

Eğilme Rijitliği Değişken Elastik Kolonların Kritik Burkulma Yüklerinin Varyasyonel İterasyon Metodu İle Elde Edilmesi

Safa Bozkurt Coşkun¹, Mehmet Tarık Atay² ve Baki Öztürk¹

¹Department of Civil Engineering, Nigde University, Nigde, 51245, Turkey

²Department of Mathematics, Nigde University, Nigde, 51245, Turkey

ÖZET

Bu çalışmada eğilme rijitliği değişken kolonların farklı mesnetlenme koşulları altında kritik burkulma yükleri varyasyonel iterasyon metodu ile elde edilmiştir. Varyasyonel iterasyon metodu doğrusal olmayan problemlerin çözümünde etkin bir yöntemdir. Elde edilen sonuçlar uygulanan yöntemin elastik stabilite problemlerinde analitik çözümün olmadığı durumlarda etkin kullanılabilir bir yöntem olduğunu göstermiştir.

ABSTRACT

In this study, critical buckling loads of columns with variable flexural stiffness are determined using variational iteration method (VIM). VIM is powerful technique in the solution of nonlinear problems. Results have shown that, applied technique can be efficiently used in the analysis of elastic stability problems where an analytical solution is not available.

¹ e-posta: sbcoskun@nigde.edu.tr

1. GİRİŞ

Yapıların analizinde ve modellenmesinde, kolon elemanları ve bunların farklı yükler altında burkulması dolayısıyla kritik yüklerin hesaplanarak göz önünde bulundurulması önemli yer tutar. Bu nedenle kolonların stabilitesi ve kolonların statik ve dinamik davranışları hakkındaki çalışmalar her zaman önemini korumuştur.

Bu alandaki ilk çalışma Euler[1] tarafından kendi ağırlığı etkisindeki kolonların stabilitesi konusunda yapılmıştır. Sonrasında Greehill [2], Karman ve Biot [3] , Timoshenko ve Gere [4] bazı basit problem durumları için kapalı formde analitik çözümler ortaya koymalarına rağmen, genelde eğilme rijitliğinin rastgele dağıldığı üniform olmayan kolonlarda burkulma problemleri için matematiksel tam çözüm bulmak çok zordur. Wang ve diğ. [5] kolonlar, kirişler, kemerler gibi farklı yapısal elemanların burkulma problemleri için çeşitli analitik çözümler vermişlerdir. Ayrıca Coşkun ve Atay [6], Atay ve Coşkun [7] varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak sabit ve değişken kesitli elastik kolonların krtik burkulma yüklerinin ve ayrıca elastik bir zemin üzerindeki Euler kolonlarının burkulma yüklerinin hesaplanması konusunda çalışmalar yapmışlardır.

Varyasyonel iterasyon metodu adlı çözüm metodu ilk olarak He [8-11] tarafından ortaya atılmış ve lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) varyasyonel teori tabanlı analitik bir teknik olup lineer olmayan sınır değer ve başlangıç değer problemlerinin ayrıca lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sistemlerinin ve lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır.

2. ELASTİK KOLONLARIN BURKULMASI

Elastik bir Euler kolonu için burkulma denklemi aşağıda yer aldığı gibidir.

$$\frac{d^4 w}{dx^4} \left[EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

Burada P eksenel basınç yükü, EI ise elastik kolonun eğilme rijitliğidir. Bu denklem uygun sınır koşullarıyla birlikte çözülerek söz konusu kolon için burkulma kritik burkulma yükü elde edilir. Eğilme rijitliğinin sabit olması durumunda denklemin genel çözümü şu şekildedir.

$$w(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 x + C_4, \quad \lambda^2 = P/EI \quad (2)$$

Eğilme rijitliğinin değişken olduğu durumlarda ise analitik çözüm elde etmek oldukça zordur. Bu çalışmada bu tip durumlar için etkin bir şekilde kullanılabilcek bir yöntem olan varyasyonel iterasyon metodu (VİM) tanıtılacak ve söz konusu probleme uygulanarak elde edilen sonuçlar mevcut analitik çözümlerle test edilecektir.

3. PROBLEMİN VİM FORMÜLASYONU

Varyasyonel iterasyon metodu aşağıda genel ifadesi belirtilen genel bir denklem formu üzerinde ifade edilecektir.

$$Lw + Nw = g(x) \quad (3)$$

burada L bir doğrusal operatör, N doğrusal olmayan operatör, ve $g(x)$ ise homojen olmayan terimdir. VİM'na göre aşağıda görüldüğü şekilde bir fonksiyonel kurulur.

$$w_{n+1} = w_n + \int_0^x \lambda(\xi) \{Lw_n(\xi) + N\tilde{w}_n(\xi) - g(\xi)\} d\xi \quad (4)$$

Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel teori yardımıyla elde edilir, n alt indisi iterasyon mertebesini, $\tilde{w}$ ise $\delta\tilde{w} = 0$ olacak şekilde sınırlı varyasyonu ifade eder. Bu çalışmada, problemi ifade eden denklem için sınırlı varyasyon göz önünde bulundurularak elde edilen $\lambda(\xi)$, şu şekildedir:

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{6}(\xi^3 - 3x\xi^2 + 3x^2\xi - x^3) \quad (5)$$

VİM formülasyonunun Denklem (1)'e uygulanması ile aşağıda görülen iterasyon formülü elde edilir.

$$w_{n+1}(x) = w_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \left\{ w(\xi)^{iv} + 2 \frac{[EI(\xi)]^i}{EI(\xi)} \tilde{w}(\xi)^{''''} + \left\{ \frac{[EI(\xi)]^{ii}}{EI(\xi)} + \frac{P}{EI(\xi)} \right\} \tilde{w}(\xi)^{''} \right\} d\xi \quad (6)$$

Denklem (6)'da verilen iterasyon formülü değişken eğilme rijitliğinin söz konusu olduğu durumlarda rahatlıkla uygulanabilir ve VİM'nun mevcut probleme önemli bir katkısı olarak düşünülebilir.

4. SINIR KOŞULLARI

Ele alınan problem, eğilme rijitliğinin değişken olduğu durumlar için farklı mesnetlenme koşulları ele alınarak çözülecektir. Dikkate alınacak mesnetlenme şekilleri ve bunlarla ilgili sınır koşulları şunlardır.

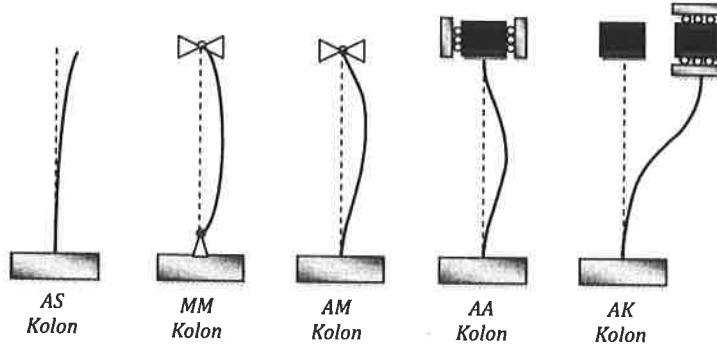
$$\text{Sabit Mafsalsal:} \quad \tilde{w} = 0 \text{ and } \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} = 0 \quad (7)$$

$$\text{Ankastre Mesnet:} \quad \tilde{w} = 0 \text{ and } \frac{d\tilde{w}}{dx} = 0 \quad (8)$$

$$\text{Serbest uç:} \quad \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} = 0 \text{ and } \frac{d^3 \tilde{w}}{dx^3} + \alpha \frac{d\tilde{w}}{dx} = 0 \quad (9)$$

$$\text{Kayan mesnet:} \quad \frac{d\tilde{w}}{dx} = 0 \text{ and } \frac{d^3 \tilde{w}}{dx^3} + \alpha \frac{d\tilde{w}}{dx} = 0 \quad (10)$$

Şekil 1'de kritik burkulma yükleri elde edilecek kolonlar görülmektedir. Basit gösterim açısından kısaltmalar kullanılacaktır. Birinci harfler alt uçtaki mesnet için bulunurken, ikinci harflerse üst uça yer alan mesneti ifade edecektir. Bu durumda, AS, *Ankastre-Serbest*, MM, *Mafsalsal-Mafsalsal*, AM, *Ankastre-Mafsalsal*, AA, *Ankastre-Ankastre* ve AK ise *Ankastre-Kayan Mesnet*'i ifade edecektir.



Şekil 1. Klasik Euler kolonu için çeşitli sınır koşulları

5. EĞİLME RİJİTLİĞİ DEĞİŞKEN KOLONLAR İÇİN KRİTİK BURKULMA YÜKLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Eğilme rijitliğinin değişken olduğu belirli durumlar için Wang ve diğ.[5] tarafından bazı analitik çözümler verilmiştir. Ele alınan durumlar şöyledir.

Eğilme rijitliğinin üstel değişimi:

$$EI(x) = \alpha e^{-ax} \quad (11)$$

Eğilme rijitliğinin doğrusal değişimi:

$$EI(x) = \alpha(1 - bx) \quad (12)$$

Eğilme rijitliğinin kuadratik değişimi:

$$EI(x) = \alpha(1 - bx)^2 \quad (13)$$

Dört tane sınır koşulu olduğundan başlangıç için kübik bir polinom seçilmiştir.

$$\bar{w}_0 = A\bar{x}^3 + B\bar{x}^2 + C\bar{x} + D \quad (12)$$

Daha sonra, Denklem (6)'da verilen iterasyon formülü dokuz adım yürütülmüştür. Elde edilen polinom sınır koşullarında yerine yazılarak bilinmeyen bir parametre cinsinden bir karakteristik denklem elde edilmiştir. Denklemin genel formu aşağıda görüldüğü gibidir.

$$[M(\alpha)]\{A\} = \{0\} \quad (14)$$

burada $\{A\} = \{A \ B \ C \ D\}^T$. Aşık olmanın çözümü ancak determinanın sıfıra eşit olması ile mümkündür ve determinanın sıfıra eşitlenmesi ile a cinsinden bir karakteristik denklem elde edilir. Bu denklemin en küçük reel pozitif kökü o kolon için kritik burkulma yüküdür. Analizler boyutsuz değişkenlerle yapılmış olup elde edilen sonuçlar Tablo 1, 2 ve 3'de görülmektedir.

Tablo1. Eğilme rijitliğinin üstel değişimi durumunda kritik burkulma yüklerinin karşılaştırılması.

aL	AS		MM		AK		AM		AA	
	Analitik	VIM	Analitik	VIM	Analitik	VIM	Analitik	VIM	Analitik	VIM
0.0	2.467	2.4674	9.870	9.8696	9.870	9.8696	20.19	20.1908	39.48	39.4916
0.1	2.394	2.3945	9.380	9.3857	9.390	9.3881	19.20	19.2018	37.55	37.5499
0.5	2.110	2.1121	7.634	7.6345	7.683	7.6827	15.64	15.6399	30.60	30.5984
1.0	1.782	1.7823	5.827	5.8257	5.973	5.9728	11.99	11.9885	23.49	23.4901
1.5	1.480	1.4821	4.389	4.3889	4.633	4.6354	9.098	9.0996	17.86	17.8647
2.0	1.209	1.2176	3.264	3.2652	3.580	3.5919	6.839	6.8470	13.46	13.4652

Tablo 2. Eğilme rijitliğinin doğrusal değişimi durumunda kritik burkulma yüklerinin karşılaştırılması.

bL	AS		MM		AK		AM		AA	
	Analitik	VIM	Analitik	VIM	Analitik	VIM	Analitik	VIM	Analitik	VIM
0.1	2.393	2.3928	9.372	9.3716	9.369	9.3690	19.17	19.1686	37.48	37.4804
0.3	2.235	2.2351	8.343	8.3434	8.317	8.3167	17.03	17.0354	33.27	33.2733
0.5	2.062	2.0612	7.256	7.2564	7.169	7.1732	14.74	14.7423	28.70	28.6972

Tablo 3. Eğilme rijitliğinin kuadratik değişimi durumunda kritik burkulma yüklerinin karşılaştırılması.

bL	AS		MM		AK		AM		AA	
	Analitik	VİM	Analitik	VİM	Analitik	VİM	Analitik	VİM	Analitik	VİM
0.1	2.319	2.3191	8.893	8.8933	8.893	8.8933	18.19	18.1893	35.56	35.5618
0.3	2.012	2.0115	7.005	7.0047	7.005	7.0042	14.29	14.2912	27.91	27.9067
0.5	1.683	1.6813	5.198	5.1992	5.198	5.2031	10.53	10.5308	20.48	20.4814

6. SONUÇ

Bu çalışmada eğilme rijitliği değişken Euler kolonları için kritik burkulma yükleri VİM yardımıyla elde edilmiştir. Bu amaçla üç farklı değişken eğilme rijitliği durumunun her birisi için beş farklı mesnetlenme durumu dikkate alınmış ve VİM yöntemi ile elde edilen iterasyon ifadesi dokuz adım yürütülerek kritik burkulma yükleri belirlenmiştir. Yapılan analizler eğilme rijitliğinin sabit olmadığı durumlar için VİM'nun oldukça iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Elde edilen sonuçlar, VİM'nun eğilme rijitliğinin sabit olmadığı ve analitik çözümün elde edilemediği durumlarda elastik kolonların kritik burkulma yüklerinin belirlenmesinde oldukça etkin ve kullanışlı bir yöntem olduğunu göstermiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Euler, L., "Die altitudine colomnarum sub proprio pondere corruentium", *Acta Acad Petropol*, 1778. (In Latin)
- [2] Greenhill, A.G., "Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole on mast can be made and of the greatest height to which a tree of given proportions can grow", *Proceedings of the Campridge Phylosophical Society IV*, 1883.
- [3] Karman, T.R, Biot, M.A., *Mathematical Methods in Engineering*, McGraw Hill, NewYork, 1940.
- [4] Timoshenko, S.P., Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill, NewYork, 1961.
- [5] Wang, C.M., Wang, C.Y., Reddy, J.N., *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*, CRC Press LLC, Florida, 2005.

- [6] Coskun, S.B., Atay M.T., Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using Variational iteration method .*Computers and Mathematics with Applications* (accepted for publication), 2009.
- [7] Atay M.T , Coskun, S.B., Elastic stability of Euler columns with a continuous elastic restraint using Variational iteration method .*Computers and Mathematics with Applications* (accepted for publication), 2009.
- [8] J. H. He, Variational iteration method - a kind of non-linear analytical technique: some examples, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, **34**, 699-708 (1999).
- [9] J. H. He, Variational iteration method for delay differential equations, *Commun. Non-linear Sci. Numer. Simulation*, **2**(4), 235-236 (1997).
- [10] J. H. He, Variational approach to the sixth order boundary value problems, *Applied Mathematics and Computation*, **143**, 537-538 (2003).
- [11] J. H. He, Variational iteration method for autonomous ODE systems, *Applied Mathematics and Computation*, **114**, 115-123 (2000).

