

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI
TİTREŞİMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cihan Önder MİKE

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

Ocak 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI
TİTREŞİMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Cihan Önder MİKE
(503091518)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Katı Cisimlerin Mekaniği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

Ocak 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503091518 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Cihan Önder MİKE**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI TİTREŞİMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Uğur GÜVEN**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Oğuz Altay
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **16 Aralık 2013**
Savunma Tarihi : **13 Ocak 2014**

ÖNSÖZ

Bu çalışmada değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşimlerinin analitik ve sonlu eleman çözümleri yapılarak, elde edilen sonuçlar literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Çalışmalarım sırasında bana yol gösteren ve akademik çalışma prensiplerini kazandıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ekrem Tüfekçi' ye katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Aralık 2013

Cihan Önder MIKE
(Makine Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	1
2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR	3
2.1 Literatür Araştırması	3
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ	7
3.1 Çubuk Statiğinin Genel Denklemleri	7
3.1.1 Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları	10
3.1.2 Denge denklemleri	11
3.1.3 Bünye denklemleri	12
3.2 Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri.....	17
4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	21
4.1 Matrikant Yöntemi	21
4.1.1 Matrikant yönteminde alternatif çözümler.....	22
4.1.2 Matrikant yöntemiyle örnek denklem çözümü	23
4.2 Eğri Eksenli Çubukların Titreşimlerinin Matrikant Yöntemi ile Çözümü.....	27
5. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ	33
5.1 Düzlem Dışı Titreşim Problemlerinin Tanımı ve Analizi	33
5.2 Sayısal Örnekler ve Çözümlerin Karşılaştırılması	36
5.3 Çözümü Etkiyen Parametreler ve Programın Optimizasyonu	40
6. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMENLAR YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ	45
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ.....	53

KISALTMALAR

A	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
c	: Boyutsuz frekans
C	: Kayma rijitliği matrisi
d	: Çubuk kesitinin çapı
D	: Eğilme rijitliği matrisi
E	: Elastiklik modülü
F	: Kesite etkiyen iç kuvvet vektörü
F_n, F_b, F_t	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin yüksekliği
I_n, I_b	: Çubuk kesitinin normal ve binormal eksenlere göre eylemsizlik momentleri
I_p	: Polar eylemsizlik momenti
i	: Jiroskopik yarıçap
J	: Burulma eylemsizlik momenti
k	: Matrikant terim sayısı
k_n, k_b	: Kayma gerilmesinin kesite üniform dağılmadığını gösteren sabitler
M_k	: Matrikant matrisi
M_n, M_b, M_t	: Kesite ait iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış moment bileşenleri
N	: Matrikant matrisinden sınır koşulları yazılarak oluşturulan matris
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkiyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
r_o, r	: Şekil değiştirmiş ve değiştirmemiş çubuğa ait konum vektörleri
R	: Çubuğun eğrilik yarıçapı
s	: Yay uzunluğu
u	: Yer değiştirme vektörü
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
y_o	: Başlangıç değerler vektörü
μ	: Çubuğun birim boyunun kütlesi
η	: Çubuğun kesit alanının değişim oranı
ρ	: Özgül kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
ϕ	: Açısal koordinat
ϕ_t	: Toplam giriş açısı
v	: Poisson oranı
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
e_n, e_b, e_t	: Eksen takımının normal, binormal ve teğet birim vektörleri

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : kn ve kb sabitleri.....	13
Çizelge 3.2 : Denklemlerdeki sembollerin açıklamaları.....	17
Çizelge 5.1 : Eliptik eksenli simetrik çubuk için elde edilen düzlem dışı boyutsuz frekans değerlerinin $(c=(\omega^2 R^4 (\mu/(E I n)))^{1/4})$ karşılaştırılması.....	36
Çizelge 5.2 : Matrikant terimi ile çözümün doğruluğu ve süresi arasındaki ilişki..	39
Çizelge 5.3 : Kök artış oranı ile çözümün doğruluğu ve süresi arasındaki ilişki...	41
Çizelge 5.4 : Tolerans değeri ile çözümün doğruluğu ve süresi arasındaki ilişki...	42
Çizelge 6.1 : Ankastre-ankastre eliptik çubuk için elde edilen analitik ve Ansys sonlu eleman doğal frekans sonuçlarının karşılaştırılması.....	47
Çizelge 6.2 : Ankastre-ankastre mesnetli dairesel çubuk için elde edilen analitik ve Ansys sonuçlarının karşılaştırılması.....	48

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.....	8
Şekil 3.2 : Çubuk elemanına etkiyen dış yükler ve kesit tesirleri.....	11
Şekil 4.1 : Hesap sınırlarının aralıklara bölünmesi.....	23
Şekil 5.1 : Lineer değişken simetrik çubuk.....	32
Şekil 5.2 : Eliptik eksenli simetrik çubuk.....	35
Şekil 5.3 : Ankastre-Ankastre mesnetli eliptik çubuğun ilk beş boyutsuz frekansı.....	37
Şekil 5.4 : Ankastre-Ankastre mesnetli eliptik eksenli çubuğun beş farklı durum için hesaplanan boyutsuz doğal frekansları.....	38
Şekil 5.5 : Eliptik çubuğun doğal frekansının aralığa bölünme sayısına göre değişimi.....	39
Şekil 5.6 : Eliptik çubuğun aralığa bölünme sayısının çözüm süresine göre değişimi.....	40
Şekil 5.7 : Regula-Falsi metodundaki olası durumlar.....	40
Şekil 5.8 : Kök artış miktarının (Δ) çözüm süresine olan etkisi.....	41
Şekil 5.9 : Tolerans(ϵ) değişiminin çözüm süresine olan etkisi.....	42
Şekil 6.1 : ANSYS programında malzeme değerlerinin girilmesi.....	43
Şekil 6.2 : ANSYS de meshleme yapılmış çubuk.....	44
Şekil 6.3 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı ilk frekans ve mod şekli.....	44
Şekil 6.4 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı ikinci frekans ve mod şekli.....	45
Şekil 6.5 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı üçüncü frekans ve mod şekli.....	45
Şekil 6.6 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı dördüncü frekans ve mod şekli.....	46
Şekil 6.7 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı beşinci frekans ve mod şekli.....	46
Şekil 6.8 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı altıncı frekans ve mod şekli.....	47
Şekil 6.9 : Dairesel eksenli çubuğun geometrik ve malzeme özellikleri.....	48

DEĞİŞKEN KESİTLİ EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI TİTREŞİMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

ÖZET

Çubuklar veya diğer adıyla kirişler uzun yıllar boyunca araştırmacıların ilgisini çeken, en basit ve en çok kullanılan yapı elemanlarından biridir. Birçok modern mühendislik yapısında kullanılması nedeniyle hala güncelliğini koruyan çubuklar üzerine yapılan çok sayıda araştırma mevcuttur.

Bu çalışmada eğri eksenli değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşim davranışları ele alınmaktadır. Çubukların statik davranışlarını ifade eden denklemlerden hareketle dinamik davranışlarını ifade eden denklemlere ulaşılmıştır.

Çalışmanın amacı; eğri eksenli sürekli değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşim problemlerini, başlangıç değerleri yöntemi (matrikant) ile kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerini de dikkate alarak, analitik olarak çözmektir.

Birinci bölümde, çubuk teorisi üzerine kısa bir giriş yapılmış ve çalışmanın amacı ve kapsamı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, eğri eksenli çubuklar ile ilgili literatürdeki çalışmalar incelenmiş ve bu çalışmalarda kullanılan yöntemler kısaca anlatılmıştır. Genelde sonlu elemanlar ve çeşitli enerji metotları kullanılarak yapılan çözümlerin birçoğunda eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edilmekte olduğu gözlemlenmiştir.

Üçüncü bölümde eğri eksenli çubukların genel denklemleri(yer değiştirme, denge ve bünye) ile bu denklemlere bağlı olarak düzlem içi ve düzlem dışı titreşim denklemlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde değişken kesitli eğrisel çubukların düzlem dışı titreşimlerinin analitik çözümü matrikant yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Matrikant yöntemi hakkında bilgi verilip, basit bir sayısal örnekle açıklanmaya çalışılmış ve yöntemin titreşim problemlerine uygulanışı detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Beşinci bölümde, literatürdeki çalışmalar incelenip, matrikant yöntemi kullanılarak bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Diferansiyel denklemleri çözerken Matlab paket programından faydalanılmış ve çözümü yaparken kullandığımız program ile ilgili çeşitli optimizasyonlar yapılarak en hızlı ve en yakın çözüm için hangi parametrelerin kullanılması gerektiği hesaplanmıştır.

Altıncı bölümde, bazı sayısal örnekler sonlu elemanlar yöntemi ile çözülmüştür. Ansys ve Abaqus analiz programları kullanılarak elde edilen sonuçlar literatürdeki ve matrikant yöntemindeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Yedinci bölümde ise çalışmanın sonuçları tartışılmış ve bu konudaki çalışmaların nasıl geliştirilebileceği konusunda bazı öneriler sıralanmıştır.

ANALYZING OF OUT-OF-PLANE VIBRATIONS OF CURVED BEAMS WITH VARYING CROSS-SECTIONS BY MATRICANT METHOD

SUMMARY

Beam elements have received considerable amounts of attention in recent years, which are the simplest and the most commonly used structural elements. Many researchers have been still working on beams cause of occur frequently in many modern engineering applications like electrical machinery, spring design, aerospace structures, bridges and earthquake resistant structures. From these examples, the analysis of a curved beam has great importance and has received considerable attention since the end of the nineteenth century.

In general, the in-plane and out-of-plane vibrations of a plane curved beam are coupled. However, based on the Bernoulli-Euler hypothesis, if the cross-section of the curved beam is uniform and doubly symmetric, i.e., when the shear center and the centroid coincide, then the in-plane and out-of-plane vibrations are uncoupled. But a coupling of the out-of-plane bending and the torsional responses still exists. Previous studies were based upon the classical Bernoulli-Euler beam theory in which neither the axial extension nor transverse shear deformation nor rotatory inertia effects are taken into account. Timoshenko beam theory considers the effects of shear deformation and rotatory inertia and provides a better approximation to the actual beam behavior.

The equations of free vibration of a curved beam become very complex when the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects are taken into account. Most of the studies in the literature give approximate solutions using Ritz and Galerkin methods by neglecting the above mentioned effects. With the advancements of computer technology and commercial softwares, the use of finite element methods becomes more advantageous for complicated geometries, in the absence of any exact solution. Band on a literature review, it can be seen that there seems to be a lack of experimental data for the vibration problems of curved beams. In addition, a few of them dealt with the curved beams of different geometries than circle.

It is often difficult and sometimes impossible to find general closed form solution for the vibration problem of a curved beam, since the governing differential equations possess variable coefficients. These equations are similar six differential equations of the first order. If the axial extension, shear deformation, rotatory inertia effects are taken into account or different geometries than circle equations will be very complicated. Because of this situation, the previous studies are not based upon the classical theory in which rotatory inertias nor shear deformation are taken into account. Although exact methods are employed for only the simple cases, Ritz, Galerkin and finite element methods are used extensively when the complicated cases are considered. Timoshenko beam theory considers the effects of shear deformation and rotatory inertias due to both flexural and torsional vibrations and provides a better approximation to the actual arch behavior.

The purpose of the present study is to give the approximate solution to the governing equations of out-of-plane dynamic problems of a curved beam with varying cross-sections and to exhibit the advantages of the solution. These governing equations solved by using the optimized matricant method and compared between the other studies results.

In the vibration problems of this study, the effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia due to torsional vibrations are taken into account. However, the warping deformation of the cross-section is neglected. The matricant method is used in order to solve the governing differential equations. The solution does not depend on the boundary conditions. The variations of the frequency coefficients with respect to the opening angle are presented for a certain slenderness ratio and several boundary conditions. The examples given in the literature are solved and the results are compared.

For out-of plane vibration of curved beams, a phenomenon of transition of modes from extensional into inextensional, several authors have observed which occurs with increase in beam curvature. The transition phenomenon is characterized by the sharp increase in frequencies of modes that occurs at certain combinations of curvature and length of the curved beam. This increase in mode frequency is accompanied by a significant change in the mode shapes. There is still no comprehensive analysis of the transition phenomenon and there are no proper explanations and methods for prediction the frequencies of a curved beam. This is possibly because numerical simulations, commonly employed for the analyses, provide little analytical insight into the vibrational problem. In this study, the analysis of the transition phenomenon in vibrational behavior of a shallow circular curved beam with uniform cross-section is also presented by using the approximated solution of the governing equations.

In the first chapter, general concepts of the theory of beams and the aim of the present study are given.

In the second chapter, the studies in the literature on dynamic problems of curved beams with varying cross-section are reviewed. Reviewing the literature has shown that although a few papers deal with the out of plane dynamic behavior of arches with varying cross-section, many excellent papers are present with in-plane dynamic behavior of arches with non-uniform cross-section and variable curvatures. With the advancement of computer technology, arch problems are solved widely by using finite element method and many finite elements were developed for this purpose. If the behavior of the arch is non-planar, then a usual finite element model of this arch becomes very complicated with many degrees of freedom. In these cases, it is evident that a model, which, with a relatively few degrees of freedom, offers a good description of the behavior of the arch, is needed.

In the third chapter, the governing differential equations of curved beam are given for the static and dynamic problems. The beam is represented by a space curve whose every point is coupled with a rigid orthonormal vector diad. The vectors are chosen to be perpendicular to the tangent vector of the space curve in the initial state and they represent the cross-section of the beam. In the deformed configuration, these directors still remain unit and perpendicular each other because of the assumption of a rigid cross-section.

The matricant (initial value) method explained and applied for the vibration problems of curved beams in the fourth chapter. In this method, the curvature and the cross-section of the arch are considered as variable. The axial extension, shear deformation

and rotatory inertia effects are also considered in the governing differential equations of free vibrations.

In the fifth chapter, the problems in the literature which interest of dynamic behavior of curved beams with continuous varying cross-section and variable curvature are solved by using the matricant method and the comparisons between the results are given in the tables and figures. Clamped-clamped, clamped-free and free-free boundary conditions are studied for different opening angles. The effects of step ratio, location of the step, boundary condition and opening angle on frequency coefficients are studied. Mostly use clamped-clamped boundary conditions, because the axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects are more changeable than other beam types. The mode transition phenomenon is also investigated and the mode shapes are given in figures. The transformation phenomenon is characterized by the sharp increase in frequencies of modes that occurs at certain combinations of curvature and length of the beam. This increase in mode frequencies is accompanied by a significant change in the mode shapes. There is still no comprehensive analysis of the transformation phenomenon and there are no proper explanations and methods for prediction the frequencies of an arch. This is possibly due to the fact that numerical simulations, commonly employed for the analyses, provide little analytical insight into the vibrational problem.

Also the Matlab code, which we use to solve matricant equations, is optimized. All results and parameters are observed. Best parameters for this program are chosen by solution time and accuracy. This process is never done in previous literature and it is a really good example for further studies.

In the sixth chapter, general information about the finite element analysis and ABAQUS, which is a commercially available finite element program, are given. The experimental studies and numerical solutions of curved beams are given. The experimental results are compared with the theoretical solution for two different curved beams at different boundary conditions. Thanks to ABAQUS the natural frequencies and mode shapes of beams are also compare with the experimental results. The results show that experimental, analytical and finite element solutions are in good agreement with each other. Also the results show that the geometry of the archs are really important to get a healthy solutions. There were some differencies between circular and elliptic archs.

The study results are discussioned and some suggestions are made to improve method in advance in the last chapter. According to that with the improvements of Matlab program code it is more easy to work on the other geometries like parabola or helical.

1. GİRİŞ

Mühendislik alanındaki yapısal elemanların önemli bir grubunu çubuklar oluşturmaktadır. Geçmişten günümüze çubuk teorileri üzerine birçok çalışmalar yapılmıştır. Günümüzde akademisyenler ve mühendisler çubuk teorisi üzerinde çalışmaya devam etmekte ve en doğru çözüm yöntemini bulmaya çalışmaktadırlar.

Elastisite teorisi dış kuvvetlerin etkisinde bulunan bir cismi gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme açısından sistematik bir şekilde inceler. Ancak karmaşık sınır problemlerinde bu teorinin kullanılması imkânsıza yakındır. Bu yüzden problemi basitleştirmek için çubuk geometrisi ve dış kuvvetlerle ilgili bazı varsayım ve kabuller yapılmaktadır. Böylece sadece özel hallerde uygulanabilecek çözümler elde edilmektedir.

Eğri eksenli çubuklar üzerine yapılan çalışmaların çoğunda eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katmayan Euler-Bernoulli çubuk teorisi temel alınmıştır. Böylece çözüm daha basitleştirilmesine karşın çözüm gerçek çubuk davranışından uzaklaşmaktadır.

Literatürdeki çalışmalarda ise Ritz, Galerkin, DQM ve sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak çözüme ulaşılmaktadır. Özellikle son yıllarda teknolojinin gelişmesiyle sonlu elemanlar yöntemine ağırlık verildiği gözlenmektedir.

Eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşim problemleri üzerine birçok çalışma olmasına rağmen, bunların çoğunda sabit kesit ve eğrilik yarıçapına sahip çubuklarla ilgilenilmiştir.

1.1. Tezin Amacı

Bu çalışmada, eğri eksenli çubukların düzlem dışı dinamik davranışları ele alınmaktadır. İlk olarak eğri eksenli çubukların statik ve dinamik denklemleri verilmiştir. Tez daha çok değişken kesitli çubukların davranışları ile ilgilendiği için kesin çözümler yerine yaklaşık olarak çözümü başlangıç değerleri ya da diğer adıyla

matrikant yöntemiyle elde edilmiştir. Matrikant hesaplamalarında; aksel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri de dahil edilmektedir.

Matrikant yöntemiyle çözümde Matlab mühendislik programı kullanılıp tezin diğer amaçlarından biri olan en optimize çözümü bulmak için çeşitli parametrelerin çözüme ve çözüm süresine olan etkileri gözlemlenmiştir.

Sonuçlar önceki çalışmalarda kullanılan yöntemlerle elde edilen diğer verilerle karşılaştırılarak aralarındaki uyum gözlenmiştir. Literatürdeki örnekler daha çok düzlem içi titreşimler üzerine olduğu için düzlem dışı titreşimler ile ilgili sonuçlar daha çok sonlu eleman programlarıyla elde edilmektedir. Toplam giriş açısının, mesnet tiplerinin, kesit alanının değişim oranının, narinlik oranının ve matrikant hesabında belirlenen bölünme sayısının boyutsuz frekans değerlerine etkisi, tablo ve grafikler şeklinde sunulmuştur.

2. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLAR ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Eğri eksenli çubukların titreşimi, literatürdeki birçok çalışmada inceleme konusu olmuştur. Çalışmalar genel olarak sabit kesite ve sabit eğrilik yarıçapına sahip çubukları kapsamaktadır. Ayrıca bu çalışmaların büyük çoğunluğunda düzlem içi titreşim davranışları ele alınmıştır. Çalışmalarda, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi esas alınarak Ritz, Galerkin ve sonlu elemanlar yöntemi gibi yaklaşık yöntemlerin kullanıldığı görülmektedir.

2.1. Literatür Araştırması

Eğri eksenli çubukların titreşimleri ile ilgili yapılan en eski çalışmalarda biri Love [1] tarafından ortaya konmuştur. Bu çalışmada daire kesitli tam bir çember halkası çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşimleri eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi ile incelenmektedir.

Timoshenko ve Goodier [2] elastisite teorisinin temelleri ve teorinin uygulanması ile ilgili çalışmaların başlangıcını oluşturmaktadır.

Ayrıca İnan [3] çubuk teorisi alanında en temel eserlerden biridir. Burada çubuk bazı kısıtlamaları sağlayan bir parametreye bağlı yönlendirilmiş ortam olarak ele alınmış ve sınır değer problemi bu ortamda kurulmaktadır.

Dairesel kesitli, çember eksenli çubuğun titreşimlerini inceleyen Den Hartog [4], çalışmasında çubuk ekseninin uzamadığı ve uzadığı varsayımları ile enerji ifadeleri oluşturarak Rayleigh-Ritz yöntemiyle sonuca ulaşmıştır.

Laura ve De Irsar [5] çalışmalarında kesiti kademeleri olarak değişen çember eksenli çubukların titreşimlerini yaklaşık çözüm yöntemleri ile ele almaktadır. Kademenin ortada olduğu varsayılan çubukların simetrik mod şekilleri incelenmektedir.

Laura ve diğerleri [6], kesiti kademeli değişen çember eksenli çubuğun konsantre kütle taşıması durumu Rayleigh-Ritz yöntemi ile incelenmekte ve sonuçları sonlu eleman yöntemleriyle karşılaştırmaktadır.

Gutierrez ve diğerleri [7], kesiti kademeli ve sürekli değişen farklı eksen eğriliklerine sahip çubukların titreşimleri, polinom fonksiyonlar seçerek Ritz yöntemiyle incelemektedir. Parabool, zincir eğrisi, spiral, sikloid ve çember eksenlere sahip çubukların doğal frekansları farklı sınır şartları için sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırılarak tablolar halinde sunulmuştur. Çalışmada eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilmiştir.

Howson ve Jemah [8], eğri eksenli çubukların kendi düzlemine dik doğrultudaki frekanslarını, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. Çalışmada, eğriliği ve kesiti sabit olan narin elastik bir kirişin düzlem dışı hareket denklemleri ortaya konmuş ve sayısal örneklerle yer verilmiştir.

Kawakami ve Sakiyama [9] eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerini Green fonksiyonları ve sayısal integrasyon yaparak hesaplamıştır.

Tarnopolskaya ve diğerlerine ait olan çalışmada [10,11] eğrilik yarıçapı ve değişken kesit alanına sahip çubukların düzlem içi titreşimleri asimptotik yaklaşımla ele alınmaktadır. Düşük frekanslardaki mod geçişi incelenmiş ve eğrilik yarıçapının mod şekli üzerindeki etkileri ele alınmıştır.

Irie ve Yamada [12] ekseni çember olmayan değişken kesitli çubukların sönümlü, zorlanmış titreşimlerini incelemişlerdir. Serbest ucundan sinüzoidal değişen moment ve kuvvetlerle zorlanan, ankastre-serbest mesnetli bir çubuğun doğal frekansları incelenmiştir. Eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin de dikkate alındığı denge denklemleri yazılarak, Runge-Kutta-Gill yöntemiyle sayısal olarak elde edilen transfer matrisi yöntemi ile çözüm aranmıştır.

Oh ve diğerleri [13], parabol, elips ve sinüs eğriliklerine sahip değişken kesitli çubukların düzlem içi doğal frekanslarını eksenel uzama, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerini dikkate alarak hesaplamıştır. Farklı narinlik oranları ve kayma katsayıları için yapılan çalışmalardaki sonuçlar sonlu eleman yöntemlerindeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Eğri eksenli, sabit kesitli düzlemsel çubukların düzlem içi serbest titreşimlerinin kesin çözümü Tüfekçi ve Arpacı [14] tarafından verilmektedir. Bu çalışmada da eksenel uzama, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği dikkate alınmakta ve elde edilen frekanslar ve şekiller gösterilmektedir.

Tüfekçi [15,16] da sırasıyla tek kademeli ve iki kademeli değişken kesitli çubukların düzlem içi titreşimlerini kesin çözümleriyle vermiştir. Çalışmada beş sınır koşulu için farklı giriş açıları, narinlik oranları ve kademe oranlarına sahip çubuklar incelenmiştir.

Karami ve Melikzadeh [17], değişken kesitli çubukların düzlem içi titreşimlerini diferansiyel kuadratür (DQM) yöntemini kullanarak incelemiş ve sonuçları diğer çalışmalarla karşılaştırmıştır.

Liu ve Wu [18], eğrisel eksenli çubukların düzlem içi titreşimlerini genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemiyle (GDQM) inceleyip eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmiştir.

Tüfekçi [19] da sığ çubukları incelemiş ve hesaplar sonucunda genelde dikkate alınmayan eksenel uzama, kayma etkisi ve dönme eylemsizliği etkilerinin sığ çubuklarda diğer çubuklara göre daha belirgin olduğunu gözlemlemiştir.

Gantmacher [20,21] kitaplarında, başlangıç değerler teoremi de dediğimiz matrikant yöntemini anlatır ve bu yöntemin diferansiyel denklemlere uygulanışını detaylı olarak göstermiştir.

Yiğit [22] de eğrisel çubukların statik ve dinamik problemlerini başlangıç değerleri metoduyla incelemiştir. Değişken kesitli çubukların düzlem içi titreşimlerini hesaplayıp Tüfekçi ve Yiğit [23] de bu sonuçları literatürdeki çalışmalarla karşılaştırmıştır.

Rosen ve Gur [24] ise; eğrisel çubukların lineer olmayan davranışlarını transfer matrisi yöntemi ile ele almıştır. Çubuğun elemanlara ayırarak çözümü yapıldığında büyük deformasyonların hesaplanabileceğini göstermiştir.

Bu yöntemler dışında Lin ve Lee [25] ye ait çalışmada denklemler Frobenius yöntemi ile elde edilmiş ve Green fonksiyonları kullanılarak çözülmüştür.

Ayrıca Kang ve diğerlerine [26] ait olan çalışmada eğri eksenli çubukların titreşimleri bir başka yöntem olan dalga yayılımı (wave propagation) yaklaşımı ile

incelenmiş, elastik mesnetler, tekil yükler, eğrilik yarıçapı değişimi gibi süreklilik içeren durumlar göz önüne alınmıştır.

Huang ve diğerleri [27,28] ise sürekli değişken kesitli çubuğun doğal frekanslarını bulmak için Dinamik Katılık Matrisi (Dynamic Stiffness Matrix) metodunu kullanmıştır. Bu çalışmada kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği dikkate alınmışken Suzuki ve diğerlerinde [29] modal süperpozisyon tekniği kullanılıp sözü geçen etkiler ihmal edilmiştir. Bu çalışmada sayısal örnekler daha çok bu kaynaklardan referans alınarak yapılacaktır.

Lee ve Chao tarafından [30,31] de yapılan çalışmalarda sabit eğrilik yarıçapına ait değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerini veren denge denklemleri yer almıştır. Analizi basitleştirmek için kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini içeren iki fiziksel parametre geliştirilmiş, çalışmanın sonunda verilen örneklerde kiriş açıklığı ve kiriş uzunluğunun ilk iki doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Rubin ve Tüfekçi [32] tarafından yapılan çalışmada eğri eksenli dikdörtgen kesitli çubukların titreşimi Cosserat Teorisi ile incelenmektedir. Çalışmada çubuk teorisinin, Cosserat teorisinin, sonlu eleman analizlerinin ve deneyden elde edilen sonuçların karşılaştırılmasına yer verilmiştir.

Teorik çalışmalara paralel olarak deneysel analiz de son yıllarda gittikçe daha fazla araştırılan bir konu olmuştur. Özellikle bilgisayar ölçüm cihazlarının gelişmesiyle artık işlemler daha hızlı ve daha doğru bir şekilde yapılabilmektedir. Ewinse ait [33] çalışmada deneysel modal analizin temel esasları, uygulama alanları, ölçüm teknikleri ve matematik modellerin oluşturulması detaylı bir şekilde anlatılmaktadır.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN GENEL DENKLEMLERİ

Çubuk teorisinin gelişimindeki en önemli basamaklardan birisi olan Euler-Bernoulli denklemlerinde çubuk ekseninin uzamadığı ve kesitte kayma meydana gelmediği kabul edilir. Bu bölümde, Euler-Bernoulli teorisinin aksine çubuk statığının ve çubuk titreşimlerinin genel denklemlerinin, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak, elde edilmesi özetlenecektir.

3.1. Çubuk Statığının Genel Denklemleri

Çubuğun eksen eğrisi üzerindeki her noktaya, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(s)$ konum fonksiyonu ile belirlenen, birbirine dik $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ birim vektörleri bağlı, bir parametrelili ortam olarak varsayılmaktadır. Burada s parametresi, başlangıç durumundaki yayın uzunluğudur. Bu iki vektöre dik olan $\mathbf{e}_t^0(s)$ birim vektörü ise eğrinin teğeti ile çakışmaktadır ve

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_t^0(s) &= \mathbf{e}_n^0 \times \mathbf{e}_b^0 \\ \mathbf{e}_t^0(s) &= \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds}\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\mathbf{e}_n^0(s)$, $\mathbf{e}_b^0(s)$ kesit vektörleri, sırasıyla çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıdır. Bu doğrultular kesit asal eksenleriyle çakışmayabilir. Bu durumda, aralarındaki ilişkiyi belirleyecek bir fonksiyona gerek duyulacaktır. Burada, bu doğrultuların çakıştığı durum göz önüne alınacaktır.

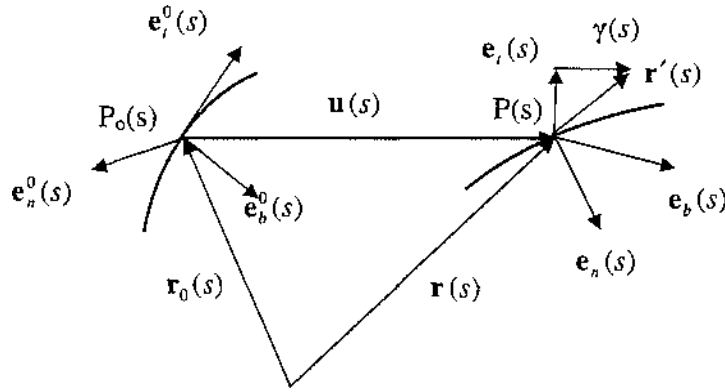
Çubuğun yüksüz ve gerilmesiz olduğu başlangıç durumu için $\mathbf{r}_0(s)$, $\mathbf{e}_n^0(s)$ ve $\mathbf{e}_b^0(s)$ vektörleri bilinmektedir. Çubuk şekil değiştirdikten sonra, geometriyi $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$ vektörleri belirlemektedir. Şekil değiştirmeden sonraki kesit vektörleri $\mathbf{e}_n(s)$ ve $\mathbf{e}_b(s)$, yine birim vektörler olup birbirlerine diktirler. Ancak, başlangıçtaki teğet birim vektörü $\mathbf{e}_n$ ve $\mathbf{e}_b$ vektörlerine dik kalmasına rağmen, artık ne şekil değiştirmiş

eksen eğrisine teğet, ne de birim vektör olma şartı vardır (Şekil 3.1). Yani, dik kesit

ötelenir ve döner; ancak, herhangi bir deformasyona uğramaz. Serbestçe dönebilme yeteneği nedeniyle,

$$\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} = \alpha \mathbf{e}_t(s) \quad (3.2)$$

olacak, dik kesit şekil değişiminden sonra çubuk eksenine dik kalmayacaktır. Bu durum, kayma deformasyonu etkisiyle ortaya çıkan haldir. Ayrıca, artık s parametresi yay uzunluğuna eşit olmadığından $\mathbf{r}'(s)$ vektörü şekil değiştirmiş eğriye teğet olmakla birlikte birim vektör olmayabilir.



Şekil 3.1 : Çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları.

Şekil 3.1'de, çubuğun şekil değiştirmeden önceki ve sonraki durumları gösterilmektedir. Buradaki $(^0)$ üst indisi, şekil değiştirmemiş durumu ifade eder.

Çubuğun yer değiştirme durumu iki vektörle tanımlanabilir:

Birincisi, eksen üzerindeki yer değiştirme vektörü;

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0(s) \quad (3.3)$$

İkincisi, rijit cisim gibi hareket ettiği varsayılan dik kesitin dönme vektörüdür.

Aslında, rijit cismin sonlu dönmeleri, vektörle ifade edilemez. Fakat burada, yer ve şekil değiştirmeler küçük sayılarak, dönme bir vektörle belirlenecektir.

Ortogonal olan $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ vektör üçlüsü, yine kendisi gibi ortogonal olan $\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b, \mathbf{e}_t$ vektör üçlüsüne,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{Q}_{ji} \mathbf{e}_j^0(s) \quad (3.4)$$

şeklinde, $\mathbf{Q}$ ortogonal dönüşüm matrisi ile dönüşmektedir. Bu matrisin,

$$\mathbf{Q}_{ji} = \delta_{ij} + W_{ij} \quad (3.5)$$

olarak parçalanması durumunda, (3.4) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + W_{ji} \mathbf{e}_j^0(s) \quad (3.6)$$

biçiminde yazılabilir. Burada, δ_{ij} , birim matristir. Dönüşüm matrisinin ortogonalligini kullanarak; yer ve şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla; W_{ij} bir antisimetrik matris olacaktır. Antisimetrik bir matris için

$$W_{ij} \cdot \mathbf{e}_i^0 = \Omega \times \mathbf{e}_i^0 \quad (3.7)$$

özelligini sağlayan Ω vektörü bulunabilir. Çubuk kesitin dönme vektörü olan $\Omega(s)$ ile (3.6) eşitliği,

$$\mathbf{e}_i(s) = \mathbf{e}_i^0(s) + \Omega(s) \times \mathbf{e}_i^0(s) \quad (3.8)$$

şekline dönüşür. $\Omega(s)$ dönme vektörü, ağırlık merkezinden geçen eksenlerdeki dönmeleri belirten vektördür.

Çubuğun şekil değiştirme durumu da iki vektörle tanımlanabilir:

Birinci vektör, çubuğa ait ekstenel şekil değiştirme vektörü olan γ vektörüdür. Bu vektör, eksen eğrisinin boy değişimini ve eksen eğrisi ile dik kesit arasındaki kaymaları ifade etmektedir, γ ekstenel şekil değiştirme vektörü, şekil değiştirmeden sonraki yer vektörünün türevi ile dik kesit normali arasındaki farktır ve

$$\gamma = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \mathbf{e}_t \quad (3.9)$$

şeklinde tarif edilmektedir.

İkinci şekil değiştirme vektörü, bazı çalışmalarda birim dönme vektörü olarak tanımlanır ve

$$\omega = \frac{d\Omega}{dx} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda, ilgili şekil değiştirme denklemi

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\omega \quad (3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{M}$ kesite etkiyen momentlerin bileşke vektörü, $\mathbf{D}$ ise eğilme rijitliği matrisidir [1].

Bazı mühendislik çalışmaları, ikinci şekil değiştirme vektörü olarak, ω açısal değişim vektörünü kullanmaktadır. Bileşenleri, çubuk ekseninin eğriliklerini ve burulmasını veren bu vektör;

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \omega \times \mathbf{e}_i \quad (3.12)$$

olarak tarif edilmektedir.

Yer ve şekil değiştirme büyüklükleri tanımlandıktan sonra, çubuk teorisinin $\mathbf{M}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{u}$, Ω , γ , ω olarak bilinen altı bilinmeyeni, iki yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntısı, iki denge ve iki bünye denklemi yardımıyla çözülebilir.

3.1.1. Yer değiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları

Yer değiştirme vektörünü tanımlayan (3.3) ifadesi türetilerek,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} - \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.1), (3.8) ve (3.9) ifadelerinden faydalanılarak,

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \Omega \times \mathbf{e}_t^0 + \gamma \quad (3.14)$$

şeklinde ilk yer değiştirme şekil değiştirme bağıntısı elde edilmiş olur.

(3.8) ifadesi türetilerek elde edilen,

$$\frac{de_i}{ds} = \frac{de_i^0}{ds} + \frac{d\Omega}{ds} \times e_i^0 + \Omega \times \frac{de_i^0}{ds} \quad (3.15)$$

eşitliğinde, (3.12)'de verilen açısal değişim vektörü yerleştirilerek,

$$\omega_0 \times e_i = \omega_0 \times e_i^0 + \frac{d\Omega}{ds} \times e_i^0 + \Omega \times (\omega_0 \times e_i^0) \quad (3.16)$$

ifadesi bulunur. (3.8) eşitliği ve vektörel çarpım özellikleri kullanılarak,

$$\left(\omega - \omega_0 - \frac{d\Omega}{ds} + \omega \times \Omega \right) \times e_i^0 = (\omega - \omega_0) \times (e_i^0 \times \Omega) \quad (3.17)$$

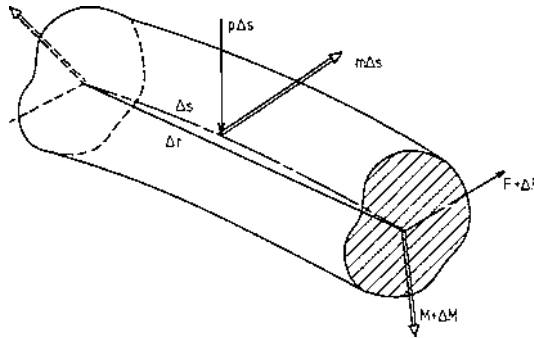
elde edilir. Şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımı ile eşitliğin sağ tarafı sıfır olarak tanımlanabilir. Böylece, eşitliğin sol tarafındaki parantezin içinin de sıfır olması gerekecektir. Buradan,

$$\frac{d\Omega}{ds} = \omega - \omega_0 + \omega \times \Omega \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilecektir.

3.1.2. Denge denklemleri

$\mathbf{p}(s)$ ve $\mathbf{m}(s)$ vektörleri, birim uzunluktaki çubuğa etkiyen dış kuvvetler ve momentler olarak tanımlanmaktadır. $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ vektörleri, sırasıyla kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörlerini göstermek üzere, Şekil 3.2'deki elemana ait denge denklemleri,



Şekil 3.2 : Çubuk elemanına etkiyen dış yükler ve kesit tesirleri.

$$-F + F + \Delta F + p \cdot \Delta s = 0$$

$$-M + M + \Delta M + m \cdot \Delta s + \Delta r \times (F + \Delta F) = 0 \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. Gereken sadeleştirmeler yapıp, $(\Delta s \rightarrow 0)$ için limit alındığında,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} + p &= 0 \\ \frac{dM}{ds} + e_t^0 \times F + m &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

şeklinde denge denklemleri elde edilir. [2]

3.1.3. Bünye denklemleri

Seçilen herhangi bir koordinat düzleminde,

$$\begin{aligned} M &= D \frac{d\Omega}{ds} \\ F &= C\gamma \end{aligned} \quad (3.21)$$

ilişkisi vardır. Burada C ve D ile gösterilen katsayılar, yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı değerler olup, çubuğa ait kayma ve eğilme rijitlik matrislerini gösterir. Böylece, elastik çubuk teorisinin genel denklemlerine ait 6 adet denklem elde edilmiş olmaktadır. Bunlar, yer değiştirme ve dönme olarak adlandırılan u ve Ω , şekil değiştirme elemanları olan γ ve ω , kesite etkiyen iç kuvvet ve moment vektörleri olan F ve M ' dir ve

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + e_t^0 \times \Omega - \gamma &= 0 \\ \frac{d\Omega}{ds} - \omega + \omega_0 + \Omega \times \omega_0 &= 0 \\ \frac{dF}{ds} + p &= 0 \\ \frac{dM}{ds} + e_t^0 \times F + m &= 0 \\ M &= D(\omega - \omega_0 - \Omega \times \omega_0) \\ F &= C\gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

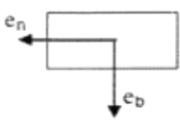
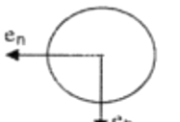
şeklinde yakabilir [2]. denklemlerde C ve D matrisleri simetriktir. Eğer, kesit simetrik ise ve $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0$ eksenleri kesitin simetri eksenleriyle çakışır, matrisler, diyagonal matrisler olarak elde edilir [1]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & C_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & C_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_n} GA & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_b} GA & 0 \\ 0 & 0 & EA \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & D_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & D_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_n & 0 & 0 \\ 0 & EI_b & 0 \\ 0 & 0 & GJ \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Burada E ve G, malzemenin elastiklik ve kayma modüllerini, I_n, I_b kesit eylemsizlik momentlerini, J , kesitin burulma eylemsizlik momentini, A , kesit alanını gösterir. k_n ve k_b ise, kayma gerilmelerinin kesite üniform olarak yayılmadıklarını karakterize eden sabitlerdir. Bu sabitler, Çizelge (3.1)'de çeşitli kesitler için verilmektedir.

Çizelge 3.1 : k_n ve k_b sabitleri.

Kesit	k_n	k_b
	6/5	6/5
	10/9	10/9
	2.10	2.20

(3.21) eşitliklerinden,

$$\frac{d\Omega}{ds} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{M}$$

$$\gamma = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.24)$$

Elde edilen denklemler (3.22)'de verilen genel denklemlerin ilk ikisinin yerine konulduğu zaman (3.22) eşitlikleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times \Omega - C^{-1}F &= 0 \\
\frac{d\Omega}{ds} - D^{-1}M &= 0 \\
\frac{dF}{ds} &= -p \\
\frac{dM}{ds} + \mathbf{e}_t^0 \times F &= -m
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Yukarıdaki $\mathbf{u}$, Ω , $\mathbf{F}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{p}$ ve $\mathbf{m}$ vektörleri, şekil değiştirmelerin küçük olduğu varsayımıyla şekil değiştirmemiş çubuk eksenine yerleştirilmiş $\mathbf{e}_n^0, \mathbf{e}_b^0, \mathbf{e}_t^0$ eksen takımında,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= u\mathbf{e}_n^0 + v\mathbf{e}_b^0 + w\mathbf{e}_t^0 \\
\Omega &= \Omega_n\mathbf{e}_n^0 + \Omega_b\mathbf{e}_b^0 + \Omega_t\mathbf{e}_t^0 \\
\mathbf{F} &= F_n\mathbf{e}_n^0 + F_b\mathbf{e}_b^0 + F_t\mathbf{e}_t^0 \\
\mathbf{M} &= M_n\mathbf{e}_n^0 + M_b\mathbf{e}_b^0 + M_t\mathbf{e}_t^0 \\
\mathbf{p} &= p_n\mathbf{e}_n^0 + p_b\mathbf{e}_b^0 + p_t\mathbf{e}_t^0 \\
\mathbf{m} &= m_n\mathbf{e}_n^0 + m_b\mathbf{e}_b^0 + m_t\mathbf{e}_t^0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Ekseni herhangi bir uzaysal eğri olan çubuk için, kesit asal eksenleri ile çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal eksenlerinin çakışması durumunda, açısal değişim vektörü

$$\omega_0 = \kappa_0\mathbf{e}_n^0 + \kappa'_0\mathbf{e}_b^0 + \tau_0\mathbf{e}_t^0 \tag{3.27}$$

Şeklinde ifade edilir. Burada κ_0 , $(\mathbf{e}_b^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, κ'_0 , $(\mathbf{e}_n^0 - \mathbf{e}_t^0)$ düzlemindeki eğrilik bileşeni, τ_0 ise eğrinin burulma açısıdır. [1]

(3.26) denklemlerindeki büyüklüklerin türevi,

$$\frac{d\mathbf{e}_i^0}{ds} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{e}_i^0 \quad (3.28)$$

denkleminde hesaplanabilir.

Asal eksenleri, eksen eğrisinin normal ve binormal eksenleri ile çakışan eğri eksenli çubuklar,

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= 0 \\ \kappa'_0 &= \frac{1}{R_0} \\ \tau_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

şeklinde hesaplanır. Bu durumda (3.25) denklemleri,

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_0} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} &= 0 & \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R_0} + p_n &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} &= 0 & \frac{dF_b}{ds} + p_b &= 0 \\ \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_0} - \frac{F_t}{C_t} &= 0 & \frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{R_0} + p_t &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{ds} - \frac{\Omega_t}{R_0} - \frac{M_n}{D_n} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + m_n &= 0 \\ \frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + F_n + m_b &= 0 \\ \frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R_0} - \frac{M_t}{D_t} &= 0 & \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R_0} + m_t &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. Burada çubuk kesit alanı normal ve binormal eksenlere göre simetrik varsayıldığından düzlem içindeki ve düzlem dışındaki eğilmelerle ilgili büyüklükler aynı denklemlerde birlikte bulunmamaktadır. Dolayısıyla düzlemsel eğri eksenli çubuğun kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerini ifade eden (3.30) denklemlerinde, yay uzunluğu yerine $ds = R_0 d\vartheta$ konulursa,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R_0(\phi)}{C_t(\phi)} F_t \\
\frac{du}{d\phi} &= -\omega + \frac{R_0(\phi)}{C_n(\phi)} F_n + R_0(\phi)\Omega_b \\
\frac{d\Omega_b}{d\phi} &= \frac{R_0(\phi)}{D_b(\phi)} M_b \\
\frac{dM_b}{d\phi} &= -R_0(\phi) F_n - R_0(\phi) m_b \\
\frac{dF_t}{d\phi} &= F_n - R_0(\phi)p_t \\
\frac{dF_n}{d\phi} &= -F_t - R_0(\phi)p_n
\end{aligned} \tag{3.31}$$

şeklinde düzlem içine ait denklemler elde edilir. Aynı şekilde düzlem dışı şekil değiştirmelere ait denklemler ise,

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\phi} &= \frac{R_0(\phi)}{C_b(\phi)} F_b - R_0(\phi)\Omega_n \\
\frac{d\Omega_n}{d\phi} &= -\Omega_t + \frac{R_0(\phi)}{D_n(\phi)} M_n \\
\frac{d\Omega_t}{d\phi} &= \Omega_n + \frac{R_0(\phi)}{D_t(\phi)} M_t \\
\frac{dM_n}{d\phi} &= -M_t + R_0(\phi) F_b - R_0(\phi) m_n \\
\frac{dM_t}{d\phi} &= M_n - R_0(\phi) m_t \\
\frac{dF_b}{d\phi} &= -R_0(\phi)p_b
\end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklindedir. Bu denklemlerdeki sembollerin açıklamalarına çizelge (3.2)'de yer verilmiştir.

Çizelge 3.2 : Denklemlerdeki sembollerin açıklamaları.

$u - w - v$	$\rightarrow$	Normal – teğetsel – binormal yer değiştirme
$\emptyset$	$\rightarrow$	Açısal koordinat
$\Omega_n - \Omega_t - \Omega_b$	$\rightarrow$	Normal – teğetsel – binormal eksenlerdeki dönme açısı
$R_0(\emptyset)$	$\rightarrow$	Eksen eğrilik yarıçapı
$F_n - F_t - F_b$	$\rightarrow$	Normal – teğetsel – binormal tekil iç kuvvetleri
$M_n - M_t - M_b$	$\rightarrow$	Normal – teğetsel – binormal tekil iç momentleri
$p_n - p_t - p_b$	$\rightarrow$	Normal – teğetsel – binormal yayılı dış yükleri
$m_n - m_t - m_b$	$\rightarrow$	Normal – teğetsel – binormal yayılı dış momentleri

3.2. Çubuk Titreşimlerinin Genel Denklemleri

Çubuk teorisinin genel denklemleri, (3.30) eşitlikleri ile verilmektedir. Denklemlerde, eksen eğrisinin uzaması ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmaktadır. D'Alembert prensibi yardımı ile, çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa, sistem bütün bu kuvvetlerin etkisi altında, t anındaki konumunda dengede bulunur. Böylece p ve m dış yükleri;

$$\begin{aligned}
 p_n &= -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & m_n &= -\frac{\mu}{A} I_n \frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial t^2} \\
 p_b &= -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} & m_b &= -\frac{\mu}{A} I_b \frac{\partial^2 \Omega_b}{\partial t^2} \\
 p_t &= -\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} & m_t &= -\frac{\mu}{A} I_p \frac{\partial^2 \Omega_t}{\partial t^2}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

şeklinde kuvvetli çiftleri olarak ifade edilebilir. Burada μ birim alanın kütlesi, A kesit alanını, I_n , I_b ve I_p ise sırası ile normal, binormal ve polar eylemsizlik momentini

göstermektedir. Yer değiştirme konum ve zamanın fonksiyonları olduğu için denklemlerdeki tüm büyüklüklerde konum ve zamanın fonksiyonları olmalıdır. Bu büyüklükler,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s, t) &= \mathbf{u}(s)e^{i\omega t} & \Omega(s, t) &= \Omega(s)e^{i\omega t} \\ \mathbf{F}(s, t) &= \mathbf{F}(s)e^{i\omega t} & \mathbf{M}(s, t) &= \mathbf{M}(s)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.34)$$

şeklinde. Buradaki ω açısal frekansı, t ise zamanı göstermektedir. Bu eşitlikler (3.33) denklemlerinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} p_n &= \mu\omega^2 u(s)e^{i\omega t} & m_n &= \frac{\mu}{A} I_n \omega^2 \Omega_n(s)e^{i\omega t} \\ p_b &= \mu\omega^2 v(s)e^{i\omega t} & m_b &= \frac{\mu}{A} I_b \omega^2 \Omega_b(s)e^{i\omega t} \\ p_t &= \mu\omega^2 w(s)e^{i\omega t} & m_t &= \frac{\mu}{A} I_p \omega^2 \Omega_t(s)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.35)$$

denklemleri elde edilir. Bu elde edilen ifadeler de (3.30) genel denklemleri yerine konulur ve zaman fonksiyonları sadeleştirilirse geriye düzlemsel eğri eksenli çubuğun statik titreşimlerinin sadece konuma ve frekansa bağlı olan genel denklem takımları kalacaktır.

Kesit asal doğrultularının, çubuk eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularıyla çakışması durumunda ise (3.29) denklemleri geçerli olacak ve aşağıdaki denklemler elde edilecektir,

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} - \Omega_b - \frac{F_n}{C_n} &= 0 & \frac{dF_n}{ds} + \frac{F_t}{R} + \mu\omega^2 u &= 0 \\ \frac{dv}{ds} + \Omega_n - \frac{F_b}{C_b} &= 0 & \frac{dF_b}{ds} + \mu\omega^2 v &= 0 \\ \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R} - \frac{F_t}{C_t} &= 0 & \frac{dF_t}{ds} - \frac{F_n}{R} + \mu\omega^2 w &= 0 \\ \frac{d\Omega_n}{ds} - \frac{\Omega_t}{R} - \frac{M_n}{D_n} &= 0 & \frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{R_0} - F_b + \frac{\mu}{A} I_n \omega^2 \Omega_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_b}{ds} - \frac{M_b}{D_b} &= 0 & \frac{dM_b}{ds} + F_n + \frac{\mu}{A} I_b \omega^2 \Omega_b &= 0 \\
\frac{d\Omega_t}{ds} - \frac{\Omega_n}{R} - \frac{M_t}{D_t} &= 0 & \frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{R_0} + \frac{\mu}{A} I_p \omega^2 \Omega_t &= 0
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Burada, düzlem içindeki ve dışındaki titreşimlerle ilgili değerlerin ayrı denklemlerde yer aldıkları gözlemlenebilir. Dolayısıyla düzlemsel eğri eksenli çubuğun serbest titreşimlerini ifade eden genel denklemlerde yay uzunluğu yerine $ds = R_0 d\phi$ eşitliği konularak düzenlenir ve C,D rijitlik matrislerine ait değerler yerlerine konulursa çubuğun kendi düzlemindeki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{d\phi} &= u + \frac{R}{EA} F_t \\
\frac{du}{d\phi} &= -\omega + \frac{RF_n}{GA/k_n} + R\Omega_b \\
\frac{d\Omega_b}{d\phi} &= \frac{R}{EI_b} M_b \\
\frac{dM_b}{d\phi} &= -RF_n - R\mu \frac{I_b}{A} \omega^2 \Omega_b \\
\frac{dF_t}{d\phi} &= F_n - R\mu \omega^2 w \\
\frac{dF_n}{d\phi} &= -F_t - R\mu \omega^2 u
\end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir.

Aynı şekilde çubuğun kendi düzlemine dik doğrultudaki serbest titreşimlerini ifade eden denklemler ise aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\phi} &= \frac{RF_b}{GA/k_b} - R\Omega_n \\
\frac{d\Omega_n}{d\phi} &= -\Omega_t + \frac{R}{EI_n} M_n \\
\frac{d\Omega_t}{d\phi} &= \Omega_n + \frac{R}{GJ} M_t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dM_n}{d\phi} &= -M_t + RF_b - R\mu \frac{I_n}{A} \omega^2 \Omega_n \\
\frac{dM_t}{d\phi} &= M_n - R\mu \frac{I_p}{A} \omega^2 \Omega_t \\
\frac{dF_b}{d\phi} &= -R\mu \omega^2 v
\end{aligned} \tag{3.38}$$

4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Matrikant Yöntemi

Diferansiyel denklemlerin kesin çözümü birçok yöntem ve bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmaktadır. Ancak bazı diferansiyel denklemlerin kesin çözümünün hesaplanması oldukça zordur. İşte matrikant veya diğer adıyla yaklaşık taşıma matrisi metodu bu gibi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerin hesaplanmasında kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

(4.1)'deki gibi bir diferansiyel denklemi ele alalım. Bu denklemde $\frac{dy}{dx}$ ve y sütun matris, $A[t]$ kare matris olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = A[t]y$$
$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Denklemde y ifadesi yerine M_k ($k=0,1,2,\dots,\infty$) taşıma matrisini koyarsak denklem (4.2)'deki gibi olur;

$$\frac{dX_k}{dt} = A[t]M_{k-1} \quad (k = 0,1,2,\dots,\infty) \quad (4.2)$$

Burada I birim matris olarak alınırsa, (4.3)'deki gibi matrikantın genel ifadesi elde edilir.

$$M_k = I + \int_0^t A[\tau]M_{k-1} d\tau \quad (4.3)$$

Bu ifadenin birkaç terimi aşağıdaki gibi hesaplanırsa,

$$M_0 = I$$

$$M_1 = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

$$M_2 = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau) \left(\int_{t_0}^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) d\tau \quad (4.4)$$

şeklinde terimler elde edilir. Burada M matrisi, (t, t_0) aralığında $[A]$ matrisinin matrikantını, t_0 , $t=0$ başlangıç referans noktasını, I birim matrisi, τ, σ sembolleri ise rastgele değişkenleri ifade eder.

Ayrıca, M_k ($k=0,1,2,\dots,\infty$) terimli taşıma matrisinin $(k+1)$ elemanı (k) terime gelen ek ifadelerle oluşmaktadır. Dikkat edilmesi gereken nokta ise iki veya ikiden fazla integral hesabının olduğu ifadelerin değişken dönüşümü yapılarak hesaplandığıdır.

Taşıma matrisinde kaç terim alınıp hesap yapılacağına yakınsama yoluyla karar verildikten sonra taşıma matrisi $y(0)$ ile çarpılarak çözüm elde edilir. Taşıma matrisiyle çözüm yapabilmek için denklemin başlangıçtaki değerleri bilinmelidir.

$$y(t) = M(k) y(0) \quad (4.5)$$

4.1.1. Matrikant yönteminde alternatif çözümler

Diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde matrikant yöntemini kullanmak büyük avantajlar ve çözüm kolaylığı sağlar. Fakat en yakın çözümü bulabilmek için matrikant serisini olabildiğince ilerletmek gerekir. Bu durumda belli bir terim sayısından sonra matrikantı hesaplamak güçleşir. İşte daha yakınsak çözümler elde edebilmek için matrikant önce belli bir terime kadar alınır ve sonrasında çözümün istendiği aralık daha küçük parçalara bölünerek hesaplama gerçekleştirilir. Bu sayede hem hesap kolaylığı hem de yakınsak çözüm elde edilir.

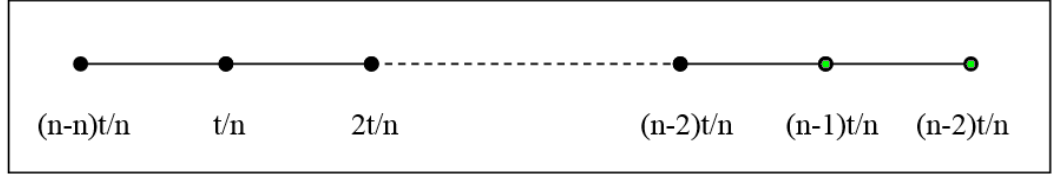
Çözümün sınırlarının aralıklara bölünmesi hesaplanırken integral sınırları (t, t_0) yerine (t, u) olarak alınır. Böylece matrikant terimleri aşağıdaki gibi

$$M_0 = I$$

$$M_1 = M_0 + \int_u^t A(\tau) d\tau$$

$$M_2 = M_0 + \int_u^t A(\tau) d\tau + \int_u^t A(\tau) \left(\int_u^\tau A(\sigma) d\sigma \right) d\tau \quad (4.6)$$

Yazılabilir. Burada matrikant denklemi iki terimde bırakılmıştır. Eleman sayısı istenildiği kadar ilerletilebilir. İşlemler bu noktaya getirildikten sonra yaklaşık taşıma matrisinin kaç aralığa bölünerek hesaplanacağına karar verilir. Şekil 4.1’de (0-t) aralığının n parçaya bölünmüş hali görülmektedir.



Şekil 4.1 : Hesap sınırlarının aralıklara bölünmesi.

Bu durumun denklemle gösterimi ise aşağıdaki gibidir.

$$M_k \left(t, \frac{(n-1)t}{n} \right) M_k \left(\frac{(n-1)t}{n}, \frac{(n-2)t}{n} \right) \cdots M_k \left(\frac{2t}{n}, \frac{t}{n} \right) M_k \left(\frac{t}{n}, \frac{(n-n)t}{n} \right) \quad (4.7)$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, aralık n parçaya bölündüğünden yaklaşık taşıma matrisinin n tane terimin çarpımına eşit olduğudur.

Bu yöntemle (t, t_0) integral sınırları içerisindeki matrikant hesaplandıktan sonra $y = M_k y(0)$ hesaplanmak suretiyle denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

4.1.2. Matrikant yöntemiyle örnek denklem çözümü

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Yukarıdaki (4.8) denkleminin kesin çözümü rahatlıkla bulunabilir. Ancak biz kesin çözümden çok matrikant yöntemiyle yaklaşık çözümü hesaplayacağız.

Kesin çözümler (4.9) denklemlerindeki gibi olur;

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_1 + y_2 & y_1 &= e^t(t+1) \\ y(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{dy_2}{dt} &= -y_1 & y_2 &= -e^t t \end{aligned} \quad (4.9)$$

Yaklaşık çözüm için matrikantını hesaplırsak;

$$\begin{aligned} X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X_1 &= X_0 + \int_0^t A(\tau) d\tau \\ X_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 2t+1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \\ X_2 &= X_1 + \int_0^t A(\tau) \left(\int_0^\tau A(\sigma) d\sigma \right) d\tau \\ X_2 &= \begin{pmatrix} 2t+1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\tau & \tau \\ -\tau & 0 \end{pmatrix} d\tau \\ X_2 &= \begin{pmatrix} \frac{3t^2}{2} + 2t + 1 & t^2 + t \\ -t^2 - t & -\frac{t^2}{2} + 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Matrikant olarak X_2 seçilmiştir. X_1 de kullanılabilir fakat X_2 daha doğru sonuç verecektir. Daha yakınsak sonuçlar için matrikant devam ettirilebilir fakat bu durumda hesaplama giderek zorlaşacaktır.

Denklemin çözümü için ise;

$$y = X_k \cdot y(0) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3t^2}{2} + 2t + 1 & t^2 + t \\ -t^2 - t & -\frac{t^2}{2} + 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{3t^2}{2} + 2t + 1 \quad y_2 = -t^2 - t \quad (4.11)$$

şeklindedir. Bulunan çözümler yapısal olarak kesin çözüme benzemediği halde değer verilerek hesaplandığında yaklaşık çözüm ile kesin çözümler birbirlerine oldukça yakın sonuçlar verirler;

$$\begin{aligned} y_{1yak}(0,1) &= 1,215 & y_{1kesin}(0,1) &= 1,21568 \\ y_{1yak}(0,2) &= 1,46 & y_{1kesin}(0,2) &= 1,465 \\ y_{2yak}(0,1) &= -0,11 & y_{2kesin}(0,1) &= -0.1105 \\ y_{2yak}(0,2) &= -0,24 & y_{2kesin}(0,2) &= -0,244 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Yaklaşık çözümlerde ufak değerler verildiğinde sonuçlar kesin çözüme çok yakın çıkar. Ancak yukarıda da görüldüğü gibi değerler büyüdükçe yaklaşık çözüm kesin çözümden ıraksamaya başlar. Bu durumu önlemek için matrikantı belli bir terime kadar aldıktan sonra istenilen değer aralığını, daha önce belirtildiği gibi parçalara bölmek gereklidir. Bunun içinde matrikant sınırları $(0,t)$ yerine (u,t) olarak alınır. Matrikant bu şekilde hesaplandıktan sonra aralığın kaç parçaya bölüneceğine karar verilir ve hesaplamalar bu yönde devam ettirilirse (4.13) denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} X_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ X_1 &= X_0 + \int_u^t A(\tau) d\tau \\ X_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_u^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 2t - 2u + 1 & t - u \\ -t + u & 1 \end{pmatrix} \\ X_2 &= X_1 + \int_u^t A(\tau) \left(\int_u^\tau A(\sigma) d\sigma \right) d\tau \\ X_2 &= \begin{pmatrix} 2t - 2u + 1 & t - u \\ -t + u & 1 \end{pmatrix} + \int_u^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\tau - 2u & \tau - u \\ -\tau + u & 0 \end{pmatrix} d\tau \end{aligned}$$

$$F[t, u] = \begin{pmatrix} 1 - 2u + \frac{3u^2}{2} + 2t - 3ut + \frac{3t^2}{2} & -u + u^2 + t - 2ut + t^2 \\ u - u^2 - t + 2ut - t^2 & 1 - \frac{u^2}{2} + ut - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Yukarıdaki matriste u değerine sıfır verildiğinde daha önce hesaplamış olduğumuz matrikanta ulaşmış oluruz. Ancak aralığı kaç parçaya bölmeye karar verdikten sonra u değerini aralıklar boyunca sıfıra götürmek bize en yaklaşık sonucu verecektir. Bu işlemi de her bir aralığın sınır değerleri u ve t yerine konulduktan sonra bunları aynı sırayla çarparak gerçekleştiririz.

$y(2)$ değerini hesaplamak için matrikanti sırasıyla 3,6 ve 10 parçaya bölerek hesaplayalım (4.14)

Üçe bölersek;

$$F[2,0] = F\left[2, \frac{4}{3}\right] \cdot F\left[\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right] \cdot F\left[\frac{2}{3}, 0\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 18.6324 & 11.893 \\ -11.893 & -5.15364 \end{bmatrix}$$

Altıya bölersek;

$$F[2,0] = F\left[2, \frac{5}{3}\right] \cdot F\left[\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right] \cdot F\left[\frac{4}{3}, 1\right] \cdot F\left[1, \frac{2}{3}\right] \cdot F\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right] \cdot F\left[\frac{1}{3}, 0\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 20.9598 & 13.7818 \\ 13.7818 & -6.60378 \end{bmatrix}$$

Ona bölersek;

$$F[2,0] = F\left[2, \frac{9}{5}\right] \cdot F\left[\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right] \cdot F\left[\frac{8}{5}, \frac{7}{5}\right] \cdot F\left[\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right] \cdot F\left[\frac{6}{5}, 1\right] \cdot F\left[1, \frac{4}{5}\right] \cdot F\left[\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right] \cdot F\left[\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right] \cdot F\left[\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right] \cdot F\left[\frac{1}{5}, 0\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 21.6744 & 14.3698 \\ -14.3698 & -7.0651 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$y(2) = F[2,0].y(0)$ denkleminin en doğru sonucunu en fazla aralığa bölünmüş olan değer verir. Burada on aralıktan oluşan değeri ele alırsak denklem (4.15) gibi olur;

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 21.6744 & 14.3698 \\ -14.3698 & -7.0651 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Denklemin kesin sonucu ise (4.11)'deki denklemlere göre aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} y_{1kesin}(2) &= 22.167 \\ y_{2kesin}(2) &= -14.778 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Aralıklara bölünmeden elde edilen sonuçlarla on aralığa bölünen sonuçlar arasındaki fark aşağıdaki (4.17) denklemlerinde açıkça görülebilir;

$$\begin{aligned} y_{1yak}(2) &= 11 & y_{1on}(2) &= 22.167 \\ y_{2yak}(2) &= -6 & y_{2on}(2) &= -14.778 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Yukarıda da açıkça görüldüğü gibi yaklaşık taşıma matrisine değerler doğrudan konulduğu zaman, özellikle değer büyüdükçe kesin ile yaklaşık çözüm arasındaki fark artmaktadır. Ancak aralık ne kadar çok parçaya bölünürse yaklaşık değer de kesin değere o kadar yakın çıkmaktadır.

4.2. Eğri Eksenli Çubukların Titreşimlerinin Matrikant Yöntemi ile Çözümü

Düzlemsel eğri eksenli çubukların, düzlem içi ve düzlem dışı serbest titreşimlerini ait verilen (3.37) ve (3.38) denklemleri, birinci mertebeden değişken katsayılı, lineer diferansiyel denklem takımıdır ve;

$$\frac{dy(\phi)}{d\phi} = A(\phi) y(\phi) \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilebilirler. Homojen bir denklem olan (4.18) denkleminin $A(\phi)$ katsayılar matrisi incelendiğinde değişken katsayılar nedeniyle bir asal matris elde edebilmenin mümkün olmadığı görülmektedir. Yani bu denklem için doğrudan doğruya bir kesin çözüm elde etmek mümkün değildir. Sonuç ancak yaklaşık çözümlerle olur.

Burada 6x6 elemanlı $\mathbf{A}(\phi)$ katsayılar matrisi düzlem içi serbest titreşimler için;

$$y(\phi) = \begin{bmatrix} \omega \\ u \\ \Omega_b \\ M_b \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & R/EA & 0 \\ -1 & 0 & R & 0 & 0 & Rk_n/GA \\ 0 & 0 & 0 & R/EI_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R\mu(I_b/A)\omega^2 & 0 & 0 & -R \\ -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

düzlem dışı serbest titreşimler için ise;

$$y(\phi) = \begin{bmatrix} v \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n \\ M_t \\ F_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & -R & 0 & 0 & 0 & Rk_b/GA \\ 0 & 0 & -1 & R/EI_n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R/GJ & 0 \\ 0 & -R\mu(I_n/A)\omega^2 & 0 & 0 & -1 & R \\ 0 & 0 & -R\mu(I_p/A)\omega^2 & 1 & 0 & 0 \\ -R\mu\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir.

Daha önce de belirtildiği gibi yukarıdaki diferansiyel denklem takımları, sürekli değişken kesitli çubukları ifade ettiği zaman katsayılar matrisinin elemanları sabit sayılar değildir. Böyle bir çubukta A , I_b , I_n , I_p ve J ifadeleri ϕ açısına bağlı olarak değişkenlik gösterirler.

Böylece (3.37) ve (3.38) denklemleri

$$A = A(\phi)$$

$$\mu = \mu(\phi)$$

$$I_b = I_b(\phi)$$

$$I_n = I_n(\phi)$$

$$I_p = I_p(\phi)$$

$$J = J(\phi)$$

şeklinde tanımlanan katsayılar ile birlikte düzlem içi için;

$$\frac{dw}{d\phi} = u(\phi) + \frac{R}{EA(\phi)} F_t$$

$$\frac{du}{d\phi} = -\omega + \frac{RF_n}{GA(\phi)/k_n} + R\Omega_b$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = \frac{R}{EI_b(\phi)} M_b$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -RF_n - R\mu(\phi) \frac{I_b(\phi)}{A(\phi)} \omega^2 \Omega_b$$

$$\frac{dF_t}{d\phi} = F_n - R\mu(\phi) \omega^2 w$$

$$\frac{dF_n}{d\phi} = -F_t - R\mu(\phi) \omega^2 u \quad (4.21)$$

düzlem dışı için ise;

$$\frac{dv}{d\phi} = \frac{RF_b}{GA(\phi)/k_b} - R\Omega_n$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{EI_n(\phi)} M_n$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{GJ(\phi)} M_t$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + RF_b - R\mu(\phi) \frac{I_n(\phi)}{A(\phi)} \omega^2 \Omega_n$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R\mu(\phi) \frac{I_p(\phi)}{A(\phi)} \omega^2 \Omega_t$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R\mu(\phi) \omega^2 v \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanır. Çubuğun eğrilik ekseninin çemberden farklı olması durumunda (parabol, spiral, eliptik vb.) ise

$$R = R(\phi) \quad (4.23)$$

durumu eklenecektir.

Yukarıdaki ifadelere göre; (4.18)'deki denklem takımının yaklaşık çözümü, matrikant yöntemi kullanılarak, (4.5) eşitliğindeki gibi ifade edilirse;

$$y(\phi) = M_k(\phi, \phi_0) y(\phi_0) \quad (4.24)$$

denklemini ile bulunabilir. Burada $M_k(\phi, \phi_0)$ matrikant, (4.3) ve (4.4) eşitlikleri

$$M_k(\phi, \phi_0) = I + \int_{\phi_0}^{\phi} A[\tau] M_{k-1} d\tau$$

$$M_k(\phi, \phi_0) = I + \int_{\phi_0}^{\phi} A(\tau) d\tau + \int_{\phi_0}^{\phi} A(\tau) \left(\int_{\phi_0}^{\tau} A(\sigma) d\sigma \right) d\tau + \dots \quad (4.25)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklemin k terim sayısı belirlenerek (ϕ, ϕ_0) sınırları n parçaya bölünerek, çözüm iyileştirilir.

$$M_k \left(\phi, \frac{(n-1)\phi}{n} \right) M_k \left(\frac{(n-1)\phi}{n}, \frac{(n-2)\phi}{n} \right) \dots M_k \left(\frac{2\phi}{n}, \frac{\phi}{n} \right) M_k \left(\frac{\phi}{n}, 0 \right) \quad (4.26)$$

Yukarıdaki denklemde ϕ toplam giriş açısı, çubuğun $\phi_0 = 0$ başlangıç noktasından çubuğun uçları arasındaki giriş açılarının toplamıdır. Yani $\phi_0 = 0$ ile A ucu arasındaki açı ϕ_A , B ucu arasındaki açı ise ϕ_B olarak gösterilir ve $\phi = \phi_A + \phi_B$ dir. $y(\phi_0)$ olarak gösterilen başlangıç değerleri vektörünün 6 bilinmeyen, çubuğun her iki ucundaki sınır şartları yardımıyla oluşturulacak denklemler yazılarak çözülecektir. Çubuğun her iki ucu A ve B için sınır şartları;

Düzlem içi titreşim problemlerinde;

$$\text{Sabit mesnet : } \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{M}_b(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Ankastre mesnet : } \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_b(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Serbest mesnet : } \boldsymbol{M}_b(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{F}_t(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

Düzlem dışı titreşim problemlerinde ise;

$$\text{Sabit mesnet : } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Ankastre mesnet : } \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega}_t(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Serbest mesnet : } \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{M}_t(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{F}_b(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{0} \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir. Sınır şartlarından elde edilen bu 6 denklem, homojen diferansiyel denklem takımını oluşturur.

Yazılan bu denklemlerin tamamının sıfıra eşitlendiği görülmektedir. Bu nedenle $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\phi}_0)$ vektörünün sıfırdan farklı bir çözümü olması için bu denklemlerin katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Determinant $\boldsymbol{\omega}$ doğal frekans değerine bağlı bir ifadedir. Burada (4.25) ve (4.26) denklemlerinden k ve n değerleri belirlendikten sonra düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlere göre çubuğun her iki noktasının da sınır şartları belirlenir ve

$$\det[N(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\phi}_0)] = 0 \quad (4.29)$$

denklemini sıfıra eşitleyen kökler bulunur. Buradaki N ifadesi $\boldsymbol{M}_k$ matrisinin sınır koşullarını yazarak oluşturduğumuz yeni matristir. Kökler Regula-Falsi, Newton-Raphson veya benzeri sayısal yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Bu köklerden A katsayılar matrisinin düzlem içi veya düzlem dışı $\boldsymbol{\omega}$ doğal frekansları elde edilir. Örneğin ankastre-serbest sınır şartlarındaki N matrisi aşağıdaki şekildedir;

$$N = \begin{bmatrix} M_{11}(\phi_A) & M_{12}(\phi_A) & M_{13}(\phi_A) & M_{14}(\phi_A) & M_{15}(\phi_A) & M_{16}(\phi_A) \\ M_{21}(\phi_A) & M_{22}(\phi_A) & M_{23}(\phi_A) & M_{24}(\phi_A) & M_{25}(\phi_A) & M_{26}(\phi_A) \\ M_{31}(\phi_A) & M_{32}(\phi_A) & M_{33}(\phi_A) & M_{34}(\phi_A) & M_{35}(\phi_A) & M_{36}(\phi_A) \\ M_{41}(\phi_B) & M_{42}(\phi_B) & M_{43}(\phi_B) & M_{44}(\phi_B) & M_{45}(\phi_B) & M_{46}(\phi_B) \\ M_{51}(\phi_B) & M_{52}(\phi_B) & M_{53}(\phi_B) & M_{54}(\phi_B) & M_{55}(\phi_B) & M_{56}(\phi_B) \\ M_{61}(\phi_B) & M_{62}(\phi_B) & M_{63}(\phi_B) & M_{64}(\phi_B) & M_{65}(\phi_B) & M_{66}(\phi_B) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

5. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN MATRİKANT YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem içi titreşimleri ilgili çok sayıda çalışma ve örnek bulunmasına rağmen bu durum düzlem dışı titreşimlerde tam tersi haldedir ve karşılaştırılabilir örnek sayısı oldukça kısıtlıdır.

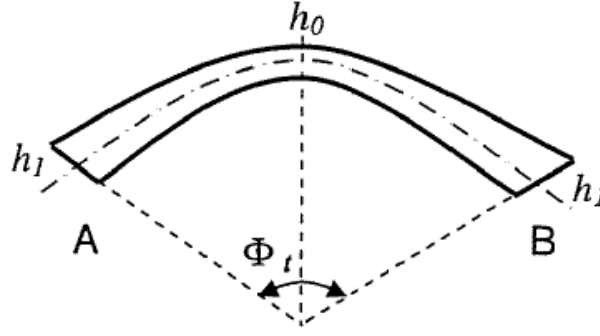
Bu bölümde kısıtlı olsalar da literatürdeki düzlem dışı problemleri bir önceki bölümde bahsettiğimiz matrikant yöntemi ile çözülmüş ve elde edilen çözümler ile önceki hesaplamalar karşılaştırılmıştır.

5.1. Düzlem Dışı Titreşim Problemlerinin Tanımı ve Analizi

Düzlem dışı çubuk teorisindeki ν , Ω_t , Ω_n , M_n , M_t ve F_b şeklindeki altı bilinmeyen, çubuğun düzlem dışı titreşimlerini ifade eden (3.38) denklemlerinde belirtilmiştir. Bu eşitlikler birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemler olup (4.20) denklemlerinde matris şeklinde gösterilmiştir.

Bu diferansiyel denklem takımının kesin çözümü elde edilemediği için yaklaşık çözüm matrikant yöntemi kullanılarak mesnetleme şartları belli olan değişken kesitli eğrisel çubukların doğal frekansları elde edilmeye çalışılmıştır.

Hesaplamalarda (4.25) deki matrikant ifadesi üç terimli olarak alınmış ve (4.26) da belirtildiği gibi yay açıklığı n parçaya bölünerek daha yakınsak bir çözüm elde edilmeye çalışılmıştır. Hesaplamalarda kullanılan referans çubuk ise şekilde gösterilmiştir.



Şekil 5.1 : Lineer değişken simetrik çubuk.

Bu çubuğun orta noktası $\phi_0=0$ referans alınarak, h yüksekliğinin değişimi ise;

$$h(\phi) = h_0(1 \pm 2\eta(\phi/\phi_t)) \quad -\phi_t/2 \leq \phi \leq 0 \quad (5.1)$$

şeklindedir. Burada;

$h_0 \rightarrow$ çubuğun referan noktasındaki kesitin yüksekliğini

$\phi_t \rightarrow$ toplam giriş açısını

$\phi \rightarrow$ açısal koordinatı

$\eta \rightarrow$ çubuğun kesit alanının değişim oranını

göstermektedir. Çubuğun h_0 ve R eksen eğriliği yarıçapı, narinlik oranı ile belirlenmiştir. λ ile gösterilen narinlik oranı

$$\lambda = \frac{R}{i} = \frac{R}{\sqrt{\frac{I_n}{A}}} \quad (5.2)$$

olarak tanımlanır. Jirasyon çapı i ile gösterilirken kesitin alanı ise b kesit derinliği olup eğri boyunca sabit olmak üzere $A=bh(\phi)$ şeklinde alınır.

Çubuk kesitinin normal eksene göre eylemsizlik momenti olan I_n ise;

$$I_n(\phi) = \frac{h(\phi)(b)^3}{12} \quad (5.3)$$

şeklindedir.

Katsayılar matrisindeki (4.20) diğer ifadelerin eşitlikleri ise aşağıdaki gibidir;

Polar eylemsizlik momenti I_p ;

$$I_p(\phi) = \frac{h(\phi)(b)^3}{12} + \frac{b(h(\phi))^3}{12} \quad (5.4)$$

Burulma eylemsizlik momenti J ise kesitte çarpılma olmaması durumunda yaklaşık olarak

$$J = \frac{WH^3}{3} \left[1 - 0.63 \frac{H}{W} \left(1 - \frac{H^4}{12W^4} \right) \right] \quad W \geq H \quad (5.5)$$

şeklinde alınır. W ve H sırasıyla çubuğun kesiti ve yüksekliğini göstermektedir. Özellikle dairesel çubuklarda ise J ifadesi,

$$J = I_p \quad (5.6)$$

şeklinde polar eylemsizlik momentine eşit olarak alınmaktadır. Ayrıca matristeki k_b sabiti incelenen çubuğun kesitine bağlı olarak çizelge(3.1)'deki gibi alınır.

Çubukların sınır şartları ise düzlem dışı olduklarından dolayı ankastre-ankastre, ankastre-serbest ve serbest-serbest olmak üzere üç farklı sınır şartı göz önünde bulundurularak incelenebilir. Çubukların iki uç noktaları için bu sınır koşullarından gelen eşitlikler (4.28)'de açıkça gösterilmiştir. Bu sınır şartlarıyla doğal frekans değerleri hesaplanırken çubuğun kayma deformasyonu, eğilme ve burulma eylemsizliği etkilerini ihmal ya da dahil eden durumları da incelenmiştir.

(Durum-1) Tüm etkiler dahil: Euler-Bernoulli teorisinde ihmal edilen bütün etkiler yani kayma deformasyonu, eğilme ve burulma dönme eylemsizlikleri dahil edilerek çubuğun doğal frekansı hesaplanır.

(Durum-2) Tüm etkiler ihmal: Euler-Bernoulli çubuk teorisinde olduğu gibi çubuğa etkiyen kayma deformasyonu ve burulma-eğilme dönme eylemsizliği etkileri ihmal edilerek hesaplama yapılır.

(Durum-3) Kayma deformasyonu dahil: Bu kabülde sadece kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınmıştır.

(Durum-4) Eğilme eylemsizliği dahil: Sadece eğilme sonucu oluşan dönme eylemsizliği etkisi dikkate alınmıştır.

(Durum-5) Burulma eylemsizliği dahil: Sadece burulma nedeniyle ortaya çıkan dönme eylemsizlik etkisi göz önüne alınarak frekans değerleri hesaplanır.

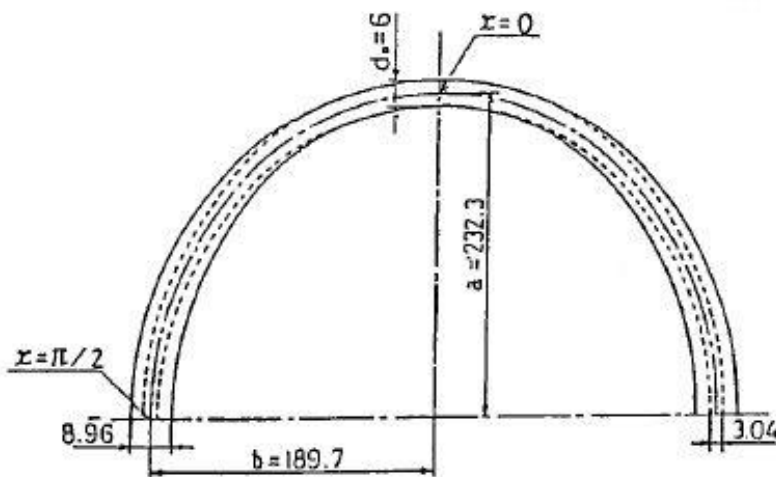
5.2. Sayısal Örnekler ve Çözümlerin Karşılaştırılması

Literatürde düzlem dışı titreşim problemleriyle ilgili daha çok sabit kesitli çubuklar üzerine çalışılmıştır. Sürekli değişken kesitli çubukların düzlem dışı titreşimlerini inceleyen çalışma sayısı oldukça azdır.

Bu nedenle düzlem dışı titreşim hesapları Huang [28] ve Suzuki [29]'nin üzerinde çalıştığı eliptik eksenli dairesel kesitli çubuğu referans alarak yapılmıştır. Ayrıca deneysel olarak kullanılan ve analiz programlarıyla hesaplanan değerler de matrikant metodundaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Huang doğal frekansları dinamik katılık matris metoduyla hesaplarken, Suzuki modal süperpozisyon tekniğiyle ele almıştır. Aralarındaki en önemli fark Huang tüm etkileri hesaba katarken, Suzuki tüm etkileri ihmal etmiştir. Matrikant metodunda ise tüm etkiler hesaba katıldığı için sonuçların Huang'ın değerlerine yakın çıktığı gözlemlenebilir.

Çözüm yaparken kullanılacak olan eliptik çubuk aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.2: Eliptik eksenli simetrik çubuk.

Bu çalışmada incelenen çubuk dairesel kesitlidir ve kesit çapı,

$$d(\phi) = d_0(1 + 0.2\phi^2) \quad -\phi_t/2 \leq \phi \leq 0 \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada d , çubuk kesitinin çapıdır. Dairesel kesitli çubuğun alanı,

$$A(\phi) = \pi(d(\phi)/2)^2 \quad (5.8)$$

olarak hesaplanır. Çubuğun normal eksene göre eylemsizlik momenti,

$$I_n(\phi) = \frac{\pi(d(\phi))^4}{64} \quad (5.9)$$

çubuğun polar eylemsizlik momenti,

$$I_p(\phi) = \frac{\pi(d(\phi))^4}{32} \quad (5.10)$$

Şeklinde alınmıştır. Ayrıca çubuk kesitinde çarpılma olmadığı kabul edilerek burulma eylemsizliği (5.11) denklemindeki gibi de alınabilir.

$$J = I_p \quad (5.11)$$

Eksen eğrisinin yarıçapı;

$$R = \sqrt{\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} \quad (5.12)$$

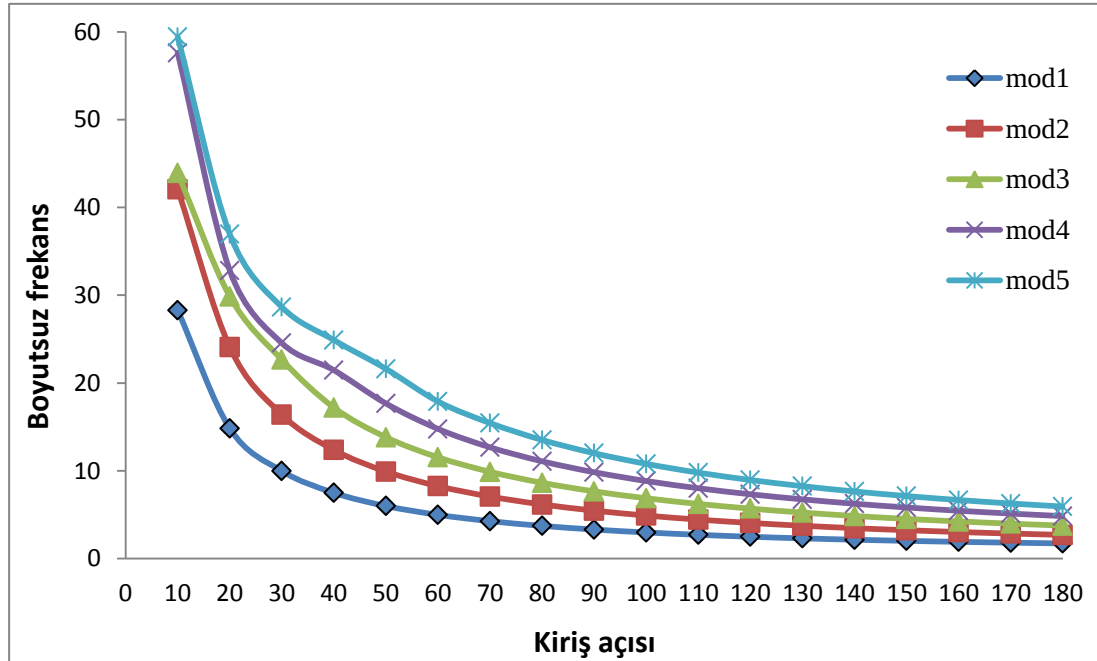
olarak hesaplanır. Buradaki a ve b değerleri Şekil (5.2)'den de görülebileceği şekilde sırasıyla 232,3 mm ve 189,7 mm dir.

Çubuğun orta noktası referans alınmış ve toplam kiriş açısı $\phi_t = 180^\circ$ kabul edilmiştir. Çubuğun kesit alanının değişim oranı η ise 0.2 olarak belirlenmiştir. Sonuçta eliptik eksenli çubuğun ankastre-ankastre sınır şartlarındaki 180° kiriş açısındaki boyutsuz frekans katsayıları ve doğal frekansları Çizelge (5.1)'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.1 : Eliptik eksenli simetrik çubuk için elde edilen düzlem dışı boyutsuz frekans değerlerinin ($c=(\omega^2 R_0^4 (\mu/(EI_n)))^{1/4}$) karşılaştırılması.

		$\phi_t=180^\circ$				
		Mod sayısı	[28]	[29]	[36]	Bu çalışma
A-A	1	1,710	1,711	1,745	1,737	
	2	2,663	2,665	2,685	2,708	
	3	3,728	3,732	3,744	3,767	
	4	4,815	4,824	4,784	4,850	
	5	5,906	5,921	5,873	5,929	
	6	6,994	7,018	6,919	7,007	

Bu durumun sadece 180° değil de bütün açılar için ilk beş modunun hesaplanmış hali Şekil (5.3)'de gösterilmiştir.



Şekil 5.3 : Ankastre-Ankastre mesnetli eliptik çubuğun ilk beş boyutsuz frekansı.

Grafikten de görüleceği gibi bazı açı değerlerinde, iki ayrı moda ait frekanslar birbirlerine çok yakın değerler almaktadırlar. Birbirine yakın frekansların, hemen öncesindeki açının ilk mod ve hemen sonrasındaki mod şekli neredeyse aynıdır. İşte farklı modlarda yakın frekansların elde edildiği bu duruma “mod geçişi” adı verilmektedir[11]. Yüksekliğin, kiriş açıklığına oranla az olduğu sığ çubuklarda bu durum daha da belirgindir.

(Şekil 5.3)'deki hesaplamalar tüm etkiler dahil edilerek yapılmıştır. (Şekil 5.4)'de ise eliptik eksenli çubuğun beş farklı etki durumu;

Durum 1: Tüm etkiler

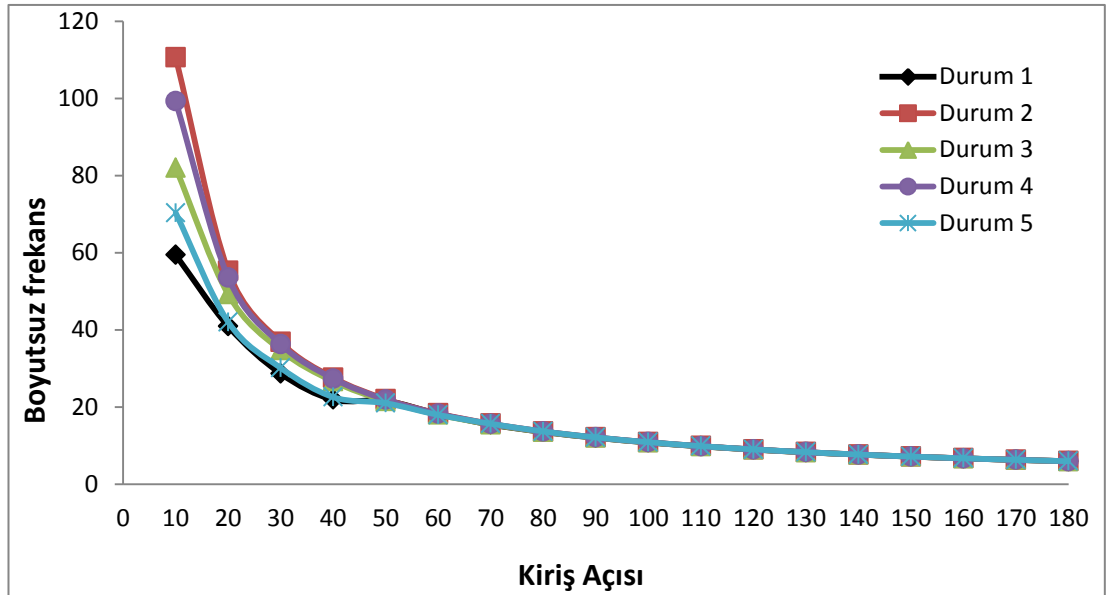
Durum 2: Tüm etkiler ihmal

Durum 3: Kayma deformasyonu etkisi

Durum 4: Eğilme eylemsizliği etkisi

Durum 5: Burulma eylemsizliği etkisi

için hesaplanan frekans değerleri verilmektedir.



Şekil 5.4 : Ankastre-Ankastre mesnetli eliptik eksenli çubuğun beş farklı durum için hesaplanan boyutsuz doğal frekansları.

Grafikten de görüldüğü üzere durum 1 ve durum 2 değerlerinin özellikle küçük kiriş açılarında birbirlerinden oldukça farklı olduğu, kiriş açısının artmasıyla birbirlerine yaklaştıkları görülmektedir. Matrikant yönteminin en önemli avantajlarından biri de bütün durumlar için ayrı ayrı hesap yapabilme kolaylığıdır. (Şekil 5.4) deki gibi kayma deformasyonu veya eğilme ve burulma dönme eylemsizliklerinin sonuca olan etkisi açıkça gözlemlenebilir.

5.3. Çözümü Etkiyen Parametreler ve Programın Optimizasyonu

Yapılan bütün hesaplamalar matrikant yönteminin Matlab paket programı yardımıyla yapılan çözümü sonucu elde edilmiştir. Kodlarda bulunan bazı değişkenler çözümün yakınsaklığını ve çözüm süresini doğrudan etkiler. İşte sonuçları etkileyen en önemli parametreler aşağıdaki gibidir;

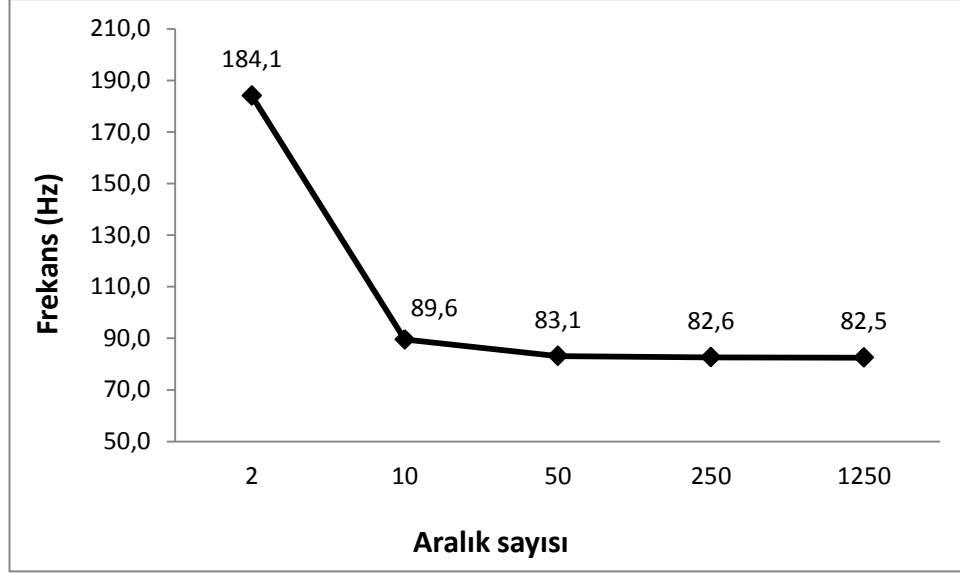
- 1) Matrikant terim sayısı:** Matrikant alınırken kaç terim ilerleneceği çözümü doğrudan etkileyen en önemli parametrelerden biridir. Terim sayısı az alınırsa çözümünden çok ıraksak sonuçlar alınabilir. Terim sayısının fazla alınması ise zaman bakımından sıkıntı yaratacaktır. Çizelge (5.2) de matrikant terimleri ile çözümün yakınsaklığı ve çözüm süresi arasındaki ilişki incelenmiştir.

Çizelge 5.2 : Matrikant terimi ile çözümün doğruluğu ve süresi arasındaki ilişki.

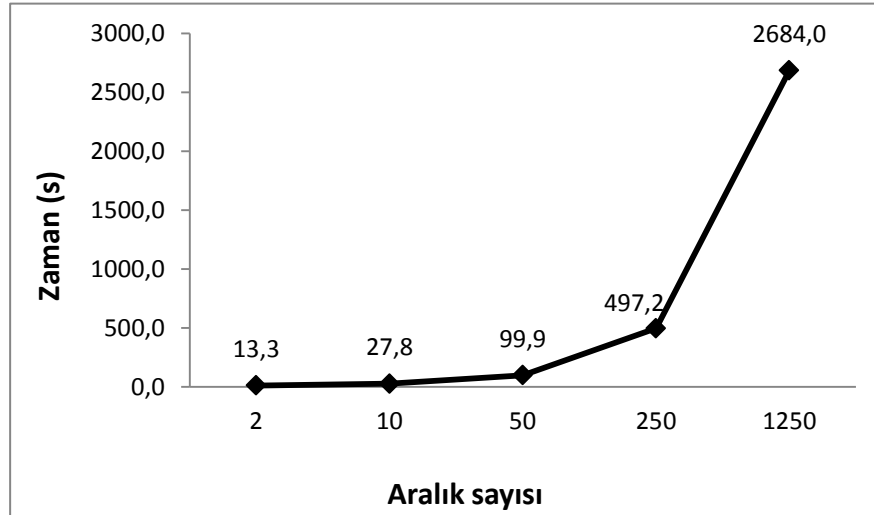
	Kiriş açısı	Mat-2	Mat-3	Mat-4	Mat-5
	30	22405	22525	22537	22539
Doğal	60	12063	12209	12218	12219
frekans	90	3921	3958	3962	3963
değerleri	120	2183	2203	2205	2205
(Hz)	150	1382	1395	1396	1396
	180	948	968	968	968

Çizelge üzerinden de görüldüğü gibi özellikle küçük açı değerlerinde matrikant terim sayısı daha çok önem kazanmaktadır. Ayrıca 3. terimden sonra doğal frekans sayısının önemli oranda değişmediği görülmektedir. Çözüm süresinin de terim sayısı arttıkça parabolik oranda artış göstermesi sonucu matrikantın 3 terimli olmasına karar verilmiştir.

- 2) Aralığa bölünme sayısı:** Matrikant hesaplanırken yay açıklığını, belli aralıklara bölüp sonucun kesin sonuca yakın olması sağlanmaktadır. Ne kadar çok aralığa bölünürse sonuç o kadar yakınsamaktadır. Fakat bu durum yine belli bir değerden sonra önemli oranda değişmemekte sadece çözüm süresini arttırmaktadır. Bu durum şekil (5.5) ve (5.6)'te gösterilmiştir.



Şekil 5.5 : Eliptik çubuğun doğal frekansının aralığa bölünme sayısına göre değişimi.

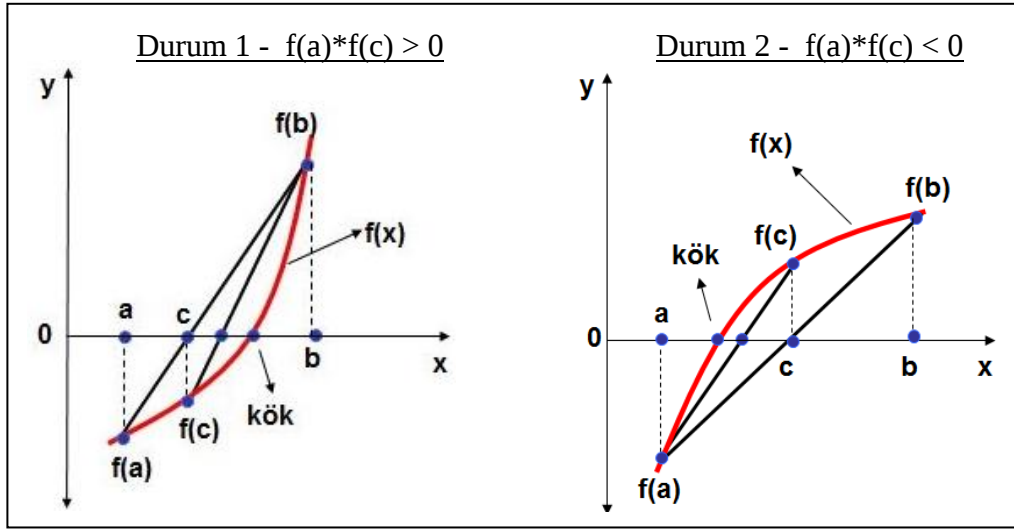


Şekil 5.6 : Eliptik çubuğun aralığa bölünme sayısının çözüm süresine göre değişimi.

Şekil (5.5)'de görüldüğü üzere eğri belli bir noktadan sonra aralık sayısı artmasına rağmen önemli bir oranda değişmemektedir. Şekil (5.6)'da ise aralık sayısı arttıkça çözüm süresi katlanarak artmaktadır. Bu noktada çözümün yakınsaklığı ve süresi açısından en uygun değer 50 olarak alınabilir.

Dördüncü bölümde belirtildiği gibi katsayılar matrisinin sınır şartlarının yazılmasıyla elde edilen yeni denklem takımının determinantı sıfıra eşitlenerek kökler bulunur. Bu kök bulma işlemi için Regula-Falsi(yer değiştirme) yöntemi kullanılmaktadır. Fakat matrikant çözümü için daha önceden kök aralığı bilinmediği için bir başlangıç

noktası “a” seçilir ve kök değerleri “Δ” kadar arttırılarak yeni bir c noktasına ulaşılır.



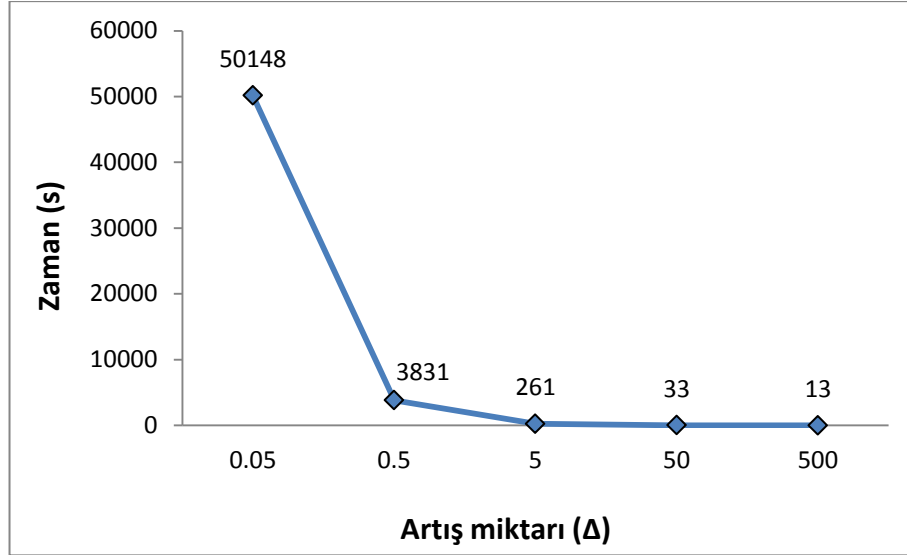
Şekil 5.7 : Regula-Falsi metodundaki olası durumlar.

İşte bütün bu işlemlerde çözümün doğruluğu için olmasa bile çözüm süresine etki eden Δ ve ϵ değerlerinin seçimi önem kazanmaktadır.

3) Kök artış oranı (Δ): Regula-Falsi yönteminde bir an önce köke ulaşmak için Δ değerinin uygun bir şekilde belirlenmesi gerekir. Bu durum hesaplanan değerde hiç bir değişiklik yapmazken (Çizelge 5.3), çözüm süresini ciddi derecede etkilemektedir.(Şekil 5.8)

Çizelge 5.3 : Kök artış oranı ile çözümün doğruluğu ve süresi arasındaki ilişki.

Kök artış oranı	Boyutsuz frekans	Kök değeri	Doğal frekans	Çözüm süresi(s)
0.05	1,807	563,22	89,64	50148
0.5	1,807	563,22	89,64	3831
5	1,807	563,22	89,64	261
50	1,807	563,22	89,64	33
500	1,807	563,22	89,64	13

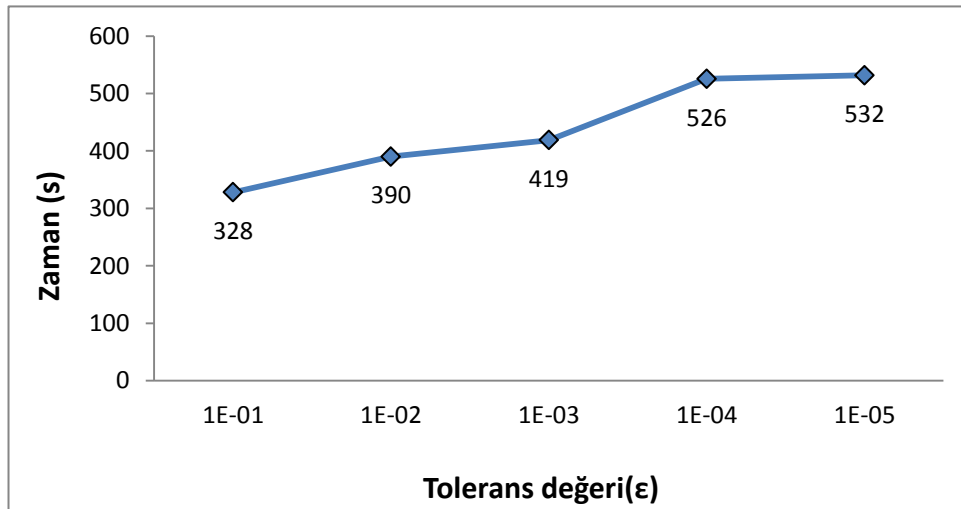


Şekil 5.8 : Kök artış miktarının (Δ) çözüm süresine olan etkisi.

4) Tolerans değeri (ϵ): Kök artış değeri gibi tolerans değeri de çözümün doğruluğunu değiştirmezken (Çizelge 5.4) çözüm süresini etkilemektedir.(Şekil 5.9)

Çizelge 5.4 : Tolerans değeri ile çözümün doğruluğu ve süresi arasındaki ilişki.

Tolerans değeri (ϵ)	Boyutsuz frekans	Kök değeri	Doğal frekans	Çözüm süresi(s)
1E-01	1.737	520,58	82,85	328
1E-02	1.736	520,16	82,79	390
1E-03	1.736	520,16	82,79	419
1E-04	1.736	520,16	82,79	526
1E-05	1.736	520,16	82,79	532



Şekil 5.9 : Tolerans(ϵ) değişiminin çözüm süresine olan etkisi.

6. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM PROBLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

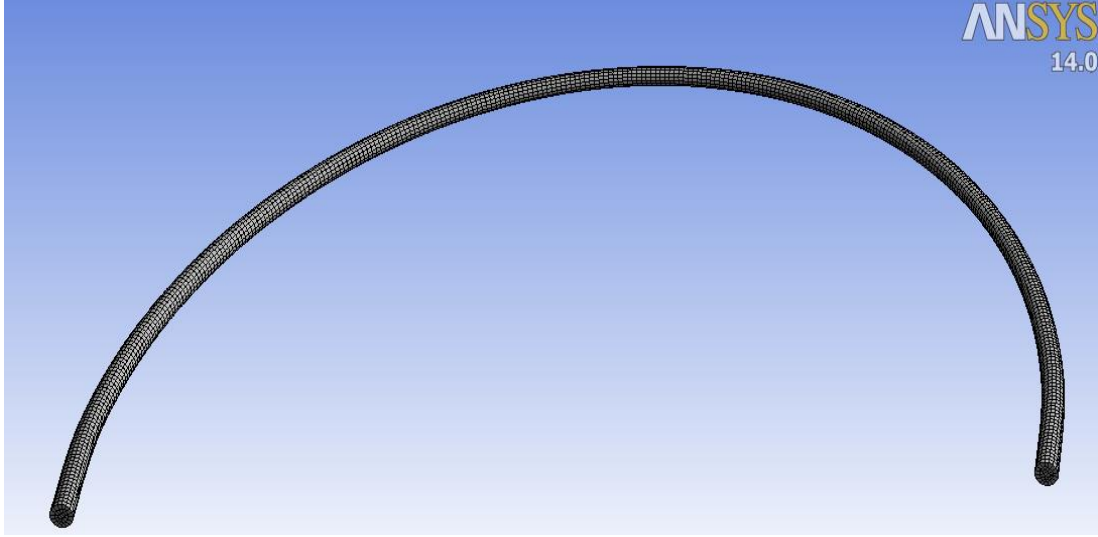
Bu bölümde Şekil (5.2)'de gösterilen çubuğun düzlem dışı titreşimleri, bilgisayar ortamında, sonlu analiz programı olan ANSYS(V14) kullanılarak elde edilmiştir. Modelleme işlemi daha kolay ve pratik olduğu için Workbench modülünde hazırlanmıştır. Belirlenen sınır şartlarındaki doğal frekans değerleri ve mod şekilleri çıkarılmıştır.

Öncelikle Şekil (6.1)'de görüldüğü gibi eliptik çubuğa ait malzeme değerleri girilmiştir.

Properties of Outline Row 3: Structural Steel					
	A	B	C	D	E
1	Property	Value	Unit		
2	 Density	7840	kg m ⁻³		
3	 Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion				
4	 Coefficient of Thermal Expansion	1,2E-05	C ⁻¹		
5	 Reference Temperature	22	C		
6	 Isotropic Elasticity				
7	Derive from	Young's M...			
8	Young's Modulus	2,1E+11	Pa		
9	Poisson's Ratio	0,3			
10	Bulk Modulus	1,75E+11	Pa		
11	Shear Modulus	8,0769E+10	Pa		

Şekil 6.1 : ANSYS programında malzeme değerlerinin girilmesi.

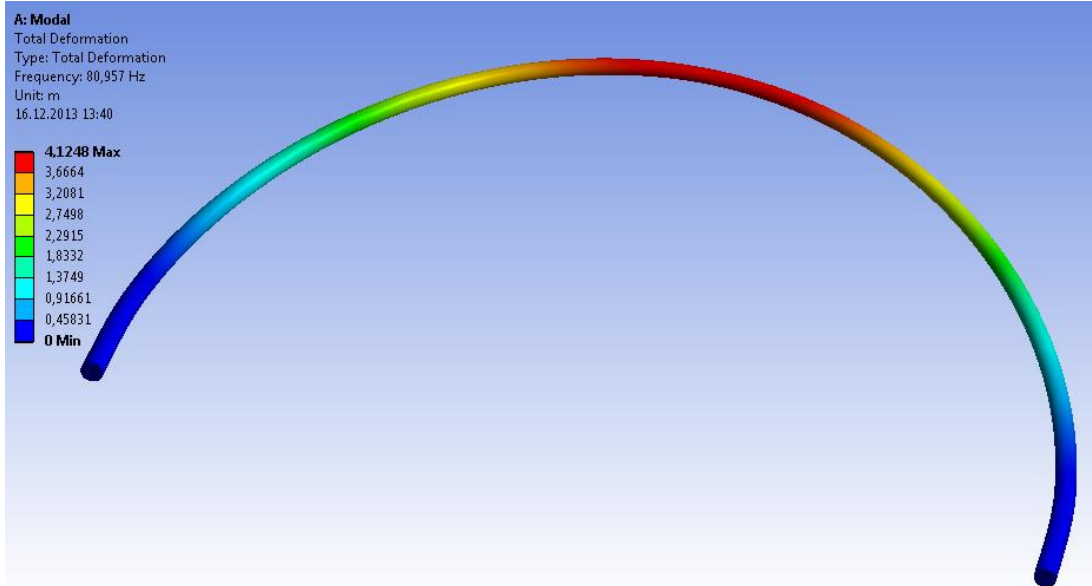
Daha sonra 180° açıklığındaki eliptik eksenli çubuğa uygun şekilde meshleme yapıldı. Şekil 6.2'de 57039 nod ve 12172 elementten oluşan meshlemenin yapıldığı eliptik çubuk gösterilmektedir.



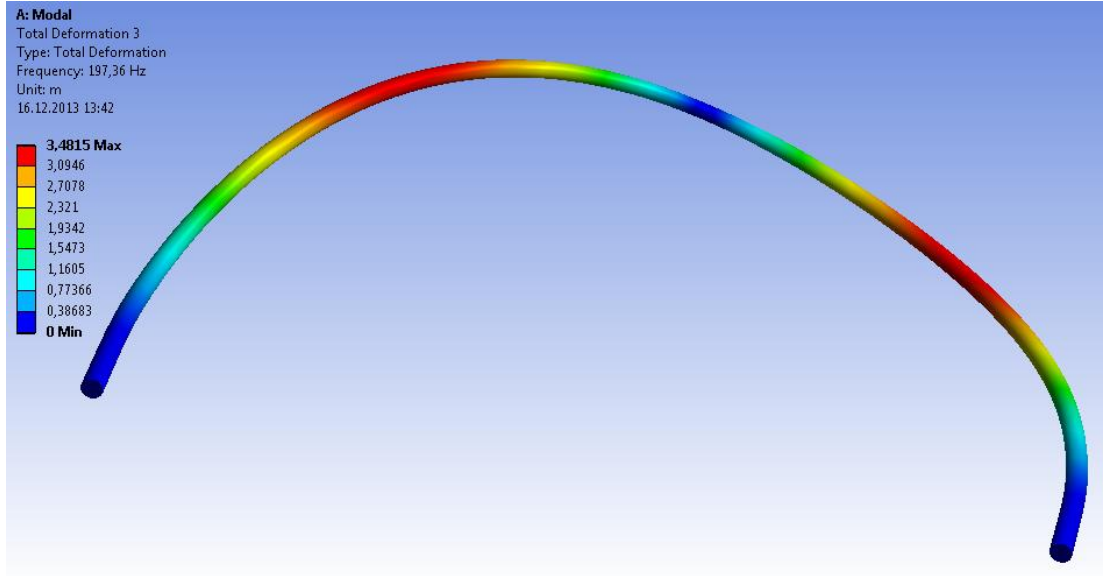
Şekil 6.2 : ANSYS de meshleme yapılmış çubuk.

Meshleme işlemi bittikten sonra çubuğun ilk 11 modu elde edilmiştir.(Şekil 6.3) Bunlardan 6 tanesi düzlem dışı olup literatürde ve ve bu çalışmada bulunan matrikant sonuçları ile karşılaştırılmıştır.(Çizelge 6.1)

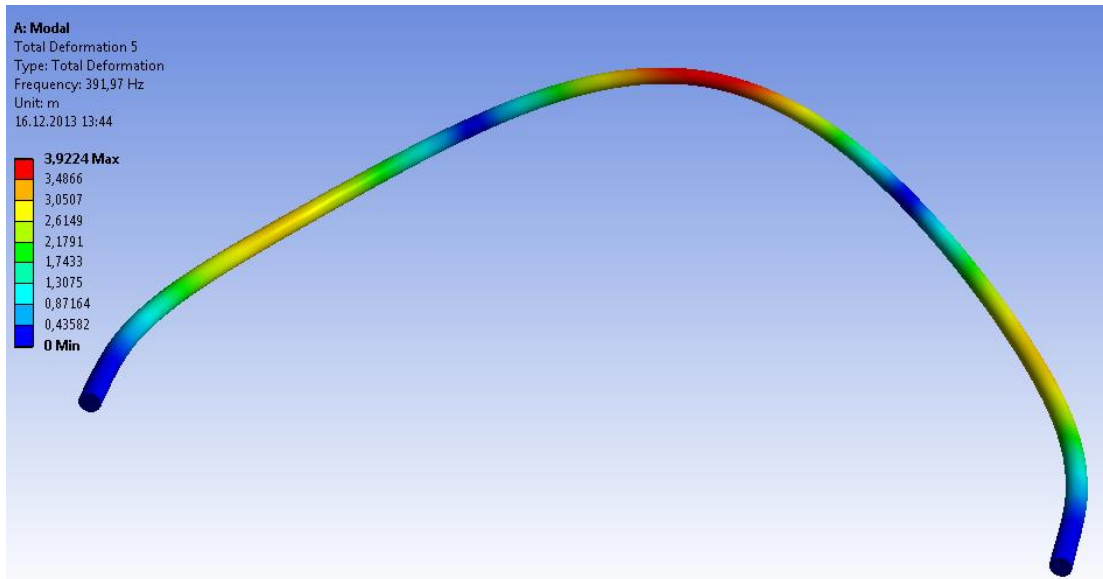
Ansyz sonlu elemanlar analiz programı ile elde edilen, ankastre-ankastre sınır şartlarındaki eliptik ve dairesel eksenli çubukların, düzlem dışı titreşimlere ait mod şekilleri aşağıdaki gibidir.



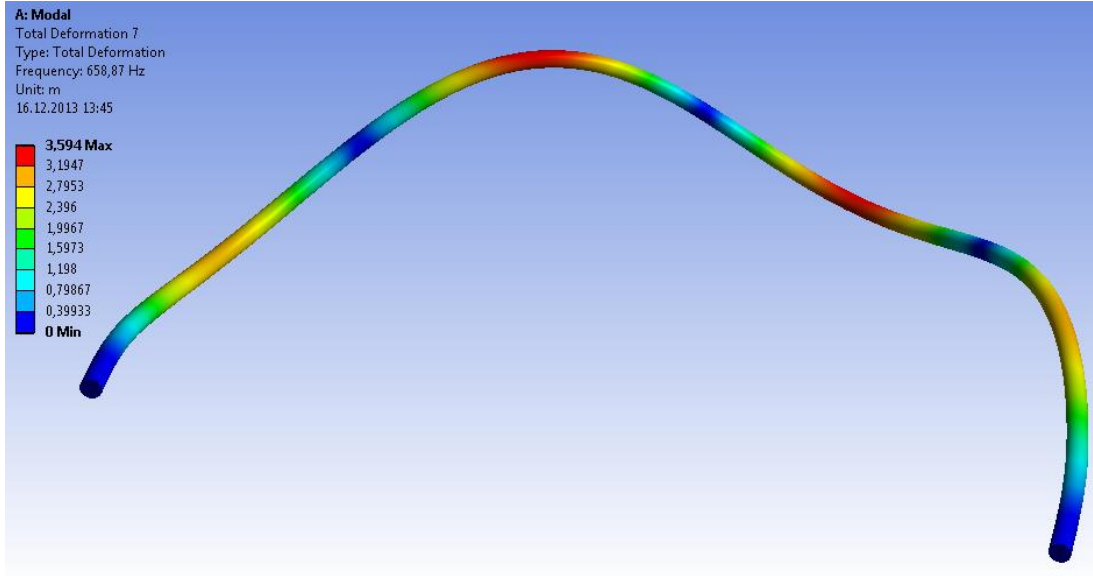
Şekil 6.3 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı ilk frekans ve mod şekli.



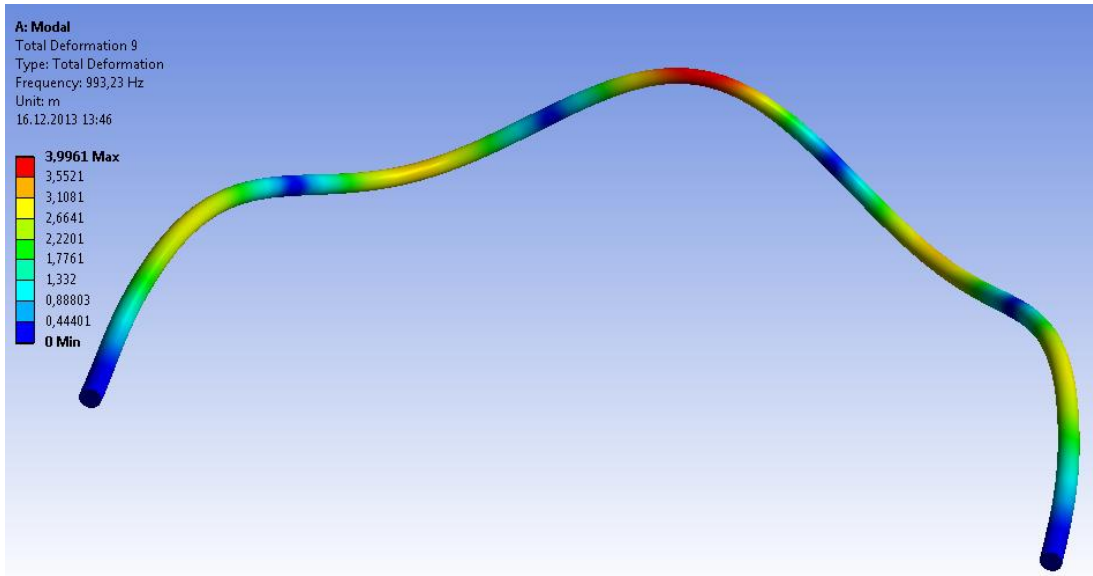
Şekil 6.4 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı ikinci frekans ve mod şekli.



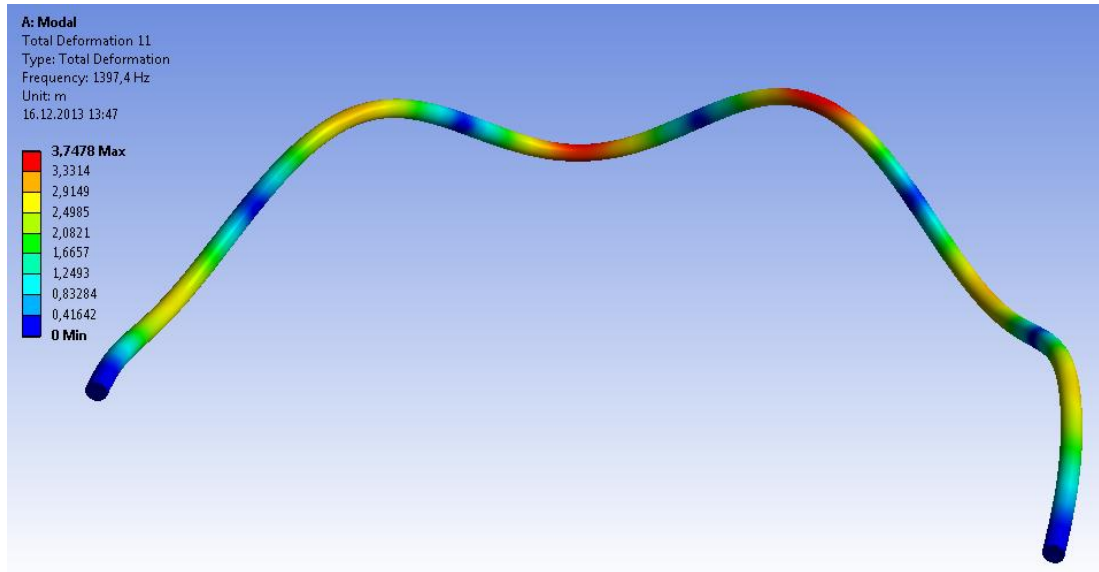
Şekil 6.5 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı üçüncü frekans ve mod şekli.



Şekil 6.6 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı dördüncü frekans ve mod şekli.



Şekil 6.7 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı beşinci frekans ve mod şekli.



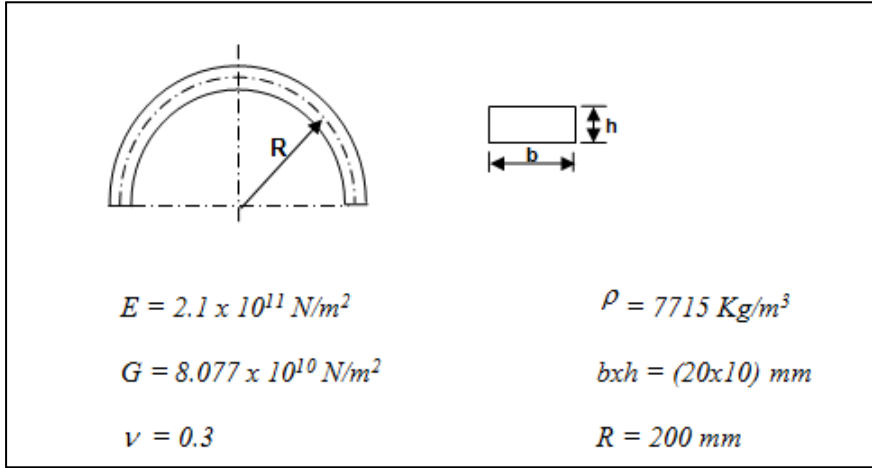
Şekil 6.8 : Eliptik çubuğa ait düzlem dışı altıncı frekans ve mod şekli.

Çizelge 6. 1 : Ankastre-ankastre eliptik çubuk için elde edilen analitik ve Ansys sonlu eleman doğal frekans sonuçlarının karşılaştırılması.

	Mod sayısı	[28]	[29]	[36]	Bu çalışma	Ansys
A-A	1	80,3	80,4	83,6	82,9	81,0
	2	194,8	195,1	198,0	201,3	197,4
	3	381,8	382,6	385,0	389,7	392,0
	4	636,9	639,3	628,8	645,8	658,9
	5	958,3	963,1	947,4	965,7	993,2
	6	1343,8	1353,1	1315,0	1349,0	1397,4

Sonuçlardan da gözlendiği üzere Ansys değerleri ile matrikant değerleri uyum içerisinde olmakla beraber Ansys değerlerinin mod sayısı arttıkça sonuçlardan uzaklaştığı görülmektedir. Bunun nedeninin yöntemden ziyade eliptik çubuğun geometrik olarak tanımlanmasının zor olması sonucu gerçekleştiği kanısına varılmıştır.

Ayrıca Şekil (6.9)'deki dairesel kesitli örnek bu durumun geometrik yapıyla ilgili olduğunu açıkça ortaya koymaktadır. Bu özelliklerdeki çubuğun ilk beş düzlem dışı doğal frekansı hem analitik olarak matrikant yöntemiyle hem de sonlu elemanlar analizi kullanılan Ansys programında elde edilmiş ve Çizelge (6.2) de bu sonuçlar karşılaştırılmıştır.



Şekil 6.9 : Dairesel eksenli çubuğun geometrik ve malzeme özellikleri.

Çizelge 6.2 : Ankastre-ankastre mesnetli daireseel çubuk için elde edilen analitik ve Ansys sonuçlarının karşılaştırılması.

	Mod sayısı	Analitik	Ansys
A-A	1	110,09	110,83
	2	317,3	318,97
	3	661,81	664,94
	4	1127,6	1132,5
	5	1706,63	1716,5

Çizelge 6.2’de görüldüğü gibi analitik değerler ile analiz sonuçları büyük uyum halindedir. Bu durum eliptik eksenle oluşan farklılığın sadece geometrik çizim zorluklarından dolayı kaynaklandığını göstermektedir.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada eğri eksenli değişken kesitli çubukların düzlem dışı dinamik davranışları, kayma deformasyonu, eğilme dönme eylemsizliği ve burulma dönme eylemsizliği etkileri göz önüne alınarak incelenmiştir. Literatürde bu tip çubuklar üzerine çok fazla çalışma olmadığı gözlemlenmiştir. Var olan çalışmaların ise genellikle sabit veya kademeli kesitleri ele aldığı ve daha çok enerji metotları üzerinden çözümler gerçekleştirdiği görülmektedir. Yine aynı şekilde çalışmaların çoğunda kayma deformasyonu, eğilme ve burulma dönme eylemsizlikleri ihmal edilmiştir.

Matrikant yöntemi ihmal edilen bütün bu etkileri dahil ederek değişken kesitli çubukların titreşimlerini hesaplayabileceğimiz alternatif bir yöntemdir. Eğer diferansiyel denklem takımlarının katsayıları sabit ise kesin çözüm, değişken ise yaklaşık çözüm elde edilebilmektedir. Bu çalışmada sadece değişken kesitli çubuklara yer verilmiştir. Sabit ve kademeli çubuklar için çeşitli incelemeler halihazırda mevcuttur.

İhmal edilen kayma deformasyonu, eğilme ve burulma dönme eylemsizlikleri etkilerinin özellikle yüksek modlarda veya küçük giriş açılarında büyük farklılıklara sebep olduğu açıkça görülmüştür. Yine bu durum çubuğun narinlik oranı azaldıkça etkisini daha da belirginleştirmektedir.

Mesnetleme durumunun da bu etkilerin önemini belirlediği gözlemlenmiştir. Özellikle ankastre-ankastre mesnetli çubuklarda etkiler daha önemli iken diğer mesnet şartlarında azalma meydana gelmektedir. Bu yüzden kullanılan örneklerde daha çok ankastre-ankastre sınır koşulları seçilmeye çalışılmıştır.

Ayrıca matrikant yöntemiyle hesaplama yaparken kullanmış olduğumuz Matlab programındaki parametrelerin çözüme ve çözüm süresine olan etkileri incelenmiş ve program optimize edilmeye çalışılmıştır. Daha önceki çalışmalarda bu durumun incelendiği gözlemlenmemiştir.

Çeşitli grafikler ve çizelgeler yardımıyla optimizasyonu gerçekleştirilen matrikant programının sonuçları ile literatürdeki sonuçlar karşılaştırılmış ve değerlerin birbirleriyle uyumlu oldukları görülmüştür. Aynı şekilde matrikant hesabında tüm etkiler dikkate alındığı için genellikle literatürdeki değerlerden daha düşük olduğu gözlemlenmiştir.

İncelenen eliptik çubuk bir kez de bilgisayar ortamında modellenerek sonlu elemanlar yöntemini kullanan Ansys programında analiz edilmiş ve elde edilen bu sonuçlar ile matrikant yöntemiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Sonuçların özellikle ilk modlarda birbirlerine yakın olduğu fakat mod sayısı arttıkça birbirlerinden az da olsa uzaklaştıkları görülmüştür. Aynı yaklaşım dairesel eksenli çubuk söz konusu olduğunda tamamiyle uyumlu olduğu için bu farklılığın nedeninin eliptik çubuğun Ansys programında modellenmesinde oluşan zorluklardan kaynaklandığına kanaat getirilmiştir.

Matrikant yönteminin değişken kesitli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerini hesaplarken tüm etkilerin dahil edildiği denklemleri hesaplarken oldukça yakınsak sonuçlar verdiğini ve bu tip çubuklarla ilgili çalışmaların bu alternatif yöntem kullanılarak kolaylıkla hesaplanabileceği açıkça görülmektedir. Deneysel, analitik ve sonlu analiz karşılaştırmalarıyla matrikantı hesaplarken kullanılan programın daha da geliştirilebileceği veya özelleştirilebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Love, A. E. H.** (1944). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publication, New York.
- [2] **Timoshenko, S. Ve Goodier, J. N.** (1951). *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [3] **İnan, M.** (1966). *Elastik Çubukların Genel Teorisi*, İTÜ Yayın, İstanbul.
- [4] **Den Hartog, J.P.**, (1952) *Advanced Strength of Materials*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- [5] **Verniere De Irassar, P.L. and Laura, P.A.A.** (1986). A Note on the Analysis of the First Symmetric Mode of Vibration of Circular Arches of Non-Uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.116, 580-584.
- [6] **Laura, P.A.A., Verniere De Irassar, P.L., Carnicer, R., Berteo, R.** (1988). A Note on Vibrations of a Circumferential Arch with Thickness Varying in a Discontinuous Fashion, *Journal of Sound and Vibration*, V.120(1),95-105.
- [7] **Gutierrez, R.H., Laura, P.A.A., Rossi, R.E., Berteo, R. ve Villaggi, A.** (1989). In-plane Vibrations of Non-circular Arches of Non-uniform Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.129(2), 181-200.
- [8] **Howson, W.P. and Jemah, A.K.** (1995). Exact Natural Frequencies for Out-of-Plane Motion of Plane Structures Composed of Curved Beam Members, *Computer & Structures*, 55, 989-995.
- [9] **Kawakami, M., Sakiyama, T., Matsuda, H. and Morita, C.** (1995). In Plane and Out-of-Plane Free Vibrations of Curved Beams With Variable Sections, *Journal of Sound and Vibrations*, 187, 381-401.
- [10] **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F.R., Fletcher, N.H., Thwaties, S.** (1996). Asymptotic Analysis of the Free in-Plane Vibrations of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*, V.196(5), 659-680.
- [11] **Tarnopolskaya, T., De Hoog, F. R. ve Fletcher, N. H.** (1999). Low-frequency Mode Transition in the Free In-plane Vibration of Curved Beams, *Journal of Sound and Vibration*, 228, 69-90.
- [12] **Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I.** (1980). The Steady State Out-of-Plane Response of a Timoshenko Curved Beam with Internal Damping, *Journal of Sound and Vibration*, 55, 145-156.

- [13] **Oh, S.J., Lee, B.K. ve Lee, I.W.** (2000). Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-uniform Cross-Section, *International Journal of Solids and Structures*, 37, 4871-4891.
- [14] **Tüfekçi, E. ve Arpacı, A.** (1998). Exact Solution of In-plane Vibrations of Circular Arches with Account Taken of Axial Extension, Transverse Shear and Rotatory Inertia Effects, *Journal of Sound and Vibration*, 209(5), 845-856.
- [15] **Tüfekçi, E.** (1999). Exact Solution of In-Plane Vibrations of Stepped Circular Arches, *Asia-Pasific Vibration Conference, Singapore*, 99, 1158-1163.
- [16] **Tüfekçi, E.** (2001). In-Plane Vibrations of a Circular Arch of Discontinuously Varying Cross-Sectioni Proceedings of IMAC XIX, *A Confarence on Structural Dynamics*, V.2, 1688-1684, Florida, ABD.
- [17] **Karami, G. ve Malekzadeh, P.** (2004). In-plane Free Vibration Analysis of Circular Arches with Varying Cross-Sections Using Differential Quadrature Method, *Journal of Sound and Vibration*, 274, 777-799.
- [18] **Liu, G. R. ve Wu, T. Y.** (2001). In-plane Vibration Analysis of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule, *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 2597-2611.
- [19] **Tüfekçi, E.** (2001). Exact Solution of Free In-plane Vibration of Shallow Circular Arches, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 1, 409-428.
- [20] **Gantmacher, F.R.** (1959). *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publishers, New York.
- [21] **Gantmacher, F.R.** (1960). *Applications of the Theory of Matrices*, Volume Two Chelsea Publishing Company, New York.
- [22] **Yiğit, Ö.Ö.** (2009). *Eğri Eksenli Değişken Kesitli Çubukların Statik ve Dinamik Problemleri*, (doktora tezi), İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [23] **Tüfekçi, E. ve Yiğit, Ö. Ö.** (baskıda). In-plane Vibrations of Circular Arches with Varying Cross-Section, *Journal of Sound and Vibration*
- [24] **Rosen, A., Gur, O.,** (2009) A Transfer Matrix Model of Large Deformations of Curved Rods, *Computers and Structures*, basım aşamasında
- [25] **Lin, S.M., Lee, S.Y.,** (2001) Closed Form Solution for Dynamic Analysis of Extensional Circular Timoshenko Beams with General Elastic Baundary Conditions, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 227-240.
- [26] **Kang, B., Riedel, C.H., Tan, C.A,** (2003) Free Vibration Analysis of Planar Curved Beams by Wave Propagation, *Journal of Sound and Vibration*, 260, 19-44.
- [27] **Huang, C.S., Tseng, Y.P., Leissa, W. ve Nieh, K.Y.** (1998) An Exact Solution for In-Plane Vibrations of an Arch Having Variable Curvature and Cross-Section, *International Journal of Mechanical Sciences*, 40, 1159-1173.

- [28] **Huang, C.S., Tseng, Y.P., Chang, S. H. ve Hung, C. L.** (2000). Out of Plane Dynamic Analysis of Beams with Arbitrarily Varying Curvature and Cross-Section by Dynamic Stiffness Matrix Method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 37, 495-513.
- [29] **Suzuki, K., Sugi, K., Kosawada, T. ve Takahashi, S.** (1986). Out of Plane Impulse Response of a Curved Bar with Varying Cross-Section. *Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers*, 29, 4312-4317.
- [30] **Lee, S. Y. ve Chao, J. C.** (1999). Exact Solution for Out-of-Plane Vibration of Curved Non-Uniform Beams, *Journal of Applied Mechanics*, 68, 186-191.
- [31] **Lee, S. Y. ve Chao, J. C.** (2000). Out-of-Plane Vibrations of Curved Non-Uniform Beams of Constant Radius, *Journal of Sound and Vibration*, 238, 443-458.
- [32] **Rubin, M. B. ve Tüfekçi, E.** (2005). Three Dimensional Free Vibrations of a Circular Arch Using the Theory of a Cosserat Point, *Journal of Sound and Vibration*, 286, 799-816.
- [33] **Ewins, D. J.** (2000). *Modal Testing: Theory, Practice and Application*, Research Studies Press Ltd., Hertfordshire
- [34] **Doğruer, O. Yaşar** (2006). *Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Düzlem dışı Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü* (doktora tezi), İTÜ, İstanbul, Türkiye
- [35] **Çetinyol, Doğukan** (2011). *Eğri Eksenli Kademeli Çubukların Titreşim Analizi* (yüksek lisans tezi), İTÜ, İstanbul, Türkiye
- [36] **Dönmez, C. Hayri** (2012). *Değişken Kesitli Eğri Eksenli Çubukların Titreşimlerinin Teorik ve Deneysel Analizi* (yüksek lisans tezi), İTÜ, İstanbul, Türkiye

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Cihan Önder MIKE
Doğum Yeri ve Tarihi:	Gaziantep – 24/06/1987
E-Posta:	mike@itu.edu.tr
Lisans:	Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Mühendisliği
Mesleki Deneyim:	Ford Otosan Otomotiv A.Ş. Ür-Ge Mühendisi