

46290

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Y.Ö. YÜKSEK LİSANS TEZİ
DOĞRULAN MÜHÜR

BEYNİN ELEKTRİKSEL ETKİNLİĞİNİN DİPOL KAYNAKLARI ŞEKLİNDE
MODELLENMESİ VE BU KAYNAKLARA AİT GERİLİM DAĞILIMININ BULUNMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Ata AKIN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Haziran 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 5 Temmuz 1995

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bingül YAZGAN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ertuğrul YAZGAN

Doç Dr. Cevdet IŞIK

TEMMUZ 1995

ÖNSÖZ

Beynin elektriksel etkinliğinin incelenmesine 1800'lerin sonuna doğru başlanmasına rağmen, ilk gerçek kayıt 1929'da Hans Berger tarafından alınmıştır. Teknolojinin ilerlemesi, kayıt tekniklerindeki gelişmeler, beynin elektriksel özelliklerinin daha nitelikli incelenmesini ve doğru klinik bulgulara ulaşabilme imkanını sağlamıştır.

Bu tezde, beynin elektriksel kaynaklarının lokalize edilmesinde kullanılan eşdeğer dipol modelinin seçilmesi ve bu dipole ait dağılımın simülasyonlarla hesaplanması yapılmıştır.

Birinci bölümde elektriksel kaynakların beynin neresinden ve nasıl oluştuğu anlatılmıştır. Bu bölümde tıbbi terminolojiden mümkün olduğunca uzak kalınmaya çalışılmıştır. Ama daha detaylı fizyolojik ve anatomik bilgiye sahip olmak isteyenler için, Ek1 yazılmıştır. İkinci bölümde, elektroensefalograma (beynin elektriksel etkinliğini ölçme) iletken hacim yaklaşımı yapılmış, beyin için kullanılması gereken elektromagnetik formülasyondan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, beyinden kaynaklanabilecek herhangi bir elektriksel etkinliğin bir dipol akımıyla modellenebileceği ve hem homojen bir ortamda, hem de kafa gibi üç konsantrik, farklı iletkenlikli inhomojen bir ortamda bulunan bu dipolün en dışta yarattığı gerilim dağılımının nasıl bulunacağına dair formülasyon tanıtılmıştır. Sınır değerlerinin ve küresel koordinatların kullanılması ise, formülasyona ayrı bir çekicilik katmaktadır.

Dördüncü bölüm, belirlenen modele dair simülasyon çalışmalarını içermektedir. Bu çalışmalar, literatürdeki çalışmalarla örtüşmektedir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçların sunulması ve tartışması yapılmıştır. Konunun bu günkü durumu ve ilerletilmesi için önerilerde bulunulmuştur.

1929'dan bugüne beyin elektrodinamiği üzerine sayısız araştırma yapılmıştır. Tüm bu literatür birikimine karşın, gerek bu konuda okuduğum makalelerden, gerekse bu konunun uzmanı olan doktorlarla yaptığım görüşmelerden edindiğim izlenim ise, eldeki bilgi birikiminin devrimsel bir buluşa yol açamayacağı kadar az olduğuydu. Dünyanın her tarafında bu konuda sabırla çalışan araştırmacıların da ortak kanısı beynin elektriksel etkinliğinin klinik olarak çok az bilgi sağladığıdır. Peki o zaman neden ufku bu kadar dar olan bir konu üzerinde bu kadar gayret sarfediliyor ?

Sanırım, bu konuda yapılabilecek herhangi bir atılımın klinik alanda değil ama mühendislik alanında bir ışık yakabileceği düşünülmekte. Buna en güzel örnek, beynin anatomik yapısından yola çıkılarak gerçekleştirilen sinir ağı modeli (neural network model) olmaktadır. Benim inancım, bu konuda yapılan araştırmaların bir gün yapay zeka araştırmalarına ışık tutabileceği yolundadır.

Teşekkürler

Bu konuya başlarken gerçekten çok zorlandığım günler oldu. Bir kere tıbbi terminoloji başlı başına bir sorundu. Elime beynin elektriksel etkinliği üzerine yazılmış birkaç kitap geçirebilmişim. Bu kitapları mühendisler yazmış olmalarına rağmen, konu tıp kökenli olduğundan, terminoloji de aynı doğrultuda; ama ben başka doğrultuydum. Bu yüzden bir süre anatomi ve fizyoloji bilgimi geliştirmem gerekti.

Olayın matematiksel boyutu ise beni adeta büyülemişti. Beynimizde ortaya çıkan elektriksel bir etkinliğin (-ki çoğu kişi bu bilginin varlığından bile yoksundur) matematiksel-analitik formülasyonunu öğrenecektim. Zorlandığım noktalarda, eşsiz bilgisiyle sorunumu anında çözen değerli hocam Sayın Prof. Dr. İnci Akkaya'ya teşekkürü bir borç bilirim. Sık sık ziyaret ettiğim İstanbul Üniversitesi Elektronörofizyoloji Araştırma Merkezi'ndeki

değerli araştırmacı arkadaşlarım Doç. Dr. Tamer Demiralp'e, Doç Dr. Sacit Karamürsel'e (şüpheli yaklaşımlarıyla beni gerçek bir bilim ortamına sürüklemiştir) ve problemimi ilgiyle izleyen gene aynı bölüm araştırmacılarından Dr. Ümülhan Alkaç ve Dr. Haluk Dülger'e teşekkür ediyorum.

Tezimin gelişmesinde yol gösteren, bir tezin gerektirdiği düzenin ne olduğunu bana defalarca tekrarlayan ve bu yüzden bana hayat boyu unutamayacağım en zevkli dersi vermiş olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Bingöl Yazgan'a teşekkür ediyorum. Bu arada, grafik analizlerin yapılmasında karşılaştığım sorunları bir çırpıda çözen değerli meslektaşım Sayın Uzman Yüksek Mühendis Selçuk Parker de kuşkusuz teşekkürlerin en büyüğünü hak ediyor.

Son olarak, bana hayatım boyunca destek vermiş, tüm çalışmalarım esnasındaki huzursuzluklarımı büyük bir sabırla dinlemiş ve yardımcı olmuş sevgili annem ve babama teşekkür ederim.

Ata Akın

İstanbul,1995

İÇİNDEKİLER

Önsöz	ii
Özet (Türkçe-İngilizce)	v
Giriş	1
1 Beyin Dalgaları ve Kaynakları	8
1.1 Değişik Tipte Beyin Dalgalarının Kaynağı	12
1.1.1 Delta Dalgalarının Kökeni	13
1.1.2 Alfa Dalgalarının Kökeni	14
2. EEG'ye iletken hacim yaklaşımı	15
2.1 İletken hacim alanları	17
2.2 Statik-benzeri formülasyon	18
2.3 Biyolojik malzemelerin ve beynin elektriksel özellikleri	20

3. Kafanın ve kaynakların modellenmesi	24
3.1 Seçilen dipol modeli ve bu modelde dipol kaynaklarının yarattığı dağılım	28
4. Simulasyon çalışmaları	52
5. Sonuç ve tartışma	70
Kaynaklar	74
Ek1 Beynin Fizyolojisi	80
E1 Beynin anatomisi ve Fonksiyonları	80
E1.1 Serebrum	82
E1.2 Beyin Sapı	86
E1.3 Serebellum	87
E2.1 Serebral Korteks ve Beynin Entellektüel Fonksiyonları	89
E2.2 Bazı Özel Kortikal Alanların Fonksiyonları	90
E2.3 İnsanda Motor Topografik Harita	92
E3.1 Beyinden Gelen Elektriksel Potansiyeller	93
E.4 Değişik derecelerdeki beyin aktivitesinin EEG'nin temel ritmi üzerine etkisi	94

E.6 EEG'nin klinik kullanımı	97
E.6.1 Beyin tümörlerinin lokalizasyonu	97
Ek 2	
E2.1 Laplace Denklemine Küresel Koordinatlarda Çözümü	99
E2.2 3 Boyutlu Laplace Denklemine Küresel Koordinatlarda Çözümü	100
E2.3 Dönel Simetri Durumunda Sınır Değer Problemi	104
E2.4 Asosiy Legendre Polinomları	104
Özgeçmiş	107

TÜRKÇE ÖZET

Anahtar Kelimeler : EEG, Dipol kaynağı lokalizasyonu, iletken hacim

Özet : Beynin elektriksel etkinliğini ölçerek, beyindeki herhangi bir hastalığı teşhis eden, veya beyin çeşitli durumlardaki çalışmasını incelemek için bu elektriksel etkinliği ölçen branşa elektroensefalografi denir. Bu tezde, nöronları senkronize olarak çalıştığı düşünülen beyin bir bölgesindeki elektriksel etkinlik, eşdeğer bir dipol şeklinde modellenmiş ve bu akım kaynağına yönelik gerilim dağılımının kafa derisindeki görüntüsünün teorik olarak hesaplanması yapılmıştır. Kafa konsantrik, farklı iletkenliklerde, üç küre şeklinde modellenmiş ve belli bir eksantritesi olan bir dipol kaynağının üçüncü küre yüzeyinde yaratacağı gerilim dağılımı, sınır koşulları aracılığıyla belirlenmiştir. Farklı dipol bileşenlerine dair gerilim dağılımlarının simülasyonları yapılmış, böylelikle, farklı eksantritelerde bulunan dipollerin gerilim dağılımlarının kafanın iletke bölgeleri tarafından nasıl etkilendiği gösterilmiştir.

Summary

Determining the relationship between human evoked scalp potentials and underlying cortical sources is one of the great challenges in electroencephalography. In this thesis, a source localization method developed by Kavanagh, et. al. 1978 and refined by Ary. et al. 1981 is described. It is of great interest to be able to infer from multiple scalp recordings obtained from different derivations the distribution of the generators within the skull, responsible for different EEG phenomena. In its more specific form, the question of determining the place of intracranial sources of EEG phenomena implies solving the so-called inverse problem of volume conduction theory, which is to locate within a conductive medium the sources of electrical activity, given the distribution of electrical potentials at the surface enclosing the medium. The forward problem in EEG consists of finding the distribution of potentials at the scalp given the intracranial sources.

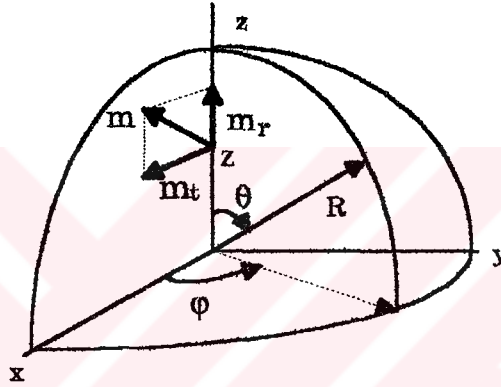
To obtain an appropriate solution to both the inverse and the forward problem is not a simple task. Some of the limitations of this problem consists of a) the model of the source, and b) that of the volume conductor.

a) Problems posted by the model source : In general the current generator can be modelled by several distributions. The most convenient one is the equivalent dipole source which is to be used throughout the thesis. Aside from mere simplicity, the principal motivation that has led previous investigators to choose a current dipole source model is that it can be appropriate from a physical point of view. The exact expression for the potential due to a volume of discrete sources, such as might arise from the activity of a population of neurons, is an infinite series whose successively higher order terms decrease more rapidly for points distant from the sources. The net source in the head is assumed to be zero and thus the first or monopolar term is neglected. Then to a good approximation, the second term, the dipole term, suffices to determine the potential field at distances large compared to the maximum distance between the sources producing the field. In situations where this criterion is not met, the sources might be modelled by extended 2-dimensional dipole sheets with irregular surfaces.

b) Problems posted by the model of the volume-conductor : In most solutions of the problems in electro-magnetoencephalography, the

brain and the different tissues of the head are modelled by concentric spheres. The investigators who have used the three or four spheres model agree that the effect of electrical inhomogenities is to attenuate and smear the pattern of scalp potentials.

The formulation of the forward problem in the thesis begins with the governing equations. The problem first encounters the homogeneous model which is the one homogeneous sphere with uniform conductivity. For this approximation the Poisson equation is solved in spherical coordinates. (Figure S1)



Şekil S1. Coordinate system for the dipole in homogeneous model

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \Phi = \nabla \cdot \vec{J}_i \quad (S1)$$

In this formula, Φ is used for the potential field, σ is the conductivity of the medium, and $\vec{J}_i$ is the surface current density. The divergence of the surface current density gives the volume current density I_v . So the solution to the above formula is :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_v \frac{I_v(x,y,z)}{R} dv \quad (S2)$$

The source function is determined to be a dipole, $z=bR$ away from the origin on the z axis, with two opposite charges that have a separation of l between each other. So the source function is given theoretically as :

$$I_v = -I_0 \delta(x') \delta(y') [-\delta(bR + l - z') + \delta(bR - z')] \quad (S3)$$

The $1/R$ term in the above (S2) formula is expanded in spherical coordinates as :

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(r')^n (n-m)!}{r^{n+1} (n+m)!} P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta) \cos[m(\varphi - \varphi')] \quad (S4)$$

If the source is on the z axis then both θ' and φ' will be zero. Substituting (S3) and (S4) in (S2) gives the potential field distribution of a dipole on the surface of a homogeneous conducting medium :

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} n m_r P_n(\cos \theta) \quad (S5)$$

Here the dipole is taken as in a radial direction. If it is taken tangential to the surface, which also means paralel to the x axis then the formula becomes :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} m_t P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi) \quad (S6)$$

Superemposing (S5) and (S6) gives the distribution of a dipole with certain eccentricity from the origin on the z axis, having both radial and tangential components :

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} [n m_r P_n(\cos \theta) + m_t P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi)] \quad (S7)$$

In the thesis, the solution for inhomogeneous media is also given. As previously mentioned, the real head can be modelled by four concentric spheres starting from the most inner one : brain, cerebrospinal fluid, skull, and the scalp. In my thesis I used the three concentric spheres model, because the conductivity of the brain and the cerebrospinal fluid is almost the same. The solution to this phenomena is the expansion of (S7) to two more surrendering spheres with different conductivities. This is a boundary value problem, and the governing equations with their boundary conditions can be given as below :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left[\frac{n(bR)^{n-1}}{r^{n+1}} + A_n r^n \right] \quad (S8)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left[\frac{B_n}{r^{n+1}} + C_n r^n \right] \quad (S9)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left[\frac{D_n}{r^{n+1}} + E_n r^n \right] \quad (S10)$$

The boundary conditions for the above potentials are :

$$1) \quad a) \quad r=r_1 \rightarrow V_1 = V_2$$

$$b) \quad \sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$$

$$2) \quad a) \quad r=r_2 \rightarrow V_2 = V_3$$

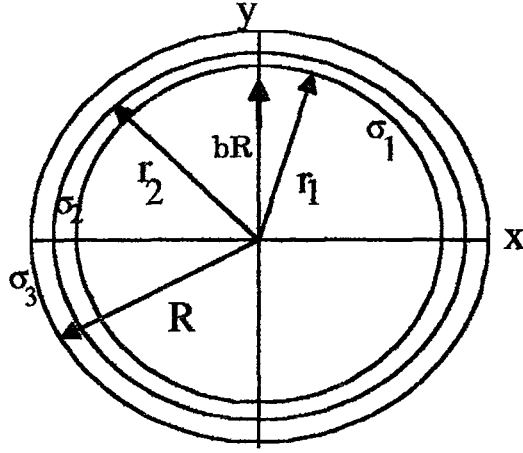
$$b) \quad \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} = \sigma_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=r_2}$$

$$3) \quad \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

Using all the information given above, the potential field distribution on the surface of the third sphere which symbolized the scalp is determined :

$$V_3(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} \left[\frac{\xi(2n+1)^2}{d_n(n+1)} \right] \left[nm_r P_n(\cos \theta) + m_t P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi) \right] \quad (S11)$$

The next chapter in the thesis is the simulation of these distributions with different values of m_r and m_t . Of course, the assumption in this equation is that the dipole is located on the z axis, and its components are in the xz plane. For a more realistic approach, the source function can be evaluated to be located anywhere inside the brain sphere; in this case the first sphere.



Şekil S2. Inhomogeneous three sphere model of the head

The simulation studies are done using the programs MCAD v 2.5 and SURFER v. 4.2. The Legendre polynomials that are seen in the equations are calculated for $1 \leq \cos(\theta) \leq 0$ in 50 points. Also the degree of rotation from the x axis known as φ is calculated in 50 points.

Giriş

Uyuşturulmuş hayvanların beyinlerindeki arka plan elektriksel etkinliğini belirleme çalışmaları 19. yüzyıla kadar dayansa da, ilk sistematik incelemeler Alman psikiyatrist Hans Berger tarafından yapılmıştır. Hans Berger'in beyinden kaydettiği gerilim titreşimleri için bulduğu isim "elektroensefalogram"dır.

Genel olarak beynin elektriksel aktivitesi üç tür elektrod ile kaydedilmektedir : saçlı deri elektrodu, kortikal elektrod ve derin elektrodlar. Eğer elektrodlar açık yüzeye (kortekse) konuyorsa, bu işleme Elektrokortikogram (ECoG) denir.. Yalıtılmış ince iğne elektrodların beynin sinir dokuları arasına sokularak kayıt alınması işlemine "derin kayıt alma" denir. Bu işlemin, uygun büyüklükte elektrodlar kullanıldığı durumlarda beyne hiçbir zarar vermediği görülmüştür.

İster saçlı deriden ister korteks veya beynin derinliklerinden kaydedilmiş olsun, kaydedilen gerilim değerleri, bir çok aktif nöronal akım jeneratörlerince yaratılan iletken-hacim (volume-conductor) alanlarının bir süperpozisyonu olmaktadır. Bu alan gerilimlerini yaratan kaynaklar, karmaşık bağıntıları olan sinir elemanlarıdır. Bu nöronal (sinir) elemanlar dendritler, hücre gövdeleri (soma) ve sinir hücrelerinin aksonlarıdır. Beynin sinir dokusu da uniform olmayıp, bölgeden bölgeye yoğunluk değiştirmektedir. Elektroensefalogramla (EEG) lokalizasyona yönelik detaylı bir incelemeye geçmeden önce şu konularda bilgi sahibi olmamız gerekir :

- 1) Beynin elektriksel kaynakları,
- 2) Elektroensefalograma iletken hacim yaklaşımı,
- 3) Beynin elektriksel özellikleri,
- 4) Kafanın ve kaynakların modellenmesi.

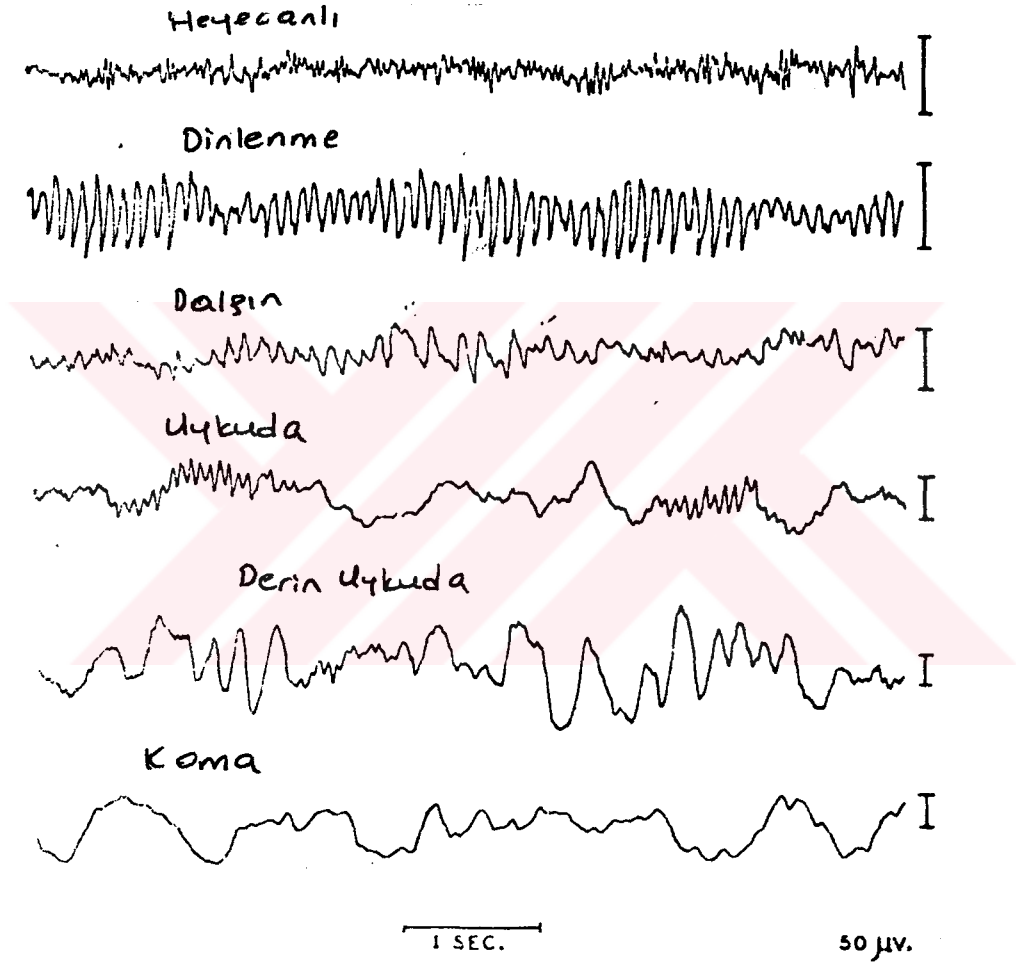
Bu bölümlerden sonra tezin bütünlüğü dahilinde eşdeğer dipol kaynağı yaklaşımıyla EEG'nin modellenmesi ele alınacaktır. Daha sonra kaynakların lokalizasyonuna (beynin neresinde olduğunun belirlenebilmesinde) sıkça kullanılan izopotansiyel haritalamaya (kontur haritalama) yönelik simülasyon çalışmalarından örnekler verilecektir. Ülkemizde beynin elektriksel etkinliğini dipol kaynakları şeklinde ele alıp, lokalize etme çalışmaları henüz başlamamış olduğundan, bu tezin bu alandaki olası çalışmalara bir başlangıç adımı olabileceği düşünülmektedir. Çok derin ve teorik olan bu konunun daha iyi kavranabilmesi ve geliştirilebilmesi için beyinin anatomisi ve fizyolojisine yönelik bilgiler de eklerde verilmiştir. Çalışmaların klinik faydaları ise ne yazık ki ümit edildiği kadar çok olmamakta; konu epilepsili veya tümörlü hastaların lezyonlarını lokalize etmede kullanılmaktadır.

1 BEYİN DALGALARI ve KAYNAKLARI

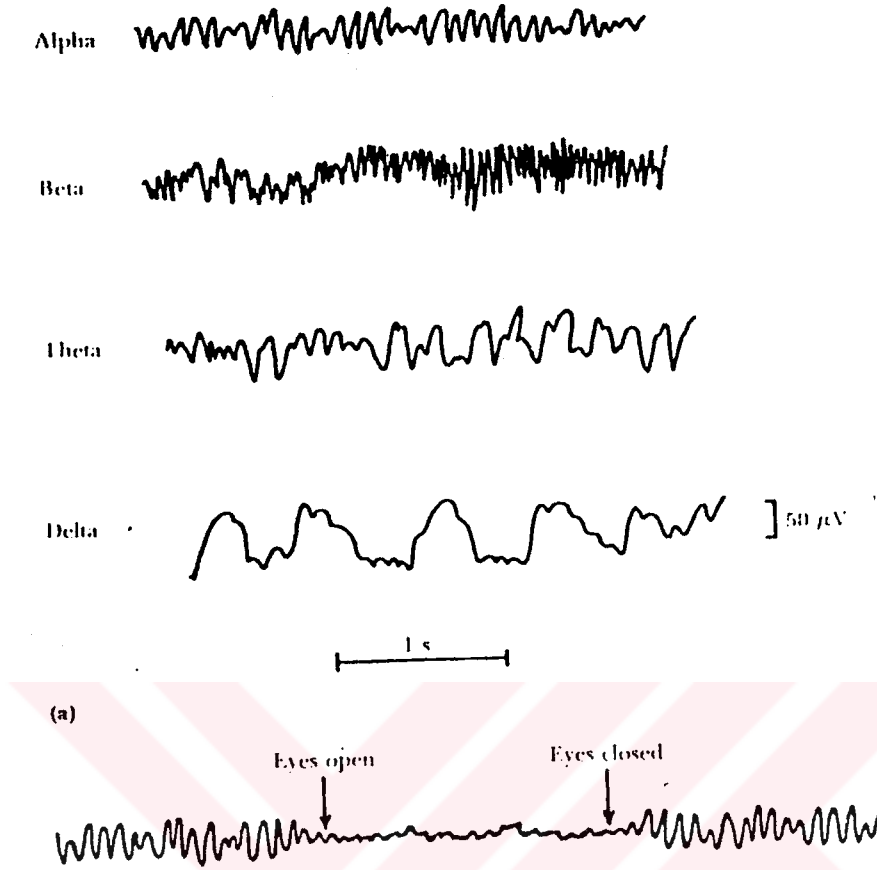
Beynin dış yüzeyinden veya kafaderisinden kaydedilen elektriksel işaretler, beynin içinde sürekli oluşan titreşimli elektriksel etkinliğin bir göstergesidir. Bu etkinliğin hem şiddeti hem de paterninin retiküler aktivasyon sistemindeki değişimlerden kaynaklanıp, tüm beynin uyarılmasından ortaya çıktığı belirlenmiştir. Elektriksel potansiyellerdeki bu titreşimlere beyin dalgaları, tüm kayıda ise elektroensefalogram denir.

Beyin yüzeyinden alınan beyin dalgalarının şiddeti kulak memesi gibi kayıt noktasına uzak bir yere göre 10 mV' ları bulurken, kafa derisinden alınan kayıtların şiddetinin 100 μ V'lara kadar düştüğü gözlenmiştir. Beyin dalgalarının frekansları 0.5 Hz. ile 100 Hz. arasında olup, özellikleri serebral korteksin etkinlik derecesine büyük bağımlılık gösterir. Örneğin bu dalgalar uyku ile uyanıklılık durumları arasında farkedilir değişiklikler gösterirler. Zamanın büyük bölümünde beyin dalgalarının düzgün olmayan şekilleri olduğundan, bunlara genel bir patern de (örgü, örüntü) bulunamaz. Bazı zamanlarda ise, çok belirgin paternler görülebilir. (Şekil 1)

Bunlar epilepsi (sara) gibi belirli anormal karakteristikli işaretlerdir. Normal bir insanın beyninde oluşan dalgaları frekanslarına göre dört grupta toplayabiliriz. (Şekil 2)

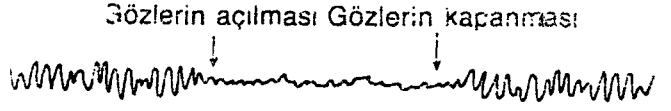


Şekil 1. Farklı bilinç durumlarında EEG karakteristikleri



Şekil 2. Normal bir EEG dalgasının içindeki farklı frekanslı bileşenler

Alfa dalgaları saniyede 8-13 frekanslı dalgalardır ve sakin uyanık, beyni istirahat durumunda olan normal erişkinlerin EEG' lerinde görülür. Bu dalgalar yoğun şekilde oksipital bölgede görülmekle birlikte, zaman zaman saçlı derinin paryetal ve frontal bölgelerinden de kaydedilebilir.(Ek1.'e Bkz.) Voltajları genellikle 50 mV kadardır. Alfa dalgaları uykuda tamamen kaybolurlar ve uyanık kişinin dikkati bazı özel beyin faaliyetine yöneltildiği zaman alfa dalgalarının yerini frekansları daha yüksek, fakat voltajları beta dalgalarından daha düşük olan asenkron dalgalar alır. (Şekil



Şekil 3. Gözlerin açılmasıyla, alfa ritmasının yerini senkron olmayan deşarjlar alır.

Şekilde basitçe, gözleri parlak ışıktan açıp sonra tekrar kapamanın alfa dalgaları üzerindeki etkisi görülmektedir. Görme uyarılarının, alfa dalgalarını derhal ortadan kaldırdığına ve bunların yerini düşük gerilimli, asenkron beta dalgalarının aldığı görülmektedir.

Beta dalgaları, frekansları saniyede 14'ten daha yüksek ve 25 hatta seyrek olarak 50 kadar olabilen dalgalardır. En sık olarak saçlı derinin paryetal ve frontal bölgelerinden kaydedilirler. Beta dalgaları en çok merkezi sinir sisteminin aktivasyonu ya da gerginlik durumunda ortaya çıkar.

Teta dalgalarının frekansı saniyede 4 ile 7 arasındadır. Bunlar başlıca çocuklarda paryetal ve temporal bölgelerde görülür. Fakat bazı erişkinlerde emosyonel (duygusal) gerginlik durumu, özellikle düş kırıklığı ve frustrasyon* koşullarında kaydedilir. Bu dalgalar, zevk veren bir deneyimden sonra, hoş giden şeyin ani olarak uzaklaştırılmasıyla frustrasyon durumuna sokulan kişilerin EEG'lerinde ortaya çıkar; bu koşullarda yaklaşık 20 saniye süren teta dalgaları görülür. Aynı dalgalar bir çok beyin hastalıklarında da kaydedilir.

*Frustrasyon : Herhangi bir arzuyu tatmin edememenin ve ya gayret gösterdiği halde amaca ulaşamamanın sebep olduğu ruhsal gerilim hali

Delta dalgaları, bunlar EEG'deki saniyede 3.5 Hz.'in altındaki tüm frekansları kapsar, frekans bazen her iki üç saniyede bir dalganın görüldüğü düşük değere inebilir: Delta dalgaları, derin uykuda, süt çocuğu çağında ve ciddi organik beyin hastalıklarında ortaya çıkar. Ayrıca, serebral korteksi talamustan ayıran subkortikal kesi yapılmış hayvanlarda görülür. Delta dalgaları beynin alt bölgelerinden bağımsız olarak, doğrudan korteksin aktivitesiyle ortaya çıkar.

1.1 Değişik Tipte Beyin Dalgalarının Kaynağı

Beyindeki tek bir nöron ya da sinir lifinin deşarjı, başın yüzeyinden kaydedilemez. Bir elektriksel potansiyelin saçlı deriye kadar geçmesi için, sinir dokusunun büyük bölümlerinde eş zamanlı olarak elektriksel akımların yayılması gerekir. Bunun olabilmesi için iki yol vardır. İlk olarak, çok sayıda sinir lifi birbiriyle senkron olarak deşarj yapar, böylece çok kuvvetli elektrik akımı gelişebilir. İkinci olarak çok sayıda nöron kısmen deşarj yapar, aksiyon potansiyeli yayılmamakla beraber, nöronların kısmi deşarjı, nöron eksitabilitesini (uyarılabilirliğini) değiştirerek aksiyon potansiyelinde dalgalanmaya neden olabilir. Saçlı deriden

kayıtlarla eşzaman olarak beyinden elektriksel ölçümler yapılırsa, beyin dalgalarının oluşumunda genellikle ikinci yolun işlediği görülür.

Daha yakından bakıldığında, serebral korteksin yüzeyinin hemen tümüyle, hücreleri korteksin daha alt tabakalarında bulunan nöronların dendritlerinin yaptığı bir ağdan oluştuğu görülür. (Ek 1.'e Bkz.) Sinyaller bu dendritlere ulaştığında, bunlar kısmen deşarj yaparlar. Bu, korteks nöronlarını çok duyarlı bir duruma getirir- yani onları fasilitasyona uğratar ve bu ileri derecedeki duyarlılığı belirten negatif potansiyeller eşzamanlı olarak saçlı deriden kaydedilir.

Serebral korteksin dış dendrit tabakasını uyaran sinyallerin başlıca kaynağı, retiküler aktive edici sistemin yaygın talamokortikal lifleridir. Bu nedenle, beyin dalgalarının şiddeti, retiküler aktive edici sistemin beyin sapı ya da talamus bölümlerinin aktive derecesiyle yakından ilişkilidir.

1.1.1 Delta Dalgalarının Kökeni

Talamustan kortekse giden sinirtraktuslarının (telleri) kesilmesi ile retiküler aktive edici sistemin (RAS) lifleri bloke edilirse, kortekste delta dalgaları ortaya çıkar. Bu, -beynin daha alt yapılarından bağımsız olarak- kortikal nöronların kendilerinde delta dalgalarını

doğuran senkronize edici bazı mekanizmaların bulunabileceğini göstermektedir.

Delta dalgaları çok derin yavaş dalga uykusunda da görülür. Bu durumda korteksin RAS aktivasyonundan kurtulduğu düşünülmektedir.

1.1.2 Alfa Dalgalarının Kökeni

Alfa dalgaları talamusla bağlantısı olmayan kortekste görülemez. Keza, yaygın talamus nükleuslarının (çekirdekleri) stimülasyonu (uyarılması), yaygın talamokortikal sistemde frekansları alfa dalgalarının doğal frekansı olan, saniyede 8 ile 13 arasında olan dalgaların ortaya çıkmasına neden olur. Böylece, alfa dalgalarının yaygın talamokortikal sistemin kortikal aktivitesinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu sistem, hem alfa dalgalarının dönemselliğine, hem de her dalga sırasında milyonlarca kortikal nöronun senkron olarak aktive olmasına yol açar.

II. ELEKTROENSEFALOGRAMA İLETKEN HACİM YAKLAŞIMI

Geometrik yaklaşımla, beyni bir küre şeklinde ve etrafının da empedansı değişen konsantrik kabuklardan oluştuğunu düşünebiliriz. Bu kaba ama oldukça kullanışlı bir yaklaşımdır. Beyni saran bu kabuklar içten dışa doğru sırasıyla serebrospinal sıvı, kafatası ve kafa derisidir. Beynin ve bu kabukların tam küre şeklinde olmamaları, üst yarı beyin çalışmalarında pek sorun çıkartmamaktadır çünkü bunların geometrik şekilleri küreye çok uzak değildir. Ama alt yarı beyin için küreselleştirme yaklaşımı, potansiyel dağılımı işlemlerinde önemli farklara yol açmaktadır. Beyin farklı hücre guruplarından oluştuğundan, ne homojen ne de izotropik olarak düşünülebilir. [Schneider 1972, 1974; Henderson et. al. 1975; Kavanagh et. al. 1978; Ary and et al. 1981; Cuffin and Cohen 1978; Cuffin 1982; Cuffin 1985; de Munck and et al. 1988; Witwer and et. al 1972; Srebro 1994; Eschel and et al. 1995; Soong and Zoles, 1995; Cuffin 1995]

Pratikte, nörolojik jeneratörler tam tamına bir boyutlu bir dipole karşılık gelmemektedirler. EEG çalışmalarında kendini belli edebilecek büyüklükteki elektriksel bir etkinliğin kaynağı, nöronları senkronize bir şekilde aktive olan korteksin ufak bir bölgesidir. Bu kaynağı, belirli bir kalınlığı olan bir sayfa gibi düşünebiliriz. Sayfanın kalınlığı boyunca polarize olması, elektriksel etkinliğin oluşması demektir. Bu polarizasyon küçük bir alanda dahi olsa,

onu hacim başına eşdeğer bir dipol şeklinde modellemek mümkündür. Korteks üzerinde büyük eğimli bir alanda ve hatta üst üste binmiş bir bölgede bile oluşması durumunda, bu etkinlik kompleks vektörler toplamı ile gene eşdeğer bir dipole indirgenebilir. Geniş alanlarda aktif akım jeneratörlerinin olduğu durumlarda ise, sonsuz sayıdaki kombinasyonlar, yüzeyde gene aynı gerilim dağılımlarını yaratabilmektedirler.

Bu yüzden serebral etkinliği eşdeğer bir dipol şeklinde modellemenin pratik değeri, EEG kaynaklarının çok odaklandığı durumlarda önem kazanmaktadır. Ne yazık ki, beynin duyuşal stimölasyonlara veya patolojik koşullara verdiği cevaplarda odaklanmaya çok ender rastlanmaktadır. Anatomik odağı belirleme (lokalizasyon) yönteminin adımlarını şu şekilde sıralayabiliriz: 1) Bir model düşünülür; örneğin üniform, homojen ve iletken bir ortam içinde eksantrik bir dipol; elektrik alanı ise, statik benzeri olsun. 2) İlgili sınır değerler ile analitik bir formül belirlendikten sonra, eldeki modeli kullanarak, ölçüm yapılacak kortikal yüzey noktalarındaki gerilim değerleri hesaplanır. 3) Teorik olarak hesaplanan bu gerilim değerleri ile, ayrı zamanda ve aynı noktalarda kaydedilen EEG dalga şekli karşılaştırılıp, genel en küçük kareler yöntemiyle bir hata fonksiyonu bulunur. Buradaki hatanın tanımı ise aynı yüzey noktaları için hesaplanan gerilimlerle, ölçülen değerler arasındaki farktır. 4) EEG dipol parametreleri iterasyonlarla değiştirilerek, bu hata en küçük kareler anlamında minimize edilmeye çalışılır. Böylelikle bulunacak optimal dipol odağının, hata fonksiyonunun minimum olması bakımından, gerçek dipol odağına çok yakın olduğunu söyleyebiliriz.

EEG çalışmalarında beynin ve içinde bulunduğu ortamın anizotropisi ve inhomojenitesi de sıklıkla incelenmiş ama bu çalışmalardaki sonuçların, homojen durum için elde edilenlerden çok büyük farkı olmadığı da gösterilmiştir. Eşdeğer bir dipolün lokalizasyonu (odağını belirleme), uyarılmış potansiyel ve derin beyin patalojilerinde klinik öneme sahiptir.

2.1 İletken Hacim (Volume-Conductor) Alanları

Bir aksiyon potansiyelinin, hücre membranının bir stimülasyon sonucu depolarize olmasından kaynaklandığı bilinmektedir. Bir sinir hücresinin yarattığı aksiyon potansiyeli, sinir aksonundan hareket ederken, iletken olan ekstraselüler (hücre dışı) sıvı yüzünden diğer sinirleri ve onların aksonlarını da aktive edebilir.

Bir membran etkinliği sonucu oluşan bu akım yoğunluğu, aktif bölgenin hemen civarında yoğunken, etraftaki ortamdan da indükte ettiği akımları akıtmaktadır. Bu ortama iletken-hacim (volume-conductor) denir ve aktif kaynakların akımlarını taşıyan pasif dokulardan oluşur. Böyle bir iletken hacme yerleştirilmiş bir elektrod ile, aktive olmuş tüm kaynakların yarattığı net elektrik potansiyel alanı ölçülebilir. Örneğin beynin elektriksel aktivitesi, subkortikal (beyin korteksinin altına) olarak yerleştirilen büyük

elektrodlarla, hatta saçlı deriye konan yüzey elektrodlarıyla bile ölçülebilir.

Bir akım akışını belirten bu ölçülebilen potansiyel farklarıyla, o alanı yaratan kaynaklar arasında ilişki kurabilmek, fizyolojik açıdan yüksek önem taşımaktadır. Bu kısımda, bir iletken hacim içindeki akım akışının yarattığı potansiyel dağılımının matematiksel-analitik modeli tanıtılıp, beynin ve vücudun elektriksel özelliklerine göre bu modeller rafine edilecektir.

2.2 Statik-benzeri Formülasyon

Bir iletken hacim içindeki akım akışını veya potansiyel alanını zamana göre değişen dağılmış biyoelektrik kaynaklar şeklinde tanımlarken, uygun elektromagnetik teori formüllerinden yararlanmak gerekir. Teze yönelik problemi önce en geniş anlamda formüle edip, daha sonra, fizyolojik sistemlerin elektriksel özelliklerine göre düzenleyeceğiz. Bu durumda, Laplace ve Poisson Denklemleri'ni kullanmak gerekir.

Başlangıç olarak, sonsuz iletken bir hacim içindeki elektrik alanını, ω açısal frekanslı zamana bağımlı J_i akım yoğunluğuyla açıklayalım : Ortamın lineer, homojen, izotropik olduğunu ve bunları karakterize eden fiziksel parametrelerin de μ, σ, ϵ olduğunu varsayalım. Elektrik ve magnetik alanların çözümü için inhomojen

Helmholtz denkleminde yararlanıp, E ve H 'yi yaratan A ve Φ vektör ve skaler potansiyellerin çözümlerini verelim :

$$\vec{A}(x', y', z') = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_i(x, y, z) e^{-jkR}}{R} dv \quad (1)$$

$$\Phi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \int_V \frac{I_v(x, y, z) e^{-jkR}}{R} dv \quad (2)$$

$$R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Üssüz ifadeler kaynak noktasını, üslüler ise alan noktasını belirlesin. $\nabla \cdot \vec{J}_i = -I_v$ olsun. I_v hacimsel akım yoğunluğudur.

$$k^2 = \omega^2 \mu \left(\epsilon + \frac{\sigma}{j\omega} \right) = -j\omega\sigma\mu \left(1 + \frac{j\omega\epsilon}{\sigma} \right) \quad (3)$$

ise

$$\sigma_c = \sigma \left(1 + \frac{j\omega\epsilon}{\sigma} \right) \quad (4)$$

ile kompleks iletkenlik tanımlanırsa,

$$k^2 = -j\omega\mu\sigma_c \quad (5)$$

yazılabilir. Böylelikle,

$$\vec{E} = j\omega\vec{A} - \nabla\Phi \quad (6)$$

yazılabilir.

2.3 Biyolojik Malzemelerin ve Beynin Elektriksel Özellikleri

Yapılan araştırmalarla, biyolojik malzemelerin iletkenlik değerleri Tablo 1'de görülmektedir.

Tablo 1 Biyolojik dokuların iletkenlikleri

DOKU	Ortama İletkenlik mhos/m
Kan	0.67
Akciğer	0.05
Karaciğer	0.14
Yağ	0.04
İnsan Gövdesi	0.21

Ortalama değer olarak $\sigma=0.2$ mhos/m alınabilir. σ_c hesabı içinse, $j\omega\epsilon/\sigma$ değerinin bilinmesi gerekir. Bu da Tablo 2'de görülebilir.

Tablo 2. Farklı frekanslar ve dokulara göre kapasitif akımların rezistif akımlara oranlarının ortalamaları

Doku	10 Hz	100 Hz.	1,000Hz.	10,000Hz.
Akciğer	0.15	0.03	0.05	0.14
Yağlı doku		0.01	0.03	0.15
Karaciğer	0.2	0.04	0.06	0.2
Kalp kası	0.1	0.04	0.15	0.32

EEG' de en yüksek frekanslı bileşenin frekansı bile 100 Hz'i geçmemektedir. Bunun yanında, biyolojik malzemelerin magnetik özelliği olmadığından, bu malzemelerin permiabiliteleri boşluğunkine eşit, yani $4\pi \cdot 10^{-7}$ alınır. R içinse maksimum değer olarak $R_{\max} = 1$ m. alınabilir.

Böylelikle Tablo 2'ye bakılarak bir ihmal yapılabilir. $|j\omega\epsilon/\sigma| \ll 1$ olduğu rahatça görülmektedir. e^{-jkR} şekliyle kaynaklardaki değişikliklerin ilerleme hızı belirtiliyorsa, burada da bir sadeleştirme yapılabilir :

$$e^{-jkR} = 1 - jkR - \frac{(kR)^2}{2!} - j\frac{(kR)^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

ve $|kR| \ll 1$ ise $e^{-jkR} \cong 1$ alınabilir. Bu durumda $|\omega A|/|\nabla\Phi| = |kR|^2 \ll 1$ çıkmakta, böylelikle

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (8)$$

yazılabilmektedir. Tüm yapılan sadeleştirmeleri aşağıdaki Tablo 3 ile ifade edelim :

Tablo 3

Koşullar	Kriterler
Propagasyon etkilerinin ihmalı	$kR \ll 1$ (9)
Kapasitif etkilerin ihmalı	$\omega\epsilon/\sigma \ll 1$ (10)
Endüktif etkilerin ihmalı	$(kR)^2 \ll 1$ (11)
$E_{1n} = 0$ ($\sigma_2 = 0$)	$\omega\epsilon_0/\sigma_1 \ll 1$ (12)

Burada bilinmesi gereken önemli bir sınır koşulu da, vücudu saran havanın iletkenliği σ_2 'nin 0 alınması, dolayısıyla sınırlar arasındaki akımın sürekliliğini ifade eden

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \quad (13)$$

formülüne göre E_{1n} 'nin 0 olması demektir. Bu koşulları ele alarak, potansiyel fonksiyonumuzun integral ifadesini şu şekilde yazabiliriz

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_V \frac{I_v(x,y,z)}{R} dv \quad (14)$$

Akan toplam akımı J ile, kaynak akımını J_i ve iletim akımını σE şeklinde ifade edelim : $\vec{J} = \vec{J}_i + \sigma \vec{E}$ idi. J solenoidal olduğundan, $\nabla \cdot \vec{J} = 0 = \nabla \cdot \vec{J}_i + \nabla \cdot \sigma \vec{E}$ ve

$$\nabla \cdot \vec{J}_i = -\sigma \nabla^2 \Phi \Rightarrow \nabla^2 \Phi = -\frac{I_v}{\sigma} \quad (15)$$

bulunur. Bu denklem, iletken hacim problemi için konvansiyonel, temel ve quvazistatik matematiksel formülasyonu vermektedir. Eğer tablodaki koşullar gerçekleşmekteyse, kaynak tarafından üretilen alanın frekans özelliğinin, alanın her yerinde aynı olacağı anlamı çıkar. Bu da problemimizi durağan hale getirir.



III. KAFANIN VE KAYNAKLARIN MODELLENMESİ

Tipik olarak, EEG kayıtları, kafaderisi yüzeyinden uzaysal örnekleme ile elde edilir (belirli aralıklarla yerleştirilen elektrodlarla). Farklı derivasyonlardan alınan çok sayıdaki saçlı deri kayıtlarından, EEG fenomeninden sorumlu jeneratörlerin kafa içindeki dağılımını çıkarabilmek, büyük bir araştırma sahası olmuştur. Daha özelleşmiş haliyle söylemek gerekirse, EEG fenomenine has intrakraniyal kaynakların yerlerini belirleme sorunu iletken hacim teorisindeki ters problemi (inverse problem) çağrıştırmaktadır. Ters problemin uğraş alanı, bir iletken ortamın içindeki elektriksel kaynakların yerlerini, o ortamı çevreleyen yüzeydeki potansiyel dağılımından lokalize etmektir. Elektroensefalogramda ters problemin çözümüne yönelik bir kaç çalışma yapılmıştır. EEG fenomeninin uzaysal dağılımıyla ilgilenen çoğu araştırmacı, gözlemlenmek istenen fenomene yönelik topografik haritaları vermekle yetinmiş ve bu olaya sebebiyet verebilecek kaynakların muhtemel yerlerine dolaylı bir şekilde belirtmişlerdir.

Elektroensefalografinin esas amacı saçlı deriden kaydedilen gerilimleri doğuran intrakraniyel kaynakları bulmak ve bunları beynin içindeki nöral kaynakların aktiviteleriyle bağdaştırabilmektir. Bu yüzden bir elektroensefalograför için, saçlı deriden gelen bilgileri kortikal ve hatta subkortikal işlemlere ait

bilgilere dönüştürebilen bir metod geliştirmek önemli olmaktadır. Bu elektroensefalogramdaki ters problemin tanımıdır. İntrakraniyel kaynakların bilindiği durumda yüzeydeki gerilim dağılımının bulunması işlemi olan ters problemin tam zıttı olan düz problem işlemidir.

Ters problemin çözülebilmesi için ilk önce yüzeydeki gerilimi tanımlayan üç değişkenli bir $g(x,y,z)$ fonksiyonunun bulunması gerekir. Bu fonksiyon, çeşitli elektrod noktalarından alınan kayıtların bir kestirimi olmakta ve bir interpolasyon işlemi ile elde edilebilmektedir. Bundan sonraki soru, bu gerilim dağılımını yaratan ve $f(x,y,z)$ ile gösterilebilen intrakraniyel kaynakların bulunmasıdır. Sonuçta kafa üzerinden sonsuz sayıda kayıt alamadığımızdan, kaynakları lokalize ederken karşımıza tek bir sonuç çıkmamaktadır; ama sorun f kaynağına yönelik bazı belirli fiziksel modeller varsayarak çözülebilir. Schneider'ın (1972,1974), Henderson ve arkadaşlarının (1975) ve Kavanagh ve arkadaşlarının (1978) modellerinde f kaynağı bir dipolün parçası olmaktadır.(Lopes da Silva 1993)

Ters probleme yönelik uygun bir çözüm üretebilme işlemi kolay değildir. Önemli olan kullanılacak a) kaynak modeli ve b) iletken hacim modelidir.

a) Kaynak Modeli : Kafaderisinden kaydedilen gerilimlerin çoğunun kaynağının, çeşitli büyüklüklerde dipol katmanları oluşturan neokortikal akım kaynakları olduğu düşünülmektedir. [Nunez 1981 a,b,c] Spontan EEG ve uyarılmış potansiyel fenomenlerinin altında yatan temel mekanizma ne olursa olsun,

bunlara karşılık gelebilecek akım kaynakları şöyle kategorize edilebilir :[Nunez 1988]

I. Tip : Lokalize ve Durağan

Kaynaklar yeteri kadar lokalize olmuş (bir bölgeye toplanmışlar) ve böylelikle kafa derisindeki potansiyel dağılımı tek bir dipolünkine yaklaşmaktadır. Korteksteki kaynaklar, kortikal yüzeyde 1 cm² 'den daha ufak bir alana sıkışmış olmalıdırlar. Derinlerdeki kaynaklar daha büyük alanlar kaplayabilir ama gene de yüzeyde dipol-benzeri gerilimler yaratabilirler. Ayrıca, dipol zaman geçtikçe yerini değiştirmemekte, yani uyarılmış potansiyel çalışmalarında uyarıdan uyarıya sabit kalmaktadır. Somatosensöryel uyarı potansiyelleri I. tipten kaynaklara örnektirler.

II. Tip : Lokalize ve Durağan Olmayan

Herhangi bir anda yüzey gerilim dağılımı tek bir dipolünkine yakın olmakta, ama dipolün yeri zaman içinde değişmektedir. Çok merkezli epileptik etkinliğin bu tanıma uyduğu gözlenmiştir.

III. Tip : Dağılmış ve Durağan

Akım kaynakları neokortekste oldukça büyük alana dağılmış olmakta, böylelikle bir dipol yaklaşımı mümkün olamamakta; ama gerilim genliğinin karakteristik uzaysal paterninin zaman içinde oldukça sabit kaldığı gözlemlenmektedir. Böyle bir özellik alfa ve uyku ritimlerinin zaman içindeki ortalamalarında karşılaşılır, ama ani spontan EEG ye cevap veremez.

IV. Tip : Dağılmış ve Durağan Olmayan

Çoğu EEG ve Uyarılmış Potansiyel fenomenlerinin bu kategoride yer aldıkları düşünülmektedir. Bu bölümde yapılacak detaylı incelemelerle, diğer tiplere ışık tutulabilip, onların oluşma şartları belirlenebilir.[Nunez 1988]

b) İletken Hacim Modeli : Beyin üzerine yapılan elektromagnetoensefalografi ters problemlerinin çözümlerinin çoğunda beynin farklı dokuları konsantrik küreler şeklinde modellenmişlerdir. Çoğu modelse, dört küreden oluşmuştur : içten dışa doğru sırayla beyin, serebrospinal sıvı, kafatası ve kafaderisi [Schneider, 1974; Hosek ve ark., 1978; Cuffin ve Cohen, 1979; Cuffin, 1985]

Biyolojik iletken hacim probleminin en tuhaf, anlaşılamaz tarafı kaynakların iletken içinde olmaları ve bunların kendi başlarına, yani herhangi bir endüksiyon olmadan oluşmalarıdır. Bu elektriksel kaynakların endükte ettiği elektriksel gerilimlerin vücut yüzeyinden ölçümleri ile bu kaynaklar hakkında bilgi sahibi olunmak istenmektedir. [Geselowitz 1967]

Aslında aynı yüzey gerilim dağılımını yaratabilecek sonsuz sayıda farklı kaynak dağılımı vardır. Tek bir çözümün (unique solution) olabilmesi ancak problemi önceden belirlenmiş bir parametrik modelle sınırlamaya bağlıdır. Önemli olan bir başka nokta ise, keyfi karmaşıklığa sahip bir kaynak dağılımının, yüzeyden yapılacak sonlu sayıda ölçümle belirlenmesinin imkansız oluşudur. [Kavanagh 1978] Elektromagnetik iletken hacim problemleri, bir

iletken ortamdaki potansiyel alanlarla bunların kaynaklarını birbirine bağlayan Poisson Denklemi ile tanımlanabilir [Plonsey 1969]. Bu iletken hacimleri tanımlama da ve dipol kaynağı şeklinde modelleme çalışmalarında Sonlu elemanlar Yöntemi (Finite Element Modelling) EEG çalışmalarında kullanılmaktadır. [Yan ve ark., 1991; Le ve ark., 1993; Lemieux ve ark., 1992; Srebro, 1994; Meijs ve ark., 1987; Cuffin, 1990]

3.1 Seçilen Model ve Bu Modelde Dipol Kaynaklarının Dağılımı

Temel Denklemler

Daha önceki bölümde de anlatıldığı gibi, inhomojen bir ortamda bulunan kaynakların yüzeyde yaratacağı gerilim dağılımını hesaplamadan önce, bu kaynakların doğasına uygun bir yaklaşımda bulunmak gerekir. İlk olarak J akım yoğunluğunun, aksiyon potansiyelinin olduğu alanların dışındaki bölgelerde doğurduğu E elektrik alan şiddetine lineer bağımlı olduğunu söylemek gerekir. [Geselowitz 1967] Ayrıca beyin dalgalarının frekans spektrumunun 1 KHz.'in çok altında olduğunu bilerek, doku empedansının kapasitif bileşenlerini de ihmal edebiliriz. Dolayısıyla, iyi bir yaklaşıklıkla, içinde biyoelektrik kaynak taşımayan bir alana σ

üniform iletkenlikli bir doku olarak bakıp, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ formülünü yazabiliriz. Elektro- magnetik dalga etkilerinin de etkisiz olduğu (11) koşulu ile belirtilmişti. Böylece,

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (8)$$

yazılmıştı. Vücut dokularının bir özelliğine dayanarak, sonuçta herhangi bir andaki akımların sadece o anki kaynaklara bağlı olduğu ve bunların da süperpozisyon ilkesine uydukları söylenebilir. Formel olarak kaynaklar, yaratılmış akım yoğunluğu dağılımı veya eşdeğer olarak, hacim başına bir akım dipol momentı olan $\vec{J}_i$ ile gösterilebilir. Akım yoğunluğu formülüne dayanarak,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_i \quad (16)$$

yazalım. Buradaki $\vec{J}_i$ 'nin fizyolojik özellikleri daha sonra anlatılacaktır. Doku kapasitanslarının ihmalı demekle, kaynakların şiddet veya yön değiştirmeleriyle, sınırlardaki yük dağılımlarının ihmal edilebilecek bir hızda (yaklaşık sıfır sürede) tekrar düzenlenebilmeleri demektir. Bir başka deyişle,

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (17)$$

(16) ve (17) birleştirilirse,

$$\nabla \cdot \sigma \nabla \Phi = \nabla \cdot \vec{J}_i \quad (18)$$

elde edilir.

İnhomojen ortamı ele alırsak : S_j yüzeyi, iletkenlikleri σ' ve σ'' olan bölgeleri ayırsın ve $\vec{dS}_j$ de bu yüzeyin bir diferansiyal alan parçası olsun. $\vec{dS}_j$ 'nin yönü, tek üslü bölgeden iki üslü bölgeye doğrudur. Akımın sınırdan sınıra geçerken sürekli olması gerektiğinden,

$$\sigma' \nabla \Phi' \cdot \vec{dS}_j = \sigma'' \nabla \Phi'' \cdot \vec{dS}_j \quad (19)$$

yazılır. Ayrıca sınırlarda gerilim de sürekli dir. Dolayısıyla,

$$\Phi'(S_j) = \Phi''(S_j) \quad (20)$$

olur. Sınırları ilgilendiren durumlarda yararlı olan Green Teoremini kullanmak için öncelikle çeşitli tanımlar yapalım : homojen bir v hacminin hacim elemanına dv diyelim ve ψ ve Φ gibi, bu ortamda iyi davranışlı olan iki fonksiyon alalım :

$$\begin{aligned} & \sum_j \int_{S_j} \left[\sigma' (\psi' \nabla \Phi' - \Phi' \nabla \psi') - \sigma'' (\psi'' \nabla \Phi'' - \Phi'' \nabla \psi'') \right] \cdot \vec{dS}_j \\ &= \sum_v \int_v [\psi \nabla \cdot \sigma \nabla \Phi - \Phi \nabla \cdot \sigma \nabla \psi] dv \end{aligned} \quad (21)$$

Problemimiz, bilinen $\vec{J}_i$ 'lerden, sınır değerlerini de kullanarak Φ 'yi belirlemek. Burada ψ ve Φ 'ye uygun fonksiyonlar atamak gerekir : $\psi = 1 / r$: herhangi bir referans noktasından dv hacim elemanına olan uzaklık. Böylelikle (21) şu şekle dönüşür :

$$\begin{aligned} & \sum_j \int_{S_j} \left[\left(\sigma' \nabla \Phi' - \sigma'' \nabla \Phi'' \right) \frac{1}{r} - \left(\sigma' \Phi' - \sigma'' \Phi'' \right) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{dS}_j \\ &= \sum_j \int_v \frac{1}{r} \nabla \cdot \sigma \nabla \Phi dv + 4\pi \sigma \Phi \end{aligned} \quad (22)$$

Son terimdeki σ ve Φ 'ler $r=0$ (keyfi referans) noktası için kullanılmışlardır. Denklemleri tekrar düzenleyelim :

$$4\pi \sigma \Phi = - \int_v \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{J}_i dv - \sum_j \int_{S_j} \Phi (\sigma' - \sigma'') \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{dS}_j \quad (23)$$

Eşitliğin sağındaki ilk integrali düzenleyelim :

$$\int_v \nabla \cdot (\vec{J}_i/r) dv = \int_{S_j} \vec{J}_i/r \cdot \vec{dS}_j = \int_v \left(\vec{J}_i \cdot \nabla(1/r) + \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{J}_i \right) dv \quad (24)$$

$\vec{J}_i$, fizyolojik olarak kaynakları içeren bölgenin sınırı olan S_j yüzeyinde kaybolacağından, ortadaki integral sıfır olur ve;

$$\int_v \frac{1}{r} \nabla \cdot \vec{J}_i dv = - \int_v \vec{J}_i \cdot \nabla(1/r) dv \quad (25)$$

yazıp, hem kaynaklara hem de kaynak alanına çok uzak bir noktadan ölçüm yaptığımızı düşünürsek (23) formülünü şöyle düzenleyebiliriz :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma} \iiint_v \vec{J}_i \cdot \nabla'(1/r) dv' - \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_j (\sigma_j^i - \sigma_j^o) \iint_{S_j} \Phi \nabla'(1/r) \cdot \vec{dS}_j \quad (26)$$

σ^i içteki, σ^o dıştaki iletkenliktir. Hacim integralleri $\vec{J}_i$ 'lerin etkilerini gösterirken, yüzey integralleri farklı iletkenlikli yüzeylerin arasında oluşan ikincil (sekonder) kaynakların katkılarını belirlemektedir.

Akım kaynaklarına yönelik model belirlemede genelde üç tür yaklaşımda bulunulmuştur. Yüzeyde gerilim değişimlerine yol açan elektrofizyolojik akım kaynakları 1) Yüzeysel akım yoğunluğu, 2) Eşdeğer bir dipol, 3) Hacimsel yük dağılımı şeklinde

modellenmişlerdir. [Geselowitz 1967, Cuffin 1982, Ary 1981, De Munck 1988, Kavanagh 1978, Witwer 1972, Perrin 1987]

Çoğu araştırmacının kaynak modelini bir eşdeğer akım dipolü şeklinde seçmelerinin altında yatan ana neden bunun bir basitlik sağlamasından öte, fizyolojik olayların fiziğe uygun açıklamalar getirebilmesiydi. Bir gurup nöron gibi bir hacim içinde ayrı kaynakların etkinliğinden doğabilecek gerilim dağılımının tam açılımı, kaynaklardan uzak noktalarda yüksek dereceli terimlerin hızla zayıfladığı sonsuz bir seri olmaktadır. Kafa içindeki net yükün sıfır olduğu varsayıldığından, bu serinin ilk yani monopolar terimi ihmal edilir. Bu yüzden iyi bir yaklaşıklıkla, ikinci yani dipol terimi, alanı yaratan kaynakların arasındaki maksimum uzaklığa göre oldukça uzak noktalardaki potansiyel dağılımını belirlemede yeterli olmaktadır.

Bu kriterin karşılanamadığı durumlarda, kaynaklar düzensiz yüzeyli, yayvan iki boyutlu dipol yüzeyleri (çarşafı) şeklinde düşünülebilir. Bu da bizi yüzeysel akım yoğunluğuna götürür. Dipol yüzeylerine, tek tek dipollerin bir süperpozisyonu şeklinde yaklaşım yapıldığında, tek bir dipol modelinin genişletilmesiyle, daha karmaşık modellere ulaşabilmek mümkündür.

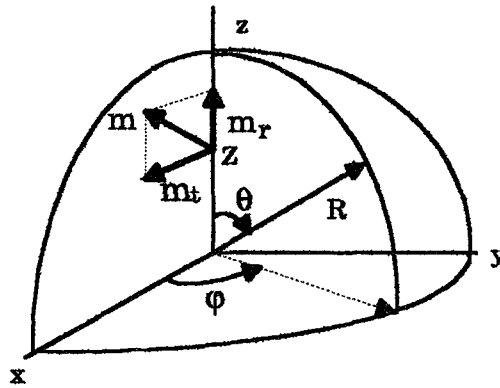
İletken hacim çalışmalarında, kimi araştırmacılar kafatasının iregüler geometrisini ve iletken inhomojen bölgelerin bozucu etkilerini ihmal ederek, kafayı elektriksel olarak homojen bir küre şeklinde modellemişlerdir. Başka araştırmacılar bu bozucu etkileri de göz önüne alarak açıklamalar yapmışlardır. Ortak kanılarına göre, elektriksel inhomojenitenin etkisi, kafaderisinden

alınan potansiyelleri zayıflatmak ve paternini yaymak şeklindedir. Bu etkilerin ihmal edildiği durumlarda bulunan eşdeğer dipollerin olmaları gerekenden daha merkezi ve genlikleri düşük olmaktadır. Çoğu araştırmacının hemfikir olduğu konu ise kafatasının küresellikten uzaklaşmasının, görsel alanlar gibi yerlerde çok büyük sorun çıkarmamasıdır.

Teori

a) Homojen bir küre içindeki dipol kaynağının gerilim dağılımı:

Bu formülasyondaki temel varsayım, kafanın R yarıçaplı ve σ iletkenlikli homojen bir küre olduğudur. Koordinat eksenini Şekil 1'de görülmektedir. Dipolün, z ekseninde, küre merkezinden z kadar uzaklıkta yerleştiğini ve başlangıç olarak da dipol momentinin xz düzleminde olduğunu varsayalım.



Şekil 3.1. Küresel homojen kafa modelinde dipolün koordinat sistemi

Bu geometri ve iletkenlik koşulu için kullanılacak formül, 14. formüldür.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma} \int \frac{I_v(x,y,z)}{R} dv \quad (14)$$

Hacimsel akım yoğunluğu I_v tanımlanırken yüzeysel yük yoğunluğundan yararlanılır. Çeşitli sadeleştirmeler için $z=bR$, b eksantrite alınır ve dipolün birbirine l kadar uzaklıklı iki zıt yüklü monopol terimden oluştuğu düşünülürse :

$$\vec{J} = I_o \delta(x') \delta(y') [-u(bR+l-z') + u(bR-z')] \cdot \vec{u}_z \quad (27)$$

z ekseninden bR kadar uzaklıkta bir (+) yük, $bR+l$ kadar uzaklıktaysa (-) yük olduğu varsayılmış ve dipol akımının artı yükten eksi yüke doğru aktığı düşünülmüştür. Bu yüzden yüzeysel yoğunluk birim fonksiyonlar şeklinde ifade edilmiştir. $I_v = -\nabla \cdot \vec{J}$ ifadesi kullanılarak, hacimsel yük yoğunluğu için aşağıdaki açılım bulunur :

$$I_v = -I_o \delta(x') \delta(y') [-\delta(bR+l-z') + \delta(bR-z')] \quad (28)$$

(14) nolu formüldeki kaynak terimi I_v 'nin açılımından sonra şimdi de küresel koordinatlarda $1/R$ 'nin açılımını yazmak gerekir.

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(r')^n}{r^{n+1}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta) \cos[m(\varphi - \varphi')] \quad (29)$$

Burada kaynak noktasının küresel koordinatları (r', θ', φ') ve alan noktasının koordinatlarıysa üssüz ifadeler olup, R kaynak ile alan noktası arasındaki uzaklıktır. ϵ_m Neumann faktörüdür (EK2):

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \quad (30)$$

$\theta' = 0, \varphi' = 0$ olmasından dolayı ve küresel koordinatlardaki hacim integrali ile kartezyen koordinatlardaki hacim integrali arasındaki aşağıdaki bağıntıya göre :

$$\begin{aligned} \iiint_{v'} \delta(r') \delta(\theta') \delta(\varphi') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' = \\ \iiint_{v'} \delta(x') \delta(y') \delta(z') dx' dy' dz' \end{aligned} \quad (31)$$

olduğundan, $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ eşitliği de dikkate alınıp, gerilim dağılımı için aşağıdaki formül kullanılabilir :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \frac{(-I_0)}{4\pi\sigma} \iiint_{v'} \delta(x') \delta(y') [-\delta(bR + l - z') + \delta(bR - z')] \cdot$$

$$\cdot [x'^2 + y'^2 + z'^2]^{n/2} dx' dy' dz' \quad (32)$$

Eksenel simetri olduğundan $1/R$ açılımında görülen Asosiye Legendre polinomu $P_n^m(\cos \theta)$ için $m=0$ durumu olan Legendre fonksiyonu kullanılmıştır. Hacim integralinin hesabından :

$$\iiint_{v'} = -(bR + l)^n + (bR)^n \quad (33)$$

çıkar. Monopol kaynakların birbirlerine uzaklığını belirten l uzaklığı için $l \ll bR$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa, ki bu fizyolojik olarak da doğrudur; o halde binom açılımı gereğince :

$$(bR)^n - (bR)^n \left(1 + \frac{nl}{bR} \right) \quad (34)$$

yazılabilir. Sadeleştirme yapıldığında, hacim integralinin sonucu $-nl(bR)^{n-1}$ çıkar. Bu sonuç seriye eklenirse ve $l_0=m$ dipol momenti olarak alınıp, $1/R$ açılımını klasik Laplace denklemi çözümlerindeki gibi hem küre içi hem de dışı açılımı

$$\frac{1}{R} = \sum_n r'^n P_n(\cos \theta) \left[\frac{1}{r^{n+1}} + r^n \right]$$

ifadesiyle kullanılırsa, gerilim dağılımının formülü şöyle çıkar :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n}{r^{n+1}} + B_n r^n \right] n \cdot m P_n(\cos \theta) (bR)^{n-1} \quad (35)$$

Burada dikkat çekebilecek bir nokta seri için n sayısının artık sıfırdan değil birden başlamasıdır. Bunun nedeni de $n=0$ iken monopol terimin olmaması gerektiğindendir. Homojen kürenin uyması gereken sınır koşulları yazılıp, A_n ve B_n katsayıları bulunur : $\partial\Phi/\partial r_{r=R} = 0$

$$\frac{-(n+1)}{R^{n+2}} A_n + n B_n R^{n-1} = 0$$

$$B_n = \frac{n+1}{n} \frac{1}{R^{2n+1}} A_n,$$

$A_n = 1$ alınırsa,

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{1}{R^{n+1}} n m (bR)^{n-1} P_n(\cos \theta)$$

ve $m_r = m/R^2$ normalizasyonu ile homojen küre yüzeyindeki gerilim dağılımı elde edilir [Ary 1981]:

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} n m_r P_n(\cos \theta) \quad (36)$$

Şimdi de xz düzleminde x eksenine paralel yani bir tanjant dipol seçilip, bu dipole ait gerilim dağılımı aransın. Bu durumda yüzeysel akım yoğunluğu tanımı şöyle olacaktır :

$$\vec{J} = I_0 [-u(l-x') + u(x')] \delta(y') \cdot \delta(bR-z') \cdot \vec{u}_x \quad (37)$$

Bu formüle göre, z ekseninden bR kadar yükseklikte bir artı yük ve gene aynı yükseklikte ama x eksenini doğrultusunda z ekseninden l kadar uzaklıkta bir de eksi yük bulunmaktadır. Hacimsel yük yoğunluğunu bulmak için gene diverjans alınırsa,

$$I_v = -\nabla \cdot \vec{J} = I_0 [\delta(l-x') - \delta(x')] \delta(y') \delta(bR-z') \quad (38)$$

bulunur. Kullanılacak alan dağılımı formülü gene (14) nolu formüldür. Bu formülü ve (29) nolu 1/R açılım formülü birleştirilirse :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{4\pi\sigma r^{n+1}} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{v'} I_v(x', y', z') r'^n \cdot P_n^m(\cos \theta') \cos [m(\varphi - \varphi')] dv' \quad (39)$$

elde edilir. Kaynağın bulunduğu noktanın koordinatları $r' = bR$, $\theta' = 0$, $\varphi' = 0$ dır. Bu durumda ancak $m=1$ için sonuç sıfır olmaz. Bunu görmek için integralin içindeki kosinüslü ifadenin açılımını yapıp, integrandla çarpmak gerekir. Bu durumda, $\varphi' = 0$ olduğundan, geriye sadece $\cos(m\varphi)$ kalmakta ve hacim integralini

olduğunan, geriye sadece $\cos(m\varphi)$ kalmakta ve hacim integralini sıfır yapmayacak tek m değeri de $m=1$ olmaktadır. (Ek 2.'ye Bakınız) (39) nolu denklem tekrar yazılırsa :

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_0}{4\pi\sigma} \frac{\cos(\varphi)}{r^{n+1}} P_n^1(\cos\theta) \iiint_{V'} [\delta(l-x') - \delta(x')] \delta(y') \delta(bR-z') r'^n dx' dy' dz' \quad (40)$$

İntegralin çözümü araştırılırsa, şu adımlar takip edilebilir :

$$l^n + (bR)^n = (bR)^n \left[1 + \left(\frac{l}{bR} \right)^n \right]$$

$l \ll bR$ için ve $n \gg 1$ durumunda $(l/bR)^n \ll 1$ olacağından, yukarıdaki ifade şu şekle dönüşür :

$$\equiv (bR)^n \left(1 + \frac{l}{bR} \right) = (bR)^n + l(bR)^{n-1}$$

İkinci integralin çözümünden de $-(bR)^n$ çıktığından, sonuç için

$$(bR)^n + l(bR)^{n-1} - (bR)^n = l(bR)^{n-1}$$

yazılır. $I_0 = m$ ve $I_0/R^2 = m_t$ normalizasyonu ile tanjant dipolün gerilim dağılımı belirlenebilir :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} m_t P_n^1(\cos\theta) \cos(\varphi) \quad (41)$$

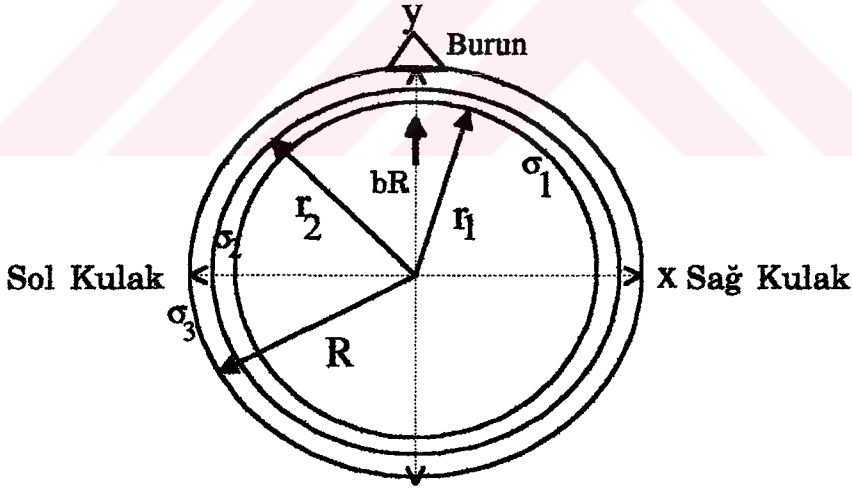
Hem radyal hem de tanjant dipole ait tam sonuç, iki dağılımın süperpozisyonudur:

$$\Phi(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} \left[nm_r P_n(\cos\theta) + m_t P_n^1(\cos\theta) \cos(\varphi) \right] \quad (42)$$

b) İnhomojen ortamdaki dipol kaynağının gerilim dağılımı :

Bir önceki bölümde beynin sonsuz homojen bir ortamda bulunduğu varsayımı yapılmıştı. Gerçekte böyle bir durum olmamaktadır. Ortaya çıkan alan potansiyelleri sadece etraflarındaki sinir topluluklarının geometrilerinden veya elektriksel özelliklerinden değil ayrıca farklı iletkenliklerdeki bölgelerin varlığından da etkilenmekte ve dağılım değiştirmektedirler. Bu yüzden kafa derisinden alınan alan potansiyellerinin yorumunu yaparken, beynin etrafını saran inhomojen bölgelerin de etkilerini göz önüne almak gerekir. Bunlar içten dışa doğru : serebrospinal sıvı (SSS), kafatası ve kafa derisidir. (Şekil 2) Bu katmanlar, kortikal

yüzeyden ölçülen gerilimlere göre, yüzeye ulaşan EEG gerilimlerinde bir zayıflatma etkisinde bulunurlar. Biraz sonra bu formülasyon gösterilecektir. Farklı iletkenliklerde olup, beyni saran bu katmanların etkilerini gösterebilmek için, en içte bir dipol kaynağı barındıran birkaç konsantrik küre şeklinde basit bir model bulunabilir. (Hosek ve ark., 1978; Kavanagh ve ark., 1978; de Munck, 1988) Model 6 cm. yarıçaplı bir beyin küresinin etrafını saran 0.1 cm kalınlıklı serebrospinal sıvıdan, ikinci bir kabuk olarak 0.5 cm kalınlıklı kafatası ve onu da saran 0.4 cm. kalınlıklı üçüncü küre olan kafa derisinden oluşmuştur. İletkenlikler için genellikle şu değerler kullanılır : beyin için 0.33 mhos/m, SSS için 1.0 mhos/m, kafatası için 0.0042 mhos/m, ve kafa derisi için 0.33 mhos/m. Çoğu araştırmacı beyin ile SSS'yi aynı alıp, içiçe üç küre modelini benimsemiştir.



Şekil 3.2. İnhomojen modelde kafanın modellenmesi

Beynin içlerindeki bir dipol kaynağının kafa derisi yüzeyinde yaratacağı gerilim dağılımının belirlenebilmesi için öncelikle farklı kabuklardaki potansiyel dağılımlarının çözülmesi (yani sınır değer

probleminin çözülmesi) gerekmektedir. Buradaki başlangıç adımı ise en iç küreye ait Poisson denklemini küresel koordinatlarda çözmektir. [da Silva ve ark.,1993]

İlk olarak üç küre için de Laplace denkleminin çözümlerini ve bunlara ait sınır koşulları yazmak gerekir. Bir önceki bölümden hatırlanacağı gibi birinci küreye ait çözüm Poisson denklemiyle elde edilmişti. Bu durumda, üç küreye ait gerilim dağılımları ve Sınır koşulları aşağıdaki gibidir :

Gerilim Dağılımları :

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left[\frac{n(bR)^{n-1}}{r^{n+1}} + A_n r^n \right] \quad (43)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left[\frac{B_n}{r^{n+1}} + C_n r^n \right] \quad (44)$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta) \left[\frac{D_n}{r^{n+1}} + E_n r^n \right] \quad (45)$$

Sınır Koşulları :

- 1) a) $r = r_1 \rightarrow V_1 = V_2$
- b) $\sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial r} = \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=r_1}$
- 2) a) $r = r_2 \rightarrow V_2 = V_3$

$$b) \quad \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} = \sigma_3 \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=r_2}$$

$$3) \quad \frac{\partial V_3}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$$

Şimdi bu sınır koşullardan ve eldeki gerilimlerden, en dıştaki küre yüzeyindeki gerilim dağılımı hesaplanabilir.

$$1) \ a) \quad \frac{1}{\sigma_1} \left[\frac{n(bR)^{n-1}}{r_1^{n+1}} + A_n r_1^n \right] = \frac{1}{\sigma_2} \left[\frac{B_n}{r_1^{n+1}} + C_n r_1^n \right] \quad (46)$$

$$b) \quad -(n+1) \frac{n(bR)^{n-1}}{r_1^{n+2}} + n A_n r_1^{n-1} = -(n+1) \frac{B_n}{r_1^{n+2}} + n C_n r_1^{n-1} \quad (47)$$

(a) ve (b) denklemleri düzenlenirse,

$$a) \quad A_n r_1^{2n+1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} [B_n + C_n r_1^{2n+1}] - n(bR)^{n-1} \quad (48)$$

$$b) \quad \frac{-n}{n+1} A_n r_1^{2n+1} = B_n - \frac{n}{n+1} C_n r_1^{2n+1} - n(bR)^{n-1} \quad (49)$$

(48) denklemini (49) denklemine bölünürse,

$$B_n = \frac{C_n r_1^{2n+1} (1 - \sigma_1/\sigma_2) + (2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n}{n+1} \right)} \quad (50)$$

bulunur. Bu sonucu hemen yerine yazalım :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left[\left(\frac{C_n r_1^{2n+1} (1 - \sigma_1/\sigma_2) + (2n+1)(bR)^{n-1}}{(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n})} \right) \frac{1}{r^{n+1}} + C_n r^n \right] \quad (51)$$

Şimdi kolaylık olsun diye (3). sınır koşulunu sağlayalım :

$$\frac{-(n+1)}{R^{n+1}} D_n + n E_n R^{n-1} = 0 \rightarrow \quad (52)$$

$$E_n = \frac{n+1}{n} \frac{1}{R^{2n+1}} D_n \quad (53)$$

Bu durumda V_3 için gerilim dağılımı :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) D_n \left[\frac{1}{r^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \frac{1}{R^{2n+1}} r^n \right] \quad (54)$$

2) a) Sınır Koşulundan

$$a) r = r_2 \rightarrow V_2 = V_3$$

a)

$$\frac{1}{\sigma_2} \left[\left(\frac{C_n r_1^{2n+1} (1 - \sigma_1/\sigma_2) + (2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n} \right)} \right) \frac{1}{r_2^{n+1}} + C_n r_2^n \right] = \frac{1}{\sigma_3} D_n \left[\frac{1}{r_2^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \frac{1}{R^{2n+1}} r_2^n \right] \quad (55)$$

ve düzenlersek ;

$$C_n \left[\frac{r_1^{2n+1} (1 - \sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n} \right)} + r_2^{2n+1} \right] = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} D_n \left[1 + \frac{n+1}{n} \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] - \frac{(2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n} \right)} \quad (56)$$

$$b) \frac{-(n+1)}{r_2^{n+2}} \left[\frac{C_n r_1^{2n+1} (1 - \sigma_1/\sigma_2) + (2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n} \right)} \right] + n C_n r_2^{n-1} = D_n \left[\frac{-(n+1)}{r_2^{n+2}} + \frac{n+1}{n} \frac{r_2^{n-1}}{R^{2n+1}} \right] \quad (57)$$

(57)'yi düzenleyelim :

$$C_n \left[\frac{r_1^{2n+1} (1 - \sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n} \right)} - \frac{n}{n+1} r_2^{2n+1} \right] = D_n \left[1 - \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] - \frac{(2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n} \right)} \quad (58)$$

(58) denklemini (56)'ya bölüp sağ ve sol taraflar için ayrı ayrı hesap yapalım

$$\frac{\frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)} - \frac{n}{n+1}r_2^{2n+1}}{\frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)} + r_2^{2n+1}} = \frac{D_n \left[1 - \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] \frac{(2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)}}{\frac{\sigma_2}{\sigma_3} D_n \left[1 - \frac{n+1}{n} \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] \frac{(2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)}} \quad (59)$$

İçler dışlar çarpımıyla ve D_n 'leri sol tarafa toplayarak bulunacak sonuçta eşitliğin sol tarafını yazalım :

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_2}{\sigma_3} D_n \left[1 + \frac{n+1}{n} \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] \left[\frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)} - \frac{n}{n+1} r_2^{2n+1} \right] \\ & - D_n \left[1 - \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] \left[\frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)} + r_2^{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

düzenlemeye devam edelim :

$$\begin{aligned} & D_n \left\{ \frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2+\frac{n+1}{n}\right)} \cdot \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_3} \left[1 + \frac{n+1}{n} \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] - 1 + \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] \right. \\ & \left. + r_2^{2n+1} \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_3} \left(\frac{-n}{n+1} \right) \left[1 + \frac{n+1}{n} \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] - 1 + \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

tekrar sadeleştirilim :

$$D_n \left\{ \frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n}\right)} \cdot \left[(\sigma_2/\sigma_3 - 1) + \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} \left(\sigma_2/\sigma_3 \frac{n+1}{n} + 1 \right) \right] \right. \\ \left. - r_2^{2n+1} \left[\left(\sigma_2/\sigma_3 \frac{n}{n+1} + 1 \right) + \frac{r_2^{2n+1}}{R^{2n+1}} (\sigma_2/\sigma_3 - 1) \right] \right\} \quad (62)$$

Sol taraf oldukça düzenlenmiş durumdadır. Artık (59) eşitliğinin sağ tarafıyla uğraşabiliriz :

$$\frac{-(2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n}\right)} \left[\frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n}\right)} + r_2^{2n+1} \right] + \frac{-(2n+1)(bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n}\right)} \left[\frac{r_1^{2n+1}(1-\sigma_1/\sigma_2)}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n}\right)} - \frac{n}{n+1} r_2^{2n+1} \right] \quad (63)$$

Sadeleştirirsek :

$$\frac{-(2n+1)^2 r_2^{2n+1} (bR)^{n-1}}{\left(\sigma_1/\sigma_2 + \frac{n+1}{n}\right)(n+1)} \quad (64)$$

Şimdi belirli sabit oranları çeşitli katsayılarla tanımlayıp, denklemleri daha da sadeleştirilim :

$$f_1 = r_1/R \quad f_2 = r_2/R \quad \sigma_1 = \sigma_3 \quad \sigma_2/\sigma_1 = \xi$$

Bu durumda (62) denklemi şu hali alır :

$$D_n \left\{ \frac{r_1^{2n+1}(1-1/\xi)}{(1/\xi + \frac{n+1}{n})} \cdot \left[(\xi-1) + f_2^{2n+1} \left(\xi \frac{n+1}{n} + 1 \right) \right] - r_2^{2n+1} \left[\left(\xi \frac{n}{n+1} + 1 \right) + f_2^{2n+1} (\xi-1) \right] \right\} \quad (65)$$

Denklemi kendi içinde düzenlersek :

$$D_n \left\{ \frac{r_1^{2n+1} n (\xi-1)^2}{[n+(n+1)\xi]} + f_2^{2n+1} (\xi-1) [r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}] - r_2^{2n+1} \frac{[n(\xi+1)+1]}{n+1} \right\} \quad (66)$$

Aynı şekilde (64) denklemi de düzenlenebilir :

$$\frac{-(2n+1)^2 r_2^{2n+1} \xi (bR)^{n-1} n}{[n+(n+1)\xi](n+1)} \quad (67)$$

Çözümü daha rahat görmek için D_n 'yi biraz daha toparlamak gerekir :

$$D_n \left\{ \frac{r_1^{2n+1} n (\xi-1)^2 + f_2^{2n+1} (\xi-1) [n+(n+1)\xi] [r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}] - r_2^{2n+1} \left[\frac{n\xi}{n+1} + 1 \right] [n+(n+1)\xi]}{[n+(n+1)\xi]} \right\} \quad (68)$$

Şimdi esas sonucu bulmak için (66) ve (68) denklemleri karşı karşıya getirilir, her iki taraf da r_2^{2n+1} ile sadeleştirilir, (-)'likler düzenlenip, $(\xi - 1)^2 = (1 - \xi)^2$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$D_n \left\{ [n + (n+1)\xi] \left[\frac{n\xi}{n+1} + 1 \right] + (1-\xi)[n + (n+1)\xi] [f_1^{2n+1} - f_2^{2n+1}] - n(1-\xi)^2 (f_1/f_2)^{2n+1} \right\} \\ = \frac{(2n+1)^2 n (bR)^{n-1}}{n+1} \xi \quad (69)$$

D_n 'yi çözersek,

$$D_n = \frac{(2n+1)^2 n (bR)^{n-1} \xi}{(n+1) d_n} \\ d_n = [n + (n+1)\xi] \left[\frac{n\xi}{n+1} + 1 \right] + (1-\xi)[n + (n+1)\xi] [f_1^{2n+1} - f_2^{2n+1}] - n(1-\xi)^2 (f_1/f_2)^{2n+1} \quad (70)$$

Böylelikle kafaderisini sembolize eden üçüncü kürenin yüzeyindeki gerilim dağılımı :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) D_n \left[\frac{1}{r^{n+1}} + \frac{n+1}{n} \frac{r^n}{R^{2n+1}} \right]$$

ile veriliyordu. $r=R$ durumunda bu eşitlik :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} P_n(\cos \theta) \frac{D_n}{R^{n+1}} \quad (71)$$

şekline dönüşür. Şimdi (70) deki D_n 'i yerine koyarsak :

$$V_3(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\sigma_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} b^{n-1} \left[\frac{\xi(2n+1)^2}{d_n(n+1)} \right] \left[nm_r P_n(\cos \theta) + m_t P_n^1(\cos \theta) \cos(\varphi) \right] \quad (72)$$

Buradaki d_n katsayısı (70)'de görülmektedir. Buradaki denklemlerin çıkarılmasında yüzey gerilimlerinin hiç birinde nm_r veya m_t değerleri kullanılmamıştır. Bundaki amaç, bu katsayıların her denklemde aynı kalmasından dolayı tekrar tekrar yazmamaktır. Bulunan (72) denklemi Ary ve ark., 1981 tarafından ilk olarak çıkarılmış, daha sonraki tüm dipol lokalizasyon işlemlerinde ve çalışmalarında istisnasız ve tartışmasız olarak kullanılmıştır. Bu formüllerde kullanılan değerler hakkında bilgi vermek gerekirse; $r_1 = 8.0$ cm., $r_2 = 8.5$ cm., $R = 9.2$ cm., $\xi = 0.0125$ alınır. b eksantrite değeri 0.6 ile 0.9 arasında değişmektedir.

IV. SİMULASYON ÇALIŞMALARI

Simülasyon çalışmalarını yaparken, öncelikle (72) formülünün katsayılarını hesaplamak gerekiyordu. Bu işlemi için MCAD 2.50 programı kullanıldı. Legendre denkleminin hesaplanması aşağıda gösterilmektedir. Asosiye Legendre denklemi içinse Rodrigues formülünden yararlanıldı. (72) deki formüle bakılacak olursa, toplamın birden sonsuza gittiği görülebilir. Bütün bu katsayıları her n için hesaplayıp, Legendre ve Asosiye Legendre denklemiyle çarpmak büyük hafızalı bilgisayarlar gerektirdiğinden, işlemler $n=10$ ' a kadar yapıldı. 54 ve 55. sayfalarda Legendre ve Asosiye Legendre fonksiyonlarının nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Dikkat edilirse Legendre fonksiyonları için , $0 \leq \theta \leq \pi/2$ kullanılmıştır. Bunun nedeni ise, koordinat takımının z ekseninin kafanın merkezinden, tepesine doğru geçtiği düşünülmesi ve sadece üst yarım küredeki gerilim dağılımının araştırılmasıdır. Geometrik olarak z ekseninden yapılan θ açısının değeri yukarıdaki gibi olmaktadır. Legendre denklemlerinin nasıl görüldüğü hakkında fikir verebilmek amacıyla Şekil 4.1 ($n=5$ için Legendre fonksiyonunun eğrisi) ve Şekil 4.2 ($m=1, n=5$ için Asosiye Legendre fonksiyonunun eğrisi) verilmiştir. Şekil 4.3 ise daha ilginç ve anlamlı bir şekildir. Şekil 4.3 (a), (72) formülündeki m_r 'nin önüne gelen 10 adet katsayının toplamıdır. Yani m_r 'nin θ 'ya göre değişimini belirleyecek katsayıdır. Aynı şekilde, (b) şekli ise tanjant dipol anlamına gelen m_t 'nin θ 'ya göre değişimini vermektedir.

Simülasyonlar, (72)'deki denklemde, m_r ve m_t için farklı değerler verilerek gerçekleştirilmiştir. Sırasıyla, $m_r=1$, $m_t=0$; $m_r=0$, $m_t=1$; $m_r=1$, $m_t=1$; $m_r=10$, $m_t=1$; $m_r=1$, $m_t=10$ değerleri ile izopotansiyel harita ve üç boyutlu gerilim dağılımları çizilmiştir. İlk simülasyonlarda $b=0.9$ alınmış, ikinci set simülasyonlarda ise $b=0.7$ alınmıştır. Bu durumda dağılımların ve genliklerin nasıl değiştiği gözlenmiştir. Şekil 4.4, sadece radyal yönde bileşeni bulunan ve eksantritesi $b=0.9$ olan bir dipolün üçüncü küre yüzeyinde yarattığı gerilim dağılımının izopotansiyel haritasıdır. Altındaki şekil, aynı haritanın üç boyutlu perspektif görüntüsünü vermektedir. Şekil 4.5, aynı özelliklere sahip, ama eksantritesi $b=0.7$ olan bir dipolün dağılımlarını göstermektedir. Şekil 4.6, literatürde simülasyon çalışmalarında sıkça karşılaşılan bir görüntüdür. Bu dağılım, sadece tanjant yönde ve eksantritesi $b=0.9$ olan bir dipolün kontur haritasıdır. Şekil 4.7'de aynı dipol $b=0.7$ eksantriteye indirildiğinde dağılımın görüntüsü verilmektedir. Dikkat edilirse, alttaki grafikten, gerilim şiddetinin dörtte bir kadar azaldığı ve paternin de ((a) şeklinden) odaklanmadan çok, yayıldığı gözlenmektedir. Eksantritenin değiştirilmesinin hem genlik hem de patern üzerine nasıl etkiler yaptığı diğer simülasyon çalışmalarında da gözlenebilir. Grafik şekillerin çıkarılmasında ise SURFER v. 4.02 programından yararlanılmıştır. Bu program için önce üç boyutlu verilen datalar gridlenmiştir. Verilerin ilk sütununu x koordinatı ikinci sütununu y koordinatı üçüncü sütununu ise bu noktalara karşılık hesaplanmış 2500 adet gerilim verisi oluşturmaktadır. Dikkat edilirse, küresel koordinatlarda çalışılmasına karşın, kartezyen koordinatlarda grafikler çizilmek zorunda kaldığı farkedilebilir. Bunun için θ ve ϕ 'ye karşılık x ve y koordinatları için aşağıdaki dönüşümlerden yararlanılmıştır :

$$x = \cos \theta \sin \phi, y = \sin \theta \sin \phi$$

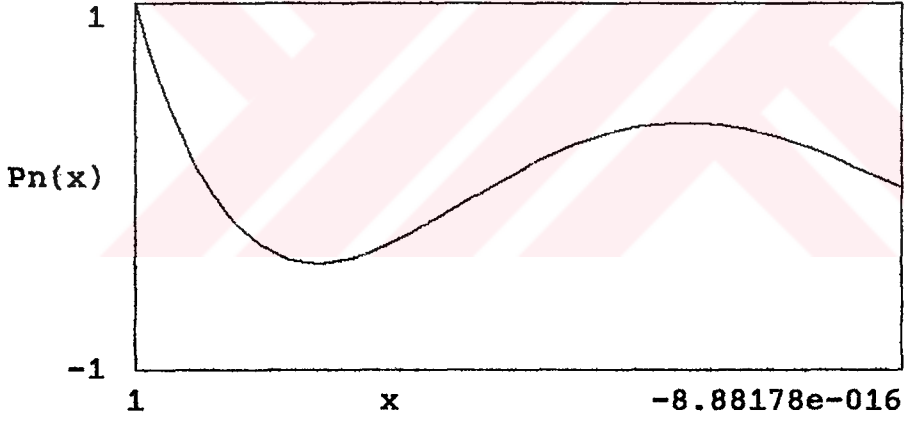
LEGENDRE FONKSIYONLARININ SAYISAL OLARAK ELDE EDİLMESİ
 $x = \cos \theta$ için çözüm $0 < \theta < \pi/2$

$n := 5$

$x := 1, 0.98 \dots 0$

$k := 0 \dots \frac{n}{2}$

$$P_n(x) := \sum_k (-1)^k \cdot \frac{(2 \cdot n - 2 \cdot k)!}{2^n \cdot k! \cdot (n - k)! \cdot (n - 2 \cdot k)!} \cdot x^{n-2 \cdot k}$$



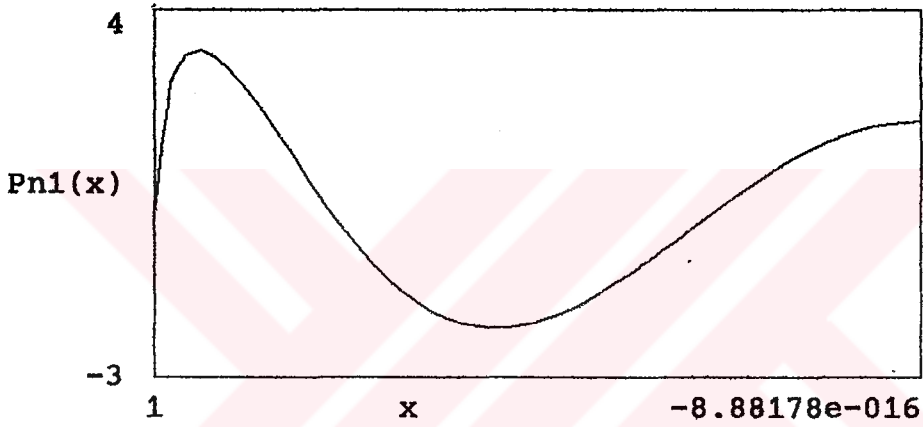
Legendre Fonksiyonu ($n=5$)

Şekil 4.1 $n=5$ için Legendre Denkleminin Eğrisi

ASSOSIYE LEGENGRE FONKSIYONLARININ ELDE EDILMESI

m=1 durumu icin

$$P_{n1}(x) := \left[1 - x^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} P_n(x)$$



ASOSIYE LEGENDRE DENKLEMI m=1, n=5

Şekil 4.2. m=1, n=5 için Asosiy Legendre Fonksiyonunun Eğrisi

LEGENDRE FONKSIYONLARININ TURETILMESI ILE
KURESEL DAGILIMIN BELIRLENMESI

I

i := 1 ..50

P1_i := READ(P1)

P2_i := READ(P2)

P3_i := READ(P3)

P4_i := READ(P4)

P5_i := READ(P5)

AP1_i := READ(AP1)

AP2_i := READ(AP2)

AP3_i := READ(AP3)

AP4_i := READ(AP4)

AP5_i := READ(AP5)

CESITLI PARAMETRELERLE DIPOLE DAGILIMININ FORMULASYONU

$\tau : \sigma/\sigma$

b:dipolun z eksenindeki eksantritesi

σ :kafatasinin ilet.

f1: beyin yaricapinin kafa derisinininkine orani

f2: kafatasi yaricapinin kafa derisinininkine orani

$$\tau := \frac{1}{80}$$

$$b := 0.9$$

$$f1 := \frac{8}{9.2}$$

$$f2 := \frac{8.5}{9.2}$$

c := 1 ..10

$$SS_c := ((c + 1) \cdot \tau) \cdot \left[\frac{c \cdot \tau}{c + 1} + 1 \right] + (1 - \tau) \cdot ((c + 1) \cdot \tau + 1)$$

$$S_c := SS_c \cdot \left[f1^{2 \cdot c + 1} - f2^{2 \cdot c + 1} \right] - c \cdot (1 - \tau)^2 \cdot \left[\frac{f1}{f2} \right]^{2 \cdot c + 1}$$

$$WRITE(S) := S_c$$

$$KK_c := \frac{2 \cdot c + 1}{c} \cdot b^{c-1} \cdot \left[\tau \cdot \frac{(2 \cdot c + 1)^2}{S_c \cdot (c + 1)} \right]$$

$$WRITE(KK) := KK_c$$

$$TTP1_i := KK_1 \cdot P1_i + 2 \cdot KK_2 \cdot P2_i + 3 \cdot KK_3 \cdot P3_i + 4 \cdot KK_4 \cdot P4_i + 5 \cdot KK_5 \cdot P5_i$$

$$WRITE(TTP1) := TTP1_i$$

$$TTAP1_i := \left[KK_1 \cdot AP1_i + KK_2 \cdot AP2_i + KK_3 \cdot AP3_i + KK_4 \cdot AP4_i + KK_5 \cdot AP5_i \right]$$

$$WRITE(TTAP1) := TTAP1_i$$

LEGENDRE FONKSIYONLARININ TURETILMESI (N>6)

II

$i := 1 \dots 50$

$AP6_i := \text{READ}(AP6_i) \quad AP7_i := \text{READ}(AP7_i) \quad AP8_i := \text{READ}(AP8_i)$

$AP9_i := \text{READ}(AP9_i) \quad AP10_i := \text{READ}(AP10_i)$

$P6_i := \text{READ}(P6_i) \quad P7_i := \text{READ}(P7_i) \quad P8_i := \text{READ}(P8_i)$

$P9_i := \text{READ}(P9_i) \quad P10_i := \text{READ}(P10_i)$

$TTP_i := \text{READ}(TTP_i) \quad TTAP_i := \text{READ}(TTAP_i)$

$j := 1 \dots 10$

$KK_j := \text{READ}(KK_j)$

$TPP_i := TTP_i + 6 \cdot KK_6 \cdot P6_i + 7 \cdot KK_7 \cdot P7_i + 8 \cdot KK_8 \cdot P8_i$

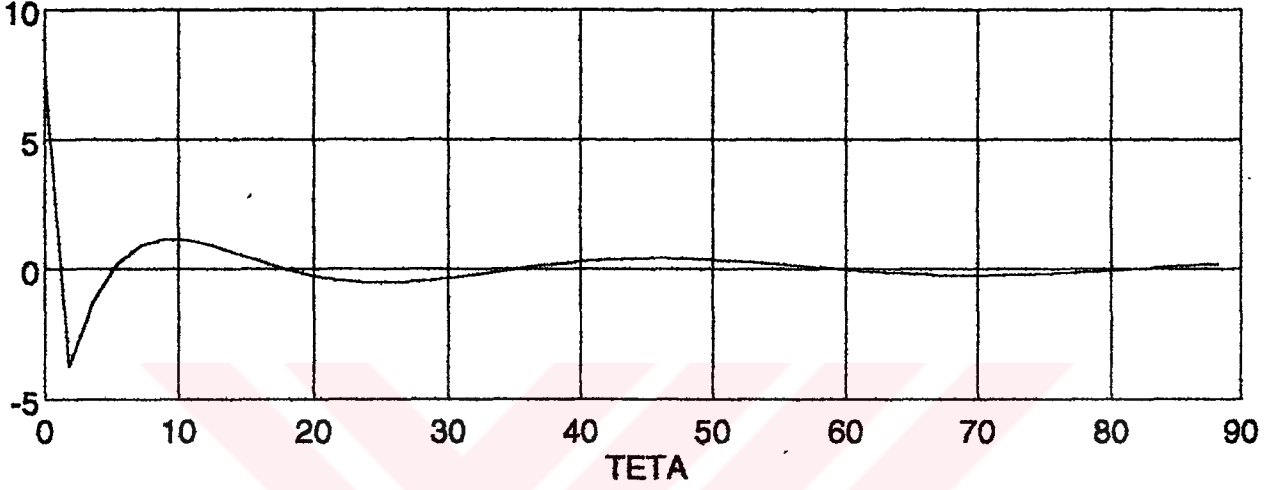
$TP_i := TPP_i + 9 \cdot KK_9 \cdot P9_i + 10 \cdot KK_{10} \cdot P10_i$

$TAP_i := TTAP_i + KK_6 \cdot AP6_i + KK_7 \cdot AP7_i + KK_8 \cdot AP8_i + KK_9 \cdot AP9_i + KK_{10} \cdot AP10_i$

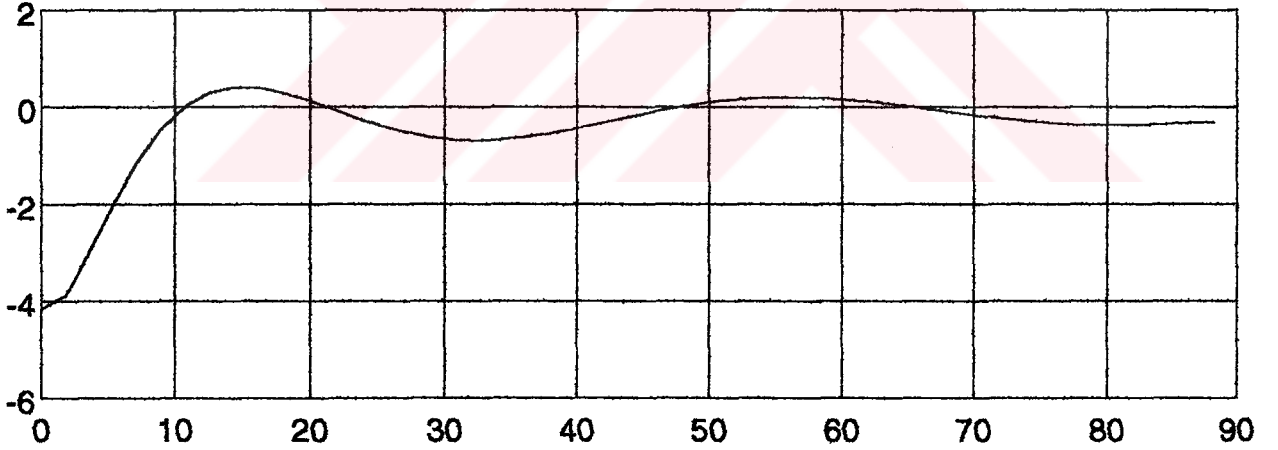
$\text{WRITEPRN} \begin{bmatrix} TP \\ DAT \end{bmatrix}_i := TP_i \quad \text{WRITEPRN} \begin{bmatrix} TAP \\ DAT \end{bmatrix}_i := TAP_i$

(a)

10 Adet Legendre Polinomunun Toplamı



10 Adet Asosiy Legendre Polinomunun Toplamı

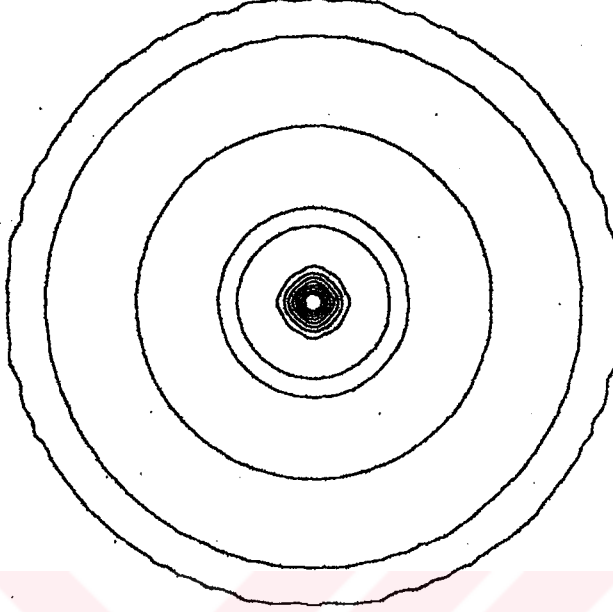


(b)

Şekil 4.3. (a) $n=1$ 'den $n=10$ 'a kadar Legendre Fonksiyonlarının Toplamı, (b) $m=1$ için $n=1$ 'den $n=10$ 'a kadar Asosiy Legendre Fonksiyonlarının toplamı

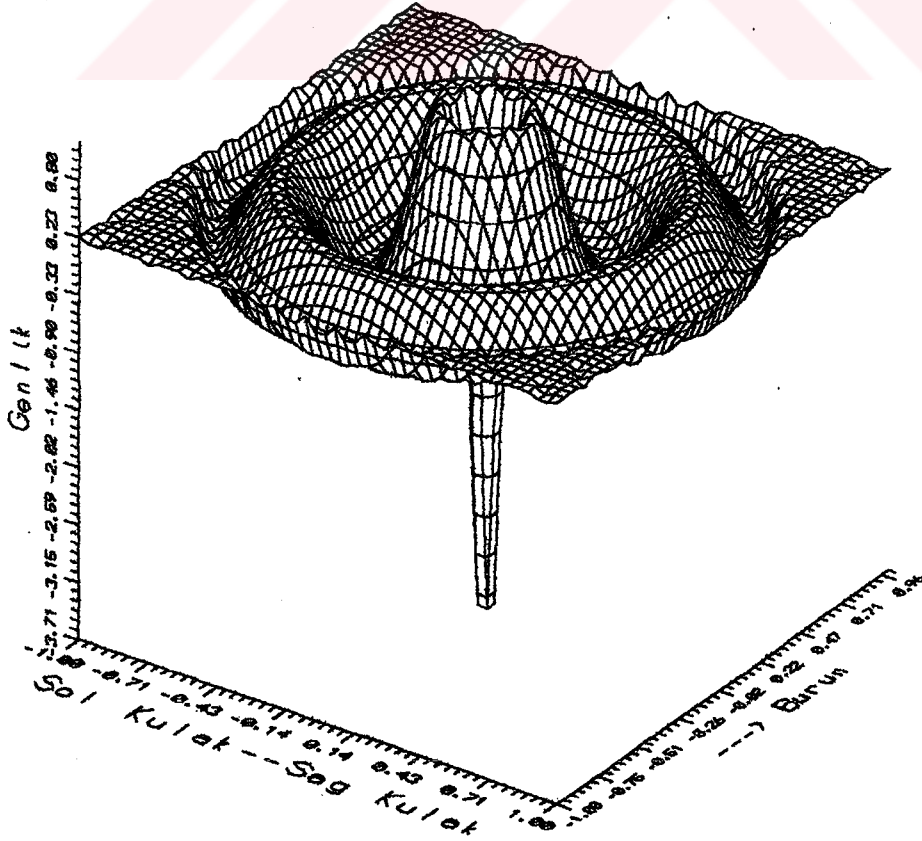
$$MR=1 \quad MT=0$$

Burun



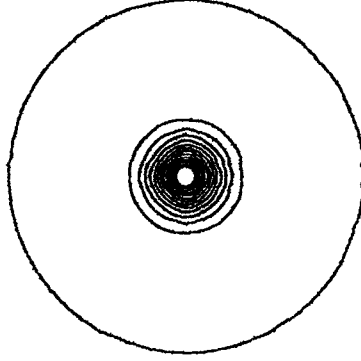
Sol Kulak-----Sag Kulak

Şekil 4.4. Üstteki şekil $b=0.9$ için radyal bileşenin 1, tanjant bileşenin 0 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altındaki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



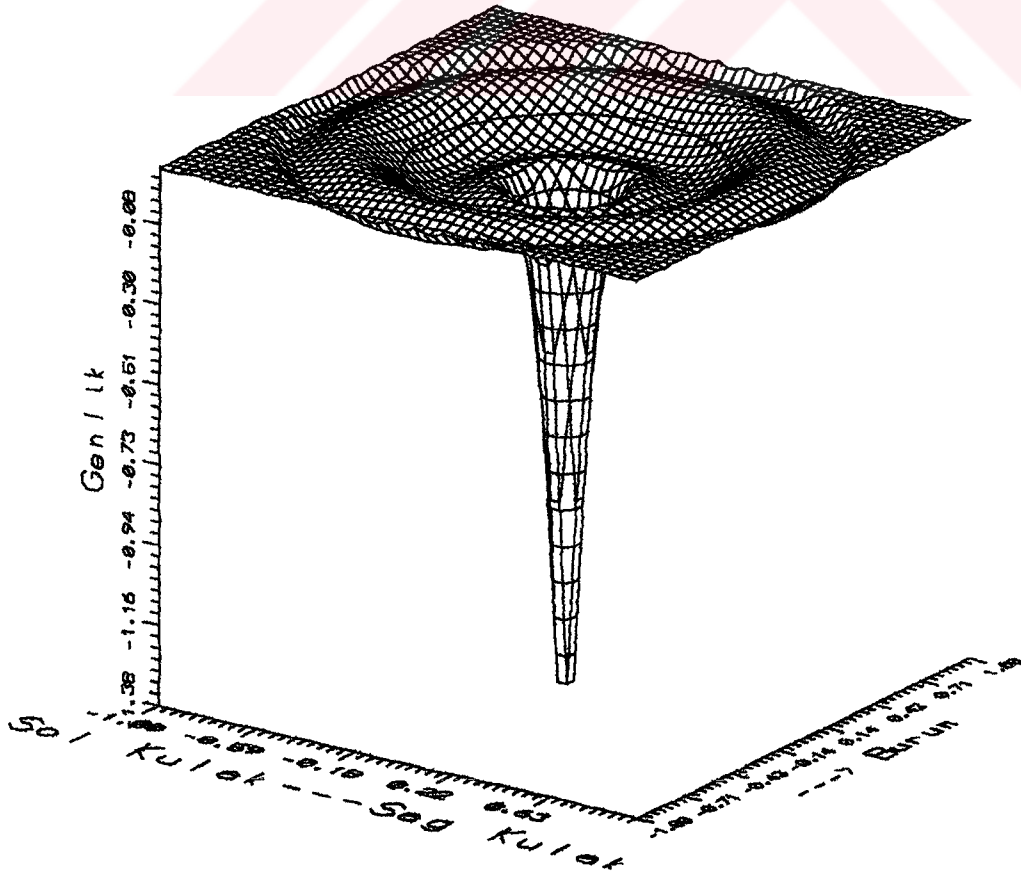
$$MR=1 \quad MT=0$$

Burun



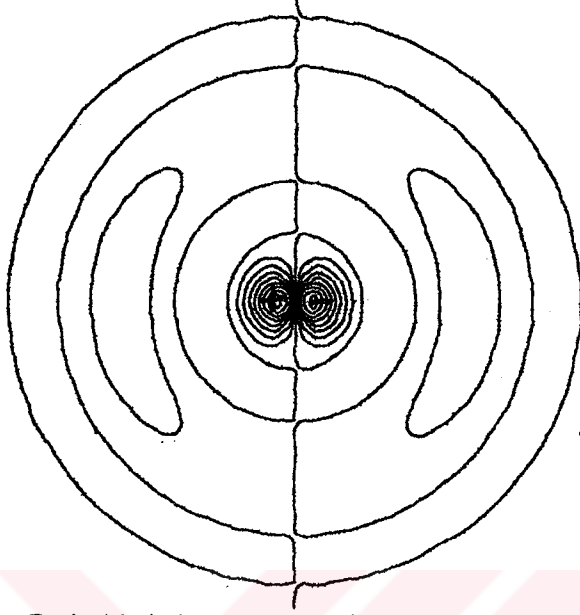
Sol Kulak --- Sag Kulak

Şekil 4.5. Üstteki şekil $b=0.7$ için radyal bileşenin 1, tanjant bileşenin 0 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Alttaki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



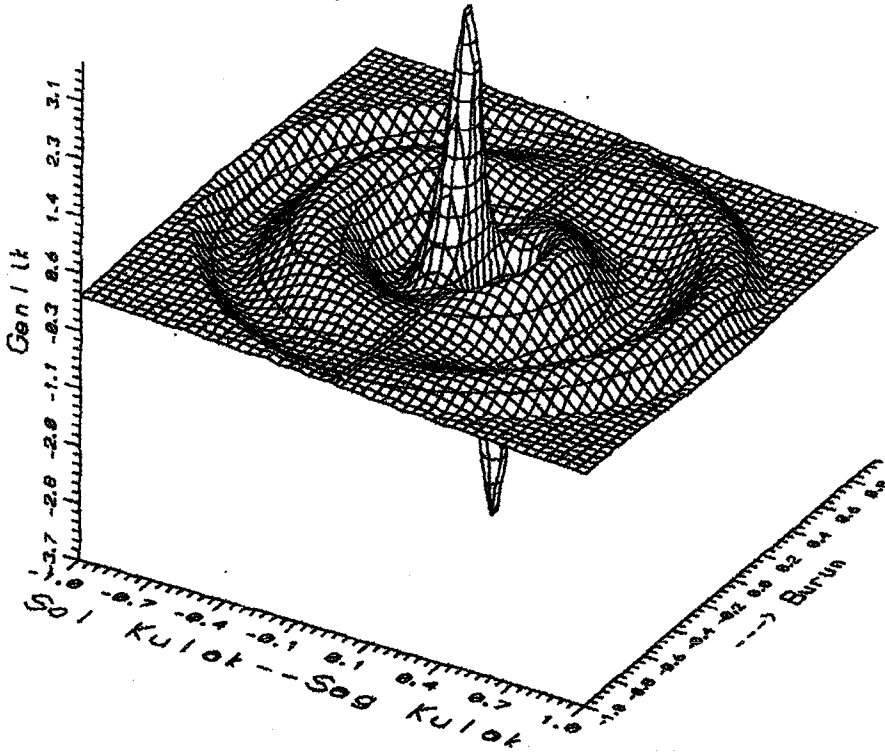
$$MR=0 \quad MT=1$$

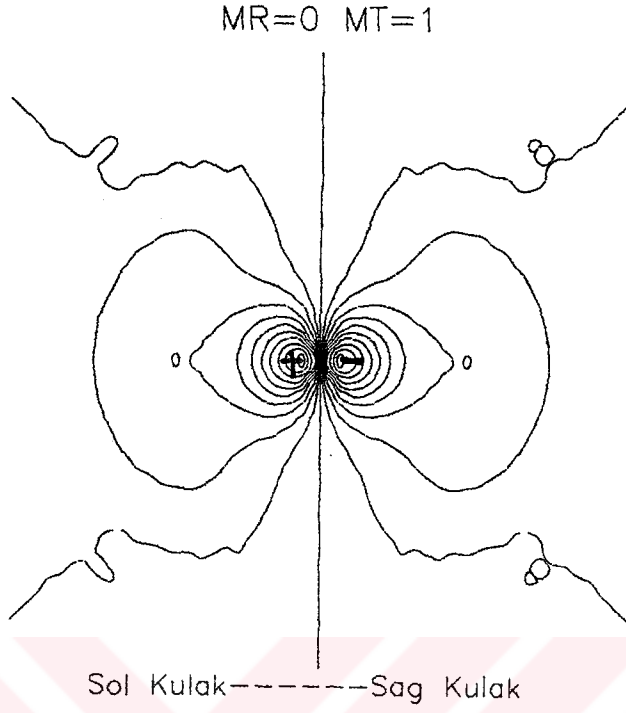
Burun



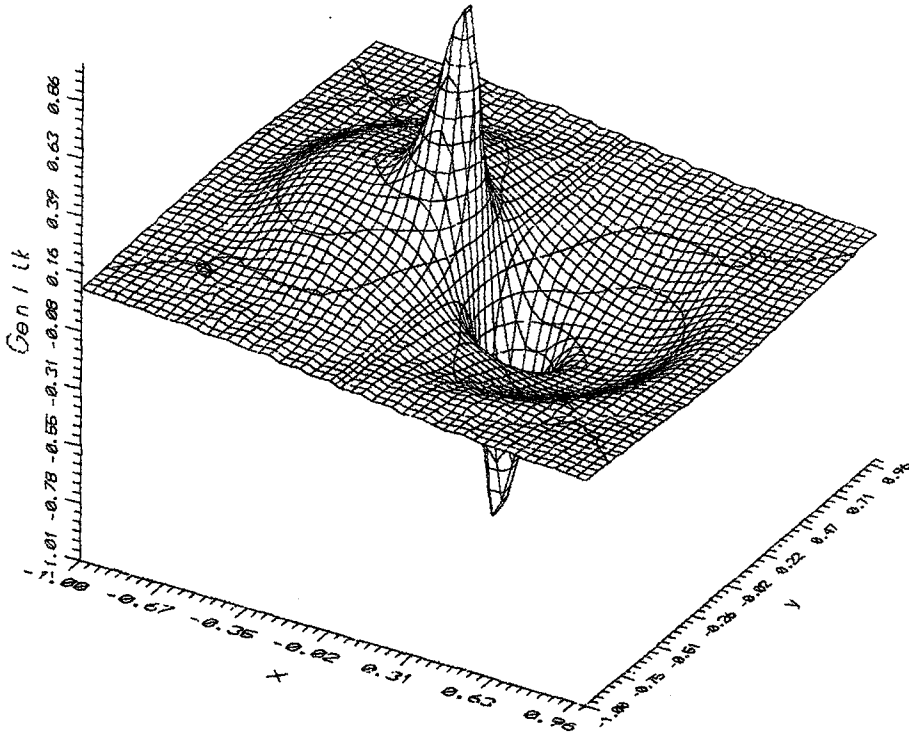
Sol Kulak-----Sag Kulak

Şekil 4.6. Üstteki şekil $b=0.9$ için radyal bileşenin 0, tanjant bileşenin 1 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



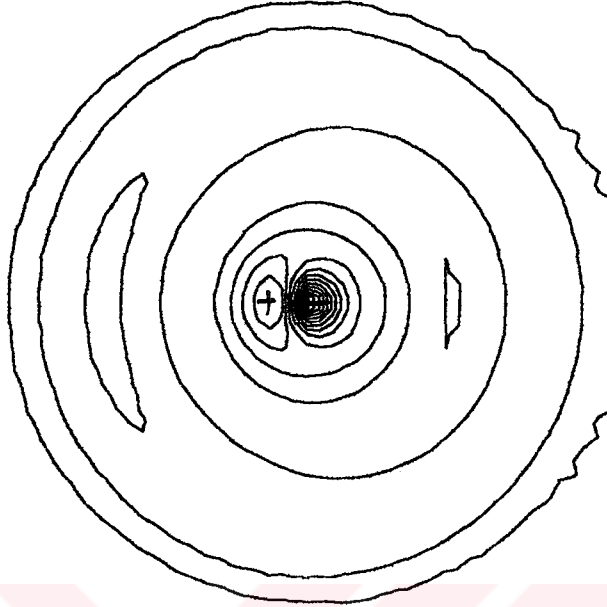


Şekil 4.7. Üstteki şekil $b=0.7$ için radyal bileşenin 0, tanjant bileşenin 1 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



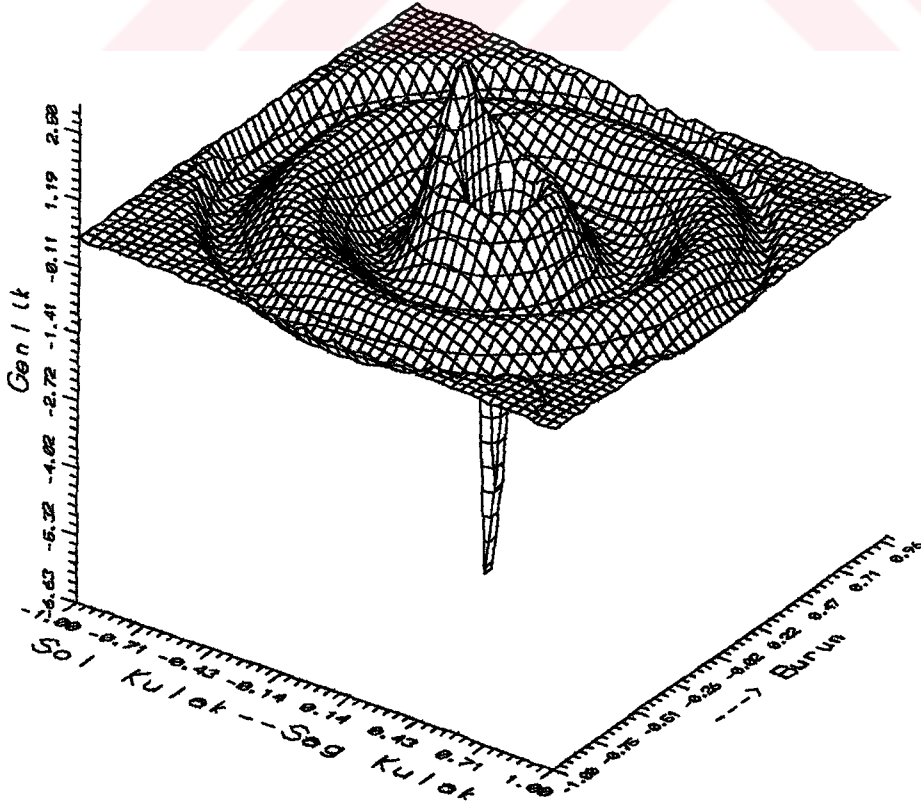
$$MR=1 \quad MT=1$$

Burun



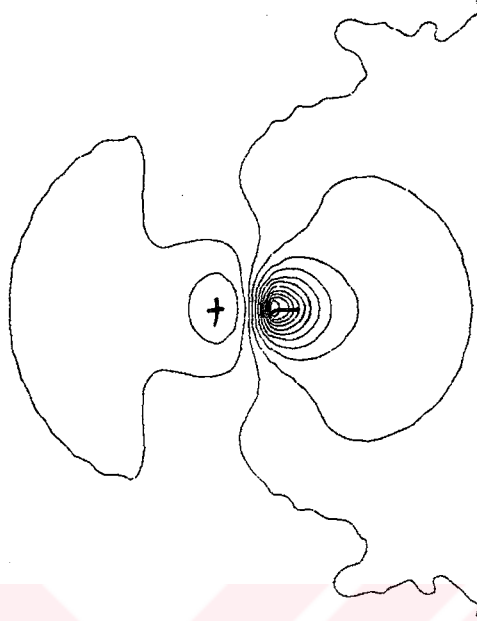
Sol Kulak-----Sag Kulak

Şekil 4.8. Üstteki şekil $b=0.9$ için radyal bileşenin 1, tanjant bileşenin 1 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



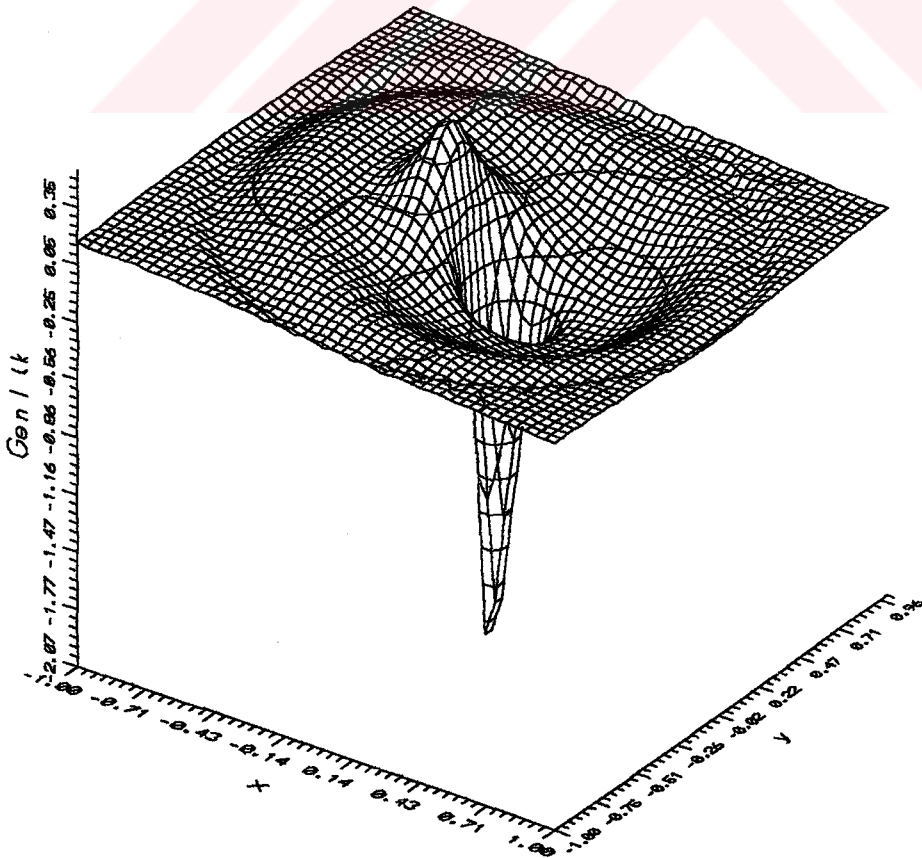
$$MR=1 \quad MT=1$$

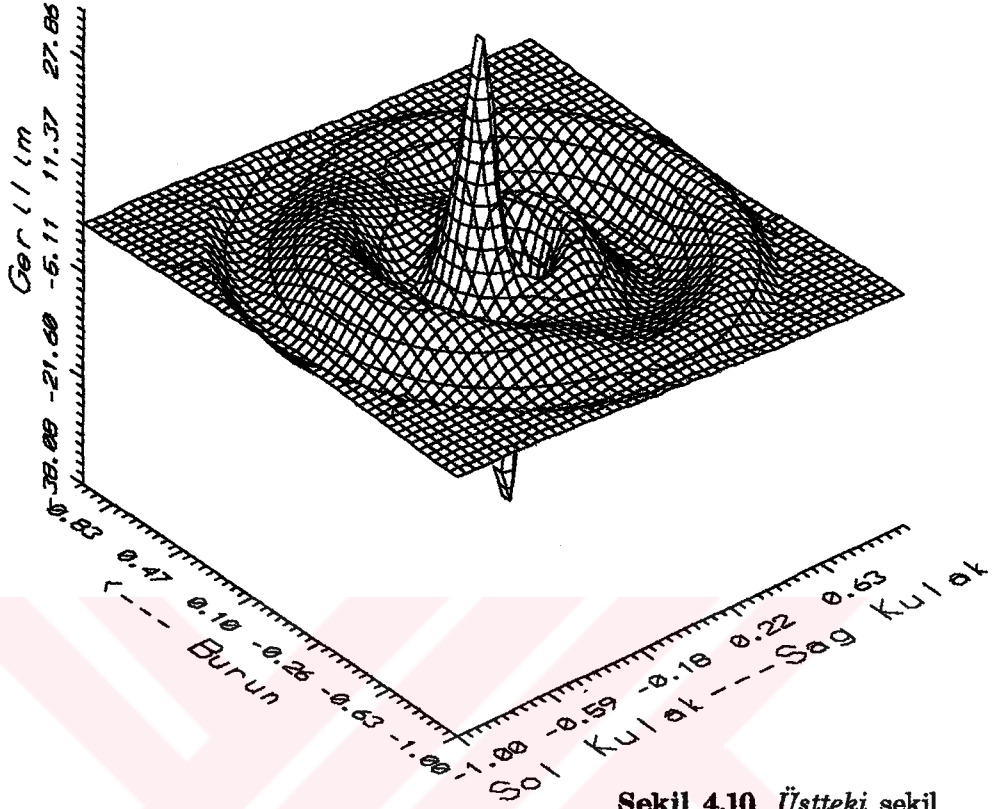
Burun



Sol Kulak-----Sag Kulak

Şekil 4.9. Üstteki şekil $b=0.7$ için radyal bileşenin 0, tanjant bileşenin 1 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.

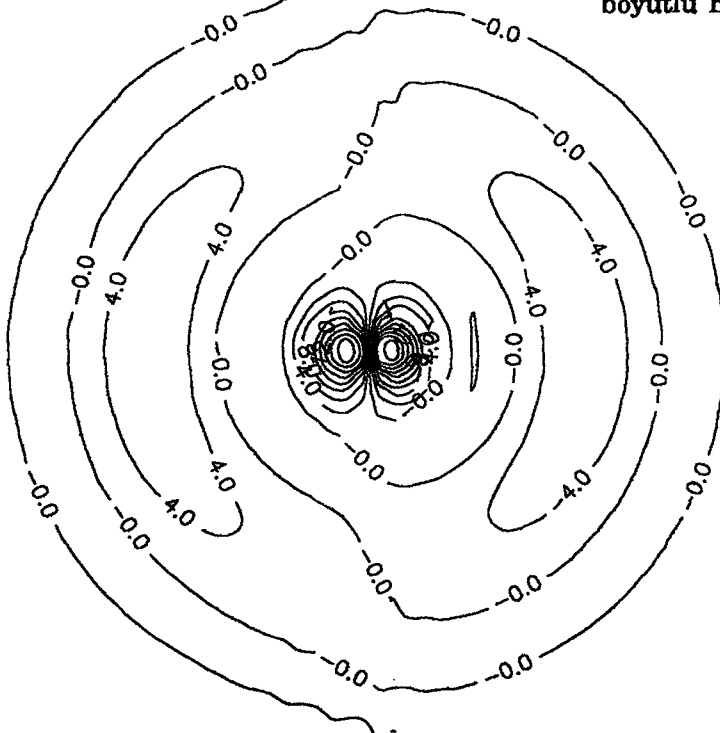




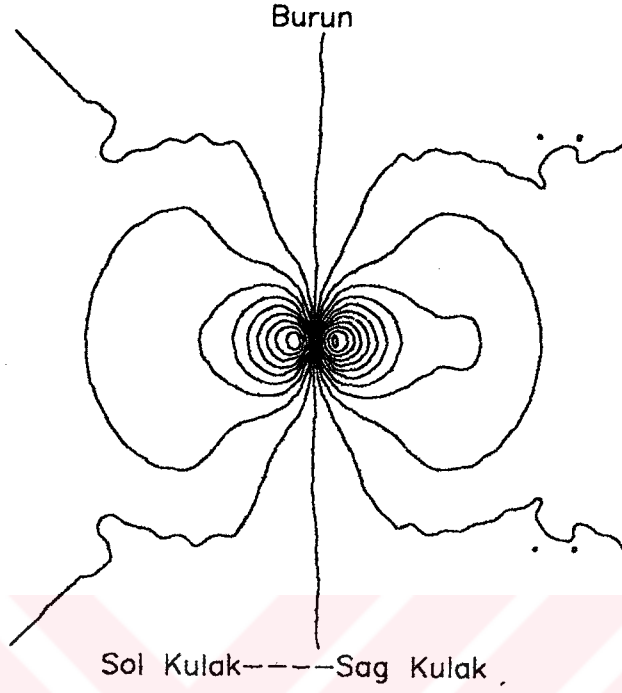
MR=1 MT=10

Burun

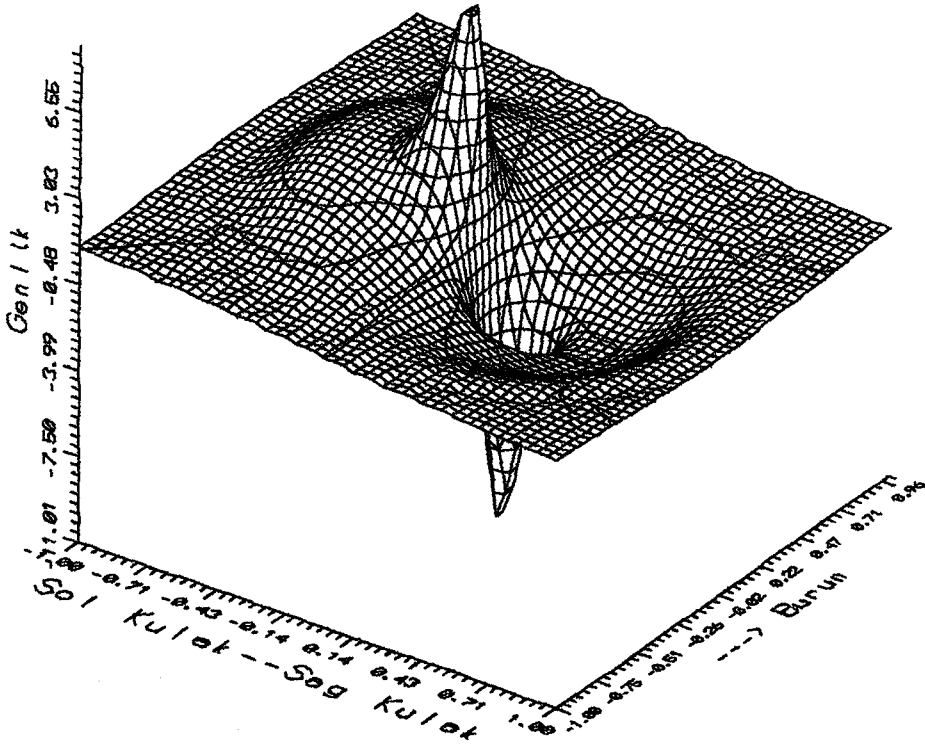
Şekil 4.10. Üstteki şekil $b=0.9$ için radyal bileşenin 1, tanjant bileşenin 10 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altındaki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır



Sol Kulak ————— Sag Kulak

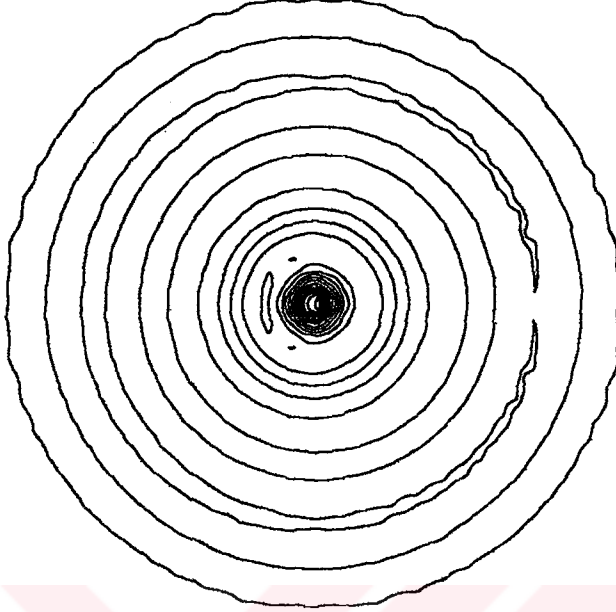
$MR=1 \quad MT=10$


Sekil 4.11. Üstteki şekil $b=0.7$ için radyal bileşenin 1, tanjant bileşenin 10 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



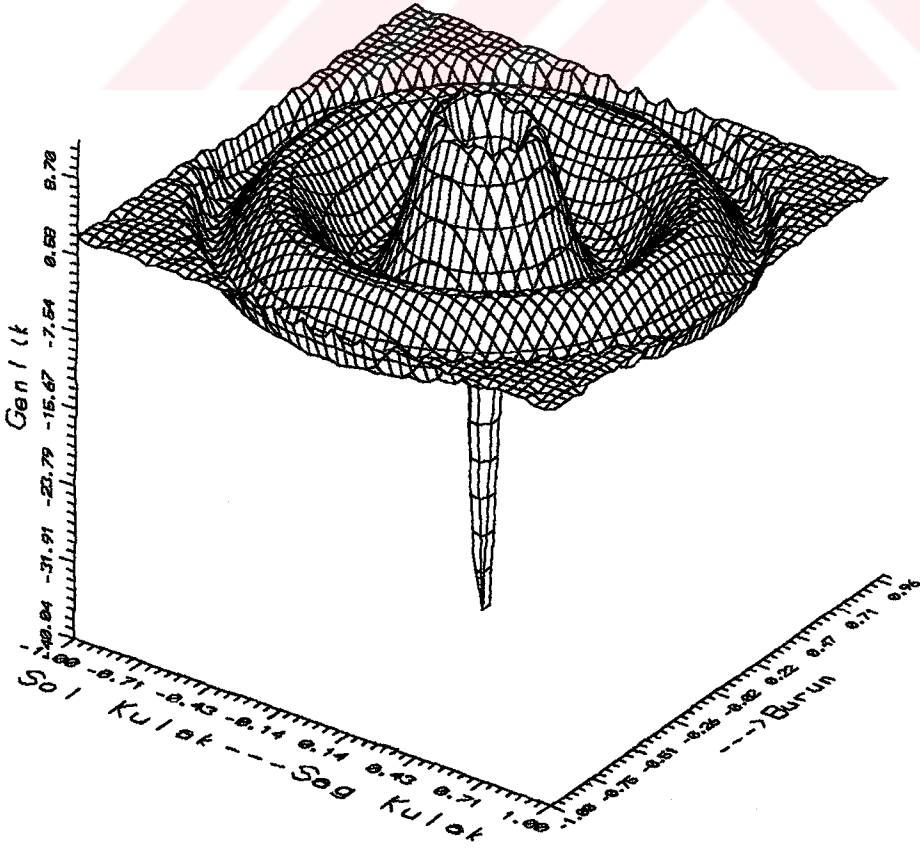
$$MR=10 \quad MT=1$$

Burun



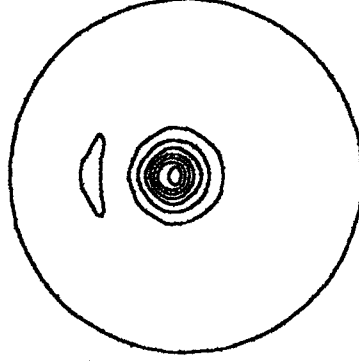
Sol Kulak ----- Sag Kulak

Şekil 4.12. Üstteki şekil $b=0.9$ için radyal bileşenin 10, tanjant bileşenin 1 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



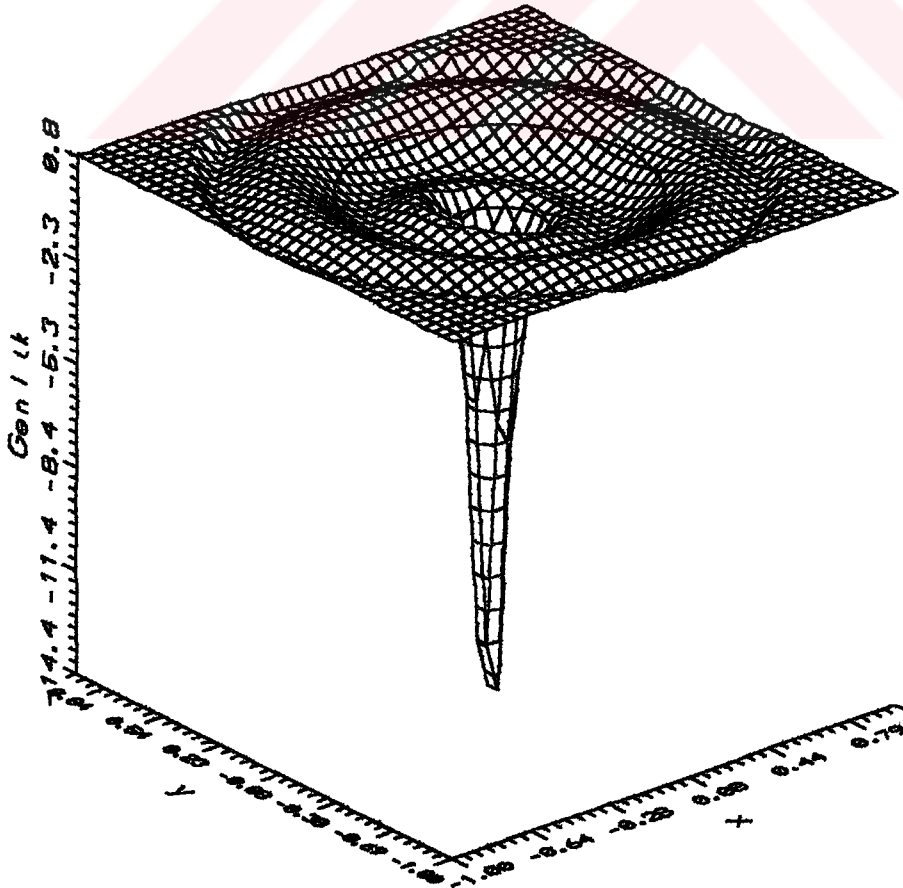
$$MR=10 \quad MT=1$$

Burun



Sol Kulak---Sag Kulak

Şekil 4.13. Üstteki şekil $b=0.7$ için radyal bileşenin 10, tanjant bileşenin 1 olduğu durumdaki gerilim dağılımıdır. Altteki şekilse aynı bileşenli dipolün üç boyutlu haritasıdır.



V. SONUÇLAR

Simülasyon çalışmaları sonucu bulunan değerler için aşağıdaki tablo yeterli bir özet sağlamaktadır :

Tablo 5.1. Simülasyon Sonuçları

Dipolün Bileşenleri	Maksimum Genlik		Minimum Genlik	
	b=0.9	b=0.7	b=0.9	b=0.7
MR=1, MT=0	1.18	0.07	-7.56	-2.08
MR=0, MT=1	4.16	1.07	-4.16	-1.07
MR=1, MT=1	3.17	0.57	-7.87	-2.37
MR=10, MT=1	12.88	0.88	-75.63	-20.82
MR=1, MT=10	37.85	9.82	-45.27	-11.58

Görüldüğü gibi eksantrite azaldıkça, yani dipol merkeze yaklaştıkça, yüzeyden kaydedilen gerilim değerleri de azalmakta ve hatta izopotansiyel dağılımda odaklanmadan çok, dağılmış bir gerilim haritası karşımıza çıkmaktadır. Böylelikle, farklı iletkenlikli dokulardan geçen eşdeğer dipol gerilimlerinin bu katmanlarca nasıl bozulduğunu görmekteyiz.

Tartışma

Bu tezde, beynin elektriksel etkinliği eşdeğer bir dipol şeklinde modellenmiş ve bu durumda, üç konsantrik farklı iletkenlikli kürelerce modellenen kafa şeklinin en dışında böyle bir hayali dipolün yaratacağı gerilim dağılımının matematiksel ifadesi çıkarılmıştır. Bu matematiksel-analitik ifadenin bulunmasındaki amaç, EEG çalışmalarının temelini de oluşturan hedeftir. EEG'nin esas amaçlarından birisi, kafa derisinden kaydedilen gerilimlerle, beynin elektriksel akım jeneratörleri arasında hem fizyolojik hem de fiziksel bağları bulmaktır. Bunun için çoğu kez elektrodinamik kurallarından destek alınmıştır. Bu formülasyonlar her ne kadar spontan EEG kayıtlarında yönelik olmasalarda, özellikle Uyarılmış Potansiyel çalışmalarında cevabın geldiği noktanın belirlenmesinde oldukça doğru sonuçlar bulmaya yaramaktadırlar.

Tezde sadece ileri yönde problem ele alınmıştır. Kafanın içinde herhangi bir nedenden ötürü oluşabilecek gerçekte dağılmış ve statik olmayan bir yük yoğunluğu bu çalışmada hem lokalize hem de statik olduğu varsayılarak, eşdeğer bir dipolle modellenmiştir. Doğaldır ki bu varsayılan fizyolojik işleyişe tamamen terstir. Bu yüzden kaynak modeli belirlenirken, fizyolojik mekanizmaya en uygun dağılımın belirlenmesi daha gerçekçi sonuçların bulunmasına yardımcı olabilir. Bunlar bir merkezden Gaussiyen şekilde azalarak dağılan hacimsel yük yoğunlukları olabileceği gibi, birden fazla dipoller şeklinde de modellenebilirler. Tabii, bu kaynakların

hepsini statik modele oturtmak şart değildir. Genelde EEG çalışmalarında ilerlemeyen dalgalara bu kaynaklar modellenmişlerdir.

Simülasyon çalışmaları üç konsantrik, farklı iletkenlikli küre için yapılmıştır. Kavanagh ve ark. 1978'de buldukları, daha sonra Ary ve ark. 1981 tarafından yeniden düzenlenen ve bu tez de kullanılan (72) formülü esasında tam da gerçek durumu yansıtmamaktadır. Esasında tam kafa modeli dört küre şeklinde verilebilmektedir. İleriki çalışmalar hem dört küre üzerinden yapılabilmesi [Cuffin 1990] hem de bu kürelerin de birbirlerine göre belirli bir eksantritesi olduğu da göz ardı edilmemelidir. Burada karşılaşılan en büyük sorun, kafa yapısının küreye benzetilmesidir. Çeşitli araştırmacılar bu sorunun üstesinden gelmek için BT (bilgisayarlı tomografi) ve NMR (nükleer magnetik rezonans) datalarından yararlanarak gerçek kafa şeklini kullanmış, bu durum için yüzeydeki gerilim dağılımını araştırmışlardır [Cuffin,1990; Meijs ve ark. 1988; Huang ve ark. 1990; Nunez ve ark. 1994; de Munck 1992; Law ve ark. 1993; Yan ve ark. 1991]

Kafa şeklinin MR veya BT datalarıyla elde edilip, (72) formülünde kullanılması, iki şekilde olabilmektedir. Bu işlem için ya sonlu elemanlar yöntemi (finite element method) ya da sınır elemanlar yöntemi (boundary element method) kullanılmaktadır. Bir dipolü lokalize etme işlemindeki hatayı azaltabilmek için daha uygun kafa modellerini ele alan bu yöntemleri etkin bir şekilde kullanabilmek için iş istasyonlarına gereksinim duyulmaktadır. İleriki çalışmalarda, kafa şeklinin sayısal yöntemlerle görüntülendikten ve bilgisayara girildikten sonra formüller üzerinde değişiklik yapmak, gerçeğe yaklaşmak açısından yararlı olacaktır.

Burada yapılması gereken bir başka değişiklik de, (72) nolu formülün biraz daha geliştirilmesidir. Dikkat edilirse, bu formül z eksenini üzerinde ve bileşenleri xz düzleminde olan bir dipolün yüzeydeki gerilim dağılımını vermektedir. Uyarılmış Potansiyel çalışmalarında bu formül yetersiz kalmakta, dipolün teorik olarak varsayıldığı yer sadece z eksenini üzerinde olurken, UP'lerde karşılaşılan anatomik merkezeler örneğin beynin arkalarında veya yanlarında olabilmektedirler. Bu yüzden (72) formülünün fizyolojik olaylara uygun hale getirilmesi gerekir. Bunun için iki işlem yapılmalıdır : 1) I_v kaynak ifadesini yazarken sadece z ekseniniyle sınırlı kalmamak, 2) (29) formülündeki üslü koordinatların da kullanılması. $1/R$ açılımının inhomojen ortamdaki gerilimlere yerleştirilmesi ve bu durum için sınır değerlerin çözülmesi gerekir. Bu işlem sonucu gerçek kaynak lokalize edilebilir.

Lokalizasyon işleminin üstünlüğü, epilepsili veya tümörlü hastalarda bu rahatsızlıklarını belirlemede ilk adımda kullanılabilecek, noninvazif bir yöntem olmasıdır. Böylelikle, tomografide daha az süreler kalınabilir. Lokalizasyonun kullanılabileceği bir başka adımsa, kognitif işlemlerin gözlemlenmesi olabilir.

Tüm bu lokalizasyon çalışmaları için öncelikle ters problem üzerine çalışılmalıdır. Sonsuz sayıda ölçüm alınamadığında tek bir çözümü bulunmayan bu çalışmalarda çeşitli algoritmalar denenmiştir. Ülkemizde henüz başlanmamış bir konu olan dipol lokalizasyon işleminin psikiyatrik vakalara da ışık tutabileceği kanısındayım.

Kaynaklar

Ary, J.P., Klein, S.A., Fender, D.H., (1981), Location of Sources of Evoked Potentials : Corrections for Skull and Scalp Thickness, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. BME-28, no. 6, pp. 447-452

Aseltine, J. A.,(1958), "The Impulse Function", Chapter 3, in Transform Method in Linear System Analysis, McGraw-Hill Comp.

Carr, J.J., Brown, J.M.,(1981) *Introduction to Biomedical Equipment Technology*, John Wiley&Sons, New York, pp. 195-205

Churchland, P.S., (1988), *Neurophilosophy Toward a Unified Science of the Mind*, MIT Press, Cambridge, pp.204-217

Cuffin, B.N.,(1982), Effects of Inhomogeneous Regions on Electrical Potentials and Magnetic Fields :Two Special Cases, J. Appl. Phys., vol. 53, n0. 12, pp. 9192-9197

Cuffin, B.N. (1985), A comparison of Moving Dipol Inverse Solutions Using EEG's and MEG's, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. BME-33, pp. 854-861

Cuffin, B.N. (1990), Effects of Head Shape on EEG's and MEG's,IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 37, no. 1, pp. 44-52

Cuffin B.N., (1991), Eccentric Spheres Models of the Head, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 38, n0. 9, pp. 871-878

Cuffin, B.N., (1995) A Method for Localizing EEG Sources in Realistic Head Models, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 42, no 1, pp. 68-71

Cuffin, B.N., Cohen, D., (1979) Comparison of the Magnetoencephalogram and Electroencephalogram, Electroenceph. Clin. Neurophysiol., pp. 132-146

de Munck, J.C., van Dijk, B.W., Spekreijse, H., (1988), Mathematical Dipoles are Adequate to Describe Realistic Generators of the Human Brain Activity, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 35, no 11, pp. 960-966

de Munck, J.C., Vijn, P.C.M., da Silva, H.L, (1992), A Random Dipole Model for Spontaneous Brain Activity, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 39, no. 8, pp. 791-804

Ganong, W.F., (1993), *Review of Medical Physiology*, International ed., 16th ed., pp. 173-182

Geselowitz, D.B. (1967), On Bioelectric Potentials in an Inhomogeneous Volume Conductor, Biophys. J., vol 7, pp. 1-11

Guyton, A.C., (1986), *Tıbbi Fizyoloji*, Çev: Gökhan, N., Çavuşoğlu, H., Merk Yayıncılık, İstanbul, pp. 907-963

Henderson, C.J., Butler, S.R., Glass, A., (1975), The Localization of Equivalent Dipoles of EEG sources by the Application of Electric Field Theory, Electroenceph. Clin. Neurophysiol., vol 39, pp. 117-130

Hosek R.S., Sances A., Jodat, R.W., Larson, S.J.,(1978), The Contributions of Intracerebral Currents to the EEG and Evoked Potentials, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. BME-28, pp. 405-413

Huang, J.C., Nicholson, C., Okada, Y.C., (1990), Distortion of Magnetic Evoked Fields and Surface Potentials by Conductivity Differences at Boundaries in Brain Tissue, *Biophysical J.*, vol. 57, pp. 1155-1166

Jackson, J.D., (1962), *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, chs 3, 4, 16

Kavanagh, R.N., Darcey, T.M., Lehmann, D., Fender, D.H. (1978), Evaluation of Methods for Three-Dimensional Localization of Electrical Sources in the Human Brain, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. BME-25, no. 5, pp. 421-429

Kearfott, R.B., Sidman, R.D., Major, D.J., Hill, C.D. (1991), Numerical Tests of a Method for Simulating Electrical Potentials on the Cortical Surface, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. 38, no. 3, pp. 294-299

Law, S.K., Nunez, P.L., Wijengsihe, R.S. (1993), High Resolution EEG Using Spline Generated Surface Laplacians on Spherical and Ellipsoidal Surfaces, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. 40, no. 2, pp. 145-153

Le, J., ve Gevins, A. (1993), Method to Reduce Blur Distortion from EEG's Using a Realistic Head Model, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.* vol. 40, no. 6, pp. 517-528

Lemieux, L, Leduc, A., (1992), Equivalent Source Estimation Based on the Calculation of the Electrical Field from Depth EEG Data, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. 39, no. 8, pp. 805-817

Lopes da Silva, F. (1993), EEG Analysis : Theory and Practice, Chp. 61 in *Electroencephalography, Basic Principles, Clinical Applications and Related Fields*, ed. Niedermeyer E., Williams and Wilkins, 3rd ed.

Lösch, J.E., (1960), *Tables of Higher Functions*, 16th ed., McGraw-Hill Comp., Chp 8,

Meijs, J.W.H., Peters, M.J. (1987); The EEG and MEG Using a Model of Eccentric Spheres to Describe the Head, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. BME-34, no. 12, pp. 913-920

Morse, P.M., Feshbach, H., (1953), *Methods of Theoretical Physics*, New York : McGraw-Hill, vol 2, 1252-1309

Myint-U, T, (1973), "Legendre Functions" Chapter 7, in *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, American Elsevier Publ., pp 179-184

Nunez, P.L.,(1981a), *Electric Fields of the Brain: The neurophysics of EEG*, Oxford University Press, New York

Nunez, P.L. (1981b), A Study of Origins of the Time Dependencies of Scalp EEG : I. Theoretical Basis, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 28, pp. 271-280

Nunez, P.L. (1981c), A Study of Origins of the Time Dependencies of Scalp EEG : II Experimental Support of Theory, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol. 28, pp. 281-288

Nunez, P.L. (1988), Methods to Estimate Spatial Properties of Dynamic Cortical Source Activity, in *Functional Brain Imaging*, ed. Pfurtscheller G. ve da Silva F.H, Hans Huber Publishers, Germany

Nunez, P.L., Silberstein, R.B. Cadusch, P.J., Wijesinghe, R.S., Westdorp, A.F., Srinivasan R., (1994), A Theoretical and Experimental Study of High Resolution EEG based on Surface Laplacians and Cortical Imaging, *Electroenceph. clin. Neurophysiol.*, vol. 90, pp. 40-57

Plonsey, R., (1969), *Bioelectric Phenomena*, McGraw-Hill Comp., New York

Schneider, M., (1972), A Multistage Process for Computing Virtual Dipolar Sources of EEG Discharges from Surface Information, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. BME-19, pp.1-12

Schneider, M., (1974), Effect of Inhomogeneties on Surface Signals Coming from a Cerebral Dipole Source, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. BME-21, pp. 52-54

Soong, A.C.K., Koles, Z.J. (1995), Principal Component Localization of the Sources of the Background EEG, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. 42, no. 1, pp. 59-67

Srebro, R. (1985), Localization of Visually Evoked Cortical Activity in Humans, *J. Physiol.*, vol. 360, pp. 233-246

Srebro, R. (1994), Continuous Current Source Inversion of Evoked Potential Fields in a Spherical Model Head, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, vol. 41, no. 11, pp. 997-1003

Webster, J.G., (1978), *Medical Instrumentation Application and Design*, Houghton Mifflin Comp., Boston, pp. 184-214

Williams, P.L., Warwick, R., Dyson, M., Bannister, L.H., (1992), *Gray's Anatomy*, ELBS with Churchill Livingstone, 37th ed., pp. 962-1092

Witwer, J.G., Trezek, G.J., Jewett, D.L., (1972), The effect of Media Inhomogeneties Upon Intracranial Electrical Fields, IEEE Trans. on Biomed. Eng., vol BME-19, no. 5, pp.352-362

Yan, Y., Nunez, P.L., Hart, R.T., (1991), Finite-Element Model of the Human Head : Scalp Potentials due to Dipole Sources, Med.& Biol. Eng. & Comput., vol 29, pp. 475-481



EK I

I. BEYNİN FİZYOLOJİSİ

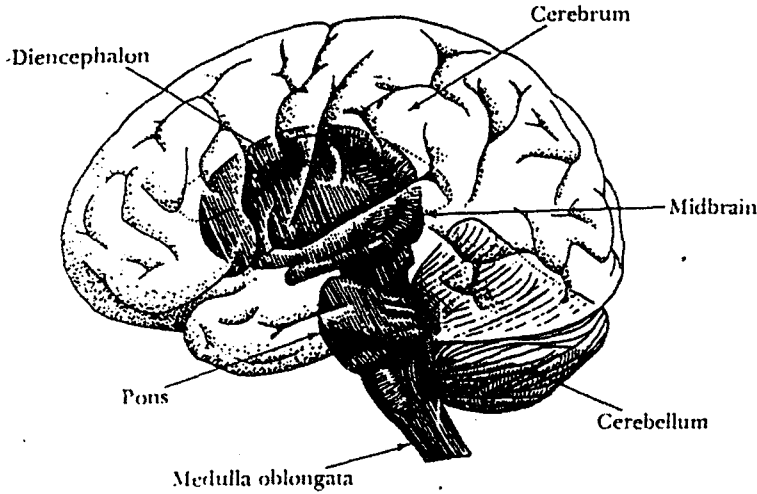
E.1 BEYNİN ANATOMİSİ VE FONKSİYONLARI

Merkezi Sinir Sistemi (MSS) omurga kemiklerinin içindeki omurilikten ve devamındaki beyinden oluşur. Beyin kafatasının içinde yer almaktadır.

Beyin, MSS'nin en gelişmiş ve büyük kısmı olarak üç koruyucu zar (meninges) tarafından kaplanmış olup, kafatası boşluğunda (cranial cavity) yer almaktadır. Spinal kord da (omurilik-medulla spinalis) aynı zarlar ile kaplı olup, vertabral kolon (omurga) içinde korunmadadır. Hem beyin hem de spinal kord, serebrospinal sıvı (beyin omurilik sıvısı) denen özel hücrelerarası bir sıvı içinde yüzmektedirler.

MSS içinde, çeşitli periferdeki (çevresel) noktalarda bulunan biyolojik dönüştürücülerden MSS'ye dış ortamdaki değişimleri bildirici duyuşal sinir yolları vardır. Bu yollar spinal korddan yukarı doğru çıkıp, beynin çeşitli yerlerine gitmektedirler. Bu duyuşal dönüştürücüler ısıyı, acıyı, yumuşak dokunuşu, basıncı vb. etkileri hissedebilen özelleşmiş hücre guruplarıdır. Aynı şekilde MSS içinde, beyinden kaynaklanıp motor sensorlarına kadar giden motor sinir yolları da mevcuttur. Bu motornöronlar (hareket sinirleri) iskelet kaslarının kasılma etkinliklerini kontrol ederler.

Anlaşıldığı gibi, beyinde iki yönlü bir iletişim bulunmaktadır. Beyinsel aktivitelerin odaklarının ve fonksiyonlarının belirlenmesinde beyni üç bölüme bölerek incelemek yararlı olmaktadır: 1) Serebrum (beyin), 2) Medulla oblongata (beyin sapı), 3) Serebellum (beyincik) (Şekil E1). Filogenetik olarak beyin sapı beynin en yaşlı kısmıdır. Omurgalıların evrim süreci içinde büyüklüğü ve fonksiyonu çok az değişmiştir. Spinal kordun kısa bir uzantısı olup, üç ana görevi vardır : 1) Serebral korteks (beyin yüzeyi) spinal kord ve serebellum arasındaki bağlantı noktasıdır. 2) Çeşitli istemsiz fonksiyonların birleştirildiği bölgedir : kalp hızının kontrolü, nefes alma frekansı gibi. 3) Çeşitli motor reflekslerinin birleşim merkezidir.



Şekil E1. Beynin anatomik bölümlerinin adları

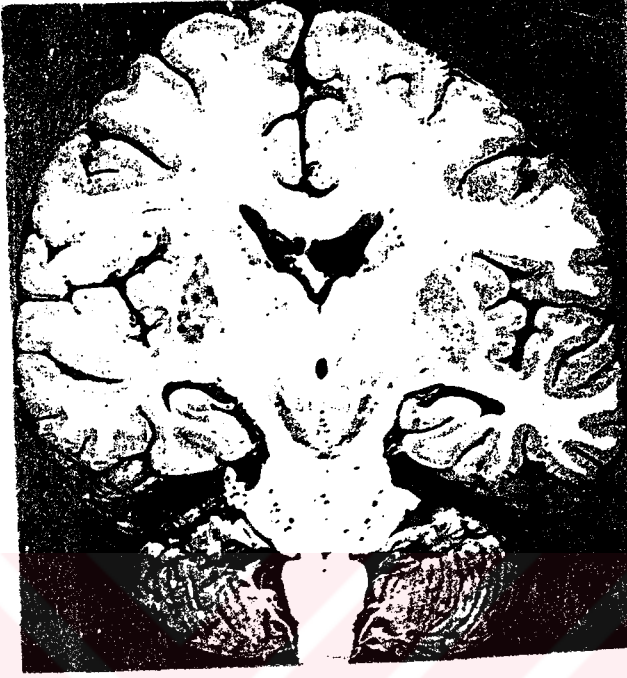
Serebellum (soğancık) vücuttaki istemli kas sisteminin koordinatörüdür. Beyin sapı ve serebral korteks ile ilişki içinde çalışarak dengenin sağlanmasında harmonik kasların kullanımını denetler.

E.1.1 Serebrum

Serebrum sağ ve sol yarım kürelerinden oluşur ve vücutta her bir kürenin aksi tarafını kontrol eder. Her yarım kürenin de yüzeyine korteks denir. Burası gözlerden, deriden, kulaklardan ve o yarımkürenin karşıtındaki bölgelerin reseptörlerinden duyuşal verileri toplar. Gelen bu bilgiler beynin çeşitli bölgelerinde daha önceden kaydedilmiş deneyimlerle karşılaştırılıp, uyarılara karşı gerekli cevaplar üretilir.

Her yarım küre çeşitli katmanlardan oluşur. Dış katman, beyin tazeyken gri renkte olup, sinir hücrelerinin yoğunlaştığı bir bölgedir. Bu yüzden buraya boz madde denir. Korteks adlı bu katman kabaca 1 cm kalınlığındadır. Bu yüzey çok kıvrımlı olup, çıkıntılarına girus ve girintilerine sulkus (oluklar) denir. Derin kıvrımlara fisürler denir. Yarımkürenin derinlerdeki katmanları

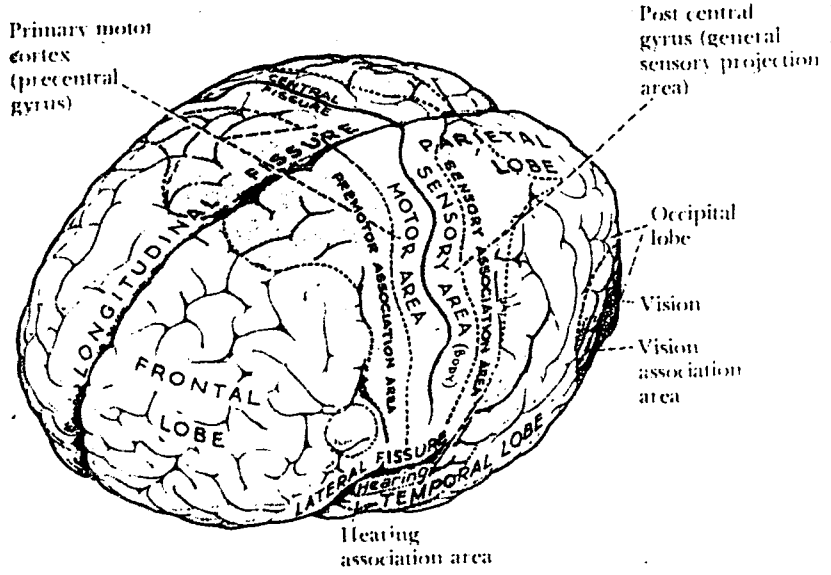
(korteksin altı) aksonlardan (beyaz madde) ve nükleus adlı hücre gövdelerinden oluşur. (Şekil E2)



Şekil E2. Serebellumun alttan görüntüsü

Serebral korteksi (beynin yüzeyini) bölümlere ayırmada kullanılabilecek işaretlerden birisi lateral (yatay) fisürdür.(Şekil E3)

Bu lateral fisür beynin yan yüzeyinde olup, öndeki açıklıktan beynin posterioruna (arkasına) ve dorsalına (yukarıya doğru) gitmektedir. Lateral fisürün inferiorunda (altında) kalan loba (bölgeye) temporal (şakak) lop denir. Bu lobun superior (üst) kısmı ana işitsel kortekstir. İç kulaktan sinir yolları aracılığıyla gelen işitsel uyarılar buraya ulaştırılırlar.



Şekil E3. Serebrumun bölümleri: frontal, parietal, temporal ve oksipital. Yatay (lateral) ve dikey (logitudinal) fissürler ve santral sulkus da görülmekte.

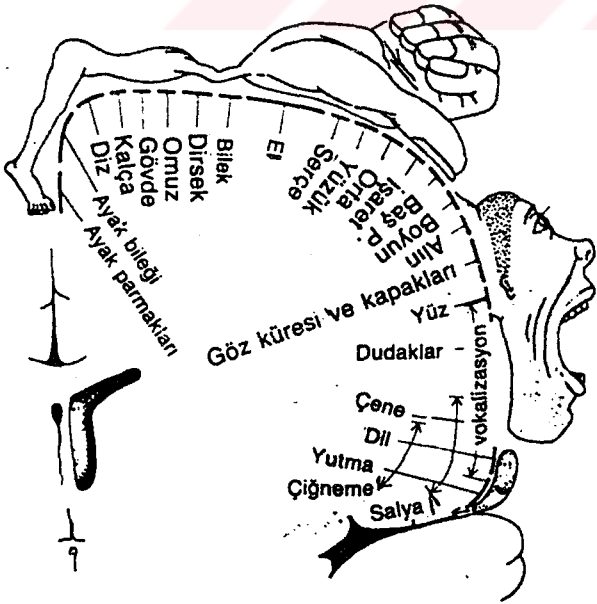
Serebral kortekse ulaştırılan bir diğer duyuşal işaret de görsel uyarılardır. Kafanın arkasındaki oksipital lop ana görsel kortekstir. Gözlere verilen bir uyarıyla (örneğin parlak ışıık) bu korteks bölgesinden gerilim elde edilir. Retinanın üzerindeki belirli noktalardan görsel korteksin belirli noktalarına bağlantılar vardır.

Serebral korteksin bölümlendirilmesinde kullanılan bir diğer anatomik işaret de santral sulkustur (merkezi oluk-santral fisür). Santral fisür tüm mediyal (orta) yüzey boyunca ve yarım kürenin eğimini takip ederek lateral fisüre kadar ulaşır. Santral fisür aynı zamanda beynin frontal (ön) lobunun da ayırıcısıdır. Santral fisürün hemen anteriorundaki (önünde) girus (çıkıntı) presantral girüs diye

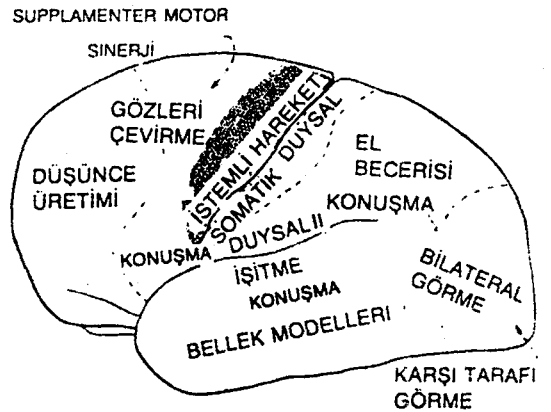
adlandırılır ve ana motor kortekstir. Bu girustan çıkan sinirsel işaretler beyin sapından spinal korda geçerek iskelet kaslarının kontrolünü sağlarlar. Bu bölgedeki herhangi bir lezyon (bozulma) vücudun karşı kısmında kısmi felçlere yol açabilir.

Santral fisürden biraz daha anteriora (öne) gidildiğinde premotor kortekse ulaşılır. Bu bölge karmaşık motor hareketlerinin (konuşma gibi) kontrolüyle ilgilenir. Frontal lop daha çok duygusal davranışlarımızın kontrol merkezidir. Ama bilişsel etkinliğin ne kadarının bu bölgede gerçekleştirildiği henüz bulunamamıştır.

Santral fisürün hemen posteriorundaki (arkasında) bölge parietal loptur. Bu fisürün posteriorunda ana somatosensoriyel (bedensel duyumlar) korteks, anatomik adıyla postsantral girus bulunmaktadır. Bu bölge tüm genel duyu reseptörlerinden impulsları (uyaranlar) alır. Bu alandaki her ufak kıvrım, vücudun belirli bir bölümünden gelen duyumları hisseder. (Şekil E4-5)



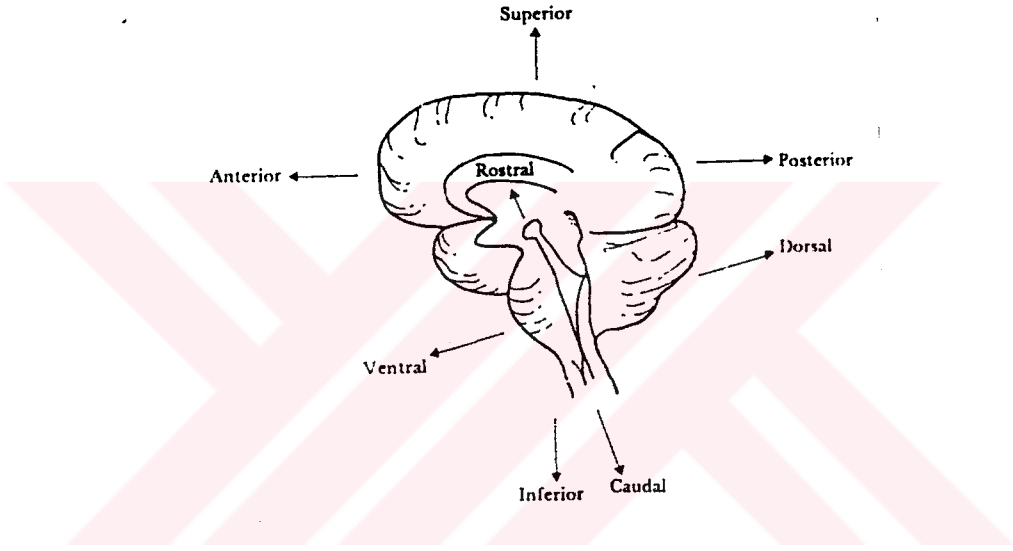
Şekil E4 Vücuttaki çeşitli kasların motor kortekste temsil alanları



Şekil E5 İnsanda beyin korteksinin nörolojik incelemeler sonucu saptanan fonksiyonel alanları

E.1.2 Beyin Sapı

Bu bölge dört bölümden oluşmuştur : medulla oblongata, ponlar, orta beyin ve diencefalon. Hepsi de birbirlerine bağlı hücre gövdeleri ve sinir akson demetlerinden oluşur. Medullanın üst sınırındaki ayrı bir bölgede ponlar vardır. (Şekil E6)



Şekil E.6 Merkezi sinir sisteminin oryantasyonunda kullanılan genel anatomik yönler : rostral (kafaya doğru), caudal (kuyruğa doğru), dorsal (sırtta ait), ventral (öne) kelimeleri beyin sapına ait doğrultulardır.

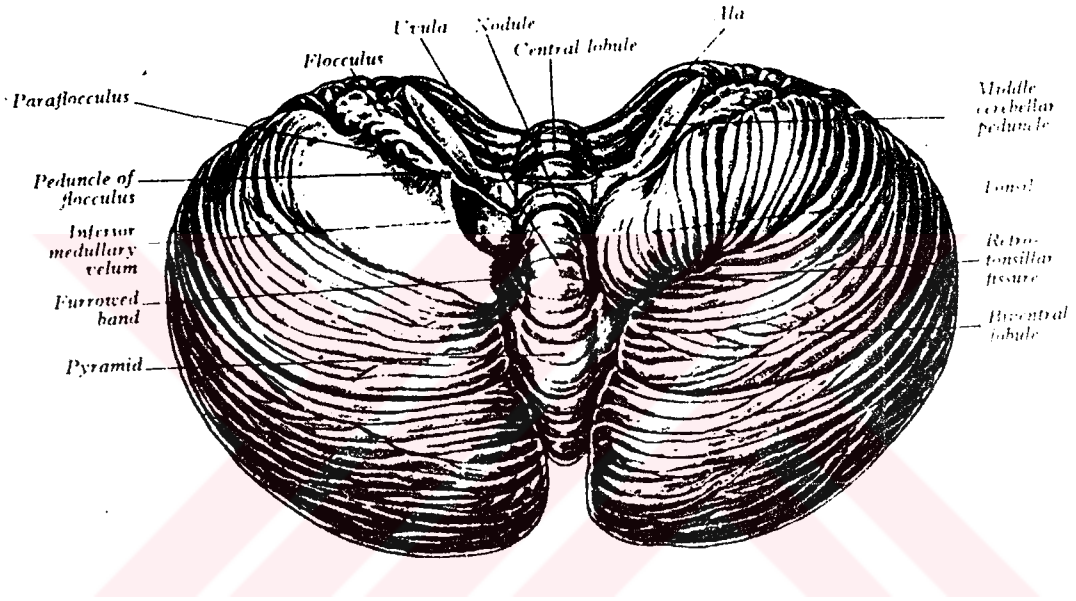
Medulla, spinal kord gibi fiber hatları (akson demetleri) ve ağız, boyun ve gırtlaktaki kasların kontrolünü sağlayan duyuşal bilgilerin alındığı duyuşal ve motor hücrelerini de içerir. Ayrıca nefes alma ve kardiovasküler sistemin (kalp ve damar sistemi) de refleks kontrolünü yapan merkezdir. Beyne doğrudan bağlanan sinirlere "kraniyel sinirler" denir. Oniki çift kraniyel sinir olup,

bunların onbiri beyin sapına girer. (Burundan gelen olfaktori sinir doğrudan serebruma girer) Ponlarda surata ait duyuşal giriş ve motor çıkışları kontrol eden kraniyel sinir çekirdekleri vardır. Orta beyin göz hareketlerini kontrol eden ana çekirdekleri içerir. Buradan, göz kırpması, ani kapama refleksi ile pupillanın ışık refleksi kontrol edilir. Diansefalon, beyin sapının en üst kısmıdır ve burada en büyük yeri talamus kaplar. Talamus periferdeki duyuşal sistemlerden gelen ister genel ister özel bilgileri, ait oldukları kortikal algı bölgelerine gönderen bir integrasyon merkezi aynı zamanda ana duraklama istasyonudur. Tüm somatik reseptörlerden gelen duyuşal informasyonlar talamus nükleuslarının birinde ya da ötekisinde duraklar. Ayrıca bilinçli durumda beyin, dikkatini duyuşal sistemin çeşitli segmentlerine yöneltme yeteneğine sahiptir. Bu fonksiyonun belki de talamustan gelen sinyallere göre başlıca kortikal alıcı alanların fasilitasyon veya inhibasyonu ile sağlandığı sanılmaktadır.

E.1.3 Serebellum

Serebellum, spinal kord aracılığıyla gövde, kol ve bacakların uzaydaki konumlarına yönelik bilgileri toplar. Serebral korteksten kaynaklanan bilgileri de alır. Serebellum özellikle koşma, daktilo

ile yazı yazma, piyano çalma ve hatta konuşma gibi çok hızlı kas aktivitelerinde hayati bir rol oynar. Beyindeki bu alanın kaybıyla, kaslarda paralizi olmadığı halde, bu gibi faaliyetlerin koordinasyonu hemen hemen tamamen kaybolur. (Şekil E7)



Şekil E7. Serebellumun alttan görünüşü

Serebellum, beynin motor kontrol alanlarından ve öteki bölgelerinden sürekli olarak kas kontraksiyonlarının uyması gerekli programlar hakkında en son bilgileri alır. Serebellumda, aynı zamanda, an be an vücudun bütün kısımlarının durumu, hareket hızı üzerine etkili kuvvetleri saptamayı sağlayacak bilgiler de

toplanır. Serebellumun, vücudun her bir bölümünün periferik informasyonlarla saptanan durumunu, motor sistemin amaçladığı durumla karşılaştırdığı kabul ediliyor- eğer bu ikisi mükemmel şekilde karşılaştırılmazsa, motor sisteme belirli kasların aktivasyon düzeylerini azaltıcı ya da çoğaltıcı, uygun düzeltme sinyalleri gönderilemez.

E.2.1 Serebral Korteks ve Beynin Entellektüel Fonksiyonları

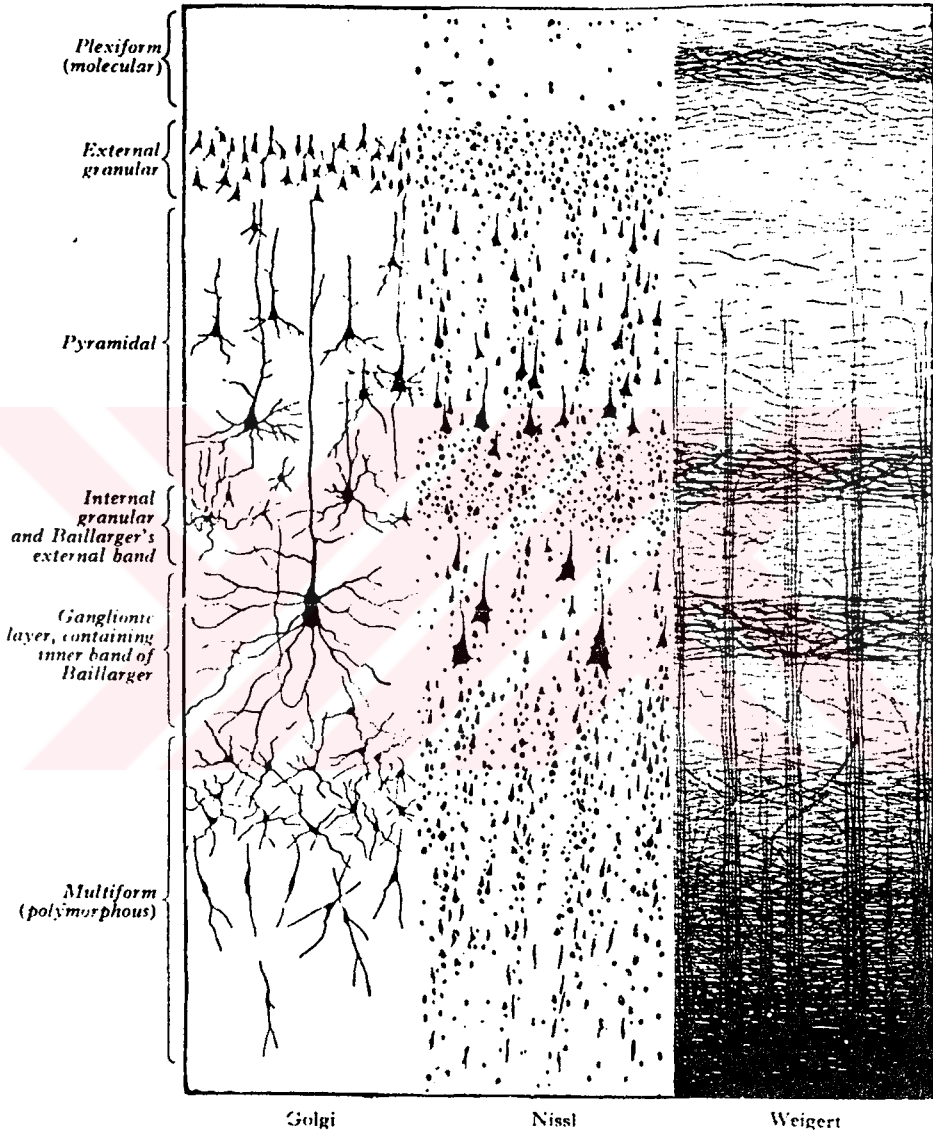
Serebral korteks sinir sisteminin en büyük bölümünü oluşturduğu halde, hemen hemen bütün bölümlerindeki mekanizmalar hakkında bilginin en düşük olduğu bölgedir. Beyin kabuğunun fonksiyonel bölümü başlıca 2-5 mm kalınlığında olan ince bir nöron tabakasından ibarettir. Toplam olarak metrekaresinin dörttebiri kadar olan bu tabaka, beynin bütün kıvrımlarını örter ve yaklaşık 50-100 milyar nöronu içerir. Şekil (E8) de serebral korteksin farklı tipteki hücre tabakalarından oluşan tipik yapısı görülmektedir. Hücrelerin çoğu üç tiptir. Granüler (yıldız da denir), fusiform ve karakteristik piramidal şekilleri nedeni ile piramidal hücreler denen hücreler. Aynı şeklin sağında da, korteksin çeşitli tabakalarındaki sinir liflerinin tipik organizasyonu gösterilmiştir.

Özellikle, korteksin komşu alanları arasında uzanan çok sayıdaki horizontal liflere ve korteksten beyin ve medulla spinalisin alt bölgelerine ya da serebral korteksin uzak bölgelerine asosyasyon lif demetlerinin içinde giden düşey lif demetleri ilginç bir yapı oluşturmaktadır.

E.2.2 Bazı Özel Kortikal Alanların Fonksiyonları

Beyin cerrahlarının insanlardaki incelemeleri, bazı özgün fonksiyonların, beyin belirli alanlarında lokalize olduğunu göstermiştir. (Bkz. Şekil 6) Penfield ve Rasmussen tarafından korteksin elektriksel stimulasyonu ile ya da nörologların, belirli korteks alanları çıkarılan hastalarda yaptıkları klinik incelemeler de belirlenen alanların bir haritasını vermektedir. Hafifçe gölgeli olan primer duysal alanları, koyu gölgeli olanı da, nispeten zayıf elektriksel uyaranlarla, kas hareketlerinin yaratıldığı primer motor alanı (istemli motor alan) göstermektedir.

Bu primer duysal ve motor alanları ileri derecede özgün fonksiyonlara sahiptir. Korteksin öteki alanları ise asosiyasyon ya da serebrasyon (ilişkiler kurarak düşünme) denen genel fonksiyonları yürütürler.



Şekil E8. İnsan serebral korteksinin katmanlarının gösterimi

E.2.3 İnsanda Motor Topografik Harita

Motor korteksin insandaki topografik haritası aşağı sınıf hayvanlarınkinden çok daha farklıdır. Çünkü insanda, aşağı sınıf hayvanlarda bulunmayan iki önemli yetenek gelişmiştir. Bunlarda 1) elleri, başparmak ve parmakları kullanma yeteneği olağanüstü gelişerek yüksek el becerisi kazanılmıştır, 2) konuşma için ağız dudak, dil ve yüz kasları kullanılmaktadır. Bu nedenle el, ağız ve yüz bölgeleri insan motor korteksinde yüksek derecede temsil edilmektedir. (Bkz. Şekil E4)

Şekilde Penfield ve Rasmussen (1950) tarafından hazırlanan vücuttaki çeşitli kas alanlarının motor korteksteki haritaları görülmektedir. Bu, insanda beyindeki cerrahi girişimler sırasında motor korteksin çeşitli alanlarını uyarma yoluyla çizilmiştir. Şekilde bütün primer korteksin yarıdan fazlasının ellerin ve konuşma kaslarının kontrolü ile ilgili oluşuna dikkat ediniz. Motor korteksteki bu alanların nokta nokta uyarılması, kasların tek tek hatta bazen tek bir kasın bir bölümünün kasılmasına neden olur. Öte yandan primer kortekste, daha düşük derecede bir temsile sahip olan, gövde alanının elektriksel stimülasyonu genellikle bir kas gurubunun kontraksiyonunu sağlar.

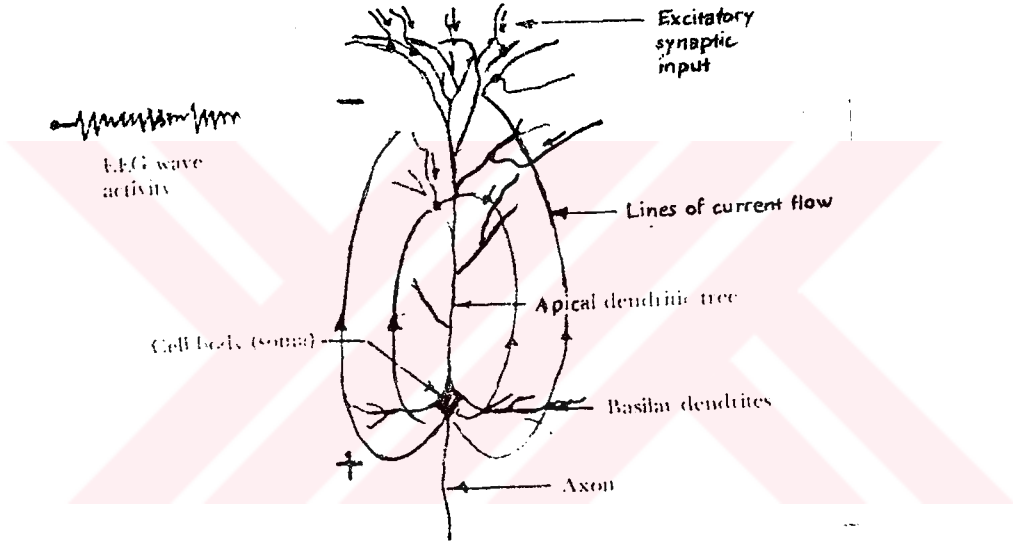
E.3.1 Beyinden Gelen Elektriksel Potansiyeller

Kortikal yüzeye yapıştırılan bir elektrod ile uzaktaki bir referans elektrodunun arasındaki elektriksel potansiyel farkını kaydederken, esasında bir dizi etkin elemanı içeren iletken bir ortamın sınırlarında oluşan bileşke alan potansiyelini kaydetmekteyizdir.

Korteks elektrofizyolojisinin incelenmesiyle, normal durumlarda, aksonlarda iletilen aksiyon potansiyellerinin, aksonların yüzeylerinin civarında her yöne gitmelerinden ve asenkron olarak bu gerilimleri üretmelerinden, yüzey kortikal kayıtlarına çok az etkileri olduğu bilinmektedir. Bu yüzden bu potansiyellerin net etkisi ihmal edilmektedir.

Bu olaya bir istisna, bir kortikal bölgenin eşzamanlı stimülasyonuna karşı verilen uyarı yanıtlarıdır. Elektrofizyologların yüzey kaydı incelemeleri sonucunda, çeşitli uyarılara verilen cevapların, kortikal hücrelerin yerel postsinaptik potansiyelleri olduğu belirlenmiştir. Yüzeyden kaydedilen bir potansiyel değişimi, o yüzey bölgesi ile uzaktaki referans elektrodu arasındaki net potansiyel (iR) düşümü (farkı) olmaktadır. Ne var ki, eğer kortikal hücrelerin tüm hücre gövdeleri ve dendritleri, kortikal yapı içinde gelişigüzel yerleştirilmiş olsalardı, bunlardan gelecek sinaptik akımların toplam etkisi de sıfır olacaktır. Dolayısıyla yüzeyden kaydedilen herhangi bir elektriksel değişim, korteks içindeki bazı hücrelerin düzenli ve simetrik yerleşiminden kaynaklanmak zorundadır.

Korteks anatomisine dayanarak, bu cevabı yaratan mekanizmanın uzun apikal dendritleri birbirine paralel olan dikey olarak yönlendirilmiş piramid hücrelerinin olduğu düşünülebilir. Bir hücrenin bir bölümünde diğerine göre oluşan potansiyel değişimleri, içinden akımın akabileceği açık potansiyel alanları yaratır ve bunlar da kortikal yüzeyden ölçülebilir. (Şekil E9)



Şekil E9. Tipik bir piramidal hücrenin apikal dendrit ağacına net bir eksitör giriş yapıldığında açığa çıkan kortikal alan potansiyellerinin elektrojenizi

Apikal dendrit ağacına gelen sinaptik girişler, dendrit zarında depolarizasyona neden olurlar. Sonuçta altesik akım, dendritlerin

sitoplazmik yapısı ve piramid hücrelerinin gövdelerinden yola çıkıp, civardaki ekstraselüler iletken ortam üzerinden tekrar sinaptik bölgelere kadar kapalı bir yol oluşturur. Akım akışının hatlarının doğrultusunda bakıldığında, soma civarındaki ekstraselüler ortam bir (+) kaynak gibi davranırken, apikal dendrit ağacının üst kısmı ise bir (-) çökme (sink) noktası gibi davranır. Bu şekilde ortaya çıkan ve kortikal yüzeyden kaydedilen gerilimlerin değerleri, bu postsinaptik potansiyellerin işaretine, doğrultusuna ve ölçüm noktasına göre uzaklığına bağımlı olmaktadır. Her bir postsinaptik potansiyelin etkisini radyal olarak oryante edilmiş bir dipol şeklinde düşünebiliriz. Dolayısıyla sürekli bir sinaptik girişin, bir potansiyel dipoller serisi oluşturduğunu ve ortaya çıkan akım akışının ayrık ama uzay ve zamanda üst üste bindiğini söyleyebiliriz.

Neokorteksteki granüler hücrelerin yüzey kayıtlarına bir etkileri olmamaktadır. Hacimsel olarak sınırlı olan dendrit ağaçları hücre gövdeleri üzerinde radyal şekillerde düzenlenmiş olduklarından, dendritlerle hücre gövdesi arasında oluşan yük farkından dolayı akan akımların toplamaları, uzak bir mesafeden yapılan kortikal kayıtlarda sıfır olmaktadır.

Özetlemek gerekirse, piramidal hücrelerin apikal dendritleri, korteksin üst yüzeyini aynı doğrultuda ve yoğun şekilde sarmış bir orman görüntüsündedirler. Her hücrenin dendritlerinin eksitör ve inhibitör sinaptik uçları aktif oldukça, akımlar geri kalan dendritler ve hücre gövdeleri arasında akım kaynakları ve çökmeleri şeklinde akarlar. Hücre-dendrit ilişkisine sürekli olarak kayan (hareket eden) dipoller şeklinde bakabilir ve bu dipollerin doğrultuları ve şiddetlerindeki değişimlerin bir iletken hacim

(volume-conductor) içinde dalga türü titreşimler yarattıklarını düşünebiliriz. Toplam dendrit aktivitesi hücreye göre negatif ise, hücre hem depolarize olmuş, hem de çok uyarılabilir durumdadır. Aktivitenin pozitif olduğu durumda hücre hiperpolarize ve az uyarılabilir durumdadır.

E.4 Değişik Derecelerdeki Beyin Aktivitesinin Elektroensefalogramın Temel Ritmi Üzerine Etkisi

Beyin aktivitesinin derecesi ile, elektroensefalografik ritmin ortalama frekansı arasında genel bir bağlantı bulunmaktadır. Aktivite arttıkça, ortalama frekans giderek daha yüksek değerlere çıkmaktadır. Delta dalgaları stüpor, cerrahi anestezi ve uykuda; teta dalgaları, psikomotor epilepsi durumu ve süt çocuğunda; alfa dalgaları, tam istirahat hallerinde; beta dalgaları da şiddetli mental aktivite anlarında görülmektedir. Bununla beraber, mental aktivite sırasında genellikle dalgalar senkron olmaktan çok asenkron duruma geldiklerinden, kortikal aktivitenin yükselmesine karşın, gerilim önemli ölçüde düşer. (Bkz. Şekil E10)

E.5 Elektroensefalogramın Klinikte Kullanımı

EEG'nin en önemli kullanımlarından biri, çeşitli tipteki epilepsilerin tanısı ve beyinde epilepsiyi doğuran odağın bulunmasıdır. EEG, beyin tümörlerinin ya da öteki yer kaplayan lezyonların (bozukluklar) lokalizasyonu ile psikopatik bozuklukların bazı tiplerinin tanısında da kullanılabilir.

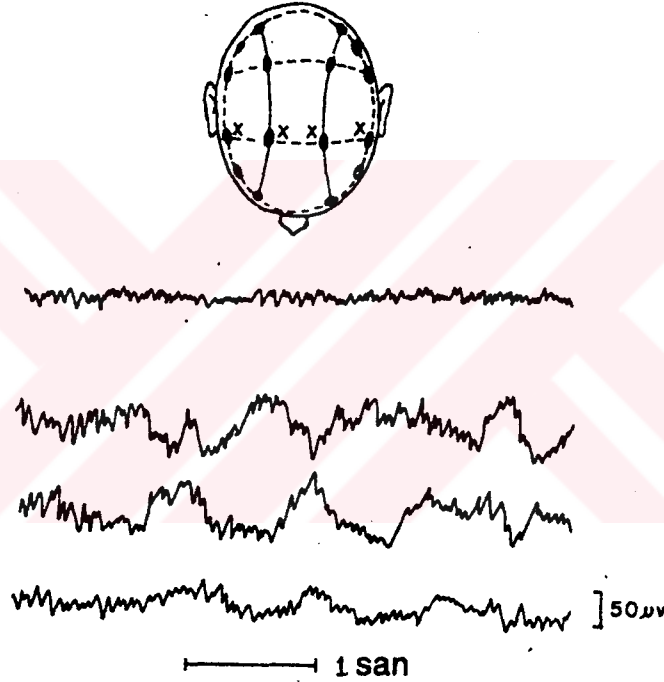
E.6.1 Beyin Tümörlerinin Lokalizasyonu

Beyin tümörlerinin lokalize edilmesinin iki yolu vardır. Bazı beyin tümörleri öyle büyük olur ki, beyin korteksinin belirli bir bölgesinden gelen elektriksel aktivite bloke olabilir. Bu durumda, beyin dalgalarının gerilimi tümör bölgesinde önemli ölçüde düşer. Bununla beraber daha sık olarak tümör, çevresindeki nöronal dokuyu sıkıştırarak bu alanların anormal elektriksel aktivitesine yol açar. Bu durumda, Şekil 14 'ün orta iki trasesinde (işaret,iz) görüldüğü gibi, EEG' de çok yüksek gerilimli senkron dalgalar kaydedilir. Saçlı deri üzerinden bu sivri potansiyellerin beyindeki kaynağını lokalize etmek, beyin tümörünün yerini belirleme bakımından büyük önem taşır.

Şekil E11 'in üst bölümünde 16 ayrı ayrı elektrodun saçlı deri üzerinde yerleşimleri, şeklin alt bölümünde ise, bu elektrodların şekilde X ile işaretlenen dördünden kaydedilen beyin dalgaları

görülmektedir. Bunların ikisinde yüksek gerilimli beyin dalgalarının kaydedildiğine ve ayrıca iki dalganın polaritesinin birbirine zıt olduğuna dikkat ediniz.

Bu zıt polarite sivri potansiyellerin kaynağının ilgili iki elektrodun arasındaki bir yerde olduğunu göstermektedir. Böylece beynin aşırı eksitabl alanı lokalize edilir ve bu da beyin tümörünün yerini belirlemede yardımcı olur.



Şekil E1Q EEG yardımıyla bir beyin tümörünün lokalizasyonu. Yukarıda elektrodların yerleştirilmesi, aşağıda, x harfiyle işaretlenen dört elektrottan alınan kayıt

EK II

E2.1 LAPLACE DENKLEMİNİN KÜRESEL KOORDİNATLARDA ÇÖZÜMÜ

Bir eliptik denklem alalım :

$$A(x,y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = F(x,y, \Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}) \quad (E1)$$

$A(x,y)C(x,y) > B^2(x,y)$ tüm x,y 'ler durumunda bu denklem eliptik bir denklem olur. F fonksiyonunun 0 olup, olmamasına göre de sırasıyla homojen veya inhomojen diye adlandırılır. $B=0$ koşulunun da ayrıca gerçekleştiği durumlarda (E1) nolu eliptik denklemin ismi iki boyutlu Laplace Denklemi olmaktadır. Kısaca Laplace operatörü tanımı kullanılırsa, üstteki denklem şöyle ifade edilmektedir :

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad (E2)$$

Bu denklemin ismi Laplace denklemidir. F 'nin sıfırdan farklı olduğu durumlarda inhomojen denklem elde edilir. Bu denklemin ismi de Poisson denklemidir :

$$\nabla^2\Psi = -4\pi\rho \quad (E3)$$

Bu iki denklemde eliptik denklemler olduklarından, kapalı sınırlar için çözümlerinde Dirichlet veya Neumann koşullarına gereksinim

duyarlar. (E2) nolu denklemin bir özelliği de Ψ çözümünün herhangi bir maksimum veya minimum içermemesidir.

Her iki denklemin de fizikte ayrı yerleri vardır. Örneğin Laplace denklemi, elektrostatik veya yerçekimi problemlerinde, bu alanların çözümlerini bulmada kullanılırken, bir akıma ait kaynakların, çökmelerin ya da bir kuvveti yaratan yüklerin varlığı durumunda gene alanları bulmada (Ψ 'nin hesaplanması) Poisson denklemi kullanılmaktadır. (E3)'teki ρ niceliği, yükün veya kaynağın yoğunluğudur.

E2.2 3 BOYUTLU LAPLACE DENKLEMİNİN KÜRESEL KOORDİNATLARDAKİ ÇÖZÜMÜ

Üç boyutlu Laplace denkleminin kartezyen koordinatlardaki açılımı aşağıdaki gibidir :

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (E4)$$

Bu denklemi küresel koordinatlarda (r, θ, ϕ) yazmak için gerekli dönüşümler yapılırsa,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \tan^{-1} \left[(1/z) \sqrt{x^2 + y^2} \right]$$

$$\phi = \tan^{-1}(y/x)$$

küresel koordinatlardaki Laplace denklemi aşağıdaki gibi yazılır :

Bu denkleme genelleştirilmiş Legendre denklemi denir ve çözümleri asosiye Legendre fonksiyonlarıdır. Asosiye fonksiyonlara geçmeden önce, özel bir hal olan $m^2=0$ durumunu veren temel Legendre Diferansiyel denkleminin kuvvet serileri cinsinden çözümü incelenecektir. Aranan çözümün fiziksel bir potansiyeli temsil edebilmesi için tek değerlikli, sonlu ve $-1 \leq x \leq 1$ aralığında sürekli olması gerekir. Çözüm aşağıdaki gibi bir kuvvet serisi ile ifade edilebilir :

$$P(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (E7)$$

α belirlenecek bir parametredir. (E7) (E6)'ya yerleştirilirse,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{(\alpha+j)(\alpha+j-1)a_j x^{\alpha+j-2} - [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - n(n+1)]a_j x^{\alpha+j}\} = 0 \quad (E8)$$

x 'in her bir kuvveti için önündeki katsayı yok olmalıdır. $j=0,1$ için

$$\begin{aligned} \text{eğer } a_0 \neq 0 &\Rightarrow \alpha(\alpha-1) = 0 \\ \text{eğer } a_1 \neq 0 &\Rightarrow \alpha(\alpha+1) = 0 \end{aligned}$$

ve j 'nin genel çözümü için

$$a_{j+2} = \left[\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - n(n+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} \right] a_j \quad (E9)$$

bulunur. $\alpha=0$ veya $\alpha=1$ seçerek $\alpha=0$ için serinin sadece çift kuvvetleri, $\alpha=1$ içinse tek kuvvetli olacağı görülür. Her iki durum için aşağıdaki özellikler ispatlanabilir :

- 1) Seriler, n değerinden bağımsız olarak $x^2 < 1$ için yakınsar.
- 2) Seriler $x = \pm 1$ 'de sonlanmadıkları sürece ıraksar.

$x=\pm 1$ 'de sonlu olan bir çözüm arandığından, serilerin sonlanmaları istenir. ve j sıfır veya pozitif tamsayılar olduklarından, (E9) rekürans denklemi yalnızca n 'nin sıfır veya pozitif tamsayı olması durumunda sonlu kalacaktır. Ama bu durumda bile $x=\pm 1$ 'de serilerden biri yakınsamaktadır. Her iki durumda da polinomlardaki en yüksek dereceli x , x^n bir sonraki x^{n+2} olmaktadır. Genel kabule göre, bu polinomlar $x=\pm 1$ 'de birim değerlikli olacak şekilde normalize edilmişlerdir. Bunlardan birkaçı şöyledir :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{aligned}$$

Legendre polinomlarını bulmada kullanılan bir başka yaklaşım da Rodrigue formülüdür :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (\text{E10})$$

Legendre polinomları, $-1 \leq x \leq 1$ aralığında tam ortogonal fonksiyonlar kümesi oluştururlar. Buna göre diferansiyel ifade P_n ve P'_n için :

$$\int_{-1}^1 P'_n(x) \left[\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right) + n(n+1)P_n(x) \right] dx = 0 \quad (\text{E11})$$

olmalıdır. Sonuç olarak

$$\int_{-1}^1 P'_n(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n'n} \quad (\text{E12})$$

bulunur.

E2.3 Dönel Simetri Durumunda Sınır Değer Problemi

Konunun başında verilen (E2) nolu Laplace denkleminin küresel koordinatlardaki çözümünden görüleceği gibi, dönel simetrisi olan bir problem için $m=0$ alınmalıdır. Bu tür bir problemin genel çözümü aşağıdaki gibi olur :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad (E13)$$

A_n ve B_n katsayıları sınır koşullarından bulunmaktadır. Bu çözüm, tezdeki sadece radyal yönde bileşeni olan bir dipolün gerilim dağılımını belirlemede kullanılmıştı. Simülasyon çalışmalarında uygun şekillere bakılırsa (Bkz. Ş4.4, Ş4.5), gerçekten de bu dağılımların ϕ açısından bağımsız olduğu görülebilir.

E2.4 Asosiye Legendre Polinomları ve $Y_{nm}(\theta, \phi)$ Küresel Harmonikleri

Dönel simetrinin olmadığı durumlarda, ($m \neq 0$), $P_n(\cos \theta)$ genelleştirilerek n ve m 'ye aynı anda bağımlı bir çözüm elde etmek gerekir. Genel Legendre fonksiyonları gibi, $-1 \leq x \leq 1$ aralığında bu yeni fonksiyonların da sonlu çözümlerinin olabilmesi için $n \geq 0$ ve $m \leq |n|$ olmalıdır. Bu özelliklere sahip fonksiyonlara $P_n^m(x)$ Asosiye Legendre fonksiyonları denir. Pozitif m 'ler için

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (E14)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Sabit bir m için bu fonksiyonlar x 'in aynı aralığında gene n indeksine göre ortogonal bir set oluştururlar. Legendre fonksiyonlarının ortogonalliğinden yararlanarak :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_n^m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n'n} \quad (E15)$$

bulunur. Hatırlanacağı gibi Laplace denkleminin çözümü olan Ψ alanı (r, θ, ϕ) 'nin bileşenleri olan üç farklı fonksiyonun çarpımıyla oluşturulmuştur. Şimdi de açısal etkenlerin tümünü kapsayan ve birim küre üzerinde oluşturulacak ortonormal fonksiyonları bulmak gerekmektedir. Hem θ , hem de ϕ 'ye bağımlı çözümler $Y_{nm}(\theta, \phi)$ ile gösterilirler ve küresel harmonikler diye adlandırılırlar. m 'nin farklı değerleri için şu isimleri alırlar :

- 1) $m=0$ ise, zonal harmonikler (dönel simetrisinin olduğu durum)
- 2) $m=n$ ise, sektoral harmonikler,
- 3) $0 < m < n$ ise, tesseral harmonikler.

Başta Laplace denklemi üç bağımsız fonksiyona ayrıldıktan sonra, m 'ye bağımlı çözümler $\cos(m\phi)$, $\sin(m\phi)$ olarak verilmişti. Bu çözümleri $Q_m(\phi) = e^{im\phi}$ şeklinde de vermek mümkündür. Bu m indeksli fonksiyonlar da $0 \leq \phi \leq 2\pi$ aralığında tam bir ortogonal fonksiyonlar kümesi oluştururlar. n indeksli olup, aynı m 'ler için $P_n^m(\cos \theta)$ fonksiyonları da $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ aralığında aynı türden bir küme oluşturduklarından, bu iki fonksiyonun çarpımı $P_n^m Q_m$ de n ve m indisleriyle belirtilen birim küre üzerinde tam ortogonal küme oluştururlar. $Y_{nm}(\theta, \phi)$ fonksiyonlarının tanımı normalizasyonla beraber aşağıdaki gibidir :

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (E16)$$

Normalizasyon ve ortogonallik koşullarından

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{n'm'}^*(\theta, \phi) Y_{nm}(\theta, \phi) = \delta_{n'n} \delta_{m'm} \quad (E17)$$

çıkar. Bu durumda, küresel koordinatlarda incelenen bir sınır değer probleminin, küresel harmonikler ve r 'nin kuvvetleri cinsinden genel çözümü aşağıdaki gibidir :

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [A_{nm} r^n + B_{nm} r^{-(n+1)}] Y_{nm}(\theta, \phi) \quad (E18)$$

Green Fonksiyonu Açılımı

$1/r$ çözümü orijinde bulunan bir kaynağın Green fonksiyonudur. Kaynak $r=r_0$, $\theta=0$ noktasında ise, Green fonksiyonu :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta), r > a \quad (E19)$$

olurken, kaynak uzayda herhangi bir nokta olan r_0, θ_0, ϕ_0 koordinat larındaysa, genel açılım şöyle olur :

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos [m(\phi - \phi_0)] \begin{cases} r^n / r_0^{n+1}, r_0 > r \\ r_0^n / r^{n+1}, r_0 < r \end{cases} \quad (E20)$$

Özgeçmiş

1970 yılında İstanbul'da dünyaya gelen Ata Akın, 1981 yılında ilk ciddi eğitimine İstanbul Amerikan Robert Lisesi'nde başladı. 1988 yılında liseyi bitirirken, Robert Kolej'i temsil etme özelliğine sahip yedi öğrenciye verilen Bizim Tepe bursunu kazandı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nü kazandı. Lisans eğitimini 1993 yılında iyi dereceyle bitirdi ve hemen o yıl aynı fakültenin Biyomedikal Mühendisliği yüksek lisans programına kaydoldu. Yüksek lisans eğitimini 1995 Haziran'ında tamamlayan Akın, 1994 Şubat'ından 1995 Eylül'üne kadar Boğaziçi Üniversitesi Meslek Yüksek Okulu Elektronik Programı'nda tam zamanlı Öğretim Görevlisi statüsünde ders vermiştir.