

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KANAT PROFİLLERİ VE İZ BÖLGESİ ÜZERİNDE
ETKİLEŞİMLİ SINIR TABAKA HESABI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Hakkı AKTAŞ**

Anabilim Dalı : UÇAK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : UÇAK MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2003

**KANAT PROFİLLERİ VE İZ BÖLGESİ ÜZERİNDE
ETKİLEŞİMLİ SINIR TABAKA HESABI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Hakkı AKTAŞ
511001132**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2003**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. M.Adil YÜKSELEN
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. M.Fevzi ÜNAL
Prof.Dr. A.Rüstem ASLAN**

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

İlk motorlu hava aracının uçtuğu andan günümüze kadar geçen bir asırlık sürede çok büyük gelişmeler sağlanmıştır. Geçen zaman bir insan ömrü kadar olsa da, aslında havacılık bu kadar kısa bir sürede bu düzeye gelmemiştir. Havacılık alanında, uzun zaman alan, süreklilik gerektiren, ekip çalışmasını gerektiren kapsamlı bir dizi deneysel ve teorik çalışmalar yapılmıştır. Gerçekte yapılan bu çalışmalar daha eski olup toplumların ihtiyaçlarının değişmesi sonucu, havacılığa duyulan gereksinim ile birlikte bu kısa zaman periyodunda ilk motorlu hava aracını uçuran Wright kardeşlerden, radara yakalanmayan uçakların ve insansız hava araçlarının uçtuğu safhaya gelmiştir. Artık havacılık günümüz dünyasında başta savunma sanayii, sanayi, ulaşım, haberleşme, sağlık, eğitim, tarım, gibi günlük hayatın her alanında yaşamımızın bir parçası haline gelmiştir. Havacılıkta güncel teknolojiye sahip ülkeler dünyanın dengesiyle adeta bir oyuncak gibi oynamakta, pazarlar bu ülkelerin kontrolünde oluşmakta ve bunun doğal bir sonucu olarak aynı ülkeler daha çağdaş ve daha müreffeh bir hayat sürebilmektedirler. Yani bir bakış açısına göre ülkelerin gelişmişlik düzeylerinin en belirgin işareti havacılığa ve bu alandaki eğitime verdikleri önem, yaptıkları yatırımdır. Çünkü havacılık bireysel bazda çalışmalardan öte ekip çalışmasını, disiplinler arası çalışmayı öngördüğünden, çok büyük yatırımlara ihtiyaç duyduğundan bir devlet vizyonunu ve politikası gerekli kılar.

Bu vizyonu benimsemiş Türk Hava Kuvvetleri Komutanlığı'nın bir subayı olarak, başta bana bu imkanı sağlayan Hava Kuvvetleri Komutanlığı ve İstanbul Teknik Üniversitesi'ne, çalışmaları ve değerli akademik kişiliği ile bana ışık tutan Değerli Hocam Prof. Dr. M. Adil YÜKSELEN'e şükranlarımı sunuyorum.

Ayrıca, beni bu günlere getiren ve akademik kariyer yapmaya teşvik eden başta Babam Yüksel AKTAŞ ve Annem Nermin AKTAŞ olmak üzere aileme ve eğitimim süresince desteğini her zaman yanımda hissettiğim Sevgili Eşim Funda'ya teşekkürlerimi sunuyorum.

Mayıs 2003

Hakkı AKTAŞ

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. POTANSİYEL AKIM / SINIR TABAKA ETKİLEŞİM YÖNTEMİ	5
2.1. Giriş	5
2.2. Eşdeğer Potansiyel Akım Modeli	5
2.2.1. Deplasman Yüzeyi Tekniği	8
2.2.2. Yüzey Üfleme Hızları Tekniği	9
2.3. Ayrılmış Sınır Tabaka Hali – Ters (Invers) Problem	10
3. KANAT PROFİLİ ETRAFINDA EŞDEĞER POTANSİYEL AKIM HESABI	14
3.1. Giriş	14
3.2. Eşdeğer Potansiyel Akım İçin Matematik Model	15
3.3. Eşdeğer Potansiyel Akım İçin Panel Yöntemi	16
3.4. Eşdeğer Potansiyel Akım İçin Süperpozisyon Yöntemi	22
3.5. Kutta Şartının Uygulanması	25
4. İKİ BOYUTLU SINIR TABAKA HESABI	28
4.1. Giriş	28
4.2. Sınır Tabaka Denklemleri	28
4.3. Sınır Tabaka Büyüklükleri	32
4.4. Laminer Sınır Tabaka Denklemlerinin Çözümleri	33

4.5.Falkner-Skan Benzerlik Çözümleri	34
4.6. İntegral Yöntemler	38
4.6.1. Karman-Pohlhausen Yöntemi	39
4.6.2. Thwaites Yöntemi	44
4.6.3. Walz-Eppler Yöntemi	45
4.6.4. Cousteix-Michel Yöntemi	47
4.6.5. Cousteix-Head Yöntemi	50
5. ETKİLEŞİMLİ SINIR TABAKA HESABI	52
5.1. Giriş	52
5.2. Standart Problem	52
5.2.1. Sınır Tabaka Denklemlerinin Standart Problemde Dönüşümü	53
5.2.2. Sayısal Çözüm Tekniği	55
5.2.3. Standart Problemde Denklemlerin Ayırıklaştırılması	57
5.2.4. Standart Problemde Denklemlerin Lineerleştirilmesi	60
5.3. Ters Problemde Dönüştürülmüş Denklemler	64
5.3.1. Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters Problemde Dönüşümü	65
5.3.2. Ters Problemde Denklemlerin Ayırıklaştırılması	68
5.3.3. Ters Problemde Denklemlerin Lineerleştirilmesi	69
5.4. İz Bölgesinde Çözüm Yöntemi	71
6. GEÇİŞ BÖLGESİ VE TÜRBÜLANSLI AKIM HESABI	75
6.1. Geçiş Bölgesi	75
6.2. Michel Metodu	76
6.3. Türbülans Modeli	76
7. SINIR TABAKA HESABINDA KULLANILAN BİLGİSAYAR PROGRAMI	81
7.1. Programın Genel Yapısı	81
7.2. Ana Program	81
7.2.1. Newton İterasyonu İçin Yakınsama Testi	82
7.2.2. Sınır Tabaka Genişliği İçin Test	83
7.3. İNPUT Alt Programı	85
7.3.1. Grid Yapısı	85
7.4. IVPL Alt Programı	87
7.5. HIC Alt Programı	88
7.6. COEF Alt Programı	88

7.7. BORALG Alt Programı	88
7.8. OUTPUT Alt Programı	88
7.9. SWTCH Alt Programı	88
7.10. INTEG Alt Programı	88
7.11. DIFF1 Alt Programı	88
7.12. LNTP Alt Programı	88
7.13. AMEAN Alt Programı	88
8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	91
8.1. Daire Üzerindeki Uygulamalar	91
8.2. Joukowsky Profili Üzerindeki Uygulama Sonuçları	92
8.3. NLF Profili Üzerindeki Uygulama Sonuçları	94
8.4. NACA 0012 Profili Üzerindeki Uygulama Sonuçları	97
8.5. Türbülanslı Yöntemlerin Karşılaştırılması	98
8.6. Cebeci- Smith Yönteminin Karşılaştırılmasının Sonuçları	97
KAYNAKLAR	100
EKLER	103
ÖZGEÇMİŞ	126

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1. Falkner – Skan denklemlerinin çeşitli β değerleri için çözümleri	37
Tablo 7.1. Programda kullanılan değişkenlerin anlamları	79
Tablo 7.2. AMEAN alt programında kullanılan değişkenler	87

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Potansiyel akım / sınır tabaka etkileşim yöntemi.....	6
Şekil 2.2 : Gerçek akım, potansiyel akım ve eşdeğer potansiyel akım modelleri.....	7
Şekil 3.1 : Eşdeğer potansiyel akım modeli.....	16
Şekil 3.2 : Yüzey ve iz panelleri.....	17
Şekil 3.3 : Kutta şartı.....	20
Şekil 3.4 : Katsayılar matrisi.....	21
Şekil 3.5 : Lineer denklem takımı.....	25
Şekil 4.1 : Sınır şartları.....	30
Şekil 4.2 : Falkner – Skan tipi akımlar.....	35
Şekil 4.3 : Karman – Pohlhausen yöntemi akış şeması.....	43
Şekil 4.4 : Walz – Eppler yöntemi akış şeması.....	47
Şekil 4.5 : Michel - Couistex yöntemi akış şeması.....	49
Şekil 5.1 : Ağ sistemi ve Keller Kutusu.....	54
Şekil 5.2 : η doğrultusunda ayırıklaştırma.....	55
Şekil 5.3 : ξ doğrultusunda ayırıklaştırma.....	56
Şekil 7.1 : Programın genel yapısı.....	79
Şekil 7.2 : Grid yapısı.....	84
Şekil 7.3 : AMEAN alt programı.....	88
Şekil 7.4 : AMEAN alt programında kullanılan parametreler.....	88

SEMBOL LİSTESİ

A	: Türbülans hesabında Sönümlleme sabiti
α	: Hücüm açısı
A_j, B_j, C_j	: Katsayılar matrisinin elemanları
b	: Viskozite parametresi, boyutsuz viskozite parametresi
β	: Basınç gradyanı parametresi
C_B	: Cisim üzerinde katsayılar matrisi
C_D	: Disipasyon katsayısı
C_f	: Yüzey sürtünme katsayısı
C_{ij}	: Hilbert integrali katsayıları
C_w	: İz üzerinde katsayılar matrisi
d_j	: Parabolik girdap dağılımı için katsayılar
δ	: Sınır tabaka kalınlığı
δ_1	: Yer değiştirme kalınlığı
δ_3	: Enerji kalınlığı
$\delta U_e(x)$	: Yer değiştirme kalınlığından ileri gelen bozuntu hızı
$\delta u, \delta v, \delta f$	: Standart problemde u, v, f değişkenleri için Newton yönteminde bozuntular
$\delta U, \delta V, \delta F$	: İnvers problemde U, V, F değişkenleri için Newton yönteminde bozuntular
δ	: Sınır tabaka kalınlığı
ε_m	: Eddy viskozitesi
$f(\xi, \eta)$	: Standart problemde boyutsuz akım fonksiyonu
$F(X, Y)$	: İnvers problemde boyutsuz akım fonksiyonu
H, H_{32}	: Şekil parametreleri
h_j	: Keller kutusunda normal yönde adım boyu
k_n	: Keller kutusunda akım yönünde adım boyu
κ	: İterasyon sayısı
L	: Karakteristik uzunluk
m	: Basınç gradyanı parametresi
N_B	: Cisim üzerindeki nokta sayısı
N_w	: İz üzerindeki nokta sayısı
λ	: Pohlhausen parametresi
μ	: Mutlak viskozite
μ_i	: Panel orta kontrol noktaları
ν	: Kinematik viskozite
ν_B	: Cisim üzerindeki tekillik şiddeti
γ_B	: Cisim üzerindeki girdap şiddeti
γ_{tr}	: Türbülans hesabında aralıklılık faktörü
η	: Standart problemde y yönünde boyutsuz dönüşüm değişkeni
P	: Basınç
r_1, r_2, r_3	: Denklemler sisteminin sağ tarafı

ρ	: Akışkanın yoğunluğu
σ	: Kaynak şiddetleri
σ_B	: Cisim üzerindeki kaynak şiddetleri
$\sigma_B^{(1)}$	: Teğetsel hıza ait cisim üzerindeki kaynak şiddetleri
$\sigma_B^{(2)}$	: Normal hıza ait cisim üzerindeki kaynak şiddetleri
$\sigma_B^{(3)}$	: Sirkülasyona ait cisim üzerindeki kaynak şiddetleri
σ_w	: İz üzerindeki kaynak şiddetleri
u, v	: 1. Kartezyen koordinatlarda hızın x ve y bileşeni 2. Standart problemde boyutsuz akım fonksiyonun 1nci ve 2nci türevleri
Re	: Reynold sayısı
R_L	: Serbest akım hızı ve cismin karakteristik uzunluğu cinsinden Reynold sayısı
$R_{\theta tr}$	: Geçiş momentum kalınlığı Reynold sayısı
s	: İz hesabında F_e büyüklüğüne eşit bir değişken
$s_1, s_2, \dots, s_8$	: Lineerleştirilmiş momentum denklemindeki bozuntu büyüklüklerinin katsayıları
t^*	: Kompleks düzlemde panel eğiminin eşleniği
t_B^*	: Kompleks düzlemde cisim üzerinde panel eğiminin eşleniği
t_w^*	: Kompleks düzlemde iz üzerinde panel eğiminin eşleniği
θ	: 1. Momentum kalınlığı 2. Hacimsel debi
θ_i	: Sınır tabakada hacimsel debi
τ	: Kayma gerilmesi
τ_w	: Duvar üzerinde kayma gerilmesi
U_∞	: Serbest akım hızı
U_e	: Sınır tabaka dışındaki potansiyel hız
$U_{ev}(x)$	: İnvers çözümde hesaplanan dış akım hızı
$U_{ei}(x)$	: Potansiyel akım çözümünde hesaplanan dış akım hızı
$U_e^{-\kappa}$	: Bir önceki iterasyon adımından gelen, $(\delta_l)^\kappa$ yerdeğiştirme kalınlığı etkisini içeren hız
V_w	: Üfleme hızı
w^*	: Kompleks düzlemde her hangi bir noktada hızının eşleniği
w_∞^*	: Kompleks düzlemde serbest akım hızının eşleniği
w_{tn}^*	: Kompleks düzlemde teğet normal doğrultudaki eşlenik hız
$w_{tn}^{*(1)}$	: Kompleks düzlemde teğet normal doğrultudaki teğetsel eşlenik hız
$w_{tn}^{*(2)}$	: Kompleks düzlemde teğet normal doğrultudaki normal eşlenik hız
$w_{tn}^{*(3)}$	: Kompleks düzlemde teğet normal doğrultudaki sirkülatif eşlenik hız
ω	: Gevşeme katsayısı
U_∞	: Serbest akım hızı
ψ	: Akım fonksiyonu
z	: Kompleks düzlemde her hangi bir nokta
z_0	: Kompleks düzlemin orijini

KANAT PROFİLLERİ VE İZ BÖLGESİ ÜZERİNDE ETKİLEŞİMLİ SINIR TABAKA HESABI

ÖZET

Bu tez kapsamında öncelikli olarak potansiyel akım / sınır tabaka birleştirme teknikleri anlatılmış, bu tekniklerden eşdeğer potansiyel akım modelleri olan yüzey üfleme hızları tekniği ve yer değiştirme yüzeyi teknikleri verilmiştir. Yüzey üfleme hızları tekniği eşdeğer potansiyel akım modeli olarak tercih edilmiştir.

Daha sonra kanat profili üzerinde basınç dağılımı ve bu profile ait iz ayırıcı çizgisi ve iz üzerinde basınç dağılımı kompleks düzlemde kompleks panel yöntemiyle süperpozisyon tekniği kullanılarak hesaplanmıştır. Bu yöntemde, akım alanının belirlenmesi problemi bir lineer denklem sisteminin çözümüne indirgenmektedir. Denklem sisteminin sol tarafındaki panel yönteminin katsayılar matrisi, sadece cismin yüzey geometrisine bağımlı ve serbest akım hızından bağımsızken, sağ tarafı akım şartlarına bağımlıdır. Bu yöntem ile etkileşim yönteminin her adımında matrisin tersini almaya gerek kalmamıştır. Akım alanı yatay, dikey ve sirkülatif akımların toplamı olarak modellenmiştir.

Panel yöntemiyle elde edilen hız dağılımı yardımıyla sınır tabaka hesabı Cebeci–Smith yöntemiyle yapılmıştır. Yöntem sonlu farklar yaklaşımını esas almakta olup, önce sınır tabaka denklemleri akım ayrılmasının olmadığı halde standart modda yazılmış, ayrıklaştırılmış ve nonlineer olan denklemler Newton yöntemiyle lineerleştirilmiştir. Aynı prosedür akım ayrılması haline ters modda (invers) tekrarlanmıştır.

Cebeci-Smith yönteminin güvenilirliğini test etmek amacıyla integral yöntemler kullanılmıştır. İntegral yöntemlerden tek denklemlilikli Thwaites ve Pohlhausen yöntemi ile çift denklemlilikli Michel-Cousteix, Cousteix-Head ve Walz–Eppler yöntemleri anlatılmıştır. Cebeci–Smith yöntemi bu yöntemlerle örtüşen sonuçlar vermiştir. Sınır tabaka hesabı sonucu bulunan yer değiştirme kalınlığı vasıtasıyla üfleme hızları hesaplanmış, bulunan kalınlıklar, potansiyel akıma sınır şartı teşkil edecek şekilde ithal edilmiş ve tekrar potansiyel akım hesabı yapılmıştır. Bu etkileşim kanat profili ve iz bölgesi üzerindeki hız dağılımı yakınsayıcaya kadar devam etmektedir.

INTERACTIVE BOUNDARY LAYER CALCULATION AROUND AN AIRFOIL AND ITS WAKE

SUMMARY

In this study, first, the potential flow / boundary layer coupling techniques are described. One of these equivalent potential flow models, wall transpiration and displacement surface techniques have been studied. In this thesis, wall transpiration method has been chosen.

Secondly, potential pressure distribution around an airfoil and its wake dividing streamline and also the wake pressure distribution are calculated by using the complex panel method in complex plane with superposition technique. Since the flow field is modelled as a combination of a circulating flow around the airfoil with non-circulating flows due to uniform streams in horizontal and vertical directions to the chord. In this technique, determination of flow field around the airfoil reduces to solution of a system of linear equations. Since the influence coefficient matrix of the panel method on the left hand side of the equation system solely depends on the airfoil geometry while the right hand side is function of free stream conditions, inverse of the matrix is calculated at the start and used throughout the interacting calculation.

Potential flow calculation by the panel method is coupled with a boundary layer calculation via Cebeci-Smith method with finite differences. First the boundary layer equations are arranged in the standard mode, discretized, and also linearized. The same procedure is repeated for the case of flow separation.

In order to test the reliability of the Cebeci-Smith method the integral methods are used. One equation Thwaites and Pohlhausen methods and the two equation Michel-Cousteix, Cousteix-Head, Walz-Eppler methods are described. Cebeci-Smith method agrees with these methods.

In order to recalculate the potential flow, using the displacement thicknesses from the boundary layer calculations, the blowing velocities have been obtained and are imported as boundary condition to the potential flow calculations. This procedure is repeated until a converged velocity distribution

1. GİRİŞ

Hava ve uzay araçlarının en önemli elemanlarından birisi kanatlarıdır. Kanatlar gibi pervane, kompresör ve türbinlerde kullanılan paller de aynı prensibe göre taşıma kuvveti oluşturmak üzere imal edilmiş elemanlardır. Dolayısı ile kanat ve benzeri elemanlar sadece hava araçları için değil, akışkan içerisinde hareket eden tüm araçlar için önem arz etmektedir. Bu elemanlar aerodinamik genel başlığı altında pek çok araştırmanın konusu olmuştur.

Kanat ve benzeri elemanların taşıyıcı özelliklerinin kesit şekilleriyle yakından ilgili olduğu bilinir. Uçakların, füzelerin, türbo makinelerin vb. hava araçlarının performansı büyük ölçüde kanat profillerinin performanslarına bağlıdır. Kanat profillerinin taşıma, sürüklenme ve yunuslama katsayıları gibi karakteristik özelliklerini deneysel yollarla elde etmek mümkündür. Ancak bu karakteristiklerin hesap yoluyla elde edilebilmesi, üzerinde uygulandıkları uçak veya benzeri vasıtanın dizaynının çabuklaştırılması ve performansının kısa zamanda belirlenmesi açısından ve tabii ki aynı zamanda ekonomik açıdan önemlidir.

Gerçek akım şartlarında kanat ve benzeri elemanlar etrafındaki akım üç boyutlu olmakla birlikte bazı hallerde üç boyutlu problemi kesit profillerinin iki-boyutlu karakteristiklerine bağlamak mümkündür. Üç boyutlu çalışmaların hem teorik hem de deneysel açıdan zaman alıcı ve pahalı olduğu da göz önüne alınırsa kanat profilleri üzerinde yapılan çalışmaların ne denli önemli olduğu bir kez daha ortaya çıkar.

Kanat profillerine ilişkin problemleri genel olarak iki grupta düşünmek mümkündür. Bunlardan birincisi şekli verilmiş bir kanat profili etrafında, belirlenmiş akım şartlarında oluşan akım alanının ve kanat profilinin performansının araştırıldığı analiz problemi, diğeri ise istenilen performansı sağlayacak kanat profili geometrisinin tespitini amaçlayan dizayn problemidir.

Bir kanat profilinin aerodinamik analizini deneysel yöntemlerle gerçekleştirerek performansını elde etmek mümkündür. Ancak model yapımı ve rüzgar tüneli işletme maliyetleri göz önüne alınırsa analizin teorik yöntemle gerçekleştirilebilmesinin avantajlı olacağı açıktır. Teorik inceleme yönteminin esası Navier-Stokes denklemlerinin veya bu denklemlerin basitleştirilmiş hallerinin çözümünden ibarettir. Elde edilen çözümün doğruluğu genellikle, yapılan basitleştirmelerle orantılı olarak azalır. Buna karşılık çözüm hızı artarak, maliyet azalır. Kaldı ki bir çok basit modelde hayli tatminkar sonuçlar elde edilmektedir.

Kanat profillerinin analizi problemine yönelik olarak günümüzde endüstriyel uygulamalarda da kullanılmakta olan bir grup yöntem “potansiyel akım / sınır tabaka etkileşim yöntemi” olarak anılmaktadır. Bu yöntemlerde, kanat profili etrafındaki akım alanının genellikle farklı karakterdeki iki bölgeden oluştuğu olgusundan hareket edilmektedir. Nitekim, Reynolds sayısının yeterince büyük olması halinde kanat profili etrafındaki akımda akışkan viskozitesinin sadece yüzey yakınında sınır tabaka adı verilen dar bir bölgede etkili olduğu, bunun dışında kalan geniş akım bölgesinde ise viskoz etkilerin ihmal edilebilir seviyelerde olduğu bilinmektedir. Viskozite etkilerinin ihmal edildiği dış bölgede akımı çoğu zaman potansiyel kabul ederek çözüme gitmek mümkündür. Sınır tabakada ise, Navier-Stokes denklemlerindeki bazı terimleri ihmal etmek, ve böylece sınır tabaka denklemi adı verilen basit bir forma sokmak suretiyle çözümünü araştırmak mümkündür. Ancak bu iki bölgedeki akım arasında bir etkileşim söz konusu olup, bu etkileşimin de uygun bir yolla çözüme sokulması gerekir.

Etkileşim probleminin çözümü ancak iteratif olarak gerçekleştirilebilir. Önce kanat profili etrafında hiç sınır tabaka yokmuş gibi düşünülür. Akım alanı potansiyel kabul edilerek çözüm yapılır. Bu şekilde kanat profili yüzeyi boyunca elde edilen basınç dağılımı kullanılarak sınır tabaka hesabı yapılır. Sınır tabaka çözümünden elde edilen sonuçlar potansiyel akımın düzeltilmesi için kullanılır. Bu işlemler kanat profiline ait hız dağılımında belli bir yakınsama elde edilinceye kadar iteratif olarak sürdürülür (Williams, 1990).

Sıkıştırılamaz akım halinde problem daha da basit bir hal alır. Şöyle ki potansiyel akım problemi, potansiyel fonksiyonu veya akım fonksiyonu cinsinden yazılan Laplace

denkleminin çözümü problemine indirgenebilir. Bir kanat profili etrafındaki sıkıştırılamaz potansiyel akım probleminin çözümü için genellikle konform dönüşüm esaslı yöntemler veya panel yöntemleri kullanılır. Konform dönüşüm esaslı yöntemlerden en iyi bilineni ve geçmişte en çok kullanılanı Theodorsen (1930) yöntemidir. Türündeki çalışmaların ilk örneğini teşkil eden bu yöntem NACA profillerinin gelişmesinde başarı ile kullanılmıştır.

Panel yöntemleri literatürde yüzey tekillikleri yöntemi olarak da anılmaktadır. Bu tür yöntemlerin ilk örneği Smith ve Pierce (1960) 'e ait olup günümüzde bu türden bir çok yöntem başarıyla kullanılmaktadır. Potansiyel akım analizi için panel yöntemleri pratik ve günümüzde çok kullanılan yöntemler olması nedeniyle tercih edilmiştir. Kullanılan tekillik cinsine ve sınır şartlarının uygulanış tarzlarına bağlı olarak birçok panel yöntemi mevcuttur.

Sınır tabaka denklemlerinin çözümüne gelince bunlar için de integral yöntemleri veya alan yöntemleri olmak üzere iki grup yöntem kullanılır. İntegral yöntemlerinde sınır tabaka denklemlerinin integral formu olarak bilinen bir takım adi diferansiyel denklemler, tam çözümlerden elde edilen bazı yardımcı formüllerle birlikte, kanat profili yüzeyi boyunca durma noktasından itibaren adım adım integre edilir. Kullanılan integral denklemlerin türüne ve yardımcı bağıntılara bağlı olarak değişik integral yöntemlerinden söz etmek mümkündür. Alan yöntemlerinde ise sınır tabakayı modelleyen kısmi türevli diferansiyel denklemler sınır tabaka içerisinde oluşturulan bir ağ içerisinde çözülür. Bu tür yöntemler sınır tabaka içerisindeki hız dağılımı hakkında ayrıntılı bilgi verir.

Bu tez çalışmasında kanat profilleri etrafındaki daimi, sıkıştırılamaz, viskoz akım probleminin potansiyel akım / sınır tabaka etkileşim yöntemi ile analizi hedeflenmiştir.

Potansiyel akım problemi kompleks düzlemde (Yükselen, 1996) tarafından geliştirilen ve süperpozisyon tekniği uygulayan bir panel yöntemi yeniden formüle edilerek kullanılmıştır. Sınır tabaka hesaplarında Cebeci (1999) tarafından geliştirilen sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Belirtilen yöntem ayrılmış sınır tabakalar için de çözüm sağlamaktadır. Potansiyel akım / sınır tabaka etkileşimi için ise Veldman (1984) tarafından geliştirilen yöntem uygulanmıştır.

Tezin ikinci bölümünde potansiyel akım / sınır tabaka etkileşim problemi genel olarak ele alınmış, yapışık sınır tabakalar için deplasman yüzeyi tekniği ve yüzey üfleme hızları tekniği ile sınır tabaka ayrılması halinde eşdeğer potansiyel akım modeli izah edilmiştir.

Üçüncü bölüm, eşdeğer potansiyel akım hesabı için uygulanan kompleks panel yöntemine ayrılmış olup, yöntem için yenilenen formülasyon, süperpozisyon tekniği, iz ayırıcı çizgisinin bulunması konuları ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Dördüncü bölümde sınır tabaka denklemleri genel anlamda ele alınmış ve bir tam çözüm olarak Falkner-Skan benzerlik çözümüne değinilmiştir. Daha sonra Karman–Pohlhausen Yöntemi, Thwaites Yöntemi, Walz–Eppler Yöntemi, Cousteix–Michel Yöntemi gibi literatürde çok denenmiş olan bazı integral yöntemleri kısaca özetlenerek, uygulama için akış diyagramları verilmiştir. Bu yöntemlerin incelenmesinin amacı tezin asıl konusu olan “Potansiyel akım/sınır tabaka etkileşim yöntemi” nin sınır tabaka hesabı kısmında kullanılacak olan Cebeci-Smith yöntemine ait bilgisayar programlarının test edilmesidir.

Beşinci bölümde sınır tabaka hesapları için kullanılacak olan Cebeci-Smith yöntemine yer verilmiştir. Yöntemin bütün aşamaları bir uygulamacı açısından kolay izlenebilecek bir biçimde özetlenmiş, bazı ayrıntılar ekler halinde tezin sonunda sunulmuştur. Ayrıca iz bölgesine ait hesap tekniğine de değinilmiştir.

Altıncı bölümde sınır tabakanın laminar halden türbülanslı hale geçiş problemi ele alınarak Michel geçiş kriterlerine yer verilmiş. Ayrıca sınır tabaka hesap yönteminde geçen Cebeci-Smith Türbülans modeli tanıtılmıştır.

Yedinci bölümde sınır tabaka hesabında kullanılan bilgisayar programı alt programlarla ve kullanılan değişkenlerle birlikte tanıtılmıştır.

Sekizinci bölümde ise Cebeci-Smith yönteminin test sonuçları ile etkileşimli sınır tabaka hesabı sonuçları Daire, NACA 0012 profili, Natural Laminar Flow (NLF) profili, Joukowski profili için karşılaştırılmıştır.

2. POTANSİYEL AKIM / SINIR TABAKA ETKİLEŞİM YÖNTEMİ

2.1. Giriş

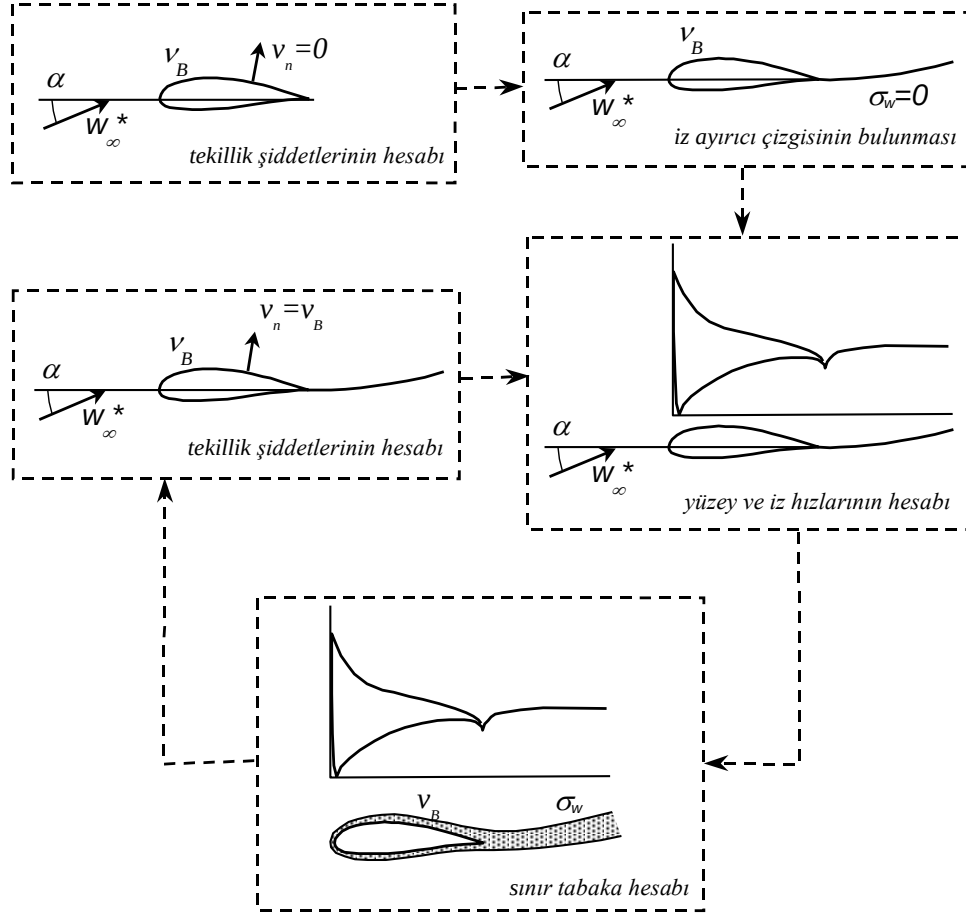
Bir kanat profili etrafındaki gerçek akımın hesaplanmasında kullanılan etkin ve pratik yöntemlerden birisi “potansiyel akım / sınır tabaka etkileşimi” yöntemidir. Bu yöntemde önce kanat profili etrafında hiç sınır tabaka yokmuş gibi bir potansiyel akım hesabı yapılarak kanat profili etrafındaki basınç dağılımı elde edilir. Firar kenarından çıkan ve iz ayırıcı çizgisi olarak adlandırılan akım çizgisi üzerindeki noktaların koordinatları ve bu çizgi boyunca basınç dağılımı hesaplanır. Daha sonra bu basınç dağılımları kullanılarak yüzey üzerinde sınır tabaka hesabı ve firar kenarının gerisinde iz hesabı gerçekleştirilir. Yöntemin takip eden aşamasında, sınır tabaka ve iz hesaplarından elde edilen bilgiler kullanılarak potansiyel akım hesabı, sınır tabaka ve iz etkilerini de içerecek biçimde tekrarlanır. Potansiyel akım ve sınır tabaka-iz hesapları, belirli bir yakınsaklık elde edilinceye kadar tekrarlanır (Şekil 2.1).

Bu bölümde, sınır tabakanın yapışık olduğu ve ayrılmaya maruz kaldığı hallerde eşdeğer potansiyel akım modellerine yer verilecek, eşdeğer potansiyel akım, sınır tabaka ve iz hesap yöntemleri ise izleyen bölümlerde ele alınacaktır.

2.2. Eşdeğer Potansiyel Akım Modeli

Bir katı yüzey etrafından geçen gerçek akım halinde bu yüzey üzerinde bir sınır tabaka oluştuğu ve bu sınır tabaka içerisinde hızların yüzey üzerinde sıfırdan başlayıp tabakanın dışında sabit bir değere erişecek şekilde bir değişim gösterdiği bilinir. Sınır tabakanın yapışık olması halin ait tipik bir hız dağılımı Şekil 2.2a’da görülmektedir. Potansiyel akım halinde ise yüzey üzerindeki sınır şartları daha farklı olup, teğetsel hız bileşeni için

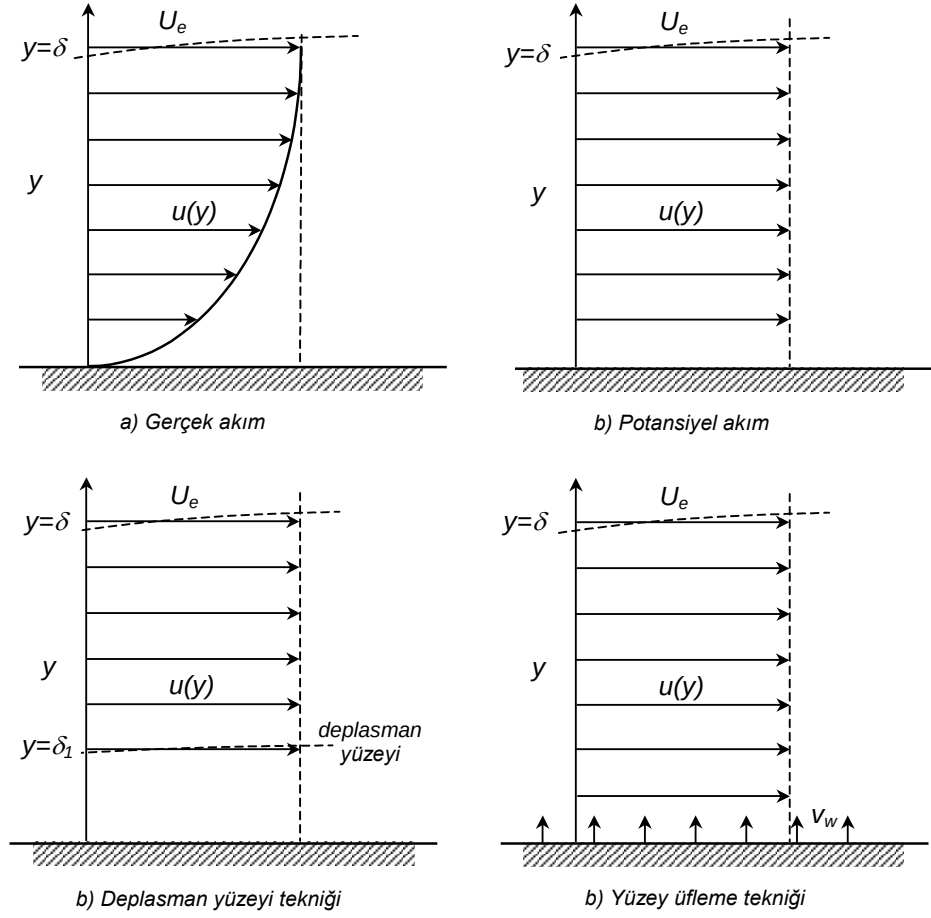
sıfır olma gibi bir koşul öne sürülmez. Dolayısıyla sınır tabaka etkilerinin hiç



Şekil 2.1: Potansiyel akım / sınır tabaka etkileşim yöntemi

hesaba katılmadığı bir potansiyel akım halinde düz bir duvarın yakınlarında, yani sınır tabakanın oluştuğu varsayılan bölge içerisinde hızların sabit olduğu görülür (Şekil 2.2b). Potansiyel akım modelinde yüzey yakın civarındaki hızlar sabit ve sıfırdan farklı iken gerçek akımda sınır tabakanın içerisinde akımın yavaşladığı göz önüne alınırsa, süreklilik denklemi gereği, gerçek akımda sınır tabaka dışındaki akım hızının potansiyel akım halindeki kıyasla daha farklı olacağını söylemek mümkündür.

Potansiyel akım / sınır tabaka etkileşim yönteminde sınır tabaka ve izin etkilerinin bir şekilde potansiyel akım hesap yöntemine sokulması gerekir. Bu etkilerin hesaba katıldığı potansiyel akım modeline “eşdeğer potansiyel akım modeli” adı verilir.



Şekil 2.2: Gerçek akım, potansiyel akım ve eşdeğer potansiyel akım modelleri

Eşdeğer potansiyel akım modeli, sınır tabaka ve iz etkilerini içereceği için bu model yardımıyla yapılan hesaplamalar sonucunda kanat profili yüzeyi boyunca bulunan basınç dağılımının gerçek akım halindeki eşit olması ve profil taşıma, sürüklenme ve yunuslama performanslarının gerçek durumdaki değerleri vermesi ümit edilir. Buna göre eşdeğer potansiyel akım modelinde sınır tabakanın dış kenarındaki hızların gerçek akımdaki hızlara eşit olmasını sağlayacak bir düzenleme olmalıdır.

Ayrılmamış sınır tabakalar haline ait olmak üzere literatürde yer alan ve çok sık tercih edilen iki yöntem, sırasıyla “deplasman yüzeyi tekniği” ve “yüzey üfleme hızları tekniği” olarak adlandırılmaktadır. Ayrılmış sınır tabaka bölgelerini içeren akımlarda ise dış akım hızı da problemin bir bilinmeyeni olup, bu hususun da dikkate alınması gerekmektedir.

2.2.1. Deplasman Yüzeyi Tekniği

Deplasman yüzeyi tekniğinde sınır tabaka etkisi eşdeğer potansiyel akımdaki katı cidar sınır tabaka deplasman kalınlığı kadar ötelenerek modellenir.

Şekil 2.2a da görülen gerçek akım halinde ve Şekil 2.2b’de görülen potansiyel akım halinde sınır tabaka bölgesi içerisinde geçen hacimsel debiler sırasıyla

$$Q = \int_0^{\delta} u \, dy, \quad Q_i = \int_0^{\delta} u_i \, dy \quad (2.1)$$

integralleriyle hesaplanabilir. Potansiyel akım modelinde hız sabit olup, gerçek akım halindeki U_e dış akım hızına eşit alınırsa ve bu iki integral birbirinden çıkartılırsa, debi farkı için

$$Q_i - Q = \int_0^{\delta} (U_e - u) \, dy = U_e \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (2.2)$$

elde edilir. Burada

$$\delta_i = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \quad (2.3)$$

deplasman kalınlığı olup, debi farkının deplasman kalınlığına

$$\frac{Q_i - Q}{U_e} = \delta_i \quad (2.4)$$

şeklinde bağlı olduğu görülmektedir. Buna göre eşdeğer potansiyel akım modelinde kanat profilinin yüzeyi deplasman kalınlığı kadar ötelenirse debi farkının sıfır olacağı görülür (Şekil 2.2c).

Deplasman yüzeyi tekniği, basit bir teknik olarak gözükmekle birlikte, etkileşim yönteminin her bir adımında eşdeğer potansiyel akım hesabı yapılırken kanat profili koordinatları değiştirileceğinden, hesaplama süresi bakımından olumsuzluk gösterir. Ayrıca, üzerinde eşdeğer potansiyel akım hesabının yapıldığı ötelenmiş kanat profili geometrisinin firar kenarındaki kalınlığı da birçok potansiyel akım çözüm yöntemi için sorun yaratır.

Yer değiştirme yüzeyi ve üfleme hızları tekniklerinin her ikisi de birinci dereceden sınır tabaka teorisine dayanmakta olup, kayma tabakası kalınlığı ince kabul edilmekte ve bu tabaka boyunca enine basınç değişimleri ihmal edilmektedir.

2.2.2. Yüzey Üfleme Hızları Tekniği

Bu teknikte sınır tabakanın öteleme etkisi eşdeğer potansiyel akımda duvar üzerinde bir üfleme hızı olduğu varsayılarak modellenir.

Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz bir akım için süreklilik denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.5)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sınır tabaka bölgesinde yüzey ile $y=\delta$ aralığında integre edilirse

$$\int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (2.6)$$

veya herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^\delta f(x) dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta f dy - f(\delta) \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (2.7)$$

eşitliği geçerli olup, yukarıdaki bağıntıda kullanılarak

$$v(\delta) - v(0) = - \int_0^\delta u dy + u(\delta) \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (2.8)$$

elde edilir.

şimdi bir eşdeğer potansiyel akım göz önüne alınıp, bunun için yine süreklilik denklemi yazılarak yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa benzeri bir bağıntı

$$v_i(\delta) - v_i(0) = - \int_0^\delta u_i dy + u_i(\delta) \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (2.9)$$

şeklinde elde edilebilir. (2.8) ve (2.9) bağıntıları birbirinden çıkartılarak,

$$[v_i(\delta) - v(\delta)] - [v_i(0) - v(0)] = - \int_0^\delta (u_i - u) dy + [u_i(\delta) - u(\delta)] \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (2.10)$$

bulunur. Burada, gerçek akım halinde duvar üzerinde dikey hız bileşeni olmayacaktır. Ayrıca, eşdeğer potansiyel akım ve gerçek akım hallerinde sınır tabakanın dış kenar noktasındaki hız bileşenlerinin aynı olması koşulu göz önüne alınırsa

$$v_i(\delta) = v(\delta), \quad u_i(\delta) = u(\delta) \quad (2.11)$$

olacaktır. Bunun yanında, eşdeğer potansiyel akımda yüzey üzerindeki dikey hız bileşeninin sıfır olmayıp $v_i(0)=v_{iw}$ gibi bir değere sahip olduğu varsayılırsa (2.10) bağıntısı

$$v_{iw} = \int_0^\delta (u_i - u) dy \quad (2.12)$$

şekline gelir. Diğer taraftan deplasman kalınlığının

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \frac{1}{U_e} \int_0^\delta (u_i - u) dy \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanabileceği hatırlanırsa,

$$v_{iw} = \frac{d}{dx} (U_e \delta_1) \quad (2.14)$$

elde edilir (Lighthill, 1958). Bu bağıntıda v_{iw} hızı yüzey üfleme hızı olarak adlandırılmakta olup, deplasman kalınlığı ile dış akım hızı çarpımının türevine eşit olduğu anlaşılmaktadır.

2.3. Ayrılmış Sınır Tabaka Hali – Ters (Invers) Problem

Yüzey üfleme tekniği için gerekli olan yüzey üfleme hızları sınır tabaka denklemlerinin çözümünden elde edilir. Sınır tabaka çözümleri standart modda (zayıf etkileşim problemi) veya ters (invers) modda (kuvvetli etkileşim problemi) yapılabilir. Standart modda sınır tabaka denklemleri, dış akım hız dağılımı problemin potansiyel akım çözümlerinden elde edilen bir verisi olmak üzere çözülür. Ancak bu çözüm tekniği

yapışık (ayrılmaya maruz kalmayan) sınır tabakalarla sınırlıdır. Zira ayrılma noktası civarında yüzey sürtünmesi sıfıra gittiğinden bu teknikle yapılmak istenen çözüm tekillik gösterir.

Ayrılma noktasının civarında dış akım hızının dağılımı keyfi olarak belirlenemez. Dış akım hız dağılımı ayrılma noktasından sonraki ters akımın varlığıyla ilgili şartları sağlamak zorundadır. Ancak dış akım hız dağılımı problemin bir parçası olarak çözüldüğü taktirde sınır tabaka denklemlerinin çözümü ayrılma noktasında tekillik göstermez. Bu tip çözüm tekniği ters (invers) mod olarak adlandırılır (Catheral and Mangler, 1966). Sınır tabakanın bildik sınır şartlarına ek olarak şayet deplasman kalınlığı veya yüzey sürtünme katsayısının dağılımı problemin bir verisi olarak önceden belirlenebilirse sınır tabaka denklemlerinin ayrılma noktası civarında ve ötesindeki çözümü hiç tekillik sorunu göstermeksizin integre edilebilir.

Ters modda sınır tabaka denklemlerinin çözümü için deplasman kalınlığının veya yüzey sürtünme katsayısının yüzey boyunca dağılımının belirlenmesi gerektiği yukarıda belirtilmişti. Ancak problemin çözümü elde edilmeden bu dağılımların tam olarak bilinmesi mümkün değildir. Uygun dağılım, sınır tabaka ile potansiyel akım arasındaki etkileşim probleminin bir parçası olarak elde edilmek zorundadır. Bir iç akım probleminde çözüm nispeten daha kolaydır. Zira süreklilik denkleminde yararlanarak basınçla hız arasında ilişki kurmak mümkündür.

İki-boyutlu dış akım problemlerinde viskoz ve viskoz olmayan akım denklemlerinin çözümlerini birleştirmek için iki yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan LeBalleur (1977) ve Carter ve Wornom (1975) tarafından geliştirilen yöntemde önce sınır tabaka denklemleri standart modda çözülerek $\delta_l(x)$ deplasman kalınlıkları hesaplanır. Bu ilk hesap sırasında şayet bir sınır tabaka ayrılması görülmüşse, deplasman kalınlıkları ayrılma noktası civarından itibaren firar kenarına kadar ekstrapole edilir. Bulunan bu deplasman kalınlıkları kullanılarak da sınır tabaka denklemleri invers modda tekrar çözülür. Bu çözümler sonucunda iki farklı dış akım hızı elde edilir. Bunlardan birisi invers çözümden elde edilen $u_{ev}(x)$ hızı, diğeri ise deplasman kalınlıkları ilave edilerek eşdeğer

potansiyel akım çözümü ile elde edilen $u_{ei}(x)$ hızıdır. Yeni adımdaki deplasman

$$\text{kalınlıkları, } \omega \text{ gevşeme katsayısı olmak üzere } \delta_i = \delta_i^0(x) \cdot \left\{ 1 + \omega \left[\frac{u_{ev}(x)}{u_{ei}(x)} - 1 \right] \right\} \quad (2.15)$$

şeklinde bir gevşeme formülü yardımıyla hesaplanabilir (Cebeci, 1999).

Veldman, (1984) tarafından geliştirilen diğer yöntemde ise $u_e(x)$ dış akım hızı ve $\delta_i(x)$ deplasman kalınlığının her ikisi de bilinmeyen büyüklükler olarak göz önüne alınır, ve denklemler inverse modda eş zamanlı olarak ve profil yüzeyi boyunca ardarda süpürmelerle çözülür. Her bir süpürme aşamasında, boyutsuz formdaki sınır tabaka denklemleri için dış akım sınır şartı, $u_e(x)$ hızları u_∞ serbest akım hızı ile boyutsuzlaştırılmış olmak üzere

$$u_e(x) = u_e^0(x) + \delta u_e(x). \quad (2.16)$$

şeklinde yazılır. Burada $u_e^0(x)$ potansiyel hız dağılımını, $\delta u_e(x)$ ise deplasman kalınlığında ileri gelen bozuntuyu belirtmektedir. Bozuntu hızları ince profil yaklaşımıyla elde edilebilecek olan, yer değiştirme kalınlığından dolayı oluşan bozuntu hızını göstermektedir.

$$\delta u_e = \frac{1}{\pi} \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{d\sigma} (u_e \delta_i) \frac{d\sigma}{x - \sigma} \quad (2.17)$$

şeklindeki Hilbert İntegrali vasıtasıyla hesaplanabilir. Buradaki

$$\frac{d}{d\sigma} (u_e \delta_i) \quad (2.18)$$

büyüklüğü (x_a, x_b) etkileşim bölgesinde sınır tabakanın etkisini modellemek üzere kullanılan yüzey üfleme hızını belirtmektedir.

Özetle eşdeğer potansiyel akımın hesabında kullanılabilecek iki alternatif iç sınır şartı mevcuttur. Yüzeyde sıfır olmayan normal hıza sahip sınır şartı, (2.14) denklemi, yüzey üfleme hızı sınır şartıdır. Yer değiştirme kalınlığının bir akım çizgisi olduğu sınır şartı (2.16) denklemidir. Her iki matematik model de eşit derecede geçerli olup dış akım üzerinde sınır tabakanın yer değiştirme etkisinin genel bir temsilidir. Ancak pratik

uygulamalarda yüzey üfleme hızları tekniği kullanıma daha uygundur. Bu tezde potansiyel akım hesabı için panel yöntemi yüzey üfleme tekniği ile birlikte kullanıldığından katsayılar matrisi ve inversi sadece başlangıçta belirlenmekte ve etkileşimli sınır tabaka hesabının bütün adımlarında kullanılabilmekte, elde edilen hız dağılımı vasıtasıyla da sınır tabaka çözülmektedir.

3. KANAT PROFİLİ ETRAFINDA EŞDEĞER POTANSİYEL AKIM HESABI

3.1. Giriş

Bir kanat profili etrafındaki akımın incelenmesinde kullanılan “potansiyel akım / sınır tabaka etkileşimi” yönteminin önemli bir bacağına eşdeğer potansiyel akımın hesabı oluşturmaktadır. Bu yönteme ilişkin matematik modelin anlaşılmasını kolaylaştırmak bakımından üniform-paralel akım içerisinde yer alan kanat profili etrafındaki akım alanını, bu üniform-paralel akımın:

- i) kanat profili,
- ii) bunun yüzeyi üzerinde oluşan sınır tabaka ve
- iii) gerisinde oluşan iz bölgesi

tarafından bozulmuş bir akım alanı şeklinde düşünmek yararlı olur.

Problem, sınır tabaka ve iz etkileri olmaksızın ele alındığı takdirde kanat profili cidarı bir takım kaynak ve/veya girdaplarla (yada duble gibi başka tekilliklerle) temsil edilerek bir integral denklem problemi haline getirilebilir. İntegral denklem ise, kanat profili cidarı panel adı verilen küçük elemanlara bölünerek ayrıklaştırılabilir ve bir lineer denklem takımına götürülerek çözümlenebilir. İki boyutlu akımlarda panel yöntemlerinin kompleks düzlemde uygulanması gerek formülasyonun ve gerekse bilgisayar programının geliştirilmesi açısından son derece büyük kolaylık sağlamaktadır.

Sınır tabaka ve iz etkilerini yukarıdaki probleme ilave etmenin çeşitli yolları bilinmektedir. Bunlardan birisi sınır tabaka ve izin öteleme etkilerini göz önüne alarak cismin ve ayırıcı iz eğrisinin üzerine bu öteleme kalınlıklarını ilave etmek ve böylece elde edilen yeni katı cidar için eşdeğer potansiyel akımı yeniden çözmektir. Böyle bir yaklaşımda her defasında katı cidar yeniden tanımlandığından potansiyel akım probleminin tam anlamıyla yeniden çözümü gerekmektedir. Bu da bilgisayar kullanım süresi açısından olumsuz bir yaklaşım anlamına gelir. Literatürde çok tercih edilen ikinci

bir yaklaşım ise öteleme etkilerinin, kanat profili yüzeyi ve ayırıcı iz çizgisi üzerindeki bir üfleme şeklinde değerlendirilmesidir. Bu yaklaşımda geometri değişmediği için bilgisayar kullanım süresi daha az olmaktadır.

Bu çalışmada kompleks düzlemde kaynak-girdap dağılımı kullanan bir panel yöntemi (Yükselen, 1996) esas alınmış olup, yöntem sınır tabaka ve iz etkilerini de içerecek şekilde genelleştirilmiştir. Sınır tabaka ve iz etkileri üfleme hızlarıyla temsil edilmiş, Kutta şartı akım alanı içerisinde öteleme yüzeyi üzerinde (Yükselen, 1996) gerçekleştirilmiştir.

3.2 Eşdeğer Potansiyel Akım İçin Matematik Model

Kompleks düzlemde üniform-paralel akım içerisinde yer alan kanat profili etrafında herhangi bir Z noktasındaki kompleks eşlenik hızı, üniform paralel akım ile kanat profili cidarı boyunca yer alan kaynak-girdap dağılımının ve iz ayırıcı çizgisi boyunca yer alan kaynak dağılımının bu noktada indükledikleri hızların süperpozisyonu yoluyla,

$$w^*(Z) = w_\infty^* + \int_B \frac{v_B(z_0) t^*(z_0) dz_0}{2\pi(Z - z_0)} + \int_W \frac{\sigma_W(z_0) t^*(z_0) dz_0}{2\pi(Z - z_0)} \quad (3.1)$$

şeklinde yazmak mümkündür (Şekil 3.1). Burada

$$w_\infty^* = U_\infty e^{-i\alpha} \quad (3.2a)$$

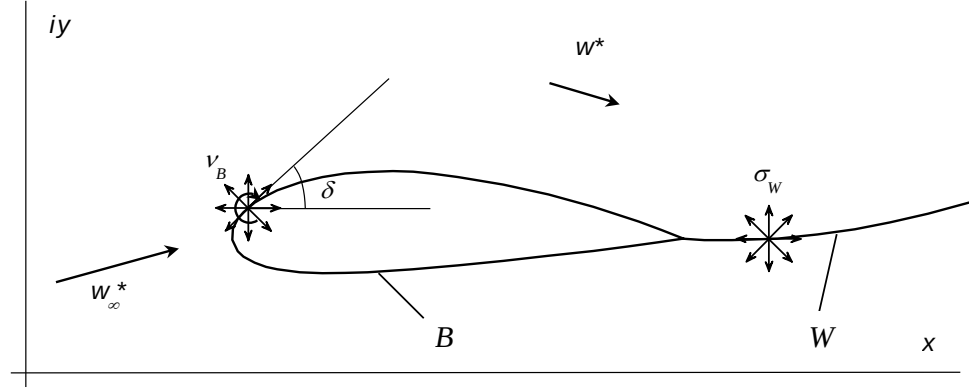
olup, U_∞ serbest akım hızının şiddetini, α ise doğrultusunu belirtmektedir. Bu açı, kanat profilinin veter doğrultusu x eksenine ile aynı olduğu takdirde hücum açısı olarak adlandırılır. $\sigma_W(z_0)$ iz ayırıcı çizgisi üzerinde bir z_0 noktasındaki kaynağın şiddetini belirtmektedir. $v_B(z_0)$ kompleks bir büyüklük olup, kanat profili cidarı üzerindeki bir z_0 noktasında $\sigma_B(z_0)$ kaynak şiddeti $\gamma_B(z_0)$ de girdap şiddeti olmak üzere

$$v_B(z_0) = \sigma_B(z_0) + i \gamma_B(z_0) \quad (3.2b)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $t^*(z_0)$ ise kanat profili cidarı veya iz ayırıcı çizgisi üzerindeki bir z_0 noktasında yüzeyin eğim açısı $\delta(z_0)$ olmak üzere

$$t^*(z_0) = e^{i\delta(z_0)} \quad (3.2c)$$

şeklinde tanımlanan bir kompleks büyüklüktür.



Şekil 3.1: Eşdeğer potansiyel akım modeli

3.3. Eşdeğer Potansiyel Akım İçin Panel Yöntemi

Kanat profilinin cidarını ve iz ayırıcı çizgisini panellere ayırarak (3.1) bağıntısını

$$w^*(z) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^{N_B} \int_{z_{B_j}}^{z_{B_{j+1}}} \frac{v_B(z_0) t^*(z_0) dz_0}{2\pi(z - z_0)} + \sum_{j=1}^{N_W} \int_{z_{W_j}}^{z_{W_{j+1}}} \frac{\sigma_W(z_0) t^*(z_0) dz_0}{2\pi(z - z_0)} \quad (3.3)$$

şeklinde yazmak mümkündür. Burada N_B kanat profilin yüzeyi üzerindeki panel sayısını N_W ise iz ayırıcı çizgisi üzerindeki panel sayısını belirtmektedir.

olacağı görülebilir.

z noktasındaki hızın (3.6) bağıntısı yardımıyla hesaplanabilmesi için serbest akım şartları, yüzey koordinatları ve iz ayırıcı çizgisi koordinatları yanında profil yüzeyi boyunca kaynak ve girdap şiddetlerinin ve iz ayırıcı çizgisi boyunca kaynak şiddetlerinin bilinmesi gerekmektedir.

İz ayırıcı çizgisi boyunca kaynak şiddetleri sınır tabaka yaklaşımıyla yapılacak bir iz hesabının sonucunda elde edilecek iz deplasman kalınlıkları yardımıyla elde edilir. Bu konuya ileriki bölümlerde yer verilecektir.

Yüzey üzerindeki kaynak ve girdap şiddetlerini bulmak için ise kanat profili yüzeyi üzerindeki sınır şartlarından yararlanılabilir. Potansiyel akım problemleri için katı cidar sınır şartı genel olarak akımın yüzeye teğet olması şeklinde ifade edilir ve bir çok uygulamada yüzeye dik hız bileşeninin sıfır olması şeklinde uygulanır. Ancak sınır tabakanın öteleme etkisinin yüzey üzerinde bir üfleme ile temsil edildiği eşdeğer potansiyel akım probleminde yüzey sınır şartı yüzeye dik hız bileşeninin yüzey üfleme hızına eşit olması şeklinde uygulanmalıdır.

Bu amaçla, profil yüzeyi üzerindeki her hangi bir i 'inci panel üzerinde alınacak bir μ_i kontrol noktasındaki hız için, bu panele teğet ve normal doğrultular üzerine kurulan bir eksen takımında

$$w_{tn_i}^* = w_i^* t_i = w_\infty^* t_i + \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{ij}} \sigma_{B_j} + \sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{ij}} \gamma_{B_j} + \sum_{j=1}^{N_W} C_{W_{ij}} \sigma_{W_j} \quad (3.8)$$

yazılarak buradan, teğet ve normal doğrultulardaki hız bileşenleri

$$\begin{aligned} w_{tn_i}^* &= v_{t_i} - i v_{n_i} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} v_{t_i} &= \text{Re} \{ w_{tn_i}^* \} \\ -v_{n_i} &= \text{Im} \{ w_{tn_i}^* \} \end{aligned} \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde hesaplanarak yüzey sınır şartı

$$v_{B_i} = \text{Im}\{w_\infty^* t_i\} + \sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{ij}}\} \sigma_{B_j} + \sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{i C_{B_{ij}}\} \gamma_{B_j} + \sum_{j=1}^{N_W} \text{Im}\{C_{W_{ij}}\} \sigma_{W_j} \quad (3.10)$$

şeklinde uygulanabilir. Burada v_{B_i} büyüklüğü i 'inci panelin kontrol noktasındaki yüzey üfleme hızını belirtmektedir. Ayrıca

$$C_{B_{ij}} = \frac{t_{B_i} t_{B_j}^*}{2\pi} \int_{z_{B_j}}^{z_{B_{j+1}}} \frac{dz_0}{z - z_0} = \frac{t_{B_i} t_{B_j}^*}{2\pi} \text{Ln} \frac{\mu_{B_i} - z_{B_j}}{\mu_{B_i} - z_{B_{j+1}}}$$

$$C_{W_{ij}} = \frac{t_{B_i} t_{W_j}^*}{2\pi} \int_{z_{B_j}}^{z_{B_{j+1}}} \frac{dz_0}{z - z_0} = \frac{t_{B_i} t_{W_j}^*}{2\pi} \text{Ln} \frac{\mu_{B_i} - z_{W_j}}{\mu_{B_i} - z_{W_{j+1}}} \quad (3.11)$$

olacağını göstermek mümkündür.

Kanat profili üzerindeki her bir panelin kontrol noktasında yüzey sınır şartı bir defa uygulandığı taktirde (3.10) denklemi gibi toplam N_B adet denklem elde edilebileceği açıktır. Oysa yüzey üzerinde bilinmeyen kaynak ve girdapların toplam sayısı bunun iki katıdır. Bilinmeyen sayısını azaltmak için izlenen bir yol, her bir panel boyunca sabit kalan girdap şiddetlerinin yüzeyin geneli boyunca bir tek bilinmeyene bağlı kalacak şekilde özel bir değişim gösterdiğinin kabul edilmesidir. Buna göre girdap şiddetleri için

$$\gamma_{B_j} = d_j \gamma \quad (3.12)$$

şeklinde bir tanımlama yapılarak

$$\sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{ij}}\} \sigma_{B_j} + \text{Im}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} d_j i C_{B_{ij}}\right\} \gamma = -\text{Im}\{w_\infty^* t_i\} + v_{B_i} + \sum_{j=1}^{N_W} \text{Im}\{C_{W_{ij}}\} \sigma_{W_j}$$

($i=1,2,\dots,NB$) (3.13)

şeklinde bir denklem sistemi elde edilebilir. Bu şartlarda akım alanının her hangi bir noktasındaki kompleks eşlenik hız için verilen (3.6) bağıntısı

$$w^*(z) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_j}(z) \sigma_{B_j} + \left\{\sum_{j=1}^{N_B} d_j i C_{B_j}(z)\right\} \gamma + \sum_{j=1}^{N_W} C_{W_j}(z) \sigma_{W_j} \quad (3.14)$$

şeklini, panel kontrol noktalarındaki kompleks eşlenik hızlar için bulunan (3.8) bağıntısı

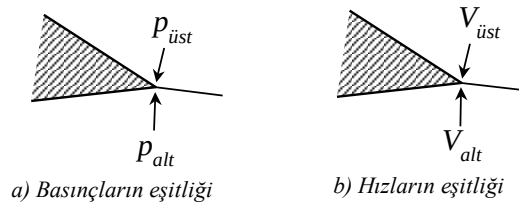
$$w_{t_i}^* = w_\infty^* t_i + \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{ij}} \sigma_{B_j} + \left\{ \sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{ij}} \right\} \gamma + \sum_{j=1}^{N_W} C_{W_{ij}} \sigma_{W_j} \quad (3.15)$$

şeklini alır. Panel kontrol noktalarındaki teğetsel hızlar için ise

$$v_{t_i} = \operatorname{Re}\{w_\infty^* t_i\} + \sum_{j=1}^{N_B} \operatorname{Re}\{C_{B_{ij}}\} \sigma_{B_j} + \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{ij}}\right\} \gamma + \sum_{j=1}^{N_W} \operatorname{Re}\{C_{W_{ij}}\} \sigma_{W_j} \quad (3.16)$$

şeklinde bir bağıntı yazılabilir.

(3.13) denklem sisteminde N_B adet denkleme karşılık N_B+1 adet bilinmeyen bulunmakta olup denklem sisteminin çözülebilir duruma gelmesi için ilave bir denklem de Kutta şartından elde edilir. Kutta şartı akımın firar kenarını düzgün bir şekilde terk etmesini öngörür. Bunun için de firar kenarının hemen üst ve hemen alt taraflarında basınçların aynı olması gerekir (Şekil 3.3). Bununla birlikte, potansiyel akımlar için hızlarla basınçlar arasındaki ilişki hatırlanırsa, belirtilen noktalarda basınçların eşitliği yerine hızların eşitliğini gerektirir.



Şekil 3.3: Kutta şartı

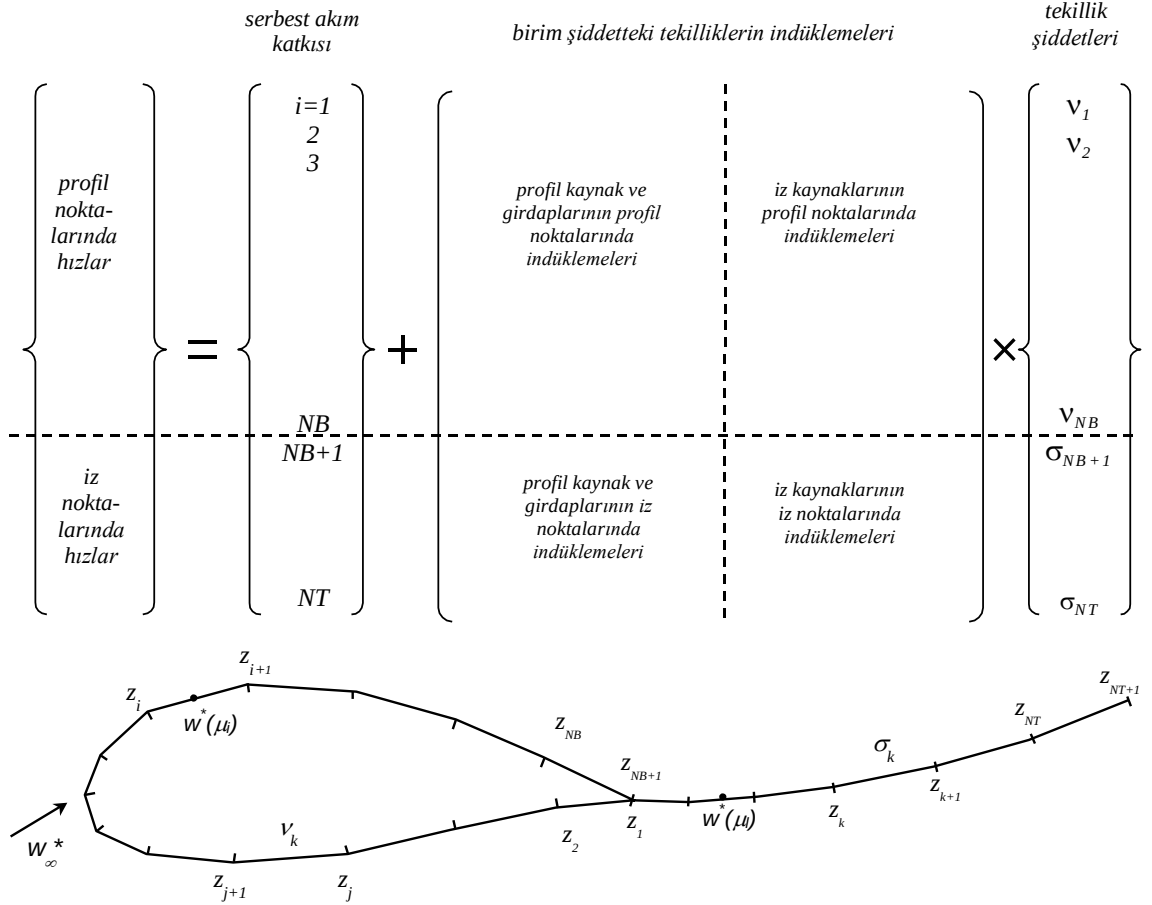
Kutta şartının uygulaması, firar kenarına komşu iki panelin kontrol noktasındaki teğetsel hızların eşitlenmesinden ibarettir. Bu durumda teğetsel hızlar için bulunan (3.16) bağıntısı kanat profilinin firar kenarına komşu ilk ve sonuncu panelleri için birer defa yazılıp, teğet yönünün saat ibreleri yönünde olduğunu da dikkate alarak

$$v_{t_1} = -v_{t_{NB}} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edilerek,

$$\sum_{j=1}^{N_B} \operatorname{Re}\{C_{B_{1j}} + C_{B_{NBj}}\} \sigma_{B_j} + \operatorname{Re}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} i(C_{B_{1j}} + C_{B_{NBj}})\right\} \gamma = -\operatorname{Re}\{w_{\infty}^*(t_1 + t_{NB})\} - \sum_{j=1}^{N_W} \operatorname{Re}\{C_{W_{NBj}} + C_{W_{NBj}}\} \sigma_{W_j} \quad (3.18)$$

denklemi elde edilir. Bir diğer uygulama ise firar kenarının yine alt ve üst hizasında, ama öteleme yüzeyleri üzerinde seçilen iki noktadaki bileşke hızların eşitlenmesidir. Bu uygulama yukarıda izah edilen formülasyon için ancak iterasyonla gerçekleştirilebilir. Bununla birlikte panel yöntemi için süperpozisyon kullanarak Kutta şartının bu uygulamasını iterasyonsuz da gerçekleştirmek mümkündür. Şekil 3.4'te katsayılar matrisi hesaplama safhası görülmektedir.



Şekil 3.4: Katsayılar matrisi

3.4. Eşdeğer Potansiyel Akım İçin Süperpozisyon Yöntemi

Eşdeğer potansiyel akım probleminin (3.1) denklemiyle ifade edildiği gibi bir takım akımların süperpozisyonu yoluyla tanımlandığı hatırlanırsa, üniform paralel akım

$$w_{\infty}^* = U_{\infty} \cos \alpha + i U_{\infty} \sin \alpha \quad (3.19)$$

şeklinde bir düşey akımla bir yatay akımın süperpozisyonu olarak, kanat profili üzerindeki kaynak dağılımı ise

$$\sigma_B = \sigma_B^{(1)} + \sigma_B^{(2)} + \sigma_B^{(3)} \quad (3.20)$$

şeklinde üç farklı kaynak dağılımının süperpozisyonu olarak ifade edilmek suretiyle, teğet normal düzlemindeki kompleks eşlenik hız için verilen (3.15) bağıntısı

$$w_{tn_i}^{*(1)} = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{ij}} \sigma_{B_j}^{(1)} + (U_{\infty} \cos \alpha) t_i + \sum_{j=1}^{N_W} C_{W_{ij}} \sigma_{W_j} \quad (3.21a)$$

$$w_{tn_i}^{*(2)} = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{ij}} \sigma_{B_j}^{(2)} + i (U_{\infty} \sin \alpha) t_i \quad (3.21b)$$

$$w_{tn_i}^{*(3)} = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{ij}} \sigma_{B_j}^{(3)} + \left\{ \sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{ij}} \right\} \gamma \quad (3.21c)$$

olmak üzere

$$w_{tn_i}^* = w_{tn_i}^{*(1)} + w_{tn_i}^{*(2)} + w_{tn_i}^{*(3)} \quad (3.22)$$

şeklinde üç akımın süperpozisyonu olarak yeniden düzenlenebilir. (3.21) bağıntılarını

$$\bar{w}_{tn_i}^{*(1)} = \frac{w_{tn_i}^{*(1)}}{U_{\infty} \cos \alpha}, \quad \bar{w}_{tn_i}^{*(2)} = \frac{w_{tn_i}^{*(2)}}{U_{\infty} \sin \alpha}, \quad \bar{w}_{tn_i}^{*(3)} = \frac{w_{tn_i}^{*(3)}}{\gamma} \quad (3.23a)$$

$$\bar{\sigma}_{B_j}^{(1)} = \frac{\sigma_{B_j}^{(1)}}{U_{\infty} \cos \alpha}, \quad \bar{\sigma}_{B_j}^{(2)} = \frac{\sigma_{B_j}^{(2)}}{U_{\infty} \sin \alpha}, \quad \bar{\sigma}_{B_j}^{(3)} = \frac{\sigma_{B_j}^{(3)}}{\gamma} \quad (3.23b)$$

$$\bar{\sigma}_{W_j} = \frac{\sigma_{W_j}}{U_\infty \cos \alpha} \quad (3.23c)$$

olmak üzere

$$\bar{W}_{tn_i}^{*(1)} = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{i,j}} \bar{\sigma}_{B_j}^{(1)} + t_i + \sum_{j=1}^{N_W} C_{W_{i,j}} \bar{\sigma}_{W_j} \quad (3.24a)$$

$$\bar{W}_{tn_i}^{*(2)} = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{i,j}} \bar{\sigma}_{B_j}^{(2)} + i t_i \quad (3.24b)$$

$$\bar{W}_{tn_i}^{*(3)} = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_{i,j}} \bar{\sigma}_{B_j}^{(3)} + \sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{i,j}} \quad (3.24c)$$

şeklinde boyutsuz hale getirmek mümkündür. Bu durumda teğetsel ve normal hız bileşenleri de yine boyutsuz olmak üzere

$$\bar{v}_{t_i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{N_B} \text{Re}\{C_{B_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(1)} + \text{Re}\{t_i\} + \sum_{j=1}^{N_W} \text{Re}\{C_{W_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{W_j} \quad (3.25a)$$

$$\bar{v}_{t_i}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N_B} \text{Re}\{C_{B_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(2)} + \text{Re}\{i t_i\} \quad (3.25b)$$

$$\bar{v}_{t_i}^{(3)} = \sum_{j=1}^{N_B} \text{Re}\{C_{B_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(3)} + \text{Re}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{i,j}}\right\} \quad (3.25c)$$

$$-\bar{v}_{n_i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(1)} + \text{Im}\{t_i\} + \sum_{j=1}^{N_W} \text{Im}\{C_{W_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{W_j} \quad (3.26a)$$

$$-\bar{v}_{n_i}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(2)} + \text{Im}\{i t_i\} \quad (3.26b)$$

$$-\bar{v}_{n_i}^{(3)} = \sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{i,j}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(3)} + \text{Im}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{i,j}}\right\} \quad (3.26c)$$

şeklinde hesaplanabilir. Yüzey boyunca her bir panelin kontrol noktasında yüzey sınır şartı birinci akım için üfleme hızı ile birlikte, diğer akımlar için sıfır normal hız şeklinde birer defa uygulanarak

$$\sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{ij}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(1)} = \bar{v}_B - \text{Im}\{t_i\} - \sum_{j=1}^{N_W} \text{Im}\{C_{W_{ij}}\} \bar{\sigma}_{W_j} \quad (3.27a)$$

$$\sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{ij}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(2)} = -\text{Im}\{i t_i\} \quad (i=1,2,\dots,NB) \quad (3.27b)$$

$$\sum_{j=1}^{N_B} \text{Im}\{C_{B_{ij}}\} \bar{\sigma}_{B_j}^{(3)} = -\text{Im}\left\{\sum_{j=1}^{N_B} i C_{B_{ij}}\right\} \quad (3.27c)$$

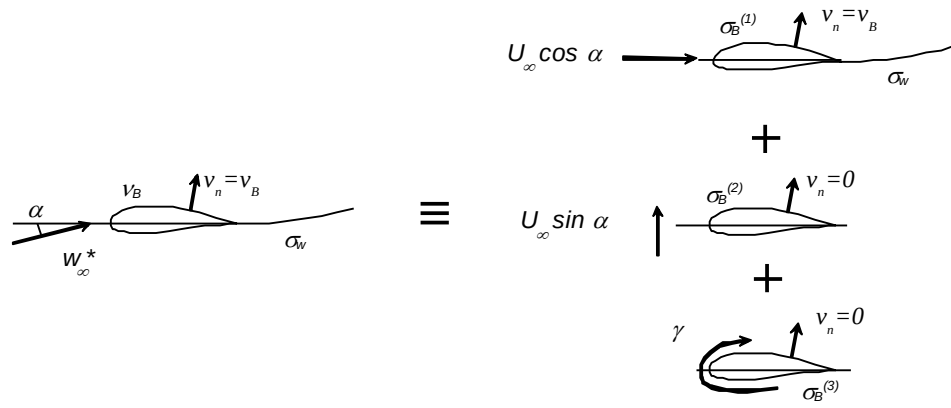
denklem sistemi elde edilir. Burada yüzey üfleme hızlarının boyutsuz olduğu ve

$$\bar{v}_B = \frac{v_B}{U_\infty \cos \alpha} \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlandığı gösterilebilir.

(3.27) denklem sistemi ve süperpozisyon yöntemi Şekil 3.5’de şematik olarak gösterilmiş olup bu denklemlerin her üçünün de katsayılar matrislerinin aynı olduğu ve sadece kanat profilinin yüzey geometrisine bağlı olduğu, ayrıca çözümün girdap şiddetinden bağımsız olduğu açıktır. Bu üç denklem sisteminin Gauss eliminasyon yöntemi veya benzeri bir yöntemle eş-zamanlı olarak çözümü mümkündür.

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1j} & \dots & B_{1NB} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2j} & \dots & B_{2NB} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3j} & \dots & B_{3NB} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i1} & B_{i2} & B_{i3} & \dots & B_{ij} & \dots & B_{iNB} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{NB1} & B_{NB2} & B_{NB3} & \dots & B_{NBj} & \dots & B_{NB} \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_1^{(1)} \\ \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_3^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_i^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{NB}^{(1)} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \sigma_1^{(2)} \\ \sigma_2^{(2)} \\ \sigma_3^{(2)} \\ \vdots \\ \sigma_i^{(2)} \\ \vdots \\ \sigma_{NB}^{(2)} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} \sigma_1^{(3)} \\ \sigma_2^{(3)} \\ \sigma_3^{(3)} \\ \vdots \\ \sigma_i^{(3)} \\ \vdots \\ \sigma_{NB}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \\ R_3^{(1)} \\ \vdots \\ R_i^{(1)} \\ \vdots \\ R_{NB}^{(1)} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} \\ R_3^{(2)} \\ \vdots \\ R_i^{(2)} \\ \vdots \\ R_{NB}^{(2)} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} R_1^{(3)} \\ R_2^{(3)} \\ R_3^{(3)} \\ \vdots \\ R_i^{(3)} \\ \vdots \\ R_{NB}^{(3)} \end{Bmatrix}$$



Şekil 3.5: Lineer denklem takımı

Bu çözümden elde edilecek boyutsuz kaynak şiddetleri (3.24b) bağıntılarında kullanılarak her bir akım için boyutsuz kompleks eşlenik hızlar elde edilebilir. Ancak, (3.23) bağıntılarıyla boyutlu kompleks eşlenik hızların ve (3.22) bağıntısıyla bileşke kompleks eşlenik hızın elde edilebilmesi için girdap şiddetinin bulunması gerekmektedir. Bunun için de Kutta şartından yararlanılacaktır.

3.5. Kutta Şartının Uygulanması

Akım alanının her hangi bir z noktasındaki kompleks eşlenik hız için yazılan (3.6) bağıntısını, önerilen süperpozisyon yöntemi ile

$$w^*(z) = w^{*(1)}(z) + w^{*(2)}(z) + w^{*(3)}(z) \quad (3.29)$$

şeklinde düzenlemek mümkündür. Burada

$$w^{*(1)}(z) = \bar{w}^{*(1)}(z) U_{\infty} \cos \alpha \quad (3.30a)$$

$$w^{*(2)}(z) = \bar{w}^{*(2)}(z) U_{\infty} \sin \alpha \quad (3.30b)$$

$$w^{*(3)}(z) = \bar{w}^{*(3)}(z) \gamma \quad (3.30c)$$

ve

$$\bar{w}^{*(1)}(z) = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_j}(z) \bar{\sigma}_{B_j}^{(1)} + 1 + \sum_{j=1}^{N_W} C_{W_j}(z) \bar{\sigma}_{W_j} \quad (3.31a)$$

$$\bar{w}^{*(2)}(z) = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_j}(z) \bar{\sigma}_{B_j}^{(2)} + i \quad (3.31b)$$

$$\bar{w}^{*(3)}(z) = \sum_{j=1}^{N_B} C_{B_j}(z) \bar{\sigma}_{B_j}^{(3)} + \sum_{j=1}^{N_B} i d_j C_{B_j}(z) \quad (3.31c)$$

dır. Bulunan boyutsuz kaynak şiddetleri bu bağıntılarda kullanılarak her bir akıma ait boyutsuz kompleks eşlenik hızlar ve bunlarda

$$\bar{V}^{(1)}(z) = \left| \bar{w}^{*(1)}(z) \right|, \quad \bar{V}^{(2)}(z) = \left| \bar{w}^{*(2)}(z) \right|, \quad \bar{V}^{(3)}(z) = \left| \bar{w}^{*(3)}(z) \right| \quad (3.32)$$

bağıntılarında kullanılarak boyutsuz hızların şiddetleri hesaplanabilir. Her bir akıma ait boyutlu hızların şiddetleri için de (3.30) bağıntıları yardımıyla

$$V^{(1)}(z) = \bar{V}^{(1)}(z) U_{\infty} \cos \alpha \quad (3.33a)$$

$$V^{(2)}(z) = \bar{V}^{(2)}(z) U_{\infty} \sin \alpha \quad (3.33b)$$

$$V^{(3)}(z) = \bar{V}^{(3)}(z) \gamma \quad (3.33c)$$

yazılabilir. Bileşke boyutlu hız ise

$$[V(z)]^2 = [V^{(1)}(z)]^2 + [V^{(2)}(z)]^2 + [V^{(3)}(z)]^2 \quad (3.34)$$

şeklinde elde edilebilir. Ancak, (3.33) bağıntılardan ilk ikisi ile hızları hesaplamak mümkün iken sonuncu bağıntı ile hesap yapılabilmesi için öncelikle girdap şiddetinin hesaplanması gerekmektedir.

Kutta şartının, akım alanının z_{K_1} ve z_{K_2} gibi iki noktasındaki hızların şiddetlerinin eşitlenmesi suretiyle gerçekleştirilmesi öngörülürse,

$$|w^*(z_{K_1})| = |w^*(z_{K_2})| \rightarrow [V(z_{K_1})]^2 = [V(z_{K_2})]^2 \quad (3.35)$$

yazılabilir. (3.33) ve (3.34) bağıntıları burada kullanılarak

$$\gamma = \sqrt{\frac{[V^{(1)}(z_{K_2})]^2 + [V^{(2)}(z_{K_2})]^2 - [V^{(1)}(z_{K_1})]^2 - [V^{(2)}(z_{K_1})]^2}{[\bar{V}^{(3)}(z_{K_1})]^2 - [\bar{V}^{(3)}(z_{K_2})]^2}} \quad (3.36)$$

elde edilir.

4. İKİ-BOYUTLU SINIR TABAKA HESABI

4.1. Giriş

Bu bölümde daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu sınır tabaka denklemleri genel anlamda incelenecek, laminar haldeki analitik çözüm teknikleriyle laminar ve türbülanslı hallerdeki bazı integral denklem esaslı çözüm yöntemleri ele alınacaktır. Bu denklemler bir sonraki bölümde bu tezin ana unsuru olarak incelenecek olan Cebeci-Smith yönteminin ve bu yöntem için yazılan bilgisayar programının güvenilirliğini test etmek için kullanılacaktır.

4.2. Sınır Tabaka Denklemleri

Newtonien akışkanların daimi, sıkıştırılamaz, iki boyutlu akımları için süreklilik ve Navier–Stokes denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.1a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.1b)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.1c)$$

şeklinde olup, V ve L sırasıyla karakteristik hız ve uzunluk olmak üzere

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{V}, \quad \bar{v} = \frac{v}{V}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho V^2} \quad (4.2)$$

değişken dönüşümleriyle bu denklemler boyutsuzlaştırılarak

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.3a)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.3b)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) \quad (4.3c)$$

şekline getirilebilir. Burada

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (4.4a)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (4.4b)$$

sırasıyla Reynolds sayısı ve kinematik viskozite katsayısı, μ ise mutlak viskozite katsayısıdır.

Yüksek Reynolds sayılarında (4.2) denklemlerindeki bazı terimler diğerlerinin yanında ihmal edilebilirler. Böylece denklemler boyutsuz halde

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.5a)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.5b)$$

$$0 = -\frac{d \bar{p}}{d \bar{y}} \quad (4.5c)$$

veya boyutlu halde

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.6a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.6b)$$

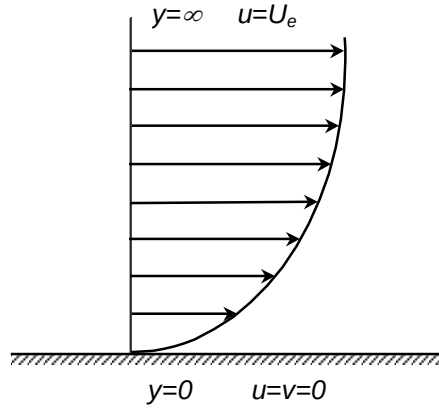
$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.6c)$$

sınır tabaka denklemleri şekline gelir. (4.6c) denklemi sadece sınır tabaka içinde katı cidara dik doğrultuda basıncın değişmediğini belirtmektedir. Denklemlerin çözümünde uygulanacak sınır şartları sırasıyla

$$y=0 \text{ 'da} \quad u=v=0 \quad (4.7a)$$

$$y=\infty \text{ 'da} \quad u=U_e \quad (4.7b)$$

şeklinde ifade edilebilir (Şekil 4.1). Burada U_e sınır tabakanın dış kenarındaki sürtünmesiz akım hızını belirtmektedir.



Şekil 4.1: Sınır şartları

(4.6b) denkleminin son terimi

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4.8)$$

şeklinde de düzenlenebilir. Burada

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.9)$$

kayma gerilmesini ifade eder. Sınır tabaka dışında kayma gerilmesi ve kayma gerilmesinin y türevi sıfır olup, bu bilgiler (4.6b) denkleminde kullanılarak

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_e \frac{dU_e}{dx} \quad (4.10)$$

yazılabilir. Böylece (4.6) sınır tabaka denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.11a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4.11b)$$

şekline gelir.

Türbülanslı sınır tabakalar için τ kayma gerilmesi

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada ilk terim yine viskoz gerilmeleri ifade ederken , ikinci terim ise türbülans kaynaklı gerilmeleri belirtmektedir. İlk terim akışkanın bir özelliği olan viskozite katsayısına ve akışın bir özelliği olan hız gradyanına bağlı iken ikinci terim Reynolds gerilmesi adını alır ve

$$\overline{u'v'} = \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.13)$$

şeklinde ε_m Eddy viskozitesine ve hız gradyanına bağlanabilir. Böylece kayma gerilmesi

$$\tau = \rho \cdot b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$b = \nu + \varepsilon_m \quad (4.15)$$

olup, laminar halde Eddy viskozitesinin değeri sıfırdır.

Bu tanımlarla birlikte sınır tabaka denklemleri laminar ve türbülanslı hallerin her ikisi için birlikte

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.16a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.16b)$$

şekline gelir. Denklemlerin çözümünde kullanılacak sınır şartları daha önce (4.7) bağıntılarıyla belirtildiği gibidir.

4.3. Sınır Tabaka Büyüklükleri

(4.16) denklemlerinin çözümünde birçok farklı yöntem kullanılmaktadır. Gerek bu yöntemlerin uygulanmasında ve gerekse elde edilen sonuçların değerlendirilmesinde önem kazanan bazı sınır tabaka büyüklükleri vardır. Bunların başlıcaları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

Deplasman Kalınlığı:
$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) \cdot dy \quad (4.17a)$$

$$\text{Momentum Kalınlığı:} \quad \theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \cdot \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \cdot dy \quad (4.17b)$$

$$\text{Enerji Kalınlığı:} \quad \delta_3 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{U_e^2}\right) \cdot dy \quad (4.17c)$$

$$\text{Şekil Parametreleri:} \quad H = \frac{\delta}{\theta} \quad (4.17d)$$

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\theta} \quad (4.17e)$$

$$H^* = \frac{\delta - \delta_1}{\theta} \quad (4.17e)$$

$$\text{Yüzey Sürtünme Katsayısı:} \quad C_f = \frac{2\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}, \quad \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (4.17g)$$

$$\text{Dissipasyon Katsayısı:} \quad C_D = \frac{D}{\rho_e U_e^3} = \frac{1}{\rho_e U_e^3} \int_0^{\delta} \left(\tau \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot dy \quad (4.17h)$$

4.4. Laminer Sınır Tabaka Denklemlerinin Çözümleri

İki boyutlu sınır tabaka denklemlerinin laminer halde sınırlı sayıda da olsa bir kısım tam (exact) çözümleri mevcuttur. Genel olarak benzerlik çözümleri adını alırlar. Bunlar arasında seçkin bir grubu Falkner Skan benzerlik çözümleri teşkil eder.

Falkner Skan benzerlik çözümleri ancak belli tipte basınç gradyanları (hız dağılımları) için elde edilebilir. Bunun dışındaki basınç gradyanları için ve türbülanslı sınır tabakalar için sayısal yöntemlerin kullanılması gerekir. Sayısal yöntemler de genel olarak “integral yöntemleri” ve “alan yöntemleri” olmak üzere iki gruba ayrılır.

4.5. Falkner–Skan Benzerlik Çözümleri

Falkner Skan çözümleri

$$U_e = k \cdot x^m \quad (4.18)$$

tipinde hız dağılımına sahip laminar sınır tabakalar için geçerlidir. Bu tip sınır tabakalar için

$$\frac{u}{U_e} = f'(\eta), \quad \eta = \frac{y}{\Delta(x)}, \quad \Delta x = \sqrt{\frac{2}{m+1} \frac{\nu x}{U_e}} \quad (4.19)$$

değişken dönüşümleri ile (4.16) denklemleri $b = \nu$ olmak üzere

$$f''' + f \cdot f'' + \beta \cdot (1 - f'^2) = 0 \quad (4.20)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denkleme ve (4.5) sınır şartları da

$$\eta=0\text{'da} \quad f=f'=0 \quad (4.21a)$$

$$\eta=\infty\text{'da} \quad f'=1 \quad (4.21b)$$

şekline dönüştürülebilir. Burada β basınç (veya hız) gradyanı parametresi olup

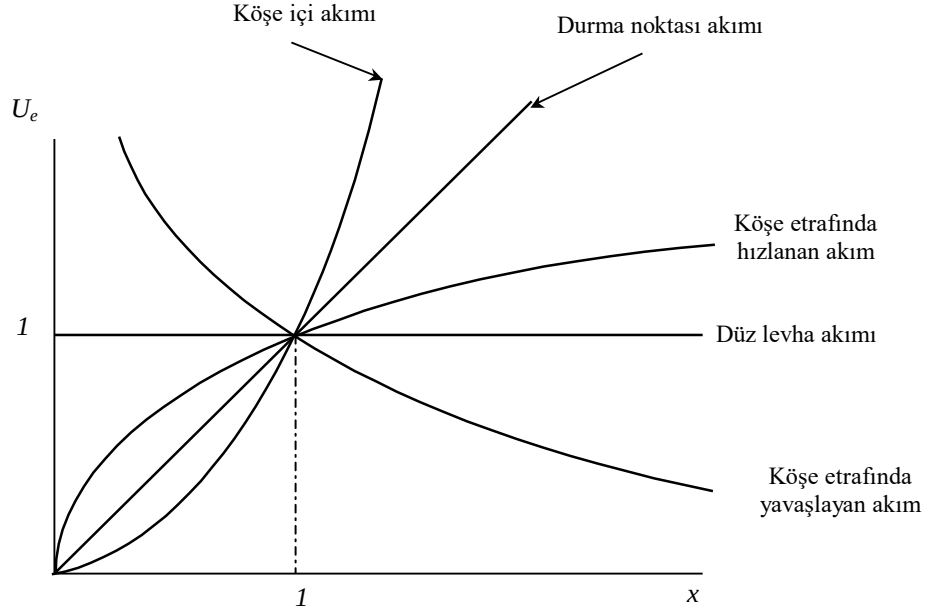
$$\beta = \frac{2m}{m+1} \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır.

(4.16) sınır tabaka denklemleri x ve y koordinatlarının her ikisine de bağlı gözüküyor iken (4.20) denkleminin sadece katı cidara dik η koordinatına bağlı olduğu ve x koordinatından bağımsız olduğu dikkat çekicidir. Bu durum (x,y) fiziksel koordinat sisteminde farklı iki x istasyonundaki sınır tabaka hız profilleri arasında bir orantı olduğu ve verilen (4.19) değişken dönüşümleri sonucunda her iki istasyon için elde edilen dönüştürülmüş hız profillerinin çakıştığı anlamına gelmektedir. Dolayısıyla

(4.20) denkleminin bir tek çözümü, fiziksel düzlemdeki orantılı bir çok çözüme karşılık gelir.

(4.20) denklemini (4.21) sınır şartlarını kullanarak β 'nın çeşitli değerleri için çözmek mümkündür. β 'nın bazı değerlerinin hangi tip hız dağılımının karşılığı olduğu Şekil 4.2 de gösterilmektedir.



Şekil 4.2: Falkner-Skan tipi akımlar

(4.20) denkleminin çözümü sonucu elde edilen $f(\eta)$ fonksiyonu ile bunun $f'(\eta)$ ve $f''(\eta)$ türevleri kullanılarak sınır tabaka büyüklükleri şu şekilde elde edilebilir.

$$\text{Yüzey Sürtünme Katsayısı: } \frac{C_f}{2} \sqrt{R_x} = \sqrt{\frac{m+1}{2} \cdot f''(0)} \quad (4.23a)$$

$$\text{Deplasman Kalınlığı: } \frac{\delta_1}{x} \sqrt{R_x} = \frac{R_{\delta_1}}{\sqrt{R_x}} = \sqrt{\frac{2}{m+1} \int_0^\infty (1-f') \cdot d\eta} \quad (4.23b)$$

$$\text{Momentum Kalınlığı: } \frac{\theta}{x} \sqrt{R_x} = \frac{R_\theta}{\sqrt{R_x}} = \sqrt{\frac{2}{m+1} \int_0^\infty f' \cdot (1-f') \cdot d\eta} \quad (4.23c)$$

burada

$$R_x = \frac{U_e x}{\nu}, \quad R_{\delta_1} = \frac{U_e \delta_1}{\nu}, \quad R_\theta = \frac{U_e \theta}{\nu} \quad (4.23d)$$

Falkner-Skan denklemi için örnek olmak üzere durma noktası etrafındaki çözüm ele alınacak olursa

$$m=\beta=1, \quad U_e=k \cdot x, \quad \sqrt{R_x} = \sqrt{\frac{k}{\nu}} x \quad (4.24)$$

olup, (4.20) denkleminin bu hale ait çözümünden

$$\frac{R_\theta}{\sqrt{R_x}} = 0.29234 \rightarrow \theta = \frac{0.29234}{\sqrt{k/\nu}} \quad (4.25a)$$

$$\frac{R_{\delta_1}}{\sqrt{R_x}} = 0.64784 \rightarrow \delta_1 = \frac{0.64784}{\sqrt{k/\nu}} \quad (4.25.b)$$

$$H=2.21623 \quad (4.25.c)$$

$$H_{32}=1.62578 \quad (4.25.d)$$

elde edilir. Burada

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{L}, \quad \bar{\delta}_1 = \frac{\delta_1}{L}, \quad \bar{k} = \frac{dU_e}{dx}, \quad \bar{U}_e = \frac{U_e}{V}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad Re = \frac{VL}{\nu} \quad (4.25e)$$

Durma noktasındaki bu çözüm, özellikle kanat profili ve benzeri bir cisim etrafındaki sınır tabakanın sayısal bir yöntemle çözümü sırasında hücum kenarı civarındaki durma noktasından itibaren çözümün başlatılmasında kullanılması açısından önem kazanmaktadır. (4.18a) denkleminin çeşitli β değerleri için çözümleri Tablo 4.1 de görülmektedir.

Tablo 4-1: Falkner-Skan denklemlerinin çeşitli β değerleri için çözümleri

B	M	$R_\theta/\sqrt{R_x}$	$R_{\delta 1}/\sqrt{R_x}$	H	H_{32}	$C_f/2\sqrt{R_x}$	$C_f/2R_\theta$	$\lambda_2=\theta R_\theta/U_e.dU_e/dx$	$F/2=R_\theta d\theta/dx$	$2C_D R_\theta/H_{32}$	$C_E R_\theta/H^*$
20.00000	-1.11111	0.35112	0.73026	2.07979	1.65358	1.22111	0.42876	0.13698	-0.13014	0.28084	0.00687
10.00000	-1.25000	0.32592	0.68101	2.08950	1.65131	1.29939	0.42350	0.13278	-0.11950	0.27883	0.01327
2.00000		0.00000	0.00000	2.15541	1.63749		0.38938	0.10652	-0.05326	0.26630	0.05327
1.00000	1.00000	0.20234	0.64789	2.21623	1.62578	1.23259	0.36034	0.08546	0.00000	0.25639	0.08547
0.50000	0.33333	0.42899	0.98537	2.29694	1.61173	0.75745	0.32494	0.06134	0.06134	0.24538	0.12269
0.28571	0.16666	0.50895	1.20511	2.36781	1.60069	0.58255	0.29649	0.04317	0.10793	0.23744	0.15110
0.00000	0.00000	0.66411	1.72079	2.59110	1.57257	0.33206	0.22052	0.00000	0.22052	0.22052	0.22052
-0.04000	-0.01961	0.69419	1.84404	2.65639	1.56595	0.29052	0.20168	-0.00945	0.24567	0.21733	0.23623
-0.08000	-0.03846	0.72786	1.99731	2.74409	1.55794	0.24512	0.17841	-0.02038	0.27508	0.21395	0.25470
-0.12000	-0.05660	0.76628	2.20057	2.87177	1.54802	0.19351	0.14828	-0.03324	0.31021	0.21050	0.27697
-0.16000	-0.07407	0.81155	2.50823	3.09067	1.53496	0.12981	0.10535	-0.04879	0.35370	0.20734	0.30492
-0.19884	-0.09043	0.86811	3.49779	4.02923	1.51509	0.00000	0.00000	-0.06815	0.41088	0.20644	0.34274
-0.16000	-0.07407	0.76792	5.18496	6.75200	1.58304	-0.08544	-0.06561	-0.04368	0.32669	0.18564	0.27300
-0.12000	-0.05660	0.63692	6.40508	10.05630	1.72570	-0.09817	-0.06253	-0.02296	0.21432	0.14543	0.19135
-0.08000	-0.03846	0.47987	7.90226	16.46750	2.02113	-0.09169	-0.04400	-0.00886	0.11957	0.09299	0.11071
-0.04000	-0.01961	0.28891	10.38459	35.94357	2.83933	-0.06766	-0.01955	-0.00164	0.04255	0.03764	0.04092

4.6. İntegral Yöntemleri

Bu tip yöntemlerde (4.16) sınır tabaka denklemlerinin doğrudan çözümü yerine bu denklemlerin sınır tabaka içinde katı cidara dik doğrultuda integre edilmesiyle elde edilen adi diferansiyel denklemlerin çözülmesi yoluna gidilir. İntegral yoluyla elde edilen başlıca denklemler şunlardır:

Süreklilik denkleminin integraliyle elde edilen katılım (entrainment) denklemi

$$\frac{d}{dx}(\delta - \delta_1) = C_E - \frac{\delta - \delta_1}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (4.26a)$$

Momentum denkleminin integraliyle elde edilen von Karman momentum integral denklemi,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} - \theta \cdot \frac{H+2}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (4.26b)$$

Momentum denkleminin u ile çarpılıp integre edilmesiyle elde edilen kinetik enerji integral denklemi

$$\frac{d\delta_3}{dx} = 2C_D - 3 \frac{\delta_3}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (4.27c)$$

Literatürde, yukarıdaki denklemlerin çözümüne dayanan bir çok sınır tabaka çözüm yöntemi mevcut olup, kullandıkları integral denkleme göre farklılık göstermektedirler. Önemli bazıları;

- Karman – Pohlhausen Yöntemi
- Thwaites Yöntemi
- Walz – Eppler Yöntemi
- Cousteix – Michel Yöntemi
- Cousteix – Head Yöntemi

şeklinde belirtilebilir. Bunlardan ilk üçü sadece laminar sınır tabaka çözümlerine uygun iken son iki yöntem türbülanslı sınır tabakalar için de uygulanabilmektedir.

4.6.1. Karman–Pohlhausen Yöntemi

Bu yöntem von Karman momentum integral denkleminin sınır tabaka boyunca integrali esasına dayanmaktadır. Ancak integrali kolaylaştırmak amacıyla sınır tabaka içindeki hız dağılımı için Pohlhausen tipi olarak adlandırılan yaklaşık hız profillerinden yararlanılmaktadır. Hız profilinin katsayılarını sınır şartlarından elde etmek mümkündür.

Dördüncü dereceden bir hız profili, sınır şartları

$$y=0 \text{ 'da} \quad u=0 \quad (4.27a)$$

$$y=\delta \text{ 'da} \quad u=U_e \quad (4.27b)$$

$$y=\delta \text{ 'da} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (4.27c)$$

$$y=\delta \text{ 'da} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.27d)$$

olmak üzere ve ilaveten momentum denkleminin yüzey üzerinde

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_0 = -\frac{U_e}{\nu} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (4.27e)$$

şeklini alacağı göz önüne alınarak,

$$\frac{u}{U_e} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{1}{6}\zeta(1-\zeta)^3 \quad (4.28)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada,

$$\Lambda = -\frac{\delta^2}{\nu} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (4.29)$$

basınç (hız) gradyantı parametresidir.

Bu hız profili kullanılarak sınır tabaka büyüklükleri için

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120} \quad (4.30a)$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \quad (4.30b)$$

$$\frac{C_f}{2} R_\delta = 2 + \frac{\Lambda}{6} \quad (4.30c)$$

elde edilebilir. Ancak Karman–Pohlhausen yönteminin uygulamasında kolaylık olması açısından,

$$\Lambda_2 = \frac{\theta^2}{\delta^2} \Lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \cdot \frac{dU_e}{dx} = \frac{\theta}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \cdot R_\theta \quad (4.31)$$

şeklindeki bir tanımlama ile elde edilen

$$\Lambda_2 = \Lambda \cdot \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right)^2 \quad (4.32a)$$

$$H(\Lambda_2) = \frac{\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}}{\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}} \quad (4.32b)$$

$$b(\Lambda_2) = \frac{C_f}{2} R_\delta = \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) \cdot \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \quad (4.32c)$$

bağıntıları yukarıdaki bağıntılar yerine kullanılır.

Karman–Pohlhausen yönteminde (4.26b) momentum integral denklemi doğrudan integre edilmez, ancak

$$Z = \frac{\theta^2}{\nu} \quad (4.33)$$

değişken dönüşümü ile

$$\frac{dZ}{dx} + 2(H+2) \frac{1}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \cdot Z = \frac{C_f R_\theta}{U_e} \quad (4.34)$$

formuna sokularak integre edilir. Bu denklem içinde geçen H ve $C_f R_\theta$ büyüklüklerinin (4.32b) ve (4.32c) bağıntılarıyla Λ_1 büyüklüğüne, Λ_1 büyüklüğünün ise (4.32a) bağıntısıyla Λ_2 bağıntısına bağlı olduğu görülmektedir. Ayrıca (4.33) bağıntısı (4.31) bağıntısında kullanılarak

$$\Lambda_2 = Z \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (4.35)$$

olduğu gösterilebilir. Buna göre (4.34) denkleminin

$$\frac{dZ}{dx} = f[x, Z(x)] \quad (4.36)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem olduğu anlaşılır. Bu denklemin, herhangi bir $\bar{x}$ istasyonunda $d\bar{Z}/d\bar{x}$ türevi bilinmek kaydıyla, örneğin birinci dereceden bir Taylor açılımı kullanılarak

$$\bar{Z}(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \cong \bar{Z}(\bar{x}) + \Delta\bar{x} \cdot \left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{x}} \right)_{\bar{x}} \quad (4.37)$$

şeklinde çözümü, veya Runge-Kutta yöntemi gibi daha gelişmiş bir yöntemle çözümü mümkündür.

Her bir sınır tabaka istasyonunda bir kez $\bar{Z}$ büyüklüğü elde edildikten sonra (4.35) bağıntısı yardımıyla Λ_2 ve bu değer (4.32a) bağıntısında kullanılarak Λ değeri hesaplanabilir. Ancak bu son bağıntının Λ için non-lineer olduğu ve ancak iteratif olarak çözülebileceğine dikkat etmek gereklidir. Λ 'nın değeri elde edildikten sonra H şekil parametresi (4.32b) bağıntısıyla ve C_f yüzey sürtünme katsayısı da R_θ 'ya bağlı olarak (4.32c) bağıntısı yardımıyla veya serbest akım Re sayısına bağlı olarak

$$\frac{C_f}{2} Re = \frac{1}{\theta} \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) \cdot \left(2 + \frac{\Lambda}{6} \right) \quad (4.38)$$

bağıntısıyla bulunabilir. Ayrıca deplasman kalınlığı da

$$\bar{\delta}_1 = H \cdot \bar{\theta} \quad (4.39)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Küt bir cisim üzerinde sınır tabaka durma noktasında başlayacağından, durma noktasındaki inceleme için (4.34) denklemini

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Z}}{d\bar{x}} &= \frac{F(\Lambda_2)}{\bar{U}_e} = \frac{C_f R_\theta - 2(H+2)\Lambda_2}{\bar{U}_e} \\ &= \frac{2 \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072} \right) \left[2 - \frac{116\Lambda}{315} + \left(\frac{2}{945} + \frac{1}{120} \right) \Lambda^2 + \frac{2}{9072} \Lambda^3 \right]}{\bar{U}_e} \end{aligned} \quad (4.40)$$

şeklinde yazmak uygun olur. Durma noktasında $\bar{U}_e = 0$ olup (4.40) eşitliğinde bir tekillik meydana gelmemesi için $F(\Lambda)=0$ olmalıdır. Bu şart ile durma noktasında $\Lambda=7.052$ ve $\Lambda_2=0.0770$ değerleri elde edilir. $(d\bar{Z}/d\bar{x})_0 = 0/0$ belirsizliği ise limit işlemi sonucunda,

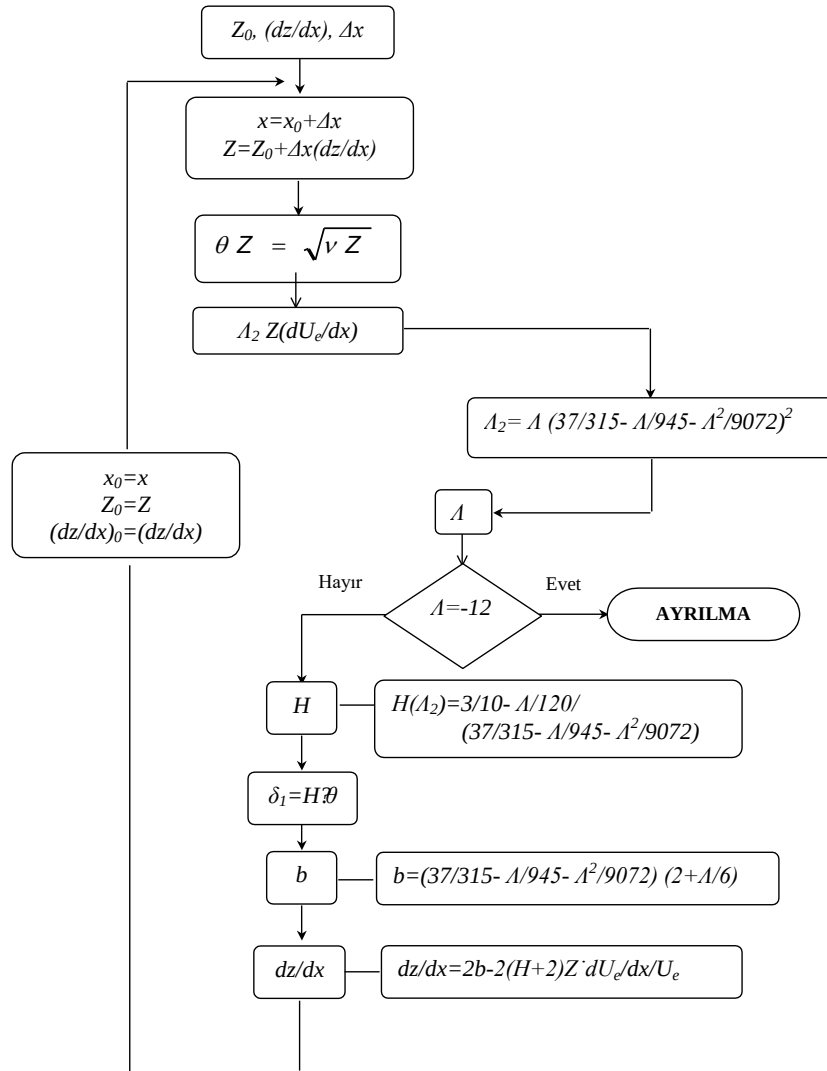
$$\left(\frac{d\bar{Z}}{d\bar{x}} \right)_0 = -0.0652 \frac{(d^2\bar{U}_e/d\bar{x}^2)_0}{(d\bar{U}_e/d\bar{x})_0} \quad (4.41)$$

verir. Ayrıca $\bar{Z}_0 = 0.0770/(d\bar{U}_e/d\bar{x})_0$ olacağı gösterilebilir.

Karman–Pohlhausen yöntemiyle laminar sınır tabaka hesabı bir geçiş veya bir laminar ayrılma ile sonuçlanır. Geçiş kontrolü seçilen yönteme bağlı olarak değişir. Ayrılma için kriter ise yüzey sürtünme katsayısının sıfır olması şartı (4.30c) bağıntısında kullanılarak

$$\Lambda = -12 \quad (4.42)$$

şeklinde bulunur. Karman–Pohlhausen yöntemine ait bir akış şeması Şekil 4.3 ‘de görülmektedir.



Şekil 4.3: Karman–Pohlhausen yöntemi akış şeması

4.6.2. Thwaites Yöntemi

Thwaites Yöntemi Karman–Pohlhausen integral denkleminin ampirik bir yolla integrali esasına dayanır. Bu amaçla (4.40) denklemi yeniden ele alınırsa, burada geçen $F(\Lambda_2)$ büyüklüğünün

$$F(\Lambda_2) = 2 \cdot b(\Lambda_2) - \Lambda_2 [H(\Lambda_2) + 2] \quad (4.43)$$

şeklinde sadece Λ_2 basınç gradyanı parametresinin fonksiyonu olduğu görülebilir. Thwaites, çeşitli basınç gradyanları halinde bilinen bir takım analitik çözümlerden hareketle bu fonksiyonun

$$F(\Lambda_2) \cong 0.45 - 6 \cdot \Lambda_2 \quad (4.44)$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Bu durumda (4.43) ve (4.45) bağıntıları da kullanılarak (4.40) denklemi

$$\frac{d(Re \cdot \bar{\theta}^2)}{d\bar{x}} = \frac{0.45 - 6 \cdot Re \cdot \bar{\theta}^2 \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}}}{\bar{U}_e} \quad (4.45)$$

şeklinde yazılabilir veya yeni bir düzenleme ile

$$\frac{d(\bar{\theta}^2 \bar{U}_e^6)}{d\bar{x}} = \frac{0.45}{Re} \bar{U}_e^5 \quad (4.46)$$

şekline getirilebilir. Bu eşitlik sınır tabaka boyunca herhangi bir $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1})$ aralığında integre edilerek

$$(\bar{\theta}^2 \bar{U}_e^6)_{\bar{x}_{i+1}} - (\bar{\theta}^2 \bar{U}_e^6)_{\bar{x}_i} = \frac{0.45}{Re} \cdot \int_{\bar{x}_i}^{\bar{x}_{i+1}} \bar{U}_e^5 d\bar{x} \quad (4.47)$$

elde edilir. Sınır tabakanın herhangi bir istasyonunda bir kez θ hesaplandıktan sonra Λ_2 , Λ , H , C_f ve δ_i değerlerinin hesaplanması Karman-Pohlhausen yönteminde açıklandığı gibi olacaktır.

4.6.3. Walz – Eppler Yöntemi

Bu yöntemin öncekilerden farkı, momentum integral denklemi yanında kinetik enerji integral denkleminin de eş zamanlı olarak çözülmesini gerektirmektedir. Boyutsuz olarak

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}} = \frac{C_f}{2} - \bar{\theta} \cdot \frac{H+2}{\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.48a)$$

$$\frac{d\bar{\delta}_3}{d\bar{x}} = 2C_D - 3 \frac{\bar{\delta}_3}{\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.48b)$$

şeklinde ifade edilebilen bu iki denkleme karşılık, denklem sisteminde

$$\theta, \delta_3, C_f, C_D, H$$

olmak üzere 5 bilinmeyen vardır. Dolayısıyla denklem sisteminin çözülebilir hale gelmesi için ilave üç denkleme veya bağıntıya ihtiyaç vardır. İlave üç bağıntı bilinen analitik çözümlerden ampirik olarak elde edilebilir. Cousteix gerekli ampirik bağıntıları Walz'ın orijinal makalesindekinden, nümerik uygulamaya daha uygun bir formda vermiştir (Yükselen, 2001).

$$H_{32} + \frac{50.84951}{H_{32}} = -23.78186 \left(\frac{1}{H} + \frac{H}{[1.4902923]^2} \right) + 46.8818 \quad (4.49a)$$

$$\frac{C_f}{2} R_\theta = b = 2.99259 \left[\left(\frac{1}{H} - \frac{1}{8.05846} \right)^{1.7} - \left(\frac{1}{8.05846} \right)^{1.7} \right] \quad (4.49b)$$

$$\frac{2C_D R_\theta}{H_{32}} = b - (H - 1) \left[-0.06815 + 4.336355 \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{4.02923} \right)^{2.095065} \right] \quad (4.49c)$$

(4.48) denklemleri birinci dereceden Taylor açılımı ile

$$\bar{\theta}(\bar{x}) = \bar{\theta}(\bar{x}_0) + (\bar{x} - \bar{x}_0) \left(\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}} \right)_{\bar{x}_0} \quad (4.50a)$$

$$\bar{\delta}_3(\bar{x}) = \bar{\delta}_3(\bar{x}_0) + (\bar{x} - \bar{x}_0) \left(\frac{d\bar{\delta}_3}{d\bar{x}} \right)_{\bar{x}_0} \quad (4.50b)$$

şeklinde çözülebilir. Yalnız durma noktasında $U_e=0$ olup, (4.48) denklemlerinin her ikisinin de ikinci terimlerinde bir tekillik söz konusudur. Bu durum durma noktasında çözümün başlatılmasında bir takım güçlükler yaratır. Bununla birlikte, aslında durma noktasında C_f ve C_D 'nin değerleri sonsuz büyük olup, (4.48) denklemlerinde ilk terimlerle ikinci terimler arası farkların sonlu kalması gerekir. Dolayısıyla (4.48) denklemlerinin aslında tekil olmadıklarını, ancak bu halleriyle durma noktasında nümerik uygulamaya uygun olmadıklarını söylemek mümkündür.

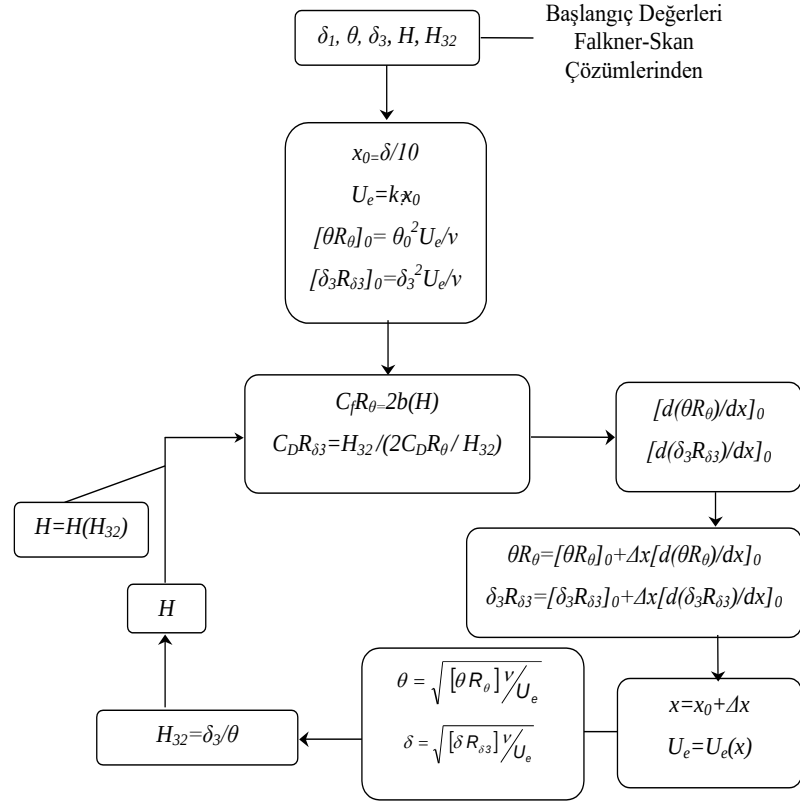
(4.48) denklemleri bir takım düzenlemelerden sonra;

$$\frac{d(\bar{\theta} R_\theta)}{d\bar{x}} = C_f R_\theta - Re \cdot \theta^2 (2H + 3) \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.51a)$$

$$\frac{d(\bar{\delta}_3 R_{\delta_3})}{d\bar{x}} = 4C_D R_{\delta_3} - 5 Re \cdot \delta_3 \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.51b)$$

şeklinde yazılarak sorunsuz çözülebilir.

Walz–Eppler Yönteminin akış şeması Şekil 4.4’de görülmektedir. Laminer sınır tabaka hesabı yine bir geçişle veya laminer ayrılmayla son bulmaktadır. Laminer ayrılma kriteri, analitik çözümlerden elde edilen $H \geq 4.02923$ şartıdır.



Şekil 4.4: Walz-Eppler yönteminin akış şeması

4.6.4. Cousteix–Michel Yöntemi

Bu yöntem de Walz–Eppler yöntemi gibi çift denklemlili bir yöntem olup, von Karman momentum integral denklemi yanında katılım denklemini (süreklilik integral denklemi) kullanır. Boyutsuz halde

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}} = \frac{C_f}{2} - \theta \cdot \frac{H+2}{\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.52a)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} (\bar{\delta} - \bar{\delta}_1) = C_E - \frac{\bar{\delta} - \bar{\delta}_1}{\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.52b)$$

şeklinde ifade edilebilen bu iki denkleme karşılık, yine θ , δ , δ_1 , C_f , C_E ve H gibi 5 bilinmeyen mevcut olup Cousteix tarafından

$$\frac{C_f}{2} R_\theta = b(H) = 2.99259 \left[\left(\frac{1}{H} - 0.124093 \right)^{1.7} - 0.028799 \right] \quad (4.53a)$$

$$\frac{2C_D R_\theta}{H_{32}} = d(H) = b(H) - (H - 1) \left[-0.06815 + 4.336355 \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{4.02923} \right)^{2.095065} \right] \quad (4.53b)$$

$$\frac{C_E R_\theta}{H^*} = e(H) = -\frac{2}{H-1} b(H) + \frac{H+1}{H-1} d(H) \quad (4.53c)$$

bağıntıları verilmiştir. Burada $H^* = (\delta - \delta_1) / \theta$ olup ayrıca

$$\frac{H^*}{12.37} + 1.2706 \left(\frac{12.37}{H^*} \right) = -1.5022 \left(\frac{1}{H} + \frac{H}{[4.02923]^2} \right) + 3.1924 \quad (4.53d)$$

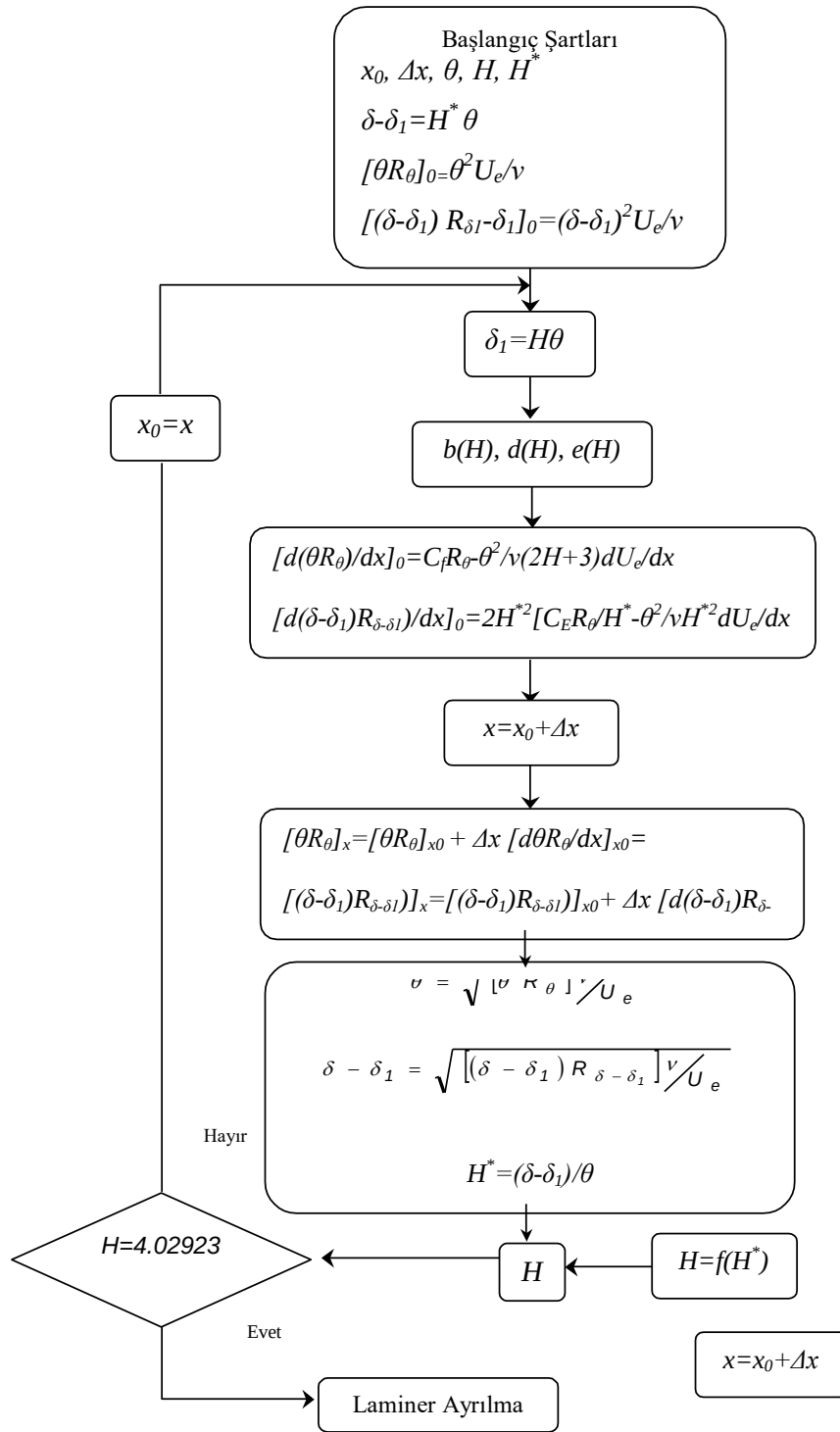
verilmektedir.

(4.52) denklemlerinin durma noktasında çözümü yine Walz–Eppler yönteminde belirtildiği türden bir sayısal zorluk çıkarır. Bu nedenle bu denklemleri düzenleyerek,

$$\frac{d(\bar{\theta} R_\theta)}{d\bar{x}} = C_f R_\theta - Re \cdot \bar{\theta}^2 (2H + 3) \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.54a)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left[(\bar{\delta} - \bar{\delta}_1) Re_{(\delta - \delta_1)} \right] = 2C_E R_\theta H^* - Re \cdot \theta^2 H^{*2} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.54b)$$

şeklinde yazıp çözmek daha uygun olur. Yöntemin akış şeması Şekil 4.5’de sunulmuştur. Laminer ayrılma için kriter yine $H \geq 4.02923$ şeklindedir.



Şekil 4.5: Cousteix - Michel yöntemi akış şeması

4.6.5. Cousteix–Head Yöntemi

Bu yöntem de bir önceki yöntem gibi çift denklemlili bir yöntem olup, Michel-Cousteix yöntemiyle aynı denklemleri yani, von Karman momentum integral denklemi yanında katılım denklemini (süreklilik integral denklemi) kullanır. Boyutsuz halde

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}} = \frac{C_f}{2} - \theta \cdot \frac{H+2}{\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.55a)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} (\bar{\delta} - \bar{\delta}_1) = C_E - \frac{\bar{\delta} - \bar{\delta}_1}{\bar{U}_e} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.55b)$$

şeklinde ifade edilebilen bu iki denkleme karşılık, yine θ , δ , δ_1 , C_f , C_E ve H gibi 5 bilinmeyen mevcuttur. Ancak sadece kullanılan ampirik bağıntılar Michel- Cousteix yönteminden farklıdır. Bu bağıntılar aşağıda verildiği gibidir,

Ludwig-Tillman Bağıntıları,

$$C_f = 0.246 \times 10^{-0.678H} R_{\theta}^{0.268} \quad (4.56a)$$

$$C_E = 0.0306(H^* - 3)^{-0.653} \quad (4.56b)$$

Head tarafından verilen bağıntı ise,

$$H^* = 1.535(H - 0.7)^{-2.715} + 3.3 \quad (4.56c)$$

(4.55) denklemlerinin durma noktasında çözümü yine bir önceki yöntemde belirtildiği türden bir sayısal zorluk çıkarır. Bu nedenle bu denklemleri düzenleyerek,

$$\frac{d(\bar{\theta} R_{\theta})}{d\bar{x}} = C_f R_{\theta} - Re \cdot \bar{\theta}^2 (2H + 3) \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.57a)$$

$$\frac{d}{d\bar{x}} [(\bar{\delta} - \bar{\delta}_1) Re_{(\delta - \delta_1)}] = 2C_E R_{\theta} H^* - Re \cdot \bar{\theta}^2 H^{*2} \cdot \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \quad (4.57b)$$

şeklinde yazıp çözmek daha uygun olur.

5. ETKİLEŞİMLİ SINIR TABAKA HESABI

5.1. Giriş

Önceki bölümde iki-boyutlu, sıkıştırılamaz sınır tabakalara ait genel denklemler ve sınır tabakanın önemli parametreleri gözden geçirilmiş ve sınır tabaka denklemlerinin çözümüne yönelik olarak literatürde yer alan bazı yöntemler ele alınmıştı. Bu bölüm yine iki-boyutlu, sıkıştırılamaz sınır tabakaların çözümü için kullanılan ve sonlu fark esaslı bir yöntem olan Cebeci-Smith yöntemine ayrılmıştır.

Yöntem ayrılmamış sınır tabakaların ve iz bölgelerinin hesabında kullanıldığı gibi, kısmen ayrılmış sınır tabakaların hesabında da uygulanabilmektedir. Ayrılmamış sınır tabaka hesabı standart (veya direkt) problem olarak adlandırılırken, ayrılmış sınır tabakaların hesabı ters (invers) problem olarak adlandırılmaktadır. Bu bölümde her iki problem de sıra ile ele alınacaktır. Ayrıca iz hesabına yer verilecektir.

5.2. Standart (Direkt) Problem

Direkt problem sınır tabakanın hiç ayrılma göstermediği hali nitelendirmektedir. Bu halde, düz levha özel problemi bir kenara bırakılırsa, kanat profili ve benzeri cisimler üzerinde sınır tabaka durma noktası olarak adlandırılan bir noktadan itibaren laminar olarak başlamakta, doğal veya zorlanmış bir geçiş ile türbülanslı hale geçmekte ve cismin gerisinde genel olarak türbülanslı bir iz bölgesi olarak devam etmektedir.

Sınır tabakayı temsil eden denklemlerin parabolik karakterde olduğu ve bu nedenle de bir sınır tabaka hesabının, sınır tabaka yapısının ilk oluştuğu yerdeki şartlarla başlatılacağı ve katı cidar ile sınır tabakanın dış kenarındaki şartlar verilmek kaydıyla akım yönünde ilerletilmesi gerektiği bilinmektedir. Çözüm için sonlu farklar yöntemi uygulandığı taktirde akım yönünde ve katı cidara dik yönde oluşturulan bir ağ sistemi içerisinde sınır tabaka denklemlerinin ayrıklaştırılması söz konusu olur. Sınır tabakanın

genel olarak ilerleme yönünde kalınlaştığı göz önüne alınırsa, katı cidara dik yöndeki ağ hücre sayısının ilerleme yönünde artırılması gerektiği ortaya çıkar. Bu hususun yaratacağı sakıncaları ortadan kaldırmak için Falkner-Skan problemindekine benzer bir dönüşümle problemin farklı bir düzleme aktarılması yararlı olur.

Önceki bölümden hatırlanacağı üzere, bazı özel basınç gradyanları halinde, Falkner-Skan dönüşümü uygulandığı taktirde sınır tabaka hız profilleri yeni bir düzlemde üst üste gelmektedir. Kanat profili ve benzeri cisimler üzerindeki basınç gradyanları her ne kadar, belirtilen bu basınç gradyanları ile aynı değillerse de uygulanacak Falkner-Skan benzeri dönüşümü ile sınır tabakanın dönüşüm düzleminde daha az kalınlaşması sağlanabilir. Böylece yüzeye dik doğrultuda sınırlı ve değişmesi çok gerekmeyen sayıda hücre kullanıldığı gibi ilerleme doğrultusunda da daha uzun adımlar atmak mümkün olur.

Benzerlik değişkenlerinin yapısı akımın türbülanslı veya serbest kayma tabakası olup olmadığına göre değişir. Bu amaçla kullanılabilecek çeşitli dönüşümler mevcuttur ve bir çoğu laminer akımlar için geliştirilmiş olmasına rağmen türbülanslı akımlar için de kullanılabilir (Cebeci, 1999, Cebeci ve Cousteix 1999, Keller, 1970, Bradshaw ve diğ., 1981).

5.2.1. Sınır Tabaka Denklemlerinin Standart Problemde Dönüşümü

Önceki bölümde verilen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.16a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.16b)$$

sınır tabaka denklemlerine

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} y, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \psi = \sqrt{U_e \nu x} f(\xi, \eta) \quad (5.1)$$

değişken dönüşümleri uygulandığı taktirde

$$(\bar{b} f'')' + \frac{(m+1)}{2} f f'' + m (1 - f'^2) = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (5.2)$$

elde edilir (Ek-B). Burada, ξ ve η benzerlik değişkenleri ve $f(\xi, \eta)$ da boyutsuz akım fonksiyonudur. Ayrıca m boyutsuz basınç gradyanı parametresi ve $\bar{b}$ de boyutsuz viskozite parametresi olup sırasıyla,

$$m = \frac{x}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad (5.3a)$$

$$\bar{b} = 1 + \frac{\varepsilon_m}{\nu} \quad (5.3b)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Sınır şartları önceki bölümde (4.7) denklemleriyle verilmişti. Burada, yüzey sınır şartında bir genelleştirme yapılarak sınır şartları

$$y = 0 \quad da \quad u = 0 \quad (5.4a)$$

$$y = 0 \quad da \quad v = v_w \quad (\text{üflemezse halde } v_w = 0) \quad (5.4b)$$

$$y = \infty \quad da \quad u = U_e \quad (5.4c)$$

şeklinde uygulanacaktır. Yüzey üzerindeki üfleme hızı sınır tabakanın öteleme etkisini temsil etmek üzere yer almaktadır.

(5.4) bağıntılarına (5.1) değişken dönüşümleri uygulandığı takdirde sınır şartları

$$\eta = 0' \quad da \quad \rightarrow \quad f' = 0 \quad (5.5a)$$

$$\eta = 0' \quad da \quad \rightarrow \quad f(\xi, 0) = f_w(\xi) = - \frac{\sqrt{R_L}}{\sqrt{U_e \xi}} \int_0^\xi v_w d\xi \quad (5.5b)$$

$$\eta = \eta_e' \quad de \quad \rightarrow \quad f' = 1 \quad (5.5c)$$

şekline gelir. Burada η_e sınır tabaka kalınlığına karşılık gelen koordinattır. Ayrıca

$$\eta_e = \sqrt{\frac{R_L \bar{U}_e}{\xi}} \quad \bar{U}_e = \frac{U_e}{U_\infty} \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{L} \quad (5.6)$$

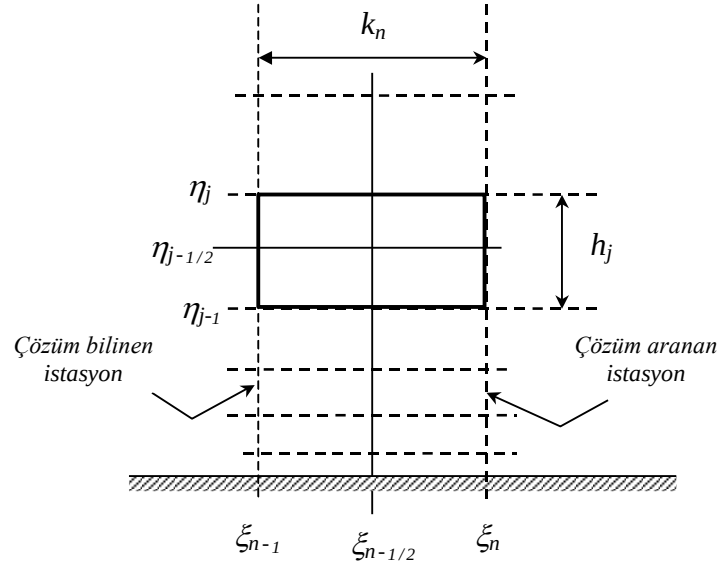
olup, R_L büyüklüğü serbest akım hızı ve cismin karakteristik uzunluğu cinsinden tanımlanan Reynolds sayısıdır.

5.2.2. Sayısal Çözüm Tekniği (Keller-Kutu Yöntemi)

Falkner-Skan dönüşümü sonucu elde edilen (5.2) sınır tabaka denkleminin çözümü için uygun bir ayrıklaştırma Keller-kutu yöntemiyle gerçekleştirilebilir (Cebeci, 1999 ve Cebeci ve Cousteix, 1999). Keller(1970) ve Keller Cebeci(1972) tarafından önerilen yöntem implisit (kapalı) prosedüre sahiptir.

Bu yöntemde sınır tabaka hesabının en son yapıldığı istasyon ve hesabın yapılacağı bir sonraki istasyon için yüzeye dik doğrultuda oluşturulan bir ağ sisteminden yararlanılır (Şekil 5.1). Yöntem koşulsuz kararlı olup Şekil 5.1’de görülen h ve k adım boylarının büyük alınabilmesine izin verir. İnce kayma tabakalı denklemlerin ve akım problemlerinin çözümünde oldukça yaygın bir kullanım alanına sahiptir. Keller-Kutu yönteminin belli başlı özellikleri (Keller, 1970, Bradshaw ve diğ., 1981):

- Matematiksel olarak biraz daha karmaşık bir yapıya sahiptir.
- Keyfi(üniform olmayan) x adımı ile ikinci dereceden hassasiyete sahiptir.
- Süreksizliklere rağmen çok hızlı x değişimlerine olanak sağlar.



Şekil 5.1: Ağ sistemi ve Keller Kutusu

Keller-Kutu yöntemi 4 basamaktan meydana gelir:

- Yönetici denklemlerin birinci mertebeden türevli denklemlere indirgenmesi,
- Türev ifadelerinin merkezi farklar ile yazılması,
- Sonuçta elde edilen cebirsel denklemler lineer değilse lineerleştirilmesi ve matris-vektör formunda yazılması,
- Lineer denklem sisteminin blok eliminasyon yöntemiyle çözülmesi,

Bu bağlamda önce (5.2) denklemi uygun değişkenler tanımlanarak,

$$f' = u \quad (5.7a)$$

$$u' = v \quad (5.7b)$$

$$(\overline{b}v)' + \frac{(m+1)}{2} f v + m(1-u^2) = \xi \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (5.7c)$$

şeklinde birinci mertebeden üç adi diferansiyel denkleme ayrılabilir. Böylece problem bu üç denklemin eş zamanlı olarak çözümü problemine dönüşür.

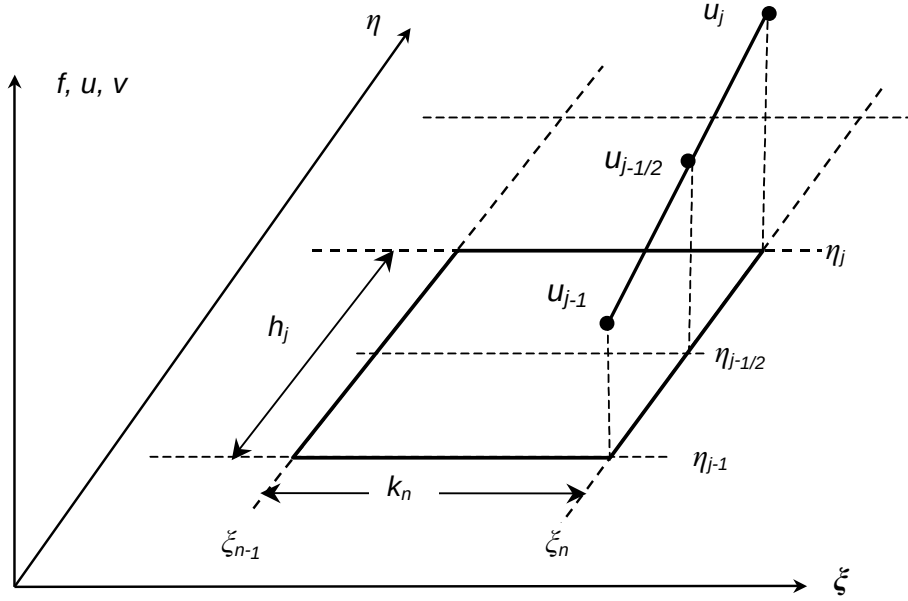
5.2.3. Sınır Tabaka Denklemlerinin Standart Problemde Ayırıklaştırılması

(5.7) denklemlerinin ilk ikisinde sadece η 'ya göre adi türevler bulunmakta olup bu denklemler merkezi farklarla ayrıştırılarak;

$$\frac{f_j - f_{j-1}}{h_j} = u_{j-1/2} = \frac{u_j + u_{j-1}}{2} \quad (5.8a)$$

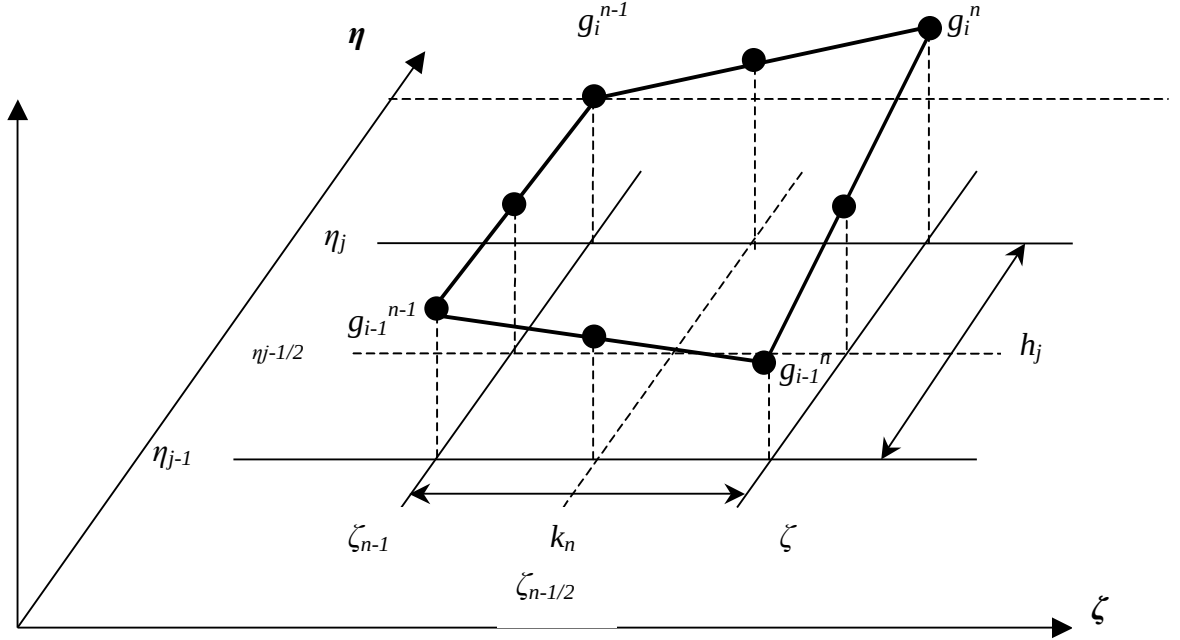
$$\frac{u_j - u_{j-1}}{h_j} = v_{j-1/2} = \frac{v_j + v_{j-1}}{2} \quad (5.8b)$$

şeklinde yazılabilir. η doğrultusundaki ayırıklaştırma şemasını Şekil 5.2'den izlemek mümkündür.



Şekil 5.2: η doğrultusunda ayırıklaştırma

(5.7c) denkleminde ise ξ doğrultusunda kısmi türevler mevcut olup bunun ayırıklaştırılması merkezi farklarla, Şekil 5.3 de görüldüğü gibi hücrenin $(\xi_{n-1/2}, \eta_{n-1/2})$ orta noktasında yapılacaktır (Chang ve diğ. 1988).



Şekil 5.3: ξ doğrultusunda ayırıklaştırma

Bu amaçla ilk aşamada denklemin sol tarafı L ile gösterilip,

$$L = \xi \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (5.9)$$

şeklinde yazılarak ξ doğrultusunda denklemin her iki tarafı merkezi farklarla ayrıştırılırsa,

$$L^{n-1/2} = \frac{L^n + L^{n-1}}{2} = \xi^{n-1/2} \left[u^{n-1/2} \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k_n} \right) - v^{n-1/2} \left(\frac{f^n - f^{n-1}}{k_n} \right) \right] \quad (5.10)$$

elde edilir. Burada

$$u^{n-1/2} = \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, \quad v^{n-1/2} = \frac{v^n + v^{n-1}}{2} \quad (5.11)$$

dır. (5.10) eşitliği

$$\frac{\xi^{n-1/2}}{k_n} = \alpha^n \quad (5.12)$$

olmak üzere ve yeni bir düzenleme ile

$$L^n - \alpha^n \left[(u^2)^n - v^n f^n - v^{n-1} f^n + v^n f^{n-1} \right] = L^{n-1} + \alpha^n \left[- (u^2)^{n-1} - v^{n-1} f^{n-1} \right] \quad (5.13)$$

şeklinde de yazılabilir.

Sınır tabaka çözümünün ξ 'nin pozitif yönünde ilerletileceği hatırlanırsa, seçilen hücrede ξ^{n-1} istasyonundaki L^{n-1} , u^{n-1} , v^{n-1} ve f^{n-1} büyüklükleri bilinirken ξ^{n-1} istasyonundaki L^n , u^n , v^n ve f^n büyüklüklerinin bilinmeyenler olduğu görülür. Yani, (5.13) denkleminin sağ tarafı bilinen, sol tarafı ise bilinmeyen değişkenleri içermektedir. Buna göre denklemin sağ tarafı R_1 ile gösterilerek,

$$L^n - \alpha^n \left[(u^2)^n - v^n f^n - v^{n-1} f^n + v^n f^{n-1} \right] = R_1 \quad (5.14)$$

yazılabilir.

Öte yandan L sembolü ile (5.7c) denkleminin sol tarafının gösterildiği hatırlanırsa,

$$L^n = \left[(bv)' \right]^n + \frac{m^n + 1}{2} (fv)^n + m^n \left[1 - (u^2)^n \right] \quad (5.15)$$

olup bu son eşitlik

$$\left[(bv)' \right]^n + \alpha_1 (fv)^n - \alpha_2 (u^2)^n + \alpha^n \left[f^n v^{n-1} - v^n f^{n-1} \right] = R^{n-1} \quad (5.16)$$

şekline gelir. Burada

$$\alpha_1 = \frac{m^n + 1}{2} + \alpha^n, \quad \alpha_2 = m^n + \alpha^n, \quad R_1 - m^n = R^{n-1} \quad (5.17)$$

dir.

(5.16) denklemi, son olarak η doğrultusunda merkezi farklarla ayrıklaştırılırsa,

$$\frac{b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n}{h_j} + \alpha_1 (fv)_{j-\frac{1}{2}}^n - \alpha_2 (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n + \alpha^n \left[f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - v_{j-\frac{1}{2}}^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.18)$$

elde edilir. Burada

$$R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = -L_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \alpha^n \left[v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] - m^n \quad (5.19a)$$

$$L_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left[\frac{b_j v_j - b_{j-1} v_{j-1}}{h_j} + \frac{m+1}{2} f_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}} + m(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^2) \right]^{n-1} \quad (5.19b)$$

olduğu görülebilir.

5.2.4. Sınır Tabaka Denklemlerinin Standart Problemde Lineerleştirilmesi

Gerek Falkner–Skan dönüşümü ile elde edilen (5.2) denklemi ve gerekse bunun birinci dereceden üç denkleme indirgenerek ayrıklaştırılmasıyla elde edilen (5.18) denklemi non-lineer denklemler olup çözüm zorluğu gösterirler. Çözümü kolaylaştırmanın bir yolu lineerleştirmedir. Sınır tabaka denklemlerinin lineerleştirilmesinde tercih edilen bir yol Newton metodudur (Cebeci ve Smith, 1974, Cebeci ve diğ., 1984).

Ayrıklaştırılmış denklemlerde yer alan f , u , ve v bağımlı değişkenlerinin herhangi bir ξ_j istasyonundaki aranan değerleri f_j^{k+1} , u_j^{k+1} , v_j^{k+1} ile gösterilirse, bu değerler, önerilen bir takım f_j^k , u_j^k , v_j^k değerlerine δf_j^k , δu_j^k , δv_j^k bozuntuları ilave edilerek

$$\begin{aligned} f_j^{k+1} &= f_j^k + \delta f_j^k \\ u_j^{k+1} &= u_j^k + \delta u_j^k \\ v_j^{k+1} &= v_j^k + \delta v_j^k \end{aligned} \quad (5.20)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada k iterasyon adımıdır. Bu bağıntılar (5.8a-b) denklemlerinde kullanılarak,

$$\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta u_j^n - \frac{h_j}{2} \delta u_{j-1}^n = \frac{h_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) - (f_j^n + f_{j-1}^n) \quad (5.21a)$$

$$\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta v_j^n - \frac{h_j}{2} \delta v_{j-1}^n = \frac{h_j}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) - (u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (5.21b)$$

veya

$$r_{1j} = h_j u_{j-\frac{1}{2}}^n - (f_j^n - f_{j-1}^n) \quad (5.22a)$$

$$r_{3j} = h_j v_{j-\frac{1}{2}}^n - (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (5.22b)$$

kısaltmaları yapılarak

$$\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta u_j^n - \frac{h_j}{2} \delta u_{j-1}^n = r_{1j} \quad (5.23a)$$

$$\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta v_j^n - \frac{h_j}{2} \delta v_{j-1}^n = r_{3j} \quad (5.23b)$$

şeklinde elde edilir. (5.20) bağıntıları (5.18) denkleminde kullanılarak ikinci mertebeden terimler ihmal edildiğinde de,

$$S_{1j} \delta v_j^n + S_{2j} \delta v_{j-1}^n + S_{3j} \delta f_j^n + S_{4j} \delta f_{j-1}^n + S_{5j} \delta u_j^n + S_{6j} \delta u_{j-1}^n = r_{2j} \quad (5.23c)$$

olarak elde edilir (Ek-C). Bu son bağıntıda:

$$S_{1j} = h_j^{-1} b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_j^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.24a)$$

$$S_{21j} = -h_j^{-1} b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.24b)$$

$$S_{3j} = \frac{\alpha_1}{2} v_j^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.24c)$$

$$S_{4j} = \frac{\alpha_1}{2} v_{j-1}^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.24d)$$

$$S_{5j} = -\alpha_2 u_j^n \quad (5.24e)$$

$$S_{6j} = -\alpha_2 u_{j-1}^n \quad (5.24f)$$

$$r_{2j} = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_j^{-1} (b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) - \alpha_1 (fv)_{j-\frac{1}{2}}^n + \alpha_2 (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n - \alpha^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) + \alpha^n (v_{j-\frac{1}{2}}^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \quad (5.24g)$$

dır.

(5.23a), (5.23b), (5.23c)ve (5.24g)denklemleri sınır tabakanın herhangi bir n 'nci istasyonu için yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} \delta f_j^n - \frac{h_j}{2} \delta u_j^n - \delta f_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta u_{j-1}^n &= r_{1j} \\ S_{3j} \delta f_j^n + S_{5j} \delta u_j^n + S_{1j} \delta v_j^n + S_{4j} \delta f_{j-1}^n + S_{6j} \delta u_{j-1}^n + S_{2j} \delta v_{j-1}^n &= r_{2j} \\ \delta u_j^n - \frac{h_j}{2} \delta v_j^n - \delta u_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta v_{j-1}^n &= r_{3j} \end{aligned}$$

$$j=1,2,3,\dots,j-1$$

$j=1$ sınır tabakanın dış sınırını belirtmekte olup, bu nokta için sınır şartları uygulanarak,

$$u_j^n + \delta u_j^n = 1 \quad \rightarrow \quad \delta u_j^n = 0 \text{ 'dır.} \quad (5.25)$$

ve ayrıca $j=1$ için yüzey üzerindeki sınır şartı uygulanarak

$$f_0^n + \delta f_0^n = f_w \quad \rightarrow \quad \delta f_0^n = 0$$

$$u_0^n + \delta u_0^n = 0 \quad \rightarrow \quad \delta u_0^n = 0$$

bulunur.

Aynı denklem sistemi matris formda ifade edilirse,

$$[A] \cdot \{\delta\} = \{r\}$$

$$A = \begin{vmatrix} A_0 & C_0 & & & & & & & & & \\ B_1 & A_1 & C_1 & & & & 0 & 0 & & & \\ & B_2 & A_2 & C_2 & & & 0 & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & & & B_j & A_j & C_j & & & & \\ & 0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & 0 & 0 & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & & & B_J & A_J & \end{vmatrix} \cdot \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_J \end{Bmatrix} \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ r_J \end{Bmatrix}$$

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_j \\ \delta u_j \\ \delta v_j \end{Bmatrix} \quad 0 \leq j \leq J \quad \{r_j\} = \begin{Bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \end{Bmatrix} \quad 0 \leq j \leq J-1$$

$$\text{burada} \quad r_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_3)_0 \end{Bmatrix} \quad r_J = \begin{Bmatrix} (r_1)_J \\ (r_2)_J \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -h_2/2 \end{bmatrix} \quad j=0$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & -h_j/2 & 0 \\ (s_3)_j & (s_5)_j & (s_1)_j \\ 0 & -1 & -(h_{j+1})/2 \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,J-1$$

$$A_J = \begin{bmatrix} 1 & -h_J/2 & 0 \\ (s_3)_J & (s_5)_J & (s_1)_J \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad j=J$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -h_j/2 & 0 \\ (s_4)_j & (s_6)_j & (s_2)_j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad j=1,2,\dots,J$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-h_{j+1}}{2} \end{bmatrix} \quad 0 \leq j \leq J-1$$

A_0 ve C_0 matrislerinin ilk iki satırları ile B_j ve A_j matrislerinin son satırı sınır şartlarını kapsamaktadır (Keller, 1970, Bradshaw ve diğ. 1981, Cebeci ve Smith, 1974).

5.3. Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters (Invers) Problemde Falkner-Skan Dönüşümü

Profil etrafındaki akımda herhangi bir ayrılma olması halinde, ayrılmasız halde olduğu gibi dış akım hızını potansiyel akım çözümünden elde etmek mümkün değildir. Yani sınır tabaka kenar hızları (U_e) artık problemin bir verisi değil bir bilinmeyenidir (Bradshaw ve diğ. 1981, Cebeci ve Smith, 1974). Bu durumda sınır tabaka deplasman kalınlıklarının veya yüzey sürtünme gerilmelerinin yüzey boyunca dağılımı verildiği takdirde dış akım hızlarını da bir bilinmeyen olarak çözebiliriz. Sınır tabaka denklemi ile yeni sınır şartları:

x boyunca momentum denklemi

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (5.26)$$

şeklinde yazılmıştı.

Sınır şartları yüzey üzerinde

$$y=0 \text{ 'da} \quad u=0 \quad v=0 \quad (5.27a)$$

iken sınır tabaka kenarında $\delta_1(x)$ veri olmak üzere

$$y=\delta \text{ 'da} \quad u=U_e \quad (5.27b)$$

şeklindedir.

5.3.1. Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters (Invers) Problemde Değişken Dönüşümü

Sınır tabaka denklemlerinin çözümünü kolaylaştırmak için standart problemde olduğu gibi yine bir değişken dönüşümü yapılabilir (Ek-D) (Cebeci, 1999, Bradshaw ve diğ. 1981, Cebeci ve Smith, 1974). Ancak dış akım hızı bu defa problemin bir bilinmeyeni olduğu için değişken dönüşümünde yer almaması gerekir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} y \\ \zeta &= \frac{x}{L} \\ \psi &= \sqrt{U_\infty \nu x} F(\zeta, y) \end{aligned} \quad (5.28)$$

şeklindeki değişken dönüşümleri uygulanarak sınır tabaka denklemi,

$$(\bar{b}f'')' + \frac{1}{2}FF'' = \zeta \left(F' \frac{\partial F'}{\partial \zeta} - F'' \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) - \xi \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\xi} \quad (5.29)$$

ve sınır şartları da,

$$Y=0 \text{ da} \quad F'=0 \quad F=0 \quad (5.30a)$$

$$Y=Y_e \text{ de} \quad F'_e = \bar{U}_e(\xi), \quad \frac{F'_e}{F'_e} = Y_e - \frac{\delta^*(\xi)}{L} \frac{\sqrt{R_L}}{\sqrt{\zeta}} \equiv e(\xi) \quad (5.30b)$$

şekline gelir. Burada

$$F' = \frac{U}{U_\infty}, \quad \zeta = \frac{x}{L}, \quad R_L = \frac{U_\infty L}{\nu}, \quad \bar{U}_e = \frac{U_e}{U_\infty}$$

olup L karakteristik uzunluğu belirtmektedir.

Yukarıda da belirtildiği gibi sınır tabaka kenar hızı $\bar{U}_e = \frac{U_e}{U_\infty}$ problemin yeni bir

bilinmeyeni olup, bu bilinmeyen,

$$w = \bar{U}_e(\xi)$$

şeklinde yeni bir değişkenle belirtilir ve ayrıca sınır tabaka yaklaşımı gereği duvara dik doğrultuda basınç gradyanı bulunmadığı hatırlanırsa w 'nın Y 'den bağımsız ve sadece ζ ile değiştiği görülür ki bu durumda,

$$w' = \frac{dW}{dY} = 0 \quad (5.31)$$

şeklinde ilave bir denklem elde edilir.

(5.29) sınır tabaka denklemi birinci dereceden denklemlere indirgenecek şekilde bir değişken dönüşümüne tabi tutularak, (5.31) denklemiyle birlikte göz önüne alınır;

$$F' = U \quad (5.32a)$$

$$U' = V \quad (5.32b)$$

$$(\bar{b}V)' + \frac{1}{2}FV = \zeta \left(U \frac{\partial U}{\partial \zeta} - V \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) - \xi W \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (5.32c)$$

$$W' = 0 \quad (5.32d)$$

denklem sistemi elde edilir. Aynı değişken dönüşümleriyle sınır şartları da

$$Y=0'da \quad U=0 \quad F=0 \quad (5.33a)$$

$$Y=Y_e'de \quad U=W \quad F=We(\zeta) \quad (5.33b)$$

şekline gelir.

Basınç dağılımı ile sınır tabaka etkileşimini gerçekleştirebilmek amacıyla ikinci bölümde anlatılan matematiksel model gereği;

Veldman, (1984) yaklaşımı ile;

$$U_e(x) = U_e^0(x) + \delta U_e(x) \quad (5.34)$$

Burada $\delta u_e(x)$, Hilbert İntegraliyle hesaplanan, yer değıştirme kalınlığından dolayı oluşan bozuntu hızını göstermektedir.

$$\delta U_e = \frac{1}{\pi} \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{d\xi} (U_e \delta_1) \frac{d\xi}{x - \xi} \quad (5.35)$$

$\frac{d}{d\xi} (u_e \delta_1)$ terimi üfleme hızı olarak bilinir. Hilbert integralinin bir toplam serisi yaklaşımıyla (5.35) denklemi;

$$U_e(x_i) = U_e^0(x_i) + \sum_{j=1}^N C_{ij}(x_i) (U_e \delta_1)_j \quad (5.36)$$

veya
$$U_e(x_i) - C_{ii} U_e(x_i) \delta_1(x_i) = U_e^0(x_i) + \sum_{j \neq i}^N C_{ij}(x_i) (U_e \delta_1)_j \quad (5.37)$$

denklemin sağ tarafı g_i ile gösterilip,

$$U_{ei}(x_i) - C_{ii} U_e(x_i) \delta_1(x_i) = g_i \quad (5.38a)$$

olup burada
$$g_i = U_e^0(x_i) + \sum_{j \neq i}^N C_{ij}(x_i) (U_e \delta_1)_j \quad (5.38b)$$

yer değıştirme kalınlığı tanımını kullanılarak;

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) \cdot dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U/U_\infty}{U_e/U_\infty} \right) \cdot dy = \int_0^{Y_e} \left(1 - \frac{F'}{F_e'} \right) \cdot \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \cdot dy \\ &= \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \left(Y_e - \frac{F_e}{F_e'} \right) \end{aligned} \quad (5.39a)$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \cdot \frac{x L^2}{L} \left(Y_e - \frac{F_e}{F_e'} \right) \text{ dönüşüm terimleri ve Reynolds Sayısı tanımı hatırlanarak,}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\xi}{R_L}} \cdot L \cdot \left(Y_e - \frac{F_e}{F_e'} \right) \quad (5.39b)$$

şeklinde düzenlenir.

Yer değiştirme kalınlığı için bulunan ifade (5.38a) denkleminde yerine koyulur ve U_e terimi U_∞ ile boyutsuzlaştırılırsa,

$$\bar{U}_e(x_i) - C_{ii} \left(Y_e \bar{U}_e - F_e \right) \frac{\sqrt{\xi}}{R_L} L = g_i \quad (5.40)$$

denklemi dördüncü sınır şartı olarak kullanılabilir (Lighthill, 1958). Ancak öncelikle bu denklem de lineerleştirilmelidir. Lineerleştirmek için denklemin sol tarafına pertürbasyon türü terimler ilave edelim,

$$\bar{U}_e + \delta \bar{U}_e - C_{ii} \frac{\sqrt{\xi}}{R_L} L(p + \delta p) = g_i \quad (5.41)$$

$$\text{olup buradaki } p = \bar{U}_e Y_e - F_e \quad \text{ve} \quad \delta p = \delta \bar{U}_e Y_e - \delta F_e \quad (5.42)$$

Tanımlanan pertürbasyon terimleri kullanılarak denklem birtakım düzenlemelerle şu hale gelir: (Lighthill, 1958 ve Cebeci ve Bradshaw 1977)

$$C_{ii} \frac{\sqrt{\xi}}{R_L} L \delta F_e + \left(1 - C_{ii} \frac{\sqrt{\xi}}{R_L} L Y_e \right) \delta \bar{U}_e = g_i - \bar{U}_e + C_{ii} \frac{\sqrt{\xi}}{R_L} L \left(\bar{U}_e Y_e - F_e \right) \quad (5.43)$$

burada L referans uzunluğu belirtmekte olup bu çalışma için veter uzunluğudur. δF_e katsayısı γ_1 ve δU_e katsayısı γ_2 ile gösterilmiştir. Hilbert integrali yaklaşımı i 'nci istasyonda yazılabilir. (5.43) denklemindeki g_i terimi şöyle ifade verilir (Cebeci ve Bradshaw 1977),

$$g_i = \bar{U}_e^\kappa + \sum_{j=1}^N C_{ij} \left[\left(\bar{U} \delta^* \right)_j - \left(\bar{U} \delta^* \right)_j^\kappa \right] \quad (5.44)$$

burada $\bar{U}_e^\kappa$, bir önceki iterasyon adımı κ 'dan gelen $(\delta_1)^\kappa$ yer değiştirme kalınlığı etkisini içeren potansiyel hız dağılımıdır.

5.3.2 Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters (Invers) Problemde Ayırıklaştırılması

Denklemlerin ayırıklaştırılmasında yine standart problemdeki gibi bir hücre sistemi (Şekil 5.3) kullanılmaktadır (Keller, 1970 ve Alemdaroğlu, 1990).

Buna göre Ek-E’de verilen işlem basamakları ile (5.32a,b,c,d) denklemleri ayrıştırılarak;

$$\begin{aligned}\frac{F_j - F_{j-1}}{h_j} &= U_{j-\frac{1}{2}} = \frac{U_j + U_{j-1}}{2} \\ \frac{U_j - U_{j-1}}{h_j} &= V_{j-\frac{1}{2}} = \frac{V_j + V_{j-1}}{2} \\ \frac{W_j - W_{j-1}}{h_j} &= 0\end{aligned}\tag{5.45}$$

bulunur. (5.32c) denklemi ise standart problemde olduğu gibi önce ξ doğrultusunda daha sonra da Y doğrultusunda ayırıklaştırılmak suretiyle bu denklem de

$$\frac{b_j^n V_j^n - b_{j-1}^n V_{j-1}^n}{h_j} + \alpha_1 (FV)_{j-\frac{1}{2}}^n - \alpha_2 (U^2)_{j-\frac{1}{2}}^n + \alpha^n [F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - v_{j-\frac{1}{2}}^n F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\tag{5.46d}$$

şekline gelir. Burada

$$R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = -L_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \alpha^n \left[-(u^2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (FV)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (w^2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right]\tag{5.47a}$$

$$L_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \left[\frac{b_j V_j - b_{j-1} V_{j-1}}{h_j} + \frac{1}{2} (FV)_{j-\frac{1}{2}} \right]^{n-1}\tag{5.47b}$$

olduğu görülebilir.

5.3.3. Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters (Invers) Problemde Lineerleştirilmesi

(5.46) denklemini lineerleştirmek için δU_j , δF_j , δV_j , δW_j bozuntuları cinsinden,

$$\begin{aligned} U_j^{k+1} &= U_j^k + \delta U_j \\ f_j^{k+1} &= f_j^k + \delta f_j \\ V_j^{k+1} &= v_j^k + \delta V_j \\ W_j^{k+1} &= W_j^k + \delta W_j \end{aligned} \quad (5.48)$$

bağıntıları yazılarak yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse(Ek-F) (Alemdaroğlu, 1990, Özgen, 1994),

$$\delta F_j - \delta F_{j-1} - \frac{h_j}{2} \delta U_j - \frac{h_j}{2} \delta U_{j-1} = r_{1j} \quad (5.49)$$

$$\delta U_j - \delta U_{j-1} - \frac{h_j}{2} \delta V_j - \frac{h_j}{2} \delta V_{j-1} = r_{3j} \quad (5.50)$$

$$S_{1j} \delta V_j + S_{2j} \delta V_{j-1} + S_{3j} \delta F_j + S_{4j} \delta F_{j-1} + S_{5j} \delta U_j + S_{6j} \delta U_{j-1} + S_{7j} \delta W_j + S_{8j} \delta W_{j-1} = r_{2j} \quad (5.51)$$

$$\delta W_j - \delta W_{j-1} = r_{4j} \quad (5.52)$$

elde edilir. Buradaki terimler ise aşağıda verilmiştir.

$$S_{1j} = h_j^{-1} b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} F_j^k - \frac{\alpha^n}{2} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.53a)$$

$$S_{2j} = -h_j^{-1} b_{j-1}^n + \frac{\alpha_1}{2} F_{j-1}^k - \frac{\alpha^n}{2} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.53b)$$

$$S_{3j} = \frac{\alpha_1}{2} V_j^k - \frac{\alpha^n}{2} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.53c)$$

$$S_{4j} = \frac{\alpha_1}{2} V_{j-1}^k - \frac{\alpha^n}{2} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.53d)$$

$$S_{5j} = -\alpha_2 u_j^k \quad (5.53e)$$

$$S_{6j} = -\alpha u_{j-1}^k \quad (5.53f)$$

$$S_{7j} = \alpha^n W_j^k \quad (5.53g)$$

$$S_{8j} = \alpha^n W_{j-1}^k \quad (5.53h)$$

$$r_{1j} = h_j U_{j-\frac{1}{2}}^k - (f_j^k - f_{j-1}^k) \quad (5.53i)$$

$$r_{2j} = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_j^{-1} (b_j^n V_j^k - b_{j-1}^n V_{j-1}^k) - \alpha_1 (FV)_{j-\frac{1}{2}}^k + \alpha_2 (U^2)_{j-\frac{1}{2}}^k - \alpha^n \left[F_{j-\frac{1}{2}}^k V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - V_{j-\frac{1}{2}}^k F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (w^2)_{j-\frac{1}{2}}^k \right] \quad (5.53j)$$

$$r_{3j} = h_j V_{j-\frac{1}{2}}^k - (U_j^k - U_{j-1}^k) \quad (5.53k)$$

$$r_{4j} = -(W_j^k - W_{j-1}^k) \quad (5.53l)$$

Lineerleştirilmiş sınır şartları şöyle yazılabilir,

$$\delta U_j - \delta W_j = W_j - U_j$$

$$\delta F_j - e^n \delta W_j = e^n (W_j) - F_j$$

denklem setini matris formunda yazalım,

$$[A].\{\delta\} = \{r\}$$

Yine A matrisi üç bantlı köşegen matris olup standart problemdeki matris ile aynı formdadır. Burada A_j , B_j , C_j , matrisleri de aynı zamanda 3×3 yerine 4×4 'lük bir matristir. A_0 ve C_0 matrislerinin ilk iki satırları ile B_j ve A_j matrislerinin son iki satırları sınır şartlarına karşılık gelmektedir (Lighthill, 1958, Alemdaroğlu, 1990, Özgen, 1994).

Çözüm daha önce de olduğu gibi blok eliminasyon yöntemi ile yapılacak olup bu kez 4×4 'lük bir matris çözülecektir.

5.4. İz Bölgesinde Çözüm Yöntemi

Kanat profiline etkiyen taşıma ve sürüklenme kuvvetinin tam olarak hesaplanabilmesi için sadece profil üzerindeki yer değiştirme kalınlığının hesaplanması yeterli değildir aynı zamanda iz bölgesindeki yer değiştirme kalınlığının da hesaplanması gerekir. Akım alanında cismin firar kenarında profilin alt ve üst yüzeyi üzerinde sınır tabaka maksimum kalınlığa erişir. Akışkan profil yüzeyini terk ettikten sonra alt ve üst yüzeye ait sınır tabakalar birbirine karışır. Profilin arkasında güçlü girdapların oluşumu neticesinde bir geri akım bölgesi oluşur ve akımı yavaşlatır. Sınır tabaka etkisinin yoğun olduğu bu bölge iz bölgesi olarak bilinir.

İz bölgesindeki çözüm yöntemi, kanat profili üzerindeki çözüm yöntemiyle aynı olmakla birlikte sınır şartlarının değişmesi sonucunda daha hassas bir çalışma gerekir. Profil üzerindeki sınır şartı yüzeyde hızın sıfır olduğu kaymama şartıyken, iz bölgesinde ayırıcı akım çizgisi üzerinde sınır şartının düzgün akışın olması sayısal olarak birtakım zorlukları beraberinde getirir (Cebeci ve diğ. 1986). İz bölgesi hesabı yapılırken çözümün kesinliği için firar kenarı yakınlarında gridler sıklaştırılmalıdır. Genellikle bu bölgenin hesabı yüzey sınır tabaka hesabına kıyasla daha zordur (Cebeci ve diğ. 1986). Çünkü yüksek hücum açılarında, iz bölgesi asimetric olup üst yüzeyden gelen kalın ve türbülanslı ayrılmış sınır tabaka ile alt yüzeyden gelen ince, muhtemelen laminar gibi olan sınır tabakayı içerir.

İz bölgesinde bu iki tabakanın etkileşimi bir karışım bölgesi oluşturur ve oldukça etkili bir ters akım gözlenebilir (Alemdaroğlu, 1990, Özgen, 1994).

- Sınır tabaka kenarındaki büyüklüklerin (F_e , F_e) her ikisi de çok büyük değerler olabileceğinden çözümün yakınsama oranı etkilenebilir.
- Akım ayrılması ve $u \cdot (\partial u / \partial x)$ türevini ayrılma halinde sıfır kabul edebilmemizi sağlayan FLARE yaklaşımının kullanılması ayrılmanın çok büyük olması durumunda iyi bir yöntem olmayabilir.

Profil üzerindeki sınır tabakanın çözümünde kullanılan çözüm yöntemini iz bölgesi için de aynı şekilde uygularsak;

$$F' = U \quad (5.54a)$$

$$U' = V \quad (5.54b)$$

$$(bV)' + \frac{1}{2}FV = \zeta \left(U \frac{\partial U}{\partial \zeta} - V \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) - \zeta w \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (5.54c)$$

$$w' = 0 \quad (5.54d)$$

iz bölgesinde akımın sınır şartları ise (Cebeci ve diğ. 1986, Chang ve diğ. 1986);

$$Y = Y_e \text{ 'de} \quad (\text{Alt iz kenarı}) \quad F' = w \quad (5.55a)$$

$$Y = 0 \text{ 'da} \quad (\text{İz kenarı}) \quad F = 0 \quad (5.55b)$$

$$Y = Y_e \text{ 'de} \quad (\text{Üst iz kenarı}) \quad F' = w \quad (5.55c)$$

Üfleme hızı için sınır şartı,

$$w - C_{ii} [w(Y_e - Y_{-e}) - (F_e - F_{-e})] = g_i \quad (5.56)$$

denklemin bu haliyle w bir diğer bilinmeyen olup,

$$w = U_e / U_\infty \quad (5.57)$$

oranına eşittir. U_e ifadesi de bir bilinmeyen olup problemin bir parçası olarak çözüleceğinden ve g_i ise Hilbert İntegralinin ayrıklaştırılmasından ortaya çıkan bir parametre olduğuna göre;

$$g_i = u_e + \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}^{-\kappa} (D_j - D_j^\kappa) - C_{ii} D_i^\kappa \quad (5.58)$$

$$\text{burada profil üzerinde } D = \left(\frac{v\kappa}{U_\infty} \right)^{1/2} (Y_e w - F_e) \quad (5.59a)$$

$$\text{ve iz bölgesinde} \quad D = \left(\frac{v\kappa}{U_\infty} \right)^{1/2} [w(Y_e - Y_{-e}) - (F_e - F_{-e})] \quad (5.59b)$$

(5.59a) ve (5.59b) denklemlerindeki Y_e ile Y_{-e} dönüşüm değişkenleri Y 'nin üst ve alt iz bölgelerindeki ifadeleridir. Benzer şekilde F_e ile F_{-e} değişkenleri ise üst ve alt iz bölgelerindeki boyutsuz akım fonksiyonlarıdır. Yukarıdaki sistemin kararlı bir çözümünü elde etmek ve F_e ile F_{-e} terimlerini içeren sınır şartlarını düzenlemek amacıyla Mechul Fonksiyonu kullanılmış olup F_{-e} terimi s ile gösterilmiştir (Cebeci ve diğ., 1979). Yeni bir bilinmeyen hesaba katıldığından denklem sisteminin kapanması için yeni bir denklem yazılmalıdır. s sadece x 'e bağlı olduğundan yeni bir denklem şöyle yazılabilir;

$$s' = 0 \quad (5.60)$$

(4.54d) denklemini tekrar hatırlayalım;

$$w' = 0 \quad (5.61)$$

sınır şartlarını tekrar düzenlersek,

$$Y_e = Y_{-e} \text{ 'de} \quad u = w \quad s = F_e \quad (5.62a)$$

$$Y = 0 \text{ 'da} \quad F = 0 \quad (5.62b)$$

$$Y_e = Y_{-e} \text{ 'de} \quad u = w \quad w - C_{ii}[w(Y_e - Y_{-e}) - (F_e - s)] = g_i \quad (5.62c)$$

6. GEÇİŞ BÖLGESİ VE TÜRBÜLANSLI AKIMIN HESABI

6.1. Geçiş Bölgesi

Navier – Stokes denklemlerinde olduğu gibi sınır tabaka denklemlerinin çözümünde de laminar akımdan türbülanslı akıma geçiş başlangıcının tahmini ve geçiş bölgesinin belirlenmesi, teorik sınır tabaka hesabı yapılırken en önemli kriterlerden birisidir. Gerçek akım şartlarında, örneğin ticari uçaklar için, akım hücum kenarından itibaren türbülanslı iken, rüzgar tüneli testlerinde kanat ve kanat profili üzerinde hesaplama yöntemleri geliştirilirken veter Reynolds sayısının nispeten daha düşük olması nedeniyle geçiş bölgesinin hesabı önemli olmaktadır.

Deneyssel olarak geçişe ait bilgi mevcut değilse çeşitli sayısal yöntemlerle yaklaşık olarak geçiş bölgesi tayin edilebilir. Geçişin başlangıcı laminar sınır tabakadaki akımın kararsızlığıyla yakından ilişkilidir. Serbest akımdaki türbülans, yüzey pürüzlülüğü, kütle transferi, ısı transferi, yüzey eğriliği vb. gibi nedenlerin hepsi geçişin başlangıcı için önemli etkenlerdir. Problemin karmaşıklığından dolayı, geçiş yerini etkileyen bu faktörlerin tam olarak hesaplanması mümkün olamamaktadır (Currie, 1993). Teorik çalışmalar belirli akım şartları altında sınır tabaka stabilite kriteri ve küçük bozuntuların gelişiminin hesaplanması ile sınırlıdır.

Geçiş bölgesine ilişkin ilk deneyssel sonuçlar, 18nci yüzyılın başlarında O.Reynolds tarafından “Reynolds Boya Deneyi” olarak bilinen deneyle elde edilmiştir. (Chang ve diğ.,1986).

İki boyutlu sıkıştırılmaz akımlarda geçiş noktasının tespiti için çeşitli ampririk bağıntılar mevcuttur. Bunlar Michel Metodu (1951), Granville Metodu (1953), Smith ve Gamberoni Metodu (1956), Van Driest ve Blumer Metodu (1963) gibi metotlardır. Bu tez kapsamında geçişin hesabı için uygulama kolaylığı açısından Michel Metodu kullanılmıştır.

6.2. Michel Metodu

Michel metodu, geçiş momentum kalınlığı Reynolds sayısı $R_{\theta r}$ ile veter Reynolds sayısı R_x 'in değişimi kabulüne dayalıdır. Daha yüksek Reynols Sayılarında daha başka uygun metodlar kullanılabilir (Smith ve Gamberoni, e^n düzeltme eğrisi gibi). Geçiş eğrisi Cebeci tarafından verilen aşağıdaki formülle tanımlanabilir (Bradshaw ve diğ., 1991).

$$R_{\theta r} = 1.174 \cdot \left[1 + \left(\frac{22.400}{R_x} \right) \right] \cdot R_x^{0.46}, \quad 0.1 \times 10^6 \leq R_x \leq 0.1 \times 10^6 \quad (6.1)$$

6.3. Türbölans Modeli

Türbölans, dinamik ve sürekli değişen bir akım olayı olup, halihazırda fiziksel detaylarının çok az bir kısmını yansıtabilen bir takım istatistiksel incelemelerle kantitatif olarak tanımlanabilmektedir. Pratik uygulamalarda karşılaşılan akımların çoğu türbölanslı akımlardır. Türbölans terimi, ana akım üzerine düzensiz bir çalkantının bindirildiği bir hareketi belirtmektedir. Yani türbölans, akışkanına ait hız, basınç, sıcaklık, yoğunluk gibi bütün özelliklerinin çalkantılı bir halde olduğu, düzensiz, kaotik, tekrarlanmayan ve davranışı tahmin edilemeyen bir haldir.

Türbölanslı akışın karmaşıklığına rağmen, ortalama akımın daimi olduğu iki boyutlu daimi sınır tabakalar için nispeten basit ampirik bağıntılar geliştirilebilmiştir. Boyut analizine dayanan bu bağıntılar yüzey sürtünmesi, hız dağılımı, momentum ve yer değiştirme kalınlıkları, ortalama türbölans parametreleri gibi önemli sınır tabaka karakteristiklerinin zaman ortalamalarının çoğu mühendislik çalışmaları için genellikle yeterli doğrulukta hesaplanmasına imkan sağlamaktadır.

Ayrılmış sınır tabakalar, üç boyutlu akımlar veya sınır tabakaların bir diğeriyle ya da cismin iziyle girişmesi gibi daha karmaşık hallerde bu ampirik bağıntılar ve hesap yöntemleri daha az tatminkar olmaktadır. Kabul edilebilir doğrulukta hesap yöntemlerinin geliştirilmesi hususundaki yetersizliğin kaynağının türbölansın detaylı fiziğiyle ilgili bilgilerdeki yetersizlik olduğu açıktır.

Ana hareket üzerine bindirilen çalkantı hareketi, matematiksel olarak incelenmesi imkansız gibi görünen çok karmaşık bir yapıya sahiptir. Ancak, ortaya çıkan karışım hareketinin akım boyunca son derece önemli olduğu unutulmamalıdır. Bu

çalkantıların neden olduğu etki, sanki viskozite yüz kat, bin kat ve hatta daha fazla arttırılmış gibi düşünülebilir. Bütün bu olaylar cisim yüzeyinin yakınındaki sınır tabakada dar bir şerit içerisinde meydana gelmektedir.

Düzgün bir yüzey üzerindeki yapışık türbülanslı sınır tabakanın yapısı incelendiğinde genellikle üç bölgeden oluşmuş gibi göz önüne alınabilir. Yüzeyin hemen yakınında viskoz alt tabaka adı verilen, türbülans çalkantılarının nispeten küçük olduğu bir bölge bulunmaktadır. Alt tabakanın hemen üzerinde viskoz iç bölge ve en dışarıda ise dış bölge bulunmaktadır.

Alt tabakada viskoz kayma gerilmeleri baskındır. Tabakanın kalınlığı çok küçük olup sınır tabakanın δ kalınlığının yüzde biri mertebesinde veya daha incedir.

Alt tabakanın üzerinde 0.4δ kalınlığında bir sınır tabaka iç bölgesi mevcut olup, burada türbülans şiddeti büyük ve baskın olan kayma gerilmesi de ediy gerilmesidir.

İç bölgesinin dışında büyük edilerle karakterize edilen bir dış bölge mevcuttur. Dış bölgede baskın olan gerilmeler yine ediy veya Reynolds gerilmeleri olup türbülanslı karışma olayı etkindir. Bu yüzden türbülanslı sınır tabakanın çoğu kısmında hız profili laminer sınır tabakaya kıyasla daha üniforma yakındır. Bunun sonucu olarak da yüzey yakınındaki gerilme miktarı ve dolayısıyla duvar sürtünme gerilmesi laminer sınır tabakadakinden daha büyüktür.

Burada şunu belirtmekte yarar vardır ki, yukarıda belirtilen üç bölge birbirinden kesin çizgilerle ayrılmayıp bir miktar bir diğerine girmekte, kalınlıkları dış basınç dağılımıyla ve bir nebze de Reynolds sayısındaki değişimlerle değişmektedir.

Bu tez kapsamında türbülans modeli sadece bir araç olarak kullanıldığından, önceki bölümde anlatılan sınır tabaka denklemlerindeki mevcut olan Eddy viskozitesi teriminin modellenenbilmesi amacıyla Cebeci-Smith türbülans modeli kullanılmış olup burada kısaca tanıtılacaktır (Cebeci ve Smit, 1974).

İlk defa Boussinesque tarafından 1877'de ortaya konan düşünceye göre türbülans kaynaklı ediy kayma gerilmeler, ortalama şekil değiştirme hızına lineer olarak bağlıdır.

$$\tau_t = -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.2)$$

Burada ν_t , kinematik viskozite gibi düşünülmüş, uzunluk ve hızın çarpımı olarak tanımlanmıştır, akıma bağlı bir büyüklüktür.

$$\nu_t \approx UZUNLUK \times HIZ \quad (6.3)$$

Prandtl'ın karışım uzunluğu kavramıyla;

$$\nu_t = \nu' \cdot l \quad (6.4)$$

olup çalkantı hızının da

$$\nu' \approx l \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.5)$$

olacağı düşüncesiyle (6.5) denklemi (6.2) denkleminde yerine koyulursa,

$$-\overline{u'v'} = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (6.6)$$

olacağı görülebilir.

Cebeci ve Smith türbülans modelini tartışmadan önce modele ait ifadeleri yazalım.

$$\text{İç bölgede,} \quad 0 \leq y \leq y_c \quad \text{için} \quad \nu_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \cdot \gamma_{tr} \quad (6.7)$$

$$\text{burada} \quad l = \kappa y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right] \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Dış bölgede ise,} \quad y_c \leq y \leq \delta \text{ için} \quad \nu_t &= \alpha \left| \int_0^\infty (U_e - U) dy \right| \cdot \gamma_{tr} \quad (6.9) \\ &= 0.0168 U_e \delta_1 \end{aligned}$$

Cebeci ve Smith(1974), dış yüzey sınır tabaka akımları, dahili akımlar, dönel yüzeyler üzerindeki akımlar ve üç boyutlu akımlar için oldukça geniş bir kullanım alanı bulan matematiksel viskozite formülasyonu önermişlerdir. Formülasyon iç bölgede Van Driest yaklaşımına ve dış bölgede hız eksilmesi yaklaşımına dayalıdır. İç bölge ile dış bölgeyi ayıran y_c terimini belirleme şartı Eddy viskozitesinin

sürekliliğidir. İç bölgeye ait ifade yüzeyden dışarı doğru, her iki denklem de aynı sonucu verinceye dek uygulanır. Dış bölgeye ait ifade ise y değişkeninin daha büyük değerleri için kullanılır.

Sönümlleme sabiti A şöyle ifade edilir;

$$A = A^+ \frac{\nu}{N} U_\tau^{-1} \quad (6.10a)$$

$$\text{burada, } U_\tau \equiv \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} \quad (6.10b)$$

$$N = \left\{ \frac{p^+}{V_w^+} \left[1 - \exp(-11.8 \cdot V_w^+) \right] + \exp(-11.8 \cdot V_w^+) \right\} \quad (6.10c)$$

$$p^+ = - \frac{\nu \cdot U_e}{U_\tau^3} \frac{dU_e}{dx} \quad (6.10d)$$

$$V_w^+ = \frac{V_w}{U_\tau} \quad (6.10e)$$

$$A^+ = 26. \quad (6.10f)$$

Kütle transferi olmayan akımlar için,

$$N = (1 - 11.8 p^+)^{1/2} \quad (6.11)$$

R_θ 'nın 5000'den küçük olması durumunda,

$$\alpha = 0.0168 \cdot \frac{1.55}{1 + \Pi} \quad (6.12a)$$

burada,

$$\Pi = 0.55 \left[1 - \exp(-0.243 z_1^{1/2} - 0.298 z_1) \right] \quad (6.12b)$$

$$z_1 = \left(\frac{R_\theta}{425} - 1 \right) \quad (6.12c)$$

Reynolds sayısının $R_\theta \geq 5000$ 'den değerleri için bir sınır tabakada dış bölgeye ait türbülansın hesabı için (6.9) denklemi geçerlidir.

Aralıklılık faktörü γ_{tr} viskoz ve türbülanslı akım arasındaki geçiş bölgesini tanımlar. İki boyutlu akımlar için şöyle tanımlanır;

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[-G x_{tr} (x - x_{tr}) \left(\int_{x_{tr}}^x \frac{1}{U_e} dx \right) \right] \quad (6.13)$$

kullanılan programda γ_{tr} değeri sıfır ile bir arasında bir değer alır ve bir değerini aldığı noktada akım tamamen türbülanslı kabul edilir. (6.13) denkleminde x_{tr} geçişin başlangıç noktası ve G ise ampirik bir faktör olup şöyle verilir,

$$G = \frac{1}{1200} \frac{U_e^3}{\nu^2} \cdot R_{x_{tr}}^{-1.34} \quad (6.14)$$

$R_{x_{tr}} = \frac{U_e \cdot x_{tr}}{\nu}$ geçiş Reynolds sayısıdır.

7. SINIR TABAKA HESABINDA KULLANILAN BİLGİSAYAR PROGRAMI

7.1. Programın Genel Yapısı

Tez kapsamında kullanılan bilgisayar programı Fortran programlama dilinde yazılmıştır. Sınır tabaka hesabının mantığını içeren, programı yöneten, her bir ζ istasyonunda çözümlerin yakınsaklığını ve laminar mı türbülanslı mı olduğunu kontrol eden bir ana program tarafından çağrılan 12 alt programdan oluşmaktadır (Şekil 7.1).

1	2	3
MAIN	INPUT	
	IVPL	
	HIC	
	EDDY	LNTP
	COEF	
	BORALG	
	OUTPUT	
	SWTCH	DIFF1
	WAKEPR	EDDY
		AMEAN
	AMEAN	DIFF1
		INTEG

Şekil 7.1: Programın Genel Yapısı

7.2. Ana Program

Yukarıda da bahsedildiği gibi ana program sınır tabaka hesabının mantığını içerir, programı yönetir, her bir ζ istasyonunda çözümlerin yakınsaklığı ile laminar mı türbülanslı mı olduğunu kontrol eder ve f_j , u_j , v_j ve b_j , fonksiyonlarını j ve η_j nin fonksiyonları olarak yazdırır.

Sınır tabakanın başlangıç noktasından itibaren adım adım hesabı bu alt program içerisinde yapılmaktadır. Sınır tabakanın hesaplanacağı grid sistemi Input alt programından bilgi olarak gelmektedir. Bu noktalar profil problemi için panel uç noktalarıdır. η noktaları ve IVPL (Initial Velocity Profile) alt programında izah edileceği gibi bir defa hesaplanınca artık sınır tabakanın hesabına geçilebilir.

Hesaplar, önceden seçilmiş bulunan bir “ters çözüm başlangıç noktası” NXS noktasından önceki noktalar için direkt modda, daha sonraki noktalar için ters modda gerçekleştirilmektedir. Ters moddaki çözümler için bazı katsayılar Newton iterasyonundan önce hesaplanmaktadır. Ancak denklemler nonlineer denklemler olduğundan çözümü için iteratif bir yaklaşım ana programda gerçekleştirilmektedir.

Hesaplar yine önceden belirlenmiş “POTAN.INP” adlı giriş dosyasıyla programa verilen “zorlanmış geçiş noktası” XTR’den önceki noktalar için laminar, daha sonraki noktalar için de türbülanslı sınır tabakada gerçekleştirilmektedir. Türbülanslı halde EDDY alt programı vasıtasıyla, Cebeci-Smith cebirsel eddy viskozitesi modeli kullanılarak b katsayıları hesaplanmaktadır. Daha sonra COEFF alt programı vasıtasıyla lineerleştirilmiş momentum denkleminin $S_1, S_2, \dots, f_1, f_2, \dots$ katsayıları hesaplanarak BORALG alt programı ile gerek standart problem gerekse ters problemde elde edilen denklem sistemi çözülmektedir.

Sınır tabaka hesabının her bir adımında gerek Newton iterasyonunun yakınsaması ve gerekse toplam grid yüksekliğinin hesaba uygunluğu için ayrı ayrı testler gerçekleştirilmektedir.

7.2.1. Newton İterasyonu İçin Yakınsama Testi

Newton iterasyonunun her adımında yakınsama için bir test yapılmaktadır. Test için duvar sürtünme gerilmesi f_w ’nın (yani denklem sistemindeki $v(0)$ değişkeni değerinin) yakınsayıp yakınsamadığına bakılmaktadır. Bunun için programda kullanılan kriterler laminar, türbülanslı ve iz bölgeleri için farklı farklı olup programda sırasıyla;

$$\text{Laminer Bölgede:} \quad |\delta v_0| \leq 10^{-4} \quad (7.1)$$

$$\text{Türbülanslı Bölgede:} \quad \left| \frac{\delta v_0}{v_0} \right| \leq 0.01 \quad (7.2)$$

$$\text{İz Bölgesinde:} \quad |\delta u_0| \leq 0.0025 \quad (7.3)$$

şeklinde kullanılmıştır.

7.2.2. Sınır Tabakanın Genişliği İçin Test

Bilindiği gibi sınır tabaka geliştikçe kalınlığı giderek artmaktadır. Falkner-Skan tipi dönüşümle hesap düzlemine aktarılan sınır tabaka laminar bölgede hemen hemen sabit kalırsa da türbülanslı halde kalınlık artışı vardır. Dolayısıyla adım adım hesap sırasında belli bir ζ değerinden sonra η_e grid genişliği yeterli olmaz, sınır tabaka hesap bölgesinin dışına taşabilir. Dolayısıyla η_e noktasının sınır tabakanın dışında kalıp kalmadığının sürekli olarak test edilmesi gerekmektedir. Bunun için hesap bölgesinin bu son noktasında kayma gerilmesinin yeterince küçük olup olmadığına bakmak yeterli olur. Şayet hesap yapılan adımda;

$$|v_j| \leq \varepsilon_n \quad \varepsilon_n = 10^{-3} \quad (7.4)$$

ise bir sonraki adımda aynı grid yüksekliği η_e kullanılabilir. Bu testi daha garantili hale getirmek için ayrıca η doğrultusunda u fonksiyonunun değişimine bakılabilir. Hesap bölgesinin son noktası ile bunun, örneğin iki altındaki bir noktadaki değerler (bu noktadaki değerler aynı zamanda u hızlarına karşılık gelmektedir) arasındaki fark yeterince küçükse, yani

$$1 - \frac{u_j}{u_{j-2}} \leq \varepsilon \quad \varepsilon = 0.005 \text{ gibi} \quad (7.5)$$

şartı gerçekleşmelidir.

Bu iki test başarılı değilse hesap bölgesinin (yani grid nokta sayısının) yeterli olmadığı anlaşılır ki bu durumda hesap bölgesini genişletmek, yani ilave noktalar almak gerekir. Bu programda gereken her defasında hesap bölgesine iki nokta ilave edilmektedir. İlave noktadaki fonksiyon değerleri,

$$U_j = 1 \quad (7.6a)$$

$$v_j = v_j \quad (7.6b)$$

$$f_j = (\eta_j - \eta_e)u_j + f_{j-1} \quad (7.6c)$$

$$b_j=b_j \quad (7.6d)$$

$$j=J+1,J+2$$

şeklinde alınmaktadır.

Yukarıdaki testler ve iterasyonlar tamamlandıktan sonra bir sonraki istasyondaki hesaplara geçilmektedir. Ana programın yapısı genel olarak tanıtıldıktan sonra, programda kullanılan değişkenlerin anlamları (Tablo 7.1) ve alt programlar anlatılacaktır.

Tablo 7-1: Programda kullanılan değişkenler

Fortran İsmi	Değişken
F, U, V, B	f_j, u_j, v_j, b_j
NXT	Toplam ζ İstasyonu Sayısı
$NXTE$	Firar Kenarına Tekabül Eden ζ İstasyonu
NXS	Hesaplamaların Standart Moddan İnvers Moda Geçtiği ζ İstasyonu
NPT	Toplam Grid Sayısı
XTR	Geçiş ζ İstasyonu
VGP	η Grid Parametresi (K)
$SUM1$	Hilbert Integralinin İleri Adım Etkisi
$SUM2$	Hilbert Integralinin Geri Adım Etkisi
$ISWP$	Çevrim Sayısı
$ISWPT$	Toplam Çevrim Sayısı
$DETA$	İlk Adım Boyu (h_1)
UBL	Boyutsuz Dış Akım Hızı
$P1$	$(m+1)/2$
$P2$	M
$X(I)$	Akım Yönündeki Grid ζ

7.3. INPUT Alt Programı

Tezde kullanılan bilgisayar programı hem standart modda ve hem de ters modda hesap yapabilen bir program olduğundan literatürde Inverse Boundary Layer Program (IBLP) olarak geçmektedir. INPUT alt programı ise adından da anlaşılacağı üzere bu programa veri sağlar. Denklemlerin çözümünde kullanılacak olan gridleri η yönünde oluşturur ve grid özelliklerini hesaplar. Geçiş noktası indeksinin yerini tespit eder. Cebeci-Smith türbülans modelinde kullanılacak olan bir takım terimleri (γ_w) hesaplar. Ayrıca ters modda hesap durumunda Hilbert integralindeki bazı terimler de yine bu programda hesaplanarak ana programa gönderilir.

Program sınır tabaka hesabına ilişkin bir takım verileri okuduktan sonra HESS-SMITH modülünü çağırır ve burada üç opsiyon altında bir seçim yapar. Kullanıcının belirlediği daire datalarının hesaplanması, dosyadan ismi verilen bir profil datası okuma veya Karman-Treffitz profili datalarını hesaplama işlemiyle geometriye ait koordinatların hesaplanması ve hız dağılımı hesabını sınır tabaka hesabı için yapılması gerekli olan durma noktasının tam olarak hesabı ile koordinatların düzenlenmesi işlemi takip eder.

7.3.1. Grid Yapısı

Grid yapısının seçimi önemli bir husustur. Laminer sınır tabakada duvar yakınlarda hız gradyanı türbülanslı haldeki kadar büyük olmayıp, çok da çabuk değişmediğinden üniform bir grid yapısı uygun olabilir. Oysa türbülanslı sınır tabakada hız gradyanı duvar yakınlarda laminer haldekinden hayli büyük olup değişimi de çabuktur. Duvarın uzaklarında ise değişim azalır. Bu nedenle türbülanslı halde duvardan uzaklaştıkça aralığı büyüyen bir grid yapısı uygun olur (Şekil 7.2). Ancak grid aralığının rastgele değişmesi istenmez. Komşu grid hücrelerinin aralıklarının oranı sabit kalacak şekilde bir değişim çoğu zaman uygun düşmektedir. Yani K bir sabit olmak üzere

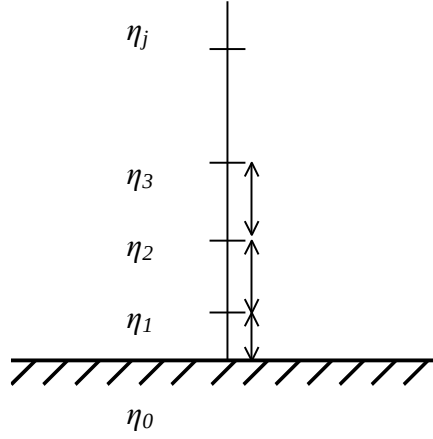
$$h_2=K \cdot h_1 \quad (7.7a)$$

$$h_3=K \cdot h_2 \quad (7.7b)$$

.....

$$h_j=K \cdot h_{j-1} \quad (7.7c)$$

yazılabilir.



Şekil 7.2.:Grid yapısı

Şekil 7.2 herhangi bir grid noktasının ordinatı,

$$h_j = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_j \quad (7.8a)$$

$$= h_1 + K \cdot h_1 + K^2 \cdot h_1 + \dots + K^{j-1} \cdot h_1 \quad (7.8b)$$

$$= h_1 (K + K^2 + \dots + K^{j-1}) \quad (7.8c)$$

$$\eta_j = h_1 \cdot \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad (7.8d)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada h_1 duvar üzerindeki ilk hücrenin yüksekliğidir.

Genellikle komşu hücre yüksekliklerinin oranı K , ilk hücrenin yüksekliği h_1 ve sınır tabakanın dış sınırının oranı η_e problemin bir verisidir. Sınır tabakanın η_e ordinatlı noktasının indisi j olmak üzere

$$\eta_j = h_1 \cdot \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad (7.9a)$$

ifadesinden J çekilirse grid sistemindeki nokta sayısı,

$$J = \frac{\ln \left[1 + (K - 1) \cdot \frac{\eta_e}{h_1} \right]}{\ln K} + 1 \quad (7.9b)$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda grid noktalarının ordinatları da kolaylıkla

$$\eta_j = \eta_{j-1} + h_j \quad j=1,2,\dots,J \quad (7.10a)$$

$$h_j = h_{j-1} \cdot K \quad j=1,2,\dots,J \quad (7.10b)$$

şeklinde hesaplanabilir. Örneğin laminar akım şartlarında;

$$h_1 = 0.01$$

$$K = 1.1$$

$$\eta_e = 8$$

alınması durumunda durma noktasında yüzeye dik doğrultuda sınır tabakanın hesaplandığı grid noktası sayısı $J=46$ olmaktadır.

7.4. IVPL Alt Programı (Initial Velocity Profile)

İki boyutlu cisimler üzerindeki sınır tabakalar $\zeta=0$ 'daki bir durma noktasında laminar olarak başlarlar. Sınır tabaka denklemleri ζ doğrultusunda adım adım ilerleme tekniği ile çözüldüğünden durma noktasındaki $u(\eta)$, $f(\eta)$ ve $v(\eta)$ hız profillerinin iyi bir yaklaşıklıkla bilinmesi gereklidir. Bunun için çeşitli çözümler mevcuttur. Burada üçüncü dereceden bir Pohlhausen hız profili kullanılmaktadır. Nitekim,

$$U = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 \quad (7.11)$$

ifadesinde sınır tabakaya ait sınır şartları

$$\eta=0'da \quad u=0 \quad v=0 \quad \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0 \quad (7.12a)$$

$$\eta = \eta_e'de, \quad u=1, \quad \frac{du}{d\eta} = 0 \quad (7.12b)$$

şeklinde kullanılarak

$$u_j = \frac{3}{2} \frac{\eta_j}{\eta_e} - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^3 \quad j=1,2,\dots,J$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin türev ve integralleri yardımıyla da f ve v fonksiyonları için

$$f_j = \frac{\eta_e}{4} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \left[3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right] \quad (7.13)$$

$$v_j = \frac{3}{2} \frac{1}{\eta_e} - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\eta_j}{\eta_e} \right)^2 \right] \quad (7.14)$$

bulunur.

7.5. HIC Alt Programı

Bu alt program C_{ij} ile gösterilen Hilbert integrali katsayılarını hesaplar.

7.6. COEF Alt Programı

Bu alt programın temel amacı Falkner-Skan dönüşümü ile ifade edilen lineerize edilmiş momentum denkleminin katsayılarını hesaplar.

7.7. BORALG Alt Programı

Bu alt program ise standart matris çözümü işlemini yerine getirir.

7.8. OUTPUT Alt Programı

Bu alt programda da sınır tabaka parametreleri R_θ , δ_1 , θ , R_δ ve C_f hesaplanmaktadır.

7.9. SWTCH Alt Programı

Bu alt program standart modda kullanılan f , f' , f'' değişkenlerinden inverse modda F , F' , F'' değişkenlerine geçişi sağlar.

7.10. INTEG Alt Programı

Bu alt program genel olarak integral alır.

7.11. DIFF1 Alt Programı

Bu alt program genel olarak diferansiyel alır.

7.12. LNTP Alt Programı

Lineer İnterpolasyon hesabı yapan bir alt programdır.

7.13. AMEAN Alt Programı

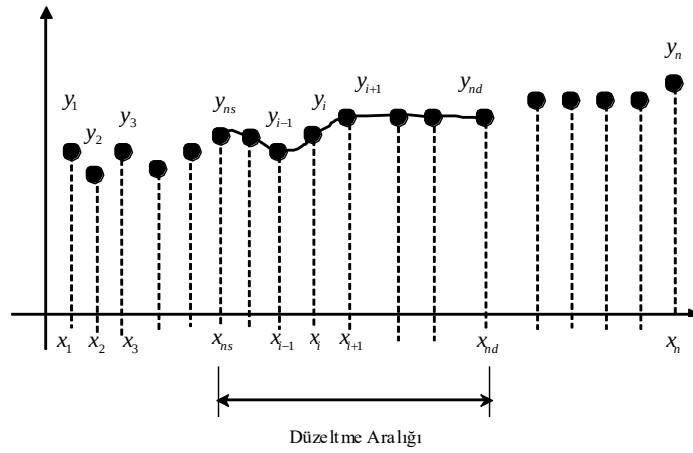
AMEAN alt programı bir veri dağılımındaki çalkantıların lineer interpolasyon ve aritmetik ortalama ile sönümlenmesini sağlar. Programda en çok kullanılan alt

programlardan birisidir. Programın çalışma mantığını anlamak için kullanılan değişkenleri ve anlamlarını verelim.

Tablo 7-2.: Amean alt programında kullanılan değişkenler

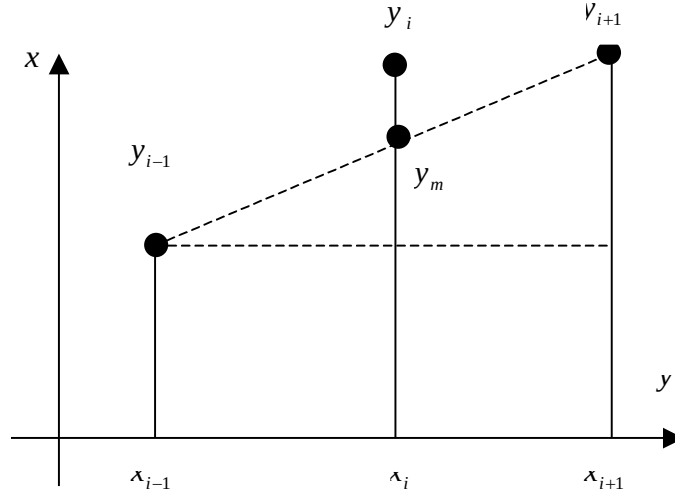
Fortran İsmi	Değişken
<i>NS</i>	Düzeltilcek Datanın İlk Noktası
<i>ND</i>	Düzeltilcek Datanın Son Noktası
<i>X, Y</i>	Düzeltilcek Data
<i>IT</i>	Data Düzeltme Çevrim Sayısı

Şekil 7-3'te yapılan işlem açıklanırsa,



Şekil 7.3.: AMEAN alt programında kullanılan değişkenler

AMEAN alt programı üç nokta için ağırlıklı formülleri kullanarak düzeltme işlemini yaptığından bu üç noktayı ve kullanılan parametreleri daha yakından görebilmek için Şekil 7.4'te bu ayrıntılar gösterilmiştir.



Şekil 7.4.: AMEAN alt programında kullanılan parametreler

$$y_m = y_{i-1} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad (7.15)$$

veya düzenlenerek;

$$y_m = \frac{y_{i-1}(x_{i+1} - x_i) + y_{i+1}(x_i - x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (7.16)$$

$$y_i^{(k)} = \frac{y_i^{(k-1)} + y_m}{2} \quad (7.17)$$

yeni bir düzenleme ile;

$$y_i^{(k)} = \frac{y_i^{(k-1)} + \frac{y_{i-1}(x_{i+1} - x_i) + y_{i+1}(x_i - x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}}{2} \quad (7.18a)$$

$$y_i^{(k)} = \frac{1}{2} \left[y_i^{(k-1)} + y_{i-1}^{(k-1)} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1})} + y_{i+1}^{(k-1)} \left(1 - \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}} \right) \right] \quad (7.18b)$$

burada $f_1 = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ olmak üzere düzenlenirse

$$y_i^{(k)} = \frac{1}{2} [y_i^{(k-1)} + y_{i-1}^{(k-1)} \cdot f_1 + y_{i+1}^{(k-1)} (1 - f_1)] \quad (7.19c)$$

bulunur.

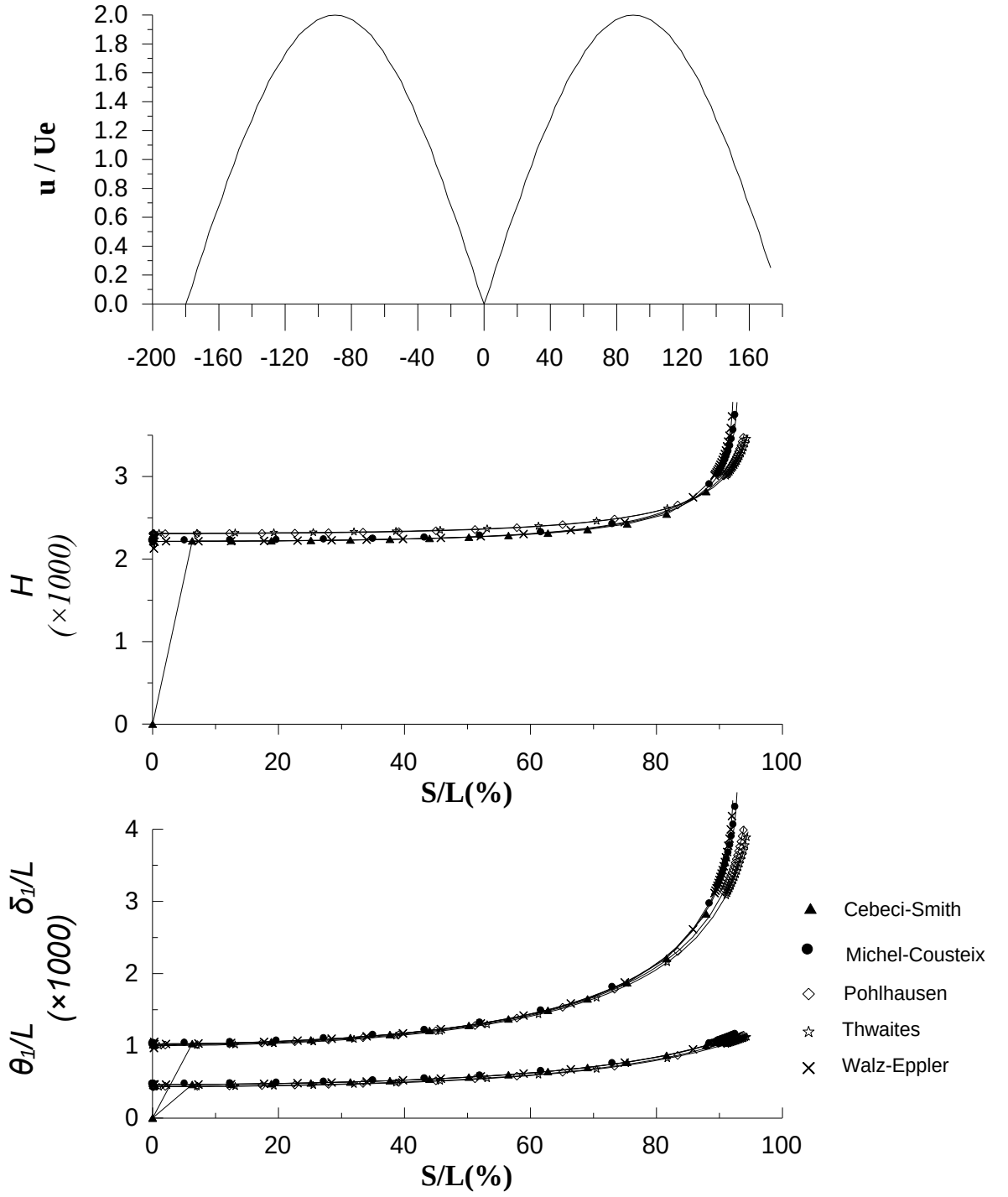
8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Tez kapsamında dördüncü bölümde anlatılan Cebeci-Smith yöntemi ile sınır tabaka hesabı için bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bilgisayar programının ilk bölümü kompleks panel metoduyla potansiyel hesabı yapmakta ve ikinci bölümü ise viskoz hesaplamaları yapmaktadır. Bu iki paket bir ana program tarafından yönetilmektedir. Potansiyel akım ile viskoz akım etkileşiminin uygulandığı tezin ana konusuna gelmeden önce, Cebeci-Smith yönteminin güvenilirliğini test etmek amacıyla yöntem dördüncü bölümde anlatılan Pohlhausen, Thwaites, Michel-Cousteix, Walz-Eppler, Cousteix-Head yöntemleriyle, daire, NACA 0012, Natural Laminer Flow (NLF) ve Joukowsky profilleri ile çeşitli hücum açılarında karşılaştırılmış ve sonuçlar verilmiştir. Etkileşimli sınır tabaka hesabına ait test sonuçları ise ilerleyen alt başlıklarda verilecektir.

8.1. Daire Üzerindeki Uygulamalar

Daire simetrik olması itibariyle hem potansiyel akım ve hem de sınır tabaka hesaplarında program geliştirme safhasında test amaçlı olarak en güvenilir cisimdir. Sonuçlarının analitik olarak hesaplanabilmesi yöntemlerin karşılaştırılması için bir referans oluşturur.

İlk test (Şekil 8.1) sıfır derece hücum açısında ve 100.000 Reynolds sayısında yapılmıştır. İz hesabı bu testlerin dışında tutulmuştur. Şekil 8.1 en üstte profilin üst yüzeyine ait hız dağılımını, ortada şekil parametresinin (H) değişimi ve en altta momentum ile yer değiştirme kalınlıklarının değişimi gözlenmektedir.

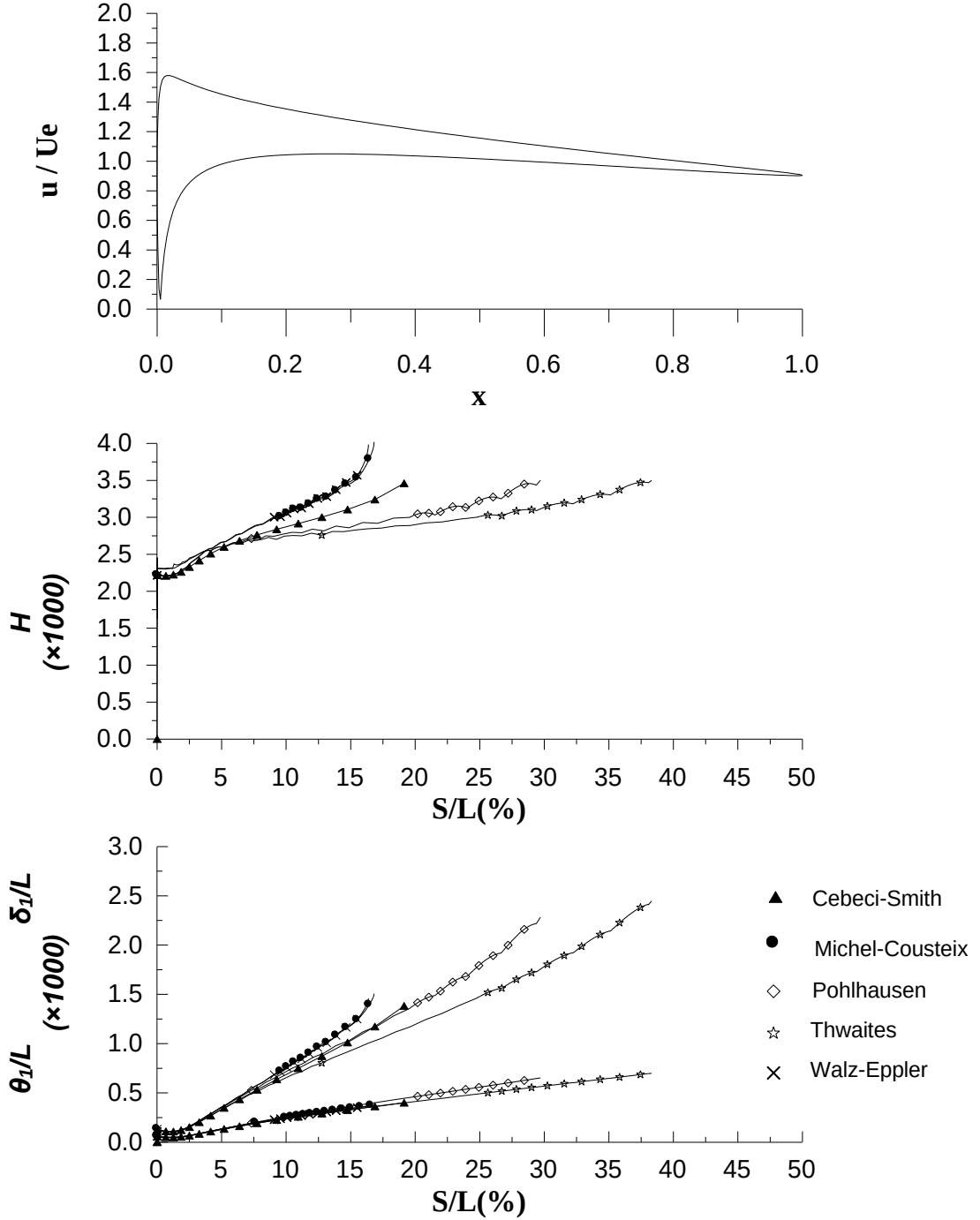


Şekil 8.1.: Daire $\alpha=0$ derece, $Re= 100\ 000$

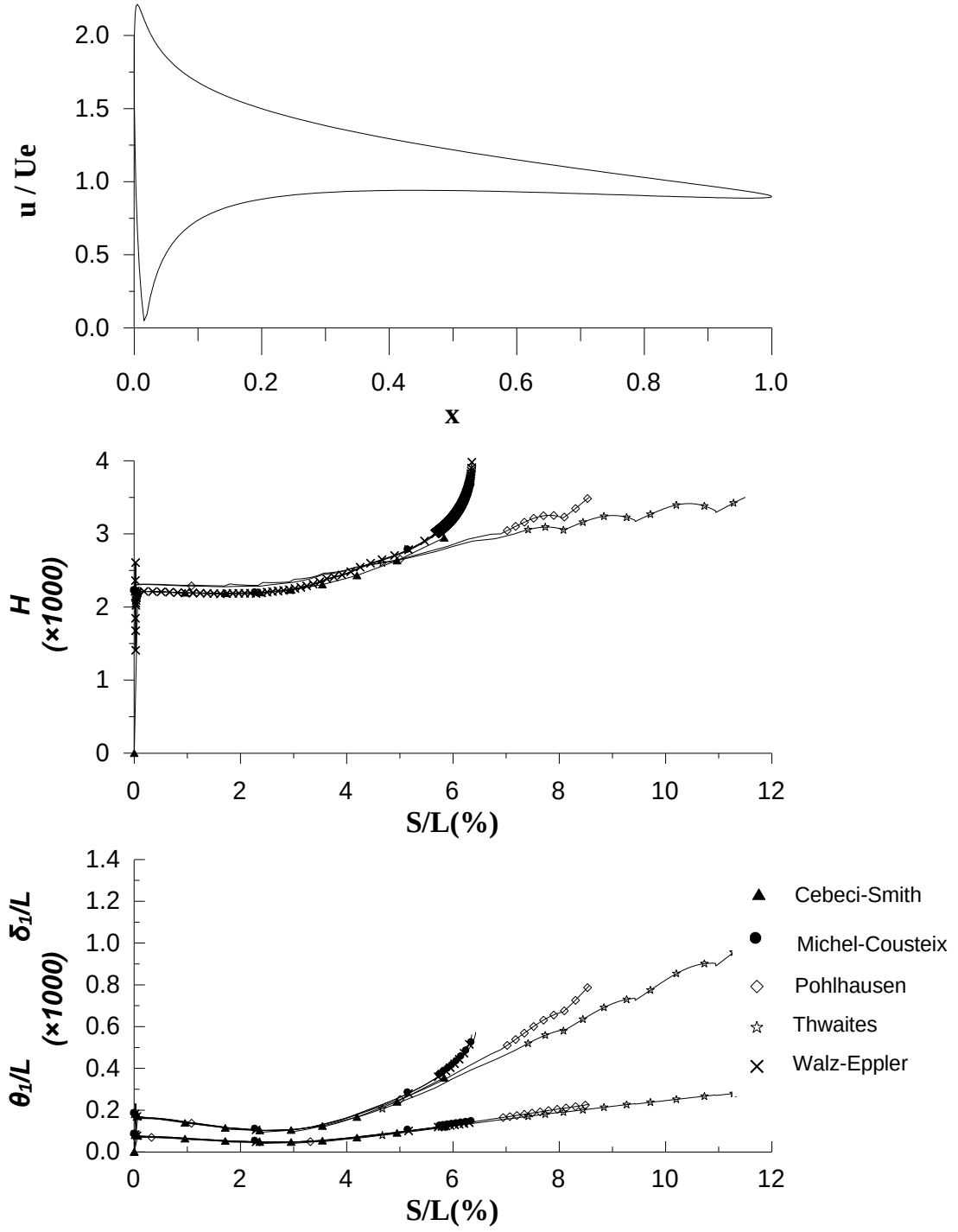
8.2. Joukowski Profili Üzerindeki Uygulama Sonuçları

Joukowski profili bir çeşit konform dönüşüm yoluyla elde edilen analitik bir profildir. Yine simetrik bir profil seçilmiş olup maksimum kalınlık noktası veterin

%12'sindedir. Bu profil için de çeşitli hücum açılarında program koşturulmuş, 4 ve 8 derece hücum açılarında, bu sefer $Re=500.000$ için grafikler verilmiştir (Şekil8.2 ve Şekil8.3).



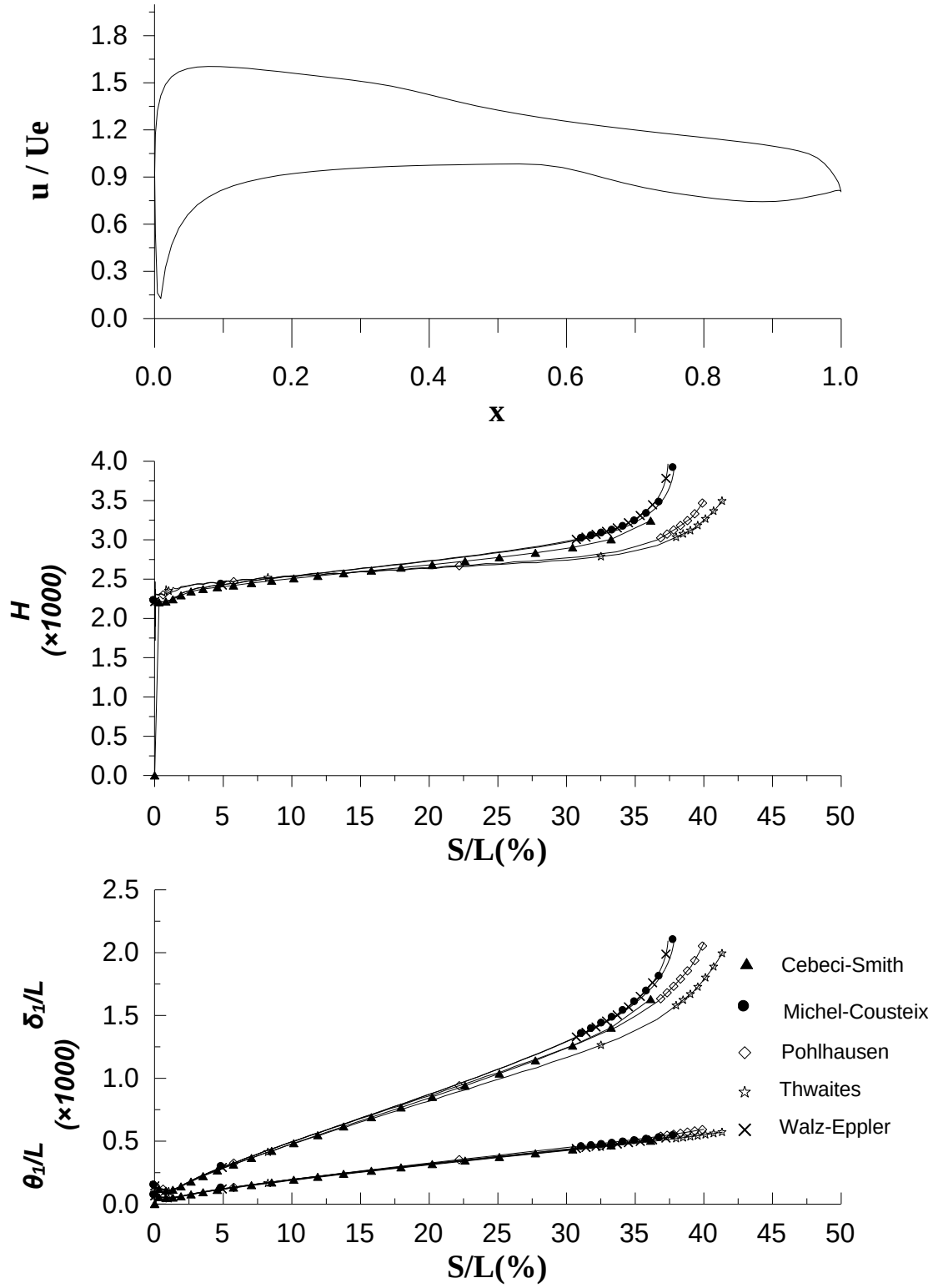
Şekil 8.2.: Joukowski Profili $\alpha=4$ derece, $Re= 500\ 000$



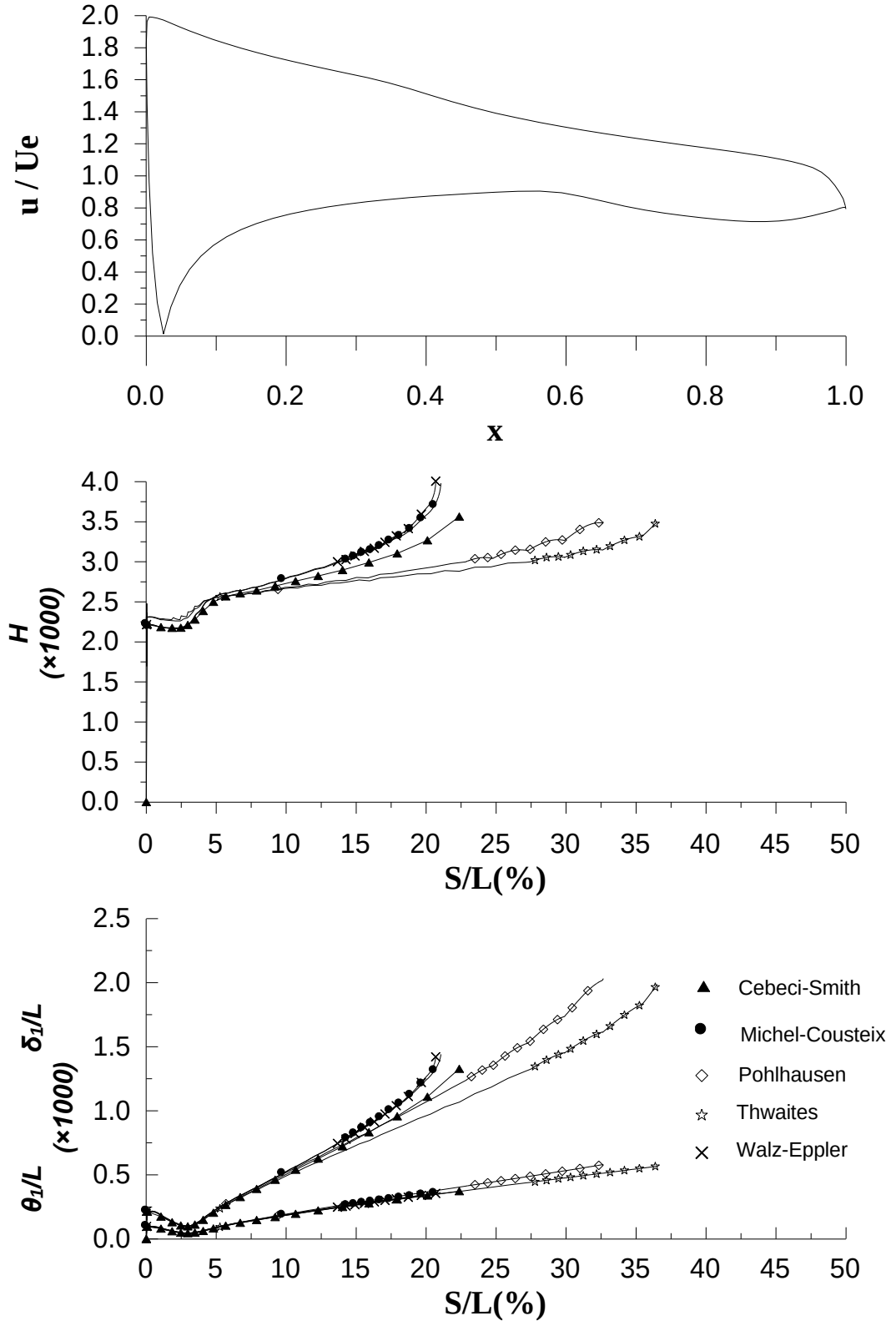
Şekil 8.3.: Joukowski Profili $\alpha=8$ derece, $Re= 500\ 000$

8.3. Natural Laminar Flow (NLF) Profili Üzerindeki Uygulama Sonuçları

NLF profili, literatürde yaygın olarak kullanılan bir profil olup yine yöntemin güvenilirliğini test etmek için kullanılmıştır. Şekil 8.4’de 4 derece hücum açısı sonuçları ve Şekil 8.5’de ise 8 derece hücum açısına ilişkin sonuçlar görülmektedir.



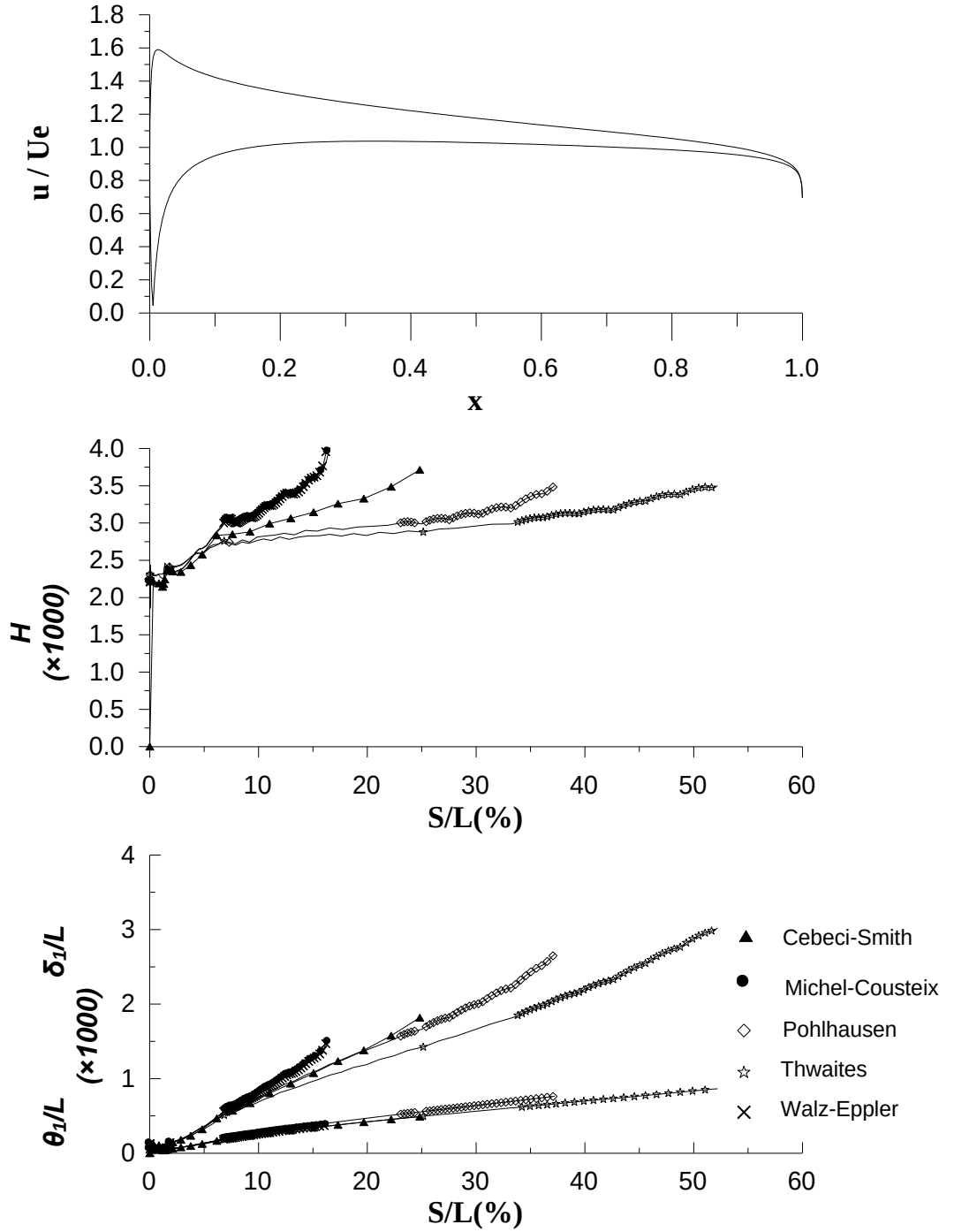
Şekil 8.4.: NLF Profili $\alpha=4$ derece, $Re= 500\ 000$



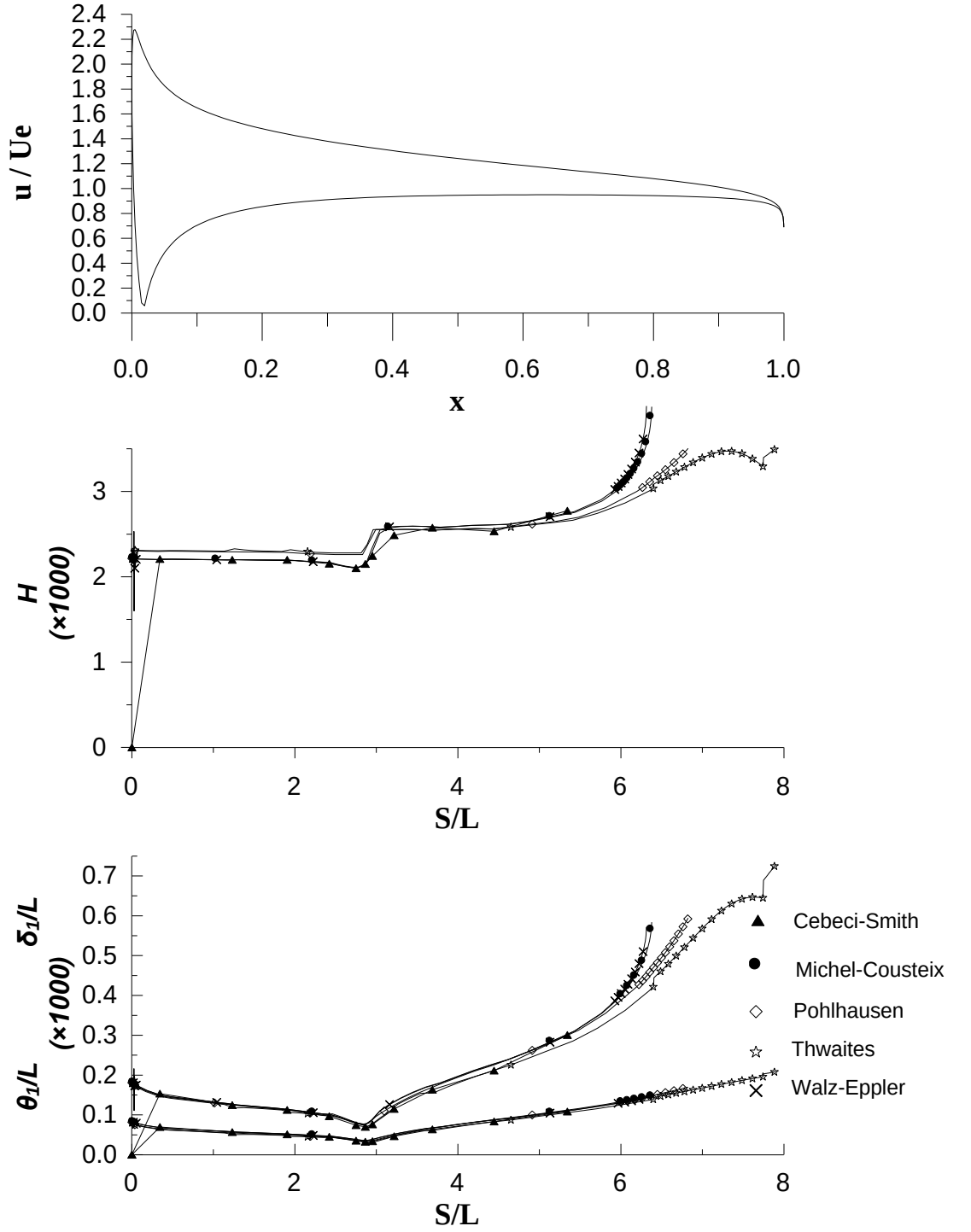
Şekil 8.5.: NLF Profili $\alpha=8$ derece, $Re= 500\ 000$

8.4. NACA 0012 Profili Üzerindeki Uygulama Sonuçları

NACA 0012 profili teorik ve deneysel çalışmalar içerisinde literatürde en çok kullanılan profillerden birisidir. Simetrik bir profil olup maksimum kalınlık noktası veterin %12'sindedir. Bu profil için de çeşitli hücum açılarında program koşturulmuş, 4 ve 8 derece hücum açılarında, yine $Re=100.000$ için grafikler verilmiştir (Şekil 8.6 ve Şekil 8.7).



Şekil 8.6.: NACA 0012 Profili $\alpha=4$ derece, $Re= 100\ 000$

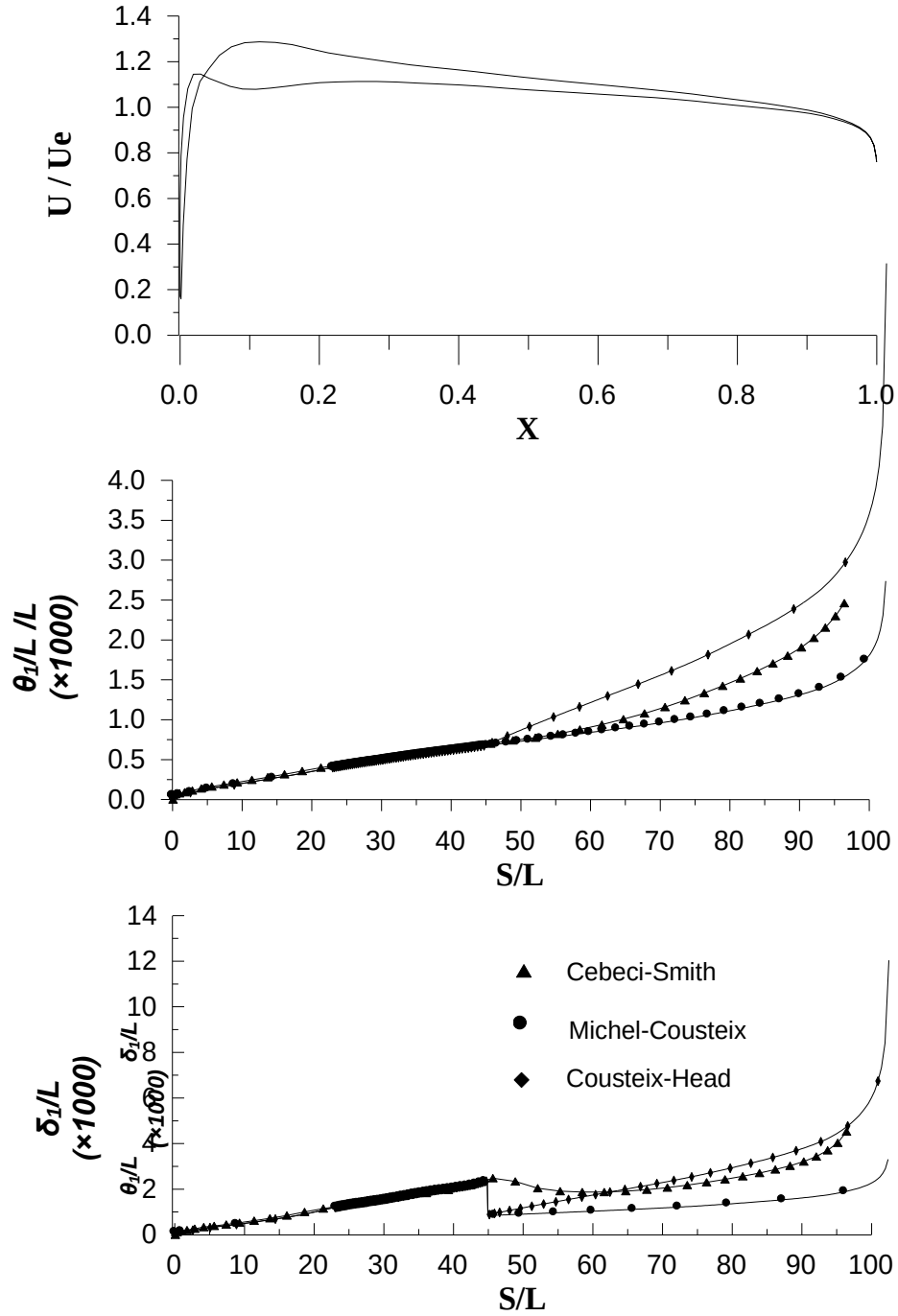


Şekil 8.7.: NACA 0012 Profili $\alpha=8$ derece, $Re= 100\ 000$

8.5. Türbülanslı Yöntemlerin Karşılaştırılması

Bu bölümde türbülanslı hesap yapan yöntemler ayrıca karşılaştırılmış olup NACA 23012 profili etrafında sıfır derece hücum açısında ve 500.000 Reynolds sayısında hesap yapılmış ve sonuçlar Cebeci-Smith yöntemiyle karşılaştırılmıştır. Burada asıl fark, bu yöntemler geçiş noktasını doğal olarak hesaplayabildiğinden, hesaplanan

geçiş noktasının Cebeci-Smith yöntemine verilmesi ile profil üzerinde daha ileri noktalara kadar hesaplama olanağının sağlanmasından ortaya çıkmaktadır. Belirtilen profillere ait grafikler Şekil 8.8 ile verilmiştir.



Şekil 8.8.: NACA 23012 Profili $\alpha=0$ derece, $Re=500\,000$

8.6. Cebeci-Smith Yönteminin Karşılaştırılmasının Sonuçları

Cebeci – Smith yöntemi önceki bölümlerde anlatılan yöntemlerle profillerin üst yüzey hız dağılımları baz alınarak karşılaştırılmıştır. Cebeci – Smith yöntemi bilindiği üzere tek denklemlidir. Kıyaslanan yöntemlerden Thwaites ve Pohlhausen yöntemleri de tek denklemlidir. Öte yandan yine önceki bölümlerde detaylı olarak anlatıldığı gibi Michel – Cousteix, Cousteix - Head ve Walz - Epler yöntemleri de çift denklemlidir. Diğer yöntemlere göre daha hassas sonuçlar vermektedir ve bu iki yöntemde birbirlerine yakın sonuçlarıyla diğerlerinden ayrılmaktadır.

Karşılaştırılan profiller açısından düşünüldüğünde Joukowski profilinin analitik bir profil olması nedeniyle sonuçların daha düzgün çıktığı görülebilir.

KAYNAKLAR

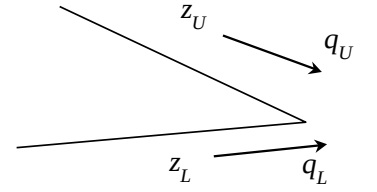
- Alemdaroğlu N.**, 1990. Numerical Solutions of Boundary Layer Equations, Lecture Series Presented at School of Aeronautics and Astronautics, İstanbul Teknik Üniversitesi
- Bradshaw, P., Cebeci, T., Whitelaw, J.H.**, 1981. Engineering Calculation Methods For Turbulent Flow, Academic Press, New York.
- Cebeci, T.**, 1999. An Engineering Approach for Calculation of Aerodynamic Flows, Springer-Verlag, Germany
- Cebeci, T., Smith, A.M.O.**, 1974. Analysis of Turbulent Boundary Layers, Academic Press, New York.
- Cebeci, T. and Cousteix, J.**, 1999. Modeling and Computation of Boundary-Layer Flows, Horizons Publishing Inc., Long Beach, California, Printed In Germany.
- Cebeci, T., Chang, K.C., Mack, D.P.**, 1984. Linearization of turbulent boundary layer equations, *AIAA Journal*, **22**, No.12, Technical Notes, 1819-1821.
- Cebeci, T., Bradshaw, P.**, 1977. Momentum Transfer In Boundary Layers, Hemisphere Publishing Corporation, USA
- Cebeci, T., Thiele, F., Williams, P.G., Stewartson K.**, 1979. On the calculation of symmetric wakes, *Numerical Heat Transfer*, **2**, 35-60
- Cebeci, T., Clark, R.W., Chang, K.C., Halsey, N.D., Lee, K.**, 1986. Airfoils with separation and the resulting wakes, *Journal of Fluid Mechanics*, **163**, 323-347.
- Chang, K.C., Alemdaroğlu N., Mehta U., Cebeci, T.**, 1988. Further comparisons of interactive boundary-layer and thin layer navier-stokes procedures, *Journal of Aircraft*, **25**, No.12, 897-903.
- Chang, K.C., Bui, M.N., Cebeci, T., Whitelaw, J.H.**, 1986. The calculation of turbulent wakes, *AIAA Journal*, **4**, No.2, 200 –201.
- Currie, I.G.**, 1993. Fundamental Mechanics Of Fluids, Mc Graw-Hill, Inc., Printed in Singapore.
- Katz, J. and Plotkin, A.**, 1991. Low Speed Aerodynamics From Wing Theory To Panel Methods, Mc graw-Hill Book Co., Singapore.
- Keller, H.B.**, 1970. A New Difference Scheme For Parabolic Problems In Numerical Solution Of Partial Differential Equations, Academic Press, New York.
- Lighthill, M.J.**, 1958. On displacement thickness, *Journal Of Fluid Mechanics* , **4**, 383-392.

- Özgen, S.**, 1994. Interactive boundary layer calculation over an airfoil and its resulting wake, *Yüksek Lisans Tezi*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Schlichting, H.**, 1979. Boundary Layer Theory, Translated by Dr. J. Kestin, McGraw-Hill, Inc., 7th. Ed., USA.
- Veldman, A.E.P.**, 1984. New, quasi-simultaneous method to calculate interacting boundary layers, *AIAA Journal*, 79-84.
- Yükselen, M.A.**, 1996. Superposition technique for potential flow around an aerofoil and the control of the circulation, *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, **22**, 1013-1022.
- Yükselen, M.A.**, 2001. Kanat profillerinin analiz ve dizaynı, *Yüksek Lisans Ders Notları*, İTÜ, İstanbul

EK-A

KUTTA ŞARTI

Viskoz/Viskoz olmayan akım etkileşimi yönteminde Kutta şartı, fırar kenarı civarında akım alanı içinde seçilen z_U ve z_L gibi iki noktadaki hızların şiddetleri eşitlenerek uygulanabilir.



$$q_U = q_L \quad (\text{A.1})$$

Akım alanının her hangi bir noktasındaki kompleks eşlenik hız süperpozisyon yoluyla

$$w^* = \bar{w}^{*(1)} \cos \alpha + \bar{w}^{*(2)} \sin \alpha + \bar{w}^{*(3)} \gamma \quad (\text{A.2})$$

şeklinde yazılmıştı. Bu eşitlikten,

$$w^* = u - i v \quad (\text{A.3a})$$

$$\bar{w}^{*(1)} = \bar{u}^{(1)} - i \bar{v}^{(1)} \quad (\text{A.3b})$$

$$\bar{w}^{*(2)} = \bar{u}^{(2)} - i \bar{v}^{(2)} \quad (\text{A.3c})$$

$$\bar{w}^{*(3)} = \bar{u}^{(3)} - i \bar{v}^{(3)} \quad (\text{A.3d})$$

olmak üzere

$$u = \bar{u}^{(1)} \cos \alpha + \bar{u}^{(2)} \sin \alpha + \bar{u}^{(3)} \gamma \quad (\text{A.4a})$$

$$v = \bar{v}^{(1)} \cos \alpha + \bar{v}^{(2)} \sin \alpha + \bar{v}^{(3)} \gamma \quad (\text{A.4b})$$

elde edilir. Bu bağıntılar

$$\tilde{u} = \bar{u}^{(1)} \cos \alpha + \bar{u}^{(2)} \sin \alpha \quad (\text{A.5a})$$

$$\tilde{v} = \bar{v}^{(1)} \cos \alpha + \bar{v}^{(2)} \sin \alpha \quad (\text{A.5b})$$

olmak üzere kısaca

$$u = \tilde{u} + \bar{u}^{(3)} \gamma \quad (\text{A.6a})$$

$$v = \tilde{v} + \bar{v}^{(3)} \gamma \quad (\text{A.6b})$$

şeklinde de yazılabilir. Ayrıca, bileşke hızın şiddeti

$$q^2 = |w^*| = u^2 + v^2 \quad (\text{A.7})$$

şeklinde tanımlanırsa, yukarıdaki tanımlamalarla birlikte

$$\begin{aligned} q^2 &= [\tilde{u} + \bar{u}^{(3)} \gamma]^2 + [\tilde{v} + \bar{v}^{(3)} \gamma]^2 \\ &= [\tilde{u}]^2 + [\tilde{v}]^2 + \left\{ [\bar{u}^{(3)}]^2 + [\bar{v}^{(3)}]^2 \right\} \gamma^2 + 2 [\tilde{u} \bar{u}^{(3)} + \tilde{v} \bar{v}^{(3)}] \gamma \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

veya

$$[\tilde{q}]^2 = [\tilde{u}]^2 + [\tilde{v}]^2 \quad (\text{A.9a})$$

$$[\bar{q}^{(3)}]^2 = [\bar{u}^{(3)}]^2 + [\bar{v}^{(3)}]^2 \quad (\text{A.9b})$$

olmak üzere

$$q^2 = [\tilde{q}]^2 + [\bar{q}^{(3)}]^2 \gamma^2 + 2 [\tilde{u} \bar{u}^{(3)} + \tilde{v} \bar{v}^{(3)}] \gamma \quad (\text{A.10})$$

elde edilir. Bu son bağıntı Kutta şartı noktaları için birer defa uygulanarak

$$q_U^2 = [\tilde{q}_U]^2 + [\bar{q}_U^{(3)}]^2 \gamma^2 + 2 [\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)} + \tilde{v}_U \bar{v}_U^{(3)}] \gamma \quad (\text{A.11a})$$

$$q_L^2 = [\tilde{q}_L]^2 + [\bar{q}_L^{(3)}]^2 \gamma^2 + 2 [\tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)} + \tilde{v}_L \bar{v}_L^{(3)}] \gamma \quad (\text{A.11b})$$

ve Kutta şartı

$$q_U^2 - q_L^2 = 0 \quad (\text{A.12})$$

şeklinde uygulanarak

$$A \gamma^2 + 2 B \gamma + D = 0 \quad (\text{A.13})$$

denklemini elde edilir. Burada

$$A = [\bar{q}_U^{(3)}]^2 - [\bar{q}_L^{(3)}]^2 \quad (\text{A.14a})$$

$$B = [\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)} + \tilde{v}_U \bar{v}_U^{(3)}] - [\tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)} + \tilde{v}_L \bar{v}_L^{(3)}] \quad (\text{A.14b})$$

$$D = [\tilde{q}_U]^2 - [\tilde{q}_L]^2 \quad (\text{A.14c})$$

(2A.13) denkleminin uygun kökü

$$\gamma = \frac{-B - \sqrt{B^2 - A \cdot D}}{A} \quad (\text{A.15})$$

şeklinde elde edilir.

ÖZEL DURUM:

Kutta şartı noktalarının firar kenarına komşu panellerin orta noktaları olması halinde, şayet hızlar bu panellerin teğet normal eksenlerinde tanımlanmış ise normal hız bileşenleri sıfır olacağından

$$\tilde{q} = \tilde{u} \quad (\text{A.16a})$$

$$\bar{q}^{(3)} = \bar{u}^{(3)} \quad (\text{A.16b})$$

ve

$$A = [\bar{u}_U^{(3)}]^2 - [\bar{u}_L^{(3)}]^2 \quad (\text{A.17a})$$

$$B = [\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)}] - [\tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)}] \quad (\text{A.17b})$$

$$D = [\tilde{u}_U]^2 - [\tilde{u}_L]^2 \quad (\text{A.17c})$$

olur. Bu durumda

$$B^2 = [\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)}]^2 + [\tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)}]^2 - 2[\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)} \tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)}]$$

$$A \cdot D = [\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)}]^2 + [\tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)}]^2 - [\tilde{u}_L \bar{u}_U^{(3)}]^2 - [\tilde{u}_U \bar{u}_L^{(3)}]^2$$

$$B^2 - A \cdot D = [\tilde{u}_L \bar{u}_U^{(3)}]^2 - 2[\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)} \tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)}] + [\tilde{u}_U \bar{u}_L^{(3)}]^2 = [\tilde{u}_L \bar{u}_U^{(3)} - \tilde{u}_U \bar{u}_L^{(3)}]^2$$

$$-B - \sqrt{B^2 - A \cdot D} = -\tilde{u}_U \bar{u}_U^{(3)} + \tilde{u}_L \bar{u}_L^{(3)} - \tilde{u}_L \bar{u}_U^{(3)} + \tilde{u}_U \bar{u}_L^{(3)} = -[\tilde{u}_U + \tilde{u}_L] \cdot [\bar{u}_U^{(3)} - \bar{u}_L^{(3)}]$$

$$A = [\bar{u}_U^{(3)}]^2 - [\bar{u}_L^{(3)}]^2 = [\bar{u}_U^{(3)} - \bar{u}_L^{(3)}] \cdot [\bar{u}_U^{(3)} + \bar{u}_L^{(3)}]$$

ve böylece

$$\gamma = -\frac{[\tilde{u}_U + \tilde{u}_L]}{[\bar{u}_U^{(3)} + \bar{u}_L^{(3)}]} \quad (\text{A.15})$$

elde edilir.

EK-B

Direkt (Standart) Problemde Sınır Tabaka Denklemlerinin ve Sınır Şartlarının Falkner–Skan Dönüşümü

Laminer ve türbülanslı hallerin her ikisi için daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu sınır tabaka denklemleri

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{B.1})$$

ve sınır şartları sırasıyla

$$y = 0 \quad da \quad u = 0 \quad (\text{B.2a})$$

$$y = 0 \quad da \quad v = v_w \quad (\text{üflemez hâlde } v_w = 0) \quad (\text{B.2b})$$

$$y = \infty \quad da \quad u = U_e \quad (\text{B.2c})$$

şeklinde verilmiştir. (A.1) denklemlerine

$$\eta = \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} y, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \psi = \sqrt{U_e \nu x} \cdot f(\xi, \eta) \quad (\text{B.3})$$

Falkner-Skan değişken dönüşümlerini

$$m = \frac{x}{U_e} \cdot \frac{dU_e}{dx} \quad (\text{B.4})$$

basınç gradyanı parametresi olmak üzere uygulayalım. Buna göre, ξ ve η nın x ve y ye göre türevleri sırasıyla

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L}} \quad (B.5a)$$

$$\boxed{\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0} \quad (B.5b)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U_e}{x} \right)^{1/2} = \frac{y}{\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{U_e}{x} \right)^{-1/2} \frac{dU_e}{dx} \cdot \frac{x - U_e}{x^2} = \frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U_e}{xv}} \left(\frac{dU_e}{dx} \cdot \frac{x}{U_e} - 1 \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta}{2x} (m-1)} \quad (B.5c)$$

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_e}{vx}}} \quad (B.5d)$$

olup bu durumda (A.1) denklemindeki hız bileşenleri ve türevleri sırasıyla:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{U_e v x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} [f(\xi, \eta)] = \sqrt{U_e v x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{U_e v x} \cdot f' \sqrt{\frac{U_e}{vx}}$$

$$\boxed{u = U_e \cdot f'} \quad (B.6a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (U_e \cdot f') = \frac{\partial U_e}{\partial x} \cdot f' + U_e \left[\frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{mU_e}{x} \cdot f' + U_e \frac{\partial f'}{\partial x} + U_e f'' (m-1) \frac{\eta}{2x}} \quad (B.6b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (U_e \cdot f') = U_e \cdot \frac{\partial f'}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot f''} \quad (\text{B.6c})$$

$$\nu = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{U_e \nu x} \cdot f(\xi, \eta) \right] = -\sqrt{\nu} \cdot \left[(U_e x)^{1/2} \cdot f \right]$$

$$\nu = -\sqrt{\nu} \cdot \left[\frac{1}{2} (U_e x)^{-1/2} \left(\frac{dU_e}{dx} x + U_e \right) \cdot f + \sqrt{U_e x} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right]$$

$$\nu = -\sqrt{\nu} \cdot \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{U_e x}} m U_e + \frac{U_e}{2\sqrt{U_e x}} \right) \cdot f + \sqrt{U_e x} \frac{\partial f}{\partial x} + \sqrt{U_e x} \cdot f'' \cdot (m-1) \frac{\eta}{2x} \right]$$

$$\boxed{\nu = -\sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot f - \sqrt{U_e \nu x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{(m-1)}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} \cdot \eta \cdot f''} \quad (\text{B.6d})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(b \cdot U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot f'' \right) = U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (b f'') \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (b f'') \cdot \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} \left(b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{U_e^2}{\nu x} \cdot (b f'')'} \quad (\text{B.6e})$$

(A.6) eşitlikleri (A.1) denkleminde kullanılarak:

$$\begin{aligned} (U_e \cdot f') \cdot \left[\frac{m U_e}{x} \cdot f' + U_e \frac{\partial f'}{\partial x} + U_e (m-1) \frac{\eta}{2x} \cdot f'' \right] + \left[-\sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} \cdot \frac{(m+1)}{2} \cdot f \right. \\ \left. - \sqrt{U_e \nu x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{(m-1)}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{x}} \cdot \eta \cdot f' \right] \cdot \left(U_e \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \cdot f'' \right) = \frac{m U_e^2}{x} + \frac{U_e^2}{\nu x} \cdot (b f'')' \end{aligned}$$

veya terimler açılarak

$$\begin{aligned} & \frac{mU_e^2}{x} f'^2 + U_e^2 f' \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{(m-1)U_e^2}{2x} \eta f' f'' - \frac{(m+1)U_e^2}{2x} \cdot f f'' - U_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} f'' \\ & - \frac{(m-1)U_e^2}{2x} \eta f' f'' = \frac{mU_e^2}{x} + \frac{U_e^2}{vx} (bf'')' \end{aligned}$$

$$m \cdot f'^2 + x f' \frac{\partial f'}{\partial x} - \frac{m+1}{2} f f'' - x \frac{\partial f}{\partial x} f'' = m + \frac{(bf'')'}{v}$$

ve yeniden düzenlenerek,

$$\frac{(bf'')'}{v} + m(1 - f'^2) + \frac{m+1}{2} f f'' = x \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

elde edilir. Bu bağıntı $x = \xi \cdot L$ dönüşümü de uygulanarak

$$\boxed{\left(\bar{b} f'' \right)' + m(1 - f'^2) + \frac{m+1}{2} f f'' = \xi \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)} \quad (B.7)$$

şekline getirilebilir. Burada

$$\boxed{\bar{b} = \frac{b}{v} = \frac{v + \varepsilon_m}{v} = 1 + \frac{\varepsilon_m}{v}} \quad (B.8)$$

dir. (B.7) denklemi, karakteristik uzunluk, karakteristik hız ve viskoziteden bağımsız boyutsuz bir denklemdir.

(B.3) değişken dönüşümleri bir defa da (B.2) sınır şartlarına uygulanırsa (B.2a) ve (B.2c) şartları kolaylıkla

$$\boxed{\eta = 0 \quad da \quad f' = 0} \quad (B.9a)$$

$$\boxed{\eta = \infty \quad da \quad f' = 1} \quad (B.9c)$$

şekline getirilebilir. (B.2c) sınır şartına gelince, v hız bileşeninin akım fonksiyonu cinsinden

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{U_e v x} f(x, \eta) \right]$$

şeklinde verilen tanıımı kullanılarak üflemeli halde

$$v_w = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{U_e v x} f(x, \eta) \right] \quad \rightarrow \quad -v_w dx = \sqrt{U_e v x} f(x, 0)$$

yazılabilir ve bu ifade integre edilerek

$$f(x, 0) = f_w(x) = -\frac{1}{\sqrt{U_e v x}} \int_0^x v_w dx$$

elde edilir. Bu sınır şartı boyutsuz olarak

$$\boxed{\eta = 0 \quad da \quad f_w(\xi) = -\frac{R_L}{\sqrt{U_e \xi}} \int_0^\xi \bar{v}_w \cdot d\xi} \quad (B.9b)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada:

$$\bar{U}_e = \frac{U_e}{U_\infty}, \quad \bar{v}_w = \frac{v_w}{U_\infty}, \quad R_L = \frac{U_\infty L}{v} \quad (B.10)$$

dır. Üflemesiz halde (B.9b) sınır şartının

$$\boxed{\eta = 0 \quad da \quad f_w(\xi) = 0} \quad (B.11)$$

şekline geleceği kolaylıkla görülebilir.

EK-C

Sınır Tabaka Denklemlerinin Direkt (Standart) Problemde Lineerleştirilmesi

f , u ve v fonksiyonlarının bir istasyonda bilinen değerlerine δf , δu , δv pertürbasyonları ilave edilerek

$$\begin{aligned} f_j^{k+1} &= f_j^k + \delta f_j^k \\ u_j^{k+1} &= u_j^k + \delta u_j^k \\ v_j^{k+1} &= v_j^k + \delta v_j^k \end{aligned} \quad (C.1)$$

burada k iterasyon adımıdır. Pertürbasyon türü ifadeler (5.8.a-b) denklemlerinde kullanılarak

$$\frac{f_j^n + \delta f_j^n - f_{j-1}^n - \delta f_{j-1}^n}{h_j} = \frac{u_j^n + \delta u_j^n + u_{j-1}^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \quad (C.2a)$$

$$\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta u_j^n - \frac{h_j}{2} \delta u_{j-1}^n = \frac{h_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) - (f_j^n + f_{j-1}^n) \quad (C.2b)$$

$$\frac{u_j^n + \delta u_j^n - u_{j-1}^n - \delta u_{j-1}^n}{h_j} = \frac{v_j^n + \delta v_j^n + v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \quad (C.3a)$$

$$\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta v_j^n - \frac{h_j}{2} \delta v_{j-1}^n = \frac{h_j}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) - (u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (C.3b)$$

(5.18) denklemi de yeniden düzenlenerek;

$$\begin{aligned} & h_j^{-1} [b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n] + \alpha_1 \frac{f_j^n v_j^n + f_{j-1}^n v_{j-1}^n}{2} - \alpha_2 \frac{(u^2)_j^n + (u^2)_{j-1}^n}{2} + \\ & \alpha^n \left[\frac{f_j^n + f_{j-1}^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{v_j^n + v_{j-1}^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (C.4)$$

pertürbasyon türü ifadeler kullanılarak

$$\begin{aligned}
& h_j^{-1}b_j^n(v_j^n + \delta v_j^n) - h_j^{-1}b_{j-1}^n(v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n) + \frac{\alpha_1}{2}(f_j^n + \delta f_j^n)(v_j^n + \delta v_j^n) + \\
& \frac{\alpha_1}{2}(f_{j-1}^n + \delta f_{j-1}^n)(v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n) - \frac{\alpha_2}{2}(u_j^n + \delta u_j^n)^2 - \frac{\alpha_2}{2}(u_{j-1}^n + \delta u_{j-1}^n)^2 \\
& \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}(v_j^n + \delta v_j^n + v_{j-1}^n + \delta v_{j-1}^n) = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Yüksek mertebeden terimler ihmal edildiğinde;

$$\begin{aligned}
& h_j^{-1}b_j^n v_j^n + h_j^{-1}b_j^n \delta v_j^n - h_j^{-1}b_{j-1}^n v_{j-1}^n - h_j^{-1}b_{j-1}^n \delta v_{j-1}^n \\
& + \frac{\alpha_1}{2} f_j^n v_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_j^n \delta v_j^n + \frac{\alpha_1}{2} v_j^n \delta f_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_{j-1}^n v_{j-1}^n \\
& \frac{\alpha_1}{2} f_{j-1}^n \delta v_{j-1}^n + \frac{\alpha_1}{2} v_{j-1}^n \delta f_{j-1}^n - \frac{\alpha_2}{2} (u_j^n)^2 - \alpha_2 u_j^n + \delta u_j^n \\
& - \frac{\alpha_2}{2} (u_{j-1}^n)^2 - \alpha_2 u_{j-1}^n \delta u_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} (\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n) = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned} \tag{C.6}$$

ve aynı türden terimler bir araya toplanarak,

$$\begin{aligned}
& \left(h_j^{-1}b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_j^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta v_j^n + \left(-h_j^{-1}b_{j-1}^n + \frac{\alpha_1}{2} f_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta v_{j-1}^n \\
& + \left(\frac{\alpha_1}{2} v_j^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta f_j^n + \left(\frac{\alpha_1}{2} v_{j-1}^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta f_{j-1}^n - \alpha_2 u_j^n \delta u_j^n - \alpha_2 u_{j-1}^n \delta u_{j-1}^n = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

veya

$$\begin{aligned}
& \frac{f_j^n v_j^n + f_{j-1}^n v_{j-1}^n}{2} = (fv)_{j-1}^n & \frac{u_j^2 + u_{j-1}^2}{2} = (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& \frac{f_j^n + f_{j-1}^n}{2} = f_{j-\frac{1}{2}}^n & \frac{v_j^n + v_{j-1}^n}{2} = v_{j-\frac{1}{2}}^n
\end{aligned} \tag{C.8}$$

olmak üzere

$$S_{1j} \delta v_j^n + S_{2j} \delta v_{j-1}^n + S_{3j} \delta f_j^n + S_{4j} \delta f_{j-1}^n + S_{5j} \delta u_j^n + S_{6j} \delta f_{j-1}^n = r_{2j} \tag{C.9}$$

tez kapsamında beşinci bölümde (5.23c) numara ile verilen denklem elde edilir.

Burada;

$$S_{1j} = h_j^{-1} b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_j^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{C.10a})$$

$$S_{21j} = -h_j^{-1} b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} f_{j-1}^n - \frac{\alpha^n}{2} f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{C.10b})$$

$$S_{3j} = \frac{\alpha_1}{2} v_j^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{C.10c})$$

$$S_{4j} = \frac{\alpha_1}{2} v_{j-1}^n + \frac{\alpha^n}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{C.10d})$$

$$S_{5j} = -\alpha_2 u_j^n \quad (\text{C.10e})$$

$$S_{6j} = -\alpha_2 u_{j-1}^n \quad (\text{C.10f})$$

$$r_{2j} = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_j^{-1} (b_j^n v_j^n - b_{j-1}^n v_{j-1}^n) - \alpha_1 (fv)_{j-\frac{1}{2}}^n + \alpha_2 (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n \\ - \alpha^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n) + \alpha^n (v_{j-\frac{1}{2}}^n f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \quad (\text{C.10g})$$

ayrıca,

$$r_{1j} = h_j u_{j-\frac{1}{2}}^n - (f_j^n - f_{j-1}^n) \quad (\text{C.11a})$$

$$r_{3j} = h_j v_{j-\frac{1}{2}}^n - (u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (\text{C.11b})$$

kısaltmaları yapılarak

$$\delta f_j^n - \delta f_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta u_j^n - \frac{h_j}{2} \delta u_{j-1}^n = r_{1j} \quad (\text{C.12})$$

$$\delta u_j^n - \delta u_{j-1}^n - \frac{h_j}{2} \delta v_j^n - \frac{h_j}{2} \delta v_{j-1}^n = r_{3j} \quad (\text{C.13b})$$

şeklinde yazılabilir.

EK-D

Sınır Tabaka Denklemlerinin ve Sınır Şartlarının Ters (İnvers) Problemde Falkner–Skan Dönüşümü

1. Sınır Tabaka Denklemlerinin Dönüşümü

Ters modda sınır tabaka denklemi ile yeni sınır şartları;

x boyunca momentum denklemi

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{D.1})$$

şeklinde yazılmıştı.

Sınır şartları yüzey üzerinde

$$y = 0 \text{ da} \quad u = 0 \quad v = 0 \quad (\text{D.2})$$

iken sınır tabaka kenarında

$$\delta_1(x) \text{ veri olmak üzere} \quad y = \delta' \text{ da} \quad u = U_e \quad (\text{D.3})$$

şeklinde verilmişti. Kullanılacak değişken dönüşümleri ise;

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} y \\ \zeta &= \frac{x}{L} \\ \psi &= \sqrt{U_\infty \nu x} F(\xi, y) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Buna göre

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} y \frac{\partial}{\partial x} (x^{-1/2}) = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} y \left(-\frac{1}{2} x^{-3/2} \right) = -\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}} y \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{Y}{2x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{Y}{2L\xi} \quad (\text{D.6a})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (\text{D.6b})$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{U_\infty \nu x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (F) = \sqrt{U_\infty \nu x} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} = \sqrt{U_\infty \nu x} \cdot F' \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (\text{D.7a})$$

$$u = U_\infty F' \quad (\text{D.7b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty \frac{\partial}{\partial x} (F') = \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \cdot F' + U_\infty \left[\frac{\partial F'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F'}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} \right] = U_\infty \left[\frac{1}{L} \frac{\partial F'}{\partial \xi} - F'' \frac{Y}{2L\xi} \right] \quad (\text{D.8a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{U_\infty}{L} \frac{\partial F'}{\partial \xi} - \frac{Y}{2L\xi} F'' \right] \quad (\text{D.8b})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{\partial}{\partial y} (F') = U_\infty \frac{\partial F'}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} = U_\infty F'' \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \quad (\text{D.9a})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu \xi}} F'' \quad (\text{D.9b})$$

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{U_\infty \nu x} \frac{\partial}{\partial x} (x^{1/2} F) = -\sqrt{U_\infty \nu} \left[\frac{1}{2} x^{1/2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right] \\ &= -\sqrt{U_\infty \nu} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{Y}{2L\xi} \cdot F' \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.10a})$$

$$v = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \nu}{L\xi}} F - \sqrt{\frac{U_\infty \nu \xi}{L}} \frac{dF}{d\xi} + \frac{U_\infty \nu Y}{L\xi} \frac{F'}{2} \quad (\text{D.10b})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(b \cdot U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} F'' \right) = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \frac{\partial}{\partial Y} (b F'') \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (\text{D.11a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(b \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{U_{\infty}^2}{\nu L \xi} (bF'')' \quad (\text{D.11b})$$

Bulunan bu türevler sınır tabaka denkleminde kullanılıp, gereken düzenlemeler yapıldığında,

$$\begin{aligned} U_{\infty} \cdot F' \frac{U_{\infty}}{L} \left(\frac{\partial F'}{\partial \xi} \frac{Y}{2\xi} \cdot F'' \right) + \left[-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_e \nu}{L \xi}} F - \sqrt{\frac{U_e \nu \xi}{L}} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{U_e \nu}{L \xi}} \frac{Y}{2} F' \right] U_{\infty} \sqrt{\frac{U_e}{\nu L \xi}} F'' \\ = U_e \frac{dU_e}{d\xi} \frac{1}{L} + \frac{U_{\infty}^2}{\nu L \xi} (bF'')' \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{\infty}^2}{L} F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} - \frac{U_{\infty}^2}{L} \frac{Y}{2\xi} \cdot F' F'' - \frac{1}{2} \frac{U_{\infty}^2}{L \xi} F F'' - \frac{U_{\infty}^2}{L} \frac{\partial F}{\partial \xi} F'' + \frac{U_{\infty}^2}{L} \frac{Y}{2\xi} \cdot F' F'' \\ = \frac{U_{\infty}^2}{L} \frac{U_e}{U_{\infty}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{U_e}{U_{\infty}} \right) + \frac{U_{\infty}^2}{\nu L \xi} (bF'')' \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$$(bF'')' + \frac{1}{2} F F'' = \xi \left(F' \frac{\partial F'}{\partial \xi} - F'' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) - \xi \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\xi} \quad (\text{D.14})$$

elde edilir. Burada

$$\bar{b} = b/\nu \quad \text{ve} \quad \bar{U}_e = U_e/U_{\infty} \text{ dur.}$$

2. Sınır Şartlarının Dönüşümü

Sınır şartları duvar üzerinde

$$Y=0' \text{ da} \quad Y=0 \quad u=0 \quad F'=0 \quad (\text{D.15a})$$

$$\nu=0 \quad F=0 \quad (\text{D.15b})$$

$$Y=0' \text{ da} \quad F'=0 \quad F=0 \quad (\text{D.15a})$$

Sınır tabakanın kenarında ise

$$y=\delta\text{'da } Y=Y_e \quad u=U_e=U_e F_e' \quad F_e' = \frac{U_e}{U_\infty} = \bar{U}_e(\xi) \quad (\text{D.16a})$$

$$Y=Y_e\text{'de} \quad F_e' = \bar{U}_e(\xi) \quad (\text{D.16b})$$

Ayrıca deplasman kalınlığının problemin bir verisi olduğu hatırlanırsa, bu kalınlığın tanımından hareketle,

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u/U_\infty}{U_e/U_\infty}\right) dy = \int_0^{Y_e} \left(1 - \frac{F_e'}{F_e'}\right) \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} dY = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \int_0^{Y_e} \left(1 - \frac{F_e'}{F_e'}\right) dY \quad (\text{D.16c})$$

F_e' İntegralden bağımsız bir değer olup,

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \left(Y_e - \frac{1}{F_e'} \cdot F_e' \right) = \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L} \cdot \frac{x L^2}{L}} \left(Y_e - \frac{F_e'}{F_e'} \right) \quad (\text{D.17})$$

ayrıca

$$\sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} = \frac{1}{R_L} \quad \frac{x}{L} = \xi \text{ olduğundan}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{\xi}{R_L}} \cdot L \cdot \left(Y_e - \frac{F_e'}{F_e'} \right) \quad (\text{D.18})$$

ve buradan,

$$Y = Y_e' de \quad \frac{F_e'}{F_e'} = Y_e - \frac{\delta_1(\xi)}{L} \frac{\sqrt{R_L}}{\sqrt{\xi}} = e(\xi) \quad (\text{D.19})$$

sınır şartı elde edilir.

EK-E

Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters(İnvers) Problemde Ayırıklaştırılması

(5.32c) denkleminin ayırıklaştırılması:

$$(\bar{b}V)' + \frac{1}{2}FV = \zeta \left(U \frac{\partial U}{\partial \zeta} - V \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) - \xi W \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (E.1)$$

Denklemin sol tarafı L ile belirtilerek;

$$(\bar{b}V)' + \frac{1}{2}FV = L \quad (E.2a)$$

$$L = \xi \left(U \frac{\partial u}{\partial \xi} - V \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) - \xi W \frac{\partial W}{\partial \xi} \quad (E.2b)$$

ζ doğrultusunda merkezi farklarla ayırıklaştırma yapılırsa

$$L^{n-\frac{1}{2}} = \frac{L^n + L^{n-1}}{2} = \xi^{n-\frac{1}{2}} \left[u^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{k_n} \right) - V^{n-\frac{1}{2}} \left(\frac{F^n - F^{n-1}}{k_n} \right) \right] - \xi^{n-\frac{1}{2}} W^{n-\frac{1}{2}} \frac{W^n - W^{n-1}}{k_n} \quad (E.3)$$

veya

$$u^{n-\frac{1}{2}} = \frac{u^n + u^{n-1}}{2}, \quad V^{n-\frac{1}{2}} = \frac{V^n + V^{n-1}}{2}, \quad W^{n-\frac{1}{2}} = \frac{W^n + W^{n-1}}{2} \quad (E.4)$$

olmak üzere

$$\frac{L^n + L^{n-1}}{2} = \frac{\xi^{n-\frac{1}{2}}}{k_n \cdot 2} \left[(u^n + u^{n-1})(u^n - u^{n-1}) - (V^n + V^{n-1})(F^n - F^{n-1}) - (W^n + W^{n-1})(W^n - W^{n-1}) \right] \quad (E.5)$$

veya yeni bir düzenleme ile $\alpha^n = \frac{\xi^{n-\frac{1}{2}}}{k_n}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L^n - \alpha^n \left[(u^2)^n - V^n F^n - V^{n-1} F^n - V^n F^{n-1} - (W^2)^n \right] \\ = L^{n-1} + \alpha^n \left[-(u^2)^{n-1} + V^{n-1} F^{n-1} - (W^2)^{n-1} \right] \end{aligned} \quad (E.6)$$

elde edilir. Bu denklemin sağ tarafı sınır tabakanın $(n-1)$ 'inci istasyonunda bilinen değerleri içermektedir. Sol tarafında ise n 'inci istasyondaki bilinmeyen değerler mevcuttur. Buna göre sağ taraf R^{n-1} ile gösterilerek,

$$L^n - \alpha^n \left[(u^2)^n - V^n F^n - V^{n-1} F^n - V^n F^{n-1} - (W^2)^n \right] = R^{n-1} \quad (E.7)$$

yazılabilir. Ayrıca L ile (1) denkleminin sol tarafının gösterildiği hatırlanırsa

$$L^n = \left[(bV)^n \right] + \frac{1}{2} (FV)^n \quad (E.8)$$

olup bu ifade (E.7) denkleminde kullanılarak

$$L^n = \left[(bV)^n \right] + \frac{1}{2} (FV)^n - \alpha^n (u^2)^n + \alpha^n V^n F^n + \alpha^n \left[V^{n-1} F^n - V^n F^{n-1} - (W^2)^n \right] = R^{n-1} \quad (E.9)$$

veya

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + \alpha^n \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \alpha^n \quad (E.10)$$

olmak üzere

$$\left[(bV)^n \right] + \alpha_1 (FV)^n - \alpha_2 (u^2)^n + \alpha^n \left[V^{n-1} F^n - V^n F^{n-1} - (W^2)^n \right] = R^{n-1} \quad (E.11)$$

bulunur. Bu son denklem şimdi Y doğrultusunda merkezi farklarla ayrıştırıldığında

$$\frac{b_j^n V_j^n - b_{j-1}^n V_{j-1}^n}{h_j} + \alpha_1 (FV)_{j-\frac{1}{2}}^n - \alpha_2 (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n + \alpha^n \left[F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - V_{j-\frac{1}{2}}^n F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - (W^2)_{j-\frac{1}{2}}^n \right] = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (E.12)$$

bulunur. Burada

$$R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = -L_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \alpha^n \left[-\left(u^2\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (FV)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \left(W^2\right)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right] \quad (\text{E.13a})$$

$$L_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} = \frac{b_j V_j - b_{j-1} V_{j-1}}{h_j} + \frac{1}{2} (FV)_{j-\frac{1}{2}} \quad (\text{E.13b})$$

EK-F

Sınır Tabaka Denklemlerinin Ters(İnvers) Problemde Lineerleştirilmesi

(5.32c) denkleminin standart problemde olduğu gibi önce ζ doğrultusunda daha sonra da Y doğrultusunda ayrıklaştırılması sonucu elde edilen denklem,

$$\frac{b_j^n V_j^n - b_{j-1}^n V_{j-1}^n}{h_j} + \alpha_1 (FV)_{j-\frac{1}{2}}^n - \alpha_2 (U^2)_{j-\frac{1}{2}}^n + \alpha^n [F_{j-\frac{1}{2}}^n V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - v_{j-\frac{1}{2}}^n F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (5.46d)$$

dir.

Herhangi bir ρ değişkeni için

$$\rho_{j-\frac{1}{2}} = \frac{\rho_j + \rho_{j-1}}{2} \quad (F.1)$$

olup buna göre denklem yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} & h_j^{-1} b_j^n V_j^n - h_j^{-1} b_{j-1}^n V_{j-1}^n + \alpha_1 \frac{F_j^n V_j^n + F_{j-1}^n V_{j-1}^n}{2} - \alpha_2 \frac{(U^2)_j^n - (U^2)_{j-1}^n}{2} + \\ & \alpha^n \left[\frac{F_j^n + F_{j-1}^n}{2} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{V_j^n + V_{j-1}^n}{2} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{(w^2)_j^n - (w^2)_{j-1}^n}{2} \right] = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (F.2)$$

ve bozuntu denklemleri

$$\begin{aligned} U_j^{k+1} &= U_j^k + \delta U_j \\ f_j^{k+1} &= f_j^k + \delta f_j \\ V_j^{k+1} &= v_j^k + \delta V_j \\ W_j^{k+1} &= W_j^k + \delta W_j \end{aligned} \quad (F.3)$$

şeklinde yazılarak denklemde kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& h_j^{-1}b_j^n(V_j^k + \delta V_j) - h_j^{-1}b_{j-1}^n(V_{j-1}^k + \delta V_{j-1}) + \alpha_1(F_j^k + \delta F_j)(V_j^k + \delta V_j) \\
& + \frac{\alpha_1}{2}(F_{j-1}^k + \delta F_{j-1})(V_{j-1}^k + \delta V_{j-1}) - \frac{\alpha_2}{2}(U_j^k + \delta U_j)^2 - \frac{\alpha_2}{2}(U_{j-1}^k + \delta U_{j-1})^2 \\
& + \frac{\alpha^n}{2}(F_j^k + \delta F_j + F_{j-1}^k + \delta F_{j-1})V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\alpha^n}{2}(V_j^k + \delta V_j + V_{j-1}^k + \delta V_{j-1})F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
& + \frac{\alpha^n}{2}(W_j^k + \delta W_j)^2 + \frac{\alpha^n}{2}(W_{j-1}^k + \delta W_{j-1})^2 = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned} \tag{F.4}$$

çarpımlar sonucu ikini mertebeden terimler ihmal edilerek

$$\begin{aligned}
& h_j^{-1}b_j^n V_j^k + h_j^{-1}b_j^n \delta V_j - h_j^{-1}b_{j-1}^n V_{j-1}^k - h_j^{-1}b_{j-1}^n \delta V_{j-1} \\
& + \frac{\alpha_1}{2}F_j^k V_j^k + \frac{\alpha_1}{2}V_j^k \delta F_j + \frac{\alpha_1}{2}F_j^k \delta V_j + \frac{\alpha_1}{2}F_{j-1}^k V_{j-1}^k \\
& + \frac{\alpha_1}{2}V_{j-1}^k \delta F_{j-1} + \frac{\alpha_1}{2}F_{j-1}^k \delta V_{j-1} - \frac{\alpha_2}{2}(U^2)_j^k - \alpha_2 U_j^k \delta U_j \\
& - \frac{\alpha_2}{2}(U^2)_{j-1}^k - \alpha_2 U_{j-1}^k \delta U_{j-1} + \frac{\alpha^n}{2}(V_j^k + V_{j-1}^k)F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\alpha^n}{2}F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \delta V_j \\
& - \frac{\alpha^n}{2} \delta F_{j-1} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\alpha^n}{2}(V_j^k + V_{j-1}^k)F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{\alpha^n}{2}F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \delta V_j \\
& - \frac{\alpha^n}{2}F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \delta V_{j-1} + \frac{\alpha^n}{2}(W^2)_j^k + \alpha^n W_j^k \delta W_j + \frac{\alpha^n}{2}(W^2)_{j-1}^k + \alpha^n W_{j-1}^k \delta W_{j-1} = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Aynı türden terimler bir araya getirilerek,

$$\begin{aligned}
& \left(h_j^{-1}b_j^n + \frac{\alpha_1}{2}F_j^k - \frac{\alpha^n}{2}F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta V_j + \left(h_j^{-1}b_{j-1}^n + \frac{\alpha_1}{2}F_{j-1}^k \right) \delta V_{j-1} \\
& + \left(\frac{\alpha_1}{2}V_j^k + \frac{\alpha^n}{2}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta F_j + \left(\frac{\alpha_1}{2}V_{j-1}^k + \frac{\alpha^n}{2}V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \right) \delta F_{j-1} + \\
& \alpha_2 U_j^k \delta U_j - \alpha_2 U_{j-1}^k \delta U_{j-1} + \alpha^n W_j^k \delta W_j + \alpha^n W_{j-1}^k \delta W_{j-1} \\
& = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_j^{-1}(b_j^n V_j^k + b_{j-1}^n V_{j-1}^k) - \alpha_1 \frac{F_j^k V_j^k + F_{j-1}^k V_{j-1}^k}{2} + \alpha_2 \frac{(U^2)_j^k + (U^2)_{j-1}^k}{2} \\
& \alpha^n \left[\frac{F_j^k + F_{j-1}^k}{2} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{V_j^k + V_{j-1}^k}{2} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{(W^2)_j^k + (W^2)_{j-1}^k}{2} \right]
\end{aligned} \tag{F.6}$$

ya da formülasyonu daha anlaşılır hale getirmek için bir takım kısaltmalar yapılırsa;

$$S_{1j} = h_j^{-1} b_j^n + \frac{\alpha_1}{2} F_j^k - \frac{\alpha^n}{2} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{F.7a})$$

$$S_{2j} = -h_j^{-1} b_{j-1}^n + \frac{\alpha_1}{2} F_{j-1}^k - \frac{\alpha^n}{2} F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{F.7b})$$

$$S_{3j} = \frac{\alpha_1}{2} V_j^k - \frac{\alpha^n}{2} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{F.7c})$$

$$S_{4j} = \frac{\alpha_1}{2} V_{j-1}^k - \frac{\alpha^n}{2} V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \quad (\text{F.7d})$$

$$S_{5j} = -\alpha_2 U_j^k \quad (\text{F.7e})$$

$$S_{6j} = -\alpha U_{j-1}^k \quad (\text{F.7f})$$

$$S_{7j} = \alpha^n W_j^k \quad (\text{F.7g})$$

$$S_{8j} = \alpha^n W_{j-1}^k \quad (\text{F.7h})$$

$$r_{1j} = h_j U_{j-\frac{1}{2}}^k - (f_j^k - f_{j-1}^k) \quad (\text{F.7i})$$

$$r_{2j} = R_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_j^{-1} (b_j^n V_j^k - b_{j-1}^n V_{j-1}^k) - \alpha_1 (FV)_{j-\frac{1}{2}}^k + \alpha_2 (U^2)_{j-\frac{1}{2}}^k - \alpha^n \left[F_{j-\frac{1}{2}}^k V_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - V_{j-\frac{1}{2}}^k F_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (w^2)_{j-\frac{1}{2}}^k \right] \quad (\text{F.7j})$$

olmak üzere,

$$S_{1j} \delta V_j + S_{2j} \delta V_{j-1} + S_{3j} \delta F_j + S_{4j} \delta F_{j-1} + S_{5j} \delta U_j + S_{6j} \delta U_{j-1} + S_{7j} \delta W_j + S_{8j} \delta W_{j-1} = r_{2j}$$

denklem sistemindeki (5.51) numaralı denklem elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Kırıkkale’de doğdu. İlk öğrenimini aynı ilde tamamlamasını takiben 1990 yılında Kuleli Askeri Lisesi’ne başlayıp, 1994 yılında mezun oldu. Aynı yıl Hava Harp Okulu Havacılık Mühendisliği Bölümü’ne başladı. 1998 yılında Teğmen rütbesi ile mezun oldu. 2nci Ana Jet Üs Uçuş Eğitim Merkez Komutanlığı, Hava Eğitim Komutanlığı Harekat İstihbarat Başkanlığı ve Hava Sınıf Okulları ve Teknik Eğitim Merkezi Komutanlığı Uçak Bakım Okulu’nda çeşitli kademelerde görev yaptıktan sonra 2000 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Uçak Mühendisliği yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen Hava Harp Okulu Havacılık ve Uzay Teknolojileri Enstitüsü Havacılık Mühendisliği Bölümünde Öğretim Elemanı olarak görev yapmaktadır.