

39653

ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRE EKSENLİ

ÇUBUKLAR VE TAŞIMA MATRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Semir ZUBAROĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 1994

Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Haziran 1994

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vural CİNEMRE

: Doç. Dr. Mehmet OMURTAG

İ.T.Ü. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

HAZİRAN 1994

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında değerli bilgi ve yardımlarını esirgmeden çalışmamı destekleyen ve manevi desteğini her zaman üzerimde hissettiğim, Sayın Hocam Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ 'e en içten ve minnet duygularıyla teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında fikir ve ilgilerini esirgmeden yol gösteren İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, Mekanik Anabilim dalı öğretim üyelerine, çalışmam sırasında yoğun işleri arasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Mehmet OMURTAG' a, araştırma görevlilerinden Fethi KADIOĞLU, Nihal ERATLI, Atilla ÖZÜTOK, Erkan EKİNGEN ve Abdülkadir BAŞKOCA olmak üzere tüm asistanlara, ayrıca bilgi ve tecrübelerinden yaralandığım tüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tüm akademik çalışmalarım boyunca, beni hiçbir fedakarlıktan kaçınmıyarak teşvik eden, ve her zaman maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen babam Nurettin ZUBAROĞLU' na, annem Fatma ZUBAROĞLU' na ve diğer tüm aile fertlerime sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

HAZİRAN 1994

Semir ZUBAROĞLU
İnşaat Mühendisi

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ÖZET	v
SUMMARY	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. Problemin Tanımı	1
1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar	2
1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı	4
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER	6
2.1. Çubuk ve Çubuk Geometrisi	6
2.2. Alan Denklemleri	8
2.2.1. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Doğru Eksenli Çubuklar	12
2.2.1. Düzlemine Dik Yüklerle Yüklü Daire Eksenli Çubuklar	13
BÖLÜM 3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	16
3.1. Başlangıç Değerleri Metodu	16
3.1.1. Durum Vektörü	17
3.1.2. Taşıma Matrisi	18
3.1.3. Ara Yükler	20
3.2. Daire Eksenli Çubuklar da Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi	22
3.2.1. Karakteristik Denklemin Oluşturulması.....	22
3.2.2. Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Nilpotent ve Idempotentler ile Eldesi	24
3.2.3. Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Cayley-Hamilton Teoremi ile Eldesi	29
3.2.4. Farklı Metodlar ile Elde edilen Taşıma Matrisin Karşılaştırılması	32

3.2.5. Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Sylvester Teoremi ile Eldesi	32
3.2.6. Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Cayley-.Hamilton Teoremi Yardımı ile Eldesi.....	49
3.2.7. Farklı Metodlar ile Elde edilen Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Karşılaştırılması	50
BÖLÜM 4. DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ..	52
4.1. Ayırık Kütle Metodu.....	52
4.1.1. Frekans Denkleminin Çözümü ve Süpürme Matrisi..	54
4.2. Başlangıç Değerleri Metodu İle Kesin Çözüm Yöntemi.....	59
4.3. Daire Eksenli Çubukların Dinamiğine Ait Uygulama.....	61
BÖLÜM 5. UYGULAMALAR	66
5.1. Daire Eksenli Çubuklara Ait Uygulamalar	66
5.2. Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubuklara Ait Uygulamalar	68
BÖLÜM 6. SONUÇLAR	70
KAYNAKLAR	72
EK A	76
EB B	77
EK C	78
EK D	79
EK E	83
EK F	85
EK G	86
EK H	90
EK I	93
ÖZGEÇMİŞ	100

ÖZET

Çalışmada Winkler Zemin tipi ele alınarak, elastik zemin üzerine oturan daire eksenli çubukların farklı yüklemeler altındaki davranışları başlangıç değerleri metodu ile incelenmiştir. Başlangıç değerleri metodu mühendislik problemlerinde sayıların fazlalığının meydana getirdiği zorlukları ortadan kaldırmak için sınır değer problemlerini; başlangıç değerleri problemlerine dönüştüren bir metoddur. Bu metod uygulanarak daire eksenli çubukların ve elastik zemine oturması hali için farklı yollarla kapalı şekilde taşıma matrisleri elde edilmiştir.

Birinci bölümde, incelenen problem ana hatlarıyla tanıtilerek, bu konu ile ilgili literatürde yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

İkinci bölümde, elastik zemine oturan homojen, lineer lineer elastik çubuklar için temel alan denklemleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, daire eksenli çubuklar için literatürde bulunan taşıma matrisi, idempotent ve nilpotentlerin yardımı ile ve Cayley-Hamilton Teoremi yardımı ile elde edilmesi şeklinde farklı iki yolla elde edilmiştir. Daire eksenli çubukların elastik zemine oturması durumunda da taşıma matrisi benzer şekilde Sylvester Teoremi ve Cayley-Hamilton Teoremi yardımı ile farklı yollardan çözüm yoluna gidilmiştir.

Dördüncü bölümde, daire eksenli çubukların dinamik olarak serbest titreşim problemi ele alınmış; serbest titreşim frekanslarına kesin çözüm olan Başlangıç Değerleri Metodu ile Frekans Determinantı kullanılmış ve yaklaşık çözüm olan Ayırık Kütle Metodu ile çözüm yoluna gidilmiştir.

Beşinci bölümde, sayısal uygulamalara yer verilmiş, kesin çözümleriyle karşılaştırma yapılmıştır.

Altıncı bölümde, yapılan çalışmadan elde edilen sonuçlar açıklanmaktadır.

SUMMARY

Circular Beams On Elastic Foundation and Transfer Matrix

Beams on elastic foundations are widely used as structural elements in engineering application. According to the beam axis geometry, beams can be either straight and circular. In this research straight and circular beams on Winkler foundations under various loads are studied.

Examples of the straight beams on elastic foundations are: continuous foundations being in one or two directions, beams traversing beneath the railway, and vertical piles which are loaded horizontally in the ground. Likewise examples of the circular beams are circular foundations of water tanks and silos.

Foundation could be classified into groups according to its response. For examples Pasternak, Vlassov, Winkler, Filonenko-Borodich, Reissner foundations.

Assuming that the base is consisted of closely independent linear springs Winkler provided the simplest representation of a continuous elastic foundation. The relation between the pressure and the deflection of the foundation surface, both parallel to the z axes is given as;

$$P(y) = k u(y)$$

where k is the foundation modulus.

The corresponding deformations of the foundation surface for a uniform load, are shown in Figure 1. It can be seen that for this foundation model, The displacements of the loaded region will be constant whether the foundation is subjected to a rigid stamp or a uniform load. While for both types of loading the displacements are zero outside the loaded region. However for most media the displacements of the foundation surface shown in Figure 2, do not exactly follow the previous statements of the theory.

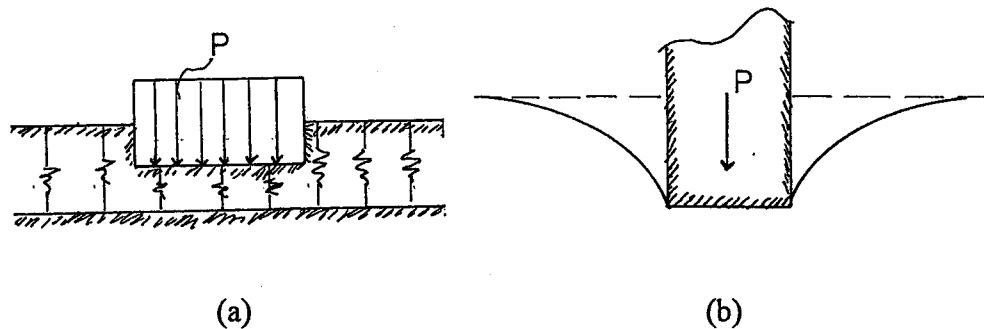


Figure 1. The corresponding deformations of the foundation surface

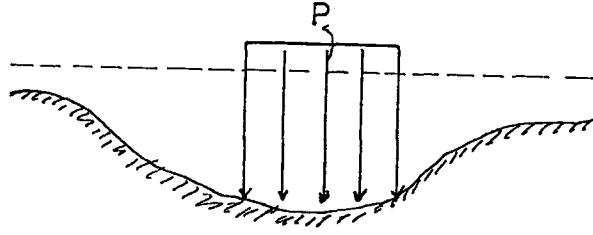


Figure 2. The Displacement of the foundation surface

This leads to the conclusion that the Winkler hypothesis is not exactly verified but provides sufficient convergence to the exact behaviour.

Beams on elastic foundation have been investigated by numerous scientist and researchers . Heteny [3] studied bems on Winkler foundations and came up with an exact solutions. No matter how simplified it was, this solution seems to be really time consuming.

In 1967, a general solution method was developed using initial values method and transfer matrix given by İnan [6] etc.

In this study linear elastic beams is cosidered into two groups;

- a) With Straight axis
- b) With circular axis

but only circular axis beams are studied.

Beams With Circular Axis

Field equations for circular beams are

$$\begin{aligned}
 -\frac{dT_b}{d\theta} - q R + k R U_b &= 0 \\
 -\frac{dM_n}{d\theta} - M_t + R T_b - R m_n &= 0 \\
 -\frac{dM_t}{d\theta} + M_n - R m_t &= 0 \\
 \frac{d\Omega_t}{d\theta} - \Omega_n - R \frac{M_t}{Dt} &= 0 \\
 \frac{d\Omega_n}{d\theta} + \Omega_t - R \frac{M_n}{Dn} &= 0 \\
 \frac{dU_b}{d\theta} + R \Omega_n - R \frac{T_b}{C_b} &= 0
 \end{aligned}$$

where T_b , M_n , M_t , Ω_n , Ω_t , U_b are shear force, bending moment, twisting moment, angle of bending, angle of twisting, displacement of axis of beam in directions perpendicular to plane of beam, respectively. Those are unknowns to be obtained. D_n , D_t , C_b are bending rigidity, torsional rigidity and shearing rigidity of the beam, respectively. R is radius of the beam; k represent the modulus of the foundation. q , m_n , m_t are external distributed load and moments, respectively.

In this study, circular beams on elastic foundation and their transfer matrix is tried to be obtained. Static and dynamic analysis of circular beams on elastic foundation is done. To solve circular beams on elastic foundation by using initial values method and transfer matrix.

Transfer matrix is a matrix which obtains any x , from an initial $x=0$ with step by step integration and transfer matrix can be expressed as follows:

$$S(x) = F(x) \cdot S(0)$$

In this equation, $S(0)$ shows initial ($x=0$) boundary conditions and $S(x)$ shows any x points' boundary conditions. Transfer matrix, $F(x)$ is an exponential matrix form as

$$F(x) = e^{xD}$$

If transfer matrix $F(x)$ is shown in a form of matrix polynomial series the equation occurs as below;

$$F(x) = e^{xD} = I + xD + \frac{x^2}{2!} D^2 + \dots + \frac{x^k}{k!} D^k$$

here D is coefficient matrix.

In this study, loads which apply vertically to the axis direction of circular beams is taken as a column matrix;

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} U_b(\varphi) \\ \Omega_n(\varphi) \\ \Omega_t(\varphi) \\ M_n(\varphi) \\ M_t(\varphi) \\ T_b(\varphi) \end{bmatrix}$$

Also, from differential equation of circular beams on elastic foundations, the below characteristic equation can be obtained;

$$m^6 + 2m^4 + \left(1 + \frac{kR^4}{D_n}\right)m^2 - \frac{kR^4}{D_t} = 0$$

At first, transfer matrix is obtained for $k=0$ by using two different theorems. First one is Nilpotent and Idempotents theorem. In this theorem, if the square of an endomorphism is equal to itself such an endomorphism is called an Idempotent and if a k' th power of an endomorphism is zero such an endomorphism is called a Nilpotent. The resolvent of an endomorphism can be expressed as

$$R(\lambda, D) = \sum_{m=1}^i \left\{ \frac{P_m}{(\lambda - \lambda_m)} + \frac{Q_m}{(\lambda - \lambda_m)^2} + L + \frac{Q_m}{(\lambda - \lambda_m)^{s_m}} \right\}$$

where the sum is over $i \leq n$ distinct eigenvalues of D .

In this theorem; Spectral expansion can be written as,

$$P = \sum \lambda_i P_i + Q_i$$

where,

- I is unit matrix,
- i are numbers of the distinguishing value,
- λ_i are eigenvalues of D ,
- S_k are the indices of the eigenvalues,
- P_i are idempotent,
- Q_i are nilpotents.

Nilpotents and Idempotents can be obtained by using mathematical functions of D matrix. Then transfer matrix is obtained by inserting nilpotents, idempotents and λ_i 's in the below equation (See (3.38));

$$\Phi(D) = \sum_1^i \left\{ \Phi(\lambda_k) P_k + \sum_1^{s_k} \frac{\Phi^r(\lambda_k)}{r!} Q_k^r \right\}$$

Secondly transfer matrix can be obtained by using Cayley-Hamilton's theorem. In this theorem transfer matrix can be expressed as;

$$\Phi(D) = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_{n-1} D^{n-1}$$

and to obtain this equation, a_i values must be calculated by using eigenvalues of D matrix.

By using either Nilpotents and Idempotents or Cayley-Hamilton Theorems, the same transfer matrix is obtained. (See (3.47))

The most important aim of this study is to obtain the transfer matrix of circular beams on elastic foundations. As known the eigenvalues of the characteristic equation of circular beams on elastic foundation are six different roots. Therefore, there are any nilpotents; so Sylvester's Theorem must be used.[22]

Sylvester's Theorem: An Idempotent of a diagonalable endomorphism can be given as;

$$P_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_j I - D)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_j - \lambda_i)}$$

By using Sylvester's Theorem, six idempotents are obtained, and by these idempotents in exponential matrix equation. With this theorem transfer matrix of circular beams on elastic foundations is obtained as in (3.97).

Cayley-Hamilton Theorem gives the same transfer matrix as well.(See (3.103))

With the obtained transfer matrix of circular beams problems are solved for some static and Dynamic loads. In dynamic analysis for free vibration, frequency determinant of circular beams are obtained and explained. Also for this problem, a computer program is developed by using both Mathematica [23] programming language and Basic programming language with sweeping matrix. In this thesis Mathematica Programming Language is used where needed.

Comparison of the results in terms of different parameter shown that convergency the proposed method and obtained transfer matrix of circular beams is excellent.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1 Problemin Tanımı

Elastik zemin üzerine oturan çubuk problemleri uygulamada çok kullanılan yapı elemanlarıdır. Çubuklar kullanılan yapı tipine göre farklı geometrik şekillere sahip olabilirler. Uygulamada en çok rastlanan, doğru ve daire eksenli çubuklardır. Konut yapılarının döşemeleri, bir veya iki doğrultudaki sürekli temeller dönel kabuklar, palplanşlar ve yatay kuvvete maruz düşey kazıklar doğru eksenli çubuklara; su tankı ve siloların betonarme temelleride daire eksenli çubuklara örnek olarak gösterilebilir. Bu çalışmamızda çubuk eksenli olarak sabit R yarı çapında daire eksenli çubuklar ele alınmıştır.

İncelenen problemde elastik zemin ele alındığından dolayı, elastik zemin hakkında kısa bir açıklama yapılacak olursa; elastik zemin üzerine oturan kirişlerin analizi üç aşamada incelenir. Bunlardan birincisi ve en önemlisi yapının davranışını ve zemin tipi için yapılan kabullerdir. İkinci olarak, zemin katsayısı, atalet momenti ve elastisite modülü gibi gerekli sabitlerin seçilmesidir. Son aşamada, ilk aşamalardan elde edilen bilgiler ve çözüm yöntemi kullanılarak sonuca ulaşılır. Çözüm yöntemleri yaklaşık veya kesin yöntemler olarak iki gruba ayrılabilir.

Elastik zemine oturan çubuklar ilk önce Winkler [1] tarafından ele alınmıştır. Winkler hipotezi basit olmasına rağmen iyi sonuçlar vermektedir. Bu hipoteze göre yer değiştirme sırasında kirişin zeminden gördüğü tepki yerdeğiştirme ile doğru orantılıdır. Bu varsayımla zemin bağımsız elastik yaylardan meydana gelmiş ve fiziksel model olarak bu şekilde ele alınabilmektedir. Zemin k ile ifade edilen bir zemin katsayısı ile karakterize edilmiştir. Zemin katsayısı düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda birim genişlikteki birim alana etkiyen reaksiyon olarak tanımlanabilmektedir.

Bu çalışmada, elastik zemin üzerine oturan daire eksenli çubukların başlangıç değerleri metodu ile çözümü yapılmakta ve bu tip çubuklara ait taşıma matrisi elde edilmektedir.

1.2 Konu İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Winkler tarafından geliştirilen, k yatak katsayısını; 1942' de Zimmermann [2] tarafından kendi özel uygulamalarında belirli türdeki zeminler için elde edilmiş ve uygulamada yaygın olarak kullanılan belirli zemin türleri için yatak katsayısı değerleri verilmiştir.

Winkler zemin tipi üzerinde 1946' da Hetenyi [3] çalışmış ve kesin çözümlerle uğraşmıştır. Kesin çözümlerde, karşılaşılan zorluklardan dolayı bir çok araştırmacı çeşitli yaklaşık metodlar geliştirerek konuyu ele almışlardır.

Literatürde elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Çalışmalar ilk olarak 1952' de Volterra [4] tarafından yapılan elastik zemin üzerine oturan R yarıçaplı dairesel çubuk ele alınmış, ve denklemlerin çeşitli yükleme durumları için çözümünü yaparak parametrelere bağlı sonuçları tablolar halinde verilmiştir.

1961' de Rodriguez [5] tarafından sinüzoidal yayılı yükleme altında elastik zemine oturan dairesel çubuğa ait burulma açısına bağlı 6'ncı. mertebeden bir diferansiyel denklem kurarak çözümlere ulaşmıştır. Kurmuş olduğu diferansiyel denklemde k , zemin katsayısına ilave olarak k_2 gibi bir sabiti dönmeye karşı zemininin etkisini eklemiştir.

Daire eksenli çubuklar için 1964' te İnan [6] tarafından başlangıç değerleri metodu ile genel bir çözüm yöntemi geliştirilmiş ve taşıma matrisi elde edilmiştir. Ancak elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar için 6'ncı mertebeden karakteristik köklerin kapalı olarak elde edilemediğinden dolayı kapalı olarak bir taşıma matrisi bulmak mümkün olamamıştır. Fakat elastik zemine oturan doğru eksenli çubuklar için yine İnan [7] tarafından 1966' da kapalı olarak bir taşıma matrisi verilmiştir.

1984' ta Çelik, [8] tarafından Başlangıç değerleri metodu ile kesitlerin kayması ve eksenin uzaması da gözönüne alınarak eğri eksenli çubukların kesme kuvveti ve moment değerleri ile yer ve şekil değiştirme bağıntıları elde edilmiştir.

1974' te Kırıl ve Ertepinar [9] elastik zemin üzerine oturan dairesel çubuklara ait genel denklemleri kanonik hale indirgiyerek çözüme ulaşmıştır.

Çözüm esnasında kayma gerilmelerinin deformasyona katkısı ve zeminin dönmeye tepkisinde dikkate alınmıştır.

Bu konudaki diğer bir çalışma 1979' da Panayotounakos [10] tarafından elastik zemin üzerine oturan daire eksenli bir kirişin genel yükleme altındaki davranışı için lineer statik analizi yapılmıştır. Bu çalışmalarda zeminin burulma reaksiyonunu ve kayma şekil değiştirmeleri dikkate alınarak altı adet 1'inci dereceden lineer diferansiyel denklemleri ele alınmıştır. Çözüm esnasında genelleştirilmiş Dirac deltası ve Heaviside fonksiyonları ile başlangıç değerleri metodu çözüm esnasında kullanılmıştır.

1987' de Dasgupta ve Sengupta [11] da benzer elastik zemine oturan daire eksenli çubuk problemlerini üç nodlu izoparametrik kiriş elemanı kullanarak sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir. Çalışmalarında kayma şekil değiştirme etkilerini ve burulma yüklemelerini de içermektedir.

1989' da Banan ve Arkadaşları [12] elastik zemin üzerinde değişken kesitli olabilen üç boyutlu çubuklar için genel sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir.

1993' te Haktanır ve Kırıl [13] taşıma matrisi metodu ile eğri eksenli çubukları çeşitli yüklemeler altında incelemişlerdir.

1994' te Kadioğlu [14] tarafından yapılan çalışmada da elastik zemin üzerine oturan doğru ve daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altındaki davranışları için kapalı olarak sonlu eleman matrisi verilmiş ve değişik problemlere uygulanmıştır. Çalışmada kayma deformasyonları ve zeminin dönmeye karşı tepkisinde ele alınmıştır.

Elastik zemin üzerine oturan doğru eksenli çubuklar üzerinde, 1971' de Rao ve Arkadaşları [15] verilebilir. Çalışmalarında sadece ortadan tekil yüklü kirişleri ele alarak çözüme gitmişler ve kirişlerle ilgili çizelge ve eğrileride vermişlerdir.

Doğru ve daire eksenli çubukların statığı için yapılmış çalışmaların yanısıra, dinamiğine ait çalışmalar da mevcuttur, Örnek olarak;

1984' te Celep [16], Wieghardt tipi elastik zemine oturan daire eksenli kirişlerin dinamik davranışı üzerinde çalışmış ve Celep ve Arkadaşları [17], 1988' de

de, yayılı ve tekil yük ile moment etkisi altındaki doğru eksenli çubukları çekme gerilmesi almayan elastik Winkler zemini üzerine oturması halinde statik ve dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Çalışmalarında statik ve dinamik yükler altında kiriş deformasyonuna ve zeminden ayrılma noktalarına ait grafikler vermişlerdir.

1993' te Doğan [18] tarafından yapılan bir çalışmada, doğru eksenli çubuklarda, zeminin basınç ve çekmede farklı davranış gösterdiği kabul edilerek, elastik zemine oturan ağırlıksız kirişlerin, statik ve dinamik tekil yükler etkisinde ki davranışları incelenmiştir.

Fakat örnek verilen bu çalışmalarda ve diğer çalışmalarda, daire eksenli çubukların dinamik analizi daima belirli ön kabuller ve yaklaşımlar ile elde edilen sonuçları içermekte, kesin çözümlere ulaşamamıştır.

Buraya kadar anlatılan çalışmalarda elastik zemin üzerine oturan daire eksenli çubuklar ele alınmıştır, ancak genel geometriye sahip uzay çubuklar üzerinde de çeşitli çalışmalar mevcuttur. Örnek olarak 1987' de Aköz [19] tarafından çubukların en genel durumu için, fonksiyoneller yardımıyla sonlu eleman yöntemi uygulanarak çözüme ulaşılmıştır.

1960' ta Cinemre, [20] tarafından, Başlangıç değerleri metodu ile helisel çubuklar statik incelemesi yapılmış, taşıma matrisi elde edilmiştir.

Bunlarla birlikte, zemin reaksiyonu için ele aldığımız Winkler zemin modelinden başka çeşitli zemin modelleri bulunmaktadır. Buna örnek olarak; Vlasov, Pasternak, Filonenko-Borodich, Reisner zemini gibi elastik ve visko elastik zemin modelleri verilebilir. Bu farklı zemin modelleri üzerinde de bir çok araştırmacı, kiriş ve plakları ele alarak çeşitli çalışmalar yapmışlardır.

2.2 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada Winkler zemini üzerine oturan daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altındaki davranışları ele alınmıştır.

Çalışmadaki asıl amaç başlangıç degerleri metodu kullanılarak literatürde benzerine rastlayamadığım elastik zemine oturan daire eksenli çubukla ait kapalı

formda taşıma matrisini elde etmektir. Bu amaca ulaşmak için, daha önce elde edilmiş daire eksenli çubukların homogen hali, yani elastik zemine oturmaması hali için taşıma matrisi farklı yöntemlerle elde edilmiştir. Bunun için idempotent ve nilpotentler ile ve Cayley-Hamilton Teoremi yardımı ile farklı iki çözüm yolu ile çözüm yoluna gidilmiştir. Elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar için de Sylvester Teoremi ve Cayley-Hamilton Teoremi Yardımı ile taşıma matrisinin kapalı çözümüne farklı iki yolla ulaşılmıştır.

Çalışmada daire eksenli çubukların dinamik hareketi serbest titreşim durumu için incelenmekte; Ayrık Kütle Metodu ile kontrol amacıyla çözüme gidilmiş, fakat asıl amaç olan kesin çözüm yöntemi; Başlangıç Değerleri Metodu ile çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır.



BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER

2.1 Çubuk ve Çubuk Geometrisi

Çubuğa ait geniş bilgiyi başta [7] nolu, belirtilen kaynakta bulmak mümkündür. Çubuğa ait bilgiler kısa bir şekilde taranacak olursa,

İnce uzun cisimler diye belirtilen bir boyutunun diğer iki boyutu yanında çok büyük olan cisimlere çubuk adı verilir.

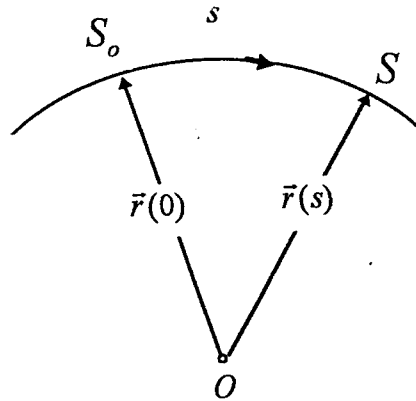
Çubuğun eksenini, genel olarak bir uzays eğrisi olup, ardışık dik kesitlerin ağırlık merkezlerinin geometrik yeridir.

Bir çubuğu tarif ederken iki elemanından bahsedilir; bunlardan birincisi çubuğun eksenini ve ikincisinde çubuğun dik kesitidir. Çubuk, bu esas doğrultusunda dik kesit denilen sınırlı bir düzlem parçası, kendi ağırlık merkezinde çubuk eksenini olan bir uzay eğrisine daima dik kalacak şekilde hareket ederse oluşur. Dik kesitte ise bu bir düzlem parçası olur.

Çubuk eksenini;

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \quad (2.1)$$

şeklinde ve Şekil 2.1. de görüldüğü gibi yer vektörü ile ifade edilir.



Şekil 2.1 Çubuk Ekseninin Yer Vektörü Şeklinde Gösterimi

Burada s notasyonu ile eğri üzerinde başlangıç olarak seçilen bir nokta ile, ele aldığımız nokta arasındaki yayboyu, $\vec{r}$ ile ise ele aldığımız noktanın yer vektörünü gösterir ve s skalerine bağlıdır.

Çubuk hesaplarında aşağıda tarif edeceğimiz üç birim vektör önemli rol oynar, bunlardan birincisi ;

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (2.2)$$

teğet birim vektörü olarak ifade edilir. Eksen eğrisine teğet olan bu birim vektörün yönü artan s yönündedir. İkincisi, asal normal birim vektör olup $\vec{n}$ ile ifade edilir. Bu birim vektörde oskülatör düzlemi içerisinde teğet vektörüne dik olup eğrilik merkezine doğru yönelmiştir. Üçüncüsü ise binormal vektör olup $\vec{b}$ ile ifade edilir. Bu vektörde ;

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (2.3)$$

şeklinde diğer iki vektörün vektörel çarpımıyla elde edilir. Bu $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ birim vektörleri arasında Frenet formülleri adı verilen şu bağıntılar mevcuttur;

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \chi \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= \tau \vec{b} - \chi \vec{t} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} &= -\tau \vec{n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada χ , daima pozitif bir skaler olan eğrilik, τ ise burulma eğriliğidir. Özel hallerde düzlemsel eğriler yani doğrular için $\tau = 0$, $\chi = 0$ ve daire için de $\chi = 1/R$ dir.

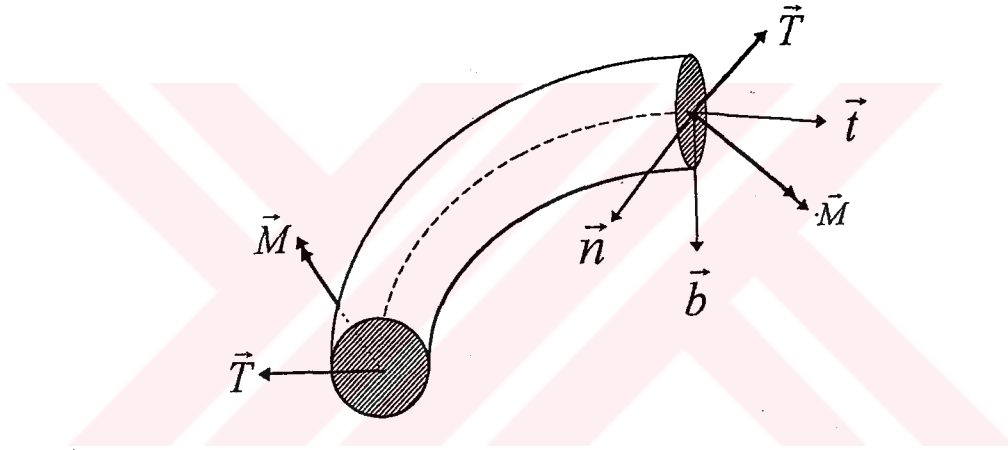
2.2 Alan Denklemleri

Çubuklara ait alan denklemleri genel halde incelenirse;

Denge denklemleri;

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} &= 0 \\ \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{t} \times \vec{T} + \vec{m} &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

biçiminde ifade edilir.



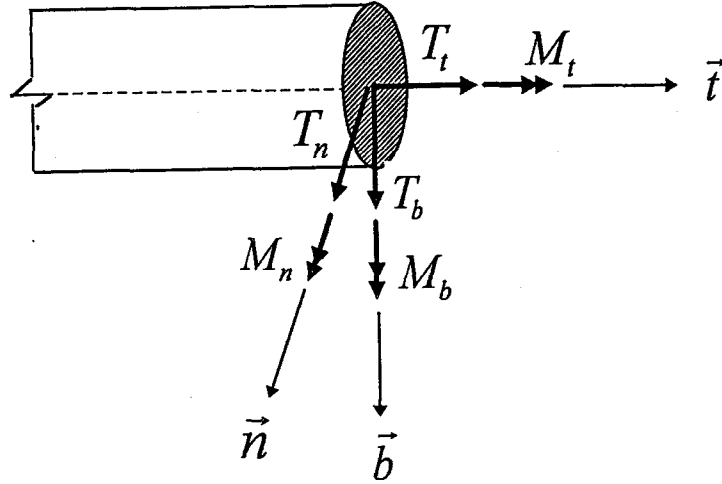
Şekil 2.2 Çubuğun İç Kuvvetleri

burada $\vec{p}$ ve $\vec{m}$ dış yükleri, $\vec{T}$ ve $\vec{M}$ kesit tesirlerini ifade eder.

Bununla birlikte;

$$\begin{aligned}\vec{T} &= T_t \vec{t} + T_n \vec{n} + T_b \vec{b} \\ \vec{M} &= M_t \vec{t} + M_n \vec{n} + M_b \vec{b}\end{aligned}\quad (2.6)$$

olmak üzere, T_t eksenel normal kuvveti, T_n ve T_b kesme kuvvetlerini, M_t burulma momentini, M_n , M_b eğilme momentlerini göstermektedir. Şekil 2.2' de kesit tesirlerinin $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ eksen takımındaki izdüşümleri görülmektedir.



Şekil 2.3 Kesit tesirleri bileşenleri

Kinematik denklemler;

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Omega}}{ds} - \bar{\omega} &= 0 \\ \frac{d\bar{U}}{ds} + \bar{t} \times \bar{\Omega} - \bar{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

şeklinde yazılır. Burada $\bar{U}$ vektörü dik kesitin ağırlık merkezindeki ötelemeleri, $\bar{\Omega}$ vektörü dik kesitin ağırlık merkezinden geçen bir eksen etrafındaki dönmelerini, $\bar{\gamma}$ vektörün rölatif birim şekil değıştirmeleri, $\bar{\omega}$ vektörü rölatif birim dönmeleri tanımlar.

Daha önce belirtilen kinematik bağıntılardan ikincisine uygunluk koşulu adı verilmektedir. $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\omega}$ vektörlerinin $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ koordinat takımındaki bileşenleri olan γ_t çubuktaki birim uzamayı, γ_n ve γ_b değerleri sırasıyla $\bar{n}$ ve $\bar{b}$ doğrultularındaki kaymaları, ve ω_b değerleride $\bar{n}$ ve $\bar{b}$ eksenleri etrafındaki eğilme momentlerinin etkisiyle meydana gelen relatif birim dönmeleri gösterirler. Yerdeğıştirme hesaplarında $\bar{\omega}$ vektörü, $\bar{\gamma}$ vektöründen daha önemli rol oynar. Bu nedenle genellikle $\gamma \cong 0$ olarak alınmakta, bu da hesaplarda kolaylık sağlamaktadır. Bu şekilde yapılan kabulde uzama ve kaymanın rolü ihmal edilmiş olmaktadır.

Bünye bağıntıları $\bar{T}$ ve $\bar{M}$ kesit tesirleri vektörleriyle $\bar{\gamma}$ ve $\bar{\omega}$ şekil değıştirme vektörleri arasındaki ilişki olup,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}} &= \mathbf{C} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \\ \bar{\mathbf{M}} &= \mathbf{D} \bar{\boldsymbol{\omega}}\end{aligned}\quad (2.8)$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{C}$ ve $\mathbf{D}$ sırasıyla kayma ve eğilme rijitlik tansörleridir. Bunlar sadece çubuk malzemesine ve geometrisine bağlıdır. Eğer malzeme homojen ve izotrop olup, $\bar{n}$, $\bar{b}$ takımında kesitin simetri eksenleriyle üst üste gelirse tansörler;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_n & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & C_t \end{bmatrix}\quad (2.9)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_n & 0 & 0 \\ 0 & D_b & 0 \\ 0 & 0 & D_t \end{bmatrix}$$

biçiminde, yalnız köşegen değerleri sıfırdan farklı, diğer tüm bileşenleri sıfır olmaktadır. Bu sıfırdan farklı olan rijitlikler, I_t kutupsal atalet momentleri, I_n , I_b sırasıyla $\bar{n}$ ve $\bar{b}$ eksenlerine göre atalet momentleri, E elastisite modülü, γ poisson oranını, G kayma modülü, k' ve k'' kesme etkisini katan sabitler ve F çubuk dik kesit alanı olmak üzere;

$$C_n = \frac{G F}{k'} ; C_b = \frac{G F}{k''} ; C_t = E F \quad (2.10)$$

$$D_n = E I_n ; D_b = E I_b ; D_t = G I_t$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

Üç boyutlu çubuklar için gerekli olan denklemleri elde etmek için (2.6) ifadesi (2.5) denge denklemlerinde yerine konur ve (2.9) ile (2.10) eşitlikleri gözönüne alınarak (2.8) bünye bağıntıları, (2.7) uygunluk denklemlerinde yerine konup $\vec{\gamma}$ ve $\vec{\omega}$ yok edilebilir. Bunun sonucunda da elde edilen denklemler,

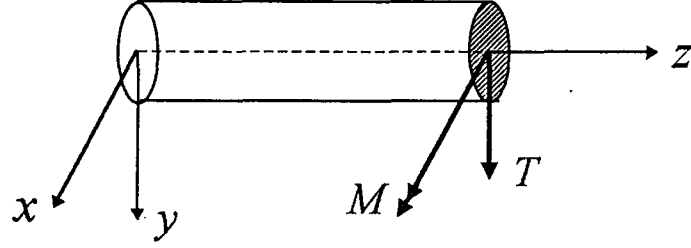
$$\begin{aligned}
\frac{dT_b}{ds} &= \tau T_n - P_t \\
\frac{dT_n}{ds} &= -\chi T_t + \tau T_b - P_n \\
\frac{dT_b}{ds} &= -\tau T_n - P_b \\
\frac{dM_t}{ds} &= \chi M_n - m_t \\
\frac{dM_n}{ds} &= T_b - \chi M_t + \tau M_b - m_n \\
\frac{dM_b}{ds} &= -T_n - \tau M_n - m_b \\
\frac{d\Omega_t}{ds} &= \chi \Omega_n + \frac{M_t}{Dt} \\
\frac{d\Omega_n}{ds} &= -\chi \Omega_t + \tau \Omega_b + \frac{M_n}{Dn} \\
\frac{d\Omega_b}{ds} &= -\tau \Omega_n + \frac{M_b}{Db} \\
\frac{dU_t}{ds} &= \chi U_n + \frac{T_t}{C_t} \\
\frac{dU_n}{ds} &= -\chi U_t + \tau U_b + \Omega_b + \frac{T_n}{C_n} \\
\frac{dU_b}{ds} &= -\tau U_n - \Omega_n + \frac{T_b}{C_b}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

eşitlikleri açık formda yazıldığı taktirde birinci dereceden türevli oniki adet diferansiyel denklem takımıdır. Bu denklemler herhangi bir eğri eksenli genel çubuklar için geçerlidir ve eğriliklere bağlı olarak ifade edilmiştir.

(2.11) denklemleri iki gruba ayrılabilir; birinci grup büyüklükler çubuk eksenin bulunduğu düzlemde ve yükler çubuk düzlemine dik olarak düşey etkirler, ikinci grup büyüklükler ise çubuk düzlemine dik doğrultudadırlar ve eğriliklerine bağlı olarak tarif edilmiştir.

2.2.1 Düzlemlerine Dik Yüklerle Yüklü Doğru Eksenli Çubuklar

Doğru eksenli çubuklar, Frenet formüllerindeki χ ve τ eğriliklerinin değerleri sıfıra eşitlediğinde oluşan eğrilerdir.



Şekil 2.4 Eksen takımında iç kuvvetler

Şekilde 2.4' te ifade edilen eksen takımı ve notasyonla çubuk deklemlerini, denklem (2.11) den,

$$\frac{dT}{dz} + p_y = 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{dM}{dz} - T + m_x = 0 \quad (2.12b)$$

$$\frac{dv}{dz} + \Omega_x = 0 \quad (2.12c)$$

$$\frac{d\Omega_x}{dz} - \frac{M}{EI} = 0 \quad (2.12d)$$

şeklinde ifade ediler. Fakat elastik zemine oturan çubuklar için dış yük,

$$p_y = q - k v \quad (2.12e)$$

şeklinde tarif edilebilir. (2.12a) ve (2.12e) ile (2.12d) eşitlikleri dikkate alınarak (2.12b) ve (2.12c) eşitlikleri elde edilir, bu şekilde elastik zemine oturan doğru eksenli çubuklar için diferansiyel denklemleri,

Denge denklemi;

$$\frac{-d^2M}{dz^2} - q + k v = 0 \quad (2.13a)$$

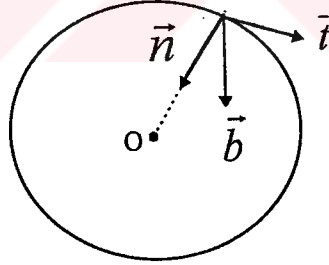
Kinematik deklemler;

$$\frac{-d^2v}{dz^2} - \frac{M}{EI} = 0 \quad (2.13b)$$

şekline getirilir. Burada ifade edilen M ve T moment ve kesme kuvveti olan kesit tesirlerini, v elastik eğri fonksiyonunu, EI eğilme rijitliğini, k elastik zeminin yatak katsayısını, q çubuğa etkiyen dış yükü göstermektedir.

2.2.2 Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Daire eksenli çubuğun eksen takımı Şekil (2.5) te ifade edildiği gibi ve R yarıçaplı olarak ele alınırsa;



Şekil 2.5 Eksen takımı

Burada yükleme yönünün düşey olmasından dolayı kesitte oluşacak kesit tesirlerinden; T_n , T_t , M_b sıfır olup ve böylece kesme ve moment vektörü şu forma gelir;

$$\begin{aligned} \vec{T} &= T_b \vec{b} \\ \vec{M} &= M_n \vec{n} + M_t \vec{t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Aynı şekilde şekil değiştirmelerin sıfır olan ifadelerini yok edersek şekil değiştirme ifadeleride ;

$$\begin{aligned}\bar{U} &= U_b \bar{b} \\ \bar{\Omega} &= \Omega_n \bar{n} + \Omega_t \bar{t} \\ \bar{\omega} &= \omega_n \bar{n} + \omega_t \bar{t}\end{aligned}\tag{2.15}$$

şekline gelir.

Daire eksenli çubuklarda eğrilikler,

$$\begin{aligned}\chi &= 1/R \\ \tau &= 0\end{aligned}\tag{2.16}$$

olduğundan dolayı Frenet formülleri,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}}{ds} &= \frac{1}{R} \bar{n} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} &= -\frac{1}{R} \bar{t} \\ \frac{d\bar{b}}{ds} &= 0\end{aligned}\tag{2.17}$$

şekline dönüşür. Dairede ds olarak gösterdiğimiz uzunluk elemanı,

$$ds = R.d\theta\tag{2.18}$$

ifade edilir. Elastik zemine oturan çubuklarda dış yük ise,

$$P_b = q - k.U_b\tag{2.19}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Burada (2.14), (2.15), (2.16), (2.18), ve (2.19) eşitlikleri alınarak (2.11) denklemlerinde (a, b, f, i, j ve k) olmak üzere altı denkleme dönüşür. Geriye kalan (2.11.c, e, d, g, h ve l) denklemleri,

$$\begin{aligned}
-\frac{dT_b}{d\theta} - q R + k R U_b &= 0 \\
-\frac{dM_n}{d\theta} - M_t + R T_b - R m_n &= 0 \\
-\frac{dM_t}{d\theta} + M_n - R m_t &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{d\theta} - \Omega_n - R \frac{M_t}{Dt} &= 0 \\
\frac{d\Omega_n}{d\theta} + \Omega_t - R \frac{M_n}{Dn} &= 0 \\
\frac{dU_b}{d\theta} + R \Omega_n - R \frac{T_b}{C_b} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

şekline dönüştürülür. Burada T_b , M_n , M_t , Ω_t , Ω_n ve U_b olmak üzere altı tane bilinmeyenleri, q , m_n , m_t dış yükleri, C_b , Dn , Dt kayma ve eğilme rijitlikleri cinsinden ifade ederek elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar için altı tane denklem kurulmuş olur. Bu denklemleri ileri aşamalarda tekrar inceleyerek asıl amacımız olan bu denklemlerin çözümüne başlangıç değerleri metodu ile ulaşılmaya çalışılacaktır.

BÖLÜM 3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1 Başlangıç Değerleri Metodu

Genelde mühendislik problemlerinde sınır şartları yardımıyla ifade edilmesi gereken, sabitlerin sayısı çok olduğu takdirde, hesap yorucu olduğu kadar hatanın oluşması ihtimali de fazla olur. Problemlerde sabit miktarının minimum tutulması bu yüzden önem kazanır. Geliştirilmiş olan başlangıç değerleri metodu da bu amacı sağlamaktadır. Sınır değerleri problemlerinin hepsini başlangıç değerleri problemlerine dönüştürmek ve böylece ara şartlardan dolayı girebilecek yeni sabitlerin önüne geçmek ve problemlerin denklemlerini hep aynı başlangıçtaki sabitlerle ifade eden bu metod, tek değişkenli problemlere uygulanmaktadır.

Elastomekanikte problemlerin incelenmesinde taşıma matrisleri, kısmen sabit kesit boyutlarına sahip keyfi sınır ve ara koşulları altındaki çok açıklıklı kiriş ve çerçevelerde eğilme titreşiminin, burkulmanın ve ayrıca diğer daha genel problemlerinin incelenmesi son zamanlarda çok yönlü olarak matrisler yardımı ile yapılmış ve bunun için matris hesabının özellikle uygun olduğu bilgisayarlar yaygın şekilde kullanılmış ve kullanılmaktadır. Belirttiğimiz problemler için, sabit kesitler halinde kapalı şekillerde çözülebilen birer lineer diferansiyel denklemi vardır. Tabii ki diferansiyel denklemin mertebesi kadar her açıklıkta sabitler ortaya çıkar. Bu sabitlerin açıklık sınırlarının geçiş koşullarına uydurulması matris hesabı ile çok açık ve şematik olarak sağlanabilir. Bu sebepten dolayı çözüm fonksyonları o şekilde seçilir ki sabitler mekanik anlam taşıyan büyüklüklere -çökme eğim, eğilme momenti ve kesme kuvveti "Durum Vektörü" ile ifade edebileceğimiz, açıklık başlangıcındaki ve açıklık sonundaki durum vektörleri arasında, diferansiyel denklemin lineer karakterlerine uygun olarak bir matris ile gösterilebilen bir bağıntı vardır. Açıklık başlangıcındaki durum büyüklüklerine giriş büyüklükleri, açıklık sonundakilere çıkış büyüklükleri adı verilmek üzere bunları birleştiren matrise de "Taşıma Matrisi" adı verilir. Bu matriste ayrıca açıklık sınırlarında süresiz geçişler için taşıma matrisleri olarak "Nokta Matrisleri" de hesaba katılabilir. Ayrıca iç sınır koşulları, örneğin ara mesnetler veya Gerber mafsalları mevcut ise ortaya çıkan bilinmeyenlerden bazıları ek koşul olarak ortaya çıkar ve bilinmeyenlerden bazıları ek koşul olarak diğerleri cinsinden ifade edilebilirler.

3.1.1. Durum Vektörü

Ele alınan bir sistemin durumunu belirtmek için n tane değere ihtiyaç olsun,

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n-1}, S_n \quad (3.1)$$

S_i değerlerine sistemin koordinatları denmektedir. Bu koordinatların bir x serbest değişkeneine bağlı olarak değiştiği kabul edilsin. Ele aldığımız problemlerde bu parametre zaman olduğu gibi, bir boyutlu sürekli ortamlarda yeri gösteren değişkende olmaktadır.

Bu $S_i(x)$ 'leri bir vektörün koordinatları olarak gözönüne alındığında oluşan kolon matrisi şeklindeki büyüklüğe "Durum Vektörü" adı verilir.

$$\bar{S}(x) = \begin{bmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \\ . \\ . \\ S_n(x) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$S_i(x)$ fonksiyonlarının hepsinin birinci türevlerinin bulunduğu kabul edilirse; Durum Vektörü'nün, türevi;

$$\bar{S}'(x) = \begin{bmatrix} S'_1(x) \\ S'_2(x) \\ . \\ . \\ S'_n(x) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde bir kolon matrisi olarak gösterilebilir.

Burada önemli olan ve kanonik tasviri diye ifade edilen $\bar{S}'(x)$ vektörü ile $\bar{S}(x)$ vektörü arasındaki bağıntının verilmesidir. Bunuda esas anlamı ise parametrenin x değerine ait durumdan $x + dx$ değerine ait duruma geçişin tarifidir. Bu ilişkinin lineer olduğu kabulüyle,

$$\bar{S}(0) = \begin{bmatrix} S_1(0) \\ S_2(0) \\ \vdots \\ S_n(0) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

$F(x)$ ise kare formda taşıma matrisini göstermektedir. Bu $F(x)$ matrisinin hesaplanması için gereken diferansiyel denklem aranır, açıkça görüleceği gibi $S(x)$ kolon matrisi ile $F(x)$ kare matrisi aynı tipte diferansiyel denklemi sağlamaktadır.

$$F'(x) = D \cdot F(x) \quad (3.9)$$

Eğer D matrisin bütün elemanları sabit olursa diferansiyel denkleminin çözümü basite indirgenmiş olur. Skalerdeki çözüme benzetilerek $F(x)$ için üstel bir matris formu oluşturulmuştur.

$$F(x) = F(0) \cdot e^{xD} = e^{xD} \quad (3.10)$$

burada $F(0)$, matrisin $x=0$ daki halini gösterir. Bu da tarifine göre birim matris olmalıdır.

$$F(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$F(x) = e^{xD}$ 'de matris polinomu serisinde gösterilirse;

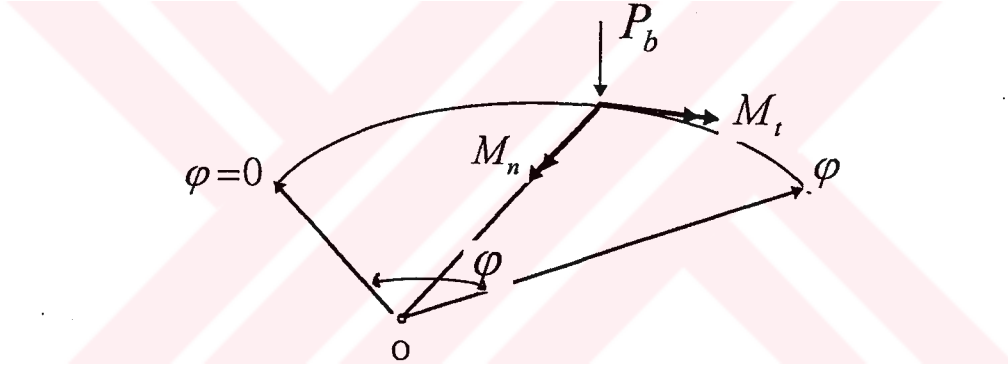
$$F(x) = e^{xD} = I + xD + \frac{x^2}{2!} D^2 + \dots + \frac{x^k}{k!} D^k \quad (3.11)$$

şeklinde oluşturulur.

Bu taşıma matrisi daha önceki belirttiğimiz gibi diferansiyel denklem çözümünden de elde edilebilir. (Bkz. [6] nolu kaynak)

3.1.3. Ara Yükler

Uygulanacak metod da sistemin sınır şartlarının bir kısmı belirlenip diğer kalanları elde edileceğine göre sisteme etkiyecek ikinci bir hususta ara yüklerdir.



Şekil 3.1 Dış Tekil Yük

Şekil (3.1) de görüldüğü $\varphi = \alpha_i$ gibi yerlerde dış tekil tesirler mevcut olursa geçiş hesabının $\varphi \geq \alpha_i$ için ifadesi,

$$S(\varphi) = F(\varphi) \cdot S(0) + F(\varphi - \alpha_i) \cdot K(\alpha_i) \quad (3.12)$$

şeklinde olduğu bilinir. Burada $K(\alpha_i)$ ile gösterilen süreksizlik matrisi,

$$\mathbf{K}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_n \\ -M_t \\ -P_b \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

Bir kaç farklı tekil yükün bulunması durumunda denklem şu şekilde genelleştirilir;

$$\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{F}(\varphi) \cdot \mathbf{S}(0) + \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{F}(\varphi - \alpha_i) \cdot \mathbf{K}(\alpha_i) \quad (3.14)$$

Eğer dış yükler, yayılı yük ise; $x = \xi$ ara girişi $\mathbf{K}(\xi)$ gibi bir kolon matris ile gösterirsek ve ara girişlerin ayrık noktalarını sıklaştırmak ve süreksizlik doğuran $\mathbf{K}(\xi)$ giriş matrisinin elemanlarını küçültmek şartıyla sürekli ara girişlere geçmek kabil olur. Bu durumda da denklemdeki sonlu toplam yerine integral almak kaydıyla,

$$\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{F}(\varphi) \cdot \mathbf{S}(0) + \int_0^{\varphi} \mathbf{F}(\varphi - \alpha) \cdot \mathbf{K}(\alpha) d\alpha \quad (3.15)$$

şeklinde oluşur, integral işareti altındaki $\mathbf{K}(\alpha)$ matriside,

$$\mathbf{K}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\mu_b(\alpha)R \\ -P_n(\alpha)R \\ -P_t(\alpha)R \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

şeklindeki kolon matrisini gösterir.

Burada P_n , P_t yayılı yüklerin iki doğrultudaki şiddetini ve μ_b de yayılı dış kuvvet çiftlerinin şiddetini gösterir.

3.2 Daire Eksenli Çubuklarda Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi

3.2.1 Karakteristik Denklemin Oluşturulması

Eksen düzlemlerine dik etkiyen kuvvetlerin hesabında bahis konusu olan büyüklükler $\bar{r}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ eksen takımı göz önünde bulundurularak U_b , Ω_n , Ω_t , M_n , M_t , T_b gibi skaler fonksiyondur. Hepsini bir kolon matrisi olarak toplarsak, problemin bilinmiyeni olan,

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} U_b(\varphi) \\ \Omega_n(\varphi) \\ \Omega_t(\varphi) \\ M_n(\varphi) \\ M_t(\varphi) \\ T_b(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

matrisi ve $\varphi = 0$ için,

$$S(0) = \begin{bmatrix} U_b(0) \\ \Omega_n(0) \\ \Omega_t(0) \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ T_b(0) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

matrisi oluşur. $S(\varphi)$ 'yi çözmek için gerekli diferansiyel denklemler genel hal için,

Denge Denklemleri;

$$\begin{aligned} \frac{dM_n}{d\varphi} &= -M_t + R T_b - R m_n \\ \frac{dM_t}{d\varphi} &= M_n - R m_t \\ \frac{dT_b}{d\varphi} &= -P_b R \end{aligned} \quad (3.19a)$$

Kinematik Denklemler;

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} &= \Omega_n + \frac{R}{Dt} M_t \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} &= -\Omega_t + \frac{R}{Dn} M_n \\
\gamma_b \cong 0 &\Rightarrow \frac{dU_b}{d\varphi} = -R \Omega_n
\end{aligned} \tag{3.19b}$$

şeklindedir. Burada P_b ile ifade edilen büyüklük çalışmada, statik durumda elastik zemin katsayısı olan k' yı, dinamik durumda ise $P_b = P - k u - \rho \omega^2 u$ olarak incelenmekte olup ρ birim hacim kütleyi, ω da titreşim frekansını ifade etmektedir.

Bu aşamada dış yükleri sıfır olursa denklemler;

Denge denklemleri;

$$\begin{aligned}
\frac{dM_n}{d\varphi} &= M_t + R T_b \\
\frac{dM_t}{d\varphi} &= M_n \\
\frac{dT_b}{d\varphi} &= 0
\end{aligned} \tag{3.20a}$$

Kinematik Denklemler;

$$\begin{aligned}
\frac{dU_b}{d\varphi} &= -R \Omega_n \\
\frac{d\Omega_n}{d\varphi} &= -\Omega_t + \frac{R}{Dn} M_n \\
\frac{d\Omega_t}{d\varphi} &= \Omega_n + \frac{R}{Dt} M_t
\end{aligned} \tag{3.20b}$$

şekline dönüşür. Genel formdaki alan denklemleri matris formunda gösterilecek olunursa, bu durumda şu şekilde bir form elde edilir,

$$\frac{dS}{d\varphi} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{S} \tag{3.21}$$

Burada kapalı halde gösterilen $\mathbf{D}$ matrisi ile matris alan denklemlerinin katsayılar matrisidir, bu da matris formda gösterilecek olunursa;

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{R}{Dn} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{R}{Dt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -P_b R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

şeklinde olduğu görülür.

Bu katsayılar matrisini, elastik zemine oturan daire eksenli çubukların genel formda karakteristik denklemi elde edilmeye çalışılırsa; tr ifadesi matrisin trace' ini göstermek üzere,

$$\alpha_n = -\frac{1}{n} \{ \alpha_{n-1} \text{tr } \mathbf{D} + \alpha_{n-2} \text{tr } \mathbf{D}^2 + \dots + \alpha_1 \text{tr } \mathbf{D}^{n-1} + \text{tr } \mathbf{D}^n \} \quad (3.23)$$

$$\text{Det}(\mathbf{m} \mathbf{I} - \mathbf{D}) = m^n + \alpha_1 m^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} m + \alpha_n$$

işlemleri yapıp elde edilen matrisin determinanı 0' a eşitlenirse,

$$m^6 + 2m^4 + \left(1 + \frac{P_b R^4}{Dn} \right) m^2 - \frac{P_b R^4}{Dt} = 0 \quad (3.24)$$

şeklindeki, elastik zemine oturan daire eksenli çubukların karakteristik denklemi elde edilir. [21]

3.2.2 Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Nilpotent ve Idempotentler ile Eldesi

Bu aşamada, ilk olarak daire eksenli cubuklarda $P_b = 0$ durumu için taşıma matrisi incelenirse, bu durumda karakteristik denklem;

$$m^6 + 2m^4 + m^2 = 0 \quad (3.25)$$

ve bunun çözümünden elde edilen kökler de,

$$m_{1,2} = 0, m_{3,4} = -i, m_{5,6} = i$$

şeklinde elde edilir.

Çalışmanın ana amacı olan taşıma matrisi olarak adlandırılan, e^{qD} matris fonksiyonunu idempotent ve nilpotentler (Bkz.[22] nolu kaynak) yardımıyla elde edilmeye çalışılırsa,

- I , $n \times n$ 'lık birim matrisi,
- i , farklı kök sayısını,
- λ_i , elde edilen karakteristik denklemin farklı köklerini,
- S_k , cebrik katlılığı,
- P_i , idempotentleri,
- Q_i , nilpotentleri

ifade ederse; matris fonksiyonun idempotentler ve nilpotentler cinsinden ifadesi,

$$P_i, Q_i = F(D, I) \quad (3.26)$$

şeklinde ve matrisin idempotentler ve nilpotentler cinsinden spektral açılımı da;

$$D = \sum_{i=1}^i \lambda_i P_i + Q_i \quad (3.27)$$

ve aynı şekilde elde edilmek istenen $\Phi(D)$ matris fonksiyonunun idempotent, nilpotent ve elde edilen köklerin, $\Phi(\lambda_i)$ şeklindeki ifadelerine bağlı genel formu,

$$\Phi(D) = \sum_{i=1}^i \left\{ \Phi(\lambda_k) P_k + \sum_{r=1}^{S_k} \frac{\Phi^{(r)}(\lambda_k)}{r!} Q_k^r \right\} \quad (3.28)$$

şeklindedir.[22]

Buraya kadar, idempotentler ve nilpotentler ile bir matris fonksiyonunun genel olarak elde edilmesinde uygulanan işlem akışını aşama aşama taşıma matrisi için elde edilecek fonksiyona uygulanırsa;

$$\begin{aligned} i &= 3 \\ S_k &= 2 \\ \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = i \end{aligned}$$

olduğu ve spektral açılımı da;

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{P}_i + \mathbf{Q}_i \quad (3.29)$$

$$\mathbf{D} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1 + \lambda_2 \mathbf{P}_2 + \mathbf{Q}_2 + \lambda_3 \mathbf{P}_3 + \mathbf{Q}_3$$

ve λ_i değerleri eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3 + i \mathbf{P}_2 - i \mathbf{P}_3 \quad (3.30)$$

sonucu elde edilir.

Idempotent ve nilpotentlerinin matrisin matematiksel ifadeler cinsinden elde edilmesi için matrisin, uygulanan metodun prensiplerine uygun olarak üstel kuvvetleri alınacak olunursa;

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 &= 2i (\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_3) - (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\ \mathbf{D}^3 &= -3 (\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3) - i (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\ \mathbf{D}^4 &= 4i (-\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3) + (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) \\ \mathbf{D}^5 &= 5 (\mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3) + i (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_3) \end{aligned} \quad (3.31)$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen bu beş bilinmeyenli beş denklemden $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ matrislerin $\mathbf{D}$ 'nin kuvvetleri cinsinden ifade edilirse;

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{D} + 2\mathbf{D}^3 + \mathbf{D}^5 \\ \mathbf{Q}_2 &= \frac{i}{4} (\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^4) + \frac{1}{4} (\mathbf{D}^3 + \mathbf{D}^5) \\ \mathbf{Q}_3 &= -\frac{i}{4} (\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^4) + \frac{1}{4} (\mathbf{D}^3 + \mathbf{D}^5) \\ \mathbf{P}_2 &= -\mathbf{D}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}^4 - \frac{i}{4} (5\mathbf{D}^3 + 3\mathbf{D}^5) \\ \mathbf{P}_3 &= -\mathbf{D}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{D}^4 - \frac{i}{4} (5\mathbf{D}^3 + 3\mathbf{D}^5) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ve P_1 idempotentini elde etmek için idempotentlerin $\sum P_i = I$ özelliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= I \\ P_1 &= I + 2D^2 + D^4 \end{aligned} \quad (3.33)$$

işlemi ile tüm idempotent ve nilpotentler elde edilmiş olunur.

Matris fonksiyonunun idempotent ve nilpotentlere bağlı ifadeside;

$$\begin{aligned} e^{qD} &= \Phi(D) \\ e^{q\lambda} &= \Phi(\lambda) \\ e^{qD} &= P_1 + e^{qi} P_2 + e^{-qi} P_3 + q Q_1 + q e^{qi} Q_2 + q e^{-qi} Q_3 \end{aligned} \quad (3.34)$$

eşitliği şeklinde elde edildikten sonra bu eşitliklerde;

$$\begin{aligned} e^{qi} &= \cos q - i \sin q \\ e^{-qi} &= \cos q + i \sin q \end{aligned} \quad (3.35)$$

trigonometrik dönüşümleri yapıldığında fonksiyon şu forma gelir;

$$\begin{aligned} e^{qD} &= P_1 + (\cos q + i \sin q) P_2 + (\cos q - i \sin q) P_3 \\ &\quad Q_1 q + q (\cos q + i \sin q) Q_2 + q (\cos q - i \sin q) Q_3 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Son aşama olarak daha önce elde edilen idempotent ve nilpotentler bu eşitlikte yerine konulursa taşıma matrisine ulaşılmış olunur.

Şimdiye kadar açıklanan sistemle, Mathematica bilgisayar programı yardımıyla elde edilen taşıma matrisi; bu matrisi kısaca $F(q)$ olarak gösterilip ve matris elemanları;

$$\begin{aligned}
T1 &= -R \sin[q] \\
T2 &= 2R \sin\left[\frac{q}{2}\right]^2 \\
T3 &= -\frac{1}{Dn \, Dt} \left[R^2 \sin\left[\frac{q}{2}\right] \left(q \cos\left[\frac{q}{2}\right] (Dn + Dt) - 2Dn \sin\left[\frac{q}{2}\right] \right) \right] \\
T4 &= -R^2 \frac{Dn + Dt}{2Dn \, Dt} (q \cos[q] - \sin[q]) \\
T5 &= \frac{R^3}{Dt} \left[q + \frac{q \cos[q] - 3\sin[q]}{2} \right] + \frac{R^3}{Dn} \left[\frac{q \cos[q] - \sin[q]}{2} \right] \\
T6 &= \cos[q] \\
T7 &= -\sin[q] \\
T8 &= \frac{R}{2Dn \, Dt} [q \cos[q] (Dn + Dt) + \sin[q] (Dt - Dn)] \\
T9 &= -\frac{Dn + Dt}{2Dn \, Dt} (q R \sin[q]) \\
T10 &= \frac{R}{2Dn \, Dt} [q \cos[q] (Dn + Dt) + \sin[q] (Dn - Dt)] \tag{3.37}
\end{aligned}$$

şeklinde T_i notasyonu ile ifade edilirse, bu durumda elde edilen matris şu formu alır;

$$F(q) = \begin{bmatrix} 1 & T1 & T2 & T3 & T4 & T5 \\ 0 & T6 & T7 & T8 & T9 & -T3 \\ 0 & -T7 & T6 & -T9 & T10 & T4 \\ 0 & 0 & 0 & T6 & T7 & -T1 \\ 0 & 0 & 0 & -T7 & T6 & T2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

ve bu matrisin elde edilmesi için uygulanan Mathematica [23] ile yapılan bilgisayar programı PROGRAM1 başlığı altında Ek A da gösterilmiş, olup matrise ulaşmak için yapılan ara kontroller gösterilmeyip genel şekliyle en basit halde program

dilinde ifade edilmiştir. Programda şimdiye kadar ifade edilen notasyonlardan farklı olarak, b_n ; kesit genişliğini, h_n ; kesit yüksekliğini, ν ; v sabitini, e ; elastisite modülünü ifade etmektedir.

3.2.3 Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Cayley-Hamilton Teoremi Yardımı İle Eldesi

$d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ Cebrik katlılıklar,

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ Indexler,

$$S_i \leq d_i$$

olmak üzere,

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1} (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{s_n} \quad (3.39)$$

$$\text{Det}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{D}) = (\lambda - \lambda_1)^{d_1} (\lambda - \lambda_2)^{d_2} \dots (\lambda - \lambda_n)^{d_n} = 0$$

Buradan elde edilecek köklerden matris fonksiyonlarına geçiş işlemleri genel olarak açıklanır,

Kompleks veya reel olabilen a_i katsayılı matris kuvvet serilerine;

$$\Phi(\mathbf{D}) = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{D} + a_2 \mathbf{D}^2 + \dots + a_{n-1} \mathbf{D}^{n-1} \quad (3.40)$$

şeklide açılarak buradan elde edilecek denklemlerden, a_i katsayılarının eldesi ile aranan matris fonksiyonuna geçilmesidir.

Bu işlem, taşıma matrisinin eldesi için gerekli matris fonksiyonuna uygulanırsa;

$$\lambda^2 (\lambda - i)^2 (\lambda + i)^2 = 0 \quad (3.41)$$

şekline gelen karakteristik denklemden elde edilen kökler;

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = -i, \lambda_{5,6} = i \quad (3.42)$$

olup, polinomun seriye açılımının ve seriye açılan polinomun mertebesinin bir derece düşürülerek a_i ve λ_i ye bağlı genel ifadesi;

$$\Phi(D) = e^{qD}$$

$$\Phi(\lambda) = e^{q\lambda}$$

$$\Phi'(\lambda) = q e^{q\lambda}$$

(3.43)

$$e^{q\lambda} = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^4 + a_5 \lambda^5$$

$$q e^{q\lambda} = a_1 + 2a_2 \lambda + 3a_3 \lambda^2 + 4a_4 \lambda^3 + 5a_5 \lambda^4$$

şeklinde elde edilir. (3.42) de elde edilen λ_i değerleri (3.43) eşitliklerinde çok katlı kök için yazılacak olunursa;

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = q$$

$$e^{-iq} = 1 - iq - a_2 + ia_3 + a_4 - ia_5$$

(3.44)

$$e^{iq} = 1 + iq - a_2 - ia_3 + a_4 + ia_5$$

$$q e^{-iq} = q - 2ia_2 - 3a_3 + 4ia_4 + 5a_5$$

$$q e^{iq} = q + 2ia_2 - 3a_3 - 4ia_4 + 5a_5$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde,

$$e^{-iq} = \cos q - i \sin q$$

$$e^{iq} = \cos q + i \sin q$$

trigonometrik dönüşümler yapıp, a_i değerleri bu 6 bilinmeyenli altı denklemden elde edilip

$$e^{qD} = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + a_4 D^4 + a_5 D^5 \quad (3.45)$$

eşitliğinde yerine yazıldığında aranan matris fonksiyonu, yani taşıma matrisine ulaşılmış olunur. Bu İşlemler sonucunda elde edilen taşıma matrisi bir önceki yöntemle uygun olarak şu şekilde elde edilebilir;

$$Y1 = -R \sin[q]$$

$$Y2 = 2R \sin\left[\frac{q}{2}\right]^2$$

$$Y3 = -\frac{1}{D_n D_t} \left[R^2 \sin\left[\frac{q}{2}\right] \left(q \cos\left[\frac{q}{2}\right] (D_n + D_t) - 2D_n \sin\left[\frac{q}{2}\right] \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
Y4 &= -R^2 \frac{Dn + Dt}{2Dn Dt} (q \cos[q] - \sin[q]) \\
Y5 &= \frac{R^3}{Dt} \left[q + \frac{q \cos[q] - 3\sin[q]}{2} \right] + \frac{R^3}{Dn} \left[\frac{q \cos[q] - \sin[q]}{2} \right] \\
Y6 &= \cos[q] \\
Y7 &= -\sin[q] \\
Y8 &= \frac{R}{2Dn Dt} [q \cos[q] (Dn + Dt) + \sin[q] (Dt - Dn)] \\
Y9 &= -\frac{Dn + Dt}{2Dn Dt} (q R \sin[q]) \\
Y10 &= \frac{R}{2Dn Dt} [q \cos[q] (Dn + Dt) + \sin[q] (Dn - Dt)]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

şeklindeki Y_i , matris elemanlarının kısaltmasıyla,

$$F(q) = \begin{bmatrix} 1 & Y1 & Y2 & Y3 & Y4 & Y5 \\ 0 & Y6 & Y7 & Y8 & Y9 & -Y3 \\ 0 & -Y7 & Y6 & -Y9 & Y10 & Y4 \\ 0 & 0 & 0 & Y6 & Y7 & -Y1 \\ 0 & 0 & 0 & -Y7 & Y6 & Y2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

şeklindedir.

Bu taşıma matrisi mathematica bilgisayar programı olarak PROGRAM2 ismi altında Ek B de görülebilir.

3.2.4. Taşıma Matrislerinin Karşılaştırılması

Şimdiye kadar farklı iki metodla daire eksenli çubukların homojen hal için taşıma matrisleri elde edildi.

Bu iki metodla elde edilen sonuçları, daha önceleri elde edilmiş sonuçlarıyla karşılaştırıldığında (Bkz. [6] nolu kaynak) matrisin hiçbir elemanında farklı iki metodla elde edilen ve daha önce elde edilmiş olanı arasında hiçbir farklılığa rastlanmamıştır. Daha önce elde edilmiş taşıma matrisini ÇIKTI1 başlığı altında EkC de görülebilir.

Her iki yöntem de, literatürde bilinen dairesel çubuklara uygulanmış ve umulduğu gibi bilinen sonuçlara ulaşılmıştır.[7,8]

3.2.5 Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Sylvester Teoremiyle Eldesi

Elastik zemine oturan daire eksenli çubukların k ya bağlı karakteristik denklemi;

$$m^6 + 2m^4 + \left(1 + \frac{k R^4}{Dn}\right)m^2 - \frac{k R^4}{Dt} = 0 \quad (3.48)$$

olarak daha önce elde edilmişti. Genel formda bu denklemin sonucunda elde edilen kökler altı tane farklı kök olup ve bu köklerden ikisi gerçel, diğer dört tanesi de karmaşık sayıdır. Burada i pür sanal sayı, a ve b de skalerler olmak üzere kökler arasında;

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha \\ m_2 &= -\alpha \\ m_3 &= a + i b \\ m_4 &= a - i b \\ m_5 &= -a + i b \\ m_6 &= -a - i b \end{aligned} \quad (3.49)$$

bağıntıları geçerlidir. Burada belirtilen α , AF notasyonuyla, a , ve b reel sayıları Dn , Dt , R değişkenlerine bağlı olan açık ifadesi Ek H de ÇIKTI 7 başlığı altında görülebileceği gibi;

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{k R^4}{Dt} \\ a_1 &= 1 + \frac{k R^4}{4} \\ a_2 &= 2 \end{aligned} \quad (3.50a)$$

şeklinde notasyonlar kullanarak,

$$\begin{aligned}
q &= \frac{a_1}{3} - \frac{a_2^2}{9} \\
r &= \frac{a_1 a_2}{6} - \frac{3 a_0}{27} - \frac{a_2^3}{27} \\
S_1 &= \left[r + (q^3 + r^2)^{1/2} \right]^{1/3} \\
S_2 &= \left[r - (q^3 + r^2)^{1/2} \right]^{1/3} \\
x &= -\frac{S_1 + S_2}{2} - \frac{a_2}{3} \\
y &= -\frac{\sqrt{3}(S_1 - S_2)}{2} \\
\theta &= \text{ArcTan}\left(\frac{y}{x}\right) \\
r_1 &= (x^2 + y^2)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.50b}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{(S_1 + S_2) - \frac{a_2}{3}} \\
a &= r_1^{1/2} \text{Cos}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
b &= r_1^{1/2} \text{Sin}\left(\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{3.50c}$$

olarakta hesaplanabilmektedir. (Bkz. [24] nolu kaynak)

Köklerin farklı altı ayrı kök olmasından dolayı taşıma matrisi için elde edilmesi gereken matris fonksiyonu *Sylvester Teoremi* ile elde edilebilir. (Bkz. [22] nolu kaynak.)

Sylvster teoremine göre idempotentleri elde etmek için, n kök sayısını ifade etmek üzere;

$$P_i = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_j I - D)}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_j - \lambda_i)} \tag{3.51}$$

bağıntısı geçerli olup, burada P_i lerin, yani idempotentlerin pay ve paydaları ayrı ayrı incelenirse ve P_i ' nin paylarına P_{ii} , paydalarına Z_{ii} notasyonları kullanılıp ve bundan sonraki aşamalarda D matrisi, bilgisayar çıktılarıyla bir notasyon farkı oluşmaması için A sembolüyle gösterilip, ve

$$T_i = (m_i I - A)$$

şeklinde bir kısaltma yoluna gidilirse; T_i ' ler

$$\begin{aligned} T_1 &= (m_1 I - A) \\ T_2 &= (m_2 I - A) \\ T_3 &= (m_3 I - A) \\ T_4 &= (m_4 I - A) \\ T_5 &= (m_5 I - A) \\ T_6 &= (m_6 I - A) \end{aligned} \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda paylar, P_{ii} ' ler;

$$\begin{aligned} P_{11} &= T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \cdot T_6 \\ P_{22} &= T_1 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \cdot T_6 \\ P_{33} &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_4 \cdot T_5 \cdot T_6 \\ P_{44} &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_5 \cdot T_6 \\ P_{55} &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_6 \\ P_{66} &= T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4 \cdot T_5 \end{aligned} \quad (3.53)$$

ve paydalar , Z_{ii} ler;

$$\begin{aligned} Z_{11} &= (m_2 - m_1)(m_3 - m_1)(m_4 - m_1)(m_5 - m_1)(m_6 - m_1) \\ Z_{22} &= (m_1 - m_2)(m_3 - m_2)(m_4 - m_2)(m_5 - m_2)(m_6 - m_2) \\ Z_{33} &= (m_1 - m_3)(m_2 - m_3)(m_4 - m_3)(m_5 - m_3)(m_6 - m_3) \\ Z_{44} &= (m_1 - m_4)(m_2 - m_4)(m_3 - m_4)(m_5 - m_4)(m_6 - m_4) \\ Z_{55} &= (m_1 - m_5)(m_2 - m_5)(m_3 - m_5)(m_4 - m_5)(m_6 - m_5) \\ Z_{66} &= (m_1 - m_6)(m_2 - m_6)(m_3 - m_6)(m_4 - m_6)(m_5 - m_6) \end{aligned} \quad (3.54)$$

şeklinde elde edilir. Bu işlemler yapıldığında P_{ii} ve Z_{ii} için,

$$\begin{aligned}
P11 &= -a^4 A + 2a^2 A^3 - A^5 - a^4 \alpha + 2a^2 \alpha A^2 - \alpha A^4 - 2a^2 b^2 A \\
&\quad - 2b^2 A^3 - 2a^2 b^2 \alpha - 2\alpha b^2 A^2 - b^4 A - \alpha b^4 \\
P22 &= -a^4 A + 2a^2 A^3 - A^5 + a^4 \alpha - 2a^2 \alpha A^2 + \alpha A^4 - 2a^2 b^2 A \\
&\quad - 2b^2 A^3 + 2a^2 b^2 \alpha + 2\alpha b^2 A^2 - b^4 A + \alpha b^4 \\
P33 &= a^3 A^2 + a^2 A^3 - a A^4 - A^5 - a^3 \alpha^2 - a^2 \alpha^2 A + a \alpha^2 A^2 \\
&\quad + \alpha^2 A^3 - i a^2 b A^2 - 2i a b A^3 - i b A^4 + i a^2 \alpha^2 b + 2i a b \alpha^2 A \\
&\quad + i \alpha^2 b A^2 + a b^2 A^2 + b^2 A^3 - a \alpha^2 b^2 + \alpha^2 b^2 A - i b^3 A^2 + i \alpha^2 b^3 \\
P44 &= a^3 A^2 + a^2 A^3 - a A^4 - A^5 - a^3 \alpha^2 - a^2 \alpha^2 A + a \alpha^2 A^2 \\
&\quad + \alpha^2 A^3 + i a^2 b A^2 + 2i a b A^3 + i b A^4 - i a^2 \alpha^2 b - 2i a b \alpha^2 A \\
&\quad - i \alpha^2 b A^2 + a b^2 A^2 + b^2 A^3 - a \alpha^2 b^2 + \alpha^2 b^2 A + i b^3 A^2 - i \alpha^2 b^3 \\
P55 &= -a^3 A^2 + a^2 A^3 + a A^4 - A^5 + a^3 \alpha^2 - a^2 \alpha^2 A - a \alpha^2 A^2 \\
&\quad + \alpha^2 A^3 - i a^2 b A^2 + 2i a b A^3 - i b A^4 + i a^2 \alpha^2 b - 2i a b \alpha^2 A \\
&\quad + i \alpha^2 b A^2 - a b^2 A^2 - b^2 A^3 + a \alpha^2 b^2 + \alpha^2 b^2 A - i b^3 A^2 + i \alpha^2 b^3 \\
P66 &= -a^3 A^2 + a^2 A^3 + a A^4 - A^5 + a^3 \alpha^2 - a^2 \alpha^2 A - a \alpha^2 A^2 \\
&\quad + \alpha^2 A^3 + i a^2 b A^2 - 2i a b A^3 + i b A^4 - i a^2 \alpha^2 b + 2i a b \alpha^2 A \\
&\quad - i \alpha^2 b A^2 - a b^2 A^2 - b^2 A^3 + a \alpha^2 b^2 + \alpha^2 b^2 A + i b^3 A^2 - i \alpha^2 b^3
\end{aligned} \tag{3.55a}$$

$$\begin{aligned}
Z11 &= -2a^4 \alpha + 4a^2 \alpha^3 - 2\alpha^5 - 4a^2 b^2 \alpha - 4\alpha^3 b^2 - 2\alpha b^4 \\
Z22 &= 2a^4 \alpha - 4a^2 \alpha^3 + 2\alpha^5 + 4a^2 b^2 \alpha + 4\alpha^3 b^2 + 2\alpha b^4 \\
Z33 &= -8i a^4 b + 8i a^2 \alpha^2 b + 24 a^3 b^2 - 8a \alpha^2 b^2 + 24i a^2 b^3 - 8a b^4 \tag{3.55b} \\
Z44 &= 8i a^4 b - 8i a^2 \alpha^2 b + 24 a^3 b^2 - 8a \alpha^2 b^2 - 24i a^2 b^3 - 8a b^4 \\
Z55 &= -8i a^4 b + 8i a^2 \alpha^2 b - 24 a^3 b^2 + 8a \alpha^2 b^2 + 24i a^2 b^3 + 8a b^4 \\
Z66 &= 8i a^4 b - 8i a^2 \alpha^2 b - 24 a^3 b^2 + 8a \alpha^2 b^2 - 24i a^2 b^3 + 8a b^4
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

Bu ve bundan sonraki aşamalarda yapılabildiği her adımda idempotentlerin özelliklerinden ve diğer kontrol edebilecek düzeylerde işlemlerin kontrolünü yapılabilmektedir. Bu aşamada yapılabilecek ilk kontrol pay ve paydaları elde edilen idempotentlerin toplamının birim ettiğini göstermektedir. Yapılan kontrolde idempotentlerin toplamının birim ettiği görülmüştür. Bu düzeye kadar bilgisayar çıktılarındaki ile metin kısmındaki notasyon farklılıkları her aşamada gösterilmiş ve ileriki kısımlarda notasyon farkı mevcut ise belirtilecektir. Bilgisayar çıktılarındaki AF notasyonu α 'yı ifade eder.

Elde edilen Pii ve Zii değerleri incelenip kendi aralarında reel ve sanal kısımları ayrılır ve paylar için Di, paydalar için Ci notasyonlarını kullanırsa; sonuçta elde edilen form şu şekildedir;

Paylar için,

$$\begin{aligned}
 P11 &= D1 \\
 P22 &= D2 \\
 P33 &= D3 + i D4 \\
 P44 &= D3 - i D4 \\
 P55 &= D5 + i D6 \\
 P66 &= D5 - i D6
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Paydalar için,

$$\begin{aligned}
 Z11 &= C1 \\
 Z22 &= -C1 \\
 Z33 &= C2 + i C3 \\
 Z44 &= C2 - i C3 \\
 Z55 &= -C2 + i C3 \\
 Z66 &= -C2 - i C3
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

sonucuna ulaşılır. Bu şekilde Pii ve Zii lerden elde edilen Di ve Ci nin problem için elde edilen değerleri şu şekilde görülür.

$$\begin{aligned}
 D1 &= -a^4 A + 2a^2 A^3 - A^5 + a^4 \alpha + 2a^2 \alpha A^2 - \alpha A^4 - 2a^2 b^2 A \\
 &\quad - 2b^2 A^3 - 2a^2 \alpha b^2 - 2\alpha b^2 A^2 - b^4 A - \alpha b^4 \\
 D2 &= -a^4 A + 2a^2 A^3 - A^5 - a^4 \alpha - 2a^2 \alpha A^2 + \alpha A^4 - 2a^2 b^2 A \\
 &\quad - 2b^2 A^3 + 2a^2 \alpha b^2 + 2\alpha b^2 A^2 - b^4 A + \alpha b^4 \\
 D3 &= a^3 A^2 + a^2 A^3 - a A^4 - A^5 - a^3 \alpha^2 - a^2 \alpha^2 A + a \alpha^2 A^2 \\
 &\quad + \alpha^2 A^3 + a b^2 A^2 - b^2 A^3 - a \alpha^2 b^2 + \alpha^2 b^2 A \\
 D4 &= -a^2 b A^2 - 2a b A^3 - b A^4 + a^2 b \alpha^2 + 2a b \alpha^2 A \\
 &\quad + b \alpha^2 A^2 - b^3 A^2 + \alpha^2 b^3 \\
 D5 &= -a^3 A^2 + a^2 A^3 + a A^4 - A^5 + a^3 \alpha^2 - a^2 \alpha^2 A - a \alpha^2 A^2 \\
 &\quad + \alpha^2 A^3 - a b^2 A^2 - b^2 A^3 + a \alpha^2 b^2 + \alpha^2 b^2 A \\
 D6 &= -a^2 b A^2 + 2a b A^3 - b A^4 + a^2 b \alpha^2 - 2a b \alpha^2 A \\
 &\quad + b \alpha^2 A^2 - b^3 A^2 + \alpha^2 b^3
 \end{aligned} \tag{3.58a}$$

$$\begin{aligned}
 C1 &= -2a^4 \alpha + 4a^2 \alpha^3 - 2\alpha^5 - 4a^2 b^2 \alpha - 4b^2 \alpha^3 - 2b^4 \alpha \\
 C2 &= 24a^3 b^2 - 8a b^2 \alpha - 8a b^4 \\
 C3 &= -8a^4 b + 8a^2 b \alpha^2 + 24a^2 b^3
 \end{aligned} \tag{3.58b}$$

ve işlem kontrolü açısından bu aşamada da D_i ve C_i ifadelerine bağlı, idempotentlerin toplamının birim ettiği yapılan işlemle görülebilmektedir.

Buradan idempotentleri elde etmek için pay ve paydalar birbirine bölünürse;

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \frac{D1}{C1} \\
 P_2 &= -\frac{D2}{C1} \\
 P_3 &= \frac{D3 + i D4}{C2 + i C3} \\
 P_4 &= \frac{D3 - i D4}{C2 - i C3} \\
 P_5 &= \frac{D5 + i D6}{-C2 + i C3} \\
 P_6 &= \frac{D5 - i D6}{-C2 - i C3}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

ve paydada ki sanal sayıları yok etmek amacıyla P_3, P_4, P_5, P_6 idempotentlerinin pay ve paydası, paydanın eşlenikleriyle çarpılırsa;

$$\begin{aligned}
 P_3 &= \frac{(D3 C2 + D4 C3) + i (-C3 D3 + D4 C2)}{C2^2 + C3^2} \\
 P_4 &= \frac{(D3 C2 + D4 C3) + i (D3 C3 - D4 C2)}{C2^2 + C3^2} \\
 P_5 &= \frac{(-D5 C2 + D6 C3) + i (-D6 C2 - D5 C3)}{C2^2 + C3^2} \\
 P_6 &= \frac{(-D5 C2 + D6 C3) + i (D5 C3 + D6 C2)}{C2^2 + C3^2}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

değerleri elde edilir.

Matris fonksiyonunun, yani taşıma matrisinin idempotentler cinsinden köklere bağlı genel ifadesi,

$$e^{qA} = e^{qm_1} P_1 + e^{qm_2} P_2 + e^{qm_3} P_3 + e^{qm_4} P_4 + e^{qm_5} P_5 + e^{qm_6} P_6 \tag{3.61}$$

eşitliğiyle ifade edildiğine göre, buradan; eksponansiyel formdaki denklem köklerine,

$$\begin{aligned}
 e^{q\alpha} &= \text{Cosh}(q\alpha) + \text{Sinh}(q\alpha) \\
 e^{q\alpha} &= \text{Cosh}(q\alpha) - \text{Sinh}(q\alpha) \\
 e^{(a+ib)q} &= e^{aq} [\text{Cos}(bq) + i \text{Sin}(bq)] \\
 e^{(a-ib)q} &= e^{aq} [\text{Cos}(bq) - i \text{Sin}(bq)] \\
 e^{(-a+ib)q} &= e^{-aq} [\text{Cos}(bq) + i \text{Sin}(bq)] \\
 e^{(-a-ib)q} &= e^{-aq} [\text{Cos}(bq) - i \text{Sin}(bq)]
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

trigonometrik dönüşümleri yapıp ve bu ifadeler taşıma matrisi genel denkleminde adım adım yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 \text{TASMT} &= e^{q\alpha} P_1 + e^{q\alpha} P_2 \\
 &+ e^{aq} [(\text{Cos } bq + i \text{Sin } bq) P_3 + (\text{Cos } bq - i \text{Sin } bq) P_4] \\
 &+ e^{-aq} [(\text{Cos } bq + i \text{Sin } bq) P_5 + (\text{Cos } bq - i \text{Sin } bq) P_6]
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

ve bu aşamada eşitlikte P_i leri $\text{Cos } bq$ ve $\text{Sin } bq$ parantezine alınırsa;

$$\begin{aligned}
 \text{TASMT} &= e^{q\alpha} P_1 + e^{-q\alpha} P_2 \\
 &+ e^{aq} [\text{Cos } bq (P_3 + P_4) + i \text{Sin } bq (P_3 - P_4)] \\
 &+ e^{-aq} [\text{Cos } bq (P_5 + P_6) + i \text{Sin } bq (P_5 - P_6)]
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu eşitlik için daha önce elde edilen idempotentlerin, farkları ve toplamaları incelenirse;

$$\begin{aligned}
P_1 + P_2 &= \frac{D1 - D2}{C1} \\
P_1 - P_2 &= \frac{D1 + D2}{C1} \\
P_3 + P_4 &= \frac{2(D3 C2 + D4 C3)}{C2^2 + C3^2} \\
P_3 - P_4 &= \frac{2i(-D3 C3 + D4 C2)}{C2^2 + C3^2} \\
P_5 + P_6 &= \frac{2(-D5 C2 + D6 C3)}{C2^2 + C3^3} \\
P_5 - P_6 &= \frac{2i(-D6 C2 - D5 C3)}{C2^2 + C3^2}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

ifadeleri elde edilir.

Bu aşamada da idempotentlerin toplamının birim ettiğinin kontrolü yapılırsa, sağladığı görülür ve son durumuna getirilen matris fonksiyonu kısım kısım incelenirse;

İlk olarak birinci kısım olarak ele alınacak ve TASMT1 olarak isimlendirilecek,

$$TASMT1 = e^{q\alpha} P_1 + e^{q\alpha} P_2 \tag{3.66}$$

kısım ele alınıp incelenirse;

$$TASMT1 = \frac{1}{C1} \left[(\cosh(q\alpha) + \sinh(q\alpha)) D1 - (\cosh(q\alpha) - \sinh(q\alpha)) D2 \right] \tag{3.67}$$

şekline getirilen eşitliği tekrar $\cosh(q\alpha)$ ve $\sinh(q\alpha)$ parantezine alınırsa bu durumda eşitlik,

$$TASMT1 = \frac{1}{C1} \left[\cosh(q\alpha) (D1 - D2) + \sinh(q\alpha) (D1 + D2) \right] \tag{3.68}$$

durumuna getirilir.

Buradan elde edilmesi gereken $(D1 - D2)'$, $(D1 + D2)$, ve bilgisayar programlarında R1 olarak ifade edilen $C2^2 + C3^2$ işlemlerin sonucu da;

$$\begin{aligned}
\mathbf{D1} - \mathbf{D2} &= -2\mathbf{A}^5 + (4a^2 - 4b^2)\mathbf{A}^3 + (-2a^4 - 4a^2b^2 - 2b^4)\mathbf{A} \\
\mathbf{D1} + \mathbf{D2} &= -2a^4\alpha - 2\alpha\mathbf{A}^4 - 4a^2b^2 - 2\alpha b^4 + (4a^2\alpha - 4b^2\alpha)\mathbf{A}^2 \quad (3.69) \\
\mathbf{C2}^2 + \mathbf{C3}^2 &= 64a^2b^2(a^2 + b^2)(a^4 - 2a^2\alpha^2 + \alpha^4 + 2a^2b^2 + 2\alpha^2b^2 + b^4)
\end{aligned}$$

formunda elde edilir.

Bulunan bu sonuçlar (3.68) denkleminde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
\mathbf{TASMT1} &= \frac{1}{C1} \cosh(\alpha q) \left[-2\alpha (a^2 + b^2)^2 \right] [\mathbf{I}] + \\
&\quad \frac{1}{C1} \sinh(\alpha q) \left[-2 (a^2 + b^2)^2 \right] [\mathbf{A}] + \\
&\quad \frac{1}{C1} \cosh(\alpha q) \left[4\alpha (a^2 - b^2) \right] [\mathbf{A}^2] + \\
&\quad \frac{1}{C1} \sinh(\alpha q) \left[4 (a^2 - b^2) \right] [\mathbf{A}^3] + \\
&\quad \frac{1}{C1} \cosh(\alpha q) [-2\alpha] [\mathbf{A}^4] + \\
&\quad \frac{1}{C1} \sinh(\alpha q) [-2] [\mathbf{A}^5]
\end{aligned} \quad (3.70)$$

ve matris kuvvetlerinin önündeki katsayıları N_i notasyonu ile tanımlanırsa, bu durumda (3.70) de kolayca görüleceği gibi, N_i değerleri;

$$\begin{aligned}
N1 &= \frac{1}{C1} \cosh(\alpha q) \left[-2\alpha (a^2 + b^2)^2 \right] \\
N2 &= \frac{1}{C1} \sinh(\alpha q) \left[-2 (a^2 + b^2)^2 \right] \\
N3 &= \frac{1}{C1} \cosh(\alpha q) \left[4\alpha (a^2 - b^2) \right] \\
N4 &= \frac{1}{C1} \sinh(\alpha q) \left[4 (a^2 - b^2) \right] \\
N5 &= \frac{1}{C1} \cosh(\alpha q) [-2\alpha] \\
N6 &= \frac{1}{C1} [-2]
\end{aligned} \quad (3.71)$$

şeklinde olduğu görülür.

Böylece birinci kısım olarak isimlendirilen ilk bölümü şu forma getirilmiş olunur;

$$\begin{aligned} \text{TASMT1} = & N1 [I] + N2 [A] + N3 [A^2] \\ & + N4 [A^3] + N5 [A^4] + N6 [A^5] \end{aligned} \quad (3.72)$$

TASMT2 olarak isimlendirecek ikinci kısımda da şu,

$$\begin{aligned} \text{FA1} &= D3.C2 + D4.C3 \\ \text{FA2} &= -D5.C2 + D6.C3 \\ \text{FB1} &= -D3.C3 + D4.C2 \\ \text{FB2} &= -D6.C2 - D5.C3 \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\text{TA} = \frac{2}{C2^2 + C3^2}$$

kısaltmaları yapılırsa eşitlik adım adım şu formu alır,

$$\begin{aligned} \text{TASMT2} = \text{TA} \{ & e^{aq} [\text{Cos}(bq) (\text{FA1}) - \text{Sin}(bq) (\text{FB1})] + \\ & e^{-aq} [\text{Cos}(bq) (\text{FA2}) - \text{Sin}(bq) (\text{FB2})] \} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Problem için elde edilen açık şekildeki FA1 ve FA2 ifadelerini ÇIKTI2 ve FB1 ve FB2 ifadelerini de ÇIKTI3 adı altında ki bilgisayar çıktılarında Ek D de görülebilir.

Tekrar eşitlik Cos(bq) ve Sin(bq) parantezine alınırsa,

$$\text{TASMT2} = \text{TA} \begin{bmatrix} \text{Cos}(bq) (e^{aq} \text{FA1} + e^{-aq} \text{FA2}) - \\ \text{Sin}(bq) (e^{aq} \text{FB1} + e^{-aq} \text{FB2}) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

FA1 ve FA2 nin gerekli matematiksel işlemleri yapıp elde edilen sonuçun matris kuvvetleri önündeki katsayı değerleri Ki ile gösterilirse; bu belirtilen form daha önceki paragrafta belirtildiği gibi Ek D de görülebilir, FA1 ve FA2 arasında matris kuvvetleri önündeki katsayılar arasındaki ilişki şu form elde edilir;

$$\begin{aligned} \mathbf{FA1} &= K1 [\mathbf{I}] + K2 [\mathbf{A}] + K3 [\mathbf{A}^2] + K4 [\mathbf{A}^3] + K5 [\mathbf{A}^4] + K6 [\mathbf{A}^5] \\ \mathbf{FA2} &= K1 [\mathbf{I}] - K2 [\mathbf{A}] + K3 [\mathbf{A}^2] - K4 [\mathbf{A}^3] + K5 [\mathbf{A}^4] - K6 [\mathbf{A}^5] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Burada ifade edilen Ki matris kuvvet katsayılarının açık ifadeleri;

$$\begin{aligned} K1 &= 16a^2 \alpha^2 b^2 (a^2 + b^2) (-2a^2 + \alpha^2 + 2b^2) \\ K2 &= 8a \alpha^2 b^2 (-5a^4 + 3a^2 \alpha^2 + 10a^2 b^2 - \alpha^2 b^2 - b^4) \\ K3 &= 32a^2 b^2 (a^4 - b^4) \\ K4 &= 8a b^2 (5a^4 - \alpha^4 - 10a^2 b^2 + b^4) \\ K5 &= -16a^2 b^2 (a^2 + b^2) \\ K6 &= 8a b^2 (-3a^2 + \alpha^2 + b^2) \end{aligned} \quad (3.77)$$

şeklinde dir.

Bu seviyede TASMT2 olarak belirtilen matris fonksiyonunun ikinci kısmında TASMT3 ve TASMT4 şeklinde iki bölümde trigonometrik katsayılar çarpanıyla, incelendiğinde,

$$\mathbf{TASMT2} = \mathbf{TA} (\cos(bq) \mathbf{TASMT3} - \sin(bq) \mathbf{TASMT4}) \quad (3.78)$$

biçiminde düşünülüp; ilk olarak

$$\mathbf{TASMT3} = (e^{aq} \mathbf{FA1} + e^{-aq} \mathbf{FA2}) \quad (3.79)$$

kısmı incelensin.

TASMT3 eşitliğinde Ki 'ye bağlı FA1 ve FA2 değerleri yerine yazılacak olunursa ;

$$\begin{aligned} \mathbf{TASMT3} &= \left\{ e^{aq} \begin{pmatrix} K1 [\mathbf{I}] + K2 [\mathbf{A}] + K3 [\mathbf{A}^2] + \\ K4 [\mathbf{A}^3] + K5 [\mathbf{A}^4] + K6 [\mathbf{A}^5] \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + e^{-aq} \begin{pmatrix} K1 [\mathbf{I}] - K2 [\mathbf{A}] + K3 [\mathbf{A}^2] - \\ K4 [\mathbf{A}^3] + K5 [\mathbf{A}^4] - K6 [\mathbf{A}^5] \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.80)$$

sonucuna varılır ve tekrar eşitlik Ki parantezine alınır;

$$\begin{aligned} \text{TASMT3} = & \{K1 [I] (e^{aq} + e^{-aq}) + K2 [A] (e^{aq} - e^{-aq}) + \\ & K3 [A^2] (e^{aq} + e^{-aq}) + K4 [A^3] (e^{aq} - e^{-aq}) + \\ & K5 [A^4] (e^{aq} + e^{-aq}) + K6 [A^5] (e^{aq} - e^{-aq})\} \end{aligned} \quad (3.81)$$

ve,

$$\begin{aligned} e^{aq} + e^{-aq} &= 2 \cosh(aq) \\ e^{aq} - e^{-aq} &= 2 \sinh(aq) \end{aligned} \quad (3.82)$$

trigonometrik dönüşümü yapıp daha sonra, $\cosh(aq)$ ve $\sinh(aq)$ parantezlerine alınırsa;

$$\text{TASMT3} = 2 \left\{ \begin{aligned} & \cosh(aq) (K1 [I] + K3 [A^2] + K5 [A^4]) \\ & + \sinh(aq) (K2 [A] + K4 [A^3] + K6 [A^5]) \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

sonucu elde edilir.

Aynı işlemler TASMT4 olarak ifade edilen kısım da **FB1** ve **FB2** için uygulanırsa;

$$\text{TASMT4} = e^{aq} \text{FB1} + e^{-aq} \text{FB2} \quad (3.84)$$

eşitliği için, **FB1** ve **FB2** arasında da bu şekilde bir benzerlik görülür, bu kısımda da **FB1** ve **FB2** ifadelerinin matris kuvvetlerinin önündeki katsayıları T_i notasyonu ile gösterilecek olunursa,

$$\begin{aligned} \text{FB1} &= T1 [I] + T2 [A] + T3 [A^2] + T4 [A^3] + T5 [A^4] + T6 [A^5] \\ \text{FB2} &= -T1 [I] + T2 [A] - T3 [A^2] + T4 [A^3] - T5 [A^4] + T6 [A^5] \end{aligned} \quad (3.85)$$

benzerliği elde edilir. Burada T_i notasyonu ile belirtilen katsayılar;

$$\begin{aligned}
T1 &= 8a \alpha^2 b^2 (a^2 + b^2) (-a^4 + a^2 \alpha^2 + 6a^2 b^2 - \alpha^2 b^2 - b^4) \\
T2 &= 8a^2 \alpha^2 b (-a^4 + a^2 \alpha^2 + 10a^2 b^2 - 3\alpha^2 b^2 - 5b^4) \\
T3 &= 8a b (a^2 + b^2) (a^4 - \alpha^4 - 6a^2 b^2 + b^4) \\
T4 &= 8a^2 b (a^4 - \alpha^4 - 10a^2 b^2 + 5b^4) \\
T5 &= 8a b (a^2 + b^2) (-a^2 + \alpha^2 + b^2) \\
T6 &= 8a^2 b (-a^2 + \alpha^2 + 3b^2)
\end{aligned} \tag{3.86}$$

şeklinde elde edilir. TASMT3 için uygulanan gidiş yolu burası için de uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
TASMT4 &= \left\{ e^{aq} \left(\begin{aligned} &T1 [I] + T2 [A] + T3 [A^2] + \\ &T4 [A^3] + T5 [A^4] + T6 [A^5] \end{aligned} \right) + \right. \\
&\quad \left. e^{aq} \left(\begin{aligned} &-T1 [I] + T2 [A] - T3 [A^2] + \\ &T4 [A^3] - T5 [A^4] + T6 [A^5] \end{aligned} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

ve,

$$TASMT4 = \left\{ \begin{aligned} &\text{Cosh}(aq) (T2 [A] + T4 [A^3] + T6 [A^5]) + \\ &\text{Sinh}(aq) (T1 [I] + T3 [A^2] + T5 [A^4]) \end{aligned} \right\} \tag{3.88}$$

Şimdi elde edilen sonuçları başlangıçta ikinci kısım olarak ifade edilen TASMT2 eşitliğinde yerine yazılırsa ikinci kısım şu forma girer;

$$\begin{aligned}
TASMT2 &= 2TA \left\{ \begin{aligned} &\text{Cos}(bq) \text{Cosh}(aq) (K1 [I] + K3 [A^2] + K5 [A^4]) + \\ &\text{Cos}(bq) \text{Sinh}(aq) (K2 [I] + K4 [A^3] + K6 [A^5]) - \\ &\text{Sin}(bq) \text{Cosh}(aq) (T2 [A] + T4 [A^3] + T6 [A^5]) - \\ &\text{Sin}(bq) \text{Cosh}(aq) (T1 [I] + T3 [A^2] + T5 [A^4]) \end{aligned} \right\}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

bu eşitlikte tüm sabitleri matris kuvvetleri parantezinde toplanacak olunursa, ifade

$$\begin{aligned}
TASMT2 = & 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K1 - \sin(bq) \sinh(aq) T1] [I] + \\
& 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K2 - \sin(bq) \sinh(aq) T2] [A] + \\
& 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K3 - \sin(bq) \sinh(aq) T3] [A^2] + \\
& 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K4 - \sin(bq) \sinh(aq) T4] [A^3] + \quad (3.90) \\
& 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K5 - \sin(bq) \sinh(aq) T5] [A^4] + \\
& 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K6 - \sin(bq) \sinh(aq) T6] [A^5]
\end{aligned}$$

şekline dönüşür, ve burada da matrisin kuvvetlerinin önündeki sabit değerleri için M_i notasyonu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
M1 &= 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K1 - \sin(bq) \sinh(aq) T1] \\
M2 &= 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K2 - \sin(bq) \sinh(aq) T2] \\
M3 &= 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K3 - \sin(bq) \sinh(aq) T3] \\
M4 &= 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K4 - \sin(bq) \sinh(aq) T4] \\
M5 &= 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K5 - \sin(bq) \sinh(aq) T5] \\
M6 &= 2TA [\cos(bq) \cosh(aq) K6 - \sin(bq) \sinh(aq) T6]
\end{aligned} \quad (3.91)$$

biçiminde de M_i ifadeleri oluşturulmuş olunur.

Böylece TASMT2 olarak tariflenen ikinci kısım eşitlik bu şekilde basit bir form getirilir;

$$\begin{aligned}
TASMT2 = & M1 [I] + M2 [A] + M3 [A^2] + \\
& M4 [A^3] + M5 [A^4] + M6 [A^5]
\end{aligned} \quad (3.92)$$

Birinci ve ikinci kısımlar ana eşitlikte yerine konulacak olursa;

$$TASMT = TASMT1 + TASMT2$$

$$\begin{aligned}
TASMT = & (N1 + M1) [I] + (N2 + M2) [A] + (N3 + M3) [A^2] + \quad (3.93) \\
& (N4 + M4) [A^3] + (N5 + M5) [A^4] + (N6 + M6) [A^5]
\end{aligned}$$

basit ifadesine dönüşen matris fonksiyonunu daha basit hale getirilmesi için, yeniden matris kuvvetleri önündeki sabitler Z_i notasyonu ile ifade edilirse;

$$\begin{aligned}
 Z1 &= N1 + M1 \\
 Z2 &= N2 + M2 \\
 Z3 &= N3 + M3 \\
 Z4 &= N4 + M4 \\
 Z5 &= N5 + M5 \\
 Z6 &= N6 + M6
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

şekline dönüştürülür. Sonuçta elastik zemine oturan dairesel eksenli çubukların taşıma matrisi şu forma getirilmiş olunur,

$$TASMT = Z1 [I] + Z2 [A] + Z3 [A^2] + Z4 [A^3] + Z5 [A^4] + Z6 [A^5] \tag{3.95}$$

Genel ifadesiyle (3.95) da elde edilen taşıma matrisinin Z_i lere bağlı matris formunda ifadesi;

$$\begin{aligned}
 E1 &= Z1 - \left(\frac{k R^4}{Dn} \right) Z5 \\
 E2 &= R \left[-Z2 + Z4 + \left(-1 + \frac{k R^4}{Dn} \right) Z6 \right] \\
 E3 &= R (Z3 - Z5) \\
 E4 &= R^2 \left[-\frac{Z3}{Dn} + \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z5 \right] \\
 E5 &= R^2 \frac{(Dn + Dt)}{(Dn Dt)} (Z4 - 2Z6) \\
 E6 &= R^3 \left[-\frac{Z4}{Dn} + \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z6 \right] \\
 E7 &= k R^3 \left[\frac{Z4}{Dn} - \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z6 \right] \\
 E8 &= Z1 - Z3 + \left(1 - \frac{k R^4}{Dn} \right) Z5 \\
 E9 &= -Z2 + Z4 - \left(1 - \frac{k R^4}{Dn} \right) Z6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E10 &= R \left[\frac{Z2}{Dn} - \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z4 + \left(\left(\frac{3Dt + 2Dn}{6Dn Dt} \right) - \left(\frac{k R^4}{Dn^2} \right) \right) Z6 \right] \\
E11 &= R \frac{(Dn + Dt)}{(Dn Dt)} (-Z3 + 2Z5) \\
E12 &= k R^3 \frac{(Dn + Dt)}{(Dn Dt)} Z5 \\
E13 &= Z2 - Z4 + k R^4 \left[\left(1 - \frac{Dn + Dt}{Dn Dt} \right) Z6 \right] \\
E14 &= Z1 - Z3 + Z5 \\
E15 &= R \left[\frac{Z2}{Dt} - \left(\frac{2Dn + Dt}{2Dn Dt} \right) Z4 + \left(\frac{2Dt + 3Dn}{6Dn Dt} \right) Z6 \right] \\
E16 &= k R^2 (Z3 - Z5) \\
E17 &= k R^3 (-Z4 + 2Z6) \\
E18 &= k R^3 Z5 \\
E19 &= k R^2 (Z4 - Z6) \\
E20 &= k R^3 Z6 \\
E21 &= k R \left[Z2 - \left(\frac{k R^4}{Dn} \right) Z6 \right]
\end{aligned} \tag{3.96}$$

matris elemanlarının Eii kısaltması ile şu şekilde tarif edilir;

$$F(q) = \begin{bmatrix} E1 & E2 & E3 & E4 & E5 & E6 \\ E7 & E8 & E9 & E10 & E11 & -E4 \\ E12 & E13 & E14 & -E11 & E15 & E5 \\ E16 & E17 & E18 & E8 & -E13 & -E2 \\ E19 & -E18 & E20 & -E9 & E14 & E3 \\ E21 & -E16 & E19 & -E7 & E12 & E1 \end{bmatrix} \tag{3.97}$$

Elde edilen bu taşıma matrisinin Z_i lere bağlı açık ifadesinin $k=0$ konarak doğrudan elde edilemez. Limit alınarak $k \rightarrow 0$ için dairesel çubukların taşıma matrisi,

$$\begin{aligned}
 F1 &= Z1 \\
 F2 &= R (-Z2 + Z4 - Z6) \\
 F3 &= R (Z3 - Z5) \\
 F4 &= R^2 \left[-\frac{Z3}{Dn} + \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z5 \right] \\
 F5 &= R^2 \frac{(Dn + Dt)}{(Dn Dt)} (Z4 - 2Z6) \\
 F6 &= R^3 \left[-\frac{Z4}{Dn} + \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z6 \right] \\
 F7 &= Z1 - Z3 + Z5 \\
 F8 &= -Z2 + Z4 - Z6 \\
 F9 &= R \left[\frac{Z2}{Dn} - \left(\frac{2Dt + Dn}{2Dn Dt} \right) Z4 + \left(\frac{3Dt + 2Dn}{6Dn Dt} \right) Z6 \right] \\
 F10 &= R \frac{(Dn + Dt)}{(Dn Dt)} (-Z3 + 2Z5) \\
 F11 &= R \left[\frac{Z2}{Dt} - \left(\frac{Dt + 2Dn}{2Dn Dt} \right) Z4 + \left(\frac{2Dt + 3Dn}{6Dn Dt} \right) Z6 \right]
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

şeklindeki F_{ii} şeklindeki matris elemanlarının kısaltmasıyla ;

$$F(q) = \begin{bmatrix} F1 & F2 & F3 & F4 & F5 & F6 \\ 0 & F7 & F8 & F9 & F10 & -F4 \\ 0 & -F8 & F7 & -F10 & F11 & F5 \\ 0 & 0 & 0 & F7 & F8 & -F2 \\ 0 & 0 & 0 & -F8 & F7 & F3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F1 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

formunda elde edilir.

Fakat genel formda elastik zemine oturan daire eksenli çubukların taşıma matrisinin mathematica bilgisayar program ile eldesi ve taşıma matrisinin oluşumundaki karakteristik denklemin ve diğer sisteme bağlı sabitlerin daha önce belirtilen notasyonları ile birlikte yapılan çözüm sisteminin tümü Ek E de PROGRAM3 başlığı altındaki mathematica ile yapılmış bilgisayar programında görülebilir.

3.2.6. Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrisinin Cayley-Hamilton Teoremi Yardımı ile Eldesi

İdempotentler yardımıyla elde edilen elastik zemine oturan daire eksenli çubukların taşıma matrisi, ikinci metod olarak Cayley-Hamilton Teoremi ile elde edilebilir.

Başlangıçta (3.49) da belirtilen altı farklı kök;

$$e^{qm_i} = a_0 + a_1 m_i + a_2 m_i^2 + a_3 m_i^3 + a_4 m_i^4 + a_5 m_i^5 \quad (3.100)$$

eşitliğinde yerine konduğunda;

$$e^{q\alpha} = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \alpha^3 a_3 + \alpha^4 a_4 + \alpha^5 a_5$$

$$e^{-q\alpha} = a_0 + \alpha a_1 - \alpha^2 a_2 + \alpha^3 a_3 - \alpha^4 a_4 + \alpha^5 a_5$$

$$e^{q(a+ib)} = a_0 + (a+ib) a_1 + (a+ib)^2 a_2 + (a+ib)^3 a_3 + (a+ib)^4 a_4 + (a+ib)^5 a_5$$

$$e^{q(a-ib)} = a_0 + (a-ib) a_1 + (a-ib)^2 a_2 + (a-ib)^3 a_3 + (a-ib)^4 a_4 + (a-ib)^5 a_5 \quad (3.101)$$

$$e^{q(-a+ib)} = a_0 + (-a+ib) a_1 + (-a+ib)^2 a_2 + (-a+ib)^3 a_3 + (-a+ib)^4 a_4 + (-a+ib)^5 a_5$$

$$e^{q(-a-ib)} = a_0 + (-a-ib) a_1 + (-a-ib)^2 a_2 + (-a-ib)^3 a_3 + (-a-ib)^4 a_4 + (-a-ib)^5 a_5$$

şeklinde, altı bilinmeyenli altı denklemden elde edilir ve daha sonra, bu denklemlerde eksponansiyel formdaki ifadelere,

$$\begin{aligned}
e^{q\alpha} &= \text{Cosh}(q\alpha) + \text{Sinh}(q\alpha) \\
e^{-q\alpha} &= \text{Cosh}(q\alpha) - \text{Sinh}(q\alpha) \\
e^{(a+ib)q} &= e^{aq} [\text{Cos}(bq) + i \text{Sin}(bq)] \\
e^{(a-ib)q} &= e^{aq} [\text{Cos}(bq) - i \text{Sin}(bq)] \\
e^{(-a+ib)q} &= e^{-aq} [\text{Cos}(bq) + i \text{Sin}(bq)] \\
e^{(-a-ib)q} &= e^{-aq} [\text{Cos}(bq) - i \text{Sin}(bq)]
\end{aligned} \tag{3.102}$$

trigonometrik dönüşümleri uygulanıp, a_i değerleri elde edilir. Elde edilen a_i değerleri;

$$e^{qA} = a_0 [I] + a_1 [A] + a_2 [A^2] + a_3 [A^3] + a_4 [A^4] + a_5 [A^5] \tag{3.103}$$

eşitliğinde yerine yazıldığı taktirde daha önce idempotentlerle elde edilen elastik zemine oturan daire eksenli çubukların taşıma matrisine ulaşılmış olunur.

Bu metoda ait bilgisayar program akışı, PROGRAM4 adı altında Ek F de görülebilir.

3.2.7 Farklı Metodlarla Elde Edilen Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubukların Taşıma Matrislerinin Karşılaştırılması

İlk olarak paragraf 3.2.5 te elde edilen elastik zemine oturan daire eksenli çubukların taşıma matrisinden yola çıkarak paragraf 3.2.2 ve 3.2.3 te elde edilen $k=0$ durumu için, taşıma matrisi elde edilmeye çalışılırsa;

Bunun için paragraf 3.2.5 te elde edilen taşıma matrisin $b=1$, $a=0$ ve $\alpha=0$, değerleri verildiğinde, % belisizliği olduğu rahatlıkla görülebilir, bundan dolayı $k=0$ durumu için elde edilen köklerdeki sabit sayılara karşılık gelen, $b=1$ ve a ile α 'nın 0'a gitmesi halinde; taşıma matrisinin Limiti alınacak olunursa paragraf 3.2.4 te elde edilen taşıma matrisine ulaşılmış olunur.

Bunun için elastik zemine oturan daire eksenli çubukların taşıma matrisi elde edilirken açıklanan Z_i sabitinin açık ifadesi ÇIKTI 4 başlığıyla ve her elemanı tek tek açılarak Limitinin alınması için $k=0$ durumunda ki Z_i 'ye bağlı ve kök sabitlerine bağlı

taşıma matrisi elemanları S_i notasyonu ile; ÇIKTI 5 adı altında, $b=1$, $a=0$ ve $\alpha = 0$ durumunda ki her elemanı S_i notasyonu ile açık olarak gösterilen elemanların Limitinin alınarak T_i notasyonu ile sonuçları ÇIKTI 6 başlığıyla Ek G de görülebilir.

Bu noktada dikkati çeken en önemli husus Limiti alınarak elde edilen $k = 0$ durumuna ait olan taşıma matrisi daha önce elde edilen taşıma matrisinin elemanlarıyla bire bir aynı olup yapılan işlemin doğruluğunu desteklemesidir.

Paragraf 3.2.5 ve 3.2.4 te elde edilen taşıma matrisleri sayısal olarak karşılaştırıldığında, sonuçların birbirine eşit olduğu gösterilmektedir. Örnek olarak aynı sayısal değerler için elde edilen bir sonuç taşıma matrisi ÇIKTI 8 başlığıyla Ek H de görülebilir.

Burada farklı iki metodla elde edilen elastik zemine oturan dairesel çubukların taşıma matrislerinin her iki metodlarda kapalı çözümlerinin karşılaştırılmamasının sebebi paragraf 3.2.6 da kapalı çözüme ulaşamayıp sayısal çözüm yapılabilinmiştir. Yapılan tüm sayısal çözümlerde çıkan sonuçlarda bunun yeterli olduğunu göstermektedir.

BÖLÜM 4. DAİRE EKSENLİ ÇUBUKLARIN DİNAMİK ANALİZİ

Genellikle geometrisi basit, düzgün yaylı kütleyle sahip ve yapıdaki rijitlik dağılımının uygun olduğu basit yapılar dışında, dinamik davranışın kesin olarak bilinmesi son derece güç olabilir. Dinamik hareketin kısmi diferansiyel denklemi bulunmasına karşı, bu denklemlerin kesin çözümlerinin eldesi güçtür. Bu sebepten dolayı birçok yaklaşık çözümler geliştirilmiştir. Ancak bu yaklaşık çözümlerin, yapının gerçek dinamik davranışının bulunmasında yeterli olmamaktadır. Bu sebepten dolayı; bu çalışmada yapının gerçek davranışının elde edilebileceği kesin yöntem olan Başlangıç Değerleri Metodu ile dinamik karakteristikleri (Frekans, Periyot, Mod şekilleri) serbest titreşim hali için elde edilmeye çalışılmıştır.

Sistemin dinamik davranışını incelemek için yaklaşık yöntemlerden olan, Ayırık Kütle Metodu ve kesin çözüm olan Başlangıç Değerleri Metodu incelenecektir.

4.1. Ayırık Kütle Metodu

Sürekli kütleli sistemlerde , çok serbestlik dereceli sistemler, kütlelerin belirli noktalarda toplanması ile meydana getirilebilir.

Bu tip sistemlerde dinamik davranış belirliyen parametreler, sistemin dinamik davranışını belirliyen parametreler belirli bazı noktaların yerdeğiştirmeleri olarak seçilebilirler. Sistemin dinamik davranışını belirliyen hareket denklemi tek serbestlik dereceli sistemin hareket denkleminin genelleştirilmesi olarak düşünülebilir ve F_I ; atalet kuvvetini, F_D ; sönüm kuvvetini; F_S ; yay kuvvetini, $P_j(t)$; j noktasına etkiyen dış kuvveti gösterirse;

$$F_I + F_D + F_S = P_j(t) \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir. Bu genelleştirmeye devam edilirse;

$$F_{Ii} = \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j, \quad F_{Di} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j, \quad F_{Si} = \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j \quad (4.2)$$

olarak ifadeleri alınır. Bura da n , sistemin serbestlik derecesini ve q_i , j noktasındaki yer değiştirmeyi gösterir ve kütle, sönüm ve rijitlik katsayıları; m_{ij} , c_{ij} , k_{ij} ; j koordinatındaki birim ivme, hız ve yerdeğiştirmeden meydana gelecek atalet, sönüm ve elastik kuvvetleri göstermektedir.

Kısaca, T ; Kinetik enerji ve V ; Elastik enerji; sistemin gerçek yerdeğiştirmelerine veya bunların lineer bileşiminden oluşan q_i genelleştirilmiş yerdeğiştirmelerine bağlı olarak ifade edilmesiyle;

$$\begin{aligned} T &= T(q_1, q_2, \dots, q_n), (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) \\ V &= V(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{aligned} \quad (4.3)$$

ve virtüel iş prensibi kullanılarak;

$$L = T - V$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = P(t) \quad (n=1,2,\dots,n) \quad (4.4)$$

şeklinde Lagrange denkleminde ulaşılır. Bu denklem den;

$$m \ddot{q} + c \dot{q} + k q = P(t) \quad (4.5)$$

şeklindeki genel hareket denkleminde ulaşılır.

Bura da;

$$\mathbf{m} = [m_{ij}] , \mathbf{c} = [c_{ij}] , \mathbf{k} = [k_{ij}] , \mathbf{q} = [v_i] \quad (4.6)$$

şeklinde $\mathbf{m}$; Kütle Matrisini, $\mathbf{c}$; Sönüm Matrisini, $\mathbf{k}$; Rijitlik Matrisini, $\mathbf{q}'$ da Yerdeğiştirme Vektörünü göstermektedir. Rijitlik matrisinin v_j yerdeğiştirme bileşeninin F_{Sj} elastik kuvvet bileşenine olan etkisini göstermekte ve,

$$v_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} F_{Sj} \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Bu ifade de, d_{ij} ; j noktasında meydana gelen yerdeğiştirmeyi göstermekte, d_{ij} olarak tarif edilen matris te, Esneklik (Fleksibilite) matrisi olarak tarif edilmekte ve rijitlik matrisinin tersine eşittir.

$$[d_{ij}] = [k_{ij}]^{-1} \quad (4.8)$$

(4.4) te elde edilen hareket denklemin sönümsüz serbest titreşim çok serbestlik dereceli bir sistem için incelenirse;

$$m \ddot{q} + k q = 0 \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümünü,

$$q = \{\psi\} \sin[\omega t + \theta] \quad (4.10)$$

şeklinde basit harmonik hareket olduğu kabulü ile, (4.9) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\{\ddot{q}\} = -\omega^2 \{\psi\} \sin[\omega t + \theta] = -\omega^2 \{q\} \quad (4.11)$$

sonucundan,

$$(k - \omega^2 m) q = 0 \quad (4.12)$$

veya fleksibilite matrisi ile,

$$\left(d m - \frac{1}{\omega^2} [I] \right) \{q\} = 0 \quad (4.13)$$

homojen lineer denklem sistemi elde edilir. Daha geniş bilgi [25] [26] nolu kaynaklardan temin edilebilir.

4.1.1 Frekans Denkleminin Çözümü ve Süpürme Matrisi

(4.13) denklemin çözümünden sistemin serbestlik sayısı kadar; $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ile gösterilen Serbest Titreşim frekansları elde edilir. Homojen olan bu denklemler $\omega = \omega_i$ şeklinde ki her serbest titreşim frekansı için $q = q_i$ alınarak çözülebilir. Bu amaçla lineer homojen olan bu n bilinmeyenli denklemin bilinmeyenlerden biri seçilerek $n-1$ bilinmiyene indirilmesi ve $n-1$ bilinmiyenin bu bilinmiyen cinsinden hesaplanması gerekir ve denklem;

$$D = d m \quad (4.14)$$

olarak tanımlanan Dinamik Matrisi ve $\lambda = 1/\omega^2$ olmak üzere;

$$([D] + \lambda [I]) \{q\} = 0 \quad (4.15)$$

şekline dönüşür. Böylece elde edilen q_i vektörüne sözkonusu titreşim frekansına karşı gelen Serbest Titreşim mod şeklindedir. Bu da serbestlik derecesi kadardır. Bu işlem sirkülasyonu için frekans denklemi,

$$[D] \{q\} = \lambda \{q\} \quad (4.16)$$

şeklinde ve çözüm matris formunda;

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

biçimin de elde edilir. Buradan denklemin çözümü daha geniş bir şekilde incelenirse, ilk modu elde etmek için ardışık yaklaşımla ilk olarak (4.16) eşitliğinin sol tarafına yaklaşık bir değer verilir, bundan sonra (4.17) de gösterildiği gibi, $[D]$ matrisi elde edilen $[q_i]$ ile çarpılarak eşitliğin iki tarafındaki $[q_i]$ değerleri birbirine eşitliği belirli bir hata oranından küçük oluncaya kadar bu iterasyon yapılır.

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \cdot \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha_1^r \\ \cdot \\ \alpha_{n-1}^r \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

(4.18) de görüldüğü gibi iterasyonda yeterli yaklaşım sağlandığında $\omega = \frac{1}{\lambda^2}$ alınarak $f = \frac{\omega}{2\Pi}$ ifadesinden özfrekansların birincisi bulunmuş olunur. 1. Modu veren özvektör ise $\{q\}_r$ matrisinin elemanlarıdır.

Birinci özdeğerden sonraki özdeğerlerin bulunması için; frekans denkleminde;

$$D S q \approx \lambda q \quad (4.19)$$

şeklinde ifade edilen S Süpürme matrisi elde edilmelidir.[27] S her adımda yeniden tanımlanan bir matris olup, birinci adımda;

$$S^0 \approx I_{n \times n} \quad (4.20)$$

mod sayısı boyutunda bir birim matris olarak tanımlanır. Burada 1. modun eldesi için daha önce açıklanan iterasyon yöntemiyle, elde edilen q^1 değeri elde edilir.

İkinci adımda süpürme matrisi;

$$\approx S^1 = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

şeklinde oluşturulur ve tekrar iterasyona sokularak $q^2_{\approx}$ elde edilir. m' ninci adımda süpürme matrisi;

$$\approx S^m = \begin{matrix} & \Downarrow_m & \Downarrow_{m+1} & & \Downarrow_n \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & S_{1\,m+1} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{2\,m+1} & \cdots & S_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{m\,m+1} & \cdots & S_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \xleftarrow{m+1} \end{matrix} \quad (4.22)$$

şeklinde oluşturulup, $q^{m+1}_{\approx}$ değerleri elde edilir.

Buradan m+1' inci adıma geçmek için (4.16) bağıntısında ardışık yaklaşım için seçilen $q_{\approx}$, daha önce bulunan $q^1_{\approx}, q^2_{\approx}, \dots, q^{m+1}_{\approx}$ özvektörlerine ortogonal olmalıdır, yani;

$$q_i \, m_{ij} \, q_j^k = 0 \quad k=1, 2, \dots, m+1 \quad (4.23)$$

koşulunu sağlamalıdır. İşlemlerde kolaylık sağlamak için,

$$\bar{q}_i = m_{ij} \, q_j^k \quad (4.24)$$

notasyonu kullanılırsa; ortoganallik koşulu,

$$q_i \, \bar{q}_i^k = 0 \quad (4.25)$$

şekline dönüşür.

Bu koşullardan sonuncusu açık olarak yazılırsa;

$$q_1 \bar{q}_1^{m+1} + q_2 \bar{q}_2^{m+1} + \dots + q_n \bar{q}_n^{m+1} = 0 \quad (4.26)$$

şeklinde ifade elde edilir. İlk m' inci ortoganallik koşulu,

$$S_{\approx}^m = S_{ij}^m \quad (4.27)$$

şeklinde süpürme matrisi ile ifade edilir. Yani ilk q_m bileşeni, geri kalan bileşenler cimsinden;

$$q_m = S_{ij}^m q_j \quad j = m+1, \dots, n \quad (4.28)$$

olarak ifade edilir. (4.28) bağıntısı (4.27) bağıntısında yerine konursa $m+1'$ inci ortoganallik koşulu;

$$\begin{aligned} & \left\{ S_{1,m+1}^m \bar{q}_1^{m+1} + S_{2,m+1}^m \bar{q}_2^{m+1} + \dots + S_{n,m+1}^m \bar{q}_n^{m+1} \right\} \{q_{m+1}\} + \\ & \left\{ S_{1,m+2}^m \bar{q}_1^{m+1} + S_{2,m+2}^m \bar{q}_2^{m+1} + \dots + S_{n,m+2}^m \bar{q}_n^{m+1} \right\} \{q_{m+2}\} + \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & \left\{ S_{1,j}^m \bar{q}_1^{m+1} + S_{2,j}^m \bar{q}_2^{m+1} + \dots + S_{n,j}^m \bar{q}_n^{m+1} \right\} \{q_j\} + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntılar;

$$\delta_j^m q_j = 0 \quad (4.30)$$

biçiminde yazılırsa, buradan;

$$\begin{aligned} \delta_j^m &= S_{ij}^m \bar{q}_i^{m+1} \quad j = m+1, \dots, n \\ \delta_{m+1}^m q_{m+1} + \delta_{m+2}^m q_{m+2} + \delta_{m+3}^m q_{m+3} + \dots + \delta_j^m q_j + \dots + \delta_n^m q_n &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan q_{m+1} , yani eşitlikte geri kalanlar cinsinden elde edilirse;

$$q_{m+1} = -\frac{\delta_{m+2}^m}{\delta_{m+1}^m} q_{m+2} - \frac{\delta_{m+3}^m}{\delta_{m+1}^m} q_{m+3} + \dots + -\frac{\delta_j^m}{\delta_{m+1}^m} q_j + \dots \quad (3.32)$$

sonucuna ulaşılır. Ulaşılan bu bağıntı $S_{\approx}^{m+1}$ süpürme vektörünün $m+1$ 'inci satırını ifade eder. Yani; $j \geq m+1$ durumunda,

$$S_{m+1,j}^{m+1} = -\frac{\delta_j^m}{\delta_{m+1}^m} \quad (4.33)$$

ve $j \leq 0$ durumunda,

$$S_{m+1,j}^{m+1} = 0 \quad (4.34)$$

dir.

$i \geq m+1$ koşulunun bulunduğu satırlarda, süpürme matrisi;

$$S^{m+1} = \begin{matrix} & \Downarrow_{m+1} & \Downarrow_{m+2} & & \Downarrow_n \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & S_{1\ m+2} & \cdots & S_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{2\ m+2} & \cdots & S_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & S_{m\ m+2} & \cdots & S_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \xleftarrow{m+2} \end{matrix} \quad (4.35)$$

şeklinde yani, sağ alt köşede birim matris ve sol tarafındaki elemanların hepside sıfır olacaktır.

$i \leq m+1$ koşulunun bulunduğu satırlardaki elemanlar için S^m süpürme matrisi, yani m' ninci adımda elde edilen süpürme matrisi kullanılarak;

$$q_i = S_{ij}^m q_j \quad j=m+1, \dots, n \quad (4.36)$$

şeklinde gösterilir. Bu ifade daha açık şekilde;

$$q_i = S_{i,m+1}^m q_{m+1} + S_{i,m+2}^m q_{m+2} + \cdots + S_{i,j}^m q_j + \cdots + S_{i,n}^m q_n \quad (4.37)$$

biçiminde görülür. Bu eşitlikte (4.31) bağıntısı kullanılarak q_{m+1} bileşeni yok edilirse, eşitlik;

$$q_i = S_{i,m+1}^m \left\{ -\sum_{j=m+2}^n \frac{\delta_j^m}{\delta_{m+1}^m} q_j \right\} + S_{i,m+2}^m q_{m+2} + \cdots + S_{i,n}^m q_n \quad (4.38)$$

ve sağ taraf $q_{m+2}, \dots, q_j, q_n$ parantezlerine alınırsa sonuçta $i \leq m+1$ satırları için süpürme matrisi;

$$S_{i,j}^{m+1} = S_{i,j}^m - \frac{\delta_j^m}{\delta_{m+1}^m} S_{i,m+1}^m \quad j=m+2, \dots, n \quad (4.39)$$

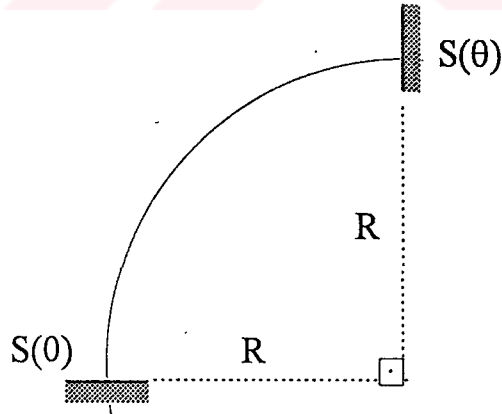
şeklinde elde edilir.

Bu şekilde elde edilen süpürme matrisi her adımda frekans denkleminde işleme sokularak iterasyon yapılır. Bu iterasyon sonucunda da sistemin serbestlik derecesi kadar titreşim frekansları elde edilir. Bu şekilde süpürme matrisi ile çözüme ulaşan, bir Basic programlama diliyle, bilgisayar programı yapılmış ve bu program Ek I da görülebilmektedir.

4.2. Başlangıç Değerleri Metodu İle Kesin Çözüm

Taşıma Matrisleri ile çubukların serbest titreşimine ait frekans determinantlarını sistematik olarak kolaylıkla kurmak mümkündür.[6]

Bu düşünceyi, homojen durum için; Şekil 4.1 de görüldüğü gibi, R yarıçaplı, iki ucu ankastre daire eksenli bir çubuk örnek alınarak açıklanmaya çalışılırsa;



Şekil 4.1 Dairesel Çubuk Dinamik Uygulaması

$S(0)$ girişine ait $M_n(0), M_t(0), T_b(0)$ bilinmeyenlerini elde etmek için kullanılacak şartlar $S(\theta)$ çıkışı dolayısıyla $U_b(\theta) = 0, \Omega_n(\theta) = 0, \Omega_t(\theta) = 0$ koşulunu sağlaması gerekecektir. Bunu

$$S(\theta) = F(\theta).S(0) \quad (4.40)$$

homojen transformasyon formülünden skaler büyüklüklerle ifade edilirse;

$$\begin{aligned} f_{1,4} M_n(0) + f_{1,5} M_t(0) + f_{1,6} T_b(0) &= 0 \\ f_{2,4} M_n(0) + f_{2,5} M_t(0) + f_{2,6} T_b(0) &= 0 \\ f_{3,4} M_n(0) + f_{3,5} M_t(0) + f_{3,6} T_b(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin trival olmayan bir çözümünün olması için bu eşitliklerdeki katsayılar determinantının sıfır olması gerekir;

$$\begin{vmatrix} f_{1,4} & f_{1,5} & f_{1,6} \\ f_{2,4} & f_{2,5} & f_{2,6} \\ f_{3,4} & f_{3,5} & f_{3,6} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.42)$$

bu da sistemin mesnet şartları için aranan frekans determinantından ibarettir. Burada ifade edilen fonksiyonlar elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar için elde edilen Taşıma Matrisin den elde edilecektir.

Sınır şartları ne olursa olsun, frekans determinantı olarak daima üçüncü mertebeden olması hesap açısından büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Aksi takdirde diğer yollardan oluşturulacak frekans Determinantı hep altıncı mertebe olarak elde edilir.

Ele alınan sistemde de görüleceği gibi çeşitli sınır şartları için frekans Determinantı $F(\theta)$ matrisine ait esas determinantın üçüncü mertebeden bir minörü olmaktadır. Bu minörün elde edilmesinde izlenen yolu, ele alınan örneklerle birlikte elastik zemine oturan daire eksenli çubuklar için elde edilen Taşıma matrisi ile şu şekilde elde edilir;

Sınır şartları;

$$S(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_n(0) \\ M_t(0) \\ T_b(0) \end{bmatrix} \quad S(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_n(\theta) \\ M_t(\theta) \\ T_b(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

olduğuna göre,

$$F(\theta) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Downarrow \\ E1 \\ \Downarrow \\ E7 \\ \Downarrow \\ E12 \\ \Downarrow \\ E16 \\ \Downarrow \\ E19 \\ \Downarrow \\ E21 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \Downarrow \\ E2 \\ \Downarrow \\ E8 \\ \Downarrow \\ E13 \\ \Downarrow \\ E17 \\ \Downarrow \\ -E18 \\ \Downarrow \\ -E16 \end{matrix} \begin{matrix} 0 \\ \Downarrow \\ E3 \\ \Downarrow \\ E9 \\ \Downarrow \\ E14 \\ \Downarrow \\ E18 \\ \Downarrow \\ E20 \\ \Downarrow \\ E19 \end{matrix} \begin{matrix} M_n(0) \\ E4 \\ E10 \\ -E11 \\ E8 \\ -E9 \\ -E7 \end{matrix} \begin{matrix} M_t(0) \\ E5 \\ E11 \\ E15 \\ -E13 \\ E14 \\ E12 \end{matrix} \begin{matrix} T_b(0) \\ E6 \\ -E4 \\ E5 \\ -E2 \\ E3 \\ E1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_n(\theta) \\ M_t(\theta) \\ T_b(\theta) \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

ve iki ucu ankastre olan daire eksenli çubuğun frekans determinantı;

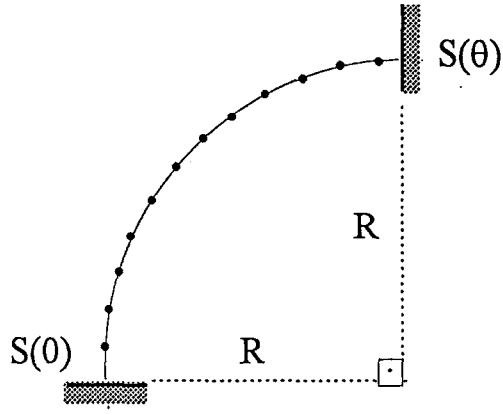
$$\begin{vmatrix} E3 & E4 & E5 \\ E9 & E10 & -E4 \\ -E11 & E15 & E5 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.45)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu taşıma matrisinin aranan Titreşim frekanslarının kesin çözümlerine ulaşılabilir.

4.3. Daire Eksenli Çubukların Dinamiğine Ait Uygulamalar

Bu bölümde biri yaklaşık çözüm olan Ayırık Kütle Metodu ile diğeri kesin çözüm olan Başlangıç Değerleri Metodunda, Taşıma Matrisinden elde edilen Frekans Determinantı ile, farklı iki çözüm yolu ile, iki ucu ankastre; daire eksenli bir çubuğun titreşim frekansları incelenmektedir.

Ayırık kütle metodunda çözüme ulaşmak için;



Şekil 4.2 Dairesel Çubuk Dinamik Uygulaması

şekil 4.2. de görüldüğü gibi sistem oniki serbestlik derecesine ayrıldığında; burada birim yükün i koordinatına etkimesi durumunda diğer kütle merkezlerindeki yerdeğiştirmelerin eldesi ile fleksibilite matrisi,

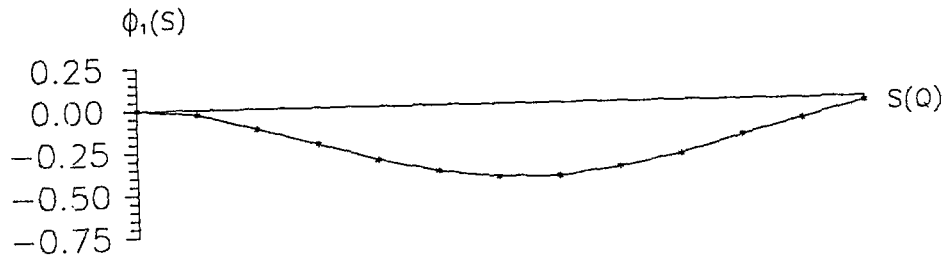
$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{112} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{212} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{121} & \cdots & \cdots & d_{1212} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

formunda elde edildi. Bu işlemler [14] nolu kaynakta elde edilmiş daire eksenli çubuklar için kapalı olarak sonlu eleman matrisi ve bunun çözümü için yapılmış bilgisayar programından elde edilmiştir.

İki ucu ankastre, daire eksenli çubuklar için elde edilen sonuçları, s her ayrı kütlenin hakim olduğu bölgenin uzunluğu olmak üzere oniki frekans için;

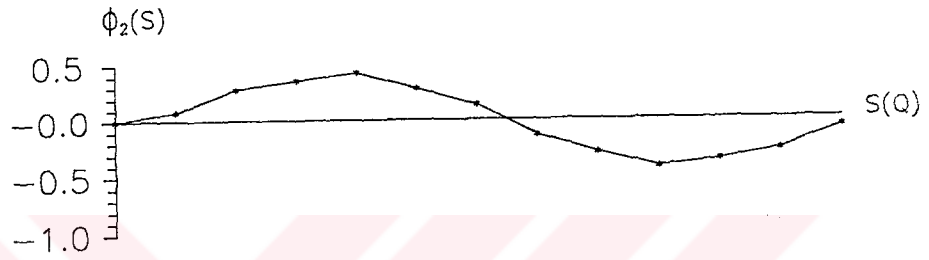
$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.113 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_2 &= 0.292 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_3 &= 0.529 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_4 &= 0.794 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}} \\ \omega_5 &= 1.069 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_6 &= 1.335 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_7 &= 1.590 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_8 &= 1.752 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}} \\ \omega_9 &= 1.798 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_{10} &= 1.815 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_{11} &= 2.495 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}}; & \omega_{12} &= 2.646 \sqrt{\frac{EI}{\rho s^4}} \end{aligned}$$

elde edilen mod şekiller ise[Şekil (4.3;4.6)];



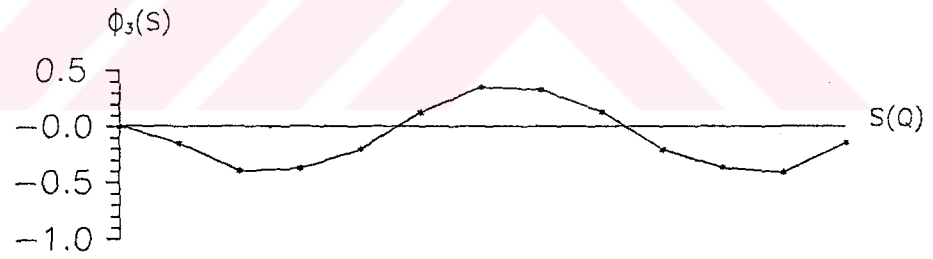
1. Mod

Şekil 4.3 1. Mod Şekli



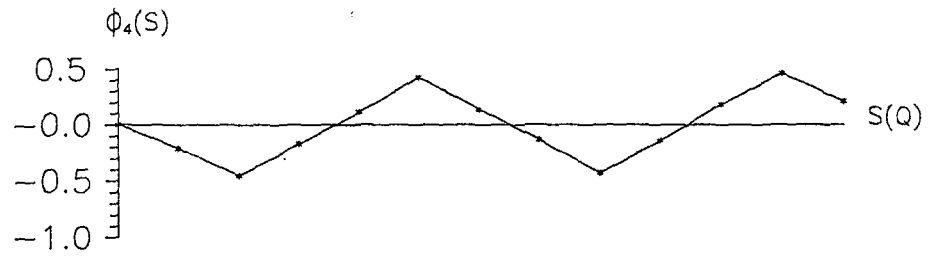
2. Mod

Şekil 4.4 2. Mod Şekli



3. Mod

Şekil 4.5 3. Mod Şekli

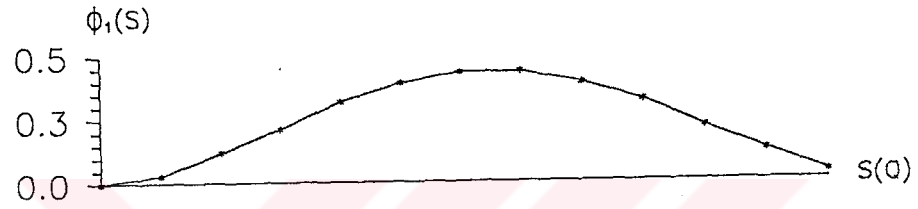


4. Mod

Şekil 4.6 4. Mod Şekli

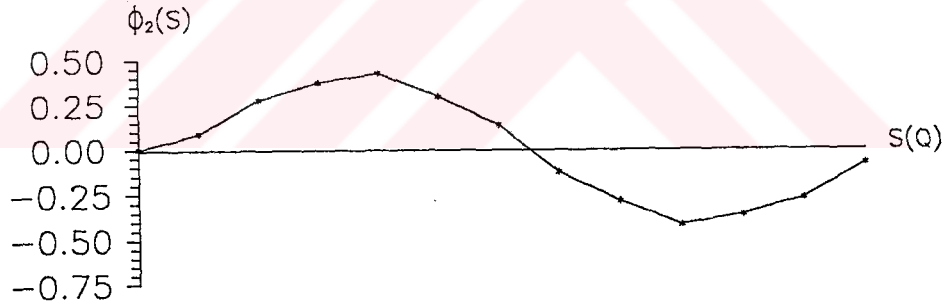
İkinci olarak elastik zemine oturan daire eksemli çubukların serbest titreşimi için $k=10$, elastik zemin katsayısına sahip iki ucu ankastre bir için ilk üç titreşim frekansı ve mod şekilleri[4.6-4.9] şöyledir;

$$\omega_1 = 0.1127 \sqrt{\frac{EI}{\rho S^4}}; \quad \omega_2 = 0.2936 \sqrt{\frac{EI}{\rho S^4}}; \quad \omega_3 = 0.5293 \sqrt{\frac{EI}{\rho S^2}}$$



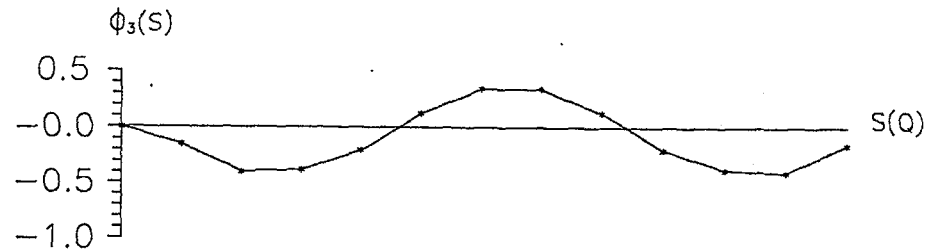
1. Mod

Şekil 4.7 1. Mod Şekli



2. Mod

Şekil 4.8 2.Mod Şekli



3. Mod

Şekil 4.9 3. Mod Şekli

Elde edilen bu sonuçlar daha önce Bölüm 3.1 de belirtilen ve Ek E de, Program 3' te P_b ifadesinde k , elastik zemin katsayısı yerine, homojen haldeki daire eksenli çubuğun incelenmesi durumunda $P_b = (k + \rho \omega^2)$ değeri alındığında ve Bölüm 4.2 de açıklanan sistemin sınır (4.43) te verilen sınır şartlarına göre, (4.45) teki elde edilen taşıma matrisi minörünün determinantı sıfıra eşitlendiğinde istenen titreşim frekansları elde edilir.

Bu çalışmada frekans determinantı ile çözüme gidilmiş ve ayrık kütle metodu ile elde edilen çözümler ile belirli hata oranında üst üste düşmektedir. Fakat çözümde ayrık kütle ile elde edilen titreşim frekanslarının dışında da bazı frekans değerleri elde edilmiştir. Bu metodtan elde edilen sonuçlar da, farklı frekansların değerlendirilmesi ve serbest titreşim frekanslarıyla birlikte, farklı yükler etkisinde zorlanmış titreşimler üzerinde çalışmalar hale sürmektedir.

BÖLÜM 5 UYGULAMALAR

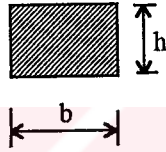
Ele alınan örnekler için;

YÖNTEM 1; Kesin çözümü,

YÖNTEM 2; Bu çalışmada elde edilen taşıma matrisleriyle çözümü,

YÖNTEM 3; Sonlu elemanlar ile elde edilen çözümü,

ifade eder ve alınan tüm örneklerde kesit boyutları;



şeklinde alınmıştır.

5.1 Daire Eksenli Çubuklara Ait Sayısal Uygulamalar

Uygulama 1:

$$k=0$$

$$P=50 \text{ ton}$$

$$R=8 \text{ m.}$$

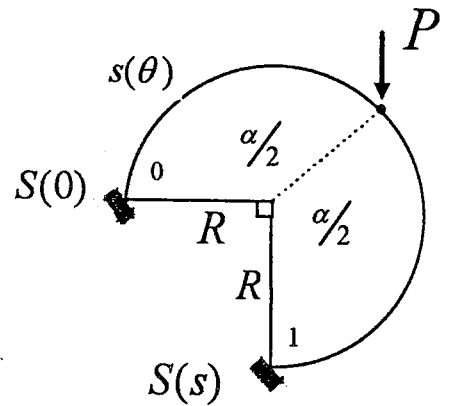
$$b=1.5 \text{ m}$$

$$h=1.5 \text{ m.}$$

$$E=2700000 \text{ ton/m}^2$$

$$\alpha = 270$$

$$\nu = 0.3$$



Şekil 5.1 Dairesel Çubuk Uygulaması

TABLO 5-1 Dairesel cubuklar için sayısal sonuçlar

KESİT TESİRLERİ		YÖNTEM 1	YÖNTEM 2
Mn (0)	(ft-tons)	-232.620	-232.620
Mt (0)	(ft-tons)	250.220	250.220
Tb (0)	(tons)	25.000	25.000
Mn (α)	(ft-tons)	-232.620	-232.620
Mt (α)	(ft-tons)	-250.220	-250.220
Tb (α)	(tons)	-25.000	-25.000

Uygulama 2:

$$k=0$$

$$P=100 \text{ ton}$$

$$R=12 \text{ m.}$$

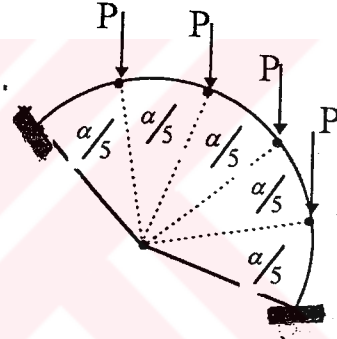
$$b=1.2 \text{ m.}$$

$$h=0.6 \text{ m.}$$

$$E=2700000 \text{ ton/m}^2$$

$$\alpha = 140$$

$$\nu = 0.3$$



Şekil 5.2 Elastik Zemine Oturan Dairesel Çubuklar Uygulaması

TABLO 5-2 Dairesel çubuklara ait sayısal sonuçlar

KESİT TESİRLERİ		YÖNTEM 1	YÖNTEM 2
Mn (0)	(ft-tons)	-1387.800	-1387.800
Mt (0)	(ft-tons)	201.232	201.232
Tb (0)	(tons)	200.000	200.000
Mn (α)	(ft-tons)	-1387.800	-1387.800
Mt (α)	(ft-tons)	-201.232	-201.232
Tb (α)	(tons)	-200.000	-200.000

Görüldüğü gibi daire eksenli çubuklara ait uygulamalarda çözümler [6] nolu kaynakta elde edilen kesin çözümlerle üst üste düşmektedir.

5.2 Elastik Zemine Oturan Daire Eksenli Çubuklara Ait Uygulamalar

Uygulama 3:

$$k=1500 \text{ ton/m}^2$$

$$P=50 \text{ ton}$$

$$R=8 \text{ m.}$$

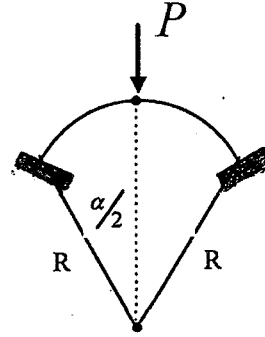
$$b=1.5 \text{ m.}$$

$$h=1.5 \text{ m.}$$

$$E=2700000 \text{ ton/m}^2$$

$$\alpha = 70$$

$$\nu = 0.3$$



Şekil 5.3 Elastik Zemine Oturan Dairesel Çubuk Uygulaması

TABLO 5-3 Daire eksenli cubuklara ait sayısal sonuçlar

KESİT TESİRLERİ		YÖNTEM 3	YÖNTEM 2
Mn (0)	(ft-tons)	-63.905	-63.780
Mt (0)	(ft-tons)	1.852	1.834
Tb (0)	(tons)	24.163	23.953
Mn (α)	(ft-tons)	-63.905	-63.780
Mt (α)	(ft-tons)	-1.852	-1.834
Tb (α)	(tons)	-24.163	-23.953

Uygulama 4:

$$k=10 \text{ ton/m}^2$$

$$P=50 \text{ ton}$$

$$R=8 \text{ m.}$$

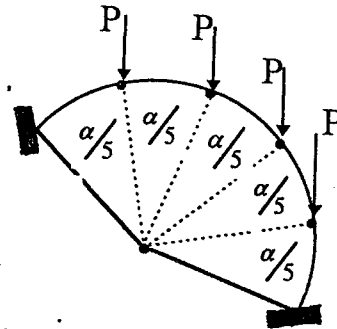
$$b=1.5 \text{ m.}$$

$$h=1.5 \text{ m.}$$

$$E=2700000 \text{ ton/m}^2$$

$$\alpha = 140$$

$$\nu = 0.3$$



Şekil 5.4 Elastik Zemine Oturan Dairesel Çubuklar Uygulaması

TABLO 5-4 Dairesel çubuklara ait sayısal sonuçlar

KESİT TESİRLERİ		YÖNTEM 3	YÖNTEM 2
Mn (0)	(ft-tons)	-464.669	-464.208
Mt (0)	(ft-tons)	75.217	75.316
Tb (0)	(tons)	99.688	99.707
Mn (α)	(ft-tons)	-464.669	-464.208
Mt (α)	(ft-tons)	-75.217	-75.316
Tb (α)	(tons)	-99.688	-99.707

BÖLÜM 6. SONUÇLAR

Bu çalışmada elastik zemine oturan dairesel kirişlere ait statik ve dinamik problemleri incelendi. Çalışmada yapılan işlemlerde Mathematica bilgisayar programı kullanılmıştır.

Elastik zemine oturan dairesel çubukların kapalı olarak taşıma matrisini bulmak için yapılması gereken işlemler bilgisayarsız yapılamıyacak kadar uzundur. Bu uzun işlemleri güvenilir sonuca götürmek için farklı çözüm yöntemleri, önce çözümü bilinen dairesel çubuklara uygulanarak yapılan işlemler kontrol edilmiştir.

Elastik zemine oturan dairesel çubukların taşıma matrisinin bulunuşu karakteristik denklemin yapısının değişmesinden dolayı, oldukça güçtür. Bu çalışmada daha önce bilinen problemlerde test edilen çözüm yöntemleri bu probleme ayrı ayrı uygulanarak sonuca ulaşılmıştır. Ulaşılan sonucun doğruluğu, farklı yöntemler ile bulunan sonucun birbirleriyle karşılaştırılarak ve $k \rightarrow 0$ için limit alındığında daha önce bilinen taşıma matrisine ulaşarak gösterilmiştir.

Ayrıca, elastik zemine oturan problemler, burda elde edilen taşıma matrisi ve sonlu elemanlar metodu ile çözülerek sayısal sonuçlar da aynı denecek kadar büyük bir uyum gözlenmiştir.

Elde edilen taşıma matrisleri ile statik ve dinamik uygulamalar çözülmüş ve çözülen statik uygulamalar, kesin çözümlerle ve yaklaşık çözüm olan sonlu eleman metodu ile karşılaştırılmış ve sonuçların, kesin sonuçlarla aynı; sonlu eleman metodu ile çözümde de göze alınmıyacak çok az hata farkı ile aynı olduğu görülmüştür.

Dairesel çubukların elastik zemine oturması ve oturmaması durmunda; Başlangıç Değerleri Metodu ile dinamik analiz yapılmış, bunlara ait frekans determinantının eldesi ve sisteme uygulanması açıklanmış, daire eksenli çubukların serbest titreşim hali için çözüme gidilmiştir. Ayrık kütle metodu çözüme kontrol amacı ile gidilmiş çözüme ulaşılmış ve bu metodta titreşim frekanslarının için gerekli süpürme matrisi, geniş bir şekilde açıklandı. Her türlü sisteme, dinamik matrisler tanımlandığında süpürme matrisi ile titreşim frekanslarını veren bir bilgisayar

proğramı hazırlanmıştır. Ayrık kütle metodu ve başlangıç değerleri metodunda; frekans determinantı yöntemiyle iki uçu ankastre dairesel çubuğa ait serbest titreşimler incelendi ve iki metod ile elde edilen sonuçlar arasında kıyaslama yapılarak yorumlandı.



KAYNAKLAR

- [1] WINKLER, E. , Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Prague, Czechoslovakia, (1867)
- [2] ZIMMERMANN, H. , Die Berechnung des Eisenbahnober bause, Second Edition, Berlin, Germany, (1888)
- [3] HETENYİ, M. , Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, (1946)
- [4] VOLTERRA, E. , Bending of Circular Beam Resting on an Elastic Foundation, J. Appl. Mech. ASME, Vol. 19, pp. 1-4 (1952)
- [5] RODRİGUEZ, D. A. , Tree-Dimensional Bending of a Ring on Elastic Foundation, J. Appl. Mech. ASME, pp.461-463, September, (1961)
- [6] İNAN, M. , Elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi, İ.T.Ü. Yayınları, Sayı 585, (1964)
- [7] İNAN, M. , Elastik çubukların Genel Teorisi, İ.T.Ü. Yayınları, Sayı 642, (1966)
- [8] ÇELİK, Ü., Kesitlerin Kayması ve Eksenin Uzamasıda Gözönüne Alınarak Eğri Eksenli Çubukların Kesme Kuvveti ve Moment Değerleri ile Yer ve Şekil Değiştirme Bağıntılarının Başlangıç Değerleri Metodu ile Elde Edilmesi, Y. Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, 1984
- [9] KIRAL, E. , ERTEPINAR , Ealstik Zemine Oturan Eğri Eksenli Düzlemsel Çubuklar, METU Journal of Pure and Applied Science, Vol. 7, No. 1, pp. 44-53, April 1974

- [10] PANAYOTOUNAKAS, D. E. , THEOCARIS, P. S. , Circular Beam on Elastic Foundation, J. Eng. Mech. Div. , Proceedings ASCE, Vol. 105, No.EM5, October, (1979)
- [11] DASGUPTA, S. , SENGUPTA, D. , Horizontally Curved Isoparametric Beam Element With or Without Elastic Foundation Including of Without Deformation, Computers and Structures, Vol. 29, No. 6, pp. 967-973, (1988)
- [12] BANAN, M. R. , KARAMI, G. , FARSHAD, M. , Finite Element Analysis of Curved Beams on Elastic Foundations, Computers and Structures, Vol. 32, No.1, pp, 45-53, (1989)
- [13] HAKTANIR N. ; KIRAL E. Statical Analysis of Elastically and Continuously Supported Hellicoidal Structures by the Transfer Matrix Methods; Computers and Structure Vol. 49, No. 4, pp. 663-677, (1993)
- [14] KADIOĞLU, F. , Elastik Zemin Oturan Doğru ve Daire Eksenli Çubuklar; İ.T.Ü. , Fen Bilimleri Enstitüsü, Y. Lisans Tezi (1994)
- [15] RAO, N. S. V. K. , DAS, Y. C. , ANANDAKRISHNAN, M. , Variational Approach to Beams on Elastic Foundations, J. Eng. Mech. Div. , Proceedings. ASCE, April, pp. 271-294, (1971)
- [16] CELEP, Z., Dynamic Response of a Circular Beam on a Wieghardt-Type Elastic Foundation; Z. Angew, Math. U. Mech. 64 (1984), p.p.,279-286
- [17] CELEP, Z., MALAIKA, A. , ABU-HUSSEIN, M., Forced Vibrations of a Beam On a Tensionless Foundation, J. Sound and Vibration, p.p.235-246, 128/2, (1988)
- [18] DOĞAN, O. , Elastik Zemin Üzerine Oturan Kirişler, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Y. Lisans Tezi, (1993)
- [19] AKÖZ, A. Y. , Şekil Değiştirebilen Cisimlerin Mekaniğinde Varyasyon Hesabı, Trabzon, Syf : 216-289, (1987)

- [20] CİNEMRE, V., Başlangıç Değerleri Metodu İle Helisel Çubukların Statik Hesabı, Doktora Tezi, İ.T.Ü. yayını, 1960
- [21] ERİNGEN, C.A., Mechanics of Continua, Copyright 1980 By Robert E. Krieger Publishing Company, Inc. Huntington-Newyork
- [22] CİNEMRE V. , Linear Algebra, İ.T.Ü. Yayınları, Sayı 1382, (1989)
- [23] St. WOLFRAM, Mathematica, Addison Wesley, (1991)
- [24] ABRAMOWITZ, M. and STEGUN, I. , Handbook of Mathematical Functions, Library of Congress Catalog Card Number :65.12253, Newyork-U.S.A. , (1965)
- [25] TAUCHERT, T. R., Enargy Principles in Structural Mechanics, Library of Congress Cataloging in Publication Data, 1980
- [26] CELEP, Z., KUMBASAR. N., Örneklerle Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliğine Giriş, Sema matbaacılık, 624.171, İstanbul (1992)
- [27] CLOUGH, R. W. ; PENZIEN, J., Dynamics of Structures 7.edition, Chong Moh Offset Printing Pte. Ltd. (1986)
- [28] ÖZDEN, K. , Elastik Zemine oturan Betonarme kirişlerin Limit Analizi, doğa Bilim Dergisi, Müh. Çevre, Cilt 6, pp. 13-19, (1982)
- [29] ZURMÜHL. R. , Çeviri; BİRKAN, İ. , Matrisler ve Mühendislik Problemlerine Uygulamaları, İ.T.Ü. Temel Bilimler Fakültesi, Sayı 1124, Birinci Baskı (1978)
- [30] İNAN, M. , Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü. Yayınları, 6. Baskı , (1988)
- [31] ÖZBEK, T., Çubuklarda Taşıma Matrislerinin Hesabı, İ.T.Ü. Bülteni, Vol. 12, İstanbul, 1964

- [32] ENGİN, H ; Elasto-Plastik Zemine Oturan Kiriş ve Plaklar, İ.T.Ü. İnş. Fak. ,
İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı, III.
Senpozyumu. İstanbul Syf. 262-273, 15-18, Haziran, (1992)



EK A

PROGRAM 1

```
q=
bn=
hn=
R=
nu=
e=
Ix=(bn*hn^3)/12
G=e/(2*(1+nu))
Dt=(G*hn*bn^3)/3
Dn=e*Ix
b=R/Dn
c=R/Dt

AD={{0,-R,0,0,0,0},{0,0,-1,b,0,0},{0,1,0,0,c,0},
    {0,0,0,0,-1,R},{0,0,0,1,0,0},{0,0,0,0,0,0}}

S1=MatrixPower[AD,2]
S2=MatrixPower[AD,3]
S3=MatrixPower[AD,4]
S4=MatrixPower[AD,5]
S5=IdentityMatrix[6]

QQ1=AD+2*S2+S4
Q1=Simplify[QQ1]
QQ2=I/4*S1+I/4*S3+S2/4+S4/4
Q2=Simplify[QQ2]
QQ3=-I/4*S1-I/4*S3+S2/4+S4/4
Q3=Simplify[QQ3]
PP2=-S1-S3/2+(5*I)/4*S2+(3*I)/4*S4
P2=Simplify[PP2]
PP3=-S1-S3/2-(5*I)/4*S2-(3*I)/4*S4
P3=Simplify[PP3]
P1=S5-P2-P3

TASMT=N[P1+(Cos[q]+I Sin[q]) P2+(Cos[q]-I Sin[q]) P3+Q1 q
        +q (Cos[q]+I Sin[q]) Q2+q (Cos[q]-I Sin[q]) Q3]
TASMT1=Simplify[TASMT]

Save["CIK1",TASMT1]
```

EK B
PROGRAM 2

```

q=
bn=
hn=
R=
nu=
e=
Ix=(bn*hn^3)/12
G=e/(2*(1+nu))
Dt=(G*hn*bn^3)/3
Dn=e*Ix
b=R/Dn
c=R/Dt

AD={{0,-R,0,0,0,0},{0,0,-1,b,0,0},{0,1,0,0,c,0},
    {0,0,0,0,-1,R},{0,0,0,1,0,0},{0,0,0,0,0,0}}

S1=MatrixPower[AD,2]
S2=MatrixPower[AD,3]
S3=MatrixPower[AD,4]
S4=MatrixPower[AD,5]
S5=IdentityMatrix[6]

OZDEG=Det[AD-S5 X]
DER=Solve[OZDEG==0,X]
M1=DER[[1,1]]
M2=DER[[2,1]]
M3=DER[[3,1]]
M4=DER[[4,1]]
M5=DER[[5,1]]
M6=DER[[6,1]]

CIK=Solve[{0==(A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5+A6 X^6-
N[(Cos[q]+I Sin[q]))]/.M1,
0==(A1+2 A2 X+3 A3 X^2+4 A4 X^3+5 A5 X^4-q N[(Cos[q]+I Sin[q]))]/.M3,
0==(A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5+A6 X^6-
N[(Cos[q]+I Sin[q]))]/.M2,
0==(A1+2 A2 X+3 A3 X^2+4 A4 X^3+5 A5 X^4-q N[(Cos[q]+I Sin[q]))]/.M4,
0==(A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5+A6 X^6-1)/.M5,
0==(A1+2 A2 X+3 A3 X^2+4 A4 X^3+5 A5 X^4-q)/.M6},{A,A1,A2,A3,A4,A5}]

TASMT1=N[(A S5+A1 AD+A2 S1+A3 S2+A4 S3+A5 S4)/.CIK]
TASMT2=Simplify[TASMT1]
Save["CIK2",TASMT2]

```

EK C

ÇIKTI 1

$$G1 = -R \sin[q]$$

$$G2 = R (1 - \cos[q])$$

$$G3 = R^2 \left[\frac{1 - \cos[q]}{Dt} - (1 + Dt/Dn) \frac{q \sin[q]}{2Dt} \right]$$

$$G4 = R^2 \frac{Dn + Dt}{2Dn Dt} (-q \cos[q] + \sin[q])$$

$$G5 = \frac{R^3}{Dt} \left[q + (1 + Dt/Dn) \frac{q \cos[q]}{2} \right] - \left[(3 + Dt/Dn) \frac{\sin[q]}{2} \right]$$

$$G6 = \cos[q]$$

$$G7 = -\sin[q]$$

$$G8 = \frac{R}{2 Dt} [q \cos[q] (1 + Dt/Dn) - \sin[q] (1 - Dt/Dn)]$$

$$G9 = -\frac{Dn + Dt}{2Dn Dt} (q R \sin[q])$$

$$G10 = \frac{R}{2 Dt} [q \cos[q] (1 + Dt/Dn) + \sin[q] (1 - Dt/Dn)]$$

$$F(q) = \begin{bmatrix} 1 & G1 & G2 & G3 & G4 & G5 \\ 0 & G6 & G7 & G8 & G9 & -G3 \\ 0 & -G7 & G6 & -G9 & G10 & G4 \\ 0 & 0 & 0 & G6 & G7 & -G1 \\ 0 & 0 & 0 & -G7 & G6 & G2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

EK D

CIKTI 2

$$\begin{aligned} D3*C2 = & 24*a^6*A^2*b^2 + 24*a^5*A^3*b^2 - \\ & 24*a^4*A^4*b^2 - 24*a^3*A^5*b^2 - \\ & 24*a^6*AF^2*b^2 - 24*a^5*A*AF^2*b^2 + \\ & 16*a^4*A^2*AF^2*b^2 + 16*a^3*A^3*AF^2*b^2 + \\ & 8*a^2*A^4*AF^2*b^2 + 8*a*A^5*AF^2*b^2 + \\ & 8*a^4*AF^4*b^2 + 8*a^3*A*AF^4*b^2 - \\ & 8*a^2*A^2*AF^4*b^2 - 8*a*A^3*AF^4*b^2 + \\ & 16*a^4*A^2*b^4 - 32*a^3*A^3*b^4 + \\ & 8*a^2*A^4*b^4 + 8*a*A^5*b^4 - \\ & 16*a^4*AF^2*b^4 + 32*a^3*A*AF^2*b^4 - \\ & 16*a^2*A^2*AF^2*b^4 + 8*a^2*AF^4*b^4 - \\ & 8*a*A*AF^4*b^4 - 8*a^2*A^2*b^6 + \\ & 8*a*A^3*b^6 + 8*a^2*AF^2*b^6 - 8*a*A*AF^2*b^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D4*C3 = & 8*a^6*A^2*b^2 + 16*a^5*A^3*b^2 + \\ & 8*a^4*A^4*b^2 - 8*a^6*AF^2*b^2 - \\ & 16*a^5*A*AF^2*b^2 - 16*a^4*A^2*AF^2*b^2 - \\ & 16*a^3*A^3*AF^2*b^2 - 8*a^2*A^4*AF^2*b^2 + \\ & 8*a^4*AF^4*b^2 + 16*a^3*A*AF^4*b^2 + \\ & 8*a^2*A^2*AF^4*b^2 - 16*a^4*A^2*b^4 - \\ & 48*a^3*A^3*b^4 - 24*a^2*A^4*b^4 + \\ & 16*a^4*AF^2*b^4 + 48*a^3*A*AF^2*b^4 + \\ & 16*a^2*A^2*AF^2*b^4 + 8*a^2*AF^4*b^4 - \\ & 24*a^2*A^2*b^6 + 24*a^2*AF^2*b^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -D5*C2 = & 24*a^6*A^2*b^2 - 24*a^5*A^3*b^2 - \\ & 24*a^4*A^4*b^2 + 24*a^3*A^5*b^2 - \\ & 24*a^6*AF^2*b^2 + 24*a^5*A*AF^2*b^2 + \\ & 16*a^4*A^2*AF^2*b^2 - 16*a^3*A^3*AF^2*b^2 + \\ & 8*a^2*A^4*AF^2*b^2 - 8*a*A^5*AF^2*b^2 + \\ & 8*a^4*AF^4*b^2 - 8*a^3*A*AF^4*b^2 - \\ & 8*a^2*A^2*AF^4*b^2 + 8*a*A^3*AF^4*b^2 + \\ & 16*a^4*A^2*b^4 + 32*a^3*A^3*b^4 + \\ & 8*a^2*A^4*b^4 - 8*a*A^5*b^4 - \\ & 16*a^4*AF^2*b^4 - 32*a^3*A*AF^2*b^4 - \\ & 16*a^2*A^2*AF^2*b^4 + 8*a^2*AF^4*b^4 + \\ & 8*a*A*AF^4*b^4 - 8*a^2*A^2*b^6 - \\ & 8*a*A^3*b^6 + 8*a^2*AF^2*b^6 + 8*a*A*AF^2*b^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D6*C3 = & 8*a^6*A^2*b^2 - 16*a^5*A^3*b^2 + \\
& 8*a^4*A^4*b^2 - 8*a^6*AF^2*b^2 + \\
& 16*a^5*A*AF^2*b^2 - 16*a^4*A^2*AF^2*b^2 + \\
& 16*a^3*A^3*AF^2*b^2 - 8*a^2*A^4*AF^2*b^2 + \\
& 8*a^4*AF^4*b^2 - 16*a^3*A*AF^4*b^2 + \\
& 8*a^2*A^2*AF^4*b^2 - 16*a^4*A^2*b^4 + \\
& 48*a^3*A^3*b^4 - 24*a^2*A^4*b^4 + \\
& 16*a^4*AF^2*b^4 - 48*a^3*A*AF^2*b^4 + \\
& 16*a^2*A^2*AF^2*b^4 + 8*a^2*AF^4*b^4 - \\
& 24*a^2*A^2*b^6 + 24*a^2*AF^2*b^6
\end{aligned}$$

$$FA1=D3*C2+D4*C3$$

$$FA2=D5*C2+D6*C3$$

$$\begin{aligned}
FA1 = & -32*a^6*AF^2*b^2 + 16*a^4*AF^4*b^2 + \\
& 16*a^2*AF^4*b^4 + 32*a^2*AF^2*b^6 + \\
& A^5*(-24*a^3*b^2 + 8*a*AF^2*b^2 + 8*a*b^4) + \\
& A^4*(-16*a^4*b^2 - 16*a^2*b^4) + \\
& A^3*(40*a^5*b^2 - 8*a*AF^4*b^2 - 80*a^3*b^4 + 8*a*b^6) + \\
& A^2*(32*a^6*b^2 - 32*a^2*b^6) + \\
& A*(-40*a^5*AF^2*b^2 + 24*a^3*AF^4*b^2 + \\
& 80*a^3*AF^2*b^4 - 8*a*AF^4*b^4 - 8*a*AF^2*b^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
FA2 = & -32*a^6*AF^2*b^2 + 16*a^4*AF^4*b^2 + \\
& 16*a^2*AF^4*b^4 + 32*a^2*AF^2*b^6 + \\
& A^5*(24*a^3*b^2 - 8*a*AF^2*b^2 - 8*a*b^4) + \\
& A^4*(-16*a^4*b^2 - 16*a^2*b^4) + \\
& A^3*(-40*a^5*b^2 + 8*a*AF^4*b^2 + 80*a^3*b^4 - 8*a*b^6) + \\
& A^2*(32*a^6*b^2 - 32*a^2*b^6) + \\
& A*(40*a^5*AF^2*b^2 - 24*a^3*AF^4*b^2 - \\
& 80*a^3*AF^2*b^4 + 8*a*AF^4*b^4 + 8*a*AF^2*b^6)
\end{aligned}$$

CIKTI 3

$$\begin{aligned}
-D3 * C3 = & 8*a^7*A^2*b + 8*a^6*A^3*b - \\
& 8*a^5*A^4*b - 8*a^4*A^5*b - \\
& 8*a^7*AF^2*b - 8*a^6*A*AF^2*b + \\
& 8*a^3*A^4*AF^2*b + 8*a^2*A^5*AF^2*b + \\
& 8*a^5*AF^4*b + 8*a^4*A*AF^4*b - \\
& 8*a^3*A^2*AF^4*b - 8*a^2*A^3*AF^4*b - \\
& 16*a^5*A^2*b^3 - 32*a^4*A^3*b^3 + \\
& 24*a^3*A^4*b^3 + 24*a^2*A^5*b^3 + \\
& 16*a^5*AF^2*b^3 + 32*a^4*A*AF^2*b^3 - \\
& 32*a^3*A^2*AF^2*b^3 - 16*a^2*A^3*AF^2*b^3 + \\
& 8*a^3*AF^4*b^3 - 8*a^2*A*AF^4*b^3 - \\
& 24*a^3*A^2*b^5 + 24*a^2*A^3*b^5 + \\
& 24*a^3*AF^2*b^5 - 24*a^2*A*AF^2*b^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D4 * C2 = & -24*a^5*A^2*b^3 - 48*a^4*A^3*b^3 - \\
& 24*a^3*A^4*b^3 + 24*a^5*AF^2*b^3 + \\
& 48*a^4*A*AF^2*b^3 + 32*a^3*A^2*AF^2*b^3 + \\
& 16*a^2*A^3*AF^2*b^3 + 8*a*A^4*AF^2*b^3 - \\
& 8*a^3*AF^4*b^3 - 16*a^2*A*AF^4*b^3 - \\
& 8*a*A^2*AF^4*b^3 - 16*a^3*A^2*b^5 + \\
& 16*a^2*A^3*b^5 + 8*a*A^4*b^5 + \\
& 16*a^3*AF^2*b^5 - 16*a^2*A*AF^2*b^5 - \\
& 8*a*AF^4*b^5 + 8*a*A^2*b^7 - 8*a*AF^2*b^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-D6 * C2 = & 24*a^5*A^2*b^3 - 48*a^4*A^3*b^3 + \\
& 24*a^3*A^4*b^3 - 24*a^5*AF^2*b^3 + \\
& 48*a^4*A*AF^2*b^3 - 32*a^3*A^2*AF^2*b^3 + \\
& 16*a^2*A^3*AF^2*b^3 - 8*a*A^4*AF^2*b^3 + \\
& 8*a^3*AF^4*b^3 - 16*a^2*A*AF^4*b^3 + \\
& 8*a*A^2*AF^4*b^3 + 16*a^3*A^2*b^5 + \\
& 16*a^2*A^3*b^5 - 8*a*A^4*b^5 - \\
& 16*a^3*AF^2*b^5 - 16*a^2*A*AF^2*b^5 + \\
& 8*a*AF^4*b^5 - 8*a*A^2*b^7 + 8*a*AF^2*b^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-D5 * C3 = & -8*a^7*A^2*b + 8*a^6*A^3*b + \\
& 8*a^5*A^4*b - 8*a^4*A^5*b + \\
& 8*a^7*AF^2*b - 8*a^6*A*AF^2*b - \\
& 8*a^3*A^4*AF^2*b + 8*a^2*A^5*AF^2*b - \\
& 8*a^5*AF^4*b + 8*a^4*A*AF^4*b + \\
& 8*a^3*A^2*AF^4*b - 8*a^2*A^3*AF^4*b + \\
& 16*a^5*A^2*b^3 - 32*a^4*A^3*b^3 - \\
& 24*a^3*A^4*b^3 + 24*a^2*A^5*b^3 - \\
& 16*a^5*AF^2*b^3 + 32*a^4*A*AF^2*b^3 + \\
& 32*a^3*A^2*AF^2*b^3 - 16*a^2*A^3*AF^2*b^3 - \\
& 8*a^3*AF^4*b^3 - 8*a^2*A*AF^4*b^3 + \\
& 24*a^3*A^2*b^5 + 24*a^2*A^3*b^5 - \\
& 24*a^3*AF^2*b^5 - 24*a^2*A*AF^2*b^5
\end{aligned}$$

$$FB1=D3*C3+D4*C2$$

$$FB2=D6*C2+D5*C3$$

$$\begin{aligned} FB1 = & -8*a^7*AF^2*b + 8*a^5*AF^4*b + \\ & 40*a^5*AF^2*b^3 + 40*a^3*AF^2*b^5 - \\ & 8*a*AF^4*b^5 - 8*a*AF^2*b^7 + \\ & A^5*(-8*a^4*b + 8*a^2*AF^2*b + 24*a^2*b^3) + \\ & A^4*(-8*a^5*b + 8*a^3*AF^2*b + \\ & 8*a*AF^2*b^3 + 8*a*b^5) + \\ & A^3*(8*a^6*b - 8*a^2*AF^4*b - \\ & 80*a^4*b^3 + 40*a^2*b^5) + \\ & A*(-8*a^6*AF^2*b + 8*a^4*AF^4*b + \\ & 80*a^4*AF^2*b^3 - 24*a^2*AF^4*b^3 - \\ & 40*a^2*AF^2*b^5) + \\ & A^2*(8*a^7*b - 8*a^3*AF^4*b - 40*a^5*b^3 - \\ & 8*a*AF^4*b^3 - 40*a^3*b^5 + 8*a*b^7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FB2 = & 8*a^7*AF^2*b - 8*a^5*AF^4*b - \\ & 40*a^5*AF^2*b^3 - 40*a^3*AF^2*b^5 + \\ & 8*a*AF^4*b^5 + 8*a*AF^2*b^7 + \\ & A^5*(-8*a^4*b + 8*a^2*AF^2*b + 24*a^2*b^3) + \\ & A^4*(8*a^5*b - 8*a^3*AF^2*b - \\ & 8*a*AF^2*b^3 - 8*a*b^5) + \\ & A^3*(8*a^6*b - 8*a^2*AF^4*b - \\ & 80*a^4*b^3 + 40*a^2*b^5) + \\ & A*(-8*a^6*AF^2*b + 8*a^4*AF^4*b + \\ & 80*a^4*AF^2*b^3 - 24*a^2*AF^4*b^3 - \\ & 40*a^2*AF^2*b^5) + \\ & A^2*(-8*a^7*b + 8*a^3*AF^4*b + 40*a^5*b^3 + \\ & 8*a*AF^4*b^3 + 40*a^3*b^5 - 8*a*b^7) \end{aligned}$$

E K E
PROGRAM 3

```

k=Pb
r=
q=
bn=
hn=
nu=
e=
Ix=(bn*hn^3)/12
G=e/(2*(1+nu))
Dtt=(G*hn*bn^3)/3
Dn=e*Ix
aa=k r
bb=r/Dn
cc=r/Dtt
AD={{0,-r,0,0,0,0},{0,0,-1,bb,0,0},{0,1,0,0,cc,0},
      {0,0,0,0,-1,r},{0,0,0,1,0,0},{aa,0,0,0,0,0}}

S1=MatrixPower[AD,2]
S2=MatrixPower[AD,3]
S3=MatrixPower[AD,4]
S4=MatrixPower[AD,5]
S5=IdentityMatrix[6]

A1=1+((k r^4)/Dn)
A0=-(k r^4)/Dtt
A2=2

Q1=(A1/3)-(A2^2/9)
R2=((A1 A2-3 A0)/6)-(A2^3/27)
ATA=R2-(Q1^3+R2^2)^(1/2)
SS1=N[(R2+(Q1^3+R2^2)^(1/2))^(1/3)]
SE2=N[(-(-R2+(Q1^3+R2^2)^(1/2))^(1/3))]
SE3=N[(R2-(Q1^3+R2^2)^(1/2))^(1/3)]
SS2=If[ATA<0,SE2,SE3]
AS1=(SS1+SS2)
AS2=(SS1-SS2)
AF1=N[AS1-(A2/3)]
F11=N[-(Sqrt[3]/2) AS2]
F22=N[-(AS1/2)-(A2/3)]
QQ3=F11/F22
QQ=N[ArcTan[QQ3]]
RR=N[(F11^2+F22^2)^(1/2)]
SI=N[Sin[QQ/2]]
CO=N[Cos[QQ/2]]

```

$$RR1=N[RR^{(1/2)}]$$

$$AF=Sqrt[AF1]$$

$$a=N[RR1 \text{ SI}]$$

$$b=N[RR1 \text{ CO}]$$

$$R1 = 64*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4)$$

$$C1 = 2*AF*(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4)$$

$$TA=2/R1$$

$$K1 = 16*a^2*AF^2*b^2*(a^2 + b^2)*(-2*a^2 + AF^2 + 2*b^2)$$

$$K2 = 8*a^2*AF^2*b^2*(-5*a^4 + 3*a^2*AF^2 + 10*a^2*b^2 - AF^2*b^2 - b^4)$$

$$K3 = 32*a^2*b^2*(a^4 - b^4)$$

$$K4 = 8*a^2*b^2*(5*a^4 - AF^4 - 10*a^2*b^2 + b^4)$$

$$K5 = -16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)$$

$$K6 = 8*a^2*b^2*(-3*a^2 + AF^2 + b^2)$$

$$T1 = 8*a^2*AF^2*b^2*(a^2 + b^2)*(-a^4 + a^2*AF^2 + 6*a^2*b^2 - AF^2*b^2 - b^4)$$

$$T2 = 8*a^2*AF^2*b^2*(-a^4 + a^2*AF^2 + 10*a^2*b^2 - 3*AF^2*b^2 - 5*b^4)$$

$$T3 = 8*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - AF^4 - 6*a^2*b^2 + b^4)$$

$$T4 = 8*a^2*b^2*(a^4 - AF^4 - 10*a^2*b^2 + 5*b^4)$$

$$T5 = 8*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(-a^2 + AF^2 + b^2)$$

$$T6 = 8*a^2*b^2*(-a^2 + AF^2 + 3*b^2)$$

$$N1 = (-2*AF*(a^2 + b^2)^2*Cosh[AF*q])/C1$$

$$N2 = (-2*(a^2 + b^2)^2*Sinh[AF*q])/C1$$

$$N3 = (4*AF*(a^2 - b^2)*Cosh[AF*q])/C1$$

$$N4 = (4*(a^2 - b^2)*Sinh[AF*q])/C1$$

$$N5 = (-2*AF*Cosh[AF*q])/C1$$

$$N6 = (-2*Sinh[AF*q])/C1$$

$$M1=2 \text{ TA } ((\text{Cos}[b \text{ q}] \text{ Cosh}[a \text{ q}] K1)-(\text{Sin}[b \text{ q}] \text{ Sinh}[a \text{ q}] T1))$$

$$M2=2 \text{ TA } ((\text{Cos}[b \text{ q}] \text{ Sinh}[a \text{ q}] K2)-(\text{Sin}[b \text{ q}] \text{ Cosh}[a \text{ q}] T2))$$

$$M3=2 \text{ TA } ((\text{Cos}[b \text{ q}] \text{ Cosh}[a \text{ q}] K3)-(\text{Sin}[b \text{ q}] \text{ Sinh}[a \text{ q}] T3))$$

$$M4=2 \text{ TA } ((\text{Cos}[b \text{ q}] \text{ Sinh}[a \text{ q}] K4)-(\text{Sin}[b \text{ q}] \text{ Cosh}[a \text{ q}] T4))$$

$$M5=2 \text{ TA } ((\text{Cos}[b \text{ q}] \text{ Cosh}[a \text{ q}] K5)-(\text{Sin}[b \text{ q}] \text{ Sinh}[a \text{ q}] T5))$$

$$M6=2 \text{ TA } ((\text{Cos}[b \text{ q}] \text{ Sinh}[a \text{ q}] K6)-(\text{Sin}[b \text{ q}] \text{ Cosh}[a \text{ q}] T6))$$

$$Z1=N1+M1$$

$$Z2=N2+M2$$

$$Z3=N3+M3$$

$$Z4=N4+M4$$

$$Z5=N5+M5$$

$$Z6=N6+M6$$

$$TASMT1=N[(Z1 \text{ S5}+Z2 \text{ AD}+Z3 \text{ S1}+Z4 \text{ S2}+Z5 \text{ S3}+Z6 \text{ S4})]$$

$$TASMT=Simplify[TASMT1]$$

$$\text{Save}["CIK3",TASMT]$$

EK F
PROGRAM 4

```

q=
k=
bn=
hn=
r=
nu=
e=
IX=(bn*hn^3)/12
G=e/(2*(1+nu))
Dt=(G*h*bn^3)/3
Dn=e*IX
a=k r
b=r/Dn
c=r/Dt
AD={{0,-r,0,0,0,0},{0,0,-1,b,0,0},{0,1,0,0,c,0},
    {0,0,0,0,-1,r},{0,0,0,1,0,0},{a,0,0,0,0,0}}
S1=MatrixPower[AD,2]
S2=MatrixPower[AD,3]
S3=MatrixPower[AD,4]
S4=MatrixPower[AD,5]
S5=IdentityMatrix[6]
OZDEG=Det[AD-S5 X]
DER=Solve[OZDEG==0,X]
M1=DER[[1,1]]
M2=DER[[2,1]]
M3=DER[[3,1]]
M4=DER[[4,1]]
M5=DER[[5,1]]
M6=DER[[6,1]]
CIK=Solve[{0==A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5-
N[Exp[Re[X] q]] N[(Cos[Im[X] q]+I Sin[Im[X] q])]/.M1,
0==A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5-
N[Exp[Re[X] q]] N[(Cos[Im[X] q]+I Sin[Im[X] q])]/.M2,
0==A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5-
N[Exp[Re[X] q]] N[(Cos[Im[X] q]+I Sin[Im[X] q])]/.M3,
0==A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5-
N[Exp[Re[X] q]] N[(Cos[Im[X] q]+I Sin[Im[X] q])]/.M4,
0==A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5-
N[Exp[Re[X] q]] N[(Cos[Im[X] q]+I Sin[Im[X] q])]/.M5,
0==A+A1 X+A2 X^2+A3 X^3+A4 X^4+A5 X^5-
N[Exp[Re[X] q]] N[(Cos[Im[X] q]+I Sin[Im[X] q])]/.M6},{A,A1,A2,A3,A4,A5}]

TASMT1=N[(A S5+A1 AD+A2 S1+A3 S2+A4 S3+A5 S4)/.CIK]
TASMT=Simplify[TASMT1]
Save["CIK4",TASMT]

```

EK G
CIKTI 4

$$Z1 = ((-2*a^4*AF - 4*a^2*AF*b^2 - 2*AF*b^4)*\cosh[AF*q])/(2*AF*(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4)) + ((-32*a^6*AF^2*b^2 + 16*a^4*AF^4*b^2 + 16*a^2*AF^4*b^4 + 32*a^2*AF^2*b^6)*\cos[b*q]*\cosh[a*q] - (-8*a^7*AF^2*b + 8*a^5*AF^4*b + 40*a^5*AF^2*b^3 + 40*a^3*AF^2*b^5 - 8*a*AF^4*b^5 - 8*a*AF^2*b^7)*\sin[b*q]*\sinh[a*q])/(16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4))$$

$$Z2 = (-((-8*a^6*AF^2*b + 8*a^4*AF^4*b + 80*a^4*AF^2*b^3 - 24*a^2*AF^4*b^3 - 40*a^2*AF^2*b^5)*\cosh[a*q]*\sin[b*q]) + (-40*a^5*AF^2*b^2 + 24*a^3*AF^4*b^2 + 80*a^3*AF^2*b^4 - 8*a*AF^4*b^4 - 8*a*AF^2*b^6)*\cos[b*q]*\sinh[a*q])/(16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4)) + ((-2*a^4 - 4*a^2*b^2 - 2*b^4)*\sinh[AF*q])/(2*AF*(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4))$$

$$Z3 = ((4*a^2*AF - 4*AF*b^2)*\cosh[AF*q])/(2*AF*(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4)) + ((32*a^6*b^2 - 32*a^2*b^6)*\cos[b*q]*\cosh[a*q] - (8*a^7*b - 8*a^3*AF^4*b - 40*a^5*b^3 - 8*a*AF^4*b^3 - 40*a^3*b^5 + 8*a*b^7)*\sin[b*q]*\sinh[a*q])/(16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4))$$

$$Z4 = (-((8*a^6*b - 8*a^2*AF^4*b - 80*a^4*b^3 + 40*a^2*b^5)*\cosh[a*q]*\sin[b*q]) + (40*a^5*b^2 - 8*a*AF^4*b^2 - 80*a^3*b^4 + 8*a*b^6)*\cos[b*q]*\sinh[a*q])/(16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4)) + ((4*a^2 - 4*b^2)*\sinh[AF*q])/(2*AF*(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4))$$

$$\begin{aligned}
 Z5 = & -(\text{Cosh}[AF*q]/(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - \\
 & 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4)) + \\
 & ((-16*a^4*b^2 - 16*a^2*b^4)*\text{Cos}[b*q]*\text{Cosh}[a*q] - \\
 & (-8*a^5*b + 8*a^3*AF^2*b + 8*a*AF^2*b^3 + \\
 & 8*a*b^5)*\text{Sin}[b*q]*\text{Sinh}[a*q])/ \\
 & (16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + \\
 & AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z6 = & (-((-8*a^4*b + 8*a^2*AF^2*b + 24*a^2*b^3)* \\
 & \text{Cosh}[a*q]*\text{Sin}[b*q]) + (-24*a^3*b^2 + \\
 & 8*a*AF^2*b^2 + 8*a*b^4)*\text{Cos}[b*q]*\text{Sinh}[a*q])/ \\
 & (16*a^2*b^2*(a^2 + b^2)*(a^4 - 2*a^2*AF^2 + \\
 & AF^4 + 2*a^2*b^2 + 2*AF^2*b^2 + b^4)) - \\
 & \text{Sinh}[AF*q]/(AF*(-a^4 + 2*a^2*AF^2 - AF^4 - \\
 & 2*a^2*b^2 - 2*AF^2*b^2 - b^4))
 \end{aligned}$$



CIKTI 5

$$S11 = Z1$$

$$S12 = -r*Z2 + r*Z4 - r*Z6$$

$$S13 = r*(Z3 - Z5)$$

$$S14 = (r^2*(-Dt*Z3 + Dn*Z5 + 2*Dt*Z5))/(Dn*Dt)$$

$$S15 = ((Dn + Dt)*r^2*(Z4 - 2*Z6))/(Dn*Dt)$$

$$S16 = (r^3*(-Dt*Z4 + Dn*Z6 + 2*Dt*Z6))/(Dn*Dt)$$

$$S21 = 0$$

$$S22 = Z1 - Z3 + Z5$$

$$S23 = -Z2 + Z4 - Z6$$

$$S24 = (r*Z2)/Dn - (2*r*Z4)/Dn - (r*Z4)/Dt + (3*r*Z6)/Dn + (2*r*Z6)/Dt$$

$$S25 = ((Dn + Dt)*r*(-Z3 + 2*Z5))/(Dn*Dt)$$

$$S26 = (r^2*(Dt*Z3 - Dn*Z5 - 2*Dt*Z5))/(Dn*Dt)$$

$$S31 = 0$$

$$S32 = Z2 - Z4 + Z6$$

$$S33 = Z1 - Z3 + Z5$$

$$S34 = ((Dn + Dt)*r*(Z3 - 2*Z5))/(Dn*Dt)$$

$$S35 = (r*(Dn*Z2 - 2*Dn*Z4 - Dt*Z4 + 3*Dn*Z6 + 2*Dt*Z6))/(Dn*Dt)$$

$$S36 = ((Dn + Dt)*r^2*(Z4 - 2*Z6))/(Dn*Dt)$$

$$S41 = 0$$

$$S42 = 0$$

$$S43 = 0$$

$$S44 = Z1 - Z3 + Z5$$

$$S45 = -Z2 + Z4 - Z6$$

$$S46 = r*Z2 - r*Z4 + r*Z6$$

$$S51 = 0$$

$$S52 = 0$$

$$S53 = 0$$

$$S54 = Z2 - Z4 + Z6$$

$$S55 = Z1 - Z3 + Z5$$

$$S56 = r*(Z3 - Z5)$$

$$S61 = 0$$

$$S62 = 0$$

$$S63 = 0$$

$$S64 = 0$$

$$S65 = 0$$

$$S66 = Z1$$

CIKTI 6

$T11 = 1$
 $T12 = -(r * \sin[q])$
 $T13 = 2 * r * \sin[q/2]^2$
 $T14 = (r^2 * (Dn - Dn * \cos[q] - (Dn * q * \sin[q])/2 - (Dt * q * \sin[q])/2)) / (Dn * Dt)$
 $T15 = -((Dn + Dt) * r^2 * (q * \cos[q] - \sin[q])) / (2 * Dn * Dt)$
 $T16 = (r^3 * (2 * Dn * q + Dn * q * \cos[q] + Dt * q * \cos[q] - 3 * Dn * \sin[q] + Dt * \sin[q])) / (2 * Dn * Dt)$
 $T21 = 0$
 $T22 = \cos[q]$
 $T23 = -\sin[q]$
 $T24 = (r * (Dn * q * \cos[q] + Dt * q * \cos[q] - Dn * \sin[q] + Dt * \sin[q])) / (2 * Dn * Dt)$
 $T25 = -((Dn + Dt) * q * r * \sin[q]) / (2 * Dn * Dt)$
 $T26 = (r^2 * (-Dn + Dn * \cos[q] + (Dn * q * \sin[q])/2 + (Dt * q * \sin[q])/2)) / (Dn * Dt)$
 $T31 = 0$
 $T32 = \sin[q]$
 $T33 = \cos[q]$
 $T34 = ((Dn + Dt) * q * r * \sin[q]) / (2 * Dn * Dt)$
 $T35 = (r * (Dn * q * \cos[q] + Dt * q * \cos[q] + Dn * \sin[q] - Dt * \sin[q])) / (2 * Dn * Dt)$
 $T36 = -((Dn + Dt) * r^2 * (q * \cos[q] - \sin[q])) / (2 * Dn * Dt)$
 $T41 = 0$
 $T42 = 0$
 $T43 = 0$
 $T44 = \cos[q]$
 $T45 = -\sin[q]$
 $T46 = r * \sin[q]$
 $T51 = 0$
 $T52 = 0$
 $T53 = 0$
 $T54 = \sin[q]$
 $T55 = \cos[q]$
 $T56 = 2 * r * \sin[q/2]^2$
 $T61 = 0$
 $T62 = 0$
 $T63 = 0$
 $T64 = 0$
 $T65 = 0$
 $T66 = 1$

$$\begin{aligned} \text{AF} = & \{(-2 + (2^{1/3}) * \text{Dn}^{1/2} * \text{Dt}^{1/3})) / (2 * \text{Dn}^{3/2} * \text{Dt} + \\ & 27 * \text{Dn}^{3/2} * \text{k} * \text{r}^4 + 18 * \text{Dn}^{1/2} * \text{Dt} * \text{k} * \text{r}^4 + \\ & 3^{1/2} * (4 * \text{Dn}^3 * \text{Dt} * \text{k} * \text{r}^4 + 4 * \text{Dn}^2 * \text{Dt}^2 * \text{k} * \text{r}^4 + \\ & 27 * \text{Dn}^3 * \text{k}^2 * \text{r}^8 + 36 * \text{Dn}^2 * \text{Dt} * \text{k}^2 * \text{r}^8 + \\ & 8 * \text{Dn} * \text{Dt}^2 * \text{k}^2 * \text{r}^8 + 4 * \text{Dt}^2 * \text{k}^3 * \text{r}^{12})^{1/2})^{1/3} - \\ & (3 * 2^{1/3} * \text{Dt}^{1/3} * \text{k} * \text{r}^4) / (\text{Dn}^{1/2} * (2 * \text{Dn}^{3/2} * \text{Dt} + \\ & 27 * \text{Dn}^{3/2} * \text{k} * \text{r}^4 + 18 * \text{Dn}^{1/2} * \text{Dt} * \text{k} * \text{r}^4 + \\ & 3^{1/2} * (4 * \text{Dn}^3 * \text{Dt} * \text{k} * \text{r}^4 + 4 * \text{Dn}^2 * \text{Dt}^2 * \text{k} * \text{r}^4 + \\ & 27 * \text{Dn}^3 * \text{k}^2 * \text{r}^8 + 36 * \text{Dn}^2 * \text{Dt} * \text{k}^2 * \text{r}^8 + \\ & 8 * \text{Dn} * \text{Dt}^2 * \text{k}^2 * \text{r}^8 + 4 * \text{Dt}^2 * \text{k}^3 * \text{r}^{12})^{1/2})^{1/3}) + \\ & (2 * \text{Dn}^{3/2} * \text{Dt} + 27 * \text{Dn}^{3/2} * \text{k} * \text{r}^4 + \\ & 18 * \text{Dn}^{1/2} * \text{Dt} * \text{k} * \text{r}^4 + 3^{1/2} * (4 * \text{Dn}^3 * \text{Dt} * \text{k} * \text{r}^4 + \\ & 4 * \text{Dn}^2 * \text{Dt}^2 * \text{k} * \text{r}^4 + 27 * \text{Dn}^3 * \text{k}^2 * \text{r}^8 + \\ & 36 * \text{Dn}^2 * \text{Dt} * \text{k}^2 * \text{r}^8 + 8 * \text{Dn} * \text{Dt}^2 * \text{k}^2 * \text{r}^8 + \\ & 4 * \text{Dt}^2 * \text{k}^3 * \text{r}^{12})^{1/2})^{1/3} / (2^{1/3} * \\ & \text{Dn}^{1/2} * \text{Dt}^{1/3}))^{1/2} / 3^{1/2} \} \end{aligned}$$

$$AF1 = a + i b$$

$$\begin{aligned} AF1 = & \{ (-2/(3) * Dn^{(1/2)} * Dt^{(1/3)}) / (2 * Dn^{(3/2)} * Dt + \\ & 27 * Dn^{(3/2)} * k * r^4 + 18 * Dn^{(1/2)} * Dt * k * r^4 + \\ & 3^{(3/2)} * (4 * Dn^3 * Dt * k * r^4 + 4 * Dn^2 * Dt^2 * k * r^4 + \\ & 27 * Dn^3 * k^2 * r^8 + 36 * Dn^2 * Dt * k^2 * r^8 + \\ & 8 * Dn * Dt^2 * k^2 * r^8 + 4 * Dt^2 * k^3 * r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)} - \\ & (I^2 * 2^{(1/3)} * 3^{(1/2)} * Dn^{(1/2)} * Dt^{(1/3)}) / (2 * Dn^{(3/2)} * Dt + \\ & 27 * Dn^{(3/2)} * k * r^4 + 18 * Dn^{(1/2)} * Dt * k * r^4 + \\ & 3^{(3/2)} * (4 * Dn^3 * Dt * k * r^4 + 4 * Dn^2 * Dt^2 * k * r^4 + \\ & 27 * Dn^3 * k^2 * r^8 + 36 * Dn^2 * Dt * k^2 * r^8 + \\ & 8 * Dn * Dt^2 * k^2 * r^8 + 4 * Dt^2 * k^3 * r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)} + \\ & (3 * 2^{(1/3)} * Dt^{(1/3)} * k * r^4) / (Dn^{(1/2)} * (2 * Dn^{(3/2)} * Dt + \\ & 27 * Dn^{(3/2)} * k * r^4 + 18 * Dn^{(1/2)} * Dt * k * r^4 + \\ & 3^{(3/2)} * (4 * Dn^3 * Dt * k * r^4 + 4 * Dn^2 * Dt^2 * k * r^4 + \\ & 27 * Dn^3 * k^2 * r^8 + 36 * Dn^2 * Dt * k^2 * r^8 + \\ & 8 * Dn * Dt^2 * k^2 * r^8 + 4 * Dt^2 * k^3 * r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)}) + \\ & (I^2 * 2^{(1/3)} * 3^{(3/2)} * Dt^{(1/3)} * k * r^4) / (Dn^{(1/2)} * \\ & (2 * Dn^{(3/2)} * Dt + 27 * Dn^{(3/2)} * k * r^4 + \\ & 18 * Dn^{(1/2)} * Dt * k * r^4 + 3^{(3/2)} * (4 * Dn^3 * Dt * k * r^4 + \\ & 4 * Dn^2 * Dt^2 * k * r^4 + 27 * Dn^3 * k^2 * r^8 + \\ & 36 * Dn^2 * Dt * k^2 * r^8 + 8 * Dn * Dt^2 * k^2 * r^8 + \\ & 4 * Dt^2 * k^3 * r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)}) - \\ & (2 * Dn^{(3/2)} * Dt + 27 * Dn^{(3/2)} * k * r^4 + \\ & 18 * Dn^{(1/2)} * Dt * k * r^4 + 3^{(3/2)} * (4 * Dn^3 * Dt * k * r^4 + \\ & 4 * Dn^2 * Dt^2 * k * r^4 + 27 * Dn^3 * k^2 * r^8 + \\ & 36 * Dn^2 * Dt * k^2 * r^8 + 8 * Dn * Dt^2 * k^2 * r^8 + \\ & 4 * Dt^2 * k^3 * r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4*Dt^2*k^3*r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)}/(2^{(1/3)}*Dn^{(1/2)}*Dt^{(1/3)}) + (I^{3^{(1/2)}}*(2*Dn^{(3/2)}*Dt + \\
& 27*Dn^{(3/2)}*k*r^4 + 18*Dn^{(1/2)}*Dt*k*r^4 + \\
& 3^{(3/2)}*(4*Dn^3*Dt*k*r^4 + 4*Dn^2*Dt^2*k*r^4 + \\
& 27*Dn^3*k^2*r^8 + 36*Dn^2*Dt*k^2*r^8 + \\
& 8*Dn*Dt^2*k^2*r^8 + 4*Dt^2*k^3*r^{12})^{(1/2)})^{(1/3)})/ \\
& (2^{(1/3)}*Dn^{(1/2)}*Dt^{(1/3)}))^{(1/2)}/6^{(1/2)}\}
\end{aligned}$$



ÇIKTI 8

q=2 Grad.
k=10 ton/m²
b=1.5 m
h=1.5 m
R=8 m
E=2700000 ton/m²
γ=0.3

0.9836	-7.2213	11.310	-0.000032	0.000081	-0.00033
0.0033	-0.43013	-0.9027	-3.74 10E-6	-0.00001	0.000032
0.00376	0.89752	-0.41191	0.00001	-5.926 E-6	0.000081
904.773	-4454.893	2594.123	-0.43013	-0.89752	7.2213
697.575	-2594.123	1125.705	0.9027	-0.41191	11.310
159.410	-904.773	697.575	-0.0033	0.00376	0.9836

EK I

Bu programda örnek data hazırlaması ve bu dataların çıkış dosyasında nasıl elde edildiği; Bölüm 4.3' te çözülen örneğin giriş ve çıkış datalarının çok geniş hacim kaplamasından dolayı [25] nolu kaynağın 271-275 nolu sayıfasındaki problem çözülmüştür.

Giriş dosyası hazırlanırken şu adımlar izlenmelidir;

1. Bilgisayarda açılan dosyanın birinci satırından boşluk bırakmadan giriş bilgileri yazılmaya başlanmalıdır.
2. İlk satıra; sistemin serbestlik derecesi,
3. İkinci bölümde; sistemin rijitlik matrisi,
4. Üçüncü bölümde; sistemin kütle matrisi,
5. Dördüncü bölümde; ilk iterasyona başlanması için gerekli serbestlik derecesi kadar, matris formunda q_i değeri

Program çalıştırıldığında, çıkışlar şu komutlarla istenilen şekilde muhafaza edilir.

CON=Çıkışları ekrana yazar

PRN=Çıkışları printer' e yazar

DOSYA İSMİ=Çıktıları belirtilen dosyaya kaydeder

Giriş için=DOSYA İSMİ.CIK

Çıkış için=DOSYA İSMİ.DAT

****INPUT DATA****

3
 43.68136760445903,-99.5859553842771,74.14084368660364
 -99.5859553842771,272.9119931379327,-283.3414832240996
 74.1408436866036,-283.3414832240995,491.3463027021339
 0.1667,0,0
 0,0.3333,0
 0,0,0.3333
 1,1,1

****OUTPUT****

**** RIJITLIK MATRISI ****

43.681366	-99.585953	74.140846
-99.585953	272.911987	-283.341492
74.140846	-283.341492	491.346313

**** KUTLE MATRISI ****

0.166700	0.000000	0.000000
0.000000	0.333300	0.000000
0.000000	0.000000	0.333300

**** DINAMIK MATRISI ****

0.055511	0.057594	0.016465
0.028806	0.032930	0.010299
0.008235	0.010299	0.004133

OZDEGER 1= 0.089311

OZDEGER 2= 0.002800

OZDEGER 3= 0.000456

**** OZVEKTOR ****

1.000000	1.000000	1.000000
0.540538	-0.699872	-1.670859
0.162048	-0.730885	2.290804


```

COLOR 0,3:CLS:LOCATE 12,25
INPUT "DATA DOSYASININ ADI : ",FILE$
LOCATE 13,25
INPUT "CIKIS DOSYASININ ADI : ",FCIK$
OPEN FCIK$ FOR OUTPUT AS #1
OPEN FILE$ FOR INPUT AS #2
INPUT #2,NMOD
  DIM S0(NMOD, NMOD), A(NMOD, NMOD), B(NMOD, NMOD), q(NMOD,
1), q0(NMOD, 1)
  DIM C0(NMOD, NMOD), D(NMOD, NMOD), C(NMOD, NMOD), Fi(NMOD,
NMOD)
  DIM M(NMOD, NMOD), DELTA(NMOD), S(NMOD, NMOD)
PRINT #1,:PRINT #1,:PRINT #1,
PRINT #1,:PRINT #1,:PRINT #1,
  FOR ART = 0 TO NMOD-1
  IF ART>0 THEN GOSUB 1500
  IF ART>0 THEN GOTO 20
  FOR I = 1 TO NMOD
  FOR J = 1 TO NMOD
  IF I = J THEN
    S0(I,J)=1
    GOTO 2
  END IF
  S0(I, J) = 0
2 NEXT J, I
  IF ART=0 THEN
  PRINT #1,TAB(15)"**** RIJITLIK MATRISI ****"
  FOR I = 1 TO NMOD
  FOR J = 1 TO NMOD
    INPUT #2, A(I,J)
    PRINT #1,USING "#####.#####";A(I,J);
  NEXT J:PRINT #1,:NEXT I
  PRINT #1,:PRINT #1,:PRINT #1,
  REM *** MATRIS INVERSI ALMA***
  FOR I=1 TO NMOD
  FOR J=1 TO NMOD
  FOR K=1 TO NMOD
  IF J=I OR K=I THEN GOTO 180
  A(J,K)=A(J,K)-A(J,I)*A(I,K)/A(I,I)
  180 NEXT K:NEXT J
  A(I,I)=-1/A(I,I)
  FOR J=1 TO NMOD
  IF J=I THEN GOTO 230
  A(J,I)=A(J,I)*A(I,I)
  230 NEXT J
  FOR J=1 TO NMOD
  IF J=I THEN GOTO 270
  A(I,J)=A(I,J)*A(I,I)
  270 NEXT J:NEXT I

```

```

FOR I=1 TO NMOD
FOR J=1 TO NMOD
A(I,J)=-A(I,J)
NEXT J,I
PRINT #1,TAB(15)"**** KUTLE MATRISI ****"
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
INPUT #2, M(I, J)
PRINT #1,USING"#####.#####";M(I,J);
NEXT J:PRINT #1,:NEXT I
PRINT #1,:PRINT #1,:PRINT #1,
FOR I=1 TO NMOD
FOR J=1 TO NMOD
B(I,J)=M(I,J)
NEXT J
NEXT I
GOSUB 1000
FOR I=1 TO NMOD
FOR J=1 TO NMOD
D(I,J)=C(I,J)
NEXT J:NEXT I
PRINT #1,TAB(15)"**** DINAMİK MATRISI ****"
FOR I=1 TO NMOD
FOR J=1 TO NMOD
PRINT #1,USING"#####.#####";D(I,J);
NEXT J:PRINT #1,:NEXT I
PRINT #1,:PRINT #1,:PRINT #1,
FOR I = 1 TO NMOD
INPUT #2, q0(I, 1)
NEXT I
END IF
GOTO 21
20 FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
S0(I, J) =INT(S(I, J)*1000)/1000
NEXT J
q0(I,1)=1
q(I,1)=0
NEXT I
21 FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
A(I, J) = D(I, J)
NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
B(I, J) = S0(I, J)
NEXT J
NEXT I

```

```

31 GOSUB 1000
  FOR I=1 TO NMOD
    FOR J=1 TO NMOD
      C0(I,J)=C(I,J)
    NEXT J
  NEXT I
5  IT=IT+1:MX=0
  FOR I = 1 TO NMOD
    B(I, 1) = q0(I, 1)
  NEXT I
  FOR I = 1 TO NMOD
    FOR J = 1 TO NMOD
      A(I, J) = C0(I, J)
    NEXT J
  NEXT I
  GOSUB 2000 :KA=0
  FOR I = 1 TO NMOD
    SEM=INT(C(I,1)*100)/100
    KEM=INT(q(I,1)*100)/100
    MX=C(1,1):OD=C(1,1)
    IF SEM=KEM THEN KA=KA+1
  NEXT I
  IF KA= NMOD THEN GOTO 12
  FOR I=1 TO NMOD
    q(I,1)=C(I,1)
  NEXT I
  FOR I=1 TO NMOD
    C(I,1)=C(I,1)/MX
  NEXT I
  FOR I=1 TO NMOD
    q0(I,1)=C(I,1)
  NEXT I
  GOTO 5
12 AA = ART + 1
  PRINT #1,TAB(15);USING"OZDEGER ##=####.#####";AA;OD
  FOR I = 1 TO NMOD
    Fi(I,AA) = q0(I, 1)
  NEXT I
  FOR I=1 TO NMOD
    FOR J=1 TO NMOD
      S(I,J)=S0(I,J)
    NEXT J,I
  NEXT ART
  PRINT #1,:PRINT #1,:PRINT #1,
  PRINT #1,TAB(20)"** OZVEKTOR **"
  PRINT #1,
  FOR I=1 TO NMOD
    FOR J=1 TO NMOD
      PRINT #1,USING"#####.#####";Fi(I,J);

```

```

NEXT J:PRINT #1,:NEXT I
500 STOP
END
1000 REM BU PROGRAM MATRIS CARPIMI YAPAR
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
C(I,J)=0
NEXT J,I
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
FOR K = 1 TO NMOD
C(I, J) = C(I, J) + A(I, K) * B(K, J)
NEXT K
NEXT J
NEXT I
RETURN
1500 REM *S* MATRISININ OLUSTURULMASI
FOR I = 1 TO NMOD
B(I, 1) = Fi(I,ART)
NEXT I
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
A(I, J) = M(I, J)
NEXT J
NEXT I
GOSUB 2000
FOR I = 1 TO NMOD
A(I, 1) = C(I,1)
NEXT I
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
C(I, J) =0
NEXT J
NEXT I
FOR I = 1 TO NMOD
FOR J = 1 TO NMOD
C(I, J) =S0(I, J)*A(I,1)
NEXT J
NEXT I
REM ****DELTALARIN OLUSUMU****
FOR I=1 TO NMOD
DELTA(I)=0
NEXT I
FOR I=1 TO NMOD
FOR J=1 TO NMOD
DELTA(I)=C(J,I)+DELTA(I)
NEXT J
NEXT I
FOR I=1 TO NMOD

```

```

    S(I,ART)=0
  NEXT I
  FOR J=ART+1 TO NMOD
    S(ART,J)=-1*DELTA(J)/DELTA(ART)
  NEXT J
  FOR I=1 TO ART
    FOR J=ART+1 TO NMOD
      S(I,J)=S0(I,J)+S(ART,J)*S0(I,ART)
    NEXT J,I
  RETURN
2000 REM BU PROGRAM MATRIS CARPIMI YAPAR
  FOR I = 1 TO NMOD
    FOR J = 1 TO NMOD
      C(I,J)=0
    NEXT J,I
    FOR I = 1 TO NMOD
      FOR J = 1 TO 1
        FOR K = 1 TO NMOD
          C(I, J) = C(I, J) + A(I, K) * B(K, J)
        NEXT K
      NEXT J
    NEXT I
  RETURN

```

□

ÖZGEÇMİŞ

Semir ZUBAROĞLU, 1969 yılında Mersin'de doğdu. İlköğretimini Mersin Devrim İlkokulunda 1981'de bitirdi. Orta öğrenimini Mersin Tevfik Sırrı Gür Lisesi'nde 1987 yılında tamamladı.

1987 yılında Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünü kazandı. 1989 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne yatay geçiş yaptı. 1991'de İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, yapı bölümü, Mekanik programında yüksek lisansa başladı. 1991-93 yılları arasında Tekfen Mühendislik A.Ş. de üst yapı grubu, Proje Mühendisi olarak çalıştı. İngilizce ve Arapça bilmektedir.