

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	iii
TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii

1. GİRİŞ	1
2. UÇAK HAREKET DENKLEMLERİ	3
2.1. Giriş	3
2.2. Uçakla İlgili Kabuller	3
2.3. Koordinat Sistemleri	3
2.3.1. Uçak Koordinat Sistemi	4
2.3.2. Atalet Koordinat Sistemi	4
2.3.3. Stabilite Koordinat Sistemi	6
2.3.4. Rüzgar Koordinat Sistemi	6
2.4. Euler Açılar Transformasyonları	7
2.5. Uçak Hareket Denklemlerine Giriş	8
2.6. Küçük Perturbasyon Teorisi	12
2.7. Uçak Hareket Denklemlerinin Ayırık Hale Getirilmesi	16
3. KALMAN FİLTRESİ	19
3.1. Giriş	19
3.2. Kalman Filtresinin Çalışma Prensibine Dair Bir Örnek	21
3.3. Lineer Dinamik Sistemler İçin Kalman Filtresi	25
3.4. Ölçüm Kanalı Oluşan Bozulmaları Göz Önüne Alan Robust Kalman Filtresi	30
4. OPTİMAL LİNEER KONTROL SİSTEMLERİ	35
4.1. Giriş	35
4.2. Performans İndisleri	35
4.3. Optimizasyon Problemi Formülasyonu	36
4.4. Düzenleyici Problemi	36
4.5. Sinyal Normları	37
4.6. Lineer Karesel Düzenleyici (LQR) Problemi	38

4.7. LQR Problemi Çözümü	39
4.8. Optimal Lineer Karesel Düzenleyici (LQR)	43
4.9. Zaman Optimal Lineer Karesel Düzenleyici (LQR)	45
5. SİMÜLASYON	47
5.1. Uçak Verileri	47
5.2. Uçağın LQR Kontrolü	48
5.3. Uçak Parametrelerinin Optimal Kalman Filtresi ile Değerlendirilmesi	50
5.4. Ölçüm Kanallarında Anormal Bozuntuların Oluştuğu Anda Durum Parametrelerinin Optimal Kalman Filtresi ile Değerlendirilmesi	54
5.5. Ölçüm Kanallarında Anormal Bozuntuların Oluştuğu Anda Durum Parametrelerinin Robust Kalman Filtresi ile Değerlendirilmesi	57
6. SONUÇ	59
KAYNAKLAR	60
EKLER	62
ÖZGEÇMİŞ	67

KISALTMALAR

LQR : Lineer Karesel Düzenleyici (Linear Quadratic Regulator)
MIMO : Çok girişli ve çok çıkışlı (Multi-Input, Multi-Output)

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. Sık Kullanılan Notasyonlar	5
Tablo 5.1. Uçağın Geometrik Parametreleri	47
Tablo 5.2. Uçağın Uzunlamasına Hareket Stabilite Türevleri	48
Tablo 5.3 Uçağın Yanlamasına Hareket Stabilite Türevleri	48

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>	
Şekil 2.1	Atalet ve uçak koordinat sistemleri	4
Şekil 2.2	Hücum ve yana kayma açılarının gösterimi	6
Şekil 2.3	Euler açı transformasyonu	7
Şekil 3.1	Kalman Filtresi genel veri akış diyagramı	20
Şekil 3.2	d konumu için Gauss dağılımı	21
Şekil 3.3	Kalman filtresi genel akış diyagramı	23
Şekil 3.4	Konum ve standart sapmanın zaman ve ölçüm güncelleme basamakları sırasındaki değişimleri	24
Şekil 3.5	Kalman filtresinin yapı şeması	28
Şekil 3.6	Kalman filtresinde değerin oluşturma mekanizmasını gösteren zaman diyagramı	29
Şekil 3.7	Tolerans elipsi	33
Şekil 5.1	Lockheed Jetstar Utility Jet Transport	47
Şekil 5.2	Uçak parametrelerinin LQR kontrolü	50
Şekil 5.3	Hücum açısının optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi	54
Şekil 5.4	Hücum açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	56
Şekil 5.5	Hücum açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	58
Şekil A.1	Yunuslama açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi	62
Şekil A.2	Yuvarlanma açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi	63
Şekil A.3	Sapma açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi	63
Şekil A.4	Yunuslama açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	64
Şekil A.5	Yuvarlanma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	64
Şekil A.6	Sapma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	65
Şekil A.7	Yunuslama açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	65
Şekil A.8	Yuvarlanma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	66
Şekil A.9	Sapma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi	66

SEMBOL LİSTESİ

A, B, C, D : Sistem Matrisleri

x: sistem durum vektörü

Φ : Kalman Filtresi durum geçiş matrisi

Δt : Örnekleme zamanı

Q: Sistem bozuntusunun korelasyon matrisi

R: Ölçüm bozuntusunun korelasyon matrisi

w: Sistem bozuntusu

v : Ölçüm bozuntusu

P: Kovaryans matrisi

K: Kalman filtresi kazanç katsayısı

K_{opt} : LQR kazanç katsayısı

ÖZET

UÇUŞ KONTROL SİSTEMİNİN ROBUST KALMAN FİLTRESİ TEMELİNDE GELİŞTİRİLMESİ

Rafik HASANOV

Uçuş kontrolü her zaman aktüalitesini korumakta ve bu konuda değişik çalışmalar yapılmaktadır.

Bu çalışmada uçuşun kontrolü LQR vasıtasıyla yapılmış ve Kalman filtresi uygulanarak durum değişkenleri değerlendirilmesi yapılmıştır.

Ölçüm yolu ile elde edilmiş sinyaller belli gürültüler içermektedir. Dolayısıyla durum değişkenleri gerçek değerlerden farklı değerlere sahip oluyorlar. Bu tür problemlerde genel olarak durum değerlendirilmesi (estimation) yapılmaktadır. Durum değerlendirme algoritması olarak Kalman filtresi geniş uygulama alanına sahiptir. Çalışmada ölçüm yolu ile elde edilmiş uzunlamasına ve yanlamasına hareket parametreleri Kalman filtresi ile değerlendirilerek grafik simülasyonları yapılmıştır.

Bazı durumlarda ölçüm kanalında bozulmalar oluşmaktadır. Optimal Kalman filtresi bu tür bozulmalara karşı dayanıklı değildir. Oudur ki bu tür problemlerde dayanıklı durum değerlendirme algoritmasına gerek duyulmaktadır. Bu çalışmada dayanıklı durum değerlendirme algoritması olarak Robust Kalman filtresi ölçüm kanalında oluşan bozulmalar sırasında uçağın uzunlamasına ve yanlamasına hareket parametrelerini değerlendirmek için uygulanmış ve grafik simülasyonlar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kalman Filtresi, Robust Kalman Filtresi, LQR

SUMMARY

DEVELOPMENT FLIGHT CONTROL SYSTEM BASED ON

ROBUST KALMAN FILTER

Rafik HASANOV

Flight control always remained as an active theme and there's been many studies related with this theme.

In this study flight control was designed according to LQR method and Kalman filter was applied to get the best estimation of state variables.

Signals received by measurement devices include some noisy terms. Thus state variables differ from actual values. In such conditions state estimations are made. Kalman filter is widely used application as an estimator. In this study the Kalman filter was applied to measurements of longitudinal and lateral motion parameters of the aircraft and according to this were drawn graphical simulations.

In some conditions, failures occurred in measurement channels. The optimal Kalman filter is not robust in such situations. The Robust Kalman filter was applied in estimation of longitudinal and lateral motion parameters of the aircraft in such conditons and graphical simulations were drawn respectively.

Keywords: Kalman Filter, Robust Kalman Filter, LQR

1. GİRİŞ

Bu çalışmada kararsız bir uçağın LQR yöntemi vasıtasıyla kontrolü sağlanarak kararlı hale getirilmiştir. Daha sonra bozuntulu ölçümler optimal Kalman filtresi ile değerlendirilmiştir. Ölçüm kanalında bozulmalar olduğu an için Robust Kalman filtresi uygulanarak uçağın uzunlamasına ve yanlamasına hareket parametreleri değerlendirilmiştir.

İkinci bölümde uçak hareketini tanımlamak için gerekli kabuller ve tanımlamalar yapılmıştır. Daha sonra simetrik ve kanat seviyesi uçuşu için uzunlamasına hareketin doğrusal olmayan denklemler verilmiş ve Taylor serisine açma yöntemi ile doğrusallaştırılmıştır. Uçak hareketinin bilgisayar simülasyonunu gerçekleştirmek için uzunlamasına ve yanlamasına hareket denklemlerinin ayrık zaman ifadesi durum uzayı için elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde Kalman filtresinin çalışma prensibinin iyi anlaşılması için basit bir örnek verilmiş, şekil ve diyagramlarla filtrenin çalışması prensibi izah edilmiştir. Sonra lineer dinamik sistemler için Kalman filtresinin matematik denklemleri verilmiştir. Ölçüm kanalında oluşan bozulmalar sırasında optimal Kalman filtresi dayanıklı performans göstermemektedir. Odur ki, bu durumlar için uygulanacak olan Robust Kalman filtresinin uygun matematik ifadeleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde optimal kontrol teorisi ile ilgili çalışmalar hakkındaki kısa bilgiden sonra, performans indisinin tanımı yapılmıştır. LQR tasarımı bir optimizasyon problemi olduğundan dolayı, optimizasyon problemi formülasyonu anlatılmıştır. Daha sonra düzenleyici problemi tanımlanmış ve LQR problemine geçmeden önce karşımıza çıkabilecek terimlerin matematik izahı yapılmıştır. LQR probleminin çözüm aşamalarını anlatım sırasında bazı ispatlar yapılmış ve daha sonra sürekli zaman için optimal LQR'in ifadesi verilmiştir. En son olarak ayrık zaman optimal LQR anlatılmıştır.

Beşinci bölümde simülasyon sırasında kullanılmış olan uçağın uçuş parametreleri, LQR ve Kalman filtresinin değerleri verilmiş simülasyon aşamaları izah edilmiştir.

2. UÇAK HAREKET DENKLEMLERİ

2.1 Giriş

Bu bölümde uçak hareket denklemleri elde edilmesi amaçlanmıştır. Bu denklemlerdeki zamandan bağımsız terimler lineerleştirilerek analiz ve simülasyon kolaylığı sağlanacaktır. Hem öteleme hem de açısal dönme birine karşılıklı dikey üç istikamette gerçekleşeceği için uçak hareket denklemleri altı diferansiyel denklem ile ifade edilecektir.

Uçak hareket denklemleri 3-boyutlu uzayda lineer ve açısal momentum için korunum yasalarının bir neticesi olacaktır.

2.2 Uçakla İlgili Kabuller

Uçağın hareket denklemlerini elde etmeden önce, uçak hareketini tanımlamak için gerekli terminoloji ve kabuller üzerinde duralım. İlk kabul olarak, uçağa katı cisim gibi bakacağız. Yani uçuş sırasında uçak üzerinde alınan herhangi iki nokta arasındaki mesafenin sabit kaldığını varsayacağız. İkinci kabul olarak ise, uçağın kütlelerinin zamanla değişmediğini varsayacağız. Ayrıca hareketin küçük düz bir alanda ve dönmeyen Dünya üzerinde gerçekleştiğini varsayacağız. Bunun ötesinde yerçekiminin sabit olduğunu da varsayacağız.

Uçak hareket denklemlerini ifade etmek için eksen takımlarına ihtiyaç duymaktayız. Uçak altı serbestlik derecesine sahip olduğundan dolayı, denklemlerin elde edilmesi sırasında değişik koordinat sistemleri kullanılacaktır.

2.3 Koordinat sistemleri

Uçağın hareket ve konumunu tanımlamak için bir kaç koordinat sistemlerinden yararlanacağız. Bu koordinat sisteminin bazıları navigasyon, bazıları ise kontrol ile ilgilidir. Uygun koordinat sistemlerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

1. Uçak koordinat sistemi

2. Atalet koordinat sistemi
3. Stabilite koordinat sistemi
4. Rüzgar koordinat sistemi.

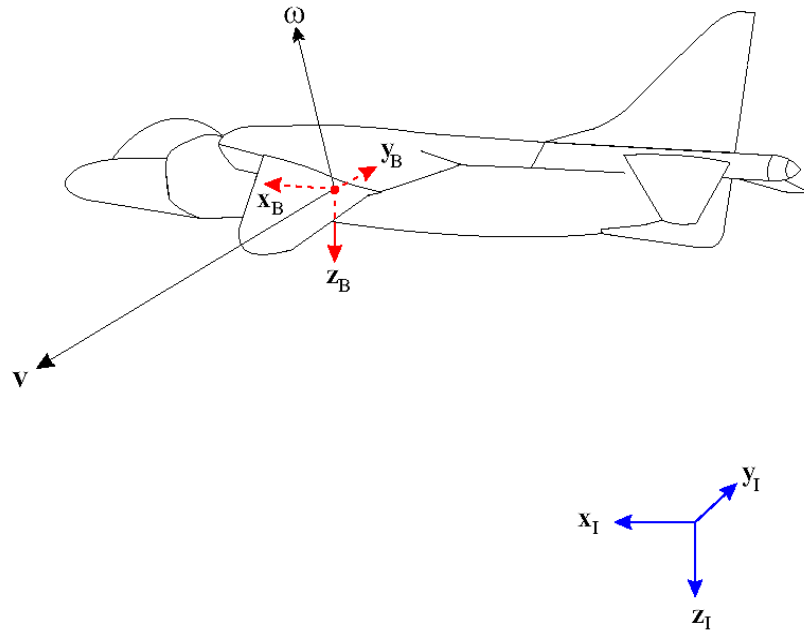
Şimdi bu koordinat sistemlerini tanımlayalım.

2.3.1 Uçak Koordinat Sistemi

Bu eksen takımının orijini uçağın ağırlık merkezine yerleştirilmiştir. $\mathbf{x}_B$ birim vektörü uçağın burnu doğrultusunda yönelmiş olup, genel olarak uzunlamasına eksen adlandırılmakta, $\mathbf{y}_B$ birim vektörü sağ kanat doğrultusunda yönelmiş olup, genel olarak yanlamasına eksen adlandırılmakta ve $\mathbf{z}_B$ birim vektörü ise aşağıya doğru pozitif olarak tanımlanmıştır (Şekil 2.1).

2.3.2 Atalet Koordinat Sistemi

Uçağın konumunu tanımlayabilmemiz için bu koordinat sisteminden yararlanabiliyoruz. Atalet koordinat sisteminin merkezi dünya üzerinde herhangi bir nokta olarak kabul edilmektedir. $\mathbf{x}_I$ ve $\mathbf{y}_I$ birim vektörleri yatay düzlem üzerinde, $\mathbf{z}_I$ birim vektörü ise aşağıya doğru yönelmiştir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Atalet ve uçak koordinat sistemleri (Dr. Craig Woolsey –Stability and Control Lecture Notes)

Uçak için katı cisim kabulü yaptığımızdan dolayı, uçak üzerindeki herhangi nokta uçak koordinat sisteminin konumu ve yönü ile belirlenir. Uçağın belli bir hızla hareket ettiğini varsayarsak, o zaman uçak koordinat sistemi atalet koordinat sistemine nazaran ötelenmiş olacaktır. Aynı şekilde uçağın belli bir açısal hızla döndüğünü varsayarsak, o zaman uçak koordinat sisteminin yönü atalet koordinat sistemine nazaran değişecektir. Uçağın hızını atalet sistemine nazaran uçak koordinat sistemindeki ifadesini

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

açısal hız ifadesini ise

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Uçak hareketi ile ilgili sık olarak karşılaştığımız notasyonlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1 Sık kullanılan notasyonlar

Eksen	Lineer yer değişme	Lineer hız	Aerodinamik kuvvet	Açısal yer değişme	Açısal hız	Aerodinamik moment
$\mathbf{x}_B$	x_B	u	X	φ	p	L
$\mathbf{y}_B$	y_B	v	Y	θ	q	M
$\mathbf{z}_B$	z_B	w	Z	ψ	r	N

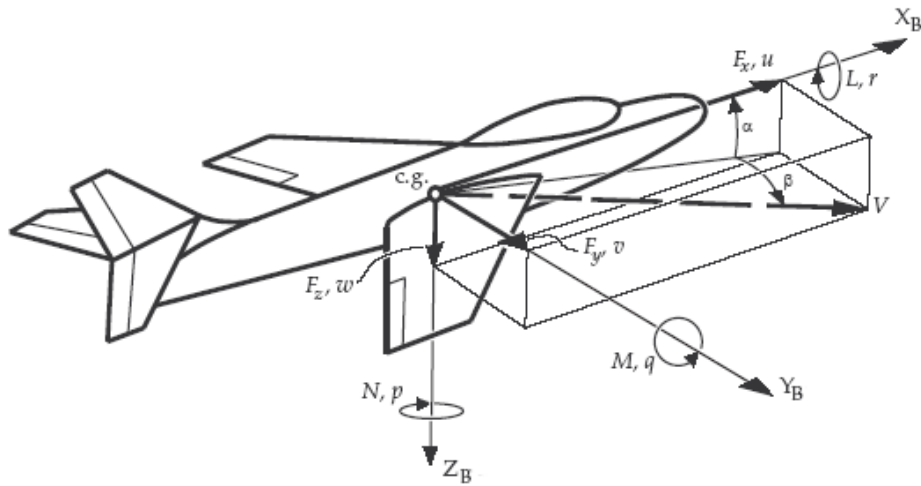
Tablo 2.1’ de yer alan φ , θ ve ψ açıları Euler açıları adlandırılmakta ve uçak koordinat sistemindeki parametreler vektörünü 3 ardışık dönme ile atalet koordinat sistemi vektörlerine dönüştürüyor. Benzeri şekilde atalet koordinat sisteminden uçak koordinat sistemine dönüşüm yapılıyor. Tabloda belirtilmiş olan açısal yer değiştirme sırasında geriye kalan açısal yer değişmelerin sıfır olduğu kabul edilir.

2.3.3 Stabilite Koordinat Sistemi

Bu koordinat sistemi (x_s, y_s, z_s) uçak koordinat sistemi ile α hücum açısı ile bağıntılıdır. Uçak koordinat sistemi y_B eksenini civarında $-\alpha$ kadar döndürüldüğünde stabilite koordinat sistemi elde edilir. Bu eksen takımı aerodinamik kuvvet ve momentlerin gösterilmesinde çok önemlidir. Genel olarak stabilite koordinat sistemi kanat seviyesi denge uçuşu için tanımlanır. Stabilite koordinat sistemi öyle tanımlanır ki, x_B vektörü uzunlamasına hız bileşeni ile çakışır ve diğer hız bileşenleri (v, w) sıfır olur (Şekil 2.2 - **Rauw, M.**, FDC 1.2 –A SIMULINK Toolbox for Flight Dynamics and Control Analysis, Report, 2001).

2.3.4 Rüzgar Koordinat Sistemi

Bu eksen takımı stabilite koordinat sistemi ile β yana kayma açısı ile ilgilidir. z_s eksenini β yana kayma açısı kadar döndürüldüğünde rüzgar koordinat sistemi (x_w, y_w, z_w) elde edilir. Aerodinamik açılar olarak da bilinen α ve β açıları Şekil 2.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Hücum ve yana kayma açılarının gösterimi

Şekil 2.2’den görüldüğü üzere hücum açısı

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{u} \quad (2.3)$$

yana kayma açısı ise

$$\beta = \sin^{-1} \frac{u}{v} \quad (2.4)$$

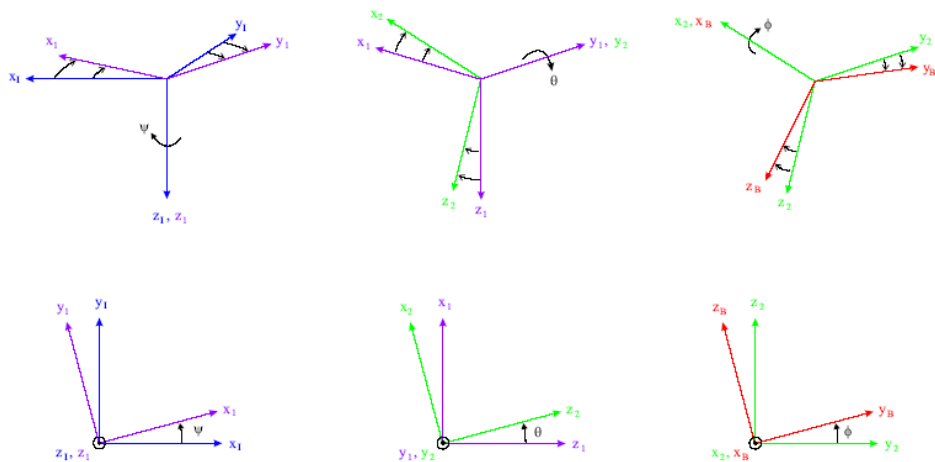
denklemler ile ifade edilebilir.

2.4 Euler Açıları Transformasyonları

Uçak dinamiği başlıca iki koordinat sistemine – uçak ve atalet koordinat sistemlerinin kullanımına dayanmaktadır. Uçak ağırlığı gibi bazı vektörel büyüklük atalet koordinat sisteminin düşey eksenine nazaran sabit kalmaktadır. Bu büyüklüğün bileşenlerinin uçak koordinat sisteminde ifade edilebilmesi için bir transformasyona ihtiyaç duyulmaktadır. Uçak uçuşu sırasında çok değişik konumlarda olabileceği için atalet koordinat sistemindeki bileşenlerin uçak koordinat sistemine dönüştürülmesi için açısal transformasyonların yapılması kullanılmazdır.

Atalet koordinat sisteminden uçak koordinat sistemine dönüşüm değişik şekillerde gerçekleştirilebilir. Fakat uçuş mekaniğinde bu dönüşüm Euler açı transformasyonu kuralına göre yapılmaktadır. Euler teoremine göre “Farklı eksenler civarındaki istenilen sayıdaki dönüşümler en sonunda tek bir dönüşüme eşdeğer olmak zorundadır.”

Euler açı transformasyonu aşağıdaki 3 dönüşüm ardışıklığından oluşmaktadır [1]. (Şekil 2.3)



Şekil 2.3 Euler açı transformasyonu (Dr. Craig Woolsey –Stability and Control Lecture Notes)

Bu dönüşümler sonucunda genel transformasyon matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$T = T_\phi T_\theta T_\psi = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & S_\psi C_\theta & -S_\theta \\ (C_\psi S_\theta S_\phi - S_\psi C_\phi) & (S_\psi S_\theta S_\phi + C_\psi C_\phi) & C_\theta S_\phi \\ (C_\psi S_\theta C_\phi + S_\psi S_\phi) & (S_\psi S_\theta C_\phi - C_\psi S_\phi) & C_\theta C_\phi \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Buradaki T transformasyon matrisi yardımı vasıtasıyla uçak koordinat sisteminden atalet koordinat sistemine dönüşüm mümkün olmaktadır. Ters bir dönüşüm için ise T^T matrisi kullanılmaktadır. Notasyon kolaylığı açısından $S_\psi = \sin \psi$ olarak ifade edilmiştir. Diğer açılar $\sin$ ve $\cos$ 'larına da benzer notasyon kolaylığı uygulanmıştır.

2.5 Uçak Hareket Denklemlerine Giriş

Daha önce de belirttiğimiz üzere, uçağı referans sistemine nazaran atmosferde hareket eden rijit bir cisim olarak ele alacağız. Bundan başka, yerin kendi eksenini etrafında, Güneş etrafında dönmelerinden ve uçuş sırasında rüzgar tarafından oluşturulan ivmeleri göz önünde bulundurmayaacağız. Üç boyutlu uzayda uçak altı serbestlik derecesine sahiptir. Bunlardan üçü öteleme, üçü ise dönme hareketidir. Uçuş sırasında uçağı ağırlık, aerodinamik ve itki kuvvetleri etkiler. Hareketin öteleme denklemi vektörel şekilde aşağıdaki gibi ifade olunur.

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum \mathbf{F} = \text{Aerodinamik} + \text{İtki} + \text{Ağırlık} \quad (2.6)$$

$\mathbf{v}$: uçağı ağırlık merkezinin hızı

m : uçağı kütlesi

$\mathbf{F}$: uçağı etkileyen dış kuvvetler

Hareketin dönme denkleminin vektörel ifadesi ise

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum \mathbf{M} = \text{Aerodinamik} + \text{İtki} \quad (2.7)$$

ile verilmektedir.

$\mathbf{H}$: açısal momentum

M : uçağa etkiyen dış momentler

(2.6) ve (2.7) denklemleri ile ifade edilen vektörel büyüklükler skaler cinsten aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$F_x = \frac{d}{dt}(mu) \quad F_y = \frac{d}{dt}(mv) \quad F_z = \frac{d}{dt}(mw) \quad (2.8)$$

$$L = \frac{d}{dt}H_x \quad M = \frac{d}{dt}H_y \quad N = \frac{d}{dt}H_z \quad (2.9)$$

Şimdi uçak üzerinde kütlesi δm , atalet koordinat sistemine göre hızı $\mathbf{v}$ olan bir parçacık ele alalım. $\delta \mathbf{F}$ ise bu parçacık kütleyle etki eden kuvvet olursa, o zaman Newton'un ikinci yasasına göre

$$\delta \mathbf{F} = \delta m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.10)$$

ve uçağa etki eden toplam dış kuvvet uçağın tüm parçacıklarına etki eden kuvvetlerin toplamına eşit olacaktır.

$$\sum \delta \mathbf{F} = \mathbf{F} \quad (2.11)$$

δm kütleli parçacığın hızı ise

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.12)$$

burada $\mathbf{v}_c$ uçağın ağırlık merkezinin hızı, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ise parçacığın ağırlık merkezine nazaran hızıdır. (2.12) ifadesini (2.10) denkleminde yerine yazalım.

$$\sum \delta \mathbf{F} = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \sum \left(\mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \delta m \quad (2.13)$$

Uçağın ağırlığının değişmediğini kabul ettiğimiz için

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \sum \mathbf{r} \delta m \quad (2.14)$$

$\mathbf{r}$ ağırlık merkezinden ölçüldüğü için $\sum \mathbf{r} \delta m$ toplamı sıfıra eşit olacak ve (2.14) denklemi aşağıdaki şekli alacaktır.

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} \quad (2.15)$$

(2.15) denklemi uçağa etki eden dış kuvvetlerle uçağın ağırlık merkezinin hızını ilişkilendiren ifadedir.

Benzer yaklaşımla δm kütleli parçacık için moment denklemini yazalım.

$$\delta \mathbf{M} = \frac{d}{dt} \mathbf{H} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \delta m \quad (2.16)$$

Parçacık kütleinin hızı ağırlık merkezinin hızı ve parçacık kütleinin ağırlık merkezine nazaran hızı cinsinden ifade edilebilir.

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.17)$$

burada $\boldsymbol{\omega}$ uçağın açısal hızı, $\mathbf{r}$ ise parçacık kütleinin ağırlık merkezine olan konumudur. Momentumların toplam momenti

$$\mathbf{H} = \sum \delta \mathbf{H} = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{v}_c) \delta m + \sum [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \delta m \quad (2.18)$$

denklemi ile ifade edilebilir. $\mathbf{v}_c$ hızı toplama nazaran sabit olduğundan toplam işareti dışına çıkarılabilir.

$$\mathbf{H} = \sum \mathbf{r} \delta m \times \mathbf{v}_c + \sum [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \delta m \quad (2.19)$$

(2.19) denklemindeki ilk terim $\sum \mathbf{r} \delta m$ sıfıra eşit olmasından dolayı sıfıra eşit olacaktır. Açısal hız ve konum vektörlerini

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.20)$$

denklemleri ifade edelim ve (2.19) denkleminde yerine yazalım.

$$\mathbf{H} = (p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}) \sum (x^2 + y^2 + z^2) \delta m - \sum (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) (px + qy + rz) \quad (2.21)$$

$\mathbf{H}$ 'nin skaler bileşenleri ise

$$\begin{aligned} H_x &= p \sum (y^2 + z^2) \delta m - q \sum xy \delta m - r \sum xz \delta m \\ H_y &= -p \sum xy \delta m + q \sum (x^2 + z^2) \delta m - r \sum yz \delta m \\ H_z &= -p \sum xz \delta m - q \sum yz \delta m + r \sum (x^2 + y^2) \delta m \end{aligned} \quad (2.22)$$

Denklemdaki toplamalar kütle momentleri olup, aşağıdaki denklemlerle ifade olunurlar.

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \delta m & I_{xy} &= \iiint_V xy \delta m \\ I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \delta m & I_{xz} &= \iiint_V xz \delta m \\ I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \delta m & I_{yz} &= \iiint_V yz \delta m \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\boldsymbol{\omega}$ açısal hızı ile dönen bir koordinat sistemi ile ilgili her hangi bir $\mathbf{A}$ matrisinin türevi aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_I = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad (2.24)$$

denklemdaki I ve B indisleri atalet ve uçak koordinat sistemlerini göstermektedir. (2.24)'ü daha önce elde edilen (2.15) ve (2.16) denklemlerine uygularsak

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \left. \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} \right|_B + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c) \\ \mathbf{M} &= \left. \frac{d}{dt} \mathbf{H} \right|_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.25)$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemlerin skaler ifadeleri ise

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} + qw - rv) & F_y &= m(\dot{v} + ru - pw) & F_z &= m(\dot{w} + pv - qu) \\ L &= I\dot{p} + qH_z - rH_y & M &= I\dot{q} + rH_x - pH_z & N &= I\dot{r} + pH_y - qH_x \end{aligned} \quad (2.26)$$

olacaktır. Uçağa etki eden kuvvet ve moment bileşenleri aerodinamik, ağırlık ve itki bileşenlerini içermektedirler.

Uçak koordinat sisteminin konumuna göre $I_{yz} = I_{xy} = 0$ olacaktır. Yani xz uçağın simetri düzlemi olduğunu kabul ediyoruz. Bu kabulü moment denklemlerinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} L &= I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz} pq \\ M &= I_y \dot{q} + pr(I_x - I_z) - I_{xz}(p^2 - r^2) \\ N &= I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + pq(I_y - I_x) + I_{xz} qr \end{aligned} \quad (2.27)$$

denklemlerini elde ederiz [2].

Uçağın açısal hızları ile Euler açılarının oranları arasındaki bağlantı ise aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\theta \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Ağırlık kuvvetini transformasyon matrisi yardımıyla atalet koordinat sisteminden uçak koordinat sistemine dönüştürür ve elde edilecek bağlantıyı (2.26) denkleminde göz önüne alırsak aşağıdaki bağlantıları elde ederiz.

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + qw - rv) &= X - mg\sin\theta \\ m(\dot{v} + ru - pw) &= Y + mg\cos\theta\sin\varphi \\ m(\dot{w} + pv - qu) &= Z + mg\cos\theta\cos\varphi \end{aligned} \quad (2.29)$$

2.6 Küçük Perturbasyon Teorisi

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz denklemlerin doğrusallaştırılmasında küçük perturbasyon teorisi kullanılacaktır. Bu teorelin uygulanması sırasında uçak hareketini iki hareketin toplamı –sürekli uçuş durumu ve bu sürekli uçuş durumundan olan küçük sapmalar şeklinde kabul edeceğiz. Doğal olarak, geniş büyüklüklerle gerçekleşen uçuş koşulları (örneğin uçağın inişi) için bu teori uygulanamaz.

Uçak hareketini tanımlayan denklemlerdeki tüm değişkenler bu değişkenlerin referans değeri ile referans değerinden olan sapmanın toplamı ile değiştirilecektir.

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \Delta u & v &= v_0 + \Delta v & w &= w_0 + \Delta w \\
p &= p_0 + \Delta p & q &= q_0 + \Delta q & r &= r_0 + \Delta r \\
X &= X_0 + \Delta X & Y &= Y_0 + \Delta Y & Z &= Z_0 + \Delta Z \\
M &= M_0 + \Delta M & N &= N_0 + \Delta N & L &= L_0 + \Delta L \\
\delta &= \delta_0 + \Delta \delta
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Kolaylık için, referans uçuş durumunun simetrik olduğunu ve itki kuvvetlerinin değişmediğini kabul ediyoruz. Yani,

$$v_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \varphi_0 = \psi_0 = 0 \tag{2.31}$$

Hatta bunun ötesinde, x ekseninin istikameti uçak hız vektörü ile aynı yönde olduğu takdirde $w_0 = 0$.

Şimdi küçük perturbasyon teorisini uçak hareket denklemlerinde göz önüne alarak basitleştirme yapalım.

$$m(u\dot{x} + qw - rv) = X - mg \sin \theta \tag{2.32}$$

Küçük perturbasyon değişkenlerini (2.32) denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
&X_0 + \Delta X - mg \sin(\theta_0 + \Delta \theta) \\
&= m \left[\frac{d}{dt} (u_0 + \Delta u) + (q_0 + \Delta q)(w_0 + \Delta w) - (r_0 + \Delta r)(v_0 + \Delta v) \right]
\end{aligned} \tag{2.33}$$

(2.31) eşitliğini (2.33) denkleminde göz önüne alır ve basit trigonometrik işlemi uygularsak, (2.33) denklemi aşağıdaki hali alır.

$$X_0 + \Delta X - mg(\sin \theta_0 + \Delta \theta \cos \theta_0) = m \Delta \dot{x} \tag{2.34}$$

Referans uçuş durumunun sıfıra eşit olduğundan dolayı (2.34) denklemi aşağıdaki gibi basitleşmiş olur.

$$\Delta X - mg \Delta \theta_0 \cos \theta_0 = m \Delta \dot{x} \tag{2.35}$$

ΔX kuvveti x yönündeki aerodinamik ve itki kuvvetlerinin değişimi olduğundan dolayı perturbasyon değişkenleri terimleri cinsinden Taylor serisi ile ifade edilebilir.

Eğer ΔX 'in sadece u, w, δ_e ve δ_T 'nin fonksiyonu olduğunu kabul edersek, o zaman ΔX aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (2.36)$$

burada $\partial X/\partial u, \partial X/\partial w, \partial X/\partial \delta_e$ ve $\partial X/\partial \delta_T$ aerodinamik türevleridir. (2.36) denklemini (2.35) denkleminde yerine yazarsak,

$$\Delta X = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial w} \Delta w - g \cos \theta_0 \Delta \theta + \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (2.37)$$

denklemini elde ederiz. Notasyon kolaylığı için

$$X_u = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial u} \quad X_w = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial w} \quad X_{\delta_e} = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \quad X_{\delta_T} = \frac{1}{m} \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \quad (2.38)$$

yazalım. (2.38) denklemi ifade edilen büyüklükler stabilite türevleridir.

Çağdaş uçakların hareketlerinin analizinde kullanılacak aerodinamik türevleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \Delta X &= \frac{\partial X}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial X}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \\ \Delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial Y}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial Y}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \delta_r \\ \Delta Z &= \frac{\partial Z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial Z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \delta_T \\ \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a \\ \Delta M &= \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial M}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \delta_T \\ \Delta N &= \frac{\partial N}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a \end{aligned} \quad (2.39)$$

ΔX için uygulamış olduğumuz prosedürleri diğer kuvvet ve moment denklemleri için uygular ve yunuslama, yuvarlanma ve sapma oranlarını da ilave edersek, tam uçak hareketini ifade eden denklemleri elde ederiz [2].

Uçağın uzunlamasına hareket denklemleri;

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{w} &= X_u \Delta u + X_w \Delta w - g \cos \theta_0 \Delta \theta + X_{\delta_e} \Delta \delta_e + X_{\delta_T} \Delta \delta_T \\
\Delta \mathbf{w} &= Z_u \Delta u + Z_w \Delta w + u_0 \Delta q - g \sin \theta_0 \Delta \theta + Z_{\delta_e} \Delta \delta_e + Z_{\delta_T} \Delta \delta_T \\
\Delta \mathbf{q} &= M_u \Delta u + M_w \Delta w + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + M_q \Delta q + M_{\delta_e} \Delta \delta_e + M_{\delta_T} \Delta \delta_T \\
\Delta \theta &= \Delta q
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Sağladığı bilgi açısından dikey hız yerine hücum açısı kullanılmaktadır. Dikey hız ile hücum açısı arasında

$$\Delta w = u_0 \Delta \alpha \tag{2.41}$$

Uçağın yanlamasına hareketinin denklemleri;

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{v} &= Y_v \Delta v - u_0 \Delta r + w_0 p + g \cos \theta_0 \Delta \theta + Y_{\delta_r} \Delta \delta_r \\
\Delta \mathbf{p} &= L'_v \Delta v + L'_p \Delta p + L'_r \Delta r + L'_{\delta_a} \Delta \delta_a + L'_{\delta_r} \Delta \delta_r \\
\Delta \mathbf{r} &= N'_v \Delta v + N'_p \Delta p + N'_r \Delta r + N'_{\delta_a} \Delta \delta_a + N'_{\delta_r} \Delta \delta_r \\
\Delta \phi &= \Delta p + \Delta r \tan \theta_0 \\
\Delta \psi &= \Delta r \sec \theta_0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Genel olarak yana kayma hızının yerine yana kayma açısı kullanılmaktadır ve bu ilişki

$$\Delta v = u_0 \Delta \beta \tag{2.43}$$

denklemleri ile ifade olunur [3].

Şimdi (2.40) ile ifade edilmiş uzunlamasına hareket denklemlerinin durum uzayındaki ifadesini yazalım.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{w} \\ \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & -g \cos \theta_0 \\ Z_u & Z_w & U_0 & -g \sin \theta_0 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & \tilde{M}_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \\ Z_{\delta_e} \\ \tilde{M}_{\delta_e} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_e \\
\mathbf{x}_{long} & \quad \mathbf{A}_{long} \quad \mathbf{x}_{long} \quad \mathbf{B}_{long}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

(2.44) denkleminde (2.41) eşitliği göz önüne alınmış ve itki ile ilgili kontrol terimi ihmal edilmiştir. Ayrıca $\tilde{M}_u, \tilde{M}_\alpha, \tilde{M}_q, \tilde{M}_\theta$ ve $\tilde{M}_{\delta_e}$ terimlerini, (2.40) denklemindeki $\Delta \mathbf{w}$ ifadesini $\Delta \mathbf{q}$ ifadesinde yerine yazmakla elde edilir ve

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_u &= M_u + M_{\omega} Z_u \\
\tilde{M}_w &= M_w + M_{\omega} Z_\alpha \\
\tilde{M}_q &= M_q + U_0 M_{\omega} \\
\tilde{M}_\theta &= -g M_{\omega} \sin \gamma_0 \\
\tilde{M}_{\delta_e} &= M_{\delta_e} + M_{\omega} Z_{\delta_e}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

denklemleri ile ifade edilir.

Şimdi ise (2.42) ile tanımlanmış yanlamasına hareket denklemlerinin durum uzayındaki ifadesini yazalım.

$$\begin{bmatrix} \Delta \beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \varphi \\ \Delta \psi \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_{lat}} = \begin{bmatrix} Y_\beta & 0 & -1 & \frac{g}{u_0} \cos \theta_0 & 0 \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & 0 & 0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tan \theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sec \theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{A}_{lat}} \begin{bmatrix} \Delta \beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \varphi \\ \Delta \psi \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_{lat}} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_r}^* \\ L'_{\delta_a} & L'_{\delta_r} \\ N'_{\delta_a} & N'_{\delta_r} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathbf{B}_{lat}} \begin{bmatrix} \Delta \delta_a \\ \Delta \delta_r \end{bmatrix}_{\mathbf{u}_{lat}} \tag{2.46}$$

burada

$$\begin{aligned}
L'_\beta &= L_\beta + I_B N_\beta & N'_\beta &= N_\beta + I_A L_\beta & L'_p &= L_p + I_B N_p \\
N'_p &= N_p + I_A L_p & L'_r &= L_r + I_B N_r & N'_r &= N_r + I_A L_r \\
L'_{\delta_a} &= L_{\delta_a} + I_B N_{\delta_a} & N'_{\delta_a} &= N_{\delta_a} + I_A L_{\delta_a} & L'_{\delta_r} &= L_{\delta_r} + I_B N_{\delta_r} \\
N'_{\delta_r} &= N_{\delta_r} + I_A L_{\delta_r} & I_A &\equiv I_{xz} / I_{xx} & I_B &\equiv I_{xz} / I_{zz} & Y_{\delta_r}^* &= Y_{\delta_r} / u_0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

2.7 Uçak Hareket Denklemlerinin Ayrık Hale Getirilmesi

(2.40) ve (2.42) denklemleri ile verilen uzunlamasına ve yanlamasına hareket denklemlerini kullanarak uçağın hareketinin bilgisayar ortamında simülasyonunu gerçekleştirebilmek için ayrık şekilde ifade edilmesi gerekir. Modelin ayrık ifadesini elde etmek için türevin tanımından faydalanılır. Uçağın öne doğru hız (Δu) denklemini yeniden yazalım ve türev tanımından yararlanarak onu ayrık hale getirelim.

$$\Delta u = X_u \Delta u + X_w \Delta w - g \cos \theta_0 \Delta \theta + X_{\delta_e} \Delta \delta_e$$

$$\frac{\Delta u(t_{k+1}) - \Delta u(t_k)}{\Delta t} = \frac{\Delta u(k+1) - \Delta u(k)}{\Delta t} \quad (2.48)$$

$$= X_u \Delta u(k) + X_w \Delta w(k) - g \cos \theta_0 \Delta \theta(k) + X_{\delta_e} \Delta \delta_e(k)$$

Burada k iterasyon numarasıdır. $\Delta u(t_{k+1})$, öne doğru hızın t_{k+1} anındaki, $\Delta u(t_k)$ ise öne doğru hızın t_k anındaki değeridir. $\Delta u(k+1) = \Delta u(t_{k+1})$ ve $\Delta u(k) = \Delta u(t_k)$ 'dir. (2.48) ifadesini düzenlersek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\Delta u(k+1) = (X_u \Delta t + 1) \Delta u(k) + X_w \Delta t \Delta w(k) - g \cos \theta_0 \Delta t \Delta \theta(k) + X_{\delta_e} \Delta t \Delta \delta_e(k) \quad (2.49)$$

Benzer şekilde bu tanımları diğer uzunlamasına ve yanlamasına hareket denklemlerine de uygular, (2.41), (2.43) ifadelerini bu denklemlerde göz önünde bulundurarak ve durum uzayında ifade edersek, durum matrisleri aşağıdaki gibi elde ederiz. Dikkat edelim ki burada,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_u &= M_u + M_{\&} \frac{Z_u}{u_0} & \tilde{M}_q &= M_\alpha + M_{\&} \\ \tilde{M}_\alpha &= M_\alpha + M_{\&} \frac{Z_\alpha}{u_0} & \tilde{M}_\theta &= -\frac{g}{u_0} M_{\&} \sin \theta_0 & \tilde{M}_{\delta_e} &= M_{\delta_e} + M_{\&} \frac{Z_{\delta_e}}{u_0} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) = & \begin{bmatrix} X_u \Delta t + 1 & X_\alpha \Delta t & 0 & -g \cos \theta_0 \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Z_u}{u_0} \Delta t & \frac{Z_\alpha}{u_0} \Delta t + 1 & \Delta t & \left(-\frac{g}{u_0} \right) \sin \theta_0 \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{M}_u \Delta t & \tilde{M}_\alpha \Delta t & \tilde{M}_q \Delta t + 1 & \tilde{M}_\theta \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_\beta \Delta t + 1 & 0 & -\Delta t & \frac{g}{u_0} \cos \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L'_\beta \Delta t & L'_p \Delta t + 1 & L'_r \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N'_\beta \Delta t & N'_p \Delta t & N'_r \Delta t + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t & \tan \theta_0 \Delta t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \\
& \mathbf{A} \\
\mathbf{u}(k) = & \begin{bmatrix} X_{\delta_e} \Delta t & 0 & 0 \\ \frac{Z_{\delta_e}}{u_0} \Delta t & 0 & 0 \\ \tilde{M}_{\delta_e} \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{\delta_r}^* \Delta t \\ 0 & L'_{\delta_a} \Delta t & L'_{\delta_r} \Delta t \\ 0 & N'_{\delta_a} \Delta t & N'_{\delta_r} \Delta t \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

burada

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \tag{2.52}$$

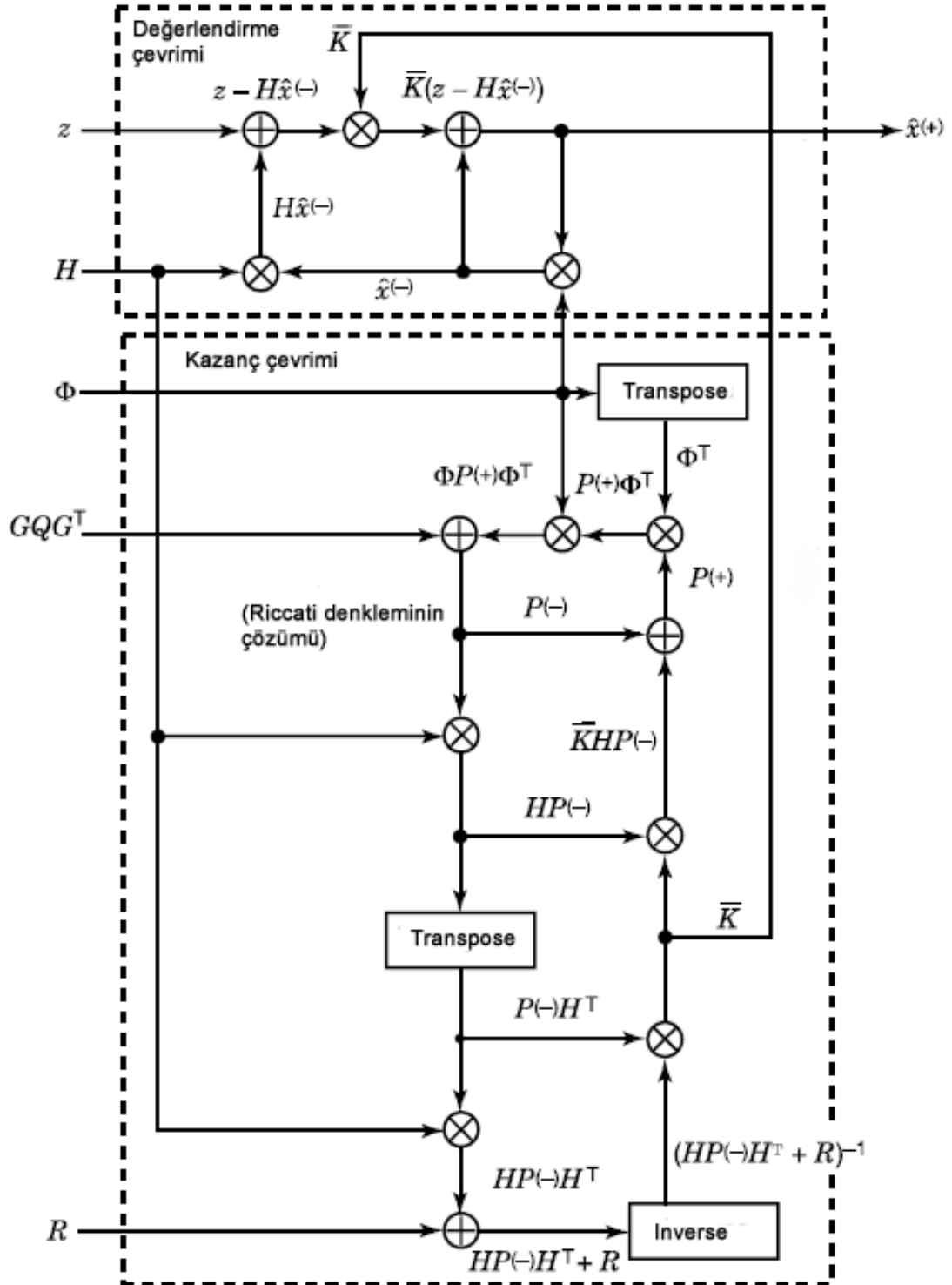
3. KALMAN FİLTRESİ

3.1 Giriş

Rudolf Kalman kendisinin 1960 yılında yayınlanan meşhur makalesinde, olasılık teorisini (daha spesifik olarak, rasgele değişkenlerin şartlı Gauss dağılımı) esas alan durum değerlendirme filtresinin yapısını açıklamıştır. O tarihten itibaren Kalman filtresinin uygulama alanı hava ve ekonomik öngörmelerden uçak ve uzay araçlarının navigasyonuna kadar çok geniş bir yelpazede kullanılmaya devam edilmektedir.

Kalman filtresi sistemin dinamik modeli ve ölçüm modeli verildiği takdirde sistemin durumunu değerlendiren, yinelemeli (recursive) matematiksel denklemler takımıdır. Sistemin modeli sürekli veya ayrık zaman olarak tanımlanabilir ve sistemin normal dağılıma sahip beyaz Gauss gürültüsü adlanan sistem bozuntusu ile tetiklendiği kabul edilir. Ölçümler ise varyansı belli normal dağılıma sahip beyaz Gauss gürültüsü ile bozulmaktadır.

Filtre öngörmeyi düzeltme prensibi ile çalışmaktadır. Sistem modeli kullanılarak öngörme yapılır ve daha sonra bu öngörme ölçümün kullanılmasıyla düzeltilir. Bu işlem yapılırken ortalama ve varyans gibi iki istatistik moment kullanılmaktadır. Kalman filtresinin genel veri akış diyagramı aşağıdaki şekilde (Şekil 3.1) gösterilmiştir.[4]



Şekil 3.1 Kalman Filtresi genel veri akış diyagramı (Grewal S. M., Andrews A. P., Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, John Wiley & Sons Inc., 2001)

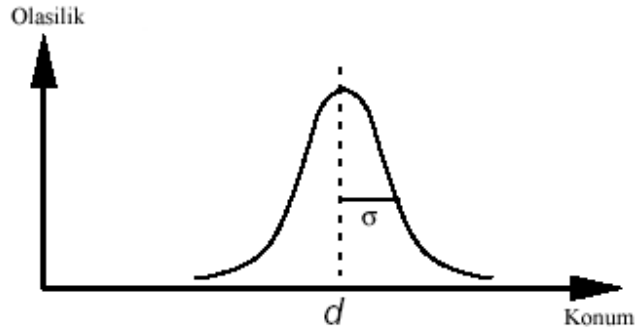
3.2 Kalman Filtresinin Çalışma Prensibine Dair Bir Örnek

Filtrenin çalışma prensibini anlayabilmek için basit bir örnek verelim. Basitlik için bir arabanın doğru ve uzun yol boyunca hareket ettiğini düşünelim. Yani bir boyutlu hareket söz konusudur. Uzak bir gözlemci arabanın konumunu ölçmüştür. Arabanın hızı ve ivmesi direkt olarak ölçülmemiştir. Arabanın şimdiki ve gelecekteki durumu ve hızını değerlendirmemiz talep olunmaktadır. Kalman filtresi araban durumunun ifadesinde $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ matrislerini kullanmaktadır. $\mathbf{X}$ vektörü arabanın durum değişkenlerini

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ifade etmektedir.

Sensörlerin doğruluklarının sınırlı olması ve durumların her zaman ölçülememesi gerçeğinden dolayı durum vektöründeki değerler belli olmayan gerçek değer yaklaşımından öte bir şey değildir. Ölçümdeki hataları beyaz gürültü şeklinde tam olarak ifade edildiği kabul edilmektedir. Kalman filtresi bu hataları Şekil 3.2’de verilmiş normal Gauss dağılımı vasıtasıyla modellemektedir.



Şekil 3.2 d konumu için Gauss dağılımı [5]

Gauss dağılımı gerçek değerlerin hangi aralıkta bulunabileceğini ifade etmektedir. Konumun durum vektöründeki değerini d göstermektedir. Gauss dağılımının genişliği standart sapma ile karakterize edilmektedir. Standart sapma büyük olduğu zaman dağılım geniş olmakta ve bu ise d konumunun değerinin doğruluğunun küçük olmasına sebebiyet vermektedir. Küçük standart sapmalar ise değerlerin daha doğru olduğuna işaret eder. $\mathbf{P}$ kovaryans matrisi ise belirsizlikleri muhafaza etmekte olup $n \times n$

boyutlu bir matrisidir. Burada n durum değişkenlerinin sayısıdır. Örneğimizde $\mathbf{P}$ 2x2 boyutlu bir matristir. Sırasıyla konum ve hız durum değişkenlerinin standart sapmalarını σ_d ve σ_v ile işaret edersek, o zaman kovaryans matrisini

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_d & \sigma_d \sigma_v \\ \sigma_d \sigma_v & \sigma_v \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade olunacaktır.

Kalman filtresi sistemin ve ölçümün modellerine ihtiyaç duymaktadır. Sistem modeli yeni ölçümlerin mevcut olmadığı durumda durum değişkenlerinin zamanla nasıl değiştiğini ifade eder ve

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{G}w \quad (3.3)$$

şeklinde ifade olunur. Burada w kovaryansı $\mathbf{Q}$ (1x1) olan beyaz gürültüdür. Örneğimiz için (3.3) denklemini açık şekilde yazarsak

$$\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (3.4)$$

denklemini elde ederiz. Görüldüğü üzere modelimiz çok basittir. Konumun türevi hızdır, hızın türevi sıfır iken, sadece gürültü teriminden ibarettir.

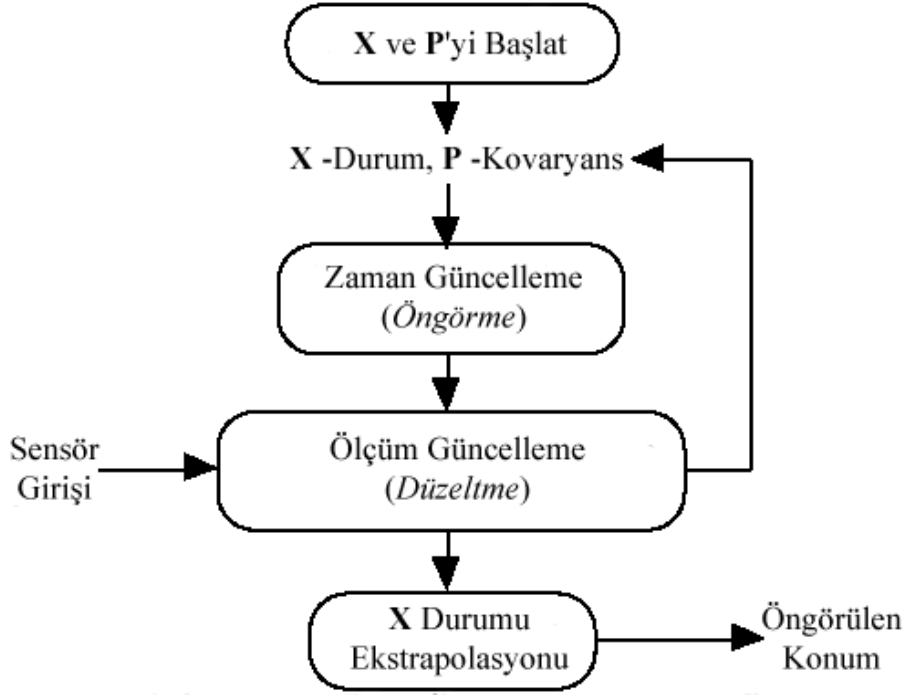
$\mathbf{X}$ durumunu ölçüm ile ilintileyen ölçüm modelini aşağıdaki denklemle ifade edebiliriz.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{X} + e \quad (3.5)$$

(3.5) denklemindeki $\mathbf{Z}$ 1x1 boyutunda vektör olup, uzaktan ölçülen y konumu içermektedir. Denklemdaki e terimin ise kovaryansı $\mathbf{R}$ olan beyaz gürültüyü ifade etmektedir.

Şekil 3.3 Kalman filtresinin genel akış şemasını temsil etmektedir. Filtre t zaman anı için $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ matrislerinin başlatılmasıyla çalışmaya başlar. Konumun ölçümünün yapıldığı her zaman anında filtre yeni bilgiyi prosese yansıtmak amacıyla $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ 'yi güncelleştirir. t_1 anında yeni bir ölçüm yapıldığını varsayalım. $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ için t_1 anındaki yeni değerlerinin bulunabilmesi için filtre sistem modelini kullanarak zaman güncelleme (öngöreme) basamağını çalıştırır. Daha sonra uzaktan ölçülen değer

yeni değerlerle harmanlana bilmesi için ölçüm modelini kullanan ölçüm güncelleme (düzeltme) basamağı çalıştırılır. Son olarak ise $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ 'nin yeni değerleri bulunur. Daha sonra zaman t_1 ayarlanarak her yeni ölçüm için öngörme-düzeltme basamakları tekrarlanır.



Şekil 3.3 Kalman filtresi genel akış diyagramı [5]

Zaman güncellemesi basamağında yeni ölçüm hesaba katılmadan $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ 'nin t anından t_1 anına ekstrapolasyonu yapılıyor. Bu basamak aşağıdaki türevleri birleştirilir.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T \quad (3.7)$$

Bu problemin çözümü genel olarak 4. dereceden Runge-Kutta yöntemiyle elde edilmektedir. Buradan kapalı form çözümü bulunmaktadır. Örneğimiz için kapalı form çözümü

$$d_{t_1} = d_t + v(t_1 - t) \quad (3.8)$$

ifade edilecektir.

Ölçüm güncelleme basamağında yeni ölçümler de göz önüne alınarak t_1 zamanı için $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{P}$ hesaplanır ve denklemleri aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

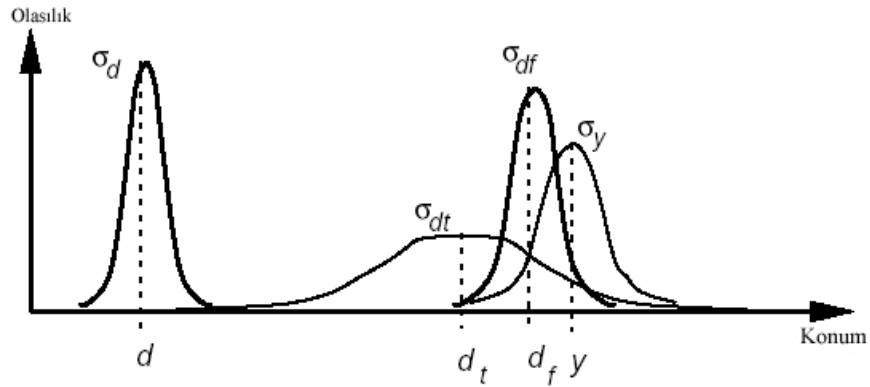
$$\mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T [\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{P}_{t_1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{P} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{X}_{t_1} = \mathbf{X} + \mathbf{K}(\mathbf{Z} - \mathbf{H}\mathbf{X}) \quad (3.11)$$

Burada $\mathbf{K}$ Kalman kazanç matrisi $\mathbf{I}$ ise birim matristir. Bu örnek için kazanç matrisi 2x1 boyutlu, birim matris ise 2x2 boyutludur.

Peki kombinasyonlar nasıl oluşur? Zaman ve ölçüm basamakları uygulandıkları sırada konum ve standart sapma ile neler baş verdiğini açıklamak için grafik ifade kullanacağız.



Şekil 3.4 Konum ve standart sapmanın zaman ve ölçüm güncelleme basamakları arasındaki değişimleri [5]

d konumun t anındaki σ_d standart sapması şeklin sol tarafında yer almaktadır. t_1 anında standart sapması σ_y yeni ölçüm (y) yapılıyor. Zaman güncelleme basamağında d başlangıç konumu için t_1 anına ait d_t konumu öngörülmesi yapılıyor. Yeni σ_{d_t} standart sapması başlangıç σ_d standart sapmadan büyüktür. Buna sebep zaman güncelleme basamağının çalışması sırasında kovaryansın arttırıcı etki yapmasıdır. Çünkü yeni ölçüm yapılmadığı için gürültü zamanla belirsizliğin büyümesine sebebiyet veriyor. Daha sonra ölçüm güncelleme basamağında öngörülen konum değeri ile ölçüm birleştirilerek σ_{d_t} standart sapmasına sahip d_f

konumu elde edilir. Kaydedelim ki, son konum zaman güncelleme ve ölçüm değerlerinin harmanlanması (birleştirilmesi) sonucunda oluşmuştur. Son konumun σ_{d_t} standart sapması başlangıç konumun σ_d ve σ_y standart sapmalarından küçüktür. Zaman güncelleme değeri ile ölçümün birleştirilmesiyle Kalman filtresi daha doğru değere ulaşır.[5]

Hız direkt olarak ölçülmemesine rağmen $\mathbf{X}$ vektörü hız ile ilgili değeri de içermektedir. Kalman filtresi devamlı olarak (3.8) öngörücüsünü kullanarak konum ve hız için en iyi değerleri bulmaya çalışır.

Şekil 3.3’de tasvir edilmiş olan filtre bir bilgisayar algoritması gibi çalışır. Basamakların çoğunda matrisler üzerinde çarpma ve toplama işlemi yapar. Modellemede zor olan kısımlardan birisi $\mathbf{X}$ durum değişkenleri ile $\mathbf{A}$ matrisi arasındaki ilişkinin belirlenmesi ve gürültü ile ilintili $\mathbf{Q}$ ve $\mathbf{R}$ matrislerinin belirlenmesidir. İdeal halde modelin mükemmel olması için $(\mathbf{Z} - \mathbf{H}\mathbf{X})$ kalanının (residual) beyaz gürültü gibi davranması gerekir.

3.3 Lineer Dinamik Sistemler İçin Kalman Filtresi

Kalman Filtresi üç temel aşamadan oluşur. $t < t_i$ koşuluyla bir dinamik sistemin t_i anındaki durum değişkenlerinin, sistemin önceki özelliklerinden faydalananarak hesaplanmasına öngörme (prediction, extrapolasyon) aşaması denir. Eğer herhangi bir t anında dinamik bir sistemin t_i anındaki durum değişkenleri $t = t_i$ koşulu ile t_i anındaki ölçülerde kullanılarak hesaplanıyorsa, bu aşamaya filtre aşaması (update) denir. Eğer herhangi bir t anında dinamik bir sistemin t_i anındaki durum değişkenleri $t > t_i$ koşuluyla, t_i anına kadar ki ölçülerle birlikte hesaplanıyorsa bu aşamaya da yumuşatma aşaması denir. [6]

Navigasyon ölçümlerinin işlemi problemlerine, Kalman filtresi geniş şekilde uygulanmaktadır. Bu durumda filtre, aşağıdaki amaçlarla kullanılır.

1. ölçüm hatalarının küçültülmesi ve ölçülen parametrenin daha doğru değerinin bulunması;
2. çeşitli bilgi kaynaklarının kompleksleştirilmesi;
3. uçağın durum vektörünün ölçülmeyen parametrelerinin belirlenmesi;
4. uçakta meydana gelmiş bozuntuların teşhisi.

Lineer ayrık dinamik sistemi ele alalım. Sistemin durum denklemi sistemin dinamiğini, gözlem denklemi ölçümün oluşma mekanizmasını belirler. Bu denklemler lineer sistem için aşağıdaki gibi yazılır:

Durum denklemi

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{\Phi}(k+1, k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k+1, k)\mathbf{w}(k), \quad (3.12)$$

Gözlem denklemi

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (3.13)$$

burada $\mathbf{x}(k)$ sistemin n boyutlu durum vektörüdür, $\mathbf{\Phi}(k+1, k)$ onun $n \times n$ boyutlu transfer matrisidir, $\mathbf{w}(k)$ - r boyutlu rasgele Gauss bozuntu vektörüdür (sistemin bozuntusu), onun ortalaması sıfır, korelasyon matrisi ise, $\mathbf{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(j)] = \mathbf{Q}(k)\delta(kj)$, $\mathbf{E}$ istatistik ortalama operatörüdür. $\delta(kj)$ Kroneker sembolüdür

$$\delta(kj) = \begin{cases} 1, k = j, \\ 0, k \neq j. \end{cases}$$

$\mathbf{G}(k+1, k)$ sistemin bozuntusunun $n \times r$ boyutlu transfer matrisidir, $\mathbf{y}(k)$ - s boyutlu gözlem vektörüdür, $\mathbf{H}(k)$ sistemin $s \times n$ boyutlu gözlem matrisidir, $\mathbf{v}(k)$ ölçümlerin s boyutlu bozuntu vektörüdür, onun matematik bekleme sıfır, korelasyon matrisi ise,

$$\mathbf{E}[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^T(j)] = \mathbf{R}(k)\delta(kj)$$

Başlangıç $\mathbf{x}(0)$ durumunun ortalama değeri $\overline{\mathbf{x}(0)}$ ve korelasyon matrisi $\mathbf{P}(0)$ Gauss vektörüdür. Sistemin bozuntusu $\mathbf{w}(k)$ ve ölçüm hatası $\mathbf{v}(k)$ arasında korelasyon ilişkisi yoktur

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}(k)\mathbf{v}^T(j)] = 0, \forall k, j.$$

Durum vektörünün $\mathbf{y}(k)$ gözlem vektörleri ardışıklığına göre değerinin bulunması istendiğinde, Kalman filtresine dayanan lineer filtreler kuramının kullanılması gerekir.

Lineer ayrık dinamik sistemin durum vektörünün optimal değerlendirme algoritması aşağıdaki denklemler sistemi ile yazılmaktadır:

Değerin denklemi

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k/k) &= \Phi(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\Phi(k, k-1)\hat{\mathbf{x}}(k-1/k-1)] \\ &= \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + \mathbf{K}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k/k-1)\end{aligned}\quad (3.14)$$

burada $\mathbf{K}(k)$ optimal filtrenin matris kazanç katsayısıdır.

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(k) &= \mathbf{P}(k/k)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k) \\ &= \mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k)[\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}\end{aligned}\quad (3.15)$$

Değerin hatasının korelasyon matrisi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k/k) &= \mathbf{P}(k/k-1) - \mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) \\ &\quad \times [\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1}\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\end{aligned}\quad (3.16)$$

Ekstrapolasyon hatasının korelasyon matrisi

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(k/k-1) &= \Phi(k/k-1)\mathbf{P}(k-1/k-1)\Phi^T(k, k-1) \\ &\quad + \mathbf{G}(k, k-1)\mathbf{Q}(k-1)\mathbf{G}^T(k, k-1)\end{aligned}\quad (3.17)$$

Başlangıç koşulları

$$\hat{\mathbf{x}}(0/0) = \overline{\mathbf{x}(0)}, \quad \mathbf{P}(0/0) = \mathbf{P}(0)$$

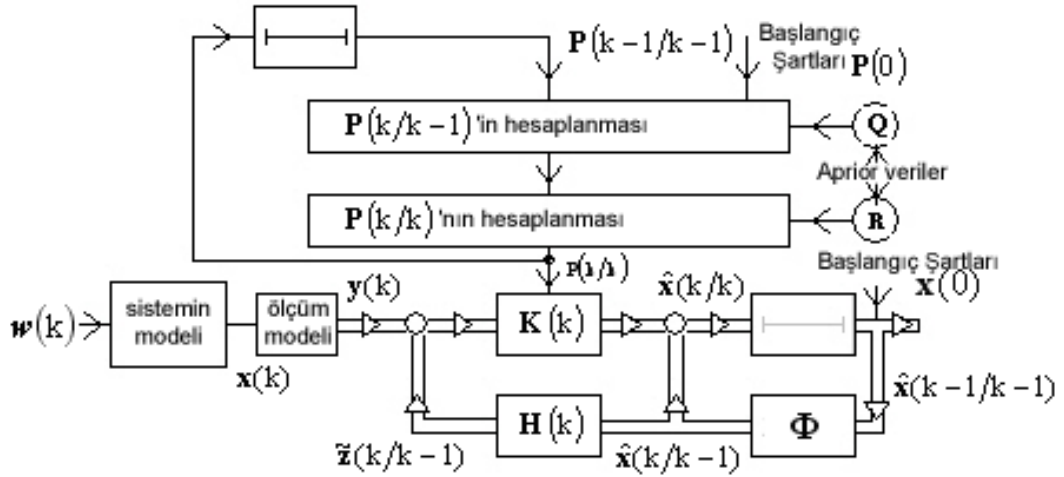
Çalışma algoritması (3.14)-(3.17) denklemleri ile yazılan optimal filtreye Kalman filtresi denir. $\mathbf{K}(k)$ ve $\mathbf{P}(k/k)$ için aşağıdaki denk ifadeler de geçerlidir:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(k) &= \mathbf{P}(k/k)\mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k) \\ \mathbf{P}(k/k) &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))\mathbf{P}(k/k-1) \\ \mathbf{P}(k/k) &= [\mathbf{P}^{-1}(k/k-1) + \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{H}(k)]^{-1} \\ \mathbf{P}(k/k) &= \mathbf{P}(k/k-1)[\mathbf{I} + \mathbf{H}^T(k)\mathbf{R}^{-1}(k)\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)]^{-1}\end{aligned}\quad (3.18)$$

burada $\mathbf{I}$ birim matrisidir

Filtrenin çalışması için aprior bilgiye göre bilinen $\overline{\mathbf{x}(0)}$ ve $\mathbf{P}(0)$ başlangıç değerleri, sistem bozuntusunun korelasyon matrisi $\mathbf{Q}(k)$ ve ölçüm hatasının korelasyon matrisi $\mathbf{R}(k)$ önceden belli olmalıdır.

Kalman filtresinin yapı şeması şekil 3.5'de gösterilmiştir.



Şekil 3.5 Kalman filtresinin yapı şeması [7]

(3.15) formülüne göre değer $\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$ ekstrapolasyon değerinin ve $\mathbf{K}(k)\tilde{\mathbf{z}}(k/k-1)$ düzeltme farkının toplamına eşittir. Ekstrapolasyon değeri önceki adımdaki değerin sistemin transfer matrisiyle çarpılmasıyla bulunur. Sonra ise, yapılmış öngörmeye (ekstrapolasyon değerine) düzeltme verilir. Dolayısıyla, Kalman filtresi öngörmeyi düzeltme prensibi üzere çalışır.

Kalman filtresinde değerin oluşturulma mekanizmasını gösteren zamana bağlı diyagram şekil 3.6'da tasvir olunmuştur. Filtrenin çevirim şeması aşağıdaki işlemleri içerir:

1. Değerin bir adım ileriye öngörmesi (ekstrapolasyon değerinin bulunması)
 $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}(k/k-1);$
2. $\rightarrow \hat{\mathbf{x}}(k/k-1);$ 'in soldan $\mathbf{H}(k)$ 'ya çarpılması, yani ölçümün öngörmesi;
3. Ölçme ile ekstrapolasyon değerinin farkının (innovasyon sürecin) bulunması
 $\rightarrow \tilde{\mathbf{z}}(k/k-1) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1);$

3.4 Ölçüm Kanalı Oluşan Bozulmaları Göz Önüne Alan Robust Kalman Filtresi [8]

3.3 bölümünde karşılaştığımız (3.14)-(3.17) denklemleri ile ifade olunan lineer dinamik sistemi ele alalım. Ancak ondan farklı olarak, gözlem modelini aşağıdaki gibi yazalım:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{x}(k) + \gamma(k)v(k) \quad (3.19)$$

$\gamma(k)$ parametrik değişkeninin her bir adımda bağımsız rasgele değişken olduğunu varsayalım. Bundan başka,

$$\gamma(k) = \begin{cases} 1 \rightarrow p(k) \\ \sigma \rightarrow 1 - p(k) \end{cases} \quad (3.20)$$

yani, $p(k)$ ihtimali ile ölçüm kanalı normal çalışacak, $1 - p(k)$ ihtimali ise bozulacaktır.

Diyelim ki, ölçüm bozuntularının varyansı, normal çalışma durumuna oranla bozulma durumunda önemli derecede büyüktür, yani $\gamma(k) = \sigma > 1$. O zaman aşağıdaki suboptimal filtreleme algoritması geçerlidir.

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \hat{\mathbf{x}}(k/k-1) + p(1/k)\mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] \quad (3.21)$$

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k)[\mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1} \quad (3.22)$$

burada $p(k)$ $\gamma(k)$ değişkeninin o anda 1 değerine eşit olmasının, dolayısıyla, bakılan k zaman anında ölçüm kanalının bozulmamasının aposterior ihtimalidir. Diğer değişkenlerin değerleri (3.14)-(3.17) formüllerinde olduğu gibidir. (3.21-3.22) ifadesinden görüldüğü gibi söz konusu filtre Kalman filtresinden sadece matris kazanç katsayısının önünde bulunan $p(k)$ çarpımından çıkartılmaktadır. $p(1/k)=1$ olduğunda, bu filtre Kalman filtresi ile çakışır, $p(1/k)=0$ olduğunda ise, ekstrapolator olarak yeni gelmiş verileri dikkate almaz.

$p(1/k)$ ihtimalinin hesaplanması için zor matematiksel işlemlerin yapılması gerekmektedir. Bundan dolayı, söz konusu algoritmanın gerçekleştirilmesi aşırı hesaplamalar gerektirir.

[6]'da vektör ölçümleri durumu için $\mathbf{y}(k)$ ölçümleri kabul olduğunda, $\mathbf{S}(k) = \mathbf{y}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k/k-1)$ vektörünün Ω tolerans bölgesinde de yerleşmesinin tespit olunmasına dayanan robust Kalman filtresi sunulmuştur. Bu durumda

$$\mathbf{S}(k) \in \Omega \text{ olduğunda, } p(1/k)=1, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{S}(k) \notin \Omega \text{ olduğunda ise, } p(1/k)=0 \quad (3.24)$$

değerleri kabul olunur.

İhtimal kuramının sınır teoremine göre, sistemin çıkış koordinatına çok sayıda faktörün etkidiğini göz önüne alarak, k zaman anında onun gerçek değerinin çok boyutlu normal kanuna göre dağıldığını varsayalım. Bu halde, ölçüm kanalının normal çalıştığı durumda $\mathbf{S}(k)$ vektörü da çok boyutlu normal dağılımı sağlayacaktır ve dağılım fonksiyonu aşağıdakine eşit olacaktır:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{S}) = & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s |\mathbf{M}(k)|}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]^T \mathbf{M}^{-1}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

burada $\mathbf{M}(k) = \mathbf{H}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}$ pozitif belirli matristir.

$\mathbf{M}(k)$ matrisinin elemanları gerçek sayılar olduğunda

$$[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]^T \mathbf{M}^{-1}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] = \rho^2 \quad (3.26)$$

denklemi elipsoidin denklemine (yayılma elipsoidinin) uygun olacaktır. $s = 2$ olduğunda elipsin ρ 'yu vermekle, parametreler uzayında tolerans elipsoitler oluştururuz. O zaman (3.23) koşuluna tolerans yayılma elipsoidinin $\mathbf{S}(k)$ vektörünü içerdiği, (3.24) koşuluna ise içermediği durum uygun olacaktır. Elipsoitlerin böyle

bir ilginç özelliği vardır ki, $\mathbf{S}(k)$ vektörünün elipsoidin içerisinde yerleşmesi sadece, ρ parametresine bağlıdır. ρ elipsoidin yarım eksenlerinin standart sapmalar ile ifade olunmuş boyutları olduğundan dolayı, tolerans elipsoidin $\mathbf{S}(k)$ vektörünü içirme ihtimalini yüksek kabul ederek,

$$\mathbf{P}[\mathbf{S}(k) \in \Omega] = 1 - \frac{s}{(2)^{s/2} \Gamma[s/2 + 1]} \int_{\rho}^{\infty} \mathbf{X}^{s-1} e^{-\mathbf{X}^2/2} d\mathbf{X} \quad (3.27)$$

koşulundan ρ parametresinin ρ_{tol} tolerans değerini buluruz. Burada $\Gamma[s/2 + 1]$ gamma fonksiyonu, s ölçüm vektörünün boyutudur.

(3.27) formülü Ω yayılma elipsoidinin $\mathbf{S}(k)$ vektörünü içirme ihtimalini nitelendiriyor. Uygun tolerans yayılma elipsoidinin denklemi aşağıdaki gibi yazılmaktadır

$$[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)]^T \mathbf{M}^{-1}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}(k/k-1)] = \rho_{tol}^2 \quad (3.28)$$

Teorem 3.4. Tolerans elipsoidi $\mathbf{S}(k)$ vektörünü içermeyişinde, (3.28) denkleminin sol tarafı ρ_{tol}^2 'dan büyük olacaktır [8].

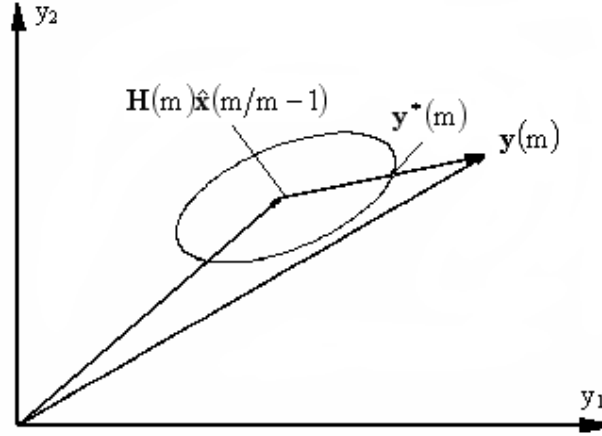
İspatı. Şekil 3.6'da tolerans elipsoidin (bakılan durumda elipsin) dışındaki keyfi $\mathbf{y}(m)$ noktası ile $\mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)$ noktasını $\mathbf{y}(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)$ vektörü ile birleştirelim. Bu vektör tolerans elipsini bir $\mathbf{y}^*(m)$ noktasında kesecektir. $\mathbf{y}(m)$ tolerans elipsinin dışında yerleştiğinden dolayı,

$$[\mathbf{y}(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)] = \mu [\mathbf{y}^*(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)]$$

eşitliği geçerli olacaktır, burada $\mu > 1$. O zaman ispatı talep olunan

$$\begin{aligned} & [\mathbf{y}(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)]^T \mathbf{M}^{-1}(m) [\mathbf{y}(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)] = \\ & = \mu^2 [\mathbf{y}^*(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)]^T \mathbf{M}^{-1}(m) [\mathbf{y}^*(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)] \phi \\ & \phi [\mathbf{y}^*(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)]^T \mathbf{M}^{-1}(m) [\mathbf{y}^*(m) - \mathbf{H}(m)\hat{\mathbf{x}}(m/m-1)] = \rho_{tol}^2 \end{aligned}$$

ifadelerini yazabiliriz.



Şekil 3.7 Tolerans elipsi

Sonuçta $S(k)$ vektörünün Ω bölgesinde yerleşmesi, sadece, $y(k)$ vektörünün (3.28) denkleminde konulması ile doğrulanır. Anormal ölçüm rejiminde (ölçüm kanalında bozulma olduğunda) (3.28) denkleminin sol tarafı ρ_{tol}^2 'dan büyük olacaktır ve $p(1/k)$ ihtimali sıfır değerini alacaktır. Bu zaman (3.21-3.22) filtresi yeni gelmiş ölçümleri göz önüne almayacaktır ve çıkış vektörünün değeri olarak, ekstrapolasyon değerlerini sunacaktır.

$S(k) \in \Omega$ koşulu geçerli olduğunda, (3.28) denkleminin sol tarafı ρ_{tol}^2 'dan düşük veya ona eşit olacaktır. Bu durumda $p(1/k)$ değişkeni 1 değerini alacaktır ve söz konusu filtre sistemin normal çalışması durumu için ayarlanmış ($\gamma(k)=1$) optimal (3.14)-(3.17) Kalman filtresi ile çakışacaktır. Değer hatasının korelasyon matrisi $P(k/k)$ bu durumda aşağıdaki formülün yardımı ile hesaplanacaktır [8]:

$$P(k/k) = \begin{cases} P(k/k-1) - K(k)H(k)P(k/k-1) & S(k) \in \Omega \\ P(k/k-1) & S(k) \notin \Omega \end{cases} \quad (3.29)$$

Açıklanan robust Kalman filtresinin avantajları:

- her bir adımda $p(1/k)$ ihtimalini belirlemek amacıyla zor hesaplamaların yapılması gerekmez;
- algoritma kolay olarak gerçek zamanlı oluşturulabilir.

Söz konusu filtrenin dezavantajları:

- bu filtre sadece ölçüm kanalında oluşan ani bozulmaları (anormal ölçümleri) dikkate alır uygulanabilir. Bu durumda önce sistemin durum veya gözlem

denklem incelenen lineer durumdan başka, robust filtre nonlineer sistemler için de doğrusallaştırılması gerekmektedir.;

- sistemde oluşabilen ve parametreler vektörünün değişmesi ile tasvir olunan bozulmalar sınıfının göz önüne alınmasını sağlamaz.

4. OPTİMAL LİNEER KONTROL SİSTEMLERİ

4.1 Giriş

Optimal kontrol problemleri kontrol mühendislerinin dikkat merkezinde büyük öneme sahiptir. Optimal kontrol sistemi öyle bir sisteme denir ki, onun tasarımı sırasında seçilmiş olan performans indisinin değeri optimizme (maksimize veya minimize) edilsin. [9]

Kontrol sistemi tasarımı titiz matematik optimizasyon teknikleri vasıtasıyla da gerçekleştirilebilmektedir. Bu tekniklerden birisinin temeli 60'larda atılmış ve modern optimal kontrol teorisi adlandırılmıştır [10]. Bu teknik zaman uzayı için geliştirilmiştir. 60 ve 70'lerde ise modern optimal kontrol teorisine en büyük katkı Massachusetts Institute of Technology profesörü Michael Athans tarafından yapılmıştır [11]. 80 ve 90'larında büyük trend yakalayan diğer optimal kontrol teorisi ise H_∞ optimal kontrol adlandırılmış ve bu teori Zames'in çalışmasıyla başlatılmıştır [12]. Bu teori zaman ve frekans uzayı için optimizasyonu tekniğini birleştirir ve hem frekans hem de zaman uzayı için tek optimal çözüm sunar [13]. 90'ların trendi olan ve H_∞ optimal kontrol teorisine benzeyen H_2 optimal kontrol da hem zaman hem de frekans uzayı için optimal çözüm sağlar [14], [15].

4.2 Performans İndisleri

Optimal kontrol sistemi tasarımı sırasında belirli sınıra sahip kontrol yasasının belirlenmesi için bir kurala ihtiyaç duyulmaktadır. Bu kural ideal davranıştan olan sapmaları belli ölçüde minimize eder. Bu ölçü seçilmiş olan performans indisi tarafından sağlanır. Performans indisi fonksiyonunun alacağı değere göre sistemin istenen veya talep olunan sisteme ne derece yakın olduğu belirlenir.

Bir çok durumda sistem davranışının optimizasyonu performans indisini minimize (veya maksimize, bu seçilmiş olan performans indisinin yapısına bağlı) edecek uygun $u(k)$ kontrol vektörünün seçilmesiyle sağlanır. Performans indisinin seçimi büyük ölçüde oluşacak optimal kontrol sisteminin yapısını belirleyeceği için

önemlidir. Performans indisinin seçimine bağlı olarak, kontrol sistemi lineer, non-lineer, sabit veya zamanla değişen olacaktır. Bu sebeple performans indisi öyle formüle edilmelidir ki, oluşacak sistemin yapısı sistem taleplerini karşılasın. Buna paralel olarak, tasarım talepleri sadece sistemin performans özelliklerinin sağlanması ile birlikte fiziksel olarak gerçekleştirilebilir olmasının da istemektir.

4.3 Optimizasyon Problemi Formülasyonu

Kontrol sisteminin optimizasyon probleminin formüle edilebilmesi için aşağıdakilerin belli olması lazım.

1. Sistem denklemleri
2. Müsaide edilebilir kontrol vektörleri sınıfı
3. Problem sınırları
4. Performans indisi
5. Sistem parametreleri

Optimal kontrol probleminin çözümü müsaide edilir kontrol vektörleri sınıfı içinden $\mathbf{u}(k)$ Optimal kontrol vektörünün seçilmesiyle mümkün olmaktadır. Bu $\mathbf{u}(k)$ vektörü

1. Performans indisi yapısına
2. Sınırların yapısına
3. Başlangıç duruma ve başlangıç çıkışa
4. Talep olunan duruma ve talep olunan çıkışa

bağlıdır [9].

4.4 Düzenleyici Problemi

Aşağıdaki gibi modellenmiş MIMO sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

sistem çıkışının başlangıç değerinin sıfırdan farklı olduğunu farz edelim. Düzenleyici problemi, çıkışı (ve onun türevlerini) asimptotik veya belli zaman aralığında sıfıra getirecek $\mathbf{u}(t)$ girişinin hesaplanmasından oluşur. Eğer $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ çifti kontrol edilebilir ise, o zaman sistemin $\mathbf{x}(t)$ durumunu istenilen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ başlangıç durumundan,

verilmiş $T_f > 0$ anı için $\mathbf{x}(T_f) = 0$ durumuna getirecek $\mathbf{u}(t)$ kontrol yasası bulmak mümkündür.

$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 'nin kontrol edilebilir olduğunu varsayalım ve $T_f > 0$ verilmiş olsun. O zaman kontrol edilebilir Grammian

$$\mathbf{W}_{T_f} = \int_0^{T_f} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (4.2)$$

tekil değildir ve kontrol yasası

$$\mathbf{u}_1(t) = -\mathbf{B}^T e^{-\mathbf{A}^T t} \mathbf{W}_{T_f}^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (4.3)$$

sistemin durumunu $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ durumundan $\mathbf{x}(T_f) = 0$ durumuna yöneltecektir. Bunun ötesinde başlangıç durumu $\mathbf{x}_0$ 'dan $\mathbf{x}(T_f) = 0$ 'a yönlendirecek kontrol sinyalleri arasında $\mathbf{u}_1(t)$ minimum enerjiye sahiptir.

Grammian kontrol edilebilirliğe dayanan şema aşağıdaki sebeplerden dolayı talep olunanı sağlamayabilir.

1. Eğer T_f küçük ise, o zaman $\mathbf{u}_1(t)$ kontrol sinyali aşırı derecede büyük olabilir.
2. Kontrol yasası açık çevrim kontrolüdür ve açık çevrim kontrolü eksikliklerine maruz kalır (örneğin; gürültü, model verilerine karşı hassasiyet)
3. $T_f = \infty$ durumunu ele alalım, $\mathbf{A}$ asimptotik olarak kararlıdır. $\mathbf{x}_0$ 'ın $\mathbf{x}(\infty) = 0$ 'a yönelmesi zaman gereken kontrol enerjisi minimumdur ($\mathbf{u}_1(t) = 0$). Bu ise kontrol organının hiçbir iş yapmadığı anlamına gelir.
4. Sadece kontrol enerjisi minimize ediliyor. Ama genel olarak kontrol sinyallerinin çarpımlarının ve düzenlenmiş çıkış toplamalarının enerjisi minimize edilmelidir.

Enerjinin tam tanımını verebilmek için bazı tanımlamalar yapacağız.

4.5 Sinyal Normları

$\mathbf{v}(t)$ sinyalinin $[0, \infty)$ aralığındaki toplam enerjisi;

$$\|\mathbf{v}\|_2^2 = \int_0^{\infty} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt = \int_0^{\infty} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt \quad (4.4)$$

$\mathbf{v}(t)$ elemanlarının lineer kombinasyonunun enerjisi, yani $\mathbf{M}\mathbf{v}(t)$ sinyalinin enerjisi;

$$\|\mathbf{M}\mathbf{v}\|_2^2 = \int_0^\infty \|\mathbf{M}\mathbf{v}(t)\|^2 dt = \int_0^\infty \mathbf{v}^T(t) \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}(t) dt \quad (4.5)$$

burada $\mathbf{M}$ uygun boyutlu matristir. $\mathbf{X} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ matrisi Hermitian'dır ve onun bütün özdeğerleri reel sayılardır ve bu sayılar negatif değildir. Böyle matrislere pozitif yarı tanımlı matrisler diyeceğiz ve $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \geq 0$ şeklinde ifade edeceğiz. Eğer $\mathbf{M}$ tam ranklı ise, o zaman $\mathbf{X} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ matrisi de Hermitian'dır ve pozitif özdeğerlere sahiptir. Böyle matrislere pozitif tanımlı matrisler diyeceğiz ve onu $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0$ şeklinde ifade edeceğiz.

Aksine söylersek, her yarı pozitif tanımlı Hermitian matrisi $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T \geq 0$, belirli $\mathbf{M}$ kare matrisi için $\mathbf{X} = \mathbf{M}^T \mathbf{M}$ şeklinde ifade olunabilir. Eğer $\mathbf{M}$ tam ranka sahip ise, o zaman $\mathbf{X}$ pozitif tanımlıdır ve $\mathbf{M}$, $\mathbf{X}$ 'in kare köküdür ($\mathbf{M} = \mathbf{X}^{\frac{1}{2}}$).

Bu tanımlamalardan sonra, düzenleyici probleminin matematik ifadesine elde edebiliriz.

4. 6 Lineer Karesel Düzenleyici (LQR) Problemi

Yine (4.1) denklemi ile ifadesi verilen sistemi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

ve karesel performans indisini

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \|\mathbf{M}\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{N}\mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \int_0^\infty (\|\mathbf{M}\mathbf{y}(t)\|^2 + \|\mathbf{N}\mathbf{u}(t)\|^2) dt \\ &= \int_0^\infty [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{u}(t)] dt \\ &= \int_0^\infty [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t)] dt \end{aligned} \quad (4.7)$$

burada

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{M}^T \mathbf{M} \geq 0 \quad (4.8)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}^T = \mathbf{N}^T \mathbf{N} > 0 \quad (4.9)$$

lineer karesel düzenleyici probleminde, öyle $\hat{\mathbf{u}}(t)$ ($t \in [0, \infty)$) kontrol yasasını bulmak gerekiyor ki, diğer $\mathbf{u}(t)$ kontrol yasası ve herhangi $\mathbf{x}_0$ için

$$J(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}) \leq J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) \quad (4.10)$$

eşitsizliği sağlansın.

LQR problemini çözmek için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

1. $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 'nin kontrol edilebilirdir. Bu kabul çözümün varlığını garanti eder. Eğer $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kontrol edilebilir değilse, o zaman $\mathbf{x}_0$ kontrol edilemeyen alt uzayda elemana sahiptir. Hal böyle iken, $\mathbf{x}_0$ 'ı orijine yöneltecek $\mathbf{u}(t)$ kontrol yasası bulunmaya bilir.
2. $(\mathbf{A}, \mathbf{MC})$ çifti (eşdeğer olarak, $\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{Q}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}$) gözlemlenebilirdir. Bu kabul iç kararlılığı garanti eder. Eğer $(\mathbf{A}, \mathbf{MC})$ gözlemlenebilir değilse, o zaman $\mathbf{MCx}(t)$ 'nin orijine yakınsamasına rağmen, $\mathbf{x}(t)$ 'nin bazı elemanları ıraksayabilir.
3. $\mathbf{N}$ tam ranklıdır. Bu kabul sonlu kontrol enerjisini sağlar. Eğer $\mathbf{N}$ tam ranklı değilse (eşdeğer olarak, eğer $\tilde{\mathbf{R}}$ tekil ise), o zaman $\mathbf{u}(t)$ 'nin bazı elemanlarının lineer kombinasyonları $\|\mathbf{Nu}\|_2$ 'nin sonlu enerjiye sahip olmasına rağmen, sonsuz enerjiye sahip olabilir.

4.7 LQR Problemi Çözümü

LQR probleminin çözümü 4 aşamada elde edilebilir.

1. Aşağıda ifade edilmiş pozitif tanımlı, Hermitian tek matrisin varolduğunu kabul edelim ve bu matris (4.11) denklemi ile ifade olunan cebri Riccati denkleminin çözümüdür.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0 \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} - \mathbf{P} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = 0 \quad (4.12)$$

2. Tüm $\mathbf{u}(t)$ girişleri arasında

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (4.13)$$

koşulunu sağlayan ve $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ 'yi minimize eden statik, lineer, geri besleme kontrol yasasının

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = -\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) \quad (4.14)$$

denklemleri ile ifade edileceğini ispat etmek mümkündür.

3. (4.13) koşulunu sağlamayan tüm $\mathbf{u}(t)$ için $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ 'nin sınırsız olduğu ispat edilecektir.

4. Son olarak ise 1. ve 4. kabulleri (4.11) ve (4.12) denklemlerini sağlayan $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ varlığını garanti edeceğini gösteren ispat yapılacaktır.

İspat:

(4.11) ve (4.12) denklemlerini sağlayan $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$ 'nin var olduğunu farz edelim. $\mathbf{U}$ (4.13) denklemini sağlayan tüm girişler kümesi olsun. Yani;

$$\mathbf{U} = \{ \mathbf{u}_{[0, \infty)} : \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \} \quad (4.15)$$

$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kontrol edilebilir olduğun dolayı $\mathbf{U}$ kümesi boş değildir.

Her $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ için

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d}{dt} [\mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t)] dt &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0)^T \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \\ &= -\mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) - \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 &= \int_0^\infty \left[\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u} + \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) \right] dt \\
&= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x}) dt \\
&= \int_0^\infty [\mathbf{x}^T \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} \mathbf{x} + (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}] dt \\
&= \int_0^\infty [\mathbf{x}^T (\mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{C} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}] dt \\
&= \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}) dt \\
&= \int_0^\infty (\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x})^T \tilde{\mathbf{R}} (\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) dt
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$\mathbf{z}(t) = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ tanımlaması yapıp, (4.17) denklemini yeniden düzenleyelim.

$$J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 + \int_0^\infty \mathbf{z}(t)^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{z}(t) dt \tag{4.18}$$

$\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}^T > 0$ olduğuna göre, herhangi $\mathbf{z}(t)$ için

$$\int_0^\infty \mathbf{z}(t)^T \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{z}(t) dt > 0 \tag{4.19}$$

olacaktır. Bundan dolayı $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{K} = -\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \tag{4.20}$$

lineer, statik, geri besleme kontrol yasası ile minimize edilecektir ve $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ 'nin minimal değeri

$$J(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \tag{4.21}$$

denklemleri ile verilecektir.

Şimdi tüm $\mathbf{x}_0$ için $\mathbf{u} \in U$ olduğunu, yani

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \tag{4.22}$$

gösterelim.

$\hat{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ olduğuna göre

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} + \mathbf{BK} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (4.23)$$

matrisinin özdeğerlerinin sol yarım düzlemde olduğunu göstermekle, tüm $\mathbf{x}_0$ için $\mathbf{u} \in U$ olduğunu göstermiş olacağız.

Bunun için (4.12)'de verilmiş olan cebri Riccati denklemini yeniden aşağıdaki gibi düzenleyelim.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PB}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C} \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}) + \mathbf{PB}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C} \\ &= \mathbf{A}_K^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}_K + \mathbf{PB}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$\mathbf{v}$, $\mathbf{A}_K\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ eşitliğini sağlasın ,sıfırdan farklı olsun. Şimdi $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ olduğunu, yani özdeğerlerin sol yarım düzlemde bulunduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}^T [\mathbf{A}_K^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}_K + \mathbf{PB}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C}] \mathbf{v} \\ &= \underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}_{>0} (\lambda + \bar{\lambda}) + \underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{PB}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{v}}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbf{v}^T\mathbf{C}^T\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C}\mathbf{v}}_{\geq 0} \end{aligned} \quad (4.25)$$

olacaktır. (4.25) eşitliğinin sağlanması için iki durumda gerçekleşmektedir. Birinci durum

$$\lambda + \bar{\lambda} < 0 \quad (4.26)$$

ikinci durum

$$\lambda + \bar{\lambda} = 0, \quad \tilde{\mathbf{Q}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}\mathbf{v} = 0 \quad \text{ve} \quad \tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = 0 \quad (4.27)$$

olduğu zaman (4.25) eşitliği sağlanır. Fakat $\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}_K\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ olmasına ve

$$\left[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \right] \tilde{\mathbf{Q}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C}\mathbf{v} = 0 \quad (4.28)$$

sebebiyet verecektir. Bu ise $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{Q}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C})$ gözlemlenebilirliğine çelişki teşkil edecektir. Bu ise $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ ve $\mathbf{A}_K$ kararlı olduğunun kanıtıdır.

Netice olarak, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ için

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = J(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (4.29)$$

yazabiliriz.

Şimdi farz edelim ki, (4.13) denklemini sağlanmıyor, yani

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) \neq 0 \quad (4.30)$$

O zaman

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{x}(\tau)^T \mathbf{x}(\tau) d\tau = \infty \quad (4.31)$$

olur ve hatta bunun ötesinde eğer $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{Q}}^{\frac{1}{2}}\mathbf{C})$ gözlemlenebilir ise, o zaman

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{y}(\tau)^T \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{y}(\tau) d\tau = \infty \quad (4.32)$$

olur. Netice olarak eğer $\mathbf{u} \notin \mathbf{U}$ ise, o zaman $J(\mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ sınırsızdır.

4.8 Optimal Lineer Karesel Düzenleyici (LQR)

Modern optimal kontrol teorisinde lineer deterministik dinamik sistemin sürekli zaman ifadesi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.33)$$

şeklinde yazarsak, aşağıdaki formülle ifade olunan

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) \quad (4.34)$$

lineer durum geri beslemesi kullanarak, $\mathbf{K}(t)$ kazanç katsayısı değerini öyle optimize etmeliyiz ki, aşağıdaki performans indisi minimize edilmiş olsun.

$$J = \min_{\mathbf{u}(t)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_s} [\mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(t)] dt \right\} \quad (4.35)$$

burada $\tilde{\mathbf{Q}} \geq 0$ ve $\tilde{\mathbf{R}} > 0$.

Buradaki performans indisi seçimi oldukça mantıklıdır. Denklemdaki girişin “karesel” teriminin minimize edilmesi talebi genel anlamda verilmiş sistemin kontrolü için gereken enerjinin ve durum değişkenlerinin “karesel” teriminin minimize edilmesi anlamına geliyor. Durum değişkenlerinin “karesel” terimi (eğer lineer sistem lineer olmayan sistemin lineerleştirilmesi yoluyla elde edilmişse) sistemin nominal durumundan olan sapmaları ifade eder. Bu sebeple $\mathbf{x}(t)$ ’nin “karesel” teriminin minimize edilmesi isteniyor. Eğer (4.33) lineer matematiksel model “saf” lineer sistemi temsil ediyorsa, o zaman minimizasyonun hedefi sistemi olabildiğince orijine ($\mathbf{x}(t)=0$) daha yakın duruma götürmekten ve enerjiyi minimize etmekten ibaret olacağı şeklinde yorumlanabilir.

Kalman göstermiştir ki, (4.34) lineer geri besleme yasası performans indisi (4.35) için global minimum üretmektedir. Bu optimizasyon problemine çözümü dinamik optimizasyon [16] ve değişimlerin hesabı (Riccati denkleminin çözümü) adlanan iki matematiksel yöntemlerle elde edilmektedir. Geri besleme kazancı için talep olunan optimal çözümün

$$\mathbf{K}_{opt}(t) = -\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \quad (4.36)$$

denklemini ile elde edilebileceğini göstermek mümkündür [17].

Burada $\mathbf{P}(t)$ diferansiyel Riccati denkleminin matris çözümü olup pozitif yarı tanımlıdır.

$$-\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \quad (4.37)$$

Burada $\mathbf{P}(t_s) = 0$.

Zamanla değişmeyen ve sonsuz zaman aralığı ($t_s \rightarrow \infty$) problemlerinde diferansiyel Riccati denklemi cebri denkleme dönüşür ve

$$0 = \mathbf{A}^T(t) \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A}(t) + \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{P}(t) \mathbf{B}(t) \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{B}^T(t) \mathbf{P}(t) \quad (4.38)$$

Eğer sistem kontrol edilebilir ve gözlemlenebilirse, o zaman (4.38) denkleminin pozitif tanımlı (veya pozitif yarı tanımlı) öyle bir tek çözümü var ki, kapalı çevrim sistemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P})\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.39)$$

asimptotik olarak karalıdır. Hatta bunun ötesinde performans indisinin optimal (minimal) değeri

$$\mathbf{J}_{opt} = \mathbf{J}_{min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (4.40)$$

denklemleri ile ifade edilmektedir [17].

4.9 Ayırık Zaman Optimal Lineer Karesel Düzenleyici (LQR)

Ayrık zaman lineer kontrol sistemi için uygun optimal kontrol teorisini elde etmeğe çalışalım. Zamanla değişmeyen ayırık zaman lineer sistemini

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.41)$$

denklemleri ile ifade edelim. Sonsuz zaman aralığındaki optimizasyon problemi için ayırık zaman performans indisi

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k) \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{u}(k)] \quad (4.42)$$

şeklinde yazılabilir ve burada $\tilde{\mathbf{Q}} \geq 0$, $\tilde{\mathbf{R}} > 0$..

Optimal kontrol ise

$$\mathbf{u}(k) = -(\tilde{\mathbf{R}} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}(k) = -\mathbf{K}_{opt} \mathbf{x}(k) \quad (4.43)$$

denklemleri ile ifade edilir ve buradaki $\mathbf{P}$ ayırık zaman cebri Riccati denklemini sağlıyor.

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{Q}} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{R}})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (4.44)$$

Kontrol edilebilir ve gözlemlenebilir sistemler için (4.44) denkleminin

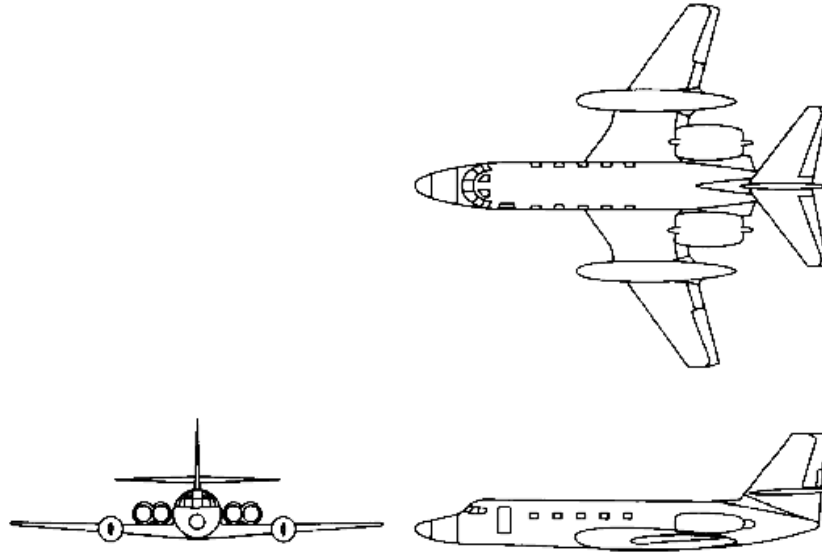
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}_{opt})\mathbf{x}(k) \quad (4.45)$$

kapalı çevrim sistemini asimptotik kararlı kılacak tek çözüme sahip olduğunu göstermek mümkündür. Optimal performans indisi (4.40) denklemi vasıtasıyla da verilebilir [9].

5. SİMÜLASYON

5.1 Uçak Verileri

Gerçekleştirilen simülasyonda Lockheed Jetstar Utility Jet Transport [1] uçağı esas alınmıştır. Uçağın parametreleri 5.1 5.2 ve 5.3 tablolarında verilmiştir.



Şekil 5.1 Lockheed Jetstar Utility Jet Transport

Tablo 5.1 Uçağın geometrik parametreleri

Parametre	Değer
h , ft	40.000
M	0.65
V , ft/s	629
Q , lb/ft ²	116
I_{xx} slug-ft ²	119,410
I_{yy} slug-ft ²	135,880
I_{zz} slug-ft ²	242,890
I_{xz} slug-ft ²	-10178
α_{trim} , derece	7.0

Tablo 5.2 Uçağın uzunlamasına hareket stabilite türevleri

Parametre	Değer
X_u, s^{-1}	-0.0076
$X_\alpha, ft/s^2$	-4.774
Z_u, s^{-1}	-0.104
$Z_\alpha, ft/s^2$	-295.2
$M_u, ft^{-1}-s^{-1}$	0.0001
M_α, s^{-2}	-3.561
$M_{\dot{\alpha}}, s^{-1}$	-0.150
M_q, s^{-1}	-0.380
$X_{\delta_e}, ft/s^2$	-0.004
$Z_{\delta_e}, ft/s^2$	-21.86
M_{δ_e}, s^{-2}	-4.27

Tablo 5.3 Uçağın yanlamasına hareket stabilite türevleri

Parametre	Değer
$Y_\beta, ft/s^2$	-38.89
L'_β, s^{-2}	-2.695
L'_p, s^{-1}	-0.484
L'_r, s^{-1}	0.141
N'_β, s^{-2}	2.094
N'_p, s^{-1}	-0.029
N'_r, s^{-1}	-0.107
L'_{δ_r}, s^{-2}	0.658
N'_{δ_r}, s^{-2}	-0.923
L'_{δ_a}, s^{-2}	1.687
N'_{δ_a}, s^{-2}	-0.291

5.2 Uçağın LQR kontrolü

Sistemin kontrolü yapılmadan önce, uçağı kararsız olduğu gözlenmiştir. Daha sonra LQR yöntemi vasıtasıyla uçak kararlı hale getirilmiştir. LQR tasarımında optimal çözümü elde etmek için $\mathbf{Q}_{lqr}$ ve $\mathbf{R}_{lqr}$ matrislerinin seçimi çok önemlidir. Bu matrislerin seçimi için değişik yöntemleri mevcuttur. Bu çalışmada durum

değişkenlerinin nominal durumdan maksimum sapmaları ele alınmış ve ağırlık matrislerinin diyagonal elemanları aşağıdaki gibi tespit edilmiştir.

$$\sqrt{Q_{lqr_i}} = \frac{1}{x_i^{\max}} \quad (5.1)$$

$$\sqrt{R_{lqr_i}} = \frac{1}{u_i^{\max}} \quad (5.2)$$

burada i-uygun durum değişkeninin ifade etmektedir [18].

Problemimiz için bu matrisler

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_{lqr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 364,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32,8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32828 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32828 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

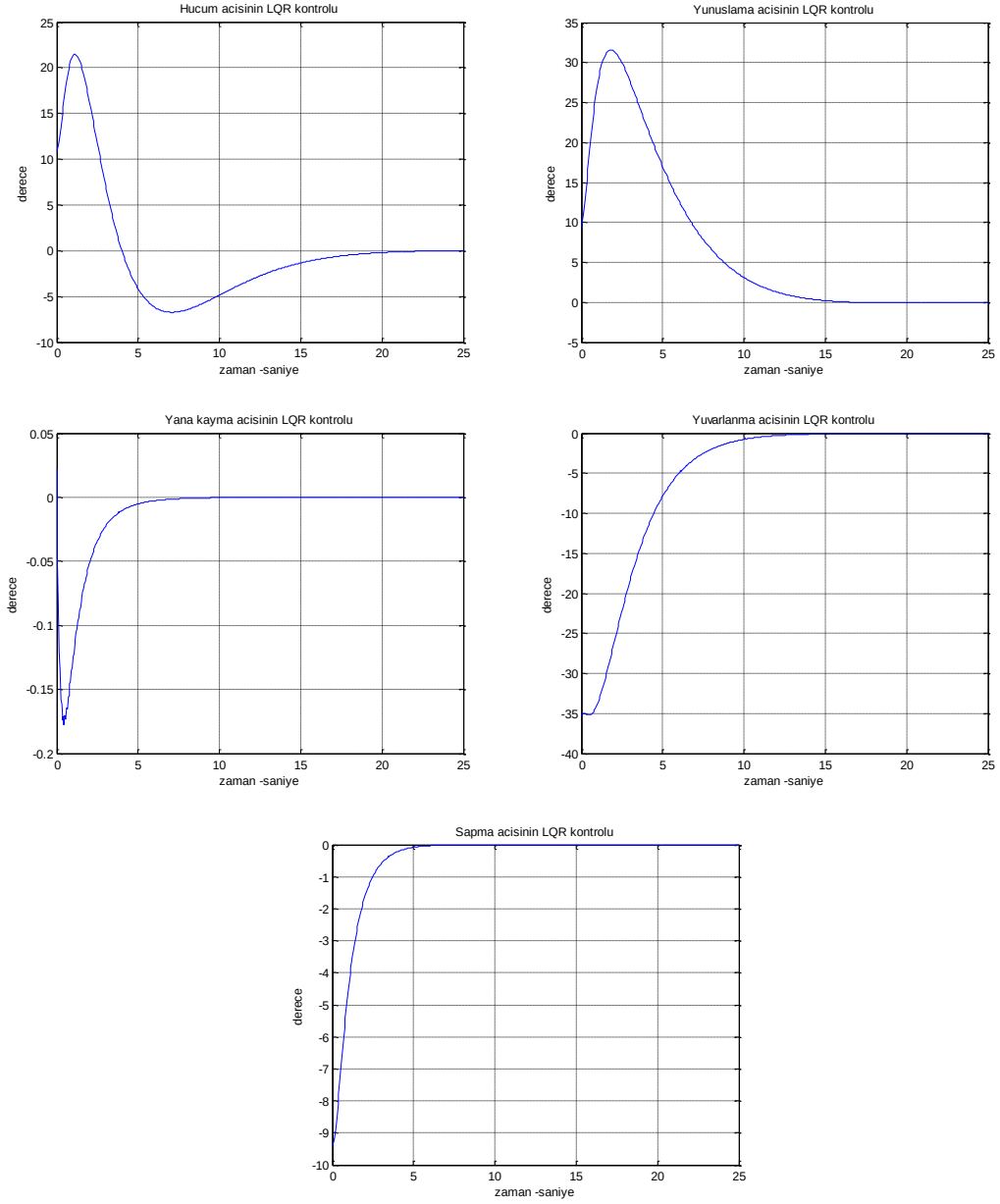
$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{lqr} = \begin{bmatrix} 1459 & 0 & 0 \\ 0 & 1621 & 0 \\ 0 & 0 & 131,3 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

LQR kontrol katsayısı ise

$$\mathbf{K}_{opt} = \begin{bmatrix} 0,0230 & 0,4695 & -0,8893 & -0,6932 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0763 & 0,4338 & -0,8619 & 0,2145 & -0,9038 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2859 & -0,0918 & -5,1827 & -0,0604 & -4,2286 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

olarak belirlenmiştir.

LQR yöntemiyle kontrolü sağlanmış uçağın grafik simülasyonları aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.2 Uçak parametrelerinin LQR kontrolü

5.3 Uçak Parametrelerinin Optimal Kalman Filtresi ile Değerlendirilmesi

Değişik kaynaklardan elde edilen ölçümler bozuntular içermektedir ve bunların düzeltilmesi talep olunuyor. Bu çalışmada bozuntular MATLAB programında aşağıdaki şekilde ifade olunmuşlar. Onu da kaydedelim ki, grafik simülasyonlarda iyi görsel etki oluşturmak için ölçüm bozuntuları yaklaşık 10 katı ile ifade edilmiştir. Dolayısıyla grafik görüntülerde elde edilecek mutlak hatalar ve innavasyon süreçler de yaklaşık 10 kat büyük olacaktır.

$$z(:,k+1)=$$

$[x(1,k+1)+0.096*\text{randn}; x(2,k+1)+0.092*\text{randn}; x(3,k+1)+0.083*\text{randn};$
 $x(4,k+1)+0.046*\text{randn}; \dots x(5,k+1)+0.096*\text{randn}; x(6,k+1)+0.092*\text{randn};$
 $x(7,k+1)+0.083*\text{randn}; x(8,k+1)+0.056*\text{randn}; x(9,k+1)+0.042*\text{randn};]$

burada

$x(1,k+1)$ –uzunlamasına hızı, $x(2,k+1)$ –hücum açısını, $x(3,k+1)$ –yunuslama hızını, $x(4,k+1)$ –yunuslama açısını, $x(5,k+1)$ –yana kayma açısını, $x(6,k+1)$ –yuvarlanma hızını, $x(7,k+1)$ –sapma hızını, $x(8,k+1)$ –yuvarlanma açısını, $x(9,k+1)$ –sapma açısını göstermektedir.

Uçak durum parametrelerini değerlendirmek için optimal Kalman filtresi sisteme uygulanarak, grafik simülasyonlar elde edilmiştir. Programda uygulanan optimal Kalman filtresi parametreleri aşağıdaki gibidir.

Kalman filtresi başlangıç değer vektörü

$$\begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \alpha \\ \Delta q \\ \Delta \theta \\ \Delta \beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta \phi \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & ft/s \\ 10,7945 & derece \\ 8,3365 & derece/s \\ 9,4481 & derece \\ 0,0229 & derece \\ 4,0107 & derece/s \\ -0,6761 & derece/s \\ -35,3458 & derece \\ -9,3335 & derece \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Kalman filtresinin kovaryans matrisinin başlangıç değeri;

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Sistemin bozuntu vektörünün korelasyon matrisi;

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Ölçümün bozuntu vektörünün korelasyon matrisi;

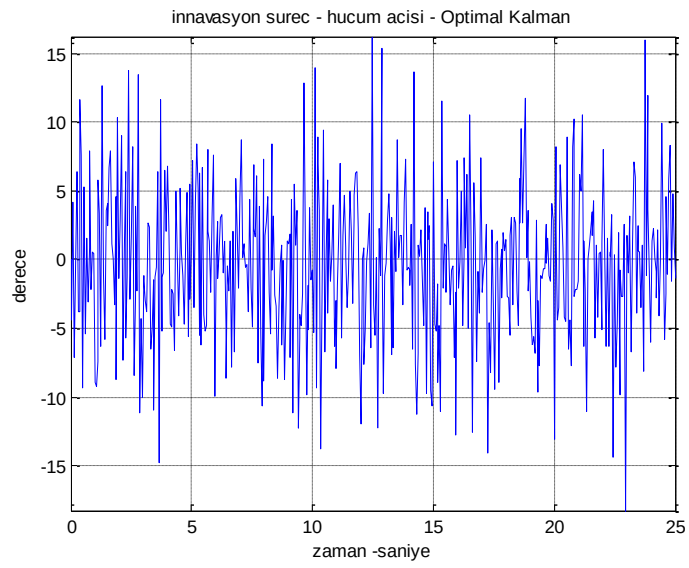
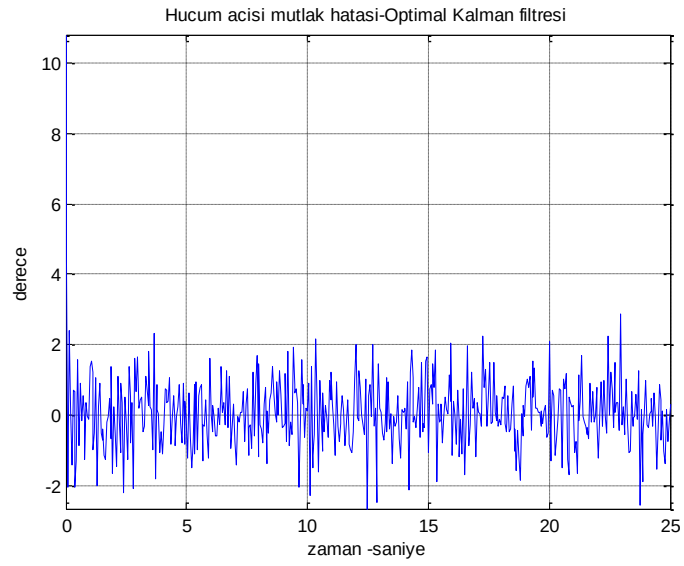
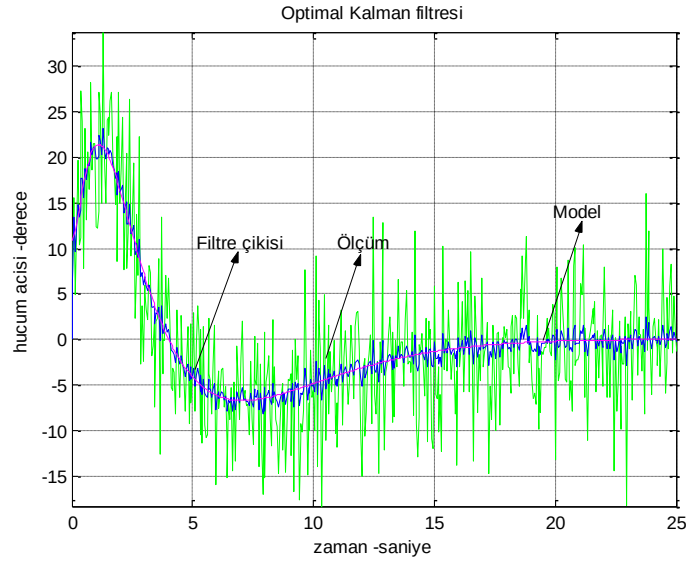
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0246 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,069 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,069 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,09 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,024 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0289 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

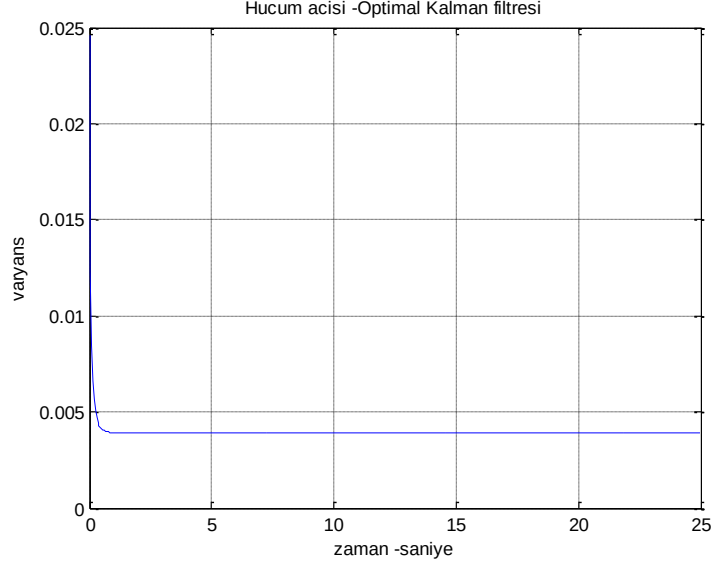
Gözlem matrisi;

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

olarak verilmiştir.

Bu bölümde sadece hüçüm açısı ile ilgili grafik görüntülere yer verilecektir. Diğer sistem parametreleri ile ilgili grafik görüntüler ise EK-1’de yer alacaktır.





Şekil 5.3 Hücüm açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi

Grafik görüntülerden de görüldüğü gibi Optimal Kalman filtresinde değerlendirilmiş olan hücüm açısı ölçümlerden daha iyi neticeye sahiptir.

5.4 Ölçüm Kanallarında Anormal Bozuntuların Oluştuğu Anda Durum Parametrelerinin Optimal Kalman Filtresi ile Değerlendirilmesi

Bazen ölçüm kanallarında anormal bozuntular oluşabilmektedir. Bu durumda Optimal Kalman filtresinin bu bozuntulara karşı nasıl bir performans ortaya koyduğu grafik simülasyonlarla gösterilmiştir. Simülasyon sırasında ölçüm kanalına 2 değişik adımda anormal bozulmalar eklenmiştir ve bu bozulmalar MATLAB’de aşağıdaki algoritma ile verilmiştir.

```

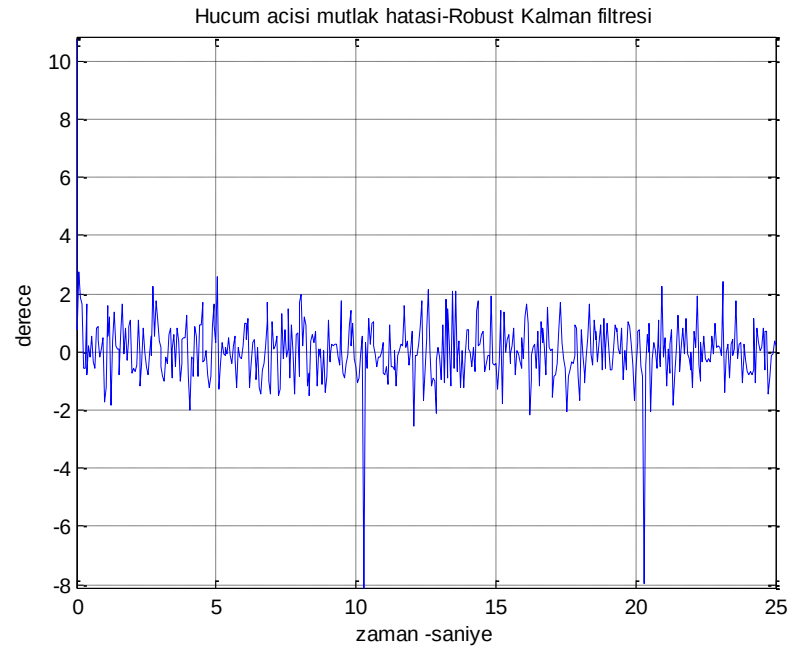
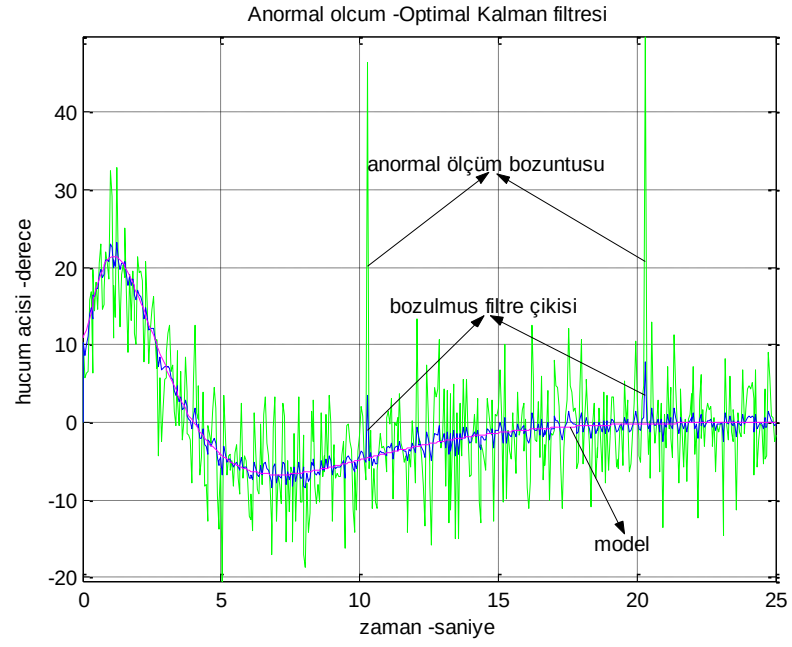
if k==206
    z(2,k+1)=x(2,k+1)+0.9+0.092*randn;
    z(4,k+1)=x(4,k+1)+0.83+0.046*randn;
    z(8,k+1)=x(8,k+1)+0.79+0.056*randn;
    z(9,k+1)=x(9,k+1)+0.74+0.092*randn;
end
if k==406
    z(2,k+1)=x(2,k+1)+0.79+0.092*randn;
    z(4,k+1)=x(4,k+1)+0.74+0.046*randn;

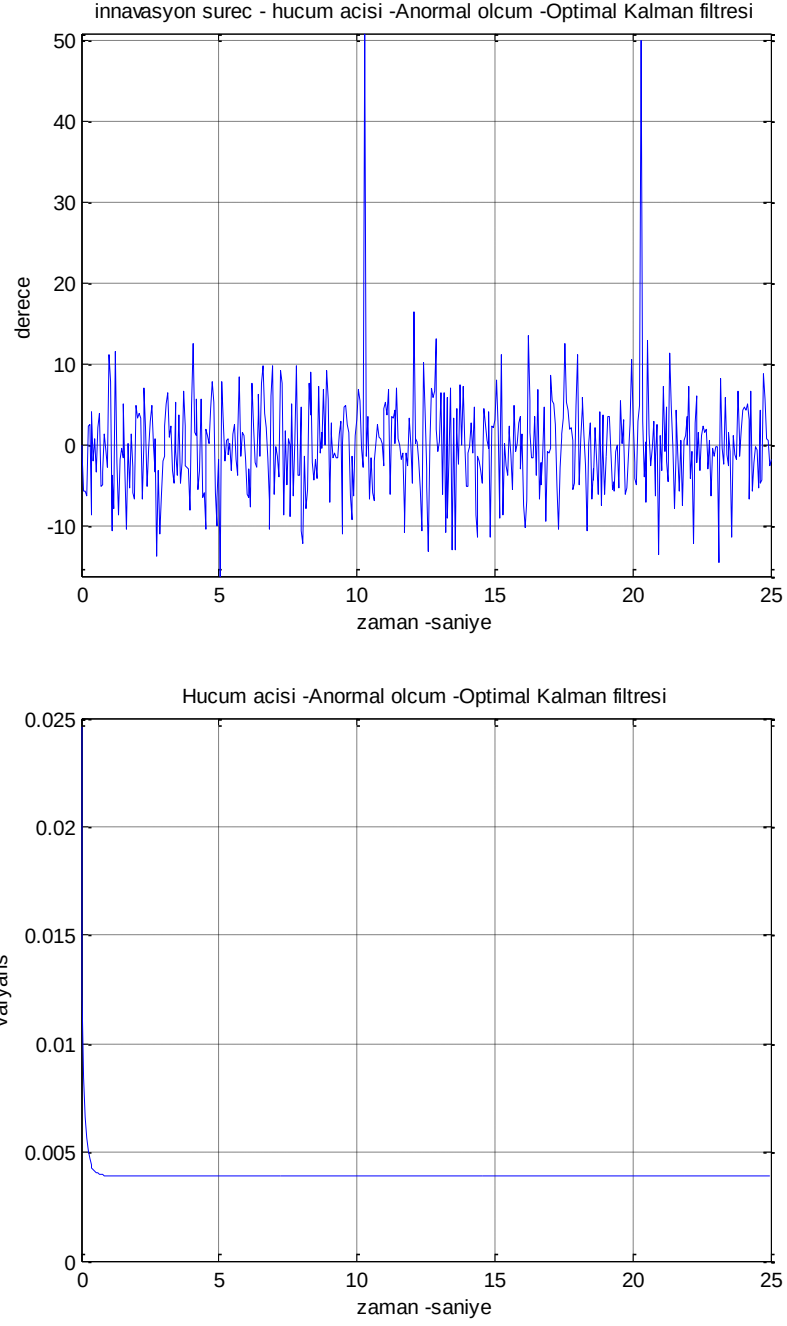
```

```

z(8,k+1)=x(8,k+1)+0.82+0.056*randn;
z(9,k+1)=x(9,k+1)+0.88+0.042*randn;
end

```



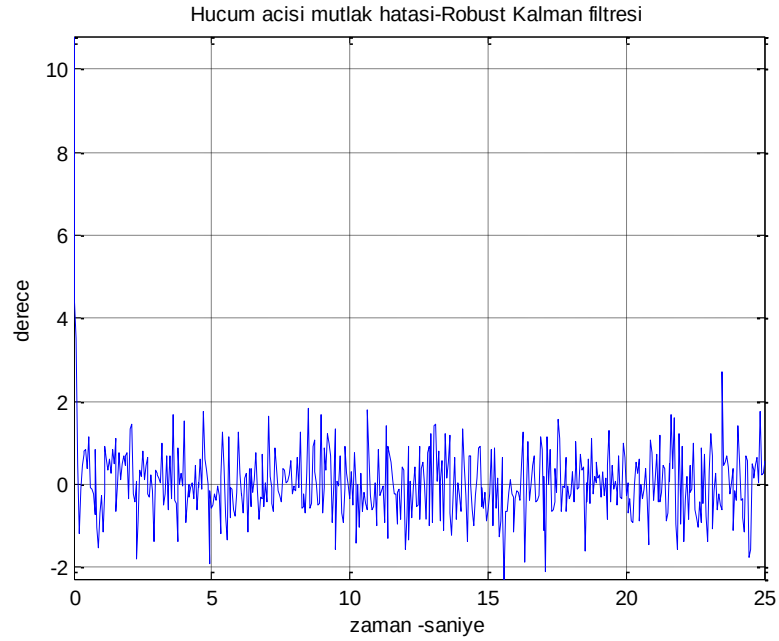
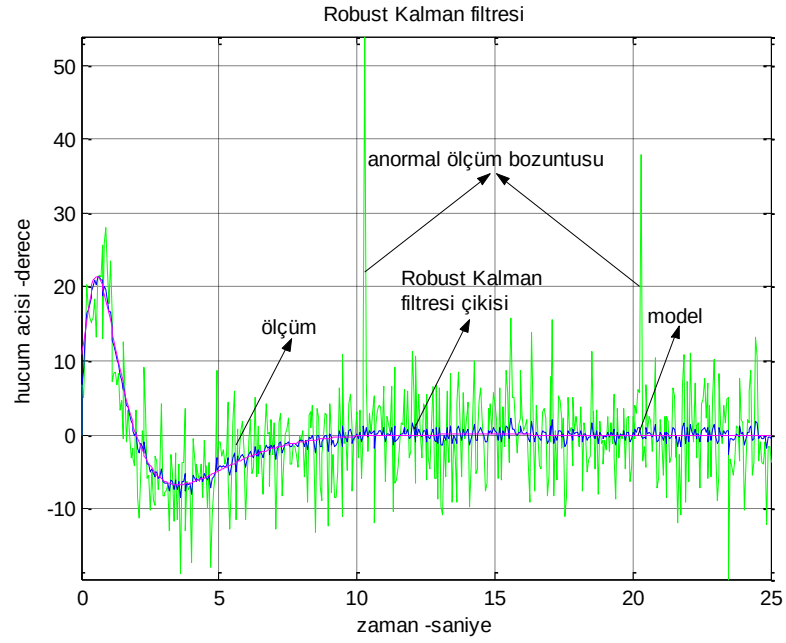


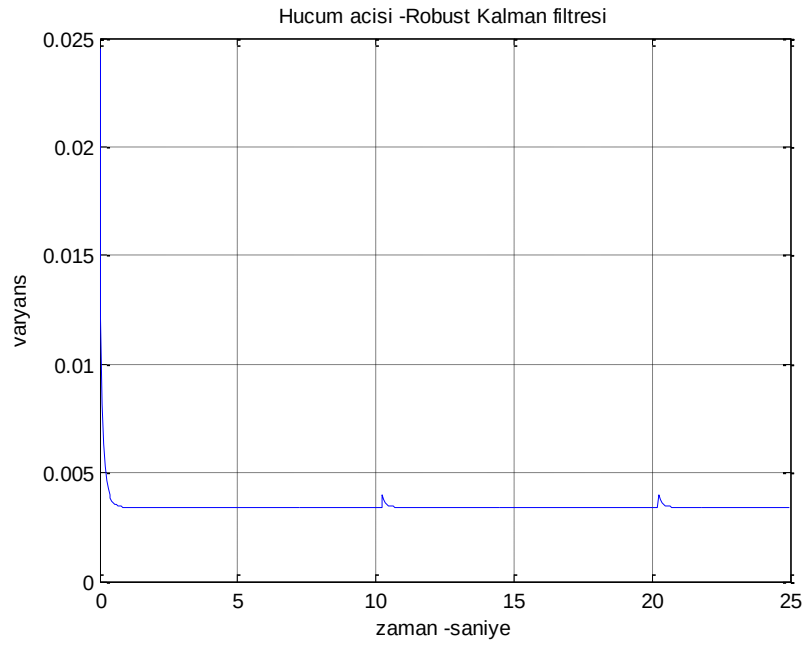
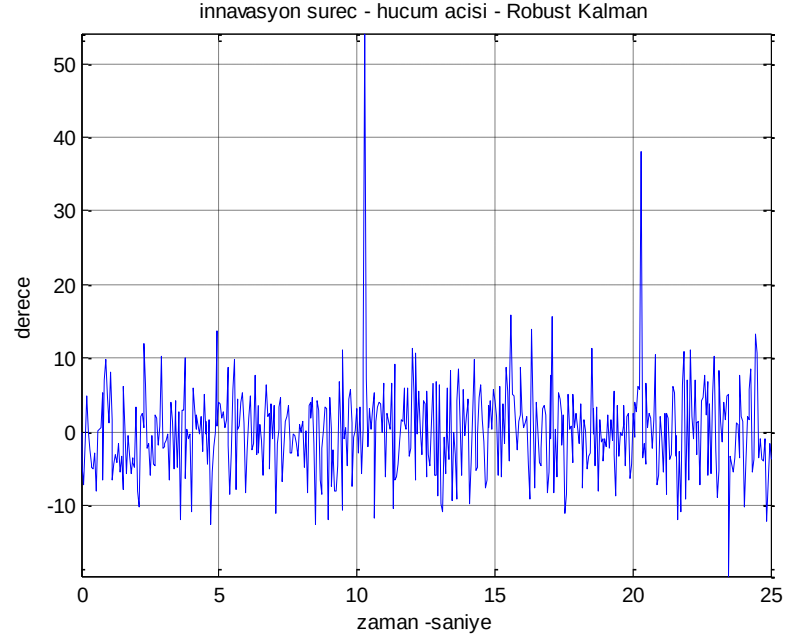
Şekil 5.4 Hücum açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi

Grafik görüntülerden de görüldüğü üzere Optimal Kalman filtresi ölçüm kanalında oluşan bozuntulara karşı dayanıklı performans göstermemektedir.

5.5 Ölçüm Kanallarında Anormal Bozuntuların Oluştuğu Anda Durum Parametrelerinin Robust Kalman Filtresi ile Değerlendirilmesi

Robust Kalman filtresinin 3.6’da izah edilmiştir. Robust Kalman filtresi $S(k) = y(k) - \hat{x}(k/k-1)$ vektörünün Ω tolerans bölgesinde de yerleşmesinin tespit olunmasına dayanmaktadır. Ölçüm kanallarında anormal bozuntuların olduğu anda Robust Kalman filtresinde değerlendirilen hücum açısının grafikleri aşağıda verilmiştir.





Şekil 5.5 Hücüm açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi

Grafik görüntülerden de görüldüğü üzere Robust Kalman filtresi ölçüm kanalında oluşan bozuntulara karşı dayanıklı performans göstermektedir.

6. SONUÇ

Uçağın uzunlamasına ve yanlamasına hareket parametrelerinin bozuntulu ölçümleri optimal Kalman filtresi ile değerlendirilmiş ve hata analizleri yapılmıştır. Bu hata analizi sonuçlarına göre, ölçüm değerleri Kalman filtresinde değerlendirildikten sonra iyileştirilmiştir.

Ölçüm kanalında anormal bozulmaların oluşması durumu için Optimal ve Robust Kalman filtreleri uygulanmıştır. Optimal Kalman filtresi bu anormal bozulmalara karşı dayanıklı performans göstermemiş, Robust Kalman filtresi ise bu bozulmalara karşı dayanıklı performans göstermiştir.

Bu çalışmada lineer sistem hareket parametreleri değerlendirilmiştir. Bir ileriki aşama için lineer olmayan uçağın tüm durum değişkenlerinin değerlendirilmesi yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **SCHMIDT, L., V.**, 1998. Introduction to Aircraft Flight Dynamics, AIAA, Inc., Reston, Virginia.
- [2] **NELSON, R., C.**, 1989. Flight Stability and Automatic Control, McGraw-Hill, Inc.
- [3] **McLean, D.**, 1990. Automatic Flight Control Systems, Prentice Hall International (UK) Ltd.
- [4] **WELCH, F., G.**, 1996. SCAAT : Incremental Tracking with Incomplete Information, *Ph.D. Disertation*, UNC at Chapel Hill.
- [5] **MAYBECK, P., S.**, 1979. Stochastic Models, Estimation, and Control, Academic Pres, Inc.
- [6] **KALMAN, R. E.**, 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82D, pp35-45,
- [7] **HACIYEV, Ç.**, 1999. Radyo navigasyon, İstanbul : İTÜ
- [8] **GADZHIEV (HACIYEV) CH., M.**, 1989. Simplified Fitlering Algorithm In the Presence of Faults In the Measuring Channel, *Measurement Techniques*, 32 n.6, p 505-507
- [9] **OGATA K.**, 1987. Discrete-Time Control Systems, Prentice-Hall, Inc.
- [10] **KALMAN, R.**, 1960. "Contribution to the theory of optimal control," *Boletin Sociedad Matematica Mexicana*, vol. 5, 102-119.
- [11] **ATHANS, M., and FALB, P.**, 1966. Optimal Control : An Introduction to the theory and its Applications , McGraw-Hill , New York.

- [12] **ZAMES, G.**, 1981. "Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximative inverses," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, 301-320.

- [13] **FRANCIS, B.**, 1987. *A Course in H_∞ Control Theory*, Springer – Verlag, Berlin.

- [14] **DOYLE, J. GLOVER, K., KHARGONEKAR, P., and FRANCIS, B.**, 1989. "State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-34, 831-847.

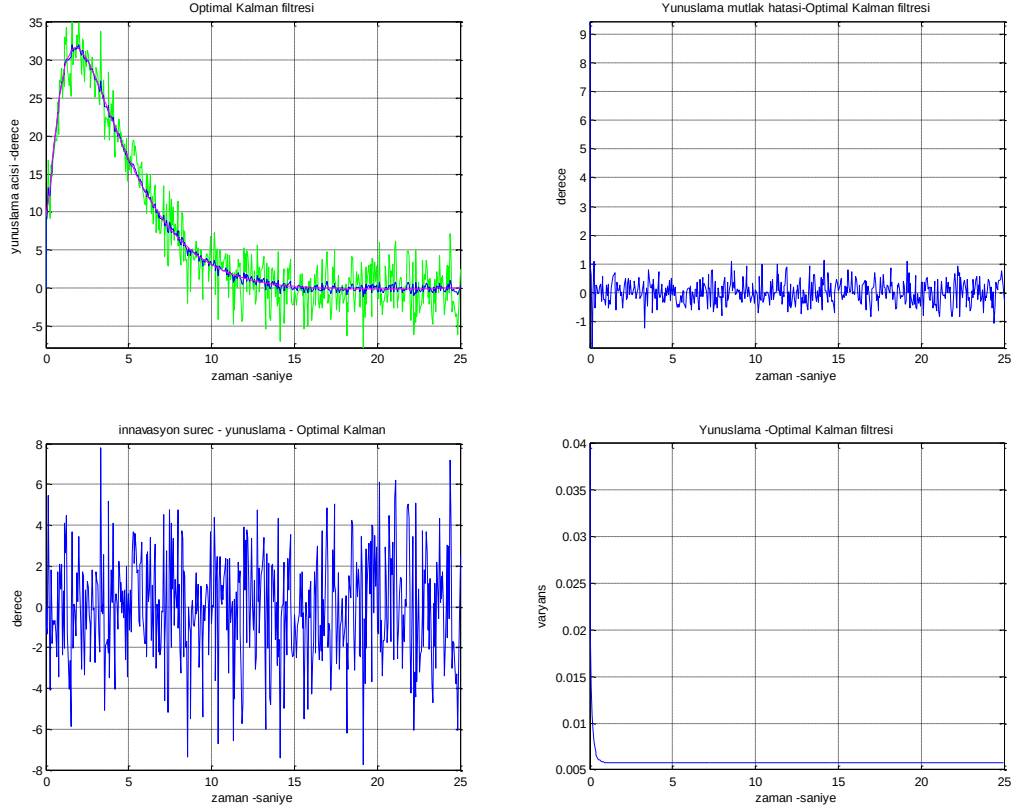
- [15] **SABERI, A., SANNUTI, P., and CHEN, B.**, 1995. *H_2 - Optimal Control*, Prentice Hall International, Hemel Hempstead.

- [16] **BELLMAN, R.**, 1957. *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

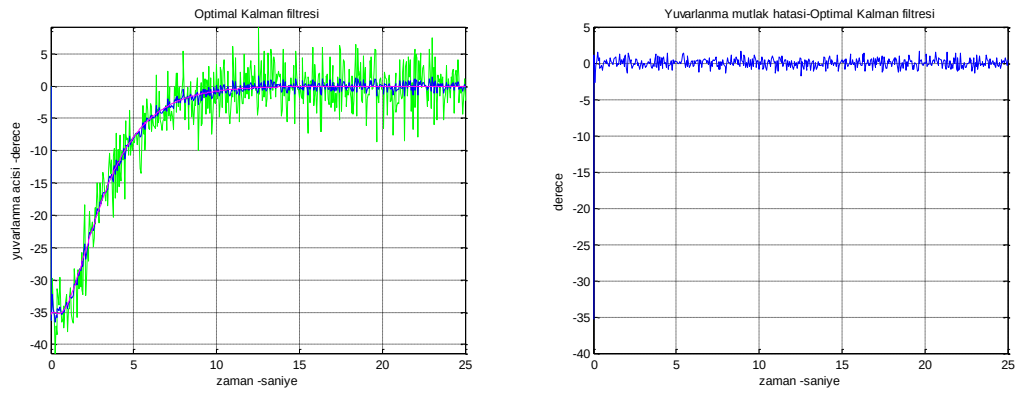
- [17] **KIRK, D.**, 1970. *Optimal Control Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

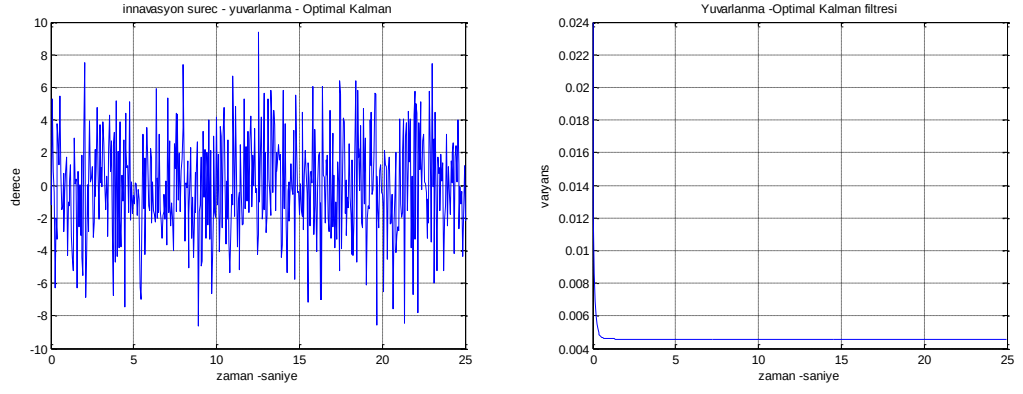
- [18] **COELINGH, H., J.**, 1997. Automated Optimal Control Design in Mechatronics, *In Proc. 7th IFAC Symp. On Computer Aided Computer Systems Design*, 157-162.

EK-1

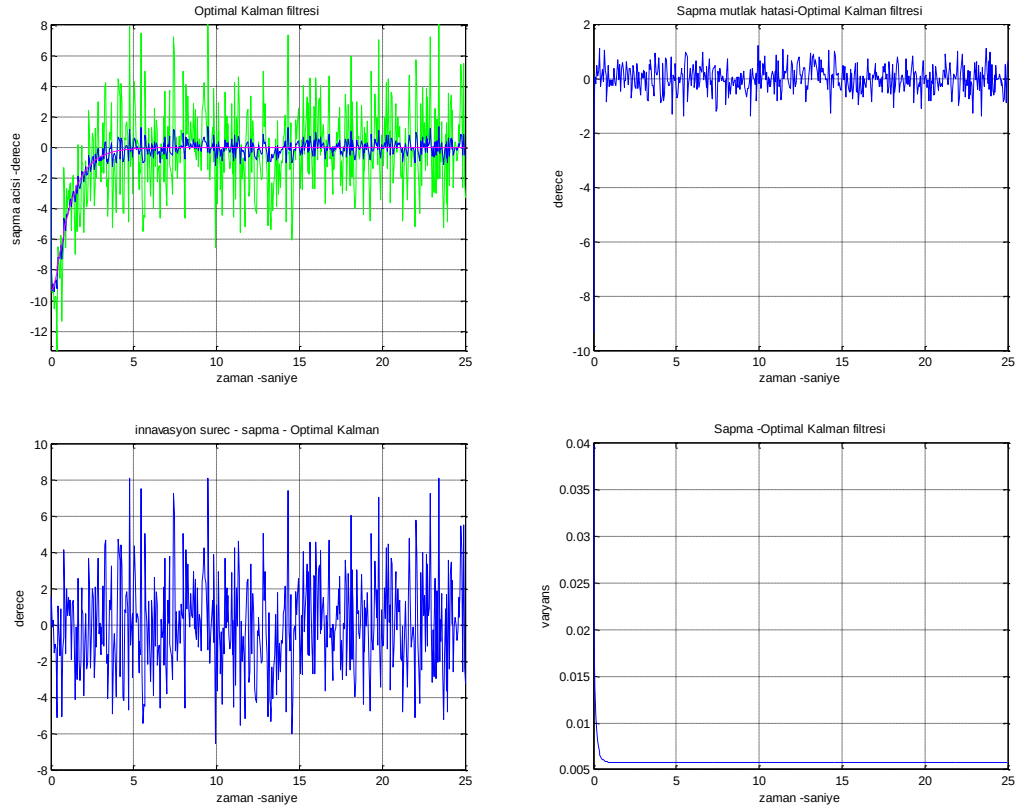


Şekil A.1. Yunuslama açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi

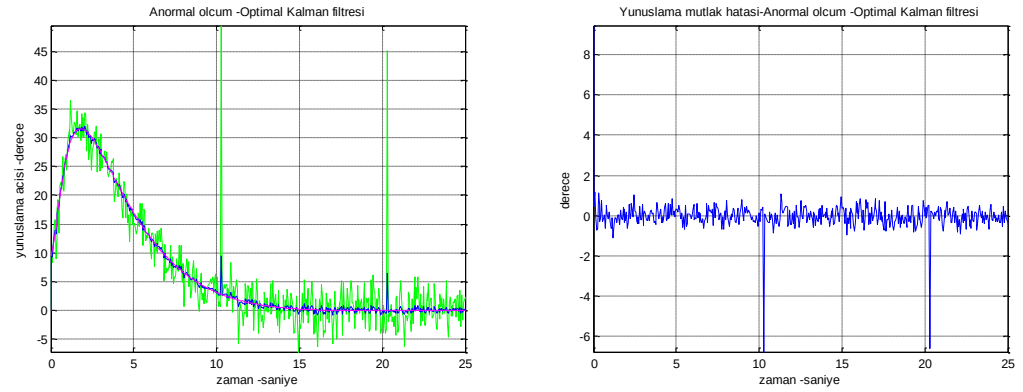


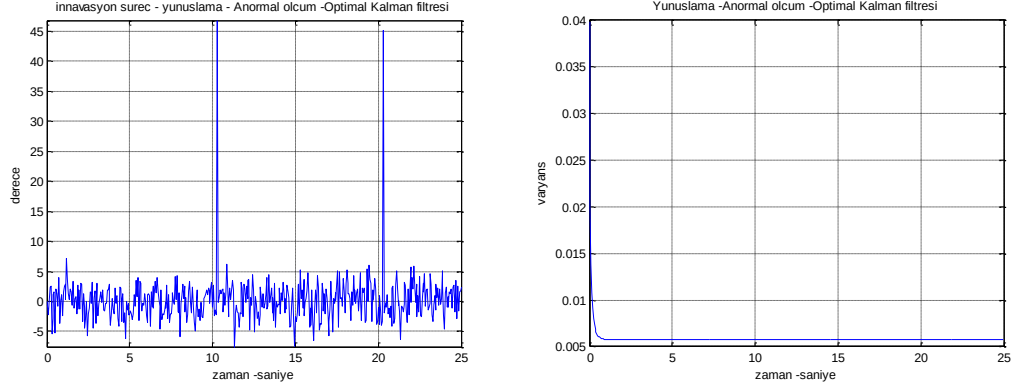


Şekil A.2 Yuvarlanma açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi

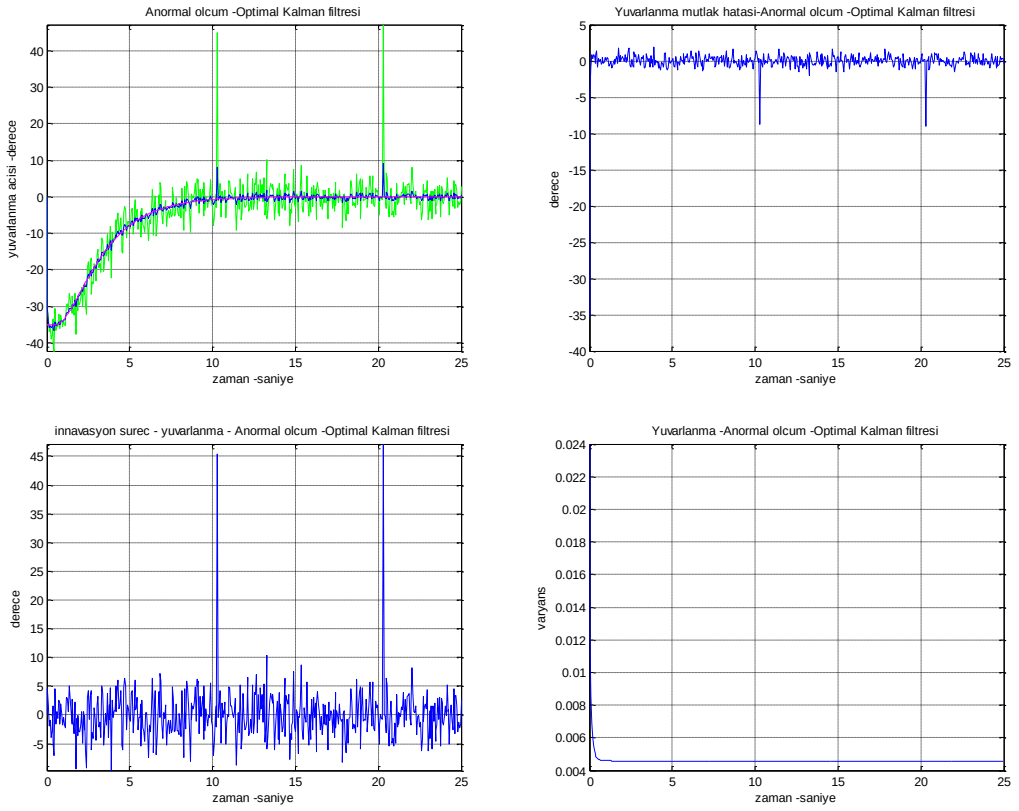


Şekil A.3 Sapma açısının Optimal Kalman Filtresi ile değerlendirilmesi

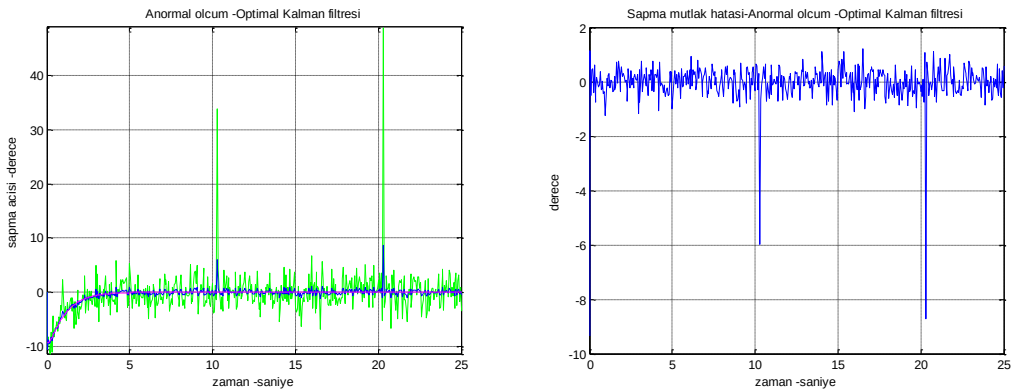


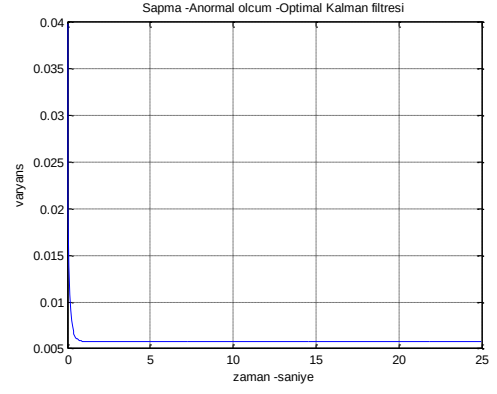
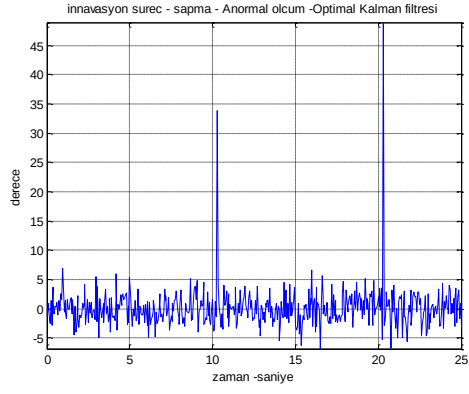


Şekil A.4 Yunuslama açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi

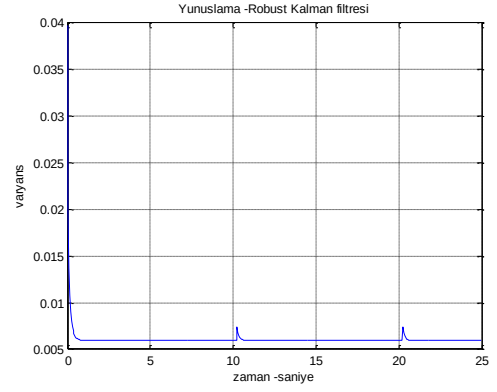
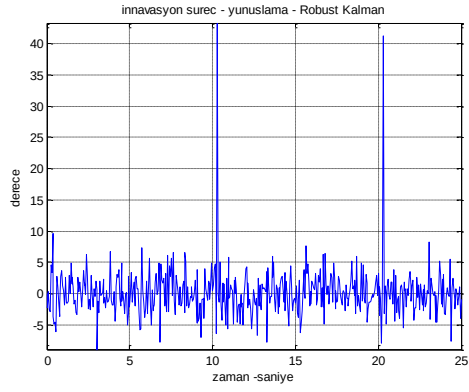
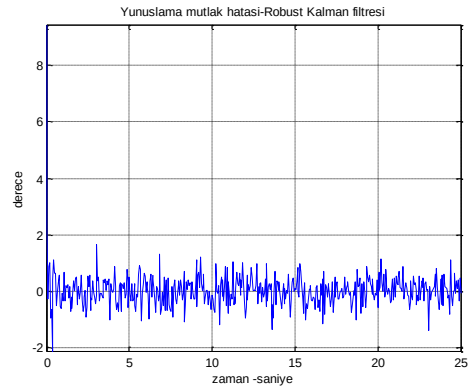
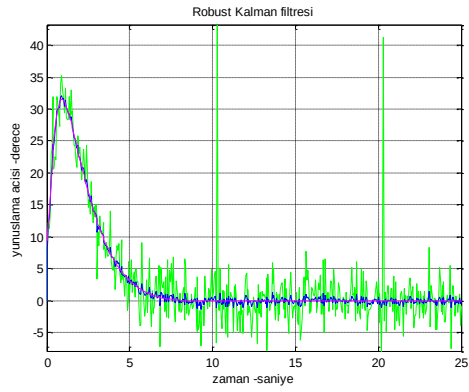


Şekil A.5 Yuvarlanma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi

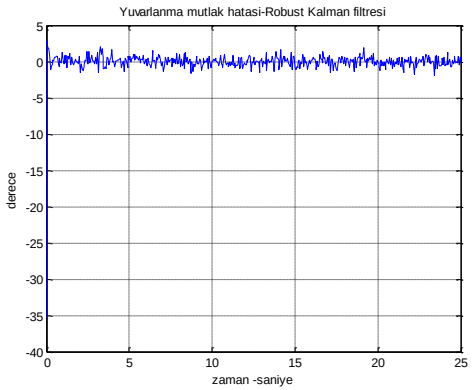
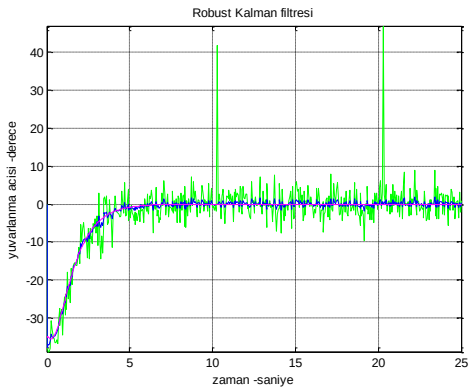


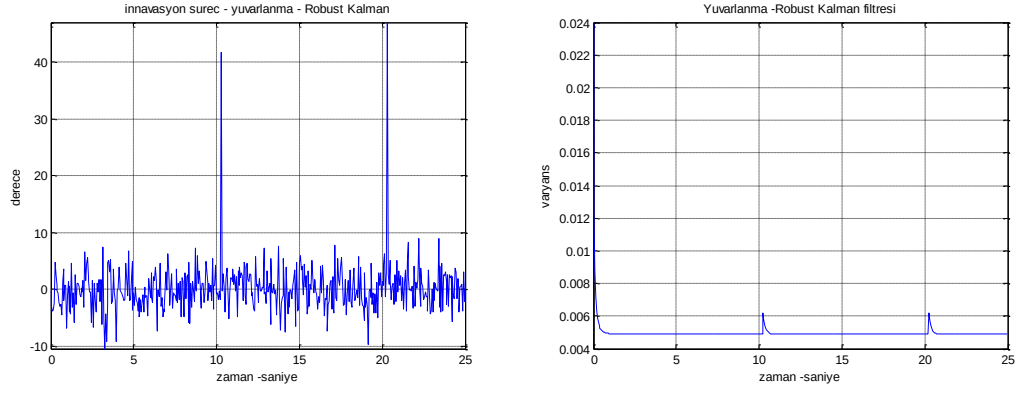


Şekil A.6 Sapma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Optimal Kalman Filtresinde değerlendirilmesi

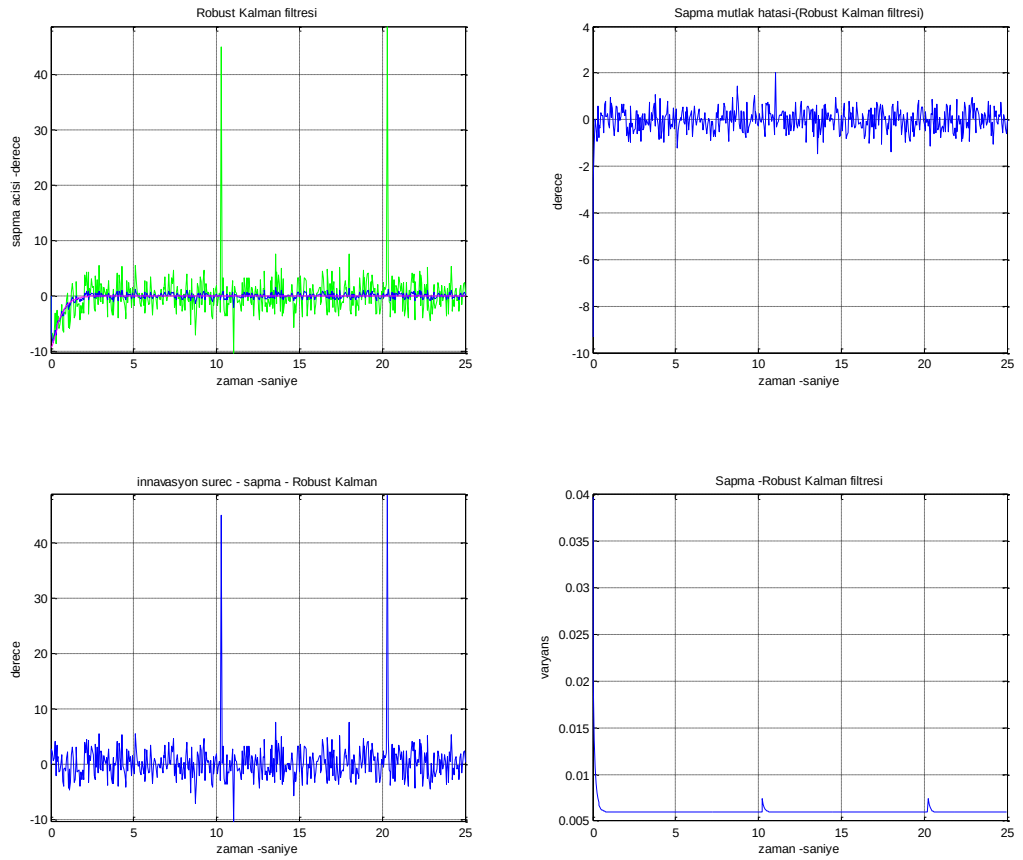


Şekil A.7 Yunuslama açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi





Şekil A.8 Yuvarlanma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi



Şekil A.9 Sapma açısı ölçüm kanalında oluşan bozuntuların Robust Kalman Filtresinde değerlendirilmesi

Özgeçmiş

Rafik HASANOV, 1977 yılında Azerbaycan'da doğdu. 1995 yılında kazanmış olduğu İTÜ Uçak Mühendisliği bölümünden 1999 yılında mezun oldu ve aynı yılda İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsünü Uçak Mühendisliği Programında Y. Lisans öğrenimine başladı. Halen Y. Lisans öğrenimine devam etmektedir.