

175838

**KABUK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HİBRİD BİR
SONLU ELEMAN**

**DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Kutlu DARILMAZ
(501972001)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Ekim 2003**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nahit KUMBASAR

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Zekai CELEP (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Mehmet OMURTAG (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Mevlüt TEYMUR (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Gülay ALTAY (B.Ü.)

EKİM 2003

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında, değerli bilgi birikimini paylaşan, destek ve yardımcı olan Sayın Hocam Prof. Dr. Nahit KUMBASAR'a sevgi ve saygı ile teşekkür ederim.

Ekim.2003

Kutlu DARILMAZ



İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Kapsamı	1
2. VARSAYIMLAR VE GENEL BAĞINTILAR	5
2.1. Varsayımlar	5
2.2. Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağıntıları	5
2.3. Gerilme-Şekil Değiştirme Bağıntıları ile Kesit Tesirleri	6
2.4. Basık Kabuk Denge Denklemleri	8
3. GERİLME SEÇİMLİ HİBRİD SONLU ELEMAN YÖNTEMİ	11
3.1. Sonlu Eleman Yöntemin Esası	11
3.2. Gerilme Seçimli Hibrid Sonlu Eleman Yöntemi	11
3.3. Eşdeğer Düğüm Noktası Kuvvetleri	14
3.4. Sistem Matrislerinin Elde Edilmesi	15
3.5. Sayısal İntegrasyon	15
4. KABUK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN GERİLME SEÇİMLİ HİBRİD BİR SONLU ELEMAN	18
4.1. Geliştirilen Sonlu Eleman	18
4.1.1. Eleman uç serbestlikleri	18
4.2. [H] Matrisinin Elde Edilmesi	19
4.2.1. Eleman yerel eksenlerinde koordinatların elde edilmesi	19
4.2.2. İç kuvvet alanının seçilmesi	21
4.2.3. [S] Matrisinin oluşturulması	22
4.3. [G] Matrisinin Elde Edilmesi	25
4.3.1. [T] Dönüşüm matrisinin elde edilmesi	26
4.3.2. Sınırlar üzerinde integrasyonda kullanılan [N] biçim fonksiyonları	29
4.4. Kayma Kilitlenmesi	31
4.5. [K] Eleman Rijitlik Matrisinin Oluşturulması	31
4.6. Yükleme Vektörleri	32
4.7. Yerel Eksenlerden Genel Eksenlere Dönüşüm	33
5. SAYISAL ÖRNEKLER	36
5.1. Örnek 1	36

5.2. Örnek 2	37
5.3. Örnek 3	39
5.4. Örnek 4	40
5.5. Örnek 5	42
5.6. Örnek 6	44
5.7. Örnek 7	46
5.8. Örnek 8	47
5.9. Örnek 9	50
5.10. Örnek 10	53
6. SONUÇLAR	56
KAYNAKLAR	57
EKLER	62
ÖZGEÇMİŞ	65



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1. Eksenler ve doğrultu kosinüsleri	34
Tablo 5.1. Elde edilen yerdeğiştirmelerin analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	37
Tablo 5.2. Örnek1 sonuçlarının diğeri çözümler ile karşılaştırılması.....	37
Tablo 5.3. Farklı eleman sayıları ile elde edilen sonuçlar.....	38
Tablo 5.4. Örnek2 sonuçlarının diğeri çözümler ile oransal karşılaştırması.	38
Tablo 5.5. Elde edilen sonuçların analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	40
Tablo 5.6. Örnek3 sonuçlarının diğeri çözümler ile oransal karşılaştırması.	40
Tablo 5.7. Düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından ankastre mesnetli kare plakta $w_{max}Eh^3/pl^4$ değeri.....	44
Tablo 5.8. Düzgün yayılı yük etkisinde, dört kenarından ankastre mesnetli kare plakta maksimum moment M_x/pa^2 değeri.....	44
Tablo 5.9. Ankastre mesnetli dairesel plakta farklı kalınlık/açıklık oranları için orta nokta çökme değeri.....	47
Tablo 5.10. Serbest uçlu silindiri farklı sonlu eleman ağırları için yükün etkidiğı noktadaki çökme değeri.....	55

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 :Kabuk elemanda gerilmeler.....	6
Şekil 2.2 :Kabuk elemanda kuvvet bileşenleri.....	8
Şekil 2.3 :Kabuk elemanda moment bileşenleri.....	8
Şekil 2.4 :Eğilme etkileri.....	9
Şekil 2.5 :Mambran iç kuvvetleri.....	10
Şekil 3.1 :Doğal koordinatlarda alan.....	16
Şekil 4.1 :Kabuk sonlu eleman, düğüm noktaları ve (ξ, η) doğal koordinatları.....	18
Şekil 4.2 :Eleman yerel eksenleri.....	20
Şekil 4.3 : $\bar{N}_1$ biçim fonksiyonu.....	24
Şekil 4.4 : Sayısal integrasyon noktaları.....	25
Şekil 4.5 : Moment bileşenleri.....	26
Şekil 4.6 : Kesme kuvveti bileşenleri.....	27
Şekil 4.7 : Normal kuvvet bileşenleri.....	27
Şekil 4.8 :Yerdeğiştirme ve dönme bileşenleri.....	28
Şekil 4.9 : $N_{\Delta 1}$ biçim fonksiyonu.....	30
Şekil 4.10 :Düzlem normalı doğrultusundaki dönmelerden oluşan u ve v yer değiştirme bileşenleri.....	30
Şekil 4.11 :Dikdörtgen bir bölge üzerinde düzgün yayılı yük ve karşı gelen eşdeğer düğüm noktası yükleri.....	33
Şekil 4.12 : (XYZ) ve (xyz) eksenlerinde v konum vektörü.....	33
Şekil 5.1 :Konsol giriş.....	36
Şekil 5.2 :Değişken kesitli ucu kaldırılmış konsol giriş.....	38
Şekil 5.3 :C noktası düşey yerdeğiştirmesinin analitik çözüme oranı.....	39
Şekil 5.4 :Eğrisel konsol giriş.....	40
Şekil 5.5 :Basit mesnetli kare plak.....	41
Şekil 5.6 :Tekil yük etkisindeki basit mesnetli kare plakda farklı eleman sayıları için $w/w_{analitik}$ oranı.....	41
Şekil 5.7 :Dört kenarından ankastre mesnetli kare plak.....	42
Şekil 5.8 :Orta nokta w yer değiştirme değerlerinin analitik çözüme oranı.....	42
Şekil 5.9 :Orta nokta m_x değerlerinin analitik çözüme oranı.....	43
Şekil 5.10 :A-B doğrultusunda M_x değişimi.....	43
Şekil 5.11 :Farklı eleman sayıları için çökme değerlerinin analitik çözüme oranları.....	45
Şekil 5.12 :Farklı eleman sayıları için m_x değerlerinin analitik çözüme oranları	45

Şekil 5.13	:Merkezinde tekil yük etkisinde ankastre mesnetli dairesel plak.....	46
Şekil 5.14	:Dairesel plakta orta nokta yer değiştirme değerinin düğüm noktası sayısına bağlı değişimi.....	47
Şekil 5.15	:Eşkenar hiperbolik paraboloid kabuk.....	48
Şekil 5.16	:Hiperbolik paraboloid kabuğun A-B doğrultusu boyunca w yer değiştirme eğrisi.....	49
Şekil 5.17	:Hiperbolik paraboloid kabuğun A-C doğrultusu boyunca w yer değiştirme eğrisi	50
Şekil 5.18	:Hiperbolik paraboloid kabuğun a-c doğrultusu boyunca M_x değişimi	50
Şekil 5.19	:Eliptik paraboloid kabuk.....	51
Şekil 5.20	:Eliptik paraboloid kabuk için ab boyunca w yer değiştirmesi dağılımı.....	52
Şekil 5.21	:Eliptik paraboloid kabuk için AB boyunca N_x dağılımı...	52
Şekil 5.22	:Eliptik paraboloid kabuk için AB boyunca N_y dağılımı...	53
Şekil 5.23	:Eliptik paraboloid kabuk için AB boyunca M_x dağılımı..	53
Şekil 5.24	:Eliptik paraboloid kabuk için AB boyunca M_y dağılımı..	54
Şekil 5.25	:Silindirik kabuk.....	55
Şekil 5.26	:Serbest uçlu silindirde farklı sonlu eleman ağırları için yükün etkidiği noktadaki çökme değerleri karşılaştırması.....	50
Şekil 5.27	:Serbest uçlu silindirde farklı sonlu eleman ağırları için yükün etkidiği noktadaki çökme değerleri karşılaştırması...	56

SEMBOL LİSTESİ

$[D]$	: Şekil değiştirme yer değiştirme bağıntısı diferansiyel işlemcisi
E	: Elastisite modülü
$\{F\}^e$	: Yüklerin düğüm noktalarındaki değerleri
$\{F\}$	: Yer değiştirme bileşenleri doğrultusunda yük fonksiyonları
f_x, f_y, f_z	: Eleman üzerine etkiyen yayılı yük bileşenleri
h	: Eleman kalınlığı
$[K]$	: Eleman rijitlik matrisi
M_x, M_y, M_{xy}	: Kesite etkiyen eğilme momentleri
M_{xy}, M_{yx}	: Kesite etkiyen burulma momentleri
N_x, N_y	: Kesite etkiyen eksenel normal kuvvetler
N_{xy}, N_{yx}	: Kesite etkiyen kayma kuvvetleri
$[N_p]$	: Yük için seçilmiş şekil fonksiyonları
$[n]$	: Sınırların doğrultu kosinüslerinden oluşan matris
$[P]$	: Alan değişkenlerine bağlı matris
$\{R\}$	: Bilinmeyenler doğrultusunda etkiyen dış yük vektörü
Q_x, Q_y	: Kesite etkiyen kesme kuvvetleri
$[S]$	: Şekil değiştirme-gerilme matrisi
$[T_\sigma]$	: İç kuvvet dönüşüm matrisi
$[T_u]$	: Yer değiştirme dönüşüm matrisi
u, v, w	: Düğüm noktası yer değiştirme bileşenleri
(x,y,z)	: Eleman düzlemindeki koordinatlar
(X,Y,Z)	: Genel koordinatlar
W_i	: Sayısal integrasyonda i noktasındaki ağırlık fonksiyonu değeri
$[J]$	: Jacobien matrisi
$[N]$	: Biçim fonksiyonu
$\{u_s\}$	: Yerdeğiştirmelerin sınırındaki bileşenleri
$\{q\}$	: Eleman uç serbestlikleri
ξ, η	: Doğal koordinatlar
$\{\beta\}$	: Gerilme alanı parametresi
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	: Birim uzamalar ve birim kayma açısı
γ_{xz}, γ_{yz}	: Kalınlık doğrultusunda kayma şekil değiştirmeleri
σ_x, σ_y	: Eleman yüzlerine etki eden normal gerilmeler
ν	: Poisson oranı
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	: Düğüm noktası dönme bileşenleri
τ_{xy}, τ_{yx}	: Ortalama yüzeye paralel olan kayma gerilmeleri
τ_{xz}, τ_{yz}	: Ortalama yüzey normali doğrultusunda etki eden kayma gerilmeleri

KABUK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN HİBRİD BİR SONLU ELEMAN

ÖZET

Kabuklar, gerek matematiksel formülasyonu gerekse geometrisi nedeniyle karmaşık yapı elemanları arasında bulunmaktadır. Bu zorluklardan dolayı kapalı formda çözüm ancak geometri, yükleme ve mesnetlenme açısından belirli koşulları sağlayan kabuk elemanlar için elde edilebilmektedir.

Sonlu eleman yöntemi, geometri, yükleme ve mesnetlenme koşulları açısından çok farklı durumları içeren sistemlerin çözümüne olanak sağlaması nedeniyle sayısal yöntemlerin içinde en yaygın olarak kullanılanı olmuştur.

Sonlu eleman yöntemi bir yapıyı küçük elemanlardan oluşacak biçimde modelleme esasına dayanmaktadır. Bu noktada önem kazanan bu küçük elemanların her birinin davranışı olmaktadır. Yer değiştirme esaslı sonlu eleman yönteminde eleman rijitlik matrisinin elde edilmesinde eleman sınırlarında yer değiştirmelerin uyumlu olması yaklaşımı ile elde edilmektedir. Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde ise eleman rijitlik matrisi, eleman içinde denge denklemlerini sağlayan iç kuvvet alanı seçimi ve eleman sınırlarında yer değiştirmelerin uyumlu olması yaklaşımı ile elde edilmektedir. Matematiksel olarak yöntem düzenlenmiş tamamlayıcı enerji ilkesini kullanan bir yöntem olarak düşünülebilmektedir.

Bu noktadan hareketle çeşitli fonksiyoneller yazılabilmektedir. Bu çalışmada Hellinger-Reissner ilkesi kullanılarak elde edilen fonksiyonel kullanılmıştır.

$$\Pi_{RH} = \int_V \left(\{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right) dV \quad (1)$$

Denge koşullarının diferansiyel denklemlerini sağlayan iç kuvvet alanı aşağıda verilen biçimde yazılabilmektedir.

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (2)$$

Burada, $\{\sigma\}^T = \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ Q_x \ Q_y \ M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$ kabuk sistemler için iç kuvvetlerinden ve $\{\beta\}$ iç kuvvet alanı bilinmeyen parametreleri β_i lerden oluşmaktadır.

Yer değiştirme alanı $\{u\}$ düğüm noktası yer değiştirmeleri $\{q\}$ ve biçim fonksiyonları $[N]$ ye bağlı olarak

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Yukarıda verilen (2) eşitliği ve sınırların doğrultu kosinülerinden oluşan $[n]$ kullanılarak seçilen iç kuvvet alanının sınırdaki bileşenleri

$$\{\sigma_s\} = [n][P]\{\beta\} \quad (4)$$

şeklinde yazılabilmektedir.

Elde edilen (3) ve (4) eşitlikleri (1) bağıntısına yerleştirilirse fonksiyonel

$$\Pi_{RH} = \int_S \{\beta\}^T [P]^T [n]^T [N] \{q\} dS - \frac{1}{2} \int_V \{\beta\}^T [P]^T [S] [P] \{\beta\} dV \quad (5)$$

şeklini almaktadır.

Burada

$$[H] = \int_V [P]^T [S] [P] dV \quad \text{ve} \quad [G] = \int_S [P]^T [n]^T [N] dS \quad (6)$$

tanımlamaları yapılır ve Π_{RH} fonksiyonelinin iç kuvvet parametreleri β_i lere göre stasyoner olması ilkesince

$$\left\{ \frac{\partial \Pi_{RH}}{\partial \beta_i} \right\} = \{0\} \quad i=1,2,\dots$$

eşitliği kullanılırsa

$$[H]\{\beta\} = [G]\{q\} \quad \text{ve} \quad \{\beta\} = [H]^{-1} [G]\{q\} \quad (7)$$

eşitlikleri elde edilmektedir.

Elde edilen (7) eşitliğindeki $\{\beta\}$, (5) eşitliğinde yerleştirilirse fonksiyonel

$$\Pi_{RH} = \frac{1}{2} [q]^T [G]^T [H]^{-1} [G] [q] = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q]$$

şeklini almaktadır.

Burada

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G]$$

rijitlik matrisini göstermektedir.

Sistemin çözümü ile $\{q\}$ düğüm noktası yerdeğiştirmeleri belirlenmektedir. Bu aşamadan sonra belirli olan $\{q\}$ kullanılarak (7) ve (2) eşitlikleri kullanılarak eleman iç kuvvetleri aşağıda verilen biçimde belirlenebilmektedir.

$$\{\sigma\} = [P][H]^{-1}[G]\{q\}$$

Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi kullanılarak geliştirilen elemanlar yer değiştirme esaslı sonlu eleman yöntemi ile geliştirilen elemanlar ile benzer yer değiştirme büyüklüklerini bilinmeyen olarak aldıklarından bir sistem içinde özel işlemler gerektirmeden birlikte kullanılabilir.

Kabuk davranışını, plak ve levha elemanların birleştirilmesi ile oluşturulan düzlemsel elemanlar kullanarak temsil etmek oldukça yaygın olarak kullanılan bir yöntemdir.

Bu yöntemin yaygın olarak kullanılma nedeni formülasyonun basit olması, geometrinin kolaylıkla tanımlanabilmesi ve diğer tür elemanlar ile kolayca birleştirilebilmesidir. Yöntemin bu avantajlarına karşın kabuk ve eğrisel elemanların yük taşımasında önemli olan eğilme ve düzlem içi etkilerin birbiri ile etkileşim içinde olması olayı gözönüne alınmamış olmaktadır. Ayrıca kabuk geometrisi daha çok sayıda eleman kullanılarak uygun olarak tanımlanabilmektedir..

Bu çalışmada gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi kullanılarak, plak ve levha eleman davranışları birleştirilmesi ile oluşan düzlemsel bir kabuk sonlu eleman geliştirilmiştir. Eleman davranışını iyileştirmek için eleman düzlemine dik doğrultudaki eksen etrafındaki dönme bileşende bilinmeyenler arasına katılmıştır. Eleman 8 noktalı bir elemandır ve her bir düğüm noktasında üçü öteleme, üçü dönme bileşeni olmak üzere 6 yer değiştirme bileşeni bulunmaktadır.

Geliştirilen eleman kullanılarak çeşitli örnekler çözülmüş ve elde edilen sonuçlar çeşitli çalışmaların sonuçları ve analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürdeki diğer çalışma sonuçları ile uyumlu olduğu, sonlu eleman ağının düzgün olmaması durumuna karşın hassasiyetin diğer elemanlar ile benzer düzeyde olduğu, kayma kilitlenmesinin ortaya çıkmadığı ve yakınsamanın sağlanabildiği görülmüştür.

A HYBRID FINITE ELEMENT FOR ANALYSIS OF SHELLS

SUMMARY

Shell structures are classified as complex structures due to their complexity in mathematical formulation and geometrical shape. Because of these sophistications, the closed-form solution of shell structures can be available under limited conditions.

Parallel to the development of computer systems numerical analysis has become a powerful tool in engineering mechanics.

Since finite element method is applicable to various structural systems having arbitrary shape, loading and support conditions, it has become the most widely used one within the numerical methods.

Finite element method models a structure as an assemblage of small elements. An important ingredient in a finite element analysis is the behavior of the individual element. In displacement based finite element, formulation of the element stiffness matrix depends on interelement compatible displacement field interpolation. Finite element method based on the assumed-stress hybrid method is a way of formulating a stiffness matrix by use of independent assumptions of an equilibrium stress field within the element and interelement compatible displacement modes on the element boundary. Mathematically the method can be stated as a modified complementary energy principle.

Starting with this point one can write various functionals. In this thesis the functional based on Reissner-Hellinger principle is used.

$$\Pi_{RH} = \int_V \left(\{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right) dV \quad (1)$$

A stress field that satisfies the differential equations of equilibrium can be written as follows:

$$\{\sigma\} = [P] \{\beta\} \quad (2)$$

where, for shells $\{\sigma\}^T = \{N_x \ N_y \ N_{xy} \ Q_x \ Q_y \ M_x \ M_y \ M_{xy}\}$ and $\{\beta\}$ contains parameters β_i that are yet to be determined.

The compatible displacement field $\{u\}$ can be defined in terms of nodal displacements $\{q\}$ and shape functions $[N]$.

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3)$$

By using Eq. 2 and the direction cosine matrix of the boundary $[n]$, the components of stress field along the boundary can be written as

$$\{\sigma_s\} = [n][P]\{\beta\} \quad (4)$$

Substitution of Eq. 3 and Eq. 4 into Eq. 1 yields

$$\Pi_{RH} = \int_S \{\beta\}^T [P]^T [n]^T [N] \{q\} dS - \frac{1}{2} \int_V \{\beta\}^T [P]^T [S][P] \{\beta\} dV \quad (5)$$

where

$$[H] = \int_V [P]^T [S][P] dV \quad \text{and} \quad [G] = \int_S [P]^T [n]^T [N] dS \quad (6)$$

Requiring that Π_{RH} has to be stationary with respect to variations of stress parameters β_i ,

$$\left\{ \frac{\partial \Pi_{RH}}{\partial \beta_i} \right\} = \{0\} \quad i=1,2,\dots$$

which yields to

$$[H]\{\beta\} = [G]\{q\} \quad \text{or} \quad \{\beta\} = [H]^{-1} [G]\{q\} \quad (7)$$

Substitution of $\{\beta\}$ from Eq. 7 into Eq. 5 yields

$$\Pi_{RH} = \frac{1}{2} [q]^T [G]^T [H]^{-1} [G] [q] = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q]$$

where

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G]$$

is recognized as a stiffness matrix.

The solution of the system yields the unknown nodal displacements $\{q\}$. After $\{q\}$ is determined, element stresses or internal forces can be recovered by use of Eq. 7 and Eq. 2. Thus

$$\{\sigma\} = [P][H]^{-1} [G]\{q\}$$

Assumed stress hybrid elements can be joined to displacement based elements because both use displacement quantities as nodal degrees of freedom.

It has been common to use flat elements to model the shell behavior by superposition of membrane element having stretching behavior and plate bending element having bending behavior.

The major attractive features of this modeling are, the formulation is simple and description of geometry is easy, easily combined with other types of elements.

Disadvantages of such modelings can be pointed out as, it can not take into account the coupling of stretching and bending within a element. In fact such coupling is a major contributor towards load carrying mechanism in shells and other curved members. Geometric approximation by using flat elements requires an increase in the number of elements and it has an influence upon the solution for imperfection sensitive structures.

In this thesis an assumed stress hybrid flat shell element is developed by combining plate bending and membrane element. To improve the performance of element the in plane nodal rotations are included as degrees of freedom. Element has 8 nodes and 48 degrees of freedom. At each node of the element 3 displacement and 3 rotations are taken as unknowns.

To check the the accuracy of the finite element, various examples are solved numerically and it is shown that the results obtained are in a good agreement with the results given in the literature. Furthermore, it is found that the element is insensitive to mesh distortion, it does not exhibit shear locking and has desirable convergence.



1. GİRİŞ

1.1 Giriş ve Çalışmanın Kapsamı

Kabuklar, gerek matematiksel formülasyonu gerekse geometrisi nedeniyle karmaşık yapı elemanları arasındadır. Bu zorluklardan dolayı kapalı formda çözüm ancak geometri, yükleme ve mesnetlenme açısından belirli koşulları sağlayan kabuk elemanlar için elde edilebilmektedir.

Bilgisayar sistemlerinin gelişmesiyle birlikte mühendislikte kullanılan sayısal analiz yöntemleri kullanımı da gelişim göstermiş ve mühendislik problemlerinin çözümünde yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöntemler içinde bulunan sonlu eleman yöntemi, geometri, yükleme ve mesnetlenme koşulları açısından çok farklı durumları içeren sistemlerin çözümüne olanak sağlaması nedeniyle sayısal yöntemlerin içinde en yaygın olarak kullanılanı olmuştur.

Bu çalışmada da, sonlu elemanlar yönteminin bir türü olan gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi kullanılarak, genel şekilli kabuk sistemlerin çözümünde kullanılabilecek bir eleman geliştirilmiştir. Geliştirilen eleman kullanılarak statik yükler altındaki çeşitli lineer elastik sistemlere ait sayısal örnekler çözülmüş, elde edilen sonuçlar analitik çözümler ve diğer çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılarak geliştirilen elemanın yaklaşımı incelenmiştir.

Konuyla ilgili literatür araştırması yapıldığı zaman karmaşık geometriye ve sınır koşullarına sahip kabuk problemlerin çözümü için sonlu elemanlar metodunun kullanımı ve uygulamaları üzerine yapılmış çok sayıda çalışma olduğu gözlenmiştir. İlk çalışmalar 1950'li ve 1960'lı yıllara kadar gitmektedir [1,2]. Bu çalışmalar incelendiğinde sonlu eleman yönteminin kabuk sistemlere uygulanışı başlangıçta üçgen ve dikdörtgen elemanlar kullanılarak olmuştur [3]. Daha sonraki çalışmalarda, kabuk elemanların geometrilerinin tanımlanması amacıyla, üçgen [4-8], dikdörtgen ve dörtgen şekilli elemanlar [9-12], eksenel simetrik düzgün veya eğrisel elemanlar [13-18], üç boyutlu elemanlardan indirgenerek elde edilen elemanlar [19-21] olmak üzere dört sınıfta toplanabilecek çok sayıda eleman geliştirilmiştir. Bu çalışmada

genel şekilli kabuk sistemlerin çözümü amaçlandığından dörtgen şekilli bir kabuk eleman geliştirilmiştir.

Bu elemanların geliştirilmesi için kullanılan yöntemler de yer değiştirme esaslı ve karma sonlu elemanlar olarak iki ana başlık altında toplanabilmektedir.

Literatürde bulunan elemanların büyük çoğunluğu yer değiştirme esaslı elemanlardan oluşmaktadır.

Yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak , Saygun [22] de yüzeysel taşıyıcı sistemlerin hesabı için çeşitli sayıda eğrisel sonlu elemanlar, Altan [23] de kalın silindirik kabukların çözümü için üç boyutlu bir sonlu eleman, Kara [24] de genel biçimli ve genel statik yükler etkisindeki kalın kabuklarda bütün etkiler dikkate alınarak yerel eğrisel ortogonal koordinatlarda, üç boyutlu elastisite teorisinden yararlanarak bir sonlu eleman geliştirmiştir.

Yer değiştirme esaslı sonlu eleman yönteminde bilinmeyenler düğüm noktası yer değiştirme bileşenleri olarak seçilirken, karma sonlu elemanlarda yer değiştirme bileşenlerine ek olarak iç kuvvetler de bilinmeyen olarak seçilmektedir. Bu çalışmada karma sonlu elemanların bir türü olan gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi kullanılmaktadır.

Sonlu eleman yönteminin bir türü olan gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminin kullanıldığı ilk çalışmalar Pian [25] tarafından yapılmıştır. Daha sonraları bu yöntem diğer çalışmacılar tarafından da kullanılmış ve çeşitli problem türlerinin çözümü için farklı elemanlar geliştirilmiştir [26-32]. Cook [27], düzlemine dik doğrultuda dönmeleride içeren levha eleman geliştirmede, Rengarajan ve diğerleri [28] kabuk sistemlerin burkulma ve serbest titreşim problemlerinin çözümünde kullanılmak üzere düzlemine dik doğrultuda dönmeleride içeren kabuk elemanı geliştirmede, Cheung ve Chen [30] ince ve orta kalınlıkta plak ve kabuk sistemlerin çözümünde kullanılmak üzere geliştirilen elemanda, Kang ve Pian [32] da genel şekilli kabuk sistemlerin çözümünde kullanılmak üzere 20 serbestlik dereceli genel şekilli kabuk elemanı geliştirmede gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemini kullananlar arasında sayılabilir.

Karma sonlu eleman yönteminin bir diğer türü de karışık sonlu eleman olarak adlandırılmaktadır. Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi ile karışık sonlu eleman yöntemlerinin her ikisinde, bilinmeyenler olarak yer değiştirme bileşenleri ile birlikte iç kuvvetleri de kullanılmaktadır. Ancak gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde iç kuvvetler düğüm noktasındaki değerlerinden bağımsız olarak

seçildiğinden eleman düzeyinde iç kuvvetler yer değiştirmelere bağlı olarak tanımlanarak yalnızca yer değiştirme bileşenlerinin bilinmeyen olarak kullanıldığı duruma getirilmektedir. Karışık sonlu elemanlarda ise bu tür bir düzenleme işlemi yapılmamakta, çözüm boyunca bilinmeyenler içinde iç kuvvetler de bulunmaktadır. Karışık sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen elemanlar kullanılarak yapılan çözümlemede sistem üzerinde yer değiştirme bileşenlerinin yanında iç kuvvetlerin sürekliliğide sağlanabilirken, gerilme seçimli hibrid sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen eleman kullanılarak yapılan çözümlemede yer değiştirme esaslı sonlu elemanlara benzer biçimde sistem üzerinde yer değiştirme bileşenlerinin sürekliliği sağlanırken, iç kuvvetlerin sürekliliği sağlanmamaktadır.

Omurtag ve Aköz [14-16] da, Gateaux diferansiyeli kullanılarak çeşitli problemler için fonksiyoneller üretilmiş ve bu yöntemle çeşitli karışık sonlu elemanlar geliştirilmiştir.

Bu çalışmada geliştirilen eleman ile ince ve orta kalınlıklı kabuk sistemlerin çözümü amaçlandığından, kalınlık doğrultusunda kayma gerilmelerinden oluşan kayma şekil değiştirmeleri de hesaplara katılmıştır. Mindlin-Reissner teorisi olarak adlandırılan bu teori kullanılarak geliştirilen eleman formülasyonunda C^0 sürekliliği yeterli olduğundan interpolasyon fonksiyonları kolaylıkla elde edilebilmektedir. Bu tür elemanlarda yer değiştirme ve dönmeler bağımsız parametreler olarak alınmaktadır. Bu bağımsız seçim işlemi, kayma kilitlenmesi adı verilen problemin ortaya çıkmasına neden olabilmektedir. Zienkiewicz ve diğ. [6] tarafından kayma kilitlenmesini ortadan kaldıracak azaltılmış integrasyon (reduced integration) yöntemi ve daha sonraları seçimli integrasyon (selective integration) yöntemi geliştirilmiştir.

Kumbasar ve Aksu [13] de, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin ve kabuk kalınlığının etkisini hesaba katarak genel biçimli kabuklar için elde edilen fonksiyonel yardımı ile yer değiştirme esaslı bir sonlu eleman geliştirilmiştir. Söz konusu çalışmada azaltılmış integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Kayma kilitlenmesi problemi genellikle yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yönteminde karşılaşılmakta ve problemin aşılması için azaltılmış integrasyon veya seçimli integrasyon gibi özel yöntemler kullanılması gerekmektedir. Gerilme seçimli hibrid sonlu elemanlarda ise kullanılan fonksiyonelin karışık formülasyon ile elde edilmesinden dolayı özel bir yöntem kullanılmadan kayma kilitlenmesi problemi aşılabilmektedir.

Geliştirilen elemanda, genel biçimli kabukların davranışı basık kabuk bağıntıları kullanılarak plak ve levha eleman davranışlarının birleştirilmesi ile oluşturulmaktadır. Elemanın her düğüm noktasında altı adet yer değiştirme parametresi bulunmaktadır. Eleman düzlemine dik doğrultudaki eksen etrafındaki dönme bileşeni de bilinmeyenler arasına katılarak, geliştirilen elemanın davranışının iyileştirilmesi ve çubuk elemanlar gibi genel durumda düğüm noktalarında altı bilinmeyen içeren diğer eleman türleri ile birlikte doğrudan kullanılabilmesi amaçlanmıştır. [27] de Cook, [33] de Allman, [31] de Sze ve diğ. Benzer biçimde eleman düzlemine dik doğrultudaki dönme bileşenini bilinmeyen olarak kullanan elemanlar geliştirmişlerdir.

Hibrid eleman yöntemi ile bir elemanın rijitlik matrisinin elde edilmesi, yerdeğiştirme esaslı sonlu eleman yöntemi ile elde edilmesine oranla daha fazla işlem gerektirmektedir. Buna karşın daha az eleman sayısı ile yakınsama sağlanabildiğinden ve kayma kilitlenmesi gibi yer değiştirme esaslı elemanlarda görülen problemlerin ortaya çıkmamasından dolayı hibrid sonlu eleman yöntemi kullanımı gelişim göstermektedir.

2. VARSAYIMLAR VE GENEL BAĞINTILAR

Bu bölümde bundan sonraki bölümlerde kullanılacak olan ve kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin etkisini de gözönüne alındığı kabuk bağıntıları verilecektir.

2.1 Varsayımlar

Kesit tesirleri elde edilirken aşağıda verilen varsayımların geçerli olduğu kabul edilecektir.

1. Ortalama yüzeye dik doğrultudaki σ_z normal gerilmeleri diğer gerilmelere göre ihmal edilebilecek düzeydedir.
2. Yerdeğiştirmeler kabuk kalınlığına göre küçük olmakta bu nedenle denge denklemleri şekil değiştirmemiş sistem üzerinde yazılmaktadır.
3. Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları doğrusal elastiktir.
4. Şekil değiştirmemiş sistemde ortalama yüzeye dik bir doğru parçası, şekil değiştirmeden sonra da doğru kalır. Ancak bu doğru kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmelerinin hesaba katılması nedeniyle şekildeğiştirmiş ortalama yüzeye diklik özelliğini korumaz.

2.2 Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağıntıları

Üç boyutlu elastisitede küçük yer değiştirmeler için elde edilmiş olan şekil değiştirme bağıntıları eksenler doğrultusundaki u , v ve w yerdeğiştirmeleri cinsinden

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.1)$$

şeklindedir. Burada

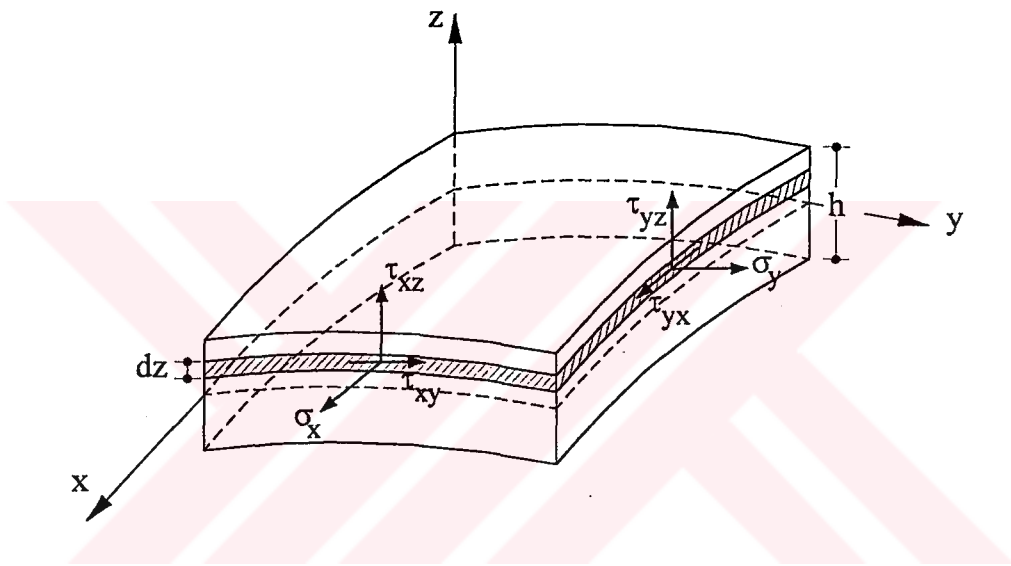
ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} : kabuk orta yüzeyinden z uzaklıktaki birim uzamaları ve birim kayma şekil değiştirmelerini

γ_{xz} , γ_{yz} : kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerini

göstermektedir.

2.3 Gerilme-Şekil Değiştirme Bağlılıları ile Kesit Tesirleri

Şekil (2.1)'de x, (x+dx) ve y, (y+dy) kesitlerince sınırlanan kalınlığı h olan bir kabuk hacim elemanı görülmektedir.



Şekil 2.1 Kabuk Elemanda Gerilmeler

σ_x , σ_y : Eleman yüzlerine etki eden normal gerilmeler

τ_{xy} , τ_{yx} : Ortalama yüzeye paralel olan kayma gerilmeleri

τ_{xz} , τ_{yz} : Ortalama yüzeyin normali doğrultusunda etki eden kayma gerilmeleri

Birim şekil değiştirmeler (2.1) bağıntıları ile elde edildikten sonra Hooke kanunu ve $\sigma_z=0$ varsayımı kullanılarak düzlem gerilme hali için E elastisite modülü, ν poisson oranı olmak üzere gerilmeler

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.3)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}$$

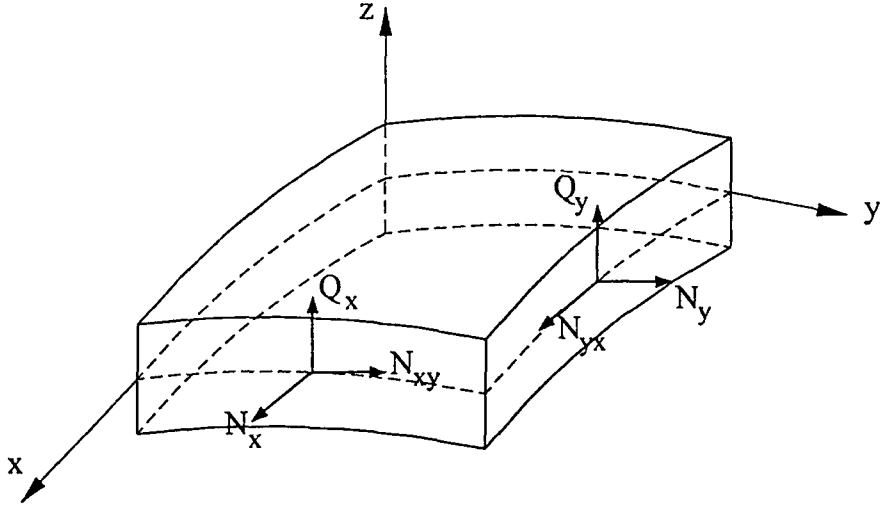
$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}$$

şeklinde ifade edilirler. Genel durumda birim boya etkiyen toplam momentler ve toplam kuvvetler ile tanımlanan iç kuvvetler ise gerilme bileşenlerinin x =sabit ve y =sabit kesitinde kalınlık boyunca integralleri olarak tanımlanmaktadır.

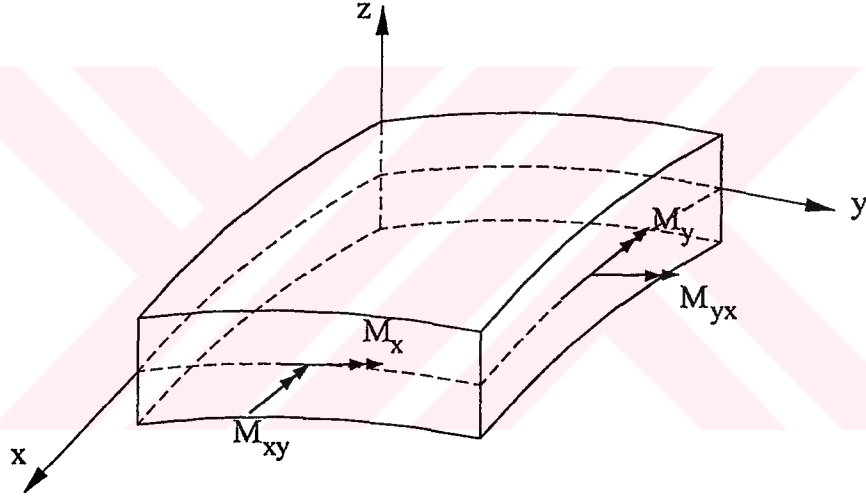
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ Q_x \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ z\sigma_x \\ z\tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} N_y \\ N_{yx} \\ Q_y \\ M_y \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yz} \\ z\sigma_y \\ z\tau_{yx} \end{Bmatrix} dz \quad (2.5)$$

Bu bağıntılarla elde edilen kesit tesirlerinin pozitif yönleri Şekil (2.2) ve (2.3)'de gösterilmektedir.



Şekil 2.2 Kabuk Elemanda Kuvvet Bileşenleri



Şekil 2.3 Kabuk Elemanda Moment Bileşenleri

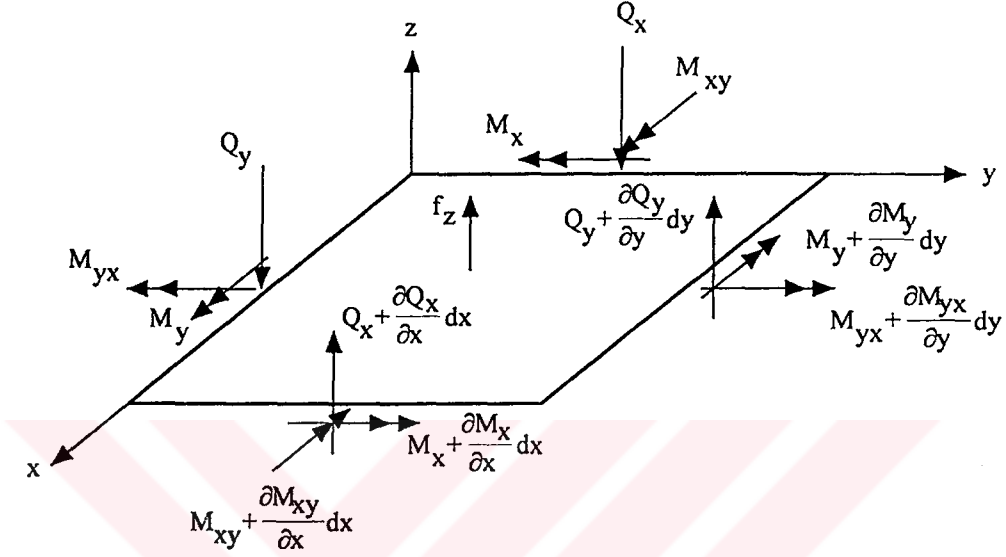
Geliştirilen sonlu elemanda iç kuvvetler, hibrid sonlu eleman yönteminde iç kuvvet alanının seçilmesinden dolayı (2.4) ve (2.5) bağıntıları kullanılmadan elde edilmektedir.

2.4 Basık Kabuk Denge Denklemleri

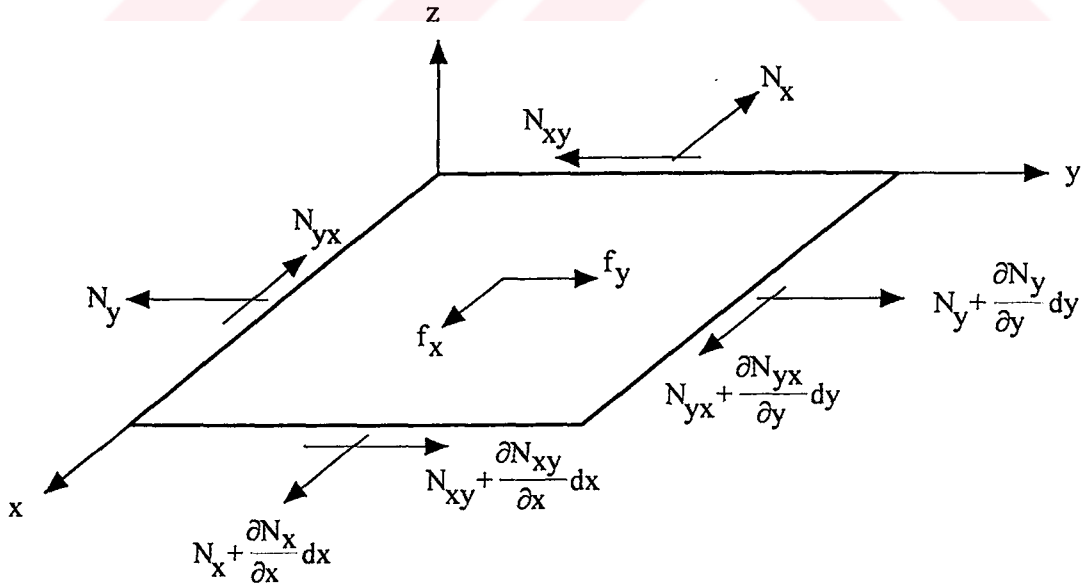
Çalışmada genel biçimli kabukların hesabı amaçlanmakta ve bu hesaplama için basık kabuk bağıntıları kullanılmaktadır. Basık kabuk bağıntıları, kabuk genel bağıntılarında eğrilik yarıçapı ile bölünen terimlerin ihmal edilmesi ile levha ve plak davranışı ile ilgili bağıntılara dönüşmektedir [34].

Bu bağıntılar kullanılarak geliştirilen sonlu eleman düzlemsel olmakta ve eğilme ve mambran davranışları birbirlerinden bağımsız hale gelmektedir.

Kenar uzunlukları dx ve dy olan eleman parçası üzerinde etkiyen yük bileşenleri ile birlikte Şekil (2.4) de plak iç kuvvetleri ve Şekil (2.5) de mambran iç kuvvetleri gösterilmektedir.



Şekil 2.4 Eğilme etkileri



Şekil 2.5 Mambran İç Kuvvetleri

Genel bağıntılarda eğriliğin küçük olduğu varsayımı ile elde edilen basık kabuk denge denklemleri aşağıda verilmektedir. Bunlardan (2.6) denklemleri levha davranışını, (2.7) denklemleri plak davranışını göstermektedir.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -f_x \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = -f_y \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -f_z$$

Burada f_x , f_y , f_z ilgili doğrultuda dx ve dy kenar uzunlukları ile tanımlanan bölge üzerine etkiyen yük bileşenlerini göstermektedir.

Basık kabuk denge denklemleri, geliştirilen sonlu eleman için seçilen iç kuvvet alanının belirlenmesinde kullanılmaktadır.

3. GERİLME SEÇİMLİ HİBRİD SONLU ELEMAN YÖNTEMİ

3.1 Sonlu Eleman Yöntemin Esası

Mühendislik yapılarından yüzeysel taşıyıcı sistemlerin sonlu eleman yöntemi ile çözümünde gözönüne alınan sistem sonlu sayıda düğüm noktalarında birbirine bağlanan yapı elemanlarının bir birleşimi olarak gözönüne alınmaktadır. Elemanlar için kuvvet yerdeğiştirme bağıntıları biliniyorsa, bir araya gelerek oluşturdukları sistemin çözümlemesini yapmak ve davranışını incelemek çeşitli yöntemleri kullanarak yapılabilir. Bu noktadan hareketle, sonlu eleman yönteminde sürekli bir ortama sahip sistemin diferansiyel denkleminin integrasyonu ayrık bir sisteme ilişkin cebrik bir denklem takımının çözümüne indirgenmektedir.

Bu çalışmada sonlu eleman yönteminin bir türü olan gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yöntemi kullanılacağından önce bu yöntem hakkında bilgi verilecektir.

3.2 Gerilme Seçimli Hibrid Sonlu Eleman Yöntemi

Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde eleman bağıntılarını elde etmek için denge denklemlerini sağlayan iç kuvvet alanı ile geometrik uygunluk koşullarını sağlayan yerdeğiştirme alanları birlikte kullanılmaktadır [25]. Bu bağıntıların elde edilmesinde kullanılan fonksiyonellerden olan Reissner-Hellinger ilkesi esas alınarak elde edilen

$$\Pi_{RH} = \int_V \left(\{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right) dV - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \{q\}^T \{R\} \quad (3.1)$$

fonksiyonelinin minimum olması gerekmektedir. Fonksiyonelin

$$\int_V \left(\{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [S] \{\sigma\} \right) dV$$

bölümü iç kuvvetlerin işini,

$$\int_V \{u\}^T \{F\} dV + \{q\}^T \{R\}$$

bölümü $\{R\}$ düğüm noktası bilinmeyenleri $\{q\}$ doğrultusunda etkiyen dış yük vektörü olmak üzere dış kuvvetlerin işini göstermektedir.

Şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasında, $[D]$ diferansiyel işlemci olmak üzere

$$\{\epsilon\} = [D]\{u\} \quad (3.2)$$

ilişkisi, şekil değiştirmeler ile iç kuvvetler arasında, $[S]$ elastisite matrisinin tersi olmak üzere

$$\{\epsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (3.3)$$

biçiminde ilişki bulunmaktadır. Eleman içinde denge denklemlerini sağlayacak biçimde, alan değişkenlerine bağlı olarak seçilen iç kuvvet matrisi $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} = [P]\{\beta\} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\{\beta\}$ bilinmeyen parametrelerden oluşan kolon matris, $[P]$ ise eleman koordinatlarına bağlı ve eleman içinde iç kuvvetlerin değişimini gösteren dikdörtgen bir matrisdir. Sınırlar boyunca geometrik uygunluk koşullarını sağlamak amacıyla düğüm noktalarında komşu elemanlara ilişkin uç yerdeğiştirmelerinin birbirine eşit olmasını sağlayacak biçimde seçilen yerdeğiştirme fonksiyonu

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (3.5)$$

olarak alınabilir. $[N]$ sınırlar boyunca biçim fonksiyonlarından oluşan matrisi, $\{q\}$ düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme bileşenlerinden oluşan kolon matrisi göstermektedir.

Eleman içinde denge denklemlerini sağlayacak biçimde seçilen $\{\sigma\}$ iç kuvvet alanının sınırlar üzerindeki bileşenleri, $[n]$ sınırların doğrultu kosinüslerinden oluşan matris olmak üzere

$$\{\sigma_s\} = [n]\{\sigma\} \quad (3.6)$$

şeklinde hesaplanabilir. (3.4) bağıntısı kullanılarak

$$\{\sigma_s\} = [n][P]\{\beta\}$$

elde edilir. Yük terimlerinin etkisi daha sonra gözönüne alınmak üzere, (3.4) ve (3.5) bağıntıları kullanılarak Π_{RH} fonksiyoneli yeniden düzenlenirse

$$\Pi_{RH} = \int_S \{\beta\}^T [P]^T [n]^T [N] \{q\} dS - \frac{1}{2} \int_V \{\beta\}^T [P]^T [S] [P] \{\beta\} dV \quad (3.7)$$

biçimini alır. Bu fonksiyonel rijitlik matrisinin elde edilmesinde kullanılacaktır. Elde edilen (3.7) bağıntısında

$$[G] = \int_S [P]^T [n]^T [N] dS \quad [H] = \int_V [P]^T [S] [P] dV \quad (3.8)$$

tanımlamaları yapılır ve $\delta\Pi = 0$ koşulu sağlanması gerektiğinden $\frac{\partial\Pi}{\partial\beta_i} = 0$ eşitliği uygulanırsa

$$[H][\beta] = [G]\{q\}$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $[H]^{-1}$ ile çarpılarak elde edilen

$$[\beta] = [H]^{-1} [G]\{q\} \quad (3.9)$$

eşitliği kullanılarak fonksiyonel düzenlenirse

$$\Pi_{RH} = \frac{1}{2} \{q\}^T [G]^T [H]^{-1} [G] \{q\}$$

biçimini alır. $[K]$ rijitlik matrisi olmak üzere

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (3.10)$$

tanımı ile (3.1) bağıntısındaki fonksiyonel

$$\Pi_{RH} = \frac{1}{2} [q]^T [K] [q] \quad (3.11)$$

biçiminde elde edilir.

Eleman için iç kuvvet alanının seçimi düğüm noktası değerlerinden bağımsız olarak yapıldığından $\frac{\partial\Pi}{\partial\beta_i} = 0$ koşulu uygulanabilmektedir. Bu koşul ile elde edilen (3.9)

bağıntısı ile seçilen iç kuvvet alanı parametreleri düğüm noktasındaki yer değiştirme bileşenleri türünden yazılabilmektedir. Böylece gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde de yer değiştirme esaslı sonlu elemanlarda olduğu gibi bilinmeyenlerin yer değiştirme bileşenlerinden oluşması sağlanmaktadır.

Çözüm yapıp düğüm noktası yer değiştirmeleri elde edildiğinde, sırasıyla (3.9) ve (3.4) bağıntıları kullanılarak iç kuvvetler elde edilebilmektedir.

Eleman rijitlik matrisi $[K]$, $[G]$ ve $[H]$ matrisleri kullanılarak elde edilmektedir. $[H]$ matrisi bütünüyle seçilen iç kuvvet alanına, $[G]$ matrisi hem seçilen iç kuvvet alanına hem de seçilen yer değiştirme biçimine bağlıdır. Bu nedenle gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde seçilen bu büyüklüklerin uyumlu olması durumunda uygun eleman rijitlik matrisi elde edilebilmektedir [35].

3.3 Eşdeğer Düğüm Noktası Kuvvetleri

Eleman üzerindeki yayılı yüklere statik olarak eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} \{F^i\} \\ \{F^j\} \\ \{F^k\} \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

ile tanımlanmaktadır. Her $\{F^i\}$ alt vektörü uç serbestliklerine eşit sayıda ve onların doğrultusunda bileşen içermektedir. Elemanın birim hacminde dış yükün potansiyel enerjisi değişimi

$$\frac{\partial(\{u\}^T \{F\})}{\partial \{q_i\}} = \frac{\partial \{q\}^e}{\partial \{q_i\}} [N]^T \{F\}$$

olarak bulunur. Böylece yayılı yüklerden oluşan düğüm noktası kuvvetlerini tanımlayan $\{F\}^e$

$$\{F\}^e = - \int_V [N]^T \{F\} dV \quad (3.12)$$

olarak elde edilir.

3.4 Sistem Matrislerinin Elde Edilmesi

Bu aşamada amaç, sistem denklemlerini kurmak ve bu denklemlerin çözümünü yapmaktır. Tüm düğüm noktaları için denge denklemleri yazılır ve matris biçiminde ifade edilirse

$$\sum_i \{R_i\} = \sum_{m=1}^n [K_m]^e \{q_m\} + \sum_{m=1}^n [F_m]^e \quad (3.13)$$

şeklini alır.

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{m=1}^n [K_m]^e \\ \{R_T\} &= \sum_i \{R_i\} \\ [F_T] &= \sum_{m=1}^n [F_m]^e \end{aligned}$$

olmak üzere (3.13) bağıntısı

$$[K]\{q\} = \{R_T\} - \{F_T\} \quad (3.14)$$

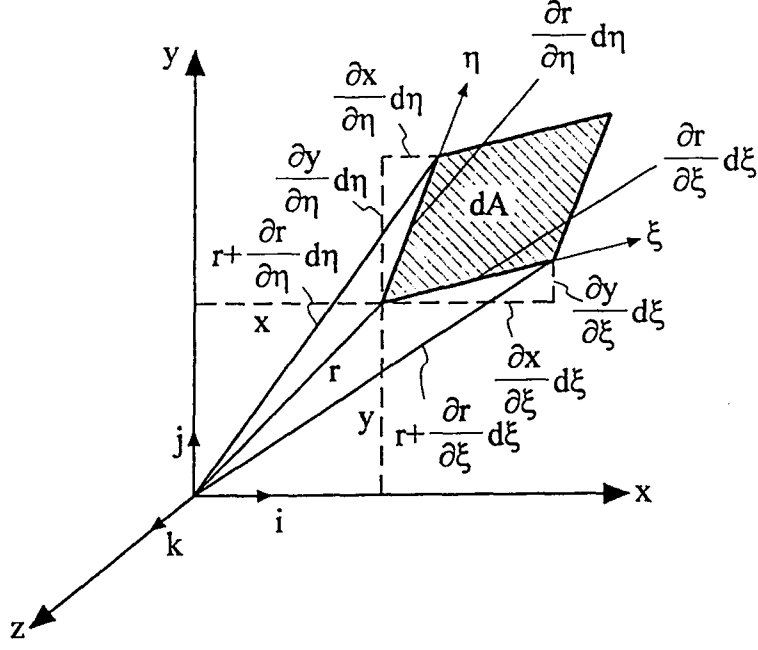
şeklinde düzenlenebilir. Bağıntı (3.14)'de $[K]$ sistem rijitlik matrisi, $\{q\}$ sistem düğüm noktası yerdeğiştirmelerini gösteren parametrelerin oluşturduğu vektördür. Elde edilen bağıntı bir lineer denklem takımı oluşturmaktadır. Oluşturulan denklem takımında sisteme ilişkin sınır koşulları konulup denklem çözülerek problemin bilinmeyenleri olan $\{q\}$ vektörü elde edilir. Buradan da (3.9) ve (3.4) bağıntıları ile iç kuvvetler bulunur.

3.5 Sayısal İntegrasyon

Eleman rijitlik ve yükleme matrislerini oluşturmak için kullanılan (3.8), (3.9) ve (3.12) bağıntılarından görüleceği üzere matrislerin hesabı için integrasyonu gerekli kılmaktadır. Kullanılan integrasyonun genel yapısı

$$I = \iint_A f(x, y) dA \quad (3.15)$$

şeklinde dir. İntegrasyon bağıntıları (ξ, η) doğal koordinatlarına bağlı olarak yazılırsa, integral daha kolay değerlendirilebilir hale gelmektedir. Bunu yapmak için integrasyonu yapılacak fonksiyonda lineer bir değişken dönüşümü yapılarak sınırların -1 ile $+1$ değerlerine getirilmesi uygun olmaktadır. Buna ek olarak küçük bir dA alanı için $d\xi$ ve $d\eta$ cinsinden yazılan bir ifade kullanılmalıdır. Bu amaçla, sonsuz küçük bir dA alanı, ξ ve η doğal koordinatlarında şekil 3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Doğal Koordinatlarda Alan

Burada $\vec{r}$ vektörü, x ve y kartezyen koordinatlarında yer vektörünü göstermektedir ve aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (3.16)$$

(ξ, η) koordinatlarında $x(\xi, \eta)$ ve $y(\xi, \eta)$ fonksiyonlarını gözönüne alarak ξ 'ye göre r 'nin değişimi (3.17) bağıntısından

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} \quad (3.17)$$

η 'ye göre r 'nin değişimi (3.18) bağıntısından

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \vec{j} \quad (3.18)$$

elde edilebilir. Bağntı (3.17)'yi $d\xi$ ile bağıntı (3.18)'i ise $d\eta$ ile çarparak dA paralelkenar alanını ortaya çıkartan iki komşu kenarı bulunabilir. dA alanı aşağıdaki vektör çarpımıyla elde edilir.

$$dA = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} d\xi \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} d\eta \right) \cdot \vec{k} \quad (3.19)$$

(3.17) ve (3.18) bağıntılarını (3.19)'da yerlerine yazılırsa

$$dA = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.20) denkleminde parantez içindeki ifade 2x2'lik matris biçiminde yazılabilir.

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = |J| d\xi d\eta \quad (3.21)$$

Burada $|J|$ Jacobien matrisinin determinantıdır. Böylece (3.15) bağıntısı aşağıdaki yeni biçimini alır.

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (3.22)$$

Sözkonusu integral bağıntılarının sayısal olarak değerlendirilmesi gerekir. Bu çalışmada Gauss sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır. Gauss integrasyonunun (3.22)'de verilen integrale iki kez uygulanmasıyla sayısal integral alma işlemi tamamlanmış olur.

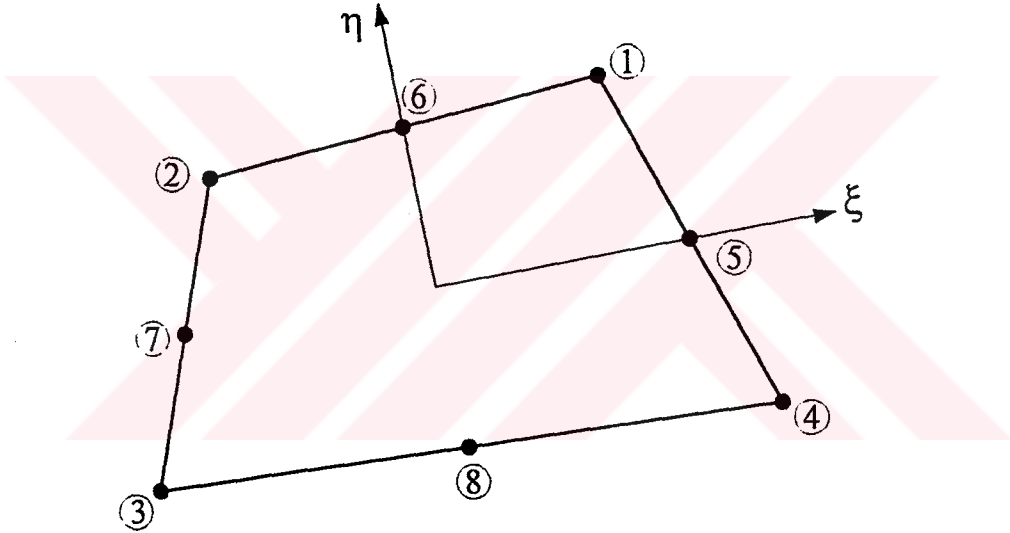
$$I = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_i W_j \phi(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)| \quad (3.23)$$

Burada $|J|$, koordinat dönüşümünden ortaya çıkan $[J]$ Jacobien matrisinin determinantını, W_i ve W_j sayısal integrasyonda i ve j noktalarındaki ağırlık fonksiyonu değerlerini göstermektedir.

4. KABUK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜ İÇİN GERİLME SEÇİMLİ HİBRİD BİR SONLU ELEMAN

4.1 Geliştirilen Sonlu Eleman

Kabuk sistemlerin çözümü için bölüm 3’de verilen yöntem kullanılarak Şekil 4.1 de gösterilen, 8 noktalı dörtgen bir sonlu eleman geliştirilmiştir. Bu eleman basık kabuk bağıntıları kullanılarak plak ve levha davranışlarının birleştirilmesi sonucu elde edilmektedir.



Şekil 4.1 Kabuk Sonlu Eleman, Düğüm Noktaları ve (ξ,η) doğal koordinatları

4.1.1 Eleman Uç Serbestlikleri

Geliştirilen elemanda, her bir düğüm noktasında, genel eksenleri tanımlayan X, Y, Z doğrultularında bulunan u, v ve w yer değiştirme bileşenleri ile bu eksenler etrafında dönme bileşenleri uç serbestlikleri olarak alınmıştır. Elemanın uç serbestlikleri e elemanı için matris formunda

$$\{q\}^{eT} = \left\{ \{q^1\} \quad \{q^2\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \{q^8\} \right\}^T \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada i düğüm noktasının serbestliklerinden oluşan $\{q^i\}$ vektörü

$$\{q^i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

biçimindedir. Her bir düğüm noktasında 6 adet serbestlik derecesi, dolayısı ile eleman için toplam 48 adet serbestlik derecesi bulunmaktadır.

4.2 [H] Matrisinin Elde Edilmesi

Şeçilen iç kuvvet alanının, kendisine karşı gelen şekil değıştirmeler üzerinde yaptığı işin hesaplanmasında kullanılan [H] matrisi

$$[H] = \int_V [P]^T [S] [P] dV \quad (4.3)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

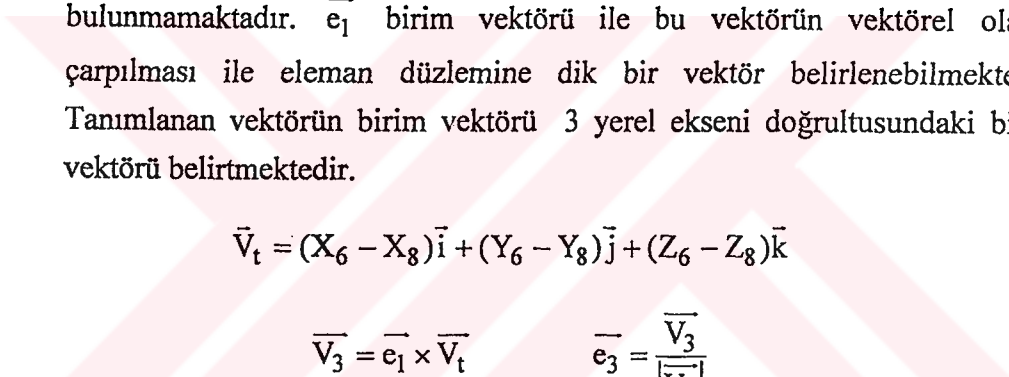
4.2.1 Eleman Yerel Eksenlerinde Koordinatların Elde Edilmesi

[H] matrisinin elde edilmesinde kullanılan [P] matrisi alan değışkenlerine bağı bir dikdörtgen matristir. [P] matrisinin elde edilmesinde elemanın kendi düzlemindeki (x,y) koordinatlarının belirlenmesi gerekmektedir. Eleman düzleminde bulunan (x,y) koordinatlarının genel eksenleri tanımlayan (X,Y,Z) koordinatlarına bağı olarak belirlenmesinde aşğıdaki adımlar izlenmektedir:

- Eleman 7 ve 5 düğüm noktası doğrultusu 1 yerel eksen doğrultusu olmak üzere, (X,Y,Z) eksen takımına bağı olarak bu doğrultudaki birim vektör belirlenmektedir, (Şekil4.2).

$$\bar{V}_1 = (X_5 - X_7)\bar{i} + (Y_5 - Y_7)\bar{j} + (Z_5 - Z_7)\bar{k}$$

$$\bar{e}_1 = e_{1x}\bar{i} + e_{1y}\bar{j} + e_{1z}\bar{k} = \frac{\bar{V}_1}{|\bar{V}_1|}$$



- 3 yerel eksenindeki birim vektör ile 1 yerel eksenini doğrultusundaki birim vektör çarpılarak 2 yerel eksenini doğrultusundaki birim vektör belirlenmektedir.

- 3 yerel eksenindeki birim vektör ile 1 yerel eksenini doğrultusundaki birim vektör çarpılarak 2 yerel eksenini doğrultusundaki birim vektör belirlenmektedir.

$$\overline{\mathbf{V}}_3 = \overline{\mathbf{e}}_1 \times \overline{\mathbf{V}}_t \quad \overline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\overline{\mathbf{V}}_3}{|\overline{\mathbf{V}}_3|}$$

- Elemanın orta noktasının (X,Y,Z) eksen takımındaki koordinatları köşe noktalarının koordinatlarına bağlı olarak belirlenmektedir.

$$Z_0 = (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)/4$$

- Eleman düğüm noktalarının kendi düzlemindeki koordinatları ($i=1,8$) $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ birim vektörleri kullanılarak

$$x_i = (X_i - X_0)e_{1x} + (Y_i - Y_0)e_{1y} + (Z_i - Z_0)e_{1z}$$

$$y_i = (X_i - X_0)e_{2x} + (Y_i - Y_0)e_{2y} + (Z_i - Z_0)e_{2z}$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

4.2.2 İç Kuvvet Alanının Seçilmesi

Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde iç kuvvet alanı eleman yerel koordinatlarına bağlı olarak seçilmektedir. Bu seçim işlemi sırasında öncelikle iç kuvvetlerin değişimlerini tanımlayan polinomlar seçilmekte, daha sonra (2.6) ve (2.7) de verilen denge denklemlerini sağlayacak biçimde polinomların katsayılarının sayısı indirgenmektedir. Basık kabuk denge denklemlerini sağlayacak biçimde seçilen iç kuvvetler (4.4) ve (4.5) bağıntılarında verilmektedir.

$$\begin{aligned} N_x &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 xy^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^4 \\ &+ \beta_{12} x^3 y + \beta_{13} x^2 y^2 + \beta_{14} xy^3 \\ N_y &= \beta_{15} + \beta_{16} x + \beta_{17} y + \beta_{18} x^2 + \beta_{19} xy + \beta_{20} y^2 + \beta_{21} x^3 + \beta_{22} x^2 y + 3\beta_{23} xy^2 + \beta_{24} y^3 / 3 \\ &+ \beta_{25} x^3 y + 6\beta_{26} x^2 y^2 + \beta_{27} xy^3 + \beta_{28} y^4 / 6 \\ N_{xy} &= \beta_{29} - \beta_{17} x - \beta_{20} y - \beta_{19} x^2 / 2 - 2\beta_{24} xy - \beta_{25} y^2 / 2 - \beta_{21} x^3 / 3 - 3\beta_{27} x^2 y - \beta_{28} xy^2 \\ &- \beta_{29} y^3 / 3 - \beta_{22} x^4 / 4 - 4\beta_{11} x^3 y - 3\beta_{12} x^2 y^2 / 2 - 2\beta_{13} xy^3 / 3 \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \beta_{29} + \beta_{46} + \beta_{27} x - \beta_{39} x + \beta_{28} y + 2\beta_{48} y + 3\beta_{30} x^2 / 2 - \beta_{42} x^2 / 2 + \beta_{31} xy - 3\beta_{43} xy + \beta_{32} y^2 \\ Q_y &= \beta_{36} + \beta_{45} + \beta_{38} x + 2\beta_{47} x - \beta_{27} y + \beta_{39} y + \beta_{41} x^2 + 3\beta_{49} x^2 - 3\beta_{30} xy \\ &+ \beta_{42} xy + \beta_{31} y^2 / 2 + 3\beta_{43} y^2 \\ M_x &= \beta_{24} + \beta_{25} x + \beta_{26} y + \beta_{27} x^2 + \beta_{28} xy + \beta_{29} y^2 + \beta_{30} x^3 + \beta_{31} x^2 y + \beta_{32} xy^2 + \beta_{33} y^3 \\ M_y &= \beta_{34} + \beta_{35} x + \beta_{36} y + \beta_{37} x^2 + \beta_{38} xy + \beta_{39} y^2 + \beta_{40} x^3 + \beta_{41} x^2 y + \beta_{42} xy^2 + \beta_{43} y^3 \\ M_{xy} &= \beta_{44} + \beta_{45} x + \beta_{46} y + \beta_{47} x^2 - \beta_{27} xy - \beta_{39} xy + \beta_{48} y^2 + \beta_{49} x^3 - 3\beta_{30} x^2 y / 2 \\ &- \beta_{42} x^2 y / 2 - \beta_{31} xy^2 / 2 - 3\beta_{43} xy^2 / 2 + \beta_{50} y^3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bağıntı (4.4) de verilen N_x , N_y , N_{xy} iç kuvvetleri (2.6) denge denklemlerini, (4.5) de verilen Q_x , Q_y , M_x , M_y , M_{xy} iç kuvvetleri (2.7) denge denklemlerini sağlamaktadır.

Gerilme seçimli hibrid elemanlar yönteminde $\{\beta\}$ katsayılarının sayısı artıkça oluşturulan eleman davranışı rijitleşmekte, kenarlarda seçilen yerdeğiştirme biçimi

karmaşıklıştıkça yumuşamaktadır. Bu nedenle gerilme seçimli hibrid eleman yönteminde seçilen iç kuvvet alanı ile yerdeğıştirmelerin uyumu eleman davranışının belirlenmesinde önemli olmaktadır . Geliştirilen elemanda yer değıştirmeler için 48 bilinmeyen, iç kuvvetler için 50 bilinmeyen bulunmaktadır.

4.2.3 [S] Matrisinin Oluşturulması

Şekildeğıştirmeler ile içkuvvetlerin ilişkisini gösteren [S] matrisi membran, eğilme ve kayma etkilerini yansıtan terimlerden oluşmaktadır.

a) Membran etkiyi gösteren şekil değıştirme-gerilme matrisi

$$[S_{\text{membran}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Eh} & \frac{-\nu}{Eh} & 0 \\ \frac{-\nu}{Eh} & \frac{1}{Eh} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{Eh} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

b) Eğilme etkisini gösteren şekil değıştirme-gerilme matrisi

$$[S_{\text{eğilme}}] = \begin{bmatrix} \frac{12}{Eh^3} & -\nu \frac{12}{Eh^3} & 0 \\ -\nu \frac{12}{Eh^3} & \frac{12}{Eh^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

b) Kayma etkisini gösteren şekil değıştirme-gerilme matrisi

$$[S_{\text{kayma}}] = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \frac{2(1+\nu)}{Eh} & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} \frac{2(1+\nu)}{Eh} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Homojen, elastik, izotrop malzeme için membran, eğilme ve kayma etkilerini içeren terimlerden oluşan alt matrisler birleştirilirse

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Eh} & \frac{-\nu}{Eh} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{Eh} & \frac{1}{Eh} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{Eh} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \frac{2(1+\nu)}{Eh} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \frac{2(1+\nu)}{Eh} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{Eh^3} & \frac{-12\nu}{Eh^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12\nu}{Eh^3} & \frac{12}{Eh^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

[P] ve [S] matrisleri belirlendikten sonra [H] matrisi (4.6) bağıntısı ile elde edilir.

$$[H] = \int_A [P]^T [S] [P] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [P]^T [S] [P] |J| d\xi d\eta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n W_i W_j [P]^T [S] [P] |J| \quad (4.6)$$

Burada bölüm 3.5’de verildiği gibi |J|, koordinat dönüşümünden ortaya çıkan [J] Jacobien matrisinin determinantını, W_i ve W_j sayısal integrasyonda i ve j noktalarındaki ağırlık fonksiyonu değerlerini göstermektedir.

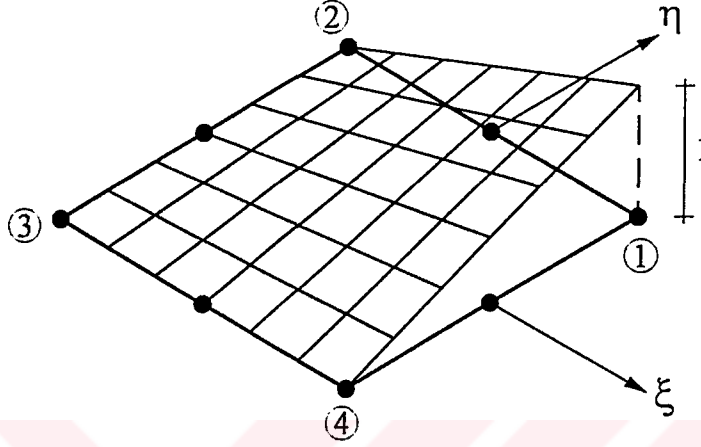
Eleman üzerinde herhangi bir noktanın bulunduğu koordinatlar, ξ , η ile gösterilen doğal koordinatlar cinsinden tanımlı biçim fonksiyonları ve yerel koordinatlardaki düğüm noktası koordinatlarına bağlı olarak aşağıdaki (4.7) bağıntılarındaki gibi ifade edilebilir.

$$x = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i \quad (i=1,4) \quad (4.7)$$

Eleman düzlemindeki bir noktanın koordinatlarının, köşe nokta koordinatlarına bağlı olarak belirlenmesinde kullanılan biçim fonksiyonları (4.8)’de verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\bar{N}_1 &= (1 + \xi)(1 + \eta) / 4 & \bar{N}_2 &= (1 - \xi)(1 + \eta) / 4 \\
\bar{N}_3 &= (1 - \xi)(1 - \eta) / 4 & \bar{N}_4 &= (1 + \xi)(1 - \eta) / 4
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Örnek olarak Şekil 4.3 de $\bar{N}_1$ biçim fonksiyonunun değişimi eleman üzerinde gösterilmektedir.



Şekil 4.3 $\bar{N}_1$ Biçim Fonksiyonu

[J] Jacobien matrisi

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

şeklindedir.

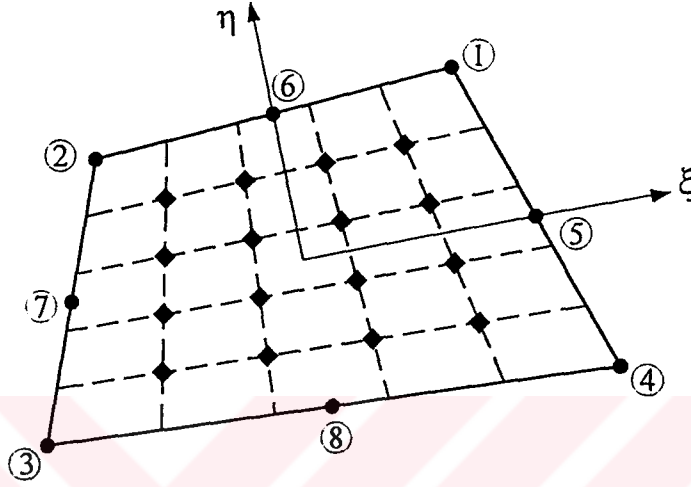
[J] Jacobien matrisin elde edilmesinde kullanılan biçim fonksiyonlarının türevleri ise (4.10)'da verilen şekildedir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \xi} &= (1 + \eta) / 4 & \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial \eta} &= (1 + \xi) / 4 \\
\frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \xi} &= -(1 + \eta) / 4 & \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \eta} &= (1 - \xi) / 4 \\
\frac{\partial \bar{N}_3}{\partial \xi} &= -(1 - \eta) / 4 & \frac{\partial \bar{N}_3}{\partial \eta} &= -(1 - \xi) / 4
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \bar{N}_4}{\partial \xi} = (1 - \eta) / 4$$

$$\frac{\partial \bar{N}_4}{\partial \eta} = -(1 + \xi) / 4$$

[H] matrisinin hesabında kullanılan sayısal integrasyonda her bir doğrultuda dörder tane olmak üzere, toplam 16 integrasyon noktası gözönüne alınmıştır, (Şekil 4.4).



Şekil 4.4 Sayısal İntegrasyon Noktaları

4.3 [G] Matrisinin Elde Edilmesi

Seçilen gerilme alanının, seçilen şekildeğiştirmeler üzerinde yaptığı işi gösteren [G] matrisi, iç kuvvetlerin sınırdaki bileşenleri

$$\{\sigma_s\}^T = \{N_N \quad N_T \quad Q_s \quad M_N \quad M_T\}^T \quad (4.11)$$

$$\{\sigma_s\} = [T_\sigma] \{\sigma\} = [T_\sigma] [P] \{\beta\} \quad (4.12)$$

ve yerdeğiştirmelerin sınırdaki bileşenleri

$$\{u_s\} = [T_u] \{u\} = [T_u] [N] \{q\} \quad (4.13)$$

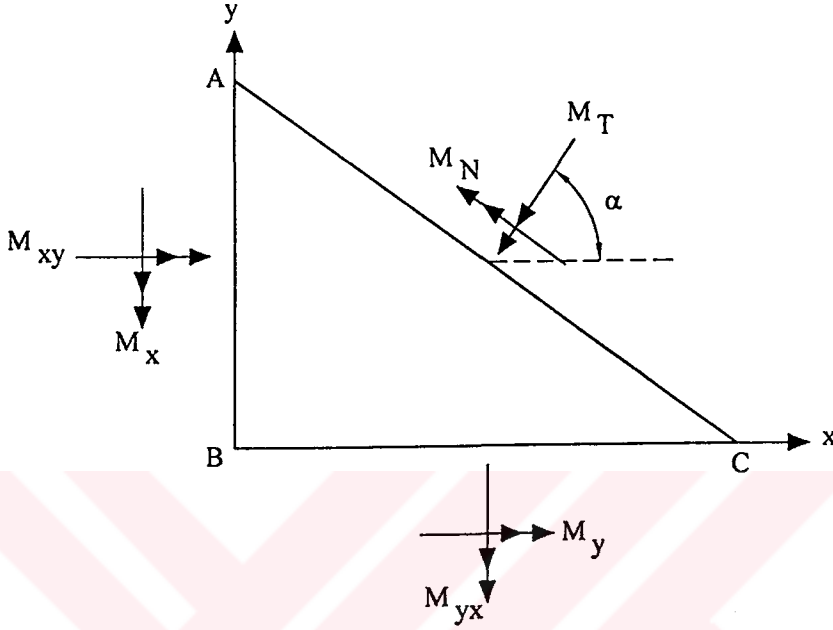
olmak üzere

$$[G] = \int_S [P]^T [n]^T [N] dS = \int_S [P]^T [T_\sigma]^T [T_u] [N] dS = \sum_{i=1}^n [P]^T [T] [N] J W_i \quad (4.14)$$

şeklinde kenarlar üzerinde integral ile elde edilmektedir.

4.3.1 [T] Dönüşüm Matrisinin Elde Edilmesi

[G] matrisinin hesaplanmasında, kenar üzerinde integrasyon işlemi yapılacağından, kenar üzerindeki iç kuvvetlerin alan üzerindeki iç kuvvetlere bağlı olarak tanımlanması gerekmektedir.



Şekil 4.5 Moment Bileşenleri

Denge denklemleri kullanılarak eleman sınırındaki moment etkileri eleman içindeki moment etkilerine bağlı olarak elde edilebilir, (Şekil 4.5) . Bağlantılardaki (x,y,z) eleman düzlemindeki koordinatları göstermektedir.

$$|BC|/|AC| = \sin \alpha \quad |AB|/|AC| = \cos \alpha$$

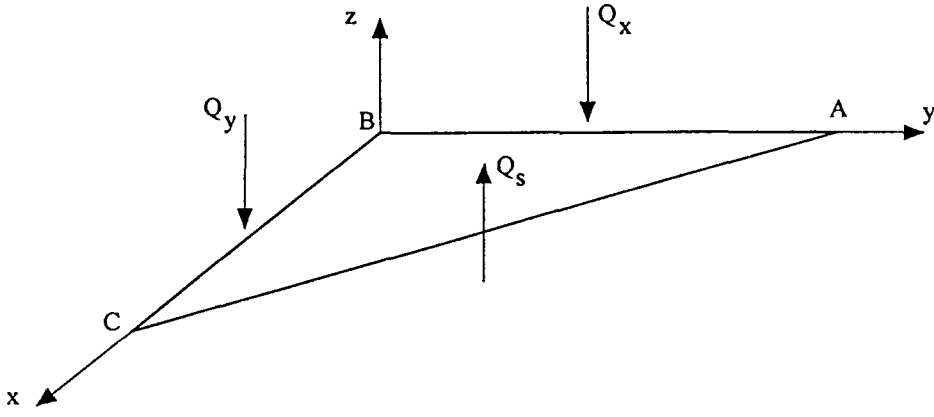
$$M_N \cdot |AC| = M_x \cdot |AB| \cdot \cos \alpha + M_y \cdot |BC| \cdot \sin \alpha + M_{yx} \cdot |BC| \cdot \cos \alpha + M_{xy} \cdot |AB| \cdot \sin \alpha$$

$$M_N = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{yx} 2 \cos \alpha \sin \alpha \quad (4.15)$$

$$M_T \cdot |AC| = -M_x \cdot |AB| \cdot \sin \alpha - M_{yx} \cdot |BC| \cdot \sin \alpha + M_y \cdot |BC| \cdot \cos \alpha + M_{xy} \cdot |AB| \cdot \cos \alpha$$

$$M_T = -M_x \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha - M_{yx} \cdot \sin^2 \alpha + M_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + M_{xy} \cdot \cos^2 \alpha$$

$$M_T = -M_x \sin \alpha \cos \alpha + M_y \sin \alpha \cos \alpha + M_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (4.16)$$

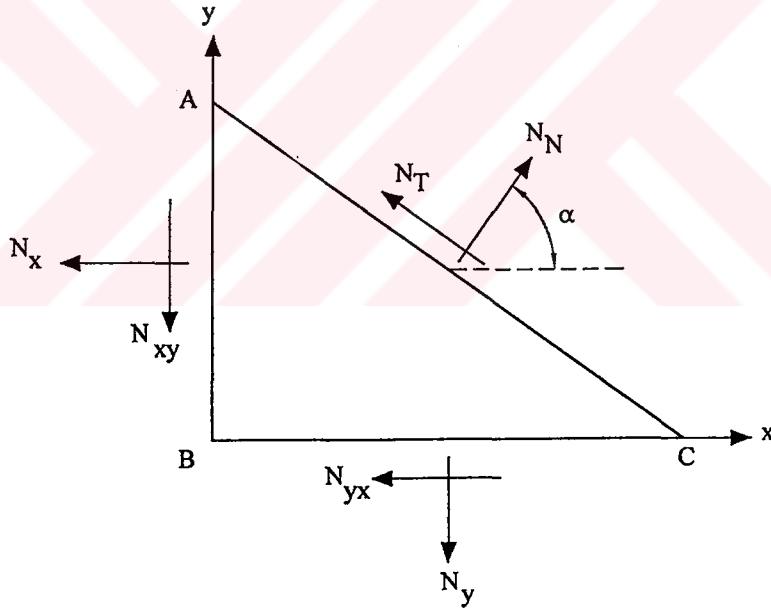


Şekil 4.6 Kesme Kuvveti Bileşenleri

Kesme kuvvetleri için de benzer işlemler yapılabilir, (Şekil 4.6).

$$Q_s \cdot |AC| = Q_x \cdot |AB| + Q_y \cdot |BC|$$

$$Q_s = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha \quad (4.17)$$



Şekil 4.7 Normal Kuvvet Bileşenleri

$$N_N \cdot |AC| = N_x \cdot |AB| \cdot \cos \alpha + N_y \cdot |BC| \cdot \sin \alpha + N_{xy} \cdot |AB| \cdot \sin \alpha + N_{yx} \cdot |BC| \cdot \cos \alpha$$

$$N_N = N_x \cos^2 \alpha + N_y \sin^2 \alpha + N_{xy} 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.18)$$

$$N_T \cdot |AC| = -N_x \cdot |AB| \cdot \sin \alpha - N_{yx} \cdot |BC| \cdot \sin \alpha + N_y \cdot |BC| \cdot \cos \alpha + N_{xy} \cdot |AB| \cdot \cos \alpha$$

$$N_T = -N_x \sin \alpha \cos \alpha + N_y \sin \alpha \cos \alpha + N_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (4.19)$$

Bağıntılar matris formunda düzenlenirse

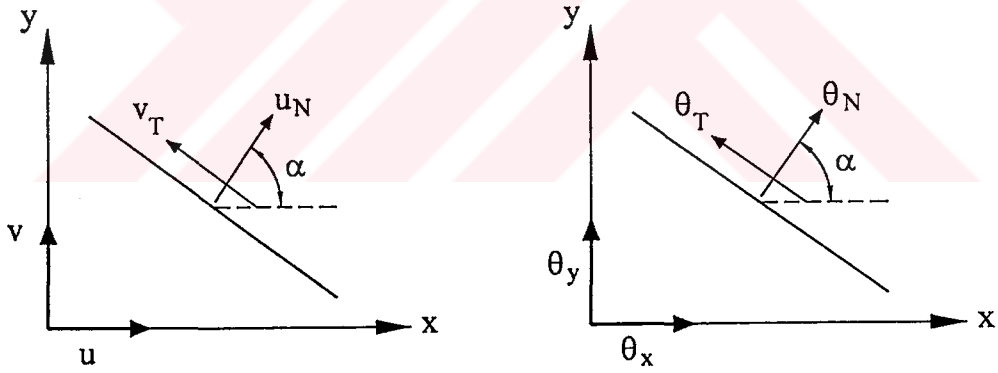
$$c = \cos \alpha \quad s = \sin \alpha$$

$$\begin{Bmatrix} N_N \\ N_T \\ M_N \\ M_T \\ Q_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sc & sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & s^2 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sc & sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

elde edilir.

$$\{\sigma_s\} = [T_\sigma] \cdot \{\sigma\} \quad (4.21)$$

Kenar üzerindeki iç kuvvetlerin alan üzerindeki iç kuvvetlere bağlı olarak tanımlanması gerektiği gibi kenar üzerindeki yer değiştirmelerin alan üzerindeki yer değiştirmelere bağlı olarak tanımlanması da gerekmektedir.



Şekil 4.8 Yerdeğiştirme ve Dönme Bileşenleri

$$\begin{aligned} u_N &= u \cos \alpha + v \sin \alpha & v_T &= -u \sin \alpha + v \cos \alpha \\ \theta_N &= \theta_x \cos \alpha + \theta_y \sin \alpha & \theta_T &= -\theta_x \sin \alpha + \theta_y \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.22)$$

Elde edilen (4.22) eşitlikleri matris biçiminde düzenlenirse

$$\begin{Bmatrix} u_N \\ v_T \\ w \\ \theta_N \\ \theta_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\{u_s\} = [T_u] \cdot \{u\} \quad (4.24)$$

şeklini alır.

Böylece (4.12) bağıntısında bulunan $[T]$ matrisi, (4.20) ve (4.23) bağıntılarında elde edilen matrisler kullanılarak

$$[T] = [T_\sigma]^T [T_u] = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

şeklinde elde edilir.

4.3.2 Sınırlar Üzerinde İntegrasyonda Kullanılan $[N]$ Biçim Fonksiyonları

$[G]$ matrisinin oluşturulmasında integrasyon işlemi sınırlar üzerinde yapılmaktadır ve bağıntı (4.12)'deki kullanılan $[N]$ biçim fonksiyonları (4.26) bağıntıları ile verilmektedir.

$$\begin{aligned} N_{\Delta 1} &= (\xi - 1)\xi/2 & N_{\Delta 2} &= (1 - \xi^2) & N_{\Delta 3} &= (\xi + 1)\xi/2 \\ N_{\theta 1} &= (1 - \xi^2)\xi L & N_{\theta 2} &= -(1 - \xi^2)\xi L & N_{\theta 3} &= (1 - \xi^2)\xi L \end{aligned} \quad (4.26)$$

Burada L , kenar uzunluğunu göstermektedir. $N_{\theta 1}$, $N_{\theta 2}$, $N_{\theta 3}$ düzlem normal doğrultusundaki dönme bileşenlerinden oluşturduğu u ve v öteleme bileşenlerinin belirlenmesi için kullanılan ek biçim fonksiyonlarıdır ve bu biçim fonksiyonlarında L kenar boyu kullanılarak boyut uyumluluğu sağlanması amaçlanmıştır.

Biçim fonksiyonları kullanılarak kenar boyunca yerdeğiştirme bileşenlerinin kenar üzerinde bulunan düğüm noktası değerlerine bağlı olarak elde edilebilmektedir.

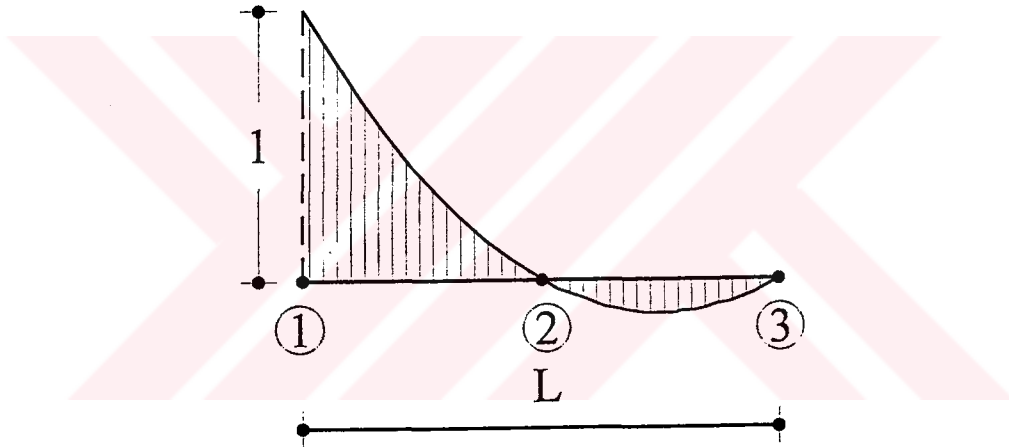
$$u = \sum_{i=1}^3 N_{\Delta i} u_i + \sum_{i=1}^3 N_{\theta i} \theta_{zi} \cos \alpha$$

$$v = \sum_{i=1}^3 N_{\Delta i} v_i + \sum_{i=1}^3 N_{\theta i} \theta_{zi} \sin \alpha$$

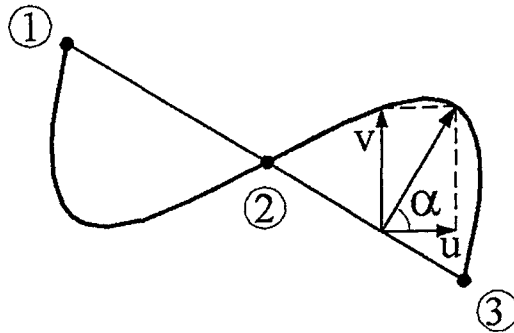
$$w = \sum_{i=1}^3 N_{\Delta i} w_i \quad (4.27)$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^3 N_{\Delta i} \theta_{xi} \quad \theta_y = \sum_{i=1}^3 N_{\Delta i} \theta_{yi}$$

Örnek olmak üzere $N_{\Delta i}$ biçim fonksiyonu Şekil 4.9 da, u ve v yerdeğiştirmelerinin belirlenmesinde düzlem normali doğrultusundaki dönme bileşenlerinin etkisini gözönüne almak amacıyla kullanılan ek biçim fonksiyonu $N_{\theta i}$ Şekil 4.10 da verilmektedir.



Şekil 4.9 $N_{\Delta i}$ Biçim Fonksiyonu



Şekil 4.10 Düzlem Normali Doğrultusundaki Dönmelerden oluşan u ve v Yer Değiştirme Bileşenleri

4.4 Kayma Kilitlenmesi

Şekildeğiştirme enerjisine kayma şekildeğiştirmelerinin katkısı kalınlık ile ters orantılıdır. Özel önlemler alınmazsa kalınlık azaldıkça kayma şekil değıştirmelerinin enerjisi, eğilme terimlerinin enerjisi yanında çok büyük değerler alabilmekte ve böyle durumlarda yanlış sonuçlar elde edilebilmektedir. Bu durum “kayma kilitlenmesi” olarak adlandırılmaktadır.

Geliştirilen sonlu elemanda birim uzamalar ve açı değışimleri ile birlikte kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmeleri de tanımlanmıştır. Eğilme ve kayma şekildeğiştirmelerinin beraber gözönüne alındığı sonlu elemanlarda sağlıklı çözümlerin elde edilebilmesi için kabuk ince iken, kayma şekil değıştirmelerine ilişkin terimlerden gelen etkilerin eğilme ile ilgili terimlerden gelen etkilerin yanında çok küçük olması, kalınlık arttıkça kayma terimlerinin etkisinde artması gerekmektedir.

Kayma kilitlenmesi çoğunlukla yerdeğıştirme esaslı sonlu eleman yöntemiyle geliştirilen elemanlarda ortaya çıkmakta ve kayma şekildeğiştirmeleri enerjisinin hesabında sayısal integrasyon adımı azaltılarak sorun çözülmeye çalışılmaktadır. Bu çalışmada geliştirilen gerilme seçimli hibrid sonlu elemanda bu tür özel bir işlem gerçekleştirilmemiş olmasına karşın kayma kilitlenmesi ortaya çıkmamaktadır. Bunun en büyük nedeni hibrid sonlu elemanlarda kullanılan fonksiyonelin yer değıştirme esaslı sonlu elemanlarda kullanılan fonksiyonele göre farklı büyüklükleri kullanması ve sonuçta elde edilen enerji ifadelerinin farklı olmasıdır.

4.5 [K] Eleman Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

Elde edilen [H] ve [G] matrisleri yardımıyla (4.28) bağıntısı kullanılarak eleman rijitlik matrisi oluşturulur.

$$[K] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (4.28)$$

[K] eleman rijitlik matrisinde j nolu kolon, j nolu serbestlik değeri bir, diğer serbestlik değerleri sıfır iken düğüm noktası serbestlikleri doğrultusunda etkiyen uç kuvvetlerinden oluşan vektörü göstermektedir. Serbestlik derecesi kadar denklem bulunduğundan dolayı [K] matrisi kare bir matrisdir. Geliştirilen elemanda [K] matrisi 48x48 boyutundadır.

4.6 Yükleme Vektörleri

Eleman üzerinde herhangi bir şekilde yayılı $\{F\}$ yükünün eleman içindeki dağılımı

$$\{F\} = [N_p] \{F\}^e \quad (4.29)$$

ile verilebilir. Burada $[N_p]$ yük için seçilmiş şekil fonksiyonlarını, $\{F\}^e$ yüklerin düğüm noktalarındaki değerlerini, $\{F\}$ 'de yer değiştirme bileşenlerine eşit sayıda ve onların doğrultusunda yük fonksiyonlarından oluşan vektörü göstermektedir.

Eleman üzerinde herhangi bir şekilde yayılı $\{F\}$ vektörünün u , v ve w doğrultularındaki bileşenleri f_u , f_v , f_w yüklerinin eleman üzerindeki dağılımları doğrusal olarak varsayılırsa, köşe düğüm noktalarındaki f_u^i , f_v^i , f_w^i değerlerine bağlı olarak bağıntı (4.30)'da verildiği gibi elde edilebilirler.

$$f_u = \sum_{i=1}^4 f_u^i \cdot N_{pi} \quad f_v = \sum_{i=1}^4 f_v^i \cdot N_{pi} \quad f_w = \sum_{i=1}^4 f_w^i \cdot N_{pi} \quad (4.30)$$

Bu durumda $[N_p]$ biçim fonksiyonları (4.7)'de verilen $[\bar{N}]$ biçim fonksiyonları ile özdeş olmaktadır.

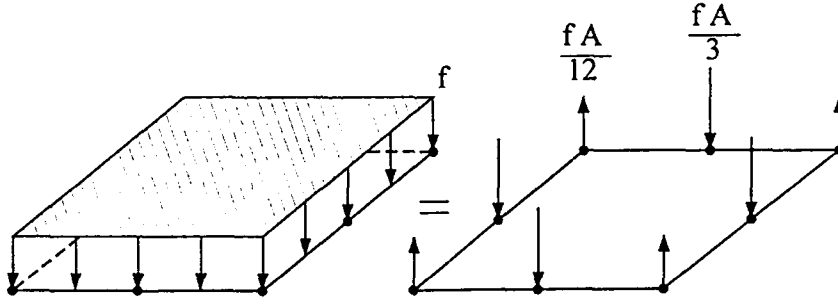
Sabit kalınlıklı elemanda yayılı yüklerden oluşan düğüm noktası kuvvetleri (3.12) bağıntısından

$$\{F\}_p^e = - \int_A [N]^T \{F\} dA \quad (4.31)$$

biçiminde elde edilir. Burada bağıntı (4.28), (4.29) eşitliğinde yerine koyulursa

$$\{F\}_p^e = - \int_A [N]^T [N_p] \{F\}^e dA = - \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 W_i W_j [N]^T [N_p] [J] \{F\}^e \quad (4.32)$$

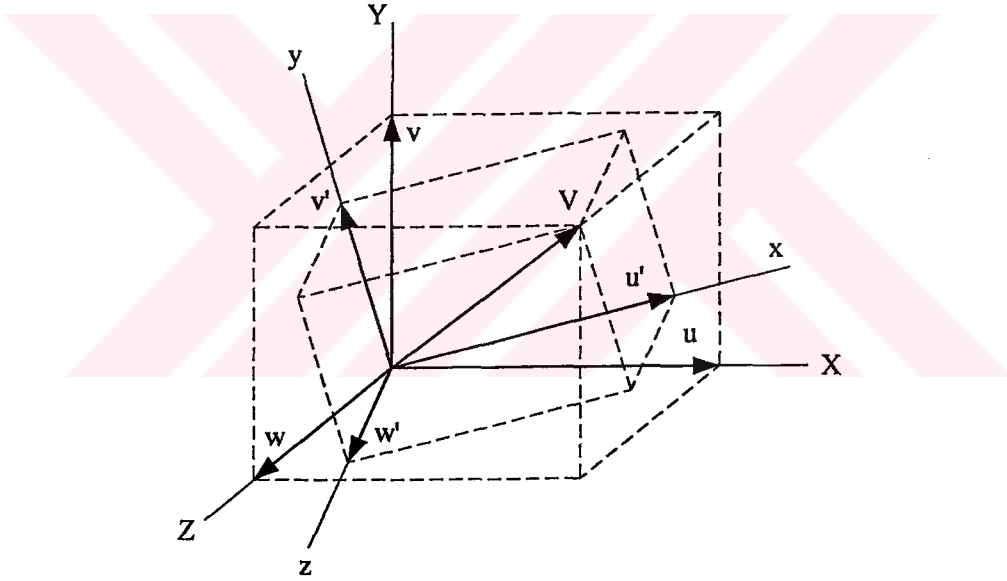
elde edilir. Buradaki sayısal integrasyon işlemi $[H]$ matrisinin elde edilışinde verildiği şekilde yapılmaktadır. Şekil 4.11'de dikdörtgen bir bölge üzerine etkiyen düzgün yayılı yük ve bu duruma karşı gelen eşdeğer düğüm noktası yükleri gösterilmektedir.



Şekil 4.11 Dikdörtgen Bir Bölge Üzerinde Düzgün Yayılı Yük ve Karşı Gelen Eşdeğer Düğüm Noktası Yükleri

4.7 Yerel Eksenlerden Genel Eksenlere Dönüşüm

Yerel eksenlerde elde edilen $[K]$ eleman rijitlik matrisi ve $\{F\}^e$ eleman yük matrislerinin genel eksenlere dönüştürülmesi gerekmektedir.



Şekil 4.12 (XYZ) ve (xyz) Eksenlerinde V Konum Vektörü

Şekil 4.12'de V konum vektörünün X, Y, Z eksenlerindeki skaler bileşenleri u, v, w, x, y, z eksenlerindeki bileşenleri u', v', w' olarak gösterilmektedir. V vektörünün (u', v', w') bileşenleri, (u, v, w) bileşenleri ve (X, Y, Z) ile (x, y, z) eksenleri arasındaki kosinüs açıları cinsinden elde edilebilir.

ℓ_1 : X ve x arasındaki açının kosinüsü

m_1 : Y ve x arasındaki açının kosinüsü

n_1 : Z ve x arasındaki açının kosinüsü

olmak üzere u' (u, v, w) değerlerine bağlı olarak

$$u' = \ell_1 u + m_1 v + n_1 w$$

şeklinde elde edilmektedir. v' ve w' bileşenleri de benzer biçimde oluşturulur ve matris biçiminde düzenlenirse (4.33) bağıntısı ortaya çıkmaktadır.

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = [\Lambda] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad [\Lambda] = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (4.33)$$

Dönüşüm matrisi olarak adlandırılan $[\Lambda]$ matrisini oluşturan terimler Tablo 4.1'de verilmektedir.

Tablo 4.1 Eksenler ve Doğrultu Kosinüsleri

	X	Y	Z
x	ℓ_1	m_1	n_1
y	ℓ_2	m_2	n_2
z	ℓ_3	m_3	n_3

$[\Lambda]$ matrisi, tersi, transpozisine eşit olduğundan ortogonal bir matristir. Bu özellik

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\Lambda]^T \begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

eşitliğini ortaya çıkarmaktadır. Genel durumda oluşturulan V vektörü, yerdeğiştirme bileşenlerinden oluşan bir $\{q\}$ vektörünü ya da yük bileşenlerinden oluşan bir $\{R\}$ vektörünü temsil edebilmektedir. Tüm serbestlik derecelerini içerecek biçimde oluşturulan $[t]$ dönüşüm matrisi, (4.33)'de verilen $[\Lambda]$ doğrultu kosinüs matrislerinden yararlanılarak (4.35) bağıntısında verildiği şekilde elde edilmektedir.

$$[t] = \begin{bmatrix} [\Lambda] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\Lambda] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\Lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\Lambda] \end{bmatrix}_{48 \times 48} \quad (4.35)$$

Bu durumda

$$\{q\} = [t] \{q\}_{xyz} \quad \text{ve} \quad \{q\}_{xyz} = [t]^T \{q\} \quad (4.36)$$

$$\{R\} = [t] \{R\}_{xyz} \quad \text{ve} \quad \{R\}_{xyz} = [t]^T \{R\} \quad (4.37)$$

bağıntılarında bulunan dönüşümler geçerlidir.

(XYZ) ve (xyz) gibi iki farklı koordinat sisteminde (3.14) bağıntısı eleman için düzenlenirse

$$[K]_{xyz} \{q\}_{xyz} = \{R\}_{xyz} \quad \text{ve} \quad [K] \{q\} = \{R\} \quad (4.38)$$

elde edilir. $[K]$ eleman rijitlik matrisinin bilindiği ve $[K]_{xyz}$ matrisinin arandığı durumda

$$\{q\} = [t] \{q\}_{xyz} \quad \{R\}_{xyz} = [t]^T \{R\} \quad (4.39)$$

$$[K]_{xyz} \{q\}_{xyz} = \{R\}_{xyz} = [t]^T [R] = [t]^T [K] \{q\} = [t]^T [K] [t] \{q\}_{xyz} \quad (4.40)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$[K]_{xyz} = [t]^T [K] [t] \quad (4.41)$$

bağıntısı elde edilir. Eleman rijitlik matrisi dönüşümü (4.41) bağıntısı ile, eleman yük vektörü $\{F\}_p^e$ 'nin dönüşümü (4.37) bağıntısından

$$\{F\}_{xyz}^e = [t]^T \{F\}_p^e \quad (4.42)$$

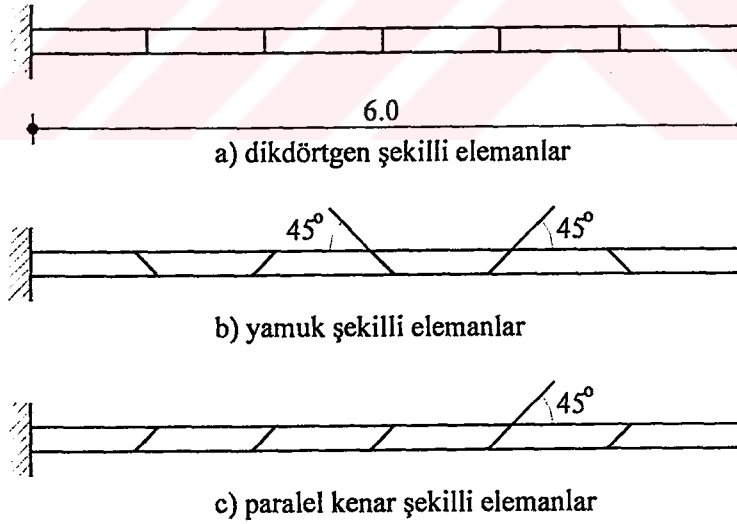
şeklinde gerçekleştirilmektedir.

5. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, geliştirilen sonlu eleman (HBQ8) kullanılarak çeşitli örnekler çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar çeşitli çalışmaların sonuçları ve analitik çözüm sonuçları ile karşılaştırılarak geliştirilen elemanın yaklaşıklık derecesi belirlenmeye çalışılmıştır.

5.1 Örnek 1 Konsol Kiriş

Uzunluğu 6m, yüksekliği 0.2m ve genişliği 0.1m olan konsol kirişin ucuna farklı yükleme durumları olarak aksenal, düzlem içinde ve düzleme dik doğrultuda birim tekil yük etkimekte ve tekil yük ile aynı doğrultudaki yerdeğiştirme değerleri hesaplanmaktadır. Malzeme özellikleri olarak $E=10^7$ kN/m², $\nu=0.3$ kullanılmıştır.



Şekil 5.1 Konsol Kiriş

Örnek 1'in çözümünden elde edilen sonuçlar, analitik sonuç ve [12] de verilen çalışmalardaki çözümler ile karşılaştırmalı olarak Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de verilmektedir. Tablo 5.2'de verilen değerler çubuk teorisinden elde edilen analitik sonuca oranlanarak oluşturulmuş değerlerdir.

Tablo 5.1 Elde Edilen Uç Yerdeğiştirmelerin Analitik Çözüm ile Karşılaştırılması

Tekil Yük Doğrultusu	HBQ8 (Dikdörtgen)	Analitik Sonuç
Eksenel	0.301×10^{-4}	0.3×10^{-4}
Düzlemi İçinde	0.10796	0.108
Düzlemine Dik	0.43014	0.432

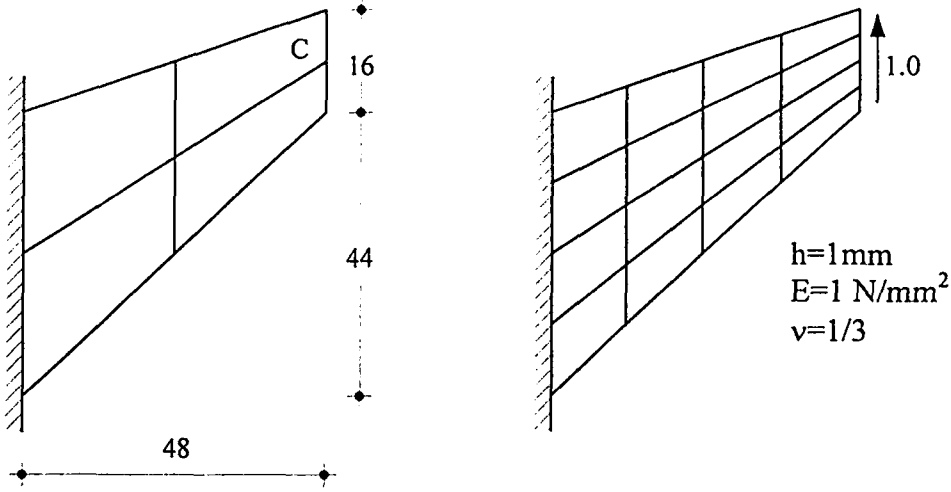
Tablo 5.2 Örnek1 Sonuçlarının Diğer Çözümler ile Karşılaştırılması

Tekil Yük Doğrultusu	QUAD4/ NASTRAN	ES1/ EX47	ES5/ E410	AQR8	HBQ8
	Dikdörtgen				
Eksenel	0.995	0.995	0.995	0.998	1.000
Düzlemi İçinde	0.993	0.904	0.915	0.993	0.999
Düzlemine Dik	0.986	0.980	0.986	0.981	0.995
	Yamuk				
Eksenel	0.996	0.761	0.991	0.998	1.010
Düzlemi İçinde	0.988	0.305	0.813	0.986	1.040
Düzlemine Dik	0.968	0.763	-	0.965	0.989
	Paralel Kenar				
Eksenel	0.996	0.996	0.989	0.998	1.011
Düzlemi İçinde	0.986	0.324	0.794	0.977	1.041
Düzlemine Dik	0.977	0.939	0.991	0.980	0.992

Karşılaştırma sonucu, analitik çözüm ve diğer çalışmalardaki çözümler ile uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Özellikle eleman şeklinin dikdörtgen olduğu durumda analitik çözüme yakınsamanın oldukça iyi sağlandığı gözlenmektedir. Sonlu eleman ağının düzensizleştiği durumlarda da mühendislik açısından kabul edilebilir sonuçlara ulaşılmaktadır.

5.2 Örnek 2 Ucu Kaldırılmış Konsol Kiriş

Malzeme, geometrik özellikleri ve yüklemesi şekil 5.2.a ve şekil 5.2.b’de verilen, değişken kesitli ucu kaldırılmış konsol kirişin çözümü yapılmış ve diğer çalışmalarda verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.



a) Boyutlar 2x2 sonlu eleman ağı

b) Yükleme ve 4x4 sonlu eleman ağı

Şekil 5.2 Değişken Kesitli Ucu Kaldırılmış Konsol Kiriş

Tablo 5.4’de verilen değerler [36]’dan C noktası için 23.90mm olarak alınan analitik çözüm sonucuna oranlanarak verilmektedir.

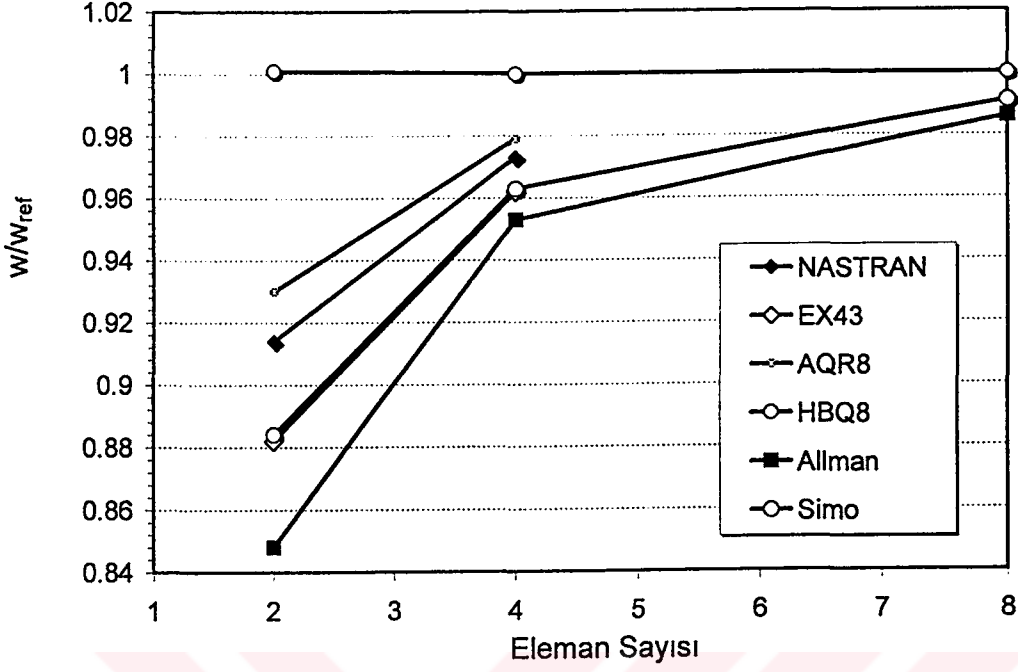
Tablo 5.3 Farklı Eleman Sayıları ile Elde Edilen Düşey Uç Yer Değiştirmeleri

Eleman Sayısı	HBQ8
2x2	23.933
4x4	23.925

Tablo 5.4 Örnek2 Sonuçlarının Diğer Çözümler ile Oransal Karşılaştırması

Eleman Sayısı	2x2	4x4	8x8
Allman [33]	0.848	0.953	0.986
Simo [37]	0.884	0.963	0.991
AQD4 [12]	0.926	0.979	-
AQR8 [29]	0.930	0.979	-
QUAD4 MSC/NASTRAN [12]	0.914	0.973	-
ES4/EX43 [12]	0.882	0.962	-
NMD4-III [38]	0.883	0.961	0.990
NMS-4Mb [39]	0.851	0.957	0.990
Ibrahimbegovic et. al. [40]	0.865	0.962	0.990
M1 Iura and Atluri [41]	0.917	0.977	0.995
HBQ8 (this study)	1.001	1.001	1.000

Elde edilen sonuçlardan görüleceği üzere, 2x2 eleman ağı gibi az sayılabilecek bir sonlu eleman ağıyla bile analitik çözüme oldukça yaklaşabilen bir sonuç elde edilebilmiştir. Şekil 5.3’de farklı eleman sayısı için elde edilen sonuçlar diğer çalışmalardaki sonuçlarla analitik çözüme oranlanarak karşılaştırmalı olarak grafiksel biçimde verilmektedir.



Şekil 5.3 C Noktası Düşey Yerdeğiştirmesinin Analitik Çözümüne Oranı

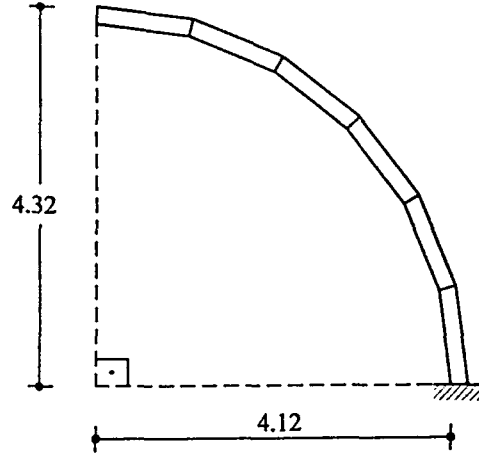
Karşılaştırma sonucu, analitik çözüm ve diğer çalışmalardaki çözümler ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

5.3 Örnek 3 Eğrisel Konsol Kiriş

Bir çok çalışmada çözümü yapılan ve boyutları Şekil 5.4'de verilen eğrisel konsol kiriş boş uca etkiyen iki farklı yükleme durumu için çözülmüştür. Birinci yükleme düzlem içinde ve yarıçap doğrultusunda birim yükleme, diğeri düzlemine dik doğrultuda birim yüklemidir.

Yükleme doğrultusundaki yerdeğiştirme değerleri elde edilmiş, analitik çözüm ve [12]'deki sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak Tablo 5.5 ve Tablo 5.6'da verilmiştir. Çözümlemede kullanılan sayısal değerler aşağıda verilmektedir.

$$r_{iç} = 4.12m, \quad r_{dış} = 4.32m, \quad \text{Genişlik (b)} = 0.1m, \quad E = 10^7 \text{ kN/m}^2, \quad \nu = 0.25$$



Şekil 5.4 Eğrisel Konsol Kiriş

Tablo 5.5 Elde Edilen Sonuçların Analitik Yerdeğiştirme Çözümü ile Karşılaştırılması

Yüklemeye Yönü	HBQ8	Analitik Çözüm
Düzlem İçinde (Yarıçap Doğrultusunda)	0.08914	0.08734
Düzlemine Dik	0.49613	0.5022

Tablo 5.6 Örnek3 Yer Değiştirme Sonuçlarının Diğer Çözümler ile Oransal Karşılaştırması

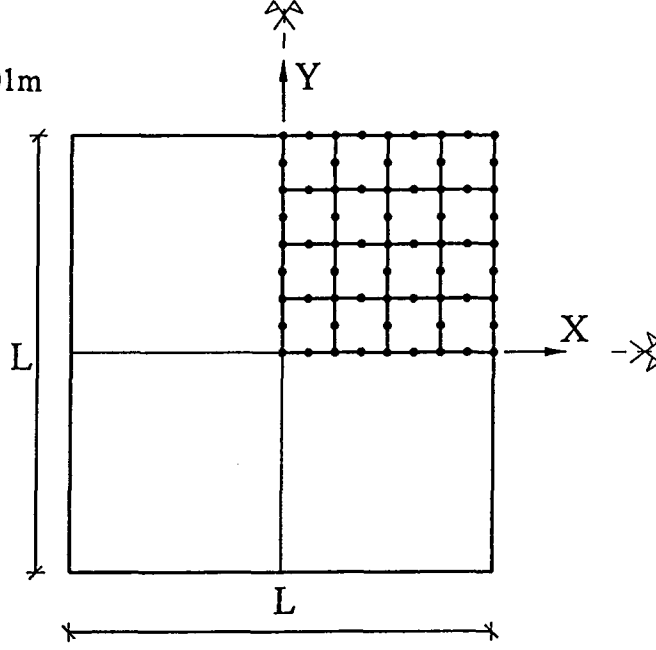
Yüklemeye Yönü	QUAD4 MSC/NASTRAN	ES1/ EX47	ES5/ E410	ES4/ EX43	AQR8	HBQ8
Düzlemi İçinde	0.833	0.929	0.938	0.888	0.997	1.021
Düzlemine Dik	0.951	0.935	0.887	0.925	0.956	0.988

Karşılaştırma sonucu, analitik çözüm ve diğer çalışmalardaki çözümler ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

5.4 Örnek 4 Tekil Yük Etkisindeki Basit Mesnetli Kare Plak

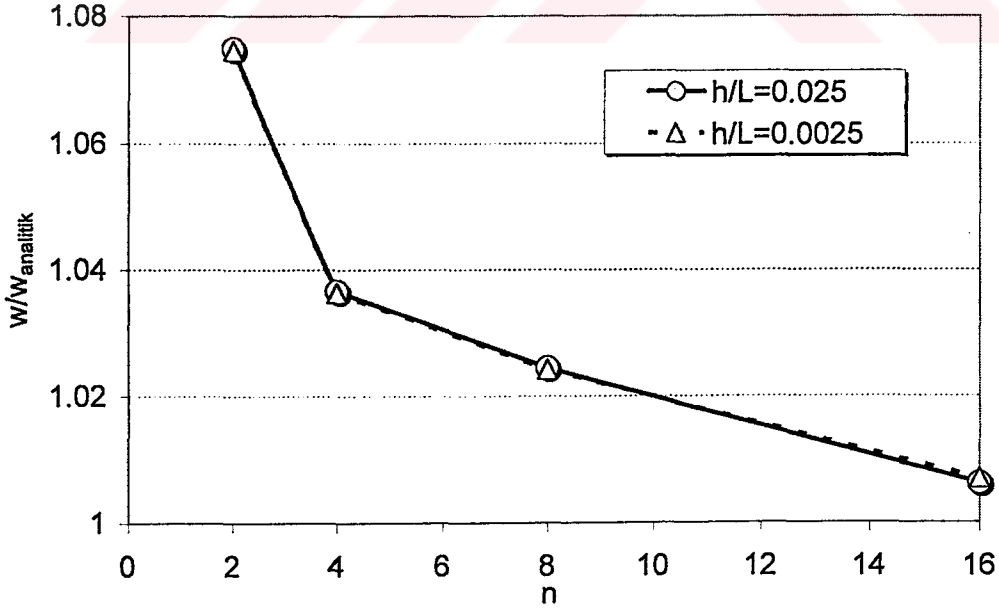
Orta noktasına tekil yük etkileyen basit mesnetli kare plak iki farklı h/L oranı ve farklı sayıda sonlu eleman ağı için çözülmüştür. Simetriden yararlanılarak sistemin $1/4$ 'ü modellenmiştir. Şekil 5.5'de hesap modeli gösterilmektedir.

$E=1000\text{kN/m}^2$
 $h=0.1\text{m} ; h=0.01\text{m}$
 $L=4\text{m}$
 $\nu=0.3$



Şekil 5.5 Basit Mesnetli Kare Plak

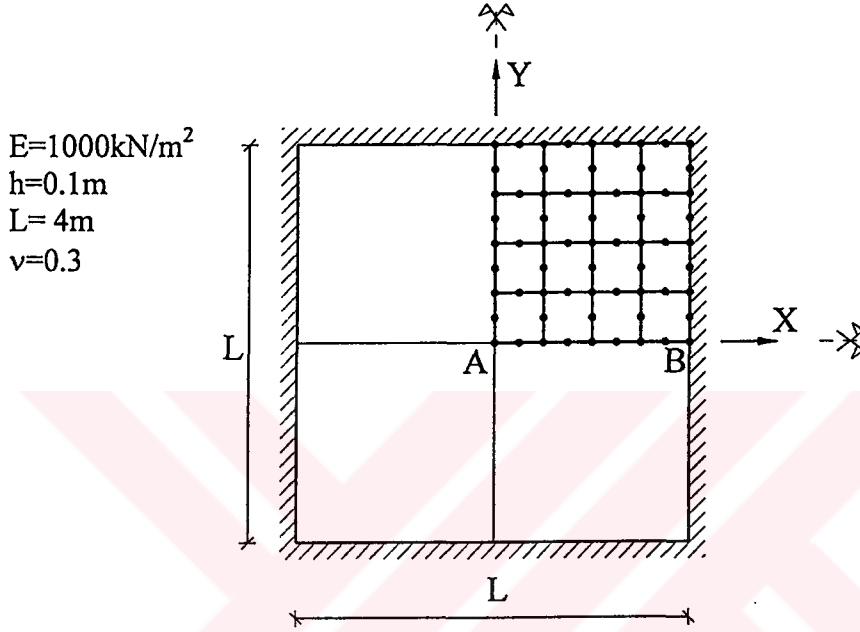
Elde edilen sonuçlar [36]'da verilen analitik çözüme oranlanarak grafiksel biçimde Şekil 5.6'da verilmektedir. Aynı grafikte farklı plak h/L oranları için sonuçlar bulunmaktadır. Grafikten görüldüğü üzere h/L 'nin küçük değerleri için kayma kilitlenmesi ortaya çıkmamakta ve ince plak teorisi ile uyumlu sonuçlar elde edilebilmektedir.



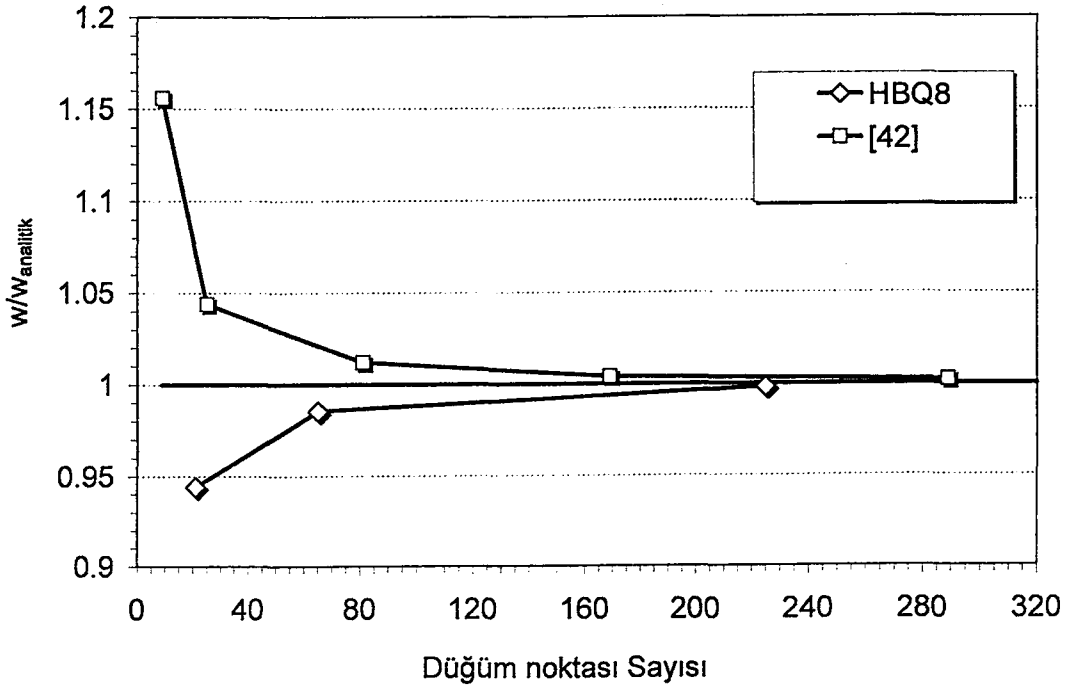
Şekil 5.6 Tekil Yük Etkisindeki Basit Mesnetli Kare Plakda Farklı Eleman Sayıları (n) İçin Orta Nokta Düşey Yerdeğiştirmesi $w/w_{analitik}$ Oranı

5.5 Örnek 5 Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Ankastre Mesnetli Kare Plak

Düzgün yayılı yük etkisindeki dört kenarından ankastre mesnetli kare plak, farklı sayıda sonlu eleman ağı için çözülmüştür. Şekil 5.7’de simetriden yararlanılarak 1/4’ü modellenen sistem gösterilmektedir. Şekil 5.8 ve 5.9’da orta noktadaki çökme değeri farklı sonlu eleman sayıları için [42] ile karşılaştırmalı olarak [36]’da verilen analitik çözüme oranlanarak verilmektedir.

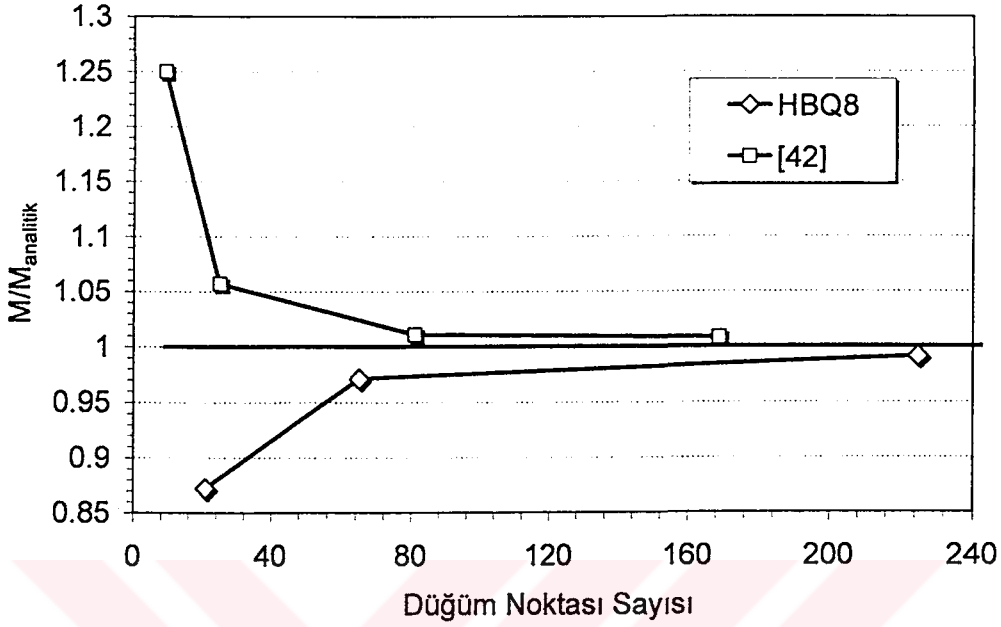


Şekil 5.7 Dört Kenarından Ankastre Mesnetli Kare Plak



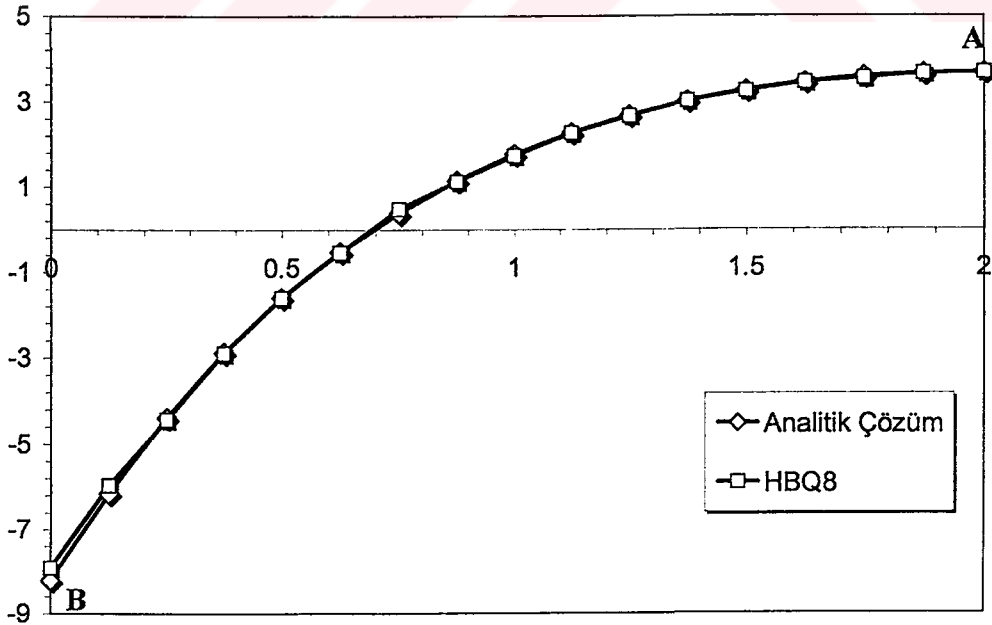
Şekil 5.8 Orta Nokta w Yer Değiştirme Değerlerinin Analitik Çözüme Oranı

Geliştirilen eleman sekiz noktalı bir sonlu eleman, [42]'de kullanılan eleman dört noktalı bir sonlu eleman olduğundan karşılaştırma düğüm noktası sayısı esas alınarak yapılmıştır.



Şekil 5.9 Orta Nokta M_x Değerlerinin Analitik Çözümüne Oranı

A-B doğrusu boyunca 8x8 eleman ağı kullanarak elde edilen M_x momenti değişimi analitik çözüm ile karşılaştırmalı olarak Şekil 5.10'da verilmektedir.



Şekil 5.10 A-B Doğrultusunda M_x Değişimi

Karşılaştırmalardan görüldüğü gibi geliştirilen elemanla elde edilen çözümler hem analitik çözüm hem de [42] de kullanılan eleman çözümleri ile uyumludur.

Plak kalınlığı arttıkça kalınlık doğrultusundaki kayma şekildeğiştirmelerinin, plak şekildeğiştirmeleri üzerindeki etkisinin arttığı bilinmektedir. Bu etkiyi incelemek amacıyla söz konusu sistem farklı kalınlık/açıklık oranları için çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Tablo 5.7 ve Tablo 5.8 de verilmiştir.

Tablo 5.7 Düzgün yayılı yük etkisinde dört kenarından ankastre mesnetli kare plakta $w_{max}Eh^3/pL^4$ değerleri

h/L	0.2	0.1	0.01
Kabir	0.02361	0.01629	0.01363
Batoz & Lardeur	0.02306	0.01616	0.01381
Bhashyam&Gallagher	0.02243	0.01605	0.01365
Kant	0.02359	0.01660	0.01398
Srinivas&Rao	0.02330	0.01633	-
HBQ8	0.02386	0.01657	0.01399

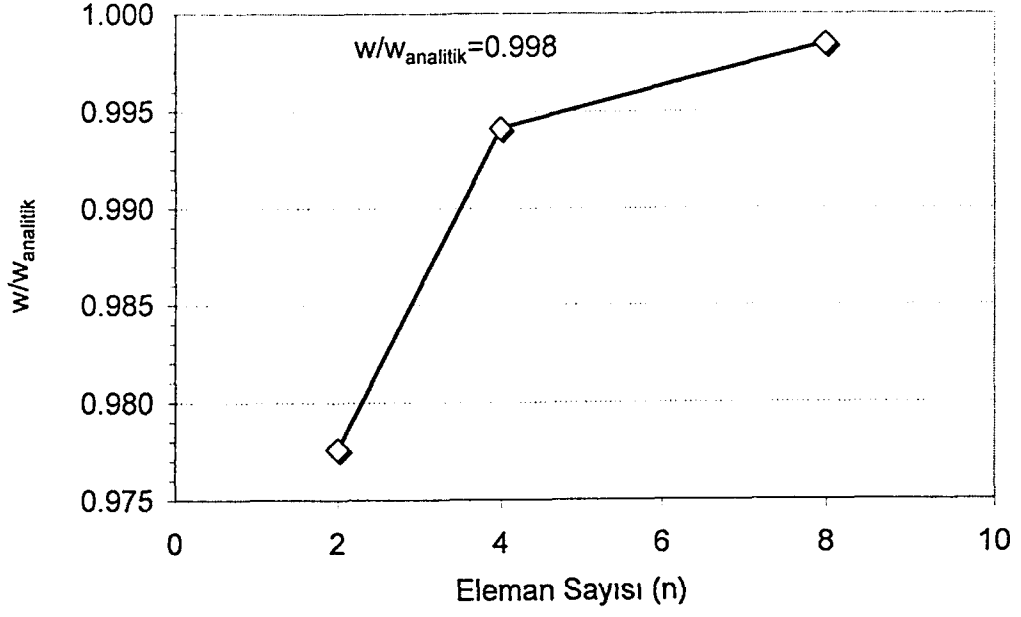
Tablo 5.8 Düzgün yayılı yük etkisinde, dört kenarından ankastre mesnetli kare plakta maksimum moment M_x/pa^2 değerleri

h/L	0.2	0.1	0.01
Kabir	0.0233	0.0230	0.0227
Batoz & Lardeur	0.0231	0.0230	0.0230
Bhashyam&Gallagher	0.0243	0.0240	0.0237
Srinivas&Rao	0.0261	0.0244	-
HBQ8	0.02438	0.02399	0.02367

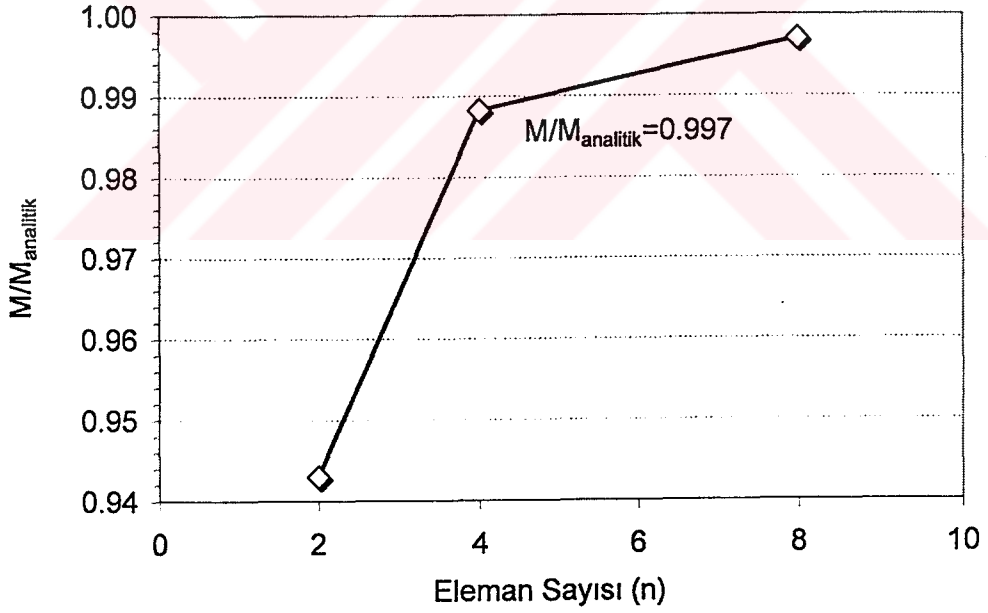
Karşılaştırma sonucu diğer çalışmalardaki çözümler ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

5.6 Örnek 6 Düzgün Yayılı Yük Etkisindeki Basit Mesnetli Kare Plak

Örnek 4'deki sistem farklı sayıda sonlu eleman ağı için düzgün yayılı yük etkisinde çözülmüştür. Orta noktada elde edilen en büyük çökme ve moment değerleri, [36]'da düzgün yayılı yüklerle yüklü basit mesnetli kare plak için verilen değerlere oranlanarak Şekil 5.11 ve 5.12'de verilmiştir.



Şekil 5.11 Farklı Eleman Sayıları İçin Orta Nokta Çökme Değerlerinin Analitik Çözümüne Oranları



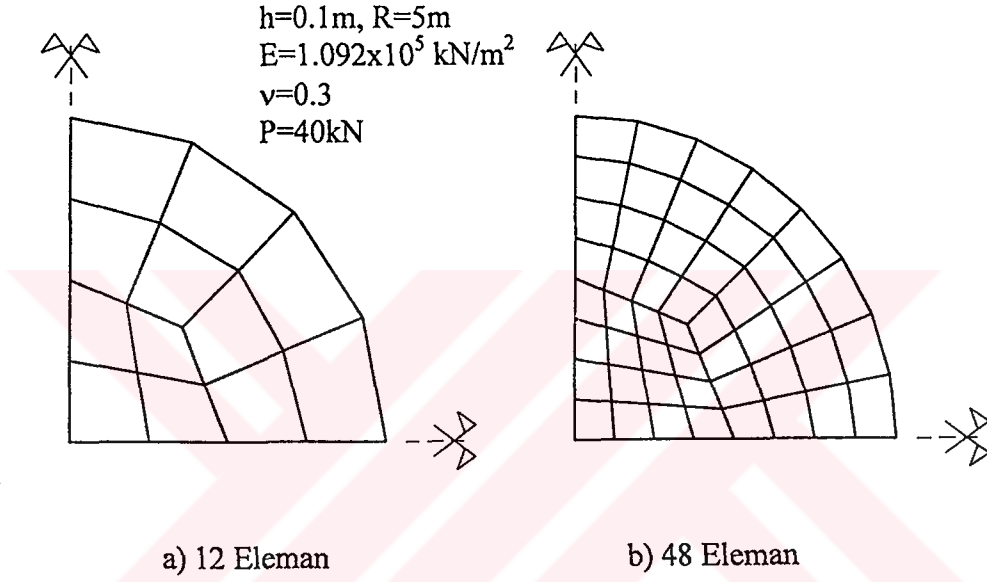
Şekil 5.12 Farklı Eleman Sayıları İçin Orta Nokta M_x Değerlerinin Analitik Çözümüne Oranları

Karşılaştırmalardan görüldüğü gibi 2x2 eleman ağı için orta nokta çökme değerinin analitik çözüme göre bağıl hatası %2.2 dolaylarında olurken, 8x8 eleman ağı için bu

değer % 0.2 olmaktadır. Benzer karşılaştırma M_x ($x=0, y=0$) moment değerleri içinde yapılırsa 2x2 eleman ile %5.7, 8x8 eleman ağı için %0.3 bağlı hata bulunmaktadır.

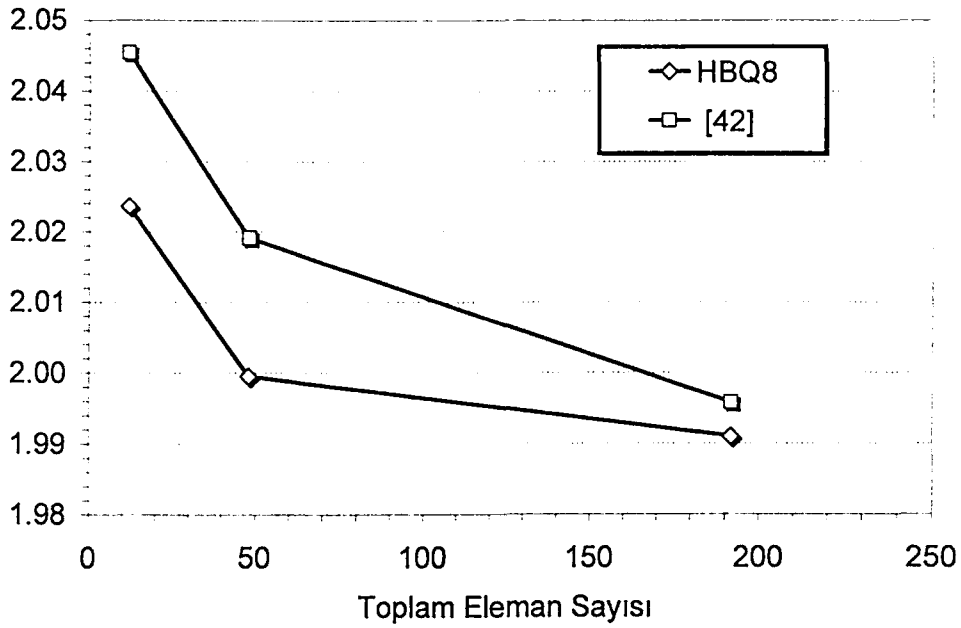
5.7 Örnek 7 Tekil Yük Etkisindeki Ankastre Mesnetli Dairesel Plak

Sonlu eleman ağının düzensiz olmasının sonuçlar üzerindeki etkisini gözlemleyebilmek için orta noktasına tekil yük etkimekte olan, ankastre mesnetli dairesel plak çözülmüştür.



Şekil5.13 Merkezinde Tekil Yük Etkisinde Ankastre Mesnetli Dairesel Plak

Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında [42] sonuçları ile uyumlu olduğu ve sonlu eleman ağının düzensiz olduğu duruma örnek olarak çözülen problemde yakınsamanın sağlanabildiği gözlemlenmiştir.



Şekil 5.14 Dairesel Plakta Orta Nokta Yer Değiştirme Değerinin Düğüm Noktası Sayısına Bağlı Değişimi

Aynı problem farklı kalınlık/açıklık oranları ve eleman sayısı ile çözülmüş ve [36] verilen analitik çözüm ile Tablo 5.9 da karşılaştırılmıştır.

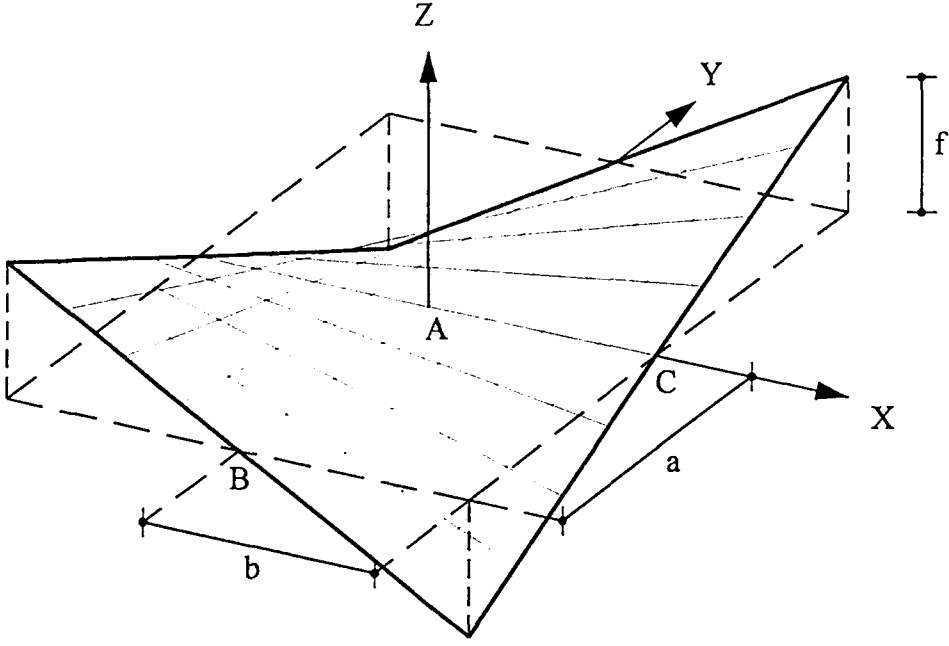
Tablo 5.9 Ankastre Mesnetli Dairesel Plakta Farklı Kalınlık/Açıklık Oranları İçin Orta Nokta Çökme Değerleri

R/h	HBQ8 (N=12)	HBQ8 (N=48)	Teorik Çözüm [36]
50	0.02213	0.02189	0.021725
5000	22018.8	21768.2	21724.7

Görüldüğü gibi geliştirilen eleman HBQ8 ile elde edilen sonuçlar farklı kalınlık/açıklık oranlarında teorik çözüm ile uyum içerisindedir ve eleman sayısı arttıkça yakınsama sağlanmaktadır..

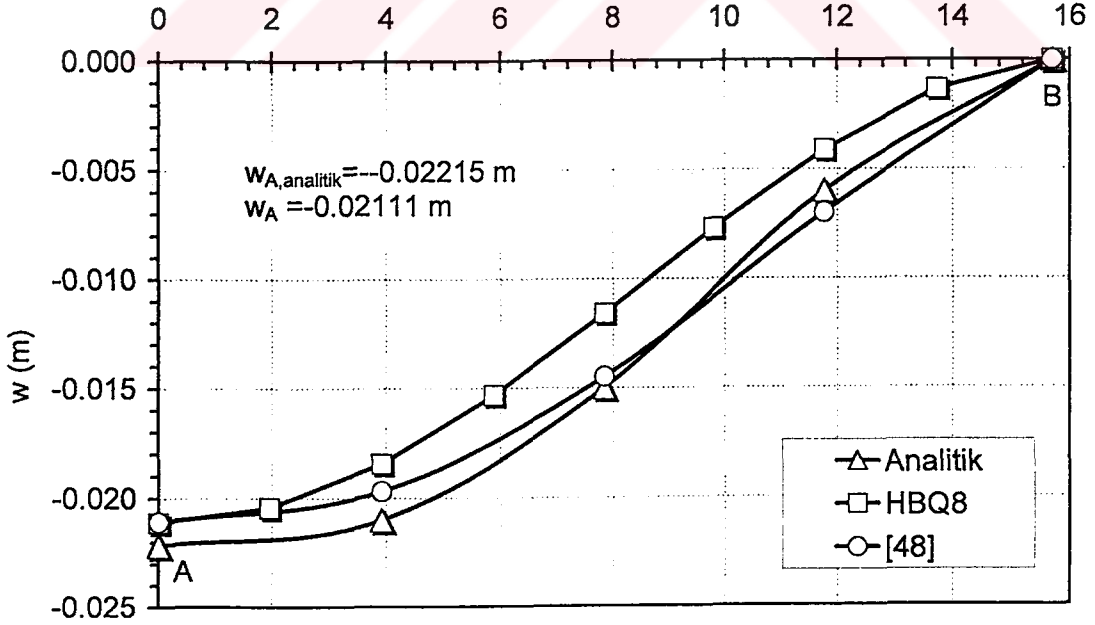
5.8 Örnek 8 Ankastre Mesnetli Hiperbolik Paraboloid Kabuk

Bu çalışmada geliştirilen eleman ile Şekil 5.15’de verilen dört kenarından ankastre mesnetli eşkenar hiperbolik paraboloid kabuğun kendi ağırlığı altında hesabı yapılmıştır. Sayısal çözümde kullanılan boyutlar ve malzeme özellikleri $a=15.7m$, $f=3.3m$, $h=0.635m$, $E=35000 \text{ kN/m}^2$, $\nu=0.30$, kendi ağırlığı $g=0.07 \text{ kN/m}^2$ şeklindedir.



Şekil 5.15 Eşkenar Hiperbolik Paraboloid Kabuk

Kabuğun A-B doğrusu boyunca w yer değiştirmesinin değişimi Şekil 5.16'da, [48]'deki sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir. [48] çalışmasındaki sonuç, 8 noktalı izoparametrik bir eğrisel eleman kullanılarak, 36 elemandan oluşan sistem çözümünden elde edilmiştir. Analitik çözüm Hadid ve Tottenham'ın verdiği analitik çözüm olarak yine [48] çalışmasından alınmıştır.

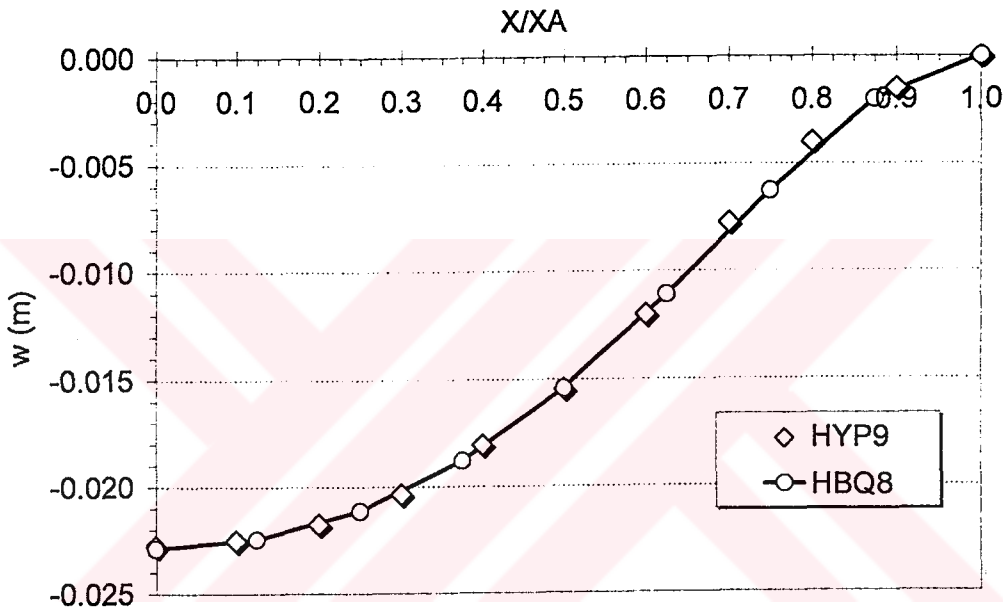


Şekil 5.16 Hiperbolik Paraboloid Kabuğun A-B Doğrultusu Boyunca w Yer Değiştirme Eğrisi

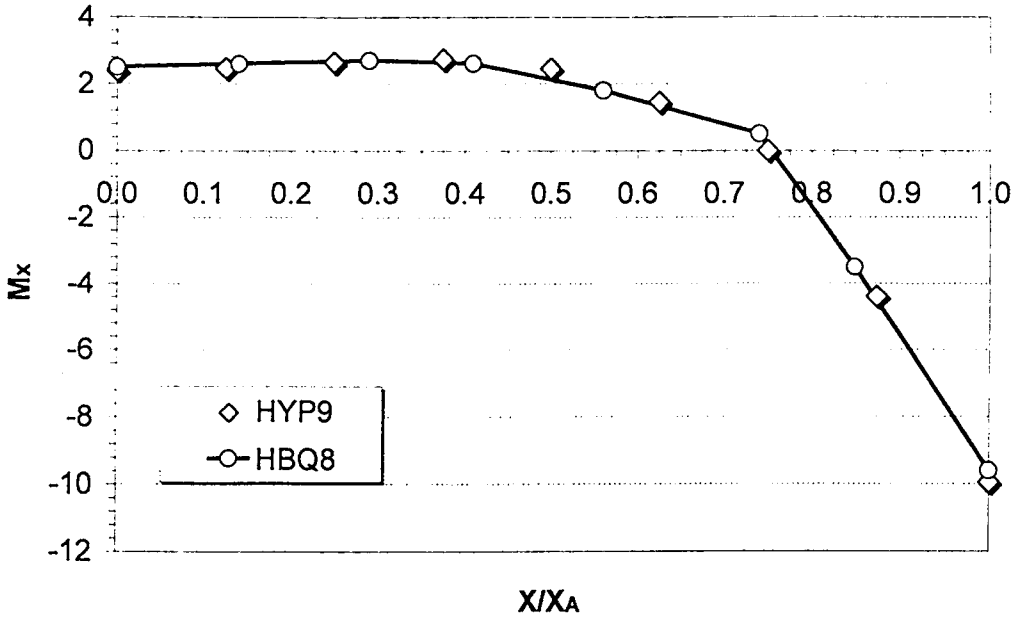
Geliştirilen eleman kullanılarak çözüm 8x8 eleman ağı için yapılmış ve A noktası düşey yerdeğiştirmesi için analitik çözüm ile fark %4.7 dolaylarında bulunmuştur.

Benzer sistem [16] çalışmasında, düzgün yayılı yük değeri $g=0.6895 \text{ kN/m}^2$ ve geometrik ve malzeme özellikleri $a=b=16.41\text{m}$, $c=3.3 \text{ m}$, $h=0.635\text{m}$, $E=344750 \text{ kN/m}^2$, $\nu=0.39$ olarak karışık sonlu elemanlar yöntemi ile geliştirilen HYP9 elemanı kullanılarak özölmüştür.

A-C boyunca düşey yerdeğiştirme değişimi şekil 5.17 de, M_x değişim şekil 5.18 de verilmektedir.



şekil 5.17 Hiperbolik Paraboloid Kabuğun A-C Doğrultusu Boyunca w Yer Değiştirme Eğrisi

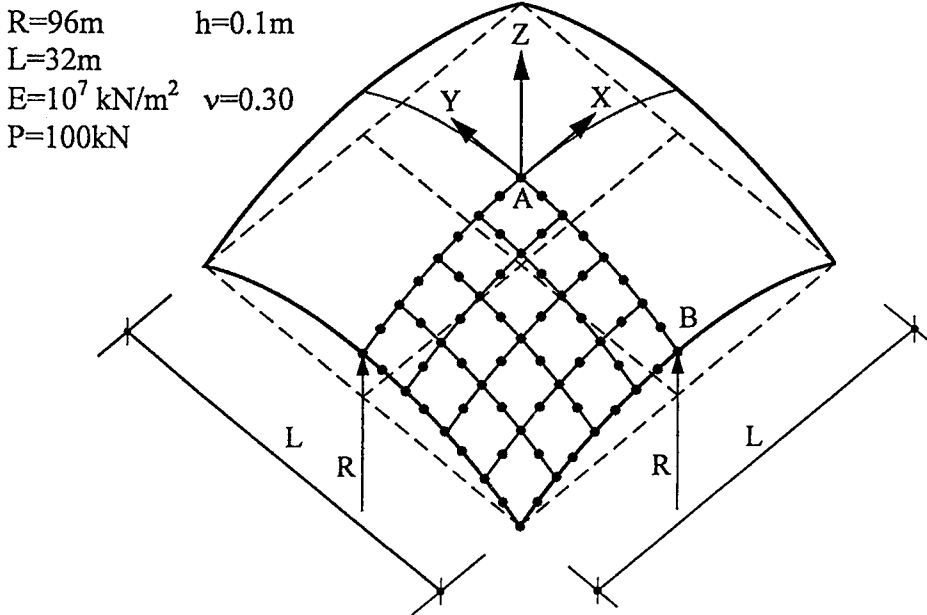


Şekil 5.18 Hiperbolik Paraboloid Kabuğun A-C Doğrultusu Boyunca M_x Değişimi

Karşılaştırma sonucu diğer çalışmalardaki çözümler ile uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmektedir.

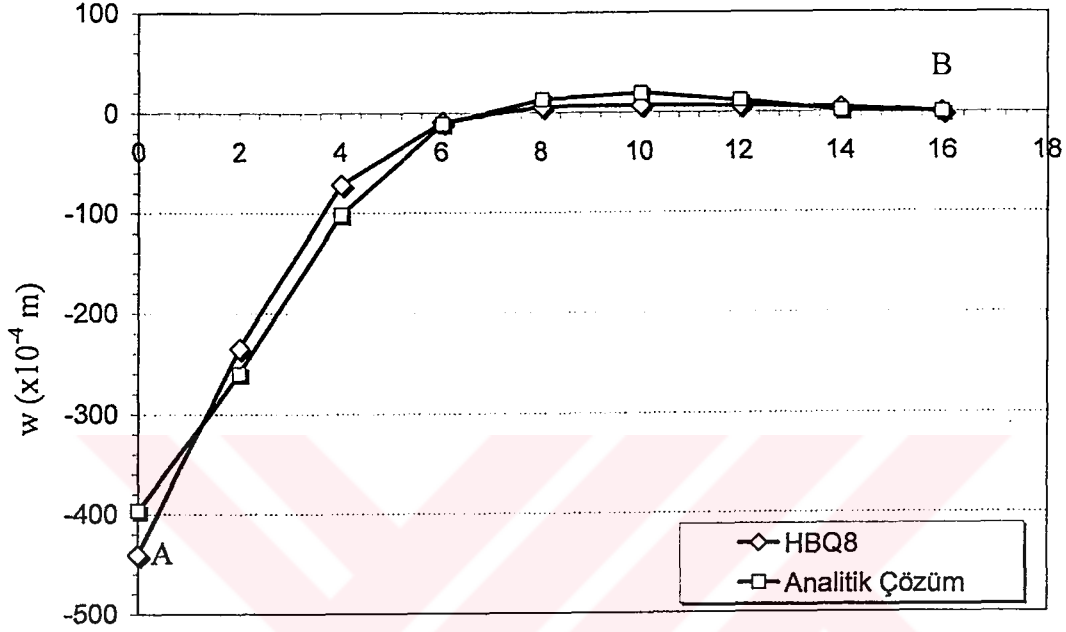
5.9 Örnek 9 Basit Mesnetli Eliptik Paraboloid Kabuk

Geliştirilen sonlu eleman kullanılarak Şekil 5.19'da gösterilen, boyutları $R=96m$, $h=0.1m$, $L=32m$, malzeme özellikleri $E=10^7 kN/m^2$, $\nu=0.30$ olan, merkezinde $P=100kN$ tekil yük etkisinde eliptik paraboloid kabuğun çözümü yapılmıştır.

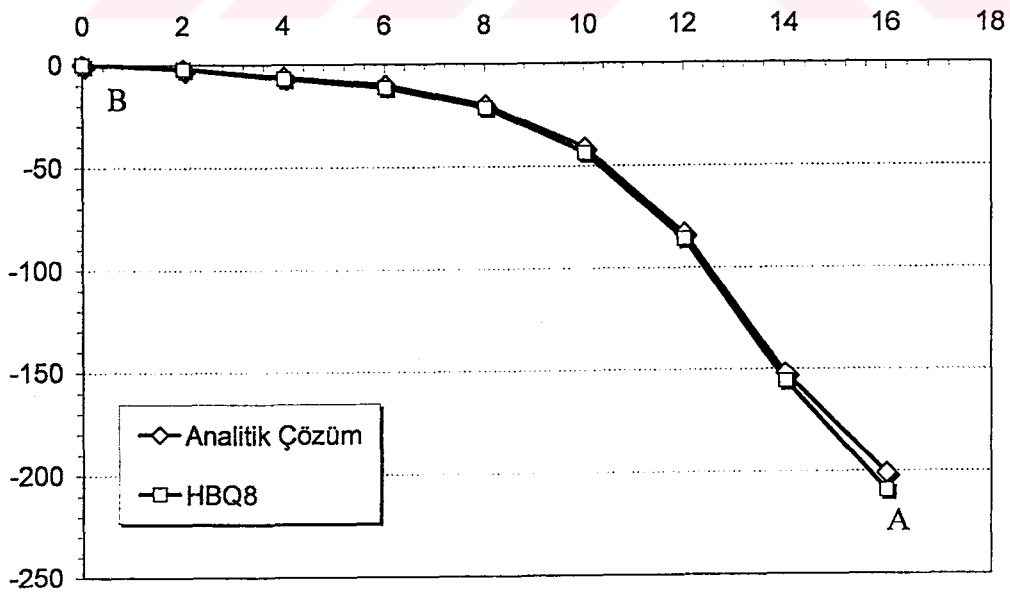


Şekil 5.19 Eliptik Paraboloid Kabuk

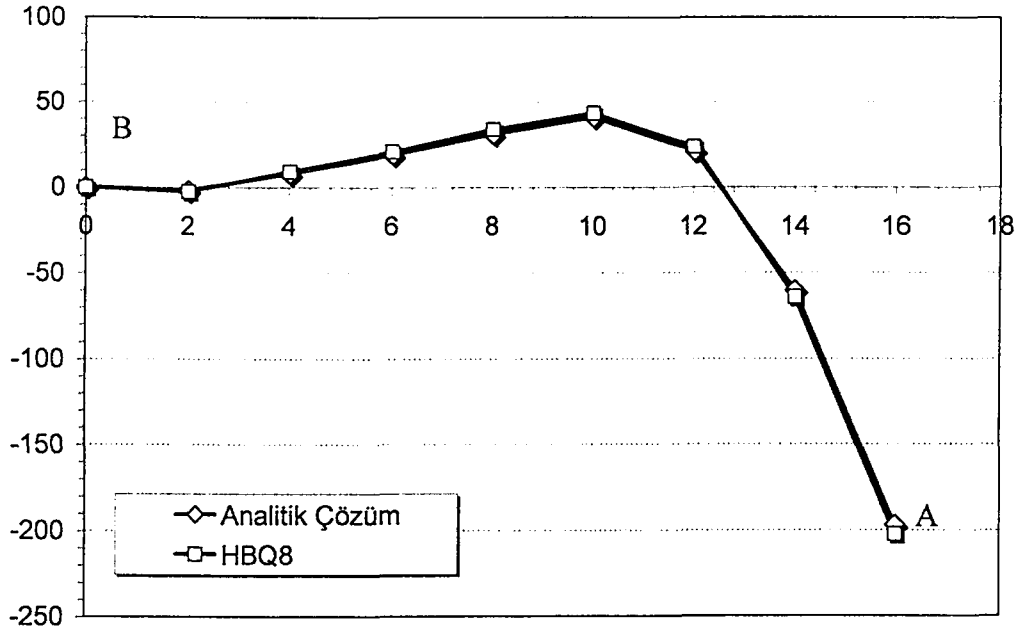
Bütün kenarları basit mesnetli olan eliptik paraboloid kabuğun simetriden dolayı 1/4 parçası alınarak hesap modeli oluşturulmuştur. Hesap modelinin 8x8 elemandan oluştuğu durumda elde edilen çeşitli büyüklükler [49]'da verilen seriler yardımı ile bulunan analitik çözüm ile karşılaştırmalı olarak aşağıda verilmektedir.



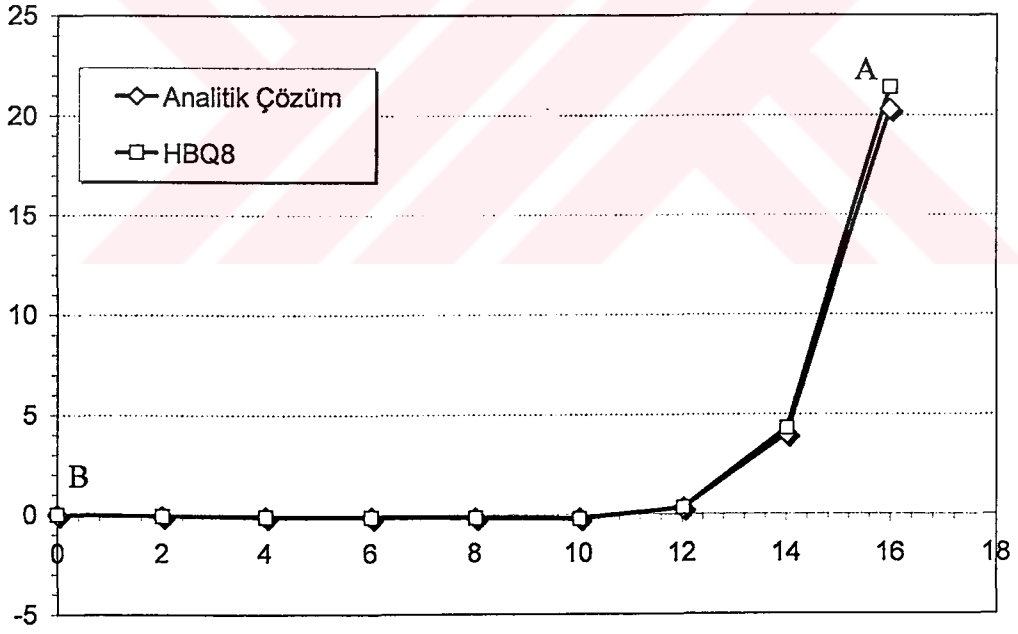
Şekil 5.20 Eliptik Paraboloid Kabuk için AB Boyunca w Yer Değiştirmesi Dağılımı



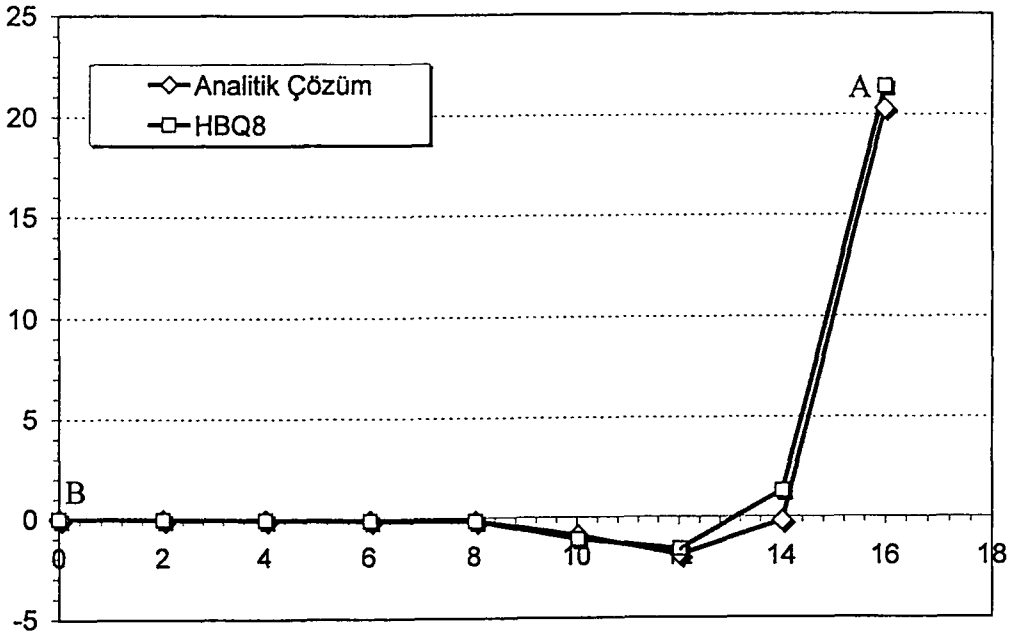
Şekil 5.21 Eliptik Paraboloid Kabuk için AB Boyunca N_x Dağılımı



Şekil5.22 Eliptik Paraboloid Kabuk için AB Boyunca N_y Dağılımı



Şekil5.23 Eliptik Paraboloid Kabuk için AB Boyunca M_x Dağılımı



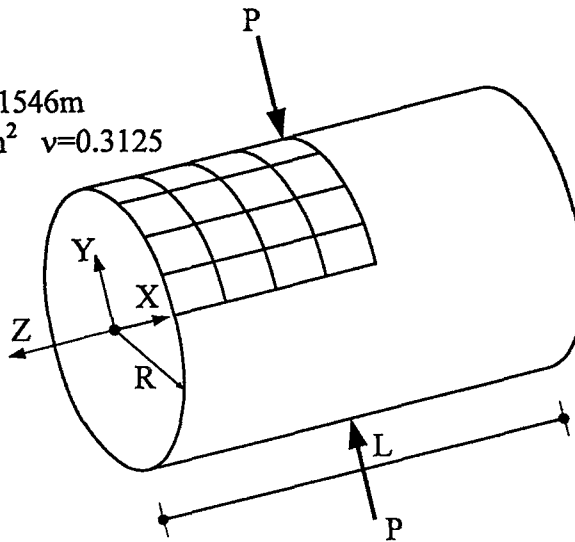
Şekil 5.24 Eliptik Paraboloid Kabuk için AB Boyunca M_y Dağılımı

Karşılaştırma sonucu analitik çözüm ile uyumlu değerler elde edilmiş ve bağıl farklar A noktası için hesaplandığında M_y bağıl farkı %1.2, M_x bağıl farkı %1.1, N_y bağıl farkı %2.7 ve N_x bağıl farkı %3.9 olarak bulunmuştur.

5. 10 Örnek 10 Silindirik Kabuk

Boyutları ve malzeme özellikleri Şekil 5.25’de verilen karşılıklı tekil yük etkisindeki iki ucu boşta silindirik kabuk farklı eleman sayıları için modellenip, çözümü yapılmıştır. Simetriden yararlanarak sistemin 1/8’i modellenmiştir.

$$\begin{aligned}
 P &= 0.025 \text{ kN} \\
 R &= 4.953 \text{ m,} \\
 L &= 10.35 \text{ m, } h = 0.01546 \text{ m} \\
 E &= 10.5 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad \nu = 0.3125
 \end{aligned}$$



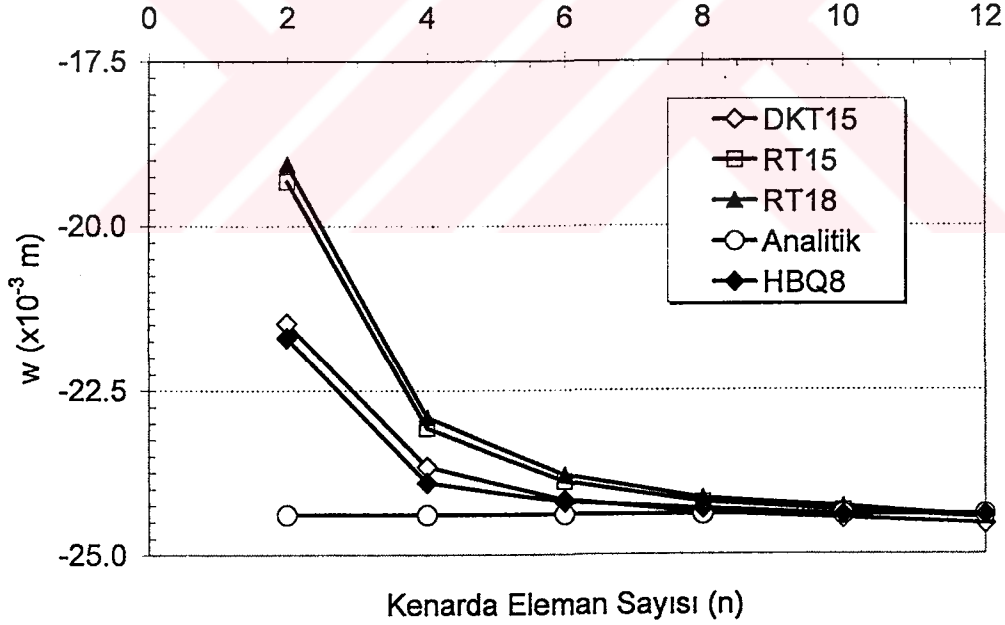
Şekil 5.25 Silindirik Kabuk

Kalınlığı 0.01546m olan ince silindir kabuk için yarıçap doğrultusundaki kesin değer [50] de $w=-0.02439m$ olarak verilmektedir. Farklı sonlu eleman ağları için elde edilen sonuçlar diğer çalışmalar ile karşılaştırmalı olarak Tablo 5.10 ve Şekil 5.26 da verilmektedir.

Sonuçların karşılaştırıldığı RTS15 ve RTS18 [50] elemanları iyileştirilmiş üçgen kabuk eleman, DKT15, ince plak ve CST membran elemanların birleştirilmesi ile elde edilen kabuk elemanlardır.

Tablo 5.10 Serbest uçlu silindirde farklı sonlu eleman ağları için yükün etkidiği noktadaki çökme değerleri

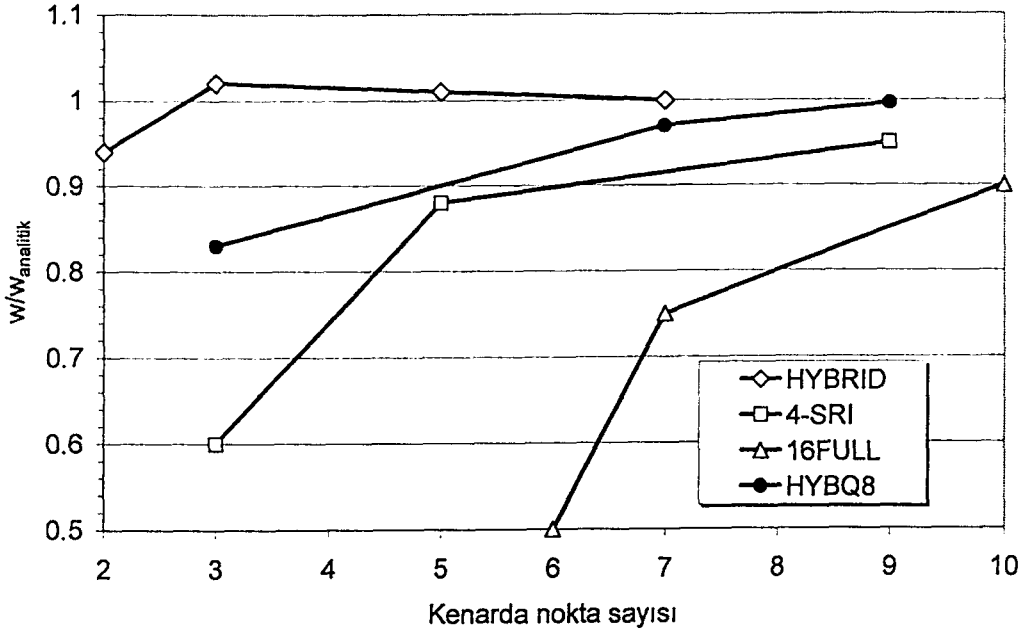
Eleman	2x2	4x4	6x6	8x8	10x10	12x12
DKT15	-0.021479	-0.023657	-0.024167	-0.024373	-0.024456	-0.024539
RTS15	-0.019325	-0.023072	-0.023892	-0.024206	-0.024336	-0.024452
RTS18	-0.019066	-0.022908	-0.023792	-0.024141	-0.024278	-0.024432
HBQ8	-0.021703	-0.023913	-0.024207	-0.024312	-0.024407	-0.024405



Şekil 5.26 Serbest uçlu silindirde farklı sonlu eleman ağları için yükün etkidiği noktadaki çökme değerleri karşılaştırması

HBQ8 elemanı, karşılaştırmada esas alınan değere daha yakın sonuçlar üretmektedir.

Geliştirilen eleman ile [32] verilen elemanların karşılaştırması ise Şekil 5.27 de verilmektedir.



Şekil 5.27 Serbest uçlu silindirde farklı sonlu eleman ağları için yükün etkidiği noktadaki çökme değerleri karşılaştırması

HYBRID elemanı 4 noktalı 20 serbestlik dereceli hibrid sonlu eleman, 4-SRI elemanı 4 noktalı 20 serbestlik dereceli yer değiştirme esaslı azaltılmış integrasyon adımı yönteminin kullanıldığı bir sonlu eleman, 16FULL ise 16 noktalı 80 serbestlik dereceli yer değiştirme esaslı bir sonlu elemandır. HYBRID elemanı HBQ8 elemanına göre daha hızlı bir yakınsama göstermektedir. Bunun nedeni HYBRID elemanında kabuk geometrisinin tanımlanmasında eğriliklerin kullanılmasıdır.

6. SONUÇLAR

Çalışmada genel biçimli kabuk sistemlerin çözümü için gerilme seçimli bir hibrid dörtgen sonlu eleman geliştirilmiştir. Kabuk eleman davranışı, plak ve levha eleman davranışlarının birleştirilmesi ile elde edilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman kullanılarak çeşitli sayısal örnekler çözülmüş ve aşağıda verilen sonuçlar elde edilmiştir

- Çözülen örneklerden elde edilen sonuçlar, literatürdeki diğer çalışmalar ve analitik çözümler ile uyum içindedir ve mühendislik uygulamaları için yeterli yaklaşıma sahiptir.
- Eleman kalınlık/açıklık oranının çok küçük olması durumunda bile sonuçlar analitik çözüm ile elde edilen sonuçlara yaklaşabilmekte, kayma kilitlenmesi ortaya çıkmamaktadır.
- Sistemin çözümü için oluşturulan sonlu eleman ağının düzgün olmaması, sonuçları diğer çalışmalarda elde edilen sonlu elemanlar düzeyinde etkilemekte ve uygun sonuçlar elde edilebilmektedir..
- Gerilme seçimli hibrid sonlu eleman yönteminde eleman rijitlik matrisinin oluşturulması sırasında, yerdeğiştirme esaslı sonlu elemanlara göre daha fazla işlem gerekiyorsa da benzer elemanların kullanılması durumunda eleman rijitlik matrisinin bir kez elde edilmesi yeterli olmakta ve yine benzer elemanların kullanıldığı yerdeğiştirme esaslı sonlu elemanlar ile aynı çözüm süresine ulaşılabilmektedir. Ayrıca kayma kilitlenmesinin ortaya çıkmaması ve daha iyi sayısal yaklaşıklığın sağlanması hibrid elemanın bu sakıncasını karşılar niteliktedir.
- Hibrid Sonlu Eleman Yöntemi kullanılarak elde edilen eleman, bilinmeyenler olarak yerdeğiştirme esaslı olanlarla aynı olduğundan bu tür elemanlarla beraber kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Argyris, J. H., 1966. Matrix displacement analysis of plates and shells, *Ingenieur-Archiv*, XXXV, pp. 102-142.
- [2] Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y. K., 1967. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., London.
- [3] Clough R. W., Johnson C. P., 1968. A finite element approximation for the analysis of thin shells. *Internationa. Journal of Solids Structures*, 4, 43-60.
- [4] Meek J. L. , Tan H. S., 1986. A faceted shell element with loof nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23, 49-67.
- [5] Carpenter N, Stolarski H, Belytschko T., 1985. A flat triangular shell element with improved membrane interpolation. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1, 161-168.
- [6] Zienkiewicz, O. C., Too, J., Taylor, R. C., 1971. Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ,3, 275-290.
- [7] Cook R D., 1993. Further development of a three-node triangular shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1413-1425.
- [8] Onate E, Zarate F, Flores F., 1994. A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 2565-2582.
- [9] Ibrahimbegovic A, Wilson EL., 1991. A unified formulation for triangular and quadrilateral flat shell finite elements with drilling degrees of freedom. *Communications in Applied Numerical Methods*, 7, 1-9.

- [10]Chinosi C., 1995. Shell elements as a coupling of plate and drill elements. *Computers and Structures*, 57(5),893-902.
- [11]Cook R. D., 1994. Four-node flat shell element: drilling degrees of freedom, membrane-bending coupling, warped geometry, and behavior. *Computers and Structures*, 50 (4), 549-555.
- [12]Aminpour M. A., 1992. Assumed-stress hybrid 4-Node shell element with drilling degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 19-33.
- [13]Kumbasar N., Aksu T., 1995. A finite element formulation for moderately thick shells of general shape. *Computers and Structure*, 54, 1, 49-57.
- [14]Omurtag M. H., Akoz A. Y., 1993. A compatible cylindrical shell element for stiffened cylindrical shells in mixed Finite element formulation. *Computers and Structures*; 49 (2), 363-370.
- [15]Omurtag M. H., Akoz A. Y., 1992. Mixed finite element formulation of eccentrically stiffened cylindrical shells. *Computers and Structures*, 42 (5), 751-768.
- [16]Omurtag M. H., Akoz A. Y., 1994. Hyperbolic parabolic shell analysis via mixed finite element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 3037-3056.
- [17]Chen W. M., Tsai P., 1984. The combined use of axisymmetric and solid elements for three dimensional stress analysis, *Computers and Structures*.,18 (4), 689-694.
- [18]Kim YY, Kim JG., 1996. A simple and efficient mixed finite element for axisymmetric shell analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39,1903-1914.
- [19]Liu S. A., 1989. Finite element analysis procedure using simple quadrilateral plate/shell elements, *Computers and Structures*, 32 (5), 937-944.
- [20]Hueck U., Wriggers P., 1996. A formulation for the 4-node quadrilateral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 3007-3037.

- [21]Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C., 1970. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, 419-451.
- [22]Saygun, A., 1974. Yüzeysel taşıyıcı sistemlerin hesabı için sonlu elemanlar, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [23]Altan, M., 1981. Kalın silindirik kabukların çözümü için üç boyutlu bir sonlu eleman ve uygulamaları, *Doktora Tezi*, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [24]Kara, N. 1997. Genel Biçimli kalın kabuklar için üç boyutlu bir sonlu eleman, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [25]Pian, T. H. H., 1964. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 2 (7), 1333-1336.
- [26]Cook, R. D., 1972. Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5, 277-288.
- [27]Cook R. D., 1987. A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 (8), 1499-1508.
- [28]Rengarajan G., Aminpour M. A., Knight N. F., 1995. Improved assumed-stress hybrid shell element with drilling degrees of freedom for linear stress, buckling and free vibration analyses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1917-1943.
- [29]Yunus, H., Saigal, S., Cook, R. D., 1989. On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28, 785-800.
- [30]Cheung YK, Chen W., 1990. Generalized hybrid degenerated elements for planes and shells. *Computers and Structures*, 36 (2), 279-290.
- [31]Sze K. Y., Sim Y. S., Soh A. K., 1997. A hybrid stress quadrilateral shell element with full rotational D.O.F.S., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1785-1800.

- [32] Kang D. S., Pian T. H. H., 1988. A 20-DOF hybrid stress general shell element, *Computers and Structures*, **30** (4), 789-794.
- [33] Allman, D. J., 1988. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**, 717-739.
- [34] Flügge, W., 1973. Stresses in Shells , Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- [35] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., 1989. Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons Inc.
- [36] Timoshenko, S. , Woinowsky-Krieger, S., 1970. Theory of Plates and Shells, Mc Graw Hill, New-York.
- [37] Simo J. C., Fox D. D., Rifai M. S., 1989. On a stress resultant geometrically exact shell model Part II: The Linear Theory, Computational Aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **73**, 53-92.
- [38] Choi , C. K., Lee, T.-Y., Chung, K.Y., 2002. Direct modification for non-conforming elements with drilling DOF, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **55** (12), 1463–1476.
- [39] Choi, C. K., Park, Y. M., 1999. Quadratic NMS Mindlin-plate-bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46** (8), 1273 –1289
- [40] Ibrahimbegovic, A., Taylor, R. L., Wilson, E. L., 1990. A robust quadrilateral membrane element with rotational degrees of freedom, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **30**, 445 –457.
- [41] Iura M., Atluri, S. N., (1992). Formulation of a membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Computational Mechanics*, **9** , 417 –428.
- [42] Wilson E., Habibullah A., 2002. SAP2000, Static and dynamic analysis of structures, Computers & Structures Inc., Berkeley.
- [43] Batoz, J. L., Lardeur, P., 1989. A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 533-560.

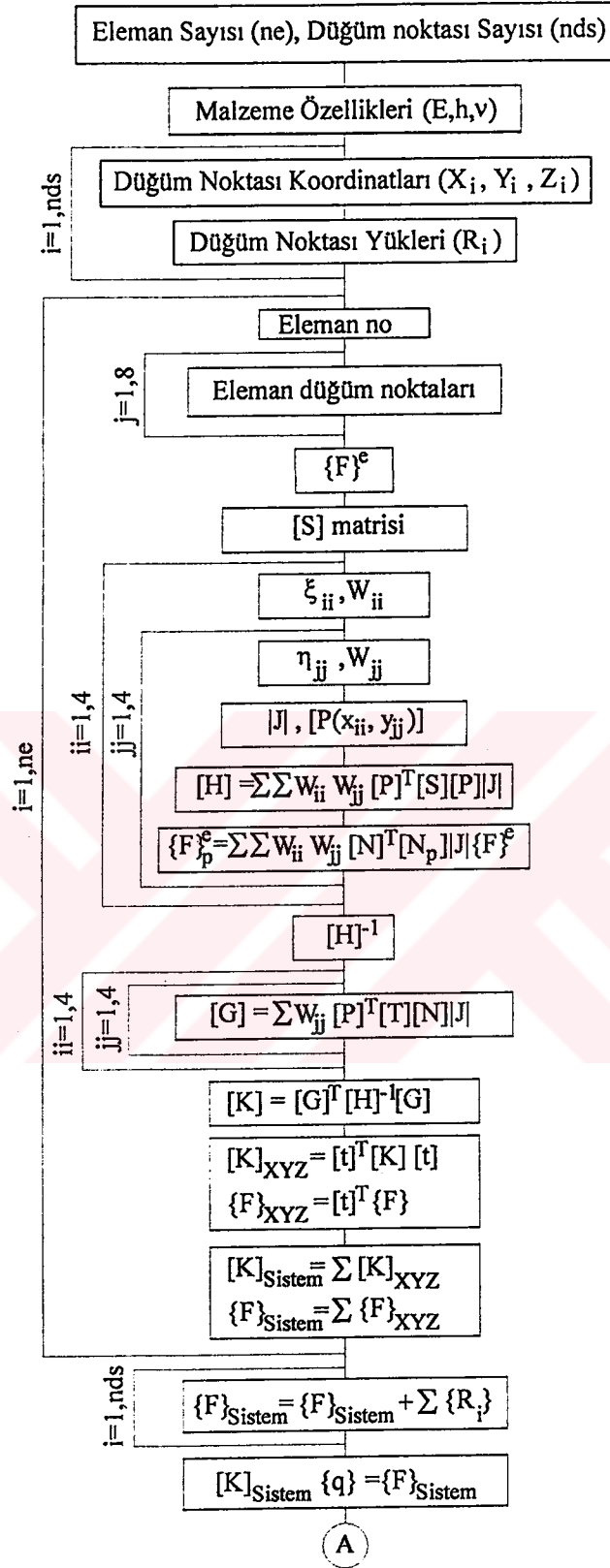
- [44] Bhashyam, G. R., Gallagher, R. H., 1983. A triangular shear flexible finite element for moderately thick laminated composite plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **40**, 309-326.
- [45] Kant, T., Owen D. R. J., Zienkiewicz, O. C., 1982. A refined higher order C^0 -plate bending element, *Computers and Structures*, **15**, 177-183,
- [46] Srinivas, S., Rao, A. K., 1973. Flexure of thick rectangular plates, *Journal of Applied Mechanics ASME*, **40**, 298-299.
- [47] Kabir, H. R. H., 1992. A shear locking free isoparametric three-node triangular finite element for moderately-thick and thin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 503-519.
- [48] Aksu T., 1993. Genel biçimli kabuklar için bir sonlu eleman formülasyonu, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [49] Mohr G. A. , 1981. Application of penalty factors to a doubly curved quadratic shell element, *Computers and Structures*, **14**, 1-2, 15-19.
- [50] Wanji, C., Cheung, Y. K., 1999. "Refined non-conforming triangular elements for analysis of shell structures", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 433- 455

EK-A BİLGİSAYAR PROGRAMI

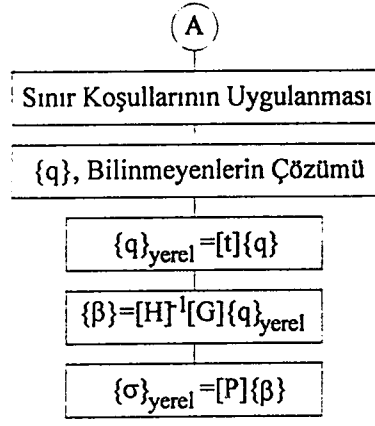
Bu çalışmada, geliştirilen gerilme seçimli hibrid sonlu elemanın sayısal örneklere uygulanabilmesi için C++ programlama dilinde kodlanmış bir program hazırlanmıştır. Bu program yardımı ile genel olarak sonlu elemanlarla idealleştirilmiş herhangi bir yüzeysel taşıyıcı sistemin bölüm 2 ve bölüm 3’de açıklanan varsayımlar ve bağıntılar kullanılarak statik hesabı yapılabilmektedir.

Programın Yapısı ve Çalışma Düzeni

Geliştirilen program kullanılarak yapılan çözümlemede izlenen işlem sırası Şekil A.1 ve Şekil A.2’de akış diyagramı olarak verilmektedir. Şekil A.1’deki akış diyagramında girdi bilgilerinin okunması ve eleman rijitlik matrislerinin oluşturulması ve daha sonra sistemin çözümü için oluşturulan denklem takımının elde edilmesi gösterilmektedir. Şekil A.2 sistemin çözümü ve eleman iç kuvvetlerinin elde edilmesi aşamalarını gösteren akış diyagramıdır.



Şekil A.1 Sistem Çözümü İçin Denklem Takımının Kurulması Akış Diyagramı



Şekil A.2 Sistem Çözümü , Yer Değiştirme ve İç Kuvvetlerin Bulunması Akış Diyagramı

ÖZGEÇMİŞ

Kutlu Darılmaz, 1971 yılında Fethiye'de doğmuştur. Orta öğrenimini İzmir Bornova Anadolu Lisesinde, lisans ve yüksek lisans öğrenimini İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünde tamamlamıştır. İ.T.Ü İnşaat Fakültesi Yapı Anabilim Dalı Betonarme Yapılar Çalışma Grubunda Araştırma Görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmektedir.

