

ORTOTROP PLAK SİSTEMLERİNİN HESABI İÇİN
YENİ BİR SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

14252

DOKTORA TEZİ

Yük. Müh. SELÇUK İZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 9 Haziran 1990

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Ekim 1990

Tez Danışmanı : Prof. Dr . Kemal Özden

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr . A.Yalçın Aköz
Prof. Dr . Vedat Yerlici

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

EKİM 1990

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her safhasında sürekli teşvik ve yardımlarını gördüğüm ve bizleri sürekli araştırmaya yönelik olarak yetiştirmiş Sayın hocam Prof.Dr. Kemal Özden 'e, değerli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Genel Müdürüm, Sayın Dr. Hidayet Sarac 'a, ilkokuldan başlayarak yetişme katkıları olan tüm öğretmenlerime teşekkürlerimi sunarım.

Yük.Müh. SELÇUK İZ



İÇİNDEKİLER

NOTASYON	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI	1
1.2. ORTOTROP PLAK SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜM METOTLARI	3
1.2.1. ANALİTİK YÖNTEMLER	3
1.2.2. SONLU FARKLAR METODU	4
1.2.3. VARIYASYONEL YÖNTEMLER	5
1.3. SONLU ELEMANLARLA İLGİLİ ÇALIŞMALARA TOPLU BİR BAKIŞ	7
BÖLÜM 2. ORTOTROP PLAK TEORİSİ VE PLAK DENKLEMLERİ	11
2.1. KABULLER	12
2.2. ŞEKİL DEĞİŞTİRME BAĞINTILARI	12
2.3. ELASTİSİTE BAĞINTILARI VE KESİT TESİRLERİ ..	14
2.4. PLAK ESAS DENKLEMİ	15
2.5. SINIR ŞARTLARI	17
BÖLÜM 3. SONLU ELEMANLAR METODUNUN ORTOTROP PLAK SİSTEMLERİNE UYGULANMASI	18
3.1. METODUN ESASI	18
3.1.1. ELEMAN ANALİZİ	19
3.1.2. SİSTEM ANALİZİ	22
3.2. PLAK FONKSİYONELİNİN BULUNMASI	24
3.2.1. AĞIRLIKLI REZİDÜ METODUNUN BİR VARYASYON PRENSİBİNE DÖNÜŞTÜREREK FONKSİYONELİN ELDE EDİLMESİ	24
3.2.2. BİR POTANSİYELE SAHİP ENERJİ FONKSİYONELLERİ YARDIMIYLA FONKSİYONELİN BULUNMASI	28

BÖLÜM 4. ÜÇGEN ORTOTROP PLAK SONLU ELEMANI	30
4.1. ORTOTROP PLAK FONKSİYONELİNİN ELDE EDİLMESİ.	30
4.2. İNTERPOLASYON FONKSİYONLARININ BULUNMASI ...	43
4.3. ELEMEN DAVRANIŞ DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	46
4.3.1. ÜÇGEN SONLU ELEMENLAR İÇİN ALAN KOORDİNATLARINI KULLANARAK X, Y TERİMLERİNİN İNTEGRASYONU	56
4.4. ELEMEN DAVRANIŞ VE ETKİ MATRİSLERİNİN TAYİNİ	59
4.5. SINIR VE MESNET ŞARTLARI	68
4.5.1. SINIR ŞARTLARININ SAĞLATILMASI	69
4.5.2. MESNET ŞARTLARININ SAĞLATILMASI	72
4.5.3. TEKİL YÜK VE MOMENTLER	73
4.6. SİSTEM DAVRANIŞ DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ	74
BÖLÜM 5. NÜMERİK UYGULAMALAR	84
5.1. UYGULAMA I	84
5.2. UYGULAMA II.....	94
5.3. UYGULAMA III.....	104
5.4. UYGULAMA IV.....	106
BÖLÜM 6. ELEKTRONİK HESAP MAKİNASI PROGRAMI	108
6.1. GİRİŞ	108
6.2. PROGRAMIN YAPISI VE ÇALIŞMA DÜZENİ	108
6.3. SİSTEM DENLEM TAKIMININ ÇÖZÜMÜ İÇİN KOLAYLIK	109
6.4. PROGRAMIN KULLANILMASI	115
6.4.1. UYGULAMA SINIRLARI	115
6.4.2. GİRİŞ BİLGİLERİ	116
6.4.3. ÇIKIŞ BİLGİLERİ	117
SONUÇLAR	118
KAYNAKLAR	120

NOTASYON

$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$	: Matris Gösterilimi
$\left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}$	: Kolon Vektör Gösterilimi
$\begin{bmatrix} \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right\}^T$	: Matris ve Vektörün Transpozu
M_x, M_y	: X ve Y Eksenine Etrafındaki Eğilme Momenti
M_{xy}, M_{yx}	: X ve Y Eksenine Etrafındaki Burulma Momenti
$1/\rho$	: Eğrilik
μ_x, μ_{xy}	: X Yönü Poission Katsayısı
μ_y, μ_{yx}	: Y Yönü Poission Katsayısı
I_x, I_y	: X ve Y Yönü Atalet Momenti
I_{bx}, I_{by}	: X ve Y Yönü Burulma Atalet Momenti
E	: Elastisite Modülü
G	: Kayma Modülü
ϵ, γ	: Uzama ve Dönme Birim Deformasyonları
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$	: Normal ve Kayma Gerilmeleri
K_x	: X Yönü Eğilme Rijitliği
K_y	: Y Yönü Eğilme Rijitliği
K_{xy}	: XY Yönü Burulma Rijitliği
K_{yx}	: YX Yönü Burulma Rijitliği
Π	: Plak Fonksiyoneli
Π_p	: Gevşetilmiş Plak Fonksiyoneli
q	: Düzgün Yayılı Yük Şiddeti

t	: Plak Üstü ile Altı Arasındaki Isı Farkı
α	: Isı Genleşme Katsayısı
h_x	: X Yönü Plak Kalınlığı
h_y	: Y Yönü Plak Kalınlığı
k_z	: Yay Katsayısı
$N_1(x,y)$	: İnterpolasyon (Şekil) Fonksiyonu
w	: Plak Düğüm Noktası Yerdeğiştirmesi
w'	: Plak Düğüm Noktası Dönmesi
$w'_{o_x} \quad w'_{o_y}$	: X ve Y Yönünde İlkel Eğrilik
$[K]$	: Eleman Davranış Matrisi Gösterilimi
$\{f\}$	: Eleman Etki Matrisi Gösterilimi
P	: Düğüm Noktaları Yüğü
Q_x, Q_y	: Kesme Kuvvetleri
x_g, y_g	: Üçgen Sonlu Elemanın Ağırlık Merkezi
$x_1, x_2, \dots, y_2, y_3$	: Üçgen Elemanın Global Eksen Koordinatları
ϕ	: Düğüm Noktası Parametreleri
Γ	: Sınır Şartlarının Tanımlandığı Bölge
β	: Önceden Bilinen Düğüm Parametreleri
$[L]$	: Operatör Matris
Ω	: Varlık Bölgesi Tamamında Tanımlı Alan
$\{R\}$	: Sınırdaki Tanımlı Etki Matrisi
$\{u\}$	: Sınır Şartlarını İçeren Kolon Matris
$[S]$	: Sistem Davranış Matrisi

ÖZET

Bu çalışmada, Ortotrop plaklardan meydana gelen çeşitli yapı sistemlerinin hesabı için bir metod geliştirilmiştir.

Yaklaşık Çözüm tekniklerinden son zamanlarda bilgisayarların yaygınlaşması ile sıkça kullanılan metodlarından biri olan "SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ" ile ortotrop plaklar için çok kullanışlı olacak bir mixed sonlu eleman formülasyonu çıkarılmıştır.

Bulunan bu eleman yardımıyla ortotrop yapı sistemlerinin statik yükler altında hesabı yapılabilmektedir.

Ayrıca bu elemanla; Çelik karkas binalarda ve Gemi İnşaatlarında sıkça kullanılan iki yönde farklı eğilme rijitliğine haiz takviyeli çelik saç döşemeler, Kompozit Döşemeler, Nervürlü betonarme taşıyıcılar ve Asmolen döşeme sistemleri çözülebilmektedir. Bulunan sonlu elemanın kullanılabilirliği diğer çözüm teknikleri ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü, çalışmanın amacına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ortotrop plak teorisi ve plak denklemleri özet halinde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Ortotrop plak sistemine sonlu elemanlar metodunun uygulanması anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, Üçgen Ortotrop plak elemanının fonksiyoneli elde edilerek varyasyon prensibi uygulanmış Eleman davranış denklemleri, Alan koordinatları kullanılarak denklemlerin integrasyonu genel halde verilmiş, Eleman davranış ve Eleman etki denklemleri matris formunda elde edilmişlerdir.

Beşinci bölümde, Nümerik uygulamalar üzerinde sonlu elemanın kullanılabilirliği diğer çözüm teknikleri ile karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde, Sayısal uygulamalar için hazırlanan ve QBASIC dilinde kodlanmış E.H.M. programının çalışma düzeni ve kullanma esasları anlatılmıştır. Ayrıca sistem denklem takımının çözümünde hafıza kaybını en aza indirmek için sağlanmış bir kolaylık bulunarak bir algoritma verilmiştir.

SUMMARY

A NEW FINITE ELEMENT FORMULATION FOR ORTHOTROPIC PLATE SYSTEMS

In this study, it has been developed a method of calculation for structural systems which consist of Orthotropic Plates.

A finite element formulation, practical for the calculation of Orthotropic Plates, is found by "FINITE ELEMENTS METHOD" using computers as an approximate solution technics.

By the aid of this element discovered, Orthotropic Structural Systems could be designed statical loadings.

Moreover, the practice of this finite element used for reinforced sheet iron slabs, composite slabs, ribbed slab systems and hollow core slab systems having different bending stiffness in both directions used frequently in steel structures & boat construction, is given in order to compare with other solution technics.

In the first part of this study which consists of six parts, the purpose is outlined.

In the second part, Orthotropic Plates theory and equations of plate are summarized.

In the third part, plate functional is obtained, using functional analysis method on Orthotropic Plates systems.

In the fourth part, a general integration of equations is given by using finite elements equations of triangular Orthotropic Plate element and area coordinates, by the way element stiffness matrice and loading matrices are obtained.

In the fifth part, the practice of finite elements with numerical applications is compared with other solution technichs.

In the sixth part, it has been explained the working order and using principles of computer programme coded in "QUICKBASIC" computer language and prepared for numerical applications.

Also an algorithm is given, in order to discover a facility to extremum the memory loss in the solution of equation system.

For any triangular plate sample, practical for Orthotropic Plates; Plate settlements w , and M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} moments are chosen as independent variables and converted to a "Variation Principle" using "Weighted Residuals Method" on Linear Self-Adjoint differential equation systems and a Π function is obtained.

Π_p function is discovered then by a partial integration of Π function [3]

The element equation, which causes some problems in Classical finite element methods, is clearly obtained in order to choose linear Interpolation functions for the variables because only the first derivatives of the variables is applied in this function.

Also by the same reason, making the choice of linear interpolation functions carries out appropriateness and exactness conditions which guarantees the convergence when the elements get smaller [20], [22], [36].

. THEORY OF ORTHOTROPIC PLATES AND EQUATION OF PLATES

The plate will be defined in x , y , z coordinate system x and y axes, being in the plane of the plate, are parallel to the main directions of the plate anisotropy.

.....(FIGURE 2.1)

. ASSUMPTIONS

The main assumptions are as follows;

- 1) The material is linear and homogeneous and there exist orthogonal anisotropy.
- 2) The deformations are small. The superposition is valid.
- 3) The mid surface remain plane after deformation.
- 4) Plate thickness is small with respect to other dimensions of the plate.

. DEFORMATION RELATIONS

..... (FIGURE 2.2)

$1/\rho_x$ curvature which takes place after the application of

$$= M_x/(EI)_x \quad (2.1)$$

$1/\rho_y$ curvature which takes place after the application of

$$= -\mu_x \cdot M_x/(EI)_x \quad (2.2)$$

$1/\rho_y$ curvature which takes place after the application of

$$= M_y/(EI)_y \quad (2.3)$$

$1/\rho_x$ curvature which takes place after the application of

$$= -\mu_y \cdot M_y/(EI)_y \quad (2.4)$$

..... (FIGURE 2.3)

$$1/\rho_x = M_x/(EI)_x - \mu_y \cdot M_y/(EI)_y \quad (2.5)$$

$$1/\rho_y = M_y/(EI)_y - \mu_x \cdot M_x/(EI)_x \quad (2.6)$$

$$1/\rho_x = - \partial/\partial x \cdot (\partial\omega/\partial x) = - \partial^2\omega/\partial x^2 \quad (2.7)$$

$$1/\rho_y = - \partial/\partial y \cdot (\partial\omega/\partial y) = - \partial^2\omega/\partial y^2 \quad (2.8)$$

$$1/\rho_{xy} = - \partial/\partial x \cdot (\partial\omega/\partial y) = - \partial^2\omega/\partial x\partial y \quad (2.9)$$

..... (FIGURE 2.4)

$$\omega_z = \omega ; u_z = -Z. \partial \omega / \partial x ; v_z = -Z. \partial \omega / \partial y \quad (2.10)$$

..... (FIGURE 2.5)

. DEFORMATIONS

$$\epsilon_x = \partial u_z / \partial x = -z. \partial^2 \omega / \partial x^2 \quad (2.11)$$

$$\epsilon_y = \partial v_z / \partial y = -z. \partial^2 \omega / \partial y^2 \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \partial u_z / \partial y + \partial v_z / \partial x = -2.z. \partial^2 \omega / \partial x \partial y \quad (2.13)$$

. ELASTICITY RELATIONS & ELEMENT STRESS COMPONENT

$$\sigma_x = (E.z / (1 - \mu_x \mu_y)). (1 / \rho_x + \mu_y. 1 / \rho_y) \quad (2.14)$$

$$\sigma_x = -(E.z / (1 - \mu_x \mu_y)). (\partial^2 \omega / \partial x^2 + \mu_y. \partial^2 \omega / \partial y^2) \quad (2.14.a)$$

$$\sigma_y = (E.z / (1 - \mu_x \mu_y)). (1 / \rho_y + \mu_x. 1 / \rho_x) \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = -(E.z / (1 - \mu_x \mu_y)). (\partial^2 \omega / \partial y^2 + \mu_x. \partial^2 \omega / \partial x^2) \quad (2.15.a)$$

$$\tau_{xy} = G. \gamma_{xy} = -2.G.z. \partial^2 \omega / \partial x \partial y \quad (2.16)$$

$$\tau_{yx} = G. \gamma_{yx} = -2.G.z. \partial^2 \omega / \partial y \partial x \quad (2.17)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \sigma_x. z. dz. dy = M_x. dy \quad (2.18)$$

$$M_x = -[(EI)_x / b_x. (1 - \mu_x \mu_y)]. (\partial^2 \omega / \partial x^2 + \mu_y. \partial^2 \omega / \partial y^2) \quad (2.18.a)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \cdot dx = M_y \cdot dx \quad (2.19)$$

$$M_y = -[(EI)_y / b_y \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)] \cdot (\partial^2 w / \partial y^2 + \mu_x \cdot \partial^2 w / \partial x^2) \quad (2.19.a)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dx \cdot dz = M_{xy} \cdot dx \quad (2.20)$$

$$M_{xy} = - 2 \cdot G \cdot (J_{bx} / b_x) \cdot (\partial^2 w / \partial x \partial y) \quad (2.20.a)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dy \cdot dz = M_{yx} \cdot dy \quad (2.21)$$

$$M_{yx} = - 2 \cdot G \cdot (J_{by} / b_y) \cdot (\partial^2 w / \partial x \partial y) \quad (2.21.a)$$

. PLATE MAIN EQUATIONS & BOUNDARY CONDITIONS

..... (FIGURE 2.6)

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum Z = 0 \quad (2.22)$$

$$\sum M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dy dx - \frac{1}{2} \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dx dy \quad \text{Neglect}$$

$$= 0 \quad (2.23)$$

$$\sum M_x = 0 = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.24)$$

$$\sum M_y = 0 = -\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.25)$$

$$\sum Z = 0 = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + (P - k_z \cdot \omega) \quad (2.26)$$

$$-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + (P - k_z \cdot \omega) \quad (2.27)$$

Plate general equation is put in order in the case of Orthotropic Plates.

$$\Delta \Delta \omega = K_x \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + K_y \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + (K_x + K_y) \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = (P - k_z \cdot \omega)$$

(2.28)

Here, the symbol indication is as follows.

$$K_x = (EI)_x / b_x \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \quad (2.29)$$

$$K_y = (EI)_y / b_y \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \quad (2.30)$$

$$K_{xy} = 2 \cdot G \cdot (J_{bx} / b_x) \quad (2.31)$$

$$K_{yx} = 2 \cdot G \cdot (J_{by} / b_y) \quad (2.32)$$

μ_x, μ_y = Poission ratio of the plate about X,Y direction.
 $q = z$ External loads in direction of Z - axis.
 $\omega = z$ Deflections in direction of Z - axis.
 K_x, K_y = Plate bending stiffness about x,y direction.
 K_{yx}, K_{xy} = Plate torsion stiffness about x,y direction.
 E, G = Moduls of Elasticity&shear of the plate material

The dynamic and geometric boundary conditions are considered.

$$\begin{aligned}
 T &= \bar{T}_0 \dots\dots\dots \text{Dynamic Boundary condition.} \\
 M &= \bar{M}_0 \dots\dots\dots \text{" " " (2.33)} \\
 \omega' &= \bar{\omega}' \dots\dots\dots \text{Geometric " " } \\
 \omega' &= \bar{\omega}' \dots\dots\dots \text{Geometric " " }
 \end{aligned}$$

In the case of mathematical operations, to make extremum the Π p function, plate equations and boundary conditions must be secured.

Replacing the moments expressed in terms of derivation of w in Π function, the well-known plate energy function is obtained in order to secure limit conditions.

Π function can be obtained as below :

$$\Pi = \iint_S \left[1/2 \cdot \{u_n\}^T \cdot \{ [L_n] \cdot \{u_n\} \} - \{u_n\}^T \cdot \{f_n\} \right] ds$$

(3.19)

Here are the clear expressions of L_B , U_b , f_b ;

$$\dots\dots\dots(4.3)$$

$$\dots\dots\dots(4.11)$$

$\Pi(u)$ function became as below after the mathematical operations on equation (4.11)

$$\dots\dots\dots(4.12)$$

Γ_2 = Valid in the limit in which geometric boundary condition has come out.

Γ_1 = Valid in the limit in which dynamic boundary condition has come out.

In Π_p function, there exist 5 unknowns; ω , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} :

Indeed, Informing plate settlement function $\omega = \omega(x,y)$ the other variables could be known easily.

Considering $\omega, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$ as five unknowns independent from each other, we can assume that they change linearly in a triangular element shown in figure (4.1)

$$\dots\dots\dots(4.5)$$

$$\dots\dots\dots(4.19)$$

$$\dots\dots\dots(4.20)$$

Here $\omega_1, M_{x1}, M_{y1}, M_{xy1}, M_{yx1}, \dots\dots\dots \omega_3, M_{x3}, M_{y3}, M_{xy3}, M_{yx3}$ show the values of unknowns in i node.

$N(x,y)$'s are obtained by the solution of linear interpolation function $N(x,y) = a_1 + a_2.x + a_3.y$

Mostly the first derivations of the five unknowns exist in $\Pi_p(u)$ (4.18) function.

By this reason, selected linear functions secure the continuity and exactness conditions. So, when the element get smaller, It can be approached to definite results.

To find equations, replacing 4.5 and 4.21 expressions in $\Pi_p(u) \dots (4.18)$ function an equalizing the derivations of unknowns in $\Pi(u)$ function, which are the nodal values of w_i , M_{xi} , M_{yi} , M_{xyi} , and M_{yxi} . So that the expressions form an minimal.

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial w_i} = 0 \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial m_{xi}} = 0 \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial m_{yi}} = 0 \dots\dots\dots (4.23)$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial m_{xyi}} = 0 \dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial m_{yxi}} = 0 \dots\dots\dots$$

Five equations as the number of unknowns can be obtained in each nodal point.

By the way, a new triangular finite element formulation is produced for any orthotropic plate.

. DERIVATION OF FINITE ELEMENT EQUATIONS

Replacing (4.5) and (4.20) expressions, completing all of the operations, using area coordinates on the element and then integrating Π_p function given in (3.18) with the element analysis is done, totally fifteen equations could be written so that five equations in each nodal point.

.....(4.24)

.....(")

.....(4.38)

Integrating (4.24) and (4.38) equations in their own limits, Element Stiffness and loading matrices are given in part 4.4.

BÖLÜM 1.

GİRİŞ

1.1.KONU VE ÇALIŞMANIN AMACI

Her iki yönde farklı eğilme rijitliği bulunan yüzeysel taşıyıcı sistemlere Köprü mühendisliğinde, Gemi ve Uçak inşa endüstrisinde ve muhtelif yapı sistemlerinde Strüktürel eleman olarak sıkça rastlanmaktadır.

Bu tür yüzeysel taşıyıcı sistemlerin birbirine dik iki doğrultudaki eğilme rijitliklerinin farklı değerlerde olmasına rağmen , İnce Plak Teorisi ile Ortotropi'yi gözönüne alarak analitik metotlarla çözmek, Klasik Ortotrop Plak Teorisi literatüründeki çözümlerin çok büyük kısmını oluştururlar. [1],[2]

Ortotrop plak sistemleri üzerinde yapılan çalışmalarda önceleri analitik daha sonra sayısal ve deneysel yöntemler birlikte kullanılmışlardır.

Analitik çözümlerin güçlüğü, deneysel çalışmaların belirli şartlarda ve sınırlı sayıda yapılabilmesi son yıllardaki kişisel kompütörlerin hızlı gelişimine paralel olarak araştırmacıların sayısal hesap yöntemlerine ilgi göstermelerine neden olmuştur.

Bu yöntemler içinde özellikle "Sonlu Elemanlar Metodu" Sistem özelliklerinin, Sınır şartlarının, Dış etkilerin ve Sistem sınırlarının düzgün olmaması hallerini kolaylıkla gözönüne alarak analitik yöntemlerle çözülmesi çok güç olan karışık problemlerin çözümüne imkan vermektedir.

Sonlu Elemanlar Metodu ile Gerilme yığılmalarının oluşabileceği bölgelerde eleman boyutlarının yeterli sıklıkta düzenlenebilmesi ve lokal etkilerin daha hassas elde edilebilmesi bu metodun üstünlüklerinden bazılarıdır.

Ancak, genel olarak Sonlu Eleman Deplasman metodlarında, Alan değişkenleri olarak seçilen deplasman ve dönmeler bulunduğundan sonra yer değiştirmelerin ikinci türevleri alınarak momentler elde edilmektedir.

Bu metodda yer değiştirme ve dönmeler büyük bir doğrulukla bulunabildiği halde Moment ve Kesme kuvvetlerinin hakiki değerlerden sapması biraz fazla olmaktadır.

Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için eleman sayısını arttırmak gerekmektedir. Bu'da bilgisayar hesap zamanının ve hata birikmelerinin çoğalmasına neden olmaktadır.

Bu sebeple son yirmi yıl içersinde az sayıda elemanla iç kuvvet değerlerini elde etmek için "Mixed Sonlu Elemanlar " türetilmiştir.

Mixed Sonlu Elemanların elde edilmesinde ;

a.) Reissner Varyasyon Prensibi,

b.) İlk defa Yalçın Aköz [3],[4] tarafından kullanılan Sistemin denge denklemi ve sınır şartları kullanılarak elde edilen bir potansiyele sahip fonksiyonelleri kullanmak,

c.) Kemal Özden, [5] tarafından Ağırlıklı Rezidü Metodunu kullanmak suretiyle esas bağıntıları lineer ve Self-Adjoint olan sistemler için elde edilen bir varyasyon prensibini kullanmak,

Metodlarından biri uygulanabilir.

Bu çalışmada pratikte gerek Betonarme gerek Öngerilmeli Beton gerek Çelik inşaatda çok geniş bir uygulama alanı bulunan Ortotrop Plaklar için ; [5] de verilen varyasyon prensibi kullanılarak bir "Mixed Sonlu Eleman" türetilmiş ve uygulanmıştır.

1.2. ORTOTROP PLAK SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜM METODLARI

Ortotrop plak sistemlerinin çözüm metodları deneysel ve teorik yöntemler olmak üzere iki grupta toplanmaktadır.

Ortotrop plakların deneysel yöntemlerle çözümü çalışmalarına örnek olmak üzere NARUOKA,M.;YONEZAWA,H.[6] gösterilebilir.

Ortotrop plak sistemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılan teorik yöntemler kısaca özetlenmektedir.

1.2.1. ANALİTİK YÖNTEMLER

Klasik Ortotrop plak teorisi çözümlerinin büyük kısmını oluştururlar. Trigonometrik ve hiperbolik seriler kullanılarak yükler ve deplasmanlar seriye açılarak plak differansiyel denklemi sağlatılmaya çalışılır. [7],[8]

Bu yöntemlerdeki esas zorluk her türlü yük ve sınır şartlarına uyabilecek serileri tayin etmektir. Ayrıca bu seriler yakınsak olmayabilir.

Ortotrop plak sistemlerinin analitik metodlarla çözümü ilk defa BOUSSINESQ,J.[9] tarafından verilmiştir.

Daha sonra HUBER, M.T. [10] de bunu Ortotrop betonarme plaklara uygulamıştır. Köprü mühendisliği ile ilgili çalışmalarında GUYON, Y. [11] ve MASSONET, CH. [12], Haç sistemi teorisine göre HOMBERG, H. [13], CORNELIUS, W. [14] bir dizi makale yayınlamıştır. SATTler, K. [15] Guyon-Massonet 'in çalışmalarını Ortotrop tabliyelı köprülerin hesabı için geliştirmiş, LEONHARDT, F. ve ANDRA, W. [16] ızgara sistemlerinin hesabını enleme ve boylamaların birbirine yayla bağılı tasvir eden bir modelle çözmüşler, PELIKAN, W. ; ESSLINGER, M., [17] de Ortotrop köprü tabliyelerini Trigonometrik-Fourier serilerini kullanarak analiz etmişlerdir.

1.2.2. SONLU FARKLAR METODU

Sonlu Farklar Metodunda plak sistemini hayali çizgilerle bölerek bu çizgilerin kesiştiği noktaların ω sehımlerine bağılı olarak ω'_x ω'_y ω''_{xx} ω''_{yy} ω''_{xy} ω''_{yx} .. gibi türev ifadeleri yazılabilir. Bu türevlerin lineer kombinezonu olan plak denklemi ve sınır şartları bilinmeyenleri ω sehımleri olan lineer cebirsel denklem takımı verir.

Çözümde bulunan sehımler yardımıyla Sonlu Farklarla ifade edilen türev ifadeleri olan kesit tesiri ve reaksiyonlar bulunur. Bir çok probleme uygulanan bu metodun basit oluşu yanında bazı zorlukları vardır.

Bunlar sırasıyla ;

a.) Düzgün şekilli (Kare, Dikdörtgen, ParalelKenar v.b) plaklara uygulanabilir. Bunun dışındaki sistemlere uygulanması, özellikle sınır şartlarınının sağlatılması çok zordur.

b.) Sınır şartlarının basit olmadığı durumlarda, program yazılımı çok zor ve esnek değildir.

c.) Tekil ve üniform olmayan yük durumları için sonuçlar yaklaşıktır. Çoğunlukla sehimler iyi bir yaklaşıklıkla bulunmasına rağmen iç kuvvetlerin hakiki değerlerden sapması büyük olmaktadır. Bazı iyileştirici yöntemler geliştirilmiştir. [18]

d.) Her düğüm noktası için bir bilinmeyen olmasına rağmen katsayılar matrisi simetrik değildir. Band genişliği çok yüksektir. Bu'da sayısal hesaplamalarda zorluk çıkarmaktadır.

1.2.3. VARİYASYONEL YÖNTEMLER

Problemin çözümü fizik anlamı enerji olan belirli bir integralin ekstrem yapılmasına indirgenen çözüm metotlarına Enerji Metotları "VARİYASYONEL YÖNTEMLER" adı verilir. [19],[20],[21]

Bir problemin çözümü için çeşitli varyasyon prensipleri kurulabilir. [22],[23]

Bunlardan bazıları aşağıda verilmektedir.

- a.) Minimum Potansiyel Enerji Prensibi
- b.) Minimum Komplementer Enerji Prensibi
- c.) Reissner Varyasyon Prensibi

Yukardaki prensiplere göre Sınırlı bir integralin ekstrem yapılması problemi ortaya çıkmaktadır. Burada bir varyasyon prensibini Euler denklemine indirgemeden direkt olarak çözen metodların başlıcalarından olan RITZ ve GALERKIN çözüm yöntemlerinden kısaca bahsedilecektir

Plağın tamamında geçerli seçilen $N_i(x,y)$ fonksiyonları ile seçilen düğüm parametreleri C_i 'nin lineer kombinezonu olan alan değişkeni olarak tanımlanan

$$U(x,y) = \tilde{U}(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \cdot C_i \quad (1.1)$$

seçilebiliyorsa, direkt varyasyon prensiplerinden RITZ ve GALERKIN yöntemlerinden biri uygulanabilir.

a.) RITZ YÖNTEMİ [20],[22]

Toplam potansiyel enerji (Π) 'nin minimum olması prensibine dayanır. (1.1) ifadesini Geometrik sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilir.

$$\Pi(\tilde{u}) = \Pi \left(\sum_{i=1}^n (C_i \cdot N_i) \right) \quad (1.2)$$

$$\Pi(\tilde{u}) = \Pi(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \dots, C_N) \quad (1.3)$$

Burada ; n = Düğüm Noktası Parametreleri Sayısı
 C_i Düğüm noktası parametreleri minimum şartı kullanılırsa

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

Bilinmeyen sayısı kadar lineer denklem takımı elde edilir.

Lineer denklem takımının çözümünden düğüm noktası parametreleri C_i ler hesaplanır.

b.) GALERKIN YÖNTEMİ [20],[22]

Sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen (1.1) ile verilen Alan değişkenine, Virtüel iş prensibinin uygulanarak C_i 'lerin bulunmasıyla çözüm elde edilmektedir.

$$\sum_{i=1}^n (\delta C_i) \iint_{\Omega} ([L].\langle U \rangle - \langle F \rangle) \cdot N_i(x,y) dx dy = 0 \quad (1.5)$$

δ = Virtüel Deplasman

$([L].\langle u \rangle - \langle f \rangle)$ = Problemin Differansiyel Denklemleri

C_i = Düğüm Noktası Parametreleri

N_i = Seçilen Keyfi Fonksiyonlar (Şekil Fonksiyonları)

Düğüm noktası parametresi C_i 'ler çözülerek yaklaşık çözüm elde edilmektedir.

Bu çalışmada Ağırlıklı Rezidü Metodunu kullanarak elde edilen fonksiyonele direkt varyasyon prensibini uygulayarak, Ortotrop Üçgen Plak sonlu elemanının davranış denklemleri ve düğüm noktası etki matrislerinin çıkarılması Bölüm 3. 'de detaylı olarak anlatılmaktadır.

1.3. SONLU ELEMANLARLA İLGİLİ ÇALIŞMALARA TOPLU BİR BAKIŞ

Düzlemsel sürekli sistemleri Kafes giriş analogisi ile Sonlu elemanlara ayırarak hesaplama düşüncesi 1906 yılında Wieghardt, K. [24] tarafından ortaya atılmıştır.

Daha sonra levha problemlerinde kafes sistem çubuklarından plak problemlerinde ise ızgara sistem çubuklarından yararlanılarak hesap etme düşüncesi 1941 yılında Hrennikof, A. [25] tarafından yayınlanmıştır.

1943 yılında Courant, R. [26] varyasyon metodunu kullanarak torsion problemini üçgen alt sonlu elemanlara bölerek çözmüştür.

Ancak o yıllardaki Elektronik hesap makinalarının yetersizliği nedeniyle fazla gelişmemiştir.

1953 yılında Levy,S. [27], yüz serbestlik dereceli bir levha problemini Sonlu elemanlar yöntemi ile digital kompütürle çözmüştür.

Daha sonra Turner, Clough, Argyris ve Zienkiewicz 'in [28], [29], [30],[31] çalışmaları yöntemin gelişmesine yol açmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminin kullanılışı Elektronik Hesap Makinelerinin kapasitelerinin ve hızlarının artışına paralel olarak çoğalmıştır.

Başlangıçta düzlemi içinde dış etkiler altında bulunan levha sistemlerin hesabı için sırasıyla ;Sekiz serbestlik dereceli dikdörtgen elemanla, Altı serbestlik dereceli üçgen sonlu eleman geliştirilmiştir.

Bu problemin çözümü daha sonra Sonlu elemanın serbestlik derecesinde ve seçilmiş deplasman fonksiyonlarında farklılıkları bulunan çok sayıda yayın birbirini izlemiştir.

Plak sistemlerine Sonlu Elemanlar metodunun uygulanması ile ilgili çalışmalara baktığımızda ;

Düzlemine dik dış etkiler altındaki ince plak sonlu eleman deplasman metotlarında, Düğüm noktalarındaki uç deplasmanları olarak düzlemi içindeki deplasman bileşenleri ile her iki koordinat eksenine göre türevi olan dönme bileşenlerindeki gözönüne alınması gerekmektedir.

Geometrik uygunluk şartlarının sağlanabilmesi için düşey deplasmanın yanında dönme bileşenlerinin sürekliliğinin sağlanması, Plak sonlu elemanlarda uygun deplasman fonksiyonlarının seçimini güçleştirmektedir.

Dikdörtgen plak sonlu elemanlarla ilgili ilk çalışmada [32] her düğüm noktasında plak düzlemine dik deplasman bileşeni ile dönme bileşenlerinden oluşan toplam oniki serbestlik dereceli elemanı geliştirilmiştir.

Bu elemanda ayritlar boyunca komşu elemanlar arasında ayrıta dik dönme bileşeninin sürekliliğinin sağlanamaması bir sakınca olmaktadır.

Bu sakıncayı önlemek için [33] 'de her iki doğrultuda tam üçüncü derece polinomların çarpımlarından oluşan bir deplasman yüzeyinden hareket ederek bir sonlu eleman geliştirilmiştir. Bu durumda düğüm noktalarının burulma eğriliği'nde ilave uç deplasman parametresi olarak seçilip eleman serbestlik derecesinin onaltı'ya çıkarılması zorunlu olmaktadır.

Klasik üçgensel plak sonlu elemanlar'da ise ayritlar boyunca uygunluk şartlarının sağlanması ancak elemanın serbestlik derecesini arttırarak mümkün olmaktadır.

Bu şartların tam olarak sağlanması zorunluluğu bulunmadığından farklı serbestlik dereceli ve değişik deplasman fonksiyonlarından hareket edilerek geliştirilen üçgen elemanlar çeşitli yayınlarda önerilmiştir.

Bunlar arasında bu şeklin tabii koordinatı sayılabilecek alan koordinatları cinsinden deplasman fonksiyonları seçilerek yapılan çalışmalar iyi sonuç vermektedir.

Klasik üçgensel plak sonlu elemanlarda ayrıtlar boyunca uygunluk şartlarının tam olarak sağlanması için serbestlik derecesinin enaz onsekiz olması her düğüm noktasında ω ω'_x ω'_y ω''_{xx} ω''_{yy} ω''_{xy} bilinmeyen olarak alınması [33]' den bilinmektedir.

Bu tür elemanlar ayrıtlar boyunca sürekliliği sağlarlar ve yakınsama hızları yüksektir.

Daha sonraki çalışmalarda Kuyucular,A. [34] eleman kenar ortalarındaki normal doğrultudaki eğimide uç parametresi olarak yirmi bir parametrelili elemanla oldukça iyi sonuçlar elde etmiştir.

Literatürde Mixed Sonlu Eleman olarak plak sistemlerin çözümü oldukça yenidir.

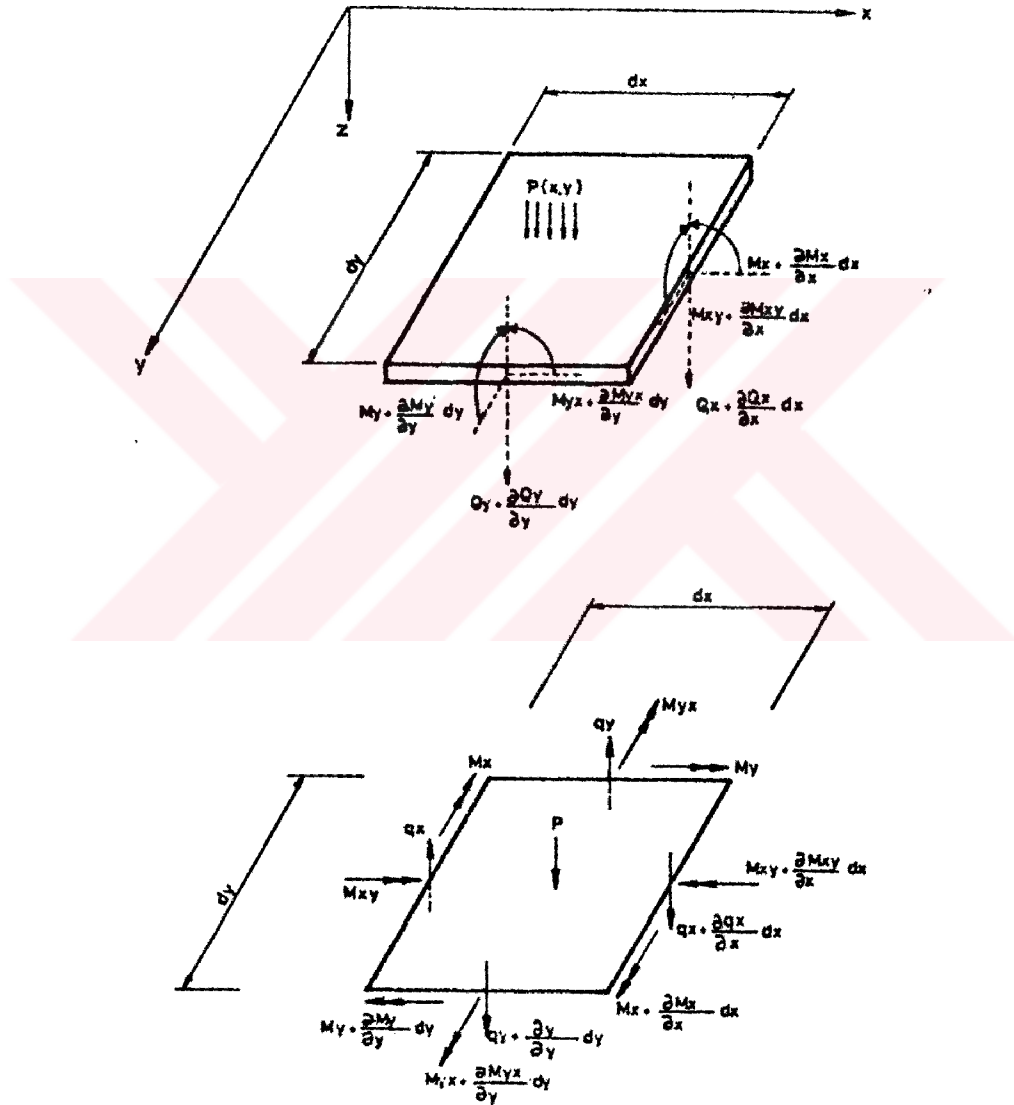
Yeni fonksiyoneller kullanarak düğüm noktalarındaki ω , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} momentlerini bağımsız değişken olarak alan ve üçgen plak sonlu elemanlara Yalçın Aköz [3] [4] de uygulayarak yeni bir Mixed Sonlu Eleman formülasyonu geliştirmişlerdir.

Mixed elemanların kullanılması ile Sonlu Eleman deplasman metodlarından farklı olarak momentler direkt olarak büyük bir doğrulukla bulunabilmektedir.

BÖLÜM 2

ORTOTROP PLAK TEORİSİ VE PLAK DENKLEMLERİ

Plak x, y, z koordinat düzleminde tasvir edilecektir. Bu koordinat eksenlerinden x ve y eksenleri plak orta düzleminde olup, plak anizotropisinin asal doğrultularına paraleldir.



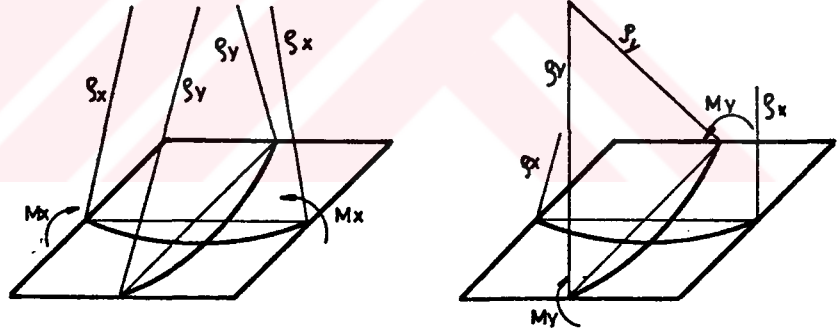
Sekil 2.1.- Plak İç Kuvvetleri Gösterilimi

2.1. KABULLER

Başlıca kabuller sırasıyla;

- 1) Malzeme Lineer, Homojen ve Ortogonal Anizotropi mevcuttur.
- 2) Şekil değiştirmeler küçüktür. Süper pozisyon geçerlidir.
- 3) Orta yüzey deformasyondan sonra düzlem kalmaktadır.
- 4) h plak kalınlığı plağın diğer boyutları yanında küçüktür.

2.2. ŞEKİL DEĞİŞTİRME BAĞLANTILARI



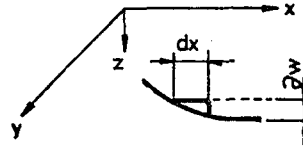
Şekil 2.2.- Plak Eğriliklerinin Tanımı

$$M_x \text{ Momentinden oluşan } 1/\rho_x \text{ eğriliği} = M_x/(EI)_x \quad (2.1)$$

$$M_x \text{ Momentinden oluşan } 1/\rho_x \text{ eğriliği} = -\mu_x \cdot M_x/(EI)_x \quad (2.2)$$

$$M_y \text{ Momentinden oluşan } 1/\rho_y \text{ eğriliği} = M_y/(EI)_y \quad (2.3)$$

$$M_y \text{ Momentinden oluşan } 1/\rho_y \text{ eğriliği} = -\mu_y \cdot M_y/(EI)_y \quad (2.4)$$



Şekil 2.3.- Plak Eğiminin Sistem Eksen Takımında Gösterimi

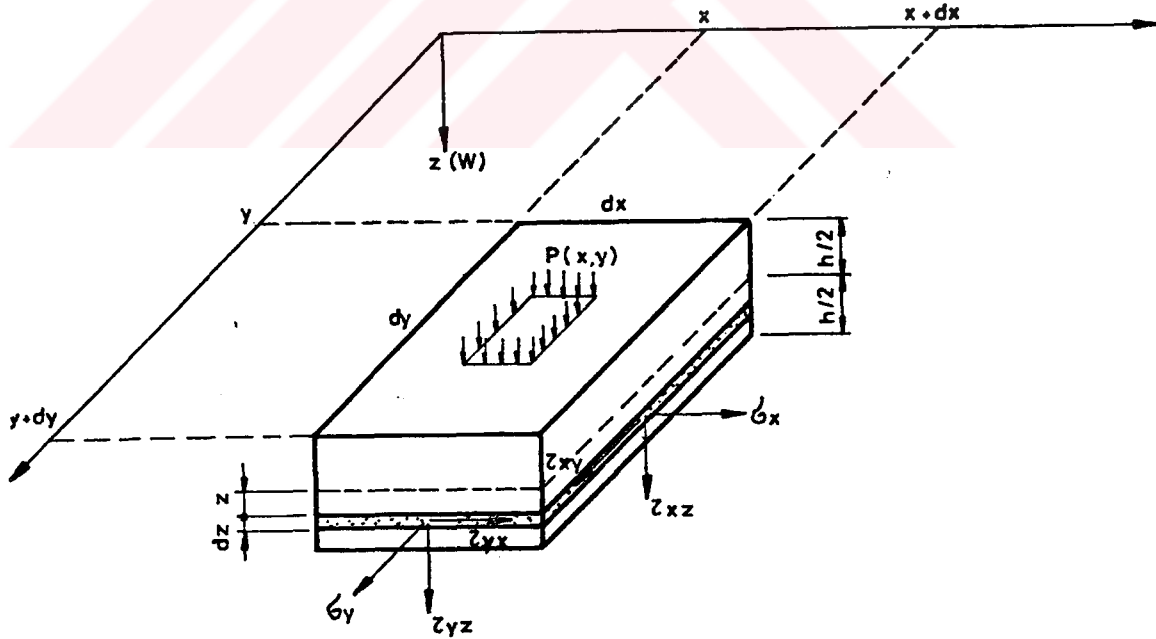
$$1/\rho_x = M_x/(EI)_x - \mu_y \cdot M_y/(EI)_y \quad (2.5)$$

$$1/\rho_y = M_y/(EI)_y - \mu_x \cdot M_x/(EI)_x \quad (2.6)$$

$$1/\rho_x = - \partial/\partial x \cdot (\partial w/\partial x) = - \partial^2 w/\partial x^2 \quad (2.7)$$

$$1/\rho_y = - \partial/\partial y \cdot (\partial w/\partial y) = - \partial^2 w/\partial y^2 \quad (2.8)$$

$$1/\rho_{xy} = - \partial/\partial x \cdot (\partial w/\partial y) = - \partial^2 w/\partial x \partial y \quad (2.9)$$

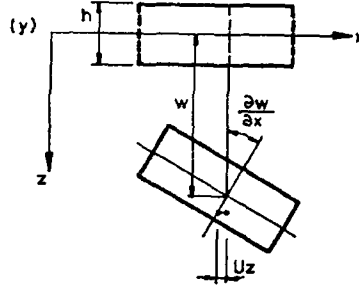


Şekil 2.4.- Plak Gerilmelerinin Tanımı

Plak orta düzlemi O,X,Y ile çakışık olsun .

Z derinliğinde bir noktanın deplasmanları ;

$$\omega_z = \omega \quad ; \quad u_z = -z \cdot \partial \omega / \partial x \quad ; \quad v_z = -z \cdot \partial \omega / \partial y \quad (2.10)$$



Şekil 2.5.- Plak Deplasmanları

Deformasyonlar ;

$$\epsilon_x = \partial u_z / \partial x = -z \cdot \partial^2 w / \partial x^2 \quad (2.11)$$

$$\epsilon_y = \partial v_z / \partial y = -z \cdot \partial^2 w / \partial y^2 \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \partial u_z / \partial y + \partial v_z / \partial x = -2 \cdot z \cdot \partial^2 w / \partial x \partial y \quad (2.13)$$

2.3. ELASTİSİTE BAĞINTILARI VE KESİT TESİRLERİ

$$\sigma_x = (E \cdot z / (1 - \mu_x \cdot \mu_y)) \cdot (1 / \rho_x + \mu_y \cdot 1 / \rho_y) \quad (2.14)$$

$$\sigma_x = -(E \cdot z / (1 - \mu_x \cdot \mu_y)) \cdot (\partial^2 w / \partial x^2 + \mu_y \cdot \partial^2 w / \partial y^2) \quad (2.14.a)$$

$$\sigma_y = (E \cdot z / (1 - \mu_x \cdot \mu_y)) \cdot (1 / \rho_y + \mu_x \cdot 1 / \rho_x) \quad (2.15)$$

$$\sigma_y = -(E \cdot z / (1 - \mu_x \cdot \mu_y)) \cdot (\partial^2 w / \partial y^2 + \mu_x \cdot \partial^2 w / \partial x^2) \quad (2.15.a)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = -2 \cdot G \cdot z \cdot \partial^2 w / \partial x \partial y \quad (2.16)$$

$$\tau_{yx} = G \cdot \gamma_{yx} = -2 \cdot G \cdot z \cdot \partial^2 w / \partial y \partial x \quad (2.17)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \cdot dy = M_x \cdot dy \quad (2.18)$$

$$M_x = -[(EI)_x / b_x \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)] \cdot (\partial^2 w / \partial x^2 + \mu_y \cdot \partial^2 w / \partial y^2) \quad (2.18.a)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \cdot dx = M_y \cdot dx \quad (2.19)$$

$$M_y = -[(EI)_y / b_y \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)] \cdot (\partial^2 w / \partial y^2 + \mu_x \cdot \partial^2 w / \partial x^2) \quad (2.19.a)$$

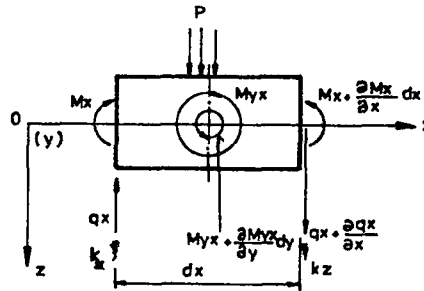
$$\int_{+h/2}^{-h/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dx \cdot dz = M_{xy} \cdot dx \quad (2.20)$$

$$M_{xy} = -2 \cdot G \cdot (J_{bx} / b_x) \cdot (\partial^2 w / \partial x \partial y) \quad (2.20.a)$$

$$\int_{+h/2}^{-h/2} \tau_{yx} \cdot z \cdot dy \cdot dz = M_{yx} \cdot dy \quad (2.21)$$

$$M_{yx} = -2 \cdot G \cdot (J_{by} / b_y) \cdot (\partial^2 w / \partial x \partial y) \quad (2.21.a)$$

2.4. PLAK ESAS DENKLEMİ



Şekil 2.6.- Plak Elemanın Dengesi

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum Z = 0 \quad (2.22)$$

(2.22) Denklemi kendiliğinden sağlanır.

X ve Y eksenindeki moment ve Z eksenindeki düşey denge denklemleri yazılırsa

$$\sum M_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dy dx - \frac{1}{2} \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dx dy \quad \text{ihmal}$$

$$= 0 \quad (2.23)$$

$$\sum M_x = 0 = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = q_x \quad (2.24)$$

$$\sum M_y = 0 = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (2.25)$$

$$\sum Z = 0 = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + (P - k_z \cdot \omega) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + (P - k_z \cdot \omega) \quad (2.27)$$

$$\Delta \Delta \omega = K_x \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + K_y \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + (K_x + K_y) \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = (P - k_z \cdot \omega)$$

$$(2.28)$$

Genel halde Ortotrop plak differansiyel denklemi (2.28) ' de verilmektedir.

Burada ;

$$K_x = (EI)_x / b_x \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \quad (2.29)$$

$$K_y = (EI)_y / b_y \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y) \quad (2.30)$$

$$K_{xy} = 2 \cdot G \cdot (J_{bx} / b_x) \quad (2.31)$$

$$K_{yx} = 2 \cdot G \cdot (J_{by} / b_y) \quad (2.32)$$

μ_x, μ_y = Plak x ve y yönündeki poission oranını

q = z eksenine doğrultusundaki dış yükleri

ω = z eksenine doğrultusundaki yerdeğiştirmeleri

K_x, K_y = Plak x ve y yönü eğilme rijitliğini

K_{yx}, K_{xy} = Plak x ve y yönü burulma rijitliğini

E, G = Plak malzemesinin Elastisite ve Kayma modülünü göstermektedir.

2.5. SINIR ŞARTLARI

Sınır koşulları için Dinamik ve Geometrik sınır koşulları gözönüne alınmıştır.

$$I = \bar{I}_0$$

DİNAMİK SINIR KOŞULU

$$M = \bar{M}_0$$

" " "

(2.33)

$$\omega' = \bar{\omega}'$$

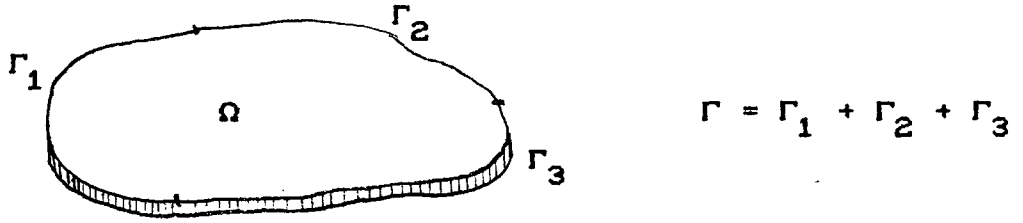
GEOMETRİK SINIR KOŞULU

$$\omega = \bar{\omega}$$

" " "

BÖLÜM 3.
SONLU ELEMANLAR METODUNUN
ORTOTROP PLAK SİSTEMLERİNE UYGULANMASI

3.1. METODUN ESASI



Şekil 3.1.- Sürekli Ortam Parçası

Sürekli bir sistemi problemin karakterine uygun sadece belirli noktalarda birbirine irtibatlı "Sonlu Elemanlar" 'a ayırarak incelemek, Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişime paralel olarak artmaktadır.

Bu yöntemde Ω varlık bölgesinde tanımlı sistem sınır şartları ve şekle uygun Sonlu elemanlara ayrılır.

Sistemi oluşturan her bir elemanın "Eleman Davranış Denklemleri" herhangi bir yöntemle (Varyasyon, Virtüel İş vb.) elde edilir. Daha sonra ;

Sistemin tamamını içeren "Sistem Davranış Denklemleri", Eleman davranış denklemlerinden faydalanılarak ve sınır şartları ilave edilerek kurulur. ve sonuçta sistemin düğüm noktası parametresi kadar bilinmeyen olan cebirsel denklem takımının çözümünden bilinmeyen olarak seçilen parametreler hesaplanır.

Sonlu Elemanlar Deplasman metotlarından farklı olarak Mixed Sonlu Elemanlar'da düğüm noktası parametreleri olarak deplasmanlar ve iç kuvvetler birlikte alınmaktadır.

Yukarıda açıklandığı gibi "SONLU ELEMENLAR" metodunda iki aşama vardır. Bunlar sırasıyla ;

- a.) ELEMEN ANALİZİ
- b.) SİSTEM ANALİZİ dir.

3.1.1. ELEMEN ANALİZİ [35]

Çalışmada kullandığımız bir varyasyon prensibinden hareketle Sonlu Eleman analizinin çıkarılmasından özet halinde bahsedilecektir. [35]

Difeferansiyel denklem sisteminin bir Π fonksiyoneli aşağıdaki gibi elde edilebiliyorsa ;

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{u}) = & \iint_{\Omega} F \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z}, x, y, z \right) d\Omega + \\ & + \iint_{\Gamma} S \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u}{\partial z}, x, y, z \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.1)$$

Bu fonksiyonel içersinde bilinmeyen olarak $U_{\bullet}(x,y)$ alan değişkeni olsun. Burada $U_{\bullet}(x,y)$ çözüm ise

$$U_e = \tilde{U}_e = \sum_{i=1}^r N_i(x,y) \cdot C_i \quad (3.2)$$

3.2 eşitliğini sağlayan keyfi olarak seçilen $\tilde{U}_{\bullet}(x,y)$ alan değişkeni çözüm demektir.

Burada ;

$N_i(x,y)$ = Keyfi olarak seçilen fonksiyon

C_i = Eleman düğüm noktası parametreleri

r = Eleman düğüm noktası parametresi sayısı

U_e = Elemanın gerçek alan değişkeni

$\tilde{U}_e$ = Elemanın yaklaşık alan değişkeni

$\Pi(u)$ = Hakiki Fonksiyonel

$\Pi(\tilde{u})$ = Yaklaşık Fonksiyonel

Ω = Varlık bölgesinde tanımlı

Γ = Belirtilen sınırdaki tanımlı

$\Pi(U_e) = \Pi(\tilde{U}_e)$ ise yaklaşık çözüm elde ediliyor demektir.

3.1 denklemindeki Π fonksiyoneli 3.2 denkleminde seçilen yaklaşık alan değişkeni konursa Π fonksiyoneli bilinmeyen düğüm noktası parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\Pi(U_e) = \Pi(\tilde{U}_e) = \Pi(C_1, C_2, \dots, C_r) \quad (3.3)$$

Eğer 3.3 ifadesi çözüm ise bunun varyasyonu 'da sıfır olmalıdır.

$$\delta \Pi(\tilde{U}_e) = 0 \quad (3.4)$$

3.4 ifadesinin sıfır olması demek 3.5 ifadelerinin sıfır olması demektir.

$$\frac{\partial \pi(\tilde{U}_e)}{\partial C_1} = 0$$

$$\frac{\partial \pi(\tilde{U}_e)}{\partial C_2} = 0$$

$$\frac{\partial \pi(\tilde{U}_e)}{\partial C_3} = 0$$

$$\frac{\partial \pi(\tilde{U}_e)}{\partial C_r} = 0$$

(3.5)

Böylece eleman düğüm noktası parametresi kadar lineer cebirsel denklem takımı elde edilir. 3.5 denkleminin tümüne "ELEMEN DAVRANIŞ DENKLEMLERİ" adı verilir.

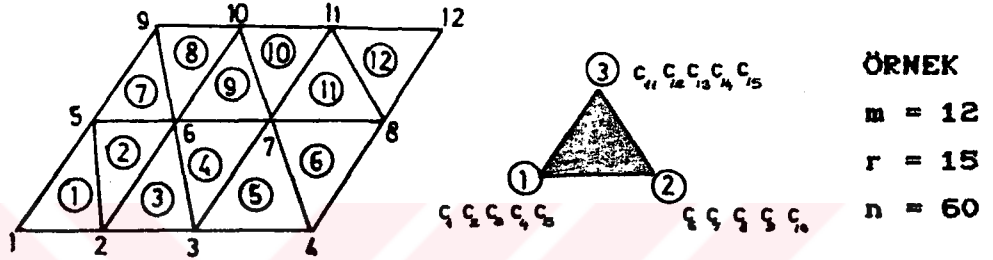
3.1 denkleminde Eleman sınırlarındaki geometrik ve dinamik sınır şartları'da gözönüne alındığı için 3.5 'de elde edilen eleman davranış denklemleri Geometrik ve Dinamik sınır şartlarını direkt olarak içermektedir.

Bölüm 4. 'de Ortotrop Üçgen Plak Mixed Sonlu Elemanın davranış denklemlerinin çıkarılışı detaylı olarak verilmektedir.

3.1.2. SİSTEM ANALİZİ [35]

Bölüm 3.1.1 'de varyasyon prensibinden hareket edilerek eleman analizi ile $C_1, C_2, C_3, \dots, C_r$ düğüm noktası parametreleri'nin nasıl elde edileceği kısaca anlatılmıştır.

Şimdi bütün sistemi gözönüne alırsak ;



Şekil 3.2. - Sonlu Eleman Ağı

Bir elemanın alan değişkeni U_e ise bütün sistemin alan değişkeni U_s aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tilde{U}_s = \sum_{e=1}^n \tilde{U}_e = \sum_{e=1}^m \left(\sum_{i=1}^r C_i^e \cdot N_i^e \right) \quad (3.6)$$

Burada ;

m = Sistemdeki Eleman Sayısı

r = Düğüm Noktası Parametre Sayısı

n = Sistemdeki Toplam Parametre Sayısı

Buna göre tüm sistemin alan değişkeni U_s şöyle yazılabilir.

$$\tilde{U}_s = \sum_{e=1}^n \tilde{U}_e \quad (3.7)$$

3.7 denklemi tüm sistemin yaklaşık çözümünü ifade etmektedir. Buna göre 3.7 denklemi 3.3 de yerine konursa sistemin fonksiyoneli şu hale gelir.

$$\Pi(U_s) = \Pi(\tilde{U}_s) = \Pi(C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3.8)$$

Böylece 3.4 ifadesi sistemde uygulanırsa ;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(\tilde{U}_s)}{\partial C_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi(\tilde{U}_s)}{\partial C_2} &= 0 \\ \frac{\partial \Pi(\tilde{U}_s)}{\partial C_3} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Pi(\tilde{U}_s)}{\partial C_n} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sistem düğüm noktası parametresi kadar lineer cebirsel denklem takımı elde edilir.

3.9 denklemlerinin tümüne "SİSTEM DAVRANIŞ DENKLEMLERİ" adı verilmektedir.

3.9 denklemlerinde Geometrik ve Dinamik sınır şartları otomatik olarak gerekmektedir.

Sistem davranış denklemleri 3.9 'un çözümünden bilinmeyen olarak düğüm noktası parametreleri tayin edilerek, tüm sistemde aranan değerler elde edilmektedir.

3.2. PLAK FONKSİYONELİNİN BULUNMASI

Eleman davranış denklemlerinin elde edilmesinde varyasyon prensibinden hareket edebilmek için Plak Differansiyel denklem sisteminin Π fonksiyonelinin elde edilmesinde kullanılan [5] ve [3],[4] 'de verilen enerji fonksiyonellerinden kısaca bahsedilecektir.

3.2.1. AĞIRLIKLI REZİDÜ METODUNU BİR VARYASYON PRENSİBİNE DONUSTUREREK FONKSİYONELİN ELDE EDİLMESİ [5]

[5] 'de verilen Linear Self-Adjoint Differansiyel denklem sistemlerinde eleman differansiyel denklemini sınır şartlarının da içerecek şekilde yazarak Ağırlıklı Rezidü Metodunun uygulanması halinde yeni differansiyel denklem sistemi şu halde olmaktadır.

$$[L_b] \cdot \{u_b\} - \{f_b\} = 0 \quad (3.10)$$

$[L_b]$ = Differansiyel denklem sisteminin sınır şartları ile birlikte içerdigi operatör matris $(r \times t)$. $(r \times t)$

$[L]$ = Differansiyel denklem sistemi operatör matris $(r \times r)$

$[B]$ = Sınır şartları operatör matrisi $(t \times t)$

$\{u_b\}$ = Düğüm noktası parametreleri ile sınır şartlarını içeren kolon matris $(1 \times (r+t))$

$\{f_b\}$ = Differansiyel denklem sistemi etki matrisi ile sınır etki matrisi $(1 \times (r+t))$

$\{f\}$ = Tüm bünyede tanımlı etki matrisi $(1 \times r)$

$\{R\}$ = Sınırdaki tanımlı etki matrisi $(1 \times t)$

$\langle f \rangle$ = Tüm bünyede tanımlı etki matrisi $(1 \times r)$

$\langle R \rangle$ = Sınırdaki tanımlı etki matrisi $(1 \times t)$

3.10 denklemini matris formunda aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 0 \end{bmatrix}_{r \times r} & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}_{t \times t} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} S \end{Bmatrix} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} R \end{Bmatrix} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$[L_b] \qquad \qquad \qquad \langle U_b \rangle \qquad \langle f_b \rangle$

3.11 denkleminin açık halde yazılması halinde

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{2,1}, L_{2,2}, \dots, L_{2,r} \\ L_{2,1}, L_{2,2}, \dots, L_{2,r} \\ \dots, \dots, \dots \\ \dots, \dots, \dots \\ L_{r,1}, L_{r,2}, \dots, L_{r,r} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\langle U \rangle = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_r \end{Bmatrix}_{1 \times r} \quad \langle f \rangle = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{Bmatrix}_{1 \times r} \quad (3.14)$$

$$\langle S \rangle = \begin{Bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_t \end{Bmatrix}_{1 \times t} \quad \langle R \rangle = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_t \end{Bmatrix}_{1 \times t} \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} L_{2,1} & L_{2,2'} & \dots & L_{2,r} \\ L_{2,1} & L_{2,2'} & \dots & L_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{r,1} & L_{r,2'} & \dots & L_{r,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_r \\ S_1 \\ \vdots \\ S_t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ R_1 \\ \vdots \\ R_t \end{bmatrix} = 0 \quad (3.16)$$

Ağırlıklı Rezidü Metodunun Lineer Self-Adjoint Differansiyel denklem sistemlerine uygulanarak [5] 'de elde edilen fonksiyonel 3.10 denklemi gözönüne alınarak yazılırsa

$$\Pi = \int_S \langle v_b \rangle^T \cdot \langle [L_b] \cdot \langle u_b \rangle - \langle f_b \rangle \rangle ds = 0 \quad (3.12)$$

Π Fonksiyoneli 3.12 de verildiği gibi elde edilir.

Burada ; V_b Sınırdaki ve varlık bölgesinde seçilen keyfi fonksiyonlardır.

$$\left\{ v_b \right\}^T = [v_1 , v_2 , \dots , v_r , \bar{v}_1 , \bar{v}_2 , \dots , \bar{v}_t] \quad (3.13)$$

$$ds = \begin{array}{ll} \text{Varlık Bölgesinde} & d\Omega \\ \text{Belirtilen Sınırdaki} & d\Gamma \end{array}$$

Olarak alırsak $\langle v_b \rangle$ keyfi fonksiyonu olarak $\langle u_b \rangle$ alan değişkenini kabul edersek

$$\delta\pi = \iint_s \langle \delta u_b \rangle^T \cdot \langle [L_b] \cdot \langle u_b \rangle - \langle f_b \rangle \rangle ds = 0 \quad (3.14)$$

$$\delta\pi = \iint_s \langle \delta u_b \rangle^T \cdot [L_b] \cdot \langle u_b \rangle ds - \iint_s \langle \delta u_b \rangle^T \cdot \langle f_b \rangle ds = 0 \quad (3.15)$$

$$I = \iint_s \langle u_b \rangle^T \cdot \langle [L_b] \cdot \langle u_b \rangle \rangle ds \quad (3.16)$$

$$\delta I/2 = \iint_s \langle \delta u_b \rangle^T \cdot \langle [L_b] \cdot \langle u_b \rangle \rangle ds \quad (3.17)$$

$$\delta\pi = \frac{1}{2} \delta I - \iint_s \langle \delta u_b \rangle^T \cdot \langle f_b \rangle ds = 0 \quad (3.18)$$

$$\pi = \iint_s \left[\frac{1}{2} \cdot \langle u_b \rangle^T \cdot \langle [L_b] \cdot \langle u_b \rangle \rangle - \langle u_b \rangle^T \cdot \langle f_b \rangle \right] ds$$

(3.19)

Lineer Self-Adjoint Differansiyel denklem sistemleri için Π fonksiyoneli 3.19 da elde edilmiştir.

Π ' ye bir defa kısmi integrasyon tatbik edilerek bulunacak Π_p fonksiyoneli 3.19 ifadesinin gevşetilmiş şeklidir.

$$\Pi_p = \int_s \left(\frac{1}{2} \langle u_s \rangle^T \langle [L_s]^* \langle u_s \rangle \rangle - \langle u_s \rangle^T \langle f_s \rangle^* \right) ds = 0$$

(3.20)

Π_p Fonksiyoneli Sonlu Eleman Metodunda Bilhassa Mixed eleman teşkilinde çok büyük kolaylıklar sağlamaktadır.

3.2.2. BİR POTANSİYELE SAHİP ENERJİ FONKSİYONELLERİ YARDIMIYLA FONKSİYONELİN BULUNMASI [3], [4]

Burada bir fizik probleminin differansiyel denklem sistemi aşağıdaki gibi gösterilmektedir.

$$\langle Q \rangle = [P] \langle u \rangle - \langle f \rangle = 0 \quad (3.22)$$

Burada;

$\langle Q \rangle = 1 \times (r+t)$ boyutlarında differansiyel denklem sistemini matris

$[P] =$ Differansiyel denklem sisteminin ve sınır şartlarını birlikte içeren operatör matris $(r+t) \times (r+t)$

$\langle u \rangle =$ Eleman üzerinde ve sınırdaki geçerli olacak şekilde seçilen parametrelerdir. $1 \times (r+t)$

$\langle \bar{u} \rangle, \langle u \rangle = U$ 'nun içinde bulunduğu uzayın elemanlarıdır.

Operatörüne ait fonksiyoneli bulmak için operatörün potansiyel operatör olması gerekmektedir.

$$[P].\langle \bar{U} \rangle = \langle \partial \bar{Q} \rangle \quad (3.23)$$

$$[P].\langle U \rangle = \langle \partial Q \rangle$$

$$\langle \partial \bar{Q} \rangle^T . \langle u \rangle = \langle \partial Q \rangle^T . \langle \bar{u} \rangle \quad (3.24)$$

3.24 eşitliğinin sağlanması halinde $\langle Q \rangle$ bir potansiyel operatördür.

$\langle Q \rangle$ Potansiyel operatörse buna ait enerji fonksiyoneli 3.25 ile bulunur.

$$I(u) = \int_{\Omega} \langle Q \rangle^T . \langle u \rangle d\Omega \quad (3.25)$$

Bu ifade ile bulunan enerji fonksiyonelleri Sonlu Eleman denklemini yazmak için kullanılmış Yalçın Aköz [4] deGenelleştirilmiş enerji fonksiyonellerini kullanarak Üçgen plak sonlu elemanı için Mixed Sonlu Eleman Formülasyonu'nu vermiştir.

BÖLÜM 4

ÜÇGEN ORTOTROP PLAK SONLU ELEMANI

4.1. ORTOTROP PLAK FONKSİYONELİNİN ELDE EDİLMESİ

Bölüm 3.2.1 de kısaca bahsedildiği gibi [5] de verilen varyasyon prensibinden yararlanılarak plak fonksiyoneli elde edilmiş, Elde edilen $\Pi(u)$ fonksiyoneline bir defa kısmi integrasyon tatbik edilerek $\Pi_p(u)$ fonksiyoneli bulunmuştur.

Sekil 2.1 de gösterilen eksen takımı ve notasyonla Bölüm 2'de özet halinde verilen Kirchhoff plak teorisi denklemleri Ortotrop Plak için aşağıda özet halinde verilmektedir. [1], [2]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + (q - k_z \cdot \omega) = 0$$

$$M_x + K_x \cdot \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu_y \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + \alpha \cdot t \cdot K_x \cdot (1 + \mu_y) = 0$$

(4.1)

$$M_y + K_y \cdot \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu_x \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right] + \alpha \cdot t \cdot K_y \cdot (1 + \mu_x) = 0$$

$$M_{xy} + K_{bx} \cdot \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

$$M_{yx} + K_{by} \cdot \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} \right] = 0$$

Sınır şartları olarak Geometrik ve Dinamik sınır koşulları birlikte ele alınmıştır. Bunlar sırasıyla ;

$$\begin{array}{llll}
 T_O = \bar{T}_O & \text{Dinamik} & \text{Sınır Koşulu} & \begin{array}{l} - \\ : \\ : \\ : \end{array} \\
 M_O = \bar{M}_O & \text{Dinamik} & \text{Sınır Koşulu} & \begin{array}{l} : \\ : \\ > \end{array} \\
 \omega'_O = \bar{\omega}'_O & \text{Geometrik} & \text{Sınır Koşulu} & \begin{array}{l} : \\ : \\ : \end{array} \\
 \omega_O = \bar{\omega}_O & \text{Geometrik} & \text{Sınır Koşulu} & \begin{array}{l} : \\ : \\ - \end{array}
 \end{array} \quad (4.2)$$

Buradaki T_O , M_O , ω'_O , ω_O Plak çevresindeki Kesme kuvveti, Moment, Dönme ve yer değiştirmedir. Şapkalı ifadeler ise sınırdaki değerlerdir.

Bölüm 3.2.1 de (3.10) denklemiyle verilen Sınır şartlarının da içine alan Ortotrop plak differansiyel denklemi matris formunda aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{bmatrix}
 L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 L_{31} & 0 & L_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 L_{41} & 0 & 0 & L_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 L_{51} & 0 & 0 & 0 & L_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 \phi_1 \\
 \phi_2 \\
 \phi_3 \\
 \phi_4 \\
 \phi_5 \\
 S_1 \\
 S_2 \\
 S_3 \\
 S_4
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_3 \\
 f_4 \\
 f_5 \\
 R_1 \\
 R_2 \\
 R_3 \\
 R_4
 \end{bmatrix}
 = 0$$

$[L_B]$
 $\langle U_B \rangle$
 $\langle f_B \rangle$

(4.3)

4.3 denkleminin elemanları Bölüm 3.2 deki tariflerle aşağıda verilmektedir.

$$L_{11} = -k_z \quad ; \quad L_{12} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad ; \quad L_{13} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{14} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad ; \quad L_{15} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \quad ; \quad L_{41} = L_{14} \quad ; \quad L_{51} = L_{15}$$

(4.4)

$$L_{22} = 1/K_x \quad ; \quad L_{33} = 1/K_y \quad ; \quad L_{44} = 1/K_{bx} \quad ; \quad L_{55} = 1/K_{by}$$

$$L_{21} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \quad ; \quad L_{31} = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mu_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]$$

Seçilen keyfi fonksiyon $\{u\}$ 'nün ve $\{S\}$ 'in anlamları aşağıda verilmektedir.

$$\phi_1 = \omega = \omega_1 \cdot N_1(x,y) = \omega_1 \cdot N_1(x,y) + \omega_2 \cdot N_2(x,y) + \omega_3 \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_2 = M_x = M_{x_1} \cdot N_1(x,y) = M_{x_1} \cdot N_1(x,y) + M_{x_2} \cdot N_2(x,y) + M_{x_3} \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_3 = M_y = M_{y_1} \cdot N_1(x,y) = M_{y_1} \cdot N_1(x,y) + M_{y_2} \cdot N_2(x,y) + M_{y_3} \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_4 = M_{xy} = M_{xy_1} \cdot N_1(x,y) = M_{xy_1} \cdot N_1(x,y) + M_{xy_2} \cdot N_2(x,y) + M_{xy_3} \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_5 = M_{yx} = M_{yx_1} \cdot N_1(x,y) = M_{yx_1} \cdot N_1(x,y) + M_{yx_2} \cdot N_2(x,y) + M_{yx_3} \cdot N_3(x,y)$$

(4.5)

$$S_1 = \omega_o$$

$$S_2 = \omega_o' = [\omega_{ox}', \omega_{oy}']$$

(4.6)

$$S_3 = M_o = [M_{ox}, M_{oy}, M_{oxy}, M_{oyx}]$$

$$S_4 = T_o = [T_{ox}, T_{oy}]$$

Aynı şekilde $\langle f \rangle$ ve $\langle R \rangle$ matrisi şu şekilde verilmektedir.

$$f_1 = -q \quad (\text{Düzgün Yayılı Yük } F.L^{-2})$$

$$f_2 = -\alpha \cdot t \cdot K_x \cdot (1 + \mu_y) \cdot 1/h_x$$

(4.7)

$$f_3 = -\alpha \cdot t \cdot K_y \cdot (1 + \mu_x) \cdot 1/h_y$$

$$f_4 = f_5 = 0$$

$$R_1 = \bar{T}_o = [\bar{T}_{ox}, \bar{T}_{oy}]$$

$$R_2 = \bar{M}_o = [\bar{M}_{ox}, \bar{M}_{oy}, \bar{M}_{oxy}, \bar{M}_{oyx}]$$

(4.8)

$$R_3 = \bar{\omega}_o' = [\bar{\omega}_{ox}', \bar{\omega}_{oy}']$$

$$R_4 = \bar{\omega}_o$$

Burada ;

α = Isı Genleşme Katsayısı

t = Plak üstü ile altı arasındaki ısı farkı

h_x, h_y = X ve Y yönü plak kalınlığı

k_z = Elastik Zemin Yatak Katsayısı ($F.L^{-3}$)

w_i = Eleman Düğüm Noktası Düşey Deplasmanı

M_{x_1} = Eleman Düğüm Noktası M_x Momenti

M_{y_1} = Eleman Düğüm Noktası M_y Momenti

M_{xy_1} = Eleman Düğüm Noktası M_{xy} Momenti

M_{yx_1} = Eleman Düğüm Noktası M_{yx} Momenti

$N_1(x,y)$ = Seçilen İnterpolasyon Fonksiyonu

Bölüm 3 'de 3.19 denklemleri ile verilen plak fonksiyonlarında 4.3 de verilen parametreler kullanılarak işlemler yapılırsa plak fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\Pi(\tilde{u}) = \iint_S \frac{1}{2} \langle u_B \rangle^T \cdot \{ [L_B] \cdot \langle u_B \rangle \} ds - \iint_S \langle u_B \rangle^T \cdot \langle f_B \rangle ds \quad (4.9)$$

$$\{u\} = \{\tilde{u}\} = \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot N_i(x, y) \quad (4.9.a)$$

$$\begin{aligned} ds &= \text{Varlık Bölgesinde} \quad d\Omega \\ &\text{Belirtilen Sınırdaki} \quad d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(\tilde{u}) &= \iint_{\Omega} 1/2 \left\{ \left[L_{11} \cdot \phi_1 + L_{12} \cdot \phi_2 + L_{13} \cdot \phi_3 + L_{14} \cdot \phi_4 + L_{15} \cdot \phi_5 \right] \cdot \phi_1 + \right. \\ &+ \left[L_{21} \cdot \phi_1 + L_{22} \cdot \phi_2 \right] \cdot \phi_2 + \left[L_{31} \cdot \phi_1 + L_{33} \cdot \phi_3 \right] \cdot \phi_3 + \\ &+ \left[L_{41} \cdot \phi_1 + L_{44} \cdot \phi_4 \right] \cdot \phi_4 + \left[L_{51} \cdot \phi_1 + L_{55} \cdot \phi_5 \right] \cdot \phi_5 \Big\} d\Omega + \\ &+ \oint_{\Gamma} 1/2 \cdot \left\{ \left[S_4 \cdot S_1 \right]_{\Gamma_1} + \left[S_3 \cdot S_2 \right]_{\Gamma_1} + \left[S_2 \cdot S_3 \right]_{\Gamma_2} + \left[S_1 \cdot S_4 \right]_{\Gamma_2} \right\} d\Gamma \\ &+ \iint_{\Omega} \left\{ \left[f_1 \cdot \phi_1 \right] + \left[f_2 \cdot \phi_2 \right] + \left[f_3 \cdot \phi_3 \right] + \left[f_4 \cdot \phi_4 \right] + \left[f_5 \cdot \phi_5 \right] \right\} d\Omega - \\ &- \oint_{\Gamma} \left\{ \left[S_1 \cdot R_1 \right]_{\Gamma_1} + \left[S_2 \cdot R_2 \right]_{\Gamma_1} + \left[S_3 \cdot R_3 \right]_{\Gamma_2} + \left[S_4 \cdot R_4 \right]_{\Gamma_2} \right\} d\Gamma \quad (4.9.b) \end{aligned}$$

Burada köşeli parentezler bölgede iç çarpımı gösterirler.

Γ_1 = Dinamik Sınır Koşulu Bölgesinde Geçerli

Γ_2 = Geometrik Sınır Koşulu Bölgesinde Geçerli

(4.9.b) 'de verilen fonksiyonelde 4.4,.....,4.8 ile verilen parametreler kullanılarak $\Pi(u)$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\begin{aligned}
 \Pi(\tilde{u}) = & \left[1/2 \cdot \left(-\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - k_z \cdot \omega \right), \omega \right] + \\
 & + \left[1/2 \cdot \left(M_x \cdot K_x + \left(-\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu_y \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \right), M_x \right] + \\
 & + \left[1/2 \cdot \left(M_y \cdot K_y + \left(-\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu_x \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \right), M_y \right] + \\
 & + \left[1/2 \cdot \left(M_{xy} \cdot K_{bx} + \left(-\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right) \right), M_{xy} \right] + \\
 & + \left[1/2 \cdot \left(M_{yx} \cdot K_{by} + \left(-\frac{\partial^2 \omega}{\partial y \partial x} \right) \right), M_{yx} \right] + \\
 & [q, \omega] + [(a.t.(1+\mu_y)), M_x] + [(a.t.(1+\mu_x)), M_y] + \\
 & + 1/2 \cdot [T_o, \omega_o]_{\Gamma_1} + 1/2 \cdot [M_o, \omega_o']_{\Gamma_1} + 1/2 \cdot [\omega_o', M_o]_{\Gamma_2} + \\
 & + 1/2 \cdot [\omega_o, T_o]_{\Gamma_2} - [\omega_o, \bar{T}_o]_{\Gamma_2} - [\omega_o, \bar{M}_o]_{\Gamma_2} - \\
 & - [\bar{M}_o, \bar{\omega}_o']_{\Gamma_1} - [T_o, \bar{\omega}_o]_{\Gamma_1}
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10) 'da bulunan plak fonksiyonelinin son sekiz terimi elemanın belirtilen sınırlarında geçerli olan Sınır Koşulları ile ilgili terimlerdir.

Şapkalı ifadeler sınırda verilen keyfi değerlerdir. T_o , M_o , ω_o' , ω_o elemanın sınırlarındaki kesit tesirleri dönme ve bilinen yerdeğiştirme bileşenidir.

Dinamik ve geometrik sınır koşulları elemanın aynı noktasında geçerli olduğu kabulü yapılırsa $\Gamma_1 = \Gamma_2$ yazılabilir. Bu durumda 4.10 denklemi şu hale gelir.

$$\begin{aligned}
 \Pi(\tilde{u}) = & \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \cdot \omega + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial y \partial x} \cdot \omega + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \cdot \omega + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \cdot \omega - k_z \cdot \omega \right) \right] + \\
 & + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(M_x \cdot M_x \cdot (1/K_x) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot M_x + \mu_y \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \cdot M_x \right) \right] + \\
 & + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(M_y \cdot M_y \cdot (1/K_y) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \cdot M_y + \mu_x \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot M_y \right) \right] + \\
 & + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(M_{xy} \cdot M_{xy} \cdot (1/K_{bx}) + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \cdot M_{xy} \right) \right) \right] + \\
 & [q \cdot \omega] + [(\alpha \cdot t \cdot (1 + \mu_y)) \cdot M_x] + [(\alpha \cdot t \cdot (1 + \mu_x)) \cdot M_y] + \\
 & + [(\bar{\omega}_o - \omega_o) \cdot T_o]_{\Gamma_2} + [(\omega_o' - \bar{\omega}_o') \cdot M_o]_{\Gamma_2} \\
 & - [\bar{T}_o \cdot \omega_o]_{\Gamma_1} - [\bar{M}_o \cdot \omega_o']_{\Gamma_1}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.11 denkleminde görüldüğü gibi $\Pi(u)$ fonksiyonelinde en yüksek ikinci mertebeden türevler vardır. $\Pi(u)$ fonksiyoneline bir defa kısmi integrasyon uygulanarak $\Pi_p(u)$ fonksiyoneli bulunmaktadır. Bu fonksiyonel $\Pi(u)$ fonksiyonelinin gevşetilmiş şeklidir.

$\Pi_p(u)$ fonksiyoneli içinde en yüksek birinci mertebe türevleri vardır.

İki değişkenli fonksiyonda kısmi integrasyon "GREEN BAĞINTISI" ile verilmektedir. [19]

$$\iint_{\Omega} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \psi dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \cdot \psi \cdot n_x \cdot d\Gamma$$

$$\iint_{\Omega} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \psi dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \cdot \psi \cdot n_y \cdot d\Gamma$$

$$\iint_{\Omega} \phi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma$$

$$\iint_{\Omega} \phi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot n_y \cdot d\Gamma$$

$$\iint_{\Omega} \phi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot n_y \cdot d\Gamma$$

$$\iint_{\Omega} \phi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) dx dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy + \oint_{\Gamma} \phi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot n_x \cdot d\Gamma$$

Burada ; $\phi(x,y), \psi(x,y)$ iki değişkenli fonksiyon olarak tanımlanmaktadır.

4.10 denklemine kısmi integrasyon uygulanarak elde edilen $\Pi_p(u)$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
 \Pi_p(\tilde{u}) = & -\frac{1}{2} \cdot k_z \cdot \omega \cdot \omega - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \\
 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot M_x \cdot M_x \cdot \frac{1}{K_x} + \\
 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \mu_y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot M_y \cdot M_y \cdot \frac{1}{K_y} + \\
 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \cdot \mu_x \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot M_{xy} \cdot M_{xy} \cdot \frac{1}{K_{bx}} + \\
 & -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + q \cdot \omega + \\
 & + \alpha \cdot t \cdot (1 + \mu_y) \cdot \frac{1}{h_x} \cdot M_x + \alpha \cdot t \cdot (1 + \mu_x) \cdot \frac{1}{h_y} \cdot M_y + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \omega \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (1) \\
 & + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \omega \cdot \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (2) + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \omega \cdot \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (3) + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \omega \cdot \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (4) \\
 & + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} M_x \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (5) + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} M_x \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \mu_y \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (6) + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} M_y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (7) \\
 & + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} M_y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \mu_x \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (8) + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} M_{xy} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (9) + \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} M_{yx} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (10) \\
 & + \frac{1}{2} [\bar{I}_0, \omega_0]_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} [\bar{M}_0, \omega_0]_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} [\omega_0, \bar{M}_0]_{\Gamma_2} + \frac{1}{2} [\omega_0, \bar{I}_0]_{\Gamma_2} \\
 & - [\bar{I}_0, \omega_0]_{\Gamma_2} - [\bar{M}_0, \omega_0]_{\Gamma_2} - [\omega_0, \bar{M}_0]_{\Gamma_1} - [\omega_0, \bar{I}_0]_{\Gamma_1} \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

4.12 denkleminde (1),(2),(3),(4) ile gösterilen terimler kesme kuvvetinin tüm sınırda yaptığı işi göstermektedir.

$$[T, \omega]_{\Gamma} = [\left(\left(-\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \cdot n_x + \left(-\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \cdot n_y \right), \omega]_{\Gamma} \quad (4.13)$$

4.12 denkleminde (5),(6),(7),(8),(9),(10) ile gösterilen terimler momentin tüm sınırda yaptığı iş olarak ifade edilmektedir.

$$[M, \omega']_{\Gamma} = \left[[M_x, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot n_y \right)] + [M_y, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot n_x \right)] + [M_{xy}, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \cdot n_y] + [M_{yx}, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \cdot n_x] \right]_{\Gamma} \quad (4.14)$$

Kısaca;

$$(1),(2),(3),(4)'ün anlamı \quad \frac{1}{2}[T, \omega]_{\Gamma} = \frac{1}{2}[T, \omega]_{\Gamma_1} + \frac{1}{2}[T, \omega]_{\Gamma_2} \quad (4.15)$$

$$(5), \dots, (10)'un anlamı \quad \frac{1}{2}[M, \omega']_{\Gamma} = \frac{1}{2}[M, \omega']_{\Gamma_1} + \frac{1}{2}[M, \omega']_{\Gamma_2} \quad (4.16)$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (4.17)$$

Γ = Tüm sınırda geçerli

Γ_1 = Dinamik sınır koşulunun belirlendiği yerde geçerli

Γ_2 = Geometrik sınır koşulunun belirlendiği yerde geçerli

4.12 denklemindeki $T_o = T$; $M_o = M$; $\omega_o = \omega$; $\dot{\omega}_o = \dot{\omega}$ kabulü yapılarak gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra 4.10 denklemine kısmi integrasyon uygulandıktan sonra elde edilen $\Pi_p(\vec{u})$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
 \Pi_p(\vec{u}) = & -\frac{1}{2} \cdot k_z \cdot \omega \cdot \omega - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot M_x \cdot M_x \cdot \frac{1}{K_x} + \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \mu_y \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot M_y \cdot M_y \cdot \frac{1}{K_y} + \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \cdot \mu_x \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot M_{xy} \cdot M_{xy} \cdot \frac{1}{K_{bx}} + \\
 & - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + q \cdot \omega + \\
 & + \alpha \cdot t \cdot (1 + \mu_y) \cdot \frac{1}{h_x} \cdot M_x + \alpha \cdot t \cdot (1 + \mu_x) \cdot \frac{1}{h_y} \cdot M_y + \\
 & + [T_o, \omega_o]_{\Gamma_1} + [\bar{M}_o, \dot{\omega}_o]_{\Gamma_1} + [(\bar{\omega}_o - \omega_o), T_o]_{\Gamma_2} + [(\dot{\bar{\omega}}_o - \dot{\omega}_o), M_o]_{\Gamma_2}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

(4.18) denklemi ile verilen plak fonksiyonelinde bilinmeyen düğüm noktası parametreleri olarak

$$\begin{aligned}
 \omega &= \omega_i \cdot N_i(x,y) \\
 M_x &= M_{x_i} \cdot N_i(x,y) \\
 M_y &= M_{y_i} \cdot N_i(x,y) \\
 M_{xy} &= M_{x_i} \cdot N_i(x,y) \\
 M_{yx} &= M_{y_i} \cdot N_i(x,y)
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.19 denkleminde görüldüğü gibi her bir düğüm noktasında beş bilinmeyen görülmektedir.

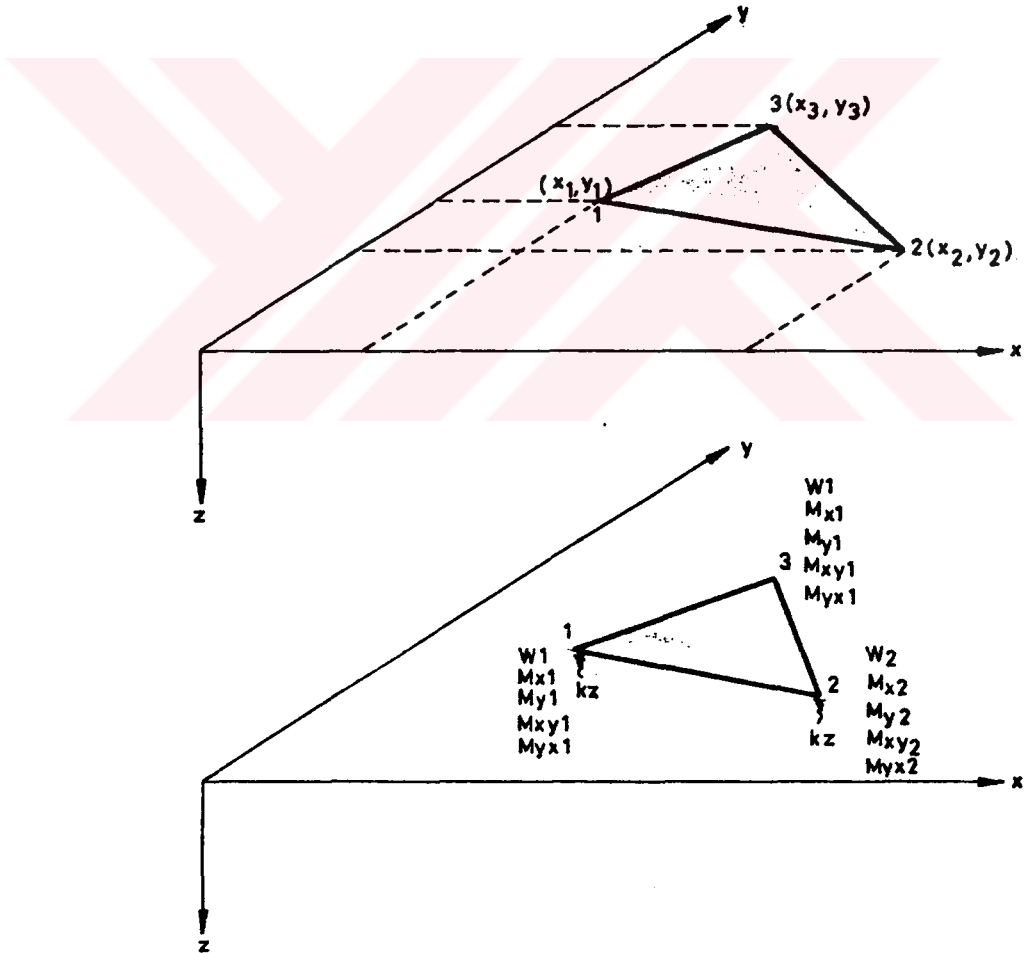
Birbirinden bağımsız olarak seçilen $\omega, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$ gibi beş bilinmeyenin üçgen plak sonlu elemanı içinde doğrusal değiştiğini kabul ederek birinci dereceden polinom $N_i(x,y)$ interpolasyon fonksiyonu olarak seçilmiştir.

İnterpolasyon fonksiyonunun elde edilişi bölüm 4.2 de verilmektedir.

4.2. İNTERPOLASYON FONKSİYONLARININ BULUNMASI

Fonksiyonelde düğüm noktası parametreleri olarak seçilen ω , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} (4.5) denkleminde $N_1(x,y)$ şekil fonksiyonlarına bağlı olarak yazılmışlardır.

Eleman içinde seçilecek interpolasyon fonksiyonlarının tamlik ve uygunluk şartlarını sağlaması gerektiği bilinmektedir. [20],[36],[37],[38],[39]



Sekil 4.1.- Üçgen Sonlu Eleman Eksen Takımı

Her düğüm noktasında beş bilinmeyeninde 4.18 deki plak fonksiyoneline ençok birinci türevleri bulunmaktadır.

Bu nedenle seçilen birinci dereceden polinom tamlik ve uygunluk şartlarını sağlarlar. [20],[36],[37],[38],[39]

İntegral içindeki parmetrelerin fonksiyonelde sadece birinci türevleri bulunduğundan eleman içindeki ω , $\partial\omega/\partial x$, ..., M_x , $\partial M_x/\partial x$, ..., M_{yx} , ..., $\partial M_{yx}/\partial y$ 'in çeşitli mertebeden türevleri sabit bir değer olarak elde edilebilmektedir. Buradan görüldüğü gibi seçilen interpolasyon fonksiyonu eleman sınırında sürekliliği sağlamaktadır.

Seçilen dogrusal interpolasyon fonksiyonu eleman küçüldüğünde kesin sonuçlara yaklaşmaktadır.

$$N_1(x,y) = a_1 + a_2 \cdot X + a_3 \cdot Y \text{ (İTERPOLASYON FONKSIYONU) (4.20)}$$

Bilinmeyenlerin 1 köşesinde aldığı değerler 4.5 denklemlerin'den faydalanılarak yazılırsa

$$\phi_1 = \omega = \omega_1 \cdot N_1(x,y) = \omega_1 \cdot N_1(x,y) + \omega_2 \cdot N_2(x,y) + \omega_3 \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_2 = M_x = M_{x_1} \cdot N_1(x,y) = M_{x_1} \cdot N_1(x,y) + M_{x_2} \cdot N_2(x,y) + M_{x_3} \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_3 = M_y = M_{y_1} \cdot N_1(x,y) = M_{y_1} \cdot N_1(x,y) + M_{y_2} \cdot N_2(x,y) + M_{y_3} \cdot N_3(x,y)$$

$$\phi_4 = M_{xy} = M_{xy_1} \cdot N_1(x,y) = M_{xy_1} \cdot N_1(x,y) + M_{xy_2} \cdot N_2(x,y) + M_{xy_3} \cdot N_3(x,y)$$

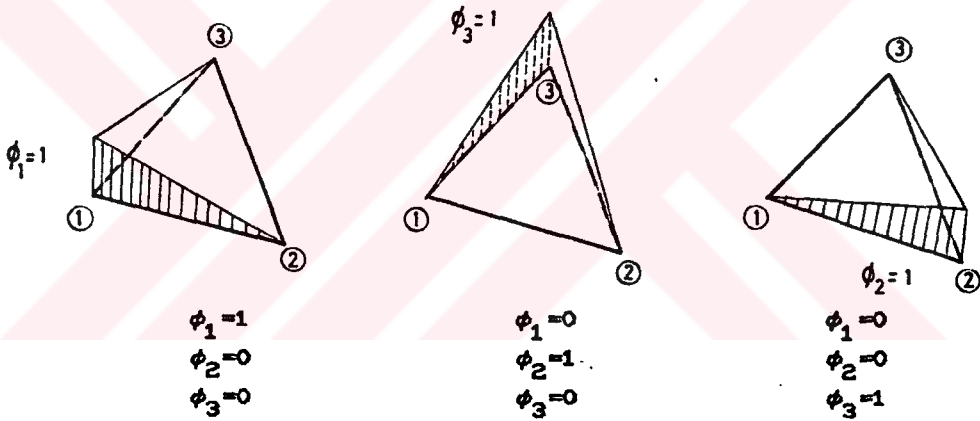
$$\phi_5 = M_{yx} = M_{yx_1} \cdot N_1(x,y) = M_{yx_1} \cdot N_1(x,y) + M_{yx_2} \cdot N_2(x,y) + M_{yx_3} \cdot N_3(x,y) \quad (4.5)$$

Burada ;

$\phi_1(x,y) \dots \phi_3(x,y) \dots \phi_5(x,y)$; Düğüm noktası parametresi
olarak seçilen lineer fonksiyon

$\omega_1, \dots, \omega_3, \dots, Mx_1, \dots, Myx_3$; Söz konusu $\phi(x,y)$ 'nin
(i)'inci köşesindeki (düğüm noktasında) değeri yani
 $\phi(x_i, y_i)$

$N_1(x,y) \dots$; Üçgenin (i) köşesinde 1
değerini ve diğer iki köşede (0) değerini alan şekil
fonksiyonudur.



Şekil 4.2.- Şekil Fonksiyonlarının Gösterilimi

4.20 Doğrusal interpolasyon fonksiyonu denkleminin çözümünden üçgen şeklin düğüm noktası koordinatları cinsinden şekil fonksiyonu aşağıda verilmektedir.

$$N_i(x,y) = \begin{cases} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \end{cases} = \begin{cases} 1/2\Delta \cdot [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3) \cdot X + (x_3 - x_2) \cdot Y] \\ 1/2\Delta \cdot [(x_2y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1) \cdot X + (x_1 - x_3) \cdot Y] \\ 1/2\Delta \cdot [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2) \cdot X + (x_2 - x_1) \cdot Y] \end{cases} \quad (4.21)$$

4.3. ELEMAN DAVRANIŞ DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Eleman davranış denklemlerinin bulunuşu Bölüm 3.1.1 de anlatıldığı gibi elde edilen $\Pi_p(u)$ (4.18) fonksiyoneli (4.5) ve (4.21) ifadeleri yerlerine konulursa

$\Pi_p(\tilde{u})$ fonksiyoneli eleman düğüm noktası parametreleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\Pi_p(\tilde{u}) = \Pi(\omega_1 \dots \omega_3, Mx_1 \dots Mx_3, My_1 \dots My_3, Mxy_1 \dots Mxy_3, Myx_1 \dots Myx_3) = 0 \quad (4.22)$$

4.22 ifadesi çözüm ise bunun varyasyonuda sıfır olmalıdır.

$\Pi_p(\tilde{u})$ fonksiyoneli 4.18 ve 4.21 ifadeleri yerine konarak elde edilen 4.22 ifadesinde bu ifadeler ekstremum olacak şekilde bilinmeyenlerin nodal değerleri olan $\omega_1, Mx_1, My_1, Mxy_1, Myx_1$ ' lere göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \pi_p(\tilde{U})}{\partial \omega_1} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial \pi_p(\tilde{U})}{\partial M_{x_1}} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p(\tilde{U})}{\partial M_{y_1}} = 0$$

(4.23)

$$\frac{\partial \pi_p(\tilde{U})}{\partial M_{xy_1}} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_p(\tilde{U})}{\partial M_{yx_1}} = 0$$

Böylece eleman düğüm noktası parametresi kadar eleman davranış denklemleri elde edilmiştir.

4.18 de elde edilen fonksiyonelde 4.5 ve 4.21 ifadeleri yerine konarak 4.23 deki işlemler yapılırsa eleman üzerinde alan koordinatlarını kullanarak alan içinde ve sınırda integrasyonları yapılmış her düğüm noktasında beş adet olmak üzere toplam onbeş denklem elde edilmiştir.

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \omega_1} = 0 = \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega + M_{x_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{x_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + M_{y_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{y_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{xy_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + M_{xy_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{xy_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{yx_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega + M_{yx_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{yx_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_y \cdot \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + M_{x_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{x_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_x \cdot \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega + M_{y_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{y_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + q \cdot \iint_{\Omega} N_1 d\Omega - 0.5k_z \cdot \omega_1 \cdot \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_1 d\Omega - k_z \cdot \omega_2 \cdot \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_1 d\Omega - k_z \cdot \omega_3 \cdot \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_1 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \omega_2} = 0 = \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{x_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{x_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{y_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{y_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{xy_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{xy_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{xy_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{yx_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{yx_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{yx_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_y \cdot \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{x_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + M_{x_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_x \cdot \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{y_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + M_{y_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + q \cdot \iint_{\Omega} N_2 d\Omega - 0.5k_z \cdot \omega_1 \cdot \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega - k_z \cdot \omega_2 \cdot \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_2 d\Omega - k_z \cdot \omega_3 \cdot \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_2 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \omega_3} = 0 = \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + M_{x_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + M_{x_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + M_{y_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + M_{y_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{xy_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + M_{xy_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + M_{xy_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & \left(M_{yx_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + M_{yx_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + M_{yx_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & 0.5 \mu_y \cdot \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + M_{x_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + M_{x_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & 0.5 \mu_x \cdot \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + M_{y_2} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + M_{y_3} \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + q \cdot \iint_{\Omega} N_3 d\Omega - 0.5 k_z \cdot \omega_1 \cdot \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega - k_z \cdot \omega_2 \cdot \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_3 d\Omega - k_z \cdot \omega_3 \cdot \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_3 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{x_1}} = 0 = \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & (0.5/K_x) \cdot \left(M_{x_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_1 d\Omega + 2M_{x_2} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{x_3} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_y \cdot \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & + \alpha \cdot t \cdot (1+\mu_y) \cdot (1/h_x) \cdot \iint_{\Omega} N_1 d\Omega - \omega_{01_x} \cdot \iint_{\Omega} N_1 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{x_2}} = 0 = \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & (0.5/K_x) \cdot \left(M_{x_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{x_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{x_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_2 d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_y \cdot \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & + \alpha \cdot t \cdot (1+\mu_y) \cdot (1/h_x) \cdot \iint_{\Omega} N_2 d\Omega - \omega_{02_x} \cdot \iint_{\Omega} N_2 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{x_3}} = 0 = \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & (0.5/K_x) \cdot \left(M_{x_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{x_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{x_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_3 d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_y \cdot \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & + \alpha \cdot t \cdot (1+\mu_y) \cdot (1/h_x) \cdot \iint_{\Omega} N_3 d\Omega - \omega_{\square x} \cdot \iint_{\Omega} N_3 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{y_1}} = 0 = \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & (0.5/K_y) \cdot \left(M_{y_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_1 d\Omega + 2M_{y_2} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{y_3} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega \right) + \\ & 0.5\mu_x \cdot \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + \alpha \cdot t \cdot (1+\mu_x) \cdot (1/h_y) \cdot \iint_{\Omega} N_1 d\Omega - \omega_{\square y} \cdot \iint_{\Omega} N_1 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{y_2}} = 0 = \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & (0.5/K_y) \cdot \left[M_{y_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{y_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{y_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_2 d\Omega \right] + \\ & 0.5\mu_x \cdot \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + \alpha \cdot t \cdot (1+\mu_x) \cdot (1/h_y) \cdot \iint_{\Omega} N_2 d\Omega - \omega_{O_2_y} \cdot \iint_{\Omega} N_2 d\Omega \\ & \frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{y_3}} = 0 = \quad (4.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) + \\ & (0.5/K_y) \cdot \left[M_{y_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{y_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{y_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_3 d\Omega \right] + \\ & 0.5\mu_y \cdot \left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right) + \\ & + \alpha \cdot t \cdot (1+\mu_x) \cdot (1/h_y) \cdot \iint_{\Omega} N_3 d\Omega - \omega_{O_3_y} \cdot \iint_{\Omega} N_3 d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{xy_1}} = 0 = \quad (4.33)$$

$$\left[\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right] +$$

$$(0.5/K_{bx}) \cdot \left[M_{xy_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_1 d\Omega + 2M_{xy_2} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{xy_3} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega \right] +$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{xy_2}} = 0 = \quad (4.34)$$

$$\left[\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial x} d\Omega \right] +$$

$$(0.5/K_{bx}) \cdot \left[M_{xy_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{xy_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{xy_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_2 d\Omega \right] +$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{xy_3}} = 0 = \quad (4.35)$$

$$\left[\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial x} d\Omega \right] +$$

$$(0.5/K_{bx}) \cdot \left[M_{xy_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{xy_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{xy_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_3 d\Omega \right] +$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{yx_1}} = 0 = \quad (4.36)$$

$$\left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) +$$

$$(0.5/K_{by}) \cdot \left[M_{yx_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_1 d\Omega + 2M_{yx_2} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{yx_3} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega \right] +$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{yx_2}} = 0 = \quad (4.37)$$

$$\left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial y} d\Omega \right) +$$

$$(0.5/K_{by}) \cdot \left[M_{yx_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{yx_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_2 d\Omega + 2M_{yx_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_2 d\Omega \right] +$$

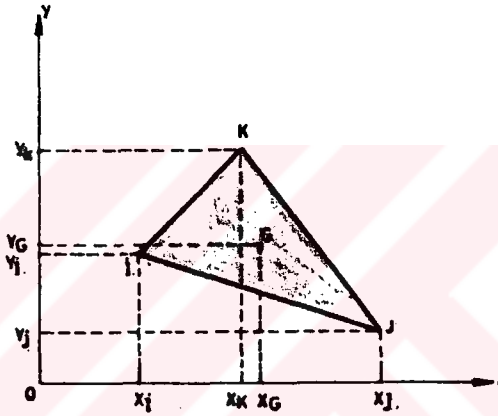
$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial M_{yx_3}} = 0 = \quad (4.38)$$

$$\left(\omega_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + \omega_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega + \omega_3 \iint_{\Omega} \frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial y} d\Omega \right) +$$

$$(0.5/K_{by}) \cdot \left[M_{yx_3} \iint_{\Omega} N_3 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{yx_1} \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_3 d\Omega + 2M_{yx_2} \iint_{\Omega} N_2 \cdot N_3 d\Omega \right] +$$

(4.26) ile (4.40) eleman davranış denklemleri eleman sınırlarında geçerli integrasyonlar uygulanarak eleman davranış ve etki matrisleri matris formunda Bölüm 4.4 de verilmektedir.

4.3.1 ÜÇGEN SONLU ELEMANLAR İÇİN ALAN KOORDİNATLARINI KULLANARAK X,Y TERİMLERİNİN İNTEGRASYONU



Şekil 4.3.- Lokal Koordinat Sistemi

Burada $x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k$ eleman köşe noktalarının apsis ve ordinatları x_g, y_g ise üçgenin ağırlık merkezinin koordinatları olarak verilmektedir.

X ve Y terimlerinin integrasyonu eleman köşe koordinatlarına bağlı olarak elde edilebilmektedir. [30]

Burada ;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= - (X_g - X_i) & Y_1 &= - (Y_g - Y_i) \\
 X_2 &= - (X_g - X_j) & Y_2 &= - (Y_g - Y_j) \\
 X_3 &= - (X_g - X_k) & Y_3 &= - (Y_g - Y_k)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$N(x,y) = \begin{cases} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \end{cases} = \begin{cases} 1/2\Delta (a_{11} + a_{21} \cdot X + a_{31} \cdot Y) \\ 1/2\Delta (a_{12} + a_{22} \cdot X + a_{32} \cdot Y) \\ 1/2\Delta (a_{13} + a_{23} \cdot X + a_{33} \cdot Y) \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\Delta = 0.5 a_{11} + 0.5 a_{12} + 0.5 a_{13} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) & a_{21} &= (y_2 - y_3) & a_{31} &= (x_3 - x_2) \\ a_{12} &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) & a_{22} &= (y_3 - y_1) & a_{32} &= (x_1 - x_3) \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$a_{13} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad a_{23} = (y_1 - y_2) \quad a_{33} = (x_2 - x_1)$$

$$\begin{aligned} \phi\phi(1,j) &= \iint_{\Omega} N_1 \cdot N_j \, d\Omega = 1/4\Delta \cdot [a_{11} \cdot a_{1j} + \\ &\quad + a_{21} \cdot a_{2j} \cdot (1/12) \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad + a_{31} \cdot a_{3j} \cdot (1/12) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad + (a_{21} \cdot a_{3j} + a_{31} \cdot a_{2j}) \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3)] \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\phi(1) = \iint_{\Omega} N_1 \, d\Omega = 1/2 \cdot a_{11} \quad (4.44)$$

$$dx dx(1,j) = \iint_{\Omega} \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \, d\Omega = 1/4\Delta \cdot a_{21} \cdot a_{2j} \quad (4.45)$$

$$dydy(1,j) = \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega = 1/4\Delta \cdot a_{3i} \cdot a_{3j} \quad (4.46)$$

$$dydx(1,j) = \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega = 1/4\Delta \cdot a_{3i} \cdot a_{2j} \quad (4.47)$$

$$dxdy(1,j) = \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega = 1/4\Delta \cdot a_{2i} \cdot a_{3j} \quad (4.48)$$

$$dx \phi(1,j) = \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot N_j d\Omega = 1/4\Delta \cdot a_{2i} \cdot a_{1j} \quad (4.49)$$

$$dy \phi(1,j) = \iint_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot N_j d\Omega = 1/4\Delta \cdot a_{3i} \cdot a_{1j} \quad (4.50)$$

X ve Y terimlerinin integrasyonu nümerik programlamaya elverişli olacak şekilde düzenlenmiş ve elemanın alan içindeki integrasyonları kesin olarak elde edilmişlerdir.

4.4.2. ELEMAN DAVRANIŞ VE ETKİ MATRİSLERİNİN TAYİNİ

Bölüm 4.4 de verilen sonlu elemanlar denklemlerine eleman sınırında geçerli olmak üzere Bölüm 4.4.1 de elde edilen integrasyonlar uygulanarak eleman davranış ve etki matrisleri nümerik programlamaya uygulanabilmesi için matris formunda düzenlenmesi halinde sonlu elemanlar denklemleri aşağıdaki gibi verilmişlerdir.

$$\begin{bmatrix}
 K(1,1) & K(1,2) & \dots & K(1,7) & \dots & K(1,15) \\
 K(2,1) & K(2,2) & \dots & K(2,7) & \dots & K(2,15) \\
 K(3,1) & K(3,2) & \dots & K(3,7) & \dots & K(3,15) \\
 K(4,1) & K(4,2) & \dots & K(4,7) & \dots & K(4,15) \\
 K(5,1) & K(5,2) & \dots & K(5,7) & \dots & K(5,15) \\
 K(6,1) & K(6,2) & \dots & K(6,7) & \dots & K(6,15) \\
 K(7,1) & K(7,2) & \dots & K(7,7) & \dots & K(7,15) \\
 K(8,1) & K(8,2) & \dots & K(8,7) & \dots & K(8,15) \\
 K(9,1) & K(9,2) & \dots & K(9,7) & \dots & K(9,15) \\
 K(10,1) & K(10,2) & \dots & K(10,7) & \dots & K(10,15) \\
 K(11,1) & K(11,2) & \dots & K(11,7) & \dots & K(11,15) \\
 K(12,1) & K(12,2) & \dots & K(12,7) & \dots & K(12,15) \\
 K(13,1) & K(13,2) & \dots & K(13,7) & \dots & K(13,15) \\
 K(14,1) & K(14,2) & \dots & K(14,7) & \dots & K(14,15) \\
 K(15,1) & K(15,2) & \dots & K(15,7) & \dots & K(15,15)
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \omega_1 \\
 \omega_2 \\
 \omega_3 \\
 M_{x1} \\
 M_{x2} \\
 M_{x3} \\
 My_1 \\
 My_2 \\
 My_3 \\
 M_{xy1} \\
 M_{xy2} \\
 M_{xy3} \\
 Myx_1 \\
 Myx_2 \\
 Myx_3
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 f_1 \\
 f_2 \\
 f_3 \\
 f_4 \\
 f_5 \\
 f_6 \\
 f_7 \\
 f_8 \\
 f_9 \\
 f_{10} \\
 f_{11} \\
 f_{12} \\
 f_{13} \\
 f_{14} \\
 f_{15}
 \end{bmatrix}
 = 0
 \quad (4.51)$$

Her eleman için 15x15 [K] Eleman davranış matrisi ile, {f} Eleman etki matrisi terimleri altta verilmektedir.

$$\begin{aligned}
K(1,1) &= -1/2 \cdot k_z \cdot \phi\phi(1,1) & (4.51.1) \\
K(1,2) &= -.k_z \cdot \phi\phi(2,1) & (4.51.2) \\
K(1,3) &= -.k_z \cdot \phi\phi(3,1) & (4.51.3) \\
K(1,4) &= dx dx(1,1) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(1,1) & (4.51.4) \\
K(1,5) &= dx dx(1,2) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(1,2) & (4.51.5) \\
K(1,6) &= dx dx(1,3) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(1,3) & (4.51.6) \\
K(1,7) &= dy dy(1,1) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(1,1) & (4.51.7) \\
K(1,8) &= dy dy(1,2) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(1,2) & (4.51.8) \\
K(1,9) &= dy dy(1,3) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(1,3) & (4.51.9) \\
K(1,10) &= dx dy(1,1) & (4.51.10) \\
K(1,11) &= dx dy(2,1) & (4.51.11) \\
K(1,12) &= dx dy(3,1) & (4.51.12) \\
K(1,13) &= dy dx(1,1) & (4.51.13) \\
K(1,14) &= dy dx(2,1) & (4.51.14) \\
K(1,15) &= dy dx(3,1) & (4.51.15) \\
F(1) &= q \cdot \phi(1) & (4.51.16) \\
K(2,1) &= -k_z \cdot \phi\phi(1,2) & (4.51.17) \\
K(2,2) &= -.1/2 \cdot k_z \cdot \phi\phi(2,2) & (4.51.18) \\
K(2,3) &= -.k_z \cdot \phi\phi(3,2) & (4.51.19) \\
K(2,4) &= dx dx(2,1) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(2,1) & (4.51.20) \\
K(2,5) &= dx dx(2,2) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(2,2) & (4.51.21) \\
K(2,6) &= dx dx(2,3) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(2,3) & (4.51.22) \\
K(2,7) &= dy dy(2,1) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(2,1) & (4.51.23) \\
K(2,8) &= dy dy(2,2) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(2,2) & (4.51.24) \\
K(2,9) &= dy dy(2,3) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(2,3) & (4.51.25) \\
K(2,10) &= dx dy(1,2) & (4.51.26) \\
K(2,11) &= dx dy(2,2) & (4.51.27) \\
K(2,12) &= dx dy(3,2) & (4.51.28) \\
K(2,13) &= dy dx(1,2) & (4.51.29) \\
K(2,14) &= dy dx(2,2) & (4.51.30) \\
K(2,15) &= dy dx(3,2) & (4.51.31) \\
F(2) &= q \cdot \phi(2) & (4.51.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(3,1) &= -k_z \cdot \phi\phi(1,3) & (4.51.33) \\
K(3,2) &= -k_z \cdot \phi\phi(2,3) & (4.51.34) \\
K(3,3) &= -1/2 \cdot k_z \cdot \phi\phi(3,3) & (4.51.35) \\
K(3,4) &= dx dx(3,1) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(3,1) & (4.51.36) \\
K(3,5) &= dx dx(3,2) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(3,2) & (4.51.37) \\
K(3,6) &= dx dx(3,3) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(3,3) & (4.51.38) \\
K(3,7) &= dy dy(3,1) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(3,1) & (4.51.39) \\
K(3,8) &= dy dy(3,2) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(3,2) & (4.51.40) \\
K(3,9) &= dy dy(3,3) + 1/2 \cdot MUX \cdot dx dx(3,3) & (4.51.41) \\
K(3,10) &= dx dy(1,3) & (4.51.42) \\
K(3,11) &= dx dy(2,3) & (4.51.43) \\
K(3,12) &= dx dy(3,3) & (4.51.44) \\
K(3,13) &= dy dx(1,3) & (4.51.45) \\
K(3,14) &= dy dx(2,3) & (4.51.46) \\
K(3,15) &= dy dx(3,3) & (4.51.47) \\
F(3) &= q \cdot \phi(3) & (4.51.48) \\
K(4,1) &= dx dx(1,1) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(1,1) & (4.51.49) \\
K(4,2) &= dx dx(1,2) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(2,1) & (4.51.50) \\
K(4,3) &= dx dx(1,3) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(3,1) & (4.51.51) \\
K(4,4) &= (1/2 \cdot K_x) \cdot \phi\phi(1,1) & (4.51.52) \\
K(4,5) &= (1/K_x) \cdot \phi\phi(2,1) & (4.51.53) \\
K(4,6) &= (1/K_x) \cdot \phi\phi(3,1) & (4.51.54) \\
K(4,7) &= 0 & (4.51.55) \\
K(4,8) &= 0 & (4.51.56) \\
K(4,9) &= 0 & (4.51.57) \\
K(4,10) &= 0 & (4.51.58) \\
K(4,11) &= 0 & (4.51.59) \\
K(4,12) &= 0 & (4.51.60) \\
K(4,13) &= 0 & (4.51.61) \\
K(4,14) &= 0 & (4.51.62) \\
K(4,15) &= 0 & (4.51.63) \\
F(4) &= -\alpha \cdot t \cdot (1+MUY) \cdot (1/h_x) \cdot \phi(1) - \omega_{x_1} \cdot \phi(1) & (4.51.64)
\end{aligned}$$

$$K(5,1) = dx dx(2,1) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(1,2) \quad (4.51.65)$$

$$K(5,2) = dx dx(2,2) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(2,2) \quad (4.51.66)$$

$$K(5,3) = dx dx(2,3) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(3,2) \quad (4.51.67)$$

$$K(5,4) = (1/K_x) \cdot \phi\phi(1,2) \quad (4.51.68)$$

$$K(5,5) = (1/2 \cdot K_x) \cdot \phi\phi(2,2) \quad (4.51.69)$$

$$K(5,6) = (1/K_x) \cdot \phi\phi(3,2) \quad (4.51.70)$$

$$K(5,7) = 0 \quad (4.51.71)$$

$$K(5,8) = 0 \quad (4.51.72)$$

$$K(5,9) = 0 \quad (4.51.73)$$

$$K(5,10) = 0 \quad (4.51.74)$$

$$K(5,11) = 0 \quad (4.51.75)$$

$$K(5,12) = 0 \quad (4.51.76)$$

$$K(5,13) = 0 \quad (4.51.77)$$

$$K(5,14) = 0 \quad (4.51.78)$$

$$K(5,15) = 0 \quad (4.51.79)$$

$$F(5) = -\alpha \cdot t \cdot (1+MUY) \cdot (1/h_x) \cdot \phi(2) - \omega_{x_2} \cdot \phi(2) \quad (4.51.80)$$

$$K(6,1) = dx dx(3,1) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(1,3) \quad (4.51.81)$$

$$K(6,2) = dx dx(3,2) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(2,3) \quad (4.51.82)$$

$$K(6,3) = dx dx(3,3) + 1/2 \cdot MUY \cdot dy dy(3,3) \quad (4.51.83)$$

$$K(6,4) = (1/K_x) \cdot \phi\phi(1,3) \quad (4.51.84)$$

$$K(6,5) = (1/K_x) \cdot \phi\phi(2,3) \quad (4.51.85)$$

$$K(6,6) = (1/2 K_x) \cdot \phi\phi(3,3) \quad (4.51.86)$$

$$K(6,7) = 0 \quad (4.51.87)$$

$$K(6,8) = 0 \quad (4.51.88)$$

$$K(6,9) = 0 \quad (4.51.89)$$

$$K(6,10) = 0 \quad (4.51.90)$$

$$K(6,11) = 0 \quad (4.51.91)$$

$$K(6,12) = 0 \quad (4.51.92)$$

$$K(6,13) = 0 \quad (4.51.93)$$

$$K(6,14) = 0 \quad (4.51.94)$$

$$K(6,15) = 0 \quad (4.51.95)$$

$$F(6) = -\alpha \cdot t \cdot (1+MUY) \cdot (1/h_x) \cdot \phi(3) - \omega_{x_3} \cdot \phi(3) \quad (4.51.96)$$

$$\begin{aligned}
K(7,1) &= dydy(1,1) + 1/2 \cdot MUX \cdot dxdx(1,1) & (4.51.97) \\
K(7,2) &= dydy(1,2) + 1/2 \cdot MUX \cdot dxdx(2,1) & (4.51.98) \\
K(7,3) &= dydy(1,3) + 1/2 \cdot MUX \cdot dxdx(3,1) & (4.51.99) \\
K(7,4) &= 0 & (4.51.100) \\
K(7,5) &= 0 & (4.51.101) \\
K(7,6) &= 0 & (4.51.102) \\
K(7,7) &= (1/2 \cdot K_y) \cdot \phi\phi(1,1) & (4.51.103) \\
K(7,8) &= (1/K_y) \cdot \phi\phi(1,2) & (4.51.104) \\
K(7,9) &= (1/K_y) \cdot \phi\phi(1,3) & (4.51.105) \\
K(7,10) &= 0 & (4.51.106) \\
K(7,11) &= 0 & (4.51.107) \\
K(7,12) &= 0 & (4.51.108) \\
K(7,13) &= 0 & (4.51.109) \\
K(7,14) &= 0 & (4.51.110) \\
K(7,15) &= 0 & (4.51.111) \\
F(7) &= -\alpha \cdot t \cdot (1+MUX) \cdot (1/h_y) \cdot \phi(1) - \omega_{y_1} \cdot \phi(1) & (4.51.112) \\
K(8,1) &= dydy(2,1) + 1/2 \cdot MUX \cdot dxdx(1,2) & (4.51.113) \\
K(8,2) &= dydy(2,2) + 1/2 \cdot MUX \cdot dxdx(2,2) & (4.51.114) \\
K(8,3) &= dydy(2,3) + 1/2 \cdot MUX \cdot dxdx(3,2) & (4.51.115) \\
K(8,4) &= 0 & (4.51.116) \\
K(8,5) &= 0 & (4.51.117) \\
K(8,6) &= 0 & (4.51.118) \\
K(8,7) &= (1/K_y) \cdot \phi\phi(1,2) & (4.51.119) \\
K(8,8) &= (1/2K_y) \cdot \phi\phi(2,2) & (4.51.120) \\
K(8,9) &= (1/K_y) \cdot \phi\phi(3,2) & (4.51.121) \\
K(8,10) &= 0 & (4.51.122) \\
K(8,11) &= 0 & (4.51.123) \\
K(8,12) &= 0 & (4.51.124) \\
K(8,13) &= 0 & (4.51.125) \\
K(8,14) &= 0 & (4.51.126) \\
K(8,15) &= 0 & (4.51.127) \\
F(8) &= -\alpha \cdot t \cdot (1+MUX) \cdot (1/h_y) \cdot \phi(2) - \omega_{y_2} \cdot \phi(2) & (4.51.128)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(9,1) &= dydy(3,1) + 1/2.MUX.dxdx(1,3) & (4.51.129) \\
K(9,2) &= dydy(3,2) + 1/2.MUX.dxdx(2,3) & (4.51.130) \\
K(9,3) &= dydy(3,3) + 1/2.MUX.dxdx(3,3) & (4.51.131) \\
K(9,4) &= 0 & (4.51.132) \\
K(9,5) &= 0 & (4.51.133) \\
K(9,6) &= 0 & (4.51.134) \\
K(9,7) &= (1/K_y) \cdot \phi\phi(1,3) & (4.51.135) \\
K(9,8) &= (1/K_y) \cdot \phi\phi(2,3) & (4.51.136) \\
K(9,9) &= (1/2K_y) \cdot \phi\phi(3,3) & (4.51.137) \\
K(9,10) &= 0 & (4.51.138) \\
K(9,11) &= 0 & (4.51.139) \\
K(9,12) &= 0 & (4.51.140) \\
K(9,13) &= 0 & (4.51.141) \\
K(9,14) &= 0 & (4.51.142) \\
K(9,15) &= 0 & (4.51.143) \\
F(9) &= -\alpha.t.(1+MUX).(1/h_y) \cdot \phi(3) - \omega_{y_3} \cdot \phi(3) & (4.51.144) \\
K(10,1) &= dydx(1,1) & (4.51.145) \\
K(10,2) &= dydx(2,1) & (4.51.146) \\
K(10,3) &= dydx(3,1) & (4.51.147) \\
K(10,4) &= 0 & (4.51.148) \\
K(10,5) &= 0 & (4.51.149) \\
K(10,6) &= 0 & (4.51.150) \\
K(10,7) &= 0 & (4.51.151) \\
K(10,8) &= 0 & (4.51.152) \\
K(10,9) &= 0 & (4.51.153) \\
K(10,10) &= (1/2.K_{bx}) \cdot \phi\phi(1,1) & (4.51.154) \\
K(10,11) &= (1/K_{bx}) \cdot \phi\phi(1,2) & (4.51.155) \\
K(10,12) &= (1/K_{bx}) \cdot \phi\phi(1,3) & (4.51.156) \\
K(10,13) &= 0 & (4.51.157) \\
K(10,14) &= 0 & (4.51.158) \\
K(10,15) &= 0 & (4.51.159) \\
F(10) &= 0 & (4.51.160)
\end{aligned}$$

$K(11,1) = dydx(1,2)$	(4.51.161)
$K(11,2) = dydx(2,2)$	(4.51.162)
$K(11,3) = dydx(3,2)$	(4.51.163)
$K(11,4) = 0$	(4.51.164)
$K(11,5) = 0$	(4.51.165)
$K(11,6) = 0$	(4.51.166)
$K(11,7) = 0$	(4.51.167)
$K(11,8) = 0$	(4.51.168)
$K(11,9) = 0$	(4.51.169)
$K(11,10) = (1/K_{bx}) \cdot \phi\phi(2,1)$	(4.51.170)
$K(11,11) = (1/2K_{bx}) \cdot \phi\phi(2,2)$	(4.51.171)
$K(11,12) = (1/K_{bx}) \cdot \phi\phi(2,3)$	(4.51.172)
$K(11,13) = 0$	(4.51.173)
$K(11,14) = 0$	(4.51.174)
$K(11,15) = 0$	(4.51.175)
$F(11) = 0$	(4.51.176)
$K(12,1) = dydx(1,3)$	(4.51.177)
$K(12,2) = dydx(2,3)$	(4.51.178)
$K(12,3) = dydx(3,3)$	(4.51.179)
$K(12,4) = 0$	(4.51.180)
$K(12,5) = 0$	(4.51.181)
$K(12,6) = 0$	(4.51.182)
$K(12,7) = 0$	(4.51.183)
$K(12,8) = 0$	(4.51.184)
$K(12,9) = 0$	(4.51.185)
$K(12,10) = (1/K_{bx}) \cdot \phi\phi(3,1)$	(4.51.186)
$K(12,11) = (1/K_{bx}) \cdot \phi\phi(3,2)$	(4.51.187)
$K(12,12) = (1/2K_{bx}) \cdot \phi\phi(3,3)$	(4.51.188)
$K(12,13) = 0$	(4.51.189)
$K(12,14) = 0$	(4.51.190)
$K(12,15) = 0$	(4.51.191)
$F(12) = 0$	(4.51.192)

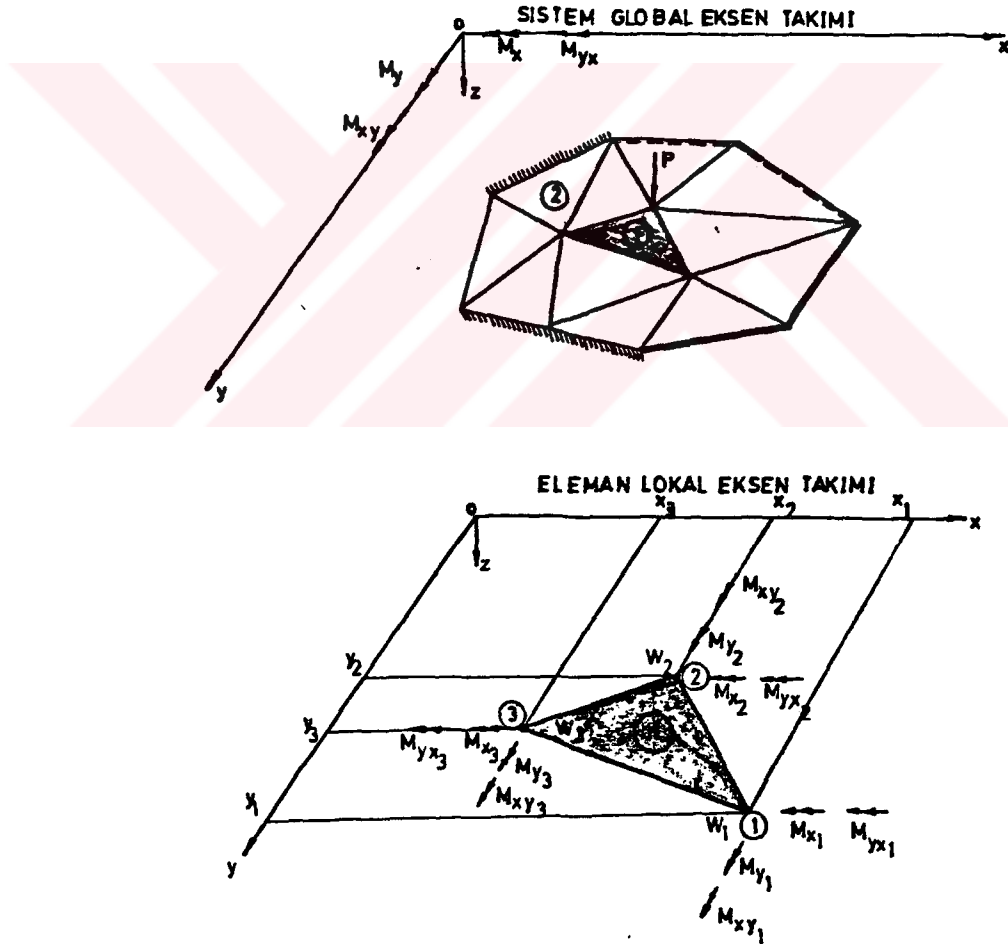
$K(13,1) = dx dy(1,1)$	(4.51.193)
$K(13,2) = dx dy(2,1)$	(4.51.194)
$K(13,3) = dx dy(3,1)$	(4.51.195)
$K(13,4) = 0$	(4.51.196)
$K(13,5) = 0$	(4.51.197)
$K(13,6) = 0$	(4.51.198)
$K(13,7) = 0$	(4.51.199)
$K(13,8) = 0$	(4.51.200)
$K(13,9) = 0$	(4.51.201)
$K(13,10) = 0$	(4.51.202)
$K(13,11) = 0$	(4.51.203)
$K(13,12) = 0$	(4.51.204)
$K(13,13) = (1/2K_{by}) \cdot \phi\phi(1,1)$	(4.51.205)
$K(13,14) = (1/K_{by}) \cdot \phi\phi(1,2)$	(4.51.206)
$K(13,15) = (1/2K_{by}) \cdot \phi\phi(1,3)$	(4.51.207)
$F(13) = 0$	(4.51.208)
$K(14,1) = dx dy(1,2)$	(4.51.209)
$K(14,2) = dx dy(2,2)$	(4.51.210)
$K(14,3) = dx dy(3,2)$	(4.51.211)
$K(14,4) = 0$	(4.51.212)
$K(14,5) = 0$	(4.51.213)
$K(14,6) = 0$	(4.51.214)
$K(14,7) = 0$	(4.51.215)
$K(14,8) = 0$	(4.51.216)
$K(14,9) = 0$	(4.51.217)
$K(14,10) = 0$	(4.51.218)
$K(14,11) = 0$	(4.51.219)
$K(14,12) = 0$	(4.51.220)
$K(14,13) = (1/K_{by}) \cdot \phi\phi(2,1)$	(4.51.221)
$K(14,14) = (1/2K_{by}) \cdot \phi\phi(2,2)$	(4.51.222)
$K(14,15) = (1/K_{by}) \cdot \phi\phi(2,3)$	(4.51.223)
$F(14) = 0$	(4.51.224)

$K(15,1) = dx dy(1,3)$	(4.51.225)
$K(15,2) = dx dy(2,3)$	(4.51.226)
$K(15,3) = dx dy(3,3)$	(4.51.227)
$K(15,4) = 0$	(4.51.228)
$K(15,5) = 0$	(4.51.229)
$K(15,6) = 0$	(4.51.230)
$K(15,7) = 0$	(4.51.231)
$K(15,8) = 0$	(4.51.232)
$K(15,9) = 0$	(4.51.233)
$K(15,10) = 0$	(4.51.234)
$K(15,11) = 0$	(4.51.235)
$K(15,12) = 0$	(4.51.236)
$K(15,13) = (1/K_{by}) \cdot \phi\phi(3,1)$	(4.51.237)
$K(15,14) = (1/K_{by}) \cdot \phi\phi(3,2)$	(4.51.238)
$K(15,15) = (1/2K_{by}) \cdot \phi\phi(3,3)$	(4.51.239)
$F(15) = 0$	(4.51.240)

4.5. SINIR ve MESNET ŞARTLARI

Geometrik ve Dinamik sınır şartları olmak üzere Bölüm 4 de (4.2) eşitliği ile tanımlanmışlardır.

Sonlu elemanlar davranış denklemleri çıkarılırken Sistemin global eksen ile Elemanın lokal eksenleri aynı eksen takımında seçilmesi nedeniyle sınır şartları sağlatılırken Sonlu eleman deplasman yöntemlerindeki gibi döndürülmüş eksenlerle çalışmaya gerek yoktur



Şekil 4.4. - Sistem ve Lokal Eksen Takımı

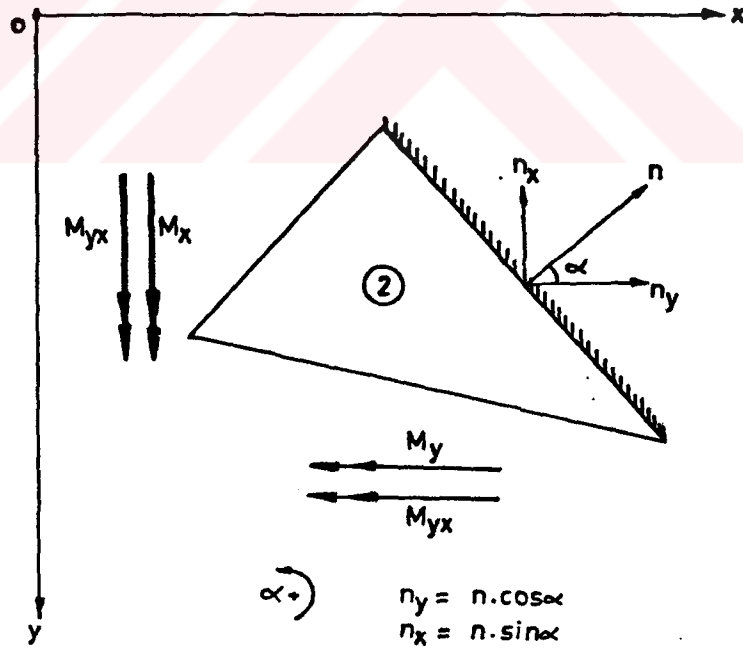
4.5.1. SINIR SARTLARININ SAĞLATILMASI

Sistemin iç elemanları ile sınırdaki tanımlı elemanların eleman davranış denklemlerinin bulunuşunda sınır şartlarının eleman davranış denklemlerine katkıları şu halde olmaktadır.

(4.18) denkleminin varyasyon hesabının ana fikri gereği sıfır olabilmesi için sınır şartları terimlerinin dış yük bulunmaması halinde sıfır olması gerekmektedir.

Sınır şartları sonlu eleman sisteminde iki kısımda ele alınabilmektedir. Bunlar sırasıyla

- a.) Sistemin dış sınırları ile irtibatlı olmayan iç elemanlar
- b.) Sistemin sınırları ile irtibatlı dış elemanlar



Şekil 4.5.- Sınırla İrtibatlı Dış Elemanlar

a.) SİSTEMİN DİŞ SINIRLARI İLE İRTİBATLI OLMAYAN İÇ ELEMANLAR

4.2 Denklemleri ile verilen sınır şartları kabûlünden plağın herhangi biri iç düğüm noktasındaki yerdeğiştirmesi ve dönmesi ile sınırdaki yerdeğiştirme ve dönmedeğerleri birbirine eşit olmaktadır.

$$\omega' = \omega'_0 = \bar{\omega}'_0 \quad \text{Geometrik Sınır Koşulu} \quad (4.52)$$

$$\omega = \omega_0 = \bar{\omega}_0 \quad \text{Geometrik Sınır Koşulu}$$

Buda 4.18 de verilen plak fonksiyoneliindeki son iki

$$\text{terimin } \left[(\bar{\omega}_0 - \omega_0), T_0 \right]_{\Gamma_2} + \left[(\bar{\omega}'_0 - \omega'_0), M_0 \right]_{\Gamma_2} \text{ sıfır olmasını}$$

$$: \frac{\quad \quad \quad}{v} \quad \quad \quad :$$

$$0$$

sağlamaktadır.

$\bar{T}_0 = 0 \quad \bar{M}_0 = 0$ kabulü ile (4.18)deki plak fonksiyoneliinde

$$+ [\bar{T}_0, \omega_0]_{\Gamma_1} + [\bar{M}_0, \omega'_0]_{\Gamma_1} \text{ terimleri sıfır olmaktadır.}$$

Böylece (4.18) plak fonksiyoneliinde sistemin sınırları ile irtibatı olmayan bir iç elemanda Sınır terimleri ortadan kalkmaktadır.

b.) SİSTEMİN SINIRLARI İLE İRTİBATLI DIŞ ELEMANLAR

Sınır şartları kabülünden 4.18 plak fonksiyoneliindeki sınır terimlerinden son iki tanesi ortadan kalkmaktadır.

$$\left[\frac{(\bar{\omega}_0 - \omega_0), \bar{T}_0}{v} + \frac{(\bar{\omega}'_0 - \omega'_0), \bar{M}_0}{0} \right]_{\Gamma_2} \quad (4.53)$$

Ancak plak kesme kuvveti ve momentinin plak çevresinde yaptığı işin katkıları aşağıdaki gibi alınmaktadır.

$$+ [\bar{T}_0, \omega_0]_{\Gamma_1} + [\bar{M}_0, \omega'_0]_{\Gamma_1} \quad (4.54)$$

$\bar{T}_0 \neq 0$; $\bar{M}_0 \neq 0$ ve $T = \bar{T}_0$; $M = \bar{M}_0$ kabulü yapılırsa

4.18 plak fonksiyoneliinde plak çevresindeki kesme kuvveti ile momentin yaptığı iş aşağıdaki gibi alınmaktadır.

$$\begin{aligned} [T, \omega]_{\Gamma_1} &= \left[\left(\left(-\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \right) \cdot n_x + \left(-\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \cdot n_y \right), \omega \right]_{\Gamma_1} \\ [M, \omega']_{\Gamma_1} &= \left[[M_x, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot n_x \right)] + [M_y, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot n_y \right)] + \right. \\ &\quad \left. [M_{xy}, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot n_y \right)] + [M_{yx}, \left(-\frac{\partial \omega}{\partial y} \cdot n_x \right)] \right]_{\Gamma_1} \quad (4.55) \end{aligned}$$

Böylece sınır ile irtibatlı elemanlarda fonksiyonelde plak çevresindeki kesme kuvveti ile momentin işi otomatik olarak girmektedir.

4.5.2. MESNET ŞARTLARININ SAĞLATILMASI

Uygulamada görülen mesnet şartları bazı düğüm noktası parametrelerinin sıfır olarak alınması ile sistem davranışına sokulmaktadır.

Aşağıda pratikte sıkça rastlanan mesnet şartları için sıfır olarak alınacak parametreler tablo halinde verilmektedir.

Tablo 4.1.- Mesnet Şartları Özet Tablosu

DÜĞÜM NOK. PAREMETRESİ	  		
	ANKASTRE KENAR	SERBEST KENAR	BOŞTA KENAR
ω	0	0	1
M_x	1	0	1
M_y	0	0	1
M_{xy}	0	0	1
M_{yx}	1	1	0

Mesnet şartlarının otomatik olarak sağlatılması için düğüm noktası parametrelerinden sıfır olanların bulunduğu satırdaki köşegene 1 diğer satır ve sütundakilere ve kolon matrisine sıfır verilerek gözönüne alınmaktadır.

4.5.3. TEKİL YÜK VE MOMENTLER

Sistem düğüm noktalarına düşey deplasman doğrultusunda kuvvetler ile X ve Y eksenı doğrultusunda momentler etkimesi halinde 4.18 plak fonksiyoneliindeki sınır terimlerinden yararlanılabilir.

Bir P_o ve M_{ox}, M_{oy} tekil yük ve momentinin etkidiğı noktada iç kuvvetlerin kesme kuvvetleri toplamı dış kuvvet veya dış momente eşittir.

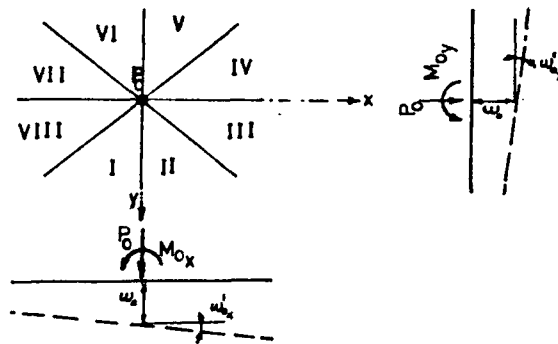
$$[\bar{T}_o, \omega_o]_{\Gamma_1} = [T_o, \omega_o]_1 + \dots + [T_o, \omega_o]_8 \quad (4.56)$$

$$= -P_o \cdot \omega_o$$

$$[\bar{M}_o, \omega_o]_{\Gamma_1} = [M_o, \omega_o]_1 + \dots + [M_o, \omega_o]_8 \quad (4.57)$$

$$= -M_{ox} \cdot \omega_{ox}$$

$$= -M_{oy} \cdot \omega_{oy}$$



(Şekil 4.3)

Şekil 4.3.- Sınırdaki Tekil Yük ve Momentler

Sistem davranış denklemlerinde düğüm noktalarına etkiyen tekil kuvvet ve momentler aşağıdaki gibi sistem davranış denklemlerine girmektedir.

$$\Pi_p(u) = (\dots\dots\dots) - P_{o_i} \cdot \omega_i - M_{o_{xi}} \cdot \omega_i \cdot \sum_{i=1}^t \partial N_i / \partial x \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \omega_i} = (\dots\dots\dots) - P_{o_i} - M_{o_{xi}} \cdot \sum_{i=1}^t \partial N_i / \partial x - M_{o_{yi}} \cdot \sum_{i=1}^t \partial N_i / \partial y \quad (4.59)$$

Bu durumda sistem davranış denklemleri şu hale gelir.

$$\begin{bmatrix} S_{11} & \dots & S_{14} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & \dots & S_{24} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{t1} & \dots & S_{t4} & \dots & S_{tn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ S_{n1} & \dots & S_{n4} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_t \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 + P_{o1} + M_{ox1} \sum \partial N / \partial x + M_{oy1} \sum \partial N / \partial y \\ \vdots \\ f_2 \\ \vdots \\ f_t \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = 0 \quad (4.60)$$

Burada ;

t= Düğüm noktasında birleşen elemanların toplamı

n= Sistem düğüm noktası sayısı

4.6. SİSTEM DAVRANIŞ DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Bölüm 4.3 de Eleman davranış ve etki matrisleri yani eleman özellikleri bulunmuş olmaktadır.

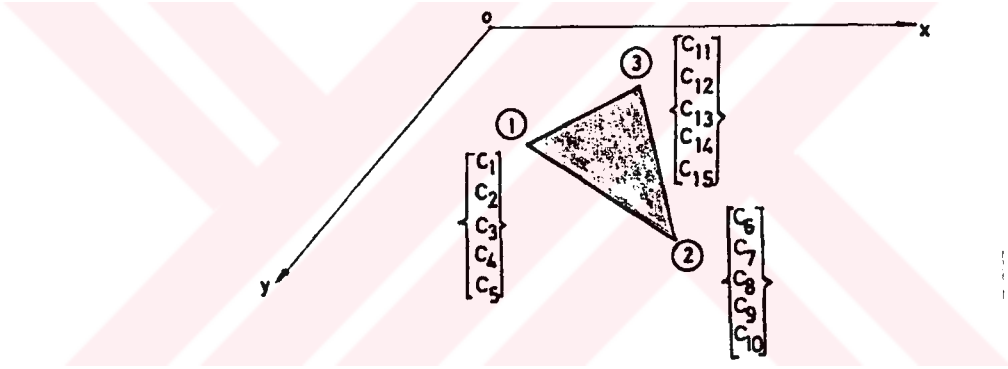
Örnek olarak alınan bir sistemde eleman davranış denklemlerinden sistem davranış denklemlerine geçiş özet halinde verilmektedir.

Eleman Davranış Denklemleri

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} (e) & (e) & (e) \\ K_{1,1} & K_{1,2} & \dots K_{1,15} \\ . & . & . \\ K_{7,1} & K_{7,2} & K_{7,15} \\ . & . & . \\ K_{15,1} & K_{15,2} & K_{15,15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (e) \\ C_1 \\ . \\ C_7 \\ . \\ C_{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (e) \\ f_1 \\ . \\ f_7 \\ . \\ f_{15} \end{bmatrix} = 0$$

$e=1,2,\dots,n$

$n = \text{eleman sayısı}$



Şekil 4.7.- Lokal Eksen Takımı Parametreleri

Sistem Davranış Denklemleri

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots S_{1,m} \\ . & . & . \\ S_{7,1} & S_{7,2} & S_{7,m} \\ . & . & . \\ S_{m,1} & S_{m,2} & S_{m,m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ . \\ \phi_7 \\ . \\ \phi_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ . \\ R_7 \\ . \\ R_m \end{bmatrix} = 0$$

$m = \text{Sistem Düğüm Noktası sayısı}$

Eleman denklemlerinin birleştirilerek sistem denklemlerinin elde edilişi

$$\left[S \right]_{m \times m} = \sum_{e=1}^m \left(\sum_{i=1}^r K_i^e \right) \quad (4.61)$$

$$\left\{ F \right\}_{m \times 1} = \sum_{e=1}^m \left(\sum_{i=1}^r f_i^e \right)$$

m = Sistemdeki eleman sayısı

r = Eleman Düğüm Noktası sayısı=3

Sistem davranış matrisinin eleman davranış matrisinden ,sistem düğüm etki matrisinin düğüm etki matrisinden elde edilişi Bölüm 3.1.2 de kısaca anlatılmıştır.

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} \right\} \text{ yerine } (K_{m \times m} \cdot C_{m \times 1} + f_{m \times 1}) \text{ yazılabilir.}$$

3.9 daki denklem yerine sistem davranış denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\left[S \right] \left\{ \phi \right\} + \left\{ R \right\} = 0 \quad (4.62)$$

Sistem davranış denklemlerininisistematik bir şekilde elde etmek için şu işlemler yapılır.

- 1.) Eleman düğüm değerleri birden başlayarak sıra ile numaralanır.
- 2.) Sistem düğüm değerleri numaralanır.

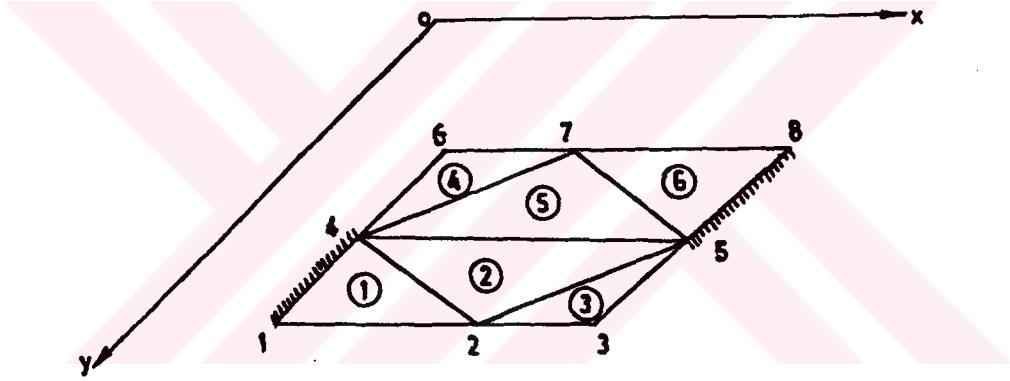
3.) Elemanda bir düğüm değerinin indisine sistemde tekabül eden tablo teşkil edilir.

4.) Buna göre eleman düğüm noktası parametreleri $[S]$ ve $\langle R \rangle$ 'ye nakledilir. Terimlerin getirildikleri yerde daha önce komşu bir elemandan gelmiş terimlerin cebrik toplamı olur.

5.) Sisteme ait denklem takımı elde edilir.

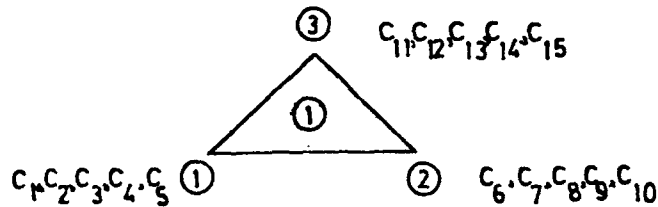
6.) Sisteme ait denklem takımı çözülerek bilinmeyen sistem düğüm noktası parametreleri bulunur.

Şimdi metodu örnek probleme uygularsak Sistem düğüm noktası numaraları aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.8. -Sistem Eleman ve Düğüm Nokta Numaralaması

Eleman düğüm noktası parametreleri ve numaralandırma sistemi aşağıda verilmektedir.



Şekil 4.9. - Eleman ve Düğüm Nokta Numaralaması

Her bir elemanda ,düğüm noktası parametrelerinin elemandaki ve sistemdeki numaraları bir tabloda özetlenmektedir.

Tablo 4.2.- Sistem Düğüm Noktası Hesap Tablosu

ELEMANDA PAREMETRE	ELEMAN NO	SISTEMDE PAREMETRE					
		1	2	3	4	5	6
K_1	1	1	6	6	16	16	21
	2	2	7	7	17	17	22
	3	S_1 3	S_2 8	S_2 8	S_4 18	S_4 18	S_5 23
	4	4	9	9	19	19	24
	5	5	10	10	20	20	25
K_2	6	6	21	11	31	21	36
	7	7	22	12	32	22	37
	8	S_2 8	S_5 23	S_3 13	S_7 33	S_5 23	S_8 38
	9	9	24	14	34	24	39
	10	10	25	15	35	25	40
K_3	11	16	16	21	26	31	31
	12	17	17	22	27	32	32
	13	S_3 18	S_4 18	S_5 23	S_6 28	S_7 33	S_7 33
	14	19	19	24	29	34	34
	15	20	20	25	30	35	35

$$[K]^e = \begin{bmatrix} [K_{1,1} \dots K_{1,5}] & [K_{1,6} \dots K_{1,10}] & [K_{1,11} \dots K_{1,15}] \\ [C_{1,1}] & [C_{1,2}] & [C_{1,3}] \\ [K_{5,1} \dots K_{5,5}] & [K_{5,6} \dots K_{5,10}] & [K_{5,11} \dots K_{5,15}] \\ [K_{6,1} \dots K_{6,5}] & [K_{6,6} \dots K_{6,10}] & [K_{6,11} \dots K_{6,15}] \\ [C_{2,1}] & [C_{2,2}] & [C_{2,3}] \\ [K_{10,1} \dots K_{10,5}] & [K_{10,6} \dots K_{10,10}] & [K_{10,11} \dots K_{10,15}] \\ [K_{11,1} \dots K_{11,5}] & [K_{11,6} \dots K_{11,10}] & [K_{11,11} \dots K_{11,15}] \\ [C_{3,1}] & [C_{3,2}] & [C_{3,3}] \\ [K_{15,1} \dots K_{15,5}] & [K_{15,6} \dots K_{15,10}] & [K_{15,11} \dots K_{15,15}] \end{bmatrix}$$

$$S_{1,1} = C_{1,1}^{(1)}$$

$$R_1 = f_1^{(1)}$$

$$S_{1,2} = C_{1,2}^{(1)}$$

$$S_{1,3} = 0$$

$$S_{1,4} = C_{1,3}^{(1)}$$

$$S_{1,5} = S_{1,6} = S_{1,7} = S_{1,8} = 0$$

$$S_{2,2} = C_{2,2}^{(1)} + C_{1,1}^{(2)} + C_{1,1}^{(3)}$$

$$R_2 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)} + f_1^{(3)}$$

$$S_{2,3} = C_{1,2}^{(3)}$$

$$S_{2,4} = C_{2,3}^{(1)} + C_{1,3}^{(2)}$$

$$S_{2,5} = C_{1,2}^{(2)} + C_{1,3}^{(3)}$$

$$S_{2,6} = S_{2,7} = S_{2,8} = 0$$

$$S_{3,3} = C_{2,2}^{(3)}$$

$$R_3 = f_2^{(3)}$$

$$S_{3,4} = 0$$

$$S_{3,5} = C_{2,3}^{(3)}$$

$$S_{3,6} = S_{3,7} = S_{3,8} = 0$$

$$S_{4,4} = C_{3,3}^{(1)} + C_{3,3}^{(2)} + C_{1,1}^{(5)} + C_{1,1}^{(4)}$$

$$R_4 = f_3^{(1)} + f_3^{(2)} + f_1^{(5)} + f_1^{(4)}$$

$$S_{4,5} = C_{3,2}^{(2)} + C_{1,2}^{(5)}$$

$$S_{4,6} = C_{1,3}^{(4)}$$

$$S_{4,7} = C_{1,2}^{(4)} + C_{1,3}^{(5)}$$

$$S_{4,8} = 0$$

$$S_{5,5} = C_{2,2}^{(3)} + C_{2,2}^{(2)} + C_{2,2}^{(5)} + C_{1,1}^{(6)} \quad R_5 = f_2^{(3)} + f_2^{(2)} + f_2^{(5)} + f_1^{(6)}$$

$$S_{5,6} = 0$$

$$S_{5,7} = C_{1,2}^{(5)} + C_{1,3}^{(6)}$$

$$S_{5,8} = C_{1,2}^{(6)}$$

$$S_{6,6} = C_{3,3}^{(4)}$$

$$R_6 = f_3^{(4)}$$

$$S_{6,7} = C_{3,2}^{(4)}$$

$$S_{6,8} = 0$$

$$S_{7,7} = C_{2,2}^{(4)} + C_{3,3}^{(5)} + C_{3,3}^{(6)} \quad R_7 = f_2^{(4)} + f_3^{(5)} + f_3^{(6)} + P$$

$$S_{7,8} = C_{2,3}^{(6)}$$

$$S_{8,8} = C_{2,2}^{(6)}$$

$$R_8 = f_2^{(6)}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_{1,1}] & \dots & [S_{1,4}] & \dots & [S_{1,8}] \\ " & & " & & " \\ " & & " & & " \\ [S_{4,1}] & \dots & [S_{4,4}] & \dots & [S_{4,8}] \\ " & & " & & " \\ " & & " & & " \\ [S_{8,1}] & \dots & [S_{8,4}] & \dots & [S_{8,8}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ " \\ " \\ \phi_4 \\ " \\ " \\ \phi_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ " \\ " \\ R_4 \\ " \\ " \\ R_8 \end{bmatrix}$$

$$[S_{1,1}] = \begin{bmatrix} (1) & & (1) \\ c_{1,1} & , & c_{1,5} \\ " & , & " \\ c_{3,1} & , & c_{3,5} \\ " & , & " \\ (1) & & (1) \\ c_{5,1} & , & c_{5,5} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$[S_{2,2}] = \begin{bmatrix} (2) & (1) & (3) & & (2) & (1) & (3) \\ c_{6,6} + c_{1,1} + c_{1,1} & , & c_{6,10} + c_{1,5} + c_{1,5} \\ " & & " \\ (2) & (1) & (3) & & (2) & (1) & (3) \\ c_{8,6} + c_{3,1} + c_{3,1} & , & c_{8,10} + c_{3,5} + c_{3,5} \\ " & & " \\ (2) & (1) & (3) & & (2) & (1) & (3) \\ c_{10,6} + c_{5,1} + c_{5,1} & , & c_{10,10} + c_{5,5} + c_{5,5} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

Böylece sistem davranış denkleminin elemanları elde edilmiş olmaktadır.

a.) Sistem Davranış Denklemlerinde Mesnet
Sartlarının Sağlatılması

Menet şartları nedeniyle sıfır olacak düğüm noktası parametrelerinin olduğu satırdaki köşegene bir diğer satır ve sütundakilere ve kolon matrisine sıfır vererek gözönüne alınabilmektedir.

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & 0 & \dots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & \dots & 0 & \dots & s_{2,n} \\ . & & 0 & & . \\ . & & 0 & & . \\ 0 & & 1 & & 0 \\ . & & 0 & & . \\ . & & 0 & & . \\ s_{n,1} & \dots & 0 & \dots & s_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ . \\ . \\ \phi_t \\ . \\ . \\ \phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ 0 \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$k_{t,t}=1 \quad ; \quad k_{t,1}=\dots=k_{t,n}=0 \quad ; \quad k_{1,t}=\dots=k_{n,t}=0$$

$\phi_t = 0$ Sınır şartı otomatik olarak sağlanmaktadır.

b.) Sistem Davranış Denklemlerinde Bilinen
Düğüm Noktası Parametrelerinin Gözönüne Alınması

Önceden bilinen olarak verilen düğüm noktası parametreleri sistem davranış denklemlerinde aşağıdaki gibi gözönüne alınabilmektedir.

$\phi_t = \beta$ gibi bir sabit kabul edilirse f_t yerine $-\beta \cdot 10^8 \cdot k_{tt}$ yazılır, k_{tt} yerinede $10^8 \cdot k_{tt}$ yazarsak

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & 0 & \dots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & \dots & 0 & \dots & s_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{t,1} & & 10^8 \cdot s_{t,t} & & s_{t,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{n,1} & \dots & s_{n,t} & \dots & s_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_t \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \beta \cdot 10^8 \cdot s_{t,t} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

t nolu satırı 10^8 ' e bölersek

$$\frac{k_{t,1} \cdot \phi_1}{10^8} + \dots + \frac{10^8 \cdot k_{t,t} \cdot \phi_t}{10^8} + \dots + \frac{k_{t,n} \cdot \phi_n}{10^8} + \dots + \frac{-\beta \cdot 10^8 \cdot k_{t,t}}{10^8} = 0$$

$$\phi_t = \beta$$

Bilinen olarak alınan düğüm noktası parametresi sistem davranış denkleminde otomatik olarak sokulmaktadır.

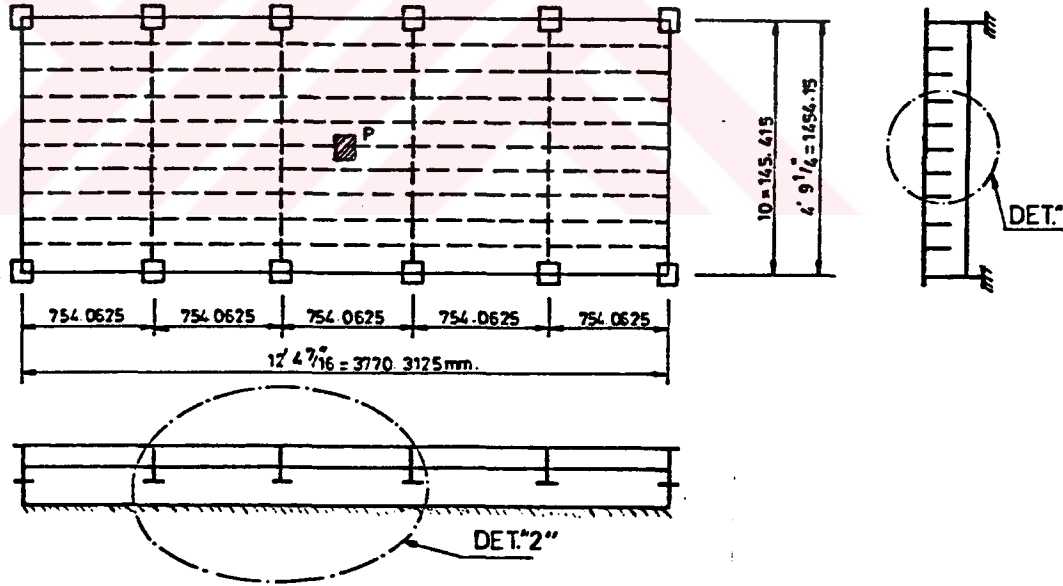
BÖLÜM 5

NÜMERİK UYGULAMALAR

5.1. UYGULAMA I.

Belgrad'da yapılmış olan Save nehri üzerindeki Çeli Ortotrop Tabliyeli köprünün birim tabliye ünitesinin test yüklemesi altındaki yük deformasyon eğrisi detaylı olarak [40] ve [41] de verilmektedir.

Aynı boyutlardaki tabliye ünitesini çalışmada elde ettiğimiz Ortotrop üçgen plak sonlu elemanla, Daha sonra Matris Deplasman Yöntemi ile kaset kiriş olarak çözülmüş tabliye ortasındaki deplasman değerleri [40] da verilen değerlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.1.- Köprü Tabliyesi Birim Ünitesi

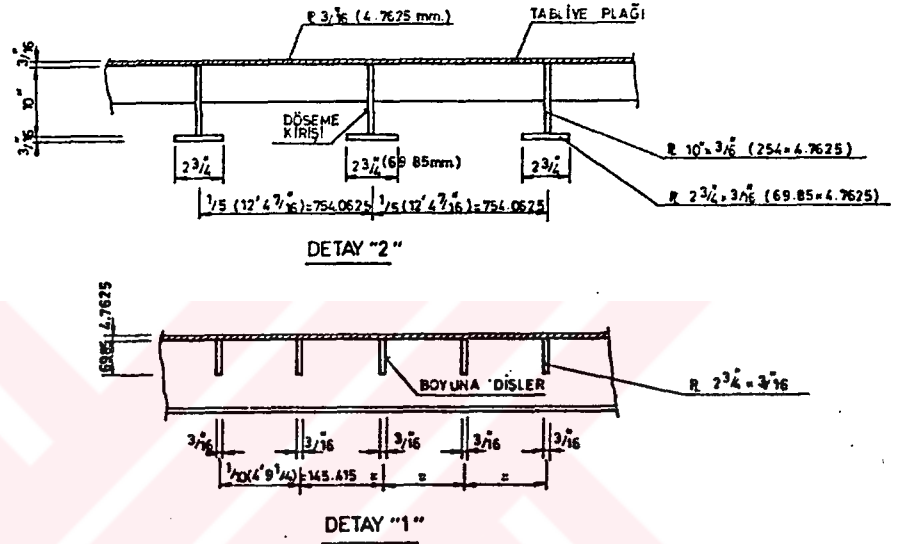
Tabliye ana kirişinin burulma rijitliğinin çok fazla olması nedeniyle 2 uzun doğrultusunda ana kirişe ankastre olarak bağlandığı kabul edilmiştir.

MALZEME VE KESİT ÖZELLİKLERİ:

Elastisite Modülü = $E = 2.1 \times 10^6 \text{ KG.cm}^2$

Poisson Oranı = $\mu_x = \mu_y = 0.30$

Kayma Modülü = $G = 0.808 \times 10^6 \text{ KG.cm}^2$



Şekil 5.2. - Köprü Tabliyesi Kesitleri

. Döşeme kirişi doğrultusundaki atalet momenti = I_x

$$I_x = 3757.1 \text{ cm}^4 \quad b_x = 75.40625 \text{ cm.}$$

. Boyuna dişler doğrultusundaki atalet momenti = I_y

$$I_y = 23.91 \text{ cm}^4 \quad b_y = 14.5415 \text{ cm.}$$

. Döşeme kirişi doğrultusundaki burulma atalet momenti

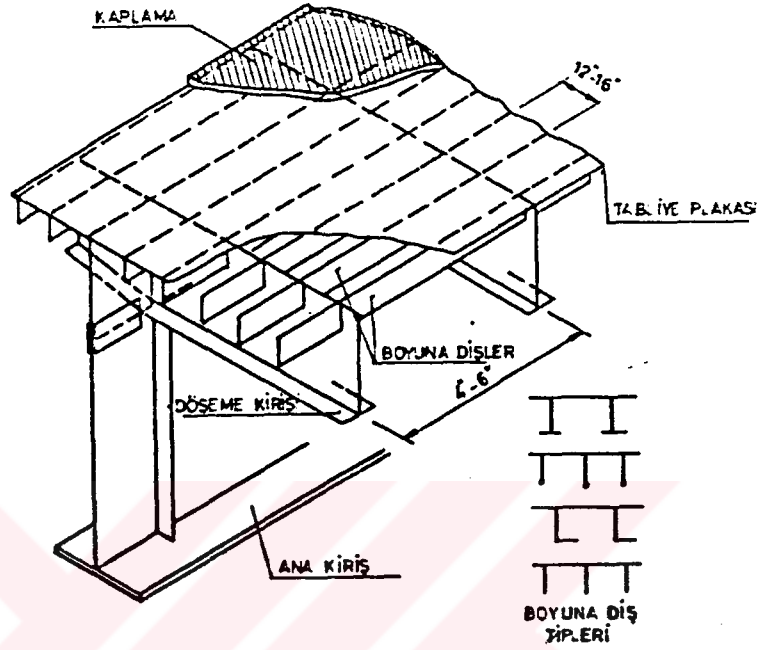
$$= I_{bx}$$

$$I_{bx} = 2.4 \text{ cm}^4 \quad b_x = 75.40625 \text{ cm.}$$

. Boyuna dişler doğrultusundaki burulma atalet momenti

$$= I_{by}$$

$$I_{by} = 0.5133 \text{ cm}^4 \quad b_y = 14.5415 \text{ cm.}$$



Şekil 5.3.- Tabliye Perspektifi

. Döşeme Kirişi Doğrultusundaki Eğilme Rijitliği = K_x

$$K_x = (EI)_x / b_x \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)$$

$$K_x = 114980 \text{ 267 KGcm}^2 / \text{cm.}$$

. Boyuna Dişler Doğrultusundaki Eğilme Rijitliği = K_y

$$K_y = (EI)_y / b_y \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)$$

$$K_y = 379445.1 \text{ KGcm}^2 / \text{cm.}$$

Döşeme Kiriş Doğrultusundaki Burulma Rijitliği = K_{bx}

$$K_{bx} = 2.6 \cdot J_{bx} / b_x$$

$$K_{bx} = 51413.8 \text{ KGcm}^2 / \text{cm.}$$

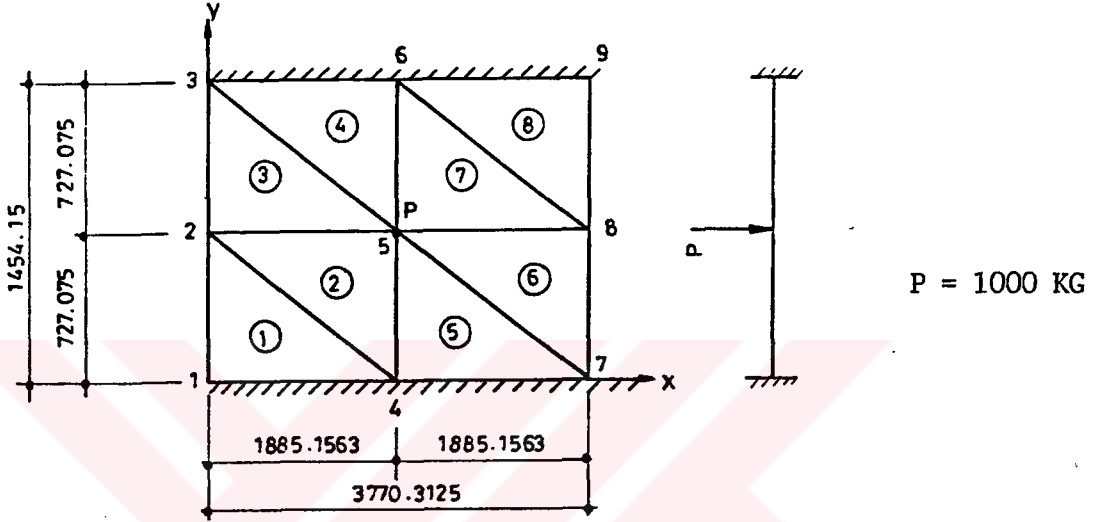
. Boyuna Dişler Doğrultusundaki Burulma Rijitliği = K_{by}

$$K_{by} = 2.6 \cdot J_{by} / b_x$$

$$K_{by} = 57021.4 \text{ KGcm}^2 / \text{cm.}$$

1) ORTOTROP ÜÇGEN PLAK SONLU ELEMANI İLE ÇÖZÜM

a) 8 ELEMANLI ÇÖZÜM



Şekil 5.4.- Sekiz Elemanlı Sonlu Eleman Ağı

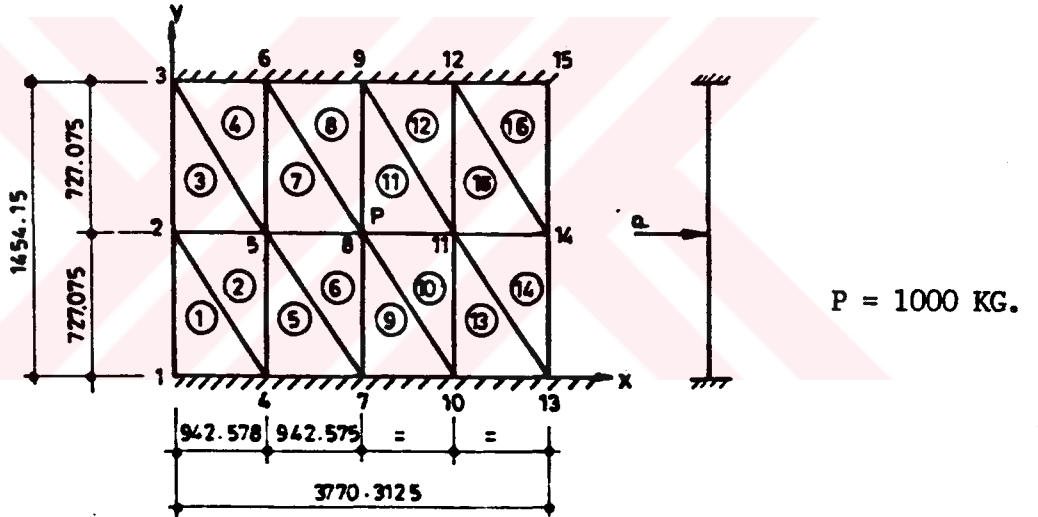
İki yönde burulma rijitliği çok yüksek ana kirişe oturan ortotrop tabliye parçasının ana kirişe bağlandığı noktalarda ankastre olarak kabul edilmiş diğer noktaların serbest olarak deplasman yaptığı kabul edilmiştir.

Şekil 5.4'de görüldüğü gibi sistem x ve y yönünde 2 şer parçaya bölünmüş her düğüm noktasında ω , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} bilinmeyen olarak alınmış $9 \times 5 = 45$ bilinmeyen elde edilmiştir. Sınır şartları nedeniyle 1, 4, 7, 3, 6, 9 noktalarındaki deplasman sıfır olduğu için $(45-6) = 39$ bilinmeyene indirgenerek sistem bölüm 6'daki programla çözülmüş ve kesit tesirleri ile deplasmanlar aşağıda özet halinde verilmiştir.

Tablo 5.1.- Kesit Tesiri ve Deplasmanlar

DÜĞÜM NK.NO	DEPLASMAN W. (mm)	M_x (KGcm/m)	M_y (KGcm/m)
5	0.182494	7660	20
4	0	10150	0
2	0.0004353	400	2
1	0	530	0

b) 16 ELEMANLI COZUM



Şekil 5.5.- Onaltı Elemanlı Sonlu Eleman Ağı

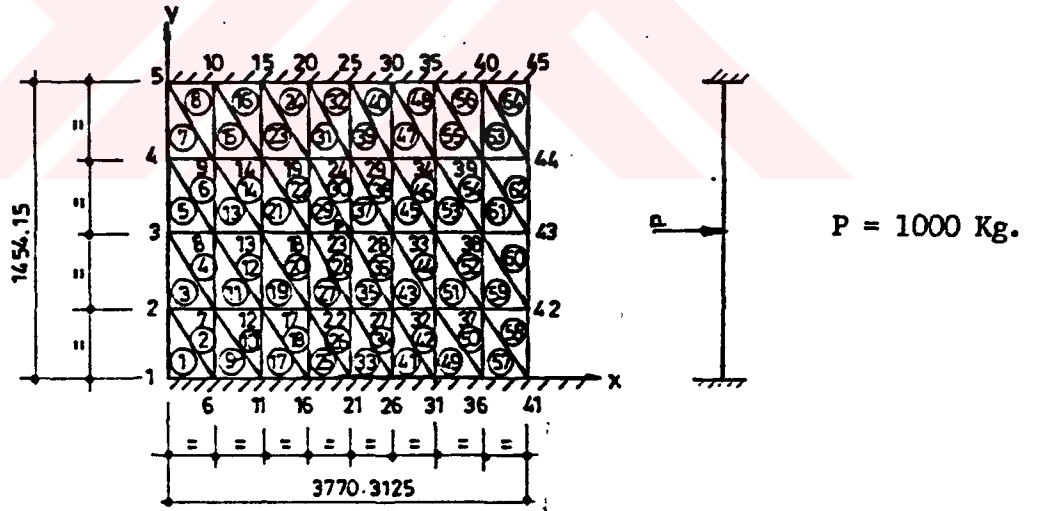
Şekil 5.5'de görüldüğü gibi sistem x yönünde 4 parçaya y yönünde 2 parçaya bölünmüş her düğüm noktasında w , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} bilinmeyen olarak alınmış $15 \times 5 = 75$ bilinmeyen elde edilmiştir.

Sınır şartları nedeniyle 10 adet deplasman sıfır olduğu için $(75-10) = 65$ bilinmeyene indirgenerek sistem çözülmüş kesit tesirleri ile deplasmanlar aşağıda özet halinde verilmiştir.

Tablo 5.2. - Kesit Tesiri ve Deplasmanlar

DÜĞÜM K. NO	DEPLASMAN W. (mm)	M_x (KGcm/m)	M_y (KGcm/m)
8	0.186146	10217.	23.06
7	0	13538	0
5	0.025791	3179	2.502
4	0	4212	0
2	0.0004382	283.68	0
1	0	376	0

c) 64 ELEMANLI ÇÖZÜM



Şekil 5.6. - Altmışdört Elemanlı Sonlu Eleman Ağı

Şekil 5.6'da görüldüğü gibi sistem x yönünde 8 parçaya y yönünde 4 parçaya bölünmüş her düğüm noktasında w , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} bilinmeyen olarak alınmış $45 \times 5 = 225$ bilinmeyen elde edilmiştir.

Sınır şartları nedeniyle 18 adet deplasman sıfır olduğu için $(225-18) = 207$ bilinmeyene indirgenerek bölüm 6'daki denklem takımı çözümündeki kolaylıktan faydalanarak kesit tesiri ve deplasmanlar bulunmuş ve aşağıdaki tabloda özet halinde verilmiştir.

Tablo 5.3. - Kesit Tesiri ve Deplasmanlar

DÜĞÜM NK.NO	DEPLASMAN W. (mm)	M_x (KGcm/M)	M_y (KGcm/m)
23	0.188231	12012.13	39.93
21	0	14649.00	0
18	0.09775	6628.56	22.095
16	0	8536.20	0
13	0.027254	3023.55	10.08
11	0	4190.30	0
8	0.011441	1060.30	3.53
6	0	1073.35	0
3	0.0004298	180.54	0.6018
1	0	343.47	0

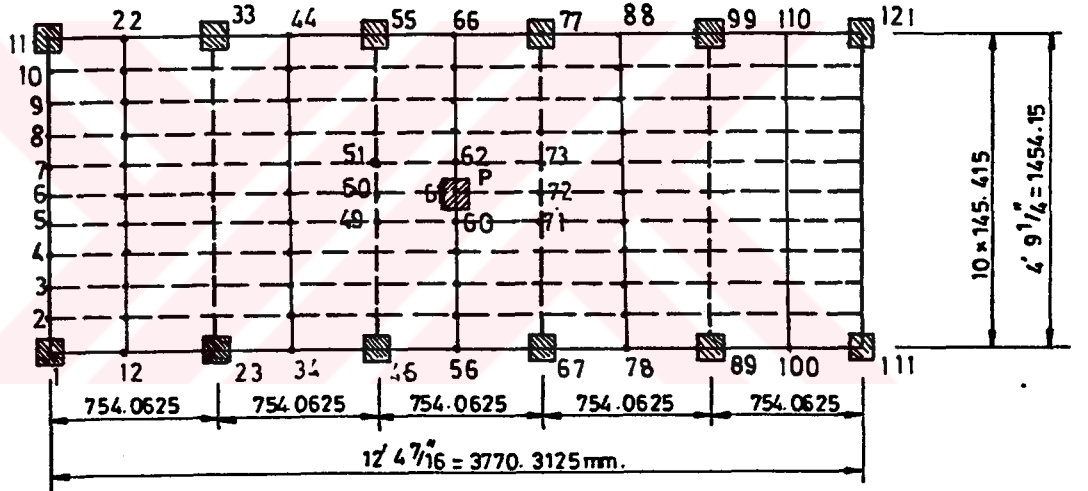
2. İZGARA KIRIŞ KABULU EDEREK SAP90 'LA ÇÖZÜM

Sistem kase döşeme olarak idealize edilmiş her düğüm noktasında üç deplasman bileşeni çökme ve her iki düzlemde dönmeler gözönüne alınarak sistem çözülmüş sonuçlar özet halinde aşağıda tabloda verilmektedir.

1,11,23,33,45,55,67,77,89,99,111,121 Düğüm noktaları ankastre diğer düğüm noktaları serbest mesnetli kabul edilmiştir.

Yükler orta noktaya komşu dokuz düğüm noktasına eşit olarak etki ettiği varsayılmıştır.

Düğ. Nok. Nok-->49,50,51,60,61,62,71,72,73 = P/9



Şekil 5.7.- Izgara Kiriş Sistemi

Tablo 5.4.- Tabliye Orta Noktasının Düşey Deplasmanları

YÜK	TABLIYE ORTA NOKTASI ÇÖKME DEĞERLERİ (mm.)
P (TON)	SAP90
2.06	0.38
4.10	0.66
5.40	0.87

3.) TABLIYE ORTA NOKTASI DEPLASMAN DEĞERLERİNİN SONLU ELEMAN, MATRİS DEPLASMAN ,VE TEST YÜKLEMESİ SONUÇLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI

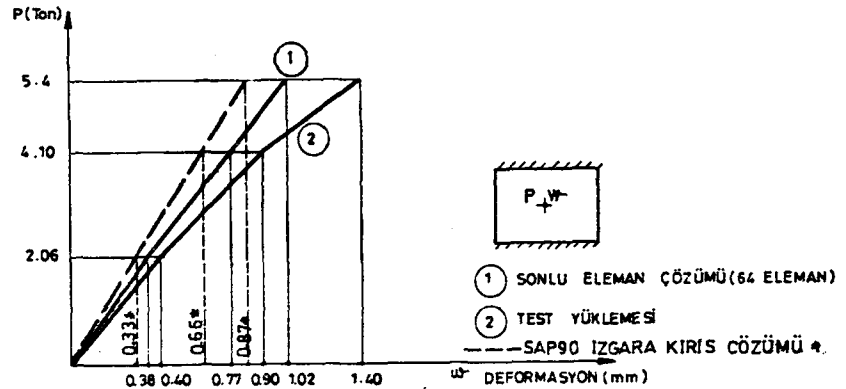
Aşağıdaki tabloda verildiği gibi test yüklemesi sonuçları ile çalışmada geliştirilen üçgen plak sonlu elemanın 64 elemanlı çözümü ile ızgara giriş kabulü ile SAP90 ile yapılan çözümler karşılaştırılmış Deplasman değerlerinin gerçek durumdaki sonuçlara yakın değerler verdiği görülmektedir. Bu da elemanın pratik amaçlar için kullanılabileceğini göstermektedir.

Tablo 5.5.- Yük Deplasman Değişimi Tablosu

YÜK	TABLIYE ORTA NOKTASI ÇÖKME DEĞERLERİ (mm.)		
	P (TON)	TEST YÜKLEMESİ	SONLU ELEMAN
	2.06	0.40	0.38
	4.10	0.90	0.77
	5.40	1.40	1.02

P = Tabliye Ortası Tekil Test Yüğü (Ton)

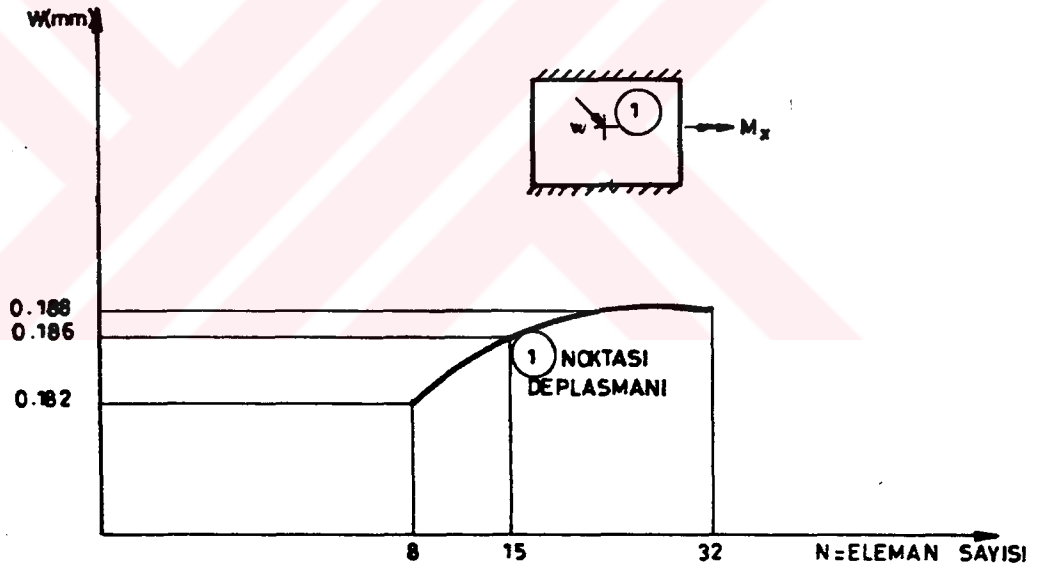
ω = Tabliye Orta Noktası Düşey Deplasman Değeri (mm.)



4) ELEMAN SAYISI İLE KESİT TESİRLERİ VE DEPLASMAN DEĞERLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Eleman sayısı ile sistemin orta noktasının deplasman değerleri ile 1 ve 2 noktalarının kesit tesirleri bir şemaya döküldüğünde aşağıdaki eğri elde edilmektedir.

Bulunan ortotrop üçgen plak elemanı ile bulunan deplasman ve momentler eleman sayısı arttırıldıkça gerçek sonuçlara hızla yaklaşmakta, bu da eleman içinde doğrusal interpolasyon fonksiyonlarının tamlik ve uygunluk şartlarını yerine getirdiğini göstermektedir.



Şekil 5.9.- Orta Nokta Deplasmanı-Eleman Sayısı Eğrisi

Ayrıca elemanı boyutlandırmaya yarayan kesit tesirleri momentler az sayıda elemanla dahi yeterli yaklaşıklıkta elde edilebilmektedir.

5.2. UYGULAMA II

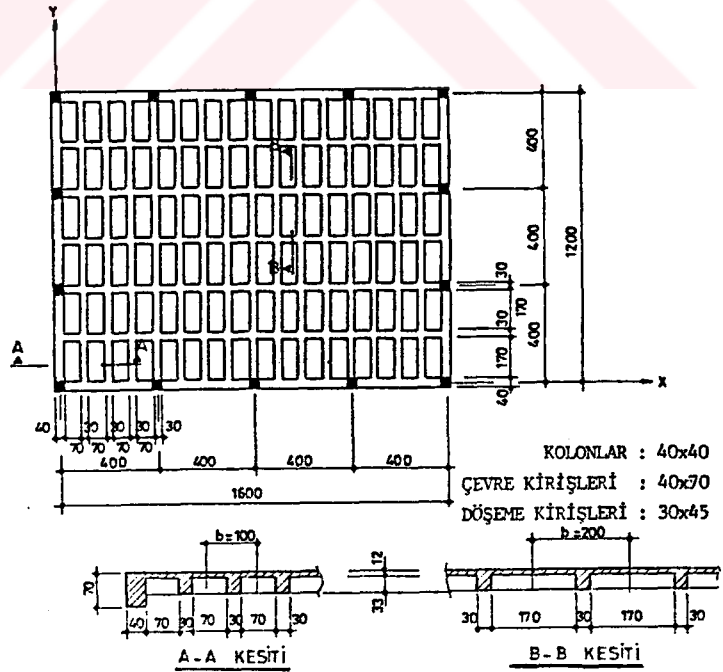
Bu uygulamada iki yönde farklı eğilme rijitliğine haiz nervürlü döşeme sistemi örnek olarak ele alınmış önce Marcus'un yaklaşık hesap yöntemi ile orta noktadaki her iki deplasmanın eşitliğinden yola çıkılarak plağın yaklaşık sehimleri ve kesit tesirleri elde edilmiştir.[42]

Daha sonra sistem çalışmada elde ettiğimiz üçgen ortotrop plak elemanla ilk önce 8 elemana bölünmüş sonra 32 elemana bölünerek sistemin kesit tesiri ve deplasmanları bulunmuştur.

Üçüncü adımda ise sistem matris deplasman yöntemi ile ızgara sistem gibi idealize edilerek çözülmüş.

Üç metodla bulunan değerler karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Döşeme çevresi kirişlerinin burulmadığı farzedilecek döşeme dört kenarından ankastre kabul edilmiştir.



Şekil 5.10.- Nervürlü Döşeme Sistemi

. MALZEME VE KESİT ÖZELLİKLERİ

$$\text{Elastisite Modülü} = E = 2.85 \times 10^6 \text{ T/m}^2$$

$$\text{Poisson Oranı} = \mu_x = \mu_y = 1/6$$

$$\text{Kayma Modülü} = G = 1.22 \times 10^6 \text{ T/m}^2$$

$$\text{X Yönü Atalet Momenti} = 0.00379 \text{ m}^4/\text{m} \quad b_x = 1 \text{ m.}$$

$$\text{X Yönü Burulma Atalet Momenti} = 0.003258 \text{ m}^4/\text{m} \quad b_x = 1 \text{ m.}$$

$$\text{Y Yönü Atalet Momenti} = 0.00237 \text{ m}^4/\text{m} \quad b_y = 2 \text{ m.}$$

$$\text{Y Yönü Burulma Atalet Momenti} = 0.001773 \text{ m}^4/\text{m} \quad b_y = 2 \text{ m.}$$

$$\text{X Yönü Eğilme Rijitliği} = K_x = (EI_x)/b_x \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)$$

$$K_x = 11110.1 \text{ Tm}^2/\text{m}$$

$$\text{Y Yönü Eğilme Rijitliği} = K_y = (EI_y)/b_y \cdot (1 - \mu_x \cdot \mu_y)$$

$$K_y = 6947.5 \text{ Tm}^2/\text{m}$$

$$\text{X Yönü Burulma Rijitliği} = K_{bx} = 2 \cdot G \cdot J_{bx}/b_x$$

$$K_{bx} = 7958.8 \text{ Tm}^2/\text{m}$$

$$\text{Y Yönü Burulma Rijitliği} = K_{by} = 2 \cdot G \cdot J_{by}/b_y$$

$$K_{by} = 4331.2 \text{ Tm}^2/\text{m}$$

YÜKLER

$$\text{Döşeme kendi ağırlığı} \dots\dots 0.12 \times 1.4 \dots\dots = 0.288 \text{ T/m}^2$$

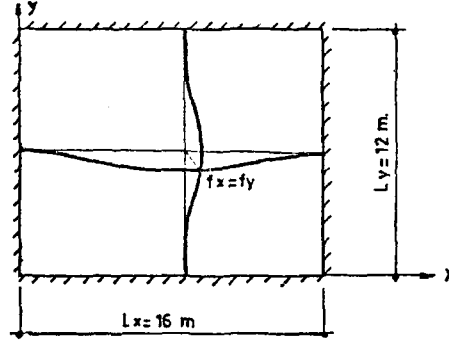
$$\text{Kiriş ağırlığı} (0.3 \times 0.33 \times 2.4/1 \quad 0.3 \times 0.33 \times 2.4/2) = 0.356 \text{ T/m}^2$$

$$\text{Kaplama ağırlığı} \dots\dots\dots 0.05 \times 2.2 \dots\dots\dots = 0.110 \text{ T/m}^2$$

ZATI YUK.....q	=	0.750	T/m ²
HAREKETLİ YUK.....P	=	0.110	T/m ²

HESAP YUKU.....q	=	1.250	T/m ²
------------------	---	-------	------------------

1.) MARCUS YÖNTEMİ İLE [42] NERVÜRLÜ PLAĞIN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ



Şekil 5.11.- Orta Nokta Deplasmanı))

1) Önce $f_x = f_y$ sehimlerinin eşitliği şartı yazılırsa;

$f_x = f_y$ (1) olur.

$$\frac{\alpha_x \cdot q_x \cdot L_x^4}{384 \cdot E \cdot I_x} = \frac{\alpha_y \cdot q_y \cdot L_y^4}{384 \cdot E \cdot I_y}$$

$\alpha_x = \alpha_y$ eşit kabulü ile

$$\frac{q_x \cdot 12^4}{E \cdot 0.00379} = \frac{q_y \cdot 16^4}{E \cdot 0.00237}$$

$$q_x = 5.05 \cdot q_y$$

2) Denge şartı yazılırsa ;

$$q_x + q_y = q$$

iki bilinmeyenli iki denklemden işlemler yapılırsa;

$$q_x = 0.835 q$$

elde edilir.

$$q_y = 0.165 q$$

$$-M_x = \frac{q_x \cdot L_x^2}{12} = 0.835 \cdot 12^2 \cdot \frac{1}{12} \cdot q = 10.02 \cdot q \quad (\text{MESNETTE})$$

$$-M_y = \frac{q_y \cdot L_y^2}{12} = 0.165 \cdot 16^2 \cdot \frac{1}{12} \cdot q = 3.52 \cdot q \quad (\text{MESNETTE})$$

$$+M_x = \frac{q_x \cdot L_x^2}{24} = 5.01 \cdot q \quad (\text{AÇIKLIKTA})$$

$$+M_y = \frac{q_y \cdot L_y^2}{24} = 1.76 \cdot q \quad (\text{AÇIKLIKTA})$$

$$M_{x0} = 1/8 \cdot q \cdot L_x^2 = 18 \cdot q$$

$$M_{y0} = 1/8 \cdot q \cdot L_y^2 = 32 \cdot q$$

$$V_x = 1 - (5/6) \cdot (L_x/L_y)^2 \cdot (M_x/M_{x0}) = 0.8695$$

$$V_y = 1 - (5/6) \cdot (L_y/L_x)^2 \cdot (M_y/M_{y0}) = 0.9185$$

$$+M_x = 0.8695 \cdot 5.01 \cdot q = 4.356 \cdot q$$

$$+M_y = 0.9185 \cdot 1.76 \cdot q = 1.617 \cdot q$$

SONUÇ KESİT TESİRLERİ

$$+ M_x = 5.445 \text{ TM/m}$$

$$+ M_y = 2.021 \text{ TM/m}$$

$$- M_x = 12.53 \text{ TM/m}$$

$$- M_y = 4.4 \text{ TM/m}$$

KISA DOĞRULTUDA BİR DIŞE GELEN AÇIKLIK MOMENTİ

$$+M_{x_b} = M_x \cdot b_x = 5.445 \text{ TM}$$

UZUN DOĞRULTUDA BİR DIŞE GELEN AÇIKLIK MOMENTİ

$$+M_{y_b} = M_y \cdot b_y = 4.042 \text{ TM}$$

KISA DOĞRULTUDA BİR DIŞE GELEN MESNET MOMENTİ

$$-M_{x_b} = M_x \cdot b_x = -12.5 \text{ TM}$$

UZUN DOĞRULTUDA BİR DIŞE GELEN MESNET MOMENTİ

$$-M_{y_b} = M_y \cdot b_y = -8.8 \text{ TM}$$

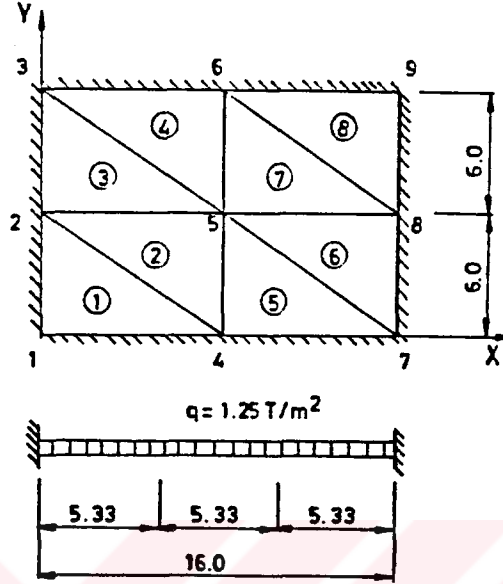
SEHİM HESABI

$$f_x = f_y = \frac{1}{384} \frac{0.835 \cdot q \cdot Lx^4}{E I_x} = \frac{1}{384} \frac{0.165 \cdot q \cdot Ly^4}{E I_y} = 5.29 \text{ mm}$$

$\omega = 5.29 \text{ mm}$ (Döşeme Orta nokta Düşey Yer Değiştirmesi)

2) ORTOTROP ÜÇGEN PLAK SONLU ELEMANI İLE ÇÖZÜM

2.1)8 ELEMANLI ÇÖZÜM



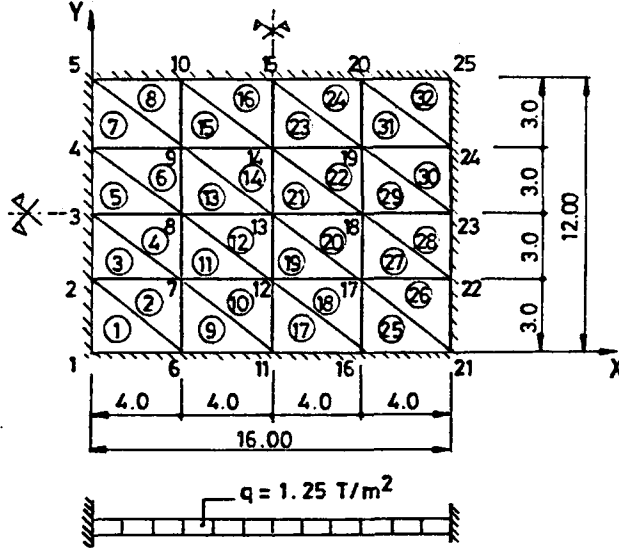
Şekil 5.12. - Sekiz Elemanlı Sonlu Eleman Ağı

Sistem x ve y yönünde, 2 şer parçaya bölünmüş her düğüm noktasında w , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} bilinmeyen olarak alındığı için $9 \times 5 = 45$ bilinmeyenli denklem takımı elde edilmiş sınırlardaki 8 adet deplasman sıfır olduğu için bilinmeyen sayısı 37 olarak elde edilmiş ; nümerik uygulamalar için yazılmış programla çözülerek sonuçlar aşağıda özet halinde verilmiştir.

Tablo 5.6. - Kesit Tesiri ve Deplasmanlar

DÜĞÜM NOK.NO:	DEPLASMAN w (mm)	M_x (Tm/m)	M_y (Tm/m)
1	0	0	0
2	0	0	4.94
4	0	13.736	0
5	7.3259	5.14	2.793

2.2) 32 ELEMANLI ÇÖZÜM



Şekil 5.13. - Otuziki Elemanlı Sonlu Eleman Ağı

Sistem x ve y yönünde 4'er parçaya bölünmüş her düğüm noktasında w , M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} bilinmeyen olarak alındığı için $25 \times 5 = 125$ bilinmeyenli denklem takımı elde edilmiş sınırlardaki 16 adet deplasman sıfır olduğu için bilinmeyen sayısı 109'a indirilmiştir. Nümerik uygulamalar için yazılmış programla çözümlere sonuçlar aşağıda özet halinde verilmektedir.

Tablo 5.7. - Kesit Tesiri ve Deplasmanlar

DÜĞÜM NOK. NO:	DEPLASMAN W(mm)	M_x (Tm/m)	M_y (Tm/m)
1	0	0	0
3	0	0	4.216
11	0	14.513	0
13	8.869	4.978	2.495

d.) SİSTEMİN 3 YÖNTEMLE ÇÖZÜMÜNÜN KARŞILAŞTIRILMASI

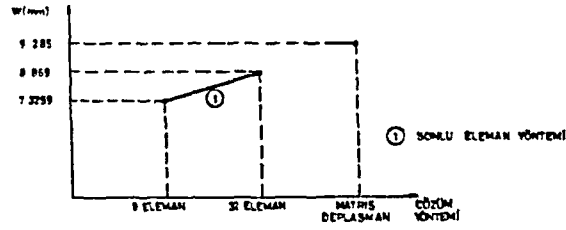
Bulunan sonuçların elde edilen değerlerle karşılaştırılmasından ortaya çıkan sonuçlar grafik halinde aşağıda özetlenmektedir.

Tablo 5.8. - Çözüm Yöntemlerini Karşılaştırma Tablosu

	MARCUS YÖNTEMİ	MATRİS DEPLASMAN YÖNTEMİ	SONLU ELEMAN ÇÖZÜMÜ 8ELEMAN	32ELEMAN
DEPLASMAN				
W(MM)	5.29	9.285	7.3259	8.8690
$+M_x$ (TM/M)	5.445	4.740	5.4400	4.9750
$+M_y$ (TM/M)	2.021	2.540	2.7930	2.4950
$-M_x$ (TM/M)	12.530	14.350	13.7360	14.5130
$-M_y$ (TM/M)	4.400	4.760	4.9400	4.2160

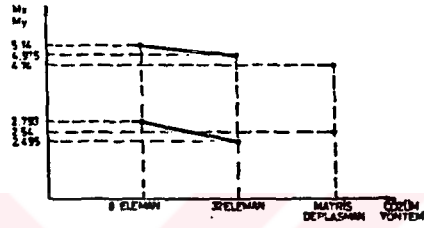
Yukarıda görüldüğü gibi bulunan ortotrop plak eleman ile yapılan çözümlerde az sayıda eleman alınması halinde dahi diğer çözüm teknikleri ile bulunan sonuçlara yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

ORTA NOKTANIN DEPLASMANLARI



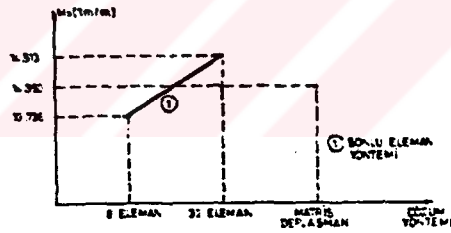
Sekil 5.15.- Orta Nokta Deplasmanı-Eleman Sayısı Eğrisi

ORTA NOKTANIN M_x VE M_y MOMENTLERİ



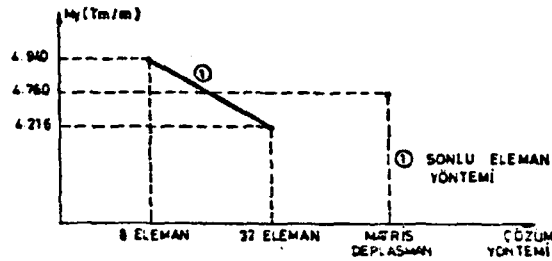
Sekil 5.16.- M_x ve M_y Momenti-Eleman Sayısı Eğrisi

KISA KENAR MOMENTLERİ



Sekil 5.17.- $-M_x$ Momenti-Eleman Sayısı Eğrisi

UZUN KENAR MOMENTLERİ



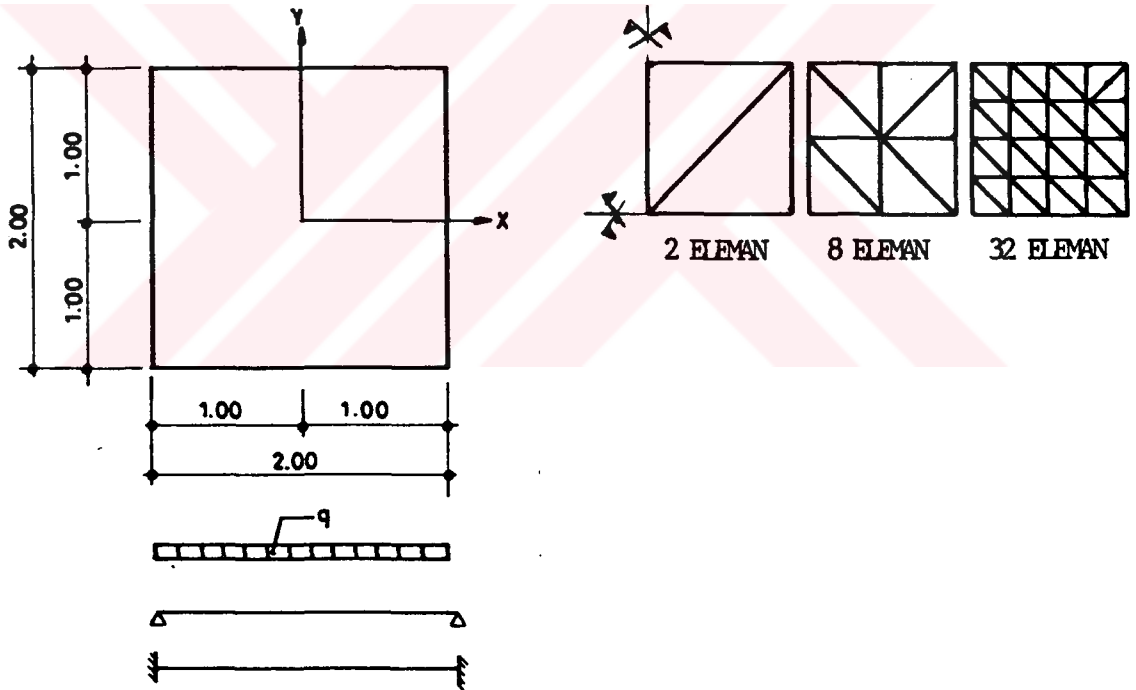
Sekil 5.18.- $-M_y$ Momenti-Eleman Sayısı Eğrisi

5.3. UYGULAMA III.

Çalışmada elde edilen sonlu elemanlar denklemleri ile ortotrop plaklar çözülebildiği gibi iki yönde aynı eğilme rijitliğine haiz plaklarda çözülebilmektedir.

Buna örnek, olarak kenarları 2 x 2 m olan plağın üniform yük etkisi altında ince kenarları serbest oturması hali daha sonra dört kenarı boyunca ankastre oturması halleri ayrı ayrı incelenmiştir. Sonlu eleman için simetriden yararlanarak plağın dörtte birini incelemek yeterli olmaktadır. [43]

Sistem, iki, sekiz ve otuziki elemana ayrılarak çözülmüş sonuçları ayrı ayrı özet halinde bir tabloda verilmiştir.



Şekil 5.19.- Dört Kenarı Ankastre ve Mafsallı Üniform Yüklü Plak

KESİT VE MALZEME ÖZELLİKLERİ

Elastisite Modülü

$$= E = 1.1 \times 10^6 \text{ KG/cm}^2$$

Poission Oranı

$$= \mu_x = \mu_y = 0.30$$

h = Plak Kalınlığı

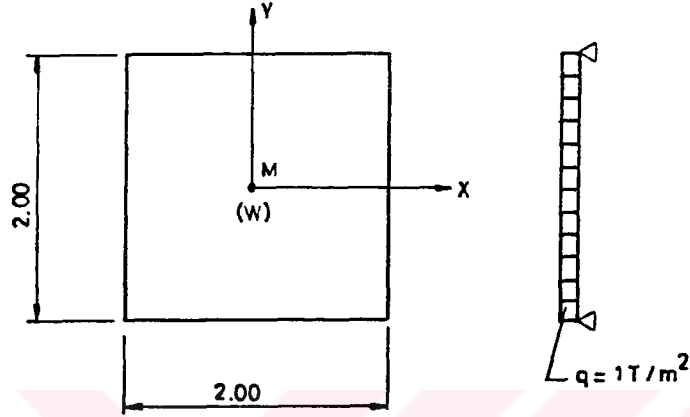
$$= 0.10 \text{ m.}$$

Kayma Modülü

$$= G = E/2/(1+\mu)$$

Tablo 5.9.- Kenarlarından Serbest Oturan Üniform Yüklü Plak Çözüm Yöntemlerini Karşılaştırma Tablosu

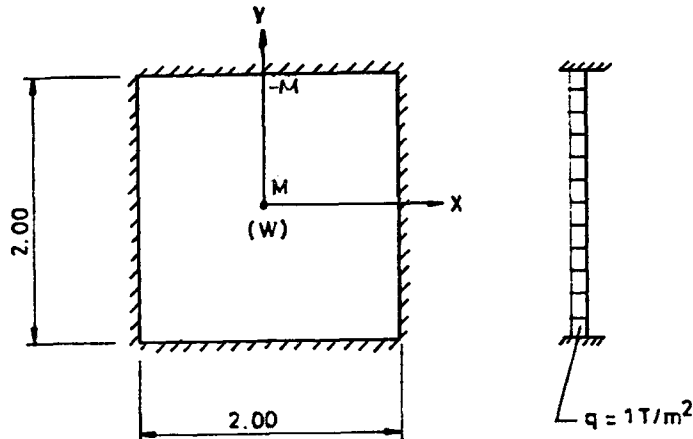
	KESİN DEGERLER[1]	RITZ COZUMU[4]	SONLU ELEMEN COZUMU		
			2ELEMEN	8ELEMEN	32ELEMEN
+M	0.1916	0.1859	0.1818	0.1897	0.1901
DEPLASMAN W (MM.)	0.03375	0.033904	0.03748	0.03613	0.03411



Şekil 5.20.- Dört Kenarı Mafsallı Üniform Yüklü Plak

Tablo 5.10.- Kenarlarından Ankastre Oturan Üniform Yüklü Plak Çözüm Yöntemlerini Karşılaştırma Tablosu

	KESİN DEGERLER[1]	RITZ COZUMU[4]	SONLU ELEMEN COZUMU		
			2ELEMEN	8ELEMEN	32ELEMEN
+M	0.0924	0.1101	0.0872	0.0929	0.0938
-M	0.2052	0.1863	0.1693	0.1999	0.2058
DEPLASMAN W (MM.)	0.01500	0.009170	0.01193	0.01398	0.01424

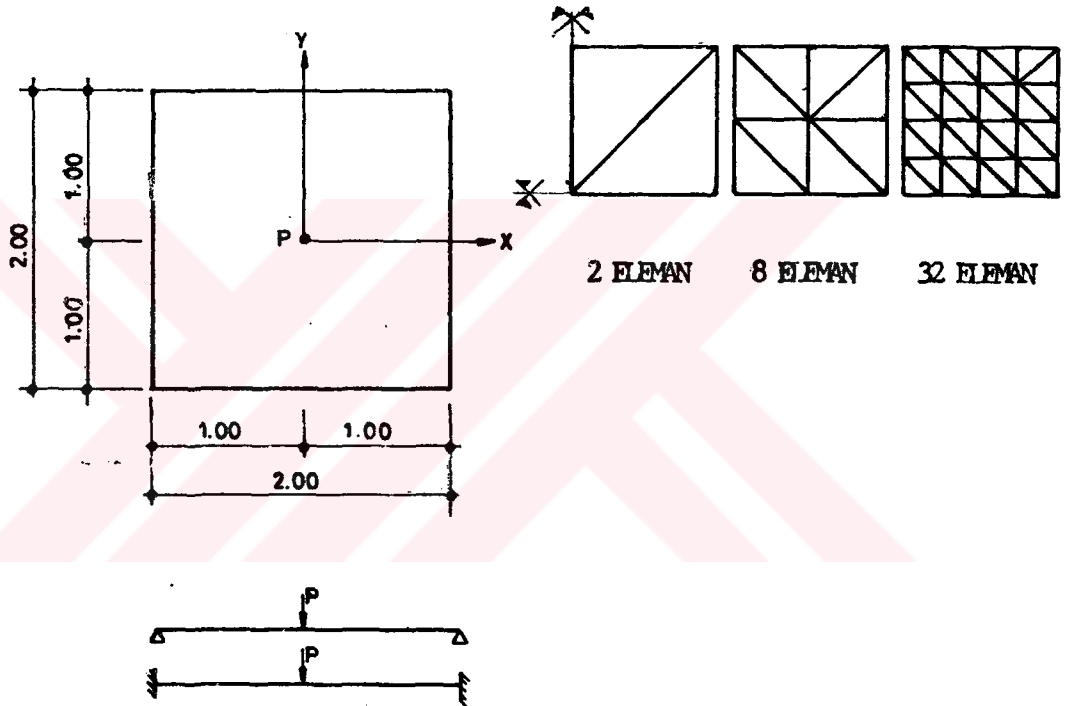


Şekil 5.21.- Dört Kenarı Ankastre Üniform Yüklü Plak

5.4. UYGULAMA IV.

Uygulama III'de ele alınan kenarları 2 x 2 m olan plağın orta noktasındaki tekil P yükü etkisi altında önce kenarları serbest oturması hali daha sonra dört kenarı boyunca ankastre oturması halleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Sonuçlar özet halinde aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.22. - Dört Kenarı Ankastre ve Mafsallı Ortasından Tekil Yüklü Plak

KESİT VE MALZEME ÖZELLİKLERİ

Elastisite Modülü

Poission Oranı

h = Plak Kalınlığı

Kayma Modülü

$$= E = 2.1 \times 10^6 \text{ KG/cm}^2$$

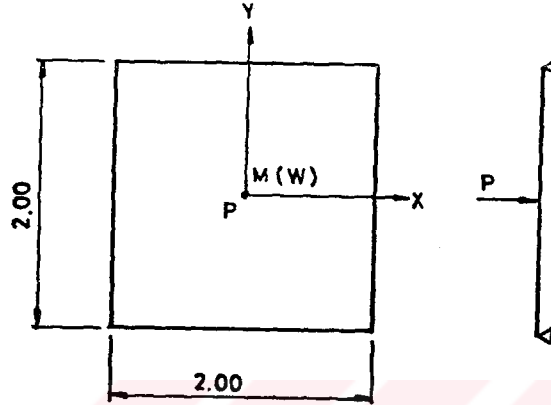
$$= \mu_x = \mu_y = 0.30$$

$$= 0.10 \text{ m.}$$

$$= G = E/2 / (1+\mu)$$

Tablo 5.11.- Kenarlarından Serbest Oturan Tekil Yüklü Plak Çözüm Yöntemlerini Karşılaştırma Tablosu

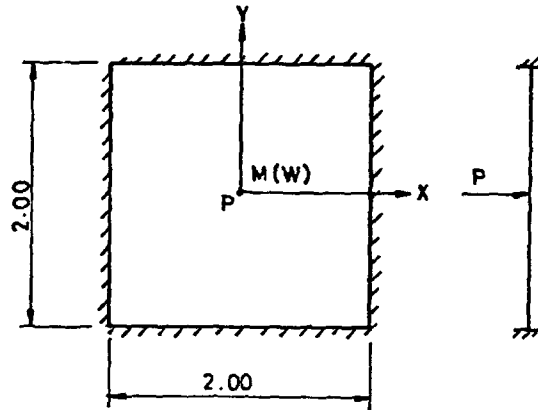
	KESİN DEGERLER[1]	SONLU ELEMEN COZUMU		
		2ELEMEN	BELEMEN	32ELEMEN
+M	0.274	0.1983	0.2592	0.2711
DEPLASMAN W (MM.)	0.024095	0.01881	0.02313	0.02541



Şekil 5.23.- Dört Kenarı Mafsallı Tekil Yüklü Plak

Tablo 5.12.- Kenarlarından Ankastre Oturan Tekil Yüklü Plak Çözüm Yöntemlerini Karşılaştırma Tablosu

	KESİN DEGERLER[1]	SONLU ELEMEN COZUMU		
		2ELEMEN	BELEMEN	32ELEMEN
-M	0.1257	0.1097	0.1099	0.1287
DEPLASMAN W (MM.)	0.01164	0.00879	0.01087	0.01193



Şekil 5.24.- Dört Kenarı Ankastre Tekil Yüklü Plak

BÖLÜM 6

ELEKTRONİK HESAP MAKİNASI PROGRAMI

6.1. GİRİŞ

Geliştirilen Ortotrop Plak Elemanın Sayısal örnekler ve parametrik araştırmalara uygulanması amacıyla bir elektronik hesap makinası programı hazırlanarak QUICK-BASIC dilinde kodlanarak derlenmiş, programın disk ünitesi ile karşılıklı etkileşimli olarak çalışması sağlanarak büyük boyutlu problemlerin çözümünde imkan sağlanmıştır.

6.2. PROGRAMIN YAPISI VE ÇALIŞMA DÜZENİ

Program 5 ana birçok alt programlardan oluşmaktadır. Ana programın akış diyagramı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

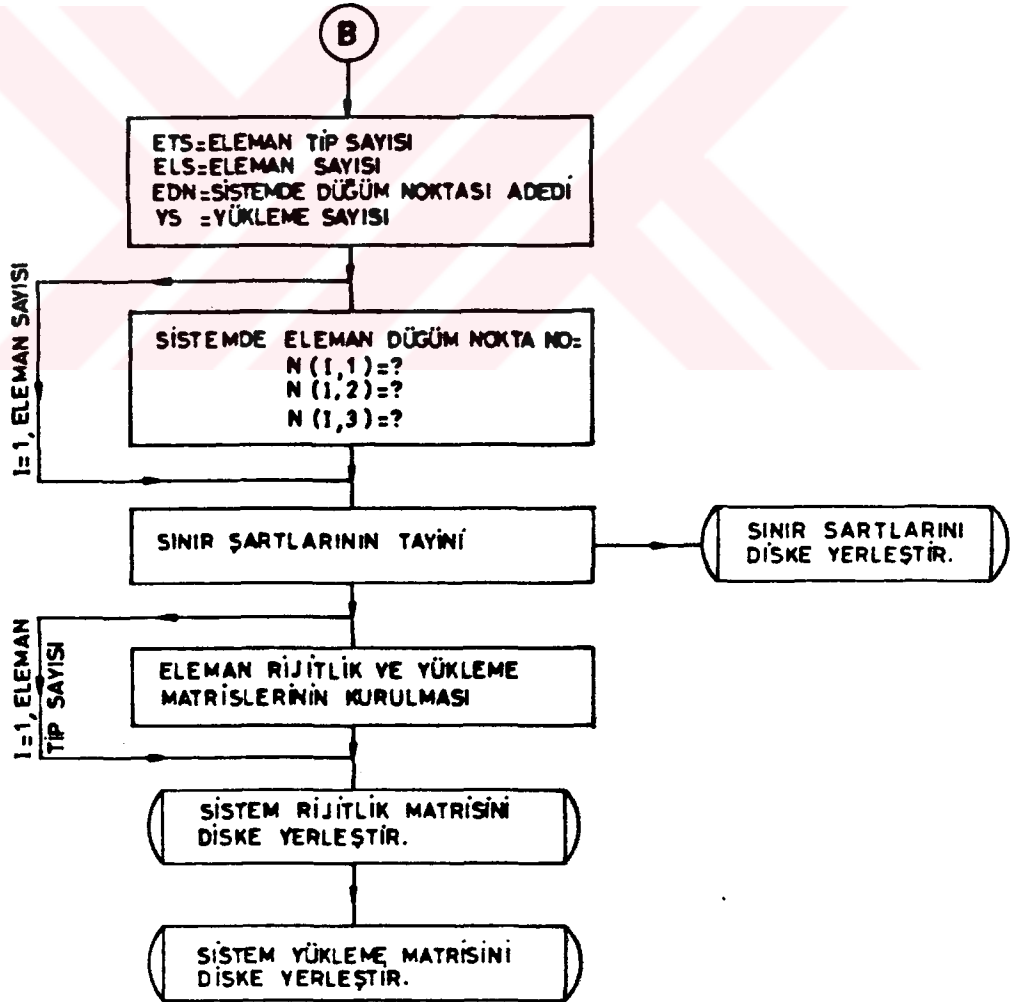
Aşağıda ana bölümleri verilmiş olan programın izlediği adımlar aşağıda açıklanacak ve bazılarının ana akış diyagramları verilecektir.



Şekil 6.1. - Program Ana Akış Diyagramı

ELEMAN

Bu ana alt programda önce toplam eleman tip sayısı, sistemdeki eleman sayısı, sistemdeki düğüm sayısı gibi sistemle ilgili bilgiler girilmektedir. Ayrıca sınır şartları tesbit edilerek eleman üzerinde çevrim yapılarak farklı tipteki eleman sayısı kadar eleman davranış ve eleman etki matrisi kurularak diske yazdırılır.

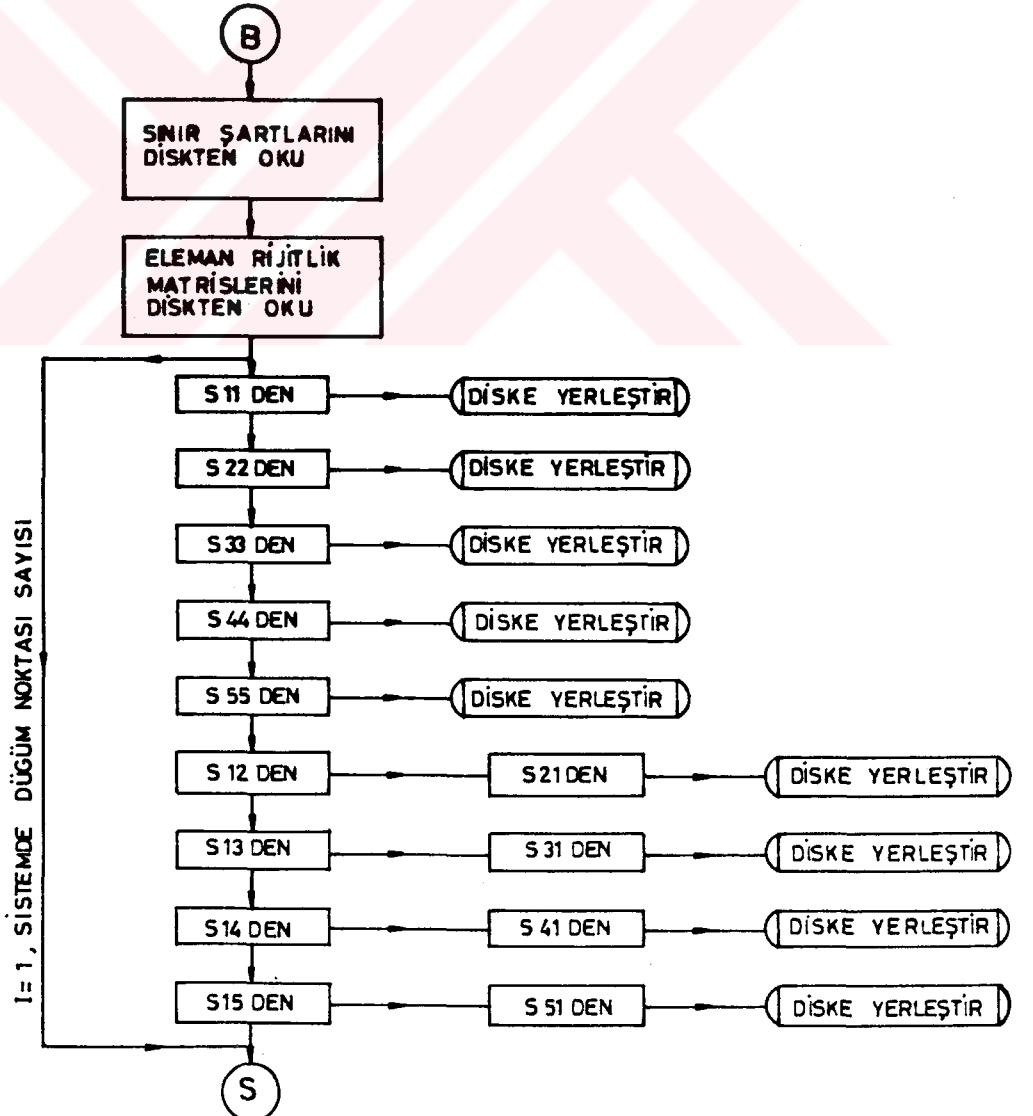


Şekil 6.2.- Eleman Davranış Denklemi Alt Programı
Ana Akış Diyagramı

DENKUR

Bu ana alt programda eleman rijitlik matrislerini diskten okuyarak sistem rijitlik matrisleri ([S11], [S12], [S15], [S21],[S51], [S55]) kurulmuş, sınır şartları diskten okunarak sistem rijitlik matrisinde yerine konmuş sistem matrisi diske yazdırılmıştır.

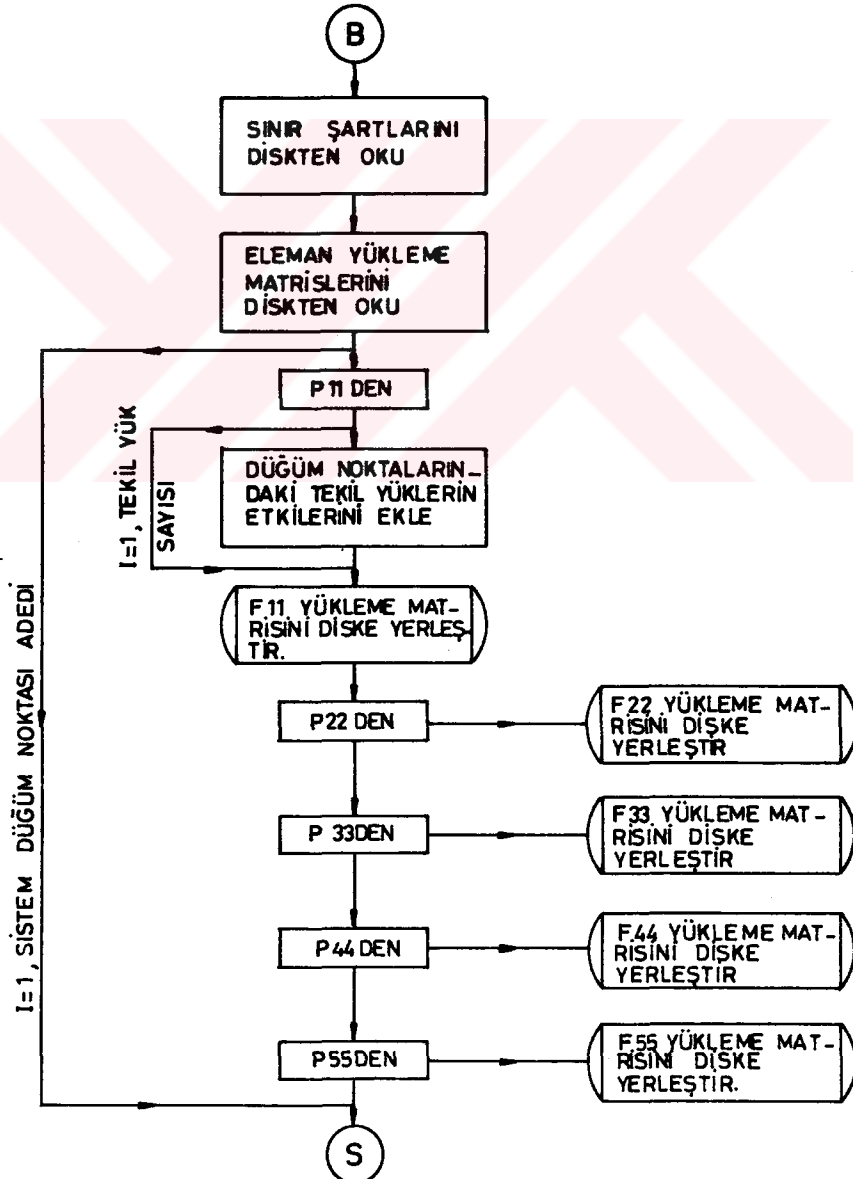
$$\begin{bmatrix} [S11] & [S12] & [S13] & [S14] & [S15] \\ [S21] & [S22] & [0] & [0] & [0] \\ [S31] & [0] & [S33] & [0] & [0] \\ [S41] & [0] & [0] & [S44] & [0] \\ [S51] & [0] & [0] & [0] & [S55] \end{bmatrix}$$



Şekil 6.3. - Sistem Davranış Denklemi Alt Programı
Ana Akış Diyagramı

YÜKKÜR

Bu ana alt programda eleman yükleme matrisleri diskten okunarak $\{f_1\}, \dots, \{f_5\}$ sistem etki matrisleri kurulmaktadır. Ayrıca eleman düğüm noktalarındaki tekil yükler sorularak sistem yükleme matrisine katkıları eklenmiş, sistem yükleme matrisi diske yazdırılmıştır.

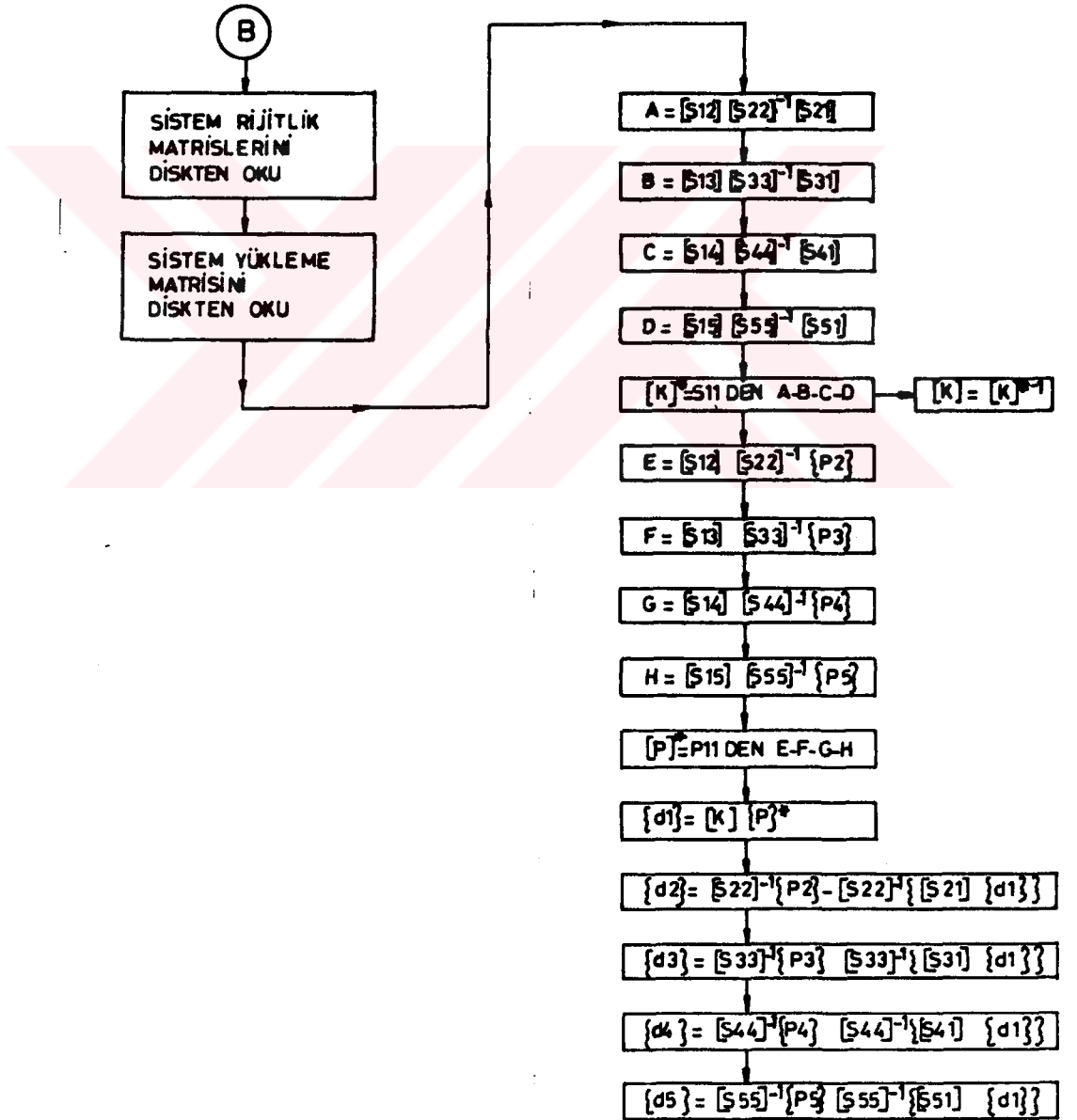


Şekil 6.4. - Eleman Etki Matrisi Alt Programı Ana Akış Diyagramı

çözüm

Sistem rijitlik ve yükleme matrisleri diskten okunarak Bölüm 6.3'de verilen denklem takımının çözümü için geliştirilen algorithmadan faydalanılarak bilinmeyenler elde edilmektedir.

Ayrıntılı akış şeması diyagramı aşağıda verilmektedir.



Şekil 6.5. - Sistem Denklem Takımı Çözümü Alt Programı
Ana Akış Diyagramı

6.3. SİSTEM DENKLEM TAKIMININ ÇÖZÜMÜ İÇİN KOLAYLIK

Sistem denklem takımının büyüklüğü nedeniyle Kişisel Kompütürlerde hesap yapabilmek için sistem denklem takımının belli bölgelerindeki sıfır matrisleri gözönüne alınmış ve denklem takımı gruplara ayrılarak çözülmüştür. Böylece hafızanın etkin biçimde kullanılması sağlanmıştır.

SİSTEM DENKLEM TAKIMI

$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	ϕ_1	R_1
$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	0	0	0	ϕ_2	R_2
$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	0	0	$\phi_3 = R_3$	
$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	0	0	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	0	ϕ_4	R_4
$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	0	0	0	$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$	ϕ_5	R_5

Sekil 6.6. - Sistem Denklem Takımı

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & 0 & S_{33} & 0 & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ S_{51} & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$[S_{11}].\langle \phi_1 \rangle + [S_{12}].\langle \phi_2 \rangle + [S_{13}].\langle \phi_3 \rangle + [S_{14}].\langle \phi_4 \rangle + [S_{15}].\langle \phi_5 \rangle = \langle R_1 \rangle \quad (6.3)$$

$$[S_{21}].\langle \phi_1 \rangle + [S_{22}].\langle \phi_2 \rangle = \langle R_2 \rangle \quad (6.4)$$

$$[S_{31}].\langle \phi_1 \rangle + [S_{33}].\langle \phi_3 \rangle = \langle R_3 \rangle \quad (6.5)$$

$$[S_{41}].\langle \phi_1 \rangle + [S_{44}].\langle \phi_4 \rangle = \langle R_4 \rangle \quad (6.6)$$

$$[S_{51}].\langle \phi_1 \rangle + [S_{55}].\langle \phi_5 \rangle = \langle R_5 \rangle \quad (6.7)$$

$$\langle \phi_5 \rangle = [S_{55}]^{-1} . \langle R_5 \rangle - [S_{55}]^{-1} . [S_{51}] . \langle \phi_1 \rangle \quad (6.8)$$

$$\langle \phi_4 \rangle = [S_{44}]^{-1} . \langle R_4 \rangle - [S_{44}]^{-1} . [S_{41}] . \langle \phi_1 \rangle \quad (6.9)$$

$$\langle \phi_3 \rangle = [S_{33}]^{-1} . \langle R_3 \rangle - [S_{33}]^{-1} . [S_{31}] . \langle \phi_1 \rangle \quad (6.10)$$

$$\langle \phi_2 \rangle = [S_{22}]^{-1} . \langle R_2 \rangle - [S_{22}]^{-1} . [S_{21}] . \langle \phi_1 \rangle \quad (6.11)$$

(6.8), (6.9), (6.10), (6.11) denklemleri (6.3) de yerine konulursa elde edilen 6.3 denklemi şu hale gelir ;

$$[S]^* . \langle \phi_1 \rangle = \langle R \rangle^* \quad (6.12)$$

burada $[S]^*$ ve $\langle R \rangle^*$ aşağıda tanımlenmiştir.

$$[S]^* = [S_{11}] - [S_{12}].[S_{22}]^{-1}.[S_{21}] - [S_{13}].[S_{33}]^{-1}.[S_{31}] - [S_{14}].[S_{44}]^{-1}.[S_{41}] - [S_{15}].[S_{55}]^{-1}.[S_{51}] \quad (6.13)$$

$$\langle R \rangle^* = \langle R_1 \rangle - [S_{12}].[S_{22}]^{-1}.\langle R_2 \rangle - [S_{13}].[S_{33}]^{-1}.\langle R_3 \rangle - [S_{14}].[S_{44}]^{-1}.\langle R_4 \rangle - [S_{15}].[S_{55}]^{-1}.\langle R_5 \rangle \quad (6.14)$$

(6.13) ve (6.14) deki işlemler yapılarak (6.12) denkleminde ϕ_1 vektörü çözülürse ;

$$\langle \phi_1 \rangle = [S]^*^{-1} . \langle R \rangle^* \quad (6.15)$$

6.15 Denkleminin çözümünden ϕ_1 bulunur.

6.15 denklemi 6.8 ; 6.9 ; 6.10 ; 6.11 denklemlerinde yerine konularak ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 bulunur.

6.4. PROGRAMIN KULLANILMASI

Bu programın uygulanmasında gözönüne alınması gereken bazı özellikler aşağıda açıklanmıştır.

6.4.1. UYGULAMA SINIRLARI

1) Kişisel bilgisayarların çekirdek hafızalarını fazla meşgul etmemek ve disk ile karşılıklı etkileşimden yararlanabilmek için programlar küçük parçalar halinde disk işletim sistemi ile çalıştırılmakta ve bulunduğu değerleri diskte bir kütükte toplamakta, her program kendi kullanacağı değerleri birbiri peşisıra çağırılmaktadır. Böylece çekirdek hafıza'da yer kaybı optimuma indirilmektedir. [44]

Ayrıca denklem takım çözümünde yapılan kolaylık neticesinde bin düğüm noktasını aşmayacak şekilde sistem sonlu elemanlara ayrılabilir.

2) Her yükleme durumu için programı bir defa çalıştırmak yeterli olmaktadır.

6.4.2. GİRİŞ BİLGİLERİ

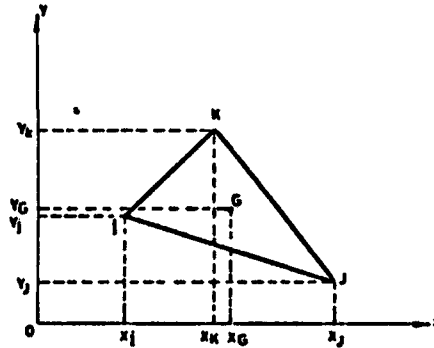
Giriş bilgileri olarak ilk önce sistemin tanımlanmasına ayrılmıştır.

Önce sistemdeki eleman tip sayısı, eleman adedi, düğüm noktası sayısı, yükleme sayısı istenmektedir.

Daha sonra sınır şartları ile bilgileri girmek gerekmektedir. Bunlar sırasıyla, sıfır deplasman sayısı, sıfır olan M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} momenti değerleridir.

Arkasından sistemdeki her bir elemanın düğüm noktası numaraları girilmektedir.

Daha sonra eleman tip sayısı kadar tekrarlanan her tip eleman da istenen giriş bilgileri aşağıda verilmektedir.



Şekil 6.7.- Lokal Eksen Takımı

1. Eleman lokal eksen koordinatları $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$
2. x ve y yönü poission oranı değerleri μ_x, μ_y
3. Plak elemanın x ve y yönü kalınlıklar; h_x, h_y
4. Zemin yatak katsayısı; k_z
5. Düzgün yayıl yük; q
6. Eğilme Rijitliği x, y yönü ; $K_y ; K_x$
7. Burulma rijitliği x, y yönü ; $K_{by} ; K_{bx}$
8. Isı genleşme katsayısı ; Alfa : α
9. Plak üstü ile altı arasındaki ısı farkı ; t

Bu bilgiler her eleman tip sayısı için yenilenmektedir.

6.4.3. ÇIKIŞ BİLGİLERİ

Çıkış bilgileri olarak sistemle ilgili bilgiler ve her düğüm noktasında bilinmeyen olarak bulunan $\omega, M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$ değerleri basılmaktadır.

SONUÇLAR

Pratikte gerek Betonarme gerek Öngerilmeli Beton gerek Çelik inşaatta çok geniş bir uygulama alanı bulunan Ortotrop Plaklar için Üçgen Mixed Sonlu Eleman Formülasyonu türetilmiş ve bu elemanın Eleman davranış denklemleri Düğüm noktası etki matrisleri çıkarılmış ve bu elemanla yapılan uygulamaları kapsıyan bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda özet halinde verilmiştir.

1.) Sonlu Eleman Deplasman Metodlarından farklı olarak bağımsız değişken olarak seçilen Plak çökmesi w ve M_x , M_y , M_{xy} , M_{yx} momentleri direkt olarak iyi bir yaklaşıklıkla elde edilmiştir.

2.) Sonlu Eleman Deplasman Metodlarında, Deplasman ve Dönmeler bulunduktan sonra yer değiştirmelerin ikinci türevleri alınarak momentler elde edilmektedir. Bu sakıncayı ortadan kaldırmak için eleman sayısını arttırmak gerekmektedir. Oysaki türetilen Mixed Sonlu Elemanda az sayıda elemanla dahi moment değerleri pratikte kullanılabilecek yaklaşıklıkla elde edilebilmektedir.

3.) Elde edilen Plak Fonksiyoneline kısmi integrasyon uygulayarak fonksiyoneli gevşetmek çok kullanışlı olmaktadır. Bu sayede fonksiyonel içinde en fazla birinci mertebe türevler bulunması nedeniyle interpolasyon fonksiyonu olarak birinci derece polinomları kullanmak yeterli olmaktadır.

4.) Bu nedenle seçilen lineer interpolasyon fonksiyonları eleman küçüldüğünde yakınsamayı garanti eden uygunluk ve tamlık şartlarını yerine getirmektedir.

5.) Çalışmada Üçgen sonlu elemanlar için alan koordinatlarını kullanarak X_1, Y_1 terimlerinin integrasyonu için bir algoritma verilmektedir.

6.) Mixed Sonlu Eleman çözümlerinde Sistem davranış matrisinde sıfır olan terimleri gözönüne alarak bilgisayar çekirdek hafızasını optimum kullanacak bir algoritma kullanma gerekliliği ortaya çıkmaktadır .

Bunun için geliştirilen algoritma Bölüm 6.3 de ayrıntılı olarak verilmiştir.

7.) Mixed Sonlu elemanların türetilmesinde sorun olan plak fonksiyonelinin bulunmasında [3] de verilen Ağırlıklı Rezidü Metodunu bir varyasyon prensibine dönüştürerek kullanmanın çok kolay olduğu bu metodla lineer self-adjoint differansiyel denklem sistemlerinin sonlu elemanlarla çözümünde büyük kolaylıklar sağlayacağı açıkça görülmektedir.

8.) Çalışma düzeni ve kullanma esasları Bölüm 6. da verilen E.H.M programı yardımıyla geliştirilmiş olan Mixed sonlu elemanlar kullanarak Ortotrop Sistemlerin sayısal hesaplarının yapılması olanağı sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] TIMESHENKO, S., (Çev. İNAN M., SÖNMEZ F.), "Plak Ve Kabuklar Teorisi", İ.T.Ü. Kütüphanesi No : 592, 1964.
- [2] GIRKMANN, K., (Çev. TAMEROĞLU S.), "Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler I - II", İ.T.Ü. Kütüphanesi No : 607, 1965.
- [3] AKÖZ, A.Y., OZCELIKORS, Y., "Plaklar için Genelleştirilmiş Fonksiyoneller ve Yeni Sonlu Eleman Formülasyonu", 4. Ulusal Mekanik Kongresi, Bayramoğlu-Istanbul, 1985.
- [4] AKÖZ, A.Y., "Çubuklar için Yeni Enerji Fonksiyonelleri ve Uygulamaları", 4. Ulusal Mekanik Kongresi, Bayramoğlu-Istanbul, 1985.
- [5] ÖZDEN, K., "Transformation Of The Method Of Weighted Residuals To A Variational Principle And Its Application In The Finite Element Method With Mixed Elements", Bull.Tech.Univ.İst., Vol.41, pp 303-313, 1988.
- [6] NARUOKA, M., YONEZAWA, H., "A Research On The Application Of The Theory Of Orthotropic Plates To Steel Highway Bridges.", Verberichtz.S.Int.Kongr.F.Bruckenbau, Hochbau,Lissobon, 1956. Bkz.[1]
- [7] ROSSNER, W., "Brücken aus Spannbeton-Fertigteilen Berlin", 1988
- [8] DEREN, H., "Ortotrop Plaklı Çelik Yol Köprüsü Tabliyeleri", 1975. İ.T.Ü Matbaası
- [9] BOUSSINESQ, J. "J.Math., 3 d. Series, vol 5." 1879. Bkz.[1]
- [10] HUBER, M.T. "Z. Österr. Ing. U. Archit: ver., p. 557, 1914. Bkz.[1]
- [11] GUYON, Y. "Calcul des ponts larges a poutres multiples solidarisees par des entretoises. In: Annales Ponts et Chaussees S. 553-612", 1946. Bkz.[7]

- [12] MASSONNET, CH., "Methode de Calcul des ponts a poutres multiples tenant compte de leur resistance a torsion. Abh. Int. Ver. Brückenbau u. Hochbau 1, 147", 1950. Bkz. [7]
- [13] HOMBERG, H., "Kreuzwerke (Statik der Trageroste und Platten). Forschungs. Aus d. Gebiete des Stahlbau Springer-Verlag", 1950. Bkz. [7]
- [14] CORNELIUS, W., "Die Berechnung Der Ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der Theorie der Orthogonal-Anisotropen Platte . Stahlbau", 1952. Bkz. [1]
- [15] SATTLER, K., "Betrachtungen zum Berechnungsverfahren Von Guyon-Massonet für Freiaufliegende Trageroste Erweiterung dieses verfahrens auf Beliebige Systeme. Der Bauingenieur 5 77-89", 1955. Bkz. [7]
- [16] LEONHARDT, F., ANDRA, W., "Die vereinfachte Tragerostberechnung 2. erw. Auflage . Stuttgart", 1950. Bkz. [7]
- [17] PELIKAN, W., ESSLINGER, M., "Die Stahlfahrbau , Berechnung und Konstruktion , M. A. N Forschungheft Nr. 7", 1957. Bkz. [8]
- [18] ÇAKIROĞLU, A., KAYAN, İ., "Exact Forms of Finite Difference Equations For Certain Differential Equations", Bull. Tech. Univ. İst., 1963.
- [19] ODEN, S. T., REDDY, J. N., "Variational Methods in Engineering Science", Mc Graw-Hill, 1977.
- [20] HUBNER, K. H., "The Finite Element Method For Engineers", John-Wiley Sons, 1977.
- [21] İNAN, M., "Cisimler in Mukavemeti", İst., 1974.
- [22] ZIENKIEWICZ, O. C., HOLISTER, G. S., "Stress Analysis", John-Wiley Sons, 1965.
- [23] COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., "Concepts And Applications of Finite Element Analysis", John-Wiley Sons, 1989.
- [24] WIEGHARDT, K., "Über Einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und Seine Anwendung auf die Statik hochgradig Statisch Unbestimmter Fachwerke .", 1906, Bkz. [23]
- [25] HRENNIKOFF, A., "Solution of Problem in Elasticity by the Framework Method", J. Appl. Mech. Vol. 8, No. 4, 1951. Bkz. [23]

- [26] COURANT, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations", Bull. American. Mat. Soc., 1943. Bkz. [23]
- [27] LEVY, S., "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings", J. Aero. Sci. Vol. 23, 1953. Bkz. [23]
- [28] TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., TOPP, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aero. Sci. Vol. 23. 1956. Bkz. [23]
- [29] ARGYRIS, J. H., KELSEY, S., "Energy Theorems and Structural Analysis", 1955, Aircraft Engineering Bkz. [23]
- [30] ZIENKIEWICZ, O. C., "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw-Hill, 1977.
- [31] ADINI, A., CLOUGH, R. W., "Analysis of Plate Bending By the Finite Elements Method", NASA 6.7337, 1961
- [32] BOGNER, F. K., FOX, R. L., SCHMIT, L. A., "The Generation of Inter-Element-Compatible Stiffness and Mass Matrices by the use of Interpolation Formulas", Proc. Conf. Mat. Meth. In Struc. Mech., Ohio, 1965.
- [33] HOLAND, I., BELL, K., "Course On Finite Element Methods in Stress Analysis", Trondheim. Tec. Univ., 1965.
- [34] KUYUCULAR, A., "Sonlu Elemanlar Metodu ile Plaklarda Öngerilme Etkilerinin Hesabı ve Aktif Donatı Optimizasyonu için Bir Yöntem", Y.Ü Matbaası, İst., 1984.
- [35] ÖZDEN, K., "Sonlu Elemanlar Ders Notları "
- [36] ÇAKIROĞLU, A., ÖZDEN, E., ÖZMEN, G., "Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metotları ve Elektronik Hesap Makinası Programları", İ.T.Ü. Küt., 1970.
- [37] PRZEMIENIECKI, J. S., "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw-Hill, 1978.
- [38] DESAI, C. S., ADEL, J. F., "Introduction to the Finite Element Method", Von-Nostrand Reinhold, 1972
- [39] SEGERLIND, L. J., "Applied Finite Element Analysis", John-Wiley Sons ,1976

- [40] ROMAN, W., "Orthotrop Plate Design For Steel Bridges", The James F. Lincoln Arc Welding Foundation., Cleveland-Ohio, 1976.
- [41] CHANG, J. C., "Orthotropic-Plate Construction For Short-Span Bridges", The James F. Lincoln Arc Welding Foundation., Ohio, 1976.
- [42] AKA, İ., KESKİNEL, F., ARDA, T. S., "Betonarme Yapı Elemanları", İst., 1980.
- [43] BARES, R., "Tables for the Analysis of Plates, Slabs and diagrams Based on the Elastic Theory", Bauverlag, 1974.
- [44] TEZCAN, S., "Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü", Arı Kit. 1970.

ÖZGEÇMİŞ

SELÇUK İZ. 1961 yılında Bursa'da doğmuş, İlkokulu Bursa Atatürk İlkokulunda bitirmiş, Orta öğrenimini Bursa İhsan Çizakça Lisesinde, Lise öğrenimini Bursa Tophane Teknik Lisesinde tamamlamıştır. 1978 yılında İ.D.M.M.A. Galatasaray Mühendislik Fakültesi İnşaat Bölümüne girmiş, 1982 yılı yaz döneminde mezun olmuştur. Aynı yıl İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi yapı ana bilim dalında yüksek lisans eğitimine başlamış ve 1983 yılında mezun olarak, aynı fakültede doktora öğrenimine başlamıştır. Aynı yıl T.Ü.B.İ.T.A.K yurt içi doktora bursunu kazanmıştır.

1983 yılında Yıldız Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmış ve daha sonra sırasıyla Enka-Çimtaş Proje Grubu ve Tekfen Mühendislik A.Ş.'de proje ve araştırma mühendisi olarak çalışmıştır.

Halen Tekfen Mühendislik şirketinde proje mühendisi olarak çalışmaktadır.