

75091

**EKSENEL SİMETRİK SICAKLIK ALANI ALTINDA
BAZI PLASTİSİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Oğuz ALTAY

75091

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Haziran 1998

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Kasım 1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mustafa SAVCI

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Abdülkerim KAR

Prof. Dr. Uğur GÜVEN

Prof. Dr. Tuncer TOPRAK

Prof. Dr. Yalçın AKÖZ

Mustafa Savcı
Abdülkerim Kar
Uğur Güven

KASIM 1998

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesindeki her aşamada değerli görüşleriyle bana yol gösteren ve desteklerini esirgemeyip yüreklendiren değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mustafa SAVCI'ya ve Sayın Prof. Dr. Uğur GÜVEN'e teşekkür ediyorum.

Ayrıca, özellikle tezin bilgisayarda yazılması sürecinde her zaman yanımda olup yardımda bulunan tüm arkadaşlarıma da bu vesileyle bir kez daha teşekkürler.

Oğuz ALTAY, Haziran 1998



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	xi
ÖZET	xii
SUMMARY	xiii
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 ÇALIŞMANIN KONUSU, AMACI VE BAŞLICA VARSAYIMLAR	1
1.2 KONU İLE İLGİLİ BAZI ÖNEMLİ ÇALIŞMALAR	3
1.3 BAZI ÖNEMLİ GENEL KAVRAMLAR	6
1.3.1 Gerilme ve Şekil Değiştirme İfadeleri	6
1.3.2 Isıl İfadeler	9
1.4 GERİLME İFADELERİNİN ELDE EDİLMESİ	10
1.4.1 Elastik Gerilmeler	11
1.4.2 Plastik Gerilmeler	12
1.4.2.1 Tresca Hipotezi	12
1.4.2.2 Plastik Gerilmelerin Hesabı	14
BÖLÜM 2 EKSENEL SİMETRİK SICAKLIK ALANINDA İÇİ BOŞ DİSK HALİ	16
2.1 DIŞ BASINCA ZORLANAN ISI KAYNAKLI İÇİ BOŞ DİSK	16
2.1.1 Elastik Gerilme Dağılışı	16
2.1.2 Elastik-plastik Gerilme Dağılışı	18
2.1.2.1 Plastik Bölge	18
2.1.2.2 Elastik Bölge	19
2.1.2.3 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	20
2.1.3 Sayısal Örnek	21
2.2 EKSENEL KARARLI SICAKLIK HALİNDEKİ İÇİ BOŞ DİSK	25
2.2.1 Elastik Gerilme Dağılışı	25
2.2.2 Elastik-plastik Gerilme Dağılışı	26

2.2.2.1 Plastik Bölge	26
2.2.2.2 Elastik Bölge	26
2.2.2.3 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	27
2.2.3 Sayısal Örnek	27
2.3 DIŞ ÇEVRESİ BOYUNCA RİJİT SINIR KOŞULLARI ALTINDAKİ ISI KAYNAKLI İÇİ BOŞ DİSK	30
2.3.1 Elastik Gerilme Dağılışı	31
2.3.2 Elastik-plastik Gerilme Dağılışı	32
2.3.2.1 Plastik Bölge	32
2.3.2.2 Elastik Bölge	33
2.3.2.3 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	33
2.3.3 Sayısal Örnek	35
BÖLÜM 3 SABİT ISI KAYNAĞI ALTINDAKİ İÇİ DOLU DİSKTE ELASTİK- PLASTİK GERİLME DAĞILIMI	37
3.1 RİJİT SINIR KOŞULLARI ALTINDA ISI KAYNAKLI DOLU DİSK	37
3.1.1 Elastik Gerilme Dağılışı	37
3.1.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı	38
3.1.2.1 Birinci Plastik Bölge	38
3.1.2.2 İkinci Plastik Bölge	39
3.1.2.3 Elastik Bölge	39
3.1.2.4 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	40
3.1.3 Sayısal Örnek	41
3.2 DIŞ BASINCA ZORLANAN ISI KAYNAKLI DOLU DİSK	44
3.2.1 Elastik Gerilme Dağılışı	45
3.2.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı	45
3.2.2.1 Dış Plastik Bölge	46
3.2.2.2 İç Plastik Bölge	46
3.2.2.3 Ara Plastik Bölge	47
3.2.2.4 Elastik Bölge	47
3.2.2.5 Genel Çözümün Geçerlilik Aralığı	47
3.2.2.6 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı	49
3.2.3 Sayısal Örnek	53
BÖLÜM 4 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANLARINDA ELASTİK PLASTİK GERİLMELER	58
4.1 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANI ALTINDAKİ İÇİ BOŞ DİSK	58
4.1.1 Elastik Gerilme Dağılışı	59
4.1.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı	60
4.1.2.1 İç Plastik Bölge	60
4.1.2.2 Ara Elastik Bölge	61
4.1.2.3 Dış Elastik Bölge	61
4.1.2.4 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	61
4.1.2.5 Geliştirilen Çözümün Geçerlilik Aralığı	63
4.1.3 Sayısal Örnek	64

4.2 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANI ETKİSİNDEKİ ISI KAYNAKLI DOLU DİSK	66
4.2.1 Elastik Gerilme Dağılışı	66
4.2.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı	68
4.2.2.1 İç Elastik Bölge	68
4.2.2.2 Birinci Ara Plastik Bölge	69
4.2.2.3 İkinci Ara Plastik Bölge	69
4.2.2.4 Dış Elastik Bölge	70
4.2.2.5 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	70
4.2.2.6 Geliştirilen Çözümün Geçerlilik Aralığı	72
4.2.3 Sayısal Örnek	73
4.3 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANI ETKİSİNDEKİ KÜRE	76
4.3.1 Elastik Gerilme Dağılışı	77
4.3.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı	78
4.3.2.1 Plastik Bölge	79
4.3.2.2 Ara Elastik Bölge	79
4.3.2.3 Dış Elastik Bölge	80
4.3.2.4 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi	80
4.3.2.5 Geliştirilen Çözümün Geçerlilik Aralığı	82
4.3.3 Sayısal Örnek	83
BÖLÜM 5 SONUÇLAR	85
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	91

SEMBOL LİSTESİ

a	: İç yarıçap
A_i, B_i, C_i	: İntegral sabitleri
b	: Dış yarıçap
c	: Dış yarıçap
E	: Elastisite Modülü
H	: Boyutsuz pekleşme katsayısı
k	: Isı iletim katsayısı
q	: Yarıçap oranı, $q=a/b$
$\dot{q}_v$	: Isı üretiminin şiddeti
r	: Yarıçap
T	: Sıcaklık dağılımı
T_a, T_b	: a ve b yarıçaplarındaki sıcaklıklar
u	: Radyal yer değiştirme
x	: Boyutsuz yarıçap
α	: Isıl genleşme sayısı
ϵ_θ	: Teğetsel birim şekil değiştirme
ϵ_{eq}	: Eşdeğer plastik şekil değişimi
ϵ_r	: Radyal birim şekil değiştirme
ν	: Poisson oranı
σ_0	: Başlangıçtaki akma gerilmesi
σ_y	: Akma gerilmesi
σ_θ	: Teğetsel Gerilme
σ_r	: Radyal Gerilme
η	: Pekleşme katsayısı

ŞEKİL LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1	Elastik doğrusal pekleşen malzemeye ait gerilme- şekil değiştirme eğrisi	7
Şekil 1.2	Elastik doğrusal pekleşen malzeme davranışının dinamik modeli	8
Şekil 1.3	Tresca altıgeni	13
Şekil 2.1	Dış basınç etkisindeki, ısı üretimli içi boş disk	16
Şekil 2.2	Elastik-plastik haldeki bölgelerin yerleri	18
Şekil 2.3	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $\bar{p}=0.32957$ için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	22
Şekil 2.4	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\bar{p}=0.45$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	23
Şekil 2.5	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\bar{p}=0.577456$ için plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	23
Şekil 2.6	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\bar{p}=0.45$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	24
Şekil 2.7	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\bar{p}=0.601234$ için plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	24
Şekil 2.8	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $\bar{p}=0.306$ için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	28
Şekil 2.9	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.45$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları	28
Şekil 2.10	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.563679$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları	29
Şekil 2.11	$\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.45$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları	29

Şekil 2.12	$\bar{T}=0.3, q=0.5, H=0.8, \nu=1/3, \bar{p}=0.583179$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları	30
Şekil 2.13	Çevrede radyal yer değiştirmesi sıfır ve içinde ısı üretimi olan içi boş disk	30
Şekil 2.14	Elastik-plastik haldeki bölgelerin yerleri	32
Şekil 2.15	Dıştan rijit sınır koşulları altındaki içi boş disk için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $H=0.5, \nu=1/3, a/b=0.5$ ve $Q=1.5$	36
Şekil 3.1	Çevrede radyal yer değiştirmesi sıfır ve içinde ısı üretimi olan dolu disk	37
Şekil 3.2	Elastik-plastik haldeki bölgelerin yerleri	38
Şekil 3.3	$Q=0.35$ için boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme	41
Şekil 3.4	$Q=0.395961$ için, tam plastik akışın henüz başladığı haldeki boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme	42
Şekil 3.5	Ara yarıçapların oranı ile boyutsuz pekleşme katsayısı H arasındaki ilişki	42
Şekil 3.6	$H=0.1$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları	43
Şekil 3.7	$H=0.25$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları	43
Şekil 3.8	$H=0.5$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları	43
Şekil 3.9	$H=0.75$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları	44
Şekil 3.10	$H=1.0$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları	44
Şekil 3.11	Dış basınca zorlanan ısı kaynaklı dolu disk	44
Şekil 3.12	En genel elastik-plastik hal için dolu diskteki bölgeler	45
Şekil 3.13	Birinci özel duruma ait bölgeler	48
Şekil 3.14	İkinci ve üçüncü özel duruma ait bölgeler	48
Şekil 3.15	$Q = 0.55, H = 0.5, \nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.35$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları	53
Şekil 3.16	$Q = 0.55, H = 0.5, \nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.7$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları	54

Şekil 3.17	$Q = 0.55, H = 0.5, \nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.9$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları	54
Şekil 3.18	$Q = 0.45, H = 0.5, \nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.7$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları	55
Şekil 3.19	$Q = 0.55, H = 0.5$ ve $\nu = 1/3$ için x_2/x_3 oranının dış basınca göre değişimi	55
Şekil 3.20	$Q = 0.55$ ve $\nu = 1/3$ için x_1/x_2 oranının H 'a göre değişimi	56
Şekil 4.1	Süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki içi boş disk	58
Şekil 4.2	Elastik-plastik hal için süreksiz sıcaklık alanına sahip diskteki bölgeler	60
Şekil 4.3	$a/b=0.5, c/b=10, \bar{T}=1.00292$ için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	64
Şekil 4.4	$a/b=0.5, c/b=10, H=0.5, \bar{T}=3.0$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	65
Şekil 4.5	$a/b=0.5, c/b=10, H=0.5, \bar{T}=4.59970$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	65
Şekil 4.6	Isı kaynaklı ve süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki dolu disk	66
Şekil 4.7	Elastik-plastik hal için ısı kaynaklı, süreksiz sıcaklık alanındaki dolu diskteki bölgeler	68
Şekil 4.8	$H=0.5, Q=0.5, \bar{T}=0.25$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	73
Şekil 4.9	$H=0.5, Q=0.55, \bar{T}=0.25$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	74
Şekil 4.10	$H=0.5, Q=0.63272, \bar{T}=0.25$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	74
Şekil 4.11	$H=0.5, Q=0.5, \bar{T}=0.35$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	75
Şekil 4.12	$H=0.5, Q=0.55, \bar{T}=0.35$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	75
Şekil 4.13	$H=0.5, Q=0.62163448, \bar{T}=0.35$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları	76

Şekil 4.14	Süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki küre	76
Şekil 4.15	Süreksiz sıcaklık alanındaki küredeki elastik-plastik bölgeler	78
Şekil 4.16	Süreksiz sıcaklık alanındaki küreye ait elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $\bar{T}=0.6668$	83
Şekil 4.17	Süreksiz sıcaklık alanındaki küreye ait elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $\bar{T}=1.5$	84
Şekil 4.18	Süreksiz sıcaklık alanındaki küreye ait elastik plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $\bar{T}=3.166$	84



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 $q=0.5$, $v = 1/3$ için plastik akmayı başlatan $\bar{p}$ değerleri	21
Tablo 2.2 $\bar{T}=0.3$ için $\bar{p}_{lim}$ değerlerinin H'a bağlı olarak değişimi	21
Tablo 2.3 $a/b=0.5$ ve $v=1/3$ için $Q_{üst}$ değerleri	35
Tablo 2.4 $a/b=0.5$, $v=1/3$ ve $Q=1.5$ için H- x_1 değişimi	36
Tablo 3.1 $Q=0.55$ ve $v=1/3$ için alt ve üst sınır basınç değerlerinin H'a bağlı değişimleri	56
Tablo 3.2 $\bar{p}=0.75$, $Q=0.55$ ve $v=1/3$ için x_2 ve x_3 boyutsuz yarıçaplarının H'a bağlı değişimleri	57
Tablo 4.1 $\bar{T}_{1L}$ ve $\bar{T}_{2L}$ alt ve üst sınır sıcaklık değerleri ile x_1 'in H ve q 'ya bağlı olarak değişimleri	63
Tablo 4.2 Elastik-plastik ara yarıçapın H'a bağlı olarak değişimi	64
Tablo 4.3 $q=2/3$ ve $\bar{T}=0.25$ için Q , x_1 ve x_2 'nin sınır değerleri	72
Tablo 4.4 $q=2/3$ ve $\bar{T}=0.35$ için Q , x_1 ve x_2 'nin sınır değerleri	73
Tablo 4.5 Süreksiz sıcaklık alanına sahip küre için x_1 ve $\bar{T}$ 'nin üst sınır değerlerinin H'a göre değişimi	

ÖZET

Bu çalışmada kararlı eksenel simetrik sıcaklık alanı etkisinde bazı elastik-plastik davranış halleri düzlem gerilme koşulu ile incelenmiştir. Malzemenin davranışı doğrusal izotrop ve homojen olarak alınmış ve ortotropinin etkisi göz önüne alınmamıştır. Plastik davranış halinde pekleşme etkisi göz ardı edilmemiş, bununla beraber doğrusal pekleşme varsayımı yapılmıştır. Burada göz önüne alınan sıcaklık aralığının malzemenin elastiklik modülü, Poisson oranı, akma gerilmesi, sıcaklıkla genleşme katsayısı ve ısı iletim katsayısı üzerinde bir etkisinin olmadığı da varsayılmıştır. Kararlı eksenel simetrik sıcaklık alanında, uygulamadaki önemi nedeni ile ısı üretiminin varlığı da göz önüne alınmıştır. Kapalı biçimde çözümlerin elde edildiği bu çalışma Tresca akma koşulu ile akış kurallarına dayanır. Çok sayıda grafik ve tablolar ile sayısal sonuçlar verilmiştir.

Birinci bölümde konu ile ilgili kısa bir açıklama, daha önce yapılmış benzer çalışmaların özetleri, başlıca varsayımlar ve genel bağıntılar verilmiştir. İkinci bölümde içi boş disk hali kararlı eksenel simetrik sıcaklık alanı etkisinde, dış basınç ve dıştan rijit sınır koşulları altında incelenmiştir. Üçüncü bölümde ısı üretiminden doğan eksenel simetrik sıcaklık alanındaki dolu disk hali ele alınmıştır. Burada sınır koşulları olarak önce diskin dış sınırda rijit bağlı olması hali, yani radyal yer değiştirmesinin sıfır olması ve daha sonra dış basınca zorlanması hali göz önüne alınmıştır. Dördüncü bölümde düzlem gerilme halinde süreksiz eksenel simetrik sıcaklık alanları ve küresel simetrik sıcaklık alanı için elastik-plastik davranış halleri ayrı ayrı düşünülmüştür. İçi boş ve dolu disklerde farklı süreksiz sıcaklık alanları için çözümler verilmiştir. Yalnızca bu bölüm içinde içi boş kürede bir süreksiz sıcaklık alanı için elastik-plastik çözüm verilmiştir. Beşinci bölüm sonuçlara ayrılmış, özellikle doğrusal pekleşme halini gösteren pekleşme katsayısı ile ısı üretiminin elastik-plastik davranış üzerine etkileri vurgulanmıştır.

SOLUTION OF SOME PLASTICITY PROBLEMS UNDER AXIAL SYMMETRIC TEMPERATURE FIELD

SUMMARY

Thermal stresses in a body due to inner heat sources play a very important role in many engineering designs and operations. Processes of this kind are exemplified by the following: liberation of Joule heat by an electric current flowing through a conductor; volumetric liberation of heat from the heat-liberating elements of atomic reactors as a consequence of deceleration of fission products of the atomic fuel, and of moderation of neutron flux; liberation or absorption of heat during many chemical reactions, etc.

When investigating heat transport in such cases, it is essential to know the intensity of volumetric heat liberation (absorption) which is represented quantitatively by the capacity of heat sources $\dot{q}_v$, W/m³. If $\dot{q}_v$ is positive, the body is said to have positive inner sources. A negative $\dot{q}_v$ signifies the presence of a heat sink.

It is well known that the residual stresses can significantly affect the properties and performance of the material. Therefore, it is essential to determine the level of residual stresses. Furthermore, an elastic-plastic stress analysis is necessary to improve the low cycle fatigue life of the material.

The material behaviour is assumed to be linear isotropic, homogenous, linear strain hardening and effect of orthotropy is ignored. A linear work-hardening constitutive law is used to represent the stress-strain relation in the plastic region. The linear work-hardening law for a linear isotropic hardening material is given by

$$\sigma_y = \sigma_0(1 + \eta \epsilon_{eq})$$

where σ_y is the yield stress, σ_0 is the initial yield stress, η is the hardening parameter and ϵ_{eq} is the equivalent plastic strain.

The material properties Young's modulus E , Poisson's ratio ν , initial yield stress σ_0 , coefficient of thermal expansion α and thermal conductivity of k are assumed to be independent of temperature.

Total strains are decomposed into elastic, plastic and thermal components. The stress-strain relations are written as

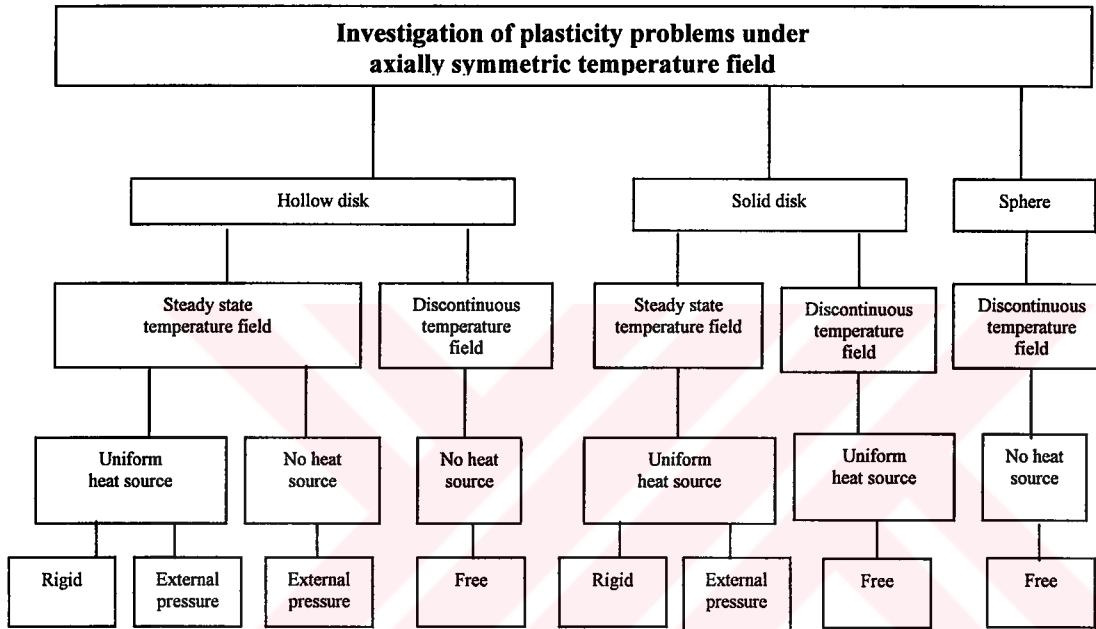
$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p + \alpha T$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p + \alpha T$$

where e and p denote the elastic and plastic components, respectively.

The present analysis is based on Tresca's yield condition, its associated flow rule and linear strain hardening material behaviour. Closed form solutions for stresses and radial displacement are obtained.

The plasticity problems investigated in this study are given in the following scheme:



In the second section, an elastic-plastic hollow disk under steady-state temperature field and different boundary conditions is considered. The hollow disk with uniform heat source for two different boundary conditions is investigated. In the first case, the external pressure condition, and in the second case, rigid body condition assumptions are considered.

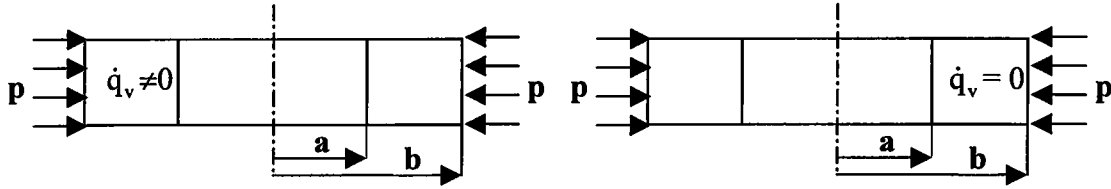
Furthermore, in the first case, the results obtained are compared with the results of the hollow disk without heat source.

Considering the elastic solution, possible plastic and elastic regions that can be distinguished are as follows:

- a. plastic region, $\sigma_z(=0) > \sigma_r > \sigma_\theta$, $a < r < r_1$
- b. elastic region, $r_1 < r < b$.

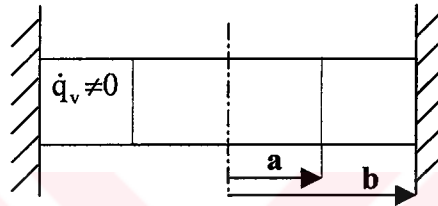
In the above cases, plastic flow is governed by the yield condition $\sigma_\theta = -\sigma_y$. Plastic flow spreads from inner surface.

It is seen that under the boundary conditions $\sigma_r(a)=0$ and $u(b)=0$ the variation of the elastic-plastic interface radius with H is not important.



First case

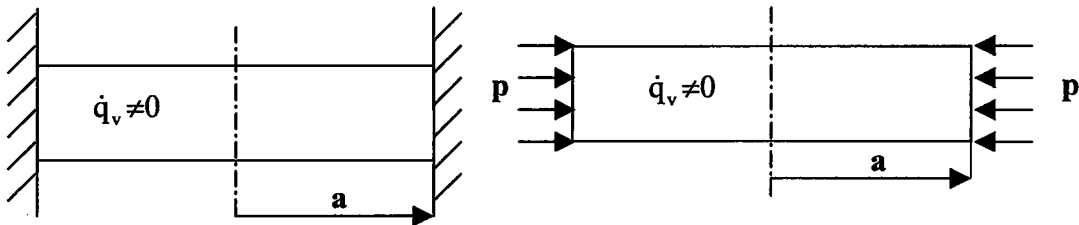
Second case



Third case

The cases investigated in the second section.

In the third section an elastic-plastic solid disk under steady-state temperature field due to uniform heat source and two different boundary conditions is considered.



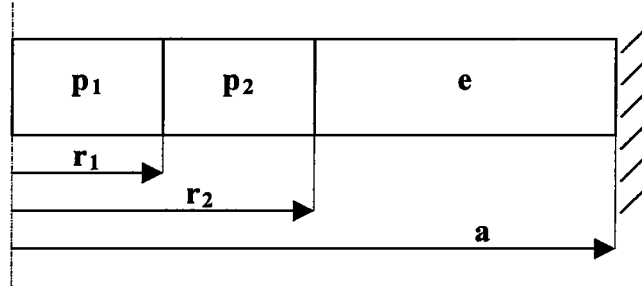
First case

Second case

The cases investigated in the third section.

In the first case (i.e., $u(a)=0$) considering the elastic solution, these are the possible plastic and elastic regions that can be distinguished:

- Inner plastic region $\sigma_z(=0)$, $\sigma_\theta = \sigma_r$, $0 < r < r_1$
- Intermediate plastic region $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta > \sigma_r$ $r_1 < r < r_2$
- Elastic region $r_2 < r < a$.

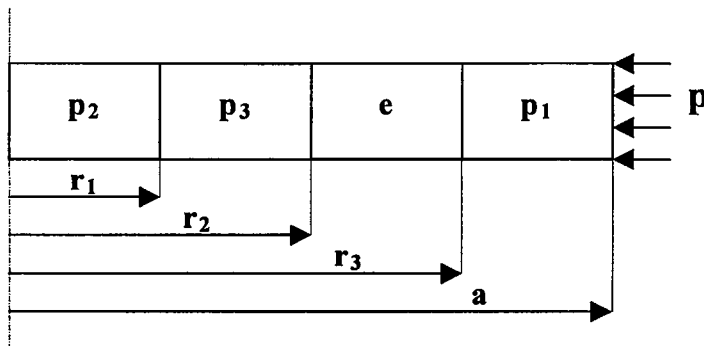


Sketch of the elastic-plastic regions in the first case.

Plastic deformations in the inner and intermediate regions are governed by the yield conditions, $-\sigma_y = \sigma_\theta = \sigma_r$ and $-\sigma_y = \sigma_r$, respectively.

In the second case (i.e., $\sigma_r(a) = -p$), four regions can be distinguished as possible plastic and elastic regions considering the elastic solution in the general case. These regions are:

- Outer plastic region $\sigma_z(=0)$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$, $r_3 < r < a$
- Inner plastic region $\sigma_z(=0)$, $\sigma_\theta = \sigma_r$, $0 < r < r_1$
- Intermediate plastic region $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta > \sigma_r$, $r_1 < r < r_2$
- Elastic region $r_2 < r < r_3$.



Sketch of the elastic-plastic regions in the second case.

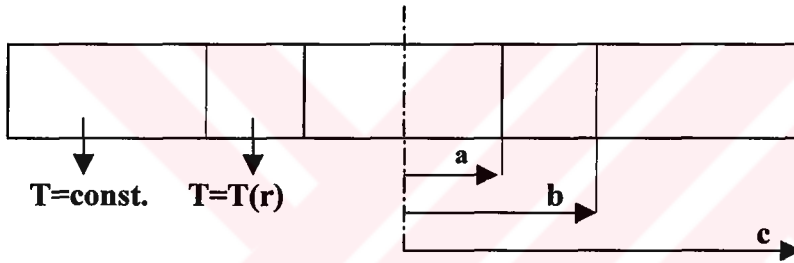
Plastic deformations in inner, intermediate and outer regions are governed by the yield conditions, $-\sigma_y = \sigma_r = \sigma_\theta$, $-\sigma_y = \sigma_r$ and $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y$, respectively. The validity of the

present general solution is discussed. It is necessary to note that the analysis is not valid for perfectly plastic material behaviour ($H=0$).

In the fourth section, some discontinuous temperature fields are considered. Firstly, the elastic-plastic stress distribution in the plane stress state, secondly the spherical elastic-plastic stress distribution are investigated.

In the first case, the temperature field of the hollow disk consists of an inner part with steady-state heat conduction equation and an outer part where the temperature is kept constant. The temperature distribution is given by

$$T = \begin{cases} \frac{T_o}{\log \frac{a}{b}} \log \frac{r}{b} & a < r < b \\ T_o & b < r < c \end{cases}.$$

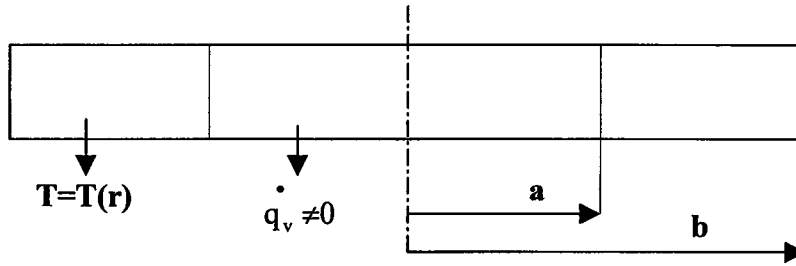


Sketch of discontinuous temperature fields in hollow disk.

In this case plastic flow is governed by the yield condition $\sigma_\theta = -\sigma_y$. Plastic flow spreads from the inner surface.

In the second case, the temperature field of the solid disk consists of a core with uniform heat source and an outer part where the temperature field is governed by the steady-state heat conduction equation. The surface of the disk is kept at constant reference temperature. The temperature distribution is given by

$$T = \begin{cases} T_a + \frac{\dot{q}_v(a^2 - r^2)}{4k} & 0 < r < a \\ \frac{T_a}{\log \frac{a}{b}} \log \frac{r}{b} & a < r < b \end{cases}.$$

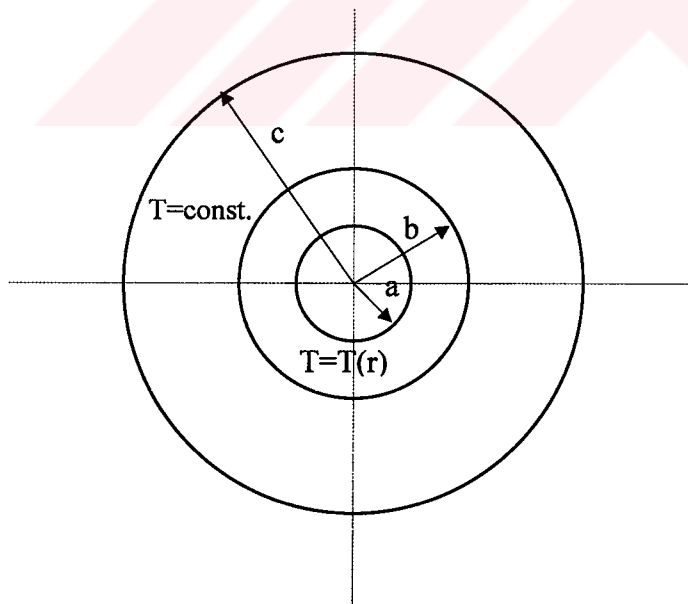


Sketch of discontinuous temperature fields in solid disk.

In this case, plastic flow is governed by the yield condition $\sigma_y = \sigma_\theta - \sigma_r$. Plastic flow spreads from intermediate surface. The validity of the present solution is discussed.

In the third case, a hollow sphere is considered. The temperature field of the sphere consists of an inner part with steady-state heat conduction equation and an outer part where the temperature is kept constant. The temperature distribution is given by

$$T = \begin{cases} T_b + \frac{T_a - T_b}{1 - \frac{b}{a}} \left(1 - \frac{b}{r}\right) & a < r < b \\ T_b & b < r < c \end{cases}.$$



Sketch of discontinuous temperature fields in sphere.

In this case, plastic flow is governed by the yield condition $-\sigma_y = \sigma_\theta - \sigma_r$. Plastic flow spreads from inner surface. The validity of the present solution is discussed briefly.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 ÇALIŞMANIN KONUSU, AMACI VE BAŞLICA VARSAYIMLAR

Eksenel simetrik sıcaklık alanı etkisindeki elastik-plastik cisimlerin gerilme ve şekil değiştirmeleri düzlem gerilme ve şekil değiştirme varsayımları altında incelenebilmektedir. Plastik şekil verme işlemlerinde (çekme, haddeleme, dövme v.b) çok büyük plastik şekil değişimleri ortaya çıktığından elastik şekil değiştirmeler genellikle gözardı edilebilmektedir. Bununla beraber makina mühendisliğinde karşılaşılan bir çok uygulamalarda elastik şekil değişimleri gözardı edilemeyecek değerlere ulaşırlar. Mükemmel plastik davranış varsayımına göre kararlı sıcaklık alanı etkisindeki disk, silindir ve küredeki gerilme ve şekil değiştirmeler iyi bilinmektedir. Bu incelemelerde serbest sınır koşulları yanında iç ve dış basınç etkileri de gözönüne alınmıştır. Bunun yanında gerilme ile birim şekil değiştirme arasındaki bağıntıyı Ramberg-Osgood ifadesine göre belirleyerek sayısal çözümler elde etmek yoluna da gidilmiştir.

Eksenel simetrik sıcaklık alanı halinde ısı üretiminin varlığının ayrı bir önemi ve etkisi bulunmaktadır. Buna ilişkin geniş uygulama alanı bulunan bazı iyi bilinen örnekler vermek gerekirse içinden elektrik akımı geçen bir iletkenin açığa çıkan ısı; nükleer reaktörlerde bölünme sonucu açığa çıkan ısı ve bir çok kimyasal reaksiyonlarda yutulan veya açığa çıkan ısı söylenebilir. Bu tip ısı iletimleri incelenirken, birim hacimde açığa çıkan veya yutulan ısıнын büyüklüğünün bilinmesi önemlidir. Genel olarak noktasal, doğrusal, yüzeysel ve hacimsel ısı kaynaklarından söz edilebilmektedir.

Gerek üretim aşaması, gerekse değişik çalışma koşulları ve aralıkları göz önüne alındığında ortaya çıkan artık gerilmelerin büyüklüğüne bağlı olarak özellikle malzemenin dinamik etkilere dayanımı ve kırılma davranışı önemli ölçüde etkilenmektedir. İstenilen çalışma koşullarında ısı üretiminin artırılabilmesi, gerekli plastik şekil değişimine olanak sağlanması ile gerçekleştirilebilir. Böylece yorulma ömrünü uzatmak olanakları da ortaya çıkartılabilir. Bunun dışında özellikle havacılık ve uzay ile ilgili uygulamalarda ağırlıktan kaçınmak için plastik şekil değişiminin istenilen biçimde gerçekleştirilebilmesi önemlidir. Günümüzde serbest pazar koşullarının zorlaması ile, çok daha kaba endüstri uygulamalarında bile daha etkin tasarım sağlamakta plastik şekil değişiminin önemli bir yeri bulunmaktadır.

Burada kararlı eksenel simetrik sıcaklık alanı altında genellikle ısı üretiminin varlığı da göz önüne alınarak düzlem gerilme varsayımı ile farklı sınır koşullarında elastik - doğrusal olarak pekleşen davranış hali incelenecektir. Her ne kadar rijit plastik davranış halinde genel bir yasa ile pekleşen, yani akma gerilmesi ile şekil değiştirme arasındaki ilişkinin doğrusal olmadığı halde kapalı çözümler bulmak mümkün olsa da yukarıda açıklanan neden ile bu çözüm burada iyi sonuç vermeyecektir. Kolay anlaşılabilir ve etkin çözümler elde etmek için Tresca akma koşulu ve akış kuralları göz önüne alınacaktır. Malzemenin pekleşmesinin doğrusal olduğu varsayılacaktır. Bu varsayım kapalı çözümler bulmaya olanak sağlamaktadır. Ayrıca bu yaklaşımın çok aykırı olmadığı, bazı malzeme davranışlarının belirli aralıklarda bu tanıma çok uygun düştüğü de gözlemlerden anlaşılmıştır. Bu varsayım ile genel hal için bile en azından bir ön bilgi kazanılarak genel gidişat kestirilebilecektir.

Göz önüne alınan sıcaklık alanlarının malzemenin elastiklik modülü, Poisson oranı, akma gerilmesi, malzemenin genleşme katsayısı gibi fiziksel büyüklüklerinin değişimleri üzerinde bir etkileri olmadığı, dolayısı ile bunların sabit kaldıkları düşünülecektir. Daha önce yapılan çalışmalarda çok üzerinde durulmayan rijit sınır koşullarının varlığı da göz önüne alınacaktır. Böylece elde edilecek çözümlerin uygulamada karşılaşılabilecek değişik sorunların çözümüne en azından bir yol gösterici olacağı da beklenebilir.

1.2 KONU İLE İLGİLİ BAZI ÖNEMLİ ÇALIŞMALAR

Pekleşme davranışı gözönüne alınarak iç, dış basınçlar ve sıcaklık etkisindeki elastik - plastik silindir hali ayrıntılı bir şekilde Bland [1] tarafından incelenmiştir. Sıcaklık farkından doğan eksenel simetrik sıcaklık alanında, düzlemsel şekil değiştirme hali için Tresca hipotezi ve akış kuralları ile kapalı biçimde çözümler elde edilmiştir. Bland bu kapalı çözümlere malzemenin plastik davranışındaki pekleşmesinin doğrusal olduğu varsayımı ile ulaşılabilmesine, genel halde ise (pекleşmenin doğrusal olmaması) karşılaşılan integralin sayısal olarak çözülebileceğine dikkat çekmiştir. Bu temel çalışmada ayrıntılı sayısal sonuçlar sunulmuş ve artık gerilmeler de hesaplanmıştır. Kammash ve diğer yazarlar [2] ısı kaynağından doğan eksenel simetrik sıcaklık alanındaki elastik - plastik silindir problemini düzlem şekil değiştirme hali için çözmüşlerdir. Bu çalışmanın amacının uygulamada karşılaşılan bir nükleer yakıt elemanının davranışını incelemek olduğu belirtilmiştir. Aynı problem Beyer [3] tarafından genelleştirilmiş düzlem şekil değiştirme hali için yeniden çözülmüştür. Benzer konuda Ishikawa [4] bazı kolaylaştırıcı varsayımları kullanarak, pekleşme etkisi ve malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olarak değişimlerini de hesaba katarak düzlem şekil değiştirme hali için çözümler vermiştir. Kennedy ve diğer yazarlar [5] göz önüne aldıkları yakıt elemanını Mohr - Coulomb akma koşuluna uygun bir elastik - plastik ortam olarak düşünmüşlerdir. Yalnızca ısı üretiminden doğan eksenel simetrik sıcaklık alanı ve dış basınç etkisinden ortaya çıkan gerilme ve şekil değiştirme dağılımı düzlem şekil değiştirme halinde kapalı biçimde elde edilmiştir. Isı üretiminden doğan sıcaklık dağılımı, kaynak [6]'da belirtildiği gibi biraz değişik bir şekilde

$$T = T_i - \frac{T_i - T_o}{r_o^2} \cdot r^2 \quad (1.1)$$

olarak alınmıştır. Burada T_i merkezdeki, T_o ise çevredeki sıcaklık ve r_o yakıt elemanının dış çapıdır.

Dastidar ve Ghosh [7] bir ısı kaynağından oluşan simetrik sıcaklık alanı etkisinde bulunan dolu küredeki gerilme dağılımını sayısal olarak bulmuşlardır. Bu

çalışmada kürenin yapıldığı malzemenin pekleşme özelliği gösterdiği varsayılmış ve bu hale uygun olarak gerilme ile birim şekil değiştirme ilişkisi Ramberg - Osgood bağıntısına göre ifade edilmiştir. Ayrıca sınır hallerde elastik ve mükemmel plastik hallere karşı gelen çözümlerin elde edildiğine de işaret edilerek böylece sayısal çözümün doğruluğunun da sağlandığı belirtilmiştir. Kaynak [8]'de Ghosh değişken kalınlıklı dönen bir diskte oluşan enine titreşimler üzerine ısı kaynağının etkisini düzlem gerilme hali için kapalı biçimde elde ettiği çözüm ile incelemiştir.

Sıcaklık alanının yorulma davranışı üzerindeki bilinen önemli etkisinden hareketle Gamer [9] aksenal simetrik ve zamana bağlı sıcaklık alanındaki elastik - mükemmel plastik davranış gösteren bir sonsuz disk incelemiştir. Bu çalışma düzlem gerilme varsayımı ile Tresca hipotezi ve akma kurallarına dayanmıştır. Aynı problem daha sonra Mack ve Gamer [10-11] tarafından daha gerçekçi bir şekilde sonlu dairesel disk için yeniden incelenmiştir. Gamer [12] aksenal simetrik sıcaklık alanını bir çekirdek disk içerisinde sabit ve çevrede 0 °C olarak düşünmüş, böylece

$$T = \left\{ \begin{array}{ll} T_o & 0 < r < a \\ \frac{T_o}{\log \frac{a}{b}} \log \frac{r}{b} & a < r < b \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

şeklinde olarak, plastik gerilme dağılışı düzlem gerilme hali için, Tresca hipotezi ve akma kurallarını kullanarak incelemiştir. Orçan ve Gamer [13] aynı aksenal simetrik sıcaklık alanını esas alarak elastik - mükemmel plastik davranış gösteren bir dolu silindirdeki gerilme ve yerdeğişimleri kapalı bir biçimde elde etmişlerdir. Yazarlar gözönüne aldıkları bu sıcaklık alanının yüksek güç ileten elektrik bağlantılarındaki sıcaklık dağılımı ile benzerlik gösterdiğine işaret etmişlerdir. Bu çalışmada elde edilen kesin çözümler düzlem şekil değiştirme varsayımı altında, Tresca hipotezi ve akma kurallarına göre gerçekleştirilmiştir. Elastiklik modülü, Poisson oranı, akma gerilmesi ve sıcaklık genleşme katsayısı gibi malzeme özelliklerinin söz konusu sıcaklık alanından etkilenmedikleri de gerçeğe uygun olarak varsayılmıştır. Berest [14] mükemmel davranış gösteren sonsuz bir ortamda, küresel simetrik sıcaklık alanı etkisinde plastik bölgelerin oluşumunu incelemiştir.

Gamer [15] daha önceden silindirik koordinatlarda gözönüne aldığı aksenal simetrik sıcaklık alanına benzer bir sıcaklık alanını küresel koordinatlar için düşünmüştür. Buna göre küresel bir çekirdek içerisinde sabit sıcaklıkta ve çevrede 0 °C deki sıcaklık alanı

$$T = \begin{cases} T_0 & 0 < r < a \\ \frac{T_0}{\frac{b}{a} - 1} \left(\frac{b}{r} - 1 \right) & a < r < b \end{cases} \quad (1.3)$$

şeklinde seçilmiştir. Bu sıcaklık alanı etkisinde plastik bölgelerin gelişimi genel pekleşme hali için Tresca hipotezi ve akma kurallarına göre incelenmiştir. Düzlem gerilme hali [16] ve küresel simetri halinde [17] bir çekirdek içinde sıcaklık T_0 , bu çekirdek dışında 0 °C alınarak, doğrusal pekleşme varsayımı ile Tresca hipotezi ve akma kurallarına göre elastik - plastik gerilme dağılışı incelenmiştir. Kovacs [18] elastik - mükemmel plastik davranışlı bir sıkı geçme sisteminde sıcaklık etkisini gözönüne almıştır. Kaynak [19]'un sonuçlarına dayanarak akma gerilmesinin

$$Y(r) = Y_0 - m T(r) \quad (1.4)$$

şeklinde sıcaklıktan etkilendiğini varsaymıştır. Bu ifadede m malzemeye bağlı olarak değişen bir katsayıyı göstermektedir. Kovacs, sıcaklık farkının değişik değerlerine bağlı olarak plastik ve elastik bölgelerin oluşumunu incelemiştir. Mack ve Bengeri [20] içi dolu bir mil üzerine sıkı geçme ile bağlanan elastik - mükemmel plastik diskteki sıcaklık alanını daha gerçeğe uygun olarak karasız varsaymışlardır. Ayrıca önceki çalışmada olduğu gibi sıcaklık etkisinden en çok akma gerilmesinin etkilenmesi nedeniyle, Tresca akma koşulunu

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 (1 - \beta T) \quad (1.5)$$

şeklinde ifade etmişlerdir. Bu ifadede β malzemeye bağlı olarak değişen bir katsayıyı göstermektedir. Kararsız sıcaklık alanı Bessel fonksiyonları cinsinden ifade edilip, çözüm Tresca hipotezi ve akma kurallarına göre gerçekleştirilmiştir. Bengeri ve

Mack [21] aynı problemi bu defa içi boş mil hali için yeniden incelemişlerdir. Orçan [22] elastik - mükemmel plastik silindirde ısı üretiminden doğan eksenel simetrik sıcaklık alanı altında gerilme ve yerdeğiştirme dağılımlarını genelleştirilmiş düzlem şekil değiştirme hali için incelemiştir. Elde edilen kesin çözüm, Tresca hipotezi ve akma kurallarına dayanmaktadır. Ayrıca malzemenin elastiklik modülü, Poisson oranı, akma gerilmesi ve sıcaklık genleşme katsayısı gibi özelliklerinin sıcaklık alanından etkilenmedikleri varsayılmıştır. Bu çalışmada daha önce yapılmış benzer çalışmalarda görülmeyen plastik bölgelerin, ısı üretiminin belirli değerlerinde ortaya çıktıklarına dikkat çekilmiştir.

1.3 BAZI ÖNEMLİ GENEL KAVRAMLAR

1.3.1 Gerilme ve Şekil Değiştirme İfadeleri

Gözlemlere dayanarak, plastik davranış için gerilme ve şekil değiştirme bağıntılarını veren değişik ifadeler ortaya atılmıştır. Bu ifadelerden yaygın olarak kullanılan bazıları şunlardır [23]:

$$\sigma = \sigma_0 + m\epsilon^n \quad \text{Ludwik} \quad (1.6)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + k \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n \quad \text{Ramberg ve Osgood} \quad (1.7)$$

$$\sigma = c \cdot (a + \epsilon)^n \quad 0 \leq n \leq 1 \quad (1.8)$$

$$\sigma = \sigma_0 \tanh \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^n \quad (1.9)$$

Verilen bu ifadelerde ϵ_0 akmayı başlatan şekil değişimi, σ_0 akma başlangıç gerilmesi, E elastiklik modülü ve m , n , k , a , c ise sabitlerdir. Şekil değişiminin plastik kısmını aynı zamanda keyfi olarak seçilen bir polinomla da tanımlamak mümkündür:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_m\varepsilon^m & \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Elastik, doğrusal pekleşen malzeme davranışı halinde a_2 'den itibaren tüm katsayılar sıfır olmaktadır. Bu çalışmada doğrusal pekleşen malzeme için kullanılan gerilme ifadesi

$$\sigma_y = \sigma_0(1 + \eta\varepsilon_{eq}) \quad (1.11)$$

olarak alınmıştır. Burada

σ_y : Akma gerilmesi

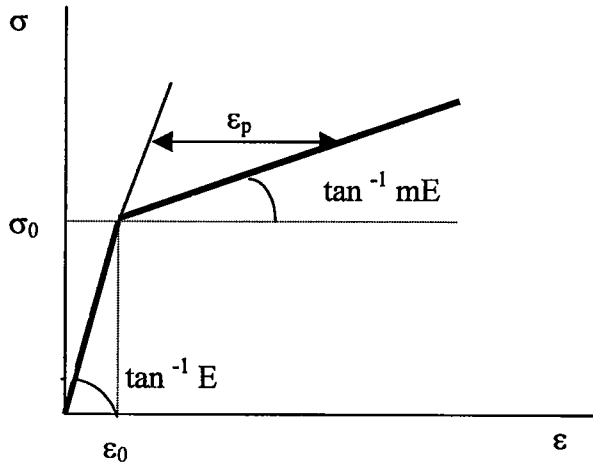
σ_0 : Başlangıç akma gerilmesi

η : Malzemeye bağlı boyutsuz katsayı

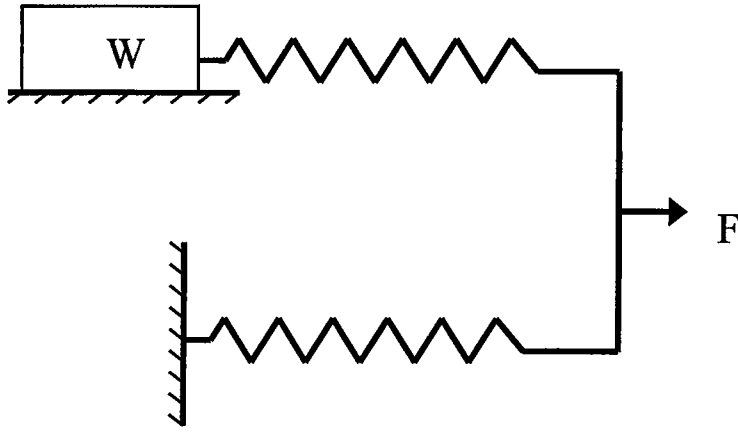
ε_{eq} : Eşdeğer plastik şekil değişimi

değerlerini göstermektedir. $\eta \rightarrow 0$ hali mükemmel plastik davranışa, $\eta \rightarrow \infty$ ise mükemmel elastik davranışa karşı gelmektedir.

Elastik doğrusal pekleşen malzemeye ait gerilme-şekil değiştirme eğrisi Şekil 1.1'de, dinamik modeli ise Şekil 1.2'de görülmektedir.



Şekil 1.1 Elastik doğrusal pekleşen malzemeye ait gerilme-şekil değiştirme eğrisi



Şekil 1.2 Elastik doğrusal pekleşen malzeme davranışının dinamik modeli.

Plastisite teorisinde sık kullanılan kavramlardan biri de plastik iş kavramıdır. Şekil değiştirme sırasında birim hacim için yapılan toplam iş aşağıdaki gibidir:

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} dW &= \sigma_{ij} (d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p) \\ &= \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e + \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \\ &= dW^e + dW^p \end{aligned} \quad (1.13)$$

Bu ifadedeki ($dW^e \equiv \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^e$) elastik enerji bileşeni tersinirdir. Diğer bileşen ise plastik iş olarak tanımlanır ve asal gerilmeler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$dW^p = \sigma_1 d\epsilon_1^p + \sigma_2 d\epsilon_2^p + \sigma_3 d\epsilon_3^p. \quad (1.14)$$

Aynı ifade yukarıda tanımlanan eşdeğer plastik birim şekil değiştirme cinsinden de aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$dW^p = \sigma_y d\epsilon_{eq}. \quad (1.15)$$

1.3.2 Isıl İfadeler

İç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan, k ısı iletim sayısına sahip, uzun bir silindir göz önüne alınsın. Bu silindirde, birim hacimde üretilen ısı miktarı $\dot{q}_v$ ile gösterilirse, bundan dolayı ortaya çıkan eksenel simetrik sıcaklık dağılımı

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}_v}{k} = 0 \quad (1.16)$$

şeklindedir. Bu denklem çözülerek sıcaklık ifadesi (silindir halinde) aşağıdaki gibi elde edilir [6, 24]:

$$T = -\frac{\dot{q}_v r^2}{4k} + A \ln r + B. \quad (1.17)$$

Buradaki A ve B integral sabitleri sınır koşullarından belirlenirler.

İçi dolu silindir halinde A integral sabiti sıfır olur ve silindir dış yüzeyindeki sıcaklık T_0 olarak alındığında sıcaklık dağılımı ifadesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$T = -\frac{\dot{q}_v (a^2 - r^2)}{4k} + T_0. \quad (1.18)$$

Küresel simetrik sıcaklık alanı etkisindeki iç yarıçapı a , dış yarıçapı b olan bir küredeki sıcaklık dağılımı

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}_v}{k} = 0 \quad (1.19)$$

diferansiyel denklemi yardımıyla

$$T = -\frac{\dot{q}_v r^2}{6k} + \frac{A}{r} + B \quad (1.20)$$

şeklinde bulunur [6, 24].

1.4 GERİLME İFADELERİNİN ELDE EDİLMESİ

Dış kuvvetler etkisindeki bir cisimden çıkarılan bir dikdörtgenler prizması şeklindeki elemanda kartezyen koordinatlarda aşağıdaki denge denklemleri yazılabilir [25]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= -F_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= -F_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= -F_z\end{aligned}\quad (1.21)$$

Burada F_x , F_y , F_z birim hacim başına kütle kuvvetlerini göstermektedir.

$\partial \tau_{xy} = \partial \tau_{yx}$, $\partial \tau_{xz} = \partial \tau_{zx}$, $\partial \tau_{zy} = \partial \tau_{yz}$ olduğu göz önüne alınırsa, tansör notasyonu kullanarak,

$$\sigma_{ij,i} = -F_j \quad (1.22)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.23)$$

yazmak mümkündür. Öte yandan birim şekil değiştirme ifadeleri

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.24)$$

şeklinde verilir. Burada u , v ve w , sırasıyla, x , y ve z doğrultusundaki yer değiştirmelerdir.

Düzlem gerilme hali için ve kutupsal koordinatlarda denge denklemi, kütle kuvvetlerinin sıfır olması halinde

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1.25)$$

şekline dönüşür.

Radyal ve teğetsel doğrultudaki şekil değiştirmeler ise aşağıdaki gibi olurlar:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (1.26)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (1.27)$$

Şekil değiştirmelerin elastik, plastik ve ısıl olmak üzere 3 bileşeni mevcuttur:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p + \alpha T \quad (1.27)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p + \alpha T \quad (1.28)$$

1.4.1 Elastik Gerilmeler

Düzlem gerilme halinde, gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha T \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha T \quad (1.30)$$

ile verilirler [25].

Denge denkleminde teğetsel gerilme, radyal gerilme cinsinden yazılıp, gerilme-birim şekil değiştirme bağıntılarında yerine konarak, ve şekil değiştirmeler cinsinden yazılan

$$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_\theta)}{dr} \quad (1.31)$$

uygunluk denklemi kullanılarak, elastik halde radyal gerilme cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = -E\alpha r \frac{dT}{dr} \quad (1.32)$$

Bu denklemin homojen çözümü

$$\sigma_{rh} = A + \frac{B}{r^2} \quad (1.33)$$

olup, özel çözüm $T=T(r)$ sıcaklık dağılımı ifadesine bağlı olarak hesaplanır.

Teğetsel gerilme ve radyal yer değiştirme ifadeleri ise denge denklemi ve şekil değiştirme bağıntıları yardımıyla hesaplanırlar.

1.4.2 Plastik Gerilmeler

1.4.2.1 Tresca Hipotezi

Plastik hale geçmede etkin olan faktörü en büyük kayma gerilmesi olarak alan bu hipoteze göre,

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (1.34)$$

olmak üzere, plastik akma

$$\sigma_y = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.35)$$

denklemine göre gerçekleşmektedir. Ortanca gerilmenin akmada hiçbir etkisi olmayıp plastik şekil değiştirmeler, ilgili akış kuralına göre

$$d\epsilon_1^p = -d\epsilon_3^p > 0, \quad d\epsilon_2^p = 0 \quad (1.36)$$

olurlar.

$$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 \quad (1.37)$$

olması halinde, akış kuralı

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_y \quad (1.38)$$

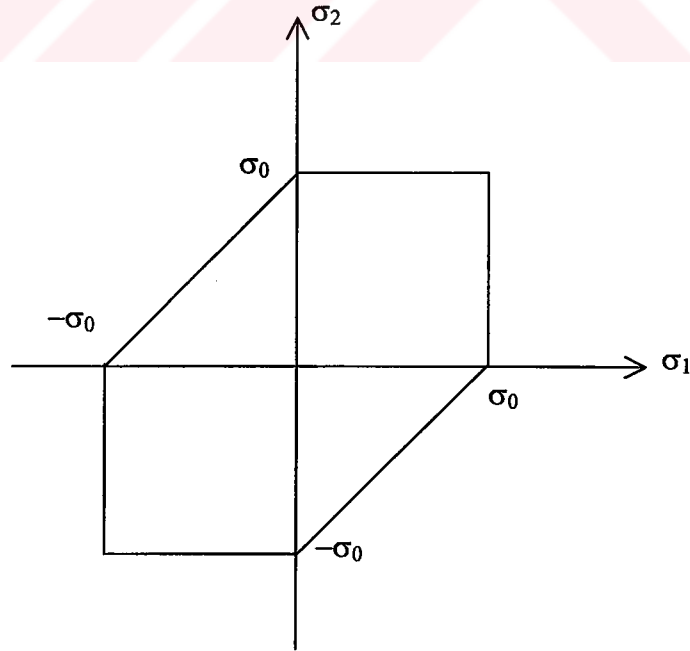
ve plastik şekil değiştirmeler

$$d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p = 0 \quad (1.39)$$

olurlar [26]. Burada

$$d\epsilon_1^p > 0, d\epsilon_2^p > 0, d\epsilon_3^p < 0. \quad (1.40)$$

Düzlem gerilme halinde, sınır yüzeyin σ_1, σ_2 düzlemiyle olan ara kesiti Şekil 1.3'deki Tresca altıgeninde gösterilmektedir.



Şekil 1.3 Tresca altıgeni

1.4.2.2 Plastik Gerilmelerin Hesabı

Düzlem gerilme halinde

$$\sigma_{\theta} > \sigma_z (= 0) > \sigma_r \quad (1.41)$$

ile verilen gerilme durumu için akış

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \sigma_y \quad (1.42)$$

ifadesiyle meydana gelir. Doğrusal pekleşen malzeme için akma gerilmesi ve eşdeğer birim şekil değiştirme arasındaki bağıntı

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 + \eta \epsilon_{eq}) \quad (1.43)$$

şeklindedir. Plastik işlerin eşitliği

$$\sigma_y \epsilon_{eq} = \sigma_r d\epsilon_r^p + \sigma_{\theta} d\epsilon_{\theta}^p + \sigma_z d\epsilon_z^p, \quad (1.44)$$

akış kuralı ve düzlem gerilme koşulu

$$d\epsilon_{\theta}^p = -d\epsilon_r^p, \quad \sigma_z = 0 \quad (1.45)$$

kullanılarak eşdeğer plastik birim şekil değiştirme

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_{\theta}^p \quad (1.46)$$

şeklinde elde edilir. (1.42) ve (1.46) ifadeleri (1.43)'de yerine konarak

$$\epsilon_{\theta}^p = \epsilon_{eq} = \frac{\sigma_{\theta} - \sigma_r}{\sigma_0 \eta} - \frac{1}{\eta} \quad (1.47)$$

bulunur.

Gerilmeler ve plastik birim şekil değiştirmeler, radyal gerilmeler cinsinden yazılıp, sıcaklık ifadeleri ile birlikte

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \varepsilon_r^p + \alpha T \quad (1.48)$$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) + \varepsilon_r^p + \alpha T \quad (1.49)$$

şekil değiştirme bağıntılarına yerleştirilerek ve uygunluk denklemi yardımıyla radyal gerilmeler cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{2\sigma_0}{H+1} - \frac{H}{H+1} E\alpha r \frac{dT}{dr} \quad (1.50)$$

Burada

$$H = \eta \frac{\sigma_0}{E} \quad (1.51)$$

olarak tanımlanmıştır.

Her akma durumu için diferansiyel denklem, benzer yaklaşımla hesaplanabilir.

$$\sigma_z (= 0) > \sigma_r > \sigma_\theta \quad (1.52)$$

halinde yönetici diferansiyel denklem

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{H+1} = -\frac{\sigma_0}{H+1} - \frac{H}{H+1} E\alpha r \frac{dT}{dr} \quad (1.53)$$

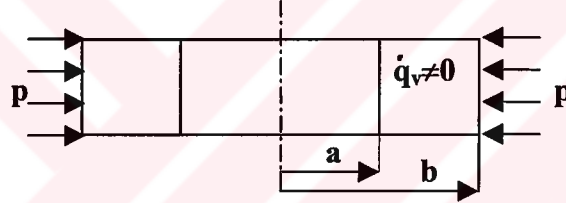
şeklinde elde edilir.

BÖLÜM 2

EKSENEL SİMETRİK SICAKLIK ALANINDA İÇİ BOŞ DİSK HALİ

2.1 DIŞ BASINCA ZORLANAN ISI KAYNAKLI İÇİ BOŞ DİSK

Burada Şekil 2.1'de gösterildiği gibi içinde ısı kaynağı bulunan, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan içi boş bir disk dış basınca zorlanması halindeki elastik-plastik davranışı ele alınacaktır. Söz konusu disk iç yüzeyinde ısı yalıtımı olduğu varsayılacaktır.



Şekil 2.1 Dış basınç etkisindeki, ısı üreten içi boş disk.

2.1.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Isı üreten bu diske ait sıcaklık dağılımı ifadesi,

$$T = A_t + B_t \ln \frac{r}{b} - \frac{\dot{q}_v r^2}{4k} \quad (2.1)$$

şeklindedir [6, 24]. İç yüzeyde ısı yalıtımı nedeniyle

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=a} = 0 \quad (2.2)$$

koşulundan ve dış yüzeydeki T_b sıcaklığı yardımıyla A_t ve B_t katsayıları hesaplanırsa, sıcaklık dağılım ifadesi

$$T = T_b + \frac{\dot{q}_v a^2}{2k} \ln \frac{r}{b} + \frac{\dot{q}_v}{4k} (b^2 - r^2) \quad (2.3)$$

şeklinde bulunur.

Söz konusu diskteki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - E\alpha \left[\frac{\dot{q}_v a^2}{4k} \ln \frac{r}{b} - \frac{\dot{q}_v r^2}{16k} \right] \quad (2.4)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} - E\alpha \left[\frac{\dot{q}_v a^2}{4k} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) - \frac{3\dot{q}_v r^2}{16k} \right] \quad (2.5)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)A - (1+\nu) \frac{B}{r^2} - E\alpha \left\{ \frac{\dot{q}_v a^2}{4k} \left[(1-\nu) \ln \frac{r}{b} + 1 \right] - \frac{(3-\nu)\dot{q}_v r^2}{16k} \right\} + E\alpha \left[T_b + \frac{\dot{q}_v a^2}{2k} \ln \frac{r}{b} + \frac{\dot{q}_v}{4k} (b^2 - r^2) \right] \quad (2.6)$$

olarak verilirler [25].

Bu ifadelerde geçen A ve B integral sabitleri

$$\sigma_r(a) = 0$$

$$\sigma_r(b) = -p$$

sınır koşullarından

$$A = -\frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left(b^2 - a^2 + 4a^2 \ln \frac{a}{b} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} - \frac{E\alpha\dot{q}_v b^2}{16k} - p \frac{b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.7)$$

$$B = \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left(b^2 - a^2 + 4a^2 \ln \frac{a}{b} \right) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} + p \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.8)$$

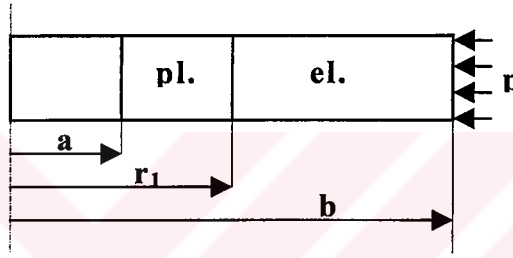
olarak bulunur.

2.1.2 Elastik-plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alınarak bu hal için olası elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. Plastik bölge, $\sigma_z(=0) > \sigma_r > \sigma_\theta$, $a < r < r_1$
2. Elastik bölge, $r_1 < r < b$

Elastik çözüme göre ayırt edilen elastik ve plastik bölgeler Şekil 2.2'de gösterilmiştir:



Şekil 2.2 Elastik-plastik haldeki bölgelerin yerleri

2.1.2.1 Plastik Bölge

Plastik akma $r=a$ 'dan dışarıya doğru

$$\sigma_\theta = -\sigma_y \quad (2.9)$$

ile yayılır. Kaynak [27] izlenerek, uygunluk denkleminde hareketle, radyal gerilme cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{H+1} = -\frac{\sigma_0}{H+1} - \frac{H}{H+1} E \alpha r \frac{dT}{dr}. \quad (2.10)$$

Bu denklem çözülerek gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = C_1 r^{t_1} + C_2 r^{t_2} - \sigma_0 + \frac{H}{8H+9} \frac{E\alpha\dot{q}_v}{2k} r^2 - \frac{HE\alpha\dot{q}_v}{2k} a^2 \quad (2.11)$$

$$\sigma_\theta = (1+t_1)C_1 r^{t_1} + (1+t_2)C_2 r^{t_2} - \sigma_0 + \frac{3H}{8H+9} \frac{E\alpha\dot{q}_v}{2k} r^2 - \frac{HE\alpha\dot{q}_v}{2k} a^2 \quad (2.12)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 + \frac{1}{H}\right) \sigma_\theta - \nu \sigma_r + \frac{\sigma_0}{H} + E\alpha T \quad (2.13)$$

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{H}{H+1}}$$

şeklinde bulunurlar.

2.1.2.2 Elastik Bölge

Elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - E\alpha \left[\frac{\dot{q}_v a^2}{4k} \ln \frac{r}{b} - \frac{\dot{q}_v r^2}{16k} \right] \quad (2.14)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} - E\alpha \left[\frac{\dot{q}_v a^2}{4k} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) - \frac{3\dot{q}_v r^2}{16k} \right] \quad (2.15)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)A - (1+\nu) \frac{B}{r^2} - E\alpha \left\{ \frac{\dot{q}_v a^2}{4k} \left[(1-\nu) \ln \frac{r}{b} + 1 \right] - \frac{(3-\nu)\dot{q}_v r^2}{16k} \right\} + E\alpha \left[T_b + \frac{\dot{q}_v a^2}{2k} \ln \frac{r}{b} + \frac{\dot{q}_v}{4k} (b^2 - r^2) \right] \quad (2.16)$$

olarak verilirler [25].

2.1.2.3 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

Elastik-plastik gerilme dağılımını tam olarak elde etmek için A , B , C_1 , C_2 integral sabitleri ile r_1 ara yarıçapını belirlemek gereklidir. Bu bilinmeyenleri bulabilmek için aşağıda sıralanan sınır koşulları kullanılabilirler:

$$\sigma_r(a)|_p = 0$$

$$\sigma_r(r_1)|_p = \sigma_r(r_1)|_e$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_p = -\sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_e = -\sigma_0$$

$$\sigma_r(b)|_e = -p$$

Burada p indisi plastik bölgeyi, e indisi ise elastik bölgeyi göstermektedir. Bu sınır koşulları kullanılarak integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{B} = \frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} \left\{ -\bar{p} + 1 - Q[4q^2(\ln x_1 + 1) - 3x_1^2 + 1] \right\} \quad (2.17)$$

$$\bar{A} = -(\bar{B} + \bar{p} + Q) \quad (2.18)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{8H(1+t_1)x_1^{t_1} \left[Qq^2 - \frac{Qq^2}{8H+9} + \frac{1}{8H} \right] + 8QHq^{t_1} \left[\frac{3x_1^2}{8H+9} - q^2 \right]}{\left[(1+t_1)x_1^{t_1}q^{t_2} - (1+t_2)x_1^{t_2}q^{t_1} \right]} \quad (2.19)$$

$$\bar{C}_1 = \left[8HQq^2 - \frac{8HQq^2}{8H+9} + 1 - \bar{C}_2q^{t_2} \right] \cdot \frac{1}{q^{t_1}} \quad (2.20)$$

Diğer taraftan boyutsuz x_1 ara yarıçapı aşağıdaki ifadeden bulunabilir:

$$\bar{C}_1x_1^{t_1} + \bar{C}_2x_1^{t_2} - 1 + \frac{8HQx_1^2}{8H+9} - 8HQq^2 - \bar{A} - \frac{\bar{B}}{x_1^2} + 4Qq^2 \ln x_1 - Qx_1^2 = 0 \quad (2.21)$$

Burada kullanılan boyutsuz ifadeler şu şekilde tanımlanmışlardır:

$$\bar{C}_1 = C_1b^{t_1}/\sigma_0, \quad \bar{C}_2 = C_2b^{t_2}/\sigma_0, \quad \bar{B} = \frac{B}{\sigma_0 \cdot b^2}, \quad \bar{A} = A/\sigma_0,$$

$$x_1 = r_1 / b, Q = \frac{E\alpha\dot{q}_v b^2}{16\sigma_0 k}, \bar{p} = p / \sigma_0, q = a/b$$

2.1.3 Sayısal Örnek

Sayısal bir örnek olarak $q=0.5$ ve $\nu = 1/3$ alarak, dış basınçla zorlanan, içi boş ve yalıtımlı diskte elastik sınırı belirleyen sınır $\bar{p}$ değerlerinin, sıcaklık farkı $\bar{T}$ 'ye bağlı olarak değişimleri Tablo 2.1'de verilmiştir. Bu tablodaki $\bar{p}$ değerlerinde plastik akma başlamaktadır.

Tablo 2.1 $q=0.5$, $\nu = 1/3$ için plastik akmayı başlatan $\bar{p}$ değerleri

$\bar{T}$	$\bar{p}$
0.1	0.35985766
0.2	0.34471532
0.3	0.32957298
0.4	0.31443063
0.5	0.29928829
0.6	0.28414595
0.7	0.26900361
0.8	0.25386127
0.9	0.23871893
1.0	0.22357658

Tablo 2.2'de ise incelenen çözüm aralığında H 'a bağlı olarak tam plastik hal sınırını belirleyen $\bar{p}$ değerleri sıralanmıştır.

Tablo 2.2 $\bar{T}=0.3$ için $\bar{p}_{lim}$ değerlerinin H 'a bağlı olarak değişimi.

H	$\bar{p}$
0.1	0.522096649
0.2	0.539936047
0.3	0.554640546
0.4	0.566969817
0.5	0.577456408
0.6	0.586484724
0.7	0.594339194
0.8	0.601234790
0.9	0.607337008
1.0	0.612775332

Değerlerin incelenmesinden, H azalırken plastik bölgenin daraldığı, buna karşılık H'n artmasıyla tam plastik hale karşı gelen dış basınç büyüklüğünün de arttığı gözlenmektedir.

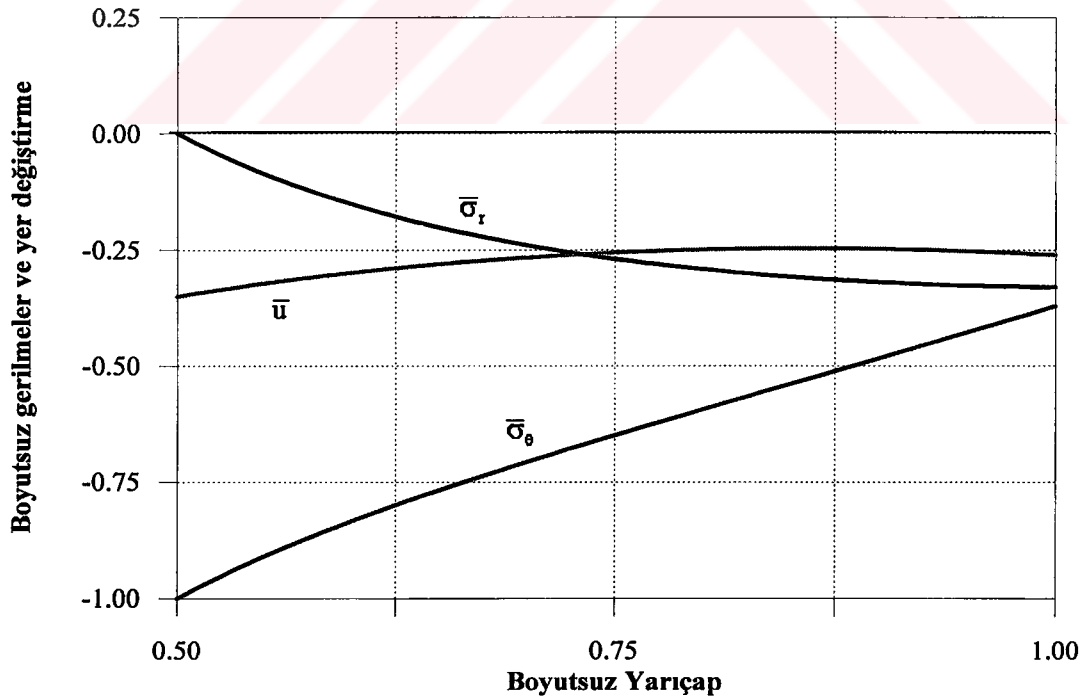
Boyutsuz sıcaklık farkını göstermek üzere

$$\bar{T} = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0}$$

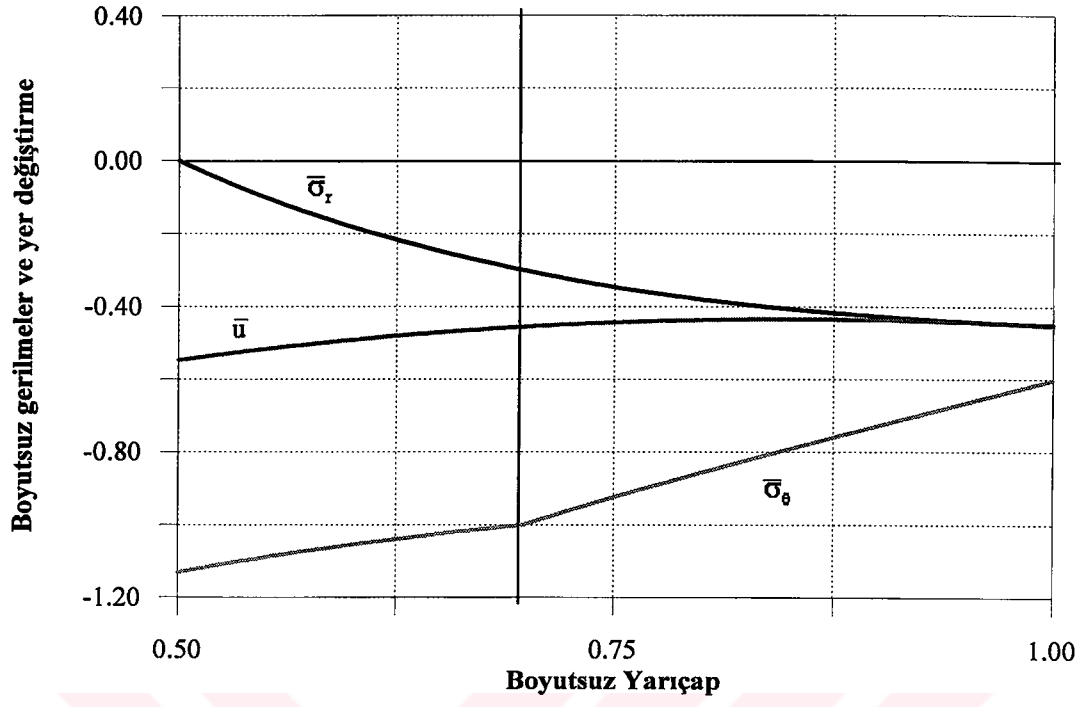
tanımlanarak, $\bar{T}=0.3$ için, elastik haldeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme diyagramları $\bar{p}=0.32957298$ için Şekil 2.3'de gösterilmiştir.

Aynı sıcaklık farkı $\bar{T}=0.3$ için, $H=0.5$ ve $\bar{p}=0.45$ için elastik-plastik gerilme dağılımları ve radyal yer değiştirme Şekil 2.4'de, tam plastik hale karşı gelen $\bar{p}=0.577456$ için çizilen dağılımlar ise Şekil 2.5'de gösterilmiştir. Diyagramlarda verilen boyutsuz yarıçap, gerilme ve yer değiştirmeler, sırasıyla,

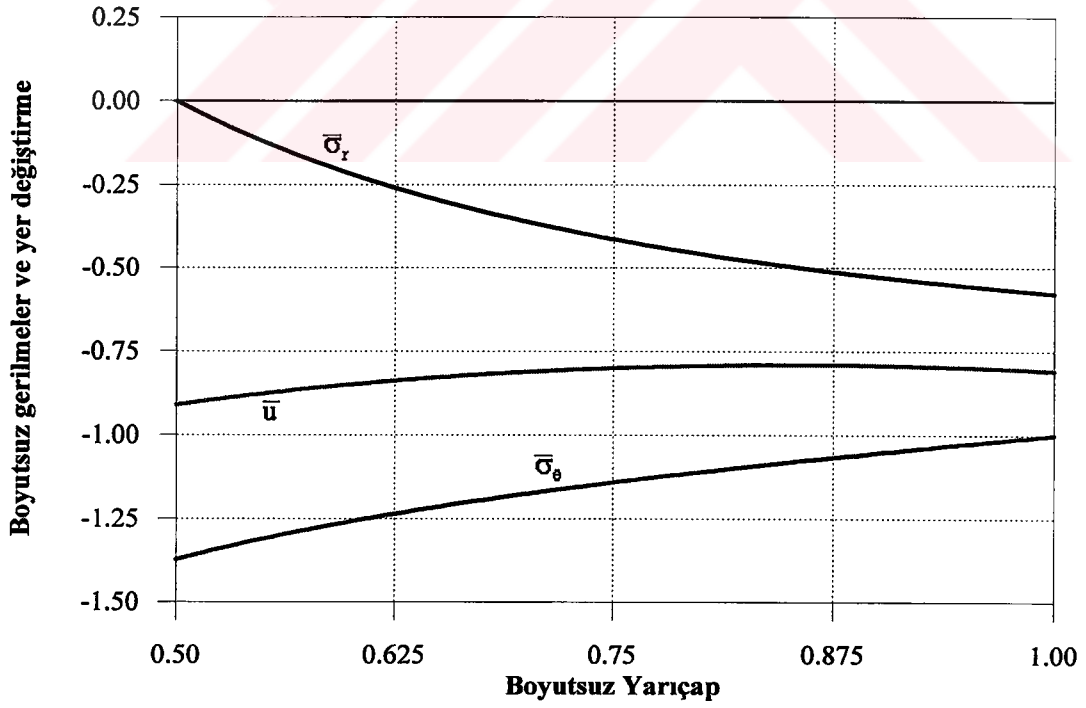
$$x = \frac{r}{b}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \quad \bar{u} = \frac{Eu}{b\sigma_0} \text{ olarak tanımlanmışlardır.}$$



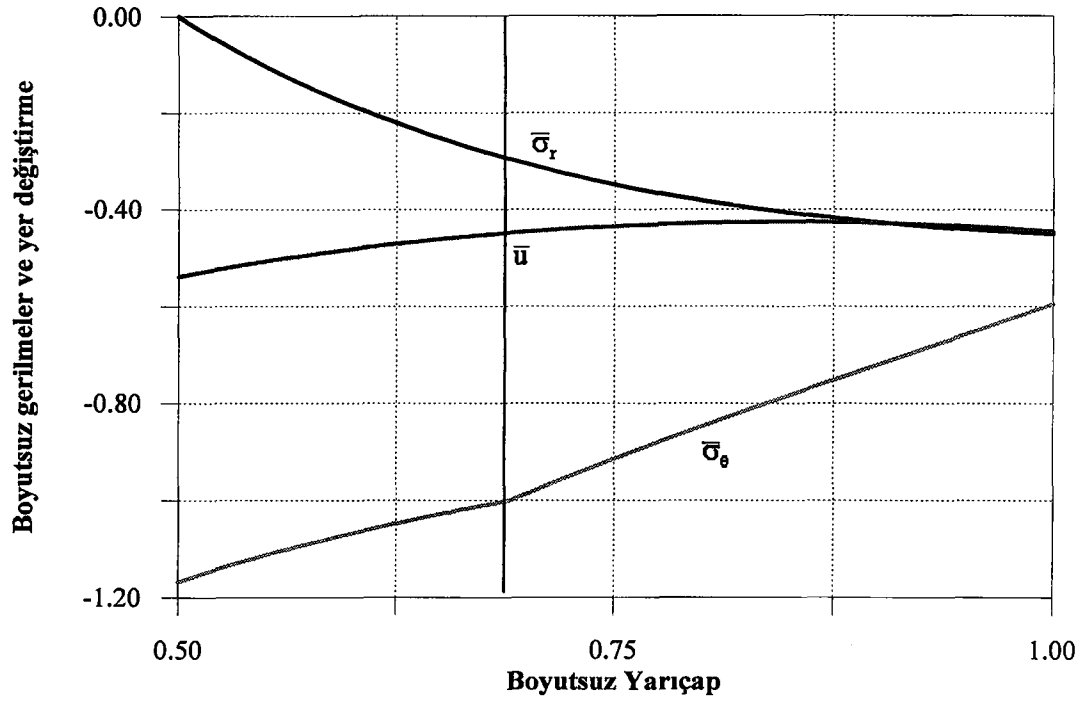
Şekil 2.3 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $\bar{p}=0.32957$ için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 2.4 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\bar{p}=0.45$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.

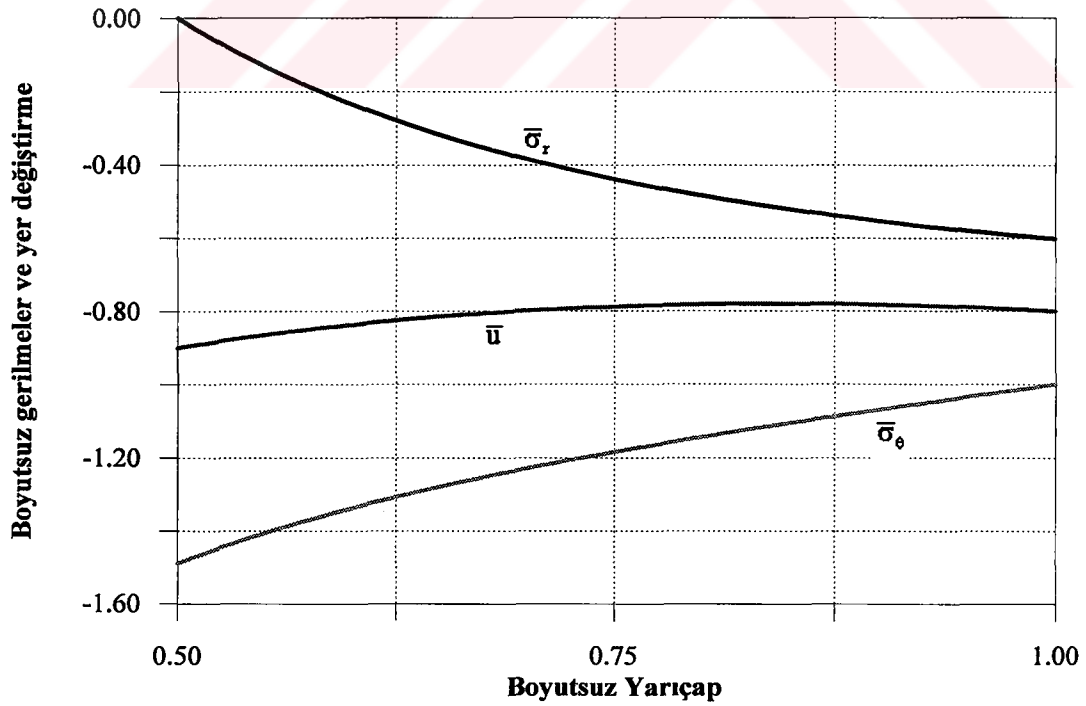


Şekil 2.5 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\bar{p}=0.577456$ için plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 2.6 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\bar{p}=0.45$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.

$H=0.8$ alındığında basıncın üst değerinin $\bar{p}=0.6012347$ olduğu görölmektedir. Şekil 2.6 ile Şekil 2.7'de ise, aynı örnek için bazı eğriler, aynı sıcaklık alanında $H=0.8$ için çizilmiştir.



Şekil 2.7 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\bar{p}=0.601234$ için plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.

2.2 EKSENEL KARARLI SICAKLIK HALİNDEKİ İÇİ BOŞ DİSK

Bir önceki kısımda sözü edilen diskte ısı kaynağı olmaması halinde sıcaklık dağılımı ifadesi,

$$T = T_b + \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (2.22)$$

şeklini alır [6, 24].

2.2.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Söz konusu diskteki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (2.23)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} E \frac{u}{r} = & (1 - \nu)A - (1 + \nu) \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \left[(1 - \nu) \ln \frac{r}{b} + 1 \right] \\ & + E\alpha \left[T_b + \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

olurlar [25].

A ve B integral sabitleri benzer şekilde

$$\sigma_r(a) = 0$$

ve

$$\sigma_r(b) = -p$$

sınır koşullarından

$$A = -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} - p \frac{b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.26)$$

$$B = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} + p \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.27)$$

olarak bulunur.

2.2.2 Elastik-plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alınarak bu hal için de olası elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. Plastik bölge, $\sigma_z (=0) > \sigma_r > \sigma_\theta$, $a < r < r_1$
2. Elastik bölge, $r_2 < r < b$

2.2.2.1 Plastik Bölge

Plastik akış $r=a$ 'dan dışarıya doğru yine

$$\sigma_\theta = -\sigma_r \quad (2.28)$$

ile yayılır. Gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = C_1 r^{t_1} + C_2 r^{t_2} - \sigma_0 - H \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\ln \frac{a}{b}} \quad (2.29)$$

$$\sigma_\theta = (1 + t_1)C_1 r^{t_1} + (1 + t_2)C_2 r^{t_2} - \sigma_0 - H \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\ln \frac{a}{b}} \quad (2.30)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 + \frac{1}{H}\right) \sigma_\theta - \nu \sigma_r + \frac{\sigma_0}{H} + E\alpha T \quad (2.31)$$

olur. Burada

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{H}{H+1}} \text{ 'dir.} \quad (2.32)$$

2.2.2.2 Elastik Bölge

Elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (2.33)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) \quad (2.34)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)A - (1+\nu) \frac{B}{r^2} - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \left[(1-\nu) \ln \frac{r}{b} + 1 \right] + E\alpha \left[T_b + \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \right] \quad (2.35)$$

olarak verilirler.

2.2.2.3 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

A, B, C₁, C₂ integral sabitleri ile r₁ ara yarıçapı aynı sınır koşulları kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{B} = \frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} \left[-\bar{p} + 1 - \frac{\bar{T}}{2 \ln q} (\ln x_1 + 1) \right] \quad (2.36)$$

$$\bar{A} = -(\bar{B} + \bar{p}) \quad (2.37)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{(1+t_1)x_1^{t_1} + H \frac{\bar{T}}{\ln q} [(1+t_1)x_1^{t_1} - q^{t_1}]}{(1+t_1)x_1^{t_1} q^{t_2} - (1+t_2)x_1^{t_2} q^{t_1}} \quad (2.38)$$

$$\bar{C}_1 = \left[\frac{H\bar{T}}{\ln q} + 1 - \bar{C}_2 q^{t_2} \right] \cdot \frac{1}{q^{t_1}} \quad (2.39)$$

Diğer taraftan boyutsuz x₁ ara yarıçapı

$$\bar{C}_1 x_1^{t_1} + \bar{C}_2 x_1^{t_2} - \frac{H\bar{T}}{\ln q} - \bar{A} - \frac{\bar{B}}{x_1^2} + \frac{\bar{T}}{2 \ln q} \ln x_1 - 1 = 0 \quad (2.40)$$

ifadesinden bulunabilir.

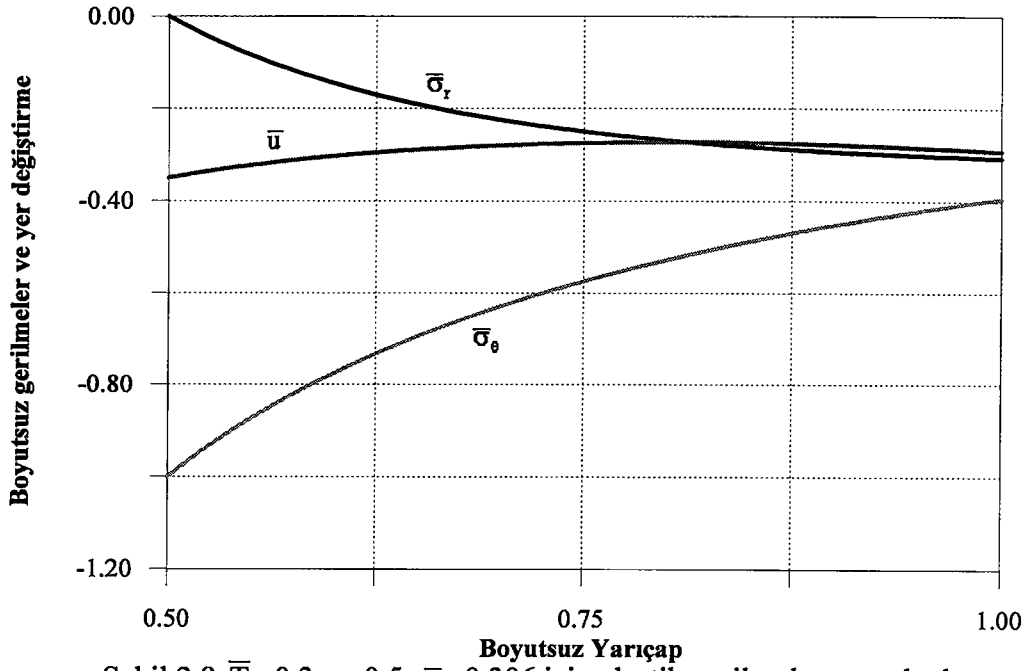
Burada kullanılan boyutsuz ifadeler şu şekilde tanımlanmışlardır:

$$\bar{C}_1 = \frac{C_1 b^{t_1}}{\sigma_0}, \quad \bar{C}_2 = \frac{C_2 b^{t_2}}{\sigma_0}, \quad \bar{A} = \frac{A}{\sigma_0}, \quad \bar{B} = \frac{B}{\sigma_0 b^2}$$

$$x_1 = r_1 / b, \quad \bar{T} = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0}, \quad \bar{p} = p / \sigma_0, \quad q = a/b$$

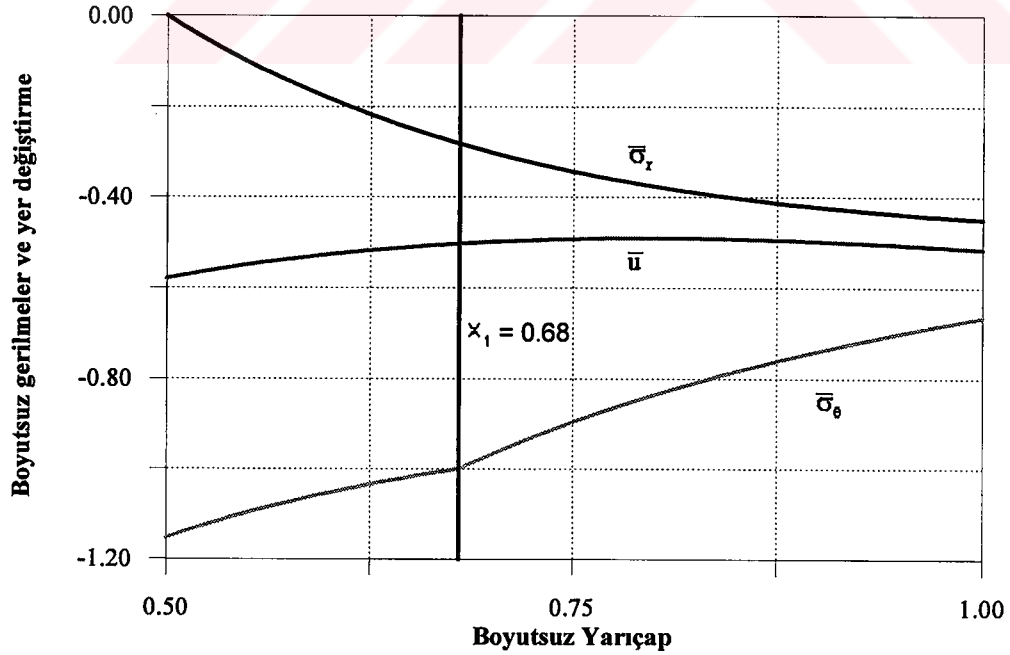
2.2.3 Sayısal Örnek

Isı üretimi olan yalıtılmış diskte karşılaştırma yapabilmek amacıyla aynı sıcaklık farkı koşullarında içi boş bir disk seçilmiştir. $\bar{T}=0,3$, $q=0,5$ için plastik akışı başlatacak basınç değeri $\bar{p}=0.30615160$ olarak bulunmuştur. Bu basınç değeri için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları Şekil 2.8'de verilmiştir.

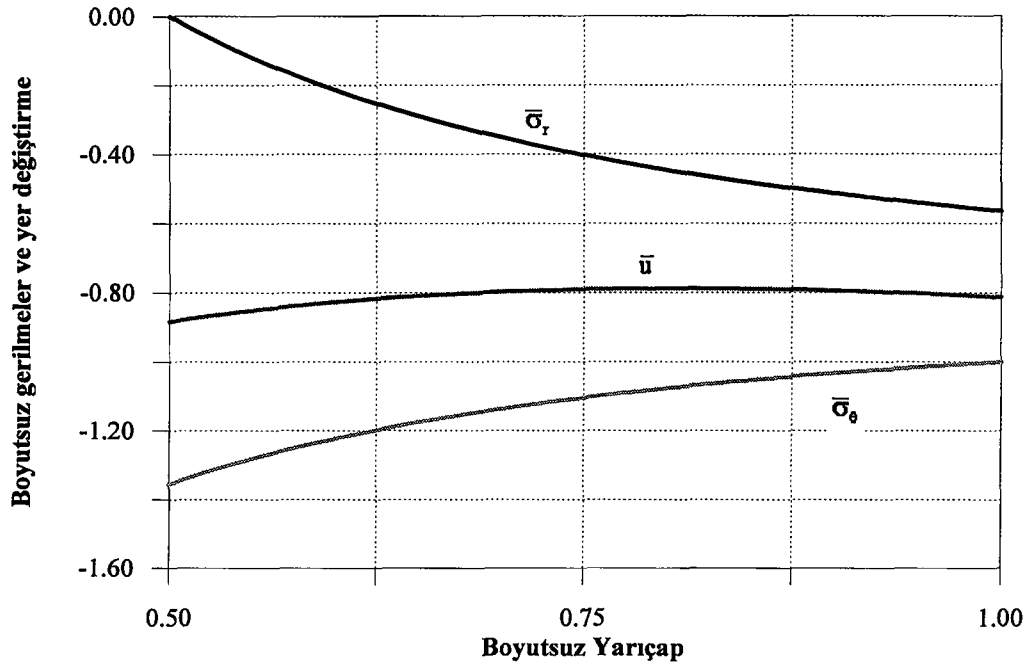


Şekil 2.8 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $\bar{p}=0.306$ için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları

$H=0.5$ ile tam plastik hale ulaşmadaki basınç sınır değeri $\bar{p}=0.563679$ olarak bulunmuştur. Ara bir değer olarak $\bar{p}=0.45$ alınarak çizilen gerilme ve yer değiştirme eğrileri Şekil 2.9'da, tam plastik hal için hesaplanan eğriler ise Şekil 2.10'da gösterilmiştir.

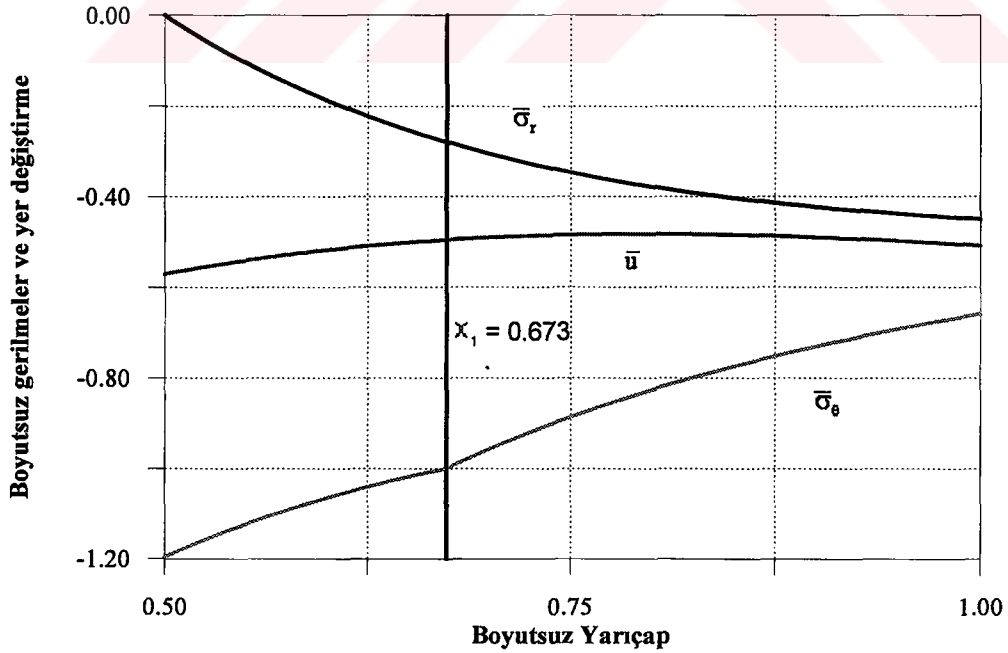


Şekil 2.9 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.45$ için radyal ve teğetesel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları

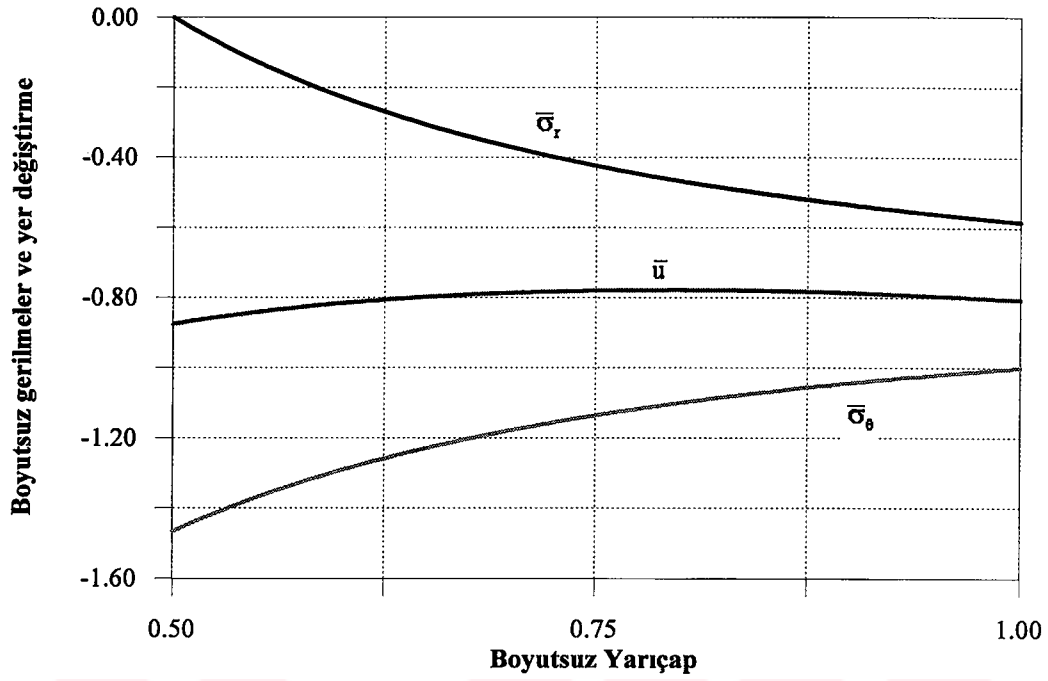


Şekil 2.10 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.5$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.563679$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları

$H=0.8$ olarak seçildiğinde plastik akışı başlatan basınç sınır değeri $\bar{p}=0.58317$ olarak bulunur. Aynı pekleşme parametresi $H=0.8$ için sırasıyla $\bar{p}=0.45$ ve $\bar{p}=0.58317$ alınarak çizilen eğriler Şekil 2.11 ve Şekil 2.12'de gösterilmektedir.



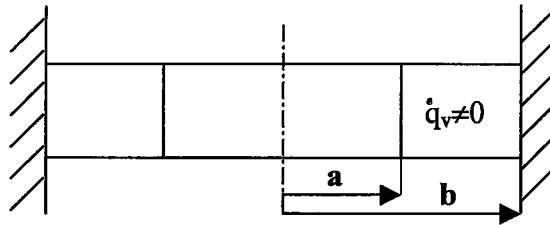
Şekil 2.11 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.45$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları



Şekil 2.12 $\bar{T}=0.3$, $q=0.5$, $H=0.8$, $\nu=1/3$, $\bar{p}=0.583179$ için radyal ve teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirme dağılımları

2.3 DIş ÇEVRESİ BOYUNCA RİJİT SINIR KOşULLARI ALTINDAKİ ISI KAYNAKLI İÇİ BOş DIşK

Burada Şekil 2.13'de gösterildiği gibi içinde ısı kaynağı bulunan, iç yarıçapı a ve dış yarıçapı b olan içi boş bir diskin dış sınırında radyal doğrultudaki yer değiştirmenin sıfır olduğu hal ele alınacaktır.



Şekil 2.13 Çevrede radyal yer değiştirmesi sıfır ve içinde ısı üretimi olan içi boş disk.

2.3.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Isı üretimli bu diske ait sıcaklık dağılımı ifadesi, ilk örnekte olduğu gibi

$$T = T_b + \frac{\dot{q}_v a^2}{2k} \ln \frac{r}{b} + \frac{\dot{q}_v}{4k} (b^2 - r^2) \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Bu sıcaklık dağılımı etkisinde dolu diskte oluşan gerilmeler ve radyal yer değiştirme, [25] izlenerek

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left[r^2 - 4a^2 \ln \frac{r}{b} \right] \quad (2.41)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left[3r^2 - 4a^2 \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) \right] \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} E \frac{u}{r} = & (1-\nu)A - (1+\nu)\frac{B}{r^2} + E\alpha \left[T_b + \frac{\dot{q}_v}{4k} \left(b^2 + 2a^2 \ln \frac{r}{b} - r^2 \right) \right] \\ & + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left\{ (3-\nu)r^2 - 4a^2 \left[(1-\nu) \ln \frac{r}{b} + 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

olarak bulunurlar.

Bu ifadelerde geçen A ve B integral sabitleri

$$u(b) = 0$$

ve

$$\sigma_r(a) = 0$$

sınır koşullarından

$$\begin{aligned} A = -E\alpha \frac{T_b + \frac{\dot{q}_v}{16k} \left\{ (3-\nu)b^2 - a^2 [5-\nu - 4(1-\nu) \ln \frac{a}{b}] \right\}}{a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)} b^2 \\ - \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} (1 - 4 \ln \frac{a}{b}) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$B = E\alpha \frac{T_b + \frac{\dot{q}_v}{16k} \left\{ (3-\nu)b^2 - a^2[5-\nu-4(1-\nu)\ln\frac{a}{b}] \right\}}{a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)} a^2 b^2 \quad (2.45)$$

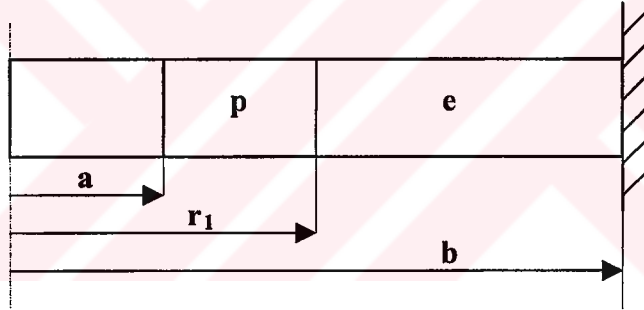
olarak bulunur.

2.3.2 Elastik-plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alınarak bu hal için olası elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. Plastik bölge, $\sigma_z(=0) > \sigma_r > \sigma_\theta$, $a < r < r_1$
2. Elastik bölge, $r_2 < r < b$

Elastik çözüme göre ayırt edilen elastik ve plastik bölgeler Şekil 2.14 'de gösterilmiştir:



Şekil 2.14 Elastik-plastik haldeki bölgelerin yerleri

2.3.2.1 Plastik Bölge

Plastik akış $r=a$ 'dan dışarıya doğru

$$\sigma_\theta = -\sigma_y \quad (2.46)$$

ile yayılır. Kaynak [27] izlenerek, uygunluk denkleminde hareketle, radyal gerilme cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r}{H+1} = -\frac{\sigma_0}{H+1} - \frac{H}{H+1} E\alpha r \frac{dT}{dr} \quad (2.10)$$

Bu denklem çözülerek gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$\sigma_r = C_1 r^{t_1} + C_2 r^{t_2} - \sigma_0 + \frac{H}{8H+9} \frac{E\alpha\dot{q}_v}{2k} r^2 - \frac{HE\alpha\dot{q}_v}{2k} a^2 \quad (2.47)$$

$$\sigma_\theta = (1+t_1)C_1 r^{t_1} + (1+t_2)C_2 r^{t_2} - \sigma_0 + \frac{3H}{8H+9} \frac{E\alpha\dot{q}_v}{2k} r^2 - \frac{HE\alpha\dot{q}_v}{2k} a^2 \quad (2.48)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 + \frac{1}{H}\right) \sigma_\theta - \nu \sigma_r + \frac{\sigma_0}{H} + E\alpha T \quad (2.13)$$

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{H}{H+1}}$$

2.3.2.2 Elastik Bölge

Elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^2} + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left[r^2 - 4a^2 \ln \frac{r}{b} \right] \quad (2.49)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{r^2} + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left[3r^2 - 4a^2 \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) \right] \quad (2.50)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)A - (1+\nu)\frac{B}{r^2} + E\alpha \left[T_b + \frac{\dot{q}_v}{4k} \left(b^2 + 2a^2 \ln \frac{r}{b} - r^2 \right) \right] + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} \left\{ (3-\nu)r^2 - 4a^2 \left[(1-\nu) \ln \frac{r}{b} + 1 \right] \right\} \quad (2.51)$$

ile verilmişlerdir.

2.3.2.3 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

Elastik-plastik gerilme dağılımını tam olarak elde etmek için A , B , C_1 , C_2 integral sabitleri ile r_1 ara yarıçapını belirlemek gereklidir. Bunlar aşağıda sıralanan sınır koşulları ile bulunabilirler:

$$\sigma_r(a)|_p = 0$$

$$\sigma_r(r_1)|_p = \sigma_r(r_1)|_e$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_p = -\sigma_0$$

$$\sigma_{\theta}(r_1)|_e = -\sigma_0$$

$$u(b)|_e = 0$$

Burada p indisi plastik bölgeyi, e indisi ise elastik bölgeyi göstermektedir. Bu sınır koşulları kullanılarak integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \frac{Q[3(1-\nu)x_1^2 + 4\nu q^2 - 4(1-\nu)q^2 \ln x_1 - (3-\nu)] + (1-\nu) - \frac{E\alpha}{\sigma_0} T_b}{(1-\nu) - (1+\nu)x_1^2} \\ & - Q[3x_1^2 - 4q^2(1 + \ln x_1)] - 1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\bar{B} = \frac{Q[3(1-\nu)x_1^2 + 4\nu q^2 - 4(1-\nu)q^2 \ln x_1 - (3-\nu)] + (1-\nu) - \frac{E\alpha}{\sigma_0} T_b}{(1-\nu) - (1+\nu)x_1^2} x_1^2 \quad (2.53)$$

$$\bar{C}_1 = \frac{\frac{8HQ}{8H+9} [3x_1^2 q^{t_2} - 8(H+1)(1+t_2)q^2 x_1^{t_2} - (8H+9)q^{t_2+2}] + (1+t_2)x_1^{t_2}}{(1+t_2)q^{t_1} x_1^{t_2} - (1+t_1)q^{t_2} x_1^{t_1}} \quad (2.54)$$

$$\bar{C}_2 = \left[\frac{64HQ}{8H+9} (H+1)q^2 + 1 - \bar{C}_1 q^{t_1} \right] \frac{1}{q^{t_2}} \quad (2.55)$$

Diğer taraftan boyutsuz x_1 ara yarıçapı aşağıdaki ifadede bulunabilir:

$$\bar{C}_1 x_1^{t_1} + \bar{C}_2 x_1^{t_2} - 1 + 8HQ \left(\frac{x_1^2}{8H+9} - q^2 \right) - Q(x_1^2 - 4q^2 \ln x_1) - \bar{A} - \frac{\bar{B}}{x_1^2} = 0 \quad (2.56)$$

Burada kullanılan boyutsuz ifadeler şu şekilde tanımlanmışlardır:

$$\bar{A} = A/\sigma_0, \quad \bar{B} = \frac{B}{\sigma_0 \cdot b^2}, \quad \bar{C}_1 = C_1 b^{t_1}/\sigma_0, \quad \bar{C}_2 = C_2 b^{t_2}/\sigma_0$$

$$Q = \frac{E\alpha \dot{q}_v b^2}{16\sigma_0 k}, \quad x_1 = r_1/b, \quad q = a/b$$

2.3.3 Sayısal Örnek:

Geçerlilik aralığı oldukça dar olan bu örnekte, tam plastik hale ulaşmak için gereken ısı üretimi şiddeti, uygulamada rastlanılmayacak değerlere ulaşmaktadır. $a/b=0.5$,

$v=1/3$ için plastik akma, $Q = \frac{E\alpha\dot{q}_v b^2}{16\sigma_0 k} = 0.950467$ değerinde başlamaktadır. Artan ısı

üretim değerleri ile dış yarıçaptan itibaren $-\sigma_r$ ile plastik akma başlamakla birlikte sıcaklık farklarının çok büyük değerlere ulaşması nedeniyle bu durum incelemeye dahil edilmemiştir. Tablo 2.3’de $a/b=0.5$ ve $v=1/3$ için pekleşme parametresi H ’a bağlı olarak ısı üretimi şiddeti Q için üst değerler ve x_1 ara yarıçapını değişimleri verilmektedir.

Tablo 2.4 ile $a/b=0.5$, $v=1/3$ ve $Q=1.5$ için doğrusal pekleşme sayısı H ile x_1 ara yarıçapının değişimi gösterilmiştir. Pekleşme sayısının değişiminin ara yarıçapın değişimi üzerindeki etkisinin çok önemsiz olduğu, x_1 ara yarıçapının ağırlıklı olarak Q ısı üretim şiddetinden etkilendiği görülmektedir.

Hesaplamalarda T_b referans sıcaklığı olarak alınmıştır.

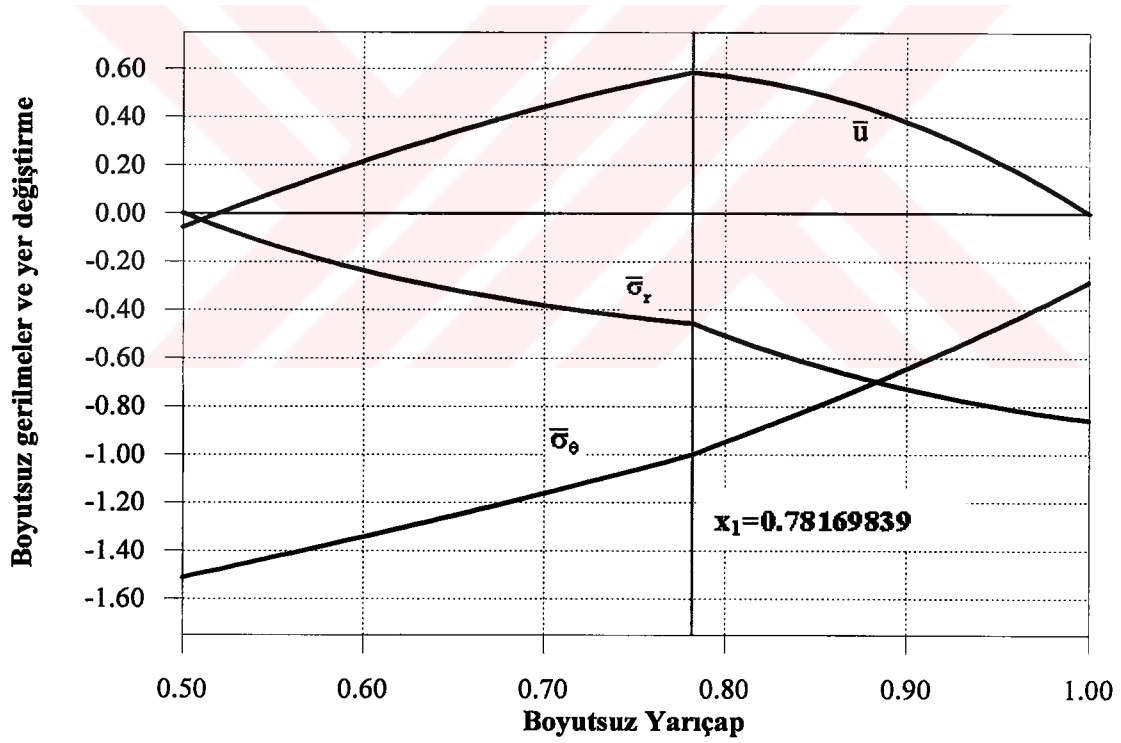
Tablo 2.3 $a/b=0.5$ ve $v=1/3$ için $Q_{üst}$ değerleri

H	$Q_{üst}$	x_1
0.01	42.1277	0.9947
0.10	5.5845	0.9572
0.20	3.5499	0.9295
0.30	2.8613	0.9098
0.40	2.5261	0.8951
0.50	2.3206	0.8835
0.60	2.1832	0.8742
0.70	2.0851	0.8665
0.80	2.0107	0.8601
0.90	1.9537	0.8547
1.00	1.9076	0.8500

Tablo 2.4 $a/b=0.5$, $\nu=1/3$ ve $Q=1.5$ için $H-x_1$ değişimi

H	x_1
0.1	0.77946156
0.2	0.78014785
0.3	0.78073746
0.4	0.78124952
0.5	0.78169839
0.6	0.78209514
0.7	0.78244835
0.8	0.78276487
0.9	0.78305010
1.0	0.78330849

$H=0.5$, $\nu=1/3$, $a/b=0.5$ ve $Q=1.5$ alınarak çizilen radyal, teğetsel gerilmeler ile radyal yer değiştirmeler Şekil 2.15' de görülmektedir.



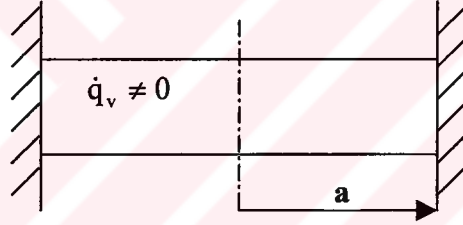
Şekil 2.15 Dıştan rijit sınır koşulları altındaki içi boş disk için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $H=0.5$, $\nu=1/3$, $a/b=0.5$ ve $Q=1.5$.

BÖLÜM 3

SABİT ISI KAYNAĞI ALTINDAKİ İÇİ DOLU DİSKTE ELASTİK-PLASTİK GERİLME DAĞILIMI

3.1 RİJİT SINIR KOŞULLARI ALTINDA ISI KAYNAKLI DOLU DİSK

Burada Şekil 3.1'de gösterildiği gibi içinde ısı kaynağı bulunan a yarıçaplı dolu diskin dış sınırında radyal doğrultudaki yer değiştirmenin sıfır olduğu hal ele alınacaktır. Isı kaynağından oluşan sıcaklık dağılımından dolayı çevredeki sıcaklık başlangıç sıcaklığı olarak alınacaktır.



Şekil 3.1 Çevrede radyal yer değiştirmesi sıfır ve içinde ısı üretimi olan dolu disk

3.1.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Yalnızca ısı kaynağından oluşan aksel simetrik sıcaklık alanı, söz konusu hal için,

$$T = \frac{\dot{q}_v(a^2 - r^2)}{4k} \quad (3.1)$$

ile verilir. Bu sıcaklık dağılımı ve etkisinde dolu diskte oluşan gerilmeler ve radyal yer değiştirme

$$\sigma_r = A + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.2)$$

$$\sigma_\theta = A + \frac{3E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.3)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - \nu)A + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{4k}a^2 - (1 + \nu)\frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k}r^2 \quad (3.4)$$

şeklinde elde edilirler [25].

Bu ifadelerde geçen A integral sabiti $u(a) = 0$ koşulundan

$$A = -\frac{(3 - \nu) E\alpha\dot{q}_v a^2}{(1 - \nu) 16k}$$

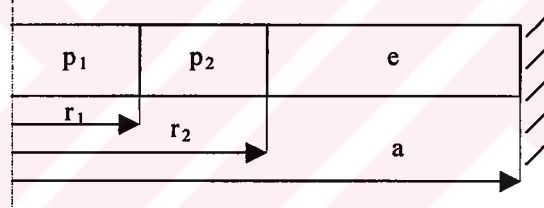
olarak bulunur.

3.1.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alınarak bu hal için olası elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. Birinci plastik bölge, $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta = \sigma_r$, $0 < r < r_1$
2. İkinci plastik bölge, $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta > \sigma_r$, $r_1 < r < r_2$
3. Elastik bölge, $r_2 < r < a$

Elastik çözüme göre ayırt edilen elastik ve plastik bölgeler Şekil 3.2'de gösterilmiştir:



Şekil 3.2 Elastik-plastik haldeki bölgelerin yerleri

3.1.2.1 Birinci Plastik Bölge

Disk merkezinde radyal ve teğetsel gerilmeler birbirine eşittir ve akış buradan

$$-\sigma_y = \sigma_r = \sigma_\theta \quad (3.5)$$

akma koşuluna göre yayılır. Bu bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme [27]'deki yol izlenerek aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = C_1 \quad (3.6)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 - \nu + \frac{E}{2\eta\sigma_0}\right) C_1 + \frac{E}{2\eta} + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{4k} \left(a^2 - \frac{r^2}{2}\right) \quad (3.7)$$

3.1.2.2 İkinci Plastik Bölge

Şekil 3.2'de gösterilen ikinci plastik bölgede gerilmeler $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta > \sigma_r$ eşitsizliğine uygun bir dağılım gösterirler. Bu nedenle bu bölgede akış

$$\sigma_y = -\sigma_r \quad (3.8)$$

akma koşuluna uyar. Kaynak [27] ve [28] göz önüne alınarak, uygunluk denkleminde hareketle, radyal gerilme cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r}{H} = \frac{\sigma_0}{H} - E\alpha r \frac{dT}{dr}. \quad (3.9)$$

Bu denklem çözülerek gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = C_3 r^{t_3} + C_4 r^{t_4} + \frac{HE\alpha \dot{q}_v}{2k(8H-1)} r^2 - \sigma_0 \quad (3.10)$$

$$\sigma_\theta = (1+t_3)C_3 r^{t_3} + (1+t_4)C_4 r^{t_4} + \frac{3HE\alpha \dot{q}_v}{2k(8H-1)} r^2 - \sigma_0 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} E \frac{u}{r} = & (1+t_3-\nu)C_3 r^{t_3} + (1+t_4-\nu)C_4 r^{t_4} + \frac{HE\alpha \dot{q}_v}{2k(8H-1)} (3-\nu)r^2 \\ & + (\nu-1)\sigma_0 + \frac{E\alpha \dot{q}_v}{4k} (a^2 - r^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilirler.

Burada

$$t_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{H+1}{H}} \quad (3.13)$$

ve

$$H = \eta \frac{\sigma_0}{E} \text{ 'dir.} \quad (3.14)$$

3.1.2.3 Elastik Bölge

Şekil 3.2'de gösterilen elastik bölgedeki gerilmeler ve yer değiştirme ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$\sigma_r = -\frac{C_5}{r^2} + C_6 + \frac{E\alpha \dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.15)$$

$$\sigma_\theta = \frac{C_5}{r^2} + C_6 + \frac{3E\alpha \dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.16)$$

$$E \frac{u}{r} = (1+\nu) \frac{C_5}{r^2} + (1-\nu) C_6 + \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{4k} - (1+\nu) \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.17)$$

3.1.2.4 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

Elastik-plastik gerilme dağılımını tam olarak elde etmek için C_1, C_3, C_4, C_5, C_6 integral sabitleri ile r_1 ve r_2 ara yarıçaplarını, sınır koşullarını kullanarak belirlemek gerekir. Yazılabilecek en uygun sınır koşulları şunlardır:

$$\sigma_r(r_1)|_{p1} = \sigma_r(r_1)|_{p2}$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_{p1} = \sigma_\theta(r_1)|_{p2}$$

$$u(r_1)|_{p1} = u(r_1)|_{p2}$$

$$\sigma_r(r_2)|_{p2} = -\sigma_0$$

$$\sigma_r(r_2)|_e = -\sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_2)|_{p2} = \sigma_\theta(r_2)|_e$$

$$u(a)|_e = 0$$

Burada p_1 indisi birinci plastik bölgeyi, p_2 indisi ikinci plastik bölgeyi, e indisi ise elastik bölgeyi göstermektedir. Bu sınır koşulları kullanılarak integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{C}_1 = -(1 + 4HQx_1^2) \quad (3.18)$$

$$\bar{C}_3 = -\frac{2HQ}{W} \left[W + 1 + \frac{2(W+3)}{8H-1} \right] x_1^{3-W} \quad (3.19)$$

$$\bar{C}_4 = -\frac{2HQ}{W} \left[W - 1 + \frac{2(W-3)}{8H-1} \right] x_1^{3+W} \quad (3.20)$$

$$\bar{C}_5 = \frac{1-\nu + [(1-\nu)x_2^2 - (3-\nu)Q]}{1-\nu + (1+\nu)x_2^2} x_2^2 \quad (3.21)$$

$$\bar{C}_6 = -\frac{(3-\nu)Q + (1+\nu)(1 + Qx_2^2)x_2^2}{1-\nu + (1+\nu)x_2^2} \quad (3.22)$$

Burada kullanılan boyutsuz ifadeler şu şekilde tanımlanmışlardır:

$$\bar{C}_1 = C_1 / \sigma_0, \quad \bar{C}_3 = C_3 a^{W-1} / \sigma_0, \quad \bar{C}_4 = C_4 a^{-(W+1)} / \sigma_0, \quad \bar{C}_5 = C_5 / \sigma_0 \cdot a^2, \quad \bar{C}_6 = C_6 / \sigma_0,$$

$$x_1 = r_1 / a, \quad x_2 = r_2 / a, \quad W = \sqrt{\frac{H+1}{H}}, \quad Q = \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16\sigma_0 k}$$

Diğer taraftan boyutsuz x_1 ve x_2 ara yarıçapları aşağıdaki iki ifadeden bulunabilirler:

$$\begin{aligned} & \left[(W-1)(8H-1) + 2(W-3) \right] \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{-(W+3)} - \left[(W+1)(8H-1) + 2(W+3) \right] \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{W-3} \\ & + 12 - \frac{8H-1}{2HQx_2^2} = \frac{8H-1}{2HQ} \left[\frac{1}{x_2^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right] \left\{ \frac{1-\nu + [(1-\nu)x_2^2 - (3-\nu)]Q}{1-\nu + (1+\nu)x_2^2} \right\} \\ & + \frac{8H-1}{2H} \left[3 - \frac{3-\nu}{(1-\nu)x_2^2} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

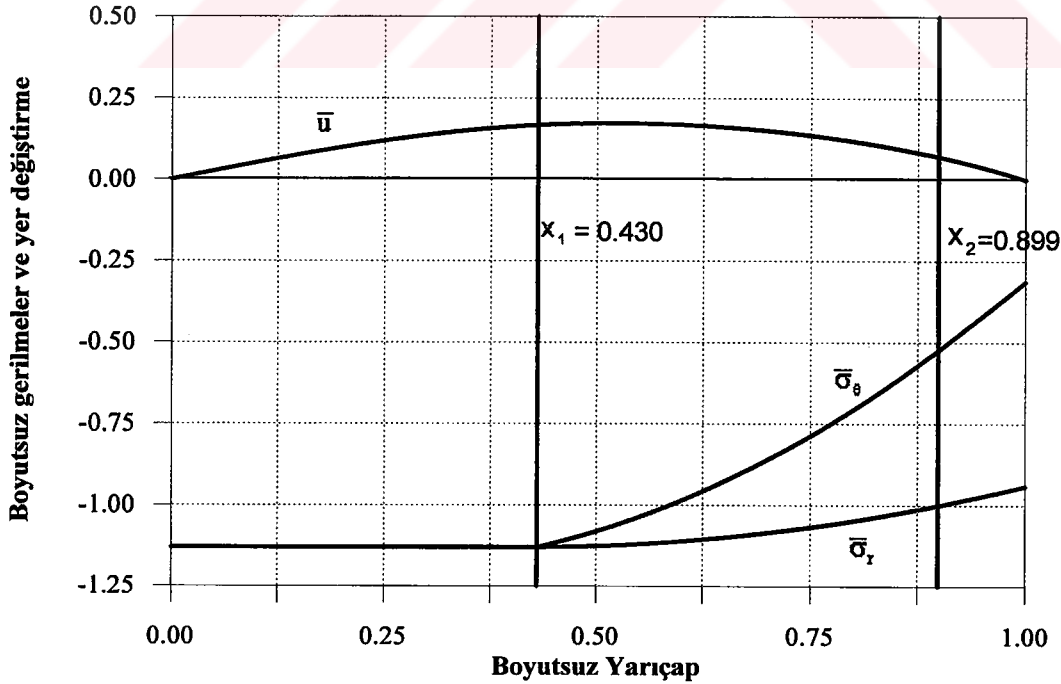
$$\left[(W+1)(8H-1) + 2(W+3) \right] \beta^{W-3} + \left[(W-1)(8H-1) + 2(W-3) \right] \beta^{-(W+3)} = 4W. \quad (3.24)$$

Burada $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ oranını göstermektedir.

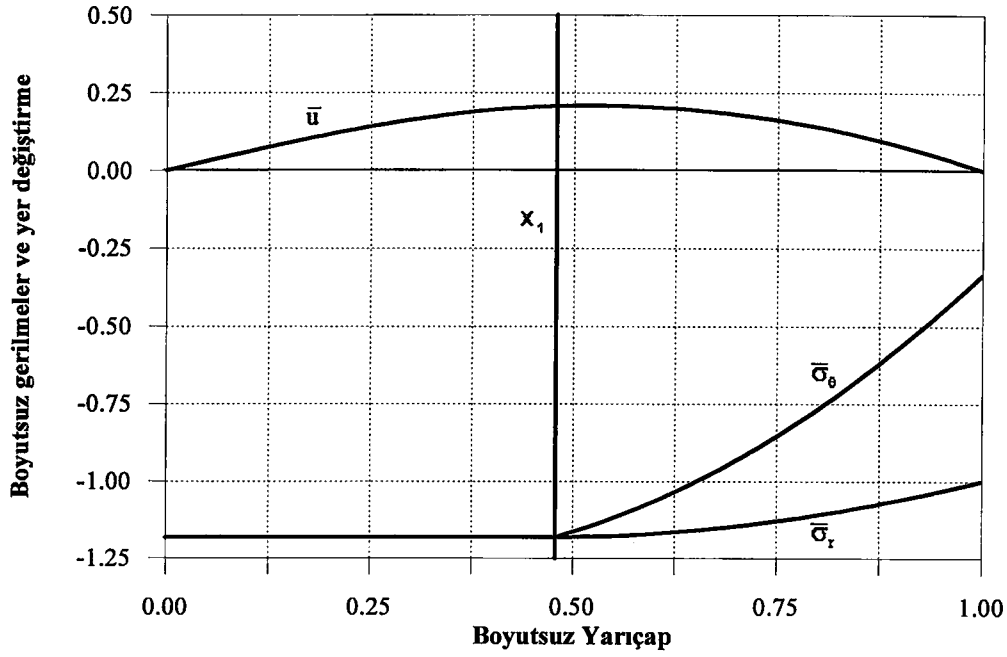
3.1.3 Sayısal Örnek

Bir sayısal örnek için $H=0.5$ ve $\nu=1/3$ seçilerek buradaki incelemenin geçerlilik aralığı $0.25 < Q < 0.395961$ olarak elde edilir. $Q=0.25$ için diskin davranışı elastik, $Q=0.395961$ için ise tam plastiktir ($x_2=1$). Bu aradaki Q değerleri için Tresca akma koşuluna göre geliştirilen çözüm geçerliliğini korur.

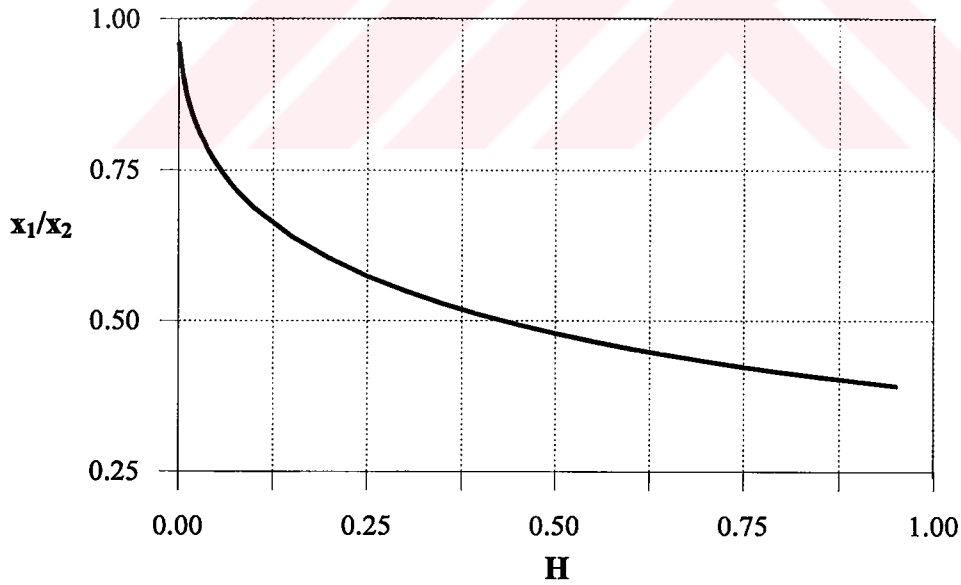
Şekil 3.3, $Q=0.35$ için boyutsuz gerilme ve yer değiştirme dağılımlarını göstermektedir. Şekil 3.4 $Q=0.395961$ için, tam plastik akmanın henüz başladığı haldeki boyutsuz gerilme ve yer değiştirme dağılımlarını göstermektedir.



Şekil 3.3 $Q=0.35$ için boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme

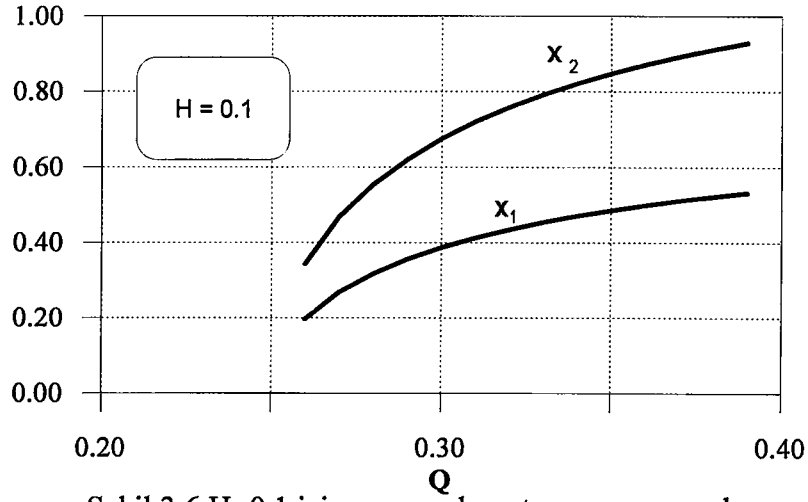


Şekil 3.4 $Q=0.395961$ için, tam plastik akmanın henüz başladığı haldeki boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirme

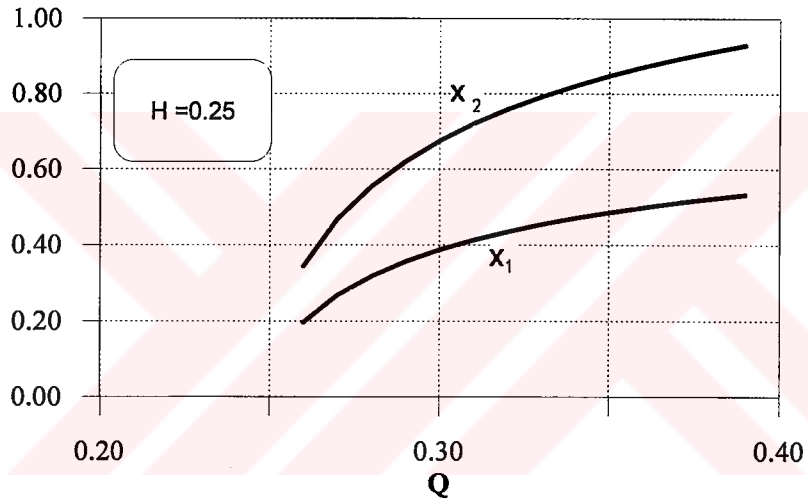


Şekil 3.5 Ara yarıçapların oranı ile boyutsuz pekleşme katsayısı H arasındaki ilişki

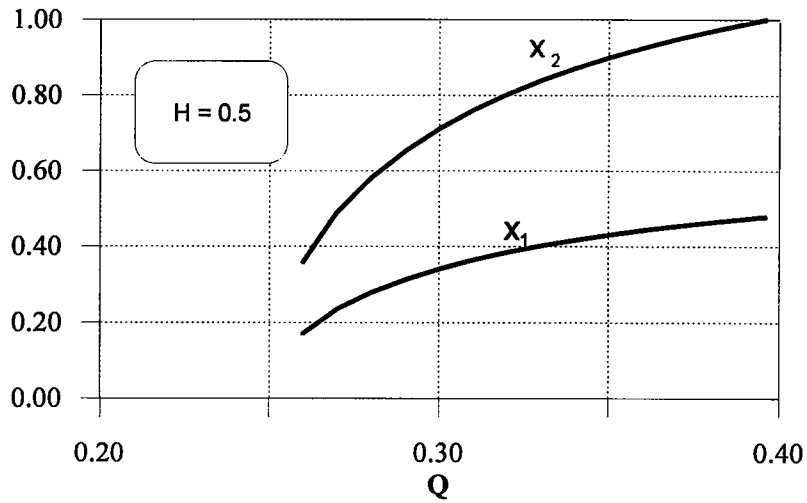
Şekil 3.5, ara yarıçapların oranı ile boyutsuz pekleşme katsayısı H arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Şekil 3.6 - Şekil 3.10, değişik H değerleri için, x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçaplarının Q ile değişimini göstermektedir.



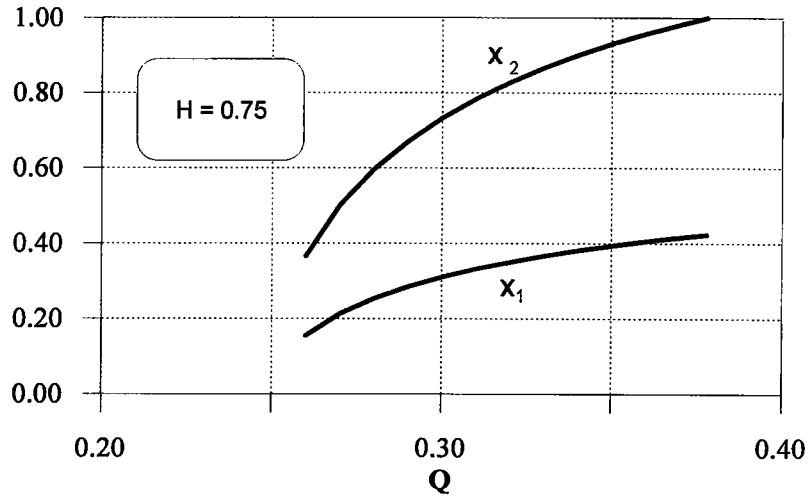
Şekil 3.6 $H=0.1$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları



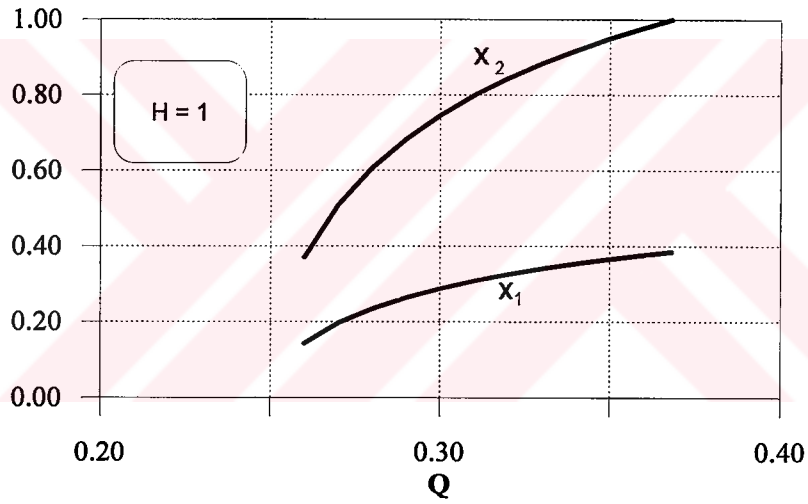
Şekil 3.7 $H=0.25$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları



Şekil 3.8 $H=0.5$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları



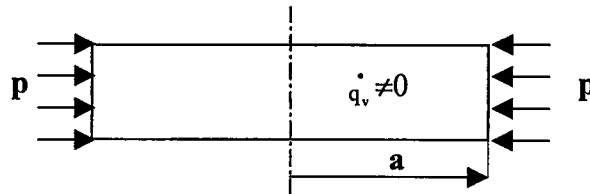
Şekil 3.9 $H=0.75$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları



Şekil 3.10 $H=1.0$ için x_1 ve x_2 boyutsuz ara yarıçapları

3.2 DIŞ BASINCA ZORLANAN ISI KAYNAKLI DOLU DİSK

Bu kısımda incelenecek olan, içinde ısı kaynağı bulunan ve p dış basıncına zorlanan a yarıçaplı dolu disk, Şekil 3.11'de gösterilmektedir..



Şekil 3.11 Dış basınca zorlanan ısı kaynaklı dolu disk

3.2.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Eksenel simetri halinde sabit bir ısı kaynağının sonucunda oluşan sıcaklık dağılımı (3.1) ve dolu diskte oluşan gerilmeler ile radyal yer değiştirmeler (3.2-3.4) denklemleriyle verilir.

Bu ifadelerdeki A integral sabiti $\sigma_r(a) = -p$ sınır koşulu kullanılarak

$$A = -\frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} - p$$

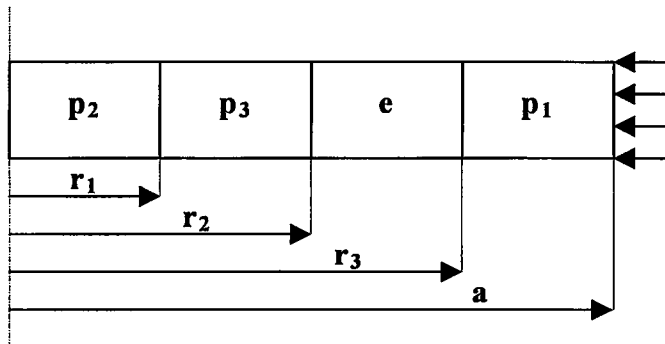
şeklinde bulunur.

3.2.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alınarak en genel halde karşılaşılabilecek elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. Dış plastik bölge, $\sigma_z(=0)$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$, $r_3 < r < a$
2. İç plastik bölge, $\sigma_z(=0)$, $\sigma_r = \sigma_\theta$, $0 < r < r_1$
3. Ara plastik bölge, $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta > \sigma_r$, $r_1 < r < r_2$
4. Elastik bölge, $r_2 < r < r_3$

Genel halde karşılaşılabilecek elastik ve plastik bölgeler Şekil 3. 12’de gösterilmiştir.



Şekil 3.12 En genel elastik-plastik hal için dolu diskteki bölgeler

3.2.2.1 Dış Plastik Bölge

$\frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} > 0.5\sigma_0$ için plastik akma ilk olarak dışarıdan ($r=a$)

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y \quad (3.25)$$

ile başlar. Kaynak [12] izlenerek, gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_r = C_7 + \frac{C_8}{r^2} + \frac{\sigma_0}{H+1} \ln \frac{r}{a} + \frac{H}{H+1} \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.26)$$

$$\sigma_\theta = C_7 - \frac{C_8}{r^2} + \frac{\sigma_0}{H+1} (1 + \ln \frac{r}{a}) + \frac{H}{H+1} \frac{3E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.27)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)C_7 - \left[\frac{(1-\nu)H+2}{H} \right] \frac{C_8}{r^2} - \left[\frac{(1+\nu)H+2}{H+1} \right] \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} 4a^2 + \frac{(1-\nu)\sigma_0}{H+1} \ln \frac{r}{a} \quad (3.28)$$

3.2.2.2 İç Plastik Bölge

Plastik akma ikinci olarak disk merkezinden içeriye doğru yayılır. Burada radyal ve teğetsel gerilmeler birbirine eşit olduğundan plastik akma

$$-\sigma_y = \sigma_r = \sigma_\theta \quad (3.29)$$

ile yönetilir. Bu bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme Kaynak [27] izlenerek aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = C_1 \quad (3.30)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 - \nu + \frac{E}{2\eta\sigma_0} \right) C_1 + \frac{E}{2\eta} + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{4k} (a^2 - \frac{r^2}{2}) \quad (3.31)$$

3.2.2.3 Ara Plastik Bölge

Şekil 3.12 'de gösterilen ara plastik bölgedeki gerilmeler $\sigma_z(=0) > \sigma_\theta > \sigma_r$ eşitsizliğine uygun dağılım gösterirler. Buna göre plastik akma

$$\sigma_y = -\sigma_r \quad (3.32)$$

ifadesine göre yönetilir. Kaynak [25-26] izlenerek, gerilmeler ve radyal yer değiştirme aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$\sigma_r = C_3 r^{t_3} + C_4 r^{t_4} + \frac{HE\alpha\dot{q}_v}{2k(8H-1)} r^2 - \sigma_0 \quad (3.33)$$

$$\sigma_\theta = (1+t_3)C_3 r^{t_3} + (1+t_4)C_4 r^{t_4} + \frac{3HE\alpha\dot{q}_v}{2k(8H-1)} r^2 - \sigma_0 \quad (3.34)$$

$$E \frac{u}{r} = (1+t_3-\nu)C_3 r^{t_3} + (1+t_4-\nu)C_4 r^{t_4} + \frac{HE\alpha\dot{q}_v}{2k(8H-1)} (3-\nu)r^2 + (\nu-1)\sigma_0 + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{4k} (a^2 - r^2) \quad (3.35)$$

$$\text{Burada } t_{3,4} = -1 \pm \sqrt{\frac{H+1}{H}}.$$

3.2.2.4 Elastik Bölge

Elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri:

$$\sigma_r = -\frac{C_5}{r^2} + C_6 + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.36)$$

$$\sigma_\theta = \frac{C_5}{r^2} + C_6 + \frac{3E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.37)$$

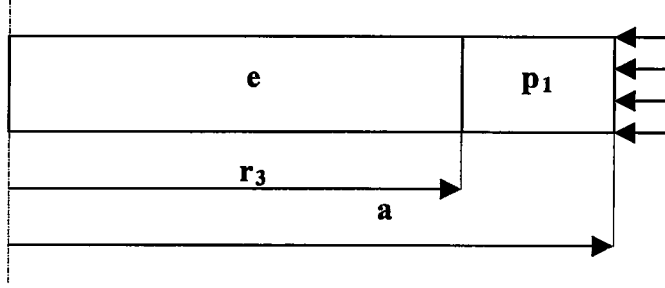
$$E \frac{u}{r} = (1+\nu)\frac{C_5}{r^2} + (1-\nu)C_6 + \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{4k} - (1+\nu)\frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (3.38)$$

ile verilirler.

3.2.2.5 Genel Çözümün Geçerlilik Aralığı

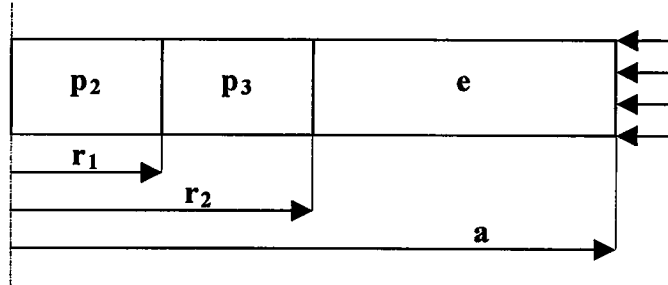
Tresca akma koşuluna göre bu bölümde ele alınan hal için geliştirilen en genel haldeki çözüm dış basınç ve ısı kaynağının büyüklüğünün her değeri için geçerli

değildir. $\frac{E\alpha\dot{q}a^2}{16k} > 0.5\sigma_0$ için dış basıncın belirli bir p_{1L} sınır değerinden küçük olması halinde iç ve ara plastik bölgeler ortadan kalkar. Bu halde plastik akma çevreden içeriye doğru $\sigma_0 - \sigma_r = \sigma_y$ ifadesine göre yayılır; dolu diskte biri dış plastik bölge ($r_3 < r < a$) ve diğeri iç elastik bölge ($0 < r < r_3$) olmak üzere iki bölge kalır. (Bkz Şekil 3.13)



Şekil 3.13 Birinci özel duruma ait bölgeler

Artan dış basınç ile disk merkezindeki gerilmeler artarak akma gerilmesine ulaşırlar. Dış basıncın biraz önce sözü edilen bir p_{1L} sınır değerinden büyük olması halinde merkezden plastik akma yayılmaya başlar. Ancak basıncın daha da artması halinde belirli bir p_{2L} sınır değerinden sonra dış plastik bölge ortadan kalkar. Bu durumda disk iç ($0 < r < r_1$) ve ara ($r_1 < r < r_2$) plastik bölgeler ile elastik ($r_2 < r < a$) bölgeden oluşur. (Bkz Şekil 3.14) En genel hal için geliştirilen bu çözümün $\frac{E\alpha\dot{q}_va^2}{16k} > 0.5\sigma_0$ için geçerli olabilmesi için diske etki eden dış basınç $p_{1L} < p < p_{2L}$ eşitsizliğine uygun olarak değişmelidir.



Şekil 3.14 İkinci ve üçüncü özel duruma ait bölgeler

$\frac{E\alpha\dot{q}a^2}{16k} < 0.5\sigma_0$ halinde ise $\left(\sigma_0 - \frac{E\alpha\dot{q}_va^2}{16k} \right) < p < \sigma_0$ aralığında dış plastik bölge

kalkar, dolu disk iç ($0 < r < r_1$) ve ara ($r_1 < r < r_2$) plastik bölgeler ve elastik ($r_2 < r < a$) bölgeden oluşur.

3.2.2.6 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı:

En genel halde gerilme ve yer değiştirme ifadelerini açık olarak elde etmek için bu ifadelerde karşılaşılan $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ integral sabitleri ile r_1, r_2 ve r_3 ara yarıçaplarını uygun sınır koşulları kullanarak belirlemek gerekir. Yazılabilecek en uygun sınır koşulları şu şekildedir:

$$\sigma_r(r_1)|_{p2} = \sigma_r(r_1)|_{p3}$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_{p2} = \sigma_\theta(r_1)|_{p3}$$

$$u(r_1)|_{p2} = u(r_1)|_{p3}$$

$$\sigma_r(r_2)|_{p3} = -\sigma_0$$

$$\sigma_r(r_2)|_e = -\sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_2)|_{p3} = \sigma_\theta(r_2)|_e$$

$$\sigma_r(r_3)|_e = \sigma_r(r_3)|_{p1}$$

$$\sigma_\theta(r_3)|_{p1} - \sigma_r(r_3)|_{p1} = \sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_3)|_e - \sigma_r(r_3)|_e = \sigma_0$$

$$\sigma_r(a)|_{p1} = -p$$

Burada p_2 indisi iç plastik bölgeyi, p_3 indisi ara plastik bölgeyi, e indisi elastik bölgeyi ve p_1 indisi dış plastik bölgeyi gösterirler. Bu sınır koşulları uygulanarak integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{C}_1 = -(1 + 4HQx_1^2) \quad (3.39)$$

$$\bar{C}_3 = -\frac{2HQ}{W} \left[W + 1 + \frac{2(W+3)}{8H-1} \right] x_1^{3-w} \quad (3.40)$$

$$\bar{C}_4 = -\frac{2HQ}{W} \left[W - 1 + \frac{2(W-3)}{8H-1} \right] x_1^{3+w} \quad (3.41)$$

$$\bar{C}_5 = \frac{1-\nu + [(1-\nu)x_2^2 - (3-\nu)]Q}{1-\nu + (1+\nu)x_2^2} x_2^2 \quad (3.42)$$

$$\bar{C}_6 = -\frac{(3-\nu)Q + (1+\nu)(1+Qx_2^2)x_2^2}{1-\nu + (1+\nu)x_2^2} \quad (3.43)$$

$$\bar{C}_7 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(1 + 2HQx_3^2)}{H+1} \right] x_3^2 - \frac{HQ}{H+1} - \bar{p} \quad (3.44)$$

$$\bar{C}_8 = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + 2HQx_3^2)}{H+1} - 1 \right] x_3^2. \quad (3.45)$$

Bu ifadelerde geçen boyutsuz büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\bar{C}_1 = C_1 / \sigma_0, \quad \bar{C}_3 = C_3 a^{W-1} / \sigma_0, \quad \bar{C}_4 = C_4 a^{-(W+1)} / \sigma_0, \quad \bar{C}_5 = \frac{C_5}{\sigma_0 \cdot a^2}, \quad \bar{C}_6 = C_6 / \sigma_0$$

$$\bar{C}_7 = C_7 / \sigma_0, \quad \bar{C}_8 = \frac{C_8}{\sigma_0 \cdot a^2}, \quad x_1 = r_1 / a, \quad x_2 = r_2 / a, \quad x_3 = r_3 / a, \quad W = \sqrt{\frac{H+1}{H}}$$

$$\bar{p} = p / \sigma_0, \quad Q = \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16\sigma_0 k}.$$

Boyutsuz ara yarıçaplar x_1 , x_2 ve x_3 aşağıda verilen üç bağıntı yardımı ile belirlenebilirler:

$$\beta^3 - \frac{1}{4W} \{ [(W+1)(8H-1) + 2(W+3)]\beta^W + [(W-1)(8H-1) + 2(W-3)]\beta^{-W} \} = 0 \quad (3.46)$$

$$\frac{1}{H+1} \left\{ \frac{1}{2} H(x_3^2 - 1) [1 + 2Q(1 - x_3^2)] + \ln x_3 \right\} - \frac{1}{2} [1 + 2Q(x_2^2 - x_3^2)] \left[\left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 - 1 \right] = \bar{p} - 1 \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} (8H-1) \left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 \left[\frac{1}{2Qx_2^2} - \left(\frac{x_3}{x_2} \right)^2 \right] + H[(W+1)(8H-1) + 2(W+3)] \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{W-3} \\ - H[(W-1)(8H-1) + 2(W-3)] \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{-(W+3)} = 1 + 4H \end{aligned} \quad (3.48)$$

Burada $\beta = \frac{x_2}{x_1}$ yarıçap oranını göstermektedir.

$\frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} > 0.5\sigma_0$ ve $p < p_{IL}$ özel hali için C_6 , C_7 , C_8 integral sabitleri ile r_3 ara yarıçapı

$$\sigma_r(r_3)|_e = \sigma_r(r_3)|_{p1}$$

$$\sigma_\theta(r_3)|_{p1} - \sigma_r(r_3)|_{p1} = \sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_3)|_e - \sigma_r(r_3)|_e = \sigma_0$$

$$\sigma_r(a)|_{p1} = -p$$

sınır koşullarını kullanarak aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{C}_6 = \frac{1}{1+H} [\ln x_3 + H(0.5 - Q)] - (0.5 + \bar{p}),$$

$$\bar{C}_7 = -\frac{HQ}{1+H} - \bar{p},$$

$$\bar{C}_8 = 0$$

$$x_3^2 = \frac{1}{2Q} \quad (3.49)$$

Burada ara yarıçapın sadece Q'ya bağlı olarak değiştiğini görmek ilginçtir. Bu halde sınır hale karşı gelen $\bar{p}_{IL}$ sınır basınç değeri, $\bar{\sigma}_r(0) = \bar{\sigma}_\theta(0) = -1$

sınır koşulu kullanılarak

$$\bar{p}_{IL} = 0.5 + \frac{1}{1+H} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2Q}} + H(0.5 - Q) \right] \quad (3.50)$$

şeklinde elde edilir.

$$\frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} > 0.5\sigma_0 \text{ ve } p > p_{2L}, \quad \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} < 0.5\sigma_0 \text{ ve } \left(\sigma_0 - \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} \right) < p < \sigma_0 \text{ özel}$$

hallerinde ise sadece C_5 ve C_6 integral sabitleri genel haldekinden farklıdır. Bu sabitlerin değerleri

$$\sigma_r(r_2) = -\sigma_0$$

$$\sigma_r(a) = -p$$

sınır koşulları ile

$$\bar{C}_5 = \left(\frac{\bar{p} - 1}{x_2^2 - 1} - Q \right) x_2^2,$$

$$\bar{C}_6 = \left(\frac{\bar{p} - 1}{x_2^2 - 1} - Q \right) x_2^2 - (\bar{p} + Q)$$

olarak belirlenirler. r_1 ve r_2 ara yarıçapları ise

$$\sigma_\theta(r_2)|_{p3} = \sigma_\theta(r_2)|_c$$

koşulu kullanılarak

$$\begin{aligned} & \frac{8H-1}{24HQ} \frac{\bar{p}-1}{x_2^2-1} \left(\frac{1}{x_2^2} + 1 \right) + \frac{8H-1}{12H} \left(1 - \frac{1}{x_2^2} \right) - \frac{8H-1}{24HQ} \bar{p} - \frac{8H-1}{24HQ x_2^2} - 1 \\ & + \frac{1}{12} [(W+1)(8H-1) + 2(W+3)] \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{(3-W)} - \frac{1}{12} [(W-1)(8H-1) + 2(W-3)] \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{3+W} = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde edilen (3.51) ve daha önceden bulunan (3.46) denklemleri yardımı ile belirlenirler.

Diğer sınır hale karşı gelen $\bar{p}_{2L}$ sınır basıncın değeri ise,

$$\sigma_\theta(a) - \sigma_r(a) = \sigma_0$$

koşulu kullanılarak

$$\bar{p}_{2L} = \left(Q + \frac{0.5 - Q}{x_2^2} \right) (x_2^2 - 1) + 1. \quad (3.52)$$

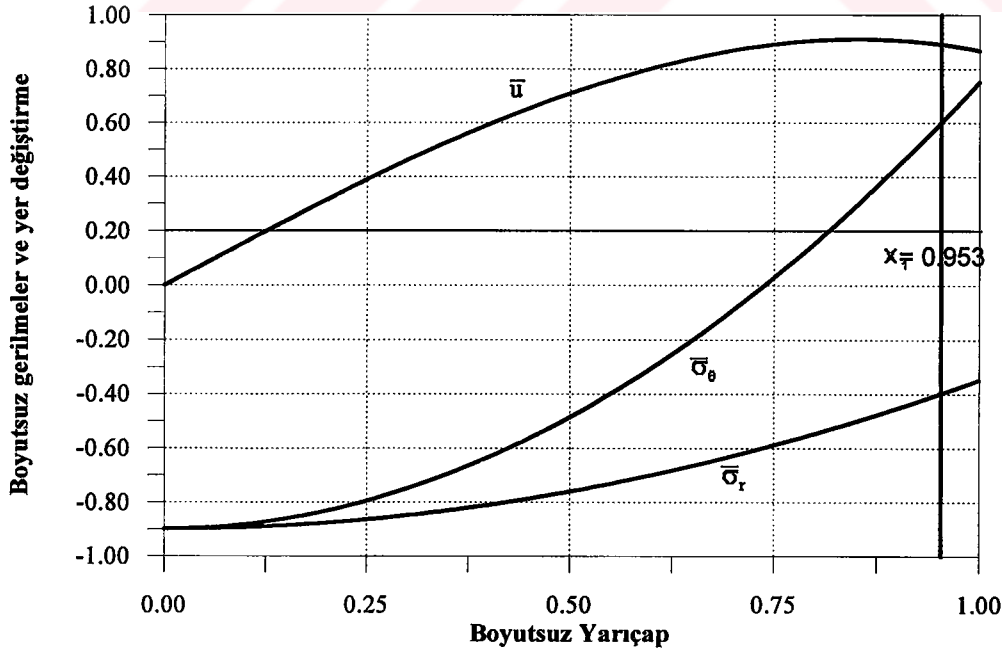
olarak bulunur.

Yukarıda bahsi geçen tüm haller için x_1/x_2 oranının yalnızca H doğrusal pekleşme parametresine bağlı olduğunu görmek diğer bir ilginç noktadır.

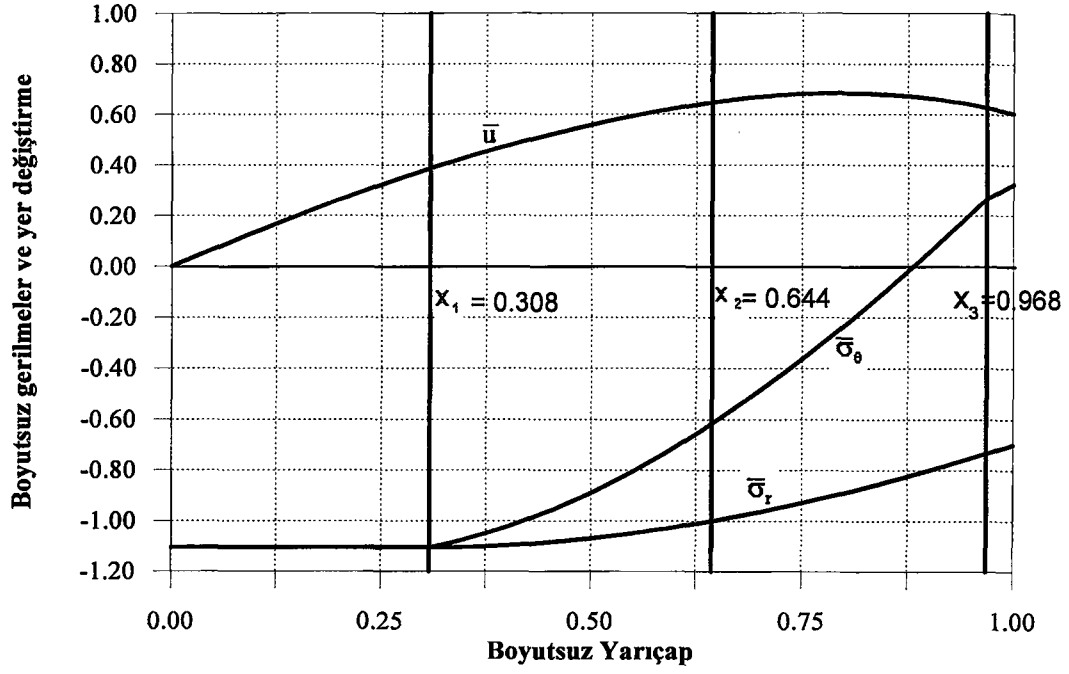
3.2.3 Sayısal Örnek

Sayısal bir örnek olarak, $Q = 0.55$, $H = 0.5$ ve $\nu = 1/3$ olarak boyutsuz limit dış basınçlar $\bar{p}_{1L} = 0.451$ ve $\bar{p}_{2L} = 0.883$ olarak hesaplanmışlardır. Şekil (3.15-3.17)'de, sırasıyla, $\bar{p} = 0.35$, $\bar{p} = 0.7$ ve $\bar{p} = 0.9$ için boyutsuz gerilme ve yer değiştirme dağılımları $Q = 0.55$ için verilmektedir. Boyutsuz gerilmeler ve yer değiştirmeler, diğer örneklerde olduğu gibi $\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}$, $\bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}$, $\bar{u} = \frac{Eu}{\sigma_0 a}$ olarak tanımlanmışlardır.

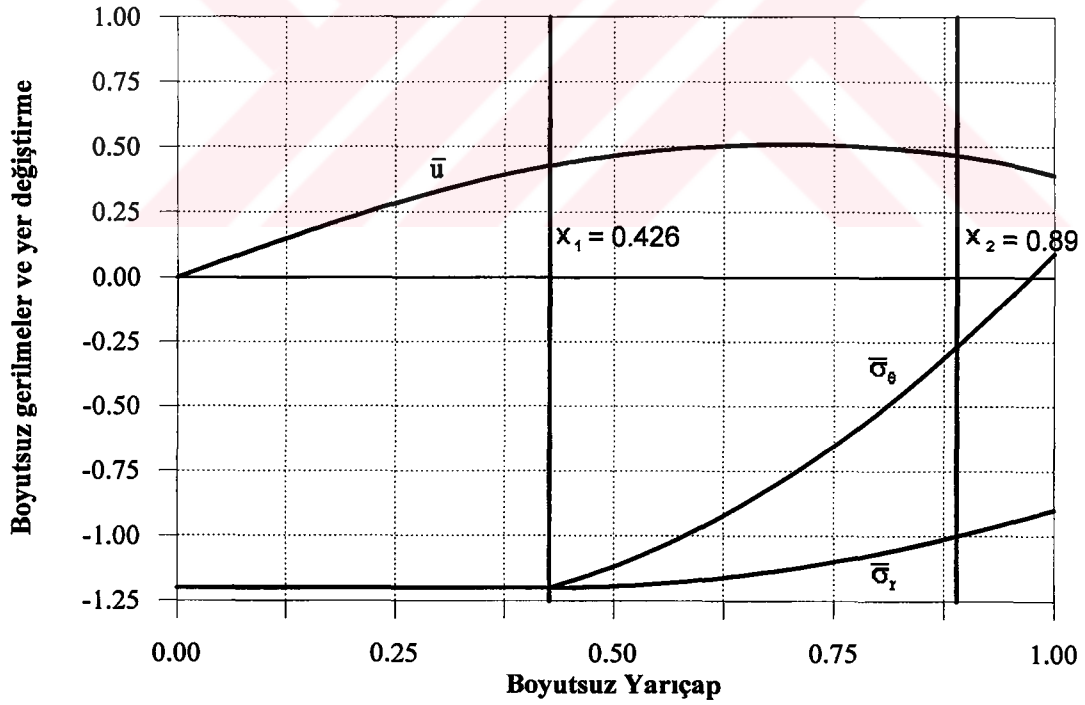
Şekil 3.18'de ise $Q = 0.45$, $H = 0.5$ ve $\nu = 1/3$ için $\bar{p} = 0.7$ alınarak boyutsuz gerilme ve yer değiştirme dağılımları verilmektedir. Şekil 3.19 $Q = 0.55$, $H = 0.5$ ve $\nu = 1/3$ için x_2/x_3 oranının dış basınca bağlı olarak değişimini göstermektedir. Basıncın artmasıyla birlikte x_2/x_3 oranı artmaktadır. Şekil 3.20'de de x_1/x_2 oranının H 'a bağlı olarak değişimi verilmektedir. H pekleşme katsayısı arttıkça x_1/x_2 oranının azaldığı gözlenmektedir. Tablo 3.1'de, $Q=0.55$ ve $\nu=1/3$ için genel çözüme karşılık gelen boyutsuz sınır basınç değerleri verilmektedir. Buradan, pekleşme katsayısı H arttıkça geçerli basınç aralığının büyüdüğü görülür. Tablo 3.2, pekleşme katsayısı H ile x_2 ve x_3 yarıçaplarının değişimini $\bar{p} = 0.75$, $Q=0.55$ ve $\nu=1/3$ için göstermektedir. Söz konusu verilerden, H değerinin artmasıyla dış plastik bölgenin büyüyüp elastik bölgenin daraldığı gözlemlenmiştir.



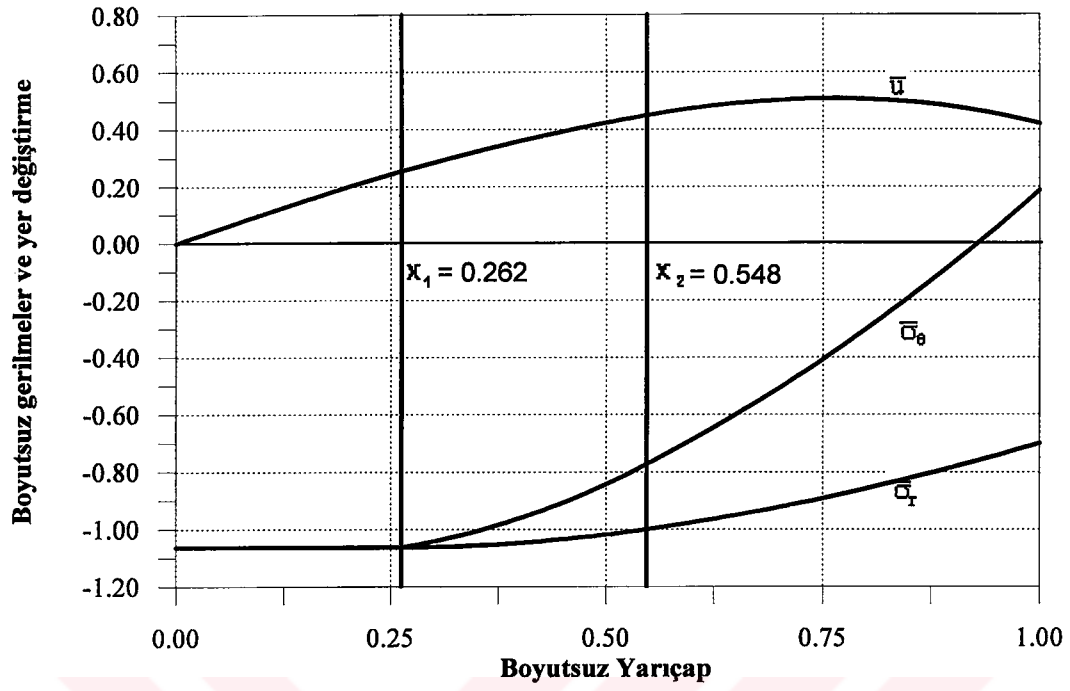
Şekil 3.15 $Q = 0.55$, $H = 0.5$, $\nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.35$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları



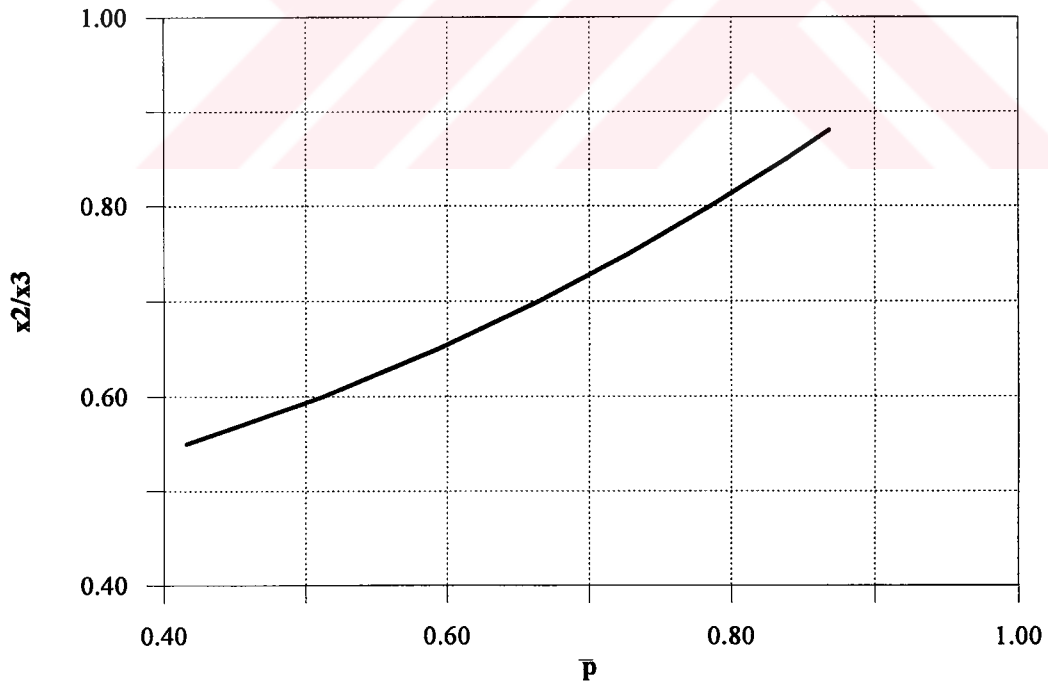
Şekil 3.16 $Q = 0.55$, $H = 0.5$, $\nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.7$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları



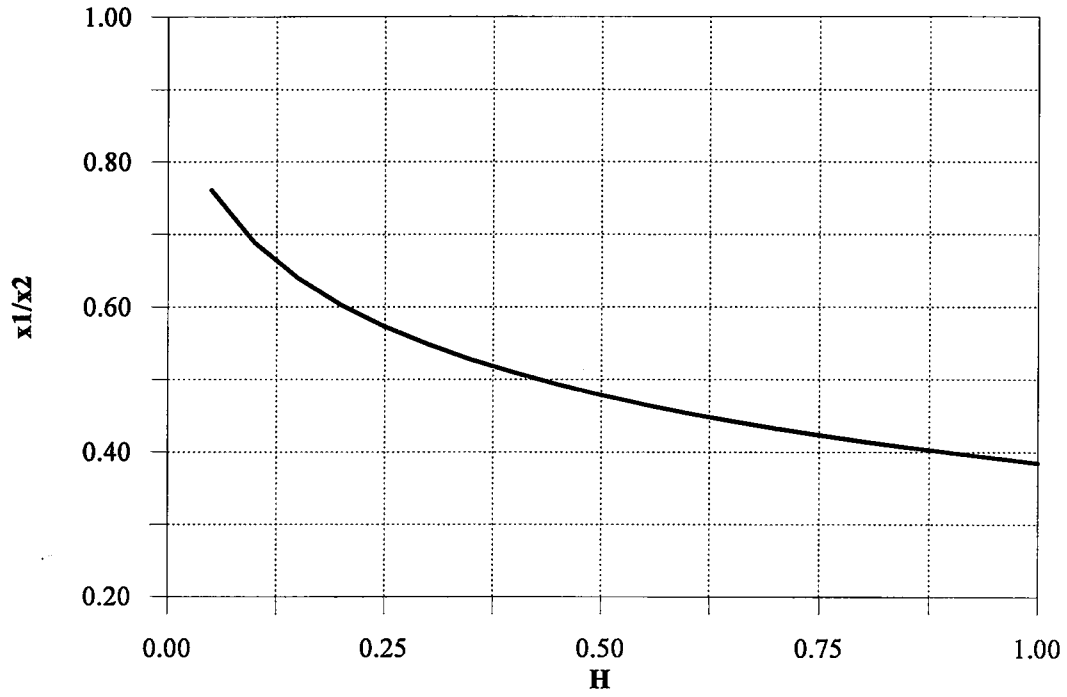
Şekil 3.17 $Q = 0.55$, $H = 0.5$, $\nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.9$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları



Şekil 3.18 $Q = 0.45$, $H = 0.5$, $\nu = 1/3$ ve $\bar{p} = 0.7$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımları



Şekil 3.19 $Q = 0.55$, $H = 0.5$ ve $\nu = 1/3$ için x_2/x_3 oranının dış basınca göre değişimi



Şekil 3.20 $Q = 0.55$ ve $v = 1/3$ için x_1/x_2 oranının H 'a göre değişimi

Tablo 3.1 $Q=0.55$ ve $v=1/3$ için alt ve üst sınır basınç değerlerinin H 'a bağlı değişimleri.

H	$\bar{p}_{1L} < \bar{p} < \bar{p}_{2L}$
0.1	$0.45213174 < \bar{p} < 0.77064373$
0.2	$0.45195409 < \bar{p} < 0.80288194$
0.3	$0.45180378 < \bar{p} < 0.83171581$
0.4	$0.45167494 < \bar{p} < 0.85820864$
0.5	$0.45145623 < \bar{p} < 0.88292527$
0.6	$0.45146557 < \bar{p} < 0.90621960$
0.7	$0.45137936 < \bar{p} < 0.92833483$
0.8	$0.45130273 < \bar{p} < 0.94944798$
0.9	$0.45123416 < \bar{p} < 0.96969374$
1.0	$0.45117246 < \bar{p} < 0.98917768$

Tablo 3.2 $\bar{p} = 0.75$, $Q=0.55$ ve $v=1/3$ için x_2 ve x_3 boyutsuz yarıçaplarının H 'a bağlı değişimleri.

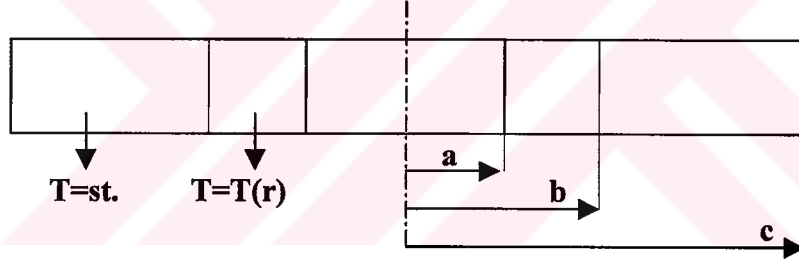
H	x_2	x_3
0.1	0.67129016	0.99386806
0.2	0.69018535	0.98659642
0.3	0.70006296	0.98171659
0.4	0.70631811	0.97816581
0.5	0.71069364	0.97544751
0.6	0.71395151	0.97329099
0.7	0.71648431	0.97153388
0.8	0.71851701	0.97007204
0.9	0.72018871	0.96883525
1.0	0.72159043	0.96777427

BÖLÜM 4

SÜREKSİZ SICAKLIK ALANLARINDA ELASTİK PLASTİK GERİLMELER

4.1 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANI ALTINDAKİ İÇİ BOŞ DİSK

Bu bölümde süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki, yani iç bölgesi kararlı eksenel simetrik sıcaklık alanında, dış bölgesi ise sabit sıcaklıkta olan içi boş bir diskten elastik-plastik davranışı düzlem gerilme hali için incelenecektir. Söz konusu disk Şekil 4.1'de görülmektedir.



Şekil 4.1 Süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki içi boş disk.

Serbest sınır koşulları altındaki bu diskten sıcaklık dağılımı ifadesi,

$$T = \begin{cases} T_b + \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} & a < r < b \\ T_b & b < r < c \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindedir.

4.1.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Düzlem gerilme varsayımı ile, elastik haldeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri [25]

$a < r < b$ için

$$\sigma_r = A_1 + B_1 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (4.2)$$

$$\sigma_\theta = A_1 - B_1 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) \quad (4.3)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - \nu) A_2 - (1 + \nu) B_1 / r^2 + \frac{E\alpha}{2} \cdot \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \left[(1 + \nu) \cdot \ln \frac{r}{b} - 1 \right] + E\alpha T_b \quad (4.4)$$

$b < r < c$ için

$$\sigma_r = A_2 + B_2 / r^2 \quad (4.5)$$

$$\sigma_\theta = A_2 - B_2 / r^2 \quad (4.6)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - \nu) A_2 - (1 + \nu) B_2 / r^2 + E\alpha T_b \quad (4.7)$$

olarak verilirler. Bu ifadelerdeki A , A_2 , B_2 integral sabitleri aşağıdaki sınır koşulları ile belirlenirler:

$r=a$ 'da $\sigma_r(a) = 0$

$r=b$ 'de radyal gerilmelerin sürekliliği

$r=b$ 'de teğetsel gerilmelerin sürekliliği

$r=c$ 'de $\sigma_r(c) = 0$.

Buradan,

$$A_1 = - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot \frac{2a^2 \ln \frac{a}{b} + b^2 - c^2}{c^2 - a^2} \quad (4.8)$$

$$B_1 = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot \frac{b^2 - c^2 + 2c^2 \ln \frac{a}{b}}{c^2 - a^2} a^2 \quad (4.9)$$

$$A_2 = -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot \frac{2a^2 \ln \frac{a}{b} - a^2 + b^2}{c^2 - a^2} \quad (4.10)$$

$$B_2 = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot \frac{2a^2 \ln \frac{a}{b} - a^2 + b^2}{c^2 - a^2} c^2 \quad (4.11)$$

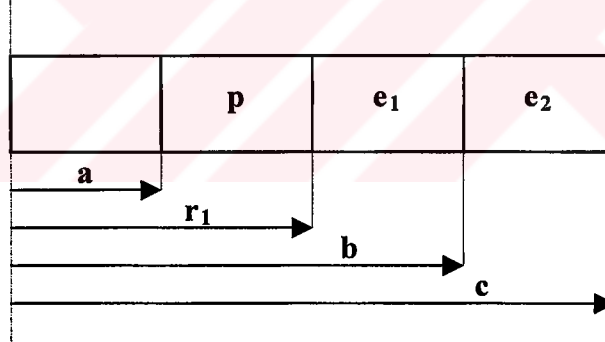
şeklinde integral sabitleri elde edilir.

4.1.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alındığında, ısı terimlerin kabul edilebilir değerlerinde karşılaşılabilecek elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. İç plastik bölge, $\sigma_z(=0) > \sigma_r > \sigma_\theta$, $a < r < r_1$
2. Ara elastik bölge, $r_1 < r < b$
3. Dış elastik bölge, $b < r < c$

Diskteki elastik ve plastik bölgeler Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 Elastik-plastik hal için süreksiz sıcaklık alanına sahip diskteki bölgeler

4.1.2.1 İç Plastik Bölge

Plastik akma $r=a$ 'dan dışarıya doğru

$$-\sigma_y = \sigma_\theta \quad (4.12)$$

ile yayılır. (2.10) yönetici diferansiyel denklemi çözülerek gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = C_1 r^{t_1} + C_2 r^{t_2} - \sigma_0 - HE\alpha \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \quad (4.13)$$

$$\sigma_{\theta} = (1 + t_1)C_1 r^{t_1} + (1 + t_2)C_2 r^{t_2} - \sigma_0 - HE\alpha \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \quad (4.14)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 + \frac{1}{H}\right) \sigma_{\theta} - \nu \sigma_r + \frac{\sigma_0}{H} + E\alpha T. \quad (4.15)$$

olarak bulunurlar.

$$t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\frac{H}{H+1}} \quad (4.16)$$

4.1.2.2 Ara Elastik Bölge

Ara elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri:

$$\sigma_r = A_1 + B_1 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (4.17)$$

$$\sigma_{\theta} = A_1 - B_1 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \left(\ln \frac{r}{b} + 1\right) \quad (4.18)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - \nu)A_1 - (1 + \nu)B_1 / r^2 + \frac{E\alpha}{2} \cdot \frac{T_a - T_b}{\ln \frac{a}{b}} \left[(1 + \nu) \cdot \ln \frac{r}{b} - 1 \right] + E\alpha T_b \quad (4.19)$$

ile verilirler.

4.1.2.3 Dış Elastik Bölge

Dış elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri:

$$\sigma_r = A_2 + B_2 / r^2 \quad (4.20)$$

$$\sigma_{\theta} = A_2 - B_2 / r^2 \quad (4.21)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - \nu)A_2 - (1 + \nu)B_2 / r^2 + E\alpha T_b \quad (4.22)$$

ile verilirler.

4.1.2.4 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

Gerilme ve yer değiştirme ifadelerini açık olarak elde etmek için bu ifadelerde karşılaşılan C_1 , C_2 , A_1 , B_1 , A_2 , B_2 integral sabitleri ile r_1 ara yarıçapını uygun sınır koşulları kullanarak belirlemek gerekir. Yazılabilecek en uygun sınır koşulları

$$\sigma_r(a)|_p = 0$$

$$\sigma_r(r_1)|_p = \sigma_r(r_1)|_{e1}$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_p = -\sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_{e1} = -\sigma_0$$

$$\sigma_r(b)|_{e1} = \sigma_r(b)|_{e2}$$

$$\sigma_\theta(b)|_{e1} = \sigma_\theta(b)|_{e2}$$

$$\sigma_r(c)|_{e2} = 0$$

şeklindedir. Burada p indisi plastik bölgeyi, e₁ indisi ara elastik bölgeyi ve e₂ indisi dış elastik bölgeyi gösterirler. Bu sınır koşulları uygulanarak integral sabitleri ve r₁ aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{C}_1 = \frac{\left(\frac{H\bar{T}}{\ln q} + 1\right)(1+t_2)x_1^{t_2} - \frac{H\bar{T}}{\ln q}q^{t_2}}{(1+t_2)x_1^{t_2}q^{t_1} - (1+t_1)x_1^{t_1}q^{t_2}} \quad (4.23)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{1}{q^{t_2}} \left(\frac{H\bar{T}}{\ln q} + 1 - C_1 q^{t_1} \right) \quad (4.24)$$

$$\bar{A}_1 = \frac{\frac{\bar{T}}{2\ln q} \left[\frac{c^2}{b^2} - 2 + 2x_1^2(\ln x_1 + 1) \right] - 4x_1^2}{2 \left(\frac{c^2}{b^2} + 2x_1^2 \right)} \quad (4.25)$$

$$\bar{B}_1 = \left[\frac{\frac{\bar{T}}{2\ln q} \left[\frac{c^2}{b^2} - 2 + 2x_1^2(\ln x_1 + 1) \right] - 4x_1^2}{2 \left(\frac{c^2}{b^2} + 2x_1^2 \right)} + 1 - \frac{\bar{T}}{2\ln q}(\ln x_1 + 1) \right] x_1^2 \quad (4.26)$$

$$\bar{A}_2 = \frac{\frac{\bar{T}}{2\ln q} \left[\frac{c^2}{b^2} - 2 + 2x_1^2(\ln x_1 + 1) \right] - 4x_1^2}{2 \left(\frac{c^2}{b^2} + 2x_1^2 \right)} - \frac{\bar{T}}{4\ln q} \quad (4.27)$$

$$\bar{B}_2 = - \left[\frac{\bar{T} \left[\frac{c^2}{b^2} - 2 + 2x_1^2 (\ln x_1 + 1) \right] - 4x_1^2}{2 \left(\frac{c^2}{b^2} + 2x_1^2 \right)} - \frac{\bar{T}}{4 \ln q} \right] \cdot \frac{c^2}{b^2} \quad (4.28)$$

$$\bar{C}_1 x_1^{1/2} + \bar{C}_2 x_1^{1/2} - 1 - \frac{H\bar{T}}{\ln q} - \bar{A}_1 - \frac{\bar{B}_1}{x_1^2} + \frac{\bar{T}}{2 \ln q} \ln x_1 = 0 \quad (4.29)$$

Bu ifadelerde geçen boyutsuz büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\bar{A}_1 = A_1 / \sigma_0, \quad \bar{B}_1 = \frac{B_1}{\sigma_0 \cdot b^2}, \quad \bar{A}_2 = A_2 / \sigma_0, \quad \bar{B}_2 = \frac{B_2}{\sigma_0 \cdot b^2}$$

$$\bar{C}_1 = C_1 b^{1/2} / \sigma_0, \quad \bar{C}_2 = C_2 b^{1/2} / \sigma_0, \quad \bar{T} = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0}, \quad q = a/b, \quad x_1 = r_1/b$$

4.1.2.5 Geliştirilen Çözümün Geçerlilik Aralığı

Tresca akma koşuluna göre bu bölümde ele alınan hal için geliştirilen çözüm, sıcaklık farkının her aralığı için geçerli değildir. İncelenen çözümün geçerli olduğu alt ve üst sıcaklık farkları ile yarıçaplar oranı x_1 pekleşme sayısı H 'a bağlı olarak Tablo 4.1'de verilmişlerdir. Plastik akmayı başlatan $\bar{T}_{1L}$ sıcaklık farkı değerleri H ve q değerlerinden etkilenmemekle birlikte, mevcut çözümün üst sınırını belirleyen $\bar{T}_{2L}$ değerinin H değeri azaldıkça arttığı görülmektedir. Benzer şekilde üst sınır için bulunan ara yarıçap değerleri de H arttıkça azalmaktadır.

Tablo 4.1 $\bar{T}_{1L}$ ve $\bar{T}_{2L}$ alt ve üst sınır sıcaklık değerleri ile x_1 'in H ve q 'ya bağlı olarak değişimleri.

q	H	x_1	$\bar{T}_{2L}$	$\bar{T}_{1L}$
0.3	0.1	0.67194920	5.05950	1.0028901
	0.5	0.59780000	4.09286	
	1.0	0.57127851	3.83500	
0.5	0.1	0.86025400	7.14309	1.0029259
	0.5	0.78722307	4.59970	
	1.0	0.76213160	4.08940	
0.7	0.1	0.97055834	18.05000	1.0022656
	0.5	0.93035000	7.53109	
	1.0	0.91377000	6.04925	

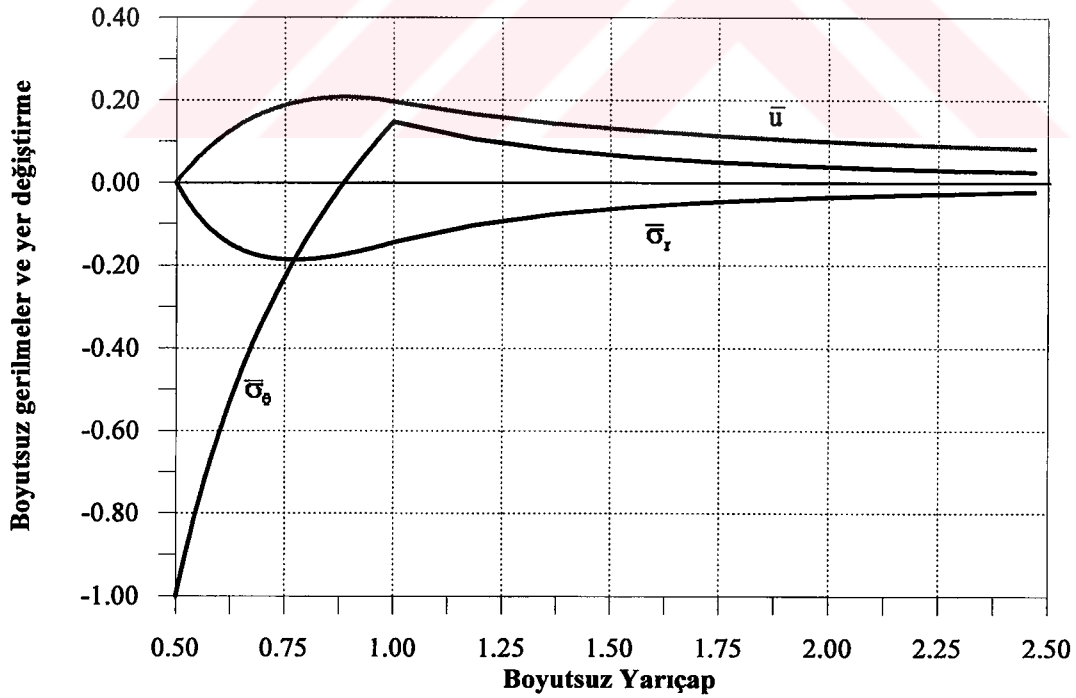
Tablo 4.2'de ise $\bar{T}=1.5$ için ara yarıçapın H 'a bağlı olarak değişimleri verilmiştir. Ara yarıçaptaki değişimin H pekleşme sayısından pek etkilenmediği görülmektedir.

Tablo 4.2 Elastik-plastik ara yarıçapın H 'a bağlı olarak değişimi.

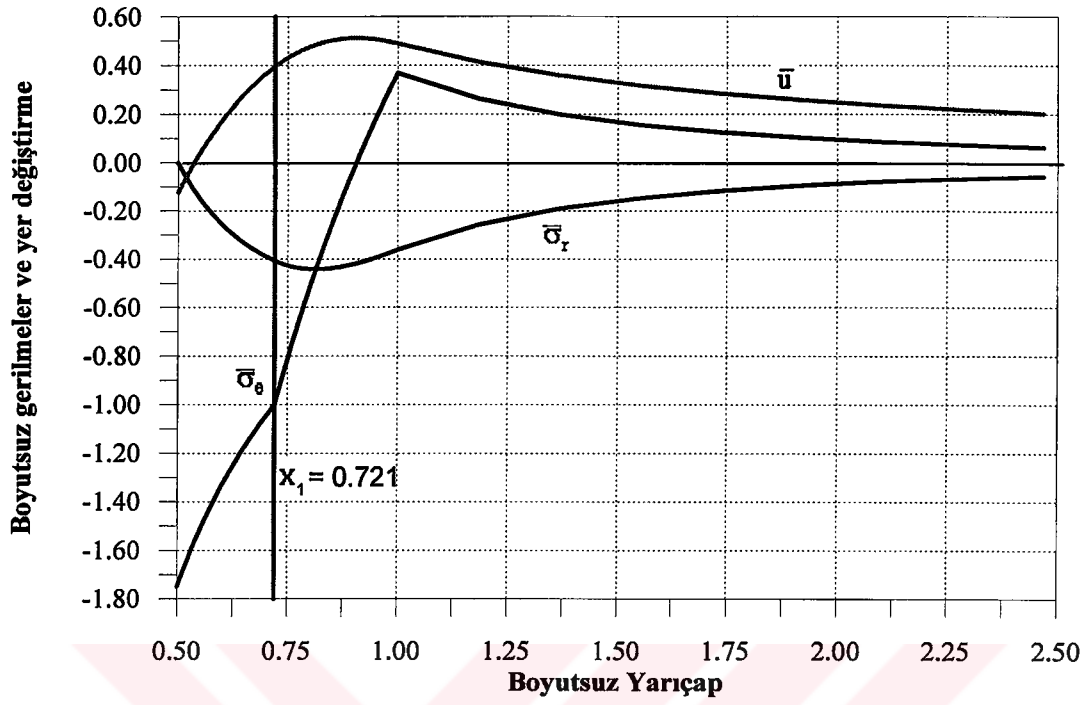
H	x_1
0.0	0.58709437
0.1	0.58643711
0.2	0.58590414
0.3	0.58546317
0.4	0.58509224
0.5	0.58477584
0.6	0.58450276
0.7	0.58426463
0.8	0.58405519
0.9	0.58386947
1.0	0.58370370

4.1.3 Sayısal Örnek

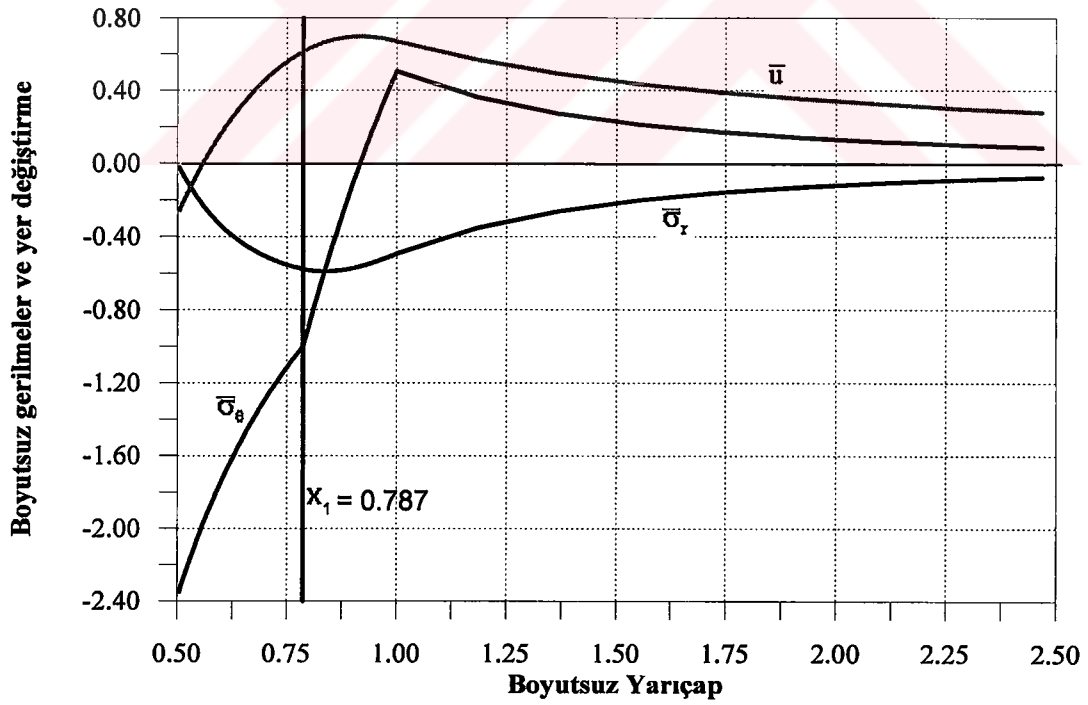
$a/b=0.5$, $c/b=10$ için elastik haldeki gerilme dağılımları ve radyal yer değiştirme, alt sınır sıcaklık değeri $\bar{T}=1.00292$ için Şekil 4.3'te verilmiştir. Şekil 4.4 ile Şekil 4.5'te $H=0.5$ alınarak, sırasıyla $\bar{T}=3$ ve $\bar{T}=4.59970$ için plastik gerilme dağılımları ve radyal yer değiştirme dağılımları gösterilmiştir.



Şekil 4.3 $a/b=0.5$, $c/b=10$, $\bar{T}=1.00292$ için elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



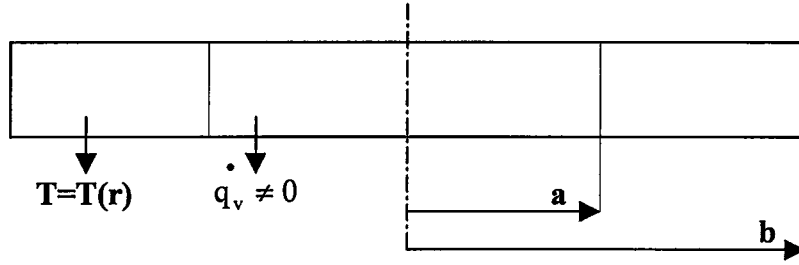
şekil 4.4 $a/b=0.5$, $c/b=10$, $H=0.5$, $\bar{T}=3.0$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



şekil 4.5 $a/b=0.5$, $c/b=10$, $H=0.5$, $\bar{T}=4.59970$ için elastik-plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.

4.2 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANI ETKİSİNDEKİ ISI KAYNAKLI DOLU DİSK

Bu bölümde süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki, iç bölgesinde ısı kaynağı olan, dış bölgesinde ise kararlı eksenel sıcaklık alanının geçerli olduğu dolu bir diskteki elastik-plastik gerilmeler, düzlem gerilme hali için incelenecektir. İnceleme konusu disk Şekil 4.6'da görülmektedir.



Şekil 4.6 Isı kaynaklı ve süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki dolu disk.

Serbest sınır koşulları altındaki bu diske ait sıcaklık ifadesi,

$$T = \left\{ \begin{array}{ll} T_a + \frac{\dot{q}_v (a^2 - r^2)}{4k} & 0 < r < a \\ \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} & a < r < b \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

şeklindedir. $r=b$ 'deki T_b sıcaklığı referans sıcaklığı olarak alınmıştır.

4.2.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Düzlem gerilme varsayımı ile, elastik haldeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri şu şekildedir [25]:

$0 < r < a$ için

$$\sigma_r = A_0 + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (4.31)$$

$$\sigma_\theta = A_0 + \frac{3E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (4.32)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)A_0 + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{4k}a^2 - (1+\nu)\frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k}r^2 + E\alpha T_a \quad (4.33)$$

$a < r < b$ için

$$\sigma_r = A_2 + B_2 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (4.34)$$

$$\sigma_\theta = A_2 - B_2 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} (\ln \frac{r}{b} + 1) \quad (4.35)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)A_2 - (1+\nu)B_2 / r^2 + \frac{E\alpha}{2} \cdot \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \left[(1+\nu) \cdot \ln \frac{r}{b} - 1 \right] \quad (4.36)$$

Bu ifadelerdeki A_0 , A_2 , B_2 integral sabitlerini bulmak için şu uygunluk koşulları kullanılır:

$r=a$ 'da radyal gerilmelerin sürekliliği

$r=a$ 'da teğetsel gerilmelerin sürekliliği

$r=b$ 'de $\sigma_r(b) = 0$.

Buradan,

$$A_0 = \frac{E\alpha T_a}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot \left[\frac{a^2}{b^2} - 1 - 2 \ln \frac{a}{b} \right] + \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} \cdot \left[\frac{a^2}{b^2} - 2 \right] \quad (4.37)$$

$$A_2 = \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} \cdot \frac{a^2}{b^2} + \frac{E\alpha T_a}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot \frac{a^2}{b^2} \quad (4.38)$$

$$B_2 = -\frac{E\alpha T_a}{4 \ln \frac{a}{b}} \cdot a^2 - \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} \cdot a^2 \quad (4.39)$$

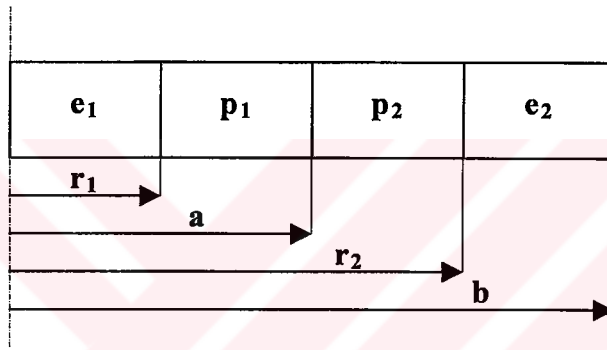
şeklinde integral sabitleri elde edilir.

4.2.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alındığında, ısı terimlerin kabul edilebilir değerlerinde karşılaşılabilecek elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. İç elastik bölge, $0 < r < r_1$
2. Birinci ara plastik bölge, $\sigma_z(=0)$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$, $r_1 < r < a$
3. İkinci ara plastik bölge, $\sigma_z(=0)$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$, $a < r < r_2$
4. Dış elastik bölge, $r_2 < r < b$

İncelenen elastik ve plastik bölgeler Şekil 4.7’de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. Elastik-plastik hal için ısı kaynaklı, süreksiz sıcaklık alanındaki dolu diskteki bölgeler

4.2.2.1 İç Elastik Bölge

İç elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri:

$$\sigma_r = C_1 + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (4.40)$$

$$\sigma_\theta = C_1 + \frac{3E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (4.41)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-\nu)C_1 + \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{4k} - (1+\nu) \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 + E\alpha T_a \quad (4.42)$$

ile verilirler.

4.2.2.2 Birinci Ara Plastik Bölge

$\frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} > 0.5\sigma_0$ için plastik akma $r=a$ 'dan hem içeriye, hem de dışarıya doğru

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y \quad (4.43)$$

ile yayılır. Kaynak [12] ve [27]'yi izleyerek, uygunluk denkleminde hareketle, radyal gerilme cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_r}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2 \frac{\sigma_0}{H+1} - \frac{H}{H+1} E\alpha r \frac{dT}{dr}. \quad (4.44)$$

Bu denklem çözülerek gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri

$$\sigma_r = C_7 + \frac{C_8}{r^2} + \frac{\sigma_0}{H+1} \ln \frac{r}{a} + \frac{H}{H+1} \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (4.45)$$

$$\sigma_\theta = C_7 - \frac{C_8}{r^2} + \frac{\sigma_0}{H+1} (1 + \ln \frac{r}{a}) + \frac{H}{H+1} \frac{3E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} E \frac{u}{r} = & (1-\nu)C_7 - \left[\frac{(1+\nu)H+2}{H} \right] \frac{C_8}{r^2} - \left[\frac{(1+\nu)H+2}{H+1} \right] \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} r^2 \\ & + \frac{E\alpha\dot{q}_v}{16k} 4b^2 + \frac{(1-\nu)\sigma_0}{H+1} \ln \frac{r}{a} + E\alpha T_a. \end{aligned} \quad (4.47)$$

şeklinde elde edilirler.

4.2.2.3 İkinci Ara Plastik Bölge

Bu bölgede de $\frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k} > 0.5\sigma_0$ için plastik akma $r=a$ 'dan dışarıya doğru

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y \quad (4.48)$$

ile yayılır. (4.45) denklemi çözülerek, gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_r = C_5 + \frac{C_6}{r^2} + \frac{1}{2 \cdot (H+1)} \left(2\sigma_0 - HE\alpha \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \right) \ln \frac{r}{a} \quad (4.49)$$

$$\sigma_\theta = C_5 - \frac{C_6}{r^2} + \frac{1}{2 \cdot (H+1)} \left(2\sigma_0 - HE\alpha \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \right) \cdot \left(\ln \frac{r}{a} + 1 \right) \quad (4.50)$$

$$E \frac{u}{r} = \left(1 + \frac{1}{H} \right) \sigma_\theta - \left(\nu + \frac{1}{H} \right) \sigma_r - \frac{\sigma_0}{H} + \frac{E\alpha T_a}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (4.51)$$

4.2.2.4 Dış Elastik Bölge

Dış elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri:

$$\sigma_r = C_3 + C_4 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad (4.52)$$

$$\sigma_\theta = C_3 - C_4 / r^2 - \frac{E\alpha}{2} \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \left(\ln \frac{r}{b} + 1 \right) \quad (4.53)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - \nu) C_3 - (1 + \nu) C_4 / r^2 + \frac{E\alpha}{2} \cdot \frac{T_a}{\ln \frac{a}{b}} \left[(1 + \nu) \cdot \ln \frac{r}{b} - 1 \right] \quad (4.54)$$

şeklindedir.

4.2.2.5 İntegral Sabitleri ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

En genel halde gerilme ve yer değiştirme ifadelerini açık olarak elde etmek için bu ifadelerde karşılaşılan $C_1, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ integral sabitleri ile r_1, r_2 ve r_3 ara yarıçaplarını uygun sınır koşulları kullanarak belirlemek gerekir. Yazılabilecek en uygun sınır koşulları

$$\sigma_r(r_1)|_{e1} = \sigma_r(r_1)|_{p1}$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_{e1} - \sigma_r(r_1)|_{e1} = \sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_1)|_{p1} - \sigma_r(r_1)|_{p1} = \sigma_0$$

$$\sigma_r(a)|_{p1} = \sigma_r(a)|_{p2}$$

$$\sigma_\theta(a)|_{p1} = \sigma_\theta(a)|_{p2}$$

$$\sigma_r(r_2)|_{p2} = \sigma_r(r_2)|_{e2}$$

$$\sigma_\theta(r_2)|_{p2} - \sigma_r(r_2)|_{p2} = \sigma_0$$

$$\sigma_\theta(r_2)|_{e2} - \sigma_r(r_2)|_{e2} = \sigma_0$$

$$\sigma_r(b)|_{e2} = 0$$

şeklinde seçilebilirler. Burada p_1 indisi birinci ara plastik bölgeyi, p_2 indisi ikinci ara plastik bölgeyi, e_1 indisi iç elastik bölgeyi ve e_2 indisi dış elastik bölgeyi gösterirler. Bu sınır koşulları uygulanarak integral sabitleri ile boyutsuz ara yarıçaplar x_1 ve x_2 aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$x_1^2 = \frac{1}{2Q} \quad (4.55)$$

$$x_2^2 = 2 \frac{Q + \frac{\bar{T}}{4 \ln Q}}{1 + \frac{\bar{T}}{2 \ln Q}} \quad (4.56)$$

$$\bar{C}_8 = 0 \quad (4.57)$$

$$\bar{C}_3 = q^2 \left(Q + \frac{\bar{T}}{4 \ln Q} \right) \quad (4.58)$$

$$\bar{C}_4 = - \left(Q + \frac{\bar{T}}{4 \ln Q} \right) \quad (4.59)$$

$$\bar{C}_6 = - \frac{H}{H+1} \left(Q + \frac{\bar{T}}{4 \ln Q} \right) \quad (4.60)$$

$$\bar{C}_5 = q^2 \left(Q + \frac{\bar{T}}{4 \ln Q} \right) - \frac{5H+1}{2(H+1)} \left(1 + \frac{\bar{T}}{2 \ln Q} \right) - \frac{\bar{T}}{2} \left(1 + \frac{\ln x_2}{\ln q} \right) - \frac{1 - \frac{\bar{T}H}{2 \ln Q}}{H+1} (1 + \ln x_2) \quad (4.61)$$

$$\bar{C}_7 = \bar{C}_5 - \frac{H}{H+1} \left(2Q + \frac{\bar{T}}{4 \ln Q} \right) \quad (4.62)$$

$$\bar{C}_1 = \bar{C}_7 - \frac{2 \ln x_1 - 1}{2(H+1)} \quad (4.63)$$

Buradaki boyutsuz sayılar şu şekildedir:

$$\bar{C}_1 = C_1 / \sigma_0, \bar{C}_7 = C_7 / \sigma_0, \bar{C}_5 = C_5 / \sigma_0, \bar{C}_3 = C_3 / \sigma_0, \bar{C}_8 = \frac{C_8}{\sigma_0 \cdot a^2}$$

$$\bar{C}_6 = \frac{C_6}{\sigma_0 \cdot a^2}, \bar{C}_4 = \frac{C_4}{\sigma_0 \cdot a^2}, \bar{T} = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0}, q = a/b, x_1 = r_1/a$$

$$x_2 = r_2/a, Q = \frac{E\alpha\dot{q}_v a^2}{16k\sigma_0}$$

4.2.2.6 Geliştirilen Çözümün Geçerlilik Aralığı

Burada geliştirilen çözüm, sıcaklık farkının ve $\dot{q}_v$ 'nin her değeri için geçerli değildir. Belirli sınırlar dışına çıktığında merkezden dışarıya doğru $\sigma_\theta = \sigma_r = -\sigma_y$ ile akma başlar. Bu akmayı başlatacak sıcaklık farkı değerleri, yukarıdaki denklemlere (4.55-4.63) ek olarak, disk merkezinde $\sigma_r = -\sigma_0$ koşulu da kullanılarak belirlenir. Tablo 4.3 ve Tablo 4.4'te, sırasıyla $\bar{T}=0.25$ ve $\bar{T}=0.35$ için H'nin değişimine bağlı olarak, sınır Q değerleri verilmiştir.

Tablo 4.3 $q=2/3$ ve $\bar{T}=0.25$ için Q, x_1 ve x_2 'nin sınır değerleri

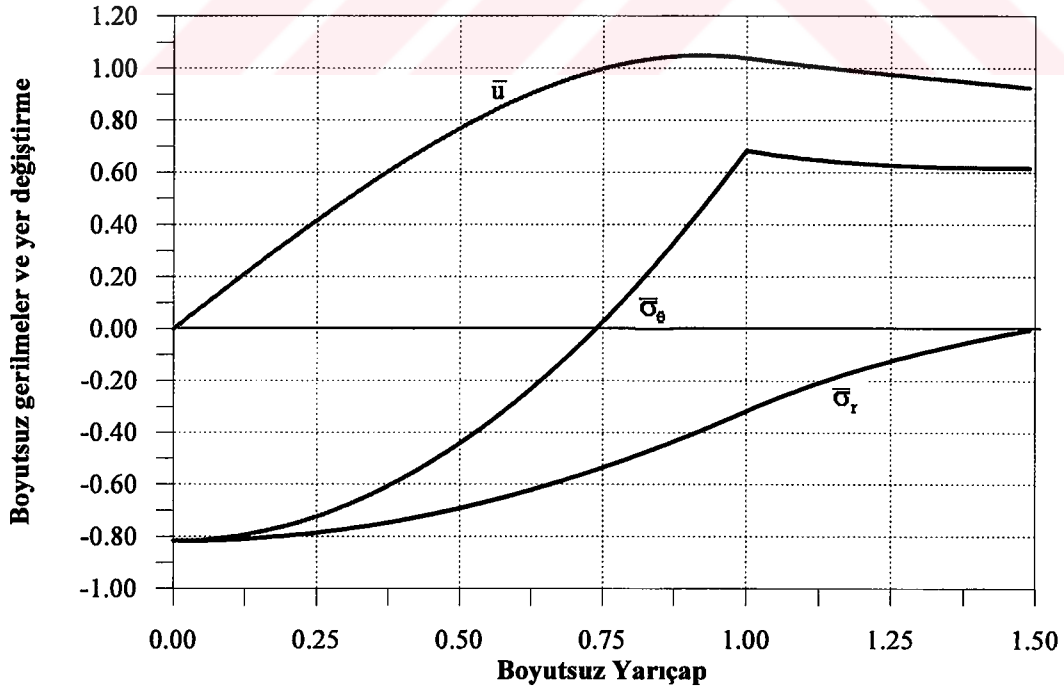
H	Q	x_1	x_2
0.1	0.64050270	0.88353655	1.1858525
0.2	0.63788130	0.88535016	1.1826524
0.3	0.63580601	0.88679388	1.1801128
0.4	0.63412032	0.88797179	1.1780460
0.5	0.63272288	0.88895184	1.1763297
0.6	0.63154488	0.88978052	1.1748811
0.7	0.63053802	0.89049065	1.1736416
0.8	0.62966735	0.89110609	1.1725686
0.9	0.62890676	0.89164478	1.1716305
1.0	0.62823657	0.89212025	1.1708032

Tablo 4.4 $q=2/3$ ve $\bar{T}=0.35$ için Q , x_1 ve x_2 'nin sınır değerleri

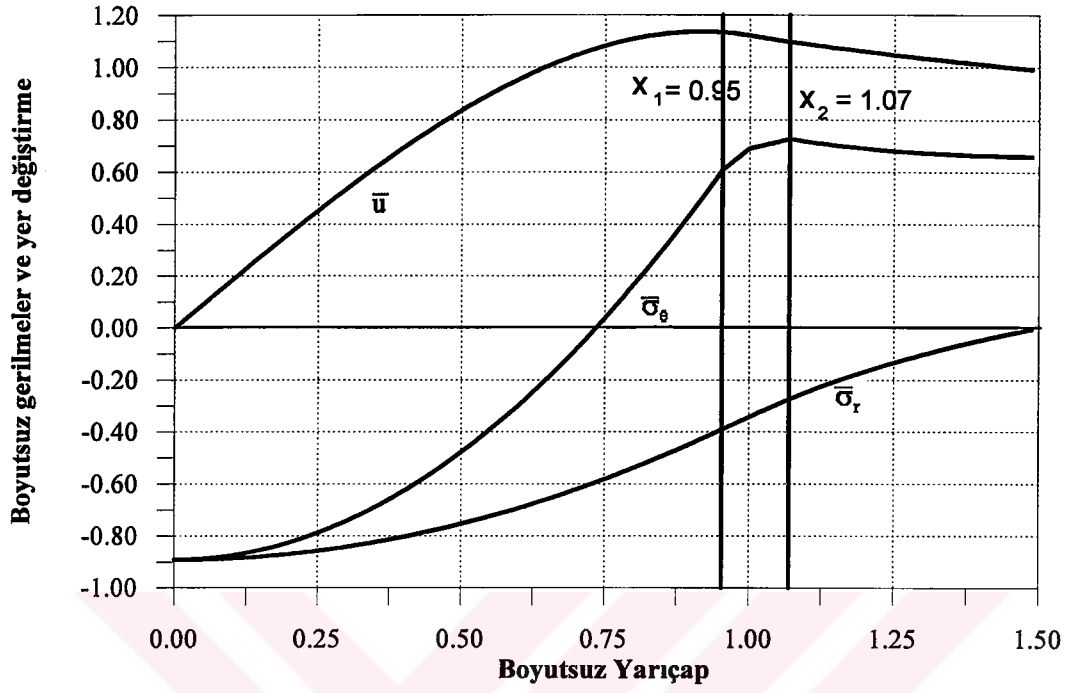
H	Q	x_1	x_2
0.1	0.62897109	0.89159918	1.2057390
0.2	0.62649460	0.89335966	1.2021200
0.3	0.62453729	0.89475846	1.1992520
0.4	0.62294947	0.89589805	1.1969204
0.5	0.62163448	0.89684513	1.1949859
0.6	0.62052695	0.89764513	1.1933542
0.7	0.61958100	0.89833011	1.1919588
0.8	0.61876343	0.89892339	1.1907515
0.9	0.61804962	0.89944235	1.1896964
1.0	0.61742087	0.89990020	1.1887662

4.2.3 Sayısal Örnek

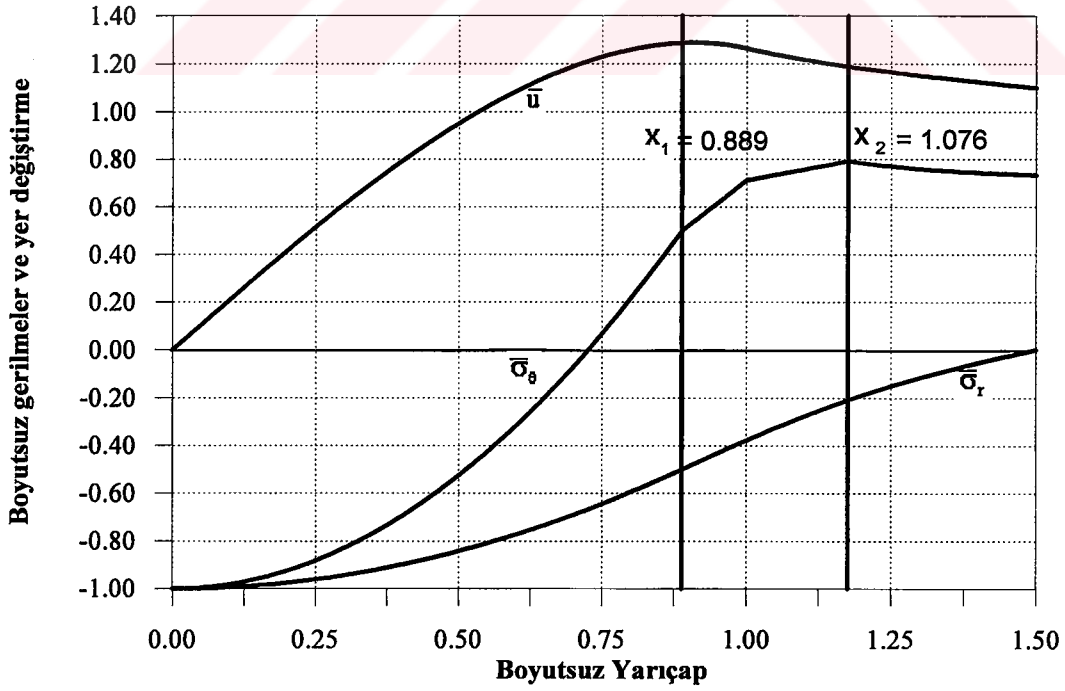
Sayısal örnek olarak, $q=2/3$, $H=0.5$ ve $\bar{T}=0.25$ alınarak; $Q=0.5$, $Q=0.55$, $Q=0.63272288$ alınarak çizilen gerilme ve yer değiştirme dağılımları, sırasıyla, Şekil 4.8-Şekil 4.10'da gösterilmişlerdir. Benzer şekilde aynı çap oranı q ve aynı pekleşme sayısı H ile, bu kez $\bar{T}=0.35$ alınarak benzer dağılımlar hesaplanmış ve $Q=0.5$, $Q=0.55$ ve $Q=0.62163448$ alınarak çizilen gerilme ve yer değiştirme dağılımları, sırasıyla, Şekil 4.11-Şekil 4.13'de gösterilmişlerdir.



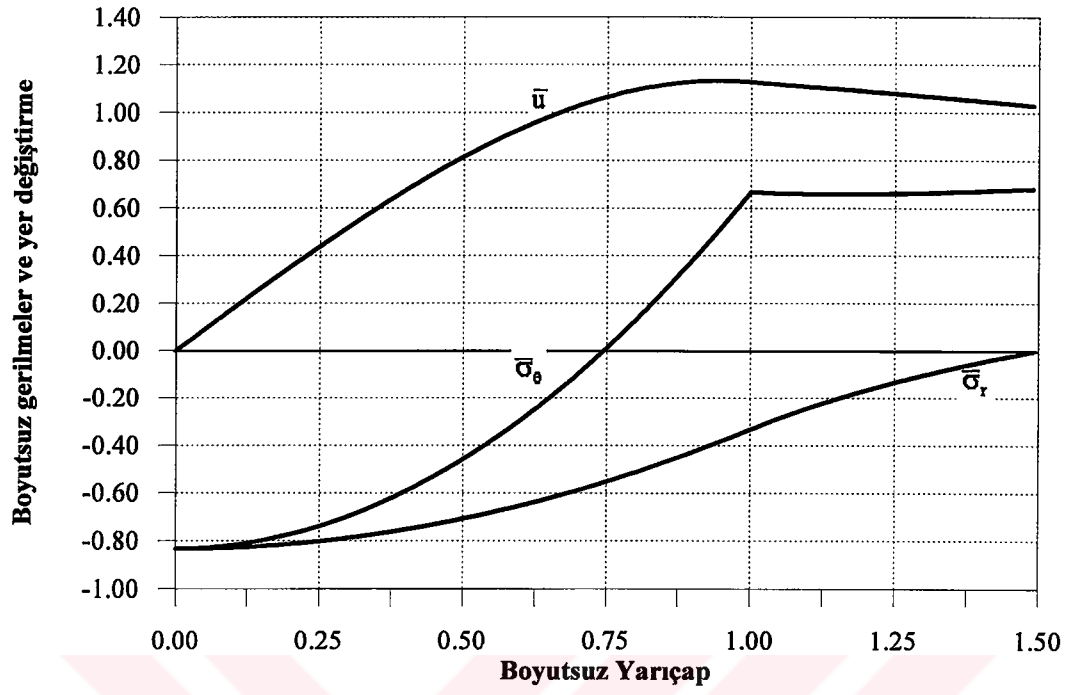
Şekil 4.8 $H=0.5$, $Q=0.5$, $\bar{T}=0.25$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



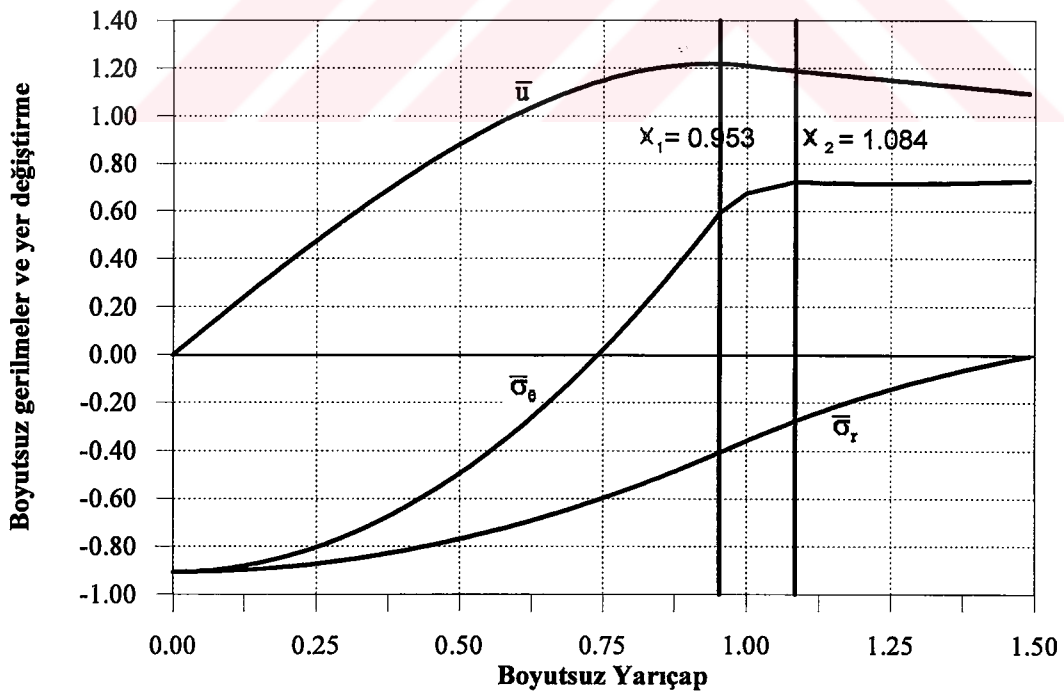
Şekil 4.9 $H=0.5$, $Q=0.55$, $\bar{T}=0.25$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



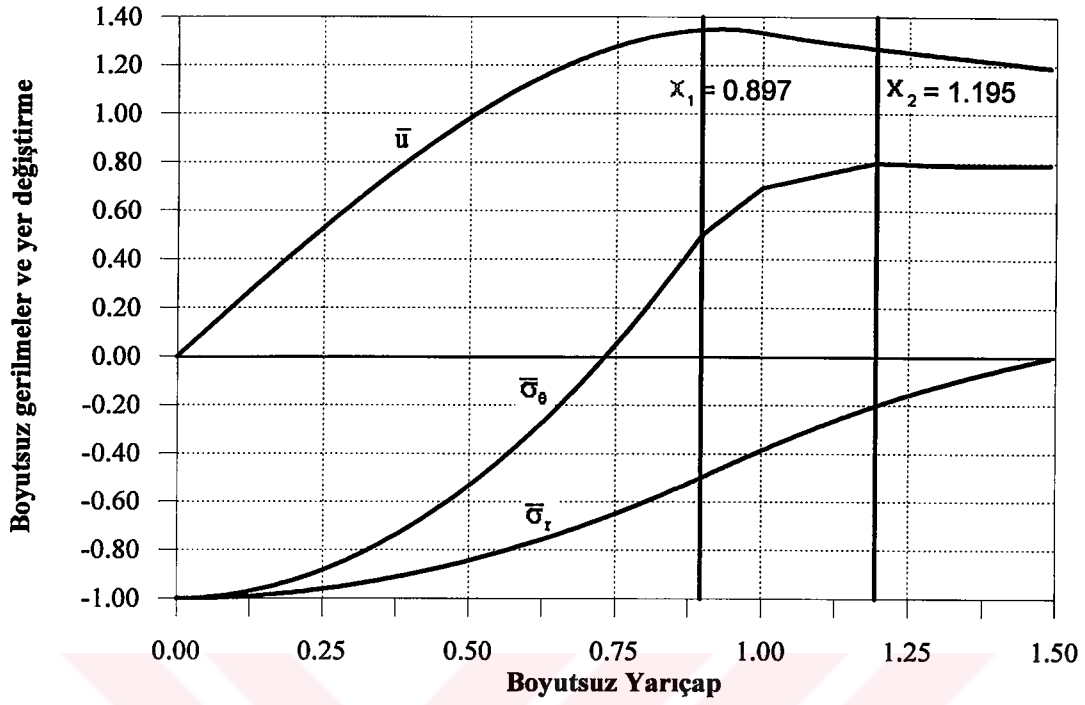
Şekil 4.10 $H=0.5$, $Q=0.63272$, $\bar{T}=0.25$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 4.11 $H=0.5$, $Q=0.5$, $\bar{T}=0.35$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



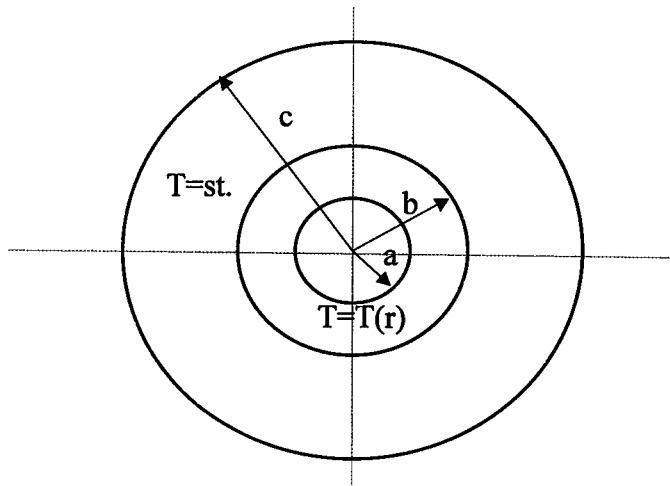
Şekil 4.12 $H=0.5$, $Q=0.55$, $\bar{T}=0.35$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.



Şekil 4.13 $H=0.5$, $Q=0.62163448$, $\bar{T}=0.35$ için gerilmeler ve radyal yer değiştirme dağılımları.

4.3 SÜREKSİZ SICAKLIK ALANI ETKİSİNDEKİ KÜRE

Bu bölümde süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki, iç bölgesinde daimi sıcaklık alanı olan, dış bölgesinde sıcaklığın sabit olduğu içi boş bir küredeki elastik-plastik gerilmeler incelenecektir. İnceleme konusu küre Şekil 4.14'de görölmektedir.



Şekil 4.14 Süreksiz sıcaklık alanı etkisindeki küre.

Serbest sınır koşulları altındaki küreye ait sıcaklık ifadesi,

$$T = \begin{cases} T_b + \frac{(T_a - T_b)}{1 - \frac{b}{a}} \cdot \left(1 - \frac{b}{r}\right) & a < r < b \\ T_b & b < r < c \end{cases} \quad (4.64)$$

şeklindedir.

4.3.1 Elastik Gerilme Dağılışı

Küresel koordinatlarda elastik haldeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri şu şekildedir [25]:

$a < r < b$ için

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^3} - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{(1 - \nu) \cdot \left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{b}{r} \quad (4.65)$$

$$\sigma_\theta = A - \frac{B}{2r^3} - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1 - \nu) \cdot \left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{b}{r} \quad (4.66)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - 2\nu)A - (1 + \nu) \frac{B}{2r^3} + E\alpha \left[\frac{(T_a - T_b) b}{\frac{b}{a} - 1} \cdot \frac{1 + \nu}{r \cdot 2(1 - \nu)} + \frac{T_b - T_a \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}} \right] \quad (4.67)$$

$b < r < c$ için

$$\sigma_r = A_2 + \frac{B_2}{r^3} \quad (4.68)$$

$$\sigma_\theta = A_2 - \frac{B_2}{2r^3} \quad (4.69)$$

$$E \frac{u}{r} = (1 - 2\nu)A_2 - (1 + \nu) \frac{B_2}{2r^3} + E\alpha T_b \quad (4.70)$$

Bu ifadelerdeki A , B , A_2 , B_2 integral sabitlerini bulmak için şu uygunluk koşulları kullanılır:

$r=a$ 'da $\sigma_r(a) = 0$

$r=b$ 'de radyal gerilmelerin sürekliliği

$r=b$ 'de teğetsel gerilmelerin sürekliliği

$r=c$ 'de $\sigma_r(c) = 0$.

Buradan,

$$A = -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{1 - \nu} \frac{a}{b - a} \cdot \frac{3a^2b - b^3 - 2c^3}{3(c^3 - a^3)} \quad (4.71)$$

$$B = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{1 - \nu} \frac{a^3}{b - a} \cdot \frac{-ab^3 - 2ac^3 + 3bc^3}{3(c^3 - a^3)} \quad (4.72)$$

$$A_2 = -\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{1 - \nu} \frac{a}{b - a} \cdot \frac{3a^2b - b^3 - 2a^3}{3(c^3 - a^3)} \quad (4.73)$$

$$B_2 = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{1 - \nu} \frac{ac^3}{b - a} \cdot \frac{3a^2b - b^3 - 2a^3}{3(c^3 - a^3)} \quad (4.74)$$

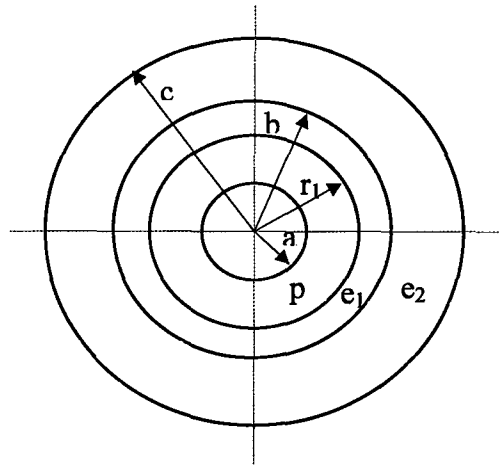
şeklinde integral sabitleri elde edilir.

4.3.2 Elastik-Plastik Gerilme Dağılışı

Elastik çözüm göz önüne alındığında, karşılaşılabilecek elastik ve plastik bölgeler aşağıdaki gibi ayırt edilebilirler:

1. Plastik bölge, $\sigma_\varphi = \sigma_\theta < \sigma_r < 0$, $a < r < r_1$
2. Ara elastik bölge, $r_1 < r < b$
3. Dış elastik bölge, $b < r < c$

İncelenen elastik ve plastik bölgeler Şekil 4.15'de gösterilmiştir.



Şekil 4.15 Süreksiz sıcaklık alanındaki küredeki elastik-plastik bölgeler

4.3.2.1 Plastik Bölge

$\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0} > 2(1 - \nu) \frac{c^3 - a^3}{2c^3 - ba(a + b)}$ için plastik akma $r=a$ 'dan dışarıya doğru

$$\sigma_\theta - \sigma_r = -\sigma_y \quad (4.75)$$

ile yayılır. Kaynak [15] ve [16] izlenerek, uygunluk denkleminde hareketle, şekil değişimleri cinsinden yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E \left(\frac{du}{dr} + 2 \frac{u}{r} \right) = (1 - 2\nu)(\sigma_r + 2\sigma_\theta) + 3E\alpha T \quad (4.76)$$

Bu denklemin çözümü ile gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^3} - \frac{2\sigma_0}{1 + 2H(1 - \nu)} \ln \frac{r}{b} - \frac{2E\alpha(T_a - T_b)}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{H}{1 + 2H(1 - \nu)} \frac{b}{r} \quad (4.77)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{2r^3} - \frac{\sigma_0}{1 + 2H(1 - \nu)} \left(2 \ln \frac{r}{b} + 1 \right) - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{H}{1 + 2H(1 - \nu)} \frac{b}{r} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} E \frac{u}{r} = & (1 - 2\nu)C_1 - (1 + \nu + \frac{3}{2H}) \frac{C_2}{2r^3} - \frac{2\sigma_0(1 - 2\nu)}{1 + 2H(1 - \nu)} \ln \frac{r}{b} \\ & + \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)} \left[\frac{3 + 2H(1 + \nu)}{1 + 2H(1 - \nu)} \cdot \frac{b}{2r} - 1 \right] + E\alpha T_b \end{aligned} \quad (4.79)$$

4.3.2.2 Ara Elastik Bölge

Ara elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri önceden belirtildiği gibi:

$$\sigma_r = A + \frac{B}{r^3} - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{(1 - \nu) \cdot \left(\frac{b}{a} - 1\right)} \frac{b}{r} \quad (4.80)$$

$$\sigma_{\theta} = A - \frac{B}{2r^3} - \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{2(1-\nu)} \cdot \frac{b}{\left(\frac{b}{a} - 1\right)r} \quad (4.81)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-2\nu)A - (1+\nu) \frac{B}{2r^3} + \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\frac{b}{a} - 1} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{1+\nu}{2(1-\nu)} + E\alpha \frac{T_b - T_a \frac{a}{b}}{1 - \frac{a}{b}} \quad (4.82)$$

şeklindedir.

4.3.2.3 Dış Elastik Bölge

İç elastik bölgedeki gerilmeler ve radyal yer değiştirme ifadeleri:

$$\sigma_r = A_2 + \frac{B_2}{r^3} \quad (4.83)$$

$$\sigma_{\theta} = A_2 - \frac{B_2}{2r^3} \quad (4.84)$$

$$E \frac{u}{r} = (1-2\nu)A_2 - (1+\nu) \frac{B_2}{2r^3} + E\alpha T_b \quad (4.85)$$

ile verilirler.

4.3.2.4 İntegral Sabitleri Ve Ara Yarıçapların Belirlenmesi

Plastik akma halindeki gerilme ve yer değiştirme ifadelerini açık olarak elde etmek için bu ifadelerde karşılaşılan C_1 , C_2 , A , B , A_2 , B_2 integral sabitleri ile r_1 ara yarıçaplarını uygun sınır koşulları kullanarak belirlemek gerekir. Yazılabilecek en uygun sınır koşulları şu şekilde seçilmişlerdir:

$$\sigma_r(a)|_p = 0$$

$$\sigma_r(r_1)|_p = \sigma_r(r_1)|_{e1}$$

$$\sigma_{\theta}(r_1)|_p - \sigma_r(r_1)|_p = -\sigma_0$$

$$\sigma_{\theta}(r_1)|_{e1} - \sigma_r(r_1)|_{e1} = -\sigma_0$$

$$\sigma_r(b)|_{e1} = \sigma_r(b)|_{e2}$$

$$u(b)|_{e1} = u(b)|_{e2}$$

$$\sigma_r(c)|_{e2} = 0$$

Burada p indisi plastik bölgeyi, e_1 indisi ara elastik bölgeyi, e_2 indisi dış elastik bölgeyi gösterirler. Bu sınır koşulları uygulanarak integral sabitleri aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\bar{C}_1 = \frac{\bar{T}q}{3(1-\nu)\left(\frac{1}{q}-1\right)} x_1^2 + \frac{2}{3} x_1^3 \quad (4.86)$$

$$\bar{C}_2 = \frac{2}{3} x_1^3 \left[1 + \frac{2(\ln x_1 + 1) - \frac{\bar{T}Hq}{\left(\frac{1}{q}-1\right)x_1}}{1 + 2H(1-\nu)} \right] \quad (4.87)$$

$$\bar{A} = -\frac{C_2}{q^3} + \left(2 \ln q + \frac{2\bar{T}H}{\left(\frac{1}{q}-1\right)} \right) \frac{1}{1 + 2H(1-\nu)} \quad (4.88)$$

$$\bar{B} = \bar{C}_1 + \frac{\bar{C}_2 - \bar{B}}{x_1^3} + \frac{\bar{T}q(1-2H\nu)}{x_1\left(\frac{1}{q}-1\right)[1 + 2H(1-\nu)]} - \frac{2 \ln x_1}{1 + 2H(1-\nu)} \quad (4.89)$$

$$\bar{A}_2 = -\frac{2}{2 + \frac{c^3}{b^3}} + \left(\bar{A} - \bar{B} + \frac{\bar{T}q}{2(1-\nu)\left(\frac{1}{q}-1\right)} \right) \quad (4.90)$$

$$\bar{B}_2 = \frac{b^3}{c^3} \bar{A} \quad (4.91)$$

$$\bar{A}_2 + \bar{B}_2 - \bar{A} - \bar{B} + \frac{\bar{T}q}{(1-\nu)\left(\frac{1}{q}-1\right)} = 0 \quad (4.92)$$

Burada kullanılan boyutsuz sayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\bar{A} = A / \sigma_0, \quad \bar{B} = \frac{B}{\sigma_0 \cdot b^3}, \quad \bar{A}_2 = A_2 / \sigma_0, \quad \bar{B}_2 = \frac{B_2}{\sigma_0 \cdot b^3}$$

$$\bar{C}_1 = C_1 / \sigma_0, \quad \bar{C}_2 = \frac{C_2}{\sigma_0 \cdot b^3}, \quad \bar{T} = \frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0}, \quad q = a/b, \quad x_1 = r_1/b$$

4.3.2.5 Geliştirilen Çözümün Geçerlilik Aralığı

$$\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0} > 2(1-\nu) \frac{c^3 - a^3}{2c^3 - ba(a+b)} \quad \text{sağlanması durumunda iç yarıçaptan itibaren}$$

dışarıya doğru plastik akma başlar. Ve aynı akış, gerçekleşme olasılığı düşük sıcaklık farklarına ulaşana kadar sürer. Bu üst sınır sıcaklık değerlerinde $r = b$ 'den itibaren $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y$ ile akma başlar. Geliştirilen çözümün geçerli sıcaklık aralıklarını belirleyebilmek için sınır koşullarına ek olarak $\sigma_\theta(b) - \sigma_r(b) = \sigma_0$ denklemi kullanılırsa $\frac{E\alpha(T_a - T_b)}{\sigma_0}$ için üst değerler bulunabilir. $a/b=0.5$, $c/b=10$ ve pekleşme

katsayısı H 'a bağlı olarak hesaplanan sonuçlar Tablo 4.5'de verilmiştir.

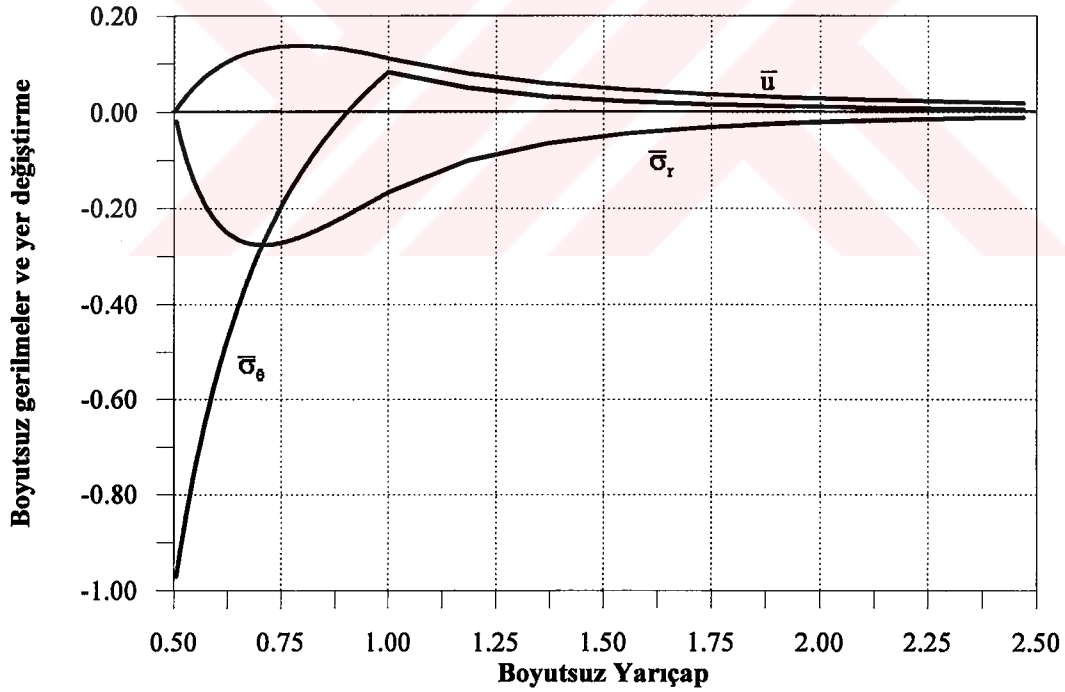
Tablo 4.5 Süreksiz sıcaklık alanına sahip küre için x_1 ve $\bar{T}$ 'nin üst sınır değerlerinin H 'a göre değişimi.

H	$\bar{T}$	x_1
0.05	5.053641	0.781253
0.10	4.280120	0.747309
0.15	3.907106	0.726542
0.20	3.681700	0.712095
0.25	3.528956	0.701317
0.30	3.417886	0.692905
0.35	3.333134	0.686124
0.40	3.266155	0.680526
0.45	3.211785	0.675814
0.50	3.166707	0.671789
0.55	3.128687	0.668305
0.60	3.096163	0.665259
0.65	3.068004	0.662569
0.70	3.043377	0.660177
0.75	3.021646	0.658034
0.80	3.002323	0.656103
0.85	2.985024	0.654352
0.90	2.969444	0.652759
0.95	2.955336	0.651301
1.00	2.942498	0.649962

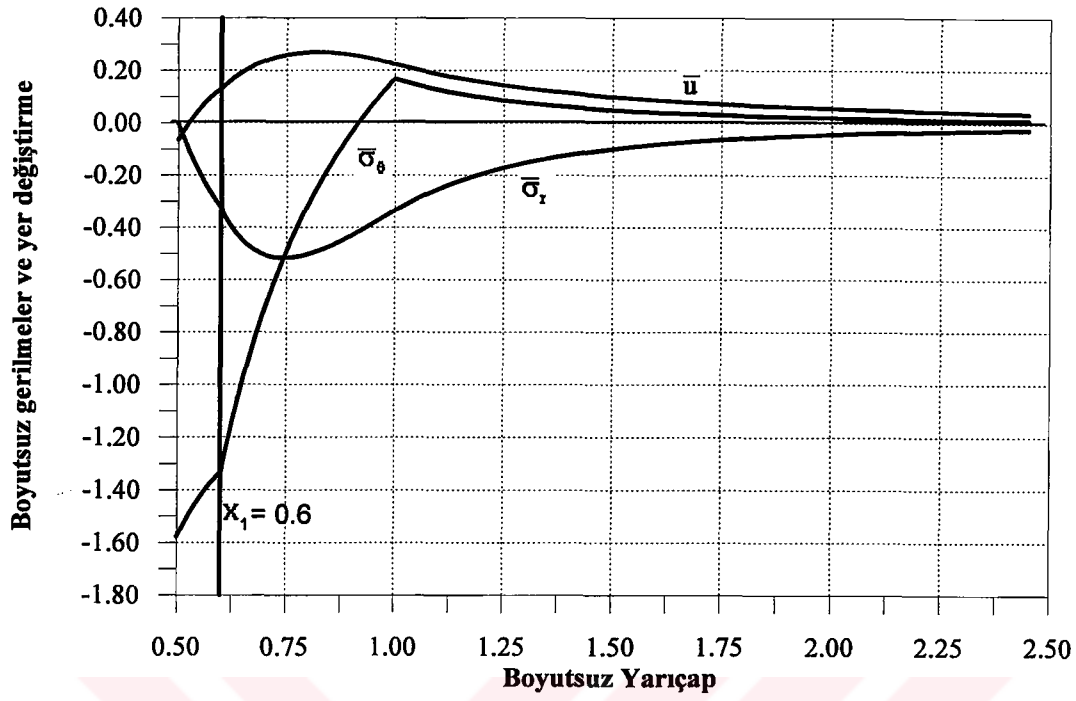
Plastik akmayı başlatan limit sıcaklık değerleri ağırlıklı olarak a/b yarıçaplar oranının bir fonksiyonu olup, sabit sıcaklığın etkidiği bölgenin genişliğinden pek fazla etkilenmedikleri de görülmektedir.

4.3.3 Sayısal Örnek

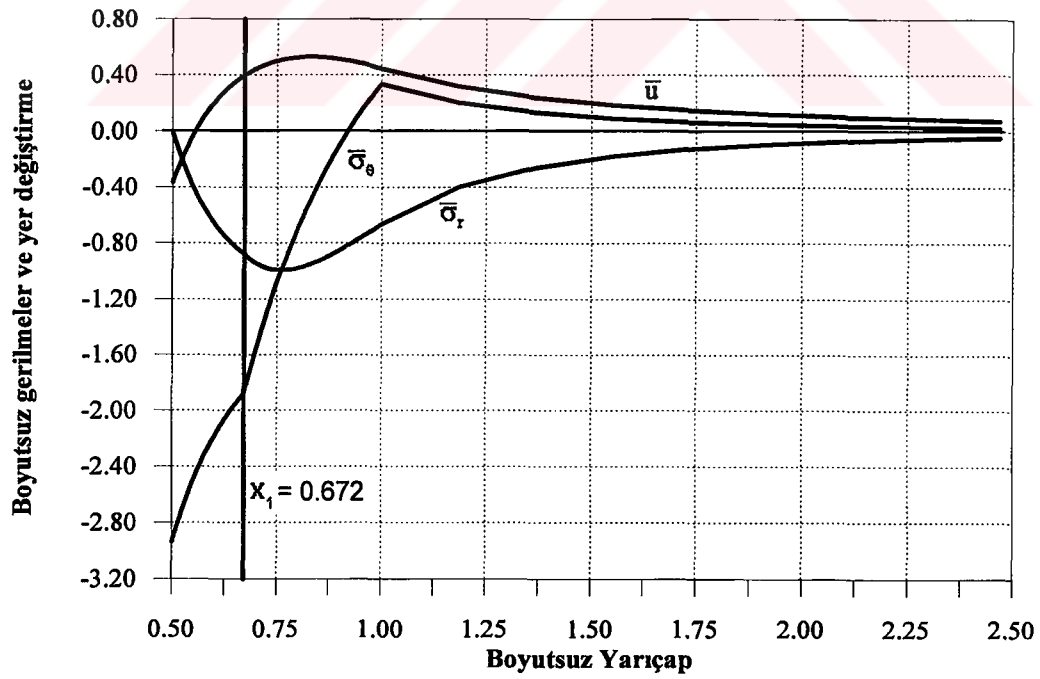
Çap oranları $a/b=0.5$ ve $c/b=10$ olan süreksiz sıcaklık alanındaki bu küreye sayısal bir örnek olarak pekleşme katsayısı $H=0.5$ alınarak elastik sınıra denk gelen $\bar{T}=0.6668$ değeri için çizilen gerilme ve yer değiştirme eğrileri Şekil 4.16'da gösterilmiştir. Yine aynı pekleşme sayısı ile, ara bir değer olarak alınan $\bar{T}=1.5$ ve üst sıcaklık sınırı olan $\bar{T}=3.166$ için çizilen gerilme ve radyal yer değiştirme dağılımları ise sırasıyla Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'de verilmektedir.



Şekil 4.16 Süreksiz sıcaklık alanındaki küreye ait elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $\bar{T}=0.6668$



Şekil 4.17 Süreksiz sıcaklık alanındaki küreye ait elastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $\bar{T} = 1.5$



Şekil 4.18 Süreksiz sıcaklık alanındaki küreye ait elastik plastik gerilmeler ve radyal yer değiştirmeler. $\bar{T} = 3.166$

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

Eksenel simetrik sıcaklık alanında Tresca akma koşulu ve akış kurallarına göre, düzlem gerilme hali değişik sınır koşulları altında ele alınmıştır. Eksenel simetrik sıcaklık alanında ısı üretiminin varlığı da göz önüne alınmış, buna karşılık Elastiklik modülü, Poisson oranı, akma gerilmesi, ısıl genleşme katsayısı ve ısı iletim katsayısının sıcaklık alanından etkilenmedikleri varsayılmıştır. Pekleşmenin doğrusal olduğu varsayılarak çözümler kapalı biçimde elde edilmişlerdir.

İkinci bölümde ısı üretiminden doğan kararlı eksenel simetrik sıcaklık alanındaki içi boş disk, basınç etkisi ve dıştan rijit sınır koşulu olmak üzere iki ayrı hal için incelenmiştir. Dış basınca zorlanan içi boş diskte plastik akma iç yüzeyden $\sigma_y = -\sigma_\theta$ ile yayılmaktadır. H azalırken doğal olarak plastik bölgenin de daraldığı, buna karşılık H artarken tam plastik hale gelen dış basıncın büyüklüğünün de arttığı görülmektedir. Aynı koşullarda $\dot{q}_v = 0$ hali ile bir kıyaslama yapılacak olursa, tam plastik hale karşı gelen basınç değeri, iç yüzeyden yalıtımlı diskte ısı üretiminin olması halinde daha büyüktür. Aynı diskin dış çevresinin rijit bağlı olması, yani diskin dış çevrede radyal yer değiştirmesinin engellenmesi halinde tam plastik hali oluşturacak sıcaklık farkı benzer koşullar için çok yüksek değerlere ulaşmaktadır. Bu hal için ara yarıçapın H ile değişimi de çok önemsiz düzeydedir.

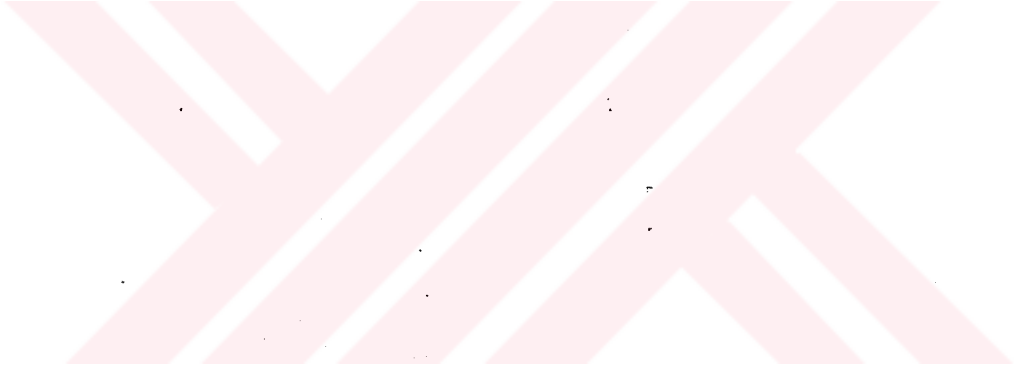
Üçüncü bölümde ise, ikinci bölümdeki gibi aynı sınır koşulları altında bulunan dolu disk hali göz önüne alınmıştır. Dıştan rijit sınır koşulu altında plastik akmanın $-\sigma_y = \sigma_r = \sigma_\theta$ ile merkezden başladığı ve $-\sigma_y = \sigma_r$ ile sürdüğü görülmektedir. Birinci ve ikinci plastik bölgelerin sınırlarını gösteren boyutsuz x_1 ve x_2 yarıçaplarının oranlarının yalnızca H'a bağlı olması ilginçtir. H arttıkça x_1/x_2 oranı

azalmaktadır. Gene doğal olarak, artan Q değerleri ile x_1 ve x_2 artarken, x_2 ara yarıçapı x_1 'e göre daha hızlı artış göstermektedir. Burada geliştirilen çözümün mükemmel plastik halde, yani $H=0$ için geçerli olmadığına da dikkat edilmelidir. Aynı dolu diskin dış basınç etkisinde bulunması halinde ise, en genel halde plastik akma $-\sigma_y = \sigma_r = \sigma_\theta$ ile merkezden başlar ve $-\sigma_y = \sigma_r$ ile sürerken arada bir elastik bölge kalmakta ve ayrıca dışarıdan da $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y$ ile bir akma görülmektedir. Önceki halde olduğu gibi merkezden itibaren ardışık sıralanan iki plastik bölgenin ara yarıçaplarının oranı yalnızca H 'a bağlı kalmaktadır. H 'ın artan değerlerine bağlı olarak, dışarıdan yayılan plastik bölge büyürken, elastik bölge küçülmektedir. Bölüm içinde ayrıntılı olarak çözümün geçerliliği tartışılmıştır. Basıncın belirli bir sınırından küçük değerleri için tek bölgeli olarak yayılan plastik akmanın gelişiminin yalnızca ısı üretiminin şiddetine bağlı olduğu görülmektedir. Basıncın bir sınırdan sonraki değerlerinde dış plastik bölge ortadan kalkmaktadır. Genel çözüm, ısı üretiminin büyüklüğüne de bağlı olmakla beraber, dış basınç etkisi plastik akmayı önemli olarak etkilemektedir. Burada geliştirilen çözümün mükemmel plastik davranış için geçerli olmadığına dikkat edilmelidir.

Dördüncü bölümde ise süreksiz sıcaklık alanları altında bulunan içi boş ve dolu disk ile kürenin elastik-plastik davranışları incelenmiştir. İçi boş diskte göz önüne alınan süreksiz sıcaklık alanında plastik akma $\sigma_y = -\sigma_\theta$ ile içeriden yayılmaktadır. H 'ın artan değerlerine bağlı olarak ara yarıçap da artmaktadır. Dolu disk hali için göz önüne alınan süreksiz sıcaklık alanında ise farklı iki sıcaklık alanını ayıran yarıçaptan $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y$ ile plastik akma yayılmaktadır. Isı üretiminin daha yüksek değerlerinde ise plastik akmanın merkezden de yayılabileceği anlaşılmaktadır. Göz önüne alınan kabul edilebilir ısı üretimi ve sıcaklık farkı için geliştirilen bu çözümde plastik bölgelerin gelişimi üzerinde H 'ın hiçbir etkisinin olmadığı görülmektedir.

Bu bölümde son olarak bir süreksiz sıcaklık alanında içi boş küresel ortamın elastik-plastik davranışı incelenmiştir. Burada plastik akma, kabul edilebilir sıcaklık alanları için $-\sigma_y = \sigma_\theta - \sigma_r$ ile içeriden yayılmaktadır. Kabul edilemeyecek düzeydeki değerler olması halinde ikinci bir plastik akmanın da $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_y$ ile sıcaklık

alanlarını ayıran ara yarıçaptan gelişebileceği de not edilmiştir. Birinci sıcaklık alanının plastik akma üzerinde önemli ölçüde etkili olduğu anlaşılmaktadır.



KAYNAKLAR

- [1] **BLAND, D. R.**, Elastoplastic thick walled tubes of work hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 4, 209 - 229, (1956)
- [2] **KAMMASH, T. B., MURCH, S. A. and NAGHDİ, P. M.**
The elastic plastic cylinder subjected to radially distributed heat source, lateral pressure and axial force with application to nuclear reactor fuel elements. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8, 1 - 25 (1960)
- [3] **BEYER, W. A.** , An elastic - plastic cylinder with free ends and internal heat generation. Nuclear Science Engineering 17. 179 - 184 (1963).
- [4] **ISHIKAWA, H.**, A thermoelastoplastic solution for a circular solid cylinder subjected to heating and cooling. Journal of Thermal Stresses, 1, 211 - 222 (1978).
- [5] **KENNEDY, T. C., GEORGE, T. L. and PEDDICORD, K. L.**
Thermoplastic analysis of a sphere - pac fuel pin, Nuclear Engineering and Design, 75, 57 - 65 (1982).
- [6] **HOLMAN, J. P.**, Heat Transfer. McGraw - Hill. 1981.
- [7] **DASTIDAR, D. G. and GHOSH, P.**, Temperature stress distribution in a sphere due to a uniform heat source for strain hardening material. Journal of Applied Mechanics, 39, 274 - 276 (1972).
- [8] **GHOSH, N. C.**, Thermal effect on the transverse vibration of spinning disk of variable thickness. Journal of Applied Mechanics, 42, 358 - 362 (1975).
- [9] **GAMER, U.**, Ein radial symmetrischer Warmespannungszustand in der idealplastischen Scheibe. Ingenieur - Archiv, 36, 174 - 181 (1967).
- [10] **MACK, W. and GAMER, U.**, Stress distribution in an elastic - plastic disk subjected to a circular heat source. Journal of Thermal Stresses, 6, 323 - 336 (1983)

- [11] **GAMER, U. and MACK, W.**, Thermal stress in an elastic plastic disk exposed to a circular heat source. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physics*, 36, 568 - 580 (1985).
- [12] **GAMER U.**, Elastic - plastic deformation of a centrally heated disk. *Journal of Thermal Stresses*, 8, 41 - 51 (1985).
- [13] **ORÇAN, Y. and GAMER, U.** Elastic - plastic deformation of a centrally heated cylinder. *Acta Mechanica*, 90, 61 - 80 (1991).
- [14] **BEREST, P.**, Point source of heat in an elastoplastic medium. *Journal of Thermal Stresses*, 9, 237 - 249 (1986).
- [15] **GAMER, U.**, On the elasto - plastic deformation of a sphere subjected to a spherical symmetrical temperature field. *Journal of Thermal Stresses*, 13, 159 - 173 (1988).
- [16] **GÜVEN, U.**, The behavior of elastic - plastic disks under discontinuous temperature field. *DOĞA Mühendislik ve Çevre* 14, 124 - 132 (1990).
- [17] **GÜVEN, U.**, On elastic - plastic stresses of a sphere with linear hardening in a discontinuous temperature field. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 73, 61 - 63 (1993).
- [18] **KOVACS, A.**, Thermal stresses in a shrink fit due to an inhomogeneous temperature distribution. *Acta Mechanica*, 105, 173 - 187 (1994).
- [19] **LIPPMANN, H.**, The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit. *International Journal of Plasticity*. 8, 567 - 587 (1982).
- [20] **MACK, W. and BENGİRİ, M.**, Thermal assembly of an elastic - plastic shrink fit solid inclusion. *International Journal of Mechanical Sciences* 36, 699 - 709 (1994).
- [21] **BENGİRİ, M. and MACK, W.**, The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic plastic shrink fit. *Acta Mechanica*, 103, 243 - 257 (1994).
- [22] **ORÇAN, Y.**, Thermal stresses in a heat generating elastic - plastic cylinder with free ends. *International journal of Engineering Science* 32, 883 - 898 (1994).
- [23] **MENDELSON, A.**, *Plasticity : theory and Application*, The Macmillan Company, New York (1968).

- [24] **ISACHENKO, V. P, OSÍPOVA, V. A. and SUKOMEL, A. S.** Heat Transfer. Mir Publishers Moscow (1980).
- [25] **TIMOSHENKO, S. P. and GOODIER, J. N.,** Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York (1970).
- [26] **CHAKRABARTY, J.,** Theory of Plasticity. McGraw-Hill, New York (1987).
- [27] **PARMAKSIZOĞLU, C. and GÜVEN, U.,** Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient. Mechanics of Structures and Machines, 26, 9 - 20 (1998).
- [28] **GÜVEN, U. and ALTAY, O.,** Elastic - plastic rotating disk with rigid casing. Zertschrift für Angewandte Mathematik und Mechanic. 77, 867 - 870 (1997).



ÖZGEÇMİŞ

Y. Müh. Oğuz ALTAY, 1960 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Darüşşafaka Lisesi'nde tamamladıktan sonra İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Genel Makina Mühendisliği Bölümü'ne girerek, 1983 yılında Makina Mühendisi ünvanı ile mezun oldu. İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Makina Anabilim Dalı Konstrüksiyon Programı'nda Yüksek Lisans eğitimini tamamlayarak Y. Müh. ünvanını alan Oğuz ALTAY, 1984 yılından bu yana İTÜ Makina Fakültesi Makina Teorisi, Sistem Dinamiği ve Kontrol Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.

Y. Müh. Oğuz ALTAY'ın SCI ve SCI Expanded tarafından taranan uluslararası dergilerdeki yayınları:

1. Güven, U., Altay, O. Linear hardening solid disk with rigid casing subjected to a uniform heat source, Mechanics Research Communications* (Yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.)
2. Güven, U., Parmaksızoğlu, C., Altay, O. Elastic-plastic rotating annular disk with rigid casing, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik** (Yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.)
3. Güven, U., Altay, O. Elastic-plastic rotating disk with rigid casing, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 77, 867-870 (1997)

* SCI tarafından taranmaktadır.

** JCR ve SCI Expanded tarafından taranmaktadır