



TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ İLE EĞİLME ANALİZİNDE KAYMA DÜZELTME KATSAYISININ ETKİSİ

Ömer Yavuz Bozkurt¹, Özkan Özbek²

^{1,2}Gaziantep Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü, 27310, Gaziantep

ABSTRACT

In this study, the effects of various shear correction factors are examined on the solution accuracy of bending analyses of layered composite plates using element-free Galerkin method (EFGM). The solutions are achieved using a general EFGM algorithm, based on Reissner-Mindlin plate theory (FSDT), has been developed on MATLAB programming environment. The obtained results using regular and irregular node distributions are compared with analytical results in the literature.

ÖZET

Bu çalışmada, tabakalı kompozit plakaların farklı kayma düzeltme katsayıları kullanarak eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile eğilme analizleri yapılmış ve sonuçları kayma düzeltme katsayılarının çözüm üzerindeki etkilerini incelemek için analitik çözümün sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Yöntem için, MATLAB programı ortamında Reissner-Mindlin Plaka Teorisi tabanlı genel amaçlı bir kod geliştirilmiş ve çözümler bu kod kullanılarak yapılmıştır. Çözümler için oluşturulan modellerde, düzgün ve düzensiz dağıtılmış düğüm nokta düzenleri kullanılmıştır.

GİRİŞ

Plakaların eğilme analizlerinde kullanılan kalınlık boyunca sabit enine kayma gerilmesi varsayımı tabakalı plakalarda tabaka kalınlığı boyunca gerçekleşen enine kayma gerilmesi ile çelişmesi sebebiyle kayma düzeltme katsayısı tabakalı plakaların eğilme analizlerinde tabakasız plakalara göre daha fazla önem göstermektedir. Tek katmanlı plakaların sonlu elemanlar ve ağsız yöntemler kullanılarak yapılan eğilme analizlerinde kayma düzeltme katsayısı olarak 5/6 değeri yaygın kullanıma sahiptir. Ancak, tabakalı plakaların sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilen eğilme analizlerinde 1/2, 3/4, 5/6, 0.917, 1 ve 1.054 gibi çeşitli kayma düzeltme katsayısı değerleri kullanımları dikkat çekmektedir [1,2]. Ağsız yöntemler ile tabakalı plakaların eğilme analizlerinde sadece 5/6 değeri kullanımı gözlemlenmiştir [3].

Ağsız yöntemler, Sonlu ve Sınır Elemanları yöntemleri gibi gelişmesinin yeterince tamamlanmamıştır. Literatürde öne sürülen birçok yeni ağsız yöntemler mevcuttur [4-7]. Bunlar arasında Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi, ilk ağsız yöntemlerden biri olması ve yüksek yakınsama hızı sayesinde katı cisimler mekaniğinde popüler bir ağsız yöntemdir [4]. Şekil fonksiyonu türetimi için Hareketli En Küçük Kareler yaklaşımı kullanan yöntem sayısal integral almak içinde arka plan hücreleri ve Gauss quadrature yöntemi kullanmaktadır [8].

TABAKALI KOMPOZİT PLAKALAR İÇİN REİSSNER-MİNDLİN PLAKA TEORİSİ

Kartezyen koordinat sisteminin $x - y$ düzleminde yatan orta düzlemi ile tipik bir Mindlin-Reissner plakası Şekil 1’de gösterilmektedir. Orta düzlem ile mesafesi z olan bir noktanın yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z\theta_x(x, y) \\ -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

burada (u, v, w) plakanın x, y ve z yönlerinde ki yer değiştirmelerini, θ_x ve θ_y enine kesitin x ve y eksenlerine göre dönmelerini göstermektedir. Eğilmeden oluşan θ_x, θ_y enine dönmeleri ve w orta düzlem yer değiştirmesi ile Mindlin-Reissner plakasında oluşan birim deformasyon aşağıdaki gibi yazılır.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial y} \\ -z \frac{\partial \theta_x(x, y)}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_y(x, y)}{\partial x} \\ -\theta_y(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ -\theta_x(x, y) + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Ortotropik doğrusal elastik malzemeler için genelleştirilmiş Hooke yasasını kullanarak i ’inci tabakada ki gerilme aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \bar{\mathbf{c}}^i \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

burada

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}\}^T \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{c}}^i = \mathbf{T}^T \mathbf{c}^i \mathbf{T} \quad (5)$$

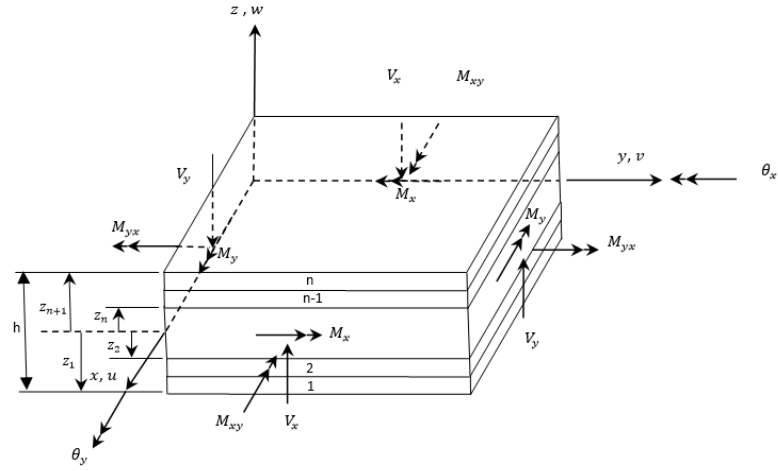
Ayrıca $\mathbf{c}^i$ i ’inci tabakanın malzeme matrisidir ve $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{13}$ and G_{23} gibi malzeme özelliklerinden oluşur. Ortotropik malzemeler için malzeme matrisi aşağıdaki gibidir;

$$\mathbf{c}^i = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_1\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (6)$$

ve $\mathbf{T}$ tabaka dönüşüm matrisi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta \cos\theta & -\sin\theta \cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

burada θ ilgili tabakada ki fiberin yönelim açısıdır.



Şekil 1. Tipik tabakalı Mindlin-Reissner plakası

Tabakada ki fiber yerleşimine göre dönüşümü gerçekleştirilmiş birim deformasyonları $\{\bar{\epsilon}_{xx} \ \bar{\epsilon}_{yy} \ \bar{\gamma}_{xy}\} = z \{\bar{\epsilon}_{xx} \ \bar{\epsilon}_{yy} \ \bar{\gamma}_{xy}\}$ göz önüne alarak i 'inci tabakanın üst yüzeyinde ki gerilmeler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{z_i+1} &= z_{i+1} [\bar{c}_{11}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{13}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\
 \sigma_{yy}^{z_i+1} &= z_{i+1} [\bar{c}_{12}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{22}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{23}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\
 \tau_{xy}^{z_i+1} &= z_{i+1} [\bar{c}_{13}^i \bar{\epsilon}_{xx} + \bar{c}_{23}^i \bar{\epsilon}_{yy} + \bar{c}_{33}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\
 \tau_{xz}^{z_i+1} &= [\bar{c}_{44}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{45}^i \gamma_{yz}] \\
 \tau_{yz}^{z_i+1} &= [\bar{c}_{45}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{55}^i \gamma_{yz}]
 \end{aligned} \tag{8}$$

Eğme döndürgüleri (M_{ij}) ve kayma kuvvetleri (V_{ij}) aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \sigma_{xx}^i dz \\
 M_{yy} &= \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \sigma_{yy}^i dz \\
 M_{xy} &= \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} z \tau_{xy}^i dz \\
 V_{xx} &= k_{sh} \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{xz}^i dz \\
 V_{yy} &= k_{sh} \sum_i^n \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tau_{yz}^i dz
 \end{aligned} \tag{9}$$

burada k_{sh} kayma düzeltme katsayısıdır. Denklem 8'de ki gerilme değerlerinin Denklem 9'a yerleştirilmesi ile Denklem 9 aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
M_{xx} &= \sum_i^n \left[\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right] [\bar{c}_{11}^i \bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{c}_{12}^i \bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{c}_{13}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\
M_{yy} &= \sum_i^n \left[\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right] [\bar{c}_{12}^i \bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{c}_{22}^i \bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{c}_{23}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\
M_{xy} &= \sum_i^n \left[\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right] [\bar{c}_{13}^i \bar{\varepsilon}_{xx} + \bar{c}_{12}^i \bar{\varepsilon}_{yy} + \bar{c}_{33}^i \bar{\gamma}_{xy}] \\
V_{xx} &= k_{sh} \sum_i^n [z_{i+1} - z_i] [\bar{c}_{44}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{45}^i \gamma_{yz}] \\
V_{yy} &= k_{sh} \sum_i^n [z_{i+1} - z_i] [\bar{c}_{45}^i \gamma_{xz} + \bar{c}_{55}^i \gamma_{yz}]
\end{aligned} \tag{10}$$

Denklem 10'daki eğme döndürücüleri ve kayma kuvvetleri vektörel olarak aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i^n \mathbf{D}^i \mathbf{L} \Phi \left(\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right) = \left[\sum_i^n \mathbf{D}^i \left(\frac{z_{i+1}^3}{3} - \frac{z_i^3}{3} \right) \right] \mathbf{L} \Phi \tag{11}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xx} \\ V_{yy} \end{bmatrix} = k_{sh} \sum_i^n [\mathbf{A}_{sh}^i (\nabla \mathbf{w} - \Phi)(z_{i+1} - z_i)] = k_{sh} [\sum_i^n \mathbf{A}_{sh}^i (z_{i+1} - z_i)] (\nabla \mathbf{w} - \Phi)$$

burada,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\Phi = \{\theta_x \quad \theta_y\}^T \tag{13}$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T \tag{14}$$

Ayrıca $\mathbf{D}^i$ ve $\mathbf{A}_{sh}^i$ sırası ile eğme ve kayma etkileri ile ilişkili malzeme özellikleridir. Matris olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\mathbf{D}^i = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11}^i & \bar{c}_{12}^i & \bar{c}_{13}^i \\ \bar{c}_{12}^i & \bar{c}_{22}^i & \bar{c}_{23}^i \\ \bar{c}_{13}^i & \bar{c}_{23}^i & \bar{c}_{33}^i \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{A}_{sh}^i = \begin{bmatrix} \bar{c}_{44}^i & \bar{c}_{45}^i \\ \bar{c}_{45}^i & \bar{c}_{55}^i \end{bmatrix} \tag{16}$$

Kütle kuvvetlerin yokluğunda, sanal çalışma prensibi kullanılarak elde edilen denge denklemleri aşağıda verilmiştir,

$$\mathbf{L}^T \mathbf{M} - \mathbf{V} = 0 \tag{17}$$

$$\nabla^T \mathbf{V} + \mathbf{b} = 0$$

burada $\mathbf{b}$ uygulanan dış kuvvetler vektörüdür. Eleman Bağımsız Galerkin yöntemi bu denklem sistemlerinin çözümü için kullanılır.

ELEMAN BAĞIMSIZ GALERKİN YÖNTEMİ

Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı

Hareketli En Küçük Kareler Yaklaşımı'na göre herhangi bir $\mathbf{x}$ noktasında ve Ω lokal alan içerisinde yer alan $u(\mathbf{x})$ alan değişkeni fonksiyonu için aşağıdaki ifade yazılır;

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (18)$$

burada m esas terimlerinin sayısını, $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), p_3(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$ monomiyal esas fonksiyonlarının vektörünü, $\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), a_3(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})\}$ ise katsayılar vektörünü, ve $\mathbf{x}^T = [x, y]$ 2 boyutlu problemler için konum vektörünü gösterir. $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ esas fonksiyonunu elde etmek monomiyaller Pascal Üçgeni'nden minimum bütünlüğü sağlayarak seçilir.

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ coefficients vektörünü elde etmek için $u(\mathbf{x})$ fonksiyonu ve lokal yaklaşımı arasındaki fark Denklem 19'te ifade edilen ağırlıklı ayrık (discrete) L_2 norm kullanılarak minimize edilmelidir.

$$J = \sum_{i=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i]^2 \quad (19)$$

burada, n $\mathbf{x}$ noktasının destek alanı içerisinde bulunan düğüm noktalarının sayısını, u_i $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ 'de u 'nun noktasal değerini, $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ ise ağırlık fonksiyonun ifade etmektedir. Ağırlık fonksiyonu değeri $\mathbf{x}$ noktasının destek alanı içinde bulunan bütün düğüm noktaları için sıfırdan büyük olmak zorundadır.

Herhangi bir $\mathbf{x}$ noktasında $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ e bağlı olarak ağırlıklı kalanın minimize edilmesi için aşağıdaki denklem kullanılır;

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (20)$$

Denklem 25'in uygulanması ile lineer denklemi kümesi olarak aşağıdaki denklem elde edilir;

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (21)$$

burada $\mathbf{U}_s = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}^T$ destek alanındaki düğüm noktaları için alan fonksiyonunun noktasal değerlerinin vektörüdür. Ayrıca $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri sırasıyla Denklem 22 ve Denklem 23'de ki gibidir.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})p(x_i)p^T(x_i), \quad w_i(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - x_i) \quad (22)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})p(x_1) \quad w_2(\mathbf{x})p(x_2) \quad \dots \quad w_n(\mathbf{x})p(x_n)] \quad (23)$$

$\mathbf{A}$ matrisi hareketli en küçük karelerin ağırlıklı döndürge matrisi olarak adlandırılır ve eğer tekil değilse $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (24)$$

$u^h(\mathbf{x})$ 'in lokal yaklaşımı Denklem 18 kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir;

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})u_i = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (25)$$

burada Φ^T is hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonlarının vektörünü gösterir ve Denklem 26'de ki gibi ifade edilir.

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (26)$$

Şekil fonksiyonlarının kısmi türevlerine Denklem 32 kullanılarak ulaşılır.

$$\Phi_{,i} = (\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_{,i} = \mathbf{p}_{,i}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,i}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,i} \quad (27)$$

burada

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,i} \mathbf{A}^{-1} \quad (28)$$

Ağırlık fonksiyonları hareketli en küçük kareler şekil fonksiyonlarını türetmek için en önemli noktalardan biridir. Hareketli en küçük kareler yaklaşımının süreklilik özellikleri temel olarak ağırlık fonksiyonlarına dayanmaktadır. Ağırlık fonksiyonu maksimum değerini destek alanının merkezinden alarak destek alanı içerisinde pozitif, destek alanı dışında monoton bir düşüş

kullanarak sıfır olmalıdır. Literatürde değişik ağırlık fonksiyonları bulunmaktadır [9]. Bu çalışmada kübik spline ağırlık fonksiyonu kullanılır ve formülü aşağıdaki gibi yazılmaktadır;

$$w_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = w(\bar{r}_i) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ 4/3 - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - 4/3 \bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (29)$$

2 boyutlu problemlerde dikdörtgen etki alanı için ağırlık fonksiyonları Denklem 30 ve Denklem 31 kullanılarak elde edilir.

$$w(\bar{r}_i) = w(r_x)w(r_y) = w_x w_y \quad (30)$$

$$r_x = \frac{|x - x_i|}{r_{wx}} \quad \text{ve} \quad r_y = \frac{|y - y_i|}{r_{wy}} \quad (31)$$

burada r_{wx} ve r_{wy} x ve y yönlerinde destek alanı ölçüleridir.

Galerkin Zayıf Formu ve Sınır Şartlarının Güçlendirilmesi

Reissner-Mindlin plakaları için Galerkin zayıf form denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_d \mathbf{u})^T D \mathbf{L}_d \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{u})^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta(\mathbf{L}_u \mathbf{u})^T t_{\Gamma} dS + \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_{\Gamma})^T \alpha (\mathbf{u}_b - \mathbf{u}_{\Gamma}) d\Gamma \quad (32)$$

Buradan ayırık(discrete) sistem denklemi aşağıda gibi yazılabilir;

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^{\alpha}) \mathbf{U} = (\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\alpha}) \quad (33)$$

burada $\mathbf{K}$ global direngenlik matrisini gösterir ve Denklem 32’da verilen noktasal direngenlik matrislerinden elde edilir.

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega \quad (34)$$

burada,

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \phi_i & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & \phi_i \end{bmatrix}^T \quad (35)$$

Ayrıca Denklem 33’de yer alan $\mathbf{K}^{\alpha}$ ceza katsayıları matrisi olup, Denklem 36’de ifade edilmektedir.

$$(\mathbf{K}^{\alpha})_{ij} = \int_{\Gamma_u} \varphi_i^T \alpha \varphi_j d\Gamma \quad (36)$$

burada φ_i diyagonal matrisidir. Eğer ilgili serbestlik derecesi kısıtlanmamış ise diyagonal elemanlar 0’a aksi takdirde 1’e eşittir.

Denklem 33’de yer alan kuvvet vektörü $\mathbf{F}$ global kuvvet vektörüdür ve Denklem 37’de ifade edilen noktasal kuvvet vektörleri kullanılarak elde edilir.

$$F_i = \int_{\Omega} (\mathbf{L}_u \Phi_i)^T b d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{L}_u \Phi_i)^T t_{\Gamma} dS \quad (37)$$

burada Φ_i şekil fonksiyonlarının diyagonal matrisidir.

Denklem 33’de bulunan $\mathbf{F}^{\alpha}$ vektörü gerekli sınır şartlarının yerine getirilmesi ile elde edilen kuvvetleri gösterir ve ifadesi aşağıdaki gibidir;

$$F_i^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \varphi_i^T \alpha u_{\Gamma} d\Gamma \quad (38)$$

ÇÖZÜMLER VE TARTIŞMA

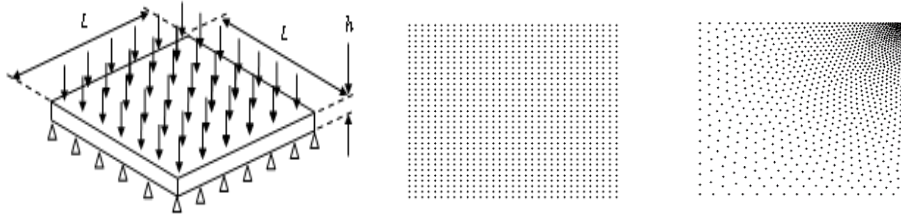
Tabakalı kompozit plakaların farklı kayma düzeltme katsayıları kullanarak eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile eğilme analizleri yapmak için iki örnek problem çözümü gerçekleştirilmiştir. Örneklerde kullanılan malzemelerin özellikleri Çizelge 1.'de verilmiştir. Çözümlerdeki deformasyon ve x yönündeki gerilme değerleri kritik nokta olarak kabul edilen 1. tabakanın üst yüzeyinde ve orta noktasında, y yönündeki gerilme değerleri 2. tabakanın üst yüzeyinde ve orta noktasından elde edilmiştir. Eleman bağımsız Galerkin yöntemi çözümlerinde ölçüsüz bir destek alanı büyüklüğü için 3.0, arka plan hücrelerindeki integrasyon nokta sayısı için 5×5 ve ceza katsayısı için 1×10^6 değerleri kullanılmıştır.

Çizelge 1. Çözümlerde kullanılan malzemelerin özellikleri

	M1	M2
E_1, Pa	250×10^9	25×10^6
E_2, Pa	10×10^9	1.0×10^6
G_{12}, Pa	5×10^9	0.5×10^6
G_{13}, Pa	5×10^9	0.5×10^6
G_{23}, Pa	2×10^9	0.2×10^6
ν_{12}	0.25	0.25

Örnek 1: Basit mesnetli düzgün dağıtılmış yük altında kare plaka

Basit mesnetli kare plakaya uygulanan düzgün dağıtılmış yayılı yük miktarı, $q = 100 \frac{kN}{m^2}$ olup, sahip olduğu kalınlık/uzunluk oranı 0.1'dir. Plaka 4 farklı tabaka sayısı için incelenmiştir. Tabakalardaki fiber yönelimleri sırasıyla $0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$, $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$, $0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$ şeklinde simetrik dizilimdedir. Malzeme olarak Çizelge 1.'den M1 seçilmiştir. Simetriden dolayı, çözümlerde plakanın $1/4$ 'ü modellenmiştir. Çözümlerde 1089 düğüm noktası ve 1024 arka plan hücresi kullanılmıştır. Çözümlerde kullanılan düzgün dağıtılmış ve düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları modelleri ve kare plaka Şekil 2.'de görülebilmektedir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 2. ve Çizelge 3.'te yer almaktadır.



Şekil 2. Düzgün dağıtılmış yayılı yük altında basit mesnetli kare plaka ve EFGM yönteminde kullanılan modelleri

Elde edilen sonuçlara göre; düzgün dağıtılmış düğüm noktaları ile düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları arasında deformasyon sonuçları için önemli bir fark görülmezken, düzgün dağıtılmış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen gerilmelerde daha yakın sonuçlar gözlenmiştir. Yine deformasyon sonuçlarında kayma düzeltme katsayısı için en yakın sonuçlar $5/6$ değerinde elde edilirken gerilme sonuçlarına bakıldığında bu durum tabaka sayısı, fiber yönelimi gibi değişkenlere bağlı olarak değişiklik göstermektedir.

Çizelge 2. Dört kenarından basit mesnetli kare plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş gerilmeleri ve deformasyonları

Fiber Yönelimi		Kayma Düzeltme Katsayısı				Analitik Sonuç [3]
		1/2	3/4	5/6	1.0	
[0°/90°/0°]	w	1.256462	1.067024	1.027900	0.970027	1.0219
	σ_x	0.695127	0.712474	0.716178	0.721889	0.7719
	σ_y	0.364786	0.311463	0.300022	0.282326	0.3072
[0°/90°] _s	w	1.246090	1.066994	1.029748	0.974599	1.025
	σ_x	0.671670	0.697339	0.703096	0.712189	0.7577
	σ_y	0.554429	0.496747	0.483861	0.463550	0.5006
[(0°/90°) _s /0°]	w	1.162076	1.007826	0.976021	0.929419	0.9727
	σ_x	0.684292	0.705985	0.711006	0.719059	0.7649
	σ_y	0.572511	0.537409	0.529363	0.516524	0.5525
[(0°/90°/90°) _s /0°]	w	1.135530	0.989303	0.959291	0.915536	0.9643
	σ_x	0.683660	0.704284	0.709171	0.717100	0.7605
	σ_y	0.622285	0.602647	0.598035	0.590591	0.6016

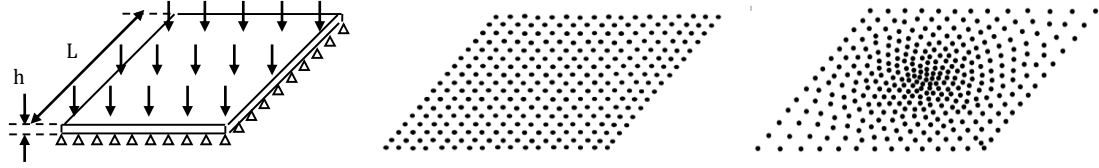
Çizelge 3. Dört kenarından basit mesnetli kare plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş gerilmeleri ve deformasyonları

Fiber Yönelimi		Kayma Düzeltme Katsayısı				Analitik Sonuç [3]
		1/2	3/4	5/6	1.0	
[0°/90°/0°]	w	1.260975	1.071595	1.029729	0.974642	1.0219
	σ_x	0.805474	0.824459	0.828454	0.834556	0.7719
	σ_y	0.339332	0.290922	0.280569	0.264596	0.3072
[0°/90°] _s	w	1.250401	1.071300	1.031657	0.978919	1.025
	σ_x	0.768348	0.796659	0.802960	0.812864	0.7577
	σ_y	0.507020	0.454919	0.443306	0.425031	0.5006
[(0°/90°) _s /0°]	w	1.166410	1.012108	0.978003	0.933685	0.9727
	σ_x	0.772104	0.795620	0.801022	0.809647	0.7649
	σ_y	0.519583	0.488126	0.480935	0.469482	0.5525
[(0°/90°/90°) _s /0°]	w	1.139727	0.993395	0.961339	0.919582	0.9643
	σ_x	0.750526	0.772401	0.777554	0.785884	0.7605
	σ_y	0.558666	0.541234	0.537153	0.530581	0.6016

Örnek 2: Basit mesnetli düzgün dağıtılmış yük altında paralelkenar plaka

Basit mesnetli paralelkenar plakaya uygulanan düzgün dağıtılmış yayılı yük miktarı, $q = 1.0 \text{ Pa}$ olup, sahip olduğu kalınlık/uzunluk oranı 0.01'dir. Plaka fiber yönelimleri sırasıyla 0°/90°/0° ve 45°/−45°/45° olmak üzere 3 tabakaya sahiptir. Plakanın dikey eksenle yaptığı iki farklı açı (15°, 30°) altında çözümleme yapılmıştır. Malzeme olarak Çizelge 1.'den **M2** seçilmiştir. Plaka simetrik olmadığından dolayı, çözümlerde plakanın tamamı modellenmiştir. Çözümlerde 289 düğüm noktası ve 256 arka plan hücresi kullanılmıştır. Çözümlerde kullanılan

düzgün dağıtılmış ve düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları modelleri ve paralelkenar plaka Şekil 3.'de görülebilmektedir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4. ve Çizelge 5.'te yer almaktadır.



Şekil 3. Düzgün dağıtılmış yayılı yük altında basit mesnetli paralelkenar plaka ve EFGM yönteminde kullanılan modelleri

Çizelge 4. ve 5.'te yer alan sonuçlara göre; özellikle düzgün dağıtılmış düğüm noktası kullanılarak elde edilen deformasyon çözümleri için bütün sonuçlar kabul edilebilir düzeyde olup, 5/6 en yakın sonuçlara sahip kayma düzeltme katsayısı değeri olarak göze çarpmaktadır. Düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları ile elde edilen çözümlerde ise 1/2 değeri ön plana çıkmaktadır.

Çizelge 4. Dört kenarından basit mesnetli paralelkenar plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş gerilmeleri ve deformasyonları

Açı	Fiber Yönelimi		Kayma Düzeltme Katsayısı				Nguyen (2007)
			1/2	3/4	5/6	1.0	
15°	[0°/90°/0°]	w	6.470480	6.444992	6.439451	6.430624	6.4321
		σ_x	0.752083	0.751721	0.751603	0.751374	0.7812
	[45°/-45°/45°]	w	6.455886	6.396392	6.382581	6.359985	6.4332
		σ_x	0.258897	0.257789	0.257516	0.257057	0.2693
30°	[0°/90°/0°]	w	5.523667	5.494419	5.487663	5.476492	5.4654
		σ_x	0.639683	0.638536	0.638208	0.637601	0.6634
	45°/-45°/45°]	w	5.821341	5.783461	5.774858	5.760859	5.7904
		σ_x	0.252146	0.251321	0.251119	0.250777	0.2651

Çizelge 5. Dört kenarından basit mesnetli paralelkenar plakanın orta noktasındaki düğüm noktasının düzgün dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılarak elde edilen normalize edilmiş gerilmeleri ve deformasyonları

Açı	Fiber Yönelimi		Kayma Düzeltme Katsayısı				Nguyen (2007)
			1/2	3/4	5/6	1.0	
15°	[0°/90°/0°]	w	6.432305	6.394471	6.385146	6.369145	6.4321
		σ_x	0.758361	0.756491	0.755915	0.754819	0.7812
	[45°/-45°/45°]	w	6.211960	6.130560	6.111012	6.078316	6.4332
		σ_x	0.255382	0.253980	0.253630	0.253035	0.2693
30°	[0°/90°/0°]	w	5.521053	5.491890	5.485189	5.474162	5.4654
		σ_x	0.646066	0.644955	0.644642	0.644071	0.6634
	45°/-45°/45°]	w	5.807717	5.768835	5.760008	5.745672	5.7904
		σ_x	0.253392	0.252601	0.252413	0.252102	0.2651

SONUÇLAR

Bu çalışmada tabakalı kompozit plakaların eleman bağımsız Galerkin yöntemi ile eğilme analizinde kayma düzeltme katsayısının etkisi farklı değerler kullanılarak incelenmiştir. Elde

edilen sonuçlara göre; düzgün dağıtılmış ve dağıtılmamış düğüm noktaları kullanılarak yapılan çözümlerde önemli bir fark gözlemlenmemiştir. Kare plaka örneğinde kayma düzeltme katsayısının 5/6 olduğu çözüm için en iyi deformasyon değerlerinin elde edildiği görülmektedir. x yönündeki gerilmelerde düzgün dağıtılmamış, y yönündeki gerilme değerlerinde düzgün dağıtılmış düğüm noktalarının kullanılması daha yakın sonuçlar vermiştir. Paralelkenar plakada ise en yakın sonuçları 1/2 değeri verse de, bütün sonuçlar kabul edilebilir düzeydedir. Söz konusu sonuçlara bakılarak kayma düzeltme katsayısı için 5/6 değerinin genel olarak kabul edilebilir doğrulukta sonuç verdiği gözükmemektedir ve farklı problemlerin çözümü için önerilebilir bir değer düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Y.X. Zhang, K.S. Kim, Two simple and efficient displacement-based quadrilateral elements for the analysis of composite laminated plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 61 (2004) 1771-1796.
- [2] Y. Urthaler, J.N. Reddy, A Mixed Finite Element for the Nonlinear Bending Analysis of Laminated Composite Plates Based on FSDT. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 15 (2008) 335-354.
- [3] J. Belinha, L.M.J.S. Dinis, Analysis of plates and laminates using the element-free Galerkin method, *Computers & Structures*. 84 (2006) 1547-1559.
- [4] T. Belytschko, Meshless Methods An Overview and Recent Developments, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38 (1996) 1655-1679.
- [5] D.A. Hu, S.Y. Long, X. Han, G.Y. Li, A meshless local Petrov–Galerkin method for large deformation contact analysis of elastomers, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 31 (2007) 657-666.
- [6] G. R. Liu, Y. T. Gu, A point interpolation method for two-dimensional solids, *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 50 (2001) 937-951.
- [7] K.M. Liew, T.Y. Ng, Y.C. Wu, Meshfree method for large deformation analysis—a reproducing kernel particle approach, *Engineering Structures*. 24 (2002) 543–551.
- [8] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*. 37 (1981) 141-158.
- [9] G.R. Liu, *Mesh Free Methods Moving Beyond The Finite Element Method*, Taylor and Francis Group, 2003.
- [10] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, & T. Tran-Cong, A simple and accurate four-node quadrilateral element using stabilized nodal integration for laminated plates, *CMC: Computers, Materials and Continua*. 6(3) (2007) 159-176.