

DEĞİŞKEN KALINLIKLIL ORTOTROPİK DİSK PROBLEMİNİN ELASTİK ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

Yasemin Kaya ve Ahmet N. Eraslan

Mühendislik Bilimleri Bölümü, Mühendislik Fakültesi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi,
06531, Ankara

kyasemin@metu.edu.tr; aeraslan@metu.edu.tr

Özet

Bu bildiride hem ısı yükü hem de merkezkaç kuvveti etkisi altındaki ortotropik değişken kalınlıklı içi boş bir diskin dekopple elastik analitik çözümü sunulmaktadır. Dönen sıcak rijit bir mile monte edilmiş ortotropik bir disk göz önüne alınmıştır. Disk kalınlığının radyal yönde genel parabolik formda değiştiği varsayılmaktadır. Bu koşullar altında diskin termoelastik denklemi alışılagelmiş düzlem gerilme ve küçük deformasyonlar kabulleri ile türetilmiştir. Verilen bir sıcaklık dağılımı ve merkezkaç kuvvetine karşılık gelen gerilme durumu termoelastik denklemin analitik çözümü kullanılarak elde edilmektedir.

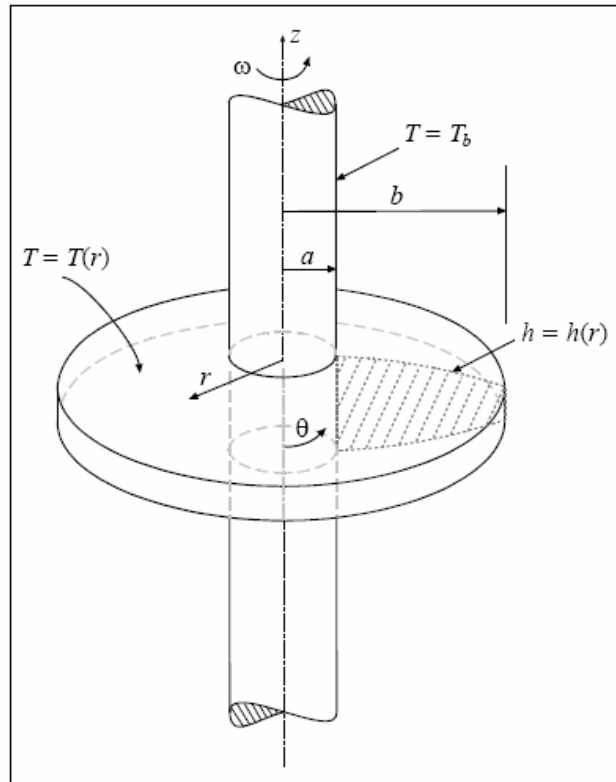
Abstract

In this article, an uncoupled elastic analytical solution of orthotropic variable thickness annular disk subjected to both thermal and centrifugal loads is presented. An orthotropic variable thickness annular disk mounted on a hot rotating rigid shaft is considered. The thickness of the disk is assumed to vary radially in a continuously variable nonlinear parabolic form. The thermoelastic equation is obtained under formal assumptions of plane stress and small strains. For given heat and centrifugal loads the corresponding state of stress is obtained by means of the analytical solution of the thermoelastic equation.

1 Giriş

Bu çalışmanın amacı hem ısı yükü hem de merkezkaç kuvveti etkisi altındaki ortotropik değişken kalınlıklı içi boş bir diskin dekuple elastik analitik çözümünü elde etmektir. Literatürde çok çeşitli profiller için dönen değişken kalınlıklı isotropik disk [1], dönen sabit kalınlıklı ortotropik disk [2] ve ısı yükü altında dönen sabit ve değişken kalınlıklı isotropik disk çözümleri mevcuttur [3], [4]. Ancak ortotropik değişken kalınlıklı diskin hem ısı yükü hem de merkezkaç kuvveti etkisi altında analitik çözümü mevcut değildir.

Yarıçapı a olan rijit ve sıcak bir mile monte edilmiş ortotropik değişken kalınlıklı bir disk ele alınmaktadır. Mil-disk geometrisi ve koordinat sistemi Şekil-1'de gösterildiği gibidir. Disk kalınlığı h radyal yönde $h = 1 - nr^k$ fonksiyonu gereğince değişmektedir. Burada n ve k kalınlık parametreleri olup r ise boyutsuz radyal koordinatı ifade eder. Isı akışı sıcak milden diske, oradan da çevreye doğrudur. Ayrıca bu sistem mil eksenini etrafında dönebilmektedir.



Şekil 1. Rijit mil-elastik disk geometrisi.

2 Formülasyon ve Çözüm

Timoshenko ve Goodier [5] notasyonu ve boyutsuz değişkenler kullanılmaktadır. Silindirik polar koordinat sistemi (r, θ, z) baz alınmıştır. Düzlem gerilme hali ($\sigma_z = 0$) ve küçük şekil değiştirmeler varsayılmaktadır. Böylece birim şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları:

$$\epsilon_r = u'; \quad \epsilon_\theta = u/r, \quad (1)$$

radyal yönde denge denklemi:

$$(hr\sigma_r)' - h\sigma_\theta + h\Omega^2 r^2 = 0, \quad (2)$$

ve uygunluk bağıntısı:

$$(r\epsilon_\theta)' - \epsilon_r = 0, \quad (3)$$

geçerlidir. Bu denklemlerde kullanılan sembollerden ϵ_j birim şekil değiştirmeyi, u yer değiştirmeyi, σ_j normal gerilmeyi, Ω ise açısal hızı ifade eder. Ayrıca ϕ' notasyonu ϕ değişkeninin radyal koordinat r ye göre türevini göstermektedir.

Radyal yöndeki elastisite katsayısının, E_r , teğetsel yöndeki elastisite katsayısına, E_θ , oranı $R_1 = E_r/E_\theta$ olarak tanımlandığında ortotropik malzemeler için, ν_{ij} Poisson oranını temsil etmek üzere, Maxwell bağıntısı $\nu_{r\theta} = R_1\nu_{\theta r}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda birim şekil değiştirme gerilme bağıntıları

$$\epsilon_r = \sigma_r - \nu_{r\theta}\sigma_\theta + \alpha\Delta T, \quad (4)$$

$$\epsilon_\theta = R_1\sigma_\theta - \nu_{r\theta}\sigma_r + \alpha\Delta T, \quad (5)$$

halini alır. Burada α termal genleşme katsayısını ve ΔT ise disk sıcaklığı ile referans sıcaklık arasındaki farkı göstermektedir. Disk içerisinde sıcaklık dağılımı Kaynak [4] de verilen boyutsuz enerji denkleminin:

$$\frac{d^2}{dr^2}\Delta T + \left[\frac{1}{r} + \frac{h'}{h}\right] \frac{d}{dr}\Delta T - \frac{H}{h\beta}\Delta T = 0, \quad (6)$$

sayısal çözümlenmesiyle elde edilir. Bu denklemde H disk-çevre arasındaki ısı transfer katsayısı β ise diskin termal iletkenliğidir. Isı transfer katsayısı, H , radyal koordinat r 'nin ve açısal hız Ω 'nın fonksiyonu olup

$$H(r, \Omega) = H_0 + H_1\Omega r + H_2\Omega^2 r^2, \quad (7)$$

şeklinde ifade edilir. Gerçekçi bir benzetişim için H_i katsayılarının deneyle belirlenmesi

önerilmektedir.

Diğer taraftan birim şekil değiştirmelerin uygunluk denkleminde yerine konulmasıyla aşağıda verilen elastik denklem elde edilir

$$-\frac{(1+\nu_{r\theta})\sigma_r}{rR_1} + \frac{(\nu_{r\theta}+R_1)\sigma_\theta}{rR_1} - \frac{\nu_{r\theta}}{R_1} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d\sigma_\theta}{dr} + \frac{\alpha}{R_1} \frac{dT}{dr} = 0. \quad (8)$$

Bu denklemin $h = 1 - nr^k$ kalınlık fonksiyonu için analitik çözümü hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla bulunur. $Y = rh\sigma_r$ olarak tanımlanan gerilme fonksiyonu cinsinden bu çözüm

$$Y(r) = C_1 Y_1(r) + C_2 Y_2(r) + P(r), \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada C_i keyfi integral sabiti Y_i homojen çözüm ve P ise özel çözümdür. Homojen çözümler $F(\alpha, \beta, \delta; z)$ formunda ifade edilen ve

$$F(\alpha, \beta, \delta; z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\delta 1!} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\delta(\delta+1)2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\delta(\delta+1)(\delta+2)3!} z^3 + \dots, \quad (10)$$

denkliği yardımıyla hesaplanan hipergeometrik fonksiyon cinsinden

$$Y_1(r) = r^{-M} F(\alpha, \beta, \delta; nr^k), \quad (11)$$

$$Y_2(r) = r^M F(\alpha - \delta + 1, \beta - \delta + 1, 2 - \delta; nr^k), \quad (12)$$

şeklindedir. Burada

$$M = \frac{1}{\sqrt{R_1}}, \quad (13)$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{M}{k} - \frac{M\sqrt{4(1-k\nu_{r\theta})+k^2R_1}}{2k}, \quad (14)$$

$$\beta = -\frac{1}{2} - \frac{M}{k} + \frac{M\sqrt{4(1-k\nu_{r\theta})+k^2R_1}}{2k}, \quad (15)$$

$$\delta = 1 - \frac{2M}{k}, \quad (16)$$

tanımları yapılmıştır. Özel çözüm $P(r)$ ise katsayıların değişimi yöntemiyle homojen çözümler yardımıyla

$$P(r) = U_1 Y_1 + U_2 Y_2, \quad (17)$$

eşitliğinden hesaplanır. Bu denklikde

$$U_1(r) = \int_a^r G_1(\lambda) d\lambda ; \quad U_2(r) = \int_a^r G_2(\lambda) d\lambda, \quad (18)$$

olup, G_1 , G_2 , f ve W_{ro} fonksiyonları ise

$$G_1(r) = -\frac{Y_2(r) f(r)}{W_{ro}(r)} ; \quad G_2(r) = \frac{Y_1(r) f(r)}{W_{ro}(r)}, \quad (19)$$

$$f(r) = -\frac{(1 - nr^k)(\nu_{r\theta} + 3R_1)\Omega^2 r}{R_1} - \frac{\alpha}{R_1} \frac{dT(r)}{dr}, \quad (20)$$

$$W_{ro}(r) = Y_1(r)Y_2'(r) - Y_2(r)Y_1'(r). \quad (21)$$

şeklinde verilmektedir. U_1 ve U_2 değişkenleri integrallerin Gauss noktalarında açılımı ile

$$U_1(r) = \frac{r-a}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i \times G_1\left(\frac{(r-a)X_i + r+a}{2}\right), \quad (22)$$

$$U_2(r) = \frac{r-a}{2} \sum_{i=1}^N \phi_i \times G_2\left(\frac{(r-a)X_i + r+a}{2}\right). \quad (23)$$

hesaplanırlar. Yukarıda, ϕ_i ve X_i terimleri sırasıyla Gauss katsayı, ve noktalarını ifade etmektedir. Bu ifadelerden kolaylıkla anlaşılacağı gibi $U_1(a) = U_2(a) = 0$ olduğundan $P(a) = 0$ elde edilir.

Rijit mile monte edilmiş elastik disk için sınır koşulları $u(a) = 0$ ve $\sigma_r(1) = 0$ şeklindedir. Bu durumda integrasyon sabitleri

$$C_1 = \frac{a^3 R_1 \Omega^2 h(a) Y_2(1) + P(1)[\nu_{r\theta} Y_2(a) - a R_1 Y_2'(a)]}{Y_1(1)[a R_1 Y_2'(a) - \nu_{r\theta} Y_2(a)] + Y_2(1)[\nu_{r\theta} Y_1(a) - a R_1 Y_1'(a)]} \quad (24)$$

$$C_2 = \frac{P(1)[a R_1 Y_1'(a) - \nu_{r\theta} Y_1(a)] - a^3 R_1 \Omega^2 h(a) Y_1(1)}{Y_1(1)[a R_1 Y_2'(a) - \nu_{r\theta} Y_2(a)] + Y_2(1)[\nu_{r\theta} Y_1(a) - a R_1 Y_1'(a)]} \quad (25)$$

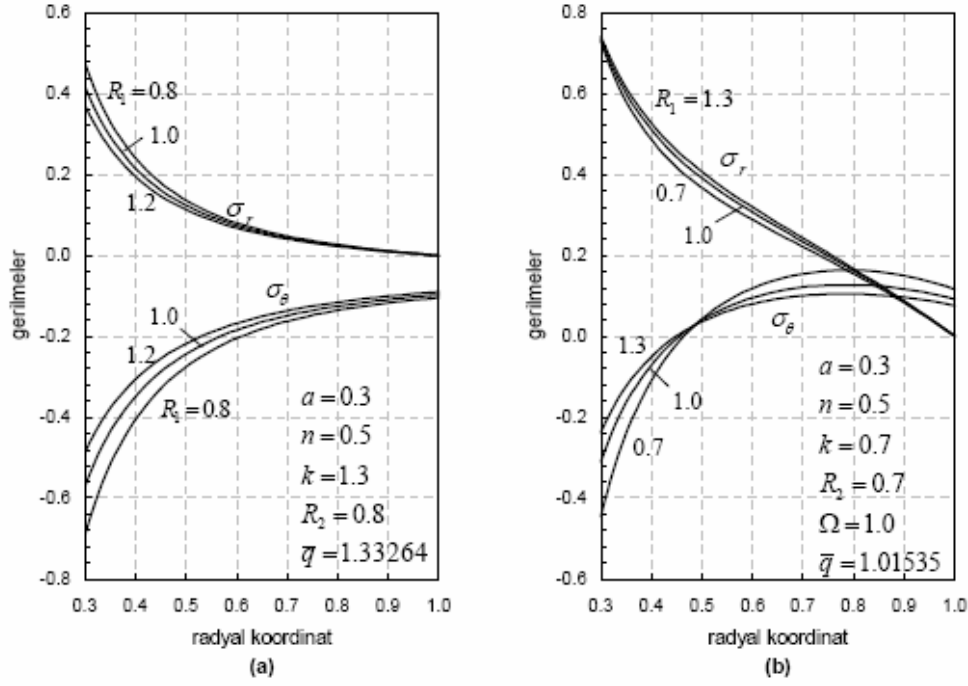
olarak bulunur.

3 Örnek Hesaplamalar

Diskin elastik limit yük parametrelerini belirlemek için

$$\phi = \sqrt{\sigma_r^2 - \frac{2R_2}{1+R_2} \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2} \quad (26)$$

denkliği ile tanımlanan ϕ boyutsuz gerilme değişkeni hesaplanır. Hill kuadratik akma kuralına göre elastik plastik sınırda $\phi = 1$ ve elastik bölgede ise $\phi < 1$ olmaktadır. Burada R_2 diğer bir malzeme ortotropi parametresidir ve radyal yöndeki akma gerilmesinin teğetsel yöndeki akma gerilmesine oranı olarak tanımlanır. R_2 parametresinin elastik gerilmeler üzerine hiçbir etkisi olmamakla beraber Hill akma kriteri gereğince elastik limit yükün belirlenmesinde etkili olur.



Şekil 2. Durağan (a) ve dönen (b) disk için R_1 parametresinin radyal ve teğetsel gerilmelere etkisi.

Durağan ($\Omega = 0$) disklerde aynı ısı yükü altında ($\bar{q} = 1.33264$) oluşan gerilmelerin R_1 parametresiyle değişimi Şekil 2(a) da gösterilmiştir. Bu şekil için kullanılan parametre değerleri şeklin alt kısmında verilmektedir. Kullanılan ısı yükü ($\bar{q} = 1.33264$) $R_1 = 0.8$ diskinin elastik limit yüküdür. Şekilde görüldüğü gibi aynı ısı yükü altında R_1 parametresi arttıkça gerilmeler azalmaktadır. Hem ısı yükü hem de merkezkaç kuvveti etkisi altındaki ortotropik disklerde gerilmeler Şekil 2(b) de gösterilmiştir. Burada da R_1 parametresinin gerilmeler üzerine etkisi vardır, ancak gerilmelerin karakteri Şekil 2(a) da olduğundan farklı olduğu için bir genelleme yapmak mümkün değildir.

Kaynaklar

- [1] Eraslan A.N., "A Class of Nonisothermal Variable Thickness Rotating Disk Problems Solved by Hypergeometric Functions", **Turkish Journal of Engineering and Environmental Sciences** 29, 241-269, 2005.
- [2] Çalhoğlu H., Topçu M. and Tarakçılar A.R., "Elastic-plastic Stress Analysis of an Orthotropic Rotating Disc", **International Journal of Mechanical Sciences** 48, 985-990, 2006.
- [3] Eraslan A.N. and Akış T., "On the Elastic-plastic Deformation of a Rotating Disk Subjected to a Radial Temperature Gradient", **Mechanics Based Design of Structures and Machines** 31, 529-561, 2003.
- [4] Eraslan A.N. and Kartal M.E., "Stress Distributions in Cooling Fin of Variable Thickness with and without Rotation", **Journal of Thermal Stresses** 28, 861-883, 2005.
- [5] Timoshenko S.P. and Goodier J.N, **Theory of Elasticity**, McGraw-Hill Book Company, 1970.

