

**EĞRİSEL KESİTE SAHİP GERGİ ÇUBUĞUNUN  
YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE YÖNTEMİYLE  
İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İnş. Müh. Tankut OĞULBULAN  
501021065**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 25 Aralık 2006  
Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 2007**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Reha ARTAN  
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)  
Doç.Dr. Ünal ALDEMİR (İ.T.Ü.)**

**ŞUBAT 2007**

## **ÖNSÖZ**

Altı yıllık eğitimin bir ürünü olan yüksek lisans tezi çalışmamda “Eğrisel Kesite Sahip Gergi Çubuğunun Yerel Olmayan Elastisite Yöntemiyle İncelenmesi” konusunu inceledim. Amacım son depremlerin ardından çok önemli bir konu haline gelen sağlamlık ve dayanım konusunda yerel olmayan elastisiteyi kullanarak eğrisel kesite sahip çubuklara klasik kuramlardan farklı bir bakış açısıyla yaklaşmaktı.

Bu konuda bana yardımcı olup değerli zaman ve görüşlerini benimle paylaşan danışmanım Prof. Dr. Reha Artan’a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Şubat 2007

Tankut OĞULBULAN

## **İÇİNDEKİLER**

|                                            |            |
|--------------------------------------------|------------|
| <b>ŞEKİL LİSTESİ</b>                       | <b>iv</b>  |
| <b>SEMBOL LİSTESİ</b>                      | <b>v</b>   |
| <b>ÖZET</b>                                | <b>vi</b>  |
| <b>SUMMARY</b>                             | <b>vii</b> |
| <b>1. GİRİŞ</b>                            | <b>1</b>   |
| <b>2. ERİNGEN DENKLEMİ</b>                 | <b>3</b>   |
| <b>3. UÇLARDAKİ GERİLMELERİN BULUNMASI</b> | <b>16</b>  |
| <b>4. SONUÇLAR</b>                         | <b>19</b>  |
| <b>KAYNAKLAR</b>                           | <b>20</b>  |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                            | <b>22</b>  |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                 | <b><u>Sayfa No</u></b> |
|-----------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>Şekil 2.1</b> : Eğrisel kesite sahip gergi çubuğu .....      | 3                      |
| <b>Şekil 2.2</b> : Üçgen Kernel .....                           | 4                      |
| <b>Şekil 2.3</b> : Karşılaştırma grafiği ( $F_2 = 2F_1$ ) ..... | 6                      |
| <b>Şekil 2.4</b> : Karşılaştırma grafiği ( $F_2 = 3F_1$ ) ..... | 11                     |
| <b>Şekil 3.1</b> : Gerilme alanı grafiği ( $F_2 = 2F_1$ ) ..... | 17                     |
| <b>Şekil 3.2</b> : Gerilme alanı grafiği ( $F_2 = 3F_1$ ) ..... | 18                     |

## SEMBOL LİSTESİ

|                                             |                          |
|---------------------------------------------|--------------------------|
| <b>a</b>                                    | : Atomik mesafe          |
| <b>B</b>                                    | : Kernel katsayısı       |
| <b><math>\xi_1, \xi_2</math></b>            | : Çözüm sabitleri        |
| <b>E</b>                                    | : Elastisite modülü      |
| <b><math>\varepsilon(\mathbf{x})</math></b> | : Şekil değiştirme       |
| <b><math>F_1, F_2</math></b>                | : Kesit alanı            |
| <b><math>F(\mathbf{x})</math></b>           | : Kesit alanı fonksiyonu |
| <b>L</b>                                    | : Çubuk uzunluğu         |
| <b>K</b>                                    | : Kernel fonksiyonu      |
| <b>P</b>                                    | : Gergi kuvveti          |
| <b><math>\sigma(\mathbf{x})</math></b>      | : Gerilme                |

## ÖZET

Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite çerçevesinde eğrisel kesite sahip bir gergi çubuğu incelenmiştir. Bunun için bir Kernel fonksiyonuna sahip Eringen'in esas denklemi kullanılmıştır. Sonuçlar klasik elastisite çözümü ile karşılaştırılmıştır.

Gergi çubukları, inşaat sektöründen otomotiv sektörüne kadar birçok kullanım alanına sahiptir ve değişik malzemelerden meydana getirilebilir. Kullanım alanı çok geniş olduğundan gergi çubukları pazarda birbirinden farklı ve son derece değişik şekillerde bulunabilmektedir. Bu nedenle klasik elastisite teorisinden daha ayrıntılı bir gerilme hesabı yapmak, gergi çubuğunun doğru seçilmesini kolaylaştırmakla beraber söz konusu inşaat veya sektör için ekonomik olacaktır.

Yerel olmayan elastisite teorisi içerisinde yaklaşım yöntemi olarak kullanılan Kernel fonksiyonları çok çeşitlidir. Kernel fonksiyonları benzer (veya benzer olmayan) girdilerin benzer (veya benzer olmayan) sonuçlar oluşturduğu varsayımından yola çıkılarak hazırlanmış yaklaşım fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada hesap kolaylığı bakımından üçgen Kernel fonksiyonu kullanılacaktır.

Tüm fiziksel teoriler, fiziksel fenomenine bağlı uygun doğruluk payı ile sınırlandırılmış bir uygulanabilirlik alanına sahiptir. Bunun altında yatan neden tüm fiziksel teorilere özgü temel kavramlarıdır. Bu çalışmadaki fiziksel teori olan klasik elastisite teorisinin uygulanabilirliği, gövdenin içyapısı ve karakteristik toplam uzunluğa bağlı olarak karakteristik bir uzunluk ölçüsüne  $(l-a)$  kadar indirgenebilir. Yerel olmayan elastisite teorisinin uygulanabilirlik sınırı da buna bağlı olarak  $(a)$  kadar olacaktır.

## SUMMARY

In this study, a tension bar having a curvilinear cross section is examined in the frame of non-local elasticity. In order to perform this, a Kernel function including Eringen's fundamental equation is used. Results are compared with the classical elasticity solution.

Tension bars have many application areas varying from construction sector to automotive sector and can be formed from different materials. While application area is very wide, tension bars can be present in many different and extraordinarily varying forms in the market. For this, by making a stress evaluation more detailed than classical elasticity theory will ease the selection of the tension bar to be used and will be more economical for the related construction or sector.

Kernel functions which one of them is used as an approximation function inside the non-local elasticity theory are very varying. Kernel functions are prepared assumption functions based on the theory that similar (or non-similar) inputs provide similar (or non-similar) results, was used in evaluations. In this study, for calculation easiness, the triangular Kernel function will be used.

All physical theories have an application area limited by a complying accuracy ratio based on the physical phenomena. The reason of this is ingrained in certain fundamental concepts underlying all physical theories. The applicability of the physical theory of this study which is classical elasticity theory can be traced to the comparison of a characteristic length ( $l-a$ ) involving the inner structure of the body and the external length of the tension bar. The applicability limit of non-local elasticity theory can be found based on that measurement as  $a$ .

Classical elasticity is insufficient to give any considerable information about the breakpoints of the tension bar. I believe that non-local elasticity theory will produce more meaningful results. The aim of the study is to play a role in achieving this target.

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite çerçevesinde eğrisel kesite sahip bir gergi çubuğu incelenmiştir. Bunun için bir Kernel fonksiyonuna sahip Eringen'in esas denklemi kullanılmıştır<sup>1</sup>. Sonuçlar klasik elastisite çözümü ile karşılaştırılmıştır.

Gergi çubukları, inşaat sektöründen otomotiv sektörüne kadar birçok kullanım alanına sahiptir ve değişik malzemelerden meydana getirilebilir. Gergi çubukları, yük aktarımı, çatı yapısı, restorasyon, koruma, bağlantı vb amaçlarla kullanılır. Kullanım alanı çok geniş olduğundan gergi çubukları pazarda birbirinden farklı ve son derece değişik şekillerde bulunabilmektedir. Bu nedenle klasik elastisite teorisinden daha ayrıntılı bir gerilme hesabı yapmak, gergi çubuğunun doğru seçilmesini kolaylaştırmakla beraber söz konusu inşaat veya sektör için ekonomik olacaktır.

Klasik fizik teorileri, tüm denge kanunlarının madde gövdesinin her noktasında geçerli olduğuna dayanmaktadır. Halbuki yerel olmayan elastisite teorisinde referans noktasındaki gerilme, her  $x'$  noktasında birim şekil değiştirmenin bir fonksiyonu olarak ele alınır. Bu çalışmada, işte bu teori kullanılarak eğrisel kesite sahip bir gergi çubuğunun gerilme ve şekil değiştirme fonksiyonlarının genel denklemleri bulunacaktır.

Yerel olmayan elastisite teorisi içerisinde yaklaşım yöntemi olarak kullanılan Kernel fonksiyonları çok çeşitlidir. Kernel fonksiyonları benzer (veya benzer olmayan) girdilerin benzer (veya benzer olmayan) sonuçlar oluşturduğu varsayımından yola çıkılarak hazırlanmış yaklaşım fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada hesap kolaylığı bakımından üçgen Kernel fonksiyonu kullanılacaktır.

Yerel olmayan elastisite teorisinin gelişimi Kröner<sup>12</sup>, Kunin<sup>13</sup>, Krumhansl<sup>14</sup> ve Edelen'e<sup>5</sup> kadar tarihlendirilebilir. Gelişmiş formüller Edelen ve Laws<sup>6</sup> ile Eringen<sup>7,8,9</sup> tarafından sunulmuştur.

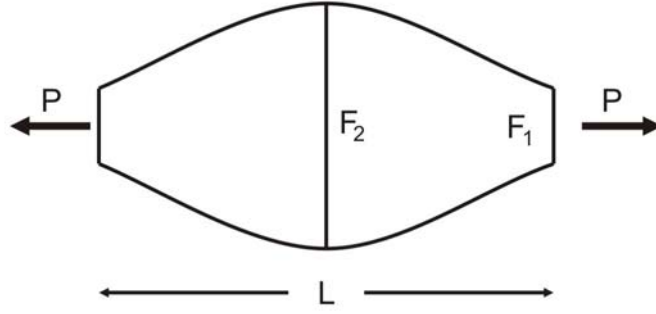
Tüm fiziksel teoriler, fiziksel fenomenine bağlı uygun doğruluk payı ile sınırlandırılmış bir uygulanabilirlik alanına sahiptir. Bunun altında yatan neden tüm fiziksel teorilere özgü temel kavramlarıdır. Bu çalışmadaki fiziksel teori olan klasik elastisite teorisinin uygulanabilirliği, gövdenin içyapısı ve karakteristik toplam



uzunluğa bağlı olarak karakteristik bir uzunluk ölçüsüne  $(l-a)$  kadar indirgenebilir. Yerel olmayan elastisite teorisinin uygulanabilirlik sınırı da buna bağlı olarak  $(a)$  kadar olacaktır.

Klasik elastisite, gergi çubuğunun kırılma noktasını belirlemede yetersiz kalmaktadır. Yerel olmayan elastisitenin bu konuda daha anlamlı sonuçlar doğuracağı hususu daha gerçekçi görünmektedir. Bu çalışmanın amacı bu yolda bir ilerleme kaydetmektir.

## 2. ERİNGEN DENKLEMİ



Şekil 2.1: Eğrisel Kesite Sahip Gergi Çubuğu

Eringen'in esas denklemi aşağıdaki gibidir<sup>10</sup>:

$$\sigma(x) = E \left[ \xi_1 \varepsilon(x) + \xi_2 \int_V K(x, x') \varepsilon(x') dV' \right] \quad (2.1)$$

Burada E Young modülü ve K (x, x') ise x noktasında merkezlenmiş yaklaşım fonksiyonudur (Kernel fonksiyonu),  $\sigma(x)$  klasik elastisitede x noktasındaki gerilme değeridir.  $\varepsilon(x')$  yerel olmayan elastisitede yer değiştirme fonksiyonudur.  $\xi_1$  ile  $\xi_2$  sabittirler ve aşağıdaki şartı sağlarlar:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \quad (2.2)$$

Bu ilişki kullanılarak şöyle yazılabilir:

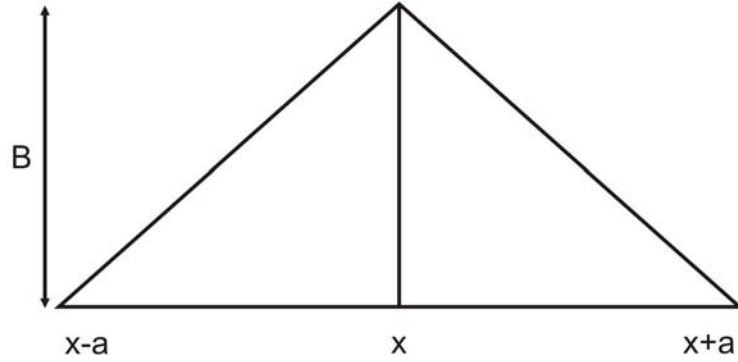
$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{\xi_1 E} - \frac{\xi_2}{\xi_1} \int_V K(x, x') \varepsilon(x') dV' \quad (2.3)$$

Kernel fonksiyonu şu şartı sağlamalıdır<sup>11</sup>:

$$\int_V K(x, x') dV' = 1 \quad (2.4)$$

Bu çalışmada Kernel fonksiyonu üçgensel seçilmiştir<sup>1,2</sup>:

$$K(x, x') = \begin{cases} B \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right), & \text{eğer } |x-x'| < a \\ 0, & \text{eğer } |x-x'| > a \end{cases} \quad (2.5)$$



Şekil 2.2: Üçgen Kernel

Bu fonksiyon üçgen Kernel olarak adlandırılmaktadır. Buradaki B simgesi bir sabittir ve a katsayısı da atomik mesafeyi simgelemektedir ( $a = 0.00000004\text{cm}$ ). (2.5) formülü kullanılarak B katsayısı şöyle bulunabilir:

$$B = \frac{1}{a} \quad (2.6)$$

Kesitin uzunlukla değişimi de şöyle yazılabilir:

$$F(x) = \frac{4}{L^2} [F_1 - F_2] x^2 - \frac{4}{L} [F_1 - F_2] x + F_1 \quad (2.7)$$

Böylece integral formülü de aşağıdaki biçimi alır:

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{F(x) \xi_1 E} - \frac{\xi_2}{a \xi_1} \int_{x-a}^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \varepsilon(x') dV' \quad (2.8)$$

$$\lambda = -\frac{\xi_2}{a\xi_1} \quad (2.9)$$

denirse,

Genel denklem aşağıdaki hale gelir:

$$\varepsilon(x) = \frac{P}{F(x)\xi_1 E} + \lambda \int_{x-a}^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \varepsilon(x') d\mathbf{x}' \quad (2.10)$$

Çözümün şu olduğu varsayılırsa,

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x) + \lambda \varepsilon_1(x) + \lambda^2 \varepsilon_2(x) + \lambda^3 \varepsilon_3(x) + \dots + \quad (2.11)$$

Denklemin her bir teriminin çözümü bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= \frac{P}{F(x)\xi_1 E}, \quad \varepsilon_1(x) = \int_{x-a}^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \varepsilon_0(x') d\mathbf{x}', \\ \varepsilon_2(x) &= \int_{x-a}^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \varepsilon_1(x') d\mathbf{x}', \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bundan sonra da hesabımız iki durum için söz konusu olacaktır. Birinci durum çubuğun kenarlarından uzaktaki herhangi bir yer için olacaktır. Bu çalışmada bu durum incelenmeyecektir. Daha önce yapılan çalışmalarda çubuğun kenarlarından uzakta herhangi bir noktadaki gerilme ve şekil değiştirme değerlerinin klasik elastisite hesabıyla aynı olduğu kanıtlanmıştır<sup>15</sup>.

İkinci durum ise çubuğun kenarlarındaki gerilme ve şekil değiştirme değerlerinin bulunmasıdır. Buna göre limitteki sınır değerleri değişecektir<sup>3,4</sup>:

$$\varepsilon_0(x) = \frac{PL^2}{[4[F_1 - F_2]x^2 - 4[F_1 - F_2]xL + F_1 L^2]\xi_1 E} \quad (2.13)$$

olduğuna göre  $\varepsilon_1(x)$  de Mathematica programı yardımıyla şöyle bulunur:

$$\varepsilon_1(x) = \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \varepsilon_0(x') d x' \quad (2.14)$$

Yani,

$$\varepsilon_1(x) = \frac{\int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{PL^2}{\xi_1 E [4(F_1 - F_2)(x')^2 - 4(F_1 - F_2)x'L + F_1 L^2]} d x'}{\quad} \quad (2.15)$$

Hale gelir. Buradaki integral paydadaki değişkenlerden dolayı zor çözülebilir olduğundan, yazdığımız  $F(x)$  ile  $[0,1]$  aralığında benzer grafiğe sahip başka bir formül bularak çözümü devam ettirmemiz gerekmektedir.

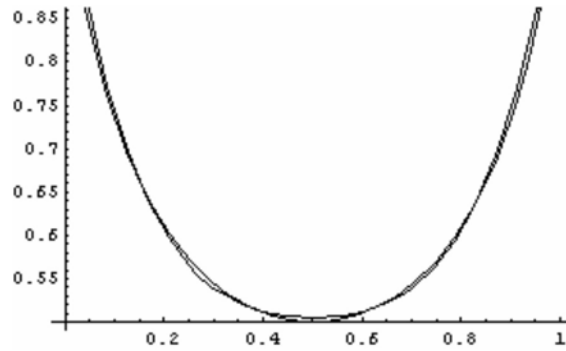
**a)  $F_2=2F_1$  durumu:**

$F_2= 2F_1$  kabul edilirse,

$$\frac{PL^2}{\xi_1 E F_1 [-4(x')^2 + 4x'L + L^2]} \quad (2.16)$$

$x'/L = \beta$  denilirse,

$$\frac{P}{\xi_1 E F_1 [-4\beta^2 + 4\beta + 1]} \quad (2.17)$$



**Şekil 2.3:** Karşılaştırma grafiği ( $F_2= 2F_1$ )

Grafiğine sahip  $g(\beta) = 0.997733 - 3.32011\beta + 8.72242\beta^2 - 10.8046\beta^3 + 5.40231\beta^4$  fonksiyonu uygun gözükmetedir. Buna göre integral yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) = & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{1}{\xi_1 EF_1} \\ & \left( P(0.997733 - 3.32011 x'/L + 8.72242 (x'/L)^2 - 10.8046 (x'/L)^3 + \right. \\ & \left. 5.40231 (x'/L)^4) \right) d x' \end{aligned} \quad (2.18)$$

haline gelir. Buradaki  $\beta$  terimini yeniden  $x'/L$  yaparsak,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) = & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{P(0.997733)}{\xi_1 EF_1} d x' - \\ & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{P(3.32011 x'/L)}{\xi_1 EF_1} d x' + \\ & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{P(8.72242 (x'/L)^2)}{\xi_1 EF_1} d x' - \\ & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{P(10.8046 (x'/L)^3)}{\xi_1 EF_1} d x' + \\ & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x-x'|}{a}\right) \frac{P(5.40231 (x'/L)^4)}{\xi_1 EF_1} d x' \end{aligned} \quad (2.19)$$

Böylece çözüm,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(x) = & \left( \frac{0.498867 a^2 P + (2.99319 a - 1.4966 x) xP}{a \xi_1 E F_1} \right) - \\
& \frac{1}{a L \xi_1 E F_1} (0.553352 a^3 P + 1.66006 a^2 xP + (1.66006 a - 0.553352 x) x^2 P) + \\
& \frac{1}{a L^2 \xi_1 E F_1} \\
& (0.726868 a^4 P + 2.90747 a^3 xP + 4.36121 a^2 x^2 P + 2.90747 a x^3 P - \\
& 0.726868 x^4 P) - \\
& \frac{1}{a L^3 \xi_1 E F_1} \\
& (0.54023 a^5 P + 2.70115 a^4 xP + 5.4023 a^3 x^2 P + 5.4023 a^2 x^3 P + \\
& 2.70115 a x^4 P - 0.54023 x^5 P) + \\
& \frac{1}{a L^4 \xi_1 E F_1} \\
& (0.180077 a^6 P + 1.08046 a^5 xP + 2.70116 a^4 x^2 P + 3.60154 a^3 x^3 P + \\
& 2.70116 a^2 x^4 P - 1.08046 a x^5 P - \\
& 0.180077 x^6 P)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

halini alır. Karmaşıklığa aldanmamak lazımdır, zira a, L, E, F değişkenleri belirli sayılardır ve yerlerine konulduğunda çözüm daha basite indirgenebilir. Buna göre ikinci ve üçüncü basamağın da çözümü,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2(x) = & \frac{1}{a^2 \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{F}_1} (0.623582 a^4 P + 1.496595 a^3 xP - 0.49886 a^2 x^2 P - \\
& 0.997732 ax^3 P + 0.124717 x^4 P) - \\
& \frac{1}{a^2 L \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{F}_1} \\
& (0.664023 a^5 P + 1.798402 a^4 xP + 0.276676 ax^4 P + 0.0276676 x^5 P) + \\
& \frac{1}{a^2 L^2 \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{F}_1} \\
& (1.33259 a^6 P + 4.215838 a^5 xP + 4.36121 a^4 x^2 P + 1.938314 a^3 x^3 P - \\
& 0.290757 ax^5 P + 0.0242289 x^6 P) - \\
& \frac{1}{a^2 L^3 \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{F}_1} \\
& (1.51779 a^7 P + 5.49234 a^6 xP + 7.56322 a^5 x^2 P + 5.40331 a^4 x^3 P + \\
& 1.800766 a^3 x^4 P - 0.180077 ax^6 P + 0.0128626 x^7 P) + \\
& \frac{1}{a^2 L^4 \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{F}_1} \\
& (0.736387 a^8 P + 2.855507 a^7 xP + 4.321852 a^6 x^2 P + 3.24139 a^5 x^3 P + \\
& 0.900388 a^4 x^4 P - 0.360152 a^3 x^5 P - 0.3601535 a^2 x^6 P + \\
& 0.00321566 x^8 P)
\end{aligned} \tag{2.21}$$



$$\begin{aligned}
\varepsilon_3(x) = & \frac{1}{a^3 FL^4 t \xi_1} \\
& (0.5 P (a - 0.5 x) x \\
& (0.180077 a^8 + a^7 (-0.54023 L + 1.44062 x) + \\
& a^6 (0.726868 L^2 - 3.78161 L x + 4.682 x^2) + \\
& a^5 (-0.553352 L^3 + 4.36121 L^2 x - 10.26437 L x^2 + 7.923388 x^3) + \\
& a x^3 (-5.98638 L^4 + 2.766758 L^3 x - 4.36121 L^2 x^2 + 3.78161 L x^3 - \\
& 1.44062 x^4) + \\
& a^2 x^2 (2.99319 L^4 - 1.1067 L^3 x + 0.726868 L^2 x^2 + 0.54023 L x^3 - \\
& 0.720308 x^4) + \\
& x^4 (1.496595 L^4 - 0.553352 L^3 x + 0.726868 L^2 x^2 - 0.54023 L x^3 + \\
& 0.180077 x^4) + \\
& a^3 x (5.98638 L^4 - 4.42681 L^3 x + 8.72242 L^2 x^2 - 8.10345 L x^3 + \\
& 2.881232 x^4) + \\
& a^4 (1.496595 L^4 - 2.766758 L^3 x + 9.449288 L^2 x^2 - 13.50575 L x^3 + \\
& 7.20308 x^4))) + \\
& \frac{1}{a^3 FL^4 t \xi_1} \\
& (0.5 P (0.5 a^2) (0.180077 a^8 + a^7 (-0.54023 L + 1.440616 x) + \\
& a^6 (0.726868 L^2 - 3.78161 L x + 4.682 x^2) + \\
& a^5 (-0.553352 L^3 + 4.36121 L^2 x - 10.26437 L x^2 + 7.923388 x^3) + \\
& a x^3 (-5.98638 L^4 + 2.766758 L^3 x - 4.36121 L^2 x^2 + 3.78161 L x^3 - \\
& 1.440616 x^4) + \\
& a^2 x^2 (2.99319 L^4 - 1.1067 L^3 x + 0.726868 L^2 x^2 + 0.54023 L x^3 - \\
& 0.720308 x^4) + \\
& x^4 (1.496595 L^4 - 0.553352 L^3 x + 0.726868 L^2 x^2 - 0.54023 L x^3 + \\
& 0.180077 x^4) + \\
& a^3 x (5.98638 L^4 - 4.42681 L^3 x + 8.72242 L^2 x^2 - 8.10345 L x^3 + \\
& 2.881232 x^4) + \\
& a^4 (1.496595 L^4 - 2.766758 L^3 x + 9.449288 L^2 x^2 - 13.50575 L x^3 + \\
& 7.20308 \\
& x^4))) \tag{2.22}
\end{aligned}$$

şeklinde olmuş olur.

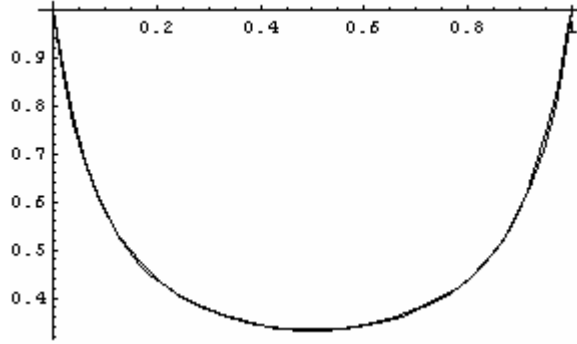
**b)  $F_2 = 3F_1$  durumu:**

$F_2 = 3F_1$  kabul edilirse,

$$\frac{PL^2}{\xi_1 EF_1 [-8 (x')^2 + 8 x' L + L^2]} \quad (2.23)$$

$x'/L = \beta$  denilirse,

$$\frac{P}{\xi_1 EF_1 [-8 \beta^2 + 8 \beta + 1]} \quad (2.24)$$



**Şekil 2.4:** Karşılaştırma grafiği ( $F_2 = 3F_1$ )

Grafiğine sahip  $g(\beta) = 0.999818 - 6.64739\beta + 32.6207\beta^2 - 92.2882\beta^3 + 146.998\beta^4 - 121.025\beta^5 + 40.3415\beta^6$  fonksiyonu uygun gözükmetedir. Buna göre integral yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) = & \int_0^{x+a} \left(1 - \frac{|x - x'|}{a}\right) \frac{1}{\xi_1 EF_1} \\ & (P (0.999818 - 6.64739 \beta + 32.6207 \beta^2 - 92.2882 \beta^3 + 146.998 \beta^4 - \\ & 121.025 \beta^5 + 40.3415 \beta^6)) d\beta \end{aligned} \quad (2.25)$$

haline gelir. Buradaki  $\beta$  terimini yeniden  $x'/L$  yaparsak çözüm,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(x) = & \\
& - \frac{1}{a\xi_1 EL^6 F_1} \\
& \{P[-0.720384 a^8 + a^7(2.88154 L - 5.76308 x) + \\
& a^6(-4.89993 L^2 + 20.1708 Lx - 20.1708 x^2) + \\
& a^5(4.61441 L^3 - 29.3996 L^2 x + 60.5123 Lx^2 - 40.3415 x^3) + \\
& a^4(-2.71839 L^4 + 23.072 L^3 x - 73.499 L^2 x^2 + 100.854 Lx^3 - 50.4269 x^4) + \\
& a^3(1.1079 L^5 - 10.8736 L^4 x + 46.1441 L^3 x^2 - 97.9986 L^2 x^3 + \\
& 100.854 Lx^4 - 40.3415 x^5) + \\
& ax^2(8.88178 \times 10^{-16} L^5 + 1.77636 \times 10^{-15} L^4 x - 1.06581 \times 10^{-14} L^3 x^2 - \\
& 2.84217 \times 10^{-14} L^2 x^3 - 1.06581 \times 10^{-14} Lx^4 + 2.66454 \times 10^{-15} x^5) + \\
& a^2(-0.499909 L^6 + 3.32369 L^5 x - 16.3104 L^4 x^2 + 46.1441 L^3 x^3 - \\
& 73.499 L^2 x^4 + 60.5123 Lx^5 - 20.1708 x^6)]\} + \\
& \frac{1}{a\xi_1 EL^6 F_1} \\
& \{Px[ \\
& x(-0.499909 L^6 + 1.1079 L^5 x - 2.71839 L^4 x^2 + 4.61441 L^3 x^3 - \\
& 4.89993 L^2 x^4 + 2.88154 Lx^5 - 0.720384 x^6) + \\
& a(0.999818 L^6 - 3.32369 L^5 x + 10.8736 L^4 x^2 - 23.072 L^3 x^3 + \\
& 29.3996 L^2 x^4 - 20.1708 Lx^5 + 5.76308 x^6)]\} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

halini alır. Buna göre ikinci ve üçüncü basamağın da çözümü,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2(\mathbf{x}) = & \frac{1}{a^2 \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{L}^6 \mathbf{F}_1} \\
& [\mathbf{P} \mathbf{x} [0.720384 a^9 + a^8 (-2.88154 \mathbf{L} + 2.52135 \mathbf{x}) + \\
& a^7 (4.89993 \mathbf{L}^2 - 8.64461 \mathbf{L} \mathbf{x} + 5.76308 \mathbf{x}^2) + \\
& a^6 (-4.61441 \mathbf{L}^3 + 12.2498 \mathbf{L}^2 \mathbf{x} - 16.809 \mathbf{L} \mathbf{x}^2 + 8.40449 \mathbf{x}^3) + \\
& a^5 (2.71839 \mathbf{L}^4 - 9.22882 \mathbf{L}^3 \mathbf{x} + 19.5997 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^2 - 20.1708 \mathbf{L} \mathbf{x}^3 + \\
& 8.06831 \mathbf{x}^4) + \\
& a^4 (-1.1079 \mathbf{L}^5 + 4.07759 \mathbf{L}^4 \mathbf{x} - 11.536 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^2 + 18.3747 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^3 - \\
& 15.1281 \mathbf{L} \mathbf{x}^4 + 5.04269 \mathbf{x}^5) + \\
& a \mathbf{x}^2 (-0.333273 \mathbf{L}^6 + 0.553949 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} - 1.08736 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 + 1.53814 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 - \\
& 1.39998 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 + 0.720384 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 - 0.160085 \mathbf{x}^6) + \\
& \mathbf{x}^3 (0.0416591 \mathbf{L}^6 - 0.0553949 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} + 0.0906131 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 - 0.109867 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 + \\
& 0.0874988 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 - 0.0400214 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 + 0.00800427 \mathbf{x}^6) + \\
& a^2 \mathbf{x} (0.249954 \mathbf{L}^6 - 0.553949 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} + 1.3592 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 - 2.3072 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 + \\
& 2.44997 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 - 1.44077 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 + 0.360192 \mathbf{x}^6) + \\
& a^3 (0.499909 \mathbf{L}^6 - 1.1079 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} + 3.62452 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 - 7.69068 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 + \\
& 9.79986 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 - 6.72359 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 + 1.92103 \mathbf{x}^6)]] + \\
& \frac{\mathbf{P}}{a \xi_1 \mathbf{E} \mathbf{L}^6 \mathbf{F}_1} [8.09232 a^9 + a^8 (-20.0107 \mathbf{L} + 40.0214 \mathbf{x}) + \\
& a^7 (21.4372 \mathbf{L}^2 - 88.2471 \mathbf{L} \mathbf{x} + 88.2471 \mathbf{x}^2) + \\
& a^6 (-12.9643 \mathbf{L}^3 + 82.5988 \mathbf{L}^2 \mathbf{x} - 170.011 \mathbf{L} \mathbf{x}^2 + 113.34 \mathbf{x}^3) + \\
& a^5 (4.98372 \mathbf{L}^4 - 42.2987 \mathbf{L}^3 \mathbf{x} + 134.748 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^2 - 184.899 \mathbf{L} \mathbf{x}^3 + 92.4493 \mathbf{x}^4) + \\
& a^4 (-1.32948 \mathbf{L}^5 + 13.0483 \mathbf{L}^4 \mathbf{x} - 55.3729 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^2 + 117.598 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^3 - \\
& 121.025 \mathbf{L} \mathbf{x}^4 + 48.4098 \mathbf{x}^5) + \\
& a \mathbf{x}^2 (-0.249954 \mathbf{L}^6 + 0.553949 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} - 1.3592 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 + 2.3072 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 - \\
& 2.44997 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 + 1.44077 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 - 0.360192 \mathbf{x}^6) + \\
& a^2 \mathbf{x} (0.333273 \mathbf{L}^6 - 1.1079 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} + 3.62452 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 - 7.69068 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 + \\
& 9.79986 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 - 6.72359 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 + 1.92103 \mathbf{x}^6) + \\
& a^3 (0.374932 \mathbf{L}^6 - 2.49277 \mathbf{L}^5 \mathbf{x} + 12.2328 \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^2 - 34.6081 \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^3 + \\
& 55.1242 \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^4 - 45.3842 \mathbf{L} \mathbf{x}^5 + 15.1281 \mathbf{x}^6) - 2.22045 \times 10^{-16} \mathbf{L}^4 \mathbf{x}^5 + \\
& 3.33067 \times 10^{-16} \mathbf{L}^3 \mathbf{x}^6 + 9.99201 \times 10^{-16} \mathbf{L}^2 \mathbf{x}^7 + 1.11022 \times 10^{-16} \mathbf{L} \mathbf{x}^8 + \\
& 4.16334 \times 10^{-17} \mathbf{L}^6 \mathbf{x}^9] \quad (2.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3(x) = & \frac{1}{a^3 \xi_1 EL^6 F_1} \\
& \{Px[8.09232 a^{11} + a^{10}(-20.0107L + 16.3247x) + \\
& a^9(21.4372L^2 - 79.6825Lx + 23.4659x^2) + \\
& a^8(-12.9643L^3 + 33.0308L^2x - 14.948Lx^2 + 22.2119x^3) + \\
& a^7(4.98372L^4 - 16.9744L^3x + 34.4162L^2x^2 - 35.539Lx^3 + 14.2156x^4) + \\
& a^6(-1.32948L^5 + 5.39148L^4x - 13.715L^3x^2 + 22.0497L^2x^3 - \\
& 18.1537Lx^4 + 6.05123x^5) + \\
& a^3x^2(-0.138864L^6 + 0.18465L^5x - 0.362452L^4x^2 + 0.512712L^3x^3 - \\
& 0.46666L^2x^4 + 0.240128Lx^5 - 0.0533618x^6) + \\
& a^2x^3(-0.083318L^6 + 0.11079L^5x - 0.181226L^4x^2 + 0.219734L^3x^3 - \\
& 0.174998L^2x^4 + 0.0800427Lx^5 - 0.0160085x^6) + \\
& x^5(-0.00138864L^6 + 0.00131893L^5x - 0.00161809L^4x^2 + \\
& 0.00152593L^3x^3 - 0.000972208L^2x^4 + 0.000363831Lx^5 - \\
& 0.000266809x^6) + \\
& ax^4(0.0249954L^6 - 0.0276974L^5x + 0.0388342L^4x^2 - \\
& 0.0412001L^3x^3 + 0.0291663L^2x^4 - 0.0120064Lx^5 + 0.00305618x^6) + \\
& a^4x(0.229125L^6 - 0.138487L^5x + 0.453065L^4x^2 - 0.769068L^3x^3 + \\
& 0.816655L^2x^4 - 0.480256Lx^5 + 0.120064x^6) + \\
& a^5(0.374932L^6 - 1.13559L^5x + 2.80901L^4x^2 - 6.15254L^3x^3 + \\
& 7.83989L^2x^4 - 5.37887Lx^5 + 1.53682x^6)] + \\
& \frac{P}{a^2 \xi_1 EL^6 F_1} [29.4743 a^{11} + a^{10}(-41.8387L + 113.332x) + \\
& a^9(47.3096L^2 - 195.712Lx + 195.528x^2) + \\
& a^8(-22.4785L^3 + 144.849L^2x - 297.419Lx^2 + 198.266x^3) + \\
& a^7(6.81702L^4 - 59.3968L^3x + 187.991L^2x^2 - 257.958Lx^3 + 128.949x^4) + \\
& a^6(-1.43235L^5 + 14.9641L^4x - 62.3494L^3x^2 + 132.415L^2x^3 - \\
& 136.273Lx^4 + 54.4611x^5) + \\
& a^3x^2(-0.145807L^6 + 0.323137L^5x - 0.792864L^4x^2 + 1.34587L^3x^3 - \\
& 1.42915L^2x^4 + 0.840449Lx^5 - 0.236126x^6) + \\
& a^2x^3(-0.138864L^6 + 0.230812L^5x - 0.453065L^4x^2 + 0.64089L^3x^3 - \\
& 0.583325L^2x^4 + 0.30016Lx^5 - 0.0747065x^6) + \\
& x^5(8.67362 \times 10^{-18}L^6 + 6.93889 \times 10^{-18}L^5x - 1.04083 \times 10^{-17}L^4x^2 + \\
& 1.73472 \times 10^{-18}L^3x^3 + 1.73472 \times 10^{-18}L^2x^4 - 1.73472 \times 10^{-18}Lx^5 + \\
& 2.1684 \times 10^{-19}x^6) + \\
& ax^4(0.0208295L^6 - 0.0276974L^5x + 0.0453065L^4x^2 - \\
& 0.0549334L^3x^3 + 0.0437494L^2x^4 - 0.0200107Lx^5 + 0.00400214x^6) + \\
& a^4x(0.341604L^6 - 0.858621L^5x + 2.80901L^4x^2 - 5.96028L^3x^3 + \\
& 7.59489L^2x^4 - 5.21078Lx^5 + 1.44237x^6) + \\
& a^5(0.311054L^6 - 2.43737L^5x + 11.2813L^4x^2 - 31.9163L^3x^3 + \\
& 50.8368L^2x^4 - 41.8543Lx^5 + 13.8957x^6)] \quad (2.28)
\end{aligned}$$

şeklinde olmuş olur.

Böylece (2.11) denklemindeki bileşenleri yerine koyduğumuzda çubuğun herhangi bir yerindeki yer değiştirme fonksiyonu bulunmuş olur.  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  söz konusu olursa,

$$\left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| < 1 \quad (2.29)$$

kuralı daha önceden kanıtlanmıştır<sup>5</sup>. Bu şart aynı zamanda uçlardan uzakta, yerel ile yerel olmayan çözümün eşdeğer olmasının şartıdır. Dolayısıyla sadece uçlardaki gerilmeler incelenecektir. (2.2) denklemini de göz önüne aldığımızda,  $x=a$  noktasındaki sürekliliği kullanarak  $\xi_1$  ve  $\xi_2$  şu şekilde seçilebilir.

$$\xi_1 = 0.99, \xi_2 = 0.01 \quad (2.30)$$

### 3. UÇLARDAKİ GERİLMELERİN BULUNMASI

#### a) $F_2 = 2F_1$ durumu:

Uçlardaki gerilmelerin bulunması (2.20), (2.21) ve (2.22)'deki sabitlerin yerine konularak (2.11) denkleminde hesap edilmelidir. Bir örnek yapılırsa:

$$P = 10000 \text{ N}$$

$$E = 2 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$\xi_1 = 0.99$$

$$\xi_2 = 0.01$$

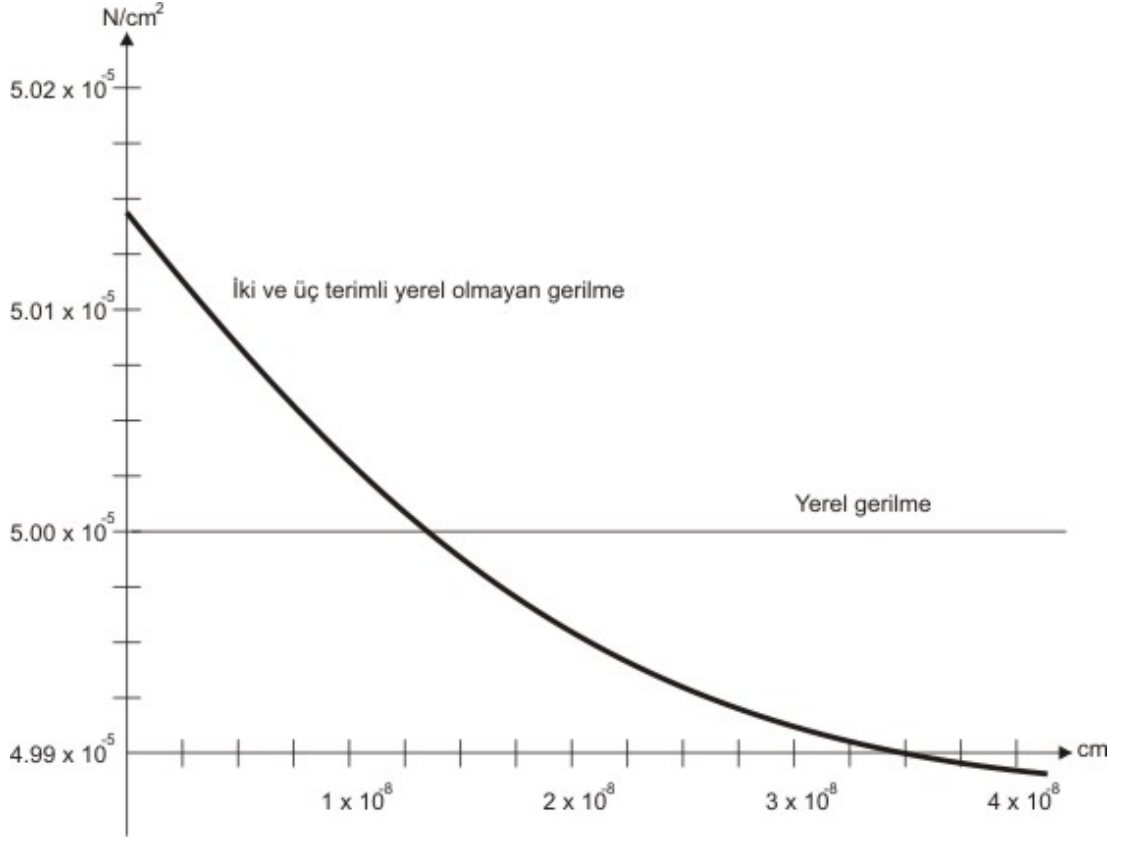
$$F_1 = 10 \text{ cm}^2$$

$$a = 4 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

$$L = 400 \text{ cm ise,}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{P}{F_1 E} \quad (3.1)$$

olarak hesaplandığında, klasik teoriden çıkan gerilme  $\varepsilon_0 = 5 \times 10^{-5}$  değerinde hesaplanır. Böylece (2.11) denkleminin grafiği aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.1: Gerilme alanı grafiği ( $F_2=2F_1$ )

**b)  $F_2= 3F_1$  durumu:**

Uçlardaki gerilmelerin bulunması (2.20), (2.21) ve (2.22)'deki sabitlerin yerine konularak (2.11) denkleminde hesap edilmelidir. Bir örnek yapılırsa:

$$P= 10000 \text{ N}$$

$$E= 2 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$\xi_1= 0.99$$

$$\xi_2= 0.01$$

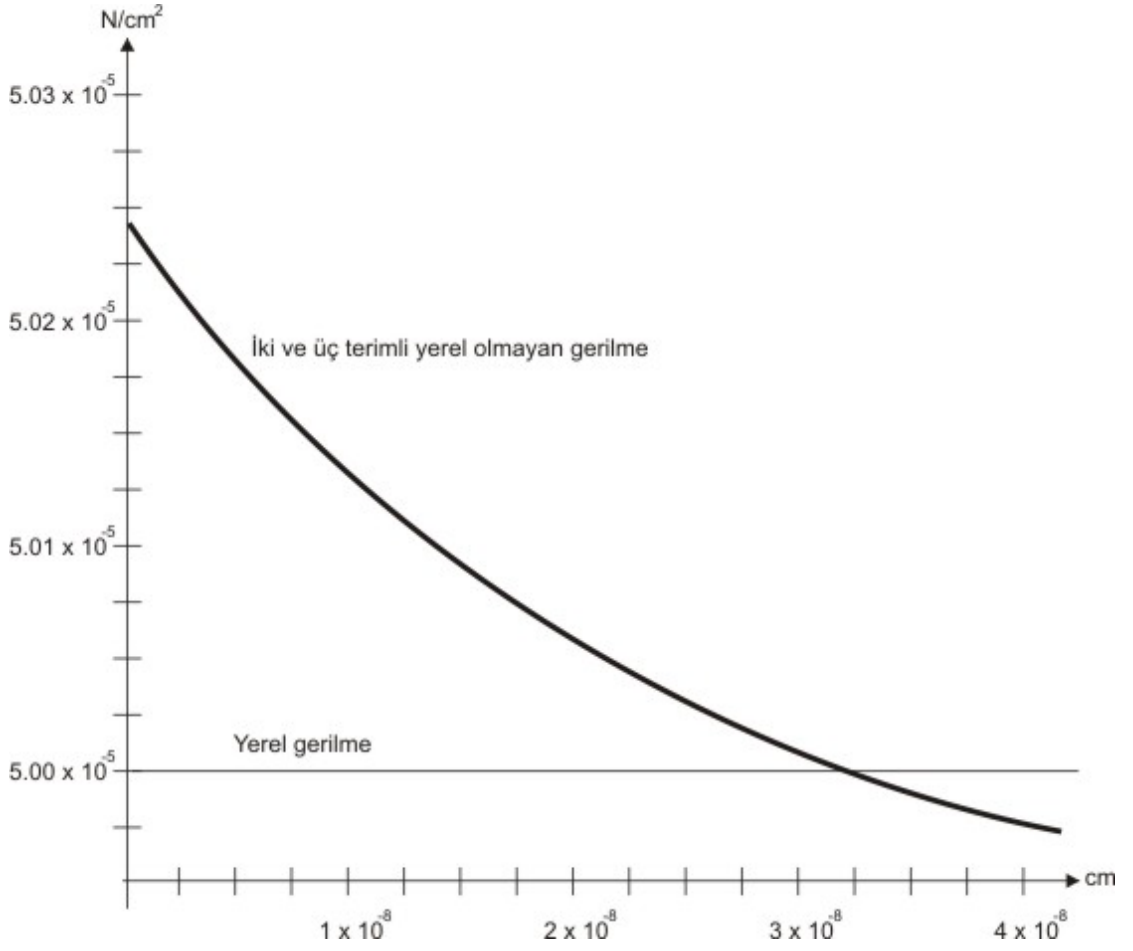
$$F_1= 10 \text{ cm}^2$$

$$a= 4 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

$$L= 400 \text{ cm ise,}$$



Yerel gerilim yukarıda bahsedildiği gibi  $\varepsilon_0 = 5 \times 10^{-5}$  değerinde hesaplanır. Böylece (2.11) denkleminin grafiği aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 3.2: Gerilme alanı grafiği ( $F_2=3F_1$ )

#### 4. SONUÇLAR

Sonuç olarak yerel ve yerel olmayan elastisite çözümlerinin uç noktalarda birbirlerinden farklı olduğu anlaşılmıştır. Bundan dolayı klasik elastisite, gergi çubuklarına bir çözüm sunmakta yetersiz kalmaktadır. Söz konusu çözüm, kırılma noktaları hakkında herhangi bir bilgi vermez. Şekil değiştirme, gerilme alanına bağlı olduğundan gergi çubuğu için şekil değiştirme grafiğini hesaplamak mümkün değildir. Yerel olmayan elastisite hesaplamasının değişken kesitli gergi çubukları için daha kesin bir sonuç verdiği ortaya çıkmıştır.

## KAYNAKLAR

- [1] Artan R, Altan BS, 2002. Propagation of SV waves in a periodically layered media in nonlocal elasticity *Int J Solids Struct.* 39 (24): 5927-5944 2002
- [2] Artan R, 1999. The nonlocal solution of the elastic half plane loaded by a couple, *Int J Eng Sci* 37 (11): 1389-1405
- [3] Artan, R, 1996, Unsymmetrical Rigid Stamp on a Nonlocal Elastic Half Plane, *Int. J. Engng. Sci.*, 34, 933-941.
- [4] Artan, R., 1996, Rectangular Rigid Stamp on a Nonlocal Elastic Half Plane", *Int. J. Solids Structures*, 33, 3577-3586
- [5] Edelen D.G.B., 1969., Proelastic bodies with large deformations. *Arch, Rat. Mech. Anal.* 34, 283-300
- [6] Edelen D.G.B., Laws, N., 1971. On the thermodynamics of systems with nonlocality. *Arch, Rat. Mech. Anal.* 43, 24-35
- [7] Eringen. A.C., 1972a. Nonlocal polar elastic continua. *Int. J. Engng. Sci.* 10, 1-16
- [8] Eringen. A.C., 1972b. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *Int. J. Engng. Sci.* 10, 425-435
- [9] Eringen. A.C., 1976. Nonlocal micropolar field theory. In: Eringen A.C. (Ed.), *Continuum Physics*, vol. 4. Academic pres, Newyork, pp. 205-267
- [10] Eringen. A.C., Speziale C. G., Kim B.S., 1977 Crack-tip problem in nonlocal elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 25, 339-355
- [11] Eringen. A.C., 1987., Theory of nonlocal elasticity and some applications. *Res. Mechanica* 21, 313-342
- [12] Kröner E., 1967. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *Int. J. Solids Struct.* 3, 731-742
- [13] Kunin, I.A., 1967. The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocation. In: Kröner (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*, ProcEdings of IUTAM Symposium 1967, New York, 1968.

[14] Krumhansl, J.A., 1968. Some considerations on the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics. In: Kröner, E. (Ed.), *Mechanics of Generalized Continua*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 298-331

[15] Pisano A.A., Fuschi P., 2003 Closed form solution for a nonlocal elastic bar in tension, *Int. J.Sol.Str.*40. 13-23

## **ÖZGEÇMİŞ**

Tankut Oğulbulan 1979 yılında Almanya'nın Pforzheim kentinde doğdu. Almanya'da dört yıl okunan ilkokuldan mezun olduktan sonra bir de Türkiye'de beşinci yılı bitirip çift ilkokul diploması sahibi olan Tankut Oğulbulan, sırasıyla 1995 yılında Emlak Bankası Orta Okulu'ndan, 1998 yılında İzmir Atatürk Lisesi'nden ve 2002 yılında da İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden başarıyla mezun olmuş, aynı yılda da İstanbul Teknik Üniversitesi Mekanik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans yapma hak ve onuruna erişmiştir. Kendisi aynı zamanda yeminli bir tercümandır ve halen belirli şirketlerle bağımsız tercüman olarak çalışmaktadır. 2004 yılında Türkiye'de ilk defa tam metin olarak hazırlanan Montaigne – Denemeler çevirisi kitapçılarda mevcuttur.