

## ÖNBURULMALI DEĞİŞKEN KESİTLİ ÇUBUKLARDA TİTREŞİM ANALİZİ

Bülent YARDIMOĞLU\* ve Ali KARA

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Makina Mühendisliği Bölümü, Gülbahçe-Urla/İZMİR

### ABSTRACT

In this study, vibration characteristics of rectangular cross-sectioned pretwisted beams of which width and depth variations along the beam are expressed as power of axial coordinate of the beam are investigated. In special cases, the selected taper functions for beam may represent linear variation or constant thickness. Numerical solution of the equations of motion with variable coefficient based on Finite Difference Method is carried out by using a symbolic program developed in Mathematica. The accuracy and numerical precision of the developed program are evaluated by using the results available for special cases in the literature. Good agreement is obtained in the comparisons of the present results with other results given in tabular form. Then, the effects of selected taper parameters regarding width and depth and pretwist angle of the beam on natural frequencies are found. The results are presented in graphical form.

### ÖZET

Bu çalışmada; genişlik ve yüksekliklerinin çubuk boyunca değişimleri, uzunluk koordinatının kuvvetleri cinsinden ifade edilen dikdörtgen kesitli, önburulmalı çubukların titreşim karakteristikleri araştırılmıştır. Çubuk için seçilen kalınlık değişim fonksiyonları özel durumlarda doğrusal değişim ve sabit kalınlık ifade edebilmektedirler. Değişken katsayılı hareket denklemlerinin SFM (Sonlu Farklar Metodu) ile sayısal çözümleri, Mathematica’da geliştirilen sembolik program ile yapılmıştır. Geliştirilen programın doğruluğu ve sayısal çözüm hassasiyeti, özel durumlar için literatürde mevcut sonuçlar kullanılarak belirlenmiştir. Tablolar halinde verilen sonuçların karşılaştırmalarında iyi bir uyum elde edilmiştir. Daha sonra, çubuk kesit değişimi ile ilgili seçilen genişlik ve yükseklik parametreleri ile önburulma açısının doğal frekanslara etkileri bulunmuş ve sonuçlar grafikler halinde verilmiştir.

---

\* e-posta: bulentyardimoglu@iyte.edu.tr

## 1.GİRİŞ

Önburulmalı çubuklar, çeşitli sebeplerden dolayı, mekanik sistemlerde veya yapılarda bulunabilirler. Örneğin; türbin kanatları, pervaneler ve matkap uçlarında işlevsel geometrik zorunluluk söz konusu iken, elastikiyet özelliklerinin değiştirilmesinin istenildiği önburulmalı çubuk uygulamalarına da bazı yapılarda rastlanılmaktadır. Önburulmalı çubukların enine kesitleri de doğal olarak, mekanik ve işlevsel geometrik şartlara göre belirlenmektedir. Enine kesitin şekli ve yük durumuna göre ortaya çıkan problemin ele alınmasında çeşitli mühendislik kabulleri de kaçınılmaz olmaktadır.

Dikdörtgen kesitli ve önburulmalı çubuklarda, çarpım alan atalet momentinden dolayı, yanal yerdeğistirmeler ile ilgili iki adet diferansiyel denklem bağlaşıktır. Ayrıca, önburulma ve değişken kesit nedeniyle, çubuk kesitinin alan atalet momentleri uzunluk boyunca değışkendir. Dolayısıyla, söz konusu bağlaşıktan iki adet diferansiyel denklem değışken katsayılı olup, sürekli ortamda özdeğer problemini ifade etmektedirler. Belirtilen özdeğer probleminin tam çözümü, katsayılar fonksiyonlarına bağlı olmak kaydı ile çok özel haller dışında genellikle yoktur. Dolayısıyla, sayısal yöntemler ile özdeğerlerin araştırılması yapılır.

Carnegie [1] dönen türbin kanatlarının yanal titreşimlerinin hareket denklemlerini Hartog [2] tarafından verilen Genişletilmiş Holzer Yöntemi ile türetmiştir. Dokumacı ve arkadaşları [3] sabit dikdörtgen kesitli ve önburulmalı çubukların bağlaşıktan eğilme titreşimlerini farklı kesit oranları ve burulma açıları için Matris Yerdeğistirme Metodu ile araştırmışlardır. Dawson ve Carnegie [4] farklı kesit oranlarındaki dikdörtgen kesitli önburulmalı çubukların titreşim biçimleri olarak bilinen özfonksiyonlarını Runge-Kutta yöntemi ile elde etmişler ve sayısal sonuçlarını çalışma kapsamında yaptıkları deney sonuçları ile doğrulamışlardır. Carnegie ve Thomas [5] sabit kesitli, sadece genişliği doğrusal olarak değışen ve hem genişliği hem de yüksekliği doğrusal olarak değışen dikdörtgen kesitli ve önburulmalı çubukların bağlaşıktan eğilme titreşimlerini SFM ile incelemişler ve sayısal sonuçlarını düz çubuğun temel frekansına oranlayıp, tablo ve grafikler halinde vermişlerdir. Rao ve Carnegie [6], Carnegie[1]'nin elde ettiği denklemleri sayısal bir örnekte uygulayarak, dönen önburulmalı dikdörtgen kesitli çubukların doğal frekanslarını ve titreşim biçimlerini elde etmişlerdir. Yardımoğlu [7] genişlik ve yükseklikleri uzunluğun doğrusal olmayan fonksiyonları şeklinde değışen, dikdörtgen kesitli, önburulmalı kalın çubukların dinamik stabilitelerini; geliştirdiği yeni bir sonlu eleman kullanımı ile incelemiştir. Geliştirilen bu sonlu elemanın yerdeğistirme fonksiyonları, sabit kesitli burulmuş çubuğun statik denge denklemleri kullanılarak türetilmiştir. Banerjee [8] önburulmalı çubukların titreşimlerini incelemede Dinamik Direngenlik Metodu'nu kullanmıştır. Yardımoğlu ve Yıldırım [9], Yardımoğlu [7]'nin çalışmasında geliştirdiği sonlu eleman yerdeğistirme fonksiyonlarını, daha genel hal olan değışken katsayılı statik denge denklemlerinin çözümüne göre genelleştirerek, önburulmalı kalın çubukların titreşimlerini incelemişlerdir.

Bu çalışmada; değışken dikdörtgen kesitli, önburulmalı çubukların titreşim karakteristikleri, kesit değışim parametrelerine göre araştırılmıştır. Çubuk enine kesitinin genişlik ve yüksekliğinin, uzunluk boyunca değışim fonksiyonları, uzunluk koordinatının kuvvetleri cinsinden ifade edilmişlerdir. Bu fonksiyonlar; genel durumda sırasıyla genişlik ve yükseklik için, uzunluğun  $q$ . ve  $r$ . kuvvetlerinden fonksiyonları olup, kuvvet parametrelerinin seçimine bağlı olarak, özel durumlarda doğrusal değışime veya sabit değere sahip olabilmektedirler. Bu

araştırmada, SFM kullanılarak Mathematica [12]'da geliştirilen sembolik program ile özdeğerlere ulaşılmıştır. İlk adım olarak; geliştirilen programın doğruluğu ve hassasiyeti, çubuk kesiti ile ilgili özel durumlar için literatürde mevcut özdeğerler ile karşılaştırmalar yapılarak denenmiş ve uyum gözlenmiştir. Daha sonra, kesit değişimi ile ilgili seçilen genişlik ve yükseklik parametreleri ile önburulma açısının özdeğerlere etkileri belirlenmiştir.

## 2. HAREKET DENKLEMLERİ

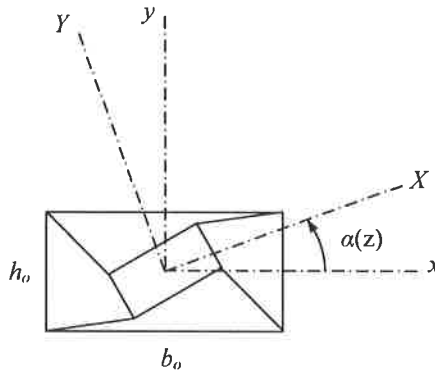
Şekil 1 de eksen takımları gösterilen dikdörtgen kesitli-kesiti değişken burulmuş çubuk gözönüne alınsın. Bu çubuğun genişlik ve yükseklik değişimleri için aşağıdaki fonksiyonlar seçilmiştir:

$$b(z) = b_0 + m_b z^q \quad (1)$$

$$h(z) = h_0 + m_h z^r \quad (2)$$

Bu çalışmada kullanılan gösterimler, bildiri sonunda listelenmiştir. Kesit değişimi için seçilen  $E(1, 2)$  de  $q$  ve  $r$  parametreleri 1 alındığında, doğrusal kesit değişimli çubuk modellenmiş olur. Ayrıca,  $m_b$  ve  $m_h$  katsayıları 0 alındığında ise, sabit kesitli çubuk durumuna indirgenebileceği açıktır. Şekil 1 de gösterilen çubukdaki burulma açısının değişimi aşağıda ifade edildiği gibi doğrusal değişimli olarak gözönüne alınmıştır:

$$\alpha(z) = a z / L \quad (3)$$



Şekil 1: Değişken kesitli burulmuş çubuk için eksen takımı

Dikdörtgen kesitli önburulmalı çubukların hareket denklemleri Dawson ve Carnegie [4] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI_{xx}(z) \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + EI_{xy}(z) \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \right] = \rho A(z) \omega^2 v \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI_{xy}(z) \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + EI_{yy}(z) \left( \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \right] = \rho A(z) \omega^2 u \quad (5)$$

burada

$$I_{xx}(z) = I_{yy}(z) \sin^2 \alpha(z) + I_{xx}(z) \cos^2 \alpha(z) \quad (6)$$

$$I_{yy}(z) = I_{yy}(z) \cos^2 \alpha(z) + I_{xx}(z) \sin^2 \alpha(z) \quad (7)$$

$$I_{xy}(z) = 0.5 (I_{yy} - I_{xx}) \sin 2\alpha(z) \quad (8)$$

Bu denklemlerde, E(1, 2)' nin gözönüne alınması ile, çalışmadaki hareket denklemlerine ulaşılmıştır. Sayısal uygulama bölümü için seçilen sabit-serbest sınır koşulundaki önburulmalı çubuğun sınır koşulları şöyledir:

$$u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0 \quad (9)$$

$$u''(L) = v''(L) = u'''(L) = v'''(L) = 0 \quad (10)$$

E(9, 10) daki üsler  $z$ 'ye göre türevi göstermektedirler.

### 3. HAREKET DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Boysuz frekans parametresi  $\lambda$  nın eldesi için E(4, 5) deki her terim  $A_0 L^4 / (A(z) E I_{xx0})$  ile çarpılıp, belirtilen denklemlerden görülebilecek  $L_1$ ,  $L_2$  ve  $L_3$  diferansiyel operatörlerinin kullanımı ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L_1[v] + L_2[u] - \lambda v = 0 \quad (11)$$

$$L_2[v] + L_3[u] - \lambda u = 0 \quad (12)$$

E(11, 12) deki ifadeler, SFM [11]'nin Merkezi Fark ifadeleri ile sürekli ortamdan ayrık ortama dönüştürülerek, aşağıdaki matris özdeğer problemi elde edilir:

$$[D] \{d\} - \lambda \{d\} = 0 \quad (13)$$

E(13), Mathematica [12]'da geliştirilen sembolik esaslı program ile çözülerek, aranan özdeğerlere ulaşılmıştır. Karşılaştırmalarda, Richardson dışdeğer (extrapolasyon) hesabı [11] ile çözüm hatası, ilgili kaynaklarda olduğu gibi 2. mertebeden 6. mertebeye düşürülmüştür.

#### 4. BİLGİSAYAR PROGRAMININ DOĞRULANMASI

Geliştirilen bilgisayar programının özel durumlar için doğruluğunu ve çözüm hassasiyetini kontrol etmek amacıyla, Carnegie ve Thomas [5]'in çalışmasında verilen değerlere ulaşılmış ve sonuçlar Tablo 1 ve 2 de verilmiştir. Tablolardan görüldüğü gibi, geliştirilen bilgisayar programının sonuçları diğerleri ile uyum içindedir.

Tablo 1: Sabit kesitli önburulmalı çubukda  $\lambda/\lambda_o$  karşılaştırmaları (  $b_o/h_o = 2, \alpha = 60^\circ$  )

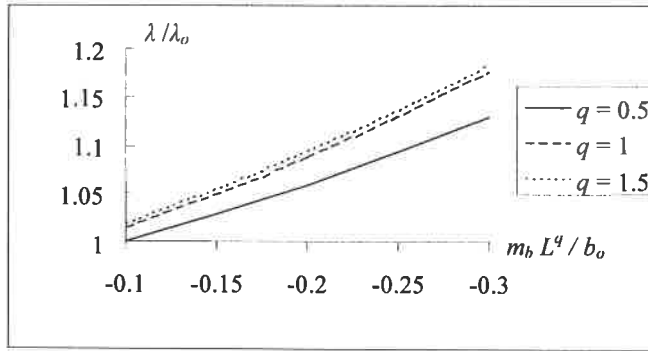
| TB | Bu çalışma sonuçları |          |          |          | Carnegie ve Thomas [5]'in sonuçları |          |          |          |
|----|----------------------|----------|----------|----------|-------------------------------------|----------|----------|----------|
|    | $n = 10$             | $n = 15$ | $n = 20$ | dışdeğer | $n = 10$                            | $n = 15$ | $n = 20$ | dışdeğer |
| 1. | 1.0217               | 1.0203   | 1.0199   | 1.0194   | 1.0215                              | 1.0199   | 1.0192   | 1.0182   |
| 2. | 3.4690               | 3.5938   | 3.6385   | 3.6969   | 3.4682                              | 3.5931   | 3.6375   | 3.6951   |
| 3. | 40.6383              | 42.2400  | 42.8206  | 43.5822  | 40.6292                             | 42.2308  | 42.8097  | 43.5680  |

Tablo 2: Sabit kesitli önburulmalı çubukda  $\lambda/\lambda_o$  karşılaştırmaları ( $b_o/h_o = 2$  )

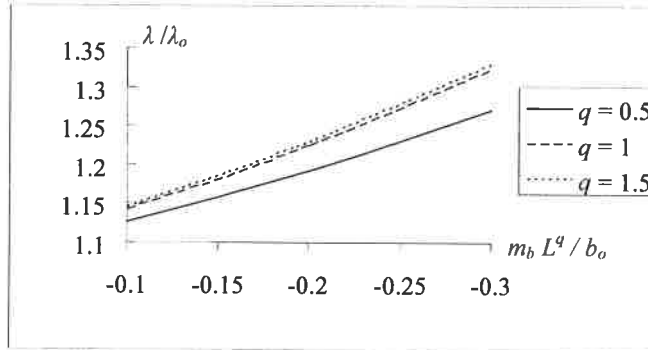
| TB | Burulma açısı $\alpha$ | Bu çalışmada dışdeğerle bulunan | [5] de dışdeğerle bulunan | Matris yerdeğiştirme metodu ile bulunan [3] |
|----|------------------------|---------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------|
| 1  | 30°                    | 1.0051                          | 1.0059                    | 1.0048                                      |
|    | 60°                    | 1.0194                          | 1.0182                    | 1.0188                                      |
|    | 90°                    | 1.0428                          | 1.0425                    | 1.0426                                      |
| 2  | 30°                    | 3.9177                          | 3.9166                    | 3.9164                                      |
|    | 60°                    | 3.6969                          | 3.6951                    | 3.6952                                      |
|    | 90°                    | 3.4026                          | 3.4020                    | 3.4029                                      |
| 3  | 30°                    | 40.3733                         | 40.3667                   | 40.3783                                     |
|    | 60°                    | 43.5822                         | 43.5680                   | 43.5969                                     |
|    | 90°                    | 48.6833                         | 48.6700                   | 48.6562                                     |
| 4  | 30°                    | 148.8765                        | 148.8397                  | 149.0010                                    |
|    | 60°                    | 131.4311                        | 131.4005                  | 131.7559                                    |
|    | 90°                    | 113.4977                        | 113.4711                  | 113.9748                                    |

#### 5. SAYISAL UYGULAMALAR VE TARTIŞMA

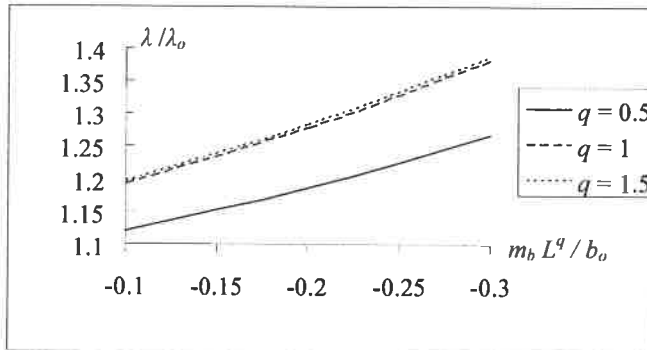
Genişlik ve yüksekliği doğrusal ve eğrisel olarak değişen, 60° önburulmalı çubuklardaki parametreler şöyle seçilmiştir;  $q$  ve  $r$  : {0.5, 1, 1.5},  $m_b L^q/b_o$  ve  $m_h L^r/h_o$  : {-0.1, -0.2, -0.3}. Bu değerlerin oluşturduğu çubukların boyutsuz doğal frekans oranları  $\lambda/\lambda_o$ ,  $n=100$  aralık kullanılarak bulunmuş ve sonuçlar Şekil 2-9 deki grafiklerde verilmiştir.



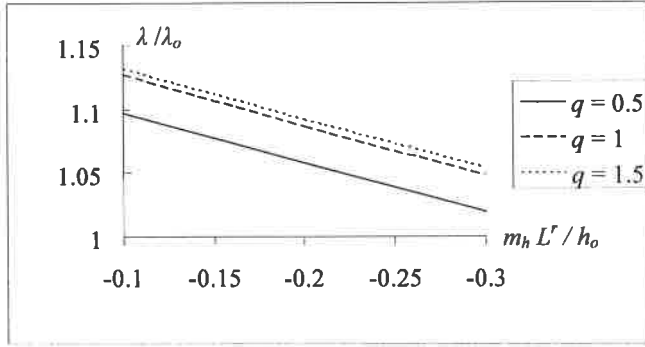
Şekil 2:  $r = 0.5$  ve  $m_h L^r / h_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



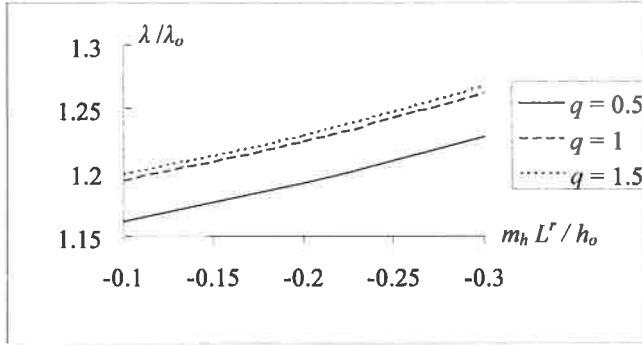
Şekil 3:  $r = 1$  ve  $m_h L^r / h_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



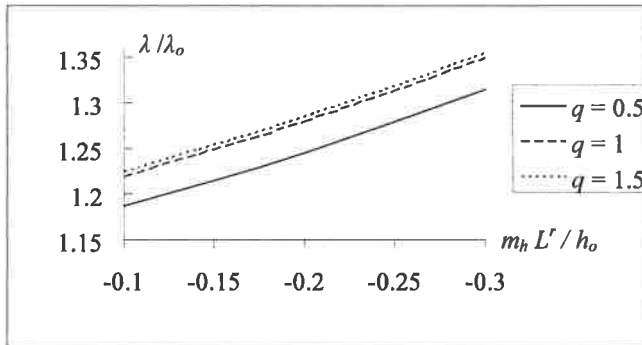
Şekil 4:  $r = 1.5$  ve  $m_h L^r / h_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



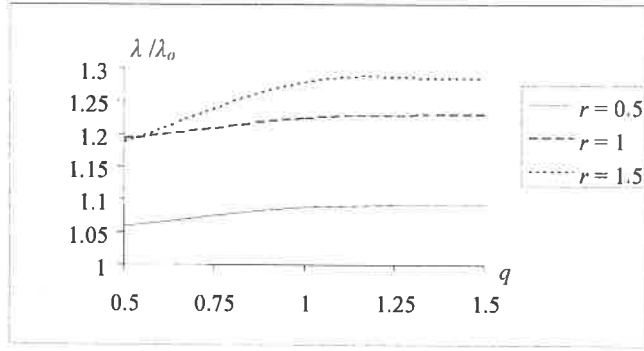
Şekil 5:  $r = 0.5$  ve  $m_b L^q / b_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



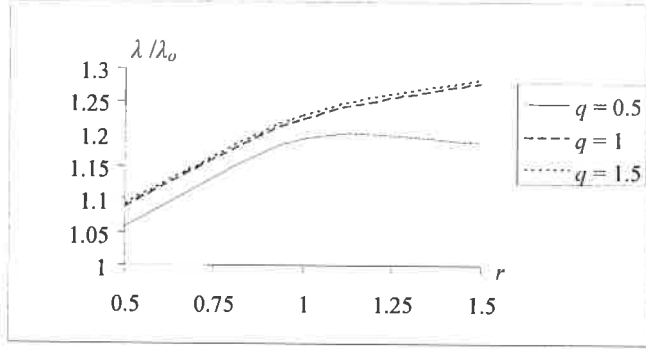
Şekil 6:  $r = 1$  ve  $m_b L^q / b_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



Şekil 7:  $r = 1.5$  ve  $m_b L^q / b_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



Şekil 8:  $m_h L^r / h_o = -0.2$  ve  $m_h L^q / b_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri



Şekil 9:  $m_h L^r / h_o = -0.2$  ve  $m_h L^q / b_o = -0.2$  için diğer kesit değişim parametrelerinin temel  $\lambda / \lambda_o$  a etkileri

Şekil 2-4 deki grafiklerden de görüleceği gibi,  $r = \{0.5, 1, 1.5\}$  ve  $m_h L^r / h_o = -0.2$  için,  $q$  veya  $m_h L^q / b_o$  değerleri arttıkça boyutsuz temel doğal frekans parametresi oranları  $\lambda / \lambda_o$  da artmaktadır.

Şekil 5 de ise  $r = 0.5$  ve  $m_h L^q / b_o = -0.2$  için  $\lambda / \lambda_o$ , oranı,  $q$  arttıkça artmakta fakat,  $m_h L^r / h_o$  arttıkça azalmaktadır. Şekil 6-7 de, Şekil 2-4 deki grafiklere benzer değişimler gözlenmekte olup,  $r = \{1, 1.5\}$  ve  $m_h L^q / b_o = -0.2$  için,  $q$  veya  $m_h L^r / h_o$  değerleri arttıkça boyutsuz temel doğal frekans parametresi oranları  $\lambda / \lambda_o$  da artmaktadır.

Diğer taraftan,  $q$  ve  $r$  parametrelerinin  $\lambda / \lambda_o$  a etkilerini aynı grafik üzerinde görmek için, Şekil 8 ve 9 oluşturulmuştur. Şekil 8 den  $q=1$  ve  $q=1.5$  için  $\lambda / \lambda_o$  değerinde ciddi bir değişim olmadığı görülmektedir. Şekil 9 da  $q=0.5$  için gösterilen  $\lambda / \lambda_o$  eğrisi,  $r$  ye göre önce artmakta daha sonra ise azalmaktadır.

Verilen tüm grafiklerdeki  $q=1$  ve  $q=1.5$  için elde edilen sonuçlar,  $q=0.5$  ve  $q=1$  arasındaki farka göre birbirlerine daha yakındır.



## 6. SONUÇLAR

Değişken kesitli önburulmalı çubuklarda, kesişimi çubuk eksenini olan iki dik düzlemdeki eğilme titreşimleri birbirleri ile bağlaşık olup, hareket denklemleri değişken katsayılı iki diferansiyel denklemdir. Bu denklemlerin sayısal çözümünde SFM kullanılabilir. Bu çalışmada seçilen kesit değişim fonksiyonuna göre SFM kullanılarak geliştirilen Mathematica programının doğruluğunu denemek için kullanılan karşılaştırmalarda aralık sayıları ilgili kaynaklardaki gibi seçilmiştir. Çalışmadaki değişken kesitli çubuk örneklerinde ise, sonuçları grafiklerde göstermek üzere aralık sayısı belirlemede “aralıktan bağımsızlık testi” ile  $n=100$  değeri bulunmuştur. Çubuk kesitinin değişimini etkileyen genişlik ve yükseklik katsayıları ile parametrelerinin boyutsuz temel doğal frekans oranlarına etkileri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlarda: boyutsuz temel doğal frekans oranları; kesit parametreleri  $q$  ve  $r$  artıkça artmakta, kesit katsayılarının artımında ise, çubuk elastikiyet ve kütleli özelliklerine bağlı olarak farklı davranışlar göstermektedir.

## EK: GÖSTERİMLER

|                 |                                             |
|-----------------|---------------------------------------------|
| $a$             | çubuk kökü ile ucu arasındaki burulma açısı |
| $A(z)$          | çubuk enine kesit alanı                     |
| $A_o$           | $A(0)$                                      |
| $b(z)$          | çubuk genişlik fonksiyonu                   |
| $b_o$           | $b(0)$                                      |
| $[D]$           | katsayılar matrisi                          |
| $\{d\}$         | yerdeğiştirme vektörü                       |
| $E$             | elastisite modülü                           |
| $h(z)$          | çubuk yükseklik fonksiyonu                  |
| $h_o$           | $h(0)$                                      |
| $I_{xx}(z)$     | $xx$ eksenine göre alan atalet momenti      |
| $I_{xxo}$       | $I_{xx}(0)$                                 |
| $I_{xx}(z)$     | $XX$ eksenine göre alan atalet momenti      |
| $I_{yy}(z)$     | $yy$ eksenine göre alan atalet momenti      |
| $I_{yy}(z)$     | $YY$ eksenine göre alan atalet momenti      |
| $I_{xy}(z)$     | çarpım alan atalet momenti                  |
| $L$             | çubuk boyu                                  |
| $L_1, L_2, L_3$ | doğrusal operatörler                        |
| $m_b$           | genişlik katsayısı                          |
| $m_h$           | yükseklik katsayısı                         |
| $n$             | sonlu farklar için çubukdaki aralık sayısı  |
| $q$             | genişlik parametresi                        |
| $r$             | yükseklik parametresi                       |
| $TB$            | titreşim biçimi                             |
| $u(z)$          | $x$ yönündeki yerdeğiştirme                 |
| $v(z)$          | $y$ yönündeki yerdeğiştirme                 |
| $x-y-z$         | sabit eksen takımı                          |
| $X-Y-Z$         | çubuk kesitinin asal eksen takımı           |

|             |                                                                            |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha(z)$ | burulma açısı fonksiyonu                                                   |
| $\lambda$   | doğal frekans parametresi, $\lambda = \rho A_o \omega^2 L^4 / (E I_{xxo})$ |
| $\lambda_o$ | burulmamış eşdeğer çubuk için temel doğal frekans parametresi              |
| $\rho$      | yoğunluk                                                                   |
| $\omega$    | doğal radyan frekans                                                       |

## KAYNAKLAR

- [1] Carnegie, W., "Solution of the Equations of Motion for the Flexural Vibration of Cantilever Blades under Rotation by the Extended Holzer Method" Bulletin of Mechanical Engineering Education 6 225-230, 1967.
- [2] Hartog, J.P.Den, "Mechanical Vibrations" Dover-1985.
- [3] Dokumacı, E., Thomas, J., and Carnegie, W., "Matrix Displacement Analysis of Coupled Bending-Bending Vibrations of Pretwisted Blading" Journal of Mechanical Engineering Science 9(4) 247-254, 1967.
- [4] Dawson, B. and Carnegie, W., "Modal Curves of Pre-Twisted Beams of Rectangular Cross-Section" Journal of Mechanical Engineering Science 11(1) 1-13, 1969.
- [5] Carnegie, W. and Thomas, J., "The Coupled Bending-Bending Vibration of Pre-Twisted Tapered Blading" Journal of Engineering for Industry 94 255-266, 1972.
- [6] Rao, J.S. and Carnegie, W., "A Numerical Procedure for the Determination of the Frequencies and Mode Shapes of Lateral Vibration of Blades Allowing for the Effects of Pre-Twist and Rotation" International Journal of Mechanical Engineering Education 1 37-47, 1973.
- [7] Yardımoğlu, B., "Önburulmalı Kalın Çubukların Dinamik Stabiliteleri" IX. Ulusal Mekanik Kongresi, 758-767, 1995.
- [8] Banerjee, J.R., "Free Vibration Analysis of a Twisted Beam using the Dynamic Stiffness Method" International Journal of Solids and Structures 38 6703-6722, 2001.
- [9] Yardımoğlu, B. and Yıldırım, T., "Finite Element Model for Vibration Analysis of Pre-Twisted Timoshenko Beam" Journal of Sound and Vibration 273 741-754, 2004.
- [10] Meirovitch, L., "Analytical Methods in Vibrations" MacMillan-1967.
- [11] Hildebrand, F.B., "Introduction to Numerical Analysis Second Edition" Dover-1987.
- [12] Wolfram, S., "The Mathematica Book 5th Edition" Wolfram Media-2003.