

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KİSMİ DOLDURULMUŞ DİKDÖRTGEN KESİTLİ RİJİT BİR TANKIN
SERBEST SIVI YÜZEYİ DOĞAL FREKANSININ GALERKİN
YÖNTEMİYLE HESABI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fuzuli Ağrı AKÇAY

Anabilim Dalı : Gemi İnşaatı ve Gemi Makinaları Mühendisliği

Programı : Gemi İnşaatı Mühendisliği

HAZİRAN 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KISMİ DOLDURULMUŞ DİKDÖRTGEN KESİTLİ RİJİT BİR TANKIN
SERBEST SIVI YÜZEYİ DOĞAL FREKANSININ GALERKİN
YÖNTEMİYLE HESABI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fuzuli Ağrı AKÇAY

(508071003)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 4 Mayıs 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Haziran 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Dr. M. Cengiz DÖKMECİ (İTÜ)

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Şakir BAL (İTÜ)

Doç. Dr. Hakan AKYILDIZ (İTÜ)

HAZİRAN 2009

Kardeşıme, anneme ve babama...

ÖNSÖZ

Lisans öğrenimimden beri, bilimsel çalışmanın önemini vurgulayan ve akademik hayat konusunda daha bilinçli olmamı sağlayan; bilgi birikimini ve deneyimini benimle paylaşan, tez çalışmam için kaynaklar sağlayan ve bana kolaylık gösteren Prof. Dr. Dr. M. Cengiz DÖKMECİ'ye teşekkür ederim. Ayrıca, başta Prof. Dr. Ömer GÖREN olmak üzere, sorularımı yanıtsız bırakmayan, üzerimde büyük emekleri ve katkıları bulunan Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi değerli öğretim üyelerine; manevi desteklerinden güç ve ilham aldığım aileme, yaptığı iyiliklerden ötürü kendimi borçlu hissettiğim Müh. Rıza YALÇINKAYA'ya ve Araş. Gör. Y. Müh. Murat ÖZBULUT'a, Microsoft Word programının inceliklerini öğreten Araş. Gör. Y. Müh. Serdar Aytekin KÖROĞLU'na ve tüm arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca bana maddi destekte bulunan, Türkiye'nin en seçkin kurumlarından biri olan TÜBİTAK'a şükranlarımı sunarım...

Mayıs 2009

Fuzuli Ağrı AKÇAY

Gemi İnş. ve Gemi Mak. Müh.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
ÇİZELGE LİSTESİ.....	ix
ŞEKİL LİSTESİ.....	xi
SEMBOL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Akışkan–Katı Etkileşim Problemi	1
1.2 Çalkantı Hareketi	1
1.3 Literatür Özeti.....	2
1.4 Tezin Amacı.....	2
2. AKIŞKAN–KATI ETKİLEŞİMİNDE TEMEL DENKLEMLER.....	5
2.1 Temel Diferansiyel Denklemler	5
2.1.1 Diverjans denklemler	5
2.1.2 Gradyant denklemler	6
2.1.3 Bünye denklemleri	7
2.1.4 Sınır koşulları	7
2.1.5 Başlangıç koşulları	8
2.1.6 Arayüz koşulları	8
2.1.7 Diferansiyel denklemlerin çözülebilirliği.....	9
2.1.8 Varlık ve teklik.....	9
2.1.9 Özel koşullar	10
2.2 Varyasyonel Denklemler	11
3. AĞIRLIKLİ ARTIKLAR YÖNTEMİ.....	13
3.1 Moment Yöntemi.....	14
3.2 Kollokasyon Yöntemi.....	14
3.3 Galerkin Yöntemi	15
3.4 En Küçük Kareler Yöntemi	15
4. UYGULAMA	17
4.1 Problemi İfade Eden Denklemler	17
4.1.1 Süreklilik denklemi	18
4.1.2 Arayüz koşulları	19
4.1.3 Lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulu	19
4.2 Analitik Sonuç	21
4.3 Hesap Yönteminin Seçimi	22
4.4 Kullanılacak Ağırlıklı Artık Yönteminin Seçimi	22
4.5 Şekil Fonksiyonun Seçimi	23
4.6 Deneme Fonksiyonu $\phi = c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ İçin Çözüm	24
4.7 Deneme Fonksiyonu $\phi = d \cdot y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ İçin Çözüm	26
4.8 Deneme Fonksiyonu $\phi = (d_1 y^2 + d_2 y^3) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ İçin Çözüm	28

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA.....	35
KAYNAKLAR.....	37
ÖZGEÇMİŞ.....	41

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Analitik ve sayısal sonuçların karşılaştırılması.....	35
---	----

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 : Kısmi doldurulmuş dikdörtgen kesitli rijit tank..... 18

SEMBOL LİSTESİ

a^i	: ivme vektörü
c, d	: genişleme katsayıları
C^{ijkl}	: malzeme sabiti
d_{ij}	: şekil değiştirme hızı tansörü
D	: integral sabiti
e_{ij}	: şekil değiştirme tansörü
e_{ijk}	: alterne tansörü
f	: şekil fonksiyonu
f^i	: birim hacimdeki kütle kuvveti vektörü
g	: yerçekimi ivmesi
$\vec{g}, g^i$	: yerçekimi vektörü
g^{ij}	: metrik tansör
h	: sıvı yüksekliği
L	: tank genişliği
n	: yüzeyden dışarı doğru normal
$\vec{n}, n_i$	: yüzeyden dışarı doğru normal vektörü
p	: hidrodinamik basınç
R	: artık değer
S	: serbest sıvı yüzeyi
t	: zaman
t^i, t^{ij}	: katı bölgesinde, gerilme vektörü ve gerilme tansörü
$T = [t_0, t_1)$	: zaman aralığı
T_0	: doğal periyot
u_i	: yer değiştirme vektörü
$\vec{v}, v_i$	: hız vektörü
w	: ağırlık katsayısı
x, y	: bağımsız değişkenler
δ_{ij}	: Kronecker delta
η	: sıvı parçacığının serbest sıvı yüzeyine olan mesafesi

θ^j	: sabit, sağ el eğrisel eksen takımı
κ	: özdeğer
λ, μ	: malzeme sabitleri
ρ	: kütle yoğunluğu
σ^i, σ^{ij}	: sıvı bölgesinde, gerilme vektörü ve gerilme tansörü
τ^i, τ^{ij}	: viskoz gerilme vektörü ve viskoz gerilme tansörü
φ	: hız potansiyeli
ω	: doğal frekans
Ω	: sonlu bölge
$\overline{\Omega}(\Omega + \partial\Omega)$	: bölgenin zarfı
$\partial\Omega$	: bölgenin sınırı

KİSMİ DOLDURULMUŞ DİKDÖRTGEN KESİTLİ RİJİT BİR TANKIN SERBEST SIVI YÜZEYİ DOĞAL FREKANSININ GALERKİN YÖNTEMİYLE HESABI

ÖZET

Kısmi doldurulmuş, dikdörtgen kesitli rijit bir tankın serbest sıvı yüzeyinin doğal frekansı Galerkin yöntemiyle hesaplanmıştır. Problem, akışkan ideal (viskozitesiz) ve sıkıştırılmaz, akışkanın hareketi çevrisiz (irrotasyonel) kabul edilerek çözülmüştür. Ayrıca, ısı, rölativistik ve kuantum etkiler ihmal edilmiş; yüzey gerilmelerinin önemli bir rol oynamaya başladığı düşük yoğunluklu sıvılar çalışmanın kapsamı dışında tutulmuştur.

Birinci bölümde, akışkan-katı etkileşimi problemleri ve uygulama alanları hakkında genel bir bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, izotropik olmayan bir katı için, katının elastik bölgede kaldığı ve titreşimin çok küçük genliklerde olduğu kabulü altında ve Newtonyen bir akışkan için, sıvı bölgesinde kavitasyon olmadığı ve yüzey dalgalarının çok küçük olduğu kabulü altında; diferansiyel denklemler, başlangıç ve sınır koşulları tansör notasyonunda verilmiştir. Ayrıca, diferansiyel denklemlerin çözülebilir olduğu gösterilmiş, varlık ve teklik hakkında yüzeysel bir bilgi verilmiş ve bazı özel koşullara değinilmiştir. Üçüncü bölümde, ağırlıklı artıklar yöntemi ve bu yöntemlerden moment yöntemi, kollokasyon yöntemi, Galerkin yöntemi ve en küçük kareler yöntemi hakkında yüzeysel bir bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, akışkan ideal (viskozitesiz) ve sıkıştırılmaz, akışkanın hareketi çevrisiz kabul edilerek, kısmi doldurulmuş dikdörtgen kesitli rijit bir tank problemini ifade eden temel denklemler vektörel formda verilmiştir. Daha sonra, hesap yönteminin ve şekil fonksiyonunun seçimine değinilmiş ve serbest sıvı yüzeyinin doğal frekansı, analitik olarak ve iki tane şekil fonksiyonu için, üç adet deneme fonksiyonu kullanılarak Galerkin yöntemiyle hesaplanmıştır. Beşinci bölümde ise, tüm sonuçlar bir çizelgede karşılaştırmalı olarak verilmiş; analitik sonuç ile sayısal sonuçlar karşılaştırılmış ve önerilerde bulunulmuştur.

CALCULATION OF THE FREE LIQUID SURFACE'S NATURAL FREQUENCY OF A PARTIALLY FILLED RIGID RECTANGULAR TANK BY GALERKIN'S METHOD

SUMMARY

Free liquid surface's natural frequency of a partially filled rigid rectangular tank is determined by Galerkin's method. The problem is solved under the assumptions of the fluid is ideal (i.e. inviscid) and incompressible, the flow is irrotational. Also, the thermal, relativistic and quantum effects are neglected; low intensity liquids where surface tension begins to play a decisive part are excluded.

In the first part, general information is given about the fluid–solid interaction problems and its practical scope. In the second part, differential equations, initial and boundary conditions are given in tensor notation for anisotropic solid under the assumptions of the solid region is in elastic range and only small amplitude of vibrations occur and a Newtonian fluid under the assumptions of there is no cavitation in the fluid region and surface waves are too small. Also, it is shown that systems are deterministic, superficial information is given about existence and uniqueness and some special cases are given. In the third part, superficial information is given about the weighted residuals method and some of these; moment method, the collocation method, Galerkin's method and least-squares method. In the fourth part, fundamental equations are given in vectorial form for partially filled rigid rectangular tank problem under the assumptions of the fluid is ideal (i.e. inviscid) and incompressible, the flow is irrotational. Then, choosing of the calculation method and shape function are touched on and natural frequency of the free liquid surface is calculated by analytically and Galerkin's method for two shape functions by using three trial solutions. In the fifth part, all results are given in a table, analytical result and numerical results are compared and recommendations are given.

1. GİRİŞ

1.1 Akışkan–Katı Etkileşim Problemi

Teknolojik uygulamaların artmasından ötürü, akışkan–katı etkileşimi problemleri üzerine olan ilgi son yıllarda artış göstermiştir (Altay ve Dökmeci, 2009). Uçak kanatlarının stabilitesi, köprülerin ve yüksek binaların rüzgâra karşı davranışı, türbin ve kompresör kanatlarının titreşimi, kanın atardamardaki akışı, akışkan-katı etkileşimi problemlerine örnek olarak verilebilir (Dowell ve Hall, 2001). Görüldüğü üzere, akışkan-katı etkileşim problemleri yalnızca mühendisliğin çeşitli alanlarıyla sınırlı kalmamış, tıbbi bilimlerde de önem kazanmıştır (Altay ve Dökmeci, 2009).

Akışkan katı etkileşimi problemlerinde, en genel halde karşılaşılabilecek iki tür problem mevcuttur. Bunlardan ilki, katı cismin tamamının veya bir kısmının, sonlu veya sonsuz bir akışkan bölgesi içerisinde bulunmasıdır. İkincisi ise, katı cisimde bulunan bir boşluğun veya oyuğun kısmen veya tamamen akışkanla doldurulmasıdır (Altay ve Dökmeci, 2009).

1.2 Çalkantı Hareketi

Serbest sıvı yüzeyinin olduğu kap içindeki herhangi bir hareket çalkantı hareketi (“sloshing”) olarak tanımlanabilir. Çalkantı hareketindeki temel problem, hidrodinamik basınç dağılımının, kuvvetlerin, momentlerin ve serbest sıvı yüzeyinin doğal frekanslarının bulunmasıdır (İbrahim, 2005).

Kısmi doldurulmuş tanklarda, çalkantı frekansı tank içindeki akışkanın doğal frekansına yaklaştığında rezonans oluşur ve tank yüzeylerinde yüksek yapısal yükler oluşabilir (Sames ve diğ., 2002). Bu durum yapısal hasarlara sebebiyet verebileceği gibi, gemilerde de stabilite kaybına neden olabilir (Armenio ve La Rocca, 1996). Bu nedenle, içerisinde sıvı bulunan sistemlerin salınım hareketiyle ilgilenen bir mühendisin karşılaştacağı ilk problem, bu sistemin doğal frekanslarını hesaplamak olacaktır (Moiseev, 1964).

1.3 Literatür Özeti

Literatürde; akışkan ve katının birlikte ele alındığı (“coupled”) çalışmalar, akışkana ait denklemlerin çözülüp katıda yerine konulduğu veya katıya ait denklemlerin çözülüp akışkanda yerine konulduğu (“quasi-coupled”) çalışmalar ve akışkan ve katının birbirlerinden bağımsız olarak ele alındığı (“uncoupled”) çalışmalar mevcuttur.

Akışkan–katı etkileşimi problemlerinde; uygulanması için temel diferansiyel denklemlerin yeterli olduğu ağırlıklı artıklar yöntemi, literatürde pek kullanılmamıştır. Genellikle varyasyonel ilkeler kullanılmış, problemi ifade eden denklemler varyasyonel formda verilmiş ve örnek soru neredeyse hiç çözülmemiştir.

Analitik ve sayısal çalışmaların yanı sıra, literatürde deneysel çalışmalar ve bilgisayar simülasyonları veya sayısal çalışmalar ile deneysel çalışmaları karşılaştıran çalışmalar mevcuttur. Akyıldız ve Çelebi (2001), Akyıldız ve Ünal (2004), Akyıldız ve Ünal (2006), Akyıldız ve Ünal (2005), Armenio ve La Rocca (1996), Celebi ve Akyıldız (2002), Sames ve diğ. (2002) bu çalışmalardan bazılarıdır.

1.4 Tezin Amacı

Bir kabın içindeki sıvı hareketinin sonsuz tane doğal frekansı vardır (İbrahim, 2005). Bu çalışmada, kısmi olarak doldurulmuş, dikdörtgen kesitli rijit bir tankın doğal frekansı, Galerkin yöntemiyle hesaplanmıştır. Isıl, rölativistik ve kuantum etkiler ihmal edilmiş; yüzey gerilmelerinin önemli bir rol oynamaya başladığı düşük yoğunluklu sıvılar çalışmanın kapsamı dışında tutulmuştur (Altay ve Dökmeci, 2009; Moiseev ve Petrov, 1966).

İkinci bölümde, izotropik olmayan bir katı için ve Newtonyen bir akışkan için; diferansiyel denklemler, başlangıç ve sınır koşulları tansör notasyonunda verilmiş, diferansiyel denklemlerin çözülebilir olduğu gösterilmiş ve bazı özel koşullara değinilmiştir. Üçüncü bölümde, ağırlıklı artıklar yöntemi ve bu yöntemlerden birkaçı hakkında yüzeysel bir bilgi verilmiştir. Dördüncü bölümde, akışkan ideal (viskozitesiz) ve sıkıştırılamaz, akışkanın hareketi çevrisiz (irrotasyonel) kabul edilerek, kısmi doldurulmuş dikdörtgen kesitli rijit bir tank problemini ifade eden temel denklemler vektörel formda verilmiştir. Daha sonra, tankın serbest sıvı

yüzeyinin doğal frekansı, analitik olarak ve iki tane şekil fonksiyonu için, üç adet deneme fonksiyonu kullanılarak Galerkin yöntemiyle hesaplanmıştır. Beşinci bölümde ise, tüm sonuçlar bir çizelgede karşılaştırmalı olarak verilmiş; analitik sonuç ile sayısal sonuçlar karşılaştırılmış ve önerilerde bulunulmuştur.

2. AKIŞKAN–KATI ETKİLEŞİMİNDE TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde verilen temel denklemler, sıkıştırılamaz bir akışkan için; sıvı bölgesinde kavitasyon olmadığı ve yüzey dalgalarının çok küçük olduğu durumlarda geçerlidir. Bununla birlikte, katının elastik bölgede kaldığı ve titreşimin çok küçük genliklerde olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca, ısı, rölativistik ve kuantum etkiler ihmal edilmiştir. Yani, denklemler, ısı etkinin ihmal edildiği sürekli bir ortamda geçerlidir.

Katıya ait sonlu bölge Ω_s , bölgenin sınırı $\partial\Omega_s$, zarfı $\overline{\Omega}_s(\Omega_s + \partial\Omega_s)$ ile; akışkana ait sonlu bölge Ω_f , bölgenin sınırı $\partial\Omega_f$, zarfı $\overline{\Omega}_f(\Omega_f + \partial\Omega_f)$ ile gösterilmiştir.

Aksi belirtilmedikçe, denklemler; sabit, sağ el eğrisel eksen takımında yazılmıştır ve $T = [t_0, t_1)$ zaman aralığında geçerlidir. Tüm değişkenler ve bunlara ait türevlerin var olduğu ve sürekli olduğu kabul edilmiştir.

Katıya ait denklemler “s” alt indisiiyle, akışkana ait denklemler ise “f” alt indisiiyle gösterilmiştir.

2.1 Temel Diferansiyel Denklemler

Sürekli ortamlar mekaniğinde, bir bölgedeki hareketler ve yer değiştirmeler, matematiksel olarak; diverjans, gradyant ve bünye denklemleri olarak üçe ayırabileceğimiz temel denklemlerle modellenir. Diverjans ve gradyant denklemler, özel bünye özelliklerine bakılmaksızın, bütün sürekli ortamlarda geçerli olan evrensel yasalarlardır. Buna karşın, bünye denklemleri; evrensel yasa değildir, belirli bir yaklaşımla, sürekli bir ortamın özelliklerini temsil eden matematiksel modellerdir (Altay ve Dökmeci, 2007; Altay ve Dökmeci, 2005).

2.1.1 Diverjans denklemler

Diverjans denklemler, hareketin temel aksiyomlarına dayanan, gerçekte integral formda olan denklemlerdir. Bununla birlikte, bu denklemler, belirli düzen ve yerel türevi alınabilir koşulları altında diferansiyel formda da yazılabilirler (Altay ve Dökmeci, 2007).

Diverjans denklemler, aşağıda özetlenmiştir (Dökmeci, 2007).

$$g^{ij}v_{i;j} = v_{;i}^i = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{de} \quad (2.1)$$

$$\tau_{;i}^{ij} - g^{ij}p_{,i} + \rho_f(f_f^j - a_f^j) = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{de} \quad (2.2a)$$

$$e_{ijk}\tau^{jk} = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{de} \quad (2.2b)$$

ve

$$t_{;i}^{ij} + \rho_s(f_s^j - a_s^j) = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_s \times T' \text{de} \quad (2.3a)$$

$$e_{ijk}t^{jk} = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_s \times T' \text{de} \quad (2.3b)$$

(2.1) denklemi, süreklilik denklemini; (2.2a) ve (2.3a) denklemleri, momentumun korunumu denklemlerini; (2.2b) ve (2.3b) denklemleri ise, momentumun momentinin (veya açısıl momentumun) korunumu denklemlerini ifade eder.

Yukarıdaki denklemlerde; v_i hız vektörünü, τ^{ij} ve t^{ij} simetrik gerilme tansörünü, p sıvı bölgesindeki hidrodinamik basıncı, ρ kütle yoğunluğunu, f^j birim hacimdeki kütle kuvveti vektörünü, a^j ivme vektörünü göstermektedir. Ayrıca, g^{ij} metrik tansörü, e_{ijk} alterne tansörünü gösterir. Yerçekimi vektörü g^j olmak üzere, birim hacimdeki kütle kuvveti vektörü (f^j), yerçekimi kuvveti etkisi altında $f_f^j = f_s^j = g^j$ halini alır (Altay ve Dökmeci, 2009).

2.1.2 Gradyant denklemler

Gradyant denklemler, her zaman diferansiyel formda yazılırlar ve diverjans denklemlerle bünye denklemleri arasında köprü görevi görürler (Altay ve Dökmeci, 2005).

Gradyant denklemler, aşağıda özetlenmiştir (Dökmeci, 2007).

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i;j} + v_{j;i}) \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{de} \quad (2.4)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) \quad ; \quad \bar{\Omega}_s \times T' \text{de} \quad (2.5)$$

Burada, d_{ij} lineer şekil değiştirme hızı tansörünü, e_{ij} lineer şekil değiştirme tansörünü, v_i hız vektörünü, u_i katı bölgesindeki yer değiştirme vektörünü göstermektedir.

2.1.3 Bünye denklemleri

Bünye denklemleri, genellikle diferansiyel formda veya yalnızca yerel olmayan durum için integral formda yazılırlar. Bu denklemler, temel ilkelerin fiziksel kanıtını ve matematiksel tutarlılığını sağlarlar (Altay ve Dökmeci, 2005).

Bünye denklemleri, aşağıda özetlenmiştir (Dökmeci, 2007).

$$\tau^{ij} = C_f^{ijkl} d_{kl} \quad (2.6)$$

$$t^{ij} = C_s^{ijkl} e_{kl} \quad (2.7)$$

$$C_f^{ijkl} = C_f^{jikl} = C_f^{ijlk} = C_f^{klij} \quad , \quad C_s^{ijkl} = C_s^{jikl} = C_s^{ijlk} = C_s^{klij} \quad (2.8)$$

Bünye denkleminin, şekil değiştirme hızı tansörünün (d_{kl}) bileşenlerine lineer bağlı olduğu akışkanlara Newtonyen; bu bağıllığın lineer olmadığı akışkanlara ise Newtonyen olmayan akışkanlar denir (Currie, 1993; Şuhubi, 1993). Dolayısıyla denklem (2.6) Newtonyen akışkanlar için geçerlidir.

Malzemenin izotropik olması halinde,

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) \quad (2.9)$$

şeklinde yazılır. Burada, C_s^{ijkl} izotermal elastisite katsayısını, C_f^{ijkl} vizkozite katsayısını göstermektedir (Altay ve Dökmeci, 2009). Bununla birlikte; akışkanda, μ dinamik viskozite katsayısını, λ ikinci viskozite katsayısını ifade eder (Currie, 1993). Katıda ise, λ ve μ Lamé sabitleri olarak adlandırılır ve μ sabitine kayma modülü ismi verilir (Fung, 1968).

2.1.4 Sınır koşulları

Neumann-Dirichlet tipi sınır koşulları, aşağıdaki gibidir (Dökmeci, 2007).

$$\sigma_*^j - n_i \sigma^{ij} = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{f\sigma} \times T' \text{de} \quad (2.10)$$

$$v_i - v_i^* = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{fv} \times T' \text{de} \quad (2.11)$$

ve

$$t_*^j - n_i t^{ij} = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{st} \times T' \text{de} \quad (2.12)$$

$$u_i - u_i^* = 0 = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{su} \times T' \text{de} \quad (2.13)$$

Ayrıca,

$$\sigma^j = -pn^j + \tau^j = n_i \sigma^{ij} , \quad \tau^j = n_i \tau^{ij} , \quad \sigma^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij} \quad (2.14)$$

$$t^j = n_i t^{ij} \quad (2.15)$$

Burada, n_i yüzeyden dışarı doğru normal vektörünü, σ^{ij} sıvı bölgesindeki gerilme tansörünü, t^{ij} katı bölgesindeki gerilme tansörünü, σ^j sıvı bölgesindeki gerilme vektörünü, t^j katı bölgesindeki gerilme vektörünü, v_i hız vektörünü, u_i katı bölgesindeki yer değiştirme vektörünü, p sıvı bölgesindeki hidrodinamik basıncı, τ^{ij} viskoz gerilme tansörünü, τ^j viskoz gerilme vektörünü göstermektedir (Altay ve Dökmeci, 2009).

2.1.5 Başlangıç koşulları

Başlangıç koşulları, aşağıdaki gibidir (Dökmeci, 2007).

$$v_i(\theta^j, t_0) - w_i^*(\theta^j) = 0 \quad ; \quad \Omega_f(t_0)'da \quad (2.16)$$

ve

$$u_i(\theta^j, t_0) - \xi_i^*(\theta^j) = 0 , \quad \dot{u}_i(\theta^j, t_0) - \eta_i^*(\theta^j) = 0 \quad ; \quad \Omega_s(t_0)'da \quad (2.17)$$

Burada, w_i^* , ξ_i^* ve η_i^* katı ve sıvı bölgeler için bilinen, verilmiş fonksiyonlardır (Altay ve Dökmeci, 2009).

2.1.6 Arayüz koşulları

Arayüz koşulları, aşağıdaki gibidir (Dökmeci, 2007).

$$v_i - v_{si} = 0 , \quad v_{si} = \dot{u}_i \quad ; \quad \partial\Omega_{fs} \times T'de \quad (2.18)$$

ve

$$v_i(\sigma^{ij} - t^{ij}) = v_i(-pg^{ij} + \tau^{ij} - t^{ij}) = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{fs} \times T'de \quad (2.19)$$

Burada, (2.18) denklemi kinematik uygunluğu (veya kaymama koşulunu), (2.19) denklemi Newton'un üçüncü yasasına göre denge koşulunu ifade eder (Altay ve Dökmeci, 2009).

2.1.7 Diferansiyel denklemlerin çözülebilirliği

(2.1), (2.2), (2.4) ve (2.6) denklemleri, sıkıştırılamaz, izotropik olmayan Newtonyen bir akışkanı; (2.3), (2.5) ve (2.7) denklemleri ise, izotropik olmayan elastik bir katıyı ifade eder.

(2.1)'de 1 denklem, (2.2)'de 3 denklem, (2.4)'te 6 denklem ve (2.6)'da 6 denklem olmak üzere, akışkan için toplam 16 denklem bulunmaktadır. Buna karşılık, p (1 tane), v_i (3 tane), τ^{ij} (6 tane) ve d_{ij} (6 tane) olmak üzere toplam 16 bilinmeyen vardır.

(2.3)'de 3 denklem, (2.5)'te 6 denklem ve (2.7)'de 6 denklem olmak üzere, katı için toplam 15 denklem bulunmaktadır. Buna karşılık, u_i (3 tane), t^{ij} (6 tane) ve e_{ij} (6 tane) olmak üzere toplam 15 bilinmeyen vardır.

Sonuç olarak, hem katıda hem de akışkanda, denklem sayısının bilinmeyenlerin sayısına eşit olduğu görülmektedir. Yani, her iki sistem de çözülebilirdir.

Problemin çözümünde iç uyum özel bir öneme sahiptir. Denklem (2.10) ve denklem (2.11) akışkan bölgesi için, denklem (2.12) ve denklem (2.13) katı bölgesi için sınır koşullarını; denklem (2.16) akışkan bölgesi için, denklem (2.17) katı bölgesi için başlangıç koşullarını; denklem (2.18) ve denklem (2.19) arayüz koşullarını ifade eder. Arayüz koşullarıyla birlikte başlangıç ve sınır koşulları, etkileşim probleminin çözümünün iç uyumunu temin eder (Altay ve Dökmeci, 2007).

2.1.8 Varlık ve teklik

Herhangi bir matematiksel fizik probleminde, cevaplandırılması gereken temel problemlerden biri, çözümün varlığı ve tekliği hakkındadır. Bu soru, genellikle, titiz matematiksel çalışmaların sonucu olan varlık ve teklik teoremleriyle cevaplandırılır (Solonnikov ve Kazhikhov, 1981).

Solonnikov ve Kazhikhov (1981), viskoz, sıkıştırılabilir bir akışkanın hareketini veren denklemlerin çözümünün varlığını incelemiş; iki ve üç boyutlu haller için, yalnızca yerel varlık teoremlerini tespit etmiş ve çözülmeyen en önemli problemlerden birinin, incelemiş olduğu problemin evrensel çözümünün olup olmadığının olduğunu belirtmiştir.

Ladyzhenskaya (1975), viskoz, sıkıştırılamaz bir akışkanın hareketini veren denklemlerin, çözümünün varlığına ve tekliğine; problemin çözülebilirliğine ve

tarihsel gelişimine değinmiştir. Ayrıca, Navier-Stokes denklemleri için yapılan matematiksel çalışmaları özet halinde sunmuştur.

2.1.9 Özel koşullar

- Katının rijit olması durumunda; katı için verilen diferansiyel denklemlerin kullanılmasına gerek yoktur, yalnızca arayüz koşulları kullanılır.
- İzotropik Newtonyen bir akışkanda, viskoz gerilme tansörü (τ^{ij}),

$$\tau^{ij} = \mu(g^{jk}v_{;k}^i + g^{ik}v_{;k}^j) + \lambda g^{ij}v_{;k}^k \quad (2.20)$$

halini alır. Bu ifade şekil değiştirme hızının çok küçük olduğu durumlarda (yani, lineer şekil değiştirme hızı tansörünün kullanılması durumunda) geçerlidir.

Denklem (2.4) ve denklem (2.9)'un denklem (2.6)'da yerine konulmasıyla,

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2}\lambda g^{ij}g^{kl}(v_{k;l} + v_{l;k}) + \frac{1}{2}\mu(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk})(v_{k;l} + v_{l;k}) \quad (2.21)$$

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2}\lambda(g^{ij}v_{;l}^l + g^{ij}v_{;k}^k) + \frac{1}{2}\mu(g^{jl}v_{;l}^i + g^{ik}v_{;k}^j + g^{il}v_{;l}^j + g^{jk}v_{;k}^i) \quad (2.22)$$

$$\tau^{ij} = \lambda g^{ij}v_{;k}^k + \frac{1}{2}\mu(g^{jk}v_{;k}^i + g^{ik}v_{;k}^j + g^{ik}v_{;k}^j + g^{jk}v_{;k}^i) \quad (2.23)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\tau^{ij} = \lambda g^{ij}v_{;k}^k + \mu(g^{jk}v_{;k}^i + g^{ik}v_{;k}^j) \quad (2.24)$$

olur.

- İzotropik bir katıda, gerilme tansörü (t^{ij}),

$$t^{ij} = \mu(g^{jk}u_{;k}^i + g^{ik}u_{;k}^j) + \lambda g^{ij}u_{;k}^k \quad (2.25)$$

halini alır. Bu ifade şekil değiştirmelerin çok küçük olduğu durumlarda (yani, lineer şekil değiştirme tansörünün kullanılması durumunda) geçerlidir.

- İdeal (viskozitesiz) bir akışkanda viskoz gerilmeler ortadan kalkar ve $\tau^{ij} = 0$ olur, böylece $\sigma^{ij} = -pg^{ij}$ halini alır (Altay ve Dökmeci, 2009).
- Dik kartezyen eksen takımında; kovaryant türev (;) kısmi türeve (.), metrik tansör (g^{ij}) ise Kronecker deltaya (δ_{ij}) dönüşür (Dökmeci, 2007). Böylece, denklem (2.20) dik kartezyen eksen takımında,

$$\tau_{ij} = \mu(\delta_{jk}v_{i,k} + \delta_{ik}v_{j,k}) + \lambda\delta_{ij}v_{k,k} \quad (2.26)$$

$$\tau_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \lambda\delta_{ij}v_{k,k} \quad (2.27)$$

halini alır.

Aynı şekilde, denklem (2.25) dik Kartezyen eksen takımında,

$$t_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda\delta_{ij}u_{k,k} \quad (2.28)$$

halini alır.

2.2 Varyasyonel Denklemler

Diferansiyel forma bir seçenek olarak, bazı temel denklemler veya tamamı, kısa ve öz olarak varyasyonel formda yazılabilirler (Altay ve Dökmeci, 2007).

Mekanikte, varyasyonel ilkelerin gelişimi, tarihsel olarak Efes’li Heraclitos ve diğer eski Yunan bilim insanlarına kadar dayanır. Akışkanlar mekaniğinde, ilk klasik varyasyonel ilke Lord Kelvin tarafından ideal akışkanlara uygulanmıştır. Kelvin’in minimum enerji ilkesinden sonra, çok sayıda araştırmacı tarafından, akışkanlar için çeşitli varyasyonel ilkeler verilmiştir. Katı mekaniğinde ise, Hilbert’in sürekli ortamlar mekaniği ve varyasyonel hesaplar dersinden ilham alan Prange ve Hellinger, elastodinamiğin ilk klasik varyasyonel ilkelerini inşa etmiştir. Daha sonra, çok sayıda yazar bu konuya katkıda bulunmuştur (Altay ve Dökmeci, 2009).

Sürekli ortamlar mekaniğinde, varyasyonel hesap kullanılmasının bazı önemli nedenleri vardır. Öncelikle, teorik fiziğin en güzel ilkelerinden olan temel minimum ilkelerden yararlanılabilir. Ayrıca, temel diferansiyel denklemler ve bunlara ilişkin sınır koşullarının en kısa yoldan çıkarımı, genellikle varyasyonel hesapla mümkündür. Dahası, varyasyonel problemlerin yaklaşık-direk yöntemlerle çözümü, sayısal çözüm için en güçlü araçlardan biridir (Fung, 1968).

Varyasyonel ilkeler, sezgisel bir yaklaşımla (önceki deneyimlerinden faydalanılarak veya deneme-yanılma yoluyla) veya kıvrım yöntemi (“method of convolution”) gibi matematiksel yöntemlerle elde edilebilir. Ayrıca, Hamilton ilkesi, virtüel iş ilkesi, virtüel güç ilkesi, virtüel dağılım ilkesi gibi genel fizik ilkeleri yardımıyla ve/veya Friedrichs ya da Legendre dönüşümü gibi uygun bir dönüşüm yardımıyla da çıkarılabilir (Altay ve Dökmeci, 2007).

Matematiksel yöntemlerin kullanılması sonucunda, açık bir fonksiyonelle birlikte integral tipi varyasyonel ilkeler elde edilir. Bu tip varyasyonel ilkeler, yalnızca bazı koşullara sahip sistemlerin (lineer ve “self-adjoint” olan sistemlerin) temel denklemlerini çıkarırken kullanılabilir ve varlığı Frechet türevi ile saptanabilir (Altay ve Dökmeci, 2007).

Sonsuz küçük varsayılan ifadelerinden ötürü, tanım gereği, fiziksel ilkelerde açık bir fonksiyonel yoktur ve fiziksel ilkelerin kullanılması sonucunda her zaman diferansiyel tipte varyasyonel ilkeler elde edilir. Diferansiyel tipte varyasyonel ilkeler, herhangi bir sistemin temel denklemlerini elde etmek için, neredeyse her zaman kullanılabilir (Altay ve Dökmeci, 2007).

Varyasyonel ilkelerin, varlığı, çıkarımı ve uygulamaları gibi detaylar, Lanczos (1970), Oden ve Reddy (1976) ve Washizu (1982) tarafından ele alınmıştır (Aşkar Altay ve Dökmeci, 1996).

Ayrıca, akışkan-katı etkileşimi problemlerinde kullanılmak üzere, akışkan ve/veya katı bölgeleri için varyasyonel denklemler, eğrisel eksen takımında Altay ve Dökmeci (2009) tarafından kapsamlı bir şekilde çıkarılmıştır.

3. AĞIRLIKLILIK ARTIKLAR YÖNTEMİ

Ağırlıklı artıklar yöntemi, diferansiyel denklemleri yaklaşık olarak çözmek için kullanılan genel bir yöntemdir. Yöntemin uygulanışı, kısaca şu şekilde özetlenebilir:

$H(x)$ bir operatörü, $B(x)$ bağımlı bir değişkeni, $K(x)$ homojen olmayan bir kaynak terimini ve x bağımsız bir veya birden çok değişkeni göstermek üzere,

$$H(x)B(x) - K(x) = 0 \quad (3.1)$$

denklemini ele alalım. Denklem (3.1)'in çözümünü yaklaşık olarak,

$$B^*(x) = c_0(x) + \sum_{n=1}^N c_n f_n \quad (3.2)$$

ile ifade edelim. Burada; f_n denklem (3.1) ile ilişkili sınır koşullarını sağlayan lineer olarak bağımsız fonksiyonlar (diğer bir deyişle şekil fonksiyonu), c_n hesaplanacak olan genişleme katsayılarıdır. $B^*(x)$ 'e ise deneme fonksiyonu adı verilir (Pomraning, 1966).

Ağırlıklı artıklar yönteminde, diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünü en iyi verecek deneme fonksiyonu ($B^*(x)$) seçilir. Deneme fonksiyonunun diferansiyel denklemde yerine konulmasıyla elde edilen değere artık değeri adı verilir. Yöntemin esası, ağırlık fonksiyonları ile artık değerinin çarpımının bölgedeki integrasyonunun sıfıra eşitlenmesine dayanmaktadır (Finlayson, 1972).

$$\int_{\Omega} w_n R d\Omega = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.3)$$

Burada, w ağırlık fonksiyonunu, R artık değeri göstermektedir.

Yukarıda anlatıldığı gibi, deneme fonksiyonu sınır koşullarını sağlıyor fakat diferansiyel denklemi sağlamıyorsa, buna iç yöntem adı verilir. Bunu dışında, deneme fonksiyonu diferansiyel denklemi sağlar fakat sınır koşullarını sağlamaz ise,

buna sınır yöntemi; hem diferansiyel denklemi hem de sınır koşullarını sağlamıyorsa buna da karma yöntem adı verilir (Finlayson, 1972; Finlayson ve Scriven, 1966).

Ağırlıklı artıklar yöntemi çok sayıda yöntemi içerir. Aşağıda, bu yöntemlerden moment yöntemine, kollokasyon yöntemine, Galerkin yöntemine ve en küçük kareler yöntemine kısaca değinilmiştir. Bununla birlikte, ağırlıklı artıklar yöntemi, Brebbia (1984), Collatz (1966), Crandall (1956) ve Finlayson (1972) tarafından daha detaylı olarak ele alınmıştır. Daha kapsamlı bir anlatım için bu kitaplara başvurulabilir.

3.1 Moment Yöntemi

Moment yönteminde, ağırlık fonksiyonları bağımsız değişkenin (veya değişkenlerin) kuvvetleri şeklinde seçilmiştir.

$$w_n = x^{n-1} ; n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} w_n R d\Omega = \int_{\Omega} x^{n-1} R d\Omega = \int_{\Omega} R x^{n-1} d\Omega = 0 ; n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.5)$$

3.2 Kollokasyon Yöntemi

Kollokasyon yönteminde, ağırlık fonksiyonları Dirac delta fonksiyonlarıdır (Finlayson ve Scriven, 1966).

$$w_n = \delta(x - x_n) ; n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} w_n R d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x - x_n) R d\Omega = R(x_n) = 0 ; n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.7)$$

Denklem (3.7)'den de görüldüğü üzere, artık değer, seçilmiş N tane kollokasyon noktasında sıfır olur veya başka bir deyişle, diferansiyel denklem N tane kollokasyon noktasında sağlanmış olur (Finlayson, 1972; Finlayson ve Scriven, 1966). N değeri büyüdükçe, yaklaşık çözümün kesin çözüme yaklaşacağı ve daha iyi bir sonuç elde edileceği aşikardır.

Kollokasyon yönteminde, kollokasyon noktalarının seçimi kritik bir öneme sahiptir. Wright, adi diferansiyel denklemler için, Chebyshev polinomlarının kökleri

kollokasyon noktaları olarak seçildiğinde, artık değerin en aza indiğini göstermiştir (Finlayson ve Scriven, 1966).

3.3 Galerkin Yöntemi

Galerkin yöntemi, 1915 yılında, Rus mühendis Galerkin tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemde, ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonları (f_n) olarak seçilmiştir (Finlayson, 1972).

$$w_n = f_n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.8)$$

$$\int_{\Omega} w_n R d\Omega = \int_{\Omega} f_n R d\Omega = \int_{\Omega} R f_n d\Omega = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.9)$$

3.4 En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler yöntemi, 1795 yılında, ilk kez Gauss tarafından kullanılmıştır. Fakat, Gauss'un bu çalışmayı yayınlamaması ve en küçük kareler yöntemini Gauss'tan bağımsız olarak keşfeden Legendre tarafından benzer fikirlerin 1806 yılında kendi kitabında yayınlanması tartışmaya neden olmuştur (Sorenson, 1970). Daha sonra, en küçük kareler yöntemi, diferansiyel denklemleri çözmek üzere ilk defa Picone tarafından kullanılmıştır (Finlayson, 1972).

En küçük kareler yönteminde, ağırlık fonksiyonları, artık değerin karesinin bölge içindeki integrasyonunu en küçük yapacak şekilde seçilmiştir (Finlayson ve Scriven, 1966).

$$I = \int_{\Omega} R^2 d\Omega \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial c_n} = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial c_n} d\Omega = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.11)$$

Sonuç olarak, en küçük kareler yönteminde, ağırlık fonksiyonları $\partial R / \partial c_n$ 'dir (Finlayson, 1972). Yani,

$$w_n = \frac{\partial R}{\partial c_n} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} w_n R d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial c_n} R d\Omega = \int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial c_n} d\Omega = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.13)$$

4. UYGULAMA

Literatürde, problemi ifade eden formülasyon yapılmış, fakat örnek soru neredeyse hiç çözülmemiştir. Çözülen örnek sorularda da, şekil fonksiyonu olarak ne seçildiği ve nasıl seçildiği konusunda bilgilendirici bir veriye rastlanmamıştır.

Bu bölümde, Şekil 4.1’de boyutları verilen, kısmi doldurulmuş dikdörtgen kesitli rijit bir tankın serbest sıvı yüzeyinin doğal frekansı, Galerkin yöntemiyle, üç tane deneme fonksiyonu için hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar ve analitik sonuç Çizelge 5.1’de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Akışkanın dikdörtgen kesitli tanklardaki davranışı, tank boyuna göre iki veya üç boyutlu olarak modellenenebilir. Tank boyu oldukça büyükse, problemin çözümü için iki boyutlu hesap yeterlidir (İbrahim, 2005). Bu bölümde çözülecek örnek soru için, tank boyunun oldukça büyük olduğu kabul edilmiş ve örnek soru iki boyutlu hal için çözülmüştür.

Akışkan, ideal (viskozitesiz) ve sıkıştırılmaz, akışkanın hareketi çevrisiz (irrotasyonel) kabul edilmiştir. Böylece, hız vektörü, skalar bir fonksiyonun gradyanı olarak yazılabilir (Landau ve Lifshitz, 1989). Bununla birlikte, maksimum dalga genliğinin, dalga boyundan oldukça küçük olduğu kabul edilmiştir. Yani, lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulu kullanılabilir (Bishop ve Price, 2005). Ayrıca, akışkanı barındıran tank ise, rijit olarak kabul edilmiştir.

4.1 Problemi İfade Eden Denklemler

Şekil 4.1’deki problemi ifade eden denklemler aşağıda özetlenmiştir (Currie, 1993; İbrahim, 2005).

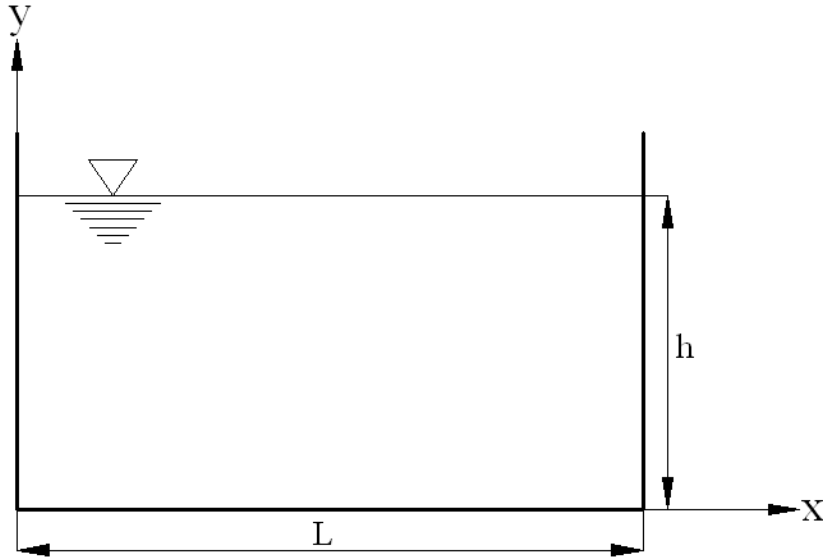
$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{de} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \partial \Omega_{fs} \times T' \text{de} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad S \times T' \text{de} \quad (4.3)$$

(4.1) denklemi, süreklilik denklemini; (4.2) denklemi, arayüz koşullarını; (4.3) denklemi ise lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulunu ifade eder.

Burada, $\varphi(x, y, t)$ hız potansiyelini, n dışarı doğru yüzeyin normalini, g yerçekimi ivmesini, S serbest sıvı yüzeyini göstermektedir.



Şekil 4.1 : Kısmi doldurulmuş dikdörtgen kesitli rijit tank

Burada; L tankın genişliği, h tankın içindeki sıvının yüksekliğidir.

4.1.1 Süreklilik denklemi

Denklem (2.1)'de verilen, sıkıştırılamaz akışkanlar için süreklilik denklemi, vektörel formda,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{de} \quad (4.4)$$

şeklinde yazılır.

Akışkanın hareketi çevrisiz (irrotasyonel) olduğundan, hız vektörü skalar bir fonksiyonunun gradyanı olarak yazılabilir (Landau ve Lifshitz, 1989).

$$\vec{v} = \nabla \varphi \quad (4.5)$$

Böylece, süreklilik denklemi, Laplace denklemi olarak bilinen,

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f \times T' \text{ de} \quad (4.6)$$

halini alır. Burada $\vec{v}$ hız vektörünü, φ hız potansiyelini göstermektedir.

4.1.2 Arayüz koşulları

Akışkan ile etkileşim halinde olan bir duvarda; arayüz koşulları, akışkanın viskoz veya viskozitesiz olma durumuna göre farklılık gösterir. Viskoz bir akışkanda, akışkan duvara yapışmalıdır (Axiş ve Antunes, 2007). Bunu ifade eden arayüz koşulu denklem (2.18)'de verilmiştir. Viskozitesiz bir akışkanda ise, akışkan duvar boyunca serbestçe kayabilir fakat akışkanın duvar ile temas halinde olduğu kabul edilmiştir (Axiş ve Antunes, 2007). Bunu ifade eden arayüz koşulu,

$$(v_i - v_{si})n^i = 0 \quad , \quad v_{si} = \dot{u}_i \quad ; \quad \partial\Omega_{fs} \times T' \text{ de} \quad (4.7a)$$

Katı rijit olduğundan $u_i = 0$ olur. Böylece, denklem (4.7a) vektörel formda,

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{fs} \times T' \text{ de} \quad (4.7b)$$

şeklinde yazılır.

Akışkanın hareketi çevrisiz (irrotasyonel) olduğundan, hız vektörü skalar bir fonksiyonunun gradyanı olarak yazılabilir (Landau ve Lifshitz, 1989). Böylece, arayüz koşulları,

$$\vec{n} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \partial\Omega_{fs} \times T' \text{ de} \quad (4.8)$$

halini alır.

Burada; $\vec{v}$ ve v_i hız vektörünü, u_i katı bölgesindeki yer değiştirme vektörünü, n yüzeyden dışarı doğru normali, $\vec{n}$ ve n^i normal vektörünü, φ hız potansiyelini göstermektedir.

4.1.3 Lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulu

Denklem (2.2a) ile belirtilen momentumun korunumu denklemi, ideal (viskozitesiz) bir akışkan ve çevrisiz (irrotasyonel) bir akış için Bernoulli denklemi halini alır. Bu denklemde, serbest sıvı yüzeyi basıncının atmosfer basıncına eşit alınmasıyla ve lineer olmayan terimlerin de denklemden atılmasıyla; lineerleştirilmiş dinamik serbest sıvı yüzeyi koşulu olan,

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} ; \quad S \times T' \text{de} \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir.

Herhangi bir anda serbest sıvı yüzeyinde olan akışkan parçacığı, serbest sıvı yüzeyinde kalmaya devam eder cümlesi kinematik serbest sıvı yüzeyi koşulu ifade eder (Currie, 1993). Böylece, lineerleştirilmiş kinematik serbest sıvı yüzeyi koşulu,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; \quad S \times T' \text{de} \quad (4.10)$$

denklemini ile ifade edilir.

Lineerleştirilmiş dinamik serbest sıvı yüzeyi koşulu ile lineerleştirilmiş kinematik serbest sıvı yüzeyi koşulunun birleştirilmesi sonucu,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 ; \quad S \times T' \text{de} \quad (4.11)$$

ile ifade edilen lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulu elde edilir.

Burada, $\eta(x, t)$ sıvı parçacığının serbest sıvı yüzeyine olan mesafesini, g yerçekimi ivmesini, φ hız potansiyelini göstermektedir.

Lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulunun adım adım çıkarımı; Currie (1993), Gören (2008), Lamb (1932), Newman (1977), Rahman (1995), Sabuncu (1993) ve Şuhubi (1993) tarafından ele alınmıştır. Detaylı bir anlatım için bu kitaplara başvurulabilir.

Serbest sıvı yüzeyinin doğal frekansını (ω) bulmak üzere; hız potansiyeli $\varphi(x, y, t)$, zamana ve konuma bağlı iki fonksiyonun çarpımı şeklinde yazılabilir.

$$\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) \cdot F(t) \quad (4.12)$$

Herhangi bir periyodik fonksiyon, yakınsayan harmonik fonksiyon serisi ile ifade edilebilir ki bu harmonik fonksiyon serisine Fourier serisi ismi verilir (Meirovitch, 1986). Böylece, $F(t)$, periyodu T_0 olan periyodik bir fonksiyon olarak kabul edilirse, Fourier serisine açılarak en genel halde,

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k [\cos(k\omega t) + i \sin(k\omega t)] , \quad \omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (4.13)$$

şeklinde yazılabilir (Meirovitch, 1967). Bu fonksiyonun yalnızca ilk teriminin alınması halinde,

$$F(t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad (4.14)$$

olur. Bu fonksiyonun da gerçel terimi göz önüne alınırsa, böylece denklem (4.13)

$$F(t) = \cos(\omega t) \quad (4.15)$$

halini alır.

Sonuç olarak, serbest sıvı yüzeyinin doğal frekansı ω olmak üzere, hız potansiyeli aşağıdaki gibi yazılabilir (Moiseev ve Petrov, 1966).

$$\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) \cdot \cos(\omega t) \quad (4.16)$$

Böylece, $\phi(x, y)$ fonksiyonu özdeğer probleminin çözümü olmak üzere, denklem (4.1), denklem (4.2) ve denklem (4.3), sırasıyla,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad ; \quad \bar{\Omega}_f' \text{de} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad ; \quad \partial \Omega_{fs}' \text{de} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} - \kappa \phi = 0 \quad ; \quad S' \text{de} \quad (4.19)$$

halini alır (Moiseyev ve Rumyantsev, 1968; Morand ve Ohayon, 1995). Burada κ özdeğerdir ve

$$\kappa = \frac{\omega^2}{g} \quad (4.20)$$

değerine karşılık gelir.

Bu bölümde çözülecek problem için, $h = 1 \text{ m}$ ve $L = 2 \text{ m}$ alınmıştır.

4.2 Analitik Sonuç

Akışkanın, ideal (viskozitesiz) ve sıkıştırılamaz, akış hareketinin çevrisiz (irrotasyonel) olması ve lineerleştirilmiş serbest sıvı yüzeyi koşulunun kullanılması durumunda; dikdörtgen bir tanktaki serbest sıvı yüzeyinin doğal frekansları, analitik olarak,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\pi n}{L} \tanh\left(\frac{h\pi n}{L}\right)} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.21)$$

formülüyle ifade edilir. Burada; g yerçekimi ivmesi, L tankın genişliği, h tankın içindeki sıvının yüksekliğidir.

Sayısal değerler yerine konursa ($h = 1 \text{ m}$ ve $L = 2 \text{ m}$), birinci doğal frekans değeri, analitik olarak,

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81 \cdot \pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 3,76 \text{ rad/s} \quad (4.22)$$

bulunur.

Üç boyutlu, dikdörtgen kesitli bir tankın, serbest sıvı yüzeyi doğal frekansının analitik hesabı için veya serbest sıvı yüzeyi doğal frekansı analitik olarak hesaplanabilen basit geometriye sahip diğer tanklar için Ibrahim (2005) incelenebilir.

4.3 Hesap Yönteminin Seçimi

Yukarıdaki problem, diferansiyel denklemi ve sınır koşullarını verecek ve integrali ekstremum yapacak olan varyasyonel ilke yardımıyla çözülebilir. Bununla birlikte, bu problem, çok sayıda ağırlıklı artıklar yönteminden biriyle de çözülebilir. Varyasyonel denklemler yerine, doğrudan diferansiyel denklemlerle çalışmak ağırlıklı artıklar yöntemine üstünlük kazandırmaktadır (Snyder ve diğ., 1964). Bu nedenle, basitliği nedeniyle, problemin çözümü için ağırlıklı artıklar yöntemi tercih edilmiştir.

4.4 Kullanılacak Ağırlıklı Artık Yönteminin Seçimi

Crandall (1956), aynı şekil fonksiyonu için, farklı ağırlıklı artıklar yöntemiyle elde edilen sonuçlar arasındaki farkın, değişik şekil fonksiyonları ile elde edilen sonuçlar arasındaki farktan daha az önemli olduğunu belirtmiştir. Yani, daha çok şekil fonksiyonun seçimi üzerinde durulması gerektiğini vurgulamıştır.

Finlayson (1972) ise, deneme fonksiyonunun çok sayıda terim içermesi durumunda, ağırlıklı artıklar yönteminden hangisinin kullanılacağına çok fazla öneme sahip olmadığını belirtmiştir. Bununla birlikte, varyasyonel yöntemle uyumlu olması ve

özdeğer problemlerinde daha doğru sonuçlar vermesi nedeniyle, genellikle Galerkin yönteminin tercih edildiğini vurgulamıştır. Bu nedenle, problemin çözümünde Galerkin yöntemi kullanılacaktır.

4.5 Şekil Fonksiyonun Seçimi

Şekil fonksiyonunun seçimi hayati derecede öneme sahiptir. Şekil fonksiyonu olarak, genellikle polinomların seçilmesiyle birlikte; şekil fonksiyonunun seçimi, seçen kişinin sezgisine ve deneyimine olan bağlılığını hala sürdürmektedir (Finlayson ve Scriven, 1966).

Problemin çözümü bilgisayar yardımıyla yapılırsa; bilgisayar, ister sinüzoidal olsun ister eksponansiyel olsun, bu fonksiyonların değerini MacLaurin serisine açarak hesaplayacaktır. Yani, kuvvet serisi biçimindeki ifadeleri kullanarak hesap yapacaktır. Bu nedenle, şekil fonksiyonu, öncelikli olarak kuvvet serisi şeklinde seçilmeye çalışılmıştır. Fakat, denklem (4.17) ve denklem (4.18)'i sağlayacak şekil fonksiyonu kuvvet serisi biçiminde seçilemediğinden aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$\phi_1 = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \quad (4.23)$$

Şekil fonksiyonunun denklem (4.17)'yi de sağlaması için $m=n$ olmalıdır. Böylece,

$$\phi_1 = \sum_{m=1}^N c_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{m\pi y}{L}\right) \quad (4.24)$$

halini alır.

Bu çalışma kapsamında, serbest sıvı yüzeyinin yalnızca birinci doğal frekansı hesaplanacağından, deneme fonksiyonunun bir teriminin alınması yeterlidir. Sonuç olarak, problemin çözümü öncelikle,

$$\phi_1 = c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (4.25)$$

deneme fonksiyonu kullanılarak yapılacaktır.

Ayrıca, şekil fonksiyonu seçiminin sonuç üzerindeki etkisini incelemek amacıyla, problem, yalnızca denklem (4.18)'i sağlayan

$$\phi_{2-3} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N d_{mn} y^{n+1} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (4.26)$$

şekil fonksiyonu için de çözülecektir. Bununla birlikte, alınan terim sayısının sonucu ne kadar etkilediğini görmek için de, bu şekil fonksiyonundan bir terim ve iki terim alınarak, problem,

$$\phi_2 = d_1 y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.27)$$

$$\phi_3 = d_1 y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + d_2 y^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) = (d_1 y^2 + d_2 y^3) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.28)$$

deneme fonksiyonları için de çözülecektir.

Sonuç olarak; problem, denklem (4.25)'te, denklem (4.27)'de ve denklem (4.28)'de verilen üç adet deneme fonksiyonu için çözülecektir.

Tüm sonuçlar karşılaştırmalı olarak Çizelge 5.1'de verilmiştir.

4.6 Deneme Fonksiyonu $\phi = c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ İçin Çözüm

Problemin çözümü için ihtiyaç duyulacak değerler aşağıda hesaplanmıştır.

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=h} = \left[c \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{L}\right) \right]_{y=h} = c \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \quad (4.29)$$

$$\phi|_{y=h} = \left[c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{L}\right) \right]_{y=h} = c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \quad (4.30)$$

Denklem (4.29) ile denklem (4.30)'un, denklem (4.19)'de yerine konulmasıyla elde edilen artık değer R olarak adlandırılırsa, problem,

$$\int_S R w dS = \int_{x=0}^L R w dx = 0 \quad (4.31)$$

bağıntısı kullanılarak çözülecektir.

Burada, w ağırlık fonksiyonudur. Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonları (f_n) olarak seçildiğinden,

$$w = f = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (4.32)$$

değerine karşılık gelir. Ayrıca,

$$R = c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi h}{L}\right) - \kappa \cdot \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \right] \quad (4.33)$$

olarak bulunur.

w ve R değerleri denklem (4.31)'de yerine konulursa,

$$\int_{x=0}^L R \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) dx = 0 \quad (4.34)$$

$$\int_{x=0}^L c \cdot \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left[\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi h}{L}\right) - \kappa \cdot \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \right] \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) dx = 0 \quad (4.35)$$

$$c \cdot \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \left[\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi h}{L}\right) - \kappa \cdot \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \right] \int_{x=0}^L c \cdot \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (4.36)$$

denklemini elde edilir. Denklem (4.36)'dan da görüldüğü üzere,

$$\frac{\pi}{L} \sinh\left(\frac{\pi h}{L}\right) - \kappa \cdot \cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right) = 0 \quad (4.37)$$

olmalıdır. Buradan da,

$$\kappa = \frac{\pi}{L} \frac{\sinh\left(\frac{\pi h}{L}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi h}{L}\right)} = \frac{\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \quad (4.38)$$

$$\omega^2 = \frac{g\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right) \quad (4.39a)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)} \quad (4.39b)$$

olarak bulunur.

Sayısal değerler yerine konursa ($h = 1 \text{ m}$ ve $L = 2 \text{ m}$),

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81 \cdot \pi}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 3,76 \text{ rad/s} \quad (4.40)$$

sonucu elde edilir.

4.7 Deneme Fonksiyonu $\phi = d \cdot y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ İçin Çözüm

Problemin çözümü için ihtiyaç duyulacak değerler aşağıda hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -d \frac{\pi}{L} y^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -d \frac{\pi^2}{L^2} y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2 \cdot d \cdot y \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 \cdot d \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.44)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=h} = \left[2 \cdot d \cdot y \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{y=h} = 2 \cdot d \cdot h \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.45)$$

$$\phi|_{y=h} = \left[d \cdot y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{y=h} = d \cdot h^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.46)$$

Denklem (4.42) ile denklem (4.44)'ün, denklem (4.17)'de yerine konulmasıyla elde edilen artık değer R_1 ve denklem (4.45) ile denklem (4.46)'nın, denklem (4.19)'da yerine konulmasıyla elde edilen artık değer artık değer ise R_2 olarak adlandırılırsa, problem,

$$\int_{\Omega} R_1 w d\Omega + \int_S R_2 w dS = \int_{y=0}^h \int_{x=0}^L R_1 w dx dy + \int_{x=0}^L R_2 w dx = 0 \quad (4.47)$$

yaklaşımı kullanılarak çözülecektir.

Burada, w ağırlık fonksiyonudur. Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonları (f_n) olarak seçildiğinden,

$$w = f = y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.48)$$

değerine karşılık gelir. Ayrıca,

$$R_1 = -d \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{\pi^2}{L^2} y^2 - 2\right) \quad (4.49)$$

$$R_2 = d \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) (2h - \kappa h^2) \quad (4.50)$$

olarak bulunur.

w , R_1 ve R_2 değerleri denklem (4.47)'de yerine konulursa,

$$\int_{y=0}^h \int_{x=0}^L R_1 y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy + \int_{x=0}^L R_2 h^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} - \int_{y=0}^h \int_{x=0}^L d \cdot \left(\frac{\pi^2}{L^2} y^4 - 2y^2\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy \\ + \int_{x=0}^L d \cdot (2h^3 - \kappa h^4) \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca,

$$\int \cos^2(kx) dx = \int \frac{1 + \cos(2kx)}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2kx)}{4} + D \quad (4.53a)$$

$$\int_{x=0}^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \int_{x=0}^L \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{4} \right] \Bigg|_{x=0}^L = \frac{L}{2} \quad (4.53b)$$

olarak hesaplanır. Böylece denklem (4.52),

$$d \cdot \frac{L}{2} \left[(2h^3 - \kappa h^4) - \int_{y=0}^h \left(\frac{\pi^2}{L^2} y^4 - 2y^2\right) dy \right] = 0 \quad (4.54)$$

halini alır. Büyük parantezin içindeki integral,

$$\int_{y=0}^h \left(\frac{\pi^2}{L^2} y^4 - 2y^2\right) dy = \left(\frac{\pi^2}{5L^2} y^5 - \frac{2}{3} y^3\right) \Bigg|_{y=0}^h = \frac{\pi^2}{5L^2} h^5 - \frac{2}{3} h^3 \quad (4.55)$$

olarak hesaplanır. Böylece, denklem (4.54),

$$d. \frac{L}{2} \left[(2h^3 - \kappa h^4) - \left(\frac{\pi^2}{5L^2} h^5 - \frac{2}{3} h^3 \right) \right] = 0 \quad (4.56)$$

$$(2h^3 - \kappa h^4) - \left(\frac{\pi^2}{5L^2} h^5 - \frac{2}{3} h^3 \right) = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{8}{3} h^3 - \kappa h^4 - \frac{\pi^2}{5L^2} h^5 = 0 \quad (4.58)$$

halini alır. Buradan da,

$$\kappa = \frac{\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{5L^2} h^2}{h} \quad (4.59)$$

$$\omega^2 = \frac{g \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{5L^2} h^2 \right)}{h} \quad (4.60a)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{5L^2} h^2 \right)}{h}} \quad (4.60b)$$

olarak bulunur.

Sayısal değerler yerine konursa ($h = 1 \text{ m}$ ve $L = 2 \text{ m}$),

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81 \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{\pi^2}{20} \right)}{1}} = 4,62 \text{ rad/s} \quad (4.61)$$

sonucu elde edilir.

4.8 Deneme Fonksiyonu $\phi = (d_1 y^2 + d_2 y^3) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ İçin Çözüm

Problemin çözümü için ihtiyaç duyulacak değerler aşağıda hesaplanmıştır.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -(d_1 y^2 + d_2 y^3) \frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -(d_1 y^2 + d_2 y^3) \frac{\pi^2}{L^2} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (2d_1 y + 3d_2 y^2) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = (2d_1 + 6d_2 y) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.65)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=h} = \left[(2d_1 y + 3d_2 y^2) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{y=h} = (2d_1 h + 3d_2 h^2) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.66)$$

$$\phi|_{y=h} = \left[(d_1 y^2 + d_2 y^3) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{y=h} = (d_1 h^2 + d_2 h^3) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.67)$$

Denklem (4.63) ile denklem (4.65)'in, denklem (4.17)'de yerine konulmasıyla elde edilen artık değer R_1 ve Denklem (4.66) ile denklem (4.67)'nin, denklem (4.19)'da yerine konulmasıyla elde edilen artık değer artık değer ise R_2 olarak adlandırılırsa, problem,

$$\int_{\Omega} R_1 w_1 d\Omega + \int_S R_2 w_1 dS = \int_{y=0}^h \int_{x=0}^L R_1 w_1 dx dy + \int_{x=0}^L R_2 w_1 dx = 0 \quad (4.68)$$

ve

$$\int_{\Omega} R_1 w_2 d\Omega + \int_S R_2 w_2 dS = \int_{y=0}^h \int_{x=0}^L R_1 w_2 dx dy + \int_{x=0}^L R_2 w_2 dx = 0 \quad (4.69)$$

yaklaşımı kullanılarak çözülecektir.

Burada, w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonlarıdır. Galerkin yönteminde ağırlık fonksiyonları şekil fonksiyonları (f_n) olarak seçildiğinden,

$$w_1 = f_1 = y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.70)$$

$$w_2 = f_2 = y^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.71)$$

değerine karşılık gelir. Ayrıca,

$$R_1 = \left[-(d_1 y^2 + d_2 y^3) \frac{\pi^2}{L^2} + (2d_1 + 6d_2 y) \right] \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.72)$$

$$R_2 = [(2d_1 h + 3d_2 h^2) - \kappa(d_1 h^2 + d_2 h^3)] \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.73)$$

olarak bulunur.

w_1 , R_1 ve R_2 değerleri denklem (4.68)'de yerine konulursa,

$$\int_{y=0}^h \int_{x=0}^L R_1 y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy + \int_{x=0}^L R_2 h^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^h \int_{x=0}^L \left[-(d_1 y^4 + d_2 y^5) \frac{\pi^2}{L^2} + (2d_1 y^2 + 6d_2 y^3) \right] \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy \\ + \int_{x=0}^L [(2d_1 h^3 + 3d_2 h^4) - \kappa(d_1 h^4 + d_2 h^5)] \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

denklemi elde edilir.

Denklem (4.53)'te gösterildiği üzere,

$$\int_{x=0}^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \quad (4.76)$$

olarak bulunur. Böylece, denklem (4.75),

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \left\{ [(2d_1 h^3 + 3d_2 h^4) - \kappa(d_1 h^4 + d_2 h^5)] \right. \\ \left. - \int_{y=0}^h \left[(d_1 y^4 + d_2 y^5) \frac{\pi^2}{L^2} - (2d_1 y^2 + 6d_2 y^3) \right] dy = 0 \right\} \end{aligned} \quad (4.77)$$

halini alır. Büyük parantezin içindeki integral,

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^h \left[(d_1 y^4 + d_2 y^5) \frac{\pi^2}{L^2} - (2d_1 y^2 + 6d_2 y^3) \right] dy \\ = \left[\left(\frac{d_1}{5} y^5 + \frac{d_2}{6} y^6 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{2d_1}{3} y^3 + \frac{3d_2}{2} y^4 \right) \right] \Big|_{y=0}^h \\ = \left(\frac{1}{5} d_1 h^5 + \frac{1}{6} d_2 h^6 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{2}{3} d_1 h^3 + \frac{3}{2} d_2 h^4 \right) \end{aligned} \quad (4.78)$$

olarak hesaplanır. Böylece denklem (4.77),

$$\frac{L}{2} \left\{ [(2d_1h^3 + 3d_2h^4) - \kappa(d_1h^4 + d_2h^5)] - \left[\left(\frac{1}{5}d_1h^5 + \frac{1}{6}d_2h^6 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{2}{3}d_1h^3 + \frac{3}{2}d_2h^4 \right) \right] \right\} = 0 \quad (4.79)$$

halini alır. Buradan da,

$$[(2d_1h^3 + 3d_2h^4) - \kappa(d_1h^4 + d_2h^5)] - \left[\left(\frac{1}{5}d_1h^5 + \frac{1}{6}d_2h^6 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{2}{3}d_1h^3 + \frac{3}{2}d_2h^4 \right) \right] = 0 \quad (4.80)$$

$$2h^3d_1 + 3h^4d_2 - \kappa h^4d_1 - \kappa h^5d_2 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2}d_1 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2}d_2 + \frac{2h^3}{3}d_1 + \frac{3h^4}{2}d_2 = 0 \quad (4.81)$$

$$\left(2h^3 - \kappa h^4 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2} + \frac{2h^3}{3} \right) d_1 + \left(3h^4 - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} + \frac{3h^4}{2} \right) d_2 = 0 \quad (4.82)$$

$$\left(\frac{8h^3}{3} - \kappa h^4 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2} \right) d_1 + \left(\frac{9h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} \right) d_2 = 0 \quad (4.83)$$

bulunur.

w_2 , R_1 ve R_2 değerleri denklem (4.69)'da yerine konulursa,

$$\int_{y=0}^h \int_{x=0}^L R_1 y^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy + \int_{x=0}^L R_2 h^3 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^h \int_{x=0}^L \left[-(d_1y^5 + d_2y^6) \frac{\pi^2}{L^2} + (2d_1y^3 + 6d_2y^4) \right] \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy \\ + \int_{x=0}^L [(2d_1h^4 + 3d_2h^5) - \kappa(d_1h^5 + d_2h^6)] \cdot \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.85)$$

denklemini elde edilir.

Denklem (4.53)'te gösterildiği üzere,

$$\int_{x=0}^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \quad (4.86)$$

olarak bulunur. Böylece, denklem (4.85),

$$\frac{L}{2} \left\{ [(2d_1 h^4 + 3d_2 h^5) - \kappa(d_1 h^5 + d_2 h^6)] - \int_{y=0}^h \left[(d_1 y^5 + d_2 y^6) \frac{\pi^2}{L^2} - (2d_1 y^3 + 6d_2 y^4) \right] dy = 0 \right\} \quad (4.87)$$

halini alır. Büyük parantezin içindeki integral,

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^h \left[(d_1 y^5 + d_2 y^6) \frac{\pi^2}{L^2} - (2d_1 y^3 + 6d_2 y^4) \right] dy \\ = \left[\left(\frac{d_1}{6} y^6 + \frac{d_2}{7} y^7 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{d_1}{2} y^4 + \frac{6d_2}{5} y^5 \right) \right] \Big|_{y=0}^h \\ = \left(\frac{1}{6} d_1 h^6 + \frac{1}{7} d_2 h^7 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{1}{2} d_1 h^4 + \frac{6}{5} d_2 h^5 \right) \end{aligned} \quad (4.88)$$

olarak hesaplanır. Böylece denklem (4.87),

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \left\{ [(2d_1 h^4 + 3d_2 h^5) - \kappa(d_1 h^5 + d_2 h^6)] - \left[\left(\frac{1}{6} d_1 h^6 + \frac{1}{7} d_2 h^7 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{1}{2} d_1 h^4 + \frac{6}{5} d_2 h^5 \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

halini alır. Buradan da,

$$\begin{aligned} [(2d_1 h^4 + 3d_2 h^5) - \kappa(d_1 h^5 + d_2 h^6)] \\ - \left[\left(\frac{1}{6} d_1 h^6 + \frac{1}{7} d_2 h^7 \right) \frac{\pi^2}{L^2} - \left(\frac{1}{2} d_1 h^4 + \frac{6}{5} d_2 h^5 \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\begin{aligned} 2h^4 d_1 + 3h^5 d_2 - \kappa h^5 d_1 - \kappa h^6 d_2 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} d_1 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2} d_2 + \frac{h^4}{2} d_1 + \frac{6h^5}{5} d_2 \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\left(2h^4 - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} + \frac{h^4}{2} \right) d_1 + \left(3h^5 - \kappa h^6 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2} + \frac{6h^5}{5} \right) d_2 = 0 \quad (4.92)$$

$$\left(\frac{5h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2}\right) d_1 + \left(\frac{21h^5}{5} - \kappa h^6 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2}\right) d_2 = 0 \quad (4.93)$$

bulunur.

Denklem (4.83) ile denklem (4.93) alt alta yazılırsa,

$$\left(\frac{8h^3}{3} - \kappa h^4 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2}\right) d_1 + \left(\frac{9h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2}\right) d_2 = 0 \quad (4.94)$$

$$\left(\frac{5h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2}\right) d_1 + \left(\frac{21h^5}{5} - \kappa h^6 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2}\right) d_2 = 0 \quad (4.95)$$

veya

$$\begin{bmatrix} \frac{8h^3}{3} - \kappa h^4 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2} & \frac{9h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} \\ \frac{5h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} & \frac{21h^5}{5} - \kappa h^6 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.96)$$

şeklinde yazılabilir.

d_1 ve d_2 değerlerinin sıfırdan farklı bir çözümü olabilmesi için,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{8h^3}{3} - \kappa h^4 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2} & \frac{9h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} \\ \frac{5h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2} & \frac{21h^5}{5} - \kappa h^6 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.97)$$

olmalıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{8h^3}{3} - \kappa h^4 - \frac{\pi^2 h^5}{5L^2}\right) \left(\frac{21h^5}{5} - \kappa h^6 - \frac{\pi^2 h^7}{7L^2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{5h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2}\right) \left(\frac{9h^4}{2} - \kappa h^5 - \frac{\pi^2 h^6}{6L^2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{56h^8}{5} - \frac{8h^9}{3}\kappa - \frac{8\pi^2h^{10}}{21L^2} - \frac{21h^9}{5}\kappa + h^{10}\kappa^2 + \frac{\pi^2h^{11}}{7L^2}\kappa - \frac{21\pi^2h^{10}}{25L^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\pi^2h^{11}}{5L^2}\kappa + \frac{\pi^4h^{12}}{35L^4} \right) \\
& - \left(\frac{45h^8}{4} - \frac{5h^9}{2}\kappa - \frac{5\pi^2h^{10}}{12L^2} - \frac{9h^9}{2}\kappa + h^{10}\kappa^2 + \frac{\pi^2h^{11}}{6L^2}\kappa \right. \\
& \quad \left. - \frac{3\pi^2h^{10}}{4L^2} + \frac{\pi^2h^{11}}{6L^2}\kappa + \frac{\pi^4h^{12}}{36L^4} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{56}{5} - \frac{45}{4} \right) h^8 + \left(-\frac{8}{3} - \frac{21}{5} + \frac{9}{2} + \frac{5}{2} \right) h^9 \kappa + \left(-\frac{8}{21} - \frac{21}{25} + \frac{3}{4} + \frac{5}{12} \right) \frac{\pi^2 h^{10}}{L^2} \\
& + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \right) \frac{\pi^2 h^{11}}{L^2} \kappa + \left(\frac{1}{35} - \frac{1}{36} \right) \frac{\pi^4 h^{12}}{L^4}
\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$-\frac{h^8}{20} + \frac{2h^9}{15}\kappa - \frac{114\pi^2h^{10}}{2100L^2} + \frac{\pi^2h^{11}}{105L^2}\kappa + \frac{\pi^4h^{12}}{1260L^4} = 0 \tag{4.101}$$

olur. Buradan da,

$$\kappa = \frac{\frac{h^8}{20} + \frac{114\pi^2h^{10}}{2100L^2} - \frac{\pi^4h^{12}}{1260L^4}}{\frac{2h^9}{15} + \frac{\pi^2h^{11}}{105L^2}} \tag{4.102}$$

$$\omega^2 = \frac{g \cdot \left(\frac{h^8}{20} + \frac{114\pi^2h^{10}}{2100L^2} - \frac{\pi^4h^{12}}{1260L^4} \right)}{\frac{2h^9}{15} + \frac{\pi^2h^{11}}{105L^2}} \tag{4.103a}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \left(\frac{h^8}{20} + \frac{114\pi^2h^{10}}{2100L^2} - \frac{\pi^4h^{12}}{1260L^4} \right)}{\frac{2h^9}{15} + \frac{\pi^2h^{11}}{105L^2}}} \tag{4.103b}$$

olarak bulunur.

Sayısal değerler yerine konursa ($h = 1 \text{ m}$ ve $L = 2 \text{ m}$),

$$\omega = \sqrt{\frac{9,810,179}{0,157}} = \sqrt{\frac{1,757}{0,157}} = 3,35 \text{ rad/s} \tag{4.104}$$

sonucu elde edilir.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, kısmi doldurulmuş dikdörtgen kesitli rijit bir tankın doğal frekansı; analitik olarak ve iki tane şekil fonksiyonu için, üç adet deneme fonksiyonu kullanılarak Galerkin yöntemiyle hesaplanmış ve sonuçlar Çizelge 5.1’de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Problem; akışkan ideal (viskozitesiz) ve sıkıştırılamaz, akışkanın hareketi çevrisiz (irrotasyonel), sıvı bölgesinde kavitasyon olmadığı ve yüzey dalgalarının çok küçük olduğu kabul edilerek çözülmüştür. Ayrıca, ısı, rölativistik ve kuantum etkiler ihmal edilmiş, yüzey gerilmelerinin önemli bir rol oynamaya başladığı düşük yoğunluklu sıvılar çalışmanın kapsamı dışında tutulmuştur (Altay ve Dökmeci, 2009; Moiseev ve Petrov, 1966).

Yüzey gerilmelerinin etkisi Morand ve Ohayon (1995) tarafından ele alınmıştır. Kapsamlı bir bilgi için bu kitap incelenebilir.

Çizelge 5.1 : Analitik ve sayısal sonuçların karşılaştırılması

	Analitik Sonuç ve Sayısal Sonuçlar	ω (rad/s)	Hata (%)
1)	Analitik Sonuç $\left(\omega = \sqrt{\frac{g\pi}{L} \tanh\left(\frac{\pi h}{L}\right)} \right)$	3,76	–
2)	$\phi = c \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ İçin Sayısal Sonuç	3,76	0
3)	$\phi = d \cdot y^2 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ İçin Sayısal Sonuç	4,62	23
4)	$\phi = (d_1 y^2 + d_2 y^3) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ İçin Sayısal Sonuç	3,35	11

Çizelge 5.1’den de görüldüğü üzere, analitik sonuç ile ikinci sırada verilen deneme fonksiyonun kullanılmasıyla elde edilen sayısal sonuç birebir aynıdır. Buradan, bu şekil fonksiyonun oldukça iyi seçildiği söylenebilir.

Üçüncü sırada verilen deneme fonksiyonun kullanılmasıyla elde edilen sayısal sonuç ile analitik sonuç arasında %23 oranında bir fark olduğu görülmektedir. İkinci

sıradaki sonuç ile üçüncü sıradaki sonuç karşılaştırıldığında; şekil fonksiyonu seçiminin sayısal sonucu ne kadar etkilediği açık olarak gözükmemektedir.

Aynı şekil fonksiyonu için; bir terim alınarak ve iki terim alınarak elde edilen sayısal sonuçlar, tabloda sırasıyla üçüncü ve dördüncü sırada verilmiştir. Görüldüğü gibi, sadece fazladan bir terim alınması bile hatayı %23'ten %11'e düşürmüştür.

Üçüncü ve dördüncü sıradaki deneme fonksiyonları için problemin çözümünde kullanılan matematiksel yaklaşımın kötü olmadığı; aksine, daha çok terim alınması durumunda bu yaklaşımın iyi sonuçlar verebileceği söylenebilir.

Sonuç olarak, şekil fonksiyonu seçiminin hayati derecede öneme sahip olduğu ve alınan terim sayısının arttırılmasıyla analitik sonuca yaklaşıldığı görülmüştür.

Aynı problemin, öncelikle, elastik dikdörtgen kesitli bir tank için çözülmesi; daha sonra ise, farklı şekil fonksiyonları için, daha çok terim alınarak çözülmesi önerilir. Bununla birlikte, problemin, varyasyonel bir yöntemle ve farklı geometrilere sahip rijit/elastik tanklar için de çözülmesi tavsiye edilir. Ayrıca, elde edilen sonuçların, Fluent gibi bir hesaplamalı akışkanlar dinamiği akış modelleme yazılımı programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması da önerilir.

KAYNAKLAR

- Akyıldız, H. ve Çelebi S., 2001. A liquid sloshing in a moving rectangular tank, *İTÜ Faculty of Naval Architecture and Ocean Engineering, Department of Ocean Engineering, Final Report*, İstanbul, Türkiye.
- Akyıldız, H. ve Ünal E., 2004. Experimental studies on liquid sloshing, *İTÜ Faculty of Naval Architecture and Ocean Engineering, Department of Ocean Engineering, Final Report*, İstanbul, Türkiye.
- Akyıldız, H. ve Ünal, N. E., 2006. Sloshing in a three-dimensional rectangular tank: Numerical simulation and experimental validation, *Ocean Engineering*, **33**, 2135–2149.
- Akyıldız, H. ve Ünal, E., 2005. Experimental investigation of pressure distribution on a rectangular tank due to liquid sloshing, *Ocean Engineering*, **32**, 1503–1516.
- Altay, G. ve Dökmeci, M. C., 2005. The consistent Mindlin's thermopiezoelectric equations and the principle of virtual work, *Mechanics Research Communications*, **32**, 115–119.
- Altay, G. ve Dökmeci, M. C., 2007. Variational Principles for Piezoelectric, Thermopiezoelectric, and Hygrothermopiezoelectric Continua Revisited, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **14**, 549–562.
- Altay, G. ve Dökmeci, M. C., 2009. Fluid-fluid and –solid interaction problems: Variational principles revisited, *International Journal of Engineering Science*, **47**, 83–102.
- Armenio, V. ve La Rocca, M., 1996. On the analysis of sloshing of water in rectangular containers: Numerical study and experimental validation, *Ocean Engineering*, **23**, 705–739.
- Aşkar Altay, G. ve Dökmeci, M. C., 1996. Some variational principles for linear coupled thermoelasticity, *International Journal of Solids and Structures*, **33**, 3937–3948.
- Axisa, F. ve Antunes, J., 2007. *Modelling of Mechanical Systems: Fluid Structure Interaction*, Elsevier, London.
- Bishop, R. E. D. ve Price, W. G., 2005. *Hydroelasticity of Ships*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Brebbia, C. A., 1984. *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London.
- Celebi, M. S. ve Akyıldız, H., 2002. Nonlinear modeling of liquid sloshing in a moving rectangular tank, *Ocean Engineering*, **29**, 1527–1553.
- Collatz, L., 1966. *The Numerical Treatment of Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.

- Crandall, S. H.**, 1956. *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Currie, I. G.**, 1993. *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, Singapore.
- Dowell, E. H. ve Hall, K. C.**, 2001. Modeling of fluid-structure interaction, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **33**, 445–490.
- Dökmeci, M. C.**, 2007. *Mühendislikte Matematiksel Yöntemler: Ders Notları*, İTÜ Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, İstanbul.
- Finlayson, B. A.**, 1972. *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York.
- Finlayson B. A. ve Scriven, L. E.**, 1966. The Method of Weighted Residuals—A Review, *Applied Mechanics Reviews*, **19**, 735–748.
- Fung, Y. C.**, 1968. *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, New Delhi.
- Gören, Ö.**, 2008. *Hydrodynamics of Floating Bodies: Lecture Notes*, İTÜ Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, İstanbul.
- Ibrahim, R. A.**, 2005. *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ladyzhenskaya, O. A.**, 1975. Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible liquids, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **7**, 249–272.
- Lamb, H.**, 1932. *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, New York.
- Lanczos, C.**, 1970. *The Variational Principles of Mechanics*, Dover Publications, New York.
- Landau, L. D. ve Lifshitz, E. M.**, 1989. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford.
- Meirovitch, L.**, 1967. *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York.
- Meirovitch, L.**, 1986. *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York.
- Moiseev, N. N.**, 1964. Introduction to the Theory of Oscillations of Liquid-Containing Bodies, *Advances in Applied Mechanics*, **8**, 233–289.
- Moiseev, N. N., ve Petrov, A. A.**, 1966. The Calculation of Free Oscillations of a Liquid in a Motionless Container, *Advances in Applied Mechanics*, **9**, 91–154.
- Moiseyev, N. N. ve Rumyantsev, V. V.**, 1968. *Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid*, Springer-Verlag, New York.
- Morand, H. J.-P. ve Ohayon, R.**, 1995. *Fluid Structure Interaction: Applied Numerical Methods*, Masson, Paris.
- Newman, J. N.**, 1977. *Marine Hydrodynamics*, MIT Press, Massachusetts.
- Oden, J. T. ve Reddy, J. N.**, 1976. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Pomraning, G. C.**, 1966. A Numerical Study of the Method of Weighted Residuals, *Nuclear Science and Engineering*, **24**, 291–301.
- Rahman, M.**, 1995. *Water Waves: Relating Modern Theory to Advanced Engineering Applications*, Clarendon Press, Oxford.

- Sabuncu, T.**, 1993. *Gemi Hareketleri*, İTÜ Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi Ofset Atölyesi, İstanbul.
- Sames, P. C., Marcouly, D. ve Schellin, T. E.**, 2002. Sloshing in Rectangular and Cylindrical Tanks, *Journal of Ship Research*, **46**, 186–200.
- Snyder, L. J., Spriggs, T. W. ve Stewart, W. E.**, 1964. Solution of the Equations of Change by Galerkin's Method, *AIChE Journal*, **10**, 535–540.
- Solonnikov, V. A. ve Kazhikhov, A. V.**, 1981. Existence theorems for the equations of motion of a compressible viscous fluid, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **13**, 79–95.
- Sorenson, H. W.**, 1970. Least-squares estimation: from Gauss to Kalman, *IEEE Spectrum*, **7**, 63–68.
- Şuhubi, E. S.**, 1993. *Akışkanlar Mekaniği*, İTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.
- Url-1** <<http://www.fluent.com>>, alındığı tarih 01.06.2009
- Washizu, K.**, 1982. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, New York.

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad : Fuzuli Ağrı AKÇAY

Doğum Yeri ve Tarihi : Iğdır – 21.11.1983

Lisans Üniversitesi : İstanbul Teknik Üniversitesi

Yayın Listesi:

- Akçay, F. A., 2007. Hiperstatik Kiriş ve Çerçevelerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri, *Gemi ve Deniz Teknolojisi*, **172**, 22–30.