

126905

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERDE
BURKULMA PROBLEMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Savaş ÖZKAN
501981060

İT. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
EDİTÖRİANTASYON MERKEZİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28 Haziran 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 8 Temmuz 2002

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hasan ENGİN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Mehmet OMURTAG

Prof.Dr. Turgut KOCATÜRK (Y.T.Ü.)

Hasan Engin
Mehmet Omurtag
T. Kocatürk

TEMMUZ 2002

ÖNSÖZ

Gerek Lisans ve gerekse Yüksek Lisans eğitimim boyunca bana gönülden destek veren ve beni hep yüreklendiren sevgili ablama, tüm öğrenim yaşantım boyunca, her türlü fedakarlığa katlanan aileme ve bu tez çalışmam boyunca bilgileriyle, hoşgörüsü ve güler yüzüyle daima önümü aydınlatan değerli hocam Prof. Dr. Hasan ENGİN'e sonsuz teşekkür ederim.

Haziran 2002

Savaş Özkan

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
TABLO LİSTESİ	IV
ŞEKİL LİSTESİ	V
SEMBOL LİSTESİ	VI
ÖZET	VII
SUMMARY	IX
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ile İlgili Çalışmalar	1
1.2. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı	6
2. ÖZEL PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜM	7
2.1. Özel Problemin Tanımı	7
2.2. Homojen Elastik Zeminin Çekme ve Basınç Alması Hali	8
2.2.1. Durum I: $\lambda > r$	10
2.2.2. Durum II: $\lambda = r$	12
2.2.3. Durum III: $\lambda < r$	14
2.3. Homojen Elastik Zeminin Sadece Basınç Alması Hali	19
2.3.1. Temas Bölgesi	20
2.3.2. Ayrılma Bölgesi	20
2.4. Basınç ve Çekmede Davranışı Farklı Olan Zemin Hali	24
2.4.1. Basınç Bölgesi	24
2.4.2. Çekme Bölgesi	25
2.5. Homojen Olmayan Elastik Zemin Hali	29
2.5.1. Özel Durum I : $k(x) = k_0(1 + ax)$	30
2.5.2. Özel Durum II: $k(x) = k_0(1 + ax^2)$	36
3. SONUÇLAR	41
3.1. Sayısal Sonuçlar	41
3.2. Yorum ve Öneriler	50
KAYNAKLAR	52
EKLER	54
ÖZGEÇMİŞ	57

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1. Çeşitli zemin türleri için ortalama “k” katsayısı değerleri	3
Tablo 3.1. Durum I: $\lambda > r$ hali için λ ve r değerleri.....	42



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1	Elastik zemine oturan kiriş durumu 7
Şekil 2.2	Homojen, çekme ve basınç alan elastik zemin üzerine oturan kiriş hali 8
Şekil 2.3	Homojen, sadece basınç alan elastik zemin üzerine oturan kiriş hali 19
Şekil 2.4	Basınç ve çekmede davranışı farklı olan zemin hali..... 24
Şekil 2.5	Homojen olmayan zemin halinde bağlı kiriş durumu..... 35
Şekil 3.1	Elastisite modülü $E = 2.10^7$ KN/m ² olan 40/60 kesitindeki 2L=6 m uzunluğundaki bir kirişin “k ve P_{kr} ” arasındaki ilişki 42
Şekil 3.2	Durum III : $\lambda < r$ ve $\lambda > 0$ için bulunan karakteristik fonksiyonunun $0 < p < (\pi/2)$ I. Bölge ve $r=1$ için bulunan çözüm grafiği 43
Şekil 3.3	Durum III : $\lambda < r$ ve $\lambda > 0$ için bulunan karakteristik fonksiyonunun $(3\pi/2) < p < 2\pi$ IV Bölge ve $r=1$ için bulunan çözüm grafiği 44
Şekil 3.4	Sadece basınç alan Elastik Zemin üzerindeki kirişin tamamen zemine gömülmesi durumu 45
Şekil 3.5	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $\beta = -0.5$ için r ‘ye göre λ' nın değişimi grafiği 47
Şekil 3.6	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $\beta = -0.25$ için r ‘ye göre λ' nın değişimi grafiği 47
Şekil 3.7	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $\beta = 0.25$ için r ‘ye göre λ' nın değişimi grafiği 48
Şekil 3.8	$k(x) = k_0(1 + ax^2)$ durumunda serbest kiriş ve bağlı kiriş hallerinde $r = 1.5$ için β ‘ya göre λ' nın değişimi grafiği 49
Şekil 3.9	$k(x) = k_0(1 + ax^2)$ durumunda serbest kiriş ve bağlı kiriş hallerinde $\beta = 0.25$ için r ‘ye göre λ' nın değişimi grafiği 49
Şekil A.1	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $\beta = 0.5$ için r ‘ye göre λ' nın değişimi grafiği 55
Şekil A.2	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $r = 1.5$ için β ‘ ya göre λ' nın değişimi grafiği 55
Şekil A.3	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $r = 4$ için β ‘ ya göre λ' nın değişimi grafiği 56
Şekil A.4	Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $r = 6$ için β ‘ya göre λ' nın değişimi grafiği 56

SEMBOL LİSTESİ

q_a	:Zeminin emniyetli taşıma kapasitesi
p	:Taban basıncı
k	:Zemin yatak katsayısı
P	:Kiriş enkesitine dik olarak etkiyen basınç kuvveti
T	:Kiriş kesme kuvveti
M	:Kiriş eğilme momenti
v	:Kirişin düşey yer değiştirmesi
v_0	:Zeminin düşey yer değiştirmesi
E	:Elastisite modülü
I	:Atalet momenti
L	:Kiriş uzunluğu
ζ	:Kirişin herhangi bir noktasının koordinatının kiriş uzunluğuna oranını gösteren boyutsuz bir büyüklük
λ	:Burkulma Çarpanı
$r, \bar{v}$	:Boyutsuz büyüklükler
α	:Karakteristik denklemin kökleri
A,B,C,D	:Diferansiyel denklemlerin bilinmeyen katsayıları
E,F,G,H	:Diferansiyel denklemlerin bilinmeyen katsayıları
β	:Zemin yatak katsayısının değişimini gösteren boyutsuz parametre
k_0	:Başlangıçtaki yatak katsayısı
a	:Zemin yatak katsayısının değişim oranı

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERDE BURKULMA PROBLEMİ

ÖZET

Savaş ÖZKAN

Bu tez çalışmasında, Winkler zemin modeli ve hipotezi kullanılarak, elastik bir zemin üzerine oturan kirişlerde burkulma problemleri ele alınmıştır. Tez çalışması üç ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde elastik zeminin sahip olduğu belirsiz özelliklerinden dolayı zemin hakkında yapılan idealleştirmeler ve kabuller üzerinde durulmuştur. Elastik zemin üzerine oturan kiriş problemleri hakkında ilk ve en önemli çalışmalardan biri olan ve bizim bu tez çalışmasında kabul ettiğimiz Winkler zemin teorisi ana hatlarıyla anlatılmış, teorinin dayandığı temel esas ve kabuller belirtilmiş ve teorinin uygulandığı problemler hakkında bilgi verilmiştir. Diğer zemin modellerine de değinilmiş ve bu modellerle ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir. Değişik araştırmacıların zemin hakkında yaptıkları kabuller doğrultusunda yatak katsayılarının belirlenmesi konusunda yaptıkları çalışmalar, bu çalışmaların birbirleriyle kıyaslanması ve farklı zeminler için ortalama “k” yatak katsayı değerleri verilmiştir.

İkinci bölümde dört özel problem ele alınmıştır.

- Homojen elastik zeminin çekme ve basınç alması hali
- Homojen elastik zeminin sadece basınç alması hali
- Basınç ve çekmede davranışı farklı olan zemin hali
- Homojen olmayan elastik zemin hali

Yukarıdaki bütün haller için öncelikle problemlerin tanımları yapılmış, temel denklemleri oluşturulmuş, temel denklemlerdeki bilinmeyen sabitler sınır koşulları yardımıyla bulunmuş ve bu sabitler yardımıyla çözüm denklemlerine ulaşılmıştır. İlk üç halde çözümlerde trigonometrik ve üstel fonksiyonlar kullanılmış, Homojen olmayan elastik zemin halinde ise kuvvet serisi metodundan yararlanılmıştır.

Üçüncü bölümde her dört hal içinde bulunan çözüm denklemleri MathCAD ve Mathematica yardımıyla çözülmüş, sayısal ve grafiksel sonuçlara ulaşılmıştır. Son olarak sayısal sonuçlar üzerinde kısa yorumlar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Elastik Zemin, Burkulma, Kiriş



BUCKLING PROBLEM OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

SUMMARY

Savaş ÖZKAN

In this thesis, using Winkler's hypothesis and assumptions, buckling problem of beams on elastic foundations are studied. The thesis is composed of three chapters.

In the first chapter, due to the uncertain elastic and plastic deformability characteristics, the idealizations and assumptions of elastic foundation are considered. Winkler's hypothesis, which we are using in this thesis, is one of the first and the most important working about beams on elastic foundation. For this purpose, main Winkler's assumptions are given and applicability of the hypothesis to the various problems is also discussed. The information and some examples of working are given briefly about other some models of foundation. The different assumptions about elastic foundation accepted by some researchers and average values of modules of foundation for various foundations are also given in this chapter.

In the second chapter, four different problems are solved.

- **The state of homogeneous elastic foundation that react in compression and tension**
- **The state of homogeneous elastic foundation that react in compression only**
- **The state of homogeneous elastic foundation which has different behavior in compression and tension**
- **The state of nonhomogeneous elastic foundation**

For all problems given above, definition of the problem, governing of the main equations, obtaining unknown coefficients depending on the boundary conditions and set of solving equations are obtained. For the solutions of first three problems, exponential and trigonometric functions and for the last problem the power series method is used.

In the third chapter, numerical and graphical results of the problems are obtained using by Matematica. After that, obtained results are discussed.

Keywords: Elastic Foundation, Buckling, Beam

1. GİRİŞ

1.1. Konu İle İlgili Çalışmalar

Elastik zemine oturan kirişler, mühendislik uygulamalarında çok kullanılan yapı elemanlarıdır. Geçmiş yıllarda, havaalanı yapılarında yumuşak filamentlerin kullanımının artması, soğuk bölgelerde yapılan bina çalışmaları, yatay yük etkisindeki düşey kazık ve palplanş kullanımının artması ile elastik veya viskoelastik zemine oturan kiriş, plak veya kabuk problemlerinin çözümüne olan ihtiyaç artmış, uygulama alanının genişliği nedeniyle de bu konuda birçok araştırma yapılmıştır.

Elastik zemine oturan kirişler ve plaklara ait bir problemin matematiksel bağıntılarla belirlenmesi için zeminin oldukça karışık ve belirsiz elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliğinden dolayı bazı idealleştirmeler gerektirir. Bu da matematiksel çözümlerin geçerliliğini daima sınırlar. Bu nedenle, bu tür problemlerde zeminin elastikliğini bazı kabullere göre göz önüne almak zorunluluğu vardır. Elastik zemine oturan kirişler ve plaklara ait çalışmalarda esas hipotez, genellikle zemin tepkileri hakkında yapılan hipotez olmuştur. Çünkü Elastik zemin üzerindeki yapının tüm özellikleri belirlidir ve burada belirsiz olan zemindir. Bu nedenle zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini değişik araştırmacılar, değişik şekillerde düşünmüş ve tanımlamışlardır.

Elastik zemin üzerine oturan kirişlerin analizi üç aşamadan oluşur. Bunlardan birincisi ve en önemlisi, yapının davranışı ve zemin tipiyle ilgili temel kabullerin yapılmasıdır. İkinci aşama zemin katsayısı, kiriş boyutu ve malzemesi gibi gerekli büyüklüklerin seçilmesidir. Üçüncü ve son aşama da birinci ve ikinci aşamalardan elde edilen bilgiler kullanılarak problemin matematiksel olarak kesin veya yaklaşık bir şekilde çözülmesini içerir.

Elastik zemine oturan kiriş problemi önce Winkler [1] tarafından incelenmiş ve teoremin esasları verilmiştir. Çeşitli yükler etkisi altındaki elastik ve prizmatik bir kirişin, elastik yatak üzerinde bulunduğu ve herhangi bir noktadaki taban basıncının aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu varsayılmıştır. Bu hipotez yatak

ortamının elastik olduğunu, diğer bir deyişle zemin malzemesinin Hooke kanununa uyduğunu belirtir. Zemin basınç deneyleri, yük belli bir değeri aşmadıkça, deformasyonların yükle orantılı olduğunu gösterir. Hipotez küçük şekil değiştirmeler durumunda uygulanabilir. Bu zemin modelinde yatak katsayısının taban basıncından bağımsız olduğu ve bütün temel yüzeyi boyunca sabit kaldığı varsayılır. Bu hipotez problemin matematiksel çözümünü oldukça basitleştirir. Bununla birlikte zeminin homojen olmaması nedeniyle yatak katsayısı noktadan noktaya değişebilir. Bu nedenle bir yatay düzlemin çeşitli noktalarında yatak katsayısı değerleri farklı olabildiği gibi, derinliğin artması ile de bu değerler değişebilir. Diğer bir husus da zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etkidiği noktada şekil değişimi yapmasıdır; yani bu durumda zemin birbirinden bağımsız, birbirine sonsuz yakın ve sıkışarak serbestçe hareket edebilen düşey yaylardan oluşan mekanik bir sistem olarak düşünülmektedir. Burada bu yayların yalnız doğrudan doğruya yüklendiklerinde çöküp tepki gösterdikleri ancak her yayın komşu yayların yüklenme ve çökmesinden etkilenmediği öngörülmektedir. Bunun sonucu olarak, zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak göz önüne alınmış olur. Zeminin fiziksel özellikleri böyle basit bir bağıntı ile ifade edilmekten daha karışık bir durum arz eder. Yalnız belirli durumlarda bu hipotezin gerçeğe yakın sonuçlar verdiği bulunmuştur.

Mühendislikte Winkler hipotezine dayanarak iyi sonuçlar veren bazı önemli problemler vardır. Bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler, bir veya iki doğrultuda sürekli temeller, gemi kaburgaları, dönel kabuklar, yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palplanşlar bunlara bazı önemli örneklerdir. Özellikle temel sisteminde Winkler hipotezini doğrulayan bazı önemli hususlar görülmüştür. Bu düşüncelerden hareketle, basitliğine rağmen Winkler hipotezinin, gerçek temel zemin durumunu, bazı karmaşık bağıntılarla veren hipotezlere göre daha yakın bir şekilde ifade ettiği sonucuna varılabilir [2].

Uygulamalı mekaniğe ilk Winkler tarafından getirilen ve Zimmermann [3] tarafından, bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabı amacıyla kullanılan yatak katsayısının değeri birçok etkene, özellikle zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlıdır. Fakat yatak katsayısı, zemin sınıfının davranışını tam olarak belirleyen bir kavram değildir. Yatak katsayısı sadece zemin özelliklerine bağlı olmayıp aynı zamanda yük şiddetine ve yükün

etkime doğrultu ve noktasına göre de değişebildiğinden, Elastisite modülü veya Poisson oranı gibi zemine ait karakteristik bir özellik de değildir. Bu nedenle, herhangi bir zemin için genelleme yapmak olanaksızdır. Hatta belirli bir arazi parçası üzerinde ve üniform homojen bir zeminde dahi yapılacak yükleme deneylerinden farklı yatak katsayısı değerleri elde edilebilir. Fakat bir kiriş veya plakta oluşan moment ve gerilmelerin yatak katsayısı değerinden çok fazla etkilenmemesi nedeni ile büyük hatalar yapmaksızın seçilebilecek yatak katsayısı değeri çok geniş bir aralıkta yer almaktadır [4]. Temel yapısının, zeminden on kat ve hatta daha fazla rijit olması nedeniyle, yatak katsayısı değerinin (1.1) eşitliği kullanılarak zeminin maksimum taşıma kapasitesine göre saptanmasının çok yanıltıcı bir sonuç vermeyeceğini ve yaklaşık bir hesap için kullanılabileceğini Bowles [5] ifade etmiştir.

$$k_s \cong 40(GS)q_a \quad \text{KN/m}^3 \quad (1.1)$$

Bu eşitlikte q_a ifadesi, zeminde 0,0254 m. Derinliğinde bir oturmaya yol açacak zemin taşıma kapasitesinin, bir emniyet sayısına (GS) bölünmesiyle elde edilen emniyetli taşıma kapasitesidir.

Tablo 1.1. Çeşitli zemin türleri için ortalama “k” değerleri

Zemin Türü	k (KN / m ²)
Balçık ; turba	< 2.000
Kil ; plastik	5.000 - 10.000
Kil ; yarı sert	10.000 - 15.000
Kil , sert	15.000 - 30.000
Dolma Torak	10.000 - 20.000
Kum , gevşek	10.000 - 20.000
Kum , orta sıkı	20.000 - 50.000
Kum , sıkı	50.000 - 100.000
Kum-Çakıl ; sıkı	100.000 - 150.000
Sağlam şist	> 500.000
Kaya	> 2.000.000

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Mühendislik problemlerinin çözümü için gerekli k yatak katsayılarının sayısal değerleri, yayınlanmış gözlemlere dayanılarak yaklaşık benzeşimle, ya da yapının inşa edileceği zeminde yapılacak arazi deneyleri sonuçlarından elde edilebilir. Bir fikir vermek amacıyla, çeşitli zemin türleri için yatak katsayısı değerleri Tablo 1.1 de derlenmiştir[6].

Yukarıda da değindiğimiz gibi zeminin fiziksel ve mekanik özellikleri çeşitli araştırmacılar tarafından değişik şekillerde düşünülmüş ve tanımlanmıştır.

Hoag, zemini fiziksel özelliklerinin daha iyi tanımlandığı oldukça şüpheli görülen sürekli elastik bir ortam olarak göz önüne alıp yarı sonsuz yada belirli bir kalınlıkta elastik ortamlara oturan sonsuz radye olarak düşünülmüş ve bazı yükleme durumlarını çözmüştür. Winkler zemininde tam bir süreksizlik, Hoag zemininde ise tam bir süreklilik göz önüne alınmıştır. Gerçek durumun bu iki kabulün arasında olduğu aşıkardır.

Engesser, kiriş genişliği arttıkça yatak katsayısı değerinin azaldığına işaret etmiştir. Hayashi ve Freund, yatak katsayısı değerinin taban basıncına bağlı olacağı düşüncesiyle “ p ” taban basıncı değeri arttıkça “ k ” yatak katsayısı değeri azalacak bir şekilde kabul yaparak çeşitli problemler çözmüşlerdir. Küçük şekil değiştirmeler için $P_{göçme} / 2$ dolaylarında gerçek durumla Winkler kabulü arasındaki farklar çok küçük olduğundan böyle bir hassasiyetin pratik açıdan sonuçları etkilemesi yok denecek kadar azdır. Hayashi [7] elastik zemine oturan kirişler konusundaki ayrıntılı çalışmasında “ k ” yatak katsayısının yükleme deneyleri sonuçlarının yüklü alanın büyüklüğüne bağlı olduğu gerçeğinden söz etmemiştir.

Biot [8] tam elastik ortama oturan yüklü kirişler için yatak katsayısının yalnız kiriş genişliğine değil, bir dereceye kadar kirişin eğilme rijitliğine de bağlı olduğunu göstermiş, bunun göz önüne alınmasını mümkün kılan bağıntılar sunmuştur. Kögler-Sheidig [9] sonsuz yüzey, dairesel ve kare plaklar, sonsuz uzunlukta şerit temeller için çeşitli parametrelere bağlı olarak, yatak katsayısını bulmaya yarayan çeşitli ampirik formüller vermişlerdir.

Terzaghi ve Peck [10], deneysel araştırmalar yaparak, aynı taban basıncı değeri için çökmelerin kiriş genişliğine bağlı olarak değişimini gösteren bir bağıntı elde etmişler ve bundan yararlanarak yatak katsayısının kiriş genişliğiyle değişimini gösteren bir bağıntı vermişlerdir. Terzaghi [11] basit ve çok karşılaşılan yükleme

durumlarındaki kohezyonsuz kum ve sert kil için yatak katsayısı değerlerini belirleyen faktörleri incelemiştir. Yatak katsayısı olarak, zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlı uygun değerler seçmek için kurallar vermiştir.

Durelli ve Parks [12], elastik zemine oturan sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin foto elastik çalışmasını yapmışlardır. Kirişler bir ve iki noktadan yüklenerek davranışları incelenmiş, bulunan sonuçlar teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Daha sonra Munther [13], aynı durumdaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemiyle inceleyip, bulduğu sonuçları foto elastik çalışmada elde edilen sonuçlarla birlikte eğriler üzerinde vermiştir.

Weistman [14], çekme gerilmesi almayan, sadece basınca çalışan Winkler ve Reissner modelini kullanarak, elastik zemin üzerine oturan tekil yük etkisindeki kiriş ve plaklarda çökme ve kesit tesirlerine ait grafikler vermiştir. Weistman [15], çekme gerilmesi almayan zemine oturan, hareketli yük etkisindeki kirişler için de ilk araştırmaları yapmış, ancak çalışmaları ayrılmalaraın olduğu durumları saptamakla sınırlandırılmıştır.

Bakioğlu ve Özkan [16] yaptıkları çalışmada temellerin çökmeleriyle eğilme momentleri arasındaki diferansiyel denklemi, sonlu farklar denklemleri şeklinde yazıp, taban basıncının bu noktalar arasında parabolik değiştiğini varsaymıştır. Bu çalışmada taban basınçları cinsinden ifade edilen moment bağıntılarından yararlanarak, çökmeler ile taban basınçları arasında lineer denklem takımları elde edilmiştir.

Elmas [17] ortasından tekil yükle yüklenmiş sonlu uzunlukta ahşap ve betonarme kirişlerin davranışını incelemiştir.

Tüm bu çalışmalardan ayrı olarak Winkler zemini dışında başka zemin modelleri de bulunmaktadır. Pasternak modelinde, yay elemanları üzerinde sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan bir kayma tabakası da göz önüne alınmıştır. Vlasov modelinde, diğer zemin modellerinden farklı olarak, elastik zemin parametresinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmıştır. Filonenko-Borodich modelinde, Winkler yaylarının yüzeyinin elastik bir zar gibi olduğu ve bu sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde gerilme meydana geldiği göz önüne alınmıştır. Reissner- Hetenyi modelinde, Winkler yaylarının üzerinde, iki boyutlu problemler için bir plak, tek boyutlu problemler için elastik bir şerit olduğu kabul

edilir. Bu tür zemin modellerini kullanarak bunların üzerine oturan kiriş ve plakların davranışlarını, Kerr [18], Tsai [19], Shirima [20] ve O'Neill [21] gibi birçok araştırmacı incelemiştir.

1.2. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Bu tez çalışmasında elastik zemin üzerine oturan kirişlerde burkulma problemi incelenmiştir. Bu tez çalışmasında Winkler zemin modeli ve hipotezi kullanılarak özel problemlerin çözümünde hesap kolaylığı sağlanmıştır.

Bu çalışmada ilk olarak homojen elastik zeminin çekme ve basınç alması hali incelenmiş, problemin tanımı yapılmış ve temel denklemler oluşturulmuştur.

Daha sonra homojen elastik zeminin sadece basınç alması üzerinde durulmuş, problemin tanımı yapılarak temel denklemler oluşturulmuştur.

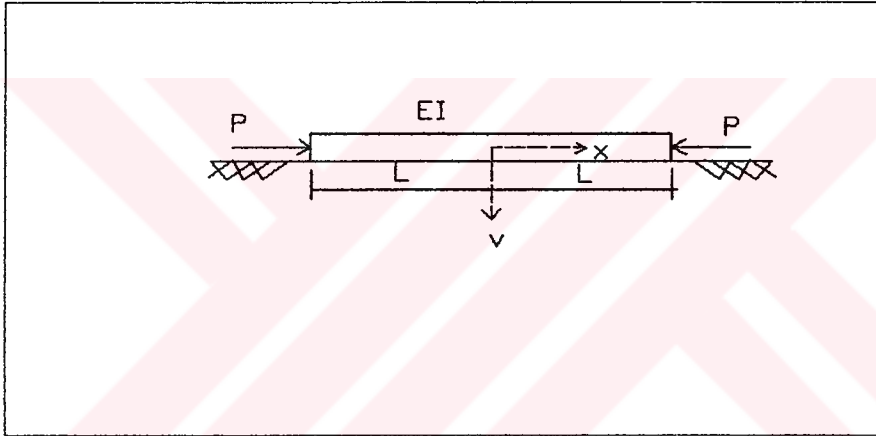
Son olarak da homojen olmayan elastik zemin hali ele alınmış, problemin tanımı yapılarak temel denklemler kurulmuştur.

Ele alınan bu üç durum için de sınır koşulları yardımıyla temel denklemlerdeki bilinmeyen sabitler çözülmüş, bilinmeyen sabitler yerlerine konarak çözüm denklemleri oluşturulmuş ve bu denklemler Matematica yardımıyla çözümlenerek sonuçlar sayısal ve grafiksel olarak verilmiştir.

2. ÖZEL PROBLEMİN TANIMI, TEMEL DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

2.1. Özel Problemin Tanımı

Bu tez çalışmasında, elastik bir zemin üzerine oturan sonlu uzunluktaki bir kirişin diferansiyel denklemlerinin, zemin hakkında yapılan çeşitli kabullere göre kurulması ve sınır koşulları yardımıyla bu diferansiyel denklemlerin çözümleri incelenmiştir.

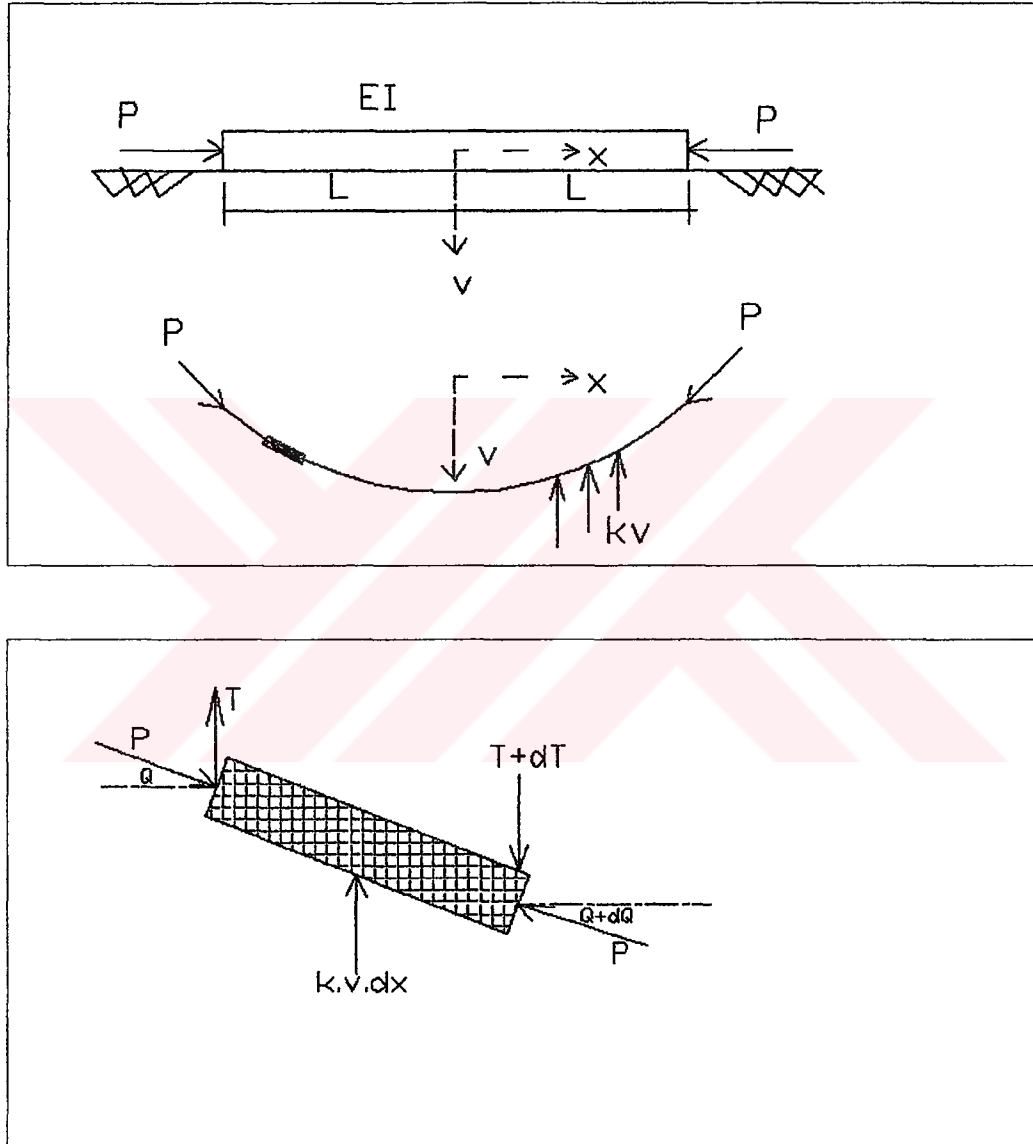


Şekil 2.1. Elastik zemine oturan kiriş durumu

Özel problemlerin çözümünde kullanılan zemin Winkler zeminidir. Dolayısıyla elastik sonlu uzunlukta bir kirişin, elastik bir yatak üzerinde olduğu ve herhangi bir noktasındaki taban basıncının, yük belirli bir değeri aşmadıkça, aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu yani zemin malzemesinin Hooke kanununa uyduğu kabul edilmiştir. Bu özel problemlerde kullanılan kiriş malzemesi betonarme olarak ele alınmıştır.

2.2. Homojen Elastik Zeminin Çekme ve Basınç Alması Hali

Bu özel problemde, uç noktalarından P basınç kuvveti etkisindeki kirişin, çekme ve basınç alabilen elastik zemin üzerindeki burkulma durumu incelenmektedir.



Şekil 2.2 Homojen, çekme ve basınç alan elastik zemin üzerine oturan kiriş durumu

$$\sin \theta \cong \theta$$

$$\sin(\theta + d\theta) \cong \theta + d\theta$$

Düşey Denge Denklemi:

$$T + dT - T + P \sin \theta - P \sin(\theta + d\theta) - k v dx = 0$$

$$(2.2.1)$$

$$dT - P d\theta - k v dx = 0 \quad (2.2.2)$$

$$\frac{dT}{dx} - P \frac{d\theta}{dx} - k v = 0 \quad (2.2.3)$$

Bu ifadede “v” kirişin düşey yerdeğiştirmesini ve “k” elastik zeminin yatak katsayısını göstermektedir. Bu ifadedeki “k” katsayısı, Tablo 1.1 deki katsayının kiriş genişliğiyle çarpımı olarak kullanılmıştır.

İç Kuvvet Elastik Eğri İlişkileri:

$$-EI v'' = M \quad (\text{Moment}) \quad (2.2.4)$$

$$-EI v''' = T \quad (\text{Kesme Kuvveti}) \quad (2.2.5)$$

$$-EI v^{iv} = \frac{dT}{dx} \quad (2.2.6)$$

$$\theta = dv/dx \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.2.7)$$

Elastik zemin üzerindeki kirişin rijitliği “EI” ile gösterilir ve iç kuvvet elastik eğri ilişkileri (2.2.3) denkleminde yerlerine konursa aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$EI v^{iv} + P \frac{d^2v}{dx^2} + k v = 0 \quad (2.2.8)$$

Bu arada diferansiyel denklemindeki terim karmaşasını önleyebilmek için aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmıştır.

$$\zeta = x/L \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (2.2.9)$$

$$\bar{v} = v/v_0$$

$$\frac{P L^2}{EI} = 2 \lambda^2 \quad , \quad \frac{k L^4}{EI} = r^4 \quad , \quad v_0 = \frac{P}{2kL} \quad (2.2.10)$$

Önceki sayfada yapılan boyutsuzlaştırmalar diferansiyel denkleminde yerlerine konursa (2.2.8) denklemi aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$\bar{v}^{IV} + 2\lambda^2 \bar{v}'' + r^4 \bar{v} = 0 \quad (2.2.11)$$

Çözüm:

“ $\bar{v} = e^{\alpha \zeta}$ ” alınır ve türevleri alınıp (2.2.11) denkleminde yerlerine yazılırsa:

$$e^{\alpha \zeta} (\alpha^4 + 2\lambda^2 \alpha^2 + r^4) = 0 \quad (2.2.12)$$

(2.2.12) denkleminin sıfır olabilmesi için ($e^{\alpha \zeta} \neq 0$) parantez içindeki terimin sıfır olması gerekir.

$$\alpha^4 + 2\lambda^2 \alpha^2 + r^4 = 0 \quad (2.2.13)$$

$$\alpha_{1,3}^2 = -\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - r^4} \quad (2.2.14)$$

(2.2.14) ifadesinde karekök içerisinde bulunan terim denklemin kaderini belirler.

2.2.1. Durum I: $\lambda > r$ Olması Durumu

Durum I için geçerli şartlar aşağıda sıralanmıştır.

$$\lambda > r \rightarrow \sqrt{\lambda^4 - r^4} > 0 \quad \text{ve} \quad \sqrt{\lambda^4 - r^4} < \lambda^2 \quad (2.2.1.1)$$

“ α ” ifadesi (2.2.14) denkleminin köklerini ifade ederse, denklem köklerinin sanal olduğu rahatça görülebilir.

$$\alpha_{1,2}^2 = -\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4} < 0 \rightarrow \alpha_{1,2} = \pm m_1 i \quad (2.2.1.2)$$

$$\alpha_{3,4}^2 = -\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4} < 0 \rightarrow \alpha_{3,4} = \pm m_2 i$$

$$m_1^2 = \lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4} \rightarrow m_1 = \sqrt{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4}} \quad m_1 > 0 \quad (2.2.1.3)$$

$$m_2^2 = \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4} \rightarrow m_2 = \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4}} \quad m_2 > 0$$

Bir önceki sayfada bulunan sanal denklem kökleri çözüm denkleminde yerine yazılırsa:

$$\bar{v} = A_1 e^{\alpha_1 \zeta} + A_2 e^{\alpha_2 \zeta} + A_3 e^{\alpha_3 \zeta} + A_4 e^{\alpha_4 \zeta} \quad (2.2.1.4)$$

$$\bar{v} = A_1 e^{m_1 i \zeta} + A_2 e^{-m_1 i \zeta} + A_3 e^{m_2 i \zeta} + A_4 e^{-m_2 i \zeta} \quad (2.2.1.4.a)$$

veya $e^{i \zeta} = \cos \zeta + i \sin \zeta$ olduğuna göre;

$$\bar{v} = A \cos m_1 \zeta + B \sin m_1 \zeta + C \cos m_2 \zeta + D \sin m_2 \zeta \quad (2.2.1.5)$$

Bu denklemin bilinmeyenleri “A, B, C, D” katsayıları olup bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunabilir.

Sınır Koşulu 1:

Eksenlerin birleşim noktasında, yani kirişin tam ortasında (simetri nedeni) dönme sıfırdır.

$$\left. \bar{v}' \right|_{\zeta=0} = 0 \quad m_1 B + m_2 D = 0 \quad (2.2.1.6)$$

Sınır Koşulu 2:

Eksenlerin birleşim noktasındaki, yani kirişin tam ortasındaki kesme kuvveti de sıfırdır.

$$\left. \bar{v}''' \right|_{\zeta=0} = 0 \quad -m_1^3 B - m_2^3 D = 0 \quad (2.2.1.7)$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.2.1.6) ve (2.2.1.7) ifadeleri kullanılıp katsayılar determinantı sıfıra eşitlenirse ve determinant çözülürse;

$$m_1 m_2 (m_1^2 - m_2^2) = 0 \quad (2.2.1.8)$$

eşitliğine ulaşılır.

$m_1, m_2 > 0$ olduğundan (2.2.1.8) eşitliğinin sıfır olabilmesi için;

$$m_1^2 = m_2^2 \quad \rightarrow \quad m_1 = m_2 \quad (2.2.1.9)$$

$$\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4} = \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4} \quad \rightarrow \quad \lambda^4 = r^4 \quad \rightarrow \quad \lambda = r \quad \text{çıkar.} \quad (2.2.1.10)$$

Fakat koşulumuz $\lambda > r$ olduğundan çözüm olabilmesi için;

$$B = D = 0 \quad \text{olarak bulunur.} \quad (2.2.1.11)$$

Sınır Koşulu 3:

Kiriş ucundaki eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}'' \Big|_{\zeta=1} = 0 \quad \rightarrow \quad -m_1^2 A \cos m_1 - m_2^2 C \cos m_2 = 0 \quad (2.2.1.12)$$

Sınır Koşulu 4:

Kiriş ucundaki kesme kuvveti sıfırdır. Buradan

$$\bar{v}''' \Big|_{\zeta=1} = 0 \quad \rightarrow \quad m_1^3 A \sin m_1 + m_2^3 C \sin m_2 = 0 \quad (2.2.1.13)$$

eşitlikleri elde edilir. ve (2.2.1.12) ve (2.2.1.3) ifadeleri kullanılıp, katsayılar determinantı sıfıra eşitlenir, çıkan eşitlik de düzenlenirse, Durum I için kirişin burkulma bağıntısı elde edilir.

$$\tan m_2 - \frac{m_1}{m_2} \tan m_1 = 0 \quad (2.2.1.14)$$

2.2.2. Durum II: $\lambda = r$ Olması Durumu

Durum II için geçerli şartlar aşağıda sıralanırsa:

$$\lambda = r \quad \rightarrow \quad \sqrt{\lambda^4 - r^4} = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda > 0 \quad (2.2.2.1)$$

“ α ” ifadesi (2.2.16) denkleminin köklerini ifade ederse denklem kökleri yine sanal olur.

$$\begin{aligned}\alpha_{1,3}^2 &= -\lambda^2 & \alpha_1 &= \alpha_3 = \lambda i \\ \alpha_2 &= \alpha_4 = -\lambda i\end{aligned}\tag{2.2.2.2}$$

Çözüm:

Sanal denklem köklerini çözüm denkleminde yerine konursa aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\bar{v} = A_1 e^{\lambda i \zeta} + A_2 e^{-\lambda i \zeta} + A_3 e^{-\lambda i \zeta} + A_4 e^{\lambda i \zeta}\tag{2.2.2.3}$$

veya

$$\bar{v} = A \cos \lambda \zeta + B \sin \lambda \zeta + C \zeta \cos \lambda \zeta + D \zeta \sin \lambda \zeta\tag{2.2.2.4}$$

Bu denklemin bilinmeyenleri “A, B, C, D” katsayıları olup bu katsayıları sınır koşulları yardımıyla bulunur.

Sınır Koşulu 1:

Eksenlerin birleşim noktasında, yani kirişin tam ortasında (simetri nedeni) dönme sıfırdır.

$$\left. \bar{v}' \right|_{\zeta=0} = 0 \rightarrow \begin{aligned} \lambda (B + C) &= 0 & \lambda &> 0 \\ (B + C) &= 0 \end{aligned}\tag{2.2.2.5}$$

Sınır Koşulu 2:

Eksenlerin birleşim noktasındaki, yani kirişin tam ortasındaki kesme kuvveti de sıfırdır.

$$\left. \bar{v}'' \right|_{\zeta=0} = 0 \rightarrow 2 C \lambda^2 + B \lambda^3 + C \lambda^3 = 0\tag{2.2.2.6}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifadede λ boyutsuz olduğuna göre, (2.2.2.5) eşitliği de kullanılırsa;

$$B \lambda^3 + C \lambda^3 = 0\tag{2.2.2.7}$$

Olduğu görülür. Dolayısıyla (2.2.2.6) ifadesi yeniden düzenlenirse;

$$2 C \lambda^2 = 0 \quad (2.2.2.8)$$

$$B = C = 0 \quad (2.2.2.9)$$

olarak bulunur.

Sınır Koşulu 3:

Kiriş ucundaki eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}'' \Big|_{\zeta=1} = 0$$

$$-\lambda^2 \cos \lambda. A + (\lambda^2 \cos \lambda + \lambda \cos \lambda - \lambda^2 \sin \lambda) D = 0 \quad (2.2.2.10)$$

Sınır Koşulu 4:

Kiriş ucundaki kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}''' \Big|_{\zeta=1} = 0 \rightarrow \lambda^3 \sin \lambda A - (\lambda^3 \cos \lambda + \lambda^3 \sin \lambda + 2 \lambda^2 \sin \lambda) D = 0 \quad (2.2.2.11)$$

(2.2.2.10) ve (2.2.2.11) No'lu ifadeleri kullanılarak katsayılar determinantı sıfıra eşitlenir ve çıkan eşitlik düzenlenirse, Durum II için burkulma denklemi elde edilmiş olur.

$$\lambda^5 \cos^2 \lambda + \lambda^5 \sin^2 \lambda + \lambda^4 \sin \lambda \cos \lambda = 0 \quad (2.2.2.12)$$

$$\sin 2\lambda = -2 \lambda \quad (2.2.2.13)$$

2.2.3. Durum III: $\lambda < r$ Olması Durumu

Durum III için geçerli şartlar aşağıda sıralanmıştır.

$$\lambda < r \rightarrow \sqrt{\lambda^4 - r^4} < 0 \quad \text{ve} \quad \lambda > 0 \quad (2.2.3.1)$$

$$q^4 = r^4 - \lambda^4 \text{ dersek} \rightarrow \sqrt{\lambda^4 - r^4} = \sqrt{-q^4} = q^2 i \quad (2.2.3.2)$$

Denklemin kökleri;

$$\alpha_{1,3}^2 = -\lambda^2 \pm q^2 i \quad (2.2.3.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= -\lambda^2 + q^2 i & \alpha_1 &= m + n i & \alpha_2 &= m - n i \\ & & & & & (2.2.3.4) \end{aligned}$$

$$\alpha_3^2 = -\lambda^2 - q^2 i \quad \alpha_3 = -m + n i \quad \alpha_4 = -m - n i$$

olarak bulunur.

$$\alpha_1^2 = -\lambda^2 + q^2 i = (m + n i)^2 \quad \text{olduğuna göre;} \quad (2.2.3.5)$$

$$m^2 + n^2 = -\lambda^2 \quad (2.2.3.6)$$

$$2 m n = q^2 \quad \rightarrow \quad m = q^2 / 2 n \quad (2.2.3.7)$$

veya

$$\alpha_1^2 = -\lambda^2 + q^2 i = \gamma^2 e^{\beta i} \quad \text{dersek ve düzenlersek;} \quad (2.2.3.8)$$

$$\gamma^2 \cos \beta = -\lambda^2 \quad (2.2.3.9)$$

$$\gamma^2 \sin \beta = q^2 \quad (2.2.3.10)$$

(2.2.3.10) ifadesi (2.2.3.9) ifadesine bölünürse;

$$\tan \beta = -\frac{q^2}{\lambda^2} \quad \rightarrow \quad \beta = \arctan(-q^2 / \lambda^2) \quad (2.2.3.11)$$

sonucu bulunur. Yine (2.2.3.9) ve (2.2.3.10) ifadelerinin kareleri alınıp toplanırsa;

$$\gamma^4 = \lambda^4 + q^4 = r^4 \quad \rightarrow \quad \gamma = r \quad (2.2.3.12)$$

olduğu rahatça görülebilir. (2.2.3.8) ifadesinin karekökü alınırsa;

$$\alpha_1 = \gamma e^{\frac{\beta}{2} i} = \gamma \cos \frac{\beta}{2} + i \gamma \sin \frac{\beta}{2} \quad \text{ve} \quad (2.2.3.13)$$

$$m = \gamma \cos \frac{\beta}{2} = r \cos \frac{\beta}{2} \quad (2.2.3.14)$$

$$n = \gamma \sin \frac{\beta}{2} = r \sin \frac{\beta}{2} \quad (2.2.3.15)$$

sonuçları bulunur.

Çözüm:

$$\bar{v} = A_1 e^{(m+ni)\zeta} + A_2 e^{(m-ni)\zeta} + A_3 e^{(-m+ni)\zeta} + A_4 e^{(-m-ni)\zeta} \quad (2.2.3.16)$$

veya

$$\bar{v} = A \cosh m \zeta \cos n \zeta + B \sinh m \zeta \sin n \zeta + C \cosh m \zeta \sin n \zeta + D \sinh m \zeta \cos n \zeta \quad (2.2.3.17)$$

Bu denklemin bilinmeyenleri “A, B, C, D” katsayıları olup, bu katsayılar sınır koşulları yardımıyla bulunur.

Sınır Koşulu 1:

Eksenlerin birleşim noktasında, yani kirişin tam ortasında (simetri nedeni) dönme sıfırdır.

$$\bar{v}' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad n C + m D = 0 \quad (2.2.3.18)$$

Sınır Koşulu 2:

Eksenlerin birleşim noktasındaki, yani kirişin tam ortasındaki kesme kuvveti de sıfırdır.

$$\bar{v}'' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad (3 m^2 n - n^3) C + (-3 m n^2 + m^3) D = 0 \quad (2.2.3.19)$$

ifadesine ulaşılır.

(2.2.3.18) ve (2.2.3.19) No'lu denklemler kullanılarak katsayılar determinantı sıfıra eşitlenir ve çıkan denklem düzenlenirse;

$$m n (n^2 + m^2) = 0 \quad (2.2.3.20)$$

ifadesi bulunmuş olur. (2.2.3.2), (2.2.3.6) ve (2.2.3.7) ifadeleri (2.2.3.20) de yerlerine yazılırsa;

$$\frac{\sqrt{r^4 - \lambda^4}}{2} (-\lambda)^2 = 0 \quad (2.2.3.21)$$

sonucuna ulaşılır ve Durum III koşulları (2.2.3.1) ifadesinden hatırlanırsa $\lambda < r$ ve $\lambda > 0$ olduğundan;

$$\text{denklemin çözümü olabilmesi için } C = D = 0 \quad \text{dır.} \quad (2.2.3.22)$$

Sınır Koşulu 3:

Kiriş ucundaki eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}'' \Big|_{\zeta=1} = 0$$

$$A \{ (m^2 - n^2) \cosh m \cos n - 2 m n \sin n \sin m \} + B \{ (m^2 - n^2) \sin n \sinh m + 2 m n \cos n \cosh m \} = 0 \quad (2.2.3.23)$$

Sınır Koşulu 4:

Kiriş ucundaki kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}''' \Big|_{\zeta=1} = 0$$

$$A \{ (m^3 - 3mn^2) \tanh m + (n^3 - 3m^2n) \tan n \} + B \{ (3m^2n - n^3) \tanh m + (m^3 - 3mn^2) \tan n \} = 0 \quad (2.2.3.24)$$

ifadesine ulaşılır. (2.2.3.23) ve (2.2.3.24) No'lu ifadeler kullanılarak katsayılar determinantı sıfıra eşitlenir ve çıkan ifade düzenlenirse;

$$(m^2 + n^2)^2 \left(n \frac{\tanh m}{\cos^2 n} + m \frac{\tan n}{\cosh^2 m} \right) = 0 \quad (2.2.3.25)$$

ifadesine ulaşılır.

$(m^2 + n^2)^2 > 0$ olduğuna göre (2.2.3.25) ifadesinin sıfır olabilmesi için parantez içerisindeki terim sıfır olmalıdır.

$$\left(n \frac{\tanh m}{\cos^2 n} + m \frac{\tan n}{\cosh^2 m} \right) = 0 \quad (2.2.3.26)$$

(2.2.3.2) ve (2.2.3.11) ifadelerinden hareketle aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\beta = -\arctan \frac{q^2}{\lambda^2} \rightarrow \beta = -\arctan \sqrt{\frac{r^4}{\lambda^4} - 1} \quad (2.2.3.27)$$

m ve n ifadeleri, (2.2.3.14), (2.2.3.15) ve (2.2.3.27) ifadelerinden aşağıdaki şekilde bulunur.

$$m = r \cos \frac{\beta}{2} = -r \cos \left(\frac{1}{2} \arctan \sqrt{\frac{r^4}{\lambda^4} - 1} \right) \quad (2.2.3.28)$$

$$n = r \sin \frac{\beta}{2} = -r \sin \left(\frac{1}{2} \arctan \sqrt{\frac{r^4}{\lambda^4} - 1} \right) \quad (2.2.3.29)$$

$$P = \frac{1}{2} \arctan \sqrt{\frac{r^4}{\lambda^4} - 1} \quad \text{dersek;} \quad (2.2.3.30)$$

$$m = -r \cos p \quad (2.2.3.31)$$

$$n = -r \sin p \quad (2.2.3.32)$$

(2.2.3.31) ve (2.2.3.32) ifadeleri (2.2.3.26) ifadesinde yerlerine konur ve çıkan ifade yeniden düzenlenirse burkulma koşulu olarak;

$$\sin p \sinh(2r \cos p) + \cos p \sin(2r \sin p) = 0 \quad (2.2.3.33)$$

ifadesi bulunur.

$r = 1, 2, 3, \dots, 10$ alınabilir.

$\tan 2p = \sqrt{\frac{r^4}{\lambda^4} - 1}$ ve denklemden λ çekilir ve denklem düzenlenirse;

$$\lambda = r \sqrt{\cos 2p} \quad \text{çıkar.} \quad (2.2.3.34)$$

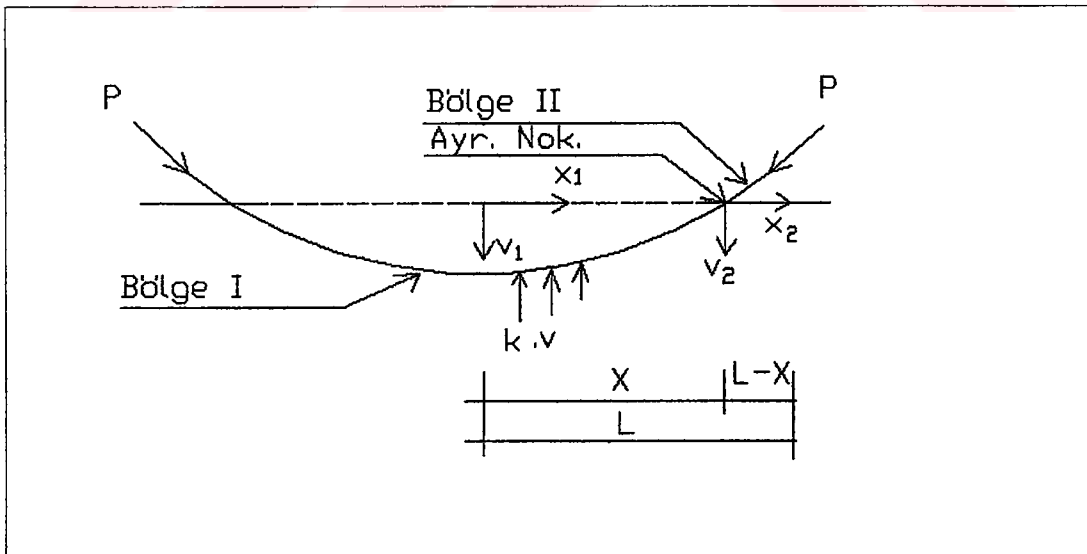
Durum III koşulları (2.2.3.1) ifadesinden hatırlanırsa $\lambda, r > 0$ ve $\lambda < r$ dolayısıyla 2.2.3.34 ifadesinin gerçekleşmesi için

$$0 < \cos 2p < 1 \quad (2.2.3.35)$$

olmalı ve $\cos 2p$ ancak I ve IV bölgelerde pozitif olur.

2.3. Homojen Elastik Zeminin Sadece Basınç Alması Hali

Bu özel problemde, uç noktalarından P basınç kuvveti etkisindeki kirişin, sadece basınç alabilen elastik zemin üzerindeki burkulma durumu incelenmektedir. Elastik zeminin kendi arasında Temas ve Ayrılma Bölgesi olarak iki bölgeye ayrıldığı ve Temas Bölgesinde zeminin basınç aldığı fakat Ayrılma Bölgesinde zeminin çekme alamadığı kabulü yapılmaktadır.



Şekil 2.3 Homojen, sadece basınç alan elastik zemin üzerine oturan kiriş durumu

2.3.1. Temas Bölgesi

Çözüm şekli zeminin çekme ve basınç aktarması haliyle aynıdır.

$$0 \leq x_1 \leq x$$

“x” temas bölgesinin uzunluğunu (boyutsuz olarak) “ x_1 ”ve “ v_1 ” temas bölgesi notasyonlarını göstermektedir.

Karakteristik denklem;

$$EI \bar{v}_1^{IV} + P \bar{v}_1'' + k v_1 = 0 \quad (2.3.1.1)$$

ve çözüm,

$$v_1 = A \cos m_1 \zeta + B \sin m_1 \zeta + C \cos m_2 \zeta + D \sin m_2 \zeta \quad (2.3.1.2)$$

Burada A, B, C, D sabitlerine ilave olarak ayrılma noktasının yeri de bilinmemektedir.

2.3.1. Ayrılma Bölgesi

Ayrılma bölgesinin uzunluğu “ $1-x$ ”dir ve sınırları aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$0 \leq x_2 \leq 1-x$$

“ x_2 ” ve “ v_2 ” Ayrılma Bölgesi notasyonlarını göstermektedir.

Yönetici denklem;

$$EI v_2^{IV} + P v_2'' = 0 \quad (2.3.2.2)$$

$v_2 = e^{\alpha \zeta}$ denir ve (2.3.2.2) no lu ifadede türevleriyle birlikte yerlerine yazılırsa;

$$e^{\alpha \zeta} (\alpha^4 + 2 \lambda^2 \alpha^2) = 0 \quad (2.3.2.3)$$

$e^{\alpha \zeta} \neq 0$ olduğuna göre (2.3.2.3) ifadesinin sıfır olabilmesi için parantez içerisindeki terim sıfır olmalıdır.

$$\alpha^2 (\alpha^2 + 2 \lambda^2) = 0 \quad (2.3.2.4)$$

Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ve (2.3.2.4) ifadesinin kökleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = \sqrt{2} \lambda i \quad \alpha_4 = -\sqrt{2} \lambda i \quad (2.3.2.5)$$

Çözüm:

(2.3.2.5) ifadesinde bulunan denklem kökleri kullanılarak “ v_2 ” çökme ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$v_2 = E + F \zeta + G \sin \sqrt{2} \lambda \zeta + H \cos \sqrt{2} \lambda \zeta \quad (2.3.2.6)$$

$$0 \leq \zeta \leq 1 - x$$

E, F, G, H bilinmeyenlerinin de eklenmesiyle toplam 9 adet bilinmeyen ortaya çıkar. Bu bilinmeyenler dokuz adet sınır koşuluyla çözülür.

Sınır Koşulu 1:

Kirişin tam orta noktasında 1.bölgedeki dönme sıfırdır.

$$v_1' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 B + m_2 D = 0 \quad (2.3.2.7)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin tam orta noktasında 1.bölgedeki kesme kuvveti sıfırdır.

$$v_1^m \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad -m_1^3 B - m_2^3 D = 0 \quad (2.3.2.8)$$

(2.3.2.7) ve (2.3.2.8) No’lu ifadeler kullanılıp katsayılar determinantı sıfıra eşitlenir ve denklemler çözülürse ;

$$B = D = 0 \quad \text{çıkarak.} \quad (2.3.2.9)$$

Sınır Koşulu 3:

Ayrılma noktasında birinci bölgedeki yer değiştirme sıfırdır.

$$v_1 \Big|_{\zeta=x} = 0 \quad \rightarrow \quad A \cos m_1 x + C \cos m_2 x = 0 \quad (2.3.2.10)$$

Sınır Koşulu 4:

Ayrılma noktasında ikinci bölgedeki yer değiştirme sıfırdır.

$$v_2 \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad E + H = 0 \quad (2.3.2.11)$$

Sınır Koşulu 5:

Ayrılma noktasında birinci bölgedeki dönme ikinci bölgedeki dönmeye eşittir.

$$v_1' \Big|_{\zeta=x} = v_2' \Big|_{\zeta=0} \rightarrow -A m_1 \sin m_1 x - C m_2 \sin m_2 x = F + G \sqrt{2} \lambda \quad (2.3.2.12)$$

Sınır Koşulu 6:

Ayrılma noktasında birinci bölgedeki eğilme momenti ikinci bölgedeki eğilme momentine eşittir.

$$v_1'' \Big|_{\zeta=x} = v_2'' \Big|_{\zeta=0} \rightarrow -A m_1^2 \cos m_1 x - C m_2^2 \cos m_2 x = -2\lambda^2 H \quad (2.3.2.13)$$

Sınır Koşulu 7:

Ayrılma noktasında birinci bölgedeki kesme kuvveti ikinci bölgedeki kesme kuvvetine eşittir.

$$v_1''' \Big|_{\zeta=x} = v_2''' \Big|_{\zeta=0} \rightarrow A m_1^3 \sin m_1 x + C m_2^3 \sin m_2 x = -2\sqrt{2} \lambda^3 G \quad (2.3.2.14)$$

Sınır Koşulu 8:

Elastik kirişin uç noktasında ikinci bölgedeki eğilme momenti sıfırdır.

$$v_2'''' \Big|_{\zeta=1-x} = 0 \rightarrow G \sin \sqrt{2}\lambda(1-x) + H \cos \sqrt{2}\lambda(1-x) = 0 \quad (2.3.2.15)$$

Sınır Koşulu 9:

Elastik kirişin uç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$v_2''' \Big|_{\zeta=1-x} = 0 \rightarrow G \cos \sqrt{2}\lambda(1-x) - H \sin \sqrt{2}\lambda(1-x) = 0 \quad (2.3.2.16)$$

(2.3.2.15) ve (2.3.2.16) da bulduğumuz denklemleri kullanır, katsayılar determinantını sıfıra eşitlersek ve çıkan eşitliği düzenlersek;

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{2}\lambda(1-x) & \cos \sqrt{2}\lambda(1-x) \\ \cos \sqrt{2}\lambda(1-x) & -\sin \sqrt{2}\lambda(1-x) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ve} \quad \sqrt{2}\lambda(1-x) = l \quad \text{dersek};$$

$$\sin^2 l + \cos^2 l = 0 \quad (2.3.2.17)$$

ifadesine ulaşılır ve bu ifadenin sağlanması mümkün olmadığından

$$G = H = 0 \quad \text{olmalıdır.} \quad (2.3.2.18)$$

(2.3.2.13) ve (2.3.2.14) de bulduğumuz denklemleri kullanır, katsayılar determinantını sıfıra eşitlersek ve çıkan eşitliği düzenlersek aşağıdaki ifadeye ulaşılır;

$$-\frac{m_2}{m_1} \tan m_2 x + \tan m_1 x = 0 \quad (2.3.2.19)$$

(2.3.2.10) ve (2.3.2.14) de bulduğumuz denklemleri kullanır, katsayılar determinantını sıfıra eşitlersek ve çıkan eşitliği düzenlersek;

$$-\frac{m_2^3}{m_1^3} \tan m_2 x + \tan m_1 x = 0 \quad (2.3.2.20)$$

ifadesini elde ederiz.

2.4. Basınç ve Çekmede Davranışı Farklı Olan Zemin Hali

Bu özel problemde, uç noktalarından P basınç kuvveti etkisindeki kirişin, yatak katsayısı basınç bölgesinde k_1 ve çekme bölgesinde k_2 olan elastik bir zemin üzerindeki burkulma durumu incelenmektedir. Elastik zemin basınç ve çekme bölgesi olarak ikiye ayrılmış ve bu bölgelerde çözüm yapılmıştır.

2.4.1. Basınç Bölgesi

2.3.1 bölümünde anlatılan bütün koşullar ve çözümler aynen burada da geçerlidir.

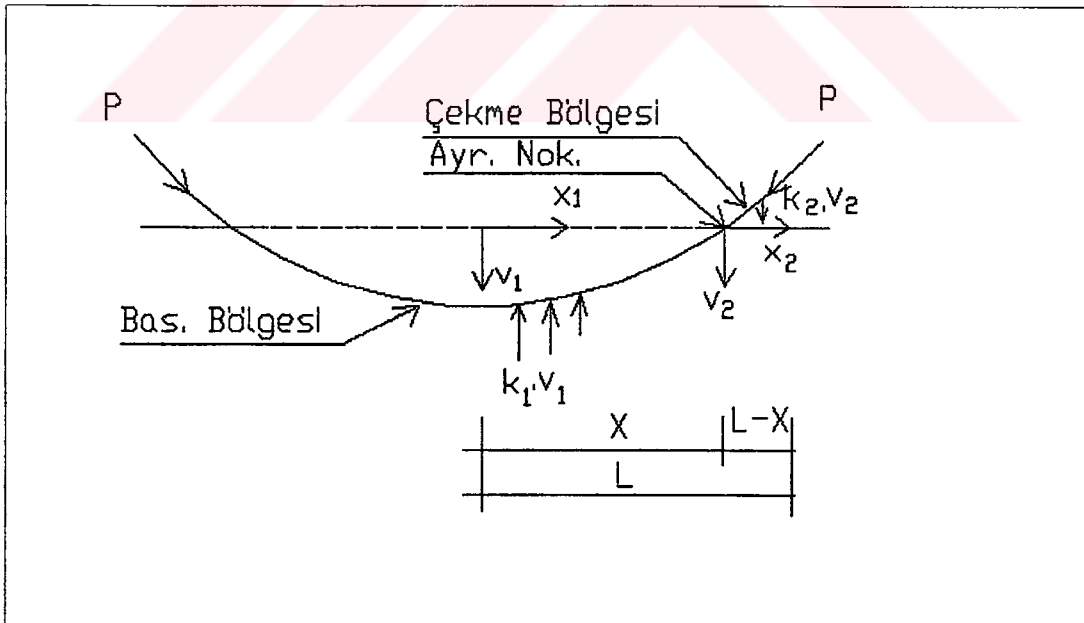
Yönetici denklem;

$$EI \bar{v}_1^{iv} + P \bar{v}_1'' + k v_1 = 0 \quad (2.4.1.1)$$

ve çözüm,

$$v_1 = A \cos m_1 \zeta + B \sin m_1 \zeta + C \cos m_2 \zeta + D \sin m_2 \zeta \quad (2.4.1.2)$$

A, B, C, D bilinmeyen katsayılarının yanında iki bölgenin birleşim noktasında da bir bilinmeyen daha vardır.



Şekil 2.4 Basınç ve çekmede davranışı farklı olan zemin hali

2.4.2. Çekme Bölgesi

Çekme bölgesinin uzunluğu $L-X$ dir ve sınırları aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$X \leq x_2 \leq L$$

$$0 \leq \zeta_1 \leq \frac{X}{L} \rightarrow \frac{X}{L} = \bar{x} \text{ dersek} \rightarrow 0 \leq \zeta_1 \leq \bar{x} \quad (2.4.2.1)$$

$$0 \leq \zeta_2 \leq \frac{L-X}{L} \rightarrow 0 \leq \zeta_2 \leq 1 - \bar{x}$$

“ x_2 ”, “ v_2 ”, “ k_2 ” ve “ ζ_2 ” Çekme Bölgesi notasyonlarını göstermektedir.

Yönetici denklem;

$$\bar{v}_2^{IV} + \frac{PL^2}{EI} \bar{v}_2'' - \frac{k_2 L^4}{EI} \bar{v}_2 = 0 \quad (2.4.2.2)$$

yönetici denklemde boyutsuzlaştırmalar uygulanırsa;

$$\bar{v}_2^{IV} + 2\lambda^2 \bar{v}_2'' - r_2^4 \bar{v}_2 = 0 \quad (2.4.2.3)$$

$\bar{v}_2 = e^{\beta \zeta_2}$ denirse ve (2.4.2.3) denkleminde türevler alınıp yerlerine konursa;

$$e^{\beta \zeta_2} (\beta^4 + 2\lambda^2 \beta^2 - r_2^4) = 0 \quad (2.4.2.4)$$

İfadesi bulunur ve (2.4.2.4) ifadesinin sıfır olabilmesi için parantez içerisindeki ifadenin sıfır olması gerekir.

$$\beta^4 + 2\lambda^2 \beta^2 - r_2^4 = 0 \rightarrow \beta_{1,3}^2 = -\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 + r_2^4} \quad (2.4.2.5)$$

(2.4.2.6) ifadesinin dikkatli incelenmesi durumunda ;

$$\sqrt{\lambda^4 + r_2^4} > \lambda^2 > 0$$

olduğu görülür ve denklem çözümünde sadece bir durum söz konusudur.

$$\beta_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + r_2^4}}, \quad \beta_{3,4} = \pm \sqrt{-\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 + r_2^4}} \quad (2.4.2.6)$$

ve $\bar{v}_2$ çökme ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\bar{v}_2 = E \cosh \beta_1 \zeta_2 + F \sinh \beta_1 \zeta_2 + G \cos \beta_3 \zeta_2 + H \sin \beta_3 \zeta_2 \quad (2.4.2.7)$$

E, F, G, H katsayılarının da eklenmesiyle toplam bilinmeyen 9 adet katsayı 9 adet sınır koşulu yardımıyla bulunur.

Sınır Koşulu 1:

Kirişin tam orta noktasında basınç bölgesindeki dönme sıfırdır.

$$\bar{v}_1' \Big|_{\zeta_1=0} = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 B + m_2 D = 0 \quad (2.4.2.8)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin tam orta noktasında basınç bölgesindeki kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}_1'' \Big|_{\zeta_1=0} = 0 \quad \rightarrow \quad -m_1^3 B - m_2^3 D = 0 \quad (2.4.2.9)$$

(2.4.2.8) ve (2.4.2.9) No'lu ifadeleri kullanılarak katsayılar determinantı sıfıra eşitlenirse ve denklemler çözülürse ;

$$B = D = 0 \text{ çıkar.} \quad (2.4.2.10)$$

Sınır Koşulu 3:

Ayrılma noktasında basınç bölgesindeki yer değiştirme sıfırdır.

$$\bar{v}_1 \Big|_{\zeta_1=\bar{x}} = 0 \quad \rightarrow \quad A \cos m_1 \bar{x} + C \cos m_2 \bar{x} = 0 \quad (2.4.2.11)$$

Sınır Koşulu 4:

Ayrılma noktasında çekme bölgesindeki yer değiştirme sıfırdır.

$$\bar{v}_2 \Big|_{\zeta_2=0} = 0 \quad \rightarrow \quad E + G = 0 \quad \rightarrow \quad E = -G \quad (2.4.2.12)$$

Sınır Koşulu 5:

Ayrılma noktasında basınç bölgesindeki dönme çekme bölgesindeki dönmeye eşittir.

$$\bar{v}_1' \Big|_{\zeta_1=\bar{x}} = \bar{v}_2' \Big|_{\zeta_2=0} \rightarrow -A m_1 \sin m_1 \bar{x} - C m_2 \sin m_2 \bar{x} = F \beta_1 + H \beta_3 \quad (2.4.2.13)$$

Sınır Koşulu 6:

Ayrılma noktasında basınç bölgesindeki eğilme momenti çekme bölgesindeki eğilme momentine eşittir.

$$\bar{v}_1'' \Big|_{\zeta=\bar{x}} = \bar{v}_2'' \Big|_{\zeta=0} \rightarrow -A m_1^2 \cos m_1 \bar{x} - C m_2^2 \cos m_2 \bar{x} = E \beta_1^2 - G \beta_3^2 \quad (2.4.2.14)$$

$$= -(\beta_1^2 + \beta_3^2)G$$

Sınır Koşulu 7:

Ayrılma noktasında basınç bölgesindeki kesme kuvveti çekme bölgesindeki kesme kuvvetine eşittir.

$$\bar{v}_1''' \Big|_{\zeta=\bar{x}} = \bar{v}_2''' \Big|_{\zeta=0} \rightarrow A m_1^3 \sin m_1 \bar{x} + C m_2^3 \sin m_2 \bar{x} = F \beta_1^3 - H \beta_3^3 \quad (2.4.2.15)$$

Sınır Koşulu 8:

Elastik kirişin uç noktasında çekme bölgesindeki eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}_2'' \Big|_{\zeta=1-\bar{x}} = 0$$

$$E \beta_1^2 \cosh \beta_1(1-\bar{x}) + F \beta_1^2 \sinh \beta_1(1-\bar{x}) - G \beta_3^2 \cos \beta_3(1-\bar{x}) - H \beta_3^2 \sin \beta_3(1-\bar{x}) = 0 \quad (2.4.2.16)$$

Sınır Koşulu 9:

Elastik kirişin uç noktasında çekme bölgesindeki kesme kuvveti sıfırdır.

$$\left. \bar{v}_2'' \right|_{\zeta=1-\bar{x}} = 0$$

$$E \beta_1^3 \sinh \beta_1(1-\bar{x}) + F \beta_1^3 \cosh \beta_1(1-\bar{x}) + G \beta_3^3 \sin \beta_3(1-\bar{x}) - H \beta_3^3 \cos \beta_3(1-\bar{x}) = 0 \quad (2.4.2.17)$$

Bu dokuz koşul homojen bir denklem takımı oluşturmaktadır. Bu denklemlerden “ $\bar{x}$ ve λ ” parametreleri hesaplanacaktır.

(2.4.2.11) ifadesinden “ A ” çekilir ve denklem düzenlenirse;

$$A = -C \frac{\cos m_2 \bar{x}}{\cos m_1 \bar{x}} \quad (2.4.2.18)$$

(2.4.2.13 ve (2.4.2.15) ifadelerinden;

$$F = C \frac{1}{\beta_1(\beta_1^2 + \beta_3^2)} \{-m_1(m_1^2 - \beta_3^2) \cos m_2 \bar{x} \tan m_1 \bar{x} + m_2(m_2^2 - \beta_3^2) \sin m_2 \bar{x}\} \quad (2.4.2.19)$$

$$H = C \frac{1}{\beta_3(\beta_1^2 + \beta_3^2)} \{m_1(m_1^2 + \beta_1^2) \cos m_2 \bar{x} \tan m_1 \bar{x} - m_2(m_2^2 + \beta_1^2) \sin m_2 \bar{x}\} \quad (2.4.2.20)$$

ifadeleri bulunur.

(2.4.2.14) ifadesinde “ A ” yerine (2.4.2.18) ifadesi konursa ve (2.4.2.14) ifadesi yeniden düzenlenir “ G ”de çekilirse aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$G = -C \frac{1}{(\beta_1^2 + \beta_3^2)} (m_1^2 - m_2^2) \cos m_2 \bar{x} \quad (2.4.2.21)$$

(2.4.2.12) ifadesinden “ E ” çekilirse (2.4.2.22) ifadesi bulunur.

$$E = C \frac{1}{(\beta_1^2 + \beta_3^2)} (m_1^2 - m_2^2) \cos m_2 \bar{x} \quad (2.4.2.22)$$

(2.4.2.19), (2.4.2.20), (2.4.2.21) ve (2.4.2.22) ifadelerinden “ F, H, G, E ” çekilir ve (2.4.2.16) ile (2.4.2.17) ifadelerinde her biri yerlerine konursa ve çıkan denklemler düzenlenirse bu özel problem için geçerli olan iki ana denklem bulunur.

$$\begin{aligned} & (m_1^2 - m_2^2) \beta_1^2 \cosh \beta_1 (1 - \bar{x}) + \beta_1 \sinh \beta_1 (1 - \bar{x}) \left(-m_1 (m_1^2 - \beta_3^2) \tan m_1 \bar{x} + m_2 (m_2^2 - \beta_3^2) \tan m_2 x \right) + \\ & (m_1^2 - m_2^2) \beta_3^2 \cos \beta_3 (1 - \bar{x}) + \beta_3 \sin \beta_3 (1 - \bar{x}) \left(-m_1 (m_1^2 + \beta_1^2) \tan m_1 \bar{x} + m_2 (m_2^2 + \beta_1^2) \tan m_2 \bar{x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.2.23)$$

$$\begin{aligned} & (m_1^2 - m_2^2) \beta_1^3 \sinh \beta_1 (1 - \bar{x}) + \beta_1^2 \cosh \beta_1 (1 - \bar{x}) \left(-m_1 (m_1^2 - \beta_3^2) \tan m_1 \bar{x} + m_2 (m_2^2 - \beta_3^2) \tan m_2 x \right) \\ & - (m_1^2 - m_2^2) \beta_3^3 \sin \beta_3 (1 - \bar{x}) + \beta_3^2 \cos \beta_3 (1 - \bar{x}) \left(-m_1 (m_1^2 + \beta_1^2) \tan m_1 \bar{x} - m_2 (m_2^2 + \beta_1^2) \tan m_2 \bar{x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.2.24)$$

2.5. Homojen Olmayan Elastik Zemin Hali

Bu özel problemde, zeminin yatak katsayısının çubuk uzunluğu boyunca değişken olması hali incelenmiştir. k ’nın x ’e göre değişimi aşağıda iki şekilde ele alınmıştır. Özel Durum I’de değişimin lineer olması hali ve Özel Durum II’de değişimin karesel olması hali ele alınıp incelenmiştir.

2.5.1 Özel Durum I: $k(x) = k_0 (1 + ax)$

Bu özel problemde, zemin yatak katsayısının çubuk uzunluğu boyunca değişimi aşağıdaki şekilde alınarak bir çözüm yapılmıştır.

$$k(x) = k_0 (1 + ax) \quad (2.5.1.1)$$

yukarıdaki ifadede k_0 başlangıçtaki yatak katsayısını ve a 'da değişim oranını göstermektedir. Yönetici denklem aşağıdaki şekilde yazılır.

$$EI v^{IV} + P v'' + k_0 (1 + ax) v = 0 \quad (2.5.1.2)$$

denklemini basitleştirmek için aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırmalar yapılırsa;

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v / v_0, & \zeta &= \frac{x}{L} \quad (0 \leq \zeta \leq 1) & \bar{\beta} &= a L \\ \lambda &= \frac{PL^2}{EI} & r &= \frac{k_0 L^4}{EI} \end{aligned} \quad (2.5.1.3)$$

ve bu boyutsuzlaştırmalar yönetici denklemde yerlerine yazılırsa ve denklem düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\bar{v}^{IV} + \lambda \bar{v}'' + r(1 + \bar{\beta}\zeta) \bar{v} = 0 \quad (2.5.1.4)$$

(2.5.1.4) diferansiyel denklemi değişken katsayılı bir denklem olduğu için bu diferansiyel denklemin kesin çözümü yapılamamaktadır. Bu nedenle yaklaşık çözüm yapılmıştır [22].

Kuvvet Serisi Yardımıyla Çözüm:

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \quad \text{dersek;} \quad (2.5.1.5)$$

ve yukarıdaki ifadenin türevleri alınıp karakteristik denklemde uygun yerlerine konursa;

$$\sum_{n=4}^{\infty} A_n n(n-1)(n-2)(n-3)\zeta^{n-4} + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} A_n n(n-1)\zeta^{n-2} + r \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n +$$

$(n = n+5) \qquad \qquad \qquad (n = n+3) \qquad \qquad \qquad (n = n+1)$

$$r\bar{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{n+1} = 0 \quad (2.5.1.6)$$

$(n = n)$

(2.5.1.6) ifadesine ulaşılır. Bu ifade de ilk terimde $n \rightarrow n+5$, ikinci terimde $n \rightarrow n+3$, üçüncü terimde $n \rightarrow n+1$, dördüncü terimde $n \rightarrow n$ konulup düzenleme yapılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{A_{n+5} (n+5)(n+4)(n+3)(n+2) + \lambda A_{n+3} (n+3)(n+2) + rA_{n+1} + r\bar{\beta}A_n\} \zeta^{n+1} = 0 \quad (2.5.1.7)$$

ifadesi elde edilir.

$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ serbest değişkenler olmak üzere

Rekürans Formülü:

$$A_{n+5} = -\frac{\lambda}{(n+5)(n+4)} A_{n+3} - \frac{r}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} A_{n+1} - \frac{r\bar{\beta}}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} A_n \quad (2.5.1.8)$$

olarak elde edilir.

Çözüm:

Çökme ifadesinin tanımı (2.5.1.5) ifadesinde yapılmıştı ve bu ifadenin biraz açılıp incelenmesiyle arka sayfadaki çökme ifadesine ulaşılır.,

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n = A_0 + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \dots + A_n \zeta^n + \dots \quad (2.5.1.9)$$

Serbest Kiriş Durumu

Sınır Koşulları

Rekürans bağıntısıyla bulunan katsayılar arasındaki ilişkinin daha sade olarak elde edilmesi nedeniyle öncelikle $x = 0$ 'daki sınır koşulları kullanılmıştır.

Sınır Koşulu 1:

Kirişin tam orta noktasında dönme sıfırdır.

$$\bar{v}' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0 \quad (2.5.1.10)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin tam orta noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}''' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad A_3 = 0 \quad \text{bulunur.} \quad (2.5.1.11)$$

(2.5.1.6) ifadesinde $n = 4$ için ζ^0 'ın katsayısı sıfıra eşitlenirse " A_4 " katsayısı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$A_4 = -\frac{\lambda}{12} A_2 - \frac{r}{4!} A_0 \quad (2.5.1.12)$$

Rekürans formülünde (2.5.1.8), $n = 0,1,2,3,\dots$ alınarak katsayılar " A_0 ve A_2 " cinsinden bulunabilir. $A_5, \dots, A_{10}$ katsayılarının A_0 ve A_2 cinsinden değerleri arka sayfada verilmiştir.

$$n = 0 \rightarrow A_5 = -\frac{r\bar{\beta}}{5!} A_0 \quad (2.5.1.13)$$

$$n = 1 \rightarrow A_6 = \frac{\lambda^2 - r}{6.5.4.3} A_2 + \frac{\lambda r}{6!} A_0 \quad (2.5.1.14)$$

$$n = 2 \rightarrow A_7 = -\frac{r\bar{\beta}}{7.6.5.4} A_2 + \frac{\lambda r\bar{\beta}}{7!} A_0 \quad (2.5.1.15)$$

$$n = 3 \rightarrow A_8 = \frac{2\lambda.r - \lambda^3}{8.7.6.5.4.3} A_2 - \frac{\lambda^2 r - r^2}{8!} A_0 \quad (2.5.1.16)$$

$$n = 4 \rightarrow A_9 = \frac{6\lambda.r\bar{\beta}}{9.8.7.6.5.4.3} A_2 + \frac{6r^2\bar{\beta} - \lambda^2 r\bar{\beta}}{9!} A_0 \quad (2.5.1.17)$$

$$n = 5 \rightarrow A_{10} = -\frac{3\lambda^2 r + \lambda^4 + r^2}{10.9.8.7.6.5.4.3} A_2 + \frac{\lambda^3 r - 2\lambda r^2 + 6r^2\bar{\beta}}{10!} A_0 \quad (2.5.1.18)$$

Bu katsayılar istenildiği kadar bulunabilir. Şimdi (2.5.1.9) daki çökme ifadesi aşağıdaki şekilde düzenlenirse.

$$\bar{v} = A_0 + A_2 \zeta^2 + \sum_{n=4}^{\infty} A_n \zeta^n \quad (2.5.1.19)$$

ifadelerine ulaşılır. (2.5.1.10) ve (2.5.1.18) arasındaki ifadelerin incelenmesi durumunda $n \geq 4$ için A_n katsayısını $A_n = A_2 g_n(n, \lambda, r, \bar{\beta}) + A_0 h_n(n, \lambda, r, \bar{\beta})$ olarak iki parçaya ayrılabilir. Bu durumda (2.5.1.19) ifadesi;

$$\bar{v} = A_0 + A_2 \zeta^2 + \sum_{n=4}^{\infty} \{A_2 g_n(n, \lambda, r, \bar{\beta}) + A_0 h_n(n, \lambda, r, \bar{\beta})\} \zeta^n \quad (2.5.1.20)$$

veya

$$\bar{v} = \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} h_n \zeta^n \right) A_0 + \left(\zeta^2 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n \zeta^n \right) A_2 \quad (2.5.1.21)$$

olarak elde edilir. Bundan sonra diğer sınır koşullarını kullanarak A_0 ve A_2 katsayıları veya burkulma koşulları bulunacaktır.

Sınır Koşulu 3:

Kirişin uç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}''_{(\zeta=1)} = 0 \rightarrow \left(\sum_{n=4}^{\infty} h_n n(n-1) \right) A_0 + \left(2 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n n(n-1) \right) A_2 = 0 \quad (2.5.1.22)$$

Sınır Koşulu 4:

Kirişin uç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}'''_{(\zeta=1)} = 0 \rightarrow \left(\sum_{n=4}^{\infty} h_n n(n-1)(n-2) \right) A_0 + \left(\sum_{n=4}^{\infty} g_n n(n-1)(n-2) \right) A_2 = 0 \quad (2.5.1.23)$$

(2.5.1.22) ve (2.5.1.23) ifadeleri kullanılıp katsayılar determinantın sıfıra eşitlenirse;

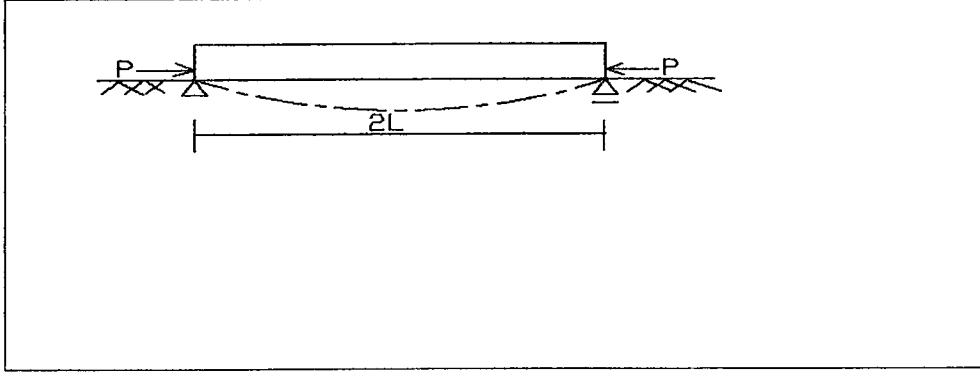
$$\sum_{n=4}^N n(n-1) h_n \sum_{n=4}^N n(n-1)(n-2) g_n - \sum_{n=4}^N n(n-1)(n-2) h_n \left(2 + \sum_{n=4}^N n(n-1) g_n \right) = 0 \quad (2.5.1.24)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdan “ r ve $\bar{\beta}$ ” seçilerek λ (burkulma yükü çarpanı) hesaplanacaktır.

Bağlı Kiriş Durumu

Sınır Koşulları

Rekürans bağıntısıyla bulunan katsayılar arasındaki ilişkinin daha sade olarak elde edilmesi nedeniyle öncelikle $x = 0$ 'daki sınır koşulları kullanılmıştır.



Şekil 2.5 Bağlı kiriş durumu

Sınır Koşulu 1:

Kirişin tam orta noktasında dönme sıfırdır.

$$\bar{v}' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad A_1 = 0 \quad (2.5.1.25)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin tam orta noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}'' \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad \rightarrow \quad A_3 = 0 \quad \text{bulunur.} \quad (2.5.1.26)$$

Sınır koşulu 1 ve sınır koşulu 2 yardımıyla çökme ifadesi yeniden düzenlenirse serbest kiriş halinde (2.5.1.21) ifadesiyle bulduğumuz çökme ifadesine ulaşılır. Bu ifade yardımıyla sınır koşulu 3 ve sınır koşulu 4 aşağıdaki şekilde bulunur.

Sınır Koşulu 3:

Kirişin uç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}''_{(\zeta=1)} = 0 \rightarrow \left(\sum_{n=4}^{\infty} h_n n(n-1) \right) A_0 + \left(2 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n n(n-1) \right) A_2 = 0 \quad (2.5.1.27)$$

Sınır Koşulu 4:

Kirişin uç noktasında çökme sıfırdır.

$$\bar{v}_{(\zeta=1)} = 0 \rightarrow \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} h_n \right) A_0 + \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n \right) A_2 = 0 \quad (2.5.1.28)$$

(2.5.1.27) ve (2.5.1.28) ifadeleri kullanılarak katsayılar determinantı sıfıra eşitlenirse;

$$\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)h_n \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n \right) - \left(2 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)g_n \right) \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} h_n \right) = 0 \quad (2.5.1.29)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntıdan “ r ve $\bar{\beta}$ ” seçilerek λ (burkulma yükü çarpanı) hesaplanacaktır.

2.5.2 Özel Durum II: $k(x) = k_0(1 + ax^2)$

Bu özel problemde, zemin yatak katsayısının çubuk uzunluğu boyunca değişimi karesel bir şekilde alınmış ve (2.5.1.3) deki boyutsuzlaştırmalar yapılarak karakteristik denklem aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$\bar{v}^{IV} + \lambda \bar{v}'' + r(1 + \bar{\beta}\zeta^2) \bar{v} = 0 \quad (2.5.2.1)$$

yukarıdaki diferansiyel denklemin değişken katsayılı bir denklem olması nedeniyle kuvvet serisi kullanılarak yaklaşık çözüm yapılmıştır.

Kuvvet Serisi Yardımıyla Çözüm:

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \quad \text{dersek;} \quad (2.5.2.2)$$

ve yukarıdaki ifadenin türevleri alınıp karakteristik denklemde uygun yerlerine konursa;

$$\begin{aligned} \sum_{n=4}^{\infty} A_n n(n-1)(n-2)(n-3) \zeta^{n-4} + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} A_n n(n-1) \zeta^{n-2} + r \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \\ (n = n+6) \qquad \qquad \qquad (n = n+4) \qquad \qquad \qquad (n = n+2) \\ + r \bar{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{n+2} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.2.3)$$

(n = n)

yukarıdaki ifadeye ulaşılır. bu ifadede ilk terimde $n \rightarrow n+6$, ikinci terimde $n \rightarrow n+4$, üçüncü terimde $n \rightarrow n+2$ ve dördüncü terimde $n \rightarrow n$ konulup düzenleme yapılırsa;

Rekürans Formülü:

$$A_{n+6} (n+6)(n+5)(n+4)(n+3) + \lambda A_{n+4} (n+4)(n+3) + r A_{n+2} + r \bar{\beta} A_n = 0 \quad (2.5.2.4)$$

elde edilir.

A_0, A_1, A_2, A_3 serbest değişkenler olmak üzere (2.5.2.3) ifadesinden A_4 ve A_5 değişkenleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$A_4 = -\frac{\lambda}{12} A_2 - \frac{r}{24} A_0 \quad (2.5.2.5)$$

$$A_5 = -\frac{\lambda}{20} A_3 - \frac{r}{120} A_1 \quad (5.5.2.6)$$

Serbest Kiriş Durumu

Sınır Koşulları

Rekürans bağıntısıyla bulunan katsayılar arasındaki ilişkinin daha sade olarak elde edilmesi nedeniyle öncelikle $x = 0$ 'daki sınır koşulları kullanılmıştır.

Sınır Koşulu 1:

Kirişin tam orta noktasında dönme sıfırdır.

$$\left. \bar{v}' \right|_{\zeta=0} = 0 \rightarrow A_1 = 0 \quad (2.5.2.7)$$

Sınır Koşulu 2:

Kirişin tam orta noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\left. \bar{v}'' \right|_{\zeta=0} = 0 \rightarrow A_3 = 0 \text{ bulunur.} \quad (2.5.2.8)$$

yukarıdaki sonuçları kullandığımızda (2.5.2.6) ifadesinde bulduğumuz $A_5 = 0$ çıkar. Rekürans Formülünde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ alındığında bütün tek sayılı serbest değişkenlerin sıfır olduğu ve çift sayılı serbest değişkenlerinde “ A_0 ve A_2 ” cinsinden ifade edilebildiği görülmüştür. Çökme ifadesi aşağıdaki şekillerde yazılabilir;

$$\bar{v} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \zeta^{2k} \quad \text{veya} \quad (2.5.2.9)$$

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^n \quad \text{n çift sayı olmak üzere}$$

A_n katsayısını $A_n = A_2 g_n(n, \lambda, r, \bar{\beta}) + A_0 h_n(n, \lambda, r, \bar{\beta})$ olarak iki parçaya ayrılabilir.

Bu durumda (2.5.2.9) ifadesi;

$$\bar{v} = A_0 + A_2 \zeta^2 + \sum_{n=4}^{\infty} \{A_2 g_n(n, \lambda, r, \bar{\beta}) + A_0 h_n(n, \lambda, r, \bar{\beta})\} \zeta^n \quad (2.5.2.10)$$

$$\bar{v} = \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} h_n \zeta^n\right) A_0 + \left(\zeta^2 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n \zeta^n\right) A_2 \quad (2.5.2.11)$$

olarak elde edilir. Bundan sonra diğer sınır koşulları kullanılarak A_0 ve A_2 katsayıları ve burkulma koşulları bulunacaktır.

Sınır Koşulu 3:

Kirişin uç noktasında eğilme momenti sıfırdır.

$$\bar{v}''_{(\zeta=1)} = 0 \rightarrow \left(\sum_{n=4}^{\infty} h_n n(n-1)\right) A_0 + \left(2 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n n(n-1)\right) A_2 = 0 \quad (2.5.2.12)$$

Sınır Koşulu 4:

Kirişin uç noktasında kesme kuvveti sıfırdır.

$$\bar{v}'''_{(\zeta=1)} = 0 \rightarrow \left(\sum_{n=4}^{\infty} h_n n(n-1)(n-2)\right) A_0 + \left(\sum_{n=4}^{\infty} g_n n(n-1)(n-2)\right) A_2 = 0 \quad (2.5.2.13)$$

(2.5.2.12) ve (2.5.2.13) ifadelerini kullanıp katsayılar determinantı sıfıra eşitlenirse;

$$\sum_{n=4}^N n(n-1) h_n \sum_{n=4}^N n(n-1)(n-2) g_n - \sum_{n=4}^N n(n-1)(n-2) h_n \left(2 + \sum_{n=4}^N n(n-1) g_n\right) = 0 \quad (2.5.2.14)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıdan “ r ve $\bar{\beta}$ ” seçilerek λ (burkulma yükü çarpanı) hesaplanacaktır.

Bağlı Kiriş Durumu

Özel Durum I bölümünde bağlı kiriş için bulunan tüm ifadeler, n çift sayı olmak üzere burada da aynen kullanılabilir.



3. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, ikinci bölümde elde edilen denklem takımlarının çözümü yapılarak sonuçlar tablolar ve grafikler yardımıyla verilmiştir. Bu denklem takımlarının sayısal çözümleri ve grafiksel gösterimleri MathCAD ve Matematica programları kullanılarak yapılmıştır.

3.1. Homojen Elastik Zeminin Çekme ve Basınç Alması Hali

İkinci bölümde (2.2.14) ile bulunan ifadede, denklemin kederini karekök içerisindeki terimin belirlediği söylenmiş ve bunun için de üç durum belirlenmişti. Burada bu üç durum için elde edilen burkulma koşullarının ayrı ayrı çözümleri yapılmış ve bu çözümler aşağıda sayısal ve grafiksel olarak sunulmuştur.

3.1.1. Durum I: $\lambda > r$

(2.2.1.14) ifadesinde Durum I için bulunan burkulma koşulu aşağıdadır.

$$\tan m_2 - \frac{m_1}{m_2} \tan m_1 = 0 \quad (3.1.1.1)$$

yukarıdaki denklemde m_1 ve m_2 değerleri yerlerine konup, çıkan ifade incelenirse aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$F(\lambda) = \tan \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4}} - \frac{\sqrt{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4}}}{\sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4}}} \tan \sqrt{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4}} = 0 \quad (3.1.1.2)$$

yukarıdaki bağıntıda “r” parametresi seçilerek “λ” burkulma çarpanı hesaplanacaktır. Değişik “r” değerleri için (3.1.1.2) ifadesinden elde edilen en küçük “λ” kökleri Tablo 3.1’de verilmiştir.

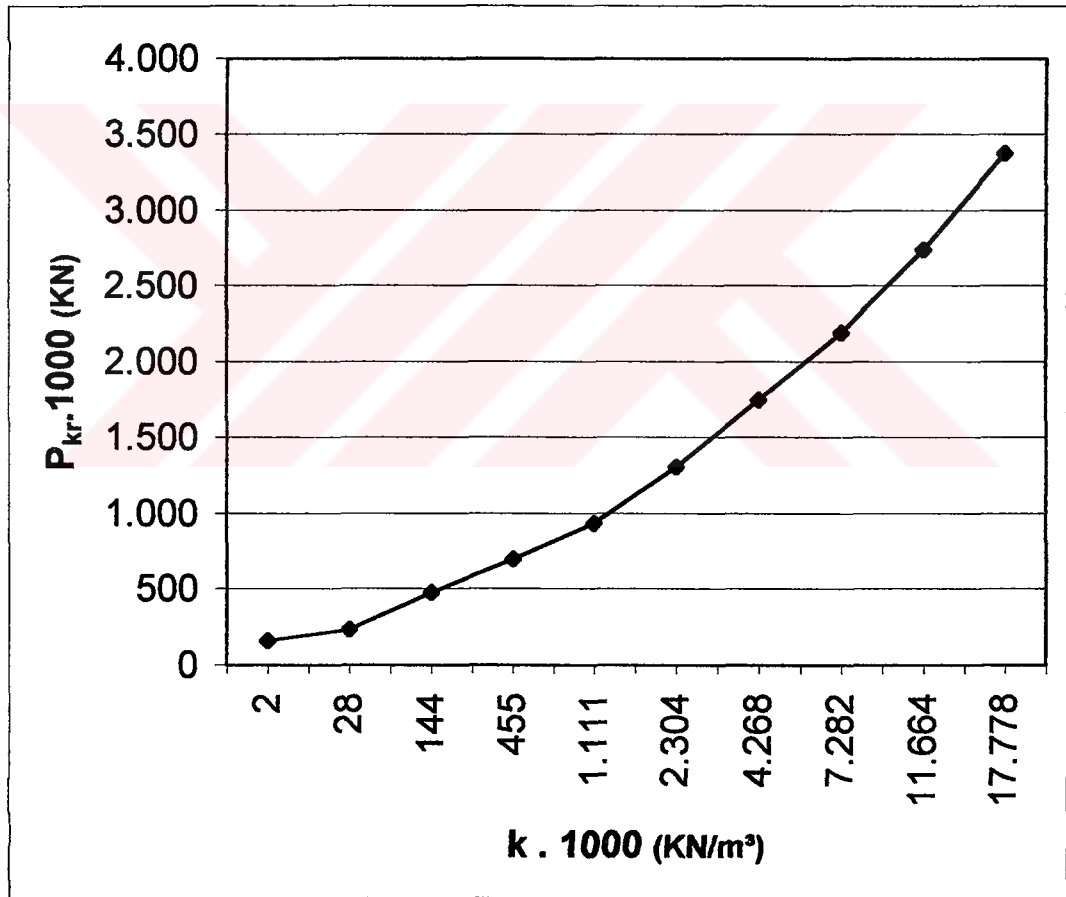
Tablo 3.1 $\lambda > r$ hali için bulunan λ ve r değerleri

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	2,25	2,70	3,86	4,67	5,41	6,39	7,39	8,28	9,25	10,27

Örnek 3.1.1: 40/60 kesitinde $2L = 6$ m boyunda bir betonarme kirişin, Elastisite modülü $E = 2.10^7$ KN/m² , $r = 1$ ve $\lambda = 2,25$ için P_{kr} değeri hesaplanırsa;

$$EI = 144.10^3 \text{ KN.m}^2$$

$$P_{kr} = 2\lambda^2 \frac{EI}{L^2} = 2.2,25^2 \cdot \frac{144.10^3}{9} \cong 162000 \text{ KN}$$



Şekil 3.1 Elastisite modülü $E = 2.10^7$ KN/m² olan 40/60 kesitindeki $2L = 6$ m uzunluğundaki bir kirişin “ k ve P_{kr} ” arasındaki ilişkisi

3.1.2. Durum II: $\lambda = r$

(2.2.2.13) ifadesinde Durum II için bulunan burkulma koşulu aşağıdadır.

$$\sin 2\lambda = -2\lambda$$

yukarıdaki burkulma koşulunu incelediğinde " $\lambda > 0$ " için gerçel kök elde edilemeyeceği aşıkardır. Dolayısıyla Durum II için bir çözüm yoktur.

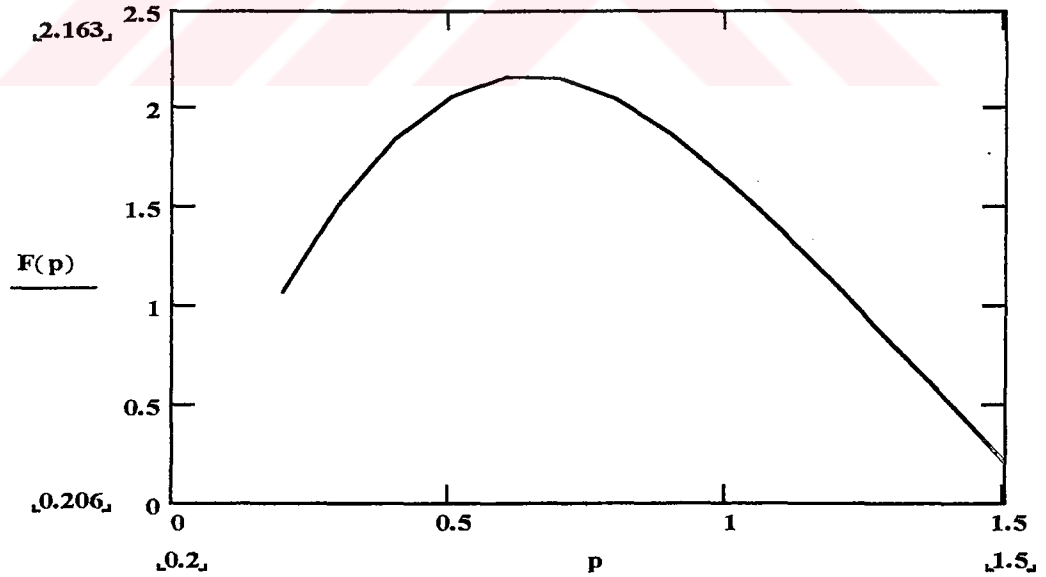
3.1.3. Durum III: $\lambda < r$

(2.2.3.33) ifadesinde Durum III için bulunan burkulma koşulu ve bu koşulun hangi şartları sağlaması gerektiği aşağıdadır.

$$\sin p \sinh(2r \cos p) + \cos p \sin(2r \sin p) = 0$$

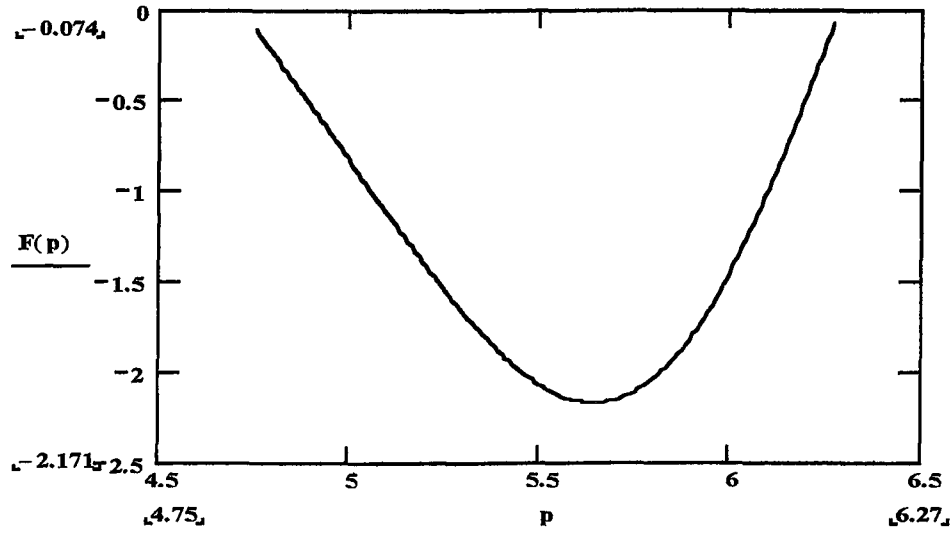
$$0 < \cos 2p < 1$$

olmalı ve $\cos 2p$ ancak I ve IV bölgelerde pozitif olur. Burada da yine " r " parametresi seçilerek (2.2.3.33) ifadesinden öncelikle " p " bulunacak ve buradan da " λ " burkulma çarpanına geçilecektir.



Şekil 3.2 Durum III : $\lambda < r$ ve $\lambda > 0$ için bulunan karakteristik fonksiyonunun

$$0 < p < \frac{\pi}{2} \text{ I. Bölge ve } r = 1 \text{ için bulunan çözüm grafiği}$$



Şekil 3.3 Durum III : $\lambda < r$ ve $\lambda > 0$ için bulunan karakteristik fonksiyonunun

$$\frac{3\pi}{2} < p < 2\pi \quad \text{IV Bölge ve } r = 1 \text{ için bulunan çözüm grafiği}$$

Şekil 3.4 ve 3.5 incelenirse fonksiyonun tanımlanmış aralıkların hiçbirinde sıfırdan geçmediği görülür. Burkulma koşulunu $r = 2.3.4...$ için dahi çözüldüğünde $\lambda < r$ ve $\lambda > 0$ için gerçel bir kök bulunamamıştır. Bu yüzden Durum III için de bir çözüm Yoktur.

Özetlersek, homojen elastik zeminin çekme ve basınç alması halinde tek çözüm Durum I için $\lambda > r$ için bulunmuştur.

3.2. Homojen Elastik Zeminin Sadece Basınç Alması Hali

Bölüm 2.3. de bu özel denklemin çözümü yapıldığında (2.3.2.19) ve (2.3.2.20) ifadeleriyle elde edilen iki adet burkulma koşulu bulunmuştu..

$$-\frac{m_2}{m_1} \tan m_2 x + \tan m_1 x = 0$$

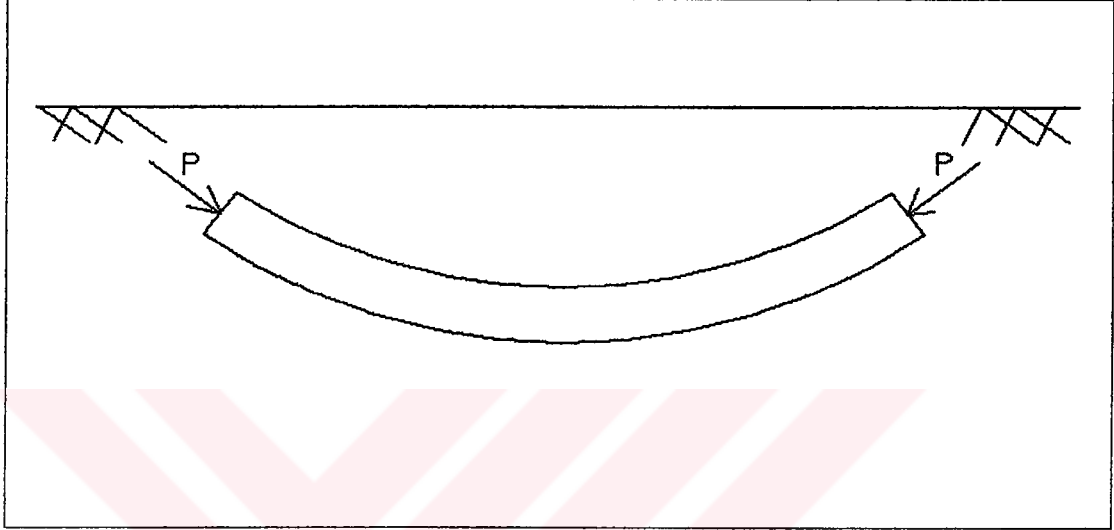
$$-\frac{m_2^3}{m_1^3} \tan m_2 x + \tan m_1 x = 0$$

Bir önceki sayfadaki burkulma koşullarının sağlanabilmesi için tek şart

$$m_1 = m_2 \quad \text{olmalıdır.} \quad (3.2.1)$$

$$\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - r^4} = \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - r^4} \quad (3.2.2)$$

(3.2.2) ifadesinin gerçekleşebilmesi için $\lambda = r$ olmalı fakat $\lambda > r$ olduğundan bu durumda bir çözüm yoktur. Kirişin tamamen zemine gömüldüğü ve ayrılma noktası olmadığı tahmininde bulunulabilir.



Şekil 3.4 Sadece basınç alan Elastik Zemin üzerindeki kirişin tamamen zemine gömülmesi durumu

3.3. Basınç ve Çekmede Davranışı Farklı Olan Zemin Hali

Bölüm 2.4. de bu özel denklemin çözümü yapıldığında (2.4.2.23) ve (2.4.2.24) ifadeleriyle iki adet burkulma koşulu bulunmuştu. Bu iki denklemde

$$“m_1, m_2, \beta_1 \text{ ve } \beta_3” \text{ ifadeleri yerlerine yazılırsa ve } \frac{k_2}{k_1} = 0.5 \rightarrow r_2^4 = 0.5r_1^4$$

olarak alınırsa, yukarıdaki denklemler “ λ , $\bar{x}$, ve r_1 ” ifadelerine bağlı olarak karşımıza çıkar. İfadelerdeki “ r_1 ” ifadesinin değeri seçilerek “ λ ve $\bar{x}$ ” değerleri yukarıdaki iki denklem çözülerek elde edilecektir.

Değişik r_1 değerleri için çözümler ;

$$r_1 = 1 \text{ olarak seçilirse} \quad \lambda = 0,661128 - 0,606549i \quad \text{ve} \quad \bar{x} = 1,22725 + 0,263502i$$

$$r_1 = 1,5 \text{ olarak seçilirse} \quad \lambda = 0,844142 + 0,0798958i \quad \text{ve} \quad \bar{x} = 0,467688 + 0,688829i$$

$$r_1 = 2 \text{ olarak seçilirse} \quad \lambda = 1,05045 + 0,101065i \quad \text{ve} \quad \bar{x} = 0,875878 + 0,0332823i$$

Yukarıdaki çözümler Matematica programında FindRoot fonksiyonu yardımıyla yapılmıştır ve çözümlerin hiçbirinde gerçel köke rastlanmamıştır. Dolayısıyla bu özel problem için de bir çözüm söz konusu değildir. Kiriş tamamıyla zemine gömülmüş olabilir.

3.4. Homojen Olmayan Elastik Zemin Hali

3.4.1 Özel Durum I

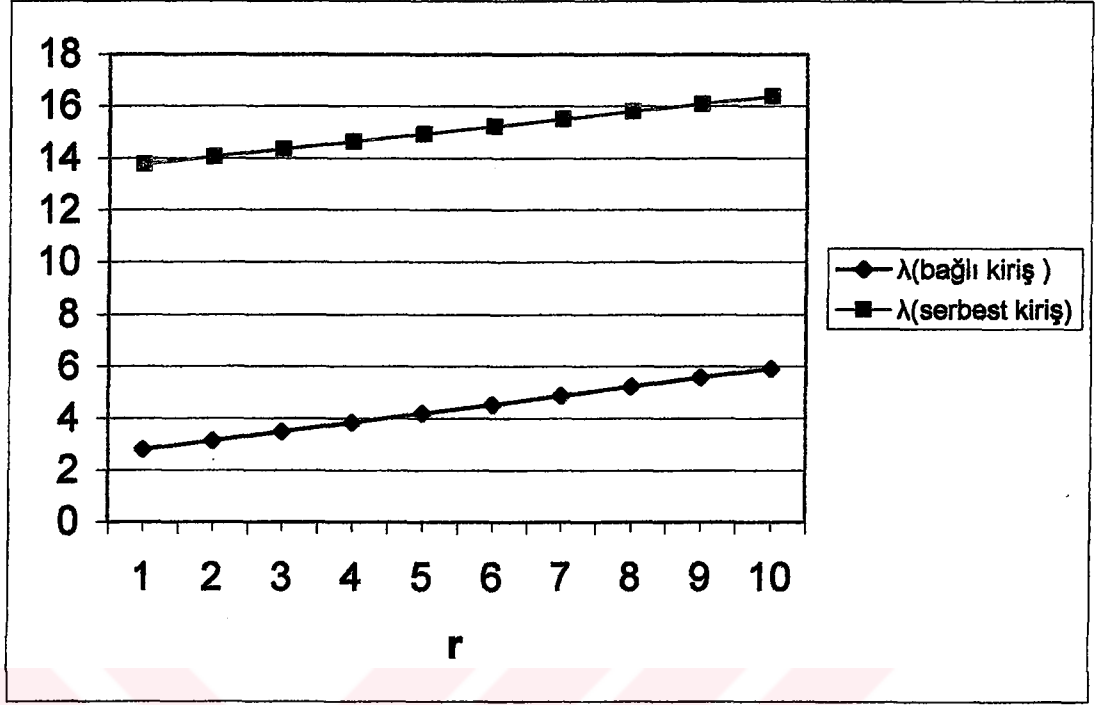
Bölüm 2.5.1 de serbest kiriş durumu için çözüm yapıldığında aşağıdaki ifade bulunmuş

$$\sum_{n=4}^N n(n-1) h_n \sum_{n=4}^N n(n-1)(n-2) g_n - \sum_{n=4}^N n(n-1)(n-2) h_n \left(2 + \sum_{n=4}^N n(n-1) g_n \right) = 0$$

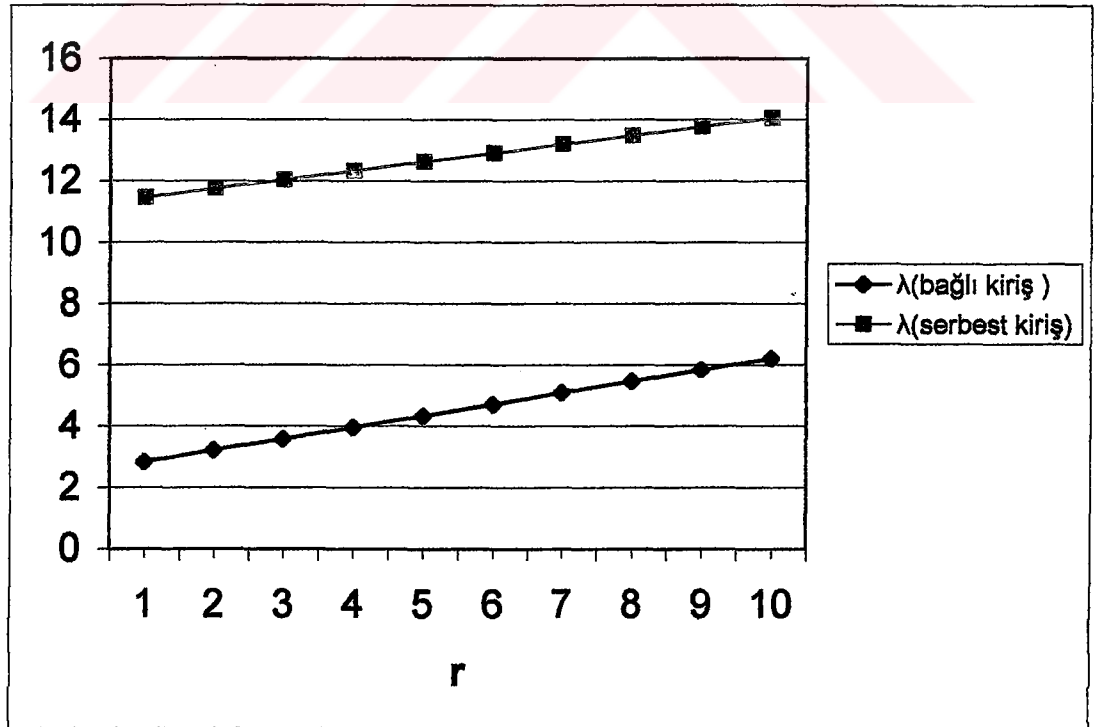
ve bağlı kiriş durumu için çözüm yapıldığında da aşağıdaki ifade elde edilmişti.

$$\sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) h_n \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} g_n \right) - \left(2 + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) g_n \right) \left(1 + \sum_{n=4}^{\infty} h_n \right) = 0$$

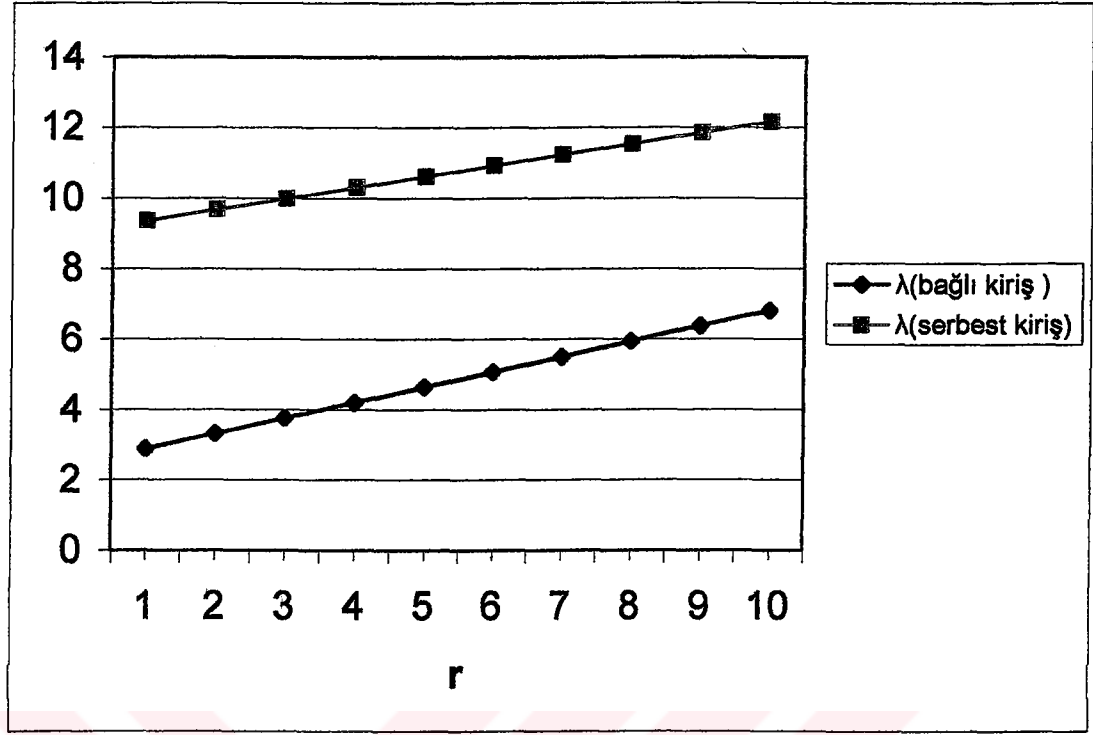
ve bu ifadelerde “ r ve $\bar{\beta}$ ” seçilerek λ ‘nın çözümü yapılabileceği belirtilmişti. Aşağıda “ β ” sabit tutulup r ’ ye göre λ ‘nın en küçük değerlerinin ve “ r ” sabit tutulup β ‘ya göre λ ‘nın en küçük değerlerinin değişimlerini hem serbest kiriş durumu hemde bağlı kiriş durumu için gösteren grafiksel sonuçlar verilmiştir. Zemin etkisini gösterebilmek için sonuçlar aynı grafikler üzerinde verilmiştir.



Şekil 3.5 Serbest giriş ve bağlı giriş durumlarında $\beta = -0.5$ için r 'ye göre λ 'nın değişimi grafiği



Şekil 3.6 Serbest giriş ve bağlı giriş durumlarında $\beta = -0.25$ için r 'ye göre λ 'nın değişimi grafiği



Şekil 3.7 Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $\beta = 0.25$ için r 'ye göre λ 'nın değişimi grafiği

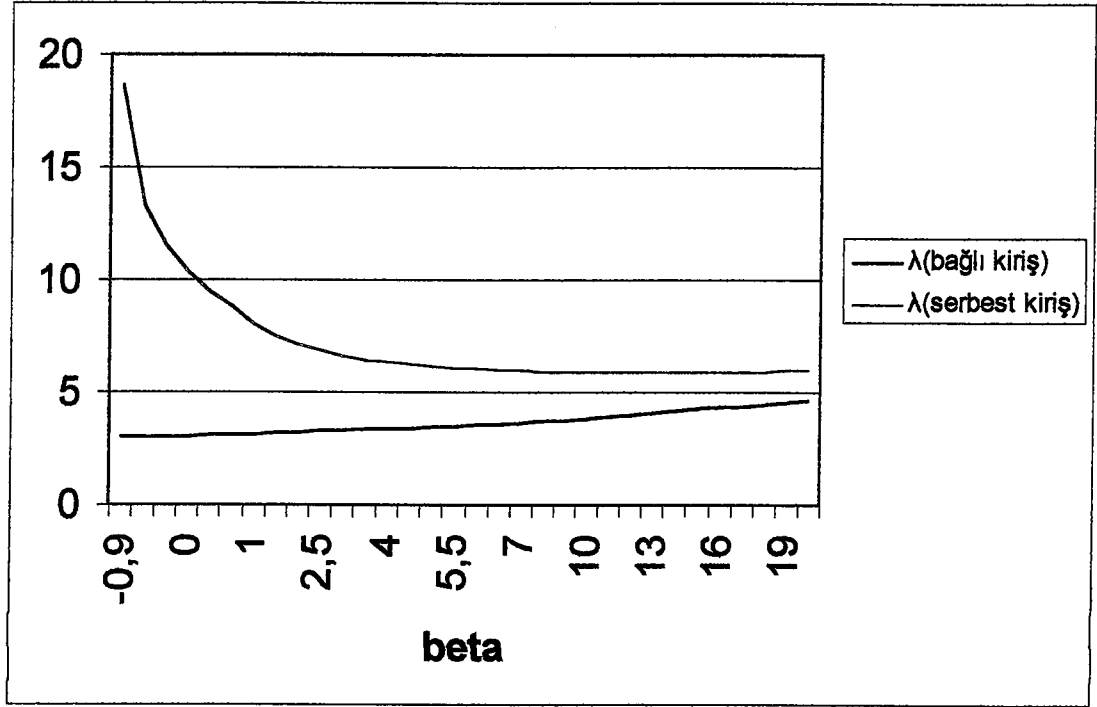
Özel Durum I ile ilgili diğer grafikler Eklerde Ek A kısmında sunulmuştur.

3.4.2 Özel Durum II

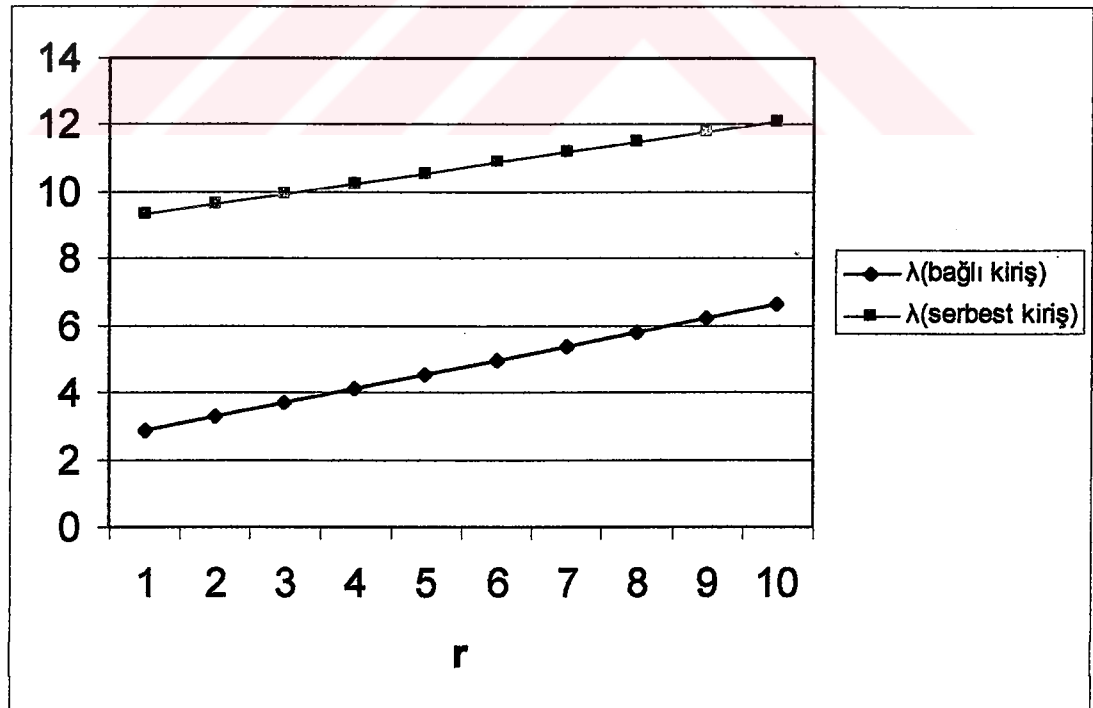
Bu özel problemde k 'nın çubuk uzunluğu boyunca olan değişimi;

$$k(x) = k_0(1 + ax^2)$$

şeklinde alınıp kuvvet serisi yardımıyla çözümü yapıldığında bir sonraki sayfadaki iki adet grafiğe ulaşılmıştır. Birinci grafikte β sabit tutulup r 'ye göre λ 'nın en küçük değerleri ve ikinci grafikte de r sabit tutulup β 'ya göre λ 'nın en küçük değerleri incelenmiştir. Bu iki grafik Şekil 3.8 ve Şekil 3.9 ile karşılaştırılırsa sonuçlar arasında bir kıyaslama yapma imkanı elde edilmiş olur.



Şekil 3.8 Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $r = 1.5$ için β 'ya göre λ 'nın değişimi grafiği



Şekil 3.9 Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $\beta = 0.25$ için r 'ye göre λ 'nın değişimi grafiği

3.2. Yorum ve Öneriler

Bu çalışmada elastik zemine oturan kirişlerde burkulma problemi, çeşitli durumlar için incelenmiştir. Çözüm ve sınır koşullarının kullanılması sonucu entegrasyon katsayılarının belirlenmesi yerine burkulma koşulu elde edilmiştir. Son olarak elde edilen sonuçlar iki ucu bağlı kiriş durumuyla karşılaştırılmıştır.

İlk olarak homojen elastik zemine oturan kiriş problemi ele alınmıştır. Zeminin çekme ve basınç alması halinde katsayıların çeşitli durumları için çözüm yapılmıştır. Burada tablo 3.1’de görüldüğü gibi sadece “ $\lambda > r$ ” hali için çözüm elde edilebilmiştir. Diğer haller için çözüm elde edilememiştir. Şekil 3.1’de kritik burkulma yükü P_{kr} ’in r katsayısı ile değişimi verilmiştir. EI rijitliği ve L boyunun sabit olması halinde r ’nin artması k yatak katsayısının artması sonucunu doğuracaktır. Beklendiği gibi yatak katsayısının artması sonucu P_{kr} yükü de artmaktadır.

İkinci olarak zeminin yalnız basınç aktarması hali için çözüm yapılmıştır. Bu durumda elde edilen burkulma koşuluyla sayısal sonuçlar uygun çıkmamıştır.

Üçüncü tip problem olarak çekme ve basınç davranışı farklı olan zemin hali ele alınmıştır. Buradaki farklılık, basınç bölgesindeki yatak katsayısının çekme bölgesindeki yatak katsayısının iki katı olarak alınması ve buna göre hesap yapılmasıdır. Hesap sonucunda gerçel değerlere ulaşılammıştır. İkinci ve üçüncü tip problemlerdeki sonuç, kirişin tamamen zemine gömüldüğü şeklinde yorumlanmıştır.

Son olarak elastik zemin yatak katsayısının çubuk eksen boyuna doğrusal ve karesel olarak değişmesi hali ele alınmıştır. Yönetici denklemin değişken katsayılı olması nedeniyle kapalı çözüm yapılamamış, kuvvet serisi yardımıyla çözüm yapılmıştır. Hesaplarda ortalama olarak 18 terim alınması halinde yeterli yaklaşımın sağlandığı görülmüştür. Şekil 3.5 - 3.8 de çeşitli, homogen olmama katsayılarına göre k_0 yatak katsayısının değişimi ile boyutsuz kritik yükün değişimi, serbest kiriş ve iki ucundan sabit bağlı kiriş durumları için elde edilmiştir. Serbest kiriş halindeki sonuçlar, bağlı kiriş halinden elde edilen sonuçlara göre oldukça büyük çıkmıştır. Bunun nedeni serbest kirişin zemine daha fazla gömülme imkanı olması nedeniyle

yanal etkinin de fazla olması şeklinde düşünülmektedir. Her iki halde de burkulma yükü k_0 zemin katsayısı ile hemen hemen doğrusal olarak değişmektedir. Şekil 3.9-3.11 de homogen olmama durumunun lineer olarak değişmesi halinde seçilen çeşitli r katsayıları için boyutsuz kritik yükün nonhomogenlik katsayısı “ β ” ile değişimi verilmiştir. β ‘nın eksi değerlerinde kritik yükün arttığı görülmektedir. Bunun nedeni, yatak katsayısı en büyük ve düşey yerdeğiştirmesi de büyük olan kirişin orta bölgesinin büyük bir yanal basınç etkisindeymiş gibi davranmasıdır. Bunun sonucu olarak ta burkulma yükünün büyük olması beklenmelidir. β ‘nın pozitif olduğu hallerde burkulma yükü negatif olduğu duruma göre azalmaktadır. Bunun nedeni kirişin orta bölgesinde yatak katsayısı küçük ve yerdeğiştirmesi de büyüktür. Kirişin uçlarına doğru ise yatak katsayısı büyük buna karşılık yerdeğiştirmesi küçüktür. Bu durumda kiriş hemen hemen homogen bir yanal etki altındaymış gibi davranmaktadır. Sonuçlara bakıldığında her üç halde de serbest kiriş halindeki burkulma yükü bağlı kiriş halindeki burkulma yüküne göre daha büyük olarak elde edilmiştir. Son olarak nonhomogenlik değişiminin karesel olması hali ele alınmıştır. Şekil 3.12-3.13 incelendiğinde bu durumda elde edilen sonuçların lineer durumdaki sonuçlarla çok benzer olduğu görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]Winkler, E., 1867. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prag.
- [2]Keskinel, F., Kumbasar, N., 1970. Elastik Zemin Oturan Sonlu Kiriş Tesir Çizgileri ve Sürekli Temellerin Çözümüne Uygulanması, İstanbul.
- [3]Zimmerman, K., 1942. Die Berechnung der Söldruckverteilung unter Grundungskörpern, Der Bauingenieur.
- [4]Develioğlu, İ. N., 1996. Yatak Katsayısı ve Temel Yapılarına Uygulanması, İ.T.Ü. Fen Bil. Enst., Yüksek Lisans Tezi, İstanbul
- [5]Bowles, J. E., 1988. Foundation Analysis and Design, Mc-Graw Hill International Editions.
- [6]Aka, İ., Keskinel, F., Arda, T. S., 1988. Betonarme Yapı Elemanları, Birsan Kitabevi, İstanbul.
- [7]Hayashi, K., 1921. Theorie des Trägers auf Elastischer Unterlage, J.Springer, Berlin.
- [8]Biot, A. M., 1937. Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation, Journal of Applied Mechanics.
- [9]Kögler – Scheiding, 1941. Baugrund und Bauwerk, Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin.
(Çeviri: Acun, N., 1953. Temel Zemin ve Yapı, İ.T.Ü., İstanbul.)
- [10]Terzaghi, K., Peck, R.B., 1948. Soil Mechanics in Engineering Practice, J. Wiley, New York.
- [11]Terzaghi, K., 1955. Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique, Volume V, pp. 297-326, I.C.E., London.
- [12]Durelli, A. J., Parks, V. J., Mok, C. K. C., 1966, Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, August 1966, pp. 1713 – 1725.
- [13]Munther, J. H., 1970. Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussion ASCE, Vol.96, April 1970, pp. 864 – 870.
- [14]Weistman, Y., 1970. On Foundation That React in Compression Only, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 37, pp.1019-1030.
- [15]Weistman, Y., 1971. On set of Separation Between a Beam and a Tensionless Foundation, International Journal of Mechanical Science, Vol. 13, No.8, August 1971, pp. 707 – 711.
- [16]Bakioğlu, M., Özkan, T., 1980. Sonlu Kalınlıkta Zemin Üzerine Oturan Yüzetsel Temellerin Hesabı Hakkında Bir Yöntem, Tübitak, VII. Bil. Kong.

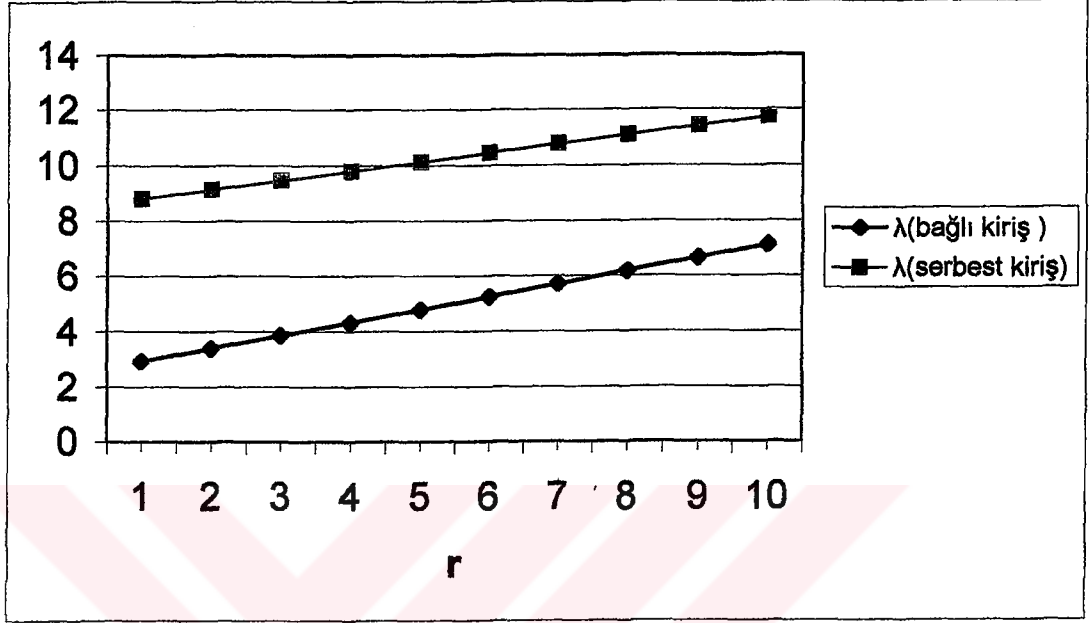
- [17]Elmas, M., 1988. Elastik Zemin Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enst. , Doktora Tezi, İstanbul.
- [18]Kerr, A. D., 1964. Elastic and Viskoelastic Foundation Models, J.Apply. Mech. Vol. 31, pp. 491 – 498
- [19]Tsai, N. C., Westman, R. A., 1967. Beam on Tensionless Foundation, J. Apply. Mech. Eng. Div., ASCE, 93, EMIO, pp. 1-12
- [20]Shirima, L. M. and Giger, M. W., 1992. M. ASCE, Timoshenko Beam Element Resting on Two Parameter Elastic Foundation, J. of Eng., March 1992, Vol. 118, No.2.
- [21]Nogami, T. and O'Neill, M. W., 1985. M. ASCE, Beam on Generalized Two Parameter Foundation, J. of Eng. Mech., May 1985, Vol. 111, No. 5.
- [22]Hildebrand, F. B., 1976. Advanced Calculus for Applications, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.



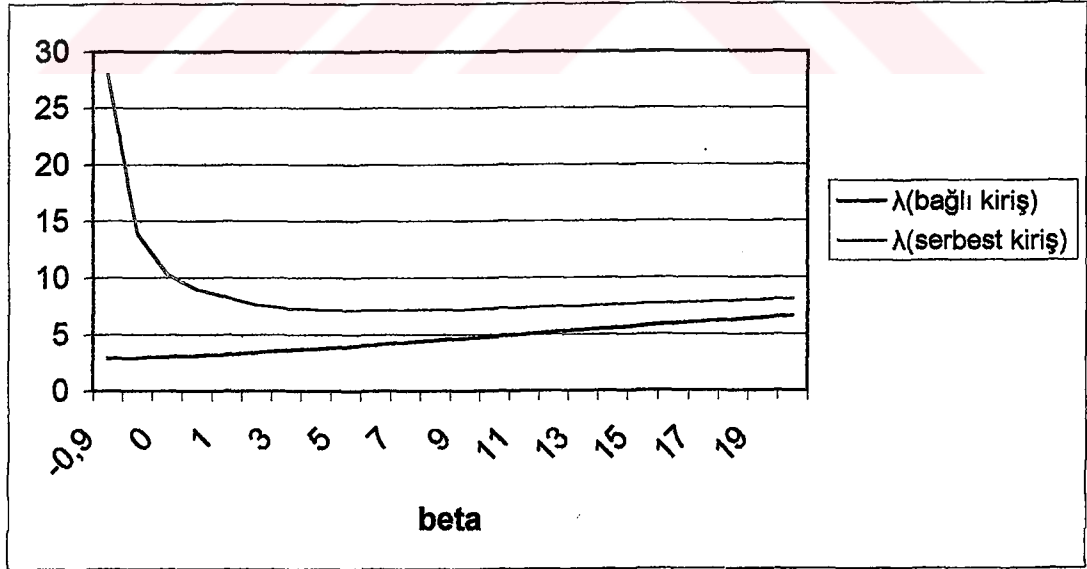
EKLER



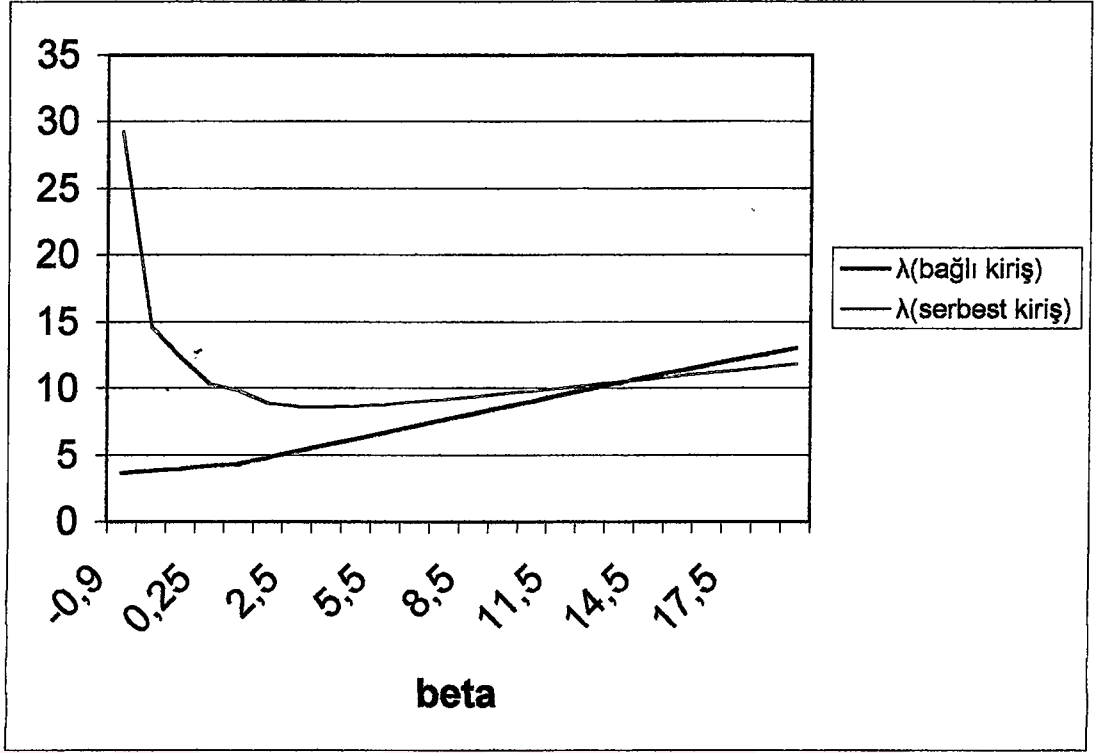
EK A



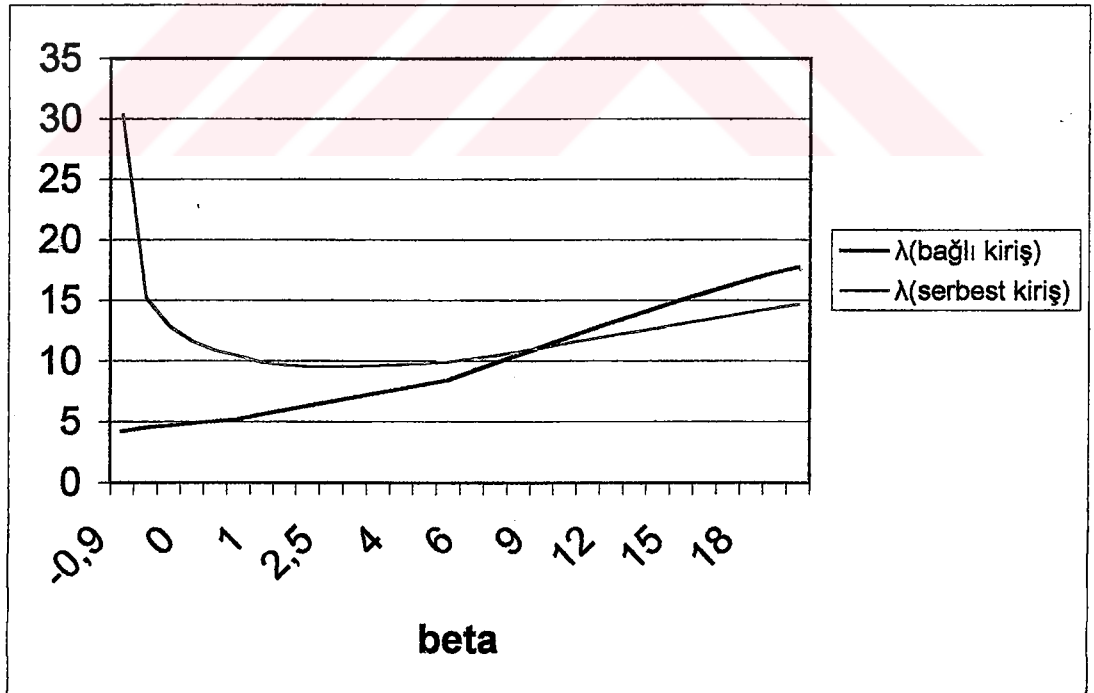
Şekil A.1 Serbest giriş ve bağlı giriş durumlarında $\beta = 0.5$ için r 'ye göre λ 'nın değişimi grafiği



Şekil A.2 Serbest giriş ve bağlı giriş durumlarında $r = 1.5$ için β 'ya göre λ 'nın değişimi grafiği



Şekil A.3 Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $r = 4$ için β 'ya göre λ 'nın değişimi grafiği



Şekil A.4 Serbest kiriş ve bağlı kiriş durumlarında $r = 6$ için β 'ya göre λ 'nın değişimi grafiği

ÖZGEÇMİŞ

Savaş ÖZKAN 1974 yılında Tunceli’de doğdu. İlk öğrenimini Elazığ Atatürk İlkokulu’nda, orta öğrenimini Elazığ Atatürk Ortaokulu’nda, lise eğitimini de Elazığ Lisesi’nde tamamladı.

İstanbul ile ilk tanışması 1993 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazanmakla oldu. Bu bölümden 1997 yılında mezun olur olmaz bir yıl kadar bir özel şirkette inşaat mühendisi olarak çalıştı. 1998 yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Yapı Anabilim Dalı’nda Lisansüstü eğitime başladı.



YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI