

HELMHOLTZ SALINICISININ REZONANS DURUMLARINDA
DALLANMA ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Reşat KÖŞKER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Haziran 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1995

Tez Danışmanı : Doç.Dr.Gazanfer ÜNAL

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Erdoğan ŞUHUBİ

Doç.Dr.Ayşe ERZAN

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Helmholtz salıncı denkleminin, çeşitli analitik yöntemler kullanılarak, statik ve dinamik dallanması incelenmiştir.

Bu konuyu bana öneren ve çalışmalarımı yöneten Sayın Doçent Doktor Gazanfer ÜNAL ' a teşekkür ederim.

Ayrıca desteğini ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Yüksek Mühendis Serdar KAZANCIOĞLU'na, Mathematica paket programı konusundaki yardımlarından dolayı Sayın Ahmet KIRIŞ'a ve ingilizce özet konusundaki yardımlarından dolayı Sayın Yüksek Mühendis Fatih TAŞÇI'ya teşekkür ederim.

Benden hiçbir zaman maddi ve manevi desteklerini eksik etmeyen ve herşeyimi borçlu olduğum aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran 1995, Sarıyer

Reşat KÖŞKER

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
BÖLÜM 1. GİRİŞ:KULLANILAN YÖNTEMLERİN TANITIMI.....	1
1.1.Çoklu Ölçekler Yöntemi.....	1
1.2.Normal Form Analizi.....	5
1.3.Ortalama Alma Yöntemi.....	9
BÖLÜM 2. HELMHOLTZ SALINICISI DENGİ NOKTALARININ DALLANMASI.....	12
2.1.Çoklu Ölçekler Yöntemi İle İnceleme.....	12
2.1.1.Asal Rezonans.....	12
2.1.2.Üstharmonik Rezonans.....	18
Güçlü Zorlama.....	19
Zayıf Zorlama.....	21
2.1.3.Altharmonik Rezonans.....	22
Güçlü Zorlama.....	22
Zayıf Zorlama.....	23
2.2.Normal Form Analizi İle İnceleme.....	23
2.2.1.Asal Rezonans Durumu.....	24
2.2.2.İkincil Rezonanslar.....	30
2.2.2.1.Altharmonik Rezonans.....	30
2.2.2.2.Üstharmonik Rezonans.....	35
2.3.Ortalama Alma Yöntemi İle İnceleme.....	40
2.4.Helmholtz Salıncısının Dengi Noktalarının Dallanma Analizi.....	42
2.4.1.Asal Rezonans Durumu İçin Dallanma Analizi.....	42
2.4.2.İkinci Mertebe Üstharmonik Rezonans Durumu İçin Dallanma Analizi.....	63
2.4.3.İkinci Mertebe Altharmonik Rezonans Durumu İçin Dallanma Analizi.....	64
BÖLÜM 3. HELMHOLTZ SALINICISININ PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN DALLANMA ANALİZİ.....	69
3.1. $\frac{2\pi}{\omega}$ Periyodik Çözüm Civarında Denklemlerin Elde Edilmesi.....	69

Anabilim Dalı : Mühendislik Bilimleri
Çalışmayı Yapan : Reşat Köşker
Danışmanı : Doç.Dr. Gazanfer Ünal
Bitiriş Tarihi : 30.06.1995

HELMHOLTZ SALINICISININ REZONANS DURUMLARINDA DALLANMA ANALİZİ

Anahtar Kelimeler : Çoklu Ölçekler Yöntemi, Normal Form Analizi, Ortalama Alma Yöntemi, Modal Denklemler, Kararlılık Analizi, Dallanma Analizi, Rezonans, Denge noktası

Özet : Bu çalışmada, tek serbestlik dereceli, sönümlü, kuadratik nonlinear terim içeren ve zorlamalı Helmholtz salınıcısının analitik yöntemlerle statik ve dinamik dallanması incelenmiştir. Kullanılan yöntemler olan Çoklu Ölçekler Yöntemi, Normal Form Analizi ve Ortalama Alma Yöntemi kısaca tanıtıldıktan sonra (0,0) denge noktası civarında, çeşitli rezonans durumları için, denkleme uygulanmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Üç farklı yöntemin de aynı yapıda sonuçlar verdiği, fakat uygulama açısından birbirlerine göre üstünlükleri veya zaafı olduğu görülmüş ve bunlar tartışılmıştır. Sonra elde edilen denklemlerin denge noktaları ve bunların kararlılık durumları incelenerek dallanma analizi yapılmış, "Pitchfork" ve "Hysteresis" tipi dallanmalar gözlenmiştir. Son olarak periyodik çözümlerin ikinci mertebe ortalama alma yöntemiyle incelenmesiyle salınıcının global davranışları araştırılmıştır.

BIFURCATION ANALYSIS OF HELMHOLTZ OSCILLATOR IN RESONANCES

Keywords : Method of Multiple Scales, Normal Form Analysis, Method of Averaging, Modal Equations, Stability Analysis, Bifurcation Analysis, Resonance, Equilibrium Point

Abstract : In this study, static and dynamic bifurcations of Helmholtz oscillator which is a driven damped, continuously excited and single-degree of freedom system with quadratic nonlinearity are studied by using analytical methods. We introduced the methods of multiple scales, normal form analysis and method of second order averaging briefly and then modal equations are obtained in the neighbourhood of the equilibrium point (0,0) of Helmholtz oscillator. When we compare the results of three different methods, we see that they have the same structure and each method has some advantages and disadvantages one another. Next, bifurcation analysis is studied for obtained equation by searching equilibrium points and their stability analysis. "Pitchfork" and "Hysteresis" types of bifurcation are observed. Finally, bifurcation analysis of periodic solution of Helmholtz oscillator is studied by using the method of second order averaging to study its global behaviour.

3.2.İkinci Mertebe Altharmonik Rezonans İçin İkinci Mertebe Ortalama Alma Yönteminin Uygulanması.....	75
3.3.İkinci Mertebe Altharmonik Rezonans İçin Dallanma Analizi.....	85
3.4.Üçüncü Mertebe Altharmonik Rezonans Durumu İçin İkinci Mertebe Ortalama Alma Yönteminin Uygulanması.....	90
3.5.Üçüncü Mertebe Altharmonik Rezonans İçin Dallanma Analizi.....	92
3.6.Diğer Altharmonikler.....	96
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	98
KAYNAKLAR.....	101
EK-1.....	102
EK-2.....	106
ÖZGEÇMİŞ.....	108



ÖZET

Bu çalışmada, birçok fiziksel ve mühendislik problemlerini modelleyen, katastrof teorisinde önemli rol oynayan ve ilk olarak Helmholtz tarafından kulak zarının titreşimini açıklamak için önerilen [4,7], tek serbestlik dereceli, sönümlü, kuadratik nonlinear terim içeren ve zorlamalı Helmholtz salıncısının analitik yöntemlerle statik ve dinamik dallanması incelenmiştir.

Birinci bölümde, incelemelerde kullanılan ve pertürbasyon yöntemlerinden olan çoklu ölçekler yöntemi, ortalama alma yöntemi ile normal form analizi kısaca tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, Helmholtz salıncı denkleminin $(0,0)$ denge noktası civarında yukarıda sözü edilen yöntemler uygulanmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Üç farklı yöntemin de aynı yapıda sonuçlar verdiği, fakat uygulama açısından her yöntemin diğerlerine göre avantajı veya dezavantajı olduğu görülmüş ve bunlar sonuçlar kısmında tartışılmıştır. Bu bölümün son aşamasında elde edilen denklemlerin denge noktaları ve bunların kararlılık durumları incelenerek dallanma analizi yapılmıştır. Burada denge noktasının kararlılığını kaybetmesi sonucu periyodik yörüngelere dallandığı gözlenmiştir.

Üçüncü bölümde, [5] referansındaki çalışmalarda $\frac{2\pi}{\omega}$ periyodundaki periyodik yörüngelerin periyodik çiftleme dallanmalarıyla kararlılığını kaybedip periyodu $\frac{4\pi}{\omega}$, $\frac{8\pi}{\omega}$ olan yörüngelerin sayısal ve analog çalışmalarla gözlenmesinden yola çıkarak ikinci mertebe ortalama alma yöntemi ile bu dallanmalar incelenmiş ve dallanma diyagramları elde edilmiştir.

BIFURCATION ANALYSIS OF HELMHOLTZ OSCILLATOR IN RESONANCES

SUMMARY

In this study, static and dynamic bifurcations of Helmholtz oscillator are studied by using some analytical methods. The equation of Helmholtz oscillator which was first proposed by Helmholtz to explain the vibration of pre-stressed membrane models many physical and engineering problems. It also plays a significant role in catastrophe theory [7]. Helmholtz oscillator is a driven damped, continuously excited and single-degree of freedom system with quadratic nonlinearity.

In the first section, methods of multiple scales, normal form analysis and method of second order averaging are introduced. We have used reference [3] and [1] to introduce methods of multiple scales. In this method, x , which is assumed to be an approximate solution of original equation depends on the various new scales, instead of t and can be represented by an expansion having the form

$$x(t, \varepsilon) = \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_m, \varepsilon) = \sum_{m=0}^M \varepsilon^m x_m(T_0, T_1, \dots, T_m) + O(\varepsilon T_m) \quad (1)$$

where $T_m = \varepsilon^m t$. If the equation (1) is differentiated with respect to t and substituted into the original equation and if the coefficients of all ε which have the same degree in the obtained equation, we arrived at ordinary differential equations. In the solutions of these differential equations we meet secular terms which makes the rest of the equations unsolvable. By eliminating secular terms we obtain model equations which must be satisfied by approximate solution of the original differential equation. The examination of these model equations gives us some information about behaviour of original system.

We have used reference [4] to introduce normal form analysis. Normal form analysis plays an important role in modern bifurcation theory. This analysis involves smooth transformation of non-linear co-ordinates so that it simplifies the original dynamical system. Since we have used fourth order normal form analysis in our study, the coefficients of fourth order normal form equations are given here.

We assume that the dynamical systems is autonomous, the linear part of vector field have Jordan form and non-linear terms of the system begin with quadratic terms. According to this assumption, standard form to which normal form can be applied is

$$\dot{x}_v = \lambda_v x_v + \sum a_{jh}^v x_j x_h + \sum b_{ihk}^v x_j x_h x_k \quad (2)$$

where λ_v are the eigenvalues of the linear part. The coefficients a_{jh}^v and b_{ihk}^v are assumed to be symmetric with respect to their subscripts without loss of generality

(v, j, h, k = 1, 2, ..., n) . According to fundamental theorem of Brjuno there exists a normalizing transformation

$$x_v = y_v + \sum \alpha_{lm}^v y_l y_m + \sum \beta_{lmp}^v y_l y_m y_p + \sum \gamma_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r \quad (3)$$

which generally has complex coefficients, in equation (3), α_{lm}^v and β_{lmp}^v are assumed to be symmetric with respect to their subscripts. Normalizing transformation (3) reduces the original system (2) to normal form

$$\dot{y}_v = \lambda_v y_v + \sum \phi_{lm}^v y_l y_m + \sum \kappa_{lmp}^v y_l y_m y_p + \sum \Omega_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r \quad (4)$$

Substituting the transformation equation (3) into the original equation (2), and using (4), we obtain the following equation

$$\begin{aligned} & \phi_{lm}^v y_l y_m + \kappa_{lmp}^v y_l y_m y_p + \Omega_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r + \alpha_{lm}^v (\lambda_l + \lambda_m - \lambda_v) y_l y_m \\ & + \beta_{lmp}^v (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_v) y_l y_m y_p + \gamma_{lmpr}^v (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_v) y_l y_m y_p y_r \\ & + \frac{2}{3} (\alpha_{jm}^v \phi_{pl}^j + \alpha_{jl}^v \phi_{mp}^j + \alpha_{jp}^v \phi_{lm}^j) y_l y_m y_p + \frac{1}{2} (\alpha_{jm}^v \kappa_{prl}^j + \alpha_{jp}^v \kappa_{rlm}^j + \alpha_{jr}^v \kappa_{lmp}^j \\ & + \alpha_{jl}^v \kappa_{mpr}^j) y_l y_m y_p y_r + \frac{1}{2} (\beta_{jmp}^v \phi_{rl}^j + \beta_{jpr}^v \phi_{lm}^j + \beta_{jrl}^v \phi_{mp}^j + \beta_{jlp}^v \phi_{mr}^j + \beta_{jmr}^v \phi_{lp}^j) y_l y_m y_p y_r \\ & = a_{lm}^v y_l y_m + b_{lmp}^v y_l y_m y_p + \frac{2}{3} (a_{jp}^v \alpha_{lm}^j + a_{jl}^v \alpha_{mp}^j + a_{jm}^v \alpha_{pl}^j) y_l y_m y_p + \frac{1}{2} (a_{jr}^v \beta_{lmp}^j \\ & + a_{jl}^v \beta_{mpr}^j + a_{jm}^v \beta_{prl}^j + a_{jp}^v \beta_{rlm}^j) y_l y_m y_p y_r + \frac{1}{6} a_{jh}^v (\alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h + \alpha_{mp}^j \alpha_{rl}^h + \alpha_{pr}^j \alpha_{lm}^h \\ & + \alpha_{rl}^j \alpha_{mp}^h + \alpha_{lp}^j \alpha_{mr}^h + \alpha_{mr}^j \alpha_{lp}^h) y_l y_m y_p y_r + \frac{1}{2} (b_{jpr}^v \alpha_{lm}^j + b_{jrl}^v \alpha_{mp}^j + b_{jlm}^v \alpha_{pr}^j \\ & + b_{jmp}^v \alpha_{rl}^j + b_{jlp}^v \alpha_{mr}^j + b_{jmr}^v \alpha_{lp}^j) y_l y_m y_p y_r \end{aligned} \quad (5)$$

Let us introduce the following symbols:

$$\begin{aligned} \Delta_{lm}^v &= \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda_v = \lambda_l + \lambda_m \\ 0, & \text{if } \lambda_v \neq \lambda_l + \lambda_m \end{cases} \\ \Delta_{lmp}^v &= \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda_v = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p \\ 0, & \text{if } \lambda_v \neq \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p \end{cases} \\ \Delta_{lmpr}^v &= \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda_v = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r \\ 0, & \text{if } \lambda_v \neq \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Comparing equal powers of terms in both sides of the identity (5), using the symbols introduced above and noting that only the resonant monomials should appear in the normal form equations, the coefficients of the normalizing transformations and normal form equations can be obtained

$$\alpha_{lm}^v = \frac{a_{lm}^v}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_v} \quad (7a)$$

$$\beta_{lmp}^v = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_v} \left\{ b_{lmp}^v + \frac{2}{3} \left[a_{jp}^v \alpha_{lm}^j + a_{jl}^v \alpha_{mp}^j + a_{jm}^v \alpha_{lp}^j - \alpha_{jm}^v \phi_{pl}^j - \alpha_{jl}^v \phi_{mp}^j - \alpha_{jp}^v \phi_{lm}^j \right] \right\} \quad (7b)$$

$$\gamma_{lmpr}^v = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r - \lambda_v} \left\{ \frac{1}{2} \left[(a_{jr}^v \beta_{lmp}^j + a_{jl}^v \beta_{mpr}^j + a_{jm}^v \beta_{prl}^j + a_{jp}^v \beta_{rlm}^j) \right. \right. \\ \left. \left. + (b_{jpr}^v \alpha_{lm}^j + b_{jrl}^v \alpha_{mp}^j + b_{jmp}^v \alpha_{lr}^j + b_{jlp}^v \alpha_{mr}^j + b_{jmr}^v \alpha_{lp}^j) \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{jm}^v \kappa_{prl}^j + \alpha_{jp}^v \kappa_{rlm}^j + \alpha_{jr}^v \kappa_{lmp}^j + \alpha_{jl}^v \kappa_{mpr}^j) - (\beta_{jmp}^v \phi_{rl}^j + \beta_{jpr}^v \phi_{lm}^j) \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_{jrl}^v \phi_{mp}^j + \beta_{jlm}^v \phi_{pr}^j + \beta_{jlp}^v \phi_{mr}^j + \beta_{jmr}^v \phi_{lp}^j) \right] + \frac{1}{6} a_{jh}^v (\alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h + \alpha_{mp}^j \alpha_{rl}^h) \right. \\ \left. + \alpha_{pr}^j \alpha_{lm}^h + \alpha_{rl}^j \alpha_{mp}^h + \alpha_{lp}^j \alpha_{mr}^h + \alpha_{mr}^j \alpha_{lp}^h \right\} \quad (7c)$$

$$\phi_{lm}^v = \Delta_{lm}^v a_{lm}^v \quad (7d)$$

$$\kappa_{lmp}^v = \Delta_{lmp}^v \left\{ b_{lmp}^v + \frac{2}{3} \left[a_{jp}^v \alpha_{lm}^j + a_{jl}^v \alpha_{mp}^j + a_{jm}^v \alpha_{pl}^j - \alpha_{jm}^v \phi_{pl}^j \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_{jl}^v \phi_{mp}^j - \alpha_{jp}^v \phi_{lm}^j \right] \right\} \quad (7e)$$

$$\Omega_{lmp}^v = \Delta_{lmp}^v \left\{ \frac{1}{2} \left[(a_{jr}^v \beta_{lmp}^j + a_{jl}^v \beta_{mpr}^j + a_{jm}^v \beta_{prl}^j + a_{jp}^v \beta_{rlm}^j) + (b_{jpr}^v \alpha_{lm}^j \right. \right. \\ \left. \left. + b_{jrl}^v \alpha_{mp}^j + b_{jlm}^v \alpha_{pr}^j + b_{jlp}^v \alpha_{mr}^j + b_{jmr}^v \alpha_{lp}^j) - (\alpha_{jm}^v \kappa_{prl}^j + \alpha_{jp}^v \kappa_{rlm}^j \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha_{jr}^v \kappa_{lmp}^j + \alpha_{jl}^v \kappa_{mpr}^j) - (\beta_{jmp}^v \phi_{rl}^j + \beta_{jpr}^v \phi_{lm}^j + \beta_{jrl}^v \phi_{mp}^j + \beta_{jlm}^v \phi_{pr}^j) \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_{jlp}^v \phi_{mr}^j + \beta_{jmr}^v \phi_{lp}^j) \right] + \frac{1}{6} a_{jh}^v (\alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h + \alpha_{mp}^j \alpha_{rl}^h + \alpha_{pr}^j \alpha_{lm}^h + \alpha_{rl}^j \alpha_{mp}^h) \right. \\ \left. + \alpha_{lp}^j \alpha_{mr}^h + \alpha_{mr}^j \alpha_{lp}^h \right\} \quad (7f)$$

Now, we assume that the original dynamical system contains a linear term related to bifurcation parameter. We will examine contribution of this term to normal form equations. In this case, dynamical system can be written as

$$\dot{x} = L_0 x + L_\xi x + f(x) \quad (8)$$

where, L_0 is the matrix which consists of the coefficient of linear terms, L_ξ is the matrix which consists of the coefficient of linear terms related to bifurcation parameter and $f(x)$ represents the non-linear terms. Since the normal form analysis of the non-linear terms is already studied, transformation sought should affect only the matrix L_ξ . Moreover, it is also desired that this transformation should give terms in the main diagonal of normal form equations in order to make the further analysis easier. Hence the normalizing transformation takes the form

$$x = y + \phi(y) + G(\xi)y \quad (9)$$

where $\phi(y)$ stands for the non-linear terms and $G(\xi)$ is of order $O(\xi)$. After some calculation, we find that normal form equations are

$$\dot{y} = L_0 y + L_\xi' y + g(y) \quad (10)$$

where perturbation matrix L_ξ' [4] is

$$L_\xi' = L_0 G - G L_0 + L_\xi \quad (11)$$

Using reference [3], we will introduce method of second order averaging. We assume that the original equation has the form

$$\dot{\underline{x}} = \varepsilon \underline{f}(\underline{x}, t) + \varepsilon^2 \underline{g}(\underline{x}, t) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (12)$$

with $\underline{f}$ and $\underline{g}$ T -periodic in t . Averaging theorem asserts that the equation (12) can be replaced by its averaged counterpart

$$\dot{\underline{x}} = \varepsilon \underline{f}_0(\underline{x}) + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

where $\underline{f}_0(\underline{x}) = (1/T) \int_0^T \underline{f}(\underline{x}, t) dt$ and local information on periodic orbits of equation (12) can be deduced from equilibrium solutions of the equation (13). Since we have no knowledge about the terms of order $O(\varepsilon^2)$, we have to study the averaging process in more detail. The steps between the equation (12) and the equation (13) depend on a lemma which states that there exists a smooth near-identity transformation,

$$\underline{x} = \underline{y} + \varepsilon \underline{u}(\underline{y}, t) \quad \underline{y}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \quad (14)$$

We will construct the transformation explicitly in order to choose $\underline{u}$. If we differentiate the equation (14) with respect to t and substitute into the equation (12), we obtain transformed system as

$$[\underline{I} + \varepsilon \underline{D}\underline{u}] \dot{\underline{y}} = \varepsilon \underline{f}(\underline{y} + \varepsilon \underline{u}, t) + \varepsilon^2 \underline{g}(\underline{y} + \varepsilon \underline{u}, t) - \varepsilon \dot{\underline{u}}(\underline{y}, t) \quad (15)$$

where $\underline{D}\underline{u}$ denotes the matrix of partial derivatives $(\frac{\partial u_i}{\partial y_j})$. Expanding the right-hand side of the equation (15) into Taylor's series about $\underline{y}$, we find that

$$[\underline{I} + \varepsilon \underline{D}\underline{u}] \dot{\underline{y}} = \varepsilon [\underline{f}(\underline{y}, t) - \dot{\underline{u}}(\underline{y}, t)] + \varepsilon^2 [\underline{D}\underline{f}(\underline{y}, t) \underline{u}(\underline{y}, t) + \underline{g}(\underline{y}, t)] + O(\varepsilon^3) \quad (16)$$

If $\underline{f}(\underline{y}, t)$ is separated into two parts, $\underline{f}_0(\underline{y})$, $\underline{f}(\underline{y}, t)$ and if $\underline{u}(\underline{y}, t)$ is chosen such that $\dot{\underline{u}}(\underline{y}, t) = \underline{f}(\underline{y}, t)$ then the part of order $O(\varepsilon)$ in the right-hand side of equation (16) becomes the averaged term $\varepsilon \underline{f}_0(\underline{y})$. Finally, if we multiply (16) by the inverse of the near-identity operator $\underline{I} + \varepsilon \underline{D}\underline{u}$, we have

$$\dot{\underline{y}} = \varepsilon \underline{f}_0(\underline{y}) + \varepsilon^2 [\underline{D}\underline{f}(\underline{y}, t) \underline{u}(\underline{y}, t) - \underline{D}\underline{u}(\underline{y}, t) \underline{f}_0(\underline{y}) + \underline{g}(\underline{y}, t)] + O(\varepsilon^3) \quad (17)$$

$\underline{u}$ and hence $\underline{D}\underline{u}$ are chosen to have zero mean and thus the only terms of non-zero mean at $O(\varepsilon^2)$ in equation (17) are $\underline{D}\underline{f}(\underline{y}, t) \underline{u}(\underline{y}, t) + \underline{g}(\underline{y}, t)$, and one may now apply averaging to these terms (making use implicitly of a second transformation $\underline{y} = \underline{z} + \varepsilon^2 \underline{v}(\underline{z}, t)$) to obtain the second order averaged system

$$\dot{\underline{z}} = \varepsilon \underline{f}_0(\underline{z}) + \varepsilon^2 (\underline{g}_0(\underline{z}) + [\underline{D}\underline{f}(\underline{z}, t) \underline{u}(\underline{z}, t)]_0) \quad (18)$$

where the subscript $[\cdot]_0$ denotes the time average. Terms of order $O(\varepsilon^3)$ have been eliminated.

In the second section, model equations are obtained in the neighbourhood of equilibrium point (0,0) of Helmholtz oscillator by using three different methods which are introduced above shortly in order to realise bifurcation analysis

The equation of Helmholtz oscillator which have been studied in the method of multiple scales can be written as

$$\ddot{x} + \bar{g} \dot{x} + \omega_0^2 x + \bar{\alpha} x^2 = \bar{A} \cos \Omega t \quad (19)$$

Instead of using the frequency of the excitation Ω as a parameter, we introduce a detuning parameter σ , which quantitatively describes the nearness of Ω to ω_0 [1]. The relations $\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma$, $2\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma$ and $\Omega = 2\omega_0 + \varepsilon \sigma$ have been used for primary resonance, second order superharmonic resonance and second order subharmonic resonance respectively.

For primary resonance, the coefficients of equation (19) are taken as $\bar{g} = \varepsilon^2 g$, $\bar{\alpha} = \varepsilon \alpha$, $\bar{A} = \varepsilon^2 A$ and we expressed the approximate solution in the following form

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (20)$$

where $T_m = \varepsilon^m t$. If the equation (20) is differentiated and substituted into the equation (19), and if the coefficients of ε^0 , ε^1 , ε^2 on both sides of the obtained equation is equated, we obtain three ordinary differential equations. Eliminating secular terms in the solution of this equations and introducing integration constant as $K = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$, we obtain

$$a' = -\frac{g}{2} a + \frac{A}{2\omega_0} \sin(\sigma T_2 - \beta) \quad (21a)$$

$$a\beta' = -\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} a^3 - \frac{A}{2\omega_0} \cos(\sigma T_2 - \beta) \quad (21b)$$

Making the transformation $\gamma = \sigma T_2 - \beta$ in the equations (21), we get

$$a' = -\frac{g}{2} a + \frac{A}{2\omega_0} \sin \gamma \quad (22a)$$

$$a\gamma' = a\sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} a^3 + \frac{A}{2\omega_0} \cos \gamma \quad (22b)$$

Secondary resonances are examined for two cases; hard excitation ($\bar{A} = A$) and weak excitation ($\bar{A} = \varepsilon A$). An approximate solution of original equation can be given as

$$x(\varepsilon, t) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (23)$$

For second order superharmonic resonance, taking the coefficient of equation (19) as $\bar{g} = \varepsilon g$, $\bar{\alpha} = \varepsilon \alpha$, doing some simple calculations as introduced above, eliminating secular terms and introducing integration constant as $K = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$, we find that

$$a' = -\frac{g}{2}a - \frac{A^2\alpha}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (24a)$$

$$a\beta' = \frac{A^2\alpha}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (24b)$$

where excitation is hard, and

$$a' = -\frac{g}{2} \quad (25a)$$

$$a\beta' = 0 \quad (25b)$$

where excitation is weak. In like manner, for second order subharmonic resonance, we obtain

$$a' = -\frac{g}{2}a - \frac{\alpha A}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (26a)$$

$$a\beta' = \frac{\alpha A}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (26b)$$

where excitation is hard, and

$$a' = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0} \sin(\Omega - \omega_0 - \beta)T_0 \quad (27a)$$

$$a\beta' = -\frac{A}{2\omega_0} \cos(\Omega - \omega_0 - \beta)T_0 \quad (27b)$$

where excitation is weak.

For normal form analysis, the coefficients of equation (19) are taken as $\bar{g} = g$, $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{A} = A$. Using $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = A \cos \Omega t$ and $x_4 = A \sin \Omega t$, we can write the equation (19) as autonomous dynamical system

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (28a)$$

$$\dot{x}_2 = -gx_2 - \omega_0^2 x_1^2 + x_3 \quad (28b)$$

$$\dot{x}_3 = -\Omega x_4 \quad (28c)$$

$$\dot{x}_4 = \Omega x_3 \quad (28d)$$

In case of primary resonance, having used the equality $\Omega = \omega_0 + \sigma$ and making a suitable transformation, the standard form to which normal form analysis can be applied is obtained. Using the code given in Appendix-1 which is written for Mathematica, we find the coefficient of normal form equations. Thus, the normal form equations can be written as

$$\dot{y}_1 = \omega_0 i y_1 + \sigma i y_1 \quad (29a)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_2^2 y_4 \quad (29b)$$

$$\dot{y}_3 = -\omega_0 i y_3 - \sigma i y_3 \quad (29c)$$

$$\dot{y}_4 = y_3 - \omega_0 i y_4 - \frac{g}{2} y_4 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_2 y_4^2 \quad (29d)$$

Having found the solutions y_1, y_3 , substituting them into y_2, y_4 and assuming that the solution of the last two equation have the form

$$y_2 = re^{i\theta}, \quad y_4 = re^{-i\theta} \quad (30)$$

and using $\gamma = [(\omega_0 + \sigma)t - \theta]$, we obtain the following equations

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + \frac{A}{4\omega_0} \sin \gamma \quad (31a)$$

$$r \dot{\gamma} = \sigma r + \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3} r^3 + \frac{A}{4\omega_0} \cos \gamma \quad (31b)$$

As it is seen, the equations obtained by using normal form analysis and the methods of multiple scales are the same except the coefficient of cubic term in (31b).

In case of second order subharmonic resonance, the relation $\Omega = 2\omega_0 + \sigma$ is used. After bringing (28) to standard form to which normal form analysis can be applied, we use the programme given in Appendix-1 for Mathematica to obtain the coefficients of normal form equations. Thus, the normal form equations are found as follows,

$$\dot{y}_1 = -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 - \frac{\alpha i}{\omega_0} y_2 y_3 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1^2 y_2 + \frac{9\alpha^2 i}{4\omega_0^3} y_1 y_3 y_4 \quad (32a)$$

$$- \frac{\alpha^3 i}{4\omega_0^5} y_1^3 y_4 + \frac{5\alpha^3 i}{36\omega_0^5} y_1 y_2^2 y_3 - \frac{221\alpha^3 i}{720\omega_0^5} y_2 y_3^2 y_4$$

$$\dot{y}_2 = \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 + \frac{\alpha i}{\omega_0} y_1 y_4 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} \omega_0^3 y_1 y_2^2 - \frac{9\alpha^2 i}{4\omega_0^3} y_2 y_3 y_4 \quad (32b)$$

$$+ \frac{\alpha^3 i}{4\omega_0^5} - \frac{5\alpha^3 i}{36\omega_0^5} y_1^2 y_2 y_4 + \frac{221\alpha^3 i}{720\omega_0^5} y_1 y_3 y_4^2$$

$$\dot{y}_3 = -2\omega_0 i y_3 - \sigma i y_3 \quad (32c)$$

$$\dot{y}_4 = 2\omega_0 i y_4 + \sigma i y_4 \quad (32d)$$

If y_3, y_4 are found from (32c,d), substituted them into (32a,b) and if we assumed that y_1, y_2 have the form

$$y_1 = re^{i\theta}, \quad y_2 = re^{-i\theta} \quad (33)$$

and if $\gamma = [(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta]$ is used, we obtain

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + [c_1 r - c_4 r^3 - c_5 r^3 + c_6 r] \sin \gamma \quad (34a)$$

$$\dot{\gamma} = \sigma + 2c_2 r^2 + 2c_3 + [2c_1 + 2c_4 r^2 - 2c_5 r^2 + 2c_6] \cos \gamma \quad (34b)$$

where

$$c_1 = \frac{A}{6\omega_0^3}, \quad c_2 = \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3}, \quad c_3 = \frac{\alpha^2 A^2}{16\omega_0^7}, \quad c_4 = \frac{\alpha^3 A}{24\omega_0^7}, \quad c_5 = \frac{5\alpha^2 A}{216\omega_0^7}, \quad c_6 = \frac{221\alpha^3 A^3}{155520\omega_0^{11}}$$

In case of second order superharmonic resonance we use $\frac{\omega_0 + \sigma}{2}$ instead of Ω . After bringing (28) to standard form, we obtain the coefficients of normal form equation by using the programme given in Appendix-1 which is made for Mathematica. Thus, we can construct normal form equations as

$$\dot{y}_1 = -\omega_0 i - \frac{g}{2} y_1 - \frac{\alpha i}{2\omega_0} y_3^2 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1^2 y_2 + \frac{46\alpha^2 i}{15\omega_0^3 y_1 y_3 y_4} - \frac{1003\alpha^3 i}{180\omega_0^5} y_1^2 y_4^2 - \frac{107\alpha^3 i}{10\omega_0^5} y_1 y_2 y_3^2 - \frac{1081\alpha^3 i}{450\omega_0^5} y_3^3 y_4 \quad (35a)$$

$$\dot{y}_2 = \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 + \frac{\alpha i}{2\omega_0} y_4^2 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1 y_2^2 - \frac{46\alpha^2 i}{15\omega_0^3} y_2 y_3 y_4 + \frac{1003\alpha^3 i}{180\omega_0^5} y_2^2 y_3^2 + \frac{107\alpha^3 i}{10\omega_0^5} y_1 y_2 y_4^2 + \frac{1081\alpha^3 i}{450\omega_0^5} y_3^3 y_4^3 \quad (35b)$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{\omega_0 i}{2} y_3 - \frac{\sigma i}{2} y_3 \quad (35c)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{\omega_0 i}{2} y_4 + \frac{\sigma i}{2} y_4 \quad (35d)$$

Here, if y_3, y_4 are found and substituted into (35a,b), if the solutions are sought in the following form

$$y_1 = r e^{i\theta} \quad y_2 = r e^{-i\theta} \quad (36)$$

and if $\gamma = [(\omega_0 + \sigma)t + \theta]$ is used, we obtain

$$\dot{r} = -\frac{g}{2} r - [c_1 - c_4 r^2 + c_5 r^2 + c_6] \sin \gamma \quad (37a)$$

$$r \dot{\gamma} = \sigma r + c_2 r^3 + c_3 r - [c_1 + c_4 r^2 + c_5 r^2 + c_6] \cos \gamma \quad (37b)$$

where

$$c_1 = \frac{2A^2\alpha}{9\omega_0^3}, \quad c_2 = \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3}, \quad c_3 = \frac{184\alpha^2 A^2}{135\omega_0^7}, \\ c_4 = \frac{1003\alpha^3 A^2}{405\omega_0^9}, \quad c_5 = \frac{214A^2\alpha^3}{45\omega_0^7}, \quad c_6 = \frac{8648A^4\alpha^3}{18225\omega_0^{13}}$$

For primary resonance, applying the method of second order averaging to the equation (19) with the coefficients $\omega_0^2 = 1, \bar{\alpha} = 1, \bar{A} = A, \bar{g} = g, \Omega = \omega$ by making use of programme given in Appendix-2 which is made for Mathematica and passing to polar co-ordinates, we obtain

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon}{8\omega^3} \left[4g\omega^3 r + \sqrt{9g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \sin \gamma \right] \quad (38a)$$

$$r \dot{\gamma} = -\frac{\varepsilon}{24\omega^3} [(3\varepsilon\Omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 3\varepsilon g^2 \omega^2) r + 10\varepsilon\alpha^2 r^3] - \frac{\varepsilon}{8\omega^3} \sqrt{9g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \cos \gamma \quad (38b)$$

$$\text{where } \Omega = \frac{\omega^2 - 1}{\varepsilon}, \quad \gamma = \theta - \varphi, \quad \varphi = \arctan \frac{\varepsilon g A \omega}{\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2}.$$

In the same manner, for second order subharmonic resonance, we obtain

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon}{6\omega^3} [3g\omega^3 r + 8\alpha\varepsilon A r \sin 2\theta] \quad (39a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{48\omega^3} [3\varepsilon\Omega^2 + 12\varepsilon g^2\omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 160\varepsilon\alpha^2 r^2 + 64\varepsilon\alpha A \cos 2\theta] \quad (39b)$$

where $\Omega = \frac{\omega^2 - 4}{\varepsilon}$.

Using the same programme and the process for third and fourth subharmonic resonances, we obtain the equations which do not give any bifurcation. Hence, the method of higher order averaging must be used to see bifurcation at third and higher subharmonic resonances of Helmholtz oscillator.

Next, bifurcation analysis is studied for obtained equations. In case of primary resonance, bifurcation of types "Pitchfork" and "Hysteresis" are seen depending on value of parameters. In case of second order superharmonic resonance, the results of normal form analysis can only give bifurcation. We obtain fifth order polynomial for equilibrium point. Since the zeros of fifth order polynomial can not find analytically, we can not examine bifurcation for this case. In case of second order subharmonic resonance, the results of normal form analysis and second order averaging can be used for bifurcation analysis. Using these equations, we draw bifurcation diagram by using Mathematica.

In the section three, bifurcation analysis of periodic solution of Helmholtz oscillator is studied by using the method of second order averaging. For this process, if we use the equation (19) with the coefficients $\omega_0^2 = 1$, $\bar{\alpha} = 1$, $\bar{A} = \varepsilon A$, $\bar{g} = \varepsilon g$, $\Omega = \omega$ the following equations are obtained

$$\begin{aligned} \dot{u} = \frac{\varepsilon}{k\omega} [& \Omega csu - \Omega s^2 v + 2\Gamma \bar{c} csu - 2\Gamma \bar{c} s^2 v - gk\omega s^2 u - gk\omega cs v + c^2 su^2 \\ & - 2cs^2 uv + s^3 v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega} \left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \bar{s} csu - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \bar{s} s^2 v - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \bar{c}_2 csu \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \bar{c}_2 s^2 v - \Gamma^2 csu + \Gamma^2 s^2 v \right] \end{aligned} \quad (40a)$$

$$\begin{aligned} \dot{v} = \frac{\varepsilon}{k\omega} [& \Omega c^2 u - \Omega cs v + 2\Gamma \bar{c} c^2 u - 2\Gamma \bar{c} cs^2 v - gk\omega csu - gk\omega c^2 v + c^3 u^2 \\ & - 2c^2 suv + sc^2 v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega} \left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \bar{s} c^2 u - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \bar{s} cs v - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \bar{c}_2 c^2 u \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \bar{c}_2 cs v - \Gamma^2 c^2 u + \Gamma^2 cs v \right] \end{aligned} \quad (40b)$$

where $\Omega = \frac{1-k^2\omega^2}{\varepsilon}$, $\Gamma = \frac{A}{1-\omega^2}$, $c = \cos k\omega t$, $s = \sin k\omega t$, $\bar{c} = \cos \omega t$, $\bar{c}_2 = \cos 2\omega t$.

Then, applying the method of second order averaging to equations (40) for $k = \frac{1}{2}$ (second order subharmonic resonance), we obtain

$$\dot{u} = (a+b)u + (c+d)v + \alpha(u^2 + v^2)v \quad (41a)$$

$$\dot{v} = (c-d)u + (a-b)v - \alpha(u^2 + v^2)u \quad (41b)$$

or, in polar co-ordinates ($r^2 = u^2 + v^2$, $\theta = \arctan \frac{v}{u}$)

$$\dot{r} = ar + br \cos 2\theta + cr \sin 2\theta \quad (42a)$$

$$\dot{\theta} = -b \sin 2\theta + c \cos 2\theta - d - \alpha r^2 \quad (42b)$$

$$\text{where } a = -\frac{\bar{g}}{2}, \quad b = \frac{\bar{g}\bar{A}}{1-\omega^2} - \frac{\bar{g}\bar{A}}{\omega^2(1-\omega^2)}, \quad c = \frac{\bar{A}}{\omega(1-\omega^2)} - \frac{\bar{A}(4-\omega^2)}{2\omega^3(1-\omega^2)},$$

$$d = -\frac{4-\omega^2}{4\omega} + \frac{\bar{A}^2}{\omega(1-\omega^2)^2} + \frac{(4-\omega^2)^2}{16\omega^3} + \frac{\bar{A}^2}{2\omega^3(1-\omega^2)^2} + \frac{\bar{g}^2}{4\omega}, \quad \alpha = \frac{10\bar{g}^2}{3\omega^3}$$

The averaged equations (41) always possess the trivial equilibrium solution $(u,v)=(0,0)$. If we search for non-trivial equilibrium point by doing some calculations, we obtain

$$r = \sqrt{\frac{1}{\alpha}(-d \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2})} \quad (43)$$

For non-trivial solutions to exist, the two conditions

$$c^2 + b^2 - a^2 \geq 0, \quad (1/\alpha)(-d \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2}) > 0 \quad (44a,b)$$

must be met. If one such solution for r does exist, then examination of equation (42) shows that there are two distinct solutions, $(r, \theta) = (r_i, \theta_i)$, $(r_i, \theta + \pi)$. The bifurcation sets on which these pair of equilibrium are created and annihilated are given by equations (44a,b), with equalities replacing the inequalities. Using this bifurcation sets and taking $\bar{A} = 0.4$, we draw bifurcation diagram (r, ω) , and then taking $\omega = 1.9$ we draw bifurcation diagram $(r, \bar{A})$.

Next, applying the method of second order averaging for $k = \frac{1}{3}$, we obtain

$$\dot{u} = au + bv + 2cuv + \alpha v(u^2 + v^2) \quad (45a)$$

$$\dot{v} = -bu + av + c(u^2 - v^2) - \alpha u(u^2 + v^2) \quad (45b)$$

or, in polar co-ordinates

$$\dot{r} = r(a + cr \sin 3\theta) \quad (46a)$$

$$\dot{\theta} = -(b + \alpha r^2) + cr \cos 3\theta \quad (46b)$$

$$\text{where } a = -\frac{\bar{g}}{2}, \quad b = \frac{(9-\omega)^2}{24\omega^3} + \frac{3\bar{g}^2}{8\omega} - \frac{9-\omega^2}{6\omega} + \frac{3\bar{A}^2}{2\omega(1-\omega^2)^2} - \frac{27\bar{A}^2}{5\omega^3(1-\omega^2)^2}, \quad c = \frac{27\bar{A}}{4\omega^3(1-\omega^2)}, \quad \alpha = \frac{45\bar{g}^2}{4\omega^3}$$

The averaged equation (45) always have the trivial equilibrium solution $(u,v)=(0,0)$.

Non-trivial solution of equation (46) are

$$r = \sqrt{(1/2\alpha^2)((c^2 - 2\alpha b) \pm \sqrt{(c^2 - 2\alpha b)^2 - 4\alpha^2(b^2 - a^2)})} \quad (47)$$

and occur in sets of three with $\theta = \theta_i$, $\theta_i + \frac{2\pi}{3}$, $\theta_i + \frac{4\pi}{3}$. Here, we also create bifurcation sets and then using these sets, and taking some value of ω , we draw bifurcation diagram $(r, \bar{A})$, finally taking some value of $\bar{A}$, we draw bifurcation diagram (r, ω) . We can not find any equations which give bifurcation for other subharmonics with method of second order averaging. We used Mathematica to control stability analysis of all equilibrium points.

BÖLÜM 1. GİRİŞ : KULLANILAN YÖNTEMLERİN TANITIMI

1.1. Çoklu Ölçekler Yöntemi [1]

Çoklu ölçekler yönteminin üç şekli vardır. Burada, Helmholtz denkleminin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde kullandığımız ve yöntemin çoklu-değişken hali olarak bilinen şekli tanıtılacaktır. Bu tanıtım aşağıdaki lineer sönümlü salıncı tartışılarak yapılacaktır:

$$\ddot{x} + x = -2\varepsilon \dot{x} \quad (1.1.1)$$

Bu örneği, tam çözümünün elde edilen yaklaşık çözümleriyle karşılaştırılmasında kullanılabilir olmasından seçtik. Başlangıç olarak, küçük ε için (1.1.2) ile verilen bir asimtotik açılımı belirleyelim:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \quad (1.1.2)$$

(1.1.2) 'yi (1.1.1) 'de kullanıp, ε nun eşit kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlersek şunları elde ederiz:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \quad (1.1.3)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2 \dot{x}_0 \quad (1.1.4)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -2 \dot{x}_1 \quad (1.1.5)$$

(1.1.3) 'ün genel çözümü

$$x_0 = a \cos(t + \phi) \quad (1.1.6)$$

olarak bulunur. Burada a ve ϕ keyfi sabitlerdir. x_0 'ı (1.1.4) 'te kullanıp elde edilen denklemi çözersek şunu elde ederiz:

$$x_1 = -at \cos(t + \phi) \quad (1.1.7)$$

x_1 'i (1.1.5) 'te kullanıp sonucu x_2 için çözersek;

$$x_2 = \frac{1}{2}at^2 \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}at \sin(t + \phi) \quad (1.1.8)$$

olur. O halde yaklaşık çözüm olarak şu elde edilmiş olur:

$$x = a \cos(t + \phi) - \varepsilon at \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}[t^2 \cos(t + \phi) + t \sin(t + \phi)] + O(\varepsilon^3) \quad (1.1.9)$$

Açıktır ki (1.1.9) denklemi, $t \varepsilon^{-1}$ kadar büyük olduğunda zayıf bir yaklaşımdır. Çünkü yukarıdaki açılımın uygulandığını kabul ederken, ikinci ve üçüncü terimler olan εx_1 ve εx_2 sırasıyla x_0 ve x_1 ile karşılaştırıldıklarında küçük değildirler. Bu nedenle açılım, $t O(\varepsilon^{-1})$ 'e artarken geçersizdir ve zorluğun kaynağı sonsuz bölgedir. Yukarıdaki açılımın başarısızlığı aşağıdaki denklemle verilen (1.1.1) 'in tam çözümünün incelenmesiyle görülebilir:

$$x = ae^{-\varepsilon t} \cos \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi \right] \quad (1.1.10)$$

(1.1.9) denklemi (1.1.10) denleminin t sabit tutularak küçük ε için açılımının bulunması ile elde edilebilir. Böylece üstel ve kosinüs ifadeleri aşağıdaki denklemlerle gösterilir:

$$e^{-\varepsilon t} = 1 - \varepsilon t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t^2 + \dots \quad (1.1.11)$$

$$\cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2} t + \phi) = \cos(t + \phi) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 t \sin(t + \phi) + \dots \quad (1.1.12)$$

Açıktır ki $e^{-\varepsilon t}$ ye, ancak εt kombinasyonu küçük ise, sonlu sayıda terimlerle yaklaşılır. ε küçük olduğundan bunun anlamı $t=O(1)$ dir. t , ε^{-1} kadar büyük olduğunda εt küçük değildir ve bu durumda kesilmiş açılım bozulur. Yukarıdaki kesilmiş seriler belirli bir t değerine kadar tatminkardır. Ancak $e^{-\varepsilon t}$ ve bunun kesilmiş serisi, verilen limitin doğruluğunu gerçekleyen bu t zamanından sonra birbirinden farklıdır. Bu kesilmiş seriye daha çok terim eklemek, t nin değerini kesilmiş seriyi memnun edici kılan t' değerine yükseltir. Bununla birlikte $t > t'$ için $e^{-\varepsilon t}$ ve yeni

kesilmiş serisi yeniden verilen limitin doğruluğunu gerçekler. Bütün t 'ler için $e^{-\epsilon t}$ 'nin açılımını geçerli kılmak için serinin bütün terimleri gereklidir. Böylece ϵ^{-1} kadar büyük zamanlar için geçerli olan bir açılım belirlemek amacıyla ϵt kombinasyonu $T_1=O(1)$ şeklinde tek değişken olarak düşünülmelidir. Bu durumda ϵ^{-1} kadar büyük zamanlar için geçerli $e^{-\epsilon t}$ 'nin kesilmiş herhangi bir açılımı şu formdadır:

$$e^{-\epsilon t} = e^{-T_1} \quad (1.1.13)$$

Benzer şekilde (1.1.12) kesilmiş açılımı, $t = O(\epsilon^{-2})$ kadar büyük olduğunda, tatminkar değildir. $t = O(\epsilon^{-2})$ için geçerli olan, $\cos\left[\sqrt{1-\epsilon^2} t + \phi\right]$ 'nin kesilmiş bir asimtotik açılımını elde etmek için $\epsilon^2 t$, $T_2=O(1)$ şeklinde tek değişken olarak düşünülmelidir. Bu şartla açılım şöyle olur:

$$\begin{aligned} \cos\left[\sqrt{1-\epsilon^2} t + \phi\right] &= \cos\left[t - \frac{1}{2}T_2 + \phi - \frac{1}{8}\epsilon^4 t + \dots\right] \\ &= \cos\left(t - \frac{1}{2}T_2 + \phi\right) + \frac{1}{8}\epsilon^4 t \sin\left(t - \frac{1}{2}T_2 + \phi\right) + \dots \end{aligned} \quad (1.1.14)$$

(1.1.14) açılımı $t = O(\epsilon^{-2})$ olduğunda geçerlidir. Çünkü düzeltme terimi (ikinci terim) $O(\epsilon^{-2})$ ye kadar olan bütün zamanlar için $O(\epsilon^2)$ veya daha küçüktür. Bununla birlikte, bu açılım, ikinci terimi birinci ile karşılaştırıldığında küçük olması için kesileceğinden, $t = O(\epsilon^{-4})$ olduğunda bozulur. $O(\epsilon^{-4})$ kadar büyük zaman değerleri için geçerli bir açılım elde etmek amacıyla $T_4 = \epsilon^4 t = O(1)$ olan bir değişken daha tanımlanmalıdır.

Yukarıdaki tartışma $x(t, \epsilon)$ 'nun, ϵ 'nin kendisine olduğu kadar $t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \dots$ ye de açık olarak bağlı olmasını önerir. Bu tam çözümden görülebilir. Bu nedenle M pozitif tam sayı olmak üzere $O(\epsilon^{-M})$ 'ye kadar olan bütün t ler için, x in $T_0, T_1, \dots, T_M$ şeklinde $M+1$ tane farklı zaman ölçeklerine bağımlılığını belirlemeliyiz. Bu zaman ölçekleri şu şekildedir:

$$T_m = \epsilon^m t \quad (1.1.15)$$

T_2 zaman ölçeği T_1 den yavaş iken, T_1 zaman ölçeği de T_0 dan daha yavaştır. Genel olarak T_n, T_{n-1} den daha yavaştır. Bu nedenle şunu yazabiliriz:

$$x(t; \varepsilon) = \tilde{x}(T_0, T_1, \dots, T_M; \varepsilon) = \sum_{m=0}^M \varepsilon^m x_m(T_0, T_1, \dots, T_M) + O(\varepsilon T_M) \quad (1.1.16)$$

(1.1.16) 'daki açılım t nin $O(\varepsilon^{-M})$ 'ye kadar olan değerleri için geçerlidir. Bu zamanların ötesinde açılımı düzgün olarak geçerli kılmak için diğer zaman ölçeklerini kullanmak zorundayız. (1.1.15) ve (1.1.16) denklemleri problemin adi diferansiyel denklemden kısmi türevli diferansiyel denkleme dönüştürüldüğünü gösteriyor. Eğer orijinal problem kısmi türevli diferansiyel denklem ise farklı zaman ölçeklerine uygulanışı bağımsız değişkenlerin sayısını artıracaktır. Zincir kuralı kullanılarak zamana göre türev aşağıdaki gibi alınır:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (1.1.17)$$

(1.1.17) 'den (1.1.15) 'e kadar olan denklemler çoklu ölçekler yönteminin çoklu-değişken halini formüle eder. Bu yöntem Sturrock (1957,1963), Frieman (1963), Nayfeh (1965, 1968) ve Sandri (1965, 1967) tarafından geliştirilmiştir. (1.1.16) ve (1.1.17) denklemleri düzgün olarak geçerli açılımın bağlı değişkenler kadar türevlerinin de küçük ε parametresinin kuvvetlerine açılmasıyla elde edildiğini gösteriyor. Bu nedenle Sturrock ve Nayfeh bu tekniği türev-açılım metodu olarak isimlendirmişlerdir.

(1.1.16) ve (1.1.17) 'yi (1.1.1) 'de koyar ve ε 'nun benzer kuvvetlerinin katsayılarını eşitlersek, $x_0, x_1, \dots, x_M$ 'i belirlemek için denklemler elde ederiz. Bu denklemlerin çözümleri $T_1, T_2, \dots, T_M$ zaman ölçeklerinin keyfi fonksiyonlarını içerirler. Bu fonksiyonları belirlemek için ek şartlara gerek vardır. Eğer (1.1.16) ε^{-M} kadar büyük zamanlar için geçerli ise, $\varepsilon^m x_m$ $\varepsilon^{m-1} x_{m-1}$ 'e küçük bir düzeltme yapılmalıdır ki bu $\varepsilon^{m-1} x_{m-1}$ $\varepsilon^{m-2} x_{m-2}$ için de geçerli olmalıdır. bu nedenle aşağıdaki ifadeyi gerçeklemek zorundayız.

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} < \infty \quad \forall T_0, T_1, \dots, T_M \quad \text{için}$$

Bu koşul her bir x_m 'in sınırlı olduğunu göstermez. Gerçekte her bir x_m sınırsız olabilir. Bununla birlikte bu koşul daha yüksek yaklaşımların ilk terimden daha singüler olmamasını gerektirir. Bu koşul seküler terimlerin yok edilmesine eşittir.

1.2 Normal Form Analizi [2]

Modern dallanma teorisinde ilk adımı normal form analizi oluşturur. Bu analiz düzgün lineer olmayan koordinat değişimlerini içerip, orijinal dinamik sistemin basitleştirilmesini sağlar. Pratik olarak burada amaç, dallanma noktasında vektör alanının Taylor açılımında görülen lineer olmayan terimlerin mümkün olduğu kadar çoğunu yok edici bir dönüşüm bulmaktır.

Normal formlar Poincaré tarafından ortaya atılmış, Siegel, Takens, Bogdanov ve Brjuno tarafından geliştirilmiştir. Brjuno normal form analizi en genel yapıya sahiptir. Burada 4. mertebe normal form denklemleri için katsayılar incelenecektir.

Dinamik sistemin otonom, vektör alanının lineer kısmının Jordan formunda olduğunu ve kuadratik terimlerle başladığını kabul ediyoruz:

$$\dot{x}_v = \lambda_v x_v + \sum a_{jh}^v x_j x_h + \sum b_{jkh}^v x_j x_h x_k \quad (1.2.1)$$

Burada a_{jh}^v ve b_{jkh}^v katsayıları genellikle bir şey kaybetmeden j, h ve k indislerine göre tam simetrik alınmıştır ($v, j, h, k=1,2,\dots,n$). Brjuno'nun temel teoremine göre tersi olan (tek değerli olmayabilir ve bazı durumlarda ıraksayabilir) genelde kompleks katsayılı bir normalize dönüşüm var olup aşağıda verilen yapıdadır:

$$x_v = y_v + \sum \alpha_{lm}^v y_l y_m + \sum \beta_{lmp}^v y_l y_m y_p + \sum \gamma_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r \quad (1.2.2)$$

Burada da aynı şekilde α_{lm}^v ve β_{lmp}^v katsayıları l, m ve p indislerine göre tam simetriktir ($v, l, m, p=1,\dots,n$). (1.2.2) normalize dönüşümü orijinal sistem (1.2.1)'i normal forma indirger:

$$\dot{y}_v = \lambda_v y_v + y_v \sum_{(\Lambda, Q)=0} g_v Q y_1^{q_1} \dots y_n^{q_n} \quad (1.2.3)$$

Burada $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ ve $Q = (q_1, \dots, q_n)^T$ vektörleri olup rezonans denklemi aşağıda verilmiştir.

$$(\Lambda, Q) = q_1 \lambda_1 + \dots + q_n \lambda_n = 0 \quad (1.2.4)$$

Normal form denklemleri (1.2.3) 'te g_{vQ} normal formun katsayılarını temsil etmekte olup, Q vektörünün elemanları ise tam sayılardır ve aşağıdaki ilişkileri sağlar:

$$q_{ij}^v \geq 0 \quad (i \neq j), \quad q_v \geq -1, \quad \sum_{j=1}^n q_{ij}^v \geq 1 \quad (1.2.5)$$

Normal form denklemleri 5. mertebe lineer olmayan terimlere kadar simetrik katsayılarla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\dot{y}_v = \lambda_v y_v + \sum \varphi_{lm}^v y_l y_m + \sum \kappa_{lmp}^v y_l y_m y_p + \sum \Omega_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r \quad (1.2.6)$$

(1.2.2) ile verilen normalize dönüşümü (1.2.1) 'de yerine koyup, çıkan formel özdeşlikte (1.2.6) 'yı kullanıp, 4. mertebeden yüksek terimleri elimine edersek aşağıdaki özdeşliği buluruz:

$$\begin{aligned} & \sum \varphi_{lm}^v y_l y_m + \sum \kappa_{lmp}^v y_l y_m y_p + \sum \Omega_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r + \sum \alpha_{lm}^v (\lambda_l - \lambda_m - \lambda_v) y_l y_m \\ & + \sum \beta_{lmp}^v (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_v) y_l y_m y_p + \sum \gamma_{lmpr}^v (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r - \lambda_v) y_l y_m y_p y_r \\ & + 2 \sum \alpha_{lm}^v \varphi_{st}^1 y_s y_t y_m + 2 \sum \alpha_{lm}^v \kappa_{stp}^1 y_s y_t y_p y_m + 3 \sum \beta_{lmp}^v \varphi_{st}^1 y_m y_p y_s y_t \\ & = \sum a_{jh}^v y_j y_h + \sum b_{jkh}^v y_j y_h y_k + 2 \sum a_{jh}^v \alpha_{lm}^h y_l y_m y_j \\ & + 2 \sum a_{jh}^v \beta_{lmp}^h y_l y_m y_p y_j + \sum a_{jh}^v \alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h y_l y_m y_p y_r \\ & + 3 \sum b_{jkh}^v \alpha_{lm}^h y_l y_m y_j y_k \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

(1.2.7)'yi simetrikleştirirsek ve yazma kolaylığı açısından toplam işaretlerini düşersek (tekerarlanan indisler üzerinde toplam yapılmaktadır) aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} & \varphi_{lm}^v y_l y_m + \kappa_{lmp}^v y_l y_m y_p + \Omega_{lmpr}^v y_l y_m y_p y_r + \alpha_{lm}^v (\lambda_l + \lambda_m - \lambda_v) y_l y_m \\ & + \beta_{lmp}^v (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_v) y_l y_m y_p + \gamma_{lmpr}^v (\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r - \lambda_v) y_l y_m y_p y_r \\ & + \frac{2}{3} (\alpha_{jm}^v \varphi_{pl}^j + \alpha_{jl}^v \varphi_{mp}^j + \alpha_{jp}^v \varphi_{lm}^j) y_l y_m y_p + \frac{1}{2} (\alpha_{jm}^v \kappa_{prl}^j + \alpha_{jp}^v \kappa_{rlm}^j + \alpha_{jr}^v \kappa_{lmp}^j \\ & + \alpha_{jl}^v \kappa_{mpr}^j) y_l y_m y_p y_r + \frac{1}{2} (\beta_{jmp}^v \varphi_{rl}^j + \beta_{jpr}^v \varphi_{lm}^j + \beta_{jrl}^v \varphi_{mp}^j + \beta_{jlp}^v \varphi_{mr}^j \\ & + \beta_{jmr}^v \varphi_{lp}^j) y_l y_m y_p y_r = a_{lm}^v y_l y_m + b_{lmp}^v y_l y_m y_p + \frac{2}{3} (a_{jp}^v \alpha_{lm}^j + a_{jl}^v \alpha_{mp}^j \\ & + a_{jm}^v \alpha_{pl}^j) y_l y_m y_p + \frac{1}{2} (a_{jr}^v \beta_{lmp}^j + a_{jl}^v \beta_{mpr}^j + a_{jm}^v \beta_{prl}^j + a_{jp}^v \beta_{rlm}^j) y_l y_m y_p y_r \\ & + \frac{1}{6} a_{jh}^v (\alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h + \alpha_{mp}^j \alpha_{rl}^h + \alpha_{pr}^j \alpha_{lm}^h + \alpha_{rl}^j \alpha_{mp}^h + \alpha_{lp}^j \alpha_{mr}^h + \alpha_{mr}^j \alpha_{lp}^h) y_l y_m y_p y_r \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(b_{jpr}^v\alpha_{lm}^j+b_{jrl}^v\alpha_{mp}^j+b_{jlm}^v\alpha_{pr}^j+b_{jmp}^v\alpha_{rl}^j+b_{jlp}^v\alpha_{mr}^j+b_{jmr}^v\alpha_{lp}^j)y_ly_my_p y_r \quad (1.2.8)$$

Aşağıdaki sembolleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \Delta_{lm}^v &= \begin{cases} 1, & \lambda_v = \lambda_l + \lambda_m \text{ ise} \\ 0, & \lambda_v \neq \lambda_l + \lambda_m \text{ ise} \end{cases} \\ \Delta_{lmp}^v &= \begin{cases} 1, & \lambda_v = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p \text{ ise} \\ 0, & \lambda_v \neq \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p \text{ ise} \end{cases} \\ \Delta_{lmpr}^v &= \begin{cases} 1, & \lambda_v = \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r \text{ ise} \\ 0, & \lambda_v \neq \lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r \text{ ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

v, l, m, p ve r 'nin aldığı değerler öyle olsun ki (1.2.8) özdeşliğinin sol tarafındaki 4., 5. ve 6. terimlerdeki parantez içindeki ifadeler sıfırdan farklı olsun ($\Delta_{lm}^v = 0$, $\Delta_{lmp}^v = 0$, $\Delta_{lmpr}^v = 0$). Bu durumda özdeşliğin sol tarafındaki ilk üç terim sıfır olur, çünkü bu terimler üzerindeki toplam, sadece rezonant denklemi olan (1.2.4)'ü sağlayan terimleri içerecek şekilde seçilmiştir. Bu noktayı biraz daha açalım, (1.2.3)'den görüleceği gibi bu özdeşlikteki ilk terim $y_v \phi_{lm}^v y_l y_m y_v^{-1}$ şeklinde olup, rezonans denklemi yukarıdaki sözkonusu edilen koşulda sağlanmaz $(\Lambda, Q) = \lambda_l(1) + \lambda_m(1) + \lambda_v(-1) \neq 0$. Aynı şekilde ikinci ve üçüncü terimin de bu koşul altında sıfıra eşit olacağı gösterilebilir. (1.2.8) eşitliğinin sol ve sağ tarafında ikinci, üçüncü ve dördüncü mertebe terimler karşılaştırılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\alpha_{lm}^v = \frac{a_{lm}^v}{\lambda_l + \lambda_m - \lambda_v} \quad (1.2.10)$$

$$\beta_{lmp}^v = \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p - \lambda_v} \left\{ b_{lmp}^v + \frac{2}{3} \left[a_{jpr}^v \alpha_{lm}^j + a_{jrl}^v \alpha_{mp}^j + a_{jlm}^v \alpha_{pr}^j - \alpha_{jlm}^v \phi_{prl}^j - \alpha_{jrl}^v \phi_{mp}^j - \alpha_{jpr}^v \phi_{lm}^j \right] \right\} \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{lmpr}^v &= \frac{1}{\lambda_l + \lambda_m + \lambda_p + \lambda_r - \lambda_v} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(a_{jpr}^v \beta_{lmp}^j + a_{jrl}^v \beta_{mpr}^j + a_{jlm}^v \beta_{prl}^j + a_{jlp}^v \beta_{rlm}^j \right) \right. \right. \\ &\quad + \left(b_{jpr}^v \alpha_{lm}^j + b_{jrl}^v \alpha_{mp}^j + b_{jmp}^v \alpha_{lr}^j + b_{jmp}^v \alpha_{rl}^j + b_{jlp}^v \alpha_{mr}^j + b_{jmr}^v \alpha_{lp}^j \right) \\ &\quad - \left(\alpha_{jlm}^v \kappa_{prl}^j + \alpha_{jpr}^v \kappa_{rlm}^j + \alpha_{jrl}^v \kappa_{lmp}^j + \alpha_{jrl}^v \kappa_{mpr}^j \right) - \left(\beta_{jmp}^v \phi_{rl}^j + \beta_{jpr}^v \phi_{lm}^j + \beta_{jrl}^v \phi_{mp}^j \right. \\ &\quad + \left. \beta_{jlm}^v \phi_{pr}^j + \beta_{jlp}^v \phi_{mr}^j + \beta_{jmr}^v \phi_{lp}^j \right) \left. + \frac{1}{6} a_{jh}^v (\alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h + \alpha_{mp}^j \alpha_{rl}^h + \alpha_{pr}^j \alpha_{lm}^h \right. \right. \\ &\quad + \left. \alpha_{rl}^j \alpha_{mp}^h + \alpha_{lp}^j \alpha_{mr}^h + \alpha_{mr}^j \alpha_{lp}^h) \right\} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Böylece normalize dönüşüm (1.2.2)'nin katsayılarını bulmuş olduk. Normal form analizinin en önemli özelliği $\Delta_{lm}^v = 1$ olduğunda α_{lm}^v , $\Delta_{lmp}^v = 1$ olduğunda β_{lmp}^v ve $\Delta_{lmp}^v = 1$ olduğunda γ_{lmp}^v katsayılarının keyfi olarak seçilebilmesidir. Çünkü daima istenmeyen rezonant olmıyan terimler daha yüksek mertebeden terimler içine katılabilir. Bu durumu aşağıda inceleyeceğiz.

v, l, m, p ve r 'nin aldığı değerler öyle olsun ki (1.2.8) özdeşliğinin sol tarafındaki 4., 5. ve 6. terimlerdeki parantez içindeki ifadeler sıfıra eşit olsun ($\Delta_{lm}^v = 1$, $\Delta_{lmp}^v = 1$, $\Delta_{lmp}^v = 1$). Bu varsayım rezonans denkleminin sağlandığını söyler. Bu durumda (1.2.8) özdeşliğinin sol ve sağ tarafındaki aynı mertebeden terimler karşılaştırılarak, normal form denkleminde görülecek olan lineer olmayan terimlerin katsayılarını bulabiliriz:

$$\varphi_{lm}^v = \Delta_{lm}^v a_{lm}^v \quad (1.2.13)$$

$$\kappa_{lmp}^v = \Delta_{lmp}^v \left\{ b_{lmp}^v + \frac{2}{3} \left[a_{jp}^v \alpha_{lm}^j + a_{jl}^v \alpha_{mp}^j + a_{jm}^v \alpha_{pl}^j - \alpha_{jm}^v \varphi_{pl}^j - \alpha_{jl}^v \varphi_{mp}^j - \alpha_{jp}^v \varphi_{lm}^j \right] \right\} \quad (1.2.14)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{lmp}^v = \Delta_{lmp}^v \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(a_{jr}^v \beta_{lmp}^j + a_{jl}^v \beta_{mpr}^j + a_{jm}^v \beta_{prl}^j + a_{jp}^v \beta_{rlm}^j \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \left(b_{jpr}^v \alpha_{lm}^j + b_{jrl}^v \alpha_{mp}^j + b_{jlm}^v \alpha_{pr}^j + b_{jlp}^v \alpha_{mr}^j + b_{jmr}^v \alpha_{lp}^j \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\alpha_{jm}^v \kappa_{prl}^j + \alpha_{jp}^v \kappa_{rlm}^j + \alpha_{jr}^v \kappa_{lmp}^j + \alpha_{jl}^v \kappa_{mpr}^j \right) - \left(\beta_{jmp}^v \varphi_{rl}^j + \beta_{jpr}^v \varphi_{lm}^j + \beta_{jrl}^v \varphi_{mp}^j \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_{jlm}^v \varphi_{pr}^j + \beta_{jlp}^v \varphi_{mr}^j + \beta_{jmr}^v \varphi_{lp}^j \right) \right] + \frac{1}{6} a_{jh}^v \left(\alpha_{lm}^j \alpha_{pr}^h + \alpha_{mp}^j \alpha_{rl}^h + \alpha_{pr}^j \alpha_{lm}^h \right. \\ \left. + \alpha_{rl}^j \alpha_{mp}^h + \alpha_{lp}^j \alpha_{mr}^h + \alpha_{mr}^j \alpha_{lp}^h \right) \left. \right\} \quad (1.2.15) \end{aligned}$$

Şimdi orijinal sistem (1.2.1)'de dallanma parametresini içeren terimin var olduğunu kabul ederek normal form denkleminde katkısını inceleyeceğiz. Orijinal sistemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\dot{x} = L_0 x + L_\xi x + f(x) \quad (1.2.16)$$

Burada L_0 dallanma parametresini içermeyen matrisi, L_ξ içeren matrisi ve $f(x)$ lineer olmayan terimleri temsil ediyor. Aradığımız dönüşüm lineer olmayan terimlerde değişiklik yapmayacak karakterde olmalıdır. Çünkü bu terimlerin normal form analizi yukarıda yapılmıştır. Ayrıca bu dönüşüm normal form denkleminde diyagonalda görülen lineer terimler vermeli ki elde edilecek normal form denklemleri basit bir

yapıya sahip olsun. (2.1.2) ile verilen normalize dönüşüme bir lineer dönüşüm ekleyip yazalım:

$$x = y + \varphi(y) + G(\xi)y \quad (1.2.17)$$

Burada $\varphi(y)$ lineer olmayan terimleri göstermekte olup, $G(\xi) = O(\xi)$ mertebesinde. (1.2.17) ile verilen dönüşüm sistemi (1.2.16) da kullanıldığında normal form denklemlerinin lineer olmayan kısmını değiştirmeyecektir. Çünkü yeni terimler $O(\xi|y|^n)$ mertebesinde, orijinal terimler ise $O(|y|^n)$ mertebesinde, bu nedenle yeni terimler orijinal terimlerle karşılaştırıldığında ihmal edilebilir. Lineer tasvir, lineer $O(\xi|y|)$ mertebesindeki terimlere katkıyı sağlayacaktır. (1.2.16) ve (1.2.17) nin sadece lineer kısımlarını alıp, (1.2.17) yi (1.2.16) da kullanıp normal formda görülecek terimlerin diyagonalde olma koşulunu getirip, sadece $O(\xi|y|)$ mertebesindeki terimleri tutarsak aşağıdaki ilişki bulunur:

$$L'_\xi = L_0 G - G L_0 + L_\xi \quad (1.2.18)$$

L'_ξ matrisi bir anlamda normal form denkleminde pertürbasyon matrisi rolünü oynamaktadır:

$$\dot{y} = L_0 y + L'_\xi y + g(y) \quad (1.2.19)$$

Burada ilk terim $O(|y|)$ mertebesinde, ikinci terim $O(\xi|y|)$ mertebesinde ve son terim $O(|y|^n)$ mertebesinde.

1.3.Ortalama Alma Yöntemi [3]

Orijinal sistem şu şekilde olsun:

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon \tilde{f}_0(\tilde{x}, t) + \varepsilon^2 \tilde{g}(\tilde{x}, t) \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.3.1)$$

Ortalaması alınmış sistem ise

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon \tilde{f}_0(\tilde{x}) + O(\varepsilon^2) \quad (1.3.2)$$

olsun. Burada $\underline{f}_0(\underline{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T f(\underline{x}, t) dt$ 'dır. (1.3.1)'den (1.3.2)'ye geçiş, "düzgün bir özdeşliğe yakın dönüşüm vardır" lemması ile olur.

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\dot{y}} + \varepsilon \underline{D} \underline{u}(\underline{y}, t) \quad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R} \quad (1.3.3)$$

$\underline{u}$ 'yu dönüşümü tam olarak gerçekleştirerek seçeceğiz. (1.3.3) ifadesinin t 'ye göre türevini alıp (zincir kuralını kullanarak) (1.3.1) 'de yerine yazarsak dönüşüm sistemini elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{\dot{y}} + \varepsilon \underline{D} \underline{u}(\underline{y}, t) + \varepsilon \underline{\dot{u}} \\ \underline{\dot{y}} + \varepsilon \underline{D} \underline{u}(\underline{y}, t) &= \varepsilon \underline{f}(\underline{y} + \varepsilon \underline{u}, t) + \varepsilon^2 \underline{g}(\underline{y} + \varepsilon \underline{u}, t) - \varepsilon \underline{\dot{u}}(\underline{y}, t) \\ \left[\underline{I} + \varepsilon \underline{D} \underline{u} \right] \underline{\dot{y}} &= \varepsilon \underline{f}(\underline{y} + \varepsilon \underline{u}, t) + \varepsilon^2 \underline{g}(\underline{y} + \varepsilon \underline{u}, t) - \varepsilon \underline{\dot{u}}(\underline{y}, t) \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Burada $\underline{D} \underline{u}$ kısmi türevler $(\partial u_i / \partial y_i)$ matrisini göstermektedir. (1.3.4) ifadesinin sağ tarafını $\underline{y}$ civarında Taylor serisine açarsak,

$$\left[\underline{I} + \varepsilon \underline{D} \underline{u} \right] \underline{\dot{y}} = \varepsilon \left[\underline{f}(\underline{y}, t) - \underline{\dot{u}}(\underline{y}, t) \right] + \varepsilon^2 \left[\underline{D} \underline{f}(\underline{y}, t) \underline{u}(\underline{y}, t) + \underline{g}(\underline{y}, t) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (1.3.5)$$

elde ederiz. Buradaki $\underline{f}$ fonksiyonu ortalama $(\underline{f}_0(\underline{y}))$ ve salıncı $(\tilde{f}(\underline{y}, t))$ kısım olarak ikiye ayrılabilir.

$$\underline{f}(\underline{y}, t) = \underline{f}_0(\underline{y}) + \tilde{f}(\underline{y}, t)$$

Eğer $\underline{u}(\underline{y}, t) = \tilde{u}(\underline{y}, t)$ şeklinde seçilirse, (1.3.5) denkleminin sağ tarafının $O(\varepsilon)$ kısmı basitçe $\varepsilon \underline{f}_0(\underline{y})$ şeklini alır. Sonunda $\underline{I} + \varepsilon \underline{D} \underline{u}$ operatörünün tersi ile (1.3.5)'in her iki tarafı çarpılırsa

$$\underline{\dot{y}} = \varepsilon \underline{f}_0(\underline{y}) + \varepsilon^2 \left[\underline{D} \tilde{f}(\underline{y}, t) \underline{u}(\underline{y}, t) - \underline{D} \underline{u}(\underline{y}, t) \underline{f}_0(\underline{y}) + \underline{g}(\underline{y}, t) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (1.3.6)$$

elde edilir. Eğer $\tilde{f}(\underline{y}, t)$ t 'ye göre Fourier serisine açılır ise $\tilde{f}(\underline{y}, t)$ ve buradan $\underline{u}(\underline{y}, t)$ kolayca hesaplanabilir.

Genellikle $\underline{u}$ ve buradan $\underline{D}\underline{u}$ sıfır ortalamalı seçilir. Böylece (1.3.6) 'daki sıfır olmayan ortalanmış terimler $\underline{D}\tilde{f}(\underline{y}, t) \underline{u}(\underline{y}, t) + \underline{g}(\underline{y}, t)$ olur.

Buradan bu terimlere, ikinci derece ortalaması alınmış sistem elde etmek için, ikinci bir $\underline{y} = \underline{z} + \varepsilon^2 \underline{v}(\underline{z}, t)$ dönüşümü uygulanarak ortalama alınır. Böylece ortalaması alınmış sistem şu halde bulunur:

$$\dot{\underline{z}} = \varepsilon \underline{f}_0(\underline{z}) + \varepsilon^2 \left(\underline{g}_0(\underline{z}) + \left[\underline{D}\tilde{f}(\underline{z}, t) \underline{u}(\underline{z}, t) \right]_0 \right) \quad (1.3.7)$$

Buradaki $[\cdot]_0$, zamana göre ortalaması alınmış olduğunu ve $O(\varepsilon^3)$ terimlerinin ihmal edildiğini gösterir.

BÖLÜM 2. HELMHOLTZ SALINICISI DENGİ NOKTALARININ DALLANMASI

Tek serbestlik dereceli, sönümlü zorlamalı ve kuadratik nonlinear terim içeren Helmholtz salınıcı denklemi kulak zarı titreşiminin modellenmesinde kullanılır. Aynı zamanda katastrof teorisinde de karşımıza çıkar [4].

Burada Helmholtz salınıcısının denge noktası (0,0) civarında dallanma analizi için, önceki bölümde kısaca tanıtılan, üç farklı yöntemi uygulayarak modal denklemleri elde edeceğiz.

2.1.Çoklu Ölçekler Yöntemi İle İnceleme

İncelemeler rezonans durumlarına göre ayrı ayrı yapılacaktır. İlk önce birincil veya asal rezonans olarak adlandırılan durum dikkate alınacak, bunu ikincil rezonans durumu olan altharmonik ve üstharmonik rezonanslar takip edecektir. Her durumda güçlü ve buna göre daha zayıf zorlama durumları incenecektir. Helmholtz denklemi

$$\ddot{x} + \bar{g} \dot{x} + x + x^2 = \bar{A} \cos \Omega t \quad (2.1.1)$$

olarak verilir. Fakat daha genel bir inceleme yapmak bakımından x in katsayısı olarak ω_0^2 , x^2 nin katsayısı $\bar{\alpha}$ sabitlerini kullanılacaktır.

2.1.1.Asal Rezonans, $\Omega \approx \omega_0$

Bu rezonans durumu zorlama frekansının doğal frekansa hemen hemen eşit olduğu durumdur. Ω zorlama frekansını bir parametre olarak kullanmak yerine, nicel olarak Ω nın ω_0 'a yakınlığını tanımlayan bir σ kayıklık parametresi düşüneceğiz. Bunun üstünlüğü seküler ve hemen hemen seküler terimlere götürecek terimleri tanımamızı sağlamasıdır[5]. Buna göre $\sigma = O(1)$ olmak üzere

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (2.1.2)$$

yazarız. Lineer sönümsüz teori, zorlama ne kadar küçük olursa olsun $\sigma = 0$ iken sınırsız salınım olacağını ileri sürer [5]. Gerçek sistemde, bu büyük salınımlar sönüm ve nonlineerlik ile sınırlandırılmışlardır. Bu yüzden, bu problemin düzgün geçerli bir yaklaşık çözümünü elde etmek için zorlamayı, sönüm ve nonlineerlik ortaya çıktığı zaman görünecek şekilde ölçeklemek durumundayız. Bunun için

$$\bar{A} = \varepsilon A, \bar{g} = \varepsilon g, \bar{\alpha} = \varepsilon \alpha$$

eşitliklerini kullanırız. Bu terimlerin ölçeklendirilmesi, yavaş sönümlü bir sistemde küçük bir genlik görelî olarak büyük bir genlik üretir [5], fikri ile tutarlıdır. Bu ölçeklendirmeden sonra (2.1.1), denklemi (2.1.2) 'yi de kullanırsak şu hale gelir:

$$\ddot{x} + \varepsilon g \dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \alpha x^2 = \varepsilon A \cos(\omega_0 + \varepsilon\sigma)t \quad (2.1.3)$$

Şimdi çoklu ölçekler yöntemini uygulayalım. Buna göre çözüm farklı zaman ölçekleri cinsinden ifade edilecektir:

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.1.4)$$

Burada $T_0 = \varepsilon^0 t = t$, $T_1 = \varepsilon t$ dir. Buradan $\Omega t = \omega_0 t + \sigma \varepsilon t$ olur ki bu

$$\Omega T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_1$$

şeklini alır. Şimdi (2.1.4) ifadesini türetilim:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x_0}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial x_0}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \varepsilon \left(\frac{\partial x_0}{\partial T_1} + \frac{\partial x_1}{\partial T_0} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{dT_0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} \frac{dT_1}{dt} \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} \frac{dT_0}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} \frac{dT_0}{dt} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} \right) + \varepsilon^2 \left(2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} \right) + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial T_i} = D_i$ ve $\frac{\partial^2}{\partial T_i \partial T_j} = D_i D_j$ notasyonlarını kullanırsak,

$$\frac{dx}{dt} = D_0 x_0 + \varepsilon(D_1 x_0 + D_0 x_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.1.5)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = D_0^2 x_0 + \varepsilon(2D_0 D_1 x_0 + D_0^2 x_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.1.6)$$

olur. (2.1.5) ve (2.1.6) 'yı (2.1.3) 'te kullanıp $O(\varepsilon^2)$ 'yi ihmal ederek ε^0 ve ε nun katsayılarını sıfıra eşitleyelim:

$$D_0^2 x_0 + \varepsilon(2D_0 D_1 x_0 + D_0^2 x_1) + \varepsilon g D_0 x_0 + \varepsilon^2 g(D_1 x_0 + D_0 x_1) + \omega_0^2(x_0 + \varepsilon x_1) + \varepsilon \alpha(x_0 + \varepsilon x_1)^2 = \varepsilon A \cos(\omega_0 T_0 + \omega_1 T_1)$$

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (2.1.7)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - g D_0 x_0 - \alpha x_0^2 + A \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (2.1.8)$$

(2.1.7) nin genel çözümü :

$$x_0 = K(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{K}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.1.9)$$

(2.1.9) 'un türevlerini alıp (2.1.8) 'de kullanalım:

$$\begin{aligned} D_0 x_0 &= i\omega_0(K e^{i\omega_0 T_0} - \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0}) \\ D_0 D_1 x_0 &= i\omega_0(K' e^{i\omega_0 T_0} - \bar{K}' e^{-i\omega_0 T_0}) \\ D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2i\omega_0 K' e^{i\omega_0 T_0} + 2i\omega_0 \bar{K}' e^{-i\omega_0 T_0} - g i\omega_0 K e^{i\omega_0 T_0} \\ &\quad + g i\omega_0 \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0} - \alpha(K e^{i\omega_0 T_0} + \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0})^2 + A \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \\ &= i\omega_0 e^{i\omega_0 T_0} (-2K' - gK) + i\omega_0 e^{-i\omega_0 T_0} (2\bar{K}' + g\bar{K}) \\ &\quad - \alpha K^2 e^{2i\omega_0 T_0} - 2K\bar{K}\alpha - \alpha \bar{K}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} \\ &\quad + \frac{A}{2}(e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + e^{-i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)}) \\ D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= i\omega_0 e^{i\omega_0 T_0} (-2K' - gK) - \alpha K^2 e^{2i\omega_0 T_0} - 2K\bar{K}\alpha \\ &\quad + \frac{A}{2} e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} + k.e. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

(2.1.10) 'daki k.e. görünen kompleks terimlerin eşleniklerini ifade etmektedir. Ayrıca kosinüs ifadesi üstel olarak yazılmıştır. (2.1.10) 'un çözümünde seküler terimlerin görünmesine sebep olan terimleri yok etmemiz gerekiyor. Çünkü bu terimler periyodikliği bozan terimlerdir. Buradan şu ifade yazılır:

$$i\omega_0 e^{i\omega_0 T_0} (-2K' - gK) + \frac{A}{2} e^{i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)} = 0$$

$$2i\omega_0 K' + g i\omega_0 K - \frac{A}{2} e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.1.11)$$

(2.1.11) 'da K 'yı aşağıdaki gibi kutupsal formda yazalım:

$$K = \frac{1}{2} a e^{i\beta} \quad (2.1.12)$$

Burada a ve β reeldirler. (2.1.12) ifadesini türetip (2.1.11) da kullanalım:

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{2} a' e^{i\beta} + \frac{1}{2} a i\beta' e^{i\beta} & \bar{K} &= \frac{1}{2} a e^{-i\beta} \\ i\omega_0 a' - \omega_0 a\beta' + \frac{g}{2} i\omega_0 a - \frac{A}{2} e^{i(\sigma T_1 - \beta)} &= 0 \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede yer alan üstel terimi trigonometrik formda yazıp ifadenin reel ve imajiner kısımlarını ayırırsak şu denklemleri elde ederiz:

$$i\omega_0 a' - \omega_0 a\beta' + \frac{g}{2} i\omega_0 a - \frac{A}{2} (\cos(\sigma T_1 - \beta) + i \sin(\sigma T_1 - \beta)) = 0$$

$$a' = \frac{A}{2\omega_0} \sin(\sigma T_1 - \beta) - \frac{g}{2} a \quad (2.1.13)$$

$$a\beta' = -\frac{A}{2\omega_0} \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.1.14)$$

(2.1.13) ve (2.1.14) 'de

$$\gamma = \sigma T_1 - \beta \quad (2.1.15)$$

dönüşümü yapıldığında

$$a' = -\frac{g}{2} a + \frac{A}{2\omega_0} \sin \gamma \quad (2.1.16)$$

$$a\gamma' = a\sigma + \frac{A}{2\omega_0} \cos \gamma \quad (2.1.17)$$

sistemine varılır.

Şimdi sönümü ve zorlamayı $O(\epsilon^2)$, nonlineerliği $O(\epsilon)$ olarak ölçeklendirip daha yavaş sönüm ve daha zayıf zorlamaya karşılık asal rezonans incelemesi

yapacağız. Bu durumda zorlama zayıf olduğundan zorlama frekansı (Ω) ile doğal frekans (ω_0) arasındaki fark küçülecektir.

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon^2 \sigma \quad (2.1.18)$$

Yeni ölçeklendirme ile (2.1.18) 'yi kullanırsak (2.1.1) şu hale gelir:

$$\ddot{x} + \varepsilon^2 g \dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon \alpha x^2 = \varepsilon^2 A \cos(\omega_0 t + \varepsilon^2 \sigma t) \quad (2.1.19)$$

(2.1.19) ifadesinde ε^2 olduğundan zaman ölçeklerini de bu dereceye kadar kullanacağız. Böylece $T_m = \varepsilon^m t$ olmak üzere araştırılan çözümün açılımı şu şekilde olacaktır:

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \quad (2.1.20)$$

$T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$ olduğuna göre (2.1.20) 'u türetelim:

$$\frac{dx}{dt} = D_0 x_0 + \varepsilon(D_1 x_0 + D_0 x_1) + \varepsilon^2(D_2 x_0 + D_1 x_1 + D_0 x_2) + O(\varepsilon^3) \quad (2.1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} = & D_0^2 x_0 + \varepsilon(D_0 D_1 x_0 + D_0^2 x_1 + D_0 D_1 x_0) \\ & + \varepsilon^2(2D_0 D_2 x_0 + 2D_0 D_1 x_1 + D_1^2 x_0 + D_0^2 x_2) + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

(2.1.21) ve (2.1.22) ifadelerini (2.1.19) 'de kullanıp ε nun eşit kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlersek:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_0 + \varepsilon(D_0 D_1 x_0 + D_0^2 x_1 + D_0 D_1 x_0) + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 x_0 \\ + \varepsilon^2(2D_0 D_1 x_1 + D_1^2 x_0 + D_0^2 x_2) + \varepsilon^2 g D_0 x_0 + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon \omega_0^2 x_1 \\ + \varepsilon^2 \omega_0^2 x_2 + \varepsilon \alpha (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2)^2 = \varepsilon^2 A \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_2) \end{aligned}$$

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (2.1.23)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \alpha x_0^2 \quad (2.1.24)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_2 = & -2D_0 D_2 x_0 - 2D_0 D_1 x_1 - D_1^2 x_0 - g D_0 x_0 - 2\alpha x_1 x_0 \\ & + A \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_2) \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

olur. (2.1.23) 'nin genel çözümü:

$$x_0 = K(T_1, T_2) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{K}(T_1, T_2) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.1.26)$$

şeklinde. (2.1.26) 'i kullanarak (2.1.24) diferansiyel denklemini yeniden yazalım:

$$\begin{aligned}
 D_0 x_0 &= i\omega_0 (K e^{i\omega_0 T_0} - \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0}) \\
 D_1 x_0 &= D_1 K e^{i\omega_0 T_0} + D_1 \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0} \\
 D_0 D_2 x_0 &= i\omega_0 (D_2 K e^{i\omega_0 T_0} - D_2 \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0}) \\
 D_0 D_1 x_0 &= i\omega_0 (D_1 K e^{i\omega_0 T_0} - D_1 \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0}) \\
 D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2i\omega_0 D_1 K e^{i\omega_0 T_0} - \alpha(2K\bar{K} + K^2 e^{2i\omega_0 T_0}) \\
 &\quad - \alpha\bar{K}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} + 2i\omega_0 D_1 \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0} \\
 D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -2i\omega_0 D_1 K e^{i\omega_0 T_0} - \alpha(2K\bar{K} + K^2 e^{2i\omega_0 T_0}) + \text{k.e.} \quad (2.1.27)
 \end{aligned}$$

(2.1.27) 'nın her özel çözümü $T_0 e^{i\omega_0 T_0}$ faktörünü içeren seküler terim üretir. $D_1 K=0$ olursa bunu engellemiş oluruz. Buradan , K T_1 den bağımsızdır, sonucu çıkar $K=K(T_2)$). Böylece (2.1.27) 'nın özel çözümü:

$$x_1 = \frac{\alpha}{3\omega_0^2} K^2 e^{2i\omega_0 T_0} - \frac{2\alpha}{\omega_0^2} K\bar{K} + \frac{\alpha}{3\omega_0^2} \bar{K}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} \quad (2.1.28)$$

olarak elde edilir. (2.1.26) ve (2.21.28) 'yi kullanarak (2.25) 'yi tekrar yazalım:

$$\begin{aligned}
 D_0 x_1 &= \frac{\alpha}{3\omega_0^2} 2i\omega_0 K^2 e^{2i\omega_0 T_0} - \frac{\alpha}{3\omega_0^2} 2i\omega_0 \bar{K}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} \\
 D_0 D_1 x_1 &= 0 \\
 D_0 x_2 + \omega_0^2 x_2 &= i\omega_0 (-2K' e^{i\omega_0 T_0} + 2\bar{K}' e^{-i\omega_0 T_0} - gK e^{i\omega_0 T_0} + g\bar{K} e^{-i\omega_0 T_0}) \\
 &\quad - \frac{2\alpha^2}{\omega_0^2} (K e^{i\omega_0 T_0} + \bar{K} e^{-i\omega_0 T_0}) \left(\frac{K^2}{3} e^{2i\omega_0 T_0} - 2K\bar{K} + \frac{\bar{K}^2}{3} e^{-2i\omega_0 T_0} \right) \\
 &\quad + A \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_2) \quad (2.1.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0 x_2 + \omega_0^2 x_2 &= e^{i\omega_0 T_0} (-gi\omega_0 K - 2i\omega_0 K' + \frac{10\alpha^2}{3\omega_0^2} K^2 \bar{K} + \frac{1}{2} A e^{i\sigma T_2}) \\
 &\quad + \text{k.e.} + \text{std.} \quad (2.1.30)
 \end{aligned}$$

(2.1.30) ifadesindeki std. seküler terim üreten terimlerin dışında kalan terimleri, k.e. ise mevcut kompleks terimlerin eşleniklerini göstermektedir. Yine periyodikliği bozan, çözümde seküler terim üreten terimleri elimine edeceğiz:

$$-gi\omega_0 K - 2i\omega_0 K' + \frac{10\alpha^2}{3\omega_0^2} K^2 \bar{K} + \frac{1}{2} A e^{i\sigma T_2} = 0 \quad (2.1.31)$$

K 'yı (2.1.12) 'deki gibi kutupsal formda yazıp (2.1.31) 'a koyduktan sonra oluşan üstel terimi trigonometrik formda yazarsak (2.1.31) şu hale gelir:

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2}g\omega_0 a + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^2}a^3 + \frac{1}{2}Ae^{i(\sigma T_2 - \beta)} - i\omega_0 a' + a\omega_0 \beta' = 0 \\
& e^{i(\sigma T_2 - \beta)} = \cos(\sigma T_2 - \beta) + i \sin(\sigma T_2 - \beta) \\
& -\frac{i}{2}g\omega_0 a + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^2}a^3 + \frac{1}{2}A \cos(\sigma T_2 - \beta) \\
& + \frac{i}{2}A \sin(\sigma T_2 - \beta) - i\omega_0 a' + a\omega_0 \beta' = 0
\end{aligned} \tag{2.1.32}$$

(2.1.32) 'in reel ve imajiner kısımlarını ayrı ayrı eşitleyelim:

$$a' = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0} \sin(\sigma T_2 - \beta) \tag{2.1.33}$$

$$a\beta' = -\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^3 - \frac{A}{2\omega_0} \cos(\sigma T_2 - \beta) \tag{2.1.34}$$

(2.1.33) ve (2.1.34) 'te $\gamma = \sigma T_2 - \beta$ dönüşümü yaparsak şu hale gelirler:

$$a' = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0} \sin \gamma \tag{2.1.35}$$

$$a\gamma' = a\sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^3 + \frac{A}{2\omega_0} \cos \gamma \tag{2.1.36}$$

Böylece x 'in ikinci yaklaşımını yazabiliriz. Bunu x_0 ve x_1 'i (2.1.20) 'da yazarak yaparız:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}ae^{i(\omega_0 T_0 + \beta)} + \frac{1}{2}ae^{-i(\omega_0 T_0 + \beta)} + \varepsilon \frac{\alpha}{12\omega_0^2}a^2 e^{2i(\omega_0 T_0 + \beta)} \\
& - \varepsilon \frac{\alpha}{2\omega_0^2}a^2 + \varepsilon \frac{\alpha}{12\omega_0^2}a^2 e^{-2i(\omega_0 T_0 + \beta)} + O(\varepsilon^2) \\
x &= a \cos(\beta + \omega_0 T_0) + \varepsilon \frac{\alpha}{6\omega_0^2}a^2 \cos 2(\beta + \omega_0 T_0) - \varepsilon \frac{\alpha}{2\omega_0^2} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{2.1.37}$$

elde edilir ki burada a ve β (2.1.33) ve (2.1.34) koşullarını sağlarlar.

2.1.2. Üstharmonik Rezonans, $\omega_0 \approx 2\Omega$

İkincil rezonanslarda, genliğin ölçeklendirilme şekline bağlı olarak güçlü ($\bar{A} = A$) ve zayıf ($\bar{A} = \varepsilon A$) zorlama olaylarını ayrı ayrı inceleyeceğiz:

Güçlü Zorlama:

İkincil rezonanslarda Ω ω_0 'dan uzak olduğundan, eğer genlik güçlü olmazsa, zorlamanın etkisi küçük olacaktır. Bundan dolayı güçlü zorlama durumunu da inceliyoruz. Bu durumda $\bar{A} = A$ olur ve sonuçta (2.1.1) denklemi şu hali alır:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon g \dot{x} - \varepsilon \alpha x^2 + A \cos \Omega t \quad (2.1.38)$$

(2.1.38) 'nin yaklaşık çözümünü açılım olarak aşağıdaki gibi düşünüyoruz:

$$x = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad (2.1.39)$$

(2.1.39) 'i, (2.1.5) ve (2.1.6) 'da olduğu gibi türetip elde edilenleri (2.1.38) 'de kullanır ve ε nun eşit kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlersek aşağıdaki diferansiyel denklemleri elde etmiş oluruz:

$$D_0^2 x_0 + \varepsilon(2D_0 D_1 x_0 + D_0^2 x_1) + \omega_0^2 x_0 + \varepsilon \omega_0^2 x_1 = A \cos \Omega t - g \varepsilon D_0 x_0 - \varepsilon \alpha (x_0 + \varepsilon x_1)^2$$

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = A \cos \Omega t \quad (2.1.40)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - g D_0 x_0 - \alpha x_0^2 \quad (2.1.41)$$

(2.1.40) 'un genel çözümü

$$x_0 = K(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + \bar{K}(T_1)e^{-i\omega_0 T_0} + \frac{A}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos \Omega T_0 \quad (2.1.42)$$

(2.1.42) in trigonometrik terimini kompleks formda yazdıktan sonra gerekli türevleri alıp (2.1.42) 'i yeniden yazarsak

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -i\omega_0(2K' + gK)e^{i\omega_0 T_0} + i\omega_0(2\bar{K}' + g\bar{K})e^{-i\omega_0 T_0} \\ &\quad - g \frac{A}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} i\Omega(e^{i\Omega T_0} - e^{-i\Omega T_0}) - \alpha K^2 e^{2i\omega_0 T_0} - \alpha K\bar{K} \\ &\quad - \frac{\alpha KA}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)}(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0})e^{i\omega_0 T_0} - \alpha K\bar{K} - \alpha \bar{K}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} \\ &\quad - \frac{\alpha KA}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}(e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0})e^{-i\omega_0 T_0} - \frac{\alpha A^2}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)}(e^{2i\Omega T_0} + e^{-2i\Omega T_0}) \\ D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= -i\omega_0(2K' + gK)e^{i\omega_0 T_0} - g \frac{A}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} i\Omega e^{i\Omega T_0} - \alpha K^2 e^{2i\omega_0 T_0} \\ &\quad - 2\alpha K\bar{K} - \frac{\alpha KA}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}(e^{i(\Omega + \omega_0)T_0} + e^{i(\omega_0 - \Omega)T_0}) - \frac{\alpha A^2}{4(\omega_0^2 - \Omega^2)} e^{2i\Omega T_0} \end{aligned}$$

$$-\frac{\alpha A^2}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)} - \frac{\alpha \bar{K} A}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} (e^{i(\Omega - \omega_0)T_0} + e^{-i(\omega_0 + \Omega)T_0}) + k.e. \quad (2.1.43)$$

Üstharmonik rezonans durumunda Ω nın $\frac{1}{2}\omega_0$ 'a yakınlığını açıklamak için σ kayıklık parametresi tanımlanır. Θ halde

$$2\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (2.1.44)$$

olur. Buna göre (2.1.43) 'de $e^{\pm i\omega_0 T_0}$ ile orantılı terimlere ilaveten x_1 'de seküler terim üreten başka terim de vardır. Bu terim $-\frac{A^2\alpha}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)}e^{\pm 2i\Omega T_0}$ dir. Seküler terimleri sıfıra eşitlemek için $2\Omega T_0$ ifadesini $\omega_0 T_0$ cinsinden açıklayalım:

$$2\Omega T_0 = (\omega_0 + \varepsilon\sigma)T_0 = \omega_0 T_0 + \sigma T_1 \quad (2.1.45)$$

Buradan, eğer aşağıdaki ifade (2.1.43) 'den elimine edilirse x_1 'de seküler terimler görülmez.

$$2i\omega_0(K' + \frac{g}{2}K) + \frac{\alpha A^2}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)}e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.1.46)$$

a ve β reel olmak üzere $K = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ kutupsal formu (2.1.46) 'te kullanılır ve elde edilen ifadenin reel ve imajiner kısımları ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$i\omega_0 a' - \omega_0 a\beta' + i\omega_0 \frac{g}{2}a + \frac{\alpha A^2}{2(\omega_0^2 - \Omega^2)}(\cos(\sigma T_1 - \beta) + i\sin(\sigma T_1 - \beta)) = 0$$

$$a' = -\frac{g}{2}a - \frac{A^2\alpha}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.1.47)$$

$$a\beta' = \frac{A^2\alpha}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.1.48)$$

elde edilir. $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ dönüşümü kullanılırsa

$$a' = -\frac{g}{2}a - \frac{A^2\alpha}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin\gamma \quad (2.1.49)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{A^2\alpha}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\cos\gamma \quad (2.1.50)$$

Zayıf Zorlama:

$\bar{A} = \varepsilon A$ şeklindeki bir ölçeklendirme zorlamanın etkisini zayıf kılacaktır. Bu durumda (2.1.1) denklemi şu hale gelir:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon g \dot{x} - \varepsilon \alpha x^2 + \varepsilon A \cos \Omega t \quad (2.1.51)$$

Aynı şekilde x asimtotik açılım olarak yazılabilir:

$$x(t; \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + \dots \quad T_0 = t, \quad T_1 = \varepsilon t \quad (2.1.52)$$

(2.1.52) ifadesinin türevini alalım:

$$\frac{dx}{dt} = D_0 x_0 + \varepsilon (D_1 x_0 + D_0 x_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.1.53)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = D_0^2 x_0 + \varepsilon (2D_0 D_1 x_0 + D_0^2 x_1) + O(\varepsilon^2) \quad (2.1.54)$$

(2.1.52) ve (2.1.53) (2.1.51) 'de yerlerine konur ve ε nun eşit kuvvetlerinin katsayısı sıfıra eşitlenirse

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (2.1.55)$$

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - g D_0 x_0 - \alpha x_0^2 + A \cos \Omega t \quad (2.1.56)$$

elde edilir. (2.1.55) 'in genel çözümü

$$x_0 = K(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{K}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (2.1.57)$$

olarak bulunur. (2.56) 'yı kullanarak (2.55) 'i yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = & i\omega_0 (-2K' - gK) e^{i\omega_0 T_0} + i\omega_0 (2\bar{K}' + g\bar{K}) e^{-i\omega_0 T_0} \\ & - \alpha K^2 e^{2i\omega_0 T_0} - 2\alpha K\bar{K} - \alpha \bar{K}^2 e^{-2i\omega_0 T_0} + A \cos \Omega t \end{aligned} \quad (2.1.58)$$

Burada da seküler terim üretecek terimleri yok etmek için (2.1.44) ve (2.1.45) ifadelerini kullanırsak

$$-2i\omega_0 (K' + \frac{g}{2} K) e^{i\omega_0 T_0} = 0$$

olur. a ve β reel olmak üzere $K = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ kutupsal formu kullanır ve elde edilen denklemi reel ve imajiner kısımlarına ayırırsak

$$a' = -\frac{g}{2}a \quad (2.1.59)$$

$$a\beta' = 0 \quad (2.1.60)$$

elde edilir ki bu da zorlamanın etkisinin görülmediğini ortaya koyar. O halde zorlama genliğine ε konmak suretiyle küçültülmesi zorlamanın etkisinin modal denklemlerde görülmesini engelliyor. Bu durumda güçlü zorlama incelemesini ele almak gerekiyor.

2.1.3. Altharmonik Rezonans $\Omega \approx 2\omega_0$

Üstharmonik rezonans durumunda olduğu gibi güçlü ve zayıf zorlama durumlarını ayrı ayrı inceleyeceğiz (2.1.1) 'in altharmonik rezonans durumunu incelemek için aşağıdaki şekilde σ kayıklık parametresi tanımlayacağız:

$$\Omega = 2\omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (2.1.61)$$

Bu durumda, $e^{\pm i\omega_0 T_0}$ ile orantılı terimlerle birlikte x_1 'de seküler terim üretecek başka terimler de olabileceğinden $(\Omega - \omega_0)$ ifadesini sadece ω_0 cinsinden açıklayalım:

$$(\Omega - \omega_0)T_0 = \omega_0 T_0 + \varepsilon\sigma T_1 \quad (2.1.62)$$

Güçlü Zorlama:

Buna göre (2.1.43) 'deki, x_1 'de seküler terim üretecek terimleri ihmal edelim:

$$i\omega_0(2K' + gK) - \frac{\alpha}{\omega_0^2 - \Omega^2} A \bar{K} e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (2.1.63)$$

a ve β reel olmak üzere K 'yı $\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ şeklinde kutupsal formda yazıp elde edilen denklemin reel ve imajiner kısımlarını ayrı ayrı sıfıra eşitlersek

$$a' = -\frac{g}{2}a - \frac{\alpha A}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} a \sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.1.64)$$

$$a\beta' = \frac{\alpha A}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} a \cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (2.1.65)$$

bulunur. $\gamma = \sigma T_1 - \beta$ dönüşümü yapılırsa

$$a' = -\frac{g}{2}a - \frac{\alpha A a}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin \gamma \quad (2.1.66)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{\alpha A a}{4\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)} \cos \gamma \quad (2.1.67)$$

denklemlerine ulaşılır.

Zayıf Zorlama

Bu durumda (2.1.58) 'deki x_1 'de seküler terim üretecek terimleri, (2.1.51) ve (2.1.52) ifadelerini de göz önüne alarak, elimine edelim:

$$-2i\omega_0 K' - i\omega_0 g K + \frac{A}{2} e^{i(\Omega - \omega_0)} = 0 \quad (2.1.68)$$

Yine a ve β reel olmak üzere K 'yı $\frac{1}{2}ae^{i\beta}$ şeklinde yazmak suretiyle varılan denklemin reel ve imajiner kısımlarını ayrı ayrı sıfıra eşitlersek

$$a' = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0} \sin(\Omega - \omega_0 - \beta)T_0 \quad (2.1.69)$$

$$a\beta' = -\frac{A}{2\omega_0} \cos(\Omega - \omega_0 - \beta)T_0 \quad (2.1.70)$$

elde ederiz.

2.2.Normal Form Analizi İle İnceleme

Bu bölümde kolaylık olması açısından Helmholtz salıncı denkleminin, bir önceki bölümde kullanılan, katsayılarında $\bar{g}$ yerine g , $\bar{A}$ yerine A kullanılarak elde edilecek (2.2.1) haliyle ele alınacaktır.

$$\ddot{x} + g\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = A \cos \Omega t \quad (2.2.1)$$

İncelemeler yine bir önceki bölümde yapıldığı gibi asal ve ikincil rezonanslar için ayrı ayrı yapılacaktır. Fakat bunun için önce (2.2.1) denkleminin dinamik sistem şeklinde yazılması gerekiyor. Ayrıca, normal form analizi yöntem, tanıtılırken de ifade edildiği gibi, otonom sistemler için yapılabildiğinden (2.2.1) denklemi bir dönüşüm ile otonom hale getirilmelidir. Önce $u = A \cos \Omega t$ dönüşümü yapılır, sonra $\dot{u} = -\Omega A \sin \Omega t$ 'den $v = A \sin \Omega t$ tanımlanırsa $\dot{u} = -\Omega v$ $\dot{v} = \Omega u$ ifadeleri ile denklem otonom hale getirilmiş olur. Buradan $x \rightarrow x_1$ $\dot{x} \rightarrow x_2$ $u \rightarrow x_3$ $v \rightarrow x_4$ dönüşümleri kullanılırsa (2.2.1) denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -gx_2 - \omega_0^2 x_1 - \alpha x_1^2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\Omega x_4 \\ \dot{x}_4 &= \Omega x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

2.2.1. Asal Rezonans Durumu

Asal rezonans durumu için σ şeklinde $\Omega = \omega_0 + \sigma$ bağıntısını sağlayan faz kayması parametresi tanımlayalım. Bu ifadeyi kullanarak (1.2.2) 'yi matrisiyel formda yazalım.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

Burada sağ taraftaki ilk matris dallanma parametresini içermeyen matris, ikinci matris içeren matris ve son matris lineer olmayan terimleri içeren matristir. Normal form analizinin (2.2.3) sistemine uygulanabilmesi için, sisteme uygulanacak bir dönüşümle dallanma parametresini içermeyen matrisin Jordan formuna getirilmesi gerekiyor. Bunun için önce sözkonusu matrisin özdeğerleri bulunmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -\omega_0 \\ 0 & 0 & \omega_0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\omega_0^2\lambda^2 + \omega_0^4 = 0$$

Buradan özdeğerler

$$\lambda_1 = \omega_0 i \quad \lambda_2 = \omega_0 i \quad \lambda_3 = -\omega_0 i \quad \lambda_4 = -\omega_0 i \quad (2.2.4)$$

olur. Özdeğerler katlı olduklarından genelleştirilmiş özvektörleri araştırırsak şunları elde ederiz:

$$\tilde{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2\omega_0 i \\ 2\omega_0 \end{bmatrix} \quad \tilde{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\omega_0 i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\omega_0 i \\ 2\omega_0 \end{bmatrix} \quad \tilde{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega_0 i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

Bu özvektörlerden oluşan S matrisini kuralım:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \omega_0 i & 1 & -\omega_0 i \\ 2\omega_0 i & 0 & -2\omega_0 i & 0 \\ 2\omega_0 & 0 & 2\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

S (2.2.6) 'deki matris olmak üzere (2.2.3) sisteminde $\underline{x} = S \underline{u}$ dönüşümü uygulanırsa dallanma parametresi içermeyen matris Jordan formuna getirilmiş olur.

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{4\omega_0} & \frac{1}{4\omega_0} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\omega_0} & 0 & \frac{i}{4\omega_0^2} \\ 0 & 0 & \frac{i}{4\omega_0} & \frac{1}{4\omega_0} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\omega_0} & 0 & -\frac{i}{4\omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

Bu dönüşüm sonunda (2.2.3) sistemi şu hale gelir:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega_0 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_0 i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\omega_0 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sigma i}{2\omega_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g i - \sigma}{2} & -\frac{g}{2} & \frac{g i + \sigma}{2\omega_0} & \frac{g}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma i}{2} & 0 \\ \frac{-g i + \sigma}{2\omega_0} & \frac{g}{2} & \frac{-g i - \sigma}{2\omega_0} & -\frac{g}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha i}{2\omega_0}(u_2 + u_4)^2 \\ 0 \\ -\frac{\alpha i}{2\omega_0}(u_2 + u_4)^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Böylece sistem aşağıdaki gibi oldu:

$$\dot{x}_v = \lambda_v x_v + L_{vj} x_j + a_{lm}^v x_l x_m + b_{lmp}^v x_l x_m x_p \quad (v = 1, 2, 3, 4) \quad (2.2.9)$$

Şimdi normal form denklemlerinin lineer olmayan terimlerini ve katsayılarını (1.2.9)'dan (1.2.15)'e kadar olan bağıntılardan faydalanarak bulalım. Bunun için önce (2.2.8)'deki kuadratik terimlerin katsayılarını (a_{lm}^v) yazalım:

$$\begin{aligned} a_{22}^2 &= \frac{\alpha i}{2\omega_0} & a_{24}^2 &= a_{42}^2 = \frac{\alpha i}{2\omega_0} & a_{44}^2 &= \frac{\alpha i}{2\omega_0} \\ a_{22}^4 &= -\frac{\alpha i}{2\omega_0} & a_{24}^4 &= a_{42}^4 = -\frac{\alpha i}{2\omega_0} & a_{44}^4 &= -\frac{\alpha i}{2\omega_0}
\end{aligned}$$

Diğer a_{lm}^v ($v, l, m=1,2,3,4$)'ler sıfırdır. Dinamik sistemimizde kübik terim bulunmadığından b_{lmp}^v 'ler sıfırdır. Kolayca görülebileceği gibi $v, l, m, p, r = 1,2,3,4$ olmak üzere $\Delta_{lm}^v = 0$ ve $\Delta_{lmp}^v = 0$ dır. Fakat Δ_{lmp}^v nin 1 olduğu yerler vardır. Bu durum aşağıda incelenmiştir:

$v = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Delta_{111}^v &= 0, & \Delta_{112}^v &= 0, & \Delta_{121}^v &= 0, & \Delta_{122}^v &= 0, & \Delta_{133}^v &= 0, & \Delta_{134}^v &= 0, & \Delta_{143}^v &= 0, \\
\Delta_{144}^v &= 0, & \Delta_{211}^v &= 0, & \Delta_{212}^v &= 0, & \Delta_{221}^v &= 0, & \Delta_{222}^v &= 0, & \Delta_{233}^v &= 0, & \Delta_{234}^v &= 0, \\
\Delta_{243}^v &= 0, & \Delta_{244}^v &= 0, & \Delta_{313}^v &= 0, & \Delta_{314}^v &= 0, & \Delta_{323}^v &= 0, & \Delta_{324}^v &= 0, & \Delta_{331}^v &= 0, \\
\Delta_{332}^v &= 0, & \Delta_{333}^v &= 0, & \Delta_{334}^v &= 0, & \Delta_{341}^v &= 0, & \Delta_{342}^v &= 0, & \Delta_{343}^v &= 0, & \Delta_{344}^v &= 0, \\
\Delta_{413}^v &= 0, & \Delta_{414}^v &= 0, & \Delta_{423}^v &= 0, & \Delta_{424}^v &= 0, & \Delta_{431}^v &= 0, & \Delta_{432}^v &= 0, & \Delta_{433}^v &= 0, \\
\Delta_{434}^v &= 0, & \Delta_{441}^v &= 0, & \Delta_{442}^v &= 0, & \Delta_{443}^v &= 0, & \Delta_{444}^v &= 0, \\
\Delta_{113}^v &= 1, & \Delta_{114}^v &= 1, & \Delta_{123}^v &= 1, & \Delta_{124}^v &= 1, & \Delta_{131}^v &= 1, & \Delta_{132}^v &= 1, & \Delta_{141}^v &= 1, \\
\Delta_{142}^v &= 1, & \Delta_{213}^v &= 1, & \Delta_{214}^v &= 1, & \Delta_{223}^v &= 1, & \Delta_{224}^v &= 1, & \Delta_{231}^v &= 1, & \Delta_{232}^v &= 1, \\
\Delta_{241}^v &= 1, & \Delta_{242}^v &= 1, & \Delta_{311}^v &= 1, & \Delta_{312}^v &= 1, & \Delta_{321}^v &= 1, & \Delta_{322}^v &= 1, & \Delta_{411}^v &= 1, \\
\Delta_{412}^v &= 1, & \Delta_{421}^v &= 1, & \Delta_{422}^v &= 1
\end{aligned}$$

$v = 3, 4$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\Delta_{111}^v &= 0, & \Delta_{112}^v &= 0, & \Delta_{113}^v &= 0, & \Delta_{114}^v &= 0, & \Delta_{121}^v &= 0, & \Delta_{122}^v &= 0, & \Delta_{123}^v &= 0, \\
\Delta_{124}^v &= 0, & \Delta_{131}^v &= 0, & \Delta_{132}^v &= 0, & \Delta_{141}^v &= 0, & \Delta_{142}^v &= 0, & \Delta_{211}^v &= 0, & \Delta_{212}^v &= 0, \\
\Delta_{213}^v &= 0, & \Delta_{214}^v &= 0, & \Delta_{221}^v &= 0, & \Delta_{222}^v &= 0, & \Delta_{223}^v &= 0, & \Delta_{224}^v &= 0, & \Delta_{231}^v &= 0, \\
\Delta_{232}^v &= 0, & \Delta_{241}^v &= 0, & \Delta_{242}^v &= 0, & \Delta_{311}^v &= 0, & \Delta_{312}^v &= 0, & \Delta_{321}^v &= 0, & \Delta_{322}^v &= 0, \\
\Delta_{333}^v &= 0, & \Delta_{334}^v &= 0, & \Delta_{343}^v &= 0, & \Delta_{344}^v &= 0, & \Delta_{411}^v &= 0, & \Delta_{412}^v &= 0, & \Delta_{421}^v &= 0, \\
\Delta_{422}^v &= 0, & \Delta_{433}^v &= 0, & \Delta_{434}^v &= 0, & \Delta_{443}^v &= 0, & \Delta_{444}^v &= 0, \\
\Delta_{133}^v &= 1, & \Delta_{134}^v &= 1, & \Delta_{143}^v &= 1, & \Delta_{144}^v &= 1, & \Delta_{233}^v &= 1, & \Delta_{234}^v &= 1, & \Delta_{243}^v &= 1, \\
\Delta_{244}^v &= 1, & \Delta_{313}^v &= 1, & \Delta_{314}^v &= 1, & \Delta_{323}^v &= 1, & \Delta_{324}^v &= 1, & \Delta_{331}^v &= 1, & \Delta_{332}^v &= 1, \\
\Delta_{341}^v &= 1, & \Delta_{342}^v &= 1, & \Delta_{431}^v &= 1, & \Delta_{414}^v &= 1, & \Delta_{423}^v &= 1, & \Delta_{424}^v &= 1, & \Delta_{431}^v &= 1, \\
\Delta_{432}^v &= 1, & \Delta_{441}^v &= 1, & \Delta_{442}^v &= 1
\end{aligned}$$

bulunur. Sıfırdan farklı olan α_{lm}^v ($v, l, m = 1, 2, 3, 4$) 'ler şunlardır:

$$\begin{aligned}
\alpha_{22}^2 &= \frac{\alpha}{2\omega_0^2}, & \alpha_{24}^2 &= -\frac{\alpha}{2\omega_0^2}, & \alpha_{42}^2 &= -\frac{\alpha}{2\omega_0^2}, & \alpha_{44}^2 &= -\frac{\alpha}{6\omega_0^2}, \\
\alpha_{22}^4 &= -\frac{\alpha}{6\omega_0^2}, & \alpha_{24}^4 &= -\frac{\alpha}{2\omega_0^2}, & \alpha_{42}^4 &= -\frac{\alpha}{2\omega_0^2}, & \alpha_{44}^4 &= \frac{\alpha}{2\omega_0^2}
\end{aligned}$$

$\Delta_{lm}^v = 0$ olduğundan $\varphi_{lm}^v = \Delta_{lm}^v a_{lm}^v = 0$ 'dır. $\Delta_{lm}^v = 1$ için κ_{lm}^v 'leri hesaplayalım:

$v = 1, 3$ için $a_{lm}^v = 0$ olduğundan $\kappa_{lm}^v = 0$ 'dır.

$$\begin{aligned}
\kappa_{113}^2 &= 0, & \kappa_{114}^2 &= 0, & \kappa_{123}^2 &= 0, & \kappa_{124}^2 &= 0, & \kappa_{131}^2 &= 0, & \kappa_{132}^2 &= 0, & \kappa_{141}^2 &= 0, \\
\kappa_{142}^2 &= 0, & \kappa_{213}^2 &= 0, & \kappa_{214}^2 &= 0, & \kappa_{223}^2 &= 0, & \kappa_{231}^2 &= 0, & \kappa_{232}^2 &= 0, & \kappa_{241}^2 &= 0, \\
\kappa_{311}^2 &= 0, & \kappa_{312}^2 &= 0, & \kappa_{321}^2 &= 0, & \kappa_{322}^2 &= 0, & \kappa_{411}^2 &= 0, & \kappa_{412}^2 &= 0, & \kappa_{421}^2 &= 0, \\
\kappa_{224}^2 &= \kappa_{242}^2 = \kappa_{422}^2 &= -\frac{5\alpha_{21}^2}{9\omega_0^3} \\
\kappa_{133}^4 &= 0, & \kappa_{134}^4 &= 0, & \kappa_{143}^4 &= 0, & \kappa_{144}^4 &= 0, & \kappa_{233}^4 &= 0, & \kappa_{234}^4 &= 0, & \kappa_{243}^4 &= 0, \\
\kappa_{313}^4 &= 0, & \kappa_{314}^4 &= 0, & \kappa_{323}^4 &= 0, & \kappa_{324}^4 &= 0, & \kappa_{331}^4 &= 0, & \kappa_{332}^4 &= 0, & \kappa_{341}^4 &= 0, \\
\kappa_{342}^4 &= 0, & \kappa_{413}^4 &= 0, & \kappa_{414}^4 &= 0, & \kappa_{423}^4 &= 0, & \kappa_{431}^4 &= 0, & \kappa_{432}^4 &= 0, & \kappa_{441}^4 &= 0, \\
\kappa_{244}^4 &= \kappa_{424}^4 = \kappa_{442}^4 &= \frac{5\alpha_{21}^2}{9\omega_0^3}
\end{aligned}$$

Dinamik sistem (2.2.8)'in sağ tarafında dallanma parametrelerini içeren ((1.2.16)'da $L_{\xi}x$ ile gösterilen) matrisin normal form denklemlerine katkısını (1.2.18) bağıntısını kullanarak bulabiliriz. Pertürbasyon matrisi L_{ξ}' üzerine konulan diyagonal olma koşulu G matrisi elemanlarının bulunmasında önemli rol oynar [2]. Normal form denklemlerinde görülecek olan L_{ξ}' pertürbasyon matrisi ve normalize dönüşümde yer alacak G matrisi aşağıda verilmiştir.

$$L_{\xi}^{\prime} = \begin{bmatrix} \sigma i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & -\frac{g-i\sigma}{2\omega_0} - a_{11} & \frac{-g+i\sigma}{4\omega_0^2} - \frac{g}{8\omega_0^2} & \frac{gi}{4\omega_0} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ \frac{-g-i\sigma}{4\omega_0^2} - \frac{g}{8\omega_0^2} & -\frac{gi}{4\omega_0} & a_{43} & a_{33} - \frac{g+i\sigma}{2\omega_0} \end{bmatrix} \quad (2.2.11)$$

Burada a_{11} , a_{21} , a_{33} , a_{43} elemanları keyfi olup sıfır alınmıştır. Böylece sistem (1.2.19) formuna getirilmiş oldu. Bu bilgileri kullanarak, (2.2.3) ile gösterilen dinamik sistemin normal form denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\dot{y}_1 = \omega_0 i y_1 + \sigma i y_1 \quad (2.2.12a)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} y_2^2 y_4 \quad (2.2.12b)$$

$$\dot{y}_3 = -\omega_0 i y_3 - \sigma i y_3 \quad (2.2.12c)$$

$$\dot{y}_4 = y_3 - \omega_0 i y_4 - \frac{g}{2} y_4 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} y_2 y_4^2 \quad (2.2.12d)$$

(2.2.12a), (2.2.12b) diferansiyel denklemlerini çözebiliriz:

$$\dot{y}_1 = i(\omega_0 + \sigma) y_1 \Rightarrow y_1 = c_1 e^{i(\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.13a)$$

$$\dot{y}_3 = -i(\omega_0 + \sigma) y_3 \Rightarrow y_3 = c_3 e^{-i(\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.13b)$$

Bunları (2.2.12b) ve (2.2.12d) denklemlerinde kullanalım:

$$\dot{y}_2 = c_1 e^{i(\omega_0 + \sigma)t} + \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} y_2^2 y_4 \quad (2.2.14a)$$

$$\dot{y}_4 = c_3 e^{-i(\omega_0 + \sigma)t} - \omega_0 i y_4 - \frac{g}{2} y_4 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} y_2 y_4^2 \quad (2.2.14b)$$

Şimdi aşağıda verilen türden çözümler arayalım:

$$y_2 = r e^{i\theta} \quad y_4 = r e^{-i\theta} \quad (2.2.15)$$

Bu ifadeleri (2.2.14a), (2.2.14b) denklemlerinde kullanırsak

$$\dot{r} + ir \dot{\theta} = c_1 e^{i[(\omega_0 + \sigma)t - \theta]} + \omega_0 ir - \frac{g}{2}r - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} r^3 \quad (2.2.16a)$$

$$\dot{r} - ir \dot{\theta} = c_2 e^{-i[(\omega_0 + \sigma)t - \theta]} - \omega_0 ir - \frac{g}{2}r + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} r^3 \quad (2.2.16b)$$

elde ederiz c_1 ve c_2 sabitlerini belirleyelim: Bu bölümün başında Helmholtz denklemini otonom dinamik sistem haline getirmek için aşağıdaki dönüşümleri yapmıştık.

$$x_3 = A \cos \Omega t \quad x_4 = A \sin \Omega t \quad (2.2.17)$$

Bu denklemlerde $t=0$ koyarsak $x_3 = A$ $x_4 = 0$ başlangıç koşullarını buluruz. Otonom dinamik sistemi normal form analizi uygulanabilecek standarda getirmek için $\underline{x} = S \underline{u}$ dönüşümünü kullanmıştık. Buradan

$$x_3 = 2\omega_0 i u_1 - 2\omega_0 i u_3 = 2\omega_0 i (c_1 e^{i(\omega_0 + \sigma)t} - c_2 e^{-i(\omega_0 + \sigma)t}) \quad (2.2.18a)$$

$$x_4 = 2\omega_0 u_1 + 2\omega_0 u_3 = 2\omega_0 (c_1 e^{i(\omega_0 + \sigma)t} + c_2 e^{-i(\omega_0 + \sigma)t}) \quad (2.2.18b)$$

bulunur. Bu denklemlerde, bulduğumuz başlangıç koşullarını kullanırsak sabitleri belirlemiş oluruz.

$$\begin{aligned} t = 0 \Rightarrow x_3 &= 2\omega_0 i (c_1 - c_2) = A & x_4 &= 2\omega_0 (c_1 + c_2) = 0 \\ c_1 &= -\frac{Ai}{4\omega_0} & c_2 &= \frac{Ai}{4\omega_0} \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Bu sabitleri (2.2.16a), (2.2.16b) denklemlerinde kullanır ve üstel fonksiyonlar yerine trigonometrik eşitlerini yazarsak

$$\begin{aligned} \dot{r} + ir \dot{\theta} &= -\frac{Ai}{4\omega_0} (\cos [(\omega_0 + \sigma)t - \theta] + i \sin [(\omega_0 + \sigma)t - \theta]) + \omega_0 ir - \frac{g}{2}r - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} r^3 \\ \dot{r} - ir \dot{\theta} &= \frac{Ai}{4\omega_0} (\cos [(\omega_0 + \sigma)t - \theta] - i \sin [(\omega_0 + \sigma)t - \theta]) - \omega_0 ir - \frac{g}{2}r + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^2} r^3 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + \frac{A}{4\omega_0} \sin [(\omega_0 + \sigma)t - \theta] \quad (2.2.20a)$$

$$r \dot{\theta} = \omega_0 r - \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^2} r^3 - \frac{A}{4\omega_0} \cos [(\omega_0 + \sigma)t - \theta] \quad (2.2.20b)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerde $\gamma = [(\omega_0 + \sigma)t - \theta]$ dönüşümü yapılırsa

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + \frac{A}{4\omega_0} \sin \gamma \quad (2.2.21a)$$

$$r \dot{\gamma} = \sigma r + \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3} r^3 + \frac{A}{4\omega_0} \cos \gamma \quad (2.2.21b)$$

elde edilir.

2.2.2. İkincil Rezonanslar

2.2.2.1. Altharmonik Rezonans

Bu rezonans durumu için bölüm 2.2.1 'de bahsedilen σ parametresi $\Omega = 2\omega_0 + \sigma$ şeklinde tanımlanacaktır. Bu ifade kullanılarak (2.2.2) dinamik sistemi matrisiyel formda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega_0 \\ 0 & 0 & 2\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.22)$$

elde edilir. Şimdi (2.2.22) ifadesine normal form dönüşümünün uygulanabilmesi için standart forma getirecek uygunluk dönüşümü yapılmalıdır. Bunun için (2.2.22) eşitliğinde sağ taraftaki ilk matris olan dallanma parametresi içermeyen matrisin özvektörlerini baz kabul eden S matrisini bulup $\underline{x} = S \underline{u}$ dönüşümü uygulanmalıdır. Bu işlemi yapalım: Sözkonusu matrisin özdeğerleri

$$\lambda_1 = -\omega_0 i, \quad \lambda_2 = \omega_0 i, \quad \lambda_3 = -2\omega_0 i, \quad \lambda_4 = 2\omega_0 i \quad (2.2.23)$$

şeklinde kolayca bulunabilir. Bu özdeğerleri kullanarak yukarıda bahsedilen S matrisini kurarsak şunu elde ederiz:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\omega_0 i & \omega_0 i & -2\omega_0 i & 2\omega_0 i \\ 0 & 0 & -3\omega_0^2 & -3\omega_0^2 \\ 0 & 0 & -3\omega_0^2 i & 3\omega_0^2 i \end{bmatrix} \quad (2.2.24)$$

Bu matrisin tersi

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2\omega_0} & \frac{1}{6\omega_0^2} & -\frac{i}{3\omega_0^2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\omega_0} & \frac{1}{6\omega_0^2} & \frac{i}{3\omega_0^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6\omega_0^2} & \frac{i}{6\omega_0^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6\omega_0^2} & -\frac{i}{6\omega_0^2} \end{bmatrix} \quad (2.2.25)$$

şeklindedir. Bu matrisleri kullanarak $\underline{\ddot{x}} = S \underline{u}$ dönüşümünü uygularsak (2.2.22) ifadesi şu hale gelir:

$$\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_0 i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\omega_0 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{g}{2} & \frac{g}{2} & \frac{-2g+3\sigma i}{2} & \frac{2g+\sigma i}{2} \\ \frac{g}{2} & -\frac{g}{2} & \frac{2g-\sigma i}{2} & -\frac{2g+3\sigma i}{2} \\ 0 & 0 & -\sigma i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha i}{2\omega_0}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \\ \frac{\alpha i}{2\omega_0}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.26)$$

Buna (1.2.6) ile verilen normal form dönüşümü uygulanabilir. Burada dönüşüm katsayıları ile normal form denklemlerinde görülecek lineer olmayan terimlerin katsayıları, Ek-1 'de verilen ve Mathematica paket programı için kodlanmış olan program ile hesaplanmıştır. Aşağıda bu programın sonucundan normal form denklemlerinde görülecek sıfır olmayan lineer terimlerin katsayıları verilmektedir:

$$\phi_{23}^1 = -\frac{\alpha i}{2\omega_0}, \quad \phi_{32}^1 = -\frac{\alpha i}{2\omega_0}, \quad \phi_{14}^2 = \frac{\alpha i}{2\omega_0}, \quad \phi_{41}^2 = \frac{\alpha i}{2\omega_0}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{112}^1 &= \frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{121}^1 &= \frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{134}^1 &= \frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{143}^1 &= \frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{211}^1 &= \frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3} \\
\kappa_{314}^1 &= \frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{341}^1 &= \frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{413}^1 &= \frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{431}^1 &= \frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3} \\
\kappa_{122}^2 &= -\frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{212}^2 &= -\frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{221}^2 &= -\frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{234}^2 &= -\frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{243}^2 &= -\frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3} \\
\kappa_{324}^2 &= -\frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{342}^2 &= -\frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{423}^2 &= -\frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3}, & \kappa_{432}^2 &= -\frac{3\alpha^2 i}{8\omega_0^3} \\
\Omega_{1114}^1 &= -\frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{1141}^1 &= -\frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{1223}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1232}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{1322}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1411}^1 &= -\frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{2123}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{2132}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{2213}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{2231}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{2312}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{2321}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{2334}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{2343}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{2433}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{3122}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{3212}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{3221}^1 &= \frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{3234}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{3243}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5} \\
\Omega_{3324}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{3342}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{3423}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{3432}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5} \\
\Omega_{4111}^1 &= -\frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{4233}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4323}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4332}^1 &= -\frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5} \\
\Omega_{1124}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1142}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1214}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1241}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{1344}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{1412}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1421}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{1434}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5} \\
\Omega_{1443}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{2114}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{2141}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{2223}^2 &= \frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5} \\
\Omega_{2232}^2 &= \frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{2322}^2 &= \frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{2411}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{3144}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5} \\
\Omega_{3222}^2 &= \frac{\alpha^3 i}{16\omega_0^5}, & \Omega_{3414}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{3441}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4112}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{4121}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5}, & \Omega_{4134}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4143}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4211}^2 &= -\frac{5\alpha^3 i}{432\omega_0^5} \\
\Omega_{4314}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4341}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4413}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}, & \Omega_{4431}^2 &= \frac{221\alpha^3 i}{8640\omega_0^5}
\end{aligned}$$

Şimdi dallanma parametrelerini içeren matrisin normal form denklemlerine katkısını belirlemek amacıyla (1.2.17) ile verilen dönüşümdeki G matrisini kuralım. Bunun için (1.2.18) ifadesinden faydalanacağız.

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{g_i}{4\omega_0} & \frac{2gi+3\sigma}{2\omega_0} & \frac{2gi-\sigma}{6\omega_0} \\ \frac{g_i}{4\omega_0} & a_{22} & \frac{2gi+\sigma}{6\omega_0} & \frac{-2gi+3\sigma}{2\omega_0} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.2.27)$$

G matrisinde köşegen üzerindeki elemanlar keyfi olup sıfır alınmıştır. Böylece dallanma parametresi içeren matris şu hale gelir:

$$L'_\xi = \begin{bmatrix} -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma i \end{bmatrix} \quad (2.2.28)$$

Artık normal form denklemlerini yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 - \frac{\alpha i}{\omega_0} y_2 y_3 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1^2 y_2 + \frac{9\alpha^2 i}{4\omega_0^3} y_1 y_3 y_4 - \frac{\alpha^3 i}{4\omega_0^5} y_1^3 y_4 \\ & + \frac{5\alpha^3 i}{36\omega_0^5} y_1 y_2^2 y_3 - \frac{221\alpha^3 i}{720\omega_0^5} y_2 y_3^2 y_4 \end{aligned} \quad (2.2.29a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 + \frac{\alpha i}{\omega_0} y_1 y_4 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1 y_2^2 - \frac{9\alpha^2 i}{4\omega_0^3} y_2 y_3 y_4 + \frac{\alpha^3 i}{4\omega_0^5} \\ & - \frac{5\alpha^3 i}{36\omega_0^5} y_1^2 y_2 y_4 + \frac{221\alpha^3 i}{720\omega_0^5} y_1 y_3 y_4^2 \end{aligned} \quad (2.2.29b)$$

$$\dot{y}_3 = -2\omega_0 i y_3 - \sigma i y_3 \quad (2.2.29c)$$

$$\dot{y}_4 = 2\omega_0 i y_4 + \sigma i y_4 \quad (2.2.29d)$$

(2.2.29c) ve (2.2.29d) diferansiyel denlemlerini çözebiliriz:

$$\dot{y}_3 = -i(2\omega_0 + \sigma)y_3 \Rightarrow y_3 = c_1 e^{-i(2\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.30a)$$

$$\dot{y}_4 = i(2\omega_0 + \sigma)y_4 \Rightarrow y_4 = c_2 e^{i(2\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.30b)$$

c_1, c_2 katsayılarını belirleyebilmek için ters dönüşüm yapıp başlangıç koşulu bulalım:

$$x_3 = A \cos \Omega t \quad t = 0 \Rightarrow x_3 = A, \quad x_4 = A \sin \Omega t \quad t = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

Şimdi $\underline{x} = S \underline{u}$ dönüşümünden faydalananarak x_3 ve x_4 'ü yazıp sözü edilen katsayıları bulalım:

$$\begin{aligned}
x_3 &= -3\omega_0^2(u_3 + u_4) = -3\omega_0^2(c_1 e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} + c_2 e^{i(2\omega_0+\sigma)t}) \\
x_4 &= -3\omega_0^2 i(u_3 - u_4) = -3\omega_0^2 i(c_1 e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} - c_2 e^{i(2\omega_0+\sigma)t}) \\
t=0 &\Rightarrow c_1 = -\frac{A}{6\omega_0^2} \quad c_2 = -\frac{A}{6\omega_0^2} \\
y_3 &= -\frac{A}{6\omega_0^2} e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} \quad y_4 = -\frac{A}{6\omega_0^2} e^{i(2\omega_0+\sigma)t}
\end{aligned}$$

Bunları (2.2.29a) ve (2.2.29b) de kullanalım:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 + \frac{A\alpha i}{6\omega_0^3} e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_2 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1^2 y_2 + \frac{9\alpha^2 A^2 i}{144\omega_0^7} y_1^3 \\
&+ \frac{A\alpha^3 i}{24\omega_0^7} e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1^3 - \frac{5A\alpha^2 i}{216\omega_0^7} e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_1 y_2^2 + \frac{221\alpha^3 A^3 i}{155520\omega_0^{11}} e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_2^3 \quad (2.2.31a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_2 &= \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 - \frac{A\alpha i}{6\omega_0^3} e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1 y_2^2 - \frac{9\alpha^2 A^2 i}{144\omega_0^7} y_2^3 \\
&- \frac{A\alpha^3 i}{24\omega_0^7} e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_2^3 + \frac{5A\alpha^2 i}{216\omega_0^7} e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1^2 y_2 - \frac{221\alpha^3 A^3 i}{155520\omega_0^{11}} e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1^3 \quad (2.2.31b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{A}{6\omega_0^3}, \quad c_2 = \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3}, \quad c_3 = \frac{\alpha^2 A^2}{16\omega_0^7} \\
c_4 &= \frac{A\alpha^3}{24\omega_0^7}, \quad c_5 = \frac{5A\alpha^2}{216\omega_0^7}, \quad c_6 = \frac{221\alpha^3 A^3}{155520\omega_0^{11}} \quad (2.2.32)
\end{aligned}$$

(2.2.32) katsayılarını kullanarak normal form denklemlerini tekrar yazalım:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 + c_1 i e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_2 + c_2 i y_1^2 y_2 + c_3 i y_1^3 + c_4 i e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1^3 \\
&- c_5 i e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_1 y_2^2 + c_6 i e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_2^3 \quad (2.2.33a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_2 &= \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 - c_1 i e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1 - c_2 i y_1 y_2^2 - c_3 i y_2^3 - c_4 i e^{-i(2\omega_0+\sigma)t} y_2^3 \\
&+ c_5 i e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1^2 y_2 - c_6 i e^{i(2\omega_0+\sigma)t} y_1^3 \quad (2.2.33b)
\end{aligned}$$

Aşağıdaki şekilde çözümler arayacağız:

$$y_1 = r e^{i\theta} \quad y_2 = r e^{-i\theta} \quad (2.2.34)$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} + r i \dot{\theta} &= -\omega_0 i r - \frac{g}{2} r + c_1 i r e^{-i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} + c_2 i r^3 + c_3 i r + c_4 i r^3 e^{i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} \\
&- c_5 i r^3 e^{-i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} + c_6 i r e^{-i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} \quad (2.2.35a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} - r i \dot{\theta} &= \omega_0 i r - \frac{g}{2} r - c_1 i r e^{i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} - c_2 i r^3 - c_3 i r - c_4 i r^3 e^{-i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} \\
&+ c_5 i r^3 e^{i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} - c_6 i r e^{i[(2\omega_0+\sigma)t+2\theta]} \quad (2.2.35b)
\end{aligned}$$

Son iki denklemde üstel ifadeleri trigonometrik formda yazıp r ve $\dot{\theta}$ yı bulalım:

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + c_1 r \sin[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] - c_4 r^3 \sin[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] - c_5 r^3 \sin[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] + c_6 r \sin[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] \quad (2.2.36a)$$

$$\dot{\theta} = -\omega_0 + c_1 \cos[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] + c_2 r^2 + c_3 + c_4 r^2 \cos[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] - c_5 r^2 \cos[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] + c_6 \cos[(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta] \quad (2.2.36b)$$

(2.2.36a), (2.2.36b) denklemlerinde $\gamma = [(2\omega_0 + \sigma)t + 2\theta]$ dönüşümünü yapıp tekrar yazarsak

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + c_1 r \sin \gamma - c_4 r^3 \sin \gamma - c_5 r^3 \sin \gamma + c_6 r \sin \gamma \quad (2.2.37a)$$

$$\dot{\gamma} = \sigma + 2c_1 \cos \gamma + 2c_2 r^2 + 2c_3 + 2c_4 r^2 \cos \gamma - 2c_5 r^2 \cos \gamma + 2c_6 \cos \gamma \quad (2.2.37b)$$

elde edilir.

2.2.2.2. Üstharmonik Rezonans

Bu rezonans durumu için Ω ile ω_0 arasındaki ilişki, çoklu ölçekler yöntemi uygulanırken kullanıldığı gibi, σ kayıklık parametresi olmak üzere

$$\Omega = \frac{\omega_0 + \sigma}{2}$$

olarak tanımlanacaktır. Bu ifade kullanılarak (2.2.2) dinamik sistemi matrisiyel formda yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\omega_0}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sigma}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sigma}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.38)$$

elde edilir. Şimdi (2.2.38) 'i normal form dönüşümünün uygulanabileceği standart forma getirmek için, önceki bölümde de sözü edilen, lineer kısmın özvektörlerini baz kabul eden S benzerlik matrisini araştıralım. Dallanma parametresi içermeyen lineer kısmın özdeğerleri

$$\lambda_1 = -\omega_0 i, \quad \lambda_2 = \omega_0 i, \quad \lambda_3 = -\frac{\omega_0 i}{2}, \quad \lambda_4 = \frac{\omega_0 i}{2} \quad (2.2.39)$$

olur. Bunlardan faydalanarak söz konusu S matrisini kurarsak

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\omega_0 i & \omega_0 i & -\frac{\omega_0 i}{2} & \frac{\omega_0 i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3\omega_0^2}{4} & \frac{3\omega_0^2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3\omega_0^2 i}{4} & -\frac{3\omega_0^2 i}{4} \end{bmatrix} \quad (2.2.40)$$

elde edilir. (2.2.38) 'e $\underline{x} = S \underline{u}$ dönüşümü uygulanırsa şu elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \\ \dot{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0 i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_0 i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega_0 i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_0 i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{g}{2} & \frac{g}{2} & \frac{-2g+3\sigma i}{8} & \frac{2g-\sigma i}{8} \\ \frac{g}{2} & -\frac{g}{2} & \frac{2g-3\sigma}{8} & \frac{-2g-\sigma}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma i}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\alpha i}{2\omega_0}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \\ \frac{\alpha i}{2\omega_0}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2.41)$$

(2.2.41) sistemine (1.2.6) ile verilen normal form dönüşümü uygulanabilir. Önceki bölümde de yapıldığı gibi burada dönüşüm katsayıları ile normal form denklemlerinde görülecek lineer olmayan terimlerin katsayıları Ek-1 'de verilen program aracılığıyla hesaplanmıştır. Buraya, bu programın sonucundan normal form denklemlerinde görülecek lineer olmayan terimlerin katsayıları alınmıştır.

$$\phi_{33}^1 = -\frac{\alpha i}{2\omega_0}, \quad \phi_{44}^2 = \frac{\alpha i}{2\omega_0}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{112}^1 &= \frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{121}^1 &= \frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{134}^1 &= \frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{143}^1 &= \frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{211}^1 &= \frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, \\ \kappa_{314}^1 &= \frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{341}^1 &= \frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{413}^1 &= \frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{431}^1 &= \frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & & \\ \kappa_{122}^2 &= -\frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{212}^2 &= -\frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{221}^2 &= -\frac{5\alpha^2 i}{9\omega_0^3}, & \kappa_{234}^2 &= -\frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{243}^2 &= -\frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, \\ \kappa_{324}^2 &= -\frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{342}^2 &= -\frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{423}^2 &= -\frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & \kappa_{432}^2 &= -\frac{23\alpha^2 i}{45\omega_0^3}, & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{1144}^1 &= -\frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{1233}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{1323}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{1332}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{1414}^1 &= -\frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{1441}^1 &= -\frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{2133}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{2313}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{2331}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3123}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3132}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3213}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{3231}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3312}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3321}^1 &= -\frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3334}^1 &= -\frac{1081\alpha^3 i}{1800\omega_0^5}, \\
\Omega_{3343}^1 &= -\frac{1081\alpha^3 i}{1800\omega_0^5}, & \Omega_{3433}^1 &= -\frac{1081\alpha^3 i}{1800\omega_0^5}, & \Omega_{4114}^1 &= -\frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{4141}^1 &= -\frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, \\
\Omega_{4333}^1 &= -\frac{1081\alpha^3 i}{1800\omega_0^5}, & \Omega_{4411}^1 &= -\frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, \\
\Omega_{1244}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{1424}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{1442}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{2144}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{2233}^2 &= \frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{2323}^2 &= \frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{2332}^2 &= \frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{2414}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{2441}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{3223}^2 &= \frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{3232}^2 &= \frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, & \Omega_{3322}^2 &= \frac{1003\alpha^3 i}{1080\omega_0^5}, \\
\Omega_{3444}^2 &= \frac{1081\alpha^3 i}{1800\omega_0^5}, & \Omega_{4124}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{4142}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{4214}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{4241}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{4344}^2 &= \frac{1081\alpha^3 i}{1800\omega_0^5}, & \Omega_{4412}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, & \Omega_{4421}^2 &= \frac{107\alpha^3 i}{120\omega_0^5}, \\
\Omega_{4434}^2 &= \frac{1081\alpha^3 i}{18000\omega_0^5}, & \Omega_{4443}^2 &= \frac{1081\alpha^3 i}{18000\omega_0^5}
\end{aligned}$$

Dallanma parametresi içeren matrisin normal form denklemlerine katkısını veren (1.2.17) dönüşümündeki G matrisi ise asal köşegen üzerindeki elemanlar keyfi olmak üzere şöyledir:

$$G = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{gi}{4\omega_0} & \frac{-2gi-3\sigma i}{4\omega_0} & \frac{2gi+\sigma}{12\omega_0} \\ \frac{gi}{4\omega_0} & a_{22} & a_{23} = \frac{2gi-3\sigma i}{12\omega_0} & \frac{2gi+\sigma i}{4\omega_0} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \quad (2.2.42)$$

Bu dönüşümünden sonra dallanma parametresi içeren matris şu hali alır:

$$L'_\xi = \begin{bmatrix} -\frac{g}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma i \end{bmatrix} \quad (2.2.43)$$

Bu durumda normal form denklemleri şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 = & -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 - \frac{\alpha i}{2\omega_0} y_3^2 + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1^2 y_2 + \frac{46\alpha^2 i}{15\omega_0^3} y_1 y_3 y_4 - \frac{1003\alpha^3 i}{180\omega_0^5} y_1^2 y_4^2 \\ & - \frac{107\alpha^3 i}{10\omega_0^5} y_1 y_2 y_3^2 - \frac{1081\alpha^3 i}{450\omega_0^5} y_3^3 y_4\end{aligned}\quad (2.2.44a)$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 = & \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 + \frac{\alpha i}{2\omega_0} y_4^2 - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1 y_2^2 - \frac{46\alpha^2 i}{15\omega_0^3} y_2 y_3 y_4 + \frac{1003\alpha^3 i}{180\omega_0^5} y_2^2 y_3^2 \\ & + \frac{107\alpha^3 i}{10\omega_0^5} y_1 y_2 y_4^2 + \frac{1081\alpha^3 i}{450\omega_0^5} y_3 y_4^3\end{aligned}\quad (2.2.44b)$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{\omega_0 i}{2} y_3 - \frac{\sigma i}{2} y_3 \quad (2.2.44c)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{\omega_0 i}{2} y_4 + \frac{\sigma i}{2} y_4 \quad (2.2.44d)$$

(2.2.44c), (2.2.44d) diferansiyel deklemleri çözüp sabitlerini belirleyelim:

$$\dot{y}_3 = -y_3 \left(\frac{\omega_0 i}{2} + \frac{\sigma i}{2} \right) \quad y_3 = c_1 e^{-\frac{i}{2}(\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.45a)$$

$$\dot{y}_4 = y_4 \left(\frac{\omega_0 i}{2} + \frac{\sigma i}{2} \right) \quad y_4 = c_2 e^{\frac{i}{2}(\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.45b)$$

$$\begin{aligned}x_3 &= A \cos \Omega t \quad t=0 \Rightarrow x_3 = A, \quad x_4 = A \sin \Omega t \quad t=0 \Rightarrow x_4 = 0 \\ x_3 &= \frac{3\omega_0^2}{4} u_3 + \frac{3\omega_0^2}{4} u_4 \quad t=0 \Rightarrow \frac{3\omega_0^2}{4} (c_1 + c_2) = A \\ x_4 &= \frac{3\omega_0^2 i}{4} u_3 - \frac{3\omega_0^2 i}{4} u_4 \quad t=0 \Rightarrow \frac{3\omega_0^2}{4} (c_1 - c_2) = 0 \\ c_1 &= \frac{2A}{3\omega_0^2} \quad c_2 = \frac{2A}{3\omega_0^2}\end{aligned}\quad (2.2.46)$$

$$y_3 = \frac{2A}{3\omega_0^2} e^{-\frac{i}{2}(\omega_0 + \sigma)t} \quad y_4 = \frac{2A}{3\omega_0^2} e^{\frac{i}{2}(\omega_0 + \sigma)t} \quad (2.2.47)$$

(2.2.47) 'yi kullanarak normal form denklemlerini tekrar yazalım:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 = & -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 - \frac{2A^2 \alpha i}{9\omega_0^5} e^{-i(\omega_0 + \sigma)t} + \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1^2 y_2 + \frac{184A^2 \alpha^2 i}{135\omega_0^7} y_1 \\ & - \frac{1003A^2 \alpha^3 i}{405\omega_0^9} e^{i(\omega_0 + \sigma)t} y_1^2 - \frac{214A^2 \alpha^3 i}{45\omega_0^7} e^{-i(\omega_0 + \sigma)t} y_1 y_2 - \frac{8648A^4 \alpha^3 i}{18225\omega_0^{13}} e^{-i(\omega_0 + \sigma)t}\end{aligned}\quad (2.2.48a)$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_2 = & \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 + \frac{2A^2 \alpha i}{9\omega_0^5} e^{i(\omega_0 + \sigma)t} - \frac{5\alpha^2 i}{3\omega_0^3} y_1 y_2^2 - \frac{184A^2 \alpha^2 i}{135\omega_0^7} y_2 \\ & + \frac{1003A^2 \alpha^3 i}{405\omega_0^9} e^{-i(\omega_0 + \sigma)t} y_2^2 + \frac{214A^2 \alpha^3 i}{45\omega_0^7} e^{i(\omega_0 + \sigma)t} y_1 y_2 + \frac{8648A^4 \alpha^3 i}{18225\omega_0^{13}} e^{i(\omega_0 + \sigma)t}\end{aligned}\quad (2.2.48b)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2A^2\alpha}{9\omega_0^5}, \quad c_2 = \frac{5\alpha^2}{3\omega_0^2}, \quad c_3 = \frac{184A^2\alpha^2}{135\omega_0^7} \\ c_4 &= \frac{1003A^2\alpha^3}{405\omega_0^9}, \quad c_5 = \frac{214A^2\alpha^3}{45\omega_0^7}, \quad c_6 = \frac{8648A^4\alpha^3}{18225\omega_0^{13}} \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

(2.2.49) 'u kullanarak (2.2.48a) ve (2.2.48b) ' yi tekrar yazalım:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega_0 i y_1 - \frac{g}{2} y_1 - c_1 i e^{-i(\omega_0+\sigma)t} + c_2 i y_1^2 y_2 + c_3 i y_1 - c_4 i e^{i(\omega_0+\sigma)t} y_1^2 \\ &\quad - c_5 i e^{-i(\omega_0+\sigma)t} y_1 y_2 - c_6 i e^{-i(\omega_0+\sigma)t} \end{aligned} \quad (2.2.50a)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \omega_0 i y_2 - \frac{g}{2} y_2 + c_1 i e^{i(\omega_0+\sigma)t} - c_2 i y_1 y_2^2 - c_3 i y_2 + c_4 i e^{-i(\omega_0+\sigma)t} y_2^2 \\ &\quad + c_5 i e^{i(\omega_0+\sigma)t} y_1 y_2 + c_6 i e^{i(\omega_0+\sigma)t} \end{aligned} \quad (2.2.50b)$$

Şu şekilde çözüm arayalım:

$$y_1 = r e^{i\theta} \quad y_2 = r e^{-i\theta} \quad (2.2.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} + r i \dot{\theta} &= -\omega_0 i r - \frac{g}{2} r - c_1 i e^{-i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} + c_2 i r^3 + c_3 i r - c_4 i r^2 e^{i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} \\ &\quad - c_5 i r^2 e^{-i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} - c_6 i e^{-i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} \end{aligned} \quad (2.2.52a)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} - r i \dot{\theta} &= \omega_0 i r - \frac{g}{2} r + c_1 i e^{i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} - c_2 i r^3 - c_3 i r + c_4 i r^2 e^{-i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} \\ &\quad + c_5 i r^2 e^{i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} + c_6 i e^{i[(\omega_0+\sigma)t+\theta]} \end{aligned} \quad (2.2.52b)$$

Elde edilen son denklemlerde üstel ifadelerin trigonometrik eşiti yazılır ve denklemler önce toplanır ve sonra çıkarılırsa şu denklemlere ulaşılır:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{g}{2} r - c_1 \sin [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] + c_4 r^2 \sin [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] \\ &\quad - c_5 r^2 \sin [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] - c_6 \sin [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] \end{aligned} \quad (2.2.53a)$$

$$\begin{aligned} r \dot{\theta} &= -\omega_0 r - c_1 \cos [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] + c_2 r^3 + c_3 r - c_4 r^2 \cos [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] \\ &\quad - c_5 r^2 \cos [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] - c_6 \cos [(\omega_0 + \sigma)t + \theta] \end{aligned} \quad (2.2.53b)$$

(2.2.53a), (2.2.53b) denklemlerinde $\gamma = [(\omega_0 + \sigma)t + \theta]$ dönüşümü yaparsak aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$\dot{r} = -\frac{g}{2} r - c_1 \sin \gamma + c_4 r^2 \sin \gamma - c_5 r^2 \sin \gamma - c_6 \sin \gamma \quad (2.2.54a)$$

$$r \dot{\gamma} = \sigma r - c_1 \cos \gamma + c_2 r^3 + c_3 r - c_4 r^2 \cos \gamma - c_5 r^2 \cos \gamma - c_6 \cos \gamma \quad (2.2.54b)$$

2.3.Ortalama Alma Yöntemi İle İnceleme

Bu inceleme Helmholtz salıncı denkleminin (2.3.1) 'de görülen halinin (doğal frekans 1 alınmıştır) Ek-2'de verilen Mathematica paket programı için kodlanmış programda işlenmesiyle asal ve çeşitli dereceden altharmonik rezonanslar için yapılmıştır. Bu yapılırken ikinci mertebe ortalama alma metodu kullanılmıştır. Sonuçlar aşağıdadır:

$$\ddot{x} + x = -\alpha x^2 - g \dot{x} + A \cos(\omega t) \quad (2.3.1)$$

Asal rezonans için:

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon g}{2} y_1 + \left[\frac{\varepsilon \Omega}{2\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{8\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{8\omega} \right] y_2 + \frac{5\alpha^2 \varepsilon^2}{12\omega^3} y_2 (y_1^2 + y_2^2) + \frac{\varepsilon^2 g A}{8\omega^3} \quad (2.3.2a)$$

$$\dot{y}_2 = -\left[\frac{\varepsilon \Omega}{2\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{8\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{8\omega} \right] y_1 - \frac{\varepsilon g}{2} y_2 - \frac{5\alpha^2 \varepsilon^2}{12\omega^3} y_1 (y_1^2 + y_2^2) - \frac{\varepsilon A}{2\omega} - \frac{\varepsilon^2 A \Omega}{8\omega^3} \quad (2.3.2b)$$

Burada $\Omega = \frac{\omega^2 - 1}{\varepsilon}$ dir. (2.3..2) denklemlerini kutupsal formda yazalım:

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon}{8\omega^3} \left[-4g\omega^3 r - \sqrt{(\varepsilon g A \omega)^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \sin(\theta - \varphi) \right] \quad (2.3.3a)$$

$$r \dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{24\omega^3} \left[(3\varepsilon \Omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 3\varepsilon g^2 \omega^2) r + 10\alpha^2 \varepsilon r^3 + 3 \sqrt{(\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2 + (g\varepsilon A \omega)^2} \cos(\theta - \varphi) \right] \quad (2.3.3b)$$

Burada $\varphi = \arctan \frac{\varepsilon g A \omega}{\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2}$ dir. (2.3.3) denklemlerinde $\gamma = \theta - \varphi$ dönüşümü yapılır ve Ω yerine konursa

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon g}{2} r - \frac{\varepsilon A}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 \omega^2 + (5\omega^2 - 1)^2} \sin \gamma \quad (2.3.4a)$$

$$r \dot{\gamma} = -\left[\frac{(\omega^2 - 1)^2}{8\omega^3} + \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{8\omega} \right] r - \frac{5\varepsilon^2 \alpha^2}{12\omega^3} r^3 - \frac{\varepsilon A}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 \omega^2 + (5\omega^2 - 1)^2} \cos \gamma \quad (2.3.4b)$$

elde edilir.

İkinci mertebe altharmonik rezonans durumu için şu denklemlere ulaşıldı:

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon g}{2}y_1 + \left[\frac{\varepsilon \Omega}{4\omega} - \frac{4\varepsilon^2 \alpha A}{3\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{16\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{4\omega} \right] y_2 + \frac{10\varepsilon^2 \alpha^2}{3\omega^3} y_2 (y_1^2 + y_2^2) \quad (2.3.5a)$$

$$\dot{y}_2 = -\left[\frac{\varepsilon \Omega}{4\omega} - \frac{4\varepsilon^2 \alpha A}{3\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{16\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{4\omega} \right] y_1 - \frac{\varepsilon g}{2}y_2 - \frac{10\varepsilon^2 \alpha^2}{3\omega^3} y_1 (y_1^2 + y_2^2) \quad (2.3.5b)$$

Burada $\Omega = \frac{\omega^2 - 4}{\varepsilon}$ dir. (2.3.5) denklemlerini kutupsal formda yazalım:

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon}{6\omega^3} [3g\omega^3 r + 8\alpha \varepsilon A r \sin 2\theta] \quad (2.3.6a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{(\omega^2 - 4)^2}{16\omega^3} - \frac{\varepsilon^2 g^2}{4\omega} - \frac{\omega^2 - 4}{4\omega} - \frac{10\varepsilon^2 \alpha^2}{3\omega^3} r^2 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha A}{3\omega^3} \cos 2\theta \quad (2.3.6b)$$

denklemleri elde edilir.

Üçüncü mertebe altharmonik rezonans için

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon g}{2}y_1 + \left[\frac{\varepsilon \Omega}{6\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{24\omega^3} + \frac{3\varepsilon^2 g^2}{8\omega} \right] y_2 + \frac{45\varepsilon^2 \alpha^2}{4\omega^3} y_2 (y_1^2 + y_2^2) \quad (2.3.7a)$$

$$\dot{y}_2 = -\left[\frac{\varepsilon \Omega}{6\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{24\omega^3} + \frac{3\varepsilon^2 g^2}{8\omega} \right] y_1 - \frac{\varepsilon g}{2}y_2 - \frac{45\varepsilon^2 \alpha^2}{4\omega^3} y_1 (y_1^2 + y_2^2) \quad (2.3.7b)$$

denklemleri elde edilmiştir. Burada $\Omega = \frac{\omega^2 - 9}{\varepsilon}$ dir. (2.3.7) denklemlerinin kutupsal şekli

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon g}{2}r \quad (2.3.8a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{24\omega^3} [\varepsilon \Omega^2 + 270\varepsilon \alpha^2 r^2 + 9g^2 \varepsilon \omega^2 + 4\Omega \omega^2] \quad (2.3.8b)$$

halindedir.

Dördüncü mertebe altharmonik rezonans durumunda

$$\dot{y}_1 = -\frac{\varepsilon g}{2}y_1 + \left[\frac{\varepsilon \Omega}{8\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{32\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{2\omega} \right] y_2 + \frac{80\varepsilon^2 \alpha^2}{3\omega^3} y_2 (y_1^2 + y_2^2) \quad (2.3.9a)$$

$$\dot{y}_2 = -\left[\frac{\varepsilon \Omega}{8\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{32\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{2\omega} \right] y_1 - \frac{\varepsilon g}{2}y_2 - \frac{80\varepsilon^2 \alpha^2}{3\omega^3} y_1 (y_1^2 + y_2^2) \quad (2.3.9b)$$

denklemleri elde edilmiştir. Burada $\Omega = \frac{\omega^2 - 16}{\varepsilon}$ dır. Bu denklemleri kutupsal koordinatlara taşırsak

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon g}{2} r \quad (2.3.10a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{96\omega^3} [3\varepsilon\Omega^2 + 2560\varepsilon\alpha^2 r^2 + 48\varepsilon g^2 \omega^2 + 12\Omega\omega^2] \quad (2.3.10b)$$

denklemleri elde edilir.

2.4.Helmholtz Salınıcısının Denge Noktalarının Dallanması

Şimdi çeşitli yöntemler kullanılarak belirli bir yaklaşımla elde edilen modal denklemler aracılığıyla orijinde bulunan denge noktası civarında dallanma kümesi ve diyagramlarını inceleyeceğiz.

2.4.1.Asal Rezonans Durumu İçin Dallanma Analizi

Helmholtz salınıcısında asal rezonans durumu için çoklu ölçekler yöntem, normal form analizi ve ikinci mertebe ortalama alma yöntemi ile yapılan incelemeler bizi, çoklu ölçekler metodunun sözü edilen rezonans durumu için uygulanmasında sönüm ve zorlamanın $O(\varepsilon^2)$, nonlineerliğin $O(\varepsilon)$ şeklinde ölçeklendirildiği halde ortaya çıkan ve (2.1.35), (2.1.36) ile ifade edilen modal denklemlerle aynı yapıya götürmüştür. Normal form analizi sonuçları ile sözü edilen ölçeklendirmeye çoklu ölçekler metodu sonuçlarının, kübik terimin katsayısı hariç, aynı olmasına karşın ikinci mertebe ortalama alma yöntemi ile elde edilen denklemlerin katsayısı farklıdır. Bu farklar, yöntemler gereği denklemdeki katsayıların ölçeklendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Burada önce çoklu ölçekler yöntemi ile elde edilen denklemler, sonra da ortalama alma yöntemi ile elde edilen denklemler ele alınacaktır.

Orijinal çözümün karakterini belirlemek için önce denge noktalarını bulmalı, sonra bu noktalar civarında hareket incelenmelidir [5]. Modal denklemler

$$a' = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0} \sin \gamma \quad (2.4.1a)$$

$$a\gamma' = a\sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^3 + \frac{A}{2\omega_0}\cos\gamma \quad (2.4.1b)$$

şeklindeydi. Denge noktaları $a' = \gamma' = 0$ durumunda elde edilir:

$$0 = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0}\sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{A}{\omega_0}\sin\gamma = ga \quad (2.4.2a)$$

$$0 = \sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2 + \frac{A}{2\omega_0a}\cos\gamma \quad \Rightarrow \quad -\frac{A}{2\omega_0a}\cos\gamma = \sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2 \quad (2.4.2b)$$

(2.4.2) denklemlerinin karelerini alıp toplarsak

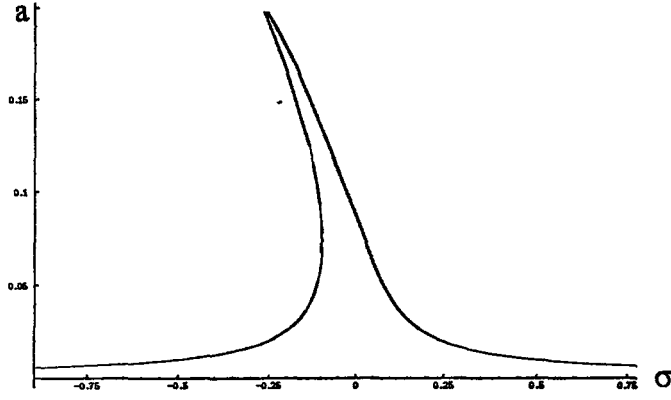
$$\left[\frac{g^2}{4} + \left(\sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2 \right)^2 \right] a^2 = \frac{A^2}{4\omega_0^2} \quad (2.4.3)$$

elde ederiz. Bu denkleme frekans-cevap denklemi denir [5]. Çünkü (2.4.3) denklemi cevap genliğinin, σ parametresi ve zorlama genliği değişkenlerinin fonksiyonu olarak, belirli bir denklemdir. a 'nın verilen g ve A değerlerine karşılık σ 'ya bağlı eğrisi frekans-cevap eğrisi olarak adlandırılır [5]. Bu eğriye dallanma diyagramı da denir [6]. Bu eğriyi çizmek için (2.4.3) denkleminde σ 'yı a 'ya bağlı olarak çözelim:

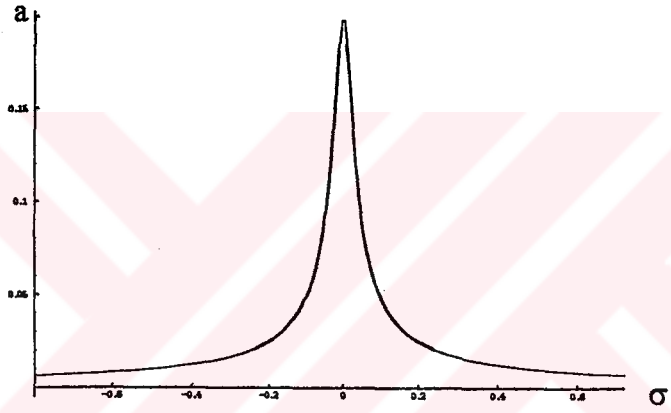
$$\sigma = -\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2 \pm \left(\frac{A^2}{4\omega_0^2a^2} - \frac{g^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.4)$$

Şekil-2.4.1a ve Şekil-2.4.1b ile verilen şekiller lineer ($\alpha = 0$) ve nonlineer ($\alpha > 0$) cevap eğrilerinin karşılaştırmasıdır. (2.4.4) denkleminde $a_t = \frac{A}{\omega_0 g}$ ile verilebilecek a 'nın tepe noktasının α 'dan bağımsız olduğu açıktır. Görüldüğü gibi lineer sonuçlar simetriktir, rezonans frekansı çevresinde dar bir bölgede çözüm görülür ve σ 'ya karşı gelen tek bir denge noktası vardır. Nonlineerliğin etkisi genliği eğmesi şeklinde kendini göstermektedir. Bu durumda çok değerli bölgeler oluşmuştur.

Şekil-2.4.2a nonlineerliğin katsayısı büyüdükçe frekans-cevap eğrisinin lineer eğriden ($\alpha = 0$) uzaklaştığını göstermektedir. Şekil-2.4.2b 'de görüldüğü gibi genlik büyüdükçe frekans-cevap eğrisi $\sigma = 0$ eksenine doğru eğilmektedir. Genliklerin tepe noktaları kesikli çizgi ile gösterilen ve denklemi $\sigma = -\frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2$ olan parabol üzerindedir.



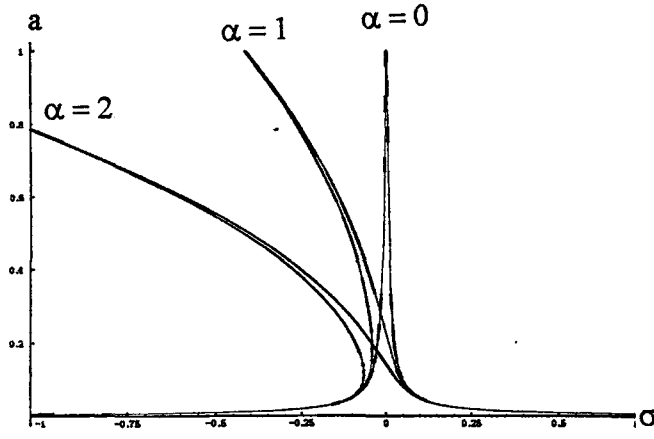
Şekil-2.4.1a : Frekans-cevap eğrisi ($\omega_0 = 1$, $A = 0.01$, $g = 0.05$, $\alpha = 4$)



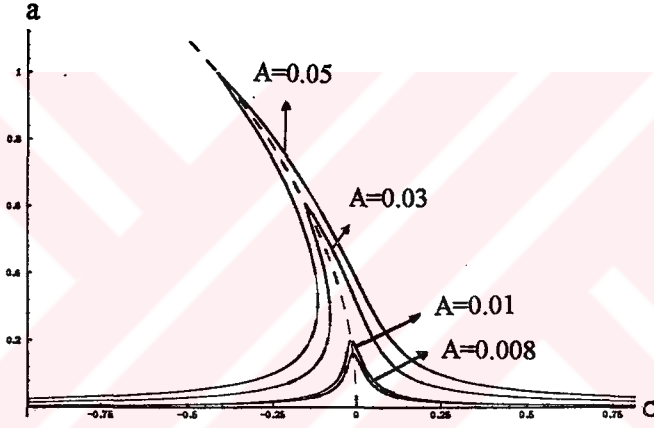
Şekil-2.4.1b : $\alpha = 0$ için frekans-cevap eğrisi ($\omega_0 = 1$, $A = 0.01$, $g = 0.05$)

Bu parbole omurga eğrisi denir [5]. Şekil-2.4.2b 'den de görüleceği gibi genlik değerlerine bağlı olarak frekans-cevap eğrilerinin bazıları çok değerli olmasına rağmen bazıları değildir.

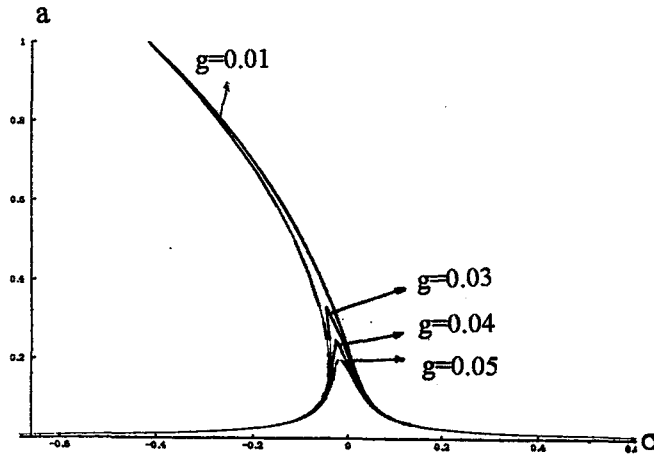
Şekil-2.4.3 'de sönüm katsayısı olan g 'nin frekans-cevap eğrisine etkisini görüyoruz. Sönümün sıfır olması durumunda genlik sonsuza gider ve frekans-cevap eğrisi omurga eğrisine asimtot iki daldan oluşur. Bu durumu (2.4.2a) denkleminde gözlemek mümkündür. Şekle dikkat edilirse g 'nin küçük değerlerinde tek değerlilik olmasına karşın, g büyüdükçe çok değerlilik görülmeye başlandığı kolayca gözlenebilir.



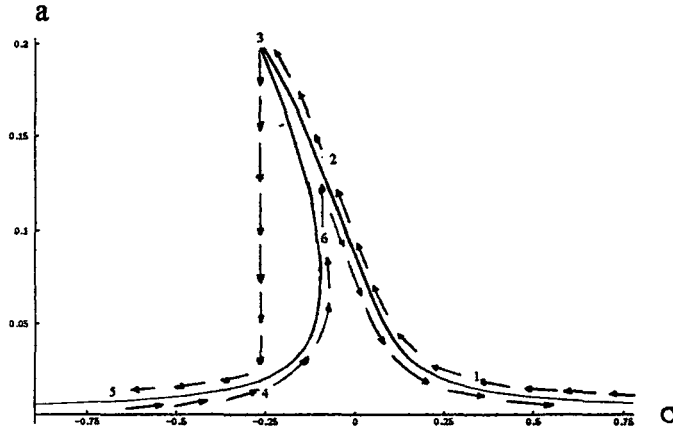
Şekil-2.4.2a : Nonlinearliğin frenks-cevap eğrisine etkisi
($\omega_0 = 1$, $A = 0.01$, $g = 0.01$)



Şekil-2.4.2b : Zorlama genliğinin frekans-cevap eğrisine etkisi
($\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, $g = 0.05$)



Şekil-2.4.3 : Sönümün frekans-cevap eğrisine etkisi
($\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, $A = 0.01$)

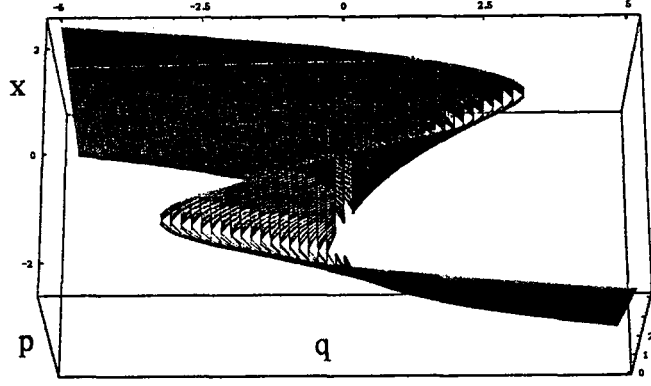


Şekil-2.4.4 : Sıçrama olayı ($\omega_0 = 1$, $A = 0.01$, $g = 0.05$, $\alpha = 4$)

Şimdi sıçrama olayını açıklayalım: Frekans-cevap eğrisindeki nonlineerliğin önemli bir etkisi olan çok değerlilik, sıçrama olayına sebep olmaktadır. Bunu açıklamak için zorlama genliği sabit tutulduğunda zorlama frekansının (burada σ 'dan sözediliyor) küçük değişmelerle lineer doğal frekansa doğru artırılıp azaldığı ve harmonik cevap genliğinin gözlemlendiği bir deney düşünelim. Deney Şekil-2.4.4 teki 1 noktasından başlasın. Frekans azalırken a yavaş yavaş artarak 3 noktasına kadar ulaşır. σ daha çok azalırsa 3 noktasından 4 noktasına sıçrama olur ve a değeri bir sıçrama yapar, daha sonra a da σ 'nın azalmasıyla yavaş yavaş azalır. Eğer deney 5 noktasından başlarsa σ artarken a da 6 noktasına kadar yavaş yavaş artar. Burada 2 noktasına bir sıçrama olur ve 2 noktasından sonra σ artarken a da yavaş yavaş azalmaya devam eder. Bu açıklamalardan çözümde dallanmalar olduğu ve frekans cevap eğrisinin 3 ile 6 noktaları arasında kararsız olduğu anlaşılır [5].

Benzer bir sıçrama olayı zorlama frekansının (Ω) sabit, zorlama genliğinin (A) değişken olduğu durumda da gözlemlenebilir.

Sıçrama olayını gözlemlenmenin bir başka yolu katastrof teorisini kullanmaktır. Verilen bir g değeri için $a = a(\sigma, A)$ yüzeyi çizilebilir. Ancak bu zor olduğundan çeşitli dönüşümler yapılarak Şekil-2.4.5 ile verilen $x^3 - px + q = 0$ yüzeyi çizilmiştir. Burada x, a'nın p ve q ise, σ ve A'nın fonksiyonlarıdır. Bu yüzeye "cusp" yüzeyi denir.



Şekil-2.4.5 : Cusp yüzeyi

Şimdi (2.4.2) denklemleri ile verilen denge noktalarının kararlılık analizlerini yapıp dallanma diyagramlarını çizelim. Kararlılık analizi için (2.4.1) denklemlerini (2.4.2) denge noktaları civarında lineerleştirmemiz gerekiyor. Buradan;

$$\begin{aligned} a' &= g(a, \gamma) = -\frac{g}{2}a + \frac{A}{2\omega_0} \sin \gamma \\ \gamma' &= f(a, \gamma) = \sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2 + \frac{A}{2\omega_0 a} \cos \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{g}{2} & \frac{A}{2\omega_0} \cos \gamma \\ \frac{5\alpha^2}{6\omega_0^3}a - \frac{A}{2\omega_0 a^2} \cos \gamma & -\frac{A}{2\omega_0 a} \sin \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g}{2} & -a\sigma - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^3 \\ \frac{\sigma}{a} + \frac{5\alpha^2}{4\omega_0^3}a & -\frac{g}{2} \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin özdeğerlerini bulalım:

$$\begin{aligned} \left(\frac{g}{2} + \lambda\right)^2 + \left(a\sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^3\right)\left(\frac{\sigma}{a} + \frac{5\alpha^2}{4\omega_0^3}a\right) &= 0 \\ \lambda^2 + g\lambda + \frac{g^2}{4} + \sigma^2 + \frac{5\alpha^2\sigma}{3\omega_0^3}a^2 + \frac{25\alpha^4}{48\omega_0^6}a^3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{g}{2} \pm \frac{1}{2} \left[-(4\sigma^2 + \frac{20\alpha^2\sigma}{3\omega_0^3}a^2 + \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}a^4) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

(2.4.5) ifadesine göre, denge noktaları $F(\sigma) \geq 0$ eşitsizliği geçerli ise kararlıdır; aksi halde kararsızdır. Burada

$$F(\sigma) = 4\sigma^2 + \frac{20\alpha^2\sigma}{3\omega_0^3}a^2 + \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}a^4 \quad (2.4.6)$$

dır. Şimdi denge noktalarını açık olarak bulalım:

$$a' = 0, \quad \gamma' = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{2\omega_0} \sin \gamma &= \frac{g}{2}a & \frac{A}{2\omega_0 a} \cos \gamma &= -\sigma - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^2 \\ \frac{A^2}{4\omega_0^2} &= \frac{g^2}{4}a^2 + (a\sigma + \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3}a^3)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{25\alpha^4}{144\omega_0^6}a^6 + \frac{5\alpha^2\sigma}{6\omega_0^3}a^4 + (\frac{g^2}{4} + \sigma^2)a^2 - \frac{A^2}{4\omega_0^2} = 0 \quad (2.4.7)$$

(2.4.7) polinomuna

$$a^2 = b \quad (2.4.8)$$

dönüşümünü uygulayalım:

$$\frac{25\alpha^4}{144\omega_0^6}b^3 + \frac{5\alpha^2\sigma}{6\omega_0^3}b^2 + (\frac{g^2}{4} + \sigma^2)b - \frac{A^2}{4\omega_0^2} = 0 \quad (2.4.9)$$

$$b^3 + \frac{24\omega_0^3\sigma}{5\alpha^2}b^2 + \frac{36\omega_0^6}{25\alpha^4}(g^2 + 4\sigma^2)b - \frac{36\omega_0^4A^2}{25\alpha^4} = 0 \quad (2.4.10)$$

Bu kez (2.4.10) ifadesinde

$$b = x - \frac{8\omega_0^3\sigma}{5\alpha^2} \quad (2.4.11)$$

dönüşümü yapıp düzenlersek

$$x^3 - \frac{12\omega_0^6}{25\alpha^4}(4\sigma^2 - 3g^2)x + \frac{4\omega_0^4}{75\alpha^6}[-32\omega_0^5\sigma^3 - 72\omega_0^5\sigma g^2 - 45\alpha^2A^2] = 0 \quad (2.4.12)$$

polinomu elde edilir. (2.4.8) ve (2.4.11) dönüşümlerini denge noktaları için kararlılık analizi kriteri olan (2.4.5) 'de kullanırsak

$$\lambda_{1,2} = -\frac{g}{2} \pm \frac{1}{2} \left[-\left(4\sigma^2 + \frac{20\alpha^2\sigma}{3\omega_0^3} \left(x - \frac{8\omega_0^3\sigma}{5\alpha^2}\right) + \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6} \left(x - \frac{8\omega_0^3\sigma}{5\alpha^2}\right)^2\right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{g}{2} \pm \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3}\sigma^2 - \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.13)$$

olur. Buna göre eğer x cinsinden elde edilecek olan denge noktası

$$\frac{4}{3}\sigma^2 \leq \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}x^2 \quad (2.4.14)$$

eşitsizliğini sağlarsa kararlı, aksi taktirde kararsız olacaktır.

Denge noktalarının davranışının analizini daha rahat yapmak için (2.4.12) ifadesini aşağıdaki gibi yazmak faydalı olacaktır:

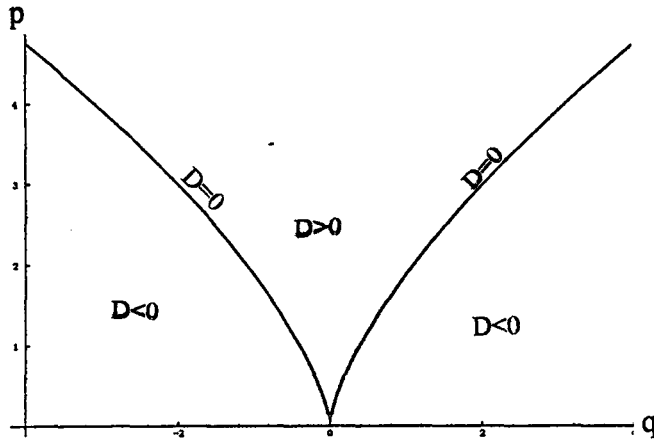
$$x^3 - px + q = 0 \quad (2.4.15)$$

Burada

$$p = \frac{12\omega_0^6}{25\alpha^4}(4\sigma^2 - 3g^2) \quad (2.4.16)$$

$$q = -\frac{4\omega_0^4}{75\alpha^6} [32\omega_0^5\sigma^3 + 72\omega_0^5\sigma g^2 + 45\alpha^2 A^2] \quad (2.4.17)$$

olur. (2.4.15) polinomunun diskriminantına bakarak köklerin durumunu inceleyelim. Şekil-2.4.6 'da $D = 4p^3 - 27q^2 = 0$ eğrisi görülüyor. $D < 0$ durumunda (2.4.15) polinomunun bir kökü reel, diğer ikisi eşlenik komplekstir ve dolayısıyla bu durumda bir denge noktası vardır. $D = 0$ durumunda, ki bu p ve q 'nun eğriler üzerindeki değerleri alması demektir, bütün kökler reel, fakat ikisi eşittir ve burada iki denge noktasından sözedilebilir. $D > 0$ iken üç kök reel ve farklıdır. Dolayısıyla bu bölgede üç denge noktası vardır. Bu açıklamalardan şekilde görülen bölgede denge noktalarının sayısının değiştiği anlaşılmaktadır. Şimdi (2.4.15) polinomu için özel durumları ele alıp kararlılık analizi de yaptıktan sonra sözkonusu özel durumların dallanma diyagramlarını elde edelim.



Şekil-2.4.6 : $D = 4p^3 - 27q^2 = 0$ eğrisi

1. $q = 0$ durumu: (2.4.15) denklemi şu hali alır:

$$x^3 - px = 0 \quad (2.4.18)$$

(2.4.18) ifadesinin kökleri:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{p} \quad x_3 = -\sqrt{p} \quad (2.4.19)$$

olur. (2.4.13) ifadesini dikkate alarak bu denge noktalarının kararlılık analizini yapalım:

$x_1 = 0$ p 'nın her değeri için kararsızdır. $p < 0$ iken ikinci ve üçüncü noktalar reel olmadığından bu denge noktaları için, $p \geq 0$ olmalıdır.

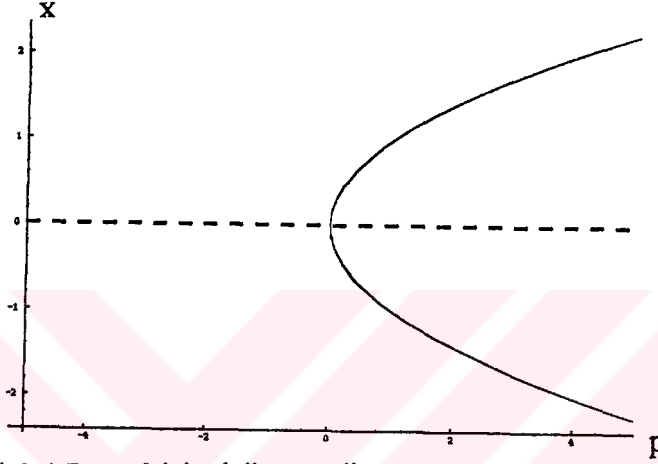
$x_2 = \sqrt{p}$ için, (2.4.13) den

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\sigma^2 &\leq \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}(\sqrt{p})^2 \\ \frac{4}{3}\sigma^2 &\leq \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}\left(\frac{12\omega_0^6}{25\alpha^4}(4\sigma^2 - 3g^24\sigma^2)\right) \\ \frac{4}{3}\sigma^2 &\leq 4\sigma^2 - 3g^2 \\ 8\sigma^2 - 9g^2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

elde edilir ki bu şart Helmholtz salınıcı denklemini de dikkate alırsak, $\sigma \neq 0$ olmak üzere sağlanır. Dolayısıyla bu denge noktası kararlı bir denge noktasıdır. $x_3 = -\sqrt{p}$

için , özdeğerlerde denge noktasının karesi alındığından, aynı inceleme ile aynı sonuca ulaşılır. Yani bu denge noktası da karardır.

Böylece $q=0$ olması halinde dallanma analizi Şekil-2.4.7 'de özetlenmiştir. Burada kesikli çizgi ile çizilmiş kısım kararsız denge noktalarını, düz çizgi ile çizilmiş olan kısım ise karardır denge noktalarını göstermektedir. Şekil-2.4.7 den de görüldüğü gibi bu dallanma "Pitchfork" dallanmasıdır.



Şekil-2.4.7 : $q=0$ için dallanma diyagramı

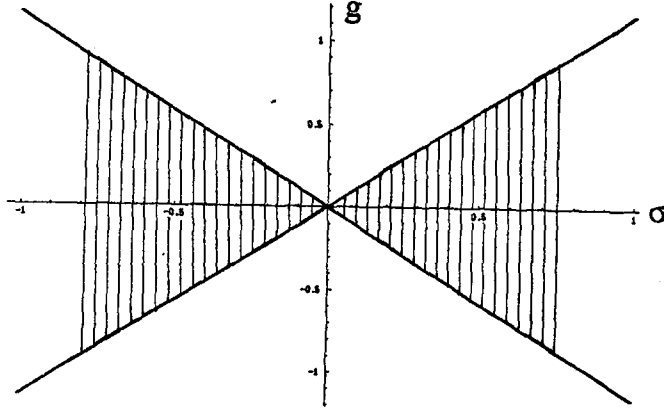
$q=0$ durumuna karşılık parametrelerin alacağı değerleri inceleyelim: x_2, x_3 denge noktalarının reel olması için $p \geq 0$ olması gerektiğini ifade etmiştik. Buna göre $p = \frac{12\omega_0^6}{25\alpha^4}(4\sigma^2 - 3g^2) \geq 0$ olmalı. Buradan da

$$4\sigma^2 \geq 3g^2 \quad (2.4.21)$$

koşulu bulunur. Buna karşılık gelen diyagram Şekil-2.4.8 de verilmiştir.

$$q = \frac{4\omega_0^4}{75\alpha^6}[-32\omega_0^5\sigma^3 - 72\omega_0^5\sigma g^2 - 45\alpha^2 A^2] = 0$$

denklemin $\sigma < 0$ alındığında (bunun alınmasının sebebi daha sonra da A'nın σ 'ya bağlı dallanma kümesinde de görüleceği gibi σ 'nın sadece negatif değerlerinde denge noktalarının sayısının değişmesidir.) şu hale gelir:



Şekil-2.4.8 : $q=0$ durumunda $p \geq 0$ için parametreler arası ilişki

$$32\omega_0^5\sigma^3 + 72\omega_0^5\sigma g^2 - 45\alpha^2 A^2 = 0$$

$$\sigma^3 + \frac{9}{4}g^2\sigma - \frac{45\alpha^2 A^2}{32\omega_0^5} = 0 \quad (2.4.22)$$

$$\Delta = -4\left(\frac{9}{4}g^2\right)^2 - 27\left(\frac{45\alpha^2 A^2}{32\omega_0^5}\right)^2 < 0 \quad (2.4.23)$$

(2.4.22) nin diskriminantı olan (2.4.23) ifadesi sıfırdan küçük kaldığından (2.4.22) denkleminin bir reel iki kompleks kökü vardır. Bu reel kök

$$\sigma = \sqrt[3]{\frac{45\alpha^2 A^2}{64\omega_0^5} + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{45\alpha^2 A^2}{32\omega_0^5}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{9}{4}g^2\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{45\alpha^2 A^2}{64\omega_0^5} - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{45\alpha^2 A^2}{32\omega_0^5}\right)^2 + \frac{1}{27}\left(\frac{9}{4}g^2\right)^3}} \quad (2.4.24)$$

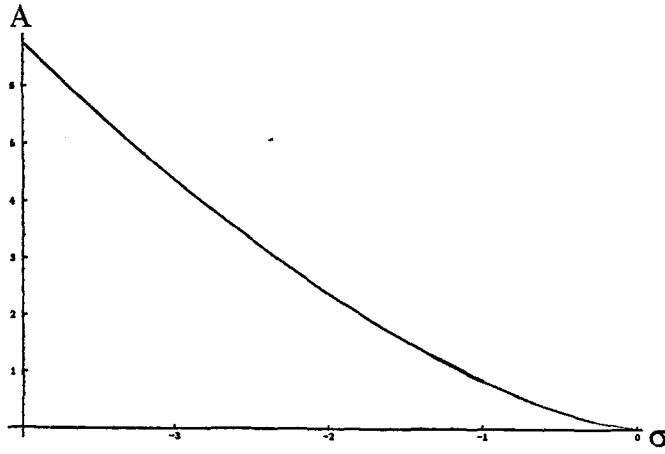
şeklindedir. Buna göre $q=0$ için parametrelerin birbiri ile ilişkileri Şekil-2.4.9, Şekil-2.4.10, Şekil-2.4.11 'de verilmiştir.

2. $p = 0$ durumu: Bu durumda (2.4.15) ifadesi şu hali alır:

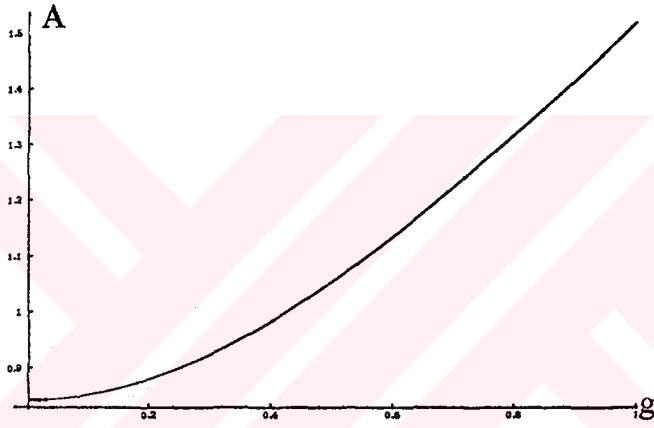
$$x^3 - q = 0 \quad (2.4.25)$$

(2.4.25) polinomunun diskriminantı $\Delta = -27\eta^2 < 0$ olduğundan tek reel kökü vardır.

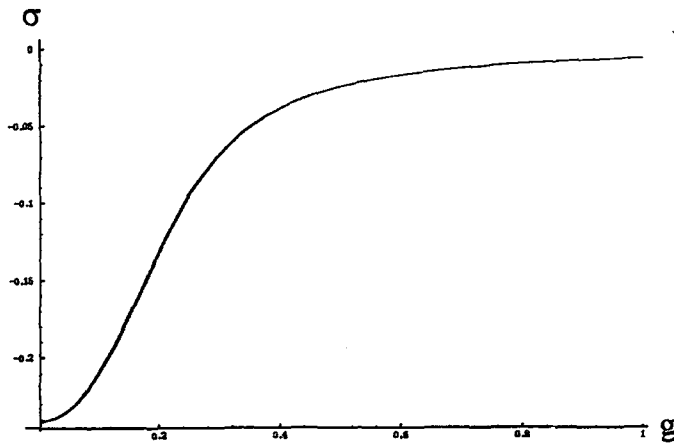
$$x = (\eta)^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.26)$$



Şekil-2.4.9 : $q=0$ için (A, σ) ilişkisi



Şekil-2.4.10 : $q=0$ için (A, g) ilişkisi



Şekil-2.4.11 : $q=0$ için (σ, g) ilişkisi

(2.4.14) ifadesini dikkate alarak bu denge noktasının kararlılık analizini yapalım:

$$\frac{4}{3}\sigma^2 \leq \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}(\eta)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{4}{3}\sigma^2 \leq -\frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6} \left(\frac{4\omega_0^4}{75\alpha^6} [32\omega_0^5\sigma^3 + 72\omega_0^5\sigma g^2 + 45\alpha^2 A^2] \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.4.27)$$

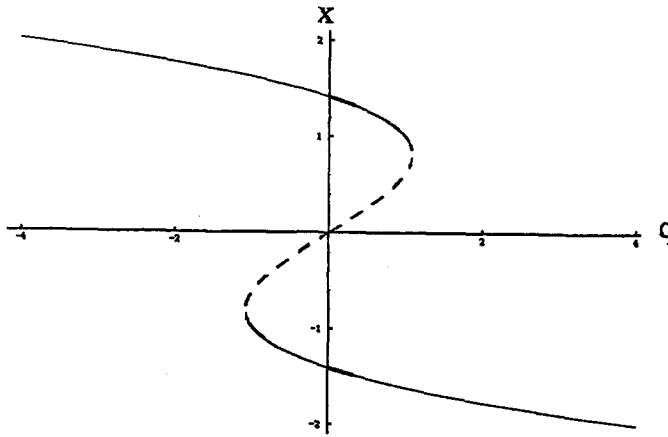
(2.4.27) eşitsizliği σ nın hiç bir değeri için sağlanamaz. Dolayısıyla sözkonusu denge noktası kararsızdır.

İncelenen $p=0$ durumunda denge noktası kararlılık değiştirmediğinden ve denge noktalarının sayısı değişmediğinden Poincare' anlamında dallanma yoktur.

3. $p = p_1$ (sabit) durumu: Bu durumda (2.4.15) ifadesi şu hali alır:

$$x^3 - p_1 x - q = 0 \quad (2.4.28)$$

Bu durum dallanma kümesi olan Şekil-2.4.6 'dan yararlanarak kolayca değerlendirilebilir. p sabit iken q , bölgeler $D<0$, $D>0$ ve $D=0$ olmak üzere üç bölgeden de geçer. Yani denge noktalarının sayısı 1 'den 3 'e değişmektedir. Bu denge noktalarının kararlılık analizi Mathematica paket programında (2.4.13) ifadesi işlenerek araştırılmış ve ilk iki kökün kararlı (burada (2.4.13) 'deki özdeğerler negatif reel kısmı kompleks sayılar çıkmıştır), üçüncü kökün kararsız olduğu sonucuna varılmıştır. Bu durum için örnek olarak $p_1=2$ alınmış ve yukarıda bahsedilen durumlar Şekil-2.4.12 ile verilen dallanma diyagramında gösterilmiştir.



Şekil-2.4.12 : $p_1=2$ için dallanma diyagramı

Buna göre dallanma tipi "Hysterisis" olur. Burada da kesikli çizgiler kararsız denge noktalarını, kesiksiz çizgiler kararlı denge noktalarını göstermektedir. $p_1=2$ için q artarken önce tek reel denge noktasının olduğu $D<0$ bölgesinden, buradan üç denge noktasının olduğu $D>0$ bölgesinden ve en son yine tek denge noktasının olduğu $D<0$ bölgesinden geçer. Kökler Cardano formüllerinden yararlanarak şu şekilde yazılır:

$$x_1 = \left[\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p_1^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p_1^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.29)$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p_1^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p_1^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.30)$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 - 4p_1^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 - 4p_1^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.31)$$

$p = p_1$ durumunda parametrelerin alabilecekleri değerleri inceleyelim:

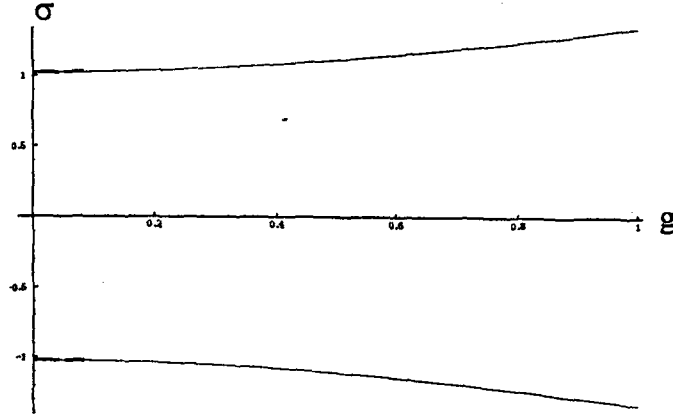
$$p_1 = \frac{12\omega_0^6}{25\alpha^4}(4\sigma^2 - 3g^2) \\ \frac{25\alpha^4}{12\omega_0^6}p_1 + 3g^2 = 4\sigma^2 \quad (2.4.32)$$

Bu durumda parametreler arasındaki ilişki Şekil-2.4.13 'de verilmiştir. Burada, dallanma diyagramı çizilirken de yapıldığı gibi, $p_1=2$ alınmıştır.

4. $q = q_1$ (sabit) durumu: Bu durumda (2.4.15) ifadesi şu hali alır:

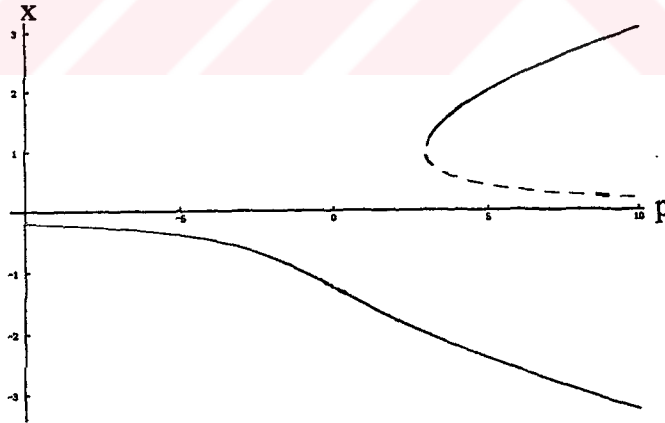
$$x^3 + px - q_1 = 0 \quad (2.4.33)$$

Değerlendirme yine Şekil-2.4.6 'daki dallanma kümesinden yararlanarak yapılabilir. q 'yu sabit tutup p 'yi artırdığımızda ($q \neq 0$ olmak üzere) sırasıyla önce bir



Şekil-2.4.13 : $p_1=2$ için (σ, g) ilişkisi

sonra iki daha sonra üç denge noktasının olduğu bölgelerden geçeriz. Kararlılık analizi yine (2.4.13) ifadesinin Mathematica'da işlenmesiyle yapılmış ve buradan ilk iki denge noktasının kararlı (özdeğerler negatif reel kısmı kompleks sayılar) üçüncü noktanın kararsız (özdeğerler aynı işaretli reel) olduğu bulunmuştur. Bu durum örnek olarak $q=2$ alınarak incelenmiş ve bununla ilgili dallanma diyagramı Şekil-2.4.14 ile verilmiştir. Buna göre dallanma tedirgenmiş "Pitchfork" dallanmasıdır.



Şekil-2.4.14 : $q_1=2$ için dallanma diyagramı

Kökler Cardano formüllerinden yararlanarak şu şekilde yazılır:

$$x_1 = \left[\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{27q_1^2 - 4p^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{\eta}{2} - \sqrt{\frac{27q_1^2 - 4p^3}{108}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.34)$$

$$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{27q_1^2 - 4p^3}{108}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q_1}{2} - \sqrt{\frac{27q_1^2 - 4p^3}{108}}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.35)$$

$$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q_1}{2} + \sqrt{\frac{27q_1^2 - 4p^3}{108}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left[\frac{q_1}{2} - \sqrt{\frac{27q_1^2 - 4p^3}{108}}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.4.36)$$

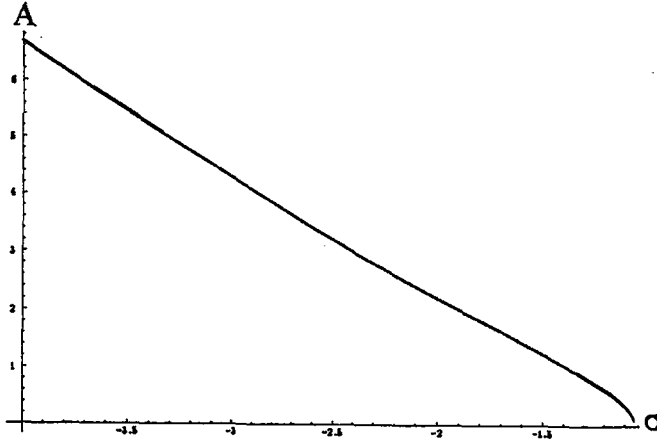
$q = q_1$ durumunda parametreler arasındaki ilişkiyi belirleyelim:

$$q_1 = -\frac{4\omega_0^4}{75\alpha^6} [32\omega_0^5\sigma^3 + 72\omega_0^5\sigma g^2 + 45\alpha^2 A^2]$$

$$A^2 = \frac{1}{45\alpha^2} \left(-\frac{75\alpha^4 q_1}{4\omega_0^4} - 32\omega_0^5\sigma^3 - 72\omega_0^5\sigma g^2 \right), A > 0$$

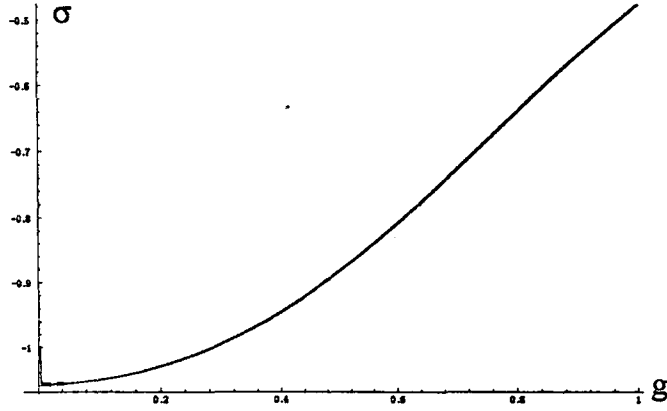
$$A = \left[\frac{1}{45\alpha^2} \left(-\frac{75\alpha^4 q_1}{4\omega_0^4} - 32\omega_0^5\sigma^3 - 72\omega_0^5\sigma g^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4.37)$$

(2.4.37)'de verilen parametreler arasındaki ilişki Şekil-2.4.15 ve Şekil-2.4.16 'da gösterilmiştir. Burada da $q_1=2$ alınmıştır.



Şekil-2.4.15 : $q_1=2$ için (A, σ) ilişkisi

Buraya kadar yapıla incelemeler x denge noktalarının p ve q cinsinden belirlenip bu p, q değerlerinin , g, A cinsinden nasıl olacağını parametreler arası



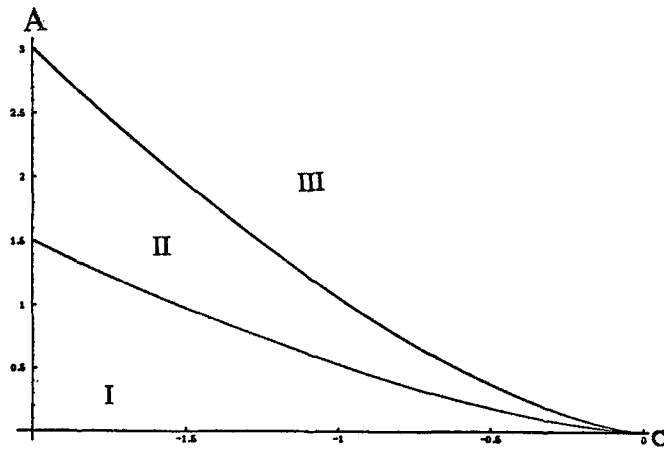
Şekil-2.4.16 : $q_1 = 2$ için (σ, g) ilişkisi

eğrileri çizerek belirlemeye çalışmaktan oluşmaktadır. Şimdi x denge noktalarının dallanma analizini σ ve A cinsinden yapalım:

Bunun için önce, Şekil-2.4.6 'da p ve q 'ya bağlı olarak verilen dallanma kümesini orijinal parametreler cinsinden elde edelim. Sözü edilen diyagramı (2.4.12) polinomunun diskriminantı olan

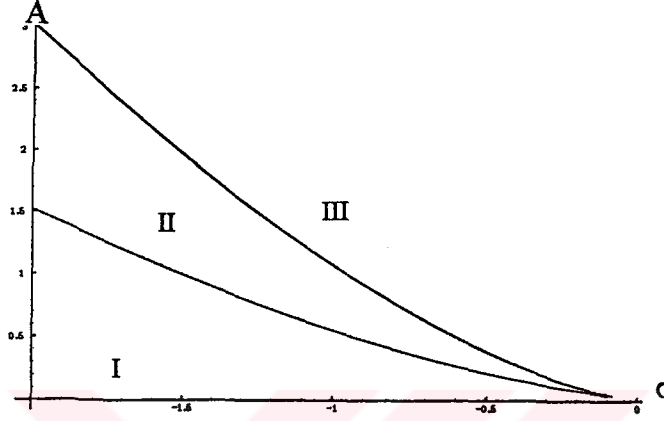
$$\Delta = 4p^3 - 27q^2 \quad (2.4.38)$$

ifadesinde p yerine (2.4.16) 'daki eşiti, q yerine (2.4.17) 'deki eşiti kullanılıp bu diskriminantın sıfıra eşitlenmesiyle oluşturabiliriz. Bu diyagram Şekil-2.4.17 ile verilmiştir. Burada $g=0.01$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$ alınmıştır.



Şekil-2.4.17 : $g = 0.01$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$ değerleri kullanılarak elde edilen (A, σ) dallanma kümesi

Şekil-2.4.17 'de I ile gösterilen bölgede (2.4.12) polinomunun bir reel iki kompleks, II ile gösterilen bölgede üç farklı reel, III ile gösterilen bölgede yine bir reel iki kompleks ve eğriler üzerinde ikisi eşit üç reel kök vardır. Şekil-2.4.18 aynı diyagramın $g=0.1$ alınarak çizilmiş halidir.

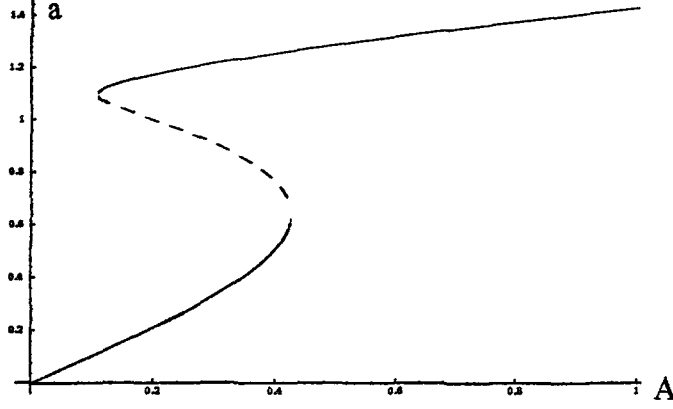


Şekil-2.4.18 : $g = 0.1$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$ değerleri kullanılarak elde edilen (A, σ) dallanma kümesi

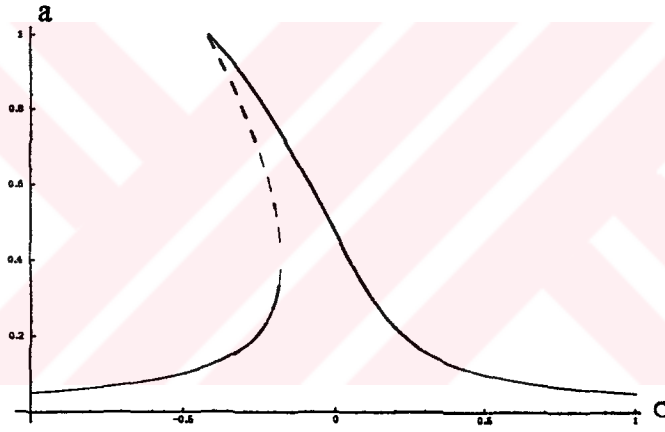
Şekil-2.4.18 'de $\sigma = -0.5$ noktasından bir dikey çizilirse sırasıyla I, II, III bölgelerinden geçer. Bu değer ve Şekil-2.4.18 'i çizerken kullandığımız diğer değişkenlerin değerlerini (2.4.7) 'de kullanırsak geçeceğimiz bölgelere göre 1, 2 veya 3 denge noktası buluruz. Bu denge noktaları Mathematica paket programı ile elde edilmiş ve kararlılık analizleri (2.4.5) ifadesi Mathematica'da işlenerek yapılmıştır. Bunun sonucunda köklerden ikisinin kararlı diğerinin kararsız olduğu bulunmuştur. Bu sonuçlar Şekil-2.4.19 'da görülebilir. Burada kesikli eğriler kararsızlık durumunu kesiksiz eğriler kararlılık durumunu ifade etmektedir.

Şekil-2.4.18 'de $A=0.1$ den yatay doğru çizilirse sırasıyla I, II, III bölgelerinden geçer. Yine, bu ve Şekil-2.4.18 elde edilirken kullanılan diğer parametrelerin değerlerini (2.4.7) 'de kullanırsak bahsedilen bölgelerin özelliğine bağlı olarak 1, 2 veya 3 denge noktası buluruz. Bu denge noktalarının kararlılık analizi (2.4.5) ifadesinin Mathematica'da işlenmesiyle yapılmış ve sonuçta iki denge noktasının kararlı diğerinin kararsız olduğu bulunmuştur. Bütün bunları Şekil-2.4.20 ile verilen

dallanma diyagramında görmek mümkündür. Burada da kesikli çizilen çizgiler kararsızlık, kesiksiz çizilenler kararlılık durumunu ifade etmektedir.



Şekil-2.4.19 : (a,A) dallanma diyagramı ($\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, $g=0.1$, $\sigma = -0.5$)



Şekil-2.4.20 : (a, σ) dallanma diyagramı ($\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, $g = 0.1$, $A = 0.1$)

Şimdi asal rezonans durumu için ikinci mertebe ortalama alma yöntemi sonucu elde edilen denklemleri inceleyelim. Denklemler, $\Omega = \frac{\omega^2-1}{\varepsilon}$ olmak üzere

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon}{8\omega^3} \left[4g\omega^3 r + \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \sin \gamma \right] \quad (2.4.39a)$$

$$r \dot{\gamma} = -\frac{\varepsilon}{24\omega^3} [(3\varepsilon \Omega^2 + 12\Omega \omega^2 + 3\varepsilon g^2 \omega^2) r + 10\varepsilon \alpha^2 r^3] - \frac{\varepsilon}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \cos \gamma \quad (2.4.39b)$$

olarak elde edilmişti. Bu denklemlerin denge noktalarını $\dot{r}=\dot{\gamma}=0$ 'dan bulalım:

$$\frac{\varepsilon}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \sin \gamma = -\frac{\varepsilon g}{2} r \quad (2.4.40a)$$

$$\frac{\varepsilon}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \cos \gamma = -\frac{\varepsilon}{24\omega^3} [(3\varepsilon \Omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 3\varepsilon g^2 \omega^2)r + 10\varepsilon \alpha^2 r^3] \quad (2.4.40b)$$

Bu denklemler, kareleri alındıktan sonra, toplanırsa frekans-cevap denklemi

$$\frac{1}{64\omega^6} [\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2] = \frac{g^2}{4} r^2 + \frac{r^2}{576\omega^6} [3\varepsilon \Omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 3\varepsilon g^2 \omega^2 + 10\varepsilon \alpha^2 r^2]^2 \quad (2.4.41)$$

olarak bulunur. Buradan bulunacak denge noktalarının kararlılık analizini yapmak için (2.4.39a,b) sisteminin denge noktaları civarında lineerleştirilmesiyle yazılacak matrisin özdeğerlerine bakmamız gerekiyor. Şimdi bu özdeğerleri bulalım:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon g}{2} & -\frac{\varepsilon}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \cos \gamma \\ -\frac{5\varepsilon^2 \alpha^2}{6\omega^3} r + \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2}}{8\omega^3 r^2} \cos \gamma & \frac{\varepsilon}{8\omega^3} \sqrt{\varepsilon^2 g^2 A^2 \omega^2 + (\varepsilon A \Omega + 4A\omega^2)^2} \sin \gamma \end{bmatrix}$$

matrisinde (2.4.40a,b) eşitliklerini kullanırsak aradığımız özdeğerleri, a ve b

$$a = \frac{\varepsilon g}{2} (1 + r) \quad (2.4.42a)$$

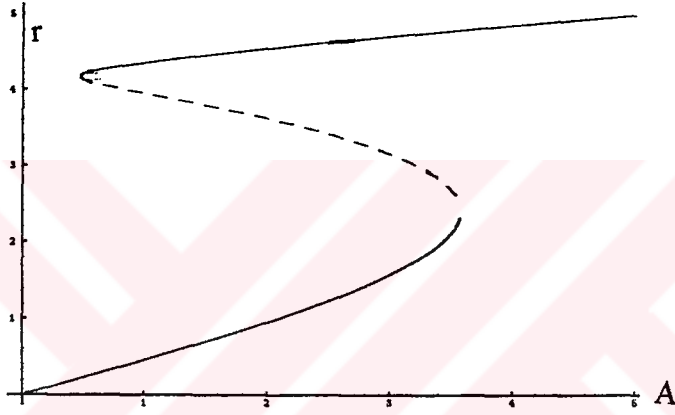
$$b = \frac{\varepsilon^2 g^2}{4} r + \left[\frac{5\varepsilon^2 \alpha^2 r}{6\omega^3} + \frac{(3\varepsilon \Omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 3\varepsilon g^2 \omega^2)r + 10\varepsilon \alpha^2 r^3}{24\omega^3 r^2} \right] \quad (2.4.42b)$$

olmak üzere

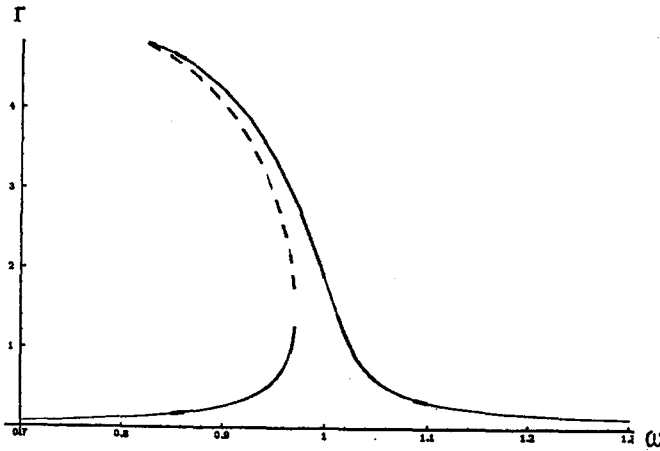
$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (2.4.43)$$

olarak buluruz. (2.4.41) ile verilen frekans-cevap denkleminde $r^2 = x$ dönüşümü kullanılırsa kökleri aradığımız denge noktalarının karesi olan üçüncü derece bir polinom buluruz. Mathematica paket programı ile bu polinomun kökleri bulunmuş ve $r = \sqrt{x}$ ters dönüşümü kullanılarak denge noktaları belirlenmiş, ancak uzun ve karışık ifadeler olduklarından buraya alınmamışlardır Sayısı üç olan bu denge noktalarında önce, $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $g = 0.1$, $\omega = 0.9$ değerleri kullanılarak Mathematica paket

programı ile (2.4.43) özdeğerleri her bir denge noktası için ayrı ayrı hesaplanıp çizdirilmiş, böylece iki denge noktasının kararlı değerinin kararsız olduğu sonucuna varılmıştır. Elde edilen bulgular Şekil-2.4.21 ile verilen (r, A) dallanma diyagramında gösterilmiştir. Sonra, aynı işlemler $\alpha = 1, \varepsilon = 0.1, g = 0.1, A = 0.6$ değerleri kullanılarak yapılmış, buradan Şekil-2.4.22 (r, ω) dallanma diyagramına ulaşılmıştır. Görüldüğü gibi, burada da denge noktalarından ikisi kararlı, biri kararsızdır. Bu diyagramlarda kesikli çizgiler kararsızlık durumunu, kesiksiz çizgiler kararlılık durumunu ifade etmektedir.



Şekil-2.4.21 : (r, A) dallanma diyagramı ($\alpha = 1, \varepsilon = 0.1, g = 0.1, \omega = 0.9$)



Şekil-2.4.22 : (r, ω) dallanma diyagramı ($\alpha = 1, \varepsilon = 0.1, g = 0.1, A = 0.6$)

2.4.2. İkinci Mertebe Üstharmonik Rezonans Durumu İçin Dallanma Analizi

B rezonans durumu için çoklu ölçekler yöntemi ile ikinci mertebe normal form analizi sonuçlarında elde edilen denklemlerin aynı olduğu görülmüş, fakat bu denklemler dallanma vermediklerinden normal form analizi dördüncü mertebeye kadar uygulanmıştır. Buradan elde edilen denklemlerin dallanmasını inceleyeceğiz: Denklemler $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ sabitleri (2.2.49) 'da verildiği gibi olmak üzere

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + [-c_1 + c_4r^2 - c_5r^2 - c_6]\sin\gamma \quad (2.4.44a)$$

$$r\dot{\gamma} = \sigma r + c_2r^3 + c_3r + [-c_1 - c_4r^2 - c_5r^2 - c_6]\cos\gamma \quad (2.4.44b)$$

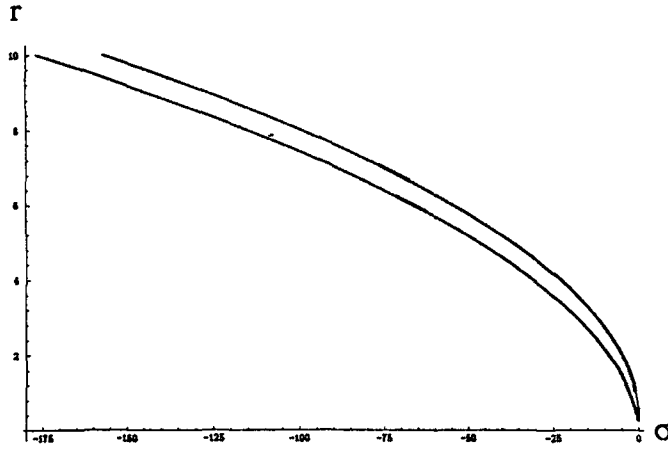
olarak elde edilmişti. Denge noktalarını araştıralım: $\dot{r}=\dot{\gamma}=0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left[(-c_1 - c_5r^2 - c_6)^2 - c_4^2r^4 \right] \sin\gamma &= \frac{g}{2}r(-c_1 - c_5r^2 - c_6 - c_4r^2) \\ \left[(-c_1 - c_5r^2 - c_6)^2 - c_4^2r^4 \right] \cos\gamma &= (-\sigma r - c_2r^3 - c_3r)(-c_1 - c_5r^2 - c_6 + c_4r^2) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemlerin kareleri alınıp toplanırsa

$$\begin{aligned} \left[(-c_1 - c_5r^2 - c_6)^2 - c_4^2r^4 \right]^2 &= r^2 \left[\frac{g^2}{4}(c_1 + c_5r^2 + c_6 + c_4r^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + (\sigma + c_2r^2 + c_3)^2(-c_1 - c_5r^2 - c_6 + c_4r^2)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

denklemi elde edilir ki bu denklemin kökleri aradığımız denge noktalarıdır. Dikkat edilirse (2.4.45) 'te $r^2 = x$ dönüşümünü kullanırsak beşinci derece polinom elde ederiz. Beşinci derece polinomun köklerini analitik olarak bulamadığımızdan bu rezonans durumunda dallanma analizi yapamıyoruz. Ancak (2.4.45) ile verilen frekans-cevap denkleminin σ 'ya göre çözülmesiyle çizilen ve Şekil-2.4.23 ile verilen frekans-cevap eğrisinde çok değerli bölgeler görüldüğünden dallanma olabileceği söylenebilmektedir. Bu eğri $\alpha = 1, \omega_0 = 1, A = 0.1, g = 0.1$ değerleri kullanılarak elde edilmiştir.



Şekil-2.4.23 : Üstharmonik rezonans için frekans-cevap eğrisi
($\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, $A = 0.1$, $g = 0.1$)

2.4.3. İkinci Mertebe Altharmonik Rezonans Durumu İçin Dallanma Analizi

Bu rezonans durumu için çoklu ölçekler yöntemi ile elde edilen denklemlerin dallanma vermediği görülmektedir. İkinci mertebe normal form analizi ile elde edilen denklemlerin çoklu ölçekler yöntemiyle elde edilenler ile aynı olduğu görülmüş, bu yüzden bu analiz dördüncü mertebeye kadar uygulanmıştır. Burada dördüncü mertebe normal form analizi ile elde edilen denklemler ile ikinci mertebe ortalama alma yöntemi sonucu elde edilen denklemler ele alınacaktır.

Dördüncü mertebe normal form analizi sonucunda elde edilen denklemler, $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ sabitleri (2.2.32) ile verildiği gibi olmak üzere

$$\dot{r} = -\frac{g}{2}r + [c_1r - c_4r^3 - c_5r^3 + c_6r]\sin\gamma \quad (2.4.46a)$$

$$\dot{\gamma} = \sigma + 2c_2r^2 + 2c_3 + [2c_1 + 2c_4r^2 - 2c_5r^2 + 2c_6]\cos\gamma \quad (2.4.46b)$$

şeklindeydi. Denge noktalarını bulmak için $\dot{r}=\dot{\gamma}=0$ eşitliklerini kullandıktan sonra trigonometrik terimleri bir tarafa alarak eşitliklerin karelerini alıp, iki denklemi toplarsak

$$\left[(c_1 - c_5r^2 + c_6)^2 - c_4^2r^4 \right]^2 r^2 = \frac{g^2}{4}r^2(c_1 - c_5r^2 + c_6 + c_4r^2)^2 + r^2\left(\frac{\sigma}{2} + c_2r^2 - c_3\right)^2(c_1 - c_5r^2 + c_6 - c_4r^2)^2 \quad (2.4.47)$$

denklemini elde edilir. Burada triviyal $r=0$ denge noktasının varlığı dikkat çekicidir. Triviyal olmayan denge noktalarını

$$\left[(c_1 - c_5 r^2 + c_6)^2 - c_4^2 r^4 \right]^2 = \frac{g^2}{4} (c_1 - c_5 r^2 + c_6 + c_4 r^2)^2 + \left(\frac{\sigma}{2} + c_2 r^2 - c_3 \right)^2 (c_1 - c_5 r^2 + c_6 - c_4 r^2)^2 \quad (2.4.48)$$

denklemden bulacağız. Bu denge noktalarının kararlılık analizi için (2.4.46) denklemlerini lineerleştirir, burada sözkonusu denge noktalarını kullanır ve lineer kısmın katsayılarından oluşturulacak matrisin özdeğerlerini bulursak

$$a = \frac{g}{2} - \frac{g(c_1 - 3c_4 r^2 - 3c_5 r^2 + c_6)}{2c_1 - 2c_4 r^2 - 2c_5 r^2 + 2c_6} + \frac{g(c_1 + c_4 r^2 - c_5 r^2 + c_6)}{c_1 - c_4 r^2 - c_5 r^2 + 2c_6}$$

$$b = \left(-\frac{g}{2} + \frac{g(c_1 - 3c_4 r^2 - 3c_5 r^2 + c_6)}{2c_1 - 2c_4 r^2 - 2c_5 r^2 + 2c_6} \right) \left(\frac{-g(c_1 + c_4 r^2 - c_5 r^2 + c_6)}{c_1 - c_4 r^2 - c_5 r^2 + 2c_6} \right)$$

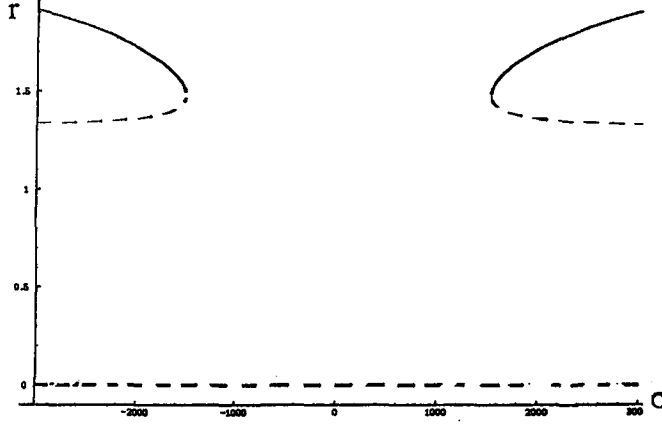
$$- \left[4c_2 r + \frac{(4c_4 r - 4c_5 r)(-\sigma - 2c_2 r^2 - 2c_3)}{2c_1 + 2c_4 r^2 - 2c_5 r^2 + 2c_6} \right] \left[\frac{r(c_1 - c_4 r^2 - c_5 r^2 + c_6)(-\sigma - 2c_2 r^2 - 2c_3)}{2c_1 + 2c_4 r^2 - 2c_5 r^2 + 2c_6} \right]$$

olmak üzere

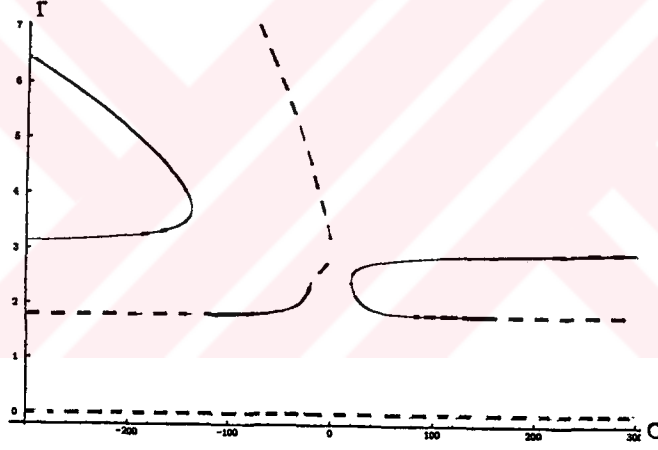
$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad (2.4.49)$$

elde ederiz. (2.4.48) denkleminde $r^2 = x$ dönüşümü yapıldıktan sonra x 'ler Mathematica paket programı ile bulunmuş, sonra $r = \sqrt{x}$ olan denge noktaları elde edilmiştir. Bunlar çok uzun ve karışık ifadeler olduklarından buraya alınmamışlardır. Bunun yerine parametrelere çeşitli değerler verilerek ve (2.4.49) özdeğerleri de her bir denge noktası için Mathematica 'da işlenerek dallanma diyagramları elde edilmiştir. Görüldüğü gibi triviyal ile birlikte en çok 4 denge noktası vardır. (r, σ) dallanma diyagramı önce $\alpha = 1, \omega_0 = 1, A = 0.1, g = 0.1$ değerleri için, sonra $\alpha = 1, \omega_0 = 1, A = 10, g = 10$ değerleri için ve $\alpha = 1, \omega_0 = 1, A = 10, g = 1$ değerleri için ayrı ayrı elde edilmiş, sonuçlar sırasıyla Şekil-2.4.24, Şekil-2.4.25, Şekil-2.4.26 ile verilmiştir. (r, A) dallanma diyagramı $\alpha = 1, \omega_0 = 1, g = 1, \sigma = -10$ değerleri için elde edilmiş ve

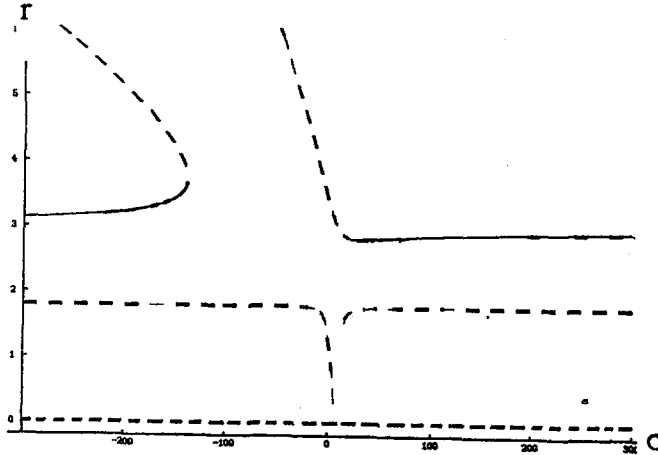
Şekil-2.4.27 ile verilmiştir. Bu şekillerde kesikli çizgiler kararsızlık durumunu, kesiksiz çizgiler kararlılık durumunu ifade etmektedir.



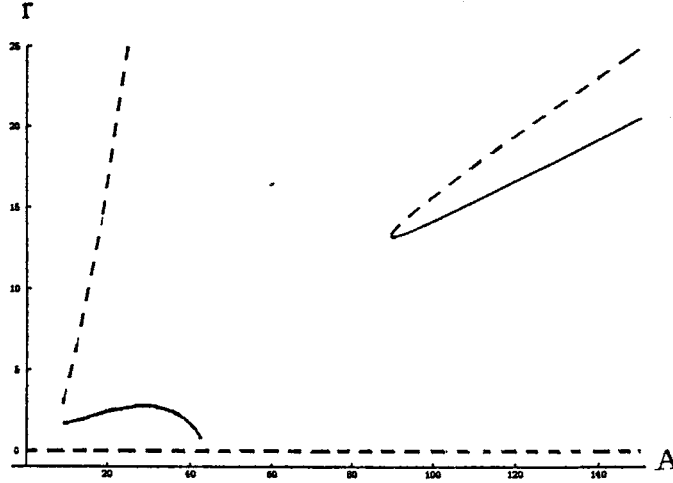
Şekil-2.4.24 : $A=0.1$, $g=0.1$ değerleri için (r, σ) dallanma diyagramı ($\omega_0 = \alpha = 1$)



Şekil-2.4.25 : $A=10$, $g=10$ değerleri için (r, σ) dallanma diyagramı $\omega_0 = \alpha = 1$



Şekil-2.4.26 : $A=10$, $g=1$ değerleri için (r, σ) dallanma diyagramı $\omega_0 = \alpha = 1$



Şekil-2.4.27 : (r,A) dallanma diyagramı $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, $g = 1$, $\sigma = -10$)

Şimdi b rezonans durumu için ikinci mertebe ortalama alma yöntemi ile elde edilen denklemleri ele alalım: Denklemler $\Omega = \frac{\omega^2 - 4}{\varepsilon}$ olmak üzere

$$\dot{r} = -\frac{\varepsilon}{6\omega^3} [3g\omega^3 r + 8\alpha\varepsilon A r \sin 2\theta] \quad (2.4.50a)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\varepsilon}{48\omega^3} [3\varepsilon\Omega^2 + 12\varepsilon g^2 \omega^2 + 12\Omega\omega^2 + 160\varepsilon\alpha^2 r^3 + 64\alpha\varepsilon A \cos 2\theta] \quad (2.4.50b)$$

olarak elde edilmişti. Denge noktalarını bulmak için $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ kullanılır, trigonometrik terimler bir tarafa alınır ve denklemler, kareleri alındıktan sonra toplanırsa

$$\frac{16\varepsilon^2\alpha^2 A^2}{9\omega^6} r^2 = \frac{g^2}{4} r^2 + r^2 \left[\frac{\varepsilon\Omega^2}{16\omega^3} + \frac{\varepsilon g^2}{4\omega} + \frac{\Omega}{4\omega} + \frac{10\varepsilon\alpha^2}{3\omega^3} r^2 \right]^2 \quad (2.4.51)$$

denklemleri bulunur. Görüldüğü gibi $r=0$ triviyal denge noktası vardır. Triviyal olmayan denge noktaları için

$$\frac{16\varepsilon^2\alpha^2 A^2}{9\omega^6} = \frac{g^2}{4} + \left[\frac{\varepsilon\Omega^2}{16\omega^3} + \frac{\varepsilon g^2}{4\omega} + \frac{\Omega}{4\omega} + \frac{10\varepsilon\alpha^2}{3\omega^3} r^2 \right]^2 \quad (2.4.52)$$

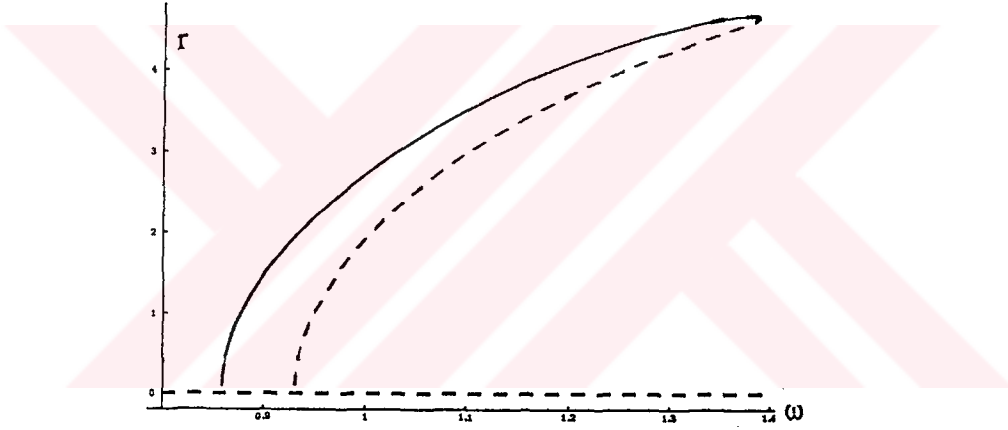
denklemleri Mathematica'da çözülmüştür. Sonuçta en çok üç denge noktası olduğu görülüyor. Denge noktalarının kararlılık analizi için daha önce de yapılan işlemler tekrar edilirse özdeğerler

$$a = \frac{20\varepsilon^2\alpha^2}{3\omega^3} r^2 \left[\frac{\varepsilon^2\Omega^2}{8\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{2\omega} + \frac{\varepsilon\Omega}{2\omega} + \frac{20\varepsilon^2\alpha^2}{3\omega^3} r^2 \right] \quad (2.4.53)$$

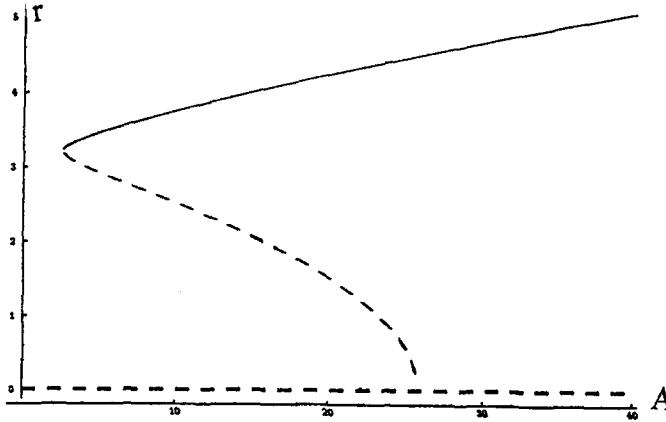
olmak üzere

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\varepsilon g \pm \sqrt{\varepsilon^2 g^2 - 4a}}{2} \quad (2.4.54)$$

olarak elde edilir. $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $g = 0.5$, $A = 5$ değerleri için denge noktalarının kararlılık analizi (2.4.54) ifadesi Mathematica'da işlenerek yapılmış ve Şekil-2.4.28 ile verilen (r, ω) dallanma diyagramı elde edilmiştir. Sonra benzer işlemler $\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $g = 0.1$, $\omega = 1.9$ değerleri için yapılmış ve Şekil-2.4.29 ile verilen (r, A) dallanma diyagramı elde edilmiştir. Bu şekillerde de kesikli çizgiler kararsızlık durumunu, kesiksiz çizgiler kararlılık durumunu ifade etmektedir.



Şekil-2.4.28 : (r, ω) dallanma diyagramı ($\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $g = 0.5$, $A = 5$)



Şekil-2.4.29 : (r, A) dallanma diyagramı ($\alpha = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $g = 0.1$, $\omega = 1.9$)

BÖLÜM 3. HELMHOLTZ SALINICISININ PERİYODİK ÇÖZÜMLERİNİN DALLANMA ANALİZİ

Rubia, Torre ve Antoranz'un Helmholtz denklemiyle ilgili olarak yaptıkları sayısal ve analog çalışmalarda [7], $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periyodundaki periyodik yörüngelerin periyodik çiftleme dallanmalarıyla kararlılığını kaybedip periyodu $\frac{4\pi}{\omega}$, $\frac{8\pi}{\omega}$ olan yörüngeler gözlenmiştir. Bu bölümde ikinci mertebe ortalama alma yöntemiyle bu dallanmaları inceleyeceğiz.

3.1. $\frac{2\pi}{\omega}$ Periyodik Çözüm Civarında Denklemlerin Elde Edilmesi

Helmholtz denklemini küçük periyodik zorlama ve sönüm ile şu şekilde verebiliriz:

$$\ddot{x} + x + x^2 = \bar{A} \cos \omega t - \bar{g} \dot{x} \quad \bar{A} \geq 0, |\bar{g}| \ll 1 \quad (3.1)$$

$\bar{g} = \bar{A} = 0$ iken hareketin ilk integrali,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x + x^2 &= 0 & \frac{d^2x}{dt^2} &= -x - x^2 & 2 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} dt &= -2(x + x^2) \frac{dx}{dt} dt \\ d\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= -2(x + x^2) dx & \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= -x^2 - \frac{2}{3}x^3 \\ H(x, \dot{x}) &= \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

olarak bulunur. Şimdi (3.1) denkleminde zorlama genliğini sıfır almakla elde edeceğimiz denklemin denge noktalarını bulup kararlılık analizlerini yapalım:

$$\bar{A} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + x + x^2 = -\bar{g} \dot{x}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 - \bar{g}x_2 \end{aligned}$$

Buradan (0,0) ve (0,-1) denge noktaları bulunur. Bu noktaların kararlılık analizi için aşağıdaki işlemleri yaparsak

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2x_1 & -\bar{g} \end{bmatrix}$$

$$\left| \tilde{J}_{(0,0)} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\bar{g} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda\bar{g} + 1 \Rightarrow \lambda_{1,1}^{(0,0)} = \frac{-\bar{g} \pm \sqrt{\bar{g} - 4}}{2}$$

$$\left| \tilde{J}_{(-1,0)} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\bar{g} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda\bar{g} - 1 \Rightarrow \lambda_{1,1}^{(-1,0)} = \frac{-\bar{g} \pm \sqrt{\bar{g} + 4}}{2}$$

(0,0) denge noktasının, sönüm katsayısı olan, $\bar{g}$ 'ye göre kararlılık durumunun değiştiğini, buna karşın diğer denge noktasının sürekli kararsız olduğunu buluruz.

Daha önce, çoklu ölçekler yöntemi, normal form analizi ve ortalama alma yöntemi ile yaptığımız denge noktası civarında yerel analiz sonuçları (3.1) denkleminin periyodik çözümlerinin varlığını, modal denklemlerde zorlamanın görülmesi ile, ortaya koymuştur. $\hat{x} = \hat{x}(t)$ (3.1)'in böyle bir periyodik çözümü olmak üzere $x = \hat{x} + \varepsilon y$ $\varepsilon \ll 1$ $\bar{A} = \varepsilon A$ $\bar{g} = \varepsilon g$ dönüşümlerini yapalım:

$$\ddot{\hat{x}} + \varepsilon \ddot{y} + \hat{x} + \varepsilon y + \hat{x}^2 + 2\varepsilon \hat{x} y + \varepsilon^2 y^2 = \varepsilon A \cos \omega t - \varepsilon g(\hat{x} + \varepsilon y)$$

$\hat{x}(t)$ (1) için bir çözüm olduğundan $\ddot{\hat{x}} + \hat{x} + \hat{x}^2 = \varepsilon A \cos \omega t - \varepsilon g \hat{x}$ olur.

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{y} + \varepsilon y + 2\varepsilon \hat{x} y + \varepsilon^2 y^2 &= -\varepsilon^2 g y \\ \ddot{y} + y + 2\hat{x} y + \varepsilon y^2 &= -\varepsilon g y \\ \ddot{y} + (2\hat{x} + 1)y &= -\varepsilon(g y + y^2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Şimdi $\hat{x}(t)$ yi belirlemek zorundayız. Öncelikle $\hat{x}(t)$ ε^2 mertebesine kadar (3.1) in yaklaşık periyodik çözümü olarak kabul edilebilir:

$$\hat{x}(t) = \varepsilon \hat{x}_0(t) + \varepsilon^2 \hat{x}_1(t) + O(\varepsilon^2) \quad (3.4)$$

(3.4)'ü (3.1) 'de yerine yazıp ε 'nun kuvvetlerini eşitleyelim:

$$\begin{aligned} \varepsilon \ddot{\hat{x}}_0 + \varepsilon^2 \ddot{\hat{x}}_1 + \varepsilon \hat{x}_0 + \varepsilon^2 \hat{x}_1 + \varepsilon^2 \hat{x}_0^2 + 2\varepsilon^3 \hat{x}_0 \hat{x}_1 + \varepsilon^4 \hat{x}_1^2 = \\ \varepsilon A \cos \omega t - \varepsilon^2 g \hat{x}_0 - \varepsilon^3 g \hat{x}_1 \end{aligned}$$

$$\varepsilon : \ddot{\hat{x}}_0 + \hat{x}_0 = A \cos \omega t \quad (3.5a)$$

$$\varepsilon^2 : \ddot{\hat{x}}_1 + \hat{x}_1 = -\hat{x}_0^2 - g \hat{x}_0 \quad (3.5b)$$

(3.4) denklemindeki ilk terim (sabit terim) $(\hat{x}, \dot{\hat{x}}) = (0, 0)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ iken) denge noktasına yaklaşılrken ilgilenildiğinden (çünkü sadece bu denge noktasında kararlılık değişmesi sözkonusu) '0' olarak seçildi. (3.5a) 'yı çözmek için ω 'yı belirlemek zorundayız. 2 ve 3 periyod yörüngeleri için sırası ile $\omega = 2$ ve $\omega = 3$ olmalı. Böylece (3.5a) denklemini rezonant değildir.

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}}_0 + \hat{x}_0 &= A \cos \omega t \\ r^2 + 1 &= 0 \quad r = \pm i \quad \hat{x}_0^h(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ \hat{x}_0^p(t) &= c \cos \omega t \quad \dot{\hat{x}}_0^p(t) = -c\omega \sin \omega t \quad \ddot{\hat{x}}_0^p(t) = -c\omega^2 \cos \omega t \\ -c\omega^2 \cos \omega t + c \cos \omega t &= A \cos \omega t \quad c(1 - \omega^2) = A \quad c = \frac{A}{1 - \omega^2} \\ \hat{x}_0^p &= \frac{A}{1 - \omega^2} \cos \omega t \quad \Gamma = \frac{A}{1 - \omega^2} \\ \hat{x}_0(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \Gamma \cos \omega t \end{aligned}$$

Birinci ve ikinci terimler $\frac{2\pi}{\omega}$ periyodunda değildir. Dolayısıyla bu terimler periyodikliği bozan terimlerdir. Eğer $c_1=0$, $c_2=0$ alınırsa periyodiklik korunmuş olur:

$$\hat{x}_0(t) = \Gamma \cos \omega t \quad (3.6)$$

(3.6) 'yı kullanarak aynı işlemleri (3.5b) için yapalım:

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{x}}_1 + \hat{x}_1 &= g\Gamma \omega \sin \omega t - \Gamma^2 \cos^2 \omega t \\ &= g\Gamma \omega \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \cos 2\omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \\ \hat{x}_1^h &= c_3 \cos t + c_4 \sin t \\ \hat{x}_1^p &= \frac{g\Gamma \omega}{1 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{2(1 - 4\omega^2)} \cos 2\omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \\ \hat{x}_1(t) &= c_3 \cos t + c_4 \sin t + \frac{g\Gamma \omega}{1 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{2(1 - 4\omega^2)} \cos 2\omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \end{aligned}$$

Burada da birinci ve ikinci terimler periyodikliği bozan terimlerdir. Bu duruma engel olmak için $c_3=c_4=0$ olmalıdır.

$$\hat{x}_1(t) = \frac{g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{2(1-4\omega^2)} \cos 2\omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \quad (3.7)$$

(3.6) ve (3.7)'yi (3.4) denkleminde kullanalım:

$$x(t) = \varepsilon \Gamma \cos \omega t + \varepsilon^2 \left(\frac{g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{2(1-4\omega^2)} \cos 2\omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \right) + O(\varepsilon^3)$$

bulunur. Bunu (3.3) 'te kullanalım:

$$\ddot{y} + \left[2\varepsilon \Gamma \cos \omega t + 2\varepsilon^2 \left(\frac{g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{2(1-4\omega^2)} \cos 2\omega t - \frac{\Gamma^2}{2} \right) + 1 \right] y = \varepsilon(g \dot{y} + y^2)$$

$$\ddot{y} + y = -\varepsilon(2\Gamma \cos \omega t y + g \dot{y} + y^2) - \varepsilon^2 \left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t \right. \\ \left. - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \cos 2\omega t - \Gamma^2 \right] y + O(\varepsilon^3)$$

$$\stackrel{\Delta}{=} \varepsilon f_0(y, \dot{y}, t) + \varepsilon^2 f_1(y, \dot{y}, t) + O(\varepsilon^3) \quad (3.8)$$

Ortalama alma teoreminin uygulanabilmesi için önce (3.8) denkleminin aşağıdaki gibi standart forma getirilmesi gerekmektedir.

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon \tilde{f}(\tilde{x}, t) + \varepsilon^2 \tilde{g}(\tilde{x}, t) \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (3.9)$$

Burada $\tilde{f}$ ve $\tilde{g}$ T-periyodik fonksyonlardır. Ortalama alma teoremi veya Krylov-Bugoliubov (K-B) metodu, (3.9) denkleminin aşağıdaki ortalanmış eşiti ile değiştirilebileceğini söyler.

$$\dot{\tilde{x}} = \varepsilon \tilde{f}_0(\tilde{x}) + O(\varepsilon^2) \quad \tilde{f}_0(\tilde{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{f}(\tilde{x}, t) dt \quad (3.10)$$

Standart forma getirilmesi için (3.8)'e Van Der Pol dönme dönüşümü uygulanabilir:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k\omega t & -\frac{\sin k\omega t}{k\omega} \\ -\sin k\omega t & -\frac{\cos k\omega t}{k\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \tilde{A}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Dönme sayısı $k = \frac{m}{n}$ çalışılmak istenen rezonansın derecesine göre sonradan seçilecektir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \cos k\omega t & -\frac{\sin k\omega t}{k\omega} \\ -\sin k\omega t & -\frac{\cos k\omega t}{k\omega} \end{bmatrix} \quad \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos k\omega t & -\sin k\omega t \\ -k\omega \sin k\omega t & -k\omega \cos k\omega t \end{bmatrix}$$

$$y = \cos k\omega t u - \sin k\omega t v \quad \dot{y} = -k\omega \sin k\omega t u - k\omega \cos k\omega t v$$

$$y = y_1 \quad \dot{y}_1 = y_2 = \dot{y}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 - \varepsilon(2\Gamma \cos \omega t y_1 + g y_2 + y_1^2) \\ &\quad - \varepsilon^2 \left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \cos 2\omega t - \Gamma^2 \right] y_1 + O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -k\omega \sin k\omega t u - k\omega \cos k\omega t v + \cos k\omega t \dot{u} - \sin k\omega t \dot{v} \\ \dot{y}_2 &= -k^2\omega^2 \cos k\omega t u + k^2\omega^2 \sin k\omega t v - k\omega \sin k\omega t \dot{u} - k\omega \cos k\omega t \dot{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = y_2 &\Rightarrow \\ -k\omega \sin k\omega t u - k\omega \cos k\omega t v + \cos k\omega t \dot{u} - \sin k\omega t \dot{v} &= \\ &\quad -k\omega \sin k\omega t u - k\omega \cos k\omega t v \\ \cos k\omega t \dot{u} - \sin k\omega t \dot{v} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -k^2\omega^2 \cos k\omega t u + k^2\omega^2 \sin k\omega t v - k\omega \sin k\omega t \dot{u} - k\omega \cos k\omega t \dot{v} \\ = -\cos k\omega t u + \sin k\omega t v - \varepsilon[2\Gamma(\cos \omega t u - \sin k\omega t v) \\ g(-k\omega \sin k\omega t u - k\omega \cos k\omega t v) + (\cos k\omega t u - \sin k\omega t v)^2] \\ - \varepsilon^2 \left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \cos 2\omega t - \Gamma^2 \right] (\cos k\omega t u - \sin k\omega t v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin k\omega t \dot{u} + \cos k\omega t \dot{v} &= \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega} \cos k\omega t u - \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega} \sin k\omega t v \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{k\omega} [2\Gamma \cos \omega t \cos k\omega t u - 2\Gamma \cos \omega t \sin k\omega t v - gk\omega \sin k\omega t u \\ &\quad - gk\omega \cos k\omega t v + \cos^2 k\omega t u^2 - 2 \cos k\omega t \sin k\omega t uv + \sin^2 k\omega t v^2] \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{k\omega} \left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t \cos k\omega t u - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \sin \omega t \sin k\omega t v - \Gamma^2 \cos k\omega t u \right. \\ &\quad \left. + \Gamma^2 \sin k\omega t v + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \cos 2\omega t \cos k\omega t u \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\cos 2\omega t \sin k\omega t v \Big] + O(\varepsilon^2)$$

$c \stackrel{\Delta}{=} \cos k\omega t$ $s \stackrel{\Delta}{=} \sin k\omega t$ $\bar{c} \stackrel{\Delta}{=} \cos \omega t$ $\bar{c}_2 \stackrel{\Delta}{=} \cos 2\omega t$ $c^2 + s^2 = 1$ dönüşümleri yerlerine konursa

$$\begin{aligned} c \dot{u} - s \dot{v} &= 0 \\ s \dot{u} + c \dot{v} &= \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega}(cu - sv) + \frac{\varepsilon}{k\omega}[2\Gamma\bar{c}cu - 2\Gamma\bar{c}sv \\ &\quad - gk\omega su - gk\omega cv + c^2u^2 - 2csuv + s^2v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega}\left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}cu \right. \\ &\quad \left. - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}sv - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2cu + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2sv - \Gamma^2cu + \Gamma^2sv\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki denklemden, önce birincisi c ikincisi s ile çarpılıp toplanır, sonra birincisi $-s$ ikincisi c ile çarpılır ve toplanırsa sırasıyla

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega}csu - \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega}s^2v + \frac{\varepsilon}{k\omega}[2\Gamma\bar{c}csu - 2\Gamma\bar{c}s^2v - gk\omega s^2u \\ &\quad - gk\omega csv + c^2su^2 - 2cs^2uv + s^3v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega}\left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}csu \right. \\ &\quad \left. - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}s^2v - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2csu + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2s^2v - \Gamma^2csu + \Gamma^2s^2v\right] \\ \dot{v} &= \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega}c^2u - \frac{1-k^2\omega^2}{k\omega}csv + \frac{\varepsilon}{k\omega}[2\Gamma\bar{c}c^2u - 2\Gamma\bar{c}csv - gk\omega csu \\ &\quad - gk\omega c^2v + c^3u^2 - 2c^2suv + sc^2v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega}\left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}c^2u \right. \\ &\quad \left. - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}csv - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2c^2u + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2csv - \Gamma^2c^2u + \Gamma^2csv\right] \end{aligned}$$

bulunur. $\Omega = \frac{1-k^2\omega^2}{\varepsilon}$ ifadesini kullanıp $\dot{u}$ ve $\dot{v}$ 'yi yeniden yazarsak:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\varepsilon}{k\omega}[\Omega csu - \Omega s^2v + 2\Gamma\bar{c}csu - 2\Gamma\bar{c}s^2v - gk\omega s^2u \\ &\quad - gk\omega csv + c^2su^2 - 2cs^2uv + s^3v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega}\left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}csu \right. \\ &\quad \left. - \frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}s^2v - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2csu + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2}\bar{c}_2s^2v - \Gamma^2csu + \Gamma^2s^2v\right] \quad (3.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{\varepsilon}{k\omega}[\Omega c^2u - \Omega csv + 2\Gamma\bar{c}c^2u - 2\Gamma\bar{c}csv - gk\omega csu \\ &\quad - gk\omega c^2v + c^3u^2 - 2c^2suv + sc^2v^2] + \frac{\varepsilon^2}{k\omega}\left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2}\bar{s}c^2u \right. \end{aligned}$$

$$\left[\frac{2g\Gamma\omega}{1-\omega^2} \bar{s}c s v - \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \bar{c}^2 c^2 u + \frac{\Gamma^2}{1-4\omega^2} \bar{c}^2 c s v - \Gamma^2 c^2 u + \Gamma^2 c s v \right] \quad (3.13)$$

elde edilir.

3.2. İkinci Mertebe Altharmonik İçin İkinci Mertebe Ortalama Alma Yönteminin Uygulanması

Önce ε mertebesinde terimlerin ortalamasını alacağız: (3.12) ve (3.13) deki terimler $O(\varepsilon)$ mertebesinde tutulursa aşağıdaki sistem bulunur.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{k\omega} \left\{ \Omega \begin{bmatrix} csu - s^2v \\ c^2u - csv \end{bmatrix} + 2\Gamma \begin{bmatrix} \bar{c}csu - \bar{c}s^2v \\ \bar{c}c^2u - \bar{c}csv \end{bmatrix} - gk\omega \begin{bmatrix} s^2u + csv \\ csu + c^2v \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} c^2su^2 - 2cs^2uv + s^3v^2 \\ c^3u^2 - 2c^2suv + cs^2v^2 \end{bmatrix} \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (3.14)$$

İkinci mertebe altharmonik rezonans için $k = \frac{1}{2}$ alınır. Böylece (3.11) dönüşümü ikinci mertebe altharmonik sinüsoidal olur. (3.14) sisteminde k 'nın bu değeri kullanılarak trigonometrik terimler açılıp yerlerine yazılırsa,

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow c \triangleq \cos k\omega t = \cos \frac{\omega t}{2} \quad s \triangleq \sin k\omega t = \sin \frac{\omega t}{2}$$

$$cs \triangleq \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2} \sin \omega t \quad c^2 \triangleq \cos^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \omega t)$$

$$s^2 \triangleq \sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \omega t)$$

$$\bar{c}cs \triangleq \cos \omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2} \sin 2\omega t$$

$$\bar{c}s^2 \triangleq \cos \omega t \sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega t - \frac{1}{4} \cos 2\omega t - \frac{1}{4}$$

$$\bar{c}c^2 \triangleq \cos \omega t \cos^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\omega t$$

$$c^2 s \triangleq \cos^2 \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{4} \sin \frac{3\omega t}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{\omega t}{2}$$

$$cs^2 \triangleq \cos \frac{\omega t}{2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{4} \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\omega t}{2}$$

$$s^3 \triangleq \sin^3 \frac{\omega t}{2} = \frac{3}{4} \sin \frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \sin \frac{3\omega t}{2} \quad c^3 \triangleq \cos^3 \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{4} \cos \frac{3\omega t}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{\omega t}{2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{2\varepsilon}{\omega} \left\{ \Omega \begin{bmatrix} \frac{u}{2} \sin \omega t - \frac{v}{2} + \frac{v}{2} \cos \omega t \\ \frac{u}{2} + \frac{u}{2} \cos \omega t - \frac{v}{2} \sin \omega t \end{bmatrix} \right.$$

$$+ 2\Gamma \begin{bmatrix} \frac{u}{4} \sin 2\omega t - \frac{v}{2} \cos \omega t + \frac{v}{4} + \frac{v}{4} \cos 2\omega t \\ \frac{u}{2} \cos \omega t + \frac{u}{4} + \frac{u}{4} \cos 2\omega t - \frac{v}{4} \sin 2\omega t \end{bmatrix} - \frac{g\omega}{2} \begin{bmatrix} \frac{u}{2} - \frac{u}{2} \cos \omega t + \frac{v}{2} \sin \omega t \\ \frac{u}{2} \sin \omega t + \frac{v}{2} + \frac{v}{2} \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$+ \left[\begin{array}{l} \frac{u^2}{4} \sin \frac{3\omega t}{2} + \frac{u^2}{4} \sin \frac{\omega t}{2} - \frac{uv}{2} \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{uv}{2} \cos \frac{3\omega t}{2} + \frac{3v^2}{4} \sin \frac{\omega t}{2} - \frac{v^2}{4} \sin \frac{3\omega t}{2} \\ \frac{u^2}{4} \cos \frac{3\omega t}{2} + \frac{3u^2}{4} \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{uv}{2} \sin \frac{3\omega t}{2} - \frac{uv}{2} \sin \frac{\omega t}{2} + \frac{v^2}{4} \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{v^2}{4} \cos \frac{3\omega t}{2} \end{array} \right]$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

elde edilir. Bu sistemde $s_j \triangleq \sin \frac{j\omega t}{2}$, $c_j \triangleq \cos \frac{j\omega t}{2}$ dönüşümü kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega} \left\{ \Omega \begin{bmatrix} us_2 - v + vc_2 \\ u + uc_2 - vs_2 \end{bmatrix} + 2\Gamma \begin{bmatrix} \frac{u}{2}s_4 - vc_2 + \frac{v}{2} + \frac{v}{2}c_4 \\ uc_2 + \frac{u}{2} + \frac{u}{2}c_4 - \frac{v}{2}s_4 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{g\omega}{2} \begin{bmatrix} u - uc_2 + vs_2 \\ us_2 + v + vc_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2}s_3 + \frac{u^2}{2}s_1 - uvc_1 + uvc_3 + \frac{3v^2}{2}s_1 - \frac{v^2}{2}s_3 \\ \frac{u^2}{2}c_3 + \frac{3u^2}{2}c_1 - uvs_3 - uvs_1 + \frac{v^2}{2}c_1 - \frac{v^2}{2}c_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.15)$$

bulunur. (3.15) sisteminin sağ tarafı ortalama ve salınıcı kısım olmak üzere aşağıdaki gibi ikiye ayrılırsa,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \varepsilon \tilde{f}_0(u, v) + \varepsilon \tilde{f}(u, v, t) + O(\varepsilon^2)$$

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} -\frac{g\omega}{2} & \Gamma - \Omega \\ \Gamma + \Omega & -\frac{g\omega}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} = \frac{1}{\omega} \left\{ \Omega \begin{bmatrix} us_2 + vc_2 \\ uc_2 - vs_2 \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} us_4 + v(c_4 - 2c_2) \\ u(c_4 + 2c_2) - vs_4 \end{bmatrix} - \frac{g\omega}{2} \begin{bmatrix} -uc_2 + vs_2 \\ us_2 + vc_2 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u^2(s_3 + s_1) + uv(2c_3 - 2c_1) + v^2(3s_1 - s_3) \\ u^2(3c_1 + c_3) - uv(2s_3 + 2s_1) + v^2(c_1 - c_3) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadelerin $\frac{4\pi}{\omega}$ üzerinde ortalamasını alalım:

$$\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} s_j dt = 0 \quad \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} c_j dt = 0 \Rightarrow \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \tilde{f} dt = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega} \begin{bmatrix} -\frac{g\omega}{2} & \Gamma - \Omega \\ \Gamma + \omega & -\frac{g\omega}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi birinci mertebe ortalama alma metodu Helmholtz denkleminde dallanma vermiyor. Bu yüzden bu metodu ikinci mertebe uygulayacağız.

Önce (3.12) deki $O(\varepsilon^2)$ terimlerin ortalamasını alalım:

$$\begin{aligned} g_0^1 = \frac{4g\Gamma}{1-\omega^2} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt \right] u - \frac{4g\Gamma}{1-\omega^2} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt \right] v \\ - \frac{2\Gamma^2}{\omega(1-4\omega^2)} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt \right] u \\ + \frac{2\Gamma^2}{\omega(1-4\omega^2)} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt \right] v - \frac{2\Gamma^2}{\omega} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt \right] u \\ + \frac{2\Gamma^2}{\omega} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt \right] v \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t) dt = 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{16\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (\sin 3\omega t + \sin \omega t) dt = 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (\cos 2\omega t - \frac{1}{2} \cos 3\omega t - \frac{1}{2} \cos \omega t) dt = 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t dt = 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin^2 \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (1 - \cos \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g_0^1 = \frac{g\Gamma}{1 - \omega^2} u + \frac{\Gamma^2}{\omega} v$$

Şimdi (3.13) deki $O(\epsilon^2)$ terimlerinin ortalamasını alalım:

$$\begin{aligned} g_0^2 = & \frac{4g\Gamma}{1 - \omega^2} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos^2 \frac{\omega t}{2} dt \right] u - \frac{4g\Gamma}{1 - \omega^2} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt \right] v \\ & - \frac{2\Gamma^2}{\omega(1 - 4\omega^2)} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \cos^2 \frac{\omega t}{2} dt \right] u \\ & + \frac{2\Gamma^2}{\omega(1 - 4\omega^2)} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt \right] v - \frac{2\Gamma^2}{\omega} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos^2 \frac{\omega t}{2} dt \right] u \\ & + \frac{2\Gamma^2}{\omega} \left[\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos \frac{\omega t}{2} \sin \frac{\omega t}{2} dt \right] v \end{aligned}$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos^2 \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{16\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (\sin 3\omega t + \sin \omega t) dt = 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos 2\omega t \cos^2 \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (\cos 2\omega t + \frac{1}{2} \cos 3\omega t + \frac{1}{2} \cos \omega t) dt = 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos^2 \frac{\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (1 + \cos \omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g_0^2 = \frac{g\Gamma}{1-\omega^2} u + \frac{\Gamma^2}{2} v$$

$$g_0(z) = \begin{bmatrix} \frac{g\Gamma}{1-\omega^2} u + \frac{\Gamma^2}{\omega} v \\ -\frac{\Gamma^2}{\omega} u - \frac{g\Gamma}{1-\omega^2} v \end{bmatrix}$$

Giriş bölümünde ortalama alma metodunu tanıtırken $\underline{u} = (\underline{y}, t)$ dönüşüm fonksiyonunu $\underline{\dot{u}} = \underline{\tilde{f}}$ olarak tanımlamıştık. (3.16)'daki $\underline{\tilde{f}}$ fonksiyonunu terim terim integre edelim:

$$s_j = \sin \frac{j\omega t}{2} \quad c_j = \cos \frac{j\omega t}{2} \quad \Rightarrow \int c_j dt = \frac{2}{j\omega} s_j \quad s_j = \int s_j dt = -\frac{2}{j\omega} c_j$$

$$\begin{aligned} \underline{u} = \int \underline{\tilde{f}} dt &= \frac{1}{\omega^2} \left\{ \Omega \begin{bmatrix} -uc_2 + vs_2 \\ us_2 + vc_2 \end{bmatrix} + \Gamma \begin{bmatrix} -\frac{u}{2}c_4 + v(\frac{1}{2}s_4 - 2s_2) \\ u(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2) + \frac{v}{2}c_4 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g\omega}{2} \begin{bmatrix} us_2 + vc_2 \\ uc_2 - vs_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -u^2(\frac{2}{3}c_3 + 2c_1) + uv(\frac{4}{3}s_3 - 4s_1) + v^2(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3) \\ u^2(6s_1 + \frac{2}{3}s_3) + uv(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1) + v^2(2s_1 - \frac{2}{3}s_3) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Şimdi $D \underline{\tilde{f}}$ 'i kurup $\begin{bmatrix} D \underline{\tilde{f}} & \underline{u} \end{bmatrix}_0$ 'ı bulalım:

$$D \underline{\tilde{f}} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \Omega s_2 + \Gamma s_4 + \frac{g\omega}{2} c_2 + u(s_3 + s_1) + v(c_3 - c_1) \\ \Omega c_2 + \Gamma(c_4 + 2c_2) - \frac{g\omega}{2} s_2 + u(3c_1 + c_3) - v(s_3 + s_1) \\ \Omega c_2 + \Gamma(c_4 - 2c_2) - \frac{g\omega}{2} s_2 + u(c_3 - c_1) + v(3s_1 - s_3) \\ -\Omega s_2 - \Gamma s_4 - \frac{g\omega}{2} c_2 - u(s_3 + s_1) + v(c_1 - c_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D \underline{\tilde{f}} & \underline{u} \end{bmatrix}^1 = \frac{1}{\omega^3} \left\{ \Omega^2 \begin{bmatrix} -uc_2s_2 + vs_2^2 \end{bmatrix} + \Gamma \Omega \begin{bmatrix} -\frac{u}{2}s_2c_4 + v(\frac{1}{2}s_4s_2 - 2s_2^2) \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g\omega\Omega}{2} (us_2^2 + vc_2s_2) + \frac{\Omega}{2} \left[-u^2 \left(\frac{2}{3}c_3s_2 + 2c_1s_2 \right) + uv \left(\frac{4}{3}s_3s_2 - 4s_1s_2 \right) \right. \\
& \left. + v^2 \left(-6c_1s_2 + \frac{2}{3}c_3s_2 \right) \right] + \Gamma\Omega(-uc_2s_4 + vs_2s_4) + \Gamma^2 \left[-\frac{u}{2}c_4s_4 + v \left(\frac{1}{2}s_4^2 - 2s_2s_4 \right) \right] \\
& \frac{g\omega\Gamma}{2} (us_2s_4 + vc_2c_4) + \frac{\Gamma}{2} \left[u^2 \left(-\frac{2}{3}c_3s_4 - 2c_1s_4 \right) + uv \left(\frac{4}{3}s_3s_4 - 4s_1s_4 \right) \right. \\
& \left. + v^2 \left(-6c_1s_4 + \frac{2}{3}c_3s_4 \right) \right] + \frac{g\omega\Omega}{2} (-uc_2^2 + vs_2c_2) + \frac{g\omega\Gamma}{2} \left[-\frac{u}{2}c_4c_2 + v \left(\frac{1}{2}s_4c_2 - 2s_2c_2 \right) \right] \\
& \frac{g^2\omega^2}{4} (us_2c_2 + vc_2^2) + \frac{g\omega}{4} \left[u^2 \left(-\frac{2}{3}c_3c_2 - 2c_1c_2 \right) + uv \left(\frac{4}{3}s_3c_2 - 4s_1c_2 \right) \right. \\
& \left. + v^2 \left(-6c_1c_2 + \frac{2}{3}c_3c_2 \right) \right] + \Omega \left[-u^2c_2(s_3 + s_1) + uvs_2(s_3 + s_1) \right] + \Gamma \left[-\frac{u^2}{2}c_4(s_3 + s_1) \right. \\
& \left. + uv \left(\frac{1}{2}s_4 - 2s_2 \right)(s_3 + s_1) \right] + \frac{g\omega}{2} [u^2s_2(s_3 + s_1) + uvc_2(s_3 + s_1)] \\
& + \frac{1}{2} \left[-u^3 \left(\frac{2}{3}c_3 + 2c_1 \right)(s_3 + s_1) + u^2v \left(\frac{4}{3}s_3 - 4s_1 \right)(s_3 + s_1) \right. \\
& \left. + v^2u \left(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3 \right)(s_3 + s_1) \right] + \Omega \left[-uvc_2(c_3 - c_1) + v^2s_2(c_3 - c_1) \right] \\
& + \Gamma \left[-\frac{uv}{2}c_4(c_3 - c_1) + v^2 \left(\frac{1}{2}s_4 - 2s_2 \right)(c_3 - c_1) \right] + \frac{g\omega}{2} [uvs_2(c_3 - c_1) + v^2c_2(c_3 - c_1)] \\
& + \frac{1}{2} \left[-u^2v \left(\frac{2}{3}c_3 + 2c_1 \right)(c_3 - c_1) + uv^2 \left(\frac{4}{3}s_3 - 4s_1 \right)(c_3 - c_1) \right. \\
& \left. + v^3 \left(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3 \right)(c_3 - c_1) \right] \Bigg\} + \frac{1}{\omega^3} \left\{ \Omega^2 (uc_2s_2 + vc_2^2) \right. \\
& + \Gamma\Omega \left[u \left(\frac{1}{2}s_4c_2 - 2s_2c_2 \right) + \frac{v}{2}c_2c_4 \right] + \frac{g\omega\Omega}{2} (uc_2^2 - vs_2c_2) + \frac{1}{2} \left[u^2 (6s_1c_2 + \frac{2}{3}s_3s_2) \right. \\
& \left. + uv \left(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1 \right)c_2 + v^2 (2s_1c_2 - \frac{2}{3}s_3c_2) \right] + \Omega\Gamma [us_2(c_4 - 2c_2) + vc_2(c_4 - 2c_2)] \\
& \left. + \Gamma^2 \left[u \left(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2 \right)(c_4 - 2c_2) + \frac{v}{2}c_4(c_4 - 2c_2) \right] + \frac{g\omega\Gamma}{2} [uc_2(c_4 - 2c_2) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -vs_2(c_4 - 2c_2)] + \frac{\Gamma}{2} \left[u^2(6s_1 + \frac{2}{3}s_3)(c_4 - 2c_2) + uv(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1)(c_4 - 2c_2) \right. \\
& \left. + v^2(2s_1 - \frac{2}{3}s_3)(c_4 - 2c_2) \right] - \frac{g\omega\Omega}{2} (us_2^2 + vc_2s_2) - \frac{g\omega\Gamma}{2} \left[u(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2)s_2 + \frac{v}{2}c_4s_2 \right] \\
& - \frac{g^2\omega^2}{4} (uc_2s_2 - vs_2^2) - \frac{g\omega}{4} \left[u^2(6s_1 + \frac{2}{3}s_3)s_2 + uv(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1)s_2 + v^2(2s_1 - \frac{2}{3}s_3)s_2 \right] \\
& + \Omega[u^2s_2(c_3 - c_1) + uvc_2(c_3 - c_1)] + \Gamma \left[u^2(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2)(c_3 - c_1) + \frac{uv}{2}c_4(c_3 - c_1) \right] \\
& + \frac{g\omega}{2} [u^2c_2(c_3 - c_1) - uvs_2(c_3 - c_1)] + \frac{1}{2} \left[u^3(6s_1 + \frac{2}{3}s_3)(c_3 - c_1) \right. \\
& \left. + u^2v(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1)(c_3 - c_1) + uv^2(2s_1 - \frac{2}{3}s_3)(c_3 - c_1) \right] + \Omega[uv s_2(3s_1 - s_3) \\
& + v^2s_2(3s_1 - s_3)] + \Gamma \left[uv(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2)(3s_1 - s_3) + \frac{v}{2}c_4(3s_1 - s_3) \right] \\
& + \frac{g\omega}{2} [uvc_2(3s_1 - s_3) - v^2s_2(3s_1 - s_3)] + \frac{1}{2} \left[u^2v(6s_1 + \frac{2}{3}s_3)(3s_1 - s_3) \right. \\
& \left. + uv^2(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1)(3s_1 - s_3) + v^3(2s_1 - \frac{2}{3}s_3)(3s_1 - s_3) \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[D \begin{smallmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{u} \end{smallmatrix} \right]^2 = \frac{1}{\omega^3} \left\{ \Omega^2(-uc_2^2 + vs_2c_2) + \Gamma\Omega \left[-\frac{u}{2}c_2c_4 + v(\frac{1}{2}s_4c_2 - 2s_2c_2) \right] \right. \\
& + \frac{g\omega\Omega}{2} (us_2c_2 + vc_2^2) + \frac{\Omega}{2} \left[-u^2(\frac{2}{3}c_3c_2 + 2c_1c_2) + uv(\frac{4}{3}s_3c_2 - 4s_1c_2) \right. \\
& \left. + v^2(-6c_1c_2 + \frac{2}{3}c_3c_2) \right] + \Gamma\Omega[-uc_2(c_4 + 2c_2) + vs_2(c_4 + 2c_2)] \\
& + \Gamma^2 \left[-\frac{u}{2}c_4(c_4 + 2c_2) + v(\frac{1}{2}s_4 - 2s)(c_4 + 2c_2) \right] + \frac{g\omega\Gamma}{2} [us_2(c_4 + 2c_2) \\
& + vc_2(c_4 + 2c_2)] + \frac{\Gamma}{2} \left[-u^2(\frac{2}{3}c_3 + 2c_1)(c_4 + 2c_2) + uv(\frac{4}{3}s_3 + 4s_1)(c_4 + 2c_2) \right. \\
& \left. + v^2(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3)(c_4 + 2c_2) \right] - \frac{g\omega\Omega}{2} (-uc_2s_2 + vs_2^2) - \frac{g\omega\Gamma}{2} \left[-\frac{u}{2}c_4s_2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v\left(\frac{1}{2}s_4 - 2s_2\right)s_2 \Big] - \frac{g^2\omega^2}{4}(us_2^2 + vs_2c_2) - \frac{g\omega}{4}\left[-u^2(c_3 + 2c_1)s_2 + uv\left(\frac{4}{3}s_3 - 4s_1\right)s_2\right. \\
& \left.+ v^2\left(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3\right)s_2\right] + \Omega[-u^2c_2(3c_1 + c_3) + uvs_2(3c_1 + c_3)] + \Gamma\left[-\frac{u^2}{2}c_4(3c_1 + c_3)\right. \\
& \left.+ uv\left(\frac{1}{2}s_4 - 2s_2\right)(3c_1 + c_3)\right] + \frac{g\omega}{2}[u^2s_2(3c_1 + c_3) + uvc_2(3c_1 + c_3)] \\
& + \frac{1}{2}\left[u^3\left(-\frac{2}{3}c_3 - 2c_1\right)(3c_1 + c_3) + u^2v\left(\frac{4}{3}s_3 - 4s_1\right)(3c_1 + c_3)\right. \\
& \left.+ uv^2\left(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3\right)(3c_1 + c_3)\right] - \Omega[-uvc_2(s_3 + s_1) + vs_2(s_3 + s_1)] \\
& - \Gamma\left[-\frac{uv}{2}c_4(s_3 + s_1) + v^2\left(\frac{1}{2}s_4 - 2s_2\right)(s_3 + s_1)\right] - \frac{g\omega}{2}[uvs_2(s_3 + s_1) + v^2c_2(s_3 + s_1)] \\
& - \frac{1}{2}\left[uv\left(-\frac{2}{3}c_3 - 2c_1\right)(s_3 + s_1) + uv^2\left(\frac{4}{3}s_3 - 4s_1\right)(s_3 + s_1) + v^3\left(-6c_1 + \frac{2}{3}c_3\right)(s_3 + s_1)\right] \\
& - \Omega^2(us_2^2 + vc_2s_2) - \Omega\Gamma\left[u\left(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2\right)s_2 + \frac{v}{2}c_4s_2\right] - \frac{g\omega\Omega}{2}(uc_2s_2 - vs_2^2) \\
& - \frac{1}{2}\left[u^2\left(6s_1 + \frac{2}{3}s_3\right)s_2 + uv\left(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1 + s_2 + v^2\left(2s_1 - \frac{2}{3}s_3\right)s_2\right) - \Gamma\Omega(us_2s_4 + vc_2s_4)\right. \\
& \left.- \Gamma^2\left[u\left(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2\right)s_4 + \frac{v}{2}c_4s_4\right] - \frac{g\omega\Gamma}{2}(uc_2s_4 - vs_2s_4) - \frac{\Gamma}{2}\left[u^2\left(6s_1 + \frac{2}{3}s_3\right)s_4\right.\right. \\
& \left.+ uv\left(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1\right)s_4 + v^2\left(2s_1 - \frac{2}{3}s_3\right)s_4\right] - \frac{g\omega\Omega}{2}(us_2c_2 + vc_2^2) \\
& - \frac{g\omega\Gamma}{2}\left[u\left(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2\right)c_2 + \frac{v}{2}c_4c_2\right] - \frac{g^2\omega^2}{4}(uc_2^2 - vs_2c_2) - \frac{g\omega}{4}\left[u^2\left(6s_1 + \frac{2}{3}s_3\right)c_2\right. \\
& \left.+ uv\left(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1\right)c_2 + v^2\left(2s_1 - \frac{2}{3}s_3\right)c_2\right] - \Omega[u^2s_2(s_3 + s_1) + uvc_2(s_3 + s_1)] \\
& - \Gamma\left[u^2\left(\frac{1}{2}s_4 + 2s_2\right)(s_3 + s_1) + \frac{uv}{2}c_4(s_3 + s_1)\right] - \frac{g\omega}{2}[u^2c_2(s_3 + s_1) - uvs_2(s_3 + s_1)] \\
& + \frac{1}{2}\left[u^3\left(6s_1 + \frac{2}{3}s_3\right)(s_3 + s_1) + u^2v\left(\frac{4}{3}c_3 + 4c_1\right)(s_3 + s_1) + uv^2\left(2s_1 - \frac{2}{3}s_3\right)(s_3 + s_1)\right]
\end{aligned}$$

$$+\Omega[uv s_2(c_1 - c_3) + v^2 c_2(c_1 - c_3)] + \Gamma \left[uv \left(\frac{1}{2} s_4 + 2s_2 \right) (c_1 - c_3) + \frac{v^2}{2} c_4 (c_1 - c_3) \right]$$

$$+\frac{g\omega}{2}[uv c_2(c_1 - c_3) - v^2 s_2(c_1 - c_3)] + \frac{1}{2} \left[u^2 v \left(6s_1 + \frac{2}{3} s_3 \right) (c_1 - c_3) \right.$$

$$\left. uv^2 \left(\frac{4}{3} c_3 + 4c_1 \right) (c_1 - c_3) + v^3 \left(2s_1 - \frac{2}{3} s_3 \right) (c_1 - c_3) \right] \Big\}$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} s_i s_j dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \frac{i\omega t}{2} \sin \frac{j\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left(\cos \frac{(i-j)\omega t}{2} - \cos \frac{(i+j)\omega t}{2} \right) dt$$

$$= 0 \quad (i \neq j)$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} c_i c_j dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos \frac{i\omega t}{2} \cos \frac{j\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left(\cos \frac{(i-j)\omega t}{2} + \cos \frac{(i+j)\omega t}{2} \right) dt$$

$$= 0 \quad (i \neq j)$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} s_i c_j dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin \frac{i\omega t}{2} \cos \frac{j\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \left(\sin \frac{(i-j)\omega t}{2} + \sin \frac{(i+j)\omega t}{2} \right) dt$$

$$= 0$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} s_i^2 dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \sin^2 \frac{i\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (1 - \cos i\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} c_i^2 dt = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} \cos^2 \frac{i\omega t}{2} dt = \frac{\omega}{8\pi} \int_0^{\frac{4\pi}{\omega}} (1 + \cos i\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\left[\tilde{Df} \quad \tilde{u} \right]_0^1 = \frac{1}{\omega^3} \left[\left(\Omega^2 - 2\Gamma\Omega + \frac{\Gamma^2}{2} + \frac{g^2\omega^2}{4} \right) v + \frac{10}{3} u^2 v + \frac{10}{3} v^3 - g\omega\Gamma u \right]$$

$$\left[\tilde{Df} \quad \tilde{u} \right]_0^2 = \frac{1}{\omega^3} \left(-\Omega^2 - 2\Gamma\Omega - \frac{\Gamma^2}{2} - \frac{g^2\omega^2}{4} \right) u - \frac{10}{3} uv^2 - \frac{10}{3} u^3 + g\omega\Gamma uv$$

$$\left[\tilde{Df} \quad \tilde{u} \right]_0 = \frac{1}{\omega^3} \left[\begin{array}{l} -g\omega\Gamma u + \left(\Omega^2 - 2\Gamma\Omega + \frac{\Gamma^2}{2} + \frac{g^2\omega^2}{4} \right) v + \frac{10}{3} v(u^2 + v^2) \\ - \left(\Omega^2 + 2\Gamma\Omega + \frac{\Gamma^2}{2} + \frac{g^2\omega^2}{4} \right) u + g\omega\Gamma v - \frac{10}{3} u(u^2 + v^2) \end{array} \right]$$

bulunur. Sonuç $\underline{z} = \varepsilon \underline{f}_0(\underline{z}) + \varepsilon^2 \left(\underline{g}_0(\underline{z}) + \left[\tilde{Df}(\underline{z}, t) \quad \tilde{u}(\underline{z}, t) \right]_0 \right)$ şeklindeydi:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon}{\omega} \begin{bmatrix} \frac{g\omega}{2}u + (\Gamma - \Omega)v \\ (\Gamma + \Omega)u - \frac{g\omega}{2}v \end{bmatrix} + \varepsilon^2 \left\{ \begin{bmatrix} \frac{g\Gamma}{1-\omega^2}u + \frac{\Gamma^2}{\omega}v \\ -\frac{\Gamma^2}{\omega}u - \frac{g\Gamma}{1-\omega^2}v \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega^3} \begin{bmatrix} -g\omega\Gamma u + \left(\Omega^2 - 2\Gamma\Omega + \frac{\Gamma^2}{2} + \frac{g^2\omega^2}{4} \right) v + \frac{10}{3}v(u^2 + v^2) \\ -\left(\Omega^2 + 2\Gamma\Omega + \frac{\Gamma^2}{2} + \frac{g^2\omega^2}{4} \right) u + g\omega\Gamma v - \frac{10}{3}u(u^2 + v^2) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.19)$$

sistemi elde edilir .(3.19) ifadesi aşağıdaki dönüşümler yapılarak daha basit forma getirilebilir:

$$a = -\frac{\varepsilon g}{2} \quad b = \frac{\varepsilon^2 g \Gamma}{1-\omega^2} - \frac{\varepsilon^2 g \Gamma}{\omega^2} \quad c = \frac{\varepsilon \Gamma}{\omega} - \frac{2\varepsilon^2 \Omega \Gamma}{\omega^3}$$

$$d = -\frac{\varepsilon \Omega}{\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Gamma^2}{\omega} + \frac{\varepsilon^2 \Omega^2}{\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 \Gamma^2}{2\omega^3} + \frac{\varepsilon^2 g^2}{4\omega} \quad \alpha = \frac{10\varepsilon^2}{3\omega^3}$$

$$\dot{u} = (a+b)u + (c+d)v + \alpha(u^2 + v^2)v \quad (3.20a)$$

$$\dot{v} = (c-d)u + (a-b)v - \alpha(u^2 + v^2)u \quad (3.20b)$$

a, b, c, d ve α katsayılarında Γ , Ω , A ve g 'nin eşitlerini yazalım:

$$\Gamma = \frac{A}{1-\omega^2} \quad \Omega = \frac{1-\omega^2}{\varepsilon} \quad A = \frac{\bar{A}}{\varepsilon} \quad g = \frac{\bar{g}}{\varepsilon}$$

$$a = -\frac{\bar{g}}{2}, \quad b = \frac{\bar{g}\bar{A}}{(1-\omega^2)^2} - \frac{\bar{g}\bar{A}}{\omega^2(1-\omega^2)}, \quad c = \frac{\bar{A}}{\omega(1-\omega^2)} - \frac{\bar{A}(4-\omega^2)}{2\omega^3(1-\omega^2)}$$

$$d = -\frac{4-\omega^2}{4\omega} + \frac{\bar{A}^2}{\omega(1-\omega^2)^2} + \frac{(4-\omega^2)^2}{16\omega^3} + \frac{\bar{A}^2}{2\omega^3(1-\omega^2)^2} + \frac{\bar{g}^2}{4\omega}, \quad \alpha = \frac{10\varepsilon^2}{3\omega^3}$$

(3.20) denklemini kutupsal formda yazalım:

$$u = r \cos \theta \quad v = r \sin \theta \quad r = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \quad \theta = \arctan \frac{v}{u}$$

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = (a+b)r \cos \theta + (c+d)r \sin \theta + \alpha r^3 \sin \theta$$

$$r \dot{\sin} \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = (c-d)r \cos \theta + (a-b)r \sin \theta - \alpha r^3 \cos \theta$$

$$\dot{r} = ar + br \cos 2\theta + cr \sin 2\theta \quad (3.21a)$$

$$\dot{\theta} = -b \sin 2\theta + c \cos 2\theta - d - \alpha r^2 \quad (3.21b)$$

(3.1) orjinal denkleminin yaklaşık çözümü, y 'yi de yerine yazarsak, yaklaşık olarak aşağıdaki gibi bulunmuş olur:

$$x(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon y(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon \left\{ u(t) \cos \frac{\omega t}{2} - v(t) \sin \frac{\omega t}{2} \right\} \quad (3.22)$$

(3.22) ifadesi kutupsal koordinatlarda yazılırsa

$$x(t) = \hat{x}(t) + \varepsilon r(t) \cos\left(\frac{\omega t}{2} + \theta(t)\right) \quad (3.23)$$

elde edilir.

3.3.İkinci Mertebe Altharmonik Rezonans İçin Dallanma Analizi:

(3.21) 'de verilen ortalaması alınmış denklemlerin triviyal olarak $(u,v)=(0,0)$ denge noktası vardır. (3.21) 'in triviyal olmayan ikinci mertebe altharmonik rezonans ile ilgili denge noktaları her zaman çift olarak ortaya çıkarlar. Bunu görmek için (3.21) ve (3.22) denklemlerini gözönüne alalım:

$$\begin{aligned} (a+b)u + (c+d)v + \alpha(u^2 + v^2)v &= 0 \\ (c-d)u + (a-b)v - \alpha(u^2 + v^2)u &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklemler v 'ye bölünürse

$$\frac{u}{v} = -\frac{(c+d) + \alpha(u^2 + v^2)}{a+b} \quad \frac{u}{v} = \frac{b-a}{(c-d) - \alpha(u^2 + v^2)}$$

elde edilir. $r^2 = u^2 + v^2$ eşitliği kullanılarak bu denklemler eşitlenirse

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{c-d-\alpha r^2} &= \frac{c+d+\alpha r^2}{a+b} \\ \Rightarrow \alpha^2 r^4 + 2d\alpha r^2 + (a^2 + d^2) - (c^2 + b^2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{\alpha}(-d \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2})} \quad (3.25)$$

bulunur. (3.25) ten de görüldüğü gibi triviyal olmayan çözümlerin varlığı aşağıdaki koşulların sağlanmasına bağlıdır.

$$c^2 + b^2 - a^2 \geq 0 \quad (3.26a)$$

$$\frac{-d \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2}}{\alpha} > 0 \quad (3.26b)$$

Bu koşulların sağlandığını, dolayısıyla böyle r 'ler elde edebileceğimizi düşünelim:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(a + b \cos 2\theta + c \sin 2\theta) = 0 \\ \dot{\theta} &= c \cos 2\theta - b \sin 2\theta - d - \alpha r^2 = 0 \end{aligned}$$

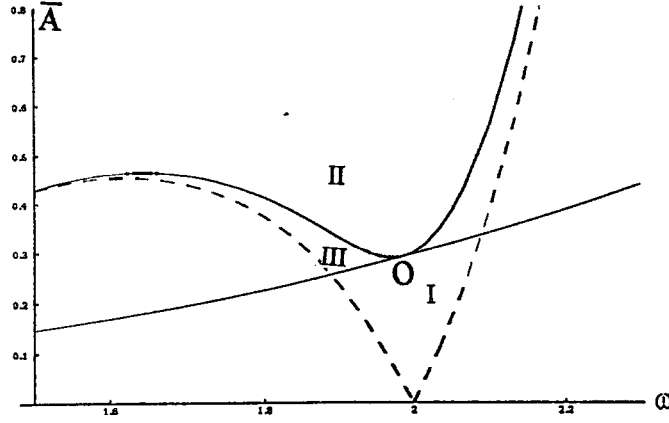
$$\begin{aligned} b \cos 2\theta + c \sin 2\theta &= -a \\ c \cos 2\theta - b \sin 2\theta - d + d \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{-a \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2}}{c^2 + b^2} & \sin 2\theta &= \frac{-a \pm \sqrt{c^2 + b^2 - a^2}}{c^2 + b^2} \\ \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} &= \tan 2\theta = -1 & \Rightarrow \theta_{1,2} &= \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Buradan aslında r için iki belirli çözüm olduğu görülmektedir.

$$(r, \theta) = (r_i, \theta_i), (r_i, \theta_i + \pi)$$

Böylece triviyal çözüm ile birlikte beş denge noktası olduğu ortaya çıkmıştır. Fakat bu, (3.25) ifadesinin reel olması kabulüne dayanıyor. Şimdi denge noktaları sayısının değiştiği bölgeleri tayin edelim. Bunun için (3.26) eşitsizliklerinin eşitlik haline getirilip, oluşacak $\bar{A} = f(\omega)$ fonksiyonlarının çizilmesi yeterlidir. Bu işlem yapılmış ve Şekil-3.3.1 ile verilen diyagram ortaya çıkmıştır. Yukarıda sözü edilen eğriler $c^2 + b^2 - a^2 = d^2 = 0$ noktasında birleşiyorlar. Bu nokta şekilde O ile gösterilmiştir. O noktasına organize nokta denir [3].



Şekil-3.3.1 : $(\bar{A}, \omega)$ dallanma kümesi ($\varepsilon = 0.1$)

Şekil-3.3.1 'de I bölgesinde (3.25) köklerinin ikisi de kompleksdir. Dolayısıyla bu bölgede sadece triviyal çözüm olarak ortaya çıkan $(0,0)$ denge noktası vardır. II bölgesinde (3.25) köklerinin biri kompleks, diğeri reeldir. Buradan, bu bölgede triviyal çözüm ile birlikte üç denge noktası vardır. III bölgesinde (3.25) kökleri reeldir. Dolayısıyla bu bölgede triviyal çözüm ile birlikte beş denge noktası vardır.

Kararlılık sınırlarını da gösteren ve dallanma kümesi olarak adlandırılan [3] Şekil-3.3.1 'de kesikli eğriler $\bar{g} = 0$, kesiksiz eğriler ise $\bar{g} = 0.1$ 'e karşılık gelen eğrilerdir.

Şimdi denge noktaları için kararlılık analizi yapalım. Bunun için önce (3.10) ve (3.11) denklemleri lineerleştirilecek sonra elde edilen bu matrisin özdeğerleri, denge noktaları da kullanılarak, bulunacaktır.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= ar + br \cos 2\theta + cr \sin 2\theta \\ \dot{\theta} &= -b \sin 2\theta + c \cos 2\theta - d - \alpha r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a + b \cos 2\theta + cr \sin 2\theta & -2br \sin 2\theta + 2cr \cos 2\theta \\ -2\alpha r & -2b \cos 2\theta - 2c \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{r} = ar + br \cos 2\theta + cr \sin 2\theta = 0 &\Rightarrow -a = a + br \cos 2\theta + c \sin 2\theta \quad (r \neq 0 \text{ için}) \\ \dot{\theta} = -b \sin 2\theta + c \cos 2\theta - d - \alpha r^2 = 0 &\Rightarrow b \sin 2\theta + c \cos 2\theta = d + \alpha r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 2r(d+\alpha r^2) \\ -2\alpha r & 2a-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2a\lambda + 4\alpha dr^2 + 4\alpha^2 r^4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 4\alpha dr^2 - 4\alpha^2 r^4} \quad (3.28)$$

Triviyal olmayan denge noktaları için bulunan r 'yi (3.28) 'de kullanalım:

$$r_1 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}(-d - \sqrt{c^2 + b^2 - a^2})} \quad r_2 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}(-d + \sqrt{c^2 + b^2 - a^2})}$$

$$\lambda_{1,2}^{r_1} = a \pm \sqrt{5a^2 - 4b^2 - 4c^2 - 4d\sqrt{c^2 + b^2 - a^2}} \quad (3.29a)$$

$$\lambda_{1,2}^{r_2} = a \pm \sqrt{5a^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4d\sqrt{c^2 + b^2 - a^2}} \quad (3.29b)$$

$(u,v)=(0,0)$ triviyal denge noktası için kararlılık analizi:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (a+b)u + (c+d)v + \alpha(u^2 + v^2)v \\ \dot{v} &= (c-d)u + (a-b)v - \alpha(u^2 + v^2)u \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a+b+2\alpha uv & c+d+3\alpha v^2+\alpha u^2 \\ c-d-3\alpha u^2-\alpha v^2 & a-b-2\alpha uv \end{bmatrix}$$

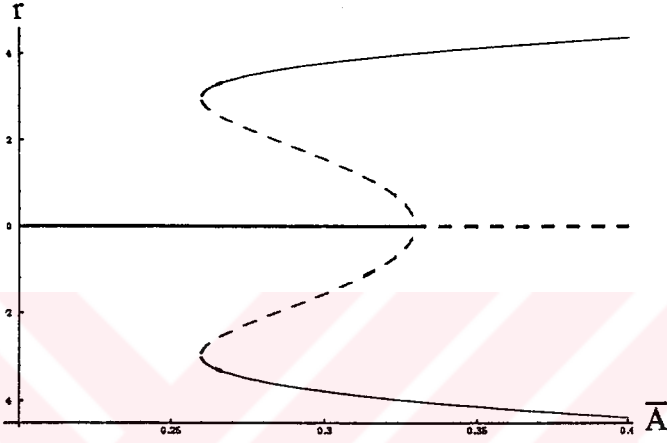
$u=0, v=0$ değerlerini kullanıp lineerleştirilmiş sistemin özdeğerlerini bulalım:

$$\begin{vmatrix} a+b-\lambda & c+d \\ c-d & a-b-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda a + a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 0$$

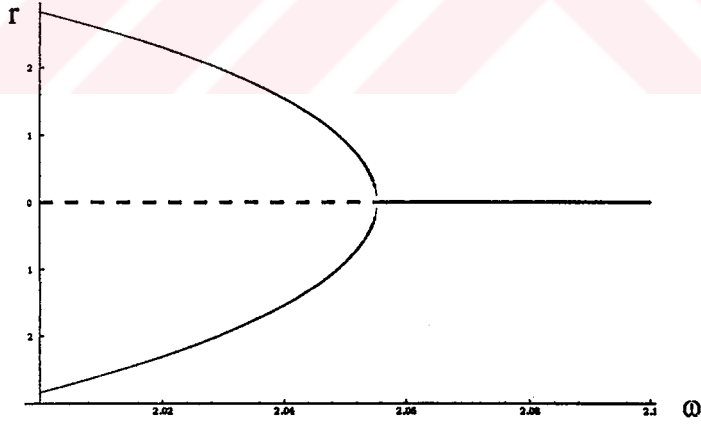
$$\lambda_{1,2}^{(0,0)} = a \pm \sqrt{b^2 + c^2 - d^2} \quad (3.30)$$

Şimdi yukarıdaki kararlılık analizinden de faydalanarak dallanma diyagramlarını verelim. Bunun için önce Şekil-3.3.1 'de $\omega = 1.9$ noktasından bir dikey çizelim. Bu doğrunun önce I bölgesinden, sonra III bölgesinden ve nihayet II bölgesinden geçeceği açıktır. Bu bölgelerdeki denge noktalarının sayısından daha önce bahsetmiştik. III bölgesinde r köklerinin ikisi de reel idi. (3.29a) ifadesi Mathematica paket programında işlenmiş ve bu özdeğerlerin negatif reel kısmımlı kompleks sayılar olduğu görülmüştür. Dolayısıyla ilgili denge noktaları kararlıdır.

(3.29b) ifadesi Mathematica paket programında işlendiğinde bu özdeğerlerin aynı işaretli reel sayılar olduğu görülmüş, buradan ilgili denge noktalarının kararsız olduğu sonucuna varılmıştır. Triviyal denge noktası için ise (3.30) ifadesi işlenmiş ve bu noktanın II bölgesinde kararsız diğer bölgelerde kararlı olduğu bulunmuştur. Bütün bunları Şekil-3.3.2 ile verilen dallanma diyagramında görmek mümkündür. Burada kesikli çizgiler kararsızlık durumunu, kesiksiz çizgiler kararlılık durumunu ifade etmektedir.



Şekil-3.3.2 : $(r, \bar{A})$ dallanma diyagramı ($\epsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.1$, $\omega = 1.9$)



Şekil-3.3.3 : (r, ω) dallama diyagramı ($\epsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.1$, $\bar{A} = 0.4$)

Şekil-3.3.1 'de $\bar{A} = 0.4$ doğrusunu çizip, ilgili dallanma diyagramını elde edelim. Bu doğrunun II bölgesinden I bölgesine geçeceği görülmüyor. İncelemeler küçük komşuluklarda yapıldığı için III bölgesine girme durumu gözönüne alınmayacaktır. I bölgesinde (3.25) 'deki köklerden biri reeldi. Bunun kararlılık analizi için (3.29b) ifadesi Mathematica 'da işlendiğinde sözkonusu denge noktalarının

kararlı olduğu görülmüştür. Triviyal denge noktasının II bölgesinde kararsız diğer bölgelerde kararlı olduğunu söylemiştik. Bunları Şekil-3.3.3 'de görmek mümkündür. Burada da kesikli çizilen çizgiler kararsızlık, kesiksiz çizilenler kararlılık durumunu ifade etmektedir. Her r değerine karşılık iki θ olduğundan Şekil-3.3.2 ve Şekil-3.3.3 $r=0$ 'a göre simetrik alınarak elde edilmiş gibi gösterilmiştir.

3.4.Üçüncü Mertebe Altharmonik Rezonans Durumu İçin İkinci Mertebe Ortalama Alma Yönteminin Uygulanması

Önce $O(\epsilon)$ mertebesindeki terimler ele alınacaktır. Bunun için (3.12), (3.13) denklemlerinden $O(\epsilon)$ terimleri alınır, burada $k = \frac{1}{3}$ değeri kullanıldıktan sonra gerekli trigonometrik derece düşürme işlemleri yapıp $s_j = \sin \frac{j\omega t}{3}$ $c_j = \cos \frac{j\omega t}{3}$ kısaltmaları kullanılırsa ve elde edilen bu denklemlerden $\tilde{f}_0$ ile $\tilde{f}$ ifadeleri ayrılırsa şunlar elde edilir:

$$\tilde{f}_0 = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} -\frac{g\omega}{2}u & -\frac{3\Omega}{2}v \\ \frac{3\Omega}{2}u & -\frac{g\omega}{2}v \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} = \frac{3}{\omega} \left\{ \Omega \begin{bmatrix} \frac{u}{2}s_2 + \frac{v}{2}c_2 \\ \frac{u}{2}c_2 - \frac{v}{2}s_2 \end{bmatrix} + \frac{g\omega}{3} \begin{bmatrix} \frac{u}{2}c_2 - \frac{v}{2}s_2 \\ -\frac{u}{2}s_2 - \frac{v}{2}c_2 \end{bmatrix} + 2\Gamma \begin{bmatrix} \frac{u}{4}s_5 - \frac{u}{4}s_1 - \frac{v}{2}c_3 + \frac{v}{4}c_5 + \frac{v}{4}c_1 \\ \frac{u}{2}c_3 + \frac{u}{4}c_5 + \frac{u}{4}c_1 - \frac{v}{4}s_5 + \frac{v}{4}s_1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} \frac{u^2}{4}s_3 + \frac{u^2}{4}s_1 - \frac{uv}{2}c_1 + \frac{uv}{2}c_3 + \frac{3v^2}{4}s_1 - \frac{v^2}{4}s_3 \\ \frac{u^2}{4}c_3 + \frac{3u^2}{4}c_1 - \frac{uv}{2}s_3 - \frac{uv}{2}s_1 + \frac{v^2}{4}s_1 - \frac{v^2}{4}c_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (3.32) \end{aligned}$$

(3.31) ve (3.32) denklemlerinin $\frac{6\pi}{\omega}$ üzerinde ortalamasını alırsak birinci mertebe ortalama alma sonucu olarak

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} -\frac{g\omega}{2}u & -\frac{3\Omega}{2}v \\ \frac{3\Omega}{2}u & -\frac{g\omega}{2}v \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

bulunur. Bu kez (3.12), (3.13) denklemlerindeki $O(\epsilon^2)$ mertebesindeki terimleri alır $k = \frac{1}{3}$ değerini kullanır ve bu terimlerin ortalamasını alırsak

$$g_0(z) = \begin{bmatrix} \frac{3\Gamma^2}{2\omega}v \\ -\frac{3\Gamma^2}{2\omega}u \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

elde edilir. Şimdi $\dot{\tilde{u}} = \tilde{f}$ eşitliğinden faydalanarak $\tilde{u}$ 'yu hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \frac{9}{\omega^2} & \left\{ \Omega \left[\begin{array}{c} -\frac{u}{4}c_2 + \frac{v}{4}s_2 \\ \frac{u}{4}s_2 + \frac{v}{4}c_2 \end{array} \right] + \frac{g\omega}{3} \left[\begin{array}{c} \frac{u}{4}s_2 + \frac{v}{4}c_2 \\ \frac{u}{4}c_2 - \frac{v}{4}s_2 \end{array} \right] + 2\Gamma \left[\begin{array}{c} u(\frac{c_1}{4} - \frac{c_5}{20}) + v(\frac{s_1}{4} - \frac{s_3}{6} + \frac{s_5}{20}) \\ u(\frac{s_1}{4} + \frac{s_3}{6} + \frac{s_5}{20}) + v(\frac{c_5}{20} - \frac{c_1}{4}) \end{array} \right] \right. \\ & \left. + \begin{array}{c} -u^2(\frac{c_1}{4} + \frac{c_3}{12}) + uv(\frac{s_3}{6} - \frac{s_1}{2}) + v^2(\frac{c_3}{12} - \frac{3c_1}{4}) \\ u^2(\frac{s_1}{4} + \frac{s_3}{12}) + uv(\frac{c_3}{6} + \frac{c_1}{2}) + v^2(\frac{s_1}{4} - \frac{s_3}{12}) \end{array} \right\} \quad (3.35) \end{aligned}$$

$\left[\tilde{Df} \tilde{u} \right]$ için oldukça uzun işlemlerden sonra

$$\left[\tilde{Df} \tilde{u} \right]_0 = \frac{27}{\omega^3} \left[\begin{array}{c} (\frac{\Omega^2}{8} + \frac{g^2\omega^2}{72} - \frac{\Gamma^2}{5})v + \frac{\Gamma}{2}uv + \frac{5}{12}v(u^2 + v^2) \\ -(\frac{\Omega^2}{8} + \frac{g^2\omega^2}{72} - \frac{\Gamma^2}{5})u + \frac{\Gamma}{4}(u^2 - v^2) - \frac{5}{12}u(u^2 + v^2) \end{array} \right] \quad (3.36)$$

elde edilir. Şimdi (1.3.7) ikinci mertebe ortalaması alınmış denklemleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{array} \right] &= \frac{\varepsilon}{\omega} \left[\begin{array}{c} -\frac{g\omega}{2}u - \frac{3\Omega}{2}v \\ \frac{3\Omega}{2}u - \frac{g\omega}{2}v \end{array} \right] \\ &+ \frac{g^2}{\omega} \left[\begin{array}{c} \frac{3\Gamma^2}{2}v + (\frac{\Omega^2}{8} + \frac{g^2\omega^2}{72} - \frac{\Gamma^2}{5})\frac{27}{\omega^2}v + \frac{27}{2\omega^2}uv + \frac{45}{4\omega^2}v(u^2 + v^2) \\ -\frac{3\Gamma^2}{2}u - (\frac{\Omega^2}{8} + \frac{g^2\omega^2}{72} - \frac{\Gamma^2}{5})\frac{27}{\omega^2}u + \frac{27}{4\omega^2}(u^2 - v^2) - \frac{45}{4\omega^2}u(u^2 + v^2) \end{array} \right] \quad (3.37) \end{aligned}$$

(3.37) ifadesinde aşağıdaki kısaltmalar yapılırsa daha kolay işlem yapabiliriz.

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\varepsilon g}{2}, \quad b = \frac{27\varepsilon^2\Omega^2}{8\omega^3} + \frac{3\varepsilon^2g^2}{8\omega} - \frac{27\varepsilon^2\Gamma^2}{5\omega^3} - \frac{3\varepsilon\Omega}{2\omega} + \frac{3\varepsilon^2\Gamma^2}{2\omega} \\ c &= \frac{27\varepsilon^2\Gamma}{4\omega^3}, \quad \alpha = \frac{45\varepsilon^2}{4\omega^3} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Bu durumda (3.37) denklemini şu hali alır:

$$\dot{\tilde{u}} = au + bv + 2cuv + \alpha v(u^2 + v^2) \quad (3.39a)$$

$$\dot{\tilde{v}} = -bu + av + c(u^2 - v^2) - \alpha u(u^2 + v^2) \quad (3.39b)$$

(3.38) katsayılarında

$\Gamma = \frac{A}{1-\omega^2}$, $\Omega = \frac{9-\omega^2}{9\varepsilon}$, $g = \frac{\bar{g}}{\varepsilon}$, $A = \frac{\bar{A}}{\varepsilon}$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a &= -\frac{\bar{g}}{2}, & b &= \frac{(9-\omega)^2}{24\omega^3} + \frac{3\bar{g}^2}{8\omega} - \frac{9-\omega^2}{6\omega} + \frac{3\bar{A}^2}{2\omega(1-\omega^2)^2} - \frac{27\bar{A}^2}{5\omega^3(1-\omega^2)^2} \\ c &= \frac{27\bar{A}\varepsilon}{4\omega^3(1-\omega^2)}, & \alpha &= \frac{45\varepsilon^2}{4\omega^3} \end{aligned} \quad (3.40)$$

(3.39) denklemlerini kutupsal koordinatlara taşırsak:

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta, \quad r^2 = u^2 + v^2 \quad (3.41)$$

olmak üzere,

$$\dot{r} = r(a + cr \sin 3\theta) \quad (3.42a)$$

$$\dot{\theta} = -(b + \alpha r^2) + cr \cos 3\theta \quad (3.42b)$$

elde edilir.

3.5. Üçüncü Mertebe Altharmonik Rezonans İçin Dallanma Analizi

(3.39) denklemlerinden triviyal çözüm olarak $(u,v)=(0,0)$ denge noktası görülüyor. Triviyal olmayan çözümleri araştırmak için (3.42) denklemlerinde $\dot{r}=\dot{\theta}=0$ kullanılır, trigonometrik terimler bir tarafa alınır, denklemler, kareleri alındıktan sonra, toplanır ve böylece elde edilen denklemden r çözülürse

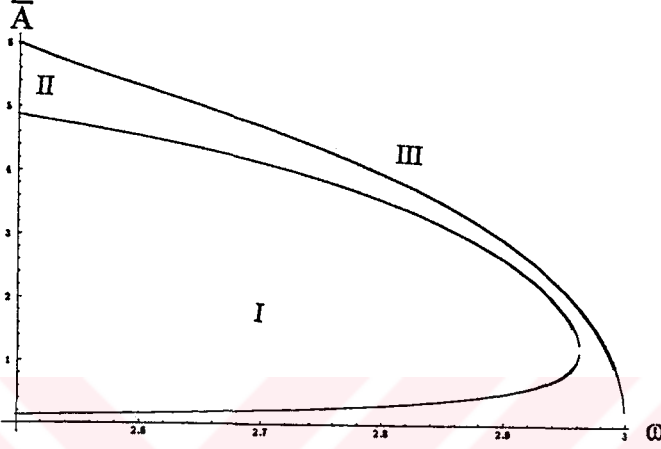
$$r = \sqrt{\frac{1}{2\alpha} \left[(c^2 - 2\alpha b) \pm \sqrt{(c^2 - 2\alpha b)^2 - 4\alpha^2(a^2 + b^2)} \right]} \quad (3.43)$$

bulunur. Gerekli incelemeden sonra her r 'ye karşılık $\theta = \theta_i$, $\theta_i + \frac{2\pi}{3}$, $\theta_i + \frac{4\pi}{3}$ olmak üzere üç θ geldiği görülür. Dolayısıyla triviyal olmayan çözümün varlığı durumunda, ki bu aşağıdaki koşulların gerçekleşmesi ile mümkün, 7 denge noktası bulunmuş olur.

$$(c^2 - 2\alpha b)^2 - 4\alpha^2(a^2 + b^2) \geq 0 \quad (3.44a)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \left[(c^2 - 2\alpha b) \pm \sqrt{(c^2 - 2\alpha b)^2 - 4\alpha^2(a^2 + b^2)} \right] > 0 \quad (3.44b)$$

(3.44) eşitsizliklerini eşitlik haline getirerek dallanma kümesini elde edebiliriz. $\varepsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.01$ alınarak elde edilen dallanma kümesi Şekil-3.5.1 ile verilmiştir. Bu şekle göre I ile gösterilen bölgede (3.43) köklerinin ikisi de reel, bu bölgenin dışında karmaşık sayılardır. Dolayısıyla I bölgesinin dışında sadece triviyal denge noktası olmasına karşın bölge içinde 7 denge noktası vardır (her r 'ye karşı üç θ geldiğinden).



Şekil-3.5.1 : $(\bar{A}, \omega)$ dallanma kümesi ($\varepsilon = 0.1$, $g = 0.01$)

Şimdi denge noktalarının kararlılık analizini yapalım: (3.42) denklemleri lineerleştirilirse

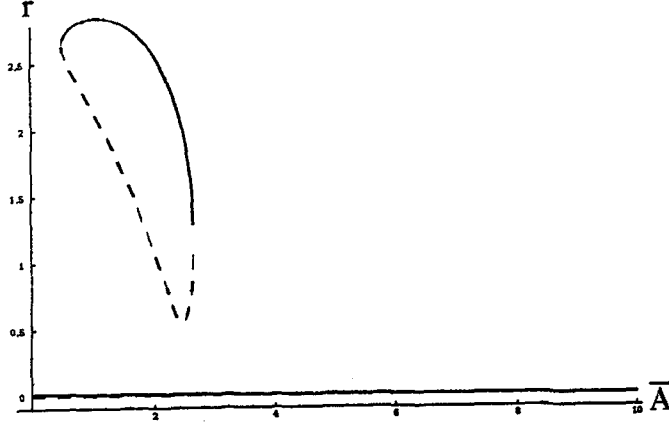
$$\begin{bmatrix} a + 2cr \sin 3\theta & 3cr^2 \cos 3\theta \\ -2\alpha r + c \cos 3\theta & -3cr \sin 3\theta \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

bulunur. Burada $r = \dot{\theta} = 0$ ile bulunan $cr \sin 3\theta = -a$, $cr \cos 3\theta = b + \alpha r^2$ eşitlikleri kullanılıp (analiz denge noktaları civarında yapıldığından) matrisin özdeğerleri hesaplanırsa

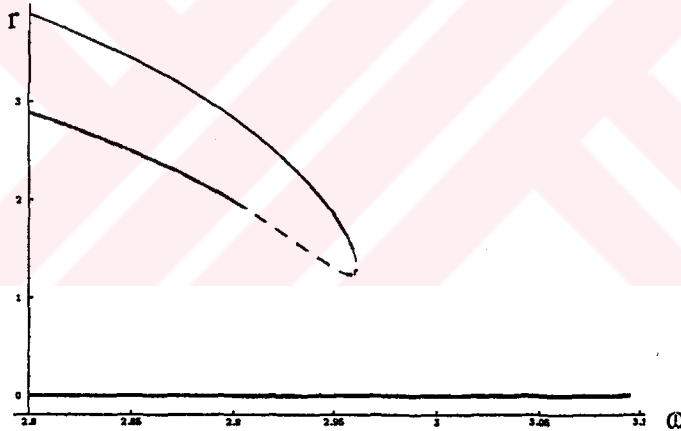
$$\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{4a^2 + 3b^2 - 3\alpha^2 r^4} \quad (3.46)$$

elde edilir. Şekil-3.5.1 'de $\omega = 2.9$ doğrusu çizilirse, bu değer denge noktalarında kullanılmasıyla denge noktalarının sayısı, doğrunun geçtiği bölgelere göre değişecektir. Bu denge noktalarının kararlılık analizini (3.46) özdeğerlerinin aldıkları değerleri Mathematica ile hesaplatıp çizdirerek gerçekleştirdik. Böylece Şekil-3.5.2 ile verilen $(r, \bar{A})$ dallanma diyagramını elde ettik. Benzer işlemleri Şekil-3.5.1'de

$\bar{A} = 1.2$ değeri için yaptık ve Şekil-3.5.3 ile verilen (r, ω) dallanma diyagramına ulaştık. Bu diyagramlardaki kesikli çizgiler kararsızlık durumunu kesiksiz çizgiler kararlılık durumunu ifade etmektedir. Diyagramlar r 'ye karşılık gelen tek θ için çizilmiştir.

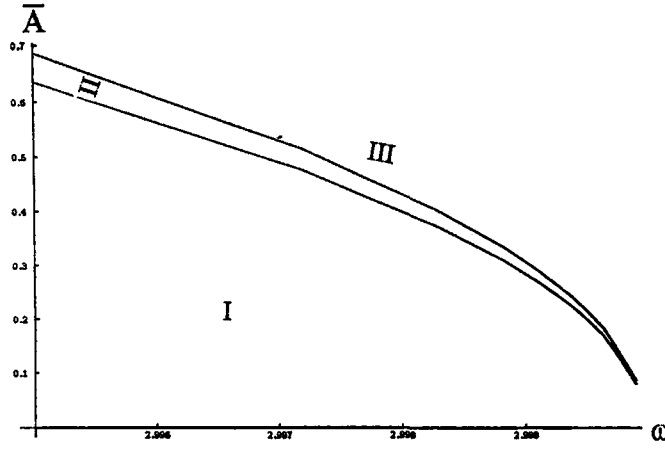


Şekil-5.3.2 : $(r, \bar{A})$ dallanma diyagramı ($\epsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.01$, $\omega = 2.9$)

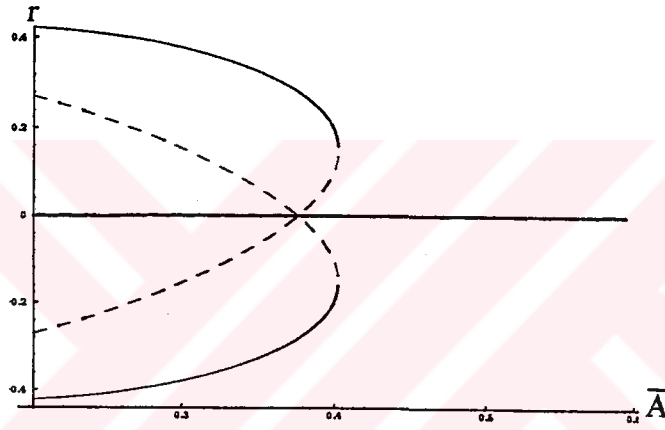


Şekil-3.5.3 : (r, ω) dallanma diyagramı ($\epsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.01$, $\bar{A} = 1.2$)

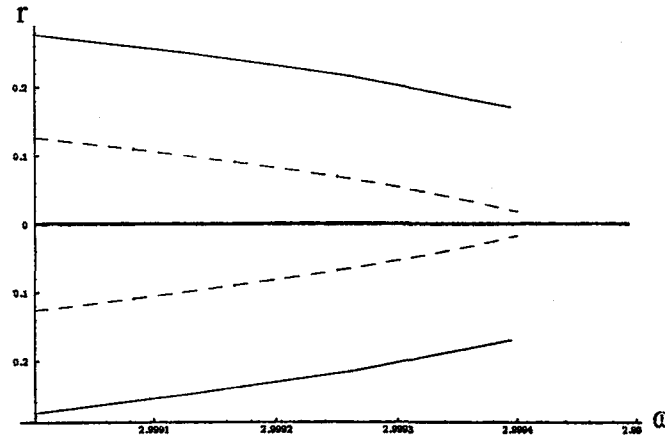
Dallanma kümesi, $\epsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.0000002$ değerleri için, tekrar elde edilirse Şekil-3.5.4 ortaya çıkar. Burada da triviyal olmayan denge noktaları sadece I ile gösterilen bölgede reeldir. Bu bölgenin dışında sadece triviyal denge noktası vardır. Şekil-3.5.4 'te $\omega = 2.998$ doğrusu çizilirse denge noktalarının sayısı doğrunun geçeceği bölgelere göre değişecektir. Bu denge noktalarının kararlılık analizi (3.46) özdeğerleri Mathematica'da araştırılarak yapılmıştır. Bu bilgilerden elde edilen $(r, \bar{A})$ dallanma diyagramı Şekil-3.5.5 ile verimiştir.



Şekil-3.5.4 : $\varepsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.00000002$ için $(\bar{A}, \omega)$ dallanma kümesi



Şekil-3.5.5 : $\varepsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.00000002$, $\omega = 2.998$ için $(r, \bar{A})$ dallanma diyagramı



Şekil-3.5.6 : $\varepsilon = 0.1$, $\bar{g} = 0.00000002$, $\bar{A} = 0.2$ için (r, ω) dallanma diyagramı

Benzer işlemler $\bar{A} = 0.2$ değeri için yapıldı ve buradan elde edilen bilgiler Şekil-3.5.6 ile verilen (r, ω) dallanma diyagramını verdi. Bu dallanma diyagramları her r' ye

karşılık θ 'lardan ikisi için çizilmiştir ve diyagramlardaki kesikli çizgiler kararsızlık durumunu kesiksiz çizgiler kararlılık durumunu ifade etmektedir.

3.6.Diğer Altharmonikler -

İkinci mertebe ortalama alma yöntemi Helmholtz salıncısının 4., 5. ve 6. derece altharmonik rezonans durumlarına da uygulanmıştır. Bütün bu uygulamaların sonuçları Ek-2 'de verilen ve Mathematica paket programı için kodlanmış programın işletilmesiyle de elde edilmiştir. Buna göre dördüncü, beşinci, ve altıncı derece altharmoniklerde (3.47a,b) ile verilen yapıya ulaşılmıştır.

$$\dot{u} = au + bv + \alpha v(u^2 + v^2) \quad (3.47a)$$

$$\dot{v} = -bu + av - \alpha u(u^2 + v^2) \quad (3.47b)$$

Buradaki a, b ve α sabitleri altharmoniklerin mertebesine göre değişmektedir.

Katsayılar, dördüncü mertebe altharmonik için

$$a = -\frac{\bar{g}}{2}, \quad b = \frac{(16 - \omega^2)^2}{32\omega^3} + \frac{\bar{g}^2}{2\omega} - \frac{16\bar{A}^2}{3\omega^3(1 - \omega^2)^2} + \frac{2\bar{A}^2}{\omega(1 - \omega^2)^2} - \frac{16 - \omega^2}{8\omega}, \quad \alpha = \frac{80\epsilon^2}{\omega^3}$$

beşinci mertebe altharmonik için

$$a = -\frac{\bar{g}}{2}, \quad b = \frac{(25 - \omega^2)^2}{80\omega^3} + \frac{5\bar{g}^2}{16\omega} - \frac{125\bar{A}^2}{21\omega^3(1 - \omega^2)^2} + \frac{5\bar{A}^2}{2\omega(1 - \omega^2)^2}, \quad \alpha = \frac{625\epsilon^2}{12\omega^3}$$

altıncı mertebe altharmonik için

$$a = -\frac{\bar{g}}{2}, \quad b = \frac{(36 - \omega^2)^2}{48\omega^3} + \frac{27\bar{g}^2}{36\omega} - \frac{27\bar{A}^2}{2\omega^3(1 - \omega^2)^2} + \frac{3\bar{A}^2}{\omega(1 - \omega^2)^2} - \frac{36 - \omega^2}{12\omega}, \quad \alpha = \frac{625\epsilon^2}{12\omega^3}$$

şeklindedir. (3.47a,b) denklemlerini kutupsal koordinatlara taşırsak şu denklemlere ulaşırız:

$$\dot{r} = ar \quad (3.48a)$$

$$\dot{\theta} = -b - \alpha r^2 \quad (3.48b)$$

Görüldüğü gibi (3.48a,b) diferansiyel denklemleri kolayca çözülebilen denklemlerdir. Dördüncü ve daha yüksek mertebe altharmonikler için ikinci mertebe ortalama alma yöntemi dallanma vermemektedir. Dolayısıyla bu rezonans durumları için üçüncü veya daha yüksek mertebe ortalama alma yöntemi uygulanmalıdır.



SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Literatürde genellikle kübik ve daha yüksek tek dereceden nonlinear terim içeren salınıcı denklemleri incelenmiştir. Bunlar arasında en çok Duffing salınıcısı ele alınmıştır. Buradan, tek serbestlik dereceli, sönümlü, kuadratik nonlinear terim içeren ve zorlamalı bir salınıcı olan Helmholtz salınıcısının analitik olarak incelenmesi önem kazanmaktadır [3,4,7]. Daha önce yapılan çalışmalarda ortaya çıkan, nonlinear salınıcıların yaklaşım teorisi ve özellikle analitik metotlarla yapılan düşük dereceli yaklaşık periyodik çözümlerin periyodiklikten düzensiz yapıya geçtiği bölgelerin önceden tahmininde yararlıdır fikri [4] bu çalışmanın önemini artırmaktadır.

Yapılan çalışmalar Helmholtz salınıcı denkleminin zorlamasız halinde kararlılık değiştiren $(0,0)$ denge noktası civarında rezonans durumları için statik dallanması ile yaklaşık periyodik çözümlerin dinamik dallanması üzerinde odaklanmıştır.

Statik dallanma çalışmaları için sözkonusu denklemin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde çoklu ölçekler yöntemi, normal form analizi ve ikinci mertebe ortalama alma yöntemi olmak üzere üç farklı yöntem kullanılmıştır. Asal rezonans durumunda her üç yöntemle de elde edilen sonuçların aynı cebrik yapıya sahip olduğu görülmüştür. Çoklu ölçekler yöntemi ile dördüncü mertebe normal form analizi sonuçları bu rezonans durumu için, kübik terimin katsayısı hariç, aynıdır. İkinci mertebe ortalama alma yöntemi ile elde edilen sonuçların katsayıları bunlarınkinden farklıdır. Bu farklar yöntemlere göre denklemin katsayılarının farklı şekillerde ölçeklendirilmesinden kaynaklanmaktadır. Bu rezonans durumu için dallanma analizi hem çoklu ölçekler yöntemi sonuçları için, hemde ikinci mertebe ortalama alma yöntemi sonuçları için yapılmış, parametrelerin aldıkları değerlere göre "Pitchfork", "Hysterisis" ve teditirgenmiş "Pitchfork" dallanmaları gözlenmiştir.

İkinci mertebe üstharmonik rezonans için çoklu ölçekler yöntemi ile elde edilen sonuçlarla ikinci mertebe normal form analizi ile elde edilen sonuçların aynı olduğu, fakat bu denklemlerin dallanma vermedikleri görülmüştür. Bu yüzden normal form analizi dördüncü mertebeye kadar uygulanmış, fakat bu kez de elde edilen denklemlerin denge noktalarını veren polinomun 5. dereceden olduğu görülmüş, bunun ise analitik olarak köklerinin bulunamaması dolayısıyla bu rezonans durumu için dallanma analizi yapılamamıştır. Fakat çizilen frekans-cevap eğrisinden dallanma olabileceği görülmüştür.

İkinci mertebe altharmonik rezonans için yine çoklu ölçekler yöntemi ile ikinci mertebe normal form analizi sonuçları aynı çıkmakla birlikte dallanma vermemişlerdir. Fakat dördüncü mertebe normal form analizi ile ikinci mertebe ortalama alma yöntemi sonuçları dallanma vermişlerdir. Bu dallanmalar incelenmiş ve çizilen şekillerle gösterilmiştir.

Dinamik dallanma analizi için ikinci mertebe ortalama alma yöntemi kullanılmıştır. Bunun için önce Helmholtz salıncı denkleminin yaklaşık periyodik çözümleri bulunmuş ardından çeşitli mertebeden altharmonikler için dallanmalar incelenmiştir. İkinci mertebe altharmonik rezonans durumu için önce triviyal olmayan denge noktasının varlığı için gereken koşullardan dallanma kümesi olarak adlandırılan şekil çizilmiş, bu şekilden denge noktalarının sayısı ve kararlılık durumlarının değiştiği ve böylece dallanmaların olduğu görülmüş, sonra parametrelere uygun değerler verilerek dallanma diyagramları çizilmiştir. Üçüncü mertebe altharmonik için de aynı işlemler yapılmış ve dallanmalar olduğu gözlenmiştir. Daha üst mertebe altharmonikleri incelemek için ikinci mertebe ortalama alma yönteminin yetersiz kaldığı görülmüş, bu yöntemin sözkonusu rezonans durumları için daha yüksek mertebeden uygulanması gerektiği sonucuna varılmıştır. Helmholtz salıncısının denge noktasında yapılan incelemeler bu salıncının sadece yerel davranışı hakkında bilgi vermesine karşın, denklemin yaklaşık periyodik çözümünün ikinci mertebe ortalama alma yöntemi ile incelenmesi salıncının global davranışı hakkında bilgi verir.

Bu sonuçlardan sonra uygulanan yöntemlerin birbirleriyle karşılaştırılmaları faydalı olacaktır. Ortalama alma yöntemi doğrudan periyodik çözümlerin dallanması ile ilgili olduğundan dinamik dallanma problemlerinde yararlıdır. Normal form analizi ve çoklu ölçekler yöntemi ise statik dallanmalar aracılığıyla oluşan periyodik çözümlerin kararlılığı olaylarını incelemek için faydalıdır. Çoklu ölçekler yönteminin zorluğu incelenecek denklemdeki katsayıların ölçeklendirilmesinde kendini göstermektedir. Yapılan çalışmalarda bu yöntem için katsayılar değişik şekillerde ölçeklendirilmiş bunlar içinden sadece asal rezonans durumunda sönüm ve zorlamanın küçük alınmasıyla ortaya çıkan denklemlerin dallanma verdiği görülmüştür. İkincil rezonans durumları için güçlü zorlama ve zayıf zorlama olayları ayrı ayrı incelenmiştir. Buna rağmen bu yöntemin iyi tarafı yapılan ölçeklendirmeye dayanarak parametrelerin birbirlerine göre alacağı değerlerin kolay saptanabilmesidir. Normal form analizi ile ikinci mertebe ortalama alma yöntemlerinin programlanabilmeleri onlara bu açıdan bir üstünlük sağlar. Nitekim burada yapılan çalışmalarda elle bulunan sonuçlar Mathematica paket programı için yapılan ve Ekler kısmında verilen programların sonuçları ile doğrulanmıştır.

İleride yapılacak çalışmalarda, nümerik yöntemler kullanılarak burada analitik yöntemlerle elde edilen sonuçların karşılaştırılması faydalı olacaktır. Ayrıca üçüncü veya daha yüksek mertebe ortalama alma yöntemi kullanılarak, ikinci mertebenin uygulanmasıyla dallanma vermeyen altharmonikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] NAYFEH, A. H., Perturbations Methods, Willey-Interscience Publication, New York, (1973)
- [2] ÜNAL, G., Türbülansa Bir Grup Teorik Yaklaşım, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora tezi, İstanbul, (1991)
- [3] HOLMES, C. and HOLMES, P., Second Order Averaging and Bifurcations To Subharmonics in Duffing's Equation, Journal of Sound and Vibration, 78(2), 161-174, (1981)
- [4] SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W. and RUDOWSKI, J., Bifurcations Phenomena in a Nonlinear Oscillator: Approximate Analytical Studies Versus Computer Simulation Results, Physica D 66, 368-380, (1993)
- [5] NAYFEH, A. H. and MOON, D. T., Nonlinear Oscillations, Willey-Interscience Publication, New York, (1979)
- [6] HALE, J., Oscillations in Nonlinear Systems, McGraw Hill, New York, (1963)
- [7] RUBÍO, M. A.- DE LA TORRE, M. and ANTORANZ, J. C., Intermittencies and Power-Law Low-Frequency Divergencies in a Nonlinear Oscillator, Physica D 36, 92-108, (1989)

EK-1

Normalize dönüşümünün katsayılarını ve normal form denklemlerindeki nonlinear terimlerin katsayılarını hesaplayan Mathematica için yazılmış program:

```

ozdeg={w I,w I,-w I,-w I}
a[1,1]={0,0,0,0}
a[1,2]={0,0,0,0}
a[1,3]={0,0,0,0}
a[1,4]={0,0,0,0}
a[2,1]={0,0,0,0}
a[2,2]={0,al I/(2 w),0,al I/(2 w)}
a[2,3]={0,0,0,0}
a[2,4]={0,al I/(2 w),0,al I/(2 w)}
a[3,1]={0,0,0,0}
a[3,2]={0,0,0,0}
a[3,3]={0,0,0,0}
a[3,4]={0,0,0,0}
a[4,1]={0,0,0,0}
a[4,2]={0,-al I/(2 w),0,-al I/(2 w)}
a[4,3]={0,0,0,0}
a[4,4]={0,-al I/(2 w),0,-al I/(2 w)}
t={b[1],b[2],b[3],b[4]}
Do[Do[If[Part[ozdeg,i]==Part[ozdeg,k]+Part[ozdeg,j],b[j]=1,b[j]=0,b[j]=0],{j,4}];delta1[i,k]=t,{i,4},{k,4}]
deltaas1=Print[Table[delta1[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

Do[Do[If[Part[delta1[i,k],j]==0,b[j]=Part[a[i,k],j]/(Part[ozdeg,k]+Part[ozdeg,j]-Part[ozdeg,i]),b[j]=0],{j,4}];alfa[i,k]=t,{i,4},{k,4}]
alfaas=Print[Table[alfa[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

Do[Do[If[Part[delta1[i,k],j]==1,b[j]=(Part[a[i,k],j]) (Part[delta1[i,k],j]),b[j]=0],{j,4}];fi[i,k]=t,{i,4},{k,4}]
fias=Print[Table[fi[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

tt={{b1[1],b1[2],b1[3],b1[4]},{b2[1],b2[2],b2[3],b2[4]},{b3[1],b3[2],b3[3],b3[4]},{b[1],b[2],b[3],b[4]}}
Do[Do[Do[If[Part[ozdeg,i]==Part[ozdeg,l]+Part[ozdeg,m]+Part[ozdeg,p],Part[tt,m,p]=1,Part[tt,m,p]=0,Part[tt,m,p]=0 ],{p,4}],{m,4}];delta2[i,l]=tt,{i,4},{l,4}]
deltaas2=Print[Table[delta2[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

```

```

Do[Do[Do[If[Part[delta2[i,l],m,p]==0,
  Part[tt,m,p]=Simplify[2/(3 (Part[ozdeg,l]+Part[ozdeg,m]
+Part[ozdeg,p]-Part[ozdeg,i]))(
  Sum[(Part[a[i,j],p]) (Part[alfa[j,l],m]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],l]) (Part[alfa[j,m],p]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],m]) (Part[alfa[j,l],p]),{j,1,4}]
-Sum[(Part[alfa[i,j],m]) (Part[fi[j,p],l]),{j,1,4}]
-Sum[(Part[alfa[i,j],l]) (Part[fi[j,m],p]),{j,1,4}]
-Sum[(Part[alfa[i,j],p]) (Part[fi[j,l],m]),{j,1,4}]],Part[tt,m,p]==0,{p,4}]
,{m,4}];beta[i,l]=tt,{i,4},{l,4}]
betaas=Print[Table[beta[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

```

```

Do[Do[Do[If[Part[delta2[i,l],m,p]==1,Part[tt,m,p]=Simplify[2/3 (
  Sum[(Part[a[i,j],p]) (Part[alfa[j,l],m]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],l]) (Part[alfa[j,m],p]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],m]) (Part[alfa[j,l],p]),{j,1,4}]
-Sum[(Part[alfa[i,j],m]) (Part[fi[j,p],l]),{j,1,4}]
-Sum[(Part[alfa[i,j],l]) (Part[fi[j,m],p]),{j,1,4}]
-Sum[(Part[alfa[i,j],p]) (Part[fi[j,l],m]),{j,1,4}]],Part[tt,m,p]==0,{p,4}]
,{m,4}];kapa[i,l]=tt,{i,4},{l,4}]
kapaas=Print[Table[kapa[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

```

```

ttt={{ {b11[1],b11[2],b11[3],b11[4]},{b12[1],b12[2],b12[3],b12[4]},{
  {b13[1],b13[2],b13[3],b13[4]},{b1[1],b1[2],b1[3],b1[4]}},
  {{b21[1],b21[2],b21[3],b21[4]},{b22[1],b22[2],b22[3],b22[4]},{
  {b23[1],b23[2],b23[3],b23[4]},{b2[1],b2[2],b2[3],b2[4]}},
  {{b31[1],b31[2],b31[3],b31[4]},{b32[1],b32[2],b32[3],b32[4]},{
  {b33[1],b33[2],b33[3],b33[4]},{b3[1],b3[2],b3[3],b3[4]}},
  {{b41[1],b41[2],b41[3],b41[4]},{b42[1],b42[2],b42[3],b42[4]},{
  {b43[1],b43[2],b43[3],b43[4]},{b4[1],b4[2],b4[3],b4[4]}}}

```

```

Do[Do[Do[Do[If[Part[ozdeg,i]==Part[ozdeg,l]+Part[ozdeg,m]+Part[ozdeg,p]
+Part[ozdeg,r],Part[ttt,m,p,r]=1,Part[ttt,m,p,r]=0,Part[ttt,m,p,r]=0,{r,4}],
{p,4}]
,{m,4}];delta3[i,l]=ttt,{i,4},{l,4}]
deltaas3=Print[Table[delta3[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

```

```

Do[Do[Do[Do[If[Part[delta3[i,l],m,p,r]==1,
  Part[ttt,m,p,r]=(1/2) ((Sum[(Part[a[i,j],r]) (Part[beta[j,l],m,p]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],l]) (Part[beta[j,m],p,r]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],m]) (Part[beta[j,p],r,l]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[a[i,j],p]) (Part[beta[j,r],l,m]),{j,1,4}])
-(Sum[(Part[alfa[i,j],m]) (Part[kapa[j,p],r,l]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[alfa[i,j],p]) (Part[kapa[j,r],l,m]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[alfa[i,j],r]) (Part[kapa[j,l],m,p]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[alfa[i,j],l]) (Part[kapa[j,m],p,r]),{j,1,4}])
-(Sum[(Part[beta[i,j],m,p]) (Part[fi[j,r],l]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[beta[i,j],p,r]) (Part[fi[j,l],m]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[beta[i,j],r,l]) (Part[fi[j,m],p]),{j,1,4}]

```

```

+Sum[(Part[beta[i,j],l,m]) (Part[fi[j,p],r]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[beta[i,j],l,p]) (Part[fi[j,m],r]),{j,1,4}]
+Sum[(Part[beta[i,j],m,r]) (Part[fi[j,l],p]),{j,1,4}]]))
+(1/6) (Sum[(Part[a[i,j],h]) ((Part[alfa[j,l],m]) (Part[alfa[h,p],r])
+(Part[alfa[j,m],p]) (Part[alfa[h,r],l])
+(Part[alfa[j,p],r]) (Part[alfa[h,l],m])
+(Part[alfa[j,r],l]) (Part[alfa[h,m],p])+(Part[alfa[j,l],p])
(Part[alfa[h,m],r]) +(Part[alfa[j,m],r]) (Part[alfa[h,l],p])),{j,1,4},{h,1,4}]]
,Part[ttt,m,p,r]=0},{r,4},{p,4}]
,{m,4}];omega[i,l]=ttt,{i,4},{l,4}]
omegaas=Print[Table[omega[i,j],{i,1,4},{j,1,4}]]

```

Yukarıda verilen programdaki ilk 17 satır Helmholtz salınıcı denkleminin, asal rezonans için, normalize dönüşümün uygulanabileceği standart forma getirildikten sonraki özdeğerleri ile nonlinear termlerin katsayılarıdır. Programın bu satırları ikinci mertebe altharmonik rezonans için

```

ozdeg={-w I,w I,-2 w I,2 w I}
a[1,1]={-al I/(2 w),-al I/w,al/(2 w^2),-al/(2 w^2)}
a[1,2]={-al I/w,-al I/(2 w),al/(2 w^2),-al/(2 w^2)}
a[1,3]={al/(2 w^2),al/(2 w^2),al I/(8 w^3),-al I/(4 w^3)}
a[1,4]={-al/(2 w^2),-al/(2 w^2),-al I/(4 w^3),al I/(8 w^3)}
a[2,1]={al I/(2 w),al I/w,-al/(2 w^2),al/(2 w^2)}
a[2,2]={al I/w,al I/(2 w),-al/(2 w^2),al/(2 w^2)}
a[2,3]={-al/(2 w^2),-al/(2 w^2),-al I/(8 w^3),al I/(4 w^3)}
a[2,4]={al/(2 w^2),al/(2 w^2),al I/(4 w^3),-al I/(8 w^3)}
a[3,1]={0,0,0,0}
a[3,2]={0,0,0,0}
a[3,3]={0,0,0,0}
a[3,4]={0,0,0,0}
a[4,1]={0,0,0,0}
a[4,2]={0,0,0,0}
a[4,3]={0,0,0,0}
a[4,4]={0,0,0,0}

```

ikinci mertebe üstharmonik rezonans için

```

ozdeg={-w I,w I,-w I/2,w I/2}
a[1,1]={-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w)}
a[1,2]={-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w)}
a[1,3]={-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w)}
a[1,4]={-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w),-al I/(2 w)}
a[2,1]={al I/(2 w),al I/(2 w),al I/(2 w),al I/(2 w)}
a[2,2]={al I/(2 w),al I/(2 w),al I/(2 w),al I/(2 w)}

```


$a[2,3]=\{aI/(2w), aI/(2w), aI/(2w), aI/(2w)\}$
 $a[2,4]=\{aI/(2w), aI/(2w), aI/(2w), aI/(2w)\}$
 $a[3,1]=\{0,0,0,0\}$
 $a[3,2]=\{0,0,0,0\}$
 $a[3,3]=\{0,0,0,0\}$
 $a[3,4]=\{0,0,0,0\}$
 $a[4,1]=\{0,0,0,0\}$
 $a[4,2]=\{0,0,0,0\}$
 $a[4,3]=\{0,0,0,0\}$
 $a[4,4]=\{0,0,0,0\}$

şeklinde alınmıştır.



EK-1

Birinci ve ikinci mertebe ortalama alma yönteminin Mathematica için yazılmış programı:

```
chos1=InputString["Yeni Problem ister misiniz? (y/n)"]
exponentialize={Sin[t]->(E^(I t)-E^(-I t))/(2 I),
Sin[an_ t]->(E^(an I t)-E^(-I an t))/(2 I),
Cos[t]->(E^(I t)+E^(-I t))/2 ,
Cos[an_ t]->(E^(an I t)+E^(-I an t))/2 ,
If[chos1=="n",<<ajump1.mat,]
Clear[x]
chos2=InputString
["z` +Omega^2 z=eps f(z,zdot,t) ? (y/n)"]
If[chos2=="n",<<ajump2.mat,]
n=2
omega0=Input[["omega0= "]]
Print["omega0= ",omega0]
or1=Input["f(z,zdot,t)= "]
f=or1*eps
Apply[f,{z,zdot,t}]
test=D[f,t]
If[NumberQ[test],If[test == 0, omega1=omega0,],
omega=Input["zorlama frekansını giriniz "];
k=Input["Altharmonik rezonansın mertebesini giriniz"];
omega1=omega/k]
zsub=List[z=Cos[omega1 t] x1-Sin[omega1 t] x2,
zdot=-omega1 Sin[omega1 t] x1-omega1 Cos[omega1 t] x2]
vf=Block[{zsub, t=tau/omega1},
{-1/omega1^2 (eps kapomega/k^2 z +f) Sin[omega1 t],
-1/omega1^2 (eps kapomega/k^2 z +f) Cos[omega1 t] }]
vf=vf/.tau->t
If[omega1==omega0, vf=vf/.kapomega->0,
vf2=Expand[vf]
Do[Part[vf2, i]=Map[Factor, Part[vf2, i], {i,1,2}]
x=List[x1,x2]
<<ajump1.mat
```

Bu programda geçen ajump1 ve ajump2 aşağıda verilmiştir:

ajump1.mat:

```

m=Input["Hangi mertebe ortalama alma? (1/2)"]
coefvfeps1=Coefficient[vf2,eps]
coefvfeps2=Coefficient[vf2,eps,2]
om1=Expand[coefvfeps1,Trig->True]
om2=om1/.{Sin[n_ t]->0,Cos[n_ t]->0,Sin[t]->0,Cos[t]->0}
g1bar=Simplify[om2]
Print[g1bar]
Input[]
If[m==1,result=eps g1bar,
g1tilde=coefvfeps1-g1bar;
w1=Integrate[g1tilde,t];
jacob[i_,j_]:=D[Part[g1tilde,i],Part[x,j]];
jacg1tilde=Table[jacob[i,j],{i,1,n},{j,1,n}];
om3=Expand[jacg1tilde.w1+coefvfeps2,Trig->True];
om4=om3/.{Sin[n_ t]->0,
Cos[n_ t]->0,Sin[t]->0,Cos[t]->0};
g2bar=Simplify[om4];
result=eps g1bar+eps^2 g2bar]
y=ToExpression[Table[StringJoin[Part[Table["y",{i,1,n}],i],
Part[Table[ToString[i],{i,1,n}],i]],{i,1,n}]]
om5=Table[Part[x,i]->Part[y,i],{i,1,n}]
result=result/.om5
Print[result]
Abort[]

```

ajump2.mat:

```

n=Input["Diferansiyel denklem sayısını giriniz= "]
x=ToExpression[Table[StringJoin[Part[Table["x",{i,1,n}],i],
Part[Table[ToString[i],{i,1,n}],i]],{i,1,n}]]
vf=Table[Input[StringForm["Enter Rhs(`)=Eps *..... ",i]]*eps,{i,1,n}]
ToExpression[vf]
Do[Print["d",Part[x,i],"/dt=",Part[vf,i]],{i,1,n}]
vf2=Expand[vf/.exponentialize]
Do[Part[vf2,i]=Map[Factor,Part[vf2,i]],{i,1,2}]
<<ajump1.mat

```

ÖZGEÇMİŞ

Reşat KÖŞKER, 1970 yılında Hatay'ın İskenderun ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada yaptı. İskenderun Barbaros Lisesinden mezun olduğu 1987 yılında Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümüne girdi. Burayı 1991 yılında bölüm birincisi olarak bitirdi. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı Sistem Analizi Programında yüksek lisans öğrenimine başladı. 1992 yılı Şubat ayında Yıldız Teknik Üniversitesi Kimya-metalurji Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak girdi ve halen aynı yerde çalışmaktadır.