

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PLAKLARIN DİNAMİK VE AEROELASTİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Merve MELEK

Anabilim Dalı : Disiplinler Arası

Programı : Uçak-Uzay Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin Orhan KAYA

OCAK 2011

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PLAKLARIN DİNAMİK VE AEROELASTİK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve MELEK

(511091142)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 Aralık 2010

Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Ocak 2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin Orhan KAYA (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL (İTÜ)
Doç. Dr. Erol UZAL (İÜ)

OCAK 2011

Aileme,

ÖNSÖZ

Çalışma boyunca bilgi ve deneyimlerini tüm samimiyetiyle paylaşan ve tezin yürütülmesinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Metin Orhan KAYA'ya, ayrıca Türkmen Koç' a ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili aileme fiili ve manevi katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Ocak 2011

Merve MELEK
(Uçak Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
KISALTMALAR.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Tezin Amacı	2
2. PLAK DENKLEMLERİ	3
2.1 Plak Tanımı.....	3
2.1.1 Kirchhoff ince plak teorisi	4
3. AEROELASTİSİTE.....	7
3.1 Flutter.....	8
3.1.1 Panel flutter.....	10
3.2 Aerodinamik model	11
3.3 Flutter denklemlerinin çıkarılması.....	12
4. PLAKLARIN DİNAMİK VE AEROELASTİK UYGULAMALARI	19
4.1 Dikdörtgen Plaklar ve Analitik Modellenmesi	19
4.1.1 Normal dikdörtgen plaklar.....	19
4.1.1.1 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi çözümü	21
4.1.1.2 Plakların serbest titreşim analizi	23
4.1.2 Sivrilmiş plaklar	24
4.1.2.1 Temel bağıntı ve hareket denklemlerinin çıkarılması	26
4.1.2.2 Sivrilmiş plakların serbest titreşim analizi	30
4.1.2.3 Sivrilmiş plakların aeroelastik analizi	32
4.2 Winkler Elastik Zemin Oturan Plaklar (Winkler Elastic Foundation)	34
4.2.1 Elastik zemin tanımı (Winkler zemini)	34
4.2.2 Elastik zemin üzerine oturan plağın analitik modellenmesi.....	37
4.2.3 Temel bağıntı ve hareket denklemlerinin çıkarılması	38
4.2.4 Winkler elastik zeminine oturan plakların ses üstü flutter analizi	42
4.2.5 Winkler elastik zeminine oturan plaklar için sonuçlar	43
4.3 Delaminasyona Uğramış Kompozit Plaklar	49
4.3.1 Kompozit malzeme tanımı ve avantajları--dezavantajları.....	49
4.3.2 Kompozit malzemelerin havacılıktaki uygulamaları	51
4.3.3 Tabakalı kompozit malzemelerde hasar karakteristiği	53
4.3.3.1 Kompozit malzemelerin darbe davranışı	55
4.3.4 Delaminasyon (Tabakalar arası ayrılma)	58
4.3.5 Temel bağıntı ve hareket denklemlerinin çıkarılması	63
4.3.6 Delaminasyona uğramış kompozit plaklar için sonuçlar	68

5. DEĞERLENDİRME	73
5.1 Normal ve Sivrilten Dikdörtgen Plaklar için Sonuçlar	73
5.2 Winkler Elastik Zeminine Oturan Plaklar için Sonuçlar	74
5.3 Delaminasyona Uğrayan Kompozit Plaklar için Sonuçlar	75
KAYNAKLAR	77
EKLER	81

KISALTMALAR

DDY : Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1 : DDY' nin temel teorileri.....	23
Çizelge 4.2 : Sınır şartlarına uygulanan DDY kuralları.....	23
Çizelge 4.3 : Farklı a/b oranları için dikdörtgen bir plağın frekans parametresi değerleri.....	24
Çizelge 4.4 : Kalınlığı değişen dikdörtgen plak örnekleri	26
Çizelge 4.5 : Sabit yay modülü k ve $R_x=0$ durumundaki basit mesnetli plak için λ_{cr} ve Z_{cr} değerleri	44
Çizelge 4.6 : Sabit $R_x= \pi^2$ durumunda sabit, lineer ve parabolik yay modülüne sahip plak için λ_{cr} ve Z_{cr} değerleri	44
Çizelge 4.7 : Matris, takviye ve kompozit yapı malzeme tipleri	50
Çizelge A.1 : Sivrilmiş plakların hesaplanan frekans değerleri ve literatürle karşılaştırılması.	83

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Uçak üzerinde plak yapılar	3
Şekil 2.2 : Yanlamasına yüklü dikdörtgen plak	5
Şekil 3.1 : Collar' ın aeroelastik kuvvet üçgeni	7
Şekil 3.2 : Langley Transonik Dinamik Tünelde gerçekleştirilen flutter testi.....	10
Şekil 4.1 : Plak geometrisi.	20
Şekil 4.2 : Sivrilme plak geometrisi.....	25
Şekil 4.3 : Çeşitli sivrilme oranları için flutter frekansının alfa ile değişimi.....	30
Şekil 4.4 : Çeşitli sivrilme oranları için flutter frekansının alfa ile değişimi.....	31
Şekil 4.5 : Sivrilme oranı $a/b = 1.5$ için literatürle karşılaştırma.	31
Şekil 4.6 : Sivrilme oranı $a/b = 2$ için literatürle karşılaştırma.	32
Şekil 4.7 : Yayılı yük altında elastik zeminin çökmesi – a: Winkler zemini; b: pratik toprak zemin.	36
Şekil 4.8 : İki parametrelili Pasternak zemini üzerine oturan kiriş modeli.	36
Şekil 4.9 : İki parametrelili Vlasov zemini üzerine oturan kiriş modeli.	37
Şekil 4.10 : Elastik zemine oturan dikdörtgen plak	37
Şekil 4.11 : Sabit yay katsayısı için λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.	45
Şekil 4.12 : Lineer yay katsayısı için λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.	46
Şekil 4.13 : Parabolik yay katsayısı için λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.	47
Şekil 4.14 : α ile λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.	48
Şekil 4.15 : R_x ' in λ_{kr} ile değişimi.....	48
Şekil 4.16 : F-14 ve F/A-18 uçaklarında kompozit malzeme kullanım alanları.	52
Şekil 4.18 : (a) Kayma gerilmelerinin, (b) eğilme gerilmelerinin neden olduğu matris kırılması (Abrate, 1998).	57
Şekil 4.19 : (a) İnce ve (b) kalın plaklar için matris kırığı hasarı ilerlemesi (Abrate, 1998).	57
Şekil 4.20 : Tipik delaminasyon biçimi (Abrate, 1998).....	59
Şekil 4.21 : (a) Kayma gerilmesi ve (b) eğilme gerilmesi nedeniyle oluşan delaminasyon (Choi, 1990).....	60
Şekil 4.22 : Temel delaminasyon başlangıcının nedenlerinin sınıflandırılması.	61
Şekil 4.23 : Delaminasyon kırılma modları	62
Şekil 4.24 : Delaminasyon kırılma modları.	62
Şekil 4.25 : Delaminasyona uğrayan kompozit bir plağın basma yükü davranışı (Sridharan, 2008).	63
Şekil 4.26 : Yorulma sonucu delaminasyona büyümesi (Sridharan, 2008).	63
Şekil 4.27 : Plak kesiti.	64
Şekil 4.28 : Tabakalı kompozit plak geometrisi	69
Şekil 4.29 : Tipik 4 tabakalı kompozit plakların (a) simetrik ve (b) antisimetrik dizilimi.....	69
Şekil 4.30 : Farklı tiplerde açılı-tabakalı laminaların kesit görünüşleri.....	70
Şekil 4.31 : Flutter sınırı vs. delaminasyon uzunluğu.....	71

PLAKLARIN DİNAMİK VE AEROELASTİK ANALİZİ

ÖZET

Son yıllarda iyice yaygın hale gelen kompozit malzemelerin hava-uzay yapılarındaki kullanımı nedeniyle uçak kanadı, kontrol ve kumanda yüzeyleri gibi plak yüzeylerin ses altı ve ses üstü durumlarda serbest titreşim ve aeroelastik analizi ile ilgili birçok çalışma yapılmış ve hem teorik hem deneysel olarak doğrulanmıştır. Bu tez kapsamında da plak yüzey olarak modellenen uçak yapılarının çeşitli geometrilerde ve durumlardaki dinamik ve aeroelastik analizleri teorik olarak yapılarak serbest titreşim ve flutter frekansları elde edilmiş ve literatürdeki bazı çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada plak yapıların çeşitli durumlarda dinamik ve aeroelastik davranışları incelenmiştir. Bu kapsamda çalışma üç temel bölüme ayrılmıştır. İlk bölümde dikdörtgen bir plağın basit mesnet sınır şartları altında serbest titreşim analizi yapılmıştır ve literatürle kıyaslandığında elde edilen frekans değerlerinin oldukça tutarlı olduğu görülmüştür. Daha sonra plak modeli biraz geliştirilerek kalınlığı x yönünde lineer olarak değişen bir plak modeli ele alınmıştır. Plak geometrisindeki sivrilme sadece plağın kalınlığı yönündedir. Kalınlığı x yönünde değişen bu plağın dinamik analizi yapılarak serbest titreşim frekansları elde edilmiştir ve literatürdeki frekans değerleriyle karşılaştırılmıştır. Analizlerin bir kısmında plağın düzlem içi yüklere maruz kaldığı da göz önünde bulundurulmuştur. Elde edilen sonuçlar çeşitli sivrilme oranları için grafiksel olarak gösterilmiştir. Dinamik analize ek olarak kalınlığı x yönünde değişen plağın aeroelastik karakteristiğini tespit etmek amacıyla sanki-daimi piston teorisi kabulüne göre aerodinamik yükleme terimleri ilave edilmiştir. Son olarak kalınlığı değişen plağın aeroelastik hareket denklemi bulunmuştur.

Çalışmanın ikinci bölümünde Winkler elastik zeminine oturan dikdörtgen bir plak ele alınmıştır. sabit, lineer ve parabolik gibi farklı yay katsayı durumlarındaki Winkler elastik zeminine oturan bir dikdörtgen plağın ses üstü flutter davranışı araştırılmıştır.

Son olarak ise çapraz-tabakalı kompozit plakların delaminasyon denilen ve tabakalar arası ayrılma anlamına gelen hasar modu durumundaki flutter davranışı incelenmiştir. Tüm çalışma boyunca ele alınan plakların basit mesnet sınır şartları altında olduğu kabul edilmiştir. Elde edilen hareket denklemleri literatürden alınan malzeme özellikleri ile Mathematica 6.0 paket programı kullanılarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi adı verilen ve Taylor seri açılımına bağlı olan bir teknik ile çözülmüştür. Sonuç olarak hesaplanan frekans değerleri grafik ve çizelgelerde gösterilerek, literatürle karşılaştırılmıştır ve iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

DYNAMIC AND AEROELASTIC ANALYSIS OF PLATES

SUMMARY

During the recent years, the usage of composite materials in the aerospace structures has become widespread. Due to it, the free transverse vibration and aeroelastic analysis of the plate surface like aircraft wings, control and stabilizer have been studying many times and either numerical or experimental validations of these findings are reported. Within the scope of this thesis, the dynamic and aeroelastic analysis of the aerospace structures which are modeled as plate surfaces are done. The free vibration and flutter frequencies are obtained and compared with previous studies in open literature.

In the present study, the dynamic and aeroelastic behaviours of various structural models have been analysed. In this context, the study is divided into three sections. In the first section, free transverse vibrations of a normal rectangular plate in the simply supported boundary conditions have been performed. The free vibration frequencies are obtained accurately. Then, by improving the plate geometry, the free vibrations and flutter analysis of rectangular plates of linearly varying thickness have been studied on the basis of classical plate theory. It is assumed that the plate thickness changes only in x direction. Also, the in-plane forces are added to the plate governing equation in order to determine how they affect the frequencies. The obtained results are plotted. In addition to the dynamic analysis, the aeroelastic governing equation of plates (have linearly varying thickness) is derived by adding the aerodynamic pressure. This aerodynamic pressure is written according to the quasi-steady supersonic piston theory.

In the second section, aeroelastic stability and supersonic flutter analysis of a panel resting on a variable Winkler foundation are considered. The flutter margins and its aerodynamic pressures are investigated for variable elastic coefficient of the foundation along the panel major axis like constant, linear and parabolic.

And the last section includes the investigations about the supersonic flutter characteristics of the cross-ply and angle-ply composite plates in the delamination failure mode. Simply supported boundary conditions are assumed all over the study. The governing differential equations of motion are solved by using Differential Transform Method which is based on Taylor series expansion. Computer codes are written in Mathematica 6.0 and natural frequencies and flutter frequencies are calculated using these codes for all sections. Finally, the calculated results are tabulated in several tables and graphics that showed good agreement with the literature.

1. GİRİŞ

Elastisite teorisinin önemli uygulamalarına örnek olarak klasik plak ve kabuk teorileri verilebilir. Bu teoriler elastik bir cisimdeki kuvvetler, yer değiştirmeler, gerilme ve birim uzamaların ilişkilerini esas alır. Bir cismin deformasyonu, o cismin geometrik konfigürasyonuna, uygulanan yüke ve malzemenin mekanik özelliklerine bağlıdır. Elastisite teorisinde önemli kısıtlardan biri malzemelerin lineer elastik olmasıdır. Buna göre gerilme ile birim uzama arasındaki ilişki lineer olup (Hook Kanunu), dış yükler kaldırıldığında deformasyon ve gerilmeler kaybolur ve elastik cisim eski haline döner. Ayrıca klasik elastik teorisi malzemenin homojen ve izotropik yani malzemenin tüm yön, doğrultu ve noktalarda aynı özellik gösterdiğini varsayar (Ventsel, 2001). Bu tez kapsamında ele alınan yapı plak yapılar olduğu için yalnızca plak teorisi için geçerli elastisite teorisinden bahsedilecek ve kabulleri açıklanacaktır.

Bilindiği üzere plaklar uçak-uzay yapılarında uygulama alanı olan yapılardır. Dikdörtgen bir plak olarak modellenecek uçak kanadı veya kontrol / kumanda yüzeyleri gerçekte var olan davranışa benzerlik göstermesi açısından “mümkün mertebe basit ama bir o kadar da komplike” olarak tanımlanan bir model olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle değişik geometrilerdeki plak yapı ve plak sistemleri, bunların doğal frekans ve mod şekilleri veya dinamik karakteristikleri, titreşim veya flutter ile karşılaştıkları dinamik basınç gibi konular havacılık alanında geçmişten bugüne çalışılmaya devam edilmektedir. Uçuş hızının artmasıyla uçak-uzay yapılarındaki plak yüzeylerin katılık, dinamik ve stabilite davranışları önemli hale gelmektedir. Özellikle aeroelastisite ve dinamik bir kararsızlık olan flutter hava araçları için ciddi bir tehlike arz etmektedir. Bu nedenle düzlem-içi kuvvetlere, burkulma yüklerine, serbest titreşim ve flutter problemlerine maruz kalan plakların analizi birçok bilim adamı ve mühendis tarafından çalışılmıştır ve çalışılmaya devam edilmektedir.

1.1 Tezin Amacı

Son zamanların en çok araştırılan konularından biri olan ve birçok çalışmalarda yer alan yapısal modeller, kanat modellemesinde kullanılmasıyla daha da karmaşılaşmakta ve daha doğru sonuçlar vermektedir.

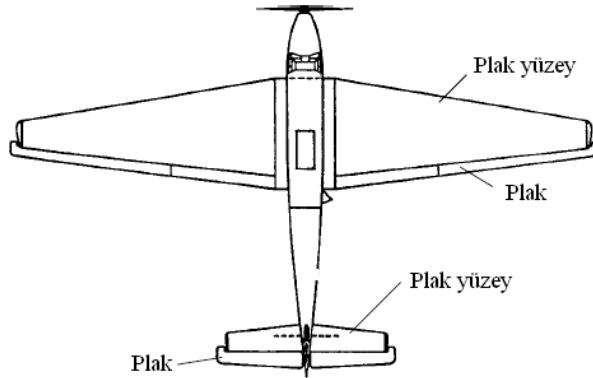
Bu çalışmada hava-uzay yapılarının tasarımında ve uygulama alanlarında sıkça kullanılan bir yapısal model olan plak yapılar ve teorisinin kavranması amaçlanmakla birlikte farklı özelliklerdeki plakların dinamik ve aeroelastik davranışları gösterilecektir. Plak yapıyı bir uçak kanadı veya kontrol-kumanda yüzeyi olarak düşünürsek bu yapıların serbest titreşim ve flutter davranışları son derece önemlidir. Hatta dinamik bir kararsızlık durumu olarak flutter çok tehlikeli ve uçuş esnasında manevra zarfı dışına atılması gereken bir durumdur. Bu tez kapsamında ilk olarak normal dikdörtgen bir plağın dinamik analizi yapılacaktır. Sonra plak modeli geliştirilerek, kalınlığı bir yönde değişen yani sivrilen bir plak için dinamik analiz yapılacak ve serbest titreşim frekansları elde edilecektir. Daha sonrasında ise bu sivrilen plağın aeroelastik analizi yapılacak ve flutter frekansı hesaplanacaktır. İkinci olarak Winkler elastik zeminine oturan dikdörtgen bir plağın flutter sınırları araştırılacaktır. Son olarak da delaminasyon yani tabakalar arası ayrılma denilen hasara maruz kalmış bir dikdörtgen plağın aeroelastik analizi yapılarak flutter karakteristiği elde edilecektir. Araştırılacak üç kısım için de elde edilecek frekanslar literatürle kıyaslanacak ve uyumu gösterilecek ve sonuçlar yorumlanacaktır. Plak malzemesi olarak seçilen kompozit malzemelerden bahsedilerek hava-uzay yapılarındaki avantajları ve dezavantajları anlatılacaktır.

2. PLAK DENKLEMLERİ

2.1 Plak Tanımı

Plaklar, düzlemine dik yönde etkiyen statik ve dinamik yükler altında eğilme taşıyan düzlemsel yapılardır. Bu dış yükleri, eğilme ve burulma momentleri ile enlemesine kesme kuvvetleri karşılar. Plak yapısı eğilme kirişlerinin iki boyutlu hali olarak düşünülebilir. Üçüncü fiziksel boyut olan kalınlıkları diğer boyutlarına çok küçük kalır. Geometrik olarak uygulama alanlarına göre düz veya kavisli olabilirler. Statik olarak plaklar serbest, basit mesnetli ve sabit mesnetli (ankastre) olabilecekleri gibi elastik destek ve elastik kısıta da sahip olabilirler.

Plak yapılar, mühendisliğin birçok alanında kullanılan düzlemsel yapılardır. Mühendislik yapılarında yapısal elemanların büyük çoğunluğu plak olarak sınıflandırılabilir. Özellikle hava-uzay sektöründe plaklar vazgeçilmez yapılardır. Uçak kanatları ve kontrol yüzeyleri düz plaklara örnek oluştururken uçak gövdesinin büyük bir bölümü kabuk dediğimiz eğrisel veya kavisli plaklara örnektir. Şekil 2.1’ de bir uçak üzerindeki plak yapıları örnek verilmiştir.



Şekil 2.1 : Uçak üzerinde plak yapıları.

Plak yapıların analizleri temel olarak *Elastik Plak Teorisi*’yle yapılır. Elastik Plak Teorisi, küçük ve büyük çökmelere sahip plaklar arasında önemli ölçüde farklılık gösterir. Büyük çökmeye sahip plaklar gerek analizlerinde gerekse kullanım

aşamasında problemler yarattığı için mühendislik alanlarında önlenmeye çalışılan bir durumdur.

Plaklara yapılara ilk yaklaşım 1766 yılında Euler (1707-1783) tarafından, dikdörtgen, üçgen ve dairesel membranların serbest titreşimleri için yapılmıştır. Daha sonra öğrencisi Jacques Bernoulli (1759-1789), Euler' in membran yaklaşımını genişleterek plak yapılara çevirmiştir. Ünlü bir mühendis ve bilimci olarak L. Navier (1785-1836), statik yükleme altındaki plakları ilk kez doğru diferansiyel denklemlerle ifade eden kişi olarak tanınır. Navier, Bernoulli' nin kirişlerin eğilmesi için başarıyla kullanılan hipotezine gerinim ve gerilmeleri iki boyutlu etkilerini ekleyerek statik ve yanal yüklemelere maruz kalan plaklar için yönetici diferansiyel denklemi tanımlamıştır. İlk kez Kirchhoff (1824-1887) plak eğilmesi için tam bir teori geliştirmiştir. Daha sonra ise büyük yer değişmelere sahip plaklar için, lineer olmayan terimlerin ihmal edilebileceğini ortaya koymuştur (Szilard, 2003).

2.1.1 Kirchhoff ince plak teorisi

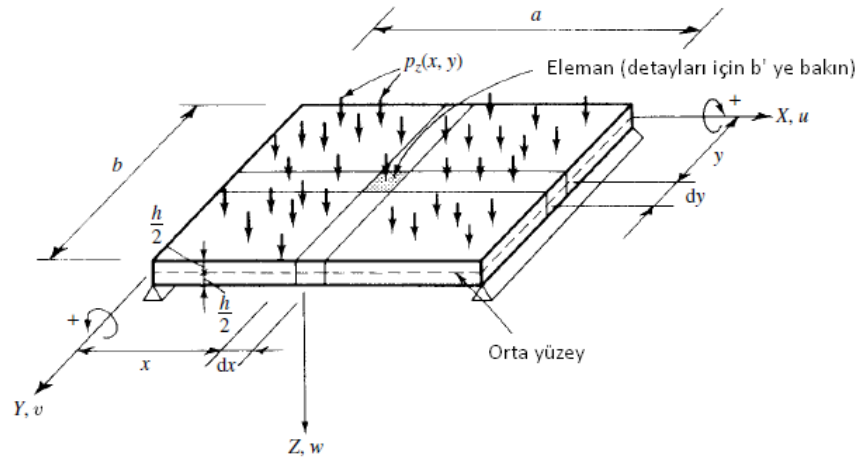
İnce plakların matematiksel olarak kesin gerilme analizlerinde üç boyutlu elastisitenin diferansiyel denklemlerinin çözümü gerekir. Kirchhoff klasik ince plak teorisi ise tüm üç boyutlu gerilme analizlerine ihtiyaç duymadan çoğu teknik uygulamalarda kesin sonuçlar sağlar. Diğer bir deyişle Kirchhoff ince plak teorisi; kalınlığı diğer boyutlarına göre küçük olan düzlemsel plakların analizinde kullanılan bir teoridir. Kirchhoff plak teorisi aşağıda sıralanan kabullere dayanır (Szilard, 2003).

1. Malzeme homojen, izotropik ve lineer elastik olmakla birlikte Hooke Kanunu' nu sağlamalıdır.
2. Plak başlangıçta düzlemseldir.
3. Plagın orta yüzeyinde eğilme esnasında birim yer değiştirme görülmez.
4. Plak kalınlığı h , plak boyunca sabit olup, diğer boyutların en az $1/10$ ' u kadar küçüktür.
5. Çökmeler $w(x,y)$ plak kalınlığına göre küçüktür. Kalınlığın $1/10$ oranında çökme, maksimum sınır olarak kabul edilir.
6. Deforme olan orta yüzeyin eğimi, $1'$ e göre çok küçüktür.
7. Deformasyondan önce orta düzleme dik olan orta düzlemsel kesitler, deformasyondan sonra yine düzlemsel ve dik kalırlar.

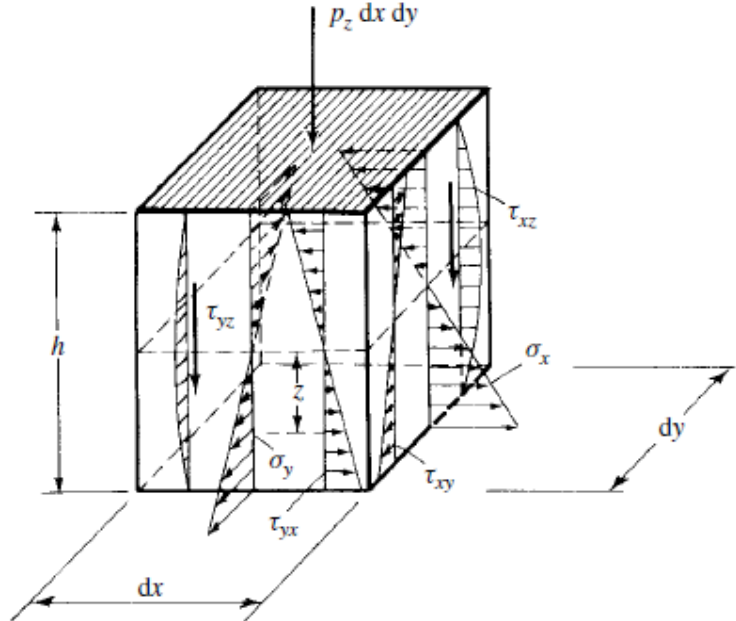
8. Plak yüzeyine dik yöndeki normal gerilme (σ_z) ihmal edilebilir.

Bu kabullerle elastisitenin üç boyutlu gerilme denklemi iki boyutlu bir plak problemi haline dönüşür.

Şekil 2.2' de dikdörtgen plaklar için kullanılan kartezyen koordinat sistemi görülmektedir. Şekil 2.2.a yanal olarak yüklenmiş plak modelini gösterirken, Şekil 2.2.b de a' daki plağın ortasından seçilen plak elemanının gerilme bileşenlerini gösterir.



(a)



(b)

Şekil 2.2 : Yanlamasına yüklü dikdörtgen plak (Szilard, 2003).

3. AEROELASTİSİTE

Aeroelastisite, bir akışkan içinde hareket eden esnek ve katı bir yapının üzerine etki eden yapısal, aerodinamik ve ataletsel kuvvetlerin birbiriyle etkileşimini inceleyen bilim dalıdır. Uçakların, helikopterlerin, füzelerin, köprülerin, güç hatlarının, uzun bacaların tasarımında aeroelastik etkiler göz önüne alınmaktadır.

Aeroelastisitenin ilgilendiği disiplinler Şekil 3.1’ de verilen ve Collar’ın aeroelastik kuvvet üçgeni diye adlandırdığı diyagramdan incelenebilir. Buna göre aeroelastisite kavramı demin de denildiği gibi üç temel kuvvet olan aerodinamik , elastik ve atalet kuvvetlerinin etkileşimiyle ortaya çıkar. Bu kuvvetlerin birbiriyle bileşimi farklı araştırma alanları yaratır. Örneğin, aerodinamik ve elastisite kuvvetlerinin etkileşimi statik aeroelastisiteyle ilgili iken elastisite ve atalet kuvvetlerinin etkileşimi ise mekanik titreşimlerle ilgilidir. Aerodinamik ve atalet kuvvetlerinin kesişimi de stabilite ve kontrol kavramını ortaya çıkarmaktadır. Bu üç kuvvetin kesişimi ile ise en önemli kavramlardan birini ortaya çıkarmaktadır: Dinamik aeroelastisite.

Diyagramda görüldüğü üzere aeroelastisite kavramı temel olarak ikiye ayrılmaktadır: Statik ve dinamik aeroelastisite. Statik aeroelastisitede zamana bağlı fiziksel öğeler probleme dâhil edilmez. Burada atalet kuvvetleri, zamana bağlı fiziksel öğelerdir. Bu durumda atalet kuvvetlerinin yapıya olan etkileri ihmal edilmekte, sadece aerodinamik ve yapısal kuvvetlerin etkileşimi incelenmektedir.



Şekil 3.1 : Collar’ın aeroelastik kuvvet üçgeni.

Statik aeroelastisite problemlerine örnek olarak diverjans yani kanadın burulma açısının sonsuza gitmesi, kontrol yüzeyleri etkinliği kaybı, kanatçık tersliği ve esnek taşıma yüzeylerine etki eden aerodinamik yüklerin değişen dağılımlarının hesaplanması verilebilir.

Dinamik aeroelastisitede ise zamana bağlı fiziksel öğeler probleme dâhil edilir ve böylece ataletsel, yapısal ve aerodinamik kuvvetlerin etkileşimi incelenmektedir. Dinamik aeroelastisite problemlerine örnek olarak da kanat çırpınması (flutter); uçağın kanat, gövde, motor kaportası gibi yapısal elemanlarının arkasındaki iz bölgesinde oluşan geçici titreşimlere karşı bu elemanların ürettiği aerodinamik tepki (Buffet) ve kontrol ve itki sistemlerinin etkileşimi sonucu uçak elemanlarının ürettiği dinamik cevap (dynamic response) verilebilir.

Aeroelastisite temel olarak, uçuş nitelikleri (kararlılık ve kontrol), flutter ve manevra ve atmosferik türbülans kaynaklanan yapısal yüklemelerle ilgilenir. Aeroelastik analiz metotları problemdeki atalet ve aerodinamik kuvvetlerin zamana bağımlılıklarına göre değişir. Uçuş niteliklerinin ve manevra yüklerinin analizinde aerodinamik yükler nispeten yavaş değişir, böylece “quasi-steady” metotlar kullanılabilir.

3.1 Flutter

Elastisite dâhilinde bahsi geçen yapı, plak davranışı gösteren uçak kontrol yüzeyleridir. Yukarıda anlatılan etkileşimlerden en tehlikelisi, kendiliğinden indüklenen titreşim biçimlerinden birisi olan ve sonuçta yapısal bozulmalara neden olan flutterdır. Diğer bir deyişle flutter, uçakların ve füzelerin kontrol yüzeylerinin eğilme ve burulma modlarının çakışmasıyla oluşan aeroelastik kararsızlık halidir. Dinamik bir kararsızlık durumu olan flutter, tasarım aşamasında önlenmesi gereken ve manevra zarfı dışına atılması gereken karmaşık bir problemdir. En önemli aeroelastisite problemlerinden birisidir. Flutter sonucunda, kontrol yüzeyleri havada titrer. Bu titreşim sonucu kontrol yüzeyi bir süre sonra kopar ve uçağın yere çakılması gibi felaketlere sebep olabilir. Bu nedenle flutter mutlaka önlenmesi gereken bir olaydır.

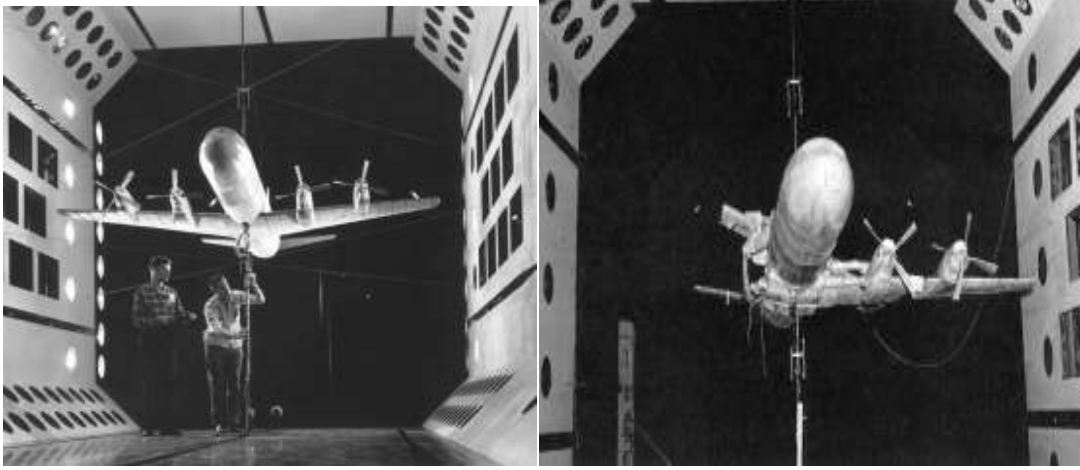
Uçağın düşük hızlarında titreşim modları kararlı haldedir. Yani uçağa bozuntu verilirse uçak tekrar kararlı hale döner. Yüksek hızlarda ise hava akımının etkisi ile

iki veya daha fazla sayıda titreşim modları etkileşirler. Böylece titreşen yapı hava akımından enerji almaya başlar. Hava akımından alınan enerji eğer uçak yapısının iç sürtünme ve sönümlemesinde harcanırsa etkileşen titreşim modları kararlı halde kalır. Ancak alınan enerji uçak yapısında harcanamayacak bir uçuş hızına erişildiğinde flutter başlar. Bu hıza “flutter hızı” denir. Biraz daha yüksek hızlarda ise titreşimin genliği büyür ve yapısal bozulmalar meydana gelir.

Konu oldukça eski olmasına rağmen günümüz uçaklarında da bu konu üzerinde titizlikle durulmaktadır. Yeni bir hava aracı geliştirilmesi veya mevcut bir uçağa yeni harici yükler takılması durumunda yapılması gereken uçuşa uygunluk (sertifikasyon) çalışmalarının önemli bir maddesini flutter analiz ve testleri oluşturmaktadır. Yeni hava aracının uçuş zarfının belirlenmesi, mevcut bir hava aracının uçuş zarfının değişikliklerden etkilenip etkilenmeyeceği, etkileniyorsa ne kadar daraltılıp genişletilmesi gerektiği, güvenilir bir şekilde ancak flutter uçuş testleri, yer titreşim testleri ve dinamik ölçeklendirilmiş hava tünelleri ile saptanabilmektedir. Şekil 3.2’deki resimde Langley Transonik Dinamik Hava Tünelinde Lockheed Electra uçağı için yapılan flutter testi görülmektedir (Kehoe, 1995). Tünelinde Lockheed Electra uçağı için yapılan flutter testi görülmektedir (Kehoe, 1995).

Flutter testlerinde, uçak ivmeölçerler ile donatılmakta ve belirli bir dinamik basınçta uçağın (özellikle kanatlarının) titreşimleri yer istasyonuna telemetre ile aktarılmaktadır. Bu titreşimler flutter test yazılımına girmekte ve yazılım içerdiği çeşitli yöntemler ile flutter emniyet payını uçuş sırasında anında hesaplamaktadır. Flutter emniyet payı, dinamik basınç ne kadar arttırıldığında uçağın fluttera gireceğini belirtmektedir. Dinamik basınç adım adım değiştirilerek bu testler yinelenmekte ve bu şekilde uçuş zarfının güvenli olduğu bölgeler adım adım doğrulanmaktadır. Flutter olayı son derece tehlikeli olduğu için, flutter hızına belirli bir paydan fazla yaklaşılmamakta ve flutter hızı kestirimi ekstrapolasyon ile yapılmaktadır.

Flutter olgusu üzerine teorik ve deneysel olarak yıllardır yapılan çalışmalara rağmen aeroelastik davranış hakkındaki her şey hala bilinmemektedir. Sönümleme ve esneklik gibi yapısal doğrusalsızlıklar; şok, akım ayrılması ve viskozite gibi transonik aerodinamik yüklemeler ve aktif kontrol sistem performansı sonucunda sistemin gösterdiği davranışlar, günümüzde hala çalışılmakta olan sıcak konulardandır.



Şekil 3.2 : Langley Transonik Dinamik Tünelde gerçekleştirilen flutter testi.

Kaydedilen ilk flutter kazası 1916 yılında İngiltere’de Handley Page O/400 bombardıman uçağının, gövde ve kuyruğunun şiddetli anti simetrik titreşimlere maruz kalmasının nedenlerini araştırırken kaydedildi. Ancak ilk flutter testi 1935 yılında Almanya’da Von Schlippe tarafından gerçekleştirilmiştir (Kehoe, M.W., 1995).

Oldukça tehlikeli şekilde sınırlar zorlanarak yapılan bu ilk testlerde uçak yapısı rezonans frekanslarında sarsılarak titreşimlerin hıza göre genlik değişimi izlenmiştir.

Artan titreşim genliği düşen sönümlemenin, dolayısıyla yaklaşan flutterın habercisidir. Oldukça tehlikeli şekilde sınırlar zorlanarak yapılan bu ilk testlerde uçak yapısı rezonans frekanslarında sarsılarak titreşimlerin hıza göre genlik değişimi izlenmiştir. Başarılı testlerden sonra 1938 yılında bir Junkers JU90 uçağı flutter testi sırasında flutter nedeniyle düşmüştür. Yetersiz sarsma ve ölçüm sistemi flutterın yaklaştığını gösterememiştir. Bundan sonra bir süre bu şekilde yapılan uçuş testlerine ara verildiyse de, 1940’ların sonunda testler tekrar başlatılmıştır. O günlerden günümüze flutter analizlerinde önemli ölçüde yenilikler yapılmasına rağmen flutter testleri hala tehlikeli olma özelliğini korumaktadır. Çünkü uçak gerçek flutter hızına yakın bir hızda uçmak zorundadır. Bu durumda hiç beklenmedik başka bir tür flutter problemi gündeme gelebilir (Kaya, M.O., 2000).

3.1.1 Panel flutter

Konuya fiziksel ve deneysel yönden bir yaklaşımda bulunulacak olunursa, “panel flutter” teorisini şu şekilde özetlemek mümkün olacaktır:

Panel flutter kavramı, plak (levha) ve kabuk olmak üzere birbirinden ayrı incelenen iki konuya ayrılmıştır. Kabuk flutter uçak gövdesi gibi silindirik yapılarda görülmektedir. Panel flutter ise bir yüzü süpersonik akışa maruz kalan ince plakların ya da membranların (zar) kendiliğinden salınım hareketleri olarak adlandırılmaktadır. Yüksek hızlı uçakların büyük bir kısmının dış yüzeyleri, belirli aralıklarla yerleştirilmiş spar ve ribler ile desteklenmektedir. Paneller basma yüküne maruz kaldıklarında flutter kararsızlığı gittikçe daha düşük hızlarda görülmektedir. Bazı durumlarda, oluşan kararsızlığı önleme, birincil tasarım kıstasıdır.

Konuya ilişkin ilk yaklaşım olarak; dikdörtgen, düz, ince ve kompozit bir plağın flutter sınırını incelemek amacıyla süpersonik bir rüzgâr tüneli deneyi yapılarak gerçekleştirildiği düşünülebilir. Gerçekte ise, dikdörtgen plak ilk önce normal daha sonra sivrilmiş geometride kabul edilecek ve süpersonik akımdaki flutter karakteristiği incelenecektir.

Deneyle hemen hemen aynı koşullar düşünüldüğünde olay, hava akımının; belirli bir Mach sayısına, toplam basınca ve sıcaklığa eriştikten sonra plağın üzerinde akması ile başlamaktadır. Bu durumda Mach sayısının, sıcaklığın ve flutter sınırının sabit kaldığı düşünülerek toplam basınçta meydana gelen artış sonucunda olduğu düşünülmektedir.

Sonuçta flutter, hava akımları nedeniyle plak üzerinde oluşan düzgün olmayan, büyük salınımlardır. Basıncın plak üzerindeki etkisi göz önünde tutularak flutter sınırı ve bu flutter sınırındaki frekans değerleri bulunmuştur. Burada flutter davranışını bulurken eğilme ile gerilme arasındaki yapısal eşleşme göz önünde bulundurulmuştur. Çünkü plağın eğilmeye maruz kalmasıyla bir çeşit gerinme oluşmakta ve bu gerinmenin de levha üzerinde gerilmeye sebep olduğu anlaşılmaktadır.

3.2 Aerodinamik model

Plağın flutter sınırlarını bulmak için plağın sabit aerodinamik yükleme altında olduğu kabul edilmiştir ve bu doğrultuda “quasi-steady süpersonik piston teorisi” (sanki-daimi ses üstü piston teorisi) kullanılmıştır. “Quasi-steady” kabulü, kolaylığı açısından caziptir ancak flutter ve kuvvetli rüzgâr-sağanak (gust) cevapları hesaplamaları için yeterli kadar eksiksiz değildir.

Dinamik hareketlerin frekansı üzerinde aerodinamik kuvvet ve momentlerin bağımlılığını doğru olarak tahmin etmek için daha ileri düzensiz (unsteady) aerodinamik analizler kullanılmak zorundadır. Bu da, üretilen aerodinamik yükler ve momentler üzerinde profilin inip-kalkma ve yunuslama hareketinin etkilerini anlamak için, geliş açısındaki ani bir değişimin ve profilin harmonik hareketinin sonuçlarının göz önünde bulundurulmasını gerektirir (Right ve Cooper, 2007). Ancak bu çalışma çerçevesinde bu etkiler göz ardı edilerek, daha basit yaklaşım olan “quasi-steady” kabulü yapılacaktır. Süpersonik piston teorisine göre basınç ifadesi şöyledir:

$$p = \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial t} \right] \quad (3.1)$$

Burada q dinamik basınç olup aşağıdaki şekilde verilir.

$$q = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \quad (3.2)$$

ve

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1} \quad (3.3)$$

Analizler ses üstü hız ($M > 1$) için yapılmış olup aşağıdaki yaklaşım kullanılmıştır.

$$\frac{1}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \cong \frac{1}{M_\infty} \quad (3.4)$$

Tüm terimlerin ifadelerini ve yapılan yaklaşımı Denklem (3.1)’ de yerine yazıldığında basınç ifadesi şu haline gelir:

$$p = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{M_\infty} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial t} \right] \quad (3.5)$$

3.3 Flutter denklemlerinin çıkarılması

Bu bölümde sürekli bir yapının sağladığı denklemler ve enerji ilkeleri kullanılarak dikdörtgen bir plağın aeroelastik analizi için elde edilecek yönetici denklemlerin oluşturulmasında kullanılan temel ifadeler verilmiştir. Plakların deformasyonun incelenmesinde temel elastisite problemleri geçerlidir.

Bunun için öncelikle düzlem için birim uzama ve yer değiştirme arasındaki ilişkiyi bilmek gerekir. Bu ilişki, daha önce anlatılan Kirchhoff ince plak teorisinin kabulleri göz önünde tutularak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \text{ ve } \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (3.6)$$

u_0 , v_0 ve w_0 tarafsız eksenin x , y ve z yönlerindeki yer değiştirmeleri olmak üzere Kirchhoff ince plak teorisine göre yer değiştirme alanları şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ ve $\frac{\partial w_0}{\partial y}$ enine normalin y ve x eksenlerinde yaptığı dönmelerdir.

Plakların yer değiştirmesi kalınlık ile karşılaştırıldığında çok küçüktür. Bu nedenle lineer birim uzama-yer değiştirme bağıntıları geçerlidir. Kalınlık yönündeki normal gerilmeler ihmal edilebilir. Plak izotrop bir yapı sergilediğinden Poisson oranı ve elastisite modülü gibi malzeme özellikleri plağın her yerinde aynıdır.

Birim-uzama-yer değiştirme ilişkileri ise şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Yer değiştirmeler elde edildikten sonra sanal birim-uzama enerjisini tespit etmek için gerilmeleri bulmak gerekmektedir. Sanal birim-uzama enerjisi sanal iş ile ilişkilidir ve hareket denklemleri çıkarımında kullanılan temel kavramdır. Sanal işi bulmak için gerilmeleri hesaplamak gerektiğinden, önce gerilmeler aşağıdaki formüller kullanılarak bulunur.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} malzeme özellikleriyle ilgili düzlem gerilmede indirilmiş katılık matrisi katsayıları (stiffness coefficients) olup şu şekilde ifade edilirler:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z,T)}{1-\nu(z)^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu(z)E(z,T)}{1-\nu(z)^2} \\ Q_{66} &= \frac{E(z,T)}{2[1+\nu(z)]} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada E elastisite modülü ve ν Poisson oranı' dır. Malzeme özelliklerinden katılık katsayıları bulunduğundan sonra katılık matrisi oluşturularak denklem (3.9)' daki gibi ifade elde edilir. Böylece birim-uzamalar da hesaba katılarak sanal veya virtüel işi tahmin etmek için gerilmeler bulunur.

Yer değiştirme ve gerilmelerin hesabından sonra virtüel birim-uzama enerjisi denklem (3.11)'de verildiği gibi hesaplanır. Virtüel birim-uzama enerjisi, uygulanan kuvvetlerin (bu çalışmada aerodinamik kuvvetler) yaptığı sanal iş ve sanal kinetik enerjinin birleştirilmesiyle elde edilir. Böylece virtüel iş prensibinin dinamik versiyonu bulunur. Bu dinamik versiyon “*Hamilton Prensibi*” olarak adlandırılır. Virtüel iş prensibinin dinamik versiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$\int_0^{t_e} (\delta U + \delta V - \delta KE) dt = 0 \quad (3.11)$$

Bu denklemde U şekil değiştirme enerjisi, V dış kuvvetlerin yaptığı iş ve K kinetik enerjidir. Şekil değiştirme ve dış kuvvetlerin yaptığı iş varyasyonlarının toplamından kinetik enerji varyasyonunu çıkarıp zamana göre entegre edildiğinde sonucun sıfıra eşit gelmesi gerekmektedir. O halde virtüel işi elde etmek için önce ayrı ayrı bu enerjileri elde etmek gerekmektedir.

Virtüel şekil değiştirmesi dediğimiz minimum toplam potansiyel enerji ilkesine göre deformasyona uğramış bir yapı potansiyel enerjisini minimize eden yer değiştirme durumuna geçme eğilimindedir (Szilard, 2003) ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dz dx dy \quad (3.12)$$

Dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş ifadesi ise Denklem (3.13)' te verilmiş olup şu şekilde açıklanabilir: “Denge halindeki bir yapı, uygun sınırlar dahilinde deformasyon oluşturan küçük yer değiştirmelere maruz kaldıysa; dış kuvvetlerin yaptığı virtüel iş, yapı içinde oluşan gerilmelerin birim uzama enerjisine eşittir” (Weaver ve Johnston, 1984).

$$\delta V = - \int_{\Omega_0} \left[p \delta w \left(x, y, \frac{h}{2} \right) \right] dx dy = - \int_{\Omega_0} [p \delta w_0(x, y)] dx dy \quad (3.13)$$

Virtüel kinetik enerji:

$$\begin{aligned} \delta KE = \int_{\Omega_0} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) & \left[\left(\dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left(\delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \left(\dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left(\delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dy dx \end{aligned} \quad (3.14)$$

Plak kiriş-plak olarak modellendiğinden plağın yön değiştirmesi (çökme) w_0 ve yer değiştirmesi u_0 ve v_0 sadece x ' in fonksiyonu olacaktır. Bu da y yönünde hiçbir türev yok demektir yani y yönündeki türevler sıfır olacaktır. Bütün bunlar göz önünde bulundurularak; sanal şekil değiştirme, sanal kinetik enerji ve dış kuvvetlerin yaptığı sanal iş değişimleri bulunduktan sonra dinamik sanal iş prensibi (3.11) denkleminde yerine yazılır. Yani hareketin birleştirilmiş kısmi diferansiyel denklemlerini saptamak için “Hamilton Prensibi” kullanılmıştır. u_0 ve v_0 yönündeki yer değiştirmeler küçük çökme, defleksiyon problemi ele alındığı için ihmal edilmiştir. Bu nedenle sadece w_0 yönündeki yer değiştirmeler göz önünde bulundurulmuştur ve hareket denklemleri buna göre çıkarılmıştır. “Hamilton Prensibi” yardımıyla hareket denklemleri şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_w &= P + I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

- N_x : Efektif malzeme özellikleri sonucunda oluşan düzlem içi bileşke kuvvet
- N_w : Doğrusal olmayan terimlerden dolayı oluşan kuvvet katkısı

- M_x : Efektif malzeme özellikleri sonucunda oluşan düzlem içi bileşke eğilme momenti
- I_0, I_1, I_2 : Plâğın atalet katsayıları
- P : Aerodinamik basınç yüklemesi

Aerodinamik basınç yüklemesi quasi-steady (sanki daimi) ses üstü piston teorisi kabul edilerek yazılmıştır ve önceki bölümlerde açıklanmıştır. Bunun dışında diğer terimler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Atalet katsayıları:

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h_s/2-h_f}^{h_s/2+h_f} \rho(z)(1, z, z^2) dz \quad (3.16)$$

Düzlem içi kuvvet ve moment ifadeleri:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^1 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

A_{11}, B_{11} ve D_{11} plak için uzama-eğilme rijitlik katsayıları olup şöyle bulunurlar:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h_s/2-h_f}^{h_s/2+h_f} Q_{ij}(z)(1, z, z^2) dz, \quad (i,j = 1, 2, 6) \quad (3.18)$$

- A_{ij} : Malzemenin uzama katılık katsayısı
- B_{ij} : Malzemenin eğilme katılık katsayısı
- D_{ij} : Malzemenin uzama-eğilme katılık katsayısı [$D = E h^3 / 12 (1-\nu^2)$]

Ayrıca birim-uzamalar da:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon^1 &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Doğrusal olmayan terimlerden dolayı oluşan kuvvet katkısı N_w ise şöyledir:

$$N_w = \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.20)$$

Buradaki N terimi, plâğın düzlem içi yüklemelere maruz kalması sonucunda oluşan burkulma etkisini gösterir.

Uzama-eğilme katılık katsayıları ve birim uzamalar hesaplandıktan sonra düzlem içi kuvvet ve moment ifadelerinde yerine yazılır. Kirchhoff ince plak teoresine göre malzemenin uzama ve eğilme katılık katsayıları A_{ij} ve B_{ij} ve eğilme-bükülme katsayıları D_{12} , D_{26} sıfıra eşit olmaktadır. Buna göre plak için aeroelastik diferansiyel hareket denklemi şu şekilde elde edilir:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial t} \right] + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = 0 \quad (3.21)$$

Bu çalışmada incelenen farklı tipteki plakların aeroelastik analizini yöneten denklemlerin temeli Denklem (3.21) ' e dayanır. Aeroelastisite içermeyen bir plağın serbest titreşimini veren klasik diferansiyel denklem ise aşağıdaki gibidir:

$$D \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.22)$$

D eğilme katılığı olup aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (3.23)$$

Burada E Elastisite modülü, h plak kalınlığı, ν Poisson oranı, ρ plağın birim alan başına kütle yoğunluğu, t zamanı ifade eder. Ayrıca ∇^2 Laplacian operatörüdür.

4. PLAKLARIN DİNAMİK VE AEROELASTİK UYGULAMALARI

Plak yapılar havacılıkta çok geniş uygulama alanına sahiptir. Uçakların kanatları, kontrol ve kumanda yüzeyleri plak olarak modellenenabilir. Bu plak yüzeyleri üzerlerine gelen hava akımı nedeniyle dinamik ve aeroelastik yüklere maruz kalırlar ve bunun sonucunda gelen yükün büyüklüğüyle alakalı olarak bir takım dinamik veya aeroelastik problemlerle karşı karşıya kalırlar. Bu problemlere serbest titreşim, diverjans veya flutter örnek olarak verilebilir. Bu konuyla ilgili birçok çalışma literatürde mevcuttur. Kompozit malzemelerin yanı sıra fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden oluşan plak yapıların flutter davranışları da incelenmiştir (Melek ve Kaya, 2009).

Bu çalışmada farklı şekillerde modellenen plakların dinamik ve aeroelastik analizleri araştırılmıştır. Bunlarda ilk olarak incelenen Winkler diye tabir edilen elastik zemine oturan dikdörtgen bir plak modelidir. Winkler elastik zeminine oturan bir dikdörtgen plağın flutter frekansı araştırılmıştır. İkinci bölümde incelen plak modeli kalınlığı değişen yani sivrilen bir plağın serbest titreşim analizidir. Son olarak ise delaminasyona uğramış kompozit plakların flutter karakteristiği incelenmiştir.

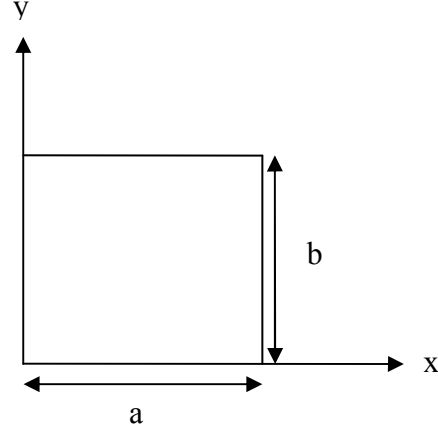
4.1 Dikdörtgen Plaklar ve Analitik Modellenmesi

4.1.1 Normal dikdörtgen plaklar

Sivrilen plakların serbest titreşim analizinden önce sivrilmeye olmayan normal bir dikdörtgen plak için serbest titreşimi analizi yapıldı ve basit mesnet-ankastre-basit mesnet-ankastre [SS-C-SS-C] sınır şartları altındaki plağın deformasyona uğradığı frekansları elde edilerek literatürle karşılaştırılmıştır. Plağın geometrisi Şekil 4.1’ da verilmiştir.

Dikdörtgen bir plağın genel olarak diferansiyel hareket denklemi aşağıdaki gibidir.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$



Şekil 4.1 : Plak geometrisi.

Plagın basit harmonik hareket yaptığı kabul edilmiştir.

$$w(x, y, t) = \bar{W}(x, y)e^{i\omega t}$$

$$\bar{W}(x, y) = \bar{W}(x) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.2)$$

Basit harmonik hareket kabulü denklem (4.1) ' de yerine yazıldığında elde edilen denklem:

$$\frac{\partial^4 \tilde{W}}{\partial x^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 - \rho h \frac{\omega^2}{D}\right] \tilde{W} = 0 \quad (4.3)$$

İlk olarak denklem (4.3) aşağıdaki boyutsuz koordinat ve yer değiştirme ifadeleri kullanılarak boyutsuzlaştırılmıştır:

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \tilde{W} = \frac{\bar{W}}{h}, \quad \frac{d^2 \bar{W}}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \tilde{W}}{d\xi^2} \quad (4.4)$$

Elde edilen boyutsuz hareket denklemi:

$$\frac{1}{a^4} \frac{d^4 \tilde{W}}{d\xi^4} - 2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \tilde{W}}{d\xi^2} + \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 - \rho h \frac{\omega^2}{D}\right] \tilde{W} = 0 \quad (4.5)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra elde edilen hareket denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{d^4 \tilde{W}}{d\xi^4} - 2(n\pi)^2 \frac{a^2}{b^2} \frac{d^2 \tilde{W}}{d\xi^2} + \left[(n\pi)^4 \frac{a^4}{b^4} - \rho h \frac{\omega^2}{D} a^4\right] \tilde{W} = 0 \quad (4.6)$$

$\sigma = a / b$ plagın açıklık oranını verirken;

$\lambda^2 = \rho h \frac{\omega^2}{D} a^4$ olarak tanımlanır ve λ boyutsuz frekansı ifade eder. Buna göre

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \text{ basit mesnet sınır şartları altında denklem (4.7)' de son hali}$$

verilen plak hareket denkleminin titreşim frekanslarını elde etmek amacıyla Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) seçilmiştir kod yazılarak frekans değerleri elde edilmiştir ve literatürle karşılaştırılmıştır. Metot hareket denklemine uygulanırken aşağıda verilen DDY temel teoremleri ve sınır şartları için kısım 4.1.1.1' de verilen çizelgeler kullanılmıştır.

$$\frac{d^4 \tilde{W}}{d\xi^4} - 2(n\pi)^2 \sigma^2 \frac{d^2 \tilde{W}}{d\xi^2} + [(n\pi)^4 \sigma^4 - \lambda^2] \tilde{W} = 0 \quad (4.7)$$

4.1.1.1 Diferansiyel dönüşüm Yöntemi çözümü

Diferansiyel formda elde edilen boyutsuzlaştırılmış hareket denklemlerinin çözüme uygun hale getirildikten sonra çözülmek için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) seçilmiştir ve etkileşim modları hesaplanmıştır. Bu nedenle öncelikle kullanılan yöntem tanıtılacaktır.

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İlk olarak Zhou tarafından elektrik devreleri analizi için lineer ve nonlinear başlangıç değer problemlerinde kullanılan diferansiyel dönüşüm yöntemi, hem adi hem de diferansiyel kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabildiğinden daha sonraki yıllarda öz-değer problemlerinin çözümüne kadar yaygın bir alanda kullanılmaya başlanmıştır. Önceki çalışmalar, diferansiyel dönüşüm yönteminin nonlinear veya değişken parametrelili problemlerin çözümünde etkin olduğunu gösterdiğinden son yıllarda pek çok çalışmada DDY kullanılmaktadır (Kaya ve Ozdemir, 2007).

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, Taylor seri açılımına dayanan ve diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bir dönüşüm tekniğidir.

Bu yöntemde, bir probleme ait diferansiyel denklemlere ve sınır koşullarına belirli dönüşüm kuralları uygulanarak denklemler basit analitik ifadelerle dönüştürülür ve bu analitik ifadelerin çözülmesi ile istenilen sonuçlar büyük bir hassasiyetle elde edilir. Yöntemin Taylor yönteminden farkı Taylor seri açılımında olduğu gibi fonksiyonun türevlerinin hesaplanmasına gerek olmamasıdır.

D bölgesinde analitik olan bir $f(x)$ fonksiyonu ve aynı bölgede yer alan $x = x_0$ noktası göz önüne alınırsa, fonksiyon bu noktada bir seri açılımla ifade edilebilir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (4.8)$$

Asıl fonksiyon $f(x)$ ve dönüştürülmüş fonksiyon, $F[k]$ olmak üzere asıl fonksiyonun diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f}{dx^k}(x) \right)_{x=x_0} \quad (4.9)$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consetetur sadipscing elitr, sed diam nonumy eirmod tempor invidunt ut labore et dolore magna aliquyam erat, sed diam voluptua. At vero eos et accusam et justo duo dolores et ea rebum.

Denklemler (4.8) ve (4.9) göz önüne alındığında asıl fonksiyon ile dönüştürülmüş fonksiyon arasındaki bağlantıya ulaşılır:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k F[k] \quad (4.10)$$

Asıl fonksiyonun seri açılımında sonlu sayıda terim almak genel bir yaklaşımdır. Bu nedenle denklem (4.10)' un üst sınırı sonlu bir q sayısı ile ifade edilebilir. Bu q üst sınırının değerini elde edilen sonuçların yakınsama hızı belirler.

$$f(x) = \sum_{k=0}^q (x-x_0)^k F[k] \quad (4.11)$$

Diferansiyel denklemlerin dönüştürülmesi için kullanılan bazı teoremler aşağıda verilmektedir.

Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin teoremleri ve sınır şartlarına uygulanan kurallarının denklem (4.7)' ye uygulanmasıyla denklem (4.7)' nin DDY formu aşağıdaki gibi yazılır.

$$(k+4)(k+3)(k+2)(k+1) W[k+4] - 2(n\pi)^2 \sigma^2 (k+2)(k+1) W[k+2] + [(n\pi)^4 \sigma^4 - \lambda^2] W[k] = 0 \quad (4.12)$$

Çizelge 4.1 : DDY' nin temel teorileri.

Orijinal fonksiyon	DDY
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F(k) = G(k) \pm H(k)$
$f(x) = \lambda g(x)$	$F(k) = \lambda G(k)$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F(k) = \sum_{l=0}^k G(k-l)H(l)$
$f(x) = \frac{d^n g}{dx^n}(x)$	$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
$f(x) = x^n$	$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq n \\ 1 & \text{if } k = n \end{cases}$

Çizelge 4.2 : Sınır şartlarına uygulanan DDY kuralları.

x = 0		x = 1	
<i>Asıl Sınır Şartı</i>	<i>Dönüştürülmüş Sınır Şartı</i>	<i>Asıl Sınır Şartı</i>	<i>Dönüştürülmüş Sınır Şartı</i>
$f(0) = 0$	$F(0) = 0$	$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F(k) = 0$
$\frac{df}{dx}(0) = 0$	$F(1) = 0$	$\frac{df}{dx}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF(k) = 0$
$\frac{d^2 f}{dx^2}(0) = 0$	$F(2) = 0$	$\frac{d^2 f}{dx^2}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F(k) = 0$
$\frac{d^3 f}{dx^3}(0) = 0$	$F(3) = 0$	$\frac{d^3 f}{dx^3}(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F(k) = 0$

4.1.1.2 Plakların serbest titreşim analizi

Denklem (4.12)' nin Mathematica 6.0 programında yazılan kod yardımıyla çeşitli açıklık oranları (a/b) için çözdürülmüştür ve dikdörtgen bir plağın ilk beş modu için frekans değerleri çizelgedeki gibi elde edilmiştir. Aşağıdaki çizelgede de görülebileceği üzere frekans değerleri literatürle çok yakın değerler elde edilmiştir.

Aradaki farklardan kaynaklanan bağıl hatalar oldukça küçüktür. Bunun sonucunda bulunan değerlerin doğru hesaplandığı sonucuna varabiliriz.

Çizelge 4.3 : Farklı a/b oranları için dikdörtgen bir plağın frekans parametresi değerleri.

a/b = 0.5	1	2	3	4	5
hesaplanan	54,7431	94,5853	154,776	234,588	329,991
literatür	54,8	94,6	154,8	234,5	333,9
% bağıl hata	0,1038	0,0155	0,0155	0,0375	1,17
a/b = 1.0	1	2	3	4	5
hesaplanan	28,9509	69,327	129,096	208,392	307,194
literatür	-	-	-	-	-
% bağıl hata	-	-	-	-	-
a/b = 1.5	1	2	3	4	5
hesaplanan	25,0436	65,0079	124,516	203,637	302,368
literatür	25	64,9	124,5	203,7	302,4
% bağıl hata	0,1744	0,1662	0,0128	0,0309	0,0105
a/b = 2.0	1	2	3	4	5
hesaplanan	23,8156	63,5345	122,93	201,982	300,676
literatür	23,8	63,4	123,0	202,1	300,7
% bağıl hata	0,0655	0,2121	0,0569	0,0583	0,0079

4.1.2 Sivrilere plaklar

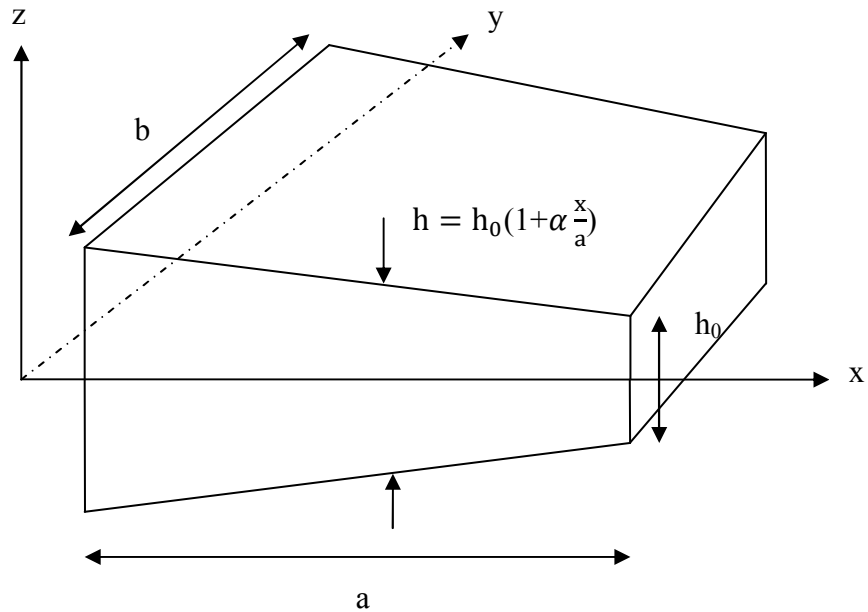
Geçmişten bu yana plakların serbest titreşim karakteristiğiyle alakalı birçok çalışma yapılmıştır. Ancak son zamanlarda, bu tip çalışmaların gelişimindeki araştırmalar yenilenmiş ve çeşitlilik kazanmıştır. Bu çeşitlilik plak kalınlığının değişmesi, kayma deformasyonu, dönel atalet etkileri, genel poligonel sınırlar, malzeme anizotropisi gibi karmaşık etkilerin serbest titreşim karakteristiği üzerindeki etkilerini kapsar [Bert ve Malik, 1995].

Bu çalışmada kalınlığı x yönünde değişen bir plağın karşılıklı iki kenarının basit mesnetli olduğu sınır şartları altındaki serbest titreşim davranışını belirlemek amaçlanmış ve frekans değerleri elde edilmiştir. Daha sonra ise üzerine aeroelastisite eklenerek sivrilen geometriye sahip bu plağın flutter sınırları araştırılmıştır.

Şekil 4.2’ de uzunlukları a ve b olan ve x -doğrultusunda lineer bir şekilde, $h = h_0(1 + \alpha \frac{x}{a})$ bağıntısına göre sivrilen plağın geometrisi görülmektedir. Serbest titreşim analizi yapılırken plağın karşılıklı iki kenarından basit mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Buna göre şekil fonksiyonu, x -yönünde trigonometrik (sinüs veya kosinüs) bir fonksiyon ile verilir (Bakınız denklem (4.2)).

Kalınlığı yalnız x -yönünde lineer olarak değişen, yalnız y -yönünde lineer değişen, her iki yönde lineer veya parabolik olarak sivrilen plaklar gibi çeşitli sivrilen plak modelleri vardır.

Çizelge 4.4’ te kalınlığı değişen dikdörtgen plaklar için bazı örnekler verilmiştir. Bu çalışmada sadece x yönünde kalınlığı lineer olarak değişen bir dikdörtgen plağın serbest titreşim ve flutter davranışları araştırılmıştır.



Şekil 4.2 : Sivrilen plak geometrisi.

Çizelge 4.4 : Kalınlığı değişen dikdörtgen plak örnekleri.

Uniform olmayan dikdörtgen plak tipleri	Sivrilme faktörü	
	s	t
Uniform plak	0	0
x-yönünde lineer sivrilen plak	1	0
y-yönünde lineer sivrilen plak	0	1
Her iki yönde lineer sivrilen plak	1	1
x-yönünde parabolik sivrilen plak	2	0
y-yönünde parabolik sivrilen plak	0	2
Her iki yönde parabolik sivrilen plak	2	2

4.1.2.1 Temel bağıntı ve hareket denklemlerinin çıkarılması

Düzlem-içi kuvvetlerin olmadığı, x ve y eksenlerinde uzunlukları a ve b olan, kalınlığı plak boyunca değişen sivrilen plakların serbest titreşimi için hareket denklemini dikdörtgen koordinatlarda şu şekilde verilebilir (Leissa, 1969):

$$\nabla^2(D \nabla^2 w) - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.13)$$

Birim hacim başına kütle yoğunluğu γ , ρ yerine yazılmıştır. Plak kalınlığı h ' ın sadece bir yönde, x yönünde değiştiği varsayımıyla denklem (4.13) aşağıdaki şekilde basitleşir.

$$D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.14)$$

x yönünde kalınlığı lineer olarak değişen plak için kalınlık bağıntısı denklem (4.15)' deki gibi verilebilir. Burada h_0 ve ξ , plak uzunluğu a ile boyutsuzlaştırılmış ifadeler olup, α plağın sivrilme (taper) oranıdır.

$$h = h_0(1 + \alpha \xi) \quad (4.15)$$

Bu tanımlamara göre, plak kalınlığı h , x yönünde değiştiğinden plağın eğilme katılığı D sabit olmayıp, plak boyunca değişiklik gösterir. Ayrıca, plak kalınlığı sadece x yönünde değiştiğinden eğilme katılığı D' nin y' ye göre türevleri "0" olur.

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.16)$$

Denklem (4.14)' teki ∇^2 iki boyutlu Laplace ifadesi olup $\nabla^2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ şeklindedir. ∇^4 ise $\nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2$ gibi tanımlanır. Buna göre plak denklemleri dördüncü dereceden olduğu için şu şekilde yazılır:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (4.17)$$

Bu eşitlik, denklem (4.14)' te yazılırsa daha açık bir ifade elde edilir:

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

Parantez içindeki ifadeleri dağıttığımızda elde edilen denklem:

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.19)$$

Dördüncü dereceden sivrilen plak denkleminin çözülebilmesi için dört adet sınır şartına ihtiyaç vardır. Plâğın $y = 0$ ve $y = b$ ' de basit mesnet sınır koşullarına sahip olduğu ve basit harmonik hareket yaptığı kabulüyle plâğın çökme, w (deflection) ifadesi denklem (4.20)' de verildiği gibi yazılmıştır.

Sınır koşulları

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } y = 0, b$$

$$w(x, y, t) = \bar{W}(x) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\omega t} \quad (4.20)$$

$$D \left[\frac{d^4 \bar{W}}{dx^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 \bar{W}}{dx^2} + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 \bar{W} \right] + 2 \frac{dD}{dx} \frac{d^3 \bar{W}}{dx^3} - 2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \frac{d\bar{W}}{dx} \frac{dD}{dx} + \frac{d^2 D}{dx^2} \frac{d^2 \bar{W}}{dx^2} - \nu \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 D}{dx^2} \bar{W} - \gamma h \omega^2 \bar{W} = 0 \quad (4.21)$$

Elde edilen (4.21) denklemi $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{i\omega t}$ ifadesinin her bir terimden sadeleştirilmiş halidir. Şimdi bu denklem boyutsuzlaştırılıp gerekli düzenlemeler yapılarak çözüme uygun hale getirilecektir.

Boyutsuzlaştırma

İlk olarak;

- Boyutsuz bir koordinat $\xi = \frac{x}{a}$, $\bar{h} = \frac{h_0}{a}$ ve
- Boyutsuz bir yer değiştirme $\bar{W} = \frac{W}{h}$ tanımlanmıştır.
- Ayrıca $\frac{d^2 \bar{W}}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2}$, $\frac{dD}{dx} = \frac{1}{a} \frac{dD}{d\xi}$, $\frac{d^2 D}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \bar{D}}{d\xi^2}$ olarak boyutsuzlaştırıldı.

Buna göre plak eğilme katılığı:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E(\bar{h}^3(1+\alpha\xi)^3)}{12(1-\nu^2)}$$

$$D_0 = \frac{E\bar{h}^3}{12(1-\nu^2)} \text{ olarak tanımlanırsa } D = D_0 (1 + \alpha \xi)^3 \text{ olur.}$$

Bu dönüşümler kullanılarak (4.21)' de verilen hareket denklemi boyutsuzlaştırılmıştır. Boyutsuz haldeki denklemi daha kolay ve anlaşılır hale getirmek ve çözebilmek için izlenen işlem sırası aşağıdaki gibidir:

Boyutuzlaştırma sonucunda her bir terimde mevcut olan “h” ifadesi sadeleştirilmiştir. Denklem D_0 ile bölünmüştür ve daha sonra denklem a^4 ile çarpılarak sıvrilen plağın flutter sınırlarını bulmak amacıyla gerekli denklemi elde etmek için yapılan formülasyon prosedürü sıvrilen plak için de benzer şekilde uygulanmıştır. Buna göre aşağıda verilen boyutsuz parametreler yardımıyla boyutsuz hareket denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} - 2 (1 + \alpha \xi)^3 (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + (1 + \alpha \xi)^3 (m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \bar{W} + \\ & 2 \frac{d\bar{D}}{d\xi} \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} - 2 (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{d\bar{D}}{d\xi} \frac{d\bar{W}}{d\xi} + \frac{d^2 \bar{D}}{d\xi^2} \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - \nu (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{d^2 \bar{D}}{d\xi^2} \bar{W} - \\ & \gamma h \frac{\omega^2 a^4}{D_0} \bar{W} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\bar{D} = D_0 (1 + \alpha \xi)^3$$

$$\frac{d\bar{D}}{d\xi} = 3 D_0 \alpha (1 + \alpha \xi)^2$$

$$\frac{d^2 \bar{D}}{d\xi^2} = 6 D_0 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) \text{ ve}$$

$$(m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \lambda^2 ; \left[\left(\frac{a}{b}\right)^2, \text{ plağın açıklık oranı - aspect ratio}\right]$$

$$\Omega^2 = \gamma h \frac{\omega^2 a^4}{D_0} : \text{ Lineer sıvrilen dikdörtgen plağın temel frekans parametresi}$$

Yukarıdaki türev ifadeleri ve boyutsuz ifadeler denklem (4.22)' de ilgili yerlere yazıldığında elde edilen denklem aşağıda verildiği gibidir.

$$(1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + 6 \alpha (1 + \alpha \xi)^2 \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} + [6 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) - 2 (1 + \alpha \xi)^3 \lambda^2] \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - 6 \alpha (1 + \alpha \xi)^2 \lambda^2 \frac{d \bar{W}}{d\xi} + [(1 + \alpha \xi)^3 \lambda^4 - 6 \nu \lambda^2 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) - \Omega^2] \bar{W} = 0 \quad (4.23)$$

Üçüncü ve ikinci dereceden terimleri çarpanlara ayırma Yöntemiyle açtığımızda;

$$(1 + \alpha \xi)^3 = 1 + 3 \alpha \xi + 3 (\alpha \xi)^2 + (\alpha \xi)^3$$

$$(1 + \alpha \xi)^2 = 1 + 2 \alpha \xi + (\alpha \xi)^2$$

Çarpanlara ayrılmış ifadeler denklem (4.23)' te yerine yazıldığında elde edilen denklem;

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + 3 \alpha \xi \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + 3 (\alpha \xi)^2 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + (\alpha \xi)^3 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + 6 \alpha \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} + 12 \alpha^2 \xi \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} \\ & + 6 \alpha^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + 6 \alpha^3 \xi^2 \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} + 6 \alpha^3 \xi \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - 2 \lambda^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - 6 \alpha \xi \lambda^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - \\ & 6 \alpha^2 \xi^2 \lambda^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - 2 \alpha^3 \xi^3 \lambda^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - 6 \alpha \lambda^2 \frac{d \bar{W}}{d\xi} - 12 \alpha^2 \xi \lambda^2 \frac{d \bar{W}}{d\xi} - 6 \alpha^3 \xi^2 \lambda^2 \frac{d \bar{W}}{d\xi} \\ & + \lambda^4 \bar{W} + 3 \alpha \lambda^4 \xi^2 \bar{W} + \alpha^3 \xi^3 \lambda^4 \bar{W} - 6 \nu \lambda^2 \alpha^2 \bar{W} - 6 \nu \lambda^2 \alpha^3 \xi \bar{W} - \Omega^2 \bar{W} = 0 \quad (4.24) \end{aligned}$$

Bölüm 4.1.1.1' de detaylı olarak açıklanan Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin teoremleri ve kurallarının uygulanmasıyla denklem (4.24)' ün DDY formu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} & (k+4) (k+3) (k+2) (k+1) W[k+4] + (k+3) (k+2) (k+1) \{3 \alpha(k) + 6 \alpha\} W[k+3] + \\ & (k+2) (k+1) \{3 \alpha^2(k) (k-1) + 12 \alpha^2(k) + 6 \alpha^2 - 2 \lambda^2\} W[k+2] + \\ & (k+1) \{\alpha^3(k) (k-1) (k-2) + 6 \alpha^3(k) (k-1) + 6 \alpha^3(k) - 6 \alpha \lambda^2(k) - 6 \alpha \lambda^2\} W[k+1] \\ & + \{-6 \alpha^2 \lambda^2(k) (k-1) (k-2) - 12 \alpha^2 \lambda^2(k) + \lambda^4 - 6 \nu \alpha^2 \lambda^2 - \Omega^2\} W[k] \\ & + \{-2 \alpha^3 \lambda^2(k-1) (k-2) - 6 \alpha^3 \lambda^2(k-1) + 3 \alpha \lambda^4 - 6 \nu \alpha^3 \lambda^2\} W[k-1] \\ & + 3 \alpha^2 \lambda^4 W[k-2] + \alpha^3 \lambda^4 W[k-3] = 0 \quad (4.25) \end{aligned}$$

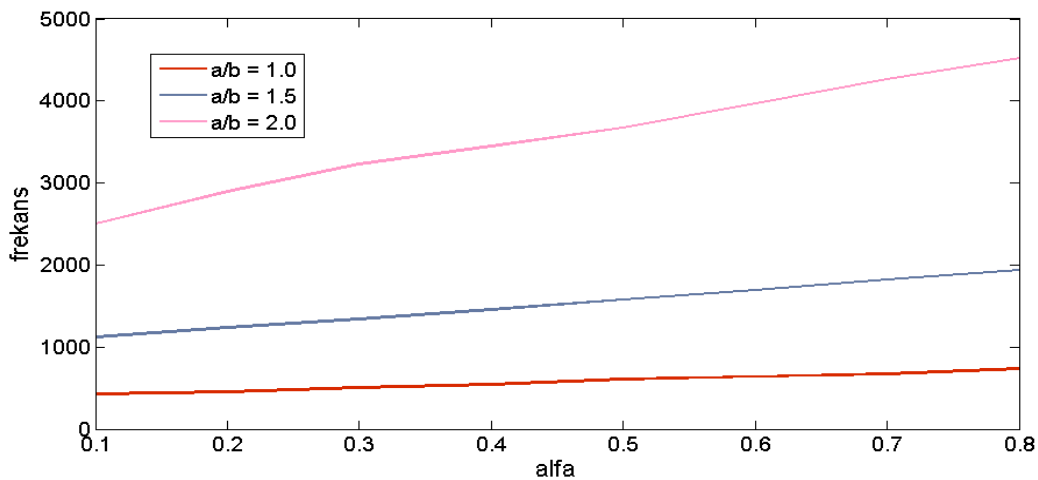
Yukarıdaki denklemden $W[k+4]$ ' ü çekersek;

$$\begin{aligned}
W[k+4] = & -\frac{3\alpha(k)+6\alpha}{(k+4)} W[k+3] - \frac{1}{(k+4)(k+3)} \{3\alpha^2(k)(k-1) + 12\alpha^2(k) + 6\alpha^2 - \\
& 2\lambda^2\} W[k+2] - \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)} \{ \alpha^3(k)(k-1)(k-2) + 6\alpha^3(k)(k-1) + \\
& 6\alpha^3(k) - 6\alpha\lambda^2(k) - 6\alpha\lambda^2 \} W[k+1] - \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \{ \lambda^4 - \Omega^2 - \\
& 6\alpha^2\lambda^2(k)(k-1)(k-2) - 12\alpha^2\lambda^2(k) + -6v\alpha^2\lambda^2 \} W[k] - \\
& \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \{ -2\alpha^3\lambda^2(k-1)(k-2) - 6\alpha^3\lambda^2(k-1) + 3\alpha\lambda^4 - 6v\alpha^3\lambda^2 \} \\
W[k-1] = & -\frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \{ 3\alpha^2\lambda^4 W[k-2] + \alpha^3\lambda^4 W[k-3] \} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Bu ifade Mathematica 6.0 programında yazılan kod yardımıyla çözülerek, çeşitli açıklık oranları ($a/b = 1.0, 1.5, 2.0$) ve α değerleri ($\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 0.8$) için basit mesnetli sınır şartlarındaki lineer olarak sivrilen bir dikdörtgen plağın serbest titreşim frekans değerleri elde edilmiştir ve elde edilen sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

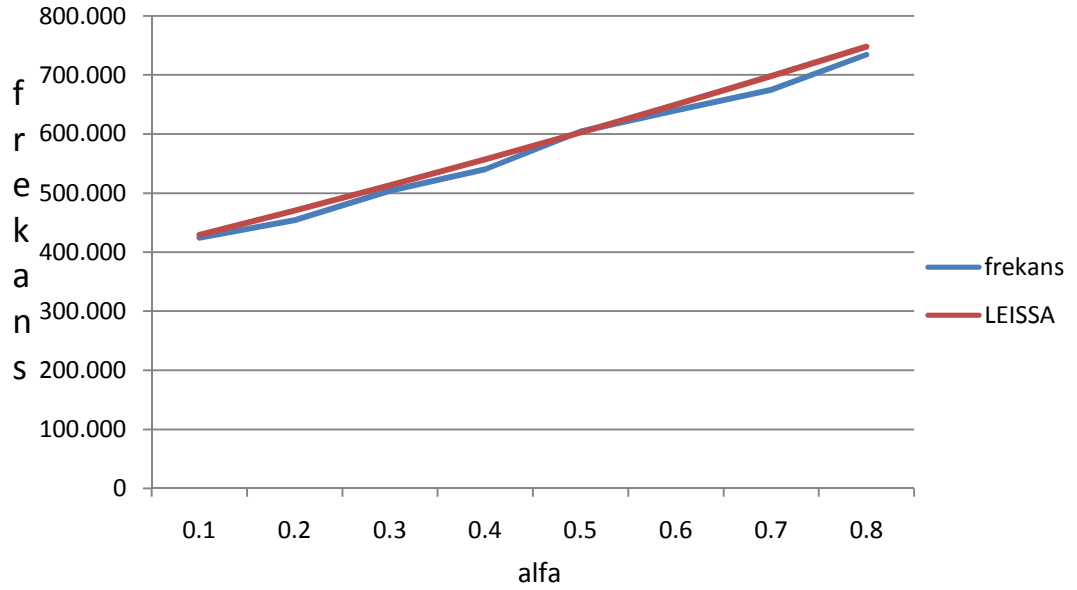
4.1.2.2 Sivrilen plakların serbest titreşim analizi

Kalınlığı x yönünde lineer olarak değişen bir plağın değişen açıklık oranlarında (alfa) serbest titreşim frekanslarının değişim grafiği Şekil 4.3' te görülmektedir. Grafik plağın çeşitli sivrilme oranlarına sahip olduğu durumlar için elde edilmiştir. Buna göre plağın sivrilme oranının artması ile doğal frekansı artmaktadır. Ayrıca bu grafiğe göre plağın açıklığının artması yani alanının büyümesi de titreşim frekansını artırır.

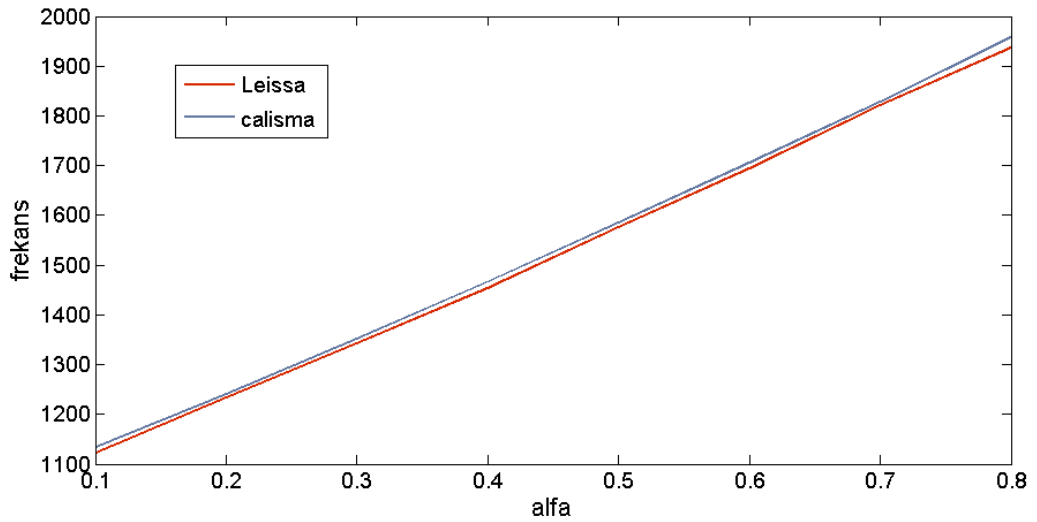


Şekil 4.3 : Çeşitli sivrilme oranları için flutter frekansının alfa ile değişimi.

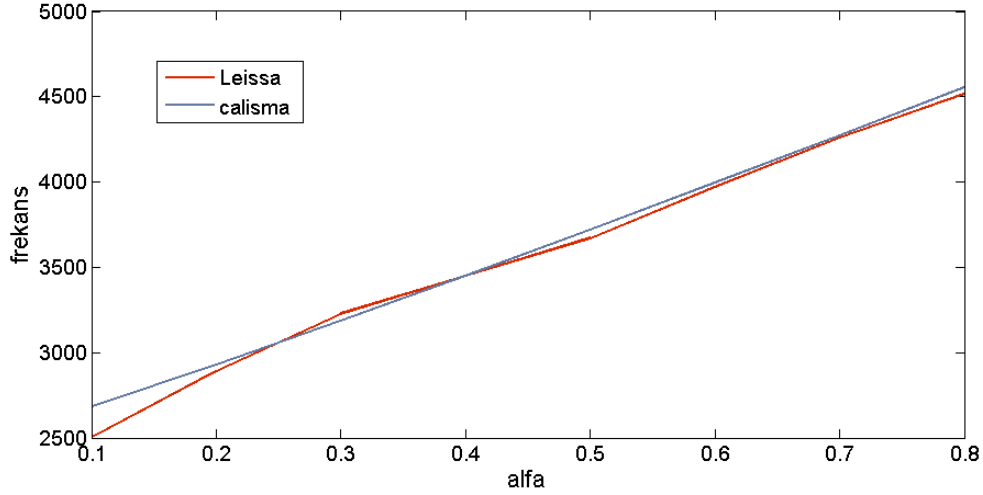
Şekil 4.4, 4.5 ve 4.6’ da sivrılme oranı a/b ‘ nin sırasıyla 1.0, 1.5 ve 2.0 olduğu durumlarda elde edilen frekans değerleri grafiksel olarak gösterilmiştir ve Leissa’ nın çalışmalarıyla karşılaştırılmıştır. Hesaplanan frekans değerleri Ek 1.A’ da çizelge halinde verilmiştir. Bu sayısal verilere göre çizilen grafiklerden görüldüğü üzere sonuçların benzer olduğu söyleyebiliriz. Frekans değerleri birebir aynı olmamakla literatürdeki değerlere yakın olup benzer eğilimi göstermektedir.



Şekil 4.4 : Sivrilme oran $a / b = 1.0$ için literatürle karşılaştırma.



Şekil 4.5 : Sivrilme oranı $a/b = 1.5$ için literatürle karşılaştırma.



Şekil 4.6 : Sivrilme oranı $a/b = 2$ için literatürle karşılaştırma.

4.1.2.3 Sivrilen plakların aeroelastik analizi

Sivrilen plaklar için serbest titreşim çalışmalarına literatürde rastlamakla birlikte aeroelastisite çalışmalarına yeterli örnek bulunmamaktadır. Yukarıda detaylandırılan serbest titreşim için çıkarılan hareket denkleminde ek olarak bölüm (3.1)' de anlatılan sanki-daimi süpersonik piston teorisi kabulüyle aerodinamik basınç P eklenmiştir. Buna göre denklem (4.14) aşağıdaki hale dönüşür.

$$D \nabla^4 w + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -P \quad (4.27)$$

P ' nin açık olarak yazılmasıyla denklem (4.28)' deki gibi olur.

$$D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + 2 \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial w}{\partial t} \right] = 0 \quad (4.28)$$

Defleksiyon w denklem (4.20)' deki gibi kabul edilerek denklem (4.28)' de yerine yazılmıştır ve aşağıdaki form elde edilmiştir.

$$D \left[\frac{d^4 \bar{W}}{dx^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 \bar{W}}{dx^2} + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^4 \bar{W} \right] + 2 \frac{dD}{dx} \frac{d^3 \bar{W}}{dx^3} - 2 \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \frac{d\bar{W}}{dx} \frac{dD}{dx} + \frac{d^2 D}{dx^2} \frac{d^2 \bar{W}}{dx^2} - \nu \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 D}{dx^2} \bar{W} - \gamma h \omega^2 \bar{W} + \frac{2q}{\beta} \frac{\partial w}{\partial x} + (i\omega) \frac{2q}{\beta} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{U_\infty} \bar{W} = 0 \quad (4.29)$$

$q = \frac{1}{2} \rho U^2$ dinamik basınç ve $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ Mach sayısı ile ilişkili boyutsuz bir parametredir. Yine aynı şekilde boyutsuz koordinat, boyutsuz plak kalınlığı ve boyutsuz yer değiştirme göz önünde tutularak denklem (4.29) boyutsuzlaştırılmıştır ve düzenlemeler gereği ilk olarak a^4 ile çarpılmıştır. Buna göre boyutsuz hareket denklemi şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} - 2 (1 + \alpha \xi)^3 (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + (1 + \alpha \xi)^3 (m\pi)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \bar{W} + \\ & 2 \frac{d\bar{D}}{d\xi} \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} - 2 (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{d\bar{D}}{d\xi} \frac{d\bar{W}}{d\xi} + \frac{d^2 \bar{D}}{d\xi^2} \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - \nu (m\pi)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{d^2 \bar{D}}{d\xi^2} \bar{W} - \\ & \gamma h \frac{\omega^2 a^4}{D_0} \bar{W} + (i\omega) \frac{\gamma U_\infty a^4}{D_0 M_\infty} \bar{W} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Daha sonra denklem ω_0^2 ve $\gamma h(I_0)$ ile bölünüp çarpılarak denklem eşitliği bozulmadan denklemi düzenleme yoluna gidilmiştir. Buna göre elde edilen denklem;

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + 6 \alpha (1 + \alpha \xi)^2 \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} + [6 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) - 2 (1 + \alpha \xi)^3 \lambda^2] \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - \\ & 6 \alpha (1 + \alpha \xi)^2 \lambda^2 \frac{d\bar{W}}{d\xi} + [(1 + \alpha \xi)^3 \lambda^4 - 6 \nu \lambda^2 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) - \pi^4 k^2 + ikg] \bar{W} = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Bu denklemde kullanılan bazı boyutsuz parametreler aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Buna göre, μ boyutsuz frekans ve g sönümlleme terimidir.

$$\mu = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad g = \frac{\gamma U_\infty}{I_0 M_\infty \omega_0}, \quad \text{ve} \quad \omega_0 = \frac{\pi^4 D_0}{I_0 a^4} \quad (4.32)$$

Ayrıca $Z = \mu^2 - i\mu g$ tanımlamasıyla denklem (4.31)' in son hali aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha \xi)^3 \frac{d^4 \bar{W}}{d\xi^4} + 6 \alpha (1 + \alpha \xi)^2 \frac{d^3 \bar{W}}{d\xi^3} + [6 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) - 2 (1 + \alpha \xi)^3 \lambda^2] \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} - \\ & 6 \alpha (1 + \alpha \xi)^2 \lambda^2 \frac{d\bar{W}}{d\xi} + [(1 + \alpha \xi)^3 \lambda^4 - 6 \nu \lambda^2 \alpha^2 (1 + \alpha \xi) - \pi^4 Z] \bar{W} = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Bölüm 4.1.1.1' de detaylı olarak açıklanan Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin teoremleri ve kurallarının uygulanmasıyla denklem (4.33)' ün DDY formu aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} & (k+4)(k+3)(k+2)(k+1) W[k+4] + (k+3)(k+2)(k+1) \{3 \alpha(k) + 6 \alpha\} W[k+3] + \\ & (k+2)(k+1) \{3 \alpha^2(k)(k-1) + 12 \alpha^2(k) + 6 \alpha^2 - 2 \lambda^2\} W[k+2] + \\ & (k+1) \{ \alpha^3(k)(k-1)(k-2) + 6 \alpha^3(k)(k-1) + 6 \alpha^3(k) - 6 \alpha \lambda^2(k) - \\ & 6 \alpha \lambda^2 \} W[k+1] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{-6 \alpha^2 \lambda^2 (k)(k-1)(k-2) - 12 \alpha^2 \lambda^2 (k) + \lambda^4 - 6\nu \alpha^2 \lambda^2 - \pi^4 Z\} W[k] + \\
& \{-2 \alpha^3 \lambda^2 (k-1)(k-2) - 6 \alpha^3 \lambda^2 (k-1) + 3\alpha \lambda^4 - 6\nu \alpha^3 \lambda^2\} W[k-1] + \\
& 3 \alpha^2 \lambda^4 W[k-2] + \alpha^3 \lambda^4 W[k-3] = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Yukarıdaki denklemde $W[k+4]$ ' ü çekersek;

$$\begin{aligned}
W[k+4] = & -\frac{3 \alpha(k)+6 \alpha}{(k+4)} W[k+3] - \frac{1}{(k+4)(k+3)} \{3 \alpha^2 (k)(k-1) + 12 \alpha^2 (k) + 6 \alpha^2 - \\
& 2 \lambda^2\} W[k+2] - \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)} \{ \alpha^3 (k)(k-1)(k-2) + 6 \alpha^3 (k)(k- \\
& 1) + 6 \alpha^3 (k) - 6 \alpha \lambda^2 (k) - 6 \alpha \lambda^2\} W[k+1] \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \{ \lambda^4 - \\
& \pi^4 Z - 6 \alpha^2 \lambda^2 (k)(k-1)(k-2) - 12 \alpha^2 \lambda^2 (k) + 6 \nu \alpha^2 \lambda^2 \} W[k] - \\
& \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \{-2 \alpha^3 \lambda^2 (k-1)(k-2) - 6 \alpha^3 \lambda^2 (k-1) + \\
& 3 \alpha \lambda^4 - 6 \nu \alpha^3 \lambda^2\} W[k-1] - \frac{1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \{3 \alpha^2 \lambda^4 W[k-2] + \\
& \alpha^3 \lambda^4 W[k-3]\}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

4.2 Winkler Elastik Zemine Oturan Plaklar (Winkler Elastic Foundation)

4.2.1 Elastik zemin tanımı (Winkler zemini)

Elastik zemine oturan kiriş problemini ilk inceleyen ve teoremin esaslarını ilk belirleyen kişi Winkler'dir (Winkler, 1867). Winkler modeli, ilk kez demiryolu raylarının analizi için geliştirilmiştir. Daha sonra Zimmermann, elastik zemine oturan kirişler teorisini demiryolu üst yapılarının hesabına uygulamıştır (Zimmermann, 1930). Bu çalışmalardan sonra probleme gittikçe artan önem verilmesiyle, bu konuda yapılan araştırmalar artmıştır. Böylece kirişlerden sonra elastik zemin üzerinde bulunan plaklar ve kabuklar da araştırma konusu olmuştur. Özellikle 1960' lı yıllardan sonra uçak-uzay sanayisindeki hızlı gelişmeler ve kompozitlerin sektörde kullanılmasıyla farklı tip ve amaçlar için geliştirilen yapılar ile birlikte elastik zemine oturan yapı türlerinde ve bu yapılara olan ihtiyaçlarda da bir hayli artış olmuştur.

Elastik zemine oturan plak ve kabuklar havacılık endüstrisi, inşaat ve makine mühendisliği alanları, gemi ve trenlerin yapımı, otoyollar, çeşitli fabrika ve makinelerin zemine sabitlenmesi, kıyı ve liman yapıları, sıvı ve gazların iletim hatları gibi pek çok sektörde kullanılmaktadır (Dumir, 1988; Chopra, 1975; Cheung, 1978).

Bu tez kapsamında göz önünde tutulan ise uçak-uzay sanayisindeki uygulama alanlarıdır. Hava-uzay yapılarında elastik zemine oturan plaklar ile ilgili birçok uygulama mevcuttur. Dugundji, Dowell ve Perkin subsonik akışta lineer elastik temelli uzun bir plağın flutter analizini Miles teorisini (Miles, 1956) kullanarak gerçekleştirmişlerdir (Dugundji, Dowell ve Perkin, 1963). Johns da bu sonuçları elastik yaylı ortotropik plakların statik-aeroelastik kararsızlıkları üzerinde yaptığı deneylerle desteklemiştir (Johns, 1969).

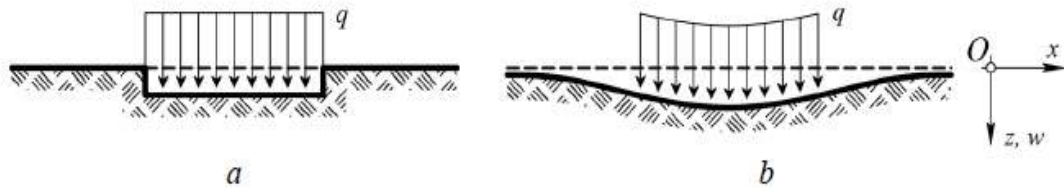
Elastik zemine oturan yapı elemanları füze ve roket rampaları olarak askeri alanlarda, uçak hangarlarında ve özellikle ağır kargo ve ses üstü uçakların inebileceği hava meydanları iniş pistlerinde geniş uygulama alanına sahiptir. Elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerinde en çok kullanılan Winkler modelidir.

Elastik zemin üzerinde oturan kiriş ve plak problemlerinin çözümünde kullanılan birçok zemin modeli vardır: Winkler, Pasternak, Vlaslov, Kerr gibi (Civalek, 2004). Bu kısımda Winkler zemin üzerine oturan bir plak göz önünde tutulacaktır. Winkler zemin üzerinde oturan kiriş ve plak problemlerinin çözümünde matematiksel formülasyonu kolaylaştırmak için değişik kabuller yapılmaktadır.

Buna göre, zeminin birbirinden bağımsız ve birbirine sonsuz yakın seri yaylardan oluştuğu düşünülmekte ve bu yayların doğrudan doğruya çökerek tepki gösterdikleri varsayılarak komşu yayların çökmesinden etkilenmedikleri kabul edilmektedir (Hetényi, 1964). Bu kabul Winkler modelinin bu konudaki en önemli eksiğini, yani zeminin üzerine yük gelen ve gelmeyen kısımlar arasında görülen yer değiştirme süreksizliğini göstermektedir. Winkler modelindeki bu gerçek dışı varsayımlara rağmen uygulamadaki basitliği ve özellikle tekil yük durumlarında verdiği doğru sonuçlardan ötürü hala tercih sebebidir. Ancak özellikle yaylı yük durumlarında Winkler modeli zemin karakteristiğini tam olarak doğru bir şekilde yansıtamamaktadır ve Şekil 4.7’ de görüldüğü üzere yaylı yük altındaki plağın çökmesi süreksiz bir davranış sergilemektedir (Teodoru, 2009).

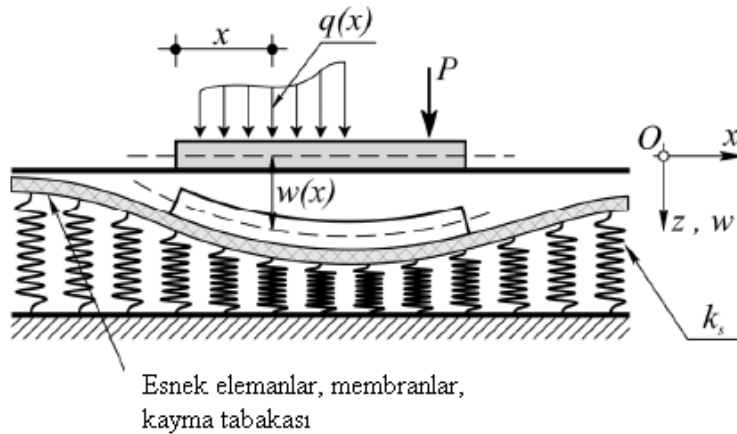
Hem plak üzerindeki ek yükleri hem de plağın kendi ağırlığını taşıyan zeminin en önemli özelliği; birim gerilme altında meydana gelen düşey yer değiştirmesidir. Elastik zemin modülü veya yay katsayısı (bazen de yatak katsayısı olarak geçer) dediğimiz k , zeminin tanınması için belirleyici bir özelliktir ve zeminin elastisite modülü, temel rijitliği ve zeminde geçerli efektif gerilme dağılımının fonksiyonudur.

Winkler modelinin eksikliklerini ortadan kaldırmak amacıyla çeşitli iki parametrelili zemin modelleri geliştirilmiştir. Bunlardan biri Pasternak tarafından 1954’ te geliştirilmiştir ve Pasternak, Winkler zemin modelinde ihmal edilen kayma etkilerini denklemlere ilave etmiştir. Pasternak modelinde kirişte eğilme ihmal edilirken, çökmenin tamamıyla kirişin kayma formasyona bağlı olarak ortaya çıktığı kabul edilmektedir (Pasternak, 1954). Pasternak modeli, iki boyutlu modeller arasında en yaygın olarak kullanılanlardan biridir (Şekil 4.8).

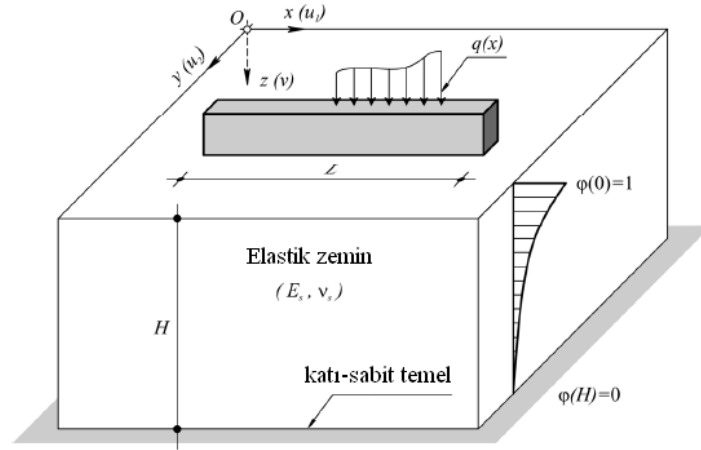


Şekil 4.7 : Yayılı yük altında elastik zeminin çökmesi – a: Winkler zemini; b: pratik toprak zemin.

Vlasov, 1960’ ta basitleştirilmiş-süreklilik yaklaşımını benimsemiş ve iki parametrelili zemin modelini türetmiştir (Şekil 4.9). Vlasov modelinde zemin elastik bir tabaka gibi davranış göstermekte ve kısıtlar uygun mod şekline sahip zemindeki çökmeler tarafından sıkıştırılmaktadır. Bu modelde, keyfi bir parametre olan γ ’ nın hesaba katılmasıyla kayma etkileri ihmal edilir. γ deformasyonun düşey dağılımını tanımlar (Teodoru, 2009).



Şekil 4.8 : İki parametrelili Pasternak zemini üzerine oturan kiriş modeli.

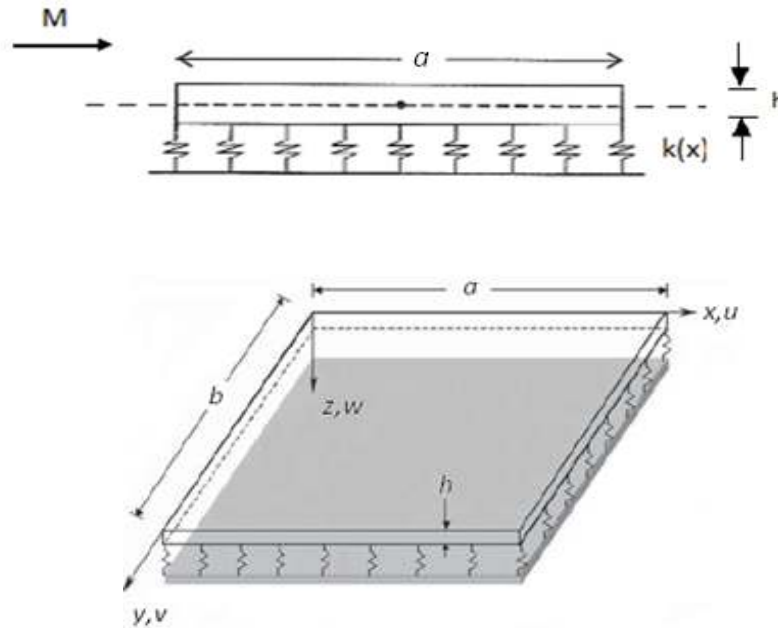


Şekil 4.9 : İki parametrelili Vlasov zemini üzerine oturan kiriş modeli.

4.2.2 Elastik zemin üzerine oturan plağın analitik modellenmesi

Uzunluğu a ve eni b , kalınlığı h ve zemin modülü k olan bir elastik zemin üzerine oturan ince, dikdörtgen ve izotrop bir plak probleminin geometrisi ve kartezyen koordinat sistemi aşağıdaki gibi verilmiştir (Şekil 4.10).

Koordinat sistemine göre, x eksenini plağın uzunluğu, y eksenini eni ve z eksenini kalınlık doğrultusunda yönelmektedir. Winkler teorisi kabullerine göre plak sonsuz sayıda, birbirine yakın ve seri yaylardan oluşan zemin üzerine oturmaktadır. Winkler modelinde yüklü alanın altındaki yer değiştirme, zeminin sonsuz rijit yüke veya düzgün esnek yüke maruz kalması durumunda sabit olacaktır (Selvadurai, 1979).



Şekil 4.10 : Elastik zemine oturan dikdörtgen plak

4.2.3 Temel bağıntı ve hareket denklemlerinin çıkarılması

Winkler tarafından önerilen idealleştirilmiş zemin ortamı modelinde, R zemin etkilerinin, w plak çökmeleriyle orantılı olduğu ve zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etkidiği noktada şekil değiştirdiği kabul edilir (Selvadurai, 1979). Buna göre, Winkler hipotezi aşağıdaki bağıntı ile ifade edilmektedir:

$$R = k(x)w(x,t) \quad (4.36)$$

R zeminin tepki kuvvetini, k(x) Winkler elastik zemin katsayısını ve w(x,t) plağın çökmesini belirtir.

Denklem (3.21)' de elde edilen plağın aeroelastik analizinin temelini oluşturan diferansiyel denklem ile Denklem (4.36)' da verilen Winkler hipotezi birleştirilir. Buna göre, Winkler elastik zemini üzerinde bulunan homojen bir plağın aeroelastik diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + N \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial t} \right] + I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + k(x)w(x,t) = 0 \quad (4.37)$$

Burada $D_{11} = E h^3 / 12 (1-\nu^2)$ plağın eğilme rijitliğidir. N toplam düzlem-içi çekme yüklerini, I_0 ise plağın atalet katsayılarını ifade eder.

Bu çalışmada Winkler elastik zemin katsayısı k(x) 'nın panel uzunluğu boyunca sabit, doğrusal(lineer) ve parabolik olarak değiştiği kabul edilmiştir. Bu kabuller sabit, lineer ve parabolik durumlar için sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

Sabit : $k(x) = k_0$

Lineer : $k(x) = k_0(1-\alpha x)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ (4.38)

Parabolik : $k(x) = k_0(1-\beta x^2)$, $0 \leq \beta \leq 1$

Plak için hareket denklemi elde edildikten sonra “*Basit Harmonik Hareket*” kabulü yapılarak flutter için elde edilecek frekanslar cinsinden denklem yazılmıştır.

Verilen bir yapının flutter hızı, o yapıyı basit harmonik harekete maruz bırakan en düşük hızdır. Basit harmonik hareket durumunda aerodinamik yüklenmelerin matematiksel analizi kolay olduğundan, teorik analizlerde değişkenlerin $e^{i\omega t}$ ile orantılı olduğu kabul edilir.

Burada ω reeldir ve ω ve U kombinasyonları bulunmalıdır. Bu ise kompleks veya çift öz değer problemi olup; hız ve frekans aranan iki karakteristik değerdir. İncelenen plak kapsamında aranılan flutter hız sınırı ve frekanslar olduğuna göre ve bu flutter hızının, plağı basit harmonik harekete maruz bırakan en düşük hız olmasından ötürü, plak için elde edilen hareket denklemi harmonikleştirilir.

Basit harmonik hareket kabulüne göre;

$$w_0 = \bar{w}_0 \cdot e^{i\omega t} \quad (4.39)$$

Bu ifade en son olarak bulunan plak hareket denkleminde uygulanır. Denklem (4.37)'deki w_0 yerine $\bar{w}_0 \cdot e^{i\omega t}$ yazılarak denklem harmonik formda elde edilir. Basit harmonik hareket kabulünden sonra bu diferansiyel denklemi çözüme uygun hale getirebilmek için boyutsuzlaştırma yapılmıştır.

İlk olarak;

- Boyutsuz bir koordinat $\xi = \frac{x}{l}$ ve
- Boyutsuz bir yer değiştirme $W = \frac{\tilde{w}_0}{h}$ tanımlanmıştır.

Bu dönüşümler kullanılarak hareket denklemi boyutsuzlaştırılmıştır. Boyutsuz haldeki denklemi daha kolay ve anlaşılır hale getirmek ve çözebilmek için izlenen işlem sırası aşağıdaki gibidir:

Boyutsuzlaştırma sonucunda her bir terimde mevcut olan “h” ifadesi sadeleştirilmiştir. Daha sonra denklem L^4 ile çarpılarak Denklem (4.40) elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 W}{d\xi^4} + \frac{NL^2}{D_{11}} \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{2qL^3}{\beta D_{11}} \frac{dW}{d\xi} + \frac{2qL^4}{\beta D_{11}} \left[\frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot (i\omega) \cdot W \right] - \omega^2 L^4 \frac{I_0}{D_{11}} W \\ & + L^4 \frac{k(\xi)}{D_{11}} W = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$K(\xi) = k(\xi) \frac{L^4}{D_{11}} \quad (4.41)$$

β ve dinamik basınç q Kısım 3.2' de açıklanmıştır. Buna göre β , q ve Denklem (3.4)'teki yaklaşım kullanılarak (4.40) denklemi şu şekli alır:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \frac{\rho U_\infty^2 L^3}{D_{11} \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \frac{dW}{d\xi} + \frac{\rho U_\infty^2 L^4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1} D_{11}} \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{1}{U_\infty} \cdot (i\omega) \cdot W \\ - \omega^2 L^4 \frac{I_0}{D_{11}} W + K(\xi) W = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Burada R_x Denklem (4.43)' te ifade edildiği gibi olup, düzlem içi mekanik yüklemeler sonucunda malzemede oluşan burkulma ile ilgili terimdir. Flutter için aeroelastik kararlılık sınırını belirlerken R_x terimi için değerler verilecektir. Verilen R_x değeri için boyutsuz aerodinamik basınç sınırları vasıtasıyla plağın dinamik olarak kararlılık sınırı yani flutter sınırı elde edilecektir.

$$R_x = \frac{NL^2}{D_{11}} \quad (4.43)$$

Denklem (4.42)' deki bazı ifadeler tek bir terim cinsinden yazılacak ve denklem biraz daha sadeleşerek çözüm için aranılan parametreler cinsinden ifade edilecektir. Buna göre;

$$\lambda = \frac{\rho U_\infty^2 L^3}{D_{11} \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \Rightarrow \text{Boyutsuz aerodinamik basınç parametresi} \quad (4.44)$$

Daha sonra denklem doğal frekans ω_0^2 ile bölünüp denklemin matematiksel olarak ifadesinin değişmemesi için tekrar ω_0^2 ile çarpılmıştır. Bu işlem sonucunda boyutsuz frekans parametresi k ortaya çıkmıştır. Buna göre denklem;

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \lambda \frac{dW}{d\xi} + \frac{\rho U_\infty L^4}{M_\infty D_{11} \omega_0} \cdot (ik) \cdot \omega_0^2 \cdot W - k^2 \omega_0^2 L^4 \frac{I_0}{D_{11}} W + K(\xi) W = 0 \quad (4.45)$$

$\mu = \omega / \omega_0$ boyutsuz frekans parametresi ve ω_0 plağın doğal frekansıdır. Ayrıca Denklem (4.46)' da verilen g sönüm parametresi ifadesi için hareket denklemi boyutsuz parametreler cinsinden Denklem (4.47)' deki hale gelir.

$$g = \frac{\rho U_\infty}{I_0 M_\infty \omega_0} \quad (4.46)$$

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \lambda \frac{dW}{d\xi} + i\mu g L^4 \frac{I_0}{D_{11}} \omega_0^2 W - \mu^2 \omega_0^2 L^4 \frac{I_0}{D_{11}} W + K(\xi) W = 0 \quad (4.47)$$

Doğal frekans da şu şekilde ifade edilir:

$$\omega_0 = \pi^2 \sqrt{\frac{D_{11}}{L^4 I_0}} \quad (4.48)$$

Bu işlemlerden sonra boyutsuz parametreler cinsinden yazılan hareket denkleminin en son hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \lambda \frac{dW}{d\xi} - \pi^4 Z W + K(\xi)W = 0 \quad (4.49)$$

$$\mu^2 - i\mu g = Z \quad (4.50)$$

Denklem (4.49) bir özdeğer problemi olup zemin yay katsayısı K 'nin sabit, lineer ve parabolik değiştiği durumlar için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile çözüm aranacaktır. Boyutsuz frekans parametresi μ 'nın reel ve sanal kısımlarının bir arada toplanmasıyla ifade edilen Z terimi iki öz değerin çakıştığı flutter frekansı olarak açıklanabilir.

Karakteristik denklem (4.49) sonucunda öz değer Z elde edildikten sonra plağın frekansı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\omega / \omega_0 = ig / 2 \pm \sqrt{-(g/2)^2 + Z} \quad (4.51)$$

Dinamik basınç λ 'nin düşük değerleri için öz değer Z reeldir ancak λ 'nin belirli bir değer üzerindeyse öz değer Z karmaşık (kompleks) olur. Z 'nin kompleks olması durumunda, eğer Denklem (4.52)'de kökün içindeki sanal ifadenin mutlak değeri $g/2$ 'den büyükse kararsız durum oluşur. Sanal kısım aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Im = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(-g^2/4 + Z_r)^2 + Z_i^2} + g^2/4 - Z_r} \quad (4.52)$$

Böylece kararsızlık durumu $g / 2 = |Im|$ şartında meydana gelir ve aerodinamik basıncın kritik değerinde $\lambda = \lambda_{cr}$ flutter şartı oluşur.

$$Z_i / \sqrt{Z_r} = g \quad (4.53)$$

Aerodinamik sönümlenmenin ihmal edildiği $g = 0$ durumunda, iki sönümlenmeyen doğal frekansın çakışması sonrasında flutter başlar. Sönümlenmenin sıfırdan büyük olduğu $g > 0$ durumunda ise dinamik basınç λ 'nin kısmen yüksek bir değerinde flutter meydana gelir.

Flutter analizi için Denklem (4.49)' da verilen hareket denkleminin zemin yay katsayısının farklı olduğu durumlardaki ifadeleri Denklem (4.38)' de verilen tanımlar göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi yazılmıştır.

Sabit değişen zemin yay katsayısı durumu:

$$\frac{d^4W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2W}{d\xi^2} + \lambda \frac{dW}{d\xi} + W[K_0 - \pi^4 Z] = 0 \quad (4.54)$$

Lineer değişen zemin yay katsayısı durumu:

$$\frac{d^4W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2W}{d\xi^2} + \lambda \frac{dW}{d\xi} + W[K_0 - \pi^4 Z] - \alpha K_0 \xi W = 0 \quad (4.55)$$

Parabolik değişen zemin yay katsayısı durumu:

$$\frac{d^4W}{d\xi^4} + R_x \frac{d^2W}{d\xi^2} + \lambda \frac{dW}{d\xi} + W[K_0 - \pi^4 Z] - \beta K_0 \xi^2 W = 0 \quad (4.56)$$

4.2.4 Winkler elastik zeminine oturan plakların ses üstü flutter analizi

Hareket denklemleri dördüncü dereceden olduğu için plağın her bir kenarında iki tane sınır şartı olmak üzere toplam dört tane sınır şartına ihtiyaç vardır. Bu çalışmada, elastik zemin üzerinde bulunan plağın her iki ucundan da basit mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Basit mesnet sınır şartı aşağıdaki gibidir.

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x = 0, l \quad (4.57)$$

Denklem (4.57)' de verilen sınır şartları Denklem (4.54), (4.55) ve (4.56)' ya uygulanarak problemin çözümü araştırılmıştır. Bu hareket denklemlerinin çözümü için Kısım 4.1.1.1' de verilen Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DDY) temel teoremleri ve sınır şartları uygulanmıştır.

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi' nin hareket denklemlerine uygulanması

Bölüm 4.1.1.1' de detaylı bir şekilde açıklanan diferansiyel dönüşüm yöntemi, denklem (4.54), (4.55) ve (4.56)' da verilen boyutsuz hareket denklemlerine uygulanarak dönüştürülmüş ifadeye ulaşılır.

Zemin yay katsayısının farklı olduğu durumlar için, DDY kurallarının uygulanmasıyla denklem (4.54-56)'da verilen ifadelerin DDY formları sırasıyla aşağıda verildiği gibidir:

Sabit olarak değişen yay katsayısı durumu:

$$W[r+4] = \frac{(\pi^4 Z - K_0)W[r] - \lambda(r+1)W[r+1] - R_0(r+2)(r+1)W[r+2]}{(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)} \quad (4.58)$$

Lineer olarak değişen yay katsayısı durumu:

$$W[r+4] = \frac{(\pi^4 Z - K_0)W[r] + \alpha K_0 W[r-1] - \lambda(r+1)W[r+1] - R_x(r+2)(r+1)W[r+2]}{(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)} \quad (4.59)$$

Parabolik olarak değişen yay katsayısı durumu:

$$W[r+4] = \frac{(\pi^4 Z - K_0)W[r] + \beta K_0 W[r-2] - \lambda(r+1)W[r+1] - R_x(r+2)(r+1)W[r+2]}{(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)} \quad (4.60)$$

4.2.5 Winkler elastik zeminine oturan plaklar için sonuçlar

Bu kısımda, çeşitli yay katsayısına sahip Winkler zeminine oturan dikdörtgen bir plak için basit mesnet sınır şartlarında aeroelastik kararlılık davranışı ve flutter frekansları araştırılmıştır. Düzlem-içi basma yüklerinin flutter sınırlarına etkileri incelenerek elde edilen sonuçlar literatürdeki çeşitli çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Düzlem-içi yüklerin olmadığı ($R_x = 0$) sabit Winkler zemini üzerindeki plak için aerodinamik basınç parametresi (λ_{kr}) ve flutter frekansı parametresi (Z_{kr}) Çizelge 4.5’ te verilmiştir. Frekanslar elastik zemin yay katsayısı K' nın $10'$ dan $2000'$ e kadar değişen çeşitli değerleri için araştırılmıştır ve literatürdeki iki benzer çalışmayla karşılaştırıldığında sonuçların oldukça tutarlı olduğu görölmüştür. Yay katsayısının sabit olduğu durumlarda K sabitinin değerinin değişmesi plağın flutter sınırlarında pek bir farklılık yaratmadığı sonucu çıkarılabilir. Benzer şekilde sabit, lineer ve parabolik yay modölüne sahip zemine oturan basit mesnetli plak için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.6’ daki gibidir.

Çizelge 4.5 ve 4.6’da verilen dinamik basınç ve flutter frekansı sonuçları Winkler elastik zemin katsayısının sabit, lineer ve parabolik olduğu durumlar için grafiksel olarak incelenmiştir.

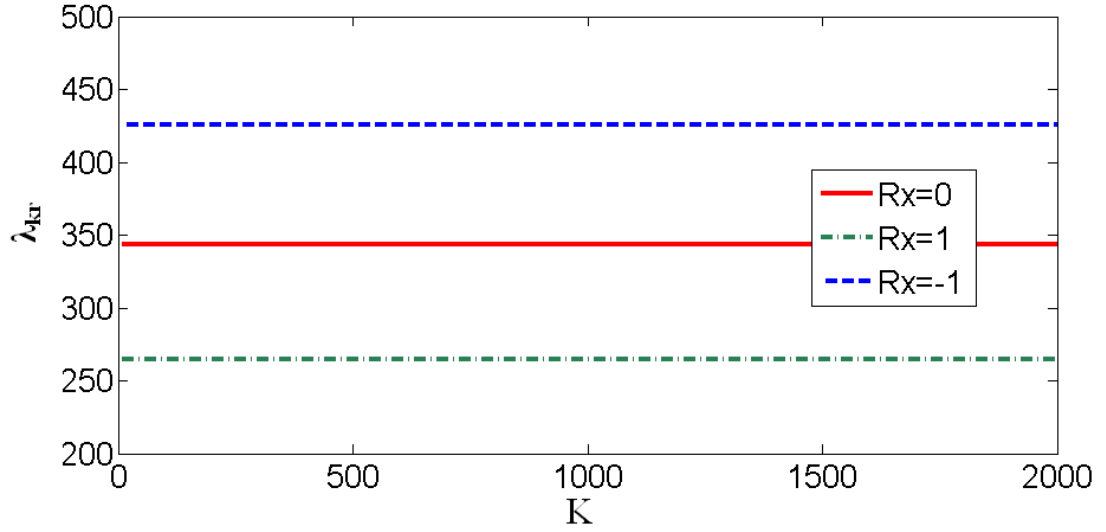
Çizelge 4.5 : Sabit yay modülü K ve $R_x=0$ durumundaki basit mesnetli plak için λ_{kr} ve Z_{kr} değerleri.

K	Çalışma		Mervyn Olson		Rao	
	λ_{kr}	Z_{kr}	λ_{kr}	Z_{kr}	λ_{kr}	Z_{kr}
10	343,3564221	1051,81	343,3564	1051,797	342	1057
50	343,3564228	1101,71	-	-	-	-
100	343,3564234	1147,81	-	-	342	1147
200	343,3564246	1251,71	-	-	-	-
500	343,3564263	1551,81	-	-	-	-
1000	343,3564263	2051,81	-	-	342	2047
1500	343,3564263	2551,81	-	-	-	-
2000	343,3564262	3051,81	-	-	-	-

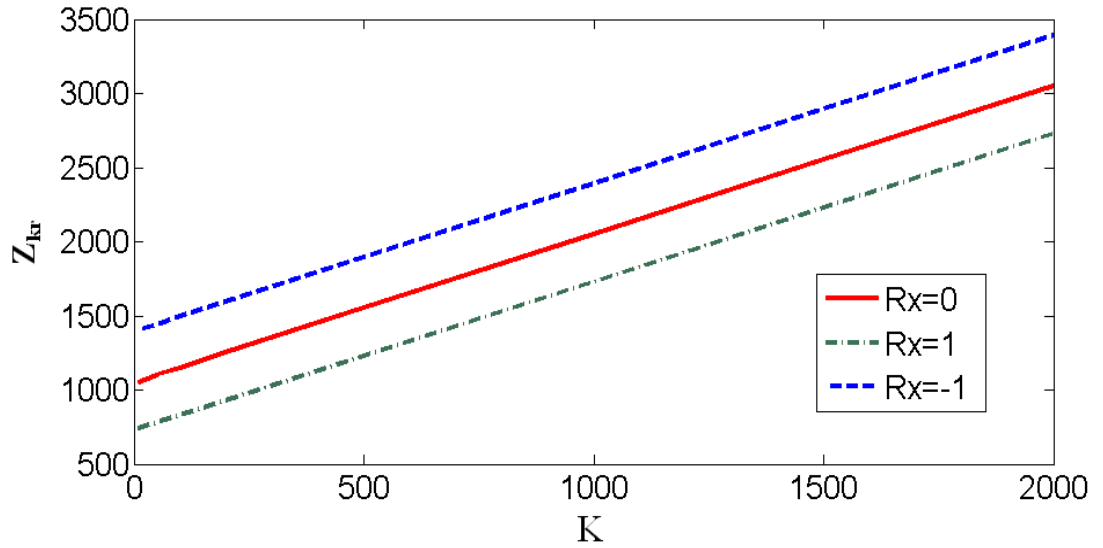
Çizelge 4.6 : Sabit $R_x=\pi^2$ durumunda sabit, lineer ve parabolik yay modülüne sahip plak için λ_{kr} ve Z_{kr} değerleri.

K	Sabit		Lineer		Parabolik	
	λ_{kr}	Z_{kr}	λ_{kr}	Z_{kr}	λ_{kr}	Z_{kr}
10	264,9081625	738,22	264,9082069	737,22	264,8533762	735,75
50	264,9081625	778,22	264,9092747	773,22	264,6484951	765,88
100	264,9081625	828,22	264,9126113	818,22	264,4246283	803,57
200	264,9081625	928,22	264,9259574	908,23	264,0851851	879,04
500	264,9081625	1228,22	265,0193609	1178,31	263,9465609	1106,14
1000	264,9081625	1728,22	265,3526691	1628,58	266,7018927	1487,02
1500	264,9081625	2228,22	265,9072285	2079,02	273,1916812	1871,05
2000	264,9081625	2728,22	266,6816203	2529,64	283,2846863	2258,42

Şekil 4.11, 4.12 ve 4.13 sırasıyla elastik zemin katsayısının sabit, lineer ve parabolik değiştiği durumlar için elde edilmiştir. Bu grafikler çizdirilirken düzlem-içi basma yüklerinin etkileri de göz önünde bulundurulmuştur.



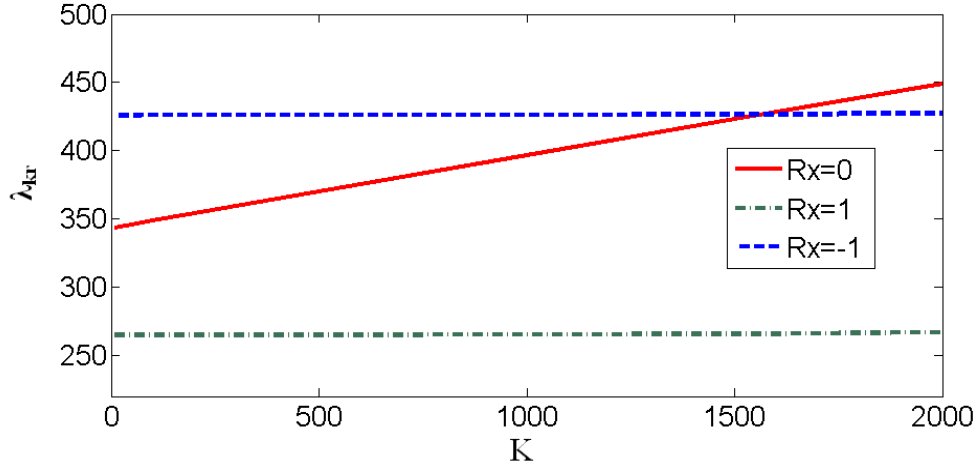
(a)



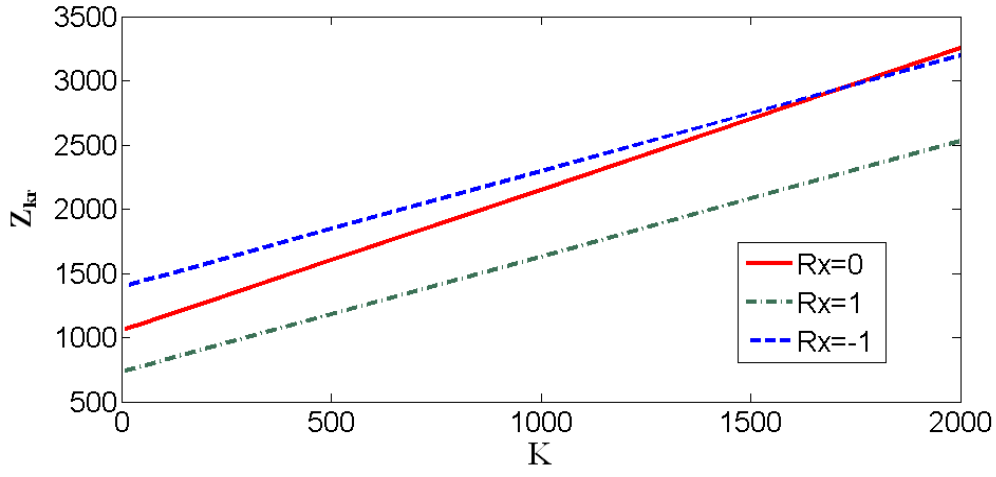
(b)

Şekil 4.11 : Sabit yay katsayısı için λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.

Yay katsayısının sabit, lineer ve parabolik olduğu her üç durumda da plağın düzlem-içi basma yüklerine maruz kalması fluttera maruz kalınan aerodinamik basıncı düşürdüğü yani plağın fluttera daha erken girmesine neden olduğu gözlemlenmiştir. Bunun tam tersi olarak plağın düzlem-içi çekme yüklerine maruz kalmasının ise flutterı geciktirdiği yorumu yapılabilir.

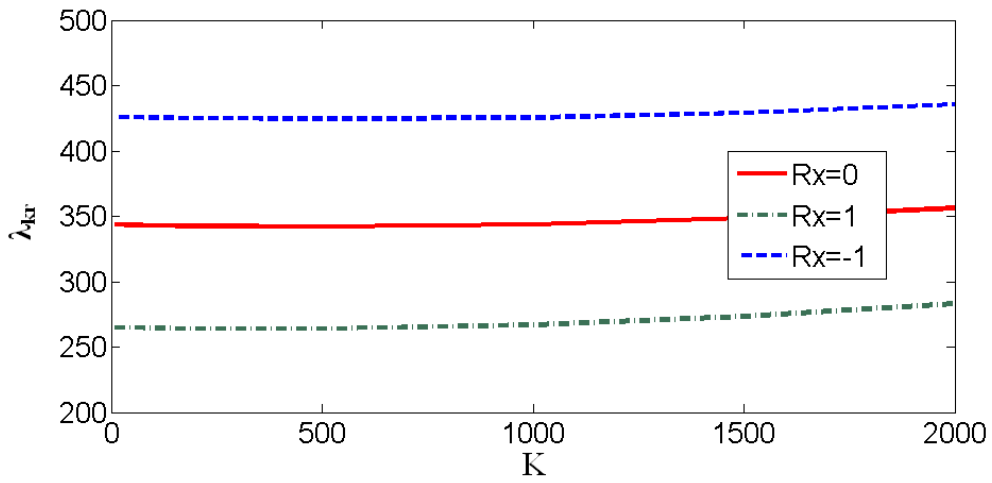


(a)

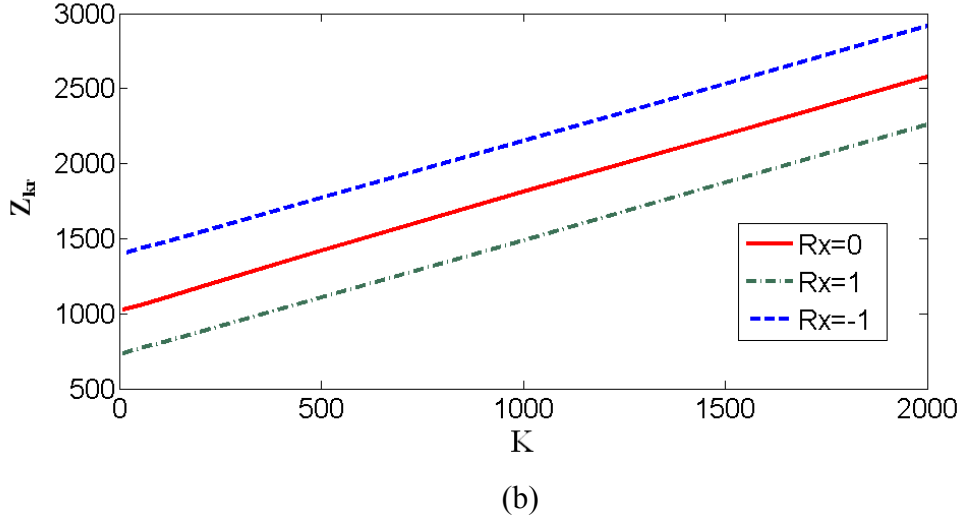


(b)

Şekil 4.12 : Lineer yay katsayısı için λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.

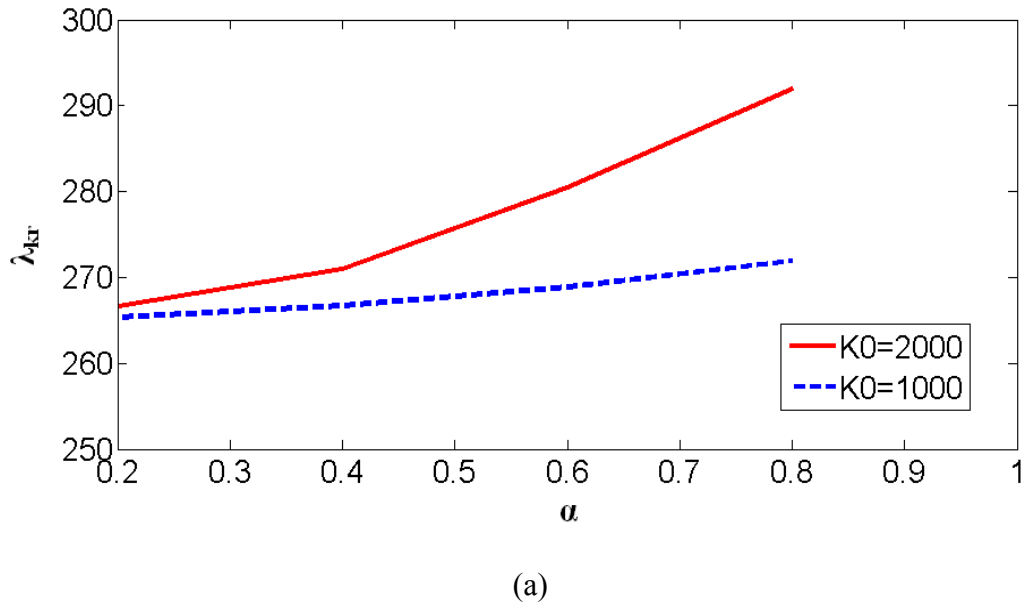


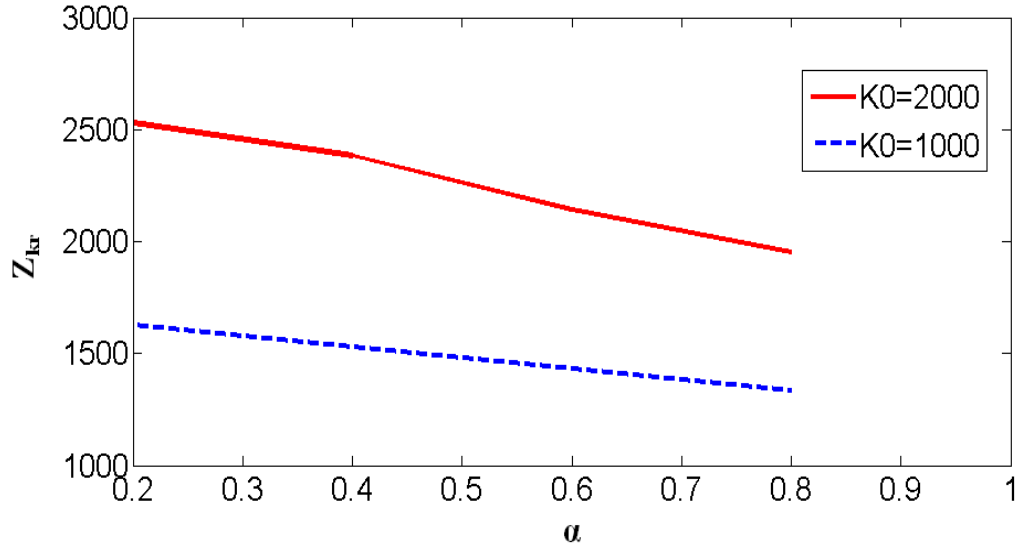
(a)



Şekil 4.13 : Parabolik yay katsayısı için λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi.

Ayrıca Şekil 4.14’ te zemin yay katsayısı K ’ nın lineer olduğu durumda keyfi seçilen iki alfa (α) değeri için dinamik basınç ve flutter frekansının değişimi incelenmiştir. Bu keyfi K değerleri 1000 ve 2000 olarak büyük değerlerden seçilmiştir. Çünkü önceki çizelgelerden de anlaşıldığı kadarıyla K ’ nın küçük değerlerinin frekans üzerinde önemli ölçüde bir değişikliği yoktur. Özellikle yay sabitinin büyük değerleri flutter frekansı üzerinde daha etkilidir. Lineer yay sabiti formülasyonundaki alfa değerinin artması plağın daha büyük bir dinamik basınçta fluttera girmesini sağlamaktadır. Ayrıca K değerinin artmasında aynı tarzda bir değişiklik yaptığı söylenebilir.

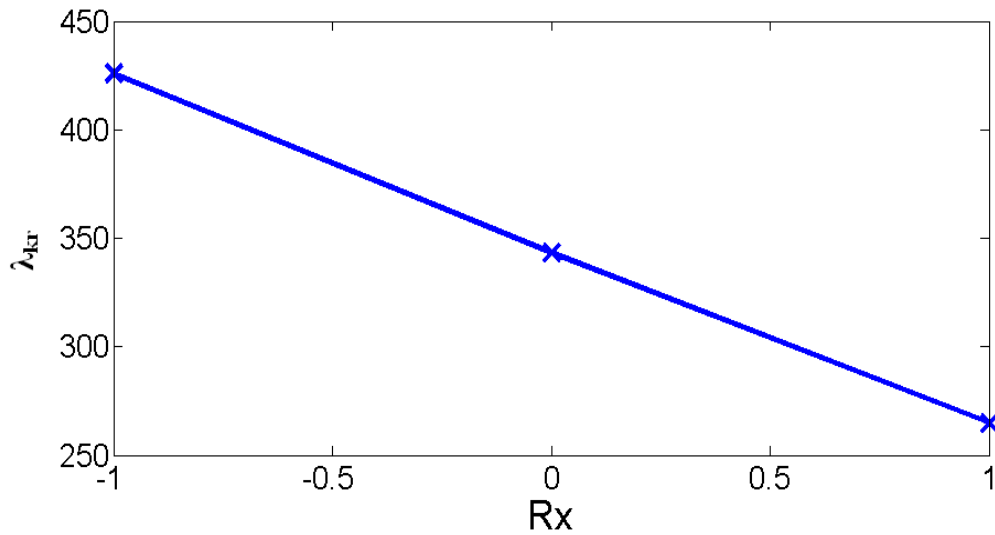




(b)

Şekil 4.14 : α ile λ_{kr} ve Z_{kr} değişimi

Son olarak da; düzlem-içi yüklerin dinamik basınç üzerindeki etkisi, seçilen K yay katsayısı değeri ($K = 10$) için araştırılmıştır (Şekil 4.15). Şekle göre R_x değerinin +1 olduğu yani düzlem içi yüklerin basma yükleri olduğu durumda plak çok daha erken bir basınçta kararsızlık moduna geçer. R_x ' in -1 olduğu yani düzlem içi yüklerin çekme yükleri olduğu durumda ise durum tam tersidir ve plak daha ileriki zamanlarda fluttera maruz kalır.



Şekil 4.15 : R_x ' in λ_{kr} ile değişimi.

4.3 Delaminasyona Uğramış Kompozit Plaklar

4.3.1 Kompozit malzeme tanımı ve avantajları--dezavantajları

Gelişen teknolojiyle birlikte, günümüzde hafif ve yüksek mukavemetli yapıların kullanılması büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda kompozit malzeme kavramı ortaya çıkmıştır ve kompozit malzeme kullanımı 1960' lardan beri sürekli gelişmiş ve artmıştır. Kompozit malzeme, istenen amaç doğrultusunda iki veya daha fazla malzemenin belirli şartlar ve oranlarda fiziksel olarak, makro yapıda bir araya getirilmesiyle elde edilen malzemedir. Genel olarak bu malzemelerde hacimsel olarak %50'nin üzerinde fiber bulunur. Çoğu havacılık firması üretimlerinde fiber takviyeli kompozit malzemeleri kullanmaktadır. Kompozit malzemelerin bilinen en eski ve en geniş kullanım alanı inşaat sektörüdür. Saman ile liflendirilmiş çamurdan yapılan duvarlar ilk kompozit malzeme örneklerindendir. Günümüzde kompozit malzemelerin kullanım alanı çok geniş boyutlara ulaşmıştır. Özellikle, kompozit malzemeler, geleneksel mühendislik malzemelerine nazaran, birçok avantajından dolayı havacılık, otomotiv, imalat sanayi ve inşaat-tarım sektörü gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Kompozit malzemelerde çekirdek olarak, fiber takviye bir malzeme ve bu malzemenin çevresinde hacimsel olarak çoğunluğu oluşturan bir matris malzeme bulunmaktadır. Yaygın kullanılan takviye malzemeleri; cam, fiber karbon, aramit, boran, alümina'dır. Matris malzemesi ise genel itibariyle polimer esastır. Polimerler ise termoset ve termoplastik reçineler olarak iki bölümde incelenir. En çok kullanılan termoset reçineler epoksi, polyester ve vinilyester dir. En çok kullanılan termoplastikler ise naylon ve poli eter keton (PEEK)'dur. Çizelge 4.7' de matris, takviye elemanı ve bunların oluşturduğu kompozit malzeme yapı tipleri verilmiştir.

Kompozitlerde polimer esaslı matrislerin yanısıra metal, seramik türevi malzemeler de matris olarak kullanılmaktadır. Diğer matrislerin kullanılmasına rağmen kompozit malzemelerin %90'ı polimer esaslı matrislerle üretilmektedir. Matris malzemelerinin genellikle plastik esaslı olmasından dolayı kompozit malzemeler de genellikle takviye edilmiş plastikler olarak adlandırılırlar. Metal matrisler büyük çaplı uygulamalarda kullanılmak için çok pahalı ve çalışmaları çok zordur.

Çizelge 4.7 : Matris, takviye ve kompozit yapı malzeme tipleri.

Matris Malzemeleri	Takviye Elemanları	Kompozit Yapının Şekli
Polimerler	Fiberler	Tabakalar
Metaller	Granüller	Kaplamalar
Seramikler	Süreksiz Fiberler	Film-Folya

Seramik matrisler ise yüksek oranda kırılğan olmalarından dolayı yeterli dayanıklılığa sahip olmamaları nedeniyle kullanım alanları yüksek ısı ile kullanılan yerlerle sınırlanmaktadır.

Matris ve lifin bir araya getirilmesi sonucu tek yönde bir tabaka oluşur. Lif yönleri farklı alınarak da tabakalı kompozit plaklar elde edilebilir. Takviye edici liflere göre ise parçacıklı, kırılmış fibere sahip, sürekli fibere sahip ve örgü tipi kompozitler olarak sınıflandırılır.

Kompozit malzemenin mukavemet ve yük taşıma özelliğini fiber malzeme sağlamaktadır. Matris malzeme ise, plastik deformasyona geçişte oluşabilecek çatlak ilerlemelerini önler ve kompozit malzemenin kopmasını geciktirir. Ayrıca, matris olarak kullanılan malzeme fiber malzemeleri yük altında bir arada tutabilmeyi ve yükü lifler arasında homojen olarak dağıtmayı sağlar. Böylelikle fiber malzemelerde plastik deformasyon gerçekleştiğinde ortaya çıkacak çatlak ilerlemesi olayının önüne geçilmiş olunur.

Kompozit malzemelerin, parça bütünlüğü, hafiflik, yüksek mukavemet, darbe dayanımı ve uzun kullanım ömrü gibi özellikleri, geniş kullanım alanlarında avantajlar sağlamaktadır. Örnek olarak cam elyafı verilebilir. Cam elyafı elastik bir malzemedir ve yük altında düzgün olarak kopma noktasına kadar uzamasına rağmen, çekme yükünün kalkması sonucunda herhangi bir akma özelliği göstermeden başlangıç şekline döner. Diğer metallerde ve organik liflerde bulunmayan bu elastiklik ve yüksek mukavemet özellikleri; cam elyafına büyük miktarda enerjiyi, kayıpsız olarak depolama ve bırakma olanağı sağlamaktadır. Bu özelliğinden ötürü dinamik yorulma dayanımı, aşınmaya karşı korunması koşulu ile

otomobil, kamyon amortisör yayları ve mobilya yayları gibi ürünlerin cam elyafı takviyeli plastik malzemeden yapılabilmektedir. Cam elyafı takviyeli plastiklerde, cam elyafı takviyesinin yönü önemli bir etkindir ve bu, cam elyafının reçine ile kaplanabilirliğini de etkiler. Dolayısıyla takviye miktarının artışı ile birlikte cam elyafının mukavemeti de artar.

Bunlara ek olarak kompozit malzemelerin metal malzemelere göre hafiflik, korozyon direnci, işleme kolaylığı, yorulmaya karşı yüksek direnç, montaj ve bağlayıcı sayısının azaltılması gibi birçok avantajı vardır. Ek olarak kompozit malzemelerin çekme ve eğilme mukavemetleri, birçok metalik malzemeye göre çok daha yüksektir. Ayrıca kaplama özelliklerinden dolayı, kompozitlere istenilen yönde ve istenilen bölgede gerekli sertlik ve kuvvetlik verilebilir. Böylelikle malzemeden tasarruf yapılarak, daha hafif ve ucuz ürünler elde edilebilir. Son olarak da kompozit malzemelerin avantajlarına titreşim sönümleme özelliği örnek verilebilir. Kompozit malzemeler sünek yapısı sayesinde, doğal bir titreşim sönümleyicidir ve ayrıca şok yutabilme özelliği vardır. Malzemenin bu özellikleri çatlak yürümesi olayını da önleyici özelliklerdir [Url-1].

Ancak, bu üstün özelliklerine rağmen, kompozit malzemelerin bazı dezavantajları da vardır. Öncelikle izotropik olmadıklarından dolayı her doğrultuda aynı özellik göstermezler. İkinci bir dezavantajı ise zamanla kompozit malzemelerin yük taşıma kabiliyetlerinin azalmasıdır. Bunun sonucunda malzemedede olabilecek ani kırılmaları önlemek için uygun bir emniyet faktörü göz önünde bulundurularak tasarım yapılması gerekir. Bunun dışında kompozit malzemeler metallere göre daha pahalı ve darbe dayanımı zayıftır.

4.3.2 Kompozit malzemelerin havacılıktaki uygulamaları

Havacılık sektöründe kompozitler, gün geçtikçe daha geniş bir uygulama alanına sahip olmaktadır. Kompozit malzemeler daha hafif malzemeyle atmosfer şartlarına dayanım ve yüksek mukavemet sağladığından uçak gövde ve iç dekorasyonu, planör gövdesi, helikopter parçaları ve uzay araçlarında başarıyla kullanılmaktadır. Kompozit malzemelerin imalata uygunluğu, bakım maliyetinin düşük ve mekanik özelliklerinin iyi olması uçak tasarımında büyük avantaj sağlar. Uçaklar, roketler ve füzeler kompozit malzemeler sayesinde daha hızlı ve daha yükseklere uçabilmişlerdir.

Yüksek performanslarından ötürü en çok karbon fiber kompozitler hava-uzay sektöründe kullanılmaktadır. Ancak havacılık sektöründe kompozit malzeme tercih edilmesinin en temel sebebi ağırlığı azaltmaktır.

Uçaklarda kompozit malzeme kullanımını detaylandırarak olursak;

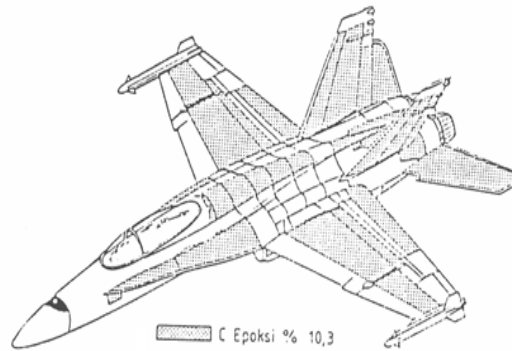
- Askeri uçaklarda:
 - o yatay ve dikey kuyrular, çeşitli kontrol yüzeyleri (irtifa dümeni, düşey ve yatay dümen), kanat yüzeyleri, gövde dış yüzeyleri, hız frenleri ve ön gövde
- Ticari uçaklarda:
 - o Kuyruk bölümü (hücum ve firar kenarı panelleri ile irtifa ve düşey dümeni), kanatçıklar, flaplar, spoylerler, motor kapakları, burun iniş takımı, kanat-gövde bağlantı kaplaması gibi kısımlarda kompozit malzeme kullanılır.

Kompozit malzemelerin uçaklardaki kullanım alanlarını şu şekilde örneklendirebiliriz:

- a. F-14 uçaklarında yatay dengeleyiciler, F-15' lerde ise yatay ve dikey dengeleyiciler, bor-epoksi kompozit malzemesinden yapılmıştır (Şekil 4.16.a)
- b. F/A-18 uçaklarında kanat yüzeyleri, dikey ve yatay dengeleyiciler ile kontrol yüzeyleri ve hız frenlerinde kompozit malzeme kullanılmıştır (Şekil 4.16.b).



a.



b.

Şekil 4.16 : F-14 ve F/A-18 uçaklarında kompozit malzeme kullanım alanları.

- c. En büyük uçak şirketlerinden biri olan Airbus, A380 yolcu uçağı kanat panelleri ve flaplar, burun bölümü ve dikey stabilizörlerinde kompozit teknolojisini kullanıyor.
- d. Bir diğer büyük uçak şirketi Boeing ise yeni nesil uçaklarında kompozit malzeme teknolojisinden yararlanıyor. Boeing-787' nin kompozit parçaları aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Boeing' in kendi sitesinden alınan bilgi doğrultusunda Boeing-787 uçaklarının 50% ' si kompozit malzemelerden oluşmaktadır.



Şekil 4.17 : Boeing-787' nin kompozit parçalarının gösterimi [Url-2].

4.3.3 Tabakalı kompozit malzemelerde hasar karakteristiği

Tabakalı kompozitler bilinen en eski kompozit malzeme şeklidir. En az iki değişik levha malzemenin tabakalar halinde dizilerek oluşturduğu malzemelere tabakalı kompozit malzemeler denir. Ayrıca, tabakalar halinde bulunması her tabakanın ayrı bir kompozit olmasına izin vermektedir. Tabakalı kompozitlerin tasarım, üretim, standartlaştırma ve kontrolü diğer kompozitlerden daha kolay olmaktadır.

Fiber takviyeli kompozit malzemeler yüksek özgül dayanımları ve hafiflikleri sayesinde giderek artan uygulama alanlarına ve kullanım miktarına sahip olmaktadır. Ancak karmaşık bir hasar mekanizmasına sahip olmaları, tabakalı kompozit malzemelerin yaygın kullanımını sınırlar.

Kompozit yapılarda meydana gelen hasar türleri genel itibariyle lokal gerilme yığılmaları nedeniyle meydana gelirler. Bu hasarlar malzemenin yüklere karşı dayanım sınırlarını etkileyerek yapının rijitliğini dolayısıyla ömrünü azaltır.

Tabakalı kompozitlerde meydana gelen hasarların nedeni serbest uç etkileri, yapısal süreksizlikler, imalat sırasında herhangi bir nesnenin düşmesi sonucu görülen darbe etkisi, çalışma şartlarında nem ve sıcaklık değişimi, imalat esnasındaki delme işlemleri veya matris kırılması gibi içsel hasarlar olabilir.

Bu kısımda, darbe etkisi sonucunda oluşan hasar türleri detaylandırılacaktır. Tabakalı bir kompozit malzemenin maruz kalabileceği darbe üç türde sınıflandırılabilir. Enerjisi düşük veya düşük hızlı darbe, enerjisi yüksek veya yüksek hızlı darbe ve son olarak enerjisi diğer iki darbe türüne göre daha yüksek olan çok yüksek hızlı darbedir. Bu yüzden, tabakalı kompozit malzemelerin hasar türlerinin ve sonuçlarının anlaşılmasında darbe enerjisi önemli bir parametredir. Eğer darbe esnasında darbe enerjisi malzemenin elastik sınırları içinde kalırsa hasar gözlenmez.

Darbe sonucunda tabakalı kompozit malzemelerde matris kırılması, fiber kırılması, fiber-matris ayrılması ve delaminasyon gibi hasar türleri oluşabilir. Kompozit malzemelerde meydana gelen bu hasar türlerinin herhangi birisi veya birkaçı darbe enerjisine bağlı olarak baskın olabilir. Bu hasar türlerini açıklamadan önce bu hasar tiplerini etkileyen parametreler detaylandırılmıştır.

- **Plaka özellikleri:**

Kompozit plakanın sahip olduğu mekanik özellikler (E_1 , E_2 , ν_{12} ve G_{12}) yapının rijitliğini değiştireceğinden darbe esnasındaki temas kuvvetinin zamana göre değişimini de etkileyecektir. Lif yönündeki elastisite modülü (E_1) eğilme rijitliğini etkilerken fibere dik yöndeki elastisite modülü (E_2) temas kuvvetine daha çok etki eder. E_1 ve E_2 elastisite modülleri arasındaki farkın artışı, kompozit plakanın her bir tabakacığının eğilme rijitliğini değiştirecek ve sonuçta delaminasyon miktarının artmasına neden olacaktır. Takviye elemanının elastisite modülü genel itibarıyla bağlayıcı elemanın elastisite modülünden daha yüksektir. Bu nedenle, takviye elemanı matris kırılması ve delaminasyonun başlamasına neden olmaz.

Bir kompozit plakanın rijitliği tabakanın kalınlığı ile orantılıdır. Kalınlık da darbe esnasında oluşan maksimum temas kuvvetini değiştirir. Düşük hızlarda, plaka genel itibarıyla eğilmeye çalışır. Bu durumda, plakanın alt tabakasında en büyük çekme gerilmeleri ve dolayısıyla alt tabakadan başlamak üzere matris kırılmaları meydana gelir. Daha sonra en alt ara yüzeyde delaminasyon bu matris kırılması neticesi oluşur

Delaminasyon farklı lif yönlenme açılarına sahip tabakacıkların kalınlığının artması ile artar (ABRATE, 1998). Tabakacıkların lif yönlenme açıları darbe hasarına tabaka kalınlığından daha fazla etki eder. Aynı yönde liflere sahip bir tabakalı kompozitte lif yönlenme açısı her bir tabakada değişmediğinden delaminasyon meydana gelmez. Eğer birbirine komşu iki tabakacığın lif yönlenme açıları farklı olursa bu iki tabakacığın ara yüzeyinde tabakacıkların eğilme rijitlikleri farkından dolayı delaminasyon meydana gelir (LIU, 1988).

- **Vurucu nesnenin özellikleri**

Vurucu nesnenin elastisite özelliğinin yüksek olması daha yüksek temas kuvvetinin ortaya çıkması ve vurucu nesne ile hedef arasındaki temas alanının azalması anlamına gelir. Bunların neticesinde daha fazla hasar meydana gelir. Vurucu nesnenin kütlesinin değişimi enerji miktarını değiştirdiğinden darbe hasarı miktarını da değiştirecektir. Daha yüksek kütleye sahip vurucunun neden olduğu temas kuvveti ve temas süresi daha fazla olacaktır. Kinetik enerjileri aynı olmasına rağmen, küçük kütleli yüksek hızlı vurucu ile yüksek kütleli düşük hızlı vurucunun neden olacağı hasar aynı olmayacaktır.

4.3.3.1 Kompozit malzemelerin darbe davranışı

Mühendislik uygulamalarında, özellikle de mekanik uygulamalarda, dışarıdan gelecek herhangi bir darbeye beklenmedik sonuçların ortaya çıkmaması için, malzemenin gerekli en uygun cevabı veya davranışı verebilmesi istenir. Uygulama yerine ve kullanım amacına göre malzemenin maruz kalabileceği darbeler çok farklı şekillerde olabilir. Buna karşın darbeye karşı olan cevap da malzemenin kendisi tarafından belirlenir. Şöyle ki, metal ve metal alaşımları durumunda darbeye karşı malzemenin cevabı; elastik uzama ve plastik şekil değiştirme şeklinde meydana gelir ve darbe hasarı, çoğunlukla, çarpma yüzeyinde başladığı anda kolay bir şekilde tespit edilebilir. Darbe hasarı, metal malzemelerde genellikle bir tehlike işareti olarak kabul edilmez, çünkü metaller plastik şekil değiştirebilme kabiliyetlerinden dolayı büyük miktarda enerjiyi absorbe edebilirler. Metaller sabit bir gerilme durumunda yapı sertleşmeden önce çok büyük uzamalarda akabilme yeteneğine sahiptir, bu nedenle oluşacak kopmalar ani ve beklenmedik olmaz.

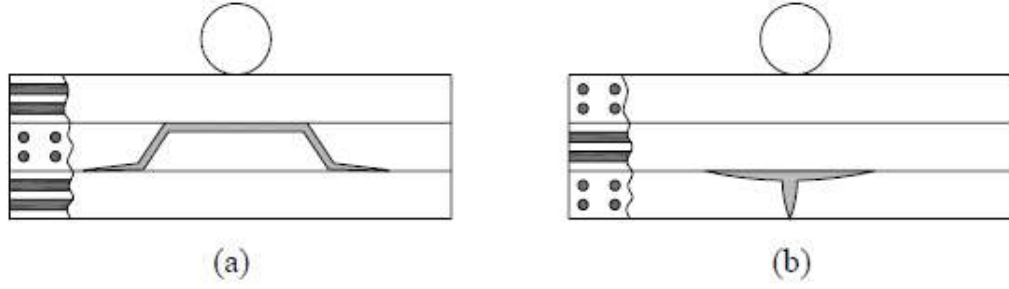
Kompozit malzemelerde bir darbe sonucunda oluşan hasar, çarpmanın türüne göre darbeye maruz kalmayan yüzeyde meydana gelebilir, içyapıda oluşan delaminasyonlar (tabakalar arasında ayrılma) şeklinde başlayabilir. Yukarıda da bahsedildiği gibi metallerde darbe cevabı, plastik şekil değiştirme sonucunda bir kopma şeklinde olmasına rağmen, kompozitler çok değişik modlarda hasara uğrayabilirler ve bu hasar modlarında parçanın yapısal bütünlüğünde ciddi bir değişiklik meydana gelmez. Genellikle gözle görülmeyen veya çok zayıf bir şekilde görülebilen hasarlar meydana gelir. Plastik matrisli kompozit malzemelerin hemen hemen tamamı kırılımandır, bu nedenle enerjiyi sadece elastik deformasyon ve bazı hasar mekanizmaları (matris kırılması, delaminasyon, fiber kopması v.b) sayesinde absorbe edebilirler, diğer bir deyişle enerjiyi soğurmada plastik deformasyonun katkısı hemen hemen hiç yoktur.

Tabakalı kompozit malzemede, eğer kalınlık boyunca bir takviye söz konusu değil ise, en büyük darbe hasarı enine doğrultuda oluşacaktır. Bunun en önemli nedenlerinden birisi, enine doğrultudaki malzeme elastik özelliğinin düşük olmasıdır. Bu nedenle bir kompozit malzemenin enine hasar direnci nisbeten zayıftır. Tabakalar arası gerilmeler (kesme ve normal) tabakalar arası mukavemetin düşük olmasından dolayı ilk kopmalara sebep olan gerilmelerdir. Darbe esnasında kompozit malzemeye aktarılan enerjinin miktarı, malzemenin bu enerjiyi sönümleyebilmesi için oluşacak hasar modlarını belirleyecektir. Bu nedenle tabakalı bir kompozit malzemede darbenin oluşturacağı hasarı tahmin etmek için darbe hızının belirlenmesi çok büyük bir öneme sahiptir.

Fiber takviyeli kompozit plakalar, anizotropik ve heterojen yapılarından dolayı dört farklı önemli hasar moduyla karşılaşabilirler:

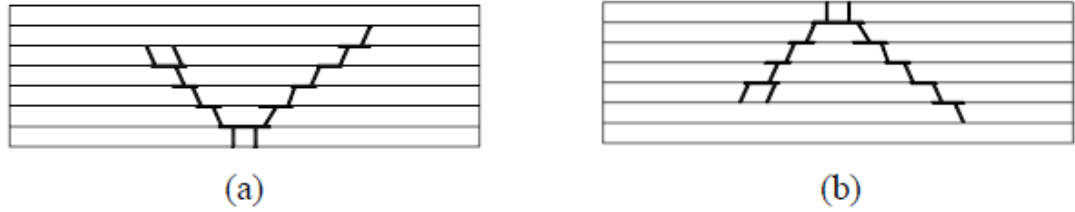
Matris Kırılması

Matris kırılması hasarı tabakalı kompozit plakalarda en çok görülen hasar tipidir. Matris kırılması daha çok epoksi gibi gevrek olan malzemelerde görülür. Matris elyaftan daha az şekil değişimine sahip olduğundan darbeli kırılma matriste başlayacaktır. Matris kırığı tabaka lif yönelme açısına bağlıdır ve hasarlı tabakadaki lif yönelme açısına paralel olarak yayılır. Literatürde çekme gerilmelerinin ve kayma gerilmelerinin neden olduğu iki tip matris kırığı Şekil 4.18’ de gösterilmiştir.



Şekil 4.18 : (a) Kayma gerilmelerinin, (b) eğilme gerilmelerinin neden olduğu matris kırılması (Abrate, 1998).

Matris kırılmasının oluşumu kompozit plakanın rijitliğini azaltır. İnce kompozitlerde plakanın eğilmesi nedeniyle matris kırılması en alt tabakacıkta oluşur (Şekil 4.19-a). Bu durumda hasar ağacın dalları şeklindedir. Fakat hasar ilerlemesi alt tabakacıktan üst tabakacığa doğru olur. Kalın kompozitlerde ise yüksek ve lokal temas gerilmelerinden dolayı matris kırılması darbe meydana geldiği ilk tabakacıkta meydana gelir. Bu durumda, hasar yine ağaç dalları şeklinde olup bu kez tabakanın üst tabakacığında alt tabakacığına doğru ilerler (Şekil 4.19-b). (ABRATE, 1998).



Şekil 4.19 : (a) İnce ve (b) kalın plaklar için matris kırığı hasarı ilerlemesi (Abrate, 1998).

Fiber Kırılması

Fiber kırılması kompozit tabakanın içerisinde bulunan lifin kırılmasıdır. Genellikle matris kırılması ve delaminasyondan sonra meydana gelir. Fiber kırılması plakanın eğilmesi neticesi en alt tabakanın yüzeyinde (yüksek çekme gerilmeleri nedeniyle) gözle görülebileceği gibi matris kırılmasını (lokal kayma gerilmeleri nedeniyle) takiben plakanın iç kısmında da görülebilir. Fiber kırılması başladığında plakanın yük taşıma kapasitesi tamamen bitmemiştir. Çünkü plakanın diğer tabakacıklarında yükü taşıyabilecek fiberler hala vardır. Yük taşıma kapasitesinin tamamen bitmesi plakanın tüm fiberlerinin hasara uğraması ile olur.

Fiber-Matris Ayrılması

Fibere dik yönde meydana gelebilecek çekme gerilmeleri fiberle matrisi ara yüzeylerinden ayırmaya çalışır. Fiber yönünde basma yüklerinin etkisiyle meydana gelecek kayma gerilmeleri fiber/matris ara yüzeyinde mikro yapıda burkulmalara neden olur ve fiber matris ayrılması genel itibariyle bu kayma gerilmelerinden dolayı oluşur. Kompozit bir yapıda fiberin yükü matrise aktaramaması fiber/matris ayrılmasının tamamen olmuş olduğunu gösterir.

Delaminasyon

Delaminasyon, tabakalı kompozit malzemeyi meydana getiren her bir katmanın ayrılması olarak tanımlanır. Tabakalı kompozit malzemede oluşan hasar türleri arasında delaminasyon, genellikle en çok karşılaşılan ve önemli bir hasar türü olarak kabul edilir.

Bu tez kapsamında delaminasyona uğramış bir plağın flutter analizi araştırılacağından delaminasyon hasar türü daha kapsamlı anlatılacaktır.

4.3.4 Delaminasyon (Tabakalar arası ayrılma)

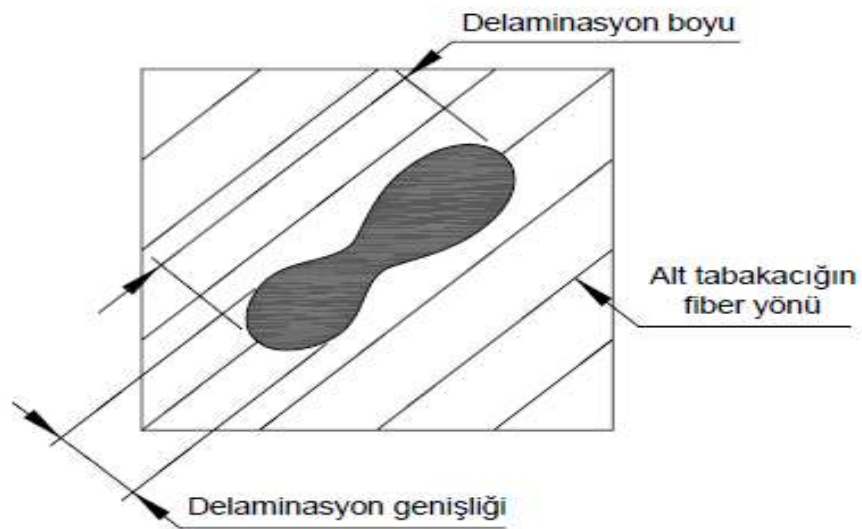
Delaminasyon hasarı birbirine komşu olan iki tabakacığın birbirlerinden ayrılması olarak tanımlanır. Kompozit yapılarda en yaygın ve ciddi hasar modu tabakalar arasındaki delaminasyondur (Wang ve diğerleri,1995). Delaminasyonlar katmanların ara yüzeylerinde ve matris kırılmalarının birbiriyle kesiştiği yerlerde oluşurlar. Katman ara yüzeyine doğru ilerleyen bir matris kırılması çoğu zaman kritik matris kırılması olarak tanımlanır (Choi ve diğerleri, 1991b). Genellikle en alt katmanda meydana gelen bu matris kırılmalarının birleşmesi delaminasyon oluşumunu hızlandırır ve delaminasyon büyümesi bu katman içerisindeki matris kırılmasının katman ara yüzeyine ulaşması olarak kabul edilir. Delaminasyon bölgesi genellikle darbenin meydana geldiği bölgenin yakınlarında ve hemen altındadır ve darbe merkezinden uzaklaşacak şekilde hareket eder.

Bir kompozit plakanın rijitliği tabakanın kalınlığı ile orantılıdır. Çünkü tabakalı kompozit plakta her bir tabakanın lif yönlenme açısı farklıdır. Lif yönlenme açısının farklı olması her bir tabakanın eğilme rijitliğinin farklı olması demektir. Bu da darbeli yüklemde tabakada düzensiz bir gerilme dağılımına neden olur. Yani plakanın kalınlığı da darbe esnasında oluşan maksimum temas kuvvetini değiştirir.

Eğer birbirine komşu iki tabakacığın lif yönlenme açıları farklı olursa bu iki tabakacığın ara yüzeyinde tabakacıkların eğilme rijitlikleri farkından dolayı delaminasyon meydana gelir ve Liu (LIU, 1988) delaminasyonun bu farklı eğilme rijitliklerinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Bir başka deyişle, uygulanan yükün durumuna göre plaka konkav şekilde eğilebilir. Bu durumda; eğer, hasarlı tabaka grubunun alt ara yüzeyinin hareketi kısıtlanmamış ise ve eğilme fiberin doğrultusunda ise, kırılmalar tabaka gruplarının farklı eğilme rijitliklerinden dolayı farklı eğilmeye çalışmalarından kaynaklanır. Tabakalardaki bu eğilme uyumsuzluğunun artması delaminasyonu artırır. Dolayısıyla delaminasyon şekli ve büyüklüğü tabakalar arası eğilme uyumsuzluğuna bağlıdır ve eğilme uyumsuzluğu matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

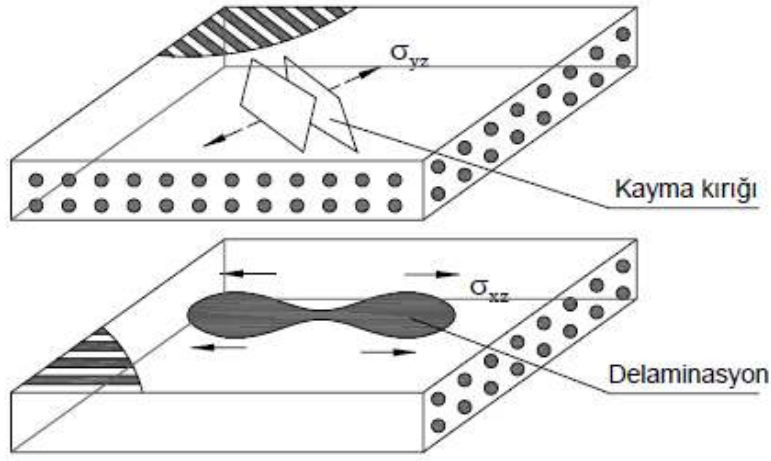
$$\text{Eğilme uyumsuzluğu} = \frac{D_{ij}(\theta_{alt}) - D_{ij}(\theta_{üst})}{D_{ij}(0^\circ) - D_{ij}(90^\circ)} \quad (4.61)$$

θ_{alt} ve $\theta_{üst}$ birbirine komşu iki tabakacığın alttaki ve üstteki lif yönlenme açılarıdır. Şekil 4.20’de verilen uzayan bir elips tipinde delaminasyon en yaygın şekilde karşılaşılan delaminasyondur. Delaminasyonun uzayan kısmı ara yüzeyin altında kalan katmandaki lif doğrultusundadır (Lu ve Liu, 1991). En büyük delaminasyon en alt katmanda meydana gelirken üst ara katmanlara gidildikçe delaminasyon küçülür. Delaminasyondaki bu izotropik olmayan ilerleme komşu katmanlardaki eğilme rijitliklerinin farklı olmasından kaynaklanmaktadır.

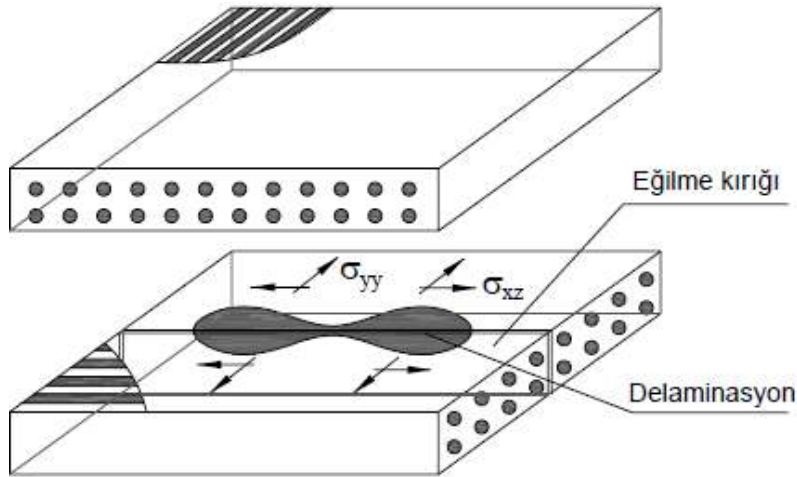


Şekil 4.20 : Tipik delaminasyon biçimi (Abrate, 1998).

Matris kırılması bölümünde anlatıldığı üzere kayma gerilmelerinin ve eğilme gerilmelerinin neden olduğu iki tip matris kırılması vardır. Delaminasyon başlamasına matris kırılması neden olduğuna göre delaminasyon da kaymanın neden olduğu delaminasyon ve eğilmenin neden olduğu delaminasyon olarak sınıflandırılabilir. Kayma delaminasyonunda; delaminasyon alt ara yüzeydeki kayma gerilmesi σ_{xz} ve üst ara yüzeydeki kayma gerilmesi σ_{yz} nedeni ile oluşur. Eğilme delaminasyonunda ise delaminasyon alt ara yüzeydeki kayma gerilmesi σ_{xz} ve eğilmeye neden olan normal gerilme σ_{yy} tarafından meydana getirilir. Bu tip delaminasyonlar şematik olarak Şekil 4.21’de verilmiştir.



(a)



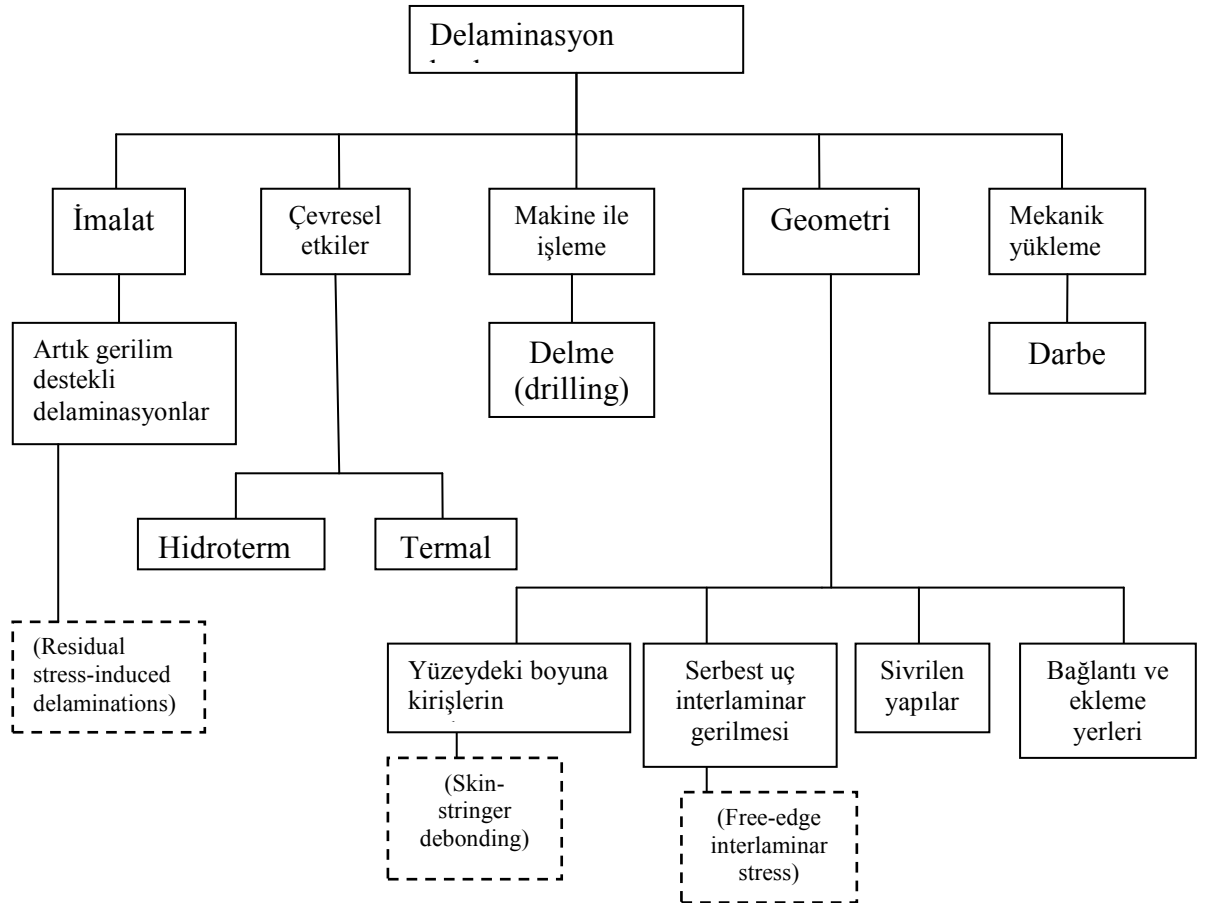
(b)

Şekil 4.21 : (a) Kayma gerilmesi ve (b) eğilme gerilmesi nedeniyle oluşan delaminasyon (Choi, 1990).

σ_{xz} , σ_{yz} ve σ_{yy} sırasıyla tabakaların ara yüzeydeki boylamasına ortalama kayma gerilmesini, tabakaların ortalama ara yüzey kayma gerilmesini ve fibere dik yöndeki ortalama eğilme gerilmesini ifade eder.

Delaminasyona neden olan en yaygın nedenler malzeme ve yapısal süreksizlikler olup bunlar interlaminar (tabaka içi) gerilmelerin artışına neden olur. Temel olarak delaminasyon başlangıcının nedenlerini Şekil 4.22’de olduğu kabaca gibi sınıflandırabiliriz.

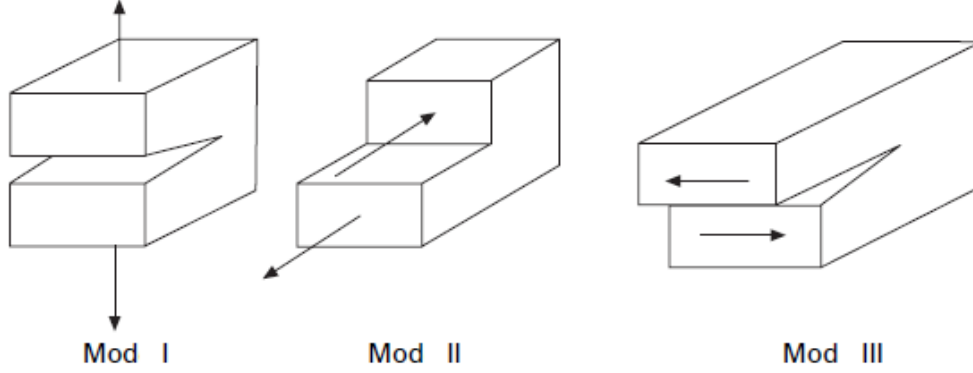
Delaminasyonun başlangıç kaynağı ne olursa olsun basma, yorulma, eğilme ve birleşme yerlerindeki çekme gerilmeleri gibi yüklerin uygulanması delaminasyonun büyümesini indükleyebilir. Hatta basma yükleri ve yorulma delaminasyon büyümesi için en kritik yükleme koşuludur denilebilir.



Şekil 4.22 : Temel delaminasyon başlangıcının nedenlerinin sınıflandırılması.

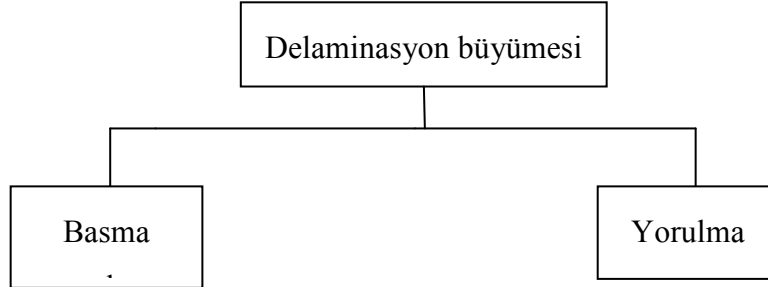
Kompozit malzemelerde delaminasyon meydana geldiği durumda üç farklı kırılma modu ortaya çıkar. Bunlardan Mod I dediğimiz birinci mod interlaminar çekmelerden

dolayı, Mod II dediğimiz ikinci mod interlaminar kayma tipi kesmelerden dolayı ve Mod III, üçüncü mod makaslama tipi kesmelerden dolayı oluşan hasar modlarıdır (Şekil 4.23) (Krueger, 2004).



Şekil 4.23 : Delaminasyon kırılma modları

Delaminasyon değişik yükleme koşullarına bağlı olarak oluşur ve ilerleyebilir. Şekil 4.24’ te delaminasyon büyümesine neden olan yükleme şartları verilmiştir. Buna göre basma yükleri ve yorulma delaminasyon için en kritik yükleme şartları olarak tanımlanır (Sridharan, 2008).

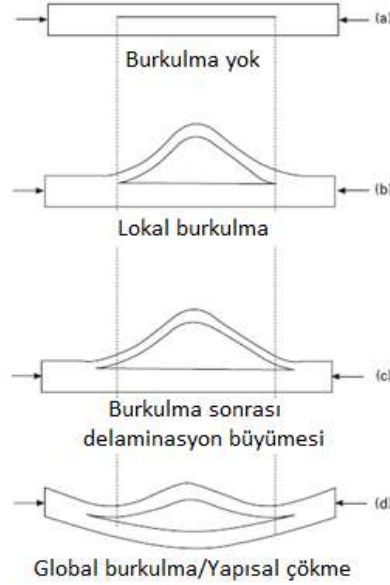


Şekil 4.24 : Delaminasyon kırılma modları.

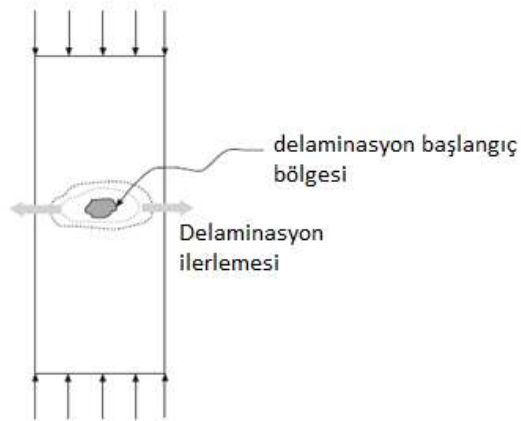
Basma yükü altında meydana gelen delaminasyon büyümesi ani olarak kompozit plağın yük taşıma kabiliyeti kaybına neden olabilir. Delaminasyona uğramış kompozit panellerde basma yükü davranışı Şekil 4.25’ de şematik olarak görülebilir.

Kompozitler, çekme-çekme yükleme şartlarında metallere göre daha iyi yorulma davranışı gösterirler, ancak çekme-basma veya çok eksenli yükleme şartlarında yorulma davranışları matrisin birbirini izleyen ayrışması ve kırılma tokluğu özelliklerinden (Mod I, Mod II, Mod III) ötürü metallere göre zayıf kalır. Yorulma yükleri sonucunda indüklenen delaminasyon büyümesi Şekil 4.26’ da verildiği gibi olup çatlak büyümesi yorulmanın sıklığına bağlıdır. Buna göre ilk faz plakta

herhangi bir basma yükü yani burkulma olmadığı durumdur. Daha sonra plağın basma yüküne maruz kalmasıyla lokal burkulma görülür. Bu basma yükleri yukarıda da bahsedildiği üzere delaminasyon büyümesine neden olan en kritik yüklemelerdir ve delaminasyon büyümesini takiben en son faz da global burkulma dediğimiz plağın yapısal olarak çöktüğü durumdur.



Şekil 4.25 : Delaminasyona uğrayan kompozit bir plağın basma yükü davranışı (Sridharan, 2008).

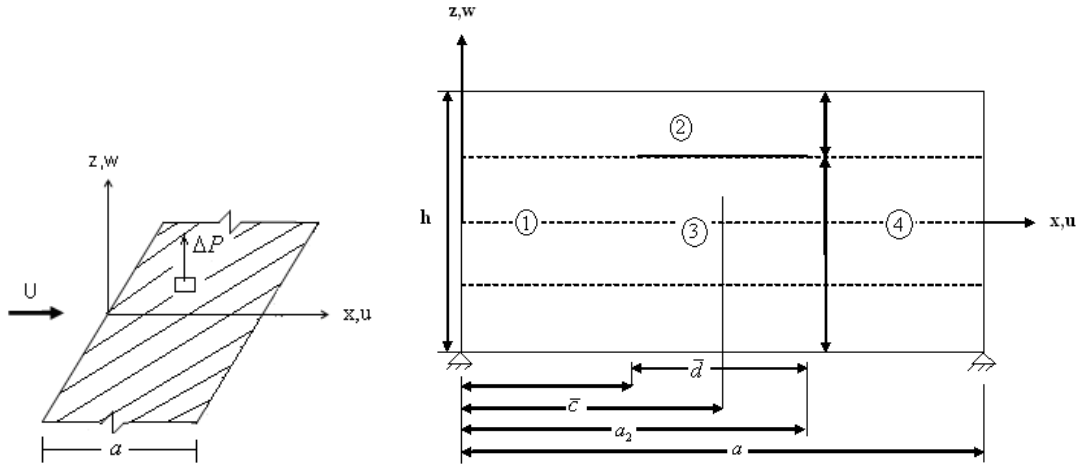


Şekil 4.26 : Yorulma sonucu delaminasyona büyümesi (Sridharan, 2008).

4.3.5 Temel bağıntı ve hareket denklemlerinin çıkarılması

Bu çalışmada, basit mesnetlenmiş kompozit bir plağın ses üstü hava akımındaki flutter karakteristiği üzerinde delaminasyon etkileri araştırılmıştır. Kirchhoff plak teorisine göre plağın deformasyonunun çok küçük olduğu ve sanki-daimi ses üstü aerodinamik yüklemeye maruz kaldığı kabul edilmiştir.

Ele alınan alınan simetrik, dört parçaya ayrılmış tabakalı plak geometrisi Şekil 4.27’ de gösterilmiştir ve her bir kısım yuvarlak içine alınmış rakamlarla ifade edilmiştir. Plak uzunluğu a , kalınlığı h ve birim hacim başına kütle yoğunluğu ρ_m ile verilmiştir. Plağın $\bar{d}$ boyunda delaminasyon genişliğine sahip olduğu kabul edilmiştir. Delaminasyonun orta noktası plağın sol kenarından $\bar{c}$ mesafesi kadar uzaktadır. U akış hızına sahip ses üstü hava akımının ve ΔP aerodinamik basıncının plağın üst yüzeyinden x-yönü boyunca geçtiği varsayılmıştır. Kompozit plak için seçilen malzeme Hercules AS4/3501-6 olup malzeme özellikleri şöyledir: $E_{11} = 14200000$, $E_{22} = 1300000$, $G_{12} = 7000600$, $\nu_{12} = 0.27$ ve $\nu_{21} = 0.02$ ’ dir. Bu malzeme özellikleri kullanılarak delaminasyonlu plağın ayrı ayrı incelediğimiz kısımlarının her biri için gerekli olan eğilme katılığı D hesaplanmıştır.



Şekil 4.27 : Plak kesiti.

Her bir bölüm için hareket denklemleri plağın deformasyonunun çok küçük olduğu kabulüyle aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$D_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho_m h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \Delta p = 0 \quad (4.62a)$$

$$D_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - B_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} - P_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \rho_m h_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \Delta p + F = 0 \quad (4.62b)$$

$$D_3 \frac{\partial^4 w_3}{\partial x^4} - B_3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3} - P_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} + \rho_m h_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} - F = 0 \quad (4.62c)$$

$$D_4 \frac{\partial^4 w_4}{\partial x^4} + \rho_m h_4 \frac{\partial^2 w_4}{\partial t^2} + \Delta p = 0 \quad (4.62d)$$

$$P_2 = A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - B_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (4.62e)$$

$$P_3 = A_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} - B_3 \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \quad (4.62g)$$

w plağın yer değıştirmesi, F 2 ile 3 kısımları arasındaki etki-tepki kuvveti, P_n (n=2, 3) delaminasyon nedeniyle indüklenen düzlem içi kuvvet ve u_n (n=2, 3) plağın düzgün düzlem-içi yer değıştirmesidir.

$$A_n = \sum_{k=i}^m (\bar{Q}_{11})_k (z_k - z_{k-1}) i = \begin{cases} 1 & (n=1,3,4) \\ j+1 & (n=2) \end{cases} \quad (4.63a)$$

$$B_n = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^m (\bar{Q}_{11})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) m = \begin{cases} N & (n=1,2,4) \\ j & (n=3) \end{cases} \quad (4.63b)$$

$$D_n = \frac{1}{3} \sum_{k=i}^m (\bar{Q}_{11})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (4.63c)$$

Burada A_n, B_n, D_n parametreleri sırasıyla katmanlı plağın uzama katılığını, bağlaşım (eğilme ve bükölme) katılığını ve eğilme katılığını göstermektedir. $(\bar{Q}_{11})_k$ ise k. tabakanın x-yönündeki indirgenmiş katılığını gösterir. $(\bar{Q}_{ij})$ burada iki boyutlu formölasyonlarda (i,j = 2, 3) değeri için ihmal edilmiştir. Ayrıca m, katmanlı yapıdaki katman sayısıdır ve z_k ve z_{k-1} k. katmanın ara yüzünün yerleridir. Denklem 1' de verilen eşitlikler 2 ile 3. kısım arasındaki bağlantıdan ötürü lineer olmayan eşitliklerdir. Basitleştirilmiş analitik bir yaklaşımla tabakalar halinde dizili bu iki tabakanın aralarındaki temastan dolayı birlikte titreşmeye zorlandığı kabul edilmiştir [2]. Bu kabul ve P₂ + P₃ =0 şartı göz önünde bulundurularak Denklem (1) aşağıdaki gibi sadeleştirilebilir.

$$D_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho_m h_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \Delta p = 0 \quad (4.64a)$$

$$\left(D_2 + D_3 - \frac{B_2^2}{A_2} - \frac{B_3^2}{A_3} \right) \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \rho_m (h_2 + h_3) \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \Delta p = 0 \quad (4.64b)$$

$$D_4 \frac{\partial^4 w_4}{\partial x^4} + \rho_m h_4 \frac{\partial^2 w_4}{\partial t^2} + \Delta p = 0 \quad (4.64c)$$

$$P_2 = A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - B_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad (4.64d)$$

Aerodinamik basınç yüklemesi ΔP , Mach sayısının yüksek olduğu durumlar için, Denklem (3.1)' deki sanki-daimi ses üstü piston teorisi kabul edilerek hesaba katılmıştır.

Plâğın verilen yükleme durumunda basit harmonik hareket yaptığı kabul edilmiştir. Basit harmonik hareket kabulü Denklem (4.14)' te verilmiştir. Daha sonra denklem boyutsuzlaştırılmıştır. Bunun için;

İlk olarak;

- Boyutsuz bir koordinat $\xi = \frac{x}{a}$ ve
- Boyutsuz bir yer değiştirme $W_n = \frac{\tilde{w}_n}{h}$ tanımlanmıştır.
- Ayrıca $c = \frac{\bar{c}}{a}$, $d = \frac{\bar{d}}{a}$ olarak boyutsuzlaştırılmıştır

Bu dönüşümler kullanılarak (4.64)' te verilen hareket denklemleri boyutsuzlaştırılmıştır. Boyutsuz haldeki denklemi daha kolay ve anlaşılır hale getirmek ve çözebilmek için izlenen işlem sırası aşağıdaki gibidir

Boyutsuzlaştırma sonucunda her bir terimde mevcut olan “h” ifadesi sadeleştirilmiştir. Daha sonra denklem L^4 ile çarpılarak delaminasyona uğramış plâğın flutter sınırlarını bulmak amacıyla gerekli denklemi elde etmek için yapılan formülasyon prosedürü delaminasyona uğramış plak için de benzer şekilde uygulanmıştır. Buna göre aşağıda verilen boyutsuz parametreler yardımıyla boyutsuz hareket denklemleri Denklem (4.65)' deki gibidir.

$$\lambda = \frac{\rho U^2 a^3}{D \sqrt{M_\infty^2 - 1}} \quad , \quad g = \frac{\rho U}{M_\infty \rho_m h \omega_0} \quad , \quad \omega_0 = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho_m h a^4}} \quad , \quad \mu = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$s_1 = \frac{a_1}{a} \quad , \quad s_2 = \frac{a_2}{a} \quad , \quad \bar{D}_1 = \frac{D_1}{D} \quad , \quad \bar{D} = \frac{D_2 + D_3}{D} - \frac{B_2^2}{D A_2} - \frac{B_3^2}{D A_3} \quad , \quad \bar{D}_4 = \frac{D_4}{D}$$

Hareket denklemleri;

$$\bar{D}_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial \xi^4} + \lambda \frac{\partial W_1}{\partial \xi} + \pi^4 Z W_1 = 0 \quad (4.65a)$$

$$\bar{D} \frac{\partial^4 W_2}{\partial \xi^4} + \lambda \frac{\partial W_2}{\partial \xi} + \pi^4 Z W_2 = 0 \quad (4.65b)$$

$$\bar{D}_4 \frac{\partial^4 W_4}{\partial \xi^4} + \lambda \frac{\partial W_4}{\partial \xi} + \pi^4 Z W_4 = 0 \quad (4.65c)$$

Burada λ boyutsuz aerodinamik basınç parametresi, D plağın eğilme katılığı ve μ boyutsuz frekansı ifade ederken Z de μ ve g (sönümle ilgili parametre) ile ilgili bir tanım olup şu şekilde verilir:

$$Z = \mu_2 - i\mu g \quad (4.66)$$

Denklem (4.65), 12 tane bilinmeyen sabit içermektedir. Bu nedenle denklemi çözebilmek için basit mesnetlenmiş plak için 12 adet sınır ve süreklilik şartına ihtiyaç vardır. Enlemesine basit mesnet sınır şartları (Shiau, 1992):

$$x = 0' \text{ da } w_1(0) = \frac{\partial^2 w_1(0)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.67a)$$

$$x = a' \text{ da } w_4(a) = \frac{\partial^2 u_4(a)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.67b)$$

a) Kinematik süreklilik şartları:

$$x = a_1' \text{ de } w_1(a_1) = w_2(a_1), \quad \frac{\partial w_1(a_1)}{\partial x} = \frac{\partial w_2(a_1)}{\partial x} \quad (4.67c)$$

$$x = a_2' \text{ de } w_2(a_2) = w_4(a_2), \quad \frac{\partial w_2(a_2)}{\partial x} = \frac{\partial w_4(a_2)}{\partial x} \quad (4.67d)$$

b) Eğilme momenti ve kesme kuvveti süreklilik şartları:

$$\begin{aligned} x = a_1' \text{ de } \quad V_1(a_1) &= V_2(a_1) + V_3(a_1) \\ M_1(a_1) &= M_2(a_1) + M_3(a_1) \end{aligned} \quad (4.67e)$$

$$\begin{aligned} x = a_2' \text{ de } \quad V_4(a_2) &= V_2(a_2) + V_3(a_2) \\ M_4(a_2) &= M_2(a_2) + M_3(a_2) \end{aligned} \quad (4.67f)$$

Burada V_1 , V_2 , V_3 ve V_4 kesme kuvveti,

$$V_i = \left(\frac{B_i^2}{A_i} - D_i \right) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.68a)$$

M_1, M_2, M_3 ve M_4 eğilme momentidir.

$$M_i = \frac{B_i P_i}{A_i} + \left(\frac{B_i^2}{A_i} - D_i \right) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.68b)$$

Sınır şartları yazıldıktan sonra bu 12 denklem diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak Denklem (4.69)' da verildiği üzere DDY formatında elde edilmiştir. Daha sonra geliştirilen kod yardımıyla DDY formatındaki hareket denklemleri çözülmüştür. Girilen λ değerleri için elde edilen alt ve üst sınır değerlerinin çakışması yöntemiyle flutter frekansı tespit edilmiştir.

Diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulandıktan sonra hareket denklemleri:

Birinci kısım için;

$$W1[k+4] = -(\lambda W1[k+1] + \pi^4 ZW1[k]) / (D1(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)) \quad (4.69a)$$

İkinci-Üçüncü kısım için;

$$W2[k+4] = -(\lambda W2[k+1] + \pi^4 ZW2[k]) / (D(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)) \quad (4.69b)$$

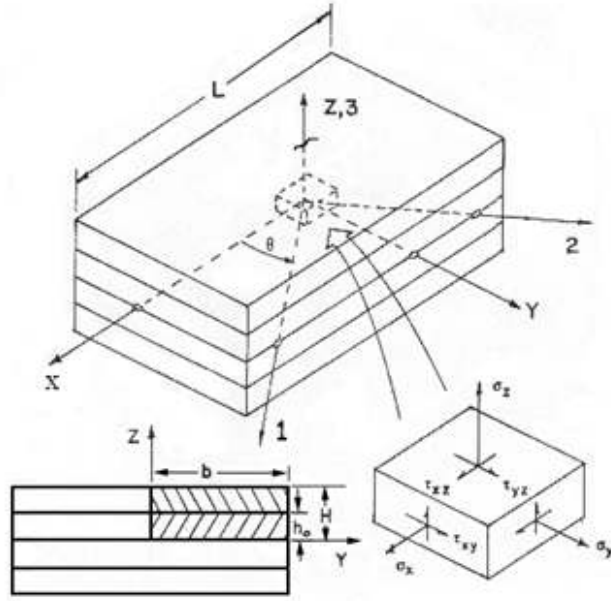
Dördüncü kısım için;

$$W4[k+4] = -(\lambda W4[k+1] + \pi^4 ZW4[k]) / (D4(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)) \quad (4.69c)$$

4.3.6 Delaminasyona uğramış kompozit plaklar için sonuçlar

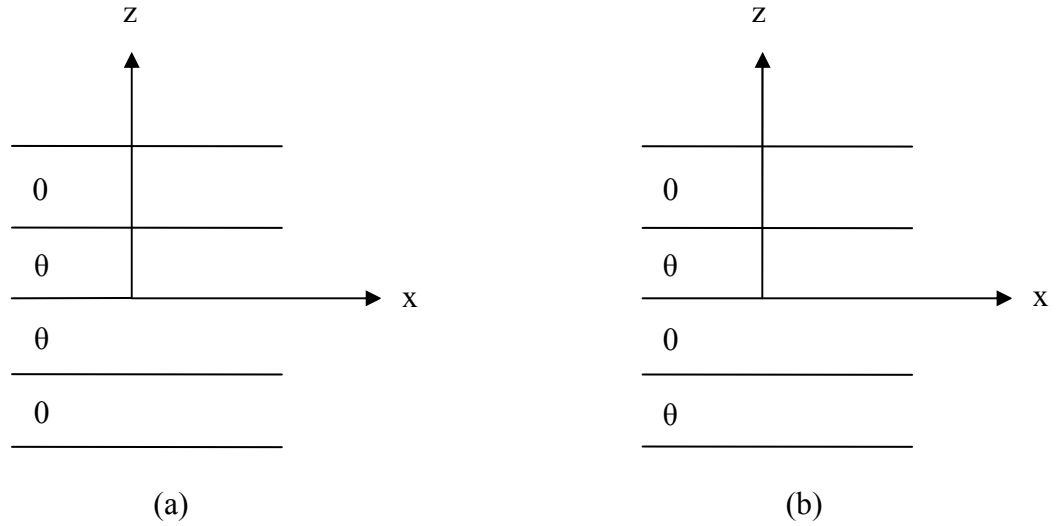
Tabakalı kompozit yapıların oryantasyon açıları için farklı dizilim yöntemleri vardır. Bunlar tabakalar simetrik, anti-simetrik ve açılı oryantasyona sahip olabilirler. Dört tabakaya sahip bir plağın geometrisi Şekil 4.28' de verilmiştir. Buna göre her bir katmanın fiber oryantasyonu simetrik , anti-simetrik ve çapraz-tabakalı (cross-ply) veya açılı-tabakalı (angle-ply) bir şekilde olabilir.

Çapraz-tabakalı dizilimine sahip tabakalı kompozitlerde fiber oryantasyonu bir katmandan diğerine 0° ve 90° yönünde değişir. Çapraz-tabakalı laminalarda katmanların dizilim sırası orta düzleme göre simetrik veya antisimetrik olabilir.



Şekil 4.28 : Tabakalı kompozit plak geometrisi

Tabakaların çapraz-kat denilen dizilimi simetrik oryantasyon için $[0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ]$ olup, antisimetrik oryantasyon için $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ]$ şeklindedir. Simetrik ve anti-simetrik dizilim gösterim şekli de aşağıdaki gibidir.

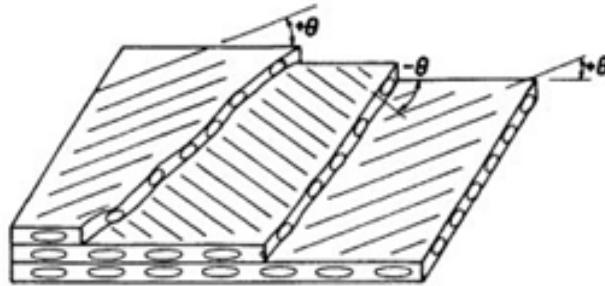


Şekil 4.29 : Tipik 4 tabakalı kompozit plakların (a) simetrik ve (b) antisimetrik dizilimi

Çeşitli alanlarda kullanılan bu malzemelerin titreşim davranışlarının incelenmesi de bir zorunluluk haline gelmiştir. Singh ve Abdelnaser (Singh ve Abdelnaser, 1992) başta olmak üzere birçok araştırmacı keyfi sınır şartlarında sahip simetrik çapraz-tabakalı kompozit kirişlerin serbest ve zorlamalı titreşimlerini araştırmışlardır.

Literatürdeki bu ve benzeri çalışmalar sonucunda kayma deformasyonu, malzeme anizotropisi ve sınır şartlarının kompozit kirişlerin doğal frekanslarına etkilerini göstermişlerdir. Matsunaga (Matsunaga, 2001) açılı-tabakalı kompozit plakların doğal frekanslarını ve burkulma gerilmelerini, kayma gerilmesi, kalınlık değişimi ve dönme ataleti etkilerini dikkate alarak analiz etmiştir. Buna ek olarak Shiau (Shiau, 1992) da hem çapraz-tabakalı hem de açılı-tabakalı dizilime sahip ve delaminasyona uğramış kompozit plakların flutter karakteristiğini incelemiştir ve çapraz-tabakalı dizilime sahip laminalarda, plağın delaminasyona uğrayan kısmının eğilme katılığı delaminasyonu nedeniyle önemli ölçüde azaldığını göstermiştir.

Buna göre delaminasyonun flutter sınırları üzerinde büyük bir etkisi olduğu sonucuna varmıştır. Aynı şekilde açılı-tabakalı kompozit plaklar için de fiber açısının x-yönünde değişmesi plağın rijitliğinin x-yönünde azalmasına neden olur. Flutter sınırı fiber açısına ters oranda bir davranış gösterirken, flutter sınırının delaminasyon uzunluğuna göre değişimi tüm fiber oryantasyonları için benzerdir. Şekil 4.30' da tipik bir açılı-tabakalı lamina ve farklı tiplerde kesitleri verilmiştir.



(a) Tipik açılı-tabakalı lamina

$+\theta$
$-\theta$
$+\theta$

(b)

Simetrik Düzensiz

$+\theta$
$-\theta$
$+\theta$
$-\theta$

(c)

Anti-simetrik Düzenli

$+\theta$
$-\theta$
$-\theta$
$+\theta$

(d)

Simetrik Düzenli

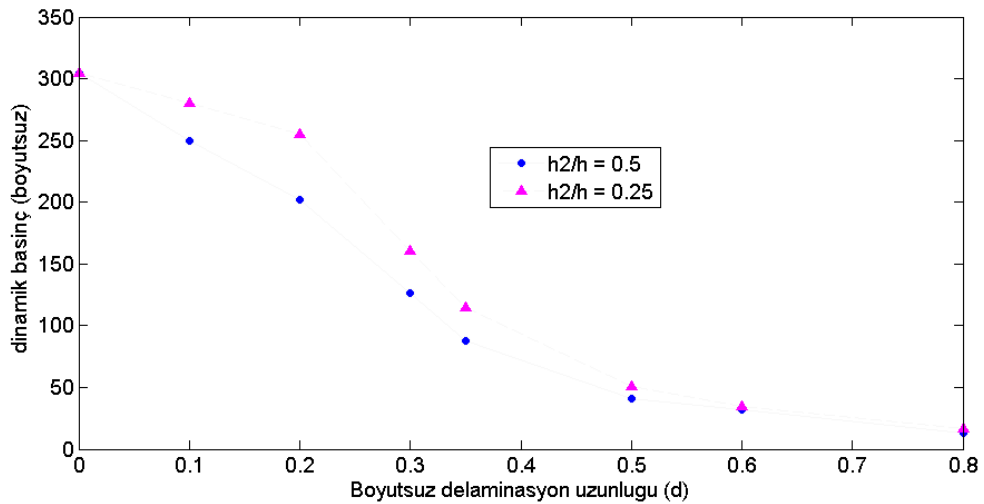
Şekil 4.30 : Farklı tiplerde açılı-tabakalı laminaların kesit görünüşleri

Çoğunlukla delaminasyon durumlarda plağın ilk iki modunda frekans çakışması olur. Çünkü delaminasyon nedeniyle doğal frekanslardaki azalmalar delaminasyon uzunluğu ile artar ve mod ikinin frekansını mod birin frekansına göre önemli ölçüde azaltır ve bir noktada her iki frekansı çakıştırır.

Bu çalışma çalışma kapsamında çapraz-tabakalı laminalardan oluşan kompozitler için frekans modlarının çakışması durumu araştırılmıştır ve grafiklerle gösterilmiştir. Bu grafikler çeşitli delaminasyon uzunlukları göz önünde bulundurularak elde edilmiştir.

İlk olarak $h_2 / h = 0.5$ tam orta düzlemde delaminasyon (mid-plane delamination) ve $h_2 / h = 0.25$ daha ince-inceltici delaminasyon (thinner delamination) durumlarının çapraz-tabakalı $[0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ]$ dizilime sahip bir plağın flutter karakteristiğine etkileri araştırılmıştır.

Elde edilen grafiğe göre (Şekil 4.31) her iki durumda da delaminasyon uzunluğu $d = 0$ olduğu zaman plağın flutter ile karşılaştığı dinamik basınç değeri değişmez. Çünkü delaminasyon olmadığı durumda plak her iki h oranı için aynı davranışı gösterir. Delaminasyon uzunluğunun arttığı durumlarda grafikten de görüleceği üzere orta-düzlem delaminasyon varlığında plak daha ince delaminasyona göre daha erken fluttera girer.



Şekil 4.31 : Flutter sınırı vs. delaminasyon uzunluğu

5. DEĞERLENDİRME

Bu tez kapsamında, ince plakların çeşitli eğilme problemleri ele alınmıştır. Öncelikle plak denklemleri ve teorileri incelenerek, plak denklemleri hakkında bilgi sahibi olunmuştur. Daha sonra lineer elastisite teorisi dahilinde yapılan kabuller, virtüel iş prensibi ve minimum potansiyel enerji prensibi kullanılarak hareket denklemleri elde edilmiştir. İncelenen plaklar bir uçak kanadı veya kontrol/kumanda yüzeyi olarak gerçekçi yaklaşımla modellendiğinden havacılık sanayiinde en çok kullanılan malzeme olan kompozit malzeme seçilmiştir. Uçak-uzay alanında malzemelerin homojen dağılımıyla oluşan kompozit malzemeler en sık kullanılan malzeme tipidir.

Çalışma üç ana bölümden oluşmakta olduğundan plak hareket denklemleri bu üç farklı kısımda incelenen plaklar için ayrı ayrı elde edilerek çözüme uygun hale getirilmiştir. Çözüm için, Taylor seri açılımına dayanan ve diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bir dönüşüm tekniği olan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi seçilmiştir. Her bir bölümde elde edilen hareket denklemleri, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi' nin teorileri ve sınır şartlarına uygulanan kurallarına göre dönüştürülmüştür. Son olarak da bu dönüştürülen denklemler Mathematica 6.0 programında yazılan kodlar yardımıyla çözümlenerek doğal ve flutter frekansları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçları özetlemek gerekirse:

5.1 Normal ve Sivrilen Dikdörtgen Plaklar için Sonuçlar

Birinci bölümde normal, sabit kalınlıkta ve dikdörtgen bir plağın basit mesnet sınır şartları altında serbest titreşim analizi yapılmıştır. Bunun sonucunda çeşitli açıklık oranları için doğal frekans değerleri (beş mod için) elde edilmiştir. Bulunan değerler literatürle kıyaslanarak bağıl hatalar hesaplanmıştır ve sonuçların birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Daha sonra plak modeli biraz daha geliştirilmiştir ve sadece x yönünde kalınlığı lineer olarak değişen bir dikdörtgen plak ele alınmıştır. Bu sivrilen plağın önce serbest titreşim daha sonra da flutter karakteristiği araştırılmıştır. Plakların aeroelastik analizlerinde sanki-daimi piston kabulü yapılarak aerodinamik basınç eklenmiştir. Sonuç olarak çeşitli açıklık oranlarında ve farklı sivrileme oranları için basit mesnet sınır şartları altındaki lineer olarak sivrilen bir dikdörtgen plağın serbest titreşim ve flutter frekans değerleri elde edilmiştir ve doğal frekans için elde edilen sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar birbirleriyle birebir örtüşmemekle beraber çok da uzak değildir. Benzer karakterde değişen bir sonuç grafiği elde edilmiştir. Aradaki farklılığın numerik nedenlerden kaynaklandığı düşünülmektedir. Sivrilme plaklar için serbest titreşim çalışmalarına literatürde yeterli ölçüde rastlamakla birlikte aeroelastisite çalışmalarına yeterli örnek bulunmamaktadır.

5.2 Winkler Elastik Zeminine Oturan Plaklar için Sonuçlar

İkinci bölümde çeşitli yay katsayısına sahip Winkler zeminine oturan dikdörtgen bir plak için basit mesnet sınır şartlarında aeroelastik kararlılık davranışı ve flutter frekansları araştırılmıştır. Düzlem-içi basma yüklerinin flutter sınırlarına etkileri incelenerek elde edilen sonuçlar literatürdeki çeşitli çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Düzlem-içi yüklerin olmadığı ($R_x = 0$) sabit Winkler zemini üzerindeki plak için aerodinamik basınç parametresi (λ_{kr}) ve flutter frekansı parametresi (Z_{kr}) hesaplanmıştır. Elde edilen değerler grafikler çizdirilerek görsel olarak da gösterilmiştir. Bu işlem sabit, lineer ve parabolik yay modülüne sahip Winkler elastik zeminine oturan basit mesnetli plaklar için tekrarlanmış ve literatürdeki farklı çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Sonuçların doğruluğu hesaplanan frekansların benzerliğinden görülmektedir. Bu grafikler çizdirilirken düzlem-içi basma yüklerinin etkileri de göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca K' nın lineer olduğu durumda seçilen iki alfa (α) değeri için dinamik basınç ve flutter frekansının değişimi incelenmiştir. Son olarak da, düzlem-içi yüklerin dinamik basınç üzerindeki etkisi seçilen bir K yay katsayısı değeri için araştırılmıştır.

5.3 Delaminasyona Uğrayan Kompozit Plaklar için Sonuçlar

Üçüncü ve son bölümde ise kompozit malzemeler, havacılıktaki uygulama alanları, avantaj ve dezavantajları hakkında genel bir bilgi verilerek giriş yapılmıştır. Sonrasında çeşitli elyaf yönlenme açılarına sahip tabakalı laminalardan oluşan dikdörtgen bir plağın flutter davranışı incelenmiştir. Böylece çapraz-tabakalı laminalardan oluşan kompozitler için frekans modlarının çakışması durumu araştırılmıştır ve grafiklerle gösterilmiştir. Bu grafikler çeşitli delaminasyon uzunlukları göz önünde bulundurularak ve delaminasyonun lokasyonuna göre elde edilmiştir. Bu lokasyonlar, delaminasyonun plak kalınlığının tam ortasında olduğu durum ($h_2 / h = 0.5$) ve plak üst yüzeyine daha yakın tabakada olduğu durumdur ($h_2 / h = 0.25$). Çapraz-tabakalı laminalardan oluşan kompozitin flutter grafiğine göre her iki delaminasyon lokasyonu durumunda delaminasyon uzunluğu $d = 0$ için plağın flutter ile karşılaştığı dinamik basınç değeri değişmez. Çünkü delaminasyon olmadığı durumda plak her iki h oranı için aynı davranışı gösterir. Delaminasyon uzunluğunun arttığı durumlarda grafikten de görüleceği üzere orta-düzlem delaminasyon varlığında plak daha ince delaminasyona göre daha erken fluttera girer.

KAYNAKLAR

- Abrate, S.**, 1998. Impact on composite structures, ed: Cambridge University Press, Cambridge.
- Cheung, M.S.** 1978. A simplified finite element solution for the plates on elastic foundation, *Computers and Structures*, No. 8, pp. 139-145.
- Choi, H., Downs, R., and Chang. F.**, 1991. A new approach toward understanding damage mechanisms and mechanics of laminate composites due to low-velocity impact: part II – analysis, *Journal of composite materials*, No 25, pp. 1011-1038.
- Choi H.Y.**, 1990. Damage in graphite/epoxy laminated composites due to low velocity impact, *PhD Thesis*, Stanford University.
- Chopra, I.**, 1975. Flutter of a panel supported on an elastic foundation, *AIAA Journal*, Vol. 13, pp. 687-688.
- Civalek, O.**, 2004. Elastik zemine oturan yapıların hesap yöntemlerine genel bir bakış, *TMH-Türkiye Mühendislik Haberleri*, Sayı 432, No. 4, pp. 45-54.
- Dugundji, J., Dowell, E. ve Perkin, B.**, 1963. Subsonic flutter of panels on continuous elastic foundations, *AIAA Journal*, Vol. 1, pp.1146-1154.
- Dumir, P.C.**, 1988. Nonlinear dynamic response of isotropic thin rectangular plates on elastic foundations, *Acta Mechanica*, Vol. 71, pp. 233-244.
- Hetényi M.**, 1964. Beams on elastic foundation : theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering. Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- Johns, D. J.**, 1969. Static instability of rectangular orthotropic panels subjected to uniform in-plane loads and deflection dependent lateral loads, R.&M. 3569, Aeronautical Research Council, London.
- Kaya, M. O. ve Melek, M.**, 2009. Supersonic flutter prediction of functionally graded panel, *Recent Advances in Space Technologies, RAST 2009*, Turkey.
- Kaya, M. O. ve Melek, M.**, 2009. High speed of FGM plates by using DTM. 5th Ankara International Aerospace Conference, August 17-19, METU, Turkey.
- Kaya, M.O. ve Ozdemir, O.O.**, 2007. Flexural-Torsional coupled vibration analysis of axially loaded closed section composite Timoshenko beam by using DTM, *Journal of Sound and Vibration*, No 306, pp. 495-506.
- Kaya, M.O.**, 2000. Uçaklarda aeroelastik problemler ve çözümleri, *Kayseri III. Havacılık Sempozyumu*, İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi.

- Kehoe, M.W.**, 1995. A historical overview of flight flutter testing, NASA Technical Memorandum 4720
- Kerr, A.D.**, 1964. Elastic and viscoelastic foundation models, *Journal of Applied Mechanics*, No. 31, pp. 491-498.
- Krueger, R.**, 2004. Virtual crack closure technique: history, approach and applications. *Applied Mechanics*, No. 57, pp. 109-143.
- Liu D.**, 1998. Virtual impact induced delamination-A view of bending stiffness mismatching, *Journal of Composite Materials*, No. 22, pp. 674-692.
- Liu D., Raju B.B., Dang X.**, 1998. Size effects on response of composite laminates, *International Journal of Impact Engineering*, *Journal of Composite Materials*, Vol. 21, No. 10, pp. 837-852.
- Liu D.**, 1998. Virtual impact induced delamination-A view of bending stiffness mismatching, *Journal of Composite Materials*, No. 22, pp. 674-692.
- Lu, X. Ve Liu, D.**, 1991. Finite element analysis of strain energy release rate at delamination rate at delamination front. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 10, No. 3, pp. 279-299.
- Matsunaga, H.**, 2001. Vibration and stability of angle-ply laminated composite plates subjected to in-plane stresses, *International Journal of Mechanical*.
- Miles, J.W.**, 1956. On the aerodynamic instability of thin panels, *Journal of the Aeronautical Sciences, of Mechanical*, Vol. 23, pp. 771-791.
- Pasternak, P. L.**, 1954. New method of calculation for flexible substructures on twoparameter elastic foundation, Gosudarstvennoe Izdatelstoo, Literaturi po Stroitelstvu Arkhitecture, Russien, pp. 1-56.
- Right, J.R. ve Cooper, J.E.**, 2007. Introduction to aircraft aeroelasticity and loads, John Wiley & Sons, Ltd.
- Shiau, L.**, 1992. Flutter composite laminated beam plates with delamination, New method of calculation for flexible substructures on twoparameter elastic foundation, *AIAA Journal*, Vol. 30, No. 10, pp. 2504-2511.
- Singh, M.P and Abdelnaser, A.S.**, 1992. Random response of symmetric cross-ply composite beams with arbitrary boundary conditions, *American Inst. Aeronautics Astronautics Journal*, Vol. 30, No. 4, pp. 1081-1088.
- Sridharan, S.**, 2008. *Delamination behaviour of composites*. Woodhead Publishing in Materials.
- Szillard, R.**, 2003. Theories and applications of plate analysis-classical, numerical and engineering methods, John Willey Press, pp. 1056.
- Teodoru, I. B.**, 2009. Beams on elastic foundation the simplified continuum approach, Buletinul Institutului Politehnic Din Iași, Publicat de Universitatea Tehnică.
- Url-1** < http://www.obitet.gazi.edu.tr/obitet/malzeme_bilgisi/kompozit/20malzemeler.pdf >, alindigi tarih 13.10.2010.

- Url-2** <<http://www.boeing.com/commercial/787family/background.html>>, alındığı tarih 10.11.2010.
- Ventsel, E. ve Krauthammner, T.,** 2001. Thin plates and shells: theory, analysis and applications, United State of America.
- Vlasov, V.Z., and Leont'ev N.N.,** 1966. Beams, plates and shells on elastic foundations, Translated from Russian to English by Barouch, A., Israel Program for Scientific translations, Jerusalem.
- Wang, Y., Li, J., and Zhao, D.,** 1995. Mechanical properties of fiber glass and kevlar woven fabric reinforced composites, Composites Engineering, Vol. 5, No. 9, pp. 1-56.
- Weaver, W. ve Johnston, P.,** 1984. Finite elements for structural analysis, Prentice Hall Press, pp. 403.
- Winkler, E.,** 1867. Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, Prague, p. 182.
- Zimmermann, H.,** 1930. Die Berechnung des Eisen Bahnoberbaues Finite elements for structural analysis, Second ed., Berlin.

EKLER

EK A.1 : Sivrilen plaklar için elde edilen doğal frekans değerleri

EK A.1

Sivrilere plakların farklı açıklık oranları (a/b) için hesaplanan doğal frekansları ve Leissa' nın benzer durumdaki sonuçları aşağıdaki çizelgede verilmiştir. Frekanslar sivrılme oranı (alfa)' nın 0.1' den 0.8' e kadar olan değerleri için elde edilmiştir.

Çizelge A.1 : Sivrilere plakların hesaplanan frekans değerleri ve literatürle karşılaştırılması.

a/b	alfa	frekans	Leissa
1.0	0.1	424.597	429.344
	0.2	454.222	470.539
	0.3	504.382	513.154
	0.4	540.677	557.195
	0.5	604.575	603.011
	0.6	639.821	650.051
	0.7	674.789	698.483
	0.8	734.262	748.214
1.5	0.1	1121.96	1133.504
	0.2	1235.22	1240.789
	0.3	1342.85	1352.131
	0.4	1453.19	1466.703
	0.5	1577.34	1584.917
	0.6	1693.76	1705.645
	0.7	1820.78	1829.210
	0.8	1937.82	1958.095
2.0	0.1	2502.96	2682.541
	0.2	2894.14	2933.149
	0.3	3227.13	3190.419
	0.4	3448.34	3452.582
	0.5	3671.574	3718.769
	0.6	3971.482	3996.104
	0.7	4262.26	4275.126
	0.8	4520.659	4556.204

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad : Merve MELEK
Doğum Yeri ve Tarihi : İstanbul, 1986
Adres : Siyavuşpaşa Mah. Mimoza Sok. No . 5/5
Bahçelievler / İstanbul.
Lisans Üniversitesi : İstanbul Teknik Üniversitesi

Yayın Listesi:

- Melek, M., Kaya, M.O., *Supersonic Flutter Prediction of Functionally Graded Panels*, 4th International Conference on RAST 2009, Haziran 2009 (yayımlandı).
- Melek, M., Kaya, M.O., *High Speed Flutter Analysis of FGM by Using DTM*, 5th Ankara International Aerospace Conference (AIAC 2009), Ağustos 2009 (yayımlandı).
- Melek, M., Kaya, M. O., *Supersonic Flutter Analysis of Panels in Variable Winkler Elastic Foundation*. Mathematical and Computational Analysis Journal, (kabul için beklemede).
- Melek, M., Kaya, M.O., *Flutter Analysis of Plates on Variable Winkler Elastic Foundation*, 5th International Conference on RAST 2011, Haziran 2011 (kabul için beklemede).