

JEODEZİDE JİROSKOP HAREKETİNİN UYGULANMASI HAKKINDA ÖNERİLER

**İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesince
«Doktor»
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdır.**

Yük. Müh. M. Semih DEDEOĞLU

**Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 1 Şubat 1977
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Temmuz 1977**

**Doktorayı Yöneten Profesör : Prof. M. Gündoğdu ÖZGEN
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahmet AKSOY
Doç. Dr. Vural CİNEMRE**

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT FAKÜLTESİ MATBAASI
1 9 7 7**

**T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi**

Konuyu veren ve çalışmalarımı titizlikle yöneten sayın hocam Prof.M.Gündoğdu zgen'e, jüri yeleri Prof. Dr.Ahmet Aksoy ve Doğ.Dr.Vural Cinemre'ye, İsveç Enstitü'sünden burslu olarak alıştığım İsveç Kraliyet Enstitü's Jeodezi Bölümü Profesörü Prof.Dr.Arne Bjerhammar'a ve Dr.Lars Sjöberg'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZET

SUMMARY

1.000. Giriş	1
--------------------	---

I. BÖLÜM

DİNAMİK İLKELER

2.000. Rijit Bir Cismin Hareket Denklemleri.....	2
2.100. Maddesel Bir Noktanın Hareket Denklemi	2
2.110. Hareket Denklemleri. Enerji Denklemi	3
2.200. Rijit Bir Cismin Kinematığı	5
2.210. Sabit Bir Nokta Etrafında Hareket Euler Teoremi	6
2.220. Rijit Bir Cismin En Genel Hareketi.	6
2.230. Sonsuz Küçük Hareketler	6
2.231. Sonsuz Küçük Dönmeler	6
2.232. Sonsuz Küçük Bir Dönmeden Oluşan Rijit Cismin Hareket Miktarı	6
2.233. Rijit Bir Cismin Genel Sonsuz Küçük Yer Değiştirmesi	7
2.240. Rijit Bir Cismin Ani Hareketi	7
2.300. Dönen Eksenlerin Teorisi.....	7
2.310. Dönen Eksenlere Göre Hareketin Değişim Miktarı	8
2.320. Dönen Eksen Takımında Bir Noktanın İvmesi	8
2.330. Hareketli Bir Merkeze Göre Hız ve İvme	9
2.400. Maddesel Noktanın Kinetiğinin İncelenmesi	9
2.500. Maddesel Bir Noktanın Yeryüzüne Bağlı Hareketi	11

2.510. Yeryüzüne Yakın Hareket Eden Maddesel Bir Noktanın Hareketinin İncelenmesi	14
2.600. Rijit Bir Cismin Hareket Denklemleri	16
2.610. Bir Maddesel Noktalar Sisteminin Hareket Denklemleri, Doğrusal ve Açısal Momentum İlkeleri	16
2.611. Enerji Denklemi	17
2.620. Rijit Bir Cismin Hareketi	17
2.621. Rijit Bir Cismin Enerji Denklemi...	18
3.000. Euler Denklemleri	18
3.100. Bir Noktası Sabit Olan Rijit Cismin Euler Denklemleri	21
3.200. Simetri Eksenli Bir Rijit Cismin Hareketi	23
4.000. Foucault Sarkacı ve Jiroskop	24
4.100. Foucault Sarkacı	24
4.200. Jiroskop	31
5.000. Jiroskoplu Teodolitler	38
5.100. Giriş	38
5.200. Temel İlkeler	38
6.000. Jiroskoplu Teodolitin Hareketinin İncelenmesi	41
6.100. Genel Prensipler	41
6.200. Jiroskoplu Teodolitin Rotorunun Dönmemesi Hali	46
6.210. Askı Telinin Burulması	46
6.220. Dönmeyen Jiroskoplu Teodolitin Hareket Denklemi.....	48
6.230. Dönmeyen Jiroskop Sisteminin Hareketinin Özellikleri	53
6.240. Salınım Eğrisinin En Küçük Kareler Yöntemine Göre Bulunması	59

6.300. Dönen Jiroskoplu Teodolitin Hareket Denklemleri	62
7.000. Jiroskoplu Teodolitlerin Yapısı	73

II. BÖLÜM

JİROSKOP HAREKETİ İLE AZİMUTUN SAPTANMASI

8.000. Jiroskoplu Teodolitle Coğrafik Azimutu Saptama Yöntemleri	78
8.100. Jiroskoplu Teodolitle Kaba Yönelme.	78
8.200. Jiroskoplu Teodolitle Ön Yönelme Yöntemleri	79
8.300. Kesin Yönelme Yöntemleri	83
8.310. Dönüm Noktası Yöntemi	83
8.311. Dönüm Noktalarının Değerlendirme Yöntemleri	85
8.320. Zaman Farkı Yöntemleri	101
8.321. Geçiş Yöntemi	101
8.330. Genlik Yöntemi	111
8.400. Jiroskoplu Teodolitlerin Kalibras- yonu	113
8.410. Dönmeyen Jiroskopun Momentsiz Hali.	114
8.420. Zaman Yönteminde Kullanılan Sabitin Tayini	115
8.430. Kalibrasyon Değeri	116
8.440. Azimut Tayini	116
9.000. Jiroskoplu Teodolitle Yapılan Dönüm Nokta- sı Ölçmelerinin En Küçük Kareler Yöntemine Göre Dengelenmesi	118
9.100. Doğrusal Sönümlü Model	118
9.200. Schuler Ortalamalarının ve İlgili Ortalamaların Özellikleri	135
9.210. Sayısal Hesaplar	157
9.300. Sonuçlar	166

10.000. Elektronik Kayıt Yapan Bir Alet Grubunun Jiroskoplu Teodolit ile Beraber Kullanılması Hakkında Öneriler	166
10.100. Jiroskoplu Teodolitde Yapılması Gereken Değişiklikler İçin Öneriler	168
10.200. Azimuta Askı Teli Momentinin Etkisi	173
10.300. Dinamik ve Gerçek Kuzey	176
10.310. k Sabitinin Saptanması	178
10.400. Salınım Peryoduna ve k Sabitine Etki Eden Faktörler	178
10.410. Jiroskop İçinde Isının Artması ve Dağılması	178
10.420. Elektriksel Faktörler	179
10.500. Askı Teli Momentinin Denge Konumunda Meydana Gelen Etkiler	180
10.510. Isı Etkisi	180
10.520. Histerisis Etkisi	182
10.530. Manyetik Tesirler	183
10.600. Jiroskopun Salınımını Etkileyen Diğer Faktörler	184
10.610. Dönme Hızının Değişmesi	185
10.620. Meridyene Göre Salınım	188
10.700. Presizyonlu Ölçmeler için Bir Ölçme Yöntemi	189
11.000. Jiroskoplu Teodolitlerin İç Presizyonu...	190
11.100. Aletin İç Prezisyonu.....	190
11.110. Ölçülen Zaman Aralığının Doğruluğu.....	191
11.200. Azimut Saptamasının Doğruluğu ve Zaman Yöntemi	193
11.300. Aletin İç Presizyonu. Dönüm Noktası Yöntemi	198
11.400. Aletin Dış Presizyonu ve Kalibrasyon Sonuçları	200

III. BÖLÜM
JİROSKOPLU TEODOLİTİN SALINIMINDAN
COĞRAFİK ENLEMİN BULUNMASI

12.000. Dönüm Noktaları Ölçmelerinden Enlemin Saptanması	203
12.100. Sonuç	208

IV. BÖLÜM
DİĞER UYGULAMALAR

13.000. Foucault Jiroskopları	210
13.100. Serbest Foucault Jiroskopu	210
13.200. İki Serbestlik Derecesine Sahip Foucault Jiroskopları	212
14.000. Doğu-Batı Doğrultusunu Veren Sistem.....	222
14.100. İç içe iki Küre Sisteminin Açık- lanması	223
14.200. Hareketin İncelenmesi	223
14.300. Hareketin Enleme Bağlılığı	236
14.400. Sonuç	241

V. BÖLÜM

SONUÇ	243
LİTERATÜR	249

Ö Z E T

Bu çalışmanın I. bölümünde rijit cisim dinamiği kısaca incelenmiştir. Bundan sonra bu bilgiler jiroskoplu teodolitin hareketlerini incelemek için kullanılmıştır. Jiroskoplu teodolitin hareketi incelenirken şu iki durum incelenmiştir.

- a. Jiroskop rotorunun dönmemesi hali
- b. Jiroskop rotorunun dönmesi hali

Jiroskop rotorunun dönmemesi halinde rotorun simetri ekseninin hareketinin diferansiyel denklemi bulunmuş ve bu diferansiyel denklem çözülerek hareketin az sönümlü bir harmonik hareket olduğu gösterilmiştir.

Bu az sönümlü harmonik hareketin salınım eğrisi en küçük kareler yöntemine göre dengelenmiş ve hareketin parametreleri elde edilmiştir.

Jiroskop rotorunun dönmesi halinde ise hareketin diferansiyel denklemleri elde edilmiş ve bunlar çözüldüğünde hareketin meridyen etrafında az sönümlü bir harmonik hareket olduğu görülmüştür.

II. bölümde, bu az sönümlü harmonik hareketin özellikleri kullanılarak elde edilen azimut saptama yöntemleri incelenmiştir.

Jiroskoplu teodolitle azimut saptanırken birkaç işlem ard arda yapılmaktadır. Bunlar kaba, ön ve kesin yönelmelerdir. Kaba ve ön yönelme işlemleri açıklandıktan sonra kesin yönelme yöntemleri incelenmiştir.

Bundan sonra kesin yönelme yöntemlerinden olan dönüm noktası yöntemi incelenmiştir. Dönüm noktalarını değerlendirmede kullanılan Schuler ortalaması sönüm katsayısı Taylor serisine açılarak ve ilk iki terimi alınarak elde edilmektedir. Aynı Taylor serisinin ilk üç terimi alınır ise Thomas ortalaması elde edilmektedir.

Alınan terim sayısı arttıkça kuzey doğrultusunu veren diğer ortalamalar elde edilmektedir. Bu ortalamaların katsayıları Paskal üçgeninin elemanlarıdır.

Lauf eşitlikleri olarak adlandırılan ortalamalar dönüm noktalarına en küçük kareler yöntemini uygulayarak elde edilmiştir. Bu ortalamalarda dönüm noktası sayısı çifttir.

Bu çalışmada bu değerlendirme bir adım öteye götürülmüş ve dönüm noktası sayısının tek olması halinde de kuzey doğrultusunu veren ortalamalar elde edilmiştir.

Diğer taraftan ortalamalardan biri dönüm noktalarını değerlendirmek için uygun olsa bile ikinci adımda bir genel aritmetik ortalama almak uygun değildir. Bu nedenle ortalamalar matematiksel korrelasyon gözönüne alınarak en küçük kareler yöntemine göre dengelenmiş ve ortalamaların ortalamaları olan eşitlikler verilmiştir.

Bunun ardından geçiş yöntemi ve teorisi incelenmiştir.

Bundan sonra elektronik kayıt yapan bir alet grubunun jiroskoplu teodolit ile beraber nasıl kullanılacağı açıklanmıştır. Ayrıca bu bölümde yapılan teorik araştırmalar sonucu jiroskoplu teodolitle yapılan ölçmelere etki eden faktörlerin sıcaklık, akım, histerisis etkisi ve manyetik etkiler olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca jiroskoplu teodolitlerin iç ve dış presizyonları incelenmiş ve aletin iç presizyonunun orantı katsayısına bağlı olduğu gösterilmiştir.

III. Bölümde jiroskoplu teodolitin salınımlarından coğrafik enlemin ne biçimde saptanacağı açıklanmıştır. Bu amaçla dönüm noktaları en küçük kareler yöntemine göre dengelenmekte bu dengeleme sonucu coğrafik enlem, yerçekimi ivmesi ve kuzey doğrultusu elde edilmektedir.

IV. Bölümde Foucault jiroskopları ve doğu-batı doğrultusunu veren sistemler eleştirici bir gözle incelenmektedir.



S U M M A R Y

In the first part of this work dynamics of rigid bodies which is necessary for the investigation of the gyroscopic phenomenon has been investigated. Regarding a rigid body as constituting of mass particles firstly the motion of a mass particle has been investigated. Following this the kinematics of a rigid body have been examined.

In investigating the motion of a mass particle or of a rigid body it is appropriate to examine the motion with respect to rotating axes. Because of this the theory of rotating axes has been explained. Using the results thus obtained the motion of a mass particle moving near the earth's surface has been explained.

In order to obtain the equations of motion of a rigid body the equations of motion of a system of particles have been derived. Using these results the equations of motion of a rigid body have been obtained. Then the Euler equations of motion of a rigid body with one point fixed have been obtained.

Following the above derivations the motion of Foucault's pendulum has been investigated. Foucault's pendulum is used to demonstrate that the earth is rotating around its axis.

Besides this the motion of a gyroscope with 3 degrees of freedom has been investigated. Applying Euler equations the equations of motion of gyroscope have been obtained. When these differential equations have been integrated it has been seen that the rotation axis of the gyroscope will seek a North-South direction. When the stability of this motion has been investigated it is apparent that a gyroscope with 3 degrees of freedom may be used for the two following purposes:

- a. To find North direction
- b. To find South direction

Following this the motion of gyro-theodolite has been investigated. In investigating the motion of gyro-theodolite the following two situations have been handled:

- a. Gyro-theodolite with non-spinning rotor
- b. Gyro-theodolite with spinning rotor

The equation of motion of gyro-theodolite with non-spinning rotor has been derived by using the principle stating that the rate of change of angular momentum with respect to time is equal to the moment acting on the system. The differential equation of motion is a second order linear differential equation with constant coefficients. This differential equation has been integrated by reducing it to a system of linear homogeneous differential equations of the first order. As a result it has been seen that the motion of gyro-theodolite with non-rotating rotor is a weakly damped harmonic oscillation.

The oscillation curve has been adjusted according to the least squares principle and as a result the parameters of the motion have been determined.

Secondly the differential equations of motion of gyro-theodolite with rotating rotor have been derived and when they have been integrated it has been found that the motion is a weakly damped harmonic oscillation about the meridian.

Gyro-theodolites are divided into two groups according to their construction. The mechanical construction of gyro-theodolites has been explained.

In the second part of the work azimuth determina-

tion methods have been thoroughly examined by using the properties of these weakly damped harmonic oscillations. In determining azimuth by using gyro-theodolites several operations are done in succession.

These are rough, primary and precise orientations. After explaining rough and primary orientation methods precise orientation methods have been discussed. Firstly the turning point method which is one of the precise orientation methods has been investigated.

If the damping coefficient is expressed with a Taylor series and the first two terms are used, Schuler Mean is obtained. On the other hand if the first three terms are used Thomas Mean is obtained. As the number of used terms increase corresponding Means giving North direction are obtained. The coefficients of these various means are the elements of the elements of the Pascal triangle.

Means known as Lauf Means have been obtained by using the least squares principle. In these Means the number of turning points are even.

Following this transit method which is one of the precise orientation methods and its theory have been discussed.

Lauf Means have been obtained by using the least squares principle, but the number of turning points is even. Turning points have been evaluated for nodd and even by using the least squares principle and corresponding means have been derived.

On the other hand even if one of the means is appropriate for the evaluation of the turning points, to take a grand mean in the second step is not appropriate. Because of this the elementary means obtained have

been adjusted by the least squares principle by taking into account mathematical correlation. As a result instead of taking simple arithmetic mean the means obtained as a result of this adjustment should be used.

Following this, for the registration of time an electronic registrating device is proposed. The most important part of this proposal is the usage of photo-transistors for registrating time.

As a result of the theoretical investigation it has been shown that the factors affecting the measurements made with the gyro-theodolites are temperature, electric current, hysteresis, magnetic effects.

The inner and outer precision of gyro-theodolites have been discussed in detail and it has been shown that the inner precision of the instrument in the transit method is dependent on the proportionality factor.

The azimuth determination is not the only application of gyro-theodolites in geodesy. The same instrument may be used to determine geographical latitude and gravity acceleration. In the third part of this work a method has been developed for the determination of the two unknowns namely geographical latitude and gravity acceleration. In this method weakly damped harmonic oscillations of the rotating gyro-theodolite have been used. These oscillations have been adjusted according to the least squares principle and as a result geographical latitude and gravity acceleration have been obtained.

In the last part of this work it has been shown that Foucault gyroscopes with two degrees of freedom might be used to determine geographical latitude.

On the other hand the dynamical analysis of the sphere within a sphere system used to give East-West direction has been made.



1.000. GİRİŞ

Son 20 yıldan beri jeodezide azimut belirlenmesinde jiroskopik teodolitler başarı ile kullanılmaktadır. Jiroskoplu teodolitler bir doğrunun gerçek kuzeyle yaptığı açıyı jiroskop hareketinden yararlanarak belirlemek amacı ile kullanılırlar.

Jiroskoplu teodolitlerle azimut saptanmasında çeşitli yöntemler uygulanmaktadır. Bu yöntemler birbirlerinden oldukça farklı iseler de hepsi jiroskop sisteminin meridyen etrafında yaptığı az sönümlü salınımı kullanmaktadır. Salınım hareketini kullanarak çeşitli yöntemler geliştirilmiş ve bunların gelişmesi henüz bitmemiştir.

Bu yöntemleri yakından incelemek ve yeni bir yöntem geliştirmek için jiroskop sisteminin dinamiğinin iyice incelenmesi gerekmektedir. Yöntemlerin geliştirilmesinde salınımlardan elde edilen büyüklükler bir dengeleme ilkesine göre dengelenirler. Dengeleme sonucu elde edilen formüller sözkonusu edilen salınımların değerlendirilmesinde kullanılırlar.

Azimutun saptanması jiroskoplu teodolitlerin jeodezideki tek uygulaması değildir. Gerçekten jiroskoplu teodolitlerin jiroskop sisteminin salınıminin periyodu gözlenerek diğer iki önemli jeodezik büyüklük coğrafik enlem ve yerçekimi ivmesi de belirlenmektedir.

Jiroskop hareketi incelendiğinde, bu hareketin coğrafik enlemi doğrudan doğruya saptamada kullanılacağı görülmektedir. Bu Foucault jiroskopunun belli eksen koşullarını sağlaması ile gerçekleşmektedir.

İç içe iki küre sistemi denilen diğer bir sistemle de doğu-batı doğrultusunu saptama olanağı vardır. Bu alet dinamiğin temel ilkelerine göre hareket ederek doğu-batı doğrultusunu vermektedir.

I. BÖLÜM

DİNAMİK İLKELER

Jiroskop hareketi açısal momentumun sakınımı kanunu ve Euler denklemleri kullanılarak incelenecektir. Dönen ve dörmeyen jiroskop sistemlerinin hareket denklemleri çıkartılacak ve bu hareket denklemleri çözülerek sistemin hareketini veren bağıntılar bulunacaktır. Hareketi veren denklemler ikinci dereceden katsayıları sabit diferansiyel denklemlerdir.

Diferansiyel denklemler sabit katsayılı birinci dereceden doğrusal homojen bir denklem sistemine indirgenerek çözülmüştür. Bu denklem sisteminin çözülmesi sonucu hareketin az sönümlü bir salınım olduğu bulunmuştur.

2.000. RİJİT BİR CİSMİN HAREKET DENKLEMLERİ

$\vec{F}$ kuvveti etkisinde, $\vec{v}$ hızıyla hareket eden ve kütlesi m olan bir maddesel noktanın hareket denklemi

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (m\frac{d\vec{r}}{dt}) \dots\dots\dots (2.1)$$

biçimindedir {21}, {36}. Burada $\vec{r}$, maddesel noktanın bir Galilee çerçevesine göre yer vektörü, t ise zamanı göstermektedir.

m in sabit olması halinde (2.1) denklemi

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \dots\dots\dots (2.2)$$

biçimini alır. (2.1) ve (2.2) denklemleri Newton'un ikinci hareket denkleminin vektörel ifadeleridir. Bu vektörel denklemlerin dik bir x,y,z koordinat sisteminde ifadeleri X,Y,Z kuvvetin bu eksen takımındaki bileşenlerini göstermek üzere

$$X = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right), Y = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dy}{dt} \right), Z = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dz}{dt} \right)$$

veya m'nin sabit olması halinde

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2}, Y = m \frac{d^2y}{dt^2}, Z = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

biçimindedir.

2.110. HAREKETİN İNTEGRALLERİ. ENERJİ DENKLEMİ

$\vec{r}_1$ konumundan $\vec{r}_2$ konumuna gelinceye kadar maddesel noktanın kinetik enerjisindeki değişim maddesel noktanın üzerine etki eden kuvvetlerin yaptığı toplam işe eşittir.

Bu

$$T_2 - T_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

biçiminde gösterilir. Burada T_1 ve T_2 sırasıyla $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ konumlarındaki kinetik enerjileri göstermektedir.

Eğer $\vec{F}$

$$\vec{F} = - \text{grad } V$$

şeklinde bir skaler alanın gradyanı ise kuvvet alanının bir potansiyeli vardır denir. V skaler alanına potansiyel enerji adı verilir.

Kuvvetlerin böyle bir potansiyeli varsa hareket süresince potansiyel enerji ile kinetik enerjinin toplamı sabit kalır. Yani V_1 ve V_2 ; $\vec{r}_1$ ve $\vec{r}_2$ noktalarındaki potansiyel enerji değerleri iseler

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 \dots\dots\dots (2.3)$$

dir.

Maddesel nokta hareketinde T koordinatların ve koordinatların zamana göre ilk türevlerinin skaler bir fonksiyonu, V konum koordinatlarının skaler bir fonksiyonu olduğuna göre ve toplam enerji hareket boyunca sabit kaldığından;

$$T + V = St$$

büyükliğüne hareketin bir birinci entegrali denir.

Diğer taraftan $\vec{H} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ olarak tanımlanan maddesel bir noktanın sabit bir noktaya göre açısal momentumunun değişim miktarı maddesel noktaya etki eden kuvvetlerin aynı noktaya göre momentine eşittir. Bu, $\vec{H}$ açısal momentumu göstermek üzere

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} \dots\dots\dots (2.4)$$

biçiminde yazılabilir. Fakat $\vec{H}$ hareketin bir sabiti olamaz.

→ Diğer taraftan (2.4) başlangıç noktasından geçen $\vec{\lambda}$ birim vektörü ile skaler olarak çarpılırsa

$$\vec{\lambda} \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F})$$

bulunur. Bu denklemin sağ tarafı kuvvetlerin O ya göre bileşke momentinin O dan geçen ve doğrultusu $\vec{\lambda}$ nin doğrultusu olan bir doğrultu üzerindeki bileşenidir.

Eğer $\vec{\lambda}$

$$\vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F}) = 0$$

olacak şekilde $\vec{r}$ ve $\vec{F}$ ile aynı düzlemde ise bileşke momentin bu doğruya göre bileşeni sıfır olur ve

$$\vec{\lambda} \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = 0 \dots\dots\dots (2.5)$$

elde edilir. Ayrıca $\vec{\lambda}$ sabit bir birim vektör ise uzayda sabit bir doğrultudur. Bu nedenle

$$\vec{\lambda} \cdot \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\lambda} \cdot \vec{H})$$

yazılabilir. Böylece (2.5) den

$$\frac{d}{dt} (\vec{\lambda} \cdot \vec{H}) = 0$$

elde edilir. Bunun integrali alınırsa

$$\vec{\lambda} \cdot \vec{H} = \text{St.} \dots\dots\dots (2.6)$$

bulunur. Bu $\vec{\lambda}$, $\vec{r}$, $\vec{F}$ aynı düzlemde ise maddesel noktanın O ya göre açısal momentumunun O dan geçen ve doğrultusu $\vec{\lambda}$ ya paralel bir doğru üzerindeki bileşeni sıfırdır anlamına gelir.

$\vec{\lambda} \cdot \vec{H}$ fonksiyonu bütün koşullar altında konum koordinatlarının ve onların değişim miktarlarının skaler bir fonksiyonudur.

2.200. RİJİT BİR CİSMİN KİNEMATİĞİ

Rijit bir cismin kinematikini incelerken hareketi meydana getiren kuvvetleri gözönüne almadan hareketin genel özellikleri incelenir.

2.210. SABİT BİR NOKTA ETRAFINDA HAREKET: EULER TEOREMİ

Bir noktası sabit bir rijit cismin sonlu hareketi Euler teoremi ile incelenebilir{21}. Bu teorem şu biçimde ifade edilebilir: Eğer rijit bir cismin sabit bir noktası varsa, cismin bir konumdan diğer bir konuma hareketi O noktasından geçen bir eksen etrafında dönmeye eşdeğerdir.

2.220. RİJİT BİR CİSMİN EN GENEL HAREKETİ

Her rijit cismin hareketi;

- Rijit cismin bütün noktalarının sabit bir O noktasının ötelemesine eşit bir paralel ötelemesi ile
- Bu noktadan geçen bir eksen etrafında bir dönmeye oluşur{21}.

2.230. SONSUZ KÜÇÜK HAREKETLER

Ard arda gelen sonsuz küçük dönmeler ekstenel vektör olduklarından paralelkenar kaidesine uyularak vektörler gibi toplanabilir.

2.231. SONSUZ KÜÇÜK DÖNMELER

Sonsuz küçük dönme dönme eksenini üzerinde bir

$$\delta \vec{\theta} = \delta \theta \vec{a}$$

ekstenel vektörüyle belirtilebilir. Burada $\delta \theta$ sonsuz küçük dönme açısını, $\vec{a}$ ise dönme eksenini üzerinde olan ve dönme yönü ile bir matematik pozitif sistem kuracak yönde seçilen birim vektörü göstermektedir.

2.232. RİJİT CİSMİN SONSUZ KÜÇÜK DÖNMEDEN OLUŞAN HAREKETİ

Verilen bir eksen etrafında $\delta \theta$ sonsuz küçük dönme-

sinden bir rijit cismin bir P noktasının yer değiştir-
mesini belirleyen $\vec{PP'}$ vektörü

$$\vec{PP'} = \delta\theta (\vec{a} \wedge \vec{r})$$

biçiminde verilir. Burada $\vec{a}$ dönme eksenini doğrultusunda
bir birim vektör, $\vec{r}$ de dönme eksenini üzerinde seçilen
bir başlangıç noktasına göre P noktasının yer vektörü-
dür.

2.233. RİJİT BİR CİSMİN GENEL SONSUZ KÜÇÜK YER DEĞİ- TİRMESİ

Sonlu bir yer deęiřtirme halinde olduğu gibi rijit
bir cismin küçük bir yer değiştirmesi sonsuz küçük bir
öteleme hareketi ile bir noktadan geçen bir eksen etrafında
sonsuz küçük $\delta\theta$ dönmesinden oluşur. Dönme açıları-
nın eşit olması ve dönme eksenlerinin paralel olması
temel noktasının seçiminden bağımsızdır.

2.240. RİJİT BİR CİSMİN ANİ HAREKETİ

Rijit bir cismin ani hareketi genel olarak bir ö-
teleme hızı ve bir açısal hızla belirlenir. Öteleme hızı
rijit bir cismin herhangi bir O noktasının hızıdır.
Açısal hızın eksenini O noktasından geçer. Öteleme hızı
O nun seçimine bağılıdır. Fakat açısal hız büyüklük ve
doğrultu bakımından O nun seçiminden bağımsızdır.

2.300. DÖNEN EKSENLERİN TEORİSİ

Maddesel bir noktanın veya rijit bir cismin hare-
ketini incelerken hareketi dönen bir eksen takımına göre
incelemek uygun olmaktadır. Bu bölümde maddesel bir
noktanın hareketinin ivmesinin dönen eksen takımına göre
genel vektöryel ifadesi verilecektir. Bu ifade ve
dünyaya bağılı bir eksen takımı ile Foucault sarkacı
problemi incelenecektir.

2.310. DÖNEN EKSENLERE GÖRE HAREKETİN DEĞİŞİM MİKTARI

Eğer bir hareketli eksen takımı, sabit bir eksen takımına göre başlangıç noktası sabit kalmak üzere $\vec{\theta}$ açısal hızı ile dönüyorsa; hareketli eksen takımına göre konumu belirleyen bir $\vec{r}$ yer vektörünün sabit eksen takımına göre mutlak türevi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\theta} \wedge \vec{r} \dots\dots\dots (2.7)$$

biçimindedir. Burada $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \vec{r}$ nin kısmî türevi olmayıp; $\vec{r}$ nin, bağlı olduğu hareketli eksen takımı sabit farzedilerek hesaplanan, rölâtif türevidir.

Hareketli eksen takımına göre ifade edilen her vek vektör için

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \theta \wedge \dots\dots\dots (2.8)$$

operatörü mutlak ve relâtif türevler arasındaki ilişkiyi verir.

2.320. DÖNEN EKSEN TAKIMINDA BİR NOKTANIN İVMESİ

(2.8) $\vec{v}$ vektörü için uygulanarak P noktasının ivmesini veren denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\theta} \wedge \vec{v} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\theta} \wedge \vec{r} \right\} + \vec{\theta} \wedge \left\{ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\theta} \wedge \vec{r} \right\} \\ &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2(\vec{\theta} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial t} \wedge \vec{r} + \vec{\theta} \wedge (\vec{\theta} \wedge \vec{r}) \dots\dots\dots (2.9) \end{aligned}$$

$\vec{a}$ nın bileşenleri herhangi bir anda (2.9) ile elde edilir. Ayrıca eğer $\vec{v}$ nın bileşenleri biliniyorsa;

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

denkleminde yerine konarak $\vec{a}$ nın bileşenleri elde edilir.

2.330. HAREKETLİ BİR MERKEZE GÖRE HIZ VE İVME

Hız ve ivme için verilen ifadelerde O merkezi sabit alınmıştı. Eğer O noktası sabit merkez takımına göre $\vec{v}_0$ hızı ile hareket ediyorsa P nin uzaydaki hızını ve ivmesini veren ifadeleri elde edebilmek için (2.7) ve (2.9) ifadelerinde bu gözönüne alınmalıdır.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 \dots \dots \dots (2.10)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \vec{a}_0 \dots \dots \dots (2.11)$$

Burada $\vec{a}_0 = \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_0$ sabit takıma göre O noktasının ivmesidir.

2.400. MADDESEL NOKTANIN KİNETİĞİNİN İNCELENMESİ

Kütlesi m olan bir maddesel noktaya etki eden kuvvet $\vec{F}$ olsun. Merkezi sabit dönen bir eksen takımına göre maddesel noktanın hareketinin vektörel denklemi

$$m\left\{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} + 2(\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\right\} = \vec{F} \dots \dots \dots (2.12)$$

biçimindedir. Bu aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$m\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{F} - m\left\{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} + 2(\vec{\omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\right\}$$

Eğer $\vec{\Omega}$ sabit ve $\vec{\Omega}$ ya eşit ise bu denklem aşağıdaki hale indirgenir.

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = \vec{F} - m \{ 2(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \}$$

Sabit referans sistemine göre dönen referans sisteminde hareket, iki ek atalet kuvveti gözönüne alınarak, Newton kanunu ile ifade edilir.

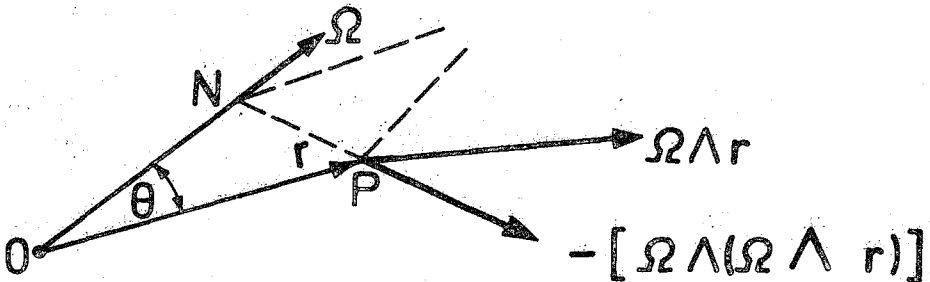
a. $-2m(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})$ kuvveti

b. $-m\{\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})\}$ kuvveti

Bu kuvvetlerden birincisi dönen sistemin açısal hızına ve noktanın hareketli referans sistemine göre hızına diktir. Bu Coriolis kuvveti diye isimlendirilir. Sürüklenme kuvveti olarak adlandırılan ikincisi ise dönme eksenine dik konumda ve noktanın yer vektörü olan $\vec{r} = \vec{OP}$ ile dönme ekseninin teşkil ettiği düzlemedir (Şekil 2.1). Değeri ise;

$$m\Omega^2 r \sin\theta = m\Omega^2 PN$$

dir.



Şekil 2.1

Burada N,P den dönme eksenine inilen dikin ayağıdır. Bu kuvvete merkez kaç kuvveti denir. Eğer O denge konumunda değilse veya üniform hareket yapmıyorsa ve a_0 gibi bir ivmeye sahip ise (2.12) nin sol tarafına $m\vec{a}_0$ terimi eklenmelidir.

2.500. MADDESEL BİR NOKTANIN YERYÜZÜNE GÖRE BAĞIL HAREKETİ

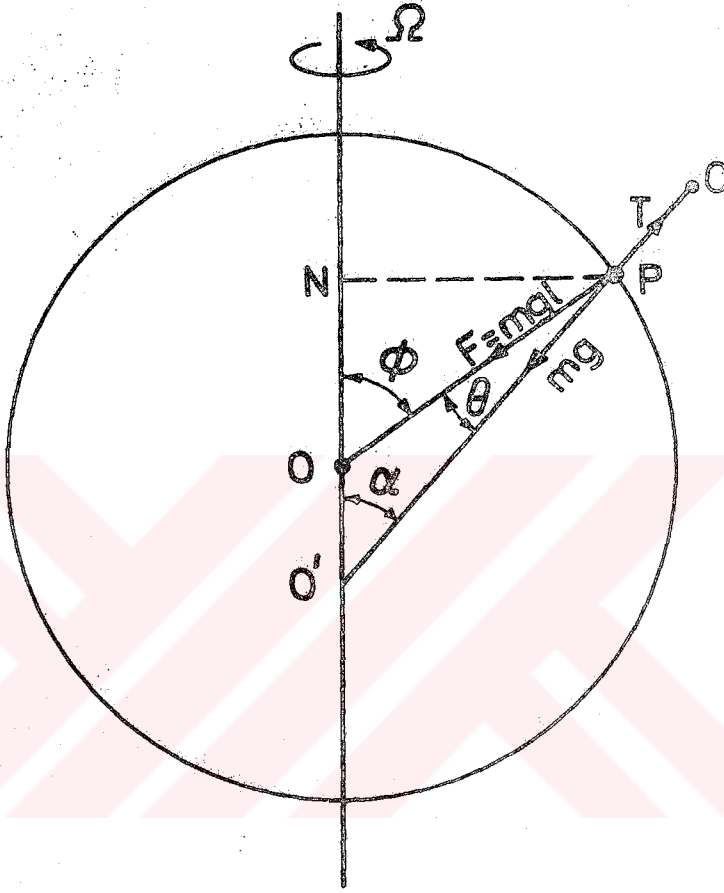
Bir maddesel noktanın hareketi yeryüzüne göre sabit bir eksen takımında incelendiğinde gerçekte hareket uzayda dönen bir eksen takımına göre incelenmektedir.

Yeryüzünün dönmesi ihmal edildiği zaman yapılacak hatanın büyüklüğü incelenecektir.

Yeryüzüne yakın hareket eden maddesel bir nokta gözönüne alınırsa maddesel noktaya etki eden kuvvetlerden biri ağırlıktır. Bir cisim yeryüzüne göre sabit bir konumda olduğu zaman eğer yeryüzünün yörüngesindeki hareketi ihmal edilirse yeryüzünün dönme eksenini etrafında dairesel bir hareket yapmaktadır. Bu nedenle cismin bu eksene doğru, bir ivmesi vardır. Genel olarak uygulamada cismin ağırlığı çekim kuvvetine eşit değildir. Bu sebepten bileşke kuvvet yeryüzü çekim kuvveti doğrultusunda değildir. Bu sapma miktarını bulmak için P bir sarkacın W ağırlığındaki topu olsun. W ağırlığı topu taşıyan ipteki kuvvettir. C noktası da sarkacın i-pinin tespit edildiği noktadır. CP dünyanın OP yarıçapına göre küçüktür (Şekil 2.2). PC çekül doğrultusuna P deki düşey denir. $\vec{F}$ topa etkiyen yerçekim kuvveti, m topun kütlesi, a yeryüzünün yarıçapı olsun. CP ve PO sırasıyla yeryüzünün eksenini ile α ve ϕ açılarını yap-sın. ($\lambda = \frac{1}{2} \pi - \phi$) burada P nin enlemidir. Topun röla-tif dengesini gözönünde tutarak

$$\vec{F} + \vec{T} = m\Omega^2 \vec{PN}$$

denklemi yazılır. Burada $\vec{\Omega}$ dünyanın eksenini etrafındaki açısal hızıdır. Bu denklemde her iki taraf da $\vec{F}$ ile



Şekil 2.2

vektörel çarpılarak

$$\vec{F} \wedge \vec{T} = m\Omega^2(\vec{F} \wedge \vec{PN})$$

elde edilir. Diğer taraftan aynı denklemin iki tarafı da $\vec{F}$ ile skaler çarpılarak

$$\vec{F} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{T} = m\Omega^2(\vec{F} \cdot \vec{PN})$$

elde edilir. Eğer θ , CP'nin merkez doğrultusundan sapma açısı ise yukardaki denklemden

$$\tan\theta = \tan(\pi - \hat{CPO})$$

$$= -\tan \hat{CPO}$$

$$= \frac{-|\vec{F} \wedge \vec{T}|}{\vec{F} \cdot \vec{T}}$$

$$= \frac{m\Omega^2 |\vec{F} \wedge \vec{PN}|}{\vec{F} \cdot \vec{F} - m\Omega^2 (\vec{F} \cdot \vec{PN})}$$

elde edilir.

Böylece

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{m\Omega^2 |\vec{F}| \cdot |\vec{PN}| \sin \hat{OPN}}{F^2 - m\Omega^2 |\vec{F}| \cdot |\vec{PN}| \cos \hat{OPN}} \\ &= \frac{ma\Omega^2 \sin\phi \cos\phi}{F - ma\Omega^2 \sin^2\phi} \end{aligned}$$

elde edilir. $\vec{F} = m\vec{g}'$ denirse

$$\tan\theta = \frac{a\Omega^2 \sin\phi \cos\phi}{g' - a\Omega^2 \sin^2\phi} = \frac{a\Omega^2 \sin\phi \cos\phi}{g'(1 - a\sin^2\phi \Omega^2/g')}$$

olur. $(a\Omega^2 \sin^2\phi)/g'$ nin bütün değerleri için küçük-
tür ve $a\Omega/g'$ nin karesi ve daha yüksek kuvvetleri ihmal
edilirse

$$\tan\theta \approx \frac{a\Omega^2}{g'} \sin\phi \cos\phi$$

elde edilir. Buradan da

$$\theta \approx \frac{1}{290} \sin\phi \cos\phi = \frac{1}{580} \sin 2\phi$$

elde edilir.

Sapma $\theta = 0$ ve $\pi/2$ iken sıfır olur. $\theta = 45$ için maksimum değeri bulur.

$$\theta_{\text{maksimum}} = 1/580 \text{ radyan}$$

Bütün enlemler için bu sapma küçüktür.

2.510. YERYÜZÜNE YAKIN HAREKET EDEN BİR MADDESEL NOKTANIN HAREKETİNİN İNCELENMESİ

Yeryüzüne yakın bir konumda enlemi λ olan bir O noktasının yakınında hareket eden maddesel bir nokta gözönüne alınsın (Şekil 2.3). Bu cisme $\vec{F}$ yerçekimi kuvveti ile bileşkeleri $\vec{R}$ olan diğer kuvvetler etki etmektedir. Hareket merkezi O noktası olan yeryüzüne göre sabit bir eksen takımına göre incelenecektir. O noktasının sürüklenme ivmesi N , O noktasından kutuplar eksenine çizilen dikmenin ayağı olduğuna göre $\Omega^2 ON$ dir. Çünkü eksenler uzayda Ω açısal hızı ile dönmektedir.

Maddesel noktanın hareket denklemi (2.12) uygulanarak elde edilir. Hareket denkleminde O noktasının hareketi gözönüne alınır ve $\vec{\Omega}$ yeryüzünde sabit bir eksen takımına göre sabit olduğundan $\partial\vec{\Omega}/\partial t = \partial\vec{\Omega}/\partial t$ yi taşıyan terim yazılmaz. Bu halde hareket denklemi

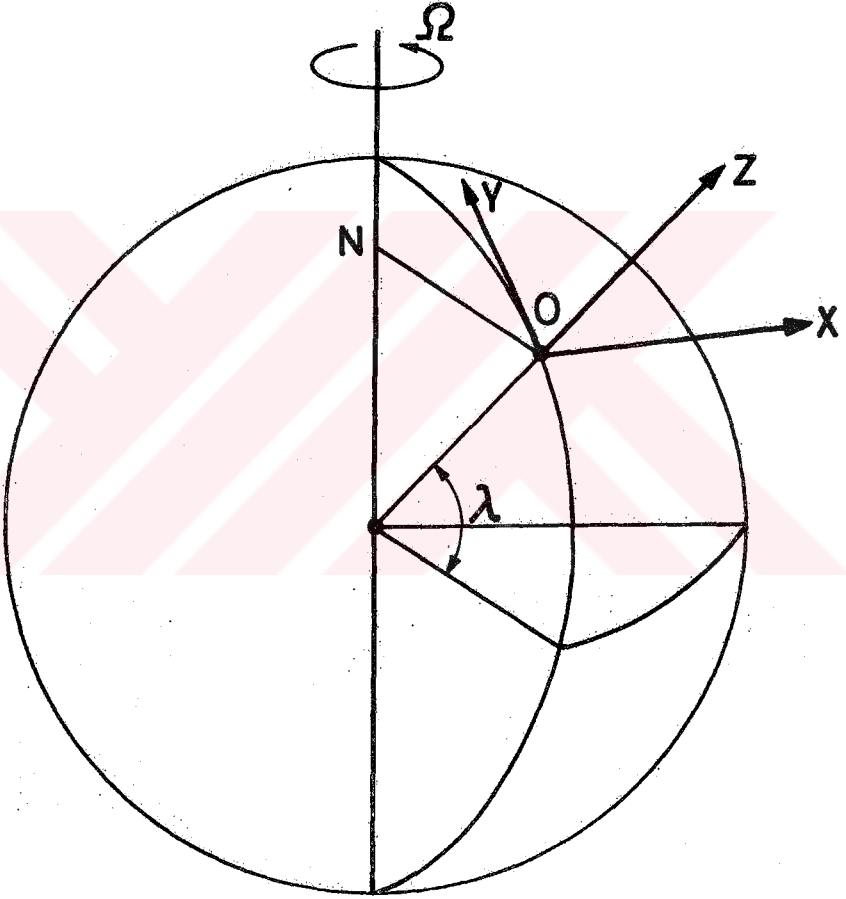
$$m\left\{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \Omega^2 \cdot \vec{ON}\right\} = \vec{R} + \vec{F} \quad (2.13)$$

biçimindedir. Fakat maddesel noktanın yeryüzünden fazla ayrılmadığı gözönüne alınırsa $\vec{F}$ aynı büyüklükte ve aynı yönde O da etki ediyormuş gibi kabul edilebilir. Bununla beraber maddesel noktanın ağırlığı taşıyıcı tertibatta meydana gelen kuvvet olarak tariflenirse ve $\vec{W}$ ile

ağırlık vektörel olarak gösterilirse $\vec{T}$ yerine $-\vec{W}$ konularak

$$\vec{F} - \vec{W} = m\Omega^2 \vec{ON}$$

yazılabilir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3.

Ω^2 ON (2.13) de yerine konulursa hareketin denklemi

$$m\left\{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})\right\} + \vec{F} - \vec{W} = \vec{R} + \vec{F}$$

olarak elde edilir. $\vec{W} = m\vec{g}$ yazılırsa denklem

$$m\left\{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})\right\} = \vec{R} + m\vec{g}' \dots\dots\dots (2.14)$$

haline indirgenir. Burada $\vec{g}'$ değeri yerçekiminden meydana gelen gerçek ivme değildir. Gerçek ivme $\vec{W} = m\vec{g}$ den bulunur. $\vec{g}'$ yerçekiminden dolayı görünen ivmeyi verir. Yönü O noktasındaki çekül doğrultusundadır. (2.14) denkleminde

$\Omega \approx 0,73 \times 10^{-4}$ radyan/saniyedir.

Yer çekimi kuvveti süreklilik kuvveti ihmal edilebileceği için $m\vec{g}' \approx m\vec{g}$ alınabilir.

2.600. RİJİT BİR CİSMİN HAREKET DENKLEMLERİ

Rijit bir cismin hareket denklemleri üç boyutlu olarak çıkarılır.

2.610. BİR MADDESEL NOKTALAR SİSTEMİNİN HAREKET DENKLEMLERİ, DOĞRUSAL VE AÇISAL MOMENTUM İLKELERİ

Tek bir maddesel noktanın hareket denklemleri

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

biçimindedir.

Bir tek maddesel nokta için elde edilmiş bu sonuçlar birbirine etki eden bir maddesel noktalar sistemine uygulanırsa

$$\frac{d}{dt} \sum_i (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \vec{F}_i$$

ve

$$\vec{H} = \sum_i \vec{H}_i = \sum_i (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i)$$

olmak üzere

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i)$$

elde edilir.

2.611. ENERJİ DENKLEMİ

Bir maddesel noktalar sisteminin iki konumu arasındaki kinetik enerjilerindeki fark;

$$T_2 - T_1 = \sum_i \int_1^2 (\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i)$$

biçimindedir. Eğer $\vec{F}_i$ kuvvetleri V potansiyel fonksiyonundan elde ediliyorsa

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = St.$$

dir.

2.620. RİJİT BİR CİSMİN HAREKETİ

Bir rijit cisim gerçekte birbirine bağlı maddesel noktalardan meydana gelmiştir. Maddesel noktalar arasındaki uzaklıklar sabittir.

Rijit cisim böylece tariflendikten sonra (3.610) da verilen sonuçlar rijit cisme uygulanırsa, üzerine

$\vec{F}_i$ kuvvetleri etkiyen, ağırlık merkezinin hızı $\vec{v}_G$ olan, M kütlesindeki bir cisim için doğrusal momentum denklemi

$$M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \dots\dots\dots (2.15)$$

biçimindedir. Eğer $\vec{F}_i$ kuvvetlerinin konum vektörleri $\vec{r}_i$ ise kütle merkezine göre $\vec{v}_i$ hızları ve $\vec{r}_i$ konum vektörleri yardımıyla hesaplanan

$$\vec{H}_G = \int \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i dm$$

açısal momentumu

$$\frac{d\vec{H}_G}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \dots\dots\dots (2.16)$$

açısal momentum ilkesini gerçekler. Sabit bir nokta için ise

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i \dots\dots\dots (2.17)$$

genel ifadesi geçerlidir.

2.621. RİJİT BİR CİSMİN ENERJİ DENKLEMİ

Bölüm (2.611) de bir noktalar sistemi için verilen enerjinin sakınımı kanunu, eğer dış kuvvetlerin bir potansiyeli varsa

$$T + V = St.$$

biçiminde bir rijit cisim için de geçerlidir.

3.000. EULER DENKLEMLERİ

Aşağıdaki denklemin rijit cisimlerin hareketini

sınırladığı evvelce belirtilmişti (2.17).

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \sum_i (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) \dots\dots\dots (3.1)$$

$\vec{H}$ nın değişim miktarı uzayda sabit doğrultudaki 3 eksene göre incelendiğinde $\vec{H}$ nın skaler bileşenlerindeki katsayılar sabit değildir. Böyle olunca hareketi atalet katsayıları sabit olacak şekilde hareket eden bir koordinat sistemine göre incelemek uygundur {21}, {30}.

Herhangibir kütle sisteminin hareketi gözönüne alınırsa şu sonuçlar elde edilir: Eksenlerin merkezi bir $\vec{v}_0$ hızına sahip olsun ve eksenler uzayda $\vec{\omega}$ açısal hızıyla dönsün. $\vec{H}$ sistemin merkeze göre açısal momentumu olsun. Dönen eksenlere göre bir vektörün değişim miktarı $\partial/\partial t$ ile gösterilirse

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge$$

yazılabilir. Bu halde rijit bir cismin açısal momentum ilkesi hareketli eksenlere göre

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\omega} \wedge \vec{H} + \vec{v}_0 \wedge \vec{P} = \sum_i (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) \dots\dots\dots (3.2)$$

biçimini alır. Burada $\vec{H}$, katı cismin mutlak hızları ile hareketli sistemin başlangıcına göre hesaplanan açısal momentumu, $\vec{P}$ yine mutlak hızlarla hesaplanan doğrusal momentumu, $\vec{r}_i$ ise hareketli sisteme göre yer vektörünü göstermektedir. Bu denklem sistemin açısal momentumunun değişim miktarını hareketli eksen takımına göre vermektedir.

Merkez sabit veya sistemin kütle merkezi ile çakışıkça (3.2) aşağıdaki biçimi alır.

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \vec{\theta} \wedge \vec{H} = \sum_i (\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i) \dots\dots\dots (3.3)$$

Eğer bu denklem sabit bir nokta etrafında dönen bir rijit cisim için uygulanırsa cisme sabit bir hareket yapması için etkimesi gereken kuvvet çifti bulunabilir. $\vec{H}$ vektörünün bileşenlerinin dönen bir eksen takımında sabit kaldığı bir hareket gözönüne alınsın. Bu eksenlere göre;

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$$

olur. Bu halde cisme etki eden kuvvetlerin 0 ya göre momentlerinin toplamı $\vec{\theta} \wedge \vec{H}$ olacaktır. $\vec{\theta}$ eksenlerin açısal hızıdır. Her kuvvet 0 da kendisine paralel ve eşit bir kuvvet ve bir kuvvet çifti ile değiştirilirse $\vec{\theta} \wedge \vec{H}$ bileşke kuvvet çiftini verir. Bu bileşke kuvvet çifti hareketi devam ettirmek için gereklidir. Eğer dönen eksenler cisme bağlı (maddesel) olsaydı $\vec{\theta} = \omega$ olurdu. Böyle bir eksen takımı seçildiğinde ve $\vec{H}$ bu eksen takımına göre sabit olduğunda kuvvet çifti

$$\vec{\omega} \wedge \vec{H}$$

ile bulunacaktır. Bu kuvvet çiftinin doğrultusunun cismin bir simetri ekseni olduğu hal gözönüne alınsın. Cisim kütle merkezinden geçen bir doğru etrafında ω sabit açısal hızıyla dönsün. Bu dönme ekseninin cismin simetri ekseniyle yaptığı açı $\alpha < \pi/2$ olsun. Bu eksen cisme göre ve uzayda sabittir. Hareket cismin G kütle merkezini merkez kabul eden bir eksen takımına göre incelenebilir.

Burada G1 ekseni simetri ekseni ile dönme ekseni düzleminde ve simetri eksenine diktir.

Dönme ekseni ile G1 simetri ekseninin aynı tarafında bulunur. G3 ise simetri ekseni doğrultusundadır. G2

ise G123 sağ bir eksen takımı olacak biçimde G3 ve G1 e diktir. Kütle merkezi sabit olduğunda $\Sigma \vec{F} = 0$ olur. Cis- me etki etmesi gereken bileşke kuvvet çifti şu biçimde- dir.

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \wedge \vec{H} &= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \wedge (H_1, H_2, H_3) \\ &= (\omega \sin \alpha, 0, \omega \cos \alpha) \wedge (A\omega \sin \alpha, 0, C\omega \cos \alpha) \\ &= \{0, (A-C) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha, 0\} \end{aligned}$$

(A,A,C) G deki asal atalet momentleridir. Kuvvet çifti- nin sabit bir momenti vardır. G2 etrafında etki eder. Eğer cisme etki eden kuvvetler ağırlığı ve eksenin do- ğurduğu reaksiyonlar ise cismin ağırlığı bir moment meydana getirmediğinden kuvvet çiftini doğuran ve hare- keti devam ettiren reaksiyonlardır. Ayrıca bu reaksi- yonların toplamı G de etki eden ve cismin ağırlığına e- şit ve aksi yönde olmalıdır. Bu halde kütle merkezi sa- bittir.

3.100. BİR NOKTASI SABİT OLAN RİJİT CİSMİN EULER DENKLEMLERİ

Rijit cismin bir noktası sabit olduğu zaman bu nokta O merkezi alınarak hareket (3.3) denklemiyle be- lirtilir {21}, {36}. Dış kuvvetlerin O ya göre momenti M ile gösterilirse $\vec{M} = \Sigma (\vec{r} \wedge \vec{F})$ olduğundan hareketin skaler denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial t} + \theta_2 H_3 - \theta_3 H_2 &= M_1 \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} + \theta_3 H_1 - \theta_1 H_3 &= M_2 \dots\dots\dots (3.4) \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} + \theta_1 H_2 - \theta_2 H_1 &= M_3 \end{aligned}$$

1,2,3 indisleri bir vektörün hareket eden bir eksen takımına göre ani bileşenlerini göstermektedir. (H_1, H_2, H_3) için ifadeler aşağıdaki gibidir.

$$(H_1, H_2, H_3) = (A\omega_1 - H\omega_2 - G\omega_3, -H\omega_1 + B\omega_2 - F\omega_3, -G\omega_1 - F\omega_2 + C\omega_3) \dots\dots\dots (3.5)$$

Burada A,B,C, F,G,H sabit noktadan geçen hareketli eksenlere göre hesaplanan ve bileşenleri

$$I = \begin{bmatrix} A & -H & -G \\ & B & -F \\ & & C \end{bmatrix}$$

tablosu ile verilen atalet momenti tensörünün bileşenleridir.

Dönen eksenler maddesel eksenler ise

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

alınarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial t} + \omega_2 H_3 - \omega_3 H_2 &= M_1 \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} + \omega_3 H_1 - \omega_1 H_3 &= M_2 \dots\dots\dots (3.6) \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} + \omega_1 H_2 - \omega_2 H_1 &= M_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca dönen eksenler asal atalet eksenleri boyunca olacak biçimde seçilirse $F = G = H = 0$ olur. Buradan;

$$(H_1, H_2, H_3) = (A\omega_1, B\omega_2, C\omega_3)$$

olur. Bu değerler (3.6) da yerine konursa

$$A\dot{\omega}_1 - (B - C) \omega_2 \omega_3 = M_1$$

$$B\dot{\omega}_2 - (C - A) \omega_3 \omega_1 = M_2 \dots\dots\dots (3.7)$$

$$C\dot{\omega}_3 - (A - B) \omega_1 \omega_2 = M_3$$

elde edilir. Bu denklemler bir noktası sabit olan bir rijit cismin Euler hareket denklemleridir.

Benzer bir denklem takımı kütle merkezi sabit bir rijit cisim içinde elde edilir. Eksen takımları G deki asal atalet eksenleri doğrultusundadır.

3.200. SİMETRİ EKSENLİ BİR RİJİT CİSMİN HAREKETİ

Bazı hallerde cismin bir simetri eksenini olursa hareketi cisimle beraber dönmeyen bir eksen takımına göre incelemek daha yararlı olur. Bu halde cismin hareketi (3.4) denklemi ile verilir. Atalet katsayılarının değişmemesi için eksen takımının cismin atalet eksenleri doğrultusunda bulunması ve bir koordinat ekseninin simetri eksenini ile çakışmış olması gerekir. Teoriyi jiroskopa uygulamadan önce $\vec{\omega}$ nun bileşenleri (dönen eksenlerin açısal hızı) ile cismin açısal hızı $\vec{\omega}$ nin bileşenleri arasında bazı bağıntılar bulunmalıdır. Bu bağıntılar bir eksenini sabit ve cismin simetri ekseniniyle çakışmış olan bir dik koordinat sistemi için geçerlidir. O3 rijit cisim içindeki bir maddesel eksen ve P bu eksen üzerinde $OP = l$ olacak biçimde alınmış bir P noktası olsun. P cismin bir noktası olduğundan hızı;

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{OP} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

biçiminde verilir. Burada $\vec{k}$, O3 doğrultusundaki birim vektördür. Fakat nokta dönen eksen takımını üzerindeki bir

maddesel nokta olarak alınabilir. Bu nedenle

$$\vec{V}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

olur. Bu iki denklem eşitlenirse;

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

olur. Diğer taraftan bu denklem

$$\vec{\omega} = \vec{\omega} + \lambda \vec{r}$$

olursa sağlanabilir. Burada λ skaler bir katsayıdır.

4.000. FOUCAULT SARKACI VE JİROSKOP

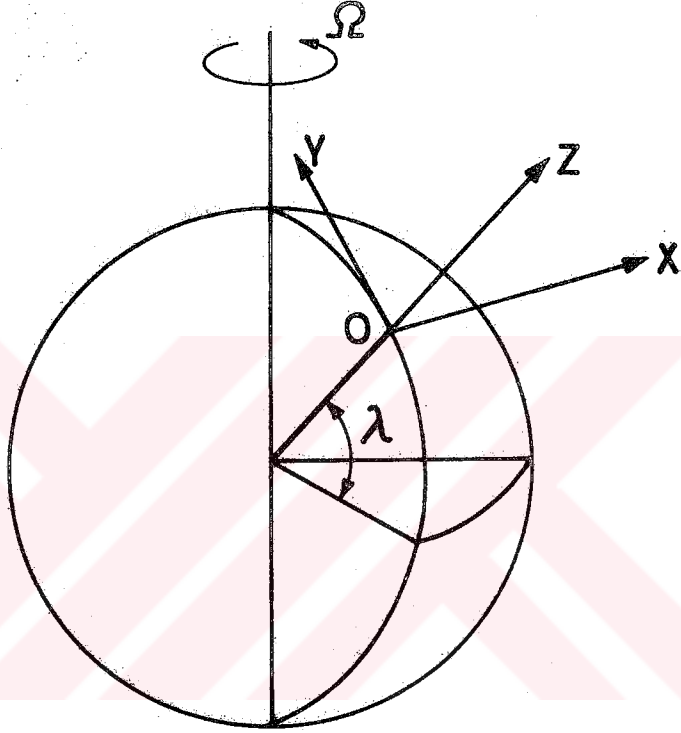
Bu bölümde tarihsel önemi bakımından Foucault sarkacı ilk önce incelenecek ve şimdiye kadar işlenen teori jiroskopa uygulanacaktır.

4.100. FOUCAULT SARKACI

Bu basit bir sarkaktır. Dünyanın kendi eksenini etrafında döndüğünü göstermek için kullanıldığında Foucault sarkacı olarak isimlendirilir. Böyle bir sarkaç λ enleminde bir noktada salınım yapmaya bırakılırsa dünyadan sapmalarını incelemek gerekir.

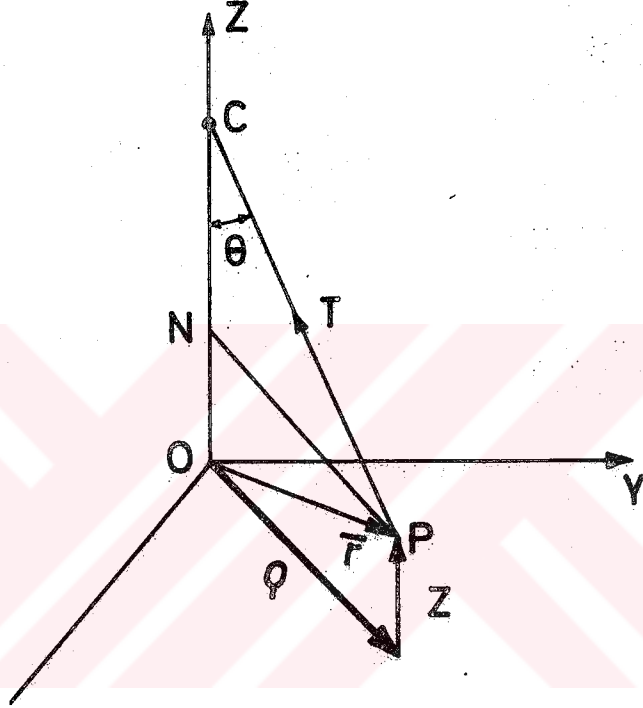
Sarkacın hareket etmediği konumda sarkacın hareketi 0 noktasına göre incelenir.

(Şekil 4.1(a) ve (b)). C noktası sarkacın ipinin tutturulduğu nokta ve OXYZ de dünyaya göre sabit bir eksen takımı olsun. Bu eksen takımında OZ düşey doğrultu, OX ve OY 0 dan geçen yatay düzlem içinde olsun, ve sırasıyla Doğu ve Kuzeye baksın. $O(\Omega^2)$ mertebesinde olan terimleri ihmal ederek OZ ekseninin dünyanın merkezinden geçtiği ve 0 dan geçen yeryüzünün yarıçapıyla çakışık olduğu kabul edilecektir{21}, {36}.



(a)

Şekil 4.1(a)



Şekil 4.1(b)

P noktası sarkacın ucundaki ağırlığın konumunu gösterebilir. Yerçekiminin dışında sarkaca etki eden diğer kuvvet ipteki gerilmedir. $\vec{R} = \vec{T}$ olduğundan eğer $\vec{OP} = \vec{r}$ ise sarkacın hareket denklemi

$$m\left\{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t})\right\} = \vec{T} + m\vec{g} \dots\dots\dots (4.1)$$

olur. Bu denklemde

$$\vec{r} = \vec{z} + \vec{\rho}$$

konulsun. Burada $\vec{z}$ sarkaç ağırlığının düşey yöndeki deplasmanı, $\vec{\rho}$ ise yatay yöndeki deplasmanıdır. (4.1) de $\vec{r}$ nin yerine $\vec{r} = \vec{z} + \vec{\rho}$ konup, her terim m ile bölünürse ve $\vec{T}$ yatay ve düşey bileşenlerinin toplamı olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{z}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2} + 2\left\{\vec{\Omega} \wedge \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}\right)\right\} &= \frac{T}{m} \frac{(l - z)}{l} \vec{k} \\ &- \frac{T}{m} \frac{\vec{\rho}}{l} - g\vec{k} \dots\dots\dots (4.2) \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Burada $\vec{k}$ OZ doğrultusundaki birim vektör ve l de sarkacın toplam uzunluğu olsun. Fakat sarkacın düşeyden sapmalarından dolayı z ikinci mertebeden küçük bir değer ve $\vec{\rho}$ ise birinci mertebeden küçük bir değerdir. Bu nedenle z li terimler $\vec{\rho}$ lu terimlere nazaran küçük olduğundan (4.2) denklemi

$$\frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2} + 2(\vec{\Omega} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) = \left(\frac{T}{m} - g\right)\vec{k} - \frac{T}{m} \frac{\vec{\rho}}{l} \dots\dots\dots (4.3)$$

biçimini alır. Bundan başka

$$\vec{\Omega} = \Omega \sin \lambda \vec{k} + \Omega \cos \lambda \vec{j}$$

yazılabilir. Burada $\vec{j}$ OY doğrultusunda bir birim vek-

tördür. (4.3) de bu yerine konursa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2} + 2\Omega \sin \lambda (\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) + 2\Omega \cos \lambda (\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) = \\ = (\frac{T}{m} - g) \vec{k} - \frac{T}{m} \frac{\vec{\rho}}{\ell} \dots\dots\dots (4.4) \end{aligned}$$

elde edilir.

Fakat $\vec{j}$ ve $\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}$ nin her ikisi de yatay düzlemdeki vektörler olduğundan $\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}$ vektörü $\vec{k}$ ya paralel düşey bir vektör olmalıdır. Bu nedenle $\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}$ de yatay bir vektördür. Bunun sonucu olarak

$$\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} = \{ \vec{k} \cdot (\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) \} \vec{k}$$

yazılabilir. Bu nedenle (4.4) denklemi aşağıdaki iki denkleme eşdeğerdir.

$$\frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2} + 2\Omega \sin \lambda (\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) = - \frac{T}{m} \frac{\vec{\rho}}{\ell} \dots (a) \dots\dots\dots (4.5)$$

$$\{ (\frac{T}{m} - g) - 2\Omega \cos \lambda \{ \vec{k} \cdot (\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) \} \} \vec{k} = 0 (b)$$

Bu denklemlerin ikincisinden

$$\frac{T}{m} = g + 2\Omega \cos \lambda \{ \vec{k} \cdot (\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) \}$$

elde edilir. T nin bu değeri (4.5(a)) da yerine konulursa hareketin belirlenmesi için $\vec{\rho}$ cinsinden hareketin diferansiyel denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2} + 2\Omega \sin \lambda (\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) = - \frac{1}{\ell} (g + 2\Omega \cos \lambda \{ \vec{k} \cdot (\vec{j} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) \}) \vec{\rho}$$

Bu diferansiyel denklemin sağ tarafındaki ikinci terim $O(\rho^2)$ mertebesinden olduğundan ihmal edilebilir. Böylece;

$$\frac{\partial^2 \vec{\rho}}{\partial t^2} + 2\Omega \sin \lambda (\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t}) + n^2 \vec{\rho} = 0 \dots\dots\dots (4.6)$$

elde edilir. Burada $n^2 = g / l$ dir.

Bu diferansiyel denklemin belirlediği hareketi yorumlamak için bir düzlemde merkezzel çekim kuvveti altında hareket eden bir maddesel nokta düşünölsün. Başlangıç noktası O (Çekim merkezi) da olan bir eksen takımına göre maddesel noktanın hareketinin diferansiyel denklemi

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + n^2 \vec{r} = 0$$

olur. Maddesel noktanın yörüngesi genel olarak bir elipsdir. Elipsin merkezi O noktasındadır ve hareketin periyodu $2\pi/n$ dir.

Eğer aynı hareket O dan geçen (x, y) düzlemine dik bir doğrultu etrafında dönen bir eksen takımına göre incelenirse, maddesel noktanın bu eksen takımına göre ivmesi

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\Omega (\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) - \Omega^2 \vec{r}$$

dır. Buna karşılık olan hareketin denklemi

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\Omega (\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + (n^2 - \Omega^2) \vec{r} = 0$$

dır. Burada $\vec{k}$ hareket düzlemine dik doğrultuda bir birim

vektördür. Fakat her iki halde de maddesel noktanın yörüngesi aynıdır. Bunun bir sonucu olarak maddesel noktanın düzlemdeki hareketinin diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + 2\Omega(\vec{k} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}) + \mu^2 \vec{r} = 0$$

dır. Burada Ω ve μ sabitlerdir. Eksen takımı ise hareket düzlemine dik doğrultudaki bir eksen etrafında dönmektedir. Maddesel noktanın yörüngesi merkezzel bir elipsdir. Hareketsiz bir eksen takımına göre, bu hareket aşağıdaki denklem ile verilir ($\mu^2 + \Omega^2 = n^2$)

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + (\mu^2 + \Omega^2) \vec{r} = 0$$

Bu yorum (4.6) ya uygulanırsa sarkacın yörüngesinin merkezzel bir elips olduğu anlaşılır. Hareket uzayda sabit bir eksen takımına göre incelenirse hareketin diferansiyel denklemi:

$$\frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} + (n^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda) \vec{\rho} = 0$$

olur. Dünya ile birlikte dönen bir gözlemci sarkacın yörüngesinin bir elips olduğunu görür. Bu hareketin periyodu

$$T = 2\pi/(n^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda)^{1/2} \approx 2\pi/n$$

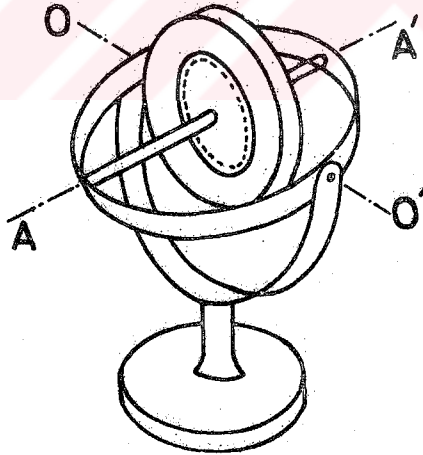
dır. Dünyanın düşey etrafındaki açısal hızı $\Omega \sin \lambda$ dir. Eğer başlangıçta sarkaç 0 noktasındaki bağıl denge konumundan harekete geçirilirse sarkacın uzaydaki yörüngesi artık merkezzel bir elips olmaz. Bu halde 0 dan geçen ve ilk hareket doğrultusunu içine alan düşey düzlem içinde doğru boyunca hareket eder. Bu doğru boyunca hareket 0 merkezi etrafında yukarıda sözü geçen periyotta basit bir harmonik harekettir.

4.200. JİROSKOP

Bir jiroskop en basit haliyle bir simetri ekseni olan bir rijit cisimden oluşur. AA' simetri ekseninin etrafında rijit cisim hızla döner, bu eksenin uçları aynı zamanda dairesel bir çerçeve üzerinde hareket edebilmektedir. Çerçeve bir çap doğrultusundaki eksen etrafında dönebilmektedir{17}, {29}. (Şekil 4.2).

Eğer çerçeve dünyanın üzerinde herhangi bir yerde yatay olarak kurulursa ve jiroskop eksenini etrafında döndürülürse yeryüzünün kendi eksenini etrafında dönmelerinden dolayı jiroskop ancak simetri eksenini kuzey-güney doğrultusunda ise çerçeveye göre sabit kalır{17}.

Bunun böyle olduğunu göstermek için jiroskop düzlemi yatay olacak biçimde dünya üzerinde G gibi bir noktada sabit olarak kurulmuş olsun (Şekil 4.3). $GXYZ$ de dünyaya göre sabit bir eksen takımı olsun.



Şekil 4.2

GX , GY sırasıyla doğu ve kuzey yönünde, GZ de yukarı doğru düşey üzerinde olsun. Hareketin kendisi merkezi jiroskopun kütle merkezinde dönen G 123 gibi dik

bir koordinat sisteminde incelenir. G3 jiroskopun eksenini doğrultusunda, G1 GZ ile çakışmış durumda G2 de G123 dik bir koordinat sistemi olacak şekilde alınmıştır. Dönen eksenlerin konumu G3'ün GX ile yaptığı θ açısı ile saptanır.

Eğer $\vec{\theta}$ G123 ün uzaydaki açısal hızı ise

$$\vec{\theta} = \vec{\Omega} + \dot{\phi} \vec{i}$$

yazılabilir. Burada $\vec{\Omega}$ yeryüzünün açısal hızı $\vec{i}$ G1 doğrultusundaki birim vektördür. $\vec{i}$ aynı zamanda GZ doğrultusundaki birim vektördür. Fakat eğer $\vec{j}$ GY doğrultusundaki birim vektör ise;

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \Omega \sin \lambda \vec{i} + \Omega \cos \lambda \vec{j} \\ &= \Omega \sin \lambda \vec{i} + \Omega \cos \lambda (\sin \phi \vec{k} - \cos \phi \vec{j}) \\ &= \Omega \sin \lambda \vec{i} - \Omega \cos \lambda \cos \phi \vec{j} + \Omega \cos \lambda \sin \phi \vec{k}\end{aligned}$$

bağıntısı vardır. $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ da G2 ve G3 doğrultusundaki birim vektörlerdir.

$$\vec{\theta} = (\Omega \sin \lambda + \dot{\phi}) \vec{i} - \Omega \cos \lambda \cos \phi \vec{j} + \Omega \cos \lambda \sin \phi \vec{k}$$

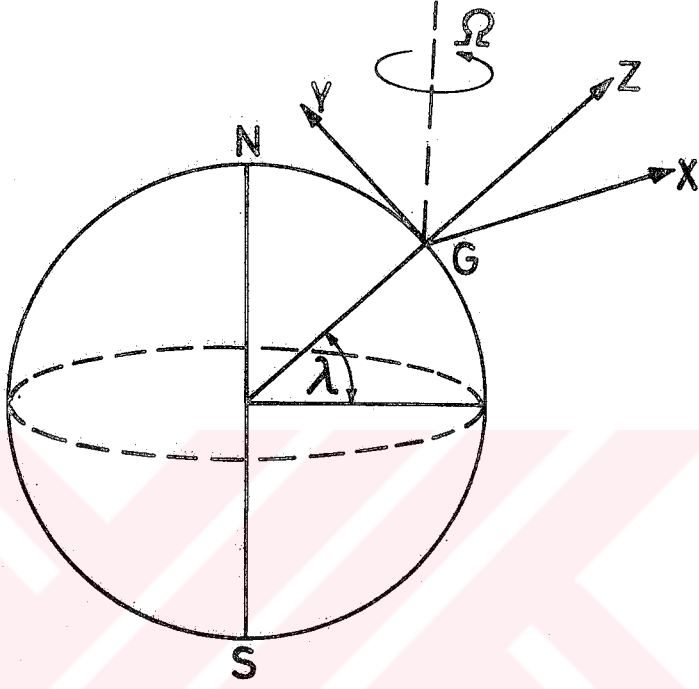
$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\Omega \sin \lambda + \dot{\phi}, -\Omega \cos \lambda \cos \phi, \Omega \cos \lambda \sin \phi) \quad (4.7)$$

Hareketin skaler denklemleri (3.4) ile verilir

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} + \theta_2 H_3 - \theta_3 H_2 = M_1$$

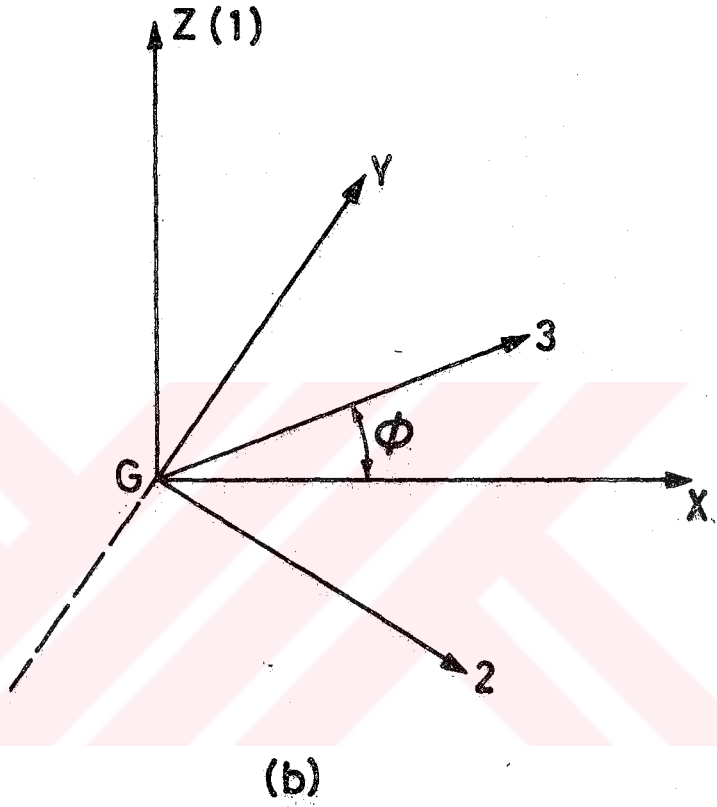
$$\frac{\partial H_2}{\partial t} + \theta_3 H_1 - \theta_1 H_3 = M_2 \dots \dots \dots \{(3.4)\}$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} + \theta_1 H_2 - \theta_2 H_1 = M_3$$



(a)

Şekil 4.3(a)



Şekil 4.3(b)

Sisteme etki eden kuvvetler sadece çerçevenin simetri eksenini uçlarında gösterdiği reaksiyonlardır. Jirooskop bu yüzden sadece yatay düzlemde hareket etmektedir{17}.

$$M_1 = 0, \quad M_2 \neq 0, \quad M_3 = 0$$

G3 bir simetri eksenini olduğundan, G1, G2, G3 0 daki a-sal atalet eksenidirler. Bunun sonucu olarak;

$$(H_1, H_2, H_3) = (A\omega_1, A\omega_2, C\omega_3)$$

olur. Sistemin hareket denklemleri (M_1, M_2, M_3) ve (H_1, H_2, H_3) değerleri (3.4) de yerine konursa

$$A\ddot{\theta}_1 + C\theta_2\omega_3 - A\theta_3\omega_2 = 0$$

$$A\ddot{\theta}_2 + A\theta_3\omega_1 - C\theta_1\omega_3 = M_2$$

$$C\ddot{\omega}_3 + A\theta_1\omega_2 - A\theta_2\omega_1 = 0$$

olur. G3 cisim içinde sabit olduğundan

$$A\ddot{\theta}_1 + C\theta_2\omega_3 - A\theta_3\omega_2 = 0 \quad (a)$$

$$A\ddot{\theta}_2 + A\theta_3\omega_1 - C\theta_1\omega_3 = M_2 \quad (b) \dots\dots\dots (4.8)$$

$$C\ddot{\omega}_3 = 0 \quad (c)$$

yazılır. Fakat (4.8c) den

$$\omega_3 = \text{Sabit} = n$$

olur. ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) değerlerini (4.7) den (4.8)(a) ve (b) de yerine konursa

$$A \frac{d}{dt}(\Omega \sin \lambda + \dot{\phi}) - Cn \Omega \cos \lambda \cos \phi + A\Omega^2 \cos^2 \lambda \cdot \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$A \frac{d}{dt} (-\Omega \cos \lambda \cos \phi) + A \Omega \cos \lambda \sin \phi (\Omega \sin \lambda + \dot{\phi})$$

$$-Cn(\Omega \sin \lambda + \dot{\phi}) = M_2$$

elde edilir. Bu iki denklem düzenlenirse

$$A \dot{\phi} - Cn \Omega \cos \lambda \cos \phi + A \Omega^2 \cos^2 \lambda \sin \phi \cdot \cos \phi = 0$$

$$A \Omega \dot{\phi} \cos \lambda \sin \phi + A \Omega \cos \lambda \sin \phi (\Omega \sin \lambda + \dot{\phi})$$

$$- Cn(\Omega \sin \lambda + \dot{\phi}) = M_2$$

biçimini alır. Ω^2 li terimler ihmal edilirse

$$A \dot{\phi} - Cn \Omega \cos \lambda \cos \phi = 0 \dots\dots\dots (4.9)$$

$$2A \Omega \dot{\phi} \cos \lambda \sin \phi - Cn(\Omega \sin \lambda + \dot{\phi}) = M_2 \dots\dots\dots (4.10)$$

elde edilir. Bunlar jiroskopun hareketlerini belirleyen denklemlerdir. (4.9) dan jiroskopun eksen $\phi = 0$ başlangıç şartında $\cos \phi = 0$ ise sabit kalacaktır.

Böylece jiroskopun eksen ϕ ya GY doğrultusunda ya da aksi yönde olacaktır. Eğer eksen diğer bir konumda serbest bırakılırsa sabit kalmayacak (GY) kuzey-güney doğrultusunu bulmağa çalışacaktır. Jiroskopa denge halinde etki eden kuvvet çifti (4.10) da verilmiştir. Yukarıdaki konumların stabilitesi için şöyle hareket edilir. ϕ_0 bağlı bir denge konumunu belirlesin.

(4.9) da

$$\phi = \phi_0 + \epsilon$$

konulursa bir denge konumuna göre salınımların diferansiyel denklemi;

$$A \ddot{\epsilon} - Cn \Omega \cos \lambda \cos(\phi_0 + \epsilon) = 0$$

olur. Burada ϵ küçük bir değerdir. İkinci mertebeden terimler ihmal edilirse bu denklem

$$A\ddot{\epsilon} - Cn\Omega \cos\lambda(\cos\phi_0 - \epsilon\sin\phi_0) = 0$$

haline indirgenir. $\cos\phi_0 = 0$ olduğundan

$$A\ddot{\epsilon} + Cn\Omega \epsilon \cos\lambda \sin\phi_0 = 0 \dots\dots\dots (4.11)$$

elde edilir. İrdeleme yapılırken şu sonuçlar elde edilir.

(a) Eğer $\phi_0 = \pi/2$ ise (4.11)

$$A\ddot{\epsilon} + Cn\Omega \epsilon \cos\lambda = 0$$

halini alır. n artı işaretli ise hareket salınım şeklinde olacaktır. Dönme eksenini kuzey doğrultusunda olduğu zaman jiroskop G3 eksenini etrafında saat ibresi yönünde dönmelidir.

(b) Eğer $\phi_0 = -\pi/2$ ise G3 güney doğrultusundadır. Böylece (4.11)

$$A\ddot{\epsilon} - Cn\Omega \epsilon \cos\lambda = 0$$

şeklini alır. Bu denge konumu etrafında n negatif ise bağıl denge konumuna göre harmonik bir hareket yapar. Denge konumu için koşul jiroskopun saat ibresinin ters yönünde dönmesidir.

Yukarıki iki halde de bağıl denge konumuna göre küçük titreşimlerin periyodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{Cn\Omega \cos\lambda}}$$

dır.

Eğer jiroskopun çerçevesi simetri eksenini λ enleminde meridyen düzlemi üzerinde hareket edecek biçimde sabitleştirilmişse bir denge halinde jiroskopun eksenini yatayla λ açısı yapan bir konumda durur. Bu halde

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{Cn\Omega}}$$

küçük titreşimlerin periyodu olur.

5.000. JİROSKOPLU TEODOLİTLER

5.100. GİRİŞ

Her ne kadar jiroskopik pusla veya jiro-pusla 60 seneden beri kullanılmakta ise de, bu tip aletin jeodezi de uygulanması yakın geçmişte başlamıştır{17}, {29}.

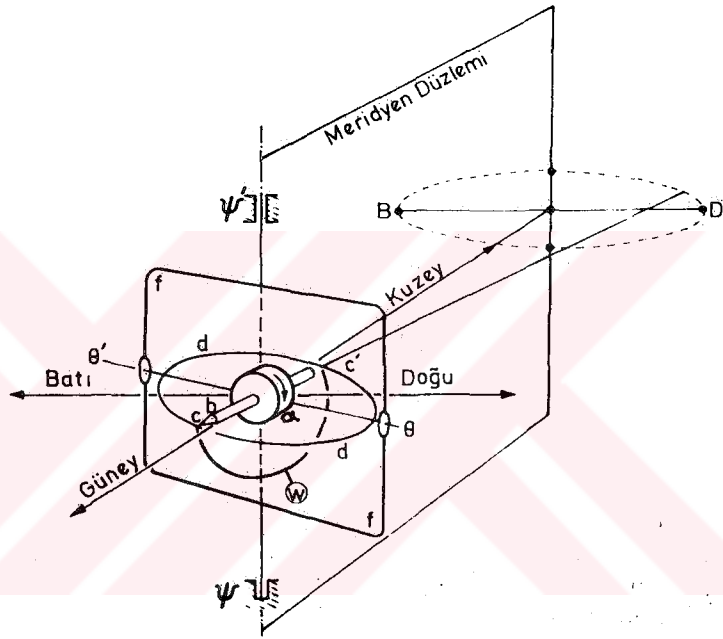
Jiro-pusulanın jeodezide uygulanmasının bu kadar gecikmesi denizcilikte kullanılan jiro-pusulanın karmaşık bir alet olmasındandır. Jeodezide kullanılan jiroskoplu teodolitler denizcilikte kullanılan jiroskoplu puslalarından yapı ve işleyiş bakımından daha basittir. Buna karşılık iki aletin de dayandığı mekanik prensipler aynıdır.

Burada açıklanacak jiroskoplu teodolit jeodezide kullanılan bir jiro-pusludur. Bu tip aletlerde yersel meridyen etrafında simetrik salınımlar yapan, doğrudan doğruya aletin dönme eksenidir.

5.200. TEMEL İLKELER

Bir jiroskoplu teodolitin gerekli özellikleri şematik olarak Şekil (5.1) de gösterilmiştir. Bu şekilde a, b eksenli jiroskop rotorudur. Rotor sabit bir hızla dönmektedir.

Bu dönme işlemi rotorun çevresindeki rijit çerçevesindeki cc' yataklarında olmaktadır. Rotor, eksen,



Şekil 5.1

yataklar ve d çerçevesi jiroskopu meydana getirmektedir. d çerçevesi yatay $\theta\theta'$ yataklarında sabitleştirilmiştir. $\theta\theta'$ yatakları dış f çerçevesindedir. Bu çerçeve de $\Psi\Psi'$ yataklarında tutturulmuştur ve düşey bir eksen belirler. Jiroskoplu teodolitteki bütün yataklar iyi kalitede olmalı ve sürtünme kabil olduğu kadar az olmalıdır. Bu koşullar Ψ ve Ψ' yatakları için geçerli olmalıdır. Ψ ve Ψ' yatakları sağlam bir temele oturtulmuştur.

Şekil (5.1) deki rotoru kuzey bulucu hale getirmek için jiroskopa ω ağırlığı eklenmiştir. Jeodezide kullanılan jiroskoplu teodolitlerde $\theta\theta'$ eksenini jiroskopun kütle merkezinin üstünde olduğundan jiroskopun kütlesi bu ağırlık işlemini görmektedir.

Böyle sarkaçsal jiroskoplara yer çekimi kontrolündeki jiroskoplar denir. Bir jiroskoplu teodolitte yer çekimi kontrolü, jiroskop eksenini yatay olmadığı zaman, jiroskop yer çekiminin meydana getirdiği bir kuvvet çiftinin etkisine girer. Bu kuvvet çifti jiroskopa presiyon yaptırır ve her zaman yatay olan bu hareket jiroskopun eksenine kuzeyi bulduran hareketi yaptırır. Jiroskop hareketinin ikinci nedeni jiroskopik atalet ile birlikte etki eden dünyanın kendi eksenini etrafında dönmesidir. Jiroskop eksenini uzayda konumunu korumaya çalışır. Fakat dünya kendi eksenini etrafında dönmektedir. Bu nedenle jiroskop ekseninin ucu yükselir veya alçalır. Bu ataletsel hareket yatay jiroskop ekseninin kuzey ucu meridyenin doğusunda bulunduğu zaman yukarı doğru batısında bulunduğu zaman aşağı doğrudur. Jiroskop ekseninin bu iki hareketinin bileşkesi eksenin ucunun basık bir eliptik hareket yapmasına neden olur. Jiroskoplu teodolitte eksenin bu elipsi çizmesi için geçen zaman salınım periyodudur. Elipsin büyüklüğü eksenin hareketinin başlangıç koşullarına bağlıdır. Elipsin konumu kuzeyi verir. Kısaca eksenin kuzey ucu yatay ve meridyen düzleminin batısında olduğu zaman, ataletsel hareket eksenin ucunu yükselterek sarkaçsal jiroskopa bir yer çekimi kuvvet çifti etki ettirir. Rotorun dönme yönü doğru ise bu kuvvet çifti eksenin ucu-

nu meridyene doğru hareket ettirecektir. Meridyene gelindiğinde eksen en yüksek konumundadır, fakat batıya doğru hareket devam eder ve eksen ucu alçalır, yer çekimi kuvvet çifti azalır ve batıya doğru olan presesyon yavaşlar. Batıya doğru yaptığı bu hareketin sonunda eksenin ucu yine yatay konumdadır ve presesyon durmuştur. Her zaman varolan ataletsel hareket eksen ucunu yataydan aşağı çeker. Böylece doğuya doğru presesyon başlar. Eksen eliptik yörüngesinin alt kısmını kateder. Presesyon hareketinin olayları meridyene göre simetrik olduğundan elips de meridyen düzlemine göre simetrikdir. Kuzeyi bulmak için elipsi eşit olarak iki parçaya ayırmak yeterlidir. Ayrıca eksenin kuzey doğrultusunda denge konumuna gelmesi beklenebilir. Sönümleme kuvvetlerinden dolayı yörünge gerçekte bir elips değil eliptik bir spiraldir.

Jiroskoplu teodolitin önemli bir özelliği jiroskopun asılma biçimidir. Askı işi uzun ve ince metal bir tel ile yapılmaktadır. Bu telde jiroskopun ağırlığı yüzünden gerilmeler meydana gelmektedir. Telin burulma özelliği minimumdur. Burulmayı azaltmak için diğer bazı önlemlerde alınmıştır. Örneğin jiroskop elemanının presesyon hareketinden dolayı telde burulma başladığı zaman, bu burulma askı telinin aynı yönde döndürülmesi ile giderilir. Böylece burulma alınmış olur, ve aynı zamanda burulma gerilmesi ortadan kalkar.

6.000. JİROSKOPLU TEODOLİTİN HAREKETİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde jiroskoplu teodolitin hareket denklemleri çıkartılacaktır. İlk önce dönmeyen jiroskop halinde hareket denklemleri çıkarılacak ve hareketi incelenecektir. Bundan sonra dönen jiroskop halinde jiroskoplu teodolitin hareket denklemleri çıkartılacak ve hareketi incelenecektir{17}{29}{46}.

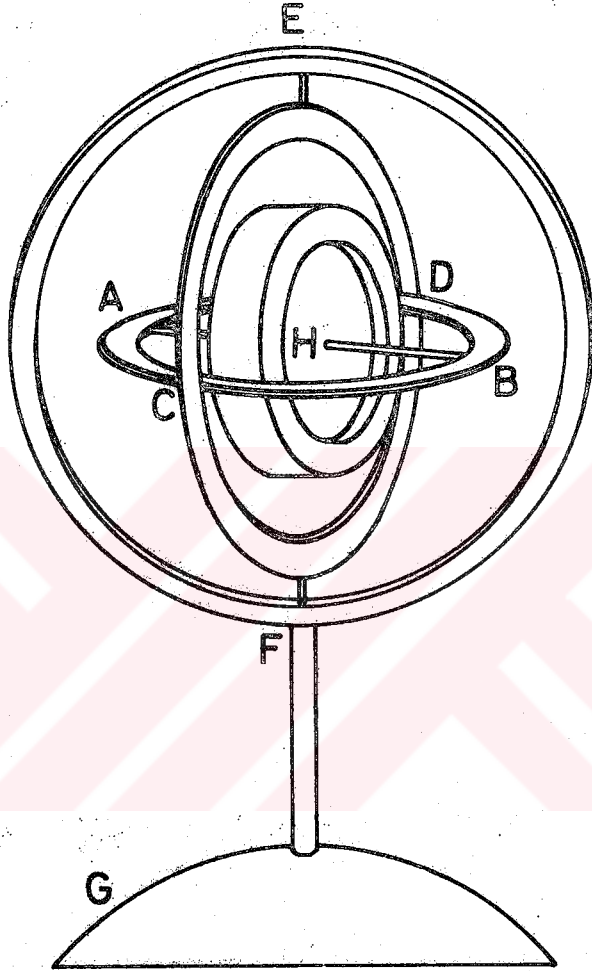
6.100. GENEL PRENSİPLER

Von Bohnberger tarafından bulunan üç serbestlik

derecesini haiz jiroskopun jiroskoplu teodolitte kullanılan iki özelliği vardır. Bunlardan birincisi dönen jiroskop rotorunun eksenini dış çerçevenin hareketlerinden bağımsız olarak uzayda aynı doğrultuyu korur{46}. İkinci olarak dönme eksenine dik yöndeki yatay eksen etrafında etki eden bir kuvvet çifti jiroskop rotorunun düşey eksen etrafında presesyon yapmasına sebep olur. Şekil (6.1) deki 3 serbestlik derecesine sahip basit jiroskopda H rotoru yatay dairesel bir çerçeveye monte edilmiş AB mili etrafında serbestçe dönebilmektedir. Yatay dairesel çerçeve düşey dairesel çerçeveye C ve D noktalarında bağlanmıştır. Yatay dairesel çerçeve düşey dairesel çerçeve içinde CD etrafında kolayca dönebilmektedir. İkinci çerçeve EF noktalarını birleştiren doğrultuda G ye bağlı son bir dairesel çerçeveye monte edilmiştir. Böylece alet AB, CD ve EF eksenleri etrafında serbestçe dönebilmektedir. İlk anda üç eksenin birbirine dik olduğu kabul edilmelidir.

Eğer H jiroskop rotoru AB eksenini etrafında hızla döndürülürse ve C deneyci tarafından istenildiği doğrultuda hareket ettirilse bile jiroskopun eksenini uzayda aynı doğrultuyu gösterecektir. Yalnız jiroskop rotorunun açısal hızı mümkün olduğu kadar sabit tutulmalıdır.

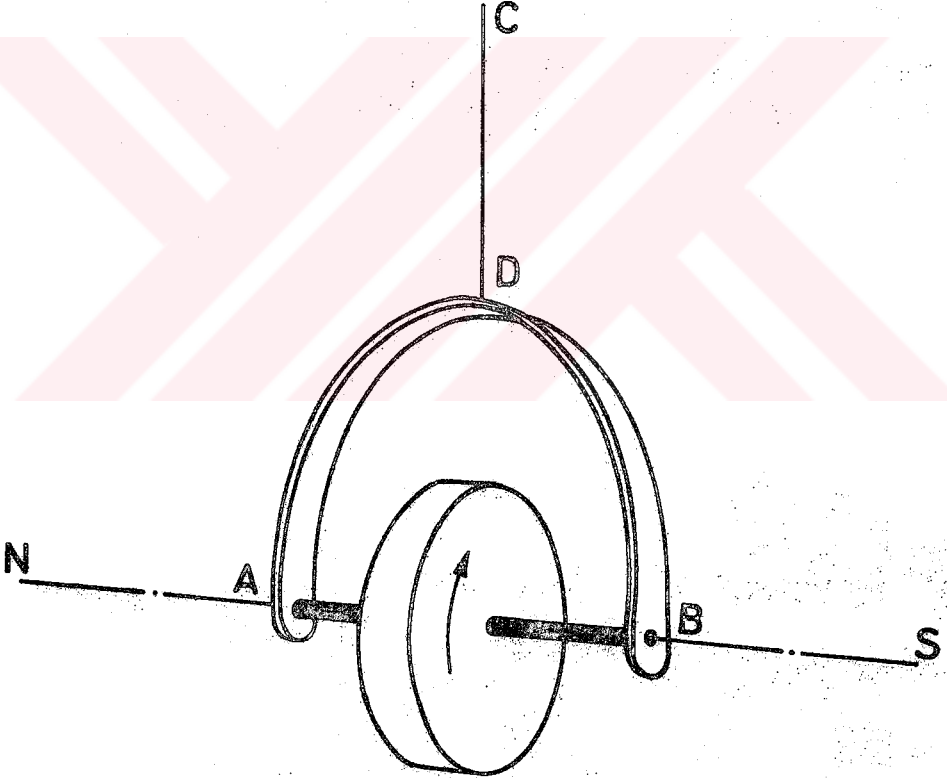
Jiroskopun ikinci özelliğini göstermek için jiroskopun rotoru AB eksenini etrafında hızla döndürülür. İlk anda AB ve CD eksenleri yatay bir düzlemde EF de düşey bir doğrultu üzerinde olsun. İç çembere A noktasında küçük bir ağırlık takılırsa bu ağırlığa etki eden yerçekimi kuvveti CD etrafında bir kuvvet çifti doğuracaktır. Aşağıya doğru inmek yerine iki çerçeve ve jiroskop rotoru EF eksenini etrafında beraber bir ünite olarak dönecektir. Düşey eksen etrafında bu hareket, eğer jiroskop rotoru aynı hızla döndürülürse ve yerçekimi kuvveti çifti sabit tutulursa, sabit olur. Bu hareket presesyon olarak isimlendirilir. Eğer rotor aynı hızla döndürülürse ve ağırlık A noktasından B noktasına alınırsa alet EF etrafında ters yönde presesyon yapacaktır.



Şekil 6.1

Sarkaç biçiminde çalışan jiroskoplu bir teodolit elde edebilmek için jiroskop şu biçimde değiştirilmelidir[47]. Jiroskop rotoru eksenini yarım bir dairesel çerçeveye takılır. AB bu yarım dairesel çerçevedir. Bu çerçeve rotor sistemi sabit bir C noktasından CD ipi

ile asılır. Jiroskop rotoru küçük bir elektrik motorunun rotoru olarak sabit bir hızla döndürülür. Jiroskoplu teodolit ekvator'den bir çerçeveye konur ve jiroskop rotorunun AB eksenini yatay bir düzlemde doğu batı doğrultusuna getirilir. Dünya eksenini etrafında batıdan doğuya doğru hareket ederken jiroskop rotorunun AB eksenini jiroskopun ilk özelliğinden dolayı, uzayda aynı doğrultuda kalmaya çalışacaktır. Fakat jiroskoplu teodolit yeryüzüne bağlı olduğundan yer çekimi kuvveti CD yi düşey doğrultuda jiroskop rotorunun eksenini yatay konumda tutacaktır. Diğer taraftan bu eksen uzaya göre doğrultusunu sürekli olarak değiştirmeye zorunlu kalacaktır{47}.



Şekil 6.2.

Doğrultunun bu değişimi B de bir ağırlık asılmasıyla aynı etkiyi yapar. Böylece jiroskop C de düşey doğrultu etrafında presesyon yapacaktır. Bu presesyon işlemi ABC den geçen düşey düzlemin doğrultusuna girinceye kadar devam edecektir.

Bu düşey düzlem C den geçen meridyen düzlemidir. AB eksenini meridyen düzleminin dışına doğru döner dönmmez, dünyanın dönme hareketi ve yer çekimi kuvveti çifti dönme ekseninin düşey etrafında aksi yönde presesyon yapmasına neden olacaktır. Kuvvet çiftinin bu yön değiştirmesi jiroskop rotorunun ekseninin meridyen etrafında salınımlar yapmasına neden olur. Sürtünme sonucu meridyen düzleminde sabit olarak durur. Jiroskoplu teodolit düşey eksen etrafında presesyon salınımları yaparak kuzeyi bulan bir alettir. Jiroskop rotorunun dönme yönü yeryüzünün eksenini etrafında dönmesiyle aynı olmalıdır. Kullanılmakta olan jiroskop rotorunun açısal hızı 18000-24000 devir/dakikadır. Bu yüksek hızlarda dönen eleman yani rotor dinamik olarak simetrik olmalıdır. Bu nedenle rotoru imal ederken en uygun maddeler kullanılmalı en uygun ve doğru biçimde imal edilmelidir. Dinamik simetrinin gerçekleştirilmesi için şu 3 şart sağlanmalıdır{47}.

1. Kütle merkezi dönme eksenini üzerinde olmalıdır.
2. Dönme eksenini bir asal atalet momenti eksenini olmalıdır.
3. Dönme eksenine kütle merkezinde dik bütün eksenlere göre atalet momentleri eşit olmalıdır.

Bunlarla birlikte yüksek açısal hızlardan meydana gelen merkezkaç kuvveti rotorun yapıldığı cismin mukavemet değerinden elde edilen emniyet değerini aşmamalıdır. Son olarak da sürtünme kuvvetleri minimuma indirilmelidir. Sürtünmeyi minimuma indirmek için en iyi cinsden bilyalı yataklar seçmek, ana yataklar için bilyasal benzerliği gözönüne almak ve jiroskop rotorunu hidrojenle veya helyumla dolu bir ortamda döndürmek ge-

reklidir. Ayrıca jiroskop sisteminin ağırlık merkezi tutturulduğu noktadan aşağıda olmalıdır. Bundan sonra jiroskoplu teodolit'in ilk önce rotorunun dönmemesi hali sonra da rotorun sabit bir hızla dönmesi için hareket denklemleri çıkarılacaktır. Bu hareket denklemleri çözümlenerek hareket saptanacaktır.

6.200. JİROSKOPLU TEODOLİTİN ROTORUNUN DÖNMEMESİ HALİ

Jiroskoplu teodolit rotorunun dönmemesi halinde rotorun dönme eksenini az sönümlü bir salınım hareketi yapar.

6.210. ASKI TELİNİN BURULMASI

Jiroskoplu teodolitde askı teli yüksek mukavemeti olan dikdörtgen kesitli bir çelik teldir. Askı teli genellikle nivafleksden yapılmaktadır. Jiroskop rotoru dönmeyen jiroskop içinde bulunduğu silindirik mahfaza ile birlikte askı telinin boyuna eksenini etrafında dönmekte serbesttir. Askı telinin boyuna eksenini düşey doğrultusunda.

Jiroskop sistemi serbest bırakılınca askı teli bir yüklemeye maruz kalır. Bu nedenle jiroskop mahfazası belli bir hareket kazanır. Bu hareket ilk önce bir yöne sonra diğer yöne doğru dönmeydir. Aslında jiroskop mahfazası bir konik sarkaç gibi hareket etmektedir(25), {65}. Ortadan salınımın bir ucuna gelirken enerji hareket eden ağırlıktan askı telinin liflerine kayma ve çekme gerilmeleri olarak geçer. Jiroskop sistemi salınımın bir ucundan ortaya doğru düzğüne yakın bir açısal hızla gelirken enerjinin bir kısmı yavaş yavaş serbest bırakılır.

Bundan sonra aynı işlem salınımın diğer ucunda meydana gelir. Hareket eden jiroskop sistemi ile askı teli arasında sürekli bir enerji değişimi vardır. Salınımın 1/4 lük kısmında kinetik enerji jiroskop sisteminden askı teline geçer. Burada potansiyel enerji ola-

rak toplanır. Bu potansiyel enerji salınımının sonra gelen $1/4$ 'lük kısmında tekrar kinetik enerji olarak jiroskop sistemine geçer. Aynı işlem salınımının geri kalan $1/2$ lik kısmında devam eder. Hernekadar enerjinin bir kısmı bu enerji değişiminde kaybolursa ve jiroskop sistemi azalan genlikle hareket etmeye devam ederse de ilk başta askı telinin yeterince elâstik olduğu ve histerisis kayıpları olmadığı gözönünde alınmalıdır. Böyle kayıplar ve sonuçlarının jiroskop sisteminin dönme hareketine etkisi bir sonraki bölümde incelenmektedir. Şimdilik düşey eksen etrafında etki eden P kuvvet çifti ile askı telinin bileşke açısal dönmesi θ ile arasındaki bağlantı söz konusu edilecektir. Dairesel kesitli bir askı teli halinde burulma teorisi oldukça kolaydır. Bu nedenle çoğu yazarlar bu konuda uygulama için yeterli formülleri elde etmişlerdir{25}, {65}.

Dikdörtgen kesitler halinde ise (Bu kesitte bir kenar diğer kenardan 20 defa daha büyüktür) sorun daha karmaşıktır. Bir telin kesiti boyuna eksen boyunca bir burulmaya maruz kalırsa yanyana olan liflerde sadece kayma gerilmeleri gözönüne alınır{25}, {65}. Burulma momenti θ ile orantılıdır. Eğer eğimli liflerde kesitin kenarında olduğu gibi çekme gerilmeleri olursa burulmaya θ^3 ile orantılı bir mukavemet eklenecektir. Gerçekte böyle gerilmeler ihmal edilebilir. Burulma açısı fazla olursa bu etki gözönüne alınmalıdır.

Şimdiki halde temel teoride gözönüne alınan kayma gerilmelerinden daha önemli bir husus mahfaza içinde jiroskop sisteminin ağırlığının neden olduğu aksenal bir yüklemidir. Jir skoplu teodolitde fazla aksenal yüklenme vardır. Yerçekimi kuvvetleri askı telinin çekme mukavemetinin % 50 si kadar bir miktarını tutmaktadır. Bu çekme kuvvetine burulmadan çıkan ve dış liflerin uzamasına neden olan etki de gözönüne alınır ve verilen bir θ dönmesine karşı gelen moment bulunabilir. Jiroskoplu teodolitte kullanılan askı telinin burulması incelenmiş ve aşağıdaki bağlantı elde edilmiştir{25}, {65}.

$$M = \frac{1}{3} bc^3 G \theta \left(1 + \frac{1}{120} \frac{E}{G} \frac{b^4}{c^2} \theta^2 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{G} \frac{b^2}{c^2} \right) \dots (6.1)$$

Burada;

- M θ radyanlık burulmayı elde etmek için kg.cm olarak gerekli burulma momenti
- θ radyan olarak birim uzunluk için burulma açısı
- b cm olarak askı telinin dikdörtgen kesitinin genişliği
- c cm olarak askı telinin dikdörtgen kesitinin kalınlığı
- E kg/cm² olarak elastisite modülünü
- G kg/cm² olarak kayma modülünü
- σ_0 Normal kuvvetten ileri gelen çekme gerilmesini kg/cm² olarak göstermektedir.

6.220. DÖNMEYEN JİROSKOPLU TEODOLİTİN HAREKET DENKLEMİ

Eğer jiroskop serbest bırakılır ve askı teli de serbestçe hareket ederse yatay bir düzlemde konik sarkaç gibi hareket etmeye başlar. Denge konumundan ayrılır ayrılmaz, enerji hareket eden cisimden telin liflerine geçer ve askı telinde kayma gerilmeleri meydana gelir. Jiroskop sistemi durduğu zaman kayma gerilmeleri tedricen azalır. Bu azalma jiroskop sisteminin ters yönde hareket etmesini sağlar. Denge konumunun öteki tarafında çevrim tamamlanır. Bu çevrim sırasında askı teline geçen enerjinin bir kısmı iç sürtünmeyi yenmek için kullanılır. Bu enerji sonra ısı enerjisine dönüşür. Isı enerjisine dönüşen bu enerji de çevredeki atmosferde dağılır. Aynı zamanda jiroskop sistemi çevredeki atmosferde dönerken enerjisinin bir kısmını kaybeder. Her

iki sürtünme kuvveti de jiroskopun açısal hızıyla orantılıdır. Bu kabul 0.005 rad/sn mertebesindeki açısal hızlar için geçerlidir{25}, {65}. A dönmeyen jiroskop sisteminin mahfazası içindeki düşey eksen etrafındaki $g - \text{cm}^2$ cinsinden atalet momenti olsun. Jiroskop sistemi denge konumundan bir θ açısı kadar ayrılırsa herhangi bir anda açısal hızı

$\frac{d\theta}{dt}$, açısal ivmesi $d^2\theta/dt^2$ ve açısal momentumu $H=A\frac{d\theta}{dt}$

dir. Eğer Newton'un açısal dönmelere uygulanan ikinci kanunu gözönüne alınırsa{25}, {65},

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{M}$$

dir. (6.1) ifadesinde görüldüğü gibi M_y , θ ile orantılıdır.

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$, θ pozitif olduğu zaman negatif olduğundan

$$A \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -q \theta \dots\dots\dots (6.4)$$

olur. Burada q bir sabittir. Sürtünme kuvvetleri gözönüne alınırsa sürtünme kuvvetlerinin etkisi

$\frac{d\theta}{dt}$ ile orantılıdır. Sürtünme kuvvetleri harekete karşı

olduklarından dönmeyen jiroskop sisteminin hareket denklemi aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilir.

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + p \frac{d\theta}{dt} + q\theta = 0 \dots\dots\dots (6.5)$$

Bu ikinci dereceden katsayıları sabit doğrusal bir diferansiyel denklemdir.

Bu diferansiyel denklemi çözmek için denklem sabit katsayılı birinci dereceden doğrusal homojen bir denklem sistemi haline getirilir[48].

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= 0 \cdot \theta + \alpha \\ \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{q}{A} \theta - \frac{p}{A} \alpha\end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6.6)$$

Sistemin katsayılar matrisi

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q}{A} & -\frac{p}{A} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Özdeğerleri elde etmek için karakteristik denklemi veren

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\frac{q}{A} & -\frac{p}{A} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

determinantı yazılır. Buradan karakteristik denklem:

$$A\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

biçiminde elde edilir. Öz değerler bu ikinci dereceden cebirsel denklemin kökleri olarak elde edilir.

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4Aq}}{2A} \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4Aq}}{2A} \quad \dots\dots\dots (6.7)$$

Bu özdeğerlere tekabül eden öz vektörler

dir. $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

yazılabilir. τ ile N yi bir benzerlik dönüşümünde köşegenleştiren bir matrisi gösterecek

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} = \tau \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

dönüşümü yapılır[48]. Özdeğerlere karşı gelen özvektörlerden elde edilen τ matrisi ve τ^{-1} tersi aşağıdaki gibidir.

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \tau^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Özdeğerlerden ibaret köşegen matris aşağıdaki gibidir.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda diferansiyel denklem

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \vec{y}$$

yapısını kazanır. Çözümü

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

dür. Tekrar fiziksel anlamı olan değişkenlere geçerek

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} = \tau \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

bulunur. Şu halde θ nın genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\theta = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \dots\dots\dots (6.8)$$

Eğer p^2 , $4aq$ dan büyük veya $4aq$ ya eşitse gerçekte salınım olmayan bir hareket elde edilir. Bu nedenle sadece p^2 nin $4aq$ dan küçük olduğu hal incelenir. Bu da λ_1 ve λ_2 yi sanal iki büyüklük yapar.

$$\lambda_1 = -\alpha + i\beta \quad \lambda_2 = -\alpha - i\beta$$

yazılır. Burada

$$\alpha = \frac{p}{2A} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{\sqrt{4Aq - p^2}}{2A}$$

dır. Çözüm

$$\theta = e^{-\alpha t} (c_1 e^{i\beta t} + c_2 e^{-i\beta t})$$

şeklindedir. Bu açıkça

$$\Theta = e^{-\alpha t} (D \cos \beta t + E \sin \beta t)$$

olur. Burada

$$D = C_1 + C_2 \quad E = i(C_1 - C_2)$$

dir. $E = -D$ tany yazılırsa (burada γ herhangi bir sabittir)

$$\Theta = D \sec \gamma e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)$$

elde edilir. Son olarak

$$B = D \sec \gamma$$

konursa dönmeyen jiroskop sisteminin hareket denklemi

$$\Theta = B e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)$$

$$\Theta = B e^{-pt/2A} \cos\left(\frac{\sqrt{4Aq - p^2}}{2A} t + \gamma\right) + \Theta_0 \dots (6.9)$$

biçiminde elde edilir. Burada B ve γ başlangıç koşullarından elde edilen sabitler, A atalet momenti, p ve q sabitlerdir. Bu sönümlü basit harmonik, hareketin denklemdir.

6.230. DÖNMEYEN JİROSKOP SİSTEMİNİN HAREKETİNİN ÖZELLİKLERİ

- a) Salınım Peryodu: $t = 0$ olduğunda Θ nun belli bir değeri vardır. $\beta t = 2\pi$ olduğu zaman Θ aynı değeri tekrar alır. Bu da $t = 2\pi/\beta$ olduğu zamandır. Sönümlü hareketin peryodu;

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{4\pi A}{\sqrt{4Aq - p^2}} \dots (6.10)$$

eşitliğiyle verilir. Diğer taraftan hiç sönüm olmasaydı

yani $p = 0$ olsaydı peryod

$$T' = \frac{4\pi A}{\sqrt{4Aq}}$$

olurdu. Sönüm etki peryodu

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \frac{4Aq}{4Aq - p^2} \dots\dots\dots (6.11)$$

oranında arttırmaktadır.

b) Salınım eğrisinin sınırları: Aşağıdaki üç eğri karşılaştırılırsa şu sonuçlar elde edilir.

1. Salınım eğrisi : $\theta = Be^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)$
2. Genlik eğrisi : $\theta = Be^{-\alpha t} \dots\dots\dots (6.12)$
3. Genlik eğrisi : $\theta = -Be^{-\alpha t}$

Bu üç eğrinin ilk türevleri

1. $\frac{d\theta}{dt} = -Be^{-\alpha t} \{\alpha \cos(\beta t + \gamma) + \beta \sin(\beta t + \gamma)\}$
2. $\frac{d\theta}{dt} = -B\alpha e^{-\alpha t} \dots\dots\dots (6.13)$
3. $\frac{d\theta}{dt} = B\alpha e^{-\alpha t}$

biçimindedir.

Açık olarak $\beta t + \gamma = 0, 2\pi, 4\pi, \dots\dots\dots$ olan noktalarda salınım eğrisinin eğimi birinci genlik eğrisinin o noktalarındaki eğimine eşittir.

$\beta t + \gamma = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\dots\dots$

olan noktalarda salınım eğrisinin eğimi ise ikinci genlik eğrisinin noktadaki eğimine eşittir. $\beta t + \gamma$ nın $-\pi/2$ ve $\pi/2$ arasındaki değerleri için $\cos(\beta t + \gamma)$ nın

değeri daıma 1 den küçüktür. Bu nedenle salınım eğrisindeki değerleri birinci genlek eğrisinde tekabül eden değerlerden daha küçüktür. $\beta t + \gamma$ nın $\pi/2$ ve $3\pi/2$ arasındaki değerleri negatif ve 1 den küçük olduğundan nun bu aradaki değeri sayısal olarak ikinci genlik eğrisinin karşı gelen değerlerinden küçüktür. Salınım eğrisi tamamiyle iki genlik eğrisi arasında kalmaktadır. Sadece;

$$\beta t + \gamma = 0, \pi, 2\pi, \dots\dots\dots$$

değerleri için genlik eğrilerine ilk önce bir tarafta sonra diğer tarafta teğet olmaktadır.

$$\beta t + \gamma = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots\dots\dots$$

olduğu zaman θ nın değerleri sıfırdır ve salınım eğrisi bu noktalarda absis eksenini keser (Şekil 6.3).

c) θ nın maksimum ve minimum değerleri: Jiroskoplu teodolitteardışık dönüm noktalarında ölçmeler yapılır. Bu uç değerler

$\frac{d\theta}{dt} = 0$ olan noktalarda elde edilir. Fakat bundan sonraki hesaplarda bu ölçmelerin:

$$\beta t + \gamma = 0, \pi, 2\pi, \dots\dots\dots$$

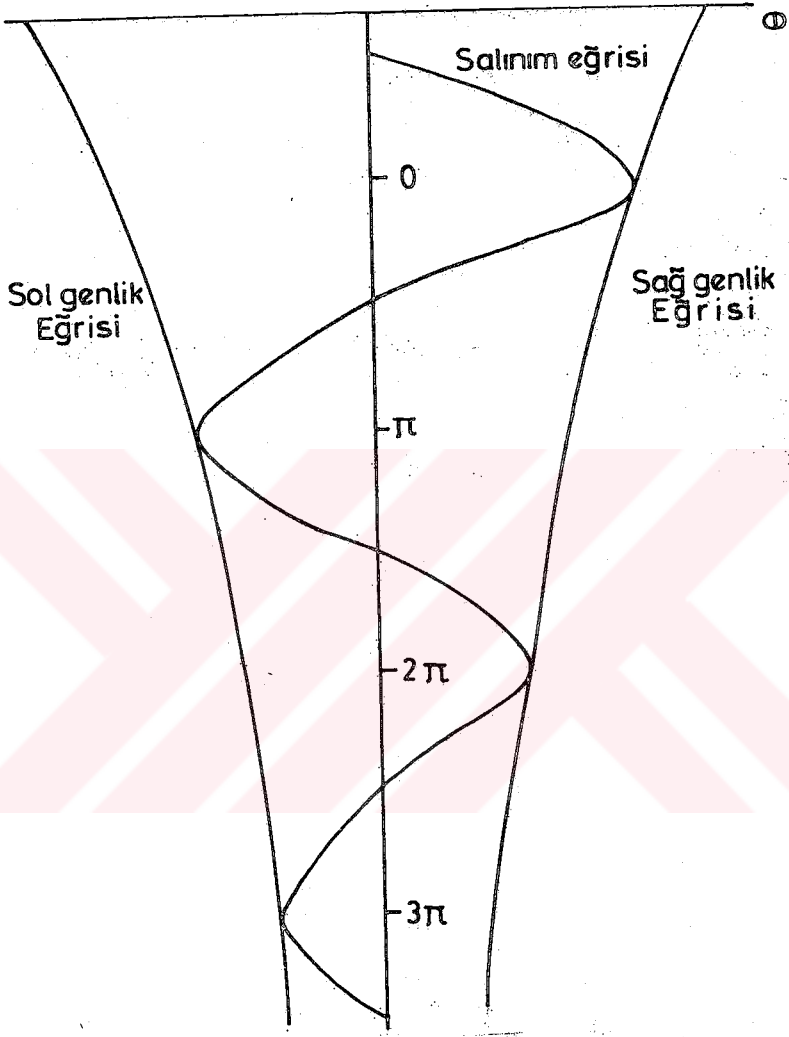
olduğu noktalarda yapıldığı kabul edilecektir. Bu varsayımdan dolayı yapılan hatayı gözönüne almak gereklidir. Salınım eğrisindeki bir uç değer için

$$-Be^{-at} (\alpha \cos(\beta t + \gamma) + \beta \sin(\beta t + \gamma)) = 0$$

dir. B ve e^{-at} sıfır olmadığından

$$\tan(\beta t + \gamma) = -\alpha/\beta$$

olmalıdır. Bu uç değerlere π zaman aralıkları kadar farklı noktalarda erişilmektedir. α ve β nın her ikisi de



Şekil 6.3.

pozitifse α β dan çok daha küçük olduğundan salınım eğrisinde uç değerlere az önce erişilir. Bu noktalarda genlik eğrileri ile birbirine teğet olur.

$$\begin{aligned}\sec^2(\beta t + \gamma) &= 1 + \tan^2(\beta t + \gamma) \\ &= 1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\cos(\beta t + \gamma) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

olur. Böylece uç değerler

$$\theta_m = Be^{-\alpha t} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

formülüyle verilir. t nin değerleri bir evvelki denklemden elde edilir.

Gerçekte gözlenen θ_m değerleridir. Fakat hesaplarda θ nın

$$\beta t + \gamma = 0, \pi, 2\pi \dots\dots\dots$$

değerlerine karşıt değerler kullanılır. Bu halde $\theta_m - \theta$ nin ihmal edilecek derecede küçük olduğu gösterilmelidir. Yukarki varsayımda yapılan hata $\theta_m - \theta$ ile verilir. Bu fark α ve β değerlerine bağlıdır. α, β dan çok küçük olduğundan

$\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ teriminin değeri ile yakındır. Bu da hatayı ihmal edilir yapar.

d) Logaritmik azalma: Absis ekseninin aynı tarafında olan uç değerlere $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ denirse ve bunlara karşıt olan zamanlar $t_0, t_1, t_2, \dots$ ile gös-

terilirse $\tan(\beta t_0 + \gamma) = \frac{-\alpha}{\beta}$, $t_1 = t_0 + T$, $t_2 = t_1 + T$ olur. Burada

$$T = \frac{4\pi A}{\sqrt{4Aq - p^2}} = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$\theta_0 = Be^{-\alpha t_0} \cos(\beta t_0 + \gamma)$$

$$\theta_1 = Be^{-\alpha t_1} \cos(\beta t_1 + \gamma) = Be^{-\alpha(t_0 + T)} \cos(\beta(t_0 + T) + \gamma)$$

$$\frac{\theta_1}{\theta_0} = \frac{e^{-\alpha(t_0 + T)}}{e^{-\alpha t_0}} = e^{-\alpha T}$$

e tabanına göre logaritma alınırsa

$$\log_e \frac{\theta_1}{\theta_0} = -\alpha T = -\frac{p}{2A} T$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\theta_3}{\theta_2}$$

elde edilir. Taraf tarafa çarparak

$$\frac{\theta_r}{\theta_0} = e^{-r\alpha T}$$

elde edilir. Bunun logaritması alınırsa

$$\log_e \frac{\theta_r}{\theta_0} = -r\alpha T = -\frac{pr}{2A} T$$

elde edilir.

6.240. SALINIM EĞRİSİNİN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNE GÖRE BULUNMASI

(6.22) no.lu bölümde salınım eğrisinin

$$\theta = \theta_0 + B e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma)$$

olduğu gösterilmiştir. Burada θ_0 denge konumudur. $\alpha = p/2A$ ve $\beta = (\sqrt{4aq - p^2})/2A$ dır. Bu üç sabitten θ_0 en büyük doğrulukta bilinmesi gereken büyüklüktür. Bu özellikle bir doğrultunun azimutunun bulunmasında gereklidir. θ_0 değeri bir ölçme serisinden diğer bir ölçme serisine değişmektedir. Bunun nedeni de aletin meridyene göre yöneltilmesidir. Geri kalan iki sabit α ve β alete bağlı birer değerdir. Bu iki değer aletten alete değişir. Bu nedenle aynı koşullar altında uzun bir zaman süresi için sabit kalmalıdır. Bu sabitlerin takip eden hesaplarda kullanılması için yüksek bir doğrulukta bulunması gereklidir. Bu üç sabitin bulunması için yapılan deneylerde şu hususlara dikkat etmelidir.

Sıcaklık birkaç saat içinde 1°C dan fazla değişmemelidir. Bu 50 - 60 dönüm noktası anlamına gelmektedir. Alet dikkatli olarak tesviye edilmelidir. Tesviye ölçmeler sırasında bozulmamalıdır. Her salınım sonunda yardımcı skalada dönüm noktası değeri okunur. Jiroskop göstergesinin sabit skalanın ortasındaki sabit göstergeden her geçişinde zaman kayıt edilir.

Ölçülen değerler $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ olsun ve bu ölçmelerde $v_1, v_2, v_3, \dots$ aksidantel hataları bulunsun.

$$\lambda_1 + v_1 = \theta_0 + \theta_1, \quad \lambda_2 + v_2 = \theta_0 - \theta_2, \dots$$

$t_1, t_2, \dots$ anlarındaki düzeltilmiş değerlerdir.

Hata denklemleri

$$v_1 = \theta_0 + \theta_1 - \lambda_1$$

$$v_2 = \theta_0 - \theta_2 - \lambda_2$$

.....(6.14)

dir. Eğer birbirini takip eden dönüm noktası ölçmelerinin

$$\beta t + \gamma = 0, \pi, 2\pi \dots\dots\dots$$

olduğu noktalarda yapıldığı ve ilk ölçmenin $t_1=0$ anında yapıldığı kabul edilirse;

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} T \dots\dots\dots (6.15)$$

$$t_3 = t_2 + \frac{1}{2} T = T$$

olur. Hata denklemleri

$$v_1 = \theta_0 + Be^0 - \lambda_1$$

$$v_2 = \theta_0 - Be^{-1/2\alpha T} - \lambda_2 \dots\dots\dots (6.16)$$

$$v_3 = \theta_0 + Be^{-\alpha T} - \lambda_3$$

dır. Bu denklemler normal denklemlerin kurulması için uygun bir halde değildirler. Bunun nedeni B ve α bilinmeyenleri cinsinden doğrusal olmamalarıdır. Bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri kullanılarak ve doğrusal olmayan terimi iki değişkenli Taylor serisine açarak doğrusal yapılabilir.

$$\theta_0 = (\theta_0) + x$$

$$B = (B) + y$$

$$\alpha T = (\alpha T) + z$$

konulur. Burada parantezli değerler yaklaşık değerler ve x,y,z bu değerlere ait düzeltilmiş değerleri verecek düzeltmelerdir. Doğrusal olmayan terimlere Taylor serisi uygulanırsa;

$$Be^{-r\alpha T} = (B) e^{-r(\alpha T)} + e^{-r(\alpha T)} y - r^2 Be^{-r(\alpha T)} z$$

elde edilir. Hata denklemleri böylece aşağıdaki son biçimlerini alırlar.

$$v_1 = x + e^0 y - \frac{0}{4} (B) e^{-0/2(\alpha T)} z + (\theta_0) + (B) e^0 - \lambda_1$$

$$v_2 = x - e^{-1/2(\alpha T)} + \frac{1}{4} (B) e^{-1/2(\alpha T)} z + (\theta_0) - (B) e^{-1/2(\alpha T)} - \lambda_2$$

$$v_3 = x - e^{-2/2(\alpha T)} y - \frac{4}{4} (B) e^{-2/2(\alpha T)} z + (\theta_0) + (B) e^{-2/2(\alpha T)} - \lambda_3$$

Hata denklemlerinden normal denklemler kurulur ve çözüm elde edilir. θ_0 , B, αT değerleri bulunur. Böylece aletin B, α sabitleri elde edilir. θ_0 ölçme serisinden ölçme serisine değişmektedir.

6.300. DÖNEN JİROSKOPLU TEODOLİTİN HAREKET DENKLEMLERİ

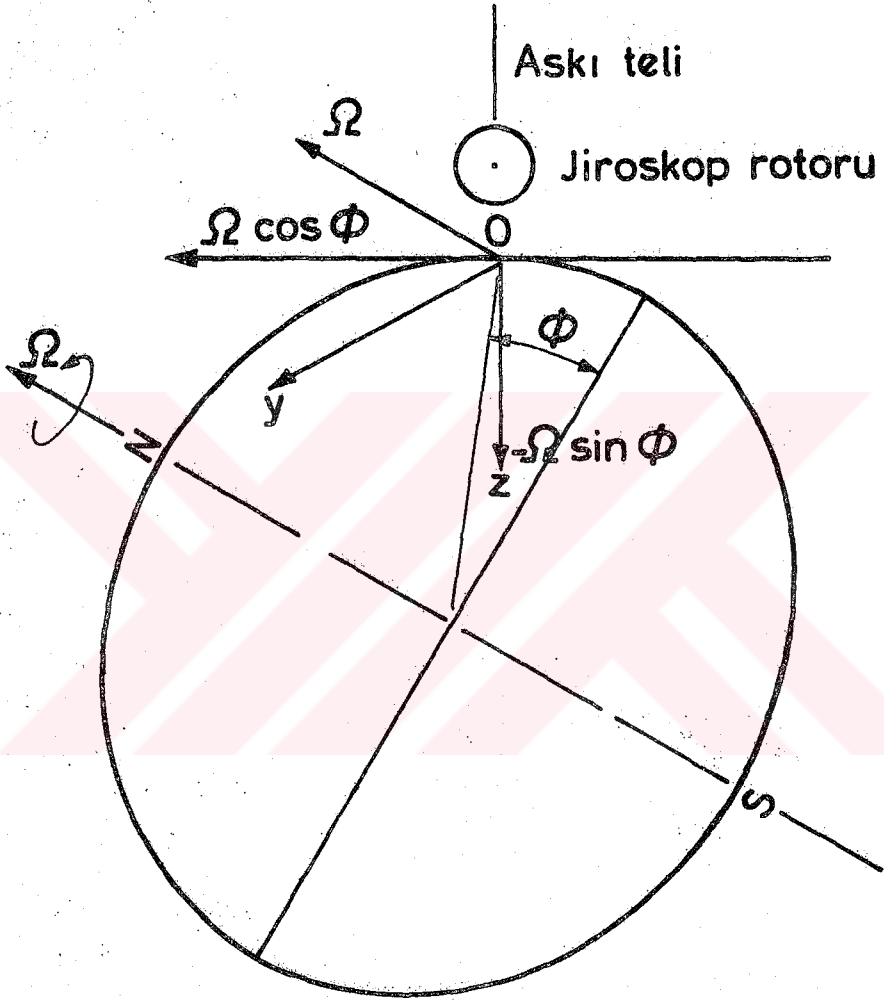
Jiroskop rotoru bir elektrik motoru ile sabit bir açısal hızla döndürülmektedir. Jiroskop bir mahfaza içinde düşey bir tel ile asılı durmaktadır. Bu halde dönme eksenini temel olarak yatay bir düzlemedir. İlk anda taşıyıcı telin urulmaya maruz kalmadığı kabul edilir. Böylece taşıyıcı tel jiroskop ve mahfazaya hiçbir dönme momenti etki ettirememektedir. Dünyanın dönme eksenini NS ve ölçme konumu enlemi ϕ olan bir nokta olsun. Yeryüzünün kabul edilen şekli jiroskoplu teodolit haretine etkenler sadece yeryüzünün açısal hızı ve yer çekimi kuvveti olduğundan önemli değildir. Hareketi incelemek için bir sağ el sistemi olan Oxyz seçilmiştir. Bu sistemin merkezi O dur. Ox ve Oy O daki yatay düzlemedir. Ox kuzey doğrultusunda ve Oy de batı doğrultusundadır. Oz düşeyle çakışır ve dünyanın merkezi yönündedir. Yer çekimi anomalileri ihmal edilirse Ox ve Oz N,S,O nun oluşturduğu meridyen düzleminde olduğu kabul edilebilir (Şekil 6.4) {17}, {29}, {46}, {47}. Ω yeryüzünün kendi etrafında döndüğü ataletsel uzaya göre açısal hızı olsun. Ω dönmenin sideral peryodundan bulunabilir. Bu değer $2\pi/86164.091 = 7.2921158 \times 10^{-5}$ rad/sn. dir.

Açısal hız vektörel bir büyüklük olduğundan ϕ enlemindeki O noktasından açısal hız vektörü $\vec{\Omega}$ yı göstermek için yeryüzünün dönme eksenine paralel bir vektör çizilir (Şekil 6.4). Bu vektör koordinat eksenleri boyunca bileşenlere ayrılır. Bu vektörün Ox doğrultusundaki bileşeni $\Omega \cos \phi$, Oy doğrultusundaki bileşeni sıfır ve Oz doğrultusundaki bileşeni $-\Omega \sin \phi$ dir. Eğer $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ x, y, z doğrultularındaki birim vektörler ise

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \phi \vec{i} + 0 \vec{j} - \Omega \sin \phi \vec{k}$$

dir.

Eğer jiroskop eksenini yatay düzlemde ve kuzey doğrultusunda ise Ox ile çakışır. Bu esnada askı teli Oz



Şekil 6.4.

doğrultusundadır. Eksen mahfaza içindeki jiroskopa etki eden çeşitli kuvvetlerden dolayı herhangi bir anda Ox , Oy , Oz eksenine göre başlangıç anında farklı bir konumda olacaktır.

Herhangibir anda jiroskopun konumu saat ibresi yönünde Oz etrafında θ , yeni Oy etrafında η ve yeni Ox etrafında ξ dönmeleri ile belirlenir. θ , η , ξ açılarına Euler açıları denir. Oz etrafındaki bir dönme Ox, y, z eksen takımını $O x' y' z'$ eksen takımına dönüştürür. Oz' ile Oz çakışmaktadır. Bu denklemler matris notasyonunda gösterilirse;

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$

$$y' = -x \sin\theta + y \cos\theta$$

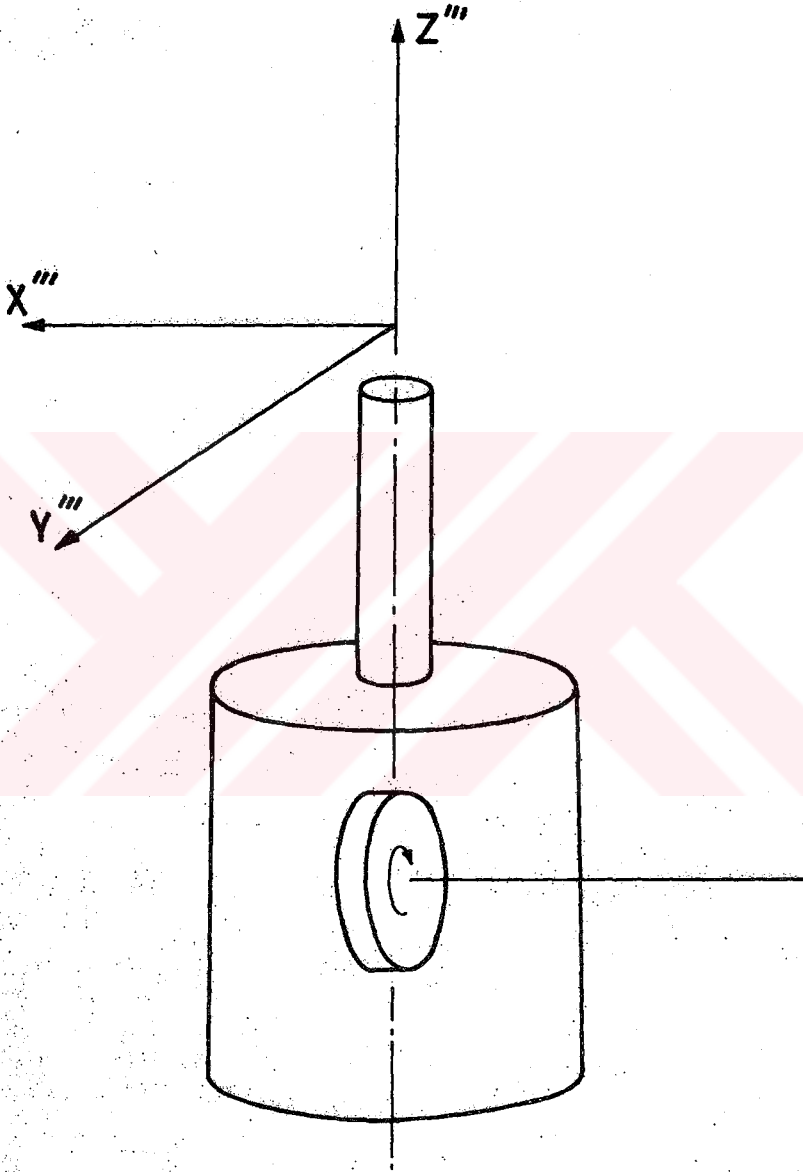
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

olur. $P' = R(\theta)P$ dir. Burada $R(\theta)$ dönme matrisidir. P' ve P sırasıyla (x', y', z') ve (x, y, z) noktalarını belirler. Oy' etrafında η kadar bir dönme saat ibresi yönünde uygulanırsa $Ox' y' z'$ sistemi $Ox'' y'' z''$ sistemine dönüşür. Bu halde de Oy'' Oy' ile çakışır. Bu dönmenin transformasyon denklemleri

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\eta & 0 & -\sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\eta & 0 & \cos\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

olur. Diğer taraftan $P'' = R(\eta)P'$ biçiminde yazılabilir. Benzer biçimde $Ox'' y'' z''$ Ox''' etrafında ξ kadar döndürülürse $Ox''' y''' z'''$ eksen takımı elde edilir (Şekil 6.5)



Şekil 6.5.

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi & \sin \xi \\ 0 & -\sin \xi & \cos \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Ayrıca $P''' = R(\theta) P''$ yazılabilir. Birbirini takip eden θ, η ve ξ dönmeleri arka arkaya uygulanır.

$$P''' = R(\xi)P'' = R(\xi) R(\eta) P' = R(\eta).R(\eta)R(\theta)P, \dots \quad (6.17)$$

elde edilir. Matrislerin çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} x''' &= x \cdot \cos \theta \cdot \cos \eta + y \sin \theta \cos \eta - z \sin \eta \\ y''' &= -x \sin \theta \cos \xi + y \cos \theta \cos \xi + x \cos \theta \sin \eta \cdot \cos \xi + \\ &\quad + y \sin \theta \sin \eta \sin \xi + z \cos \eta \sin \xi \quad (6.18) \\ z''' &= x \sin \theta \sin \xi - y \cos \theta \sin \xi + x \cos \theta \sin \eta \cdot \cos \xi + \\ &\quad + y \sin \theta \sin \eta \cos \xi + z \cos \eta \cdot \cos \xi \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer şimdi x, y, z karşıtları olan açısal hız bileşenleri ile yer değiştirirse:

$$\begin{aligned} x &= \Omega \cos \phi, \quad y=0, \quad z = -\Omega \sin \phi \\ \Omega'_x &= \Omega \cos \phi \cos \theta \cos \eta + \Omega \sin \phi \sin \eta \\ \Omega'_y &= -\Omega \cos \phi \sin \theta \cos \xi + \Omega \cos \phi \cos \theta \sin \eta \cdot \sin \xi \\ &\quad - \Omega \sin \phi \cos \eta \sin \xi \\ \Omega'_z &= \Omega \cos \phi \sin \theta \sin \xi + \Omega \cos \phi \cos \theta \sin \eta \cdot \cos \xi \\ &\quad - \Omega \sin \phi \cos \eta \cos \xi \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Ω'_x , Ω'_y , Ω'_z b yeryüzünün açısal hızının jiroskop mahfazasındaki sabit eksen takımına göre bileşenleridir. Bu denklemlerin doğruluğunu saptamak için aşağıdaki kontrol uygulanabilir.

$$(\Omega'_x)^2 + (\Omega'_y)^2 + (\Omega'_z)^2 = \Omega^2$$

Jiroskoplu teodolitte yapılan ölçmelerde θ genel olarak 6° geçmez. η ξ açıları bunun çok küçük bir kesri kadardır. Yüksek bir doğruluk elde etmek için bile

$$\sin \eta = \eta$$

$$\cos \eta = 1$$

$$\sin \xi = \xi$$

$$\cos \xi = 1$$

koymak ve $\sin \xi \cdot \sin \eta$ çarpımını taşıyan terimleri ihmal etmek yeterlidir.

$$\Omega'_x = \Omega \cos \phi \cos \theta + \Omega \eta \sin \phi$$

$$\Omega'_y = -\Omega \cos \phi \sin \theta - \Omega \xi \sin \phi \dots\dots\dots (6.20)$$

$$\Omega'_z = \Omega \xi \cos \phi \sin \theta + \Omega \eta \cos \phi \cos \theta - \Omega \sin \phi$$

şeklinde yeryüzünün açısal dönme hızının jiroskop mahfazasının içinde sabit olan $Ox''y''z''$ sisteminin eksenleri doğrultusunda bileşenleri elde edilir. Yukardaki denklemlerde verilen değerler jiroskopa etki eden yeryüzünün kendi eksenini etrafında dönmesinin θ , η ve ξ ile belirlenen konumdaki bileşenleridir.

Eğer jiroskop mahfazası yeryüzüne göre hareket ediyorsa, bu hareket yeryüzünün kendi eksenini etrafında dönmesine eklenecek ataletsel uzaya göre jiroskop mahfazasının açısal hızları elde edilir. Son değerleri Ω_x , Ω_y , Ω_z ile göstererek ve jiroskop mahfazasının yeryüzüne nazaran hızlarının hepsi $Ox''y''z''$ eksenlerine göre olmadığını hatırlayarak ve küçük terimleri ihmal ederek

$$\Omega_x = \Omega \cos \phi \cos \theta + \Omega \eta \sin \phi + \dot{\xi}$$

$$\Omega_y = -\Omega \cos \phi \sin \theta + \Omega \xi \sin \phi + \dot{\eta}$$

$$\Omega_z = \Omega \xi \cos \phi \sin \theta + \Omega \eta \cos \phi \cos \theta - \Omega \sin \phi + \dot{\theta}$$

elde edilir. Bu denklemlerin daha yakından incelenmesi sonucu $\Omega \eta$ ve $\Omega \xi$ çarpımlarının diğer terimlere nazaran ihmal edilebileceği ortaya çıkar. Buradan

$$\Omega_x = \Omega \cos \phi \cos \theta + \dot{\xi}$$

$$\Omega_y = \Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta} \dots \dots (6.21)$$

$$\Omega_z = -\Omega \sin \phi + \dot{\theta}$$

elde edilir. $Ox''' y''' z'''$ sisteminin eksenleri doğrultusundaki birim vektörleri $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ile gösterilirse jiroskop mahfazasının toplam açısal hız vektörü $\vec{V}$ aşağıdaki gibidir.

$$\vec{V} = (\Omega \cos \phi \cos \theta + \dot{\xi}) \vec{i} + (-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) \vec{j} + (-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) \vec{k}$$

A,B,C sırasıyla mahfaza içinde jiroskopun $Ox''' Oy'''$, Oz''' eksenlerine göre atalet momentleri, I_x ise sadece dönen jiroskop rotorunun dönme eksenine göre atalet momenti olsun. Eğer jiroskopun rotoru dünya ile aynı yönde dönerse ve ω açısal hızına sahipse açısal momentum

$$\vec{J} = I_x \vec{\omega}$$

eşitliği ile verilir.

Şimdi jiroskop rotorunun x''' eksenine etrafındaki açısal momentumu $\vec{J}$ olduğuna ve dönme x''' eksenine etrafında olduğuna göre $\vec{H}$ dönen jiroskopun mahfazası içindeki toplam açısal momentumu olduğundan aşağıdaki gibi

yazılır.

$$\vec{H} = \{J + A(\Omega \cos \phi \cos \theta + \dot{\xi})\} \vec{i} + B(-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) \vec{j} + C(-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) \vec{k} \quad (6.22)$$

Eğer m jiroskopun mahfazası ile birlikte kütlesi, $\vec{g}$ yerçekimi ivmesi, a da askı telinin alt ucu ile jiroskopun kütle merkezi arasındaki uzaklık ise $\vec{M}$ yerçekimi vektörü

$$\vec{M} = -M \sin \xi \vec{i} - M \sin \eta \vec{j} - p \vec{k}$$

dir. Burada $M = mga$ ve $p \vec{k}$ jiroskop boyuna eksen etrafında dönmesi halinde sönüm kuvvet çiftidir. $Ox'' y'' z''$ dönen bir referans sistemi olduğundan açısal momentumun bu sistemde zamana göre değişimine karşı gelen ataletsel uzaya göre dönüşümü aşağıdaki denklem ile sağlanır.

$$\frac{d\vec{H}_s}{dt} = \frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{H} \quad (6.23)$$

$\frac{d\vec{H}_s}{dt}$ bir Galile çerçevesinde açısal momentumun zamana göre değişimidir.

$\frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t}$ ise jiroskop mahfazasında sabit eksen takımına göre aynı büyüklüktür. $\vec{V} \wedge \vec{H}$ ise vektörel çarpımdır. (6.22) no.lu denklemin türevi alınır, hareketli çerçevede rotorun hızı değişmediği için, J sabit olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t} &= A(-\Omega \cos \phi \sin \theta \dot{\theta} + \dot{\xi}) \vec{i} + B(-\Omega \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} + \dot{\eta}) \vec{j} \\ &+ C \dot{\theta} \vec{k} \end{aligned} \quad (6.24)$$

elde edilir. $\vec{V} \wedge \vec{H}$ vektörel çarpımının bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 \vec{I} \text{ boyunca } & (-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) C (-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) \\
 & - (-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) B (-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) \\
 \vec{J} \text{ boyunca: } & (-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) \{J + A(\Omega \cos \phi \cos \theta + \xi)\} - \\
 & (\Omega \cos \phi \cos \theta + \xi) C (-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) \\
 \vec{K} \text{ boyunca: } & (\Omega \cos \phi \cos \theta + \xi) B (-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) - \\
 & (-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) \{J + A(\Omega \cos \phi \cos \theta + \xi)\} \dots \dots \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

Ω^2 , $\Omega\dot{\theta}$, $\Omega\dot{\eta}$, $\Omega\xi$, $\dot{\theta}\dot{\eta}$, $\dot{\theta}\xi$ ve $\eta\xi$ terimleri diğer terimlere nazaran ikinci mertebeden küçük oldukları için ihmal edilirler. Böylece aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\vec{V} \wedge \vec{H} = \Omega \vec{I} + J(-\Omega \sin \phi + \dot{\theta}) \vec{J} - J(-\Omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\eta}) \vec{K}
 \tag{6.26}$$

Açısal momentumun zamana göre değişimi ataletsel uzaydaki koordinat sistemine göre etki eden kuvvet çiftine eşittir.

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt}$$

Üç eksenindeki bileşenleri eşitleyerek

$$\begin{aligned}
 A \frac{d^2 \xi}{dt^2} + M \xi &= 0 \\
 B \frac{d^2 \eta}{dt^2} - J \Omega \sin \phi \frac{d\theta}{dt} + M \eta &= 0 \dots \dots \dots (6.27) \\
 C \frac{d^2 \theta}{dt^2} + J \Omega \cos \phi \sin \theta - J \frac{d\eta}{dt} + p \frac{d\theta}{dt} &= 0
 \end{aligned}$$

bulunur.

Bu diferansiyel denklemler dönen jiroskopun mahfa-

zası içindeki hareket denklemleridir. (6.27) denklemlerinden ikincisinin zamana göre türevi alınır ve üçüncü türev ihmal edilirse

$$J\ddot{\theta} + M\ddot{\eta} = 0 \dots\dots\dots (6.28)$$

elde edilir. Bu üçüncü denklemden yerine konursa;

$$(C + \frac{J^2}{M}) \ddot{\theta} + p\dot{\theta} + J\Omega \cos\phi\theta = 0 \dots\dots\dots (6.29)$$

elde edilir. Burada $\sin\theta$ yerine θ konmuştur. Bu denklemin (6.5) no.lu denklem ile karşılaştırılırsa (6.29) denkleminin de basit sönümlü hareketin denklemi olduğu ortaya çıkar.

Salınım eğrisinin denklemi

$$\theta = \theta_N + Be^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma) \dots\dots\dots (6.30)$$

$$\alpha = \frac{p}{2(C + \frac{J^2}{M})}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4(C + \frac{J^2}{M}) J\Omega \cos\phi - p^2}}{2(C + \frac{J^2}{M})} \dots\dots\dots (6.31)$$

dir. Salınımın periyodu

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

ile verilir. Logaritmik azalma ise

$$\log_e \frac{\theta_n}{\theta_0} = \frac{p^n}{2(C + \frac{J^2}{M})} T \dots\dots\dots (6.32)$$

ile verilir.

Bir jiroskoplu teodolitte sönüm katsayısı p genellikle küçüktür. Ayrıca C terimi de J^2/M göre çok küçüktür. Hareketin Oy''' eksenini etrafındaki bileşenini belirlemek için

$$\theta = B \cos\left(\sqrt{\frac{M\Omega \cos\phi}{J}} t + \gamma\right)$$

yazılabilir. Türev alınırsa;

$$\dot{\theta} = -B \sqrt{\frac{M\Omega \cos\phi}{J}} \sin\left(\sqrt{\frac{M\Omega \cos\phi}{J}} t + \gamma\right)$$

bulunur. (6.27) denklemlerinden ikincisinde $B\dot{\eta}$ ihmal edilebilir. Böylece

$$\eta = \frac{J}{M} \Omega \sin\phi - \frac{J}{M} \dot{\theta} \dots\dots\dots (6.33)$$

Dönen jiroskopun hareketi hava sürtünmesi yüzünden azalacağından, bir zaman sonra, θ 'nın değeri sıfır olacaktır. Bir noktada jiroskop eksenini

$$\eta = \frac{J}{M} \Omega \sin\phi$$

konumunda olacaktır. Budenge konumu η_0 ile gösterilirse

$$\eta_0 = \frac{J}{M} \Omega \sin\phi$$

olur. Buradan

$$\eta = \eta_0 - \frac{J}{M} \dot{\theta}$$

elde edilir. (6.31) denkleminde yerine konursa

$$\eta - \eta_0 = B \sqrt{\frac{M\Omega \cos\phi}{J}} \sin\left(\sqrt{\frac{M\Omega \cos\phi}{J}} t + \gamma\right)$$

bulunur. Sinüslü ve kosinüslü terimler yok edilirse:

$$\frac{\theta^2}{B^2} + \frac{(\eta - \eta_0)^2}{B^2 \eta \cot \phi} = 1 \dots\dots\dots (6.34)$$

bulunur.

Bu dörmme ekseninin ucunun düşey bir düzlemde bir elips çizdiği anlamına gelir. Bu elipsin yatay doğrultudaki yarım eksenini B , düşey doğrultudaki yarım eksenini $B\sqrt{\eta_0 \cot \phi}$ dır. Yatay doğrultuda salınımların büyüklüğü azaldıkça düşey doğrultudaki salınımlarda azalır. Fakat iki genliğin oranı sabit kalır. Jiroskop eksenini sonunda denge konumuna geldiği zaman jiroskop eksenini yatayın üstünde doğu-batı ile η_0 açısı yapacak biçimde durur.

Son olarak (6.27) nin ilk denkleminde ξ hareketinin sönümsüz bir hareket olduğu görülür. Hareketin denklemini

$$\xi = C \cos \left(\sqrt{\frac{M}{A}} t + \gamma \right) \dots\dots\dots (6.35)$$

ve salınının periyodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{M}} \dots\dots\dots (6.36)$$

biçimindedir.

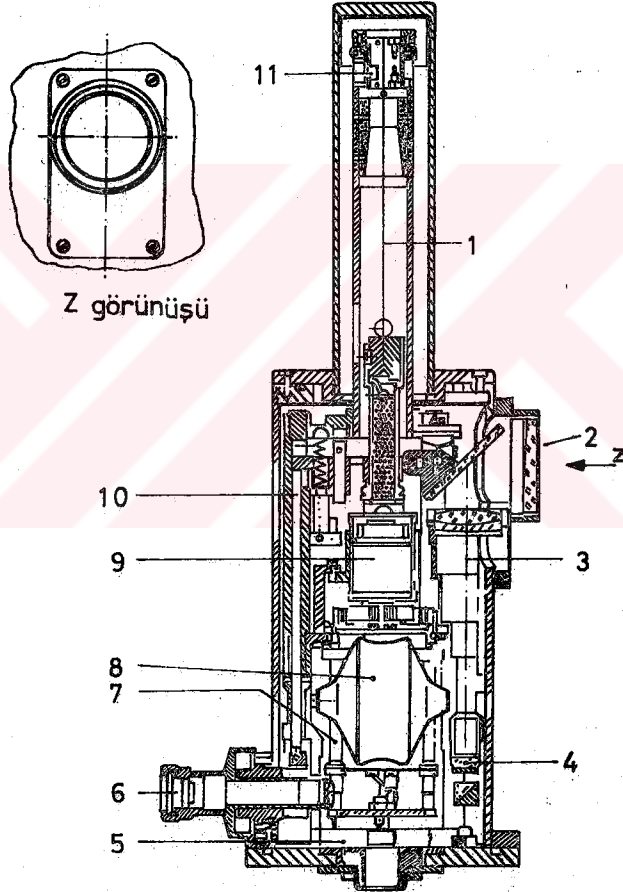
7.000. JİROSKOPLU TEODOLİTLERİN YAPISI

Jiroskoplu teodolitler iki grupta toplanabilir.

- 1) Jiroskop sistemi ile teodolitin aynı yapıda bulunması hali
- 2) Jiroskop sistemi ile teodolitin aynı yapıda olup birleştirilmeleri hali

Bu iki tip jiroskoplu teodolit arasında sistem yönünden bir ayırım yapmağa olanak yoktur. Yalnız 2. tip jiroskoplu teodolitlerde jiroskop sisteminin takıldığı teodolit değiştirilerek sınırlı da olsa ölçmenin doğruluğunu ve inceliğini arttırmak olanağı vardır.

1. tip jiroskoplu teodolitlere örnek Fennel KT3 jiroskoplu teodolitidir (Şekil 7.1).



Şekil 7.1

Şekil (7.1) de Fennel KT3 ün bir kesiti görölmektedir.

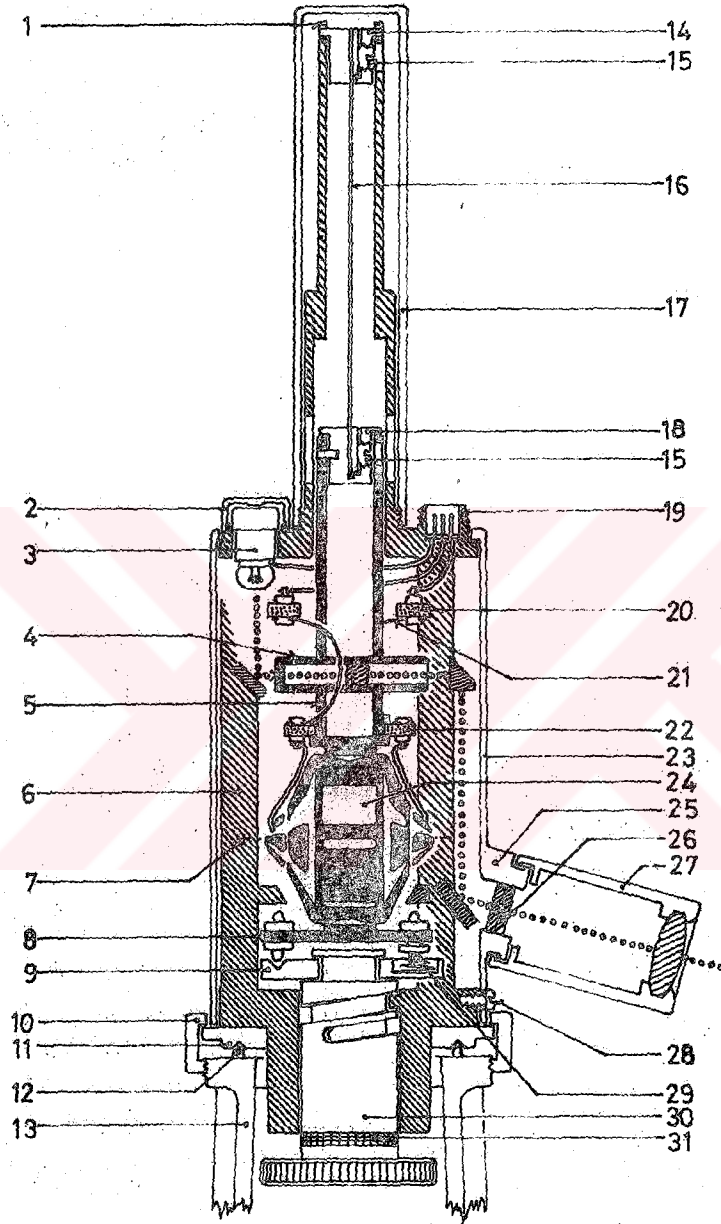
1. 106 mm uzunluğundaki nivafleks band
2. Objektif penceresi
3. Gözleme Dürbünü
4. Aydınlanabilir gözleme çizgisi
5. Bağlama vidası
6. Dürbün öküleri
7. Jiroskopun Askıları
8. Jiroskopun rotoru
9. Fren Motoru
10. Düşey Hareket Düzeni
11. Askı düzeni

2. tip jiroskoplu teodolitlere örnek Wild GAK1 jiroskoplu teodolitidir (Şekil 7.2).

Şekil (7.2) de Wild GAK1 aletinin kesiti görölmektedir. Burada

1. Askı vidası.
2. Örtü somunu,
3. Lamba yatağı,
4. Işıklı gösterge,
5. Direk,
6. Taşıyıcı Mahfaza,
7. Dönme eksenı,
8. Sönümlendirme plağı,
9. Bağlama Plağı,
10. Sıkıştırma düzeni,

11. Oturtma yarığı,
12. Küresel civata
13. Jiroskop köprüsü,
14. Askı Düzeni
15. Bağlama vidası,
16. Askı teli,
17. Koruyucu boru
18. Alt tel bağlayıcısı
19. Priz
20. İzolasyon plağı
21. Akım iletim teli
22. İzolasyon plağı
23. Dış koruyucu
24. Jiroskop
25. Gözleme tertibatı dayanağı
26. Skalalı gözleme plağı,
27. Büyüteç
28. Sabitleştirme vidası
29. Takoz,
30. Bağlama vidası
31. Dişli vidadır.



Şekil 7.2.

II, BÖLÜM

JİROSKOP HAREKETİ İLE AZİMUTUN SAPTANMASI

Jiroskoplu teodolitlerle azimutu saptamak için birkaç işlemi ard arda uygulamak gerekmektedir. Bunlar kaba, ön ve kesin yönelme olarak adlandırılır.

Kaba yönelme jiroskoplu teodolitin optik ve dönme eksenlerini meridyen doğrultusundan 30° farkla yöneltme işlemidir. Ön yönelme kaba yönelmeye göre daha ince bir yönelmedir. Bu yönelme sonucu aletin optik ve dönme eksenleri meridyen doğrultusundan 1° farkla yöneltilir. Kesin yönelme ise aletin meridyen doğrultusuna tam olarak yöneltilmesini sağlar.

Kesin yönelme birbirinden farklı üç yöntemle yapılmaktadır. Bunlardan birincisi Dönüm Noktası Yöntemidir. Bu yöntemde jiroskopun dönme ekseninin meridyen etrafında yaptığı salınımların dönüm noktaları ölçülerek ve değerlendirilerek meridyen doğrultusu bulunur. İkinci kesin yönelme yöntemi zaman farkı yöntemidir. Bu yöntemde ölçülen büyüklükler zamandır. Ölçülen zaman farkları değerlendirilerek kuzey doğrultusu saptanır. Üçüncü ve son kesin yönelme yöntemi Genlik Yöntemidir. Genlik yönteminde salınımın genlikleri ölçülür. Genlikler kullanılarak meridyen doğrultusu, başka bir deyişle gerçek kuzey doğrultusu bulunur.

8.000. JİROSKOPLU TEODOLİTLE COĞRAFİK AZİMUTU SAPTAMA YÖNTEMLERİ

Bu bölümde jiroskoplu teodolitle coğrafik kuzeyi saptama yöntemleri incelenecektir.

8.100. JİROSKOPLU TEODOLİTLE KABA YÖNELME

Kaba yönelme dürbünü kuzeyden farkı $\pm 30^{\circ}$ olacak

biçimde yöneltmektir. Normal olarak bir pusla, güneş yardımı ile veya harita kullanılarak dürbün kuzeye $\pm 30^\circ$ incelikle yöneltilebilir. Bu olanaklardan hiçbiri yoksa jiroskoplu teodolitin kendisi kullanılarak kaba yönelme yapılabilir.

Dürbünün kuzeyden $\pm 30^\circ$ den daha fazla sapmış olduğu halde jiroskop serbest bırakıldığında ya hızlı bir ivmelenme gösterir ya da yavaşlar. Bu halde dürbün ivmelenmenin yönünde 30° veya 45° kadar döndürülmelidir.

Eğer dürbün güneye yakın veya güney doğrultusunda ise jiroskop serbest bırakıldığı zaman hızlanıyor ve hiç yavaşlamıyorsa jiroskop bağlanmalı ve jiroskopun hızlandığı yönün tersi yönde 120° döndürülmelidir.

8.200. JİROSKOPLU TEODOLİTLE ÖN YÖNELME YÖNTEMLERİ

Ön yönelme yöntemlerinin sayısı zaman ve dönüm noktası yöntemleri olmak üzere iki adettir.

1. Ölçülen değerin zaman olması halinde ön yönelme yöntemi: (6.30) eşitliği gözönüne alınarak;

$$\beta = \frac{\sqrt{4(C + J^2/M)J\Omega \cos\phi - p^2}}{2(C + J^2/M)}$$

yazılır. Jiroskopun simetri ekseninin sönümlü harmonik hareketinin periyodunun

$$T = \frac{2\pi}{\beta}$$

olduğu hatırlanırsa periyod

$$T = 2\pi \cdot \frac{2(C + J^2/M)}{\sqrt{4(C + J^2/M)J\Omega \cos\phi - p^2}}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikten görüldüğü üzere jiroskopun simetri ekseninin sönümlü harmonik hareketinin periyodu sadece aletin kurulduğu noktanın enlemine bağlıdır. Buradan

$$T = 2\pi \frac{2(C + J^2/M)}{\sqrt{\cos\phi} \sqrt{4(C + J^2/M) J\Omega - p^2/\cos\phi}}$$

elde edilir. $p^2/\cos\phi$ diğer terimlere nazaran ikinci dereceden bir terim olduğundan ihmal edilirse eşitlik;

$$T = 2\pi \frac{2(C + J^2/M)}{\sqrt{\cos\phi} \sqrt{4(C + J^2/M) J\Omega}} \dots\dots\dots (8.1)$$

halini alır.

Eğer $T_{u\phi_1}$ ile enlemi ϕ_1 olan noktadaki jiroskopun simetri ekseninin sönümlü harmonik hareketinin periyodunu, $T_{u\phi}$ ise enlemi ϕ olan noktadaki simetri ekseninin aynı hareketinin periyodu ise (8.1) eşitliğini kullanarak aşağıdaki iki eşitlik yazılabilir.

$$T_{u\phi_1} = 2\pi \frac{(C + J^2/M)}{\sqrt{\cos\phi_1} \sqrt{4(C + J^2/M) J\Omega}}$$

$$T_{u\phi} = 2\pi \frac{(C + J^2/M)}{\sqrt{\cos\phi} \sqrt{4(C + J^2/M) J\Omega}}$$

Bu iki eşitlik taraf tarafa bölünürse

$$\frac{T_{u\phi_1}}{T_{u\phi}} = \frac{\sqrt{\cos\phi}}{\sqrt{\cos\phi_1}}$$

elde edilir.

$$T_{u\phi_1} \cdot \sqrt{\cos\phi_1} = T_{u\phi} \sqrt{\cos\phi}$$

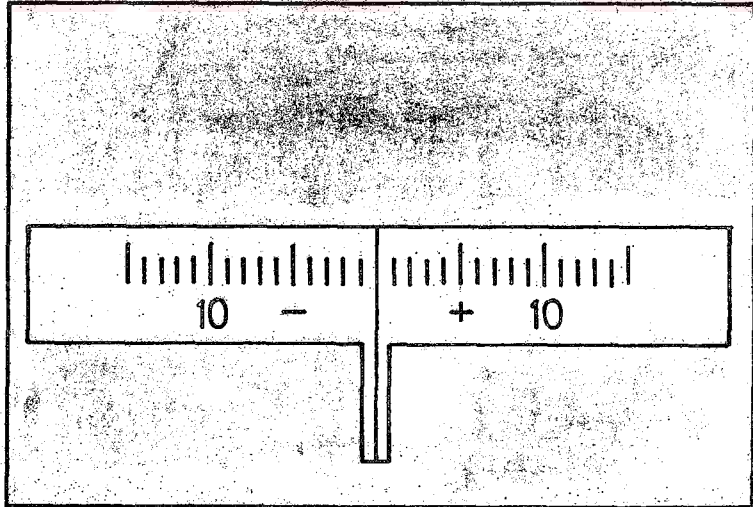
$$T_{u\phi} = T_{u\phi_1} \frac{\sqrt{\cos\phi_1}}{\sqrt{\cos\phi}} \dots\dots\dots (8.2)$$

(8.2) deki $T_{u\phi}$ değerini elde edebilmek için ϕ_1 enlemindeki $T_{u\phi_1}$ değerinin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle ϕ enlemindeki $T_{u\phi}$ değerini hesap yoluyla bulabilmek için belli bir ϕ_1 enlemindeki $T_{u\phi_1}$ değerinin bilinmesine gerek vardır. $T_{u\phi_1}$ değerleri ya deneyle ya zaman ölçmesiyle ya da sönümlü hareketin periyodunu veren eşitlikteki değerleri yerine koyarak belli enlemler için bulunabilir.

(8.2) no.lu eşitlik ile elde edilen periyodların 1/4 ü alınarak çeyrek periyodlar elde edilir.

$$\frac{T_{u\phi}}{4} = \frac{T_{u\phi_1}}{4} \frac{\sqrt{\cos\phi_1}}{\sqrt{\cos\phi}} \dots\dots\dots (8.3)$$

Belli bir enlemdeki çeyrek periyod ile ön yönelme aşağıdaki gibi yapılır.



Şekil 8.1

Şekil (8.1) de görülen jiroskopun simetri ekseninin görüntüsü olan yukardaki gösterge devamlı olarak sabit gösterge ile çakışık bir biçimde hareket ettirilir. Bu sürekli çakıştırma sonsuz bir yatay az hareket vidası ile gerçekleştirilir. Dönüm noktasına gelindiğinde kronometre çalıştırılır. Çeyrek periyod geçinceye kadar jiroskopun salınımı takip edilir. Bu işlem yapıldığında jiroskopun simetri eksenini yaklaşık olarak kuzeye yönlendirilmiş durumdadır. Bu yöntemin doğruluğu genliğe bağlıdır. Bunu şu şekilde açıklamak mümkündür. Jiroskopun simetri ekseninin sönümlü harmonik hareketinin denklemi:

$$\theta = \theta_N + B \cos\left(\frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} t + \gamma\right)$$

dir. Jiroskopun simetri ekseninin açısal dönme hızını bulmak için bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\theta}{dt} = -B \frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} \sin\left(\frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} t + \gamma\right)$$

ve t yerine T konursa

$$\frac{d\theta}{dt} = -B \frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} \sin\left(\frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} T + \gamma\right)$$

elde edilir

$$A = -\frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} \sin\left(\frac{\sqrt{M\Omega\cos\phi}}{J} T + \gamma\right)$$

$$= f(T) = \text{sabit}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_T = B \cdot f(T)$$

dir.

Bu eşitlik, jiroskopun simetri ekseninin açısal hızının genliğe bağlı olduğunu gösterir. Bu nedenle büyük bir genlikte jiroskop göstergesi büyük bir hızla, küçük bir genlikte daha küçük bir hızla hareket eder.

Bu nedenle genliği sönümlendirmek gereklidir. Bu donatı da jiroskoplu teodolitlerde vardır.

2) Peryodun yarısının ampirik olarak tayin edilmesi: Herhangibir ϕ enleminde belli bir alet grubu için periyodun yarısı $T/2$ aşağıdaki biçimde saptanır. Bu amaçla iki dönüm noktası arasındaki $T/2$ zamanı ölçülür. Hareketli gösterge sürekli olarak sonsuz yatay az hareket vidası döndürülerek sabit gösterge ile çakışık konumda tutulur. Dönüm noktasına gelince kronometre çalıştırılır ve bu konuma karşılık olan yatay daire okuması yapılır. Bir sonraki dönüm noktasına gelinceye kadar yine yatay az hareket vidası ile, hareketli gösterge diğer dönüm noktasına gelinceye kadar sabit gösterge ile çakışık durumda tutulur. Dönüm noktasına gelindiğinde kronometreden iki dönüm noktası arasında geçen $T/2$ süresi ile bu konuma tekabül eden yatay daire okuması yapılır. $T/2$ nin yarısı alınarak $T/4$ değeri bulunur. Yukardaki biçimde yaklaşık kuzey doğrultusu bulunur.

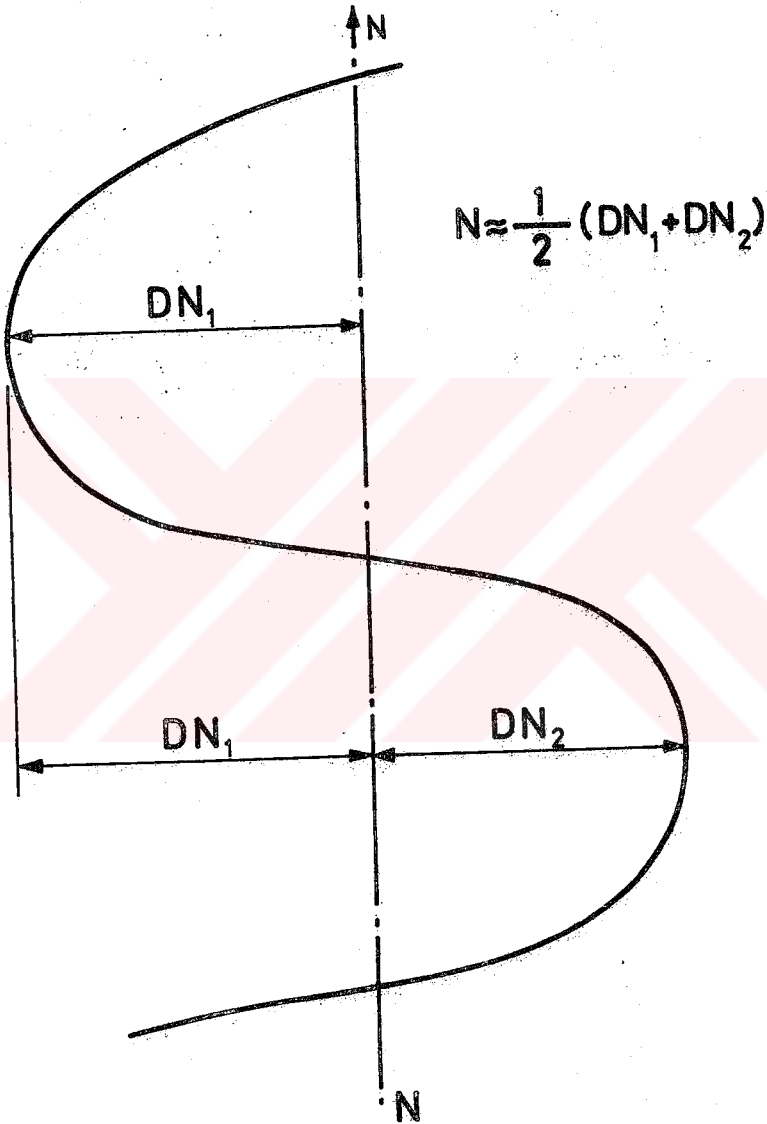
Diğer taraftan dönüm noktalarındaki yatay daire okumalarının aritmetik ortalaması alınarak yaklaşık kuzey doğrultusu bulunabilir. Eğer dönüm noktalarındaki yatay daire okumaları DN_1 ve DN_2 ise yaklaşık kuzey doğrultusu $N = (DN_1 + DN_2)/2$ olur (Şekil 8.2).

8.300. KESİN YÖNELME YÖNTEMLERİ

8.310. DÖNÜM NOKTASI YÖNTEMİ

Bu yöntemi uygulamadan önce (8.2) bölümündeki yöntemlerden biri ile jiroskopun simetri eksenini kuzeye $\pm 2^0$ presizyonunda yöneltir.

Bu ön yönelmeden sonra jiroskop salınımları sürekli olarak izlenir. Bu izleme işlemi jiroskopun simetri ekseninin göstergesi sabit gösterge ile çakışık konumda yatay az hareket vidası ile yapılır. Her dönüm noktasında o konuma karşılık olan yatay daire okuması ya-



Şekil 8.2.

pılır. Bu yatay daire okumaları çeşitli formüllerle değerlendirilip istasyondaki kuzey doğrultusu bulunur. Salınımlar harmonik bir harekettir. Salınımın ortasında jiroskop göstergesinin hızı maksimumdur. Dönüm noktalarına yaklaştıkça salınımda gözle görülür bir yavaşlama ortaya çıkar. Dönüm noktasında jiroskopun simetri ekseninin göstergesi birkaç saniye duruyor gibi gözükür. Bu noktalarda yatay daire okumaları yapılır. Yatay daire okumaları değerlendirilerek meridyen doğrultusu bulunur.

8.311. DÖNÜM NOKTALARINI DEĞERLENDİRME YÖNTEMLERİ

Dönüm noktalarını değerlendirmek için bir dizi formül mevcuttur. Bütün bu formüllerin elde edilmesinde çıkış noktası sönümlü harmonik hareketin denklemdir.

1) Schuler Ortalaması: (Bölüm 6.300) de gösterildiği gibi e^x üssel fonksiyonu ile verilmektedir. $e^x = 1 + x + 0(x^2)$ şeklinde Taylor serisine açılıp ilk iki terim alınırsa (DN dönüm noktalarını göstermektedir).

$$DN_i = N + Be^{-\alpha t_i} \cos(\beta t_i + \gamma) + St.$$

$$DN_i = N + B(-1)^{i-1} e^{-\alpha t_i} + St. \dots\dots\dots (8.4)$$

$$DN_i = N + B(-1)^{i-1} (1 - \alpha t_i)$$

elde edilir. Burada ilk üç dönüm noktası için (8.4) eşitliği yazılırsa;

$$DN_1 = N + B$$

$$DN_2 = N - B(1 - \frac{\alpha T}{2})$$

$$DN_3 = N + B(1 - \alpha T)$$

elde edilir. Parantezler açılırsa

$$DN_1 = N + B \quad (a)$$

$$DN_2 = N - B + B \frac{\alpha T}{2} \quad (b) \dots (8.5)$$

$$DN_3 = N - B - B\alpha T \quad (c)$$

elde edilir.

(8.5a), (8.5b) ile (8.5b), (8.5c) ile toplanır

$$DN_1 + DN_2 = 2N + B \frac{\alpha T}{2}$$

$$DN_2 + DN_3 = 2N + B(-\frac{\alpha T}{2})$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik taraf tarafa toplanır-
sa;

$$DN_1 + DN_2 + DN_2 + DN_3 = 4N$$

$$DN_1 + 2DN_2 + DN_3 = 4N$$

elde edilir. Buradan

$$N = \frac{1}{4} (DN_1 + 2DN_2 + DN_3) = \frac{1}{2} \left(\frac{DN_1 + DN_3}{2} + DN_2 \right) \quad (8.6)$$

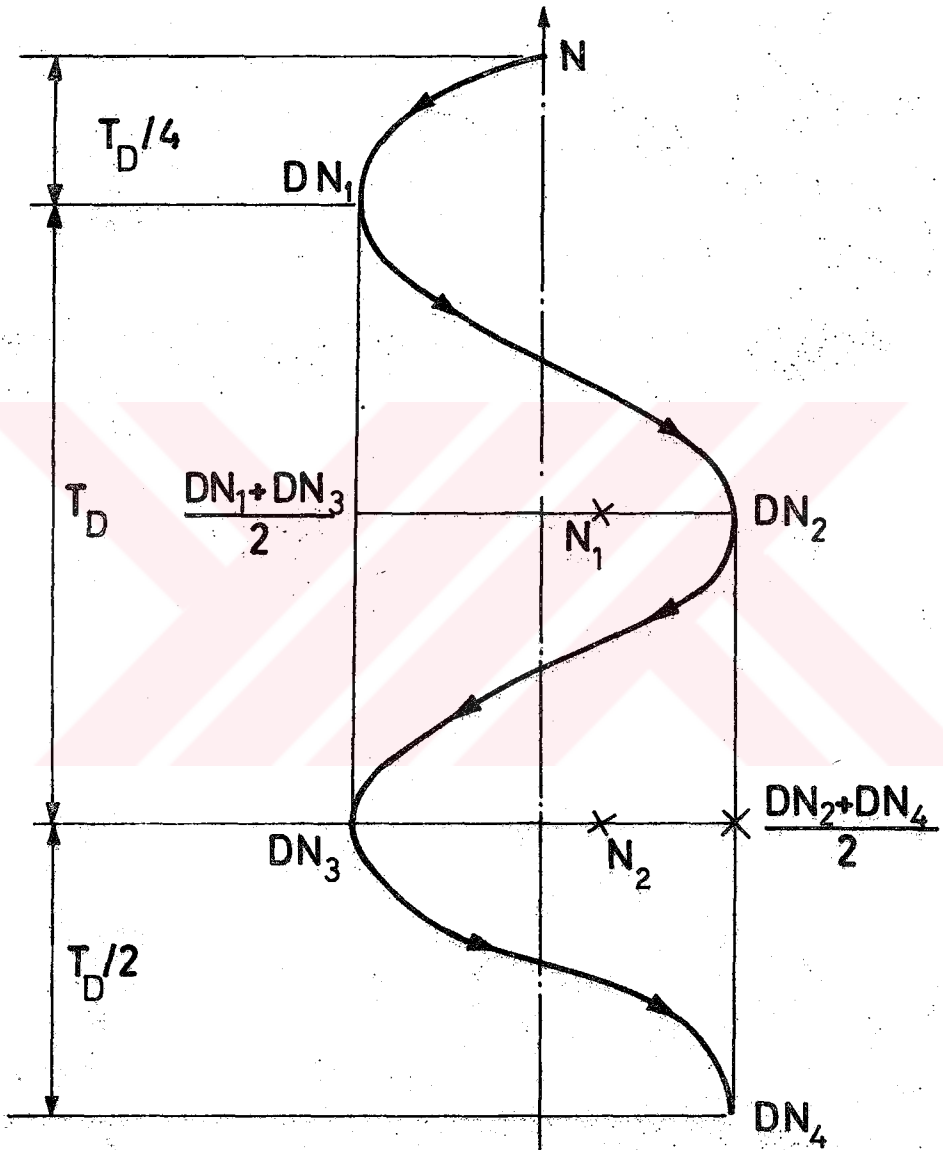
dır. Coğrafik kuzeyi veren bu eşitliğe Schuler ortala-
ması denir (Şekil 8.3).

Eğer n sayıda dönüm noktası ölçmesi yapılmışsa

$$N_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{DN_1 + DN_3}{2} + DN_2 \right)$$

·
·
·

$$N_{n-2} = \frac{1}{2} \left(\frac{DN_{n-2} + DN_n}{2} + DN_{n-1} \right)$$



Sekil 8.3

şeklinde Schuler ortalamaları alınır. Bunların en ihtimalli değeri olan aritmetik ortalamaları, coğrafik kuzeyi verir.

$$N = \sum_{i=1}^{n-2} N_i / (n-2) \dots \dots \dots (8.7)$$

Schuler ortalamalarının aritmetik ortalaması dönüm noktaları cinsinden yazılırsa;

$$N = \frac{1}{n-2} \left\{ \frac{1}{4}(DN_1 + DN_n) + \frac{3}{4}(DN_2 + DN_{n-1}) + \sum_{i=3}^{n-2} DN_i \right\}$$

elde edilir.

(8.8)

2) Thomas Ortalaması: Thomas ortalamasını elde edebilmek için çıkış noktası gene jiroskopun simetri ekseninin yaptığı sönümlü harmonik hareketin denklemdir.

$$DN_i = N + B e^{-\alpha t_i} \cos(\beta t_i + \gamma)$$

Thomas ortalaması çıkartılırken sönüm terimi

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + O(x^3)$$

biçiminde alınmaktadır.

$$DN_1 = N + B$$

$$DN_2 = N - B \left(1 - \frac{\alpha T}{2} + \frac{\alpha^2 T^2}{8} \right)$$

$$DN_3 = N + B \left(1 - \alpha T + \frac{\alpha^2 T^2}{2} \right)$$

$$DN_4 = N - B \left(1 - \frac{3\alpha T}{2} + \frac{9\alpha^2 T^2}{8} \right)$$

Bu sistemdeki 2. ve 3. eşitlikler 3 ile çarpılırsa

$$DN_1 = N + B$$

$$3DN_2 = 3N - 3B + 3B \frac{\alpha T}{2} - 3B \frac{\alpha^2 T^2}{8}$$

$$3DN_3 = 3N + 3B - 3B\alpha T - 3B \frac{\alpha^2 T^2}{2}$$

$$DN_4 = N - B + B \frac{3\alpha T}{2} - B \frac{9\alpha^2 T^2}{8}$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$DN_1 + 3DN_2 + 3DN_3 + DN_4 = 8N$$

$$N = \frac{1}{8} (DN_1 + 3DN_2 + 3DN_3 + DN_4) \dots\dots\dots (8.9)$$

biçiminde Thomas ortalaması elde edilir. Genel Thomas ortalamasını veren formül aşağıdaki biçimdedir.

$$N = \frac{1}{n-3} \left\{ \frac{1}{8}(DN_1 + DN_n) + \frac{1}{2}(DN_2 + DN_{n-1}) + \frac{7}{8}(DN_3 + DN_{n-2}) + \sum_{i=4}^{n-3} DN_i \right\} \dots\dots\dots (8.10)$$

Schuler ve Thomas ortalamasının yapısı incelendiği zaman sönüm katsayısı $e^{-\alpha t}$ Taylor serisine açıldığında alınan terim sayısı arttıkça coğrafik kuzeyi veren ortalamalar aşağıdaki şekli alır.

$$e^x \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!}$$

$$N = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} DN_{i+1} \dots\dots\dots (8.11)$$

(8.11) incelenirse katsayıların Paskal üçgeninin elemanları olduğu anlaşılır. Ayrıca dönüm noktalarının katsayıları binom formülünün katsayılarıdır.

D.N. SAYISI	ORTALAMALARDAKİ KATSAYILAR						SABİT ÇARPAN
1				1			1
2			1		1		2
3			1	2		1	4
4		1		3	3	1	8
5		1	4	6		4	16
6	1	5		10	10	5	32
7	1	6	15	20		15	64
8	1	7	21	35	35	21	128

Şekil 8.4

3) H.Rjmarzyk (1965), T.L.Thomas (1967) ve E.Graferend (1970) tarafından üssel sönümlemeyi gözönüne alarak coğrafik kuzeyi veren eşitlik: Bu eşitliğin elde edilmesinde çıkış noktası gine jiroskopun simetri ekseninin yaptığı sönümlü harmonik hareketin denklemidir.

Bu denklemi tekrar kullanarak coğrafik kuzeyi veren yeni bir eşitlik elde edilir.

$$DN_i = N + Be^{-\alpha t} \cos(\beta t_i + \gamma) + St..... \quad (8.12)$$

Sözkonusu coğrafik kuzeyi veren eşitlik çıkarılırken sönüm katsayısı e^x olarak alınacaktır. (8.12) denklemi ardışık 3 dönüm noktası için yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$DN_1 = N + B$$

$$DN_2 = N - Be^{-\alpha T/2}$$

$$DN_3 = N + Be^{\alpha T}$$

$(DN_1 - N)/(DN_2 - N)$ ve $(DN_2 - N)/(DN_3 - N)$ bölümleri yazılıp eşitlenirse;

$$\frac{DN_1 - N}{DN_2 - N} = \frac{DN_2 - N}{DN_3 - N}$$

elde edilir. İçler dışlar çarpımı yapılırsa;

$$(DN_1 - N)(DN_3 - N) = (DN_2 - N)^2$$

$$DN_1 \cdot DN_3 - DN_1 \cdot N - N \cdot DN_3 + N^2 = DN_2^2 - 2DN_2N + N^2$$

$$2DN_2 \cdot N - DN_1N - DN_3N = DN_2^2 - DN_1 \cdot DN_3$$

$$N(2DN_2 - DN_1 - DN_3) = DN_2^2 - DN_1 \cdot DN_3$$

$$N = \frac{DN_2^2 - DN_1 \cdot DN_3}{2DN_2 - DN_1 - DN_3}$$

n sayıdaki dönüm noktası için aşağıdaki ortalama formül verilebilir.

$$N_i = \frac{DN_{i+1}^2 - DN_i \cdot DN_{i+2}}{2DN_{i+1} - DN_i - DN_{i+2}}$$

olduğuna göre genel aritmetik ortalama

$$N = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} N_i$$

olur. Bu formülün diğer bir şeklide

$$N_i = \frac{DN_i \cdot DN_{i+2} - DN_{i+1}^2}{DN_i + DN_{i+2} - 2DN_{i+1}}$$

dir. Benzer biçimde n sayıda dönüm noktası için

$$N = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-2} N_i$$

aritmetik ortalaması elde edilir.

4) Kohlrausch Formülleri:

Bu formüller üretilirken α sönüm katsayısının 0 a eşit olduğu kısaca $e^x = 1$ olduğu varsayılmaktadır.

Böyle olunca da coğrafik kuzeyi bulmak için kullanılan ortalamaların en basiti olan aritmetik ortalama elde edilir. Kohlrausch tarafından bulunan aşağıdaki genel eşitlik yazılır.

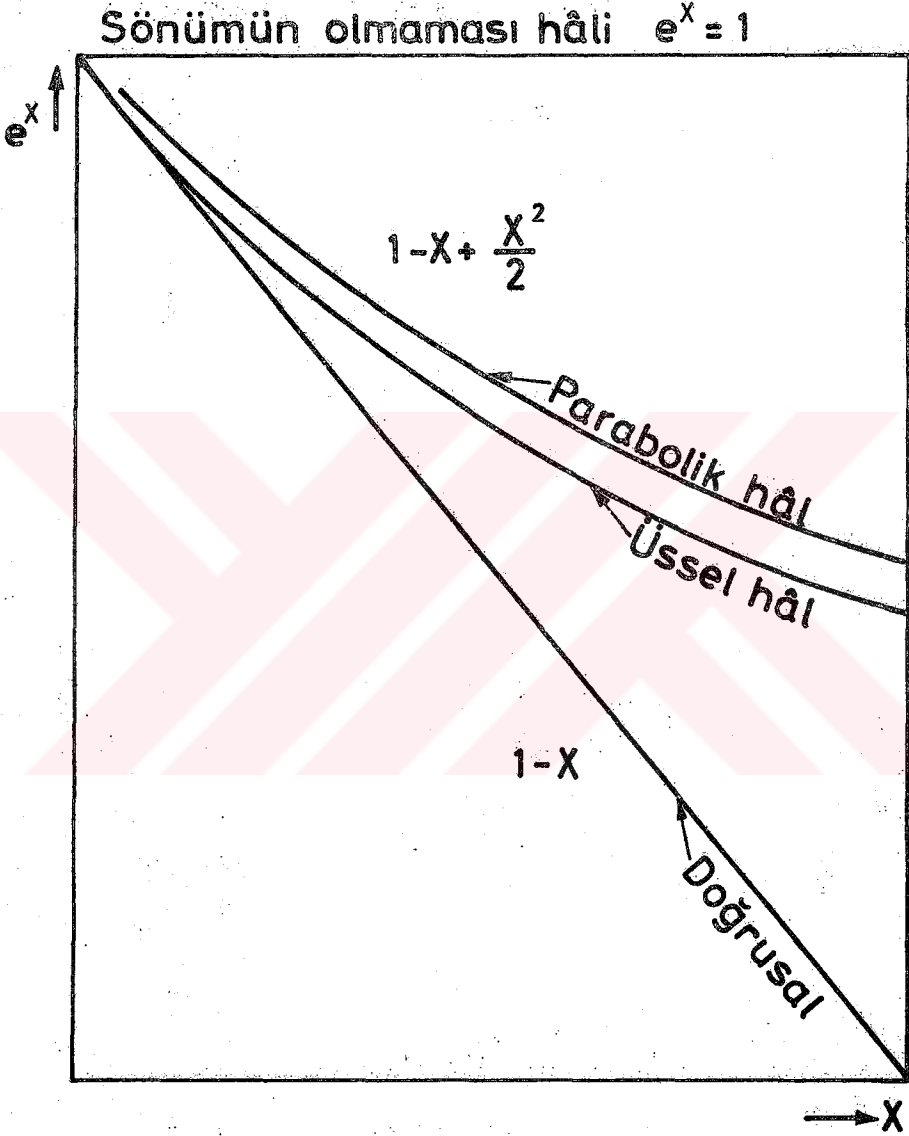
$$N = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{(n+1)/2} DN_{2i-1} + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} DN_{2i} \dots (3.13)$$

Coğrafik kuzeyi veren bu eşitlik incelenirse gözlenen dönüm noktalarının sayısının tek olduğu görülür. Bu eşitlikte ilk önce sol dönüm noktalarının ortalaması A_1 , sonra da sağ dönüm noktalarının ortalaması A_2 alınır. Sonuç olarak kuzeyi veren değer

$$N = \frac{1}{2} (A_1 + A_2) \quad \text{elde edilir.}$$

5) Lauf Eşitlikleri

Lauf dönüm noktalarından coğrafik kuzeyi veren eşitlikleri en küçük kareler yöntemini kullanarak çıkarmıştır. Çıkış noktası yine jiroskopun simetri eksenin sönümlü harmonik hareketini veren



Şekil 8.5.

$$DN_i = N + Be^{-\alpha t_i} \cos(\beta t_i + \gamma) + St.$$

denklemdir.

n adet ardışık dönüm noktasına karşılık olan yatay daire okumaları yapılmış olsun. Burada n 4 ün bir katıdır. Dönüm noktaları $DN_1, DN_2, DN_3, \dots, DN_n$ olduğuna göre N jiroskopun simetri ekseninin meridyen düzleminde bulunduğu zamanki yatay daire değeri olsun. Bu duruma göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$DN_1 = N + Be^0$$

$$DN_2 = N - Be^{-\frac{1}{2}\alpha T}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$DN_n = N - Be^{-\frac{1}{2}(n-1)\alpha T}$$

Eğer zaman iki dönüm noktası arasındaki bir andan itibaren ve $1/2 \alpha T = m$ denilirse en küçük kareler yöntemi kullanarak n adet hata denklemi elde edilir.

$$v_1 = N + Be^{(n-1)m} - DN_1$$

$$v_2 = N - Be^{(n-3)m} - DN_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_{n-1} = N - Be^{-(n-3)m} - DN_{n-1}$$

$$v_n = N - Be^{-(n-1)m} - DN_n$$

Burada $v_1, v_2, \dots, v_n$ $DN_1, DN_2, \dots, DN_n$ ölçmelerinde yapılacak düzeltmelerdir. Bu şekilde dengelenmiş değerler elde edilecektir.

Bu denklemleri doğrusal bir hale getirmek için (N), (B) ve (m) yaklaşık değerler alınır. Dengeleme sonucu bu yaklaşık değerleri alınır. Dengeleme sonucu bu yaklaşık değerlere uygulanacak düzeltmeler sırasıyla x, y, z ile gösterilsin. Ayrıca doğrusallığı sağlamak için üssel fonksiyon iki bilinmeyenli Taylor serisine açılır. Böylece aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$N = (N) + x$$

$$B = (B) + y$$

$$m = (m) + z$$

Buradan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} B e^{+(n-1)m} &= ((B) + y) e^{(n-1)(m) + (n-1)z} \\ &= (B) e^{(n-1)(m)} + y e^{(n-1)(m)} + (n-1)z (B) e^{(n-1)m} \\ &+ \frac{1}{2} 0(y^2) + (n-1)yz e^{(n-1)m} + \frac{1}{2} z^2 (n-1)^2 (B) \cdot e^{(n-1)(m)} \end{aligned}$$

Bu eşitlikte sadece lineer terimler alınır. (N), (B), (m) yaklaşık değerleri $0(y^2) = 0$ olacak şekilde seçilir. Böylece yz li terim 0 olur. Eger (m) = 0 seçilirse z^2 li terim

$$\frac{1}{2} z^2 (n-1)^2 (B) e^0 = \frac{1}{2} z^2 (n-1)^2 (B)$$

olur. Burada z^2 çok küçük olduğundan ilgili terim ihmal edilebilir. Hata denklemleri

$$v_1 = x + y e^{(n-1)(m)} + (n-1)(B) z e^{(n-1)(m)} + ((N) + (B)) e^{(n-1)(m)}$$

$$= DN_1 \}$$

$$v_2 = x - y e^{(n-3)(m)} - (n-3)(B) z e^{(n-3)(m)} + ((N) - (B)) e^{(n-3)(m)}$$

$$= DN_2 \}$$

.....

$$v_{n-1} = x + y e^{-(n-3)(m)} - (n-1)(B) z e^{-(n-3)(m)} + ((N) + (B)) e^{-(n-3)(m)}$$

$$= DN_{n-1} \}$$

$$v_n = x - y e^{-(n-3)(m)} + (n-1)(B) z e^{-(n-1)(m)} + ((N) - (B)) e^{-(n-1)(m)}$$

$$= DN_n \}$$

olarak belirlenir.

(N), (B), (m) yaklaşık değerleri

$$(N) = \frac{1}{n} \{DN_1 + DN_2 + \dots + DN_{n-1} + DN\}$$

$$(B) = \frac{1}{n} \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) + \dots + (DN_{n-1} - DN_n) \}$$

$$(m) = 0$$

şeklinde olsun.

Hata denklemlerindeki sabit terimler aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} (N) + (B)e^{(n-1)(m)} &= (N) + (B) - DN_1 = \delta_1 \\ &= \frac{1}{n} (DN_1 + DN_2 + \dots + DN_{n-1} + DN_n) \\ &+ \frac{1}{n} (DN_1 - DN_2 \dots \dots \dots DN_{n-1} - DN_n) - DN_1 \\ &= \frac{2}{n} DN_T - DN_1 \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$(N) - (B) e^{-(n-3)(m)} - DN_1 = \delta_2 = \frac{2}{n} DN_\xi - DN_2$$

• • • • •

$$(N) + (B) e^{-(n-3)(m)} - DN_{n-1} = \delta_2 = \frac{2}{n} DN_T - DN_{n-1}$$

$$(N) - (B) e^{-(n-1)(m)} - DN_n = \delta_n = \frac{2}{n} DN_c - DN_n$$

elde edilir. Burada

$$DN_T = DN_1 + DN_3 + \dots + DN_{n-1}$$

$$DN_\zeta = DN_2 + DN_4 + \dots + DN_n$$

dır. Hata denklemleri

$$v_1 = x+ye^{(n-1)(m)} + (n-1)(B)ze^{(n-1)(m)} + \delta_1$$

$$v_2 = x-ye^{(n-3)(m)} - (n-3)(B)ze^{(n-3)(m)} + \delta_2$$

.....

$$v_{n-1} = x+ye^{-(n-3)(m)} - (n-3)(B)ze^{-(n-3)(m)} + \delta_{n-1}$$

$$v_n = x-ye^{-(n-1)(m)} + (n-1)(B)ze^{-(n-1)(m)} + \delta_n$$

şeklindedir. Bu indirgenmiş hata denklemleri katsayıları ve sabit terimleri aşağıdaki gibi olan üç normal denklem verir.

<u>x</u>	<u>y</u>	<u>z</u>	<u>Sabit Terim</u>	
n	0	n(B)	0	= 0
0	n	0	0	= 0
n(B)	0	$\frac{1}{3}n(n^2 - 1)(B)^2$	A	= 0

Bu denklemlerin katsayılarının çoğu sıfır olduğundan x,y,z için değerler aşağıdaki gibi bulunur. İkinci denklemden

$$y = 0$$

elde edilir. Birinci ve üçüncü denklemlerden

$$x + (B) z = 0$$

$$x + \frac{1}{3} (n^2 - 1) (B)^2 z + \frac{G}{n} (B) = 0$$

$$z = 3G/n(n^2 - 4) (B)^2$$

ve

$$z = \left\{ \frac{3}{n} (n^2 - 4) (B) \right\} \{ (n-2) (DN_1 - DN_2) + (n-6) (DN_3 - DN_4) + \dots \\ \dots + (n-6) (DN_{n-3} - DN_{n-2}) - (n-2) (DN_{n-1} - DN_n) \}$$

Bu değer ilk denklemde yerine konursa

$$x = -(B) z = \left\{ \frac{3}{n} (n^2 - 4) \right\} \{ -(n-2) (DN_1 - DN_2) - (n-6) (DN_3 - DN_4) + \dots \\ \dots + (n-6) (DN_{n-3} - DN_{n-2}) + (n-2) (DN_{n-1} - DN_n) \}$$

bulunur. Sonuç olarak x, y, z nin normal denklemlerinden elde edilen değerleri yerine konursa bir seri kısaltmalardan sonra aşağıdaki değerler elde edilir.

$$N = \left\{ \frac{3}{n} (n^2 - 4) \right\} \left\{ (n^2 - 3n + 2) / 3 \right\} (DN_1 + DN_n) + \left\{ (n^2 + 3n - 10) / 3 \right\} (DN_2 + DN_{n-1}) \\ + \left\{ (n^2 - 3n + 14) / 3 \right\} (DN_3 + DN_{n-2}) + \left\{ (n^2 + 3n - 22) / 3 \right\} (DN_4 + DN_{n-3}) + \\ + \left\{ (n^2 - 3n + 26) / 3 \right\} (DN_5 + DN_{n-4}) + \left\{ (n^2 + 3n - 34) / 3 \right\} (DN_6 + DN_{n-5}) + \dots \}$$

$$B = \left(\frac{1}{n} \right) \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) + \dots + (DN_{n-1} - DN_n) \}$$

$$m = \left\{ \frac{3}{n} (n^2 - 4) (B) \right\} \{ (n-2) (DN_1 - DN_2) + (n-6) (DN_3 - DN_4) + \dots \\ \dots + (n-6) (DN_{n-3} - DN_{n-2}) - (n-2) (DN_{n-1} - DN_n) \} = \\ = \left\{ 3 / (n^2 - 4) \right\} \{ (n-2) (DN_1 - DN_2) + (n-6) (DN_3 - DN_4) + \dots \}$$

$$\dots - (n-6)(DN_{n-3}-DN_{n-2}) - (n-2)(DN_{n-1}-DN_n) \div \{ (DN_1-DN_2) + (DN_3-DN_4) + \dots + (DN_{n-1}-DN_n) \}$$

m in bu değerinden α

$$\alpha = 4m/T$$

eşitliği ile bulunur.

Uygulamada en çok kullanılan haller $n=4$, $n=8$ dir. Ayrıca bunların katları olan $n=12$, $n=16$ için coğrafik kuzeyi veren eşitlikler çıkarılacaktır.

$$N = \{1/8\} \{ (DN_1 + DN_4) + 3(DN_2 + DN_3) \}$$

$$B = \{1/8\} \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) \}$$

$$m = \{1/8(B)\} \{ (DN_1 - DN_2) - (DN_3 - DN_4) \}$$

$$m = 1/2 \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) \}$$

$n=8$

$$N = \{1/80\} \{ 7(DN_1+DN_8)+13(DN_2+DN_7)+9(DN_3+DN_6)+11(DN_4+DN_5) \}$$

$$B = \{1/8\} \{ (DN_1-DN_2)+(DN_3-DN_4)+(DN_5-DN_6)+(DN_7-DN_8) \}$$

$$m = \{1/16(B)\} \{ 3(DN_1-DN_2)+(DN_3-DN_4)-(DN_5-DN_6) -$$

$$-3(DN_7-DN_8) \} = \{1/10\} \{ 3(DN_1-DN_2)+(DN_3-DN_4)$$

$$-(DN_5-DN_6)-3(DN_7-DN_8) \} / \{ (DN_1-DN_2)+(DN_3-DN_4)+$$

$$+(DN_5-DN_6)+(DN_7-DN_8) \}$$

$$n = 12$$

$$N = \{1/840\} \{ 55(DN_1 + DN_{12}) + 85(DN_2 + DN_{11}) + 61(DN_3 + DN_{10}) + \\ + 79(DN_4 + DN_9) + 67(DN_5 + DN_8) + 73(DN_6 + DN_7) \}$$

$$B = \{1/12\} \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) + (DN_5 - DN_6) + (DN_7 - DN_8) + \\ + (DN_9 - DN_{10}) + (DN_{11} - DN_{12}) \}$$

$$m = \{1/280(B)\} \{ 5(DN_1 - DN_2) + 3(DN_3 - DN_4) + (DN_5 - DN_6) \\ - (DN_7 - DN_8) - 3(DN_9 - DN_{10}) - 5(DN_{11} - DN_{12}) \}$$

$$= \{3/70\} \{ 5(DN_1 - DN_2) + 3(DN_3 - DN_4) + (DN_5 - DN_6) - (DN_7 - DN_8) \\ - 3(DN_9 - DN_{10}) - 5(DN_{11} - DN_{12}) \} / \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) + \\ + (DN_5 - DN_6) + (DN_7 - DN_8) + (DN_9 - DN_{10}) + (DN_{11} - DN_{12}) \}$$

$$n=16$$

$$N = \{1/672\} \{ 35(DN_1 + DN_{16}) + 49(DN_2 + DN_{15}) + 37(DN_3 + DN_{14}) + \\ + 47(DN_4 + DN_{13}) + 39(DN_5 + DN_{12}) + 45(DN_6 + DN_{11}) + \\ + 41(DN_7 + DN_{10}) + 43(DN_8 + DN_9) \}$$

$$B = \{1/16\} \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) + (DN_5 - DN_6) + (DN_7 - DN_8) + \\ + (DN_9 - DN_{10}) + (DN_{11} - DN_{12}) + (DN_{13} - DN_{14}) + (DN_{15} - DN_{16}) \}$$

$$m = \{ 1/672(B) \} \{ 7(DN_1 - DN_2) + 5(DN_3 - DN_4) + 3(DN_5 - DN_6) + \\ + (DN_7 - DN_8) - (DN_9 - DN_{10}) - 3(DN_{11} - DN_{12}) - 5(DN_{13} - DN_{14}) - \\ - 7(DN_{15} - DN_{16}) \}$$

$$m = \{ 1/42 \} \{ 7(DN_1 - DN_2) + 5(DN_3 - DN_4) + 3(DN_5 - DN_6) + (DN_7 - DN_8) - \\ - (DN_9 - DN_{10}) - 3(DN_{11} - DN_{12}) - 5(DN_{13} - DN_{14}) - 7(DN_{15} - DN_{16}) \} / \\ \{ (DN_1 - DN_2) + (DN_3 - DN_4) + (DN_5 - DN_6) + (DN_7 - DN_8) + (DN_9 - DN_{10}) + \\ + (DN_{11} - DN_{12}) + (DN_{13} - DN_{14}) + (DN_{15} - DN_{16}) \}$$

8.320. ZAMAN FARKI YÖNTEMLERİ

Bu yöntemlerde ölçme süresince teodolit ve yatay daire Bölüm 8.2 deki yöntemle belirlenen yaklaşık kuzey doğrultusunda bağlanır. Zaman jiroskop göstergesi sabit göstergeden her geçişte ölçülür. Bu zaman ölçme işlemi bir kronometre ile yapılır. Yardımcı skala salınım genliklerini ölçmede kullanılır. Geçiş sürelerini açısal değerlere dönüştürmek için aletin c orantı katsayısının bilinmesi gereklidir. Bu açısal değerler yaklaşık kuzey doğrultusu için düzeltileceklerdir.

8.321. GEÇİŞ YÖNTEMİ

Geçiş yöntemi ilk olarak H.R. Schwendener tarafından bulunmuştur. Ön yönelme yöntemlerinden biri kullanılarak alidad kuzeyden birkaç dakika farklılıkla yöneltilir. Bu yönelmeye ait doğrultu okuması N' ile gösterilsin. Jiroskop rotoru çalışma hızında çalıştırılır ve presesyon yapmak üzere serbest bırakılır. Bundan sonra salınımın görüş sahası içinde kalması için salınım gerektiği kadar sönümlendirilir. Jiroskop göstergesinin sabit skalanın ortasından her geçişi zaman olarak saptanır. Ayrıca yardımcı skaladan jiroskop göstergesinin

sağ ve sol dönüm noktalarının değerleri okunur. Burada sağ dönüm noktalarının değeri pozitif ve sol dönüm noktalarının değeri negatif olarak alınır. Birbirini takip eden salınım süreleri arasındaki farklar Δt ile gösterilir ve birbirini takip eden yardımcı skaladan okunan genliklerin toplamının yarısı yarım genlik olarak isimlendirilip a ile gösterilirse, kuzeyi veren eşitlik aşağıdaki gibi olur.

$$N = N' + c.a.\Delta t \dots\dots\dots (8.14)$$

Burada c aletin orantı katsayısıdır. Bu eşitlik ΔN nin değerleri yarım genliğin yay değerinin $1/5$ inden küçükse yeterince doğrudur.

Kısaca bu açıklama yapıldıktan sonra yöntemin teorisi incelenir. Telle asılı jiroskoplu pusulada düşey etrafında jiroskopu döndürmeye çalışan iki adet kuvvet çifti veya burulma momenti vardır. Bunlardan birincisi askı telinin burulma yaparken ve burulmasız hale gelirken ortaya çıkan kuvvet çiftidir. Bu kuvvet çifti askı telinin uzunluğuna, genişliğine, kalınlığına, elastik özelliklerine ve gerilmesine bağlıdır. Uygulamadaki bütün haller için bu kuvvet çifti ölçme yapılan noktanın enleminden bağımsızdır. Askı teline etki eden kuvvet çifti burulma açısı θ ile orantılıdır.

$$P_T = q_T \theta \dots\dots\dots (8.15)$$

q_T askı telinin burulma momentidir.

İkinci kuvvet çifti dünyanın kendi eksenini etrafında dönmesinden ve jiroskop rotorunun kendi simetri eksenini etrafında dönmesinden ileri gelen presesyon kuvvet çiftidir. Bu nedenle aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$P_E = J \Omega \cos \phi \theta \quad \text{veya}$$

$$P_E = q_E \theta \dots\dots\dots (8.16)$$

Burada q_E presesyon momentidir. Presesyon momenti aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$q_E = J \Omega \cos \phi \dots\dots\dots (8.17)$$

Önceden görüldüğü gibi , J jiroskop rotorunun açısal momentumu, Ω dünyanın kendi eksenini etrafında açısal dönme hızı, ϕ de ölçme yapılan noktanın enlemidir.

Bu nedenle presesyon momentini q_E enlemle değişmektedir. O halde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$q_E = q_0 \cos \phi$$

Burada $q_0 = J\Omega$ ekvatordeki presesyon momentidir. Jiroskopun rotoru dönmezken, $P_E = 0$ olacak, böylece askı teli ucunda jiroskop sadece askı teli kuvvet çifti ile salınım yapacaktır. Buhareketin diferansiyel denklemleri ve hareket denklemleri önceden verilmiştir.

Jiroskop rotoru dönerken, P_E presesyon kuvvet çiftinin ve askı telinin kuvvet çiftinin etkisi altında kalır. Küçük ϕ dönmeleri için her iki kuvvet çiftinde ϕ ile doğru orantılıdır. Eğer alidat mekanik veya elektiriksel yoldan jiroskopun presesyon yaptığı miktarda döndürülürse askı telinin kuvvet çifti sıfırdır. Bu nedenle de salınımlar presesyon momentinden meydana gelir.

Sönümün hareketin periyoduna etkisi çok az olduğundan ihmal edilebilir. Bu nedenle $T_u \sqrt{\sec \phi}$ ile orantılı olarak değişecektir. Bu nedenle aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

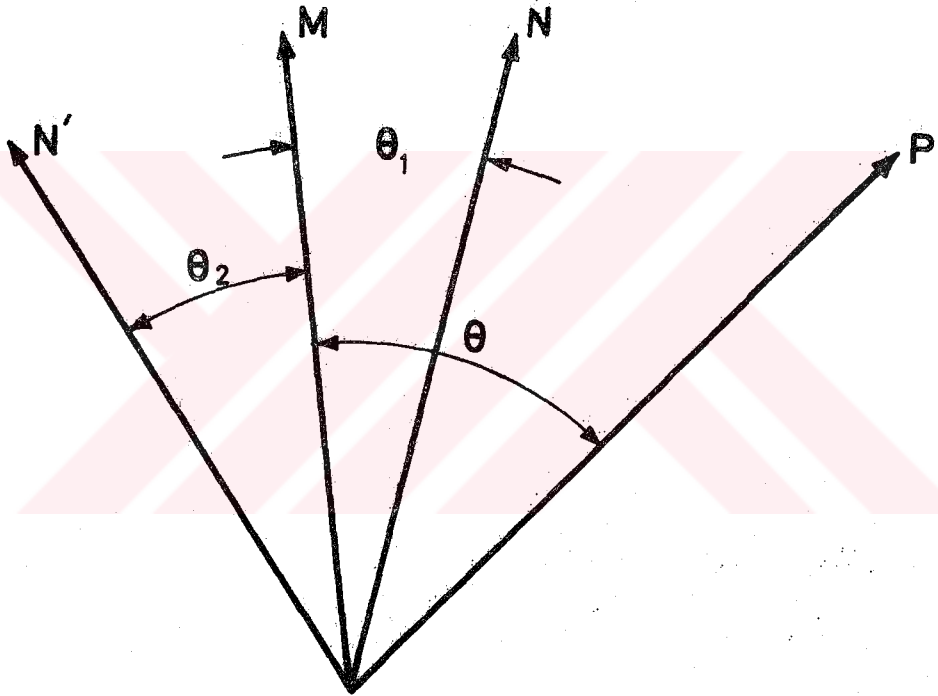
$$T_u = T_{u_0} \sqrt{\sec \phi}$$

Burada T_{u_0} ekvatordeki salınım süresidir.

Zaman yöntemlerinde alidat coğrafik kuzeye mümkün olduğu kadar yakın bağlanır. Bu nedenle jiroskop elema-

manına hem askı teli kuvvet çifti hem de presesyon kuvvet çifti etki etmektedir.

Şekil (8.6) de ON meridyenin doğrultusunu, ON' aldatın bağlandığı doğrultuyu, OP de salınımın herhangi bir anında jiroskopun dönme ekseninin doğrultusunu göstermektedir.



Şekil 8.6.

OP, ON' ile çakıştığı zaman, askı telinin kuvvet çifti P_T sıfırdır ve presesyon kuvvet çifti OP yi ON e doğru döndürür. Benzer şekilde OP ON ile çakıştığı zaman presesyon kuvvet çifti P_F sıfırdır ve askı telinin kuvvet çifti OP yi ON' ye doğru hareket ettirir. OP ON

nin sağında veya solunda olduğu zaman her iki kuvvet çifti de aynı yönde etki eder. OP ON' ile ON arasında olduğu zaman iki kuvvet çifti aksi yönde etki ederler. Böylece jiroskop eksenini ara bir konumda belirsiz bir süre sonra duracaktır. Bu ara konuma OM denirse ON ile θ_1 açısını ON' ile θ_2 açısını yapacaktır. Bu ara konumda iki kuvvet çifti birbirlerini dengeleyeceklerdir. Bu aşağıdaki eşitliğin sağlanmasına neden olur.

$$P_T = P_E$$

veya

$$q_T \theta_2 = q_E \theta_1$$

olur.

Bu eşitliklerden aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\frac{q_T}{q_E} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \chi \dots\dots\dots (8.18)$$

q_E enlemle değiştiğinden χ de enlemle değişecektir. Eğer χ_0 χ in ekvatordeki değeri ise

$$\chi_0 = \frac{q_T}{q_0}$$

dir. Bu eşitliklerden

$$\chi_0 = \chi \cos \phi$$

elde edilir.

Eğer şimdi jiroskopun dönme ekseninin denge konumundan olan ayrılması θ açısı ile gösterilirse aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$(C + \frac{J^2}{M})\ddot{\theta} + p\dot{\theta} + q_T(\theta + \theta_2) + q_E(\theta - \theta_1) = 0 \quad (8.19)$$

$q_T \theta_2 = q_E \theta_1$ olduğundan difransiyel denklem

$$(C + \frac{J^2}{M})\ddot{\theta} + p\dot{\theta} + (q_T + q_E)\theta = 0$$

haline indirgenir. Bu yeniden sönümlü bir harmonik titreşimin denklemidir. Burada sönüm katsayısı askı telindeki iç sürtünmeden ve hava sürtünmesinden ileri gelir. Bu halde askı teli kuvvet çifti ve presesyon kuvvet çifti etki ettiğinden salınımın periyodu değişiktir. Bu salınımın periyodu

$$T_0 = \frac{4 \pi (C + J^2/M)}{\sqrt{4(C + J^2/M)(q_T + q_E) - p^2}}$$

dır. Evvelce olduğu gibi harekete az bir etkisi olan sürtünme ihmal edilirse (sürtünmenin periyoda etkisi çok azdır)

$$\left(\frac{T_u}{T_0}\right)^2 = \frac{q_T + q_E}{q_E} = 1 + \chi = 1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi}$$

elde edilir. Bu denklem

$$T_D = T_u \left(1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

biçiminde de yazılabilir.

Buradan (8.14) denkleminin nasıl çıkartıldığı açıklanacaktır. Şekil 8.7 de N alidadın bağlandığı sabit doğrultu olsun. M de meridyenin doğrultusu olsun. Önceden belirtildiği gibi M askı telinin kuvvet çifti ile presesyon kuvvet çiftinin dengelendiği;

dönüm noktasından jiroskop göstergesinin sabit skaladan bölüm olarak değeri okunur. Bu değerler a_B ve a_D olarak gösterilir. İşaret gözönüne alınmadan alınan aritmetik ortalama skala bölümleri cinsinden genliğin yarısıdır.

$$a = \frac{1}{2} (|a_D| + |a_B|)$$

Yardımcı skaladan yapılan okumalarda sönüm belli olmadığından 0 noktası sistemin başlangıç noktası olarak alınabilir. Salınım eğrisinin denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\theta = a \sin \beta t$$

Burada a yarım genliktir. t $t=0$ dan itibaren ölçülen zaman ve $\beta = 2\pi/T_D$ olur. Burada T_D salınımın periyodudur.

$$t = 0, \quad \sin \beta t = 0 \quad \text{ve} \quad \theta = 0$$

$$t = \frac{1}{4} T_D, \quad \sin \beta t = \sin \frac{1}{2} \pi \quad \text{ve} \quad \theta = a$$

$$t = \frac{1}{2} T_D, \quad \sin \beta t = \sin \pi \quad \text{ve} \quad \theta = 0$$

$$t = \frac{3}{4} T_D, \quad \sin \beta t = \sin \frac{3}{2} \pi \quad \text{ve} \quad \theta = -a$$

T_1 ve T_2 geçiş zamanlarının farkı t_1 ve T_2 , T_3 arasındaki fark t_2 ise (Şekil 9.8) den

$$T_1 = \frac{3}{4} T_D - \frac{1}{2} t_1$$

$$T_2 = \frac{3}{4} T_D + \frac{1}{2} t_1$$

$$T_3 = \frac{5}{4} T_D + \frac{1}{2} t_2$$

elde edilir. T_1 zamanı için

$$\theta_2 = a \sin \frac{2\pi}{T_D} \left(\frac{3}{4} T_D - \frac{1}{2} t_1 \right) = -a \cos \frac{\pi t_1}{T_D}$$

elde edilir. Bu M den itibaren saat ibresinin ters yönünde ölçülen açıdır. Bu açının değeri:

$$\theta_2 = a \cos \frac{\pi t_1}{T_D}$$

dir. N' nün solundaki salınım süreleri negatif N' sağındaki salınım süreleri pozitif kabul edilirse

$$\theta_2 = a \cos \left\{ \pi \frac{|t_1|}{|t_1| + |t_2|} \right\}$$

$$\theta_2 = a \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{|t_2| - |t_1|}{|t_2| + |t_1|} \right\}$$

elde edilir. Eğer $|t_2|$, $|t_1|$ den büyükse $|t_2| - |t_1| = \Delta t$ yazılabilir.

$$\theta_2 = a \sin \frac{\pi}{2} \frac{\Delta t}{T_D}$$

olur. Eğer açılar derece olarak yazılırsa

$$\theta_2 = a \sin \left(\frac{\Delta t}{T_D} 90^\circ \right)$$

olur. Bu θ_2 nin tam ifadesidir. Yalnız sönüm ihmal edilmiştir. Bunun nenedenide yardımcı skalada sönüm etkisinin belli olmamasıdır.

$$a(\text{Bölüm}) m = a^0$$

olur. Böylece

$$\theta_2 = a(\text{bölüm}) \cdot m \sin \left(\frac{\Delta t}{T_D} 90^\circ \right)$$

dir. Şimdi N'den N i elde etmek için N'e uygulanacak düzeltmeyi hesaplamak için $(\theta_1 + \theta_2)$ açısı gereklidir.

$$\theta_2 + \theta_1 = \theta_2(1 + \chi) = \theta_2 \left(1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi} \right)$$

Buradan

$$\Delta N = \theta_2 + \theta_1 = a(\text{bölüm}) \cdot m \left(1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi} \right) \sin \left(\frac{\Delta t}{T_D} 90^\circ \right)$$

elde edilir. Bu ΔN düzeltmesi için tam ifadedir. Uygulamada bu formülün kullanılmasının iki avantajı vardır. Bunlardan ilki $\Delta t/T_D$ oranı kullanıldığından kronometrenin kalibrasyonuna gerek yoktur. Burada her iki terimin de aynı kronometreyi kullanarak ölçüldüğü varsayımı yapılmıştır. Ayrıca eğrinin doğrusal kısmına bağlı kalmak gibi bir zorunluk yoktur. Eğer ΔN a'nın $1/5$ i mertebesinde ise (her iki büyüklük de aynı birimde ölçüldüğüne göre) sinüs yerine açının radyan olarak değeri konulabilir:

$$\Delta N = c \cdot a(\text{bölüm}) \Delta t$$

Burada

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{m}{T_D} \left(1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi} \right) \quad \text{dır. Ayrıca } c \text{ için aşağıdaki ifadeler elde edilebilir.}$$

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{m}{T_{u_0}} \sqrt{\cos \phi} \left(1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi} \right)^{3/2}$$

ve

$$c = \frac{\pi}{2} \frac{m}{T_u} \left(1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi} \right)^{3/2}$$

dir.

ϕ enlemindeki bir istasyon noktasında c amprik bir yoldan belirlenebilir. Bu halde N'nin iki tarafında coğ-

rafik kuzeyden az farklı N_1' ve N_2' gibi iki doğrultu alınır. Zaman yöntemi iki doğrultu için uygulanırsa

$$N = N_1' + \Delta N_1 = N_1' + c \cdot a_1 \cdot \Delta t_1$$

$$N = N_2' + \Delta N_2 = N_2' + c a_2 \Delta t_2$$

Buradan

$$c = \frac{N_2' - N_1'}{a_1 \Delta t_1 - a_2 \Delta t_2}$$

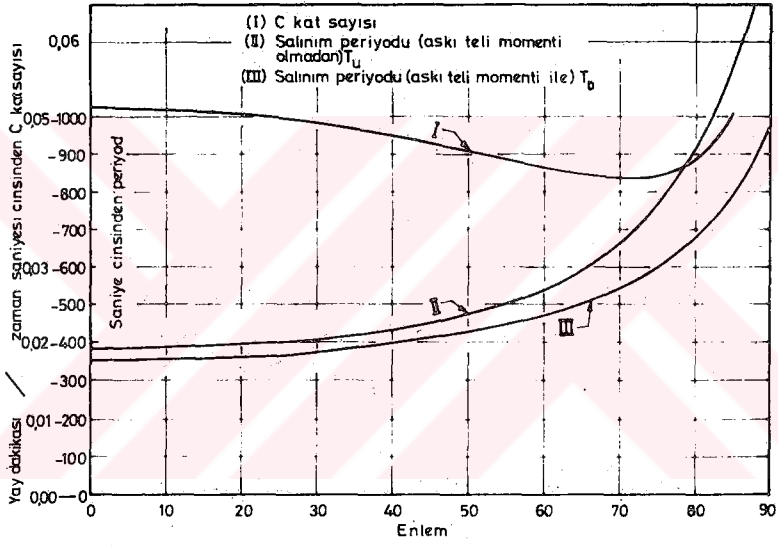
elde edilir. Zaman yöntemindeki T_D salınım periyodu geçiş zamanlarından elde edilebilir.

$$T_D = T_3 - T_1 = T_4 - T_2, \dots \dots \dots (8.20)$$

Dönüm noktaları tam doğru olarak belirlenemediklerinden T_u en iyi şekilde, bir yardımcı ile bulunur. Bu araştırmalar T_u , T_D ve c nin 0° ve 85° arasındaki değerleri Şekil 8.8'de gösterilmiştir.

8.330. GENLİK YÖNTEMİ

Genlik yöntemini kullanabilmek için, jiroskoplu teodolit gerçek kuzeyden $\pm 1^\circ$ farklılıkla yöneltilmelidir. Bu işlemi yapmanın en kısa yolu, kalibrasyonu yapılmış bir pusla kullanmaktır. Eğer pusla yoksa ön yönelme yöntemlerinden biri kullanılabilir. Jiroskopun salınımı aletin alıdatı ön yönelmenin yapıldığı N doğrultusunda bağlanır. Jiroskop serbest bırakılarak oto-kolimasyon sisteminden jiroskop salınımının yardımcı skalada a , doğu ve a_B batı okumaları yapılır. Jiroskopun bir salınımı süresince sönüm yardımcı skaladaki bölümlerden farkedilemeyeceğinden 3 ölçmeden fazla ölçme yapmağa gerek yoktur. Çoğu hallerde sadece iki okuma yeterlidir.



Şekil 8.8.

İki okumanın cebrik toplamı $(a_D + a_B)$ gerçek kuzey N ile aletin yaklaşık doğrultusu N'_D arasındaki ΔN düzeltmesi ile orantılıdır.

$$\Delta N = k(a_D + a_B) \dots\dots\dots (8.21)$$

Buradaki k çarpanı bir alet sabitidir. Bu sabit amprik olarak bu yöntemi N'_1 ve N'_2 gibi iki ön yönelmeye uygulanarak bulunabilir. N'_1 ve N'_2 gerçek kuzeyden meridyenin doğusunda ve batısında 10° farklılıkla iki doğrultudur. Ölçmelerden aşağıdaki iki denklem yazılabilir.

$$N = N'_1 + k(a_D + a_B)_1$$

$$N = N'_2 + k(a_D + a_B)_2$$

Bu denklemlerden k çarpanı

$$k = \frac{N'_1 - N'_2}{(a_D + a_B)_2 - (a_D + a_B)_1}$$

olarak bulunur.

8.400. JİROSKOPLU TEODOLİTLERİN KALİBRASYONU

Modern jiroskoplu teodolitlerde saptanması gereken 3 kalibrasyon sabiti vardır.

- a) Dönmeyen jiroskopun kuvvet çiftsiz konumu
- b) Zaman yönteminde kullanılan c sabiti
- c) Dürbünün gözleme doğrultusunun dönen jiroskopun eksenine göre oryantasyonu

Bu sabitlerin nasıl tayin edileceğini saptamadan önce uygulamada ne şekilde ortaya çıktıklarını incelemekte fayda vardır.

Dönmeyen jiroskopun askı teline etki eden moment-den ileri gelen sabit jiroskop askı telinin düşey ekse-

ni etrafında salınımlar yaparken denge konumuna geldiği zaman yardımcı skalanın sıfırında durmamasıdır. Sarkaç şeklindeki jiroskopu kısa bir sürede hareketsiz hale getirmeye imkân yoktur. Bu nedenle askı telinin boyuna eksenini etrafında serbestçe salınım yapacak şekilde serbest bırakılır. Salınımların merkezi yardımcı skalanın merkezinde olmalıdır. Eğer salınımların merkezi yardımcı skalının merkezinde değilse aletin elde edilecek sonuçları etkileyecek bir sabiti vardır.

Zaman yönteminde ise yaklaşık kuzey doğrultusunda yapılacak düzeltmeyi bulmak için bir matematiksel sabit bulunmakta idi. Bu sabit aletdeki bir bozukluktan ileri gelmemektedir. Bu sabit geçiş zamanları ile salınımların genliği arasındaki bir bağıntıyı vermektedir. Bu sabit, enlemle değişmektedir ve her alet için saptanmalıdır.

Dönen bir jiroskop serbest bırakıldığında dünyanın dönmesinden ileri gelen presesyon momentinin etkisi altında salınım yaparken bir süre sonra dönme eksenini meridyende olacak biçimde denge konumuna gelecektir. Bu konumda gözleme doğrultusu meridyen düzleminde olmaya bilir. Eğer meridyen düzleminde değilse alet ile belirlenen azimut doğru olmayacaktır. Bu nedenle ölçülen değerlerde bir düzeltme yapmak gereklidir. Düzeltme aletin yapısından ileri gelmektedir. Bu nedenle sık sık bu düzeltmenin değeri saptanmalıdır.

8.410. DÖNMEYEN JİROSKOPUN MOMENTSİZ HALİ

Eğer dönmeyen jiroskop serbest bırakılır ve askı teli de eksenini etrafında birkaç derecelik bir genlikle dönmeye bırakılırsa, dönüm noktaları yardımcı skaladan gözlenebilir. Salınımların merkezini bulmak için Schuler ortalaması kullanılabilir. Aşağıdaki örnek bu işlemin nasıl yapılacağını göstermektedir.

<u>Sol</u>	<u>Sağ</u>	<u>Schuler Ortalaması</u>
+8.0	-7.00	+0.45
+7.8	-6.8	+0.45
Ortalama		+0.45

Bu sonuçlardan görüleceği üzere jiroskop salınımlarının merkezi yardımcı skalanın ortasının 0.45 bölüm kadar solundadır. Her bölüm 10.2 yay dakikası olduğundan askı teli yardımcı skalanın merkezine göre 4.59 dakika dönmüştür. Jiroskop dönerken ve dönüm noktası yöntemi uygulanırsa presesyon momentine ek olarak telde böyle ikinci bir moment de bulunacaktır. Bu moment takip işlemi ne kadar dikkatli yapılırsa yapılsın etki edecektir. Ekvatörde askı momentinin presesyon momentine oranı yaklaşık olarak 0.15 olduğundan presesyondan ileri gelen salınımlar normal konumlarından 0.68 yay saniyesi kadar sapacaklardır. Bu hatanın tesiri eğer diğer iki alet sabiti aynı askı momentinde tayin edilirse giderilebilir. Bu nedenle jiroskoplu teodolit sık sık kalibre edilmelidir. Bunun nedeni de askı telinin momentsiz konumu zaman zaman değişmektedir.

8.420. ZAMAN YÖNTEMİNDE KULLANILAN SABİTİN TAYİNİ

(8.33) bölümünde görüldüğü üzere zaman yönteminde kullanılan c sabiti iki adet doğrusal denklemin çözümü ile elde edilebilir. Görüldüğü gibi bu denklem takımı gerçek kuzeyin iki tarafındaki konumlardan kuzeyin belirlenmesi ile elde edilir. Uygulamada aşağıdaki yöntem en iyi sonuçları vermektedir.

Ön yönelme yöntemlerinden birini kullanarak kuzeyi birkaç yay dakikası presizyon ile elde etmek olanaklı vardır. Bundan sonra iki dönüm noktası kullanarak bu presizyon arttırılabilir. Bu adımda jiroskop salınımları-

nın genliği büyük olmalıdır.

Gerçek kuzeyin elde bulunan en iyi değerini kullanarak kuzey için yaklaşık bir değer seçilir. Yatay daire bu konuma getirilir. Zaman yöntemi kullanılarak jiroskop göstergesinin yardımcı skalanın ortasından geçişi dört defa ölçülür. Bundan sonra kuzeyin öteki tarafında kuzeye yaklaşık bir değer seçilir. Aynı işlem bu konumda da tekrarlanır (Bölüm 8.8) deki formül kullanılarak c sabiti elde edilir.

8.430. KALİBRASYON DEĞERİ

Bu değer bilinen azimut ile jiroskop salınımlarında belirlenen azimut arasındaki farktır. Bu değer diğer bir yöntemle belirlenmiş bir doğrunun azimutu ile jiroskop salınımlarından elde edilen azimut arasındaki fark olduğundan bir referans doğrusunda önemli bir ölçme programından önce ve sonra belirlenmelidir.

8.440. AZİMUT TAYİNİ

Jiroskoplu pusla ile kuzey elde edilirken E kalibrasyon değeri gözönüne alınmamıştır. Alet istasyonu ve bir noktanın saptadığı doğrunun azimutu elde edilirken kuzeye karşılık olan yatay daire okuması ile ikinci noktaya karşılık olan yatay daire okuması elde edilir.

Coğrafik azimut A

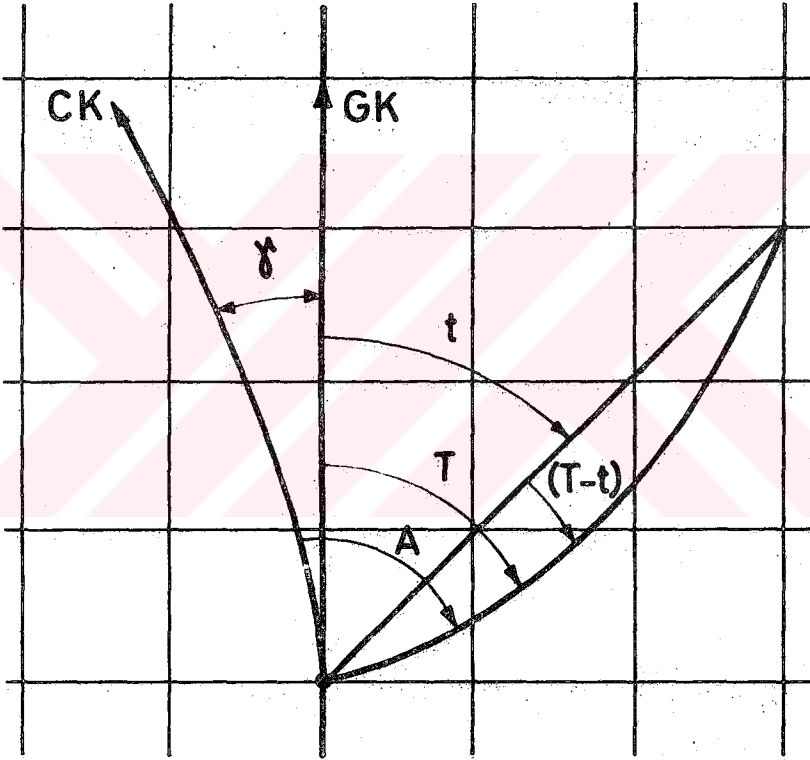
$$A = M - N + E \dots\dots\dots (8.22)$$

eşitliği ile verilir. Burada E kalibrasyon değeridir. Düzlem açıklık açısı t coğrafik azimut A ya γ meridyen konvergensiğini uygulayarak elde edilir. Büyük uzaklıklarda (20 km.den büyük) bu değere yay giriş düzeltmesi

(T-t) uygulanmalıdır.

$$t = A \pm \gamma - (T - t) \dots\dots\dots (8.23)$$

γ nın işareti bir şekil çizerek bulunabilir. Ayrıca T-t nin işaretini de bulmak için bir şekil faydalı olur.



şekil 8.9.

9.000. JİROSKOPLU TEODOLİTLE YAPILAN DÖNÜM NOKTASI ÖLCMELERİNİN EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİNE GÖRE DENGELENMESİ:

Dönüm noktalarından meridyenin belirlenmesi birçok bilgin tarafından incelenmiştir. Bu problemin çözümü Profesör G.B.Lauf tarafından 1963 de verilmiştir{42}. Fakat diğer çözümleri incelemekde gereklidir. Özellikle Profesör Max Schulerin{60} yaklaşımı herkesçe bilinmektedir. F.Kohlrausch, Profesör G.B.Lauf ve Dr.T.L.Thomas gibi yazarlar bu problemin anlaşılmasına katkıda bulunmuşlardır{40}{63}.

Bu bölümde jiroskoplu teodolitlerde olduğu gibi az sönümlü harmonik hareketin özellikleri incelenmekte ve değerlendirilmektedir. Doğrusal sönüm hali incelenmekte Schuler ve benzeri ortalamaların bir yorumu yapılmaktadır. Bu suretle Schuler ortalamalarının basit bir birleşimi ile, ortalama salınım doğrusu doğrultusunun en küçük kareler çözümünü verdiği gösterilmektedir.

9.100. DOĞRUSAL SÖNÜMLÜ MODEL

Sarkaçsal bir jiroskopun meridyene göre presesyon açısının

$$\theta = Be^{-\alpha t} \cos (\beta t + \gamma) \dots\dots\dots (9.1)$$

olduğu gösterilmiştir. Burada

B bir başlangıç noktasında salınımın yarım genliği
e tabii logaritmaların tabanı

α ve β jiroskop rotorunun açısal momentumu sabit
olduğu zaman belli bir alet için belli bir
enlemdeki sabitler

γ herhangi bir faz açısı

dır.

Dönüm noktalarında presesyon açısı için iyi bir yaklaşım $(\beta t + \gamma) \approx 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ olduğu zamanlardır. (10.1) denklemi

$$\theta = - B e^{-2\alpha' \tau} \cos 2\pi \tau$$

biçiminde yazılabilir. Burada τ geçen zamanın peryoda oranıdır.

Dönüm noktaları, $\tau = 0, 1/2, 1 \dots$ olduğu zaman meydana gelecektir. Jiroskoplu teodolit için sönüm genellikle gayet azdır. Üssel terim sadece doğrusal sönüm terimleri gözönüne alınarak seriye açılırsa

$$\theta = - B(1 - 2\alpha' \tau) \cos 2\pi \tau$$

elde edilir. $\tau = \frac{i}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$ olan dönüm noktalarında presesyon açısı için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\theta_i = B(1 - i\alpha')(-1)^{i-1}$$

θ_i ölçmeleri meridyene göre oryantasyonu bilinmeyen bir yatay daire üzerinde yapılmaktadır. Bu oryantasyon N ile gösterilir. Bu ölçmeler eğer DN_i ile ve bunlara karşı gelen düzeltmeler v_i ile gösterilirse önceki denklem aşağıdaki hali alır:

$$v_i = B(1 - i\alpha')(-1)^{i-1} + N - DN_i$$

Bu denklem $i = 1, 2, 3, 4 \dots$ için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} v_1 &= B - \alpha' B + N - DN_1 \\ v_2 &= -B + 2\alpha' B + N - DN_2 \\ v_3 &= B - 3\alpha' B + N - DN_3 \\ v_4 &= -B + 4\alpha' B + N - DN_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Bunlar aranan hata denklemleridir.

Takip eden dengeleme yönteminde şu varsayımlar yapılmaktadır.

- 1) Ölçmeler stokastik olarak bağımsızdır.
- 2) Ölçmeler eş presizyonla yapılmıştır.

Burada şunu belirtmekte yarar vardır. Dağılımın normal olduğuna dair bir varsayımda bulunulmamıştır. Sadece bu dağılım için bir varyansın bulunduğu kabul edilmiştir. En küçük kareler yöntemi sadece $\{v\}$ nin bağıntısını gerktirmektedir. Ayrıca dağılım için bir sınırlama yoktur. Yalnız varyansın varlığı hipotezi gereklidir.

Hata denklemleri (9.2.) biçiminde doğrusal olmadıklarından direkt bir çözüm için uygun değildir. Lauf α ve β bilinmeyenleri için yaklaşık değerler olarak ve sonra doğrusal olmayan terimi Taylor serisine açarak problemi çözmüştür. Bunun yerine burada bilinmeyenleri ayırıp doğrusal denklemler elde etmek için yeni bir bilinmeyenler grubu seçilecektir.

Eğer $a = \alpha'B$, $b = N + B$, $c = N - B$ denirse hata denklemlerinin genel şekli aşağıdaki gibi olur.

$$v_i = i(-1)^i a + \left\{ \frac{1 + (-1)^{i-1}}{2} \right\} b + \left\{ \frac{1 + (-1)^i}{2} \right\} c - DN_i \quad (9.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$n \geq 3$$

$i = 1, 2, 3, 4, \dots$ için bu denklem aşağıdaki biçimi alır.

$$v_1 = -a + b \quad -DN_1$$

$$v_2 = 2a + c \quad -DN_2$$

$$v_3 = -3a + b \quad -DN_3$$

$$v_4 = 4a + c \quad -DN_4$$

.....
.....

Asıl değişkenler

$$N = \frac{b+c}{2}, B = \frac{b-c}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{a}{B} \quad \text{veya} \quad \alpha' = \frac{2a}{b-c}$$

eşitlikleri ile verilmektedir. Dengelemenin geometrik yorumu Şekil 9.1. de görülmektedir. Matematiksel model bir çift doğrudur. Bu doğrular ortalama salınım doğrusuna göre aynı eğimdedirler ve ölçmelerden geçmektedirler.

Normal denklemler kurulursa simetrik matrislerin köşegenin altında kalan kısımları yazılmamıştır.

a	b	c	Sabit Terim
$\sum_{i=1}^n i^2$	$\sum_{i=1}^n \frac{i(-1)^i \{1+(-1)^{i-1}\}}{2}$	$\sum_{i=1}^n \frac{i(-1)^i \{1+(-1)^i\}}{2}$	$-\sum_{i=1}^n i(-1)^i DN_i = 0$
$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1+(-1)^{i-1}}{2} \right\}^2$		0	$-\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1+(-1)^{i-1}}{2} \right\} DN_i = 0$
		$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1+(-1)^i}{2} \right\}$	$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1+(-1)^i}{2} \right\} DN_i = 0$

Aşağıdaki indirgemedede dönüm noktası sayısının tek veya çift olması halinde ayrı ayrı değerlendirme yapılmıştır.

n in çift olması halinde normal denklemler

a	b	c	sabit terim
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$-\frac{n^2}{4}$	$\frac{n}{4}(n+2)$	$\sum_{i=1}^n i^T DN_i^T - \sum_{i=1}^n i^S DN_i^S = 0$
	$\frac{n}{2}$	0	$-\sum_{i=1}^n DN_i^T = 0$
		$\frac{n}{2}$	$-\sum_{i=1}^n DN_i^S = 0$

(9.4)

biçimindedir. Eğer n tek ise normal denklemler aşağıdaki gibidir.

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$-(\frac{n+1}{2})$	$\frac{n^2-1}{4}$	$\sum_{i=1}^n i^T DN_i^T - \sum_{i=1}^n i^S DN_i^S = 0$
	$\frac{n+1}{2}$	0	$-\sum_{i=1}^n DN_i^T = 0$
		$\frac{n-1}{2}$	$\sum_{i=1}^n DN_i^S = 0$

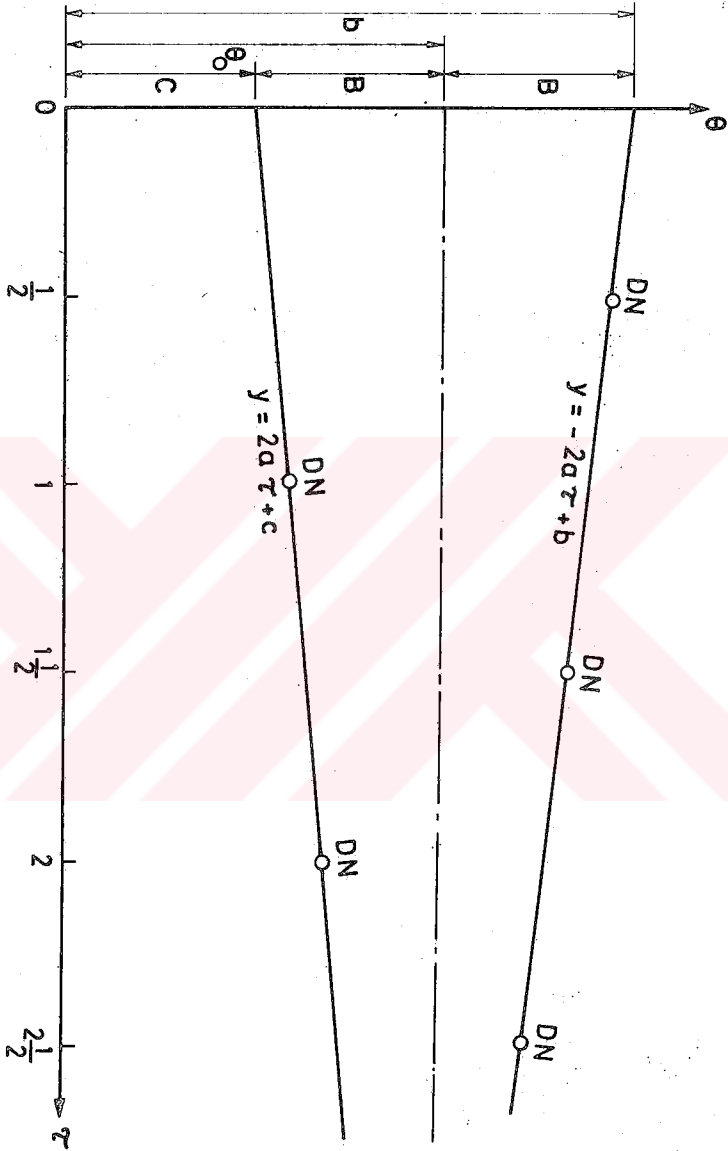
(9.5)

Burada T ve Ç endisleri sırasıyla tek veya çift ölçme sayısına karşılıktır.

Uygulama yönünden $n > 8$ hali ile az karşılaştırıldığında (9.4) ve (9.5) denklemleri $n=3,4,\dots,8$ için çözülmüştür. Bu çözümlerin sonuçları (Çizelge 9.1) de verilmiştir.

Çizelge 9.1 Doğrusal Sönümlene Halinde Normal Denklemlerin Çözümleri:

n	a							
	DN ₁	DN ₂	DN ₃	DN ₄	DN ₅	DN ₆	DN ₇	DN ₈
3 1/2	(1		-1					)
4 1/4	(1	-1	-1	1				)
5 1/10	(2	-1		1	-2			)
6 1/8	(1	-1			-1	1		)
7 1/28	(3	-2	1		-1	2	-3	)
8 1/40	(3	-3	1	1	-1	1	-3	3.)



Şekil 9.1.

n	b							
	DN ₁	DN ₂	DN ₃	DN ₄	DN ₅	DN ₆	DN ₇	DN ₈
3 1/2	(3		-1					)
4 1/2	(2	-1		1				)
5 1/30	(28	-9	10	9	-8			)
6 1/24	(17	-9	8		-1	9		)
7 1/28	(19	-8	11		3	8	-5	)
8 1/20	(11	-6	7	-2	3	2	-1	6)

n	c							
	DN ₁	DN ₂	DN ₃	DN ₄	DN ₅	DN ₆	DN ₇	DN ₈
3 1/9	(-1	1	1					)
4 1/4	(-3	5	3	-1				)
5 1/5	(-3	4		1	3			)
6 1/6	(-3	5		2	3	-1		)
7 1/21	(-9	13	-3	7	3	1	9	)
8 1/8	(-3	5	-1	3	1	1	3	-1)

n	$N = \frac{b+c}{2}$							
	DN ₁	DN ₂	DN ₃	DN ₄	DN ₅	DN ₆	DN ₇	DN ₈
3 1/4	(1	2	1					)
4 1/8	(1	3	3	1				)
5 1/12	(2	3	2	3	2			)
6 1/48	(5	11	8	8	11	5		)
7 1/24	(3	4	3	4	3	4	3	)
8 1/80	(7	13	9	11	11	9	13	7)

n	$B = \frac{b-c}{2}$							
	DN ₁	DN ₂	DN ₃	DN ₄	DN ₅	DN ₆	DN ₇	DN ₈
3 1/4 (5	-2	-3						)
4 1/8 (7	-7	-3	3					)
5 1/60 (46	-33	10	3	-26				)
6 1/48 (29	-29	8	-8	-13	13			)
7 1/68 (93	-76	45	-28	-3	20	-51		)
8 1/80 (37	-37	19	-19	1	-1	-17	17	)

Burada ayrıca $\frac{b+c}{2}$ ve $\frac{b-c}{2}$ değerleri de bulunmuştur. Bunlar asıl bilinmeyenler olan N ve B için gereklidir. n = 4 ve 8 için elde edilen N değerleri Lauf eşitlikleri ile aynıdır.

(9.4) ve (9.5) normal denklemlerinden iki önemli bağıntı elde edilebilir. (9.4) normal denklemlerinin ikincisi üçüncüsü ile toplanırsa;

$$\frac{n}{2}a + \frac{n}{2}b + \frac{n}{2}c = \sum_{i=1}^n DN_i^T + \sum_{i=1}^n DN_i^S$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{b+c}{2} = N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DN_i - \frac{a}{2} \dots\dots\dots (9.6)$$

elde edilir. Ayrıca (9.5) normal denklemlerinde ikinci denklem n + 1 ve üçüncü denklem n - 1 ile bölünüp toplanırsa;

$$\frac{b+c}{2} = N = \frac{1}{n^2 - 1} \{ (n-1) \sum_{i=1}^n DN_i^T + (n+1) \sum_{i=1}^n DN_i^S \} \quad (9.7)$$

elde edilir. Bu eşitlik tek sayılı ölçmelerin aritmetik ortalamasını ve çift sayılı ölçmelerin aritmetik ortalamasını alıp, bu iki aritmetik ortalamının ortalaması alınarak elde edilir.

Bu çözümlerin sonuçlarını Williams ve Belling{66} tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırmak yararlı olacaktır. Bu bilginler{VV} min dan daha iyi bir kriter bulununcaya kadar en küçük kareler yönteminin herhangi bir diğer yöntem kadar geçerli olduğunu belirtmektedirler. Ayrıca en küçük kareler yöntemi ile uyuşan her indirgemenin geçerli olduğunu belirtmektedirler. Bunun nedeni de en küçük kareler yönteminin daha genel bir çözüm vermesidir. Williams ve Belling aşağıdaki formülleri simetriden ve {VV} min olmasından çıkartmışlardır.

n çift için

$$N = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DN_i - \frac{1}{4(n-2)} (DN_1 - DN_2 - DN_{n-1} + DN_n)$$

ve n tek için

$$N = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n DN_i^T + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n DN_i^S$$

formülleri verilmektedir. Bu eşitlikler ile (9.6) ve (9.7) eşitlikleri arasındaki uyum tam değildir. n tek için uyum tamdır. Fakat n çift için a/2

$$\frac{1}{4(n-2)} (DN_1 - DN_2 - DN_{n-1} + DN_n)$$

dir. Bu yaklaşım akla yatkındır. Çünkü en küçük kareler yönteminin geometrik bir yorumu yapılırsa a/2 nin uç ölçmelerden elde edilebileceği görülür. En küçük kareler

yöntemi ile elde edilen çözüm tercih edilmelidir. Ayrıca Schuler ortalamaları gözönüne alınarak daha basit bir indirgeme sözkonusudur.

Dengelenmiş parametrelerin tahminlerinin çözümünün yanısıra bunların varyanslarının ve kovaryanslarının hesaplanması gereklidir. Böylece matematiksel modelin ve ölçmelerin geçerliliği incelenmiş olacaktır.

Dengelenmiş parametrelerin ağırlık katsayılarının matrisi mutlak terimler çıkarıldıktan sonra elde edilen normal denklemlerin katsayılar matrisinin enversidir.

n çift için bu ters matris

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{n(n^2 - 4)} & \frac{6}{(n^2 - 4)} & \frac{-6}{n(n - 2)} \\ \frac{5n^2 - 8}{n(n^2 - 4)} & \frac{-3}{(n - 2)} & \frac{5n + 2}{n(n - 2)} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. n tek için

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{n(n^2 - 1)} & \frac{6}{n(n - 1)} & \frac{-6}{n(n - 1)} \\ \frac{5n^2 + 4n + 3}{n(n^2 - 1)} & \frac{-3(n + 1)}{n(n - 1)} & \frac{5n + 3}{n(n - 1)} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Dengelenmiş ölçmelerin varyansını veren formül

$\hat{S}_y^2 = \frac{\{vv\}}{r}$ şeklinde ise a,b,c dengelenmiş parametrelerin varyanslar aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$\hat{S}_a^2 = Q_{aa} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_b^2 = Q_{bb} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_c^2 = Q_{cc} \hat{S}_y^2$$

Evvelce belirtildiği gibi önemli olan asıl bilinmeyenler

$$N = \frac{b+c}{2}, \quad B = \frac{b-c}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha' = \frac{a}{B}$$

dir. Bu bağıntılara varyansların yayılması uygulanırsa

$$\hat{S}_N^2 = \frac{1}{4} \{Q_{bb} + 2Q_{bc} + Q_{cc}\} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_B^2 = \frac{1}{4} \{Q_{bb} - 2Q_{bc} + Q_{cc}\} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_{\alpha'}^2 = \frac{4}{(b-c)^2} \{ (b-c)^2 Q_{aa} + a^2 (Q_{bb} - 2Q_{bc} + Q_{cc}) - 2a(b-c)(Q_{ab} - Q_{ac}) \} \hat{S}_y^2$$

elde edilir. Envers matrislerden bu değerler alınıp yerine konursa n çift için

$$\hat{S}_N^2 = \frac{n^2 - 1}{n(n^2 - 4)} \cdot \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_B^2 = \frac{4n^2 + 6n - 1}{n(n^2 - 4)} \cdot \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_{\alpha'}^2 = \frac{12}{n(n^2-4)B^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha'^2}{24} (5n+4)(n+1) - \alpha'(n+1) \right\} \cdot \hat{S}_y^2$$

elde edilir. Eğer n büyük değilse (uygulamada da bu böyledir) son bağıntı

$$\hat{S}_{\alpha'}^2 = \frac{12}{n(n^2-4)B^2} S_y^2$$

biçiminde verilebilir. n tek için

$$\hat{S}_N^2 = \frac{n}{n^2-1} \hat{S}_y^2$$

biçiminde verilebilir. n tek için

$$\hat{S}_N^2 = \frac{n}{n^2-1} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_B^2 = \frac{4n^2+6n+3}{n(n^2-1)} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_{\alpha'}^2 = \frac{12}{n(n^2-1)B^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha'^2}{12} (4n^2+6n+3) - \alpha'(n+1) \right\} \hat{S}_y^2$$

elde edilir. Son bağıntı için

$$\hat{S}_{\alpha'}^2 = \frac{12}{n(n^2-1)B^2} \cdot \hat{S}_y^2$$

yazılabilir. T ekseninin merkezi ölçmeler merkezi ile karşılaştırılırsa n in çift değerleri için bir karşılaştırma yapılabilir. (9.4) ve (9.5) denklemlerinde

$$b = b' + \frac{(n+1)}{2} a$$

ve

$$c = c' - \frac{(n+1)}{2} a$$

konursa n çift için

a	b'	c'	sabit terim
$\frac{n(n^2-1)}{12}$	$-\frac{n^2}{4}$	$\frac{n}{4}(n+2)$	$\sum_{i=1}^n i^T DN_i^T - \sum_{i=1}^n i^S DN_i^S = 0$
$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{2}$	0	$-\sum_{i=1}^n DN_i^T = 0$
$\frac{n}{4}$	0	$\frac{n}{2}$	$-\sum_{i=1}^n DN_i^S = 0$

(9.8)

elde edilir. Aynı şekilde n tek için

a	b'	c'	sabit terim
$\frac{n(n^2-1)}{12}$	$-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$	$\frac{(n^2-1)}{4}$	$\sum_{i=1}^n i^T DN_i^T - \sum_{i=1}^n i^S DN_i^S = 0$
0	$\frac{(n+1)}{2}$	0	$-\sum_{i=1}^n DN_i^T = 0$
0	0	$\frac{(n-1)}{2}$	$-\sum_{i=1}^n DN_i^S = 0$

(9.9)

elde edilir. Bu denklem takımlarının çözümü a ve $\frac{b+c}{2}$ için (9.4) ve (9.5) denklem takımının verdiği çözüm ile aynıdır. Diğer taraftan orta genlik B' için basit ifadeler elde edilebilir. Burada

$$B' = \frac{b' - c'}{2}$$

dir. (9.8) de üçüncü denklem ikinci denklemden çıkartılırsa n çift için

$$B' = \frac{b' - c'}{2} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n DN_i^T - \sum_{i=1}^n DN_i^S \right\} \dots\dots$$

elde edilir. (9.9) denklem takımında aynı işlem yapılırsa n tek için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$B' = \frac{b' - c'}{2} = \frac{1}{n^2-1} \left\{ (n-1) \sum_{i=1}^n DN_i^T - (n+1) \sum_{i=1}^n DN_i^S \right\}$$

(9.8) ve (9.9) envers matrisleri

n çift için

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{12}{n(n^2-4)} & \frac{6}{n^2-4} & \frac{-6}{n(n-2)} \\ \frac{-6}{n(n^2-4)} & \frac{2n^2-3n-8}{n(n^2-4)} & \frac{3}{n(n-2)} \\ \frac{-6}{n(n^2-4)} & \frac{-3}{n^2-4} & \frac{2n-1}{n(n-2)} \end{array} \right]$$

ve

n tek için

$$\begin{bmatrix} \frac{12}{n(n^2 - 1)} & \frac{6}{n(n - 1)} & \frac{-6}{n(n - 1)} \\ 0 & \frac{2}{n + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n - 1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Dengelenmiş bilinmeyen N in varyansını veren bağıntı aynı kalacaktır. Varyansların yayılması kanunu gözönüne alınırsa B' ve α'' için, aşağıdaki varyans ifadeleri elde edilir.

$$\hat{S}_{B'}^2 = \frac{1}{4} \{ Q_{b'b'} - Q_{b'c'} - Q_{c'b'} - Q_{c'c'} \} \hat{S}_y^2$$

$$S_{\alpha''}^2 = \frac{4}{(b' - c')^4} \{ (b' - c')^2 Q_{aa} + a^2 (Q_{b'b'} - Q_{b'c'} - Q_{c'b'} + Q_{c'c'}) + a(b' - c') (Q_{ac'} + Q_{c'a} - Q_{ab'} - Q_{b'a}) \} \hat{S}_y^2$$

Burada

$$B' = \frac{b' - c'}{2} \text{ ve } \alpha'' = \frac{2a}{b' - c'}$$

dir. Envers matrislerden uygun değerleri yerine konduktan sonra aşağıdaki eşitlikler elde edilir. n çift için

$$\hat{S}_N^2 = \frac{n^2 - 1}{n(n^2 - 4)} \cdot \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_{B'}^2 = \frac{1}{n} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_{\alpha''}^2 = \frac{12}{n(n^2 - 4)B'^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha''^2}{12} (n^2 - 4) - \frac{\alpha''}{2}(n+1) \right\} \hat{S}_y^2$$

elde edilir. Son eşitlik iyi bir yaklaşımla

$$\hat{S}_{\alpha''}^2 = \frac{12}{n(n^2 - 4)B'^2} \hat{S}_y^2$$

biçiminde verilebilir. n tek için

$$\hat{S}_N^2 = \frac{n}{n^2 - 1} \hat{S}_y^2$$

$$\hat{S}_{B'}^2 = \frac{n}{n^2 - 1} \hat{S}_y^2 \dots\dots\dots (9.11)$$

$$\hat{S}_{\alpha''}^2 = \frac{12}{n(n^2 - 1)B'^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha''^2 n^2}{12} - \frac{\alpha''}{2} (n + 1) \right\} \hat{S}_y^2$$

elde edilir. Son eşitlik

$$\hat{S}_{\alpha''}^2 = \frac{12}{n(n^2 - 1)B'^2} \hat{S}_y^2$$

biçiminde yazılabilir.

"a" nın hesaplanması için gereken formül dışında n çift ve n tek için en küçük kareler yöntemine göre kuzeyi veren bağıntılar elde edilmiştir. (9.4) ve (9.5) veya (9.8) ve (9.9) denklemlerine dönerek b ve c veya b' ve c' bilinmeyenleri yok edilir ve n çift için

$$a = \frac{12}{n(n^2 - 4)} \left\{ \sum_{i=1}^n i^S DN_i^S - \sum_{i=1}^n i^T DN_i^T + \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n DN_i^T - \frac{n+2}{2} \sum_{i=1}^n DN_i^S \right\}$$

ve n tek için

$$a = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \left\{ \sum_{i=1}^n i^2 DN_i^S - \sum_{i=1}^n i^2 DN_i^T + \frac{n+1}{2} \left(\sum_{i=1}^n DN_i^T - \sum_{i=1}^n DN_i^S \right) \right\} \dots\dots\dots (9.12)$$

elde edilir.

9.20. SCHULER ORTALAMALARININ VE İLGİLİ ORTALAMALARIN ÖZELLİKLERİ

Sarkaçsal jiroskopda kullanılan dönüm noktası yönteminde meridyenin ortalama doğrultusu Prof. Max Schuler {60} tarafından verilen formülle hesaplanmaktadır.

$$S_1 = \frac{DN_1 + 2DN_2 + DN_3}{4}, S_2 = \frac{DN_2 + 2DN_3 + DN_4}{4}$$

$$S_3 = \frac{DN_3 + 2DN_4 + DN_5}{4} \dots\dots\dots$$

$$S_{n-2} = \frac{DN_{n-2} + 2DN_{n-1} + DN_n}{4}$$

$$N = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-2}}{n-2}$$

Bu yöntemde sayısal hesap gayet basittir. Ayrıca kuzeyi veren N değeri arazide ölçmeler yapıldıktan sonra hemen hesaplanabilir. Ayrıca Schuler ortalaması ile en küçük kareler yöntemine göre elde edilen çözüm arasındaki fark nadiren önemli derecede farklıdır. Schuler yönteminin sakıncaları şunlardır:

- En küçük kareler yönteminden elde edilen çözüm ile N arasındaki farkın önemli olup olmadığı bilinmeyebilir.

- b) Başlangıç ölçmeleri birleştirildiğinden kötü veya hatalı bir ölçme Schuler ortalamasında belli olmayabilir. Böylece N hatalı elde edilir.
- c) Schuler ortalamaları bağımsız büyüklükler olarak kabul edilirse bunlardan elde edilen bir varyans yanlıştır.
- d) Başlangıç ölçmelerinin hataları, geri kalan bilinmeyenler ve varyanslar kapalı bir formülle verilmemiştir.

Schuler ortalaması başlangıç ölçmelerinden elde edilebilecek bir seri ortalamaların özel bir halidir. Yeterli ve gerekli ölçme sayısı üçtür. Böyle üç ölçmeden iki çeşit ortalama elde edilir. Yapılan her fazla ölçme için seride diğer bir ortalama bulunabilir. Burada sadece ilk üç çeşit ortalama gözönüne alınacaktır. Bunlar İlk Ortalama, Schuler Ortalaması ve Thomas Ortalaması diye isimlendirileceklerdir. İşlemler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Ölçmeler	İlk Ortalama	Schuler Ortalaması	Thomas Ortalaması
DN	S^1	S^2	S^3
DN ₁	$S_1^1 = \frac{DN_1 + DN_2}{2}$	$S_1^2 = \frac{S_1^1 + S_2^1}{2} =$	$S_1^3 = \frac{S_1^2 + S_2^2}{2} =$
DN ₂		$\frac{DN_1 + 2DN_2 + DN_3}{4}$	$\frac{DN_1 + 3DN_2 + 3DN_3 + DN_4}{8}$
	$S_2^1 = \frac{DN_2 + DN_3}{2}$		

DN ₃		$S_2^2 = \frac{S_2^1 + S_3^1}{2} =$ $= \frac{DN_2 + 2DN_3 + DN_4}{4}$	
	$S_3^1 = \frac{DN_3 + DN_4}{2}$		$S_2^3 = \frac{S_2^2 + S_3^2}{2} =$ $= \frac{DN_2 + 3DN_3 + 3DN_4 + DN_5}{8}$
DN ₄		$S_3^2 = \frac{S_3^1 + S_4^1}{2} =$ $= \frac{DN_3 + 2DN_4 + DN_5}{4}$	
	$S_4^1 = \frac{DN_4 + DN_5}{2}$		
DN ₅			

Her ortalamadaki başlangıç ölçmelerinin katsayıları $(a+b)^n$ Binom açılımından elde edilir. Bölen ise katsayıların toplamıdır. Diğer taraftan bu değerler Paskal üçgeninden alınabilir (Çizelge 9.2). Bölen 2^{n-1} dir.

Bu ortalama alma işleminin gerisindeki matematiksel mekanizmayı incelemek yararlıdır.

n	Ortalamalardaki K.A.matrisindeki bölün katsayılar													2^{n-1}
1	1													1
2		1											ilk	2
3			1										Schuler	4
4				1									Thomas	8
5					1								Schuler	16
6						1								32
7							1							64
8								1						128
9									1					256
10										1				512
11											1			1024
12												1		2048
13													1	4096

Çizelge 9.2 Paskal Üçgeni

$$DN_i = B(-1)^{i-1} e^{-\alpha i} + N - v_i$$

Üslü Terim Taylor serisine açıldığında, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$DN_1 = B(1 - \alpha + \frac{1}{2!} \alpha^2 - \frac{1}{3!} \alpha^3 + \frac{1}{4!} \alpha^4 + \dots) + N - v_1$$

$$DN_{j-2} = B(-1)^{j-3} \{1 - (j-2)\alpha + \frac{1}{2!} \{(j-2)\alpha\}^2 - \frac{1}{3!} \{(j-1)\alpha\}^3 + \frac{1}{4!} \{(j-2)\alpha\}^4 \dots\} + N - v_{j-2}$$

$$DN_{j-1} = B(-1)^{j-2} \{1 - (j-1)\alpha + \frac{1}{2!} \{(j-1)\alpha\}^2 - \frac{1}{3!} \{(j-1)\alpha\}^3 + \frac{1}{4!} \{(j-1)\alpha\}^4 \dots\} + N - v_{j-1}$$

$$DN_j = B(-1)^{j-1} \{1 - j\alpha + \frac{1}{2!} (j\alpha)^2 - \frac{1}{3!} (j\alpha)^3 + \frac{1}{4!} (j\alpha)^4 \dots\} + N - v_j$$

$$DN_{j+1} = B(-1)^j \{1 - (j+1)\alpha + \frac{1}{2!} \{(j+1)\alpha\}^2 - \frac{1}{3!} \{(j+1)\alpha\}^3 + \frac{1}{4!} \{(j+1)\alpha\}^4 \dots\} + N - v_{j+1}$$

$$DN_{j+2} = B(-1)^{j+1} \{1 - (j+2)\alpha + \frac{1}{2!} \{(j+2)\alpha\}^2 - \frac{1}{3!} \{(j+2)\alpha\}^3 + \frac{1}{4!} \{(j+2)\alpha\}^4 \dots\dots\dots\} + N - v_{j+2}$$

$$DN_n = B(-1)^{n-1} \{1 - n\alpha + \frac{1}{2!} (n\alpha)^2 - \frac{1}{3!} (n\alpha)^3 + \frac{1}{4!} (n\alpha)^4 \dots\dots\dots\} + N - v_n$$

$$n \geq 3 \qquad j \geq 3$$

Birbirini takip eden denklemlerin ortalaması alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

İlk Ortalamalar:

$$S_{j-2}^1 = \frac{DN_{j-2} + DN_{j-1}}{2} = \frac{B(-1)^{j-2}}{2} \{-\alpha + \frac{(2j-3)\alpha^2}{2!} - \{(j-1)^3 - (j-2)^3\} \frac{\alpha^3}{3!} + \{(j-1)^4 - (j-2)^4\} \frac{\alpha^4}{4!} \dots\dots\} + N \frac{v_{j-2} + v_{j-1}}{2}$$

$$S_{j-1}^1 = \frac{DN_{j-1} + DN_j}{2} = \frac{B(-1)^{j-1}}{2} \{-\alpha + \frac{(2j-1)^2 \alpha^2}{2!} - \{j^3 - (j-1)^3\} \frac{\alpha^3}{3!} + \{j^4 - (j-1)^4\} \frac{\alpha^4}{4!} \dots\dots\} + N \frac{v_{j-1} + v_j}{2}$$



Şekil 9.2.

$$S_j^1 = \frac{DN_j + DN_{j+1}}{2} = \frac{B(-1)^j}{2} \left\{ -\alpha + \frac{(2j+1)\alpha^2}{2!} + \frac{(2j+1)\alpha^2}{2!} - \right. \\ \left. - \{ (j+1)^3 - j^3 \} \frac{\alpha^3}{3!} + \{ (j+1)^4 - j^4 \} \frac{\alpha^4}{4!} \dots \right\} + N \frac{v_j + v_{j+1}}{2}$$

$$S_{j+1}^1 = \frac{DN_{j+1} + DN_{j+2}}{2} = \frac{B(-1)^{j+1}}{2} \left\{ -\alpha + \frac{(2j+3)\alpha^2}{2!} - \right. \\ \left. - \{ (j+2)^3 - (j+1)^3 \} \frac{\alpha^3}{3!} + \{ (j+2)^4 - (j+1)^4 \} \frac{\alpha^4}{4!} \dots \right\} +$$

$$+ N - \frac{v_{j+1} + v_{j+2}}{2}$$

Schuler Ortalamaları:

$$S_{j-2}^2 = \frac{S_{j-2}^1 + S_{j-1}^1}{2} = \frac{B(-1)^{j-1}}{4} \left\{ \alpha^2 - \frac{6(j-1)\alpha^3}{3!} + 12j^2 - 24j + \right. \\ \left. + 14 \right\} \frac{\alpha^4}{4!} \dots \dots \dots + N - \frac{v_{j-2} + 2v_{j-1} + v_j}{4}$$

$$S_{j-1}^2 = \frac{S_{j-1}^1 + S_j^1}{2} = \frac{B(-1)^j}{4} \left\{ \alpha^2 - \frac{6j\alpha^3}{3!} + (12j^2 + 2) \frac{\alpha^4}{4!} \dots \right\} + \\ + N - \frac{v_{j-1} + 2v_j + v_{j+1}}{4}$$

$$S_j^2 = \frac{s_j^1 + s_{j+1}^1}{2} = \frac{B(-1)^{j+1}}{4} \left\{ \alpha^2 - \frac{6(j+1)\alpha^3}{3!} + \right. \\ \left. + (12j^2 + 24j + 14) \frac{\alpha^4}{4!} \dots\dots\dots \right\} + N - \frac{v_j + 2v_{j+1} + v_{j+2}}{4}$$

Thomas Ortalamaları:

$$S_{j-2}^3 = \frac{s_{j-2}^2 + s_{j-1}^2}{2} = \frac{B(-1)^j}{8} \left\{ -\alpha^3 + 12(2j-1) \frac{\alpha^4}{4!} + \dots\dots \right\} + \\ + N - \frac{v_{j-2} + 3v_{j-1} + 3v_j + v_{j+1}}{8}$$

$$S_{j-1}^3 = \frac{s_{j-1}^2 + s_j^2}{2} = \frac{B(-1)^{j+1}}{8} \left\{ -\alpha^3 + 12(2j+1) \frac{\alpha^4}{4!} + \dots\dots \right\} + \\ + N - \frac{v_{j-1} + 3v_j + 3v_{j+1} + v_{j+2}}{8}$$

Her ortalamadaki seri açılımı toplu olarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\text{İlk Ortalama} : B(-1)^{i-1} e^{-\alpha i} \left\{ \frac{1-e^{-\alpha}}{2} \right\}$$

$$\text{Schuler Ortalaması} : B(-1)^{i-1} e^{-\alpha i} \left\{ \frac{1-e^{-\alpha}}{2} \right\}^2$$

$$\text{Thomas Ortalaması} : B(-1)^{i-1} e^{-\alpha i} \left\{ \frac{1-e^{-\alpha}}{2} \right\}^3$$

Seri açılımından görüldüğü üzere ard arda ortalama alma işlemi α nın kuvvetlerini içeren terimlerin ortadan kalkmasına yaramaktadır. Örneğin ilk ortalama için α^0 lı terimler, Schuler ortalaması için α^1 lı terimler ve Thomas ortalamaları için α^2 lı terimler ortadan kalkmaktadır.

Matematiksel modele yeterli bir yaklaşım

$$DN_i = B(-1)^{i-1} + N - v_i$$

olarak alınırsa $\alpha = 0$ kabul edilmekte ve ilk ortalamalar sadece N ve v lerin birleşiminden oluşmaktadır. Schuler ortalamaları için model

$$DN_i = B(-1)^{i-1} (1 - i\alpha) + N - v_i$$

şeklindedir.

Böylece ilk ortalamaların veya Schuler ortalamalarının aritmetik ortalamalarını alarak N bulunmak istenirse;

$$B(-1)^{i-1} e^{-\alpha i} \left\{ \frac{1-e^{-\alpha}}{2} \right\}$$

veya

$$B(-1)^{i-1} e^{-\alpha i} \left\{ \frac{1-e^{-\alpha}}{2} \right\}^2$$

büyükliklerinin sayısal olarak birbirinden farklı olmaları kabul edilir.

Bu hadisenin diğer bir yorumu şu biçimdedir. Eğer ilk ortalama yeterli bulunuyorsa sönüm ihmal edilmiştir ve dönüm noktalarının zarfı birbirine paralel iki doğrudur. Schuler ortalamaları için bu zarf eş eğimli iki doğru, Thomas ortalaması için ise ikinci dereceden eğrilerdir. Her özel halde zarf üssel eğriye bir yaklaşım olarak kabul edilmektedir.

Herhangibir ortalama ölçmeler için uygun görülse bile, ikinci adımda ortalama almanın bir zararlı yanı vardır. Ortalama alırken eğer orijinal bağımsız ölçmeleri alınıyorsa bu yol geçerlidir. Fakat burada sözkonusu edilen dengelenecek büyüklükler bu ölçmelerin fonksiyonudur. Her ne kadar ortalama almak bu halde kabul edilmez ise de (en küçük kareler yöntemine göre) elde edilen büyüklüklere matematiksel korelasyon gözönüne alınarak bir dengeleme uygulamak olanak dışı değildir. Sözkonusu olan parametrik denklemler aşağıdaki şekilde olsun.

$$N \quad - \quad S_1 \quad = \quad v_1$$

$$N \quad - \quad S_2 \quad = \quad v_2$$

$$N \quad - \quad S_3 \quad = \quad v_3$$

$$\text{-----}$$
$$\text{-----}$$
$$\text{-----}$$

$$N \quad - \quad S_m \quad = \quad v_m$$

Burada ilk ortalama için $m = n - 1$

Schuler ortalaması için $m = n - 2$

Thomas ortalaması için $m = n - 3$

dür. Bu denklem takımını matris notasyonunda yazarsak

$$AN - S = V$$

elde edilir. Burada A m boyutlu bir sütun birim vektörü, S ortalamaların sütun vektörü

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$$

v düzeltmelerin vektörü

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

ve N ise 1X1 matrisidir.

Her tek ortalamanın ağırlık katsayısı matrisindeki katsayılar varyansların yayılması kanunundan bulunabilir.

$$s_1^1 = \frac{DN_1 + DN_2}{2}$$

$$s_2^1 = \frac{DN_2 + DN_3}{2}$$

$$s_3^1 = \frac{DN_3 + DN_4}{2}$$

$$g_{s_1^1} = \frac{1}{2} g_{DN_1} + \frac{1}{2} g_{DN_2}$$

$$g_{s_2^1} = \frac{1}{2} g_{DN_2} + \frac{1}{2} g_{DN_3}$$

$$g_{s_3^1} = \frac{1}{2} g_{DN_3} + \frac{1}{2} g_{DN_4}$$

$$\text{ve } g_{s_1^1} s_1^1 = \frac{1}{4} g_{DN_1 DN_1} + \frac{1}{4} g_{DN_2 DN_2} = \frac{1}{2} g_{DN DN}$$

$$g_{s_1^1} s_2^1 = \frac{1}{4} g_{DN_2 DN_2} = \frac{1}{4} g_{DN DN}$$

elde edilir. Burada her ölçmenin bağımsız ve eş varyanslı olduğu kabul edilmiştir. Böylece aranan ağırlık matrisi:

G¹ ~~200~~

biçimindedir. Aynı teknik Schuler ve Thomas ortalamalarına uygulanırsa aşağıdaki matrisler elde edilir:

$$G^2 =$$

$$\frac{1}{16}$$

bilinen yöntemler uygulanmış fakat n büyük olduğu zaman Schuler ve Thomas ortalamaları için ekonomik olmadığı görülmüştür. Bundan sonra elektronik hesap makinası uygulanmış ve E.H.M. den elde edilen sonuçlarla genel ifadeler elde edilmiştir.

İlk Ortalama

n çift

$$N = \frac{2}{n} (S_1^1 + S_3^1 + S_5^1 + S_7^1 + \dots)$$

veya

$$N = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{1/2n} S_{2i-1}^1$$

n	ilk ortalama	Schuler Orta.	Thomas Ortalaması
	$S_1^1 S_2^1 S_3^1 S_4^1 S_5^1 S_6^1 S_7^1$	$S_1^2 S_2^2 S_3^2 S_4^2 S_5^2 S_6^2$	$S_1^3 S_2^3 S_3^3 S_4^3 S_5^3$
$3\frac{1}{2}$	(1 1)	(1)	)
$4\frac{1}{2}$	(1 1)	$\frac{1}{2}(1 1)$	(1)
$5\frac{1}{6}$	(2 1 1 2)	$\frac{1}{3}(2-1 2)$	$\frac{1}{2}(1 1)$
$6\frac{1}{3}$	(1 1 1)	$\frac{1}{12}(5 1 1 5)$	$\frac{1}{6}(5 -4 5)$
$7\frac{1}{12}$	(3 1 2 2 1 3)	$\frac{1}{6}(3-2 4 -2 3)$	$\frac{1}{2}(1 1)$
$8\frac{1}{4}$	(1 1 1 1)	$\frac{1}{20}(7-14 4 -1 7)$	$\frac{1}{10}(7 8 12 -8 7)$

Çizelge 9.3: Ortalamaların Katsayıları

$n \leq 8$ için G^{1-1} , G^{2-1} , G^{3-1} invers Matrisleri

$$n=3 \quad \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad n=4 \quad \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad n=5 \quad \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$n=6 \quad \frac{4}{6} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -6 & 4 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad n=7 \quad \frac{4}{7} \begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 & -3 & 2 & -1 \\ -5 & 10 & -8 & 6 & -4 & 2 \\ 4 & -8 & 12 & -9 & 6 & -3 \\ -3 & 6 & -9 & 12 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -8 & 10 & -5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$n=8 \quad \begin{bmatrix} 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ -6 & 12 & -10 & 8 & -6 & 4 & -2 \\ 5 & -10 & 15 & -12 & 9 & -6 & 3 \\ -4 & 8 & -12 & 16 & -12 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 9 & -12 & 15 & -10 & 5 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -10 & 12 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$n=3 \quad \frac{16}{6} \quad n=4 \quad \frac{16}{10} \begin{bmatrix} G^2 & -1 \\ 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad n=5 \quad \frac{16}{10} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$n=6 \quad \frac{16}{105} \begin{bmatrix} 50 & -60 & 45 & -20 \\ -60 & 114 & -96 & 45 \\ 45 & -96 & 114 & -60 \\ -20 & 45 & -60 & 50 \end{bmatrix} \quad n=7 \quad \frac{16}{84} \begin{bmatrix} 45 & -60 & 54 & -36 & 15 \\ -60 & 120 & -120 & 84 & -36 \\ 54 & -120 & 156 & -120 & 54 \\ -36 & 84 & -120 & 120 & 60 \\ 15 & -36 & 54 & -60 & 45 \end{bmatrix}$$

$$n = 8 \frac{16}{84}$$

$$\begin{bmatrix} 49 & -70 & 70 & -56 & 35 & -14 \\ -70 & 145 & -160 & 134 & -86 & 35 \\ 70 & -160 & 220 & -200 & 134 & -56 \\ -56 & 134 & -200 & 220 & -160 & 70 \\ 35 & -86 & 134 & -160 & 145 & -70 \\ -14 & 35 & -56 & 70 & -70 & 49 \end{bmatrix}$$

$$n=4 \frac{64}{20} \quad n=5 \frac{64}{35} \quad \begin{matrix} G^3 - 1 \\ \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad n=6 \frac{64}{140} \quad \begin{bmatrix} 25 & -30 & 15 \\ -30 & 52 & -30 \\ 15 & 30 & 25 \end{bmatrix}$$

$$n=7 \frac{64}{42} \quad \begin{bmatrix} 10 & -15 & 12 & -5 \\ -15 & 30 & -27 & 12 \\ 12 & -27 & 30 & -15 \\ -5 & 12 & -15 & 10 \end{bmatrix} \quad n=8 \frac{64}{168} \quad \begin{bmatrix} 49 & -84 & 84 & -56 & 21 \\ -84 & 184 & -204 & 144 & -56 \\ 84 & -204 & 264 & -204 & 84 \\ -56 & 144 & -204 & 184 & -84 \\ 21 & -56 & 84 & -84 & 49 \end{bmatrix}$$

Çizelge 3...

n tek için

$$N = \frac{4}{n^2 - 1} \left\{ \frac{(n-1)}{2} s_1^1 + s_2^1 + \frac{(n-3)}{2} s_3^1 + 2s_4^1 + \right. \\ \left. + \frac{(n-5)}{2} s_5^1 + 3s_6^1 + \dots \right\}$$

veya

$$N = \frac{4}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \left\{ \frac{(n-2i+1)}{2} s_{2i-1}^1 + i s_{2i}^1 \right\}$$

elde edilir.

Schuler Ortalaması

n çift için

$$N = \frac{4}{n(n^2-4)} \{ (n-2)(n-1)S_1^2 - (n-2)(n-7)S_2^2 \\ + 2(n-4)(n-5)S_3^2 - 2(n-4)(n-11)S_4^2 \\ + 3(n-6)(n-9)S_5^2 - 3(n-6)(n-15)S_6^2 \\ + 4(n-8)(n-13)S_7^2 - 4(n-8)(n-19)S_8^2 \\ \dots \dots \dots \}$$

veya

$$N = \frac{4}{n(n^2-4)} \frac{1}{2}(n-2) \sum_{i=1}^{n/2} i(n-2i) \{ (n-4i+3) S_{2i-1}^2 - (n-4i-3) S_{2i}^2 \}$$

elde edilir.

n tek için ise

$$N = \frac{4}{(n^2-1)} \{ (n-1)S_1^2 - (n-3) S_2^2 \\ + 2(n-3)S_3^2 - 2(n-5) S_4^2 \\ + 3(n-5)S_5^2 - 3(n-7) S_6^2 \\ + 4(n-7)S_7^2 - 4(n-9) S_8^2 \\ \dots \dots \dots \}$$

veya

$$N = \frac{8}{(n^2-1)} \{ (n-1)S_1^2 + \frac{1}{2}(n-3) \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (n-2i-1) \{ -i S_{2i}^2 + (i+1)S_{2i+1}^2 \} \}$$

elde edilir.

Thomas Ortalamasi

n çift için

$$N = \frac{8}{n(n^2-4)} \{ (n-2)(n-1) S_1^3 - 2(n-2)(n-4) S_2^3$$
$$+ 2(n-4)(2n-7) S_3^3 - 6(n-4)(n-6) S_4^3$$
$$+ 3(n-6)(3n-17) S_5^3 - 12(n-6)(n-8) S_6^3$$
$$+ 4(n-8)(4n-31) S_7^3 - 20(n-8)(n-10) S_8^3$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$

veya

$$N = \frac{8}{n(n^2-4)} \left\{ (n-2)(n-1) S_1^3 + \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-4)} \{-1(i+1)(n-2i) \cdot (n-2i-2) S_{2i}^3 + (i+1)(n-2i-2) \{(i+1)n - 2i^2 - 4i - 1\} S_{2i+1}^3 \} \right\}$$

elde edilir.

n tek için

$$N = \frac{8}{(n^2-1)(n^2-9)} \{ (n-3)(n^2-3n+2) S_1^3 - 2(n-3)(n^2-9n+14) S_2^3 \\ + 2(n-5)(2n^2-20n+42) S_3^3 - 6(n-5)(n^2-15n+46) S_4^3 \\ + 3(n-7)(3n^2-49n+170) S_5^3 - 12(n-7)(n^2-21n+94) S_6^3 \\ + 4(n-9)(4n^2-90n+434) S_7^3 - 20(n-9)(n^2-27n+158) S_8^3 \}$$

$$5(n-11)(5n^2-143n-882)s_9^3-30(n-11)(n^2-33n+238)s_{10}^3$$

veya

$$N = \frac{8}{(n^2-1)(n^2-9)} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-3)} \{1(n-2i-1) \{in^2-(3i-2)(2i+1)n+ \\ +2(2i-1)(2i^2-1)\} s_{2i-1}^3 - (i+1)(n-2i-1) \{n^2-3(2i+1)n+ \\ +2(4i^2+4i-1)\} s_{2i}^3 \}$$

elde edilir.

Sayısal hesapları yapabilmek için $n \leq 8$ kadar olan katsayılar (Çizelge 10.3) de verilmiştir. Dengelenmiş değer N in varyansı aşağıdaki formüller verilir.

$$\hat{S}_N^2 = Q_{NN} \frac{v^T G^{-1} v}{r}$$

Burada $Q_{NN} = (A^T G^{-1} A)^{-1}$ dır. Buir tablo olarak aşağıda verilmiştir.

	<u>n tek</u>	Q_{NN}	<u>n çift</u>
İlk Ortalama	$\frac{n}{n^2-1}$		$\frac{1}{n}$
Schuler Ortalaması	$\frac{n}{n^2-1}$		$\frac{n^2-1}{n(n^2-4)}$
Thomas Ortalaması	$\frac{n(n^2-4)}{(n^2-1)(n^2-9)}$		$\frac{n^2-1}{n(n^2-4)}$

Yukarda belirtilen işlem elde edilen ortalamaların ortalamasının alınmasının bütün sakıncalarını ortadan kaldırmamaktadır. Fakat bu şekilde N in en küçük kareler yöntemine göre değerleri elde edilmektedir. Bu değerlerin elde edilmesi çok basittir. Çift sayıdaki ölçmeler için Schuler ve Thomas ortalamaları ile elde edilen çözümler aynıdır. Tek sayılı ölçmeler için ilk ve Schuler ortalaması aynıdır. Sönümlü doğrusal modellerle Schuler ortalamasının özelliklerini birleştiren bir hesaplama tekniği bundan sonraki bölümde iki sayısal örneğe uygulanmıştır.

9.210. SAYISAL HESAPLARI

Uygulamada en önemli iki koşul şunlardır.

- 1) Hatalar ölçme anında hemen saptanmalıdır. Eğer fazla ölçmeye gerek varsa hemen anında yapılabilir.
- 2) Hesap yöntemleri saptamanın beklenen presizyonu ile uygun olmalıdır.

Bu koşullar ile beraber hesapların yapılacağı ortam gözönüne alınmalıdır. Arazide çabuk ve basit yöntemler tercih edilir. Çoğu hallerde yaklaşık yöntemler yeterli olacaktır. Fakat büroda ikinci koşul çok önemlidir. Ayrıca yöntem seçimi hesapların nasıl bir ortamda yapılacağına bağlıdır. Yüksek hızlı dijital hesap makineleri kullanıldığı zaman aranılan bilinmeyenlerin bulunması için hangi yöntemin kullanıldığı önemli değildir. Fakat küçük bir hesap makinası için hız ve basitlik veren ifadeler kullanılmalıdır. Tavsiye edilen yöntem sırası şöyledir:

a) Arazi Hesapları

- 1) Schuler ortalamaları ard arda ölçmeler yapılırken hesaplanır. Belirli bir ölçekde dönüm

noktaları ve Schuler ortalamaları grafik kağıdı üzerinde işaretlenir.

2) N yaklaşık olarak Schuler ortalamalarının aritmetik ortalamasından veya Schuler ortalamalarının ağırlıklı ortalamasından hesaplanır.

3) Hatalar veya kaba hatalar (dönüm noktası ölçmelerindeki) Schuler ortalamaları alırken veya salınım eğrisinde gözükmebilir. Evvelce belirtildiği gibi en küçük kareler yöntemine göre yapılan çözümün geometrik yorumu ölçmelerden geçen ortalama salınım doğrusuna eş eğimli iki doğrudur. Ortalama salınım doğrusunun konumu bilindiğinden, sol veya sağ ölçmeleri bu doğruya ötelemek gayet kolaydır. Bundan sonra bu noktalardan geçen en uygun doğru çizilir. Bu öteleme iki şekilde yapılabilir.

(i) Grafik kağıdı ortalama salınım eğrisi etrafında katlanır

(ii) Sol veya sağ ölçmeleri $2N$ den çıkarılır ve sonuçlar tekrar grafik kağıdına işlenir.

b) Büro Hesapları

1) N Schuler ortalamalarının ağırlıklı ortalamasından hesaplanır.

2) n çift için (9.6) denkleminde

$$a = 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n DN_i - N \right)$$

ve (9.11) denkleminde

$$B' = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n DN_i^T - \sum_{i=1}^n DN_i^S \right)$$

hesaplanır. n tek için,

$$a = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \left\{ \frac{n-1}{2} (DN_1 - DN_n) - \frac{n-3}{2} (DN_2 - DN_{n-1}) \right. \\ \left. + \frac{n-5}{2} (DN_3 - DN_{n-2}) \dots (-1)^{1/2(n+1)} (DN_{\frac{1}{2}(n-1)} - DN_{\frac{1}{2}(n+3)}) \right\}$$

ve

$$B' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n DN_i^T}{1/2(n+1)} - \frac{\sum_{i=1}^n DN_i^S}{1/2(n-1)} \right\}$$

elde edilir.

3) (9.10) ilgili varyanslar hesaplanır.

Birinci örnek, n çift

<u>Sol</u>	<u>Sağ</u>	<u>S.0</u>	<u>S.0-S.0</u>
		245g.17	
244g.1565			
(244.15625)	246.1870	16.3	-1.1
244.1560	(246.18675)	13.8	-3.6
(244.1566)	246.1865	15.5	-1.9
244.1572	(246.1866)	19.0	1.6
(244.1571)	246.1867	19.0	1.6
244.1570	(246.1871)	20.5	3.1
	246.1875		
	<u>S.0</u>	17.4	= <u>-0.3</u>

$$N = \frac{1}{20} \{ 7.245.17163 - 245.17138 + 4.245.17155 \\ + 4.245.17190 - 245.17190 + 7.245.17205 \} = \\ 245^g.17181$$

$$\Sigma DN^T = 976.6267 \quad \Sigma DN^C = 984.7477$$

$$a = 2 \left\{ -\frac{1}{8} (976.6267 + 984.7477) - 245.17181 \right\} \\ = \underline{-0.''1}$$

$$B' = \frac{1}{8} \{ 976.6267 - 984.7477 \} \\ = \underline{-1^g.0151}$$

$$\alpha'' = \frac{a}{B'} = \frac{-0.1}{-1.0151} = \underline{9.8 \times 10^{-2}}$$

$$B' + N = -1^g.0151 + 245^g.17181 = 244^g.15671$$

$$-B' + N = 1^g.0151 + 245^g.17181 = 246^g.18691$$

$$\begin{aligned} V_1 = B' + N - DN_1 + 7/2 a = & 244.15671 \\ & -244.15650 \\ & \underline{- 0.00004} \end{aligned}$$

$$\underline{V_1 = +1.7}$$

$$\begin{aligned} V_2 = -B' + N - DN_2 - 5/2 a = & 246.18691 \\ & -246.18700 \\ & \underline{0.00003} \end{aligned}$$

$$\underline{V_2 = - 0.6}$$

$$\begin{aligned} V_3 = B' + N - DN_3 + 3/2 a = & 244.15671 \\ & -244.15600 \\ & \underline{0.00002} \end{aligned}$$

$$\underline{V_3 = +6.9}$$

$$\begin{aligned} V_4 = -B' + N - DN_4 - 1/2 a = & 246.18691 \\ & -246.18650 \\ & \underline{0.00001} \end{aligned}$$

$$\underline{V_4 = +4.2}$$

$$\begin{aligned} V_5 = B' + N - DN_5 - 1/2 a = & 244.15671 \\ & -244.15720 \\ & \underline{0.00001} \end{aligned}$$

$$\underline{V_5 = -4.8}$$

$$\begin{aligned} V_6 = -B' + N - DN_6 + 3/2 a = & 246.18691 \\ & -246.18670 \\ & \underline{0.00002} \end{aligned}$$

$$\underline{V_6 = +1.9}$$

- 162 -

$$\begin{aligned} V_7 &= B' + N - DN_7 - 5/2 a = 244.15671 \\ &\quad - 244.15700 \\ &\quad \underline{0.00003} \\ V_7 &= -2.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8 &= -B' + N - DN_8 + 7/2 a = 246.18691 \\ &\quad - 246.18750 \\ &\quad \underline{0.00004} \\ V_8 &= -6.3 \end{aligned}$$

$$\text{Kontrol } \Sigma V = 0.0$$

$$\Sigma V^2 = 141.6$$

$$\hat{S}_{DN}^2 = \frac{141.6}{5} = 28.32$$

$$\hat{S}_N^2 = \frac{21}{160} \cdot 28.32 = 3.717$$

$$S_{B'}^2 = \frac{1}{8} \cdot 28.32 = 3.54$$

$$S_{\alpha''}^2 = \frac{1}{40(-1.0151)^2} \cdot 28.32 = 6.4 \times 10^{-1}$$

Özet

$$n=8 \quad r=5$$

$$\hat{S}_{DN} = \pm 5."32$$

$$N=245^g.17181$$

$$\hat{S}_N = \pm 1.92$$

$$B'=-1^g.0151$$

$$\hat{S}_{B'} = \pm 1.88$$

$$\alpha'' = 9.8 \times 10^{-2}$$

$$\hat{S}_{\alpha''} = \pm 0.8$$

Örnek 2, n tek

<u>Ölçmeler</u>			
<u>Sol</u>	<u>Sağ</u>		
	255.9818		
253.2112	(255.9766)	254.59393	-16.3
(253.2162)	255.9715	254.59385	-17.1
253.2212	(255.9700)	254.59560	0.4
(253.22635)	255.9685	254.59743	18.7
253.2315	(255.9625)	254.59700	14.4
	255.9565		

$$S.O. = 254.59556 \quad \Sigma = 0$$

$$N = \frac{1}{6}(3.254.59393 - 2.254.59385 + 4.254.59560 - 2.254.59743 + 3.254.59700) = 254.59544$$

$$N = 254.59544$$

$$\Sigma DN^S = 759.6639$$

$$\Sigma DN^T = 1023.8783$$

$$B' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1023.8783}{4} - \frac{759.6639}{3} \right\} = \underline{\underline{1.37413}}$$

$$a = \frac{1}{28} \{ 3(DN_1 - DN_7) - 2(DN_2 - DN_6) (DN_3 - DN_5) \}$$

$$a = \frac{1}{28} \{ 3(255.9818 - 255.9565) - 2(253.2112 - 253.2315) + (255.9715 - 255.9685) \}$$

$$4.2 \times 10^{-3} = 0.0042$$

$$\alpha'' = \frac{4.2 \times 10^{-3}}{B} = \frac{4.2 \times 10^{-3}}{1.37413} = 3.0 \times 10^{-3}$$

- 164 -

$$B' + N = 1.37413 + 254.59544 = 255.96957$$

$$-B' + N = -1.37413 + 254.59544 = 253.22131$$

$$\begin{aligned} V_1 = B' + N + 3a - DN_1 &= 255.96957 \\ &0.01260 \\ &\underline{255.98180} \end{aligned}$$

$$\underline{V_1 = +3.7}$$

$$\begin{aligned} V_2 = -B' + N - 2a - DN_2 &= 253.22131 \\ &-253.21120 \\ &\underline{0.00840} \end{aligned}$$

$$\underline{V_2 = +17.1}$$

$$\begin{aligned} V_3 = B' + N + a - DN_3 &= 255.96957 \\ &0.00420 \\ &\underline{-255.97150} \end{aligned}$$

$$\underline{V_3 = +22.7}$$

$$\begin{aligned} V_4 = -B' + N - DN_4 &= 253.22131 \\ &\underline{-253.22120} \end{aligned}$$

$$\underline{V_4 = +1.1}$$

$$\begin{aligned} V_5 = B' + N - a - DN_5 &= 255.96957 \\ &- 0.00420 \\ &\underline{-255.96850} \end{aligned}$$

$$V_5 = -31.3$$

$$\begin{aligned} V_6 = -B' + N + 2a - DN_6 &= 253.22131 \\ &0.00840 \\ &\underline{-253.2315} \end{aligned}$$

$$V_6 = -17.9$$

- 165 -

$$\begin{aligned} V_7 &= B' + N - 3a - DN_7 = 255.96957 \\ &\quad -0.01260 \\ &\quad \underline{-255.95650} \end{aligned}$$

$$\underline{V_7 = +4.7}$$

$$\Sigma V = 0$$

$$\Sigma V^2 = 2144.79$$

$$\hat{S}_{DN}^2 = \frac{2144.79}{4} = 536.1975$$

$$\hat{S}_{B'}^2 = \hat{S}_N^2 = \frac{7}{48} \cdot 536.1975 = 78.1954$$

$$\hat{S}_{\alpha''}^2 = \frac{1}{28(255.96957)^2} \cdot 536.1975 = 0.00029$$

Özet

$$n=7, r=4$$

$$N^9 = 254.59544$$

$$B' = 1.37413$$

$$\alpha'' = 3 \times 10^{-3}$$

$$\hat{S}_{DN} = \pm 23.15$$

$$\hat{S}_N = \pm 8.84$$

$$\hat{S}_{B'} = \pm 8.84$$

$$\hat{S}_{\alpha''} = \pm 0.017$$

9.300. SONUÇLAR

Lauf[41] bu problemin çözümü için diğer bilginler tarafından kullanılan yöntemleri özetlemiştir. Bu bölümde yapılan incelemenin ışığında bunları tekrardan incelemek faydalıdır. Kahlrausch[40] tek sayıda dönüm noktası kullanmış ve bir taraftaki ölçmelerin ortalaması ile birleştirerek son bir ortalama almaktadır. Bu yaklaşım az sönümlü bir salınım için teorik yönden oldukça doğrudur. Fakat Schuler bu yöntemi eleştirmektedir. Thomas'ın[63] yaklaşımı daha fazla sönüm gözönüne olmaktadır. Schuler ve Thomas ortalamaları jiroskoplu teodolit ölçmelerini değerlendirmek için yeterlidir.

Bir saptama için kaç dönüm noktası ölçmesi kullanılacağı önemlidir. Ölçmelerin iç presizyonu dış presizyonu ile uyusmakta ise ölçme sayısı saptamanın öngördüğü doğruluğa bağlıdır. Hesap ve dengeleme yönünden tek veya çift sayıda ölçme yapmak önemsizdir. Çift sayıda ölçme için ağırlıklı Schuler ortalaması en küçük kareler çözümünü vermektedir.

Sonuç olarak bu bölümde elde edilen formüller ölçme sayısı için bir sınır vermemektedir. Her yöntemin özelliklerinin bir birleşimi ölçmeler ile uyum içinde olan basit bir çözüm vermektedir. Varyansların yayılması kanunu uygulanarak en küçük kareler yöntemine uygun basit bağıntılar elde edilebilir.

10.000. ELEKTRONİK KAYIT YAPAN BİR ALET GRUBUNUN JİROSKOPLU TEODOLİT İLE BERABER KULLANILMASI HAKKINDA ÖNERİLER

Jiroskoplu teodolit ile yapılan azimut tayininde zaman yöntemi kullanılırsa ölçülen büyüklük zamandır. Gayet yavaş hareket eden bir cismin geçiş zamanlarını bir kronometre ile saptamak gayet yetersizdir. Basit bir sarkaçsal jiroskopun bile çok düzgün bir salınımı vardır. Fakat alet bir operatör tarafından kullanıldığı zaman bu salınım bozulmaktadır.

Bu nedenle jiroskoplu teodolit bir elektronik zaman kayıt işlemi yapan aygıtla beraber kullanıldığı zaman daha iyi sonuçlar almak mümkündür. Kayıt işlemini yapabilmek için üç adet foto-transistör kullanılması önerilmektedir. Böyle bir sistemin doğruluğu ve iç presizyonu $\pm 1''$ dir. Ayrıca birbirinden bağımsız altı veya sekiz ölçme ile daha iyi standard sapmalar elde edilmektedir. Elde edilen doğruluk sadece sistemin bir avantajıdır. Ayrıca sonuçlar kişi hatalarından bağımsızdır.

Dönüm noktası yöntemi ile zaman yöntemi bir doğrurunun azimutunu bir serbestlik derecesini haiz bir sarkaçsal jiroskop ile bulmak için kullanılan iki yöntemdir. Dönüm noktası yönteminde evvelce belirtildiği gibi salınım yapan jiroskop teodolit ile takip edilmektedir. Bu takip işlemi ya elle ya da otomatik bir mekanizma ile yapılmaktadır. El ile yapılan takip işleminde kişisel hata da işin içine girmektedir. Otomatik takip aygıtı olan jiroskoplu teodolitlerde ise genellikle ölçülmesinde yine kişisel hata işin içine girmektedir. Fakat bu halde kişi hatası daha azdır.

Zaman yönteminde ise salınım sırasında alet hiç hareket ettirilmemektedir. Bu yöntemde jiroskop göstergesinin yardımcı skaladaki bir bölümden geçiş zamanları ölçülmektedir. Zaman ölçme işlemi bir kronometre ile yapılmaktadır. Deneyler, gözle görülebilir ışıklı bir sinyalin zamanlandırılmasının karesel ortalama hatasının 0.12 zaman saniyesi olduğunu göstermiştir. Jiroskopun verdiği ışıklı sinyal ise o kadar keskin değildir. Bu nedenle karesel ortalama hata saniyenin birkaç onda biri kadar olabilir. Ayrıca genlikler jiroskopun skalasından okunmaktadır. Gözün ayırma gücü ise ± 0.1 bölümdür. Bu da $40''$ yay saniyesidir.

Burada şunu belirtmekte yarar vardır. Zaman ölçme işleminde daha büyük hatalar yapmak mümkündür. Bu hatalar yukarda verilen değerleri iki katına çıkarabilir. Zaman yöntemini daha iyi bir biçimde uygulayabilmek i-

çin elle yapılan zaman ölçmesinin doğruluğu unu arttırmak gereklidir. Ayrıca jiroskopun salınımında bulunan sistematik ve aksidantel hatalar ortadan kaldırılmalıdır.

Jiroskoplu pusla birçok sistematik hatanın etkisi altındadır. Bu nedenle eğer zaman ölçme işleminin doğruluğu küçük ise genlik ve zaman ölçme işlemlerinden bu sistematik hataların büyüklüğü elde edilemez. Bu nedenlerle jiroskoplu puslanın doğruluğunu ve presizyonunun arttırmak için zaman ölçme işlemini daha doğru yapmak gerekmektedir. Ancak bundan sonra jiroskoplu puslanın sistematik davranışı incelenebilir. Bu sistematik hataların kaynakları bulunabilirse bunları düzeltmek için yöntemler geliştirebiliriz. Sistematik hataların incelenmesi ve zamanın presizyonlu ölçülmesi yüksek presizyonlu azimut saptanmasını sağlayacaktır.

10.100. JİROSKOPLU TEODOLİTDE YAPILMASI GEREKEN DEĞİŞİKLİKLER İÇİN ÖNERİLER

Zaman yönteminin presizyonunun arttırmak için jiroskoplu teodolitde aşağıdaki değişikliklerin yapılması önerilmektedir.

- a) Jiroskopunun bölümlü skalası çıkartılmalı, yerine ışık geçiren siyah bir cam levha konmalıdır.
- b) Jiroskop göstergesini yansıtan prizmanın yerine karanlık alanda jiroskop göstergesini gözle gözükür yapan diğer bir prizma konmalıdır.
- c) Jiroskop bir saniye teodoliti ile kullanılmalıdır.
- d) Dönüştürücü ossilatörü kristalli bir saatten alınan sinyalle stabil hale getirilmelidir.
- e) Jiroskopun standard oküleri çıkartılmalıdır.

- f) Düzgün bir akım elde edebilmek için batarya ile dönüştürücü arasına bir reosta ve ampermetre konulmalıdır.
- g) İçinde üç tane eş uzaklıklı fototransistör bulunan bir oküler kullanılmalıdır.
- h) İçinde kristalli saati bulunan bir zaman ölçücü alet kullanılmalıdır. Bu alet zamanı mili-saniye cinsinden ölçmelidir.

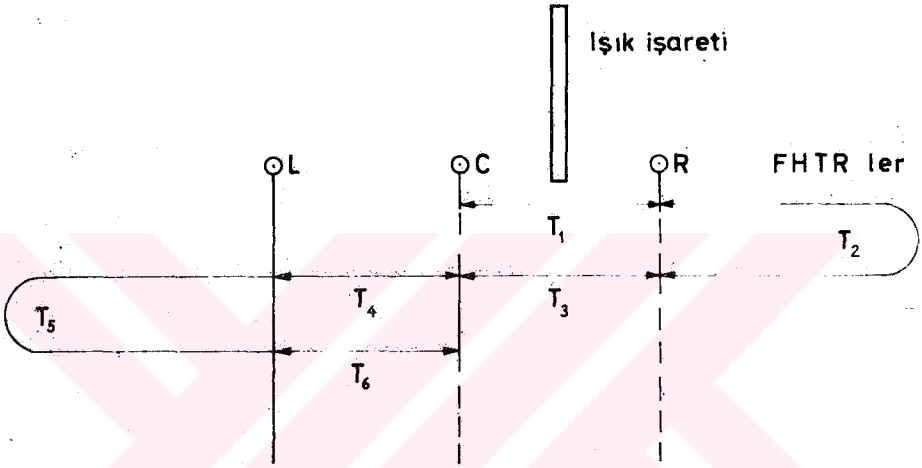
Plastik bir tabaka içine üç tane foto-transistör (FHTR) konulmalı ve jiroskopun ökülerine takılmalıdır. FHTR ler büyük bir yaklaşımla eş uzaklıkta olmalıdır. Bir FHTR un hacminin merkezi elektronik merkezi ile aynı değildir. Fakat iki FHTR arasındaki bağıntı ölçmelerin kendinden elde edilebilir.

Elektronik olarak zaman aralıklarını ölçen alet grubu şu biçimde tarif edilebilir. Jiroskopun hareketinden elde edilen ışık işaretinin hareketi bilindiği gibi basit bir harmonik harekettir. Işık hüzmesi FHTR lerin önünden geçerken altı büyüklük ölçülmektedir(Şekil 10.1)

- T_1 -C den R ye kadar olan zaman
- T_2 -R den R ye kadar olan zaman
- T_3 -R den C ye kadar olan zaman
- T_4 -C den L ye kadar olan zaman
- T_5 -L den L ye kadar olan zaman
- T_6 -L den C ye kadar olan zaman

Şekil 10.1 de referans noktaları C(merkezi FHTR), R(Sağ FHTR), ve L(Sol FHTR) olarak gösterilmiştir.

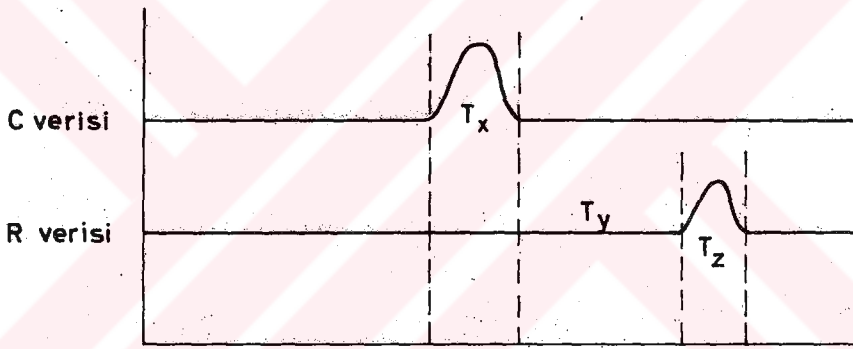
Ölçülen zaman bir FHTR un merkezinden diğer FHTR merkezine kadar olan zaman aralığıdır. FHTR sinyalinin genişliği fazla olduğundan diğer bir yaklaşım gözönüne alınmalıdır. Çözüm işaret genişliğini gözönüne alarak



Şekil 10.1

gerçekleştirilir. Bunu yapmak için değişken frekanslı bir saat sistemi kullanılır.

Şekil 10.2 den görüleceği üzere Tx ve Tz süresince saat verisi 500 HZ ve Ty süresince saat verisi 1000 HZ dir. Tx ve Tz süresince 500 HZ lik verileri 1000 HZ lik veriler yerine saymak iki veri için bir ortalama zaman elde etmek içindir.



Şekil 10.2.

$$T_{AV} = \frac{1}{2} F_c (T_x + T_z) \dots\dots\dots (10.1)$$

Burada F_c 1000 HZ lik normal saat frekansıdır. Bu zaman T_y ile toplanır.

$$T = \frac{1}{2} F_c (T_x + T_y) + F_c \cdot T_y \dots\dots\dots (10.2)$$

$$\text{Toplam} = F_c \frac{1}{2} (T_x + T_z) + T_y$$

Bu eşitlik T_x merkezinden T_z nin merkezine olan efektif zamanı vermektedir. Örneğin

$$T_x = T_z = 2 \text{ saniye}$$

$$T_y = 10 \text{ saniye}$$

$$F_c = 1000 \text{ HZ}$$

olsun. (10.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \text{Toplam} &= 1000 \text{ Hz} \left\{ \frac{1}{2} (2 + 2) + 10 \right\} \\ &= 1000 \cdot 12 = 12\,000 \text{ Hz} \end{aligned}$$

elde edilir. Dijital bir kronometrede F_c 1000 HZ ise ± 0.001 saniyelik bir ayırım elde edilir. Bu nedenle zaman aralığı $12000 \times 0.001 = 12$ saniyedir ve gösterge 12.000 saniyeyi gösterecektir.

Bu yöntemin bir üstünlüğü veri genişliği değişebilmesine rağmen sabit bir ışık işareti için merkezden merkeze ölçülen zaman aralığının aynı kalmasıdır.

Örneğin

$$T_x = T_z = 10 \text{ saniye}$$

$$T_y = 2 \text{ saniye}$$

$$F_c = 1000 \text{ Hz}$$

için

$$\begin{aligned}\text{Toplam} &= 1000 \{1/2 (10 + 10) + 2\} \\ &= 1000 \{10 + 2\} \\ &= 1000 \times 12 = 12.000 \text{ Hz}\end{aligned}$$

olacaktır. Bu zamana çevrilirse $12000 \times 0.001 = 12.000$ saniye elde edilir.

10.200. AZİMUTA ASKI TELİ MOMENTİNİN ETKİSİ

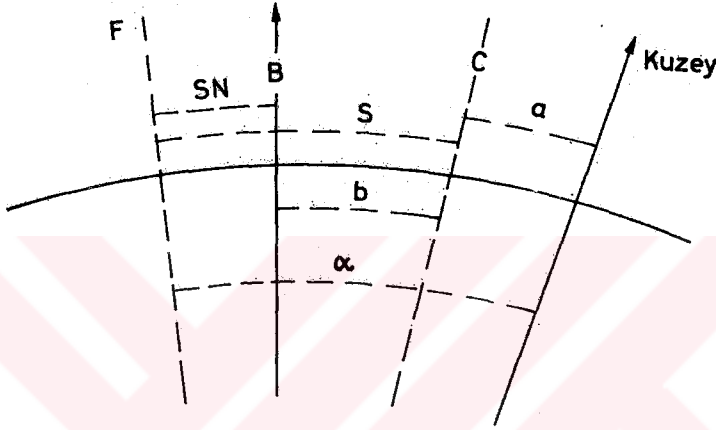
Jiroskopa etki eden kuvvetler aşağıdaki gibidir.

- 1) Dünyanın kendi eksenini etrafında dönmesinden meydana gelen merkezkaç kuvvetinin doğurduğu moment.
- 2) Askı telinin momenti
- 3) Yerçekimi ivmesi

Jiroskop bu kuvvetlerin etkisi altında hareket etmektedir. Bu nedenle salınım yapan jiroskop yatay daire üzerinde doğrudan kuzeyi vermez. Elde edilen konum bu kuvvetlerin dengede olduğu konumdur.

Askı telinin denge konumu hakkındaki bilgi çoğu zaman yetersizdir. Ayrıca çoğu zaman askı telinin denge konumunun skaladaki referans işaretine olan uzaklığı bilinir kabul edilmektedir. Bu skaladaki referans işaretine bundan sonra SN denilecektir. Fakat SN da ölçme sırasında değişiklikler olmaktadır. Bu nedenle SN nun gerçek ve ani değerini gözönüne almayan bir sonuç çok hatalı olacaktır (Şekil 10.3). Bu şekilde

- F = Merkezzel FHTR ün doğrultusu
- B = Askı telinin momentinin sıfır olduğu doğrultu
- C = Denge konumu doğrultusu



şekil 10.3

Kuzey = Astronomik kuzey doğrultusu

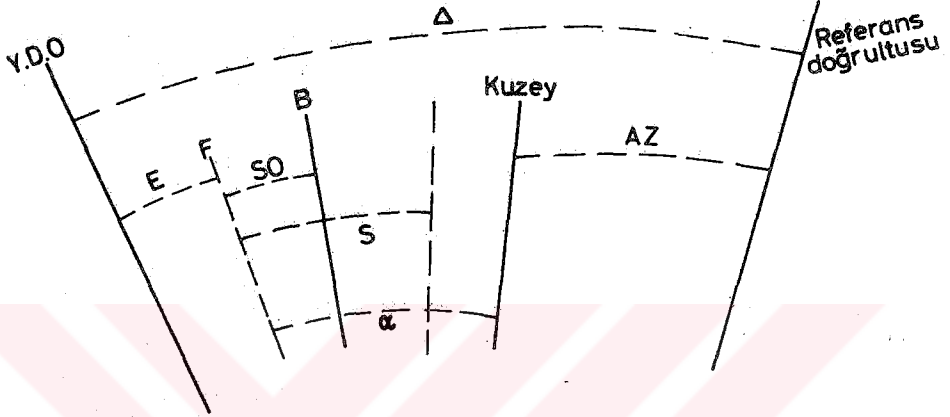
$$\alpha = S + a$$

$$b = S - SN$$

$a = k.b$, burada k etki eden iki kuvvetin oran-
tı katsayısıdır.

$$\alpha = S + (S - SN) k = S(1 + k) - k \cdot SN \quad (10.3)$$

Dürbünün optik eksenini ile(yatay daire okuması =
Y.D.O) merkezsel FHTR merkezi arasındaki açı önemli bir
alet sabitidir. Bu sabit E ile gösterilecektir(Şekil
10.4)



Şekil 10.4

Astronomik kuzeyin referans doğrultusu ile bağlantısı E alet sabitibilinirse bulunabilir. Referans doğrultusunun azimutu böylece(10.4) formülü ile verilir.

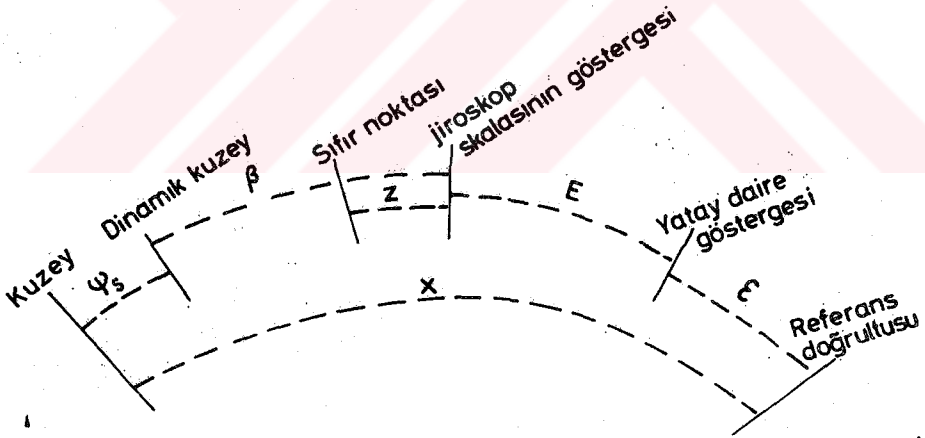
$$AZ = \text{Referans doğrultusu okuması} - \text{Yatay daire okuması} - E - \alpha \dots\dots\dots(10.4)$$

(10.3) ve (10.4) no.lu şekiller incelenirse FHTR leri taşıyan plakanın jiroskop okülerine sürekli olarak bağlı kalması gerektiği ortaya çıkar. Y.D.O.-F bağıntısındaki herhangi bir değişiklik E yi değiştirir. Bu da E nin yeniden saptanmasını gerektirmektedir. Fakat S.N si B nin yerini değiştirerek ayarlanırsa N-F bağıntısı değişmez.

Teodolite nazaran FHTR ün yeri 1 mikron değıştirse E deki değışiklik 5" olmaktadır. Bunun nedeni de řu şekilde açıklanabilir. FHTR leri taşıyan plâka jiroskopun merkezinden 2.5 cm.lik bir uzaklıktadır. Bir yay saniyelik bir öteleme skalada 0.2 mikronluk bir deplasmana karşılık olmaktadır.

10.300. DİNAMİK VE GERÇEK KUZİY

Jirosyon olayında gerçek kuzeyden ψ_s kadar sapan doğrultuya dinamik kuzey denir. Bu doğrultu jiroskopun verdiği doğrultudur. Diğer taraftan jiroskoplu teodolit kullanmanın amacı bir referans doğrultusunun astronomik azimutunu ölçmektir. Bu saptama ile ilgili bütün büyüklükler (Şekil 10.5) de gösterilmiştir.



Şekil 10.5

Şekil (10.5) de ϵ referans doğrultusu için yatay daire okuması

E jiroskop skalasının sabit göstergesi için yatay daire okuması

Z jiroskop skalasında sıfır askı teli okuması

β jiroskop skalasında dinamik kuzey için okumadır.

Şekil (10.5) den görüldüğü üzere

$$\alpha = \epsilon + E + \beta + \psi_s \dots\dots\dots (10.5)$$

dur. Burada E sabittir vedaha önceden bilinmektedir. β jiroskop skalasından okunmaktadır. Sadece ψ_s saptanmalıdır. ψ_s şu şekilde saptanabilir.

$$\psi_n = \psi_s + \beta + Z \dots\dots\dots (10.6)$$

ile verilen bir büyüklüktür. Diğer taraftan

$$\psi_s = k' \psi_n \dots\dots\dots (10.7)$$

ile verilmektedir. z sabit varsayıldığından ve evvelce bilindiğinden

$$\psi_s = \frac{k'}{1 - k'} (\beta - z) \dots\dots\dots (10.8)$$

elde edilir. Burada

$$k = \frac{k'}{1 - k'} \dots\dots\dots (10.9)$$

k sabiti olarak bilinmektedir. Bu nedenle gerçek azimut α yı saptamak için k sabitinin değerini bilmek gereklidir.

10.310. k SABİTİNİN SAPTANMASI

k sabiti şöyle saptanabilir. Aynı α azimutu yatay dairenin farklı konumlarında belirlenir. Okumalar birinci konumda ϵ_1, β_1 ; ikinci konumda ϵ_2, β_2 ise (13.5) den

$$\alpha = \epsilon_1 + E + \beta_1 + k(\beta_1 - z)$$

$$\alpha = \epsilon_2 + E + \beta_2 + k(\beta_2 - z)$$

yazılabilir. Bu iki bağıntı eşitlenir ve k için çözülürse;

$$k = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1 + \beta_2 - \beta_1}{\beta_1 - \beta_2}$$
$$= \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\beta_1 - \beta_2} - 1 \quad \dots\dots\dots (10.10)$$

elde edilir.

10.400. SALINIM PERİYODUNA VE k SABİTİNE ETKİ EDEN FAKTÖRLER

Bundan evvel yapılan açıklamalarda salınım periyodunun ve k sabitinin değişmeyen büyüklükler olduğu varsayılmıştı. Gerçekte bu büyüklükler değişen şartlar ile beraber değişmektedir. Değişen şartlardan en önemlileri sıcaklık ve elektrik akımıdır.

10.410. JİROSKOP İÇİNDE ISININ ARTMASI VE DAĞILMASI

Dönen bir jirooskopda ısı kaynakları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

- 1) Yataklardaki sürtünme
- 2) Tellerdeki kurşunun filaman gibi hareket etmesi sonucu elde edilen ısı. Isı genellikle hızlandırma ve yavaşlatma anlarında ortaya çıkmaktadır.

3) Aletin mahfazası içinde sürekli yanan bir lamba

Jiroskop ısısını etrafındaki havaya radyasyon ile verir. Jiroskopun ısı kaybı jiroskopun içi ile dışı arasındaki sıcaklık farkının karesi ile orantılıdır. Bu ısı kaybına sebep olan diğer faktörler de aletin yapıldığı madde, şekli ve büyüklüğüdür.

Elde edilen ısı radyasyon, ile kaybolan ısıya eşit olunca bir ısı dengesi meydana gelecektir. Dengenin sağlanması aletin dışındaki havanın sıcaklığına bağlıdır. Değişen sıcaklıklar serbest salınımın periyodunu değiştirebilir. Ayrıca askı telinin rijidliği de değişebilir. Salınım yapan kısımlar sıcaklık değişimine dayanıklı maddelerden yapılmıştır. Çeliğinküçük olan genleşme katsayısı gözönüne alınırsa genleşme ihmal edilebilir.

Askı telinin soğuması askı telini daha rijid yapmaktadır. Bu da kuvvet çiftinin artmasına sebep olur. Böylece k sabiti değişmektedir.

10.420. ELEKTRİKSEL FAKTÖRLER

Jiroskopun motoru bir endüksiyon motorudur. Dönme hızı aşağıdaki faktörlere dayanır.

- 1) Sürtünme
- 2) Akımın frekansı
- 3) Akım şiddeti
- 4) Elektrik kaynağının voltajı

Genellikle bir dönüştürücünün basit ossilatörü tarafından verilen frekans ısı tesirinde kalmamaktadır. Nominal 400 S değerinden $\pm 3S$ lik bir sapma göstermektedir.

Elektrik kaynağından elde edilen akım zamanla doğ-

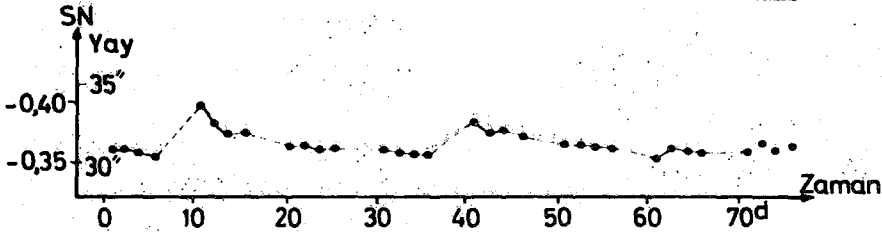
rusal bir biçimde azalır. Voltaj ısı değışikliklerinin tesiri altında kalmaktadır. 12 voltluk bir veri eğer batarya ilk başta biraz fazla şarj edilmeşse sağlanabilir. Voltajın artması dönme hızını arttıracaktır. Böylece A açısai momentumu tesir altında kalacaktır.

Eğer jiroskopa güç sağlayan kaynak düzenlenmezse voltaj azalacaktır. Her iki halde de (sürtünme artması ve voltajın kontrol edilmemesi) motor yavaşlıyacaktır. Bataryanın voltaj seviyesinin stabilize edilmesi jiroskopun dönmesini ayarlıyacaktır.

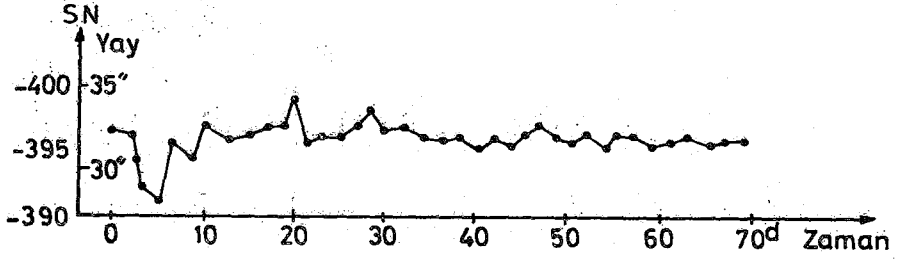
10.500. ASKI TELİ MOMENTİNİN DENGİ KONUMUNDA MEYDANA GELEN ETKİLER

10.510. ISI ETKİSİ

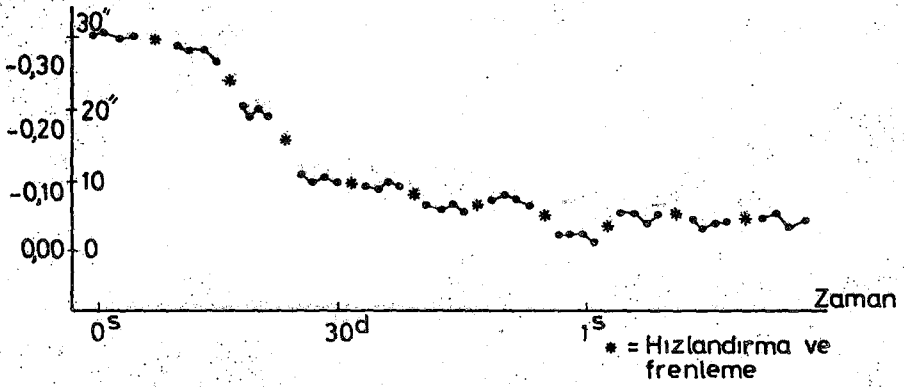
Pustzai ve Halmosa{57}, {37} göre sıcaklık değışimleri askı telindeki molekölse gerilmeleri değıştirmektedir. Bu da denge konumunda ufak bir sapmaya sebep olmaktadır. SN değeri üniform bir sıcaklıkta sabit oluncaya kadar (Şekil 10.6) sıcaklık değışimi ile değışmeye yatkındır (Şekil 10.7){33}.



Şekil 10.6(a)



Şekil 10.6(b)



Şekil 10.7

Bu deneylerde histerisis etkisi olmadığı kabul edilmiştir. Bunu sağlamak için de jirooskop askı telinin ucunda uzunca bir zaman asılı bırakılmıştır.

Şekil (10.6) SN da aletin içinin ısınması sonucu değişimleri göstermektedir. Bu deneyde ilk önce soğuk SN gözlenmiştir. Bundan sonra jirooskop çalıştırılmış ve hemen frenlenmiştir. Bundan sonra SN gözlenmiştir. Bu işleme değişiklikler küçük ve aksidantel oluncaya kadar devam edilmiştir.

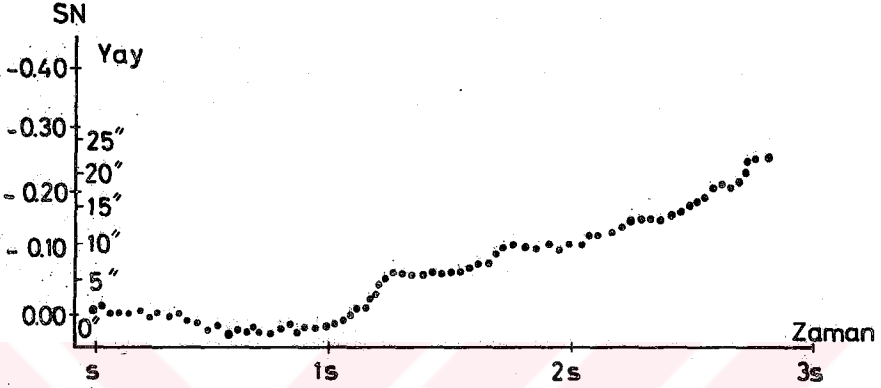
10.520. HİSTERİSİS ETKİSİ

Pustzai ve Halmos histerisis tesirini tamamen incelemişlerdir. Dönmeyen jirooskop uzun bir süre serbestçe asılı kalırsa (üniform sıcaklıkta) askı teli momentinin sıfır olduğu bir konuma yaklaşır.

Eğer bu konumda salınım yaptırılırsa, uzun bir müddet için olsa da bu sıfır konumu sıcaklık sabit kaldıkça değişmez. Fakat sıcaklık değişirse bu konum sıcaklık değişimi ile orantılı olarak değişecektir. Jirooskop bağlanıp serbest bırakılsa bile moment konumu kayıt doğruluğu içinde değişmeyecektir.

Jirooskop bağlandığı zaman bir kuvvet etkisi altındadır ve merkezden ayrı bir konumdadır. Bu koşullar altında jiroskopa etki eden sabit bir kuvvet vardır. Bu konumda jirooskop uzun zaman kalırsa histerisis olayına yol açılır. Bu sefer sıfır moment konumu diğer bir konuma kaymış olacaktır. Alet serbest bırakıldığı zaman (dönmeyen jirooskop halinde) askı teli momentinin sıfır olduğu konum histerisis etkisi olmayan konuma doğru gider (Şekil 10.8). Askı teli histerisis tesirinden hemen kurtulmaz. Bu iki konum arasında az bir fark olacak biçimde askı teli düzenlense bile sapma farkedilebilir.

Alet ile 24 saat çalışmadıktan sonra histerisis tesirinin giderilmesi saatler alabilir. Bu ufak patlamalar biçiminde olur ve presizyonlu işlerde önemli bir



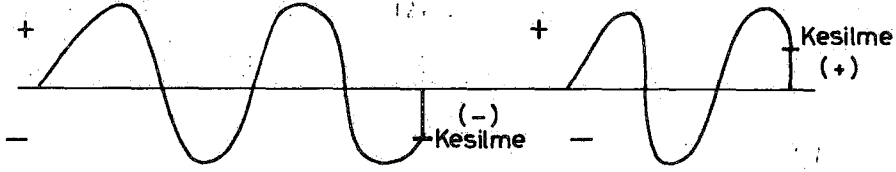
Şekil 10.8

hata kaynağı olabilir. Presizyonlu sonuçlar elde edebilmek için histerisis etkisi giderilmelidir. Bu nedenle ölçme yapmadan önce jiroskop birkaç saat serbest hareket etmelidir.

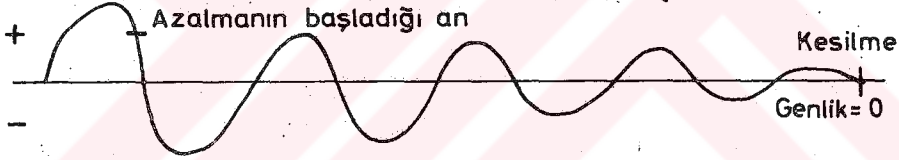
10.530. MANYETİK TESİRLER

Jiroskop mahfazası dış manyetik alanların etkisini önleyecek biçimde yapılmıştır. Jiroskop çalıştırılırken ve frenlenirken alternatif akım kullanılır. Akım herhangi bir anda kesilirse, bu sinüs eğrisinin herhangi bir yerinde olabilir. Bu da bir miktar manyetik alan doğurur(Şekil 10.9).

A Akımın genlik azalması yapılmadan kesilmesi



B Akımın genlik azalması kullanarak kesilmesi



Şekil 10.9

Eğer akım, kesilmeden önce bir reosta ile sifıra indirilirse akım sıfır genliğinde kesilir. Böylece bir manyetik olay meydana gelmez.

10.600. JİROSKOPUN SALINIMINI ETKİLEYEN DİĞER FAKTÖRLER

(10.5) no.lu bölümde açıklanan faktörler doğrudan doğruya askı teline etkilemektedirler. Jiroskopun salınımını etkileyen diğer faktörler de vardır. Bunlar arasında en önemlisi dönme hızının değişmesidir.

10.610. DÖNME HIZININ DEĞİŞMESİ

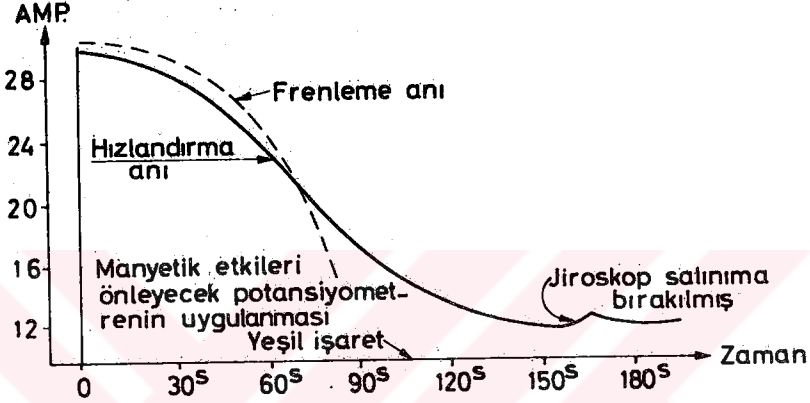
Tamamıyla kontrol edilebilir bir dönme elde edebilmek için senkron bir motora ihtiyaç vardır. Ayrıca gerekli hız kazanıldığı zaman devrede kapanılabilen senkron veya endüksiyon motorları da kullanılabilir. Teknik zorluklar senkron bir motorun uygulanmasını zorlaştırmaktadır.

Konverter de çalışan bir feed-bak sistemi vardır. Bu alet akımın genliğini ihtiyaca göre ayarlar. Fakat bu feed-bak kontrolü endüksiyon motorunun özelliklerinden ve zamanla yavaş yavaş olan değişimlerden dolayı küçük gecikmelerle çalışır. Bu gecikmeler dönmeye dolayısıyla açısal momentum ve salınım süresinde değişikliklere yol açar.

Isı dengesi olduğu zaman bile bağlanmış jiroskop çalıştırılması esnasında yataklarına karşı çalışmaktadır. Bu da bu sırada jiroskopun çıkardığı sestən anlaşılmalıdır. Bu sesin nedeni de rotorun dönme ekseninin yataklara az da olsa bir basınç yapmasıdır. Böylece sürtünme az bir miktar artmaktadır. Bağlı jiroskop bu nedenle optimal dönme hızını kazanır.

Yetersiz dönme sayısını alet yeşil ışık yakıp ölçme yapılabilir komutunu verdikten sonra jiroskop bağlı iken bir dakika daha çalıştırarak giderilebilir. Hızlandırma, salınım yaparken ve frenleme anlarında Şekil 10.10 kullanılan akımın amper olarak miktarı ölçülürse yeşil ışığın erken yandığı görülür. Akımın gösterdiğine göre bu anda tam dönme hızına erişilmemiştir. Eğer bu andan itibaren alet bir dakika daha bağlı konumda çalıştırılmazsa ilk salınım süresi arkadan gelen salınım sürelerinden daha kısadır. Bir dakikalık bir fazla çalıştırma olduğu zaman birinci salınım süresi diğer salınım sürelerinden çok az farklıdır.

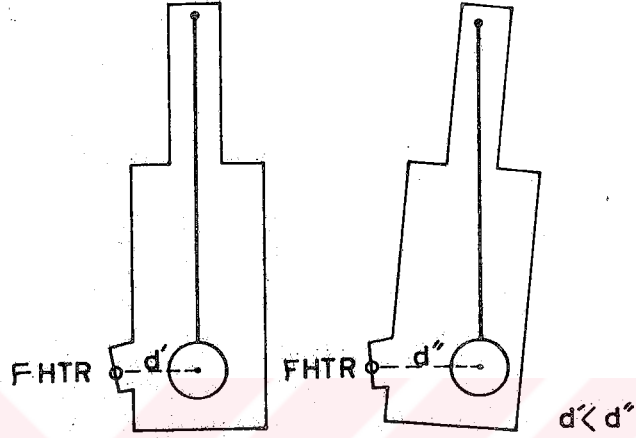
Buradan çıkan sonuca göre salınım süresindeki farklılıklar aksidanteldirler ve düzeltilemezler.



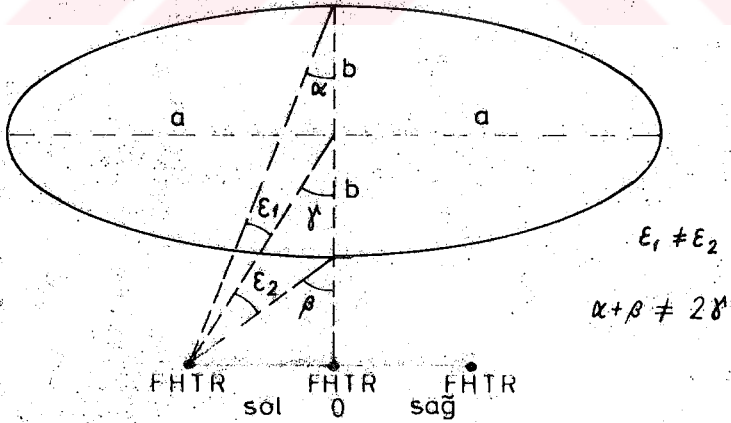
Şekil 10.40

Bu olayın bir sonucu bir FHTR aralığının tek başına hiçbir önemi yoktur. Birbirine karşı gelen çiftlerin ortalaması alınmalıdır.

Bu olayın diğer bir etkisi de vardır. Bu (Şekil 10.14) de gösterilmiştir. Eğer alet meridyende tesviye edilmemişse FHTR ler ile jiroskop arasındaki uzaklık, tesviye olmuş hale göre farklılık göstermektedir. Skala aralığının açısal değeri de değişikliğe uğrayacaktır. Bu nedenle açısal değer olarak bir değer almak tesviye edilmez. Ortalama değer her FHTR aralığı için 4350" olarak bulunmuştur. Gerçek değer ölçmelerin kendilerinden elde edilebilir.



Şekil 10.11



Şekil 10.12

10.620. MERİDYENE GÖRE SALINIM

Jiroskopun salınımı sönümlü bir harmonik hareket-
tir (S.H.H). Sönüm teknik olarak üsseldir ve ancak
sonsuzda sıfıra eşit olur. Doğrusallıktan sapma çok kü-
çüktür. Kısa bir zaman süresinde (10-15 dakika) ihmal
edilebilir.

Diğer bir olay da şu şekildedir. Fakat bu olay
sadece presizyonlu zaman ölçmelerinde ortaya çıkmıştır.
Bu olay azalmanın doğru olmadığını ortaya çıkarmıştır.

Bu olayın varlığı Lauf ve Pusztai tarafından ince-
lenmiştir. Jiroskop bir dönme eksenini etrafında sadece
sağa ve sola doğru hareketler yapmamaktadır. Ayrıca
merkezde meridyene küçük bir salınım yapmaktadır. Böy-
lece dönme ekseninin ucunun yörüngesi az çok eliptik
bir yörüngedir. İki genlik arasındaki bağıntı

$$\frac{b}{a} = 0.004$$

dür. Burada b meridyen düzlemindeki genliktir.

Sağa doğru olan salınım sola doğru olan salınımdan
farklıdır. FHTR ler arasında karşılık olan aralıklar
incelendiği zaman zahiri bir düzensizlik görülmüştür.
Jiroskopun dönme ekseninin ucu geniş bir elips çizdiği
zaman, bu salınımı meydana getiren kuvvet (meridyen
düzleminde) askı telinin düşeyden sapmasına yol açar..
Bu olayın sonucu olarak jiroskop bazen skalaya yakın
bazen de uzaktır (Şekil 10.12.)

α ve β açılarının eşit olmadığı görülmektedir. Bu-
nun bir sonucu olarak iki FHTR arasında ölçülen zaman
sağdan sola doğru olan salınımla soldan sağa olan salı-
nım da birbirinden farklıdır. Ölçülen zamanların ortala-
ması bile orta çizgiye karşı gelmemektedir. Bunun nede-
ni de $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ olmasıdır. Bu faktörler incelenirken çok
küçük uzaklıkların söz konusu olduğu akıldan çıkarılma-
malıdır. 1" aşağı yukarı 0.2u karşılık olmaktadır.

10.700. PRESİZYONLU ÖLÇMELER İÇİN BİR ÖLÇME YÖNTEMİ

Bundan önceki bölümlerde sözü geçen faktörlerden dolayı hataları azaltmak için bir ölçme yöntemi vermek gereklidir.

A) Ölçme işlemine başlamadan önce histerisis etkisi giderilmelidir. Bunu yapabilmek için alet kaç gün bağlı kaldıysa o kadar saat serbest salınım yaptırılmalıdır.

Bu yöntem zaman alıcıdır. Bu nedenle jiroskop geceden tesviye edilmiş bir şekilde serbestçe salınım yapacak şekilde bırakılmalıdır.

B) Jiroskop ısı dengesi sağlanıncaya kadar çalıştırılmalıdır. Bu tabii koşullar altında yaklaşık olarak 1 1/2 veya 2 saat olmaktadır. Bu zaman zarfında jiroskop dönerek salınım yapmalıdır.

C) Bir doğrultu için birbirinden bağımsız ölçme yapılmalıdır. Herbir ölçme aşağıdaki adımlardan meydana gelir.

- a. Referans doğrultusunu gözleyip yatay daire okunur.
- b. SN noktasının saptanması için jiroskop dönmek 4 yarım salınım gözlenir.
- c. 4 yarı salınım gözlenerek azimut belirlenir. Birbirinden bağımsız ölçmelerde bir kontrol yapılmalıdır. Böylece aletin yatay kalıp kalmadığı saptanır.

Deneyler sonucu salınım yapan jiroskopun (dönen ve dönmeyen) soğuk denge konumunu aradığı anlaşılmıştır. Bu kayma dönmeyen jiroskopda daha hızlıdır. Bunun nede-

ni de bu halde ısı ortaya çıkmamakta fakat buna karşılık ısı kaybı olmaktadır. Dönen jiroskop halinde ise bu kayma sürtünmeden ve güç alımından meydana gelen ısı yüzünden değişik bir durum takip eder. Dönme ve frenleme modlarında meydana gelen ısı bu kaymayı önlemek için yeterlidir.

D) Zaman ölçülmektedir. Deplasmanın değeri genliğin bir fonksiyonudur. Ölçme datasından genlikler hesaplandığı vakit zaman aralıkları skalada bir uzaklık deplasmanına dönüştürebilir.

Bu deplasmanların karşı gelen açısal değerleri tesviyenin iyi olmamasına karşı çok duyarlıdır.

11.000. JİROSKOPLU TEODOLİTLERİN İÇ VE DIŞ PRESİZYONLARI

Bu bölüm GAK 1 aleti ile yapılan bir dizi ölçmeleri ile sonuçlarını kapsamaktadır. Bu araştırmanın amaçları aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

- a. Aletin iç presizyonunu saptamak alet operatör sistemile tekrarlanan bir dizi ölçmeden aynı azimutu elde etmek.
- b) Aletin dış presizyonunu saptamak-kalibrasyon sonuçlarının stabilitesi.
- c) a ve b amaçlarına göre çeşitli ölçme yöntemlerini karşılaştırmak.

11.100. ALETİN İÇ PRESİZYONU VE ZAMAN YÖNTEMİ

İyi tesviye edilmiş bir alet de teodolitin gözleme doğrultusu ve jiroskopun ucunda asılı bulunduğu tel aynı düşey düzlemedir. Jiroskop çalıştırıldığı zaman meridyen düzlemi etrafında salınımlar yapmaktadır. Gözleme doğrultusu ve jiroskop skalasının sabit göstergesi bu düzleminde değilse, salınım göstergeye göre simetrik değildir. Salınımın periyodu sabit göstergeye göre

ölçülür. Sağ yarım periyod ile sol yarım periyod birbirinden farklıdır. Bu fark evvelce de belirtildiği gibi gözleme doğrultusunu meridyen doğrultusuna getirmek için kullanılan düzeltmeyi verir. Bu dönme azimut düzeltmesi olarak isimlendirilir.

Yarım periyod jiroskopun gözleme doğrultusunun düzey düzleminden ard arda iki geçişi arasındaki zaman aralığıdır. Bu büyüklüğü ölçmek için iki geçiş anı kayıtl edilir. Geçiş anları jiroskop skalasının sabit göstergesinden geçişi kayıtl edilerek elde edilir. Bu nedenle zaman yönteminin güvenilirliği operatörün bu anları, kayıtl etme kabiliyetine, hareketli göstergenin sabit göstergenin tam ortasında olup olmadığını belirlemesine ve bu anı saptamasına bağlıdır. Bunların yanı sıra salınım periyodunun jiroskopun çalışırken gösterdiği sapmalara bağlı olduğu düşünülebilir. Eğer böyle periyod değişimleri var ve ölçülebilir büyüklükte iseler aletin kalitesi hakkında bir karar verirken bunları gözönüne almak gereklidir. Eğer alet periyod değişikliklerine katkıda bulunuyorsa operatöre bağlı hatalar ayrı incelenmelidir.

11.110. ÖLÇÜLEN ZAMAN ARALIĞININ DOĞRULUĞU

Bir ölçme serisi n adet geçiş anının kayıtl edilmesi ile elde edilir. Böyle bir ölçme serisi belli bir salınım genliği ve gözleme doğrultusunun belli bir azimutuna bağlıdır.

Bir seri ölçme yapıldığı kabul edilmektedir. Bu ölçme serisinde $t_1, t_2, \dots, t_n$ gibi n adet an saptanmış olsun. n adet geçiş anı $n - 1$ adet yarım periyod verir.

Birinci yarım periyod	$t_2 - t_1$
İkinci yarım periyod	$t_3 - t_2$
Üçüncü yarım periyod	$t_4 - t_3$
$n-1$ inci yarım periyod	$t_n - t_{n-1}$

Birbirini izleyen her çift yarım periyod azimut düzeltmesi için Δt gibi bir zaman farkı verir. Bütün ölçme serisi aşağıdaki zaman farklarını verir.

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= t_1 - 2t_2 + t_3 \\ \Delta t_2 &= -t_2 + 2t_3 - t_4 \dots\dots\dots (11.1) \\ \Delta t_3 &= t_3 - 2t_4 + t_5\end{aligned}$$

Tek bir Δt nin doğruluğunu hesaplamak için bütün seri dengelenmelidir. Tek farkların dengelenmiş değer Δt den sapmaları zaman farkı doğruluğunun bulunmasını sağlar. (11.1) eşitliklerinden görüleceği üzere Δt_i ler birbirlerine bağlı büyüklüklerdir. Bu nedenle dengeleme korrelasyonlu ölçmelerin koşullarına uymalıdır. Bu koşullara göre 40 ölçme serisi gözlenmiştir.

Bir seri 5 veya 7 geçiş anından ibarettir. 5 transit üç zaman farkı vermektedir. Böyle bir serinin dengelenmiş zaman farkı aşağıdaki gibidir.

$$\Delta \bar{t}_{(3)} = \frac{2\Delta t_1 - \Delta t_2 + 2\Delta t_3}{3} \dots\dots\dots (11.2)$$

Yedi geçiş anı ve 5 zaman farkı için kullanılan eşitlik

$$\Delta \bar{t}_{(5)} = \frac{6\Delta t_1 - 4\Delta t_2 + 8\Delta t_3 - 4\Delta t_4 + 6\Delta t_5}{12} \dots\dots (11.3)$$

biçimindedir.

Zaman farkı saptamalarının varyansları bütün seriler için hesaplanmıştır. Genliklere göre bir sıralama yapıldığı zaman aşağıdaki (11.1) no.lu çizelge elde edilmiştir.

Genlik	Bir sınıftaki Seri Sayısı	Sınıftaki Ortalama Varyans	Bir Geçiş Anı- nın Standart Sapması
		S_n^2	S^n
4	5	0.1122	0.14
4- 6	10	0.1027	0.13
6- 8	6	0.0702	0.11
8-10	5	0.0346	0.08
10-15	14	0.0369	0.08

Çizelge 11.1. Zaman Farkları Varyanslarının
Dağılımları

Çizelge 11.1 deki verilerden zaman farkı varyansı-
nın artan genlikle azaldığı görülmektedir. Varyans ve
genlik arasındaki bağıntı

$$V = -0.0081a + 0.1361..... \quad (11.4)$$

formülüyle verilir. Burada V varyans , a da yardımcı
skaladaki bölümler cinsinden genliktir. (11.4) no.lu
formül Çizelge 11.1 deki değerlerden elde edilmiştir.
Bu nedenle çizelgedeki genlikler için geçerlidir.

11.200. AZİMUT SAPTAMASININ DOĞRULUĞU VE ZAMAN YÖNTEMİ

Zaman yöntemi gözleme doğrultusunun yaklaşık olarak
kuzey doğrultusunda olmasını gerektirmektedir. Ayrıca
gerekli azimut düzeltilmesinin 10 yay dakikasından küçük
veya ona eşit olması gerekmektedir. Azimutun bu yöntem-
le saptanmasında bir dizi yarım periyotlar ile salınım
genlikleri ölçülür. Bütün ölçülen yarım periyotlar den-
gelenmiş bir zaman farkı verir. Bu zaman farkı genlik-
le beraber aşağıdaki formülde yerine konarak düzeltme
bulunur.

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta \bar{t} \dots\dots\dots (11.5)$$

Bilindiği gibi c alete bağlı bir sabittir. Sonuç azimut gözleme doğrultusu değeri artı (11.5) verilen düzeltmedir.

$$N = N' + \Delta N \dots\dots\dots (11.6)$$

Azimut düzeltmesinin bulunması c jiroskop sabiti-nin bulunmasını gerektirmektedir. c ampririk olarak N, a ve Δt değerlerini değiştirerek bulunur. Her üç büyük-lük de ölçülen büyüklükler olduklarından ölçme hatala-rından etkilenirler. N' ve a daki hatalar ihmal edile-bilir. Bunun nedeni de genliğin değişmesidir. Bu neden-le sabitini etkileyen ana faktör zaman ölçmesidir. (11.5) ve (11.6) formüllerinden

$$\bar{t} = \frac{N - N'}{ac} \dots\dots\dots (11.7)$$

elde edilir. (11.7) ifadesi lineer hale getirilirse

$$a_o V_t = \frac{dN}{a} + \frac{N' - N_o}{ac_o} dc - (c_o \Delta \bar{t} + \frac{N - N_o}{a}) \dots\dots\dots (11.8)$$

elde edilir. c_o ve N_o başlangıç değerleri (11.7) şek-lindeki iki denklemden elde edilir. (11.8) şeklindeki her hata denklemi bir ölçme serisinin sonucudur. Böyle hata denklemleri normal bir denklem takımı verir. Bu normal denklem takımı çözüldüğünde dc ve dN büyüklükle-ri elde edilir. Normal denklemleri elde ederken her ha-ta denkleminin ağırlığı gözönüne alınmalıdır. Ağırlık-lar her seride ölçülen yarım peryotlardan elde edilir. Normal denklemler dc nin doğruluğu için bir tahmin ve-rirler.

$$m_1 = m_o \sqrt{Q_{cc}} \dots\dots\dots (11.9)$$

$$Q_{cc} = \left\{ \frac{a^2 c_o^2}{P(N' - N_o)^2} \right\}$$

(11.9) formülü küçük salınım genliklerinin c sabitini saptamada daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir. Diğer taraftan küçük genlikler zaman ölçmesi bakımından uygun değildir. 8 birimlik genlik her iki koşul için uygun bir çözümdür.

Yukarda söz edilen doğrultuda yedi normal denklem takımı kurulmuş ve çözülmüştür. Bunun sonucu olarak Çizelge 11.2 deki c değerleri elde edilmiştir.

	c	m_c
1	2.864	0.025
2	2.914	0.013
3	2.934	0.0064
4	2.965	0.025
5	2.881	0.018
6	2.903	0.0088
7	2.915	0.018
		0.018 Ağırlıklı Ortalama

Çizelge 11.2. c Sabitinin Saptanması

İstatiksel yöntemlerle Çizelge 11.2 deki c sabiti değerlerinin birbirinden önemli derecede fark etmediği gösterilebilir. Sonuçların dispersiyonu aksidantel ölçme hatalarından ileri gelmektedir. Bu gözönüne alındığında c sabitinin son değeri bütün sonuçların ağırlıklı ortalaması olarak alınmıştır.

c nin doğruluğu incelendikten sonra kuzey doğrultusu saptanmasının doğruluğu incelenebilir. Kuzey doğrultusunun doğruluğu c sabitinin doğruluğuna vezaman farkı saptanmasının güvenilirliğine bağlıdır. Bu iki

faktör azimuta farklı biçimde etki ederler. Zaman farklarının ölçülmesinde yapılan hata azimut saptanmasında genliğin bir fonksiyonu olarak etki eder. Diğer taraftan c deki hatadan dolayı azimutta meydana gelen hata a t çarpımı ile orantılıdır. Bu da bu hatanın gerekli azimut düzeltilmesinin bir fonksiyonu olduğunu ortaya koyar. Başlangıç doğrultusu N' gerçek kuzeye ne kadar yakınsa c deki hata o kadar önemsizdir. Yukarda sözü edilen faktörlerin bir fonksiyonu olarak elde edilen azimut düzeltilmesinin karesel ortalama hatası aşağıdaki formülle verilir.

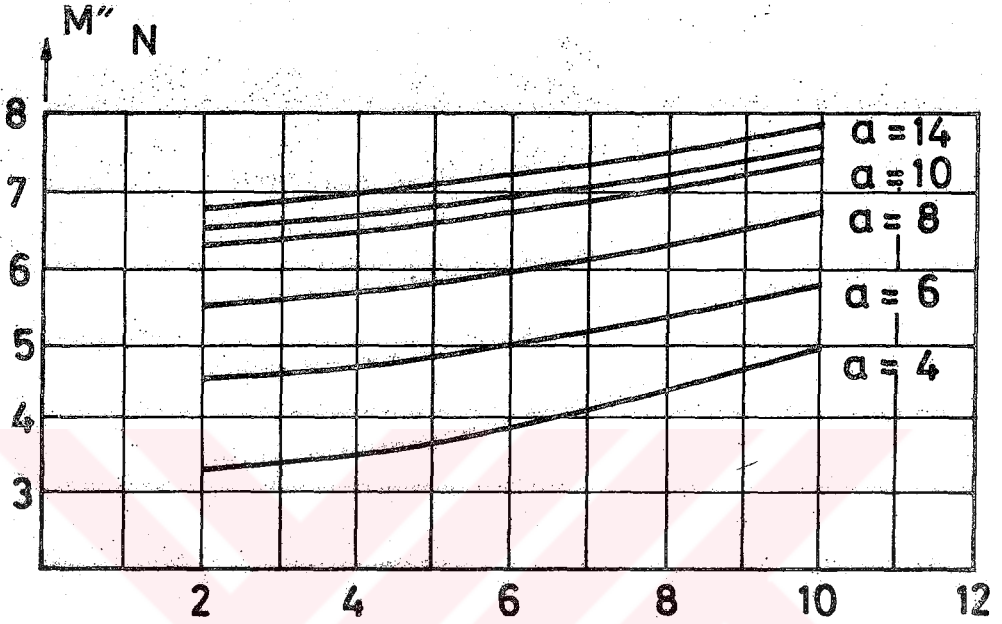
$$m_N^2 = (ca)^2 M \frac{2}{t} + (\Delta t)^2 m_c^2 \dots\dots\dots (11.10)$$

İstenilen azimut düzeltilmelerinin ve salınım genliklerinin çeşitli kombinezonları farklı karesel ortalama hatalar verir.

Azimut saptanmasında beklenen doğruluk ile buna tesir eden faktörler arasındaki bağıntıyı göstermek için Şekil (11.1) hazırlanmıştır. Zaman ölçmesinin genliğe bağımlılığı (11.4) no.lu formülden alınmıştır. m karesel ortalama hatası da Çizelge 11.2 den alınmıştır. Şekildeki her eğri belli bir genliğe karşılık olmaktadır. Yatay eksen de aranılan azimut düzeltilmeleri, (yaydaki kası olarak) düşey eksen de azimut saptanmasındaki karesel ortalama hatalar yay saniyesi olarak işaretlenmiştir.

Şekilden görüldüğü gibi normal çalışma koşulları altında (bu bir ölçme serisi anlamına gelmektedir) 8-10 birimlik bir genlik ve 5 dakikalık bir düzeltme halinde azimut saptanmasının beklenen doğruluğu yaklaşık olarak 6 saniyedir.

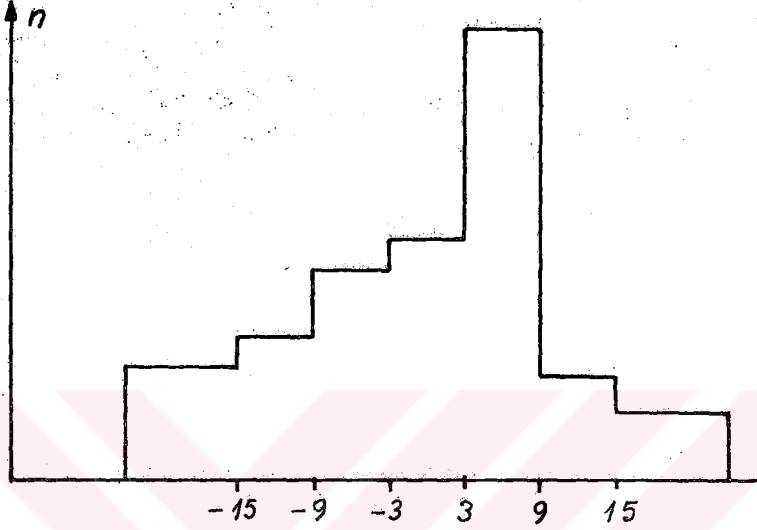
Yukarda sözü edilen amaçları gerçekleştirmek için bir dizi ölçme yapılmıştır. Ölçmeler laboratuarda ve arazide yapılmıştır.



Şekil 11.1

Bir seri ölçme 5 veya 7 geçiş anından ibarettir. Her serinin genliğine başlangıç doğrultusu birbirinden farklıdır. Bir dizi seri aynı arazi doğrultusuna bağlanmıştır. Bu dizinin doğrultusunun ortalaması ve her serinin bu doğrultudan sapmaları saptanmıştır. Toplam olarak 40 sapma elde edilmiştir. Bu sapmaların dağılımı (11.2) no.lu şekildeki histogram ile verilmiştir. Bu histogram için kullanılan data 8" lik bir standard sapma vermektedir. Uç sapma 18" dir. Doğruluk tahmininin büyüklüğü (11.10) formülüyle elde edilen sonuçlara uymaktadır.

Sözü geçen standard sapma zaman farkı saptamasındaki hata ile aletin tesviye edilmesinden ortaya çıkan hatadan ileri gelmektedir. Bu standard sapma aletin sadece iç presizyonunu vermektedir. Ayrıca aletin aynı sonuçları vermesi kapasitesini göstermektedir.



Şekil 11.2

11.300. ALETİN İÇ PRESİZYONU, DÖNÜM NOKTASI YÖNTEMİ

İlk olarak dönüm noktası yöntemi ile azimut saptanmasındaki adımları kısaca hatırlamak yararlı olacaktır. Teodolitın gözleme doğrultusu kuzey doğrultusuna yakın bir yönde yöneltilir. Jiroskop çalıştırılır ve salınım yapmaya başlayınca operatör teodoliti döndürerek salınımı sürekli olarak izler. Salınım gayet dikkatli olarak izlenmelidir. Teodolitın dönmesi jiroskopun salınım hızı ile aynı olmalıdır. Jiroskop göstergesi bütün hareket boyunca jiroskop skalasının sabit göstergesi ile çakışık olmalıdır. Salınımın üç noktasına gelince salınım yavaşlar ve jiroskop salınım doğrultusunu değiştirmeden durur. Bu anda operatör yatay daire okumasını yapar. Bundan sonra jiroskop aksi yönde hareket etmeye başlar. Operatör salınımı diğer uç noktasına kadar izler. Aynı şekilde yatay daire okumasını yapar. Jiroskop meridyen etrafında salınım yaparken uç

noktaların ortalaması yatay dairede kuzey doğrultusunu verir. Bu yöntem birkaç kere tekrar edilir. Sonuç kuzey doğrultusu bütün ölçme serisinden elde edilir.

Her salınım periyodu bir kuzey doğrultusu verir.

$$N_i = \frac{DN_{\ell}^i + DN_r^i}{2} \dots\dots\dots (11.11)$$

Bütün ölçme serisinden

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{DN_{\ell}^1 + DN_r^1}{2} \\ N_2 &= \frac{DN_r^1 + DN_{\ell}^2}{2} \dots\dots\dots (11.12) \\ N_3 &= \frac{DN_{\ell}^2 + DN_r^2}{2} \end{aligned}$$

N_i büyüklükleri birbirlerine bağlıdır. Bu nedenle sonuç kuzey doğrultusu uygun bir dengeleme ile elde edilir. Burada kullanılan ölçme serileri iki veya üç salınım periyodundan meydana gelmektedir. Toplam olarak 16 seri gözlenmiştir. Bunlardan sekizi iki periyoddan sekizi de üç periyoddan meydana gelmektedir. Her seri için dengelenmiş bir kuzey doğrultusu ve karesel ortalama hatası elde edilmiştir. Dengelenmiş kuzey doğrultularının doğruluk tahminleri her serideki tek kuzey doğrultularının doğruluğunu belirtmektedir. Çizelge 11.3 ölçmelerin sonuçlarını vermektedir.

Seri No	M _N	Seri No	M _N
1	8	9	6
2	4	10	6
3	3	11	7
4	6	12	5
5	7	13	6
6	9	14	5
7	5	15	10
8	5	16	2

Çizelge 11.3.

Bu sonuçlardan dönüm noktası yönteminin uygun bir iç presizyona sahip olduğu söylenebilir. Bu yöntem zaman ölçmelerini ve c jiroskop sabitini kullanmadığından zaman yöntemine tercih edilebilir.

11.400. ALETİN DIŞ PRESİZYONU VE KALİBRASYON SONUÇLARI

Jiroskoplu teodolit diğer bütün aletlerde olduğu gibi kalibre edilmelidir. Kalibrasyon sözkonusu olduğu zaman aletin bir sistematik hatası olup olmadığı ve eğer böyle bir hata varsa sabit kalıp kalmadığı saptanmalıdır. Bu sorulara bir cevap verebilmek için bir kalibrasyon doğrultusu kurulmalıdır. Bu doğrultunun azimutu jiroskoplu teodolitin verdiği değerden daha presizyonlu bir değer veren bir yöntemle ölçülmelidir. Bu azimut jiroskoplu teodolitin verdiği azimutla karşılaştırılarak aletin sistematik hatası hakkında bir fikir elde edilebilir. Bu karşılaştırmayı farklı kalibrasyon doğrultularında yaparak aletin sistematik hatasının değişip değişmediğini kontrol edilebilir.

Bu kalibrasyon doğrultularının azimutları astrono-

mik ölçmelerle saptanabilir. Bir triyangülasyon ağının bir kenarının bu amaçla kullanılması uygun değildir. Direkt astronomik ölçmelerin tercih edilmesinin nedeni jiroskop azimutu ve astronomik azimut aynı istasyonda bulunursa aynı çekül doğrultusuna göre saptama yapılmasıdır.

Azimutlar Arasındaki Fark		Ortalamadan Sapma
$E = AZ_a - AZ_\gamma$		
Dönüm Noktası	33"	1.2"
Yöntemi	34	2.2
	37	5.2
	27	-4.8
	33	1.2
	27	-5.2
Ortalama	= 31.8"	$M_E = 1.7"$
	51	17.5
	45	11.5
	39	5.5
	26	-7.5
	36	2.5
	20	-13.5
	26	-7.5
	40	6.5
	19	-14.5
Ortalama	= 33.5"	$M_E = 3.8"$

Çizelge 11.4. Kalibrasyon Sonuçları

Çizelge 11.4 deki her jiroskop azimutu bir seri ölçmenin dengelenmiş sonucudur. Azimutların saptandığı istasyonlar beton kolonlardır ve jiroskopun tesviyesi çok stabildir. Referans doğrultularında yapılan yatay daire okumaları her iki halde de aynıdır. Bu nedenle yatay daire okumasında yapılan hata iki azimutda da aynıdır.

Jiroskop azimutu ile astronomik azimut arasındaki fark her iki ölçme yönteminde de aynı bulunmuştur. Fakat dönüm noktası yöntemi daha uygun gözükmektedir. Bu ölçmelerde dönüm noktası yöntemi ile elde edilen sonuçların dispersiyonu zaman yönteminden daha azdır. Bu sonuç zaman yönteminin daha uygun olduğu fikrine karşıdır.

Alet aletin kullanılacağı yerde kalibre edilmelidir.

III. BÖLÜM

JİROSKOPLU TEODOLİTİN SALINIMLARINDAN COĞRAFİK ENLEMİN BULUNMASI

Astronomik gözlemlerle büyük doğruluklarla belirlenegelen coğrafik enlem bazı hallerde yeterli olabilecek doğrulukla jiroskoplu teodolitın salınımlarından da bulunabilir. Bu yöntemde dönüm noktaları değerleri periyodun bir fonksiyonu olarak yazılır ve yeterinden fazla dönüm noktası ölçmeleri en küçük kareler yönteminde indirekt ölçmelere göre dengelenerek coğrafik enlem bulunur.

12.000. DÖNÜM NOKTALARI ÖLÇMELERİNDEN ENLEMİN SAPTANMASI

Jiroskop rotorunun simetri ekseninin sönümlü harmonik hareketinde yatay daire okumaları

$$DN_i = N + Be^{-\alpha t_i} \cos (\beta t_i + \gamma) + St$$

bağıntısı ile verilmektedir.

n sayıda ardışık dönüm noktasına karşılık olan yatay daire okumaları

$DN_1, DN_2, DN_3, \dots, DN_n$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$f_1 = DN_1 = N + Be^0$$

$$f_2 = N - Be^{-1/2} \alpha T$$

$$f_n = DN_n = N - Be^{-1/2} \alpha^{(n-1)} T$$

Burada T salınımin periyodudur. Bu denklem i inci dönüm noktası için

$$DN_i = N + (-1)^{i-1} e^{-1/2} (i-1)\alpha T \dots\dots\dots (12.1)$$

biçimini alır.

Salınımın T peryodu ω , C, I_x , a, g, Ω , $\cos\phi$, p, m bilinmeyenlerinin bir fonksiyonudur ve

$$T = T(\omega, C, I, a, g, \Omega, \cos\phi, p, m) =$$

$$= 2\pi \frac{2(C + \frac{I_x \omega^2}{mga})}{\sqrt{4(C + \frac{I_x \omega^2}{mga}) I_x \omega \Omega \cos\phi - p^2}} \dots\dots\dots (12.2)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Burada p

$$\alpha = \frac{P}{2(C + \frac{J^2}{M})}$$

bağıntısı ile verilir. Bilinmeyenler için yaklaşık değerler N_0 , B_0 , α_0 , ω_0 , C_0 , I_{x0} , a_0 , g_0 , Ω_0 , $(\cos\phi)_0$, p_0 , m_0 olmak üzere

$F(N_0, B_0, \alpha_0, \omega_0, C_0, I_{x0}, a_0, g_0, \Omega_0, (\cos\phi)_0, p_0, m_0) =$
 $= F(\Sigma)$ gösterimi ile (12.1) fonksiyonu Σ noktasında çok değişkenli Taylor serisine açılıp lineerleştirilir. Bu durumda i inci hata denkleminin bilinmeyenlerin katsayıları (12.1) den aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$a_{i1} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial N} \right\}_{\Sigma} = 1$$

$$a_{i2} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial B} \right\}_{\Sigma} = \{ (-1)^{i-1} e^{-1/2} (i-1)\alpha T \}_{\Sigma}$$

$$a_{i3} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)TBe^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i4} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \omega} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial \omega} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i5} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial C} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(i-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial C} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i6} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial I} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial I} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i7} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial a} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial a} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i8} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial g} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial g} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i9} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial \Omega} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial \Omega} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i10} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial (\cos \phi)} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial (\cos \phi)} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i11} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial p} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial p} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

$$a_{i12} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial m} \right\}_{\Sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}(-1)^{i-1}(i-1)\alpha B \frac{\partial T}{\partial m} e^{-1/2}(i-1)\alpha T \right\}_{\Sigma}$$

Bir dönüm noktasına ait lineerleştirilmiş hata denklemleri

$$V_i + DN_i - f_i(\Sigma) = a_{i1}dN + a_{i2}dB + a_{i3}d\alpha + a_{i4}d\omega + \\ + a_{i5}dC + a_{i6}dI + a_{i7}da + a_{i8}dg + a_{i9}d\Omega + \\ + a_{i10}d(\cos\phi) + a_{i11}dp + a_{i12}dm$$

biçimindedir. Toplam olarak 12 bilinmeyen vardır. $n > 12$ biçimde n adet dönüm noktası gözlenirse 12 bilinmeyen daha önce söylenildiği gibi klasik en küçük kareler yöntemine göre bulunur.

Matris notasyonu kullanılırsa;

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial B} & \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \omega} & \frac{\partial f_1}{\partial C} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial g} & \frac{\partial f_1}{\partial \Omega} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} & \frac{\partial f_1}{\partial p} & \frac{\partial f_1}{\partial m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial N} & \frac{\partial f_n}{\partial B} & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_n}{\partial \omega} & \frac{\partial f_n}{\partial C} & \frac{\partial f_n}{\partial I} & \frac{\partial f_n}{\partial a} & \frac{\partial f_n}{\partial g} & \frac{\partial f_n}{\partial \Omega} & \frac{\partial f_n}{\partial \phi} & \frac{\partial f_n}{\partial p} & \frac{\partial f_n}{\partial m} \end{bmatrix}$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} dN \\ dB \\ d\alpha \\ d\omega \\ dC \\ dI \\ da \\ dg \\ d\Omega \\ d(\cos\phi) \\ dp \\ dm \end{bmatrix}$$

$$\ell = \begin{bmatrix} f_1(\Sigma) - DN_1 \\ f_2(\Sigma) - DN_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(\Sigma) - DN_n \end{bmatrix}$$

ile hata denklemleri

$$V = A \cdot \Delta X - \ell$$

$$A'AX - A\ell = 0$$

biçiminde normal denklemler kurulur. Bu normal denklemler çözülerek

$$\Delta X = (A'A)^{-1} A' \ell$$

biçiminde ΔX çözümü bulunur. Başlangıç değerleri X_0 vektörü ile gösterilirse çözüm

$$X = X_0 + \Delta X$$

biçimindedir. Hata denklemlerinin lineer hale sokulmalarında bilinmeyenler için alınan yaklaşık değerlerin yeterli yaklaşıklıkta alınamaması halinde ilk dengeleme sonucu bulunan bu X değeri yeni başlangıç değeri olarak kabul edilir. Bunlarla yeniden A ve ℓ matrisleri hesaplanır. Hata denklemleri kurulur. Aynı işlemi tekrarlanarak yeni ΔX düzeltme vektörü bulunur. Ardışık iki çözüm arasındaki fark belli bir değerden küçük oluncaya kadar ardışık yaklaşım işlemine devam edilir.

Belli şartları sağlayan X çözümü bulunduğundan sonra bilinmeyen sayısı u ($= 12$) olmak üzere

$$m_0 = \sqrt{V'V/(n-u)}$$

ile birim ağırlıklı ölçünün karesel ortalama hatası bulunur. Eş ağırlıkta alındıkları için ölçülen DN_i değerlerinin karesel ortalama hataları

$$m_i = m_0$$

olur.

Bilinmeyenlerin karesel ortalama hataları

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{NN} & Q_{NB} & \dots & \dots & \dots \\ Q_{NB} & Q_{BB} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = (A'A)^{-1}$$

olmak üzere

$$(\mathbf{m}_N, \mathbf{m}_B, \mathbf{m}_\alpha, \mathbf{m}_\omega, \mathbf{m}_C, \mathbf{m}_I, \mathbf{m}_a, \mathbf{m}_g, \mathbf{m}_\Omega, \mathbf{m}_{(\cos)}, \mathbf{m}_p, \mathbf{m}_a, \mathbf{m}_m) = \mathbf{m}_O (Q_X^O)^{1/2}$$

olarak bulunur. Burada

$$(Q_X^O)^{1/2} = \text{köşegen } (Q_{NN}, Q_{BB}, Q_{\alpha\alpha}, Q_{\omega\omega}, Q_{CC}, Q_{II}, Q_{aa}, Q_{gg}, Q_{\Omega\Omega}, Q_{\phi\phi}, Q_{pp}, Q_{mm}) \text{ dir.}$$

Benzer şekilde dengelenmiş ölçmelerin karesel ortalama hataları bulunur.

Özel Durum:

Jiroskoplu teodolitin rotorunun simetri ekseninin salınım periyodunu veren (12.2) bağıntısı incelenirse bilinmeyen olarak alınan bazı büyüklüklerin alet yapısından dolayı kesinlikle bilindiği ortaya çıkar. Bunlar C, I_x atalet momentleri, rotorun ω açısal hızı, jiroskop sisteminin m kütlesi, a uzaklığı ve dünyanın kendi eksenini etrafındaki Ω açısal hızıdır. Bunlar alet el kitabından alınabilir. Bu büyüklükler bilinen değerler olarak alındığında geriye bilinmeyen olarak N kuzey doğrultusu, B genlik, α ve p sönüm katsayıları, ϕ enlemi ve g yerçekimi ivmesi kalır. Böylece bilinmeyen sayısı 12 den 6 ya inmiş olur. $n > 6$ olacak biçimde n adet dönüm noktası gözlenirse ve (12.1) lineerleştirilirse problemin en küçük kareler yöntemine göre çözümü vardır. Burada yapılan işlemler bilinmeyen sayısının 12 olması ile aynıdır.

12.100. SONUÇ

Bölüm 12.000 de verilen yöntemle aletin bir kuruluşunda kuzey doğrultusu noktanın coğrafik enlemi ve o noktadaki yerçekimi ivmesi bulunmaktadır. Böylece 20 dakikalık bir ölçme süresinde elde edilen büyüklüklerle 3 jeodejik büyüklük bir dengeleme işlemi sonucu aynı anda bulunmaktadır. Bu jeodezi yönünden bir aşamadır.

Bunun nedenleri şöyle açıklanabilir. Kuzey doğrultusunun ve buna bağlı olarak bir doğrultunun azimutunun bulunması astronomik ölçmeleri gerektirmektedir. Diğer taraftan yerçekimi ivmesinin bulunması gravimetrik ölçmeleri gerektirmektedir. Bu iki farklı alet, değişik ölçme ilkeleri ve farklı yöntemler anlamına gelmektedir.

Halbuki bölüm 12.000 de verilen yöntemde kısa bir zaman süresinde bir tek jiroskop hareketinin özellikleri kullanılarak ve bir tip ölçme yapılarak kuzey doğrultusu, coğrafik enlem ve yerçekimi ivmesi bulunabilmektedir.

IV. BÖLÜM

DİĞER UYGULAMALAR

Jiroskop hareketi kullanılarak doğrudan doğruya enlemi veren bir alet yapmak olanağı vardır. Bu jiroskop sisteminde bazı eksen koşullarını yerine getirerek sağlanır.

Diğer taraftan iç içe küre sistemi denilen bir sistemi kullanarak doğu-batı doğrultusunu veren bir alet yapmak olanağı vardır. Bu bölümde bu aletin dinamik ilkeleri incelenmiştir.

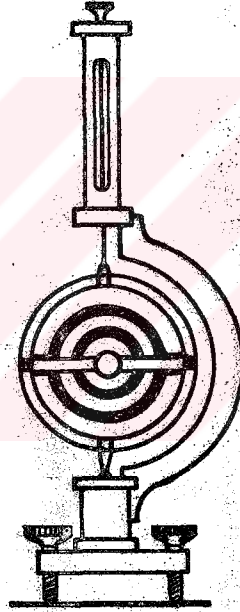
13.000. FOUCAULT JİROSKOPLARI

13.100. SERBEST FOUCAULT JİROSKOPU

Yeryüzünde herhangi bir noktada bir kardan askısına bir jiroskop konur ve şekil eksenini doğrultusunda bir başlangıç açısal hızı verilirse, sınırlayıcı kuvvetlerin olmaması halinde şekil eksenini sabit yıldızlara göre sabit bir doğrultuda kalır. Bu jiroskopun ağırlık merkezi kardan eksenlerinin kesim noktasında olmalıdır. Böyle jiroskoplara astatik jiroskoplar denir. Dış momentlerin etkimediği bir jiroskop sadece düzgün presesyon hareketi yapar. Böyle bir hareket yapabilmesi için başlangıç açısal hızı ve dolayısıyla açısal momentum vektörü H şekil eksenini doğrultusunda olmalıdır. Bu halde presesyon konisini doğuran açısı sıfıra konide düzgün bir doğruya indirgenir{17}{47}.

Dünya uzayda Ω açısal hızıyla dönerken jiroskop dünyanın eksenini etrafında Ω açısal hızıyla konik bir presesyon yapar. Bu yeryüzündeki bir gözlemci tarafından görülür ve bu nedenle dünyanın döndüğünün bir ispatı olarak kullanılabilir{17},

Foucault aletinde (Şekil 13.1) iç yalpalığın başlangıç konumu yataydır. Dış düşey yalpalık bir ipile asılmıştır. Alet bir iple döndürülmektedir. Fakat Foucault bu aletle kesin bir sonuç elde edememiştir. Bunun nedenleri incelenirken iç yalpalığın açısal hızının yatay başlangıç konumundaki değeri $\Omega \sin \phi$ dır. Bu değer ölçme ve alet hataları tarafından yutulabilir.



Şekil 13.1

Foucault jiroskopu

Bu hatalar dengedeki hatalardan ve sürtünmeden ileri gelmektedir. Jiroskop ve iç yalpalığın oluşturduğu sistemin ağırlık merkezi ile kardan eksenlerinin kesim noktası mutlak olarak çakışmazsa vektörü yatay düzlemde olan bir yerçekimi momenti ortaya çıkar. Bu moment düşey etrafında azimutta bir presesyona neden olur. Yerçekimi momentinin doğurduğu bu presesyon dünyanın dönmelerinden ileri gelen presesyonu yutabilir. Dış yalpalığı iple asmakla Foucault alt kısımda sürtünmeyi önlemiştir. Sürtünme sadece iç yalpalığın yataklarında kalmıştır. Alınan bütün önlemlere rağmen yataklardaki sürtünme yeterince büyük olmuştur. Bu nedenle bu alet sadece doğrultu saptamada başarılı olmuştur. Fakat presesyonun gerçek hızı elde edilememiştir {17}{47}.

Sınırlayıcı momentlerin neden olduğu presesyon hareketlerinin açısal hızı jiroskopun kendi momenti ile ters orantılıdır. Bu nedenle jiroskopun kendi momenti mümkün olduğu kadar büyük olmalıdır. Fakat jiroskopu çalıştırmada kullanılan yöntem gözönüne alınırsa bu doğrultuda bir işlem yapmanın olasılığı yoktur.

Foucault deneyinde jiroskopun başlangıç açısal hızı $\vec{V}_0$ in şekil eksenini doğrultusunda olmadığı söylenebilir. Çünkü $\vec{V}_0$ başlangıç impulsu jiroskopa verilen dünyaya göre ω_0 açısal hızı ile dünyanın kendi eksenini etrafında açısal dönme hızı olan Ω nin vektörel toplamıdır. Bu nedenle jiroskopun şekil eksenini sabit bir doğrultuda olmayacak, sabit yıldızlara göre düzgün presesyon yapacaktır. Fakat ω_0 , Ω dan birkaç defa büyüktür.

13.200. İKİ SERBESTLİK DERECEŚİNE SAHİP FOUCAULT JİROSKOPLARI

Foucault 1852 de yayınladığı eserinde aşağıdaki hususları belirtmiştir {17}{47}.

- 1) Astatik bir jiroskopun deplasmanları eksenini yatay düzlemde kalacak biçimde sınırlandırılırsa eksen meridyen doğrultusunu alır.

- 2) Şekil ekseninin deplasmanları meridyen düzleminde kalacak biçimde sınırlandırılmışsa eksen dünya eksenine doğrultusunda kalır.

Bu problemin ifade edilişi aşağıdaki gibi genelleştirilebilir. Şekil eksenini yeryüzüne bağlı ve değişmeyen bir π düzleminde kalacaktır. Jiroskopun ağırlık merkezi O dayanak noktası ile çakışmayacaktır. Fakat bu noktadan negatif z eksenine üzerinde l uzaklığında olacaktır. P jiroskopun ağırlığı olsun. π düzleminin konumunu tariflemek için şu açılar kullanılacaktır:

- 1) Yukarı doğru düşey ile π düzleminin meridyen düzlemi ile olan arakesitinin güney doğrultulu parçasının arasındaki Ψ açısı (Şekil 13.2). Burada Ψ açısı başucundan ayak ucuna doğru okunur ve 180° yi geçmez.
- 2) Meridyen düzlemi ile π düzlemi arasındaki θ açısı. Belirsizliği önlemek için θ açısı şu yarım düzlemler arasındaki açı olarak tarif edilecektir. Meridyen düzleminde düzlemin ayakucu noktasını taşıyan yarısı ve π düzleminde meridyen düzleminin doğusunda kalan yarısı.

π düzleminde ξ, η eksenleri ve düzlemin yukarı doğru olan dikey ζ eksenini olarak alınır. Burada η eksenini Ω vektörünün düzlemdeki izdüşümü olarak alınır. Burada ξ, η, ζ üç yüz lüsü dik ve sağel sistemi olmalıdır. γ ile Ω vektörü ile π düzlemi arasındaki açı gösterilecektir. Ω vektörü ξ eksenine ile düzlemin aynı tarafında olduğu zaman pozitif kabul edilecektir. ϕ ile konumun enlemi gösterilecektir.

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma < +\frac{\pi}{2}$$

olduğu zaman

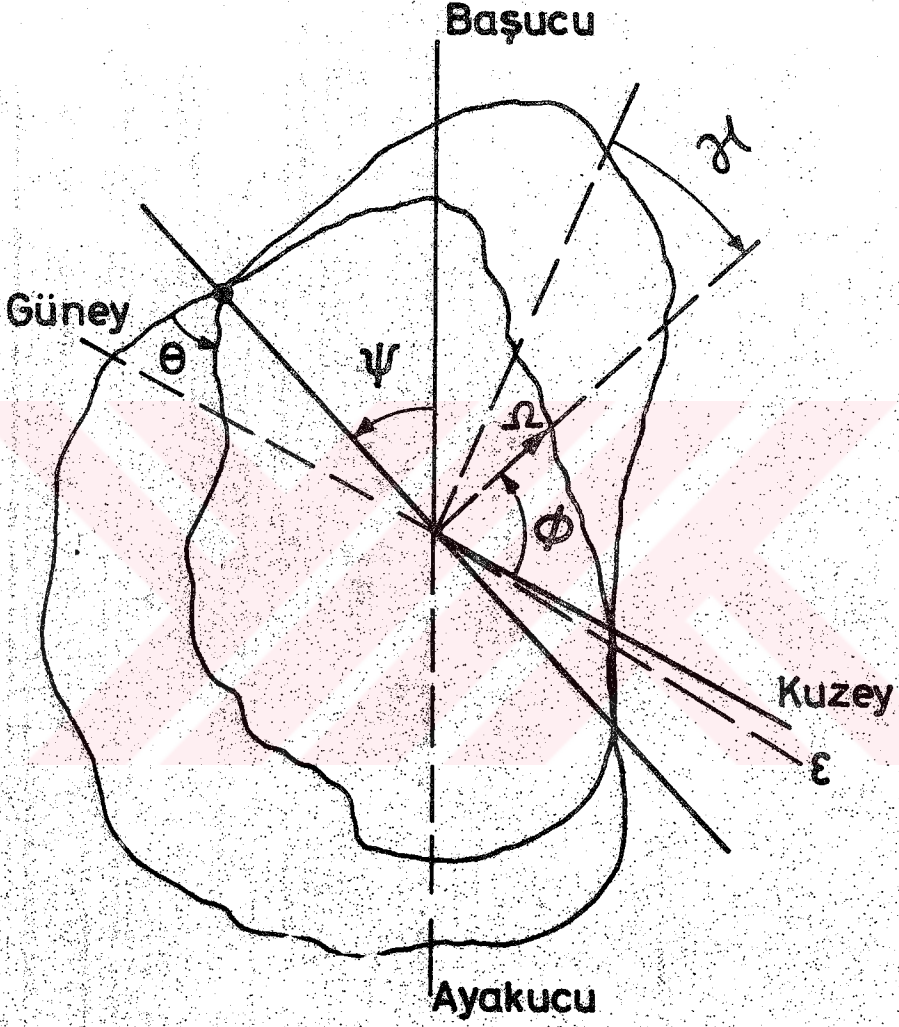
$$\sin \gamma = \cos (\Psi - \phi) \sin \theta \quad (13.1)$$

biçiminde bir bağıntı elde edilir.

Doğrultman kosinüsleri çizelgesi aşağıdaki gibidir.

Doğrultu	ξ	η	ζ
Doğu	$\sin(\psi - \phi)\sin\theta\sec\gamma$	$-\cos(\psi - \phi)\sin\theta\cos\theta\sec\gamma$	$\cos\theta$
Kuzey	$\cos\theta\sin\phi\sec\gamma$	$\{\cos\phi - \cos\psi\cos(\psi - \phi)\sin^2\theta\}\sec\gamma$	$\sin\theta\cos\psi$
Ayakucu	$-\cos\theta\cos\phi\sec\gamma$	$\{\sin\phi - \sin\psi\cos(\psi - \phi)\sin^2\theta\}\sec\gamma$	$\sin\theta\sin\psi$

Çizelge 13.1



Şekil 13.2

Ω vektörünün ξ, η, ζ eksenleri üzerindeki izdüşümleri

$$0, \Omega \cos \gamma, \Omega \sin \gamma$$

ve P ağırlığının başlangıç izdüşümleri

$$P_{\xi} = P \cos \theta \cos \phi \sec \gamma$$

$$P_{\eta} = P \left[-\sin \phi + \sin \psi \cos (\psi - \phi) \sin^2 \theta \right] \sec \gamma \quad (13.2)$$

biçimindedir.

α ile η eksenini ile şekil eksenini z arasındaki açı gösterilecektir. Bu açı $(\eta) - (-\xi)$ doğrultusunda pozitif kabul edilecektir. y eksenini ξ eksenini, şekil eksenini z eksenini ve x eksenini, y ve z eksenleri ile bir dik sağel sistemi teşkil edecek şekilde alınacaktır. Bu üç yüz-lünün toplam açısal hızı dünyanın Ω açısal hızı ve $\vec{\alpha}$ ba-ğıl açısal hızının toplamından oluşmaktadır. Toplam a-çısal hızın x, y, z eksenleri üzerindeki izdüşümleri

$$p = -\Omega \cos \gamma \sin \alpha, q = \Omega \sin \gamma - \dot{\alpha}$$

$$r = \Omega \cos \gamma \cos \alpha$$

biçimindedir. Ağırlığın y eksenine göre (veya ζ) momen-ti $M_y = \xi P_{\eta} - \eta P_{\xi}$ dir. Burada $\xi = l \sin \alpha, \eta = -l \cos \alpha$ ağırlık merkezinin koordinatlarıdır. (4.4) ün ikinci denkleminde

$A\ddot{\alpha} + H\Omega \cos \gamma \sin \alpha - A\Omega^2 \cos^2 \gamma \sin \alpha \cos \alpha = l(P_{\xi} \cos \alpha + P_{\eta} \sin \alpha) \quad (13.6)$ elde edilir. Burada H jiroskopun kendi eksenini etrafın-daki açısal momentumudur. Ω^2 li terim ihmal edilirse ve

$$K = + \sqrt{(H\Omega \cos \gamma)^2 + l^2 (P_{\xi}^2 + P_{\eta}^2) - 2H\Omega l P_{\eta} \cos \gamma} \quad (13.4)$$

$$K \cos \alpha^0 = -l P_{\eta} + H\Omega \cos \gamma, K \sin \alpha^0 = l P_{\xi} \quad (13.5)$$

denilirse

$$A \ddot{\alpha} + K \sin (\alpha - \alpha^0) = 0 \quad (13.6)$$

bulunur.

Bu denklem şekil ekseninin $\alpha = \alpha^0$ denge konumu etrafındaki salınımlarını göstermektedir. Bu salınım, eşdeğer uzunluğu

$$L = \frac{A_g}{K} \dots\dots\dots (13.7)$$

olan bir sarkaçın salınımları ile aynıdır. Küçük genlikler için salınının periyodu

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \pi \sqrt{\frac{A}{K}} \dots\dots\dots (13.8)$$

biçimindedir.

Jiroskopun ağırlık merkezi dayanak noktası ile çakışırsa $\ell = 0$ dır. Buradan $\alpha^0 = 0$ veya $= \pi$ olur. Bu H nin işaretine bağlıdır. Şekil eksen denge konumunda $\vec{\Omega}$ nin π düzlemi üzerindeki izdüşümü doğrultusunu alır. Burada şekil ekseninin jiroskopun dönmesinin saat akrebinin ters yönünde gözüktüğü ucuna kuzey denilirse, verilen halde kuzey ucu denge konumunda $\vec{\Omega}$ vektörünün π düzlemindeki izdüşümü ile aynı yönde döner. Böylece astatik bir jiroskopun şekil eksen (Bu şekil eksen dünyaya bağlı ve dünyaya göre sabit bir düzlemde hareket etmektedir) salınımlar sönümlendikten sonra dünya eksenine en yakın bir konuma gelmeye çalışır. Ayrıca jiroskopun dönmesi dünyanın dönmesi ile aynı yöndedir.

(13.3) tam denklemi $\ell = 0$ olunca (13.9) biçimini alır.

$$A \ddot{\alpha} = \mu (-H \sin \alpha + \frac{1}{2} A \mu \sin 2 \alpha) \dots\dots\dots (13.9)$$

Burada

$$\mu = \Omega \cos \gamma$$

dır. Bu biçimdeki bir denklem eliptik fonksiyonlar ile kolayca çözülebilir. Bu noktada aşağıdaki irdeleme ya-

pılacaktır. Bu irdeleme sonucu enlemi veren bir aletin prensipleri ortaya çıkmaktadır.

İRDELEME:

1) π düzlemi yataydır. Bu nedenle $\Psi = \theta = \pi/2$ olur. (13.1) ve (13.2) formüllerinden

$$\gamma = \phi, P_{\xi} = P_{\eta} = 0 \quad \dots\dots\dots (13.10)$$

elde edilir. Hareketin yaklaşık denklemi

$$A \ddot{\alpha} + H \Omega \cos \phi \sin \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots (13.11)$$

biçimindedir. $H>0$ için (13.11) denklemi pozitif z ekseninin konumu etrafında bir salınımı gösterir. $H<0$ için ise aynı eksenin $\alpha=\pi$ konumu etrafındaki salınımı elde edilir. Böylece salınımlar sönümlendikten sonra jiroskopun şekil ekseninin kuzey ucu kuzey doğrultusuna gelir. Burada

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A}{H\Omega \cos \phi}} \quad \dots\dots\dots (13.12)$$

dır. Böylece jiroskoplu pusulanın ilkesi elde edilmiş olur.

2) π düzlemi düşeydir $\Psi = 0$. Böyle bir düzlemin altı ve üstü olmadığından $\Psi = 0$ koşulu ile uygun olarak Ψ ekseninin kuzey doğrultusunda olduğu kabul edilecektir. (13.1) formülünden

$$\sin \gamma = \sin \theta \cos \phi \quad \dots\dots\dots (13.13)$$

elde edilir. Burada δ, ϵ açıları kullanılacaktır. Bu açılar η eksenini ve şekil eksenini z denge konumunda göstermektedir. Bu konumda düşey yukarı doğru ve δ, ϵ açıları η - ζ yönünde pozitif olarak okunur. Şekil 13.3 den

$$P_{\xi} = P \sin \delta, P_{\eta} = - P \cos \delta$$

elde edilir.

$$\cos \delta = \sin \phi \sec \gamma, \sin \delta = \cos \theta \cos \phi \sec \gamma \quad (13.14)$$

dır. Bu nedenle

$$\alpha^0 = \delta - \epsilon \quad (13.15)$$

dır. (13.5) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$K \cos \alpha^0 = K (\cos \delta \cos \epsilon + \sin \delta \sin \epsilon) = \ell P \cos \delta + H \Omega \cos \gamma \quad (13.16)$$

$$K \sin \alpha^0 = K (\sin \delta \cos \epsilon - \cos \delta \sin \epsilon) = \ell P \sin \delta$$

Buradan da

$$K \cos \epsilon = \ell P + H \Omega \cos \gamma - \cos \delta = \ell P + H \Omega \sin \delta \quad (13.17)$$

$$K \sin \epsilon = H \Omega \cos \gamma \sin \delta = H \Omega \cos \theta \cos \phi$$

ve

$$\operatorname{ctg} \epsilon = \operatorname{ctg} \delta + \frac{\ell P}{H \Omega \cos \gamma \sin \delta} = \sec \theta \sec \phi \left(\sin \phi + \frac{\ell P}{H \Omega} \right) \quad (13.18)$$

elde edilir. K için ise aşağıdaki ifade bulunur.

$$K = T \sqrt{(H \Omega \cos \gamma)^2 + (\ell P)^2 + 2 H \Omega \ell P \sin \phi} \quad (13.19)$$

(13.18) formülü eşdeğer şartlar altında düşeyden en büyük sapıncın ($\operatorname{ctg} \epsilon$ nin en küçük mutlak değeri) $|\cos \theta| = 1$ için elde edilir. Bu meridyen düzlemine karşılık olmaktadır.

Bu son özel hal için $\theta = 0$ konulacaktır. Şekil 13.3 doğudan görünüşü vermektedir. Bu halde $\gamma = 0$, $\delta = \pi/2 - \phi$ olmaktadır.

$$\tan \alpha^0 = \frac{lP}{H\Omega} \frac{\cos \phi}{1 + \frac{lP}{H\Omega} \sin \phi}$$

$l = 0$ ise (13.16) formülü $H > 0$ için $\alpha^0 = 0$, $H < 0$ için ise $\alpha^0 = \pi$ verir.

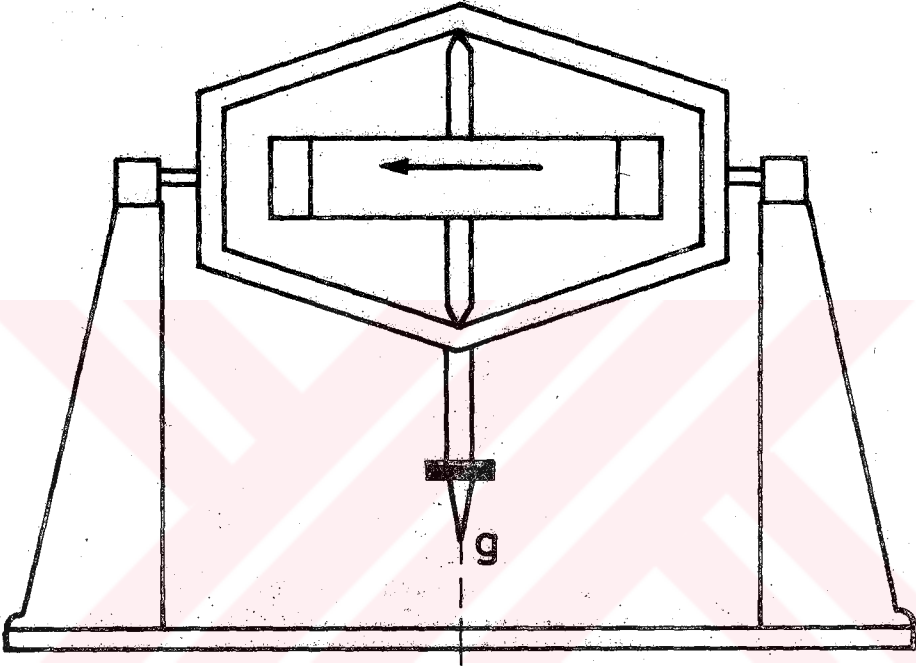
Bu şu şekilde yorumlanabilir. Şekil eksenini kuzey ucu gökyüzünün kuzey kutbuna bakacak şekilde kendini dünya eksenine paralel hale getirmeye çalışır. Böylece ilke olarak enlemi tarifleyecek bir alet elde edilir. Çünkü dünyanın eksenini ile ufuk düzlemi arasındaki açı ϕ enlemine eşittir. Bu yöntemden başka enlemi otomatik olarak tayin edecek bir yöntem yoktur.

$l = 0$ sağlamamak zor olduğundan Ph. Gilbert'in bari jiroskopunda 1 kolu istenerek sıfırdan farklı yapılmıştır. Bunu sağlamak için karşıt ağırlığı kullanılmıştır (Şekil 13.4).

Bu alette jiroskop kendini gökyüzünün kuzey kutbu doğrultusuna getirmez. Fakat büyük bir H kendi momenti için (13.18) düşey formülünden farklılık gösterir. (13.18) formülü aşağıdaki şekli alır.

$$\text{ctg } \epsilon = \text{tg } \phi + \frac{lP}{H\Omega} \sec \phi \quad (13.21)$$

Düşeyden en büyük sapınçları elde etmek için (ctg ϵ en küçük mutlak değerleri) kuzey yarı kürede $l > 0$, $H < 0$ almak uygundur. Bu jiroskopa pozitif z eksenini etrafında saat akrebi yönünde bir dönme vermek anlamına gelir. $\epsilon = \pi/2$ maksimum sapıncı $\frac{lP}{H\Omega} = -\Omega \sin \phi$ koşulu ile elde edilir. Bu koşul Gilbert'in aletinde sağlanamaz. Çünkü l yi çok küçük H yi çok büyük yapmak olanak dışıdır. ϵ vel (13.21) bağıntısı ile bağlı olduğundan bari jiroskop prensip olarak enlem endikatörü olarak çalışabilir.



Şekil 13.4
Bari jiroskop

14.000. DOĞU-BATI DOĞRULTUSUNU VEREN SİSTEM

İç içe iki küre adlı bir sistem ile doğu-batı doğrultusu saptamak mümkün olmaktadır. Müller ve arkadaşları bir gaz tabakası ile ayrılmış iç içe bir düşey eksen etrafında dönen iki sistemin sabit bir sapma açısı meydana getirdiklerini göstermişlerdir. Sapma açısının düzlemi doğu-batı doğrultusundadır. Bu prensibi kullanarak BELOCK Instrument Corporation, Huntsville, CAT isimli doğrultuyu veren bir alet yapmıştır. 400 sn.lik

bir ölçme süresi içinde aletle bir doğrultuyu bir yay dakikası karesel ortalama hata ile saptamak mümkün olmuştur.

Bu bölümün amacı "iç içe iki küre" sisteminin dayandığı fiziksel esasları saptamaktır.

14.100. "İÇ İÇE İKİ KÜRE" SİSTEMİNİN AÇIKLANMASI

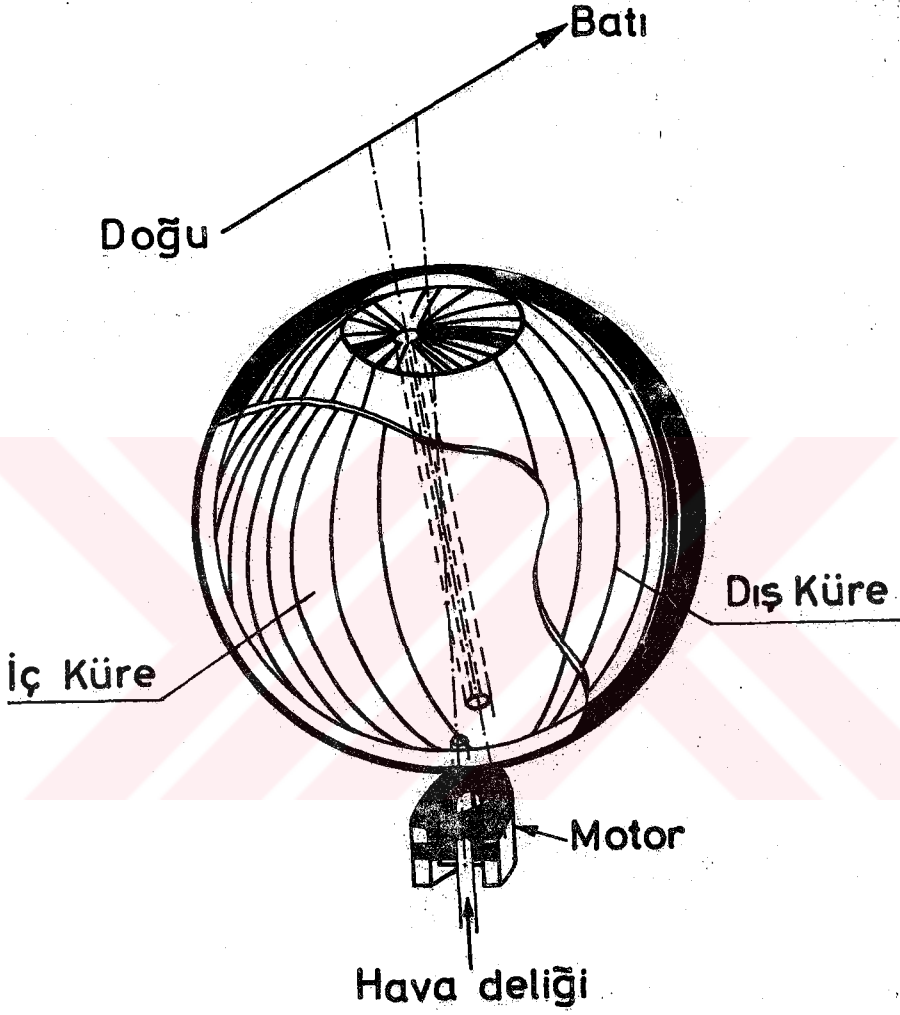
"İç içe iki küre" sisteminin ana parçaları Şekil (14.1) de görülebilir. İçi boş bir küre bir elektromotor ile 6000 devir/dak lık bir açısal hızla döndürülmektedir. Motorun eksenini cismin ağırlık vektörüne paraleldir. Bütün bir çapı boyunca delinmiş masif bir küre bu boş kürenin içinde bulunmaktadır. İç masif küreye dış boş küreye değdiği nokta, etrafında belirli bir açısal hız verilir. Bundan sonra elektromotorun içi boş ekseninden dış kürenin içine hava pompalanır. Böylece içi dolu küre bir hava yastığının üzerinde mesnetleşmiş olur. Havanın sürtünmesi ihmal edilirse iç küreye hiç bir kuvvet ve moment etki etmemektedir.

İç ve dış sistemler sürtünme nedeniyle hemen hemen aynı dönme hızına sahiptirler. İç masif kürenin üst kutbunda bir ayna bulunmaktadır.

Bu ayna dış bir ışık kaynağı tarafından içi boş dış kürede bulunan bir delik ile aydınlatılmaktadır. Işık kaynağı, ayna ve yansıyan ışık arasındaki açı sabittir. Yatay bir kesit alınırsa bu açı düzlemi doğu-batı doğrultusundadır.

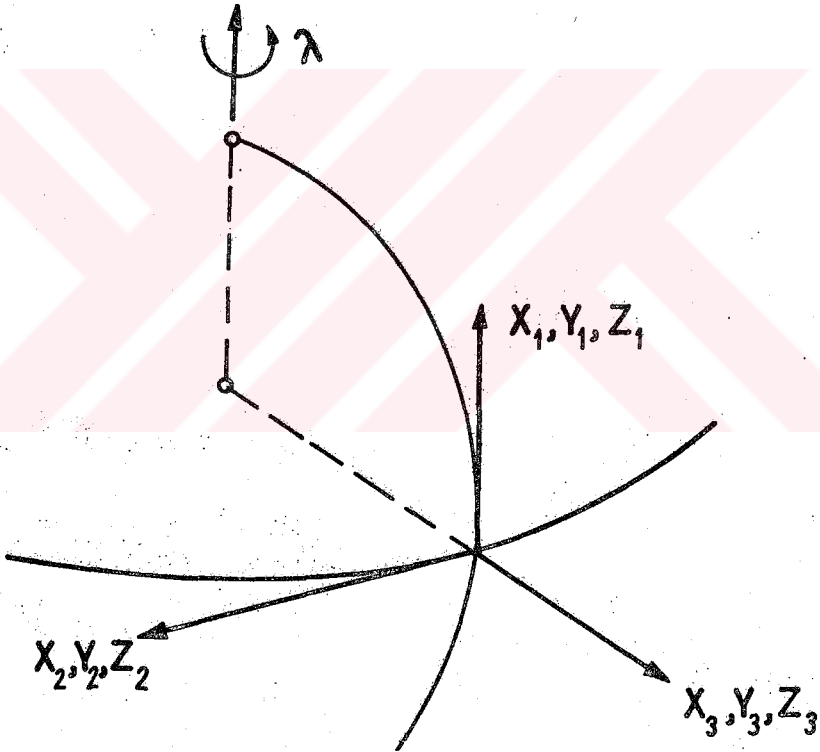
14.200. HAREKETİN İNCELENMESİ

Hareketin iyi anlaşılması için ekvatörde incelenecektir. X_i, Y_i, Z_i ($i = 1, 2, 3$) diye adlandırılan üç kartezyen koordinat sistemi alınsın (Şekil 14.2). Bu koordinat, sistemlerinden X_i koordinat sistemi şu biçimde



Şekil 14.1

seçilmiştir. Bu sistemin orijini t_1 anında yeryüzündedir. X_1 eksenini astronomik kuzey kutbunu X_2 eksenini doğu-batı doğrultusunu X_3 eksenini de yeryüzüne dik olmak üzere uzaya doğru olan yönü göstermektedir. Y_1 ve Z_1 koordinat sistemleri sadece t_1 anında X_1 koordinat sistemi ile çakışık dırlar. Bu koordinat sistemleri (Y_1 ve Z_1) dış ve iç rotasyon sistemlerinin kütle merkezlerinden geçen cisme bağı sabit sistemlerdir.



Şekil 14.2

Bundan sonra dünya eksenini uzayda sabit varsayılacaktır. Ayrıca diğeri bir varsayım dünyanın ataletsel bir sistem olduğudur. Bir de dünyanın bir gök cismi olarak hareke-

ti ihmal edilecektir. Kuzey doğrultusunun günlük sapması 0.1° kadar olup ihmal edilecek mertebededir.

Rotasyon yapan sisteme hava pompalamadan önce dış rotasyon sisteminin açısal momentum vektörü $\sum A_i \vec{e}_i = \vec{A}$ düşeydir. Kürenin homojen ve bir çapı boyunca geçen deliğin bir asal atalet momenti eksenini boyunca olması ve bu eksene göre kürenin denge durumunda bulunması nedeniyle de, iç rotasyon sisteminin açısal momentum vektörü $\sum B_i \cdot \vec{e}_i = \vec{B}$ de aynı şekilde düşeydir. Bu vektörler toplanarak 3 eksene göre bileşke açısal momentum vektörü elde edilir.

Alt yapı ile olan rijid bağlantısından dolayı Y_i dünyanın dönmesi nedeniyle yeni bir duruma gelir. Önce iç ve dış sistemin rijid bir biçimde birbirleri ile bağlantılı oldukları kabul edilecektir. Şekil 14.3 e göre Y_i nin sabit X_i sistemine göre dönmesi γ_2 açısı ile Z_i nin X_i e göre dönmesi γ_2 açısı ile gösterilsin. Bağlantı koşulu nedeniyle $\gamma_1 = \gamma_2$ dir.

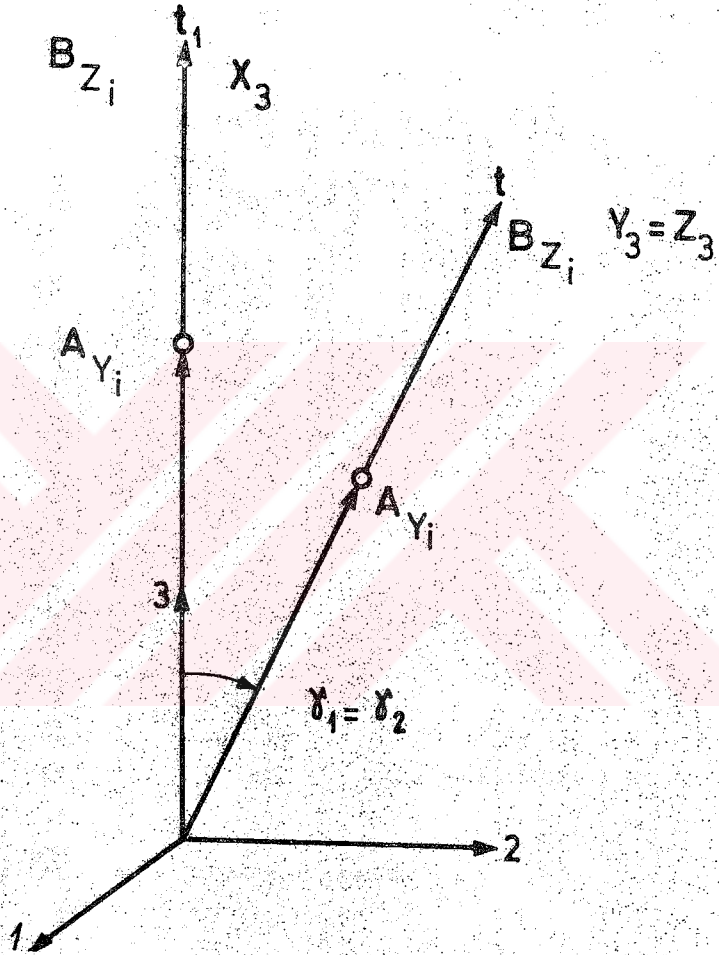
Kürenin delinmiş eksenine göre olan asal atalet momenti C ile A_i ve B_i açısal momentumlarına ait ω açısal dönme hızları a_i ve b_i ile gösterirse rijid bağlantı olması halinde

$$a_i = b_i \quad \Delta \vec{\omega} = 0 \quad (14.1)$$

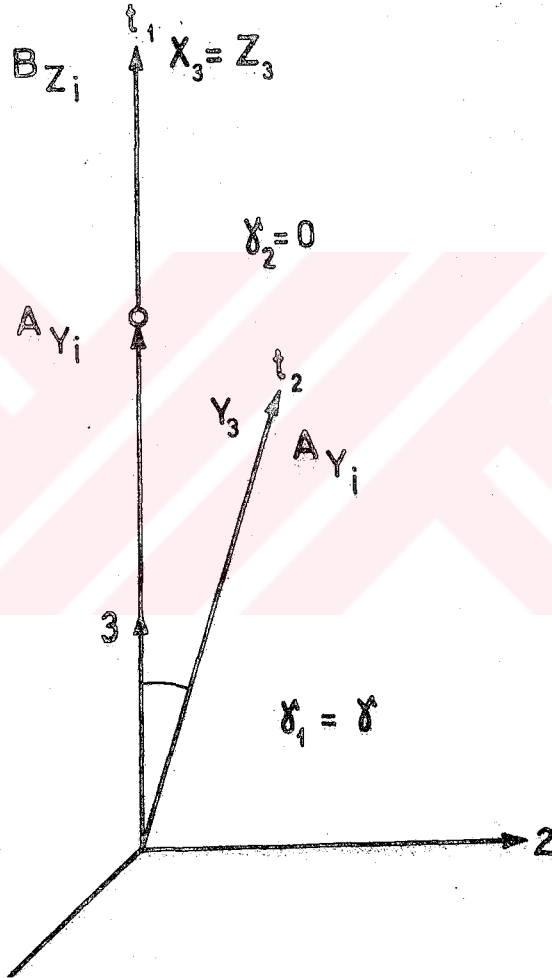
$$B_1 = B_2 = 0 \quad B_3 = C \quad b_3 = Ca_3 \quad (14.2)$$

dir.

Eğer boş küre ile dolu küre arasındaki boşluğa hava pompalanırsa, elde edilen yeni bağlantı eskisine göre farklılıklar gösterir. Sürtünme ihmal edilirse, dış kuvvet ve momentlerin etkisinde olmadığı için, iç küre uzayda sabittir. Şekil 14.4 de bu sistem gösterilmiştir.



Şekil 14.3
Rijid bağlantı halinde açısal momentum
vektörlerinin konumları



Şekil 14.4

Bağılantı olmaması halinde açısal momentum vektörlerinin konumu

$\vec{A}$ açısal momentum vektörü belli bir zaman süresinde $\gamma = \gamma_1$ açısına kadar döner. $\vec{B}$ sabit, $\gamma_2 = 0$ dir. Bağlantı olmaması halinde

$$\vec{b} = \text{sabit} \quad \vec{a} = \vec{a}(t) \dots\dots\dots (14.3)$$

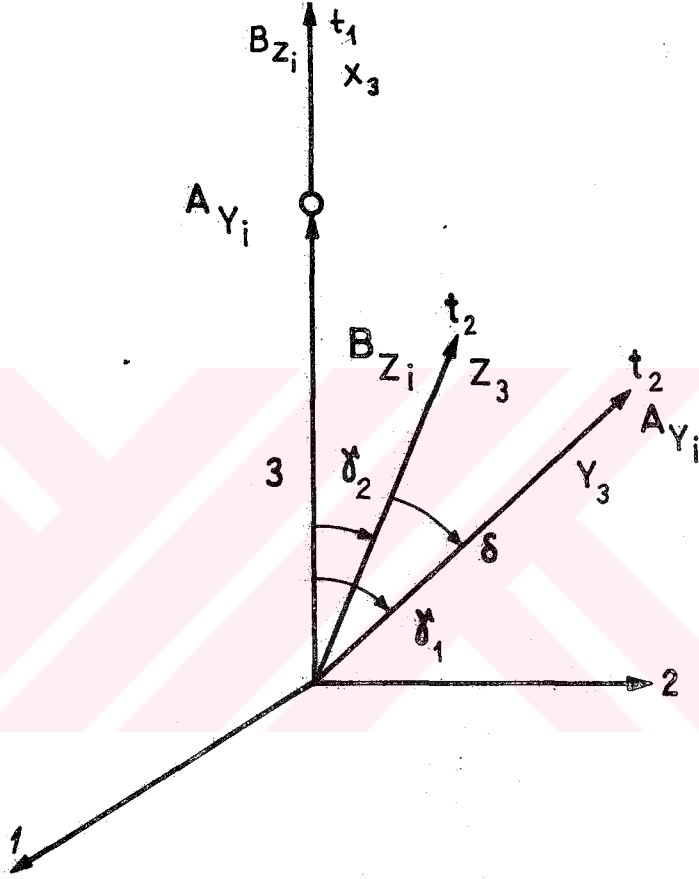
$$\frac{d\vec{b}}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec{A}}{dt} \neq 0 \dots\dots\dots (14.4)$$

dir. Rijid bağlantı ve bağlantısız iki durumu limit durumlar olarak incelendikten sonra, gerçek durum incelemeyecektir. İçeri pompalanan hava masif kürenin sürtünmesiz mesnetlenmesini sağlayamaz. Bu hava dış dönmeyi iç küreye ileten bir ortamdır. Bu ortam rijid bir bağlantı değil sürtünme kanunlarının geçerli olduğu belli bir viskoziteye sahip bir ortamdır. Buna göre Şekil 14.5 den de görüleceği üzere belli bir zaman süre içinde $\vec{A}$ vektörü γ_1 kadar döndüğü zaman $\vec{B}$ vektörü onu izler. Havanın sağladığı zayıf bağlantıdan dolayı $\vec{B}$ açısal momentum vektörü $\vec{A}$ nın arkasında kalır. Bundan sonraki araştırmanın amacı $\gamma_1 - \gamma_2 = \delta$ nın doğu-batı yönünde bir düzlemde sabit bir açı olduğunu göstermektir.

İç küreyi kaldıran kuvvetler ve momentler gözönüne alınmasın. Hava yastığının üzerinde hareket eden kürenin durumu son durum olarak kabul edilsin.

İki küre arasındaki aralığın yeterince küçük olması halinde Newton'nun sıvılar için geçerli olan sürtünme kanunlarına göre, iç ve dış küreler arasındaki hava tarafından iletilen, aslında dünyanın dönmelerinden ortaya çıkan sürtünme momenti M açısal hızların $\Delta\omega = \vec{a} - \vec{b}$ farkı ile doğru orantılıdır. Bu nedenle akım çizgileri kürenin yüzeyine paralel bir konumdadırlar.

$$\vec{M} \sim (\vec{a} - \vec{b}) \dots\dots\dots (14.5)$$



Şekil 14.5
Havalı bağlantı halinde
açısal momentum vektörlerinin konumları

Hız vektörlerinin birbirleri ile olan zayıf bağlantılarından dolayı bir geri dönme olayı ortaya çıkar. Benzer bir etki asenkron motorda iç ve dış manyetik alanların dönme hızlarını ölçerken ortaya çıkar.

Aynı merkezli mesnetlenme halinde orantı sabiti

$$f = \frac{8}{3} \pi \eta \frac{r^4}{\Delta r} \quad (14.6)$$

biçiminde bir formül ile verilir. Burada η dinamik viskoziteyi, r küre yarıçapını, Δr radyal aralığı simgeler. $M = f \cdot \Delta \omega$ dönme momenti Z_i nin Y_i ye nazaran ötelenmesine neden olur.

Hareket kantitatif olarak aşağıdaki şekilde açıklanır. t_1 anında bileşke dönme vektörleri

$$\begin{aligned} \underline{t_1} \quad Y_i &= Z_i \\ a_{yi} &= a_{zi} = [\lambda, 0, \omega] \end{aligned} \quad (14.7)$$

biçimindedir. t_2 anında γ_1 açısı yeryüzünün λt açısal hızı ile hareket ettiğinden

$$\begin{aligned} \underline{t_2} \quad Y_i &\neq X_i \\ a_{yi} &= [\lambda, 0, \omega] \end{aligned} \quad (14.8)$$

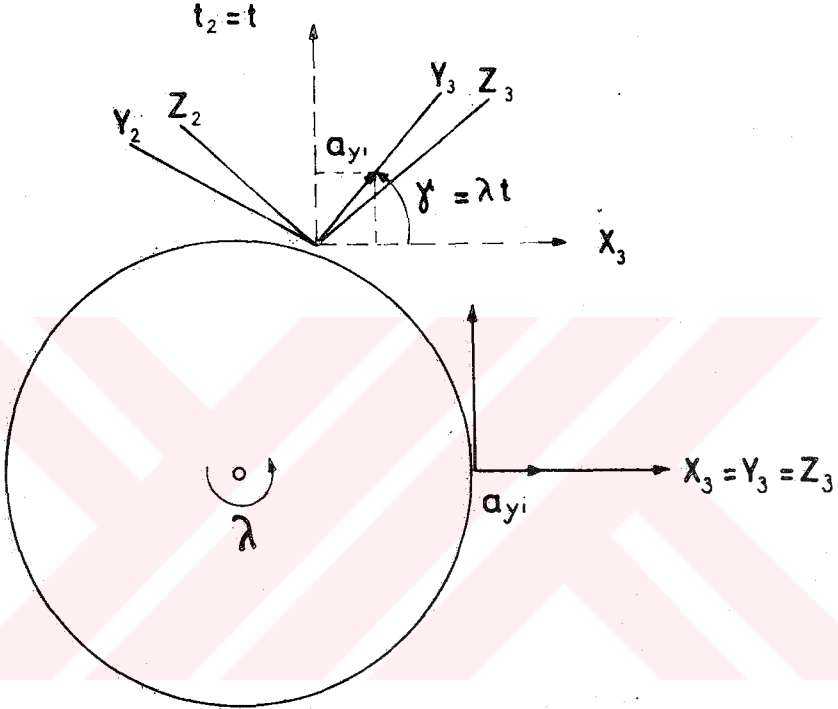
$$\begin{aligned} a_{xi} &= [\lambda, \omega \sin \gamma_1, \omega \cos \gamma_1] \\ &= [\lambda, \omega \sin \lambda t, \omega \cos \lambda t] \end{aligned} \quad (14.9)$$

bulunur. Şekil 21.6 da dönme çeşitli koordinat sistemlerinde gösterilmiştir.

$\vec{b}$ vektörünün durumu incelenirse şu sonuçlar bulunur. $\vec{m} = f \cdot \Delta \omega$ dönme momenti $\vec{B}$ açısal momentum vektörünün ötelenmesine neden olur.

$$\vec{M} = \frac{dB}{dt} \quad (14.10)$$

Hava tabakasının sürtünme olayı nedeniyle iç sisteme uyguladığı zayıf kuvvetlerden ötürü momentlerin



Şekil 14.6
Dönme vektörlerinin uzayda
sabit sistemlere göre konumları

etkisinden kurtulmuş olan rotasyon sisteminin büyük asal atalet momenti eksenini etrafında döndüğü kabul edilebilir. Cisme bağlı sabit koordinat sisteminin eksenlerinin iç rotasyon cisminin asal atalet eksenleri ile çakıştığı kabul edilsin. Böylece (14.10) da ifade edilmiş bileşen sadece z eksenine göre yazılır.

$$\vec{M} = C \frac{d\vec{b}}{dt} \dots\dots\dots (14.11)$$

Geri döndüren momentle (14.5) ile (14.6), (14.12) şeklini alır.

$$C \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} = f (\vec{a}-\vec{b}) \dots\dots\dots (14.12)$$

Bu ataletsel sistemde momentlerin denge durumudur. Özdeşlik 1. dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemler verir.

$$b_{xi} + \frac{1}{\tau} b_{xi} = \frac{1}{\tau} a_{xi} , \frac{f}{C} = \frac{1}{\tau} \dots\dots\dots (14.13)$$

$t_1 = 0$ anında (14.8) ile verilen başlangıç koşulları gözönüne alınırsa genel çözüm

$$b_{xi} = \begin{vmatrix} \lambda \\ \frac{\omega}{1+(\lambda\tau)^2} \left[\sin \lambda t - \lambda\tau \cos \lambda t + \lambda\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \\ \frac{\omega}{1+(\lambda\tau)^2} \left[\cos \lambda t + \lambda\tau \sin \lambda t + (\lambda\tau)^2 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right] \end{vmatrix} \dots\dots\dots (14.14)$$

biçimindedir.

Bir pusla için önemli olan yeryüzüne bağlı sabit bir karşılaştırma sistemine izdüşürülmüş rotasyon sistemlerinin eksenleri arasındaki açı ile bu açının içinde bulunduğu düzlemin doğrultusudur. Geri dönme açısı ve dış açısal hız vektörlerinin skaler çarpımı ile verilir. Açı düzlemi iç dönme hız vektörünün dış dönme hızı vektörüne dik düzleme izdüşümü ile elde edilir.

Yeryüzünün üstündeki bir gözlemcinin kendisi de λ açısal hızı ile döner. Bu nedenle karakteristik büyük-

lükler yeryüzüne bağlı Y_i sisteminde verilirken, yani uzaya bağlı sabit X_i sisteminden yere bağlı sabit Y_i sistemine dönüştürülürken gözlemcinin dönme hızı olan λ hızı çıkartılmalıdır. Bu nedenle geri dönme açısı şu şekilde belirlenir.

$$\cos \delta = \frac{(\vec{a}-\vec{\lambda}) \cdot (\vec{b}-\vec{\lambda})}{|\vec{a}-\vec{\lambda}| \cdot |\vec{b}-\vec{\lambda}|} \quad (14.15)$$

(14.14) de yerine konursa yalnız duran kısmın gözönüne alınması halinde

$$\delta = \arctan \omega_E \tau \quad (14.16)$$

elde edilir. İç ve dış hızların geri dönme açısı gözönüne alınırsa ve bir karşılaştırma yapılırsa her iki rotasyon sisteminin zamansal faz farkı açıkça ortaya çıkar (çizelge 14.1).

Dış sistemin açısal hızları		İç kürenin açısal hızları	
$a_1 = \lambda$	(14-17a)	$b_1 = \lambda$	(14-17b)
$a_2 = \omega \sin \lambda t$	(14-18a)	$b_2 = \frac{\omega}{1-(\lambda \tau)^2} \sin(\lambda t - \delta)$	(14-18b)
$a_3 = \omega \cos \lambda t$	(14-19a)	$b_3 = \frac{\omega}{1-(\lambda \tau)^2} \cos(\lambda t - \delta)$	(14-19b)

Çizelge 14.1

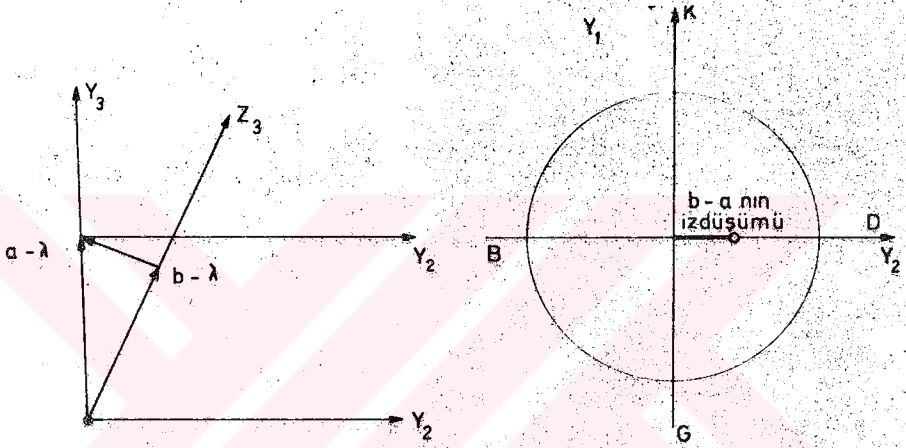
Bağılantısız dönme vektörleri ekvator konumu

Yere bağlı Y_i sisteminin Y_1 ve Y_2 eksenleri Şekil 14.7 de de görüldüğü gibi uzayda bir düzlem saptarlar. Bu düzlem aletin kuzey-güney, doğu-batı görüş düzlemine karşılık olmaktadır. Eksenler uzayda sabit sistemine göre dönüştürülürse $\vec{e}$ birim vektörü gösterdiğine göre (14.9) formülünden

$$\vec{e}_{y1} = \vec{e}_{x1} \quad (14.20)$$

$$\vec{e}_{y2} = \vec{e}_{x2} \cos \lambda t - \vec{e}_{x2} \sin \lambda t \quad (14.21)$$

elde edilir.



Şekil 14.7

Ekvatorde görüntü düzlemi ve geri kalma açısı

$\vec{b}-\vec{\lambda}$ vektörü görüntü düzlemine izdüşürülecektir.

$$\cos (\angle \vec{a}-\vec{\lambda}, \vec{e}_{y1}) = \frac{(\vec{b}-\vec{\lambda}) \cdot \vec{e}_{y1}}{|\vec{b}-\vec{\lambda}|} \quad (14.22)$$

$$\cos (\angle \vec{b}-\vec{\lambda}, \vec{e}_{y2}) = \frac{(\vec{b}-\vec{\lambda}) \cdot \vec{e}_{y2}}{|\vec{b}-\vec{\lambda}|} \quad (14.23)$$

(14.14) çözümü aşağıdaki sonuçları verir.

$$\cos \chi (22) = 0, \quad (\vec{b}-\vec{\lambda}, \vec{e}_{y1}) = \frac{\pi}{2} \quad (14.24)$$

$$\cos \chi (23) = - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + (\lambda \tau)^2}} = - \sin \lambda \quad (14.25)$$

İç ve dış kürede kuzey ve güney kutup noktaları işaretlensin. Açısal hızların bileşkesinin küreyi uzay yönünde deldiği nokta kuzey kutup noktası karşısı güney kutup noktasıdır. Böylece (14.24) ve (14.25) açıklamak daha kolaylaşacaktır. İç kürenin kuzey kutbu dış kürenin kuzey kutbundan doğu-batı yönünde bir sapma gösterir.

14.300. HAREKETİN ENLEME BAĞLILIĞI

Ekvatördeki uzaya bağlı koordinat sistemi Şekil 14.8 de görüldüğü üzere ilk durumuna paralel kalmak üzere yeryüzü üzerindeki ϕ coğrafi enlemine kaydırılsın.

t_1 ve t_2 anlarında (14.7) (14.9) (14.17) (14.18) ve (14.19) aşağıdaki biçimi alırlar.

$$\underline{t_1} \quad \underline{x_2} = \underline{x_2} \quad \dots\dots\dots (14.26)$$

$$a_{xi} = [\underline{\lambda} + \omega \sin \phi, 0, \omega \cos \phi] \dots\dots\dots (14.26)$$

$$\underline{t_2} \quad \underline{x_2} \neq \underline{x_2}$$

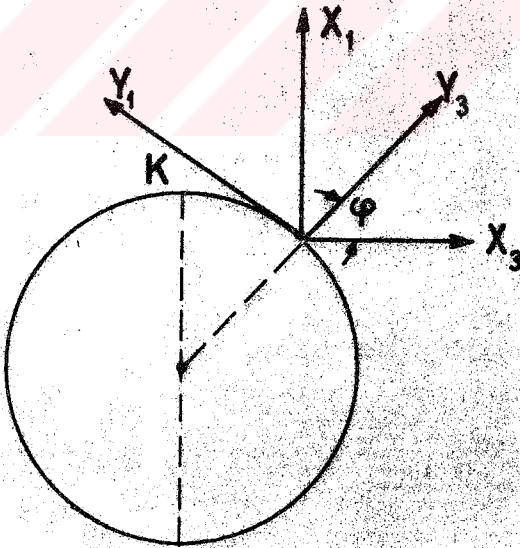
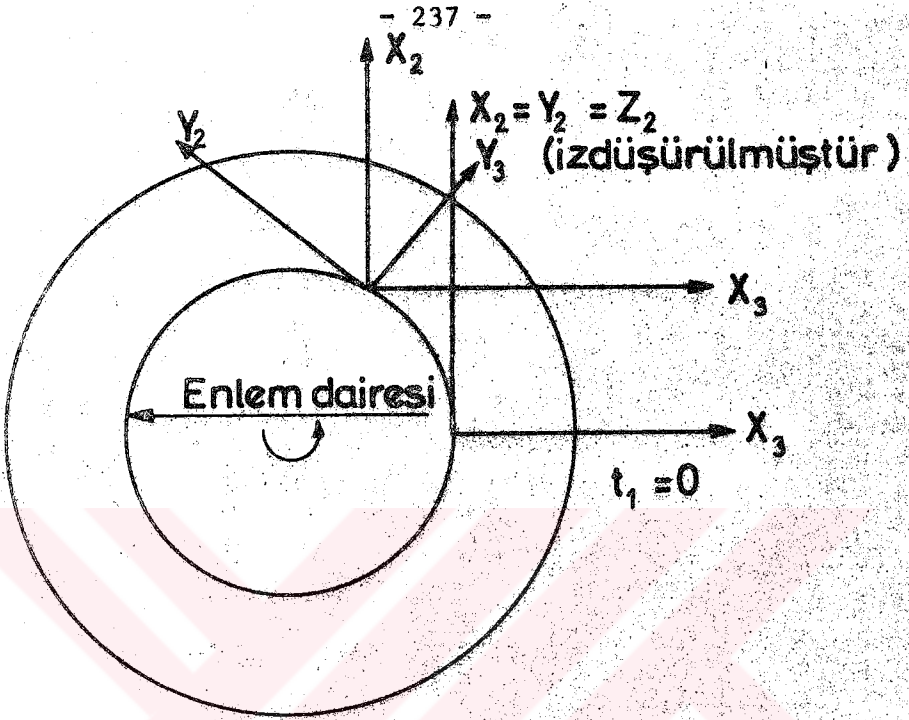
$$a_{xi} = [\underline{\lambda} + \omega \sin \phi, \omega \cos \phi \sin \lambda t, \omega \cos \phi]$$

$$\cos \lambda t] \dots\dots\dots (14.27)$$

Bu bağlantılar ışığında (14.23) nolu denklem yeniden çözülürse stasyoner çözüm Çizelge 14.2 de verildiği gibidir.

(14.15) nolu formülde belirtilen yöntemle göre geri dönme açısı aşağıdaki bağlantıyı sağlar

$$v = \arcsin (\sin \delta \cos \phi) \quad (14.31)$$



Şekil 14.8

Dış Sistemlerin Açısal Hızları	İç Kürenin Açısal Hızları
$a_1 = \lambda + \omega \sin \phi$ (14.28a)	$b_1 = \lambda + \omega \sin \phi$ (14.28b)
$a_2 = \omega \cos \phi \sin \lambda t$ (14.29a)	$b_2 = \omega \cos \phi \sin(\lambda t - \delta) \cos \delta$ (14.29b)
$a_3 = \omega \cos \phi \cos \lambda t$ (14.30a)	$b_3 = \omega \cos \phi \cos(\lambda t - \delta) \cos \delta$ (14.30b)

Çizelge 14.2.

Bağlantısız dönme vektörler enlem konumu

Kutuplarda yani $\phi = \pm 90^\circ$ enleminde pusla çalışmaz. Kutup problemi denen olay ortaya çıkar. Geri dönme açısının hangi düzlemde olduğunu saptamak için (14.20)(14.25) denklemlerini işlemek gerekir. Önce eksenler aşağıdaki gibi dönüştürülür,

$$\vec{e}_{y1} = \vec{e}_{x1} \cos \phi - \vec{e}_{x2} \sin \phi \sin \lambda t - \vec{e}_{x3} \sin \phi \cos \lambda t \quad (14.32)$$

$$\vec{e}_{y2} = \vec{e}_{x2} \cos \lambda t - \vec{e}_{x3} \sin \lambda t \dots\dots\dots (14.33)$$

Bağlantılar koordinat sisteminin seçimi ile ilgilidir. (14.22) ve (14.23) aşağıdaki bağlantılara dönüşürler.

$$\cos(\angle \vec{b} - \vec{\lambda}, \vec{e}_{y1}) = \frac{\sin \phi \cos \phi \sin^2 \delta}{\sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \delta}} \dots\dots (14.34)$$

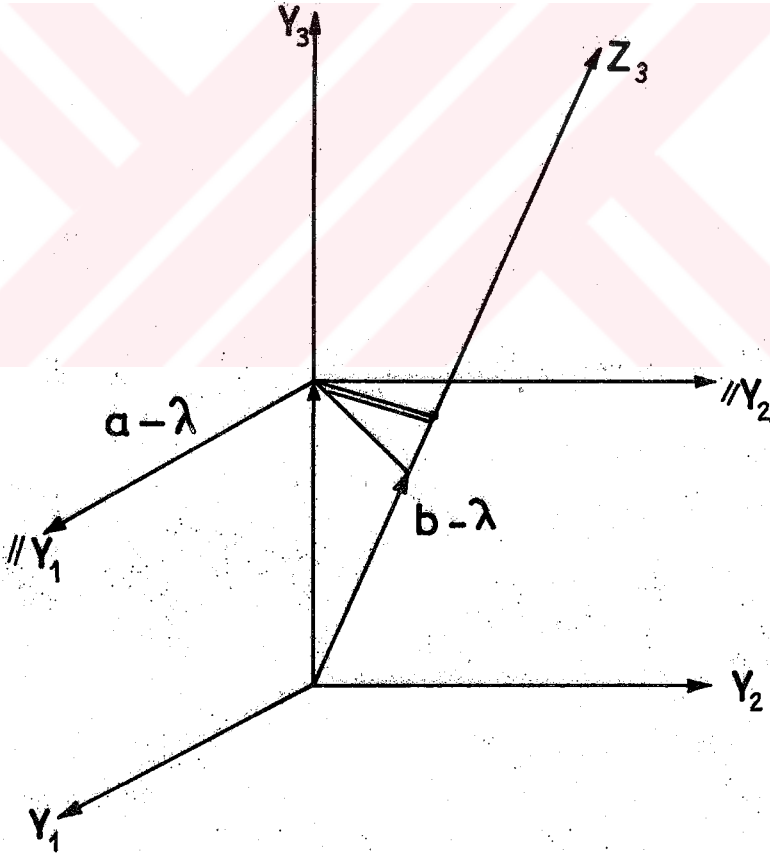
$$\cos(\angle \vec{b} - \vec{\lambda}, \vec{e}_{y2}) = \frac{\cos \phi \sin \delta \cos \delta}{\sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi \cos^2 \delta}} \dots\dots (14.35)$$

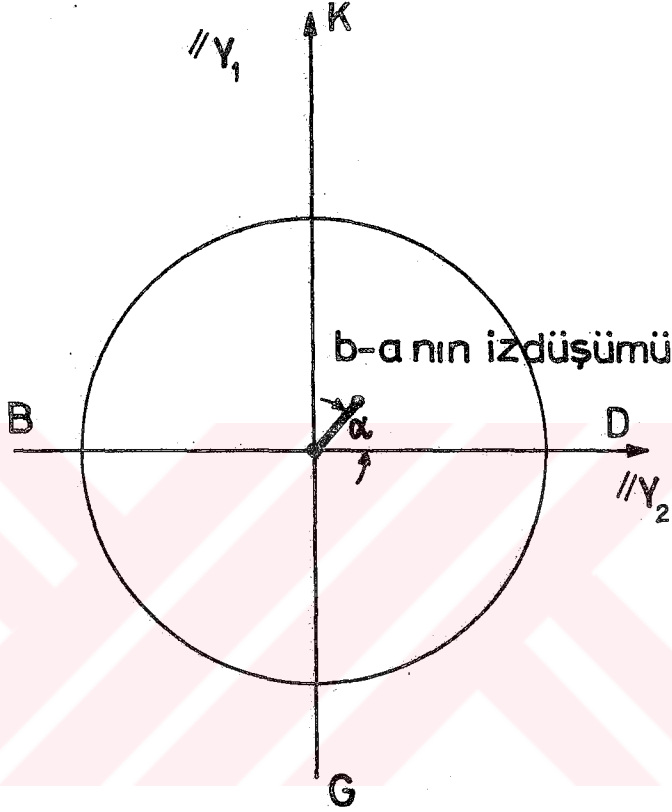
Açılar Şekil (14.9) da gösterilmiştir.

Geri dönme açısı tam olarak doğu-batı yönünde değildir. Görüntü düzlemine izdüşümünde bir sapması gösterir.

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \frac{\cos \lambda}{\cos \lambda} \quad (34) \\ &= - \sin \phi \text{tg } \delta = - \lambda \sin \phi \quad (14.36) \\ \phi &< 90^\circ \end{aligned}$$

Doğu-batı doğrultusundaki sapma, ϕ enlemi ile düz orantılı, C atalet momenti ile düz orantılı ve f bağlantı



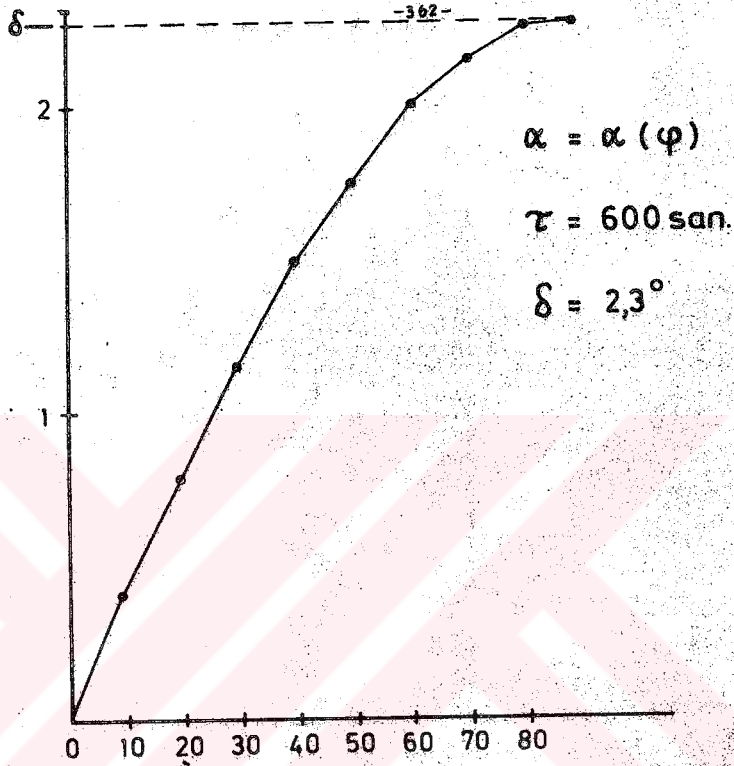


Şekil 14.9.

Herhangibir Enlemde Görüntü Düzlemi ve Geri Kalma Açısı

faktörü ile ise ters orantılıdır. Şekil 14.10 da $\alpha = \alpha(\phi)$ fonksiyonu gösterilmiştir.

Aletin kuruluş doğrultusuna bu sapma da eklenirse her coğrafi enlemde alet Doğu-Batı doğrultusunu gösterir. (14.36) denklemi kutup durumu $\phi = 90^\circ$ dışındaki bütün enlemler için geçerlidir.



Şekil 14.10

Örnek $\tau = 600$ saniye ekvatordeki geri dönme açısı $\delta = 2,3^\circ$ verildiğinde $\phi = 45^\circ$ enleminde geri dönme açısı $v = 1,7^\circ$ ve sapma açısı $\alpha = 1,7^\circ$ hesaplanır.

14.400. SONUÇ

Ağırlık vektörü yönünde kurulmuş iki rotasyon sistemi (geri dönme açısının neden olduğu momentle birbiri ile bağlantılıdır) yer dönmesinin etkisi altında

belli bir zaman sonra aralarında bir açı meydana getirecek biçimde hareket ederler. Ekvatördeki geri dönme açısı doğu-yerküresi merkezi-batı yönündedir. Herhangibir, ϕ coğrafi enleminde bu yönden belli bir sapma gösterir.

Uygulamada sistemin geri dönme açısının olduğunca büyük olması gerekir. ϕ Coğrafi enlemi küçüldükçe, rotasyon sistemleri arasındaki ortamın η dinamik vizkositesi azaldıkça, iç kürenin R yarıçapı küçüldükçe, C atalet momenti büyüdükçe, Δr aralığı arttıkça geri dönme açısı büyür.



V. BÖLÜM

S O N U Ç

Bu çalışmada, önce Foucault sarkacı ile serbestlik derecesi 3 olan genel bir jiroskopun hareketleri dinamik ilkelere göre incelenmiştir (Bölüm 4.10 ve 4.20). Bu inceleme sırasında (3.4) Euler denklemleri jiroskop hareketi için geliştirilmiştir (4.8). Bu denklemler sonuçta indirgenerek serbestlik derecesi 3 olan genel bir jiroskopun

- a. Kuzeyi gösteren
- b. Güneyi gösteren

bir jeodezik alet olarak kullanılabilmesi için gerekli formüller elde edilmiştir.

Nitekim hareketin stabilitesini incelemek için (4.11) denklemi geliştirilmiştir. Jiroskop rotorunun simetri ekseninin başlangıç konumunu belirleyen açı $+ 90^\circ$ ve jiroskop rotoru eksenini etrafında saat hareketi yönünde dönüyor ise (4.11) denkleminde jiroskop ekseninin kuzey etrafında salınım yaptığı kolaylıkla görülmektedir. Bu husus ise jiroskoplu teodolitin serbestlik derecesi 3 olan jiroskopun özel bir hali olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan eğer jiroskop rotorunun simetri ekseninin başlangıç konumunu belirleyen açı $- 90^\circ$ ve jiroskop rotoru eksenini etrafında saat hareketinin ters yönünde dönüyor ise (4.11) denkleminde jiroskop ekseninin güney doğrultusu etrafında bir salınım yaptığı ortaya çıkar. Böylece güney doğrultusunu belirleyen bir aletin temel ilkelerine ait bir bağıntı açıklanmış olmaktadır.

Sözü edilen, çerçeve içinde monte edilmiş olarak bulunan serbestlik derecesi 3 olan jiroskop (Bölüm 4.20 ve 6.10) sarkaç biçiminde çalışan bir jiroskoplu teodolit elde etmek için şu biçimde değiştirilmektedir. Jiroskop rotorunun eksenini yarım bir dairesel çerçeveye

takılmakta ve bu çerçeve-rotor sistemi sabit bir noktadan bir tel ile asılmaktadır. Bu biçimde elde edilen jiroskoplu teodolitte serbestlik derecesi 3 olan genel jiroskopun iki özelliği kullanılır. Bunlardan birincisi dönen jiroskop rotorunun ekseninin dış çerçevenin hareketlerinden bağımsız olarak uzayda aynı doğrultuyu koruması ikincisi ise dönme eksenine dik yöndeki yatay eksen etrafında etki eden bir kuvvet çiftinin jiroskop rotoruna düşey eksen etrafında presesyon yaptırmasıdır. Bu iki özellik jiroskoplu teodolite kuzey etrafında salınım yaptırır. Salınımlar değerlendirilerek kuzey doğrultusu belirlenir.

Serbestlik derecesi 3 olan genel bir jiroskopdan bu değişikliklerle elde edilen bir jiroskoplu teodolitin şu iki hareketi incelenmiştir:

- a) Jiroskop rotorunun dönmemesi hali
- b) Jiroskop rotorunun dönmesi hali

Jiroskop rotorunun dönmesi halinde jiroskoplu teodolit kuzey bulucu özelliğini kazanmaktadır. Jiroskop rotorunun dönmemesi hali ise bazı alet sabitlerini saptamak için incelenmektedir. Bu inceleme yapılırken sürtünme kuvvetlerinin etkisinin açısal hız ile orantılı olduğu (47) varsayılarak ve açısal momentumun zamana göre değişiminin etki eden momente eşit olduğu ilkesinden yararlanarak jiroskop rotoru ekseninin hareketini veren (6.5) denklemi elde edilmektedir. İkinci dereceden katsayıları sabit doğrusal bir diferansiyel denklem olan bu denklem çözülerek, hareketin az sönümlü bir salınım olduğu görülmektedir (6.9). (6.9) eşitliğinde bulunan genlik, sönüm katsayısı, denge konumunu saptayan açı bilinmeyenlerini elde etmek için en küçük kareler yöntemine göre dengeleme yapılır. Bunun sonucunda aletin bu sabitleri elde edilmektedir. (Bölüm 6.240). Bu sabitlerden genlik ve sönüm katsayıları alete bağlı sabitler, denge konumunu gösteren açı ise ölçmeden ölçmeye değişen bir sabittir.

Dönen jiroskop rotoru halinde ise, jiroskop rotorunun simetri ekseninin hareket denklemleri elde edilirken (6.23) eşitliği yazılmakta ve açısal momentumun zamana göre değişiminin etki eden momente eşit olmasından, (6.27) diferansiyel denklem takımı elde edilmektedir. Bu denklem takımı çözüldüğünde rotorun simetri ekseninin kuzey etrafında yaptığı hareketin az sönümlü bir salınım olduğu bulunmaktadır. Salınım eğrisinin denklemi (6.30) jiroskoplu teodolitte uygulanan bütün kuzey saptama yöntemlerinin çıkış noktasıdır.

Dönen jiroskop rotorunun simetri ekseninin hareketinin az sönümlü bir salınım olduğu elde edildikten sonra, bu noktadan hareket ederek jiroskoplu teodolit ile kuzeyi saptama yöntemleri incelenmektedir. Kuzeyi saptama yöntemleri 4 grubda açıklanmaktadır. Bunlar ön yönelme yöntemleri, dönüm noktası yöntemleri, zaman farkı yöntemleri ve genlik yöntemleri olarak adlandırılmaktadır.

Ön yönelme yöntemleri olarak adlandırılan yöntemler jiroskoplu teodolitin optik eksenini yaklaşık olarak kuzeye yöneltmek için kullanılmaktadır. Bu yöntemler zaman veya dönüm noktası değerleri ölçüldüğünde iki grubda toplanmaktadır (Bölüm 8.200).

(Bölüm 8.200) deki ön yönelme yöntemlerinden biriyle ön yönelme yapıldıktan sonra, kesin yönelme, dönüm noktası yöntemleri, zaman yöntemleri veya genlik yöntemi ile yapılmaktadır. Kesin yönelme yöntemlerinden dönüm noktası yöntemlerinde jiroskoplu teodolitin rotorunun simetri ekseninin yaptığı az sönümlü salınımın uç noktalarına karşılık olan yatay daire okumaları (6.30) salınım eğrisine uygun bir biçimde değerlendirilerek, kuzey doğrultusunu veren yatay daire okuması bulunmaktadır. Dönüm noktalarını değerlendirirken kullanılan formüller (Bölüm 8.311) (6.30) salınım eğrisini veren denklemde sönüm katsayısı Taylor serisine açılarak ve sönümü yeter yaklaşıklıkta veren terim alınarak bulunmaktadır. Örneğin Schuler ortalaması olarak adlandırılır.

lan formülde sönüm katsayısı Taylor serisine açılmaktadır. Sonuçta sönüm katsayısı olarak ilk iki terim alınarak Schuler ortalaması geliştirilmektedir. Bunun nedeni salınının az sönümlü olmasıdır. Sönüm katsayısı olarak alınan terim sayısı arttırıldığında diğer formüller elde edilmektedir (Bölüm 8.311). Diğer taraftan sönüm terimi Taylor serisinin ilk üç terimi olarak alınırsa Thomas ortalaması elde edilmektedir. Taylor serisinin alınan terim sayısı arttıkça elde edilen formüllerin katsayıları Paskal üçgeni ile verilmektedir.

Dönüm noktalarını değerlendirerek kuzey doğrultusunu bulmaya yarayan diğer bir grub formülde Lauf eşitlikleridir (Bölüm 8.311) de bu formüller 4,8,16 dönüm noktası için dönüm noktası ölçmelerine en küçük kareler yönteminin dolaylı ölçmeler hali uygulanarak elde edilmektedir. Çalışmada bu formüller iki yönde geliştirilmiştir. Lauf formülleri dönüm noktası sayısının çift olması halinde çıkartılmıştır. (Bölüm 9.100) da ise sönüm lineer alınarak dönüm noktası sayısının tek ve çift olması halleri için dönüm noktaları en küçük kareler yöntemine göre dengelenmektedir. n in çift olması halinde normal denklemler (9.4), n in tek olması halinde ise (9.5) ile verilmektedir. Normal denklemler çözülmüş ve Çizelge 9.1 hazırlanmıştır.

Diğer taraftan (Bölüm 9.200) de ilk ortalamalar, Schuler ortalamaları ve Thomas ortalamalarına bir dengeleme işlemi uygulanarak bu ortalamaların bir birleşimi olarak kuzey doğrultusunu veren formüller elde edilmiştir. Sonuçlar Çizelge 10.3 de gösterilmektedir. Ayrıca (Bölüm 9.210) da sayısal hesaplara n in tek veya çift olması halinde birer örnek verilmektedir.

Foto-transistör ve zaman kayıt aygıtından oluşan alet grubu zamanın kayıt işlemini elektronik olarak yapmaktadır. Bu amaçla jiroskoplu teodolitte yapılması gereken değişiklikler (Bölüm 10.100) de belirtilmektedir. Bu deney düzenini kullanarak jiroskoplu teodolitle yapı-

lan ölçmelere etki eden faktörler ısı, elektriksel faktörler, histerisis etkisi, manyetik etkiler, dönme hızının değişmesi olarak özetlenebilir. Bu faktörlerin etkisi minimuma indirildiğinde kuzey belirlemesinin presizyonu artmaktadır.

Çalışmanın bundan sonraki 11. bölümünde jiroskoplu teodolitlerin iç ve dış presizyonları incelenmektedir. Aletin iç presizyonu alet-operatör sistemi ile tekrarlanan bir dizi ölçmede ölçmelerin birbirinden az farklılık göstermesidir. Zaman yöntemi ile yapılan ölçmelerde ölçmelerin presizyonu ölçülen zaman aralığının ve c sabitinin saptanmasının presizyonuna bağlılığı (11. 10) dan görülmektedir. Zaman aralığının presizyonunu saptamak için 5 veya 7 geçiş anından oluşan 40 seri ölçme yapılmıştır. Bu ölçmeler genliklerine göre sınıflandırılarak Çizelge 11.1 hazırlanmıştır. İkinci olarak c sabiti saptanmış (Bölüm 11.200) ve Çizelge 11.2 hazırlanmıştır. Bu doğrultularda yapılan zaman yöntemi ölçmeleri değerlendirilerek Şekil 11.2 deki histogram elde edilmiştir.

Aletin iç presizyonunu dönüm noktası yönteminden saptamak için 16 seri ölçme yapılmış ve sonuçlar Çizelge 11.3 de gösterilmiştir.

Diğer taraftan aletin dış presizyonu kalibrasyon sonuçlarının doğruluğudur.

Bu amaçla azimutu astronomik yoldan bulunmuş bir doğrultu üzerinde hem dönüm noktası, hem de zaman yöntemi ile ölçmeler yapılmış ve sonuçlar hazırlanan Çizelge 11.4 de gösterilmiştir.

Azimutu saptamanın yanısıra jiroskoplu teodolitin diğer bazı önemli jeodezik büyüklükleri belirlemede kullanılabileceği saptanmıştır. Bu büyüklüklerin ikisi coğrafik enlem ve yerçekimi ivmesidir. Bu dönüm noktalarının en küçük kareler yöntemine göre dengelenmesi ile elde edilmektedir.

(Bölüm 12.000) de jiroskoplu teodolit ölçmelerinden coğrafik enlemin ne biçimde saptanacağı belirtilmiştir. Bu yöntemler dolaylı yöntemlerdir. Coğrafik enlemi doğrudan saptama olanağı vardır. Bu Foucault sarkacının bazı eksen koşullarını sağlaması sonucu mümkün olmaktadır. Bu coğrafik enlemi doğrudan doğruya veren tek yöntemdir (Bölüm 13.000). Fakat alet yapımında karşılaşılan zorluklar henüz yenilememiştir.

L İ T E R A T Ü R

- { 1 } Aksoy, A. : Matematik İstatistik Yöntemlerle Jeodezik Ölçülerin İrdelenmesi T.C. İ.T.Ü. Kütüphanesi, İstanbul, Sayı 987.
- { 2 } Anderson, T.W. : An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley and Sons Inc, 1958.
- { 3 } Arnold, R.N ve Maunder, L. : Gyrodynamics, Academic Press, 1961
- { 4 } Beer F.P. ve Johnston : (Çev. Tameroglu S.S, Özbek, T) Mühendisler İçin Mekanik Cilt 2
- { 5 } Bennet, G.G. : The Modified Transit Method of Observation with Wild GAK-1 Gyro-Theodolite, Canadian Surveyor, Mart 1970.
- { 6 } Berwanger, E. : Dige Eichwertlose Azimut Bestimmung mit einem Vermessung Kreisel sowie Untersuchungen zur Schwingungsdämpfung, Mitteilungen aus dem Markscheidewesen, 1/1964.
- { 7 } Bjerhammar, A. : Linear Prediction and Filtering, K.T.H. Stockholm, İsveç.
- { 8 } Bjerhammar, A. : Non-Gaussian Estimation, K.T.H. Stockholm, İsveç.

- {9} Bjerhammar,A. : Optimal Prediction and Filtering, K.T.H. Stockholm, İsveç.
- {10} Bjerhammar,A. : Application of Calculus of Matrices to Method of Least Squares with Special Referances to Geodetic Calculations, K.T.H. Stockholm, İsveç.
- {11} Bjerhammar,A. : Linear Unbiased Estimation Theory, K.T.H. Stockholm İsveç.
- {12} Bjerhammar,A. : Estimation with Singular Inverses, K.T.H.Stockholm, İsveç.
- {13} Bjerhammar,A. : Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses Elsevier, 1973
- {14} Bonatz,M. ve Schuster,O: Azimut Messungen mit einem Theodolit Kreisel in Spitzbergen, AVN Haziran 1971.
- {15} Brandt,S. : Statistical and Computational Methods in Data Analysis North-Hollanda Publishing Company, 1970.
- {16} Brownlee,K.E. : Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering, John Wiley and Sons Inc. 1965.

- {17} Bulgakov, B.V. : Applied Theory of Gyroscopes, State Publishing House for Theoretical Technical Literature, Moskova 1965.
- {18} Dagoga, M. ve Fubara J. : Geodetic Numarical and Statistical Analysis of Data, B.C.G. 108/1973.
- {19} Daniel, C. ve Wood, F.S. : Fitting Equations to Data, Computer Analysis of Multifactor Data for Scientists and Engineers, John Wiley and Sons Inc 1971.
- {20} Dorn, W.S. ve Mc Cracken, D.D. : Numerical Methods with FORTRAN IV Case Studies, John Wiley and Sons Inc. 1972.
- {21} Easthope, C.E. : Three Dimensional Dynamics, Vectorial Treatment
- {22} Fischer, W. : Bemerkungen zur Statistischen Analyse, ZfV Mart 1968.
- {23} Flowe, R. : Gyroscopic Azimut Instrument, Surveying and Mapping Haziran 1962.
- {24} Fung, Y.C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice Hall, 1965
- {25} Gotthardt, E. : (Çev. Aytaç, M; Örmeci, C; Altan, O) Dengelemeye Giriş T.C. İ.T.Ü. Kütüphanesi 999.

- {26} Graferend, E. : Der Klasische Nord-Süd
Suchende Kreisel, Vermes-
sungs Technische Rundschau,
1/1967.
- {27} Graferend, E. : Beobachtung Verfahren bei
Vermessung Kreisel, AVN,
Mart 1971.
- {28} Graferend, E. : Neuartige Chronometrische
Mesverfahren zur Nord Bes-
timmung mit Vermessung
Kreisel AVN, Haziran 1971
- {29} Gray, A. : Treatise on Gyrostatics
and Rotational Motion Dover
Publications.
- {30} Greenwood, D.T. : Principles of Dynamics
Prentice Hall 1965.
- {31} Gregerson, L.F. : An Investigation of the
MOM Gi B2 Gyroscopic The-
odolite, Canadion Surveyor,
Mart 1970.
- {32} Grossman, W. : En Küçük Kareler Metoduna
göre Dengeleme Hesaplarının
Ana Hatları, (Çev.Özgen, G)
T.C. İ.T.Ü. Kütüphanesi,
Sayı 503.
- {33} Halmos, F. : Über den Kreisel Theodolit
MOM Gi B2 und seine Anwen-
dung bei unterirdischen
Orientierungs Messungen,
Mitteilungen aus dem Marks-
cheidewesen 2/1968.

- {34} Halmos, F. : Instrumentelle und Methodische Fragen der Geodetischen Anwendung von zeitgemässen Kreisel Theodoliten, AVN Mart 1971.
- {35} Halmos, F. : Einige Frage Entwicklung und Messmethodik der Kreisel Theodolite, ZfV 2/1971.
- {36} Hardenbergh, D.E. : Introduction to Dynamics, Holt, Rinehart, and Winston, 1963.
- {37} İnan, M. : Cisimlerin Mukavemeti.
- {38} Jochmann, H. : Ein neuer Meridansucher, seine Theorie und Anwendung V.T. 7/1961
- {39} Kallen, P. : Der Laser Kreisel, Ausführungen und Anwendungen VR 7/1969.
- {40} Kohlrausch, F.W. : Praktische Physik, Teubner, Stuttgart 1955.
- {41} Lauf, G.B. : The Rotation of the Earth and its Effect upon the Motion of a Gyroscope, The South African Geographical Journal Aralık/1967.
- {42} Lauf, G.B. : Adjustment and Precision of the Gyro-theodolite Observations.
- {43} Lehmann, K. : Vom Magnet Kompass über den Kreisel Kompass zum Meridianweiser, Mitteilungen aus dem Markscheidewesen 1967.

- {44} Leimanis, E. : The General Problem of the motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point, Springer Verlag
- {45} Liersek, W. : Der Entwicklungstand bei Vermessung Kreiselgeräten Vf 9/1964.
- {46} Lindner, K. : Grundlagen der Kreisel Orientierung, VT 11/1968.
- {47} Magnus, K. : Kreisel, Theorie und Anwendungen, Springer Verlag 1971.
- {48} Mc Lelland, J. : Kreisel Theodolit im Geodatischen Einsatz, VT 2/1959.
- {49} Mc Lelland, J. : Kreisel Theodolit VR 2/1959.
- {50} Özemre, A.Y. : Fizikte Matematik Metotlar, T.C. İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı 826.
- {51} Özgen, M.G. : Madencilik Topoğrafyası, Cilt I, İ.T.Ü. T.O. Yayınları, İstanbul 1966.
- {52} Özgen, M.G. : Madencilik Topoğrafyası, Cilt II, İ.T.Ü. T.O. Yayınları, İstanbul 1967.
- {53} Perry, J. : Spinning Tops and Gyroscopic Motion, Dover Publications.
- {54} Pollman, H. : Vermessung Kreisel, VR 4/1970.

- {55} Pollmann, H. : Vermessung Kreisel, VR 5/1970.
- {56} Pollmann, H. : Vermessung Kreisel, VR 7/1971.
- {57} Pusztai, F. : Einige Probleme der Genauigkeits Erhöhung der Kreisel Theodolit, AVN 3/1966.
- {58} Rellensman, O. : Der Vermessung Kreisel, Heutiger Stand und Weiter Entwicklung, Freiburger Forschung Hefte, 1957.
- {59} Rellensman, O. : Der Aufsatzkreisel, Ein Zusatz Gerat zum theodoliten, Mitteilungen aus dem Markscheidewesen 4/1965.
- {60} Schuler, M. : Die Berechnung der gleichgewichtslage von Gemessenen Schwingungen auf Grund der Fehlertheorie Zeit f. Ang Math und Mech 12/1932.
- {61} Slater, J.C. and Nathaniel F.H. : Introduction to Theoretical Physics, McGraw Hill Book Company Inc. 1933.
- {62} Thomas, T.L. : Precision Indication of the Meridian, The Chartered Surveyor 97, 1965.
- {63} Thomas, T.L. : The Precision Indication of the Meridian, Theory and Application Third S.A. Nat. Survey Conf. Johannesburg Paper No: 5/9, 1967.

- {64} Tienstra, J.M. : (Çev. Aytaç, M. ve Örmeci, C.) Normal Yayılmış Gözlemlerde Dengeleme Teorisi, T.C. İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı 973.
- {65} Timoshenko, S. : Strength of Materials, part II, Advanced Theory and problems, 3rd. edition, New Jersey.
- {66} Williams, H.S ve Belling, G.E. : The Reduction of Gyro-Theodolite Observations, Survey Review XIX, 146, 1967.

ÖZ GEÇMİŞ

1.1.1947 Tarihinde İstanbul'da doğdum. İlkokulu Şişli Terakki İlkokulunda 1953 - 1958 yıllarında okudum. 1958 - 1959 ders yılında Kadıköy Maarif Koleji Hazırlık sınıfına girdim. 1964 - 1965 ders yılında Kadıköy Maarif Kolejinden mezun oldum. 1965 - 1966 ders yılında İ.T.Ü. İnşaat Fakültesine girdim ve 1971 yılında mezun oldum. Aynı yıl İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Jeodezi Kürsüsüne Asistan olarak girdim. 1975 - 1976 ders yılında İsveç Enstitü'sünden burslu olarak İsveç Kraliyet Enstitü'sü Jeodezi bölümünde çalıştım. Halen Jeodezi Kürsüsü Asistanıyım.

Yüksek Öğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi