

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın vucuda gelmesinde büyük küçük yardımları dokunmuş herkese teşekkür etmekle birlikte bilhassa tez danışmanım sayın Prof. Dr. Ertaç Ergüven beye daimi teşvikleri ve yönlendirmesi için, sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah Gedikli beye bilgi ve tecrübesini paylaştığı için, sayın Araş. Gör. Mustafa Yavuz beye de tezi okuyarak kontrol ettiği için şükranlarımı sunarım.

Bu çalışmayı yetişmemde hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan değerli anne ve babama ithaf ediyorum.

Aralık 2004

İnş. Müh. Çağrı Mollamahmutoğlu

SEMBOL LİSTESİ

$A()$	: Yönetici Denklemin Operatörü
A	: Potansiyel Enerji Yoğunluğu Fonksiyonu, Yer Değiştirmelere Göre
B	: Potansiyel Enerji Yoğunluğu Fonksiyonu, Gerilmelere Göre
b	: Dikdörtgen Kesit Genişliği
b_x	: x Yönünde Hacimsel Kuvvet
b_y	: y Yönünde Hacimsel Kuvvet
b_z	: z Yönünde Hacimsel Kuvvet
c_i	: Yaklaşık Çözümün i . Parametresi
E	: Elastisite Modülü
D	: Şekil Fonksiyonları Geçiş Matrisi
F	: Kesit Alanı, Kuvvet
G	: Kayma Modülü
H	: Yatay Kesme Kuvveti
h	: Dikdörtgen Kesitin Yüksekliği
k_s	: Kayma Açısı Düzeltme Katsayısı
k_z	: Winkler Zemin parametresi
k_z^*	: Boyutsuz Winkler Zemin Parametresi
K^{ij}	: Davranış Matrisi
K^{ij}	: Davranış Matrisi Alt Matrisi
I	: Eğilme Yönündeki Kesit Atalet Momenti
$I()$	: Fonksiyonel
L	: Kiriş Uzunluğu
M	: Moment
N	: Elastik Eğriye Paralel Eksenel Kuvvet
l	: Karakteristik Eleman Uzunluğu
$l()$	: Lineer Fonksiyonel
p	: Eksenel Tekil Kuvvet
p_1	: Birinci Burkulma Yüğü
p_x	: Sınırdaki x Yönünde Etkiyen Belirtilmemiş Gerilme
p_y	: Sınırdaki y Yönünde Etkiyen Belirtilmemiş Gerilme
p_z	: Sınırdaki z Yönünde Etkiyen Belirtilmemiş Gerilme
$\bar{p}_x$	: Sınırdaki x Yönünde Etkiyen Belirtilmiş Gerilme
$\bar{p}_y$	: Sınırdaki y Yönünde Etkiyen Belirtilmiş Gerilme
$\bar{p}_z$	: Sınırdaki z Yönünde Etkiyen Belirtilmiş Gerilme
Q	: Eksenel Yayılı Yük
q	: Enine Yayılı Yük
S	: Genel Olarak Problem Sınırı
S_1	: Kuvvetlerin Belirtildiği Sınır Kısmı
S_2	: Yer Değiştirmelerin Belirtildiği Sınır Kısmı
T	: Elastik Eğriye Dik Kesme Kuvveti
u	: x Ekseni Yönündeki Yer Değiştirme Bileşeni

$\tilde{u}$	: u Yerine Önerilen Yaklaşık Çözüm
$\bar{u}$	: Sınırdan Tanımlı, Belirtilmiş x Yönündeki Yer Değiştirme Bileşeni
V	: Genel Olarak Problemin Tanımlı Olduğu Hacim
v	: y Eksenini Yönündeki Yer Değiştirme Alanı Bileşeni
$\bar{v}$	: Sınırdan Tanımlı, Belirtilmiş y Yönündeki Yer Değiştirme Bileşeni
W	: Mekanik Anlamında İş
w	: z Eksenini Yönündeki Yer Değiştirme Bileşeni, Çökme
$\bar{w}$	: Sınırdan Tanımlı, Belirtilmiş z Yönündeki Yer Değiştirme Bileşeni
α	: Eksenel Statik Yük Katsayısı
β	: Eksenel Dinamik Yük Katsayısı
γ	: Kayma Açısı
δ	: Varyasyon Sembolü
Δ	: Yük Vektörü
ϵ_{xy}	: Birim Şekil Değiştirme Bileşeni
η	: Bir skaler
θ	: Eğilmeden Kaynaklanan Dönme Açısı
κ	: Operatörün Matris Formu
λ	: Serbest Titreşim Frekansının Karesi
μ	: Narinlik Katsayısı
ν	: Ağırlık Fonksiyonu
ν	: Sertbestlik Vektörü
π	: Bir Fonksiyonel
π_{HRTB}	: Timoshenko Kirişi için Hellinger – Reissner Fonksiyoneli
π_{HREB}	: Euler – Bernoulli Kirişi için Hellinger – Reissner Fonksiyoneli
π_{HREBB}	: Euler – Bernoulli Kirişinde Burkulma Problemi Fonksiyoneli
π_{GTT}	: Timoshenko Kirişi İçin Genelleştirilmiş Fonksiyonel
π_{MDS}	: Dinamik Stabilite Fonksiyoneli
ρ	: Malzeme Birim Hacim Kütlesi
σ_{yz}	: Gerilme Bileşeni
χ	: Operatör
φ	: Şekil Fonksiyonu
ϕ_i	: i . Yaklaşım Fonksiyonu
ψ	: Elastik Eğrinin Eğimi
ω	: Kiriş Enine Serbest Titreşim Frekansı
Ω	: Eksenel Zorlama Frekansı

ELASTİK KİRİŞLERDE ÖZDEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ BİR FONKSİYONEL VE SONLU ELEMAN FORMULASYONU

ÖZET

Bu çalışma kapsamında kirişlerde sık karşılaşılan özdeğer problemlerinden burkulma ve serbest titreşim problemleri, Winkler zeminine oturan Euler – Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre ele alınmış ve iki problemin birleşimi olan dinamik stabiliteyi de kapsayan yeni ve genel bir varyasyonel formülasyon verilmiştir.

Çalışma toplam beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde problem tanıtılmış, konuyla ilgili literatürde yapılmış olan çalışmalara değinilmiş ve bu çalışma kapsamında ne tür yeniliklerin getirileceği üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde teknikte çok kullanılan Euler – Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorileri lineer elastisite teorisindeki çıkış noktaları dikkate alınarak yeniden kurulmuş ve her iki tip kiriş için de adı geçen özdeğer problemleri tanıtılarak ilgili denklemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde varyasyonel hesap tarzı hakkında genel matematiksel bilgi verilmiş, fonksiyonel kavramı ve mekanik enerji ile ilgisi, ağırlıklı artıklar yöntemi ve varyasyonel hesap, sonlu elemanlar ve çıkış noktalarından bahsedilmiş ve en nihayetinde de problemin çözümü için mekanik enerji anlamında genel bir fonksiyonel ifadenin elde edilmesi ağırlıklı formların kontrollü kullanımıyla gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde çeşitli karakteristik özelliklere sahip kirişler için sayısal uygulamalar yapılmıştır. Literatürle karşılaştırmalara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde elde edilen fonksiyonelin ve ürettiği sonuçların üzerinde durulmuş ve formülasyonun avantajları vurgulanmıştır. Bu bölümde konunun mühendislik yönü ile ilgili yorumlarda bulunmaktadır.

A NEW FUNCTIONAL FOR EIGENVALUE ANALYSIS OF TIMOSHENKO BEAMS AND FINITE ELEMENT FORMULATION

ABSTRACT

The parametric instability problem (a.k.a. dynamic stability problem) of Timoshenko beams resting on an elastic foundation of Winkler type is studied by mixed finite element method. For this purpose a new functional is constructed via variational methods with seven degrees of freedom. Taking into account the effect of transverse shear deformation and rotatory inertia, this new functional allows using linear shape functions and results in shear free elements. The formulation also allows to treat free vibration and buckling problems separately by simple modifications of parameters. The results indicate excellent agreement with available results.

In the first section there is an introduction to the subject by explaining the importance of the problem and past researches about subject. Here , also , the difference of new view point is discussed.

In the second section a brief theory of linear elasticity is given and then the theory of Euler – Bernoulli and Timoshenko beams are presented. At the end of the section the eigenvalue problems for the two this type are constructed.

In the third section a general information about variational calculus in solid mechanics is given. Later the way of constructing the new functional is explained in detail. Finally with the aim of the new functional new finite element formulations are formed.

In the forth section the finite element formulation is solved by The Mathematica packet program and eigenvalue analysis for buckling , free vibration and dynamic stability problems are treated separately. Examples are given for different end conditions and for different values of Winkler foundation coefficient.

In the last section , section five , a general conclusion is made and the advantages of the new formulation are highlighted.

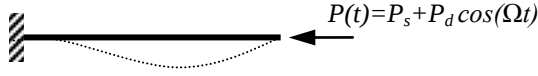
1. GİRİŞ

1.1 Konunun Tanıtımı ve Önemi

İmalat süreci de dahil olmak üzere her yapı elemanı servis ömrü boyunca çeşitli büyüklük ve karakterde zorlamaların etkisi altında kalır. Bu zorlamalar projede öngörüleceği şekilde dinamik ve/veya statik karakterde olabilir. Proje mühendisinin görevi genel yapı güvenliğini sağlamak olduğundan, sadece, kesitlerin oluşan gerilmeleri taşıyabilecek şekilde boyutlandırılması ile problem halledilmiş olmaz. Bilindiği gibi emniyet şartlarından biri gerilme şartı ise en az onun kadar önemli olan bir diğeri de stabilite şartıdır. Teorik nedenlerden dolayı, genel olarak, sistemin zorlama altında kararlılığının sorgulandığı stabilite problemlerinde gerilme durumundan daha zor bir analizin yürütülmesi gerektiği iddia edilebilir. Bu itibarla stabilite kriterine ait çeşitli analiz metodlarının, yeter güvenlikte sonuçlar alınabilmesi için ve bu şekilde emniyetli tarafta kalınabilmesi için, gereken ölçüde bilinmesi şarttır.

Yapının genel olarak sitabilitesinin tahkiki yanında daha çok onu oluşturan parçalarının ayrı ayrı stabilitesinin tahkiki düşünülürse, yani sistemin bir parçalar bütünü olduğu düşüncesinden hareket etmek neticesinde, genellikle, stabilite problemiyle kast edilenin veya anlaşılabilenin her elemanın ayrı ayrı stabilite kriterini sağlaması durumu olduğu sonucuna varılabilir. Kuşkusuz bu bakış açısının yetersiz kalarak sistemin global stabilite tahkikinin yapılmasının zaruri olduğu haller bulunsa da ilk ifade edilen durumun genelliği tartışılmazdır çünkü, genellikle, mühendis, stabilite tahkinin eleman bazında nerede gerektiğini elemanın durumundan ve elemana etkiyen yükün şiddet ve karakterinden tecrübi olarak anlayacak ve evvela lokal olan bu stabilite problemine eğilecektir. Esasında bir mantıki kaide olarak parçalar güvende değilse, onların oluşturduğu bütün olan sistem de güvende olmayacağından eleman bazında stabilite tahkikinin önemi aşıkardır.

Eleman bazında düşünülduğünde kiriş olarak nitelenebilecek bir çok yapı elemanında ve makine parçasında sıklıkla karşılaşılan eksenel yükün özellikle eleman narin ise gerilme probleminden çok stabilite problemini ön plana çıkarttığı bilinmektedir. Bu durumda eksenel yük etkisi altındaki elemanların denge durumlarının kararlı, kararsız veya farksız oluşu stabilite analizinin temel hareket noktasıdır. Bu şekilde kirişin verilen yük, malzeme ve kesit bilgisi dikkate alındığında her zaman mümkün olabilecek çok küçük saptırıcılardan dolayı denge konumunun muhafaza edilip edilemeyeceği yani kararlılığı tahkik edilir. Statik karakterli yükler için vaaz edilen statik stabilite, pratikte yavaş yüklenen dinamik etkilerin ihmal olunabileceği durumlarda yeter fikir verir. Bununla beraber kirişin dizaynında eksenel yükün dinamik karakterde olması stabilite probleminin geleneksel statik bakış açısını aşar. Yapılan gözlemler ve deneysel çalışmalar ile anlaşıldığı üzere bu halde yine dizaynın bir parçası olan ve sistemin geometrik ve bünye özelliklerine dayanan serbest titreşim olayı stabilite problemi ile etkileşime girmektedir. Kısaca artık stabilite problemi dinamik bir karakter kazanır. Özellikle eksenel dış yükün periyodik olması neticesinde kirişte meydana gelen enine titreşimlerin genliklerindeki aşırı büyüme neticesinde, yükün frekansının kirişin enine titreşim frekansına bazı oranları söz konusu olduğunda, çok düşük gerilme değerlerinde dahi göçme görülebilir. Esasında rezonans olarak adlandırılan bu durumda eksenel yükün periyodik etkisinden dolayı enine titreşimlerin genliğinde eleman için mümkün olamayacak artışlar gözlenmektedir. Bu itibarla statik durumdakinden farklı olarak, dinamik stabilitede, dış yükün frekansı, kirişin enine serbest titreşim frekansı ve dolayısıyla bunların etkileşim altındaki ilgili parametreleri rol aldığından literatürde durumu izah için “parametrik instabilite” terimi de sıkça kullanılmaktadır. Netice olarak, hiç beklenmeyecek yük değerlerinde, parametreler arası ilişkiden dolayı hasıl olabilecek ani genlik büyümeleri yüzünden göçme kaçınılmaz olmaktadır. İzahlardan anlaşılacağı üzere artık sistemin serbest titreşim karakteristiğinin ve bunun eksenel yük ile olan etkileşiminin bilinmesi ve modellenmesi emniyet açısından zaruridir ve statik halden farklı olarak daha karışık bir analiz gerektireceğinden, bu durum, ayrıyeten dikkat ve özen isteyecektir. Son olarak anlatılanların bir ilüstrasyonu yükün statik ve dinamik karakterli parçaları gösterilerek Şekil 1.1 de verilmiştir. Şekil 1.1 de noktalı çizgili deforme olmuş form ise titreşim mod şeklini karakterize etmektedir. Enine Serbest titreşim frekansı λ ve yük frekansı Ω arasındaki oran $\Omega/\lambda=2$ olduğunda rezonans hali söz konusu olacaktır.



Şekil 1.1 Dinamik Eksenel Yükün Etkimesi ve Enine Titreşim Durumu

Anlatılan titreşim ve stabilite olayları için kurulan denklemler belirli bazı parametreleri bulmaya yönelik olarak sıradan sınır değer problemlerinden şekil ve karakter olarak ayrılırlar. Bu tip denklemlere genel olarak “özdeğer problemleri” adı verildiğinden bu çalışma başlığında geçen kirişlerin özdeğer problemleri ifadesi ile titreşim, stabilite ve bunların birlikte bulunduğu dinamik stabilite adıyla ifade edilen problem gruplarının genelinin kast edildiği anlaşılmış olur.

Değişik sınır şartlarının ve mesnetlenme şekillerinin kullanılması uygulamada kaçınılmaz olabilir. Bu gibi durumlarda göz önüne alınan sınır koşullarının ve mesnetlenme şekillerinin dinamik stabilite karakteristiklerinde ne gibi değişikliklere yol açtığına incelenmesi gayet mühimdir. Ayrıyeten yüksekliği büyük olan kirişlerde dönme ataleti etkisi daha belirgin olduğundan ve kayma deformasyonları artık ihmal edilemeyeceğinden bu durumların dikkate alınmasının titreşim karakteristiklerinde meydana getirecekleri değişimlerin analiz edilerek, dinamik stabilite yönünden, dizaynda göz önünde bulundurulması emniyet açısından kaçınılmazdır. Buraya kadarki izahatlardan problemin önemi açıkça anlaşılmaktadır.

1.2 Çalışmanın Kapsamı ve Getirdiği Yenilik

Bu çalışma kapsamında ortaya yeni bir problem konulmamıştır. Çözümü olmayan bir probleme çözüm de sunulmamıştır. Ancak burada amaçlanan, kirişlerin, serbest titreşim, stabilite ve dinamik stabilite kategorisindeki özdeğer problemlerini, pratikte en çok kullanılan iki kiriş teorisi (Euler – Bernoulli ve Timoshenko) zaviyesinden ele alarak, değişik sınır şartlarını, elastik Winkler tipi sürekli mesnetlenme durumunu ve dönme ataletinin etkisini de düşünerek literatürde rastlanılmayan üç hali de kapsayıcı

genel bir “karışık sonlu eleman formülasyonu” vermeye çalışmak olacaktır. İlk etapta 2. Kısımda analize nesne olacak kirişler ve ilgili teorileri lineer elastisite teorisinin özet bilgileri göz önünde tutularak verilecektir. Buradan anlaşılacağı üzere malzeme lineer elastik ve yerdeğiştirmeler de mertebe itibariyle küçük kabul edilecektir. Ayrıca yine analize konu olan kiriş teorileri ile ilgili özdeğer denklemlerinin kurulumunun ve ifadesinin de ilerki bölümlerdeki kullanımları düşünöldüğünde 2. Kısımda verilmesi uygun bulunmuştur. Hedef yeni bir karışık sonlu eleman formülasyonu geliştirmek olduğundan bu amaç uğruna varyasyon hesabına girilecek, mekanik enerji kavramı, enerji fonksiyoneli ve varyasyonu, bunların genel bir sayısal çözüml yolu olan ağırlıklı artıklar yöntemi ile ilişkileri 3. Kısımda irdelenecektir. Konu bütönlüğü bakımından sonlu eleman çözümlüne temel olan denklem takımlarının üretilmesinde kullanılan integral formlarının veya varyasyon prensiplerinin kurulmasında yararlanılan Lagrange çarpanları ve Gateaux türevi şeklindeki mevcut literatür bilgilerinin yanında ağırlıklı artıklar yöntemini ve zayıf formu temel alan bakış açısının kullanılması yine 3. Kısım kapsamında önerilecektir. Bu şekilde bilinen bir varyasyonel prensibin nasıl kurulabileceğı ve genelleştirilebileceğı tartışılacak, nihayetinde de genel formölasyon üzerinden değışik mertebede sonlu eleman çözümlünün geliştirilmesi ile 3. Kısım sona erecektir. 4. Kısım elde edilen sonlu eleman denklemlerinin Mathematica bilgisayar programına çözdürölmesi ve çeşitli sınır, mesnetlenme koşulları için sayısal sonuçların elde edilmesi işlerinin yürütöldüğü bir geçiş kısmı olacaktır. Yine 4. Kısımda kullanılan algoritma ile ilgili bazı bilgiler verilecektir. Bu geçişi takip eden 5. Kısımda ise literatürde var olan çözümler ile burada elde edilenler yakınsamadaki sürat ve doğruluk açılarından mukayese edilerek formölasyonun bazı avantajları vurgulanacak ve ayrıca bir miktarda sonuçlar üzerinden konunun kendi hakkında mühendislik yorumlarında bulunulacaktır.

1.3 Konu ile İlgili Yapılmış Çalışmalar

İmalat sanayinin ve mühendisliğin gelişmesi ile birlikte mukavemet alanında dikkat çeken dinamik problemlerin başında gelen dinamik stabilite konusu ilk defa Rus asıllı V. Bolotin tarafından [1]’de geniş olarak işlenmiştir. [1]’de belirtildiğı üzere problemin bazı basit sınır koşulları altında analitik çözümleri Floquet tarafından verilmiştir.

Konu ile ilgili önceki çalışmaların bir çoğu Euler – Bernoulli kiriş teorisi dikkate alınarak geliştirilmiştir. [2,4]

Dinamik stabilite probleminde elastik zeminin uniform kesitli kirişin davranışına katkısı ilk defa Goldenblat [5] daha sonra da Brown [6] tarafından göz önüne alınmıştır.

Ahuja ve Duffield aynı problemi modifiye edilmiş bir Galerkin yöntemi kullanarak uniform olmayan kesit haline genelleştirmişlerdir. [7]

Abbas ve Thomas ise [8] ,bu çalışma anlamında, elastik zemin üzerindeki bir Timoshenko kirişinin dinamik stabilitesi ile ilk ilgilenenler olmuşlardır. [9] Ancak geliştirdikleri kiriş elemanının kesitlerinde süreksizlik içeren bir kiriş için kullanılması mümkün değildir ve bununla beraber özel bir durum olarak Euler – Bernoulli kirişinin sonuçları bu modelden elde edilememektedir.

Burada en çok atıf alan çalışma ise Yokoyama'ya [10] aittir. Dinamik halde yazılan toplam potansiyel enerji fonksiyoneliyle hareketle geliştirilen deplasman tipi sonlu elemanların kullanılarak Abbas ve Thomas'ın çalışmasındaki [9] yetersizliklerin aşıldığı bu çalışmada kayma kilitlenmesi sorununu gidermek için yüksek dereceli şekil fonksiyonlarının kullanılması gerekmiştir.

Yakın zamanlardaki bir çalışmada ise Majorana ve diğerleri [11] Euler – Bernoulli tipi kirişler için deplasman bazlı sonlu elemanlar üretmişler ve bunlardan kurulu yapı sistemlerinin viskos sönüm etkisi altında dinamik stabilite karakterlerini incelemişlerdir.

Karışık sonlu eleman davranış matrislerinin elde edilmesinde kullanılacak fonksiyonellerin üretilmesinde Gateaux Türevini esas alan Aköz ve diğerlerinin [12,13] çalışmaları bulunmaktadır.

Şekil değiştiren cisimler mekaniğinde varyasyonel prensipleri toplu halde tanıtan ve bir çok varyasyonel prensip ailesine Lagrange çarpanları yöntemi ile geçişi öngören Washizu'ya ait çalışma da [14] konu ile ilgili temel kaynaklar arasında geçmektedir.

Yine varyasyonel tekniklerin matematiksel yönüne dikkat çeken Oden ve Reddy'ye ait [15] , özellikle Gateaux Türevini kullanan , bir çok çalışmaya temel olması bakımından önemlidir.

Sonlu eleman tekniklerinin uygulanması söz konusu olduğunda Reddy'ye ait [16] ve Bathe'ye ait [17] , uygulamadaki problemlerin çözümleri ve bilgisayar kodlaması bakımından , bahsedilmesinde yarar bulunan çalışmalardır.

Son olarak yabancı literatürde “follower force” olarak geçen ve buradaki dinamik stabiliteden farklı olarak eksenel yükün elastik eğriye daima teğet kalması hali [21]'de ve bir çok benzerinde geniş olarak incelenmiştir. Bu tip problemler bu çalışmadan farklı olarak korunumlu olmayan tipte olup daha ileri seviyede analiz gerektirmektedir. Takipçi kuvvet durumu rotor dizaynının ve roket sanayisinin tipik problemlerindendir.

2. KIRIŞLERİN TEKNİK TEORİSİ VE ÖZDEĞER PROBLEMLERİ

Bu kısımda uygulamada sıkça karşılaşılan ve bu nedenden dolayı teknik teoriler olarak adlandırılacak Euler – Bernoulli kiriş modeli ile Timoshenko kiriş modelinin tanıtımı lineer elastisite teorisi dikkate alınarak gerçekleştirilecektir. Bu kısmın ilerleyen bölümlerinde ise adı geçen kiriş teorileri ile ilgili özdeğer problemleri kuruluş aşamalarıyla verilecektir. Bu bağlamda dinamik stabilitenin esas noktalarına ve literatürde önerilen çözüm yollarına ana hatlarıyla değinilecektir.

2.1 Kirişlerin Teknik Teorisi

Bir çok çalışmadan bilindiği üzere her cisim gibi üç boyutlu olduğu halde, kiriş, geometrik özelliklerinden dolayı teknik incelemede tek boyutlu (uzunluk) bir model şeklinde kabul edilmiş ve işlemler bu kabule göre yürütülerek analize tabi tutulmuştur. Bu itibarla uzunluğun diğer iki boyut yanında merteye itibariyle büyük olduğu hallerde, yani l uzunluk h yükseklik ve b de genişliği göstermek üzere $l/5 \approx b, h$ için, bir elemanı kiriş kabul ederek buna göre bir boyutlu analize gitmek teknik problemlerin yaklaşıklık kriterleri içinde genellikle makul sonuçlar vermektedir. Kiriş davranışını yeterli ölçüde yansıtabilecek, bununla beraber mühendisliğin pratik kullanım amaçları bakımından zorluk çıkarmayacak en basit kiriş modeli Euler ve Bernoulli'ye izafe edilen modeldir. Euler – Bernoulli'nin kabullerinden hareket edilerek kalın kirişler için kurulan en temel teori ise S. Timoshenko'ya aittir. Belirtildiği üzere bu teknik teorilerin temellerinde yapılan kabullerin bilinmesi, anlaşılması ürettikleri sonuçların sıhhatli ve yerinde kullanılması açısından son derece önemlidir. Durum bu şekilde olunca, geliştirilen teorilerin genel üç boyutlu cisimler için vaaz edilen elastisite teorisinden ne şekilde türetildiğini bilmek icap etmektedir.

2.1.1 Lineer Elastisite Teorisi Özet Bilgileri

En genel haliyle bir elastisite problemini kurmak için ele alınan cisim üzerinde sürekli fonksiyonlar şeklinde her noktada tek değerli gerilme (σ_{ij}) ve yer değiştirme (u_i) bileşenleri (2.1) tanımlanır.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z) \quad u_i = u_i(x, y, z) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

Gerilme bileşenleri, ele alınan nokta civarında kenarları seçilen eksen takımına paralel çok küçük bir küpün dokuz yüzeyinde oluşan gerilme değerleridir. Her bir gerilme bileşeni semboldeki indislerin bir durumuna karşı gelir. Bu, matematiksel olarak matris formunda tensör adı verilen bir yapı ile ifade edilir ve fonksiyon olarak verildiği noktanın gerilme halini bildirdiği için gerilme hali de denir. İlk etapta, kolayca, küpün etkiyen gerilemeler altında eksenler etrafındaki momentinin dengesinden (açısal momentumun korunumu sonucu) gerilmelerin oluşturduğu 3x3'lük matrisin hacme yayılı moment bulunmaması nedeniyle simetrik olduğu sonucuna varılır. Böylece bir nokta civarındaki gerilme durumu burada söz konusu olan genel hal için 6 bağımsız bileşenle verilecek demektir. Yine cisim içindeki bir noktanın şekil değişiminden önceki ve sonraki yeri arasındaki vektörün (yer değiştirme vektörü) bileşenleri anlamındaki yer değiştirme bileşenlerinden bir nokta civarında ele alınan sonsuz küçük küpün açısal ve uzunluk olarak bozulmasını karakterize eden birim şekil değiştirme bileşenlerine (ε_{ij}) lineer elastisite teorisinde uygunluk denklemleri adı verilen lineer kısmi türevler (2.2) ile geçilir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2)$$

Burada hemen türev bağıntısından ε_{ij} girdileri ile oluşturulan 3x3'lük matrisin simetrik olduğu ve gerilme durumundaki gibi bir nokta civarında birim şekil değişiminin bağımsız 6 sabitle verilebileceği görülür. Burada da birim şekil değiştirme bileşenleri

matris formda tensör adı verilen yapılar ile ifade edilerek bu forma şekil değiştirme hali denir. Birim şekil değiştirme bileşenleri ile gerilme bileşenleri arasında bünye bağıntısı (2.3) olarak ortaya çıkan

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.3)$$

ifadesi bulunur. (2.3)'de E_{ijkl} bileşenleri her cismin bünyesini oluşturan malzeme için karakteristik elastik sabitlerden oluşur. Bu şekilde malzemeye ait elastik sabitler ile oluşturulan ilişki esasında genel Hooke kanunlarıdır. En genel halde çeşitli fiziksel düşünceler neticesinde varılan bir sonuç olarak bu sabitlerin bağımsız çeşidi 21 adettir. İncelenen problemin gereklerine göre, gereken sayıda sabit kullanılabilirken en basit elastik mühendislik malzemesinin sadece iki adet bağımsız sabiti vardır. Elastisite teorisine göre statik halde dengenin diferansiyel denklemleri (2.4) indis notasyonuna göre:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir Burada $\sigma_{ij,j}$ kartezyen eksen takımındaki gerilme bileşenlerinin eksen değişkenlerine göre kısmi türevlerini b_i ise yine aynı eksen takımındaki birim hacme etkiyen kütle kuvvetlerini ifade etmektedir Esasında bu ifade cisim içerisinden çekilip alınmış bulunan söz konusu çok küçük küpün yüzeylerinde oluşan gerilmeler ve kütle kuvvetleri için eksen doğrultularında yazılmış ötelenme denge denklemlerinin toplu halde gösterimidir. Cismin içinde bunlar olup biterken sınırlar 2 çeşit parçaya ayrılmaktadır:

- a) Sınır şartı olarak gerilme bileşenlerinin bir takım önceden belirlenmiş değerleri almasının şart koşulduğu yerler ki burada anlaşılabilirlik olarak bu kısımlarda uygulanmış dış yüklerin sınırdaki gerilme bileşenleri ile dengede olmaları veya bir başka anlatımla onların devamı olmaları durumu ifade edilmektedir. Sınır kuvvetlerin iç kuvvetler ile mekanik dengesi matematiksel olarak (2.5) deki gibi verilir.

$$\sigma_{ij}n_j = P_i = \overline{P_i} \quad (2.5)$$

b) Sınır şartı olarak yer değiştirme bileşenlerinin bir takım önceden belirlenmiş değerleri almasının şart koşulduğu yerler, burada da matematiksel olarak (2.6) denklemi verilebilir.

$$u_i = \overline{u_i} \quad (2.6)$$

Hemen takdir edilebilir ki üstü çizgili karakterler önceden belirtilen değerleri göstermektedir. Bu durumda tüm sınır S ile ifade edildiğinde S_1 ile ilk kısım S_2 ile de ikinci kısım gösterilirse $S \equiv S_1 \cup S_2$ ve tanım gereği $\emptyset \equiv S_1 \cap S_2$ denklikleri elde edilir. Böylece sınır üzerinde belirsiz yer kalmamıştır. $\emptyset \equiv S_1 \cap S_2$ denkleğinin gerekliliği konusunda şu ifade edilebilir ki kuvvetlerin belirtildiği kısımda (S_1) belirtilen kuvvetlere göre şekil değişimi olduğundan burada artık deplasmanların kuvvetlere bağlı olarak keyfilikleri kaldırılmış durumdadır, bunun tersi deplasmanların belirtildiği kısımlar (S_2) için de kuvvetlerin bu kısımlardaki keyfiliklerinin kaldırılması şeklinde olup aynı şekilde geçerlidir. Dolayısıyla bu anlatım verilen önermeyi gerektirir bir sonuç içerir. Özet olarak 3 adet (2.2) uygunluk denklemi, 6 adet (2.3) bünye denklemi, 3 adet (2.4) denge denklemi, 3 adet (2.5) mekanik sınır şartı, 3 adet (2.6) geometrik sınır şartı ile toplamda 15 denklem ve 6 adet (2.1) gerilme bileşeni, 3 adet (2.1) şekil değiştirme bileşeni, 6 adet birim şekil değiştirme bileşeni ile de toplam 15 adet bilinmeyen bulunmaktadır. Netice itibarıyla bu şartlar altında elastisite probleminin çözümü tektir. Bir başka anlatımla verilen tutarlı sınır koşulları altında tek σ_{ij} alanı ve buna karşılık tek ε_{ij} alanı vardır.

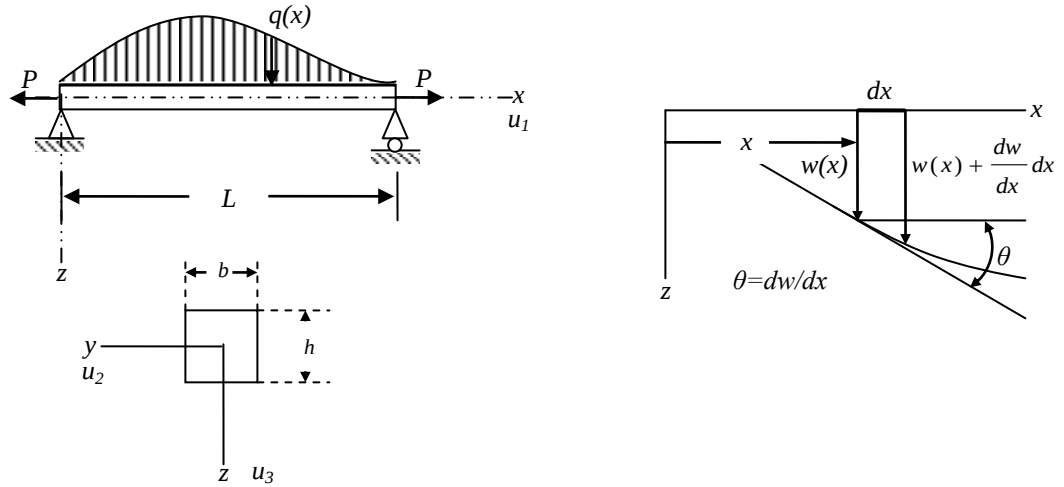
2.1.2 Euler – Bernoulli Kiriş Teorisi

Euler – Bernoulli kiriş teorisi, basitliği ve bir çok durumda yeterli sonuçlar vermesi dolayısıyla teknikte çok kullanıldığından çoğu zaman teknik kiriş teorisi adıyla da anılır. Bu ve ileri kısımlarda denklemlerde geçen bazı büyüklüklerin indislerinde koordinat eksenlerini simgeleyen 1,2,3 harfleri yerine bazı durumlarda x,y,z rakamları kullanılacaktır.

Bu teoriye göre tek boyutlu bir cisim gibi düşünölen kirişte bağımlı değişken olarak kiriş kesitinin ağırlık merkezinin çökmesi alınır. Analizde Bernoulli – Navier hipotezleri denilen şu kabuller kullanılır:

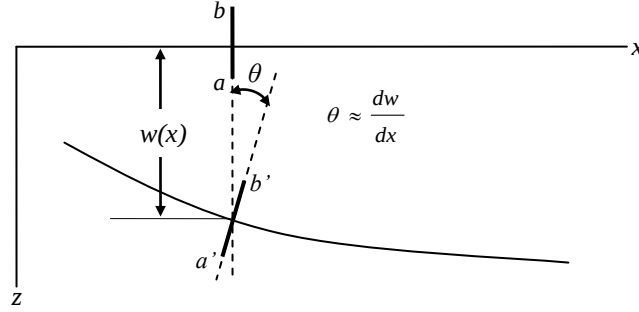
- Eğilmeden önce kiriş eksenine dik ve düzlem olan kesitler eğilme neticesinde kiriş eksenine dikliklerini ve düzlemliklerini muhafaza eder.
- Şekil değişimleri elemanın boyutları yanında mertebe itibariyle küçük olup geometriden kaynaklanan nonlinear etkiler ihmal edilir. Kısaca birinci mertebe teorisi ve dolayısıyla süperpozisyon prensibi geçerlidir.

Buna göre eğilme neticesinde kirişte bir takım lifler uzarken bazıları kısılacak bir çizgi üzerinde bulunanlar ise eski boylarında kalacaklardır. Bu çizgiye tarafsız eksen adı verilir. Tariften anlaşılacağı üzere tarafsız eksen çekme ve basınç bölgeleri arasındaki sınırı oluşturmaktadır. Yine ekstenel kuvvet neticesinde herhangi bir kesitteki bütün noktaların aynı yer değiştirmeyi yapacağı yani kesitin bütün olarak öteleneceğini ifade etmek mümkündür. Ayrıca şekil değiştirmeler küçük olduğundan süperpozisyon kanunu ve neticesinde 1. mertebe teorisi geçerli sayıldığından eğilme momenti ve normal kuvvetten meydana gelen şekil değişimleri arasında etkileşme bulunmayacaktır.



Şekil 2.1. Basit Mesnetli Bir Kiriş ve Bernoulli – Navier Hipotezine Göre Şekil Değişiminin Gösterimi

Açıklama bakımından Şekil 2.1 örnek alınmış olsun Buna göre L açıklıklı yayılı $q(x)$ yükü ile yüklü basit kirişin yüksekliği h eni ise b 'dir. Bu çalışma kapsamındaki kirişler şekilde görüldüğü gibi daima eğilmeye zorlandıkları düşey ekseninde simetriye sahip olacaklar ve yükleme de simetri eksenine göre kesit ekseninin oluşturduğu düzlem içinde bulunacaktır. Ayrıca yine şekilden takip edilebildiği gibi kiriş uçlarında eksenel tekillik kuvvetleri bulunabilir. Bu şekilde eğilmiş bulunan kiriş eksenine eğri bir form(elastik eğri) alacak ve yine adı geçen düzlemde bulunacaktır. Genel olarak kirişteki herhangi bir noktanın yer değiştirme vektörü olarak $u = u_1 \hat{i} + u_2 \hat{j} + u_3 \hat{k}$ kullanılabilir. Bu durumda amaç kabul edilen hipoteze göre yer değiştirme bileşenlerini ifade etmek olacaktır.



Şekil 2.2 Euler – Bernoulli Kirişinde Şekil Değiştirme – Birim Şekil Değiştirme
Bağıntılarının Geometrik Gösterimi

Bernoulli – Navier hipotezlerine göre şekil değiştirmiş bir kesit Şekil 2.2’de verilmiştir. Buradan hemen dik kesitin rijit olarak döndüğü ve nihayetinde de elastik eğriye dik olarak konumlandığını görmek mümkün olmaktadır. Böylece x eksenindeki şekil değişimi bu dönme ve varsa eksenel ötelenmeden kaynaklanırken z ekseninde ise şekil değişimi x bağlı bir çökme fonksiyonu ile ifade edilecektir. Düzlem durum için değinilen simetriden dolayı kesit üzerindeki noktaların y ekseninde herhangi bir yer değiştirmeleri söz konusu olmayacaktır. Bu anlatımlardan ve Şekil 2.2’den şekil değiştirme bileşenleri için şu ifadeler ulaşılır:

$$u_1 = u^n + u^b \quad (2.7.a)$$

$$u_2 = 0 \quad (2.7.b)$$

$$u_3 = w(x) \quad (2.7.c)$$

Buradaki eksenel şekil değiştirme bileşenleri ise n indisli normal kuvvettten ve b indisli eğilmeden kaynaklanan olmak üzere arada etkileşim olmadığı için ayrı ayrı verilmiştir ve açık olarak (2.8) de ifadeki gibi ifade edilirler.

$$u^n = u \quad (2.8.a)$$

$$u^b = -zw_{,x} \quad (2.8.b)$$

Şekil değiştirmeler yapılan kabuller neticesinde bir kez elde edildiğinde artık (2.2) denklemleri ile birim şekil değiştirme bileşenlerine rahatlıkla geçilebilir. Gerekli türev işlemleri neticesinde Bernoulli – Navier hipotezlerinden kurulan şekil değiştirme alanının sadece ε_{xx} birim şekil değişimini öngördüğü ve diğer şekil değiştirme bileşenlerinin sıfır kabul edildiği anlaşılmış olur.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^n + \varepsilon_{xx}^b \quad (2.9.a)$$

$$\varepsilon_{xx}^n = u_{,x} \quad (2.9.b)$$

$$\varepsilon_{xx}^b = -zw_{,xx} \quad (2.9.c)$$

Bu aşamadan sonra ihtiyaç homojen ve izotrop olduğu kabul edilen malzemeden müteşekkil kirişe Hooke kanununa göre uygun bir gerilme birim şekil değiştirme bağıntısı seçmektir. Esasında yapılan kabuller neticesinde elde edilen yaklaşık teoriye göre genel Hooke kanunları işletilirse σ_{xx} ‘den başka σ_{yy} ve σ_{zz} ‘nin de kiriş üzerindeki kuvvet tipi sınır şartlarının aksine sıfırdan farklı oldukları anlaşılır. Bu açıkça teorinin getirdiği bir hatadır. Bununla beraber yine de teori kabul edilebilir sonuçlar üretmektedir ki bu noktaya ileride dönecektir. Yapılan açıklamalar ışığında eksenel doğrultudan farklı doğrultudaki etkileşimleri göz ardı ederek kiriş liflerindeki şekil değişimlerinin sadece eksen doğrultusunda olduklarını farz ederek E elastisite modülü veya Young

modülü olmak üzere Hooke kanunun bilinen en basit halinin (2.10) kullanılması mümkündür.

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} \quad (2.10)$$

Netice itibariyle tekrar edilecek olursa, bu tip bir bünye bağıntısı kullanılması esasında ν Poisson oranının sıfır kabul edilmesiyle aynı anlama gelir. Bununla beraber pratikte Poisson oranı sıfır olmayan malzemeler için dahi teoremin makul ve güvenilir sonuçlar verdiği gerek deneysel yöntemlerle gerek de elastisite çözümleri ile kontrol edildiğinden bu durum bir sorun oluşturmaz. Buradan anlaşılacağı üzere ihmal edilen diğer eksenlerdeki gerilmelerin kendileri gibi şekil değişimi üzerindeki etkileri de σ_{xx} yanında küçüktür. Bünye bağıntısı bu şekilde belirtildikten sonra sıra denge denklemlerine gelmiştir. Birim şekil değişimi normal kuvvet kaynaklı ve eğilme kaynaklı olarak iki parçadan ifade edildiğinden bunlar ile alakalı olan σ_{xx} gerilmesi de bu şekilde bir ayrıma tabi tutulabilir.

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^n + \sigma_{xx}^b \quad (2.11)$$

Böylece eksenel denge olarak x ekseninde yazılan (2.4)'ün ilki olan (2.12) kullanılabilir.

$$\sigma_{xx,x}^n + \frac{Q}{F} = 0 \quad (2.12)$$

(2.12) 'de F , x eksenini boyunca sabit kabul edilen kesit alanını ve Q ise eksen boyunca birim uzunluk boyunca yayılı yüklemeyi göstermektedir. Bu şekilde Q/F ile hacme yayılı eksenel kuvvet elde edilmiştir. Diğer denge denklemleri ise eksenel gerilmenin eğilmeye yol açan bileşeni ile ilgili olup bunlarda (2.13) takımı ile ifade edilebilirler. Yalnız burada hipotez neticesinde varılan sonuçlardan şekil değişimine katkısı olmadığından dolayı sıfır kabul edilen σ_{xz} yardımcı gerilmeleri eğilme ile düşeyde yayılı yük arasındaki ilişkiyi gösterebilmek için kullanılmıştır.

$$\sigma_{xx,x}^b + \sigma_{xz,z} = 0 \quad (2.13.a)$$

$$\sigma_{zx,x} + \frac{q}{F} = 0 \quad (2.13.b)$$

(2.13)'de F yine kesit alanı ve q/F ifadesi ile de düşeyde uzunluk boyunca yayılı yük düşeyde etkiyen hacimsel kuvvete dönüştürülmektedir. (2.12) ve (2.13) denklem takımları kesit üzerinde alınacak entegraller ile mühendislik kullanımına daha uygun olan kesit tesirlerine dönüştürülebilir. Buna göre normal kuvvet için (2.14) eşitliği elde edilince normal kuvvetin dengesi olarak da (2.12)'nin karşılığı olan (2.15) elde edilecektir.

$$\iint_F \sigma_{xx}^n dF = N \quad (2.14)$$

$$N_{,x} + Q = 0 \quad (2.15)$$

Aynı şekilde hareketle (2.13) takımı için de gereken entegraller uygulanırsa M ile moment ve T ile kesme kuvveti tanımları sırasıyla (2.16.a) ve (2.16.b) de olduğu gibi verilebilir. Bu durumda (2.13.a) nın karşılığı olan moment ve kesme kuvveti bağıntısı (2.17) ile (2.13.b)'nin karşılığı olan düşey denge (2.18) bağıntısı elde edilecektir.

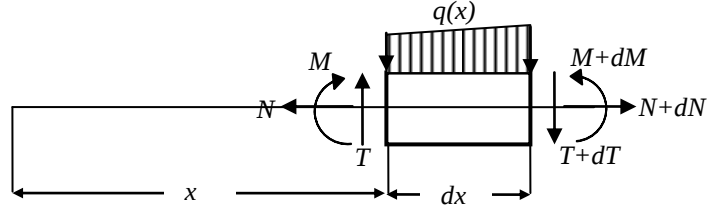
$$\iint_F z \sigma_{xx}^b dF = M \quad (2.16.a)$$

$$\iint_F \sigma_{xz} dF = T \quad (2.16.b)$$

$$M_{,x} - T = 0 \quad (2.17)$$

$$T_{,x} + q = 0 \quad (2.18)$$

Elde edilen denge denklemlerini kiriş üzerinden alınan dx uzunluğundaki elemanter parça üzerinden elde etmek de mümkündür. Anlatımdaki basitliği dolayısıyla çoğunlukla kullanılan bu yöntem için Şekil 2.3 verilebilir.



Şekil 2.3 Kiriş denge Denklemlerinin Elemanter Teori ile Doğrudan Elde Edilmesinde Kullanılan Sonsuz Küçük Kiriş Parçası ve Üzerine Etkiyen Kuvvetler

Şekil 2.3'e göre yazılan normal kuvvet, düşey denge ve moment dengesi denklemleri neticesinde sırasıyla (2.15) (2.17) ve (2.18)'in aynen elde edilebileceği aşıkardır. Bu itibarla bünye bağıntılarını da entegral ile kesit genelini ifade edecek şekle dönüştürmek mümkündür. Momenti oluşturan gerilme dağılımı düşünülürse gerekli entegral neticesinde (2.19) elde edilir. (2.19) da görülen I sabitine kesitin eğilme yönündeki (burada y etrafında) atalet momenti denir ve bu büyüklük tamamen kesit geometrisine bağlıdır. Aynı şekilde normal kuvvetin ilgili bünye bağıntısı için de (2.20) geçerli olacaktır.

$$M = -EIw_{,xx} \quad (2.19)$$

$$N = EFu_{,x} \quad (2.20)$$

Sınır koşulları olarak yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sınırlarda önceden belirlenmiş değerleri aldıkları iki tip kısım olduğundan bahis edilmişti. Kuvvet tipi sınır koşullarının bulunduğu kısımda gerilmelerin kesit üzerindeki bileşkeleri olan moment ve kesme kuvveti için (2.21) bağıntıları bulunur.

$$(M = \bar{M})|_{\sigma} \quad (2.21.a)$$

$$(T = \bar{T})|_{\sigma} \quad (2.21.b)$$

Benzer şekilde yer değiştirme tipi sınır koşulları için geometrik tipte (2.22) bağıntıları geçerli olacaktır.

$$(u = \bar{u})|_{\varepsilon} \quad (2.22.a)$$

$$(w = \bar{w})|_{\varepsilon} \quad (2.22.b)$$

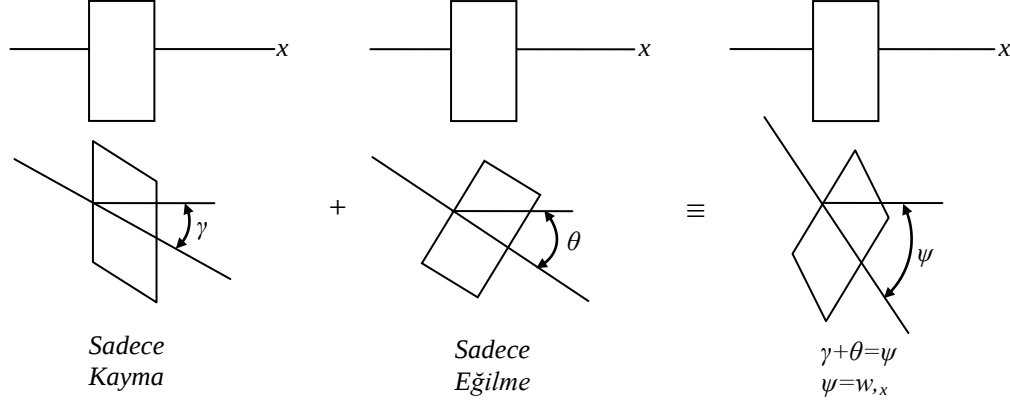
$$(w_{,x} = \bar{w}_{,x})|_{\varepsilon} \quad (2.22.c)$$

Buraya kadar verilen denklemler ve anlatılanlar ile Euler – Bernoulli kirişi için ayrı ayrı gerilme ve şekil değiştirme durumları ve ileride kullanılmak üzere kabul edilen bünye bağıntısı verilmiştir. Kirişin denklemlerinin bir bütün olarak ele alındığı ve bünye bağıntısının kullanıldığı yer ise bu işlemin varyasyonel olarak geereştirileceği 3. Kısım olacaktır.

2.1.3 Timoshenko Kiriş Teorisi

Euler – Bernoulli'ye göre $w(x)$ çökmesi sadece eğilme momentinin katkısıyla hesaplanmaktadır. Buna göre şekil değişiminde katkısı dikkate alınmayan kesme kuvvetlerinin daha doğrusu kayma gerilmelerinin etkileri yüksekliği uzunluğuna göre küçük olan kirişlerde (ince kirişler veya alçak kirişler) sorun oluşturmadığından Euler – Bernoulli teorisi yeterlidir hükmüne varılabilir. Yükseklik (h) ve açıklık (L) arasındaki bu oranın yükseklik lehine bozulduğu kirişler inceleneceği zaman, Euler-Bernoulli'nin düşey yer değiştirmelerden sadece eğilme momentini sorumlu tutan hipotezinin getirdiği hata kabul edilemez mertebelere yükselir. Bu durumda bir şekilde yükleme neticesinde kesit içerisinde oluşan kayma gerilemelerinin de şekil değişimine etkisini hesaba katacak yeni bir teoriye ihtiyaç duyulacaktır. Timoshenko kiriş teorisi bu gereksinimleri karşılayan, bununla beraber pratik uygulama imkanı da nispeten kolay olan Euler-Bernoulli'den daha genel bir teordir. Timoshenko'ya göre artık eğilmeden kaynaklanan kesit dönmesi yanında bir de kayma gerilmesinden kaynaklanan bir kısım bulunmaktadır. şekil 2.4'de sadece kayma, sadece eğilme ve birleştirilmiş halin kesit üzerindeki etkileri görölmektedir. Buna göre artık sadece eğilmeden meydana gelen

dönme $\theta(x)$ ile gösterilirken sadece kaymadan meydana gelen dönme ise $\gamma(x)$ şeklinde bağımsız bir fonksiyonla gösterilecektir.



Şekil 2.4 Timoshenko Kirişinde Şekil Değişiminin Basit Hallerden Süperpozisyonla Elde Edilişinin Çok İnce Kiriş Parçası Üzerinde Geometrik Temsili

Şekil değiştirmelerin küçük olması neticesinde eğilme ve kayma etkilerinin meydana getirdiği dönmeler süperpozisyona tabi tutulursa (2.23) yeni durumda elastik eğrinin eğimi elde edilir. Netice itibarıyla Bernoulli – Navier hipotezinin “dik kesitler eğilme neticesinde düzlemliklerin korurlar ve elastik eğriye dik konumlanırlar” şeklindeki maddesinin “dik kesitler düzlemliklerini muhafaza ederler bununla beraber artık elastik eğriye dik değildirler” şeklinde değiştirilmesi gerektiği anlaşılmış olur. Bu anlatımlardan anlaşılabacağı üzere ve Şekil 2.4’den takip edilirse Timoshenko kirişi için yer değiştirme alanı (2.24) takımı ile verilir.

$$\theta(x) = w_{,x} - \gamma(x) \quad (2.23)$$

$$u_1 = u - z\theta(x) \quad (2.24.a)$$

$$u_2 = 0 \quad (2.24.b)$$

$$u_3 = w(x) \quad (2.24.c)$$

Bu şekil değiştirme takımından elde edilen birim şekil değiştirme bileşenlerine yine (2.2) ile geçmek mümkündür. Böylece uygunluk denklemleri de denilen (2.25) birim şekil değiştirme denklemleri elde olunur.

$$\varepsilon_{xx}^n = u_{,x} \quad (2.25.a)$$

$$\varepsilon_{xx}^b = -z\theta_{,x} \quad (2.25.b)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\gamma(x) \quad (2.25.c)$$

(2.25)'de yine eğilme ile eksenel normal kuvvetin şekil değiştirme bileşenlerinin ayrıldığına ve diğer birim şekil değiştirme bileşenlerinin özdeş olarak sıfır ettiklerine dikkat edilmelidir. Kullanılacak bünye bağıntıları yine lineer elastik homojen izotrop malzemeye göre Euler – Bernoulli'dekine benzer olarak seçilecektir.

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} \quad (2.26)$$

Ancak gerçekte kayma gerilmesi kesit üzerinde değiştiğinden esasında kayma açısı da kesit üzerinde derinlik boyunca değişecektir. Yani kayma açısı $\gamma = \gamma(x, z)$ şeklinde bir fonksiyondur. Kayma açısı γ 'nın kesit üzerinde sabit kabul edildiği bir formülasyon geliştirmek isteniyorsa kesit için eş değer ortalama bir kayma açısı tanımlanmalıdır. Bu eş değerlilik enerji kriterlerinden hareket edilerek kesit için kayma açısını ortalama olarak alma anlamına gelecek bir çarpanın, k_s , devreye sokulması ile sağlanabilir.(2.27) Böylece artık kayma gerilmesinin bünye bağıntısı (2.28) kesit şekline bağlı olan bu düzeltme faktörünü içerecektir.

$$\gamma(x, z) \cong k_s \gamma(x) \quad (2.27)$$

$$\sigma_{xz} = Gk_s \gamma(x) \quad (2.28)$$

Sonuç olarak Euler – Bernoulli modeline benzer şekilde Timoshenko için de benzer moment (2.17) ve düşey denge (2.18) denklemleri yazılabilir. Ancak bu sefer ki bünye

bağıntılarında kesme kuvvetinin de işi düşünüldüğünden birtakım değişiklikler yapmak icap edecektir. Kesit üzerinde gereken entegraller alındıktan sonra moment ve kesme kuvvetinin bünye bağıntıları sırasıyla (2.29) ve (2.30) ile verilirken normal kuvvet için (2.20) geçerliliğini koruyacaktır.

$$M = -EI \theta_{,x} \quad (2.29)$$

$$T = GFk_s \gamma \quad (2.30)$$

Timoshenko kirişi için verilecek sınır koşulları da önceki modele benzer olacaktır, bununla beraber yeni tanıştırılan bağımsız fonksiyonlar da bir takım ön değerleri almak durumundadır. Bu durumda mekanik sınır şartlarının verildiği kısımda (2.21) denklem takımları aynen geçerli olacaktır. Geometrik sınır şartları için ise normal yerdeğiştirme koşulu ve çökme koşulu aynı kalmaya devam ederken dönme için yeni tanımlanan fonksiyon gereğince (2.31) yürürlükte olacaktır.

$$(\theta = \bar{\theta})|_e \quad (2.31)$$

Euler – Bernoulli’de olduğu gibi bünye bağıntıları dikkate alınarak geliştirilecek, gerilme ve şekil değiştirmeleri birbirine bağlayan formülasyonlar varyasyonel inceleme amacıyla 3. Kısım’a bırakılmıştır.

2.1.4 Elastik(Winkler) Zemin Etkisi

Uygulamada çoğu yerde kirişler sürekli tarzda mesnetlenirler. Bu durum olayın diferansiyel denklemine kabul edilen zemin davranışı için geliştirilen matematiksel modelin adaptasyonu ile göz önüne alınır. En yaygın, kullanımı ve adaptasyonu en basit bununla birlikte sürekli mesnetlenme durumunda çoğu zaman iyi bir fikir verebilecek, mühendislik yaklaşımları içinde zemin modellemede ilk akla geleni Winkler’in elastik yay modelidir. Buna göre zemin ayrı ve birbirine sonsuz yakın konumlandırılmış (yani sürekli) yaylar ile temsil edilmiştir. Dolayısıyla bu durumda her zemin çeşidi için

değişik alınabilecek deneylerden elde olunan bir yay sabiti k_z tanımlamak gerekmiştir. Winkler'e göre sürekli olan çökme ile adı geçen yay sabitinin çarpılması neticesinde elde edilen tepki kuvveti de yayılı şekilde (q_z) ve sürekli olarak çökmeye ters yönde etkiyecektir. (2.32) Bu izahtan esasında kirişin yayılı zemin tepkisi q_z 'nin dış q yayılı yükünden çıkarılmasıyla (2.33) oluşan yeni bir yayılı q^* yükü etkisi altında olduğu anlaşılmaktadır.

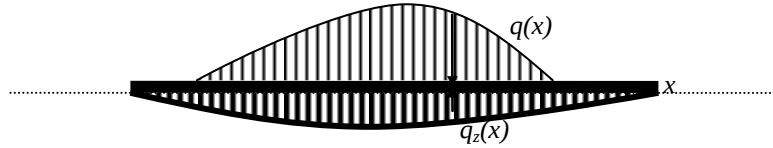
$$q_z = k_z w \quad (2.32)$$

$$q^* = q - q_z \quad (2.33)$$

Yeni elde edilen q^* yayılı yükü (2.18) düşey denge denklemlerinde kullanıldığına Winkler zeminine oturan kiriş (2.34) elde edilecektir.

$$T_{,x} + q - k_z w = 0 \quad (2.34)$$

(2.34) daha önceden verilen her iki kiriş modeli için de geçerlidir. Winkler zeminin oluşturduğu tepkinin bir ilüstrasyonu ise Şekil 2.5 de verilmiştir.



Şekil 2.5 Winkler Zeminine Oturan Kirişin Tabanında Çökmeyle Doğru Orantılı Olarak Oluştugu Varsayılan Yayılı Kuvvetin Gösterimi

2.2 Kirişlerde Özdeğer Problemleri

Bu kısımda bir çok fiziki olayın izahında ve matematiksel modelinde yer alan özdeğer problemleri bazı genel bilgiler eşliğinde tanıtılacaktır. Özdeğer problemlerinin uygulamada karşılaşıldığı yerlere ve önemine teknik mekaniğin bakış açısı içinden

değinilecektir. Yine teknik mekaniğin bakış açısıyla özdeğer problemleri sınıflandırmaya tabi tutulacak ve önceden verilen giriş modelleri için matematiksel ifadeleri elde edilecektir. Denge ,uygunluk ve bünye denklemlerinin birleştirilmesi yine 3. Kısım'a havale edilecektir. Bu kısımda probleme özdeğer özelliği katan bölümün izahı olacaktır.

2.2.1 Genel Bilgiler ve Tanımlar

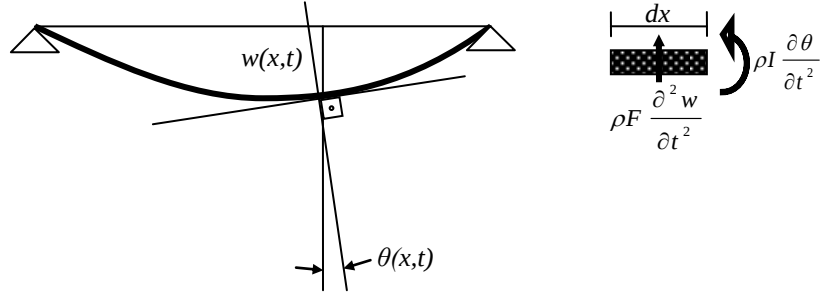
Genel olarak özdeğer problemi $A(u) - \lambda u = 0$ formatını haiz olup bir A operatörünün bir u fonksiyonuna uygulanan halinin yine fonksiyonun uzayına dönüşümünü temsil eder karakterdedir. Buna göre verilen denklemin çözümü olan u fonksiyonları öz fonksiyonlar olurken yine denklemi u öz fonksiyonları ile simültane sağlayan λ parametresinin mümkün her değeri özdeğerler olarak adlandırılır. Bu şekliyle matematiksel izahlar özdeğer problemlerinin pratik uygulamalarını işaret etmekten uzaktır. Bununla beraber şekil değiştiren cisimler mekaniği içinden olmak üzere çeşitli yapı sistemlerinin serbest titreşim özelliklerinin ve denge hallerinin kararlılığının araştırılmasında her zaman özdeğer tipi denklemler kurulması gerektiği gerçeği konunun önemini izah eder. Hemen anlaşılacağı üzere burada yapılacak sınıflandırma teknik mekanik yönünden olacaktır.

2.2.2 Serbest Titreşim Problemi

Titreşim bir dinamik hareket çeşididir. Buna göre bir sistem çeşitli dış ve iç kuvvetler ile dinamik etkiden dolayı oluştuğu varsayılan atalet kuvvetleri etkisi altında denge noktası etrafında periyodik yani tarz bakımından benzer salınımlar yapar. Eğer bu olguda sadece iç kuvvetler ile atalet kuvvetleri bulunursa olursa bu duruma serbest titreşim denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere serbest titreşim halinde dış kuvvetler sıfırken sistem herhangi bir ilk konum veya hız ile birlikte iç kuvvetlerin ve atalet kuvvetlerinin etkisi altında denge durumu etrafında tekrarlayan hareketler yapar. Serbest titreşim bu şekliyle cismin iç yapısına ve geometrisine bağlı olduğundan her sistem için ayrı karakter taşıyacağı aşıkardır. Sistemlerin serbest titreşim karakterlerinin bilinmesi dinamik

davranışları ve dış yük etkisi altında oluşan rezonans ve benzeri durumların araştırılması bakımından önem taşır.

Çalışmada seçilen yapı elemanı kiriş olduğundan bu kısımda kirişlerin enine titreşim özellikleri ile ilgilenecektir. Kirişler ile ilgili denge ve uygunluk denklemlerinin verildiği kısımdakine benzer olarak burada da elastisite teorisi uygulamaya konulabilir ancak daha kolay olan elemanter gösterim vasıtasıyla da titreşim ile ilgili denklemler elde olunabileceğinden basitlik ve sadelik adına burada ikinci belirtilen seçilecektir. Buna göre kirişler enine titreşirken düşey serbestliği (w) kullandıkları için dinamik etki neticesinde oluşan atalet kuvvetleri de bu serbestlik doğrultusunda bulunacaktır.



Şekil 2.6 Serbest Titreşim Neticesinde Kirişte Oluşan Zaman Bağlı Deformasyon ve Yayılı Atalet Kuvvetlerinin Diferansiyel Bir Elemanda Gösterimi

Şekil 2.6 titreşim neticesinde dx uzunluğunda bir parça üzerinde oluşan atalet etkilerini göstermektedir. Buna göre enine titreşim kiriş boyunca sürekli tarzda olduğundan ($w(x,t)$) atalet kuvvetleri de kiriş üzerinde sürekli yayılı dinamik kuvvetler (q_d) şeklinde düşünülebilir. Newton'un 3. hareket yasasının (2.18) düşey denge denkleminin uygulanması ile ve D'Alembert Prensiplerinin dinamik denge adı altında kullanılması neticesinde m birim uzunluğun kütlesi olmak üzere (2.35) elde edilir

$$T_{,x} + q_d = 0 \quad (2.35.a)$$

$$T_{,x} - m \frac{d^2 w}{dt^2} = 0 \quad (2.35.b)$$

Aynı şekilde yine Şekil 2.6'dan takip edilebileceği gibi kesitin ağırlık merkezine yerleştirilen ve eğilmeye zorlanan eksen etrafında dönmesinin getirdiği dinamik etkiler de Newton'un 3. yasası ve D'Alambert Prensibi neticesinde düşünülen dinamik denge uyarınca kesitin dönme ataleti şeklinde moment dengesine eklenebilirler. Bu durum (2.19) moment dengesi denkleminde yansıtılırsa (2.36) elde edilir.

$$M_{,x} + \rho I \ddot{\theta} - T = 0 \quad (2.36)$$

Titreşimin periyodikliğinin basit harmonik fonksiyonlar ile ifade edilebildiği kararlı hal durumunun burada da geçerli olduğu düşünülürse bağımsız değişkenlerin çarpım şeklinde fonksiyonlara dönüştürüldüğü (2.37) formları geçerli olur.

$$w(x, t) = w(x) \sin \omega t \quad (2.37.a)$$

$$\theta(x, t) = \theta(x) \sin \omega t \quad (2.37.b)$$

$$T(x, t) = T(x) \sin \omega t \quad (2.37.c)$$

$$M(x, t) = M(x) \sin \omega t \quad (2.37.d)$$

(2.37) (2.35) ve (2.36)'da ilgili türev işlemleri kullanılarak ve gereken sadeleştirmeler yapılarak $\omega^2 = \lambda$ olmak üzere düşey dinamik denge için (2.38) ve moment dinamik dengesi için ise (2.39) denklemleri elde edilir.

$$T_{,x} - \lambda \rho F w = 0 \quad (2.38)$$

$$M_{,x} - \lambda \rho I \theta - T = 0 \quad (2.39)$$

Bu kabuller ile (2.37) ve 'de geçen ω ifadesi sistemin serbest titreşim frekansı $w(x)$ ile ilgili mod şekli olmuş olur. Netice itibariyle titreşim tipindeki özdeğer problemi ile amacın burada geçen frekans değerlerini ve ilgili mod şekillerini bulmak olduğu ifade edilebilir.

Denklemler ile ilgili bir diğ er önemli nokta ise hem Euler – Bernoulli hem de Timoshenko kirişlerinde dönme ataletine katkı olarak daima sadece eğilmeden dolayı kesitte vuku bulan dönmenin düşünülmesidir. Esasında bu şekilde (2.39) da geçen θ , Euler – Bernoulli için aynı zamanda elastik eğrinin eğimi olan $w_{,x}$ 'e eşit iken, Timoshenko için ise elastik eğrinin eğimiyle kayma açısının farkına ($w_{,x}-\gamma$) eşit olacaktır.

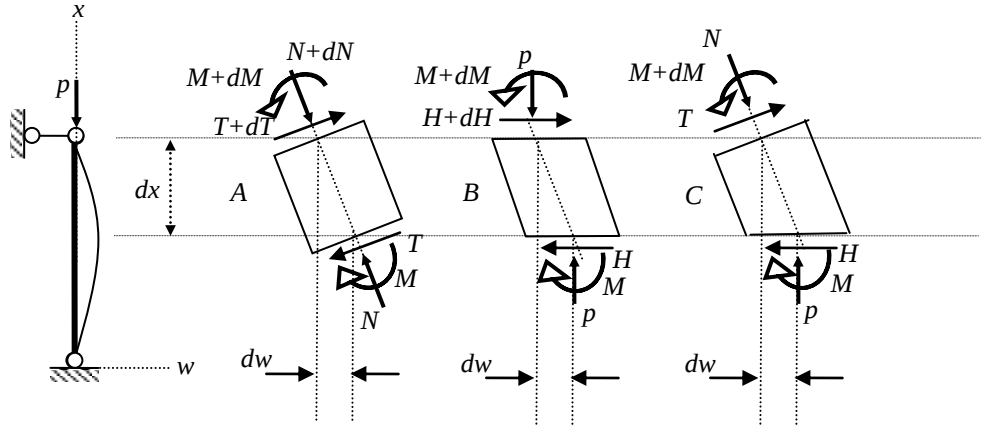
Konu b t nl ğ  ve uygunluk bakımından denklemlerin birleştirilmiş hali ile ilgili genel durum 3. Kısım'da verilecektir. Burada görülen o ki, özdeğerler probleme denge denklemleri aracılığı ile intikal etmektedirler.

2.2.3 Elastik Statik Stabilite Problemi

Teknik mekanikte karşılaşılan önemli  zdeğer problemlerinden biri de sistemlerin stabilitesidir. Genel olarak yapısal stabilite geometrik ve elastik şeklinde iki bölüme ayrılır. Geometrik stabilite sistemin geometrisine, yüklemenin biçimine ve mesnetlenme şartlarına göre verilen koşullar altındaki davranışın stabilitesini konu edinirken (yükün taşınıp taşınamayacağı veya sistemin labil olup olmadığı) , elastik stabilite ise belirli bir şekilde yüklenmiş bir sistemin hangi y k durumlarında ve hangi y k seviyelerinde stabil olduğunu araştırır. Bu tanımlardan anlaşılacağı gibi herhangi bir labil olmayan sistemin verilen koşullar altındaki stabilitesi elastik stabilitenin araştırma alanı içerisinde kalmaktadır. Bu sistem en genel haliyle üç boyutlu bir cisim olabileceği gibi kabuk plak gibi daha basitleştirilmiş yapısal modellerden olan iki boyutlu sistemlere de dahil olabilir. Bu çalışmada önceden belirtildiği şekilde kirişlerin stabilitesi göz önüne alınacaktır.

Daha  nceki kısımlarda kirişlerin mühendislik veya teknik teorisinden bahsedilmiştir. Netice olarak bu kısımda tekrardan kaçınarak daha önceden elde edilmiş sonuçlar kullanılacaktır. Buna göre kirişlerde karşılaşılan stabilite problemlerinden en yaygın olanı eksenel basınç yükü nedeniyle meydana gelen burkulma olayıdır. Eksenel basınç yükünün belli bir değerinden sonra sistem için orjinal konuma çok yakın fakat kiriş

ekseninin orjinal halinden saptığı denge halleri söz konusudur. Yük bu değere ulaştığı anda kaçınılması imkansız olan saptırıcı etkiler neticesinde kiriş derhal yakın bir denge konumuna geçecektir. Buna sebep olarak bu şekilde burkulmanın toplam potansiyel enerjiyi orjinal halde kalarak boy kısalması durumundan daha küçük bir değere ulaştırabilmesi gösterilebilir. Bu şekilde her doğa olayında olduğu gibi sistem gereken şartlar altında minimum enerji kullanarak yeni bir denge konumuna ulaşmaktadır. İlgili açıklamaları pekiştirmek ve yakın denge konumundan alınan diferansiyel elemanlar üzerinden yazılacak denge denklemlerini daha anlaşılır kılmak için Şekil 2.7 kullanılabilir.



Şekil 2.7 Burkulma Halinde Temel Mod Şekli ve Bu Durumda Denge Denklemlerini Yazmak İçin Kullanılan Diferansiyel Elemanlar

Burada da titreşim probleminde olduğu gibi elastisite denklemlerinden hareket yerine daha kolay ve anlaşılabilir olan mukavemetin kesit tesirlerinin kullanıldığı diferansiyel parça için düşünülen denge prensiplerinden hareket edilerek gereken denklem takımları elde edilecektir. Bu amaca hizmet etmesi bakımından Şekil 2.7’de gösterilen farklı koordinatlara nispet edilen değişik kesit tesirleri ile kurulacak denklemler Kısım 3’de gerçekleştirilecek problemin genel formülasyonu açısından önem arz etmektedir. Buna göre daima elastik eğriye dik olan kesme kuvveti, aynı zamanda elemanter mukavemette de kullanılan, T ile gösterilirken daima x eksenine dik kalacak kesme kuvveti H ile gösterilmiştir. Bu durumda bir anlamda T maddesel koordinatlara H ise uzaysal

koordinatlara göre tanımlanmış kesme kuvvetleri olmaktadır. Yine bu bakış açısıyla eksenel normal kuvvet maddesel koordinatlara göre N ile gösterilirken uzaysal koordinatlara göre denge esasından dolayı daima p dış yüküne eşit olacaktır. Moment için bu şekilde bir ayırım söz konusu değildir. Bu durumda Şekil 2.7'deki A durumunda yazılan moment dengesi neticesinde maddesel koordinatlarda (s) moment denklemi (2.40) elde edilirken B durumunda yazılan moment dengesinden uzaysal koordinatlarda (x) moment denklemi (2.41) elde edilir.

$$M_{,x} - T = 0 \quad (2.40)$$

$$M_{,x} - pw_{,x} - H = 0 \quad (2.41)$$

Benzer şekilde B durumunda yazılacak enine ötelenme denge denklemi neticesinde (2.42) elde edilir. Eğer Winkler zemini söz konusu olursa enine denge Winkler tepki kuvvetlerinin ilavesi ile derhal (2.43) formunu alacaktır.

$$H_{,x} = 0 \quad (2.42)$$

$$H_{,x} - k_z w = 0 \quad (2.43)$$

Kiriş elastik eğrisinin eğimi daha önceden ifade edildiği gibi $w_{,x} = \psi$ şeklinde ifade edilirse ve burkulma denge formunun ilk duruma çok yakın olup bu hal için $\cos\psi \approx 1$ ve $\sin\psi \approx \psi$ alınabileceği öngörülürse Şekil 2.7'de gösterilen C durumunda enine ve eksenel doğrultuda yazılan denge denklemleri (2.44.a,b) elde olunur.

$$H \equiv T - N\psi \quad (2.44.a)$$

$$p \equiv T\psi + N \quad (2.44.b)$$

(2.44)'den N yok edilirse ve birim yanında merteye itibariyle küçük olan ψ^2 'nin ihmal edilebileceği düşünülürse H, T ve p arasındaki ilişkiyi ifade eden (2.45) elde edilir. Esasında aynı zamanda eğimlerin küçük kabul edilmesi neticesinde $s \approx x$ alınabileceği öngörülmüştür.

$$T - p\psi - H = 0 \quad (2.45)$$

Ele alınan kirişin Euler – Bernoulli tipi olması veya Timoshenko tipi olması daha önceden belirtildiği gibi ψ yerine θ alınması veya $\theta+\gamma$ alınması ile ve T için bünye denkleminin (2.30) dikkate alınması ile belirlenebilecek bir durumdur.

Bu şekilde elastik stabilitede karşılaşılan özdeğer probleminin temel denklemleri kurulmuştur. Buna göre anlaşılmaktadır ki bu çeşit stabilite probleminde eksenel yükün burkulma şartına yol açan değerleri öz değerler olarak ortaya çıkarken bu şartlar altında denklemleri sağlayan w çökme tipleri de ilgili özdeğerlere karşı gelen öz fonksiyonları (mod şekilleri) oluşturmaktadır.

2.2.4 Dinamik Stabilite Problemi

Daha önceden kirişlerde dinamik stabilite hakkında açıklayıcı bilgi verilmişti. Bu kısımda [1]'de gösterildiği şekliyle konunun matematiksel yönü izah edilmeye çalışılacaktır. Buna göre Şekil 2.7'de gösterilen yükleme altındaki kirişin iyi bilinen yönetici diferansiyel denklemi (2.46) ile verilebilir.

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + p \frac{d^2 w}{dx^2} + \rho F \frac{d^2 w}{dt^2} = 0 \quad (2.46)$$

(2.46) kiriş enine titreşimlerinden dolayı D'Alambert Prensibi düşünülerek dinamik yükün statik stabilite denklemine eklenmesiyle elde edilmiştir. Bu durum daha önceden belirtildiği gibi $p = p_s + p_d \cos \Omega t$ şeklinde eksenel yükün dinamik karakterli olarak serbest titreşim ile etkileşime girmesinin sonucudur. (2.46) için (2.47) şeklinde bir seri çarpım çözümü düşünülebilir.

$$\varphi_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (2.47.a)$$

$$w(x, t) = F_k(t)\varphi_k(x), (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.47.b)$$

Bu seçim ile esasında problemin sınır şartları sağlanmış olmaktadır. Dikkat edilirse önerilen çözümde karşılaşılan koordinat fonksiyonları φ_k hem serbest titreşim hem de statik stabilitede karşılaşılanlar ile aynı formdadır. (2.47)'nin (2.46)'ya yerleştirilmesi neticesinde gerekli işlemler de yapıldıktan sonra (2.48) elde edilir.

$$\rho F \frac{d^2 F_k}{dt^2} + EI \frac{k^4 \pi^4}{l^4} F_k - p \frac{k^2 \pi^2}{l^2} F_k = 0, (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.48)$$

(2.48) F_k fonksiyonlarının sağlaması gereken şart olarak ortaya çıkmaktadır. (2.48)'de dikkat edileceği üzere F_k çarpanlı terimlerde F_k 'nin katsayılarının (2.49)'da verilen şekliyle sırasıyla serbest titreşimin k . mod frekansı ve statik halin k . burkulma yükü oldukları anlaşılmaktadır. (2.49)'da verilen atamalar da kullanıma sokulursa (2.48)'e eşdeğer (2.50) formuna ulaşılır.

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \quad (2.49.a)$$

$$p_k = \frac{k^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (2.49.b)$$

$$\Phi_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{p_s}{p_k}} \quad (2.49.c)$$

$$\mu_k = \frac{p_d}{2(p_k - p_s)} \quad (2.49.d)$$

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \Phi_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \Omega t) f_k = 0 \quad (2.50)$$

(2.50) her k için gerçekleşme durumunda olduğundan artık k indisi kaldırılarak (2.51) kullanılabilir.

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \Phi^2 (1 - 2\mu \cos \Omega t) f = 0 \quad (2.51)$$

(2.51) literatürde Mathieu denklemi olarak geçmektedir ve bu denkleme teorik fiziğin bir çok alanında rastlanmaktadır. Öneminden dolayı bir çok araştırmaya konu olan Mathieu denkleminin buradan itibaren daha ayrıntılı çözümüne girmeden sadece bazı özelliklerinden bahsedilecektir. Buna göre denklemde görülen parametreler (Ω, μ, Φ) arası bazı matematiksel bağıntılar neticesinde çözüm sınırsız olmaktadır. Bu ise daha önceden bahsedilen dinamik stabilite problemi için parametrik instabilite olayına karşı gelmektedir. Yani dış zorlamanın ve kirişin serbest titreşim frekansının belirli karakteristik ilişkilerinde davranış periyodik titreşim yerine zamanla sonsuza genlikli bir hal alma istidadındadır. Dolayısıyla denklemin çözümü neticesinde parametreler arası ilişkilerin ifade edileceği bir parametrik düzlem üzerinde çözümün sınırlı ve sınırsız olduğu bölgeler bulunacaktır. Kısaca dinamik stabilite problemi için bu durum titreşim ve burkulma parametrelerinin etkileşim düzlemi olarak ortaya çıkacaktır. Belirli bazı ilişkilerin bir takım eğriler olarak çizilerek durumun stabil ve instabil olduğu bölgelerin düzlem üzerinde işaretlenmesi ile, belirli zorlama ve titreşim frekansları için, davranış kestirilebilecektir. Öyleyse amaç bir şekilde adı geçen düzlemde stabil olan ve olmayan bölgeleri ayıran parametrik ilişkileri elde etmek olacaktır. Buna göre [1]'de belirtildiği üzere diferansiyel denklemler ile alakalı Floquet'e ait bazı matematiksel düşünceler neticesinde $T=2\pi/\Omega$ olmak üzere kiriş titreşiminin T periyodlu çözümleri stabil bölgeleri sınırlarken, $2T$ (yani serbest titreşim frekansının dış yük frekansının yarısı olduğu durum $\omega=\Omega/2$) periyodlu çözümleri ise instabil bölgeleri sınırlandırmaktadır. Teknik mekanik yönünden [2]'de belirtildiği üzere $2T$ periyodlu instabil bölgeleri sınırlayan çözümlerin önemi büyüktür. Zira sorunsuz bölgeden ziyade sorunlu bölgenin bilinmesi daha kullanışlıdır. Dolayısıyla [2]'de yapıldığı gibi burada da parametrik düzlemde direkt olarak instabil bölgeleri sınırlayan $2T$ periyodlu çözümler dikkate alınacaktır. Bu itibarla (2.51) için [1]'de önerilen pratik çözüm yolu ile denklemin genel çözümünü araştırmak yerine instabil bölgelerin sınırlarını belirlemek daha kullanışlı olacaktır. Buna göre f 'nin hemen hemen periyodik bir davranış sergileyebilmesi için bir trigonometrik seri açılımını kabul ettiği düşünülmektedir. Bu açılım $2T$ için (2.52)'deki gibi olacaktır.

$$f(t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} (a_k \sin \frac{k\Omega t}{2} + b_k \cos \frac{k\Omega t}{2}) \quad (2.52)$$

Bu şekliyle (2.52) (2.51)'e yerleştirilirse bilinmeyen katsayılar (a_k, b_k) için yazılacak denklemlerin kurulumu olan ve girdileri problemin parametreleri ile ilgili matematiksel ifadeler içeren bir matris elde edilecektir. Çözümün belirtildiği üzere instabil bölge sınırında olması için matrisin tersinin alınamaması kısaca sistemin denklem sisteminin çözümünün olmaması gerekir. Bu da bilineceği üzere katsayılar determinantının sıfıra eşitlenmesi ile mümkündür. Bu şekilde girdileri parametreler ile kurulu matematiksel formlar olan determinantın sıfıra eşitlenmesi ile parametrik düzlem için instabil bölgelerin sınırlarını belirleyen parametreler arası ilişkileri elde edilecektir. Hemen takdir edileceği üzere, sonsuz sayıda terim içeren seri çözümü için pratik sonuçlar elde edilebilmesi belirli sayıda terim kullanılmasıyla mümkündür. Bu amaçla sadece ilk terimin kullanımı neticesinde dahi pratik kullanım açısından yeterli fikirler veren çözümlerin elde edilebildiği [1]'de belirtilmiştir. Dolayısıyla burada da f için sadece (2.53) düşünülecektir.

$$f(t) = a_1 \sin \frac{\Omega t}{2} + b_1 \cos \frac{\Omega t}{2} \quad (2.53)$$

Çeşitli kesit tesirleri ve şekil değiştirme büyüklükleri dinamik problemler için koordinat ve zamanın ayrı ayrı fonksiyonlarının çarpımları şeklinde düşünülebileceğinden dinamik stabilite denklemlerin çıkarılışı bakımından en genel durumda (2.54) verilebilir. Bu şekilde f çözümünün yerleştirilmesi ile ve gereken işlemlerin yapılmasıyla dinamik hal kararlı durum titreşimine (3.27) benzer şekilde zaman fonksiyonlarından bağımsız bir şekle sokulacaktır.

$$w(x, t) = w(x) f(t) \quad (2.54.a)$$

$$\theta(x, t) = \theta(x) f(t) \quad (2.54.b)$$

$$T(x, t) = T(x) f(t) \quad (2.54.c)$$

$$M(x, t) = M(x) f(t) \quad (2.54.d)$$

$$H(x, t) = H(x) f(t) \quad (2.54.e)$$

$$\psi(x, t) = \psi(x) f(t) \quad (2.54.f)$$

$$\gamma(x, t) = \gamma(x) f(t) \quad (2.54.g)$$

(2.54)'de geçen büyüklüklerin anlamları daha önceden açıklanmıştır. Buna göre verilen bilgiler ışığında dinamik stabilite denklemlerinin kurulmasına geçilebilir. Dinamik stabilite durumu serbest titreşim ve burkulma problemlerinin bir kombinasyonu şeklinde olduğundan denklemleri de bu karakterde olacaktır. Netice olarak düşey denge denklemi (2.43)'e benzer şekilde yalnız bu sefer D'Alambert atalet kuvvetleri de düşünülerek elastik zemin olması (2.55.a) veya (2.55.b) olmaması durumunda (2.55) ile ifade edilebilir.

$$H_{,x} - \rho F \ddot{w} = 0 \quad (2.55.a)$$

$$H_{,x} - \rho F \ddot{w} - k_z w = 0 \quad (2.55.b)$$

Moment dengesi ise serbest titreşime benzer olarak dönme ataletinin etkisi de düşünülerek (2.56) ile verilir.

$$M_{,x} + \rho I \ddot{\theta} - T = 0 \quad (2.56)$$

H ve T arasındaki ilişki ise statik burkulma problemindekine, (2.45), benzer olacaktır ancak artık aksenal p yükü sabit olmadığından bunun yerine dinamik karakterli şekli yazılmalıdır. Bu durumda p yükünün statik (p_s) ve dinamik (p_d) karakterli parçalarının birinci burkulma yükünün sırasıyla α ve β katı olduğu düşünülürse (2.57) ifadelerine ulaşılır. Artık (2.45)'in karşılığı olarak (2.58) yazılabilir.

$$p_1 = \frac{\pi^2 EI}{l_b^2} \quad (2.57.a)$$

$$\alpha = \frac{p_s}{p_1}, \beta = \frac{p_d}{p_1} \quad (2.57.b)$$

$$p = p_s + p_d \cos \Omega t = (\alpha + \beta \cos \Omega t) p_1 \quad (2.57.c)$$

$$T - (\alpha + \beta \cos \Omega t) p_1 \psi - H = 0 \quad (2.58)$$

Sonuç olarak f (2.54)'de yerine konulursa ve (2.54)'deki büyüklükler denge bünye ve uygunluk denklemlerinde kullanılırsa ve gereken işlemler yapılarak a_1 b_1 katsayıları sıfıra eşitlenirse (2.55 a,b) için (2.59 a,b), (2.56) için (2.60) ve (2.58) için de (2.61) elde edilir.

$$H_{,x} + \frac{\Omega^2}{4} \rho F w = 0 \quad (2.59.a)$$

$$H_{,x} + \frac{\Omega^2}{4} \rho F w - k_z w = 0 \quad (2.59.b)$$

$$M_{,x} - \frac{\Omega^2}{4} \rho I \theta - T = 0 \quad (2.60)$$

$$T - (\alpha \pm \frac{\beta}{2}) p_1 \psi - H = 0 \quad (2.61)$$

Geri kalan uygunluk ve bünye denklemleri kirişin tipinin Euler – Bernoulli veya Timoshenko olmasına göre serbest titreşim probleminde verildiği gibi olacaktır. Dolayısıyla burada tekrarına gerek görülmemiştir.

3. YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu kısımda Kısım 2’de izah edilen ve gerekli özellikleri verilen özdeğer problemlerinin denklemlerinin toplu halde ele alınması ve çeşitli yaklaşık çözümlerin üretilmesi amaç edinilmiştir. Bu amaca hizmet etmek için en çok kullanılan yaklaşık çözüm yöntemleri, çıkış noktaları, problemlerin fiziksel boyutuyla ilgileri ve önemli bazı özellikleri de düşünülerek izah edilmeye çalışılmıştır.

3.1 Genel Bilgiler ve Tanımlar

Herhangi bir fizik olayının incelenmesi neticesinde ortaya konulan, olayın çeşitli semboller ile gösterilen ve matematik dilindeki karşılığı olan, ifadelere olayın yönetici denklemleri ve sınır şartları adı verilirken, bu ifadelerin elde edilmesi için yürütülen işlemlere de matematiksel analiz adı verilir. Bu durumda bahsi geçen matematiksel analizin üzerinden yürütüldüğü ve olayla ilgili denklemlerde geçen parametrelerin tanımlandığı, belli düşüncelere göre basitleştirilmiş modele de fiziksel olayın matematiksel modeli adı verilir. Matematiksel modelleme ve elde edilen model sonucu kurulan matematik ifadelerin çözüme kavuşturulması esasen matematiksel fiziğin uğraşı alanına girer.

İlgili problemin gözlenen özelliklerinin kağıt üzerindeki veya denklemlerdeki karşılıklarına değişkenler denir. Yine ilgilenilen olayın karakteristik büyüklüklerine yani sadece problem şekli değiştirilince değişen büyüklüklerine problemin parametreleri adı verilir. Seçilen matematik model tipine göre parametreler ve değişkenler arasında bir takım denklemler kurulur. Bilindiği üzere bu ifadeler cebrik denklem formunda olabilecekleri gibi kullanılan matematik modele göre değişkenler arası kısmi türevler ile ifade edilebilen diferansiyel denklem takımları şeklinde de olabilir. Bu durumda bazı değişkenler diğerlerinin fonksiyonu şeklinde olaya göre süreklilik arz edecek tarzda olayın cereyan ettiği ortamda tanımlanmış bağımlı

değişkenler olur. Her iki durumda da problemin çözümü demek değişkenler arası münasebetin bir takım ek şartlar göz önüne alınarak ortaya konulması ve böylece olayın her sürecinin matematiksel izaha kavuşmasıdır. Bahsedilen ek şartlar genel itibariyle sözü edilen değişkenlerin tanımlanan ortamın sınırlarında evvela sağlaması zaruri olan değerleri alması koşulunu içerebileceği gibi zamanla problemin çözümünde değişiklikler oluyorsa veya kısaca zaman mevhumu olaya sirayet etmişse değişkenlerin başlangıç değerlerinin belirtilmesi koşulunu da içerebilir.

Belirli bir matematiksel modelleme neticesinde yönetici denklemleri ve sınır şartları kurulan bir problem için çözüm aşamasına gelinmiştir. Bu aşamadan sonra genel olarak iki seçenek söz konusudur. Bunlardan birincisi matematiksel birtakım teknikler kullanarak denklemlerin tam (kesin) çözümlerini geliştirmek yani kısaca analitik çözüm yollarından hareket etmek iken ikincisi ise yaklaşık bir yöntem kullanarak yönetici denklemleri, sınır ve/veya başlangıç şartlarını belli bir mertebede yaklaşık olarak sağlayacak çözümler geliştirmektir. Buna göre ikinci yolun tercihi durumunda ancak yaklaşık çözüm elde edilebileceği ifade olunmaktadır. Ancak hemen eklemek gerekirse, modern mühendisliğin bir çok probleminde birinci yolun çözüme ulaştırması problemlerin analitik çözüme geçit vermeyen zorluklarından dolayı imkansız gözükmektedir. Ayrıca hesaplamaları hızlandıran ve görselleştiren mühendislik yazılımlarının programlanmasında yaklaşık yöntemlerin daha uygun olduğu genel kabul görmüş ve uygulamaya geçmiş bir gerçektir. Bu anlatımlar neticesinde teknolojinin deneysel çalışmalar ve yaklaşık yöntemler üzerine bina edildiğini iddia etmek yanlış olmayacaktır.

Bugüne değin bir çok yaklaşık yöntem geliştirilmiştir. Bunların en geneli ve diğer bir çok yaklaşık yöntemin geliştirilmesine temel olanı “Ağırlıklı Artıklar Yöntemi”dir. Bu itibarla Ağırlıklı Artıklar Yöntemi teknik mekaniğin hemen her sahasında çok önemli rol oynayan “Varyasyonel Prensipler” için de çıkış noktası teşkil etmektedir. Varyasyonel prensipler ise problemlere genel bir bakış açısıyla bakılmasını ve yönetici denklemler ile sınır şartlarını topluca değerlendirmeyi mümkün kılmaktadır. Ayrıca yine belirtmekte yarar vardır ki varyasyonel prensipler mekanik izah yönünden de matematiksel çözümün fiziki karşılığını anlamada ve yorumlamada ve bu şekilde daha iyi ve kontrollü yaklaşık çözümler üretilmesinde anahtar rolünü üstlenmektedir. Böylece çok genel olan ağırlıklı artıklar yöntemi ile bir çok fizik dalı

için ve bilhassa mekanik için geniş uygulama alanı olan varyasyonel prensipler daha rafine, verimli ve kullanışlı yaklaşık yöntemler geliştirilmesi için zemin oluşturmaktadır. Bu bağlamda varyasyonel hesap ile ve dolayısıyla da ağırlıklı artıklar yöntemi ile yakın ilintili ve mühendislik dünyasından büyük kabul görmüş bir yaklaşık çözüm yolu da “Sonlu Elemanlar Metodu”dur. Esasında bu çalışmada da önceden belirtildiği gibi varyasyonel prensipler üzerine bina edilen Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılacaktır.

3.2 Ağırlıklı Artıklar Yöntemi

Genel olduğu belirtilen ağırlıklı artıklar yöntemi burada genellikle bir şey kaybedilmemeye özen gösterilerek basitleştirilmiş bir örnek üzerinde izah edilecektir.

$A(u) = f$ şeklinde bir diferansiyel denklem verilmiş olsun. A 'ya operatör denir ve formu bilinir. f ise kaynak veya yük fonksiyonu olarak geçen ve yine formu bilinen bir fonksiyondur. Burada amaç entegrasyon ile denklemi sağlayan u fonksiyonunu bulmaktır. A operatörünün içerdiği türev mertebesine göre, kaçınıcı mertebeye kadar türevler var ise entegrasyon neticesinde gelecek olan o kadar integral sabiti de probleme dahil olacaktır Dolayısıyla bir diferansiyel denklemi bölge üzerinde sağlayan bir çok u fonksiyonundan çözüm olanını adı geçen sabitlerin bulunmasında kullanılacak olan sınır şartları belirleyecektir. Bu bağlamda genel itibariyle verilmesi gereken sınır şartının sayısının operatörde geçen türev mertebesi ile aynı olması gerektiği ifade edilebilir. Buraya kadar çözüm yolu ile ilgili bir şey anlatılmadı bununla beraber daha önceden denklemleri ve sınır şartlarını tam sağlayacak analitik çözüm geliştirmenin zorluğundan bahsedilmiştir. Genellikle uygulamada karşılaşılan problemlerin yönetici denklemlerinin ve sınır şartlarının karmaşıklığı yaklaşık çözüm yöntemlerinin araştırılmasını mecburi kılar. Yine önceden bahsedildiği üzere ağırlıklı artıklar yöntemi bu yaklaşık yöntemler içinde önemli yer tutar. Buna göre $\tilde{u}$, u yerine önerilen yaklaşık çözüm ise artık $A(\tilde{u}) - f \neq 0$ olacaktır. Denklemdaki bu fark açıkça $\tilde{u}$ ile u arasındaki farktan kaynaklanmaktadır. Bu farka R denilirse, yani kısaca $A(\tilde{u}) - f = R$, yaklaşık çözümünden amacın R fonksiyonunu bir şekilde olabildiğince küçültmek olduğu söylenebilir. Ağırlıklı artıklar yönteminde R

fonksiyonu ile bir ağırlıklı integral ifade kurulur. Bölge üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu v ile R 'nin çarpımının integrali olan bu ifadenin sıfıra eşitlenmesi ile diferansiyel denklemde yaklaşık çözümden dolayı oluşan hata tam (kesin) çözümdeki gibi bölgenin her noktasında değil de ağırlıklı integral anlamında bölge üzerinde genel bir mahiyette sıfıra eşitlenmiştir. Buna göre R hatası küme üzerine çarpım integrali sıfır olacak şekilde ağırlık fonksiyonuna göre dağıtılmaktadır. Matematiksel olarak anlatılanlar V olayın tanımlı olduğu bölge olmak üzere (3.1) ile özetlenebilir.

$$\int_V Rv dV = 0 \quad (3.1)$$

Eğer $\tilde{u} = c_i \phi_i$ ($i=1,2,3,...,n$) şeklinde yaklaşık çözüm için c_i bilinmeyen parametreler ile formu bilinen ϕ_i fonksiyonlarının çarpımı şeklinde bir öneri yapılırsa artık amacın ağırlıklı ifadeyi sağlayan c_i parametrelerini bulmak olduğu söylenebilir. Bu amaçla, önerilen yaklaşık çözümde kullanılan parametre sayısı (N) kadar bağımsız denklem üretmek için, yine parametre sayısı kadar v lineer bağımsız ağırlık fonksiyonu kullanılması gerektiği aşikardır. v 'lerin seçimi genel itibariyle sürekli olmaları, integrali alınabilir olmaları ve kendi aralarında lineer bağımsız olmaları koşullarından hariç tutulursa keyfidir. Çözümün bu şekilde elde edilişi sınır koşullarını kapsamadığından ve ağırlıklı integral ifadenin sıfıra eşit kılınması sadece diferansiyel denklemin sağlanmasına karşı geldiğinden, yaklaşık çözümün önceden verilen sınır şartlarını sağlayacak şekilde önerilmesi gerekir. Ancak bu şekildedir ki söz konusu spesifik probleme yaklaşık bir çözüm geliştirilmesi mümkün olsun. Buraya kadar anlatılanlardan, ağırlıklı artıklar yönteminin, diferansiyel denklemini ve/veya sınır şartlarını, yaklaşık çözümün getireceği hatayı ağırlıklı integral anlamında problemin tanım kümesi üzerinde sıfıra eşitleyecek çözümler üretilmesini sağlayacak şekilde karşıladığı anlaşılmaktadır. Benzer yapıda olan, değişik çözüm önerileri ve ağırlık fonksiyonları kullanılarak geliştirilen, karakter itibariyle farklı yaklaşık yöntemler literatürde mevcuttur.[15,16]

3.2.1 Ağırlıklı Artıklar ve Varyasyonel Yöntemin İlişkisi

Ağırlıklı artıklar anlatılan keyfi şekliyle kullanılması yerine, ki burada keyfilikten kasıt ağırlık fonksiyonlarının seçimidir, bir takım fiziksel düşünceler neticesinde fiziksel yönden anlamlı ağırlıklı entegrallerin oluşturulmasına olanak tanıyacak bir yapıya sokulabilir. Bu işlem kısmi entegrasyon veya diverjans teoremi gibi bir takım matematiksel tekniklerle sınır şartlarının da diferansiyel denklem ile beraber yaklaşık formülasyonun çatısı altına sokulabilmesini sağlayacak özel ağırlık fonksiyonlarının kullanılması ile gerçekleştirilebilir ve bu durum varyasyonel prensipler denilen ayrı bir bakış açısı oluşturur. Buna göre artık ilgilenilen ve daha önceden sadece matematiksel hatanın bir ölçüsü olan entegrallerin bir fiziksel anlamı vardır. Bir çok fiziksel problemde artık entegraller ile, ilgili fiziksel problemin enerji durumu söz konusu edilmektedir.

Teknik mekanikte çeşitli yapı sistemleri için kurulan enerji boyutundaki entegral formların (fonksiyoneller) bağımlı değişkenlere (kuvvet, yer değiştirme ve/veya şekil değiştirme bileşenleri) göre düşünülen stasyoner özellikleri, ilgili sistemler için yazılan denge ve uygunluk denklemleri ile sınır şartlarının sağlanması anlamına gelmektedir. Esasında sürekli ortamlar mekaniğinin hemen her dalında büyük kullanım alanı bulan ve bir çok enerji teoremine temel oluşturan “virtüel iş prensibi” de bir şekilde ağırlıklı artıklar formundadır. Kısaca mekanik için varyasyonel prensipler söz konusu olduğunda elde edilen ve mümkün olduğunca küçük kılınmaya çalışılan hatanın boyutu mekanik enerjidir ve bu şekilde, yani bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu olan belli bir ifadenin stasyoner yapılması durumunda, problemin diferansiyel denklemi ve/veya sınır şartları farklı fakat eşdeğer bir anlamda sağlatılmaya çalışılmaktadır.

3.2.1.1 Fonksiyonellerin Stasyonerliği ve Varyasyon Kavramı

Varyasyonel analiz fonksiyonellerin (fonksiyonların fonksiyonu) stasyoner değerlerinin ve özelliklerinin araştırıldığı matematiksel bir bilim dalıdır. Bundan dolayı bir fonksiyonelin analizi sonucunda belirli bir sayının değil de bir fonksiyonun verilen fonksiyoneli stasyoner yapma durumu aranır. Daha fazla ilerlemeden

fonksiyoneller ile alakalı bazı matematiksel kavramları izah etmek anlatım bakımından uygun olacaktır.

$u = u(x)$, $u' = du/dx$ olmak üzere (3.2) şeklindeki $I(u)$ integral ifadesi bağımsız değişken x , bağımlı değişken u ve onun türevi u' 'yi entegral kabul etsin. Burada entegrasyon tek boyutlu küme olan bir doğru üzerinde gerçekleştirilmektedir ve sınırlarda buna göre verilmiştir.

$$I(u) = \int_0^L F(x, u, u') dx \quad (3.2)$$

Bu durumda (3.2) integral ifadesinin değeri bir skalerdir ve u 'ya bağlıdır. Kısaca tanımlamak gerekirse, anlaşılaçağı üzere fonksiyonel girdileri fonksiyonlar çıktısı skaler değerler olan bir çeşit fonksiyondur ve bu skaler değer girdilerde bulunan bağımlı değişkenlerin formlarına bağlıdır. Matematiksel olarak ise bir fonksiyonel u 'yu $I(u)$ gibi bir skalere dönüştüren bir I operatörüdür. Burada bazı fonksiyonel özellikleri hatırlatılmıştır Buna göre u ve v tanımlı oldukları bölgede fonksiyonelin istediğı şartları(süreklilik vs.) yerine getiren fonksiyonlar olmak üzere (3.3.a) özelliğı var ise $I(u)$ fonksiyoneli lineerdir denir. (3.3.b) özellikleri mevcut ise $I(u, v)$ fonksiyoneli argümanlarının her ikisi için de lineer olduğı için bilineerdir denir. Ayrıca yine çift argümanlı bu fonksiyonel için (3.3.c) şartı sağlanıyorsa fonksiyonel simetriktir denir.

$$I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v) \quad (3.3.a)$$

$$I(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha I(u, v_1) + \beta I(u, v_2) \quad (3.3.b)$$

$$I(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha I(u_1, v) + \beta I(u_2, v) \quad (3.3.c)$$

Daha önce de belirtildiğı gibi $F(x, u, u')$ fonksiyonel çekirdeğı, x 'in keyfi sabit bir değeri için u 'nun formuna bağlıdır. Dolayısıyla bu form değişimi, x 'e bağlı olmadan meydana gelen değişim, α istenildiğı kadar küçük seçilebilen pozitif bir reel sayı ve v de u 'nun belirtildiğı sınır koşullarında sıfır değerini alan yani homojen sınır koşullarına sahip ve sürekli olan başkaca tamamen keyfi bir fonksiyon olmak üzere αv şeklinde gösterilebilir. Hakikaten bu keyfi fonksiyonun eklenmesiyle

u 'da bölge içinde bir form değişikliği meydana gelir. Bu değişim fonksiyonların bağımsız değişkenlerine göre değişimlerini ifade eden türev operatorüne benzetilerek $\delta u = \alpha v$ şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde u 'ya verilen δu değişimine u 'nun varyasyonu denir. Eğer u fonksiyonu ele alınan spesifik problem için belirli noktalarda bir takım ön değerler almak zorunda bırakılmış ise bu durumda bu noktalar için $\delta u = 0$ değerini alacağı önceden belirtilmişti. Yani kısaca u 'nun tanımlı olduğu ve reel değerler aldığı noktalar için $v = 0$ olmaktadır, çünkü bilinen değerleri için bir fonksiyonun o noktalarında değişimi (varyasyonu) düşünülemez. Buraya kadar ki anlatımlardan δu 'nun klasik analizdeki türev ile analojisi meydana çıkar. Bu bağlamda yine fonksiyonel çekirdeği F ele alınırsa (3.4.a,b) ifadeleri elde olunur.

$$dF = \partial F / \partial u du + \partial F / \partial u' du' + \partial F / \partial x dx \quad (3.4.a)$$

$$\delta F = \partial F / \partial u \delta u + \partial F / \partial u' \delta u' \quad (3.4.b)$$

(3.4.a)'daki ifade F 'nin diferansiyeli olup anlamı argümanlarına göre F 'de meydana gelen değişim miktarıdır. (3.4.b)'deki ifadede ise yine F 'deki değişim aranmaktadır ancak bu sefer sadece u 'da meydana gelen değişimden dolayı F 'nin ne kadar değiştiği önemlidir. Dolayısıyla ikinci ifade de bir fonksiyonel çekirdeğinin varyasyonunun, argümanlardan bağımlı değişken (burada sadece u) olanlarda meydana gelen değişimler neticesinde oluştuğu, bu değişim esnasında bağımsız değişkenlerin (burada sadece x) sabit parametreler kabul edildikleri için etkilerinin olmadıkları ($dx = 0$) anlaşılmış olur. Kısaca fonksiyonel çekirdeğinin bağımlı argümanlarına göre bir nevi türevi alınmış olmaktadır. Bu tanımlardan anlaşılabileceği üzere artık (3.5) özellikleri tıpkı klasik türevde olduğu gibi geçerlidir. Ayrıca benzer düşünceler ile hareket edilerek türev ile varyasyonun değişkenlik özelliği ve yine integral ile varyasyonun değişkenlik özellikleri (3.6) yazılabilir

$$\begin{aligned} \delta(F_1 + F_2) &= \delta F_1 + \delta F_2 \\ \delta(F_1 / F_2) &= \frac{\delta F_1 F_2 - F_1 \delta F_2}{F_2^2} \\ \delta(F_1 F_2) &= \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2 \\ \delta(F^n) &= n \delta F F^{n-1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\delta \int u dx = \int \delta u dx$$

Matematiksel yapısı hakkında özet bilgi verilen fonksiyoneller sadece fiziksel değil çeşitli pratik problemlerin formülasyonunda da büyük kullanım alanına sahiptir. Buna örnek olarak uzunluğu sabit bir eğrinin hangi şekli aldığında en büyük alanı çevireceği sorusu verilebilir. Bu durumda L eğri boyu sabit iken en büyük alan A_{max} aranacaktır. Bundan başka mesela 3 boyutlu uzayda eğrisel bir yüzeyin belli iki noktası arasında söz konusu eğrisel yüzey üzerinden olmak şartı ile en kısa mesafenin bulunması da (jeodezik problem) yine varyasyonel hesap konularını içeren problemlerden yalnızca biridir. Varyasyonel hesabı matematiksel fizikte geniş uygulama alanı bulmuştur. Bunun nedeni ise fiziksel olayların matematiksel izahlarında genellikle ele alınan problem için kurulmuş ilgili fonksiyonellerin stasyonel değer almalarıdır. Bir başka şekilde izah edilirse fiziksel problemleri tanıtan yönetici denklemlerin genellikle ilgili varyasyonel denklemin (fonksiyonel şeklinde ifade edilmiş) stasyonelik şartından elde edilebilmesi varyasyonel ifadenin alternatif formülasyon olarak ortaya çıkmasına sebep olmuştur denilebilir. Yukarıda verilen örneklerden daha ziyade fiziğe giren bir örnek olarak Fermat prensibi verilebilir. Buna göre ışığın iki nokta arasında yol alırken takip edeceği yörünge için en kısa zamanı harcayacağı yolu seçeceğini ileri sürülmektedir. Aynı ortam içindeki iki nokta için bunun doğru olduğu şüphesizdir. Bunun gibi bir çok fiziksel problemin çözümü bahsedilen şekliyle ilgili varyasyonel formun stasyonelik şartının bir karşılığıdır.

3.2.1.2 Mekanik Enerji ve Enerji Fonksiyoneli Kavramı

Daha önce belirtildiği gibi mekanik de varyasyonel hesabın sıkça başvurulduğu matematiksel fiziğin bir dalıdır. Konuya giriş yapmak için burada bir parçacıklar sisteminin problemi ele alınarak bu sistemin varyasyonel formülasyonun elde edilişi virtüel iş prensibi dikkate alınarak gözden geçirilecektir.

Mekanik anlamda, bir kuvvetin işinden bahsedildiğinde anlaşılan kuvvetin uygulama noktasının yer değiştirme doğrultusu üzerindeki bileşeninin yer değiştirme büyüklüğü ile skaler çarpımıdır. Kuvvetin yolun fonksiyonu olduğu durumda bu ifade (3.7) ile verilirken kuvvet sabit olduğunda ifadenin $W=F.r$ olacağı açıktır.

$$W = \int_r F dr \quad (3.7)$$

Netice itibariyle kuvvetin bu şekil değiştirmeye yol açıp açmadığına bakılmaksızın yaptığı işin yukarıda verilen şekilde hesaplanacağı ifade edilebilir. Eğer olayda zaman mevhumu söz konusu ise bu sefer de integral t_1 ve t_2 gibi iki zaman arasında alınarak kuvvetin bu zaman süresince yaptığı iş (3.8) şeklinde hesaplanacaktır.

$$W = \int_{t_1}^{t_2} F \left(\frac{dr}{dt} \right) dt \quad (3.8)$$

Enerji ve iş bağlamında bir takım esasların altının çizilmesinde fayda vardır: Bir sistemde yapılan iş denilince mekanik kuvvetlerin işi anlaşılacaktır. İş ile enerji arasındaki münasebet için ise sistemin iki farklı enerji durumu arasındaki farkın(enerji farkı) bu arada yapılan işe eşit olduğu ifade edilir. Kısaca enerjideki değişimler yapılan işler (W) olarak ortaya çıkmaktadır. Korunumlu sistemler için yani mümkün olabilecek her durum için sistemdeki enerji miktarının sabit olması durumunda kuvvetlerin işi iç kuvvetlerinki iç iş ve dış kuvvetlerinki dış iş şeklinde iki kısma ayrılmıştır. Bu ayrım kuvvetlerin karakterlerinden ileri gelir. Dış kuvvetler etkidikleri cismin bünye ve geometrisinden bağımsızdırlar, bununla beraber iç kuvvetler dış kuvvetlerin veya etkilerin sonucunda cismin bünyesel özellikleri söz konusu olarak oluşurlar. Bu anlatımla iç kuvvetlerin kendi kendine değil de bir şekilde dış etkiler sonucu oluştuğu sonucuna varılabilir. Bir mekanik sistemin analizinde şu üç hususa yer verilir:

- a) Denge: Sistem üzerinde bulunan iç ve dış kuvvetler altında dengede olmalıdır
- b) Uygunluk: Sistemin şekil değişimi söz konusu olduğunda birim şekil değişiminin şekil değişimine ve dış bağlara uygun bir şekilde gerçekleşmesi gerekir.

- c) Bünyeye bağıntıları: İç kuvvetlerin ve i ekil değiştirmenin ele alınan cismin doğasına uygun bir şekilde birbiriyle alakalandırılması gerekir.

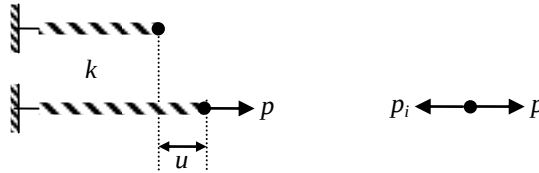
Bu şartlar vektörel analiz sonucu kurulabileceği gibi tamamen başka bir yolla hareket etmek de mümkündür. İşte virtüel iş burada sahne alır. Buna göre yukarıda verilen kuvvet ve deplasman türü şartları enerji adı altında bir formülasyonda birleştirmek esasını oluşturur. Bu bağlamda virtüel deplasmanlar ve virtüel kuvvetler şeklinde iki ana kısma ayrılan prensibin çıkış noktası itibariyle ilki ve kolay anlaşılanı virtüel deplasmanlar prensibi şu şekilde açıklanır: Dengede olan bir kuvvetler sisteminin herhangi bir keyfi virtüel ekil değiştirmesinde yapılan toplam iş sıfırdır. Bu sembolik olarak (3.9) ile ifade edilebilir.

$$\delta W = F \cdot \delta u = 0 \quad (3.9)$$

Dikkat edilirse burada gayet açık haliyle esasen denge denklemini keyfi ancak deplasman boyutunda bir fonksiyonla çarparak enerji boyutlu bir büyüklük elde edilmektedir. Bunun sıfıra eşitlenmesiyle, çarpım fonksiyonun keyfilikinden, daima denge şartının sağlanması öngörülmektedir. Bu ifade sadece bir parçacık üzerine etkiyen bir kuvvetler sistemi veya benzer tek serbestlikli basit sistemler için elde edilmiş gözükse de buradan hareketle prensibin ekil değiştiren sonsuz sayıda parçacıktan oluşmuş(sürekli ortam) mekanik sistemlere de genelleştirilebileceği görülmüştür. Bir parçacığın uzayda 3 adet serbestliği vardır. Dolayısıyla buna etkiyen kuvvetler tarafından bu 3 serbestlik doğrultusunda keyfi virtüel deplasmanlar sonucu yapılan işlerin sıfıra eşit olması parçacık için gereken denge denklemlerini verecektir. Bu parçacığın yanına bir diğerini uzamaz bir bağla ekleyerek kurulan sistem rijit bir yapıdır. Bunun  zerindeki kuvvetler sistemi göz önüne alındığında sistemin toplam serbestlik derecesinin 5 olduğu anlaşılır. Yani kısaca bu 5 çeşit deplasman parametresi ile sisteme bağlarıyla uygun olabilecek her çeşit hareket yaptırılabilir dolayısıyla bu demektir ki hangi tip kuvvetler sistemi etkirse etkisin eğer sistem dengede değilse ele alınan 5 çeşit serbestliğin kullanılmasıyla elde edilecek deplasman konfigürasyonlarından başka deplasman şekli mümkün olmayacaktır. Dolayısıyla dengenin virtüel deplasmanlar anlamında sağlanması için etkiyen kuvvetler sisteminin basit modelin her hareketini karakterize eden 5 çeşit virtüel deplasman neticesinde yapacakları işin sıfıra eşit olması yeterli olacaktır. İki parçacıklı rijit cisme bir tane daha parçacık eklenerek oluşturulan sistemin serbestlik

sayısı artık 6 olur. Bundan sonra değişmez uzunlukta bağ kısıtlaması altında eklenecek her parçacık bu sayıyı değiştirmeyecektir. Sonuçta elde edilecek sonsuz sayıda parçacıktan oluşan rijit cismin uzayda 6 adet serbestliği olacaktır. Yani cismin geometrisi bilindiği sürece her parçacığın konumu 6 serbestlik parametresiyle tamamen verilmiş olacaktır (parçacıklar arası rijit bağların uzunluğu cismin geometrisiyle alakalı olup bunların serbestlik değil cismin şekliyle ilgili veri oldukları unutulmamalıdır). Dolayısıyla da herhangi bir kuvvetler sistemi esasında bu 6 adet serbestlik üzerinde yapılan virtüel deplasmanlar neticesinde daima sıfır işini üretiyorsa sistemin mümkün olan bütün deplasman durumları göz önüne alındığı için sistem dengededir denilebilir. Buraya kadar ifade edilenler esasında şekil değiştiren cisimler için virtüel iş prensibinin anlaşılmasını kolaylaştırıcı izahlardır. Prensibin bu şekliyle rijit cisimlerin denge denklemlerini bulmada kullanılabileceği aşıkardır.

Enerji fonksiyoneli ve şekil değiştiren cisimler için bunun varyasyonu anlamında konunun anlatımı için basit bir örnek olan lineer yay modeli verilebilir. Buna göre yay sabiti k olan bir yayın dışarıdan uygulanan statik karakterli p kuvveti altındaki boy değişimi problemi enerji yönünden daha önceden anlatılanlar doğrultusunda ve Şekil 3.1 yardımı ile açıklanabilir.



Şekil 3.1 Lineer Yay ve Şekil Değişimi

Burada p kuvvetinin dinamik etkiler oluşturmayacak şekilde yavaş bir yüklemeyle uygulandığı ve neticede de yayın uç noktasında u yer değiştirmesinin meydana geldiği görülmektedir. Bu çok basit sistem için kullanılabilecek denge ve bünye bağıntısı sırasıyla (3.10) ve (3.11) de verilmiştir. Yaylı modelde sadece uç noktanın durumuyla ilgilenildiğinden herhangi birim şekil değişimi tanımlamak gereksizdir.

$$p - p_i = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{p_i}{k} - u = 0 \quad (3.11)$$

Aşık olarak görüldüğü gibi problemde bulunması gerekenler p dış kuvveti ve yay sabiti k verilenler olmak üzere bilinmeyen p_i iç kuvveti ve u şekil değiştirmesidir. Burada denklem yapıları basit ve de çözüm aşık olup herhangi bir yaklaşık çözüm gerekmediği halde sadece şekil değiştiren cisimlerin enerji temelli varyasyonel formülasyonuna örnek vermek için denklemlerin virtüel enerji karşılıkları (3.12) ve (3.13) oluşturulsun. Hemen anlaşılacağı üzere bu işlem yapılırken ifadelerin boyutu enerji olacak şekilde (3.10) için δu ve (3.11) için δp_i seçilmiştir. Çarpanlarda görülen varyasyonel sembolü ise keyfi olan δu ve δp_i ifadelerinin daima hakiki u ve p_i 'nin varyasyonu şeklinde seçilebilmesinin mümkün olduğunu ifade etmek içindir.

$$(p - p_i)\delta u = 0 \quad (3.12)$$

$$(\frac{p_i}{k} - u)\delta p_i = 0 \quad (3.13)$$

Bu şekilde denge ve uygunluk denklemlerine eşdeğer iki ifade elde edilmiştir. (3.10) ve (3.11)'e esasında yaklaşık bir çözüm önerildiği düşünülürse; ağırlık fonksiyonları (çarpanları) yaklaşık çözümü aranan fonksiyonların varyasyonu şeklinde seçilen ve enerji boyutunda olan, (3.12) ve (3.13)'e ağırlıklı cebirsel ifadeler gözüyle bakılabilir. Kısaca virtüel enerji ifadeleri aslında ağırlıklı artıklar yönteminde anlatılana benzer formdadır. Varyasyonel hesaba göre varyasyon sembolünün özellikleri kullanılarak ve enerji boyutunda olan bu iki ifade toplanarak (3.14) eşdeğer formuna ulaşılır.

$$\delta I(u, p_i) = \delta \left(\frac{p_i^2}{2k} + up - up_i \right) = 0 \quad (3.14)$$

(3.14) eşdeğer formu artık hem denge hem de bünye denklemlerinin karşılığı olan bir ifadedir. Burada parantez içinde yazılan, sistemin bir çeşit mekanik enerjisini gösteren büyüklük (3.15) olarak ortaya çıkmaktadır. Öyleyse denilebilir ki genel

olarak bir sistem için iç kuvvetler (burada p_i) ve şekil değiştirmeler (burada u) kullanılarak benzer bir $I(u, p_i)$ enerji fonksiyoneli elde edilebilirse, bu ifadenin birinci varyasyonunun sıfıra eşitlenmesi, sistemin denge ve bünye denklemlerinin karşılığıdır. Bu (3.15) için varyasyonel sembol ve türev alma ile ilgili bağıntılar kullanılarak derhal görülebilir.

$$I(u, p_i) = \frac{p_i^2}{2k} + up - up_i \quad (3.15)$$

Bu şekilde ele alınan mekanik sistemle ilgili belli bir enerji değerini ifade eden fonksiyonel yapının stasyoner halinin nasıl aynı mekanik probleminin denklemlerinin eşdeğeri olduğu basit de olsa bir örnek üzerinde görülmüştür. Ayrıca yine bu özel fonksiyonelin varyasyonun alınması durumunda, ağırlıklı artıklar yöntemindekine tamamen benzer olan ve yönetici denklemlerin enerji boyutunu verecek tarzda keyfi varyasyonlar ile çarpımı şeklinde ortaya çıkan, ifadelerle (3.12) (3.13) karşılaşılmıştır. Buraya kadar anlatılanlar varyasyonel formülasyon neticesinde elde olunan ve enerji boyutunu haiz olan fonksiyonel yapıların stasyoner hallerinin ağırlıklı artıklar yöntemindeki ifadelerin bir şekli olduğunu açıkça ortaya koymaktadır ve yine anlaşılmaktadır ki virtüel iş prensibi ağırlıklı artıklardan fonksiyonel forma geçişte ara basamağı oluşturmaktadır.

(3.15)'deki ifade ile sistem ile ilgili bir enerji ifadesi elde edilmiştir. Eğer (3.12) ve (3.13) denge denklemi altında birleştirilmiş olsa farklı bir formülasyon (3.16) elde edilir. Buna göre artık ilgili virtüel iş ifadesi (3.17) virtüel δu yer değiştirmesi ile oluşturulacaktır.

$$ku - p = 0 \quad (3.16)$$

$$(ku - p)\delta u = 0 \quad (3.17)$$

Dikkat edilirse öncekilere benzer olarak (3.17) de ağırlıklı artan formunda olup boyutu enerjidir. Varyasyon sembolünün benzer özellikleri tekrar edilirse (3.18) yapısına ulaşılır. Yine parantez içindeki ifadenin sistemin enerji durumuyla ilgili bir

büyüklik olduğu aşıkardır. Bu ifade (3.19) bir fonksiyonel şeklinde verilirse bunun stasyoner halinin (3.16)'ya karşı geldiği anlaşılmış olur.

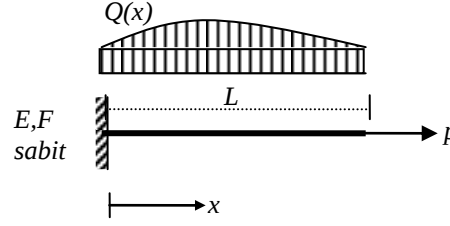
$$\delta \left(\frac{ku^2}{2} - pu \right) = 0 \quad (3.18)$$

$$I^*(u) = \frac{ku^2}{2} - pu \quad (3.19)$$

(3.19) fonksiyoneline önemli olan ifadede geçen terimlerin enerji yönünden daha anlamlandırılabilir olmasıdır. Buna göre ilk terim yaydaki potansiyel enerjiyi ifade ederken ikinci terim dış kuvvetlerin işini göstermektedir. Dış kuvvetler δu varyasyonu altında sabit kabul edilirse ikinci terim dış kuvvetlerin potansiyelinin negatifini anlamına da gelir. Böylece $I^*(u)$ ile esasında sistemin toplam potansiyel enerjisi ifade olunmaktadır. (3.18) ise toplam potansiyel enerjinin stasyoner halinin denge denkleminde karşı geldiğini ifade ettiğinden artık ağırlıklı artıklar ve varyasyonel prensipler ile mekanik enerji fonksiyonellerinin ilişkisi tamamen ortaya çıkmıştır.

3.3 Lineer Elastisitede Varyasyonel Yöntemler

Bölüm 3.2'de ağırlıklı artıklar yöntemi ile varyasyonel yöntemlerin ve mekanik enerji boyutundaki fonksiyonellerin ilişkileri basit fakat fikir verici örnekler üzerinden izah edilmeye çalışılmıştır. Bu kısımda ise lineer elastik malzemeden yapılan cisimler için varyasyonel prensipler ve bununla ilgili yaklaşık çözüm yöntemleri üzerinde durulacaktır ve sonuçta kirişler ile ilgili varyasyonel prensiplere basamak oluşturulacaktır. Yine anlatım kolaylığı bakımından basit bir örnek seçilecektir. Bu, düzgün kesitli homojen izotrop lineer elastik malzemeden imal edilmiş çubuğun aksenal yükler altında boy değişimi problemidir.



Şekil 3.2 Eksenel Kuvvetler Etkisindeki Elastik Çubuk

Şekil 3.2’de örnek problemin yükleme durumu ve geometrisi verilmiştir. Bu durumda problemin tanımlanacağı küme bir boyutlu olup bağımsız değişken x maddesel noktaların koordinatlarını göstermektedir. Esasen her cisim gibi üç boyutlu olan bu çubukta şekil değişimi için yapılan bazı basitleştirici kabuller neticesinde cismin geometrisi ve yükleme dikkate alınarak denklemlerin tek bağımsız değişkene göre yazılabileceği bir boyutlu bir model kurmak mümkün olmuştur. Bu durum Kısım 2’de belirtildiğinden burada tekrardan kaçınılarak orada elde edilen sonuçlar kullanılacaktır. Buna göre Kısım 2’yi de düşünerek (2.12), (3.20) ve (2.15), (3.21) denge denklemi hem gerilme hem de kesit tesiri N cinsinden derhal yazılabilir.

$$\frac{d\sigma_{xx,x}}{dx} + \frac{Q(x)}{F} = 0 \quad (3.20)$$

$$N_{,x} + Q = 0 \quad (3.21)$$

Uygunluk denklemi benzer yoldan (3.22) ile verilirken bünye denklemi de (3.23) olacaktır.

$$\varepsilon_{xx} - \frac{du}{dx} = 0 \quad (3.22)$$

$$\sigma_{xx} - E\varepsilon_{xx} = 0 \quad (3.23)$$

Bir de bunlara ilaveten, problemten probleme değişen, fonksiyonların bölge sınırında sağlamaları gereken sınır şartları bulunmaktadır. Ele alınan problemde genelde olduğu gibi sınır şartları mekanik ve geometrik olarak iki kısma ayrılabilir. Şekil 3.2’den açıkça izlendiği üzere örnekte mekanik sınır şartı olarak $x=L$ ve

geometrik sınır şartı olarak da $x=0$ noktaları tanımlıdır. Rijit tutulma sebebiyle $x=0$ noktasında (3.24) olması geometrik şart iken, L ucundaki p kuvveti sebebiyle (3.25) mekanik şarttır.

$$u(0) - u_0 = 0 \quad (3.24)$$

$$\sigma_{xx}(L) - \frac{p}{F} = 0 \quad (3.25.a)$$

$$N(L) - p = 0 \quad (3.25.b)$$

Bu durumda problemi tanımlayan bütün denklemler özetlenmiştir. Bu aşamadan itibaren lineer yay modeline benzer şekilde stasyoner hali problemin denklemlerine ve sınır koşullarına karşılık gelen enerji boyutunda fonksiyoneller üretilebilir. Bu amaçla ilk olarak denge denklemi ele alınırsa bir dx elemanı üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamı ifade edilerek aynı x noktasına virtüel $\delta u(x)$ yerdeğiştirmesi verildiğinde dengeden dolayı net işin (3.26) sıfır olması gerekir. Eğer $\delta u(x)$ sürekli tarzda keyfi bir fonksiyon gibi seçilirse ve $u(x)$ gerçek yer değiştirme fonksiyonun belirtildiği noktalarda sıfır değerini alırsa yani $\delta u(0) = 0$, entegral ile küme boyunca hesaplanan net virtüel iş (3.27) de sıfır olacaktır.

$$(N_{,x} + Q)\delta u = 0 \quad (3.26)$$

$$\int_0^L (N_{,x} + Q)\delta u dx = 0 \quad (3.27)$$

Benzer şekilde mekanik sınır koşulu da düşünülürse (3.28) elde edilir.

$$(p - N(L))\delta u(L) = 0 \quad (3.28)$$

Böylece (3.27) ile iç kuvvetlerin dengesi ve (3.28) ile de mekanik sınır koşulunun tanımlı olduğu noktadaki dış kuvvetin dengesi virtüel iş formunda verilmiş olmaktadır. Dolayısıyla iki ifadenin birleştirilmesi ile toplam virtüel iş için (3.29) ifadesi elde edilir.

$$\int_0^L (N_{,x} + Q) \delta u dx + (p - N(L)) \delta u(L) = 0 \quad (3.29)$$

Kısmi entegrasyon ile (3.29)'daki integrale müdahale edilirse ve $\delta u(0) = 0$ şartı düşünülürse (3.30) elde edilir.

$$\int_0^L -N \delta u_{,x} + \delta u dx + p \delta u(L) = 0 \quad (3.30)$$

(3.30) iç kuvvetlerin virtüel işi ile dış kuvvetlerin virtüel işinin eşit olduğunu ve bunun içinde denge şartının bulunması gerektiğini göstermesi bakımından önemlidir. δu keyfi olduğundan gelişim tersine düşünülürse yine $\delta u(0) = 0$ şartını da düşünerek denge denklemi ve mekanik sınır koşullarına ulaşılır. Öyleyse (3.30) integralinin sağlatılması denge denklemi ve sınır şartlarının ayrı ayrı sağlatılmaya çalışılması ile özdeştir. Virtüel iş ifadesi bu şekli ile yaklaşık çözüm geliştirmek için kullanılabilir. Yalnız bu sefer bünye denklemini de dengeye sokmak icap eder. Ayrıca şunu tekrar hatırlamak lazımdır ki elde edilen fonksiyonel ifadenin stasyonerliği neticesinde sadece ve ancak denge denklemi ve mekanik sınır koşulu sağlanabileceğinden problemin genel çözümü için geometrik sınır şartının önerilen çözüm tarafından önceden sağlanması gerekir. Bu itibarla yaklaşık çözüm ağırlıklı artıklara benzer şekilde $\tilde{u} = \phi_0 + c_i \phi_i$ tipinde seçilebilir. Burada ϕ_0 , u 'nun belirtildiği noktadaki (geometrik sınır şartının) değerini alacak başkaca keyfi bir fonksiyondur. Böylece geometrik sınır şartının belirtildiği noktalarda $\phi_i = 0$ şartı bulunacağı anlaşılmış olur. Eldeki problem için geometrik şart $u(0) = 0$ olduğundan $\tilde{u}(0) = \phi_0(0) = 0$ edeceği anlaşılır. Netice itibariyle (3.30) ifadesinde u yerine $\tilde{u}$ yaklaşık çözümü ve N normal kuvveti yerine de bünye denklemini kullanılarak elde edilen (3.31) karşılığı yerleştirilirse (3.32) formu elde edilir.

$$N = EF \tilde{u}_{,x} = E F c_i \phi_{i,x} \quad (3.31)$$

$$\int_0^L -EF c_i \phi_{i,x} \delta(c_i \phi_{i,x}) + Q \delta(c_i \phi_i) dx + p \delta(c_i \phi_i(L)) = 0 \quad (3.32)$$

(3.32)'de geçen ifadelerde yaklaşık çözümün varyasyonu alınırken varyasyonel artımın sadece bilinmeyen c_i parametreleriyle verilebileceği düşünülerek $\delta(c_i \phi_i) = \phi_i \delta c_i$ eşitliği kullanılırsa (3.32) c_i parametreleri integralden bağımsız oldukları için δc_i parantezine alınabilir. Bu durumda elde edilen (3.33) ifadesinin sağ tarafının daima sıfır olması keyfi δc_i parametrelerinin sadeleştirilip (3.34) şartının belirtilmesi ile sağlanır.

$$\delta c_i \left\{ \int_0^L -EF c_i \phi_i' \phi_i' dx + Q \phi_i(L) + p \phi_i(L) \right\} = 0 \quad (3.33)$$

$$\int_0^L -EF c_i \phi_i' \phi_i' dx + Q \phi_i(L) + p \phi_i(L) = 0 \quad (3.34)$$

Böylece $i=1,2,...,n$ 'e kadar yazılacak n adet şart ile bilinmeyen n adet c_i parametresi dolayısıyla da $\tilde{u}$ yaklaşık çözümü elde edilmiş olacaktır. Bu çözüm şekli literatürde Rayleigh-Ritz yöntemi olarak da geçmektedir. Takdir edileceği üzere kullanılacak parametre sayısı arttıkça çözüm daha yaklaşık olacaktır. Bununla beraber normal kuvvet (3.31)'deki türev ilişkisi ile üretildiğinden daima deplasmanlardan daha az yaklaşık olacaktır.

Virtüel iş (deplasmanlar) yönteminin esasında ağırlık fonksiyonun virtüel deplasman seçildiği özel bir çeşit ağırlıklı artıklar yöntemi olduğu ve bunun da Rayleigh – Ritz adıyla anılan bir yaklaşık çözüme ulaştırdığı yine açıkça görülmektedir.

3.3.1 Lineer Elastisitede Varyasyonel Prensipler

Önceki bölümlerde virtüel iş prensibi basit bir problem için elde edilmiştir. Burada tekrardan kaçınılarak literatürde de [4] bulunan varyasyonel prensipler basit örnekler üzerinden verilmeye çalışılacaktır.

3.3.1.1 Virtüel İş Prensibi

Daha önce basit durumlar için verilmiş olan virtüel iş denklemi varyasyonel prensiplere temel olması bakımından burada 3 boyutlu genel hal için verilecektir. Buna göre lineer elastisitenin denge denklemi ve mekanik sınır koşullarının enerji boyutunda olacak şekilde ağırlıklı formları oluşturulursa sırasıyla hacim içinde (3.34) ve sınırdaki (3.35) elde edilir.

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx},_x + \sigma_{xy},_y + \sigma_{xz},_z + b_x)\delta u &= 0 \\(\sigma_{yx},_x + \sigma_{yy},_y + \sigma_{yz},_z + b_y)\delta v &= 0 \\(\sigma_{zx},_x + \sigma_{zy},_y + \sigma_{zz},_z + b_z)\delta w &= 0\end{aligned}\tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}(p_x - \bar{p}_x)\delta u &= 0 \\(p_y - \bar{p}_y)\delta v &= 0 \\(p_z - \bar{p}_z)\delta w &= 0\end{aligned}\tag{3.35}$$

Hacim V ve sınır S ile gösterildiğinde (3.34 ve (3.35) sırasıyla elemanter dV ve dS parçaları üzerinde 3 eksen doğrultusunda yapılan virtüel işleri göstermektedir. Toplam virtüel iş için hacim ve sınırdaki entegre geçilerek ifadeler toplanırsa (3.36) ifadesine ulaşılır.

$$\begin{aligned}- \iiint_V (\sigma_{xx},_x + \sigma_{xy},_y + \sigma_{xz},_z + b_x)\delta u + (...) \delta v + (...) \delta w dV \\+ \iint_{S_1} (p_x - \bar{p}_x)\delta u + (...) \delta v + (...) \delta w dS = 0\end{aligned}\tag{3.36}$$

Dikkat edilirse virtüel deplasmanlar sınırın geometrik şartlarının belirtildiği kısmı olan S_2 sıfır olduğundan sınırlarda mümkün olan virtüel iş sadece S_1 üzerindeki entegral ile hesaplanmıştır. (3.36)'ya diverjans teoremi uygulanırsa ve şekil değiştirme birim şekil değiştirme bağıntıları da düşünülürse (3.37) ifadesine ulaşılır ki bu da en genel haliyle lineer elastik cisimleri için virtüel iş prensibinin ifadesidir.

$$\begin{aligned}\iiint_V \sigma_{xx}\delta\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\epsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\epsilon_{zz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz} + \sigma_{zx}\delta\gamma_{zx} + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} dV \\- \iiint_V b_x\delta u + b_y\delta v + b_z\delta w dV - \iint_{S_1} \bar{p}_x\delta u + \bar{p}_y\delta v + \bar{p}_z\delta w dS = 0\end{aligned}\tag{3.37}$$

Buna göre başında negatif işaret bulunan entegraller karşı tarafa atılırsa tekrardan virtüel iş prensibi “uygunluk denklemlerine ve geometrik sınır koşullarına uyacak şekilde düşünülen virtüel yer değiştirmeler sonucunda iç kuvvetlerin virtüel işi dış kuvvetlerin virtüel işine eşittir” şeklinde tekrarlanabilir. Böylece virtüel iş prensibinin esasında diferansiyel denge denklemi ve mekanik sınır koşullarının bir karşılığı olduğu hatırlatılır. Kısaca uygunluk şartları ve virtüel yer değiştirmelerin geometrik sınır koşullarının tanımlı olduğu sınırdaki sıfır edeceği dikkate alınır (3.37)’den tekrar denge ve mekanik sınır koşullarına ulaşılır.

Bir başka bakış açısı olarak uygunluk denklemlerini ve geometrik sınır şartlarını kullanarak da virtüel iş prensibi elde edilebilir. Bu durumda oluşturulacak ağırlıklı ifadelerin enerji boyutunda olması için kuvvetlerin virtüel değişime veya kısaca varyasyona uğratılmaları gerektiği aşikardır. Bu şekilde bölgede (3.38) ve sınırdaki (3.39) ifadeleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{xx} - u_{,x})\delta\sigma_{xx} &= 0 \\
(\varepsilon_{yy} - v_{,y})\delta\sigma_{yy} &= 0 \\
(\varepsilon_{zz} - w_{,z})\delta\sigma_{zz} &= 0 \\
(\gamma_{xy} - u_{,y} - v_{,x})\delta\sigma_{xy} &= 0 \\
(\gamma_{xz} - u_{,z} - w_{,x})\delta\sigma_{xz} &= 0 \\
(\gamma_{yz} - w_{,y} - v_{,z})\delta\sigma_{yz} &= 0 \\
(u - \bar{u})\delta p_x &= 0 \\
(v - \bar{v})\delta p_y &= 0 \\
(w - \bar{w})\delta p_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
(u - \bar{u})\delta p_x &= 0 \\
(v - \bar{v})\delta p_y &= 0 \\
(w - \bar{w})\delta p_z &= 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Virtüel deplasmandakine benzer şekilde dV ve dS elemanları üzerinde yapılan (3.38) ve (3.39) virtüel işleri integral ile genele taşınırsa (3.40) elde edilir. (3.40)’dan da diverjans teoremi yardımıyla varyasyon şeklindeki virtüel gerilme ve kuvvetlerin S_1 sınırında sıfır ettiği ve virtüel kuvvetlerin kendi aralarında dengede oldukları düşünülerek (3.41) virtüel kuvvetler prensibine veya komplementer virtüel iş prensibine ulaşılır.

$$\iiint_V (\varepsilon_{xx} - u_{,x}) \delta \sigma_{xx} + (...) \delta \sigma_{yy} + ... + (\gamma_{yz} - w_{,y} - v_{,z}) \delta \sigma_{yz} dV$$

$$+ \iint_{S_2} (u - \bar{u}) \delta p_x + (v - \bar{v}) \delta p_y + (w - \bar{w}) \delta p_z = 0 \quad (3.40)$$

$$\iiint_V (\varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \delta \sigma_{zz} + \gamma_{xy} \delta \sigma_{xy} + \gamma_{xz} \delta \sigma_{xz} + \gamma_{yz} \delta \sigma_{yz} dV$$

$$- \iint_{S_2} \bar{u} \delta p_x + \bar{v} \delta p_y + \bar{w} \delta p_z dS = 0 \quad (3.41)$$

Öncekinde olduğu gibi (3.41)'den de iç kuvvetlerin virtüel işinin dış kuvvetlerinkine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Yalnız (3.37)'den farklı olarak burada kuvvetlerin varyasyonu düşünülmektedir. Dolayısıyla (3.41)'in uygunluk ve geometrik sınır koşullarının bir karşılığı olduğu söylenecektir. Kısaca diferansiyel denge denklemlerini sağlayan ve mekanik sınır koşullarının bulunduğu yerlerde sıfır eden başkaca tamamen keyfî virtüel gerilmelerin ve kuvvetlerin sisteme tanıtılması durumunda gerçek yer değiştirmelerin yapacağı iç ve dış virtüel işler birbirine eşit olacaktır. Sonuçta bu iki bakış açısının (virtüel deplasmanlar ve virtüel kuvvetler) birbirini tamamlayıcı veya literatürdeki karşılığı olarak komplementer oldukları sonucuna varılır.

3.3.1.2 Toplam Potansiyel Enerjinin Minimal Prensibi

Virtüel deplasmanlardan hareket ederek lineer elastik bünye bağıntılarının da devreye sokulması neticesinde iyi bilinen bir varyasyonel prensip olan toplam potansiyel enerjinin stasyonerliğine ulaşılabilir. Bu amaç ile $A(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, ..., \gamma_{xy})$ (3.42) şeklinde hacim içinde birim şekilde değiştirmelere bağlı bir durum fonksiyonun bulunduğu kabul edilecektir. A fonksiyonunu tanımlamadaki amaç bünye denklemini devreye sokabilmektir.

$$A = \frac{1}{2} \{ (a_{11} \varepsilon_{xx} + a_{12} \varepsilon_{yy} + ... + a_{16} \gamma_{xy}) \varepsilon_{xx}$$

$$+ ... + (a_{61} \varepsilon_{xx} + a_{62} \varepsilon_{yy} + ... + a_{66} \gamma_{xy}) \gamma_{xy} \} \quad (3.42)$$

Bu A fonksiyonu esasında birim hacim başına depolanmış potansiyel enerjiden başka bir şey değildir. Bu durumda A 'nın varyasyonu alınması durumunda virtüel deplasmanlar ifadesinde karşılaşılan yapıya (3.43) ulaşıldığı görülür.

$$\delta A = \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \dots + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} \quad (3.43)$$

Buna göre eğer lineer bünye kanunları veya daha genel anlamda genelleştirilmiş Hooke yasaları kabul edilirse virtüel deplasmanlarda geçen $\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \dots + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}$ ifadesi yerine δA 'nın koyulabileceği anlaşılmış olur. Böylece (3.37) (3.44) formunu alır.

$$\delta \iiint_V A(u, v, w) dV - \iiint_V b_x \delta u + b_y \delta v + b_z \delta w dV - \iint_{S_1} \bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w dS = 0 \quad (3.44)$$

Bu aşamadan sonra iç ve dış kuvvetlerin potansiyel fonksiyonlardan türetilabilir oldukları yani korunumlu oldukları düşünülürse, kısacası (3.45) ve (3.46) gibi eşitlikler yazılabiliyorsa (3.44) (3.47) şeklinde verilebilir.

$$- \delta \Psi = b_x \delta u + b_y \delta v + b_z \delta w \quad (3.45)$$

$$- \delta \Phi = \bar{p}_x \delta u + \bar{p}_y \delta v + \bar{p}_z \delta w \quad (3.46)$$

$$\delta \iiint_V A(u, v, w) dV - \delta \iiint_V \Psi dV - \delta \iint_{S_1} \Phi dS = 0 \quad (3.47)$$

Bu çıkarımlar neticesinde $\pi(u, v, w)$ (3.48) şeklinde bir fonksiyonel tanımlanırsa bunun birinci varyasyonu olan stasyoner halinin $\delta \pi(u, v, w) = 0$ esasında elastisite probleminin denge ve mekanik sınır koşullarına karşı geldiği anlaşılmış olur.

$$\iiint_V A(u, v, w) dV + \iiint_V \Psi dV + \iint_{S_1} \Phi dS = \pi(u, v, w) \quad (3.48)$$

(3.48) ifadesi dış kuvvetlerin potansiyeli ile elastik iç potansiyel enerjinin toplamı olduğundan $\pi(u, v, w)$ toplam potansiyel enerji adıyla da anılır ve burada görüldüğü üzere bir sistemin bu şekilde toplam potansiyel enerji fonksiyoneli elde edilebiliyorsa derhal birinci varyasyonunu alınarak gerekli denge koşulları ve mekanik sınır şartları elde edilir. Yine hatırlatmakta fayda vardır ki u, v, w 'nin varyasyonları geometrik sınır şartlarının geçerli olduğu kısımda sıfır edecektir çünkü ancak bu şekilde sınır şartları ile uygun bir değişim söz konusu olabilir.

Toplam potansiyel enerji prensibi geniş uygulama alanına sahiptir. Burada bazı basit durumlardan bahsedilecektir. Önceki kısımlarda kullanılan eksenel yüklü çubuk problemi dikkate alınır ise ister (3.47), (3.48) kullanılsın isterse de ağırlıklı formlar yardımıyla oluşturulsun toplam potansiyel enerji fonksiyoneli kurmak zor olmayacaktır. Buna göre bünye ve uygunluk denklemleri yer değiştirme u cinsinden denge denkleminde yerine konularak ağırlıklı form oluşturulursa (3.50) elde edilecektir. Mekanik sınır koşulu için de aynı işlemler gerçekleştirildiğinde (3.51)'e ulaşılır.

$$\int_0^L (EFu_{,xx} + Q)\delta u dx = 0 \quad (3.50)$$

$$(p - EFu_{,x})\delta u(L) = 0 \quad (3.51)$$

Böylece önceden anlatıldığı üzere bu iki ifade toplanarak diverjans teoreminin bir boyutlu durumlardaki karşılığı olan kısmi entegrasyonun devreye sokulmasıyla ve $\delta u(0) = 0$ şartının hatırlanmasıyla (3.52) ifadesine varılır.

$$\delta \left\{ \int_0^L \frac{EFu_{,x}^2}{2} - Qudx - pu(L) \right\} = 0 \quad (3.52)$$

Oysa (3.52)'de varyasyonu alınan ifade eksenel yük ile yüklü elastik çubuk için verilen (3.53) toplam potansiyel enerjisinden farklı değildir.

$$\pi(u) = \int_0^L \frac{EFu_{,x}^2}{2} - Qudx - pu(L) \quad (3.53)$$

Öyleyse elde (3.53) var ise birinci varyasyon ile derhal denge denklemi ve mekanik sınır koşullarına ulaşmak mümkündür.

Elastik çubuk için anlatılanlar pekala Kısım 2’de verilen kiriş teorilerine de uygulanabilir. Bu durumda (3.53) benzeri fonksiyonel elde etmek için kiriş teorilerinin ilgili denklemlerinden hareket etmek gerekir veya genel olarak elde edilmiş bulunan (3.48) ifadesine ilgili bünye ve uygunluk şartlarını tanıtmak gerekir. Burada yine eldeki denklemlerden hareket edilecektir. Buna göre Euler – Bernoulli kirişi için moment ve düşey denge denklemleri birleştirilirse (3.54) elde edilir.

$$M_{,xx} + q = 0 \quad (3.54)$$

Uygunluk koşulu bünye denklemine yerleştirilirse ve her iki yandan z ile çarpılarak kesit üzerinde entegrali alınırsa şekil değiştirme bileşeni verilecek bir bünye denklemi elde olunur (3.55).

$$M + EIw_{,xx} = 0 \quad (3.55)$$

(3.54) ve (3.55)’in birleştirilmesiyle elastik çubuk probleminin Euler – Bernoulli kirişindeki karşılığı olan hem bünye hem de uygunluk koşulunu içeren (3.56) denklemine ulaşılır.

$$EIw_{,xxxx} - q = 0 \quad (3.56)$$

Mekanik sınır şartları olarak (2.21) denklemleri alınabilir, yalnız burada da bünye bağıntısının kullanılması ile (3.57) elde edilecektir.

$$(EIw_{,xx} + \overline{M})\Big|_{\sigma M} = 0 \quad (3.57.a)$$

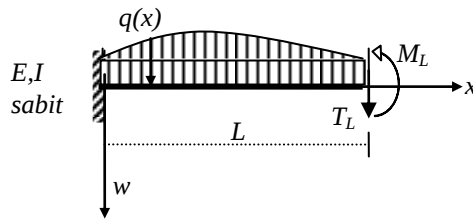
$$(EIw_{,xxx} + \overline{T})\Big|_{\sigma T} = 0 \quad (3.57.b)$$

Çarpım boyutunun enerji olmasına dikkat ederek (3.56) ve (3.57) δw şeklinde geometrik koşullu sınırlarda sıfır edecek başkaca tamamen keyfi varyasyon şeklinde

ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak ve (3.56) için entegrale geçilerek toplanırsa (3.58) elde edilir.

$$\int_0^L (EIw_{,xxxx} - q)\delta w + (EIw_{,xx} + \overline{M})\delta w_{,x} \Big|_{\sigma M} - (EIw_{,xxx} + \overline{T})\delta w \Big|_{\sigma T} = 0 \quad (3.58)$$

Keyfi mekanik sınır koşulları için verilen (3.58) Şekil 3.3'deki durum düşünüldüğünde (3.59)'daki gibi düzenlenebilir.



Şekil 3.3 Düşeyde Yayıllı Yük q , Uç Moment M_L ve Uç Kesme Kuvveti T_L Etkisindeki Konsol Kiriş

$$\int_0^L (EIw_{,xxxx} - q)\delta w + (EIw_{,xx} + M_L)\delta w_{,x}(L) - (EIw_{,xxx} + T_L)\delta w(L) = 0 \quad (3.59)$$

(3.59) için sözü edilen kısmi integrasyonun iki kez ard arda uygulanması ve geometrik sınır koşullarının belirtildiği yerlerde varyasyonun sıfır alınmasıyla (3.60) enerji fonksiyoneline ulaşılır.

$$\int_0^L \frac{EIw_{,xx}^2}{2} - qwdx + M_L w_{,x}(L) - T_L w(L) = \pi_{EBT}(w) \quad (3.60)$$

(3.60)'ın ilk varyasyonun tekrardan denge ve mekanik sınır koşullarına götüreceği aşıkardır. Aynı fonksiyonele (3.48) kullanılarak da ulaşılabilir.

Benzer formulasyon Timoshenko kirişi için de kurulabilir. Bu sefer (3.48) direkt olarak kullanılırsa (3.61) iç kuvvetlerin potansiyel enerjisini verirken (3.62)'de dış kuvvetlerin potansiyellerini verecektir.

$$\int_0^L \frac{EI \theta_{,x}^2}{2} + \frac{GFk_s (w_{,x} - \theta)^2}{2} dx \quad (3.61)$$

$$- \int_0^L q w dx + M_L \theta(L) - T_L w(L) \quad (3.62)$$

Bu iki ifadenin toplamı ile de Timoshenko kirişi için toplam potansiyel enerji fonksiyoneli (3.63) elde edilmiş olacaktır.

$$\int_0^L \left(\frac{EI \theta_{,x}^2}{2} + \frac{GFk_s (w_{,x} - \theta)^2}{2} - q w \right) dx + M_L \theta(L) - T_L w(L) = \pi_{TT}(\theta, w) \quad (3.63)$$

Toplam potansiyel enerji ifadesi ile yaklaşık çözüm ararken, geometrik sınır şartları stasyonerlik şartından elde edilemeyeceğinden geometrik sınır koşullarının önerilen çözümün içinde bulunması gerekir.

3.3.1.3 Genelleştirilmiş Varyasyonel Prensip

Toplam potansiyel enerji prensibine bakıldığında varyasyonun sadece şekil değiştirme bileşenleri üzerinden alındığı ve dolayısıyla da yaklaşık çözümün şekil değiştirme tipinde önerilebileceği görülmektedir. Bunun nedeni açıkça başlangıçta bütün denklemlerin şekil değiştirme tipinde yazılmasıdır. Şekil değiştirmeden farklı büyüklüklerin mesela kuvvet veya birim şekil değiştirme büyüklükleri kullanıldığı fonksiyoneller de geliştirmek mümkündür. Buna göre bu tip fonksiyonellerde stasyonerlik şartı olarak farklı karakterde büyüklüklere göre varyasyon alınmakta ve dolayısıyla da farklı denklemler elde edilebilmektedir. Kısaca açıklamak gerekirse örneğin yer değiştirmelere göre varyasyon alındığında denge denklemi elde edilirken kuvvetlere göre varyasyon alındığında ise uygunluk denklemi elde edilmektedir. Bu açıkça virtüel iş konusunda oluşturulan ağırlıklı ifadelerin enerji boyutunda olmasını sağlamak için denge denklemini yer değiştirmenin varyasyonu ile uygunluk denklemini kuvvetin varyasyonu ile çarpmaktan ileri gelmektedir. Eksenel yüklü çubuk örneğine dönülürse bütün denklemlerin enerji ağırlıklı ifadeleri oluşturulurken

enerji boyutunda olabilmeleri için uygun varyasyonlar ile çarpılması (3.64)'de gösterilmiştir.

$$\int_0^L (N_{,x} + q) \delta u dx = 0 \quad (3.64.a)$$

$$\int_0^L (\varepsilon_{xx} - u_{,x}) \delta N dx = 0 \quad (3.64.b)$$

$$\int_0^L (N - EF \varepsilon_{xx}) \delta \varepsilon_{xx} dx = 0 \quad (3.64.c)$$

$$(p - N(L)) \delta u(L) = 0 \quad (3.64.d)$$

$$(u(0) - u_0) \delta N(0) = 0 \quad (3.64.e)$$

(3.64)'de geçen ifadeler bir çatı altında birleştirilirse (3.65) genelleştirilmiş ifadesi bulunur.

$$\delta \left\{ \int_0^L N \varepsilon_{xx} - N u_{,x} - \frac{EF \varepsilon_{xx}^2}{2} + Q u dx + p u(L) - (u(0) - u_0) \delta N(0) \right\} = 0 \quad (3.65)$$

(3.65)'in elde edilmesinde çift sayıda rastlanan terimlerin varyasyonları aynı olacağından sadece birinin alınması yetmiştir. Örneğin $\delta(N u_{,x}) = u_{,x} \delta N - N_{,x} \delta u$ şeklinde varyasyon sembolünün türev ile analogisi ve kısmi entegrasyon kullanılmıştır. Böylece eksenel yüklü çubuk için (3.66) ile ifade edilen genelleştirilmiş fonksiyoneline ulaşılır.

$$\int_0^L N \varepsilon_{xx} - N u_{,x} - \frac{EF \varepsilon_{xx}^2}{2} + Q u dx + p u(L) - (u(0) - u_0) N(0) = \pi_{GC}(N, u, \varepsilon_{xx}) \quad (3.66)$$

Bu basit durum için elde edilen ifade 3 boyutlu hale rahatlıkla genelleştirilebilir. Bu durumda (3.66)'ya benzetilerek (3.67) elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
& \pi_G (\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{yz}, u, v, w, \sigma_{xx}, \dots, \sigma_{yz}) = \\
& \iiint_V -A(\varepsilon_{xx}, \dots, \gamma_{xz}) + \sigma_{xx} (\varepsilon_{xx} - u_{,x}) + \dots + \sigma_{xz} (\gamma_{xz} - u_{,z} - w_{,x}) \\
& + b_x u + b_y v + b_z w dV + \\
& \iint_{S_1} \bar{p}_x u + \bar{p}_y v + \bar{p}_z w dS + \\
& \iint_{S_2} (u - \bar{u}) p_x + (v - \bar{v}) p_y + (w - \bar{w}) p_z dS
\end{aligned} \tag{3.67}$$

(3.67) Hu – Washizu varyasyonel prensibi adıyla da bilinir. Önceki kısımda olduğu gibi Hu – Washizu prensibi kullanılarak kiriş problemleri için varyasyonel ifadeler geliştirmek mümkündür. Bunun için (3.67) kullanılabileceği gibi ağırlıklı formlar oluşturularak da işlem yerine getirilebilir. Örneğin Euler – Bernoulli kirişi için Şekil 3.3 dikkate alındığında şekilden farklı olarak Winkler zemini etkisi de kabul edilirse kullanılacak denklemler (3.68)’de verilmiştir.

$$\int_0^L (M_{,x} - T) \delta \theta dx = 0 \tag{3.68.a}$$

$$\int_0^L (T_{,x} + q - k_z w) \delta w dx = 0 \tag{3.68.b}$$

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} + \theta_{,x} \right) \delta M dx = 0 \tag{3.68.c}$$

$$\int_0^L (w_{,x} - \theta) \delta T dx = 0 \tag{3.68.d}$$

$$(T(L) - T_L) \delta w(L) = 0 \tag{3.68.e}$$

$$(M(L) - M_L) \delta \theta(L) = 0 \tag{3.68.f}$$

$$(\theta(0) - \theta_0) \delta M(0) = 0 \tag{3.68.g}$$

$$(w(0) - w_0) \delta T(0) = 0 \tag{3.68.h}$$

(3.68.b)’deki düşey denge denkleminde dikkat edilirse Kısım 2’den hatırlanabilecek Winkler zemin etkisi hesaba katılmıştır. Bu durumda denklemlerin hepsi enerji formundadır ve esasında hepsi bir serbestliğin varyasyon halini göstermektedir. Her serbestlik bir denklemi kontrol ettiğinden bu durumda önemli olan ağırlıklı formları

oluştururken denklemi kontrol eden doğru serbestliği bulmak olacaktır. (3.68) denklemleri kısmi entegrasyon ve varyasyonun bilinen sınır koşullarında sıfır olacağı gerçeğinden hareket ederek birleştirilirse (3.69) fonksiyoneli elde edilir.

$$\pi_{GEB}(M, T, w, \theta) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + T\theta + T_{,x}w + qw - \frac{k_z w^2}{2} + M\theta_{,x} dx + w_0 T(0) - M_L \theta(L) + (T(L) - T_L)w(L) + (\theta(0) - \theta_0)M(0) \quad (3.69)$$

(3.69)'un argümanlarına göre varyasyonu ile tekrardan (3.68) denklemleri elde edilebilir. Şunu da belirtmek lazımdır ki (3.69) oluşturulurken birleşimde uygunluk olması için bazı denklemler (–) ile çarpılmıştır.

(3.69)'un Timoshenko kirişi için kullanılabilecek tipte olanı, kesme kuvveti için bünye denkleminin dikkate alınması ve (3.68.d) dönme uygunluk koşulunun Timoshenko'ya göre değiştirilmesi ile kolaylıkla gerçekleştirilebilir. Bu durumda (3.70.a) kesme kuvvetinin bünye denkleminin ağırlıklı formu ve (3.70.b) dönme uygunluk koşulunun ağırlıklı formunun modifiye edilmiş şekli olarak kullanılabilir.

$$\int_0^L (T - GFk_s \gamma) \delta \gamma dx = 0 \quad (3.70.a)$$

$$\int_0^L (\gamma + \theta - w_{,x}) \delta T dx = 0 \quad (3.70.b)$$

Bu durumda benzer yollar kullanılarak Timoshenko kirişi için kullanılabilecek (3.71) ifadesine ulaşılır.

$$\pi_{GT}(M, T, w, \theta, \gamma) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + T\gamma + T\theta + T_{,x}w + qw - \frac{k_z w^2}{2} + M\theta_{,x} - \frac{GFk_s \gamma^2}{2} dx + w_0 T(0) - M_L \theta(L) + (T(L) - T_L)w(L) + (\theta(0) - \theta_0)M(0) \quad (3.71)$$

(3.71)'e benzer olan ve yine Timoshenko kirişi için kullanılabilir, ancak bu sefer kayma serbestliği γ 'yı içermeyen, bir formülasyon (3.70.a) ve (3.70.b)'yi aynı anda

düşünerek, bunlardan γ 'yı yok etmek suretiyle, birleştirmek netcesinde elde edilen (3.72) ağırlıklı formu kullanılarak elde edilebilir.

$$\int_0^L \left(\frac{T}{GFk_s} + \theta - w_{,x} \right) \delta T dx = 0 \quad (3.72)$$

Bu şekilde yeni fonksiyonel tamamiyle (3.71) ile eşdeğer olarak benzer yollardan hareketle (3.73) ile verilebilir.

$$\begin{aligned} \pi_{GT2}(M, T, w, \theta) = & \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GFk_s} + T\theta + T_{,x}w + qw \\ & - \frac{k_z w^2}{2} + M\theta_{,x} dx + w_0 T(0) - M_L \theta(L) \\ & + (T(L) - T_L)w(L) + (\theta(0) - \theta_0)M(0) \end{aligned} \quad (3.73)$$

(3.73) ile (3.71)'in üreteceği sonuçlar birbiriyle aynı olacaktır. Ayrıca (3.73)'e dikkat edilirse GFk_s kayma şekil değiştirme rijitliği arttırıldıkça fonksiyonel (3.69)'da Euler – Bernoulli için verilene yaklaşmaktadır.

3.3.1.4 Hellinger – Reissner Varyasyonel Prensibi

Hu – Washizu prensibinin gerilmeler, şekil değiştirmeler ve birim şekil değiştirmeler üzerine kurulduğu ifade edilmişti. Buna göre prensibin stasyoner hali ile elastisite problemine ait her denklem ve sınır koşulu sağlanmaktadır. Hu – Washizu formülasyonunda bünye denkleminin dışarıda bırakılarak birim şekil değiştirmelerin formülasyon haricinde tutulması ile yeni bir varyasyonel prensip olan Hellinger – Reissner prensibine ulaşılır. Buna göre artık gerilmelere ve şekil değiştirmelere göre varyasyonun alınacağı kısacası fonksiyonelin argüman olarak sadece gerilme ve şekil değiştirmeleri bulunduracağı anlaşılmış olur. Yine anlatım kolaylığı olması bakımından eksenel yüklü çubuk problemi dikkate alınırsa kullanılacak enerji boyutundaki ağırlıklı formlar (3.74) ile verilebilir.

$$\int_0^L (N_{,x} + q) \delta u dx = 0 \quad (3.74.a)$$

$$\int_0^L \left(\frac{N}{EF} - u_{,x} \right) \delta N dx = 0 \quad (3.74.b)$$

$$(p - N(L)) \delta u(L) = 0 \quad (3.74.c)$$

$$(u(0) - u_0) \delta N(0) = 0 \quad (3.74.d)$$

(3.74)'deki ağırlıklı formların, belirtilmiş sınır koşullarında varyasyonun sıfır ettiğine dikkat ederek, kısmi entegrasyon ile birleştirilmesi neticesinde, eksenel yüklü elastik çubuk için, (3.75) Hellinger – Reissner fonksiyoneli elde edilir.

$$\int_0^L \frac{N^2}{2EF} + u N_{,x} + Q u dx + u_0 N(0) + (p - N(L)) u(L) = \pi_{HRC}(u, N) \quad (3.75)$$

Yine argümanlara göre varyasyon alınırsa (3.75)'dan tekrar denge, uygunluk, mekanik ve geometrik sınır şartları stasyoner haller olarak elde edilebilir.

(3.75)'da geçen terimlere benzetilerek 3 boyutlu hal için Hellinger – Reissner fonksiyoneli verilebilir. Bu durumda (3.76)'ın stasyoner hali lineer elastisitenin uygunluk, denge ve mekanik, geometrik sınır şartlarına karşı gelecektir.

$$\begin{aligned} \pi_{HR}(\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zy}, u, v, w) = \\ \iiint_V B(\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zy}) + u(\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + b_x) + v(\dots) + w(\dots) dV \\ - \iint_{S_1} (p_x - \bar{p}_x)u + (p_y - \bar{p}_y)v + (p_z - \bar{p}_z)w dS \\ - \iint_{S_2} p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w} dS \end{aligned} \quad (3.76)$$

Burada tanımlanan $B(\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zy})$ durum fonksiyonu esasında $A(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \dots, \gamma_{xy})$ 'nin komplementlerinden başka bir şey değildir. Kısaca birim hacim başına depolanan enerji Hooke kanunları kullanılarak bu defa da gerilme bileşenleri cinsinden elde edilmektedir. Malzeme lineer ve elastik olduğu sürece $A=B$ eşitliği geçerlidir. A 'dakine benzer olarak B 'içinde tanım gereğince (3.77) özelliği bulunacaktır.

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial \sigma_{xx}} \delta \sigma_{xx} + \dots + \frac{\partial B}{\partial \sigma_{yz}} \delta \sigma_{yz} \quad (3.77)$$

(3.76) fonksiyoneli kullanarak Şekil 3.3'deki kiriş için çeşitli fonksiyoneller kurulabilir. Fakat yine enerji boyutunda ağırlıklı form kullanılması durumunda gerekli ifadeler Euler – Bernoulli kirişi için (3.78) ile verilebilir.

$$\int_0^L (M_{,xx} + q - k_z w) \delta w dx = 0 \quad (3.78.a)$$

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} + w_{,xx} \right) \delta M dx = 0 \quad (3.78.b)$$

$$(w_{,x}(0) - \bar{w}_{,x}) \delta M(0) = 0 \quad (3.78.c)$$

$$(M_{,x}(L) - T_L) \delta w(L) = 0 \quad (3.78.d)$$

(3.78)'deki ifadeler kısmi entegrasyon kullanımı ve varyasyonun belirlenmiş sınır koşullarında sıfır edeceğini hesaba katarak (3.79)'deki fonksiyonele dönüştürülebilir.

$$\pi_{HREB}(w, M) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - M_{,x} w_{,x} - \frac{k_z w^2}{2} + q w dx + \bar{w}_{,x} M(0) - T_L w(L) \quad (3.79)$$

Genelleştirilmiş veya Hu – Washizu prensibinde olduğu gibi Timoshenko kirişi için de Hellinger – Reissner tarzı fonksiyonel üretilebilir. Bu durumda yine (3.78) denklemlerinde uygun değişikliklerin yapılması gerekir. (3.78.b)'deki dönme uygunluk ifadesi Timoshenko'ya göre modifiye edilirse bunun yerine (3.80) elde edilecektir.

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} - \frac{M_{,xx}}{GFk_s} + w_{,xx} \right) \delta M dx = 0 \quad (3.80)$$

Böylece (3.80)'in (3.78.a,b,c) ile beraber kullanılması durumunda, her zamanki rutin işlemler (kısmi entegrasyon ve varyasyonun sınır koşullarının belirtildiği yerlerde sıfır değerini alması) neticesinde, Timoshenko tip kirişler için geliştirilen (3.81) Hellinger – Reissner fonksiyoneline ulaşılır.

$$\pi_{HRT}(w, M) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_{,x}^2}{2GFk_s} - M_{,x} w_{,x} - \frac{k_z w^2}{2} + qwdx + \bar{w}_{,x} M(0) - T_L w(L) \quad (3.81)$$

Gerek (3.81) gerekse (3.79)'da moment tipinde ve çökme tipinde sınır koşulları stasyonelik sonuçlarından olmadığından herhangi bir yaklaşık çözüm geliştirilirken bu büyüklükler ile ilgili sınır koşullarının önerilen çözüm ile önceden sağlatılması gerektiği dikkat edilmesi gereken bir husustur.

3.3.1.5 Komplementer Enerji Prensibi

Daha önce virtüel iş prensibine iki farklı açıdan bakılabileceği, yani deplasmanların virtüel kabul edilebileceği gibi kuvvetlerin de virtüel kabul edilerek bir takım prensiplere ulaşılabileceği bahis olunmuştu. Bu düşünceyle kuvvet tipi serbestliklerin varyasyonu neticesinde uygunluk ve geometrik sınır şartlarının elde edildiği fonksiyoneller gerçekleştirmek mümkündür. Elde edilen bu tip fonksiyoneller toplam potansiyel enerji fonksiyonellerinin bir tamamlayıcısı niteliğinde olduğundan komplementer enerji prensibi adı altında değerlendirilmektedir. Netice itibarıyla anlatılanlar ışığında eksenel yüklü basit çubuk örneği dikkate alınırsa kullanılacak uygunluk ve geometrik sınır şartı ağırlıklı formda, tekrardan, (3.82.a,b) ile verilebilir.

$$\int_0^L (u_{,x} - \frac{N}{EF}) \delta N dx = 0 \quad (3.82.a)$$

$$(u(0) - u_0) \delta N(0) = 0 \quad (3.82.b)$$

Bu aşamadan sonra (3.82.a)'dan, kısmi entegrasyon neticesinde (3.83)'e ulaşılır.

$$- \int_0^L u \delta N_{,x} + \delta \left(\frac{N^2}{2EF} \right) dx + \delta N u \Big|_0^L = 0 \quad (3.83)$$

(3.83)'ün yapısında virtüel olarak düşünülen gerilmelerin dengede olması gerçeğinden yola çıkarak $\delta N_{,x} = 0$ ve $\delta N(L) = 0$ olduğu hesaba katılırsa ve (3.82.b)

ağırlıklı formu (3.83)'e eklenirse eksenel yüklü elastik çubuk için komplementer enerji fonksiyoneli olarak (3.84)'e ulaşılır.

$$\pi_{KEC}(N) = \int_0^L -\frac{N^2}{2EF} dx + u_0 N(0) \quad (3.84)$$

Dikkat edilirse toplam potansiyel enerjide geometrik sınır şartlarına ve uygunluk denklemlerine uyan virtüel deplasmanlar kullanılarak stasyoner durumdan denge denklemi ve mekanik sınır şartı elde edilmekteyken, komplementer enerji prensibinde ise tersi olarak mekanik sınır şartlarına ve denge denklemine uygun virtüel kuvvetler kullanılarak uygunluk denklemi ve geometrik sınır şartları komplementer enerji fonksiyonelinin stasyonerliğinden elde edilmektedir. Bu şekilde bu iki yapının birbirlerinin tamamlayıcısı olduğu tamamen belli olmuştur. Buradan hemen yaklaşık çözüm için komplementer enerji fonksiyoneline önerilecek kuvvet tipi çözümün mekanik sınır şartlarını ve denge denklemlerini önceden sağlayacak tarzda olması gerektiği de ortaya çıkmış olur.

Komplementer enerji prensibi için genel hal ise (3.84)'e benzeterek rahatlıkla yazılabilir. Bu durumda (3.85) 3 boyutlu genel bir lineer elastisite problemi için geçerli olacaktır.

$$\pi_C(\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zy}) = -\iiint_V B(\sigma_{xx}, \dots, \sigma_{zy}) dV + \iint_{S_2} (p_x \bar{u} + p_y \bar{v} + p_z \bar{w}) dS \quad (3.85)$$

3.3.1.6 Özdeğer Problemlerine Geçiş

Kısım 2'de özdeğer problemleri Timoshenko ve Euler – Bernoulli için ayrı ayrı verilmiştir. Bu kısımda bu denklemler anlatılan varyasyonel prensipler ile birlikte kullanılarak özdeğer problemlerine ait formülasyonlar elde edilmeye çalışılacaktır.

Esasında titreşim burkulma veya dinamik stabilite problemlerine 3 boyutlu elastisite teorisi için verilen fonksiyoneller yardımıyla geçmek mümkün iken burada yine denklemlerin ağırlıklı formları oluşturularak bu işlem gerçekleştirilecektir. Bu durumda örneğin Hellinger – Reissner tarzı, burkulma problemine çözüm olabilecek bir fonksiyonele Kısım 2'de verilen denklemlerin ağırlıklı formları oluşturularak

geçilebilir. Burada önemli olan bir diğer nokta ise özdeğer denklemleri homojen yapıda olduklarından kuvvet tipi herhangi bir dış zorlamaya maruz değildir. Yani mekanik sınır koşulları söz konusu değildir. Bununla beraber ele alınan kiriş problemlerinde daima geometrik sınır şartları sıfır değerini haiz olduğundan sınır şartlarının fonksiyonel formülasyona katılmasına gerek yoktur. Anlatılanlar ışığında (3.86) ve (3.87) ağırlıklı formları oluşturulabilir.

$$\int_0^L (M_{,xx} - pw_{,xx} - k_z w) \delta w dx = 0 \quad (3.86)$$

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} + w_{,xx} \right) \delta M dx = 0 \quad (3.87)$$

(3.86) ve (3.87)'ye Euler – Bernoulli için zemin etkisinin de düşünüldüğü halin denge ve uygunluk denklemleri olarak bakılabilir. Bunların birleştirilmesi neticesinde Euler – Bernoulli kirişinin burkulma problemi için (3.88) fonksiyoneli elde edilir.

$$\pi_{HREBB} (M, w) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - M_{,x} w_{,x} + p \frac{w_{,x}^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} dx \quad (3.88)$$

Timoshenko kirişinin burkulması için ise (3.87) uygunluk denkleminde modifikasyon yapılması neticesinde elde edilen (3.89) uygunluk denklemi kullanılarak (3.90) fonksiyoneli kullanılabilir.

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} - \frac{M_{,x}}{GFk_s} + w_{,xx} \right) \delta M dx = 0 \quad (3.89)$$

$$\pi_{HRTB} (M, w) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_{,x}^2}{2GFk_s} - M_{,x} w_{,x} + p \frac{w_{,x}^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} dx \quad (3.90)$$

Titreşim problemi için de benzer şekilde hareket edilebilir. Bu durumda Euler – Bernoulli kirişi için zemin etkisini de düşünerek, Hellinger – Reissner tipi fonksiyonel oluşturmak için Kısım 2'den alınan denklemlerin ağırlıklı formu (3.91)'de verilmiştir.

$$\int_0^L (M_{,xx} - \lambda \rho F w - k_z w) \delta w dx = 0 \quad (3.91.a)$$

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} + w_{,xx} \right) \delta M dx = 0 \quad (3.91.b)$$

(3.91)'in rutin işlemler aracılığıyla birleştirilmesi ve sadece homojen sınır koşullarının bulunduğu dikkate alınması neticesinde (3.92) fonksiyoneli elde edilir.

$$\pi_{HREBT}(M, w) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - M_{,x} w_{,x} - \lambda \rho F \frac{w^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} dx \quad (3.92)$$

Timoshenko kirişi için atalet etkilerini de düşünerek verilebilecek bir fonksiyonel Hu – Washizu tipinde olacaktır. Bu durumda (3.68.b) düşey denge denkleminin karşılığı olan ağırlıklı form yerine (3.93.b) enine titreşim denge denkleminin karşılığı olan ağırlıklı formun kullanılması gerekecektir. Yine (3.68.a) moment denge denkleminin karşılığı olan ağırlıklı form yerine dönme atalet etkilerini hesaba katan (3.93.a) ifadesinin kullanılması gerektiği aşıkardır.

$$\int_0^L (M_{,x} - \lambda \rho I \theta - T) \delta \theta dx = 0 \quad (3.93.a)$$

$$\int_0^L (T_{,x} + \lambda \rho F w - k_z w) \delta w dx = 0 \quad (3.93.b)$$

Özdeğer problemlerinde homojen sınır koşullarının hüküm sürdüğü düşünülürse, ağırlıklı formların uygun şekilde birleştirilmesinden Timoshenko kirişinde titreşim problemi için (3.94) fonksiyoneline varılır.

$$\begin{aligned} \pi_{GTT_2}(T, M, w, \theta) = & \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GFk_s} - M_{,x} \theta + \lambda \rho F \frac{w^2}{2} + \lambda \rho I \frac{\theta^2}{2} \\ & - \frac{k_z w^2}{2} + T(\theta - w_{,x}) dx \end{aligned} \quad (3.94)$$

(3.94)'ün bir benzeri kesme kuvveti için bünye denklemi kullanılarak elde edilebilir. Bu durumda (3.70.a,b) denklemleri düşünülürse (3.94)'e eşdeğer, kayma açısı serbestliğinin de bulunduğu (3.95) fonksiyoneline ulaşılır.

$$\pi_{GTT}(T, M, w, \theta, \gamma) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - M,_{,x} \theta + \lambda \rho F \frac{w^2}{2} + \lambda \rho I \frac{\theta^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} + T(\gamma + \theta - w,_{,x}) - \frac{GFk_s \gamma^2}{2} dx \quad (3.95)$$

Böylece genel olarak özdeğer problemlerinin Kısım 2'de önceden hazırlanan denklemler kullanılarak ve homojen sınır şartları düşünülerek, fonksiyonel tarzda ifadesinin, kurulan ağırlıklı formların kısmi entegrasyonlar neticesinde uygun bir yapıda birleştirilmesi ile elde edilebileceği anlaşılmış olur.

3.3.2 Çalışma Kapsamında Geliştirilen Kiriş Fonksiyoneli

Önceki bölümlerde, denklemlerin kontrol edildikleri serbestliklerin virtüel artımları ile çarpılarak oluşturulan ve enerji boyutundaki karşılıkları olan ağırlıklı formları elde edilmişti. Kısmi entegrasyonlar ve belirli sınır koşullarında varyasyonun sıfır edeceği dikkate alınarak, bu ağırlıklı formların birleştirilmesi neticesinde çeşitli eşdeğer fonksiyoneller oluşturulmuştu. Bu işlemlerin titreşim ve burkulma tipinden özdeğer problemlerine ayrı ayrı uygulanması ile elde olunan fonksiyoneller geçmiş sayfalarda bulunmaktadır. Burada ise yine Kısım 2'de dinamik stabilite için çıkarılmış denklemler kullanılarak genel bir özdeğer problemi kurulmaya gayret edilecektir. Bu amaçla kullanılacak denklemler ağırlıklı formda olmak üzere (3.96) tekrar sıralanabilir.

$$\int_0^L (H,_{,x} + \frac{\Omega^2}{4} \rho F w - k_z w) \delta w dx = 0 \quad (3.96.a)$$

$$\int_0^L (M,_{,x} - \frac{\Omega^2}{4} \rho I \theta + T) \delta \theta dx = 0 \quad (3.96.b)$$

$$\int_0^L (T - (\alpha \pm \frac{\beta}{2}) p_1 \psi - H) \delta \psi dx = 0 \quad (3.96.c)$$

$$\int_0^L (T - GFk_s \gamma) \delta \gamma dx = 0 \quad (3.96.d)$$

$$\int_0^L \left(\frac{M}{EI} + \theta, x \right) \delta M dx = 0 \quad (3.96.e)$$

$$\int_0^L (\gamma + \theta - \psi) \delta T dx = 0 \quad (3.96.f)$$

$$\int_0^L (w, x - \psi) \delta H dx = 0 \quad (3.96.g)$$

(3.96) ağırlıklı formlarının yorumları, fonksiyonelin oluşturulmasını izah bakımından önemli olduğundan bir miktar açıklama gerektirmektedir. Buna göre önceden de belirtildiği gibi her serbestliğin kontrol ettiği bir denklem vardır. Örneğin herhangi bir yer değiştirme serbestliği kendi doğrultusu üzerinden yazılan denge denklemini kontrol edeceğinden, o serbestlik derecesi ile ilgili denge denkleminin virtüel işi adı geçen serbestliğin varyasyonunun denklem ile çarpılmasıyla elde edilecektir. Kısacası o serbestlik doğrultusundaki denge denklemini ağırlıklı formda enerji boyutunda eş değer olarak yazılmaktadır. (3.96) ağırlıklı formlarına bu gözle bakıldığında (3.96.a)'nın düşey dengeye karşı geldiği ve bu yöndeki serbestliğin de w ile ifade edildiği anlaşılabilecektir. (3.96.b)'de sadece eğilme momentinden kaynaklanan dönme açısı θ serbestliği üzerine yazılan moment denge denklemini kullanılmıştır. Dolayısıyla virtüel enerji şeklindeki ağırlıklı form karşılığı ancak $\delta\theta$ ile çarparak oluşturulabilir. (3.96.c)'de farklı koordinat sisteminde yazılmış bir moment dengesi söz konusudur. Burada denklemini yazarken kullanılan serbestlik toplam kesit dönmesi olan ψ olduğundan denklemini kontrol eden serbestlik de ψ olacaktır ve virtüel çarpım da doğal olarak $\delta\psi$ ile yapılacaktır. Bünye denklemleri birim şekil değiştirme veya kuvvet üzerinden yazılabildiğinden, yazılışına göre farklı serbestlikler üzerinden kontrol edilecektir. Bu durumda (3.96.d) kayma gerilmesinin bünye denklemini olup kayma açısı üzerinden yazıldığından γ ile kontrol edilmektedir. (3.96.e) moment dengesinin bünye denklemini olup moment üzerinden yazıldığından M ile kontrol edilmektedir. (3.96.f) uygunluk denklemini kayma açısı için yazıldığından T ile kontrol edilirken (3.96.g) uygunluk denklemini toplam kesit dönmesi olan ψ için yazıldığından H ile kontrol edilmektedir. Bu anlatılanlar

ışığında özdeğer problemleri için homojen sınır koşulları ve kısmi entegrasyon dikkate alınırsa kirişlerde hem serbest titreşim, hem burkulma, hem de dinamik analiz için kullanılabilecek; kayma deformasyonlarının, Winkler zemininin ve dönme ataletinin etkisini de hesaba katan genel bir fonksiyonel olan (3.97) elde edilir.

$$\pi(w, \psi, \theta, \gamma, H, T, M) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - \theta M_{,x} + T(\gamma + \theta - \psi) + H(\psi - w_{,x}) - \frac{GFk_s \gamma^2}{2} + p_1 \left(\alpha \pm \frac{\beta}{2} \right) \frac{\psi^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} + \rho F \Omega^2 \frac{w^2}{8} + \rho I \Omega^2 \frac{\theta^2}{8} dx \quad (3.97)$$

(3.97)'nin argümanlarına göre varyasyonu neticesinde tekrar stasyonerlik şartı olarak (3.96) ağırlıklı formlarının oluştuğu görülebilir.

3.3.3 Lagrange Çarpanları

Halihazırdaki bir fonksiyonelin stasyonerlik şartı olarak bünyesinde bulundurduğu denklemler yanında, dışarıdan sağlanan bir takım denklemlerin de stasyonerlik şartı olacak şekilde fonksiyonelin yapısına katılması, esasında, fonksiyonelin genelleştirilmesidir. Buna örnek olarak toplam potansiyel enerjinin genelleştirilmiş varyasyonel prensibe geniletilmesi verilebilir. Bu amaçla kullanılan matematik tekniklerden en yaygın olanı Lagrange Çarpanları yöntemidir. Burada sadece konu ile olan yakınlığından dolayı Lagrange Çarpanlarına örnek verilerek fiziksel anlamı sorgulanacaktır. Örnek olarak toplam potansiyel enerji ile kurulmuş olan Euler – Bernoulli kirişinin serbest titreşim problemi ele alınmış olsun. Bu durumda fonksiyonel (3.98) ile ifade edilecektir.

$$\pi_{TPEBT}(w) = \int_0^L \frac{EI w_{,xx}^2}{2} - \rho F \lambda \frac{w^2}{2} dx \quad (3.98)$$

Bu fonksiyonelin Hellinger – Reissner tipine genişletilebilmesi dışarıdan sağlanan bünye denkleminin stasyonerlik şartı olarak (3.98)'e entegre edilmesiyle mümkündür. Buna göre x kiriş boyunca sürekli bir fonksiyon olarak (3.99) ifadesi ile tanımlansın.

$$X = w_{,xx} \quad (3.99)$$

(3.98)'de $w_{,xx}$ yerine (3.99)'daki karşılığının kullanılmasıyla ve (3.99) şartının enerji boyutunda olacak şekilde M fonksiyonu ile ağırlıklı formunun oluşturularak yeni yapıya eklenmesiyle (3.100) elde edilir.

$$\pi_{HRP}(w, M, X) = \int_0^L \frac{EIX^2}{2} - \rho F \lambda \frac{w^2}{2} dx + \int_0^L (X - w_{,xx}) M dx \quad (3.100)$$

(3.100) ifadesi açıkça (3.99)'a eşdeğerdir ve fazladan eklenen argümanlardan M 'in varyasyonu ile (3.99) şartı sağlanacaktır. Eğer X 'e göre varyasyon alınırsa bu durumda karşılaşılan (3.101) şartı dışardan sağlatılarak yani X yerine karşılığı olan M/EI koyarak (3.102) eşdeğer fonksiyonel elde edilebilir.

$$\int_0^L (EIX + M) \delta X dx = 0 \quad (3.101)$$

$$\pi_{HREB}(M, w) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - M_{,x} w_{,x} - \rho F \lambda \frac{w^2}{2} dx \quad (3.102)$$

Bu şekilde kullanımıyla (3.99)'da geçen M bir Lagrange Çarpanı vazifesi yapmıştır. Literatürde [3] bu yöntemi kullanarak daha önce anlatılan varyasyonel prensiplerin çoğunu elde etmiştir. Burada önemli olan fonksiyonel ifadeye eklenmek istenen denklemin ağırlıklı formunun enerji boyutunda olmasını sağlayan uygun bir Lagrange Çarpanı seçilebilmesidir. Basit durumlar hariç tutulursa komplike problemlerde Lagrange Çarpanına ilk bakışta herhangi fiziksel bir mana yüklenemezken çarpanın fiziksel anlamı ancak bir takım varyasyonların alınması ile açıklığa kavuşur. Mesela örnekte Lagrange çarpanına ilk etapta moment denilemeseydi dahi X 'e göre varyasyon alındığında Lagrange çarpanı M 'nin hakikaten moment boyutunda bir büyüklük olduğu görülmektedir. Bu anlatılanlar ile Lagrange Çarpanı yönteminin fonksiyonellerin genelleştirilmesinde kullanımı hakkında bir fikir verilmiştir.

3.3.4 Gateaux Türevi ve Potansiyel Operatör

Herhangi bir problem her zaman ağırlıklı form ile kısmi entegrasyon sonucu eşdeğer bir integral yapıya sokulabilse de fonksiyonel formulasyonu bulunmayabilir. Buna göre fonksiyonel formulasyonu kabul eden yani elde edilen fonksiyonelin birinci varyasyonunun stasyoner olması ile ilgili problemin yönetici denklemlerinin ve/veya sınır koşullarının sağlanmasının eşdeğer olduğu problemlerin diğerlerinden bir farkının bulunması gerekir. Bu fark yönetici denklemlerin operatör formda yazılması ile elde edilen yapının bir özelliğini kontrol etmekle açığa çıkarılabilir. Bunun için bazı tanımlar vermek gereklidir. Yine basit bir örnek olan lineer yay ele alınırsa denklemler operatör formda (3.103 a,b)'de olduğu gibi açık ve kapalı olarak verilebilir.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0} \quad (3.103.a)$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} u \\ p_i \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.103.b)$$

$$\chi(\nu, \Delta) = \kappa \nu + \Delta \quad (3.303.c)$$

$$\bar{\chi}(\nu) = \kappa \nu \quad (3.103.d)$$

χ operatörü bu şekilde problemi öz biçimde ifade etmektedir. Bu aşamada χ 'in potansiyel bir operatör olup olmadığını kontrol etmek için, yani χ 'den fonksiyonel türetilip türetilmeyeceğini anlamak için, [15]'de verilen Gateaux Türevini kullanan yöntem uygulanabilir. Buna göre [15]'de Gateaux Türevi (3.104)'deki gibi tanımlanmaktadır.

$$d\bar{\chi}(\nu, \bar{\nu}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} (\bar{\chi}(\nu + \tau \bar{\nu}) - \bar{\chi}(\nu)) \right) \quad (3.104)$$

(3.104)'den anlaşılacağı üzere, Gateaux Türevi, operatör formun ν vektörüne göre birinci varyasyonu göstermektedir. Lineer elastisite teorisinde küçük şekilde

değişiklikler için denklemler daima lineer olduklarından operatör de lineer olacaktır. Bu durumda Gateaux Türevi ile (3.105)'e direkt geçilebilir.

$$d\bar{\chi}(\nu, \bar{\nu}) = \bar{\chi}(\bar{\nu}) \quad (3.105)$$

Operatörün Gateaux Türevi bu şekilde elde edildikten sonra potansiyellik şartı olarak artık (3.106)'nın sağlanması gerektiği literatürde [15] ifade edilmektedir.

$$\langle d\bar{\chi}(\nu, \bar{\nu}), \hat{\nu} \rangle = \langle d\bar{\chi}(\nu, \hat{\nu}), \bar{\nu} \rangle \quad (3.106)$$

(3.106)'da köşeli parantez bir iç çarpımı göstermektedir. Buna göre eşitliğin sağlanması için karşılıklı olarak aynı terimlerin üretilmesi gerekir. Bu da ancak (3.103.c)'deki κ matrisinin yapısı ile ilgilidir. (3.106) şartı açık olarak yazılırsa (3.107) elde edilir.

$$(\kappa \bar{\nu})^T \hat{\nu} = (\kappa \hat{\nu})^T \bar{\nu} \quad (3.107)$$

(3.107)'den anlaşılacağı üzere eşitliğin geçerli olabilmesi için (3.108) şartının bulunması yani κ 'nın simetrik olması gerekmektedir.

$$\kappa = \kappa^T \quad (3.108)$$

Eğer κ 'nın her girdisi sabit ise (3.108) şartı direkt kullanılabilecekken çoğu problemde girdiler türev operatörü şeklinde olduğundan (3.107)'nin sağlanması için kısmi entegrasyonlar gerekecektir. Bu durumda κ içindeki tek mertebeden türev operatörü şeklindeki girdilerin esas diyagonele göre antimetrik olması (3.107)'yi sağlayacak şart olacaktır. Basit örnekte, lineer yay problemi için (3.103.c)'de görüldüğü gibi κ 'nın bütün girdileri parametrik olarak sabit olduğu için (3.106) şartı yerine simetriklik şartı olan (3.108) derhal kullanılabilir ki zaten bu problemde κ 'nın simetrik olduğu görülmektedir. Örneğin elastik çubuk problemi dikkate alınırsa (3.103) denklemlerinin elastik çubuk problemindeki karşılığı, sınır şartları dahil edilmez ise (3.109) ile verilir.

$$\begin{pmatrix} 0 & -d/dx & 1 \\ d/dx & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -EA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ u \\ \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.109.a)$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & -d/dx & 1 \\ d/dx & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -EA \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} N \\ u \\ \varepsilon_{xx} \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.109.b)$$

$$\chi(\nu, \Delta) = \kappa\nu + \Delta \quad (3.109.c)$$

$$\bar{\chi}(\nu) = \kappa\nu \quad (3.109.d)$$

(3.109.a)'da κ matrisinde türev operatörü girdileri esas köşegene göre ters işaretli yani antimetrikler. Bunun neden dolayı bu şekilde yazılması gerektiği (3.106) şartı (3.109)'a uygulanarak derhal bulunabilir. Bu işlem açık olarak (3.110)'da gösterilirse türev operatörüyle çarpımın, sabit parametrik bir girdi ile çarpımdan, farklı tarafı ortaya çıkar.

$$\int_0^L \begin{pmatrix} \hat{N} & \hat{u} & \hat{\varepsilon}_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d/dx & 1 \\ d/dx & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -EA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{N} \\ \bar{u} \\ \bar{\varepsilon}_{xx} \end{pmatrix} dx = \quad (3.110.a)$$

$$\int_0^L \begin{pmatrix} \bar{N} & \bar{u} & \bar{\varepsilon}_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d/dx & 1 \\ d/dx & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -EA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{N} \\ \hat{u} \\ \hat{\varepsilon}_{xx} \end{pmatrix} dx =$$

$$-\langle \bar{N} \hat{u},_x \rangle + \langle \bar{N} \hat{\varepsilon}_{xx} \rangle + \langle \bar{u} \hat{N},_x \rangle + \langle \bar{\varepsilon}_{xx} \hat{N} \rangle - \langle \bar{\varepsilon}_{xx} \hat{\varepsilon}_{xx} EA \rangle = \quad (3.110.b)$$

$$-\langle \hat{N} \bar{u},_x \rangle + \langle \hat{N} \bar{\varepsilon}_{xx} \rangle + \langle \hat{u} \bar{N},_x \rangle + \langle \hat{\varepsilon}_{xx} \bar{N} \rangle - \langle \hat{\varepsilon}_{xx} \bar{\varepsilon}_{xx} EA \rangle$$

$$-\langle \bar{N} \hat{u},_x \rangle + \langle \bar{u} \hat{N},_x \rangle = \quad (3.110.c)$$

$$-\langle \hat{N} \bar{u},_x \rangle + \langle \hat{u} \bar{N},_x \rangle$$

$$(\bar{N} \hat{u}),_x = \bar{N},_x \hat{u} + \bar{N} \hat{u},_x \quad (3.110.d)$$

$$(\hat{N} \bar{u}),_x = \hat{N},_x \bar{u} + \hat{N} \bar{u},_x \quad (3.110.e)$$

$$\langle (\hat{N} \bar{u}),_x \rangle = \langle (\bar{N} \hat{u}),_x \rangle \quad (3.110.f)$$

(3.110)'daki işlemlerin takip edilmesinden operatörün potansiyel olması için en nihayetinde (3.110.f) şartının sağlanması gerektiği görülür. Bu ise Betti'ye izafe edilen farklı kuvvet $(\hat{N}, \bar{N})$ ve yer değiştirme $(\hat{u}, \bar{u})$ sistemlerinin birbirleri üzerinde

aynı işi yapacaklarının ifadesi olan “Betti Karşıtlık Teoreminden” başka bir şey değildir. Böylece (3.109.c)’deki operatörün potansiyel olduğu anlaşılmış olur. Öyleyse artık bu operatörün hangi fonksiyonelden türetildiğini bulmaya sıra gelmiştir. Bu da yine [15]’de (3.111) denklemi ile verilmiştir.

$$I(v) = \int_0^1 \langle \chi(\eta v, \Delta), v \rangle d\eta \quad (3.111)$$

Bu şekilde (3.111) uygulaması olarak (3.110.a) düzenlenirse (3.112) elde edilir.

$$\pi_G(N, u, \varepsilon_{xx}) = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} N & u & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -d/dx & 1 \\ d/dx & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -EA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta N \\ \eta u \\ \eta \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle d\eta \quad (3.112)$$

(3.112)’de işlemlerin yürütülmesiyle daha önceden sınır koşulları ile elde edilmiş olana (3.66) tamamen benzer olan fakat, operatörün kurulumunda sadece yönetici denklemler kullanıldığından sınır koşullarını içermeyen eksenel yüklü çubuk fonksiyoneli (3.113) elde edilmiş olur.

$$\pi_G(N, u, \varepsilon_{xx}) = \int_0^L N,_{,x} u + N \varepsilon_{xx} + Qu - \frac{EF \varepsilon_{xx}^2}{2} dx \quad (3.113)$$

Anlaşılabacağı üzere Gateaux Türevi operatör formu, belirlenen simetri ve antimetri koşullarına göre uygun şekilde düzenlemekle birlikte kullanılan bir kontrol yöntemidir. Buna göre operatör potansiyel ise fonksiyonel kolayca elde edilebilmektedir. Netice itibarıyla yöntemin başarısı κ matrisinin kurulumunu uygun şekilde gerçekleştirmekte yatmaktadır. Bu da, kuşkusuz daha önce belirtilen hangi denklemin hangi serbestlik tarafından kontrol edildiğinin iyi belirlenmesi ile yakından alakalıdır.

3.3.5 Varyasyonel Yöntemlerin Avantajları

Önceki kısımlarda daima teorik bilgiler verildi ve varyasyonel formülasyon anlatılmaya çalışıldı. Burada alternatif bir formülasyon olan varyasyonel yöntemin avantajlarından bahs edilerek konu kapatılacaktır.

Varyasyonel formülasyon elastisitenin yönetici denklemlerini bünyesinde barındırdığından (stasyonerlik şartı olarak) onlara denktir. Bununla beraber varyasyonel formülasyonun birtakım bariz avantajları vardır:

- a) Stasyoner olması istenen fonksiyonelin fiziksel bir anlamı vardır ve koordinat dönüşümleri altında invaryanttır. Mesela mekanikte bu genellikle enerjidir. Bu özellikten faydalanarak yönetici denklemlerin diğer koordinatlardaki ifadeleri rahatlıkla elde edilebilir. Bunun için önce invaryant olan ifade (fonksiyonel) yeni koordinat sistemi için yazılıp burada stasyoner olma şartı aranarak yeni koordinat sistemi için yönetici denklemler elde edilir.
- b) Varyasyonel formülasyon aracılığıyla bir matematiksel problem eşdeğer varyasyonel forma sokulabilmektedir ki böylece çözümü bulmak için bir takım kolaylaştırıcı prosedürler kullanılabilir. Bir takım ek koşullar ile bir varyasyonel problem Lagrange çarpanlarının kullanılmasıyla yeni bir forma dönüştürülebilir. Bu şekilde birbirine eşdeğer varyasyonel prensip ailelerinden uygun olanı seçilerek kullanılabilir.
- c) Bazı durumlarda varyasyonel formülasyon neticesinde ilgili problemin kesin sonucunun alt veya üst sınırı elde edilebilir. Bu da bir takım kontroller ile sonucun doğruluğunun araştırılmasında kullanılabilir.
- d) Kesin çözümü bulunamayan bir çok elastisite problemine varyasyonel formülasyon aracılığı ile istenilen duyarlıkta yaklaşık bir çözüm geliştirilebilir. Burada varyasyonel formülasyon sadece yaklaşık yönetici denklem önermek için değil yaklaşık sınır koşulları önermek için de kullanılabilir. Nitekim Kısım 3.3'de varyasyonel bazlı bir yaklaşık çözüm örnek problem için geliştirilmiştir.

Sonuç olarak denilebilir ki bir çok durumda varyasyonel yaklaşık çözümler ile yetinilmesi gerekir. Kiriş, kabuk, levha ve kompleks yapıların analizi için

varyasyonel yöntem güçlü bir matematiksel araçtır. Bununla beraber yaklaşık yöntemler için şu gerçek unutulmamalıdır ki türevle birlikte hatalar artmaktadır. Deplasman bazlı yöntemler deplasmanlar için iyi sonuç verirken gerilmeler için iyi sonuç vermez çünkü yaklaşım deplasmanlar üzerine kurulmuştur ve gerilmeler yaklaşık bulunan deplasmanlardan türetilerek elde edilmişlerdir. Genel olarak yaklaşık yöntemlerde yönetici denklemler ve sınır şartlarından bazıları yaklaşık olarak sağlatılır.

3.4 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar varyasyonel esasa dayalı olarak geliştirilen ve diferansiyel denklemlerden yola çıkılarak oluşturulan eşdeğer entegral denklemleri yaklaşık olarak çözmek için kullanılan matematiksel bir yöntemdir. Genel olarak yaklaşık yöntemlerde diferansiyel denklemler ile ifade edilen bir problem “eşdeğer” varyasyonel forma sokulur. Daha sonra yaklaşık çözüm yaklaşım fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu şeklinde aranır. Buna göre önerilen çözüm formu (3.114) ile verilecektir.

$$\tilde{u} \approx \sum c_i \phi_i \quad (3.114)$$

Burada ϕ_i 'ler “yaklaşım fonksiyonları”, c_i 'ler ise çözüm halinde (varyasyonel form ile) belirlenecek parametrelerdir. Klasik yaklaşık yöntemler problemin tanımlı olduğu kümeyi bir bütün olarak ele alarak genel bir çözüm geliştirme yoluna giderken, sonlu elemanlar kompleks geometrilili bölgeleri bütün olarak ele almak yerine, basit geometrilili parçalardan oluşmuş kabul eder. Sonlu elemanlar, bu kabul neticesinde ortaya çıkan parçalar üzerinde yaklaşım fonksiyonları üreterek ayrık, eşdeğer, yaklaşık çözüm geliştirmek için sistematik bir yol sunar. Sonlu elemanlarda sözü edilen yaklaşım fonksiyonları bölgeyi oluşturan parçalar üzerinde tanımlı polinomlardır. Burada parçalardan kast edilen ise “sonlu elemanlar”dır.

Daha önce de belirtildiği gibi diferansiyel denklem eşdeğer fonksiyonel şekle sokulduktan ve argümanlarının tümü için (3.114)’e benzer çözümler önerildikten sonra artık fonksiyonelin yeni argümanları bilinmeyen parametreler olacaktır.

Dolayısıyla yönetici denklemlerin ve sınır koşullarının sağlatılması anlamına gelen fonksiyonelin stasyoner hali, bu durumda fonksiyonel bu parametrelere bağlı olduğundan, parametrelere göre adi türev şartı ile ifade edilebilecektir. Öyleyse denilebilir ki fonksiyonel, içine yerleştirilen yaklaşık çözüm neticesinde, parametrelere bağlı bir yapı arz edecektir ve stasyonerlik şartı artık parametrelere göre adi türev alınarak sağlanabilecektir.

3.4.1 Genel Bilgiler ve Tanımlar

Literatürde geçen değişik varyasyonel metotların, örneğin Rayleigh-Ritz, Galerkin, en küçük kareler vs., birbirlerinden ayırıcı yönleri seçilen yaklaşım fonksiyonlarının, kullanılan ağırlık fonksiyonlarının veya kurulan entegral ifadenin farklı oluşu ile ortaya çıkar. Bu yöntemlerin en büyük sıkıntısı kompleks sınır koşullarına sahip bölgeler için adı geçen yakınsama fonksiyonlarının oluşturulmasında karşılaşılan güçlüklerdir.

Sonlu elemanlar ise işte bu noktada öne çıkar. Sonlu elemanlar analizinin temel felsefesi üç basamakta özetlenebilir:

- a) Üzerinde çözüm aranan kompleks geometrilili bir bölge daha basit alt bölgelere ayrılır. Mesela problemin tanımlandığı bir düzlem bölge, üçgen ve/veya dörtgenlere ayrılabilir ve gereken büyüklükte üçgen veya dörtgenler kullanılarak da istenilen ölçüde temsil edilebilir.
- b) Bulunmaya çalışılan katsayılar, yani yaklaşık çözümde önerilen c_i parametreleri, sonlu elemanlar yönteminde, yaklaşık çözüm önerilen büyüklüğün eleman üzerinde, yerleri önceden tanımlanan, çeşitli noktalardaki bilinmeyen değerleri olarak seçilir. Yani bir eleman içi (3.114) şeklinde bir çözüm önerisinde c_i yerine u_i kullanılacaktır. Bu şekilde fonksiyonelin stasyonerliği aracılığıyla kurulan denklem takımlarında bilinmeyen u_i değerleri belirlendiğinde, önceden seçilen u_i 'lerin tanımlı olduğu bu noktalardaki aranan çözüm otomatik olarak bulunmuş olacaktır. Eleman üzerinde arada kalan noktalarda ise, çözüm, yaklaşım fonksiyonlarının

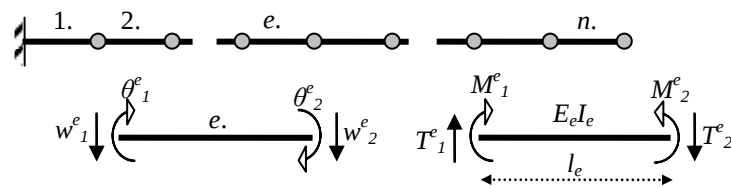
bulunan u_i değerleri ile çarpılması ile fonksiyon tipinde (3.114) gösterilmiş olacaktır.

- c) Sonlu eleman adı verilen bu basit alt bölgelerde adı geçen yaklaşım fonksiyonlarının kurulmasında dikkat edilmesi gereken bazı hususlar vardır. Buna göre sonlu elemanlarda önerilen tanım gereği yaklaşım fonksiyonları ait oldukları noktalarda 1 değerini alırken diğer noktalarda sıfır değerini alacaklardır. Çünkü ancak bu şekilde, önerilen çözümde seçilen noktaların koordinatları girildiğinde, yaklaşım fonksiyonlarının nodal parametreleri olarak bilinmeyen u_i değerleri elde edilir. Ayrıca seçilen enterpolasyon fonksiyonlarının fonksiyonelin gerektirdiği ölçüde türevlenebilir özelliğe sahip olmaları gerekir. Örneğin fonksiyonelde ikinci mertebe türevlerinin bulunduğu bir fonksiyona yaklaşık çözüm önerirken lineer enterpolasyon fonksiyonlarının kullanılamayacağı aşıkardır.

Sonlu elemanlarda fonksiyonel formülasyonun dışında kalan sınır şartları bilinmeyen noktasal değerler olan u_i parametrelerinden verilen sınır şartlarına denk gelenlerinin, bu sınır şartlarına göre düzenlenmesiyle hesaba katılırken, fonksiyonel formülasyona dahil olan sınır şartları yaklaşık anlamda kısmi olarak gerçekleştirir.

3.4.2 Varyasyonel Yöntemler ve Sonlu Elemanlar

Daha önceden varyasyonel prensiplerin başında gelen virtüel deplasmanların yaklaşık çözümde kullanımı gösterilmişti. Burada yine anlatım kolaylığı bakımından Euler – Bernoulli kirişi için geliştirilen (3.98) serbest titreşim fonksiyoneli kullanılarak sonlu eleman formülasyonu geliştirilecektir. Bu amaç için Şekil 3.4 takip edilebilir.



Şekil 3.4 Euler – Bernoulli Kirişinin Sonlu Eleman Modellemesi

Buna göre görüldüğü üzere kiriş denklemlerinin tanımlı olduğu bölge tek boyutlu çubuk eksenini ile gösterilmektedir. Bu esasen denklemlerin tek bağımsız değişken olan x ile kurulmalarının bir sonucudur. Şekil 3.4'te bölgenin alt bölgelere yani elemanlara bölünmesi de gösterilmektedir. Farklı büyüklüklerde eleman tanımlamak mümkünken genelde eleman boylarını yakın büyüklükte seçmek tercih edilir. Bu problemde ise her elemanın boyu eşit alınmaktadır. Sonlu elemanlar varyasyonel prensipleri her model alt bölge üzerinde sağlayarak bir elemanın karakteristik denklemlerini üretmeyi amaçladığından sistemden izole edilen tipik bir eleman üzerindeki uç kuvvetler ve deplasmanlar ile parametrik olarak gösterilmiştir. Bu şekilde sadece bu izole eleman için varyasyonel prensip uygulanmaya hazır hale getirilmiştir. Artık çözüm için yapılması gereken problemin icap ettirdiği yaklaşık sonlu eleman çözümünü inşa etmek gerekmektedir. Fonksiyonelin yapısı incelendiğinde problemde bilinmeyen olarak sadece w çökmelerinin bulunduğu görülmektedir. Dolayısıyla bir elemanda yaklaşık çözüm önerirken noktasal parametrelerin w_i şeklinde seçileceği anlaşılmaktadır. Buradaki elemanlar, eleman başında ve sonunda olmak üzere, iki adet noktaya sahip olduklarından bir e . elemanın çökme karakteristiği, w_1^e sol uç noktadaki çökme ve w_2^e sağ uç noktadaki çökme olmak üzere, w_1^e ve w_2^e parametreleriyle verilecek demektir. Buna göre süreklilik şartı ile $(e-1)$. elemandan e . elemana geçişte çökme sürekliliği olması için $w_2^{e-1} = w_1^e$ şartının ileri sürüleceği aşikardır. Bu çubuğun elastik eğrisinde süreksizliği önleyecektir. Hemen anlaşılabileceği üzere kirişin fiziksel modeli için elastik eğrinin eğimi olan dönmelerin de sürekliliğinin sağlanması gereklidir. Öyleyse artık çökmeye benzer şekilde uç noktalarda $w_{,x_1}^e$ $w_{,x_2}^e$ gibi dönme serbestliklerinin de tanımlanması gerekmektedir. Bu durumda kiriş üzerinde önerilecek çökme fonksiyonu, polinom olarak, en az dört sabit içermelidir ki uç noktalarda dört parametre üzerine kurulabilsin. Anlatılanlar ışığında e . eleman üzerinde çökme e . eleman lokal koordinatı ile (3.115) şeklinde kabul edilebilir.

$$w^e(x_e) = ax_e^3 + bx_e^2 + cx_e + d \quad (3.115)$$

(3.115) çözüm önerisini, daha önceden tanımlanan, çökme ve dönme şeklindeki noktasal parametreler ile verilen şekle çevirmek için uç noktaların koordinatlarının

(3.115) ve türevine yerleştirilerek uç noktalardaki çökme ve dönmelere eşitlenmesi yeterlidir. Buna göre (3.116) takip edilirse (3.117) ile sonlu elemanların eleman üzerinde önerdiği noktasal parametreler cinsinden yazılmış çözüm verilmiş olur.

$$\begin{aligned}
w^e(0) &= w_1^e = d \\
w^e(l_e) &= w_2^e = al_e^3 + bl_e^2 + cl_e + d \\
w_{,x}^e(0) &= w_{,x1}^e = \theta_1^e = c \\
w_{,x}^e(l_e) &= w_{,x2}^e = \theta_2^e = 3al_e^2 + 2bl_e + cl_e
\end{aligned} \tag{3.116.a}$$

$$\begin{pmatrix} w_1^e \\ w_2^e \\ \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_e^3 & l_e^2 & l_e & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3l_e^2 & 2bl_e & l_e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{3.116.b}$$

$$S = \begin{pmatrix} w_1^e \\ w_2^e \\ \theta_1^e \\ \theta_2^e \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ l_e^3 & l_e^2 & l_e & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3l_e^2 & 2bl_e & l_e & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \tag{3.116.c}$$

$$S = DY$$

$$Y = D^{-1}S$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{l_e^3} & -\frac{2}{l_e^3} & \frac{1}{l_e^2} & \frac{1}{l_e^2} \\ -\frac{3}{l_e^2} & \frac{3}{l_e^2} & \frac{1}{l_e} & -\frac{1}{l_e} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.116.d}$$

$$w^e(x_e) = w_1\phi_1 + w_2\phi_2 + \theta_1\varphi_1 + \theta_2\varphi_2 = w_i\phi_i + \theta_j\varphi_j$$

$$i, j = 1, 2$$

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= 1 - \frac{3x_e^2}{l_e^2} + \frac{2x_e^3}{l_e^3} \\
\phi_2 &= \frac{3x_e^2}{l_e^2} + \frac{2x_e^3}{l_e^3} \\
\varphi_1 &= x - \frac{2x_e^2}{l_e} + \frac{x_e^3}{l_e^2} \\
\varphi_2 &= -\frac{x_e^2}{l_e} + \frac{x_e^3}{l_e^2}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

(3.117)'de geçen yaklaşım fonksiyonlarına noktasal değerleri küme içine taşıdıkları için artık enterpolasyon fonksiyonları da denir. Bunların klasik yaklaşım fonksiyonlarından nasıl türetildiği açıkça izlenmektedir. Bu şekilde üzerinden yaklaşım geliştirilen (bu problem için w) fonksiyonun hem kendinin hem de türevlerinin sürekliliğinin sağlandığı tipteki enterpolasyon fonksiyonlarına Hermite tipi enterpolasyon fonksiyonları denir. İlerde görülecek ve sadece yaklaşım kurulan fonksiyonun sürekliliğini sağlayacak, türevlerine ilişmeyecek tipteki enterpolasyon fonksiyonlarına ise Lagrange tipi enterpolasyon fonksiyonları denecektir. Bu izahlardan sonra artık yaklaşık çözüm fonksiyonel ifadeye yerleştirilebilir.(3.118)

$$\pi_{TPEBT}(w_1, w_2, \varphi_1, \varphi_2) = \int_0^{l_e} \frac{E_e I_e [w_{,xx}^e(x_e)]^2}{2} - \frac{\rho F \lambda [w^e(x_e)]^2}{2} dx_e \quad (3.118)$$

(3.118)'in açık olarak yazılması ile (3.119)'a ulaşılır.

$$\begin{aligned} \pi_{TPEBT}(w_1, w_2, \varphi_1, \varphi_2) = & \int_0^{l_e} \frac{E_e I_e [w_1^e \phi_{1,xx} + w_2^e \phi_{2,xx} + \theta_1^e \varphi_{1,xx} + \theta_2^e \varphi_{2,xx}]^2}{2} \\ & - \frac{\rho F \lambda [w_1^e \phi_1 + w_2^e \phi_2 + \theta_1^e \varphi_1 + \theta_2^e \varphi_2]^2}{2} dx_e \end{aligned} \quad (3.119)$$

(3.119)'dan açıkça görüldüğü üzere fonksiyonel ifade artık x_e 'den ve dolayısıyla da entegrasyondan bağımsız olan noktasal değerlere bağlıdır. Bu durumda fonksiyonelin stasyonerlik şartının noktasal değerlerin birbirlerinden bağımsız oldukları göz önünde tutulduğunda adi türev alınarak sonucun sıfıra eşitlenmesi ile ifade edilmesi mümkündür. Anlatılanlar (3.120)'de işlem olarak gösterilmiştir. Burada $\delta w_1, \dots$ virtüel artımı birbirinden bağımsız olduğundan, stasyonerlik şartının sağlanması için, herbirinin katsayısı ayrı ayrı sıfıra eşitlenmelidir.

$$\begin{aligned} \delta \pi_{TPEBT} &= \frac{\partial \pi}{\partial w_1^e} \delta w_1^e + \frac{\partial \pi}{\partial w_2^e} \delta w_2^e + \frac{\partial \pi}{\partial \theta_1^e} \delta \theta_1^e + \frac{\partial \pi}{\partial \theta_2^e} \delta \theta_2^e = 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial w_1^e} &= \frac{\partial \pi}{\partial w_2^e} = \frac{\partial \pi}{\partial \theta_1^e} = \frac{\partial \pi}{\partial \theta_2^e} = 0 \end{aligned} \quad (3.120)$$

Elde edilen denklemler ise kısaltmalar izah edilerek (3.121)'deki gibi verilebilir.

$$B_2 = \rho F \lambda \begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \phi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \langle \varphi_1, \phi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \phi_2 \rangle \\ \langle \phi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \phi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \langle \phi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \phi_2, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{pmatrix}, \quad (3.121.a)$$

$$B = B_1 - B_2, SB = 0$$

$$\int_0^{l_e} \phi_i \varphi_j dx_e = \langle \phi_i, \varphi_j \rangle$$

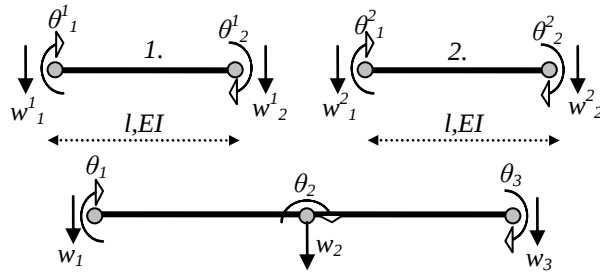
$$B_1 = E_e I_e \begin{pmatrix} \langle \phi_1,_{xx}, \phi_1,_{xx} \rangle & \langle \phi_2,_{xx}, \phi_1,_{xx} \rangle & \langle \varphi_1,_{xx}, \phi_1,_{xx} \rangle & \langle \varphi_2,_{xx}, \phi_1,_{xx} \rangle \\ \langle \phi_1,_{xx}, \phi_2,_{xx} \rangle & \langle \phi_2,_{xx}, \phi_2,_{xx} \rangle & \langle \varphi_1,_{xx}, \phi_2,_{xx} \rangle & \langle \varphi_2,_{xx}, \phi_2,_{xx} \rangle \\ \langle \phi_1,_{xx}, \varphi_1,_{xx} \rangle & \langle \phi_2,_{xx}, \varphi_1,_{xx} \rangle & \langle \varphi_1,_{xx}, \varphi_1,_{xx} \rangle & \langle \varphi_1,_{xx}, \varphi_2,_{xx} \rangle \\ \langle \phi_1,_{xx}, \varphi_2,_{xx} \rangle & \langle \phi_2,_{xx}, \varphi_2,_{xx} \rangle & \langle \varphi_1,_{xx}, \varphi_2,_{xx} \rangle & \langle \varphi_2,_{xx}, \varphi_2,_{xx} \rangle \end{pmatrix} \quad (3.121.b)$$

Buradaki B_1 ve B_2 matrislerinin fonksiyoneldeki hangi terimlerden türediği katsayılarından açıkça belli olmaktadır. Ele alınan serbest titreşim problemi bir özdeğer problemidir. Dolayısıyla önceden homojen sınır şartlarına sahip olduğu söylenen bu tip problemlerde herhangi bir sınır terimle karşılaşılmamıştır ki zaten fonksiyonel de önceden bu mülahazalar ile kurulmuştu. (3.121)'de gerekli entegraller alınarak (3.122)'de parametrik olarak verilmiştir. Bu ifadeler ile kurulan B matrisinde tek eleman göz önüne alındığında çeşitli mesnetlenme tiplerine göre sınır şartları girilerek elde edilen alt matrisin determinantı sıfıra eşitlenecektir. Örneğin konsol kiriş için $w_1 = 0, \theta_1 = 0$ olduğundan B matrisinin bunlara karşı gelen 1. ve 3. satır ve sütunu silinerek elde edilecek alt matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile kurulacak denklemden çekilen λ değerlerinden küçük olan 1. titreşim frekansını verirken büyük olanı ise 2. titreşim frekansını verecektir. Bu işlemler gerçekleştirildiğinde tek eleman için analitik değer $\omega_{1ana.} = 3.516 \sqrt{EI / \rho Fl^4}$ iken $\omega_1 = 3.534 \sqrt{EI / \rho Fl^4}$ bulunmuştur. Kuşkusuz eleman sayısı arttırılınca modlar daha iyi ifade edilebileceğinden sonuç da iyileşecektir.

$$B_1 = E_e I_e \begin{pmatrix} \frac{12}{l_e^3} & -\frac{12}{l_e^3} & \frac{6}{l_e^2} & \frac{6}{l_e^2} \\ -\frac{12}{l_e^3} & \frac{12}{l_e^3} & -\frac{6}{l_e^2} & -\frac{6}{l_e^2} \\ \frac{6}{l_e^2} & -\frac{6}{l_e^2} & \frac{4}{l_e} & \frac{2}{l_e} \\ \frac{6}{l_e^2} & -\frac{6}{l_e^2} & \frac{2}{l_e} & \frac{4}{l_e} \end{pmatrix} \quad (3.122.a)$$

$$B_2 = \rho F \lambda \begin{pmatrix} \frac{13l_e}{420} & \frac{9l_e}{210} & \frac{11l_e^2}{140} & -\frac{13l_e^2}{105} \\ \frac{35}{420} & \frac{70}{210} & \frac{210}{140} & \frac{420}{105} \\ \frac{9l_e}{420} & \frac{13l_e}{210} & \frac{13l_e^2}{140} & -\frac{11l_e^2}{105} \\ \frac{70}{420} & \frac{35}{210} & \frac{420}{140} & \frac{210}{105} \\ \frac{11l_e^2}{420} & \frac{13l_e^2}{210} & \frac{l_e^3}{140} & -\frac{l_e^3}{105} \\ \frac{210}{420} & \frac{420}{210} & \frac{105}{140} & \frac{140}{105} \\ -\frac{13l_e^2}{420} & -\frac{11l_e^2}{210} & -\frac{l_e^3}{140} & \frac{l_e^3}{105} \end{pmatrix} \quad (3.122.b)$$

Netice itibariyle bir Euler – Bernoulli kirişinin serbest titreşim sonlu eleman modeli geliştirilmiş oldu. Son aşama olarak birden fazla eleman kullanılması durumunda genel rijitlik matrisinin oluşturulması işlemi üzerinde durulacaktır. Örneğin iki eleman seçilmesi durumunda sistemin ne şekilde olacağı Şekil 3.5’de gösterilmiştir.



Şekil 3.5 İki Sonlu Elemandan Oluşan Sistemin Geometrik Birleşimi, Lokal ve Global Serbestliklerin Gösterilmesi

Hemen anlaşılacağı üzere üst üste binen noktalardaki serbestlikler süreklilik şartından dolayı aynı olmak zorundadır. Dolayısıyla aynı cins olan her iki serbestlik tek serbestliğe indirgenerek o noktanın kendileri cinsinden global serbestliğine dönüşmektedir. Bu şekilde düşünülünce n elemanlı olan ve her elemanında iki nokta bulunan bir kirişin $n+1$ adet global noktası olacak ve her noktada tanımlı tek çökme ve tek dönme parametresinden dolayı toplamda $m=2(n+1)$ adet serbestliği

bulunacaktır. Netice itibariyle global serbestlikler ile kurulacak matrisin mxm boyutunda olacağı aşıkardır. Hemen takdir edilebilecek bir başka gerçek ise global matrisin doldurulurken aynı global serbestliğe karşı gelen lokal eleman rijitliklerinin de üst üste bindirileceğidir. Bu gerçekler 2 eşit uzunlukta elemandan müteşekkil model için kurulmuş global sistem matrisinin verildiği (3.123)'de görülmektedir.

$$\begin{aligned}
 & EI \begin{pmatrix} \frac{12 EI}{l^3} & -\frac{12 EI}{l^3} & 0 & \frac{6}{l^2} & \frac{6}{l^2} & 0 \\ -\frac{12 EI}{l^3} & \frac{24 EI}{l^3} & -\frac{12 EI}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} \\ 0 & -\frac{12 EI}{l^3} & \frac{12 EI}{l^3} & 0 & -\frac{6}{l^2} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{4}{l} & \frac{2}{l} & 0 \\ \frac{6}{l^2} & 0 & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{8}{l} & \frac{2}{l} \\ 0 & \frac{6}{l^2} & -\frac{6}{l^2} & 0 & \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} - \\
 & \rho F \lambda \begin{pmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{9l}{70} & 0 & \frac{11l^2}{210} & -\frac{13l^2}{420} & 0 \\ \frac{9l}{70} & \frac{26l}{35} & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} & 0 & -\frac{13l^2}{420} \\ 0 & \frac{9l}{70} & \frac{13l}{35} & 0 & \frac{13l^2}{420} & -\frac{11l^2}{210} \\ \frac{11l^2}{210} & \frac{13l^2}{420} & 0 & \frac{l^3}{105} & -\frac{l^3}{140} & 0 \\ -\frac{13l^2}{420} & 0 & \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & \frac{2l^3}{105} & -\frac{l^3}{140} \\ 0 & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{11l^2}{210} & 0 & -\frac{l^3}{140} & \frac{l^3}{105} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

(3.123)'de eleman boyları l alınmıştır. İki elemandan oluşmuş sistemde konsol giriş sınır şartları düşünülürse $w_1 = \theta_1 = 0$ edeceğinden 1. ve 4. satır ve sütun silinerek elde edilen alt matrisin determinantı sifıra eşitlenecektir. Elde edilen cebrik denklem λ parametresine göre çözülürse serbest titreşimin ilk dört yaklaşık frekansı küçükten büyüğe elde edilir. Buna göre $\omega_1 = 3.534 \sqrt{EI / \rho F l^4}$ olarak bulunmuştur. Tek elemana göre sonucun iyileştiği görülmektedir.

3.4.2.1 Zayıf Form ve Fonksiyonelin Birinci Varyasyonu

Şimdiye kadar sonlu eleman formülasyonunu geliştirirken daima bir fonksiyonel kullanıldı. Fonksiyonele yaklaşık çözüm önerildikten sonra parametrelere göre türev alınarak gereken denklemler elde edilmişti. Oysa önce varyasyonu alarak daha sonra yaklaşık çözüm önermek de mümkündür. Bu durumda varyasyon alınınca, önceden bilindiği üzere, bir takım ağırlıklı formlara ulaşılmıştı. Bunlar aslında fonksiyonelin bünyesinde barındırdığı yönetici denklemlerin enerji boyutunda olacak şekilde uygun ağırlık fonksiyonları ile çarpılarak küme üzerinde entegre edilmeleriyle ve kısmi entegrasyon işlemi neticesinde elde ediliyordu. Eğer ağırlıklı formu kurduktan sonra fonksiyonel yapıda birleştirmeyerek sadece kısmi entegrasyon ile türev mertebesini eşit olacak şekilde ağırlık fonksiyonun üzerine geçirmekle yetinilirse zayıf form adı verilen yine benzer ağırlıklı bir form elde edilir. Açıklamalardan anlaşılacağı üzere zayıf form fonksiyonelin birinci varyasyonun alınması durumunda karşılaşılan ağırlıklı formlara verilen addır. Bununla beraber zayıf form, direkt yönetici denklemlerden de yukarıda anlatıldığı gibi çift mertebede türevleri ağırlık fonksiyonu üzerine kısmi entegrasyon ile geçirerek de bulunabilir. Anlatım kolaylığı bakımından ve karşılaştırma için yine Euler – Bernoulli kirişinin serbest titreşim problemi ele alınsın. Bu durumda kullanılan fonksiyonel burada (3.124.a) ile verilmektedir. (3.124.b) ifadelerinde fonksiyonelin varyasyonu gösterilmiştir. Varyasyonun alınmış olduğu hale yaklaşık çözümün konulmasıyla elde edilen yapının (3.124.c) önce yaklaşık çözüm önerilerek sonra stasyonerlik şartının parametrelere göre adi türevle ifade edildiği yapıdan (3.124.d) farkı açıkça ağırlık fonksiyonun anlamı (3.124.e) ile ilgilidir. Buna göre görülmektedir ki oluşturulan zayıf forma (3.124.f) yaklaşık çözümle girildiğinde varyasyon olarak görülen ağırlık fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonları şeklinde seçilmesi ile fonksiyonelden elde edilen cebrik denklemlerin aynısı elde edilmektedir.

$$\pi_{TPEBT}(w) = \int_0^L \frac{EI(w'_{xx})^2}{2} - \frac{\rho F \lambda w^2}{2} dx \quad (3.124.a)$$

$$\delta \pi_{TPEBT} = \int_0^L EI w'_{xx} \delta w'_{xx} - \rho F \lambda w \delta w dx = 0 \quad (3.124.b)$$

$$\delta\pi_{TPEBT} = \int_0^L EI (w_i \phi_i,_{xx}) \delta w,_{xx} - \rho F \lambda w_i \phi_i \delta w dx = 0 \quad (3.124.c)$$

$$\delta\pi_{TPEBT} = \int_0^L EI (w_i \phi_i,_{xx}) \phi_j,_{xx} - \rho F \lambda w_i \phi_i \phi_j dx = 0 \quad (3.124.d)$$

$$w = w_i \phi_i, \delta w = \phi_j \quad (3.124.e)$$

$$\int_0^L (EI w,_{xxxx} - \rho F \lambda w) \delta w dx = \int_0^L EI w,_{xx} \delta w,_{xx} - \rho F \lambda w \delta w dx + s.t. \quad (3.124.f)$$

Özetlemek gerekirse elde bir fonksiyonel var ise buna yaklaşık çözüm önerilerek noktasal değerlere göre adi türev almak ile stasyonerlik şartı aracılığıyla bilinmeyen noktasal değerler için gereken denklemler elde edilebilir. Eğer elde fonksiyonel yoksa bu durumda denklemlerin enerji boyutunda olacak şekilde uygun ağırlık fonksiyonları ile çarpılmaları ile ağırlıklı formlar oluşturulur. Bu formlar denklemlerdeki türev mertebesinin çift olduğu durumlarda kısmi entegrasyon ile ağırlık fonksiyonu üzerine yarı yarıya dağıtılır. Kısmi entegrasyon neticesinde çeşitli sınır koşullarının da görüldüğü bu yapıya zayıf form denir. Zayıf form da görülen varyasyon şeklindeki ağırlık fonksiyonları yerine enterpolasyon fonksiyonları yerleştirilerek hiç bir türev işlemine gerek kalmadan bilinmeyen noktasal değerler için aynı cebrik denklemler elde edilir. Bununla beraber şu da belirtilmelidir ki her denklem zayıf formülasyonu kabul ettiği halde bir fonksiyonel formu bulunmayabilir. Eğer fonksiyonel var ise zayıf form doğrudan bunun birinci varyasyonudur.

3.4.3 Sonlu Elemanlar Yönteminin Geliştirilen Fonksiyonele Uygulanması

Daha önceden sonlu elemanlar Euler – Bernoulli krişinin serbest titreşim problemine uygulanmıştı. Orada yapılane benzer şekilde burada da çalışma kapsamında daha önceden geliştirilmiş bulunan çeşitli fonksiyoneller için sonlu eleman formülasyonları kurulacaktır.

3.4.3.1 Timoshenko Kirişinde Burkulma Fonksiyonelinin Formülasyonu

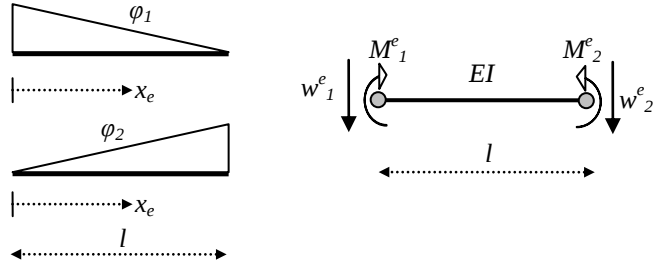
Daha önce (3.90) ile verilen ve Hellinger – Reissner prensibine göre Timoshenko kirişi için geliştirilmiş bulunan fonksiyonelin sonlu eleman formülasyonu bu kısmın konusudur.

$$\pi_{HRTB}(M, w) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_{,x}^2}{2Gfk_s} - M_{,x} w_{,x} + p \frac{w_{,x}^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} dx \quad (3.125)$$

Buna göre fonksiyonelde dikkat edileceği şekilde artık M ve w gibi biri kuvvet diğeri deplasman tipinde iki değişik fonksiyonun aynı durumda yaklaşık çözümü söz konusudur. Bu şekilde farklı alanların aynı formülasyonda birlikte bulunmasına sonlu elemanlar literatüründe karışık sonlu eleman formülasyonu adı verilmektedir. Fonksiyonelin kurulumundan hatırlanacağı üzere M ve w fonksiyonları birbirlerinden bağımsız oldukları için her birisi için ayrı ayrı çözüm önermek mümkündür. Problemin matematiksel yapısından anlaşılacağı gibi M , w fonksiyonlarında süreklilik sadece kendi üzerlerinde gereklidir dolayısıyla bunlarda daha önceden bahsedilen Lagrange tipi enterpolasyon fonksiyonları kullanılacaktır. Yine fonksiyonelden anlaşılacağı üzere w de M de sadece birer kez türeve tabi tutulduğundan seçilecek enterpolasyon fonksiyonlarının lineer olması türevlilik şartı açısından yeterli olacaktır. Buna göre (3.126)'daki yaklaşık çözüm kabulleri yapılabilir.

$$\begin{pmatrix} M = M_i \varphi_i \\ w = w_i \varphi_i \end{pmatrix}, i = 1, 2 \quad (3.126)$$

Şekil 3.6'dan kullanılan elemanların özellikleri ve yaklaşım fonksiyonlarının biçimleri görülebilir. Esasında daha önceden verilen Kısım 3.42'de anlatılan genel yöntemle bulunabileceği gibi, enterpolasyon fonksiyonlarının üçgen formlarından, matematiksel olarak ifadeleri derhal yazılabilir. (3.127)



Şekil 3.6 Lineer Enterpolasyon Fonksiyonları ve Pozitif Yönlü Uç Kuvvet ve Uç Deplasmanların Gösterimi

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1 - \frac{x_e}{l} \\ \varphi_2 &= \frac{x_e}{l}\end{aligned}\tag{3.127}$$

Önerilen yaklaşık çözümler ile önceden izah edildiği gibi (3.125)'e girilirse yine fonksiyonel yaklaşık çözüm geliştirilen fonksiyonların noktasal değerlerine bağlı hale gelir. Bu parametrelere göre yapılacak türev işleminin sonucunun sıfıra eşitlenmesi ile stasyonerlik şartı gerçekleştirilmiş olacaktır. Anlatılanlar (3.128) ifadelerinden takip edilebilir. Yalnız burada yazım kolaylığı olması bakımından büyüklüklerin keyfi bir e . elemana ait olduğunu ifade eden e indisi kaldırılmıştır.

$$\begin{aligned}\pi_{HRTB}(M_i, w_i) &= \int_0^L \frac{(M_i \varphi_i)^2}{2EI} + \frac{(M_i \varphi_{i,x})^2}{2GFk_s} - M_i \varphi_{i,x} w_i \varphi_{i,x} \\ &+ p \frac{(w_i \varphi_{i,x})^2}{2} - \frac{k_z w_i \varphi_i^2}{2} dx\end{aligned}\tag{3.128.a}$$

$$\delta \pi_{HRTB} = \frac{\partial \pi}{\partial w_1} \delta w_1 + \frac{\partial \pi}{\partial w_2} \delta w_2 + \frac{\partial \pi}{\partial M_1} \delta M_1 + \frac{\partial \pi}{\partial M_2} \delta M_2 = 0\tag{3.128.b}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_1} = \frac{\partial \pi}{\partial w_2} = \frac{\partial \pi}{\partial M_1} = \frac{\partial \pi}{\partial M_2} = 0$$

$$K.v = 0\tag{3.128.c}$$

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} \\ K^{21} & K^{22} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} M \\ w \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\tag{3.128.d}$$

$$K^{11} = \begin{pmatrix} \frac{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle}{EI} + \frac{\langle \varphi_{1,x}, \varphi_{1,x} \rangle}{GFk_s} & \frac{\langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle}{EI} + \frac{\langle \varphi_{2,x}, \varphi_{1,x} \rangle}{GFk_s} \\ \frac{\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle}{EI} + \frac{\langle \varphi_{1,x}, \varphi_{2,x} \rangle}{GFk_s} & \frac{\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle}{EI} + \frac{\langle \varphi_{2,x}, \varphi_{2,x} \rangle}{GFk_s} \end{pmatrix} \quad (3.128.e)$$

$$K^{12} = K^{21} = \begin{pmatrix} -\langle \varphi_{1,x}, \varphi_{1,x} \rangle & -\langle \varphi_{2,x}, \varphi_{1,x} \rangle \\ -\langle \varphi_{1,x}, \varphi_{2,x} \rangle & -\langle \varphi_{2,x}, \varphi_{2,x} \rangle \end{pmatrix} \quad (3.128.f)$$

$$K^{22} = \begin{pmatrix} -k_z \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + p \langle \varphi_{1,x}, \varphi_{1,x} \rangle & -k_z \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle + p \langle \varphi_{2,x}, \varphi_{1,x} \rangle \\ -k_z \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + p \langle \varphi_{1,x}, \varphi_{2,x} \rangle & -k_z \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle + p \langle \varphi_{2,x}, \varphi_{2,x} \rangle \end{pmatrix} \quad (3.128.g)$$

(3.128.c) ile ifade edilen denklem takımı bir eleman için çıkarılmıştır. Önceden anlatıldığı şekilde bir birleştirme işlemi ile istenilen sayıda eleman için kurulacak bir global matris sınır şartlarının uygulanacağı sistem matrisi olacaktır. Bununla beraber K^{ij} girdilerini açık olarak vermek faydalı olabilir.

$$K^{11} = \begin{pmatrix} \frac{l}{3EI} + \frac{1}{GFk_s l} & \frac{l}{6EI} - \frac{1}{GFk_s l} \\ \frac{l}{6EI} - \frac{1}{GFk_s l} & \frac{l}{3EI} + \frac{1}{GFk_s l} \end{pmatrix} \quad (3.129.a)$$

$$K^{12} = K^{21} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \end{pmatrix} \quad (3.129.b)$$

$$K^{22} = \begin{pmatrix} -k_z \frac{l}{3} + p \frac{1}{l} & -k_z \frac{l}{6} - p \frac{1}{l} \\ -k_z \frac{l}{6} - p \frac{1}{l} & -k_z \frac{l}{3} + p \frac{1}{l} \end{pmatrix} \quad (3.129.c)$$

3.4.3.2 Timoshenko Kirişinde Serbest Titreşim Fonksiyonelinin Formülasyonu

Bu kısımda önceden verilmiş olan (3.94) kodlu fonksiyonelin formülasyonu gerçekleştirilecektir. Fonksiyonel kolaylık olması bakımından tekrar verilmiştir.

$$\pi_{GTT_2}(T, M, w, \theta) = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} + \frac{T^2}{2GFk_s} - M_{,x} \theta + \lambda \rho F \frac{w^2}{2} + \lambda \rho I \frac{\theta^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} + T(\theta - w_{,x}) dx \quad (3.130)$$

Dikkat edilirse artık her noktada çökme, eğilmeden meydana gelen dönme, moment ve kesme kuvveti olmak üzere dört adet serbetlik bulunmaktadır. Bu fonksiyonların tümü formülasyona göre ayrı ayrı varyasyona tabi tutulduğundan ve birbirlerinden bağımsız olduklarından yaklaşık çözümleri de ayrı ayrı önerilecektir. Yine fonksiyonelin incelenmesinden lineer enterpolasyon fonksiyonlarının yeterli olacağı görülmektedir. Bu durumda (3.126)'ya benzer tarzda (3.131) önerilebilir.

$$\begin{pmatrix} M = M_i \varphi_i \\ T = T_i \varphi_i \\ \theta = \theta_i \varphi_i \\ w = w_i \varphi_i \end{pmatrix}, i = 1, 2 \quad (3.131)$$

Burada kullanılan enterpolasyon fonksiyonlarının matematiksel ifadeleri (3.127)'de olduğu gibidir. Burkulma problemine benzer rutin işlemlerin yapılması durumunda (3.132) eleman davranış matrisine ulaşılır.

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} & K^{34} \\ K^{41} & K^{42} & K^{43} & K^{44} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} M \\ T \\ \theta \\ w \end{pmatrix}, \quad (3.132.a)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K^{11} &= \begin{pmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{pmatrix}, K^{22} = \begin{pmatrix} \frac{l}{3GFk_s} & \frac{l}{6GFk_s} \\ \frac{l}{6GFk_s} & \frac{l}{3GFk_s} \end{pmatrix}, \\
K^{33} &= \begin{pmatrix} \frac{\rho I \lambda l}{3} & \frac{\rho I \lambda l}{6} \\ \frac{\rho I \lambda l}{6} & \frac{\rho I \lambda l}{3} \end{pmatrix}, K^{44} = \begin{pmatrix} \frac{-k_z l + \rho F \lambda l}{3} & \frac{-k_z l + \rho F \lambda l}{6} \\ \frac{-k_z l + \rho F \lambda l}{6} & \frac{-k_z l + \rho F \lambda l}{3} \end{pmatrix} \\
K^{31} &= (K^{13})^T = K^{42} = (K^{24})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
K^{32} &= K^{23} = \begin{pmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}, K^{12} = K^{21} = K^{14} = K^{41} = K^{43} = K^{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.132.b}$$

Böylece hem elastik Winkler zemininin hem kayma deformasyonlarının hem de dönme ataletinin etkisinin düşünüldüğü bir eleman davranış matrisi elde edilmiş olur.

3.4.3.3 Timoshenko Kirişinde Dinamik Stabilité Fonksiyonelinin Formülasyonu

Bu kısımda çalışmanın asıl meyvesi denilebilecek (3.98) dinamik stabilité fonksiyonelinin sonlu eleman formülasyonu verilecektir.

$$\begin{aligned}
\pi(w, \psi, \theta, \gamma, H, T, M) &= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} - \theta M_{,x} + T(\gamma + \theta - \psi) + H(\psi - w_{,x}) \\
&- \frac{GFk_s \gamma^2}{2} - p_1 \left(\alpha \pm \frac{\beta}{2} \right) \frac{\psi^2}{2} - \frac{k_z w^2}{2} + \rho F \Omega^2 \frac{w^2}{8} + \rho I \Omega^2 \frac{\theta^2}{8} dx
\end{aligned} \tag{3.133}$$

Önceden ifade edildiği gibi bu durumda artık nokta başına yedi adet serbestlik bulunacaktır. Her biri diğerinden bağımsız olan bu serbestlikler için türevlenebilme şartı lineer enterpolasyon fonksiyonlarının kullanılabileceğini ifade etmektedir. Bu durumda öncekilere benzer olarak yaklaşık çözümler (3.134) ile verilebilir.

$$\begin{pmatrix} M = M_i \varphi_i \\ T = T_i \varphi_i \\ H = H_i \varphi_i \\ \gamma = \gamma_i \varphi_i \\ \theta = \theta_i \varphi_i \\ \psi = \psi_i \varphi_i \\ w = w_i \varphi_i \end{pmatrix}, i = 1, 2 \quad (3.134)$$

Belirtilen (3.134)'ün (3.133)'e yerleştirilerek rutin türev işlemlerinin gerçekleştirilmesi sonucu (3.135) eleman davranış matrisine ulaşılır.

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} & K^{15} & K^{16} & K^{17} \\ K^{12} & K^{22} & K^{23} & K^{24} & K^{25} & K^{26} & K^{27} \\ K^{13} & K^{32} & K^{33} & K^{34} & K^{35} & K^{36} & K^{37} \\ K^{14} & K^{42} & K^{43} & K^{44} & K^{45} & K^{46} & K^{47} \\ K^{15} & K^{52} & K^{53} & K^{54} & K^{55} & K^{56} & K^{57} \\ K^{16} & K^{62} & K^{63} & K^{64} & K^{65} & K^{66} & K^{67} \\ K^{17} & K^{72} & K^{73} & K^{74} & K^{75} & K^{76} & K^{77} \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} M \\ T \\ H \\ \gamma \\ \theta \\ \psi \\ w \end{pmatrix}, \quad (3.135.a)$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

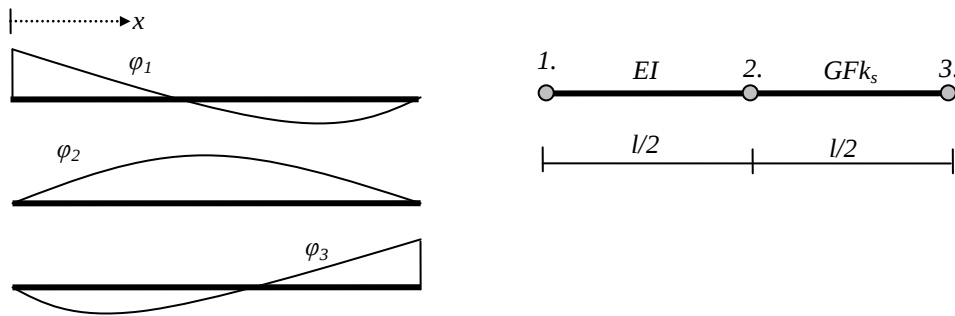
$$K^{11} = \begin{pmatrix} \frac{l}{3EI} & \frac{l}{6EI} \\ \frac{l}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{pmatrix}, K^{44} = \begin{pmatrix} -\frac{lGFk_s}{3} & -\frac{lGFk_s}{6} \\ -\frac{lGFk_s}{6} & -\frac{lGFk_s}{3} \end{pmatrix},$$

$$K^{55} = \begin{pmatrix} \frac{\rho I \Omega l}{12} & \frac{\rho I \Omega l}{24} \\ \frac{\rho I \Omega l}{24} & \frac{\rho I \Omega l}{12} \end{pmatrix}, K^{66} = \begin{pmatrix} \frac{-p(2\alpha + \beta)l}{6} & \frac{-p(2\alpha + \beta)l}{12} \\ \frac{-p(2\alpha + \beta)l}{12} & \frac{-p(2\alpha + \beta)l}{6} \end{pmatrix} \quad (3.135.b)$$

$$K^{77} = \begin{pmatrix} \frac{-8k_z l + 2\rho F \Omega l}{24} & \frac{-4k_z l + \rho F \Omega l}{24} \\ \frac{-4k_z l + \rho F \Omega l}{24} & \frac{-8k_z l + \rho F \Omega l}{24} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K^{15} &= (K^{51})^T = K^{73} = (K^{37})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
K^{24} &= K^{42} = K^{25} = K^{52} = K^{35} = K^{53} = -K^{26} = -K^{62} = \begin{pmatrix} \frac{l}{3} & \frac{l}{6} \\ \frac{l}{6} & \frac{l}{3} \end{pmatrix}, \\
K^{12} &= K^{21} = K^{22} = K^{13} = K^{31} = K^{32} = K^{23} = K^{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K^{14} &= K^{41} = K^{43} = K^{34} = K^{35} = K^{53} = K^{45} = K^{54} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K^{64} &= K^{46} = K^{16} = K^{61} = K^{71} = K^{17} = K^{27} = K^{72} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K^{47} &= K^{74} = K^{56} = K^{65} = K^{57} = K^{75} = K^{67} = K^{76} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.135.c}$$

Bu kısımda son olarak dinamik stabilite fonksiyoneli için kuvadratik elemanlar kullanılarak elde edilen (3.135) benzeri ifadeler verilecektir. Bilindiği üzere daha az eleman ile daha iyi sonuç almak için enterpolasyon fonksiyonlarının derecelerini arttırmak, eleman sayısını arttırmak yanında sıkça başvurulmuş bir diğer yöntemdir. İkinci dereceden eğrinin karakteri bir paraboldür. Hemen anlaşılacağı gibi bir parabol 3 parametrik sabit içerdiğinden sonlu eleman üzerinde üç nokta gerekecektir. Buna göre, üçüncü nokta eleman ortasında olmak kaydı ile, parabolik karakterli yaklaşım fonksiyonlarının matematiksel ifadeleri (3.136) ile verilmişken eleman durumu ve enterpolasyon fonksiyonlarının biçimleri Şekil 3.7’de görülebilir.



Şekil 3.7 Kuadratik Enterpolasyon Fonksiyonlarının ve Sonlu Eleman Modelinin Gösterimi

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= (x-l)\left(x-\frac{l}{2}\right)\frac{2}{l^2} \\
\varphi_2 &= x(l-x)\frac{4}{l^2} \\
\varphi_3 &= 2\left(x-\frac{l}{2}\right)\frac{x}{l^2}
\end{aligned} \tag{3.136}$$

$$\begin{pmatrix} M = M_i \varphi_i \\ T = T_i \varphi_i \\ H = H_i \varphi_i \\ \gamma = \gamma_i \varphi_i \\ \theta = \theta_i \varphi_i \\ \psi = \psi_i \varphi_i \\ w = w_i \varphi_i \end{pmatrix}, i = 1, 3 \tag{3.137.a}$$

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} & K^{15} & K^{16} & K^{17} \\ K^{12} & K^{22} & K^{23} & K^{24} & K^{25} & K^{26} & K^{27} \\ K^{13} & K^{32} & K^{33} & K^{34} & K^{35} & K^{36} & K^{37} \\ K^{14} & K^{42} & K^{43} & K^{44} & K^{45} & K^{46} & K^{47} \\ K^{15} & K^{52} & K^{53} & K^{54} & K^{55} & K^{56} & K^{57} \\ K^{16} & K^{62} & K^{63} & K^{64} & K^{65} & K^{66} & K^{67} \\ K^{17} & K^{72} & K^{73} & K^{74} & K^{75} & K^{76} & K^{77} \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} M \\ T \\ H \\ \gamma \\ \theta \\ \psi \\ w \end{pmatrix}, \tag{3.137.b}$$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$K^{11} = \begin{pmatrix} \frac{2l}{15EI} & \frac{l}{15EI} & -\frac{l}{30EI} \\ \frac{l}{15EI} & \frac{8l}{15EI} & \frac{l}{15EI} \\ -\frac{l}{30EI} & \frac{l}{15EI} & \frac{2l}{15EI} \end{pmatrix}, \tag{3.137.c}$$

$$K^{44} = \begin{pmatrix} -\frac{2lGFk_s}{15} & -\frac{lGFk_s}{8lGFk_s} & \frac{lGFk_s}{30} \\ -\frac{lGFk_s}{15} & -\frac{15}{8lGFk_s} & -\frac{15}{lGFk_s} \\ \frac{lGFk_s}{30} & -\frac{lGFk_s}{15} & -\frac{2lGFk_s}{15} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
K^{55} &= \begin{pmatrix} \frac{\rho I \Omega l}{30} & \frac{\rho I \Omega l}{60} & -\frac{\rho I \Omega l}{120} \\ \frac{\rho I \Omega l}{60} & \frac{2 \rho I \Omega l}{15} & \frac{\rho I \Omega l}{60} \\ -\frac{\rho I \Omega l}{120} & \frac{\rho I \Omega l}{60} & \frac{\rho I \Omega l}{30} \end{pmatrix}, \\
K^{66} &= \begin{pmatrix} -\frac{2 p(2 \alpha + \beta) l}{15} & -\frac{p(2 \alpha + \beta) l}{15} & \frac{p(2 \alpha + \beta) l}{30} \\ -\frac{p(2 \alpha + \beta) l}{15} & -\frac{8 p(2 \alpha + \beta) l}{15} & -\frac{p(2 \alpha + \beta) l}{15} \\ \frac{p(2 \alpha + \beta) l}{30} & -\frac{p(2 \alpha + \beta) l}{15} & -\frac{2 p(2 \alpha + \beta) l}{15} \end{pmatrix} \\
K^{77} &= \begin{pmatrix} \frac{-16 k_z l + 4 \rho F \Omega l}{120} & \frac{-8 k_z l + 2 \rho F \Omega l}{120} & \frac{4 k_z l - \rho F \Omega l}{120} \\ \frac{-8 k_z l + 2 \rho F \Omega l}{120} & \frac{-64 k_z l + 16 \rho F \Omega l}{120} & \frac{-8 k_z l + 2 \rho F \Omega l}{120} \\ \frac{4 k_z l - \rho F \Omega l}{120} & \frac{-8 k_z l + 2 \rho F \Omega l}{120} & \frac{-16 k_z l + 4 \rho F \Omega l}{120} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.137.d}$$

$$K^{15} = (K^{51})^T = K^{73} = (K^{37})^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \tag{3.137.e}$$

$$K^{24} = K^{42} = K^{25} = K^{52} = K^{35} = K^{53} = -K^{26} = -K^{62} = \begin{pmatrix} \frac{2l}{15} & \frac{l}{15} & -\frac{l}{30} \\ \frac{l}{15} & \frac{8l}{15} & \frac{l}{15} \\ -\frac{l}{30} & \frac{l}{15} & \frac{2l}{15} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K^{12} = K^{21} = K^{22} = K^{13} = K^{31} = K^{32} = K^{23} = K^{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
K^{14} = K^{41} = K^{43} = K^{34} = K^{35} = K^{53} = K^{45} = K^{54} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K^{64} = K^{46} = K^{16} = K^{61} = K^{71} = K^{17} = K^{27} = K^{72} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
K^{47} = K^{74} = K^{56} = K^{65} = K^{57} = K^{75} = K^{67} = K^{76} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.137.f}$$

Eleman davranış matrisinin önceden izah edildiği şekilde birleştirilmesi ile çok elemanlı sistemlerin sistem davranış matrisleri elde edilebilir. Nihayetinde de sınır şartlarının verilmesi ile parametrik özdeğerleri bulunması gereken indirgenmiş sistem matrisine ulaşılır. Dinamik stabilite fonksiyoneli ile ilgili çok önemli bir diğer nokta ise gerekli düzenlemeler ile statik burkulma ve serbest titreşim problemlerinin aynı formülasyon çatısı altında çözülebilir olmasıdır. Hakikaten $\beta = \Omega = 0$ ve $\alpha = 1$ seçilirse statik burkulma problemi çözülebilirken, $\beta = \alpha = 0$ durumunda da davranış matrislerinden Ω parametresine göre çözülecek özdeğer problemi serbest titreşim problemine denk gelecektir. Ancak bu defa bulunan özdeğerlerden serbest titreşim frekanslarına dinamik stabilite şartı gereği $\omega = 2\Omega$ ile geçileceğini belirtmek yerinde olur. Burada belirtilmesi gereken bir diğer nokta da düşey denge denklemi H fonksiyonu üzerinden yazıldığından artık sınırlarda T kesme kuvvetine göre değil H kesme kuvvetine göre sınır şartlarının belirtilecek ve duruma göre H ile ilgili satır ve sütunlara müdahale edilecek olmasıdır. Uygulama kısmında bunlar ile ilgili örnekler yapılmıştır.

4. SAYISAL ÇÖZÜM VE UYGULAMALAR

Bu kısımda bilgisayar kullanarak istenilen sayıda elemandan müteşekkil, sabit kesitli ve homojen malzemeden imal edilmiş değişik mesnetlenme şartlarına sahip kirişlerin özdeğer problemleri çözülmüştür. Problemler ile ilgili çeşitli parametreler değiştirilerek çözümün ne şekilde etkilendiği veya değiştiği incelenmiştir. Ayrıca artan eleman sayısı veya elemanın lineer veya kuvadratik oluşunun sonuçların yaklaşım hızı ve kesinliğine etkisi yine elde edilen sonuçlar üzerinde irdelenmiştir.

4.1 Mathematica Bilgisayar Programı

Çalışma kapsamında Wolfram Inc.'e ait olan Mathematica 5.0 matematiksel analiz programı kullanılmıştır. Esasında sembolik hesaplama ve programlama da yapabilen bu program kullanımında büyüklükler boyutsuzlandırılarak işlemler nümerik katsayıların hesaplanmasına indirgenmiş ve işlem sürati arttırılmıştır. Mathematica'nın matris oluşturma, tersini alma özdeğer bulma konularında bulundurduğu kolaylıklardan azami ölçüde yararlanılmıştır. Burada yazılan program tekrardan verilmeyecektir ancak tez ile birlikte verilen cd içinde mevcuttur. Buradan çalıştırılacak programda istenilen eleman sayısı(n), rijitlik(I), elastisite modülü(E), kayma modülü(G), Poisson oranı(ν), malzeme birim ağırlığı(ρ), kesit alanı(F), giriş boyu(l), boyutsuz dinamik (α) ve statik (β) eksenel yük katsayıları, Winkler zemini yay katsayısı(k_z), kesitin şekline göre kayma düzeltme katsayısı(k_s) girilerek değişik sonuçlar elde edilebilir. Uygulamada genellikle narinlik(μ) ile çalışıldığından programda narinlik girişi öne alınmış ve atalet momenti buradan iyi bilinen (4.1) ile hesaplanmıştır Yapılan boyutsuzlaştırma işlemi (4.2) ile verilebilir.

$$I = F \left(\frac{l}{\mu} \right)^2 \quad (4.1)$$

$$k_z^* = k_z l^4 EI / \pi^4, \lambda^* = \left(\frac{\rho F l^4}{EI} \right) \omega^2, \omega^* = \sqrt{\lambda^*}, p^* = \frac{p l^2}{EI} \quad (4.2)$$

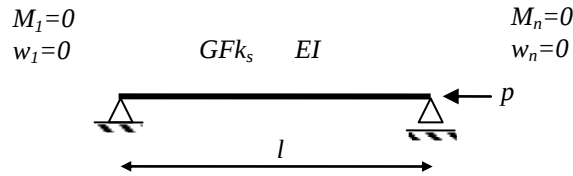
4.2. Burkulma ve Serbest Titreşim Problemleri

Bu başlık altında konsol, basit, ankastre – kayıcı ve ankastre – ankastre kirişlerin Winkler zemini üstünde olmaları ve olmamaları durumunda, burkulma yükleri ve serbest titreşim frekansları çalışma kapsamında geliştirilen fonksiyoneller ile hesaplanmış ve [10]'ile karşılaştırılmıştır. Literatürle yapılan boyutsuz karşılaştırmalarda ve tablolarda verilen sonuçlarda $F=1$, $\rho=1$, $E=13$, $G=5$, $ks=0.85$, $\mu=12.5$ alınmıştır.

4.2.1 Winkler Zemininin Bulunmaması Hali

4.2.1.1. Basit Mesnetli Kiriş

Şekil 4.1 problemin sınır şartlarını ve datasını göstermektedir. Tablo 4.1 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.2 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.1 Basit Mesnetli Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.1 Basit Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

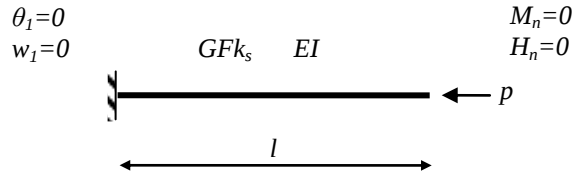
Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Yokoyama16 Qu.
1	8,361	8,294	8,27	8,271	8,273	8,272	8,275
2	22,912	22,43	22,211	22,265	22,297	22,271	22,34
3	33,752	32,771	30,026	31,824	32,532	32,441	32,65
4	40,347	39,072	37,706	38,554	38,72	38,618	38,96
5	44,204	42,882	39,4	42,236	42,19	42,356	42,79

Tablo 4.2 Basit Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

Mod	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Kesin
1	8,84	8,84	8,84	8,841	8,84	8,84
2	28,455	28,465	28,455	28,512	28,465	28,46
3	51,448	51,526	51,448	51,801	51,526	51,5
4	75,146	75,475	75,146	75,996	75,475	75,36
5	99,748	99,596	99,748	99,75	99,596	99,3

4.2.1.2 Konsol Kiriş

Şekil 4.2 problemin sınır şartlarını ve dadasını göstermektedir. Tablo 4.3 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.4 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.2 Konsol Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.3 Konsol Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

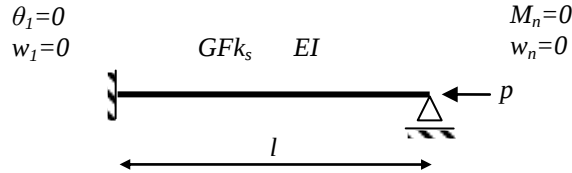
Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Yokoyama16 Qu.
1	2,36	2,356	2,354	2,354	2,354	2,354	2,354
2	15,791	15,556	15,463	15,477	15,487	15,479	15,5
3	28,943	28,196	27,796	27,934	28,005	27,948	28,08
4	37,484	36,324	35,37	35,882	36,038	35,925	36,2
5	42,536	41,207	40,297	40,622	40,734	40,712	41,11

Tablo 4.4 Konsol Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

Mod	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Kesin
1	3,324	3,324	3,324	3,324	3,324	3,324
2	16,288	16,29	16,288	16,301	16,29	16,29
3	36,707	36,7	36,707	36,502	36,7	36,71
4	58,144	58,32	58,144	58,658	58,32	58,28
5	79,996	80,338	79,996	80,319	80,338	80,14

4.2.1.3 Ankastre Mafsallı Kiriş

Şekil 4.3 problemin sınır şartlarını ve dadasını göstermektedir. Tablo 4.5 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.6 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.3 Ankastre Mafsallı Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.5 Ankastre Mafsallı Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

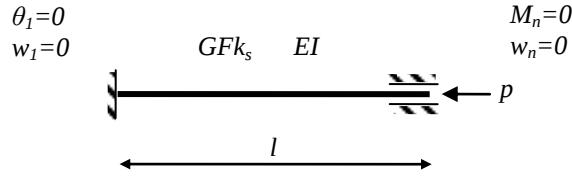
Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$
1	14,329	14,143	14,071	14,08	14,091	14,081
2	27,94	27,272	26,9	27,035	27,102	27,048
3	36,78	35,711	34,015	35,29	35,432	35,338
4	42,014	40,781	38,894	40,231	40,086	40,311
5	45,064	43,897	39,946	43,223	41,08	43,254

Tablo 4.6 Ankastre Mafsallı Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

Mod	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/16Qa.$
1	12,22	12,219	12,219	12,228	12,219
2	31,356	31,368	31,356	31,442	31,363
3	53,114	53,239	53,114	53,55	53,209
4	75,87	76,194	75,87	76,692	76,091
5	110,698	110,812	110,698	111,767	110,781

4.2.1.3 Ankastre Ankastre Kiriş

Şekil 4.4 problemin sınır şartlarını ve dadasını göstermektedir. Tablo 4.7 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.8 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.4 Ankastre Ankastre Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.7 Ankastre Ankastre Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$
1	22,912	22,43	22,211	22,265	22,297	22,271
2	30,564	29,86	29,467	29,603	29,736	29,62
3	40,347	39,072	37,706	38,554	38,72	38,618
4	42,631	41,546	39,4	41,005	41,154	41,107
5	46,406	45,271	43,676	43,462	43,376	44,709

Tablo 4.8 Ankastre Mafsallı Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

Mod	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/16Qa.$
1	15,74	15,741	15,74	15,753	15,741
2	33,835	33,85	33,835	33,961	33,84
3	54,758	54,868	54,758	55,2	54,835
4	76,433	76,753	76,433	77,296	76,651
6	123,671	123,713	123,671	124,843	123,201

4.2.2 Winkler Zemininin Bulunması Hali

Bu başlık altındaki bütün örneklerde k_z^* boyutsuz Winkler zemin parametresi 2 alınmıştır.

4.2.2.1. Winkler Zemini Üzerinde Basit Mesnetli Kiriş

Şekil 4.5 problemin sınır şartlarını ve datasını göstermektedir. Tablo 4.9 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.10 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.5 Basit Mesnetli Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.9 Basit Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayılar

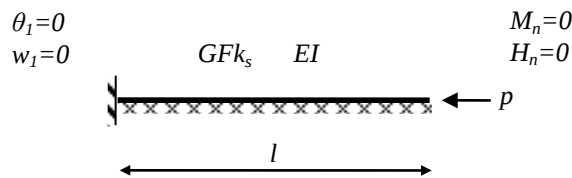
Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Yokoyama16 Qu.
1	27,601	27,302	27,169	27,201	27,221	27,204	28,01
2	27,848	27,97	28,014	28,011	28,009	28,011	27,26
3	35,71	34,902	34,379	34,611	34,707	34,632	34,82
4	41,362	40,244	39,059	39,793	39,938	39,849	40,16
5	44,797	43,611	40,531	43,035	42,994	43,442	43,54

Tablo 4.10 Basit Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

Mod	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Yokoyama 16Qu	Kesin
1	16,26	16,26	16,26	16,26	16,26	16,26
2	31,435	31,344	31,435	31,444	31,5	31,44
3	51,467	53,219	51,467	53,22	53,58	53,19
4	76,328	76,651	76,328	76,651	77,81	76,54
5	99,791	100,502	99,791	100,502	100,9	100,2

4.2.2.2 Winkler Zemini Üzerinde Konsol Kiriş

Şekil 4.6 problemin sınır şartlarını ve datasını göstermektedir. Tablo 4.11 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.12 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.6 Konsol Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.11 Konsol Kiriş Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

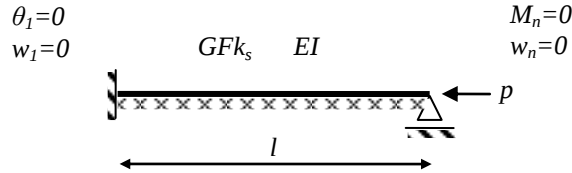
Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Yokoyama16 Qu.
1	12,805	12,668	12,542	12,618	12,607	12,622	12,64
2	32,266	31,804	31,559	31,64	31,696	31,649	31,75
3	37,2	36,388	35,752	36,081	36,195	36,109	36,31
4	42,632	41,644	39,792	41,198	41,326	41,266	41,57
5	45,097	44,024	40,501	42,912	43,204	43,573	43,96

Tablo 4.12 Konsol Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

Mod	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$	Yokoyama 16Qu	Kesin
1	14,168	14,168	14,168	14,17	14,17	14,17
2	20,943	20,944	20,943	20,944	20,95	20,94
3	38,92	38,91	38,92	38,91	39,05	38,92
4	59,49	59,663	59,49	59,663	60,15	59,62
5	80,93	81,263	80,93	81,263	82,49	81,14

4.2.2.3 Winkler Zemini Üzerinde Ankastre Mafsallı Kiriş

Şekil 4.7 problemin sınır şartlarını ve datasını göstermektedir. Tablo 4.13 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.14 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan ω^* değerlerini içermektedir.



Şekil 4.7 Ankastre Mafsallı Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.13 Ankastre Mafsallı Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

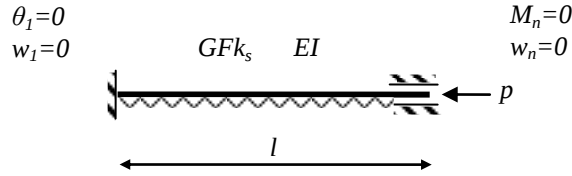
Mod	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$
1	27,677	27,501	27,419	27,441	27,457	27,443
2	34,133	33,502	33,141	33,283	33,35	33,296
3	39,988	38,927	36,783	38,526	38,651	38,568
4	43,958	42,702	38,018	38,856	41,821	42,242
5	46,376	45,167	40,784	42,156	42,271	44,196

Tablo 4.14 Ankastre Mafsallı Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için ω^* katsayıları

<i>Mod</i>	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$
1	18,36	18,36	18,36	18,36
2	34,124	34,135	34,124	34,135
3	54,763	54,884	54,763	54,884
4	77,021	77,34	77,021	77,34
5	110,812	110,929	110,812	110,929

4.2.2.4 Winkler Zeminin Üzerinde Ankastre Ankastre Kiriş

Şekil 4.8 problemin sınır şartlarını ve datasını göstermektedir. Tablo 4.15 burkulma yükleri için boyutsuz p^* katsayılarını, Tablo 4.16 ise serbest titreşim frekansının boyutsuz katsayıları olan $\sqrt{\lambda}^*$ değerlerini içermektedir.



Şekil 4.8 Ankastre Ankastre Kirişte Sınır Şartları

Tablo 4.15 Ankastre Ankastre Kirişin Burkulma Yükleri için p^* Katsayıları

<i>Mod</i>	$\pi_{HRTB}/8L.$	$\pi_{HRTB}/16L.$	$\pi_{MDS}/8L.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/4Qa.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$
1	34,054	33,436	33,092	33,222	33,307	33,235
2	34,799	34,153	33,735	33,916	34,025	33,934
3	43,954	42,614	40,28	42,047	42,162	42,143
4	43,972	42,97	40,485	42,46	42,483	42,562
5	47,353	46,772	44,326	44,94	46,249	46,232

Tablo 4.16 Ankastre Ankastre Kiriş Serbest Titreşim Frekansı için $\sqrt{\lambda}^*$ katsayıları

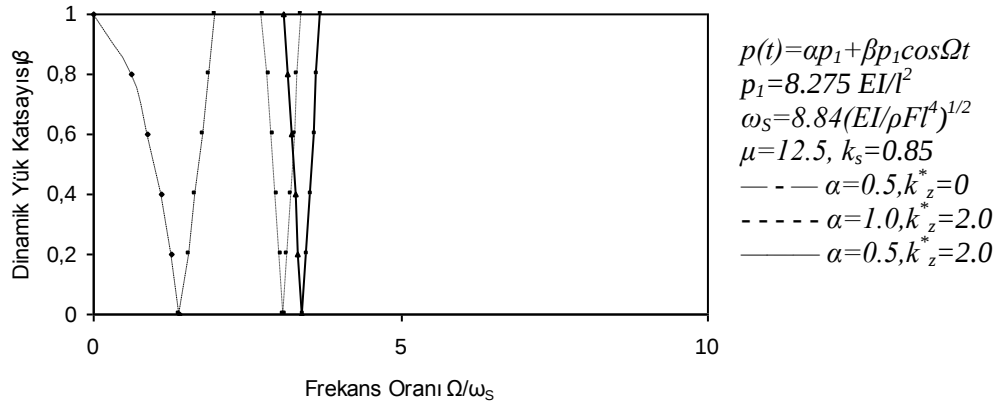
<i>Mod</i>	$\pi_{GTT}/16L.$	$\pi_{GTT}/8Qa.$	$\pi_{MDS}/16L.$	$\pi_{MDS}/8Qa.$
1	20,942	20,943	20,942	20,943
2	36,434	36,446	36,434	36,446
3	56,369	56,475	56,369	56,475
4	77,547	77,861	77,547	77,861
6	123,796	124,051	123,796	124,051

4.3 Dinamik Stabilité Problemi

Bu kısımda yine basit, konsol, ankastre – mafsallı ve ankastre – ankastre bağılı kirişler için dinamik stabilite problemi ile ilgili geliştirilen fonksiyonelin ürettiği sonuçlar verilecektir. Bu amaçla daha önceden bahsedilen, eksenel yükün statik (α) ve dinamik (β) karakterini belirten katsayılar ile eksenel zorlama frekansının (Ω) serbest titreşim frekansına (ω_S) oranının etkileşimini gösteren parametrik düzlem kullanılacaktır. Buna göre parametrik eksen takımında ordinat β ile verilirken apsis ise Ω/ω_S oranını gösterecektir. Böylece değişik α değerleri için çizilecek parametrik eğriler ile sınırlanan alanlar, o α değerleri için durumun instabil olduğu bölgeleri belirleyecektir. Kirişin Winkler zemini üzerinde olmasının duruma etkisi yine aynı düzlem üzerinde çizilecek parametrik eğriler ile gösterilecektir. Her durumda instabil bölgeler eğrilerin kapadağı üçgen benzeri alanlardır.

4.3.1 Basit Kiriş

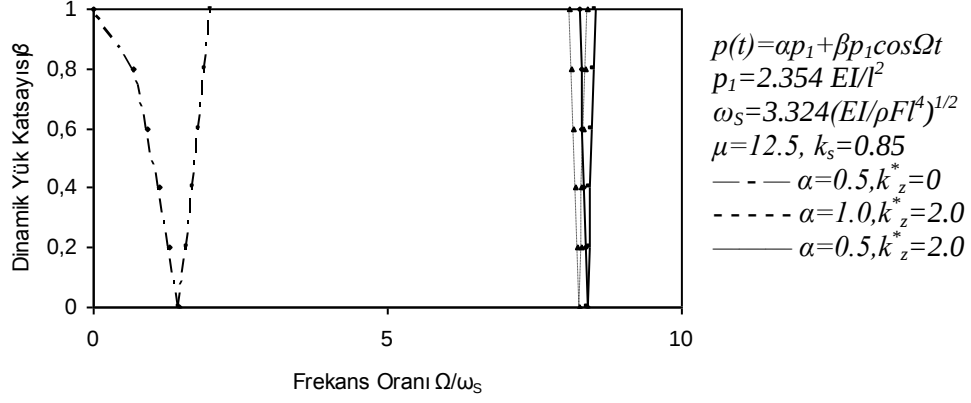
Basit kirişin değişik koşullar altında birinci titreşim modu için çizilen instabilite diyagramı Şekil 4.9’da verilmiştir.



Şekil 4.9 Basit Kirişte İnstabil Bölge Sınırları

4.3.2 Konsol Kiriş

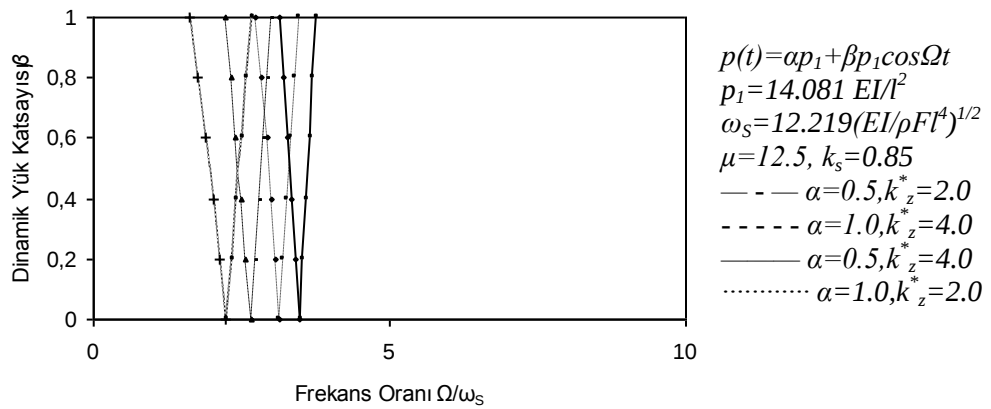
Konsol kirişin değişik koşullar altında birinci titreşim modu için çizilen instabilite diyagramı Şekil 4.10'da verilmiştir.



Şekil 4.10 Konsol Kirişte İnstabil Bölge Sınırları

4.3.2 Ankastre Mafsallı Kiriş

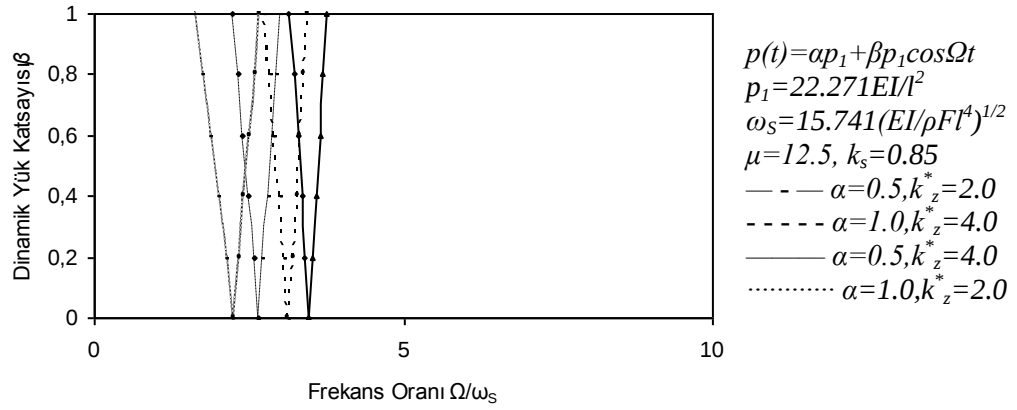
Ankastre Mafsallı kirişin değişik koşullar altında birinci titreşim modu için çizilen instabilite diyagramı Şekil 4.11'de verilmiştir.



Şekil 4.11 Ankastre Mafsallı Kirişte İnstabil Bölge Sınırları

4.3.2 Ankastre Ankastre Kiriş

Ankastre Ankastre kirişin değişik koşullar altında birinci titreşim modu için çizilen instabilite diyagramı Şekil 4.12’de verilmiştir.



5 SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışma kapsamında karışık sonlu eleman formulasyonu ile neticelenen yedi serbestlikli yeni bir fonksiyonel üretilmiştir. Fonksiyonel aracılığı ile elde edilen sonuçların literatürle karşılaştırınca gayet tatminkar oldukları gözlenmektedir. Formulasyonun vurgulanabilecek en önemli avantajı, deplasman türü sonlu elemanlarda karşılaşılan kayma kilitlenmesi sorunun bulunmamasıdır. Buna göre literatürde [16] bu sorunu gidermek için geliştirilen ve yüksek dereceli şekil fonksiyonları kullanımını gerektiren yöntemlere (CIE,FIE) başvurmaya gerek kalmadan lineer elemanlar kullanarak mükemmele yakın sonuçlar elde edilmiştir. Kuadratik elemanlarda da gayet iyi sonuçların elde edildiği gözlenmiştir. Bu söylenenler Kısım 4'de Yokoyama [10] tarafından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmaların bulunduğu tablolar incelenerek derhal anlaşılabilir. Formulasyonun vurgulanabilecek bir diğer avantajı ise yedi alanın bağımsız varyasyonunu öngörmesi nedeniyle, eleman sınırlarında, serbestliklerin türev sürekliliklerinin bulunmasının gerekmemesidir. Bu şekilde Lagrange tipi şekil fonksiyonları ile süreksizliğe sahip problem tiplerine müdahale kolaylaşmış bulunmaktadır. Formulasyon için söylenebilecek bir diğer önemli özellik ise kirişlerin özdeğer problemleri adı altında, uygulamada çok önemli olan, burkulma, serbest titreşim ve dinamik stabilite problemlerine genel bir yapıda, parametrelerin uygun modifikasyonu ile kolayca ve başkaca bir formulasyona veya davranış matrisi kurulumuna gerek bırakmadan cevap verebilmesidir.

Konunun mühendislik yönü ile ilgili yorumlar da yapılabilir. Buna göre serbest titreşim probleminde dönme ataleti etkisiyle frekanslarda düşüşler gözlenmiştir ki bu atalet artışından dolayı olup normaldir. Bununla beraber yine kayma deformasyonlarının hesaba katılması neticesinde de titreşim frekansları küçülmüştür çünkü artan deplasmanlar periyodu büyültmüştür. Dolayısıyla kalın kirişlerde dönme ataleti ve kayma deformasyonlarını göz önünde bulundurmakta fayda vardır. Elastik

zemin etkisi sistemin rijitliğini arttırdığından titreşim değerleri de artmıştır. Bu da beklenen bir sonuç olarak ortaya çıkmaktadır. Burkulma problemine gelince burada da kayma deformasyonlarının kritik burkulma yükünü düşürmesi ve elastik zemin etkisinin ise tam tersi olarak sistemin stabilitesini arttırması ve dolayısıyla da burkulma yüklerini büyütmesi beklenen sonuçlardır. Yine burada da kalın kirişlerin burkulma yüklerinin Timoshenko'ya göre hesaplanmasında emniyet açısından önem olduğunun belirtilmesinde fayda vardır. Dinamik stabilite konusunda ise üretilen parametrik düzlem diyagramlarından görülebileceği üzere, elastik zemin etkisi, sistemin kararlılığını (stabilitesini) arttırıcı yönde olarak, karasız (instabil) davranışa denk gelen alanları frekans oranı eksenini boyunca sağa kaydırmakta ve küçültmektedir. Ayrıca yine ince kirişten kalın kirişe doğru gidildikçe, artan dönme ataleti ve kayma deformasyonları etkilerinin, instabil alanları büyütürken frekans eksenini boyunca sola kaydırmakta oldukları dikkat çekmektedir. Yine bir diğer parametre olan statik yük katsayısı α 'nın artımının, beklendiği üzere, instabil bölgeleri sola kaydıracağı gözlenmektedir. Bu durum sistemin daima taşıdığı yük olan statik kısmının artması durumunda düşük frekanslı eksenel zorlamaların tehlikeli olacağı gerçeğiyle izah edilebilir.

Son olarak, çalışmanın açılımı ve ilerisi için, modüler yapıda hangi serbestliğin davranışa nasıl katkı yaptığına görülebildiği davranış matrisinden ve fonksiyonelin yapısından probleme iki parametrelili zemin ve viskoz sönüm etkisinin rahatlıkla eklenebileceği anlaşılmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Bolotin V.**, 1964, The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day INC., London.
- [2] **Pipes L. A.**, 1964, The dynamic stability of a uniform straight column excited by a pulsating load, J. Franklin Inst. **277**, 534 – 551.
- [3] **Morris. N. F.**, 1965, The dynamic stability of beam – columns with a fixed distance between supports, J. Franklin Inst., **280**, 163 – 173.
- [4] **Burney S. Z. H. and Jaeger L. G.**, 1971, A method of determining the regions of instability of a column by a numerical method approach, J. Sound and Vibr., **15**, 75 – 91.
- [5] **Goldenblat I. I.**, 1950, Some new problems of structural dynamics, Izv. Otd. Tekh., N., **6**, 819 – 833.
- [6] **Brown E. J., Hutt M. J. ve Salama A. E.**, 1968, Finite element solution to dynamic stability of bars, AIAA Jnl., **6**, 1423 – 1425.
- [7] **Ahuja R. and Duffield R. C.**, 1975, Parametric instability of variable cross section beams resting on an elastic foundation, J. Sound and Vibr., **39**, 159 – 174.
- [8] **Abbas H. A. B. and Thomas J.**, 1978, Dynamic stability of Timoshenko beams Resting on an elastic foundation, J. Sound Vibr., **60**, 33 – 44 .
- [9] **Thomas J. and Abbas H. A. B.**, 1978, Dynamic stability of Timoshenko beams by finite element method, J. Engng Ind. (Trans. ASME, Ser. B), **98**, 1145 - 1151.
- [10] **Yokoyama T.**, 1987, Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation, Comps & Struct., **28**, 2, 207 – 216 .
- [11] **Briseghella L., Majorana C. E., Pellegrino C.**, 1998, Dynamic stability of elastic structures: a finite element approach Comps & Struct., **69**, 11–25.
- [12] **Aköz A. Y., Omurtag M. H., Dogruoglu A. N.**, 1991, The mixed – finite element formulations for 3 – dimensional bars, Int. J. Solids. And Struct., **28**(2), 225 – 234.
- [13] **Aköz A. Y., Kadioglu F.**, 1999, The mixed finite element method for the quasi static and dynamic analysis of viscoelastic timoshenko beams, Int. J. Numer. Meth. Engng ,**44** ,1909 – 1932 .

- [14] **Washizu K.**, 1975, Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press Inc., New York.
- [15] **Oden J. T., Reddy J. N.**, 1976, Variational methods in theoretical mechanics, Springer – Verlag, New York.
- [16] **Reddy J. N.**, 1993, An introduction to the finite element method, Mc Graw – Hill, New York.
- [17] **Klaus J. B.**, 1995, Finite element procedures in engineering anaysis., Prentice – Hall, New Jersey.
- [18] **İnan M.**, 1967, Cisimlerin Mukavemeti, Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul.
- [19] **Dym C. L., Shames I. H.**, 1973, Solid mechanics: A variational approach, Mc Graw – Hill, New York.
- [20] **Gün T.**, 2002, Doğru eksenli çubukların burkulma analizi için geliştirilen yeni bir fonksiyonel ve sonlu eleman analizi, Yüksek lisans tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü ,İTÜ.
- [21] **Raju K.K., Rao G. N.**,2004, A simple method to evaluate the critical loads of cantilever columns with follower forces, Indian Jour. Eng. and Material. Sci. ,**11**, 2 143 - 146