

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NANOTEKNOLOJİDE EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ
DAVRANIŞLARI İÇİN BİR SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer Ekim GENEL

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Dinamiği, Titreşim ve Akustik Programı

HAZİRAN 2018

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**NANOTEKNOLOJİDE EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ
DAVRANIŞLARI İÇİN BİR SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ömer Ekim GENEL
(503161408)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Dinamiği, Titreşim ve Akustik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

HAZİRAN 2018

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503161408 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Ömer Ekim GENEL, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “NANOTEKNOLOJİDE EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ DAVRANIŞLARI İÇİN BİR SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Haluk EROL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Uğur GÜVEN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 04 Mayıs 2018
Savunma Tarihi : 04 Haziran 2018





Aileme,



ÖNSÖZ

Ondokuzuncu yüzyılın sonu ve yirminci yüzyılın ilk yarısındaki fizik alanında yapılmış öncü çalışmalar, 1950’li yıllardan itibaren teknolojik olarak önemli sıçramalar yaşanmasına sebep olmuştur. Bu teknolojik sıçramaların en çok dikkat çekenlerinden biri olan nanoteknoloji, ilk olarak 1950’li yıllarda modern bilimin gündemine girmiştir. 1990’lı yıllarda karbon nanotüplerin sentezlenmesi ve bu malzemenin konvansiyonel malzemelere kıyasla üstün özelliklere sahip olduğunun farkedilmesiyle beraber bu alana yönelik ilgi giderek artmıştır. Günümüzde mekanik, elektronik, kimya ve tıp gibi önemli bilim sahalarının ortak çalışma noktası haline gelen nanoteknoloji, kanser tedavisinden nano elektro-mekanik sistemlere (NEMS) kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu yapıların ve sistemlerin geliştirilmesi sürecinde, mekanik özelliklerin bilinmesi mühendislik açısından son derece önemli bir ihtiyaçtır. Bu bağlamda, nano ölçekteki yapıların ve sistemlerin mekanik davranışlarının incelenmesiyle ilgilenen nanomekanik çalışma alanı doğmuştur. Bu çalışma alanının incelediği yapısal elemanlardan biri de çubuk adı verilen bir boyutunun diğer iki boyutundan görece olarak daha büyük olduğu yapısal elemanlardır. Nanoçubuklar, gerek tasarımlarından gerekse de nano boyuttaki imalatın kısıtlarından dolayı eğri eksene sahip olabilmektedirler. Dolayısıyla, eğri eksene sahip nanoçubukların mekanik özelliklerinin incelenmesi mühendislik açısından önem arz etmektedir.

Bu çalışmada, eğri eksenli nanoçubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışlarını incelemek için yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş kesin analitik çözümleri temel alan bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Formülasyonda, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri gözönünde bulundurulmuştur. Rijitlik ve kütle matrislerinin formüle edilmesinde şekil fonksiyonu olarak kesin analitik çözümler kullanılmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş kesin analitik çözümleri kullanması ve bunu eğri eksenli nanoçubuklara uygulaması bakımından bir ilk özelliğine sahip olan bu çalışmanın, nanoçubuk sistemlerinin tasarımını kolaylaştıracağı ve hızlandıracağı düşünülmektedir.

Bu çalışma süresince, bilgisi ve tecrübesiyle bana her zaman yol gösteren, bilimi daha çok sevmeme vesile olan saygıdeğer hocam Prof.Dr. Ekrem TÜFEKÇİ’ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca her zaman beni destekleyen, gösterdikleri anlayış ve hoşgörüyle bana huzurlu bir çalışma ortamı sunan aileme teşekkür ederim.

Mayıs 2018

Ömer Ekim GENEL
Makina Mühendisi



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ	xvii
ŞEKİL LİSTESİ	xix
ÖZET	xxi
SUMMARY	xxiii
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI	5
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ STATİK DAVRANIŞLARINI İFADE EDEN YEREL OLMAYAN DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ	13
3.1 Eğri Eksenli Çubukların Düzlem İçi Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler	13
3.2 Eğri Eksenli Çubukların Düzlem İçi Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemlerin Çözümleri	17
4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	25
4.1 Rijitlik matrisinin formüle edilmesi	25
4.2 Kütle matrisinin formüle edilmesi	28
4.3 Rijitlik ve Kütle matrislerinin Hamilton Prensibi kullanılarak formüle edilmesi	31
5. SAYISAL ÇALIŞMALAR	39
5.1 Nanoçubukların Düzlem İçi Statik Davranışına İlişki Sayısal Çalışmalar	39
5.1.1 Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan, $\pi/2$ açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk	39
5.1.2 Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan, π açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk	40
5.1.3 Normal yüke maruz nano çember (Nano Ring)	41
5.2 Nanoçubukların Düzlem İçi Dinamik Davranışına İlişki Sayısal Çalışmalar ..	42
5.2.1 Çember eksenli sabit kesitli bir çubuğun doğal frekanslarının boyut parametresi R/γ 'ya bağlı olarak değişiminin incelenmesi	43
5.2.2 Çember eksenli sabit kesitli bir çubuğun doğal frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişiminin incelenmesi	45
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	57

KISALTMALAR

2D	: İki boyutlu
3D	: Üç boyutlu
CLT	: Klasik Çubuk Teorisi
FSDT	: Birinci Mertebe Kayma Şekil Değişimi Teorisi
GDQM	: Genelleştirilmiş Diferansiyel Kuadratür Yöntemi
LaDQM	: Yerel Adaptif Diferansiyel Kuadratür Yöntemi
MEMS	: Mikro Elektro-mekanik Sistemler
NEMS	: Nano Elektro-mekanik Sistemler
SIN, SIN-z2	: Sinüzoidal Kayma Şekil Değişimi Teorileri



SEMBOLLER

A	: Çubuğun dik kesit alanı
$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})$	: Asal matrisin ilk üç satırındaki elemanları içeren alt matrisler
$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})$	: Asal matrisin son üç satırındaki elemanları içeren alt matrisler
E	: Elastisite modülü
F_t, F_n	: Yerel olmayan teğetsel ve normal iç kuvvet bileşenleri
F_t^l, F_n^l	: Yerel teğetsel ve normal iç kuvvet bileşenleri
$\mathbf{F}$	: Yerel olmayan iç kuvvet bileşenlerini içeren vektör
$\mathbf{F}_0$	: Yerel olmayan iç kuvvet bileşenlerinin başlangıç değerlerini içeren vektör
$\mathbf{F}^l$	: Yerel iç kuvvet bileşenlerini içeren vektör
$\mathbf{F}_A$	: Sonlu elemanın A ucundaki yerel olmayan iç kuvvet vektörü
$\mathbf{F}_B$	: Sonlu elemanın B ucundaki yerel olmayan iç kuvvet vektörü
$\mathbf{F}^e$	: Yerel olmayan nodal kuvvet vektörü
$\mathbf{f}$	: Dış yüklere ait bileşke kuvvet vektörü
G	: Kayma modülü
$\mathbf{G}$	: Nodal yer değiştirmelerle başlangıç değerleri vektörü arasındaki geçiş matrisi
$\mathbf{G}^l$	: Yerel durum için nodal yer değiştirmelerle başlangıç değerleri vektörü arasındaki geçiş matrisi
h	: Çubuk kesitinin yüksekliği
$\mathbf{h}$	: Kuvvetlerle birim şekil değiştirmeleri ilişkilendiren matris
$\mathbf{H}$	: Yerel olmayan durumda asal matrisin ilk üç satırını içeren matris
$\mathbf{H}^l$	: Yerel durum için asal matrisin ilk üç satırını içeren matris

I_b	: Binormal eksenlerine göre eylemsizlik momenti
$\mathbf{K}^e$	: Eleman rijitlik matrisi
$\mathbf{K}^G$	: Global rijitlik matrisi
$\mathbf{k}$	: Yerel ile yerel olmayan iç kuvvetler arasındaki geçiş matrisi
k_n	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabit
$\mathbf{M}^e$	: Eleman kütle matrisi
$\mathbf{M}^G$	: Global kütle matrisi
M_b	: Binormal eksen etrafındaki yerel olmayan iç moment
M_b^l	: Binormal eksen etrafındaki yerel iç moment
m_b	: Binormal eksen etrafındaki yayılı dış moment
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
$\mathbf{P}(\theta)$	: Kesit bilgisini içeren matris
R	: Eğrilik yarıçapı
r, θ, z	: Silindirik koordinatları belirten indisler
s	: Yay uzunluğu
$\mathbf{S}(\theta)$	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
T	: Kinetik enerji
U	: Birim şekil değiştirme enerjisi
$\mathbf{u}$	: Analitik durum için yer değiştirmeler vektörü
$\mathbf{Y}$	: Asal matris
$\mathbf{Y}^l$	: Asal matrisin yerel terimlerini içeren matris
$\mathbf{Y}^{nl}$	: Asal matrisin yerel olmayan terimlerini içeren matris
$\mathbf{y}$	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
$\mathbf{y}_0$	: Başlangıç değerleri vektörü
W_e	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
w, u	: Teğetsel ve normal doğrultulardaki yer değiştirmeler

$\mathbf{X}$	: Yerel olmayan yer değiştirme bileşenlerini içeren vektör
$\mathbf{X}_0$	: Yerel olmayan yer değiştirme bileşenlerinin başlangıç değerlerini içeren vektör
$\mathbf{X}^l$	: Yerel yer değiştirmeler vektörü
$\mathbf{X}^G$	: Global yer değiştirme vektörü
$\mathbf{X}^e$	: Yerel olmayan nodal yer değiştirmeler vektörü
$(\mathbf{X}^e)^l$	: Yerel nodal yer değiştirmeler vektörü
$\mathbf{X}_A$	: Sonlu elemanın A ucundaki yerel olmayan yer değiştirme vektörü
$\mathbf{X}_B$	: Sonlu elemanın B ucundaki yerel olmayan yer değiştirme vektörü
q_t, q_n	: Teğetsel ve normal yayılı dış kuvvetler
θ	: Açısal koordinat
θ_e	: Sonlu elemanın açıklığı
θ_T	: Toplam ubuk açıklığı
θ_0	: Referans açısı
ρ	: Yoğunluk
Ω_b	: Binormal eksen etrafındaki dönme açısı
ω	: Dairesel frekans
ν	: Poisson oranı
σ^{nl}	: Yerel olmayan gerilme tansörü
σ^l	: Yerel gerilme tansörü
γ	: Yerel olmayan parametre
λ	: Narinlik oranı
ω^*	: Yerel olmayan boyutsuz doğal frekans
ω_l^*	: Yerel boyutsuz doğal frekans
ϵ	: Birim şekil değiştirme tansörü
$\mathcal{L}$	: Lagrange fonksiyonu, kinetik potansiyel

δ : Varyasyon sembolü

∇^2 : Laplasyen



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme bileşenlerinin sonlu eleman ve analitik yaklaşım sonuçları.	40
Çizelge 5.2 : Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme bileşenlerinin sonlu eleman ve analitik yaklaşım sonuçları.	41
Çizelge 5.3 : Normal yüke maruz sabit kesitli nano çember için sonlu eleman ve analitik yaklaşım sonuçları.	42
Çizelge 5.4 : $\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 5$ için 1. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.	46
Çizelge 5.5 : $\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 50$ için 1. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.	46
Çizelge 5.6 : $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 5$ için 2. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.	47
Çizelge 5.7 : $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ için 2. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.	47



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1 : Analitik ve sonlu eleman yaklaşımları arasındaki yön kabul farkı...	27
Şekil 5.1 : Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan $\pi/2$ açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk...	40
Şekil 5.2 : Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan, π açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk.....	41
Şekil 5.3 : Normal yüke maruz sabit kesitli nano çember (nano ring).....	42
Şekil 5.4 : İlgili nanoçubuğun 1.doğal frekans değerinin eleman sayısına göre değişimi.	44
Şekil 5.5 : Oldaç (2016) ve bu çalışmadaki yaklaşımların karşılaştırılması.	44
Şekil 5.6 : Yerel ve yerel olmayan 1.doğal frekansların oranının R/γ ile değişimi.	45



NANOTEKNOLOJİDE EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ DAVRANIŞLARI İÇİN BİR SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

ÖZET

Nanoteknoloji, özellikle son yıllarda hayatımızın her alanında kendine yer bulmaktadır. Bu araştırma alanının gelişmesi sayesinde, geleneksel malzemelere kıyasla fiziksel, kimyasal ve elektriksel yönlerden daha üstün davranış gösteren malzemeler geliştirilmiştir. En iyi bilinen örnekleri karbon nanotüp ve grafen levha olan bu üstün nitelikli malzemelerin mekanik özelliklerinin tespitine ve bu malzemelerden yapılan mühendislik yapılarının tasarımına günümüzde sıklıkla ihtiyaç duyulmaktadır. Bu sebeple, malzemelerin ve yapıların nano ölçeğe davranışlarını inceleyen nanomekanik adı verilen bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. Mühendislik yapılarının tasarımında ve modellenmesinde sıklıkla kullanılan yapısal elemanlardan olan çubuklar, nano ölçekteki yapılarda da kullanılmaktadır ve nanomekaniğin ana inceleme konularından birini oluşturmaktadırlar. Ana olarak makina mühendisliğinin uygulama sahasına giren bu yapıların mühendisler tarafından statik ve dinamik analizinin yapılması önem arz etmektedir.

Genellikle klasik (yerel) elastisite teorisinin kullanıldığı çalışmalarda, atomlar arasındaki boşlukların etkilerinin ihmal edilebilecek kadar az olduğu kabul edilmektedir. Ancak, çalışma ölçeğinin nanometre mertebelerine inmesiyle, bu boşlukların etkisi artık göz ardı edilemeyecek seviyelere çıkmaktadır. Böyle durumlarda, boşlukların etkisini ihmal eden klasik (yerel) elastisite teorisinin yerine yerel olmayan elastisite teorisinin kullanılması daha doğru sonuçlar vermektedir.

Bu çalışmada, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dikkate alan eğri eksenli Timoshenko nanoçubuklarının, düzlem içi statik ve dinamik davranışlarının analizi için yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş kesin analitik çözümlere dayalı bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Yukarıda değinilen kapsamıyla bir ilk olma özelliği taşıyan bu formülasyonda, yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilmiş kesin analitik çözümlerinden hareketle katılık (rijitlik) ve kütle matrisleri elde edilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman formülasyonundan elde edilen sonuçlar, literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Bu bağlamda, birinci bölüm, nanoçubukların günümüz mühendislik bilimi içerisindeki yerine ve uygulama alanlarına dair bilgileri, gerçekleştirilen tezin amacını ve kapsamını içermektedir.

İkinci bölümde, nispeten yakın bir geçmişe sahip olan nanoçubuklar hakkında bir literatür araştırması sunulmaktadır. Literatür araştırması, nanoçubukların statik ve dinamik davranışlarını yerel olmayan elastisite teorisi ile inceleyen çalışmalar kapsamıyla sınırlı tutulmuştur. Gerçekleştirilen literatür araştırması, analitik ve sonlu eleman yaklaşımları olmak üzere iki alt grup olarak sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, bu çalışmaya temel teşkil eden, nanoçubukları yerel olmayan elastisite teorisi perspektifiyle inceleyen analitik yaklaşıma yer verilmiştir. Bu

bölümde, yerel ve yerel olmayan elastisite teorileri arasındaki ilişkilere, varsayımlara ve kesin analitik çözümü elde etmek için başlangıç değerleri yönteminin kullanımına değinilmiştir. Bu bölümde açık ifadeleri verilen yer değiştirme alanları, bir sonraki bölümde şekil fonksiyonları olarak kullanılmıştır.

Dördüncü bölüm, şekil fonksiyonu olarak kesin analitik çözümleri kullanan bir sonlu eleman formülasyonu sunmaktadır. Bu bölümde, rijitlik matrisi, ilk olarak literatürde “direkt metot (direct method)” olarak geçen yöntemle formüle edilmiştir. Ardından, kütle matrisi, dönme eylemsizliğinin göz önünde bulundurulduğu durum için formüle edilmiştir. Son olarak, elde edilmiş rijitlik ve kütle matrislerinin, Hamilton Prensipleri olarak adlandırılan varyasyonel yaklaşımla da elde edilebileceği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, geliştirilen sonlu eleman formülasyonu, sayısal örneklerle doğrulanmıştır. Literatürdeki statik ve dinamik örnekleri içeren bu bölümde, sonlu eleman yaklaşımıyla elde edilen sonuçlar, analitik ve sayısal çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde genel bir değerlendirme yapılmış ve gelecek çalışmalar için çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

Yapılan bu çalışmanın, eğri eksenli nanoçubuklar ile ilgili yapılacak çalışmaların gelişmesine katkı sağlayacağına ve önerdiği formülasyon sayesinde bu çubukların statik ve dinamik davranışının incelenmesini içeren tasarım süresinin kısaltılmasına önemli ölçüde yardımcı olacağı düşünülmektedir.

A FINITE ELEMENT FORMULATION FOR IN-PLANE BEHAVIOURS OF CURVED BEAMS IN NANOTECHNOLOGY

SUMMARY

Nanotechnology takes wider place in our life especially in recent years. Thanks to development of that research field, better materials were developed in terms of physical, chemical and electrical aspects when compared to conventional ones. Most well-known examples of these advanced materials are carbon nanotubes and graphene sheets and determining mechanical properties of these new materials and designing engineering structures which are made of them is frequently needed. Therefore, nanomechanics, a new research area which studies behaviours of materials and structures in nano-scale, is emerged. Beams, which are frequently used in designing and modelling of engineering structures, are also used in nano-scale structures and they are considered as one of the fundamental research topics of nanomechanics. Mainly, these structures belong to mechanical engineering application field and static and dynamic analyses of them are essential. It is observed that most of studies in the literature are related with nanobeams which have curved axis. However, due to design purposes and having some difficulties in manufacturing processes to produce an exact straight beam, investigating static and dynamic properties of curved beams is significant.

In the literature, there are three main approaches to investigate mechanical behaviours of nanobeams: molecular dynamics simulations, hybrid and continuum mechanics approaches. The first one uses potential energies between atoms and integrates them into equations of motion. However, due to dealing with large-scale matrices, this approach is considered computationally expensive. Hybrid approach is an approach that combines molecular dynamic simulations and continuum mechanics approaches. Nonetheless, this approach is directly linked to advances in computational chemistry research field. Unlike previous approaches, continuum mechanics approach requires less computational effort and is considered as more independent field. Also, it can present more analytical models. This approach separates into two subareas for nanobeams: local and nonlocal theories of elasticity. It is generally accepted that in the classical (local) theory of elasticity, effects of gaps between atoms are negligible. However, by narrowing our working scale into nanometer levels, effects of these gaps can not be ignored anymore. In that case, using the nonlocal theory of elasticity provides more accurate results rather than classical theory of elasticity which neglects effects of gaps between atoms.

In this study, developing a new finite element formulation based on exact analytical solutions obtained from nonlocal theory of elasticity for in-plane static and dynamic analyses of curved nanobeams which take into consideration of axial extension, shear deformation and rotatory inertia effects is aimed. Within the scope of mentioned content, this formulation is considered as the first study in that area in the literature and stiffness and mass matrices are obtained from exact analytical solutions based on

nonlocal theory of elasticity. Accomplished results from developed finite element formulation are compared with those given in the literature.

In this sense, in the first chapter, informations about the place of nanobeams in current engineering sciences and their application fields, aim and content of this thesis are presented.

The second chapter includes a literature survey about nanobeams in order to give relatively short history. The content of survey is limited to studies which investigate statics and dynamics of nanobeams by using nonlocal theory of elasticity. Presented survey consists of two subgroups; analytical and finite element approaches. In addition to studies which investigate only static and dynamic behaviours of nanobeams, other studies which are also contain buckling behaviour, nonlinear vibrations, cracked beams and mixed approach are also examined. It is observed that there are relatively small number of studies which deal with finite element formulation of nanobeams in the literature than analytical studies. Moreover, it can be also stated that there are very few studies which investigate mechanical behaviours of curved nanobeams.

In the third chapter, theoretical basis of this study, the analytical approach which investigates in-plane behaviour of nanobeams by using nonlocal theory of elasticity is presented. This chapter includes relations between local and nonlocal theories of elasticity, assumptions and usage of initial values method which is used to obtain the exact analytical solutions. Explicit displacement fields, which are obtained in that chapter, are used as shape functions in following chapter.

The fourth chapter presents a finite element formulation which uses exact analytical solutions as shape functions. In that chapter, stiffness matrix is formulated by using direct method, a well-known method in the literature. Then, the mass matrix is obtained also by considering rotatory inertia. Finally, it is shown that these stiffness and mass matrices can also be obtained by using Hamilton's Principle, a variational approach. In the formulation of mass matrix, Mindlin's kinetic energy formulation is utilized. This formulation expresses kinetic energy as a summation of macrostructure and microstructure effects. The first term, which corresponds to macrostructure effect, is the classical kinetic energy formulation which uses time derivatives of local nodal displacements. However, the second term, which corresponds to microstructure effect, uses time derivatives of gradients of local nodal displacements. After formulation of element stiffness and mass matrices, under harmonic vibrations assumption, eigenvalue problem can be built.

In the fifth chapter, developed finite element formulation is validated with numerical examples. This chapter contains both static and vibration problems from the literature, and obtained results by using presented finite element approach are compared with those given in the literature. In static problems, there are three examples. The first and the second ones investigate static behaviours of circular clamped-free nanobeams under a tip force with 90° and 180° opening angles, respectively. Due to having only one region, both problems are solved by using one element. In these examples, curvature value is taken 5γ and aspect ratio values are taken as 20 and 30, respectively. In the third static example, a nanoring under two normal forces is analyzed. It is solved by using two elements because of having two region and the model is built as a half model. In that example, curvature and aspect ratio values are taken 5γ and 50. All static examples are compared with the literature and results are discussed. In dynamic problems, there are two examples. In the first

dynamic example, under clamped-clamped boundary conditions, the curvature of a nanobeam which has 60° opening angle is changed for a constant nonlocal parameter value and dimensionless frequencies are calculated. A mesh convergence study is performed and minimum number of elements is determined as 10 in order to be able to perform a reliable analysis. Then, the analysis is performed and results which are obtained by using developed finite element formulation are compared with analytical results. It is observed that for increasing values of small scale parameter, R/γ , dimensionless frequencies, which are obtained by using nonlocal theory of elasticity, converges to a constant value asymptotically. That constant value is the dimensionless frequency value which is obtained by using local theory of elasticity. In the second dynamic example, nonlocal parameter values are changed for a nanobeam which has clamped-clamped boundary conditions. For 30° and 120° opening angle values, variations of first and second dimensionless frequencies are investigated for different nonlocal parameter values. In that example, aspect ratio values are taken as 5 and 50. Obtained results are compared with the literature and effects of aspect ratio and nonlocal parameter values on dimensionless frequencies are also discussed. It is observed that for increasing values of nonlocal parameter, dimensionless frequencies are decreasing. Obtained results are in well agreement with SIN shear deformation theory based beam model in the literature for both first and second dimensionless frequencies.

In the last chapter, a general evaluation is performed and some recommendations are discussed for the future studies.

It is believed that the presented study will be instructive for the future studies about curved nanobeams and thanks to recommended formulation, design processes of nanobeams which include static and dynamic analyses can be shortened significantly.

1. GİRİŞ

Nanobilim, önemli özellikler ve işlevler gösteren nano ölçekteki ($1\text{ nm}=10^{-9}\text{ m}$) malzemeleri inceleyen bir bilim sahasıdır. Özellikle son yıllardaki ilerlemeler sayesinde birçok alanda insanlığın ihtiyaçlarını karşılayan bu önemli bilim sahasına ilk dikkat, 1959 yılında “There’s Plenty of Room at the Bottom” adlı dersinde Richard Feynman tarafından çekilmiştir. Nanoteknolojinin tanımı ise, nanobilimin uygulamaları olarak özetlenebilir. Daha detaylı bir tanım yapılacak olursa, nanoteknoloji, atomları ve molekülleri kontrol ederek ve/veya bir araya getirerek nano ölçekte yeni malzemeler, yapılar ve sistemler geliştirilmesidir. Mekanik, elektronik, kimya, tıp ve imalat teknolojisi gibi birçok bilim sahasının sürekli olarak birbiriyle temas halinde bulunduğu nanoteknoloji, araştırma alanları bakımından alt dallarına ayrılmaktadır. Bu alt dallardan en önemlilerinden birisi de nanomekanik araştırma alanıdır. Adından da anlaşılacağı üzere nano ölçekli yapıların tasarımıyla ilgilenen bu araştırma alanı halen gelişimini sürdürmektedir.

Nano ölçekli yapıların tasarımlarında, tıpkı makro ölçekte olduğu gibi çubuk elemanlar kullanılmaktadır. Üstün malzeme özelliklerine sahip olduklarından dolayı bu çubuklar, günümüzde birçok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadır. Nano elektro-mekanik sistemler (NEMS), mikro elektro-mekanik sistemler (MEMS), görüntüleme teknolojisi, enerji depolama uygulamaları, boyaya duyarlı güneş panelleri, biyosensörler ve yüksek ısı özelliklerinden dolayı kanser tedavisi için geliştirilen nanosistemler, nanoçubukların uygulama alanlarına örnek verilebilir. Bu nanoçubuklar, boyutlarına göre düzlemsel (2D) ve uzaysal (3D) olarak; eksen tiplerine göre ise doğru eksenli ve eğri eksenli olarak sınıflandırılabilir. Bu tip yapısal elemanların tasarımında, yerel olmayan elastisite teorisinin yanında, klasik (yerel) sürekli ortamlar mekaniği teorisi, moleküler dinamik simülasyonları, hibrid yaklaşım da kullanılmaktadır. Moleküler dinamik simülasyonu yaklaşımı, nano ölçekteki malzemelerin atom seviyesinde modellenmesi ve simülasyonuyla ilgilenmektedir. Hibrid yaklaşımda ise klasik moleküler dinamik yaklaşımı ile sürekli ortamlar mekaniği yaklaşımı birleştirilmektedir. Moleküler dinamik simülasyonları

yaklaşımı, klasik sürekli ortamlar mekaniği teorisine göre daha karmaşık denklemlerle çalışmakta ve bu durum hesaplama maliyetini artırmaktadır. Hibrid yaklaşım ise ancak kimya alanındaki çalışmaların (moleküller arası çekim kanunlarının) gelişmişlik düzeyine göre uygulama alanını genişletebilecek bir yaklaşımdır. Ancak, klasik (yerel) sürekli ortamlar mekaniği teorisinin, diğer yöntemlere kıyasla avantajları bulunmasına karşın, incelenen malzemenin atomlarının arasındaki boşlukların etkileri ihmal edilmektedir. Bu yaklaşıma göre, herhangi bir noktadaki gerilme değerleri, sadece o noktadaki şekil değiştirmeler üzerinden tanımlanmaktadır. Bu durum, boyutlarına oranla artık ihmal edilemeyecek atomlar arası boşluklara sahip olan nanoçubukların modellemesine uygun olmamaktadır. Sürekli ortamlar mekaniği teorisinde kalarak bu problemi aşmanın bir yolu, Eringen tarafından geliştirilen yerel olmayan elastisite teorisini kullanmaktır. Bu teoride, herhangi bir noktadaki gerilme durumunun, sadece ilgili noktanın şekil değiştirmesinden değil, aynı zamanda diğer noktaların şekil değiştirmelerinden de etkilendiği kabulü yapılmaktadır. Bu yaklaşım sayesinde, nanoçubukların statik ve dinamik davranışlarını ifade eden denklemler elde edilebilmektedir. Gerek tasarlanan yapının eğri eksenli olmasından dolayı gerekse de tam, ideal bir doğru eksenli nanoçubuk üretmenin zorluğundan dolayı, eğri eksene sahip nanoçubukların mekanik modellenmesinin ve analizinin oldukça büyük pratik önemi vardır. Bu tasarım sürecinde, makro ölçekteki çubukların tasarımında olduğu gibi eğri eksenli bir nanoçubuğun sonlu eleman formülasyonunu birden fazla doğru eksenli elemanla yapmak yerine, eğri eksenli bir sonlu elemanın kullanılması hassasiyet ve hesaplama yükü bakımından oldukça verimli bir yaklaşım olacaktır.

Bu çalışmada, nanoteknolojide kullanılan eğri eksenli bir çubuğun düzlem içi davranışlarının araştırılması için, yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş kesin analitik çözüme dayanan bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, öncelikle, eksenel uzamanın ve kayma deformasyonunun göz önünde bulundurulduğu çubuk modeli için statik davranışı ifade eden denklemlerin kesin analitik çözümü kullanılmıştır. Bu denklemler ve kesin analitik çözüm kullanılarak sonlu eleman için katılık (rijitlik) matrisi elde edilmiştir. Daha sonra, dönme eylemsizliğinin etkisi de göz önüne alınarak, sonlu eleman için kütle matrisi elde edilmiştir. Ayrıca, bu matrislerin, sonlu eleman formülasyonunda en sık kullanılan yöntemlerinden birisi olan Hamilton prensibi ile de elde edilebileceği

gösterilmiştir. Oluşturulan sonlu eleman formülasyonu ile literatürdeki çeşitli problemler çözülerek elde edilen sonuçlar, bu çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.





2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Çalışma ölçeğinin küçülmesiyle malzemelerin özelliklerinin önemli bir şekilde değiştiğinin farkedilmesinin ardından, nano ölçekte yapılan çalışmalar mühendisliğin ana araştırma alanlarından birisi haline gelmiştir. Nanomalzemelerden en çok bilineni, 1991 yılında Sumio Iijima tarafından keşfedilen karbon nanotüplerdir (Iijima, 1991). Yüksek dayanıklılığa sahip olan bu malzemelerin elastisite modülü, Salvetat ve diğ. (1999) tarafından yaklaşık 1 TPa olarak tespit edilmiştir. Mekanik özellikler bakımından çok sayıda gelişmiş ürün geliştirme potansiyeli taşıyan bu malzemelerin, kuvvet ve yer değiştirme ilişkilerinin tespiti veya sistem davranışlarının incelenmesi makina mühendisliği kapsamında nanomekanik adından bir çalışma alanının doğmasını sağlamıştır. Temel olarak nano ölçekteki yapıların ve makinaların tasarımıyla ve analiziyle ilgilenen nanomekanikte, güncel araştırma alanlarında birisi de nanoçubuklardır. Nanoçubuklar, bir boyutu diğer iki boyutuna göre oldukça büyük olan nano ölçekli yapılardır. Nano elektro-mekanik sistemler (NEMS), mikro elektro-mekanik sistemler (MEMS), görüntüleme teknolojisi (Sadeghi, 2012), enerji depolama uygulamaları (Iqbal, 2014), boyaya duyarlı güneş panelleri (Sadeghi, 2012), biyosensörler ve yüksek ısıl özelliklerinden dolayı kanser tedavisi (Demir, 2016), nanoçubukların uygulama alanlarına örnek verilebilir. Makina mühendisliğinde bir yapının mekanik özelliklerini incelerken genel olarak klasik sürekli ortamlar mekaniğinden yararlanılmaktadır. Yerel elastisite teorisi olarak da adlandırılan bu teori temel olarak inceleme alanı makro boyutta olduğundan dolayı atomlar arası boşluğu ihmal etmekte ve bir noktadaki gerilme durumunun sadece o noktadaki şekil değişimi tarafından ortaya çıktığını kabul etmektedir. Ancak, günümüzde çalışma ölçeğinin nanometre boyutlarına inmesiyle beraber sürekli ortamlar mekaniğinin yerel kabulü tartışmaya açık bir konuma gelmiştir. Malzeme içerisindeki boşlukların, elastisite modülü üzerindeki etkisi Alizada ve Sofiyev (2011) tarafından gösterilmiştir. Sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinden çıkmadan boyut etkisini ihmal etmeyen yeni bir teori, Eringen (1972) tarafından önerilmiştir. Atomlar arasındaki boşlukları ihmal etmeden, bir noktadaki

gerilmenin oluşmasında, cismin diğer noktadaki şekil değişimlerinin de etkili olduğunu kabul eden bu teori son yıllarda bilim çevrelerinin dikkatini çekmiştir. Bu teorinin, nanoçubuklara ilk uygulaması Peddieson ve diğ. (2003) tarafından Euler-Bernoulli çubuğu üzerinde yapılmıştır. Bu yaklaşıma ek olarak literatürde atom seviyesinde modellemeyle geliştirilen moleküler dinamik simülasyonları ve hibrid yaklaşım da mevcuttur. Atomlar arası potansiyel enerjileri içeren hareket denklemlerini içeren moleküler dinamik simülasyonları yaklaşımı, hesaplama yükü bakımından diğer yöntemlere kıyasla oldukça maliyetlidir (Thai ve diğ, 2017). Hibrid yaklaşım ise sürekli ortamlar mekaniği yaklaşımıyla klasik moleküler dinamik yaklaşımının bir kombinasyonunu önermektedir (Li ve Chou, 2003). Ancak, hibrid yaklaşımın, uygulama alanının genişliği büyük ölçüde hesaplamalı kimya alanındaki gelişmelere bağlı olmaktadır.

Nanoçubukların, makro ölçekteki çubuklar gibi boyutlarına göre düzlemsel ve uzaysal olarak; eksenlerine göre de doğru eksenli ve eğri eksenli olarak sınıflandırılabilir. Bu yapıların, mekanik davranışlarını araştırmak için kullanılan yöntemler ise ana olarak analitik ve sonlu eleman yönteminden oluşan sayısal yaklaşımlar olarak incelenebilir.

Literatürde, nanoçubukların statik ve dinamik analizi için analitik yaklaşımı temel alan birçok çalışma bulunmaktadır.

Dequesnes ve diğ. (2004), nano-anahtarlar özelinde, moleküler dinamik simülasyonu, hibrid yaklaşım ve sürekli ortamlar yaklaşımını karşılaştıran bir araştırma yapmışlardır. Yaptıkları çalışmada, bir nano-anahtarın statik ve dinamik analizini gerçekleştirmişlerdir. Wang ve diğ. (2006), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak statik yükleme altında karbon nanotüplerin davranışlarını incelemiştir. Statik davranışın yanında burkulma davranışının da incelendiği çalışmada, boyut etkisinin önemine vurgu yapılmıştır. Aydoğdu (2009), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak nanoçubukların eksenel titreşimlerini incelemiştir. Ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartlarını kullandığı çalışmada, çalışma ölçeğinin doğal frekanslar üzerindeki etkisini göstermiştir. Elishakoff ve Pentaras (2009), Bresse-Timoshenko teorisinin basitleştirilmiş bir formunu önererek, iki duvarlı karbon nanotüplerin serbest titreşimlerini incelemişlerdir. Önerdikleri basit formun, çok iyi sonuçlar verdiğini vurgulamışlardır. Mayoof ve Hawwa (2009), eksenli boyunca eğriliğe sahip bir karbon nanotüpün lineer olmayan titreşimlerini

incelemişlerdir. Ankastre-ankastre olarak modellenen ve harmonik olarak uyarılan çubuğun titreşimlerinin hareket denklemi, Galerkin yaklaşımı ile ikinci dereceden lineer olmayan diferansiyel denkleme dönüştürülmüştür. Elde edilen sonuçlar faz portreleri, Poincare tablosu ve zaman cevabı olarak görselleştirilmiştir. Joshi ve diğ. (2010), ankastre-ankastre sınır şartları altında, yüzey sapmasına sahip bir karbon nanotüpün dinamik davranışını incelemişlerdir. Tüp uzunluğunun ve dalgalılığının rezonans frekansı üzerindeki etkisi gösterilmiştir. Aydogdu (2012), nanoçubuklarda boyuna dalga yayılımını yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak incelemiştir. Çalışmada, kafes dinamiğinden yararlanarak, yerel olmayan parametre değerini kalibre etmiştir. Ayrıca, temel aldığı çubuk modelinde bulunan yanal eylemsizliğin ve yüzey etkilerinin, nanoçubuğun boyuna titreşimleri üzerindeki etkisine vurgu yapmıştır. Murmu ve Adhikari (2012), başlangıçta basma gerilmesine maruz birleşik bir nanoçubuk sisteminin titreşim analizini gerçekleştirmişlerdir. Yerel olmayan elastisite teorisinin kullanıldığı çalışmada, ölçek etkisinin ve yay etkilerinin titreşim karakteristikleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. Yapılan çalışmadan, nano-optomekanik sistemlerin, nano-kompozitlerin ve çeşitli sensör uygulamalarının geliştirilmesi sürecinde yararlanılabileceği belirtilmiştir. Berrabah ve diğ. (2013), kayma ve eğilme bileşenlerinin birbirlerini etkilemediği kabulü altında, nanoçubukların eğilme, burkulma ve serbest titreşim davranışlarını incelemişlerdir. Elde edilen sonuçlar, yerel olmayan elastisite teorisini içeren Timoshenko çubuk teorisinin ve Reddy çubuk teorisinin verdiği sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Roostai ve Haghipanahi (2013), birden fazla çatlağa sahip bir Euler-Bernoulli nanoçubuğunun serbest titreşimlerini yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak incelemiştir. Çatlakların burulma yayları olarak modellendiği çalışmada, çatlak konumu ve çatlak parametrelerinin doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir. Aydogdu ve Arda (2016), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak, çift duvarlı karbon nanotüplerin burulma titreşimlerinin analizlerini gerçekleştirmişlerdir. Çalışmada, nanotüpün uzunluğu ve yerel olmayan parametrenin yanında Van der Waals kuvvetlerinin ve nanotüpün iç çapının titreşim davranışı üzerindeki etkisi de incelenmiştir. Baretta ve diğ. (2014), nanoçubukların statik problemlerinin çözülmesinde yerel olmayan elastisite teorisini temel alan varyasyonel bir formülasyon önermişlerdir. Yaptıkları çalışmanın düzlemsel ve uzaysal boyutlardaki Euler-Bernoulli ve Timoshenko çubuklarına da uygulanabileceğini belirtmişlerdir. Behera ve Chakraverty (2014a), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak Euler-Bernoulli ve Timoshenko

nanoçubuklarının serbest titreşimlerini Rayleigh-Ritz yöntemiyle incelemişlerdir. Şekil fonksiyonu olarak ortonormal ve basit polinomlar kullanılmıştır. Farklı yerel olmayan parametre değerlerine ve sınır şartlarına sahip sayısal örneklerini, literatürde bulunan çalışmalarla karşılaştırmışlardır. Behera ve Chakraverty (2014b), homojen olmayan bir Timoshenko nanoçubuğunun serbest titreşimlerini Rayleigh-Ritz yöntemi kullanarak incelemişlerdir. Literatürdeki çalışmaların birçoğunda, elastisite modülü ve yoğunluğun sabit birer parametre olarak alındığını ancak gerçekte bunların sabit olmadıklarını vurgulayan çalışmada, şekil fonksiyonları olarak Gram-Schmidt süreci kullanılarak elde edilmiş ortonormal polinomlar kullanılmıştır. Guven (2014a), nanoçubuklarda eksenel dalga yayılımını iki parametrelili birleştirilmiş yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak analitik olarak incelemiştir. Love çubuk teorisinin kullanıldığı çalışmada, şekil değiştirme enerjisi, kayma gerilmeleri dikkate alınarak hesaplanmıştır. Guven (2014b), başlangıç gerilmesine sahip karbon nanotüplerde manyetik alanın enine dalga yayılımı üzerindeki etkisini analitik olarak incelemiştir. Timoshenko çubuk modelinin uygulandığı çalışmada, çözüm için gerilme-şekil değiştirme ve gerilme-eylemsizlik gradyenti elastisite teorileri kullanılmıştır. Baretta ve diğ. (2015), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak, fonksiyonel olarak derecelendirilmiş, burulma etkisindeki viskoelastik dairesel nanoçubukların statik durumdaki kesin analitik çözümünü elde etmişlerdir. Bağdatlı (2015), farklı sınır şartları altında bir Euler-Bernoulli nanoçubuğunun lineer olmayan titreşimlerini incelemiştir. Lineer olmayan durum için serbest ve zorlanmış titreşimleri incelediği çalışmasında, yerel olmayan parametrenin artması durumunda lineer ve lineer olmayan frekansların düştüğünü belirtmiştir. Ansari ve diğ. (2016), yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak piezoelektrik Timoshenko çubukların serbest titreşimlerini incelemişlerdir. Burkulma sonrası bölgede ısı ve mekanik etkilere maruz bir nanoçubuğun incelendiği çalışmada, farklı sınır şartları altında titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Ayrıca, yerel olmayan parametrenin ve sıcaklık artışının, doğal frekans üzerindeki etkileri de araştırılmıştır. Karlicic ve diğ. (2016a), sıcaklık değişimine ve eksenel basma yüküne maruz, elastik ortam içerisindeki bir nanoçubuk sisteminin eğilme titreşimlerini ve burkulmasını incelemiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi temelinde, Euler-Bernoulli çubuk modelinin kullanıldığı çalışmada yerel olmayan parametrenin, sıcaklık değişiminin, elastik ortamın rijitliğinin ve çubuk sayısının doğal frekans ve burkulma üzerindeki etkileri incelenmiştir. Tufekci ve diğ. (2016), yerel olmayan elastisite teorisini

kullanarak eğri eksenli nanoçubukların düzlem içi statik davranışının kesin analitik çözümünü elde etmişlerdir. Başlangıç değerleri yöntemiyle çözümün elde edildiği çalışmada, yerel olmayan Timoshenko çubuk modeli kullanılmıştır. Tufekci ve diğ. (2016), değişken eğrilığe ve kesite sahip nanoçubukların düzlem içi statik davranışını incelemişlerdir. Çalışmada, ölçek etkisinin yanında çubuk geometrisinin, sınır şartlarının, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri de incelenmiştir. Tufekci ve Aya (2016), çember eksenli nanoçubukların düzlem dışı statik davranışının kesin analitik çözümünü elde etmişlerdir. Eğilme ve burulma momentlerinin yanında kayma kuvvetinin yerel olmayan etkileri de incelenmiştir. Behera ve Chakraverty (2017), Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak nanoçubukların statik analizini gerçekleştirmişlerdir. Şekil fonksiyonu olarak ortogonal polinomları kullandıkları çalışmada, Euler-Bernoulli ve Timoshenko çubuk teorilerini, yerel olmayan elastisite teorisiyle incelemişlerdir. Ayrıca, narinlik oranının, yerel ve yerel olmayan kabuller altında çökmeye olan etkisini; yerel olmayan parametrenin de, eğilmeye ve farklı sınır şartları altında çökmeye etkisini incelemişlerdir. Challamel ve diğ. (2017), yerel olmayan elastisite teorisi yardımıyla, kafes davranışına iyi bir şekilde uyan sürekli model geliştirmişlerdir. Ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır şartları altında ve elastik ortamla temas durumunda statik ve dinamik durum için çözüm elde etmişlerdir. Bahrami (2017), birden fazla çatlağa sahip bir Euler-Bernoulli nanoçubuğunda titreşimleri, dalga gücü iletimini ve yansımalarını incelemiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi yaklaşımını içeren çalışmada, yerel olmayan parametrenin ve çatlak-şiddet parametresinin doğal frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Barati (2017), fleksoelektrik bir nanoçubuğun lineer olmayan titreşimlerini varyasyonel bir yöntemle incelemiştir. Çalışmada, elastik mesnet, yüzey sabitleri, çubuk kalınlığı gibi parametrelerin lineer olmayan frekans üzerine etkileri araştırılmıştır. Ecsedi ve Baksa (2017), Rayleigh modelini kullanarak elastik ortam içerisindeki karbon nanotüpün eksenel titreşimlerini incelemişlerdir. Hareket denklemlerinin çıkarılmasında Hamilton prensibinden yararlanılmıştır. El-Borgi ve diğ. (2017), elastik ortam içerisindeki viskoelastik çubukların burulma titreşimlerini incelemişlerdir. Farklı sınır şartlarının incelendiği çalışmada, Kelvin-Voigt viskoelastik sönüm modeli ele alınmıştır. Sönümlü durum için doğal frekanslar, analitik olarak ve yerel adaptif diferansiyel kuadratür yöntemi (LaDQM) kullanılarak sayısal olarak elde edilmiş ve karşılaştırılmıştır. Fernandez-Saez ve Zaera (2017), yerel ve yerel olmayan elastisite teorilerini birleştiren bir yaklaşım kullanarak bir

Euler-Bernoulli nanoçubuğunun düzlem içi serbest titreşimini incelemişlerdir. Farklı sınır şartları kullandıkları çalışmada, yerel olmayan yaklaşımın yumuşama etkisi araştırılmıştır. Jaing ve Wang (2017), elastik sınır şartlarına sahip bir Euler-Bernoulli nanoçubuğundaki ısıt titreşimleri analitik olarak incelemişlerdir. Yerel olmayan elastisite teorisinin kullanıldığı çalışmada, boyut etkisine vurgu yapan sayısal örnekler çözülmüş ve yerel olmayan parametrenin, ısıt gerilmelerin ve sınırlardaki rijitliğin etkileri incelenmiştir. Lu ve diğ. (2017), yerel olmayan şekil değiştirme gradyenti teorisini kullanarak nanoçubukların serbest titreşimlerini incelemiştir. Yaptıkları çalışmada, ölçeğe bağlı bir sinüzoidal kayma şekil değişimi çubuk modeli geliştirmişlerdir. Yerel olmayan parametrenin, malzeme uzunluk ölçek parametresinin, narinlik oranının ve kayma deformasyonunun, titreşim karakteristiği üzerindeki etkisi incelenmiştir. Sonuçlar diğer çubuk teorileriyle karşılaştırılmıştır. Lv ve Liu (2017), ısıt ortamdaki fonksiyonel olarak derecelendirilmiş nanoçubuklardaki belirsizliklerin titreşim ve burkulma davranışı üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak Euler-Bernoulli çubuk modelinin temel alındığı çalışmada, belirsizlikler olasılık temelli olmayan bir yöntemle modellenmiştir. Morassi ve diğ. (2017), maddesel kütleyle sahip bir nanoçubuğun eksenel titreşimlerini modifiye edilmiş şekil değiştirme enerjisi teorisi kullanarak incelemişlerdir. Çalışmada, ölçek ve kütle parametrelerinin titreşim davranışına etkileri araştırılmıştır. Bu çalışmanın, nanosensör uygulamalarında kullanılabileceği belirtilmiştir. Baretta ve diğ. (2018), fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir Euler-Bernoulli çubuğunun statik problemini Baretta ve Romano tarafından önerilen gerilme etkin yerel olmayan elastisite teorisiyle incelemiştir. Önerdikleri yeni yaklaşımı, sayısal analizlerle ve deneysel çalışmalarla desteklemişlerdir. Khaniki (2018), Eringen'in iki fazlı yerel/yerel olmayan integral modelini kullanarak, nanoçubuk sistemlerinin titreşimlerini incelemiştir. Çalışmada, bu modeldeki yerel olmayan terimlerin dinamik davranış üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Çözüm için genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi (GDQM) kullanılmıştır. Zhou ve diğ. (2018), elastik ortam içerisindeki ikili nanoçubuk sistemlerinin enine titreşimlerinin kesin analitik çözümünü yeni bir Hamilton temelli metot kullanarak incelemiştir. Yapılan çalışmada, yerel olmayan elastisite teorisini temel alan çubuk modellerinin karmaşık çubuk yapılarının çözümünde yeterli hassasiyette sonuçlar verdiği belirtilmiştir.

Literatürde nanoçubukların mekanik davranışlarını inceleyen sayısal yöntemler ana olarak sonlu eleman yöntemini temel almaktadır.

Phadikar ve Pradhan (2010), yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak, nanoçubuklar için Euler-Bernoulli çubuk modeli; nanoplaklar için ise Kirchhoff plak teorisini kullanarak bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir. Dört farklı sınır şartı altında, eğilme, titreşim ve burkulma analizlerine uygulanan formülasyonun doğruluğu, literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Mahmoud ve diğ. (2012), nanoçubukların statik analizini gerçekleştirmek için yüzey etkilerini de gözönünde bulundurarak bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir. Euler-Bernoulli çubuk modelinin kullanıldığı çalışmada, yerel olmayan parametrenin artmasıyla çubuğun çökmesinin arttığı vurgulanmıştır. Narendar (2012), spektral sonlu eleman yöntemi ve yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak, yerel olmayan bir burulma çubuğu modeli geliştirmişlerdir. Dalga yayılımının incelendiği çalışmada, dinamik katılık matrisi, yerel olmayan parametrenin bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Alshorbagy ve diğ. (2013), nanoçubukların statik analizi için yerel olmayan bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Euler-Bernoulli çubuk modelinin kullanıldığı çalışmada, eleman matrisleri varyasyonel prensip kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, narinlik oranının ve sınır şartlarının etkileri farklı yerel olmayan parametre değerleri için incelemiştir. Eltaher ve diğ. (2013), yerel olmayan Euler-Bernoulli çubuk modelini kullanarak, nanoçubukların titreşim analizi için bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Çalışmada, narinlik oranının, yerel olmayan parametrelerin, dönme eylemsizliğinin ve sınır koşullarının birinci doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir. Hemmatnezhad ve Ansari (2013), elastik ortam içerisindeki iki duvarlı karbon nanotüplerin serbest titreşimlerini, Timoshenko çubuk modelini temel alan ve yerel olmayan elastisite teorisini temel alan bir sonlu eleman formülasyonu ile incelemiştir. Isıl etkilerin de dikkate alındığı çalışmada, elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca, ortam rijitliği, dış çap oranı ve küçük ölçek etkisi gibi parametrelerin dinamik davranışa olan etkileri de incelenmiştir. Alotta ve diğ. (2014), Paoula ve diğ. (2013) tarafından önerilen yerel olmayan Timoshenko çubuk modelini kullanarak statik analiz için bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, şekil fonksiyonu olarak eksenel davranış için birinci; eğilme davranışı için ise üçüncü mertebeden polinom fonksiyonlar kullanmışlardır. De Sciarra (2014), nanoçubukların yer değiştirmelerini

ve eğilme momentlerini incelemek için yerel olmayan Euler-Bernoulli çubuk modelinden hareketle bir yerel olmayan sonlu eleman formülasyonu geliştirmiştir. Çalışmada, yerel olmayan sonlu eleman formülasyonu yaklaşımının, klasik sonlu eleman formülasyonundan farklı olarak mesh bağımlılığı, sayısal kararsızlık veya sınır şartlarından etkilenme gibi olumsuz etkilerinin bulunmadığı belirtilmiştir. Eptaimeros ve diğ. (2016), iki fazlı yerel olmayan integral teoriyi kullanarak, nanoçubuklar için bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Çalışmalarında, integral yaklaşımın diferansiyel yaklaşıma göre üstünlükleri tartışılmıştır. Karlicic ve diğ. (2016b), yayınladıkları yerel olmayan teoriyi temel alan yapı mekaniği kitabında, nanoçubukların statik ve dinamik davranışlarını, analitik yöntemin yanında sonlu eleman yaklaşımıyla da incelemişlerdir. Çalışmalarında, nanotüplerin eksenel ve eğilme titreşimlerini sonlu elemanlar yöntemi kullanarak detaylı olarak incelemişlerdir. Ganapathi ve diğ. (2018), eğri eksenli nanoçubukların titreşimlerini incelemek için yerel olmayan elastisite yaklaşımını ve kayma deformasyonu teorisini beraber ele alan bir sonlu eleman formülasyonu geliştirmişlerdir. Üç nodlu bir eğri eksenli çubuk elemanın geliştirildiği çalışmada, kalınlık oranının, açının, sınır şartlarının ve iç malzeme uzunluğu parametresinin titreşim üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM İÇİ STATİK DAVRANIŞLARINI İFADE EDEN YEREL OLMAYAN DENKLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

3.1 Eğri Eksenli Çubukların Düzlem İçi Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler

Yerel ve yerel olmayan elastisite teorisinin gerilmeleri arasındaki ilişki, (Eringen, 1983)'te aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$$(1 - \gamma^2 \nabla^2) \sigma^{nl} = \sigma^l \quad (3.1)$$

Burada, σ^l ve σ^{nl} , sırasıyla, yerel ve yerel olmayan elastisite teorisine göre tanımlanan gerilme tensörlerini; γ , yerel olmayan parametreyi; ∇^2 ise Laplasyen operatörünü temsil eden sembollerdir. (3.1) denklemi silindirik koordinatlarda bileşenlerine ayrılırsa:

$$\sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl})) = \sigma_{rr}^l \quad (3.2)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl})) = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.3)$$

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl})) = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.4)$$

$$\sigma_{rz}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \sigma_{rz}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta}) = \sigma_{rz}^l \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \sigma_{\theta z}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta}) = \sigma_{\theta z}^l \quad (3.6)$$

$$\sigma_{zz}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \sigma_{zz}^{nl}) = \sigma_{zz}^l \quad (3.7)$$

denklemleri elde edilir. Frenet koordinatları, eğri eksenli çubukların denklemlerinde sıklıkla kullanılmakta olup, çubuk kesitinin değişmediği ve çarpılmanın olmadığı

varsayımları altında, bu koordinat sistemine göre, σ_n , σ_b ve σ_{nb} gerilmelerinin değerleri sıfır olmaktadır. Frenet koordinat sistemi ve silindirik koordinat sistemi arasındaki ilişkiler

$$\sigma_n = -\sigma_{rr} = 0 \quad (3.8)$$

$$\sigma_b = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.9)$$

$$\sigma_t = \sigma_{\theta\theta} \neq 0 \quad (3.10)$$

$$\sigma_{tn} = -\sigma_{r\theta} \neq 0 \quad (3.11)$$

$$\sigma_{tb} = \sigma_{\theta z} \neq 0 \quad (3.12)$$

$$\sigma_{nb} = -\sigma_{rz} = 0 \quad (3.13)$$

olarak ifade edilir. (3.8-3.13) denklemleri çubuk varsayımları olarak adlandırılır. Düzlem içi durum özelinde (3.12) denklemi, $\sigma_{tb} = \sigma_{\theta z} = 0$ halini alınır. Düzlem içi yükleme durumu ve (3.8-3.13) çubuk kabulleri altında, (3.2-3.7) denklemleri düzenlenirse,

$$-\frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} = 0 \quad (3.14)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right] \\ = \sigma_{r\theta}^l \end{aligned} \quad (3.16)$$

denklemleri elde edilir. Burada, $\bar{r}$ kesit içindeki radyal koordinatı temsil etmektedir. (3.14-3.16) denklemlerinden hareketle, yerel olmayan elastisite teorisine göre tanımlanan F_t, F_n, M_b kesit tesirleri ile yerel elastisite teorisine göre tanımlanan F_t^l, F_n^l, M_b^l kesit tesirleri arasındaki ilişkiyi elde etmek için, (3.14-3.16) denklemleri,

$$\iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA = F_t \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l dA = F_t^l \quad (3.17)$$

$$\iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA = -F_n \quad \iint_A \sigma_{r\theta}^l dA = -F_n^l \quad (3.18)$$

$$\iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} \bar{r} dA = M_b \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l \bar{r} dA = M_b^l \quad (3.19)$$

bağıntıları kullanılarak kesit üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right) F_t(\theta) + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta) q_n(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dq_t}{d\theta} + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_t \\ = F_t^l \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2}\right) F_n(\theta) - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta) q_t(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dq_n}{d\theta} + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_n \\ = F_n^l \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} M_b - \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} [R(\theta)]^2 q_n(\theta) + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} F_n + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dm_b}{d\theta} \\ + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} m_b = M_b^l \end{aligned} \quad (3.22)$$

denklemleri elde edilir. Burada, q_t , q_n , m_b , sırasıyla teğetsel doğrultudaki yayılı dış yüke, normal doğrultudaki yayılı dış yüke ve binormal doğrultu etrafındaki yayılı dış momente; θ , açısıl koordinata; $R(\theta)$, değişken eğrilikli durumunu da kapsayan eğrilik yarıçapına karşılık gelmektedir.

Yerel elastisite teorisi kullanılarak çubuğun düzlem içi statik davranışını ifade eden diferansiyel denklem takımı,

$$\frac{dw(\theta)}{d\theta} = u(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} F_t^l(\theta) \quad (3.23)$$

$$\frac{du(\theta)}{d\theta} = -w(\theta) + \frac{k_n R(\theta) F_n^l(\theta)}{GA(\theta)} + R(\theta) \Omega_b(\theta) \quad (3.24)$$

$$\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} = \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} M_b^l(\theta) \quad (3.25)$$

$$\frac{dM_b^l(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)F_n^l(\theta) - R(\theta)m_b(\theta) \quad (3.26)$$

$$\frac{dF_t^l(\theta)}{d\theta} = F_n^l(\theta) - R(\theta)q_t(\theta) \quad (3.27)$$

$$\frac{dF_n^l(\theta)}{d\theta} = -F_t^l(\theta) - R(\theta)q_n(\theta) \quad (3.28)$$

olarak (Tüfekci ve Arpacı, 2006) tarafından verilmiştir. Burada, u ve w sırasıyla, normal ve teğetsel doğrultudaki yer değiştirmeleri; Ω_b , binormal eksen etrafındaki dönme açısını ifade etmektedir. Ayrıca, A , kesit alanını; I_b , binormal eksene göre tanımlanan kesit eylemsizlik modülünü; E ve G sırasıyla, elastisite ve kayma modüllerini; k_n , kayma gerilmesinin kesit üzerinde üniform yayılmadığı belirten sabiti ifade etmektedir.

(3.20-3.22) denklemleri, gerekli düzenlemelerle (3.23-3.25) denklemlerindeki yerel elastisite teorisine göre tanımlanmış kesit tesirlerinin içine konulursa,

$$\begin{aligned} \frac{dw(\theta)}{d\theta} &= u(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_t(\theta) \\ &+ \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R(\theta)q_n(\theta) + \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} R \frac{dq_t}{d\theta} \\ &+ \frac{R(\theta)}{EA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_t \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{du(\theta)}{d\theta} &= -w(\theta) + R(\theta)\Omega_b(\theta) + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) F_n(\theta) \\ &- \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} q_t(\theta) + \frac{k_n [R(\theta)]^2}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dq_n}{d\theta} \\ &+ \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} q_n \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_b(\theta)}{d\theta} &= \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} M_b + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} F_n \\
&\quad - \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} [R(\theta)]^2 q_n(\theta) + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dm_b}{d\theta} \\
&\quad + \frac{R(\theta)}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} m_b
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\frac{dM_b(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)F_n(\theta) - R(\theta)m_b(\theta) \tag{3.32}$$

$$\frac{dF_t(\theta)}{d\theta} = F_n(\theta) - R(\theta)q_t(\theta) \tag{3.33}$$

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = -F_t(\theta) - R(\theta)q_n(\theta) \tag{3.34}$$

denklemleri yazılır (Oldaç, 2016). Bir diferansiyel denklem takımı oluşturan (3.29-3.34) denklemlerinin kesin analitik çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak elde edilebilir.

3.2 Eğri Eksenli Çubukların Düzlem İçi Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemlerin Çözümleri

(3.29-3.34) denklemleri, birinci merteben değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Bu denklemler,

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{S}(\theta)\mathbf{y}(\theta) + \mathbf{f}(\theta) \tag{3.35}$$

formunda ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{y}(\theta)$ değişkenler vektörü; $\mathbf{S}(\theta)$, katsayılar matrisi; $\mathbf{f}(\theta)$, dış yüklere ait bileşke vektörünü ifade etmekte olup; düzlemsel durumda sırasıyla, 6x1, 6x6 ve 6x1 boyutlarındadırlar.

Başlangıç değerleri yönteminde, sınır şartlarına göre yazılan $\mathbf{y}_o = \mathbf{y}(\theta_0)$ başlangıç değerleri vektörü için, (3.35) denklem sisteminin çözümü,

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, \theta_0)\mathbf{y}_o + \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{Y}^{-1}(\phi, \theta_0)\mathbf{f}(\phi)d\phi \tag{3.36}$$

formunda elde edilir. Burada, $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$, $\theta_0 = 0$ referans koordinatına göre hesaplanmış asal matristir. $\mathbf{Y}^{-1}(\phi, \theta_0)$ ise asal matrisin tersini ifade etmektedir. Dış yüklerin etkilemediği durumda çözüm,

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, 0)\mathbf{y}_0 \quad (3.37)$$

halini alır. (3.37) denklemi,

$$\begin{bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \\ \Omega_b(\theta) \\ F_t(\theta) \\ F_n(\theta) \\ M_b(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \\ F_{t0} \\ F_{n0} \\ M_{b0} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

biçiminde matris formunda da yazılabilir. Benzer şekilde, (3.36) denklemi de en genel durum için,

$$\begin{bmatrix} w \\ u \\ \Omega_b \\ F_t \\ F_n \\ M_b \end{bmatrix} = [Y]_{6 \times 6} \begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \\ F_{t0} \\ F_{n0} \\ M_{b0} \end{bmatrix} + [Y]_{6 \times 6} \int_0^\phi [Y]^{-1}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} d\psi \quad (3.39)$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda teğetsel ve normal doğrultudaki yer değiştirme ifadeleri,

$$\begin{aligned}
w(\theta) = & \cos \theta w_o + \sin \theta u_o - \int_0^\theta R(\psi) \sin \psi d\psi \cos \theta \Omega_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \cos \psi d\psi \sin \theta \Omega_{bo} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta M_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \right) \cos \psi d\psi \sin \theta M_{bo} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos^2 \psi d\psi \cos \theta F_{to} + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin^2 \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left(\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \right) \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin^2 \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \left[\int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \right] \cos \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos^2 \psi d\psi \sin \theta F_{no}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
u(\theta) = & -\sin \theta w_o + \cos \theta u_o + \int_0^\theta R(\psi) \sin \psi d\psi \sin \theta \Omega_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \cos \psi d\psi \cos \theta \Omega_{bo} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta M_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta M_{bo} \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \cos \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{to} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{to} \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \cos \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \sin \psi d\psi \sin \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta \frac{R(\psi)}{EA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \sin \phi \sin \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& - \int_0^\theta R(\psi) \int_0^\phi \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\psi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no} \\
& + \int_0^\theta \frac{k_n R(\psi)}{GA(\psi)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\psi)]^2} \right) \cos \phi \cos \psi d\psi \cos \theta F_{no}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Binormal doğrultu etrafındaki dönme açısı,

$$\begin{aligned}
\Omega_b(\theta) = & \Omega_{bo} + \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} d\psi M_{bo} \\
& + \left\{ \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \sin \psi d\psi d\phi \right. \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \sin \phi d\psi \left. \right\} F_{to} \\
& + \left\{ \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \frac{\gamma^2}{(R(\theta))^2} \frac{dR}{d\phi} \cos \phi d\psi \right. \\
& - \int_0^\theta \frac{R(\phi)}{EI_b(\phi)} \int_0^\phi R(\psi) \cos \psi d\psi d\phi \left. \right\} F_{no}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Teğetsel doğrultudaki yerel olmayan iç kuvvet,

$$F_t(\theta) = F_{no} \sin \theta + F_{to} \cos \theta \tag{3.43}$$

Normal doğrultudaki yerel olmayan iç kuvvet,

$$F_n(\theta) = F_{no} \cos \theta - F_{to} \sin \theta \tag{3.44}$$

Binormal doğrultu etrafındaki yerel olmayan iç moment,

$$M_b(\theta) = M_{bo} + \int_0^\theta R(\psi) \sin \psi d\psi F_{to} - \int_0^\theta R(\psi) \cos \psi d\psi F_{no} \tag{3.45}$$

olarak elde edilir.

İncelenen çubuğun, çember eksenli ve sabit kesitli olması durumunda, asal matrisin sıfırdan farklı elemanları aşağıdaki formları alır:

$$Y_{11} = \cos \theta ; Y_{12} = \sin \theta ; Y_{13} = R(1 - \cos \theta) \tag{3.46}$$

$$Y_{14} = \frac{2EA^2GR^4\theta + (EA^2GR^4 + EI_b(GA + EAk_n)(R^2 + \gamma^2))\theta\cos\theta}{2E^2A^2I_bGR} + \frac{(-3EA^2GR^4 + EI_b(GA - EAk_n)(R^2 + \gamma^2))\sin\theta}{2E^2A^2I_bGR} \quad (3.47)$$

$$Y_{15} = \frac{-2EA^2GR^4 + 2EA^2GR^4\cos\theta}{2E^2A^2I_bGR} + \frac{(EA^2GR^4 + EI_b(GA + EAk_n)(R^2 + \gamma^2))\theta\sin\theta}{2E^2A^2I_bGR} \quad (3.48)$$

$$Y_{16} = \frac{R^2(\theta - \sin\theta)}{EI_b} \quad (3.49)$$

$$Y_{21} = -\sin\theta ; Y_{22} = \cos\theta ; Y_{23} = R\sin\theta \quad (3.50)$$

$$Y_{24} = -\frac{-2EA^2GR^4 + 2EA^2GR^4\cos\theta}{2E^2A^2I_bGR} - \frac{(EA^2GR^4 + EI_b(GA + EAk_n)(R^2 + \gamma^2))\theta\sin\theta}{2E^2A^2I_bGR} \quad (3.51)$$

$$Y_{25} = \frac{(EA^2GR^4 + EI_b(GA + EAk_n)(R^2 + \gamma^2))\theta\cos\theta}{2E^2A^2I_bGR} - \frac{(EA^2GR^4 + EI_b(GA - EAk_n)(R^2 + \gamma^2))\sin\theta}{2E^2A^2I_bGR} \quad (3.52)$$

$$Y_{26} = \frac{2R^2\sin(\frac{\theta}{2})^2}{EI_b} \quad (3.53)$$

$$Y_{33} = 1 \quad (3.54)$$

$$Y_{34} = \frac{R^2(\theta - \sin\theta)}{EI_b} \quad (3.55)$$

$$Y_{35} = -\frac{2R^2\sin(\frac{\theta}{2})^2}{EI_b} \quad (3.56)$$

$$Y_{36} = \frac{R\theta}{EI_b} \quad (3.57)$$

$$Y_{44} = \cos\theta ; Y_{45} = \sin\theta \quad (3.58)$$

$$Y_{54} = -\sin\theta ; Y_{55} = \cos\theta \quad (3.59)$$

$$Y_{64} = R(1 - \cos\theta) ; Y_{65} = -R\sin\theta ; Y_{66} = 1 \quad (3.60)$$





4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Katı cisim mekaniği özelinde, kesin analitik çözümler sadece çubuk, plak gibi temel yapısal elemanlar için elde edilebilmektedir. Daha karmaşık geometrilerin söz konusu olması durumunda ise kesin analitik çözüm genellikle mümkün olamamaktadır. Böyle durumlarda, mühendislik yaklaşımı, çözümü sayısal yöntemlerle aramaya yönelmektedir. Bu yöntemlerden bir tanesi de 1950'li yıllarda geliştirilen sonlu elemanlar yöntemidir. Özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle beraber günümüzde kendine katı cisim mekaniği ve akışkanlar dinamiği gibi temel araştırma alanlarında geniş bir biçimde yer bulan sonlu elemanlar yöntemi, karmaşık yapıları, sonlu sayıda daha basit yapısal elemanlara ayıran ve çözümü yaklaşık olarak elde eden bir yöntemdir. Bu yaklaşımda, eleman olarak adlandırılan sonlu sayıdaki alt birimler, şekil fonksiyonu olarak adlandırılan yer değiştirme alanlarına tabii olup, birbirlerine nod adı verilen bağlantı noktalarıyla bağlanmışlardır.

Literatürde, bu yaklaşım kullanılarak nanoçubukların statik ve dinamik analizleri gerçekleştiren sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Şekil fonksiyonu olarak yaklaşık ifadeleri kullanan bu çalışmaların büyük çoğunluğu doğru eksenli nanoçubuklar üzerinedir.

Bu bölümde, eğri eksenli nanoçubukların statik ve dinamik analizlerini gerçekleştirmek için 2 nodlu bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman, eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkilerini içermekte ve şekil fonksiyonu olarak kesin analitik çözümden elde edilmiş yer değiştirme alanlarını kullanmaktadır.

4.1 Rijitlik matrisinin formüle edilmesi

3. bölümde elde edilen kesin analitik çözümün matrisinde, sonlu eleman formülasyonuna uygunluk açısından kuvvet ve moment ifadelerinin yerleri değiştirilirse, aşağıdaki ifade edilir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \\ \Omega_b(\theta) \\ F_t(\theta) \\ F_n(\theta) \\ M_b(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(\theta)} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)} \underbrace{\begin{bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \\ F_{t0} \\ F_{n0} \\ M_{b0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_0} \quad (4.1)$$

Burada,

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \\ \Omega_b(\theta) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{X}_0 = \begin{Bmatrix} w_0 \\ u_0 \\ \Omega_{b0} \end{Bmatrix}; \quad (4.2)$$

ve

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_t(\theta) \\ F_n(\theta) \\ M_b(\theta) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_0 = \begin{Bmatrix} F_{t0} \\ F_{n0} \\ M_{b0} \end{Bmatrix}; \quad (4.3)$$

kısaltmaları kullanılırsa $\mathbf{y}(\theta)$ ve $\mathbf{y}_0$ vektörleri,

$$\mathbf{y}(\theta) = \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{y}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{F}_0 \end{Bmatrix}; \quad (4.4)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca, $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ asal matrisi de

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\theta) &= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}; & \mathbf{B}(\theta) &= \begin{bmatrix} Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\theta) &= \begin{bmatrix} Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} \end{bmatrix}; & \mathbf{D}(\theta) &= \begin{bmatrix} Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.5)$$

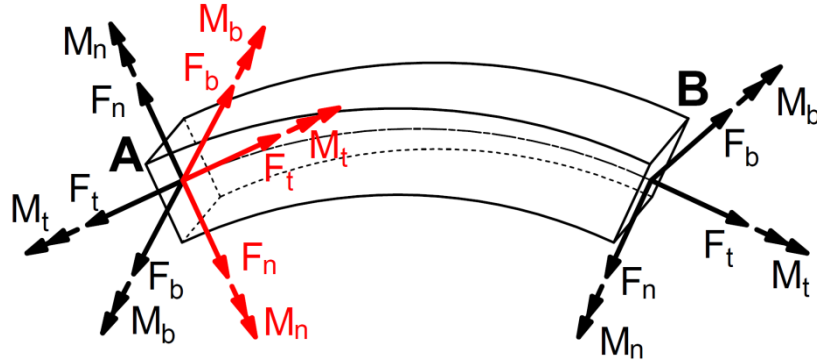
şeklinde 3x3'lük alt matrislere ayrılırsa, son durumda (4.1) denklemi,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta) & \mathbf{B}(\theta) \\ \mathbf{C}(\theta) & \mathbf{D}(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{F}_0 \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

şeklinde yazılır.

Analitik yaklaşım ve sonlu eleman formülasyonu arasında yön kabulü bakımında fark mevcuttur. Şekil 4.1'de A ucunda, sonlu eleman formülasyonunda kullanılan

koordinat takımı kırmızı renkle gösterilmiştir. B ucu için herhangi bir değişiklik yapılmamıştır.



Şekil 4.1 : Analitik ve sonlu eleman yaklaşımları arasındaki yön kabul farkı.

θ_e , birim eleman başına açısal açıklık olmak üzere, A ve B noktalarının açısal koordinatları sırasıyla $\theta_A = 0$ ve $\theta_B = \theta_e$ olarak seçilirse, analitik yaklaşımda bu durum,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta_e) & \mathbf{B}(\theta_e) \\ \mathbf{C}(\theta_e) & \mathbf{D}(\theta_e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{F}_A \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

olarak yazılabilir. Sonlu eleman formülasyonundaki yön kabulüne göre (4.7) denklemi,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_B \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta_e) & \mathbf{B}(\theta_e) \\ \mathbf{C}(\theta_e) & \mathbf{D}(\theta_e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ -\mathbf{F}_A \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

şeklinde elde edilir. (4.8)denklemi gerekli düzenlemelerle,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\theta_e) & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}(\theta_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta_e) & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C}(\theta_e) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{I}$ ve $\mathbf{0}$ alt matrisleri sırasıyla, 3×3 'lük birim ve sıfır matrislere karşılık gelmektedir. (4.9) denklemi, klasik sonlu eleman formülasyonu formunda yazılırsa,

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{F}_B \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}(\theta_e) & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}(\theta_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta_e) & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C}(\theta_e) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_A \\ \mathbf{X}_B \end{Bmatrix}}_{\mathbf{X}^e} \quad (4.10)$$

olarak yazılır. Böylece, rijitlik matrisi,

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\theta_e) & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}(\theta_e) & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\theta_e) & -\mathbf{I} \\ \mathbf{C}(\theta_e) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

şeklinde elde edilir.

Rijitlik matrisini elde etmek için yukarıda bahsedilen yaklaşım literatürde “direkt metot” (direct method) olarak geçmektedir. 4.3 alt bölümünde aynı rijitlik matrisi, Hamilton Prensipli kullanılarak da elde edilecektir.

4.2 Kütle matrisinin formüle edilmesi

Nanoçubukların sonlu eleman yaklaşımıyla dinamik analizini gerçekleştirmek için kütle matrisi formüle edilmelidir. Dönme eylemsizliğinin etkisinin de dikkate alındığı bu formülasyonda, şekil fonksiyonu olarak kesin analitik çözümden elde edilmiş yer değiştirme alanları kullanılmaktadır.

Bunun için, (4.1) denkleminde verilmiş olan $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ asal matrisi aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir,

$$\mathbf{Y}(\theta, \theta_0) = \mathbf{Y}^l(\theta, \theta_0) + \mathbf{Y}^{nl}(\theta, \theta_0) \quad (4.12)$$

Burada, denkleminin sağ tarafındaki ilk terim, $\mathbf{Y}^l(\theta, \theta_0)$, yerel elastisite teorisine karşılık gelen kesin analitik çözümleri; ikinci terim, $\mathbf{Y}^{nl}(\theta, \theta_0)$ ise yerel olmayan elastisite teorisinin katkısını ifade eden yerel olmayan kesin analitik çözümleri barındırmaktadır. Bu durumda, yerel durum için yer değiştirme bileşenleri,

$$\mathbf{X}^l = [\mathbf{A}^l(\theta, \theta_0) \mathbf{B}^l(\theta, \theta_0)] \mathbf{y}_0 = \mathbf{H}^l(\theta, \theta_0) \mathbf{y}_0 \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{X}^l$, yerel teorideki yer değiştirmeleri, $\mathbf{A}^l$ ve $\mathbf{B}^l$ kısaltmaları yerel durum için kesin analitik çözümleri içeren 3x3 boyutundaki alt matrisleri, $\mathbf{H}^l$ ise bu alt matrislerin oluşturduğu 3x6 boyutundaki yeni matrisi tanımlamaktadır. Sonlu elemanın her iki ucunun yer değiştirmesi yerel durum için bu durumda,

$$(\mathbf{X}^e)^l = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}^l(\theta_A) \\ \mathbf{X}^l(\theta_B) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^l(\theta_A, \theta_0) \\ \mathbf{H}^l(\theta_B, \theta_0) \end{bmatrix} \mathbf{y}_0 = \mathbf{G}^l \mathbf{y}_0 \quad (4.14)$$

olarak yazılır. Burada, $\mathbf{G}^l$, her iki uç için yazılan $\mathbf{H}^l$ matrislerini içeren, 6x6 boyutundaki bir matrisi ifade etmektedir. Böylece, yer değiştirmeler arasındaki ilişki,

$$\mathbf{X}^l = \mathbf{H}^l(\theta)(\mathbf{G}^l)^{-1}(\mathbf{X}^e)^l \quad (4.15)$$

olarak yazılır ve kesin analitik çözüme dayalı şekil fonksiyonu da $\mathbf{H}^l(\theta)(\mathbf{G}^l)^{-1}$ olarak tanımlanır. İleriki adımlara hazırlık olması açısından bu yer değiştirmeler, sabit eğrilik kabulü altında, $ds = R(\theta)d\theta$ kabulüne göre zamana ve konuma göre ayrı ayrı ve son olarak da beraberce birer defa türetilirse,

$$\frac{\partial \mathbf{X}^l}{\partial t} = \mathbf{H}^l(\theta)(\mathbf{G}^l)^{-1}(\dot{\mathbf{X}}^e)^l \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}^l}{\partial s} = \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial \mathbf{H}^l(\theta)}{\partial \theta} (\mathbf{G}^l)^{-1}(\mathbf{X}^e)^l \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}^l}{\partial s \partial t} = \frac{1}{R(\theta)} \frac{\partial \mathbf{H}^l(\theta)}{\partial \theta} (\mathbf{G}^l)^{-1}(\dot{\mathbf{X}}^e)^l \quad (4.18)$$

ifadeleri elde edilir.

Mindlin (1964)'e göre kinetik enerji, denklem (4.19) şeklinde ifade edilebilir. Literatürde hız gradyenti teorisi olarak da bilinen bu kinetik enerji formülasyonunda, ilk terim makro yapı etkisine, ikinci terim ise mikro yapı etkisine karşılık gelmektedir. Böylece, sonlu elemanın kinetik enerjisi, ρ malzeme yoğunluğunu, t zamanı, θ ise konumu göstermek üzere, aşağıdaki gibi yazılır (Mindlin, 1964):

$$T = \frac{1}{2} \int_{\theta_e} \rho \frac{\partial (\mathbf{X}^l)^T}{\partial t} \mathbf{P}(\theta) \frac{\partial \mathbf{X}^l}{\partial t} R(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \gamma^2 \int_{\theta_e} \rho \frac{\partial^2 (\mathbf{X}^l)^T}{\partial s \partial t} \mathbf{P}(\theta) \frac{\partial^2 \mathbf{X}^l}{\partial s \partial t} R(\theta) d\theta \quad (4.19)$$

Burada, $\mathbf{P}(\theta)$ matrisi kesit özelliklerini ihtiva eden matristir ve

$$\mathbf{P}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & A(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_b(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

olarak tanımlanır.

(4.16-4.18) ifadeleri, (4.19) denkleminde yerlerine konulursa,

$$\begin{aligned}
& \overset{T}{=} \frac{1}{2} \left((\dot{\mathbf{X}}^e)^l \right)^T (\mathbf{G}^l)^{-T} \int_{\theta_e} \rho \left(\mathbf{H}^l(\theta) \right)^T \mathbf{P}(\theta) \mathbf{H}^l(\theta) R(\theta) d\theta (\mathbf{G}^l)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}^e)^l \\
& + \frac{1}{2} \left((\dot{\mathbf{X}}^e)^l \right)^T \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} (\mathbf{G}^l)^{-T} \int_{\theta_e} \rho \left(\mathbf{H}_\theta^l(\theta) \right)^T \mathbf{P}(\theta) \mathbf{H}_\theta^l(\theta) R(\theta) d\theta (\mathbf{G}^l)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}^e)^l
\end{aligned} \quad (4.21)$$

şeklinde yazılır. Burada, $\mathbf{H}_\theta^l(\theta)$ notasyonu, $\mathbf{H}^l(\theta)$ matrisinin θ koordinatına göre bir defa türevini ifade etmektedir. Nodların yerel ve yerel olmayan yer değiştirmeleri arasındaki ilişkinin

$$(\mathbf{X}^e)^l = \mathbf{G}^l \mathbf{G}^{-1} \mathbf{X}^e \quad (4.22)$$

şeklinde olduğu gözönünde bulundurularak, kütle matrisi, sabit kesit ve sabit eğrilik kabulü altında,

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho \left(\mathbf{H}^l \right)^T \mathbf{P} \mathbf{H}^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} + \frac{\gamma^2}{R^2} \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho \left(\mathbf{H}_\theta^l \right)^T \mathbf{P} \mathbf{H}_\theta^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \quad (4.23)$$

olarak elde edilir. 4.3 alt bölümünde aynı kütle matrisi, Hamilton Prensipli kullanılarak da elde edilecektir.

Denklem (4.11) ve denklem (4.23)'te her bir eleman için elde edilen eleman rijitlik ve kütle matrisleri üzerinden global rijitlik, $\mathbf{K}^G$ ve global kütle, $\mathbf{M}^G$, matrislerinin inşa edilmesiyle, incelenen yapının sönümsüz serbest titreşim davranışı incelenebilir. Bunun için, aşağıdaki hareket denkleminin çözülmesi gerekmektedir:

$$\mathbf{M}^G \ddot{\mathbf{X}}^G + \mathbf{K}^G \mathbf{X}^G = \mathbf{0} \quad (4.24)$$

Burada, $\mathbf{X}^G$ ve $\ddot{\mathbf{X}}^G$ sırasıyla global yer değiştirme vektörünü ve global yer değiştirme vektörünün zamana göre ikinci türevini temsil etmektedir. Harmonik titreşimler kabulü altında, global durum için çözüm:

$$\mathbf{X}^G(\theta, t) = \mathbf{X}^G(\theta) e^{i\omega t} \quad (4.25)$$

olarak aranırsa, özdeğer problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(\mathbf{K}^G - \omega^2 \mathbf{M}^G) \mathbf{X}^G = \mathbf{0} \quad (4.26)$$

Bu problemin, sıfırdan farklı çözümlerini elde etmek için katsayılar matrisinin determinantını sıfır olduğu durumlar incelenmelidir. Bu determinantı sıfır yapan değerlerin karekökleri ilgili yapının doğal frekanslarına karşılık gelmektedir.

$$\det[\mathbf{K}^G - \omega^2 \mathbf{M}^G] = 0 \quad (4.27)$$

4.3 Rijitlik ve Kütle matrislerinin Hamilton Prensibi kullanılarak formüle edilmesi

Bu alt bölümde, rijitlik ve kütle matrisleri, varyasyonel bir yaklaşım olan Hamilton Prensibi kullanılarak elde edilecektir. Bir potansiyelden türetilmeyen dış kuvvetlerin mevcut olmadığı bir mekanik sistemde Hamilton Prensibi,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (4.28)$$

olarak ifade edilir. Burada, $\mathcal{L}$, Lagrange fonksiyonuna; δ , varyasyonel operatöre karşılık gelmektedir. Ancak, formüle edilen sonlu eleman modelinde, bir potansiyelden türetilmeyen dış kuvvetler de bulunduğundan dolayı Hamilton Prensibi,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta \mathcal{L} + \delta W_e) dt = 0 \quad (4.29)$$

olarak ifade edilir. (4.29) denklemi, literatürde Genelleştirilmiş Hamilton Prensibi olarak ifade edilip, δW_e terimi, bir potansiyelden türetilmeyen dış kuvvetlerin yaptıkları toplam işin varyasyonunu ifade etmektedir.

Yukarıdaki tanımlamalardan sonra, ilgilenilen problem özelinde, şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve bir potansiyelden türetilmeyen dış kuvvetlerin yaptığı iş ifadeleri,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_e} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{F}^l ds \quad (4.30)$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\theta_e} \rho (\dot{\mathbf{X}}^l)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{X}}^l ds + \frac{1}{2} \gamma^2 \int_{\theta_e} \rho (\dot{\mathbf{X}}_s^l)^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{X}}_s^l ds \quad (4.31)$$

$$W_e = (\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (4.32)$$

şeklinde tanımlanır. Burada, U , birim şekil değiştirme enerjisine; $\boldsymbol{\varepsilon}$, birim şekil değiştirmeleri; $\mathbf{F}^l$, çubuk eksenine indirgenmiş yerel gerilme vektörünü; T , kinetik enerjiyi; ρ , yoğunluğu; $\dot{\mathbf{X}}$, sonlu elemanın nodlarının yer değiştirmelerinin zamana göre birinci türevini; $\dot{\mathbf{X}}_\theta$, sonlu elemanın nodlarının yer değiştirmelerinin konuma ve zamana göre türevini; $\mathbf{P}$, kesit özelliklerini içeren matrisi; W_e , bir potansiyelden türetilmeyen dış kuvvetlerin yaptığı işi; $\mathbf{X}^e$, sonlu elemanın nodlarının yer değiştirmelerini; $\mathbf{F}^e$, bir potansiyelden türetilmeyen dış kuvvetleri temsil etmektedir.

Birim şekil değiştirme enerjisini formüle etmek için öncelikle yerel olmayan durum için birim şekil değiştirmeler elde edilmelidir. Analitik yaklaşımda, düzlem içi durumdaki yer değiştirme bileşenleri,

$$\mathbf{u} = \{w(\theta), u(\theta), \Omega_b(\theta)\}^T \quad (4.33)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda, birim şekil değiştirmeleri elde etmek için, (3.29-3.31) denklemleri,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{R(\theta)} \begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{d}{d\theta} & -R(\theta) \\ 0 & 0 & \frac{d}{d\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(\theta) \\ u(\theta) \\ \Omega_b(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_n}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_b(\theta)} \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} & \frac{1}{EI_b(\theta)} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_t(\theta) \\ F_n(\theta) \\ M_b(\theta) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

şeklinde kısaltılarak,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{h} \mathbf{F} \quad (4.37)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece, birim şekil değiştirme enerjisi, $ds = R(\theta)d\theta$ olmak üzere,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\theta_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{F}^l ds = \frac{1}{2} \int_{\theta_e} \mathbf{F}^T \mathbf{h}^T \mathbf{F}^l R(\theta) d\theta \quad (4.38)$$

olarak yazılır. Burada,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{[R(\theta)]^2} \frac{dR}{d\theta} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

şeklinde tanımlanmak üzere, yerel ile yerel olmayan iç kuvvet vektörleri arasındaki ilişki,

$$\mathbf{F}^l = \mathbf{k} \mathbf{F} \quad (4.40)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda,

$$\mathbf{F}^l = \mathbf{k} [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}] \mathbf{G}^{-1} \mathbf{X}^e \quad (4.41)$$

ilişkisi yazılır ve (4.38) ifadesi sabit eğrilik kabulü altında,

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{X}^e)^T \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}]^T \mathbf{h}^T \mathbf{k} [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}] R d\theta \mathbf{G}^{-1} \mathbf{X}^e \quad (4.42)$$

halini alır. Burada,

$$U^* = \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}]^T \mathbf{h}^T \mathbf{k} [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}] R d\theta \mathbf{G}^{-1} \quad (4.43)$$

kısaltması kullanılırsa, (4.42) denklemi,

$$U = \frac{1}{2} (\mathbf{X}^e)^T U^* \mathbf{X}^e \quad (4.44)$$

formunu alır.

Kinetik enerji ifadesini elde etmek için, yerel durumda

$$\mathbf{X}^l = \mathbf{H}^l (\mathbf{G}^l)^{-1} (\mathbf{X}^e)^l \quad (4.45)$$

nodal yer değiştirme ifadesi, zamana göre bir defa türetilirse,

$$\dot{\mathbf{X}}^l = \mathbf{H}^l (\mathbf{G}^l)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}^e)^l \quad (4.46)$$

formu elde edilir. Ayrıca, (4.45) denklemi, $ds = R(\theta)d\theta$ kabulü altında, s koordinatına göre bir defa türetilirse,

$$\mathbf{X}_s^l = \frac{1}{R(\theta)} \mathbf{H}_\theta^l (\mathbf{G}^l)^{-1} (\mathbf{X}^e)^l \quad (4.47)$$

ifadesi elde edilir. (4.47) denkleminin zamana göre bir defa türetilmesiyle de,

$$\dot{\mathbf{X}}_s^l = \frac{1}{R(\theta)} \mathbf{H}_\theta^l (\mathbf{G}^l)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}^e)^l \quad (4.48)$$

Denklem (4.46) ve denklem (4.48), (4.31) denkleminde ilgili yerlerine konulursa kinetik enerji ifadesi sabit kesit ve sabit eğrilik kabulü altında,

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \left((\dot{\mathbf{X}}^e)^l \right)^T (\mathbf{G}^l)^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}^l R d\theta (\mathbf{G}^l)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}^e)^l \\ & + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{R^2} \left((\dot{\mathbf{X}}^e)^l \right)^T (\mathbf{G}^l)^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}_\theta^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}_\theta^l R d\theta (\mathbf{G}^l)^{-1} (\dot{\mathbf{X}}^e)^l \end{aligned} \quad (4.49)$$

olarak elde edilir. Burada, nodların yerel ve yerel olmayan yer değiştirmeleri arasındaki ilişkinin

$$(\mathbf{X}^e)^l = \mathbf{G}^l \mathbf{G}^{-1} \mathbf{X}^e \quad (4.50)$$

olduğu gözönünde bulundurulursa, kinetik enerji ifadesi

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{X}}^e \\ & + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{R^2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}_\theta^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}_\theta^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{X}}^e \end{aligned} \quad (4.51)$$

formunu alır. Burada, birim şekil değiştirme enerjisinde yapıldığı gibi

$$T^* = \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \quad (4.52)$$

$$T' = \frac{\gamma^2}{R^2} \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}_\theta^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}_\theta^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \quad (4.53)$$

kısaltmaları yapılmasıyla kinetik enerji ifadesi, son durumda,

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e \quad (4.54)$$

olarak yazılabilir.

Denklem (4.29)'daki Genelleştirilmiş Hamilton Prensiplerinin uygulanması için kinetik potansiyel, $\mathcal{L}$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (4.55)$$

Burada, (4.44) ve (4.54) enerji ifadelerinin yerlerine konulmasıyla, son durumda kinetik potansiyel,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e - \frac{1}{2} (\mathbf{X}^e)^T U^* \mathbf{X}^e \quad (4.56)$$

olarak yazılır.

Benzer şekilde, bir potansiyelden türetilmeyen dış yüklerin yaptığı işler,

$$W_e = (\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (4.57)$$

olarak yazılır.

Böylece, (4.56) ve (4.57) denklemleri, (4.29) denkleminde konulursa,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \left(\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e - \frac{1}{2} (\mathbf{X}^e)^T U^* \mathbf{X}^e \right) + \delta ((\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e) \right) dt = 0 \quad (4.58)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \left(\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e \right) - \delta \left(\frac{1}{2} U^* \mathbf{X}^e \right) + \delta ((\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e) \right) dt = 0 \quad (4.59)$$

ve terim terime varyasyonu alınır, ilk terim için,

$$\begin{aligned} & \delta \left(\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((T^* + T') \delta(\dot{\mathbf{X}}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e + (T^* + T') (\dot{\mathbf{X}}^e)^T \delta(\dot{\mathbf{X}}^e) \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, $\delta(\dot{\mathbf{X}}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e = (\dot{\mathbf{X}}^e)^T \delta \dot{\mathbf{X}}^e$ özelliği kullanılarak,

$$\delta \left(\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e \right) = (T^* + T') \delta(\dot{\mathbf{X}}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e \quad (4.61)$$

formu elde edilir. Son durumda, (4.61) denkleminin sağ tarafı için

$$\delta(\dot{\mathbf{X}}^e)^T = \delta \left(\frac{d(\dot{\mathbf{X}}^e)^T}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \delta(\mathbf{X}^e)^T \quad (4.62)$$

özelliği kullanılırsa,

$$\delta \left(\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{X}}^e)^T (T^* + T') \dot{\mathbf{X}}^e \right) = (T^* + T') \frac{d}{dt} \delta(\mathbf{X}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e \quad (4.63)$$

eşitliğine ulaşılır.

İkinci terim için de benzer şekilde,

$$\delta \left(\frac{1}{2} (\mathbf{X}^e)^T U^* \mathbf{X}^e \right) = \frac{1}{2} (U^* \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{X}^e + U^* (\mathbf{X}^e)^T \delta(\mathbf{X}^e)) \quad (4.64)$$

eşitliği elde edilir. Burada, $\delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{X}^e = (\mathbf{X}^e)^T \delta \mathbf{X}^e$ özelliği kullanılırsa,

$$\delta \left(\frac{1}{2} (\mathbf{X}^e)^T U^* \mathbf{X}^e \right) = U^* \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{X}^e \quad (4.65)$$

denklemini elde edilir.

Üçüncü terim için,

$$\delta((\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e) = \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (4.66)$$

ifadesi elde edilir.

Böylece, (4.59) denklemi,

$$\int_{t_1}^{t_2} ((T^* + T') \frac{d}{dt} \delta(\mathbf{X}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e - U^* \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{X}^e + \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e) dt = 0 \quad (4.67)$$

haline dönüşür. Bu denklemde, integralin her terime dağıtılmasıyla ve ilk terimdeki dt ifadelerinin sadeleşmesiyle,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (T^* + T') d(\delta(\mathbf{X}^e)^T) \dot{\mathbf{X}}^e - \int_{t_1}^{t_2} U^* \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{X}^e dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e dt \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.68)$$

denklemini elde edilir. (4.66) denklemde, ilk terim için kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (T^* + T') \delta(\mathbf{X}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} ((T^* + T') \ddot{\mathbf{X}}^e \delta(\mathbf{X}^e)^T) dt \\ - \int_{t_1}^{t_2} (U^* \delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{X}^e) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\delta(\mathbf{X}^e)^T \mathbf{F}^e) dt = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

denklemini elde edilir. (4.69) denklemdeki ilk terimde, yer değiştirmelerin varyasyonunun stasyoner değerleri sıfır olacağından dolayı,

$$(T^* + T') \delta(\mathbf{X}^e)^T \dot{\mathbf{X}}^e \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (4.70)$$

olur. Son durumda, (4.68) denklemi, tek integral altında,

$$- \int_{t_1}^{t_2} ((T^* + T') \ddot{\mathbf{X}}^e + U^* \mathbf{X}^e - \mathbf{F}^e) \delta(\mathbf{X}^e)^T dt = 0 \quad (4.71)$$

olarak yazılır. (4.71) denklemde, Varyasyon Hesabının Temel Lemması gereğince parantezin içi sıfır olmak zorundadır. Böylece son durumda, hareket denklemi,

$$(T^* + T') \ddot{\mathbf{X}}^e + U^* \mathbf{X}^e - \mathbf{F}^e = 0 \quad (4.72)$$

olarak elde edilir. (4.72) denklemde, T^* , T' ve U^* kısaltmaları tekrardan açılıp yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} + \frac{\gamma^2}{R^2} \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}_\theta^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}_\theta^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \right) \ddot{\mathbf{X}}^e \\
& + \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}]^T \mathbf{h}^T \mathbf{k} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] R d\theta \mathbf{G}^{-1} \mathbf{X}^e - \mathbf{F}^e = 0
\end{aligned} \tag{4.73}$$

denklemini elde edilir. Görüldüğü üzere, $\ddot{\mathbf{X}}^e$ ve $\mathbf{X}^e$ vektörlerinin katsayıları olan bu ifadeler, aslında sırasıyla, $\mathbf{M}^e$, kütle matrisi ve $\mathbf{K}^e$, rijitlik matrisine karşılık gelmektedirler:

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} + \frac{\gamma^2}{R^2} \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} \rho (\mathbf{H}_\theta^l)^T \mathbf{P} \mathbf{H}_\theta^l R d\theta \mathbf{G}^{-1} \tag{4.74}$$

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{G}^{-T} \int_{\theta_e} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}]^T \mathbf{h}^T \mathbf{k} [\mathbf{C} \ \mathbf{D}] R d\theta \mathbf{G}^{-1} \tag{4.75}$$

5. SAYISAL ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, 4. Bölümde geliştirilmiş olan sonlu eleman formülasyonun, literatürdeki statik ve dinamik örneklerle doğrulanması gerçekleştirilmiştir.

5.1 Nanoçubukların Düzlem İçi Statik Davranışına İlişki Sayısal Çalışmalar

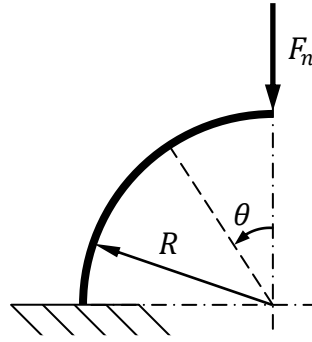
Bu bölümde, nanoçubukların düzlem içi statik davranışını sonlu elemanlar yöntemiyle incelemek için yerel olmayan parametre, γ , 1.56 nm; elastisite modülü, E , 1 TPa; Poisson oranı, ν , 0.3; çubuk açıklığı, $\frac{\pi}{2}$ ve π radyan; kayma gerilmesinin kesit üzerinde uniform dağılmadığını gösteren sabit, k_n , 6/5 olarak alınmış ve dikdörtgen kesit kabulü altında sonlu eleman ile elde edilen statik analiz sonuçları, Oldaç (2016)'daki analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca, normal yüklere maruz bir nanoçemberin de statik analizi gerçekleştirilmiş ve sonuçlar Oldaç (2016) ile karşılaştırılmıştır. Örneklerde narinlik oranı,

$$\lambda = R \theta_T / \sqrt{I_b / A} \quad (5.1)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada, λ , narinlik oranını; R , çubuk eğriliğini; θ_T , çubuk açıklığını; A , kesit alanını; I_b , binormal eksen etrafındaki kesit eylemsizlik momentini ifade etmektedir.

5.1.1 Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan, $\pi/2$ açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk

Bu örnekte, ankastre-serbest sınır koşulları altında, narinlik oranı 20, eğriliği 5γ olan ve $\pi/2$ açıklığa sahip çember eksenli ve sabit kesitli bir nanoçubuğun serbest ucundan, normal doğrultuda 1 nN değerinde kuvvet uygulanmaktadır. Şekil 5.1'de görüldüğü üzere, θ açisal koordinat parametresi, serbest uçtan başlatılmıştır.



Şekil 5.1 : Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan $\pi/2$ açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk.

Örnek, tek bir bölgeye sahip olduğu için 1 adet sonlu eleman kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar, Oldaç (2016)'daki analitik ifadeler ile karşılaştırılmış ve Çizelge 5.1'te gösterilmiştir.

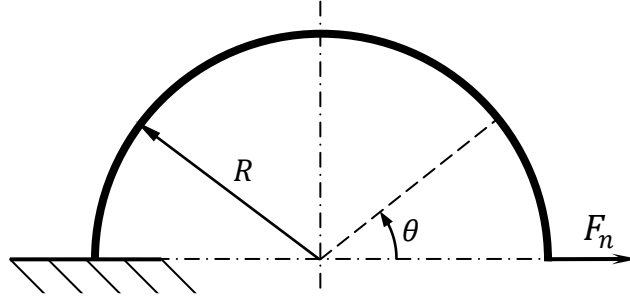
Çizelge 5.1 : Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme bileşenlerinin sonlu eleman ve analitik yaklaşım sonuçları.

Yer değiştirme bileşenleri	Oldaç (2016)	Bu çalışma
w [nm]	0.213448	0.213448
u [nm]	0.339527	0.339527
Ω_b [rad]	0.053995	0.053995

Çizelge 5.1'den de görüldüğü üzere, tek eleman kullanılarak elde edilen yer değiştirme değerleri, analitik sonuçlarla oldukça iyi bir uyum içerisindedir.

5.1.2 Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan, π açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk

Bu örnekte, ankastre-serbest sınır koşulları altında, narinlik oranı 30, eğriliği 5γ olan ve π açıklığa sahip çember eksenli ve sabit kesitli bir nanoçubuğun serbest ucundan, normal doğrultuda 1 nN değerinde kuvvet uygulanmaktadır. Şekil 5.2'de görselleştirilen geometri tek bir bölgeye sahip olduğundan dolayı örnek 1 adet sonlu eleman kullanılarak çözülmüştür.



Şekil 5.2 : Ankastre-serbest sınır şartlarına sahip, serbest ucundan F_n yükü uygulanan, π açıklığındaki çember eksenli sabit kesitli çubuk.

Oldaç (2016)'daki analitik ifadeler ile karşılaştırılan sonuçlar Çizelge 5.2'te verilmiştir.

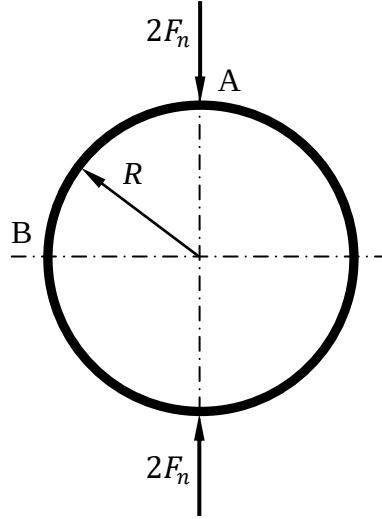
Çizelge 5.2 : Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme bileşenlerinin sonlu eleman ve analitik yaklaşım sonuçları.

Yer değiştirme bileşenleri	Oldaç (2016)	Bu çalışma
w [nm]	0.266520	0.266520
u [nm]	0.219160	0.219160
Ω_b [rad]	0.034169	0.034169

Çizelge 5.2'de verilen sonuçlar ışığında, çubuk açıklığının π olduğu durumda da, tek eleman kullanılarak elde edilen yer değiştirme değerleri, literatürdeki analitik sonuçlarla iyi bir uyum içerisindedir.

5.1.3 Normal yüke maruz nano çember (Nano Ring)

Bu örnekte, tam bir çember geometrisine sahip, çember eksenli ve sabit kesitli, nanoçember incelenmiştir. İlgilenilen nanoçember, merkezinden geçen 2 adet 2nN büyüklüğünde tekil kuvvetlere maruz durumdadır (Şekil 5.3). Burada, narinlik oranı 50 ve eğrilik 5γ olarak alınmıştır.



Şekil 5.3 : Normal yüke maruz sabit kesitli nano çember (nano ring).

Burada, sınır koşullarının tanımlanabilmesi için sonlu eleman modeli, yarım model olarak kurulmuştur. Bunun anlamı, nanoçember merkezinden geçen iki eşit parçaya ayrılmıştır. Yeni durumda sınır şartları, iki uç ve A noktası için $w = 0$ ve $\Omega_b = 0$ olarak tanımlanmış ve 2 elemanla çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar, Oldaç (2016)'daki analitik ifadeler ile karşılaştırılmış ve Çizelge 5.3'te verilmiştir.

Çizelge 5.3 : Normal yüke maruz sabit kesitli nano çember için sonlu eleman ve analitik yaklaşım sonuçları.

Yer değiştirme bileşenleri ve tepki momenti	Oldaç (2016)	Bu çalışma
u_A [nm]	0.166641	0.166641
u_B [nm]	-0.144953	-0.144953
M_B [nNm]	2.834365	2.834365

Çizelge 5.3'den de görüldüğü üzere, iki eleman kullanılarak, A ve B noktaları için hesaplanan normal yer değiştirme ve B noktası için hesaplanan tepki momenti değerleri, analitik sonuçlarla iyi bir uyum içerisindedir.

5.2 Nanoçubukların Düzlem İçi Dinamik Davranışına İlişki Sayısal Çalışmalar

Dinamik kısım, boyut parametresinin ve yerel olmayan parametrenin değişimlerinin boyutsuz frekanslar üzerindeki etkisini inceleyen iki örnekten oluşmaktadır. Bu

örneklerin ilkinden elde edilen sonuçlar Oldaç (2016) ile, ikincisinden elde edilen sonuçlar ise Ganapathi ve diğ. (2018) ile karşılaştırılmıştır. Bu örneklerde, Oldaç (2016) için narinlik oranı, denklem (5.1) şeklinde ve boyutsuz frekans ifadesi,

$$\omega^* = (R\theta_T)^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI_b}} \omega \quad (5.2)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Ganapathi ve diğ. (2018) için ise narinlik oranı, h kesit uzunluğu olmak üzere,

$$\lambda = \frac{L}{h} \quad (5.3)$$

şeklinde, boyutsuz frekanslar ise

$$\omega^* = L^2 \sqrt{\frac{\rho h}{EI_b}} \omega \quad (5.4)$$

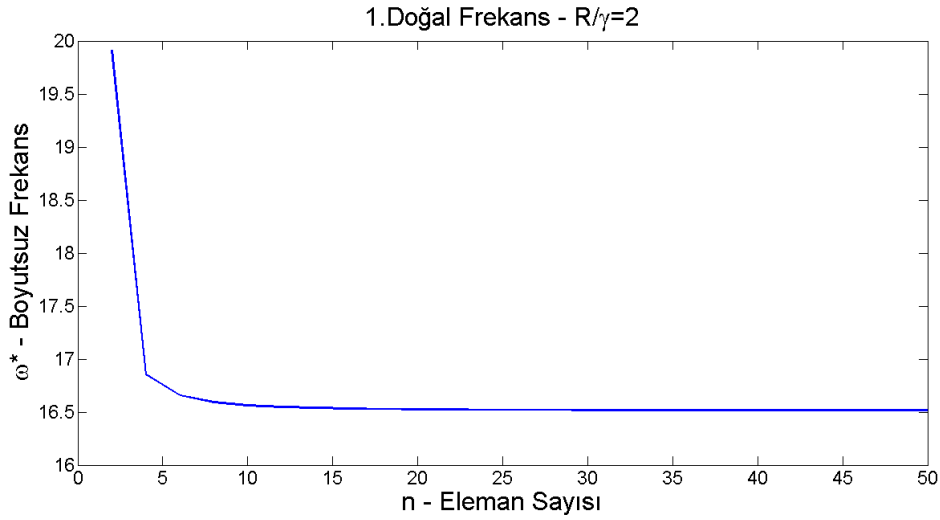
biçiminde tanımlanmıştır. Burada, λ , narinlik oranını; ω^* , boyutsuz frekans değerini; R , çubuk eğriliğini; θ_T , çubuk açıklığını; ρ , yoğunluğu; A , kesit alanını; E , elastisite modülünü; I_b , kesit eylemsizlik momentini; ω , boyutlu frekans değerini; L ise çubuk boyunu ifade etmektedir.

5.2.1 Çember eksenli sabit kesitli bir çubuğun doğal frekanslarının boyut parametresi R/γ 'ya bağlı olarak değişiminin incelenmesi

Bu örnekte, λ , narinlik oranının, 50 ve θ_T , çubuk açıklığının, $\pi/3$ radyan olduğu ankastre-ankastre sınır şartlarına sahip bir eğri eksenli nanoçubuk için yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilmiş doğal frekans değerlerinin, boyut parametresi, R/γ 'ya göre değişimi incelenmiştir. Yerel olmayan parametrenin, γ , 2 nm olarak alındığı bu çalışmada, boyut parametresi, R/γ , 1-20 arasında değiştirilmiş ve elde edilen sonuçlar Oldaç (2016) ile karşılaştırılmıştır.

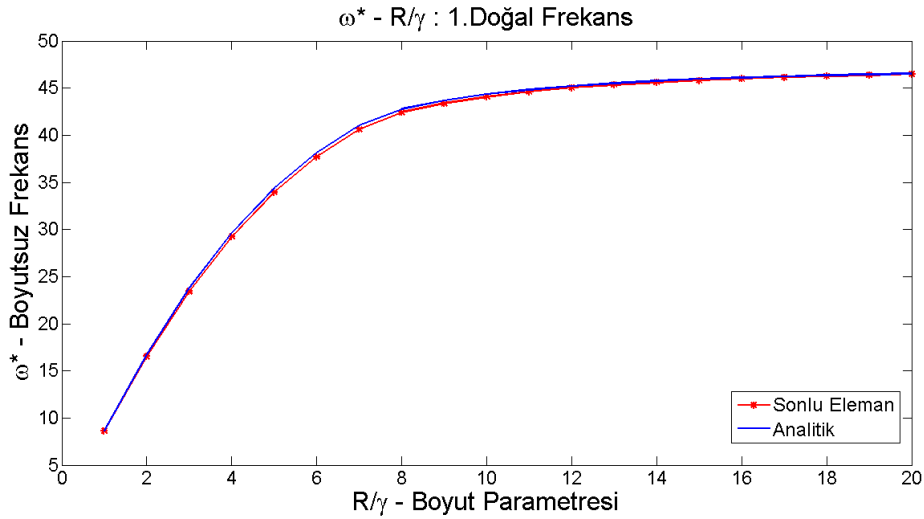
Ayrıca, kullanılan sonlu eleman formülasyonunun yakınsaklığını göstermek açısından, Şekil 5.4'te, R/γ boyut parametresinin 2 olduğu durum için ilgili çubuğun boyutsuz 1.doğal frekans değerinin, eleman sayısına göre değişimi verilmiştir. Şekil

5.4'ten de görüleceği üzere, yaklaşık 15 elemandan sonra boyutsuz doğal frekans değerleri sabit bir değere ulaşmaktadır.



Şekil 5.4 : İlgili nanoçubuğun 1.doğal frekans değerinin eleman sayısına göre değişimi.

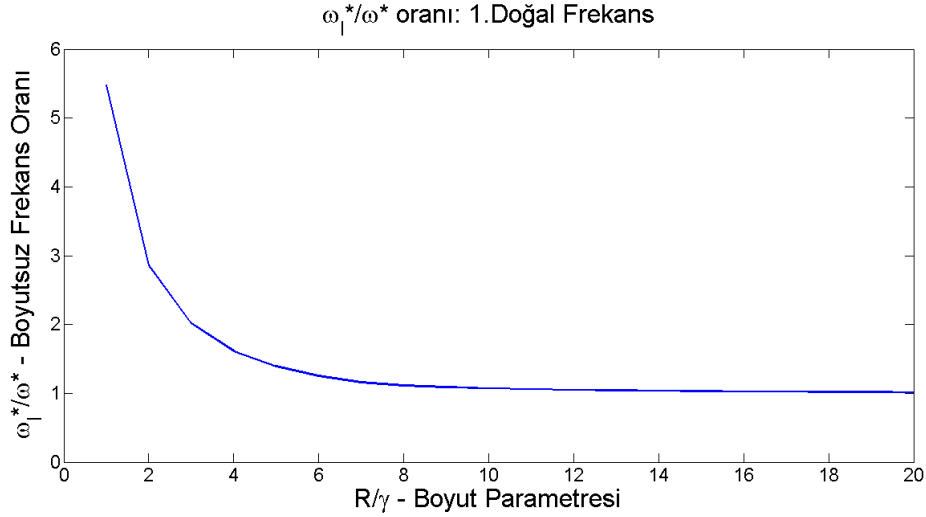
Şekil 5.5, Oldaç (2016)'da sunulan analitik yaklaşım ile bu çalışmada geliştirilmiş olan sonlu eleman yaklaşımının karşılaştırmalı bir gösterimini içermektedir.



Şekil 5.5 : Oldaç (2016) ve bu çalışmadaki yaklaşımların karşılaştırılması.

Şekil 5.5'ten de görüldüğü gibi analitik ve sonlu eleman sonuçları iyi bir uyum içerisindedir. Boyut parametresinin artan değerlerinde, boyutsuz frekans değeri sabit bir değere yakınsamaktadır. Bu değer, Şekil 5.6'da da gösterildiği üzere yerel elastisite teorisiyle elde edilen doğal frekans değeridir.

Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş doğal frekans değerlerinin, yerel elastisite teorisi kullanılarak elde edilmiş doğal frekans değerlerine oranının, boyut parametresi R/γ 'ya bağlı olarak değişimi Şekil 5.6'da gösterilmiştir.



Şekil 5.6 : Yerel ve yerel olmayan 1. doğal frekansların oranının R/γ ile değişimi.

Şekil 5.6'dan da görüldüğü üzere boyut parametresinin artan değerleri için bu oran 1'e yaklaşmaktadır. Başka bir deyişle, R/γ oranının artması ile yerel olmayan terimlerin etkileri azalmakta ve yerel teoriyle hesaplanmış sonuca yaklaşılmaktadır.

5.2.2 Çember eksenli sabit kesitli bir çubuğun doğal frekanslarının yerel olmayan parametreye göre değişiminin incelenmesi

Bu örnekte, geliştirilen sonlu elemanlar formülasyonu, literatürde eğri eksenli nanoçubukların titreşimlerini sonlu elemanlar yöntemiyle inceleyen bir başka çalışma olan Ganapathi ve diğ. (2018) üzerinden doğrulanmıştır. Çubuk derinliğinin ihmal edildiği çalışmada, ankastre-ankastre sınır şartlarına sahip çubuğun boyu, L , 10 olarak alınmıştır.

Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5, sırasıyla narinlik oranının 5 ve 50 olduğu, 30° açıklığa sahip eğri eksenli bir çubuğun, 1. doğal frekans değerlerini içermektedir. Ganapathi ve diğ. (2018) ile karşılaştırılan sonuçların iyi bir uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Burada, CLT kısaltmasıyla, Euler-Bernoulli çubuğu; FSDT kısaltmasıyla, Timoshenko çubuğu kastedilmektedir. SIN ve SIN-z2 kısaltmaları ise kayma şekil değişimini sinüs modeli üzerinden dikkate alan yaklaşımları ifade etmektedir (Ganapathi ve diğ, 2018).

Çizelge 5.4 : $\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 5$ için 1. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.

λ	γ^2	Ganapathi ve diğ. (2018)				Bu çalışma
		CLT	FSDT	SIN	SIN-z2	
5	0	22.9609	19.9479	19.5582	19.7036	19.4336
	1	21.5441	18.8365	18.4728	18.6140	18.3692
	2	20.3559	17.8835	17.5418	17.6789	17.4539
	3	19.3416	17.0557	16.7326	16.8657	16.6569
	4	18.4629	16.3284	16.0215	16.1508	15.9554

Çizelge 5.5 : $\theta_T = 30^\circ$ ve $\lambda = 50$ için 1. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.

λ	γ^2	Ganapathi ve diğ. (2018)				Bu çalışma
		CLT	FSDT	SIN	SIN-z2	
50	0	60.9201	60.6437	60.5895	60.9652	60.5698
	1	50.4400	50.2265	50.1845	50.4548	50.1720
	2	43.9576	43.7775	43.7421	43.9584	43.7327
	3	39.4540	39.2953	39.2641	39.4474	39.2564
	4	36.0951	35.9516	35.9234	36.0844	35.9169

Çizelge 5.4 ve Çizelge 5.5'ten de görüleceği üzere, yerel olmayan parametre değerinin artmasıyla boyutsuz doğal frekans değerleri azalmaktadır. Narinlik oranının artmasıyla, yani çubuğun incilmesiyle beraber boyutsuz frekans değerlerinin arttığı gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada geliştirilmiş olan sonlu eleman formülasyonu ile elde edilen sonuçların, Ganapathi ve diğ. (2018)'de kullanılan SIN çubuk yaklaşımıyla oldukça yakın değerlerde olduğu tespit edilmiştir. Sonlu eleman ve SIN yaklaşımları arasındaki sayısal farkın ise narinlik oranının artmasıyla azaldığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 5.6 ve Çizelge 5.7, sırasıyla 5 ve 50 narinlik oranına ve 120° açıklığa sahip eğri eksenli çubukların 2. doğal frekanslarını boyutsuz olarak sunmaktadır.

Çizelge 5.6 : $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 5$ için 2. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.

λ	γ^2	Ganapathi ve diğ. (2018)				Bu çalışma
		CLT	FSDT	SIN	SIN-z2	
5	0	43.0525	34.0420	33.1013	33.4345	32.8440
	1	37.8919	30.4949	30.2667	30.4810	29.7283
	2	33.9014	28.2345	27.9650	28.1856	27.1412
	3	30.8385	26.2747	25.9637	26.1857	25.0038
	4	28.4340	24.5848	24.2400	24.4597	23.2327

Çizelge 5.7 : $\theta_T = 120^\circ$ ve $\lambda = 50$ için 2. doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması.

λ	γ^2	Ganapathi ve diğ. (2018)				Bu çalışma
		CLT	FSDT	SIN	SIN-z2	
50	0	102.3418	101.5397	101.3836	102.0045	101.1704
	1	74.8226	74.2803	74.1745	74.5543	74.0074
	2	61.7091	61.2740	61.1891	61.4781	61.0530
	3	53.6954	53.3220	53.2491	53.4894	53.1337
	4	48.1584	47.8262	47.7613	47.9706	47.6607

Çizelge 5.6 ve Çizelge 5.7’den de görüleceği üzere, geliştirilen formülasyon, 2. doğal frekans değerleri için de analitik sonuçlarla iyi bir uyum içerisindedir. Yerel olmayan parametre değerinin artmasıyla, hesaplanan doğal frekans değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca, narinlik oranının artmasıyla beraber boyutsuz frekans değerlerinin arttığı gözlemlenmiştir. Sonlu eleman formülasyonundan elde edilen sonuçlar, Ganapathi ve diğ. (2018)’deki SIN yaklaşımıyla oldukça iyi bir uyum içerisindedir ve bu iki yaklaşım arasındaki fark narinlik oranının artmasıyla azaltmaktadır.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma kapsamında, eğri eksenli nanoçubukların düzlem içi statik ve dinamik davranışlarını incelemek için bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman formülasyonunun özgünlüğü, yerel olmayan elastisite teorisinden elde edilen kesin analitik çözümleri şekil fonksiyonu olarak kabul etmesi ve eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini gözönünde bulundurmasıdır.

Yerel olmayan elastisite teorisinden yararlanarak oluşturulan denklemlerin, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak analitik olarak çözülmesiyle elde edilen asal matrisler, sonlu eleman formülasyonunda rijitlik ve kütle matrislerinin oluşturulmasında kullanılmıştır. Bu bağlamda, ilk olarak rijitlik matrisi literatürde direkt metot adı verilen yöntemle formüle edilmiştir. Ardından, Mindlin (1964)'te sunulan kinetik enerji formu kullanılarak kütle matrisi oluşturulmuştur. Literatürde, hız gradyenti teorisi olarak da bilinen bu yaklaşımda, kesin analitik çözümün yerel terimleri içeren kısmı şekil fonksiyonu olarak kullanılmış ve kinetik enerji ifadesi makro ve mikro yapı etkilerini ayrı ayrı içeren terimlerin toplamı şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca, oluşturulan rijitlik ve kütle matrisleri, varyasyonel bir yaklaşım olan Hamilton Prensipli kullanılarak da elde edilmiştir.

Rijitlik ve kütle matrislerinin formüle edilmesinden sonra, formülasyonun doğruluğu ve geçerliliği, literatürde bulunan statik ve dinamik örneklerle gösterilmiştir. Bu bağlamda, statik örneklerde, sırasıyla narinlik oranları 20 ve 30, çubuk açıklıkları ise $\pi/2$ ve π olan ankastre-serbest sınır şartlarına sahip çubukların normal yük altındaki statik davranışları incelenmiştir. Tek eleman kullanılarak elde edilen sonuçlar Oldaç (2016) ile karşılaştırılmış ve sonlu eleman formülasyonunun analitik yaklaşımla iyi bir uyum içinde olduğu görülmüştür. Ayrıca, normal yüke maruz bir nano çemberin statik davranışı da incelenmiştir. Yarım model kullanılarak inşa edilen sonlu eleman formülasyonundan elde edilen sonuçların Oldaç (2016)'daki analitik sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmüştür. Dinamik örneklerde, yakınsaklık bakımından yaklaşık olarak 15 eleman kullanılmasının yeterli olduğu

görülmüştür. Ardından, 50 narinlik oranına, $\pi/3$ çubuk açıklığına ve ankastre-ankastre sınır şartlarına sahip bir çubuğun, yerel olmayan parametre değerinin sabit olduğu durum altında, eğrilik değeri değiştirilmiş ve doğal frekansları hesaplanmıştır. Boyutsuz olarak ifade edilen doğal frekansların, boyut parametresi R/γ ile değişimi incelenmiş ve sonlu eleman formülasyonu kullanılarak elde edilen sonuçların Oldaç (2016)'daki analitik sonuçlarla uyum içerisinde olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, boyut parametresinin artan değerleriyle beraber yerel olmayan etkinin denklemlerde giderek azaldığı ve yerel olmayan teoriye göre hesaplanan doğal frekans değerlerinin, yerel teoriye göre hesaplanan değerlere yaklaştığı gözlemlenmiştir. Dinamik örneklerle ilgili bir diğer çalışma da, çubuk eğriliğinin sabit tutulup, yerel olmayan parametre değerinin değiştirildiği durum için gerçekleştirilmiştir. Burada, ankastre-ankastre sınır şartlarına sahip bir çubuk için yerel olmayan parametre 0-2 arasında değiştirilmiş ve elde edilen sonuçlar Ganapathi ve diğ. (2018)'deki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda, yerel olmayan parametrenin artmasıyla beraber hesaplanan doğal frekans değerlerinin, yerel elastisite teorisine göre hesaplanana göre giderek azaldığı gözlemlenmiştir. Çubuk açıklığının 30° olduğu durumda, narinlik oranının artan değerleri için boyutsuz olarak ifade edilen 1. doğal frekans değerlerinin arttığı gözlemlenmiştir. Benzer şekilde, çubuk açıklığının 120° olduğu durum için, narinlik oranının artmasıyla boyutsuz olarak ifade edilen 2. doğal frekans değerlerinin arttığı tespit etmiştir. Her iki durum için de elde edilen doğal frekans değerleri, Ganapathi ve diğ. (2018)'de sunulan SIN yaklaşımıyla oldukça iyi bir uyum içerisinde. Narinlik oranının artmasıyla beraber, geliştirilen sonlu eleman formülasyonunda elde edilen sonuçlar ile SIN yaklaşımıyla hesaplanmış değerler arasındaki farkın azaldığı tespit edilmiştir.

Geliştirilen formülasyon sayesinde, daha karmaşık geometriye sahip eğri eksenli nanoçubuk sistemlerinin statik ve dinamik analizi, tüm etkileri gözönünde bulunduracak şekilde yüksek hassasiyette daha hızlı bir biçimde gerçekleştirilebilir.

Bu çalışmanın ardından, değişken eğriliğe ve kesite sahip nanoçubukların sonlu eleman formülasyonu gerçekleştirilebilir. Bir diğer öneri olarak, bu çalışmada sunulan yaklaşımla eğri eksenli nanoçubukların zorlanmış titreşim davranışları sonlu eleman formülasyonu ile incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Alizada, A. N. & Sofiyev, A. H.** (2011). Modified Young's moduli of nano-materials taking into account the scale effects and vacancies. *Meccanica*, 46(5), 915-920.
- Alotta, G., Failla, G., Zingales, M.** (2014). Finite element method for a nonlocal Timoshenko beam model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 89, 77-92.
- Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A., Mahmoud, F.F.** (2013). Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(7), 2035-2044.
- Ansari, R., Oskouie, M.F., Gholami, R., Sadeghi, F.** (2016). Thermo-electro-mechanical vibration of postbuckled piezoelectric Timoshenko nanobeams based on the nonlocal elasticity theory. *Composites Part B*, 89, 316-327.
- Aydogdu, M.** (2009). Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model. *Physica E*, 41, 861-864.
- Aydogdu, M.** (2012). Longitudinal wave propagation in nanorods using a general nonlocal unimodal rod theory and calibration of nonlocal parameter with lattice dynamics. *International Journal of Engineering Science*, 56, 17-28.
- Aydogdu, M., Arda, M.** (2016). Torsional vibration analysis of double walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 12(1), 71-84.
- Bağdathı, S.M.** (2015). Non-linear vibration of nanobeams with various boundary condition based on nonlocal elasticity theory. *Composites: Part B*, 80, 43-52.
- Bahrami, A.** (2017). A wave-based computational method for free vibration, wave power transmission and reflection in multi-cracked nanobeams. *Composites Part B*, 120, 168-181.
- Barati, M.R.** (2017). On non-linear vibrations of flexoelectric nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 121, 143-153.
- Barretta, R., Feo, L., Luciano, R.** (2015). Torsion of functionally graded nonlocal viscoelastic circular nanobeams. *Composites: Part B*, 72, 217-222.
- Barretta, R., Canadija, M., Feo, L., Luciano, R., Marotti de Sciarra, F., Penna, R.** (2018). Exact solutions of inflected functionally graded nano-beams in integral elasticity. *Composites Part B*, 142, 273-286.
- Barretta, R., de Sciarra, F.M., Diaco, M.** (2014). Small-scale effects in nanorods. *Acta Mechanica*, 225(7), 1945-1953.

- Behera, L., Chakraverty, S.** (2014a). Free vibration of Euler and Timoshenko nanobeams using boundary characteristic orthogonal polynomials. *Applied Nanoscience*, 4(3), 347-358.
- Behera, L., Chakraverty, S.** (2014b). Free vibration of nonhomogenous Timoshenko nanobeams. *Meccanica*, 49(1), 51-67.
- Behera, L., Chakraverty, S.** (2017). Static analysis of nanobeams using Rayleigh-Ritz method. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 12(5), 603-616.
- Berrabah, H.M., Tounsi, A., Semmah, A., Bedia, E.A.A.** (2013). Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams. *Structural Engineering and Mechanics*, 48(3), 351-365.
- Challamel, Noe., Aydogdu, M., Elishakoff, I.** (2017). Statics and dynamics of nanorods embedded in an elastic medium: Nonlocal elasticity and lattice formulations. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 67, 254-271.
- Demir, Ç.** (2016). Nonlocal vibration analysis for micro/nano beam on winkler foundation via DTM. *International Journal of Engineering & Applied Sciences*, 8(4), 108-118.
- De Sciarra, F.M.** (2014). Finite element modelling of nonlocal beams. *Physica E*, 59, 144-149.
- Dequesnes, M., Tang, Z., Aluru, N.R.** (2004). Static and dynamic analysis of carbon nanotube-based switches. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 126(3), 230-237.
- Di Paola, M., Failla, G., Zingales, M.** (2013). Non-local stiffness and damping models for shear-deformable beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 40, 69-83.
- Ecsedi, I., Baksa, A.** (2017). Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity and Rayleigh model. *Mechanics Research Communications*, 86, 1-4.
- El-Borgi, S., Rajendran, P., Friswell, M.I., Trabelssi, M., Reddy, J.N.** (2017). Torsional vibration of size-dependent viscoelastic rods using nonlocal strain and velocity gradient theory. *Composite Structures*, 186, 274-292.
- Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E., Mahmoud, F.F.** (2013). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Appl. Math. Modelling*, 37, 4787-4797.
- Eptaimeros, K.G., Koutsoumaris, C.Ch., Tsamasphyros, G.J.** (2016). Nonlocal integral elasticity analysis of nanobeams by employing finite element method. *International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2016*.
- Eringen, A. C.** (1972). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10(3), 425-435.

- Fernandez-Saez, J., Zaera, R.** (2017). Vibrations of Bernoulli-Euler beams using the two-phase nonlocal elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 119, 232-248.
- Ganapathi, M., Merzouki, T., Polit, O.** (2018). Vibration study of curved nanobeams based on nonlocal higher-order shear deformation theory using finite element approach. *Composite Structures*, 184, 821-838.
- Guven, U.** (2014a). A generalized nonlocal elasticity solution for the propagation of longitudinal stress waves in bars. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 45, 75-79.
- Guven, U.** (2014b). Transverse vibrations of single-walled carbon nanotubes with initial stress under magnetic field. *Composite Structures*, 114, 92-98.
- Hemmatnezhad, M., Ansari, R.** (2013). Finite element formulation for the free vibration analysis of embedded double-walled carbon nanotubes based on nonlocal Timoshenko beam theory. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 7:6.
- Iijima, S.** (1991). Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, 354, 56-58.
- Iqbal, M.Z., Wang, F., Hussain, R., Iqbal, T., Ali, I., Rafique, M.Y., Ali, S.** (2014). Synthesis and Characterization of SnO₂ nanorods for energy storage applications. *Advanced Science, Engineering and Medicine*, 6, 1-6.
- Jiang, J., Wang, L.** (2017). Analytical solutions for thermal vibration of nanobeams with elastic boundary conditions. *Acta Mechanica Sinica*, 30(5), 474-483.
- Joshi, A.Y., Sharma, S.C., Harsha, S.P.** (2010). Dynamic analysis of a clamped wavy single walled carbon nanotube based nanomechanical sensors. *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, 1(3), 031007.
- Karlicic, D., Ozvat, S., Cajic, M., Kozic, P., Pavlovic, R.** (2016a). Bending vibration and stability of a multiple-nanobeam system influenced by temperature change. *Facta Universitatis*, 14(1), 75-88.
- Karlicic, D., Murmu, T., Adhikari, S., McCarthy, M.** (2016b). *Non-local Structural Mechanics*. London: ISTE.
- Khaniki, H.B.** (2018). On vibrations of nanobeam systems. *International Journal of Engineering Science*, 124, 85-103.
- Li, C., Chou, T.** (2003). A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes. *International Journal of Solids and Structures*, 40, 2487-2499.
- Lu, L., Guo, X., Zhao, J.** (2017). Size-dependent vibration analysis of nanobeams based on the nonlocal strain gradient theory. *International Journal of Engineering Science*, 116, 12-24.
- Lv, Z., Liu, H.** (2017). Uncertainty modeling for vibration and buckling behaviors of functionally graded nanobeams in thermal environment. *Composite Structures*, 184, 1165-1176.

- Mahmoud, F.F., Eltaher, M.A., Alshorbagy, A.E., Meletis, E.I.** (2012). Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite element. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 26(11), 3555-3563.
- Mayoof, F.N., Hawwa, M.A.** (2009). Chaotic behavior of a curved carbon nanotube under harmonic excitation. *Chaos, Solitons and Fractals*, 42, 1860-1867.
- Mindlin, R.D.** (1964). Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1), 51-78.
- Morassi, A., Fernandez-Saez, J., Zaera, R., Loya, J.A.** (2017). Resonator-based detection in nanorods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 93, 645-660.
- Murmu, T., Adhikari, S.** (2012). Nonlocal elasticity based vibration of initially pre-stressed coupled nanobeam systems. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 34, 52-62.
- Narendar, S.** (2012). Spectral finite element and nonlocal continuum mechanics based formulation for torsional wave propagation in nanorods. *Finite Elements in Analysis and Design*, 62, 65-75.
- Oldaç, O.** (2016). *Nanoteknolojide yerel olmayan çubuk teorisinin statik ve dinamik problemleri* (Doktora tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Phadikar, J.K., Pradhan, S.C.** (2010). Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational Materials Science*, 49, 492-499.
- Paola, M.D., Failla, G., Zingales, M.** (2013). Non-local stiffness and damping models for shear-deformable beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 40, 69-83.
- Peddie, J., Buchanan, G. R. and McNitt, R. P.** (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41, 305-312.
- Roostai, H., Haghpanahi, M.** (2013). Vibration of nanobeams of different boundary conditions with multiple cracks based on nonlocal elasticity theory. *Appl. Math. Modelling*, 38(3), 1159-1169.
- Sadeghi, B.** (2012). Synthesis and application of nanorods. In Dr. Orhan Yalçın (Ed.), *Nanorods*, 117-128, Retrieved from <https://www.intechopen.com/books/nanorods/synthesis-and-application-of-nanorods>.
- Salvetat, J.P., Briggs, G.A.D., Bonard, J.M., Bacsá, R.R., Kulik, A.J., Stöckli, T.** (1999). Elastic and shear moduli of single-walled carbon nanotube ropes. *Physical Review Letters*, 82(5), 944-947.
- Thai, H-T., Vo, T.P., Nguyen, T-K., Kim, S-E.** (2017). A review of continuum mechanics models for size-dependent analysis of beams and plates. *Composite Structures*, 177, 196-219.

- Tufekci, E., Arpacı, A.** (1998). Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects. *Journal of Sound and Vibration*, 209(5), 845-856.
- Tufekci, E., Arpacı, A.** (2006). Analytical solutions of in-plane static problems for non-uniform curved beams including axial and shear deformations. *Structural Engineering and Mechanics*, 22(2), 131-150.
- Tufekci, E., Aya, S. A., Oldac, O.** (2016a). A unified formulation for static behavior of nonlocal curved beams. *Structural Engineering Mechanics*, 59(3), 475-502.
- Tufekci, E., Aya, S. A., Oldac, O.** (2016b). In-plane static analysis of nonlocal curved beams with varying curvature and cross-section. *International Journal of Applied Mechanics*, 8(1), 1650010.
- Tufekci, E., Aya, S. A.** (2016) A nonlocal beam model for out-of-plane static analysis of circular nanobeams. *Mechanics Research Communications*, 76, 11-23.
- Wang, Q., Shindo, Y.** (2006). Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1(4), 663-680.
- Zhou, Z., Li, Y., Fan, J., Rong, D., Sui, G., Xu, C.** (2018). Exact vibration analysis of a double-nanobeams-systems embedded in an elastic medium by a Hamiltonian-based method. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 99, 220-235.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Ömer Ekim Genel
Doğum Tarihi ve Yeri : 21.11.1993 - İstanbul
E-posta : roegenel@gmail.com



ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, İ.T.Ü, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Oldac, O., Tufekci, M., **Genel, O.E.**, Tufekci E. 2017. Free bending vibrations of rotating disks with a concentric hole. *International Journal of Technology and Engineering Studies*, 3(6), 253-263.
- Tufekci, M., **Genel, O.E.**, Oldac, O. 2017. Experimental And Finite Element Analysis Of Vibrations Of A Rotating Annular Plates. *Journal of Advances in Technology and Engineering Studies*, 3(6), 224-234.
- Tufekci, M., **Genel, Ö.E.**, Koç, H., Oldaç, O., Tufekci, E. 2017. Yüzeyine Dik Kuvvet Etkiyen Dönen Diskin Titreşimleri. *20. Ulusal Mekanik Kongresi*, Eylül 05-09, 2017 Bursa, Türkiye.
- Tufekci, M. Koç, H., **Genel, Ö.E.**, Oldaç, O., Tufekci, E. 2017. Dönen Disklerin Serbest Titreşimleri. *20. Ulusal Mekanik Kongresi*, Eylül 05-09, 2017 Bursa, Türkiye.
- Tufekci, M., **Genel, O.E.**, Oldaç, O. 2017. Finite Element And Experimental Analysis Of Vibrations Of A Rotating Disk. *International Conference On Engineering & Technology, Computer, Basic & Applied Science*, July 25-26, 2017 Tokyo, Japan.
- Oldac, O., Tufekci, M., **Genel, O.E.**, Tufekci E. 2017. Transverse Free Vibration Of Rotating Annular Plates. *International Conference On Engineering & Technology, Computer, Basic & Applied Science*, July 25-26, 2017 Tokyo, Japan.