



TOURATIER PLAĞININ DİNAMİK RİJİTLİK MATRİSİ YÖNTEMİ İLE WITTRICK-WILLIAMS ALGORİTMASI KULLANARAK SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Barış Tanrıverdi¹, Hikmet Hüseyin Çatal²

^{1,2}Dokuz Eylül Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İzmir

ABSTRACT

In the analysis of plates, taking the effects of rotational inertia into account as well as the shear deformation plays an important role in achieving more realistic results. The results obtained from Touratier's Shear Deformation Theory so as to consider cosine shear stress distribution are pretty close to 3D elasticity solutions. Free vibration analysis of uniform isotropic plates are performed by using Dynamic Stiffness Matrix Method with Wittrick-Williams Algorithm based on Touratier's Plate Theory in this paper. Navier type solutions of higher order shear deformation theory studies are quietly prevalent in the literature despite Levy type solutions are rare. Levy type solution considered in the study to investigate the angular frequencies of plates with two opposite sides simply supported and the remaining ones arbitrary with the contribution of rotational inertia effects. Angular frequencies obtained from square and rectangular plates simply supported in all edges are compared with the results of Mindlin Plate Theory and 3D elasticity solutions in order to show the efficiency of the theory and method.

ÖZET

Plakların analizinde, kayma deformasyonlarının yanı sıra dönme ataleti etkilerinin de dikkate alınması daha gerçekçi sonuçlara ulaşılmasında önemli bir rol oynamaktadır. Kayma deformasyonu etkilerini kosinüs kayma gerilmesi dağılımı ile dikkate alan Touratier Kayma Deformasyonu Teorisi kullanılarak elde edilen sonuçlar üç boyutlu elastisite teorisi çözümlerine oldukça yakındır. Bu çalışmada, Touratier Plak Teorisi esas alınarak üniform izotropik plakların serbest titreşim analizi Dinamik Rijitlik Matrisi Yöntemi ile Wittrick-Williams algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Literatürde yüksek mertebeden kayma deformasyonu etkilerinin dikkate alındığı plak çalışmalarında Navier tipi çözüme sıklıkla rastlansa da Levy tipi çözüm oldukça nadirdir. Çalışmada esas alınan Levy tipi çözüm ile karşılıklı iki kenarından basit mesnetli, diğer kenarları değişik mesnet koşullarına sahip plakların açılal frekans değerleri ile dönme ataletinin açılal frekanslara katkısı incelenmiştir. Kenarlarından basit mesnetli kare ve dikdörtgen plaklardan elde edilen açılal frekans değerleri Mindlin Plak Teorisi ile üç boyutlu elastisite teorisi çözümlerinden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak teorelin ve yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

GİRİŞ

Plakların serbest titreşim analizinde kayma deformasyonu ve dönme ataletinin etkileri özellikle yüksek modlarda ihmal edilemeyecek derecede önem arz etmektedir. Birinci mertebeden kayma deformasyonu teorisi olan Mindlin Plak Teorisi'nde, deformasyon öncesi düzlem olan kesitlerin deformasyon sonrasında da düzlem kaldığı; kesitin eğilme ve kayma etkileri altında çarpılmadan döndüğü varsayımı yapılır [1]. Bu kabul altında plağın alt ve üst yüzeylerinde gerçekte var olmayan kayma gerilmeleri ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle teoride bir düzeltme katsayısı ihtiyacı bulunmaktadır.

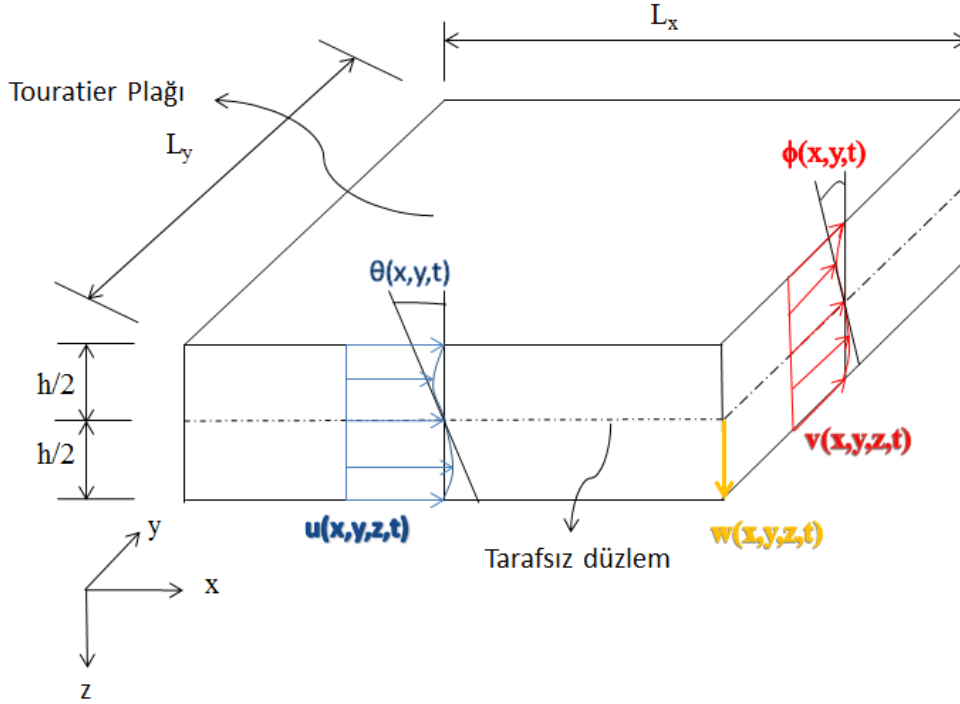
Yüksek mertebeden kayma deformasyonu teorilerinin geliştirilmesi ile birlikte, deformasyon sonrası kesitin aldığı elastik eğrinin, sınır ve gerilme şartlarına uygunluğu sağlanmıştır. Bir diğer adıyla trigonometrik kayma deformasyonu teorisi olarak anılan Touratier Plak Teorisi, plağın üst ve alt yüzeylerinde sıfır kayma gerilmesini oluşturan kosinüs kayma gerilmesi dağılımı ile Mindlin Plak Teorisi'nde kullanılan düzeltme katsayısı problemini de ortadan kaldırmaktadır [2]. Sinüs fonksiyonu ile tanımlanan normal deformasyon dağılımının kullanıldığı Touratier Kayma Deformasyonu Teorisi'nde sinüs terimi, kuvvet serilerine açılıp ilk iki terim dikkate alındığında, parabolik kayma deformasyonu teorilerinde görülen normal deformasyon ifadelerine benzer terimler elde edilir. Bu durum, trigonometrik kayma deformasyonu teorilerinin parabolik kayma deformasyonu teorilerine göre kinematik olarak daha zengin olduğunun bir göstergesidir [3].

Literatürde, trigonometrik kayma deformasyonu teorileriyle ilgili çalışmalar son yıllarda artış göstermiştir. Ghugal ve Sayyad yaptıkları çalışmalarında, Touratier Kayma Deformasyonu Teorisi'nde yer alan kalınlık koordinatı doğrultusundaki deplasman ifadesine trigonometrik bir terim ekleyerek üçüncü boyut etkisini dikkate almışlardır [3]. Ghugal ve Shinde, geliştirdikleri trigonometrik kayma deformasyonu teorisi ile tabakalı kirişlerin statik analizini gerçekleştirmişlerdir [4]. Ghugal ve Kulkarni, Touratier Kayma Deformasyonu Teorisi'ni kullanarak tabakalı plakların termo-elastik eğilme analizini gerçekleştirmişlerdir [5]. Nguyen ve diğerleri geliştirdikleri teorilerinde, ters trigonometrik kayma deformasyonu dağılımı ile izotropik ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalı sandviç plakların statik ve serbest titreşim analizlerini gerçekleştirmişlerdir [6]. Rango ve diğerleri, Touratier Kayma Deformasyonu Teorisi'ni kullanarak geliştirdikleri dörtgen sonlu eleman ile simetrik tabakalı kompozit plakların serbest titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir [7]. Jun ve diğerleri, tabakalı sığ eğrisel kirişler için yeni bir trigonometrik kayma deformasyonu teorisi geliştirmişlerdir [8]. Thai ve diğerleri, ters trigonometrik fonksiyonları kullanarak tabakalı ve sandviç plakların izogeometrik sonlu eleman analizlerini gerçekleştirmişlerdir [9]. Tounsi ve diğerleri, fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalı sandviç plakların termo-elastik eğilme problemini, Touratier Kayma Deformasyonu Teorisi'nden yararlanarak geliştirdikleri farklı bir yaklaşım ile çözmüşlerdir [10]. Pradhan ve Chakraverty, geliştirdikleri ters trigonometrik kayma deformasyon teorisi ile kalın izotropik dikdörtgen plakların dinamik analizlerini gerçekleştirmişlerdir [11].

Bu çalışmada Touratier Plağı'nın Levy tipi çözümü, Dinamik Rijitlik Matrisi Yöntemi ile Wittrick-Williams algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Teorinin tutarlılığını göstermek üzere, basit mesnetli dikdörtgen plaklardan elde edilen açılal frekanslar, literatürde yer alan üç boyutlu elastisite teorisi ve Mindlin Plağı çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Ayrıca, değişik mesnet koşullarına sahip plakların dönme ataleti etkileri ihmal edilerek yapılan çözümler ile dönme ataletinin açılal frekanslara katkıları incelenmiştir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Şekil 1’de sunulan plak, homojen, izotropik ve lineer elastik malzemeli; L_x uzunluğunda, L_y genişliğinde, h yüksekliğindedir. Plâğin tarafsız düzlemi xy düzlemiyle çakışık, z eksenini ise tarafsız düzleme normaldir.



Şekil 1 Touratier Plâğı

Buna göre plak sınırları, x - y - z kartezyen koordinat sisteminde aşağıda sunulduğu gibi tanımlanmıştır.

$$0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (1)$$

Şekil değiştirme sonrası plâğın aldığı deplasman formu (2) bağıntılarındaki gibidir [2].

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left[\theta(x, y, t) + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right] \\ v(x, y, z, t) &= -z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left[\phi(x, y, t) + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right] \\ w(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Burada u ve v sırasıyla x ve y doğrultularında düzlem içi deplasmanları w , tarafsız düzlemin yapmış olduğu z doğrultusundaki deplasmanı θ ve ϕ , plâğın tarafsız düzleminin sırasıyla yz ve xz düzlemlerine göre kesit dönmelerini, t ise zamanı simgelemektedir. (2)

ifadelerinden hareketle normal şekil değiştirmeler ($\varepsilon_x, \varepsilon_y$) ile kayma şekil değiştirmeleri ($\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$) lineer elastik teori çerçevesinde (3) bağıntılarında sunulmuştur.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial x} = 2 \left(\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial x} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v(x, y, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, y, z, t)}{\partial y} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\phi + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

Lineer izotropik plağın gerilme-şekil değiştirme ilişkisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= D(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= D(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ & & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}\quad (4)$$

Burada D , $D=E/(1-\nu^2)$ ile tanımlanan ifadeyi, E elastisite modülünü, $G=E/[2(1+\nu)]$ ifadesiyle tanımlanan kayma modülünü, ν ise Poisson oranını belirtmektedir. Virtüel iş prensibi uygulanarak aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left\{ \left[\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right] + \rho \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] \right\} dx dy dz dt = 0 \quad (5)$$

(5) numaralı bağıntıya Green Teoremi uygulanarak plağın Euler-Lagrange denklemleri ile ilgili sınır şartları elde edilir. Euler-Lagrange denklemlerinin iç kuvvetler cinsinden ifadesi (6) bağıntılarında sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 M_{xh}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xyh}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yh}}{\partial y^2} - \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\
& - \rho C \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - \rho A \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y \partial t^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \\
& Q_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho B \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \\
& Q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho B \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Burada M_x , M_y ve M_{xy} kesit dönmeleri ile ilişkili eğilme ve burulma momentlerini; M_{xh} , M_{yh} ve M_{xyh} kesit eğimleri ile ilişkili eğilme ve burulma momentlerini; Q_x ve Q_y ise kesme kuvvetinin bazı bileşenlerini ifade etmektedir. (6) numaralı bağıntılardaki A, B ve C ifadeleri $I=h^3/12$ olmak üzere aşağıda açık haliyle sunulmuştur.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \left(\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z \right) dz = \frac{6\pi - 24}{\pi^3} I \\
B &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right)^2 dz = \frac{6}{\pi^2} I \\
C &= \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z \right)^2 dz = \frac{(\pi^3 - 48 + 6\pi)}{\pi^3} I
\end{aligned} \tag{7}$$

Plakın $x=0$ ve $x=L_x$ kenarlarına ait sınır şartları aşağıdaki gibi,

$$\begin{array}{ll}
w=0 & V_x = -\frac{\partial M_{xh}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xyh}}{\partial y} + Q_x + \rho C \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \\
\frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{veya} \quad M_{xh} = 0 \\
\theta = 0 & M_x = 0 \\
\phi = 0 & M_{xy} = 0
\end{array} \tag{8}$$

Plak köşeleri olan $(x,y)=(0,0);(0,L_y);(L_x,0);(L_x,L_y)$ noktalarında,

$$M_{xy} = 0 \tag{9}$$

olarak alınmaktadır. $y=0$ ve $y=L_y$ kenarlarına ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 w &= 0 & V_y &= -\frac{\partial M_{yh}}{\partial y} - \frac{\partial M_{xyh}}{\partial x} + Q_y + \rho C \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 & \text{veya} & M_{yh} = 0 \\
 \phi &= 0 & & M_y = 0 \\
 \theta &= 0 & & M_{xy} = 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

(6), (8)-(10) bağıntılarındaki iç kuvvet ifadeleri (11) bağıntılarının çözümü ile bulunur.

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) dz & M_{yh} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z \right) dz \\
 M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) dz & M_{xyh} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z \right) dz \\
 M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) dz & Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(\cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) dz \\
 M_{xh} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(\frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z \right) dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \left(\cos \left(\frac{\pi z}{h} \right) \right) dz
 \end{aligned} \tag{11}$$

Euler-Lagrange denklem sisteminin çözümünü elde etmek için (11) numaralı bağıntılar (6) numaralı bağıntılarda yerine yazılarak sistemin deplasman ve kesit dönmeleri cinsinden ifadesi mümkün olmaktadır.

$$\begin{aligned}
 w(x, y, t) &= \sum_{j=1}^8 A_j e^{is_j x} \sin \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) \sin(\omega t) \\
 \theta(x, y, t) &= \sum_{j=1}^8 B_j e^{is_j x} \sin \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) \sin(\omega t) \\
 \phi(x, y, t) &= \sum_{j=1}^8 C_j e^{is_j x} \cos \left(\frac{m\pi y}{L_y} \right) \sin(\omega t) \\
 m &= 1, 2, 3, \dots, \infty; j = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{12}$$

(12) numaralı bağıntılarda verilen çözüm fonksiyonları dikkate alınarak (6) numaralı bağıntıların non-trivial çözümü, frekansa bağlı sekizinci dereceden bir fonksiyonun kökleridir. Burada s_j , çözümü araştırılan sekizinci dereceden denklemin köklerini ω , açısal frekansı A_j, B_j ve C_j ise bilinmeyen katsayıları simgelemektedir.

Dinamik Rijitlik Matrisi Yöntemi:

Gerçekte bütün yapılar, sürekli kütleli ve rijitlikli; sonsuz serbestlik derecesine ve doğal titreşim frekanslarına sahiptir. Wittrick-Williams Algoritması ise bu gibi sonsuz serbestlik derecesine sahip elastik sistemlerin doğal açısal frekanslarını bulmaya yarayan güçlü bir

algoritmadır [12,13]. Wittrick-Williams Algoritmasını uygulamak için öncelikle sistemin dinamik rijitlik matrisinin elde edilmesi gerekmektedir [14].

Touratier Plağı'nın y-y eksenı doğrultusunda basit mesnetli olduğu kabulü ile x-x doğrultusu istenilen sayıda elemana bölünebilir. Bu yönü ile Dinamik Rijitlik Matrisi Yöntemi, Sonlu Elemanlar Yöntemi'yle benzerdir. Ancak burada bölme işleminin tek doğrultu için yapılmasından dolayı ilgili düğüm noktaları yerine düğüm çizgileri ile ardışık elemanlar arası bağlantı kurulur. Buna göre, i. elemanın deplasman fonksiyonu,

$$\{\delta_i\} = \left\langle w_j \quad \frac{\partial w_j}{\partial x} \quad \theta_j \quad \phi_j \quad w_k \quad \frac{\partial w_k}{\partial x} \quad \theta_k \quad \phi_k \right\rangle^T = [B_i]_{8 \times 8} \{C\}_{8 \times 1} \quad (13)$$

ile ifade edilebilir. Burada $\{\delta_i\}$, i. elemanın deplasman vektörünü; j ve k indisleri sırasıyla başlangıç ve bitiş düğüm noktalarını; $[B_i]$ i. elemanın frekansa bağı kare matrisini, $\{C\}$ ise bilinmeyen katsayılar vektörünü ifade etmektedir. İç kuvvetler matrisi yine (13) numaralı bağıntıya benzer bir şekilde aşağıdaki gibidir.

$$\{F_i\} = \left\langle -V_{x,j} \quad -M_{xh,j} \quad -M_{x,j} \quad -M_{xy,j} \quad V_{x,k} \quad M_{xh,k} \quad M_{x,k} \quad M_{xy,k} \right\rangle^T = [R_i]_{8 \times 8} \{C\}_{8 \times 1} \quad (14)$$

Burada $\{F_i\}$, i. elemanın iç kuvvet vektörünü; $[R_i]$ i. elemanın frekansa bağı kare matrisini belirtmektedir. (13) ifadesinde yer alan $\{C\}$ katsayılar vektörü yalnız bırakılıp, değeri (14) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$\{F_i\} = [R_i][B_i]^{-1}\{\delta_i\} = [K_i]\{\delta_i\} \quad (15)$$

Burada $[K_i]$, i. elemanın dinamik rijitlik matrisidir. Sistemin dinamik rijitlik matrisinin elde edilebilmesi için elemanlar kodlama yöntemi ile birleştirilir [15].

Wittrick-Williams Algoritması:

Deplasman, iç kuvvet fonksiyonları ve dolaylı olarak da dinamik rijitlik matrisi, frekansa bağı yüksek dereceden düzensiz fonksiyonları içermektedir. Bu nedenle klasik çözüm yöntemi [16] ile yapılan açısıl frekans araştırmalarında güvenilir olmayan sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu gibi problemlerin çözümü için kullanılan algoritmalarından biri Wittrick-Williams algoritmasıdır. Wittrick-Williams Algoritması denenen bir frekans değeri altında kalan -düşük veya yüksek- bütün modlara ait doğal açısıl frekans sayısını veren güvenilir bir algoritmadır.

Algoritmada, $[0, \omega^* \lambda]$ aralığında mevcut olan açısıl frekansların sayısı aşağıda verilen bağıntıyla hesaplanır.

$$j = j_0 + s(K^*) \quad (16)$$

Burada $j \lambda$, $[0, \omega^*]$ aralığında olan açısıl frekansların sayısını; $s(K^*)$, dinamik rijitlik matrisinin Gauss eliminasyon yöntemi ile elde edilen üst üçgen matrisinde yer alan

köşegendeki negatif elemanların sayısını, $J_0(\lambda)$ j_0 ise sistemin Dirichlet sınır şartları altında aşılacak açısal frekanslarının sayısını belirtmektedir [17]. Bu değer, denenen bir ω^* değerinin altında kalan ankastre-ankastre sınır şartları altında aşılacak açısal frekansların sayısı demektir ki, bunu tek açıklıklı bir plak için bulmak oldukça zordur. Bu elverişsiz durumu ortadan kaldırmanın yolu plak elemanını yeterince küçük sonlu şeritlere bölerek aşılacak frekans değerlerinin sayısını sifıra yaklaştırmaktan geçer [18]. Böylelikle j_0 değeri kaybolarak $j=s(K^*)$ ifadesine dönüşür.

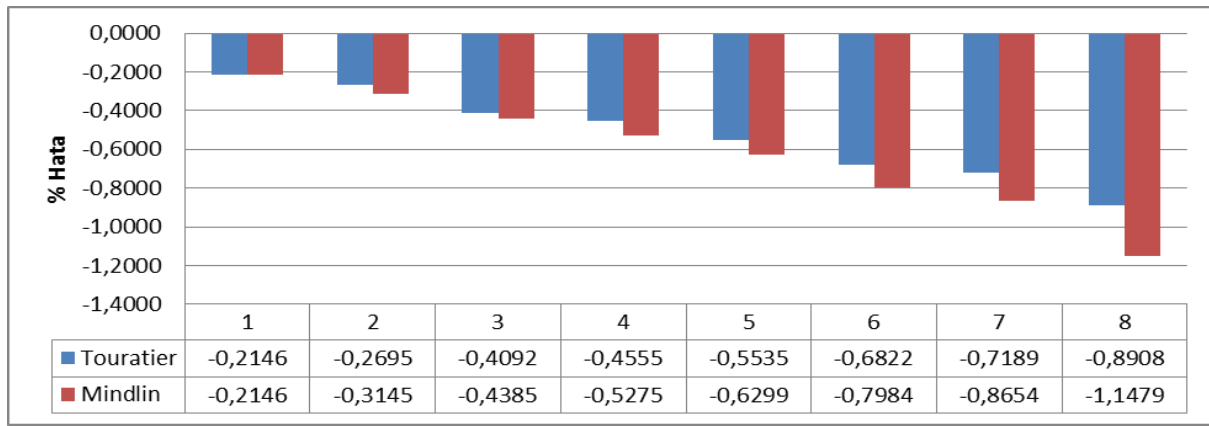
SAYISAL UYGULAMALAR

Eşit aralıklarla sonlu şeritlere ayrılmış plağın elemanlarına ait dinamik rijitlik matrisi elde edilmiş ve kodlama yöntemi ile sistemin dinamik rijitlik matrisi oluşturulmuştur. İlk aşamada, kenarlarından basit mesnetli izotropik dikdörtgen plağın dinamik rijitlik matrisine sınır koşulları uygulanmıştır.

Tablo 1. Kenarlarından basit mesnetli plakların boyutsuz açısal frekans değerleri
($\omega^* = \omega \times h \times \sqrt{\rho/G}$)

$L_x/L_y=1$				$L_x/L_y=\sqrt{2}$			
m n	Elastisite Teorisi [19]	Touratier (Hata %)	Mindlin [18] (Hata %)	m n	Elastisite Teorisi [19]	Touratier (Hata %)	Mindlin [18] (Hata %)
1 1	0,0932	0,0930 (-0,2146)	0,0930 (-0,2146)	1 1	0,0704	0,0704 (0,0000)	0,0703 (-0,1420)
1 2	0,2226	0,2220 (-0,2695)	0,2219 (-0,3145)	1 2	0,1376	0,1373 (-0,2180)	0,1373 (-0,2180)
2 1	0,2226	0,2220 (-0,2695)	0,2219 (-0,3145)	2 1	0,2018	0,2013 (-0,2478)	0,2012 (-0,2973)
2 2	0,3421	0,3407 (-0,4092)	0,3406 (-0,4385)	1 3	0,2431	0,2424 (-0,2879)	0,2424 (-0,2879)
1 3	0,4171	0,4152 (-0,4555)	0,4149 (-0,5275)	2 2	0,2634	0,2626 (-0,3037)	0,2625 (-0,3417)
3 1	0,4171	0,4152 (-0,4555)	0,4149 (-0,5275)	2 3	0,3612	0,3596 (-0,4430)	0,3595 (-0,4707)
2 3	0,5239	0,5210 (-0,5535)	0,5206 (-0,6299)	1 4	0,3800	0,3784 (-0,4211)	0,3782 (-0,4737)
3 2	0,5239	0,5210 (-0,5535)	0,5206 (-0,6299)	3 1	0,3987	0,3969 (-0,4515)	0,3967 (-0,5016)
3 3	0,6889	0,6842 (-0,6822)	0,6834 (-0,7984)	3 2	0,4535	0,4512 (-0,5072)	0,4509 (-0,5733)
2 4	0,7511	0,7457 (-0,7189)	0,7446 (-0,8654)	2 4	0,4890	0,4864 (-0,5317)	0,4861 (-0,5930)
4 4	1,0889	1,0792 (-0,8908)	1,0764 (-1,1479)	3 3	0,5411	0,5380 (-0,5729)	0,5375 (-0,6653)

Elde edilen indirgenmiş dinamik rijitlik matrisinden hareketle Wittrick-Williams Algoritması yardımı ile bulunan ilk onbir moduna ait boyutsuz açısal frekanslar ($\omega^* = \omega \times h \times \sqrt{\rho/G}$) alınarak, Mindlin Plağı [18] ve üç boyutlu elastisite teorisi [19] sonuçlarıyla Tablo 1’de karşılaştırılmıştır. Şekil 2’de $L_x/L_y=1$, Şekil 3’te $L_x/L_y=\sqrt{2}$ için Touratier ve Mindlin Plakları’ndan [18] elde edilen boyutsuz açısal frekans değerlerinin üç boyutlu elastisite teorisi çözümünden elde edilen sonuçlara göre yüzdelik hata oranları grafiklerde gösterilmiştir. Farklı mesnet koşullarına sahip kare plakların boyutsuz açısal frekans değerleri ($\omega^* = \omega \times L_x^2 \times \sqrt{\rho/D}$) alınarak, Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4’te sunulmuştur. Dikkate alınan plakların, y-y doğrultusu basit mesnetli ve bu doğrultuya paralel kenar uzunluğunun plak kalınlığına oranı ($L_y/h=10$), Poisson oranı ($\nu=0,3$), Mindlin Plağı’nda kullanılan düzeltme katsayısı ise ($k=5/6$) olarak ele alınmıştır [18,19]. Tablolarda yer alan m ve n değerleri sırasıyla y-y ve x-x doğrultularındaki modların sırasını belirtmektedir.

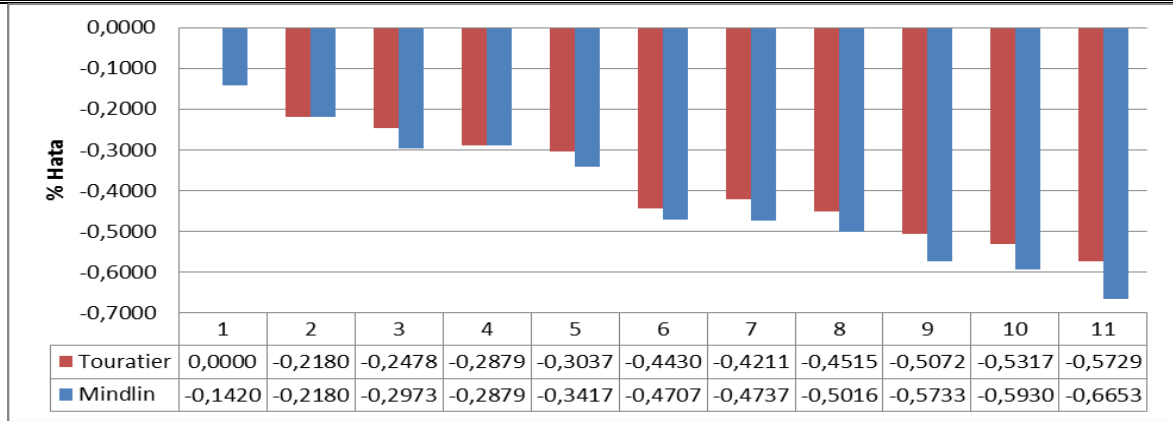


Şekil 2. Açısal frekans değerlerinin yüzdelik hata oranları ($L_x/L_y=1$)

Tablo 2. Basit-Basit-Basit-Basit ve Basit-Serbest-Basit-Basit mesnetli plakların boyutsuz açısal frekans değerleri ($\omega^* = \omega \times L_x^2 \times \sqrt{\rho/D}$)

Basit-Basit-Basit-Basit			Basit-Serbest-Basit-Basit		
m n	Touratier	Mindlin [18]	m n	Touratier	Mindlin [18]
1 1	19,0661	19,0650	1 1	11,3576	11,3731
1 2	45,4918	45,4827	1 2	26,1340	26,1545
2 1	45,4918	45,4827	2 1	38,2619	38,2861
2 2	69,8213	69,7944	2 2	53,2188	53,2462
1 3	85,0831	85,0380	1 3	55,6280	55,6234
3 1	85,0831	85,0380	3 1	78,3542	78,3664
2 3	106,765	106,683	2 3	81,0710	81,0756

3 2	106,765	106,683	3 2	92,2101	92,2072
4 1	133,770	133,621	1 4	97,4053	97,3551
1 4	133,770	133,621	3 3	117,9513	117,9080
3 3	140,226	140,057	2 4	119,9158	119,8440
4 2	152,821	152,608	4 1	127,5205	127,4610

Şekil 3. Açılal frekans değlerlnlnn yüzdelık hata oranları ($L_x/L_y=\sqrt{2}$)Tablo 3. Basit-Ankastre-Basit-Basit ve Basit-Serbest-Basit-Serbest mesnetli plakların boyutsuz açılal frekans değlerlnn ($\omega^*=\omega \times L_x^2 \times \sqrt{\rho/D}$)

Basit-Ankastre-Basit-Basit			Basit-Serbest-Basit-Serbest		
m n	Touratier	Mindlin [18]	m n	Touratier	Mindlin [18]
1 1	22,4047	22,3886	1 1	9,4311	9,4406
2 1	47,1388	47,1039	1 2	15,3519	15,3893
1 2	52,2489	52,1496	1 3	33,8232	33,8599
2 2	74,2516	74,1051	2 1	36,3374	36,3570
3 1	85,9544	85,8759	2 2	42,7355	42,7927
1 3	93,5510	93,2268	2 3	62,0833	62,1467
3 2	109,4837	109,2590	1 4	66,1885	66,1965
2 3	113,1392	112,7410	3 1	76,6245	76,6330
4 1	134,2707	134,0840	3 2	82,3566	82,4088

1 4	142,6915	141,9360	2 4	92,5858	92,6128
3 3	144,6323	144,1170	3 3	100,9876	101,0290
4 2	154,5119	154,1450	1 5	110,0851	110,0240

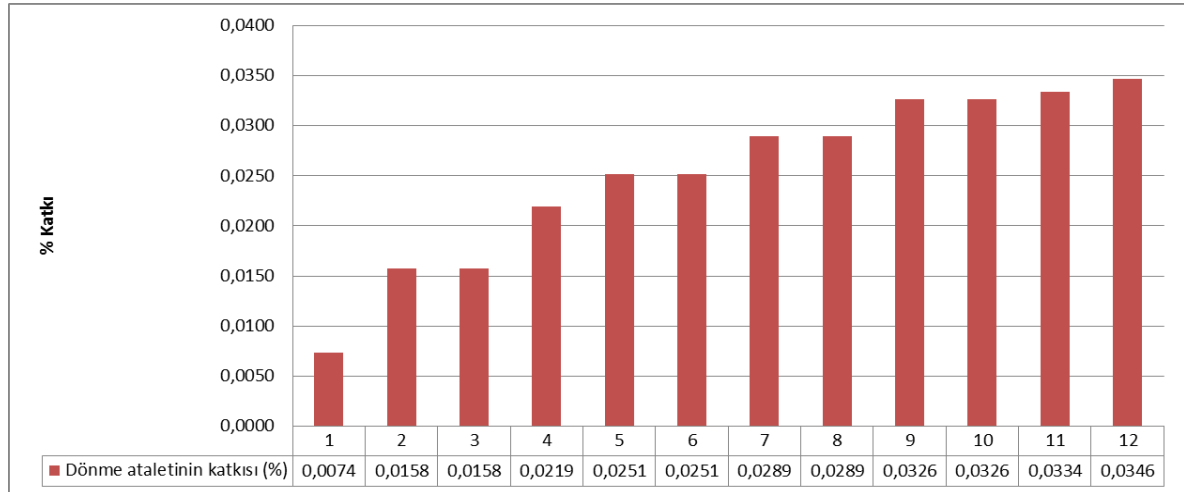
Tablo 4. Basit-Serbest-Basit-Ankastre ve Basit-Ankastre-Basit-Ankastre mesnetli plakların boyutsuz açılal frekans değlerleri ($\omega^* = \omega \times L_x^2 \times \sqrt{\rho/D}$)

Basit-Serbest-Basit-Ankastre Mesnet			Basit-Ankastre-Basit-Ankastre Mesnet		
m n	Touratier	Mindlin [18]	m n	Touratier	Mindlin [18]
1 1	12,2319	12,2492	1 1	26,7155	26,6683
1 2	30,4156	30,4086	2 1	49,1888	49,1129
2 1	38,6116	38,6343	1 2	59,4497	59,2102
2 2	55,8200	55,8017	2 2	79,1243	78,8130
1 3	62,8515	62,7260	3 1	86,9677	86,8440
3 1	78,5176	78,5265	1 3	102,0593	101,3710
2 3	86,0536	85,8935	3 2	112,4619	112,0580
3 2	93,7478	93,6825	2 3	119,7106	118,9220
1 4	106,0145	105,6130	4 1	134,8271	134,5950
3 3	121,2256	120,9870	3 3	149,2380	148,3160
2 4	126,4919	126,0290	1 4	151,4508	149,9900
4 1	127,6032	127,5400	4 2	156,3361	155,7880

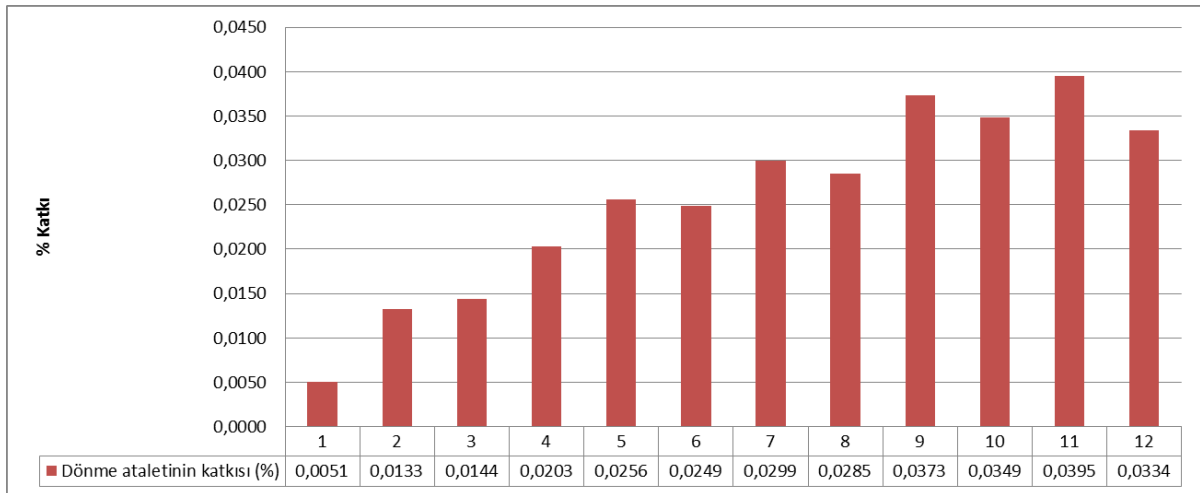
Yapılan analizlerde dönme ataletinin etkileri ihmal edilerek elde edilen açılal frekans değlerlerinden yararlanılarak, dönme ataletinin açılal frekanslara olan etkileri araştırılmıştır. Şekil 4'ten Şekil 9'a kadar olan grafiklerde değışik mesnet şartları için Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açılal frekanslara katkı oranları sunulmuştur. Katkı oranı aşağıda verilen formül ile hesaplanmıştır.

$$\%Katki = \frac{\omega_2^* - \omega_1^*}{\omega_1^*} \times 100 \quad (17)$$

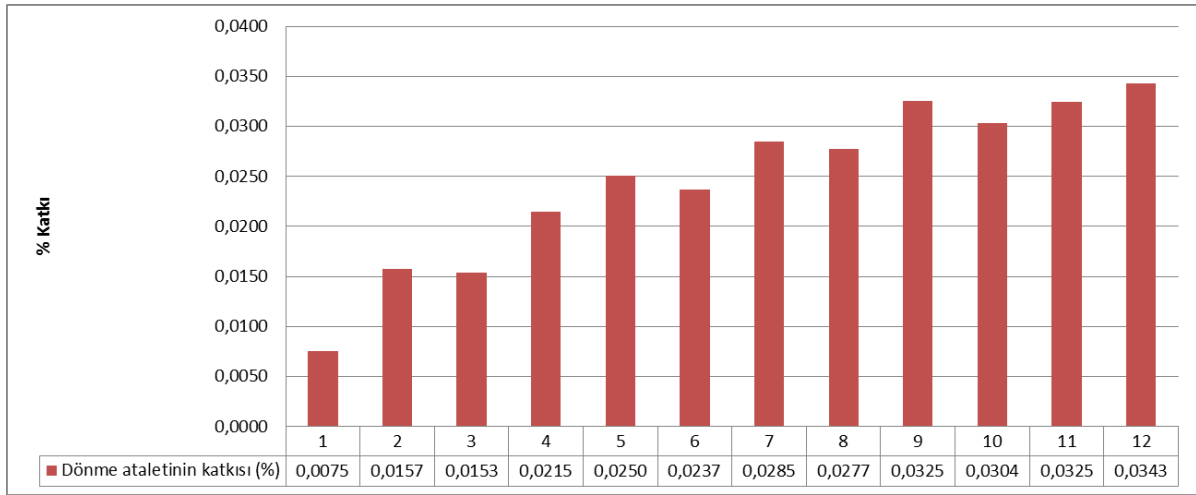
Burada ω_1^* , dönme ataleti etkileri dikkate alınarak ω_2^* , dönme ataleti etkileri ihmal edilerek elde edilen boyutsuz açısal frekans değerlerini belirtmektedir.



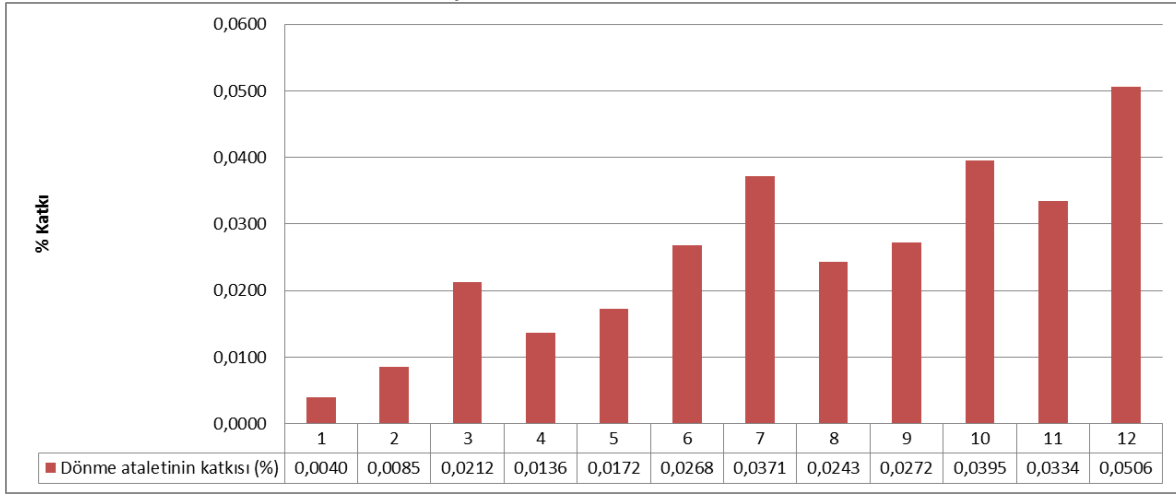
Şekil 4. Basit-Basit-Basit-Basit mesnetli Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açısal frekanslara katkısı



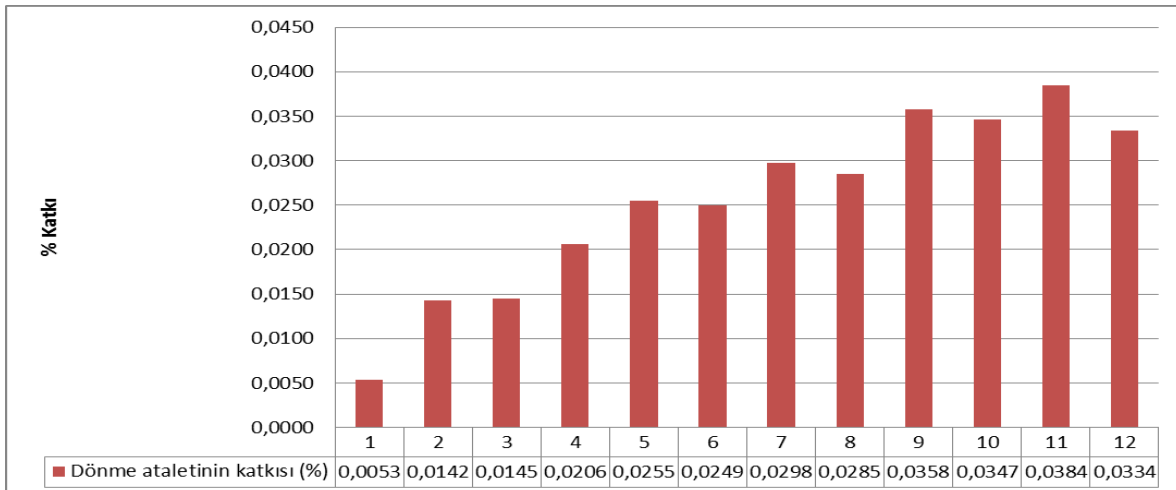
Şekil 5. Basit-Serbest-Basit-Basit mesnetli Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açısal frekanslara katkısı



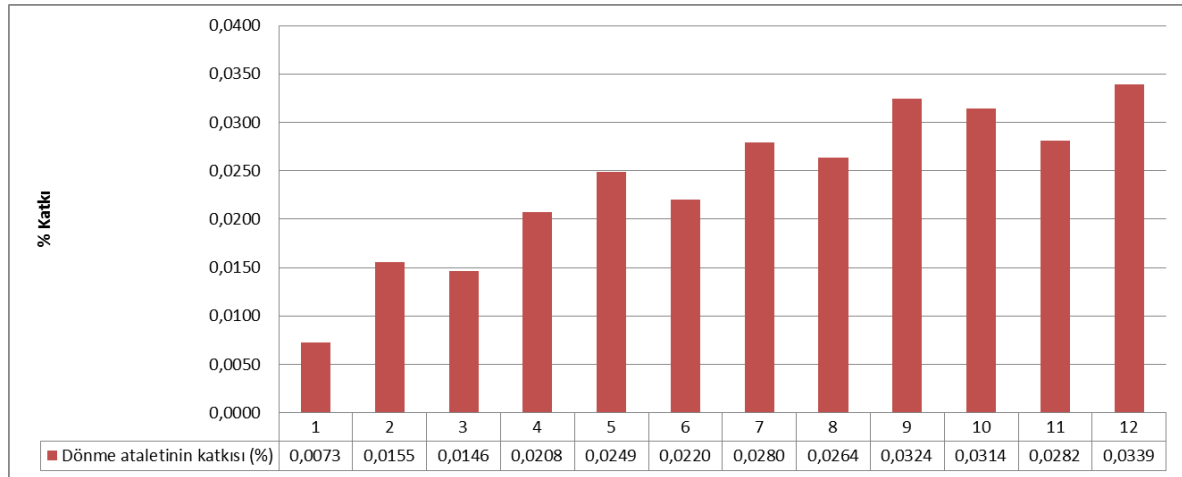
Şekil 6. Basit-Ankastre-Basit-Basit mesnetli Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açılal frekanslara katkısı



Şekil 7. Basit-Serbest-Basit-Serbest mesnetli Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açılal frekanslara katkısı



Şekil 8. Basit-Serbest-Basit-Ankastre mesnetli Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açılal frekanslara katkısı



Şekil 9. Basit-Ankastre-Basit-Ankastre mesnetli Touratier Plağı'nda dönme ataleti etkilerinin açısal frekanslara katkısı

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Touratier Plağı'nın serbest titreşim analizi Dinamik Rijitlik Matrisi Yöntemi ve Wittrick-Williams Algoritması kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Plağın karşılıklı iki kenarı basit mesnetli diğer iki kenarının ise basit-basit, serbest-basit, ankastre-basit, serbest-serbest, serbest-ankastre ve ankastre-ankastre mesnetli olması durumlarına göre boyutsuz açısal frekans değerleri sayısal olarak hesaplanmıştır. Tablo 1'de yer alan verilere bakıldığında, Touratier Plak Teorisi'nden elde edilen açısal frekans değerlerinin, Mindlin Plak Teorisi'nden elde edilen değerlere kıyasla üç boyutlu elastisite çözümlerine daha yakınsak olduğu görülmektedir. Şekil 2'de kenarlarından basit mesnetli kare plak için sunulan grafikte, hata oranının yüksek modlara çıktıkça artış göstererek %o 6~7 dolaylarına ulaştığı, Şekil 3'te dikdörtgen plak için sunulan grafikte bu oranın %o 9~10 dolaylarına kadar artış gösterdiği görülmektedir. Tablo 2'den Tablo 4'e kadar sunulan değişik mesnet şartlarına sahip plakların boyutsuz açısal frekans değerlerinden, Touratier Plak Teorisi'nin Mindlin Plak Teorisi ile tutarlı olduğu sonucuna varılmıştır. Şekil 4'ten Şekil 9'a kadar verilen grafikler ile Touratier Plak Teorisi'nde dönme ataletinin açısal frekanslara sağladığı katkının yüksek modlara gidildikçe artış eğilimi gösterdiği ortaya konmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18 (1951) 31-38.
- [2] M. Touratier, An Efficient Standard Plate Theory, *International Journal of Engineering Science*, 29-8 (1991) 901-916.
- [3] Y.M. Ghugal, A.S. Sayyad, Free vibration of thick orthotropic plates using trigonometric shear deformation theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 3-2 (2011) 172-182.
- [4] Y.M. Ghugal, S.B. Shinde, Flexural analysis of cross-ply laminated beams using layerwise trigonometric shear deformation theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10(2013) 675-705.
- [5] Y.M. Ghugal, S.K. Kulkarni, Thermal flexural analysis of cross-ply laminated plates using trigonometric shear deformation theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10(2013) 1001-1023.

- [6] V-H. Nguyen, T-K. Nguyen, H-T. Thai, T.P. Vo, A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates, *Composites: Part B*, 66 (2014) 233-246.
- [7] R.F. Rango, L.G. Nallim, S. Oller, Formulation of enriched macro elements using trigonometric shear deformation theory for free vibration analysis of symmetric laminated composite plate assemblies, *Composite Structures*, 119 (2015) 38-49.
- [8] L. Jun, R. Guangwei, P. Jin, L. Xiaobin, W. Weiguo, Free vibration analysis of a laminated shallow curved beam based on trigonometric shear deformation theory, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 42(2014) 111-129.
- [9] C.H. Thai, A.J.M. Ferreira, S.P.A. Bordas, T. Rabczuk, H. Nguyen-Xuan, Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 43 (2014) 89-108.
- [10] A. Tounsi, M.S.A. Houari, S. Benyoucef, E.A.A. Bedia, A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates, *Aerospace Science and Technology*, 24 (2013) 209-220.
- [11] K.K. Pradhan, S. Chakraverty, Transverse vibration of isotropic thick rectangular plates based on new inverse trigonometric shear deformation theories, *International Journal of Mechanical Sciences*, 94-95 (2015) 211-231.
- [12] F.W. Williams, W.H. Wittrick, An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures, *International Journal of Mechanical Sciences*, 12-9 (1970) 781-791.
- [13] W.H. Wittrick, F.W. Williams, A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures, *Quarterly Journal Of Mechanics And Applied Sciences*, 24-3 (1970) 263-284.
- [14] J.R. Banerjee, Dynamic stiffness formulation for structural elements: a general approach. *Computers and Structures*, 63-1 (1997) 101-103.
- [15] H.H. Çatal, *Yapı ve Deprem Mühendisliğinde Matris Yöntemler*, DEÜ Müh. Fak. Yay. No:294, İzmir, 2014.
- [16] M. İnan, *Cisimlerin Mukavemeti*, Ofset Matbaacılık, İstanbul, 1970.
- [17] F.W. Williams, W.P. Howson, A. Watson, Application of the Wittrick-Williams algorithm to the Sturm-Liouville problem on homogeneous trees: a structural mechanics analogy. *Proc. R. Soc. Lond.*, 460(2004) 1243-1268.
- [18] M. Boscolo, J.R. Banerjee, Dynamic stiffness formulation for plates using first order shear deformation theory: *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Orlando, Florida, 2010: s. 1-29.
- [19] S. Srinivas, C.V.J. Rao, A.K. Rao, An exact analysis for vibration of simply supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, *Journal Of Sound And Vibration*, 12-2 (1970) 187-199.