

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI ORTOTROPİK PLAKLARIN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Memet YILDIRIM

Anabilim Dalı: İnşaat Mühendisliği

Programı: Yapı Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Mehmet BAKİOĞLU

HAZİRAN 2007

**BAZI ORTOTROPİK PLAKLARIN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Memet YILDIRIM
501011082**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet BAKİOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Hasan ENGİN (İ.T.Ü.)
Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)**

HAZİRAN 2007

ÖNSÖZ

Sunulan bu tez ile ilgili olarak tüm çalışmam boyunca ilgi ve desteğini esirgemeyen, sürekli olarak değerli bilgilerinden faydalandığım sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU' na teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatımda bana destek olarak bugünlere gelmemi sağlayan aileme ve özellikle ablam Yıldız YILDIRIM' a şükranlarımı sunarım.

Bu tezin yazılmasında ve sunulmasında bana yol gösteren arkadaşım Araş. Gör. Dr. Fatih SÜTCÜ' ye yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2007

İnş. Müh. Memet YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TABLO LİSTESİ	viii
ÖZET.....	xi
SUMMARY	xii
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ	1
1.1 GİRİŞ	1
1.2 ÇALIŞMANIN AMACI ve KAPSAMI	4
BÖLÜM 2.....	5
MALZEME SABİTLERİ ve PLAK DENKLEMLERİ	5
2.1 MALZEME SABİTLERİ ve HOOKE YASALARI	5
2.2 İZOTROPİK PLAK DENKLEMLERİ.....	12
2.3 ORTOTROPİK PLAK DENKLEMLERİ.....	20
BÖLÜM 3.....	30
ANALİTİK ÇÖZÜMLER.....	30
3.1 BASİT ÇOK TERİMLİ ÇÖZÜMLER	30
3.2 NAVIER ÇÖZÜMÜ	34
3.3 LEVY YÖNTEMİ.....	36
BÖLÜM 4.....	38
SAYISAL ÇÖZÜMLER.....	38
4.1 SONLU FARKLAR YÖNTEMİ	38
4.2 ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAK PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR İLE FORMÜLE EDİLMESİ.....	43
4.3 SINIR ŞARTLARI VE DENKLEM SAYISI.....	49
4.4 DOĞRUSAL DENKLEM TAKIMININ ÇÖZÜMÜ İÇİN DAİRESEL DÖNGÜ	57
4.5 ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAK DENKLEMLERİNİN BOYUTSUZLAŞTIRILMASI.....	58
4.6 ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAK PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜMÜ.....	61
4.7 ANALİTİK ÇÖZÜM İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜN KARŞILAŞTIRILMASI	112
BÖLÜM 5.....	118
SONUÇLAR VE TARTIŞMA	118
KAYNAKLAR	119
ÖZGEÇMİŞ.....	123

SEMBOL LİSTESİ

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: x, y ve z doğrultularındaki birim uzamalar
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: x, y ve z eksenlerine paralel normal gerilme bileşenleri
E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}	: x, y ve z doğrultularındaki Elastisite Modülleri uzamalar
D_x, D_y, D_{xy}, D_1	: Plak eğilme rijitliği
I_x, I_y	: Plak atalet momentleri
G	: Plak kayma modulleri
ν_x, ν_y, ν_z	: x, y ve z doğrultularındaki poisson oranları
h	: Plak kalınlığı
w	: Plagın z doğrultusundaki deplasmanı
a, b	: Plagın net açıklığı
M_x, M_y	: Plagın x ve y eksenlerine dik kesitlerinin birim boyuna gelen eğilme momentleri
M_{xy}	: Plagın x eksenine dik kesitlerinin birim boyuna gelen burulma momenti
Q_x, Q_y	: Plagın x ve y eksenlerine dik kesitlerinin birim boyuna gelen z eksenine paralel kesme kuvvetleri
p	: Plaga etkiyen yükün şiddeti
V_x, V_y	: Plak mesnet tepkileri
R	: Plak köşe kuvveti

λ_x, λ_y	: x ve y doğrultularındaki sonlu farklar ağı genişliği
α	: Plağın x doğrultusundaki kenarın y doğrultusundaki kenara oranı
r_x, r_y	: Plak eğrilik yarıçapları
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	: xy, xz ve yz yüzeylerinde oluşan kayma gerilmeleri

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1: Sabit Kalınlıklı Plak ve Koordinat Eksenleri	12
Şekil 2.2: Orta Düzlem Üzerindeki Bir A Noktasının Yer Değiştirmesi	13
Şekil 2.3: Sonsuz Küçük Eleman	14
Şekil 2.4: Düzlem Kesitin Deformasyonu	14
Şekil 2.5: Sonsuz Küçük Plak Elemanının Dengesi	16
Şekil 2.6: $x = 0$ Noktasında Ankastre Mesnetlenmiş Plak	18
Şekil 2.7: $x = 0$ Noktasında Sabit Mesnetlenmiş Plak.....	18
Şekil 2.8: $x = L$ Noktasında Serbest Kenar	19
Şekil 2.9: $x =$ Sabit Kenarında M_{xy} Değişimi	20
Şekil 2.10: x ve y Doğrultusunda Çelik Donatılar ile Donatılmış Betonarme Döşeme Plağı.	23
Şekil 2.11: Dalgalı Sac Plak	25
Şekil 2.12: Eşit Aralıklı Takviye Levhaları ile Donatılmış Plak	26
Şekil 2.13: Tek Taraflı Eşit Aralıklı Nervürlerle Donatılmış Plak	27
Şekil 2.14: Betonarme Izgara Sistem	28
Şekil 3.1: Plak Ötelenmesi Hareketi.....	30
Şekil 3.2: Eğik Ötelenme Hareketi	31
Şekil 3.3: Dönme Hareketi	31
Şekil 3.4: Üniform Eğilme.....	32
Şekil 3.5: Basit Burulma Durumunda Plak.....	33
Şekil 3.6: Dört Kenarı Sabit Mesnetlenmiş Plak	34
Şekil 3.7: Karşılıklı İki Kenarı Sabit Mesnetlenmiş Ortotropik Dikdörtgen Plak.....	36
Şekil 4.1: Tek Boyutta Sonlu Farklar	39
Şekil 4.2: Plaklarda Sonlu Farklar Ağı	40
Şekil 4.3: Türev Fonksiyonları Katsayılar Şablonu.....	43
Şekil 4.4: Ortotrop Plaklar İçin Sonlu Farklar Katsayılar Şeması.....	46
Şekil 4.5: Fiktif Yerdeğiştirmeler için Sonlu Farklar Ağı'nın Plaklarda Uygulanması	52
Şekil 4.6: Verilen Şartlar Altında Oluşan Deplasmana Ait Grafik.....	72
Şekil 4.7: Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plağın Çökmesi	81

Şekil 4.8: Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plağın Çökmesi	91
Şekil 4.9: Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plağın Çökmesi	101
Şekil 4.10: Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre İki Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plağın Çökmesi	111

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Plywood Plak İçin Elastik Sabitler. Birimler: GPa	25
Tablo 4.1 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş plakta yer değiştirmeler.	54
Tablo 4.2 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı sabit mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.....	54
Tablo 4.3 Sabit yayılı yükle yüklenmiş x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı sabit olarak mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.....	55
Tablo 4.4 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.....	55
Tablo 4.5 Sabit yayılı yükle yüklenmiş x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.	56
Tablo 4.6 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş üçkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş bir kenarı boşta olan ortotropik plakta yer değiştirmeler.	56
Tablo 4.7 Sabit yayılı yükle yüklenmiş x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş üçkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş bir kenarı boşta olan ortotropik plakta yer değiştirmeler.....	57
Tablo 4.8 Verilen Şartlar Altında Oluşan Deplasmanlar.....	62
Tablo 4.9 Verilen Şartlar Altında Oluşan M_x Momentleri	63
Tablo 4.10 Verilen Şartlar Altında Oluşan M_y Momentleri	64
Tablo 4.11 Verilen Şartlar Altında Oluşan M_{xy} Momentleri	65
Tablo 4.12 Verilen Şartlar Altında Oluşan Q_x Kesme Kuvvetleri.....	66
Tablo 4.13 Verilen Şartlar Altında Oluşan Q_y Kesme Kuvvetleri.....	67
Tablo 4.14 Verilen Şartlar Altında Oluşan V_x Mesnet Tepkileri	68
Tablo 4.15 Verilen Şartlar Altında Oluşan V_y Mesnet Tepkileri	69
Tablo 4.16 Verilen Şartlar Altında Oluşan R Köşe Kuvvetleri.....	70
Tablo 4.17 Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plağa Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme	71
Tablo 4.18 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü, Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları	73
Tablo 4.19 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz M_x Momentleri.....	74
Tablo 4.20 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz M_y Momentleri.....	75

Tablo 4.21 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mxy Momentleri	76
Tablo 4.22 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri	77
Tablo 4.23 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri	78
Tablo 4.24 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Vx Ve Vy Mesnet Tapkileri	79
Tablo 4.25 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Rxy Köşe Kuvvetleri	80
Tablo 4.26 Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plağa Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme	82
Tablo 4.27 Sabit Yayılı Yükle Yüklü, Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları	83
Tablo 4.28 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mx Momentleri	84
Tablo 4.29 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz My Momentleri	85
Tablo 4.30 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mxy Momentleri	86
Tablo 4.31 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri	87
Tablo 4.32 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri	88
Tablo 4.33 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Vx Ve Vy Mesnet Tapkileri	89
Tablo 4.34 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Rxy Köşe Kuvvetleri	90
Tablo 4.35 İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve 2 Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plağa Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme	92
Tablo 4.36 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları	93
Tablo 4.37 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mx Momentleri	94
Tablo 4.38 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz My Momentleri	95
Tablo 4.39 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mxy Momentleri	96
Tablo 4.40 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri	97
Tablo 4.41 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri	98

Tablo 4.42 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olanı Dikdörtgen Plak Boyutsuz V_x Ve V_y Mesnet Tapkileri.....	99
Tablo 4.43 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz R_{xy} Köşe Kuvvetleri.....	100
Tablo 4.44 İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plaga Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme	102
Tablo 4.45 Sabit Yayılı Yükle Yüklü, İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları	103
Tablo 4.46 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz M_x Momentleri	104
Tablo 4.47 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz M_y Momentleri	105
Tablo 4.48 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz M_{xy} Momentleri	106
Tablo 4.49 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Q_x Kesme Kuvvetleri	107
Tablo 4.50 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Q_y Kesme Kuvvetleri	108
Tablo 4.51 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz V_x Ve V_y Mesnet Tapkileri.....	109
Tablo 4.52 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz R_{xy} Köşe Kuvvetleri	110
Tablo 4.53 İki Kenarı Ankastre ve İki Kenarı Sabit Olarak Mesnetlenmiş Plagın Analitik Çözümleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ile Bulunan Çözümlerinin Karşılaştırılması.	115
Tablo 4.54 Dörtkenarı Ankastre Olarak Mesnetlenmiş Plagın Analitik Çözümleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ile Bulunan Çözümlerinin Karşılaştırılması.	116
Tablo 4.55 Dörtkenarı Sabit Olarak Mesnetlenmiş Plagın Analitik Çözümleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ile Bulunan Çözümlerinin Karşılaştırılması.....	117

ÖZET

Yüzeysel taşıyıcı sistemlerden biri olan plaklar, günümüzde yalnızca yapı mühendisliğinde değil, uçak ve gemi mühendisliği gibi birçok alanda da kullanılan sistemlerdir. Belirlenen kabullere göre modellenen plaklardan, denge denklemleri kullanılarak, plak denklemlerinin diferansiyel formu elde edilir. Plak denklemlerinden, basit diferansiyel denklem çözümleri yanında çeşitli analitik yöntemler kullanılarak da kesin çözüm elde edilebilir. Analitik yöntemler kullanılarak çözüme ulaşılamadığı veya çözümün zor olduğu durumlarda, sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal çözüm yöntemlerine başvurulur. Bu çalışmada, çeşitli mesnetlenme ve yükleme durumlarına göre plakların malzeme bakımından özel bir hali olan bazı ortotropik dikdörtgen plakların çözümü, sayısal bir çözüm yöntemi olan sonlu farklar yöntemi kullanılarak bilgisayar ortamında yapılmıştır. Çalışmada sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar, literatürde bulunan bazı izotropik ve ortotropik plakların analitik yöntemle elde edilmiş sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçların, analitik yöntemler ile elde edilen sonuçlara çok yakın olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY

Plates, as a special type of shell systems are widely used in not only structural engineering field, but also many other fields such as naval or aerospace engineering. For design purpose, plate equations can be obtained in a differential form by using the equation of equilibrium evaluated from the plates modelled by suitable assumptions. Besides simple differential equation solutions, exact solutions can be evaluated from plate equations with the help of different analytical methods as well. When it is impossible or hard to evaluate the results with analytical methods, numerical solution methods *e.g.* finite differences or finite element method can be used. In this study, orthotropic rectangular plate equations are solved on computer for various supporting and loading conditions by using finite differences method. Results are compared with the results of previous studies using analytical methods. It was shown that there is a substantial correspondence between the compared results.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 GİRİŞ

Kalınlıkları, taşıyıcı yöndeki boyutları yanında çok küçük olan sistemler yüzeysel taşıyıcı sistemler olarak adlandırılırlar. Kalınlıkların orta noktalarını birleştiren yüzey de orta yüzey olarak adlandırılır. Orta yüzey bir düzlem ise düzlemsel taşıyıcı sistemler olarak adlandırılır. Dış yükler de orta düzleme dik olarak uygulanıyorsa plak ismini alırlar.

Plaklar, yalnızca yapı mühendisliğinde kullanılmayıp, uçak ve gemi mühendisliği gibi birçok mühendislik dalında da taşıyıcı düzlemlerin oluşturulmasında kullanılan sistemlerdir.

Plak sistemlerin modellenmesi yapılırken göz önünde bulundurulması gereken parametrelerden biri, kullanılan malzemedir. Tüm doğrultularda birbirinden bağımsız özellikler gösteren malzemeler anizotropik, birbirlerine dik üç düzleme göre elastik simetri özellikleri bulunan malzemelere ortotropik, tüm doğrultularda aynı özellikleri gösteren malzemeler ise izotropik malzeme olarak adlandırılırlar. Bunun dışında plaklar, geometrilerine göre, dikdörtgen plaklar ve dairesel plaklar olarak iki önemli ve büyük grup oluştururlar. Mesnetlenme şekilleri ise, yapı amaç ve ihtiyaçlarına göre, ankastre mesnet, sabit mesnet ve boşta kenar halinin kombinasyonlarından meydana getirilir.

Anizotrop plakların ve kabukların analizi ile ilgili ilk çalışmalar ortotropi hali için sınırlandırılmıştır. Bu konu ile ilgili olarak ilk çalışmayı Gehring 1860 yılında yayınladığı, statik yükle yüklü durumlar için ortotropik plaklar teorisinde yapmıştır.

[1]. Ortotropik plakların titreşimini ise Hearmon dikdörtgen, ahşap ve plywood plaklar için temel titreşim frekanslarını incelemiştir [2]. Çalışmasında Rayleigh-Ritz metodunu kullanarak, çeşitli şekillerde sabit ve ankastre mesnetlenmiş plaklara uygulayarak yapmış ve sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır. Elastik

plakların serbest titreşimleri ile ilgili çalışmalar 1969 yılında Leissa tarafından yapılmıştır [3].

Lechnitzky, klasik plak teorisini temel alan tek katmanlı anizotrop plak teorisi, özel ortotropik plakların eğilme, stabilite ve titreşim problemlerini ele almak yoluyla sunan geniş kapsamlı kitabını 1957 yılında yayınlamıştır [4]. Genel üniform yükle yüklü ortotropik plakların çözümünü de Kantorovich' in birinci iterasyon metodu ile yapmıştır.

Stavsky, 1959 yılında anizotrop ince plaklar teorisini formülize etmiştir [5]. 1961 yılında Reissner ve Stavsky, Smith ve Lechnitzky' nin daha önce yapmış oldukları gerilme-eğilme çiftinin etkilerini anizotrop ince plaklar için tekrar ele almışlardır [6]. Bu problemin örneklerini silindirik eğilme tipi için Stavsky' de görülmektedir. Hoff ile Stavsky' nin beraber yapmış oldukları çalışmaları Dietz 1969 yılında "Composite Engineering Laminates" adıyla yayınlamıştır [7-8].

Waddoups 1965 yılında, ince tabakalı özel ortotrop plakların titreşim karşısındaki davranışlarını, hem deneysel hem de analitik olarak ele alarak incelemiştir [9]. 1967 yılından beri "Journal of Composite Materials" dergisi anizotropik ince plak problemleri üzerinde yoğunlaşmıştır. 1968 yılında, bölümleri birçok araştırmacı tarafından birleşik malzeme ve yapıların temel problemleri konusunda yapılan çalışmaları Tsai tarafından bir araya getirilerek hazırlanan "Composite Materials Workshop" kitabında yayınlanmıştır [10]. Ashton ve Anderson bor-epoksi levhaların doğal titreşim modlarını Rayleigh-Ritz formülleri ile incelemiştir [11].

Whitney ve Leissa genel katmanlı anizotrop plakların temel denklemlerini Von Karman plak denklemlerine paralel olarak formülize etmişlerdir [12]. Bunu takiben Whitney ve Leissa, benzer bir çalışmayı tam Fourier trigonometrik serileri kullanarak yeniden yapmışlardır [13].

Ashton ve Waddoups, yine 1969 yılında tek katmanlı anizotrop plak problemleri için bir enerji formülünü, doğrusal stabilize analizi; frekans ve mod şekili hesabı ve düzlemsel yüklemelerden doğan yer değiştirmelerin analizini de göz önünde bulundurarak sunmuştur [14].

Kicher ve Mandell yine 1969 yılında katmanlı plaklar için kritik burkulma yükünü deneysel olarak incelemişlerdir [15]. Deneysel sonuçlarla karşılaştırma yapmak amacı ile stabilizeyi; kalsik ortotropik plak denklemleri ile analiz etmişlerdir.

1970 yılında Ashton, anizotrop plakların sınır koşullarını incelemiştir [16]. Sonuç olarak, Rayleigh-Ritz metodunu kullanılırken bir dizi karakteristik kiriş fonksiyonunu kullanmanın, özel ortotropik plakların her durumu için mükemmel sonuç verdiğini ortaya koymuştur. Ashton'un çalışmasının, burkulma yükü, doğal frekans, mod şekilleri ve yer değiştirmelerin belirlenmesinde tatminkâr sonuçlar verdiği fakat gerilmeler, momentler ve köşe reaksiyonları için iyi sonuç vermediği görülmüştür.

Ankastre ve basit mesnetli, simetrik olmayan anizotrop ince plakların çapraz yüklemeler altında hesabı için Whitney, Reissner ve Stavsky'nin temel denklemlerini kullanmıştır [17].

Ümit Uzman, İstanbul Teknik Üniversitesinde 1985 yılında hazırladığı doktora tezinde ortotrop malzemeden yapılmış ince dikdörtgen plakların düzlem içi dinamik kenar yükleri etkisindeki davranışlarını incelemiş ve sayısal yöntemlerle elde ettiği çözümler ile bir bilgisayar programı geliştirmiştir [18].

Zafer Kütüğü, 1992 yılında hazırladığı yüksek lisans tezinde izotrop plak denklemlerinin en genel çözümlerini değişkenlerin ayrılması metodu'nu ve Fourier serilerini kullanarak yapmıştır [19].

Batuhan Çalin, 1998 yılında hazırladığı yüksek lisans tezinde bazı izotrop plakların çözümlerini sonlu farklar yöntemlerini kullanarak yapmıştır [20].

Ali Ergün, 1996 yılında hazırladığı yüksek lisans tezinde üniform yükle yüklü çeşitli izotropik plakların çözümlerini sonlu elemalar yöntemi ile yapmış ve bunları analitik yöntem sonuçları ile karşılaştırmıştır [21]. 2002 yılında yaptığı doktora çalışmasında ise herhangi bir kuvvetler sisteminin başka kuvvetler sisteminden meydana gelen yerdeğiştirme üzerinde yaptığı virtüel işin, ikinci kuvvetler sisteminin ilk kuvvetler sisteminden meydana gelen yerdeğiştirme üzerinde yaptığı işe eşitliğini tanımlayan Betti karşılıklı teoremi temel alınarak yeni bir sonlu fark operatörü çıkararak sonlu farklar yöntemi ile yapmıştır [22].

1.2 ÇALIŞMANIN AMACI ve KAPSAMI

Belirlenen kabullere göre modellenen plaklardan, denge denklemleri kullanılarak, plak denklemlerinin diferansiyel formu elde edilir. Plak denklemlerinden, basit diferansiyel denklem çözümleri yanında, çift Fourier serileri (Navier yöntemi), tek Fourier serileri (Levy yöntemi) gibi çeşitli analitik yöntemler kullanılarak kesin çözüm elde edilebilir.

Analitik yöntemler kullanılarak çözüme ulaşamadığı veya çözümün zor olduğu durumlarda, sonlu farklar yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal çözüm yöntemlerine başvurulur. Bu yöntemler analitik yöntemlere çok yakın sonuçlar verebilmektedirler. Özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişmesi ve hızla bu gelişimini devam ettirmesi de sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesini ve sıkça kullanılmasını kolaylaştırmıştır.

Bu çalışmada, çeşitli mesnetlenme ve yükleme durumlarına göre bazı ortotropik dikdörtgen plakların çözümü, sayısal bir çözüm yöntemi olan sonlu farklar yöntemi kullanılarak bilgisayar ortamında yapılmıştır. Literatürde bulunan bazı izotropik ve ortotropik plakların kapalı çözümleri ile sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. Sonlu farklar yöntemi ile elde edilen sonuçların, analitik yöntemler ile elde edilen sonuçlara çok yakın olduğu gösterilmiştir.

BÖLÜM 2

MALZEME SABİTLERİ ve PLAK DENKLEMLERİ

Bu bölümde malzeme sabitleri tanımlandıktan sonra çeşitli malzemeler için Hooke yasaları elde edilecektir. Daha sonra da bu bağıntılardan yararlanarak önce izotropik malzeme için plak denklemleri daha sonra da ortotropik malzeme için plak denklemleri elde edilecektir. Son kısımda ise ortotropik plaklar için bazı analitik çözümler elde edilecektir.

2.1 MALZEME SABİTLERİ ve HOOKE YASALARI

Bir malzemede gerilme şekil değiştirme bağıntılarını teorik olarak elde etmek şu an için mümkün olmamaktadır. Malzemeler, kuvvet ve sıcaklık karşısında çok farklı davranışlar gösterirler. Malzemelerin göstermiş oldukları bu davranışları matematik olarak tek bir denklem veya denklem takımı ile açıklamak mümkün değildir. Bu nedenle, çeşitli malzeme tipleri için ideal malzeme davranışı tanımlayan ayrı bir takım denklemler kurma yoluna gidilir. Bu denklemlere bünye denklemleri adı verilir. Bu denklemler malzemenin fiziksel davranışlarını gözlem ve istatistiksel yöntemlerle ortaya koyan matematik formüllerdir. Bu kısımda bünye denklemlerinde bulunan sabitler hakkında bilgiler verilecektir.

Bir malzemede, yük ve şekil değiştirme arasında bağıntı doğrusal kabul edildiğinde, gerilme ile şekil değiştirme tansörleri birbirlerine aşağıda verilen şekilde bağlanabilir.

$$\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

Bu bağıntı toplama uylasımlı kullanarak

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada; σ_{ij} , gerilme tansörü, ε_{kl} , Cauchy birim şekil değiştirme tansörü ve c_{ijkl} ise elastik sabitlerin bulunduğu dördüncü mertebeden bir

tansördür. Bu tansöre elastik sabitler tansörü veya elastisite tansörü adı verilir. Elastik sabitler tansöründe 81 sabit vardır. Fakat ε_{kl} birim şekil değiştirme tansörü simetrik olduğundan $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ dır. Bu durumda c_{ijkl} tansörünün bileşenleri k ve l ye göre simetrik olurlar; dolayısıyla $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ yazılabilir. Bu nedenle bağımsız sabitlerin sayısı 27 azalır ve geriye 54 bağımsız sabit kalır. σ_{ij} gerilme tansörü de simetrik olduğundan c_{ijkl} katsayıları bu kez i ve j indislerine göre de simetrikdir; yani; $c_{ijkl} = c_{jikl}$ yazılabilir. Dolayısıyla bağımsız sabitlerin sayısı 18 azalarak geriye 36 bağımsız sabit kalır.

Gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin bağımsız altışar elemanları;

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma_1 & \sigma_{22} &= \sigma_2 & \sigma_{33} &= \sigma_3 \\
\sigma_{23} &= \sigma_4 & \sigma_{13} &= \sigma_5 & \sigma_{12} &= \sigma_6 \\
\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_3 \\
2\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4 & 2\varepsilon_{13} &= \varepsilon_5 & 2\varepsilon_{12} &= \varepsilon_6
\end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır ise (2.2) bağıntısı

$$\sigma_i = c_{ij} \varepsilon_j \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade matris formu aşağıda verilmektedir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Yukarıda verilen bağıntılara genel Hooke Yasaları adı verilir. Enerji esaslarında da yararlanıldığında (2.5) de görülen c_{ij} matrisinin simetrik olduğu görülür. Sonuç olarak $c_{ij} = c_{ji}$ bağıntısından dolayı, 21 bağımsız sabit kalır. Anizotrop malzemelerde; yani hiçbir doğrultuda simetri özelliği olmayan malzemelerde gerilme şekil değiştirme bağıntıları bu 21 sabit ile belirlenir ve bu sabitler deneylerle bulunur.

Bir malzemede genel halde 21 bağımsız elastik sabit olmasına karşın malzemede düzleme ve/veya eksene göre malzeme simetrisi özelliği var ise bağımsız sabitlerin sayısı azalır.

Monoklinik malzeme: Malzemede bir düzleme göre malzeme simetrisi varsa böyle malzemelere monoklinik malzeme adı verilir. Monoklinik bir malzemede bağımsız sabitlerin sayısı 13 dür. $x_1 - x_2$ eksen takımına göre simetri olması halinde (2.5) eşitliğinde bulunan matris aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Ortotropik malzeme: Bir cisimde birbirine dik iki düzleme göre malzeme simetrisi var ise malzeme sabitlerinin sayısı 9 dur. Bir cisimde birbirine dik iki düzleme göre malzeme simetrisi var ise birbirine dik üç düzleme göre simetri şartları otomatik olarak sağlanır. Dolayısıyla birbirine dik üç düzleme göre simetrisi olan cisimlerde bağımsız malzeme sabitlerinin sayısı da dokuzdur. Bu tür malzemelere Ortogonal Anizotropik kelimelerinin kısaltılmışı olan Ortotropik malzeme adı verilir. $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$ ve $x_3 - x_1$, eksen takımlarına göre simetri olması halinde (2.5) eşitliğinde bulunan matris aşağıda verilen matris şeklinde yazılır.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Enine izotropik malzeme: Birbirine dik üç düzleme göre simetrik olan malzeme, bu düzlemlerden birinde izotrop ise yani malzeme özellikleri bu düzlemde doğrultuya göre değişmiyor ise bu tip malzemeye “enine izotrop” adı verilir. Enine izotrop malzemede bağımsız değişken sayısı 5 dir. İzotropik düzleme dik doğrultu x_1 olsun. Bu durumda elastik sabitlerin bulunduğu matris aşağıda verilen şekle gelir.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{31} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

İzotropik Malzeme: Tam izotropi halinde elastik sabitlerin bulunduğu matris;

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{21} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

şeklinde. Burada görüldüğü gibi bağımsız elastik sabit sayısı 2 dir.

Hooke Yasaları: Yukarıda (2.4) ile verilen gerilme şekil değiştirme bağıntısı ters dönüşüm ile

$$\varepsilon_i = s_{ij} \sigma_j \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada görülen s_{ij} matrisi c_{ij} matrisinin tersidir. Bu eşitliğin matris formunda yazılışı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} & s_{56} \\ s_{61} & s_{62} & s_{63} & s_{64} & s_{65} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Bu bağıntı ortotropik malzeme için;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

şeklindedir. Yukarıdaki bağıntıda bulunan s_{ij} elastik sabitleri, mühendislikte kullanılan Young modülü ve Poisson oranına bağlı olarak aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{E_{11}} & s_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} & s_{13} &= \frac{-\nu_{31}}{E_{33}} \\ s_{21} &= \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} & s_{22} &= \frac{1}{E_{22}} & s_{23} &= \frac{-\nu_{32}}{E_{33}} \\ s_{31} &= \frac{-\nu_{13}}{E_{11}} & s_{32} &= \frac{-\nu_{23}}{E_{22}} & s_{33} &= \frac{1}{E_{33}} \\ s_{44} &= \frac{1}{G_{23}} & s_{55} &= \frac{1}{G_{13}} & s_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Yukarıdaki gösterilimde; E_{ii} sabitleri, i doğrultusunda çekme veya basınçtan elde edilen Young modulüdür. Poisson oran ν_{ij} ise i doğrultusunda gerilme uygulandığında j doğrultusundaki daralmadır; yani $\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$ dir. s_{ij} matrisinin simetrisinden dolayı aşağıda verilen bağıntılar bulunmaktadır.

$$\frac{\nu_{21}}{E_{22}} = \frac{\nu_{12}}{E_{11}} \quad \frac{\nu_{32}}{E_{33}} = \frac{\nu_{23}}{E_{22}} \quad \frac{\nu_{13}}{E_{11}} = \frac{\nu_{31}}{E_{33}} \quad (2.14)$$

Yukarıda yapılan tanımlar kullanılarak, ortotropik malzemede xyz eksen takımlarına göre Hooke yasaları;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_{xx}} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} \sigma_x + \frac{1}{E_{yy}} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} \sigma_z \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu_{xz}}{E_{xx}}\sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}}\sigma_y + \frac{1}{E_{zz}}\sigma_z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G_{yz}} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılır. Yukarı verilen denklemlerde görülen E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} , ν_{xy} , ν_{yx} , ν_{yz} , ν_{zy} , ν_{zx} , ν_{xz} , G_{xy} , G_{yz} , G_{zx} değerleri malzeme sabitleri olup toplam on iki sabittir, fakat s_{ij} matrisinin simetrisinden dolayı yazılan

$$\frac{\nu_{xy}}{E_{xx}} = \frac{\nu_{yx}}{E_{yy}} \quad \frac{\nu_{xz}}{E_{xx}} = \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \quad \frac{\nu_{yz}}{E_{yy}} = \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} \quad (2.16)$$

eşitlikleri ile bağımsız malzeme sabiti sayısı dokuz iner. Malzeme sabitlerinden E_{xx} , E_{yy} ve E_{zz} değerleri malzemenin sıra ile x , y ve z doğrultularındaki elastisite modulleri G_{xy} , G_{yz} ve G_{zx} değerleri sıra ile malzemenin xy , yz ve zx düzlemlerindeki kayma modulleridir. ν_{ij} ($i, j = x, y, z$) değerleri ise daha önceden belirtildiği gibi i doğrultusunda gerilme uygulandığında j doğrultusundaki enine birim uzamalar için Poisson oranıdır; yani $\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$ dir.

Ortotropik düzlem gerilme halinde, 1,2,3 doğrultuları sıra ile x,y,z doğrultusu alınıp gerilme vektörlerinin x - y düzleminde bulunması halinde (2.15) bağıntısından Hooke yasaları Young modülü ve Poisson oranı cinsinden;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{xx}} & \frac{-\nu_{xy}}{E_{yy}} & 0 \\ \frac{-\nu_{xy}}{E_{xx}} & \frac{1}{E_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

şeklinde yazılır. Yukarıda verilen denklemlerde 5 sabit bulunmaktadır; $\nu_{yx} / E_{yy} = \nu_{xy} / E_{xx}$ eşitliği kullanıldığında ortotropik düzlem gerilme halinde 4 sabit yeterli olmaktadır. Yukarıda (2.17) ile verilen ifadenin ters dönüşümü yapıldığında

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{yx}E_{xx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{xy}E_{yy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

bulunur. Bu ifade dört sabite bağılı olarak

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_x^* \varepsilon_x + E_{xy} \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E_{xy} \varepsilon_x + E_y^* \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde yazılır. Burada E_x^* , E_y^* , E_{xy} nin tanımları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} E_x^* &= \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} & E_y^* &= \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \\ E_{xy} &= E_{yx} = \frac{\nu_{yx}E_{xx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} = \frac{\nu_{xy}E_{yy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Enine izotropi hali: xy düzleminde enine izotropi olsun. Bu izotropide

$E_{xx} = E_{yy} = E$, $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$; $G = G_{xy}$ ve $G_{yz} = G_{xz} = G^*$ $\nu_{xz} = \nu_{yz}$ ve $\nu_{zy} = \nu_{zx}$ olacaktır. Bu durumda (2.15) bağıntıları;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu_{zy}}{E_{zz}} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_{xz}}{E} \sigma_x - \frac{\nu_{yz}}{E} \sigma_y + \frac{1}{E_{zz}} \sigma_z \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G^*} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G^*} \end{aligned} \quad (2.21)$$

şekline gelirler. Bu bağıntılarda E , E_{zz} , ν , G , G^* $\nu_{xz} = \nu_{yz}$ ve $\nu_{zy} = \nu_{zx}$ olmak üzere yedi sabit bulunmaktadır. Bu sabitler arasında;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \frac{\nu_{yz}}{E} = \frac{\nu_{zx}}{E_{zz}} \quad (2.22)$$

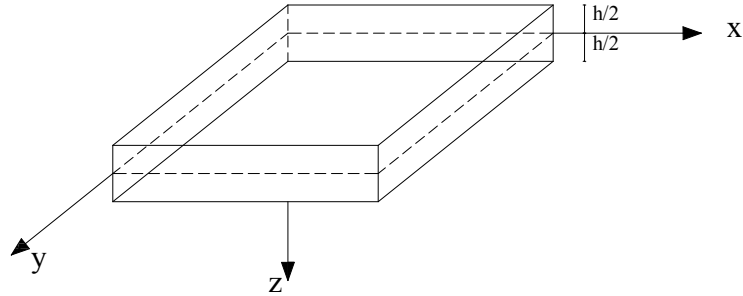
bağıntıları vardır. Dolayısıyla enine izotropik malzemede beş bağımsız sabit vardır.

2.2 İZOTROPİK PLAK DENKLEMLERİ

Yüzeysel taşıyıcı sistemler, kalınlıklarının ortasından geçen ve orta yüzey olarak isimlendirilen yüzey ve bu yüzeyin her noktasında kalınlığın verilmesi ile tanımlanır. Yüzeysel taşıyıcı sistemlerde kalınlık diğer iki boyutunun yanında küçüktür.

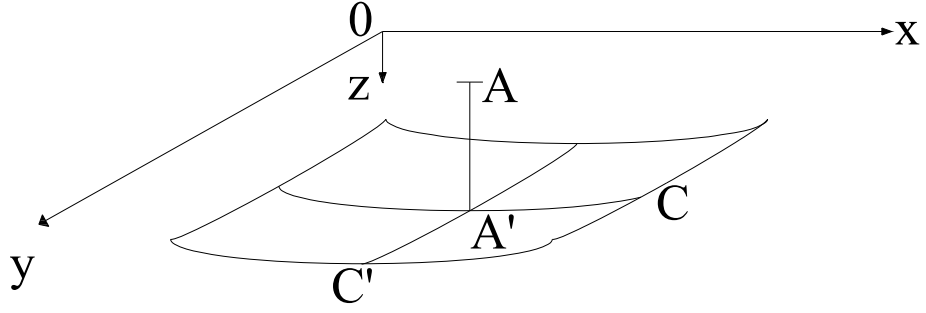
Plakta orta yüzey bir düzlemdir. Plak dış yükler etkisiyle eğildikten sonra orta düzlemin meydana getirdiği yüzeye elastik yüzey adı verilir. Bu kısımda sabit kalınlıklı izotropik plak denklemleri çıkarılacaktır. Plak denklemleri çıkartılırken; orta düzleme dik düzlemlerin, şekil değiştirmeden sonrada düzlem kalıp elastik yüzeye dik olacakları kabul edilecektir. Bu hipotez çubuklarda kullanılan Bernouilli-Navier hipotezine karşı gelir ve Kirchoff-Love hipotezi olarak isimlendirilir.

Bir plağın orta düzlemi xy eksen takımı ile belirlensin; şekil 2.1 Sabit kalınlıklı bir plakta plak malzemesi $z = \pm h/2$ düzlemleri arasında bulunacaktır. Plak içindeki herhangi bir noktanın ortalama düzleme olan uzaklığı z ile gösterelim.



Şekil 2.1: Sabit Kalınlıklı Plak ve Koordinat Eksenleri

Orta düzlem üzerinde bulunan bir A noktası yer değiştirme sonucunda, Şekil 2.2' de görüldüğü gibi A' noktasına gelsin. A noktasının x ve y doğrultularında yer değiştirmeleri ihmal edilerek $AA' = w$ ve $w = w(x, y)$ kabul edilecektir.



Şekil 2.2: Orta Düzlem Üzerindeki Bir A Noktasının Yer Değiştirmesi

Elastik yüzeyi A' noktasından geçen ve zx düzlemine paralel bir düzlemle keselim. Şekil 2.2 de görülen arakesit C eğrisinin eğriligi;

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.23)$$

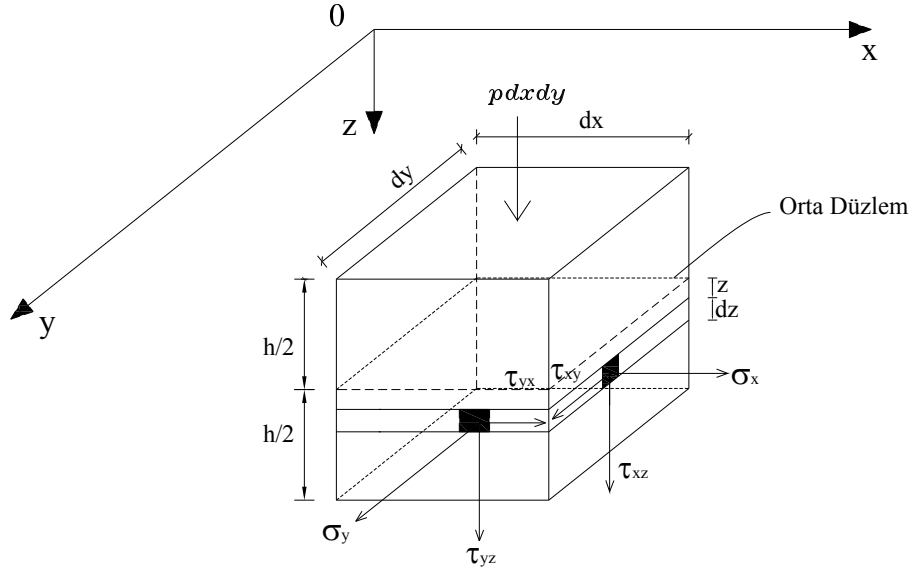
dir. İkinci olarak elastik yüzeyi A' noktasından geçen ve zy düzlemine paralel bir düzlemle keselim. Şekil 2.2 de görülen arakesit C' eğrisinin eğriligi;

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

dir. $w = w(x, y)$ fonksiyonunun karışık türevi yüzeyin x ve y eksenlerine göre burulması olarak tanımlanır ve buna ait eğrilik yarıçapı r_{xy} aşağıda verilmektedir.

$$\frac{1}{r_{xy}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.25)$$

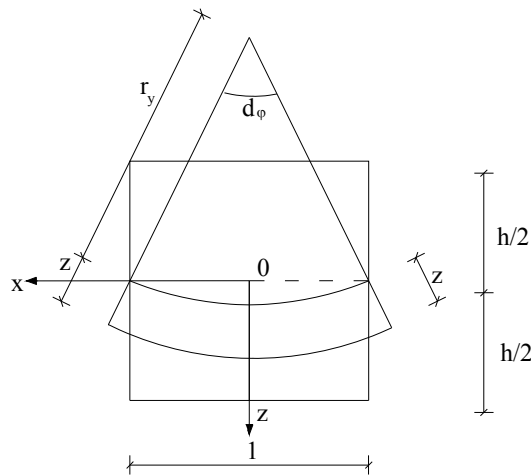
Plaktan çıkarılan sonsuz küçük bir eleman üzerindeki gerilmeler Şekil 2.3' de görülmektedir.



Şekil 2.3: Sonsuz Küçük Eleman

Sonsuz küçük eleman üzerindeki gerilmelerin oluşturduğu birim uzunluğa gelen eğilme momentleri M_x , M_y , burulma momentleri M_{xy} , M_{yx} ve kesme kuvvetleri Q_x , Q_y ise aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz & M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \\
 M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz & Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz
 \end{aligned} \tag{2.26}$$



Şekil 2.4: Düzlem Kesitin Deformasyonu

Bernoulli-Navier hipotezi geçerli olduğundan y doğrultusundaki birim uzama Şekil 2.4' te görülen birim genişlikte alınan bir eleman üzerinde yazılan bağıntıdan

$$\varepsilon_y = \frac{(r_y + z)d\varphi - r_y d\varphi}{r_y d\varphi} = \frac{z}{r_y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.27)$$

elde edilir. Aynı şekilde x doğrultusunda birim genişlikte alınan bir elemanda

$$\varepsilon_x = \frac{(r_x + z)d\varphi - r_x d\varphi}{r_x d\varphi} = \frac{z}{r_x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.28)$$

yazılır. İzotropik cisimler için yazılan Hooke yasalarında şekil değiştirmeler yerine w cinsinden değerleri yerlerine konulduğunda

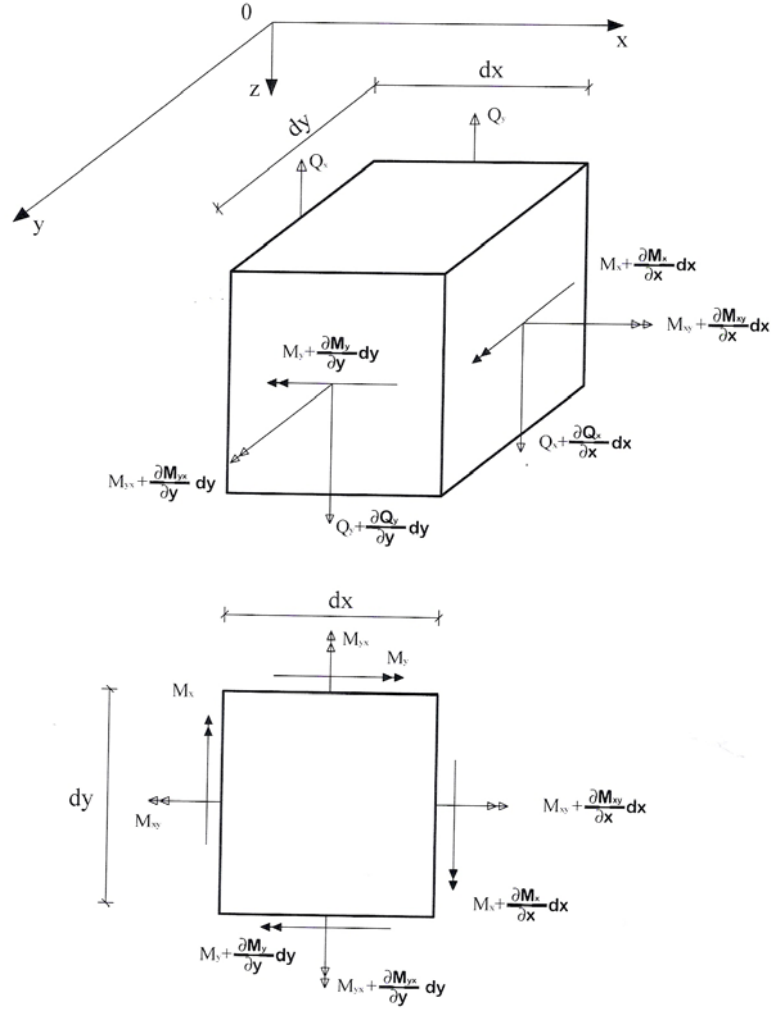
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{E.z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{E.z}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.29)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar (2.26) eşitliklerinde yerlerine konulup integraller alındığında aşağıda verilen eşitlikler elde edilirler.

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Burada $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ dir.

Plak Denge Denklemleri: Plak üzerinde alınan sonsuz küçük bir eleman Şekil 2.5' te gösterilmiştir.



Şekil 2.5:Sonsuz Küçük Plak Elemanının Dengesi

Şekil 2.5’de görülen elemanın z eksenine göre izdüşüm denge denklemi yazıldığında

$$(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx)dy - Q_x dy + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy)dx - Q_y dx + p(x, y)dxdy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p(x, y) = 0 \quad (2.31)$$

denklemini elde edilir. Aynı elemana etkiyen kuvvetlerin sıra ile x ve y eksenlerine paralel kenarlarına göre moment denge denklemleri yazıldığında;

$$M_y dx - (M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy)dx - M_{xy} dy + (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx)dy +$$

$$\begin{aligned}
& + (Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy) dy dx + p(x, y) dx dy \frac{dy}{2} = 0 \\
& (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy - M_x dy + (M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy) dx - M_{yx} dx - \\
& - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy dx - p(x, y) dx dy \frac{dx}{2} = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

eşitlikleri elde edilir. Bulunan bu eşitliklerde ikinci mertebeye terimler ihmal edildiğinde aşağıda verilen denklemler bulunur.

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0 \tag{2.34}$$

Denge denklemlerinden elde edilen bu iki denklem ile daha önce yine denge denklemlerinden elde edilen (2.31) denklemleri arasında, $M_{xy} = -M_{yx}$ olduğu göz önüne alınarak Q_x ve Q_y yok edildiğinde izotropik plaklar için aşağıda verilen diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \tag{2.35}$$

Kesme kuvvetleri Q_x ve Q_y ifadeleri için (2.33) ve (2.34) denklemlerinde momenti w cinsinden değerleri konulduğunda aşağıda verilen bağıntılar elde edilir.

$$Q_y = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \tag{2.36}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \tag{2.37}$$

Plak Sınır Şartları:

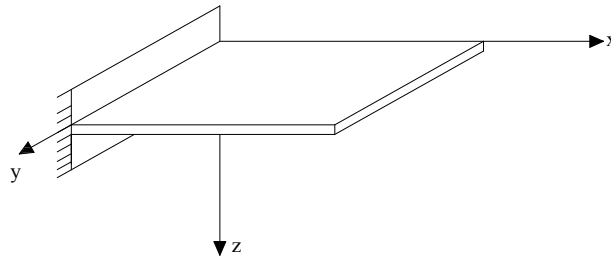
a) Ankastre Mesnet; $x = 0$ da bir ankastre mesnet düşünelim. Şekil 2.6' da ankastre olarak mesnetlenmiş bir plak görülmektedir. Ankastre mesnette çökme ve dönme olmayacağı için ankastre mesnette sınır şartları

$$w|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (2.38)$$

dır. Ayrıca bütün mesnet boyunca $\partial w / \partial x$ olduğundan; $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ olur. Dolayısıyla ankastre mesnette

$$M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.39)$$

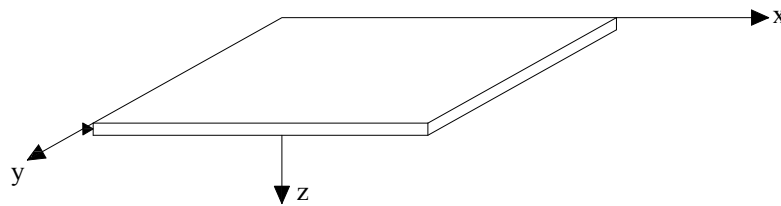
dır. Yani ankastre mesnette burulma momenti meydana gelmez.



Şekil 2.6: $x = 0$ Noktasında Ankastre Mesnetlenmiş Plak

b)Sabit Mesnet; $x = 0$ da bir sabit mesnet düşünelim; şekil 2.7 $x = 0$ noktasında sabit mesnetlenmiş plak. Sabit mesnette çökme ve moment sıfır olacağından dolayı;

$$w|_{x=0} = 0 \quad M_x|_{x=0} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2.40)$$



Şekil 2.7: $x = 0$ Noktasında Sabit Mesnetlenmiş Plak

dır. $x = 0$ kenarı boyunca bütün mesnet boyunca $\partial w / \partial y = 0$ olduğundan; $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ olur. Dolayısıyla sabit mesnette;

$$w|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.41)$$

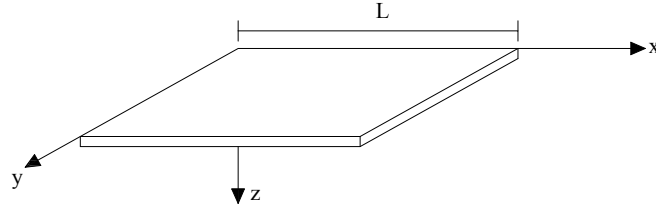
şartları yazılır. Aynı şekilde $y = 0$ kenarı sabit mesnet olduğunda

$$w|_{y=0} = 0 \quad M_y|_{y=0} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (2.42)$$

şartları yerine aşağıda yazılan şartlar kullanılır.

$$w|_{y=0} = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.43)$$

c) Serbest Kenar; $x = L$ Noktasında serbest bir kenar düşünelim;

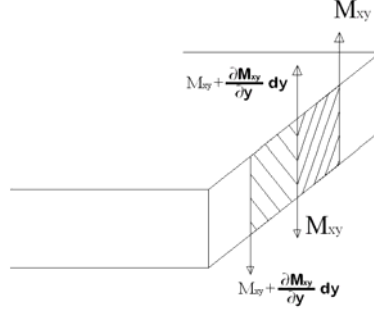


Şekil 2.8: $x = L$ Noktasında Serbest Kenar

Serbest kenarda çökme hariç diğer değerler yani moment, kesme kuvveti ve burulma momenti sıfır olur.

$$M_x|_{x=L} = 0, \quad M_{xy}|_{x=L} = 0, \quad Q_x|_{x=L} = 0 \quad (2.44)$$

Üç sınır şartı fazla olduğundan dolayı M_{xy} ve Q_x birleştirilir. Birleştirmek için şekil 2.9 da görüldüğü gibi $x = \text{sabit}$ kenarında M_{xy} değişimini göz önüne alalım. Sonsuz küçük dy uzunluğuna etkiyen $M_{xy}dy$ momenti dy uzunluğunun kenarlarında $M_{xy}dy/dy = M_{xy}$ şeklinde iki kuvvete ayrılır. Sonsuz küçük dy uzunluğunun yanında bulunan yine sonsuz küçük dy uzunluğunda ise burulma momentinin değeri $(M_{xy} + \partial M_{xy}/\partial y)dy$ dir. Bu moment ise iki kuvvete ayrıldığında her bir kuvvetin şiddeti $M_{xy} + \partial M_{xy}/\partial y$ dir. Kuvvet çiftlerinin aynı noktaya etkiyen kuvvetleri toplandığında $\partial M_{xy}/\partial y$ kuvveti elde edilir. Bu kuvvet Q_x ile birleştirildiğinde



Şekil 2.9: $x =$ Sabit Kenarında M_{xy} Değişimi

$$V_x = Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (2.45)$$

elde edilir. Bu şekilde Burulma momenti ile kesme kuvveti birleştirilmiş olmakta ve $x = a$ da sınır şartları olarak

$$M_x|_{x=a} = 0, \quad V_x|_{x=a} = 0 \quad (2.46)$$

eşitlikleri kullanılacaktır. Bu şartlar w çökme fonksiyonu cinsinden

$$\left| \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{x=a} = 0 \quad \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{x=a} = 0 \quad (2.47)$$

şeklinde yazılır. Aynı durum $y = b$ kenarı içinde geçerlidir. Bu kenarda;

$$V_y = Q_y + \frac{M_{yx}}{\partial x} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (2.48)$$

olduğundan $y = b$ kenarında aşağıda verilen şart yazılır.

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{y=b} = 0 \quad \left| \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right|_{y=b} = 0 \quad (2.49)$$

2.3 ORTOTROPİK PLAK DENKLEMLERİ

Bir önceki bölümde plak denklemleri, izotropik malzemeden yapılmış plaklar için çıkartıldı. Plaklar, genellikle, her yönde farklı özellikler gösteren anizotrop malzemelerden yapılır. İki doğrultuda farklı özellikler gösteren betonarme plaklar, nervürlü plaklar, dalgalı sac plaklar, taşıyıcı ızgaralar gibi sistemler ortotrop malzemeler olarak modellenir. Ortotropik plak denklemleri ise ortotrop malzemeler için yazılan Hooke yasaları kullanılarak izotropik plak için izlenen yol aynen

izlenerek çıkartılır. İzotropik plaklarda, geometrik esaslardan ve denge denklemlerinden yazılan bağıntılar değişmeyeceğinden, işlemler sırasında onlar aynen kullanılır.

Hesaplarda, üçüncü doğrultuda gerilme ve şekil değişikliği olmadığı kabul edildiğinden; ortotropik malzemelerde, düzlem gerilme haline ait Hooke yasaları (2.19) den aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E_x^* \varepsilon_x + E_{xy} \varepsilon_y \\ \sigma_y &= E_{xy} \varepsilon_x + E_y^* \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= G_{xy} \gamma_{xy}\end{aligned}\tag{2.50}$$

Burada; daha önce (2.20) da belirtildiği gibi;

$$\begin{aligned}E_x^* &= \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} & E_y^* &= \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} \\ E_{xy} &= E_{yx} = \frac{\nu_{yx} E_{xx}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{\nu_{xy} E_{yy}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}}\end{aligned}\tag{2.51}$$

dir. Malzeme sabitlerinden E_{xx} ve E_{yy} değerleri malzemenin sıra ile x ve y doğrultularındaki elastisite modulleri; G_{xy} malzemenin xy düzlemindeki kayma modulüdür. ν_{ij} ($i, j = x, y, z$) değerleri ise daha önceden belirtildiği gibi i doğrultusunda gerilme uygulandığında j doğrultusundaki enine birim uzamalar için Poisson oranıdır; yani $\nu_{ij} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$ dir.

İzotropik plaklar için elde edilen

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\tag{2.52}$$

bağıntıları geometrik esaslardan hareket edilerek çıkartıldığı için ortotropik plaklar için de geçerlidir. Bu bağıntılar (2.50) denklemlerinde yerlerine konulduğunda

$$\sigma_x = -z \left(E_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -z(E_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.53)$$

bağıntıları elde edilir. Moment ifadeleri ise yukarıda verilen gerilmeler z ile çarpılıp plak kalınlığı boyunca integre edilerek;

$$\begin{aligned}M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = -(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \\ M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = -(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \\ M_{xy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (2.54)$$

şeklinde elde edilirler. Burada D_x , D_y , D_{xy} ve G_{xy} ile gösterilen büyüklükler eğilme ve burulma rijitliği olup aşağıda verilen şekilde tanımlanmıştır.

$$D_x = \frac{h^3 E_x^*}{12} \quad D_y = \frac{h^3 E_y^*}{12} \quad D_1 = \frac{h^3 E_{xy}}{12} \quad D_{xy} = \frac{h^3 G}{12} \quad (2.55)$$

Yukarıda (2.54) ile verilen moment ifadeleri daha önce elde edilen ve (2.31),(2.33) ve (2.34) denklemi ile verilen

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad (2.56)$$

denge denklemlerinde yerlerine konulduğunda ortotropik plak diferansiyel denklemi aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (2.57)$$

Burada:

$$H = D_1 + 2D_{xy} \quad (2.58)$$

dir. Kesme kuvvetlerinin çökmeye bağlı ifadeleri daha önce denge denklemleri ile elde edilen (2.33) ve (2.34)

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

$$Q_y = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (2.59)$$

ifadeleri kullanılarak aşağıda verilen şekilde bulunur.

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.60)$$

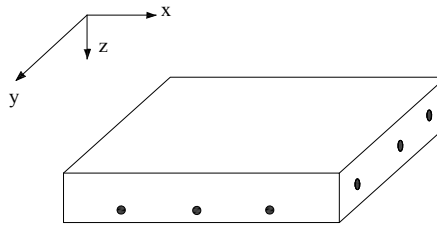
ÇEŞİTLİ ÖZEL DURUMLAR İÇİN PLAK RİJİTLİKLERİNİN HESABI

Rijitlikler için verilen (2.55) ifadeleri malzeme davranışlarının doğasından dolayı çeşitli farklılıklar gösterirler. Bunlar için uygulamada sıkça kullanılan çeşitli durumlara ait rijitlikler aşağıdaki gibidir.

Betonarme Plaklar: E_s çelik çubuğun E_c ise betonun Young Modülü, ν_c betonun poisson oranı olmak üzere $n = E_s / E_c$ olarak ifade edilirse (2.51) ifadelerinden

$$\nu_c = \frac{E_{xy}}{\sqrt{E_x^* E_y^*}} \quad (2.61)$$

olarak elde edilir.



Şekil 2.10: x ve y Doğrultusunda Çelik Donatılar ile Donatılmış Betonarme Döşeme Plağı.

Şekil 2.10' da görüldüğü gibi x ve y yönünde çift yönlü olarak donatılmış betonarme plakta şu kabuller yapılır;

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{E_c}{1-\nu_c^2} [I_{cx} + (n-1)I_{sx}] \\
D_y &= \frac{E_c}{1-\nu_c^2} [I_{cy} + (n-1)I_{sy}] \\
D_1 &= \nu_c \sqrt{D_x D_y} \\
D_{xy} &= \frac{1-\nu_c}{2} \sqrt{D_x D_y}
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Bu denklemlerde I_{cx} plak elemanın x doğrultusundaki atalet momenti, I_{sx} $x = sabit$ bölgesindeki tarafsız eksen civarında verilen donatının atalet momenti, I_{cy} ve I_{sy} ise $y = sabit$ bölgesindeki atalet momentleridir.

D_{xy} için verilen ifadelerle birlikte;

$$H = \sqrt{D_x D_y} \tag{2.63}$$

olarak hesaplanır ve diferansiyel denklem;

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \tag{2.64}$$

halini alır.

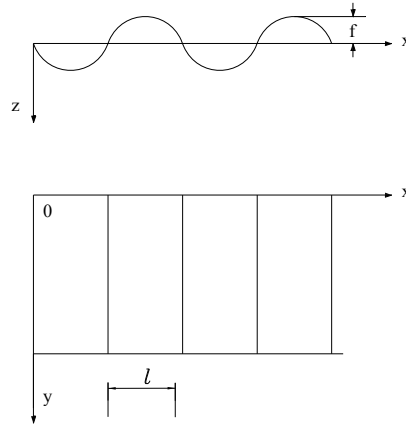
Yeni bir değişken olarak $y_1 = y\sqrt{D_x/D_y}$ ele alınarak (2.35) denklemi formuna dönüştürülebilir.

Plywood: Üç veya beş tabakanın birbirlerine yapıştırılması ile elde edilen plaklardır. Plak x aksı yüzey tanelerine paralel olması halinde Tablo 1 ile verilen sabitleri kullanabiliriz.

Tablo 2.1 Plywood Plak İçin Elastik Sabitler. Birimler: GPa

Malzeme	E'_x	E'_y	E''	G
Akçağacı, 5-kat.....	12.893	4.137	0.503	1.096
Afara, 3-kat.....	13.514	1.137	0.296	0.758
Gabon (Okoumé), 3-kat.....	8.825	0.758	0.096	0.586
Huş ağacı (Birch), 3-ve 5-kat.....	13.790	1.151	0.530	1.172
Bakalit mambranlar ile huş ağacı (Birch)	11.721	5.860	0.420	0.689

Dalgalı Sac: Kalınlığı h , elastisite modülü E ve Poisson oranı ν olan dalgalı sac elemanın formu s bir yarım dalga yayının uzunluğu olmak üzere aşağıdaki ifadeler ile belirlenir.

**Şekil 2.11:** Dalgalı Sac Plak

$$z = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (2.65)$$

$$D_x = \frac{l}{s} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_y = EI$$

$$D_1 \approx 0$$

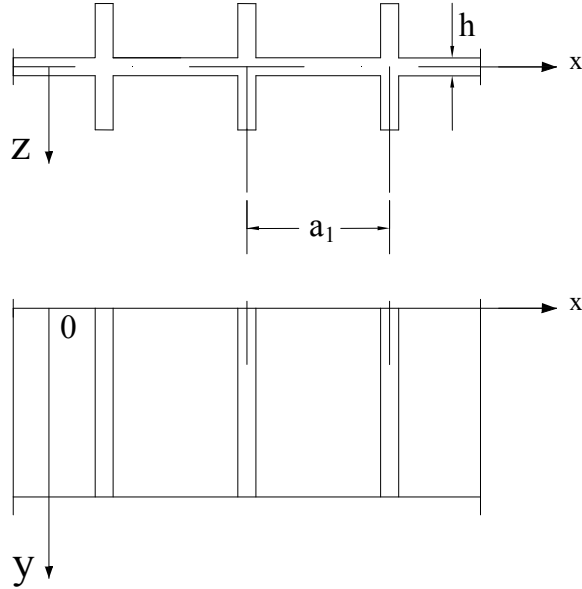
$$H = 2D_{xy} = \frac{8}{l} \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \quad (2.66)$$

Burada;

$$s = l \left(1 + \frac{\pi^2 f^2}{4l^2} \right)$$

$$I = \frac{f^2 h}{2} \left[1 - \frac{0,81}{1 + 2,5 \left(\frac{f}{2l} \right)^2} \right] \quad (2.67)$$

Tek Doğrultuda Eşit Aralıklı Takviye Levhaları ile Donatılmış Plak:



Şekil 2.12: Eşit Aralıklı Takviye Levhaları ile Donatılmış Plak

Plak orta düzlemine göre simetrik olarak donatılmış bir plak şekil 2.12’ de gösterilmiştir. Bu plakta;

$$D_x = H = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E_y' I}{a_1} \quad (2.68)$$

Elastisite modülü E ve poisson oranı ν olan plak elemanı ile Young modülü E'_y olan ve atalet momenti I olan takviye levhası, plak kesitinin orta aksı üzerinde birlikte alınmıştır.

Eşit Aralıklı İki Takım Takviye Levhaları İle Oluşturulmuş Nervürlü Plak:

Simetrik özellikleri sağlayan plakta;

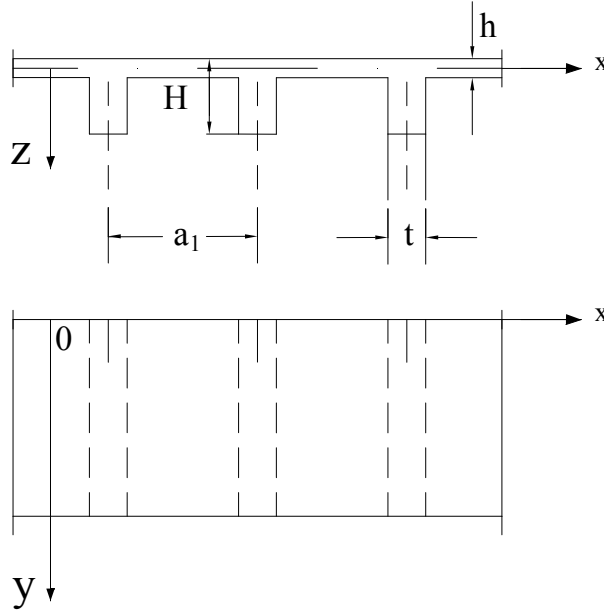
$$D_x = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'_x I_1}{b_1}$$

$$D_y = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{E'_y I_2}{a_1}$$

$$H = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.69)$$

I_1 takviye levhasının atalet momenti, b_1 x doğrultusundaki takviye levhaları arasındaki net açıklık, I_2 ve a_1 y doğrultusundaki değerlerdir.

Tek Taraflı Eşit Aralıklı Nervürlerle Donatılmış Plak:



Şekil 2.13: Tek Taraflı Eşit Aralıklı Nervürlerle Donatılmış Plak

Şekil 2.13 te gösterildiği gibi bir plak elemanında, E plağı oluşturan elemanın elastisite modülü, I a_1 genişlikli T kesitin atalet momenti, $\alpha = h/H$ olmak üzere

$$D_x = \frac{Ea_1h^3}{12(a_1 - t + \alpha^3 t)}$$

$$D_y = \frac{EI}{\alpha_1}$$

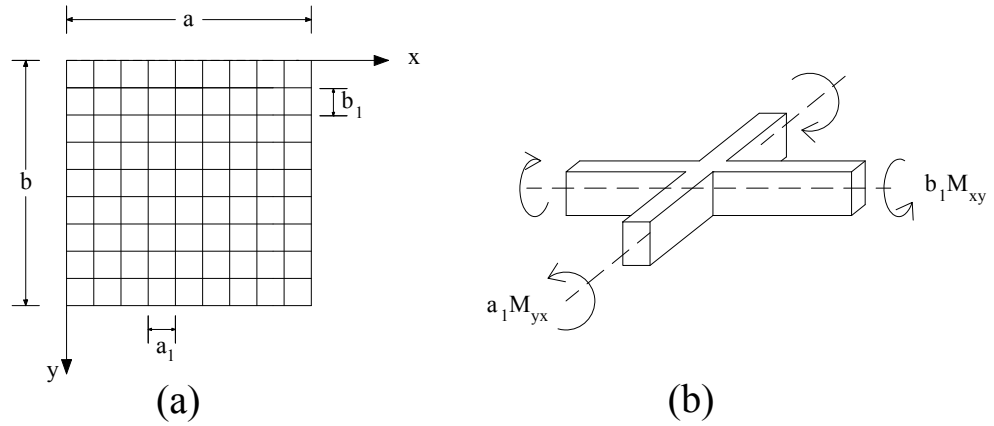
$$D_1 = 0 \quad (2.70)$$

Formüllerin karşılıklı etkileşimleri ihmal edilerek burulma rijitliği son olarak şu şekilde hesaplanır;

$$D_{xy} = D'_{xy} + \frac{C}{2a_1} \quad (2.71)$$

Burada D'_{xy} nervürsüz plağın burulma rijitliği C ise bir nervürün burulma rijitliğidir.

Betonarme Izgara Sistem:



Şekil 2.14: Betonarme Izgara Sistem

Bu ızgara sistem x ve y doğrultularına paralel olarak konmuş ve kesişme yerlerinde birbirlerine rijit olarak tesbit edilmiş iki kiriş sisteminden ibarettir. Kirişler uçlarında mesnetlenmiş ve yük xy düzlemine dik olarak tatbik edilmiştir. Kirişler arasındaki a_1 ve b_1 uzaklıkları ızgaranın a ve b boylarına göre küçük ve kirişlerden her birinin x eksenine paralel olan eğilme rijitliği B_1 , y eksenine paralel olan eğilme rijitliği B_2 , ise;

$$D_x = \frac{B_1}{b_1} \quad D_y = \frac{B_2}{a_1} \quad (2.72)$$

Konulabilir. Bu halde D_1 değeri sıfırdır ve D_{xy} değeri x eksenine paralel olan eğilme rijitliği C_1 , y eksenine paralel olan eğilme rijitliği C_2 olarak ifade edilebilir. Bu durumda şekil 2.10b' nin burulmasını gözönüne alarak burulma momentleri ile $\partial^2 w / \partial x \partial y$ burulması arasında şu bağıntı yazılabilir;

$$M_{xy} = \frac{C_1}{b_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad M_{yx} = -\frac{C_2}{a_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.73)$$

Bu ifadeler (2.56) denkleminde yerine konularak şu denklem elde edilir;

$$\frac{B_1}{b_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(\frac{C_1}{b_1} + \frac{C_2}{a_1} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{B_2}{a_1} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (2.74)$$

BÖLÜM 3

ANALİTİK ÇÖZÜMLER

Ortotropik plaklara ait analitik çözümler çok azdır. Bunların bir kısmı mesnetlerden yüklenen plaklara ait çözümlerdir. Bu tip çözümler tersden gidilerek çökme fonksiyonu için belirli çok terimli kabulü yapılarak bunlara karşı gelen yükler bulunur. İkinci grup çözümler ise izotropik basit mesnetli dikdörtgen plaklarda kullanılan Navier çözümünün basit mesnetli ortotropik plaklara uygulanmasıdır. Üçüncü grup çözümler ise Navier çözümünde olduğu gibi izotropik plakalara uygulanan Levy çözümünün ortotropik plaklarda uygulanmasıdır.

3.1 BASİT ÇOK TERİMLİ ÇÖZÜMLER

$\Delta\Delta w = 0$ homojen denkleminin çözümünün fiziksel anlamı, yalnız kenar kuvvetlerinin etkisindeki bir plağın $w_h(x, y)$ sehimlerinin bulunmasıdır. Problemin türüne göre yer değiştirme fonksiyonu seçilmelidir.

a) $w = \text{sabit}$;

$w = C$ olsun



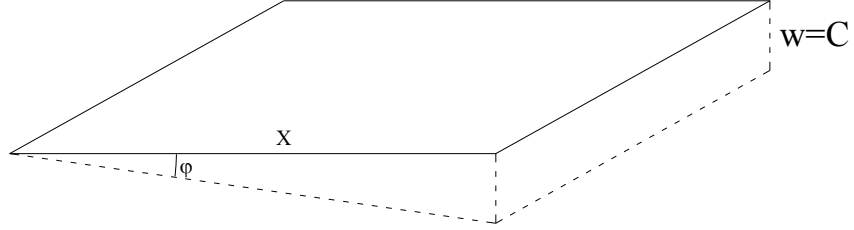
Şekil 3.1: Plak Ötelenmesi Hareketi

Bu çözümler plak ötelenmesi hareketidir. $w_x = C.x$, $w_y = C.y$ dir. $w'_x = w'_y = 0$

Herhangi bir elastik yüzey meydana gelmez.

b) $w = C.x$

$w = C.x$ olsun



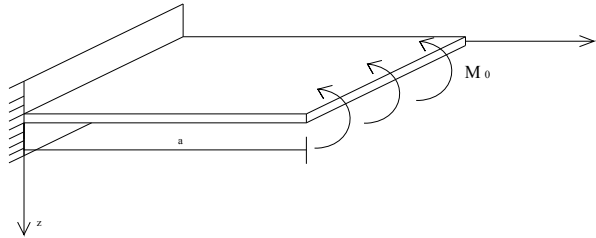
Şekil 3.2: Eğik Ötelenme Hareketi

$$w'_x = C, \quad w'_y = 0$$

$$w''_{xx} = 0, \quad w''_{yy} = 0, \quad w''_{xy} = 0 \quad (3.1)$$

Bütün momentler sıfırdır. Bu da plak ötelenmesi hareketidir.

c) $w = C.x^2$



Şekil 3.3: Dönme Hareketi

$$w'_x = 2Cx, \quad w'_y = 0$$

$$w''_{xx} = 2C, \quad w''_{yy} = 0$$

$$w'''_{xxx} = 0, \quad w'''_{yyy} = 0$$

$$w''_{xy} = 0, \quad w'''_{xxy} = 0 \quad (3.2)$$

Bu çözüm $x = 0$ kenarında ankaster ve $x = a$ ucunda üniform bir M_0 momenti etkisinde olan sonsuz uzun konsol bir plağı gösterir.

$$M_x = -(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2})$$

$$M_x = -D_x 2C$$

$$M_x = M_0$$

$$C = -\frac{M_0}{2D_x}$$

$$w = -\frac{M_0}{2D_x} x^2$$

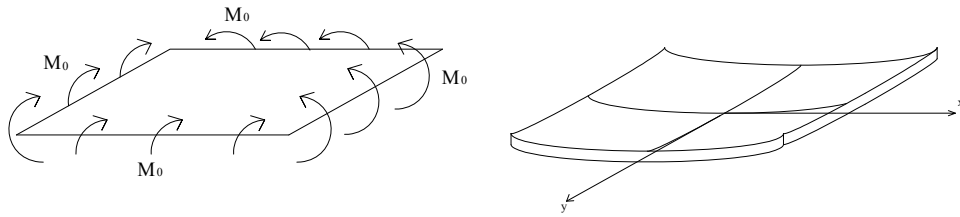
$$M_y = -(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$$

$$M_y = -D_{xy} 2C$$

$$Q_x = Q_y = V_x = V_y = M_{xy} = 0 \quad (3.3)$$

$$d) w = C.(x^2 + y^2)$$

Plakın tüm kenarlarına üniform M_0 momentinin uygulanması halidir. Üniform eğilme denir. Elastik yüzey dönel bir parabolüdür.



Şekil 3.4: Üniform Eğilme

$$w = C(x^2 + y^2)$$

$$w'_x = 2Cx, \quad w'_y = 2Cy$$

$$w''_{xx} = 2C, \quad w''_{yy} = 2C$$

$$w'''_{xxx} = 0, \quad w'''_{yyy} = 0$$

$$w'''_{xxy} = 0, \quad w'''_{yyx} = 0$$

$$M_x = -(D_x 2C + D_{xy} 2C)$$

$$M_y = -(D_y 2C + D_{xy} 2C)$$

$$Q_x = Q_y = V_x = V_y = M_{xy} = 0$$

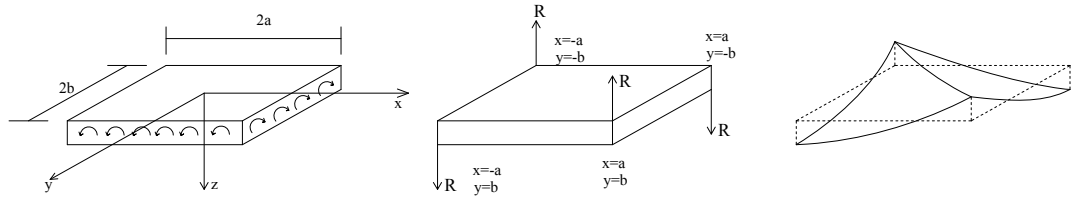
$$C = -\frac{M_x}{(2D_x + 2D_y)}$$

$$w = -\frac{M_0}{(2D_x + 2D_y)}(x^2 + y^2) \quad (3.4)$$

e) $w = C.x.y$

Basit burulma durumudur. Asal eğilme momentleri $M_n = \pm M_{xy}$ olur.

Dörtkenarından sabit M_{xy} momentinin etkisinde bir dikdörtgen plak ele alınırsa;



Şekil 3.5: Basit Burulma Durumunda Plak

$$w'_x = Cy, \quad w'_y = Cx$$

$$w''_{xx} = 0, \quad w''_{yy} = 0$$

$$w'''_{xxx} = 0, \quad w'''_{yyy} = 0$$

$$w'''_{xxy} = 0, \quad w'''_{yyx} = 0$$

$$M_x = M_y = 0$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -2G_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2G_{xy} C$$

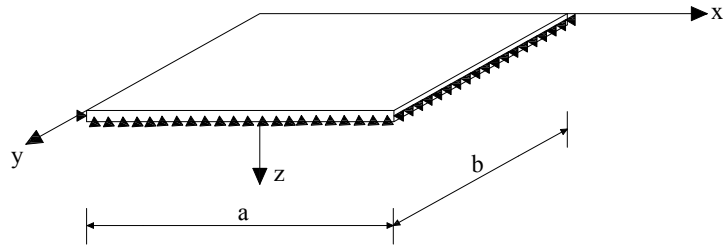
$$C = -\frac{M_{xy}}{2G_{xy}} = -\frac{12M_{xy}(1+\mu)}{Eh^3}$$

$$w = -\frac{12M_{xy}(1+\mu)}{Eh^3}xy$$

$$R = 2M_{xy} \quad (3.5)$$

3.2 NAVIER ÇÖZÜMÜ

Basit mesnetli dikdörtgen plaklara uygulanan bu çözümde dış yük ve w çökme fonksiyonu çift trigonometrik serilere açılır. w çökme fonksiyonu sınır şartlarını önceden sağladığı için diferansiyel denklemi sağlayacak şekilde çift katlı Fourier serisinin terimleri bulunur.



Şekil 3.6: Dört Kenarı Sabit Mesnetlenmiş Plak

Kenarları a , b olan ve bütün kenarların sabit olarak mesnetlenmiş bir dikdörtgen plagi göz önüne alalım; şekil 2.15 Plak dört kenarındaki mesnetler sabit mesnet olduğundan sınır şartları

$$x = 0 \text{ ve } x = a \text{ da } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$y = 0 \text{ ve } y = a \text{ da } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.6)$$

dır. Plagin $p(x, y)$ dış yükünü

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.7)$$

şeklinde çift katlı Fourier serisine açalım. Burada görülen p_{mn} katsayıları

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (3.8)$$

şeklinde bulunur. Plâğın $w(x, y)$ çökme fonksiyonu ise

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.9)$$

şeklinde çift Fourier serisi ile ifade edilsin. w fonksiyonunun x ve y 'ye göre ikinci türevleri

$$\begin{aligned} w''_{xx} &= \sum \sum -w_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ w''_{yy} &= \sum \sum -w_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (3.10)$$

dir. w fonksiyonunun x ve y 'ye göre ikinci türevleri de sınır şartların sağlar. w fonksiyonunun problemin diferansiyel denklemi

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (3.11)$$

sağlatılarak w_{mn} katsayıları bulunacaktır. $w(x, y)$ ve $p(x, y)$ fonksiyonlarının çift Fourier serisine açılmış hali (2.68) denkleminde yerine konulduğunda aşağıda verilen sonuç elde edilir.

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)} \quad (3.12)$$

Dış yükün sabit olması halinde dış yük p ve çökme w ;

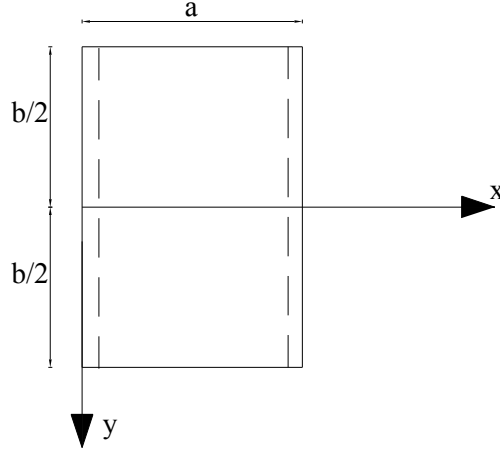
$$\begin{aligned} q_o &= \frac{16q_0}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ w &= \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Şeklinde çift Fourier serisine açıldığında w_{mn} katsayıları aşağıda verilen şekilde elde edilirler.

$$w_{mn} = \frac{16q_o}{\pi^6} \frac{1}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)} \quad (3.14)$$

3.3 LEVY YÖNTEMİ

Şekil 3.7’de gösterildiği gibi karşılıklı iki kenarı $x=0$ da ve $x=a$ da sabit mesnetlenmiş $y = \mp b/2$ de diğer iki kenarı herhangi bir şekilde mesnetlenmiş olan ortotropik dikdörtgen plak çözümünü Levy yöntemi ile yaparız.



Şekil 3.7: Karşılıklı İki Kenarı Sabit Mesnetlenmiş Ortotropik Dikdörtgen Plak

Bu plak x ’e bağlı üniform olmayan bir yük ile yüklenince daha önceki bölümlerde gösterilen;

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (3.15)$$

ifadesinin homojen hali;

$$D_x \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w_h}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_h}{\partial y^4} = 0 \quad (3.16)$$

halini alır. Bu denklemin genel çözümü şu şekilde seçilir;

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \begin{cases} \sin(m\pi x / a) \\ \cos(m\pi x / a) \end{cases} \quad (3.17)$$

Buradaki $f_m(y)$ fonksiyonunun $y = \pm b/2$ deki sınır koşullarını da sağlaması gerekir. Levy yönteminin tanımında olduğu gibi $x=0$ da ve $x=a$ da sabit mesnetlenmiş dikdörtgen plak ele alınırsa (3.17) denklemi;

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3.18)$$

olarak elde edilir. Sonuçların aynı zamanda x eksenine paralel sınırları da sağlaması gerekir. Sonuca ulaşmak için fonksiyonu $y = \pm b/2$ deki rastgele seçilmiş olan mesnetlenme koşullarını da sağlaması gerekir. (3.18) denkleminde ;

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{d^4 f_m}{dy^4} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 f_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 f_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0 \quad (3.19)$$

Bu ifade (3.15) ifadesine uygulanırsa;

$$D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 f_m - 2H \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 f_m}{dy^2} + D_y \frac{d^4 f_m}{dy^4} = 0 \quad (3.20)$$

olur. Karakteristik denklemin kökleri ise;

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp \frac{m\pi}{a} \sqrt{\frac{1}{D_y} (H \mp \sqrt{H^2 - D_x D_y})} \quad (3.21)$$

Böylece homojen denklem çözümü;

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} (C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y} + C_3 e^{\lambda_3 y} + C_4 e^{\lambda_4 y}) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.22)$$

Sinüs serisi şeklinde yüklenen bir ortotropik dikdörtgen plak denkleminde yükleme;

$$p(x) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} p_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.23)$$

şeklindedir. (3.15) ve (3.18) ifadelerinin açılımından;

$$D_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 k_m - 2H \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 k_m}{dy^2} + D_y \frac{d^4 k_m}{dy^4} = p_m \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Burada $k_m = (p_m / D_x)(a / m\pi)^4$ tür. Böylece w_p ;

$$w_p = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{D_x} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.25)$$

Olur. w_h ve w_p 'nin birleştirilmesi ile çözüm;

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_1 e^{\lambda_1 y} + C_2 e^{\lambda_2 y} + C_3 e^{\lambda_3 y} + C_4 e^{\lambda_4 y} + \frac{p_m}{D_x} \left(\frac{a}{m\pi}\right)^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3.26)$$

olarak elde edilir. Burada C_1 , C_2 , C_3 ve C_4 sınır şartlarının özel çözümü ile elde edilen integrasyon sabitleridir.

BÖLÜM 4

SAYISAL ÇÖZÜMLER

Plak denkleminin, çok az sayıda değişik yükler ve geometriler için analitik çözümü bulunmaktadır. Bulunan analitik çözümlerin önemli bir kısmı seriler ile ifade edilmektedir. Seriler ile ifade edilen çözümlerde, sayısal sonuçlara varmak bazı hallerde zor ve/veya uzun olabilir. Bu nedenle birçok yük ve geometri için plak problemin çözümünde sayısal çözüm yöntemlerine başvurulur.

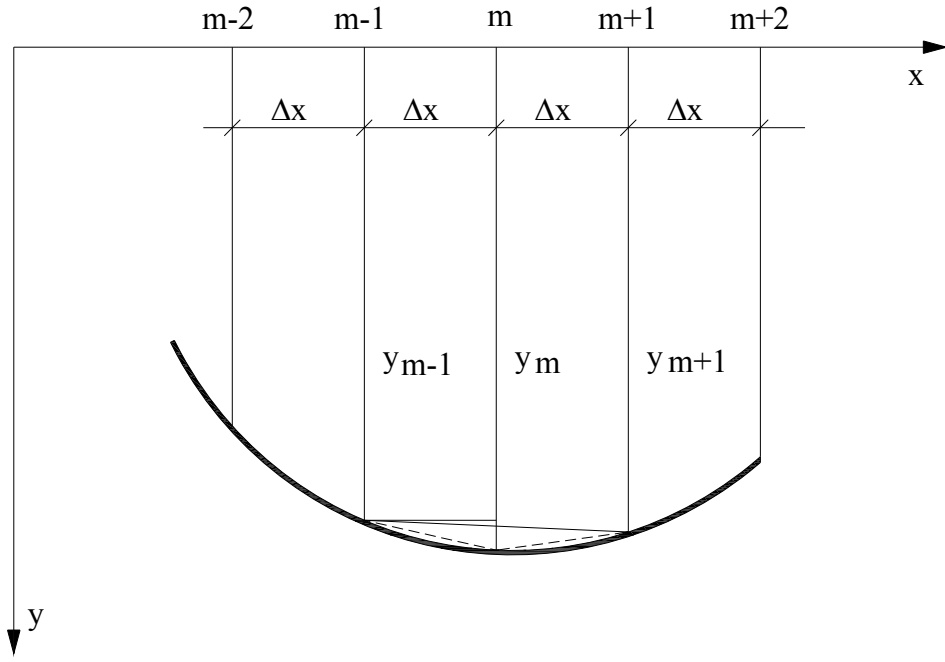
Bu çalışmada dikdörtgen bölgelerde plak denkleminin çözümünde sayısal çözüm yöntemlerinden, sonlu farklar yöntemi kullanılacaktır

4.1 SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu farklar yöntemi, bir problemin analitik çözümünde güçlüklerle karşılaşıldığında başvurulacak sayısal bir yöntemdir. Sonlu fark yönteminde bilinmeyen fonksiyonun türev değerleri sonlu farklar yardımı ile fonksiyon değerlerine bağlanarak diferansiyel denklem, cebrik denkleme dönüşür. Elde edilen cebrik denklem çözülerek bilinmeyen fonksiyonun değerleri belli noktalarda bulunarak bilinmeyen fonksiyon tablo şeklinde elde edilir.

Bu çalışmada, plak diferansiyel denklemini sonlu farklar yardımı ile cebirsel denkleme dönüştürülerek plağın çökme fonksiyonu belirli noktalarda bulunacak ve tablo şeklinde bulunan bu fonksiyondan yine sonlu farklar yardımı ile belirli noktalarda moment, kesme kuvvetleri ve diğer büyüklükler elde edilecektir.

Bir değişkenli fonksiyonlarda türevlerin fonksiyon değerlerine bağlanması: $y = f(x)$ eğrisini ve x eksenini üzerinde Δx aralıklı $x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}$ noktaları ile bu noktalardaki $y_{m-2}, y_{m-1}, y_m, y_{m+1}, y_{m+2}$ fonksiyon değerlerini göz önüne alalım.



Şekil 4.1: Tek Boyutta Sonlu Farklar

Şekil 4.1’ de verilen $y = f(x)$ eğrisinin m noktasındaki teğetinin eğimini yani; $(dy/dx)_m$ değeri sonlu farklar cinsinden

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m \quad (4.1)$$

şeklinde yazılabilir. $(\Delta y / \Delta x)_m$ değeri sıra ile ileri, geri ve ortalama sonlu farklar cinsinden aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m \quad \frac{y_m - y_{m-1}}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m \quad \frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m \quad (4.2)$$

Yukarıda ortalama farklara ait formüllerden ikinci, üçüncü ve dördüncü türevler aşağıdaki verilen şekilde elde edilirler.

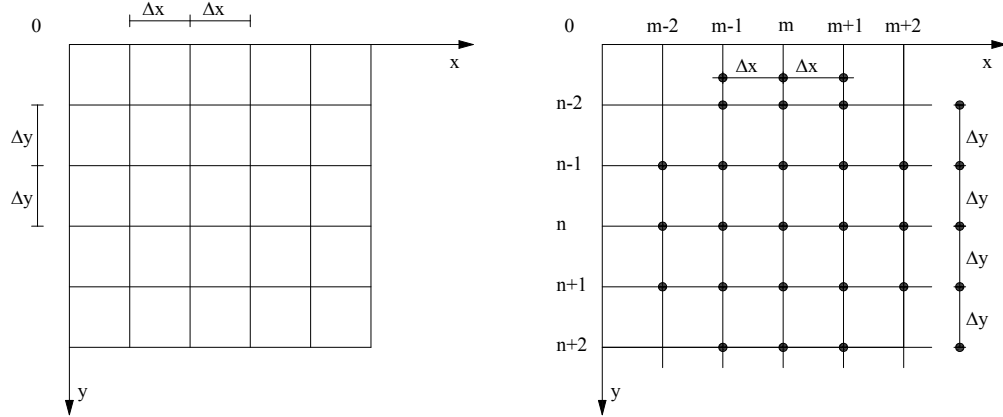
$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_m = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_m \cong \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_m = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m+1} - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{m-1} \right]$$

$$\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)_m = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta x} - \frac{y_m - y_{m-1}}{\Delta x} \right) = \frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{\Delta x^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_m &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + y_m}{\Delta x^2} - \frac{y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2}}{\Delta x^2} \right] \\
\left(\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \right)_m &= \frac{y_{m+2} - 2y_{m+1} + 2y_{m-1} - y_{m-2}}{2\Delta x^3} \\
\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_m &= \frac{1}{\Delta x^2} \left[\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_{m+1} - 2 \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_m + \left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} \right)_{m-1} \right] \\
\left(\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} \right)_m &= \frac{y_{m+2} - 4y_{m+1} + 6y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}}{\Delta x^4}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

İki değişkenli fonksiyonlarda türevlerin fonksiyon değerlerine bağlanması: İki değişkenli fonksiyonlarda kısmi türevler alınırken, değişkenlerden biri değişirken diğer değişken sabit kabul edileceğinden, tek bir değişkene göre türevler için elde edilen bağıntılar kısmi türevler için de geçerlidir



Şekil 4.2: Plaklarda Sonlu Farklar Ağı

$w = w(x, y)$ şeklinde iki değişkenli fonksiyonu göz önüne alalım. Fonksiyonun değişim bölgesini şekil 4.2' de görüldüğü gibi, bir ağ biçiminde Δx ve Δy genişliğinde dilimlere ayıralım. Ağın (m, n) ile tanımlanan noktasındaki w fonksiyonun ikinci, üçüncü ve dördüncü türev bağıntıları daha önce tek değişkenli fonksiyonlar için elde edilen ikinci, üçüncü ve dördüncü türev bağıntılarından yararlanarak

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m,n} \cong \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{m,n} &\cong \frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \\
\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_{m,n} &\cong \frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^3} \\
\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_{m,n} &\cong \frac{w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^3} \\
\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_m &\cong \frac{w_{m-2,n} - 4w_{m-1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{(\Delta x)^4} \\
\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_m &\cong \frac{w_{m,n-2} - 4w_{m,n-1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n+1} + w_{m,n+2}}{(\Delta y)^4}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde bulunur. Karışık türev ifadelerinin bulunuşu ise aşağıda verilmiştir.

Ortalama fark bağıntısına göre;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)_{m,n} &= \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{m,n} = \frac{1}{2\Delta y} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{m,n+1} - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{m,n-1} \right] \\
\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)_{m,n} &= \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}}{4\Delta x \Delta y}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

İleriye doğru fark bağıntısına göre;

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)_{m,n} = \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m,n+1} - w_{m+1,n} + w_{m,n}}{\Delta x \Delta y} \tag{4.6}$$

Geriye doğru fark bağıntısına göre;

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)_{m,n} = \frac{w_{m,n} - w_{m-1,n} - w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1}}{\Delta x \Delta y} \tag{4.7}$$

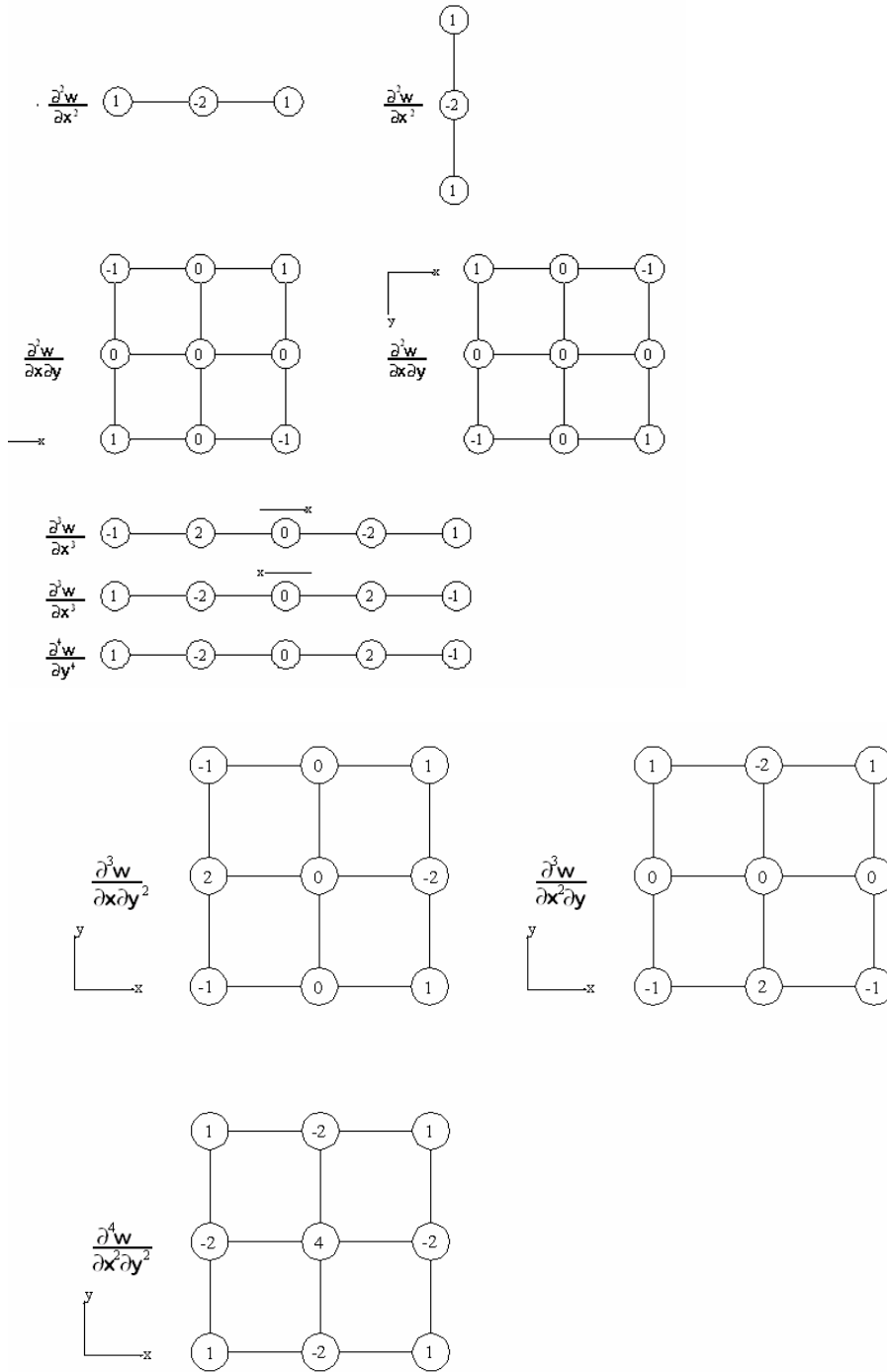
Üçüncü mertebeden karışık türevler ise;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)_{m,n} &= \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \\
\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}\right)_{m,n} &= \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Dördüncü mertebeden karışık türevler ise;

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{m,n} = & \frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} - w_{m-1,n+1} - 2w_{m+1,n} + 4w_{m,n} - 2w_{m-1,n} +}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \\ & + \frac{w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n-1} + w_{m-1,n-1}}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \quad (4.9) \end{aligned}$$

Yukarıda verilen türevlerde fonksiyon değerlerinin katsayılarını hatırlamak ve bazı uygulamalara yardımcı olması için Şekil 4.3'te verilen şablonlar kullanılır. Şablonlarda tek dereceli türevlerde (birinci ve üçüncü türevler) ilgili eksenin yönü önemli olduğundan, eksenin yönü şekilde gösterilmiştir. Eksen yönü olarak şekilde gösterilen yönün tersi alındığında, değiştirilen eksen doğrultusundaki katsayıların simetriğini almak gerekir. Buna ait örnek şekilde $\partial^2 w / \partial x \partial y$ ve $\partial^3 w / \partial x^3$ türevinde gösterilmiştir.



Şekil 4.3: Türev Fonksiyonları Katsayılar Şablonu

4.2 ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAK PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR İLE FORMÜLE EDİLMESİ

Ortotropik plak diferansiyel denklemi (2.57) eşitliği aşağıda tekrar yazılmıştır.

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (4.10)$$

Bu ifade de bulunan türev değerleri yerine w fonksiyonun değerleri (4.4) ve (4.9) ifadelerini kullanarak yazıldığında

$$\begin{aligned}
& D_x \frac{w_{m-2,n} - 4w_{m-1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m+1,n} + w_{m+2,n}}{(\Delta x)^4} + \\
& + 2H \frac{4w_{m,n} - 2(w_{m,n+1} + w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n-1})}{(\Delta x^2)(\Delta y^2)} + \\
& + 2H \frac{w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1}}{(\Delta x^2)(\Delta y^2)} + \\
& + D_y \frac{w_{m,n-2} - 4w_{m,n-1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n+1} + w_{m,n+2}}{(\Delta y)^4} = p_{m,n} \\
& p_{m,n} = p(x_m, y_m) \tag{4.11}
\end{aligned}$$

elde edilir. İfadeler $w_{m,n}$ ' e göre düzenlenip ve $\Delta x / \Delta y = \alpha$ ile gösterilir ise ortotropik dikdörtgen plaklar için, plak denkleminin sonlu farklarla ifadesi aşağıda verilen şekildedir.

$$\begin{aligned}
& D_x \frac{w_{m-2,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^4} - 4D_x \frac{w_{m-1,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^4} - 4H \frac{w_{m-1,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^4} + \\
& + 6D_x \frac{w_{m,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^4} + 8H \frac{w_{m,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + 6D_y \frac{w_{m,n}}{(\Delta y)^4} - 4D_x \frac{w_{m+1,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^4} - 4H \frac{w_{m+1,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + \\
& + D_x \frac{w_{m+2,n}}{(\Delta y)^4 \alpha^4} + D_y \frac{w_{m,n+2}}{(\Delta y)^4} - 4D_y \frac{w_{m,n+1}}{(\Delta y)^4} - 4H \frac{w_{m,n+1}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} - 4D_y \frac{w_{m,n-1}}{(\Delta y)^4} - \\
& - 4H \frac{w_{m,n-1}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + D_y \frac{w_{m,n-2}}{(\Delta y)^4} + 2H \frac{w_{m+1,n+1}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + 2H \frac{w_{m+1,n-1}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + 2H \frac{w_{m-1,n+1}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + \\
& + 2H \frac{w_{m-1,n-1}}{(\Delta y)^4 \alpha^2} = p_{m,n} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Bu ifadeleri $w_{m,n}$ parantezine alarak aşağıda gösterildiği gibi daha düzenli bir şekile getirebiliriz.

$$w_{m-2,n} \left[\frac{D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} \right] + w_{m-1,n} \left[\frac{-4D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} - \frac{4H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + w_{m,n} \left[\frac{6D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} + \frac{8H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + \frac{6D_y}{(\Delta y)^4} \right] + w_{m+1,n} \left[\frac{-4D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} - \frac{4H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] + \\
& + w_{m+2,n} \left[\frac{D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} \right] + w_{m,n+2} \left[\frac{D_y}{(\Delta y)^4} \right] + w_{m,n+1} \left[\frac{-4D_y}{(\Delta y)^4} - \frac{4H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] + \\
& w_{m,n-1} \left[\frac{-4D_y}{(\Delta y)^4} - \frac{4H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] + w_{m,n-2} \left[\frac{D_y}{(\Delta y)^4} \right] + w_{m+1,n+1} \left[\frac{2H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] + \\
& w_{m+1,n-1} \left[\frac{2H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] + w_{m-1,n+1} \left[\frac{2H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] + w_{m-1,n-1} \left[\frac{2H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] = p_{m,n} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

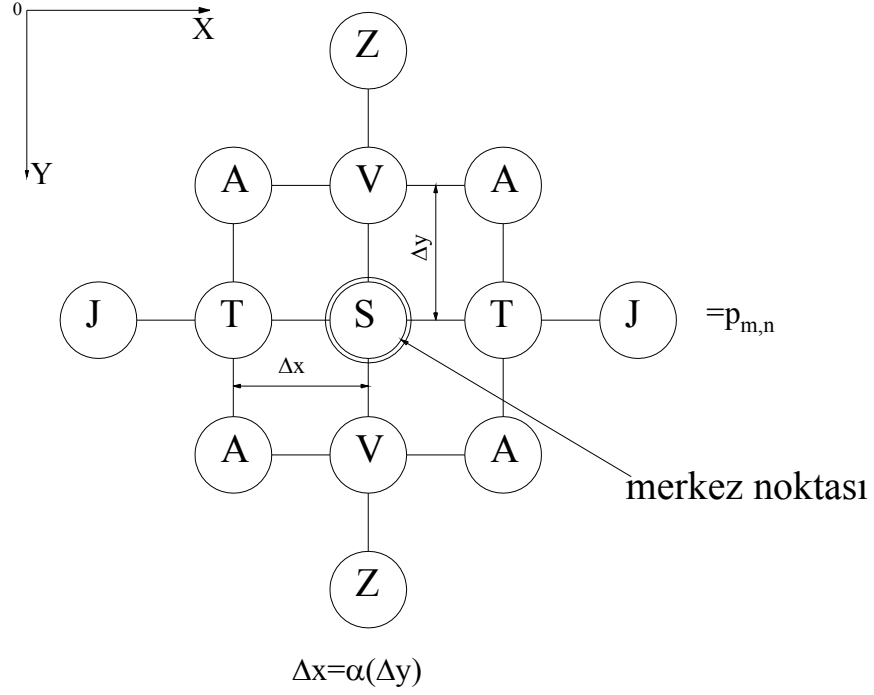
$w_{m,n}$ katsayılarını kolaylık olması açısından farklı ifadelerle gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} \right] &= J & \left[\frac{-4D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} - \frac{4H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] &= T \\
\left[\frac{6D_x}{(\Delta y)^4 \alpha^4} + \frac{8H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} + \frac{6D_y}{(\Delta y)^4} \right] &= S \\
\left[\frac{D_y}{(\Delta y)^4} \right] &= Z & \left[\frac{-4D_y}{(\Delta y)^4} - \frac{4H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] &= V & \left[\frac{2H}{(\Delta y)^4 \alpha^2} \right] &= A \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Bu katsayılar ile oluşturulan denklem aşağıdaki hali alır.

$$\begin{aligned}
& w_{m-2,n} J + w_{m-1,n} T + w_{m,n} S + w_{m+1,n} T + w_{m+2,n} J + w_{m,n+2} Z + w_{m,n+1} V + w_{m,n-1} V + \\
& + w_{m,n-2} Z + w_{m+1,n+1} A + w_{m+1,n-1} A + w_{m-1,n+1} A + w_{m-1,n-1} A = p_{m,n} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Bu katsayılar göre ortotropik plaklar için sonlu farklar ağı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.4: Ortotrop Plaklar İçin Sonlu Farklar Katsayılar Şeması

Ortotropik plakların iç kuvvetlerinin, sonlu farklar ile w çökme fonksiyon değerlerine bağlı olarak ifade edilişi aşağıda verilmiştir.

Moment İfadeleri:

$$\begin{aligned}
 (M_x)_{mn} &= -D_x \left[\frac{\omega_{m+1,n} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right] - D_1 \left[\frac{\omega_{m,n+1} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right] \\
 (M_y)_{mn} &= -D_y \left[\frac{\omega_{m,n+1} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right] - D_1 \left[\frac{\omega_{m+1,n} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right] \\
 (M_{xy})_{mn} &= 2D_{xy} \left[\frac{\omega_{m+1,n+1} + \omega_{m-1,n-1} - \omega_{m-1,n+1} - \omega_{m+1,n-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \right]
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$ olduğu durumlarda;

$$\begin{aligned}
(M_x)_{mn} &= -\frac{D_x}{\lambda^2} [\omega_{m+1,n} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m-1,n}] - \frac{D_1}{\lambda^2} [\omega_{m,n+1} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m,n-1}] \\
(M_y)_{mn} &= -\frac{D_y}{\lambda^2} [\omega_{m,n+1} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m,n-1}] - \frac{D_1}{\lambda^2} [\omega_{m+1,n} - 2\omega_{m,n} + \omega_{m-1,n}] \\
(M_{xy})_{mn} &= \frac{D_{xy}}{2\lambda^2} [\omega_{m+1,n+1} + \omega_{m-1,n-1} - \omega_{m-1,n+1} - \omega_{m+1,n-1}]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Q_x ve Q_y İfadeleri:

$$\begin{aligned}
Q_x &= -\frac{\partial}{\partial x} (D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - H \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \\
Q_x &= -D_x \left[\frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^3} \right] - \\
&\quad - H \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$ olduğu durumlarda;

$$\begin{aligned}
Q_x &= -\frac{D_x}{2\lambda^3} [w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}] - \\
&\quad - \frac{H}{2\lambda^3} [w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}]
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Aynı işlemler Q_y içinde yapılırsa;

$$\begin{aligned}
Q_y &= -\frac{\partial}{\partial y} (D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\
Q_y &= -D_y \left[\frac{w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^3} \right] - \\
&\quad - H \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2} \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$ olduğu durumlarda;

$$Q_y = -\frac{D_y}{2\lambda^3} [w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}] -$$

$$-\frac{H}{2\lambda^3} [w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}] \quad (4.21)$$

V_x ve V_y ifadeleri;

$$\begin{aligned} V_x &= Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -(D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + H \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}) - 2D_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ &= -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} - 2D_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = -D_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ V_x &= -D_x \left[\frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^3} \right] - \\ &\quad - (D_1 + 4D_{xy}) \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$ olduğu durumlarda;

$$\begin{aligned} V_x &= -\frac{D_x}{2\lambda^3} [w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}] - \\ &\quad - \frac{(D_1 + 4D_{xy})}{2\lambda^3} [w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Aynı işlemler V_y içinde yapılırsa;

$$\begin{aligned} V_y &= Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -(D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + H \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}) - 2D_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ &= -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 2D_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = -D_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (D_1 + 4D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ V_y &= -D_y \left[\frac{w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^3} \right] - \\ &\quad - (D_1 + 4D_{xy}) \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)^2 (\Delta y)} \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

$\Delta x = \Delta y = \lambda$ olduğu durumlarda;

$$V_y = -\frac{D_y}{2\lambda^3} D_y [w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m,n-2}] - \frac{(D_1 + 4D_{xy})}{2\lambda^3} [w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}] \quad (4.25)$$

4.3 SINIR ŞARTLARI VE DENKLEM SAYISI

Bu bölümde, ortotropik plaklar için sınır şartları sonlu farklar cinsinden ifade edilecektir.

a) Ankastre Mesnet: Ankastre mesnet için daha önce verilen (2.38) ifadesi sonlu farklar cinsinden;

$$w|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = \frac{w_{m+1,n} - w_{m-1,n}}{2\Delta x} = 0 \rightarrow w_{m+1,n} = w_{m-1,n} \quad (4.26)$$

olur. (2.39) ile verilen ifade ise ortotropik plaklar için;

$$M_{xy} = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

$$(M_{xy})_{mn} = 2D_{xy} \left[\frac{w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} \right] = 0$$

$$(M_{xy})_{mn} = D_{xy} \left[\frac{w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)} \right] = 0 \quad (4.27)$$

b) Sabit Mesnet: Sabit mesnet için verilen (2.40) ifadeleri ortotropik plaklar için;

$$w|_{x=0} = 0$$

$$(M_x)_{mn} = -D_x \left[\frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right] - D_1 \left[\frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{\Delta y^2} \right] = 0 \quad (4.28)$$

olur. (2.41) ifadeleri ise;

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{m,n} = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad w_{m+1,n} = -w_{m-1,n} \quad (4.29)$$

olur.

c) Serbest Kenar: Serbest kenar için verilen (2.46) ifadeleri ortotropik plaklar için;

$$\begin{aligned}
 M_x|_{x=a} &= 0, \quad V_x|_{x=a} = 0 \\
 (M_x)_{mn} &= -D_x \left[\frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right] - D_1 \left[\frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right] = 0 \\
 (V_x)_{mn} &= -D_x \left[\frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^3} \right] - \\
 &\quad - (D_1 + 4D_{xy}) \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

M_x ifadeleri kullanılarak;

$$w_{m,n} = \frac{D_1 \left(\frac{w_{m,n+1} + w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right) + D_x \left(\frac{w_{m+1,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right)}{\left(\frac{2D_x}{(\Delta x)^2} + \frac{2D_1}{(\Delta y)^2} \right)}$$

olur. V_x kullanılarak;

$$\begin{aligned}
 &D_x \left(\frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} - w_{m-2,n}}{2(\Delta x)^3} \right) + \\
 &+ (D_1 + 4D_{xy}) \left(\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \right) \\
 w_{m-1,n} &= \frac{\left(\frac{-D_x}{(\Delta x)^3} - \frac{(D_1 + 4D_{xy})}{(\Delta x)(\Delta y)^2} \right)}{\left(\frac{2D_x}{(\Delta x)^2} + \frac{2D_1}{(\Delta y)^2} \right)} \\
 &+ (D_1 + 4D_{xy}) \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m-1,n} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta x)(\Delta y)^2} \right] + \\
 &+ D_x \left[\frac{w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n}}{2(\Delta x)^3} \right] \\
 w_{m-2,n} &= \frac{\left[\frac{D_x}{2(\Delta x)^3} \right]}{\left(\frac{2D_x}{(\Delta x)^2} + \frac{2D_1}{(\Delta y)^2} \right)}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak elde edilir.

Boşta kenarın y doğrultusunda olması durumunda M_y ifadeleri kullanılarak;

$$w_{m,n} = \frac{D_1 \left(\frac{w_{m+1,n} + w_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \right) + D_y \left(\frac{w_{m,n+1} + w_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \right)}{\left(\frac{2D_y}{(\Delta y)^2} + \frac{2D_1}{(\Delta x)^2} \right)}$$

olur. V_y kullanılarak;

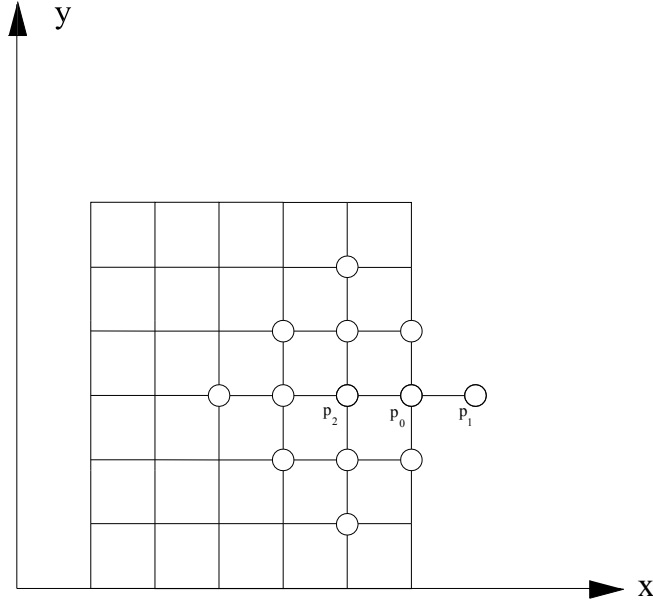
$$w_{m,n-1} = \frac{D_y \left(\frac{w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + w_{m,n-2}}{2(\Delta y)^3} \right) + (D_1 + 4D_{xy}) \left(\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2} \right)}{\left(\frac{-D_y}{(\Delta y)^3} - \frac{(D_1 + 4D_{xy})}{(\Delta y)(\Delta x)^2} \right)}$$

$$w_{m,n-2} = \frac{(D_1 + 4D_{xy}) \left[\frac{w_{m+1,n+1} - 2w_{m,n+1} + w_{m-1,n+1} - w_{m+1,n-1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}}{2(\Delta y)(\Delta x)^2} \right] + D_y \left[\frac{w_{m,n+2} - 2w_{m,n+1} + 2w_{m,n-1}}{2(\Delta y)^3} \right]}{\left[\frac{D_y}{2(\Delta y)^3} \right]}$$

(4.34)

Sonlu Fark Denklemlerinin Uygulanışı ve Denklem Sayısı: Üzerinde $p(x,y)$ yayılı yükü olan ve kenarlarından rastgele mesnetlenmiş bir ortotropik dikdörtgen plak x eksenini yönünde m sayıda, y eksenini yönünde n sayıda eşit parçalara bölününce x eksenini yönünde mesnetler dahil $(m+1)$ sayıda, y eksenini yönünde mesnetler dahil $(n+1)$ sayıda düğüm noktası (yer değiştirme) oluşturulmuş olur. Toplamda $(m+1)(n+1)$ adet düğüm noktası oluşur.

Plağın kenarlarındaki yer değiştirmeler bilindiğinden x eksenini yönünde bilinmeyen yer değiştirme sayısı $(m+1-2) = (m-1)$ adet, y eksenini yönünde bilinmeyen yer değiştirme sayısı $(n+1-2) = (n-1)$ adet olur. Toplamda bilinmeyen yer değiştirme sayısı $(m-1)(n-1)$ adet olur.



Şekil 4.5: Fiktif Yerdeğiştirmeler için Sonlu Farklar Ağının Plaklarda Uygulanması

Yer değiştirmeler plak dışında, sınır koşullarına bağlı kalarak fiktif olarak genişletilir. Bu yerdeğiştirmeler sınırda verilen türev bağıntılarının ayrıklaştırılması ile bulunur. Plakta ankastre mesnet halinde yerdeğiştirme ve birinci türev olarak verilen eğim sıfırdır. Buna bağlı olarak fiktif yerdeğiştirmeler için birinci türev bağıntısı ayrıklaştırılarak kullanılır. Örneğin şekil 4.5’ da verilen p_0 noktasında birinci türev merkezi farklar kullanılarak ayrıklaştırıldığında;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(p_0) = \frac{u(p_1) - u(p_2)}{2\Delta x} \quad \rightarrow \quad u(p_1) = u(p_2) + 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(p_0) \quad (4.35)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı ile plak dışındaki fiktif yerdeğiştirme değeri plak üzerindeki iç nokta değerine bağlanmıştır. şayet sınırdaki türev değeri ankastre mesnette olduğu gibi, sıfır ise $u(p_1) = u(p_2)$ olarak bulunur.

Sabit mesnette olduğu gibi sınırda ikinci türev verildiğinde ikinci türevin merkezi farklar kullanılarak ayrıklaştırılması ile;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(p_0) = \frac{u(p_1) - 2u(p_0) + u(p_2)}{(\Delta x)^2}$$

$$u(p_1) = 2u(p_0) - u(p_2) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(p_0) \quad (4.36)$$

bağıntısı elde edilir. şayet sınırdaki ikinci türev ve fonksiyonun kendi değeri, sabit mesnette olduğu gibi, sıfır ise $u(p_1) = -u(p_2)$ olarak bulunur.

Serbest kenarlarda olduğu gibi sınırlarda sadece yer değıştirmenin türevleri verilir ise sınır noktalarındaki yer değıştirme değeri de bilinmeyendir. Bu durumda merkez nokta sınır noktalar üzerine uygulanarak ek denklemler elde edilir. Bu denklemlerde verilen fonksiyon türevlerinin ayrıklaştırılması ile bulunur.

Sonuçta plak dışında oluşan fiktif yerdeğıştirmeler sabit mesnetler için plak üzerindeki yer değıştirmelerin ters işaretlisi, ankastre mesnetler için aynı işaretlisidir.

Şekil 4.2’ de verilen sonlu farklar ağı şeması, plak üzerindeki yerdeğıştirmelerden herhangi biri merkez alınarak yerleştirilip, ağ katsayıları ile bu katsayılarla karşı gelen yerdeğıştirmelerin çarpılması ile sonlu farklar denklemleri oluşturulmaya başlar. Plak üzerinde mesnet noktaları hariç diğer tüm noktalarda bu işlemler yapılarak bütün denklemler oluşturulmuş olur. Bu denklemler daha önce belirtildiği gibi $(m-1)(n-1)$ adettir. Bu denklemlerin çözülmesi ile yerdeğıştirmeler bulunmuş olur.

Plak kenarlarından birinin boşta kenar olması halinde, sonlu farklar ağı merkezi bu kenar boyunca da yerleştirilerek bir sıra denklem takımı daha elde edilir. Bu takdirde boşta kenar x eksen yönünde tek mesnette olursa $(m)(n-1)$ sayıda, iki mesnette olursa $(m+1)(n-1)$ sayıda denklem oluşur. Boşta kenar y eksen yönünde tek mesnette olursa $(m-1)(n)$ sayıda, iki mesnette olursa $(m-1)(n+1)$ sayıda denklem oluşur.

Bu çalışmada ortotropik dikdörtgen plak x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünerek sonuca gidilmiştir. Tablo 4.1’ de bir ortotropik dikdörtgen plağın 10 eşit parçaya ayrılması halinde oluşan yerdeğıştirmeler gösterilmiştir.

Tablo 4.1 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş plakta yer değiştirmeler.

		Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf		
		Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf		
Wf	Wf	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	W10	W11	Wf	Wf
Wf	Wf	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18	W19	W20	W21	W22	Wf	Wf
Wf	Wf	W23	W24	W25	W26	W27	W28	W29	W30	W31	W32	W33	Wf	Wf
Wf	Wf	W34	W35	W36	W37	W38	W39	W40	W41	W42	W43	W44	Wf	Wf
Wf	Wf	W45	W46	W47	W48	W49	W50	W51	W52	W53	W54	W55	Wf	Wf
Wf	Wf	W56	W57	W58	W59	W60	W61	W62	W63	W64	W65	W66	Wf	Wf
Wf	Wf	W67	W68	W69	W70	W71	W72	W73	W74	W75	W76	W77	Wf	Wf
Wf	Wf	W78	W79	W80	W81	W82	W83	W84	W85	W86	W87	W88	Wf	Wf
Wf	Wf	W89	W90	W91	W92	W93	W94	W95	W96	W97	W98	W99	Wf	Wf
Wf	Wf	W100	W101	W102	W103	W104	W105	W106	W107	W108	W109	W110	Wf	Wf
Wf	Wf	W111	W112	W113	W114	W115	W116	W117	W118	W119	W120	W121	Wf	Wf
		Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf		
		Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf	Wf		

Tablo 4.1' e göre plakta $m=10$ ve $n=10$ olduğundan dolayı 121 adet yer değiştirme ve 121 adet denklem oluşur.

Plak dışında kalan noktalarda oluşan fiktif yer değiştirmelerden ilki mesnetlenme koşulundan elde edilen denklemler ile bulunur.

Tablo 4.1 ile verilen durumda, dörtkenarı sabit olarak mesnetlenmiş ise ortotropik plak için indisler ile beraber tekrar düzenlenirse Tablo 4.2 elde edilir.

Tablo 4.2 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı sabit mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.

		0	Wf19	Wf20	Wf21	Wf22	Wf23	Wf24	Wf25	Wf26	Wf27	0		
		0	-W1	-W2	-W3	-W4	-W5	-W6	-W7	-W8	-W9	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wf1	-W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	0	-W9	Wf10
Wf2	-W10	0	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18	0	-W18	Wf11
Wf3	-W19	0	W19	W20	W21	W22	W23	W24	W25	W26	W27	0	-W27	Wf12
Wf4	-W28	0	W28	W29	W30	W31	W32	W33	W34	W35	W36	0	-W36	Wf13
Wf5	-W37	0	W37	W38	W39	W40	W41	W42	W43	W44	W45	0	-W45	Wf14
Wf6	-W46	0	W46	W47	W48	W49	W50	W51	W52	W53	W54	0	-W54	Wf15
Wf7	-W55	0	W55	W56	W57	W58	W59	W60	W61	W62	W63	0	-W63	Wf16
Wf8	-W64	0	W64	W65	W66	W67	W68	W69	W70	W71	W72	0	-W72	Wf17
Wf9	-W73	0	W73	W74	W75	W76	W77	W78	W79	W80	W81	0	-W81	Wf18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	-W73	-W74	-W75	-W76	-W77	-W78	-W79	-W80	-W81	0		
		0	Wf28	Wf29	Wf30	Wf31	Wf32	Wf33	Wf34	Wf35	Wf36	0		

Tablo 4.2 den de görüleceği üzere $m=10$ ve $n=10$ olduğundan dolayı $(m-1)(n-1)=81$ adet yer değiştirme ve dolayısı ile 81 adet denklem oluşur.

Plak dışında kalan noktalarda oluşan fiktif yer değiştirmelerden ilki sabit mesnetlenme koşulundan dolayı mesnete eşit uzaklıkta ve plak üzerinde bulunan noktanın yer değiştirmesinin ters işaretlisi olur. İkinci fiktif yer değiştirme ise sonlu

farklar şablonunun merkezinin mesnet üzerine getirilmesi ile elde edilen denklemden elde edilir.

Mesnetlenme ve yüklemelerdeki simetri özellikleri kullanılırsa $w_1 = w_9 = w_{73} = w_{81}$, $w_2 = w_8 = w_{74} = w_{80} \dots$ şeklinde olacağından indisleri yeniden düzenlenerek Tablo 4.2 den Tablo 4.3 elde edilir. Hesaplarda simetri özelliği kullanılmamıştır.

Tablo 4.3 Sabit yayılı yükle yüklenmiş x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı sabit olarak mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.

		0	Wf6	Wf7	Wf8	Wf9	Wf10	Wf9	Wf8	Wf7	Wf6	0		
		0	-W1	-W2	-W3	-W4	-W5	-W4	-W3	-W2	-W1	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wf1	-W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0	-W1	Wf1
Wf2	-W6	0	W6	W7	W8	W9	W10	W9	W8	W7	W6	0	-W6	Wf2
Wf3	-W11	0	W11	W12	W13	W14	W15	W14	W13	W12	W11	0	-W11	Wf3
Wf4	-W16	0	W16	W17	W18	W19	W20	W19	W18	W17	W16	0	-W16	Wf4
Wf5	-W21	0	W21	W22	W23	W24	W25	W24	W23	W22	W21	0	-W21	Wf5
Wf4	-W16	0	W16	W17	W18	W19	W20	W19	W18	W17	W16	0	-W16	Wf4
Wf3	-W11	0	W11	W12	W13	W14	W15	W14	W13	W12	W11	0	-W11	Wf3
Wf2	-W6	0	W6	W7	W8	W9	W10	W9	W8	W7	W6	0	-W6	Wf2
Wf1	-W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0	-W1	Wf1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	-W1	-W2	-W3	-W4	-W5	-W4	-W3	-W2	-W1	0		
		0	Wf6	Wf7	Wf8	Wf9	Wf10	Wf9	Wf8	Wf7	Wf6	0		

Tablo 4.1 ile verilen durumda, dörtkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş ise ortotrop plak için indisler ile beraber tekrar düzenlenirse Tablo 4.4 elde edilir.

Tablo 4.4 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.

		0	Wf19	Wf20	Wf21	Wf22	Wf23	Wf24	Wf25	Wf26	Wf27	0		
		0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wf1	W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	0	W9	Wf10
Wf2	W10	0	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18	0	W18	Wf11
Wf3	W19	0	W19	W20	W21	W22	W23	W24	W25	W26	W27	0	W27	Wf12
Wf4	W28	0	W28	W29	W30	W31	W32	W33	W34	W35	W36	0	W36	Wf13
Wf5	W37	0	W37	W38	W39	W40	W41	W42	W43	W44	W45	0	W45	Wf14
Wf6	W46	0	W46	W47	W48	W49	W50	W51	W52	W53	W54	0	W54	Wf15
Wf7	W55	0	W55	W56	W57	W58	W59	W60	W61	W62	W63	0	W63	Wf16
Wf8	W64	0	W64	W65	W66	W67	W68	W69	W70	W71	W72	0	W72	Wf17
Wf9	W73	0	W73	W74	W75	W76	W77	W78	W79	W80	W81	0	W81	Wf18
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	W73	W74	W75	W76	W77	W78	W79	W80	W81	0		
		0	Wf28	Wf29	Wf30	Wf31	Wf32	Wf33	Wf34	Wf35	Wf36	0		

Tablo 4.4 den de görüleceği üzere sabit mesnetlenmede olduğu gibi 81 adet denklem oluşur.

Plak dışında kalan noktalarda oluşan fiktif yer değiştirmelerden ilki ankastre mesnetlenme koşulundan dolayı mesnete eşit uzaklıkta ve plak üzerinde bulunan noktanın yer değiştirmesine eşit olur. İkinci fiktif yer değiştirme ise sabit mesnetlenme koşulunda olduğu gibi sonlu farklar şablonunun merkezinin mesnet üzerine getirilmesi ile elde edilen denklemden elde edilir.

Mesnetlenme ve yüklemelerdeki simetri özellikleri sabit olarak mesnetlenmiş olan plaklarda olduğu gibi kullanılırsa Tablo 4.4 den Tablo 4.5 elde edilir.

Tablo 4.5 Sabit yayılı yükle yüklenmiş x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş dörtkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş ortotropik plakta yer değiştirmeler.

		0	Wf6	Wf7	Wf8	Wf9	Wf10	Wf9	Wf8	Wf7	Wf6	0		
		0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wf1	W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0	W1	Wf1
Wf2	W6	0	W6	W7	W8	W9	W10	W9	W8	W7	W6	0	W6	Wf2
Wf3	W11	0	W11	W12	W13	W14	W15	W14	W13	W12	W11	0	W11	Wf3
Wf4	W16	0	W16	W17	W18	W19	W20	W19	W18	W17	W16	0	W16	Wf4
Wf5	W21	0	W21	W22	W23	W24	W25	W24	W23	W22	W21	0	W21	Wf5
Wf4	W16	0	W16	W17	W18	W19	W20	W19	W18	W17	W16	0	W16	Wf4
Wf3	W11	0	W11	W12	W13	W14	W15	W14	W13	W12	W11	0	W11	Wf3
Wf2	W6	0	W6	W7	W8	W9	W10	W9	W8	W7	W6	0	W6	Wf2
Wf1	W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0	W1	Wf1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0		
		0	Wf6	Wf7	Wf8	Wf9	Wf10	Wf9	Wf8	Wf7	Wf6	0		

Tablo 4.1 ile verilen durumda, üçkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş bir kenarı ise boşta olan ortotropik plak için indisler ile beraber tekrar düzenlenirse Tablo 4.6 elde edilir.

Tablo 4.6 x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş üçkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş bir kenarı boşta olan ortotropik plakta yer değiştirmeler.

		0	Wf19	Wf20	Wf21	Wf22	Wf23	Wf24	Wf25	Wf26	Wf27	0		
		0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wf1	W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W6	W7	W8	W9	0	W9	Wf10
Wf2	W10	0	W10	W11	W12	W13	W14	W15	W16	W17	W18	0	W18	Wf11
Wf3	W19	0	W19	W20	W21	W22	W23	W24	W25	W26	W27	0	W27	Wf12
Wf4	W28	0	W28	W29	W30	W31	W32	W33	W34	W35	W36	0	W36	Wf13
Wf5	W37	0	W37	W38	W39	W40	W41	W42	W43	W44	W45	0	W45	Wf14
Wf6	W46	0	W46	W47	W48	W49	W50	W51	W52	W53	W54	0	W54	Wf15
Wf7	W55	0	W55	W56	W57	W58	W59	W60	W61	W62	W63	0	W63	Wf16
Wf8	W64	0	W64	W65	W66	W67	W68	W69	W70	W71	W72	0	W72	Wf17
Wf9	W73	0	W73	W74	W75	W76	W77	W78	W79	W80	W81	0	W81	Wf18
0	0	0	W82	W83	W84	W85	W86	W87	W88	W89	W90	0	0	0
		0	Wf28	Wf29	Wf30	Wf31	Wf32	Wf33	Wf34	Wf35	Wf36	0		
		0	Wf37	Wf38	Wf39	Wf40	Wf41	Wf42	Wf43	Wf44	Wf45	0		

Tablo 4.6 dan da görüleceği üzere $m = 10$ ve $n = 10$ olmasına rağmen bir kenarın boşta kenar olmasından dolayı $(m - 1)(n) = 90$ adet yer değiştirme ve dolayısı ile 90 adet denklem oluşur.

Plak dışında kalan noktalarda oluşan fiktif yer değiştirmeler ise ankastre olarak mesnetlenen kenarlarda ankastre mesnetlenme koşullarındaki gibi elde edilir. Boşta kenardan sonra oluşan fiktif yer değiştirme ise boşta kenar koşullarından elde edilen denklemlerden elde edilir.

Mesnetlenme ve yüklemelerdeki simetri özellikleri kullanılırsa Tablo 4.6 dan Tablo 4.7 elde edilir.

Tablo 4.7 Sabit yayılı yüklerle yüklenmiş x ve y yönünde 10 eşit parçaya bölünmüş üçkenarı ankastre olarak mesnetlenmiş bir kenarı boşta olan ortotropik plakta yer değiştirmeler.

		0	Wf10	Wf11	Wf12	Wf13	Wf14	Wf13	Wf12	Wf11	Wf10	0		
		0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wf1	W1	0	W1	W2	W3	W4	W5	W4	W3	W2	W1	0	W1	Wf1
Wf2	W6	0	W6	W7	W8	W9	W10	W9	W8	W7	W6	0	W6	Wf2
Wf3	W11	0	W11	W12	W13	W14	W15	W14	W13	W12	W11	0	W11	Wf3
Wf4	W16	0	W16	W17	W18	W19	W20	W19	W18	W17	W16	0	W16	Wf4
Wf5	W21	0	W21	W22	W23	W24	W25	W24	W23	W22	W21	0	W21	Wf5
Wf6	W26	0	W26	W27	W28	W29	W30	W29	W28	W27	W26	0	W26	Wf6
Wf7	W31	0	W31	W32	W33	W34	W35	W34	W33	W32	W31	0	W31	Wf7
Wf8	W36	0	W36	W37	W38	W39	W40	W39	W38	W37	W36	0	W36	Wf8
Wf9	W41	0	W41	W42	W43	W44	W45	W44	W43	W42	W41	0	W41	Wf9
0	0	0	W46	W47	W48	W49	W50	W49	W48	W47	W46	0	0	0
		0	Wf15	Wf16	Wf17	Wf18	Wf19	Wf18	Wf17	Wf16	Wf15	0		
		0	Wf20	Wf21	Wf22	Wf23	Wf24	Wf23	Wf22	Wf21	Wf20	0		

Bu çalışmada, oluşturulan doğrusal denklemler iterasyon yöntemi ile çözülmüştür. Excel tablolarında bulunan döngüsel başvuru yardımı ile iterasyon yapılmıştır.

4.4 DOĞRUSAL DENKLEM TAKIMININ ÇÖZÜMÜ İÇİN DAİRESEL DÖNGÜ

Elektronik tablolarda bir hücreye yazılan formül diğer bir hücreye yazılmış olan bir değere veya formüle referans verebilir. Bir hücreye yazılan formül doğrudan ya da dolaylı olarak kendi hücrelerine referans verir ise buna döngüsel başvuru veya çevrimli başvuru adı verilmektedir.

Döngüsel başvuru yapıldığında, mevcut verilere göre hesaplanan hücre değeri değiştiğinde ilgili olduğu diğer hücre değerleri de değişir. İlgili hücrelerdeki değerlerin değişmesi döngüsel başvuru yapılan hücre değerinin tekrar

hesaplanmasına sebep olur. Bu tekrar hesaplanmaya yineleme adı verilir. Yineleme, daha önceden belirlenen yenileme sayısına eşit oluncaya kadar ya da hücrelerdeki değerler arasındaki fark önceden belirlenen bir değerden küçük oluncaya kadar devam eder.

Microsoft Excel kullanılarak yapılan bir programda, döngüsel başvuru yapıldığında bu işlemin bir hata sonucunda yapılıp yapılmadığı ve bu konu hakkında yardım istenip istenmediği bir iletişim kutusu ile kullanıcıya sorulur. Bu işlemin bilerek yapıldığı kabul edilen seçenek butonuna basıldığında döngüsel başvuru program tarafından kabul edilir.

Döngüsel başvuru yenileme sayısı ve hücreler arasında ki fark, Excel çalışma sayfasının Araçlar-Seçenekler-Hesaplama kısmında belirtilir. Bu verilere göre döngüsel başvuru işlemi tamamlanır.

Plak diferansiyel denklemi daha önce anlatıldığı şekilde kurulduktan sonra, Microsoft Excel kullanılarak bir program hazırlanır. Bu programda, dikdörtgen plak elektronik bir tablo haline getirilir. Bu plak üzerinde alınan her nokta bir hücre olarak ifade edilir. Bir hücreye, plak denkleminde $w_{m,n}$ yalnız bırakılarak formülü girilir. Bir hücreye girilen formülün diğer hücelere kopyalanarak tüm tablo hazırlanmış olur. Formül girişlerinin hemen arkasından program otomatik olarak döngüsel başvuruyu başlatır ve belirlenen sınırlara ulaşınca kadar çalışmayı yinelemeye devam eder. Belirlenen sınırlara ulaşıldığında çalışma durdurulur.

4.5 ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAK DENKLEMLERİNİN BOYUTSUZLAŞTIRILMASI

Bu kısımda ortotropik plak denklemleri, deplasmanlar, momentler, kesme kuvvetleri, mesnet reaksiyonları ve köşe kuvvetleri boyutsuzlaştırılacaktır. Bu kuvvetleri boyutsuzlaştırmalar için öncelikle (2.55) ve (2.58) ile verilen ortotropik plak denklemlerine ait ifadelerin boyutsuzlaştırılması gerekir. Bunun için x ve y doğrultularındaki uzunluklar ile beraber (2.55) ve (2.58) ifadeleri kullanılarak;

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x}{a} & \bar{y} &= \frac{y}{b} & \bar{D}_x &= \frac{D_x}{\left(\frac{E_x^* h^3}{12}\right)} & \bar{D}_y &= \frac{D_y}{\left(\frac{E_y^* h^3}{12}\right)} \\
\bar{D}_{xy} &= \frac{D_{xy}}{\left(\frac{Gh^3}{12}\right)} & \bar{D}_1 &= \frac{D_1}{\left(\frac{E_{xy} h^3}{12}\right)} & \bar{H} &= \frac{H}{(D_1 + 2D_{xy})}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

boyutsuz ifadeleri elde edilir. Elde edilen ifadelerin kontrolünü $\bar{D}_x$ için yapacak olursak;

$$\bar{D}_x = \frac{D_x}{\left(\frac{E_x^* h^3}{12}\right)} = \frac{KNM}{(KN / M^2)(M^3)} = \frac{KNM}{KNM} = \text{BOYUTSUZ} \tag{4.38}$$

Yük ifadesinin de yayılı yükte olduğu gibi p_0 yayılı yükün şiddetine bölünmesi ile;

$$\bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{p(x, y)}{p_0} \tag{4.39}$$

boyutsuz yük ifadesi elde edilmiş olur. Daha önce (2.57) ile verilen ortotropik plak denklemi elde edilen boyutsuz ifadeler kullanılarak;

$$\bar{D}_x \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2\bar{H} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + \bar{D}_y \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} = \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) \tag{4.40}$$

boyutsuz plak denklemi elde edilir. Burada bilinmeyenler sadece w boyutsuz deplasmanlardır. Bunlarda program sonucu olarak elde edileceklerdir. Elde edilen boyutsuz deplasmanlar kullanılarak;

$$\bar{M}_x = -(\bar{D}_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2})$$

$$\bar{M}_y = -(\bar{D}_y \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2})$$

$$\bar{M}_{xy} = 2\bar{D}_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}$$

$$\bar{Q}_x = -\bar{D}_x \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} - \bar{H} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2 \partial \bar{x}}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_y &= -\bar{D}_y \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} - \bar{H} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \\
\bar{V}_x &= -\bar{D}_x \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} - (\bar{D}_1 + 4\bar{D}_{xy}) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \\
\bar{V}_y &= -\bar{D}_y \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{y}^3} - (\bar{D}_1 + 4\bar{D}_{xy}) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \\
\bar{R} &= 2\bar{M}_{xy} = 4\bar{D}_{xy} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

boyutsuz ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeler sınır şartları içinde kullanılarak;

a) Ankastre Mesnet:

$$\bar{w}|_{x=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right|_{x=0} = 0 \tag{4.42}$$

b) Sabit Mesnet:

$$\begin{aligned}
w|_{x=0} &= 0 \\
\bar{M}_x &= -(\bar{D}_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}) = 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

c) Serbest Kenar:

$$\begin{aligned}
M_x|_{x=a} &= 0, \quad V_x|_{x=a} = 0 \\
\bar{M}_x &= -(\bar{D}_x \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{D}_1 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2}) = 0 \\
\bar{V}_x &= -\bar{D}_x \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x}^3} - (\bar{D}_1 + 4\bar{D}_{xy}) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

boyutsuz sınır şartları elde edilmiş olur.

Programda sonuçlar boyutsuz olarak elde edileceğinden gerçek boyutlu değerlere ulaşabilmek için verilerin gerçek değerlerinin katsayılara uygulanması ile elde edilir.

4.6 ORTOTROPİK DİKDÖRTGEN PLAK PROBLEMİNİN SONLU FARKLAR İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, Microsoft Office Excel programı ile hazırlanan bilgisayar programı kullanılarak çeşitli ortotropik plak problemleri ve ortotropinin özel hali olan izotropik plak problemleri çözülecektir.

ORTOTROPİK PLAK PROBLEMLERİ: Bu bölümde Karl GIRKMANN' ın Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler (Çeviri: Prof. Dr. Sacit TAMEROĞLU) kitabının 395. sayfasında verilen dört kenarı sabit olarak mesnetlenmiş olan ortotropik plak ve plak sabitleri ile Zekai CELEP, Nahit KUMBASAR' ın Betonarme Yapılar kitabının Örnek 2.1. bölümünde verilen hareketli yükler ve plak boyutları kullanılarak çözülecektir. Bu veriler ve problemin çözümü;

$$E_{xx} = 150.000 \text{ kg} / \text{cm}^2 = 15.000.000 \text{ KN} / \text{m}^2 = 15 \text{ GPa}$$

$$E_{yy} = 0,1E_{xx} = 15.000 \text{ kg} / \text{cm}^2 = 1.500.000 \text{ KN} / \text{m}^2 = 1,5 \text{ GPa}$$

$$G = 10.000 \text{ kg} / \text{cm}^2 = 1.000.000 \text{ KN} / \text{m}^2 = 1 \text{ GPa}$$

$$\nu_x = 0,4$$

$$\nu_y = 0,1\nu_x = 0,04$$

$$q = 2 \text{ KN} / \text{m}^2$$

$$l_x = 4,6 \text{ m} \quad l_y = 3,6 \text{ m} \quad h = 0,12 \text{ m} \quad (4.45)$$

ÖRNEK 1: ORTOTROPİK PLAK PROBLEMİ

Tablo 4.8 Verilen Şartlar Altında Oluşan Deplasmanlar

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20			0,00000	-0,00024	-0,00044	-0,00060	-0,00069	-0,00072	-0,00069	-0,00060	-0,00044	-0,00024	0,00000		
	-0,10		0,00013	0,00000	-0,00013	-0,00025	-0,00033	-0,00038	-0,00040	-0,00038	-0,00033	-0,00025	-0,00013	0,00000	0,00013	
	0,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,10		-0,00025	-0,00013	0,00000	0,00025	0,00033	0,00038	0,00040	0,00038	0,00033	0,00025	0,00013	0,00000	-0,00013	-0,00025
	0,20		-0,00044	-0,00024	0,00000	0,00044	0,00060	0,00069	0,00072	0,00069	0,00060	0,00044	0,00024	0,00000	-0,00024	-0,00044
	0,30		-0,00059	-0,00032	0,00000	0,00032	0,00059	0,00079	0,00092	0,00096	0,00092	0,00079	0,00059	0,00032	0,00000	-0,00032
	0,40		-0,00067	-0,00036	0,00000	0,00036	0,00067	0,00091	0,00105	0,00110	0,00105	0,00091	0,00067	0,00036	0,00000	-0,00036
	0,50		-0,00070	-0,00038	0,00000	0,00038	0,00070	0,00094	0,00109	0,00115	0,00109	0,00094	0,00070	0,00038	0,00000	-0,00038
	0,60		-0,00067	-0,00036	0,00000	0,00036	0,00067	0,00091	0,00105	0,00110	0,00105	0,00091	0,00067	0,00036	0,00000	-0,00036
	0,70		-0,00059	-0,00032	0,00000	0,00032	0,00059	0,00079	0,00092	0,00096	0,00092	0,00079	0,00059	0,00032	0,00000	-0,00032
	0,80		-0,00044	-0,00024	0,00000	0,00024	0,00044	0,00060	0,00069	0,00072	0,00069	0,00060	0,00044	0,00024	0,00000	-0,00024
	0,90		-0,00025	-0,00013	0,00000	0,00013	0,00025	0,00033	0,00038	0,00040	0,00038	0,00025	0,00013	0,00000	-0,00013	-0,00025
	1,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1,10		0,00013	0,00000	-0,00013	-0,00025	-0,00033	-0,00038	-0,00040	-0,00040	-0,00038	-0,00033	-0,00025	-0,00013	0,00000	0,00013
	1,20		0,00000	-0,00013	-0,00024	-0,00044	-0,00060	-0,00069	-0,00072	-0,00069	-0,00060	-0,00044	-0,00024	0,00000	0,00000	0,00000

Tablo 4.9 Verilen Şartlar Altında Oluşan Mx Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
	1,20																

Tablo 4.10 Verilen Şartlar Altında Oluşan My Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
	1,20																

Tablo 4.11 Verilen Şartlar Altında Oluşan Mxy Momentleri

(x/a)																
-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20		

Tablo 4.12 Verilen Şartlar Altında Oluşan Qx Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20
(y/b)	-0.20															
	-0.10															
	0.00															
	0.10															
	0.20															
	0.30															
	0.40															
	0.50															
	0.60															
	0.70															
	0.80															
	0.90															
	1.00															
	1.10															
	1.20															

0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,74450	1,48159	1,01723	0,64323	0,31233	0,00000	-0,31233	-0,64323	-1,01723	-1,48159	-1,74451						
2,31334	1,98748	1,39664	0,89610	0,43897	0,00000	-0,43896	-0,89610	-1,39664	-1,98748	-2,31334						
2,54279	2,18954	1,54415	0,99167	0,48606	0,00000	-0,48606	-0,99167	-1,54415	-2,18954	-2,54279						
2,64105	2,27519	1,60465	1,02919	0,50399	0,00000	-0,50398	-1,02919	-1,60465	-2,27519	-2,64106						
2,66926	2,29967	1,62167	1,03948	0,50880	0,00000	-0,50879	-1,03948	-1,62167	-2,29968	-2,66927						
2,64105	2,27519	1,60465	1,02919	0,50399	0,00000	-0,50398	-1,02919	-1,60465	-2,27519	-2,64106						
2,54279	2,18954	1,54415	0,99167	0,48606	0,00000	-0,48606	-0,99167	-1,54415	-2,18954	-2,54279						
2,31334	1,98748	1,39664	0,89610	0,43897	0,00000	-0,43896	-0,89610	-1,39664	-1,98748	-2,31334						
1,74450	1,48159	1,01723	0,64323	0,31233	0,00000	-0,31233	-0,64323	-1,01723	-1,48159	-1,74451						
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000						

Tablo 4.13 Verilen Şartlar Altında Oluşan Qy Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

0,00000	0,90360	1,33446	1,55557	1,66220	1,69401	1,66220	1,42612	1,45452	1,42612	1,33062	1,55557	1,33446	0,90360	0,00000
0,00000	0,74936	1,13211	1,33061	1,42612	1,45452	1,42612	1,00344	1,02517	1,00344	0,93002	1,33062	1,13211	0,74936	0,00000
0,00000	0,49015	0,77713	0,93002	1,00344	1,02517	1,00344	0,64879	0,66376	0,64879	0,59813	0,93002	0,77713	0,49015	0,00000
0,00000	0,30163	0,49313	0,59812	0,64879	0,66376	0,64879	0,31984	0,32754	0,31984	0,29381	0,59813	0,49313	0,30163	0,00000
0,00000	0,14442	0,24020	0,29380	0,31984	0,32754	0,31984	0,00000	0,00000	0,00000	0,29381	0,24020	0,24020	0,14442	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	-0,14442	-0,24020	-0,29380	-0,31984	-0,32754	-0,31984	-0,64879	-0,66376	-0,64879	-0,59812	-0,29380	-0,24020	-0,14442	0,00000
0,00000	-0,30163	-0,49313	-0,59812	-0,64879	-0,66376	-0,64879	-1,00344	-1,02517	-1,00344	-0,93002	-0,59812	-0,49313	-0,30163	0,00000
0,00000	-0,49015	-0,77713	-0,93002	-1,00344	-1,02517	-1,00344	-1,42612	-1,45452	-1,42612	-1,33062	-1,13211	-0,74936	0,00000	0,00000
0,00000	-0,74936	-1,13211	-1,33061	-1,42612	-1,45452	-1,42612	-1,66220	-1,69401	-1,66220	-1,55557	-1,33446	-0,90360	0,00000	0,00000
0,00000	-0,90360	-1,33446	-1,55557	-1,66220	-1,69401	-1,66220	-1,66220	-1,66220	-1,66220	-1,55557	-1,33446	-0,90360	0,00000	0,00000

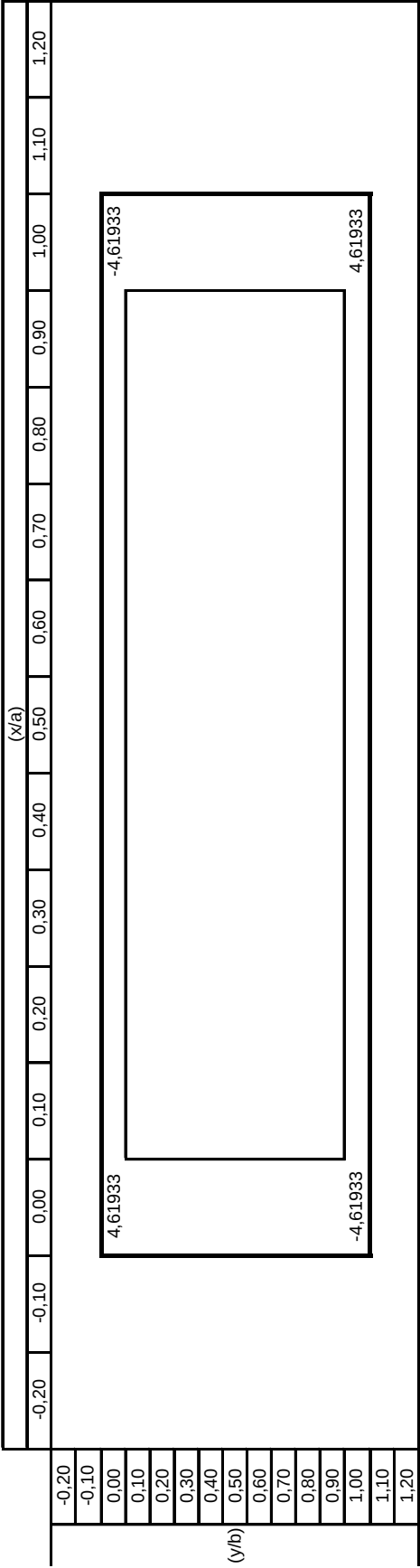
Tablo 4.14 Verilen Şartlar Altında Oluşan Vx Mesnet Tepkileri

		(x/a)																																																																																																																																																																																																										
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20																																																																																																																																																																																												
(y/b)	-0,20	<table><tr><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td></tr><tr><td>2,99842</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3,79757</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4,03368</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4,10322</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4,11834</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4,10322</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4,03368</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3,79757</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2,99842</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>0,00000</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>																0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	2,99842																	3,79757																	4,03368																	4,10322																	4,11834																	4,10322																	4,03368																	3,79757																	2,99842																	0,00000																
	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000																																																																																																																																																																																											
	2,99842																																																																																																																																																																																																											
	3,79757																																																																																																																																																																																																											
	4,03368																																																																																																																																																																																																											
	4,10322																																																																																																																																																																																																											
	4,11834																																																																																																																																																																																																											
	4,10322																																																																																																																																																																																																											
	4,03368																																																																																																																																																																																																											
	3,79757																																																																																																																																																																																																											
	2,99842																																																																																																																																																																																																											
	0,00000																																																																																																																																																																																																											
	-0,10																																																																																																																																																																																																											
0,00																																																																																																																																																																																																												
0,10																																																																																																																																																																																																												
0,20																																																																																																																																																																																																												
0,30																																																																																																																																																																																																												
0,40																																																																																																																																																																																																												
0,50																																																																																																																																																																																																												
0,60																																																																																																																																																																																																												
0,70																																																																																																																																																																																																												
0,80																																																																																																																																																																																																												
0,90																																																																																																																																																																																																												
1,00																																																																																																																																																																																																												
1,10																																																																																																																																																																																																												
1,20																																																																																																																																																																																																												

Tablo 4.15 Verilen Şartlar Altında Oluşan Vy Mesnet Tepkileri

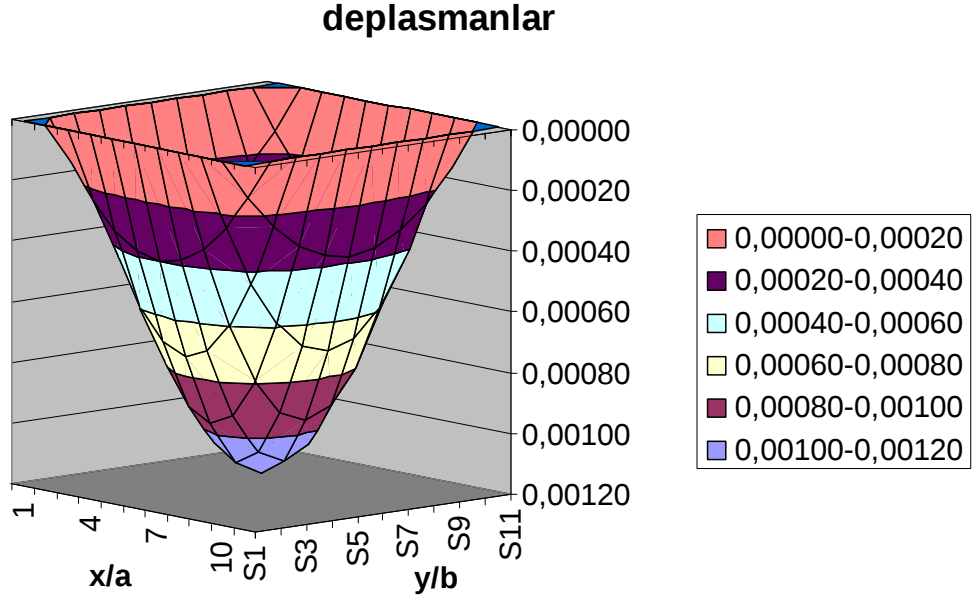
		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/h)	-0,20	0,00000 1,66196 2,41689 2,78583 2,95626 3,00579 2,95626 2,78584 2,41689 1,66196 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 0,00000 -1,66196 -2,41689 -2,78583 -2,95626 -3,00579 -2,95626 -2,78584 -2,41689 -1,66196 0,00000															
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
	1,20																

Tablo 4.16 Verilen Şartlar Altında Oluşan R Köşe Kuvvetleri



Tablo 4.17 Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plaga Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme

(x/a)																
-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20		
(y/b)	-0,20	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	-0,10	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,10	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,20	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,30	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,40	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,50	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,60	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,70	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,80	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	0,90	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	1,00	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	1,10	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		
	1,20	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000		



Şekil 4.6: Verilen Şartlar Altında Oluşan Deplasmana Ait Grafik

**ÖRNEK 2: DÜZGÜN YAYILI YÜKLE YÜKLÜ, DÖRT KENARI SABİT MESNETLİ DİKDÖRTGEN
İZOTROPİK PLAK PROBLEMİ**

Tablo 4.18 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü, Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları

		(x/a)													(y/b)	
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
-0,20		0,00000	-0,00071	-0,00141	-0,00193	-0,00225	-0,00236	-0,00225	-0,00193	-0,00141	-0,00071	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-0,10		0,00044	0,00000	-0,00044	-0,00081	-0,00109	-0,00126	-0,00132	-0,00126	-0,00109	-0,00081	-0,00044	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10		-0,00071	-0,00044	0,00000	0,00044	0,00081	0,00109	0,00126	0,00132	0,00126	0,00109	0,00081	0,00044	0,00000	-0,00044	-0,00071
0,20		-0,00141	-0,00081	0,00000	0,00081	0,00151	0,00203	0,00235	0,00246	0,00235	0,00203	0,00151	0,00081	0,00000	-0,00081	-0,00141
0,30		-0,00193	-0,00109	0,00000	0,00109	0,00203	0,00274	0,00319	0,00333	0,00319	0,00274	0,00203	0,00109	0,00000	-0,00109	-0,00193
0,40		-0,00225	-0,00126	0,00000	0,00126	0,00235	0,00319	0,00370	0,00387	0,00370	0,00319	0,00235	0,00126	0,00000	-0,00126	-0,00225
0,50		-0,00236	-0,00132	0,00000	0,00132	0,00246	0,00333	0,00387	0,00406	0,00387	0,00333	0,00246	0,00132	0,00000	-0,00132	-0,00236
0,60		-0,00225	-0,00126	0,00000	0,00126	0,00235	0,00319	0,00370	0,00387	0,00370	0,00319	0,00235	0,00126	0,00000	-0,00126	-0,00225
0,70		-0,00193	-0,00109	0,00000	0,00109	0,00203	0,00274	0,00319	0,00333	0,00319	0,00274	0,00203	0,00109	0,00000	-0,00109	-0,00193
0,80		-0,00141	-0,00081	0,00000	0,00081	0,00151	0,00203	0,00235	0,00246	0,00235	0,00203	0,00151	0,00081	0,00000	-0,00081	-0,00141
0,90		-0,00071	-0,00044	0,00000	0,00044	0,00081	0,00109	0,00126	0,00132	0,00126	0,00109	0,00081	0,00044	0,00000	-0,00044	-0,00071
1,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,10		0,00044	0,00000	-0,00044	-0,00081	-0,00109	-0,00126	-0,00132	-0,00126	-0,00109	-0,00081	-0,00044	-0,00000	0,00000	0,00044	0,00000
1,20		0,00000	-0,00071	-0,00141	-0,00193	-0,00225	-0,00236	-0,00225	-0,00193	-0,00141	-0,00071	-0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tablo 4.19 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mx Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
1,20																	

Tablo 4.20 Düzgün Yaylı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz My Momentleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	-0,10	0,00000	0,00833	0,01409	0,01787	0,02003	0,02073	0,02003	0,01787	0,01409	0,00833	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,00	0,00000	0,01272	0,02229	0,02889	0,03275	0,03402	0,03275	0,02889	0,02229	0,01272	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,10	0,00000	0,01514	0,02696	0,03535	0,04035	0,04201	0,04035	0,03535	0,02696	0,01514	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,20	0,00000	0,01637	0,02935	0,03871	0,04433	0,04621	0,04433	0,03871	0,02935	0,01637	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,30	0,00000	0,01675	0,03009	0,03974	0,04557	0,04751	0,04557	0,03974	0,03009	0,01675	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,40	0,00000	0,01637	0,02935	0,03871	0,04433	0,04621	0,04433	0,03871	0,02935	0,01637	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,50	0,00000	0,01514	0,02696	0,03535	0,04035	0,04201	0,04035	0,03535	0,02696	0,01514	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,60	0,00000	0,01272	0,02229	0,02889	0,03275	0,03402	0,03275	0,02889	0,02229	0,01272	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,70	0,00000	0,00833	0,01409	0,01787	0,02003	0,02073	0,02003	0,01787	0,01409	0,00833	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,80	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,90	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1,10	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	

Tablo 4.21 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mxy Momentleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

(x/a)																
0,03057	0,02832	0,02635	0,02137	0,01578	0,00804	0,00000	-0,00758	-0,01578	-0,02281	-0,02832	-0,03057					
0,02832	0,02635	0,02137	0,01756	0,01232	0,00632	0,00000	-0,00758	-0,01485	-0,02137	-0,02635	-0,02832					
0,02281	0,02137	0,01756	0,01232	0,00632	0,00000	-0,00758	-0,01232	-0,01756	-0,02137	-0,02635	-0,02832					
0,01578	0,01485	0,01232	0,00871	0,00449	0,00000	-0,00449	-0,00871	-0,01232	-0,01485	-0,01756	-0,02137					
0,00804	0,00758	0,00632	0,00449	0,00232	0,00000	-0,00232	-0,00449	-0,00632	-0,00758	-0,00804	-0,00804					
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000	-0,00000	-0,00000	-0,00000	-0,00000	-0,00000					
-0,00804	-0,00758	-0,00632	-0,00449	-0,00232	0,00000	0,00232	0,00449	0,00632	0,00758	0,00804	0,00804					
-0,01578	-0,01485	-0,01232	-0,00871	-0,00449	0,00000	0,00449	0,00871	0,01232	0,01485	0,01578	0,01578					
-0,02281	-0,02137	-0,01756	-0,01232	-0,00632	0,00000	0,00632	0,01232	0,01756	0,02137	0,02281	0,02281					
-0,02832	-0,02635	-0,02137	-0,01756	-0,01232	-0,00632	0,00000	0,00632	0,01232	0,01756	0,02137	0,02635					
-0,03057	-0,02832	-0,02281	-0,02137	-0,01485	-0,00758	0,00000	0,00758	0,01485	0,02137	0,02281	0,02832					

Tablo 4.22 Düzgün Yaylı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	-0,10	0,17813	0,10313	0,06292	0,03687	0,01716	0,00000	0,00000	0,00000	-0,01716	-0,03687	-0,06292	-0,10313	-0,17813	-0,17813	-0,17813
	0,00	0,25626	0,17147	0,11168	0,06739	0,03176	0,00000	0,00000	0,00000	-0,03176	-0,06739	-0,11168	-0,17147	-0,25626	-0,25626	-0,25626
	0,10	0,30397	0,21481	0,14495	0,08925	0,04248	0,00000	0,00000	0,00000	-0,04248	-0,08925	-0,14495	-0,21481	-0,30397	-0,30397	-0,30397
	0,20	0,32999	0,23886	0,16407	0,10217	0,04893	0,00000	0,00000	0,00000	-0,04893	-0,10217	-0,16407	-0,23886	-0,32999	-0,32999	-0,32999
	0,30	0,33828	0,24657	0,17028	0,10642	0,05107	0,00000	0,00000	0,00000	-0,05107	-0,10642	-0,17028	-0,24657	-0,33828	-0,33828	-0,33828
	0,40	0,32999	0,23886	0,16407	0,10217	0,04893	0,00000	0,00000	0,00000	-0,04893	-0,10217	-0,16407	-0,23886	-0,32999	-0,32999	-0,32999
	0,50	0,30397	0,21481	0,14495	0,08925	0,04248	0,00000	0,00000	0,00000	-0,04248	-0,08925	-0,14495	-0,21481	-0,30397	-0,30397	-0,30397
	0,60	0,25626	0,17147	0,11168	0,06739	0,03176	0,00000	0,00000	0,00000	-0,03176	-0,06739	-0,11168	-0,17147	-0,25626	-0,25626	-0,25626
	0,70	0,17813	0,10313	0,06292	0,03687	0,01716	0,00000	0,00000	0,00000	-0,01716	-0,03687	-0,06292	-0,10313	-0,17813	-0,17813	-0,17813
	0,80	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

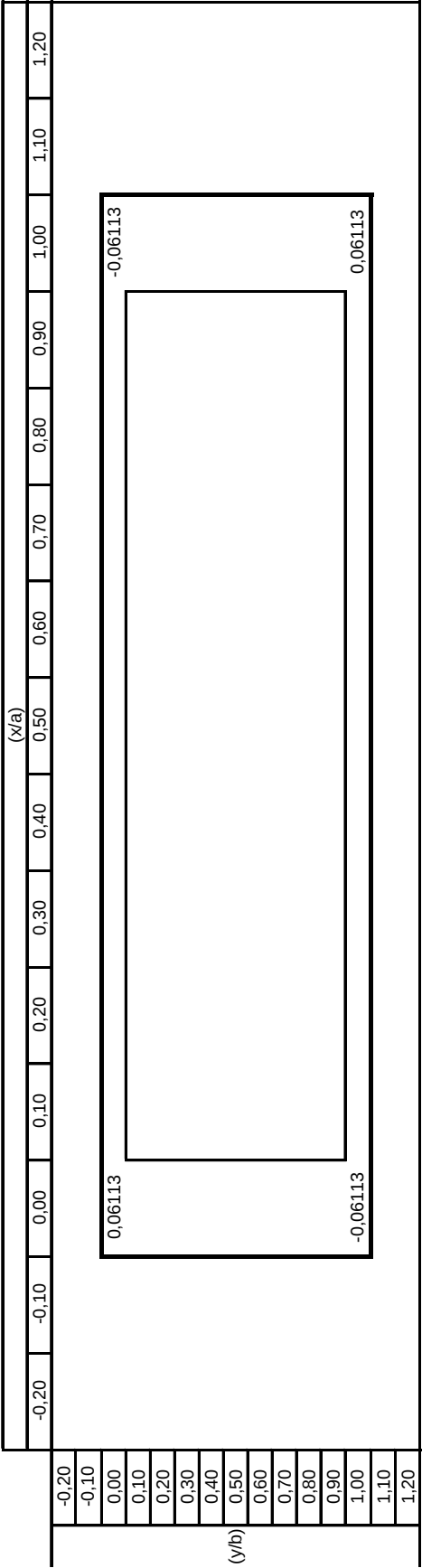
Tablo 4.23 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

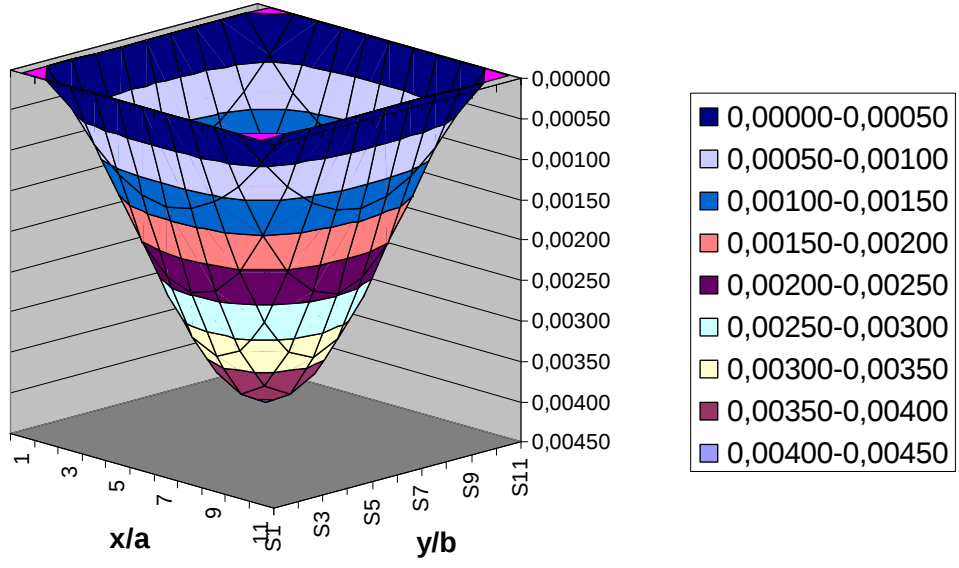
Tablo 4.24 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz V_x Ve V_y Mesnet Tapkileri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	Vy															

Tablo 4.25 Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Rxy Köşe Kuvvetleri



Deplasmanlar



Şekil 4.7: Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plâğın Çökmesi

ÖRNEK 3: DÖRT KENARI ANKASTRE OLARAK MESNETLİ DİKDÖRTGEN PLAĞA UYGULANAN SABİT YAYILI YÜKLEME

Tablo 4.26 Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plaga Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

Tablo 4.27 Sabit Yayılı Yükle Yüklü, Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları

		(x/a)													(y/b)				
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20			
-0,20		0,00000	0,00025	0,00079	0,00119	0,00144	0,00152	0,00144	0,00123	0,00096	0,00061	0,00023	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-0,10		0,00005	0,00000	0,00012	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,10		0,00025	0,00005	0,00000	0,00012	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,20		0,00079	0,00012	0,00000	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,30		0,00119	0,00019	0,00000	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,40		0,00144	0,00023	0,00000	0,00023	0,00024	0,00023	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,50		0,00152	0,00024	0,00000	0,00024	0,00023	0,00023	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,60		0,00144	0,00023	0,00000	0,00023	0,00023	0,00023	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,70		0,00119	0,00019	0,00000	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,80		0,00079	0,00012	0,00000	0,00012	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,90		0,00025	0,00005	0,00000	0,00005	0,00012	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,10		0,00005	0,00005	0,00000	0,00005	0,00012	0,00019	0,00023	0,00024	0,00023	0,00019	0,00012	0,00006	0,00003	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1,20		0,00000	0,00025	0,00079	0,00119	0,00144	0,00152	0,00144	0,00123	0,00096	0,00061	0,00023	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tablo 4.28 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mx Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10	0,00000	-0,00281	-0,00724	-0,01118	-0,01374	-0,01462	-0,01374	-0,01118	-0,00724	-0,00281	0,00000	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872
	0,20	-0,00938	-0,00350	-0,00134	-0,00121	-0,00164	-0,00186	-0,00164	-0,00121	-0,00134	-0,00350	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580
	0,30	-0,02414	-0,00696	0,00219	0,00657	0,00838	0,00886	0,00838	0,00657	0,00219	-0,00696	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872
	0,40	-0,03726	-0,01099	0,00400	0,01198	0,01572	0,01680	0,01572	0,01198	0,00400	-0,01099	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872	-0,04580
	0,50	-0,04580	-0,01399	0,00477	0,01512	0,02015	0,02164	0,02015	0,01512	0,00477	-0,01399	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872
	0,60	-0,04872	-0,01508	0,00497	0,01614	0,02163	0,02326	0,02163	0,01614	0,00497	-0,01508	-0,04872	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872	-0,04580
	0,70	-0,04580	-0,01399	0,00477	0,01512	0,02015	0,02164	0,02015	0,01512	0,00477	-0,01399	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872
	0,80	-0,03726	-0,01099	0,00400	0,01198	0,01572	0,01680	0,01572	0,01198	0,00400	-0,01099	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872	-0,04580
	0,90	-0,02414	-0,00696	0,00219	0,00657	0,00838	0,00886	0,00838	0,00657	0,00219	-0,00696	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,04872
	1,00	-0,00938	-0,00350	-0,00134	-0,00121	-0,00164	-0,00186	-0,00164	-0,00121	-0,00134	-0,00350	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580
1,10	0,00000	-0,00281	-0,00724	-0,01118	-0,01374	-0,01462	-0,01374	-0,01118	-0,00724	-0,00281	0,00000	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	
1,20																	

Tablo 4.29 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz My Momentleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10	0,00000	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,03726	-0,02414	-0,00938	0,00000	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580
	0,20	-0,00281	-0,00350	-0,00696	-0,01099	-0,01399	-0,01508	-0,01399	-0,01099	-0,00696	-0,00350	-0,00281	-0,00350	-0,00696	-0,01099	-0,01399
	0,30	-0,00724	-0,00134	0,00219	0,00400	0,00477	0,00497	0,00477	0,00400	0,00219	0,00134	-0,00724	0,00134	0,00219	0,00400	0,00477
	0,40	-0,01118	-0,00121	0,00657	0,01198	0,01512	0,01614	0,01512	0,01198	0,00657	-0,00121	-0,01118	-0,00121	0,00657	0,01198	0,01512
	0,50	-0,01374	-0,00164	0,00838	0,01572	0,02015	0,02163	0,02015	0,01572	0,00838	-0,00164	-0,01374	-0,00164	0,00838	0,01572	0,02015
	0,60	-0,01462	-0,00186	0,00886	0,01680	0,02164	0,02326	0,02164	0,01680	0,00886	-0,00186	-0,01462	-0,00186	0,00886	0,01680	0,02164
	0,70	-0,01374	-0,00164	0,00838	0,01572	0,02015	0,02163	0,02015	0,01572	0,00838	-0,00164	-0,01374	-0,00164	0,00838	0,01572	0,02015
	0,80	-0,01118	-0,00121	0,00657	0,01198	0,01512	0,01614	0,01512	0,01198	0,00657	-0,00121	-0,01118	-0,00121	0,00657	0,01198	0,01512
	0,90	-0,00724	-0,00134	0,00219	0,00400	0,00477	0,00497	0,00477	0,00400	0,00219	0,00134	-0,00724	0,00134	0,00219	0,00400	0,00477
	1,00	-0,00281	-0,00350	-0,00696	-0,01099	-0,01399	-0,01508	-0,01399	-0,01099	-0,00696	-0,00350	-0,00281	-0,00350	-0,00696	-0,01099	-0,01399
1,10	0,00000	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	-0,04872	-0,04580	-0,03726	-0,02414	-0,00938	0,00000	-0,00938	-0,02414	-0,03726	-0,04580	
1,20																

Tablo 4.30 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mxy Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
	1,20																

0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00549	0,00645	0,00512	0,00275	0,00000	0,00000	-0,00275	-0,00512	-0,00645	-0,00549	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00645	0,00778	0,00632	0,00345	0,00000	0,00000	-0,00345	-0,00632	-0,00778	-0,00645	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00512	0,00632	0,00521	0,00287	0,00000	0,00000	-0,00287	-0,00521	-0,00632	-0,00512	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00275	0,00345	0,00287	0,00159	0,00000	0,00000	-0,00159	-0,00287	-0,00345	-0,00275	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	-0,00275	-0,00345	-0,00287	-0,00159	0,00000	0,00000	0,00159	0,00287	0,00345	0,00275	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	-0,00512	-0,00632	-0,00521	-0,00287	0,00000	0,00000	0,00287	0,00521	0,00632	0,00512	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	-0,00645	-0,00778	-0,00632	-0,00345	0,00000	0,00000	0,00345	0,00632	0,00778	0,00645	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	-0,00549	-0,00645	-0,00512	-0,00275	0,00000	0,00000	0,00275	0,00512	0,00645	0,00549	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Tablo 4.31 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20	0,00000	-0,12072	-0,13941	-0,10826	-0,05728	0,00000	0,05728	0,10826	0,13941	0,12072	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	-0,10	0,06307	0,01498	-0,02001	-0,02820	-0,01824	0,00000	0,01824	0,02820	0,02001	-0,01498	-0,06307	-0,06307	-0,06307	-0,06307	-0,06307
	0,00	0,23582	0,13759	0,07259	0,03371	0,01250	0,00000	-0,01250	-0,03371	-0,07259	-0,13759	-0,23582	-0,23582	-0,23582	-0,23582	-0,23582
	0,20	0,35170	0,22698	0,13906	0,07793	0,03456	0,00000	-0,03456	-0,07794	-0,13906	-0,22698	-0,35170	-0,35170	-0,35170	-0,35170	-0,35170
	0,30	0,41577	0,27956	0,17872	0,10442	0,04780	0,00000	-0,04780	-0,10442	-0,17872	-0,27956	-0,41577	-0,41577	-0,41577	-0,41577	-0,41577
	0,40	0,43607	0,29676	0,19186	0,11323	0,05220	0,00000	-0,05220	-0,11323	-0,19186	-0,29676	-0,43607	-0,43607	-0,43607	-0,43607	-0,43607
	0,50	0,41577	0,27956	0,17872	0,10442	0,04780	0,00000	-0,04780	-0,10442	-0,17872	-0,27956	-0,41577	-0,41577	-0,41577	-0,41577	-0,41577
	0,60	0,35170	0,22698	0,13906	0,07793	0,03456	0,00000	-0,03456	-0,07793	-0,13906	-0,22698	-0,35170	-0,35170	-0,35170	-0,35170	-0,35170
	0,70	0,23582	0,13759	0,07259	0,03371	0,01250	0,00000	-0,01250	-0,03371	-0,07259	-0,13759	-0,23582	-0,23582	-0,23582	-0,23582	-0,23582
	0,80	0,06307	0,01498	-0,02001	-0,02820	-0,01824	0,00000	0,01824	0,02820	0,02001	-0,01498	-0,06307	-0,06307	-0,06307	-0,06307	-0,06307
	0,90	0,00000	-0,12072	-0,13941	-0,10826	-0,05728	0,00000	0,05728	0,10826	0,13941	0,12072	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	1,00															
	1,10															
	1,20															

Tablo 4.32 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri

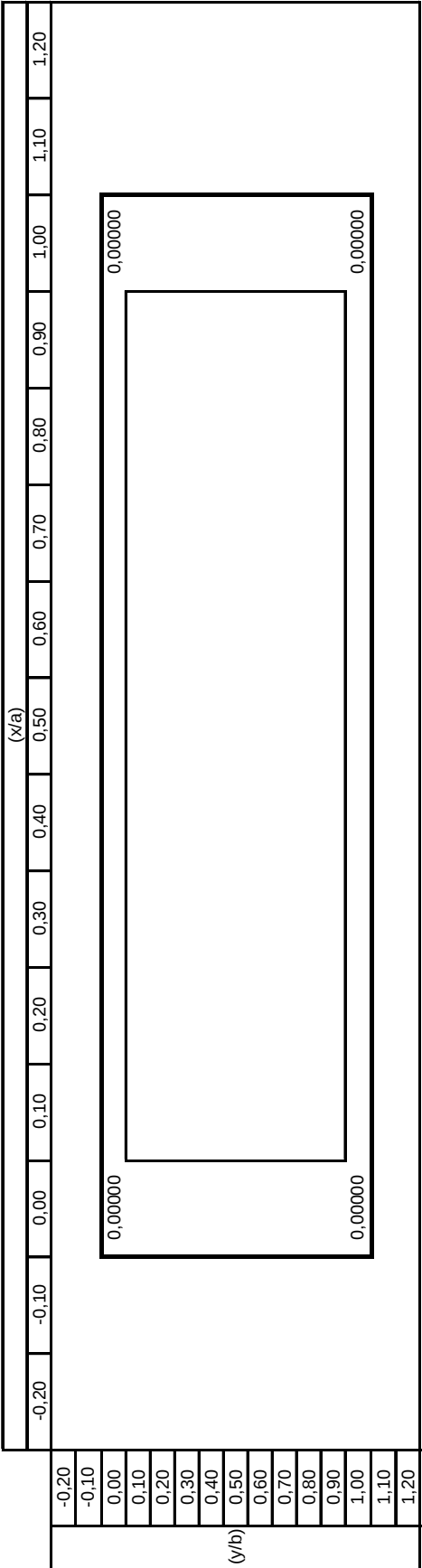
(x/a)																
-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20		
									</							

Tablo 4.33 Sabit Yayılı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz V_x Ve V_y Mesnet Tapkileri

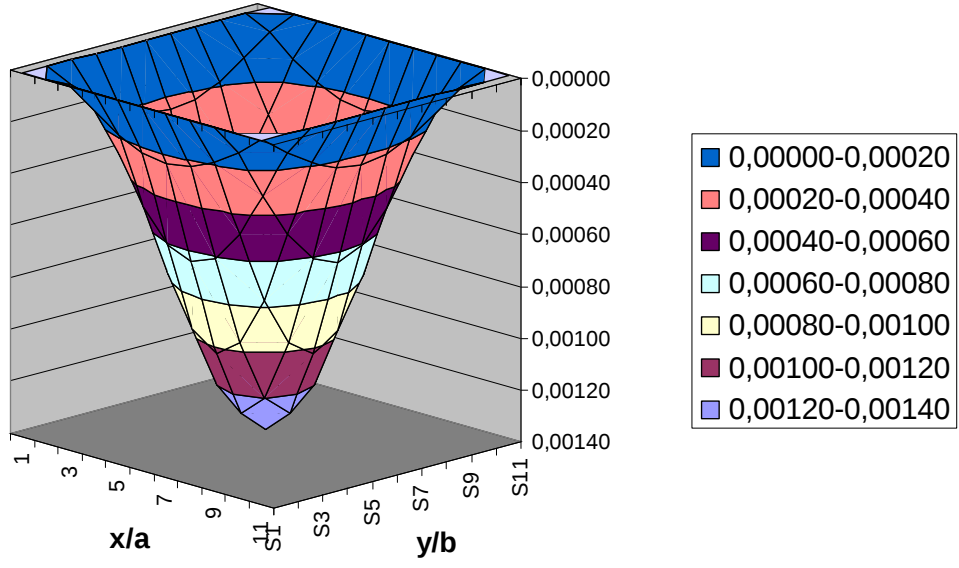
		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
1,00																	
1,10																	
1,20																	

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
1,00																	
1,10																	
1,20																	

Tablo 4.34 Sabit Yaylı Yükle Yüklü Dört Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Rxy Köşe Kuvvetleri



Deplasmanlar



Şekil 4.8: Sabit Yayıllı Yükle Yüklü Dört Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plâğın Çökmesi

**ÖRNEK 4: İKİ KENARI ANKASTRE OLARAK MESNETLİ VE İKİ KENARI BOŞTA OLAN DİKDÖRTGEN PLAĞA
UYGULANAN SABİT YAYILI YÜKLEME**

Tablo 4.35 İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve 2 Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plaka Uygulanan Sabit Yayılı Yükleme

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

Tablo 4.36 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20			0,00000	0,00001	0,00142	0,00278	0,00373	0,00407	0,00373	0,00278	0,00142	0,00001	0,00000		
	-0,10		0,00031	-0,00026	0,00031	0,00136	0,00243	0,00320	0,00348	0,00320	0,00243	0,00136	0,00031	-0,00026	0,00031	
	0,00	0,00071	0,00044	0,00000	0,00044	0,00132	0,00224	0,00290	0,00315	0,00290	0,00224	0,00132	0,00044	0,00000	0,00044	0,00071
	0,10	0,00265	0,00044	0,00000	0,00044	0,00126	0,00212	0,00274	0,00296	0,00274	0,00212	0,00126	0,00044	0,00000	0,00044	0,00265
	0,20	0,00223	0,00042	0,00000	0,00042	0,00122	0,00205	0,00264	0,00286	0,00264	0,00205	0,00122	0,00042	0,00000	0,00042	0,00223
	0,30	0,00217	0,00041	0,00000	0,00041	0,00120	0,00201	0,00259	0,00280	0,00259	0,00201	0,00120	0,00041	0,00000	0,00041	0,00217
	0,40	0,00215	0,00041	0,00000	0,00041	0,00118	0,00198	0,00257	0,00278	0,00257	0,00198	0,00118	0,00041	0,00000	0,00041	0,00215
	0,50	0,00215	0,00040	0,00000	0,00040	0,00118	0,00198	0,00256	0,00277	0,00256	0,00198	0,00118	0,00040	0,00000	0,00040	0,00215
	0,60	0,00215	0,00041	0,00000	0,00041	0,00118	0,00198	0,00257	0,00278	0,00257	0,00198	0,00118	0,00041	0,00000	0,00041	0,00215
	0,70	0,00217	0,00041	0,00000	0,00041	0,00120	0,00201	0,00259	0,00280	0,00259	0,00201	0,00120	0,00041	0,00000	0,00041	0,00217
	0,80	0,00223	0,00042	0,00000	0,00042	0,00122	0,00205	0,00264	0,00286	0,00264	0,00205	0,00122	0,00042	0,00000	0,00042	0,00223
	0,90	0,00265	0,00044	0,00000	0,00044	0,00126	0,00212	0,00274	0,00296	0,00274	0,00212	0,00126	0,00044	0,00000	0,00044	0,00265
	1,00	0,00071	0,00044	0,00000	0,00044	0,00132	0,00224	0,00290	0,00315	0,00290	0,00224	0,00132	0,00044	0,00000	0,00044	0,00071
	1,10		0,00031	-0,00026	0,00031	0,00136	0,00243	0,00320	0,00348	0,00320	0,00243	0,00136	0,00031	-0,00026	0,00031	
	1,20			0,00000	0,00001	0,00142	0,00278	0,00373	0,00407	0,00373	0,00278	0,00142	0,00001	0,00000		

Tablo 4.37 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mx Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20	-0,07974	-0,04006	-0,00375	0,02282	0,03880	0,04412	0,03880	0,02282	-0,00375	-0,04006	-0,07974	-0,08731	-0,08419	-0,08213	-0,08115	-0,08088
	-0,10	-0,08731	-0,03861	-0,00315	0,02214	0,03738	0,04246	0,03738	0,02214	-0,00315	-0,03861	-0,08731	-0,08419	-0,08213	-0,08115	-0,08088	-0,08088
	0,00	-0,08419	-0,03810	-0,00297	0,02191	0,03681	0,04178	0,03681	0,02191	-0,00297	-0,03810	-0,08419	-0,08213	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,10	-0,08213	-0,03758	-0,00289	0,02181	0,03659	0,04151	0,03659	0,02181	-0,00289	-0,03758	-0,08213	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,20	-0,08115	-0,03722	-0,00282	0,02177	0,03650	0,04141	0,03650	0,02177	-0,00282	-0,03722	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,30	-0,08088	-0,03709	-0,00279	0,02176	0,03648	0,04138	0,03648	0,02176	-0,00279	-0,03709	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,40	-0,08115	-0,03722	-0,00282	0,02177	0,03650	0,04141	0,03650	0,02177	-0,00282	-0,03722	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,50	-0,08088	-0,03709	-0,00279	0,02176	0,03648	0,04138	0,03648	0,02176	-0,00279	-0,03709	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,60	-0,08115	-0,03722	-0,00282	0,02177	0,03650	0,04141	0,03650	0,02177	-0,00282	-0,03722	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,70	-0,08213	-0,03758	-0,00289	0,02181	0,03659	0,04151	0,03659	0,02181	-0,00289	-0,03758	-0,08213	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,80	-0,08419	-0,03810	-0,00297	0,02191	0,03681	0,04178	0,03681	0,02191	-0,00297	-0,03810	-0,08419	-0,08213	-0,08115	-0,08088	-0,08088	-0,08088
	0,90	-0,08731	-0,03861	-0,00315	0,02214	0,03738	0,04246	0,03738	0,02214	-0,00315	-0,03861	-0,08731	-0,08419	-0,08213	-0,08115	-0,08088	-0,08088
	1,00	-0,07974	-0,04006	-0,00375	0,02282	0,03880	0,04412	0,03880	0,02282	-0,00375	-0,04006	-0,07974	-0,08731	-0,08419	-0,08213	-0,08115	-0,08088
	1,10																
	1,20																

Tablo 4.38 Sabit Yaylı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz My Momentleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	-0,10	-0,02619	-0,01031	-0,00195	0,00247	0,00468	0,00535	0,00468	0,00535	0,00468	0,00247	-0,00195	-0,01031	-0,02619	-0,02619	-0,02619
	0,00	-0,02526	-0,01191	-0,00237	0,00377	0,00717	0,00825	0,00717	0,00825	0,00717	0,00377	-0,00237	-0,01191	-0,02526	-0,02526	-0,02526
	0,10	-0,02464	-0,01177	-0,00204	0,00467	0,00857	0,00984	0,00857	0,00984	0,00857	0,00467	-0,00204	-0,01177	-0,02464	-0,02464	-0,02464
	0,20	-0,02435	-0,01148	-0,00167	0,00522	0,00931	0,01066	0,00931	0,01066	0,00931	0,00522	-0,00167	-0,01148	-0,02435	-0,02435	-0,02435
	0,30	-0,02426	-0,01138	-0,00153	0,00541	0,00954	0,01091	0,00954	0,01091	0,00954	0,00541	-0,00153	-0,01138	-0,02426	-0,02426	-0,02426
	0,40	-0,02435	-0,01148	-0,00167	0,00522	0,00931	0,01066	0,00931	0,01066	0,00931	0,00522	-0,00167	-0,01148	-0,02435	-0,02435	-0,02435
	0,50	-0,02464	-0,01177	-0,00204	0,00467	0,00857	0,00984	0,00857	0,00984	0,00857	0,00467	-0,00204	-0,01177	-0,02464	-0,02464	-0,02464
	0,60	-0,02526	-0,01191	-0,00237	0,00377	0,00717	0,00825	0,00717	0,00825	0,00717	0,00377	-0,00237	-0,01191	-0,02526	-0,02526	-0,02526
	0,70	-0,02619	-0,01031	-0,00195	0,00247	0,00468	0,00535	0,00468	0,00535	0,00468	0,00247	-0,00195	-0,01031	-0,02619	-0,02619	-0,02619
	0,80	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

Tablo 4.39 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mxy Momentleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

Tablo 4.40 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri

(x/a)																
	-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
1,00																
1,10																
1,20																

-0,30134	0,29227	0,24184	0,16364	0,08196	0,00000	-0,08196	-0,16364	-0,24184	-0,29227	0,30134
0,69221	0,41692	0,28281	0,18134	0,08924	0,00000	-0,08924	-0,18134	-0,28281	-0,41693	-0,69221
0,50187	0,40041	0,29113	0,18968	0,09365	0,00000	-0,09365	-0,18968	-0,29113	-0,40041	-0,50187
0,48626	0,39170	0,29164	0,19261	0,09567	0,00000	-0,09567	-0,19261	-0,29164	-0,39170	-0,48626
0,48338	0,38849	0,29112	0,19344	0,09643	0,00000	-0,09643	-0,19344	-0,29112	-0,38849	-0,48338
0,48320	0,38777	0,29090	0,19360	0,09662	0,00000	-0,09661	-0,19360	-0,29090	-0,38777	-0,48320
0,48338	0,38849	0,29112	0,19344	0,09643	0,00000	-0,09643	-0,19344	-0,29112	-0,38849	-0,48338
0,48626	0,39170	0,29164	0,19261	0,09567	0,00000	-0,09567	-0,19261	-0,29164	-0,39170	-0,48626
0,50187	0,40041	0,29113	0,18968	0,09365	0,00000	-0,09365	-0,18968	-0,29113	-0,40041	-0,50187
0,69221	0,41692	0,28281	0,18134	0,08924	0,00000	-0,08924	-0,18134	-0,28281	-0,41693	-0,69221
-0,30134	0,29227	0,24184	0,16364	0,08196	0,00000	-0,08196	-0,16364	-0,24184	-0,29227	0,30134

Tablo 4.41 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20	0,39686	-0,03107	0,00212	0,02311	0,03403	0,03740	0,03403	0,02311	0,00212	-0,03107	0,39686				
	-0,10	-0,11425	-0,03828	-0,00612	0,01102	0,01992	0,02271	0,01992	0,01102	-0,00612	-0,03828	-0,11426				
	0,00	0,02589	-0,00167	0,00066	0,00716	0,01193	0,01359	0,01193	0,00716	0,00066	-0,00167	0,02589				
	0,10	0,01518	0,00505	0,00327	0,00503	0,00703	0,00782	0,00703	0,00503	0,00327	0,00505	0,01518				
	0,20	0,00627	0,00341	0,00234	0,00268	0,00333	0,00362	0,00333	0,00268	0,00234	0,00341	0,00627				
	0,30	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000				
	0,40	-0,00627	-0,00341	-0,00234	-0,00268	-0,00333	-0,00362	-0,00333	-0,00268	-0,00234	-0,00341	-0,00627				
	0,50	-0,01518	-0,00505	-0,00327	-0,00503	-0,00703	-0,00782	-0,00703	-0,00503	-0,00327	-0,00505	-0,01518				
	0,60	-0,02589	0,00167	-0,00066	-0,00716	-0,01193	-0,01359	-0,01193	-0,00716	-0,00066	0,00167	-0,02589				
	0,70	0,11425	0,03828	0,00612	-0,01102	-0,01992	-0,02271	-0,01992	-0,01102	0,00612	0,03828	0,11426				
	0,80	-0,39686	0,03107	-0,00212	-0,02311	-0,03403	-0,03740	-0,03403	-0,02311	-0,00212	0,03107	-0,39686				
	0,90															
	1,00															
	1,10															
	1,20															

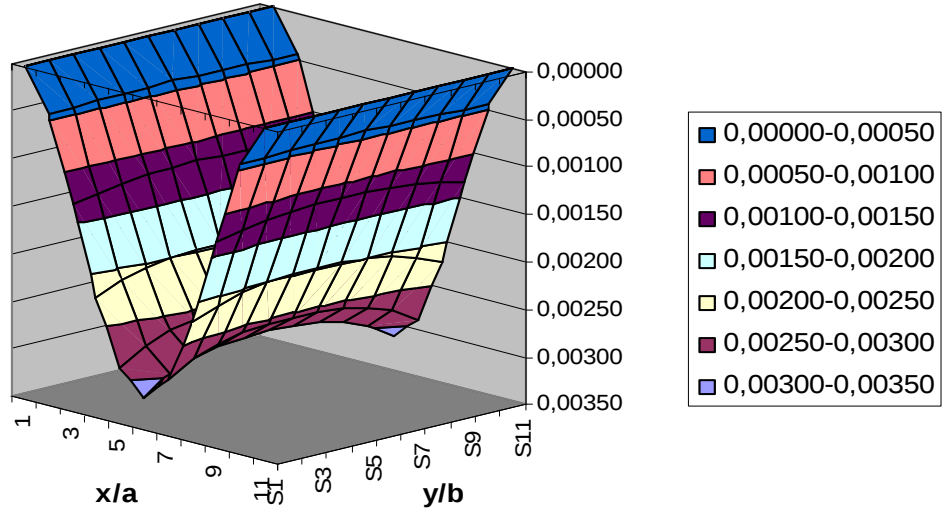
Tablo 4.42 Sabit Yaylı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olanı Dikdörtgen Plak Boyutsuz V_x Ve V_y Mesnet Tapkileri

		(x/a)																																																																																																																																																																																			
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20																																																																																																																																																																					
(y/b)	-0,20	V_x V_y <table><tr><td>-0,30134</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,30134</td></tr><tr><td>0,69221</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,69221</td></tr><tr><td>0,50187</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,50187</td></tr><tr><td>0,48626</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,48626</td></tr><tr><td>0,48338</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,48338</td></tr><tr><td>0,48320</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,48320</td></tr><tr><td>0,48338</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,48338</td></tr><tr><td>0,48626</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,48626</td></tr><tr><td>0,50187</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,50187</td></tr><tr><td>0,69221</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>-0,69221</td></tr><tr><td>-0,30134</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,00000</td><td>0,30134</td></tr></table>																-0,30134	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,30134	0,69221														-0,69221	0,50187														-0,50187	0,48626														-0,48626	0,48338														-0,48338	0,48320														-0,48320	0,48338														-0,48338	0,48626														-0,48626	0,50187														-0,50187	0,69221														-0,69221	-0,30134	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,30134
	-0,30134																	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,30134																																																																																																																																																						
	0,69221																														-0,69221																																																																																																																																																						
	0,50187																														-0,50187																																																																																																																																																						
	0,48626																														-0,48626																																																																																																																																																						
	0,48338																														-0,48338																																																																																																																																																						
	0,48320																														-0,48320																																																																																																																																																						
	0,48338																														-0,48338																																																																																																																																																						
	0,48626																														-0,48626																																																																																																																																																						
	0,50187																														-0,50187																																																																																																																																																						
	0,69221																														-0,69221																																																																																																																																																						
	-0,30134																	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,30134																																																																																																																																																							
	-0,10																																																																																																																																																																																				
	0,00																																																																																																																																																																																				
	0,10																																																																																																																																																																																				
0,20																																																																																																																																																																																					
0,30																																																																																																																																																																																					
0,40																																																																																																																																																																																					
0,50																																																																																																																																																																																					
0,60																																																																																																																																																																																					
0,70																																																																																																																																																																																					
0,80																																																																																																																																																																																					
0,90																																																																																																																																																																																					
1,00																																																																																																																																																																																					
1,10																																																																																																																																																																																					
1,20																																																																																																																																																																																					

Tablo 4.43 Sabit Yaylı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plak
Boyutsuz R_{xy} Köşe Kuvvetleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20	0,00000 0,00000															
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
	1,20																

Deplasmanlar



Şekil 4.9: Sabit Yayıllı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak Mesnetli Ve İki Kenarı Boşta Olan Dikdörtgen Plâğın Çökmesi

**ÖRNEK 5: İKİ KENARI ANKASTRE OLARAK İKİ KENAR SABİT OLARAK MESNETLİ DİKDÖRTGEN
PLAĞA UYGULANAN SABİT YAYILI YÜKLEME**

Tablo 4.44 İki Kenarlı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plağa Uygulanan Sabit Yayıllı Yükleme

[illegible]

Tablo 4.45 Sabit Yayılı Yükle Yüklü, İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Deplasmanları

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
	-0,20		0,00000	0,00088	0,00140	0,00172	0,00189	0,00195	0,00189	0,00172	0,00140	0,00088	0,00000				
	-0,10		0,00012	0,00000	0,00022	0,00028	0,00032	0,00033	0,00033	0,00032	0,00028	0,00012	0,00000				
	0,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000			
	0,10		-0,00012	0,00000	0,00022	0,00028	0,00032	0,00033	0,00033	0,00032	0,00028	0,00012	0,00000	0,00000	0,00012	0,00000	
	0,20		-0,00049	-0,00033	0,00000	0,00059	0,00077	0,00088	0,00092	0,00088	0,00077	0,00059	0,00033	0,00000	-0,00033	-0,00049	
	0,30		-0,00084	-0,00051	0,00000	0,00094	0,00125	0,00143	0,00149	0,00143	0,00125	0,00094	0,00051	0,00000	-0,00051	-0,00084	
	0,40		-0,00108	-0,00064	0,00000	0,00064	0,00118	0,00158	0,00181	0,00181	0,00158	0,00118	0,00064	0,00000	-0,00064	-0,00108	
(y/b)	0,50		-0,00117	-0,00069	0,00000	0,00069	0,00127	0,00169	0,00203	0,00195	0,00169	0,00127	0,00069	0,00000	-0,00069	-0,00117	
	0,60		-0,00108	-0,00064	0,00000	0,00064	0,00118	0,00158	0,00181	0,00181	0,00158	0,00118	0,00064	0,00000	-0,00064	-0,00108	
	0,70		-0,00084	-0,00051	0,00000	0,00051	0,00094	0,00125	0,00143	0,00149	0,00125	0,00094	0,00051	0,00000	-0,00051	-0,00084	
	0,80		-0,00049	-0,00033	0,00000	0,00033	0,00059	0,00077	0,00088	0,00092	0,00077	0,00059	0,00033	0,00000	-0,00033	-0,00049	
	0,90		-0,00012	-0,00012	0,00000	0,00012	0,00022	0,00028	0,00032	0,00033	0,00028	0,00022	0,00012	0,00000	-0,00012	-0,00012	
	1,00		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	
	1,10		0,00012	0,00012	0,00022	0,00028	0,00032	0,00033	0,00033	0,00032	0,00028	0,00022	0,00012	0,00000	0,00012	0,00012	
	1,20		0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	

Tablo 4.46 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Mx Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
1,20																	

Tablo 4.47 Sabit Yaylı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz My Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
	1,10																
	1,20																

Tablo 4.48 Sabit Yaylı Yükle Yüklü İki Kenarlı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz M_{xy} Momentleri

		(x/a)															
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	
(y/b)	-0,20																
	-0,10																
	0,00																
	0,10																
	0,20																
	0,30																
	0,40																
	0,50																
	0,60																
	0,70																
	0,80																
	0,90																
	1,00																
1,10																	
1,20																	

0,00435	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00435
0,01138	0,01031	0,00787	0,00516	0,00253	0,00000	0,00000	-0,00253	-0,00516	-0,00787	-0,01031	-0,01138	-0,01365	-0,01261	-0,01365
0,01365	0,01261	0,01003	0,00679	0,00339	0,00000	0,00000	-0,00339	-0,00679	-0,01003	-0,01261	-0,01365	-0,01114	-0,01039	-0,01114
0,01114	0,01039	0,00844	0,00582	0,00295	0,00000	0,00000	-0,00295	-0,00582	-0,00844	-0,01039	-0,01114	-0,00612	-0,00573	-0,00612
0,00612	0,00573	0,00470	0,00328	0,00167	0,00000	0,00000	-0,00167	-0,00328	-0,00470	-0,00573	-0,00612	0,00000	0,00000	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
-0,00612	-0,00573	-0,00470	-0,00328	-0,00167	0,00000	0,00000	0,00167	0,00328	0,00470	0,00573	0,00612	0,00612	0,01039	0,01114
-0,01114	-0,01039	-0,00844	-0,00582	-0,00295	0,00000	0,00000	-0,00295	-0,00582	-0,00844	-0,01039	-0,01114	-0,01365	0,01261	0,01365
-0,01365	-0,01261	-0,01003	-0,00679	-0,00339	0,00000	0,00000	-0,00339	-0,00679	-0,01003	-0,01261	-0,01365	0,01138	0,01031	0,01138
-0,01138	-0,01031	-0,00787	-0,00516	-0,00253	0,00000	0,00000	-0,00253	-0,00516	-0,00787	-0,01031	-0,01138	0,00435	0,00000	0,00435
-0,00435	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00435

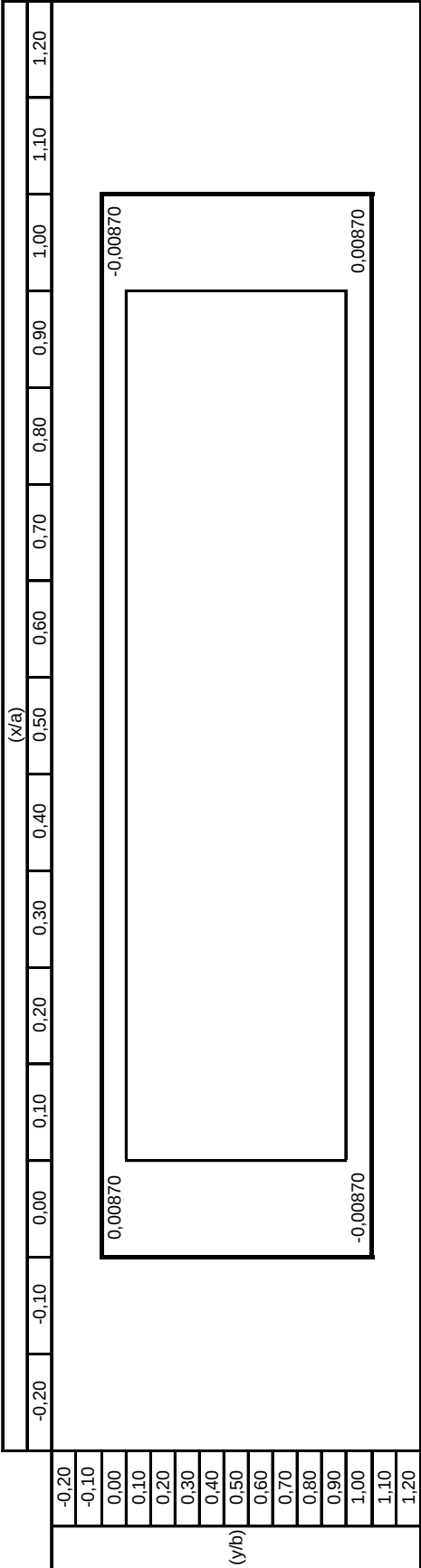
Tablo 4.49 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarlı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qx Kesme Kuvvetleri

		(x/a)														
		-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
(y/b)	-0,20															
	-0,10															
	0,00															
	0,10															
	0,20															
	0,30															
	0,40															
	0,50															
	0,60															
	0,70															
	0,80															
	0,90															
	1,00															
	1,10															
1,20																

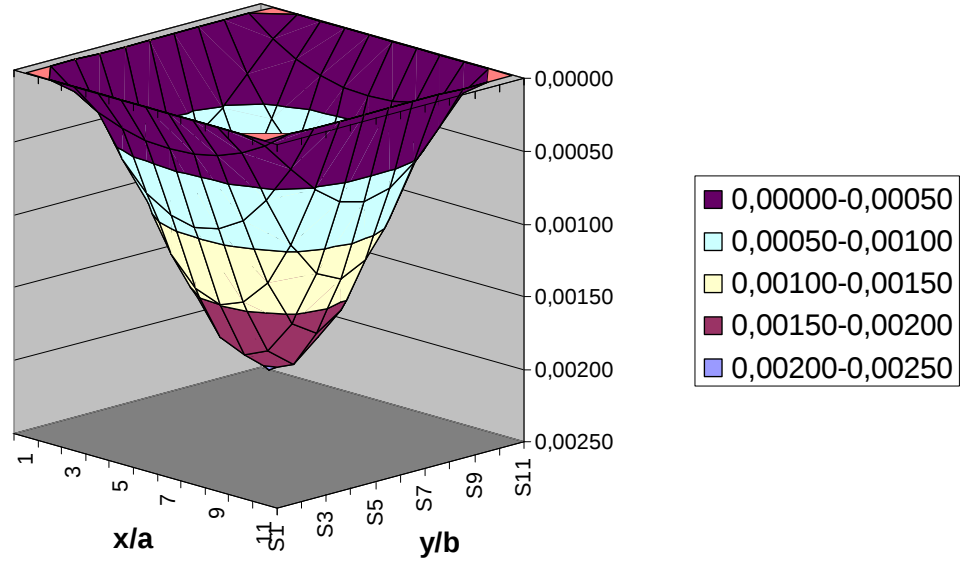
Tablo 4.50 Sabit Yaylı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Qy Kesme Kuvvetleri

		(x/a)															
		-0.20	-0.10	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	
(y/h)	-0.20																
	-0.10																
	0.00																
	0.10																
	0.20																
	0.30																
	0.40																
	0.50																
	0.60																
	0.70																
	0.80																
	0.90																
	1.00																
	1.10																
1.20																	

Tablo 4.52 Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenar Ankastre Olarak İki Kenar Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plak Boyutsuz Rxy
Köşe Kuvvetleri



Deplasmanlar



Şekil 4.10: Sabit Yayılı Yükle Yüklü İki Kenarı Ankastre İki Kenarı Sabit Olarak Mesnetli Dikdörtgen Plâğın Çökmesi

4.7 ANALİTİK ÇÖZÜM İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜN KARŞILAŞTIRILMASI

Ortotropik plak problemleri kısmında hazırlamış olduğumuz program ile çözdüğümüz dörtkenarı sabit olarak mesnetli ve üzerine sabit yayılı yük uygulanan ortotropik dikdörtgen plak sonucunu S. Timoshenko' nun Plak ve Kabuklar Teorisi kitabının 183. sayfasında bulunan ve Dörtkenarı sabit mesnetli ortotrop plak için elde ettiği sonuç ile karşılaştıracğıız.

Dörtkenarı sabit mesnetli ortotrop plak için Timoshenko' nun verdiği analitik sonuç;

$$w = \frac{16q_o}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2 n^2}{a^2 b^2} H + \frac{n^4}{b^4} D_y \right)} \quad (4.45)$$

Seri hızla yakınsak olduğu için ilk 4 terimin alınması yeterli olacaktır. $x = a/2$ ve $y = b/2$ için w ;

$$\begin{aligned} w &= \frac{16q_o}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5..}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \left(\left(\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{m \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{2m^2}{a^2 b^2} H + \frac{1}{b^4} D_y \right)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sin \frac{3\pi y}{b}}{3m \left(\frac{m^4}{a^4} D_x + \frac{18m^2}{a^2 b^2} H + \frac{81}{b^4} D_y \right)} \right) \right) \\ w &= \frac{16q_o}{\pi^6} \left(\sin \frac{\pi x}{a} \left(\left(\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\left(\frac{1}{a^4} D_x + \frac{2}{a^2 b^2} H + \frac{1}{b^4} D_y \right)} \right) + \left(\frac{\sin \frac{3\pi y}{b}}{3 \left(\frac{1}{a^4} D_x + \frac{18}{a^2 b^2} H + \frac{81}{b^4} D_y \right)} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{3\pi x}{a} \left(\left(\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{3 \left(\frac{81}{a^4} D_x + \frac{18}{a^2 b^2} H + \frac{1}{b^4} D_y \right)} \right) + \left(\frac{\sin \frac{3\pi y}{b}}{9 \left(\frac{81}{a^4} D_x + \frac{162}{a^2 b^2} H + \frac{81}{b^4} D_y \right)} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

x ve y değerlerini yerlerine koyacak olursak;

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6} \left(1 \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a^4} D_x + \frac{2}{a^2 b^2} H + \frac{1}{b^4} D_y \right)} - \frac{1}{3 \left(\frac{1}{a^4} D_x + \frac{18}{a^2 b^2} H + \frac{81}{b^4} D_y \right)} \right) + \right. \\ \left. + (-1) \left(\frac{1}{\left(\frac{243}{a^4} D_x + \frac{54}{a^2 b^2} H + \frac{3}{b^4} D_y \right)} - \frac{1}{\left(\frac{729}{a^4} D_x + \frac{1458}{a^2 b^2} H + \frac{729}{b^4} D_y \right)} \right) \right) \quad (4.47)$$

olarak elde edilir. Bu denklemdeki sabitler (2.51), (2.55) ve (2.58) ifadeleri yardımı ile bulunur;

$$E_x^* = \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{15.000.000}{1 - 0,4 * 0,04} = 15.243.902 \text{ KN} / M^2$$

$$E_y^* = \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{1.500.000}{1 - 0,4 * 0,04} = 1.524.390 \text{ KN} / M^2$$

$$E_{xy} = E_{yx} = \frac{\nu_{yx} E_{xx}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{\nu_{xy} E_{yy}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} = \frac{0,4 * 1.500.000}{1 - 0,4 * 0,04} = 609.756 \text{ KN} / M^2$$

$$D_x = \frac{h^3 E_x^*}{12} = \frac{(0,12^3) * (15.243.902)}{12} = 2195 \text{ KNM}$$

$$D_y = \frac{h^3 E_y^*}{12} = \frac{(0,12^3) * (1.524.390)}{12} = 219,5 \text{ KNM}$$

$$D_1 = \frac{h^3 E_{xy}}{12} = \frac{(0,12^3) * (609.756)}{12} = 87,80 \text{ KNM}$$

$$D_{xy} = \frac{h^3 G}{12} = \frac{(12^3) * (10.000.000)}{12} = 1440 \text{ KNM}$$

$$H = D_1 + 2D_{xy} = 87,80 + 2 * 1440 = 2967,80 \text{ KNM}$$

$$q_0 = 2 \text{ KN} / M^2 \quad (4.48)$$

Bu değerler (4.47) de yerine konularak;

$$\begin{aligned}
 w = \frac{16 * 2}{\pi^6} & \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{4,6^4} 2195 + \frac{2}{4,6^2 3,6^2} 2967,8 + \frac{1}{3,6^4} 219,5 \right)} - \right. \\
 & - \frac{1}{3 \left(\frac{1}{4,6^4} 2195 + \frac{18}{4,6^2 3,6^2} 2967,8 + \frac{81}{3,6^4} 219,5 \right)} - \\
 & - \frac{1}{\left(\frac{243}{4,6^4} 2195 + \frac{54}{4,6^2 3,6^2} 2967,80 + \frac{3}{3,6^4} 219,5 \right)} + \\
 & \left. + \frac{1}{\left(\frac{729}{4,6^4} 2195 + \frac{1458}{4,6^2 3,6^2} 2967,80 + \frac{729}{3,6^4} 219,5 \right)} \right] = \\
 w = \frac{32}{3,14^6} & \left[\frac{1}{27,85} - \frac{1}{916,66} - \frac{1}{1779,58} - \frac{1}{20305,20} \right] = 0,0011419 \, m \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Daha önce elektronik tabloda bulduğumuz değer ise Tablo 4.8' den 0,00115 m idi.

Analitik sonuca oldukça yakınsak olduğu görülmektedir.

Ortotropinin Özel Hali Olan İzotropik Plak Çözümlerinin Karşılaştırılması:

Tablo 4.53'te ilk satırlar analitik çözüm, ikinci satır sayısal çözüm sonuçlarıdır.

Tablo 4.53 İki Kenarı Ankastre ve İki Kenarı Sabit Olarak Mesnetlenmiş Plakın Analitik Çözümleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ile Bulunan Çözümlerinin Karşılaştırılması.

a/b	(W) _{x=a/2,y=b/2}	(M _x) _{x=a/2,y=b/2}	(M _y) _{x=a/2,y=b/2}	(M _y) _{x=a/2,y=b}
1,000	0,00192	0,02440	0,03320	-0,06970
	0,00203	0,02531	0,03329	-0,06674
	5,73%	3,73%	0,27%	-4,25%
1,100	0,00209	0,02300	0,03550	-0,07390
	0,00222	0,02390	0,03573	-0,07113
	6,22%	3,91%	0,65%	-3,75%
1,200	0,00223	0,02150	0,03750	-0,07710
	0,00236	0,02244	0,03763	-0,07450
	5,83%	4,37%	0,35%	-3,37%
1,300	0,00234	0,02030	0,03880	-0,07940
	0,00248	0,02104	0,03909	-0,07704
	5,98%	3,65%	0,75%	-2,97%
1,400	0,00240	0,01920	0,03990	-0,08100
	0,00257	0,01975	0,04019	-0,07894
	7,08%	2,86%	0,73%	-2,54%
1,500	0,00247	0,01790	0,04060	-0,08220
	0,00264	0,01859	0,04101	-0,08033
	6,88%	3,85%	1,01%	-2,27%
2,000	0,00260	0,01420	0,04200	-0,08420
	0,00280	0,01483	0,04267	-0,08300
	7,69%	4,44%	1,60%	-1,43%

Tablo 4.54 Dörtkenarı Ankastre Olarak Mesnetlenmiş Plâgın Analitik Çözümleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ile Bulunan Çözümlerinin Karşılaştırılması.

b/a	(W) _{x=a/2,y=b/2}	(Mx) _{x=0,y=b/2}	(My) _{x=a/2,y=0}	(Mx) _{x=a/2,y=b/2}	(My) _{x=a/2,y=b/2}
1,000	0,00138 0,00137 -0,72%	-0,05130 -0,04872 -5,03%	-0,05130 -0,04872 -5,03%	0,02310 0,02326 0,69%	0,02310 0,02326 0,69%
1,100	0,00164 0,00163 -0,61%	-0,05810 -0,05569 -4,15%	-0,05310 -0,05044 -5,01%	0,02640 0,02711 2,69%	0,02310 0,02348 1,65%
1,200	0,00188 0,00187 -0,53%	-0,06390 -0,06169 -3,46%	-0,05540 -0,05115 -7,67%	0,02990 0,03046 1,87%	0,02280 0,02314 1,49%
1,300	0,00209 0,00207 -0,96%	-0,06870 -0,06667 -2,95%	-0,05630 -0,05115 -9,15%	0,03270 0,03325 1,68%	0,02220 0,02150 -3,15%
1,400	0,00226 0,00223 -1,33%	-0,07260 -0,07069 -2,63%	-0,05680 -0,05067 -10,79%	0,03490 0,03552 1,78%	0,02120 0,02150 1,42%
1,500	0,00240 0,00237 -1,25%	-0,07570 -0,07387 -2,42%	-0,05700 -0,04989 -12,47%	0,03680 0,03733 1,44%	0,02030 0,02048 0,89%
1,600	0,00251 0,00248 -1,20%	-0,07800 -0,07633 -2,14%	-0,05710 -0,04893 -14,31%	0,03810 0,03875 1,71%	0,01930 0,01945 0,78%
1,700	0,00260 0,00256 -1,54%	-0,07990 -0,07822 -2,10%	-0,05710 -0,04786 -16,18%	0,03810 0,03984 4,57%	0,01930 0,01847 -4,30%
1,800	0,00267 0,00263 -1,50%	-0,08120 -0,07963 -1,93%	-0,05710 -0,04674 -18,14%	0,04010 0,04066 1,40%	0,01740 0,01757 0,98%
1,900	0,00272 0,00268 -1,47%	-0,08220 -0,08067 -1,86%	-0,05710 -0,04558 -20,18%	0,04070 0,04128 1,43%	0,01650 0,01677 1,64%
2,000	0,00277 0,00272 -1,81%	-0,08290 -0,08142 -1,79%	-0,05710 -0,04441 -22,22%	0,04170 0,04173 0,07%	0,01250 0,01606 28,48%

Tablo 4.55 Dörtkenarı Sabit Olarak Mesnetlenmiş Plâgın Analitik Çözümleri ile Sonlu Farklar Yöntemi ile Bulunan Çözümlerinin Karşılaştırılması

b/a	(W)max	(Mx)max	(My)max	(Qx)max	(Qy)max	(Vx)max	(Vy)max	R
1,000	0,00406	0,04790	0,04790	0,33800	0,33800	0,42000	0,42000	0,06500
	0,00406	0,04751	0,04751	0,33828	0,33828	0,41928	0,41928	0,06113
	0,00%	-0,81%	-0,81%	0,08%	0,08%	-0,17%	-0,17%	-5,95%
1,100	0,00485	0,05540	0,04930	0,36000	0,34700	0,44000	0,44000	0,07000
	0,00486	0,05503	0,04895	0,36002	0,34776	0,43851	0,43774	0,06673
	0,21%	-0,67%	-0,71%	0,01%	0,22%	-0,34%	-0,51%	-4,67%
1,200	0,00564	0,06270	0,05010	0,38000	0,35300	0,45500	0,45300	0,07400
	0,00564	0,06216	0,04973	0,37910	0,35488	0,45397	0,45251	0,07133
	0,00%	-0,86%	-0,74%	-0,24%	0,53%	-0,23%	-0,11%	-3,61%
1,300	0,00638	0,06940	0,05030	0,39700	0,35700	0,46800	0,46400	0,07900
	0,00638	0,06880	0,05000	0,39574	0,36047	0,46625	0,46423	0,07503
	0,00%	-0,86%	-0,60%	-0,32%	0,97%	-0,37%	0,05%	-5,03%
1,400	0,00705	0,07550	0,05020	0,41100	0,36100	0,47800	0,47100	0,08300
	0,00708	0,07491	0,04992	0,41018	0,36485	0,47592	0,47351	0,07795
	0,43%	-0,78%	-0,56%	-0,20%	1,07%	-0,44%	0,53%	-6,08%
1,500	0,00772	0,08120	0,04980	0,42400	0,36300	0,48600	0,48000	0,08500
	0,00772	0,08048	0,04958	0,42270	0,36837	0,48352	0,48088	0,08021
	0,00%	-0,89%	-0,44%	-0,31%	1,48%	-0,51%	0,18%	-5,64%
1,600	0,00830	0,08620	0,04920	0,43500	0,36500	0,49100	0,48500	0,08600
	0,00830	0,08550	0,04905	0,43342	0,37118	0,48930	0,48665	0,08189
	0,00%	-0,81%	-0,30%	-0,36%	1,69%	-0,35%	0,34%	-4,78%
1,700	0,00883	0,09080	0,04860	0,44400	0,36700	0,49600	0,48800	0,08800
	0,00883	0,09001	0,04841	0,44269	0,37355	0,49376	0,49128	0,08314
	0,00%	-0,87%	-0,39%	-0,30%	1,78%	-0,45%	0,67%	-5,52%
1,800	0,00931	0,09480	0,04790	0,45200	0,36800	0,49900	0,49100	0,09000
	0,00930	0,09405	0,04771	0,45065	0,37560	0,49714	0,49500	0,08401
	-0,11%	-0,79%	-0,40%	-0,30%	2,07%	-0,37%	0,81%	-6,66%
1,900	0,00974	0,09850	0,04710	0,45900	0,36900	0,50200	0,49400	0,09100
	0,00973	0,09765	0,04699	0,45750	0,37741	0,49965	0,49802	0,08460
	-0,10%	-0,86%	-0,23%	-0,33%	2,28%	-0,47%	0,81%	-7,03%
2,000	0,01013	0,10170	0,04640	0,46500	0,37000	0,50300	0,49600	0,09200
	0,01012	0,10085	0,04626	0,46338	0,37907	0,50149	0,50052	0,08495
	-0,10%	-0,84%	-0,30%	-0,35%	2,45%	-0,30%	0,91%	-7,66%
3,000	0,01223	0,11890	0,04060	0,49300	0,37200	0,50500	0,49800	0,09300
	0,01224	0,11812	0,04078	0,49143	0,39454	0,50413	0,51472	0,08253
	0,08%	-0,66%	0,44%	-0,32%	6,06%	-0,17%	3,36%	-11,26%
4,000	0,01282	0,12350	0,03840	0,49800	0,37200	0,50200	0,50000	0,09400
	0,01286	0,12299	0,03859	0,49780	0,41427	0,50209	0,52793	0,07721
	0,31%	-0,41%	0,49%	-0,04%	11,36%	0,02%	5,59%	-17,86%
5,000	0,01297	0,12460	0,03750	0,50000	0,37200	0,50100	0,50000	0,09500
	0,01304	0,12438	0,03786	0,49937	0,43909	0,50101	0,54528	0,07160
	0,54%	-0,18%	0,96%	-0,13%	18,03%	0,00%	9,06%	-24,63%

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Sonlu farklar yöntemi kullanılarak hazırlanan programdan elde ettiğimiz sonuçlar hem ortotropik plaklar için hem de izotropik plaklar için S. Timoshenko' nun "Theory of Plates and Shells" kitabında analitik olarak çözülmüş ve sonuçlar tablo halinde verilmiş değerler ile karşılaştırılarak hata oranları hesaplanmıştır. Sonuç olarak, sonlu farklar yöntemi ile çözdüğümüz problemlerin önemli bir kısmının analitik çözümlere oldukça yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Fakat plak boyutlarının birbirine oranı $\alpha = a/b$ büyüdükçe, hesaplanan değerlerdeki hassasiyet kaybolmaktadır. Bu gibi durumlarda, hesaplanan nokta sayılarının artırılması hassasiyetin yeniden elde edilebilmesi için uygun bir yöntem olacaktır. Ancak nokta sayısının artırılması daha çok iterasyon yapılması anlamına gelir. Bu da hesap işleminin uzun sürmesine neden olur. İşlem miktarının ve süresinin azalmasını sağlamak için simetri özelliklerinin kullanılması faydalı olur. Bu şekilde elde edilecek moment ve kesme kuvveti ifadelerinin işaretlerine dikkat edilmesi gerekir. Ayrıca ortotropinin özel hali olan izotropi için sonlu farklar yöntemi ile elde ettiğimiz sonuçlar ile İnş. Müh. Batuhan Çalin'in hazırlamış olduğu sonlu farklar yöntemi ile izotropik plak çözümleri sonuçlarının birbiri ile örtüşmesi hazırlamış olduğumuz programın güvenilirliğini kanıtlamıştır.

Sonlu farklar yöntemi dikdörtgen ve daire gibi düzgün sınırlarda uygulanması çok kolay bir yöntemdir. Ayrıca Excel programındaki dairesel döngü yardımı ile sonlu farklar yönteminde elde edilen doğrusal denklem takımının kuruluşu ve çözümü kolay bir şekilde yapılmaktadır. Düzgün olmayan sınırları bulunan bölgelerde de sonlu farklar yöntemi kullanılır ise de böyle bölgelerde sonlu elemanlar yöntemini kullanmak hesap yükünü azaltır.

KAYNAKLAR

[1]- GEHRING, F., De Aequationibus Differentialibus, Quibus Aequilibrium et Motus Laminae Crystallinae Deffiniuntur, unpublished dissertation, Berlin, (1860).

[2]- HEARMON, R. The Elastic Constants of Anisotropic Materials, Revs. Mod. Phys., 18, 409, (1946).

[3]- LEISSA, A.W., Vibration of Plates, NASA SP-160 U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., (1969).

[4]- LECKHNITZKY, S.G., Anisotropic Plates, Translated from Russian by American Iron and Steel Institute, 1956. The Second Edition was Translated by S.W. Tsai and T. Cheron, Gordon and Breach/ New York (1968).

[5]- STAVSKY, Y., On the Theory of Heterogeneous Plates, Doctoral Dissertation, Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, Massachusetts, (1959).

[6]- REISSNER, E. And STAVSKY, Y. Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates, J. Appl. Mech., 28, 402 (1961).

[7]- STAVSKY, Y. and HOFF, N., Mechanics of Composite Structures, Composite Engineering Laminates, A.G.H. Dietz, ed., MIT Press, Cambridge, Mass. (1969).

[8]- DIETZ, A., Composite Engineering Laminates, MIT Press, Cambridge, Mass. (1969).

[9]- WADDOUPS, M., The Vibration Response of Laminated Orthotropic Plates, M.S. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Brigham Young University, (1965).

[10]- TSAI, S., HALPIN J., and PAGANO, J., Composite Material Workshop, Technomic Publ. Co. Inc., Stamford, Conn. (1968).

[11]- ASHTON, J. and ANDERSON, J., The Natural Modes of Vibrations of Boron-Epoxy Plates, Bulletin of 39th Shock and Vibration Symposium, Pacific Grove, California (1969).

[12]- WHITNEY, J. and LEISSA, A., Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates, j.Appl. Mech., 36, 261 (1969).

[13]- WHITNEY, J. and LEISSA, A., Analysis of a Simple-Supported Laminated Anisotropic Plate, AIAA/ASME 10th Structures, Structural Dynamics, and Material Conference, New Orleans, Louisiana, April 1969; a revised version published in AIAA Journal, 8, No. 1 (1970).

[14]- ASHTON, J. and WADDOUPS, M., Dynamic Response of Anisotropic Plates, General Dynamics Corp., Fort Worth Div., Contract No. AF33(615)-5257, Report FZM-5088, March (1969).

[15]- KITCHER, T. And MANDELL, J., An Experimental Study of the Buckling of Anisotropic Plates, AIAA/ASME 10th Structure, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, Louisiana (April 1969).

[16]- ASHTON, J., Anisotropic Plate Analysis-Boundary Conditions, J. Comp. Mater., 4, 162 (1970)

[17]- WHITNEY, J. The Effect of Boundary Conditions on the Response of Laminated Composite, J. Comp. Mater., 4, 192 (1970).

[18]- UZMAN, Ümit, (1985) Düzlem İçi Kuvvetler Etkisindeki Dikdörtgen Ortotrop Plakların Düzlem İçi ve Düzlem Dışı Titreşimleri, İTÜ Doktora Tezi, ISTANBUL

[19]- KÜTÜĞ, Zafer, (1992) Plak Denkleminin Genel Çözümü İçin Bir Metod, İTÜ Yüksek Lisans Tezi, ISTANBUL

[20]- ÇALIN, Batuhan, (1998) Elektronik Tablolarda Sonlu Farklar Yöntemiyle Plak ve Üç Moment Denklemleriyle Sürekli Kiriş Çözümü, İTÜ Yüksek Lisans Tezi, ISTANBUL

[21]- ERGÜN, Ali, (1996) Plakların Sonlu Elemanlar ve Sonlu Farklar Metodu ile Çözümü ve İki Metodun Karşılaştırılması, İTÜ Yüksek Lisans Tezi, ISTANBUL

[22]- ERGUN, Ali, (2002) İnce Plaklar İçin Geliştirilmiş Sonlu Farklar Metodu Yöntemi, İTÜ Doktora Tezi, ISTANBUL

[23]- TIMOSHENKO, S., WOINOWSKY-KRIEGER, S(1959) Theory of Plates and Shells, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York.

[24]- BERKTAY, I (1992) Plak Teorisi ve Uygulamaları, Küçük Sehimli İnce Plaklar, İstanbul.

[25]- BAKIOGLU, Mehmet, (2004) Sayısal Analiz, Birsan Yayınevi, ISTANBUL

[26]- GIRKMANN, Karl (Çeviri: Prof. Dr. Sacit TAMEROĞLU), (1991) Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler Cilt 1, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası.

[27]- UGURAL, Ansel C., (1999) Stresses in Plates and Shells, Boston: WCB/McGraw Hill

[28]- KUMBASAR N., CELEP Z. (1998) Betonarme Yapılar. 2.baskı. Sema Matbaacılık/İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Malatya’ da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Malatya’ da tamamladı. 1996 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü’ ne kayıt yaptırdı. 2001 yılında İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilin Dalı, Yapı Mühendisliği Programı’ nda yüksek lisans eğitimine başladı.