

ÜSTEL MATRİS YAKLAŞTIRIMINDA
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem YAMAN

Anabilim Dalı: Bilişim
Programı: Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Mayıs 2003

ÜSTEL MATRİS YAKLAŞTIRIMINDA
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİM
UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İrem YAMAN

702011006

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003

Tezin Savunulduğu Tarih : 5 Haziran 2003

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Hasan DAĞ

Doç. Dr. N. Abdülbaki BAYKARA (M.Ü)

Mayıs 2003

ÖNSÖZ

Tezin her aşamasında benden deneyimlerini ve yolgösterimlerini esirgemeyen, yüksek lisans eğitimim boyunca akademik gelişimime, bilimsel ve sosyal anlamda çok önemli katkıları bulunan değerli hocam Metin Demiralp'e, bana tezimi hazırlamam için gerekli ortamı sağlayan Bilişim Enstitüsü Müdürlüğü'ne, Enstitü'nün tüm öğretim üyelerine ve çalışma arkadaşlarıma, ilgisi ve teşvikleriyle bugüne gelmemi sağlayan değerli hocam N. Abdülbaki Baykara'ya ve bana her zaman destek olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Mayıs 2003

İrem YAMAN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1 GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Amacı	1
1.2 Üstel Matris Belirleme Yordamları	1
1.2.1 Serisel Yöntemler	3
1.2.2 Sıradan Türevli Denklem Yöntemleri	4
1.2.3 Çokterimlisel Yöntemler	6
1.2.4 Matris Ayırıklaştırma Yöntemleri	10
1.2.5 Parçalama Yöntemleri	14
1.3 Yüksek Boyutlu Model Gösterilim	15
1.4 Evrim Operatörleri ve YBMG	18
2 SIFIRINCI BASAMAK YBMG YAKLAŞTIRIMI	21
3 BİRİNCİ BASAMAK YBMG YAKLAŞTIRIMI	24
4 UYGULAMA - 1	33
5 UYGULAMA - 2	44
6 ÇOK DEĞİŞTİRGENLİ SAPTIRIM AÇILIMLARI	52
7 UYGULAMA - 3	58
7.1 Örnek - 1	61
7.2 Örnek - 2	62
8 DEĞERLENDİRME	63

KAYNAKLAR	65
------------------	----

EKLER

A UYGULAMA - 1'DEKİ SERİ AÇILIMLARI	67
--	----

B UYGULAMA - 3'DEKİ ÖRNEKLER İÇİN YAPILAN HESAPLAR	76
---	----

C LIE OPERATÖRÜNÜN ETKİSİNİN GÖSTERİLİMİ	78
---	----

KISALTMALAR

YBMG	Yüksek Boyutlu Model Gösterilim
JKF	Jordan Kanonik Form

SEMBOL LİSTESİ

$\mathcal{P}$	İzdüşüm Operatörü
Q	Üstel Evrim Operatörü
Ω	Lie Evrim Operatörü
$\mathbf{I}$	Birim matris
$\mathbf{e}$	Birim vektör
δ	Kronecker Delta fonksiyonu
∇	Gradient Operatör
$\mathcal{L}$	Laplace Operatörü
$\mathbf{0}$	Sıfır matrisi

ÖZET

Çok değişkenli fonksiyonların işlenmesinin getirdiği zorluklardan kurtulmanın bir yolu, fonksiyonu daha az değişken içeren birtakım fonksiyonlar cinsinden ifade edip, gerçek fonksiyon yerine bu parçalanmış fonksiyon yapıları ile ilgilenmektir. Bu şekildeki bir parçalama işlemi, çok sayıda değişken ile uğraşmak yerine, bu kez daha az sayıda değişken içeren fakat çok sayıda fonksiyon ile uğraşmamızı gerektirir. Bu işlem ilk bakışta esas fonksiyon ile uğraşmaktan daha giderli görünse de, fonksiyon için gerçek değer elde etmekten çok yaklaşık değerler üzerinde duracağımızdan, ilgilenmemiz gereken fonksiyon sayısını da istediğimiz duyarlılık doğrultusunda sınırlı tutabiliriz.

Bu çalışmada, doğrusal bir Lie operatörünü argüman olarak içeren çok değişkenli üstel evrim operatörünün bilineer fonksiyona etkisiyle elde edilen bir üstel matrisi, yapısında bulunan matrisi parçalara ayırarak inceleyeceğiz. Burada, yukarıda bahsettiğimiz çok değişkenli fonksiyon matrisi, değişkenler de matrisin elemanlarını temsil etmektedir. Çalışmada üzerinde durulacak olan özel bir parçalara ayırma işlemi ile, matrisi elemanları cinsinden parçalara ayırıp, elde ettiğimiz yeni matris yapıları ile ilgileneceğiz. Üstel matris hesabı için bu yöntemle yeni bir çözüm geliştirip, çözümün doğruluğu özel matrisler aracılığıyla gösterilecek ve genel yapıdaki matrisler için de matrisin boyutu büyüdükçe büyük kuvvet içeren terimleri sıfıra giden bir serisel açılım şeklinde çözüm elde edilecektir.

Yapılan çalışma, kuramı elde edilmiş bir yöntemi çeşitli matris yapılarına uygulayıp, sonuçları karşılaştırmaktan çok, yeni bir yöntemin kuramını elde etmeye ve bu kuramın doğruluğunu kanıtlamaya yöneliktir.

SUMMARY

One way to get rid of the difficulties arising when dealing with multivariate functions is to represent the original function in terms of some other functions which contain fewer variables. This transformation process enables us to work with more than one functions containing fewer variables instead of the single original function. At first glance, this process may seem computationally a little bit more expensive, but since we will be dealing with approximation rather than exact solution for the function, the number of functions to be created can be adjusted for the desired accuracy.

In this work, we investigate High Dimensional Model Representation (HDMR) of exponential matrix by resolving it into rather simple partitions. This is done via an indirect approach where a multivariate exponential evolution operator which contains a linear Lie operator as an argument is applied on a bilinear function. Here, the multivariate functions characterize the matrix while the variables represent the elements of the matrix. A special separation process that will be the focus of this study is used to resolve the matrix into components and we will deal with these components. We develop a new method for the calculation of exponential matrix. The approach is tested with the help of special matrices and a series expansion whose high power terms approach to zero as the dimension of the matrices increases is introduced for general matrices.

In this study, the presented new approach is aimed to verify that the theory behind the approach works without any remarkable conceptual difficulty rather than applying a verified approach to various matrix structures and comparing the results.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmada son yıllarda birçok uygulama alanı bulmuş olan ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilim, YBMG, (High Dimensional Model Representation, HDMR) olarak adlandırılan bir yöntemin üstel matris belirlemede kullanımı için bir yöntem ve ona bağımlı bir belirleme yordamı geliştirmeye çalışılmaktadır. Çalışma yöntembilim niteliklidir. Amacın salt yöntem geliştirme olması nedeniyle, bu çalışma kuramsal tabanlı bir içeriktedir. Analitik incelemeler ve tasarımlarla, geliştirilen yöntemin yetenekleri kestirilmeye çalışmakta ve bu kestirimlere bakarak etkinleştirme olanakları araştırılmaktadır. Ama bu çalışmayı izleyebilecek başka çalışmalarla yöntemi yüksek başarılı hesaplama alanına çekmek kuşkusuz mümkündür.

Burada önce üstel matris belirleme ile ilgili anlatımlara yer verilmekte, daha sonra ise YBMG ile ilgili bir giriş yapılmaktadır. Girişi izleyen bölümlerde üstel matris belirleme için YBMG kullanımı ve bu yoldan oluşturulan yaklaşıtlar verilmektedir. Yaklaşıtlar en çok birinci basamağa kadar verilmektedir. Ancak bulgular daha yüksek basamaklara çıkıldığında neyle karşılaşılacağıının öngörülerini vermeye yeterlidir. Bu arada, Çok Değiştirgenli Saptırım Açılımı ile ilgili bir bölüm de ayrılmakta ve daha sonra bu açılımla YBMG açılımının kuramsal karşılaştırmaları verilmektedir.

1.2 Üstel Matris Belirleme Yordamları

Doğal bilim dallarının çoğunda ve mühendislikteki modellemeler sonucu ortaya çıkan azımsanmayacak sayıda matematiksel sorunlar değişmez katsayılı, türevli doğrusal denklem dizgeleri içerirler. Bunların genel yapısı aşağıdaki biçimde verilebilir [1].

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (1.1)$$

Burada $\mathbf{A}$, bilinen, gerçel veya karmaşık sayı değerli, $n \times n$ bir matrisi, $\mathbf{x}(t)$ ise, elde etmeye çalıştığımız ve aşağıdaki başlangıç koşulunu sağlayan çözüm

vektörünü göstermektedir.

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.2)$$

Yukarıdaki türevli denklem dizgesinin çözümü, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ ile verilir. Burada, $\mathbf{I}$ birim matrisi göstermek üzere, $e^{\mathbf{A}t}$ aşağıda verilen ve t 'nin tüm sonlu değerleri için yakınsak olan kuvvet serisiyle tanımlanır.

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \dots \quad (1.3)$$

$e^{\mathbf{A}t}$ 'nin hesaplanması için yaklaştırım kuramı ve matris kuramının sonuçlarından çok sayıda yöntem üretilebilir. Yöntemlerin bazıları özel belirleme yordamları (algorithms) olarak önerilmektedir. Bazıları ise pek o kadar da yararlı olmayan kişiliklendirmelere (characterization) dayandırılmıştır.

Farklı belirleme yordamları arasında en etkin olanını bulmak için önem sırasına göre, genellik, güvenilirlik, kararlılık, doğruluk, verim, bellek gerekliliği, kullanım kolaylığı ve yalınlık gibi verilmiş nitelikler üzerinde durmak gerekir. Bu nitelikler taban alındığında, bilinen hiçbir belirleme yordamı bütünüyle doyurucu değildir, ama bazı yöntemler, özelliklerinin çokluğu açısından diğerlerinden daha iyidir.

Genellik, yöntemin geniş bir matris sınıfı için kullanılabilir olmasıdır. Örneğin, yalnızca ayırık özdeğerleri olan matrisler için çalışan bir yöntem, kullanışlı sayılmaz.

Güvenilirlik, kararlılık ve doğruluk kavramlarını tanımlarken, sorunun doğasındaki duyarlılık ile çözümde kullanılacak belirleme yordamının yanılğı özelliklerini birbirinden ayırmak önem kazanır. Örneğin, tekilliğe yatkın bir matrisin tersini alma işlemi, doğasında duyarlılığa önem veren bir işlemdir. Sonlu duyarlılıkta aritmetikle çalışan hiçbir belirleme yordamı büyük yanılğılar oluşturmada bu ters alma işlemini gerçekleştiremez.

Belirleme yordamı, çok büyük yanılğılar üretirken bir takım uyarı duyurumları (message) veriyorsa güvenilirdir. Örneğin, pivotlama olmadan yapılan Gauss Yokedimi (elimination) güvenilir olmayan bir belirleme yordamıdır. Büyük çarpanlar tarafından oluşan yuvarlatma yanılğıları sonuçta çok büyük yanılğılar oluşturabilir ve bu durumla ilgili hiçbir uyarı duyurumunda bulunmaz.

Belirleme yordamı, saptırımlar (perturbations) sonucu sorunun doğasında varolan yanılğibirikiminden daha çoğunu üretmiyorsa kararlıdır. Parçalı veya tam pivotlamayla yapılan Gauss Yokedimi kararlı değildir. Matris elemanlarının yokedim sırasında büyümesi ve sonuçta oluşan yuvarlatma yanılğılarının asıl verilerle karşılaştırıldığında büyük olma olasılığı vardır.

Belirleme yordamının doğruluğu, sonlu serinin kesilmesiyle veya yinelemenin sonlandırılmasıyla oluşan yanılğıyla ilgilidir. Örneğin denklem

dizgesini çözmede kullanılan yinelemeli yöntemin doğruluğu, yineleme sayısı değiştirilerek denetim altına alınabilir.

Verim, belirli bir sorunu çözerken gereken bilgisayar zamanı ile ölçülür. Sıkça bilinen yöntemlerden daha çok zaman gerektiren bir yöntem, verimsiz sayılabilir.

Şimdi, $e^{\mathbf{A}}$ 'yı hesaplamak için bugüne kadar üretilmiş çeşitli yöntemler üzerinde duralım.

1.2.1 Serisel Yöntemler

Serisel olarak nitelendirdiğimiz yöntemler, ölçekleyici (scalar) fonksiyon e^t 'nin benimsenegelen (standard) yaklaştırım tekniğinin matrislere uygulamasıdır. Bu yöntemlerde, matrisin boyutu ve özdeğerleri doğrudan bir etkinlik üstlenmez.

Yöntem-1: Taylor Serisi

Tanım:

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots \quad (1.4)$$

Verimliliği bir an için gözardı edersek, yeni bir terim eklendiğinde bilgisayarda kilerlenen sayılar değişmemeye başlayana kadar toplama işlemine devam ederek, serinin toplamını elde edebiliriz. Eğer,

$$T_k(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^k \frac{\mathbf{A}^j}{j!} \quad (1.5)$$

tanımı yapılırsa, ve $fl[T_k(\mathbf{A})]$, $T_k(\mathbf{A})$ 'yı kayar noktalı aritmetikte elde ederken belirlenen kayar noktalı sayıların oluşturduğu matris olduğu öngörülürse, bu durumda k , $fl[T_k(\mathbf{A})] = fl[T_{k+1}(\mathbf{A})]$ olacak şekilde elde edilir ve $e^{\mathbf{A}}$ için $T_k(\mathbf{A})$ yaklaştırım olarak alınır. Burada, seriyi nerede kestiğimiz ve kullandığımız aritmetik önem kazanır. fl simgesi, belirli basamakta alt sınır koyma anlamına gelmektedir.

Yöntem-2: Padé Yaklaştırımı

$e^{\mathbf{A}}$ matrisi için (p, q) Padé Yaklaştırımı, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathbf{R}_{pq}(\mathbf{A}) = [\mathbf{D}_{pq}(\mathbf{A})]^{-1} \mathbf{N}_{pq}(\mathbf{A}) \quad (1.6)$$

Burada $\mathbf{D}_{pq}$ ve $\mathbf{N}_{pq}$ matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\mathbf{N}_{pq}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^p \frac{(p+q-j)!p!}{(p+q)!j!(p-j)!} \mathbf{A}^j \quad (1.7)$$

$$\mathbf{D}_{pq}(\mathbf{A}) = \sum_{j=0}^q \frac{(p+q-j)!q!}{(p+q)!j!(q-j)!} (-\mathbf{A})^j \quad (1.8)$$

$\mathbf{D}_{pq}$ 'nin tekil olmaması, p ve q 'nin yeterince büyük olması veya $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerlerinin eksi olması durumunda güvenilirlerdir.

Yuvarlatma yanılgıları, Padé Yaklaşımını güvenilir olmaktan çıkarır.

Padé Yaklaşımını, $\|\mathbf{A}\|$ 'nin çok büyük olmadığı durumlarda kullanılır. Bu durumda köşegen yaklaşıtlarlar ($p = q$), köşegen dışı yaklaşıtlara ($p \neq q$) yeğlenir.

Yöntem-3: Ölçekleme ve Kareleme

Taylor ve Padé Yaklaşıtlarındaki yuvarlatma yanılgılarının zorlukları ve hesaplama maliyeti, $t\|\mathbf{A}\|$ veya $\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerlerinin yayılması arttıkça artar. Bütün bu özellikler, üstel fonksiyon için temel bir özellik yazılarak denetim altına alınabilir.

$$e^{\mathbf{A}} = \left(e^{\frac{\mathbf{A}}{m}}\right)^m \quad (1.9)$$

Buradaki düşünce, m 'yi 2'nin bir kuvveti olarak seçmeye dayanır, öyle ki $e^{\frac{\mathbf{A}}{m}}$ güvenilir ve verimli bir şekilde hesaplansın. m 'nin, $\frac{\|\mathbf{A}\|}{m} \leq 1$ olmak üzere, 2'nin küçük bir kuvveti olarak alınması yaygın olarak başvurulmuş bir eylemdir. Böyle bir seçimle $e^{\frac{\mathbf{A}}{m}}$, Taylor ve Padé Yaklaşıtları'ndan daha doyurucu olarak hesaplanır.

Yöntem-4: Chebyshev Oransal Yaklaşımı

$c_{qq}(x)$, dereceleri q olan iki çokterimlinin oranı olsun. Farklı q değerleri için c_{qq} 'nin katsayıları, $\max_{0 \leq x < \infty} |c_{qq}(x) - e^{-x}|$ değerini en küçük yapacak şekilde bulunabilir. Eğer $\mathbf{A}$, Hermite türü matris ise ve özdeğerleri eksi gerçel eksen üzerindeyse bu yapı $\mathbf{A}$ matrisine uygulanabilir. Eğer $\mathbf{A}$ matrisi Hermite türü değilse, $c_{qq}(\mathbf{A})$ 'nin $e^{\mathbf{A}}$ 'yı ne kadar iyi yaklaştırdığını belirlemek zordur. Eğer $\mathbf{A}$ 'nın eksi gerçel eksen üzerinde λ diye bir özdeğeri varsa, c_{qq} , e^λ için zayıf bir yaklaşım olabilir. Bu durumda,

$$\|e^{\mathbf{A}} - c_{qq}(\mathbf{A})\| \geq |e^\lambda - c_{qq}(\lambda)| \quad (1.10)$$

olduğu sürece $c_{qq}(\mathbf{A})$ da $e^{\mathbf{A}}$ için zayıf bir yaklaşım olabilir.

1.2.2 Sıradan Türevli Denklem Yöntemleri

$e^{t\mathbf{A}}$ ve $e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$, sıradan türevli denklemlerin çözümleri olduklarından sayısal integrasyona dayanan yöntemler üretmek, doğal bir eğilimdir. $e^{t\mathbf{A}}$ 'yı hesaplamak için kullanılan, tek adım, çok adım ve kapalı çok adım bağıntılarına dayandırılan yöntemlerin hepsi çok kolaydır ve basit bir programcılık gerektirir. Fakat kötü tarafları bilgisayar zamanını çok tüketmeleridir.

Sıradan türevli denklem belirleme yordamları aşağıdaki dizgeyi değişik t değerleri için çözmeyi amaçlamaktadır.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.11)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ seçimiyle, $e^{t\mathbf{A}}$ 'nın k . sütunu birim matrisin k . sütununa $\mathbf{x}_0$ koyarak elde edilen vektörü başlangıç değeri olarak kullanmak yoluyla belirlenir. Tüm yöntemler, $0 = t_0, t_1, \dots, t_j = t$ değerlerinin bir sırasını ve değişmez veya değişken adım aralığı, $h_i = t_{i+1} - t_i$ 'yi içerirler ve $\mathbf{x}(t_i)$ 'ye yaklaştıran $\mathbf{x}_i$ 'yi üretirler.

Yöntem-5: Genel, Sıradan Türevli Denklem Çözücüleri

Çoğu bilgisayar kitaplıkları, başlangıç değerli sıradan türevli denklemleri çözmek için bir takım program parçacıkları içerirler. Çok az sayıda kitaplık $e^{t\mathbf{A}}$ 'yı hesaplayacak program parçası içerir. Eğer bilgisayar kitaplığındaki türevli denklem çözücüler kolay kullanılabilir durumdaysa, $e^{t\mathbf{A}}$ 'yı hesaplamak için en kolay yol, bu program parçasını çağırmaktır. Eğer türevli denklem çözen alt program, sorunumuzun doğrusal ve değişmez katsayılı olma yapısından dolayı bir kolaylık sağlamıyorsa, bu yöntem çok pahalıdır.

Yöntem-6: Tek Adım Sıradan Türevli Denklem Çözücüleri

Değişmez adım aralıklı, dördüncü basamak Taylor ve Runge Kutta yöntemleri, türevli denklem çözmede kullanılan klasik tekniklerdir. Özel denkleminiz için bu yöntemler aşağıdaki biçimde incelenebilir.

$$\mathbf{x}_{j+1} = \left(\mathbf{I} + h\mathbf{A} + \dots + \frac{h^4}{4!}\mathbf{A}^4 \right) \mathbf{x}_j = \mathbf{T}_4(h\mathbf{A})\mathbf{x}_j \quad (1.12)$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4 \quad (1.13)$$

Burada,

$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{A}\mathbf{x}_j$, $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{A}(\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1)$, $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{A}(\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2)$, $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{A}(\mathbf{x}_j + \mathbf{k}_3)$ şeklindedir. Adım aralığı sabit oldukça $\mathbf{T}_4(h\mathbf{A})$ matrisi bir kez hesaplanır, $\mathbf{x}_{j+1}$ 'de $\mathbf{x}_j$ kullanılarak tek bir matris vektör çarpımından elde edilir.

Özel bir t , örneğin $t = 1$ için ve $h = \frac{1}{m}$ alarak $\mathbf{x}(t)$ 'yi düşünelim.

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}(mh) \simeq \mathbf{x}_m = [\mathbf{T}_4(h\mathbf{A})]^m \mathbf{x}_0 \quad (1.14)$$

Bu yöntem ile ölçekleme, kareleme yöntemi arasında yakın bir ilişki vardır. Ölçeklenmiş matris $h\mathbf{A}$ ile temsil edilmekte, onun üsteli ise $\mathbf{T}_4(h\mathbf{A})$ ile yaklaşılmaktadır. Bu yöntem, benzer yuvarlatma yanılgıları özellikleri taşır. Buradan da anlaşılacağı gibi değişmez adım aralıklı Runge Kutta yönteminin sağladığı önemli bir yarar yoktur.

Değişken adım aralığı kullanılmak istense bu kez, adım aralığının ne olması gerektiği sorusu önem kazanır. Bunun için basit bir belirleme yordamı

değişken adımlı Taylor yöntemine dayandırılabilir. Bu yöntemde, $\mathbf{x}_{j+1}$ için iki yaklaştırım değeri alınır ve bunların farkı adım aralığı olarak seçilir. Eğer ε , yerel yanılıgıkatlanılabilirliği (tolerance) olarak seçilirse, $\mathbf{x}_{j+1}$ ve $\mathbf{x}_{j+1}^*$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{T}_5(h_j \mathbf{A}) \mathbf{x}_j \quad (1.15)$$

$$\mathbf{x}_{j+1}^* = \mathbf{T}_4(h_j \mathbf{A}) \mathbf{x}_j \quad (1.16)$$

h_j 'yi belirlemenin bir yolu,

$$\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_{j+1}^*\| \simeq \varepsilon \|\mathbf{x}_j\| \quad (1.17)$$

olduğunu önermektir. Bu arada önemli olan nokta, yaklaştırım hesabı için beşinci, denetim için dördüncü basamak bağıntılarının kullanılmakta olmasıdır. Yukarıdaki eşitliklerden yararlanılarak,

$$\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_{j+1}^* = \frac{h_j \mathbf{A}^5}{5!} \mathbf{x}_j \quad (1.18)$$

ve

$$h_j = \left[\frac{5! \varepsilon}{\|\mathbf{A}^5\|} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (1.19)$$

elde edilir.

Yöntem-7: Çok Adım Sıradan Türevli Denklem Çözücüler

Doğrusal, değişmez katsayılı problemler için özelleştirilmiş Adams formülleri ölçekleme ve kareleme yöntemine karşılık gelmezler, çünkü verilen bir zamanda elde edilen yaklaşık çözüm önceki zamanlarda elde edilmiş yaklaşık çözümler türünden tanımlanır. Algoritma, başlangıç vektörünün seçimine, basamağın ve adımaralığının belirlenmesine bağlıdır.

1.2.3 Çokterimlisel Yöntemler

$\mathbf{A}$ 'nın kişiliksel çokterimlisi (characteristic polynomial), aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$c(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \quad (1.20)$$

Cayley-Hamilton teoremine göre, $c(\mathbf{A}) = 0$ 'dır. Yani,

$$\mathbf{A}^n = c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} + \cdots + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \quad (1.21)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan, $\mathbf{A}$ 'nın her kuvvetinin $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ terimleri türünden yazılabileceği söylenebilir.

$$\mathbf{A}^k = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj} \mathbf{A}^j \quad (1.22)$$

$e^{t\mathbf{A}}$ 'nın matematiksel anlatımı, $\mathbf{A}$ ve t türünden bir çokterimli olarak verilebilir.

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mathbf{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj} \mathbf{A}^j \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj} \frac{t^k}{k!} \right] \mathbf{A}^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) \mathbf{A}^j \end{aligned} \quad (1.23)$$

Yöntem-8: Cayley-Hamilton

Kişiliksel çokterimli biliniyorsa, $\alpha_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj} \frac{t^k}{k!}$ analitik fonksiyonunu tanımlayan β_{kj} katsayıları aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$\beta_{kj} = \begin{cases} \delta_{kj}, & k < n \\ c_j, & k = n \\ c_0 \beta_{k-1, n-1}, & (k > n, j = 0) \\ c_j \beta_{k-1, n-1} + \beta_{k-1, j-1}, & (k > n, j > 0) \end{cases} \quad (1.24)$$

Buradaki zorluk, β_{kj} için elde edilen özyineli bağıntıların yuvarlatma yanılığını (round-off error accumulation) eğilimli olmasıdır. Diğer bir zorluk da kişiliksel çokterimlinin biliniyor olmasının gerekliliğidir. Eğer $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ biliniyorsa, kişiliksel çokterimli, $c(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)$ şeklinde hesaplanabilir. Özdeğerler doğru hesaplanırsa bile c_j 'nin uygun sonuç verip vermeyeceği belirgin değildir. Buradan anlaşılabileceği üzere, $\mathbf{A}$ 'nın yinelenen kuvvetlerine ve c_j için çeşitli bakışık (symmetric) fonksiyonların oluşturduğu bağıntılara dayanan yöntemler, yuvarlatma yanılığının oluşması ve uygulama ederyüksekliği (high expense) açısından kararlı değildir.

Bu yöntem, $e^{t\mathbf{A}}$ 'nın $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ matrisleri türünden oluşturulabileceğini söyler. Eğer $(\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_{n-1})$, aynı alt uzaya taban olan farklı bir matris kümesi ise, aşağıdaki şekilde $\beta_j(t)$ analitik fonksiyonları oluşturulabilir.

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j(t) \mathbf{A}_j \quad (1.25)$$

Bu bağıntının uygunluğu, $\mathbf{A}_j$ ve β_j 'nin ne kadar kolay genelleştirilebileceğine bağlıdır. Eğer $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri biliniyorsa, aşağıdaki üç yöntemden sözedilebilir.

Yöntem-9: Lagrange İnterpolasyonu

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\lambda_j t} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})}{(\lambda_j - \lambda_k)} \quad (1.26)$$

Yöntem-10: Newton İnterpolasyonu

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda_1 t} \mathbf{I} + \sum_{j=2}^n [\lambda_1, \dots, \lambda_j] \prod_{k=1}^{j-1} (\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) \quad (1.27)$$

$[\lambda_1, \dots, \lambda_j]$ özyineli olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \quad (1.28)$$

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}] = \frac{[\lambda_1, \dots, \lambda_k] - [\lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}]}{\lambda_1 - \lambda_{k+1}}, \quad k \geq 2 \quad (1.29)$$

Yöntem-11: Vandermonde Matrisi Yöntemi

9. yöntemde önerilen,

$$\mathbf{A}_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})}{(\lambda_j - \lambda_k)} \quad (1.30)$$

matrislerinin hesaplanması için farklı yöntemler vardır. Bunlardan bir tanesi Vandermonde matrisini kullanır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Eğer v_{jk} , $\mathbf{V}^{-1}$ 'in (j, k) . elemanı ise,

$$\mathbf{A}_j = \sum_{k=1}^n v_{jk} \mathbf{A}^{k-1} \quad (1.32)$$

ve

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} \mathbf{A}_j \quad (1.33)$$

yazılabilir. 9., 10. ve 11. yöntemler, küçük n seçimi dışında ederyüksekliliği getiren, $O(n^4)$ mertebesinde işlem içerirler.

Yöntem-12: Ters Laplace Dönüşümü

Eğer $\mathcal{L}[e^{t\mathbf{A}}]$, üstel matrisin ters Laplace dönüşümü ise,

$$\mathcal{L}[e^{t\mathbf{A}}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (1.34)$$

yazılabilir.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^{n-k-1}}{c(s)} \mathbf{A}_k \quad (1.35)$$

Burada, $c(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k s^k$ ve $k = 1, \dots, n$ için:

$$c_{n-k} = \frac{-iz(\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A})}{k}, \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A} - c_{n-k}\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{I} \quad (1.36)$$

Bu özyineli ilişkiler $e^{t\mathbf{A}}$ 'yı üretmek için kullanılırsa,

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{n-k-1}}{c(s)} \right] \mathbf{A}_k \quad (1.37)$$

elde edilir. Ters Laplace dönüşümü, $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^{n-k-1}}{c(s)} \right]$ t 'nin kuvvet serisi olarak elde edilebilir. Genel yapıdaki matrisler için işlem sayısı, $O(n^4)$ düzeyindedir ve yuvarlatma yanılgılarının belirleme yordamı üzerinde önemsenmesi gereken etkileri vardır.

Yöntem-13: Eşleşik Matris Yöntemi

Burada, tanımı aşağıda verilen $\mathbf{C}$ matrisi (eşleşik matris, companion matrix) için $e^{\mathbf{C}}$ 'yi hesaplama yöntemi üzerinde durulacaktır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Eşleşik matris aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\mathbf{C}$, seyrek matristir.
2. $\mathbf{C}$ 'nin kişiliksel çokterimlisi, $c(z) = z^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k$ 'dir.
3. Eğer $\mathbf{V}$, $\mathbf{C}$ 'nin özdeğerlerinden oluşan Vandermonde matrisi ise $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}$ Jordan formundadır.
4. Eğer $\mathbf{A}$, indirgeyici (derogatory) matris değilse, ya Eşleşik matrise ya da Eşleşik matrislerin doğrudan toplamına (direct sum) benzerdir.

$\mathbf{C}$, seyrek matris olduğundan küçük kuvvetleri n^3 'den daha az işlem gerektirir. Eğer $\mathbf{C}$ 'nin kişiliksel çokterimlisi biliniyorsa, c_k 'nın özyineli bağıntılarını içeren yöntemler kullanılabilir.

Eğer $\mathbf{A} = \mathbf{Y}\mathbf{C}\mathbf{Y}^{-1}$ yapısında ise,

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{Y}e^{\mathbf{C}}\mathbf{Y}^{-1} \quad (1.39)$$

yazılabilir. Buradan, 4. özellik genel yapıdaki bir matrisin üstelini bulmada yol gösterir. Eğer, birinci basamaktan türevli denklem dizgesi olarak yazılmış, n . basamaktan orijinal tek bir türevli denklem varsa, oluşan matris Eşleşik formdadır.

$\mathbf{H}$, alt Hessenberg yapısında ($h_{ij} = 0, j > i + 1$) bir matris olmak üzere, $\mathbf{A}$ matrisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{H}\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (1.40)$$

Buradan,

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}\mathbf{e}^{\mathbf{H}}\mathbf{Q}^T \quad (1.41)$$

yazılabilir. $f_k, \mathbf{e}^{\mathbf{H}}$ 'nin k . sütununu temsil etsin. Aşağıdaki eşitlik, $\mathbf{H}\mathbf{e}^{\mathbf{H}} = \mathbf{e}^{\mathbf{H}}\mathbf{H}$ eşitliğindeki k . sütunları eşitlemek yoluyla, kolayca yazılabilir.

$$\mathbf{H}f_k = \sum_{i=k-1}^n h_{ik}f_i, \quad k \geq 2 \quad (1.42)$$

Süperköşegen üzerindeki $h_{k-1,k}$ elemanlarının hiçbirisi sıfır olmadığı ve f_n bilindiği sürece diğer f_k 'lar aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$f_{k-1} = \frac{1}{h_{k-1,k}} \left[\mathbf{H}f_k - \sum_{i=k}^n h_{ik}f_i \right] \quad (1.43)$$

Benzer özyineli işlemler, $\mathbf{e}^{\mathbf{C}}$ 'yi hesaplamak için de önerilebilir.

Belirleme yordamını, herhangi bir $h_{k-1,k}$ elemanının sıfır olması durumunda düzeltmenin yolları vardır. Sorun, $h_{k-1,k}$ 'nin çok küçük fakat gözardı edilemez olması durumunda ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, $\frac{1}{h_{k-1,k}}$ çarpanı içeren yuvarlatma yanılgıları, $\mathbf{e}^{\mathbf{H}}$ 'yi tam olarak hesaplamaya engel olacak şekilde ortaya çıkarlar.

Özet olarak, $\mathbf{A}$ 'yı Eşleşik veya Hessenberg matrisine dönüştürerek, $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ 'yı hesaplamak çok ilgi çekici bir yöntem değildir. Fakat başka matris çarpanlarına ayırma yöntemleri kullanılarak $\mathbf{e}^{\mathbf{A}}$ doyurucu bir şekilde elde edilebilir.

1.2.4 Matris Ayırıklaştırma Yöntemleri

Matris ayırıklaştırmasına dayanan yöntemler, büyük matrisler ve $\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}$ 'nın yinelenen değerlendirilmesini içeren problemler için verimli yöntemlerdir. Eğer $\mathbf{A}$ simetrikse bütün bu yöntemler son derece basit ve verimli duruma dönüşür. Tüm matris ayırıklaştırmaları aşağıdaki formda bir basitleştirme dönüşümüne dayanırlar.

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} \quad (1.44)$$

Daha önceden de sözü edildiği gibi,

$$\mathbf{e}^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}\mathbf{S}^{-1} \quad (1.45)$$

Buradaki mantık, $\mathbf{e}^{t\mathbf{B}}$ 'nin kolay hesaplanacağı bir $\mathbf{S}$ matrisi bulmaktır. Zorluk ise $\mathbf{S}$ 'nin tekile yakın bir matris olma olasılığıdır ki bu da $\text{cond}(\mathbf{S})$ 'nin büyük olması

demektir. Burada, $cond(\mathbf{S})$, $\mathbf{S}$ matrisinin koşul sayısıdır (condition number) ve $cond(\mathbf{S}) = \|\mathbf{S}\| \|\mathbf{S}^{-1}\|$ eşitliğiyle verilir.

Yöntem-14: Özvektörler

Basit bir yaklaşımla olarak $\mathbf{S}$, kolonları $\mathbf{A}$ 'nın özvektörlerinden oluşan bir matris olarak seçilebilir ($\mathbf{S} = \mathbf{V}$)

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 | \cdots | \mathbf{v}_n] \quad (1.46)$$

ve

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.47)$$

Bu n tane denklem,

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{D} \quad (1.48)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 'dir. Ölçekleyen üstelini bulmak için uygun bir yöntem varsa, $\mathbf{D}$ 'nin de üsteli eşsiz olarak hesaplanabilir.

$$e^{t\mathbf{D}} = diag(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \quad (1.49)$$

Eğer $\mathbf{V}$ tekil değilse,

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{V} e^{t\mathbf{D}} \mathbf{V}^{-1} \quad (1.50)$$

yazılabilir. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$ türevli denkleminin çözümü ve eşlik eden başlangıç koşulu, aynı özvektör yaklaşımıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j \quad (1.51)$$

ve

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j \quad (1.52)$$

α_j 'ler $\mathbf{V} \alpha = \mathbf{x}(0)$ türevli denklem kümesinin çözülmesiyle elde edilir.

Bu yöntemin zorluğu katlı (confluent) özdeğer içermemesinin gerekliliğidir. Yöntem simetrik matrislerde iyi çalışır. Çünkü simetrik matrislerin özvektörleri, katlı özdeğerlerde kendiliğinden dik olarak oluşmasalar da birbirlerine dik seçilebilir. Başka bir zorluk da $\mathbf{A}$ 'nın doğrusal bağımsız özvektörlerden oluşan tam bir kümesinin olmaması durumunda ortaya çıkar.

Eksiklikli (defective) bir matrisin katlı özdeğerleri olacağı kesindir ama katlı özdeğerleri olan her matris eksiklikli olmak zorunda değildir. Uygulamada zorluk, $\mathbf{A}$ matrisinin neredeyse eksiklikli (nearly defective) olduğu durumda ortaya çıkar. Eğer $\mathbf{A}$ bu tür bir matris ise $cond(\mathbf{V})$ çok büyük olur (sonsuz). Özdeğerleri hesaplamadan kaynaklanan en küçük bir yanılğı, sonuçta $cond(\mathbf{V})$ tarafından çok büyütülür. Özel olarak $cond(\mathbf{V})$ büyükse, $e^{t\mathbf{A}}$ hesabı sayısal doğruluktan uzaklaşır.

9. yöntemle verilen Lagrange İnterpolasyonu ile özdeğerleri kullanma arasında ilişki vardır. Özdeğerler ayrıksa özvektör yaklaşımını,

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{V} \text{diag} (e^{\lambda_j t}) \mathbf{V}^{-1} = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} \mathbf{v}_j \mathbf{y}_j^T \quad (1.53)$$

şeklindedir. Burada, $\mathbf{y}_j$, $\mathbf{V}^{-1}$ 'in j . satırıdır.

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{\lambda_j t} \mathbf{A}_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})}{(\lambda_j - \lambda_k)} \quad (1.54)$$

$$\mathbf{A}_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I})}{(\lambda_j - \lambda_k)} \quad (1.55)$$

$e^{t\mathbf{A}}$ için verilen iki eşitlikte, karşılık gelen matrisler eşitlenirse,

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{v}_j \mathbf{y}_j^T \quad (1.56)$$

elde edilir.

Yöntem-15: Özvektörlerin Üçgensel Sistemleri

Geleneksel özvektör yaklaşımındaki verim ve güvenilirliği iyileştirmenin bir yolu, özvektörleri $\mathbf{QR}$ ayrıştırmasını kullanarak belirlemektir. $\mathbf{A}$ matrisi simetrik olmasa bile özdeğerleri gerçel olabilir. Böyle olduğu düşünülürse, $\mathbf{Q}$ dönme matrisi, $\mathbf{T}$ üçgensel matris olmak üzere

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{T} \quad (1.57)$$

yazılabilir. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ise istenen özdeğerler, $\mathbf{T}$ 'nin köşegeni üzerinde oluşur. $\mathbf{D}$ köşegen matris olmak üzere,

$$\mathbf{T} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{D} \quad (1.58)$$

yazılabilir ve $\mathbf{A}$ 'nın özvektörleri $\mathbf{V} = \mathbf{QR}$ çarpımından elde edilir. Burada $\mathbf{R}$ üst üçgenseldir.

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ matrisleri ile ilgilenmenin iki önemli yararı vardır. Birincisi, $\mathbf{V}$ 'nin tersini bulmak veya $\mathbf{V}$ 'yi içeren dizgeleri çözmek için gereken zaman gereksinimini azaltır. Fakat bu zaman, tüm zamanın ufak bir parçası ise verimdeki düzeltme işlemi çok da önemli değildir. Başka bir önemli getiri ise, $\text{cond}(\mathbf{V}) = \text{cond}(\mathbf{R})$ olması ve $\text{cond}(\mathbf{R})$ için yapılan değerlendirmenin güvenilir ve verimli olmasıdır. $\text{cond}(\mathbf{R})$, çözüm bulunduktan sonra sonuçtaki yanlışları saptayabilmemizi sağlıyorsa, belirleme yordamı güvenilirdir.

Eğer $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri gerçel değilse, $\mathbf{R}$ matrisi üçgensel olmaktan çıkar fakat köşegeninde, her sanal eşlenik için 2×2 'lik bloklar barındırır. Bu tür matrislere yarıüçgensel matris denir.

Yöntem-16: Jordan Kanonik Formu

Eksiklikli (defective) dizgeler Jordan Kanonik Form'una (JKF) başvurularak çözülebilir. Eğer,

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} [\mathbf{J}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{J}_k] \mathbf{P}^{-1} \quad (1.59)$$

$\mathbf{A}$ 'nın JKF'u ise

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P} [e^{t\mathbf{J}_1} \oplus \cdots \oplus e^{t\mathbf{J}_k}] \mathbf{P}^{-1} \quad (1.60)$$

yazılabilir. Jordan bloklarının üsteli kapalı formda yazılabilir. Örneğin eğer,

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

ise

$$e^{t\mathbf{J}_i} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

şeklindedir. Zorluk, JKF'unun kayar nokta aritmetiği kullanılarak hesaplanamamasından kaynaklanır. Tek bir yuvarlatma yanlıgısı çeşitli özdeğerlerin yapısını değiştirebilir ki bu da $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{P}$ 'nin tam yapısında değişim yaratabilir. Bu bağlamda, diğer bir sorun da $\text{cond}(\mathbf{P})$ 'ye açık bir bağımlılığın olmamasıdır.

Yöntem-17: Schur Ayrıklaştırması

$\mathbf{A}$ matrisinin özdeğerleri gerçelse, Schur Ayrıklaştırması,

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad (1.63)$$

şeklinde verilir. Burada, $\mathbf{Q}$ ortogonal, $\mathbf{T}$ de üçgensel matristir. Eğer $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri gerçel değilse, $\mathbf{T}$ 'nin köşegeni üzerinde oluşan ikili blokları hesaba katmak veya $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{T}$ 'yi sanal yapmak ve $\mathbf{Q}^T$ 'yi $\mathbf{Q}^*$ ile değiştirmek gereklidir.

Schur Ayrıştırması,

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{Q}e^{t\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T \quad (1.64)$$

şeklinde yazılabilir.

Buradaki en ince nokta, $\mathbf{T}$ üçgensel veya yarıüçgensel olduğunda $e^{t\mathbf{T}}$ 'nin hesaplanmasıdır. Burada, $\mathbf{A}$ 'nın özdeğerlerine gereksinim yoktur.

Eğer $\mathbf{T}$, köşegeninde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ olan üst üçgensel matris ise $e^{t\mathbf{T}}$ 'nin de köşegeninde $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ olan üstüçgensel bir matris olacağını görmek

zor değildir. Buradaki zorluk, neredeyse çakışan özdeğerlerden kaynaklanan yuvarlatma yanılığının büyümesidir. Katlı özdeğerler köşegen blokta özel teknikler uygulanacak şekilde tutulabilir.

Yöntem-18: Blok Köşegen

Ayrıklaştırmayı içeren tüm yöntemler, aşağıdaki formdadır.

$$\mathbf{A} = \mathbf{SBS}^{-1} \quad (1.65)$$

Burada, üzerinde durulması gereken iki konu vardır.

1. $e^{t\mathbf{B}}$ 'nin kolay hesaplanabilmesi için $\mathbf{B}$ 'nin köşegene yakın yapıda bir matris olarak seçilmesi,
2. $\mathbf{S}$ 'nin yanılığları büyütmemek için iyi koşullanmış (well conditioned) seçilmesidir.

Jordan Kanonik Formu ilk konuya, Schur Ayrıklaştırılması, ikinci konuya ağırlık verir. Blok Köşegen yöntemi, bu iki önemli konunun karışımı şeklindedir. Buradaki amaç, dik olmayan ama iyi koşullanmış bir $\mathbf{S}$ matrisi ile üçgensel ve blok köşegen $\mathbf{B}$ matrisini oluşturmaktır. $\mathbf{B}$ 'deki her blok neredeyse katlı özdeğerlerden oluşan bir salkım içerir. Her bloğun boyutu, $\text{cond}(\mathbf{S}) < 100$ koşulunu sağlayacak şekilde, mümkün olduğu kadar küçük seçilir. Üst sınırın 100 olarak seçimi, $e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{S}e^{t\mathbf{B}}\mathbf{S}^{-1}$ eşitliği kullanılarak $e^{t\mathbf{B}}$ 'den $e^{t\mathbf{A}}$ 'nın hesaplanması sırasında oluşan yuvarlatma yanılığları yüzünden kabaca iki basamağın kaybolması anlamına gelmektedir. Çarpanlara ayırma ve $e^{t\mathbf{B}}$ 'yi oluşturma işlemlerinde, daha yüksek bir sınır kaybolan basamak sayısının artmasına, daha alçak bir sınır da bilgisayar zamanının çok artmasına yol açmaktadır. Uygulamada genellikle 1×1 veya 2×2 'lik bloklar kullanılarak hızlı bir hesaplama beklenir.

1.2.5 Parçalama Yöntemleri

Üstel matrisin toplamsallık kuralı aşağıda verilmektedir.

$$e^{t\mathbf{B}}e^{t\mathbf{C}} = e^{t(\mathbf{B}+\mathbf{C})} \Leftrightarrow \mathbf{BC} = \mathbf{CB} \quad (1.66)$$

Genel olarak,

$$e^{(\mathbf{B}+\mathbf{C})} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{\mathbf{B}}{m}} e^{\frac{\mathbf{C}}{m}} \right)^m \quad (1.67)$$

olarak hesaplanabilir.

Yöntem-19: Parçalama

$e^{\mathbf{A}}$ 'yı yaklaştırmak için, $\mathbf{A}$ 'yı $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ 'ye parçalayarak (splitting), aşağıdaki yaklaştırmayı kullanılabilir.

$$e^{\mathbf{A}} \simeq \left(e^{\frac{\mathbf{B}}{m}} e^{\frac{\mathbf{C}}{m}} \right)^m \quad (1.68)$$

$\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ matrislerinin üstel yapıları doğru ve verimli bir şekilde elde edilebiliyorsa, yukarıdaki yaklaşımla $e^{\mathbf{A}}$ hesaplanabilir. Genel bir parçalama ile ($\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$), m sayısı aşağıdaki eşitsizlikten elde edilir.

$$\left\| e^{\mathbf{A}} - \left(e^{\frac{\mathbf{B}}{m}} e^{\frac{\mathbf{C}}{m}} \right)^m \right\| \leq \frac{\|[\mathbf{B}, \mathbf{C}]\|}{2m} e^{\|\mathbf{B}\| + \|\mathbf{C}\|} \quad (1.69)$$

Burada $[\mathbf{B}, \mathbf{C}]$ ile verilen büyüklük, $\mathbf{B}$ ve $\mathbf{C}$ matrislerinin Çeviricisi (Commutator) olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$[\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{BC} - \mathbf{CB} \quad (1.70)$$

Yukarıda kısaca tanımları, getirileri ve götürüleri verilen üstel matris belirleme yöntemlerinden hangisinin en iyi yöntem olduğunu saptamak mümkün değildir. Her yöntem, kendi yapısına uygun matrisler için diğer yöntemlerden daha iyi çalışacaktır. Yani, hangisinin en iyi yöntem olduğuna karar verebilmek için, öncelikle iyilikten ne anlaşılması gerektiğini (genellik, güvenilirlik, kararlılık, doğruluk, verim, az bellek gereksinimi, kullanım kolaylığı) ve problemin yapısını bilmek gerekmektedir.

Biz, sözünü ettiğimiz diğerlerinden farklı olarak, matris boyutunun (n) çok büyük olması durumunda bize yarar sağlayan bir yöntem elde etmeye çalışacağız. Aşağıda geniş tanımı, örneklemeye de bezenmiş olan yöntem, bu tezin ana ögesini oluşturmaktadır.

1.3 Yüksek Boyutlu Model Gösterilim

Günümüzün güçlü bilgisayar yazılım ve donanımlarına rağmen, çok sayıda bağımsız değişkeni olan bir fonksiyonun incelenmesi ve işlenmesi genellikle büyük zorluklar getirir. Bu zorlukların kaynağının içerdiği değişken sayısının çokluğu olduğu düşünülürse, fonksiyonu daha az sayıda bağımsız değişken içeren bir takım başka fonksiyonlara ayırmanın ve esas fonksiyon yerine bu yeni fonksiyonlarla ilgilenmenin mantıklı olduğu düşünülebilir. Burada, ilk olarak Sobol soyadlı bir matematikçi [2] tarafından öngörülen ve daha sonra genişletici, genelleştirici birçok özellik katılan ve Yüksek Boyutlu Model Gösterilim (YBMG) olarak adlandırılan açılım ile ilgilenilecektir [3 – 8].

$f(x_1, \dots, x_N)$ şeklinde gösterilen ve $x_1, \dots, x_N$ ile simgelenen N bağımsız değişkene bağlı olan bir çok değişkenli fonksiyon gözönüne alalım. Bu fonksiyonu dik bileşenlere ayırmaya çabalayalım. Bu amaçla ilk bileşenin f_0 ile simgelenen bir değişmez olduğu, daha sonraki ilk N bileşenin $f_1(x_1), \dots, f_N(x_N)$ şeklinde simgelenen ve bir tek bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar olduğu, daha sonraki

ilk $\frac{N(N-1)}{2}$ bileşenin $f_{1,2}(x_1, x_2), \dots, f_{1,N}(x_1, x_N), f_{2,3}(x_2, x_3), \dots, f_{2,N}(x_2, x_N), \dots, f_{N-1,N}(x_{N-1}, x_N)$ ile simgelenen ve yalnızca iki bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar olduğu ve diğer bileşenlerin de bu biçimde, gittikçe artan sayıda, bağımsız değişken içeren fonksiyonlardan oluştuğu ve bu fonksiyonların hepsinin birbirine dik olduğu varsayımıyla yola çıkalım. Burada diklik koşulu bir iççarpım üzerinden tanımlanmakta ve gerek $f(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonunun gerekse bileşen fonksiyonların karesi integre edilebilen fonksiyonlar olduğu varsayılmaktadır. Kare integraller ve iççarpım bağımsız değişkenlerin baştan saptanan belli bir aralığı üzerinde tanımlanmakta ve her bir değişken için o değişkene bağlı olarak verilen bir ağırlık fonksiyonu kullanılmaktadır. Dolayısıyla, $u(x_1, \dots, x_N)$ ve $v(x_1, \dots, x_N)$ şeklinde simgelenen karesi integre edilebilen herhangi iki fonksiyon için iççarpım

$$(u, v) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) u(x_1, \dots, x_N) v(x_1, \dots, x_N) \quad (1.71)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca, yukarıda sözü edilen bileşenlerin kolayca saptanabilmesi için, ağırlık fonksiyonlarının her birinin ilgili aralık üzerindeki integralinin 1 olduğu yani

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1 \quad (1.72)$$

eşitliğinin geçerli olduğu da varsayılmaktadır.

Bu bilgiler çerçevesinde $f(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonunun dik bileşenlere ayrılması için yazılması gereken denklem aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_N) = & f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1, i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \\ & \cdots f_{12 \dots N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (1.73)$$

Sağ yan fonksiyonları için diklik tanımı, aşağıdaki eşitlik ile verilebilir.

$$\int_{a_{i_s}}^{b_{i_s}} dx_{i_s} W_{i_s}(x_{i_s}) f_{i_1 \dots i_N}(x_{i_1}, \dots, x_{i_N}) = 0, \quad 1 \leq s \leq N \quad (1.74)$$

(1.73) eşitliğinin sağ yanındaki büyüklüklerin her birinin belirlenmesi için bir takım izdüşüm operatörlerinden yararlanabiliriz. Bu bağlamda, değişkenlerin aralıkları üzerinde karesi integre edilebilir, herhangi bir $g(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonu için

$$\mathcal{P}_i g(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) g(x_1, \dots, x_N) \quad (1.75)$$

ve

$$\mathcal{I}g(x_1, \dots, x_N) \equiv g(x_1, \dots, x_N) \quad (1.76)$$

tanımlamaları yapılacak olursa

$$f(x_1, \dots, x_N) = \left\{ \prod_{i=1}^N (\mathcal{P}_i + [\mathcal{I} - \mathcal{P}_i]) \right\} f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.77)$$

özdeşliği yazılabilir. Son tanımlamadaki operatörler çarpımı aşağıdaki biçimde açılabilir.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N (\mathcal{P}_i + [\mathcal{I} - \mathcal{P}_i]) = & \prod_{i=1}^N \mathcal{P}_i + \sum_{i_1=1}^N \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} \mathcal{P}_i \right) [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^N \mathcal{P}_i \right) + \\ & + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} \mathcal{P}_i \right) [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^{i_2-1} \mathcal{P}_i \right) [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{i_2}] \left(\prod_{i=i_2+1}^N \mathcal{P}_i \right) \\ & + \dots \end{aligned} \quad (1.78)$$

Eşitlik (1.77)'deki açılımın toplamsal terimlerinin birbirine dik oldukları kolayca gösterilebilir. Ayrıca, ilk toplamsal terimin bir değişmez olduğu, daha sonra gelen grubun ise yalnızca bir bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlardan oluşan toplamsal bir yapı olduğu, üçüncü grup terimlerin ise yalnızca iki bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlardan oluşan terimler olduğu kolayca görülebilir. Bu ise, dik bileşenlere ayırma işleminin anlatımının tek olması nedeniyle, aşağıdaki tanım eşitliklerinin yazılmasına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} f_0 &\equiv \left\{ \prod_{i=1}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) \\ f_i(x_i) &= \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} \mathcal{P}_i \right) [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^N \mathcal{P}_i \right) f(x_1, \dots, x_N) \\ f_{i_1, i_2}(x_1, x_2) &= \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} \mathcal{P}_i \right) [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^{i_2-1} \mathcal{P}_i \right) \\ &\quad \times [\mathcal{I} - \mathcal{P}_{i_2}] \left(\prod_{i=i_2+1}^N \mathcal{P}_i \right) f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (1.79)$$

Diğer dik bileşenler için de, son bağıntılara benzer, $f(x_1, \dots, x_N)$ fonksiyonuna ve izdüşüm operatörlerine bağlı, bağıntılar üretilebilir.

Örnek:

$$f(x_1, \dots, x_N) = (x_1 + \dots + x_N)^2$$

olarak alalım.

$$\begin{aligned} f_0 &= \left\{ \prod_{i=1}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) = \frac{N^2}{4} + \frac{N}{12} \\ f_{i_1}(x_{i_1}) &= \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) - \left\{ \prod_{i=1}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{i_1}(x_{i_1}) &= \frac{(N-1)}{3} + x_{i_1}^2 + \frac{(N-1)(N-2)}{4} + (N-1)x_{i_1} - f_0 \\
f_{i_1}(x_{i_1}) &= x_{i_1}^2 + (N-1)x_{i_1} + \frac{1-3N}{6} \\
f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i \neq i_2}}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) - \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) \\
&\quad - \left\{ \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_2}}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) + \left\{ \prod_{i=1}^N \mathcal{P}_i \right\} f(x_1, \dots, x_N) \\
f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) &= 2x_{i_1}x_{i_2} - x_{i_1} - x_{i_2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Üç değişkenli YBMG terimlerini, aynı yöntemle elde etmek istesek sonucun sıfır olacağını görürüz. Bu da verilen f fonksiyonunun yapısından kaynaklanmaktadır. Fonksiyon, içerisinde en fazla iki değişkenli yapıları barındırır. Verilen fonksiyonu, sıfıncı, birinci ve ikinci basamak yaklaşımları kullanarak birebir belirleyebiliriz.

1.4 Evrim Operatörleri ve YBMG

Doğal bilimler ve mühendislikteki sorunların büyük bir çoğunluğu, uygun seçilmiş bir evrim operatörü aracılığıyla betimlenebilir. Uygulamada en çok karşılaşılan sorunlar, evrim operatörünün üstel kullanımına gereksinim duyarlar. Bu üstel evrim operatör türlerinin belki de en önemlisi, birinci basamaktan parça türevli evrim operatörüdür (Lie Evrim operatörü). Ayrıca, Lie evrim operatörleri ile birinci basamaktan parça türevli denklem dizgelerinin çözümü arasında da yakın bir ilişki vardır [9 – 12].

Genelde, evrim operatörleri, evrimi izlemekte bize eşlik edecek bir parametre içerirler. Bu, ya çoğunlukla zaman değiştirgeni (parameter) olarak ortaya çıkar ya da zaman değiştirgeni gibi yorumlanabilecek bir nitelik taşır. Çok değişkenli bir evrim operatörü

$$Q \equiv e^{t\Omega}, \quad \Omega \equiv \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.80)$$

şeklinde verilebilir. Burada Ω , bir Lie evrim operatörüdür. Bu çalışmada, Lie operatörlerinin en genel kümesi ile değil de onun bir alt kümesi ile çalıştığımızı varsayalım ve φ_i fonksiyonlarının, $x_1, \dots, x_m$ değişkenlerinin doğrusal fonksiyonları olduklarını öngörelim. Bu durumda ilgileneceğimiz Lie operatörü $\mathbf{a}_i$ 'ler $1 \times m$ vektörler ve

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m]^T \quad (1.81)$$

olmak üzere,

$$\Omega \equiv (\mathbf{x}^T \mathbf{a}_1^T) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (\mathbf{x}^T \mathbf{a}_m^T) \frac{\partial}{\partial x_m} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \nabla \quad (1.82)$$

$$\nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \quad (1.83)$$

şeklinde tanımlanabilir.

$$Q(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = f, \quad f|_{t=0} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} \quad (1.84)$$

olacak şekilde bir f fonksiyonu seçelim. Burada $\mathbf{y}$, $m \times 1$ bir vektörü temsil etmektedir.

$$Q(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = e^{t\Omega}(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T (e^{t\Omega} \mathbf{x}) \quad (1.85)$$

eşitliğinden de görüleceği gibi, yukarıdaki gibi bir f fonksiyonu seçmemizin nedeni, bu fonksiyonun x ve y 'ye göre doğrusallığının, t ne olursa olsun bozulmamasıdır. Bu durumda fonksiyonun YBMG bileşenlerinden de aynı özelliği beklemek yanlış olmayacaktır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f = e^{t\Omega}(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) &= e^{t\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \nabla}(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{y}^T e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.86)$$

eşitliğini yazabiliriz (bu eşitliğin geçerliliğinin kanıtlanması Ekler - C'de verilmektedir), yani f fonksiyonunun YBMG bileşenlerini belirlemek ile $e^{t\mathbf{A}}$ matrisinin YBMG bileşenlerini belirlemek aynıdır. O halde,

$$\mathbf{E}(t) = e^{t\mathbf{A}} \quad (1.87)$$

şeklinde bir matris tanımlayalım ve (1.81) eşitliğiyle verilen $\mathbf{A}$ matrisini, α_i katsayıları aracılığıyla parçalara ayıralım.

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + \alpha_N \mathbf{A}_N \quad (1.88)$$

Burada $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$, α 'lardan bağımsız matrisler olarak öngörülmektedir. O halde $\mathbf{E}(t)$ matrisi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{E}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = e^{t\mathbf{A}} = e^{t(\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \cdots + \alpha_N \mathbf{A}_N)} \quad (1.89)$$

Bu matris için

$$\mathbf{E}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \mathbf{E}_0(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(t, \alpha_i) + \cdots \quad (1.90)$$

yapısında, yani YBMG türü bir yaklaştırım açılımı üretmeye çalışalım. Bu amaçla (1.84) eşitliğinin her iki yanının t 'ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \Omega f = 0 \quad (1.91)$$

Bu denklemi, (1.82) ve (1.88) eşitliklerini kullanarak tekrar yazalım.

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \alpha_1(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_1^T \nabla) f - \dots - \alpha_N(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_N^T \nabla) f = 0$$

$\Rightarrow$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_1(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_1^T \nabla) - \dots - \alpha_N(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_N^T \nabla) \right] f(x_1, \dots, x_m; t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = 0 \quad (1.92)$$

f fonksiyonunun, α_i değişkenlerine göre Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG) aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m; t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = & f_0(x_1, \dots, x_m; t) + \sum_{i=1}^N f_i(x_1, \dots, x_m; t, \alpha_i) + \\ & + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_1, \dots, x_m; t, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) + \dots \end{aligned} \quad (1.93)$$

Bu eşitliği (1.92) denkleminde yerine yazalım. (Bundan sonraki gösterilimlerde f fonksiyonunun x_i 'lere bağıllığı açıkça vurgulanmayacaktır.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) f_0(t) + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N f_i(t, \alpha_i) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(t, \alpha_{i_1}) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(t, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(t, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Yukarıdaki denklem, (1.92) denkleminde f fonksiyonunun yerine, bu fonksiyonun YBMG bileşenlerinin yerleştirildiği durumu temsil eden denklemdir. f fonksiyonunun YBMG bileşenlerini belirlemek için bu denklemi kullanacağız.

Bir sonraki bölümde, (1.94) denklemini kullanarak f fonksiyonunun Sıfırıncı Basamak YBMG Yaklaşımını elde edeceğiz.

BÖLÜM 2

SIFIRINCI BASAMAK YBMG YAKLAŞTIRIMI

Eşitlik (1.94)'ün her iki yanını $W_i(\alpha_i)$ ağırlığı altında, $[a_i, b_i]$ aralığında, α_i 'ler üzerinde N kez integre edelim. YBMG bileşenlerinin (1.74) ile verilen diklik koşulunu, ağırlık fonksiyonlarının da (1.72) ile verilen normalizasyon koşulunu sağlayacakları düşüncesiyle,

$$\int_{a_i}^{b_i} d\alpha_i W_i(\alpha_i) \alpha_i = \bar{\alpha}_i \quad (2.1)$$

ve

$$\int_{a_i}^{b_i} d\alpha_i W_i(\alpha_i) \alpha_i f_i(t, \alpha_i) = \gamma_i(t) \quad (2.2)$$

olmak üzere,

$$\frac{\partial f_0(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) f_0(t) - \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_i(t) = 0 \quad (2.3)$$

sonucuna ulaşılır. Denklem (2.3)'e eşlik edecek, f_0 için bir başlangıç koşulu elde etmeye çalışalım. Bunun için (1.84) eşitliğinden ve f fonksiyonunun YBMG açılımından yararlanacağız. Eşitlik (1.93)'ü, $t = 0$ için yeniden yazalım.

$$f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = f_0(0) + \sum_{i=1}^N f_i(0, \alpha_i) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(0, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}) + \dots \quad (2.4)$$

Eşitlik (1.84)'den, $f(0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ olduğunu biliyoruz. Eşitlik (2.4)'ün her iki yanının α_i 'ler üzerinden N kez integralini alırsak,

$$\mathbf{y}^T \mathbf{x} = f_0(0) \quad (2.5)$$

elde edilir.

f fonksiyonuna f_0 değişmez terimiyle yaklaşıtımda bulunmak isteyelim. Bu durumda, (2.3) denklemindeki birinci basamaktan terimlerden gelen katkıyı gözardı edelim. Çözeceğimiz denklem, aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial f_0^{(0)}(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) f_0^{(0)}(t) = 0, \quad f_0^{(0)}(0) = \mathbf{y}^T \mathbf{x} \quad (2.6)$$

$$f_i^{(0)}(t, \alpha_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.7)$$

f_0 'ı içeren (2.3) denkleminde birinci basamaktan terimleri gözardı ettiğimizden, yeni elde ettiğimiz (2.6) denkleminin çözümü gerçek f_0 değil, yalnızca sıfırıncı basamaktan terimlerin alıkonulduğunu gösteren $f_0^{(0)}$ 'dır. Bu denklemi çözmek için,

$$f_0^{(0)}(t) = \mathbf{y}^T \mathbf{B}_0^{(0)}(t) \mathbf{x} \quad (2.8)$$

öngörümünde bulunalım. Denklem (2.6)'da $f_0^{(0)}$ yerine yukarıdaki eşitlikteki değerini yazalım.

$$\mathbf{y}^T \frac{d\mathbf{B}_0^{(0)}(t)}{dt} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{A}}^T \nabla \mathbf{y}^T \mathbf{B}_0^{(0)}(t) \mathbf{x} = 0 \quad (2.9)$$

$\mathbf{A}$, $m \times m$ türünde, elemanları x_i 'lere ve α_i 'lere bağımlı olmayan bir matris olmak üzere, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\nabla (\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (2.10)$$

Bu eşitliği kullanarak (2.9) denklemini tekrar yazalım.

$$\mathbf{y}^T \frac{d\mathbf{B}_0^{(0)}(t)}{dt} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}_0^{(0)}(t)^T \mathbf{y} = 0 \quad (2.11)$$

$\mathbf{B}_0^{(0)}$ için başlangıç koşulu elde etmeye çalışalım. Bunun için (2.5) ve (2.8) eşitliklerini birlikte kullanırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\mathbf{B}_0^{(0)}(0) = \mathbf{I} \quad (2.12)$$

Eşitlik (2.11)'in her iki yanını, soldan $(\mathbf{y}^T)^{-1}$, sağdan $\mathbf{x}^{-1}$ ile çarpalım. Sıfırıncı basamaktan terimlerde olduğu gibi, birinci basamaktan YBMG terimlerine $\mathbf{B}_i$ matrislerinin eşlik ettiğini düşünürsek, çözülmesi gereken yeni denklem, aşağıdaki biçimde olur.

$$\frac{d\mathbf{B}_0^{(0)}(t)}{dt} = \mathbf{B}_0^{(0)}(t) \bar{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B}_0^{(0)}(0) = \mathbf{I} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{B}_i^{(0)}(t, \alpha_i) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Burada $\mathbf{B}_0^{(0)}$ ve $\mathbf{B}_i^{(0)}$ $m \times m$ 'lik matrisler olup

$$\bar{\mathbf{A}} = \left(\sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i \mathbf{A}_i \right) \quad (2.15)$$

tanımı kullanılmıştır. Denklem (2.13)'ün çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{B}_0^{(0)}(t) = e^{t\bar{\mathbf{A}}} \quad (2.16)$$

Bu ifadeyi (2.8) eşitliğinde yerine koyalım.

$$f_0^{(0)}(t) = \mathbf{y}^T e^{t\bar{\mathbf{A}}} \mathbf{x} \quad (2.17)$$

Böylece, $\mathbf{E}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ matrisinin YBMG tabanlı Sıfıncı Basamak Yaklaşırımı

$$E^{(0)}(t) = e^{t\bar{\mathbf{A}}} = e^{t(\sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i \mathbf{A}_i)} \quad (2.18)$$

olarak elde edilmektedir.

Eşitlik (2.18)'de görüldüğü gibi, sıfıncı basamak yaklaşırında, ilgilendiğimiz üstel matrisin yapısındaki α_i değişkenleri yerine, bu değişkenlerin ilgili aralıkta ve ilgili ağırlık altında integralleri gelmiştir. Aralığın ve ağırlığın uygun seçilmesinin önemi, sıfıncı basamak yaklaşırında ortaya çıkmıştır. Aralıklarla ve ağırlıklarla oynayarak, sıfıncı basamak yaklaşırımı daha etkin duruma getirmek mümkündür.

Bir sonraki bölümde Birinci Basamak YBMG Yaklaşırımı, bu bölümde yapılanlara benzer şekilde elde edilecektir.

BÖLÜM 3

BİRİNCİ BASAMAK YBMG YAKLAŞTIRIMI

Şimdi (1.94) eşitliğinin her iki yanını aynı aralıkta ve aynı ağırlık altında, $1 \leq k \leq N$ olmak üzere α_k değişkenini dışlayarak, $N - 1$ kez integre edelim. Eşitlik (1.72) ve eşitlik (1.74)'ü kullanarak,

$$\gamma_{j_1 j_2}^{(j_1)}(t, \alpha_{j_2}) = \int_{a_{j_1}}^{b_{j_1}} d\alpha_{j_1} W_{j_1}(\alpha_{j_1}) \alpha_{j_1} f_{j_1 j_2}(t, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}), \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq N \quad (3.1)$$

ve

$$\gamma_{j_1 j_2}^{(j_2)}(t, \alpha_{j_1}) = \int_{a_{j_2}}^{b_{j_2}} d\alpha_{j_2} W_{j_2}(\alpha_{j_2}) \alpha_{j_2} f_{j_1 j_2}(t, \alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}), \quad 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq N \quad (3.2)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_0(t)}{\partial t} - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) + \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \right] f_0(t) + \frac{\partial f_k(t, \alpha_k)}{\partial t} \\ & - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_i(t) - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) + \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \right] f_k(t, \alpha_k) \\ & - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_{ik}^{(i)}(t, \alpha_k) - \sum_{i=k+1}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_{ki}^{(i)}(t, \alpha_k) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

denkleminde ulaşılır. Bu eşitlikte $\frac{\partial f_0(t)}{\partial t}$ yerine (2.3) ile bulduğumuz eşitlikten çekilen değerini yazarsak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_k(t, \alpha_k)}{\partial t} + (\bar{\alpha}_k - \alpha_k) (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) f_0(t) + (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \gamma_k(t) \\ & - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) + \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \right] f_k(t, \alpha_k) \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_{ik}^{(i)}(t, \alpha_k) - \sum_{i=k+1}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_{ki}^{(i)}(t, \alpha_k) = 0 \quad (3.4)$$

Bu denkleme eşlik edecek başlangıç koşulu sıfıncı basamak terimlerde olduğu gibi belirlenir. Bu kez, (2.4) eşitliğinin her iki yanının, α_k değişkenini dışlayarak $N - 1$ kez integralini alalım.

$$\mathbf{y}^T \mathbf{x} = f_0(0) + f_k(0, \alpha_k) \quad (3.5)$$

Eşitlik (2.5)'i yukarıda kullanırsak,

$$f_k(0, \alpha_k) = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Şimdi f fonksiyonunu sıfıncı ve birinci basamaktan terimlerle yaklaştırmak isteyelim. (3.4) denkleminde ikinci basamaktan terimlerin katkısını gözardı edelim. Bu durumda çözülmesi gereken yeni denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} + (\bar{\alpha}_k - \alpha_k)(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) f_0^{(1)}(t) + (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \gamma_k^{(1)}(t) \\ & - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) + \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \right] f_k^{(1)}(t, \alpha_k) = 0, \quad f_k^{(1)}(0, \alpha_k) = 0 \quad (3.7) \\ & \frac{\partial f_0^{(1)}(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) f_0^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_i^{(1)}(t) = 0, \quad f_0^{(1)}(0) = \mathbf{y}^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$f_{kl}^{(1)}(t, \alpha_k, \alpha_l) = 0 \quad 1 \leq k \leq l \leq N \quad (3.9)$$

Denklem (3.8), daha önce elde ettiğimiz fakat sıfıncı basamak yaklaştırmayı elde etmek için tek değişkenli terimlerini gözardı ettiğimiz (2.3) denkleminin bu kez, tek değişkenli terimlerin de alıkonulduğu şeklidir. Denklem (3.7), denklem (3.8) ve denklem (3.9)'daki üst indis (1) ise birinci basamak yaklaştırmayı elde etmek için değişmez ve tek değişkenli terimleri alıkoyduğumuzu göstermektedir. Şimdi denklemleri çözmek için,

$$f_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \mathbf{y}^T \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \mathbf{x} \quad (3.10)$$

ve

$$f_0^{(1)}(t) = \mathbf{y}^T \mathbf{B}_0^{(1)}(t) \mathbf{x} \quad (3.11)$$

öngörülerinde bulunalım ve bu eşitlikleri (3.7) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} \mathbf{x} - \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \mathbf{y}^T \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \mathbf{x} \\
& - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \right] \mathbf{y}^T \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \mathbf{x} \\
& = (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \mathbf{y}^T \mathbf{B}_0^{(1)}(t) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla \left(\mathbf{y}^T \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) \mathbf{x} \right)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Bu eşitlikte,

$$\bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) = \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \tag{3.13}$$

olarak tanımlanmıştır. Eşitlik (2.10)'u kullanarak, denklem (3.12)'yi yeniden yazalım.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y}^T \frac{\partial \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} \mathbf{x} - \alpha_k \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}_k^T \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k)^T \right) \mathbf{y} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}_i^T \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k)^T \right) \mathbf{y} \\
& = (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}_k^T \mathbf{B}_0^{(1)}(t)^T \right) \mathbf{y} - \mathbf{x}^T \left(\mathbf{A}_k^T \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t)^T \right) \mathbf{y}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Sıfırıncı basamak denkleminde ((2.11) denklemi) yapılan işlemlerin aynısı bu kez (3.14) denklemi için yapılırsa,

$$\bar{\mathbf{A}}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i \mathbf{A}_i \tag{3.15}$$

olmak üzere, aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\frac{\partial \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} - \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) [\bar{\mathbf{A}}_k + \alpha_k \mathbf{A}_k] = \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(t) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) \right] \mathbf{A}_k \tag{3.16}$$

Bu denkleme eşlik edecek başlangıç koşulunu elde etmek için, (3.6) ve (3.10) eşitliklerinden yararlanalım. Eşitlik (3.10)'da, $t = 0$ yazar ve $f_k^{(1)}(0, \alpha_k) = 0$ eşitini kullanırsak, aşağıdaki başlangıç koşulunu elde ederiz.

$$\mathbf{B}_k^{(1)}(0, \alpha_k) = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

İşlemleri kolaylaştırmak için aşağıdaki tanımlamayı yapalım.

$$\bar{\mathbf{A}}_k + \alpha_k \mathbf{A}_k = \mathbf{C}_k(\alpha_k) \tag{3.18}$$

Denklem (3.16)'yı çözmek için, $\mathbf{B}_k^{(1)}$, in aşağıda tanımlandığı şekilde olduğunu öngörelim.

$$\mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \mathbf{H}_k^{(1)}(t, \alpha_k) e^{t \mathbf{C}_k(\alpha_k)} \tag{3.19}$$

Burada, $\mathbf{H}_k^{(1)}$, $m \times m$ 'lik bir matrisi göstermektedir. Eşitlik (3.19)'u, (3.16) denkleminde yerine koyar, gerekli sadeleştirme işlemlerini yaparsak, çözmemiz gereken parça türevli diferansiyel denklem, $\mathbf{H}_k^{(1)}$ 'i içeren, değişkenlerine ayrılabilen, daha basit yapıda bir parça türevli diferansiyel denkleme dönüşür. Elde edilecek yeni denkleme eşlik edecek başlangıç koşulu da, bu kez (3.19) eşitliğinde $t = 0$ yazarak ve (3.17) eşitliğini kullanarak elde edilir. Bu durumda çözmemiz gereken denklem, aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{\partial \mathbf{H}_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} = \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(t) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) \right] \mathbf{A}_k e^{-t \mathbf{C}_k(\alpha_k)}, \quad \mathbf{H}_k^{(1)}(0, \alpha_k) = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{H}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \int_0^t \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(\tau) \right] \mathbf{A}_k e^{-\tau \mathbf{C}_k(\alpha_k)} d\tau + \mathbf{C}_1 \quad (3.21)$$

Burada, $\mathbf{C}_1$, elemanları t 'ye göre değişmez olan $m \times m$ 'lik bir matrisi temsil etmektedir. Eşitlik (3.20)'deki başlangıç koşulunu da bu eşitlikte yerine yazarsak $\mathbf{H}_k^{(1)}$, aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{H}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \int_0^t \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(\tau) \right] \mathbf{A}_k e^{-\tau \mathbf{C}_k(\alpha_k)} d\tau \quad (3.22)$$

$\mathbf{H}_k^{(1)}$ 'in bu değeri, (3.19) eşitliğinde yerine yazılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \left[\int_0^t \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(\tau) \right] \mathbf{A}_k e^{-\tau \mathbf{C}_k(\alpha_k)} d\tau \right] e^{t \mathbf{C}_k(\alpha_k)} \quad (3.23)$$

Bu eşitlikte, τ 'ya göre integral altındaki parçaya Laplace dönüşümünü uygulayalım.

t 'ye bağlı bir F fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır [13].

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt \quad (3.24)$$

Laplace dönüşümünde **Katlama** (Convolution) özelliği aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t) \quad (3.25)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F(t) * G(t) \quad (3.26)$$

Eşitlik (3.23), **Katlama** özelliği uygulanacak şekilde tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = & \left[\int_0^t \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(\tau) \right] \mathbf{A}_k e^{(t-\tau) \mathbf{C}_k(\alpha_k)} d\tau \right] \\ & \times e^{-t \mathbf{C}_k(\alpha_k)} e^{t \mathbf{C}_k(\alpha_k)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir.

$$\mathbf{F}_k^{(1)}(\tau, \alpha_k) = (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(\tau) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(\tau) \quad (3.28)$$

$$\mathbf{G}_k^{(1)}(t - \tau, \alpha_k) = \mathbf{A}_k e^{(t-\tau)\mathbf{C}(\alpha_k)} \quad (3.29)$$

tanımları yapılırsa, aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \int_0^t \mathbf{F}_k^{(1)}(\tau, \alpha_k) \mathbf{G}_k^{(1)}(t - \tau, \alpha_k) d\tau \quad (3.30)$$

Eşitliğin her iki yanına Laplace dönüşümü uygulayalım.

$$\mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) = \mathbf{f}^{(1)}(s, \alpha_k) \mathbf{g}^{(1)}(s, \alpha_k) \quad (3.31)$$

Şimdi bu eşitlikteki $\mathbf{f}^{(1)}$ ve $\mathbf{g}^{(1)}$ 'yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(s, \alpha_k) &= \int_0^\infty e^{-st} \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(t) - \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(t) dt - \int_0^\infty e^{-st} \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) dt \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aşağıdaki tanımları yapalım.

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^\infty e^{-st} (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{B}_0^{(1)}(t) dt \quad (3.33)$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^\infty e^{-st} \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) dt \quad (3.34)$$

$\mathbf{I}_1$ integraline kısmî integrasyon uygulanırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathbf{I}_1 = (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \left[\frac{\mathbf{B}_0^{(1)}(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \frac{d\mathbf{B}_0^{(1)}(t)}{dt} dt \right] \quad (3.35)$$

Laplace dönüşümünün aşağıdaki özelliğini, bu eşitlikte kullanalım.

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \quad (3.36)$$

Bu eşitliği, (3.35) ifadesindeki $\mathbf{B}_0^{(1)}$ için kullanacak olursak, $\mathbf{I}_1$ 'i aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\mathbf{I}_1 = (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{b}_0^{(1)}(s) \quad (3.37)$$

Burada $\mathbf{b}_0^{(1)}$, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{B}_0^{(1)}(t)\} = \mathbf{b}_0^{(1)}(s) \quad (3.38)$$

$\mathbf{I}_2$ integraline kısmî integrasyon uygulayalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2 &= \int_0^\infty e^{-st} \bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t) dt \\ &= \frac{\bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \frac{d\bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t)}{dt} dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

Eşitlik (3.36)'yı bu kez, $\bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}$ 'e uygulayalım. Bu durumda, $\mathbf{I}_2$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{I}_2 = \bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) \quad (3.40)$$

Burada $\bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mathcal{L}\{\bar{\mathbf{B}}_k^{(1)}(t)\} = \bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) \quad (3.41)$$

Eşitlik (3.37) ve eşitlik (3.40)'ı, (3.32) ifadesinde yerine yazalım.

$$\mathbf{f}^{(1)}(s, \alpha_k) = (\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{b}_0^{(1)}(s) - \bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) \quad (3.42)$$

Şimdi, $\mathbf{g}^{(1)}$ 'i elde edelim.

$$\mathbf{g}^{(1)}(s, \alpha_k) = \int_0^\infty e^{-st} \mathbf{A}_k e^{t\mathbf{C}_k(\alpha_k)} dt = \mathbf{A}_k \int_0^\infty e^{-t(s\mathbf{I} - \mathbf{C}_k(\alpha_k))} dt \quad (3.43)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{C}_k(\alpha_k))^{-1} = \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \quad (3.44)$$

tanımını yapalım. Burada, $(\bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k))^{-1}$ matrisinin pozitif tanımlı bir matris olduğu kabul edilmektedir. $\mathbf{g}^{(1)}$, aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{g}^{(1)}(s, \alpha_k) = \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \quad (3.45)$$

Bulduğumuz $\mathbf{f}^{(1)}$ ve $\mathbf{g}^{(1)}$ matris fonksiyonlarının değerlerini (3.31) eşitliğinde yerine yazalım.

$$\mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) = \left[(\alpha_k - \bar{\alpha}_k) \mathbf{b}_0^{(1)}(s) - \bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) \right] \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \quad (3.46)$$

Bu eşitliğin her iki yanını, α_k ile çarpıp, $W_k(\alpha_k)$ ağırlığı altında, $[a_k, b_k]$ aralığında integre edelim.

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) \alpha_k &= \mathbf{b}_0^{(1)}(s) \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k^2 \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \\ - \bar{\alpha}_k \mathbf{b}_0^{(1)}(s) \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) &- \bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Eşitlik (3.13)'ün her iki yanına Laplace dönüşümünü uygulayıp, bu denklemde yerine yazacak olursak, $\bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}$ 'i aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) &= \mathbf{b}_0^{(1)}(s) \left[\int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k^2 \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\alpha}_k \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \right] \\ &\quad \left[\mathbf{I} + \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Denklem (3.48)'deki $\mathbf{b}_0^{(1)}$ terimi bilinmemektedir ve $\bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}$ 'yi elde etmek için, belirlenmesi gerekir.

Şimdi de (3.8) denklemini çözerek $\mathbf{b}_0^{(1)}$ 'i elde etmeye çalışalım.

$\mathbf{B}_0^{(1)}$ için başlangıç koşulu, (3.8)'deki başlangıç koşulunu kullanarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(0) = \mathbf{I} \quad (3.49)$$

Eşitlik (3.10), eşitlik (3.11) ve eşitlik (3.13)'ü, (3.8) denkleminde yerine yazar ve gerekli sadeleştirme işlemlerini, (2.10) ve (2.15) eşitliklerini kullanarak yapacak olursak, sıfıncı basamak terimlerdeki (2.13) denkleminde benzer şekilde aşağıdaki sıradan türevli denklemi elde ederiz.

$$\frac{d\mathbf{B}_0^{(1)}(t)}{dt} - \mathbf{B}_0^{(1)}(t)\bar{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(t)\mathbf{A}_i, \quad \mathbf{B}_0^{(1)}(0) = \mathbf{I} \quad (3.50)$$

Bu denklemi çözmek için yine tek değişkenli terimlerde yaptığımız gibi, bu kez de $\mathbf{B}_0^{(1)}$ için aşağıdaki şekilde bir öngörümde bulunalım.

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) = \mathbf{H}_0^{(1)}(t)e^{t\bar{\mathbf{A}}} \quad (3.51)$$

$\mathbf{H}_0^{(1)}(0)$ 'ı elde etmek için, (3.49) ve (3.51) eşitliklerini kullanalım.

$$\mathbf{H}_0^{(1)}(0) = \mathbf{I} \quad (3.52)$$

Eşitlik (3.51) ve eşitlik (3.52)'yi (3.50) denkleminde yerine yazar ve oluşan ifadeyi düzenlersek, aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{d\mathbf{H}_0^{(1)}(t)}{dt} = \left[\sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(t)\mathbf{A}_i \right] e^{-t\bar{\mathbf{A}}}, \quad \mathbf{H}_0^{(1)}(0) = \mathbf{I} \quad (3.53)$$

Denklem (3.53)'ü çözelim. $\mathbf{H}_0^{(1)}$ 'yi aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\mathbf{H}_0^{(1)}(t) = \int_0^t \left[\sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(\tau)\mathbf{A}_i e^{-\tau\bar{\mathbf{A}}} d\tau \right] + \mathbf{I} \quad (3.54)$$

Bu eşitliği, (3.51)'de yerine koyalım.

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) = \left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(\tau)\mathbf{A}_i e^{-\tau\bar{\mathbf{A}}} d\tau \right) + \mathbf{I} \right] e^{t\bar{\mathbf{A}}} \quad (3.55)$$

İfadeyi Laplace dönüşümü uygulanacak şekilde düzenleyelim.

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) - e^{t\bar{\mathbf{A}}} = \left[\int_0^t \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(\tau)\mathbf{A}_i e^{(t-\tau)\bar{\mathbf{A}}} d\tau \right] e^{-t\bar{\mathbf{A}}} e^{t\bar{\mathbf{A}}} \quad (3.56)$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) - e^{t\bar{\mathbf{A}}} = \int_0^t \mathbf{F}^{(0)}(\tau)\mathbf{G}^{(0)}(t-\tau)d\tau \quad (3.57)$$

Bu eşitlikteki $\mathbf{F}^{(0)}$ ve $\mathbf{G}^{(0)}$ matris fonksiyonları, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\mathbf{F}^{(0)}(\tau) = \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(\tau) \mathbf{A}_i \quad (3.58)$$

ve

$$\mathbf{G}^{(0)}(t - \tau) = e^{(t-\tau)\bar{\mathbf{A}}} \quad (3.59)$$

$\mathbf{b}_0^{(1)}$ 'i elde etmek için, (3.57) eşitliğinin heriki yanına Laplace dönüşümünü uygulayalım. Tanım (3.26) ile verilen **Katlama** özelliğinin de kullanılmasıyla, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{B}_0^{(1)}(t) - e^{t\bar{\mathbf{A}}}\} = \mathbf{f}^{(0)}(s) \mathbf{g}^{(0)}(s) \quad (3.60)$$

Buradaki $\mathbf{f}^{(0)}$ ve $\mathbf{g}^{(0)}$, $\mathbf{F}^{(0)}$ ve $\mathbf{G}^{(0)}$ matris fonksiyonlarının Laplace dönüşümleridir. Laplace dönüşümünün doğrusallık özelliğini ve (3.38) eşitliğini kullanalım.

$$\mathcal{L}\{\mathbf{B}_0^{(1)}(t) - e^{t\bar{\mathbf{A}}}\} = \mathcal{L}\{\mathbf{B}_0^{(1)}(t)\} - \mathcal{L}\{e^{t\bar{\mathbf{A}}}\} = \mathbf{b}_0^{(1)}(s) - (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad (3.61)$$

Burada, $(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}$ matrisinin pozitif tanımlı bir matris olduğu kabul edilmiştir. Şimdi, sırasıyla $\mathbf{f}^{(0)}$ ve $\mathbf{g}^{(0)}$ 'yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(0)}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(t) \mathbf{A}_i \right) dt \\ &= -\frac{1}{s} \left(\sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(t) \mathbf{A}_i \right) e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} \left(\sum_{i=1}^N \frac{d\bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(t)}{dt} \mathbf{A}_i \right) dt \end{aligned} \quad (3.62)$$

Eşitlik (3.36) ve eşitlik (3.41)'in beraber kullanılmasıyla, $\mathbf{f}^{(0)}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(s) &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(0) \mathbf{A}_i + \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{b}}_i^{(1)}(s) \mathbf{A}_i - \frac{1}{s} \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{B}}_i^{(1)}(0) \mathbf{A}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{b}}_i^{(1)}(s) \mathbf{A}_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{g}^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{t\bar{\mathbf{A}}} dt = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad (3.64)$$

Eşitlik (3.61), eşitlik (3.63) ve eşitlik (3.64)'ü (3.60)'da yerine yazarsak, $\mathbf{b}_0^{(1)}$ 'i aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \left[\sum_{i=1}^N \bar{\mathbf{b}}_i^{(1)}(s) \mathbf{A}_i + \mathbf{I} \right] (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad (3.65)$$

Burada, $\bar{\mathbf{b}}_i^{(1)}$ yerine, (3.48) ile verilen eşitini yazalım.

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \left[\sum_{i=1}^N \mathbf{b}_0^{(1)}(s) \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i + \mathbf{I} \right] (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad (3.66)$$

Bu eşitlikte $\mathbf{L}_i$ ve $\mathbf{M}_i$ matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\mathbf{L}_i(s) = \int_{a_i}^{b_i} d\alpha_i W_i(\alpha_i) \alpha_i^2 \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) - \bar{\alpha}_i \int_{a_i}^{b_i} d\alpha_i W_i(\alpha_i) \alpha_i \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{M}_i(s) = \left[\mathbf{I} + \int_{a_i}^{b_i} d\alpha_i W_i(\alpha_i) \alpha_i \mathbf{A}_i \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) \right]^{-1} \quad (3.68)$$

Denklem (3.66)'dan, $\mathbf{b}_0^{(1)}$ 'i çözersek, aşağıdaki eşitliğe ulaşırız.

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right]^{-1} \quad (3.69)$$

Şimdi de (3.48) denkleminde $\mathbf{b}_0^{(1)}$ yerine, yukarıdaki eşitini yazalım.

$$\bar{\mathbf{b}}_k^{(1)}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right]^{-1} \mathbf{L}_k(s) \mathbf{M}_k(s) \quad (3.70)$$

Eşitlik (3.69) ve eşitlik (3.70)'i, (3.46) eşitliğinde yerlerine yazarsak tek değişkenli YBMG fonksiyonlarına eşlik eden $\mathbf{B}_k^{(1)}$ matrislerinin Laplace dönüşümü olan $\mathbf{b}_k^{(1)}$ matrislerini aşağıdaki şekilde ederiz.

$$\mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right]^{-1} [(\alpha_k - \bar{\alpha}_k)\mathbf{I} - \mathbf{L}_k(s) \mathbf{M}_k(s)] \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \quad (3.71)$$

Bu bölümde birinci basamak, değişmez ve tek değişkenli YBMG terimlerine eşlik eden matrislerin Laplace dönüşümlerini kapalı formda elde ettik. Eşitlik (3.69) ve eşitlik (3.71) ile verilen bu matrislerin ters Laplace dönüşümlerini bulmak için yapıları daha açık forma getirmemiz gerekir. Bu amaçla çeşitli özel seçimlerle, elde ettiğimiz bu yapıların davranışlarını ilerdeki bölümlerde inceleyeceğiz.

BÖLÜM 4

UYGULAMA - 1

$\mathbf{A}$ matrisinin elemanları α_i 'ler olsun ve $N = m^2$ olarak alalım. Bu durumda, $1 \leq i \leq N$ olmak üzere, $\mathbf{A}_i$ 'leri aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T, \quad i_1 = \left\lfloor \frac{i + (m-1)}{m} \right\rfloor, \quad i_2 = i - (i_1 - 1)m, \quad 1 \leq i_1, i_2 \leq m \quad (4.1)$$

Aynı zamanda tüm değişkenler için ağırlıklar, $W_i = 1$ ve aralıklar, $[0, 1]$ olarak alınsın.

Aşağıdaki tanımları yapalım.

$$\mathbf{T}(s) = (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right]^{-1} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{K}_k(s, \alpha_k) = [(\alpha_k - \bar{\alpha}_k)\mathbf{I} - \mathbf{L}_k(s) \mathbf{M}_k(s)] \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}_k(s, \alpha_k) \quad (4.3)$$

Önce $\mathbf{T}$ 'yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) &= (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \left[\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right]^{-1} \\ &= \left[\left(\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \right) (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) \right]^{-1} \\ &= \left[s\mathbf{I} - \left(\bar{\mathbf{A}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathbf{T}}(s) = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i(s) \mathbf{M}_i(s) \mathbf{A}_i \quad (4.5)$$

tanımlamasını yapalım ve $\bar{\mathbf{T}}$ 'yi hesaplayalım. Önce (3.44) eşitliği ile verilen $\bar{\mathbf{C}}_i$ matrisini, (3.18) eşitliğini kullanarak elde edelim.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) &= \left(s\mathbf{I} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \bar{\alpha}_j \mathbf{A}_j - \alpha_i \mathbf{A}_i \right)^{-1} \\ &= \left(s\mathbf{I} - \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \mathbf{A}_j - (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \mathbf{A}_i \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aşağıdaki tanımı yapalım.

$$\mathbf{D}(s) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{j=1}^N \bar{\alpha}_j \mathbf{A}_j \right) \quad (4.7)$$

Bu durumda $\bar{\mathbf{C}}_i$ matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) &= (\mathbf{D}(s) (\mathbf{I} - (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i))^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{D}^{-1}(s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\mathbf{A}_i$ 'nin (4.1) ile verilen değerini kullanarak, $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i$ 'yi hesaplayalım.

Aşağıdaki tanımı yapalım.

$$\mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i = \mathbf{u}_{i_1}(s) \mathbf{v}_{i_2}^T, \quad \mathbf{u}_{i_1}(s) = \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1}, \quad \mathbf{v}_{i_2} = \mathbf{e}_{i_2} \quad (4.9)$$

Şimdi aşağıdaki eşitliği ve $\bar{\alpha}_i$ 'nin (2.1) ile verilen tanımını kullanarak (4.8) eşitliğindeki $(\mathbf{I} - (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \mathbf{D}(s)^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1}$ matrisini hesaplayalım.

$$(\mathbf{I} - \beta \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{I} + \frac{\beta}{1 - \beta \rho} \mathbf{u} \mathbf{v}^T, \quad \rho = \mathbf{v}^T \mathbf{u} \quad (4.10)$$

$$(\mathbf{I} - (\alpha_i - \bar{\alpha}_i) \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i)^{-1} = \mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{1}{2}) \rho_{i_1 i_2}} \mathbf{u}_{i_1}(s) \mathbf{v}_{i_2}^T, \quad \rho_{i_1 i_2} = \mathbf{v}_{i_2}^T \mathbf{u}_{i_1}(s) \quad (4.11)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) &= \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{1}{2}) \rho_{i_1 i_2}} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T \right] \mathbf{D}^{-1}(s), \\ \rho_{i_1 i_2} &= \mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Şimdi sırasıyla, $\mathbf{L}_i$ ve $\mathbf{M}_i$ 'yi hesaplayalım. $\bar{\mathbf{C}}_i$ 'nin (4.12) ile verilen değerini (3.67) eşitliğinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i(s) &= \int_0^1 \alpha_i^2 \mathbf{A}_i \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{1}{2}) \rho_{i_1 i_2}} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1}(s) \mathbf{e}_{i_2}^T \right] \mathbf{D}^{-1}(s) d\alpha_i \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha_i \mathbf{A}_i \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{1}{2}) \rho_{i_1 i_2}} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1}(s) \mathbf{e}_{i_2}^T \right] \mathbf{D}^{-1}(s) d\alpha_i \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1}(s) \mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{D}^{-1}(s) = (\mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s))^2 = \rho_{i_1 i_2} \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (4.14)$$

eşitliğinin kullanılmasıyla, $\mathbf{L}_i$ 'yi aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i(s) &= \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \int_0^1 \alpha_i^2 \left[1 + \frac{\rho_{i_1 i_2} (\alpha_i - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{1}{2}) \rho_{i_1 i_2}} \right] d\alpha_i \\ &\quad - \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha_i \left[1 + \frac{\rho_{i_1 i_2} (\alpha_i - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{1}{2}) \rho_{i_1 i_2}} \right] d\alpha_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\int_0^1 \frac{\alpha_i^2 \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right) \rho_{i_1 i_2}} d\alpha_i = - \frac{(\rho_{i_1 i_2}^2 + 3\rho_{i_1 i_2} + 3)}{3\rho_{i_1 i_2}^3} - \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \left(\frac{\rho_{i_1 i_2}^2 + 4\rho_{i_1 i_2} + 4}{4\rho_{i_1 i_2}^4} \right) \quad (4.16)$$

$$\int_0^1 \frac{\alpha_i \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right)}{1 - \left(\alpha_i - \frac{1}{2}\right) \rho_{i_1 i_2}} d\alpha_i = - \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^2} \right) - \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^3} \right) \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \quad (4.17)$$

eşitliklerini (4.15)'da yerine yazalım.

$$\mathbf{L}_i(s) = \left[\frac{-(\rho_{i_1 i_2} + 2)}{2\rho_{i_1 i_2}^2} - \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \left(\frac{\rho_{i_1 i_2} + 2}{2\rho_{i_1 i_2}^3} \right) \right] \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (4.18)$$

elde edilir. Şimdi de (4.17) eşitliğini, (3.68)'de yerine yazalım.

$$\mathbf{M}_k(s) = \left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}} \right) - \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^2} \right) \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \right) \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \right]^{-1} \quad (4.19)$$

Eşitlik (4.10)'un kullanılmasıyla, $\mathbf{M}_i$ 'yi de aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{M}_i(s) = \mathbf{I} - \frac{\left[\frac{1}{\rho_{i_1 i_2}} + \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^2} \right) \right]}{\rho_{i_1 i_2} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^2} \right)} \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (4.20)$$

Eşitlik (4.18) ve eşitlik (4.20)'yi, (4.5) eşitliğinde yerlerine yazıp, $\bar{\mathbf{T}}$ 'yi hesaplayalım.

$$\mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i = \rho_{i_1 i_2} \mathbf{A}_i \quad (4.21)$$

ve

$$\mathbf{A}_i (\mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i)^2 = \rho_{i_1 i_2}^2 \mathbf{A}_i \quad (4.22)$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla, $\bar{\mathbf{T}}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\bar{\mathbf{T}}(s) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1 + \frac{1}{\rho_{i_1 i_2}} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^2} \right)} \right] \mathbf{A}_i \quad (4.23)$$

Bulduğumuz bu ifadeyi (4.4) eşitliğinde yerine yazalım.

$$\mathbf{T}(s) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_{i_1 i_2}} \right) \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right) \left(\frac{2 + \rho_{i_1 i_2}}{2\rho_{i_1 i_2}^2} \right)} \right] \mathbf{A}_i \right)^{-1} \quad (4.24)$$

Şimdi, (4.3) eşitliği ile verilen $\mathbf{K}_k$ 'yi hesaplayalım. Eşitlik (4.1) ve eşitlik (4.12)'yi kullanırsak,

$$\mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}(s, \alpha_k) = \left[1 + \frac{\rho_{k_1 k_2} (\alpha_k - \frac{1}{2})}{1 - (\alpha_k - \frac{1}{2}) \rho_{k_1 k_2}} \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (4.25)$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde, (4.18) ve (4.20) eşitliklerini kullanalım.

$$\mathbf{L}_k(s)\mathbf{M}_k(s) = \left[\frac{1 + \frac{1}{\rho_{k_1 k_2}} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)}{\rho_{k_1 k_2} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)} \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (4.26)$$

Eşitlik (4.25) ve eşitlik (4.26)'yı, (4.3) eşitliğinde yerlerine yazalım.

$$\mathbf{K}_k(s, \alpha_k) = \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{1}{2})\rho_{k_1 k_2}} \left[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\rho_{k_1 k_2}} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (4.27)$$

Eşitlik (4.24) ve son bulduğumuz eşitlik, (3.71) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_{i_1 i_2}} \right) \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right)} \right] \mathbf{A}_i \right)^{-1} \times \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{1}{2})\rho_{k_1 k_2}} \left[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\rho_{k_1 k_2}} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (4.28)$$

elde edilir. Böylece birinci basamak, tek değişkenli YBMG fonksiyonlarına eşlik eden $\mathbf{B}_k^{(1)}$ matrislerinin Laplace dönüşümü olan $\mathbf{b}_k^{(1)}$ matrislerini elde etmiş oluruz. Eşitlik (4.24) ile verilen $\mathbf{T}$ matrisi de (3.69) ile verilen birinci basamak, değişmez YBMG bileşeninin Laplace dönüşümüdür. O halde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \left[\frac{1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_{i_1 i_2}} \right) \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{i_1 i_2}} \right)} \right] \mathbf{A}_i \right)^{-1} \quad (4.29)$$

Eşitlik (4.28)'i ρ 'lardan kurtarıp, daha açık yazmaya çalışalım. Bu amaçla (4.28)'deki matrisi iki parçaya ayıralım. Birinci parça (4.29) ile verilen $\mathbf{b}_0^{(1)}$ olsun, ikinci parçayı da aşağıda tanımlayalım.

$$\mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}(s, \alpha_k) = \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{1}{2})\rho_{k_1 k_2}} \left[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\rho_{k_1 k_2}} \ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)}{\ln \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}}{1 + \frac{1}{2}\rho_{k_1 k_2}} \right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (4.30)$$

Önce $\mathbf{b}_0^{(1)}$ 'ı hesaplayalım.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i = \mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (4.31)$$

Burada, $\mathbf{u}$, tüm elemanları bir olan $m \times 1$ 'lik bir vektörü temsil etmektedir. $\mathbf{D}$ 'nin (4.7) ile verilen eşitini ve (4.31) eşitliğini kullanalım.

$$\mathbf{D}^{-1}(s) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i \mathbf{A}_i \right)^{-1} = \left(s\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T \right)^{-1} \quad (4.32)$$

$$\left(s\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\right)^{-1} = \frac{1}{s}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2s}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\right)^{-1} \quad (4.33)$$

Eşitlik (4.10) ve $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = m$ eşitlikleri kullanılırsa, $\mathbf{D}^{-1}$ matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{D}^{-1}(s) = \frac{1}{s}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{2s-m}\mathbf{u}\mathbf{u}^T\right) = \frac{1}{s}\left(\mathbf{I} + \frac{1}{2s-m}\sum_{i=1}^N\mathbf{A}_i\right) \quad (4.34)$$

$\rho_{i_1 i_2}$ 'yi (4.12) ve yukarıdaki eşitliği kullanarak hesaplayalım.

$$\rho_{i_1 i_2} = \mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1} = \frac{1}{s} \mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{e}_{i_1} + \frac{1}{s(2s-m)} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{e}_{i_1} = \delta_{i_1 i_2} \quad (4.36)$$

eşitliğini kullanırsak, ρ 'yu aşağıdaki şekilde elde ederiz. Burada δ , **Kronecker Delta** fonksiyonunu temsil etmektedir.

$$\rho_{i_1 i_2} = \begin{cases} \frac{1}{s(2s-m)}, & i_1 \neq i_2 \\ \frac{2s-m+1}{s(2s-m)}, & i_1 = i_2 \end{cases} \quad (4.37)$$

ρ 'nun bu değerini (4.29) eşitliğinde yerine yazalım ve (4.1) eşitliğini kullanalım.

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \left(s\mathbf{I} - R_1 \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^m \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T - R_2 \sum_{i_1=1}^m \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_1}^T\right)^{-1} \quad (4.38)$$

Bu eşitlikteki R_1 ve R_2 katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$R_1(s) = \frac{\ln\left(\frac{2s(2s-m)-1}{2s(2s-m)+1}\right) \left(\frac{1}{2} + s(2s-m)\right) + 1}{\ln\left(\frac{2s(2s-m)-1}{2s(2s-m)+1}\right)} \quad (4.39)$$

$$R_2(s) = \frac{\ln\left(\frac{2s(2s-m)-(2s-m+1)}{2s(2s-m)+(2s-m+1)}\right) \left(\frac{(2s-m+1)+2s(2s-m)}{2(2s-m+1)}\right) + 1}{\ln\left(\frac{2s(2s-m)-(2s-m+1)}{2s(2s-m)+(2s-m+1)}\right)} \quad (4.40)$$

$\mathbf{b}_0^{(1)}$ matrisini hesaplayalım. Aşağıdaki eşitliği kullanalım.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T = \mathbf{I} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} & \left(s\mathbf{I} - R_1(s) \sum_{i_1, i_2=1}^m \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T + (R_1(s) - R_2(s)) \sum_{i_1=1}^m \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_1}^T\right)^{-1} \\ & = (P(s)\mathbf{I} - R_1(s)\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Burada P aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$P(s) = s + (R_1(s) - R_2(s)) \quad (4.43)$$

Yine, (4.10)'i kullanırsak, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$(P(s)\mathbf{I} - R_1(s)\mathbf{u}\mathbf{u}^T)^{-1} = \frac{1}{P(s)} \left[\mathbf{I} + \frac{R_1(s)}{P(s) - R_1(s)}\mathbf{u}\mathbf{u}^T \right] \quad (4.44)$$

Bu durumda, $b_0^{(1)}$ 'i aşağıdaki şekilde elde ederiz.

$$b_0^{(1)}(s) = \kappa(s, m)\mathbf{I} + \kappa(s, m)\xi(s, m)\mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (4.45)$$

$$\kappa(s, m) = \frac{1}{s + s(2s - m) \left(1 - \frac{1}{2s-m+1}\right) + \frac{1}{\Theta_1(s, m)} - \frac{1}{\Theta_2(s, m)}} \quad (4.46)$$

$$\xi(s, m) = \frac{\frac{1}{2} + s(2s - m) + \frac{1}{\Theta_1(s, m)}}{s - \frac{1}{2} - \frac{s(2s-m)}{2s-m+1} - \frac{1}{\Theta_2(s, m)}} \quad (4.47)$$

Burada, Θ_1 ve Θ_2 aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\Theta_1(s, m) = \ln \left(\frac{2s(2s - m) - 1}{2s(2s - m) + 1} \right) \quad (4.48)$$

$$\Theta_2(s, m) = \ln \left(\frac{2s(2s - m) - (2s - m + 1)}{2s(2s - m) + (2s - m + 1)} \right) \quad (4.49)$$

$\mathbf{B}_0^{(1)}(s)$ 'yi elde etmek için, yukarıdaki matrisin ters Laplace dönüşümünü elde etmemiz gerekir. Bunun için önce yukarıdaki eşitlikte, m 'ye bağlı terimleri $\frac{1}{m}$ 'nin kuvvetleri cinsinden seriye açalım. (Seri açılımlarının MuPAD çıktıları, Ekler - A'da verilmiştir.)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s + s(2s - m) \left(1 - \frac{1}{2s-m+1}\right) + \frac{1}{\ln(*)} - \frac{1}{\ln(**)}} \\ &= -\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right) + \frac{1}{m} \left[-\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)^2 \left(-s - \frac{1}{12s} + \frac{4s}{(4s^2 - 1)\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)^2} \right) \right] \\ & \quad + \dots \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} + s(2s - m) + \frac{1}{\ln(*)}}{\left(s + s(2s - m) \left(1 - \frac{1}{2s-m+1}\right) + \frac{1}{\ln(*)} - \frac{1}{\ln(**)} \right) \left(s - \frac{1}{2} - \frac{s(2s-m)}{2s-m+1} - \frac{1}{\ln(**)} \right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)}{\left(\frac{1}{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + \frac{1}{2} \right)} + \frac{1}{m} \left[-\frac{1}{12s} \frac{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)}{\left(\frac{1}{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + \frac{1}{2} \right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)}{\left(\frac{1}{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + \frac{1}{2} \right)} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[-\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} \left(-s + \frac{4s}{(4s^2-1)\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2} \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} + \frac{1}{2} \right) \left(-s - \frac{1}{12s} + \frac{4s}{(4s^2-1)\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.51)$$

Bu durumda $\mathbf{B}_0^{(1)}(t)$ aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0^{(1)}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right) + \frac{1}{m} \left[-\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2 \right. \right. \\ & \quad \times \left. \left(-s - \frac{1}{12s} + \frac{4s}{(4s^2-1)\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2} \right) \right] + \dots \Big\} \mathbf{I} \\ &+ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)}{\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{m} \left[-\frac{1}{12s} \frac{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)}{\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)}{\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} + \frac{1}{2}\right)} \right)^2 \right. \right. \\ & \quad \times \left[-\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} \left(-s + \frac{4s}{(4s^2-1)\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2} \right) \right. \\ & \quad \left. \left. - \left(\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} + \frac{1}{2} \right) \left(-s - \frac{1}{12s} + \frac{4s}{(4s^2-1)\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2} \right) \right] + \dots \right\} \mathbf{u}\mathbf{u}^T \end{aligned} \quad (4.52)$$

$\mathbf{B}_0^{(1)}$ matrisinin seri açılımında, sadece değişmez terimi alıkoyarak matris için bir yaklaştırım elde edelim. Bunun için, aşağıdaki seri açılımlarına gereksinimimiz olacaktır.

$$\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right) = -\frac{1}{s} - \frac{1}{12s^3} - \frac{1}{80s^5} - \dots \quad (4.53)$$

$$\frac{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)}{\frac{1}{\ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3} + \frac{5}{12s^4} + \dots \quad (4.54)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \quad (4.55)$$

eşitliğin de kullanılmasıyla $\mathbf{B}_0^{(1)}$ için bir yaklaştırım aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) \sim \left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (4.56)$$

Şimdi eşitlik (4.30) ile verilen $\mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}$ matrisini hesaplayalım.

$\mathbf{A}_k$ matrisi (4.1) eşitliğindeki gibi tanımlanmıştır. Yani,

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \quad (4.57)$$

yazılabilir. O halde (4.30) ile, eşiti verilen matris için iki ayrı durum incelenmelidir.

$k_1 = k_2$ ise,

$$k_1 = k_2 = \bar{k} \quad (4.58)$$

olsun. $\mathbf{D}^{-1}$ 'nin (4.34) ile verilen eşitini kullanalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) &= \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \frac{1}{s} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2s-m} \sum_{j_1, j_2=1}^m \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2}^T \right) \\ &= \frac{1}{s} \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_1}^T + \frac{1}{s(2s-m)} \mathbf{e}_{k_1} \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{j_2}^T \end{aligned} \quad (4.59)$$

Yukarıda elde edilen eşitliği ve $\rho_{k_1 k_2}$ 'nin (4.37) ile verilen eşitliğini (4.30)'da yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\bar{k}}^{(1)}(s, \alpha_k) &= \\ \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{\bar{k}}^T &\left[\frac{-(2s-m)}{(2s-m+1)} - \frac{(2s-m)}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})(2s-m+1)] \Theta_2(s, m)} \right] \\ + \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{j_2}^T &\left[\frac{-1}{(2s-m+1)} - \frac{1}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})(2s-m+1)] \Theta_2(s, m)} \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

$\mathbf{b}_0^{(1)}$ matrisinde yapıldığı gibi, bu kez de $\mathbf{b}_{\bar{k}}^{(1)}$ matrisindeki s 'ye ve m 'ye bağımlı terimlerin $\frac{1}{m}$ 'nin kuvvetleri cinsinden seri açılımlarını elde edelim.

$$\begin{aligned} \frac{-(2s-m)}{(2s-m+1)} - \frac{(2s-m)}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})(2s-m+1)] \Theta_2(s, m)} &= \\ \left[-1 + \frac{1}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s] \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} \right] + \\ \frac{1}{m} \left[\frac{1}{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right) [(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s]} \left(\frac{8s}{(2-8s^2) \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + \frac{(\alpha_k - \frac{1}{2})}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s]} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{(2s-m+1)} - \frac{1}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})(2s-m+1)] \Theta_2(s, m)} &= \\ \frac{1}{m} \left[\frac{-1}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s] \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + 1 \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.62)$$

Bu eşitlikler kullanılarak $\mathbf{B}_{\bar{k}}^{(1)}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\bar{k}}^{(1)}(t, \alpha_k) &= \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{\bar{k}}^T \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s] \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} \right] + \right. \\ \frac{1}{m} \left[\frac{1}{\ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right) [(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s]} \left(\frac{8s}{(2-8s^2) \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + \frac{(\alpha_k - \frac{1}{2})}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s]} \right) \right] &+ \dots \left. \right\} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{j_2}^T \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{-1}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s] \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} + 1 \right] + \dots \right\} \quad (4.63)$$

$\mathbf{B}_0^{(1)}$ matrisinde yapıldığı gibi, şimdi de $\mathbf{B}_k^{(1)}$ matrisi için, değişmez terimi alıkoyarak bir yaklaşıtırm üretmeye çalışalım. Eşitlik (4.55)'i kullanarak değişmez terimlerin ters Laplace dönüşümlerini elde edelim.

$$-1 + \frac{1}{[(\alpha_k - \frac{1}{2}) - s] \ln \left(\frac{2s-1}{2s+1} \right)} = (\alpha_k - \frac{1}{2}) \frac{1}{s} + \left[(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right] \frac{1}{s^2} + \dots \quad (4.64)$$

seri açılımının kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\bar{k}}^{(1)}(t, \alpha_k) &\sim \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{\bar{k}}^T \left[(\alpha_k - \frac{1}{2}) + \left[(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right] t + \dots \right] \\ &+ \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_{j_2}^T \left[-(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left[(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right] t + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.65)$$

şeklinde elde edillir.

$k_1 \neq k_2$ ise,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) &= \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \frac{1}{s} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2s-m} \sum_{j_1, j_2=1}^m \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2}^T \right) \\ &= \frac{1}{s} \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T + \frac{1}{s(2s-m)} \mathbf{e}_{k_1} \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{j_2}^T \end{aligned} \quad (4.66)$$

Eşitlik (4.37) ve eşitlik (4.66), eşitlik (4.30)'da yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}(s, \alpha_k) &= \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \left[-(2s-m) - \frac{(2s-m)}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})] \Theta_1(s, m)} \right] \\ &+ \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{j_2}^T \left[-1 - \frac{1}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})] \Theta_1(s, m)} \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi, $\mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}$ matrisinin ters Laplace dönüşümü olan $\mathbf{B}_{k_1 k_2}^{(1)}$ matrisini elde edelim. Bunun için, yine daha önce yapıldığı gibi, s ve m 'ya bağlı terimleri $\frac{1}{m}$ 'nin kuvvetleri cinsinden seriye açalım.

$$\begin{aligned} &-(2s-m) - \frac{(2s-m)}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})] \ln \left(\frac{2s(2s-m)-1}{2s(2s-m)+1} \right)} = \\ &\frac{(\alpha_k - \frac{1}{2})}{s} + \frac{1}{m} \left[\frac{-(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}{s^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$-1 - \frac{1}{[s(2s-m) - (\alpha_k - \frac{1}{2})] \ln \left(\frac{2s(2s-m)-1}{2s(2s-m)+1} \right)} = \frac{1}{m} \left[\frac{-(\alpha_k - \frac{1}{2})}{s} \right] + \dots \quad (4.69)$$

Bu seri açılımları kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{k_1 k_2}^{(1)}(t, \alpha_k) &= \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(\alpha_k - \frac{1}{2})}{s} + \frac{1}{m} \left[\frac{-(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}}{s^2} \right] \dots \right\} \\ &+ \sum_{j_2=1}^m \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{j_2}^T \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{m} \left[-\frac{(\alpha_k - \frac{1}{2})}{s} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.70)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi de $\mathbf{B}_{k_1 k_2}^{(1)}$ matrisi için, sadece değişmez terimleri alıkoyarak bir yaklaştırım elde etmeye çalışalım. Eşitlik (4.55)'in de kullanılmasıyla,

$$\mathbf{B}_{k_1 k_2}^{(1)}(t, \alpha_k) \sim \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T (\alpha_k - \frac{1}{2}) \quad (4.71)$$

elde edilir. Bu durumda (4.28) ile verilen $\mathbf{b}_k^{(1)}$ matrisini için, değişmez terimleri alıkoyarak elde edilen yaklaştırım aşağıdaki gibidir.

$k_1 = k_2 = \bar{k}$ için,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \sim & \left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \\ & \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \bar{k}}}^m \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_j^T \left(-(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left[(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right] t + \dots \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

$k_1 \neq k_2$ için,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \sim & \left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \\ & \times \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T (\alpha_k - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Eşitlik (4.56), eşitlik (4.72) ve eşitlik (4.73) kullanılarak, f fonksiyonunun birinci basamak, değişmez ve tek değişkenli YBMG bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f_0^{(1)}(t) \sim \mathbf{y}^T \left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \mathbf{x} \quad (4.74)$$

$k_1 = k_2 = \bar{k}$ için,

$$\begin{aligned} f_k^{(1)}(t, \alpha_k) \sim & \mathbf{y}^T \left(\left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \right. \\ & \times \left. \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \bar{k}}}^m \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_j^T \left(-(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left[(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right] t + \dots \right) \right) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.75)$$

$k_1 \neq k_2$ için,

$$\begin{aligned} f_k^{(1)}(t, \alpha_k) \sim & \mathbf{y}^T \left(\left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \right. \\ & \times \left. \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T (\alpha_k - \frac{1}{2}) \right) \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.76)$$

$\mathbf{E}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ matrisinin Birinci Basamak YBMG Yaklaştırımı, aşağıdaki yaklaşık eşitlik ile verilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) \sim & \left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \\ & + \left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \\ & \times \left(\sum_{\substack{j, \bar{k}=1 \\ j \neq \bar{k}}}^m \mathbf{e}_{\bar{k}} \mathbf{e}_j^T \left(-(\alpha_k - \frac{1}{2}) - \left[(\alpha_k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{12} \right] t + \dots \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^m \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T (\alpha_k - \frac{1}{2}) \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

Bu yapıyı biraz daha sadeleştirip tekrar yazalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \alpha_1, \dots, \alpha_N) &\sim \left(\left[1 + \frac{1}{12} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{I} + \left[t + \frac{1}{2} \frac{t^2}{2!} + \dots \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right) \\ &\times \left(\mathbf{I} + \sum_{\substack{k_1, k_2=1 \\ k_1 \neq k_2}}^m \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \left(- \left[\left(\alpha_k - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] t + \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Böylece, yapısında, elemanları $1 \leq i \leq N$ olmak üzere α_i 'ler olan bir matris barındıran üstel matrisin Birinci Basamak YBMG Yaklaşımı, $[0, 1]$ aralığında ve $W_i = 1$ ağırlığı altında, kuvvet serileri aracılığı ile elde edilmiş olmaktadır. Ağırlıkları ve aralıkları daha genel tutarak yaptığımız inceleme bir sonraki bölümde verilmektedir.

BÖLÜM 5

UYGULAMA - 2

$\mathbf{A}$ matrisinin elemanları bu kez de $1 \leq i \leq N$ olmak üzere α_i 'ler olsun ve $\mathbf{A}_i$ matrisleri (4.1) eşitliğindeki şekilde tanımlansın. α_i , $\mathbf{A}$ matrisinin i_1 . satır ve i_2 . kolonundaki eleman olmak üzere, bu değişken için ağırlık fonksiyonu,

$$W_i = \begin{cases} \frac{1}{c}, & i_1 \neq i_2 \\ \frac{1}{b}, & i_1 = i_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

ve aralık,

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [0, c], & i_1 \neq i_2 \\ [0, b], & i_1 = i_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu tanımları kullanarak, (1.89) ile verilen $\mathbf{E}$ matrisi için birinci basamak YBMG yaklaşımını elde etmeye çalışalım. Bunun için, (3.69) ve (3.71) ile verilen matrislerin hesaplanması gerekmektedir. Uygulama - 1'de yapılan işlemleri, ağırlık fonksiyonları ve aralığın yukarıdaki seçimine göre tekrarlayalım. Bunu için öncelikle (4.5) ile tanımı verilen $\bar{\mathbf{T}}$ matrisinin yapısında bulunan $\mathbf{L}_i$ ve $\mathbf{M}_i$ matrislerinin yeni ağırlık fonksiyonlarının ve ağırlıkların eşliğinde yeniden hesaplanmaları gerekmektedir. Eşitlik (4.6) ile verilen $\bar{\mathbf{C}}_i$ matrisini elde edelim.

$i_1 = i_2$ ise,

Tanım (2.1)'i kullanalım.

$$\bar{\alpha}_i = \frac{b}{2} \quad (5.3)$$

Bu eşitlik (4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^m \frac{c}{2} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2}^T - \sum_{j_1=1}^m \frac{b}{2} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_1}^T - \left(\alpha_i - \frac{b}{2} \right) \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T \right)^{-1} \quad (5.4)$$

Eşitlik (4.41), (5.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) = \left(\left(s - \frac{b}{2} \right) \mathbf{I} - \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^m \frac{c}{2} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2}^T - \left(\alpha_i - \frac{b}{2} \right) \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T \right)^{-1} \quad (5.5)$$

elde edilir. Bir önceki bölümde (4.7) ile tanımı verilen $\mathbf{D}$ matrisini bu kez aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\mathbf{D}(s) = \left(\left(s - \frac{b}{2} \right) \mathbf{I} - \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^m \frac{c}{2} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2}^T \right) \quad (5.6)$$

Bu durumda, (5.5) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) &= [\mathbf{D}(\mathbf{I} - (\alpha_i - \frac{b}{2}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i)]^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - (\alpha_i - \frac{b}{2}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$\mathbf{D}^{-1}$ matrisini hesaplayalım.

$$\mathbf{D}^{-1}(s) = \left[\left(s - \frac{b}{2} \right) \mathbf{I} - \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 \neq j_2}}^m \frac{c}{2} \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2}^T \right]^{-1} \quad (5.8)$$

Eşitlik (4.31) ve eşitlik (4.10) sırasıyla kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1}(s) &= \left[\left(s - \frac{b}{2} \right) \mathbf{I} - \frac{c}{2} (\mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mathbf{I}) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} \left[\mathbf{I} + \frac{\frac{c}{2}}{s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}(1-m)} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Eşitlik (4.12) ile verilen $\rho_{i_1 i_2}$ değeri, $i_1 = i_2$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\rho_{i_1 i_2} = \rho \quad (5.10)$$

Eşitlik (5.9) ve eşitlik (5.10)'u (5.7)'de yerine yazalım ve tekrar (4.10) eşitliğini kullanalım.

$$\left(\mathbf{I} - \left(\alpha_i - \frac{b}{2} \right) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i \right)^{-1} = \mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{b}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{b}{2}) \rho} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i \quad (5.11)$$

Bu durumda, (5.7) ile verilen $\bar{\mathbf{C}}_i$ matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) = \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{b}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{b}{2}) \rho} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i \right] \mathbf{D}^{-1} \quad (5.12)$$

Şimdi sırasıyla, $\mathbf{L}_i$ ve $\mathbf{M}_i$ 'yi hesaplayalım. $\bar{\mathbf{C}}_i$ 'nin (5.12) ile verilen değerini (3.67) eşitliğinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i(s) &= \int_0^b \alpha_i^2 \mathbf{A}_i \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{b}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{b}{2}) \rho} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i \right] \mathbf{D}^{-1}(s) \frac{1}{b} d\alpha_i \\ &\quad - \frac{b}{2} \int_0^b \alpha_i \mathbf{A}_i \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{b}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{b}{2}) \rho} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i \right] \mathbf{D}^{-1}(s) \frac{1}{b} d\alpha_i \end{aligned} \quad (5.13)$$

Eşitlik (4.14)'ün kullanılmasıyla, $\mathbf{L}_i$ 'yi aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\mathbf{L}_i(s) = \left[\frac{-(\rho b + 2)}{2\rho^2} - \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right) \left(-\frac{\rho b + 2}{2\rho^3} \right) \right] \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.14)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.12)'yi bu kez de (3.68)'de yerine yazalım.

$$\mathbf{M}_i(s) = \left[\mathbf{I} - \left(\frac{1}{\rho} - \left(\frac{2 + \rho b}{2\rho^2 b} \right) \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right) \right) \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \right]^{-1} \quad (5.15)$$

Eşitlik (4.10)'un kullanılmasıyla, $\mathbf{M}_i$ 'yi de aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{M}_i(s) = \mathbf{I} + \frac{\left[\frac{1}{\rho} - \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right) \left(\frac{2 + \rho b}{2\rho^2 b} \right) \right]}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right) \left(\frac{2 + \rho b}{2\rho b} \right)} \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.16)$$

$i_1 \neq i_2$ ise,

Tanım (2.1)'i kullanalım.

$$\bar{\alpha}_i = \frac{c}{2} \quad (5.17)$$

Bir önceki adımda, $i_1 = i_2$ için hesaplanan matrisleri yeniden hesaplayalım. Hesaplama yöntemleri bir önceki adımdakilerin aynısı olduğundan bu kesimde sadece sonuçlar verilecektir.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) &= [\mathbf{D} (\mathbf{I} - (\alpha_i - \frac{c}{2}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i)]^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - (\alpha_i - \frac{c}{2}) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1}(s) &= \left[(s - \frac{b}{2}) \mathbf{I} - \frac{c}{2} (\mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mathbf{I}) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} \left[\mathbf{I} + \frac{\frac{c}{2}}{s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}(1-m)} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Eşitlik (4.12) ile verilen $\rho_{i_1 i_2}$ değeri, $i_1 \neq i_2$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\rho_{i_1 i_2} = \bar{\rho} \quad (5.20)$$

Eşitlik (5.19) ve eşitlik (5.20) birlikte kullanılırsa, $\bar{\mathbf{C}}_i$ matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\bar{\mathbf{C}}_i(s, \alpha_i) = \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{c}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{c}{2}) \bar{\rho}} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}_i \right] \mathbf{D}^{-1} \quad (5.21)$$

Şimdi sırasıyla $\mathbf{L}_i$ ve $\mathbf{M}_i$ matrislerini hesaplayalım. Bu kez $\mathbf{L}_i$ matrisinin tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_i(s) &= \int_0^c \alpha_i^2 \mathbf{A}_i \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{c}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{c}{2}) \bar{\rho}} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i \right] \mathbf{D}^{-1}(s) \frac{1}{c} d\alpha_i \\ &\quad - \frac{c}{2} \int_0^c \alpha_i \mathbf{A}_i \left[\mathbf{I} + \frac{(\alpha_i - \frac{c}{2})}{1 - (\alpha_i - \frac{c}{2}) \bar{\rho}} \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{A}_i \right] \mathbf{D}^{-1}(s) \frac{1}{c} d\alpha_i \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{L}_i(s) = \left[\frac{-(\bar{\rho}c + 2)}{2\bar{\rho}^2} - \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right) \left(-\frac{\bar{\rho}c + 2}{2\bar{\rho}^3} \right) \right] \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.23)$$

Benzer şekilde $\mathbf{M}_i$ matrisi de aşağıdaki şekildedir.

$$\mathbf{M}_i(s) = \mathbf{I} + \frac{\left[\frac{1}{\bar{\rho}} - \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right) \left(\frac{2 + \bar{\rho}c}{2\bar{\rho}^2 c} \right) \right]}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right) \left(\frac{2 + \bar{\rho}c}{2\bar{\rho}c} \right)} \mathbf{A}_i \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.24)$$

Şimdi (4.5) eşitliğinde tanımlanan $\bar{\mathbf{T}}$ matrisini tekrar yazalım. (Toplamdaki ilk terim, köşegen elemanların, ikinci terim ise köşegen dışı elemanların oluşturduğu matris yapılarını temsil etmektedir.)

$$\bar{\mathbf{T}}(s) = \sum_{\substack{i=1 \\ i_1=i_2}}^N \mathbf{L}_i \mathbf{M}_i \mathbf{A}_i + \sum_{\substack{i=1 \\ i_1 \neq i_2}}^N \mathbf{L}_i \mathbf{M}_i \mathbf{A}_i \quad (5.25)$$

Eşitlik (5.14), eşitlik (5.16), eşitlik (5.23) ve eşitlik (5.24) yukarıda yerlerine yazılır ve (4.21), (4.22) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\bar{\mathbf{T}}(s) = \sum_{i_1=1}^m b \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right)} \right] \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_1}^T + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^m c \left[\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right] \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T \quad (5.26)$$

Eşitlik (2.15) ile verilen $\bar{\mathbf{A}}$ matrisini (5.3) ve (5.17) eşitliklerini kullanarak tekrar hesaplayalım.

$$\bar{\mathbf{A}} = \sum_{i_1=1}^m \frac{b}{2} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_1}^T + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^m \frac{c}{2} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T \quad (5.27)$$

Yukarıda verilen iki eşitlik (4.4)'de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) = & \left(s\mathbf{I} - \sum_{i_1=1}^m \left[\frac{b}{2} + b \left[\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right)} \right] \right] \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_1}^T \right. \\ & \left. - \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 \neq i_2}}^m \left[\frac{c}{2} + c \left[\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right] \right] \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2}^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Eşitlik (4.31)'in kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(s) = & \left(\left[s - \frac{b}{2} - b \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\rho b}{1 - \frac{1}{2}\rho b} \right)} \right) + \frac{c}{2} + c \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right) \right] \mathbf{I} \right. \\ & \left. - \left[\frac{c}{2} + c \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right) \right] \mathbf{u} \mathbf{u}^T \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.29)$$

elde edilir. Buradaki ters alma işleminde (4.10) eşitliğini kullanalım.

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{s - \frac{b}{2} - b \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)} \right) + \frac{c}{2} + c \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\bar{\rho} c}{1-\frac{1}{2}\bar{\rho} c}\right)} \right)} \quad (5.30)$$

$$\bar{\xi} = \frac{\frac{c}{2} + c \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\bar{\rho} c}{1-\frac{1}{2}\bar{\rho} c}\right)} \right)}{s - \frac{b}{2} - b \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)} \right) + \left[\frac{c}{2} + c \left(\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\bar{\rho} c}{1-\frac{1}{2}\bar{\rho} c}\right)} \right) \right] (1-m)} \quad (5.31)$$

olmak üzere,

$$\mathbf{T}(s) = \bar{\kappa} \mathbf{I} + \bar{\kappa} \bar{\xi} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \quad (5.32)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi, (4.3) ile verilen $\mathbf{K}_k$ matrisini hesaplayalım. Yine, iki ayrı durum incelememiz gerekmektedir.

$k_1 = k_2 = \bar{k}$ ise,

Eşitlik (4.1) ve eşitlik (5.12)'nin kullanılmasıyla,

$$\mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}(s, \alpha_k) = b \left[1 + \frac{\rho(\alpha_k - \frac{b}{2})}{1 - (\alpha_k - \frac{b}{2})\rho} \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.33)$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde, (5.14) ve (5.16) eşitliklerini kullanalım.

$$\mathbf{L}_k(s) \mathbf{M}_k(s) = b \left[\frac{1 + \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)}{\rho \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)} \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.34)$$

Eşitlik (5.33) ve eşitlik (5.34)'ü, (4.3) eşitliğinde yerlerine yazalım.

$$\mathbf{K}_k(s, \alpha_k) = \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{b}{2})\rho} \left[(\alpha_k - \frac{b}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (5.35)$$

Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) = (\bar{\kappa} \mathbf{I} + \bar{\kappa} \bar{\xi} \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \times \left(\frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{b}{2})\rho} \left[(\alpha_k - \frac{b}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \right) \quad (5.36)$$

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \bar{\kappa} \mathbf{I} + \bar{\kappa} \bar{\xi} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \quad (5.37)$$

$$\mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}(s, \alpha_k) = \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{b}{2})\rho} \left[(\alpha_k - \frac{b}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)}{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}\rho b}{1-\frac{1}{2}\rho b}\right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (5.38)$$

$k_1 \neq k_2$ ise,

Eşitlik (4.1) ve eşitlik (5.21)'in kullanılmasıyla,

$$\mathbf{A}_k \bar{\mathbf{C}}(s, \alpha_k) = c \left[1 + \frac{\bar{\rho}(\alpha_k - \frac{c}{2})}{1 - (\alpha_k - \frac{c}{2})\bar{\rho}} \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.39)$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde, (5.23) ve (5.24) eşitliklerini kullanalım.

$$\mathbf{L}_k(s) \mathbf{M}_k(s) = c \left[\frac{1 + \frac{1}{\bar{\rho}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)}{\bar{\rho} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) \quad (5.40)$$

Eşitlik (5.39) ve eşitlik (5.40)'ı, (4.3) eşitliğinde yerlerine yazalım.

$$\mathbf{K}_k(s, \alpha_k) = \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{c}{2})\bar{\rho}} \left[(\alpha_k - \frac{c}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\bar{\rho}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (5.41)$$

Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) &= (\bar{\kappa} \mathbf{I} + \bar{\kappa} \bar{\xi} \mathbf{u} \mathbf{u}^T) \times \\ &\left(\frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{c}{2})\bar{\rho}} \left[(\alpha_k - \frac{c}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\bar{\rho}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \bar{\kappa} \mathbf{I} + \bar{\kappa} \bar{\xi} \mathbf{u} \mathbf{u}^T \quad (5.43)$$

$$\mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}(s, \alpha_k) = \frac{1}{1 - (\alpha_k - \frac{c}{2})\bar{\rho}} \left[(\alpha_k - \frac{c}{2}) - \left(\frac{1 + \frac{1}{\bar{\rho}} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)}{\ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2}\bar{\rho}c}{1 - \frac{1}{2}\bar{\rho}c} \right)} \right) \right] \mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1} \quad (5.44)$$

Şimdi elde ettiğimiz yapıları ρ ve $\bar{\rho}$ 'dan kurtarıp daha açık yazmaya çalışalım. Eşitlik (4.12) ve eşitlik (5.19)'u kullanalım.

$$\rho_{i_1 i_2} = \mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{D}^{-1}(s) \mathbf{e}_{i_1} = \frac{1}{s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} \mathbf{e}_{i_2}^T \mathbf{e}_{i_1} + \frac{\frac{c}{2}}{(s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2})(1 - m)(s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2})} \quad (5.45)$$

Eşitlik (4.37)'nin kullanılmasıyla ρ ve $\bar{\rho}$ aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\rho = \frac{1}{s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}} + \frac{\frac{c}{2}}{(s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2})(1 - m)(s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2})} \quad (5.46)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\frac{c}{2}}{(s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2})(1 - m)(s - \frac{b}{2} + \frac{c}{2})} \quad (5.47)$$

Aşağıdaki tanımları yapalım.

$$b = 2\nu_2 + 2\frac{\nu_1}{m} \quad (5.48)$$

$$c = 2\frac{\nu_1}{m} \quad (5.49)$$

Burada, ν_1 ve ν_2 artı değerli keyfi iki değiştirgendir. Bu tanımların (5.46) ve (5.47) eşitliklerinde yerlerine konulmasıyla,

$$\rho = \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)} \quad (5.50)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\nu_1}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)} \quad (5.51)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri kullanarak önce $\mathbf{b}_0^{(1)}$ matrisini hesaplayalım. Eşitlikleri önce (5.30), daha sonra da (5.31)'de yerlerine yazalım.

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}(s, m) = \frac{1}{s - \nu_2 - \left(\nu_2 + \frac{\nu_1}{m}\right) \varepsilon(s, m) - \zeta(s, m)} \quad (5.52)$$

Burada, ε ve ζ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır.

$$\varepsilon(s, m) = \frac{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)}{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)} + \frac{1}{\bar{\Theta}_1(s, m)} \quad (5.53)$$

$$\zeta(s, m) = (s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2) + \nu_1 \frac{1}{m\bar{\Theta}_2(s, m)} \quad (5.54)$$

$\bar{\Theta}_1$ ve $\bar{\Theta}_2$ fonksiyonlarının tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\bar{\Theta}_1(s, m) = \ln \left[\frac{1 + \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)} \left[\nu_2 + \frac{\nu_1}{m} \right]}{1 - \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)} \left[\nu_2 + \frac{\nu_1}{m} \right]} \right] \quad (5.55)$$

$$\bar{\Theta}_2(s, m) = \ln \left[\frac{1 + \frac{2\nu_1^2}{m^2(s - \nu_1 - \nu_2)}}{1 - \frac{2\nu_1^2}{m^2(s - \nu_1 - \nu_2)}} \right] \quad (5.56)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(s, m) = \frac{\frac{\nu_1}{m} + 2\zeta(s, m)}{s - \nu_1 - \nu_2 - \left(2\nu_2 + 2\frac{\nu_1}{m}\right) \varepsilon(s, m) + \left(-2\nu_1 + 2\frac{\nu_1}{m}\right) m\zeta(s, m)} \quad (5.57)$$

Eşitlik (5.52) ve eşitlik (5.57)'yi, (5.43) eşitliğinde yerlerine yazalım.

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = \bar{\kappa}(s, m)\mathbf{I} + \bar{\kappa}(s, m)\bar{\xi}(s, m)\mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (5.58)$$

$k_1 = k_2 = \bar{k}$ ise,

$$\mu_1(s, m) = \frac{m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2) - \left(\alpha_k - \nu_2 - \frac{\nu_1}{m}\right) (\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2))} \quad (5.59)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\bar{k}}^{(1)}(s, \alpha_k) &= \mathbf{e}_{\bar{k}}\mathbf{e}_{\bar{k}}^T \mu_1(s, m) \times \\ &\left[\left(\alpha_k - \nu_2 - \frac{\nu_1}{m} \right) - \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)} - \frac{1}{\bar{\Theta}_1(s, m)} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^m \mathbf{e}_{\bar{k}}\mathbf{e}_j^T \mu_1(s, m) \frac{\nu_1}{m(s - \nu_1 - \nu_2)} \times \end{aligned}$$

$$\left[\left(\alpha_k - \nu_2 - \frac{\nu_1}{m} \right) - \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2)} - \frac{1}{\bar{\Theta}_1(s, m)} \right] \quad (5.60)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde,

$k_1 \neq k_2$ ise,

$$\mu_2(s, m) = \frac{m(s - \nu_1 - \nu_2)}{m(s - \nu_1 - \nu_2)(s - \nu_2) - \nu_1 \left(\alpha_k - \frac{\nu_1}{m} \right) (\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2))} \quad (5.61)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}(s, \alpha_k) &= \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2}^T \mu_2(s, m) \times \\ &\left[\left(\alpha_k - \frac{\nu_1}{m} \right) - \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{\nu_1} - \frac{1}{\bar{\Theta}_2(s, m)} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^m \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_j^T \mu_2(s, m) \frac{\nu_1}{m(s - \nu_1 - \nu_2)} \times \\ &\left[\left(\alpha_k - \frac{\nu_1}{m} \right) - \frac{\nu_1 + m(s - \nu_1 - \nu_2)}{\nu_1} - \frac{1}{\bar{\Theta}_2(s, m)} \right] \end{aligned} \quad (5.62)$$

şeklindedir.

Bir önceki bölümde yapıldığı gibi burada da $\mathbf{b}_0^{(1)}$ ve $\mathbf{b}_{k_1 k_2}^{(1)}$ matrislerinin ters Laplace dönüşümleri seri açılar yardımıyla bulunabilir ve Laplace dönüşümünün Katlama özelliği kullanılarak, bu matrislerin çarpımı olan $\mathbf{b}_k^{(1)}$ matrisinin ters Laplace dönüşümü, $\mathbf{B}_k^{(1)}$, elde edilebilir. $\mathbf{B}_0^{(1)}$ ve $\mathbf{B}_k^{(1)}$ matrislerinin toplamı ise ilgilendiğimiz üstel matris $\mathbf{E}$ 'nin Birinci Basamaktan YBMG Yaklaşımıdır. Fakat, burada yaklaşımın açık yapısının elde edilmesi üzerinde durulmayacaktır.

Bu bölüm ve önceki bölümden çıkarılan sonuçlar, YBMG açılımının üstel matrisin ters Laplace dönüşümü üzerindeki etkisinin Çok Değiştirgenli Saptırım Açılımının aynı yapı üzerindeki etkisiyle benzerlik gösterdiği ile ilgili ipuçları vermektedir. Benzerlikleri araştırmak amacıyla, Çok Değiştirgenli Saptırım Açılımı hakkında genel bilgi, bir sonraki bölümde verilecektir.

BÖLÜM 6

ÇOK DEĞİŞTİRGENLİ SAPTIRIM AÇILIMLARI

Bu bölümde, verilen genel yapıda bir doğrusal operatörün çokdeğiştirgenli (multiparameter) saptırım (perturbation) açılımı üzerinde durulacaktır.

Açılımın tanımı için gözönüne alınacak operatör olası en genel durumunda düşünülmeyecek, değiştirgenlere bağımlılığının da doğrusal olduğu varsayılacaktır. Bu varsayım, her ne kadar, değiştirgenlere olan bağımlılığı kısıtlıyorsa da bizim YBMG çalışmalarımızda, en azından bu an için, karşılaşılan durumların tümünü kapsamaktadır. Böylece,

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \equiv [\mathcal{L}_0 + (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)\mathcal{L}_1 + (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)\mathcal{L}_2 + \dots + (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)\mathcal{L}_N]^{-1} \quad (6.1)$$

büyükliğini düşünerek yola koyulabiliriz. Burada, $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ ile bağımsız değiştirgenler simgelenmekte, $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_N$ ile ise bu değiştirgenlere bağımlı olmayan ama açık yapıları bilinen operatörler gösterilmektedir. Bu tanım eşitliğinin sağ yanında tersi gözüken yapı, açıkça görülebildiği üzere, değiştirgenlere doğrusal olarak bağımlı alınmaktadır. Bir başka varsayım ise $\mathcal{L}_0$ operatörünün tersinin alınabildiği yani $\mathcal{L}_0^{-1}$ operatörünün varolduğudur. Amacımız, $M(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ fonksiyonunun değiştirgenlerin eksi olmayan tamsayı üslüleri türünden açılımının belirlenmesidir. Bu bir anlamda Taylor açılımından başka bir şey değildir. Ancak değiştirgenlerin yukarıda tanımlanan ama açık yapıları verilmeyen operatörlerin yapılarında bulunmamaları yani onların değişkenleri olmaması, “Taylor Açılımı” deyiminin kullanılmamasının, onun yerine başka bir deyim kullanılmasının daha yerinde olacağı izlenimini verir. Aslında, açılımın $(\alpha_1 - \bar{\alpha}_1), \dots, (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)$ büyüklüklerinin eksi olmayan tamsayı üslüleri türünden yapılması değiştirgenlerin kendileri yerine belirli bir değerden sapmalarının gündemde olduğunu gösterir. Bu durum, sağ yandaki yapının $\mathcal{L}_0$ operatöründen saptırılmış bir yapının tersi olduğu anlamına gelir. Bu ise üretilecek açılımın “Çokdeğiştirgenli Saptırım Açılımı” olarak adlandırılabilceği yargısına götürür. Bu deyimin İngilizce karşılığının “Multiparameter Perturbation Expansion” olacağını vurgulamakta da yarar bulunmaktadır.

Denklem (6.1)'den M fonksiyonunu belirlemek amacıyla aşağıdaki matematiksel yapı öngörülebilir.

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \equiv \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1} \dots (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N} M_{k_1 \dots k_N} \quad (6.2)$$

Burada $M_{k_1 \dots k_N}$ büyüklükleri değiştirgenlere bağımlı olmayan ve bu an için bilinmeyen operatörleri göstermektedir. Bu operatörleri kolayca belirleyip genel bir bağıntıyla verilebilir biçime kavuşturmak için (6.1) denklemini aşağıdaki biçimde yeniden yazmak daha yerinde olacaktır.

$$[\mathcal{L}_0 + (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)\mathcal{L}_1 + (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)\mathcal{L}_2 + \dots + (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)\mathcal{L}_N] M(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = \mathcal{I} \quad (6.3)$$

Burada $\mathcal{I}$, $\mathcal{L}$ operatörlerinin içinde bulunduğu “Operatör Uzayı’nın” birim elemanını yani “Birim Operatör’ü” göstermektedir. Eğer, (6.2) ile verilen yapı (6.3)’te ilgili yere yerleştirilecek olursa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1} \dots (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N} \mathcal{L}_0 M_{k_1 \dots k_N} \\ & + \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1+1} (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)^{k_2} \dots (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N} \mathcal{L}_1 M_{k_1 \dots k_N} \\ & + \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1} (\alpha_2 - \bar{\alpha}_2)^{k_2+1} (\alpha_3 - \bar{\alpha}_3)^{k_3} \dots (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N} \mathcal{L}_2 M_{k_1 \dots k_N} \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1} \dots (\alpha_{N-1} - \bar{\alpha}_{N-1})^{k_{N-1}} (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N+1} \mathcal{L}_N M_{k_1 \dots k_N} = \mathcal{I} \quad (6.4) \end{aligned}$$

Bu eşitlikteki toplamaların ilki dışındakilerin tümünde üslü çarpanlardan birinde üs 1 arttırılmış durumdadır. $M_{k_1, \dots, k_N}$ katsayılarının belirlenebilmesi için bu arttırılmış üslerin arttırılmamış biçimlerine geri götürülmeleri gerekir. Bu ise değeri arttırılmış k toplama değişkeninin yerine, o toplamda her yerde, onun 1 eksiğinin yerleştirilmesiyle sağlanabilir. Böylece (6.4) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1} \dots (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N} [\mathcal{L}_0 M_{k_1 \dots k_N} + \mathcal{L}_1 M_{k_1-1 k_2 \dots k_N} \\ & + \mathcal{L}_2 M_{k_1 k_2-1 k_3 \dots k_N} + \mathcal{L}_N M_{k_1 \dots k_{N-1} k_N-1}] = \mathcal{I} \quad (6.5) \end{aligned}$$

Burada toplama değişkenlerindeki kaydırmalar toplama işleminin sınırlarında farklı kaymalara dolayısıyla farklılaşmalara neden olur. Bu farklılaşmalar aşağıda verilen ve indislerden herhangi birisinin eksileşmesi durumunda sıfırlanma

anlamına gelen varsayım ile ortadan kaldırılabilir ve böylece alt sınırları tüm toplama değişkenleri için aynı ve de sıfır olan tek bir toplama simgesiyle yazılabilen biçime büründürülebilir.

$$M_{k_1 \dots k_N} \equiv 0, \quad k_1 < 0 \vee k_2 < 0 \vee \dots \vee k_N < 0 \quad (6.6)$$

Eşitlik (6.5)'in sağlanabilmesi için, değiştirgenlerin birbirinden bağımsız olmaları nedeniyle, aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerekir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 M_{k_1 \dots k_N} + \mathcal{L}_1 M_{k_1-1 k_2 \dots k_N} + \dots + \mathcal{L}_N M_{k_1 \dots k_{N-1} k_N-1} &= \delta_{k_1 + \dots + k_N 0} \\ k_1, \dots, k_N &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Buradan ilk belirlenecek terim indis toplamı en az yani 0 olan terimdir ve aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$M_{0 \dots 0} = \mathcal{L}_0^{-1} \quad (6.8)$$

Bundan sonra, indis toplamı 1 olan terimler, bu sonucu kullanarak, aşağıda yazılan biçimde elde edilirler.

$$\begin{aligned} M_{10 \dots 0} &= -\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1} \\ M_{010 \dots 0} &= -\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_0^{-1} \\ &\dots \dots \dots \\ M_{0 \dots 01} &= -\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_N \mathcal{L}_0^{-1} \end{aligned} \quad (6.9)$$

İndis toplamı 2 olan iki tür terim vardır. Bunlardan bir türünde yalnızca bir indis 2 olurken diğer indislerin tümü 0 olmakta diğer türde ise değerleri 1 olan ikisi dışında kalan tüm indisler 0 olmaktadır. Birinci türdeki sonuçlar (6.9) eşitliklerine çok benzer sonuçlar üretirler.

$$\begin{aligned} M_{20 \dots 0} &= (-\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_1)^2 \mathcal{L}_0^{-1} \\ M_{020 \dots 0} &= (-\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_2)^2 \mathcal{L}_0^{-1} \\ &\dots \dots \dots \\ M_{0 \dots 02} &= (-\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_N)^2 \mathcal{L}_0^{-1} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Bu sonuçları çok daha genel olarak

$$\begin{aligned} M_{k0 \dots 0} &= (-\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_1)^k \mathcal{L}_0^{-1} \\ M_{0k0 \dots 0} &= (-\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_2)^k \mathcal{L}_0^{-1} \\ &\dots \dots \dots \\ M_{0 \dots 0k} &= (-\mathcal{L}_0^{-1} \mathcal{L}_N)^k \mathcal{L}_0^{-1} \end{aligned} \quad (6.11)$$

şeklinde yazmak olanaklıdır. İndis toplamaları 2 olan ikinci tür terimler için de aşağıdaki şekilde eşitlikler yazılabilir.

$$M_{110...0} = (-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_1)(-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_2)\mathcal{L}_0^{-1} + (-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_2)(-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_1)\mathcal{L}_0^{-1}$$

.....

$$M_{0...011} = (-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_{N-1})(-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_N)\mathcal{L}_0^{-1} + (-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_N)(-\mathcal{L}_0^{-1}\mathcal{L}_{N-1})\mathcal{L}_0^{-1} \quad (6.12)$$

Bu biçimde ilerleyerek, ilke olarak, tüm terimleri eşsiz (unique) olarak belirlemek ve de üstelik genel terim üretmek bile olanaklıdır. Ancak burada bu kadar inceleme ile yetinilecektir.

Şimdi, üstel matrisin YBMG açılımı ile çok değiştirgenli saptırım açılımı ile ilişkilendirilmesi üzerinde duralım. s Laplace dönüşüm değiştirgeni olmak üzere,

$$\mathbf{B}(s) \equiv [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1} \quad (6.13)$$

şeklinde verilen bir matris ile ilgilenilecektir. Buradaki yapıda gözüken $\mathbf{A}$ matrisinin (1.88) eşitliğinde verilen değiştirgenlere doğrusal olarak bağımlı yapıda yazılabildiğini varsayarak ilerlenecektir. Buradaki $\mathbf{A}_k$ ($1 \leq k \leq N$) matrislerinin α_k ($1 \leq k \leq N$) değiştirgenlerine bağımlı olmadığı düşünülmektedir. Bu tanımla (6.13) eşitliği, değiştirgenli yapıda daha açık olarak, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s) \equiv [s\mathbf{I} - \alpha_1\mathbf{A}_1 - \dots - \alpha_N\mathbf{A}_N]^{-1} \quad (6.14)$$

Bu yapı yerine YBMG açısından daha uygun olan ve ters belirleme içermeyen aşağıdaki denklemle ilerlenebilir.

$$[s\mathbf{I} - \alpha_1\mathbf{A}_1 - \dots - \alpha_N\mathbf{A}_N]\mathbf{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s) = \mathbf{I} \quad (6.15)$$

Buradaki bilinmeyen olan $\mathbf{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s)$ matrisinin YBMG açılımı aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\mathbf{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s) = \mathbf{B}_0(s) + \sum_{i_1=1}^N \mathbf{B}_{i_1}(\alpha_{i_1}, s) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \mathbf{B}_{i_1 i_2}(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, s) \dots \quad (6.16)$$

Buradaki YBMG değişkenleri olan α değiştirgenlerinin bir aşkındıkçokyüzlünün içinde ve yüzeyinde değer alabildiği varsayılmakta ve çokyüzlünün her bir ayrıtı $\alpha_k \in [a_k, b_k]$ ($1 \leq k \leq N$) şeklinde tanımlanmaktadır. Ağırlık fonksiyonları $W_k(\alpha_k)$ ($1 \leq k \leq N$) ile simgelenirse YBMG'nin genel ağırlık fonksiyonu çarpımsal olup aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$$W(\alpha_1, \dots, \alpha_N) = W_1(\alpha_1) \dots W_N(\alpha_N) \quad (6.17)$$

Eşitlik (6.16), (6.15) eşitliğindeki yerine konulur ve elde edilen eşitliğin her iki yanı (6.17)'de verilen ağırlık fonksiyonu ile çarpıldıktan sonra oluşan eşitliğin her iki yanı tüm α değişirgenlerine göre ilgili aralıklar üzerinde integre edilirse ve de diklik ya da sıfırlanma koşulları gözönüne alınırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$[s\mathbf{I} - \bar{\alpha}_1\mathbf{A}_1 - \cdots - \bar{\alpha}_N\mathbf{A}_N] \mathbf{B}_0(s) - \mathbf{A}_1\bar{\mathbf{B}}_1(s) - \cdots - \mathbf{A}_N\bar{\mathbf{B}}_N(s) = \mathbf{I} \quad (6.18)$$

$$\bar{\alpha}_k \equiv \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (6.19)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_k(s) \equiv \int_{a_k}^{b_k} d\alpha_k W_k(\alpha_k) \alpha_k \mathbf{B}_k(s, \alpha_k), \quad 1 \leq k \leq N \quad (6.20)$$

Eğer

$$\bar{\mathbf{A}} \equiv \bar{\alpha}_1\mathbf{A}_1 + \cdots + \bar{\alpha}_N\mathbf{A}_N \quad (6.21)$$

tanımı yapılacak olursa (6.18) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] \mathbf{B}_0(s) - \mathbf{A}_1\bar{\mathbf{B}}_1(s) - \cdots - \mathbf{A}_N\bar{\mathbf{B}}_N(s) = \mathbf{I} \quad (6.22)$$

Burada $\bar{\mathbf{B}}_k(s)$ ($1 \leq k \leq N$) terimleri bir değişkenli YBMG bileşenlerine bağımlıdır ve sıfıncı basamak YBMG denkleminde yer almaktadırlar. $\mathbf{B}$ matrisi için sıfıncı basamak yaklaşıtırm elde etmek için (5.22) denklemindeki tek değişkenli YBMG fonksiyonlarının katkısı gözardı edilirse,

$$[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}] \mathbf{B}_0^{(0)}(s) = \mathbf{I} \quad (6.23)$$

yazılabilir ve buradan Sıfıncı Basamak Yaklaşıtırm olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathbf{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s) \approx \mathbf{B}_0^{(0)}(s) = [s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}]^{-1} \quad (6.24)$$

Eğer yukarıda değişmez YBMG bileşeninin belirlenmesinde izlenen yol integrallerde YBMG değişkenlerinden birinin ve ilgili ağırlık çarpanının dışlanmasıyla bir değişkenli YBMG bileşenlerinin belirlenmesinde de kullanılabilir. İki değişkenli YBMG bileşenleri içeren integrallerin yoksayılmasıyla Birinci Basamaktan YBMG Yaklaşıtırmı tanımlanabilir. Böylece, açık yapısı verilmeksizin

$$\mathbf{B}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s) \approx \mathbf{B}^{(1)}(\alpha_1, \dots, \alpha_N, s) = \mathbf{B}_0^{(1)}(s) + \sum_{i_1=1}^N \mathbf{B}_{i_1}^{(1)}(\alpha_{i_1}, s) \quad (6.25)$$

yazılabilir. Eğer

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \equiv [s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} - (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)\mathbf{A}_1 + \cdots + (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)\mathbf{A}_N]^{-1} \quad (6.26)$$

şeklinde bir matris tanımı yapılacak olursa $(\alpha_k - \bar{\alpha}_k)$ ($1 \leq k \leq N$) değiştirgenleri türünden bir saptırım açılımına gidilebilir ve

$$\mathbf{M}(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \equiv \sum_{k_1, \dots, k_N=0}^{\infty} (\alpha_1 - \bar{\alpha}_1)^{k_1} \dots (\alpha_N - \bar{\alpha}_N)^{k_N} \mathbf{M}_{k_1 \dots k_N} \quad (6.27)$$

yazılabilir. Burada $\mathbf{M}_{k_1 \dots k_N}$ büyüklükleri değiştirgenlere bağımlı olmayan matrisleri göstermekte olup Taylor serisi açılımı yoluyla belirlenebilirler.

Öte yandan (6.25) eşitliğinde kapalı olarak verilen yaklaştıranlar da aslında, birinci basamaktan yaklaşık YBMG denklemlerini diklik ya da sıfırlanma koşullarını da sağlatacak şekilde belirlenebilirler ve (6.27)'de karşılaşılan saptırım değiştirgenlere bağımlıdırlar. Bu bağımlılık aralık ve ağırlık seçimine göre değişik yapıda ortaya çıkabilir. Ancak, aralık ve ağırlık seçiminin (6.27) saptırım açılımıyla, en azından sadece bir değiştirgenin üslülerini içeren terimler toplamı açısından ilişkilendirilebilir.

BÖLÜM 7

UYGULAMA - 3

$1 \leq i \leq N$ olmak üzere, $\mathbf{A}_i$ matrislerinin aşağıdaki şekilde olduğunu varsayalım ve $m = N$ alınsın.

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \mathbf{u}_j^T \mathbf{u}_k = \delta_{jk} \quad (7.1)$$

Burada, $\mathbf{u}_i$ 'ler $N \times 1$ 'lik matrisleri temsil etmektedir.

$$\left(s\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i \xi_i^T \right)^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{s - \lambda_i} \xi_i \xi_i^T \quad (7.2)$$

Eşitliğin kullanılmasıyla, (4.7) ile verilen $\mathbf{D}$ matrisinin tersi, aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{D}^{-1}(s) = \left(s\mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right)^{-1} = \frac{2}{2s - 1} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \quad (7.3)$$

Bu eşitlik ile beraber, (4.9) ve (4.11) eşitliklerini de kullanarak ρ 'yu hesaplayabiliriz.

$$\rho = \frac{2}{2s - 1} \quad (7.4)$$

Şimdi de $\mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s)$ 'yi hesaplayalım.

$$\mathbf{A}_k \mathbf{D}^{-1}(s) = \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \frac{2}{2s - 1} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T = \frac{2}{2s - 1} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \quad (7.5)$$

Bulduğumuz eşitlikleri kullanarak, (4.24) ve (4.27) ile verilen matrisleri sırasıyla elde edelim.

$$\mathbf{T}_k(s) = \left(s\mathbf{I} - \frac{s \ln \left(\frac{s-1}{s} \right) + 1}{\ln \left(\frac{s-1}{s} \right)} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right)^{-1} = -\ln \left(\frac{s-1}{s} \right) \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \quad (7.6)$$

$$\mathbf{K}_k(s) = -1 - \frac{1}{(s - \alpha_k) \ln \left(\frac{s-1}{s} \right)} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \quad (7.7)$$

Bu durumda, birinci basamak değişmez ve tek değişkenli YBMG fonksiyonlarına eşlik eden matrislerin Laplace dönüşümleri aşağıdaki şekildedir.

$$\mathbf{b}_k^{(1)}(s, \alpha_k) = \left[\ln \left(\frac{s-1}{s} \right) + \frac{1}{(s-\alpha_k)} \right] \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \quad (7.8)$$

$$\mathbf{b}_0^{(1)}(s) = -\ln \left(\frac{s-1}{s} \right) \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \quad (7.9)$$

Elde ettiğimiz matrislerin ters Laplace dönüşümlerini bulalım. Bunun için aşağıda verilen, ters Laplace ile ilgili eşitlikleri kullanalım.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at} \quad (7.10)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \ln \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \right\} = \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} \quad (7.11)$$

Yukarıdaki eşitliklerin kullanılmasıyla, (7.8) ve (7.9) ile verilen matrislerin ters Laplace dönüşümleri, aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \left[\frac{1-e^t}{t} + e^{\alpha_k t} \right] \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \quad (7.12)$$

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) = \left[\frac{e^t-1}{t} \right] \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \quad (7.13)$$

Bu durumda, $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i$ şeklinde tanımlanan $\mathbf{A}$ matrisi için (1.7) ile tanımı verilen f fonksiyonunun, (3.10) ve (3.11) eşitlikleri ile verilen, birinci basamak değişmez ve tek değişkenli YBMG bileşenleri aşağıdaki gibidir.

$$f_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \mathbf{y}^T \left[\frac{1-e^t}{t} + e^{\alpha_k t} \right] \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \quad (7.14)$$

$$f_0^{(1)}(t) = \mathbf{y}^T \left[\frac{e^t-1}{t} \right] \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \quad (7.15)$$

Elde ettiğimiz bu fonksiyonların (2.5) ve (3.6) ile verilen başlangıç koşullarını sağladıklarını gösterelim.

Eşitlik (7.14)'de $t = 0$ yazalım.

$$f_k^{(1)}(0, \alpha_k) = 0 \quad (7.16)$$

Aynı şekilde bu kez, (7.15) eşitliğinde $t = 0$ yazalım.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T = \mathbf{I} \quad (7.17)$$

eşitliğinin de kullanılmasıyla,

$$f_0^{(1)}(0) = \mathbf{y}^T \mathbf{x} \quad (7.18)$$

elde edilir. O halde YBMG aracılığıyla elde ettiğimiz fonksiyonlar, f fonksiyonu için verilen başlangıç koşullarını sağlarlar.

Şimdi elde ettiğimiz bu fonksiyonların, sırasıyla (3.7) ve (3.8) denklemlerini sağladıklarının gösterilmesi gerekmektedir. Önce bu eşitliklerin (3.7) denklemini sağladıklarını gösterelim.

$$\frac{\partial f_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} = \mathbf{y}^T \left[\frac{\alpha_k e^{\alpha_k t} t^2 - e^t t - 1 + e^t}{t^2} \right] \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \quad (7.19)$$

$$(\bar{\alpha}_k - \alpha_k) (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) f_0^{(1)}(t) = \mathbf{y}^T \left(\frac{1}{2} - \alpha_k \right) \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \quad (7.20)$$

Eşitlik (2.2)'yi kullanalım, bu durumda

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \gamma_k^{(1)}(t) = \mathbf{y}^T \left(\frac{e^t t - e^t + 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}te^t}{t^2} \right) \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \quad (7.21)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} & - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) + \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \right] f_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \\ & \mathbf{y}^T \alpha_k \left[-e^{\alpha_k t} - \left(\frac{1 - e^t}{t} \right) \right] \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{x} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Elde edilen bu eşitlikler toplanacak olursa,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_k^{(1)}(t, \alpha_k)}{\partial t} + (\bar{\alpha}_k - \alpha_k) (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) f_0^{(1)}(t) + (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \gamma_k^{(1)}(t) \\ & - \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) + \alpha_k (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_k^T \nabla) \right] f_k^{(1)}(t, \alpha_k) = 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi elde ettiğimiz fonksiyonların bu kez (3.8) denklemini sağladıklarını gösterelim.

$$\frac{\partial f_0^{(1)}(t)}{\partial t} = \mathbf{y}^T \left[\frac{e^t t - (e^t - 1)}{t^2} \right] \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \quad (7.24)$$

$$- \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) f_0^{(1)}(t) = \mathbf{y}^T \left(\frac{-\frac{1}{2}(e^t - 1)}{t} \right) \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \quad (7.25)$$

$$- \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_i^{(1)}(t) = \mathbf{y}^T \left(-\frac{e^t t - e^t + 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}te^t}{t^2} \right) \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{x} \quad (7.26)$$

Yine bulunan eşitlikleri toplayacak olursak,

$$\frac{\partial f_0^{(1)}(t)}{\partial t} - \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_i (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) f_0^{(1)}(t) - \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}^T \mathbf{A}_i^T \nabla) \gamma_i^{(1)}(t) = 0 \quad (7.27)$$

eşitliğini elde ederiz. Yani, birinci basamaktan YBMG aracılığıyla elde edilen değişmez ve tek değişkenli fonksiyonlar, (3.7) ve (3.8) denklemlerini sağlarlar.

Bu durumda,

$$f \approx f_0^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^N f_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \mathbf{y}^T \left(\sum_{k=1}^N e^{\alpha_k t} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \right) \mathbf{x} \quad (7.28)$$

eşitliği yazılabilir.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçları basit örnekler üzerinde gösterelim.

7.1 Örnek - 1

$\mathbf{A}_i$ matrislerini, $\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$ olarak seçelim. Burada, $\mathbf{e}_i$ 'ler m boyutlu birim vektörleri göstermektedir.

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) = \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) \mathbf{I} \quad (7.29)$$

$$\mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \left(e^{\alpha_k t} + \frac{1 - e^t}{t} \right) \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \quad (7.30)$$

Eşitlik (1.7)'deki $e^{t\mathbf{A}}$ matrisinin Birinci Basamak YBMG Yaklaşımını bulalım.

$$e^{t\mathbf{A}} \approx \mathbf{B}_0^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^N \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) \quad (7.31)$$

$$\mathbf{B}_0^{(1)}(t) + \sum_{k=1}^N \mathbf{B}_k^{(1)}(t, \alpha_k) = \sum_{k=1}^N e^{\alpha_k t} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \quad (7.32)$$

$e^{t\mathbf{A}}$ için $m = 3$ durumunda MuPAD ile elde edilen sonuç Ekler - B'de verilmiştir.

Birinci basamaktan YBMG ile elde edilen sonuçlar, gerçek sonuçla birebir aynıdır. Şimdi farklı bir $\mathbf{A}$ matrisi için duruma bakalım.

7.2 Örnek - 2

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^T &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \cdots 0 \right] \\ \mathbf{u}_2^T &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \cdots 0 \right] \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{e}_3 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_N &= \mathbf{e}_N\end{aligned}$$

şeklinde seçilen $\mathbf{A}_i$ matrisleri için, $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i$ yapısındaki $\mathbf{A}$ matrisinin, Birinci Basamak YBMG Yaklaşırımı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}e^{t\mathbf{A}} &\approx \sum_{k=1}^N e^{\alpha_k t} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{\alpha_1 t}}{2} + \frac{e^{\alpha_2 t}}{2} & \frac{e^{\alpha_1 t}}{2} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{e^{\alpha_1 t}}{2} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{2} & \frac{e^{\alpha_1 t}}{2} + \frac{e^{\alpha_2 t}}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha_3 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & e^{\alpha_N t} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{7.33}$$

$\mathbf{A}_i$ 'lerin bu şekilde seçimi için, yine $m = 3$ ile alınan sonuç Ekler - B'de verilmiştir. Bu örnekte de görüldüğü gibi birinci basamaktan YBMG yaklaşırımı ile matrisin gerçek değeri aynı sonucu vermiştir.

BÖLÜM 8

DEĞERLENDİRME

1. Bu çalışmada, üstel matrisin Birinci Basamak Yüksek Boyutlu Model Gösterilim Yaklaşırımı elde edilmiştir. Aralığın özel seçimiyle (tüm değışkenler için $[0,1]$) başlayan çalışma, elde edilen sonuçların, aralık ve ağırlık fonksiyonlarının daha genel tutulmasının birinci basamak yaklaşırımın gerçek fonksiyona daha iyi bir yaklaşırım olmasını sağlayacağını göstermesiyle bizi, aralığı ve ağırlığı daha genel tutmaya yönlendirmiştir. Ama, yine alınan sonuçlara göre ağırlığı ve aralığı daha genel tutmak yakınsamayı hızlandırırken, işlemleri de oldukça zorlaştırmaktadır. Çalışmanın ardından bir adım olarak, fonksiyona birinci basamaktan yeterince iyi bir yaklaşırım sağlayacak ama aynı zamanda da işlemleri fazla zorlaştırmayacak ağırlık fonksiyonlarının ve aralıkların seçilmesi üzerinde durulabilir.

2. Yine ağırlıklarla ve aralıklarla oynayarak, elde edilen sıfırncı ve birinci basamak YBMG bileşenleri, üstel matrisin saptırım açılımındaki sıfırncı ve birinci basamak terimlerle birebir eşleştirilebilir.

3. Yapılan çalışmada, üstel matrisin kendisinin YBMG bileşenleri elde edilmeye çalışılmış, çözüm aşamasında ters Laplace dönüşümü kullanılarak, çalışma bu aşamada, t uzayından s uzayına aktarılmıştır. Ama yeni bir çalışma olarak, üstel matrisin kendisinin değil doğrudan ters Laplace dönüşümünün YBMG açılımı ile ilgilenilebilir.

4.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T, \quad \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k^T = \delta_{jk}$$

şeklindeki $\mathbf{A}$ matrisleri için birinci basamaktan YBMG yöntemi, $e^{t\mathbf{A}}$ matrisine birebir bir yaklaşırım üretir.

$e^{t\mathbf{A}}$ 'nın Taylor açılımından yararlanarak, aşağıdaki işlemlerle bu durum ispat edilebilir.

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right) t + \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right)^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \quad (8.1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T \right) \quad (8.2)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{I} + t\alpha_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \frac{t^2 \alpha_1^2}{2!} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots \\ &+ t\alpha_N \mathbf{u}_N \mathbf{u}_N^T + \frac{t^2 \alpha_N^2}{2!} \mathbf{u}_N \mathbf{u}_N^T + \dots \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T + t\alpha_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \frac{t^2 \alpha_1^2}{2!} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots \\ &+ t\alpha_N \mathbf{u}_N \mathbf{u}_N^T + \frac{t^2 \alpha_N^2}{2!} \mathbf{u}_N \mathbf{u}_N^T + \dots \\ &= \left(1 + t\alpha_1 + \frac{t^2 \alpha_1^2}{2} + \dots \right) \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots \\ &+ \left(1 + t\alpha_N + \frac{t^2 \alpha_N^2}{2} + \dots \right) \mathbf{u}_N \mathbf{u}_N^T + \dots \\ &= e^{\alpha_1 t} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T + \dots + e^{\alpha_N t} \mathbf{u}_N \mathbf{u}_N^T \\ &= \mathbf{B}_0^{(1)} + \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_k^{(1)} \end{aligned} \quad (8.3)$$

KAYNAKLAR

- [1] **Moler, C. B., and Van Loan, C. F.**, 1978, Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, *SIAM-REVIEW*.
- [2] **Sobol, I. M.**, 1993, Sensitivity Estimates for Nonlinear Mathematical Models *MMCE*, VOL.1, NO.4. pp. 407.
- [3] **Rabitz, H., Alış, Ö. F. Shorter, J., and Shim, K.**, 1999, Efficient Input-Output Model Representations, *Computer Phys. Comm.*, **117**, pp. 11-20.
- [4] **Alış, Ö. F., and Rabitz, H.**, 2001, Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **29**, pp. 127-142.
- [5] **Li, G., Rosenthal, C., and Rabitz, H.**, 2001, High Dimensional Model Representations, *J. Phys. Chem. A*, **105**, pp. 7765-7777.
- [6] **Li, G., Wang, S. W., Rosenthal, C., and Rabitz, H.**, 2001, High Dimensional Model Representations Generated from Low Dimensional Data Samples. I. mp-Cut-HDMR, *J. Math. Chem.*, **30**, pp. 1-30.
- [7] **Rabitz, H., and Alış, Ö. F.**, 1999, Additive and Multiplicate High Dimensional Representation General Foundations of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **25**, pp. 197-233.
- [8] **Demiralp, M.**, 2001, Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi: Değişmezlik ve Toplamsallık Ölçenleri, Çarpımsal Gösterilim ve Çarpımsallık Ölçenleri, *12. Ulusal Mekanik Kongresi, Konya*.
- [9] **Demiralp, M., and Rabitz, H.**, 1993, Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Definition and the Solution of the Canonical Problem, *Int. J. Eng. S.*, **307**.
- [10] **Demiralp, M., and Rabitz, H.**, 1993, Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Convergence Theorems for the Canonical Case, *Int. J. Eng. S.*, **333**.
- [11] **Demiralp, M., and Rabitz, H.**, 1991, Factorization of Certain Evolution Operators Using Lie Operator Algebra: Convergence Theorems, *J.Math. Chem.*, **6**, pp. 193.

- [12] **Demiralp, M., and Rabitz, H.**, 1991, Factorization of Certain Evolution Operators Using Lie Algebra: Formulation of the Method, *J. Math. Chem.*, **6**, pp. 164.
- [13] **Spiegel, M. R.**, 1989, Theory and Problems of Laplace Transforms, *Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, Inc.*

EKLER A

UYGULAMA - 1'DEKİ SERİ AÇILIMLARI

MuPAD, Windows, Linux ve Solaris gibi işletim sistemlerinde çalışabilen bir programlama dilidir. Hem sayısal hem simgesel düzeyde işlem yapabilir. Bu çalışmada, Linux ortamında çalışılmıştır.

```
*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      /|
*-----*
                                UNREGISTERED VERSION
                                Please contact info@sciface.com to register.

>>
>>
>> /*Sabit terim, ilk parca*/
>>
>> f1:=s+s*(2*s-(1/m))*(1-(1/(2*s-(1/m)+1)))+
1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-1)
/(2*s*(2*s-(1/m)+1))-1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-
(2*s-(1/m)+1))/(2*s*(2*s-(1/m)
&> )+(2*s-(1/m)+1))))):
>> ters1:=1/f1:
>> rters1:=series(ters1,m=0,6):
>>
>>
>> tersk:=simplify(coeff(rters1,-1));

                                0
>> ters0:=simplify(coeff(rters1,0));

                                / 2 s - 1 \
                                - ln| ----- |
                                \ 2 s + 1 /

>> ters1:=simplify(coeff(rters1,1));
```

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}} \cdot \frac{4s}{(4s-1)\ln\sqrt{2s-1}} \cdot \frac{1}{12s} \cdot \sqrt{2s+1} \\
& - \ln\left| \frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}} \right| \cdot \frac{1}{12s} \cdot \sqrt{2s+1}
\end{aligned}$$

```

*-----*      MuPAD 2.5.2 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2002 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      |/
*-----*      Licensed to:  Bilisim Enstitusu

>>
>>
>>
>> /*Sabit terim, ikinci parca*/
>>
>> f1:=series(s+s*(2*s-(1/m))*(1-(1/(2*s-(1/m)+1))))+
1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-1)/
(2*s*(2*s-(1/m))+1)))-1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-(2*s-(1/m)+1))
/(2*s*(2*s-(1/m)
&> )+(2*s-(1/m)+1))))),m=0,6):
>> f1k:=simplify(coeff(f1,-1)):
>> f10:=simplify(coeff(f1,0)):
>> f11:=simplify(coeff(f1,1)):
>> f2:=series((1/2)+s*(2*s-(1/m))+1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-1)/
(2*s*(2*s-(1/m))+1))))),m=0,6):
>> f2k:=simplify(coeff(f2,-1)):
>> f20:=simplify(coeff(f2,0)):
>> f21:=simplify(coeff(f2,1)):
>> f3:=series(s-(1/2)-(s*(2*s-(1/m))/(2*s-(1/m)+1))-1/
(ln((2*s*(2*s-(1/m))-(2*s-(1/m)+1)))/(2*s*(2*s-(1/m)
&> )+(2*s-(1/m)+1))))),m=0,6):
>> f3k:=simplify(coeff(f3,-1)):
>> f30:=simplify(coeff(f3,0)):
>> f31:=simplify(coeff(f3,1)):
>> carp:=(f1*f3):
>> carpk:=simplify(coeff(carp,-1)):
>> carp0:=simplify(coeff(carp,0)):
>> carp1:=simplify(coeff(carp,1)):
>> bol:=1/carp:
>> bolk:=simplify(coeff(bol,-1)):
>> bol0:=simplify(coeff(bol,0)):
>> bol1:=simplify(coeff(bol,1)):

```

```
>> ir:=(f2*bol):
>> irk:=simplify(coeff(ir,-1));
```

0

```
>> ir0:=simplify(coeff(ir,0));
```

$$\frac{\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2s-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2s+1}}}}{\sqrt{2s+1}}$$

```
>> ir1:=simplify(coeff(ir,1));
```

$$\frac{\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}}\right)}{\frac{1}{2\sqrt{2s-1}} + \frac{1}{2\sqrt{2s+1}}}}{\frac{12s\sqrt{2s+1}}{(4s^2-1)\ln\left(\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}}\right)} + \frac{\sqrt{2s-1}}{\ln\left(\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}}\right)}}$$

\\
| |
| |
| |

```

      /      1      \ /      4 s      1      \ | |
4 | - ----- - 1/2 |
      |
      |      / 2 s - 1 \      | |      2      / 2 s - 1 \ 2      12 s      | | |
      |      ln| ----- |      | |      (4 s - 1) ln| ----- |      | | |
      \      \ 2 s + 1 /      / \      \ 2 s + 1 /      / / /

      / / / 2 s - 1 \      \ 2 \
      / | 2 | ln| ----- | + 2 | |
      \ \ \ 2 s + 1 /      / /

>>
>> quit

```

```

*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|--*      All rights reserved.
|/      /|
*-----*
                        UNREGISTERED VERSION
                        Please contact info@sciface.com to register.

```

```

>>
>>
>> /*Sabit terim, 1. ve 2. parca seri aclilimlari */
>> /*Geriye donus*/
>>
>> f1:=series(ln((2*(1/s)-1)/(2*(1/s)+1)),s=0,6);

```

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{s} - \frac{s}{12} + O(s^5)
 \end{aligned}$$

```

>>
>> f2:=series(1/(ln((2*(1/s)-1)/(2*(1/s)+1)))+(1/2), s=0,6):
>> bol:=(1/f2):
>> carp:=(bol*f1);

```

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{s^2} + \frac{4}{12s} + \frac{5}{4} + O(s^6)
 \end{aligned}$$

```

>>
>> quit

```

```

*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      |/
*-----*
                                UNREGISTERED VERSION
                                Please contact info@sciface.com to register.

```

```

>>
>>
>>
>>
>> /*k1=k2 icin
&> 1.parca*/
>>
>> r:=series((2*s-(1/m))/(2*s-(1/m)+1),m=0,6):
>> t1:=series((2*s-(1/m))/(s*(2*s-(1/m))-
(a-(1/2))*(2*s-(1/m)+1)),m=0,6):
>> t2 :=series(1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-(2*s-(1/m)+1))
/(2*s*(2*s-(1/m))+(2*s-(1/m)+1)))),m=0,6):
>> t:=-r-(t1*t2):
>> topk:=simplify(coeff(t,-1));

```

0

```
>> top0:=simplify(coeff(t,0));
```

2

$$- \frac{(2s^2 - 2a + 1) \ln \left(\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}} \right)}{\sqrt{2s+1}} - 1$$

```
>> top1:=simplify(coeff(t,1));
```

8 s

$$\frac{\ln \left(\frac{\sqrt{2s-1}}{\sqrt{2s+1}} \right) (2a^2 - 2s + 4s^2 + 8s^3 - 8as^2 - 1)}{\sqrt{2s+1}}$$

$$\frac{\sqrt{2s-1} \ln \left| \frac{\sqrt{4s^2-4as-8as^2+4a^2+4s^2+1}}{\sqrt{2s+1}} \right|}{\sqrt{2s-1} \sqrt{4s^2-4as-8as^2+4a^2+4s^2+1}} - 1$$

```
>> ir1:=series(ir,s=0,6);
```

$$s \left(a - \frac{1}{2} \right) + s^2 \left(-2a + 1 \right) \sqrt{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} + \dots$$

$$s^3 \left(\frac{a}{12} + \frac{(-2a+1)^2}{2} \sqrt{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} + \frac{1}{24} \right) + O(s^4)$$

```
>> quit
```

```

*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      /|
*-----*
                                UNREGISTERED VERSION
                                Please contact info@sciface.com to register.
```

```

>>
>>
>>
>>
>>
>> /*k1=k2, 2. parca*/
>>
>> r:=series(1/(2*s-(1/m)+1),m=0,6):
>> t1:=series(1/(s*(2*s-(1/m))-(a-(1/2))*(2*s-(1/m)+1)),m=0,6):
>> t2 :=series(1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-(2*s-(1/m)+1))
/((2*s*(2*s-(1/m))+(2*s-(1/m)+1))))),m=0,6):
>> t:=-r-(t1*t2):
>> topk:=simplify(coeff(t,-1));

0

>> top0:=simplify(coeff(t,0));

0

>> top1:=simplify(coeff(t,1));
```

```

2
----- + 1
/ 2 s - 1 \
(2 s - 2 a + 1) ln| ----- |
\ 2 s + 1 /

>> top2:=simplify(coeff(t,2));

8 s
2 s - ----- +
/ 2 s - 1 \2 2 3 2
ln| ----- | (2 a - 2 s + 4 s + 8 s - 8 a s - 1)
\ 2 s + 1 /

2
4 s - 4 a - 8 a s + 8 s + 2
----- + 1
/ 2 s - 1 \ 2 2
ln| ----- | (4 s - 4 a - 8 a s + 4 a + 4 s + 1)
\ 2 s + 1 /

>> ir:=subs(top1,s=(1/s));

2
----- + 1
/ 2 \
| - - 1 |
/ 2 \ | s |
| - - 2 a + 1 | ln| ----- |
\ s / | 2 |
| - + 1 |
\ s /

>> ir1:=series(ir,s=0,6);

2 / / a \ \
s (- a + 1/2) + s | (- 2 a + 1) | - - 1/4 | + 1/12 | +
\ \ 2 / /

/ 2 / a \ \
| (- 2 a + 1) | - - 1/4 | |
3 | a \ 2 / | 4
s | - - ----- - 1/24 | + 0(s )
\ 12 2 /

>> quit

```

```

*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      |/
*-----*
                                UNREGISTERED VERSION
                                Please contact info@sciface.com to register.

>>
>>
>>
>> /*k1\ne k2 icin, 1. parca*/
>>
>>
>> t1:=series((2*s-(1/m))/(s*(2*s-(1/m))-(a-(1/2))),m=0,6):
>> t2 :=series(1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-1)/(2*s*(2*s-(1/m))+1))),m=0,6):
>> t3 :=series(2*s-(1/m),m=0,6):
>> t:=-t3-(t1*t2):
>> topk:=simplify(coeff(t,-1));

                                0
>> top0:=simplify(coeff(t,0));

                                2 a - 1
                                -----
                                2 s

>> top1:=simplify(coeff(t,1));

                                2      2      2
                                4 a - 4 a - 4 s + 8 a s - 1
----- - 2 a + ----- + 1
      2                                2
    12 s                                4 s

>> quit

*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      |/
*-----*
                                UNREGISTERED VERSION
                                Please contact info@sciface.com to register.

>>
>>

```

```

>>
>> /*k1\ne k2 icin, 2. parca*/
>>
>>
>> t1:=series(1/(s*(2*s-(1/m))-(a-(1/2))),m=0,6):
>> t2 :=series(1/(ln((2*s*(2*s-(1/m))-1)/(2*s*(2*s-(1/m))+1))),m=0,6):
>> t:=-1-(t1*t2):
>> topk:=simplify(coeff(t,-1));

0

>> top0:=simplify(coeff(t,0));

0

>> top1:=simplify(coeff(t,1));

2
4 s  - 2 a + 1
----- - 2 s
2 s

>> top2:=simplify(coeff(t,2));

2      2      4      2
4 a  - 4 a + 8 s  + 16 s  - 16 a s  + 1
2 a - ---- - 4 s  + ----- - 1
2      2      2
12 s      4 s

>> top3:=simplify(top2);

2      2      4      2
4 a  - 4 a + 8 s  + 16 s  - 16 a s  + 1
2 a - ---- - 4 s  + ----- - 1
2      2      2
12 s      4 s

>> quit

```

EKLER B

UYGULAMA - 3'DEKİ ÖRNEKLER İÇİN YAPILAN HESAPLAR

```
*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      |/
*-----*      Licensed to: Bilisim Enstitusu
```

```
>> A :=matrix([[a1,0,0],[0,a2,0],[0,0,a3]]);
```

```
      +-          +-
      | a1,  0,  0 |
      |              |
      |  0, a2,  0 |
      |              |
      |  0,  0, a3 |
      +-          +-
```

```
>> B :=exp(A*t);
```

```
      +-          +-
      | exp(t a1),    0,          0 |
      |              |
      |  0,          exp(t a2),    0 |
      |              |
      |  0,          0,          exp(t a3) |
      +-          +-
```

```
>> quit
```

```
*-----*      MuPAD 2.0.0 -- The Open Computer Algebra System
/|      /|
*-----* |      Copyright (c) 1997 - 2000 by SciFace Software
| *--|-*      All rights reserved.
|/      |/
*-----*      Licensed to: Bilisim Enstitusu
```

```
>> A :=matrix([[ (a1+a2)/2, (a1-a2)/2, 0], [(a1-a2)/2, (a1+a2)/2, 0]
&> , [0, 0, a3]]);
```

```

      +-              +-
      |  a1   a2  a1   a2   |
      |  -- + --, -- - --,  0 |
      |  2    2  2    2     |
      |                      |
      |  a1   a2  a1   a2   |
      |  -- - --, -- + --,  0 |
      |  2    2  2    2     |
      |                      |
      |      0,      0,    a3 |
      +-              +-

```

```
>> B :=exp(A*t);
```

```

      +-              +-
      | exp(t a1)  exp(t a2)  exp(t a1)  exp(t a2)   |
      | ----- + -----, ----- - -----,      0 |
      |      2          2          2          2     |
      |                      |
      | exp(t a1)  exp(t a2)  exp(t a1)  exp(t a2)   |
      | ----- - -----, ----- + -----,      0 |
      |      2          2          2          2     |
      |                      |
      |                      0,                      0,      exp(t a3) |
      +-              +-

```

```
>> quit
```

EKLER C

LIE OPERATÖRÜNÜN ETKİSİNİN GÖSTERİLİMİ

$$e^{t\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \nabla} \mathbf{x} = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}$$

eşitliğini gösterelim. Bunun için önce $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$ eşitliğini gösterelim.

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla \mathbf{x})_i = \sum_{j,k=1}^m x_j A_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k} x_i = \sum_{j,k=1}^m x_j A_{jk} \delta_{ki} = \sum_{j=1}^N x_j A_{ji} = (\mathbf{A}^T \mathbf{x})_i$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}$$

Üstel evrim operatörünü, argümanı türünden MacLaurin serisine açalım.

$$e^{t\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla} \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla + \frac{t^2}{2!} (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla)^2 + \dots \right) \mathbf{x}$$

$$(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla)^m \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T)^m \mathbf{x}$$

eşitliğinin kullanılmasıyla,

$$e^{t\mathbf{x}^T \mathbf{A} \nabla} \mathbf{x} = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A}^T + \frac{t^2}{2!} (\mathbf{A}^T)^2 + \dots \right) \mathbf{x} = e^{t\mathbf{A}^T} \mathbf{x}$$

elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Ankara’da doğdu. Orta öğretimini 1990 - 1997 yılları arasında, Üsküdar Anadolu Lisesi’nde tamamladıktan sonra, 1997 yılında, Marmara Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitime başladı. 2001 yılında lisans eğitimini tamamlayıp, İTÜ Bilişim Enstitüsü’nde Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Yüksek Lisans programına başladı. Halen bu programda eğitimini sürdürmektedir.