

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖNGERİLMELİ BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE TEMAS KOŞULLARININ
EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGA YAYILIMINA ETKİSİ**

**DOKTORA TEZİ
Cengiz İPEK**

Anabilim Dalı : İnşaat Mühendisliği

Programı : Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ünal ALDEMİR

HAZİRAN 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖNGERİLMELİ BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE TEMAS KOŞULLARININ
EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGA YAYILIMINA ETKİSİ**

DOKTORA TEZİ

Cengiz İPEK

(501952010)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Nisan 2011

Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Haziran 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ünal ALDEMİR (İTÜ)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdul HAYIR (İTÜ)

Prof. Dr. Surkay AKBAROV (YTÜ)

Prof. Dr. Hasan ENGİN (İTÜ)

Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (YTÜ)

HAZİRAN 2011

Aileme,

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında, her türlü desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Surkay AKBAROV'a, danışman hocam Prof. Dr. Ünal ALDEMİR'e ve diğer çalışma arkadaşlarıma, şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

HAZİRAN 2011

Cengiz İPEK
(İnşaat Yüksek Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	vii
KISALTMALAR.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
SEMBOL LİSTESİ.....	xix
ÖZET.....	xix
SUMMARY.....	xxiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Özeti	1
2. BÖLÜM.....	7
2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu.....	7
2.1.1 Hiper elastik cisimlerin doğrusal olmayan elastisite teorisi bağıntıları.....	11
2.1.2 Ön şekil değiştirme ve öngerilmelerin belirlenmesi.....	13
2.1.3 Pertürbasyon durumuna ait denklem ve bağıntılar.....	15
2.1.4 Çözüm yöntemi ve dispersiyon denkleminin elde edilmesi	20
3. BÖLÜM.....	35
3.1 Sayısal Sonuçların Değerlendirilmesi	35
3.2 Hesaplama Algoritması.....	36
3.3 İçi Dolu İki Katlı Bileşik Silindir	36
3.3.1 Öngerilmesiz durumun değerlendirilmesi	37
3.3.2 Öngerilmeli durumun değerlendirilmesi	47
3.4 İçi Boş İki Katlı Bileşik Silindir.....	54
3.4.1 Temas koşulunun süreklilik durumu	54
3.4.2 Öngerilmesiz durumda süreksiz temas koşullarının etkisinin değerlendirilmesi	59
3.4.3 Öngerilmeli durumun değerlendirilmesi.....	65
3.4.4 İki katlı içi dolu ve içi boş bileşik silindirin sayısal sonuçlarının karşılaştırılması	72
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR.....	81
EKLER.....	85
ÖZGEÇMİŞ	127

KISALTMALAR

ÖÖÜDEDYT: Öngerilmeli Ortamda Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : İçi dolu iki katlı bileşik silindirin geometrisi.	8
Şekil 2.2 : İçi boş iki katlı bileşik silindirin geometrisi.	8
Şekil 3.1a : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0, h/R = 1.0$ 'de dalga yayılımına etkisi.	38
Şekil 3.1b : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0, h/R = 0.5$ 'de dalga yayılımına etkisi.	38
Şekil 3.1c : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0, h/R = 0.3$ 'de dalga yayılımına etkisi.	39
Şekil 3.1d : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0, h/R = 0.1$ 'de dalga yayılımına etkisi.	39
Şekil 3.2a : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5, h/R = 1.0$ 'de dalga yayılımına etkisi.	41
Şekil 3.2b : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5, h/R = 0.5$ 'de dalga yayılımına etkisi.	41
Şekil 3.2c : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5, h/R = 0.3$ 'de dalga yayılımına etkisi.	42
Şekil 3.2d : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5, h/R = 0.1$ 'de dalga yayılımına etkisi.	42
Şekil 3.3 : F 'in farklı değerleri için, birinci mod için dispersiyon diyagramı.	45
Şekil 3.4a : F 'in yüksek değerlerinde, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0, h/R = 1.0$ değerleri için içi dolu iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon eğrileri.	46
Şekil 3.4b : F 'in yüksek değerlerinde, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5, h/R = 0.3$ değerleri için içi dolu iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon eğrileri.	46
Şekil 3.5a : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.	47
Şekil 3.5b : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.	48
Şekil 3.5c : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 0.9\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.	49
Şekil 3.5d : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9 \text{ ve } 0.8\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.	49
Şekil 3.6a : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	50
Şekil 3.6b : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	50
Şekil 3.6c : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 0.9\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	51
Şekil 3.6d : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9 \text{ ve } 0.8\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	52
Şekil 3.7 : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2, 1.0, 0.8\}$ temel modun	

ikinci tip eğrisine etkisi.	53
Şekil 3.8 : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2, 1.0, 0.8\}$ temel modun	
birinci tip eğrisine etkisi.	54
Şekil 3.9a : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.1$ değeri için öngerilmenin çekme	
olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.....	55
Şekil 3.9b : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.5$ değeri için öngerilmenin çekme	
olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.....	56
Şekil 3.9c : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.9$ değeri için öngerilmenin çekme	
olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.....	56
Şekil 3.10a : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.1$ değeri için öngerilmenin basınç	
olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.....	57
Şekil 3.10b : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.5$ değeri için öngerilmenin basınç	
olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.....	57
Şekil 3.10c : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.9$ değeri için öngerilmenin basınç	
olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.....	58
Şekil 3.11a : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının	
$\{h^{(1)}/R = 1.0; h^{(2)}/R = 0.5\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.	60
Şekil 3.11b : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının	
$\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.5\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.	61
Şekil 3.11c : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının	
$\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.3\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.	61
Şekil 3.11d : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının	
$\{h^{(1)}/R = 1.0; h^{(2)}/R = 0.1\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.	62
Şekil 3.11e : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının	
$\{h^{(1)}/R = 0.1; h^{(2)}/R = 0.5\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.	62
Şekil 3.12 : F 'in yüksek değerlerinde, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $\{h^{(1)}/R=1.0; h^{(2)}/R = 0.5\}$	
değerleri için içi boş iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon	
eğrileri.....	63
Şekil 3.13a : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve	
1.2} temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	67
Şekil 3.13b : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$ ve	
1.5} temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	67
Şekil 3.13c : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5$ ve	
1.9} temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	68
Şekil 3.13d : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve	
0.9} temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	68
Şekil 3.13e : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9$ ve	
0.8} temel modun birinci tip eğrisine etkisi.	69

Şekil 3.14a : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $1.2\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.	70
Şekil 3.14b : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$ ve $1.5\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.	70
Şekil 3.14c : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5$ ve $1.9\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.....	71
Şekil 3.14d : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $0.9\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.....	71
Şekil 3.14e: İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9$ ve $0.8\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.....	72
Şekil 3.15a : $F = 0.3$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.....	73
Şekil 3.15b : $F = 1.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.....	73
Şekil 3.15c : $F = 3.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.....	74
Şekil 3.15d : $F = 5.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.....	74
Şekil 3.16a : $F = 0.3$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi	76
Şekil 3.16b : $F = 1.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.....	76
Şekil 3.16c : $F = 3.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi	77
Şekil 3.16d : $F = 5.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi	78
Şekil A.1 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.9$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	87
Şekil A.2 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.9$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	87
Şekil A.3 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	88
Şekil A.4 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	88
Şekil A.5 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	89
Şekil A 6 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	89

Şekil A.7 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	90
Şekil A.8 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	90
Şekil A.9 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	91
Şekil A.10 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	91
Şekil A.11 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.8$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	92
Şekil A.12 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.8$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	92
Şekil A.13 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.7$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	93
Şekil A.14 : Yüksek modlarda $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.7$, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	93
Şekil A.15 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$, $h^{(1)}/R = 0.5$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi..	94
Şekil A.16 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$, $h^{(1)}/R = 0.3$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi..	94
Şekil A.17 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$, $h^{(1)}/R = 0.1$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi..	95
Şekil A.18 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$, $h^{(1)}/R = 0.5$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi..	95
Şekil A.19 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$, $h^{(1)}/R = 0.3$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi..	96
Şekil A.20 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$, $h^{(1)}/R = 0.1$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	96
Şekil A.21: Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$, $h^{(1)}/R = 0.5$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	97
Şekil A.22 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$, $h^{(1)}/R = 0.3$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	97
Şekil A.23 : Yüksek modlarda $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$, $h^{(1)}/R = 0.1$; $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinin dispersiyon eğrilerine etkisi.....	98
Şekil A.24 : Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması...	99

- Şekil A.25 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması... 99
- Şekil A.26 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması..100
- Şekil A.27 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması 100
- Şekil A.28 :** Öngerilmenin(basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.101
- Şekil A.29 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 101
- Şekil A.30 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.102
- Şekil A.31 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması..102
- Şekil A.32 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması 103
- Şekil A.33 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması 103
- Şekil A.34 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 104
- Şekil A.35 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 104
- Şekil A.36 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 105
- Şekil A.37 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 105
- Şekil A.38 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 106
- Şekil A.39 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 106

- Şekil A.40 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 107
- Şekil A.41 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 107
- Şekil A.42 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 108
- Şekil A.43 :** Öngerilmenin (basınç) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 108
- Şekil A.44 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 109
- Şekil A.45 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 109
- Şekil A.46 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 110
- Şekil A.47 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 110
- Şekil A.48 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 111
- Şekil A.49 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 111
- Şekil A.50 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması..112
- Şekil A.51 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 112
- Şekil A.52 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 113
- Şekil A.53 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h^{(2)}/R = 0.1$ mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması113
- Şekil A.54 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması .114
- Şekil A.55 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.9$

- değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması...114
- Şekil A.56 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 115
- Şekil A.57 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.7$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. .115
- Şekil A.58 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 116
- Şekil A.59 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.5$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. .116
- Şekil A.60 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması. 117
- Şekil A.61 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.3$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması...117
- Şekil A.62 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin birinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması..118
- Şekil A.63 :** Öngerilmenin (çekme) olması durumunda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için sürekli temas koşullarının içi dolu ve içi boş silindirlerin ikinci mod için elde edilen dispersiyon eğrilerinin karşılaştırılması.. 118
- Şekil B.1 :** F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$, $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0, 1.2, 1.5, 1.9\}$ için içi dolu iki katlı bileşik silindirde temel modun ikinci tip dispersiyon eğrileri.....119
- Şekil B.2 :** F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$, $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0, 1.2, 1.5, 1.9\}$ için içi dolu iki katlı bileşik silindirde temel modun ikinci tip dispersiyon eğrileri.....119
- Şekil B.3 :** F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$, $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2, 1.0$ ve $0.8\}$ için içi dolu iki katlı bileşik silindirde temel modun ikinci tip dispersiyon eğrileri.....120
- Şekil B.4 :** F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$, $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2, 1.0$ ve $0.8\}$ için içi dolu iki katlı bileşik silindirde temel modun ikinci tip dispersiyon eğrileri.....120
- Şekil B.5 :** F 'in yüksek değerlerinin, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon eğrileri.....121
- Şekil B.6 :** Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $0.9\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi...121

Şekil B.7 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..122
Şekil B.8 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..122
Şekil B.9 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..123
Şekil B.10 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 0.9\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..123
Şekil B.11 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..124
Şekil B.12 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..124
Şekil B.13 : Öngerilmenin $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin temel modun birinci tip dispersiyon eğrilerine etkisi... ..125
Şekil B.14 : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ $\{h^{(1)}/R = 0.3; h^{(2)}/R = 0.5\}$ için dispersiyon eğrilerine etkisi... ..125
Şekil B.15 : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ $\{h^{(1)}/R = 0.1; h^{(2)}/R = 0.5\}$ için dispersiyon eğrilerine etkisi.126
Şekil B.16 : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ $\{h^{(1)}/R = 1.0; h^{(2)}/R = 0.5\}$ için dispersiyon eğrilerine etkisi.126

SEMBOL LİSTESİ

R	: Doğal durumda silindirler arası silindirik yüzeyin yarıçapı
h	: İçi dolu iki katlı bileşik silindirde dış silindirin doğal durumdaki kalınlığı
$h^{(1)}$	: İçi boş iki katlı silindirin dış katmanının doğal durumdaki kalınlığı
$h^{(2)}$	: İçi boş iki katlı silindirin iç katmanının doğal durumdaki kalınlığı
$u_m^{(k)}$	: Yerdeğiştirme vektörü bileşenleri
$\lambda_m^{(k)}$	: Birim uzama-kısalma parametresi
$Q_{ij}^{(k)}$	: Gerilme tansörü bileşenlerinin pertürbasyonu
$\omega_{ijj}^{(k)}$	: Elastisite bağıntılarında kullanılan sabitler
$\rho^{(k)}$	: Başlangıç durumunda k nolu malzemenin yoğunluğu
$\varepsilon_{(ij)}$	: Green şekil değiştirme tansörünün fiziksel bileşenleri
$S_{(ij)}$	: Lagrange gerilme tansörünün fiziksel bileşenleri
$\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}$	: Malzeme sabitleri
Φ	: Şekil değiştirme enerjisi
F	: Kayma-yay parametresi
$J_0(x)$	: Sıfırıncı mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonu
$Y_0(x)$	: Sıfırıncı mertebeden ikinci tip Bessel fonksiyonu
$I_0(x)$	: Sıfırıncı mertebeden modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu
$K_0(x)$	: Sıfırıncı mertebeden Macdonald fonksiyonu
c	: Dalga yayılım faz hızı
ω	: Dalganın açısal frekansı
k	: Dalga sayısı
kR	: Boyutsuz dalga sayısı
r, θ, z	: Doğal durumdaki silindirik koordinatlar
r', θ', z'	: Öngerilmeli durumdaki silindirik koordinatlar

ÖNGERİLMELİ BİLEŞİK SİLİNDİRLERDE TEMAS KOŞULLARININ EKSENEL SİMETRİK BOYUNA DALGA YAYILIMINA ETKİSİ

ÖZET

Yapı malzemelerinde öngerilme ve ön şekil değiştirmenin oluşması farklı sebeplere dayanır. Son çeyrek yüzyılda yapı malzemelerinde meydana gelen öngerilmelerin hem teorik hem de pratik bakımından incelenmesi önem kazanmıştır. Öngerilmenin malzemenin kullanımı sırasında oluşturduğu etkiler verimlilik, emniyet ve konfor gibi değişik açılardan araştırılmıştır.

Bu çalışmada öngerilmeli iki katlı bileşik silindirlerde temas koşullarının eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisi incelenmiştir. Çalışmada parçalı homojen cisim modeli olarak, öngerilmeli elastik cisimlerde üç boyutlu doğrusallaştırılmış elastik dalga yayılımı teorisi kullanılmıştır (ÖÖÜDEDYT). Bileşik silindirlerin katmanlarından herbiri sıkışabilir hiper elastik malzemeden yapılmış kabul edilerek malzemenin mekanik davranışı harmonik potansiyel ile tanımlanmıştır. Silindirler arasındaki temas yüzeyinde süreksizlik derecesinin kayma-yay parametresine bağlı olduğu kabulü yapılmıştır. Bu parametrenin değişiminin temel modlara ait dispersiyon eğrilerine etkisi geniş bir biçimde incelenmiştir. Sayısal sonuçlar grafikler halinde verilmiş ve bu sonuçların elde edilmesi için uygun algoritma geliştirilmiştir.

Sunulan çalışma, öngerilmeli iki katlı bileşik silindirlerde sürekli ve süreksiz temas koşullarının eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisinin incelenmesine yönelik ilk girişimdir.

THE INFLUENCE OF THE CONTACT CONDITIONS ON THE DISPERSION OF THE AXISYMMETRIC LONGITUDINAL WAVES IN THE PRE-STRESSED COMPOUND CYLINDER

SUMMARY

Initial stresses and strains can occur in structural materials due to the different reasons. Both theoretical and practical investigation of initial stresses in the structural materials have become important in the last quarter of the century. The effects of the initial strains on the materials in use has been investigated in many ways such as efficiency, safety and comfort.

In this study, the influence of the imperfectness of the interface conditions on the dispersion of the axisymmetric longitudinal waves in the pre-strained compound cylinder is investigated. The investigations are performed within the framework of the piecewise homogeneous body model by utilizing the 3D linearized theory of elastic waves in elastic bodies with initial stresses(TLTEWISB). It is assumed that the layers of the compound cylinder are made from high elastic compressible materials and their elasticity relations are given through the harmonic potential. The shear spring type imperfectness of the interface conditions is considered and the degree of this imperfectness is estimated by the shear-spring parameter. Numerical results showing the influence of this parameter on the behavior of the dispersion curves are obtained related to the fundamental mode.

The previously performed algorithms are modified for the present study and than the numerical results and graphs are obtained using the modified programs.

The present study is the first attempt to investigate the influence of the imperfectness of the interface conditions on the dispersion of the axisymmetric longitudinal waves in the pre-stressed compound cylinder.

1. GİRİŞ

Yapı elemanlarındaki öngerilmeler (veya ön şekil değiştirmeler) sadece statik açıdan değil, aynı zamanda malzemenin dinamik davranışı bakımından dikkate alınması gereken önemli bir konudur. Öngerilmeler jeostatik kuvvetlere maruz kalmış yerin farklı katmanlarında, kompozit malzemelerin hazırlanmasında uygulanan işlem sırasında, yapı elemanlarının kurulumu ve montajında ortaya çıktığından etkilerinin incelenmesi daima güncelliğini korumaktadır. Bundan başka, işletme süresi boyunca dış etkiler (rüzgar, deprem, servis yükleri vb.) ve ilave kuvvetler altında yapı elemanlarında oluşabilecek mekanik etkilerin analizinde öngerilmelerin bir faktör olarak dikkate alınması gerekmektedir. Öngerilmeye maruz malzeme problemlerinin irdelenmesi, hem teorik hem de uygulama alanı bakımından büyük bir öneme sahiptir.

1.1 Tezin Amacı

Literatür araştırmalarının sonucunda elde edilen verilere göre temas koşullarının süreksiz olması durumunun öngerilmeli ve öngerilmemiş iki katlı bileşik silindirlerdeki eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisi şimdiye kadar incelenmemiştir. Tezin amacı temas koşullarının öngerilmeli içi boş ve içi dolu iki katlı bileşik silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkilerinin incelenmesidir. Malzeme, hiper elastik sıkışabilir malzeme olarak kabul edilmiş ve elastisite bağıntıları harmonik potansiyel ile tanımlanmıştır.

1.2 Literatür Özeti

Öngerilmeli elemanlarda dalga yayılımının incelenmesi bir çok araştırmacı tarafından yapılmıştır. Bu araştırmaların sistematik analizi Biot (1965), Eringen ve Suhubi (1975), Guz (2004) tarafından verilmiştir. Bu çalışmaların özetini Guz (2002, 2005), Zhuk ve Guz (2007), Akbarov (2007) yayınlarında bulmak mümkündür. Söz konusu araştırmaların önemli bir kısmının kısa özeti aşağıda ele alınmıştır.

Öngerilmeli çok katlı ortamlarda harmonik dalga yayılımından söz edildiğinde ilk çalışmanın, literatür incelenmesine dayanarak Hayes ve Rivline (1961) ile başladığı görülmüştür. Bu çalışmada, öngerilmeli yarı uzayda Rayleigh yüzey dalgaları incelenmiştir. Dalga yayılımının öngerilmelerin asal eksenı boyunca oluştuğu varsayılarak yayılımın dispersif olmadığı tıpkı (elastodinamiğin klasik teorisinde olduğu gibi) doğrulanmıştır. Bundan sonra da bu alanda bir çok araştırma yapılmıştır. Son yirmi yılda gerçekleştirilen çalışmalar aşağıda özetlenmiştir.

Dowaik ve Ogden (1991) tarafından yapılan çalışmada şekil değiştirme-enerji fonksiyonu kullanılarak öngerilmelerin bir asal eksen boyunca etkidiği varsayılarak yayılan yüzey dalgalarının bir somut denklemi elde edilmiştir. Sotiropoulos (1998) tarafından iki ayrı öngerilmeli sıkışabilir yarı uzayın düzlem sınırları boyunca elastik iç yüzey dalgaların (Stoneley dalgaları) yayılımı incelenmiştir. İki farklı elastik malzemeden meydana gelen düzlemlerin arayüzeyinde ortaya çıkan elastik iç yüzey dalgaların (Stoneley dalgaları) yayılımına öngerilmelerin etkileri incelenmiştir. Sotiropoulos çalışmasında yarı uzayın maruz kaldığı homojen sonlu şekil değiştirmelerin maruz kaldığı asal eksenlerden birinin ara yüzeye normal olduğu varsayımını yapmıştır.

Akbarov ve Ozışık (2003) alışmalarında öngerilmeli katman ile kaplanmış öngerilmeli yarı düzlemdeki genelleştirilmiş Rayleigh yüzey dalgalarının dispersiyonunu incelemişlerdir. Bu çalışmada, katman ve yarı düzlem arasında sürekli temas koşullarının sağlandığı varsayımı yapılarak bileşenlerin mekanik davranışı Murnaghan potansiyeli ile tanımlanmıştır. Ayrıca, ngerilmeler ve ön şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayılarak klasik doğrusal elastisite teorisıyla belirlenmiştir. İlgili dispersiyon denkleminden elde edilen sayısal sonuçlar analiz edilmiştir. Akbarov ve Ozışık (2004), Akbarov ve Ozışık (2003) alışmalarındaki elde edilen sonuçları kullanarak katman ve yarı düzlem arasında süreksiz temas koşulları için de inceleme yapmışlardır.

Rogerson ve Fu (1995) yaptıkları çalışmada öngerilmeli sıkışmaz elastik plakta dalga yayılımı için dispersiyon bağıntılarının asimtotik analizi ele alınmıştır. Dalga hızının dalga sayısının bir fonksiyonu olarak bir asimtotik açılımı elde edilmiştir.

Plak malzeme sabitlerinin özel koşulları sağladığı durum için sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Bu özel koşulları neo-Hookean ve Mooney-Rivlin şekil değiştirme-enerji fonksiyonların koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Sandiford ve Rogerson (2000), Rogerson ve Fu (1995) tarafından yapılan çalışmaları geliştirerek ön şekildeğiştirmiş az sıkışabilir elastik plak üzerinde inceleme yapmışlardır. Sayısal sonuçlar elde edildiğinde elastisite bağıntıları Varga şekil değiştirme-enerji fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Sandiford ve Rogerson (2000) çalışmalarında ele alınan problem Nolde ve diğ. (2004) tarafından da ele alınmış, plak malzemesinin elastik davranışını gösteren çok yaygın olarak kullanılan şekil değiştirme-enerji fonksiyonları için incelenmiştir. Malzemenin farklılığının etkisini elde etmek için neo-Hookean, Varga ve Blatz-Ko şekil değiştirme-enerji fonksiyonları kullanılmıştır.

Sandiford ve Rogerson (2000) çalışmalarında önerilmeli sıkışmaz dört tabakalı simetrik yapıda genişlemeli dalga yayılımı incelenmiştir. Yapının orta düzleminde üst ve alt kısımda lamine edilmiş iki simetrik kat olduğu varsayılmıştır. Gerçekte bu çalışma, sıkışmaz bir malzemedan oluşan üç tabakalı plak sandiviçinde genişlemeli dalga yayılmasının incelenmesidir. Sayısal sonuçlar Mooney-Rivlin ve Varga potansiyeli için elde edilmiştir.

Öngerilmeli sıkışabilir malzemedan yapılmış iki katlı bir plakta öngerilmenin asal eksenini boyunca yayılan dalgaların dispersiyonu Kayestha ve diğ. (2010) tarafından incelenmiştir. Sayısal sonuçlar elde etmek için hem iki parametrelili sıkışabilir neo-Hookean malzemesi hem de Varga malzemesi kullanılmıştır.

Öngerilmeli tabakalı ortamlara ait yukarıda gösterilen bütün çalışmalarda dalga yayılımına her hangi bir dış kısıtlama olmadığı varsayılımı vardır. Bu varsayımı Wijeyewickrema ve diğ. (2008) çalışmalarında ortadan kaldırarak öngerilmeli homojen bir plakta plak yüzey yerdeğiştirmelerinin engellenmesinin dalga yayılımına (dispersiyona) etkisi incelenmiştir.

Yukarıdaki çalışmalarda katlar arasındaki temas koşullarının tam sürekli olduğu varsayımı yapılmıştır. Süreksiz temas koşullarının önerilmeli çok katlı plaklardaki dalga yayılımına etkisinin incelenmesi Leungvichcharoen ve Wijeyewickrema (2003), Leungvichcharoen ve diğ. (2004), Wijeyewickrema ve Leungvichcharoen (2009) tarafından yapılmıştır. Leungvichcharoen ve Wijeyewickrema (2003), Leungvichcharoen ve diğ. (2004) çalışmalarında önerilmeli sıkışmaz sandiviç plakalarda süreksiz temas koşullarını dikkate alarak simetrik ve simetrik olmayan dalga yayılımının dispersif davranışını analiz etmişlerdir. Wijeyewickrema ve Leungvichcharoen (2009) çalışmalarında, Leungvichcharoen ve Wijeyewickrema (2003), Leungvichcharoen ve diğ. (2004) yaptıkları çalışmayı geliştirerek önerilmeli sıkışabilir sandiviç simetrik plağı incelemişlerdir. Bu çalışmalardaki sayısal örnekler için düzlem-şekil değiştirme hali dikkate alınarak hem neo-Hookean malzemesi hem de Varga malzemesi kullanılmıştır.

Böylece, önerilmeli sıkışabilir ve sıkışmaz çok katlı plaklardaki harmonik dalga dispersiyonu ile ilgili çalışmaların özeti tamamlanmıştır. Unutulmamalıdır ki, bu çalışmalardaki elde edilen sayısal sonuçlar bir araştırmacıya önerilmenin, dalga yayılım hızına veya tabakalı bir ortamdaki dalga yayılımına etkisinin nitelik ve nicelik açısından nasıl olabileceği sorusuna bir cevap verememektedir. Bu boşluğu Akbarov ve diğ. (2008, 2011) hiper elastik malzemeden yapılmış önerilmeli üç katlı sandiviç bir plakta esnek Lamb dalgaların incelenmesi ile doldurmuştur. Katmanların malzemelerinin mekanik bağıntıları harmonik-tip potansiyel ile tanımlanmıştır. Aşağıda bu tez çalışması ile doğrudan alakalı önerilmeli dairesel kesitli iki katlı bileşik silindirlerde harmonik dalga dispersiyonu ile ilgili çalışmalar ele alınmıştır.

Önerilmeli silindirik elemanlarda elastik dalgaların yayılımı ile alakalı ilk öncü çalışma Green (1961) tarafından yapılmıştır. Green (1961) çalışmasında önerilmeli homojen silindirlerde burulma dalga yayılımını incelemiştir.

Demiray ve Suhubi (1970) çalışmalarında ön burulmalı dairesel silindirlerde simetrik dalga yayılımlarının ayrı ayrı oluşamayacağı belirlenmiş ve yeni tip simetrik dalgaların oluştuğu gösterilmiştir.

Belward (1976) çalışmasında sıkışmaz malzemeden yapılmış önerilmeli silindirde dalga yayılımını incelemiştir.

Silindirdeki öngerilme, doğrusal olmayan elastisite teorisi kullanılarak bulunmuştur. Homojen bir silindirde boyuna dalga yayılımının incelenmesi Guz ve diğ. (1975) ve Kushnir (1979) çalışmalarına da konu olmuştur. Bu konudaki çalışmalar Guz (2004)'ün monografında verilmiştir.

Söz konusu önceki çalışmalar homojen dairesel silindirler için yapılmış çalışmalardır. 21. yüzyılın başlamasından önce öngerilmeli iki katlı bileşik silindirlerde dalga yayılımı problemi incelenmemiştir. Bu alandaki ilk teşebbüs Akbarov ve Guz (2004) tarafından yapılmıştır.

Ozturk ve Akbarov (2008, 2009a, 2009b) çalışmalarında burulma dalgalarını, öngerilmeli içi boş ve dolu iki katlı bileşik silindirlerde incelemişlerdir. Öngerilmelerin klasik doğrusal elastisite teorisiyle hesaplanabildiği varsayımı yapılmıştır. Ayrıca bileşenlerin elastisite bağıntıları Murnaghan potansiyeli ile tanımlanmıştır.

Akbarov ve Guliev (2009) çalışmalarında Akbarov ve Guz (2004) çalışmalarını geliştirmişlerdir. Bu çalışmada şekil değiştirmelerin sonlu olduğu, malzemelerin sıkışabilir olduğu, mekanik bağıntılarının harmonic-tip potansiyel ile tanımlandığı vurgulanmıştır. Aynı kabuller kullanılarak Akbarov ve Guliev (2010) çalışmalarında sonlu öngerilmelerin sıkışabilir sonsuz elastik ortamla çevrelenmiş dairesel silindirlerdeki dalga yayılımına etkilerini incelemişlerdir.

Akbarov ve diğ. (2010) çalışmasında ise, Akbarov ve Guliev (2009, 2010) çalışmasındaki problemi bu kez malzemenin sıkışamaz hali için incelenmiş ve malzemenin gerilme-şekil değiştirme bağıntıları Treolar potansiyeli ile verilmiştir. Silindirin içinde ve onu çevreleyen kısımda öngerilmenin dalga yayılımına etkileri ile alakalı sayısal sonuçlar sunulmuştur. Bu çalışmalarda öngerilmelerin dalga yayılımı yönünde bir asal eksen boyunca (silindir boyunca) basınç veya çekme ile oluştuğu varsayılmıştır. Ön burulmalı bileşik silindirlerdeki simetrik boyuna dalgaların dispersiyonu Akbarov ve diğ. (2010b, 2011) tarafından araştırma konusu olmuştur. Malzeme bileşenleri izotrop ve homojen olduğu kabul edilmiştir. Yukarıdaki çalışmaların tümünde iç ve dış silindirlerin temas eden yüzeylerinde kuvvet ve yerdeğiştirme vektörlerinin sürekli olduğu varsayımı yapılmıştır.

Ancak bir çok durumda (örneğin öngerilmeli kabloların iki malzemeli bileşik silindir olarak modellenmesi durumu gibi) yüzeyde temasın sürekli olarak sağlandığı varsayımı gerçekçi olmamaktadır. Sonuç olarak, teorik sonuçları belirtilen durumlara uygulamak için iki katlı bileşik silindirdeki dalga yayılımına temas koşullarının süreksizliğinin etkilerinin incelenmesi vazgeçilmez olmuştur.

Berger ve diğ. (2000) çalışmalarında Jones ve Whitter (1967) tarafından süreksiz temas koşullarının önerildiği bir modeli kullanarak öngerilmesiz iki katlı bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımının incelenmesi yapılmıştır. Benzer bir çalışma Kepceler (2010) tarafından iki malzemeli bileşik silindir için yapılmıştır. Bu çalışmada Ozturk ve Akbarov (2008, 2009b), Berger ve diğ. (2000)'in çalışmalarında temas koşullarının süreksizliğini ifade eden veriler kullanılarak inceleme yapılmıştır.

Literatür araştırmalarından elde edilen sonuçlar ışığında bakıldığında temas koşullarının öngerilmeli ve öngerilmesiz durumdaki iki katlı bileşik silindirlerde eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisinin incelenmesi ilk kez bu tez çalışmasında ele alınmıştır.

2. BÖLÜM

2.1 Problemin Matematiksel Formülasyonu

Bu çalışmada, önerilmeli içi dolu ve içi boş iki katlı bileşik silindirde temas koşullarının eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisinin incelenmesi yapıldığından her bir durum için matematiksel formülasyonun çıkarılması, temas ve sınır koşullarının belirlenmesi ve modellenmesi yapılmıştır. Söz konusu iki durum aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

İçi dolu iki katlı bileşik silindir:

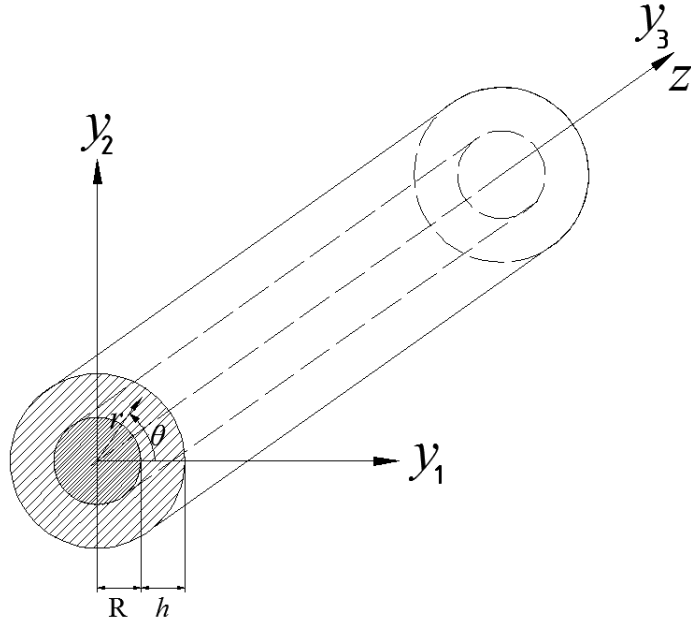
İki katlı bileşik silindirden oluşmaktadır. İçi dolu ve dışı silindirle çevrili bileşik silindir. Şekil 2.1’de içi dolu iki katlı bileşik silindirin geometrisi verilmiştir.

İçi boş iki katlı bileşik silindir:

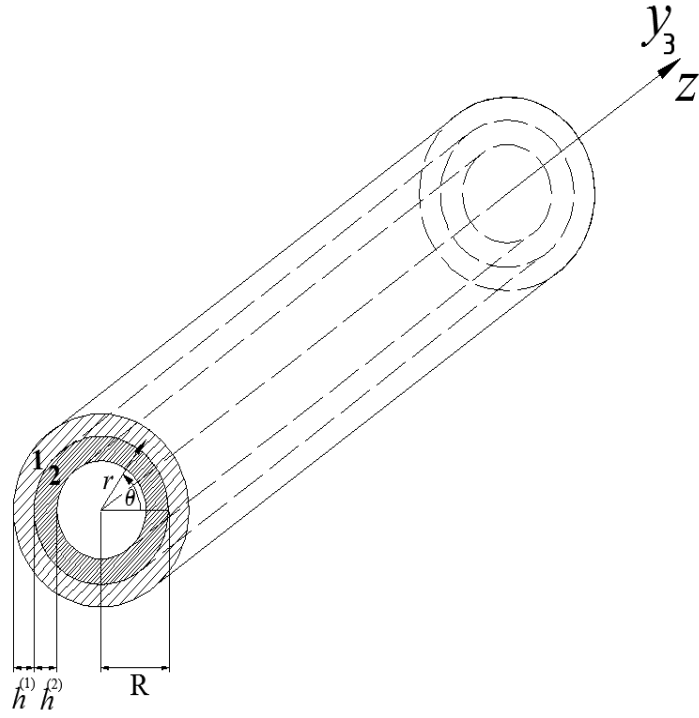
İki katlı bileşik silindirden oluşmaktadır. İçi boş ve dışı silindirle çevrili bileşik silindir. Şekil 2.2’de içi boş iki katlı bileşik silindirin geometrisi gösterilmiştir.

Doğal durumda bileşik silindirlerin noktalarının konumunu $Or\theta z$ silindirlik koordinat takımında verilen Lagrange koordinatları ile belirlenmektedir. Silindirlerin Oz eksenini boyunca sonsuz uzunlukta olduğu ve başlangıç şekildeğiştirme-gerilme durumunda bu eksene göre eksenel simetrik ve homojen olduğu kabulü yapılmıştır. Gerilme alanının Oz eksenini boyunca iki katlı bileşik silindirin başlangıçta çekmeye veya basınca maruz kalarak oluştuğu düşünülmüştür.

İçi dolu ve içi boş iki katlı bileşik silindirlerde önerilmeler Oz eksenini boyunca silindirlerin ya çekmeye yada basınca maruz kalarak oluştuğu varsayılmaktadır. Çekme veya basınç gerilmesi, içi dolu ve içi boş iki katlı bileşik silindir oluşturulmadan önce her bir silindir malzemeye uygulandıktan sonra önerilmeli bileşik silindir oluşturulmuştur.



Şekil 2.1: İçi dolu iki katlı bileşik silindirin geometrisi.



Şekil 2.2: İçi boş iki katlı bileşik silindirin geometrisi.

Ancak yapılan araştırmalar, silindirler birleştirildikten sonra oluşan aksenal simetrik öngerilme durumları için de geçerli olmaktadır. Bu durumda bileşik silindiri oluşturan iç ve dış silindir malzemelerinin radyal ve çevresel deformasyonun farklarının bir sonucu olarak (klasik doğrusal elastisite teorisinde benzer deformasyon durumu Poisson oranları ile belirlenmektedir) Oz eksenine paralel alan üzerinde homojen olmayan bir ön gerilme-şekil değiştirme alanı ortaya çıkar. Ancak çok iyi bilinmektedir ki, mekanik öngörüler dikkate alındığında, söz konusu homojen olmayan gerilmeler, Oz eksenine dik alanda etki eden gerilmelerden çok küçük olduğundan ihmal edilebilir.

İçi dolu iki katlı bileşik silindirin doğal durumdaki iç yarıçapı R , onu çevreleyen boş silindirin kalınlığı h dır. İçi boş iki katlı bileşik silindirin doğal durumdaki iç silindirin iç yarıçapı R , iç silindirin kalınlığı $h^{(2)}$ ve onu çevreleyen dış silindirin kalınlığı $h^{(1)}$ dır.

Bileşik silindirde iç ve dış silindirlere ait büyüklükler sırasıyla, üst (2) ve üst (1) indisleri ile gösterilmiştir. Başlangıç durum ise, üst 0 indisi ile işaretlenmiştir.

Sonuç olarak, içi dolu ve içi boş iki katlı bileşik silindirde başlangıç durumda iç ve dış katlarındaki radyal ve Oz eksenleri yönündeki ön şekil değiştirmeler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$u_r^{(k),0} = (\lambda_1^{(k)} - 1)r, u_\theta^{(k),0} = 0, u_z^{(k),0} = (\lambda_3^{(k)} - 1)z, \lambda_1^{(k)} \neq \lambda_3^{(k)}, k = 1, 2 \quad (2.1)$$

$u_r^{(k),0}$ ve $u_z^{(k),0}$ başlangıç durumdaki yerdeğiştirmeleri, $\lambda_1^{(k)}$ ve $\lambda_3^{(k)}$ ise, sırasıyla radyal ve Oz eksenleri yönüne ait birim uzama-kısalma parametreleridir.

Başlangıç durumda (yani öngerilme olduğu durumda) silindirlerin noktalarının konumu $O'r'\theta'z'$ silindirik koordinat takımında verilen Lagrange koordinatları ile belirlenmiştir. Böyle ki,

$$r' = \lambda_1^{(k)}r, z' = \lambda_3^{(k)}z. \quad (2.2)$$

(2.2)'de içi dolu bileşik silindir için:

$$0 \leq r \leq R \text{ durumunda } k = 2$$

$$R < r \leq R + h \text{ durumunda } k = 1$$

İçi boş bileşik silindir için:

$R \leq r \leq R + h^{(2)}$ durumunda $k = 2$

$R + h^{(2)} < r \leq R + h^{(1)} + h^{(2)}$ durumunda $k = 1$

İleride r' ve z' koordinatları ile belirlenen büyüklükler üst (')'le gösterilmektedir.

Bu çalışmada yukarıda verilenler çerçevesinde bileşik silindirlerde Oz (veya $O'z'$) eksenini boyunca yayılan ve bu eksene göre simetrik olan boyuna dalgaların yayılımına silindirler arasındaki temas koşullarının etkisi incelenmiştir.

Akbarov ve Guliev (2008) çalışmalarında kullanılan notasyon ve yöntem kullanılmıştır. Sonuçta, aksenal simetri durumunda sıkışabilir bir cisim için Öngerilmeli Ortamda Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖÖÜDEDYT)'nin temel bağıntıları elde edilmiştir. Burada homojen cisim modeli kullanıldığından malzeme bileşenlerinin herbiri bu bağıntıları sağlamaktadır.

Hareket denklemleri:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r'} Q_{r'r'}^{(k)} + \frac{\partial}{\partial z'} Q_{r'z'}^{(k)} + \frac{1}{r'} (Q_{r'r'}^{(k)} - Q_{\theta'\theta'}^{(k)}) &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{r'}^{(k)}, \\ \frac{\partial}{\partial r'} Q_{z'r'}^{(k)} + \frac{\partial}{\partial z'} Q_{z'z'}^{(k)} + \frac{1}{r'} Q_{z'r'}^{(k)} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{z'}^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mekanik bağıntılar:

$$\begin{aligned} Q_{r'r'}^{(k)} &= \omega_{1111}^{(k)} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial r'} + \omega_{1122}^{(k)} \frac{u_{r'}^{(k)}}{r'} + \omega_{1133}^{(k)} \frac{\partial u_{z'}^{(k)}}{\partial z'}, \\ Q_{\theta'\theta'}^{(k)} &= \omega_{2211}^{(k)} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial r'} + \omega_{2222}^{(k)} \frac{u_{r'}^{(k)}}{r'} + \omega_{2233}^{(k)} \frac{\partial u_{z'}^{(k)}}{\partial z'}, \\ Q_{z'z'}^{(k)} &= \omega_{3311}^{(k)} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial r'} + \omega_{3322}^{(k)} \frac{u_{r'}^{(k)}}{r'} + \omega_{3333}^{(k)} \frac{\partial u_{z'}^{(k)}}{\partial z'}, \\ Q_{r'z'}^{(k)} &= \omega_{1313}^{(k)} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial z'} + \omega_{1331}^{(k)} \frac{\partial u_{z'}^{(k)}}{\partial r'}, \\ Q_{z'r'}^{(k)} &= \omega_{3113}^{(k)} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial z'} + \omega_{3131}^{(k)} \frac{\partial u_{z'}^{(k)}}{\partial r'}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(2.3) ve (2.4) nolu denklemlerdeki $Q_{r'r'}^{(k)}, \dots, Q_{3r'}^{(k)}$ büyüklükleri simetrik olmayan Kirchoff gerilme tansörünün bileşenlerinin pertürbasyonu; $u_{r'}^{(k)}$ ve $u_{z'}^{(k)}$ yerdeğiştirme vektörü bileşenlerinin pertürbasyonunu; $\omega_{1111}^{(k)}, \dots, \omega_{3333}^{(k)}$ k . malzemesinin elastisite sabitlerini ve başlangıç şekil değiştirmeleri belirten parametreleri içeren büyüklükleri; $\rho^{(k)}$ ise k nolu malzeme bileşeninin yoğunluğunu göstermektedir.

Bu çalışmada verilen denklem takımları ve bağıntılar Eringen ve Suhubi (1975), Guz (2004) monograflarındaki çalışmaya dayanarak çıkarılmıştır. Bu çalışmadaki sözkonusu hiper elastik cisimler ve doğrusallaştırma işlemleri için uygulanan sonlu elastik şekil değiştirme teorisinin temel bağıntıları aşağıda açıklanmıştır.

2.1.1 Hiper elastik cisimlerin doğrusal olmayan elastisite teorisi bağıntıları

Bu amaçla $Or\theta z$ silindirik koordinat sisteminde tanımlanan Lagrange koordinatları kullanılmaktadır. İlk önce Green şekil değiştirme tansörü $\tilde{\epsilon}$ 'nin $Or\theta z$ takımındaki fiziksel bileşenlerinin yerdeğiştirme vektörü $\vec{u}$ 'nun fiziksel bileşenleri arasındaki ilişki yazılmalıdır.

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 \right\}, \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2, \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Kirchoff gerilme tansörünün tanımı ele alındığında elastik ortamların sonlu şekil değiştirmelerinde farklı gerilme tansörleri olarak kullanılmaktadır. Bu tansörler, gerilme vektörlerinin şekil değiştirmeden önceki veya sonraki alanların oranına göre alınması ile farklılaştırılırlar. Çünkü, sonlu elastik şekil değiştirme teorisinde hareket denklemlerinin ve kuvvetlere göre verilen sınır koşullarının yazılımında alan ve hacim değişimleri gözönüne alınmak zorundadır. Bu açıklamalar çerçevesinde bu

çalışmada kullanılan gerilme tansörlerinden Kirchoff ($\tilde{\mathbf{q}}$ ile işaret edilirse) ve Lagrange ($\tilde{\mathbf{s}}$ işaret edilirse) gerilme tansörleri ele alınsın. Bu gerilme tansörlerinin her ikisinin bileşenleri cisme şekil değiştirme durumunda etki eden iç kuvvetlerin şekil değiştirmeden önceki uygun alana göre yayılım şiddetini belirler.

Gerilme tansörü $\tilde{\mathbf{s}}$ 'in, $s_{(ij)}$ fiziksel bileşenleri, şekil değiştirme enerjisi potansiyeli $\Phi = \Phi(\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \dots, \varepsilon_{zz})$ cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir.

$$s_{(ij)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ij)}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{(ji)}} \right) \Phi \quad (2.6)$$

Burada, $(ij) = rr, \theta\theta, zz, rz$ olarak tanımlanmıştır.

Gerilme tansörü $\tilde{\mathbf{q}}$ 'nun bileşenleri ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} q_{rr} &= s_{rr} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + s_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ q_{rz} &= s_{rr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + s_{rz} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\ q_{\theta\theta} &= s_{\theta\theta} \left(1 + \frac{u_r}{r} \right), \\ q_{zr} &= s_{zr} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + s_{zz} \frac{\partial u_r}{\partial z}, \\ q_{zz} &= s_{zr} \frac{\partial u_z}{\partial r} + s_{zz} \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

(2.6) ve (2.7) denklemlerinde görüldüğü gibi $\tilde{\mathbf{s}}$ simetrik iken, $\tilde{\mathbf{q}}$ simetrik değildir. Ele alınan durumda hareket denklemi Kirchhoff gerilme tansörü bileşenleri aracılığı ile aşağıdaki gibi yazılmaktadır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial q_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}(q_{rr} - q_{\theta\theta}) &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial q_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}q_{rz} + \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bu çalışmada (2.6) denkleminde verilen şekil değiştirme enerjisi potansiyeli Φ harmonik potansiyel olarak, yani

$$\Phi = \frac{1}{2} \lambda e_1^2 + \mu e_2 \quad . \quad (2.9)$$

biçiminde ele alınmaktadır. Burada,

$$e_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_1} + \sqrt{1+2\varepsilon_2} + \sqrt{1+2\varepsilon_3} - 3, \\ e_2 = \left(\sqrt{1+2\varepsilon_1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{1+2\varepsilon_2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{1+2\varepsilon_3} - 1\right)^2. \quad (2.10)$$

yazılabilmektedir.

(2.9) ve (2.10) denklemindeki λ ve μ malzeme sabitleridir. ε_i ($i = 1, 2, 3$) ise, Green şekil değiştirme tansörünün asal değerleridir. Böylece gerilme ve şekil değiştirme tansörleri tanımlamaları, aralarındaki bağıntıları ve sonlu elastik şekil değiştirme teorisindeki hareket denklemi verilmiştir.

2.1.2 Ön şekil değiştirme ve öngerilmenin belirlenmesi

(2.1) nolu denklem (2.5) nolu denklemde yerine yazıldığında ve uygun üst indisler kullanıldığında başlangıç şekil değiştirmeler için aşağıdaki ifade elde edilmiştir.

$$\varepsilon_{rr}^{(k),0} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0} = \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_1^{(k)} \right)^2 - 1 \right), \\ \varepsilon_{zz}^{(k),0} = \frac{1}{2} \left(\left(\lambda_3^{(k)} \right)^2 - 1 \right), \\ \varepsilon_{rz}^{(k),0} = 0. \quad (2.11)$$

(2.11) nolu denklem incelendiğinde, başlangıç durumunda Green şekil değiştirme tansörünün asal değerleri $\varepsilon_1^{(k),0}$, $\varepsilon_2^{(k),0}$ ve $\varepsilon_3^{(k),0}$ 'nin sırasıyla, $\varepsilon_{rr}^{(k),0}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0}$ ve $\varepsilon_{zz}^{(k),0}$ ile, örtüştüğü görülmüştür. (2.11) nolu denklem (2.9) ve (2.10) nolu denklemlerde kullanıldığında başlangıç durumdaki şekil değiştirme enerjisi potansiyeli aşağıdaki biçimde elde edilmiştir.

$$\Phi^{(k),0} = \frac{1}{2} \lambda^{(k)} \left(2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3 \right)^2 + \mu^{(k)} \left(2 \left(\lambda_1^{(k)} - 1 \right)^2 + \left(\lambda_3^{(k)} - 1 \right)^2 \right). \quad (2.12)$$

(2.11)'den gözüktüğü gibi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{rr}^{(k),0}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0}} = \frac{1}{\lambda_1^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1^{(k)}}, \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{zz}^{(k),0}} &= \frac{1}{\lambda_3^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \lambda_3^{(k)}}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

olmaktadır.

(2.12) ve (2.13) denklemlerini kullanarak, (2.6)'dan başlangıç durumdaki gerilmeler için aşağıdaki ifadeler elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}s_{zz}^{(k),0} &= \left[\lambda^{(k)} \left(2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3 \right) + 2\mu^{(k)} \left(\lambda_3^{(k)} - 1 \right) \right] \left(\lambda_3^{(k)} \right)^{-1}, \\ s_{r\theta}^{(k),0} &= s_{rz}^{(k),0} = s_{z\theta}^{(k),0} = 0, \\ s_{rr}^{(k),0} &= s_{\theta\theta}^{(k),0} = \left[\lambda^{(k)} \left(2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3 \right) + 2\mu^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} - 1 \right) \right] \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Ele alınan problemlerin formülasyonuna göre

$$s_{rr}^{(k),0} = s_{\theta\theta}^{(k),0} = \left[\lambda^{(k)} \left(2\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} - 3 \right) + 2\mu^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} - 1 \right) \right] \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-1} = 0,$$

olduğu varsayılmıştır. Buradan

$$\lambda_1^{(k)} = \left[2 - \frac{\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}} \left(\lambda_3^{(k)} - 3 \right) \right] \left[2 \left(\frac{\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}} + 1 \right) \right]^{-1}.\tag{2.15}$$

elde edilir.

(2.14), (2.1) ve (2.7) denklemlerinden başlangıç durumunda Kirchhoff gerilme tansörü bileşenleri aşağıda verildiği şekilde elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}q_{zz}^{(k),0} &= \lambda_3^{(k)} s_{zz}^{(k),0}, \\ q_{rr}^{(k),0} &= \lambda_1^{(k)} s_{rr}^{(k),0} = 0, \\ q_{\theta\theta}^{(k),0} &= \lambda_1^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),0} = 0, \\ q_{\theta r}^{(k),0} &= q_{r\theta}^{(k),0} = q_{rz}^{(k),0} = q_{zr}^{(k),0} = q_{z\theta}^{(k),0} = q_{\theta z}^{(k),0} = 0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

(2.1)-(2.16) denklemleri incelendiğinde, (2.8) denkleminin başlangıç öngerilme-şekil değiştirme durumu için sağlandığı görülmüştür.

2.1.3 Pertürbasyon durumuna ait denklem ve bağıntılar

Bu çalışmada ele aldığımız iki katlı bileşik silindirde, ön gerilme-şekil değiştirme durumuna ilave küçük pertürbasyonlar oluşmaktadır. Bu küçük pertürbasyonlar $u_r^{(k)} = u_r^{(k)}(r, z, t)$ ve $u_z^{(k)} = u_z^{(k)}(r, z, t)$ yerdeğiştirme bileşenleri ile tanımlanmıştır. Bu pertürbasyonların çok küçük olduğu dikkate alınarak (2.5)-(2.10) denklemleri $(u_r^{(k),0} + u_r^{(k)}), (u_z^{(k),0} + u_z^{(k)})$ 'lar için yazılarak elde edilen doğrusal olmayan denklemler $u_r^{(k)}$ ve $u_z^{(k)}$ 'lara göre doğrusallaştırılırsa Öngerilmeli Ortamda Üç Boyutlu Doğrusallaştırılmış Elastik Dalga Yayılımı Teorisi (ÖÖÜDEDYT) denklemleri elde edilir. Bu işlem ile pertürbasyon durumu için Green şekil değiştirme tansörleri bileşenleri için aşağıdaki doğrusallaştırılmış ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r}, \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} &= \lambda_3^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz}^{(k)} &= \frac{1}{2} \left(\lambda_1^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \lambda_3^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} \right).\end{aligned}\tag{2.17}$$

(2.6) nolu denklemin doğrusallaştırılmasında $\tilde{\mathbf{s}}^{(k)}$ gerilme tansörü bileşenlerinin pertürbasyonları ($S_{(ij)}^{(k)}$ ile işaret edilsin) için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}S_{rr}^{(k)} &= \left(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} \right) \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \lambda^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r} + \lambda^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}, \\ S_{\theta\theta}^{(k)} &= \lambda^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \left(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} \right) \frac{u_r^{(k)}}{r} + \lambda^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}, \\ S_{zz}^{(k)} &= \lambda^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \lambda^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r} + \left(\lambda^{(k)} + \frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_3^{(k)}} 2\mu^{(k)} \right) \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z},\end{aligned}$$

$$S_{rz}^{(k)} = \frac{2\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)}} \mu^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{2\lambda_3^{(k)}}{\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)}} \mu^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}. \quad (2.18)$$

Yukarıdaki (2.18) denklemi ele alındığında (2.7) nolu denklemindeki Kirchhoff gerilme tansörünün bileşenlerinin pertürbasyonun bileşenleri $Q_{(ij)}^{(k)}$ 'lar için kullanılarak aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$\begin{aligned} Q_{zz}^{(k)} &= \lambda_3^{(k)} S_{zz}^{(k)} + s_{zz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}, \\ Q_{rr}^{(k),0} &= \lambda_1^{(k)} S_{rr}^{(k)}, \\ Q_{\theta\theta}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} S_{\theta\theta}^{(k)}, \\ Q_{rz}^{(k)} &= \lambda_1^{(k)} S_{rz}^{(k)}, \\ Q_{zr}^{(k)} &= \lambda_3^{(k)} S_{rz}^{(k)} + s_{zz}^{(k),0} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$q_{(ij)}$, u_r ve u_z yerine, $(q_{(ij)}^{(k),0} + Q_{(ij)}^{(k)})$, $(u_r^{(k),0} + u_r^{(k)})$ ve $(u_z^{(k),0} + u_z^{(k)})$ ifadeleri (2.8) nolu denklemde yazıldığında ve uygun doğrusallaştırma işlemleri yapıldığında

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial Q_{zr}^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{r} (Q_{rr}^{(k)} - Q_{\theta\theta}^{(k)}) &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_r^{(k)}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial Q_{rz}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_{rz}^{(k)} + \frac{\partial Q_{zz}^{(k)}}{\partial z} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_z^{(k)}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

biçiminde doğrusallaştırılmış hareket denklemleri elde edilir.

(2.20) denklemini $\left((\lambda_1^{(k)})^2 \lambda_3^{(k)} \right)^{-1}$ ile çarptığımızda ve aşağıdaki terimler kullanıldığında,

$$\rho'^{(k)} = \rho^{(k)} \left((\lambda_1^{(k)})^2 \lambda_3^{(k)} \right)^{-1},$$

$$Q_{r'r'}^{(k)} = Q_{rr}^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \lambda_3^{(k)} \right)^{-1},$$

$$Q_{z'z'}^{(k)} = Q_{zz}^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-2},$$

$$r' = \lambda_1^{(k)} r,$$

$$Q_{\theta'\theta'}^{(k)} = Q_{\theta\theta}^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \lambda_3^{(k)} \right)^{-1},$$

$$Q_{z'z'}^{(k)} = Q_{zz}^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-2},$$

$$u_{r'}^{(k)} = u_r^{(k)},$$

$$u_{z'}^{(k)} = u_z^{(k)},$$

$$z' = \lambda_3^{(k)} z. \quad (2.21)$$

(2.3) nolu denklemi elde edilmektedir. Ayrıca (2.18), (2.19) ve (2.21) denklemlerinden $\omega_{1111}^{(k)}$, $\omega_{3333}^{(k)}$, $\omega_{1122}^{(k)}$, $\omega_{1133}^{(k)}$, $\omega_{1221}^{(k)}$, $\omega_{3113}^{(k)}$ ve $\omega_{1313}^{(k)}$ büyüklükleri için aşağıdaki ifadeler (2.4) nolu denklem yardımıyla elde edilmiştir.

$$\omega_{1111}^{(k)} = \left(\lambda_3^{(k)} \right)^{-1} \left(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} \right),$$

$$\omega_{3333}^{(k)} = \left(\frac{\lambda_3^{(k)}}{\lambda_1^{(2)}} \right)^2 \left(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} \right),$$

$$\omega_{1122}^{(k)} = \left(\lambda_3^{(k)} \right)^{-1} \lambda^{(k)},$$

$$\omega_{1133}^{(k)} = \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-1} \lambda^{(k)},$$

$$\omega_{1221}^{(k)} = \left(\lambda_3^{(k)} \right)^{-1} \mu^{(k)},$$

$$\omega_{1313}^{(k)} = 2\mu^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} \right)^{-1},$$

$$\omega_{3113}^{(k)} = 2\mu^{(k)} \left(\lambda_1^{(k)} \right)^{-2} \left(\lambda_3^{(k)} \right)^2 \left(\lambda_1^{(k)} + \lambda_3^{(k)} \right)^{-1}. \quad (2.22)$$

Sonuç olarak, bu çalışmada (2.3), (2.4) ve (2.22) nolu denklemleri kullanarak ele alınan problem için eksenel simetrik boyuna dalga yayılımı incelenebilmektedir. Bu denklemler mutlaka sınır ve temas koşullarını sağlamalıdır. Bu çalışmada içi dolu ve içi boş iki katlı bileşik silindirler incelendiğinden herbiri için ayrı sınır koşullarını yazmak gerekmektedir.

İçi dolu iki katlı bileşik silindir için:

$$\begin{aligned} Q_{r'r'}^{(1)} \Big|_{r'=R'+h'} &= 0, \\ Q_{r'z'}^{(1)} \Big|_{r'=R'+h'} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23_1)$$

İçi boş iki katlı bileşik silindir için :

$$\begin{aligned} Q_{r'r'}^{(1)} \Big|_{r'=R'+h^{(1)}} &= 0, \\ Q_{r'z'}^{(1)} \Big|_{r'=R'+h^{(1)}} &= 0, \\ Q_{r'r'}^{(2)} \Big|_{r'=R'-h^{(2)}} &= 0, \\ Q_{r'z'}^{(2)} \Big|_{r'=R'-h^{(2)}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.23_2)$$

Önce, iç ve dış silindir arasındaki temas yüzeyinin süreksiz olması durumunu ele alarak bir modelleme yapmak gerekmektedir. Temas koşullarının süreksiz olması durumu temas yüzeyindeki yerdeğiştirme ve gerilmelerin temas yüzeyi boyunca süreksizliğinden kaynaklanmaktadır.

Mevcut araştırmalarda temas yüzeyi üzerindeki temas koşullarının süreksizliklerinin matematiksel modellenmesi yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerinin süreksizliği biçiminde ele alınmıştır. Bu konuda yapılan incelemelerin geniş özeti Martin (1992) çalışmasında verilmiştir.

Temas yüzeyinin bir tarafındaki yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerini $\mathbf{u}^+$ ve $\mathbf{f}^+$ ile, diğer tarafındaki yerdeğiştirme ve kuvvet vektörlerini ise $\mathbf{u}^-$ ve $\mathbf{f}^-$ edilirse Rokhlin ve Wang (1991)'in çalışmalarında da kullanılan temas koşullarının süreksizliğinin matematiksel modellemesi aşağıdaki biçimde verilmektedir.

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}] &= \mathbf{C}\mathbf{u}^- + \mathbf{D}\mathbf{f}^-, \\ [\mathbf{u}] &= \mathbf{G}\mathbf{u}^- + \mathbf{F}\mathbf{f}^-. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Burada; $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ ve $\mathbf{F}$ (3×3) boyutlu matrislerdir ve kare parantezler temas yüzeyinde geçiş matrisini göstermektedir. Eğer yüzey $r' = R'$ ise;

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ \Big|_{r'=R'+0} - \mathbf{u}^- \Big|_{r'=R'-0}$$

$$[\mathbf{f}] = \mathbf{f}^+ \Big|_{r'=R'+0} - \mathbf{f}^- \Big|_{r'=R'-0} \quad (2.25)$$

elde edilmiştir.

(2.24) denklemi dikkate alınarak, bir çok özel durumdaki temas koşullarının süreksizliği $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri yardımıyla incelenebilmektedir. Bu özel durumlardan biri için Jones ve Whitter (1967) çalışmalarında, $\mathbf{C} = \mathbf{D} = \mathbf{G} = \mathbf{0}$, kullanarak problemin çözümünü yapmışlardır. (2.25) denklemi kullanılarak aşağıdaki sonuca varılır.

$$[\mathbf{f}] = \mathbf{0}, [\mathbf{u}] = \mathbf{F}\mathbf{f}^-. \quad (2.26)$$

Burada $\mathbf{F}$ sabit bir diyagonal matristir. (2.26) denklemdeki modelleme bir çok durum için problemin çözümünde son derece kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle, bu modele kayma-yay tipi direnç modeli denmektedir. Model, Jones ve Whitter (1967), Mul ve Xu (1989), Pilarski ve Rose (1988), Berger, Martin ve McCaffery (2000) gibi araştırmacılar tarafından klasik Elastodinamiğin konusu olan bir çok problemin incelenmesinde kullanılmıştır. Ayrıca bu modeli, Leungvichcharoen ve Wijeyewickrema (2003), Leungvichcharoen ve diğ. (2004), Wijeyewickrema ve Leungvichcharoen (2009) ve Kepceler (2010) önerilme dinamiğinde kullanmışlardır. Bu çalışmada da bu model ve (2.26)'daki matematiksel formülasyon, süreksiz temas koşullarının modellenmesi için kullanılmıştır.

(2.26) modeli kullanıldığında içi dolu ve içi boş iki katlı bileşik silindir için aşağıdaki temas koşullarını yazmak gerekmektedir:

$$Q_{r'r'}^{(1)} \Big|_{r'=R'} = Q_{r'r'}^{(2)} \Big|_{r'=R'},$$

$$Q_{r'z'}^{(1)} \Big|_{r'=R'} = Q_{r'z'}^{(2)} \Big|_{r'=R'},$$

$$u_{r'}^{(1)} \Big|_{r'=R'} = u_{r'}^{(2)} \Big|_{r'=R'},$$

$$u_{z'}^{(1)} \Big|_{r'=R'} - u_{z'}^{(2)} \Big|_{r'=R'} = F \frac{R}{\mu^{(2)}} Q_{r'z'}^{(2)}. \quad (2.27)$$

Burada F , boyutsuz kayma-yay parametresidir. $F = 0$ sürekli temas koşulunu, $F = \infty$ durumu ise, tam kaymalı temas koşulunu tanımlamaktadır.

($\lambda_3^{(k)} = \lambda_3^{(k)} = 1.0$), ($k = 1, 2$) olması halinde ise (yani öngerilmenin olmadığı durum için), sıkışabilir bir cismin incelenmesinde, yukarıdaki formülasyon klasik elastisite teorisindeki formülasyona dönüşecektir.

2.1.4 Çözüm yöntemi ve dispersiyon denkleminin elde edilmesi

(2.4) denklemi (2.3) denkleminde yerine yazıldığında yerdeğiştirmelerin cinsinden aşağıdaki hareket denklemleri elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
& \omega_{1111}^{(k)} \frac{\partial^2 u_{r'}^{(k)}}{\partial r'^2} + \omega_{1122}^{(k)} \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{u_{r'}^{(k)}}{r'} \right) + \left(\omega_{1133}^{(k)} + \omega_{1331}^{(k)} \right) \frac{\partial^2 u_{r'}^{(k)}}{\partial r' \partial z'} + \omega_{1313}^{(k)} \frac{\partial^2 u_{r'}^{(k)}}{\partial z'^2} \\
& + \frac{1}{r'} \left(\omega_{1111}^{(k)} - \omega_{2211}^{(k)} \right) \\
& \times \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial r'} + \left(\omega_{1122}^{(k)} - \omega_{2222}^{(k)} \right) \frac{u_{r'}^{(k)}}{r'^2} + \left(\omega_{1133}^{(k)} - \omega_{2233}^{(k)} \right) \frac{1}{r'} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial z'} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_{r'}^{(k)}}{\partial t^2}, \\
& \omega_{3133}^{(k)} \frac{\partial^2 u_{r'}^{(k)}}{\partial r' \partial z'} + \omega_{3131}^{(k)} \frac{\partial^2 u_{z'}^{(k)}}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \omega_{3113}^{(k)} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial z'} + \frac{1}{r'} \omega_{3131}^{(k)} \frac{\partial u_{z'}^{(k)}}{\partial r'} + \omega_{3311}^{(k)} \frac{\partial^2 u_{r'}^{(k)}}{\partial r' \partial z'} + \\
& \omega_{3322}^{(k)} \frac{1}{r'} \frac{\partial u_{r'}^{(k)}}{\partial z'} + \omega_{3333}^{(k)} \frac{\partial^2 u_{z'}^{(k)}}{\partial z'^2} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_{z'}^{(k)}}{\partial t^2}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Guz (2004) yaptığı çalışmaya göre yerdeğiştirme için aşağıdaki ifade yazılmıştır.

$$\begin{aligned}
u_{r'}^{(k)} &= -\frac{\partial^2}{\partial r' \partial z'} X^{(k)}, \\
u_{z'}^{(k)} &= \frac{1}{\omega_{1133}^{(k)} + \omega_{1313}^{(k)}} \left(\omega_{1111}^{(k)} \Delta'_1 + \omega_{3113}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \rho^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) X^{(k)}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Burada $X^{(k)}$, aşağıdaki denklemi sağlamaktadır:

$$\left[\left(\Delta'_1 + \left(\xi_2^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \left(\Delta'_1 + \left(\xi_3^{(k)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) - \rho^{(k)} \left(\frac{\omega_{1111}^{(k)} + \omega_{1331}^{(k)}}{\omega_{1111}^{(k)} \omega_{1331}^{(k)}} \Delta'_1 + \frac{\omega_{3333}^{(k)} + \omega_{3113}^{(k)}}{\omega_{1111}^{(k)} \omega_{1331}^{(k)}} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\rho^{(k)}}{\omega_{1111}^{(k)} \omega_{1331}^{(k)}} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] X^{(k)} = 0. \tag{2.30}$$

(2.29) ve (2.30) denklemlerinde aşağıdaki işaretlemeler kabul edilmiştir.

$$\Delta'_1 = \frac{d^2}{dr'^2} + \frac{1}{r'} \frac{d}{dr'},$$

$$\begin{aligned} \left(\xi_{2,3}^{(k)}\right)^2 &= d^{(k)} \pm \left[\left(d^{(k)}\right)^2 - \omega_{3333}^{(k)} \omega_{3113}^{(k)} \left(\omega_{1111}^{(k)} \omega_{1331}^{(k)}\right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ d^{(k)} &= \left(2\omega_{1111}^{(k)} \omega_{1331}^{(k)}\right)^{-1} \left[\omega_{1111}^{(k)} \omega_{3333}^{(k)} + \omega_{1331}^{(k)} \omega_{3113}^{(k)} - \left(\omega_{1133}^{(k)} + \omega_{1313}^{(k)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Bileşik silindirlerde $O'z'$ eksenine yönünde harmonik dalgaların yayılımı ele alındığından $X^{(m)} = X^{(m)}(r', z', t)$ fonksiyonu

$$X^{(m)} = X_1^{(m)}(r') \cos(kz' - \omega t). \quad (2.32)$$

biçiminde gösterilmektedir.

(2.32) denklemi (2.30) denkleminde kullanıldığında ve bazı kısaltmalar ve değişiklikler yapıldığında $X_1^{(m)}(r')$ için aşağıdaki denklem elde edilmektedir:

$$\left(\Delta_1 + \left(\zeta_2^{(m)}\right)^2\right) \left(\Delta_1 + \left(\zeta_3^{(m)}\right)^2\right) X_1^{(m)}(r') = 0. \quad (2.33)$$

(2.33)'teki $\zeta_{2,3}^{(k)}$ sabitleri, aşağıdaki denklem yardımıyla hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} &\omega_{1111}^{(m)} \omega_{1331}^{(m)} \left(\zeta_2^{(m)}\right)^4 - k^2 \left(\zeta_2^{(m)}\right)^2 \left[\omega_{1111}^{(m)} \left(\rho^{(m)} c^2 - \omega_{3333}^{(m)}\right) + \omega_{1331}^{(m)} \left(\rho^{(m)} c^2 - \omega_{3113}^{(m)}\right) + \right. \\ &\left. + \left(\omega_{1133}^{(m)} + \omega_{1313}^{(m)}\right)^2 \right] + k^4 \left(\rho^{(m)} c^2 - \omega_{3333}^{(m)}\right) \left(\rho^{(m)} c^2 - \omega_{3113}^{(m)}\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Burada $c = \omega/k$, c dalga yayılımının faz hızıdır, ω dalganın açısal frekansı, k ise

dalga sayısıdır. $X_1^{(m)}(r')$, (2.33) ve (2.34) denklemleri yardımıyla içi dolu ve içi boş

iki katlı bileşik silindir için aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

İçi dolu iki katlı bileşik silindir için:

$$\begin{aligned} X_1^{(1)}(r') &= A_2^{(1)} E_0^{(1)} \left(kr' \zeta_2^{(1)}\right) + A_3^{(1)} E_0^{(1)} \left(kr' \zeta_3^{(1)}\right) + B_2^{(1)} G_0^{(1)} \left(kr' \zeta_2^{(1)}\right) + B_3^{(1)} G_0^{(1)} \left(kr' \zeta_3^{(1)}\right) \\ X_1^{(2)}(r') &= A_2^{(2)} E_0^{(2)} \left(kr' \zeta_2^{(2)}\right) + A_3^{(2)} E_0^{(2)} \left(kr' \zeta_3^{(2)}\right). \end{aligned} \quad (2.35_1)$$

İçi boş iki katlı bileşik silindir için:

$$X_1^{(1)}(r') = A_2^{(1)} E_0^{(1)} \left(kr' \zeta_2^{(1)}\right) + A_3^{(1)} E_0^{(1)} \left(kr' \zeta_3^{(1)}\right) + B_2^{(1)} G_0^{(1)} \left(kr' \zeta_2^{(1)}\right) + B_3^{(1)} G_0^{(1)} \left(kr' \zeta_3^{(1)}\right)$$

$$X_1^{(2)}(r') = A_2^{(2)} E_0^{(2)}(kr' \zeta_2^{(2)}) + A_3^{(2)} E_0^{(2)}(kr' \zeta_3^{(2)}) + B_2^{(2)} G_0^{(2)}(kr' \zeta_2^{(2)}) + B_3^{(2)} G_0^{(2)}(kr' \zeta_3^{(2)}). \quad (2.35_2)$$

Burada,

$$E_0^{(k)}(kr' \zeta_m^{(k)}) = \begin{cases} J_0(kr' \zeta_m^{(k)}) & \text{eğer } (\zeta_m^{(k)})^2 > 0, \\ I_0(kr' |\zeta_m^{(k)}|) & \text{eğer } (\zeta_m^{(k)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$G_0^{(k)}(kr' \zeta_m^{(k)}) = \begin{cases} Y_0(kr' \zeta_m^{(k)}) & \text{eğer } (\zeta_m^{(k)})^2 > 0, \\ K_0(kr' |\zeta_m^{(k)}|) & \text{eğer } (\zeta_m^{(k)})^2 < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

(2.36) denkleminde $J_0(x)$ ve $Y_0(x)$ sıfırıncı mertebeden birinci tip ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır. $I_0(x)$ ve $K_0(x)$ sırasıyla, sıfırıncı mertebeden modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonudur.

Sonuç olarak, (2.4), (2.29), (2.32), (2.35) ve (2.36) denklemleri kullanılarak eksenel simetrik boyuna dalganın dispersiyon denklemi (2.23) ve (2.27) denklemlerinden elde edilmiştir.

İçi dolu iki katlı bileşik silindir için:

$$\det \left\| \alpha_{ij} \left(c/c_{20}^{(2)}, kR, F, \frac{h}{R} \lambda_m^{(k)} \mu^{(k)}, \lambda^{(m)}, \rho^{(k)} \right) \right\| = 0, i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (2.37_1)$$

İçi boş iki katlı bileşik silindir için:

$$\det \left\| \beta_{ij} \left(c/c_{20}^{(2)}, kR, F, \frac{h^{(1)}}{R}, \frac{h^{(2)}}{R}, \lambda_m^{(k)}, \mu^{(k)}, \lambda^{(m)}, \rho^{(k)} \right) \right\| = 0, i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. \quad (2.37_2)$$

İçi dolu iki katlı bileşik silindir için α_{ij} değerinin açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \begin{cases} \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(-\left(s_2^{(2)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(J_2(\chi_2^{(2)}) - J_0(\chi_2^{(2)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} \left(s_2^{(2)}\right)^2 \left(J_2(\chi_2^{(2)}) - J_0(\chi_2^{(2)}) \right) - \frac{s_2^{(2)}}{\eta} J_1(\chi_2^{(2)}) - \beta_2^{(2)} J_0(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0, \\ \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(-\left(s_2^{(2)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)}) \right) \right) - \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} \left(s_2^{(2)}\right)^2 \left(I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)}) \right) + \frac{s_2^{(2)}}{\eta} I_1(\chi_2^{(2)}) - \beta_2^{(2)} I_0(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases} \\
\alpha_{21}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \begin{cases} -\frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left(\left(s_2^{(2)}\right)^3 \left(3J_1(\chi_2^{(2)}) - J_3(\chi_2^{(2)}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} J_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\left(s_2^{(2)}\right)^2}{\eta 2} \left(J_2(\chi_2^{(2)}) - J_0(\chi_2^{(2)}) \right) + \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) \right) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0; \\ \frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left(\left(s_2^{(2)}\right)^3 \left(3I_1(\chi_2^{(2)}) + I_3(\chi_2^{(2)}) \right) \right) - \right. \\ \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} I_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\left(s_2^{(2)}\right)^2}{\eta 2} \left(I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)}) \right) - \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases} \\
\alpha_{31}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \begin{cases} -s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0; \\ s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases} \\
\alpha_{41}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= -\frac{FR}{\mu^{(2)}} \alpha_{21}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) + \begin{cases} \left(-\beta_1^{(2)} \left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 - \beta_2^{(2)} \right) J_0(\chi_2^{(2)}) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(2)} \left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 - \beta_2^{(2)} \right) I_0(\chi_2^{(2)}) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases} \\
\alpha_{51}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \alpha_{61}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\alpha_{n2} = \alpha_{n1}(s_3^{(2)}, \chi_3^{(2)}), \quad n=1,2,3,4,5,6,$$

$$\alpha_{13}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(-\left(s_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(Y_2(\chi_2^{(1)}) - Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ \left(\beta_1^{(1)} \left(s_2^{(1)}\right)^2 \left(Y_2(\chi_2^{(1)}) - Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) - \frac{s_2^{(1)}}{\eta} Y_1(\chi_2^{(1)}) - \beta_2^{(1)} Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 > 0, \\ \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\left(s_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(K_2(\chi_2^{(1)}) + K_0(\chi_2^{(1)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ \left(\beta_1^{(1)} \left(s_2^{(1)}\right)^2 \left(I_2(\chi_2^{(1)}) + I_0(\chi_2^{(1)}) \right) + \frac{s_2^{(2)}}{\eta} I_1(\chi_2^{(1)}) - \beta_2^{(2)} I_0(\chi_2^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 < 0, \\ -\frac{\omega_{1313}^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega_{1331}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left(\left(s_2^{(1)}\right)^3 \left(3Y_1(\chi_2^{(1)}) - Y_3(\chi_2^{(1)}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} Y_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\left(s_2^{(1)}\right)^2}{\eta 2} \left(Y_2(\chi_2^{(1)}) - Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) \right) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 > 0; \\ -\frac{\omega_{1313}^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega_{1331}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left(\left(s_2^{(1)}\right)^3 \left(3K_1(\chi_2^{(1)}) + K_3(\chi_2^{(1)}) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} K_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\left(s_2^{(1)}\right)^2}{\eta 2} \left(K_2(\chi_2^{(1)}) + K_0(\chi_2^{(1)}) \right) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) \right) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 < 0, \end{cases}$$

$$\alpha_{23}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} -s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 > 0; \\ -s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 < 0, \end{cases},$$

$$\alpha_{43}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} \left(-\beta_1^{(1)} \left(\zeta_2^{(1)} \right)^2 - \beta_2^{(1)} \right) Y_0(\chi_2^{(1)}) & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(1)} \left(\zeta_2^{(1)} \right)^2 - \beta_2^{(1)} \right) K_0(\chi_2^{(1)}) & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 < 0, \end{cases},$$

$$\alpha_{n4} = \alpha_{n3}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}), \quad n=1,2,3,4,5,6,$$

$$\alpha_{53} = \alpha_{13}(s_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)}), \quad \alpha_{63} = \alpha_{23}(s_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)}),$$

$$\alpha_{n4} = \alpha_{n3}(s_3^{(2)}, \chi_{3h}^{(2)}), \quad n=1,2,3,4,5,6$$

$$\alpha_{15} = \alpha_{11} \left(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)} \right), \alpha_{25} = \alpha_{21} \left(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)} \right), \alpha_{35} = \alpha_{31} \left(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)} \right),$$

$$\alpha_{45} \left(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)} \right) = \begin{cases} \left(-\beta_1^{(1)} \left(\zeta_2^{(1)} \right)^2 - \beta_2^{(1)} \right) J_0 \left(\chi_2^{(1)} \right) & e\check{g}er \left(\zeta_2^{(1)} \right)^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(1)} \left(\zeta_2^{(1)} \right)^2 - \beta_2^{(1)} \right) I_0 \left(\chi_2^{(1)} \right) & e\check{g}er \left(\zeta_2^{(1)} \right)^2 < 0, \end{cases},$$

$$\alpha_{55} = \alpha_{15} \left(s_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)} \right), \alpha_{65} = \alpha_{25} \left(s_2^{(1)}, \chi_{2h}^{(1)} \right), \alpha_{j6} = \alpha_{j5} \left(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)} \right), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\alpha_{k6} = \alpha_{k5} \left(s_3^{(1)}, \chi_{3h}^{(1)} \right), \quad k = 5, 6. \quad (2.38_1)$$

İçi boş iki katlı bileşik silindir için β_{ij} açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\beta_{11} \left(s_2^{(2)}, \chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) = \begin{cases} \frac{\omega_{111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(- \left(s_2^{(2)} \right)^2 \frac{1}{2} \left(J_2 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) - J_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) \right) + \frac{\omega_{112}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} J_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \\ + \frac{\omega_{113}^{(2)}}{2 \lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} \left(s_2^{(2)} \right)^2 \left(J_2 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) - J_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) - \frac{s_2^{(2)}}{\eta} J_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) - \beta_2^{(2)} J_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) \\ e\check{g}er \left(\zeta_2^{(2)} \right)^2 > 0, \\ \frac{\omega_{111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(- \left(s_2^{(2)} \right)^2 \frac{1}{2} \left(I_2 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + I_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) \right) - \frac{\omega_{112}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} I_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + \frac{\omega_{113}^{(2)}}{2 \lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} \left(s_2^{(2)} \right)^2 \left(I_2 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + I_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) + \frac{s_2^{(2)}}{\eta} I_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) - \beta_2^{(2)} I_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) \\ e\check{g}er \left(\zeta_2^{(2)} \right)^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{21} \left(s_2^{(2)}, \chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) = \begin{cases} - \frac{\omega_{131}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} J_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + \frac{\omega_{133}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left(\left(s_2^{(2)} \right)^3 \left(3 J_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) - J_3 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} J_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + \frac{\left(s_2^{(2)} \right)^2}{\eta^2} \left(J_2 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) - J_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) + \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} J_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) \\ e\check{g}er \left(\zeta_2^{(2)} \right)^2 > 0; \\ \frac{\omega_{131}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} I_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + \frac{\omega_{133}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left(\left(s_2^{(2)} \right)^3 \left(3 I_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + I_3 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) - \right. \\ \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} I_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + \frac{\left(s_2^{(2)} \right)^2}{2 \eta} \left(I_2 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) + I_0 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) - \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} I_1 \left(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)} \right) \right) \\ e\check{g}er \left(\zeta_2^{(2)} \right)^2 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{13}(\mathbf{s}_2^{(2)}, \chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) &= \begin{cases} \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(-(\mathbf{s}_2^{(2)})^2 \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \mathbf{Y}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} \mathbf{s}_2^{(1)} \mathbf{Y}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} (\mathbf{s}_2^{(2)})^2 (\mathbf{Y}_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \mathbf{Y}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) - \frac{\mathbf{s}_2^{(2)}}{\eta} \mathbf{Y}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \beta_2^{(2)} \mathbf{Y}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \right) \\ \text{eğer } (\zeta_2^{(2)})^2 > 0, \\ \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left((\mathbf{s}_2^{(2)})^2 \frac{1}{2} (\mathbf{K}_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \mathbf{K}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} \mathbf{s}_2^{(2)} \mathbf{K}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} (\mathbf{s}_2^{(2)})^2 (\mathbf{I}_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \mathbf{J}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) + \frac{\mathbf{s}_2^{(2)}}{\eta} \mathbf{I}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \beta_2^{(2)} \mathbf{I}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \right) \\ \text{eğer } (\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases} \\
\beta_{23}(\mathbf{s}_2^{(2)}, \chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) &= \begin{cases} -\frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} \mathbf{s}_2^{(2)} \mathbf{Y}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left((\mathbf{s}_2^{(2)})^3 (3\mathbf{Y}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \mathbf{Y}_3(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) \right) + \right. \\ \left. \frac{\mathbf{s}_2^{(2)}}{\eta^2} \mathbf{Y}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \frac{(\mathbf{s}_2^{(2)})^2}{2\eta} (\mathbf{Y}_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \mathbf{Y}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) + \beta_2^{(2)} \mathbf{s}_2^{(2)} \mathbf{Y}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \right) \\ \text{eğer } (\zeta_2^{(2)})^2 > 0; \\ -\frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(1)}} \mathbf{s}_2^{(2)} \mathbf{K}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left((\mathbf{s}_2^{(2)})^3 (3\mathbf{K}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \mathbf{K}_3(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) \right) + \right. \\ \left. \frac{\mathbf{s}_2^{(2)}}{\eta^2} \mathbf{K}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \frac{(\mathbf{s}_2^{(2)})^2}{2\eta} (\mathbf{K}_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \mathbf{K}_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) + \beta_2^{(2)} \mathbf{s}_2^{(2)} \mathbf{K}_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \right) \\ \text{eğer } (\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases} \\
\beta_{n2} &= \beta_{n1}(\mathbf{s}_3^{(2)}, \chi_{3h^{(2)}}^{(2)}), \\
\beta_{n4} &= \beta_{n3}(\mathbf{s}_3^{(2)}, \chi_{3h^{(2)}}^{(2)}), \\
\beta_{n5} &= \beta_{n6} = \beta_{n7} = \beta_{n8} = 0, \quad n=1, 2,
\end{aligned}$$

$$\beta_{31}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) = \begin{cases} \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(- (s_2^{(2)})^2 \frac{1}{2} (J_2(\chi_2^{(2)}) - J_0(\chi_2^{(2)})) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} (s_2^{(2)})^2 (J_2(\chi_2^{(2)}) - J_0(\chi_2^{(2)})) - \frac{s_2^{(2)}}{\eta} J_1(\chi_2^{(2)}) - \beta_2^{(2)} J_0(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 > 0, \\ \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(- (s_2^{(2)})^2 \frac{1}{2} (I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)})) \right) - \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} (s_2^{(2)})^2 (I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)})) + \frac{s_2^{(2)}}{\eta} I_1(\chi_2^{(2)}) - \beta_2^{(2)} I_0(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{41}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) = \begin{cases} -\frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left((s_2^{(2)})^3 (3J_1(\chi_2^{(2)}) - J_3(\chi_2^{(2)})) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} J_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{(s_2^{(2)})^2}{\eta^2} (J_2(\chi_2^{(2)}) - J_0(\chi_2^{(2)})) + \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) \right) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 > 0; \\ \frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left((s_2^{(2)})^3 (3I_1(\chi_2^{(2)}) + I_3(\chi_2^{(2)})) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} I_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{(s_2^{(2)})^2}{\eta^2} (I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)})) - \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) \right) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{51}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) = \begin{cases} -s_2^{(2)} J_1(\chi_2^{(2)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 > 0, \\ s_2^{(2)} I_1(\chi_2^{(2)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{61}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) = -\frac{FR}{\mu^{(2)}} \beta_{41}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) + \begin{cases} \left(-\beta_1^{(2)} (\zeta_2^{(2)})^2 - \beta_2^{(2)} \right) J_0(\chi_2^{(2)}) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(2)} (\zeta_2^{(2)})^2 - \beta_2^{(2)} \right) I_0(\chi_2^{(2)}) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{33}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \begin{cases} \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(-\left(s_2^{(2)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(Y_2(\chi_2^{(2)}) - Y_0(\chi_2^{(2)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} Y_1(\chi_2^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} \left(s_2^{(2)}\right)^2 \left(Y_2(\chi_2^{(2)}) - Y_0(\chi_2^{(2)}) \right) - \frac{s_2^{(2)}}{\eta} Y_1(\chi_2^{(2)}) - \beta_2^{(2)} Y_0(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0, \\ \frac{\omega_{1111}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)}} \left(\left(s_2^{(2)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(K_2(\chi_2^{(2)}) + K_0(\chi_2^{(2)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} K_1(\chi_2^{(2)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(2)}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} \left(s_2^{(2)}\right)^2 \left(I_2(\chi_2^{(2)}) + I_0(\chi_2^{(2)}) \right) + \frac{s_2^{(2)}}{\eta} I_1(\chi_2^{(2)}) - \beta_2^{(2)} I_0(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases} \\
\beta_{43}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \begin{cases} -\frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} Y_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left(\left(s_2^{(2)}\right)^3 \left(3Y_1(\chi_2^{(2)}) - Y_3(\chi_2^{(2)}) \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} Y_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\left(s_2^{(2)}\right)^2}{2\eta} \left(Y_2(\chi_2^{(2)}) - Y_0(\chi_2^{(2)}) \right) + \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} Y_1(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0; \\ -\frac{\omega_{1313}^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} s_2^{(2)} K_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\omega_{1331}^{(2)}}{\lambda_3^{(2)} 4} \left(\beta_1^{(2)} \left(\left(s_2^{(2)}\right)^3 \left(3K_1(\chi_2^{(2)}) + K_3(\chi_2^{(2)}) \right) \right) + \right. \\ \left. \frac{s_2^{(2)}}{\eta^2} K_1(\chi_2^{(2)}) + \frac{\left(s_2^{(2)}\right)^2}{\eta 2} \left(K_2(\chi_2^{(2)}) + K_0(\chi_2^{(2)}) \right) + \beta_2^{(2)} s_2^{(2)} K_1(\chi_2^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases} \\
\beta_{53}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) &= \begin{cases} -s_2^{(2)} Y_1(\chi_2^{(2)}) e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0; \\ -s_2^{(2)} K_1(\chi_2^{(2)}) e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases},
\end{aligned}$$

$$\beta_{63}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) = -\frac{FR}{\mu^{(2)}} \beta_{43}(s_2^{(2)}, \chi_2^{(2)}) + \begin{cases} \left(-\beta_1^{(2)} \left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 - \beta_2^{(2)} \right) Y_0(\chi_2^{(2)}) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(2)} \left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 - \beta_2^{(2)} \right) K_0(\chi_2^{(2)}) \\ e\check{g}er\left(\zeta_2^{(2)}\right)^2 < 0, \end{cases},$$

$$\beta_{n2} = \beta_{n1}(s_3^{(2)}, \chi_3^{(2)}), \quad \beta_{n4} = \beta_{n3}(s_3^{(2)}, \chi_3^{(2)}), \quad n = 3, 4, 5, 6$$

$$\begin{aligned}
\beta_{35}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(-\left(s_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(J_2(\chi_2^{(1)}) - J_0(\chi_2^{(1)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} J_1(\chi_2^{(1)}) \\ & + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ & \left(\beta_1^{(1)} \left(s_2^{(1)}\right)^2 \left(J_2(\chi_2^{(1)}) - J_0(\chi_2^{(1)}) \right) - \frac{s_2^{(1)}}{\eta} J_1(\chi_2^{(1)}) - \beta_2^{(1)} J_0(\chi_2^{(1)}) \right) \\ & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 > 0, \\ & \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(-\left(s_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(I_2(\chi_2^{(1)}) + I_0(\chi_2^{(1)}) \right) \right) - \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} I_1(\chi_2^{(1)}) \\ & + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ & \left(\beta_1^{(1)} \left(s_2^{(1)}\right)^2 \left(I_2(\chi_2^{(1)}) + I_0(\chi_2^{(1)}) \right) + \frac{s_2^{(1)}}{\eta} I_1(\chi_2^{(1)}) - \beta_2^{(1)} I_0(\chi_2^{(1)}) \right) \\ & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 < 0, \end{aligned} \right. \\
\beta_{37}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = & \left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(-\left(s_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(Y_2(\chi_2^{(1)}) - Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) \\ & + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ & \left(\beta_1^{(1)} \left(s_2^{(1)}\right)^2 \left(Y_2(\chi_2^{(1)}) - Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) - \frac{s_2^{(1)}}{\eta} Y_1(\chi_2^{(1)}) - \beta_2^{(1)} Y_0(\chi_2^{(1)}) \right) \\ & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 > 0, \\ & \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(\left(s_2^{(1)}\right)^2 \frac{1}{2} \left(K_2(\chi_2^{(1)}) + K_0(\chi_2^{(1)}) \right) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) \\ & + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ & \left(\beta_1^{(1)} \left(s_2^{(1)}\right)^2 \left(I_2(\chi_2^{(1)}) + I_0(\chi_2^{(1)}) \right) + \frac{s_2^{(1)}}{\eta} I_1(\chi_2^{(1)}) - \beta_2^{(1)} I_0(\chi_2^{(1)}) \right) \\ & e\check{g}er\left(\zeta_2^{(1)}\right)^2 < 0, \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\beta_{45}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} -\frac{\omega'^{(1)}_{1313}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} J_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega'^{(1)}_{1331}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3J_1(\chi_2^{(1)}) - J_3(\chi_2^{(1)})) \right) + \right. \\ \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} J_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{2\eta} (J_2(\chi_2^{(1)}) - J_0(\chi_2^{(1)})) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} J_1(\chi_2^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ \frac{\omega'^{(1)}_{1313}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} I_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega'^{(1)}_{1331}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3I_1(\chi_2^{(1)}) + I_3(\chi_2^{(1)})) \right) - \right. \\ \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} I_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{2\eta} (I_2(\chi_2^{(1)}) + I_0(\chi_2^{(1)})) - \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} I_1(\chi_2^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{47}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} -\frac{\omega'^{(1)}_{1313}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega'^{(1)}_{1331}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3Y_1(\chi_2^{(1)}) - Y_3(\chi_2^{(1)})) \right) + \right. \\ \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} Y_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{\eta^2} (Y_2(\chi_2^{(1)}) - Y_0(\chi_2^{(1)})) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ -\frac{\omega'^{(1)}_{1313}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{\omega'^{(1)}_{1331}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3K_1(\chi_2^{(1)}) + K_3(\chi_2^{(1)})) \right) + \right. \\ \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} K_1(\chi_2^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{\eta^2} (K_2(\chi_2^{(1)}) + K_0(\chi_2^{(1)})) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{36} = \beta_{35}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}), \quad \beta_{38} = \beta_{37}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}),$$

$$\beta_{46} = \beta_{45}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}), \quad \beta_{48} = \beta_{47}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}),$$

$$\beta_{55}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} -s_2^{(1)} J_1(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0, \\ s_2^{(1)} I_1(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases},$$

$$\beta_{65}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} \left(-\beta_1^{(1)} (\zeta_2^{(1)})^2 - \beta_2^{(1)} \right) J_0(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(1)} (\zeta_2^{(1)})^2 - \beta_2^{(1)} \right) I_0(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{57}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} -s_2^{(1)} Y_1(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ -s_2^{(1)} K_1(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases},$$

$$\beta_{67}(s_2^{(1)}, \chi_2^{(1)}) = \begin{cases} \left(-\beta_1^{(1)} (\zeta_2^{(1)})^2 - \beta_2^{(1)} \right) Y_0(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ \left(-\beta_1^{(1)} (\zeta_2^{(1)})^2 - \beta_2^{(1)} \right) K_0(\chi_2^{(1)}) e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\beta_{56} = \beta_{55}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}), \quad \beta_{58} = \beta_{57}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}),$$

$$\beta_{66} = \beta_{65}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}), \quad \beta_{68} = \beta_{67}(s_3^{(1)}, \chi_3^{(1)}),$$

$$\beta_{75}(s_2^{(1)}, \chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) = \begin{cases} \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(- (s_2^{(1)})^2 \frac{1}{2} (J_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - J_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) \right) + \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} J_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ \left(\beta_1^{(1)} (s_2^{(1)})^2 (J_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - J_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) - \frac{s_2^{(1)}}{\eta} J_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - \beta_2^{(1)} J_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0, \\ \frac{\omega_{1111}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)}} \left(- (s_2^{(1)})^2 \frac{1}{2} (I_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + I_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) \right) - \frac{\omega_{1122}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} \eta} s_2^{(1)} I_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \\ + \frac{\omega_{1133}^{(1)}}{2\lambda_1^{(1)}} \times \\ \left(\beta_1^{(1)} (s_2^{(1)})^2 (I_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + I_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \frac{s_2^{(1)}}{\eta} I_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - \beta_2^{(2)} I_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \\ -\frac{\omega_{1313}^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} J_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{\omega_{1331}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3J_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - J_3(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} J_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{2\eta} (J_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - J_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} J_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \right) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ \frac{\omega_{1313}^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} I_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{\omega_{1331}^{(1)}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3I_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + I_3(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} I_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{2\eta} (I_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + I_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) - \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} I_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \right) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{77}(s_2^{(1)}, \chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) &= \begin{cases} \frac{\omega'^{(2)}_{1111}}{\lambda_3^{(2)}} \left(- (s_2^{(2)})^2 \frac{1}{2} (Y_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - Y_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) \right) + \frac{\omega'^{(2)}_{1122}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(1)} Y_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \frac{\omega'^{(2)}_{1133}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} (s_2^{(2)})^2 (Y_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - Y_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) - \frac{s_2^{(2)}}{\eta} Y_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \beta_2^{(2)} Y_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 > 0, \\ \frac{\omega'^{(2)}_{1111}}{\lambda_3^{(2)}} \left((s_2^{(2)})^2 \frac{1}{2} (K_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + K_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) \right) + \frac{\omega'^{(2)}_{1122}}{\lambda_3^{(2)} \eta} s_2^{(2)} K_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + \frac{\omega'^{(2)}_{1133}}{2\lambda_1^{(2)}} \times \\ \left(\beta_1^{(2)} (s_2^{(2)})^2 (I_2(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) + J_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)})) + \frac{s_2^{(2)}}{\eta} I_1(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) - \beta_2^{(2)} I_0(\chi_{2h^{(2)}}^{(2)}) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(2)})^2 < 0, \end{cases} \\
\beta_{87}(s_2^{(1)}, \chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) &= \begin{cases} - \frac{\omega'^{(1)}_{1313}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} Y_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{\omega'^{(1)}_{1331}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3Y_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - Y_3(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} Y_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{2\eta} (Y_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) - Y_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} Y_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \right) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 > 0; \\ - \frac{\omega'^{(1)}_{1313}}{\lambda_1^{(1)}} s_2^{(1)} K_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{\omega'^{(1)}_{1331}}{\lambda_3^{(1)} 4} \left(\beta_1^{(1)} \left((s_2^{(1)})^3 (3K_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + K_3(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2^{(1)}}{\eta^2} K_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + \frac{(s_2^{(1)})^2}{2\eta} (K_2(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) + K_0(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)})) + \beta_2^{(1)} s_2^{(1)} K_1(\chi_{2h^{(1)}}^{(1)}) \right) \right) \\ e\check{g}er(\zeta_2^{(1)})^2 < 0, \end{cases} \\
\beta_{n6} &= \beta_{n5}(s_3^{(1)}, \chi_{3h^{(1)}}^{(1)}), \\
\beta_{n8} &= \beta_{n7}(s_3^{(1)}, \chi_{3h^{(1)}}^{(1)}), \\
\beta_{n1} &= \beta_{n2} = \beta_{n3} = \beta_{n4} = 0, n = 7, 8.
\end{aligned} \tag{2.38_2}$$

(2.38₁) ve (2.38₂)’deki ifadelerde

$$\chi_2^{(n)} = kR\lambda_1^{(n)} |\zeta_2^{(n)}|, \quad \chi_3^{(n)} = kR\lambda_1^{(n)} |\zeta_3^{(n)}|, \quad s_2^{(n)} = |\zeta_2^{(n)}|, \quad s_3^{(n)} = |\zeta_3^{(n)}| \quad n = 1, 2$$

$$\chi_{2h}^{(n)} = kR \left(1 + \frac{h}{R} \right) \lambda_1^{(n)} |\zeta_2^{(n)}|, \quad \chi_{3h}^{(n)} = kR \left(1 + \frac{h}{R} \right) \lambda_1^{(n)} |\zeta_3^{(n)}|, \quad \eta = kR\lambda_1^{(1)},$$

$$\chi_{2h^{(2)}}^{(n)} = kR \left(1 - \frac{h^{(2)}}{R} \right) \lambda_1^{(n)} |\zeta_2^{(n)}|, \quad \chi_{3h^{(2)}}^{(n)} = kR \left(1 - \frac{h^{(2)}}{R} \right) \lambda_1^{(n)} |\zeta_3^{(n)}|,$$

$$\chi_{2h^{(1)}}^{(n)} = kR \left(1 + \frac{h^{(1)}}{R} \right) \lambda_1^{(n)} |\zeta_2^{(n)}|, \quad \chi_{3h^{(1)}}^{(n)} = kR \left(1 + \frac{h^{(1)}}{R} \right) \lambda_1^{(n)} |\zeta_3^{(n)}|,$$

$$\beta_1^{(n)} = \frac{\lambda_1^{(n)}}{\lambda_3^{(n)}} \frac{\omega_{1111}^{(n)}}{(\omega_{1133}^{(n)} + \omega_{1313}^{(n)})}, \quad \beta_2^{(n)} = \frac{\lambda_3^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} \frac{\omega_{3113}^{(n)}}{(\omega_{1133}^{(n)} + \omega_{1313}^{(n)})} - \rho^{(n)} c^2 \frac{\lambda_3^{(n)}}{\lambda_1^{(n)}} (\omega_{1133}^{(n)} + \omega_{1313}^{(n)})^{-1}. \quad (2.39)$$

notasyonları kullanılmıştır.

Sonuç olarak, içi dolu bileşik silindirde yayılan eksenel simetrik boyuna dalgalar dispersiyon denklemi (2.37₁), (2.38₁) ve (2.39) biçiminde, içi boş bileşik silindirde yayılan eksenel simetrik boyuna dalgalar dispersiyon denklemi (2.37₂), (2.38₂) ve (2.39) denklemlerindeki formda elde edilmiştir.

3.BÖLÜM

3.1 Sayısal Sonuçların Değerlendirilmesi

Bileşik silindir katman malzemelerinin yoğunluklarının oranı $\rho^{(2)}/\rho^{(1)}=1.0$, elastisite sabitleri modülleri oranları $\lambda^{(2)}/\mu^{(2)} = \lambda^{(1)}/\mu^{(1)} = 1.5$ alınmıştır. Dalga yayılımının faz hızı, $c(=c(kR))$ biçiminde gösterilmiştir. $c=c(kR)$ fonksiyonun grafiklerine, literatürde olduğu gibi dispersiyon eğrileri denilmiştir. Sayısal incelemelerde F boyutsuz kayma-yay parametresinin, $\lambda_3^{(2)}$ ve $\lambda_3^{(1)}$ ön şekil değiştirmeleri belirleyen parametrelerin, söz konusu dispersiyon eğrilerine etkisini nitelik ve nicelik açısından ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Problemin çözümünde kolaylık sağlaması açısından aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} c_{20}^{(k)} &= \sqrt{\frac{\mu^{(k)}}{\rho^{(k)}}}, \\ c_{10}^{(k)} &= \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}{\rho^{(k)}}}, \\ c_2^{(k)}(\lambda_3^{(k)}) &= \sqrt{\frac{\omega_{1313}^{(k)}}{\rho^{(k)}}}, \\ c_1^{(k)}(\lambda_3^{(k)}) &= \sqrt{\frac{\omega_{3333}^{(k)}}{\rho^{(k)}}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada,

$$c_{20}^{(k)} = c_2^{(k)}(1.0),$$

$$c_{10}^{(k)} = c_1^{(k)}(1.0) \text{ dir.}$$

3.2 Hesaplama Algoritması

Dispersiyon çözüm denklemi (2.37)- (2.39)'da verilmiştir. Bu denklemlerden Farklı parametrelerin değişik kombinasyonları ile çeşitli sayısal sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu denklemin sayısal çözümünde çok yaygın olarak kullanılan iki parçaya ayırma yöntemi uygulanmıştır.

Bu yöntem kullanılarak kR 'nin her değeri için $c/c_{20}^{(2)}$ dalga hızı bulunmuştur.

Bu çalışmadaki temel amaç, öngerilmeli iki katlı bileşik silindirin, iç ve dış silindirleri arasındaki yüzeyde oluşan kayma-yay tipi süreksizliğinin temel modlara olan etkisini ortaya çıkarmaktır.

Ancak, temel modlara karşı gelen dispersiyon eğrilerini elde etmek için (2.37) – (2.39) denkleminin yeterli miktarda N sayıda köklerini bulmak gerekmektedir. Bu durumda $(c/c_2^{(2)})_1, (c/c_2^{(2)})_2, \dots, (c/c_2^{(2)})_N$ kökleri ve kR arasındaki grafiklerden temel moda karşı gelen $\{c/c_{20}^{(2)}, kR\}$ üzerinde dispersiyon eğrisi oluşturulmaktadır.

$(c/c_2^{(2)})_n$ ve kR arasındaki bağımlılığa karşı gelen grafikler oluşumunda, genellikle dispersif ve dispersif olmayan iki tip dalga yayılımına uygun olan eğri ortaya çıkmaktadır. Çalışmada dispersif dalga eğrilerinin elde edilmesi amaçlandığından dispersif olmayan dalga eğrileri genellikle uygun şekillerde gösterilmiştir. Bu açıklamalar ışığında, sayısal sonuçları elde etmek için boyutsuz F kayma-yay parametresinin, dalga yayılım hızına ve dispersiyon eğrilerine etkilerini incelemek için bileşik iki katlı silindirlerde öngerilmesiz ve öngerilmeli durumlar ayrı ayrı ele alınmıştır.

3.3 İçi Dolu İki Katlı Bileşik Silindir

Burada içi dolu iki katlı bileşik silindirin öngerilmesiz ve öngerilmeli durumda temas koşullarının süreksizliğinin boyuna dalga dispersiyonuna etkisi incelenmektedir.

3.3.1 Öngerilmemiş durumun değerlendirilmesi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$)

Bileşik silindirde kullanılan iç ve dış silindir malzemesinin farklı malzeme rijitlikleri kullanılmıştır. Birinci durumda, iç silindir malzemesinin dış silindir malzemesine oranla daha rijit olduğu ele alınmıştır. İkinci durumda ise, dış silindir malzemesinin iç silindir malzemesine nazaran daha rijit olduğu varsayılmıştır.

Birinci durumda, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, ikinci durumda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ rijitlik oranları kullanılarak Şekil 3.1 ve Şekil 3.2 grafikleri elde edilmiştir. Grafikler, $h/R = 1.0$ (Şekil 3.1a, Şekil 3.2a) da, $h/R = 0.5$ (Şekil 3.1b, Şekil 3.2b)de, $h/R = 0.3$ (Şekil 3.1c, Şekil 3.2c) de ve $h/R = 0.1$ (Şekil 3.1d, Şekil 3.2d) de değerleri kullanılarak elde edilmiştir.

Şekillerden gözüktüğü gibi, $F > 0$ durumunda, yani temas koşullarının süreksiz olduğu durumda, $F = 0$ (yani sürekli temas koşulları sağlandığı durum) durumunda elde edilen tek bir temel dispersiyon mod yerine farklı iki tip temel mod oluşmaktadır. ile $F > 0$ durumunda elde edilen birinci ve ikinci tip temel modlara karşı gelen dalga yayılım hızlarını c_{IF}^D ve c_{IIF}^D ile ve $F = 0$ durumundaki dalga yayılım hızını c ile işaret edilirse, söz konusu modlar

$$c_{IF}^D < c < c_{IIF}^D . \quad (3.2)$$

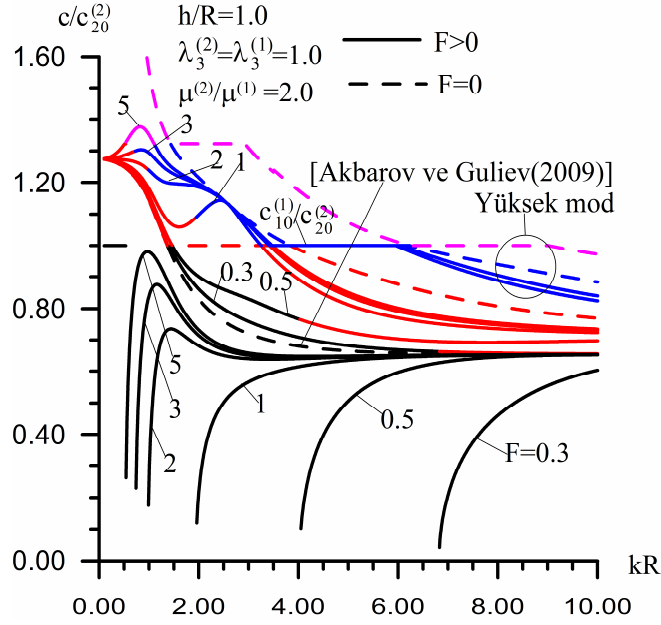
ilişkisi yardımı ile tanımlanabilmektedir. Yani, $F > 0$ durumundaki birinci (ikinci) tip dispersiyon eğrileri $F = 0$ durumuna karşı gelen dispersiyon eğrisinden altta (üstte) kalmaktadır.

Şekil 3.1a'da $F = 0$ durumunda elde edilen grafik (dispersiyon eğrisi) Akbarov ve Guliev (2009) çalışmasında elde edilen uygun grafikte çakışmaktadır. Bu durum sayısal incelemeler de kullanılan hesaplama algoritmasının ve kodlamasının güvenli ve doğru olduğunu kanıtlamaktadır.

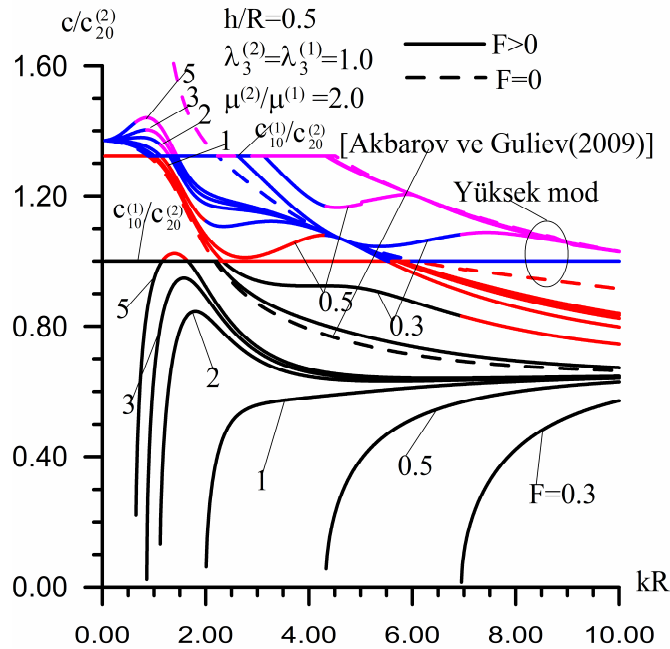
Elde edilen sayısal sonuçlardan birinci tip temel dispersiyon eğrilerinin kR 'nin belirli değerlerinden (bu değerler $(kR)_{cf}$ ile işaret edilsin) sonra oluştuğu gözlenmektedir. $(kR)_{cf}$ değerleri F kayma-yay parametresinin azalması ile büyüyerek sonsuza yaklaşmaktadır.

$$F \rightarrow 0 \text{ iken, } (kR)_{cf} \rightarrow \infty . \quad (3.3)$$

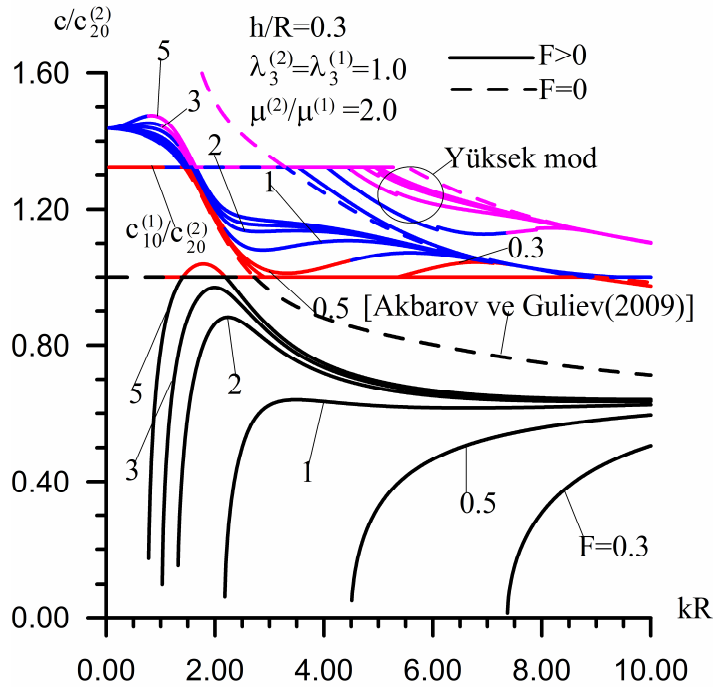
olmaktadır. $kR \rightarrow 0$ yaklaşırken temel modun ikinci tip eğrisinin dalga yayılımının hızı, sonlu bir limite sahip olduğundan ve bu limit değeri $F=0$ sürekli temas koşulunda elde edilen sonuçlarla çakışmaktadır.



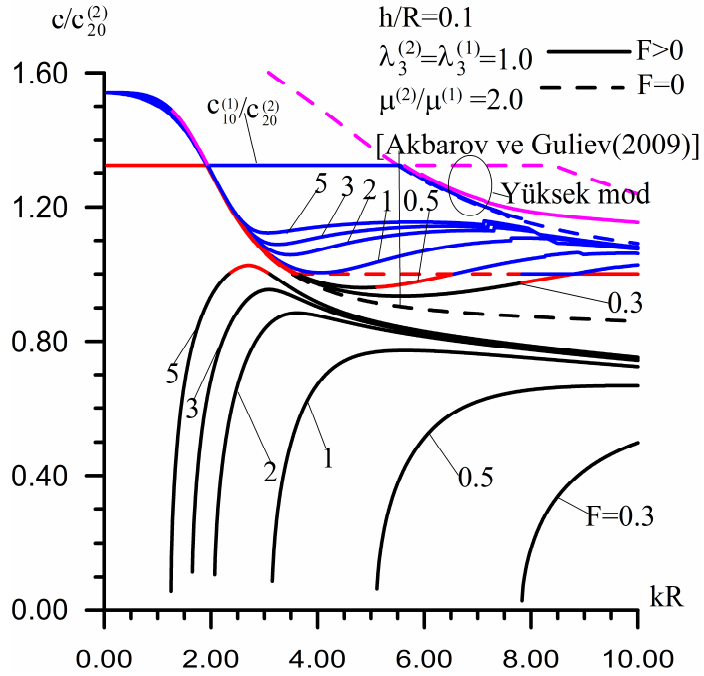
Şekil 3.1a : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$ 'de dalga yayılımına etkisi.



Şekil 3.1b : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 0.5$ 'de dalga yayılımına etkisi.



Şekil 3.1c : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 0.3$ 'de dalga yayılımına etkisi.



Şekil 3.1d : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 0.1$ 'de dalga yayılımına etkisi.

Elde edilen bu sonuç, Lai ve diğ.(1971) ve Akbarov ve Guliev (2009) çalışmalarında kullandıkları aşağıdaki bağıntıya göre belirlenmektedir.

$$kR \rightarrow 0 \text{ iken, } \frac{c_{IIF}}{c_{20}^{(2)}} = \left[\frac{e^{(2)}\eta^{(2)} + e^{(1)}\eta^{(1)}\mu^{(1)}/\mu^{(2)}}{\eta^{(2)} + \eta^{(1)}\rho^{(1)}/\rho^{(2)}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

olmaktadır. Burada:

$$e^{(k)} = 2 \left(1 + \frac{\lambda^{(k)}}{2(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})} \right),$$

$$\eta^{(2)} = \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-2},$$

$$\eta^{(1)} = \left(2\frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{-2}. \quad (3.5)$$

Yukarıdaki sonuç, küçük dalga sayıları için, yani $kR \rightarrow 0$ için nitelik açısından süreksiz temas koşulları durumu için kullanıldığında, Berger ve diğ. (2000) ve Kepceler (2010) çalışmalarındaki bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımı incelemelerinde elde edilen sonuçlara uymaktadır.

$kR \rightarrow \infty$, durumu ele alındığında Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de elde edilen sonuçlarda ve $kR \gg 10.0$ değerlerinde aşağıdaki ifadeler geçerli olmaktadır:

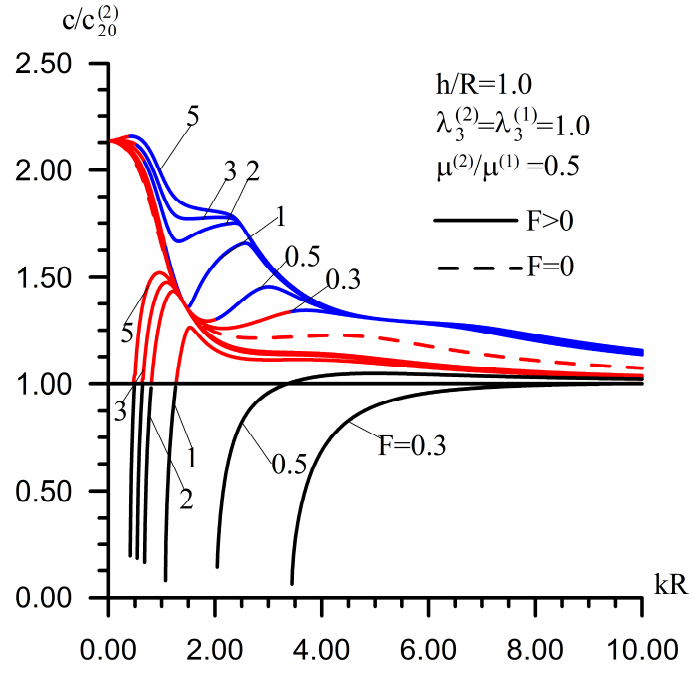
$$\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0 \text{ değeri alındığında,}$$

$$kR \rightarrow \infty \text{ iken, } c_{IF}^D \rightarrow c_R^{(1)} - 0, c_{IIF}^D \rightarrow c_R^{(1)} + 0. \quad (3.6)$$

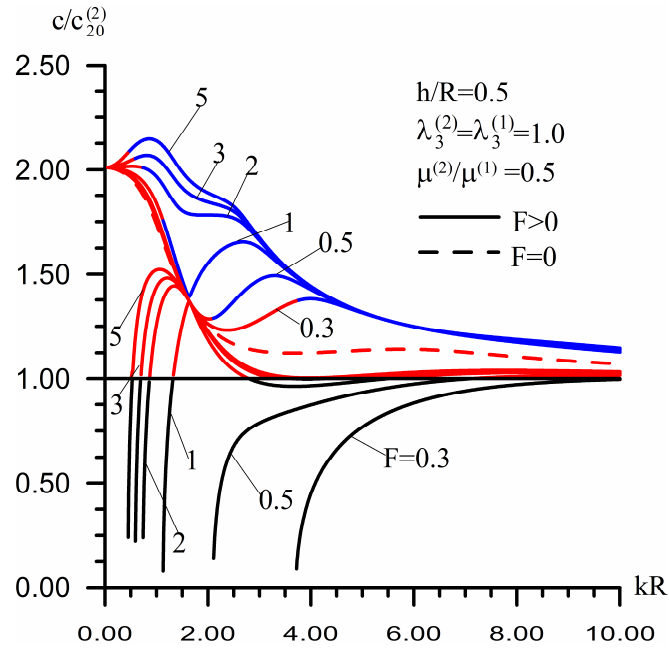
olmaktadır. $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ değeri alındığında,

$$kR \rightarrow \infty \text{ iken, } c_{IF}^D \rightarrow c_2^{(2)} - 0, c_{IIF}^D \rightarrow c_2^{(2)} + 0. \quad (3.7)$$

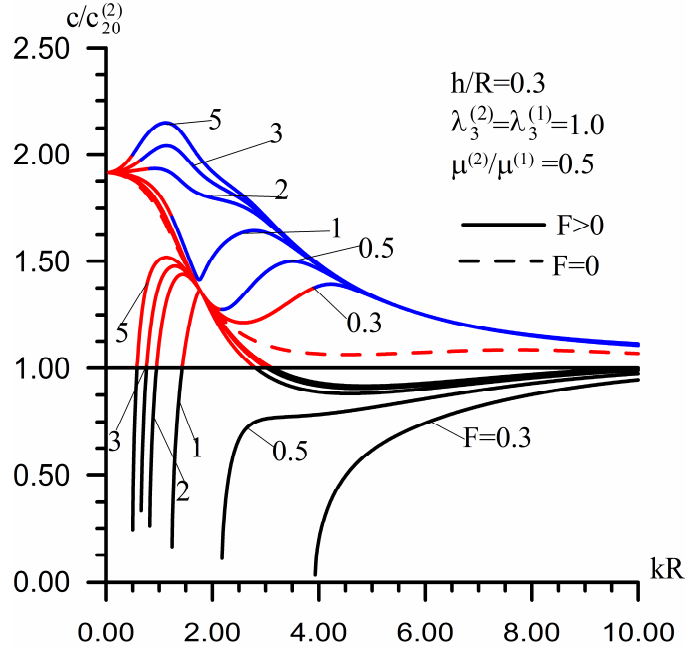
olmaktadır. Yukarıdaki ifadelerde $c_R^{(1)}$, iki katlı bileşik silindirin dış kat malzemesinin Rayleigh dalga hızı, $c_2^{(2)}$ iç kat malzemesinin kayma dalga hızı olmaktadır.



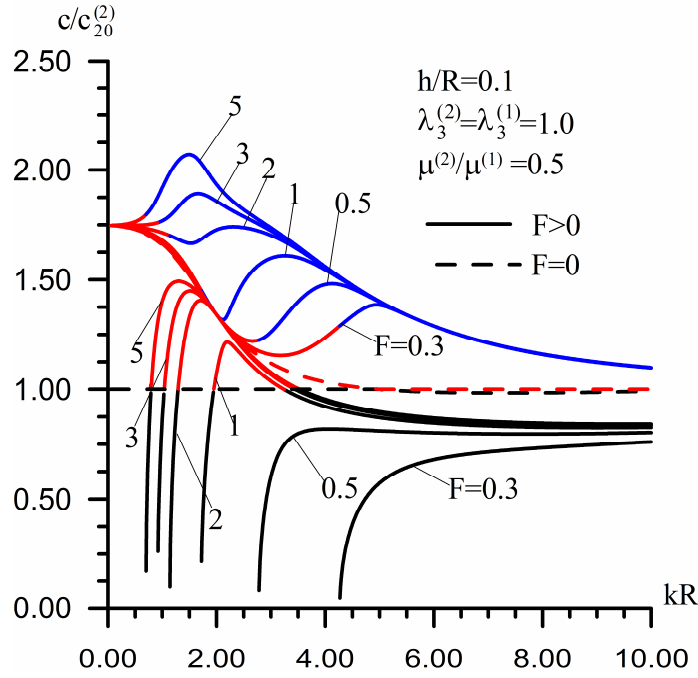
Şekil 3.2a : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.5$, $h/R=1.0$ 'de dalga yayılımına etkisi.



Şekil 3.2b : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.5$, $h/R=0.5$ 'de dalga yayılımına etkisi.



Şekil 3.2c : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.5$, $h/R=0.3$ 'de dalga yayılımına etkisi.



Şekil 3.2d : F 'in, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}=0.5$, $h/R=0.1$ 'de dalga yayılımına etkisi.

Bütün bu ifadeler tüm mümkün $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ değerleri için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

$kR \rightarrow \infty$ iken,

$$c_{IF}^D \rightarrow \min \{c_R^{(1)} - 0, c_2^{(2)} - 0, c_S - 0\}, c_{IIF}^D \rightarrow \min \{c_R^{(1)} + 0, c_2^{(2)} + 0, c_S + 0\}. \quad (3.8)$$

Burada c_S , Stoneley dalga hızıdır. Stoneley dalgası farklı iki malzemelerin arayüzeyi civarında meydana gelen bir tür dalga olduğundan, belirli malzeme çiftleri için geçerli olduğundan ve bu çalışmada bu tür malzeme çifti incelenmediğinden Stoneley dalga hızının Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de meydana gelmediği gözlenmektedir. Dispersiyon eğrilerin karakterleri analizi ele alındığında;

Birinci tip temel dispersiyon eğrilerine karşı gelen grafiklerden gözüktüğü gibi kayma-yay parametresi F ’in belirli $F = F_{I*}$ değerlerinden sonra $c_{IF}^D = c_{IF}^D(kR)$ fonksiyonu monoton olmayan bir fonksiyona dönüşür.

Bir başka değişle, $F > F_{I*}$ durumunda c_{IF}^D değerinde kR değerleriyle, keskin bir şekilde artmakta hatta kR ’in belirli bir $kR = (kR)_{Icr}$ değerleri için maksimuma ulaşmaktadır. Bu nedenle aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\left. \frac{dc_{IF}^D}{d(kR)} \right|_{kR=(kR)_{Icr}} = 0. \quad (3.9)$$

Sayısal sonuçlar gösteriyor ki, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ olduğu durumda, $kR > (kR)_{Icr}$ için c_{IF}^D ’in değerleri kR ’in artması ile monoton olarak azalmaktadır. Ancak $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ olduğunda da ise $kR > (kR)_{Icr}$ için c_{IF}^D ve kR arasındaki bağımlı ilişkiden dolayı h/R ’in değerlerine göre değişmektedir.

Örneğin, $F \geq 1$, olduğunda sözkonusu bağımlılık $h/R = 0.3$ durumunda monoton olmadığı halde $h/R = 0.1$ durumunda monotondur.

Yukarıdaki sonuçların $F > F_{I*}$ ’in durumunda geçerli olduğunu hatırlanmalıdır. Ayrıca F_{I*} değerlerinin esasen $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ değerlerine bağlı olduğu görülmektedir. Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de verilen sonuçlara göre $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ için $F_{I*} = 2.0$ ve $F_{I*} = 1.0$ kabul edilebilmektedir.

Temel modun ikinci dispersiyon eğrilerine ait Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de gösterilen sonuçlara göre kayma-yay parametresi F ’in her bir seçilmiş değeri için öyle kR var ki, (bu kR ’nin $(kR)_S$ ile işaretlensin) $kR > (kR)_S$ durumunda sözkonusu ikinci tip dispersiyon eğrisi $F = 0$ durumunda elde edilen temel dispersiyon eğrisinden ayrılmaktadır.

Sayısal sonuçlara göre aşağıdaki değerlendirme yapılmaktadır.

$$F \rightarrow \infty \text{ iken, } (kR)_S \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

olmaktadır. Bundan başka sayısal sonuçlar gösteriyor ki, temel moda ait ikinci dispersiyon eğrisine karşı gelen dalgaın faz hızı c_{IIF}^D , F ’in artması ile artmaktadır. Bununla birlikte F arttıkça temel moda ait ikinci tip dispersiyon eğrileri daha karmaşık bir şekil alır.

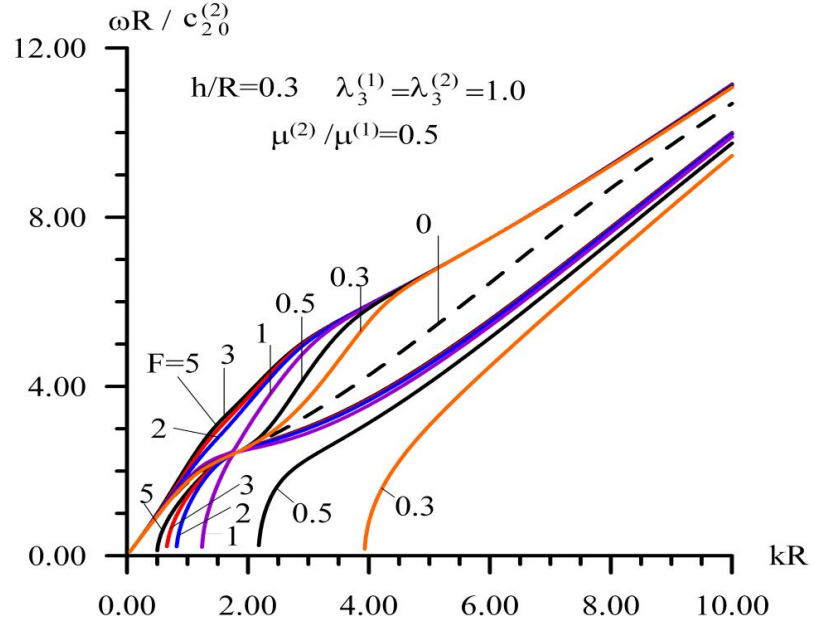
F ’in öyle değerleri vardır ki, (bu değerleri F_{II*} ile işaret edilsin) $F > F_{II*}$ durumlarında c_{IIF}^D değerleri için yerel maksimum veya minimum olmaktadır. c_{IIF}^D ’in söz konusu yerel maksimum veya minimuma karşı gelen kR değerini (bu değeri $(kR)_{IIcr.}$ ile işaretlensin)

$$\left. \frac{dc_{IIF}^D}{d(kR)} \right|_{kR=(kR)_{IIcr.}} = 0. \quad (3.11)$$

denklemini yazılabilmektedir.

Sayısal sonuçlara dayanarak F_{II*} ’in sadece $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ değerlerine değil aynı zamanda h/R ’in değerlerine bağlı olduğu ortaya çıkmaktadır.

(3.9) ve (3.11) denklemlerine göre $kR = (kR)_{Icr.}$ veya $kR = (kR)_{IIcr.}$ durumlarında ele alınan dalga yayılımının grup hızı, onun faz hızına eşit olmaktadır. Başka bir deyişle, $kR = (kR)_{Icr.}$ veya $kR = (kR)_{IIcr.}$ noktaları normal ve normal olmayan dispersiyon kısımlarını birbirinden ayırmaktadır. Söylenenler Şekil 3.3’te verilen dispersiyon diyagramları aracılığı ile daha açık bir biçimde gözlenmektedir.



Şekil 3.3 : F 'in farklı değerleri için birinci mod için dispersiyon diyagramı.

Bu dispersiyon diyagramları $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h/R = 0.3$ durumunda çizilmiştir.

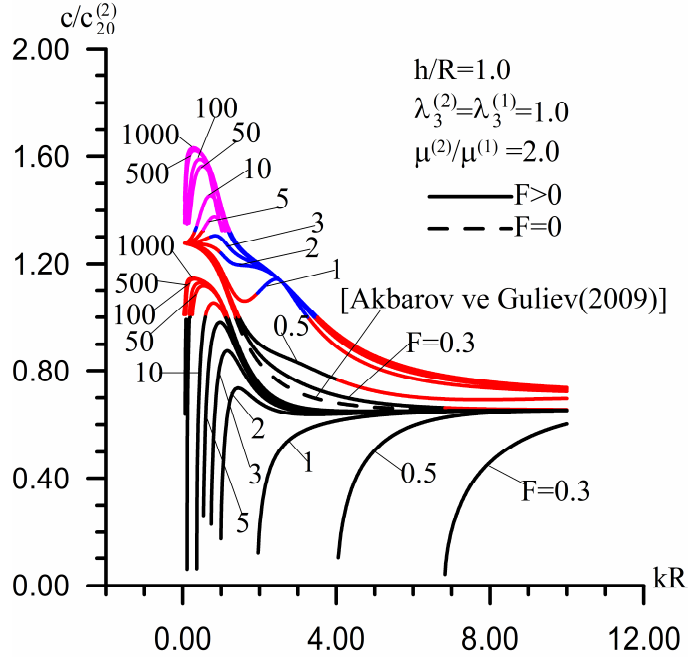
Benzer dispersiyon diyagramları problem parametrelerinin başka değerleri için de elde edilmektedir.

Yukarıda gösterildiği gibi $F = 0$ durumunun sürekli temas koşulu durumuna $F = \infty$ durumu ise tam kaymalı süreksiz temas koşuluna karşı gelmektedir. Bu durum aşağıdaki ifade ile açıklanmıştır:

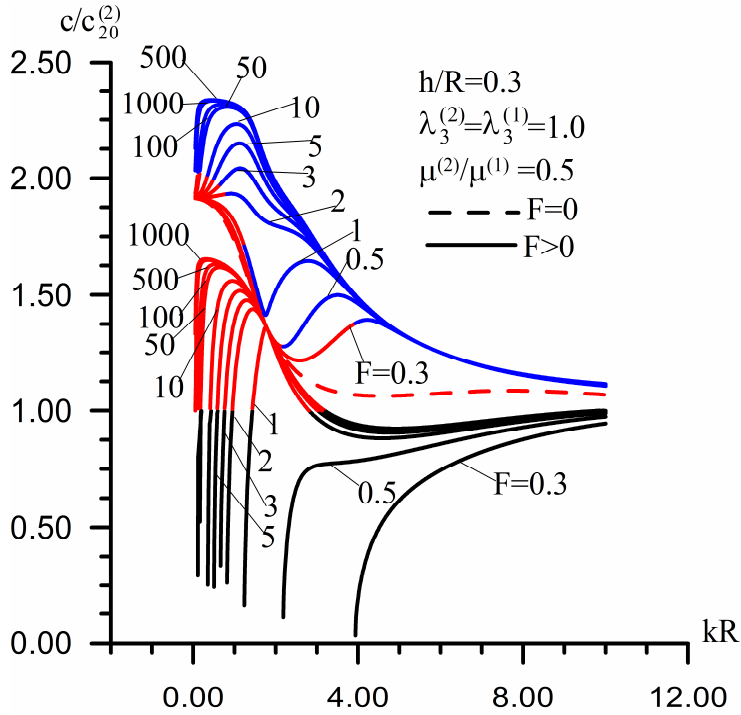
$$F \rightarrow 0 \text{ iken, } c_{IF}^D \rightarrow c + 0 . \quad (3.12)$$

olmaktadır. Şimdi temel moda ait dispersiyon eğrilerinin $F \rightarrow \infty$ durumundaki davranışını Şekil 3.4a'da $0 \leq F \leq 1000$ ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ ve $h/R = 1.0$ durumunda Şekil 3.4b'de $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ ve $h/R = 0.3$ durumlarında elde edilen grafikler göstermektedir. Bu grafiklerden gözüktüğü gibi $c_{IF}^D = c_{IF}^D(kR)$ ve $c_{IIF}^D = c_{IIF}^D(kR)$ eğrileri F 'in artması ile belirli bir "limit" eğrilerine yaklaşmaktadırlar.

$c_{IF}^D/c_{20}^{(2)}$ (veya $c_{IIF}^D/c_{20}^{(2)}$)'in $F = 500$ ve $F = 1000$ olduğunda aldığı değerler arasındaki fark 10^{-5} mertebesinde.



Şekil 3.4a : F 'in yüksek değerlerinde, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$ değerleri için içi dolu iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon eğrileri.



Şekil 3.4b : F 'in yüksek değerlerinde, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, $h/R = 0.3$ değerleri için dolu iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon eğrileri.

Başka bir değişle, $F = 1000$ 'in durumunda elde edilen dispersiyon eğrilerini $F = \infty$ durumuna karşı gelen dispersiyon eğrileri gibi kabul etmek mümkündür.

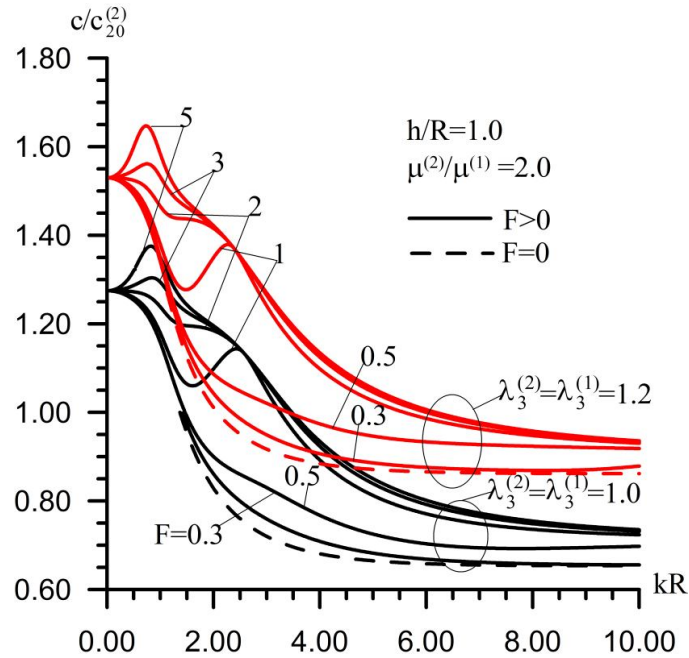
3.3.2 Öngerilmeli durumun değerlendirilmesi

Bu kısımda yukarıdaki kısımda elde edilen sonuçlara silindirlerde oluşabilen ön şekil değiştirmelerin (veya öngerilmelerin) etkisi incelenmektedir. Bu etkiler (2.1)'deki $\lambda_3^{(1)}$ ve $\lambda_3^{(2)}$ parametreleri aracılığıyla yapılmaktadır. $F = 0$ durumu, yani sürekli temas koşuluna ait durum Akbarov ve Guliev (2009) tarafından incelenmiştir.

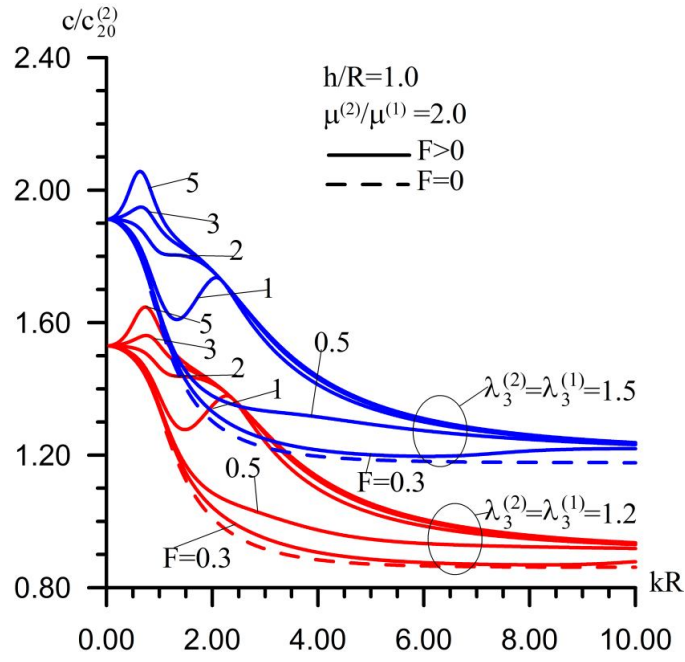
$F > 0$ durumuna ait yani süreksiz temas koşulları durumuna ait sayısal sonuçlar Şekil 3.5 ve Şekil 3.6'da sırası ile temel moda ait ikinci ve birinci tip dispersiyon eğrileri için verilmektedir. Bu eğriler $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h/R = 1.0$ durumunda

$\lambda_3 (= \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(1)})$: $\{1.0; 1.2\}$ (Şekil 3.5a ve Şekil 3.6a), $\{1.2; 1.5\}$ (Şekil 3.5b ve Şekil 3.6b), $\{1.0; 0.9\}$ (Şekil 3.5c ve Şekil 3.6c), $\{0.9; 0.8\}$ (Şekil 3.5d ve Şekil 3.6d), değerleri için alınmıştır.

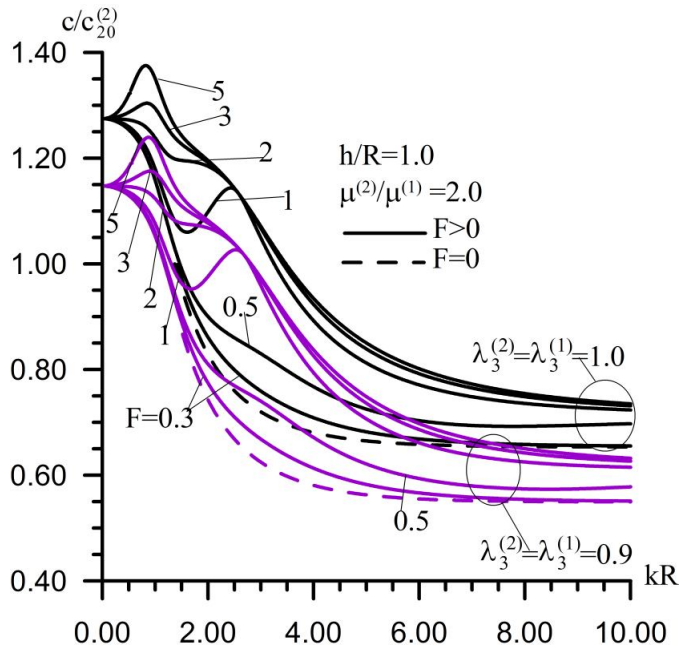
Şekil 3.5'te verilen sonuçlardan gözüktüğü gibi, F değerleri küçüldükçe yani $F \rightarrow 0$ iken elde edilen sonuçlar, Akbarov ve Guliev (2009) çalışmasında verilen sonuçlara yaklaşmaktadır.



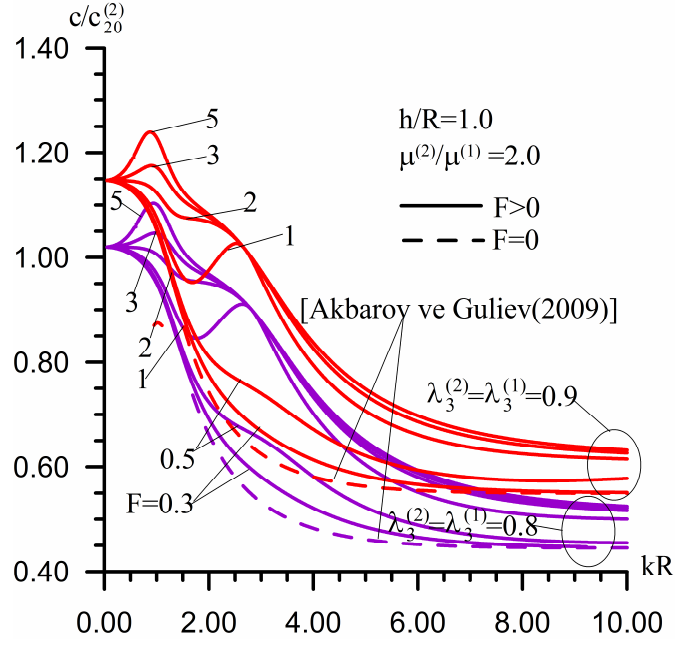
Şekil 3.5a : Öngerilmeli durumun $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $1.2\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.5b : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$ ve $1.5\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.5c : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $0.9\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.

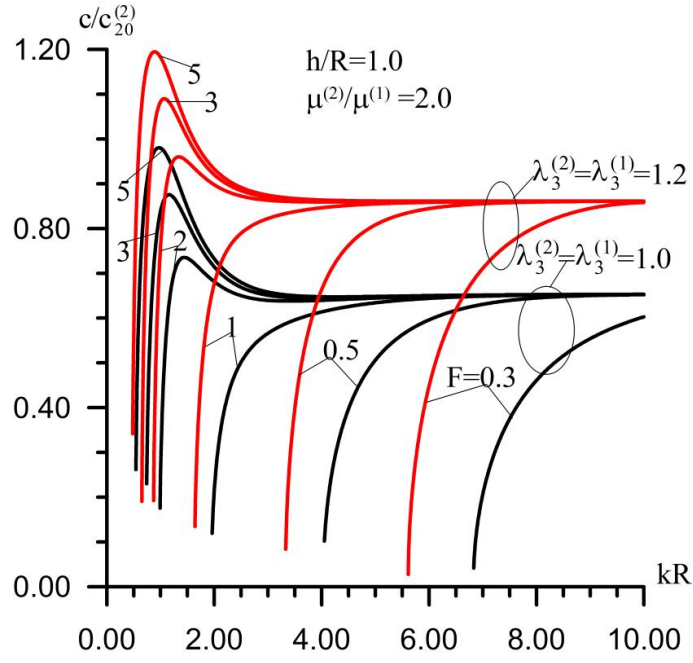


Şekil 3.5d : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9 \text{ ve } 0.8\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.

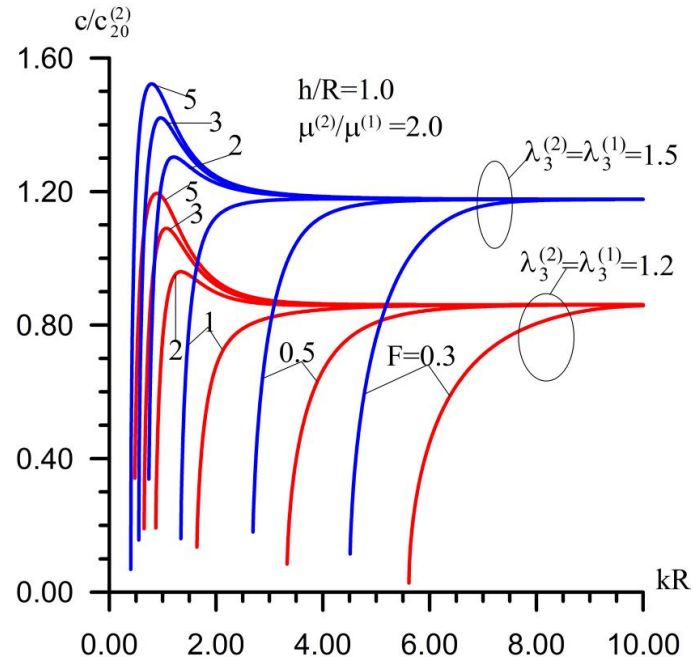
Bundan başka Şekil 3.5 ve Şekil 3.6’da verilen sayısal sonuçlar silindirlerdeki ön şekil değiştirmelerin silindirler arasındaki süreksiz temas koşullarının sözkonusu dalga yayılımının dispersiyon eğrilerine nitelik açısından etki etmemektedir. Yani ele alınan ön şekil değiştirmeler süreksiz temas koşullarının dispersiyon eğrilerine sadece nicelik açısından etki ettiğini kanıtlamaktadır. Yalnız ön şekil değiştirme durumunda (3.2) ilişkisi aşağıdaki biçimde bulunmaktadır.

$$c_{IF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) < c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) < c_{IIF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}). \quad (3.13)$$

Burada; $c_{IF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$, $c_{IIF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$ ve $c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$ ’lar sırasıyla c_{IF} , c_{IIF} ve c ön şekil değiştirme durumdaki değerlerini göstermektedir.



Şekil 3.6a : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $1.2\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.6b : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$ ve $1.5\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.

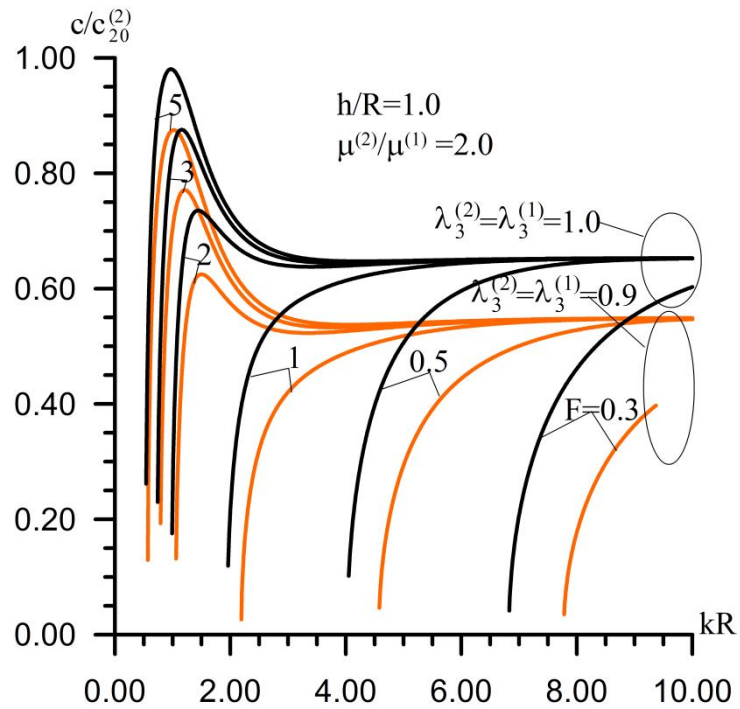
Bundan başka elde edilen sayısal sonuçlardan gözüktüğü gibi $F \rightarrow 0$ iken , $(kR)_{cf.} \rightarrow \infty$ ilişkisi öngerilmeli durum için de geçerli olmaktadır. Ancak, öngerilme $(kR)_{cf.}$ 'nin değerlerini önemli derecede değiştirmektedir;

Yani silindirler ön çekmeye maruz kalmışlarsa $(kR)_{cf.}$ değerleri ön çekmenin artması ile azalmakta, eğer silindirler ön basınca maruz kalmışlar ise $(kR)_{cf.}$ değerleri ön basıncın artması ile büyümektedir.

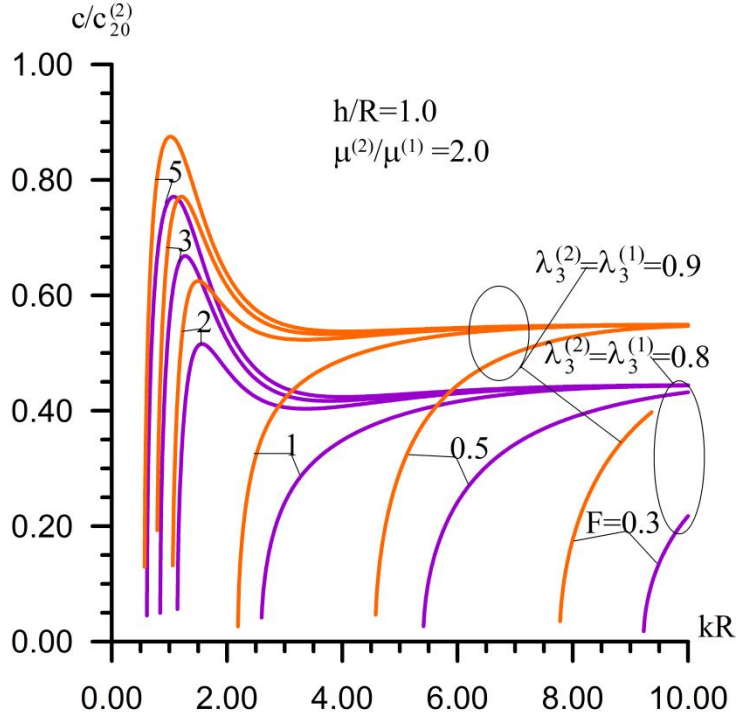
Şekil 3.5'ten görüldüğü gibi $(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$ 'nin $(kR) \rightarrow \infty$ iken aldığı limit değerleri kayma-yay parametresinden bağımsızdır ve bu limit Akbarov ve Guliev (2009) çalışmalarında verilen aşağıdaki ifade ile verilmektedir.

$kR \rightarrow 0$ iken,

$$\frac{c_{III}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})}{c_{20}^{(2)}} = \left[\frac{e^{(2)} (\lambda_3^{(2)})^2 \eta^{(2)} + e^{(1)} (\lambda_3^{(1)})^2 \eta^{(1)} \mu^{(1)} / \mu^{(2)}}{\eta^{(2)} + \eta^{(1)} \rho^{(1)} / \rho^{(2)}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.14)$$



Şekil 3.6c : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 0.9\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.6d : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9 \text{ ve } 0.8\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.

Yukarıdaki sayısal sonuçlardan öngerilmeli durumda (3.6), (3.7) ve (3.8) ifadelerin aşağıdakilerle yerdeğıştirmeleri gerekmektedir.

$kR \rightarrow \infty$ iken,

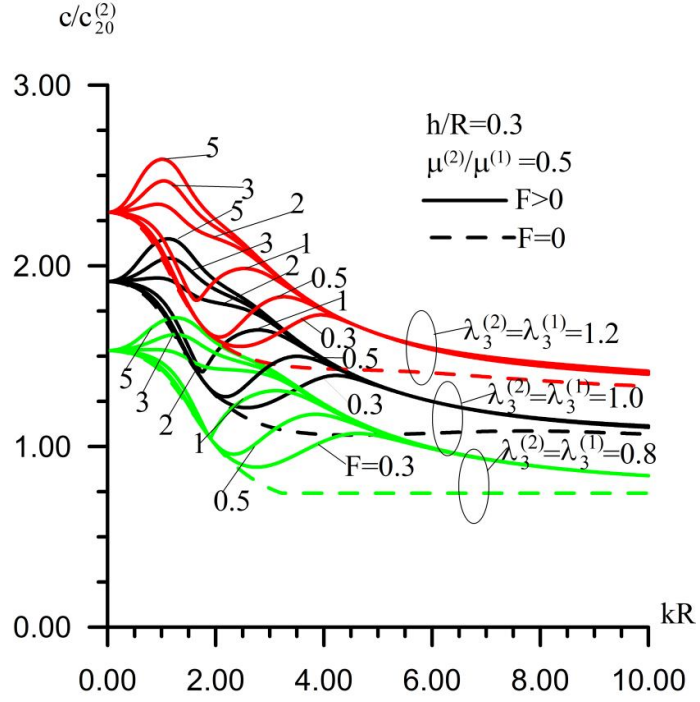
$$c_{IF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) \rightarrow \min \{c_R^{(1)}(\lambda_3^{(1)}) - 0, c_2^{(2)}(\lambda_3^{(2)}) - 0, c_s(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) - 0\},$$

$$c_{IIF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) \rightarrow \min \{c_R^{(1)}(\lambda_3^{(1)}) + 0, c_2^{(2)}(\lambda_3^{(2)}) + 0, c_s(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) + 0\}$$

$$F \rightarrow 0 \text{ iken, } c_{IIF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) \rightarrow c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) + 0. \quad (3.15)$$

Burada; $c_s(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$, öngerilmeli durumdaki Stoneley dalga hızlarıdır.

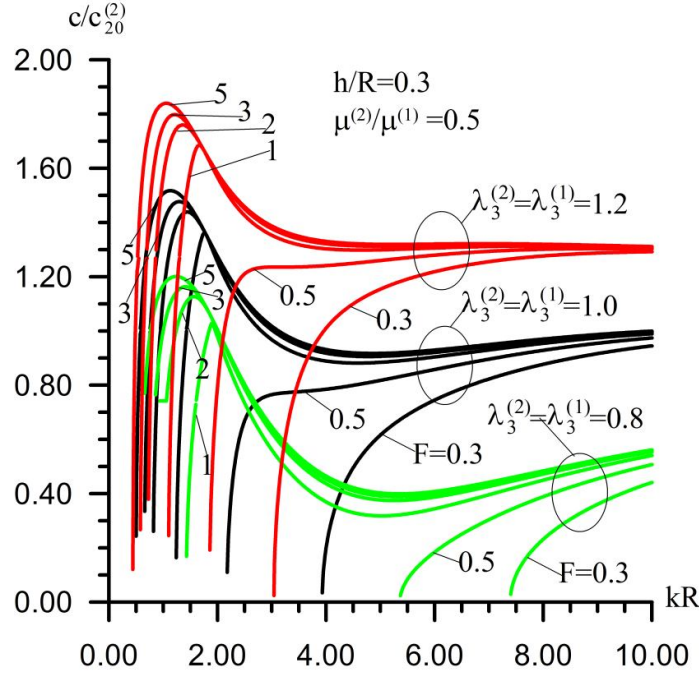
(3.15)'teki ifadeler $kR \rightarrow \infty$ iken, öngerilmeli durumda birinci ve ikinci tip dispersiyon eğrilerine ait dalga yayılım hızlarını göstermektedir.



Şekil 3.7 : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2, 1.0, 0.8\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6’da elde edilen sonuçlardan $(kR)_{Icr.}$ ve $(kR)_{IIcr.}$ değerlerinin ön şekil değiştirmelerin büyümesi ile yani $\lambda_3^{(1)}$ ve $\lambda_3^{(2)}$ parametrelerin büyümesi ile küçüldüğü açıkça görülmektedir.

Yukarıdaki incelemeler, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ durumu için yapılmıştır. Yani Şekil 3.5 ve Şekil 3.6’da verilen sonuçlar $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ durumuna aittir. Benzer sonuçlar $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ durumu için de elde edilmiş ve Şekil 3.7 ve Şekil 3.8’de gösterilmektedir.



Şekil 3.8 : Öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2, 1.0, 0.8\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.

İçi dolu iki katlı bileşik silindir için öngerilme değerlerini karşılaştıran ilave grafikler **EK.B** (1)-(4) şekillerinde verilmiştir.

3.4 İçi Boş İki Katlı Bileşik Silindir

İçi boş iki katlı bileşik silindirin temas koşullarının süreklilik durumu, öngerilmemiş ve öngerilmeli durumda dalga dispersiyonun temas koşullarının etkisi altında incelenmesi yapılmıştır.

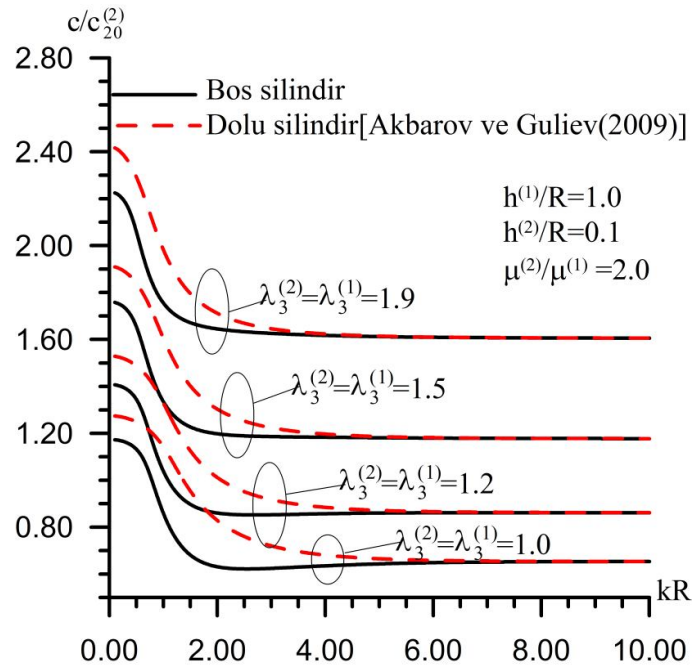
3.4.1 Temas koşulunun süreklilik durumu

Bu kısımda öngerilmeli içi boş iki katlı bileşik silindirin katları arasındaki yüzeyin sürekli olduğu durum, yani (2.27) denkleminde $F=0$ olduğu durum ele alınmaktadır. İki katlı içi dolu bileşik silindir ile ilgili araştırma Akbarov ve Guliev (2009) çalışmasında yapıldığı hatırlanmalıdır. Bu açıdan bakıldığında bu kısımda yapılan incelemeler Akbarov ve Guliev (2009) çalışmasındaki incelemelerin içi boş iki katlı silindirler için genelleştirilmesini oluşturmaktadır.

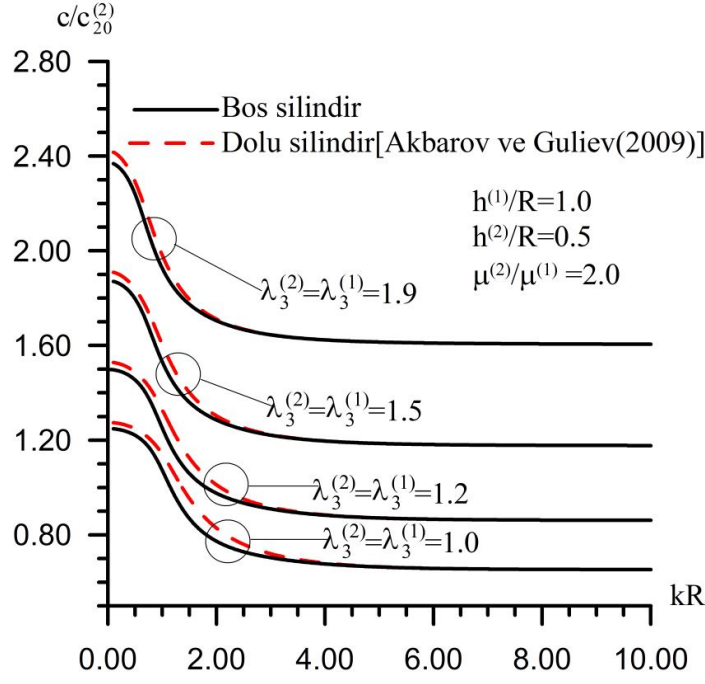
Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'da (2.37₂) dispersiyon denkleminin $F = 0$ durumunda, sayısal çözümünden elde edilen ve temel moda ait olan dispersiyon eğrileri verilmektedir.

Bu eğriler $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $h^{(1)}/R = 1.0$ durumunda (Şekil 3.9)'da $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} \geq 1.0$ ve (Şekil 3.10)'da $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} \leq 1.0$ hallerinde $h^{(2)}/R = 0.1$ (Şekil 3.9a ve Şekil 3.10a), $h^{(2)}/R = 0.5$ (Şekil 3.9b ve Şekil 3.10b), $h^{(2)}/R = 0.9$ (Şekil 3.9c ve Şekil 3.10c) elde edilmiştir. Bununla birlikte Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'da içi dolu iki katlı bileşik silindire ait uygun dispersiyon eğrileri de verilmektedir. Mekaniksel ve fiziksel öngörülere göre $h^{(2)}/R$ büyüdükçe, içi boş iki katlı bileşik silindir için elde edilen dispersiyon eğrilerine yaklaşmalıdır.

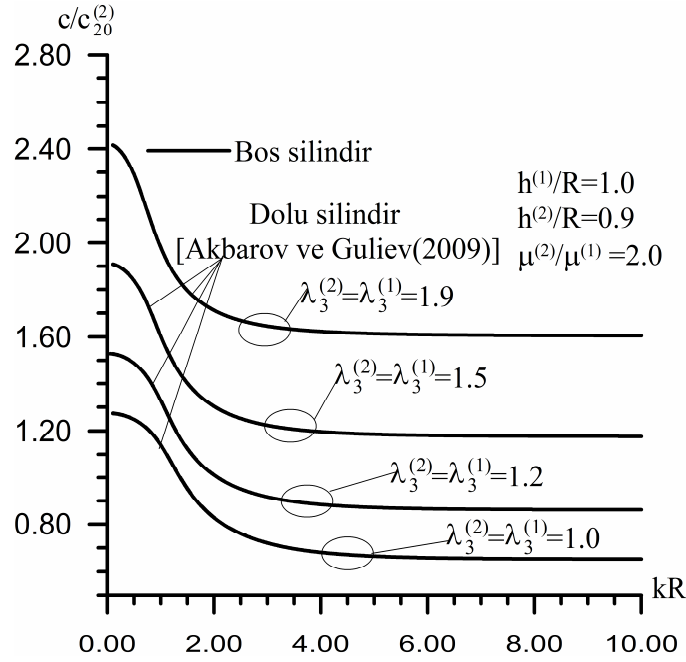
Elde edilen ve Şekil 3.9 ve Şekil 3.10'da verilen sayısal sonuçların analizi ve karşılaştırılması yukarıda belirtilen mekaniksel ve fiziksel öngörülere doğrulamaktadır.



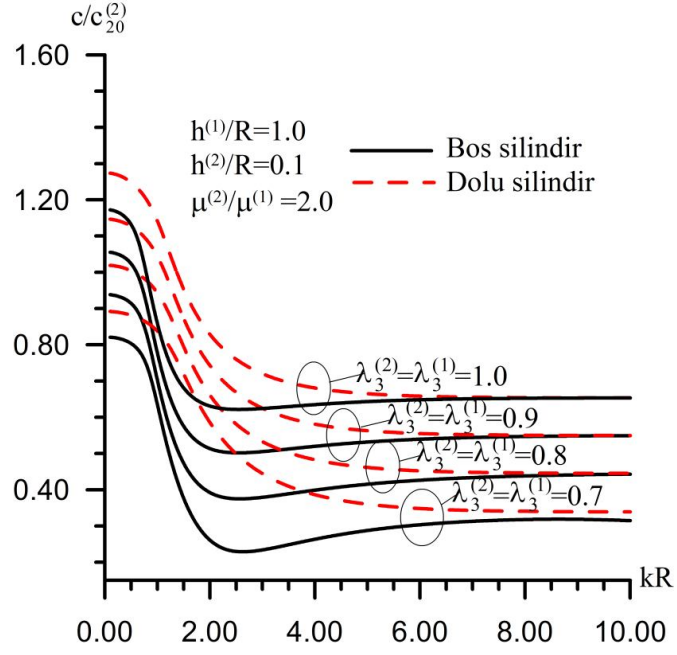
Şekil 3.9a : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R = 0.1$ değeri için öngerilmenin çekme olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.



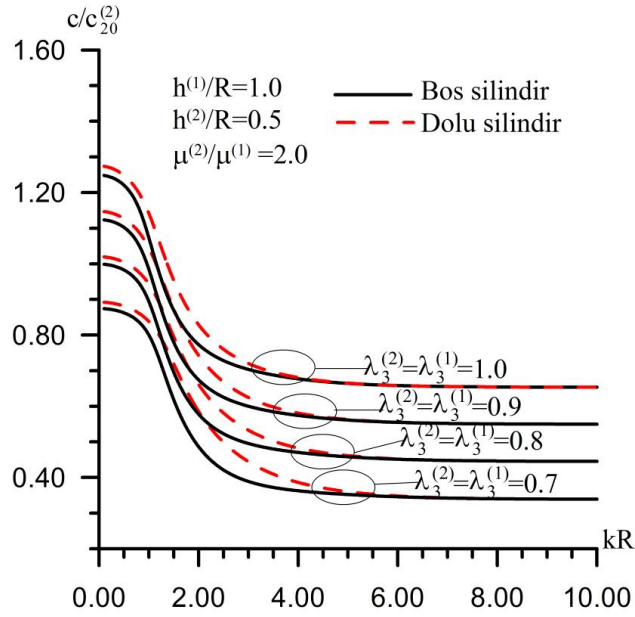
Şekil 3.9b : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.5$ değeri için öngerilmenin çekme olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.



Şekil 3.9c : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.9$ değeri için öngerilmenin çekme olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.



Şekil 3.10a : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.1$ değeri için öngerilmenin basınç olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.



Şekil 3.10b : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R=0.5$ değeri için öngerilmenin basınç olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.

Bundan başka, sayısal ve analitik incelemeler aşağıdaki limit durumlarının olduğunu göstermektedir.

$$kR \rightarrow 0 \text{ iken, } \frac{c}{c_{20}^{(2)}} = \frac{e^{(2)} (\lambda_3^{(2)})^2 \eta^{(2)} + e^{(1)} (\lambda_3^{(1)})^2 \eta^{(1)} \mu^{(1)} / \mu^{(2)}}{\eta^{(2)} + \eta^{(1)} \rho^{(1)} / \rho^{(2)}},$$

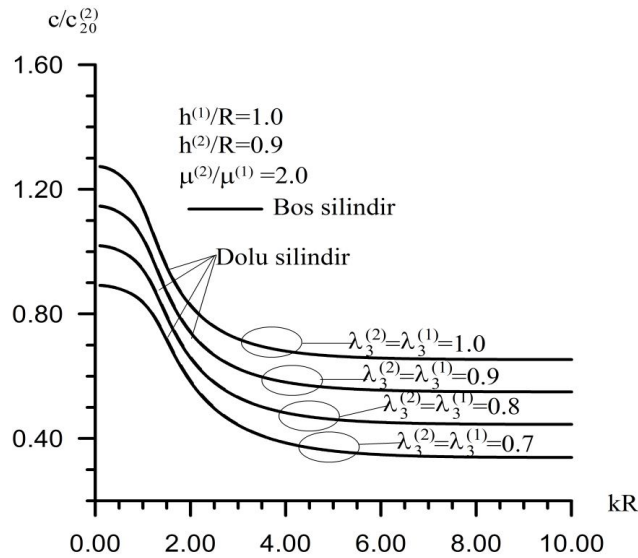
$$kR \rightarrow \infty \text{ iken, } \frac{c}{c_{20}^{(2)}} = \min \left(c_R^{(1)}(\lambda_3^{(1)})/c_{20}^{(2)}; c_R^{(2)}(\lambda_3^{(2)})/c_{20}^{(2)} \right). \quad (3.16)$$

olmaktadır. Burada, $c_R^{(2)}(\lambda_3^{(2)})$ içi boş iki katlı bileşik silindirdeki iç katın Rayleigh dalga hızı, $c_R^{(1)}(\lambda_3^{(1)})$ silindirdeki dış katın Rayleigh dalga hızıdır. Ayrıca aşağıdaki bağıntılar (3.16) denkleminde kullanılmaktadır.

$$e^{(k)} = 2 \left(1 + \lambda^{(k)} / \left(2 \left(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)} \right) \right) \right),$$

$$\eta^{(2)} = \frac{2 - h^{(2)}/R}{\left(1 + h^{(1)}/h^{(2)} \right) \left(2 + h^{(1)}/R - h^{(2)}/R \right)},$$

$$\eta^{(1)} = \frac{2 + h^{(1)}/R}{\left(1 + h^{(1)}/h^{(2)} \right) \left(2 + h^{(1)}/R - h^{(2)}/R \right)}. \quad (3.17)$$



Şekil 3.10c : Sürekli temas koşullarının $h^{(2)}/R = 0.9$ değeri için öngerilmenin basınç olması durumunda dispersiyon eğrilerine etkisi.

Sayısal sonuçlara dayanarak, ön çekme (ön basınç) şekil değiştirmeleri içi boş iki katlı silindirde de dalga yayılım hızını artırmaktadır (azaltmaktadır).

EK.B'de, tüm grafikler, farklı rijitlik değerlerinde birinci, ikinci ve yüksek modlarda hem içi boş hem de içi dolu iki katlı bileşik silindirler için öngerilmeli ve öngerilmesiz durum karşılaştırılarak verilmiştir. Grafikler $\{h^{(1)}/R = 1.0;$

$h^{(2)}/R = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$ değerleri kullanılarak hem ön basınç hem de ön çekme değerlerinde dalga dispersiyon eğrileri için elde edilmiştir.

3.4.2 Öngerilmemiş durumda düreksiz temas koşullarının etkisinin

değerlendirilmesi ($\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$)

$F > 0$ için iki durum ele alınmıştır. Birinci durumda $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, yani iç silindir malzemesinin dış silindir malzemesine ikinci durumda ise $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$, yani dış silindir malzemesinin iç silindir malzemesine nazaran daha rijit olduğu dikkate olmaktadır. Birinci durum ile ilgili sonuçlar Şekil 3.11 de verilirken ikinci durum ile ilgili sonuçlar **EK.B**'de (5)-(16) şekillerinde verilmiştir.

Grafikler $\{h^{(1)}/R = 1.0; h^{(2)}/R = 0.5\}$ (Şekil 3.11a), $\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.5\}$ (Şekil 3.11b), $\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.3\}$ (Şekil 3.11c), $\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.1\}$ (Şekil 3.11d) ve $\{h^{(1)}/R = 0.1; h^{(2)}/R = 0.5\}$ (Şekil 3.11e) değerleri kullanılarak elde edilmiştir.

Şekillerde içi dolu iki katlı bileşik silindirde olduğu gibi içi boş iki katlı bileşik silindirde de $F > 0$ durumunda, yani temas koşullarının süreksiz olduğu durumda, $F = 0$ tek bir temel dispersiyon mod yerine farklı iki tip temel mod oluşmaktadır. c_{IF}^B ve c_{IIF}^B ile $F > 0$ durumunda elde edilen birinci ve ikinci tip temel modlara karşı gelen dalga yayılım hızlarını işaret edersek, söz konusu modları

$$c_{IF}^B < c < c_{IIF}^B. \quad (3.18)$$

ilişkisi yardımı ile tanımlanabilmektedir. Yani, $F > 0$ durumundaki birinci (ikinci) tip dispersiyon eğrileri $F = 0$ durumuna karşı gelen dispersiyon eğrisinden altta (üstte) kalmaktadır. İçi dolu iki katlı bileşik silindirde olduğu gibi içi boş iki katlı bileşik silindirde de elde edilen sayısal sonuçlardan birinci tip temel dispersiyon

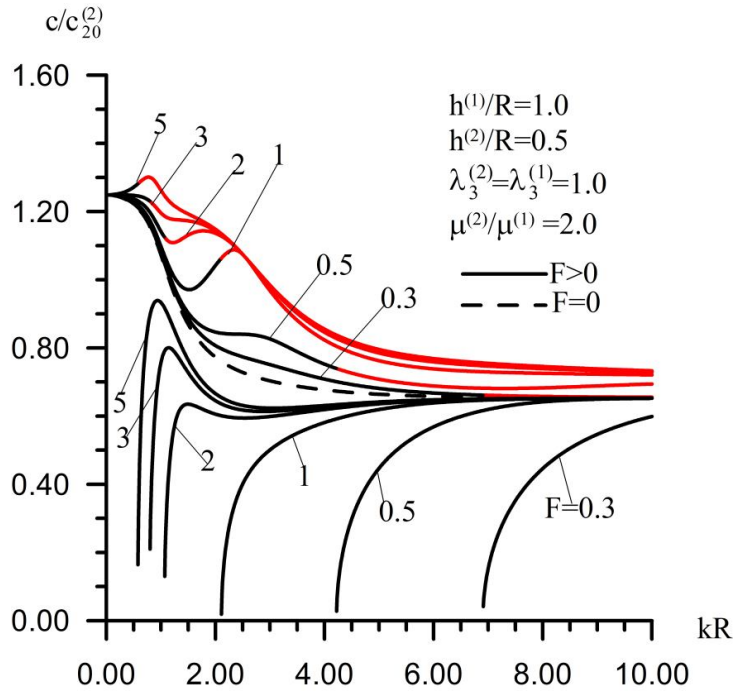
eğrilerinin kR 'nin belirli değerlerinden (bu değerleri $(kR)_{cf}$ ile işaret edilsin) sonra olduğu görülmektedir. $(kR)_{cf}$ değerleri F kayma-yay parametresinin azalması ile büyüyerek sonsuza yaklaşmaktadır.

$$F \rightarrow 0 \text{ iken, } (kR)_{cf.} \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

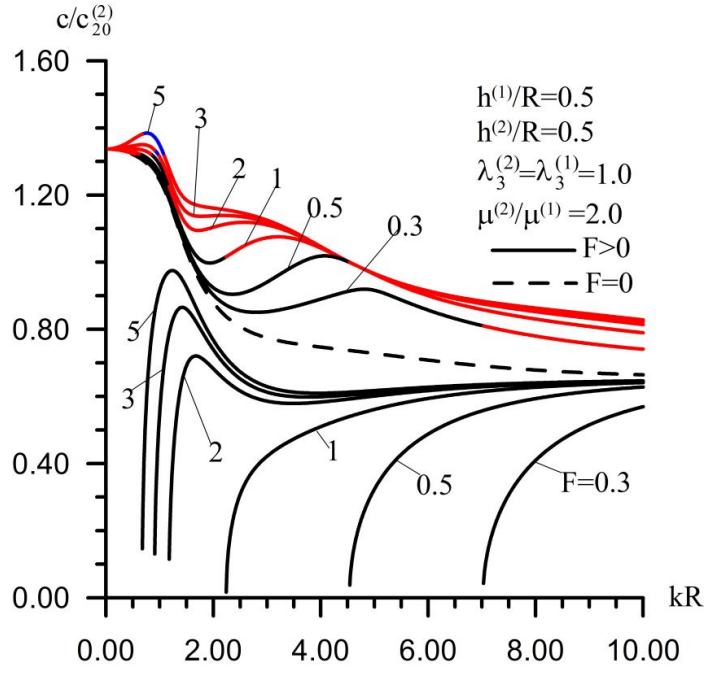
olmaktadır. $kR \rightarrow 0$ yaklaşırken temel modun ikinci tip eğrisinin dalga yayılımının hızı, sonlu bir limite sahip olduğundan ve bu limit değeri $F=0$ sürekli temas koşulunda elde edilen sonuçlarla çakışmakta ve aşağıdaki bağıntıya göre belirlenmektedir.

$$kR \rightarrow 0 \text{ iken, } \frac{c_{HF}^B}{c_{20}^{(2)}} = \left[\frac{e^{(2)}\eta^{(2)} + e^{(1)}\eta^{(1)}\mu^{(1)}/\mu^{(2)}}{\eta^{(2)} + \eta^{(1)}\rho^{(1)}/\rho^{(2)}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.20)$$

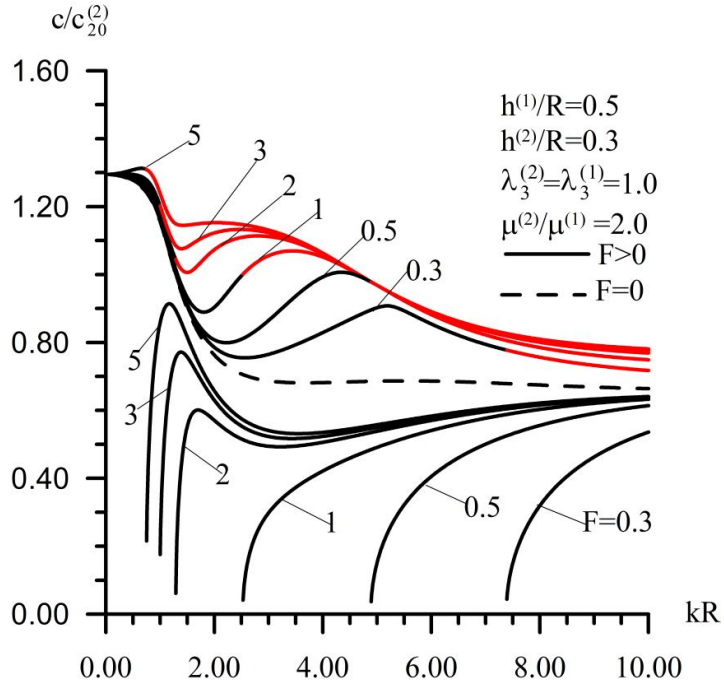
Yukarıdaki sonuç, küçük dalga sayıları için, yani $kR \rightarrow 0$ için nitelik açısından süreksiz temas koşulları durumu için kullanıldığında, Berger ve diğ. (2000) ve Kepceler (2010) çalışmalarındaki bileşik silindirlerde burulma dalga yayılımı incelemelerinde elde edilen sonuçlara uymaktadır.



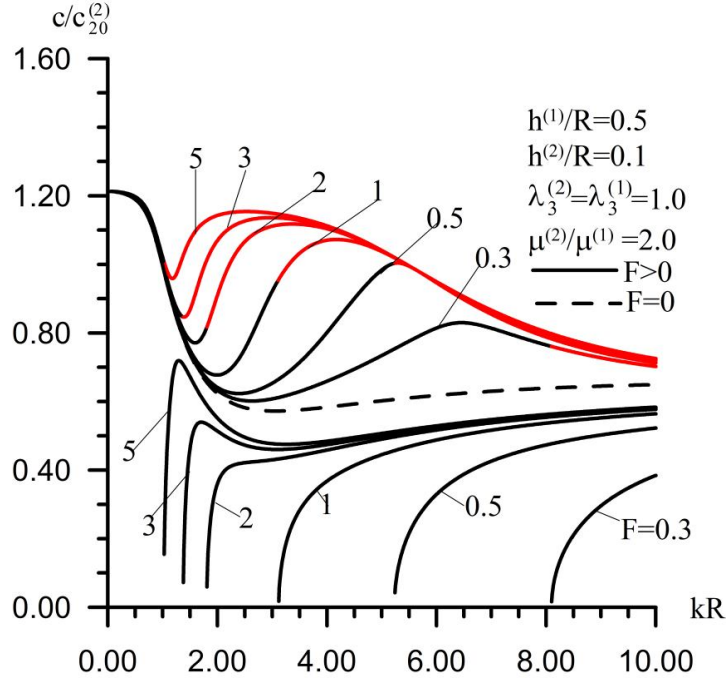
Şekil 3.11a : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\{h^{(1)}/R=1.0; h^{(2)}/R=0.5\}$ değeri için dispersiyon eğrilerine etkisi.



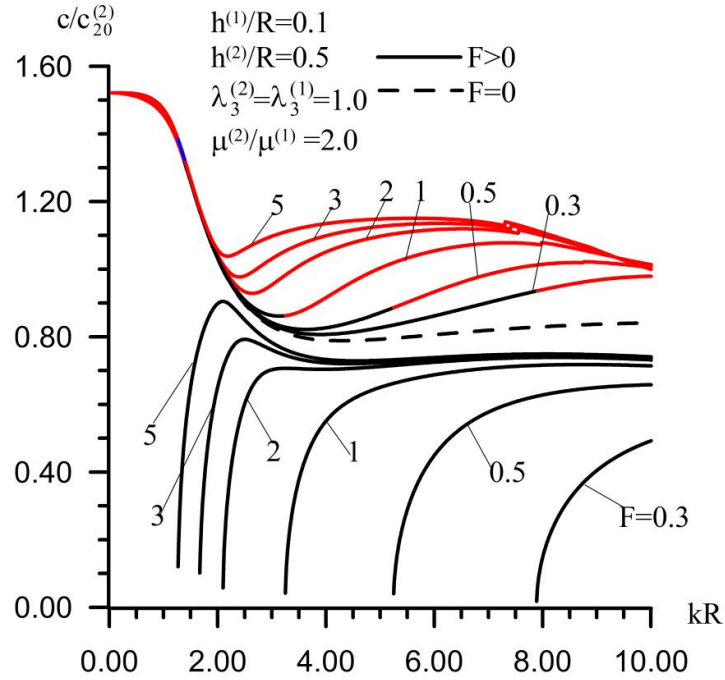
Şekil 3.11b : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.5\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.



Şekil 3.11c : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\{h^{(1)}/R = 0.5; h^{(2)}/R = 0.3\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.



Şekil 3.11d : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\{h^{(1)}/R = 1.0; h^{(2)}/R = 0.1\}$ değerleri için dispersiyon eğrilerine etkisi.

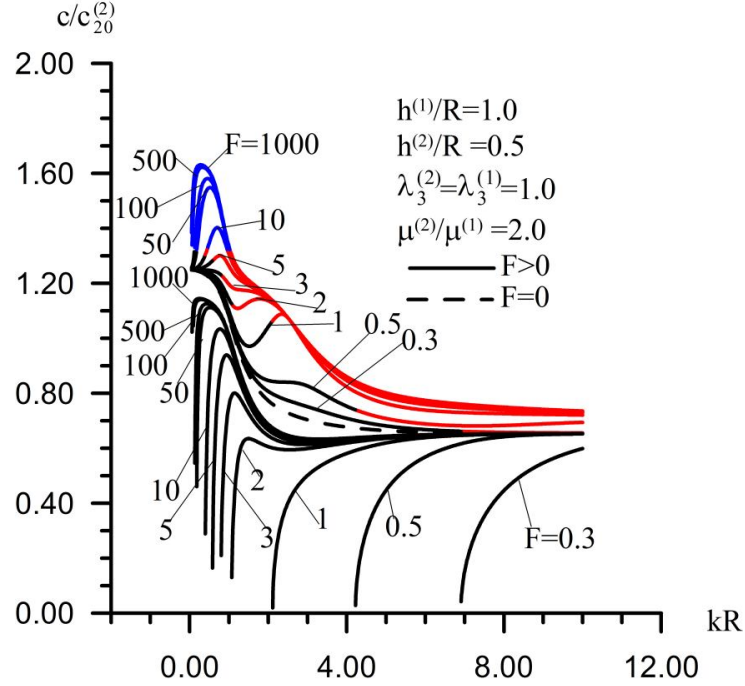


Şekil 3.11e : İçi boş iki katlı bileşik silindirde sürekli temas koşullarının $\{h^{(1)}/R = 0.1; h^{(2)}/R = 0.5\}$ değeri için dispersiyon eğrilerine etkisi.

$kR \rightarrow \infty$, durumunu ele aldığımızda Şekil 3.12 de elde edilen sonuçlarda ve $kR \gg 10.0$ değerlerinde aşağıdaki ifadeler geçerli olmaktadır. $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ değeri alındığında;

$$kR \rightarrow \infty \text{ iken, } c_{IF}^B \rightarrow c_R^{(1)} - 0, c_{IIF}^B \rightarrow c_R^{(1)} + 0. \quad (3.21)$$

olmaktadır.



Şekil 3.12 : F 'in yüksek değerlerinde, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, $\{h^{(1)}/R = 1.0; h^{(2)}/R = 0.5\}$ için içi boş iki katlı bileşik silindirin "limit" dispersiyon eğrileri.

(3.21) ifadesi bütün olası $\mu^{(2)}/\mu^{(1)}$ değerleri için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

$kR \rightarrow \infty$ iken,

$$c_{IF}^B \rightarrow \min\{c_R^{(1)} - 0, c_R^{(2)} - 0, c_s - 0\}, c_{IIF}^B \rightarrow \min\{c_R^{(1)} + 0, c_R^{(2)} + 0, c_s + 0\}. \quad (3.22)$$

Yukarıdaki ifadelerde $c_R^{(1)}$ ($c_R^{(2)}$) bileşik silindirin dış(iç) silindirin Rayleigh dalga hızı, burada c_s ise Stoneley dalga hızıdır. Stoneley dalga hızı içi dolu iki katlı bileşik silindirde olduğu gibi içi boş iki katlı bileşik silindirde de elde edilen şekillerden meydana gelmediği görülmektedir.

Dispersiyon eğrilerin karakterleri analizi ele alındığında;

İçi dolu iki katlı bileşik silindirde olduğu gibi içi boş iki katlı bileşik silindirde de temel moda ait birinci tip dispersiyon eğrilerine karşı gelen grafiklerden gözüktüğü gibi kayma-yay parametresi F 'in belirli $F = F_{I*}$ değerlerinden $c_{IF}^B = c_{IF}^B(kR)$ fonksiyonu monoton olmayan bir fonksiyona dönüşür.

Bir başka değişle, $F > F_{I*}$ durumunda c_{IF}^B değerinde kR değerleriyle, keskin bir şekilde artmakta hatta kR 'in belirli bir $kR = (kR)_{Icr}$ değerleri için maksimuma ulaşmaktadır. Bu nedenle aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\left. \frac{dc_{IF}^B}{d(kR)} \right|_{kR=(kR)_{Icr}} = 0. \quad (3.23)$$

Sayısal sonuçlar gösteriyor ki, $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ olduğu durumda, $kR > (kR)_{Icr}$ için c_{IF}^B 'in değerleri kR 'in artması ile monoton olarak azalmaktadır.

Temel moda ait ikinci tip dispersiyon eğrileri ele alındığında elde edilen sayısal sonuçlardan kR 'nin belirli değerlerinden önce (bu kR 'ler $(kR)_m$ ile işaretlensin) $F > 0$ durumunda elde edilen temel modun ikinci tip eğrileri $F = 0$ durumu için elde edilen eğrilere hemen hemen çakışmaktadır. Bu $(kR)_m$ değerleri F , $h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R$ değerlerine bağlıdır. Bu sebeple Şekil 3.11'de verilen grafiklerden aşağıdaki ilişki verilebilmektedir.

$$F \rightarrow \infty \text{ iken, } (kR)_m \rightarrow 0. \quad (3.24)$$

Ayrıca sayısal sonuçlar gösteriyor ki, $(kR)_m$ değerleri $h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R$ 'lerin azalması ile artmaktadır. Bunun yanında c_{IIF}^B , F 'in artması ile artmaktadır. Bundan başka sayısal sonuçlar gösteriyor ki, temel moda ait ikinci dispersiyon eğrisine karşı gelen dalganın faz hızı c_{IIF}^B F 'in artması ve $(h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R)$ 'lerin azalması ile temel moda ait ikinci tip dispersiyon eğrileri daha karmaşık bir şekil alır.

F 'in öyle değerleri vardır ki, (bu değerler F_{II*} ile işaret edilsin) $F > F_{II*}$ durumlarında c_{IIF}^B değerleri için yerel maksimum veya minimum olmaktadır. c_{IIF}^B 'in söz konusu yerel maksimum veya minimuma karşı gelen kR değerini (bu değer $(kR)_{IIcr}$ ile işaretlensin)

$$\left. \frac{dc_{IIF}^B}{d(kR)} \right|_{kR=(kR)_{IIcr.}} = 0. \quad (3.25)$$

denklemini yazılabilmektedir.

(3.25) denklemini F 'in aldığı belirli değerlerden sonra oluşmaktadır ve sadece F 'in değerlerine değil aynı zamanda $(h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R)$ 'lere de bağlıdır.

(3.23) ve (3.25) denklemlerine göre $kR = (kR)_{IIcr.}$ durumlarında ele alınan dalga yayılımının grup hızı, onun faz hızına eşit olmaktadır. Başka bir deyişle, $kR = (kR)_{Icr.}$ veya $kR = (kR)_{IIcr.}$ noktaları normal ve normal olmayan dispersiyon kısımlarını birbirinden ayırmaktadır.

Yukarıda gösterildiği gibi $F = 0$ durumunun sürekli temas koşulu durumuna $F = \infty$ durumu ise tam kaymalı süreksiz temas koşuluna karşı gelmektedir. Bu durum aşağıdaki ifade ile açıklanmıştır:

$$F \rightarrow 0 \text{ iken, } c_{IIF}^B \rightarrow c + 0. \quad (3.26)$$

olmaktadır. Şimdi temel moda ait dispersiyon eğrilerinin $F \rightarrow \infty$ durumundaki davranışını Şekil 3.12'de $0 \leq F \leq 1000$ ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$ ve $(h^{(1)}/R = 1.0, h^{(2)}/R = 0.5)$ 'lerin durumlarında elde edilen grafikler göstermektedir. Bu grafiklerden gözüktüğü gibi $c_{IF} = c_{IF}(kR)$ ve $c_{IIF} = c_{IIF}(kR)$ eğrileri F 'in artması ile belirli bir "limit" eğrilerine yaklaşmaktadırlar. $c_{IF}/c_{20}^{(2)}$ (veya $c_{IIF}/c_{20}^{(2)}$)'in $F = 500$ ve $F = 1000$ olduğunda aldığı değerler arasındaki fark 10^{-5} mertebesindeir.

3.4.3 Öngerilmeli Durumun Değerlendirilmesi

Bu kısımda ön şekil değiştirmelerin (veya öngerilmelerin) $F = 0$ durumu, yani sürekli temas koşuluna ait durum için ve $F > 0$ durumuna ait, yani temas koşulları süreksiz olduğu durumda dispersiyon eğrilerine etkisi incelenmiştir. Bu etkiler (2.1) deki $\lambda_3^{(1)}$ ve $\lambda_3^{(2)}$ parametreleri aracılığıyla yapılmaktadır.

Bu amaçla temel modlara ait birinci ve ikinci tip eğriler için sayısal sonuçlar Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'te, $\{h^{(1)}/R=1.0; h^{(2)}/R=0.5\}$ $\lambda_3 (= \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(1)}) : \{1.0; 1.2\}$ (Şekil 3.13a ve Şekil 3.14a), $\{1.2; 1.5\}$ (Şekil 3.13b ve Şekil 3.14b), $\{1.5; 1.9\}$ (Şekil 3.13c ve Şekil 3.14c), $\{1.0; 0.9\}$ (Şekil 3.13d ve Şekil 3.14d), $\{0.9; 0.8\}$ (Şekil 3.13e ve Şekil 3.14e) elde edilmiştir.

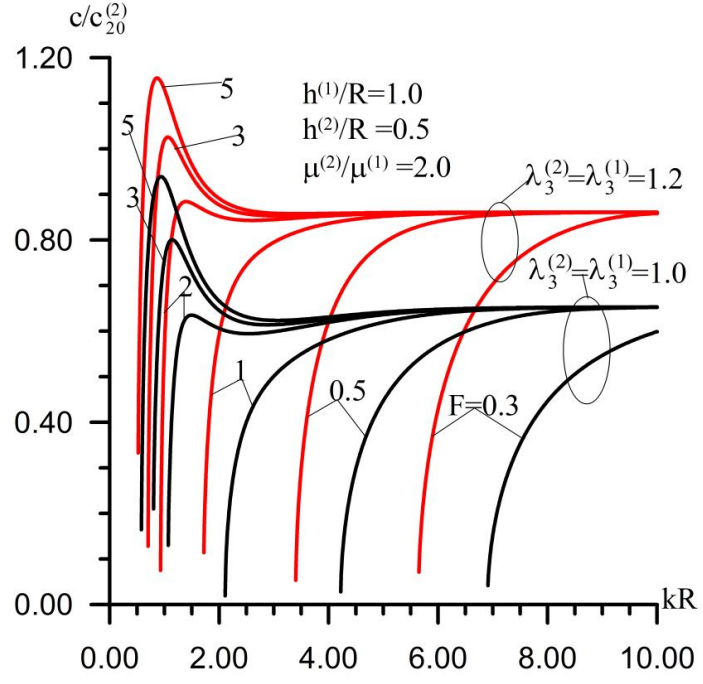
Sonuçlara bakıldığında iki katlı içi boş bileşik silindirdeki ön şekil değiştirmelerin silindirler arasındaki süreksiz temas koşullarının sözkonusu dalga yayılımının dispersiyon eğrilerine nitelik açısından etki etmemektedir. Yani ele alınan ön şekil değiştirmeler süreksiz temas koşullarının dispersiyon eğrilerine sadece nicelik açısından etki ettiğini kanıtlamaktadır. Yalnız ön şekil değiştirme durumunda (3.18) ilişkisi aşağıdaki biçimde bulunmaktadır.

$$c_{IF}^B(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) < c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) < c_{IIF}^B(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}). \quad (3.27)$$

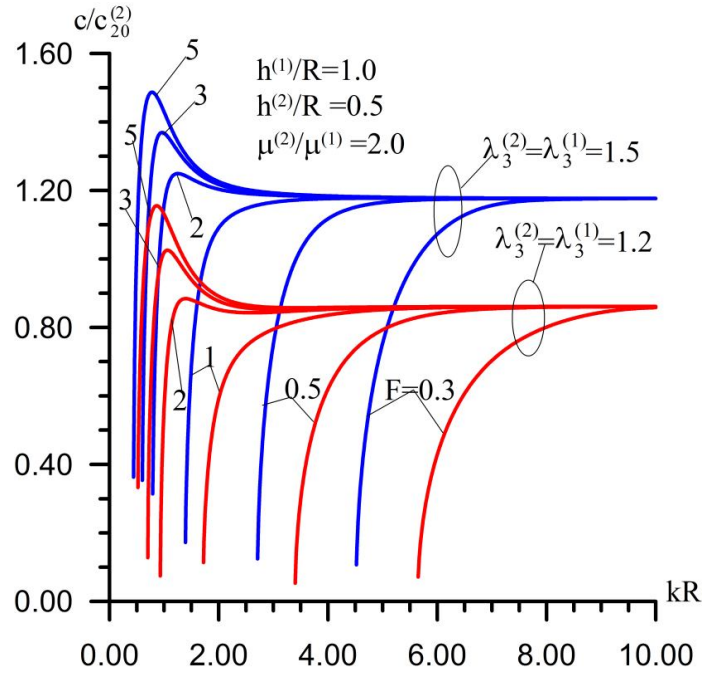
Burada; $c_{IF}^B(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$, $c_{IIF}^B(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$ ve $c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$ 'lar sırasıyla c_{IF}^B , c_{IIF}^B ve c ön şekil değiştirme durumundaki değerlerini göstermektedir.

Bundan başka elde edilen sayısal sonuçlardan gözüktüğü gibi $F \rightarrow 0$ iken , $(kR)_{cf.} \rightarrow \infty$ ilişkisi öngerilmeli durum için de geçerli olmaktadır. Ancak öngerilme, $(kR)_{cf.}$ 'nin değerlerini önemli derecede değiştirmektedir. Yani silindirler ön çekmeye maruz kalmışlarsa $(kR)_{cf.}$ değerleri ön çekmenin artması ile azalmakta, eğer silindirler ön basınca maruz kalmışlar ise $(kR)_{cf.}$ değerleri ön basıncın artması ile büyümektedir.

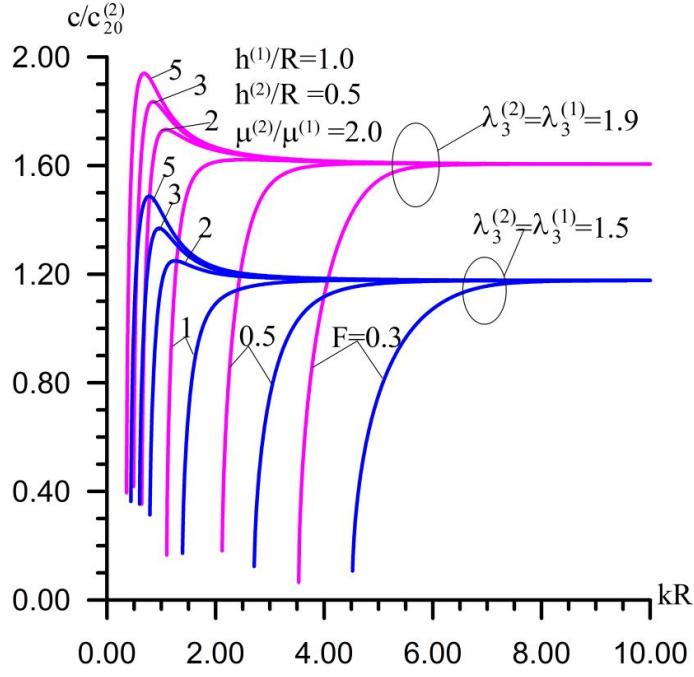
Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'te verilen grafiklerden anlaşıldığı üzere öngerilmeli durumda temel moda ait ikinci tip dispersiyon eğrisinin ile ilgili dalga yayılım hızı, küçük dalga sayıları limiti sıfıra yaklaşırken yani $kR \rightarrow 0$, boyutsuz kayma-yay parametresi F 'den bağımsızdır. Ancak öngerilmeli durumundaki bu limit değeri (3.16) denklemiyle hesaplanmaktadır.



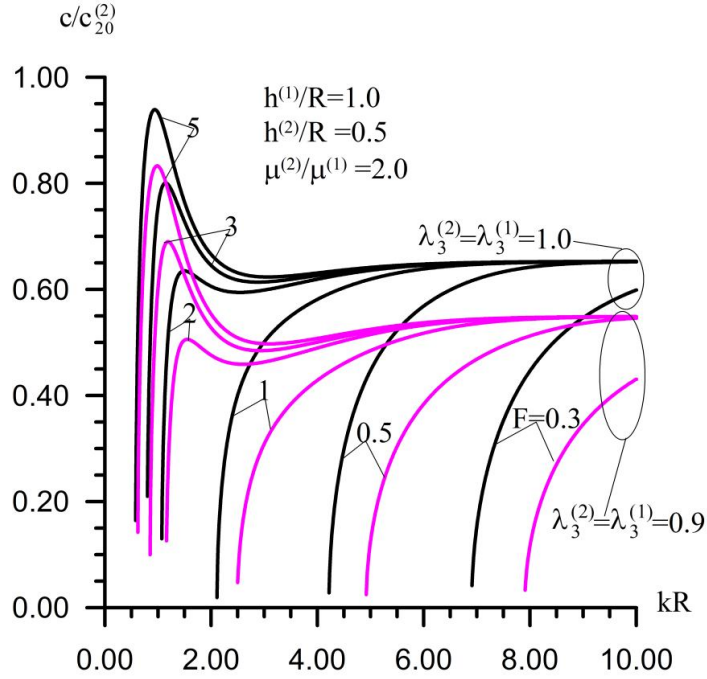
Şekil 3.13a : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 1.2\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



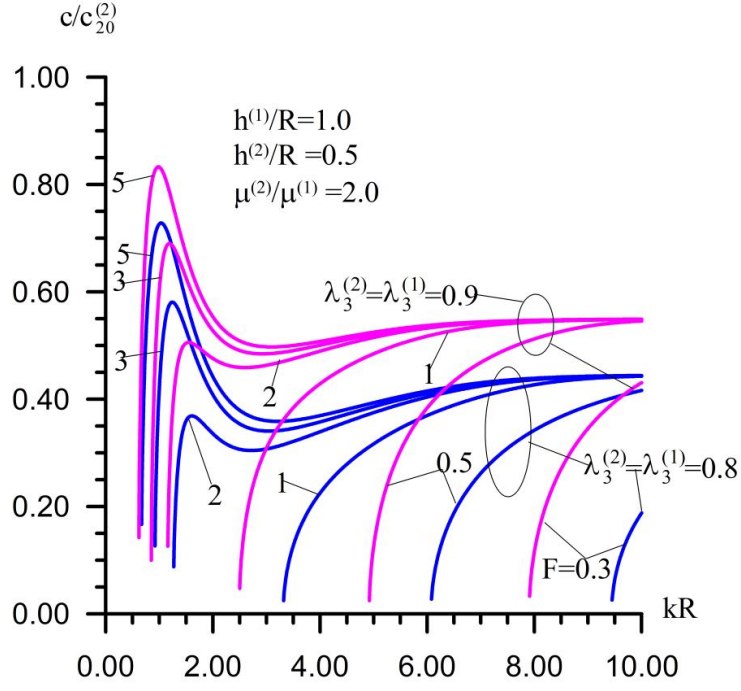
Şekil 3.13b : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2 \text{ ve } 1.5\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.13c : İçi boş iki katlı bileşik silindirden öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.13d : İçi boş iki katlı bileşik silindirden öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 0.9\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.13e : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmeli $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9 \text{ ve } 0.8\}$ temel modun birinci tip eğrisine etkisi.

Elde edilen sayısal sonuçlardan öngerilmeli durumdaki iki katlı içi boş bileşik silindirde dalga yayılım hızları için dalga sayısının yüksek olması durumunda yani $kR \rightarrow \infty$ iken, aşağıdaki ifadeler geçerli olmaktadır:

$kR \rightarrow \infty$ iken,

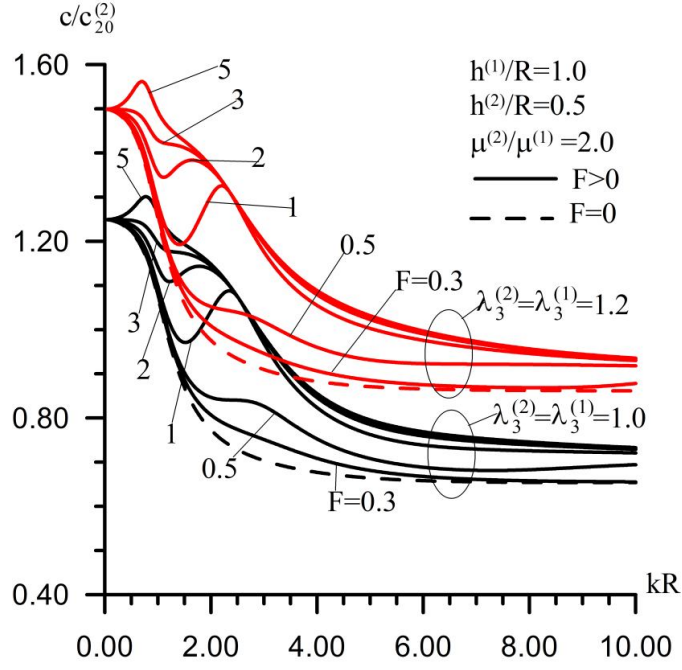
$$c_{IF}^B(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) \rightarrow \min\{c_R^{(1)}(\lambda_3^{(1)}) - 0, c_R^{(2)}(\lambda_3^{(2)}) - 0, c_S(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) - 0\},$$

$$c_{IIF}^B(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) \rightarrow \min\{c_R^{(1)}(\lambda_3^{(1)}) + 0, c_R^{(2)}(\lambda_3^{(2)}) + 0, c_S(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) + 0\},$$

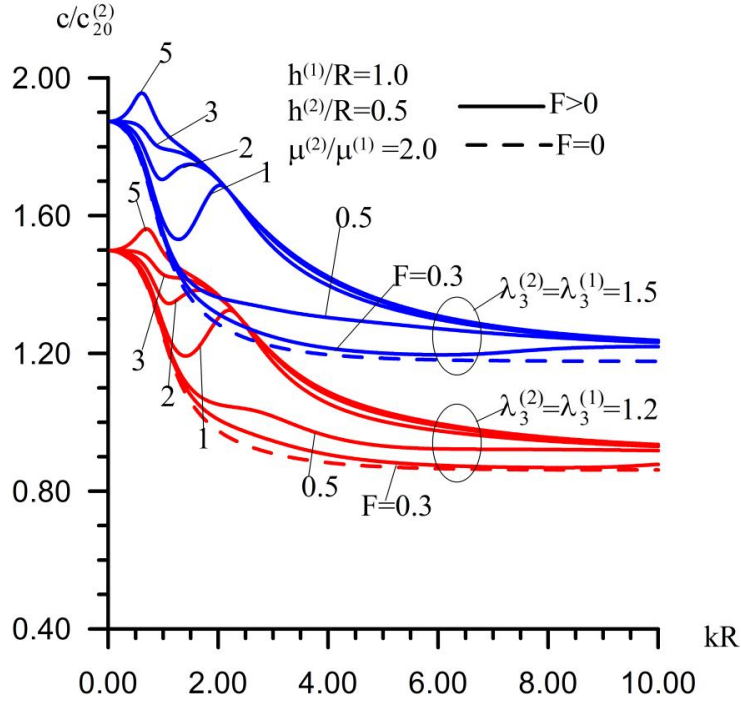
$$F \rightarrow 0 \text{ iken, } c_{IIF}(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) \rightarrow c(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)}) + 0. \quad (3.28)$$

Burada $c_S(\lambda_3^{(1)}, \lambda_3^{(2)})$ öngerilmeli durumdaki Stoneley dalga hızlarıdır.

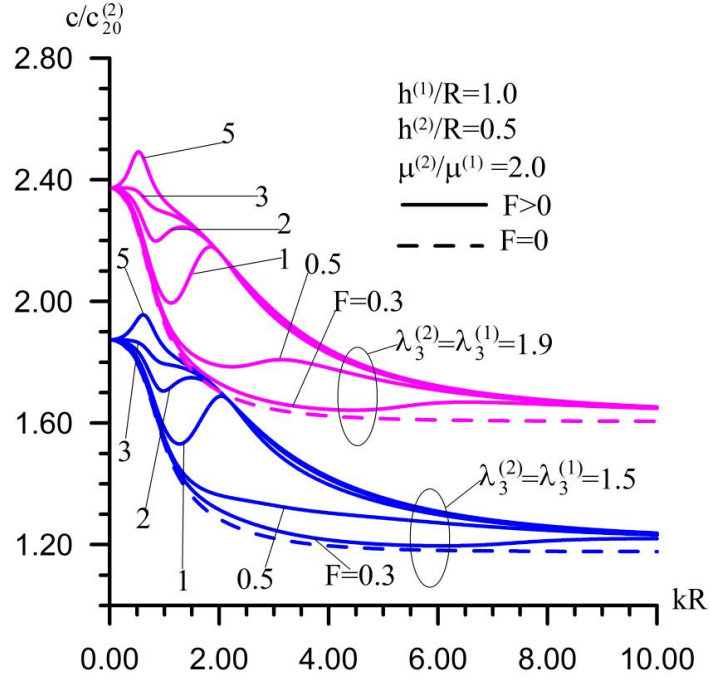
Burada $(kR)_{Icr.}$ ve $(kR)_{IIFcr.}$ değerleri $\lambda_3^{(1)} (= \lambda_3^{(2)})$ parametreleri ile azalmakta olduğu sonucuna varılmaktadır.



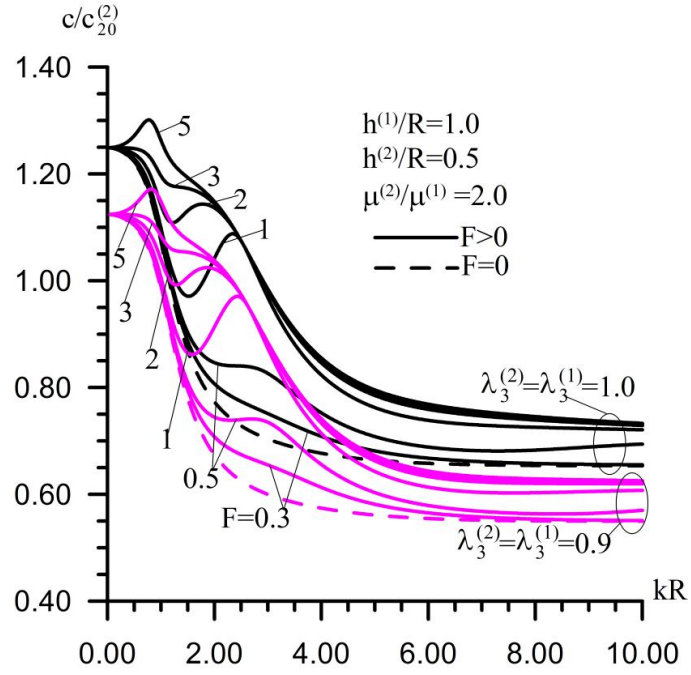
Şekil 3.14a : İçi boş iki katlı bileşik silindirden öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ ve $1.2\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



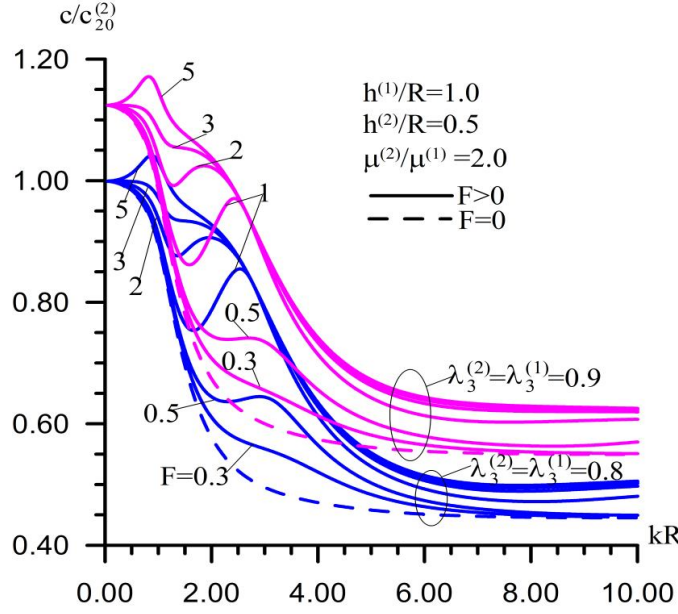
Şekil 3.14b : İçi boş iki katlı bileşik silindirden öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.2$ ve $1.5\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.14c : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.5 \text{ ve } 1.9\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



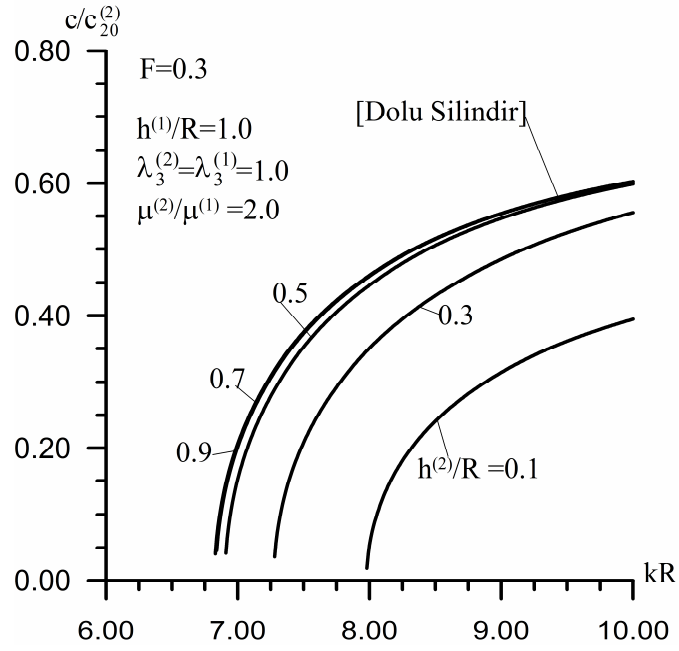
Şekil 3.14d : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0 \text{ ve } 0.9\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



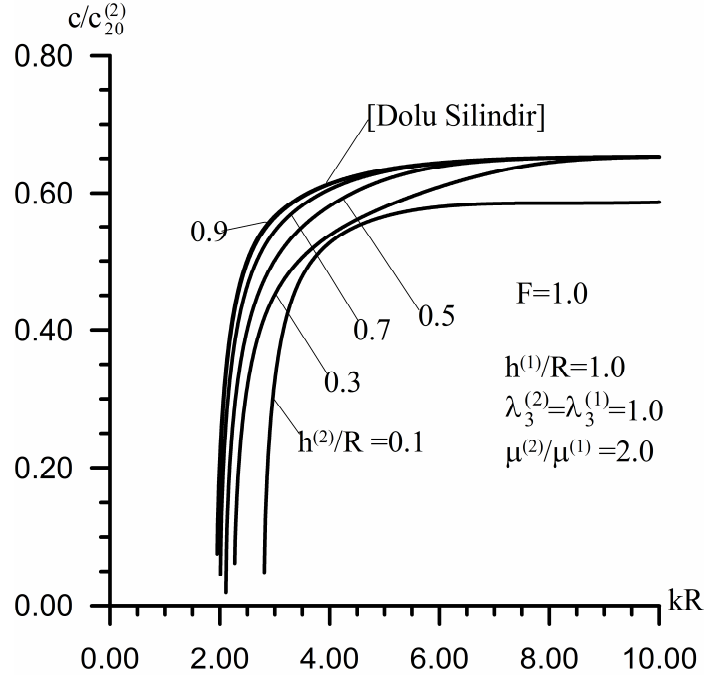
Şekil 3.14e : İçi boş iki katlı bileşik silindirde öngerilmenin $\{\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 0.9 \text{ ve } 0.8\}$ temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.

3.4.4 İki katlı içi dolu ve içi boş bileşik silindirin sayısal sonuçlarının karşılaştırılması

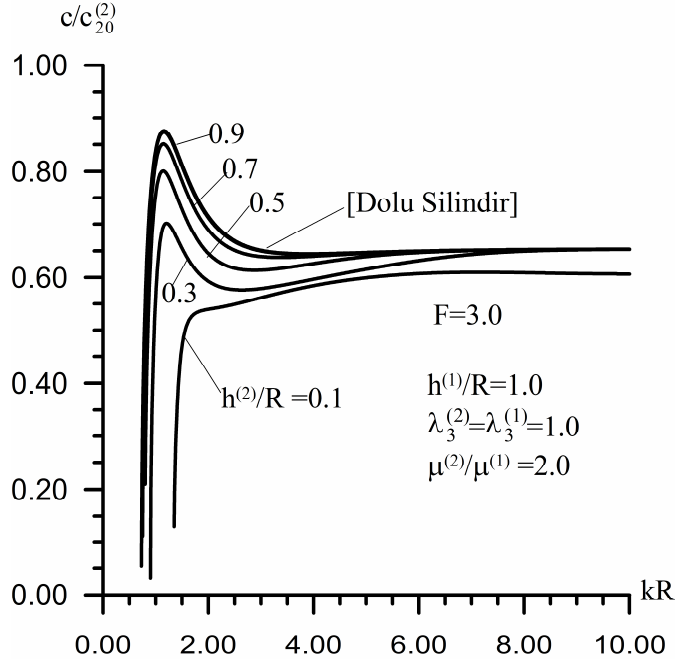
Öncelikle, nitelik açısından bakıldığında iki katlı içi dolu bileşik silindir için elde edilen sayısal sonuçlar ile iki katlı içi boş bileşik silindir için elde edilen sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Elde edilen sonuçlara dayanarak iki durum için bulunan sonuçlardaki farklılığın içi boş bileşik silindirin iç silindir kalınlığını ifade eden $h^{(2)}/R$ parametresinden kaynaklandığı ifade edilebilir. Bileşik silindirin katları arasındaki temasın süreksiz olması durumunda elde edilen dispersiyon eğrilerinin $h^{(2)}/R$ parametresinin değişiminden ne kadar etkilendiğini görmek için temel moda ait birinci ve ikinci tip dispersiyon eğrilerinin bulunduğu Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'daki sayısal sonuçlarda öngerilmenin olmadığı $\lambda_3^{(1)} = \lambda_3^{(2)} = 1.0$ değerlerinde, $F = 0.3$ 'ün, (Şekil 3.15a ve Şekil 3.16a)'da, $F = 1.0$ 'ün, (Şekil 3.15b ve Şekil 3.16b)'de, $F = 3.0$ 'ün, (Şekil 3.15c ve Şekil 3.16c)'de, $F = 5.0$ 'ün, (Şekil 3.15d ve Şekil 3.16d)'deki sonuçları analiz etmek gerekmektedir.



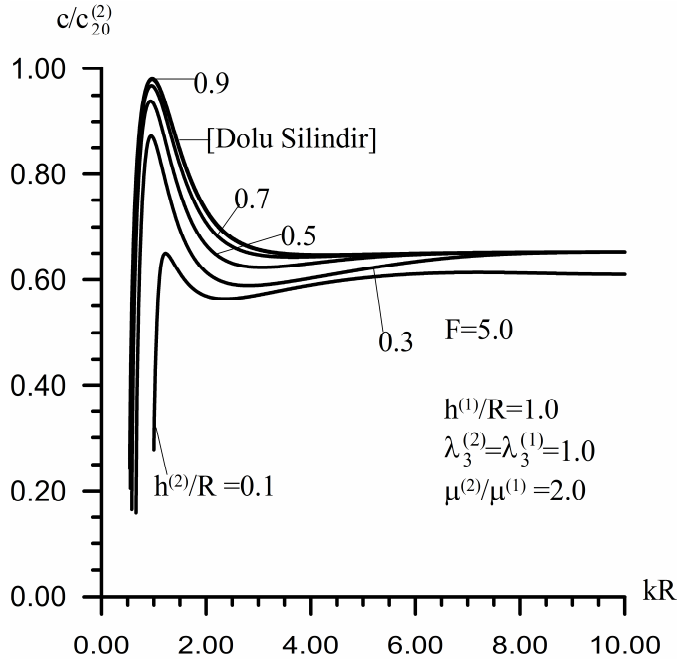
Şekil 3.15a : $F = 0.3$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.15b: $F = 1.0$ 'de, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.15c: $F = 3.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.15d : $F = 5.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun birinci tip eğrisine etkisi.

Mekanik öngörülere göre içi boş iki katlı bileşik silindir için $h^{(2)}/R$ parametresinin artması ile elde edilen sonuçlar içi dolu iki katlı bileşik silindir için elde edilen uygun sonuçlara mutlaka yaklaşmalıdır. İçi boş durumdaki iki katlı bileşik silindirdeki temel moda ait birinci ve ikinci tip eğrisinin boyuna dalga yayılım hızı sırası ile c_I^B ve c_{II}^B olarak adlandırılısın. Benzer şekilde içi dolu iki katlı bileşik silindirin temel moduna ait birinci ve ikinci tip eğrisinin boyuna dalga yayılım hızı sırası ile c_I^D ve c_{II}^D olsun.

Şekil 3.15 ve Şekil 3.16'daki grafiklerde sonuçlara göre bütün kR değerleri için

$$h^{(2)}/R \rightarrow 1.0 \text{ iken, } c_I^B < c_I^D \text{ olaraktan, } c_I^B \rightarrow c_I^D - 0. \quad (3.29)$$

olmaktadır. c_{II}^B ve c_{II}^D dalga yayılım hızları arasındaki ilişki incelendiğinde bu ilişkinin nitelik ve nicelik açısından $h^{(2)}/R$, kR ve boyutsuz kayma-yay parametresi F 'in değerlerine bağlı olduğu görülmektedir.

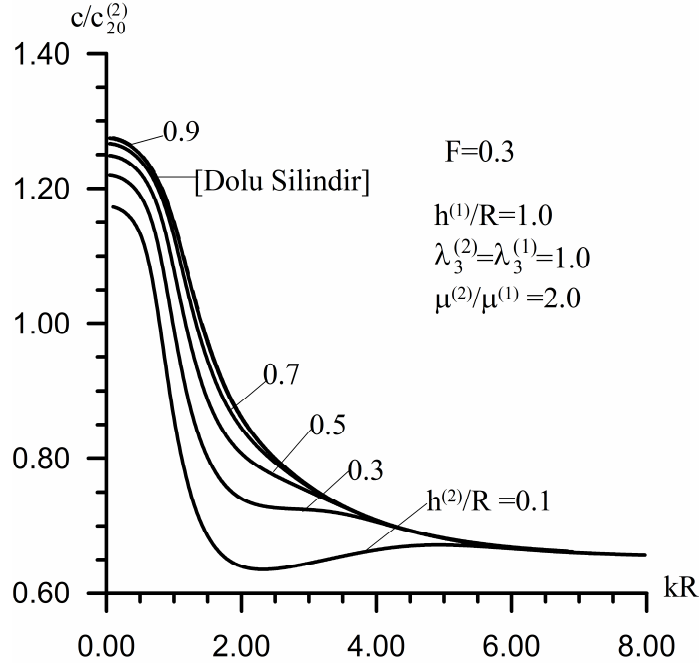
Kayma-yay parametresi F 'in oldukça küçük değerleri için örneğin $F = 0.3$ değeri dikkate alındığında bütün kR değerleri için

$$h^{(2)}/R \rightarrow 1.0 \text{ iken, } c_{II}^B < c_{II}^D \text{ olaraktan, } c_{II}^B \rightarrow c_{II}^D - 0. \quad (3.30)$$

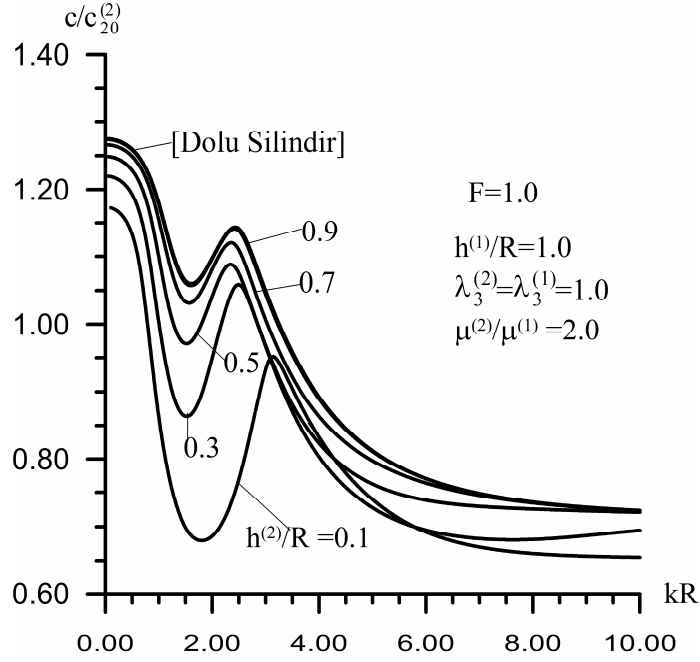
olmaktadır. $F \geq 3.0$ olduğunda (3.30) ilişkisi kR değerlerinin değişim alanı üzerine koyulmuş belirli bir kısıtlama çerçevesinde geçerli olmaktadır. Söz konusu bu kısıtlama çerçevesinin boyutu ise $h^{(2)}/R$ parametresine bağlıdır.

Aynı zamanda Şekil 3.16'daki grafiklere bakıldığında temel modun ikinci tip eğrilerinin karakteri, önemli ölçüde iki katlı içi boş bileşik silindirin iç silindir kalınlığına yani $h^{(2)}/R$ 'ye bağlı kalmakta olduğu görülmektedir. Örneğin $kR = (kR)_{lcr.}$ şartları altında, $F \geq 3.0$ durumunda, $h^{(2)}/R$ parametresinin küçük değerlerinde, c_{II}^B yerel minimum değerlerinde iken $h^{(2)}/R$ parametresinin belirli değerlerinden sonra aynı kR değerinde c_{II}^B yerel maksimum değerine ulaşmaktadır.

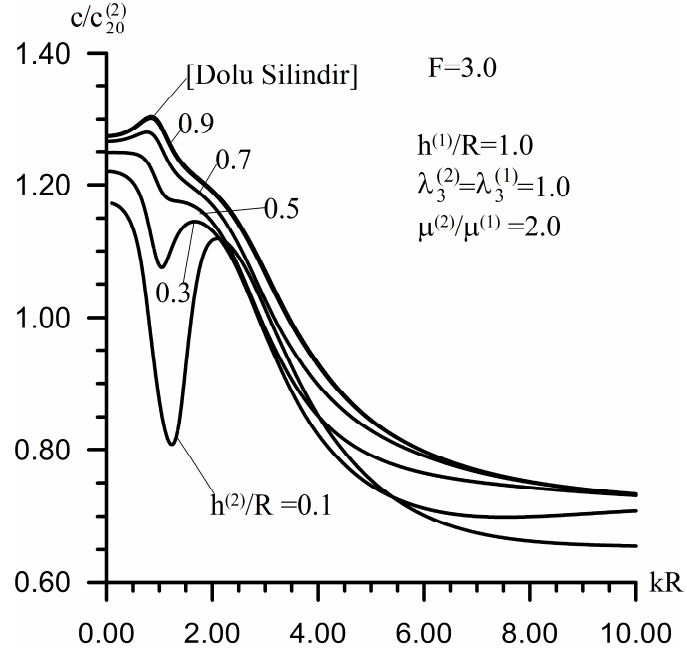
Benzer sonuçlar öngerilmeli durumlar için de bulunmuştur.



Şekil 3.16a : $F = 0.3$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



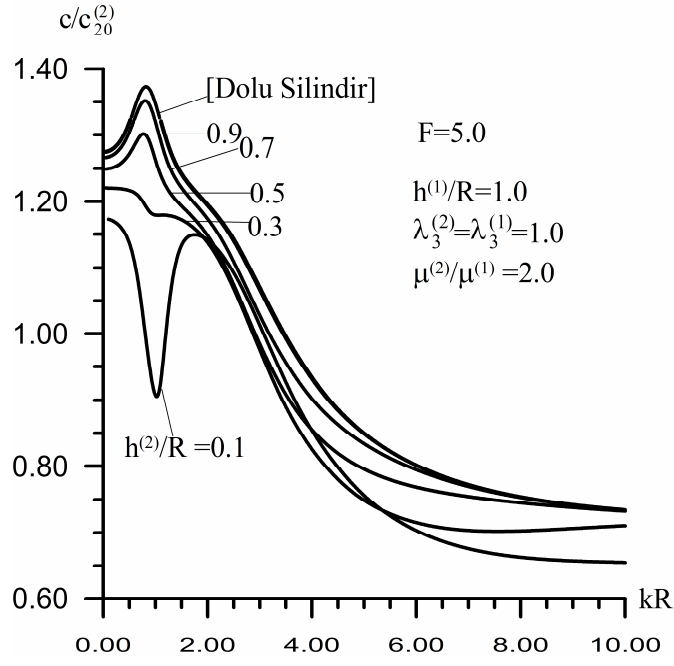
Şekil 3.16b : $F = 1.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.



Şekil 3.16c : $F = 3.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.

EK.A' da verilen ilave şekiller $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 2.0$, ve $\mu^{(2)}/\mu^{(1)} = 0.5$ rijitlik değerleri için içi boş hem de içi dolu bileşik silindir için birinci ve ikinci modlarla elde edilen grafikler karşılaştırma yapılarak verilmiştir. Şekillerde $\{h^{(1)}/R = 1.0;$

$h^{(2)}/R = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9\}$ değerleri için öngerilmeli durumundaki ön basınç ve ön çekme değerleri için (24)-(63) şekilleri verilmiştir.



Şekil 3.16d : $F = 5.0$ 'te, $h^{(2)}/R$ parametresinin farklı değerlerinde temel modun ikinci tip eğrisine etkisi.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada önerilmeli iki katlı bileşik silindirde temas koşullarının eksenel simetrik boyuna dalga yayılımına etkisinin incelenmesiyle aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

- 1- Kayma-yay parametresi tipi süreksiz temas koşulları kullanıldığında temel modun iki tip eğrisi meydana gelmektedir. $F \rightarrow 0$ iken, yani kayma yay parametresinin küçülmesi ile birinci tip eğri kaybolmakta ikinci tip eğri ise temas koşullarının sürekli olduğu durum için elde edilen dispersiyon eğrisine yaklaşmaktadır. Bu durum hem içi dolu ve hem de içi boş iki katlı bileşik silindir için geçerli olmaktadır.
- 2- Kayma-yay parametresi artar iken, yani $F \rightarrow \infty$ iken temel modun iki tip dispersiyon eğrileri tam kaymalı limit dispersiyon eğrilerine yaklaşmaktadır.
- 3- kR 'in $kR < (kR)_m$ değerlerinde $F > 0$ olması durumunda elde edilen ikinci tip dispersiyon eğrileri, $F = 0$ için bulunan ile hemen hemen çakışmaktadır. $(kR)_m$ sadece, boyutsuz kayma-yay parametresi F 'in değerlerine değil, aynı zamanda $h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R$ değerlerine de bağlı kalmaktadır. $(kR)_m$ 'nin değerleri F , $h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R$ 'in azalan değerleri ile de artmaktadır.
- 4- Kayma-yay tipi süreksiz temas koşulları küçük ve büyük dalga sayısı limitlerinin değerlerini değiştirmemektedir.
- 5- Süreksiz temas koşulu durumunda temel modlara göre elde edilen birinci tip eğrisindeki dalga yayılım hızı sürekli temas koşulu durumundaki dalga yayılım hızından küçük kalırken ikinci tip eğrisi büyük kalmaktadır.
- 6- Temel moda ait birinci tip dispersiyon eğrilerinin kR 'ye göre başlangıcını gösteren $(kR)_{cf}$ değerleri için:

$F \rightarrow \infty$ iken, $(kR)_{cf.} \rightarrow 0$

$F \rightarrow 0$ iken, $(kR)_{cf.} \rightarrow \infty$ özelliğini göstermektedir.

7- Öngerilmeli iki katlı bileşik silindirin katmanlarındaki ön şekil değiştirmelerin dispersiyon eğrilerinin davranışı üzerinde temas koşullarındaki süreksizliğin etkisini nitelik bakımından değiştirmedığı ancak nicelik bakımından değiştirdiği gözlenmiştir.

8- İçi dolu öngerilmeli iki katlı bileşik silindirde elde edilen sayısal sonuçlar boyutsuz kayma-yay parametresi $F \rightarrow 0$ değerleri için, Akbarov ve Guliev (2009) çalışmalarında bulunan uygun sonuçlarla çakışmaktadır.

9- İki katlı içi boş bileşik silindirin iç silindir kalınlığı arttıkça, yani $h^{(2)}/R \rightarrow 1.0$ durumunda elde edilen dispersiyon eğrileri uygun içi dolu bileşik silindir için elde edilen dispersiyon eğrilerine yaklaşmaktadır.

KAYNAKLAR

- Akbarov, S. D.**, 2007: Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses (review). *International Applied Mechanics*, **43**(12), 1305-1324.
- Akbarov, S. D., Guliev M. S.**, 2009: Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science*. **39**(2) 155–177.
- Akbarov, S. D., Guliev, M. S.**, 2010: The influence of the finite initial strains on the axisymmetric wave dispersion in a circular cylinder embedded in a compressible elastic medium. *International Journal of Mechanical Sciences*, **52**, 89-95.
- Akbarov, S.D., Guliev, M.S., Kepceler, T.**, 2010: Dispersion relations of the axisymmetric wave propagation in the initially twisted bi-material (compound) cylinders. *Journal Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2010. 10. 020.
- Akbarov, S.D., Guliev, M.S., Kepceler, T.**, 2010b: Dispersion relations of the axisymmetric wave propagation in the initially twisted bi-material (compound) cylinders *Journal Sound and Vibration*, (Accepted manuscript).
- Akbarov, S. D., Guliev, M. S., Kepceler, T.**, 2011: Dispersion relations of axisymmetric wave propagation in initially twisted bi-material (compound) cylinders. *Journal Sound and Vibration*. **330**, 1644-1664.
- Akbarov, S. D., Guliev, M. S., Tekercioglu, R.**, 2010a: Dispersion relations of axisymmetric wave propagation in finite pre-stretched compound circular cylinders made from highly elastic incompressible materials. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **50**(1), 1-32.
- Akbarov, S. D., Guz, A. N.**, 2004: Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders. *International Journal of Engineering Science*, **42**, 769–791.
- Akbarov, S. D., Ipek, C.**, 2010: The influence of the interface conditions on the dispersion of the Axisymmetric longitudinal waves in the pre-strained compound cylinder. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science*. **70**(2) 93-122.
- Akbarov, S. D., Ozisik, M.**, 2003: The influence of the third order elastic constants on the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed stratified half-plane. *International Journal of Engineering Science*, **41**(17), 2047-2061.

- Akbarov, S. D., Ozisik, M.,** 2004: Dynamic interaction of a pre-stressed nonlinear elastic layer and a half-plane. *International Applied Mechanics*, **40**(9),137-144.
- Akbarov, S.D., Salmanova, K.A.,** 2009: On the dynamics of a finite pre-strained bi-layered slab resting on a rigid foundation under action of an oscillating moving load. *Journal Sound and Vibration*, **327**,454-472
- Akbarov, S. D., Agasiyev, E.R., Zamanov, A. D.,** 2011: Wave propagation in a pre-strained compressible elastic sandwich plate. *European Journal of Mechanics A/Solids* **30**(2),409- 422.
- Akbarov, S. D., Zamanov, A. D., Agasiyev, E. R.,** 2008: On the propagation of Lamb On waves in a sandwich plate made of compressible materials On the propagation of Lamb with finite initial strains. *Mechanics of Composite Materials*, **44**(2),155-164.
- Belward I. A.,** 1976: The propagation of small amplitude waves in prestressed incompressible elastic cylinders. *International Journal of Engineering Science*, **14**(8), 647-659
- Berger, J.R., Martin, P.A., McCaffery, S.J.,** 2000: Time-harmonic torsional waves in a composite cylinder with an imperfect interface, *Journal of the Acoustical Society of America* **107** (3), 1161- 1167.
- Biot, M. A.,** 1965: *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley, New York, 504p.
- Demiray, H., Suhubi, E. S.,** 1970: Small torsional oscillation in initially twisted circular rubber cylinder. *International Journal of Engineering Science*, 19-30.
- Dowaikh, M. A., Ogden, R. W.,** 1991: On surface waves and deformations in pre-stressed elastic media *Stability and Applied Analysis of Continuous Media* 1,27-44.
- Eringen, A. C., Suhubi, E. S.,** 1975: *Elastodynamics. Vol. I. Finite Motions*, Academic Press, New York, London. Pp. 1-342.
- Green, A. E.,** 1961: Torsional vibration of an initially stressed circular cylinder. In“Problems continuum mechanics” (Muskhelishvili Anniversary Vol.) *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia, Pennsylvania, pp. 148-154.
- Guz, A. N.,** 1999: *Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies*. Berlin: Springer.
- Guz, A. N.,** 2002: Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, **38**(1), 23-59.
- Guz, A. N.,** 2004: *Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses*, A. S. K. Kyiv (in Russian).
- Guz, A. N.,** 2005: On foundations of the ultrasonic non-destructive method of determination of stresses in near-the-surface layers of solid bodies. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **8**(3), 217-230.

- Guz, A. N., Kushnir, V.P., Makhort, F.G.,** 1975: On the wave propagation in a cylinder with initial stresses. *Izv. AS SSSR, Ser. Mekhan. Tverd. Tela.* 5, 67-74(in Russian).
- Hayes, M., Rivlin, R. S.,** 1961: Surface waves in deformed materials. *Archive for Rational Mechanics and Analyses*, 8(5), 358-380.
- John, F.,** 1960: Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type. *Commun. Pure and Appl. Math*, **13**(2), 239-296.
- Jones, J.P.,Whitter, J.S.,** 1967: Waves at a flexibly bonded interface, *J. Appl. Mech.* **34**, 905-909.
- Kayestha, P., Wijeyewickrema, A.C.,** 2010: Time-harmonic wave propagation in a pre-stressed compressible elastic bi-material laminate. *European Journal of Mechanics A/Solids* **29**, 143-151.
- Kepceler, T.,** 2010: Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface, *Applied Mathematical Modeling* **34**, 4058-4073.
- Kushnir, V.P.,** 1979: Longitudinal waves in the field of a transversally isotropic cylinder with initial stress. *International Applied Mechanics*, **15** (9) 884-886.
- Lai, J.L., Dowell, E.H., Taucher, T. R.,** 1971: Propagation of harmonic waves in a composite elastic cylinder. *J. Acoustic Societ.* No 1(part 2) 220-228.
- Leungvichcharoen, S., Wijeyewickrema, A.C.,** 2003: Dispersion effects of extensional waves in pre-stressed imperfectly bonded incompressible elastic layered composites *Wave Motion*, **38**, 311-325.
- Leungvichcharoen, S., Wijeyewickrema, A.C., Yamamamoto, T.,** 2004: Anti-symmetric waves in pre-stressed imperfectly bonded incompressible elastic layered composites. *International Journal of Solids and Structures*, **41**, 6873-6894.
- Mal, A.K., Xu, P.C.,** 1989: Elastic waves in layered media with interface feature; in “*Elastic wave propagation*” edited by M.F. McCarthy and Hayes, North-Holland, Amsterdam, 67-73.
- Martin, P.A.,** 1992: Boundary integral equations for the scattering of elastic waves by elastic inclusions with thin interface layers , *J. Nondestructive Eval***11**, 167-174.
- Nolde, E. V., Prikazchikova, L. A., Rogerson, G. A.,** 2004: Dispersion of small amplitude waves in a pre-stressed, compressible elastic plate. *Journal of Elasticity***75**, 1-29.
- Ozturk, A., Akbarov, S.D.,** 2008: Propagation of torsional waves in a prestretched compound hollow circular cylinder, *Mech. Comp. Mater.* **44** (1), 77–86.
- Ozturk, A., Akbarov, S.D.,** 2009a : Torsional wave propagation in a pre-stressed circular cylinder embedded in a pre-stresses elastic medium, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. **33**, 3636-3649.

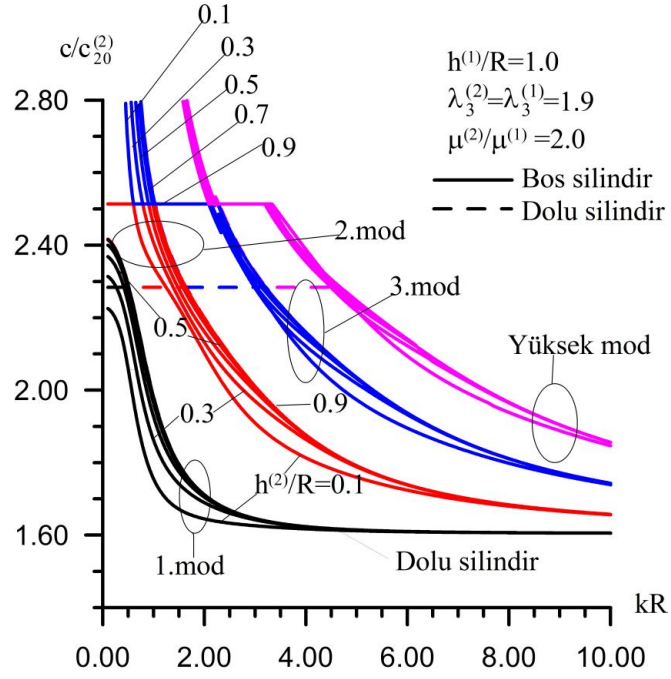
- Ozturk, A.; Akbarov, S.D.**, 2009b: Torsional wave propagation relation in a pre-stressed bi- material compounded cylinder, *ZAMM.: Z Angew. Math. Mech*, Vol. **89**, No. 9, 754-766.
- Pilarski, A.; Rose, V.**, (1988: A transverse-wave ultrasonic oblique-incidence technique for interfacial weakness detection in adhesive bonds. *J. Appl. Phys.* **63**, 300-307.
- Roxburg, D. G., Ogden, R. W** 1994: Stability and vibration of pre-stressed compressible elastic plates, *International Journal of Engineering Science*, **32**(3), 427-454.
- Rogerson, G. A., Fu, Y. B.**, 1995: An asymptotic analysis of the dispersion relation for a pre- stressed incompressible elastic plate. *Acta Mechanica***111**, 59-74.
- Rogerson, G. A., Sandiford, K. J.**, 2000: The effect of primary deformations on harmonic waves in layered elastic media. *International Journal of Solids and Structures***37**, 2059-2087.
- Rokhlin, S. I., Wang, Y. J.**, 1991: Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids. *J. Acoust. Soc. Am.* **89**, 503-515.
- Sandiford, K. J., Rogerson, G. A.**, 2000: Some dynamic properties of a pre-stressed nearly incompressible (rubber-like) elastic layer. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **35**, 849-868.
- Sotiropoulos, D. A.**, 1998: Interfacial waves in pre-stressed compressible elastic media. *Computational Mechanics* **21**, 293-299.
- Truestell C., Noll W, T.**, 1965: The nonlinear field theories of mechanics In: *E. Flugge (Ed.), Handbuch der Physik*, Vol III/3, Springer, Berlin, New York.
- Wijeyewickrema, A.C., Ushida, Y., Kayestha, P.**, 2008: Wave propagation in a pre- stressed compressible elastic layer with constrained boundaries. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* **3**(10), 1963-1976.
- Wijeyewickrema, A.C., Leungvichcharoen, S.**, 2009: Wave propagation in pre-stressed imperfectly bonded compressible elastic layered composites. *Mechanics of Materials* **41**, 1192-1203.
- Zhuk, Yu. A., Guz, I. A.**, 2007: Features of plane wave propagation along the layers of pretrained nanocomposites. *International Applied Mechanics*, **43**(4), 361-379.

EKLER

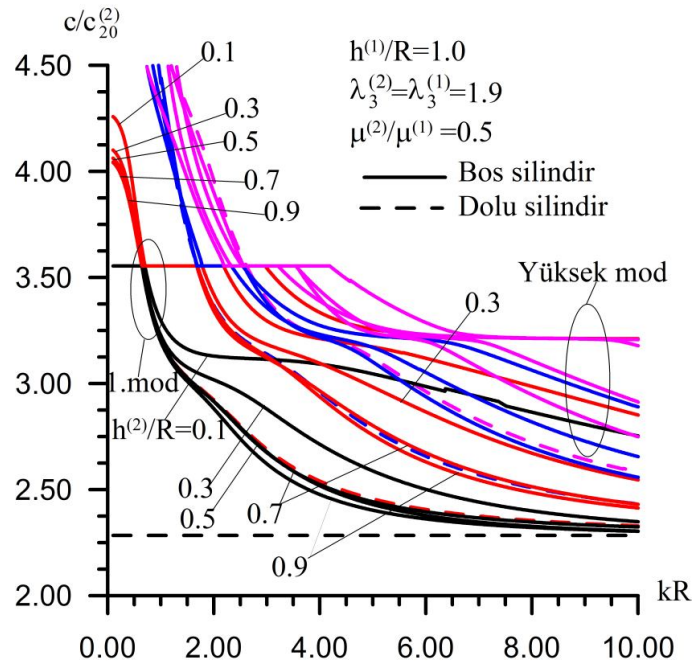
EK A : Yüksek modlarda ve farklı gerilmelerde dispersiyon eğrileri

EK B : Farklı rijitlikte içi dolu ve içi boş bileşik silindir için dispersiyon eğrileri

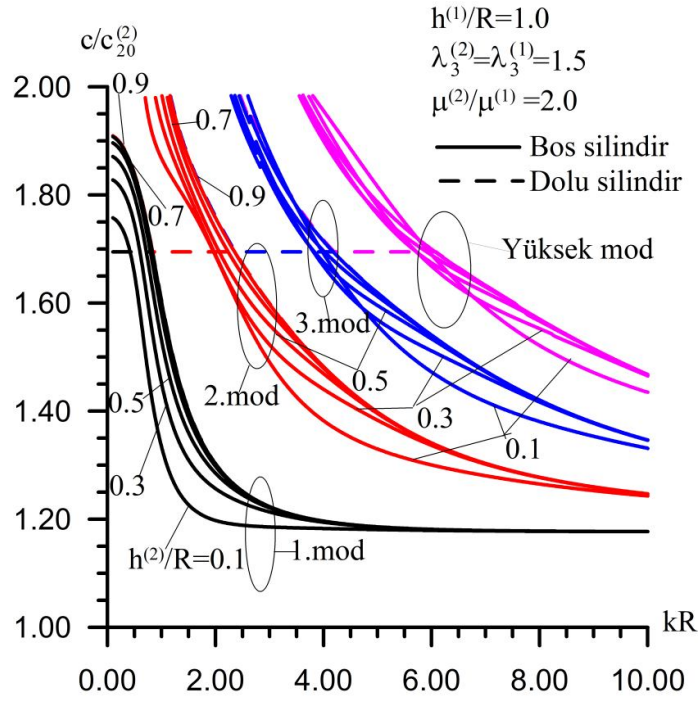
EK A.



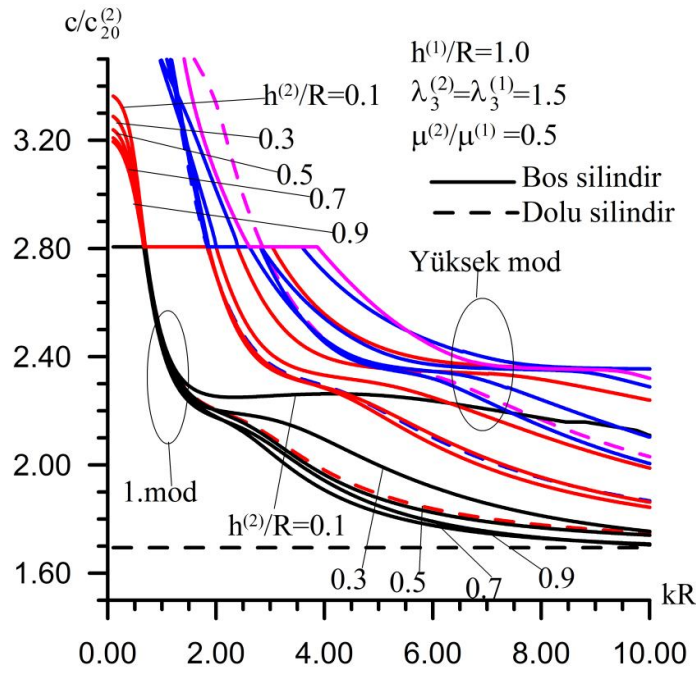
Şekil A.1



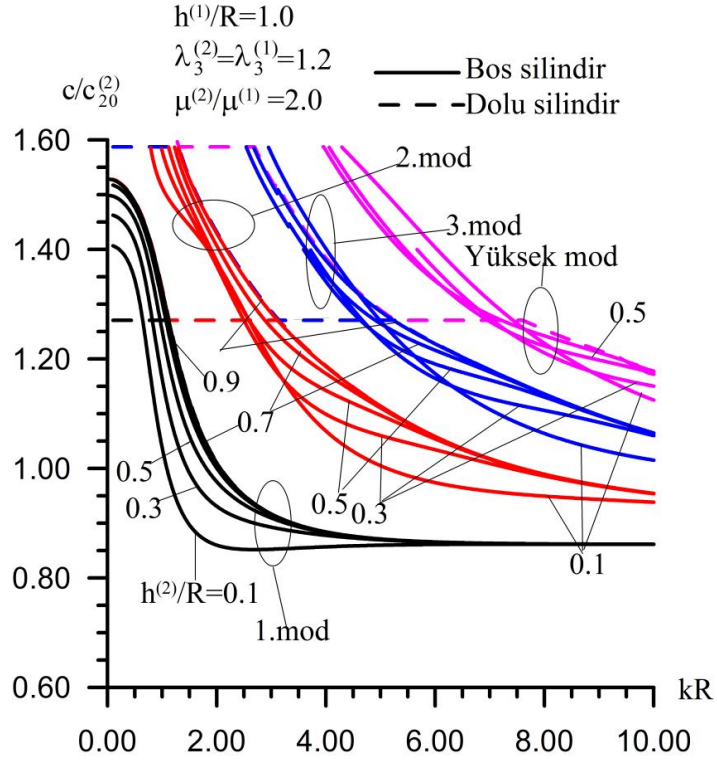
Şekil A.2



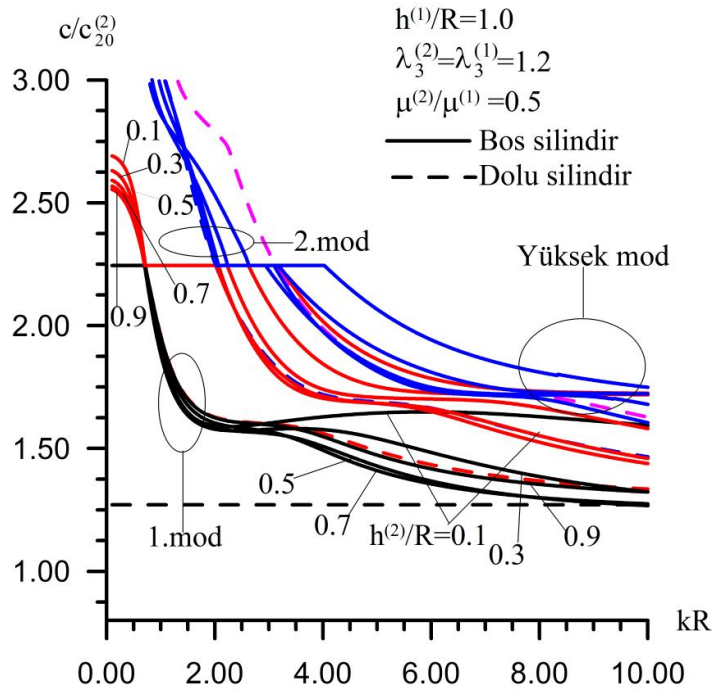
Şekil A.3



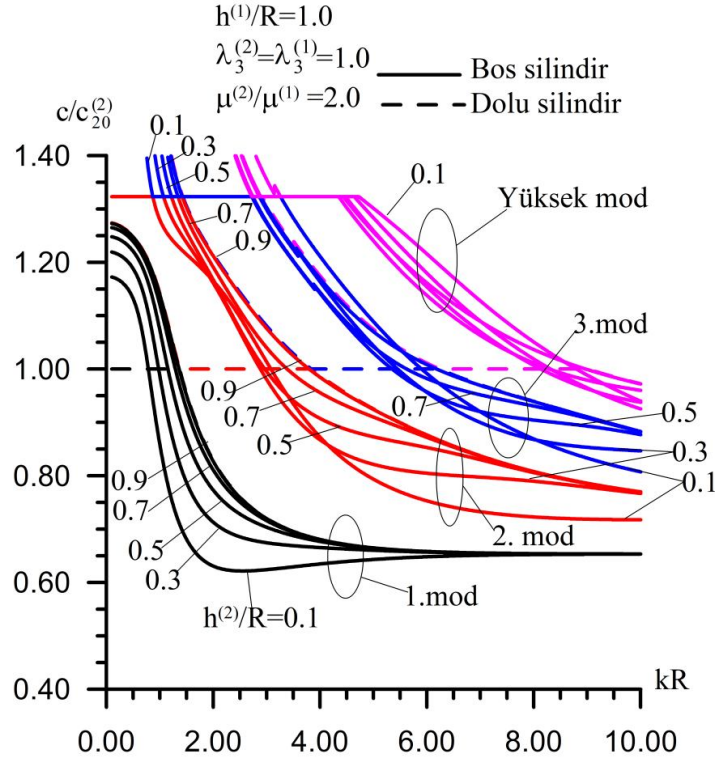
Şekil A.4



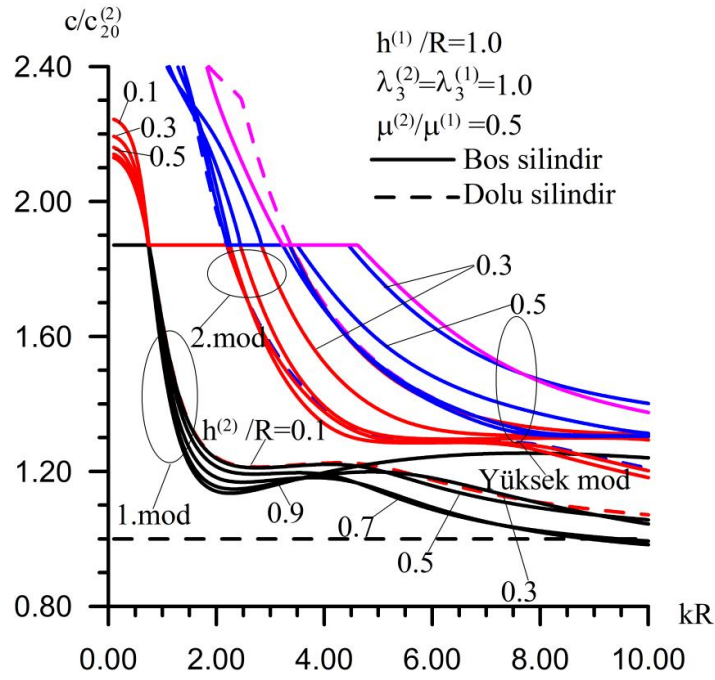
Şekil A.5



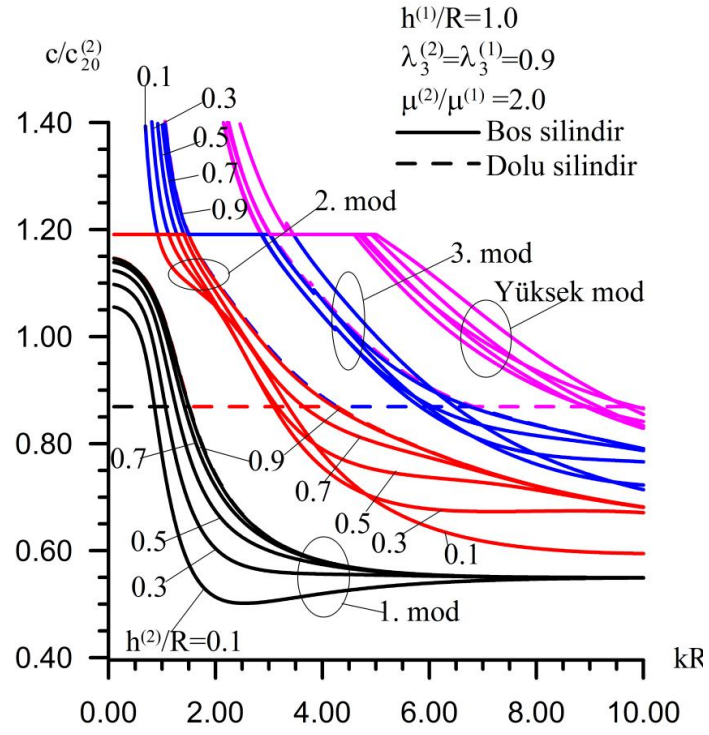
Şekil A.6



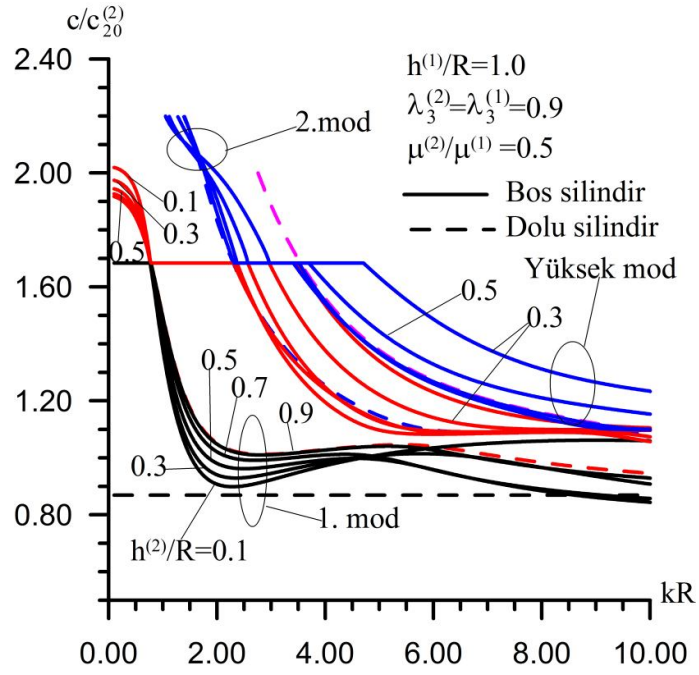
Şekil A.7



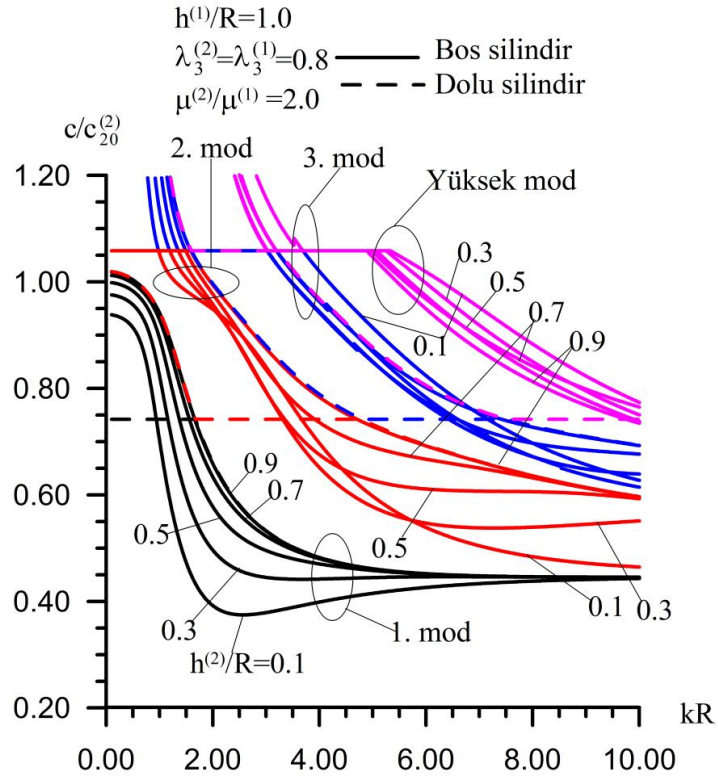
Şekil A.8



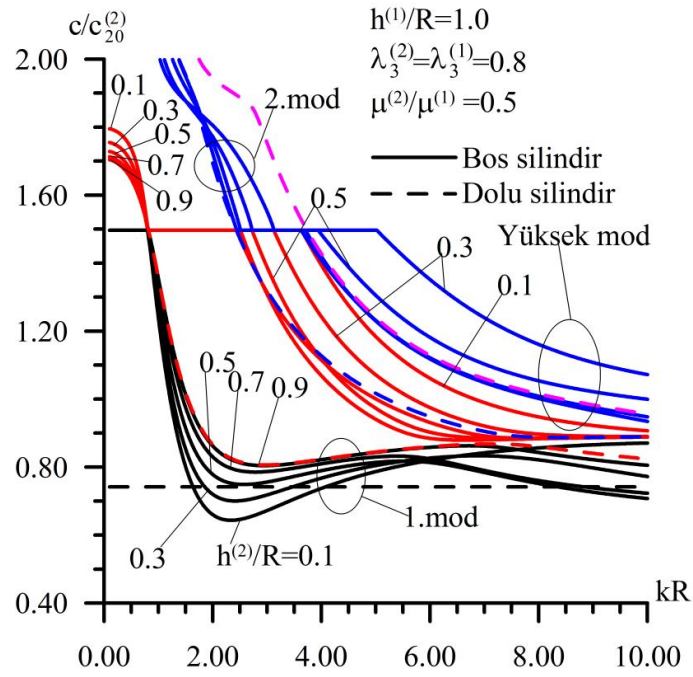
Şekil A.9



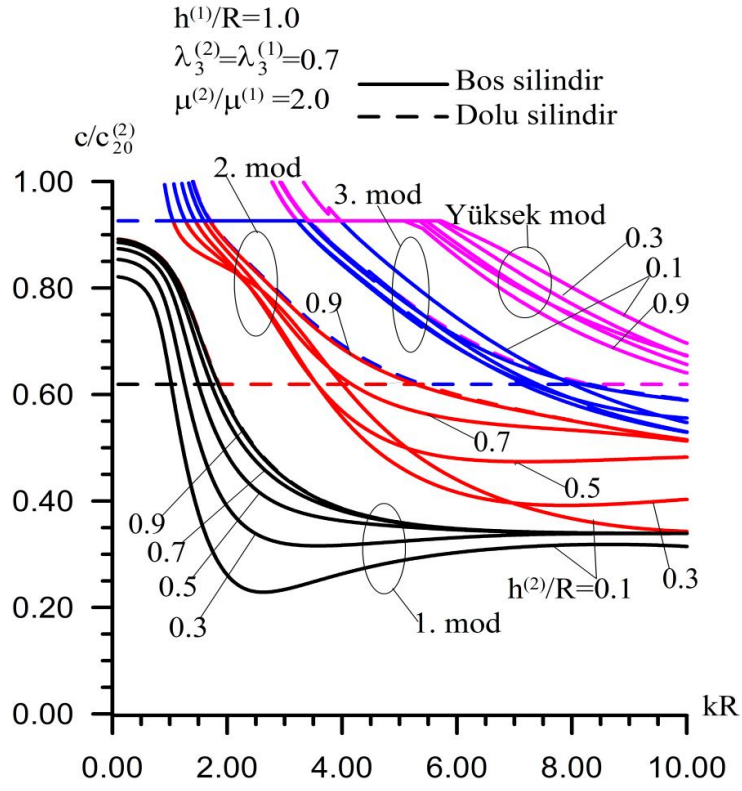
Şekil A.10



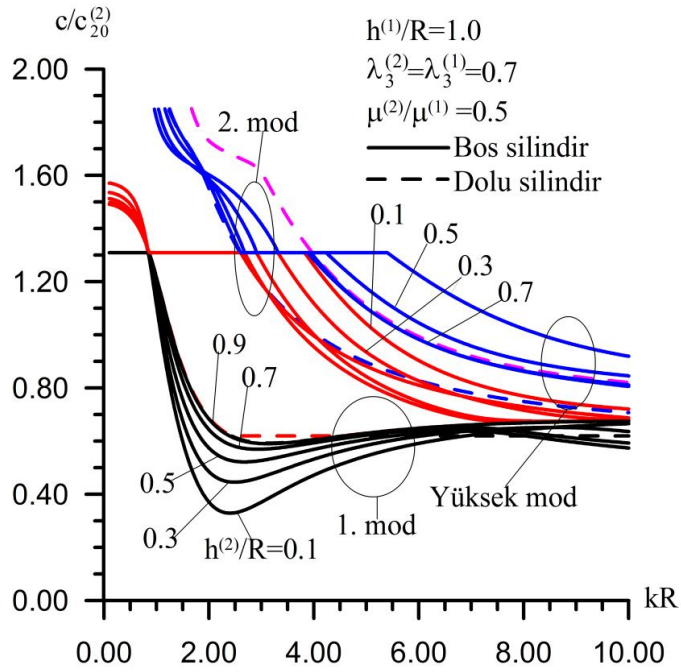
Şekil A.11



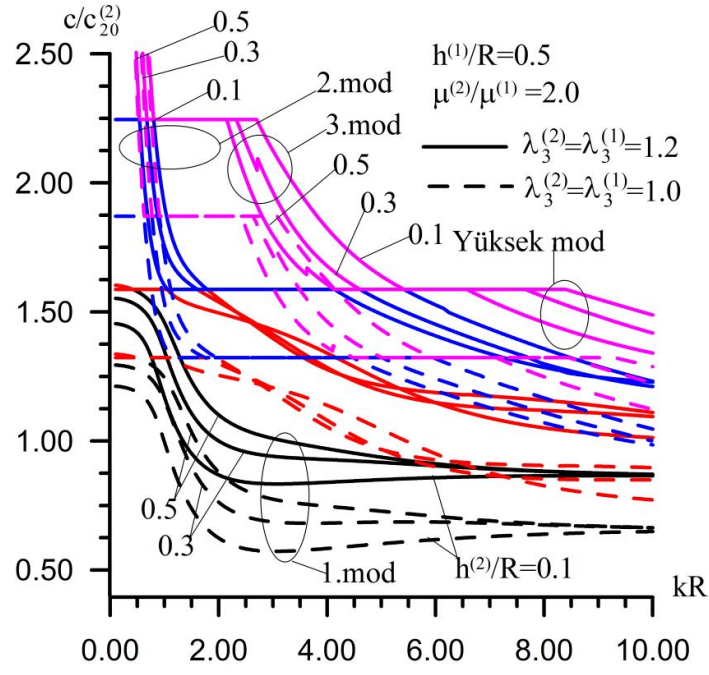
Şekil A.12



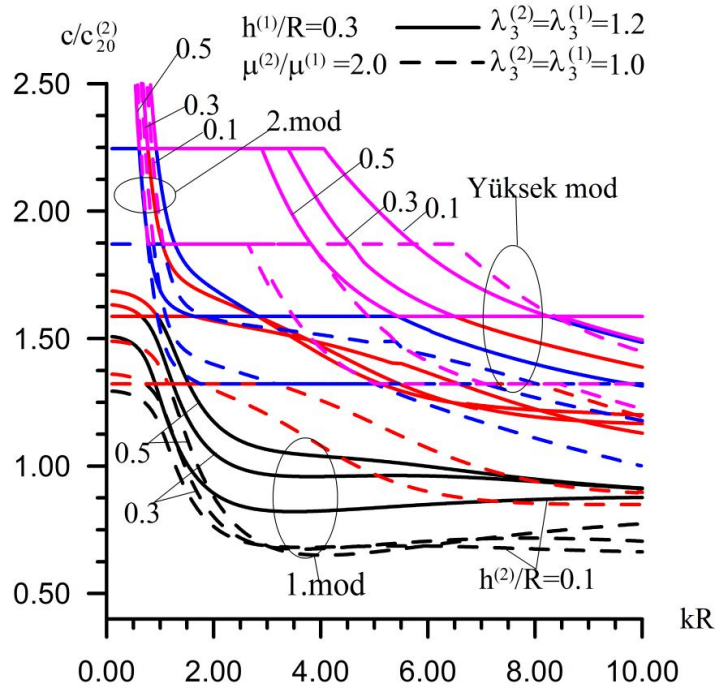
Şekil A.13



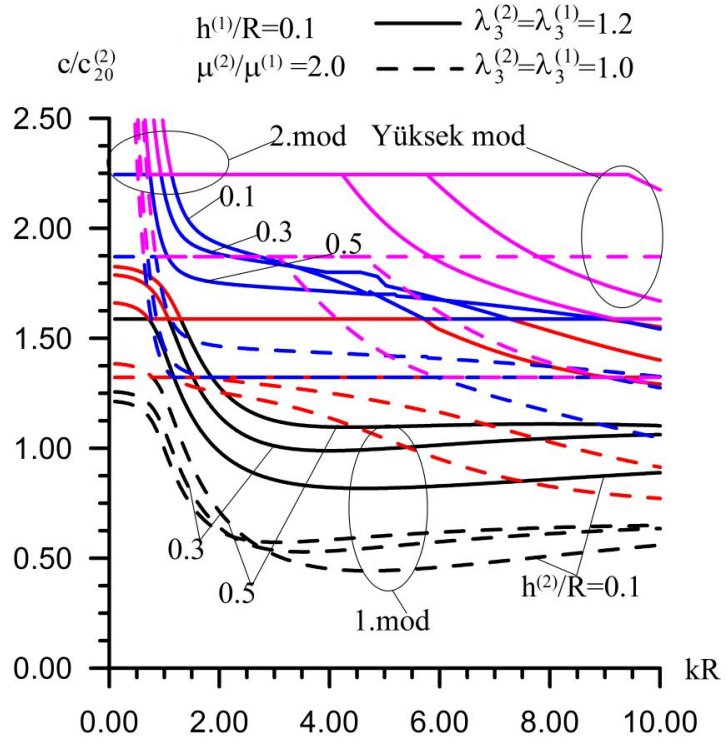
Şekil A.14



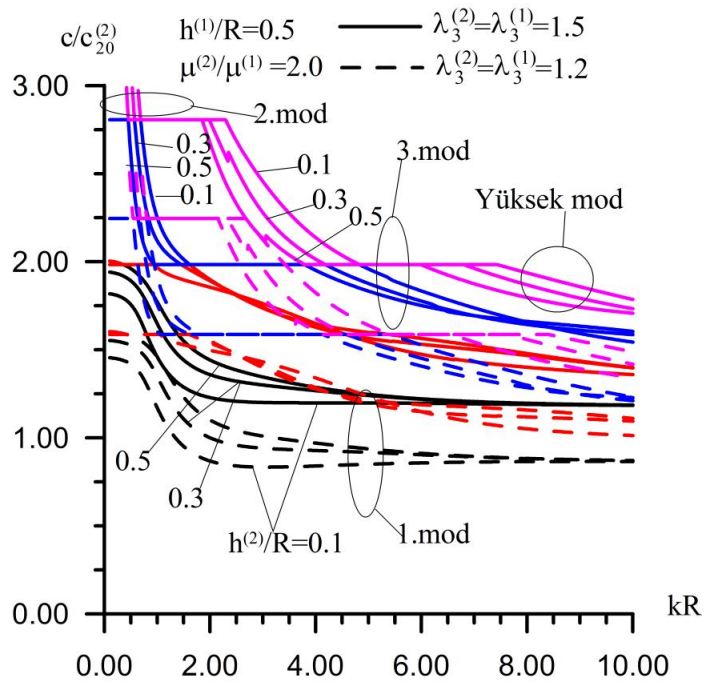
Şekil A.15



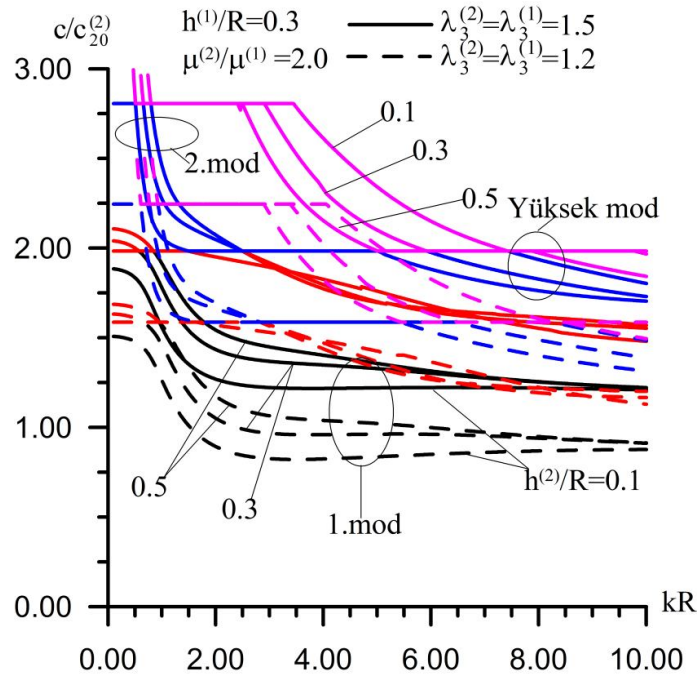
Şekil A.16



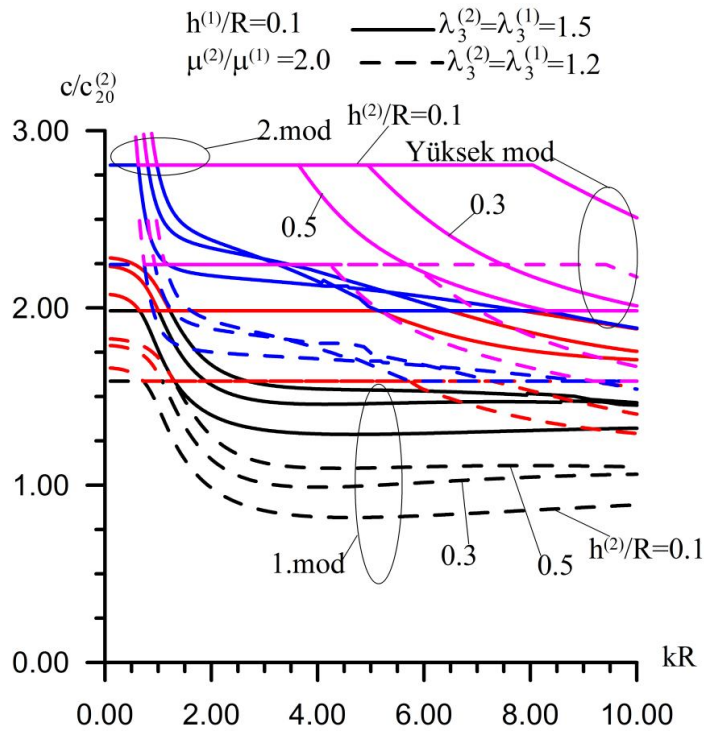
Şekil A.17



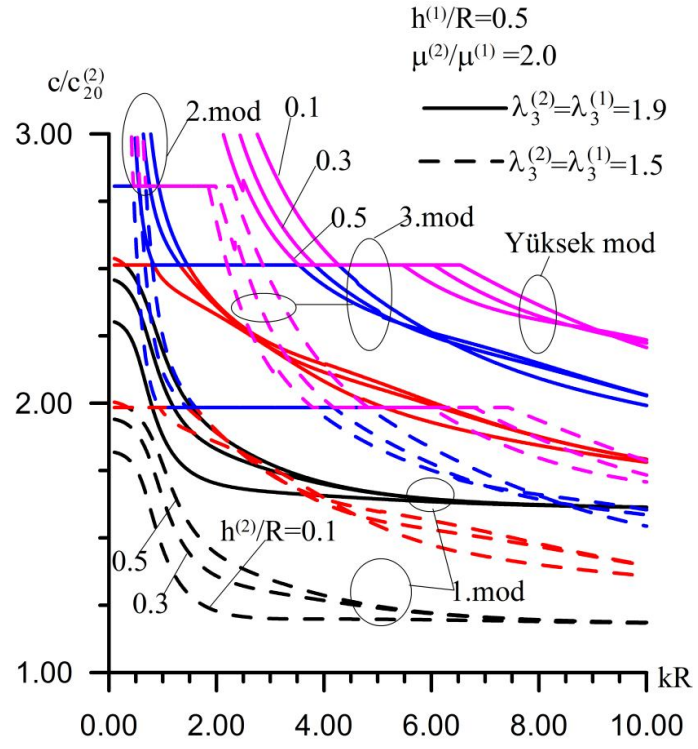
Şekil A.18



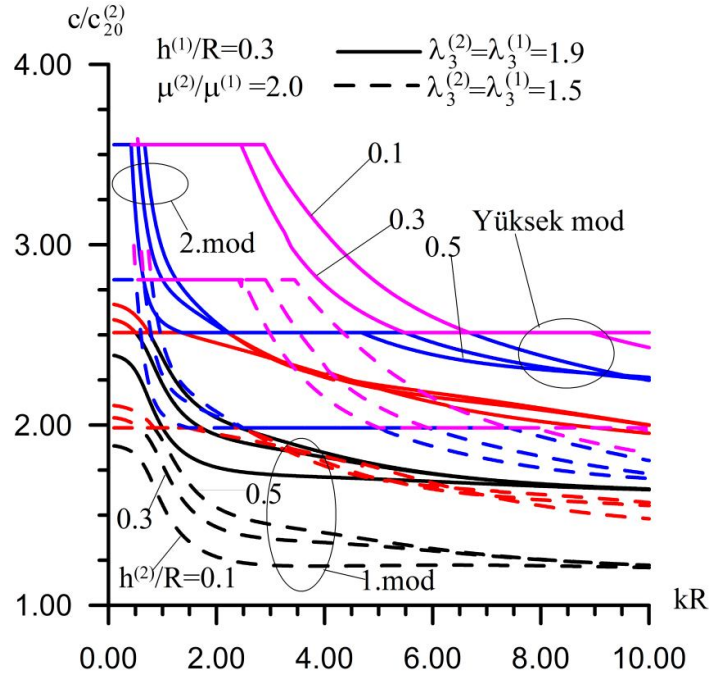
Şekil A.19



Şekil A.20

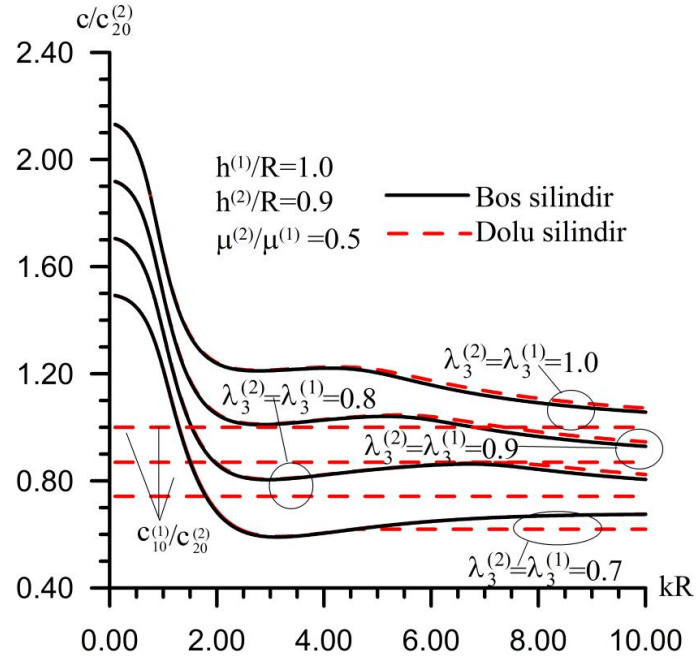


Şekil A.21

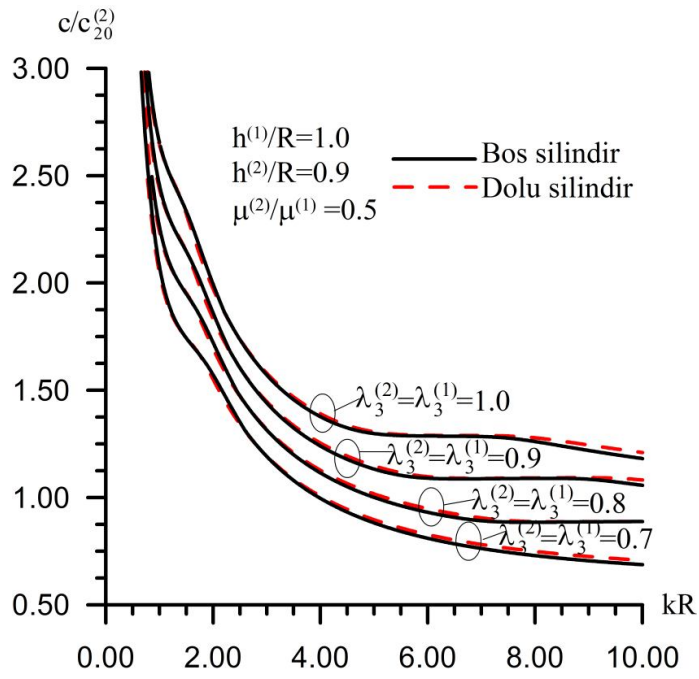


Şekil A.22

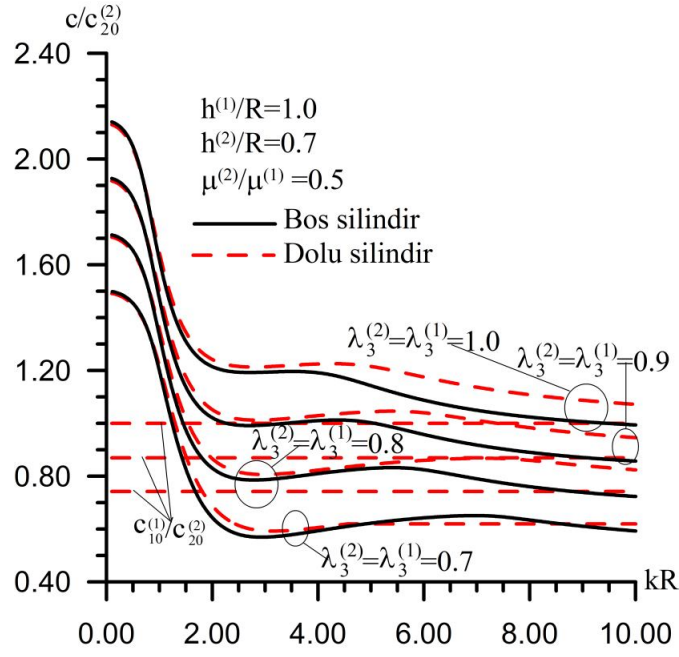




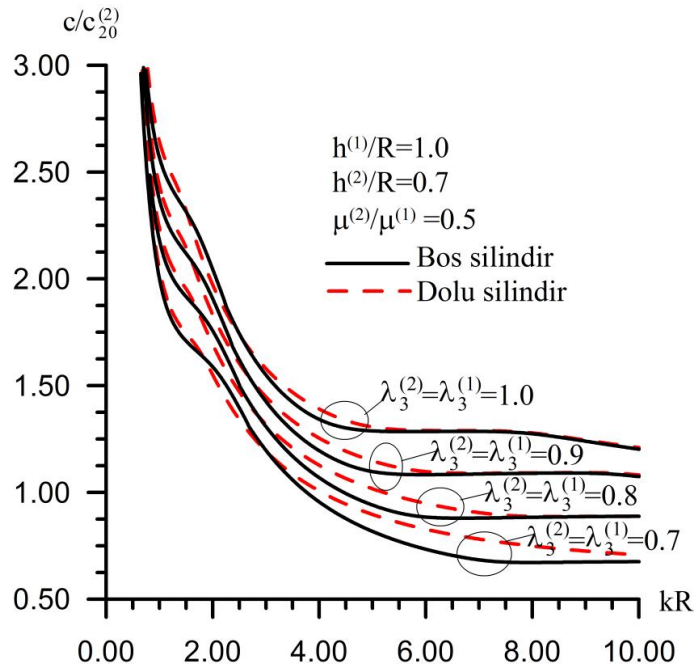
Şekil A.24



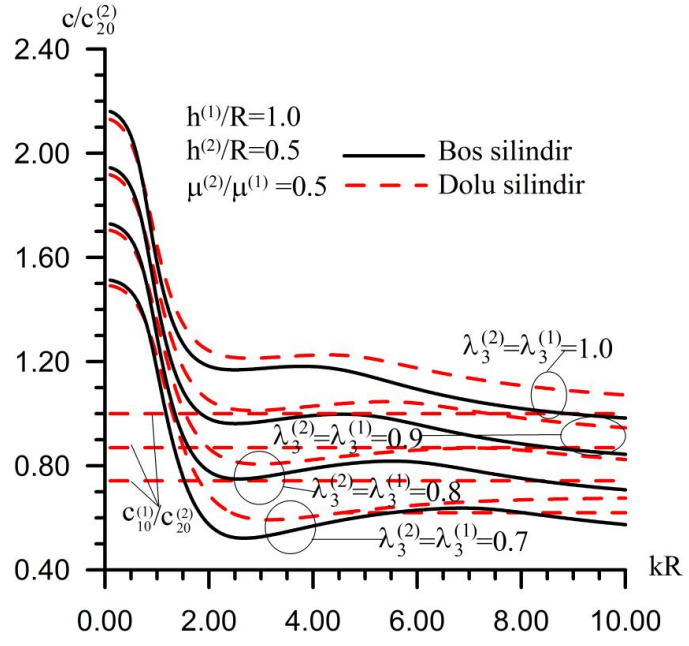
Şekil A.25



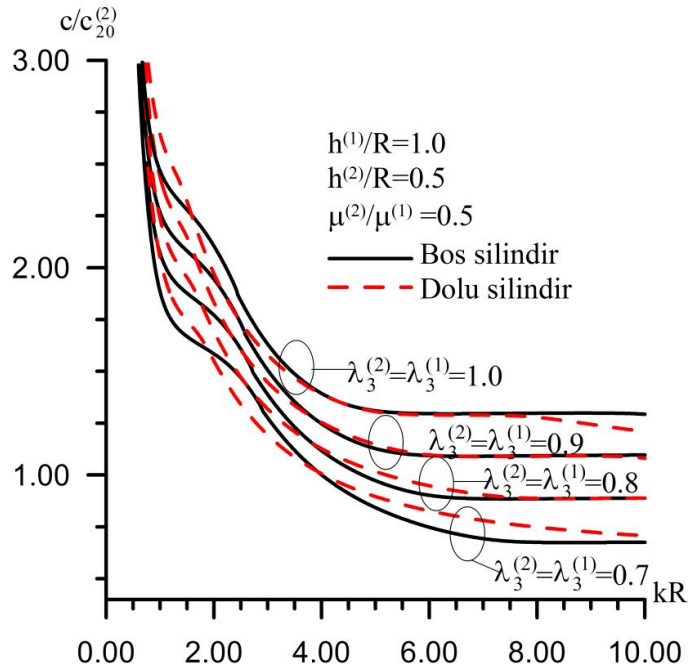
Şekil A.26



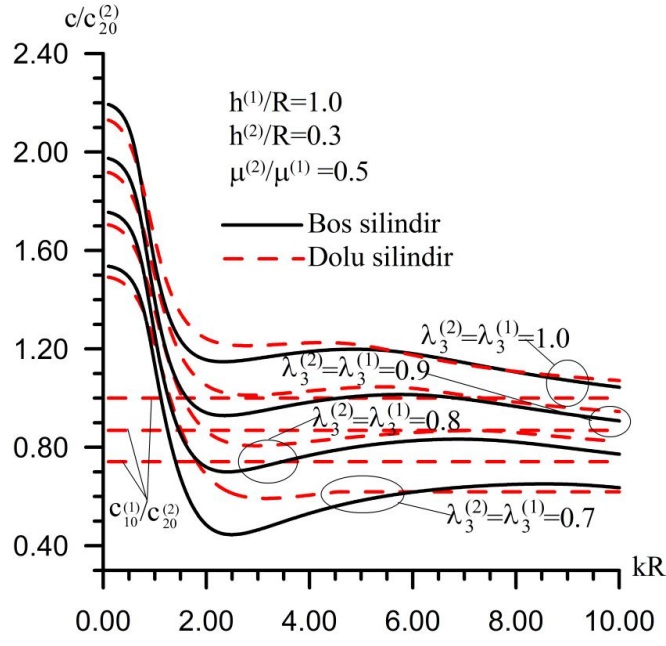
Şekil A.27



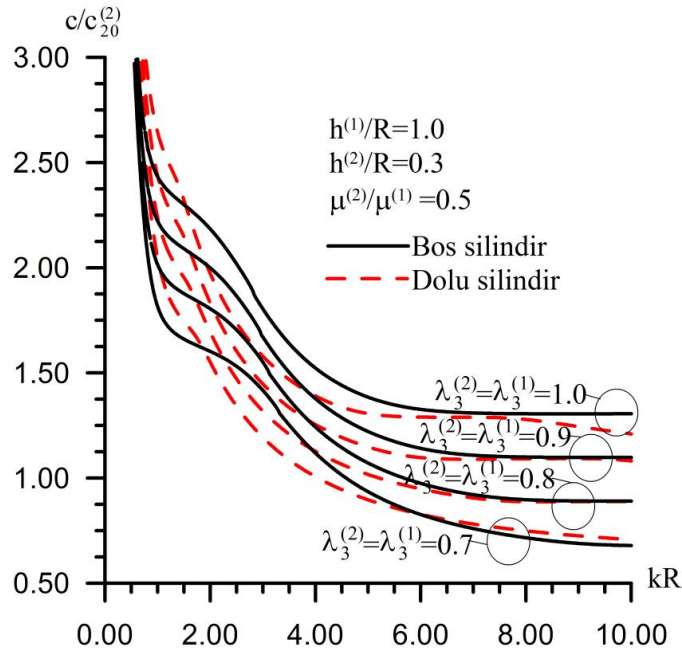
Şekil A.28



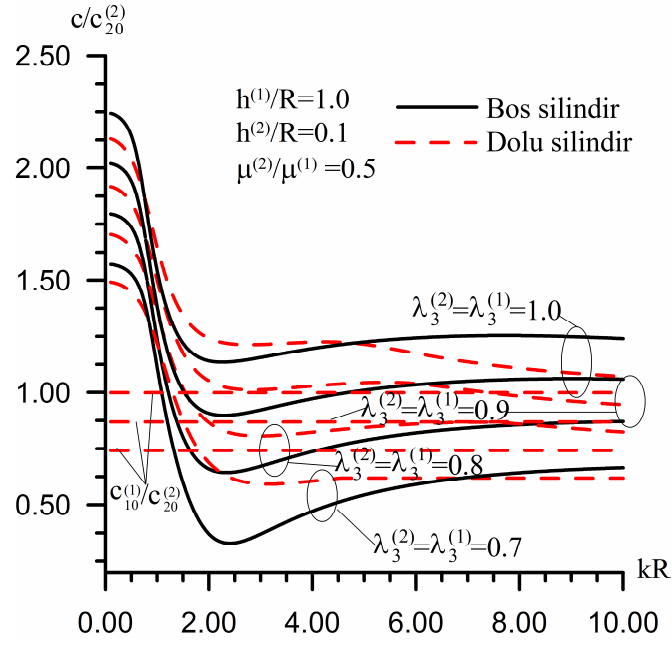
Şekil A.29



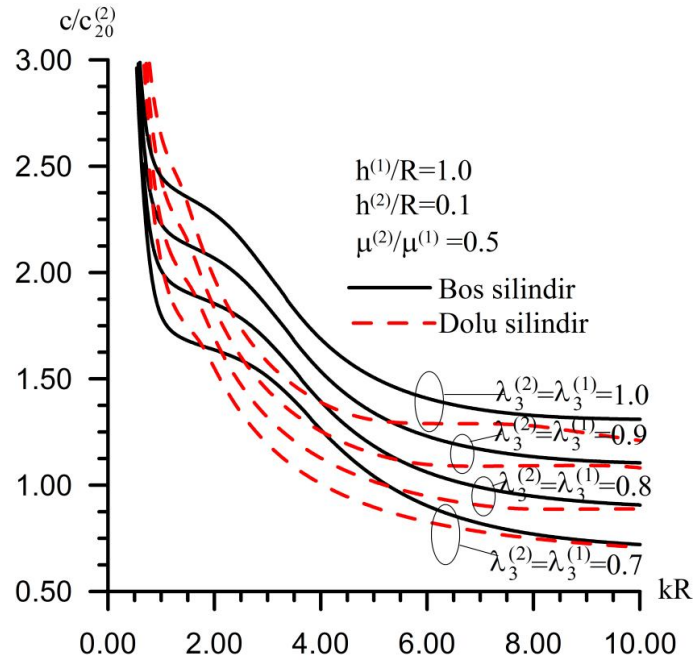
Şekil A.30



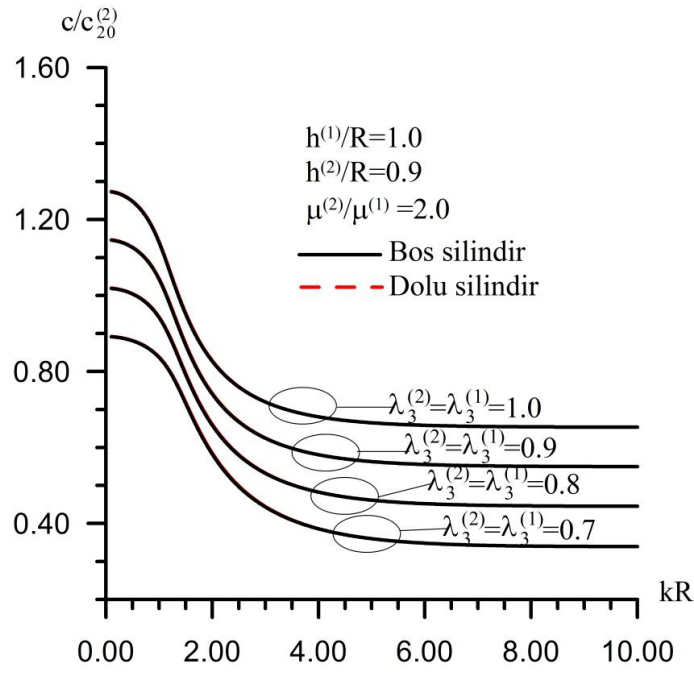
Şekil A.31



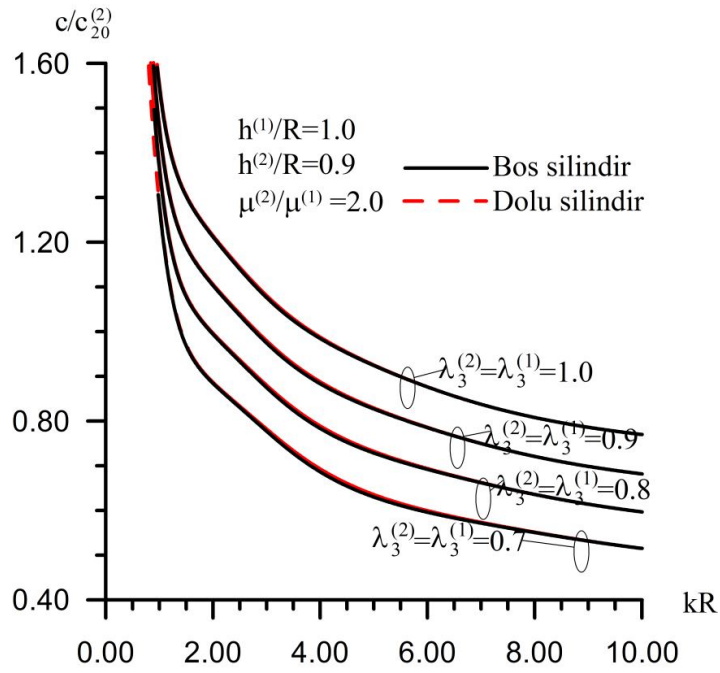
Şekil A.32



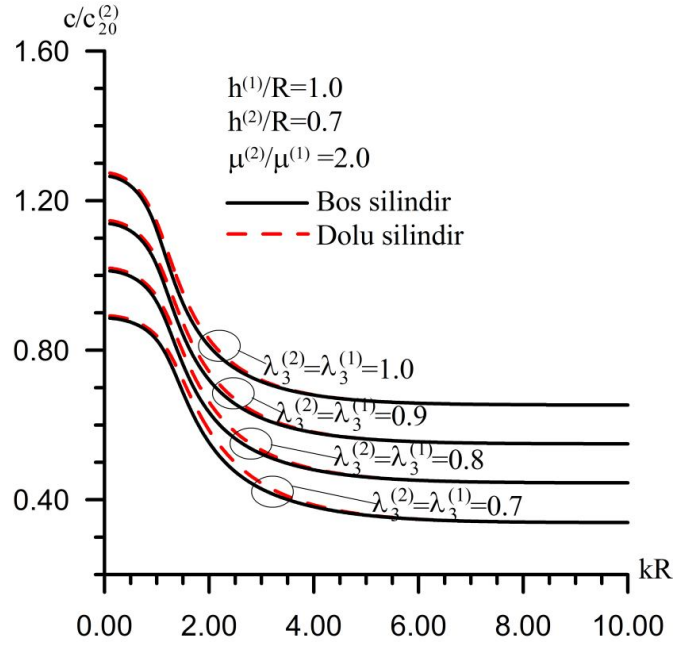
Şekil A.33



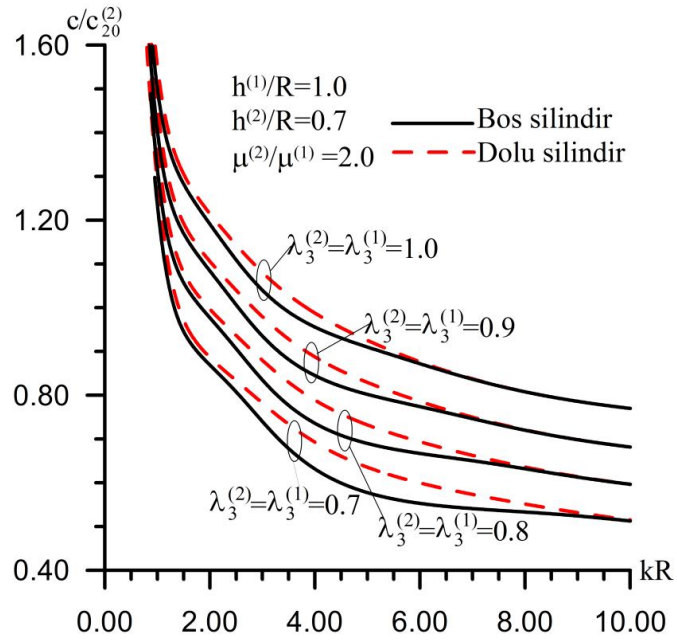
Şekil A.34



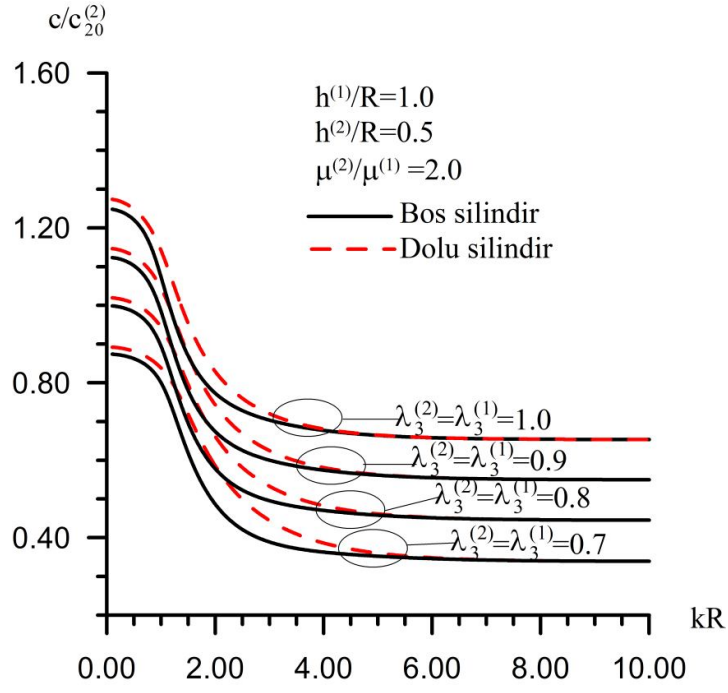
Şekil A.35



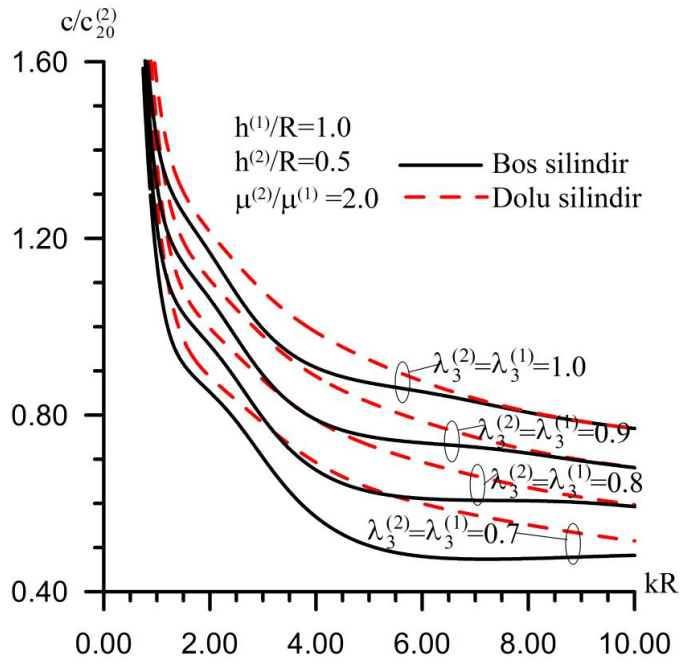
Şekil A.36



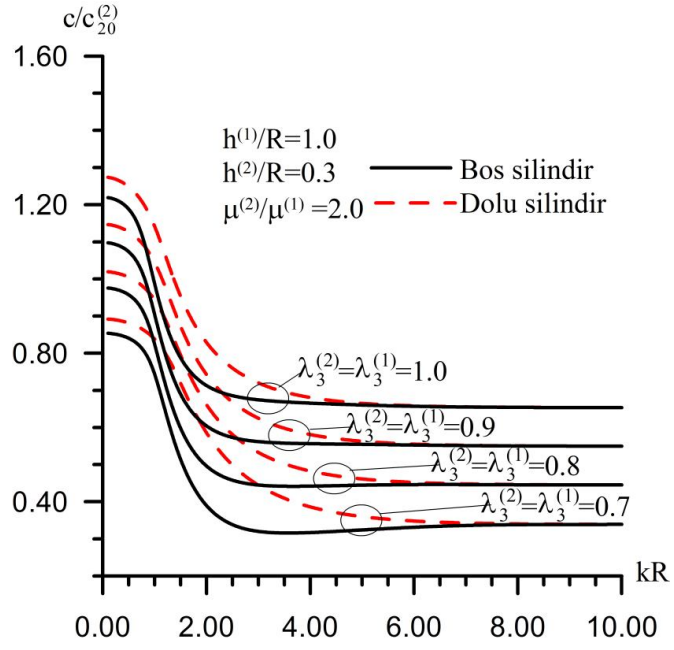
Şekil A.37



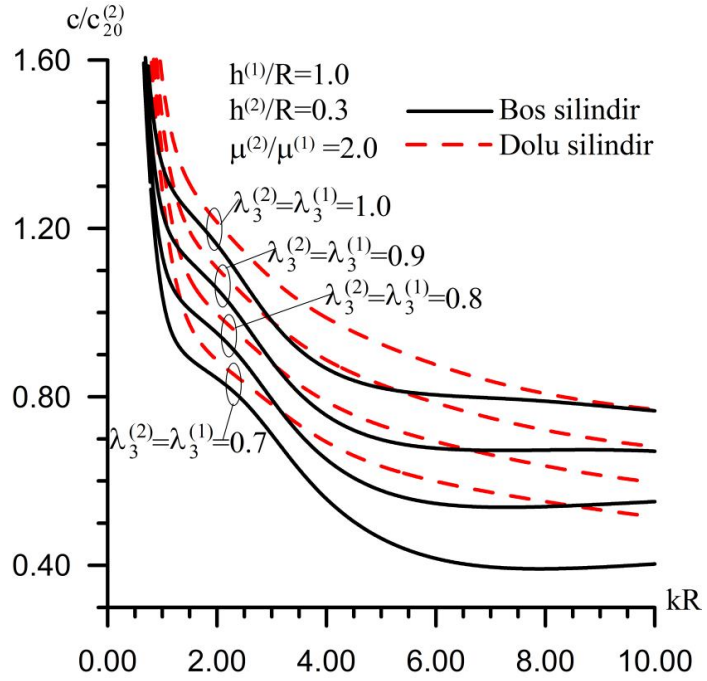
Şekil A.38



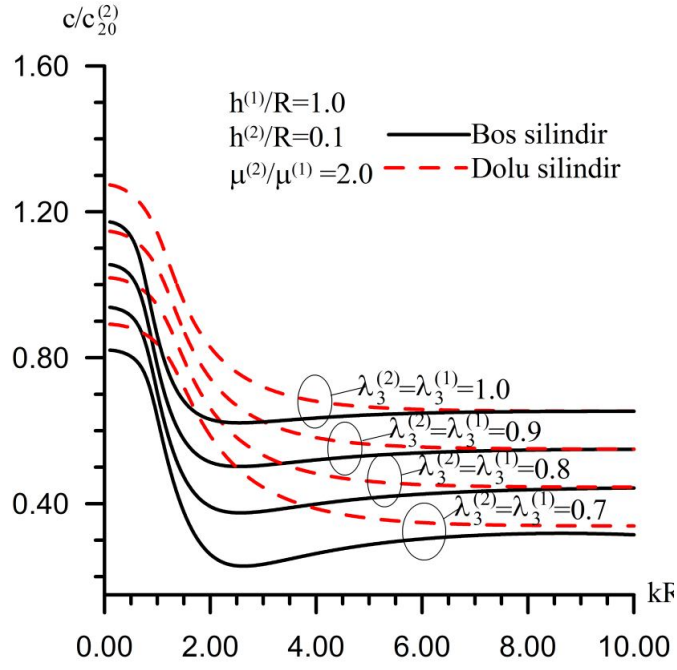
Şekil A.39



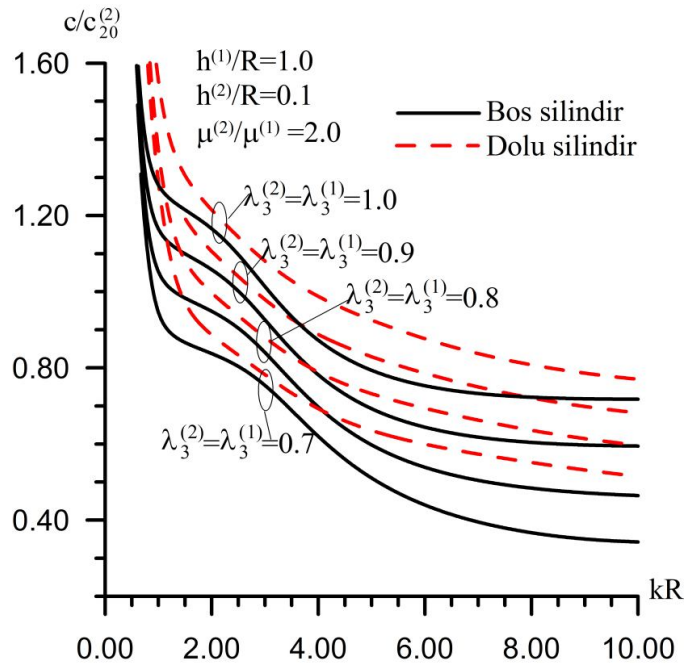
Şekil A.40



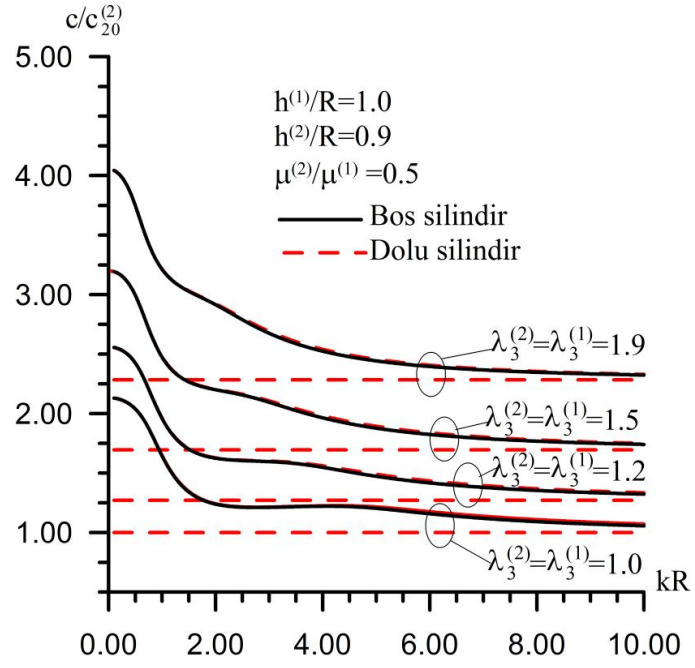
Şekil A.41



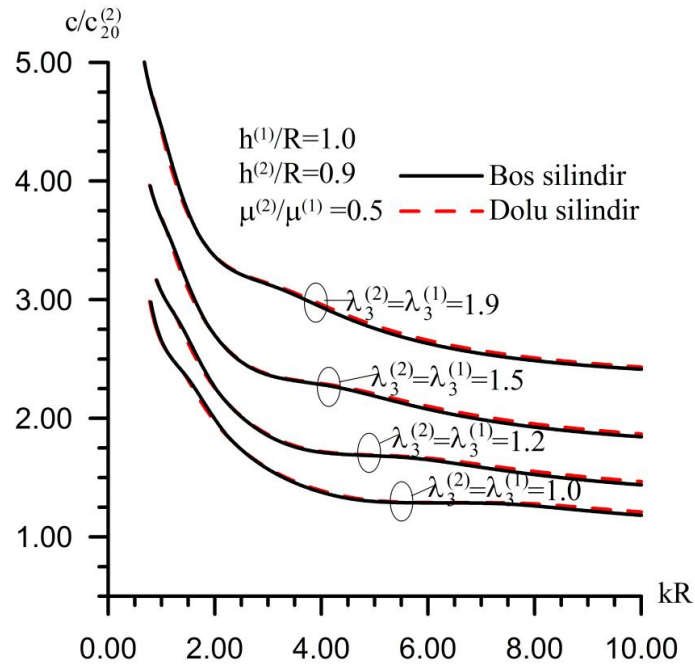
Şekil A.42



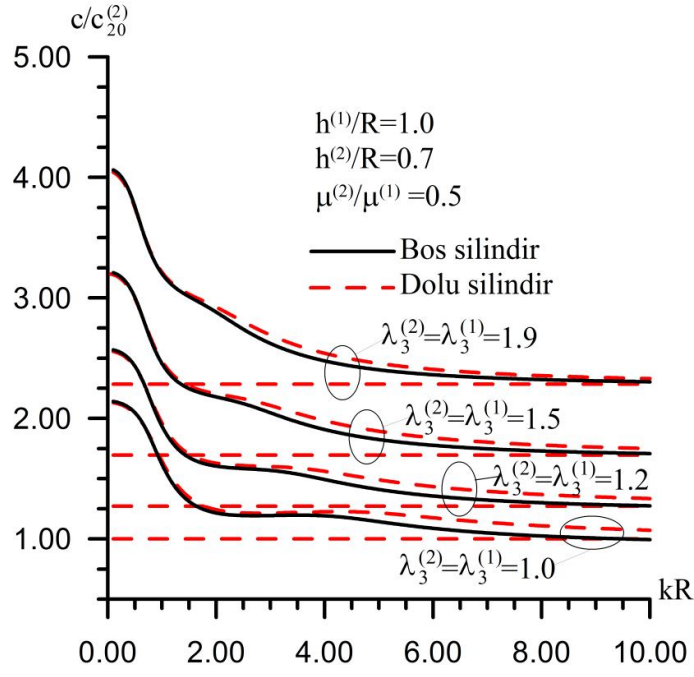
Şekil A.43



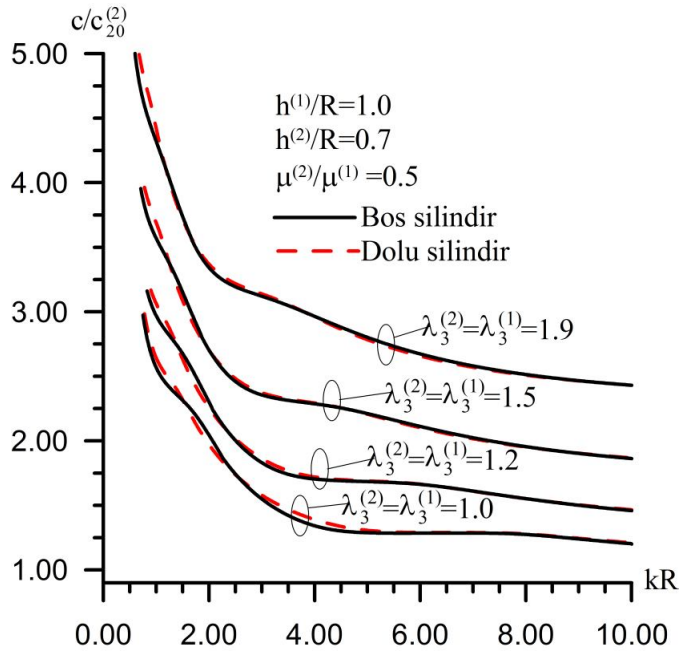
Şekil A.44



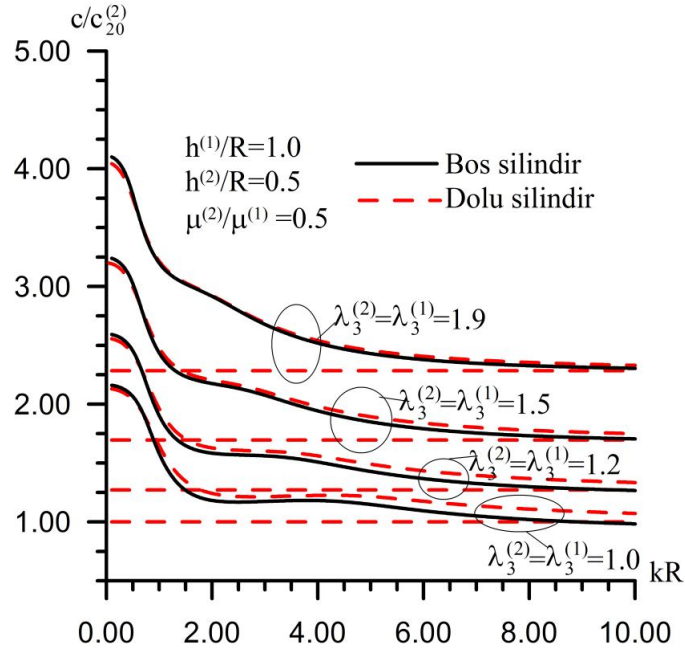
Şekil A.45



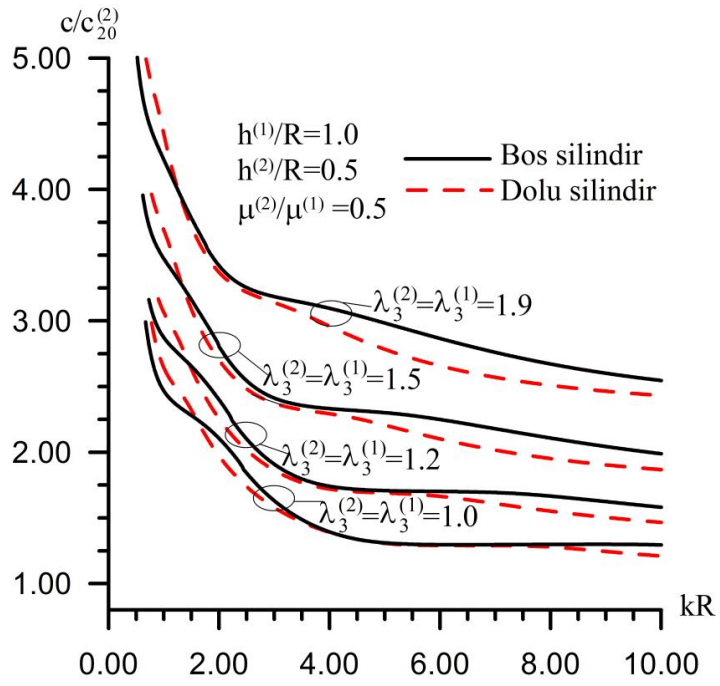
Şekil A.46



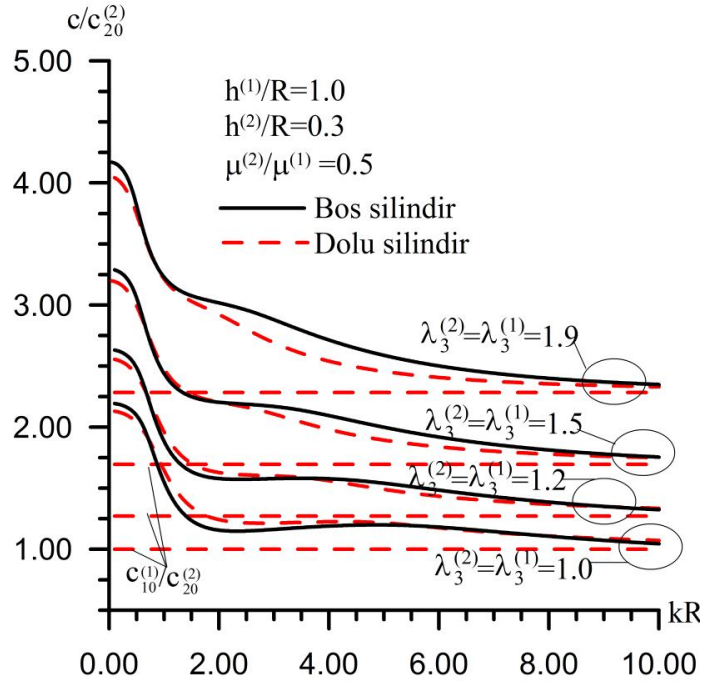
Şekil A.47



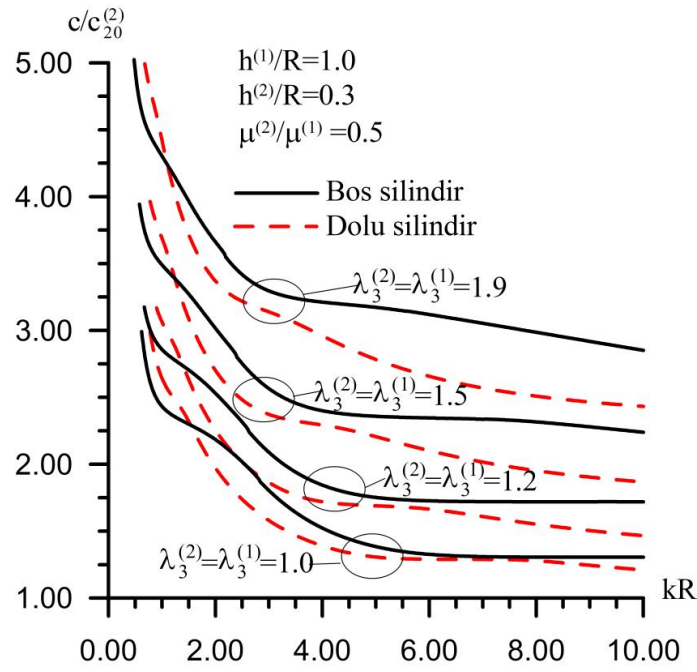
Şekil A.48



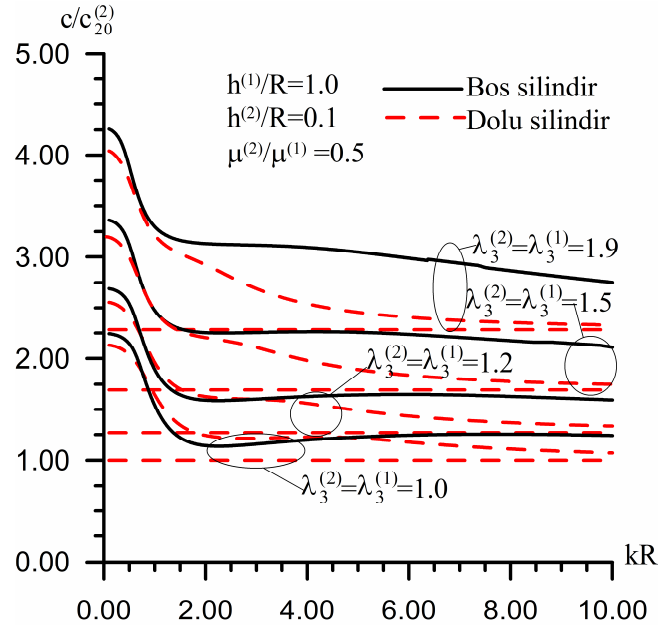
Şekil A.49



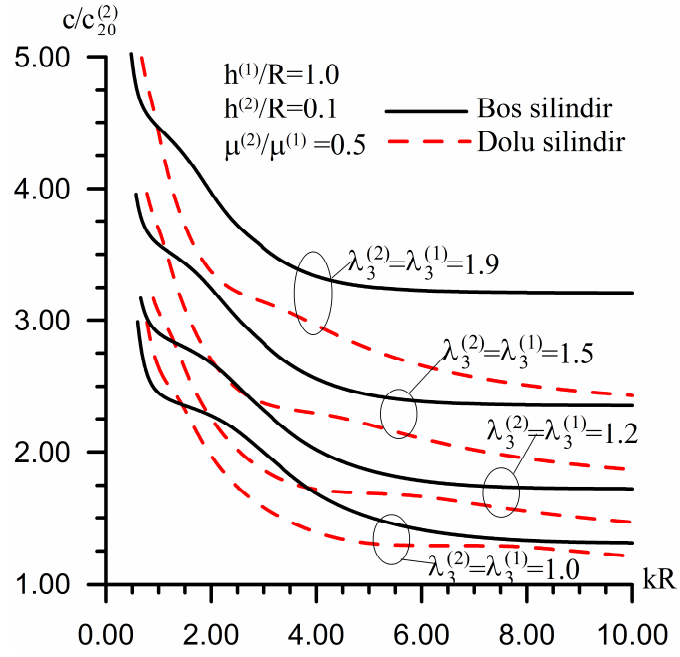
Şekil A.50



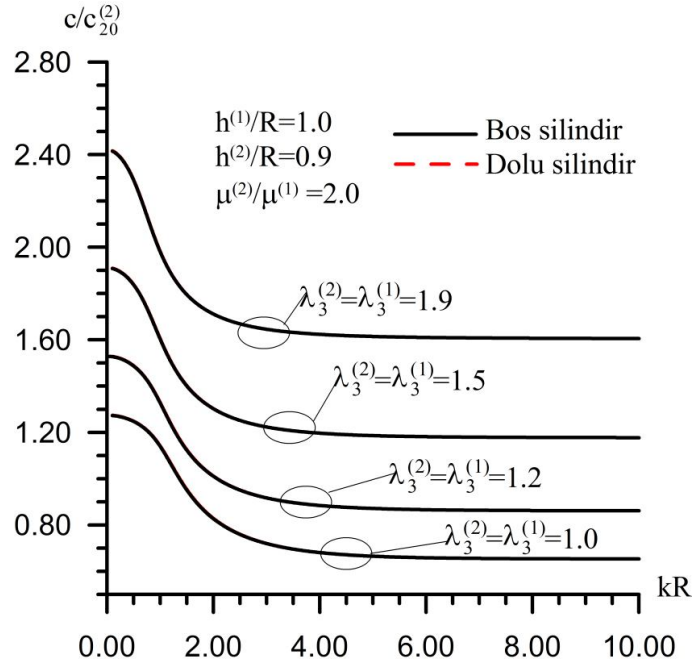
Şekil A.51



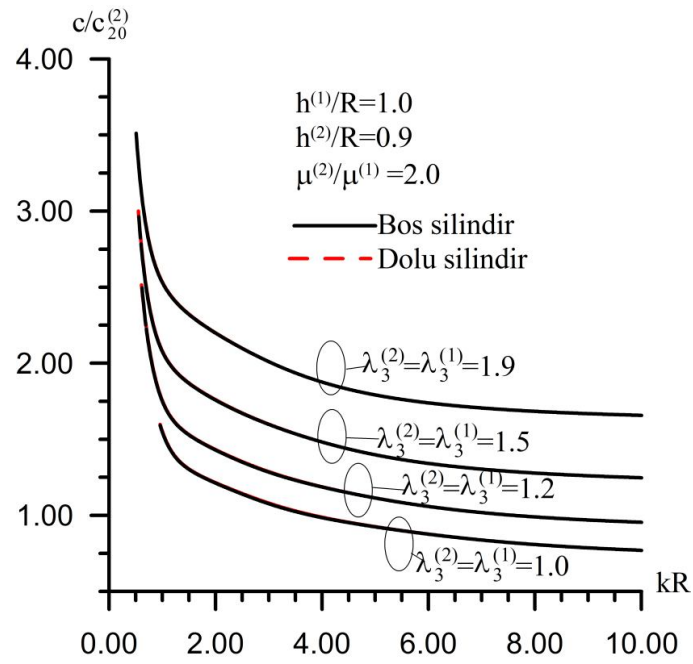
Şekil A.52



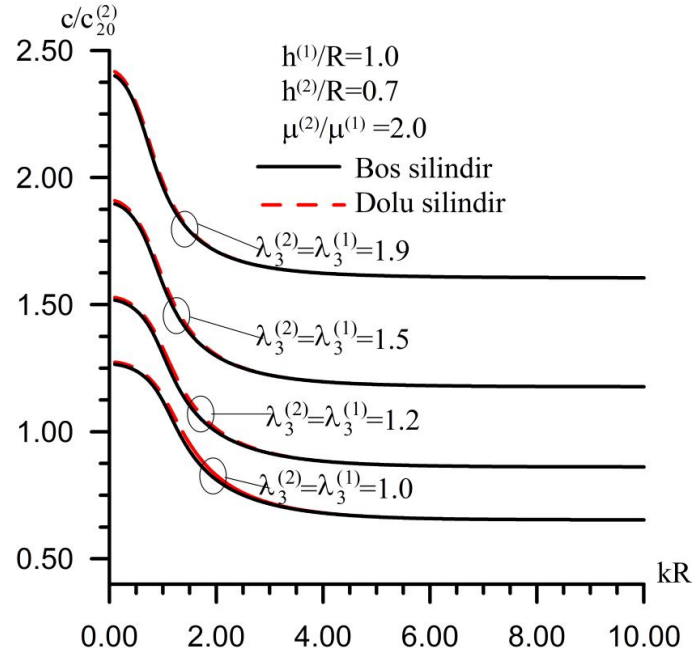
Şekil A.53



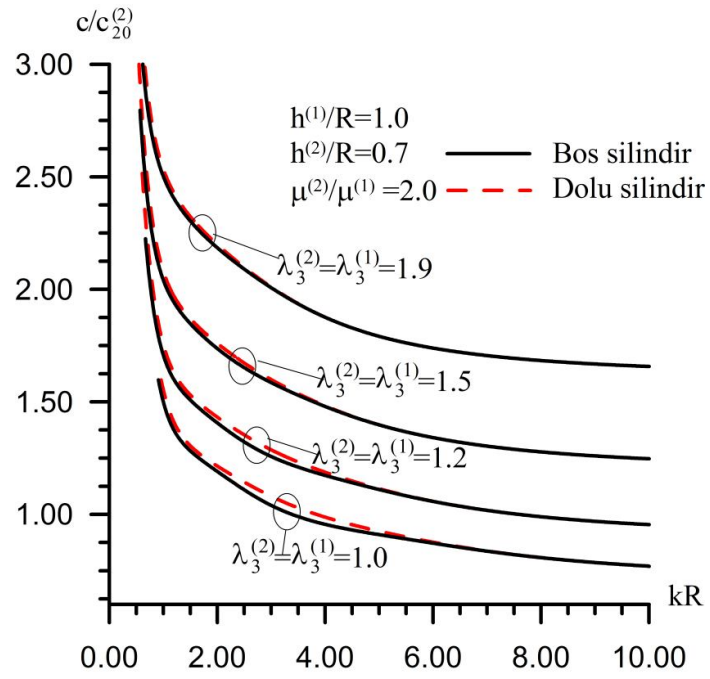
Şekil A.54



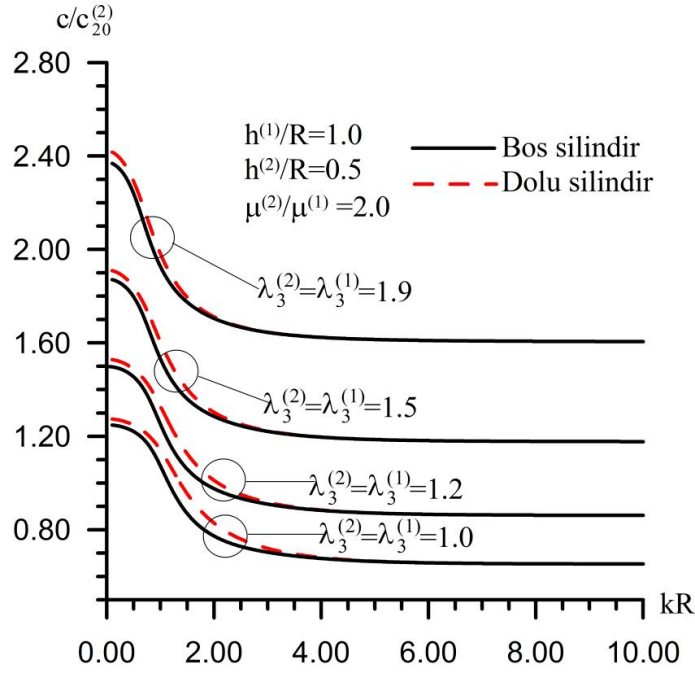
Şekil A.55



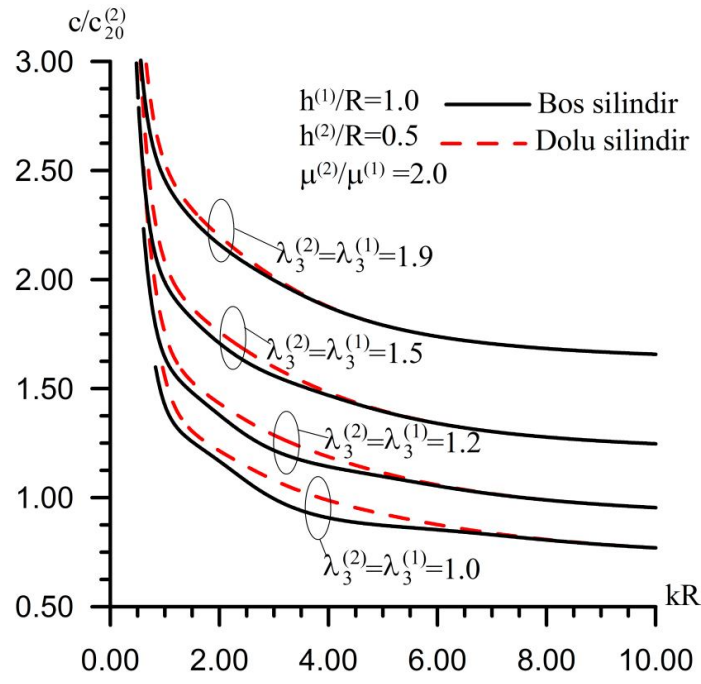
Şekil A.56



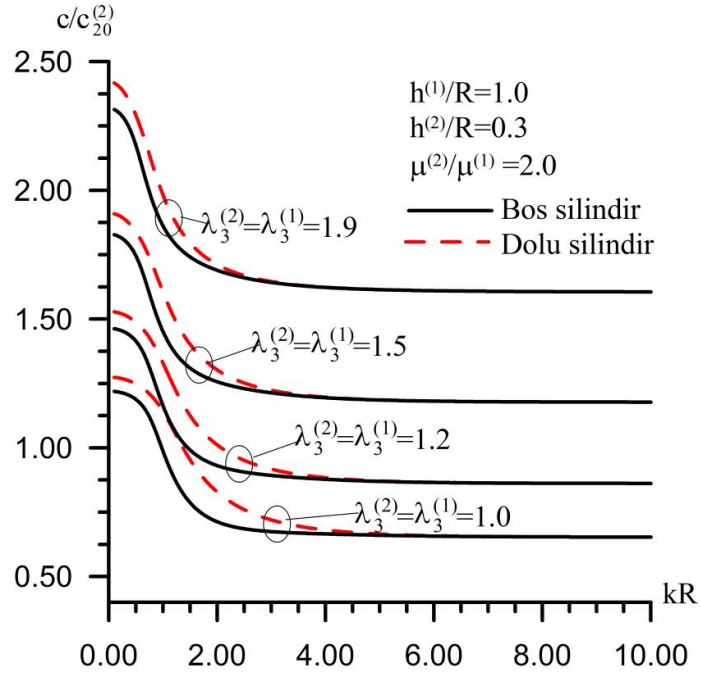
Şekil A.57



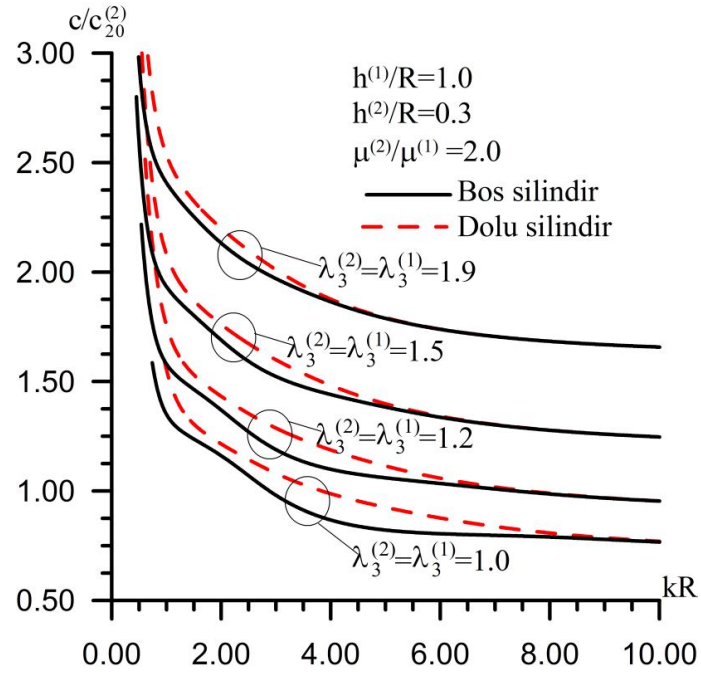
Şekil A.58



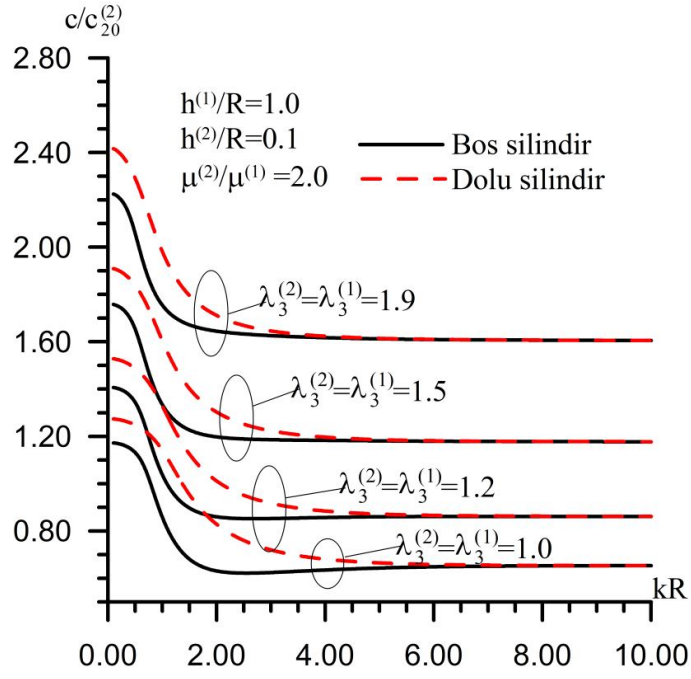
Şekil A.59



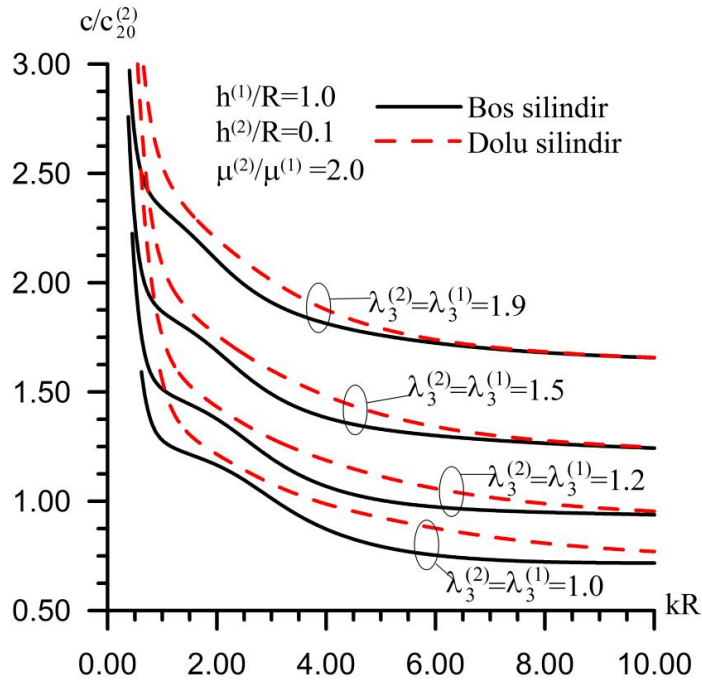
Şekil A.60



Şekil A.61

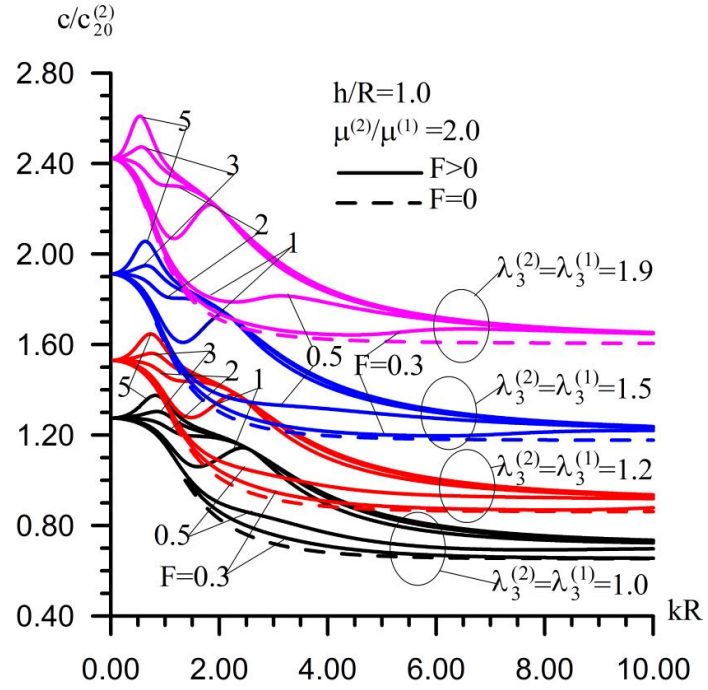


Şekil A.62

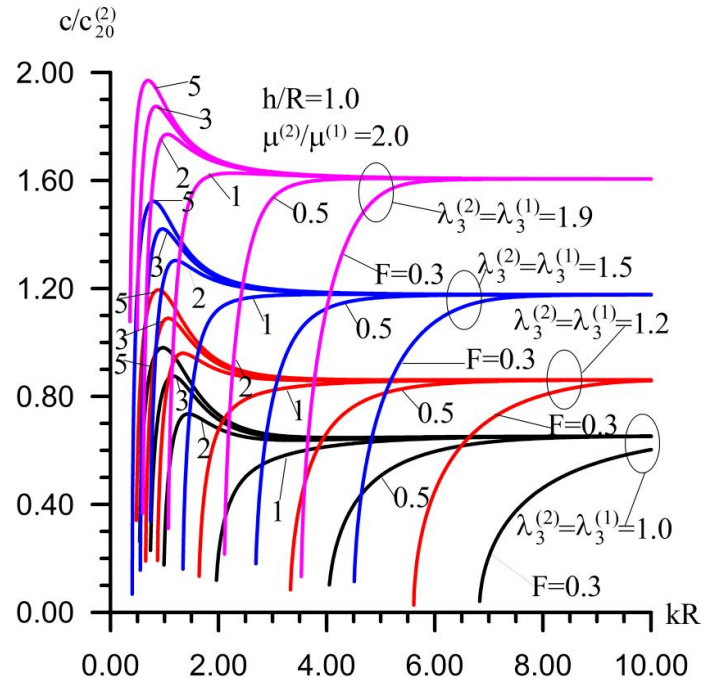


Şekil A.63

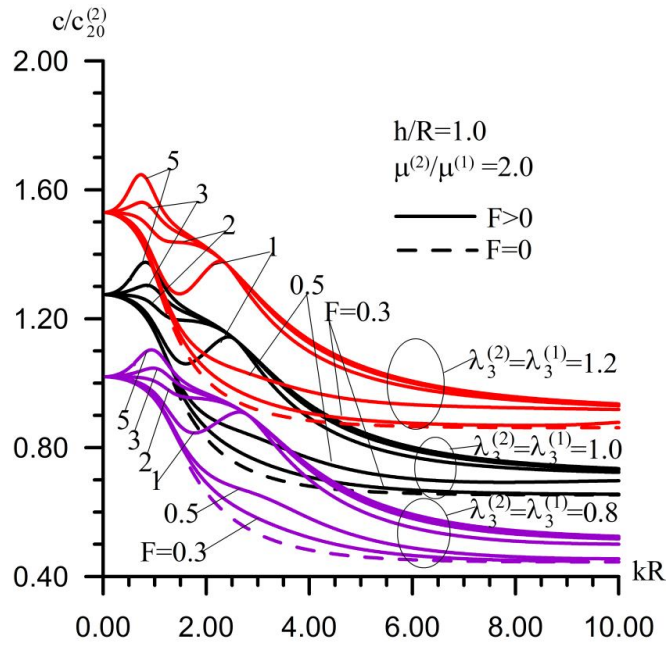
EK B.



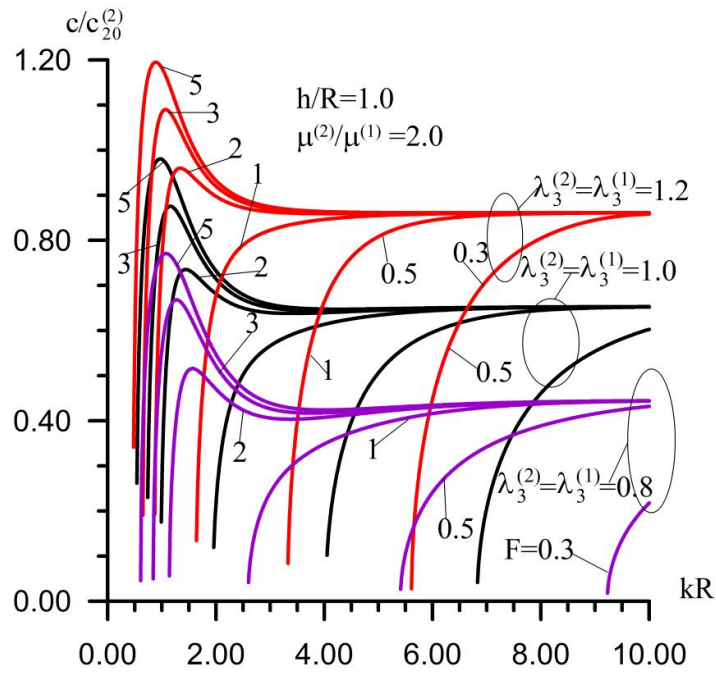
Şekil B.1



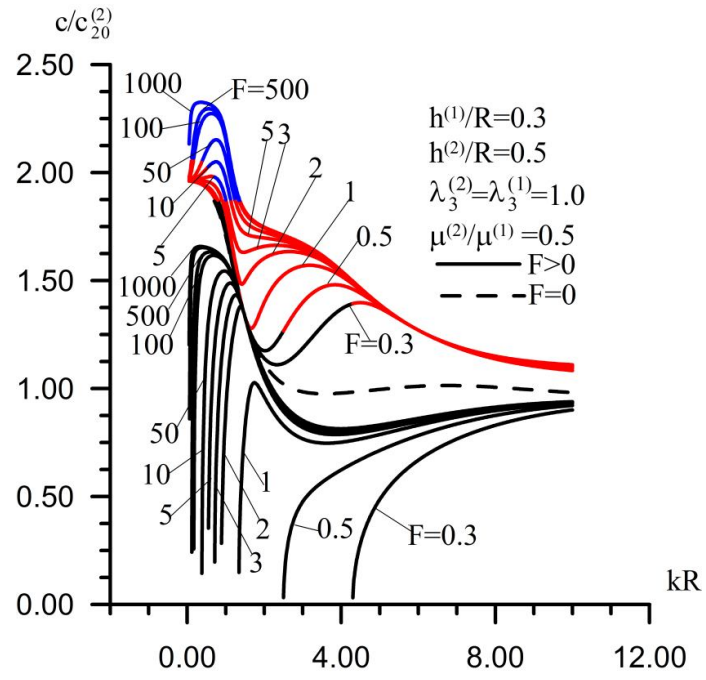
Şekil B.2



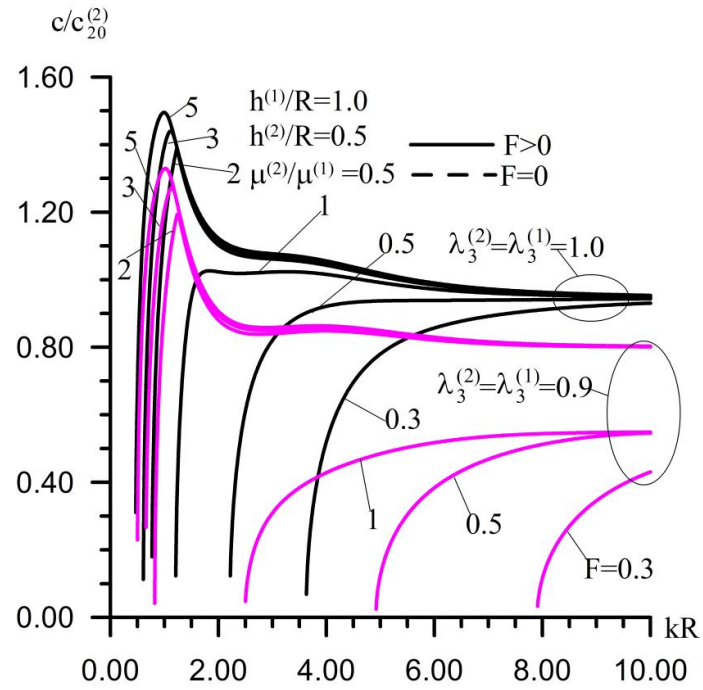
Şekil B.3



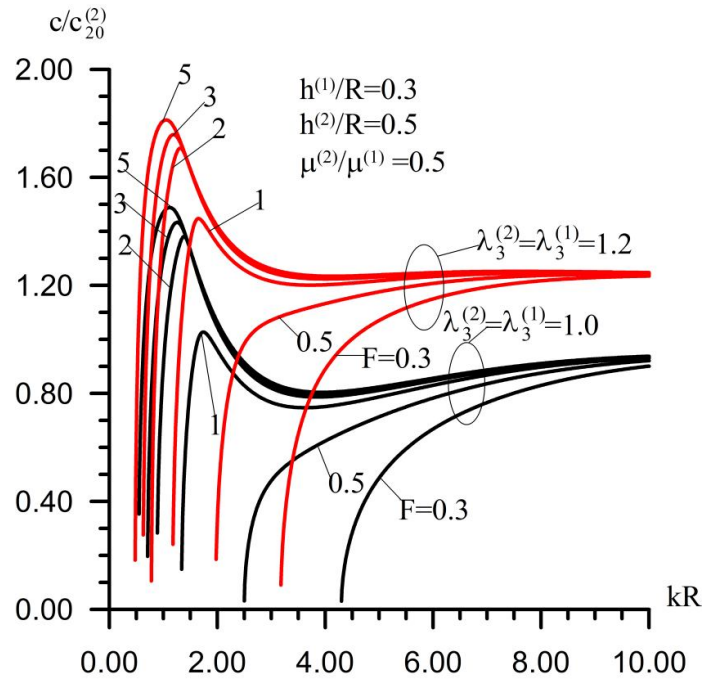
Şekil B.4



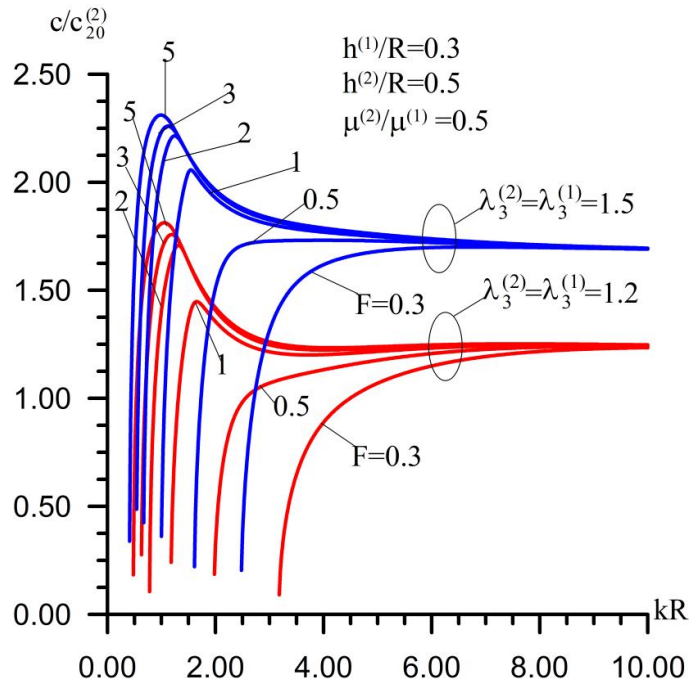
Şekil B.5



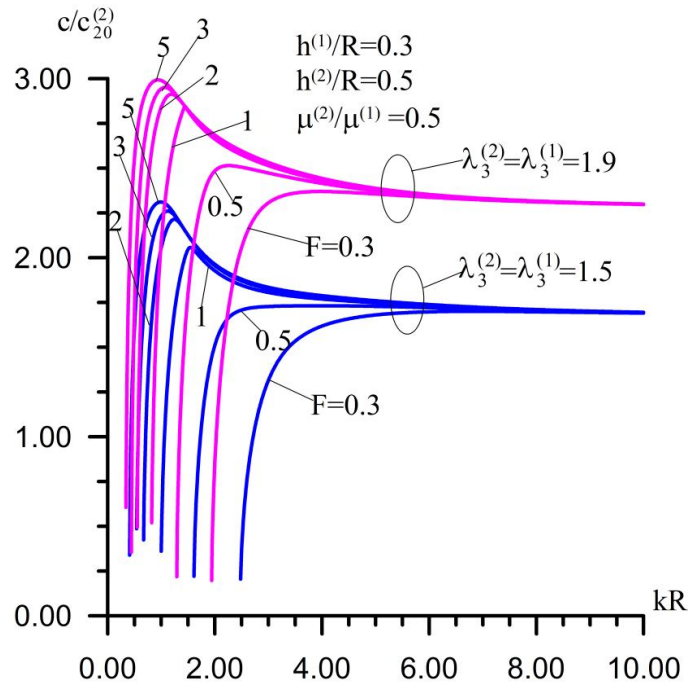
Şekil B.6



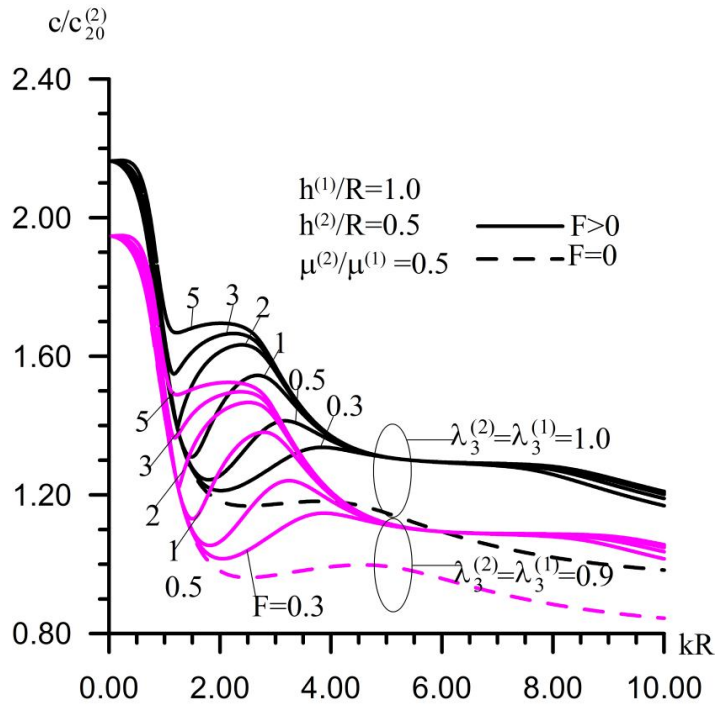
Şekil B.7



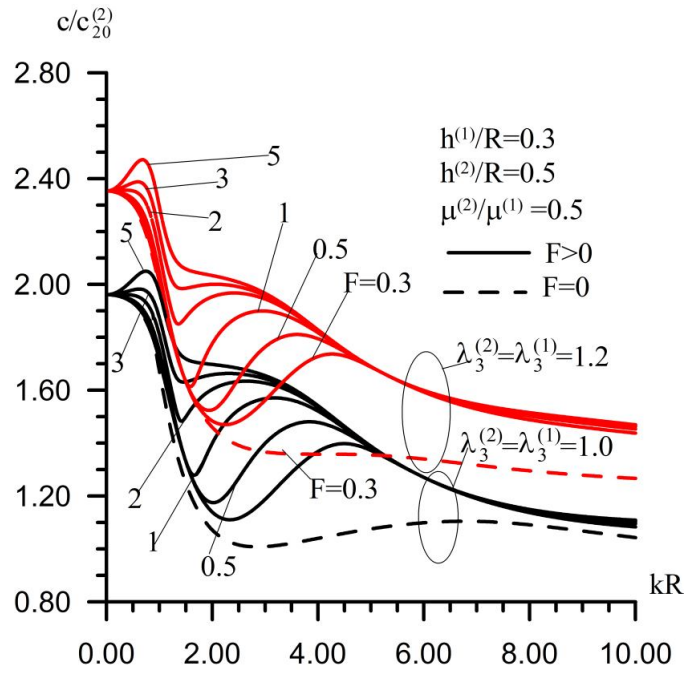
Şekil B.8



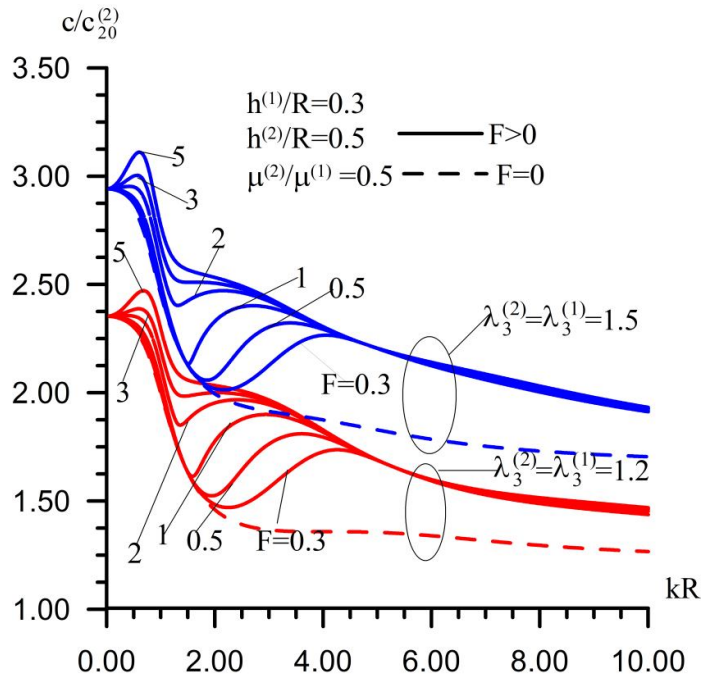
Şekil B.9



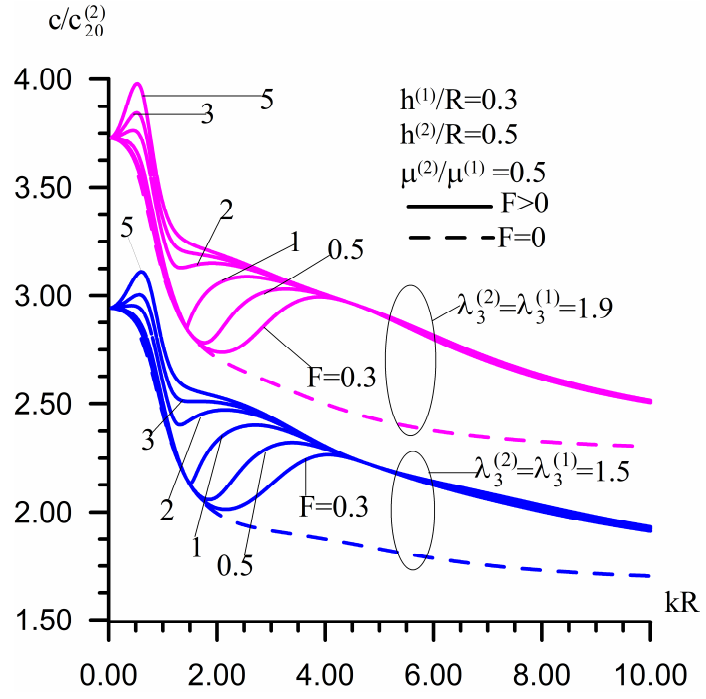
Şekil B.10



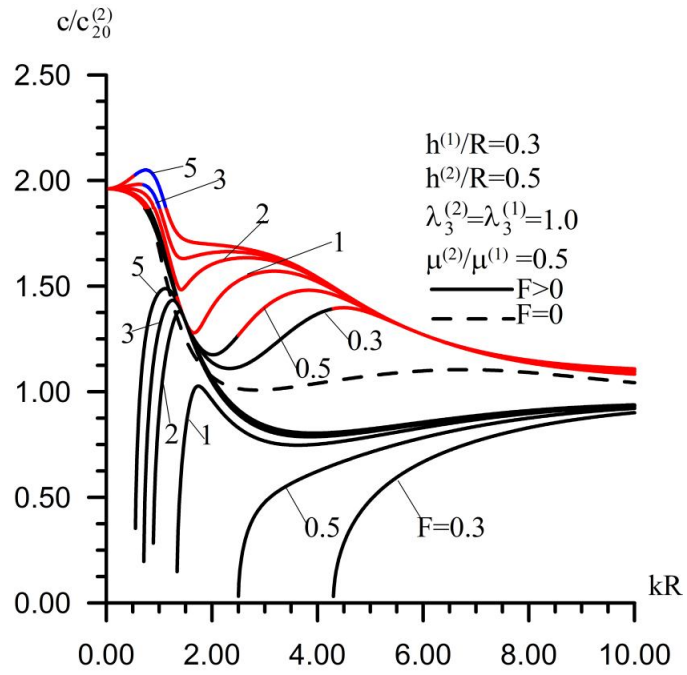
Şekil B.11



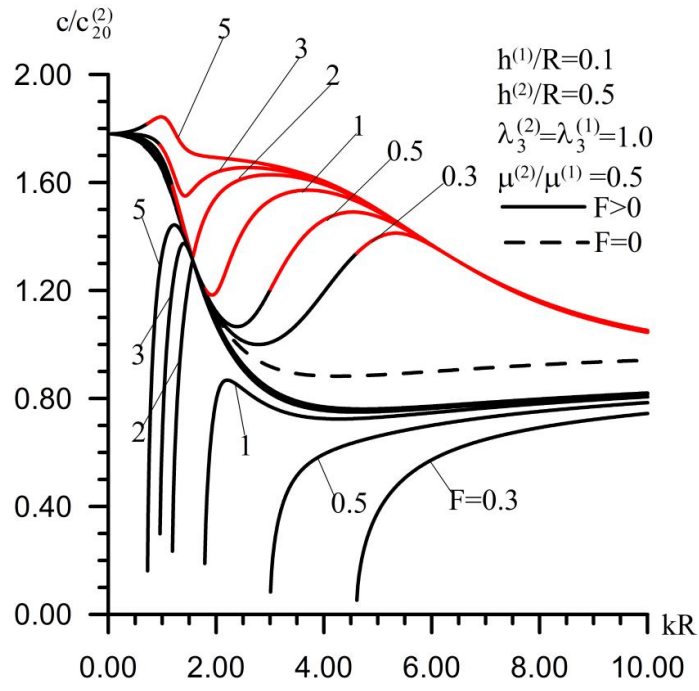
Şekil B.12



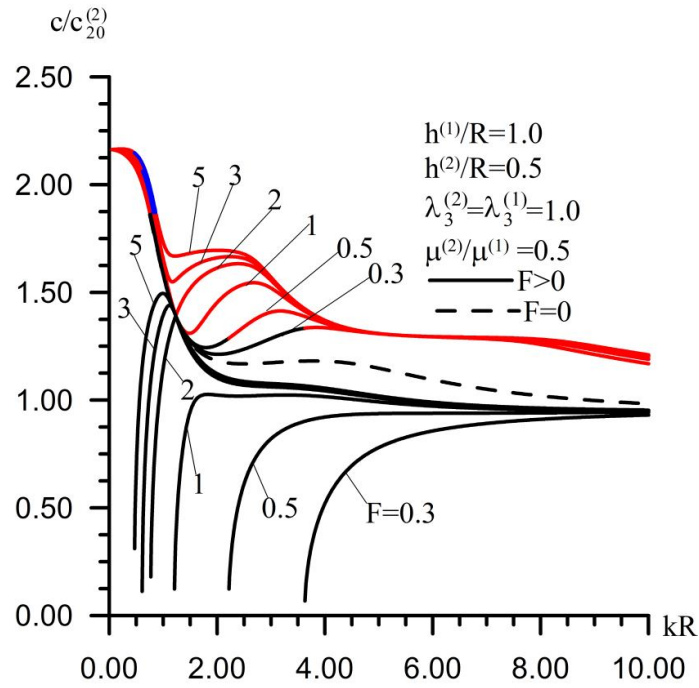
Şekil B.13



Şekil B.14



Şekil B.15



Şekil B.16

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Cengiz İPEK

Doğum Yeri ve Tarihi: Bismil 1967

Adres: Fatih mahallesi. Cumhuriyet Cad. No: 130 Başiskele/ KOCAELİ

Lisans Üniversite: İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği.

Yayın Listesi:

- Akbarov, S. D., **Ipek, C.**, 2010 : The Influence of the Imperfectness of the Interface Conditions on the Dispersion of the Axisymmetric Longitudinal Waves in the Pre-strained Compound Cylinder. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science*.**70**(2) 93–122.