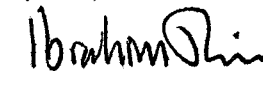


OPTİMAL LQP KONTROL**YÜKSEK LİSANS TEZİ****Müh. S.Fusun DEDE****Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06.Haziran.1997****Tezin Savunulduğu Tarih : 26.Haziran.1997****Tez Danışmanı : Prof.Dr. Leyla GÖREN****Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Atilla BİR****Doç.Dr. İbrahim EKSİN** 7.7.1997 7.7.1997 7.07.1997

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	V
ÖZET	VI
SUMMARY.....	VII
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM I LİNEER DURUM DENKLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ	
I-1 Durum Uzayı ve Durum Değişkenleri.....	3
I-2 A ve B'nin Dinamik Özellikleri.....	6
I-2.1 Geçici Dinamikler.....	6
I-2.2 Kontrol Edilebilirlik.....	7
I-3 Çıkışlar.....	9
I-3.1 Gözlenebilirlik.....	9
I-3.2 Transfer Fonksiyonları.....	10
I-4 Durum Uzayı Gerçeklemeleri.....	12
I-4.1 Ek Durum Değişkenleri.....	12
I-4.2 Benzerlik Dönüşümleri.....	14
I-4.3 SISO Sistemleri İçin Gerçekleme.....	16
I-5 Kontrol Edilememe ve Gözlenememe.....	17
I-5.1 Etkileşimsizlik Durumu.....	19
I-5.2 Özdeş Dinamiklere Sahip Alt Sistemler.....	21
I-5.3 Kutup-Sıfır Yok Etmesi.....	22
I-5.4 Kararlı Kılınabilme, Detekte Edilebilme.....	23
I-6 Örnekler.....	24
BÖLÜM II OPTİMAL LQP KONTROL	
II-1 Giriş.....	33
II-2 Optimal Kontrol Teorisi İçin LQP'ye Giriş.....	34
II-2.1 Ayrık-Zamanlı Skaler Problem.....	35
II-2.2 Sürekli-Zamanlı Skaler Problem.....	42
II-3 LQP Optimal Kontrol İle İlgili Genel Sonuçlar.....	48
II-3.1 Sürekli-Zamanlı Sistemler İçin LQP Sonuçları	48
II-3.2 Ayrık-Zamanlı Sistemler İçin LQP Sonuçları.....	50
II-4 Regülatör, Hedef İzleme ve Bozucu Yok Etme.....	52
II-5 Sürekli-Hal İçin LQP Optimal Kontrol.....	58
II-5.1 Kontrol Edilemeyen Dış Etkenleri Olan Sistem Örneği	64
II-6 Örnekler.....	67
BÖLÜM III OPTİMAL LİNEER, GERİ BESLEMELİ KONTROLÖR	
III-1 Giriş.....	75
III-1.1 Kullanılan Notasyonlar.....	77

III-2	Gözleyiciler.....	78
III-2.1	Kazanç Matrisi K_O	82
III-3	İdeal LQP Kontrol.....	84
III-3.1	Bir İdeal Kontrolör Transfer Fonksiyonu Yapısı.....	87
III-3.2	Klasik Kontrolörler.....	88
III-3.3	Bir İdeal PID Kontrolör Örneği.....	89
III-3.4	Kapalı-Çevrim Kontrol Sisteminin Davranışı.....	96
III-4	Genel Değerlendirme.....	98
III-4.1	Problemin Özelleştirilmesi.....	99
III-4.2	Kontrolörün Yapısı.....	99
III-4.3	Kontrolör Dinamikleri.....	100
III-5	Örnekler.....	101
BÖLÜM IV	OPTİMAL KONTROL TEORİSİ	
IV-1	Giriş.....	110
IV-2	Skaler-Zamanla Değişmeyen Problemler.....	112
IV-2.1	Ayrık-Zamanlı Sistem.....	112
IV-2.2	Sürekli-Zamanlı Sistem.....	115
IV-3	Birden Fazla Durum İçeren Problemler.....	117
IV-3.1	Optimallik Prensibi.....	121
IV-4	LQP Problemleri.....	122
IV-5	Varyasyonel Hesap.....	126
IV-5.1	Pontriagin Maksimum Prensibi.....	127
IV-5.2	Durum Sınırlamalı Optimal Kontrol.....	129
IV-6	Dinamik Programlamaya Giriş.....	136
IV-7	Örnekler.....	136
SONUÇ.....		147
KAYNAKLAR.....		148
ÖZGEÇMİŞ.....		149

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında, değerli görüşlerinden ve yapıcı uyarılarından yararlandığım sayın hocam Prof.Dr.Leyla GÖREN’e teşekkürlerimi sunarım.

Haziran , 1997

S.Fusun DEDE



ÖZET

Sürekli lineer bir sistemin dinamiğini belirleyen diferansiyel denklem giriş $u(t)$, çıkış $y(t)$, t 'de zaman olmak üzere sürekli-zamanda

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0$$

ve ayrık-zamanlı bir sistemde i tam sayı olmak üzere

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = d_1 u(i-1) + d_2 u(i-2) + \dots$$

lineer fark denklemleri ile verilir. Durum uzayı gösterilimi

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{ve} \quad y = Cx \quad \text{dir.}$$

A matrisi companion matristir. Durum değişkenlerinin yer aldığı x vektörüne durum vektörü, bu vektörlerle tanımlı uzaya durum uzayı denir. A , B , C matrisleri sistemin tüm özelliklerini taşır. Sistemin dinamik özellikleri ve kontrol edilebilirlik A , B 'ye; transfer fonksiyonu A , B , C 'ye; gözlenebilirlik A , C 'ye bağlı tanımlanır. Dinamik sistemlerin geçişi davranışını karakteristik denklemin kökleri belirler. Durum uzayında herhangi bir x_0 keyfi noktasından diğer bir x durumu u girişleri ile seçilebiliyorsa sisteme kontrol edilebilirdir denir. Giriş sıfır iken y çıkışları o andaki ve geçmişteki değerlerinden yararlanılarak x durumları hesaplanabiliyorsa sisteme gözlenebilirdir denir. Minimal gerçekleştirme için gerek ve yeter koşul durum modelinin kontrol edilebilir ve gözlenebilir olmasıdır. Kararsız durumlar kontrol edilebilir ise sisteme kararlı kılınabilir, kararsız durumlar gözlenebiliyorsa sisteme detecte edilebilir denir. Yarı-sabit yapıda kontrol edilen sistem optimal olacak şekilde kontrolör yapısı belirlenirki bu LQP kontrol olarak bilinir. Zamanla değişen sürekli-zamanlı ve ayrık-zamanlı LQP problemleri Riccati denklemlerini sağlar. Optimal kontrol teori kontrol edilen sistemin x dinamik durumunun değişen değerinin bir fonksiyonu olarak temsil edilen optimal kontrol problemlerine yol gösterir. x durumlarını ölçülen çıkışlar olarak direk almak mümkün olmadığından geri beslemeli kontrolör tasarımı kullanılır. Verilen bir sistemin x durumları gözleyici olarak bilinen uygun dinamik sistemlerle tahmin edilir. LQP teori dinamik sistemlerin x durumunu kontrol etmek için u girişlerinin nasıl seçilmesi gerektiğini veren en genel optimal teoremin bir dalıdır. Dinamik programlama denklemleri varyasyonel hesapta Hamiltonian-Jacobi-Bellman denklemi olarak bilinir. Pontriagin maksimum prensibi optimizasyon hesaplama yapılamadığında varyasyonel hesabı içeren problemlerde genelleştirilir.

SUMMARY

For continuous-time linear system having input $u(t)$ and output $y(t)$ where t represent time the dynamic equation is the ordinary linear equation

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

which specifies relationships between rates of change. Difference equations specifying relationships between point values are conventionally used to characterize discrete-time dynamic system

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = d_1 u(i-1) + d_2 u(i-2) + \dots$$

where i is an integer counting the discrete-time instants. When the equation are linear, matrices can be used. Continuous-time linear dynamics can be written

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

and discrete-time linear dynamics can be written

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(i) + \mathbf{B}\mathbf{u}(i)$$

with output y given by

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$\mathbf{A}$ is known as a companion matrix.

The set of n variables introduced to translate dynamics of order n into a set of simultaneous first-order equations are known as state variables. The vector x is known as a state vector and n -dimensional space which is known as state space. The matrices A , B , C provide a complete specification of a linear dynamic system. Dynamical properties which depend only on A and B and the overall transfer function from u to output y which depends also on C where desirable properties of controllability and observability. Transient behaviour of a linear dynamic system is determined by roots of characteristic solution of $|sI - A| = 0$ are the eigenvalues of A . A set of dynamic state equations is said to be controllable if the output u can in a finite time transfer the dynamic state x between any two arbitrarily chosen points in state space. When the eigenvalues of A are distinct controllability can be examined by diagonalizing the matrix equations. This is done using the modal matrix of A . X is non-singular and the modal matrix diagonalizes A .

$$X^{-1}AX = S$$

where S is a diagonal matrix whose only non zero elements on the main diagonal are the eigenvalues of A . A general necessary and sufficient condition for controllability of time invariant linear systems both continuous-time and discrete-time is that controllability matrix

$$M_c \equiv [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

must have rank n . A set of dynamic and output equations is said to be observable if for zero input u , it is possible from a finite time history of the output y to determine any value which the state x may have had at any point in time. The general necessary and sufficient condition for observability of time invariant linear systems both continuous-time and discrete-time is that the $n \times np$ observability matrix

$$M_o \equiv [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

must have rank n . When a linear system is specified by a triple of matrices (A an $n \times n$ matrix, B an $n \times m$ matrix, C a $p \times n$ matrix) its transfer function matrix is a $p \times m$ matrix of transfer functions relating transforms of p output variables y to transforms of m input variables u . It can be seen again that it is the eigenvalues of the A matrix which are the poles of the transfer function and roots of the characteristic equation. A state space model A , B , C corresponding to a given transfer function G is known as a realization of the transfer function. Possible of state can be partitioned into four subsets.

- * States which are both controllable and observable
- * States which are controllable but not observable
- * States which are observable but not controllable

* States which are either controllable nor observable.

The number of states which are both controllable and observable is the same as order of the transfer function. Absence of additional states is the necessary and sufficient condition for realization to be both controllable and observable. Realization which is minimal in the sense that the number of the states is the same as the order of the transfer function is always both controllable and observable. If the corresponding transfer function is known. If order of the transfer function is not known, it can be examining the rank of the controllability and observability matrices M_c and M_o for realization is minimal or not. Other causes of uncontrollability and unobservability can arise that the relationship between states and either or both inputs and outputs may not be linearly independent. Controllability and observability are, as a properties which are desirable in a object which is to be subject to feedback control. A set of dynamic state equation is said to be stabilizable if any uncontrollable states in the set are stable. A set of dynamic and output equations is said to be detectable if any unobservable states in the set are stable.

When the performance is measured by a scalar function there two classes of optimal control problem:

* Fixed configuration; where the form of a controller is given and it is required to optimize the value of some parameter such as a controller gain.

* Semi-free configuration; where the form of the controller is not specified but is to be determination to produce whatever will be the optimal performance of a given controlled object. Optimal semi-free control theory is introduced LQP semi-free LQP problems are in continuous-time with realization

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

and performance criterion

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{x}^T \mathbf{Px} + \mathbf{u}^T \mathbf{Qu}) dt$$

or discrete-time with realization

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

and performance criterion

$$I = \sum_{i_1}^{i_2} (x^T P x + u^T Q u)$$

The matrices A, B, P, Q which specify a problem may in general be time-varying as also may matrix K specifying the solution. The LQP result is by way of simple continuous-time or discrete-time scalar LQP problems.

For discrete-time scalar LQP problem time interval $N = i_2 - i_1 + 1$ optimal value I_N^* of I_N minimized with respect to sequence $u(i_1) \dots u(i_2)$ depends only on the initial state $x(i_1)$ and on the number N of term in a sequence. Optimal value of the performances criterion which are quadratic in the state

$$I_N^*(x) = v_N x^2$$

optimal controls

$$u_N(x) = -k_N x \quad \text{where } k_N = \frac{abv_{N-1}}{q + b^2 v_{N-1}}$$

$$v_N = p + a^2 v_{N-1} - \frac{a^2 b^2 v_{N-1}^2}{q + b^2 v_{N-1}}$$

For continuous scalar LQP problems

$$\dot{x} = ax + bu$$

and performance criterion

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (px^2 + qu^2) dt$$

All four scalars p, q, a, b are time-invariant. Optimal values of performance criterion which is quadratic in x

$$I^*(x, T) = v(T) x^2$$

optimal control

$$u(x,T) = -k(T)x \quad \text{where } k(T) = \frac{bv(T)}{q}$$

a non-linear difference equation of optimal control

$$\frac{dv}{dT} = p + 2av - \frac{b^2v^2}{q^2}$$

This equation is known as Riccati Equations. Time interval T is defined by $T = t_2 - t$ like N . Convergence of the solution $v(T)$ to a finite steady state value v_∞ when T goes to a infinity is a desirable property. The optimal control depends on the current state $x(t)$ and the time to go to T according to a linear feedback law

$$u(t) = -K(T)x(t) \quad \text{having gain } K(T) = Q^{-1}(t)B^T(t)V(T)$$

where $V(T)$ satisfies the Riccati equations. For discrete-time equations are all of them as the same continuous-time equations. Of any LQP problem is a linear function of the current value of dynamic state x of the controlled object: This provides use of linear feedback control law in the practice where controlled objects can be described by linear equations. State regulation, where main source of the variability is the arbitrary initial state of controlled object and the control objective is to achieve a stable equilibrium is at the origin of the state space. Target tracing, with the variability in the form of exogenous target motion r to be tracked by output c of the controlled object. Disturbance rejection, where either or both state regulation or target tracing is to be achieved in spite of the action of additional variability in the form of exogenous disturbances x_2 affecting states of the controlled object. Continuous-time scalar example shows how Riccati equations converge to a time invariant steady state solutions in the limit as run time becomes infinite.

For continuous-time

$$0 = P + A^TV + VA - VBQ^{-1}B^TV$$

For discrete-time

$$V = P + A^T V A - A^T V B (Q + B^T V B)^{-1} B^T V A$$

The matrix V measures optimal value in performance criteria I . If P is positive definite the state x is regulated to the origin of the state space.

General expression for optimal control

$$u(t) = (\sqrt{a_0^2 + 1/q} - a_0)y(t) - (\sqrt{a_1^2 + 2a^2(\sqrt{a_0^2 + 1/q} - a_0)} - a_1)\dot{y}(t)$$

This equation for the optimal control with the original differential equation of the controlled object show that resulting optimal control is a second order system governed the second equation.

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

ω_0 natural frequency, ξ damping ratio and $\xi = 1/\sqrt{2}$ value which is often chosen as given acceptable transient response is optimal.

Optimal control theory leads to solution where optimal control is expressed as a function of the current value of dynamic states x of the controlled object. With real controlled object cannot usually be directly available as measured outputs. Real feedback control can only be driven by $y = Cx$. Optimal control theory is exploited in designing the feedback control what is known as an observer. This system is designed using the real signal u, y to generate an estimate $\hat{x}$ of the state x . The observer output $\hat{x}$ can be used to drive control law $u = -K\hat{x}$. Observer uses A, B, C matrices which are characterized of the controlled object. The observer has the same number n of the dynamic states as to be estimated convergence towards the estimated states x .

For linear controlled object in continuous-time

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_o(y - C\hat{x})$$

or in discrete-time

$$\hat{x}(i) = A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1) + K_o(y(i) - C(A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1)))$$

Right hand side of the each equation consist of prediction term plus correction term. The correction term can be written $K_o(\tilde{y} - y)$ when $\tilde{y}$ predicted value y is given $\tilde{y} = C\tilde{x}$ with $\tilde{x}$ the predicted value of x . K_o must be chosen so that the observation

error e_0 ; $e_0 \equiv x - \hat{x}$ converges to zero. Convergence to zero of the observation error e_0 depends on eigenvalues of $(A - K_o C)$ for continuous-time or of $(I - K_o C)A$ for discrete-time systems. For continuous-time system all eigenvalues must be in the left half plane. For discrete-time system all eigenvalues must be within the unit circle. Matrix K_o is known as the observer gain. One way is to choose K_o so as to fix the roots of observer characteristic equation or at specified values chosen to ensure good behavior of observer. This procedure is known as pole placement. Another way to choose K_o is take account of causing any discrepancy e_0 between the estimate $\hat{x}$ and true value x . Because they are due to random noises and disturbances. The necessary condition for observer convergence that both poles be in the left half plane and also k_1, k_2 must be positive.

In continuous-time transfer function matrix is

$$H(s) \equiv K_c(sI - A + K_o C + BK_c)^{-1} K_o$$

and in discrete-time

$$H(z) \equiv K_c(zI - (I - K_o C)(A - BK_c))^{-1} K_o$$

K_c is the control gain of the feedback controller. Methods of loop recovery has been developed which aim to recover guaranteed stability margins by making assumptions about exogenous disturbances which have the effect of tuning the observer gain K_o so as to increase loop stability. The controller transfer function matrices are $m \times p$ where m is the number of the control u and p is the number of measurement y .

Integral control; If a continuous-time system value of A, B, C, K_o, K_c are such the denominator coefficient d_0 is zero, this is an integral control.

PID control; If a continuous-time system its numerator polynomial is of higher order than its denominator, so the denominator coefficient d_1 were so dominant in the transfer function, this is the PID control.

For the LQP controller design first assumption that only the control error is available to drive the observer. An alternative way to design controller gain K_c would be to force steady state error to zero. This is achieved by $k_{e2} = 1$ which set d_0 in the denominator of the transfer function. $k_{e1} < 0$ ensures T' faster than T . If $T_1 > T_2$ the transfer function is that of a phase-advance controller with integral action. Very fast observer response ($\alpha \rightarrow \infty$) value the d_1 denominator coefficient dominates and the controller transfer function approximation PI rather than PID of the controlled object. Closed-loop behaviour of linear system is determined by the characteristic equation $|sI - A| = 0$ where A having the partitioned structure. The design of an ideal feedback controller requires specification of two gain matrices K_c, K_o .

Integrators; whose in the feedback controllers was indicated as model of the dynamics of the class of variables which are finite polynomials in time.

Derivative action; whether in the form of velocity feedback or of phase-advance can also be seen to serve the purpose of state estimation. Derivative action in feedback control provides a crude because noisy, estimate of the order state.

The LQP theory is special case of more general optimal control theory about how to choose input u so as to control the state x of dynamic object. The general theory applies to problem where the dynamics of the control object have state space realization arguments indicate that these function could be time varying but no restriction on quadratic functions. The theory of multistage decision processes provides powerful theoretical framework for optimal control theory of both discrete-time and continuous-time problems. The optimal control theory of dynamic programming like LQP theory specifies control action as a function $u(x)$ of the current value of dynamic states x . An optimal control sequence has the property that the initial state and the optimal first control may be remaining control constitute an optimal control sequence with the regard to the state resulting from the first control. Solution function f are quadratic in the state x and can be expressed in terms of symmetric matrices V . For optimal control into dynamic programming equation gives (P , Q symmetric matrices) in the discrete-time

$$V_N = P + A^T V_{N-1} A - A^T V_{N-1} B (Q + B^T V_{N-1} B)^{-1} B^T V_{N-1} A$$

with boundary condition $V_1 = P_1 + P$ and for continuous-time

$$\frac{dV}{dT} = P + A^T V + V A - V B Q^{-1} B^T V$$

with boundary condition $V(0) = P_1$.

Dynamic programming is known in the calculus of variations as the Hamiltonian-Jacobi-Bellman equations. Pontriagin's maximum principle generalizes the calculus of variations to include problems where optimization is not achieved by calculus. New variable p is known adjoint variables and are functions of time only.

$$p_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad j = 0, 1, \dots, n$$

A new function H is known Hamiltonian

$$H(x, u, t) \equiv h(x, u, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j(x, u, t) = h + \sum_{j=1}^n p_j \dot{x}_j$$

Hamiltonian-Jacobi-Bellman equation becomes

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -H \quad \text{and} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad \text{and} \quad \dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

They known as Pontriagin's equations. The condition for a trajectory to be optimal is that the Hamiltonian H be a minimum with respect to the control u at every point in time. A set of saturation inequalities is

$$U_{j1} \leq u_j \leq U_{j2} \quad j = 1, \dots, m$$

on components of control u . Pontriagin maximum principle to problems having linear dynamics with saturation constraints can lead to useful results. The optimal is assign to every element of control u its minimum or maximum allowed value depending on whether to the sign its coefficient in $p^T B$ is positive or negative. This control law which requires every control variable to take one or another of two limiting values is called bang-bang control.

Features of dynamic programming can be summarized:

- * The problem has to be describe numerically.
- * Constrains on the range of the state x can improve the efficiency of the search by reducing the number of the possibilities that need be considered.
- * Numerical procedures of dynamic programming share with other numerical procedures the curse of dimensionality, an ability to handle problems of high dimensionality.

The resulting functions of optimal control specify control action as a function of the absolute value of time and of the current value of the state x . This feature that optimal control is specified in the form of the feedback is in the principle of optimality and is not shared by techniques of calculus of variations. It is the reason why dynamic programming is suitable for analysis of problems of control.

GİRİŞ

Bu çalışmada optimal kontrolde, yaygın olarak kullanılan lineer karesel davranış ölçütünü temel alan ve kısaca LQP olarak bilinen kontrol problemi hem sürekli-zamanlı hemde ayrık-zamanlı sistemler için incelenmiştir.

Tezin 1.inci Bölümünde genel optimal kontrol problemlerini formüle etmek için gerekli olan n boyutlu durum uzayı tanıtılmıştır. Sürekli ve ayrık durum denklemlerinin çözümleri kısaca incelenmiş, kontrol edilebilir, gözlenebilir gibi kavramlar verilmiştir. Durum uzayı ile transfer fonksiyonu ilişkileri ve gerçekleştirme problemi ele alınmış, kararlı kılınabilme ve detekte edilebilme tanımları ve özellikleri açıklanmıştır.

Bölüm-II' de, sistem modeli durum uzayında verildiğinde ve sistem davranışı LQP ölçütüne göre değerlendirildiğinde ortaya çıkan iki ayrı optimal kontrol problemi (sabit yapı ve yarı sabit yapı) tanıtılmıştır. Bu bölümde ayrıca, LQP optimal kontrol teorisi sürekli-zamanlı ve ayrık-zamanlı sistemler için formüle edilmiş ve optimal kontrol kuralının durum geri beslemesiyle gerçekleştirilmesi probleminin çözümü ele alınmıştır. Bu genel incelemeden sonra lineer regülatör, hedef izleme ve bozucu yok etme problemlerine yöntemin nasıl uygulanabileceği açıklanmıştır. Daha sonra da, LQP probleminin sürekli-hal çözümlerinin özellikleri incelenmiş ve yakınsaklık koşulları irdelenerek örnekler verilmiştir.

Bölüm-III'de ise, kontrol edilen sistemin davranışları yerine, ölçülebilen büyüklükleri olan çıkışlar kullanılarak gerçekleştirilen optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu amaçla gözleyiciler incelenmiş ve gözleyici temelli optimal kontrolör ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiş ve geleneksel yöntemler ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Böylece, durumları tam olarak ölçülemeyen sistemlerin optimal kontrolü konusunda temel sonuçlar verilmiştir. Elde edilen optimal kontrolörlerin

genel yapısı tartışılmıştır. Ayrıca kapalı çevrimli kontrol sisteminin davranışları sürekli-zamanlı ve ayrık-zamanlı sistemler için incelenmiş kontrolörün kararlılık kriterleri verilmiştir. Elde edilen sonuçlar örnekler üzerinde tartışılmıştır.

Bölüm-IV 'de sürekli-zamanlı ve ayrık-zamanlı sistemler için Hamilton-Jacobi-Bellman denklemleri ve Pontriagin maksimum prensibi verilmiştir. Ayrıca bu bölümde durumları sınırlandırılmış optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Problemin dinamik programlamaya ilişkin formülasyonu verilmiş ve sonuçlar analitik olarak verilmese de çözümünü durum geri beslemesiyle çözülebileceği gösterilmiştir. [1]



BÖLÜM I

LİNEER DURUM DENKLEMLERİ VE ÖZELLİKLERİ

I.1 Durum Uzayı ve Durum Değişkenleri

Sürekli lineer bir sistemin dinamiğini belirleyen lineer diferansiyel denklem; giriş $u(t)$, çıkış $y(t)$, t ' de zaman olmak üzere

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \\ & = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \end{aligned} \quad (I-1)$$

biçimindedir.

Ayrık-zamanlı bir dinamik sistem ise,

$$c_0 y(i) + c_1 y(i-1) + \dots + c_n y(i-n) = d_1 u(i-1) + d_2 u(i-2) + \dots$$

i tam sayı olmak üzere lineer fark denklemiyle verilir. Kontrol teorisinin birçok konusu diğer bir gösterilim biçimi olan durum denklemlerini kullanır.

n . mertebeden bir diferansiyel denklemden

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = u$$

n adet 1. mertebeden lineer diferansiyel denklem aşağıdaki tanımlar kullanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \end{aligned}$$

O halde

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned}$$

tanımlanırsa n. denklem için

$$\dot{x}_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n - \dots - \frac{a_0}{a_n} x_1 + \frac{1}{a_n} u$$

elde edilir.

Çıkış denklemi ise $y = x_1$ şeklinde olacaktır.

Durum uzayı gösterilimi

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu$$

(I-2)

şekilde matrisel biçimde yazılır.

Ayrık- zamanlı sistemlerde ise durum uzayı gösterilimi

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \quad (I-3)$$

$$y = Cx \quad (I-4)$$

şeklindedir. Sürekli ve ayrık zamanlı durum için, sistem matrisi A, giriş matrisi B, ve çıkış matrisi C

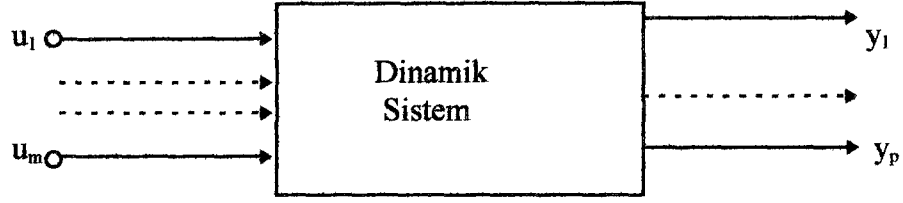
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, C = [1 \dots 0] \quad (I-5)$$

şeklinde olacaktır. Görüldüğü gibi A companion matris biçimindedir.

Durum değişkenlerinin yer aldığı x vektörüne durum vektörü, bu vektörlerle tanımlanan n boyutlu uzaya durum uzayı denir. Bu denklemlerin çözümü için n adet başlangıç değerine gereksinim vardır ve başlangıç durumu x_0 ile gösterilir.

Durum uzayının kullanılmasının ana sebebi; 1. mertebeden dinamik denklemlerin çözüm ve analizi yüksek mertebeli dinamik denklemlerin çözüm ve analizinden daha kolay olmasıdır. Diğer bir sebep; matematiksel modelin durum uzayında verilmesidir. (I-2), (I-3), (I-4) denklemleri çok girişli çok çıkışlı dinamik sistemlerin bir gösterilimi iken, (I-1) sadece tek girişli dinamik sistemlerin bir gösterilimidir. Her iki durum içinde A, B, C matrisleri sistemin tüm özelliklerini taşır.

Sistem dinamik özellikleri ve kontrol edilebilirlik A ve B'ye, transfer fonksiyonu A, B ve C'ye, gözlenebilirlik kavramı ise A ve C'ye bağlı olarak tanımlanır.



ŞEKİL 1-1: Çok değişkenli sistem

Bu bölüm aşağıdaki gibi düzenlenmiştir: I-2 ve I-3 bölümlerinde kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramlarına, I-4 bölümünde gerçekleştirme konusuna, I-5 bölümünde sistemin kontrol edilemez, gözlenemez olmasının sebeplerine yer verilmiştir.

I-2 A ve B' nin Dinamik Özellikleri:

I-2.1 Geçici Dinamikler

Lineer dinamik sistemin geçici davranışını karakteristik denklemin kökleri belirler.

Bu kökler A matrisinin öz değerleridir. (I-2) ve (I-3) denklemlerinde giriş sıfır alındığında sürekli sistemler için sistem cevabı

$$x_{CF}(t) = x(0) e^{st}$$

ayrık- zamanlı sistemler için sistem cevabı $x_{CF}(i) = x(0)s^i$ şeklindedir. Bu denklemleri $t = 0$ için çözersek;

$$sx(0) = Ax(0)e^{s0} \quad \text{ya da} \quad x(0)s^{0+1} = Ax(0)s^0$$

buradan

$$s\mathbf{x}(0) = A\mathbf{x}(0) \quad \text{ya da} \quad \mathbf{x}(0)s = A\mathbf{x}(0)$$

düzenlenirse

$$[sI - A]\mathbf{x}(0) = 0$$

elde edilir. Bu ise

$$|sI - A| = 0 \quad (I-6)$$

olması ile sağlanabilir. Bu denklemin çözümü [2] A matrisinin öz değerlerini verir.

Matris formundan, karakteristik denkleme geçilir ise

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

elde edilir. Böylece A'nın özdeğerlerinin dinamik sistemin önemli özellikleri arasında olduğu görülür.

I-2.2 Kontrol edilebilirlik

Kontrol açısından önemli olan diğer bir özellik de, x durumlarının u girişlerinden kontrol edebilmesi kavramıdır. Durum uzayında herhangi bir x_0 keyfi noktasından, seçilen diğer bir x durumuna u girişleri ile seçilebiliyorsa kontrol edilebilirdir denir. Verilen bir sistemin kontrol edilebilir olup olmadığına karar vermek kontrol teorisinin önemli bir konusudur. (I-2) ve (I-3) lineer denklemleri ile sistemin kontrol edilebilir olması giriş u ve x durumları arasındaki ilişkiye bağlıdır.

A'nın özdeğerleri farklı olduğunda, kontrol edilebilirlik matris denklemleri köşegenleştirme işlemleri ile incelenebilir. Köşegenleştirme işlemi; durumlara uygun bir benzerlik dönüşümü yapılarak gerçekleştirilir. Yani X, A'nın modal matrisi [3] olmak üzere

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{x}$$

şeklinde yapılır. Bu ilişki; (I-2) yada (I-3) denklemlerinde kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{c}} \text{ yada } \mathbf{c}(i+1) &= \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{c} + \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \\ &= \mathbf{S} \mathbf{c} + \mathbf{B}^* \mathbf{u} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada “S” özdeğerlerin yer aldığı köşegen matrisdir ve

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{B}$$

şeklinde dir. $\mathbf{u}$ girişleri ile $\mathbf{c}$ durumları arasındaki herhangi bir bağlantı $\mathbf{B}^*$ matrisi üzerinden olması gerektiğinden yeni durum değişkenleri için bu dönüşüm

$$\bar{c}_j \quad \text{yada} \quad c_j = s_j c_j + (b_{j1} u_1 + \dots + b_{jm} u_m) \quad j = 1, \dots, n$$

şeklinde verilir. $\mathbf{B}^*$ matrisinin j .inci satırı sıfırsa, buna karşılık gelen c_j durumu herhangi bir $\mathbf{u}$ girişinden etkilenmeyebilir ve tüm diğer durumlardan da etkilenmeyeceğinden kontrol edilemeyecektir.

A'nın özdeğerleri katlı ise köşegenleştirme çok basit değildir ve kontrol edilebilme durumu $\mathbf{B}^*$ 'nin terimlerinde gösterilmeyebilir. Genel olarak hem sürekli-zaman hem de ayrık-zamanlı lineer zamanla değişmeyen sistemlerin kontrol edilebilirliği için gerek ve yeter koşul [4] , [5]; A'nın özdeğerlerinin farklı olup olmadığına bakılmaksızın $(n \times m)$ boyutundaki $\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}$ matrislerinden oluşan $n \times nm$ boyutundaki $\mathbf{M}_c$ matrisinin

$$\mathbf{M}_c \equiv [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] \quad (\text{I-7})$$

rankının n olmasıdır. Yukarıda genel durum olarak verilen kontrol edilebilirlik kavramı, eğer sistem tek $\mathbf{u}$ girişine sahip bir ayrık-zamanlı sistem için incelenirse;

$$x(i + 1) = Ax(i) + bu(i) \quad (I-8)$$

biçimindedir, ve giriş matrisi 'B' yerine $(n \times 1)$ boyutlu giriş vektörü gelecektir. Bu durumda kontrol edilebilirlik kavramı, keyfi bir $x_0(t)$ başlangıç durumundan diğer bir $x(i)$ durumuna sonlu $u(i)$ giriş dizisi ile gidilebilmesi olarak tanımlanacaktır. Sistem derecesi n ise, bu sonlu değer " n " olacaktır.

I-3 Çıkışlar

Genel olarak kontrol edilen sistemlerde x durumu y sistem çıkışından alınarak doğrudan gözlenemez. Çıkışlarının sayısı olan p genellikle n durum sayısından büyüktür. Klasik kontrol teorisinde $p = 1$ alınır ve y skalerdir. Genel olarak çıkış denklemi (I-4)'deki gibi ise; cebirsel yapıdadır.

I-3.1 Gözlenebilirlik

Geri beslemeye bakış açısından en önemli özelliklerden biri de x durumları hakkında bilginin (y çıkışlarından tam) elde edilip edilememesidir. Eğer, bir sistemde $u = 0$ için y çıkışlarının o andaki ve geçmişteki değerlerinden yararlanarak x durumlarının değerleri hesaplabiliyorsa, bu sisteme gözlenebilirdir denir. Verilen bir sistemin gözlenebilir olması durumu geri besleme ile kontrol edilebilmesinin ön koşuludur. Lineer sistemler için gözlenebilirlik x durumları ve y çıkışları arasındaki ilişkiye bağlı olup A ve C matrisleri ile karar verilebilir.

Gözlenebilirlik analizi, Bölüm I-2.2' deki kontrol edilebilirlik analizine benzerdir. Eğer A 'nın özdeğerleri farklı ise modal matris " X " olmak üzere

$$C^* = CX$$

şeklinde benzerlik dönüşümü yapılır. Hem sürekli-zamanlı hem de ayrık-zamanlı lineer zamanla değişmeyen sistemlerin gözlenebilirliği için gerek ve yeter koşul; $n \times n$ boyutundaki gözlenebilirlik matrisi M_o 'nun rankının n olmasıdır. M_o matrisi

$$M_o = [C^T A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T] \quad (I-9)$$

şeklinde tanımlanır.

I-3.2 Transfer Fonksiyonları

Lineer sistem A $n \times n$, B $n \times m$ ve C $p \times n$ boyutunda üçlü matrisler ile verildiğinde, sistemin transfer matrisi; m tane u girişlerinin p tane y çıkış değişkenlerine olan bağıllığını veren $(p \times m)$ boyutlu rasyonel bir matristir.

Sürekli-zamanlı sistemler için, (I-2) dinamik denklemlerinin ve (I-4) çıkış denklemlerinin Laplace dönüşümü alınarak

$$sX(s) = A X(s) + BU(s) \quad , \quad Y(s) = C X(s)$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrık-zamanlı sistemler için, (I-3) dinamik denklemlerinin ve (I-4) çıkış denklemlerinin z - dönüşümü alındığında özdeş denklemleri, z -domeninde

$$zX(z) = AX(z) + BU(z) \quad , \quad Y(z) = CX(z)$$

elde ederiz.

Transfer fonksiyonlarını, transfer değişkenlerinin her iki tipi için uygun transfer değişkeni s yada z 'yi göstermek üzere $\bullet$ şeklindeki birleştirilmiş gösterilimi kullanarak tek formda yazabiliriz.

İki eşitlik grubundan $X(\bullet)$ elimine ederek

$$Y(\bullet) = G(\bullet)U(\bullet)$$

transfer fonksiyonu

$$G(\bullet) = C[\bullet I - A]^{-1}B \quad (I-10)$$

şeklinde boyutu $p \times m$ olan bir rasyonel matristir. Daha uygun bir gösterilişi [3]

$$G(\bullet) = \frac{C \text{ adj}(\bullet I - A)B}{|\bullet I - A|}$$

biçiminde olur. Bu gösterilimde $|\bullet I - A|$ karakteristik polinomun derecesi n ve orjinal matrisin kofaktörünün her bir elemanı $(n - 1)$ derecedeki başka bir polinomdur. Böylece $G(\bullet)$ 'nin her elemanı,

$$G(\bullet) = \frac{C_0 + C_1\bullet + \dots + C_{n-1}\bullet^{n-1}}{d_0 + d_1\bullet + \dots + d_{n-1}\bullet^{n-1} + \bullet^n} \quad (I-11)$$

şeklinde bir tranfer fonksiyonudur. Burada her terimde payda polinomları birbirleri ile aynı, pay polinomları ise farklı olacaktır.

Buradan, karakteristik denklemin köklerinin ve transfer fonksiyonunun kutuplarının A matrisinin özdeğerleri olduğu görülür.

I-4 Durum Uzayı Gerçeklemeleri

Durum uzayı modeli A, B, C matrislerinin verilen transfer fonksiyonu $G(s)$ 'den bulunması işlemi gerçekleştirme olarak bilinir. Bu karşı düşürme bire bir değildir. Her durum uzayı modeli $C[sI - A]^{-1}B$ ile verilen tek bir transfer fonksiyonuna sahiptir, fakat her transfer fonksiyonuna karşı düşen sonsuz sayıda durum uzayı modeli vardır. Gerçeklemenin tek olmamasının iki sebebi vardır:

1- Durum değişkenleri, transfer fonksiyonuna etki etmeksizin belirlenebilir.

Bunu Bölüm I-4.1'de inceleyeceğiz.

2- Sistemin dinamik sistem özellikleri benzerlik dönüşümü altında değişmezdir.

Gereksiz tekrardan sakınmak için sürekli-zamanlı sistemler incelenip, sonuçlar ayrık- zamanlı sistemlere aktarılacaktır.

Burada genel durum incelenecektir, böylece tek giriş-tek çıkış (SİSO) durumu incelenmiş olacaktır.

I-4.1 Ek Durum Değişkenleri

$G(s)$ 'e karşı düşen bir durum modeli A_1 , B_1 , C_1 , ve x_1 orjinal sistemin durum değişkeni olsun. Bu durum için

$$G(s) = C_1 \text{adj} \frac{(sI - A_1) B_1}{|sI - A_1|}$$

dir.

Böyle İlave Durumlar :

1-Gözlenemeyen durumlar seti x_2

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = C_1 x_1$$

şeklinde sisteme eklendiğinde, yeni durum için; durum ve çıkış denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir ve transfer fonksiyon matrisi

$$G(s) = G(s)^*$$

dır.

Yol gösterme:

$$\left\{ sI - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} sI - A_1 & 0 \\ A_{21} & sI - A_2 \end{bmatrix}$$

2-Kontrol edilemeyen x_3 durumları

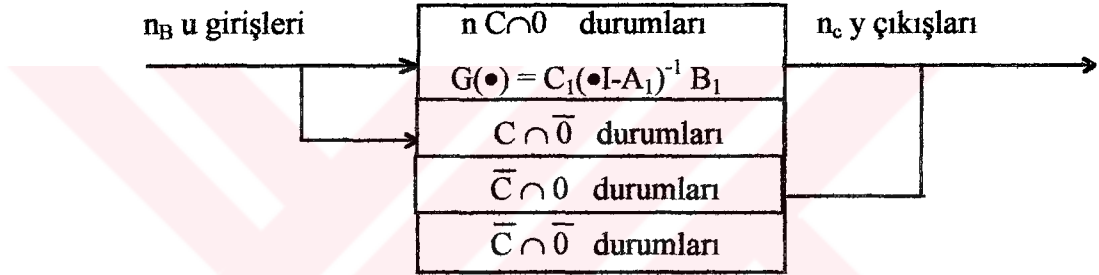
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{13} \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

sisteme yukarıdaki gibi ilave edilirse; sistemin transfer fonksiyonunun bu durumdan etkilenmeyeceği açıktır.

Eğer, gerçekleştirme hem gözlenemez, hemde kontrol edilemez ek durumları aynı anda içerirse aşağıdaki yapıda durum modeli elde edilir.

$$A_4 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_2 & A_{23} \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_4 = [C_1 \ 0 \ C_3]$$

Açıkça görüldüğü gibi bu durum içinde, transfer fonksiyonu aynı kalacaktır. Genel blok diagramı Şekil I-2’de verilmiştir.



ŞEKİL I-2: Transfer Fonksiyonuna Etki Etmeyen Tüm Durumlar

Şekil I-2’deki diagram durum tiplerinin dört alt bölüme ayrılabilmesinin nasıl mümkün olabileceğini gösterir: hem kontrol edilebilir hemde gözlenebilir durumlar, kontrol edilebilir ama gözlenemez durumlar, kontrol edilemez ama gözlenebilir durumlar, ne kontrol edilebilir ne de gözlenebilir durumlar.

Hem kontrol edilebilir, hem de gözlenebilir durumların sayısı transfer fonksiyonunun derecesi ile aynıdır. O halde, minimal bir gerçekleştirme için gerek ve yeter koşul [4]; elde edilen durum modelinin hem kontrol edilebilir, hem de gözlenebilir olmasıdır. Bu durum; elde edilen durum matrisinin durum sayısının transfer fonksiyonunun derecesi ile aynı olması ile ortaya çıkar.

I-4.2 Benzerlik Dönüşümleri :

Durum uzayı modeli, sistem davranışını n boyutlu durum uzayında yörüngeler olarak gösterir. Eğer x , durum uzayında belirlenmiş lineer bağımsız bir koordinat seti

$x_T = Tx$ başka bir koordinat seti ise

T tekil olmayan olmak koşuluyla $x = T^{-1} x_T$ 'i

$$\dot{\bar{x}} = Ax + Bu, \quad y = Cx$$

'de yerine koyarak

$$T^{-1}\dot{\bar{x}}_T = AT^{-1}x_T + Bu, \quad y = CT^{-1}x_T$$

yazabiliriz. T ile dinamik denklemi çarparsak

$$\dot{\bar{x}}_T = TAT^{-1}x_T + TBu$$

bulunur ve elde edilen yeni durum modeli

$$A_T \equiv TAT^{-1}, \quad B_T \equiv TB, \quad C_T \equiv CT^{-1} \quad (I-12)$$

$$\dot{\bar{x}}_T = A_T x_T + B_T u, \quad y = C_T x_T$$

dir. Giriş-çıkış ilişkilerini yeniden eklersek

$$G(s) = C_T[sI - A_T]B_T = C[sI - A]B$$

elde edilir. Burada A_T 'nin özdeğerleri A 'nın özdeğerleriyle aynıdır.

Böylece verilen herhangi bir A , B , C gerçeğemesi için; T herhangi bir tekil olmayan matris olma koşulu altında (I-12) denklemiyle belirlendiği gibi sonsuz sayıda eşdeğer gerçeğlemeler elde edilecektir.

I-4.3 SISO Sistemleri İçin Gerçekleme

SISO sürekli-zamanlı sistemler için genel olarak

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (I-13)$$

durum değişkenlerinin standart bir grubu

$$x(t) \equiv T_1 \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} + T_2 \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I-14)$$

$$T_1 \equiv \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad T_2 \equiv \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & \cdot & -b_m \\ -b_2 & \cdot & \cdot & b_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -b_m & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

denklemleri ile verilir.

Benzer şekilde ayrık-zamanlı sistem denklemlerini genelleştirmek için de

$$y(i) + \dots + a_1 y(i - n + 1) + a_0 y(i - n) = b_m x(i - n + m) + \dots + b_0 x(i - n) \quad (I-15)$$

$$x(i) \equiv T_3 \begin{bmatrix} y(i) \\ y(i-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ y(i-n+1) \end{bmatrix} + T_4 \begin{bmatrix} u(i-n+m) \\ \cdot \\ \cdot \\ u(i-n+2) \\ u(i-n+1) \end{bmatrix} \quad (I-16)$$

$$T_3 \equiv \begin{bmatrix} -a_0 & & & & \\ -a_1 & -a_0 & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ -a_{n-2} & \cdot & \cdot & & -a_0 \\ 1 & & & & \end{bmatrix}, \quad T_4 \equiv \begin{bmatrix} b_0 & & & & \\ b_1 & b_0 & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ b_{m-1} & \cdot & \cdot & b_0 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

denklemleri kullanılır.

A companion matris [6] olduğundan durum denklemleri; hem sürekli-zamanlı sistemler için (I-2) ve hem de ayrık-zamanlı sistemler için (I-3) aynı A, B matrislerine sahip ve çıkış denklemi (I-4) aynı C'ye sahip olması yukarıdaki denklemlerin bir özelliğidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_0 \\ 1 & & & & -a_1 \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1-a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}, \quad C = [0, \dots, 0, 1] \quad (I-17)$$

I-5 Kontrol Edilememe ve Gözlenememe

Herhangibir durum uzayı modelinin kontrol edilemeyen ve gözlenemeyen durumlara sahip olup olmadığının bilinmesi teorik bir önem taşır. Bu konu, transfer fonksiyonunun derecesi ile durumların sayısının karşılaştırılması ile çözülür.

Bölüm I-4.1'de anlatıldığı gibi transfer fonksiyonlarının derecesi ile durumların sayısı aynı olduğunda elde edilen gerçekleştirme minimaldir. Yani, model hem

gözlenebilir hemde kontrol edilebilirdir. Eğer, transfer fonksiyonunun derecesi bilinmiyorsa bu problem; Bölüm I-2.2 ve I-2.3'de incelendiği gibi (I-7) ve (I-8) denklemleri M_c ve M_o kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik matrislerinin ranklarının incelenmesi ile çözülebilir.

Çok daha pratik bir problem ise; gerçek sistemin matematik modelinde gözlenemeyen ve kontrol edilemeyen durumların neden ortaya çıktığı sorusudur. Bu sorunun cevabı; kontrol edilemeyen, gözlenemeyen veya hem kontrol edilemeyen, hemde gözlenemeyen iç değişkenlerin varolmasıdır. Buna bir örnek;

$\ddot{x}_1 = 0$ diferansiyel denklemini sağlayan keyfi sabit x_1 yörünge pozisyonu ile yönetilebilen sistemin transfer fonksiyonu

$Y(s)/U(s) = 1/Js^2$ dir. Bu sistemin transfer fonksiyonu;

$x_2 \equiv y$; $x_3 \equiv \dot{y}$ iki durum değişkeni kullanılarak (I-2) ve (I-4) biçiminde gerçekleştirir. x_1 yörüngesinin kontrol edilemezliği kontrol edilebilirlik matrisinin

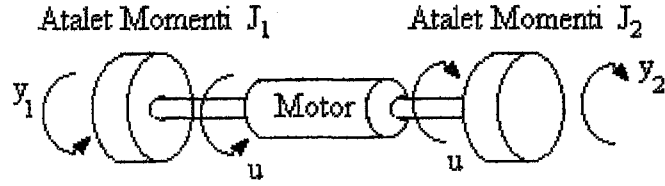
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix}, \quad M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J & 0 \\ 1/J & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rankının $\text{rank } M_c = 2 < 3$ olması ile ortaya çıkar.

Kontrol edilememe ve gözlenememenin diğer nedeni; gerçeklemenin cebrik denklemlerinden görülebilir. Benzer sebeplerden birisi (I-5.1'de incelenen gibi); durumlar arasındaki ilişki ve girişlerin / çıkışların herikisinin yada birinin lineer bağımsız olmamasıdır. Diğer bir sebepte (Bölüm I-5.2'de incelenen gibi); sistem dinamiği bir alt sistemin dinamiği ile aynı olmasına rağmen kontrol edilemeyen veya gözlenemeyen alt sistemlere sahip olmasıdır. Üçüncü sebep (Bölüm I-5.3'de incelenen gibi); transfer fonksiyonundaki kutup-sıfır silmesidir.

Kontrol açısından daha önemli bir sorun, kontrol edilemeyen veya gözlenemeyen durumların kararlı olup olmadığıdır. Bu problem Bölüm I-5.4'de açıklanacaktır.

I-5.1 Etkileşimsizlik Durumu



ŞEKİL I-3: Kontrol Edilemeyen Bir Sistem Örneği

Şekil I-3’de aralarında mekanik bağlantı olmadığını hayal ettiğimiz yükü döndüren tek bir motordan oluşan bir sistem gösterilmiştir. Bu sistem; u momentini üreten motorun rotoruna J_2 yükü, statoruna J_1 yükü bağlanarak oluşmuştur.

Kontrol edilen sistemin diferansiyel denklemi

$$\ddot{J}_1 y_1 = u$$

$$\ddot{J}_2 y_2 = u$$

ve transfer fonksiyonu

$$\begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{U(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{U(s)} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 \\ J_1 \\ 1 \\ J_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. İki yükün hareketini tamamlayabilmek için durum değişkenleri sayısı 4 olmalıdır. Örneğin;

$$x_1 \equiv y_1 \quad ; \quad x_2 \equiv \dot{y}_1 \quad ; \quad x_3 \equiv y_2 \quad ; \quad x_4 \equiv \dot{y}_2$$

dır. Yukarıdaki durum değişkenleri ile durum uzayı gerçekleştirilmesinin derecesi ‘‘4’’ tür.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \\ 1/J_2 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

Kontrol edilebilirlik matrisi (1-7)

$$M_C = \begin{bmatrix} 0 & 1/J_1 & 0 & 0 \\ 1/J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/J_2 & 0 & 0 \\ 1/J_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir ve gözlenebilirlik matrisi (I-9) ise

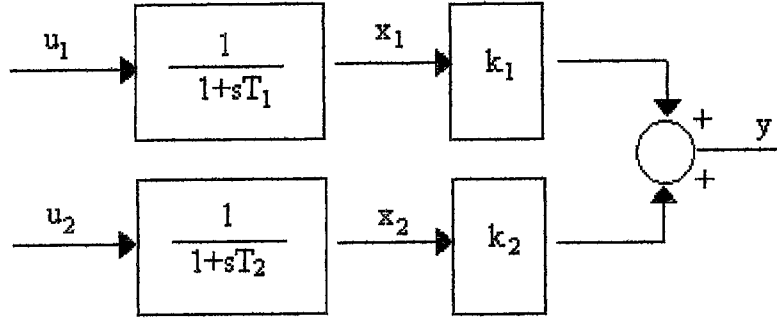
$$M_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. M_c ve M_o 'nun rankları 2 olduğu için sistem hem kontrol edilemez, hem de gözlenemezdir. Bu durumun nedeni; (x_1, x_2) ve (x_3, x_4) durumları birbirini etkilemeyen iki alt sistemi oluşturuyor ve u girişinin her ikisini sürüyor olmasıdır. Sistemin kontrol edilebilir olması ancak iki alt sistemin girişlerinin lineer bağımsız olmasıyla mümkündür.

Matematiksel analiz, fiziksel olarak hissettiklerimizi doğrulamış oldu. Bir motorun ürettiği kinetik enerji birbirinden bağımsız iki yüke paylaştırılmaz.

I-5.2 Özdeş Dinamiklere Sahip Alt Sistemler

Şekil I-4’de y çıkışını üretmek için çıkışları toplanan, T_1 ve T_2 gibi zaman sabitlerine sahip, iki benzer alt sistemin oluşturduğu bir sistem gösterilmiştir.



ŞEKİL I-4: Benzer Alt sistemler

Bu y çıkışından iki durum değişkeni x_1 ve x_2 hakkında bilgi elde etmek için durumlara bağlı olarak y’deki değişimin ne olduğunu bilmek gerekir. Bilindiği gibi, I-3.1’de tanımlanan gözlenebilir durumların y’den u girişleri sıfır iken bilgi elde edilebilme kavramıdır.

Matematiksel analizde x_1 ve x_2 durum değişkenleri kullanılırsa sistem gerçekleştirilmesi

$$A = \begin{bmatrix} -1/T_1 & 0 \\ 0 & -1/T_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/T_1 \\ 1/T_2 \end{bmatrix}, \quad C = [k_1 \quad k_2]$$

biçimindedir.

I-9 denkleminde gözlenebilirlik matrisi

$$M_o = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1/T_1 \\ k_2 & -k_2/T_2 \end{bmatrix}$$

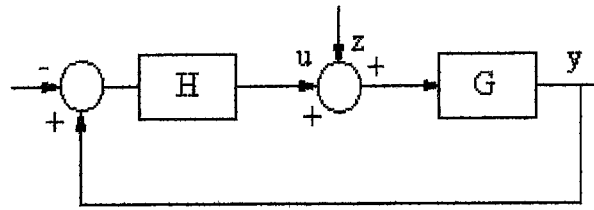
ve determinantı

$|M_o| = k_1 k_2 [-1/T_2 + 1/T_1]$ şeklinde elde edilir. Böylece gözlenebilirlik için ;

$T_1 \neq T_2$ olması gerektiği ortaya çıkar.

I-5.3 Kutup-Sıfır Yok Etmesi

Birçok kontrol sisteminde Şekil I-5’de görüldüğü gibi kontrolör, kontrol edilen sisteme kaskad olarak bağlıdır. Bu durumda

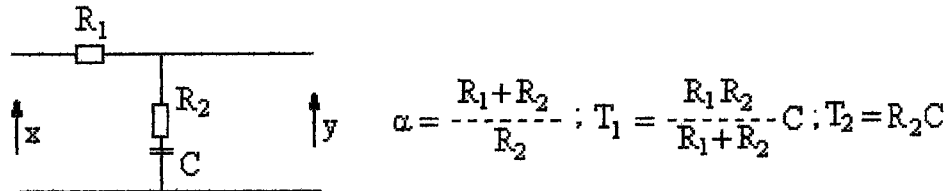


ŞEKİL I-5: Lineer Kontrol Sistemi

Kontrolör ile sistemin derecesi $n_H + n_G$ olacaktır. Burada; kontrolör derecesi n_H , sistemin derecesi n_G 'dir.

Patalojik bir durum; sistemin bir kutbu veya sıfırı ile kontrolörün bir sıfırı veya kutbu silinmesi durumudur. Bu durumda tüm sistemin minimal gerçekleştirilmesi $n_H + n_G$ 'den daha düşük dereceli olacaktır.

Minimal dereceli transfer fonksiyonu analiz edilirse, tüm fiziksel değişkenlerin incelenmiş olmayacağı açıktır. Buna bir örnek olmak üzere aşağıdaki kontrolör verilebilir:



sistemin transfer fonksiyonu

$$H(s) = K_1 \frac{1 + sT_1}{1 + s\alpha T_1}$$

dir. Bu kontrolörü kullanan sistem

$$G(s) = \frac{K_2}{1+sT_2}$$

olsun. Tüm sistemin açık-çevrim transfer fonksiyonu,

$$HG(s) = K_1 K_2 \frac{1+sT_1}{(1+s\alpha T_1)(1+sT_2)}$$

dir. Genel olarak sistem derecesi $n_H + n_g = 2$ dir. Fakat $T_1 = T_2$ olduğunda sıfır kutup silinmesi olacağından, sistem derecesi “1” düşecektir. Silinen kutba ilişkin durumun kontrol edilemeyeceği açıktır.

I-5.4 Kararlı Kılınabilme, Detekte Edilebilme

Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik geri beslemeli kontrol da bir sistemin istenen özellikleri olarak Bölüm I-2.2 ve I-3.1’de anlatıldı. İstenmesine rağmen tüm uygulamalar için bu koşullara uymayan sistemlerle karşılaşılabilir. Bu durumda hiç olmazsa sistemin geri besleme ile kontrol edilemeyen durumlarının kararlı kılınabilmesi istenir. Çünkü kararlılık, bir kontrol sisteminin sahip olması gereken vazgeçilmez koşuldur. Bu özellikler aşağıdaki gibi tanımlanır. [7]

Kararlı Kılınabilir Yapabilme

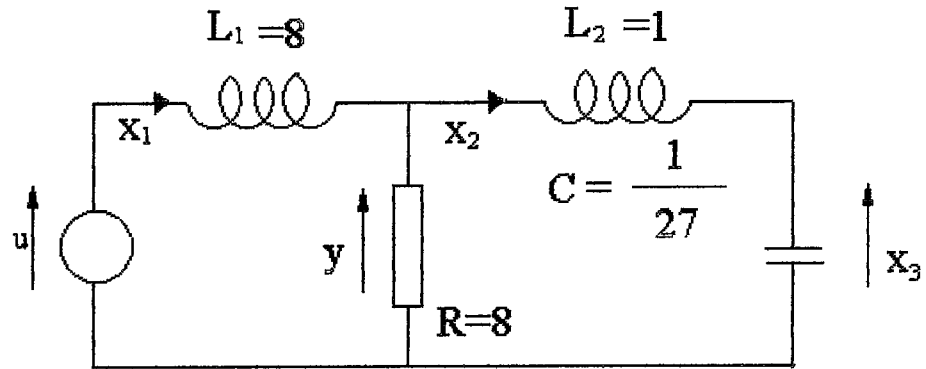
Bir sistemde kararsız durumlar kontrol edilebilir ise bu sisteme “Kararlı Kılınabilir” denir.

Detekte Edilebilme

Bir sistemde kararsız durumlar gözlenebiliyorsa bu sisteme “ Detekte Edilebilir” denir.

I-6 Örnekler

Örnek :1



Şekildeki sistemin durum denklemlerini

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx}$$

biçiminde elde edelim.

$$8 \frac{di_1}{dt} + 8(i_1 - i_2) = u \Rightarrow 8 \frac{di_1}{dt} = -8i_1 + 8i_2 + u \quad (1)$$

$$\frac{di_2}{dt} + 8(i_2 - i_1) = x_3 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 8i_1 - 8i_2 + x_3 \quad (2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -27i_2 \Rightarrow \frac{dx_3}{dt} = -27i_2 \quad (3)$$

$$x_1 \equiv i_1 \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} \equiv \frac{di_1}{dt}$$

$$x_2 \equiv i_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{di_2}{dt} \equiv \dot{x}_2$$

$$(1): \frac{di_1}{dt} = -i_1 + i_2 + \frac{1}{8}u \Rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + \frac{1}{8}u$$

$$(2): \frac{di_2}{dt} = 8i_1 - 8i_2 + x_3 \Rightarrow \dot{x}_2 = 8x_1 - 8x_2 + x_3$$

$$(3): \frac{dx_3}{dt} = -27i_2 \quad \dot{x}_3 = -27x_2$$

$$y = 8(i_1 - i_2) = 8(x_1 - x_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 8 & -8 & 1 \\ 0 & -27 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_B u$$

$$y = \underbrace{[8 \quad -8 \quad 0]}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sistemin transfer fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \Rightarrow sX(s) = X(s) + BU(s) \\ y &= Cx \quad [sI - A]X(s) = BU(s) \\ &\quad X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = CX(s)$$

$$Y(s) = C[sI - A]^{-1} BU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B = G(s)$$

$$G(s) = [8 \quad -8 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & s+1 & -1/8 \\ 0 & 27 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & s+1 & -1/8 \\ 0 & 27 & s \end{bmatrix} = (s+3)^3$$

$$G(s) = [8 \quad -8 \quad 0] \frac{1}{(s+3)^2} \begin{bmatrix} s(s+1)+27/8 & s & 1/8 \\ s & s(s+1) & (s+1)/8 \\ -27 & 27(s+1) & s(s+9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = [8 \quad -8 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{s^2 + 8s + 27}{8(s+3)^3} \\ \frac{s}{(s+3)^3} \\ \frac{-27}{(s+3)^3} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 27}{(s+3)^3}$$

biçimindedir. Sistemin kontrol edilebilirliğini ve gözlenebilirliğini inceliyelim;

$$(s + 3)^3 = 0$$

kökler;

$$(s + 3)(s + 3)(s + 3) = 0$$

$$s_1 = -3$$

$$s_2 = -3$$

$$s_3 = -3$$

biçimindedir.

$$M_C = [B \quad AB \quad A^2B]$$

AB ve A^2B hesaplanıp yerine yerleştirilse

$$M_C = \begin{bmatrix} 1/8 & -1/8 & 9/8 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -27 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Rank = 3 olduğundan sistem kontrol edilebilir.

$$M_O = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T]$$

$A^T C^T$ ve $(A^T)^2 C^T$ hesaplanıp yerine yerleştirilirse

$$M_o = \begin{bmatrix} 8 & -216 & 7344 \\ 0 & 216 & 8856 \\ 0 & 0 & -108648 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Rank = 3 olduğundan sistem gözlenebilirdir.

Örnek :2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C = [1 \quad 1]$$

durum uzayı gerçeklemesine sahip bir sistemin transfer fonksiyonu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = C [sI - A]^{-1} B$$

$$H(s) = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = [1 \quad 1] \frac{1}{(s-1)^2 - 1} \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

matematiksel işlemler yapılarak

$$H(s) = \frac{2}{s-2}$$

elde edilir. Bu sistemin kontrol edilebilirliğini ve gözlenebilirliğini inceleyelim:

$$M_C = [B \quad AB]$$

Matrisel işlemler yapılarak

$$M_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir, rank = 1 olduğundan kontrol edilemez,

$$M_O = [C^T \quad A^T C^T]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

rank = 1 olduğundan sistem gözlenemezdir.

Örnek :3

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2 \quad 1] x$$

durum denklemleri verilen bir sistemin köşegenleştirme işlemi yapılarak kontrol edilebilir, gözlenebilir, kararlı kılınabilir ve detekte edilebilir olup olmadığını inceleyelim.

$$\det [sI-A] = \det \begin{bmatrix} s-1 & -3 & -2 \\ 0 & s+2 & 2 \\ 0 & -1 & s-1 \end{bmatrix} = s(s-1)(s+1)$$

Kökler: $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ ve $s_3 = -1$ dir.

$\lambda_1 = 0$ için :

$$[A-\lambda_1 I] = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda_1 & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_1 = -B_1 = C_1$$

$\lambda_2 = 1$ için:

$$[A-\lambda_2 I] = \begin{bmatrix} 1-\lambda_2 & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda_2 & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B_2 = C_2 = 0$$

$\lambda_3 = -1$ için:

$$[A-\lambda_3 I] = \begin{bmatrix} 1-\lambda_3 & 3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda_3 & -2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A_3 = 2C_3 = -B_3$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b^* = X^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C^* = [1 \quad 2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [2 \quad 2 \quad 1]$$

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \quad 2 \quad 1] z$$

$$M_C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kontrol edilemez.}$$

$$M_O = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{gözlenemez.}$$

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B$$

$$= [2 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1/s & 0 & 0 \\ 0 & 1/(s-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(s+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= [2 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} 1/s \\ 1/(s-1) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s-1}$$

$$G(s) = \frac{2(2s-1)}{s(s-1)}$$

Bu durumda sistem kontrol edilebilir, gözlenebilir. Kararsız durum kararlı hale getirilebildiğinden kararlı kılınabilir, bu durum gözlenebilir olduğundan detekte edilebilir.

BÖLÜM II

OPTIMAL LQP KONTROL

II-1 Giriş

En önemli teorik sorulardan biri sistemi istenilen biçimde davranışa iten giriş işaretinin en iyisi veya optimal olmanın hangisi olduğu sorusudur. Sistem davranışı durum uzayında verildiği zaman ve performans bir skaler fonksiyon ile ölçüldüğünde matematiksel olarak iki sınıf optimal kontrol problemi ortaya çıkar:

Sabit yapı : Bu problemde kontrolör yapısı sabittir. Sadece kontrolör parametreleri için optimal değerler bulunur.

Yarı Sabit Yapı : Kontrolör yapısı belirlenmemiştir, fakat kontrol edilen sisteme optimal performans verdirecek şekilde belirlenir. Bu, aynı zamanda optimal kontrol teorisi olarak bilinir. Buradan bu konu, LQP ile gösterilen lineer, karesel performans kriteri ile kontrol olarak incelenecektir. Bölüm-IV’de ise daha genel optimal kontrol teorisi ele alınacaktır. Bu bölümde; optimal kavramı sadece bir kriterin minimize edilmesi değil, aynı zamanda erişilebilir davranışları da ele alınacaktır, ve bunlara ilişkin genel bir ölçme kriteri verilecektir.

Bölüm II-4’de LQP’nin regülatör problemi ile ilgili genel sonuçların zamanla değişen bozucuların izole edilmesi problemlerine nasıl uygulandığını inceleyeceğiz. Bölüm II-5’de zamanla değişmeyen klasik kontrol kurallarının LQP’nin sürekli haline nasıl karşı düştüğü açıklanacaktır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar lineer sistemlerin optimal kontrolü için geneldir.

II-2 Optimal Kontrol Teorisi İçin LQP'ye Giriş

Sürekli-zamanlı sistemler durum uzayı modeli

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{II-1a})$$

olsun ve performans ölçütü ise

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\mathbf{u})dt \quad (\text{II-2a})$$

şeklinde verilsin.

Veya ayrık-zamanlı sistemler için ise aynı yapı

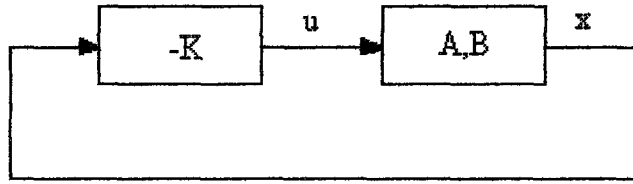
$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{II-1b})$$

$$I = \sum_{i_1}^{i_2} (\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}\mathbf{u}), \quad (\text{II-2b})$$

şeklindedir. Optimal kontrol işareti $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ durumları ile orantılıdır ve Şekil II-1'deki gibi,

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (\text{II-3})$$

lineer geri besleme formunda gösterilebilir.



ŞEKİL II-1: Optimal Lineer Geri Besleme

Problemi belirleyen A, B, P, Q matrisleri genelde zamanla değişen olabilir ve bu durumda çözümü belirleyen K matrisi de zamanla değişen olacaktır.

Yukarıdaki sonucu ve K'yı belirleyen denklemlere bizi götüren genel analiz Bölüm-IV'ün konusu olan optimal kontrolün genel denklemlerini kullanır. LQP'nin sonuçları basitlik açısından skaler LQP problemleri olarak incelenecektir.

Bölüm II-2-1 denklemleri basit, skaler, ayrık-zamanlı probleminin optimal kontrolü için türetilmiştir. Bu yöntem, Bölüm-IV'te anlatıldığı gibi optimal kontrol teorisinin esası olan genel dinamik programlama metodunun basit bir versiyonu olarak kullanılır.

II-2.1 Ayrık-Zamanlı Skaler Problem

LQP probleminin basit bir tanıtımı için tek u girişine sahip kontrol edilen sistemin ayrık-zamanlı durum denklemi

$$x(i+1) = ax(i) + bu(i) \quad (\text{II-4})$$

ve performans ölçütü

$$I = \sum_{i=i_1}^{i_2} (px^2(i) + qu^2(i)) \quad (\text{II-5})$$

şeklinde verilmiş olsun. Burada p, q, a, b negatif olmayan ve zamandan bağımsız parametreler olsun.

Optimal kontrolü belirlemek için çıkış noktası; $i > i_1$ olmak koşuluyla herhangi bir $x(i)$ durumu, başlangıç $x(i_1)$ 'ye ve $u(i_1), \dots, u(i-1)$ kontrol girişine bağlıdır. (II-5) denklemi

$$I = px^2(i_1) + qu^2(i_1) + p(ax(i_1) + bu(i_1))^2 + qu^2(i_1 + 1) + p(a(ax(i_1) + bu(i_1)) + bu(i_1 + 1))^2 + qu^2(i_1 + 2) + \dots + qu^2(i_2)$$

şeklinde başlangıç koşulu $x(i_1)$ 'e ve kontrol girişlerine bağlı olarak yazılır. Adım sayısı

$N = i_2 - i_1 + 1$ olmak üzere aşağıdaki tanıımı yapılarak

$$I \equiv I_N(x(i_1), u(i_1), u(i_1 + 1), \dots, u(i_2))$$

I 'nin optimal değeri I_N^* , I_N 'nin $u(i_1), \dots, u(i_2)$ giriş dizisine ve $x(i_1)$ başlangıç koşuluna göre N üzerinden minimize edilmesiyle

$$\min_{u(i_1), \dots, u(i_2)} \{ I_N(x(i_1), u(i_1), u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)) \} \equiv I_N^*(x(i_1)) \quad (II-6)$$

şeklinde elde edilir. Aşağıdaki işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} I_N^*(x(i_1)) &= \min_{u(i_1), u(i_1+1), \dots, u(i_2)} (I_N) \\ &= \min_{u(i_1), u(i_1+1), \dots, u(i_2)} (px^2(i_1) + qu^2(i_1) + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=i_1+1}^{i_2} (px^2(i) + qu^2(i)) \\
& = \min_{u(i_1)} (px^2(i_1) + qu^2(i_1) \\
& \quad + \min_{u(i_1+1), \dots, u(i_2)} (I_{N-1}(ax(i_1) + bu(i_1), u(i_1+1), \dots, u(i_2))))
\end{aligned}$$

rekürsif yapıya aşağıdaki tanımlar ile geçilir. I_N 'deki birinci terim $px^2(i_1) + qu^2(i_1)$ dir. Geriye kalan terim ise

$$I_{N-1}^*(x(i_1+1)) = I_{N-1}^*(ax(i_1) + bu(i_1))$$

şeklindedir. Optimal değer I_N^* 'de başlangıç durumu $x(i_1)$ ve kontrol $u(i_1)$ yerine x, u yazılarak

$$I_N^*(x) = \min_u (px^2 + qu^2 + I_{N-1}^*(ax + bu)) \quad (\text{II-7})$$

elde edilir.

N 'nin tüm değerleri için matematiksel tümevarımla optimal performans

$$I_N^*(x) = v_N x^2 \quad (\text{II-8})$$

şeklinde olduğu ve bunu veren optimal kontrol girişlerinin

$$u_N = -k_N x \quad (\text{II-9})$$

şeklinde olacağı açıktır.

Tümevarımla (II-8) denklemini kullanarak

$$I_{N-1}^*(x) = v_{N-1} x^2$$

elde edilir. (II-7) denklemini yeniden yazarsak

$$I_N^*(x) = \min_u (px^2 + qu^2 + v_{N-1}(ax+bu)^2)$$

dır. (II-9) denkleminde

$$I_N^*(x) = v_N x^2 = \min_u (px^2 + qu^2 + v_{N-1}(ax + bu)^2)$$

$$v_N x^2 = px^2 + qu^2 + v_{N-1}(a^2 x^2 + 2axbu + b^2 u^2)$$

$$u_N = -k_N x$$

yerine konursa

$$k_N = \frac{a b v_{N-1}}{q + b^2 v_{N-1}} \quad (\text{II-10})$$

ve

$$v_N = p + a^2 v_{N-1} - \frac{a^2 b^2 v_{N-1}^2}{q + b^2 v_{N-1}} \quad (\text{II-11})$$

ve

$$I_N = v_N x^2$$

buradan

$$I_N^* = \left(p + a^2 v_{N-1} - \frac{a^2 b^2 v_{N-1}^2}{q + b^2 v_{N-1}} \right) x^2$$

elde edilir.

Bu, v_N katsayıları bir lineer olmayan diferansiyel denklemi sağlamasıyla (II-8) denkleminde I_{N-1}^* x'de karesel ise I_N^* 'de x'de kareseldir. Tümevarım, başlangıç koşulu $N = 1$ ve toplam kriteri $px^2 + qu^2$ düşünülerek sağlanır. Minimal değer, $u(i_1)$ 'in optimal değeri

$$u_1 = 0$$

alınarak x'de karesel

$$I_1^*(x) = px^2 \quad (\text{II-12})$$

elde edilir.

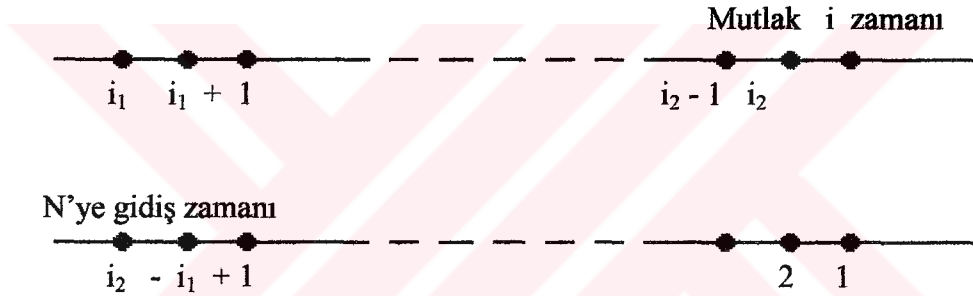
Yukarıdaki tümevarım rekürsif yöntemdir. N geniş zaman aralıklarının artmasıyla problemler üzerinde oluşan bir rekürsif işlemdir. Optimal kontrol $u^*(i)$ 'nin ne

olduğuna karar vermek için (II-9), (II-10) ve (II-11) sonuç denklemleri kullanılarak zaman içinde i gerçek anında tanımlanmış olmalıdır. Kullanılan zaman aralığı; i başlangıç zamanı ve i_2 bitiş zamanı arasında kalan

$$N = i_2 - i + 1 \quad (\text{II-13})$$

dır.

Optimal kontrol denklemlerinde N değişkeni, kalan zamandan bitiş zamanı i_2 'ye kadar yükselip Şekil II-2'de gösterildiği gibi tekrar geri dönecektir.



ŞEKİL II-2 : N Aralığında i_2 'ye Kadar Yükselme Ve Geri Dönüş Zamanı

Bölüm IV'de anlatılacak olan gerçek zamandan ziyade dönüş zamanının terimlerinde ortaya çıkan sonuçlara yönelmek optimal kontrol teorisinin tipik bir özelliğidir.

Gerçek zamana dönmek için (II-13) denklemi kullanılarak

$$u^*(i) = u_{i_2-i+1}(x(i)) = -k_{i_2-i+1} x(i) \quad (\text{II-14})$$

elde edilir. Bu, (II-3) denkleminde aktarılan genel sonucun bir skaler versiyonudur.

Yukarıdaki örneğin problemi üç durum $i = 1, 2, 3$ için sınırlandırılırsa; $N = 3$ alındığında $u(1)$ optimal kontrolü, birinci optimal kontrol olmalıdır.

$$u^*(1) = u_3(x(i)) = -k_3 x(1) = -\frac{a b v_2}{p + b^2 v_2} x(1)$$

$$k_3 = \frac{a b v_2}{q + b^2 v_2}$$

$$v_2 = p + a^2 v_1 - \frac{a^2 b^2 v_1^2}{q + b^2 v_1}$$

$v_1 = p$ olduğundan $u^*(1)$ 'de yerine konursa

$$u^*(1) = -\frac{a b p (q + p b^2 + a^2 p)}{(q + p b^2)^2 + a^2 b^2 p q} x(1)$$

elde edilir. İkinci adımda; $N = 2$ alındığında $u^*(2)$ optimal ikinci kontroldür.

$$u^*(2) = u_2[x(2)] = -k_2 x(2) = -\frac{a b p}{q + b^2 p} x(2)$$

Burada ;

$$k_2 = \frac{a b v_1}{q + b^2 v_1} = \frac{a b p}{q + b^2 p}$$

ve

$$v_1 = p$$

dir. Üçüncü adımda; $N = 1$ alındığında optimal kontrol

$$u^*(3) = u_1[x(3)] = -k_1 x(3) = 0$$

dır.

II-2.2 Sürekli-Zamanlı Skaler Problem

Bölüm II-2.1 ayrık-zamanlı probleminin yerini tutan, bir tek x durumu ile yönetilebilen bir basit sistemin sürekli-zamanlı durum denklemi

$$\dot{x} = ax + bu$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (px^2 + qu^2) dt$$

biçimindedir. Burada p ve q parametreleri pozitiftir. Bu basit örnekte a , b , p , q skaler parametreleri zamandan bağımsızdır.

Bölüm II-2.1'de olduğu gibi ;

* I integrali t_1 'den t_2 'ye kadar T ile gösterilen zaman aralığında sadece başlangıç durumu $x(t_1)$ ve kontrol $u(t)$ 'ye bağlıdır.

$$I \equiv I [x(t_1), u(T)] \quad \text{Burada} \quad t_1 < t < t_2 \quad \text{dir.}$$

* I 'nin minimal değeri I^* 'dır.

$$\min_{u(t)} (I) = I^* [x(t_1), T]$$

- * Analizin amacı için; T zaman aralığı Δ bölünemeyecek kadar küçük aralık olmak üzere t_1 'den $t_1 + \Delta$ 'a kadar, kalan aralık uzunluğu $T - \Delta$ olduğundan $t_1 + \Delta$ 'dan t_2 'ye kadar olmak üzere iki ayrı aralığa ayrılır.
- * Birinci aralığın sonundaki durum, Taylor serisinin birinci terimiyle

$$x(t_1 + \Delta) \approx x(t_1) + \Delta \dot{x}(t_1)$$

yakınsayabileceğini ve bu kısa aralıkta I 'ya

$$\Delta(px^2(t_1) + qu^2(t_1))$$

terimiyle yakınsayabileceğini farzedelim.

- * $T - \Delta$ uzunluğundaki kalan aralıkta $u(t)$ 'ye göre minimizasyon

$$I^*(x(t_1) + \Delta \dot{x}(t_1), T - \Delta)$$

biçimindedir.

- * I 'nin optimal değeri; sürekli-zamanlı denklemine benzer şekilde (II-7) ayrık-zamanlı denkleminde de tahmin edilir.

$$I^*(x, T) = \min_u [\Delta(px^2 + qu^2) + I^*[x + \Delta(ax + bu), T - \Delta]] \quad (II-15)$$

Gösterilimi basitleştirmek için başlangıç değeri $x(t_1)$ ve $u(t_1)$ yerine x, u yazılabilir.

Sürekli-zamanlı problemlerde analizin bir ileri adımı; minimum maliyet fonksiyonu $I^*(x, T)$ 'nin x, T argümanlarına göre ayırt edilebileceğini farzedelim. Bu kabul ile yazımı basitleştirmek için $I^*(x, T)$ yerine I^* yazsak ; (II-15) denkleminin sağ taraftaki terimler, (x, T) noktaları için Taylor serisinde ihmal edileceğinden

$$I^* = \min_u \left\{ \Delta(px^2 + qu^2) + I^* + \Delta(ax + bu) \frac{\partial I^*}{\partial x} - \Delta \frac{\partial I^*}{\partial T} + O(\Delta^2) \right\}$$

biçimindedir. Δ çok küçük olduğundan $O(\Delta^2)$ terimleri ihmal edilirse,

$$\min_u \left\{ \Delta(px^2 + qu^2) + \Delta(ax + bu) \frac{\partial I^*}{\partial x} - \Delta \frac{\partial I^*}{\partial T} \right\} = 0 \quad (\text{II-16})$$

biçimindedir.

(II-15) denklemini çözmek için; x 'in karesel olduğunu farzederek

$$I^*(x, T) = v(T)x^2 \quad (\text{II-17})$$

dir. Bu, ayrık-zamanlı problemi için (II-8) denklemi ile aynı biçimdedir. Optimal kontrol; minimizasyonla (II-16) denklemden hesapla bulunur.

$$u(x, T) = -k(T)x \quad ; \quad k(T) = \frac{bv(T)}{q} \quad (\text{II-18})$$

Bu; (II-16) denkleminde yerine konulduğunda lineer olmayan diferensiyel denklemlerin yerini tutan ayrık-zamanlı (II-11) lineer olmayan fark denklemlerine yol gösterir. Optimal kontrol

$$\frac{dv}{dT} = p + 2av - \frac{b^2 v^2}{q} \quad (\text{II-19})$$

dır.

Bu denklem Riccati Denklemleri diye bilinen denklem sınıfına girer. Riccati denklem çözümünün varlığı, (II-17) denkleminde belirtilen karesel kabulü ile doğrulanır.

Riccati denklemi için sınır koşul, (II-12) denkleminde olduğu gibi $T = 0$ en kısa yükselme zamanı olmak üzere

$$I^*(x, 0) = v(0)x^2 = \min_u \left\{ \int_{t_1}^{t_2} (px^2 + qu^2) dt \right\} = 0$$

dır ve burada p belirlidir. Buradan

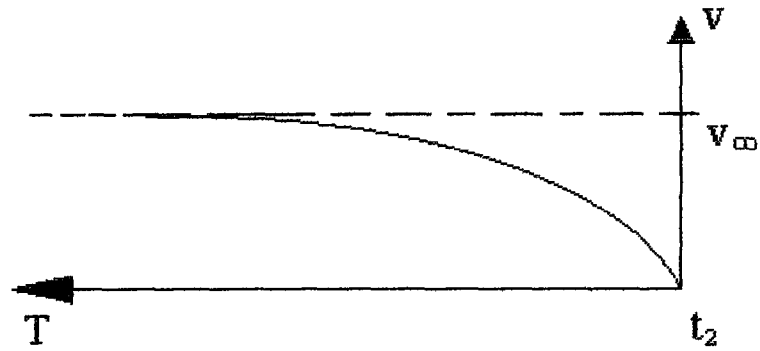
$$v(0) = 0 \quad (\text{II-20})$$

elde edilir.

Şekil (II-3) ve Şekil (II-2)'de N 'ye benzer şekilde geri dönüş zamanı

$$T = t_2 - t \quad (\text{II-21})$$

ile belirtilen T zaman aralığında (II-19)'un tipik bir çözümünü gösterir.



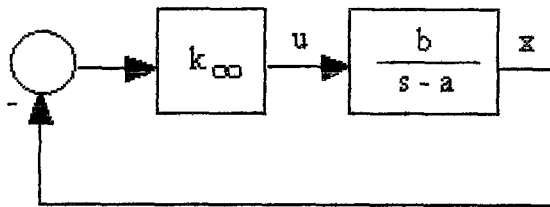
ŞEKİL II-3: Skaler Riccati Denklemi Çözümü İçin

Diagramda gösterildiği gibi T sonsuza gittiğinde $v(T)$ çözümünün v_∞ belirli sabit durum değerine yakınsaması istenilen bir özelliktir. Kontrol, $T = \infty$ için belirsiz bir zaman aralığında yapıldığında; herhangi bir $t_1 = t$ başlangıç zamanından I integralinin $v_\infty x^2(t)$ belirli değerine yakınsayacağını gösterir. Bu, eğer hem x durumu ve hemde kontrol u sıfır olacak şekilde düzenlenirse oluşan $px^2 + qu^2$ integrantının sıfıra gittiğini gösterir.

Şekil II-4'de gösterilen $b/(s-a)$ transfer fonksiyonu ile gösterilen kontrol edilen sistem, optimal kontrol yerine sabit geri besleme kazancı

$$k_\infty = v_\infty \frac{b}{q}$$

'nı kullanır.



ŞEKİL II-4: Sürekli-Zamanlı Skaler Optimal Kontrol Sistemi

Yakınsamaya (II-19) Riccati denkleminde karar verilir. (II-20) denkleminin başlangıç koşulu; Şekil II-3’de gösterildiği gibi dv/dT eğrisinin başlangıcının p pozitif değerine sahip olmasıyla sağlanır. Yakınsama, b ’nin sıfır olmayan değeriyle sağ taraftaki $-b^2v^2/q$ terimini etkiliyerek dv/dt ’nin sıfıra indirilmiş olmasını ister. Kesinlikle sıfır olmayan skaler b kontrol edilen sistemin kontrol edilebilirlik durumudur.

Riccati denkleminin istenilen davranışı daima dv/dt türevinin sonlu kalmasıdır. (II-19) denklemi skaler q ’nun sıfır olmaması gerektiğini gösterir. Böylece optimal kontrol teorisi, performans ölçütünün kontrol işleminin maliyetini önceden belirttiğini gösterir.

v_∞ sabit durum çözümü (II-19) denkleminin karesel eşitliği

$$v_\infty^2 - \frac{2aq}{b^2} v_\infty - \frac{qp}{b^2} = 0$$

ve kökleri

$$v_\infty = \frac{aq}{b^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{pb^2}{qa^2}} \right)$$

vermesi için dv/dt sıfır yapılırsa Riccati denkleminde yakınsar. Bu $\pm$ belirsizlik;

(II-17) denkleminin açıklamasında v_∞ çözümünün negatif olmadığı, p ’nin negatif olmadığı ve q ’nun pozitif olduğu söylenerek tekrar çözülürse

Kararlı kılınabilen kontrol edilen sistemler için $a < 0$:

$$v_{\infty} = \frac{aq}{b^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{pb^2}{qa^2}} \right)$$

Kararlı kılınamayan kontrol edilen sistemler için $a > 0$:

$$v_{\infty} = \frac{aq}{b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{pb^2}{qa^2}} \right)$$

elde edilir.

II-3 LQP Optimal Kontrol İle İlgili Genel Sonuçlar

Skaler zamanla değişmeyen problemleri çözmek için Bölüm II-2’de kullanılan analiz, Bölüm-IV’de zamanla değişen LQP problemlerini de kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Bu bölümün amacı için, (II-1) denkleminin zamanla değişen LQP genel sonuçları hakkındaki bilgileri ileride vermek daha uygun olacaktır.

II-3.1 Sürekli-Zamanlı Sistemler İçin LQP Sonuçları

P , Q pozitif ve simetrik, P_1 ; t_2 bitiş zamanında maliyet hatası ölçümü ise; lineer, kararlı kılınabilen sistemin durum denklemini

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad (\text{II-22})$$

ve karesel maliyet fonksiyonunu

$$I = \mathbf{x}^T(t_2)\mathbf{P}_1\mathbf{x}(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^T\mathbf{Q}(t)\mathbf{u})dt$$

biçiminde olsun. Problem, $\mathbf{P}_1$ sıfırdan farklı ise; sonlu zamanlı kontrol problemidir.

Optimal kontrol işareti, (II-21) denklemindeki $\mathbf{T}$ 'yi kullanarak $\mathbf{x}(t)$ durumundaki değişime bağlıdır. Buna göre lineer geri besleme kuralı

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(T)\mathbf{x}(t)$$

biçimindedir ve $\mathbf{K}(T)$

$$\mathbf{K}(T) = \mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{V}(T)$$

ilişkisini sağlar ve $\mathbf{V}(T)$ aşağıdaki Riccati denkleminin çözümüdür.

$$\frac{d\mathbf{V}}{dT} = \mathbf{P}(t) + \mathbf{A}^T(t)\mathbf{V}(T) + \mathbf{V}(T)\mathbf{A}(t) - \mathbf{V}(T)\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{V}(T) \quad (\text{II-23})$$

ve sınır koşulu $\mathbf{V}(T=0) = \mathbf{P}_1$ dir.

II-3.2 Ayırık-Zamanlı Sistemler İçin LQP Sonuçları

Lineer, kararlı kılınabilen sistemin ayırık-zamanlı durum denklemini

$$x(i+1) = A(i)x + B(i)u \quad (II-24)$$

olsun ve karesel maliyet fonksiyonunun

$$I = x^T(i_2)P_1x(i_2) + \sum_{i_1}^{i_2} [x^T P(i)x + u^T Q(i)u]$$

olduğu durumu düşünelim. Burada P_1 , t_2 bitiş zamanında hataların bir ölçüsüdür ve P , Q matrisleri pozitif ve simetriktir.

Optimal kontrol işareti; (II-13) denklemindeki N 'ye ve $x(i)$ durumundaki değişime bağlı olarak lineer geri besleme kuralı

$$u(i) = -K_N x(i)$$

yazılır ve K_N

$$K_N = [Q(i) + B^T(i)V_{N-1}B(i)]^{-1} B^T(i)V_{N-1}A(i)$$

ilişkisinden bulunur. Burada $V(N)$ Riccati denkleminin ayırık-zamanlı versiyonunu

$$V_{N+1} = P(i) + A^T(i)V_N A(i) - A^T(i)V_N B(i)[Q(i) + B^T(i)V_N B(i)]^{-1} B^T(i)V_N A(i) \quad (II-25)$$

sağlar. Bu eşitlikte sınır koşulu

$$V_{N+1} = P(i_2) + P_1$$

dir.

(II-23) denklemini gibi Riccati denklemleri de uzun bir geçmişe sahiptir. Simetrik V matrisinin $n(n+1)/2$ elemanlarının herbiri için; ardışık lineer olmayan dinamik denklemlerinin, (II-23) ve (II-25) matris denklemlerinde herbirinin sınırlı ve tek çözümlere sahip olup olmaması önemli bir matematiksel sorudur. İyi bilinen sonuçlardan biri [4]; A, B 'nin kontrol edilebilirliğidir. Bölüm II-5'de inceleneceği gibi (II-23) ve (II-25) denklemlerinde V 'nin tüm elemanlarının sınırlı sabit bir durum değerine yakınsaması için; hem A, B kontrol edilebilir hemde P, Q simetrik ve pozitif olmalıdır.

LQP sonuçları, kontrol problemlerinin tasarımında yol gösterici bir sonuçtur. Tüm klasik kontrol sistemlerinin nasıl sınıflandırılacağı Bölüm II-4 ve II-5'de incelenecektir. Bir önemli sonuç da; herhangi bir LQP probleminin optimal kontrol işareti; kontrol edilen sistemin x dinamik durumunun değişen değerinin bir lineer fonksiyonu (II-3) denkleminde özetlenmiş olmasıdır. Pratikte kontrol edilen sistemin lineer denklemlerle biçimlendirilmesi, lineer geri besleme kuralının yaygın biçimde kullanılmasının sonucudur.

Bölüm II-3 ve Bölüm-III'de anlatıldığı gibi, ölçüm için uygun olmayan ve Bölüm II-4'de anlatıldığı gibi, x durumlarının önceden bilinmeyen bozucuların etkisinde kalması, uygulamaların önemli bir özelliğidir. İyi kontrol için durumların değişimi tahmin edilmelidir. Geri besleme kontrol sistemlerinde tahmin kuralının esası önemli bir konu haline gelmiştir.

II-4 Regülatör, Hedef İzleme ve Bozucu Yok Etme

Bölüm II-3'ün genel sonuçları; A, B ve P matrislerinin yapılarına bağlı olarak kontrol problemlerinin değişikliklerinin tümünü kapsar. İçerdiği olasılıklar:

Lineer Regülatör Problemi; kontrol gücü sınırlandırılmış durumda, sistemi orjine veya başka bir denge noktasına getiren kontrol kuralını elde etme problemidir. Yani sistem

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$$

iken performans ölçütü

$$I = \frac{1}{2} \bar{x}^T(t_f) H \bar{x}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\bar{x}^T(t) P(t) \bar{x}(t) + \bar{u}^T(t) Q(t) \bar{u}(t)) dt$$

biçimindedir.

Hedef İzleme Problemi; kontrol gücü sınırlandırılmış durumda, her t anında ve t_f varış anında sistemin durumlarının bir hedef işaretine mümkün olduğu kadar yakın yapacak kontrol kuralını elde etme problemidir. Yani sistem

$$\dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x}(t) + B(t) \bar{u}(t)$$

iken performans ölçütü

$$I = \frac{1}{2} [\bar{x}(t_f) - r(t_f)]^T H [\bar{x}(t_f) - r(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} ([\bar{x}(t) - r(t)]^T P(t) [\bar{x}(t) - r(t)] + \bar{u}^T Q(t) \bar{u}(t)) dt$$

Bozucu Yok Etme; kontrol gücü sınırlandırılmış durumda, sistem durumlarına gelen bozucuları gideren kontrol kuralını elde etme problemidir. Bu problem hem

lineer regülatör ve hemde hedef izleme problemlerinin sistem için aynı anda çözülmesi şeklinde çözülür.

Dış değişkenler, ister hedef hareketleri ya da istersede bozucular olsunlar zamana bağlı polinom fonksiyonları ile modellenir. Böyle bir polinomun sürekli-zamanlı genel biçimi

$$r(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_{n-1} t^{n-1}$$

dir ve

$$\frac{d^n r}{dt^n} = 0$$

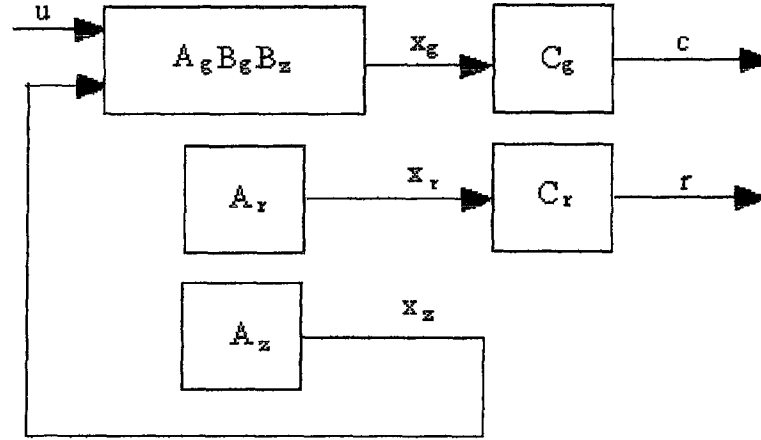
diferansiyel denklemini sağlar. A_r durum modelini sağlayan n tane x_r durum değişkeni, durum uzayı gerçekleştirilmesine sahiptir.

$$x_{r1} \equiv r, \quad x_{r2} \equiv \frac{dr}{dt}, \quad \dots, \quad x_{rn} \equiv \frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}},$$

$$\dot{\bar{x}}_r = A_r x_r \text{ dir. Burada } A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & . & \dots & 0 \\ . & 0 & 1 & & 0 \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Optimal LQP teorisi için, bozucuların yukarıdaki gibi durum denklemleri ile verildiğini varsayalım.

Genel LQP sonuçları, bozucu içeren problemlere uygulandığında; A, B genel durum uzayı gerçekleştirilmesi Şekil II-5’de görüldüğü gibi iki yada üç alt sistemin sıralanması biçiminde olacaktır.



ŞEKİL II-5: Yörünge Hareketleri Ve Bozucu İçin Alt Sistem Modeli

Alt sistem prensibi, u girişlerine ve c çıkışlarına sahip kontrol edilen sistemin A_g , B_g , C_g durum modelini ve x_g durum değişkenini kullanır. İkinci alt sistem r yörünge hareketini modelleyen A_r , C_r matrislerini ve x_r durum değişkenini kullanır. Üçüncü alt sistem, kontrol edilen sistemin x_g durumunu etkileyen bozucuyu modelleyen A_z , B_z matrislerini ve x_z durum değişkenini kullanır. Bu durumda tüm sistemin durum vektörü

$$x = \begin{bmatrix} x_r \\ x_g \\ x_z \end{bmatrix}$$

ve matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} A_r & & \\ & A_g & B_z \\ & & A_z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-26})$$

biçimindedir. Bu gerçekleştirme kontrol edilemez, çünkü u girişleri x_r, x_z ile gösterilen durum değişkenleri üzerinde, ne de bozucu üzerinde hiçbir etkiye sahip değildir. İyi bir kontrol;

$$c = C_g x_g$$

hedef izleyici çıkışa yardım eden herhangi bir durumun kontrol edilebilirliği ile kontrol edilen sistem, A_g, B_g durum modelinin kararlı olmasını ister.

Yörünge izleme ölçütü

$$e \equiv r - c = C_r x_r - C_g x_g$$

olduğunda $e^T P_e e$ biçimindeki küresel izleme hatası performans ölçütü ile belirlenir. P matrisi yerine

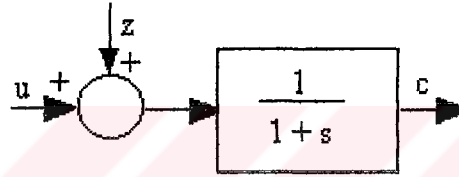
$$x^T P x = e^T P_e e$$

yazılırsa

$$P = \begin{bmatrix} C_r^T \\ -C_g^T \\ 0 \end{bmatrix} P_e [C_r - C_g \ 0] \quad (\text{II-27})$$

elde edilir.

(II-26) ve (II-27) denklemleri, genel LQP sonuçlarının uygulamalarını özetler. Şekil II-6'daki örnek; basit sürekli-zamanlı sisteminin kontrol edilme problemi düşünerek gerçekleştirilirse, sistemin c çıkışı sabit bozucu z etkisi altında sabit r hedef değerini alacaktır.



ŞEKİL II-6: Birinci Dereceden Bozucu İle Kontrol Edilen Sistem

Kontrol edilen sistemin hedef hareketleri ve bozucu için fark denklemleri

$$\dot{\tilde{c}} = u + z - c$$

$$\dot{\tilde{r}} = 0$$

$$\dot{\tilde{z}} = 0$$

dır. Şekil II-5'in yerini tutan durum uzayı modeli

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}} \\ \dot{\tilde{c}} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{c} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

ve matrisleri

$$\begin{aligned} A_g &= -1 & , & & B_g &= 1 & , & & C_g &= 1 \\ A_r &= 0 & , & & C_r &= 1 \\ A_z &= 0 & , & & B_z &= 1 \end{aligned}$$

ile (II-26) denkleminin genişletilmiş matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. Performans ölçütü;

$$I = \int [(r-c)^2 + qu^2] dt = \int [(C_r x_r - C_g x_g)^2 + qu^2] dt$$

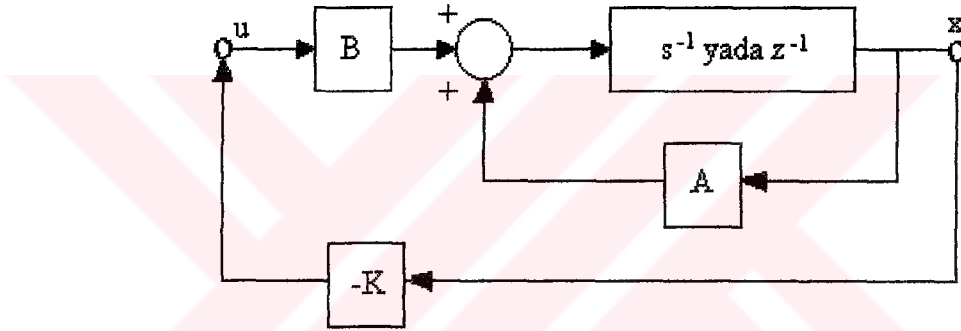
dir. (II-27) denkleminin genişletilmiş matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad Q = q$$

dir. LQP teori, bu geliştirilmiş matrislerin terimleriyle belirlenen problemlere direkt olarak uygulanır.

II-5 Sürekli-Hal İçin LQP Optimal Kontrol

Pratik uygulama açısından, genel kontrolör transfer fonksiyonları zamanla değişmeyen kontrol kurallarına da yol gösteren bir teoridir. A, B, P ve Q matrisleri zamanla değişmez ise, Bölüm II-3'deki K matrisi olduğunda bu tip bir LQP kontrol kuralını ortaya çıkarır. Kontrol edilen sistem Şekil II-7'deki gibi bir blok diagramla gösterilir. Her bir blok, bir matris ile gösterilir. s^{-1} yada z^{-1} bloğu; (II-1) ardışık denklemlerinin dinamikleri birinci dereceden sürekli-zamanlı ya da ayrık-zamanlı gösterilir.



ŞEKİL II-7: Zamanla Değişmeyen LQP Optimal Kontrol Sisteminin Blok Diagramı

Şekil II-7'deki K geri besleme kazancı LQP kabulüyle seçilirse, kapalı-çevrim kararlılık tartışmasına rağmen, sonuç kontrol sistemi 60 derece faz açılıdır ve bununla ilişkili olarak iyi kararlılık özelliğine ve iyi kazanç değerine sahip olacaktır.

Bölüm II-3.1 ve II-3.2'de Riccati denklemlerinin zamanla değişmeyen V çözümlerine sahip olması ile, optimal kontrolunda zamandan bağımsız olacağı Bölüm II-3'den görülebilir. Şekil II-3'ün Bölüm II-2.2'deki sürekli-zamanlı skaler örneği, Riccati denklemlerinin zaman sonsuza giderken sürekli-hal çözümüne limit içinde nasıl yakınsayacağını gösterir. Sonsuz zaman aralığında LQP optimal kontrolun sürekli-hal çözümleri Riccati denklemlerinin matematiksel versiyonunu sağlayacaktır.

$$0 = P + A^T V + V A - V B Q^{-1} B^T V \quad (\text{Sürekli-zaman}) \quad (\text{II-28})$$

$$V = P + A^T V A - A^T V B (Q + B^T V B)^{-1} B^T V A \quad (\text{Ayrık-zaman}) \quad (\text{II-29})$$

V matrisi, I performans ölçütünde $x^T R x + u^T Q u$ 'nun integralinin (ya da toplamının) optimal değerleriyle ölçülür. Böylece V'nin sürekli-hal değerine yakınsaması, $x^T P x + u^T Q u$ integralinin sıfıra gideceğini gösterir. P pozitif sınırlıysa, x durumu durum uzayının orjiniindeyse integralin sıfır sürekli-hal değeri elde edilir.

V'nin tüm elemanlarının yakınsaması, bazı kontrol problemleri için çok önemlidir. Örneğin sürekli-hal hatası kabul edilebilir olduğunda I ölçütü iyi bir kontrolle sonsuza gidebilir. Optimal V'nin bazı elemanları sonsuz olurken, diğerleri (II-3) denkleminin belirlediği sınırlı, zamanla değişmeyen değere yakınsaması kabul edilebilirdir. Buna örnek; Bölüm II-5.1'de verilmiştir.[5]

Kullanılabilirliği gittikçe artan CAD software [8], uygun boyutluluk, kontrol edilebilirlik ve pozitiflik testi için A, B, P, Q'yu giriş matrisleri ve sürekli-hal LQP optimal problemlerinin çözümünde V, K'yı geri dönüş matrisler olarak kabul eder. Computer ile sürekli-hal çözümleri; Bölüm II-3'deki Riccati denklemlerinin yakınsamaya izin verilen uygulamalarında kullanılır. Buna bir örnek; sürekli-zamanda ikinci dereceden bir sistemin diferansiyel denklemini

$$a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = u$$

ve performans ölçütünü

$$I = \int_0^T (y^2 + qu^2) dt$$

düşünelim. Durum vektörü kullanarak

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

matrisler

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \\ -a_2 & -a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = q$$

dir. Bunları Bölüm II-3.1'deki matris Riccati denklemlerinde yerine koyarsak simetrik V matrisinin v_{11} , v_{12} , v_{22} elemanları için üç ardışık Riccati diferansiyel denklemlerinin matris versiyonu

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dT} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a_0/a_2 \\ 1 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0/a_2 & -a_1/a_2 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a_2 \end{bmatrix} q^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{dv_{11}}{dT} = 1 - 2 \frac{a_0}{a_2} v_{12} - \frac{v_{12}^2}{qa_2^2}$$

$$\frac{dv_{12}}{dT} = - \frac{a_0}{a_2} v_{22} + v_{11} - \frac{a_1}{a_2} v_{12} - \frac{v_{12} v_{22}}{qa_2^2}$$

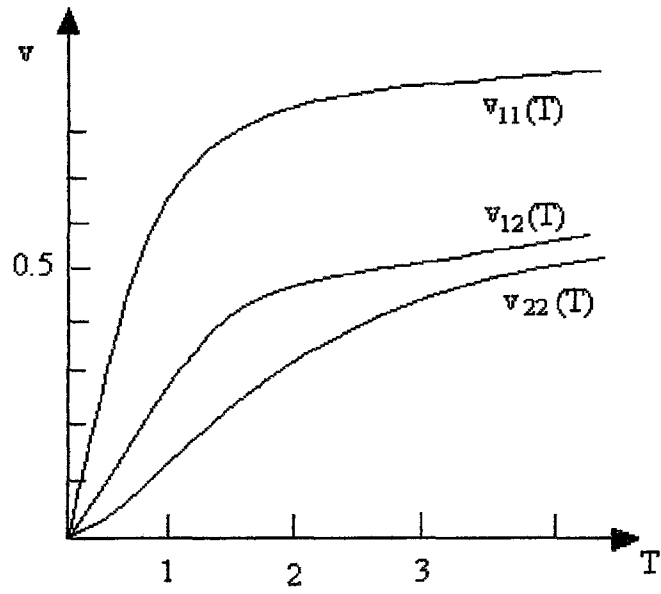
$$\frac{dv_{22}}{dT} = 2 v_{12} - 2 \frac{a_1}{a_2} v_{22} - \frac{v_{22}^2}{qa_2^2}$$

elde edilir. Bölüm II-3.1’de optimal kontrol; v_{11} , v_{12} , v_{22} için diferansiyel denklem çözümüne bağlıdır.

$$u(t) = -q^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1/a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ - \\ y \end{bmatrix}$$

$$u(t) = - \frac{v_{12}}{qa_2} y - \frac{v_{22}}{qa_2} \dot{y}$$

Bunlar lineer olmayan denklemlerdir, analitik olmamasına rağmen $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $q = 1$ parametre grubu için Şekil II-8’deki computer çözümü için uygun biçimdedir.



ŞEKİL II-8: Riccati Denklemlerinin Çözümü

Diagram, T zamanı arttığında, V 'nin elemanlarının sabit değere yakınsadığını gösterir. Bu değerler, optimal kontrol için genel gösterilimi direk verecek şekilde basitçe çözülebilen (II-28)

$$1 - 2 \frac{a_0}{a_2} v_{12} - \frac{v_{12}^2}{qa_2^2} = 0$$

$$- \frac{a_0}{a_2} v_{22} + v_{11} - \frac{a_1}{a_2} v_{12} - \frac{v_{12}v_{22}}{qa_2^2} = 0$$

$$2 v_{12} - 2 \frac{a_1}{a_2} v_{22} - \frac{v_{22}^2}{qa_2^2} = 0$$

matematiksel Riccati denklemleri çözülerek bulunur. Kontrol kuralı

$$u(t) = -\left(\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{q}} - a_0\right)y(t) - \left[\sqrt{a_1 + 2a_2^2\left(\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{q}} - a_0\right)} - a_1\right]\dot{y}(t)$$

biçimindedir.

Kontrol edilen sistemin orjinal diferansiyel denklemi ile optimal kontrol için birleştirilen bu denklem optimal kontrol sisteminin sonuç standart denklemi ile kontrol edilen ikinci bir

$$\ddot{y} + 2\zeta w_0 \dot{y} + w_0^2 = 0$$

sistemi gösterir. Bu denklemde

$$w_0 = a_2^{-1/2} \left(a_0 + \frac{1}{q} \right)^{1/4}$$

doğal frekans ve

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{a_1^2 - 2a_0a_2}{2a_2\sqrt{a_0^2 + 1/q}} \right)^{1/2}$$

söndürme oramıdır.

Sık seçilen $\zeta = 1 / \sqrt{2}$ değeri verildiğinde geçici cevap optimaldir, böylece kontrol edilen sistemin katsayıları

$$a_1^2 - 2a_0a_2 = 0$$

biçimindedir. Bu durumu sağlayan bir sistem atalet momentli dönebilen bir sistemdir. Sistemin diferansiyel denklemi

$$J\ddot{y} = u$$

biçimindedir ve katsayıları

$$a_2 = J, \quad a_1 = 0 \quad \text{ve} \quad a_0 = 0$$

dır. Böylece LQP teorisi, konum kontrol sistemlerinde söndürme olarak kullanılan $1/\sqrt{2}$ yaklaşık değerini doğrulamış olur.

II-5.1 Kontrol Edilemeyen Dış Etkenleri Olan Sistem Örneği

Tanımla, bozucular kontrol edilemezler. Böylece (II-26) ve (II-27) denklemlerinin geliştirilmiş LQP problemleri; V'nin tüm elemanlarının sınırlı, zamanda bağımsız değerlere yakınsaması Riccati denklemlerine yol gösterir. V'nin yakınsamayan elemanları (II-25) optimal kontrol problemlerinde gözükmez ve optimal LQP kontrol kuralında daha önceki gibi karar verilir.

Bölüm II-4'deki Şekil II-6 buna bir örnektir. Bir çift A, B ne kontrol edilebilir ne de kararlı kılınabilen sistemin, genişletilmiş matrislerle üç durum değişkenlerine

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & -1 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = q = 1$$

sahip durum modeli elde edilir. Bu problem için LQP teorisinin simetrik V matrisi

$$V = \begin{bmatrix} v_{rr} & v_{rg} & v_{rz} \\ v_{rg} & v_{gg} & v_{gz} \\ v_{rz} & v_{gz} & v_{zz} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. V matrisi 6 ardışık Riccati denklemlerini sağlayan altı ayrı elemana sahiptir, ancak tümü yakınsamayacaktır. Buna rağmen optimal kontrolü belirleyen K matrisi sadece V 'nin elemanlarının üçüne

$$K = Q^{-1}B^T V = \frac{1}{q} [0 \quad 1 \quad 0] V = \frac{1}{q} [v_{rg} \quad v_{gg} \quad v_{gz}]$$

bağılıdır.

Bunlar, karesel performans ölçütündeki $x^T V x$ teriminde kontrol edilen c değişkeninin terimleriyle birleşen elemanlardır. Bu elemanlar için üç Riccati denklemi; (II-28) denkleminin uygulaması olan üç matematiksel denklemi sağlayan ardışık sürekli-hal çözümlerine yakınsar.

$$\begin{aligned} q + qv_{rg} + v_{rg}v_{gg} &= 0 \\ v_{gg}^2 + 2qv_{gg} - q &= 0 \\ qv_{gz} - qv_{gg} + v_{gg}v_{gz} &= 0 \end{aligned}$$

Bu durum için tipik sonuçlar $q = 1$ alınarak

$$v_{gg} = \sqrt{2} - 1, \quad v_{rg} = -1/\sqrt{2}, \quad v_{gz} = 1 - 1/\sqrt{2}$$

elde edilir. Bu sonuçlarla kontrol kuralı

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} r - (\sqrt{2} - 1) c(t) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) z$$

elde edilir.

Kontrol edilen sistemin $\dot{c} = u + z - c$ denkleminde bu kontrol kuralı yerine konursa, LQP optimal kontrol sisteminin davranışını kontrol eden

$$c + \frac{1}{\sqrt{2}} \dot{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} (r + z)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

$\dot{c} = 0$ olduğunda elde edilen kontrol edilen c değişkeninin sürekli-hal değerinin $0.5 (r + z)$ olduğu ve istenen r değeri olmadığı görülür. Kontrol, sıfır sürekli-hal hatalarını sağlamak için tasarlanmaz, kontrol işleminin maliyetini kullanarak performans ölçütünde $u^T Q u$ terimini içeren tüm cevabı optimize etmek için tasarlanır.

Burada sıfır sürekli-hal hatasını sağlayan kontrol

$$u = r - z$$

tüm diferansiyel denklemi

$$\dot{c} + c = r$$

verir. Bu sistem I maliyet fonksiyonunun olabildiğince en büyük değeriyle LQP sisteminden daha yavaş geçişi cevaba (1 zaman sabiti yerine $1/\sqrt{2}$ zaman sabiti) sahiptir; farklar bu basit örnekte çok küçük olabilir, fakat her zaman bu kadar da küçük olacağını garanti edilemeyecektir.

II-6 Örnekler

Örnek : 1

Ayrık-zamanlı kontrol edilen sistemin dinamik denklemi

$$x(i+1) = 0.74x(i) + 0.26u(i)$$

dir, ve performans ölçütü

$$J = \sum_{i=1}^3 [x^2(i) + 0.2 u^2(i)] \text{ dir.}$$

$x(4)$ belirli değilse ve $x(4) = 0$ için minimize $u(i)$ değerlerini hesaplayalım.

Ayrık-zamanlı Hamiltonian kullanarak

$$\begin{aligned} H(x, u, \lambda, i) &= \phi_2(x, u, k) + \lambda^T(k+1)x(i+1) \\ &= x^2(i) + 0.2u^2(i) + \lambda(i+1)[0.74x(i) + 0.26u(i)] \end{aligned}$$

Gerek koşul:

$$\frac{\partial H(\bullet)}{\partial u(i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.4u(i) + 0.26\lambda(i+1) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H(\bullet)}{\partial x(i)} = \lambda(i) \quad \Rightarrow \quad 2x(i) + 0.74\lambda(i+1) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial H(\bullet)}{\partial \lambda(i+1)} = x(i+1) \quad \Rightarrow \quad 0.74x(i) + 0.26u(i) = x(i+1) \quad (3)$$

x(4) belirli değil ise;

Yeter koşul :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda(i) \right|_{i=4} = 0 = \lambda(4) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (1)'den \quad 0.4u(i) &= -0.26\lambda(i+1) & \Rightarrow \quad u(i) &= -0.65\lambda(i+1) \\ (3)'den \quad x(i+1) &= 0.74x(i) - 0.26 \cdot 0.65\lambda(i+1) & \Rightarrow x(i+1) &= 0.74x(i) - 0.169\lambda(i+1) \\ (2)'den \quad 2x(i) + 0.74\lambda(i+1) &= \lambda(i) & \Rightarrow \lambda(i+1) &= 1.35\lambda(i) - 2.7x(i) \\ (3)'de (2) yerine konursa & & \Rightarrow x(i+1) &= 1.2x(i) - 0.23\lambda(i) \quad (5) \\ (1)'de (2) yerine konursa & & \Rightarrow u(i) &= 1.8x(i) - 0.88\lambda(i) \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(i+1) &= 0.74x(i) - 0.169\lambda(i+1) \\ \lambda(i+1) &= 1.35\lambda(i) - 2.7x(i) \\ u(i) &= 1.8x(i) - 0.88\lambda(i) \end{aligned}$$

elde ederiz.

i = 1 için

$$\begin{aligned} x(2) &= 0.74x(1) - 0.169\lambda(2) & \Rightarrow \quad x(2) &= 0.5x(1) \\ \lambda(2) &= 1.35\lambda(1) - 2.7x(1) & \Rightarrow \quad \lambda(1) &= 0.16x(2) \\ u(1) &= 1.8x(1) - 0.88\lambda(1) & \Rightarrow \quad u(1) &= 1.86x(2) = 0.93x(1) \end{aligned}$$

i = 2 için

$$\begin{aligned} x(3) &= 0.74x(2) - 0.169\lambda(3) & \Rightarrow \quad x(3) &= 0.55x(2) \\ \lambda(3) &= 1.35\lambda(2) - 2.7x(2) & \Rightarrow \quad \lambda(2) &= 2.82x(2) \\ u(2) &= 1.8x(2) - 0.88\lambda(2) & \Rightarrow \quad u(2) &= 0.46x(2) = -0.23x(1) \end{aligned}$$

i = 3 için

$$\begin{aligned} x(4) &= 0.74x(3) - 0.169\lambda(4) & \Rightarrow \quad x(4) &= 0.74x(3) \\ \lambda(4) &= 1.35\lambda(3) - 2.7x(3) & & \\ u(3) &= 1.8x(3) - 0.88\lambda(3) & \Rightarrow \quad u(3) &= 0.04x(3) \end{aligned}$$

$x(4)$ belirli olmadığından

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda(i) \right|_{i=4} = 0 = \lambda(4) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(3) = 2 x(3) = 1.1x(2) = 0.55x(1)$$

sonuç olarak

$$u(1) = 0.93x(1)$$

$$u(2) = -0.23x(1)$$

$$u(3) = 0.55x(1)$$

$x(4) = 0$ ise;

$i = 3$ denklem takımında yerine konursa

$$\lambda(4) = 4.38x(3)$$

$$\lambda(3) = 5.24x(3)$$

$$u(3) = -2.81x(3)$$

$i = 2$ denklem takımında yerine konursa

$$1.88x(3) = 0.74x(2)$$

$$\Rightarrow x(2) = 2.55x(3)$$

$$5.24x(3) = 1.35\lambda(2) - 2.7x(2)$$

$$\Rightarrow \lambda(2) = 8.98x(3)$$

$$u(2) = -3.31x(3)$$

$i = 1$ denklem takımında yerine konursa

$$2.55x(3) = 0.74x(1) - 0.169.8.98x(3)$$

$$\Rightarrow x(1) = 5.5x(3)$$

$$8.98x(3) = 1.35\lambda(1) - 2.7.5.5x(3)$$

$$\Rightarrow \lambda(1) = 17.65x(3)$$

$$u(1) = 1.8.5.5x(3) - 0.88.17.65x(3)$$

$$\Rightarrow u(1) = -5.63x(3)$$

Sonuç olarak

$$u(1) = -x(1)$$

$$u(2) = -0.60x(1)$$

$$u(3) = -0.51x(1)$$

Örnek : 2

Kontrol edilen sistemin diferansiyel denklemi

$$\dot{x} = u$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_0^{t_2} (x^2 + u^2) dt$$

dir. Kontrol kuralı için Riccati denklemlerini yazarak optimal kontrol kuralını hesaplıyalım.

Sistemin durum denklemi $\dot{x} = ax + bu$ olduğundan $a = 0$ ve $b = 1$ dir.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_2} 2(x^2 + u^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_2} 2(xPx^T + uQu^T) dt$$

$P = 2$ ve $Q = 2$ dir:

$$\dot{v}(t) = -v(t)A(t) - A^T(t)v(t) + v(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)v(t) - P(t)$$

$$\dot{v}(t) = v(t) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v(t) - 2$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{2} v^2(t) - 2$$

$$0 = \frac{1}{2} v^2(t) - 2$$

$$v^2(t) = 4$$

$$v(t) = 2 \text{ veya } v(t) = -2 \text{ dir.}$$

$$u^*(t) = -Q^{-1}B^TVx$$

$$u_1^*(t) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2x = -x$$

$$u_2^*(t) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-2)x = x$$

bulunur.

Örnek : 3

Bir konum kontrol sisteminde $c(t)$ çıkışı uygulanan $u(t)$ ile kontrol edildiğinde sistemin durum denklemi

$$J \ddot{c} = u$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_0^{\infty} (c^2 + qu^2) dt$$

biçimindedir. Sistemin durum uzayı gerçeklemesini yazalım:

$$\ddot{c} = \frac{1}{J} u$$

$$x = \begin{bmatrix} c \\ \dot{c} \end{bmatrix}$$

$$c = x_1 \quad \text{ve} \quad \dot{c} = x_2 \quad \text{dir.}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{c} \quad \text{ve} \quad \dot{x}_2 = \ddot{c} \quad \text{olacaktır.}$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u$$

elde edilir.

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2(c^2 + qu^2) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} 2(cPc^T + uQu^T) dt$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad ; \quad P = 2 \quad ; \quad Q = 2q$$

$$\dot{v}(t) = -v(t)A(t) - A^T(t)v(t) + v(t)BQ^{-1}B^T v(t) - P$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{v}_{11} & \dot{v}_{12} \\ \dot{v}_{12} & \dot{v}_{22} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} \frac{1}{2q} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} - 2
 \end{aligned}$$

Matrisel işlemler yapılınc

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_{11} &= \frac{v_{12}^2}{2qJ^2} = 0 \quad \Rightarrow v_{12} = 0 \\
 \dot{v}_{12} &= -v_{11} + \frac{v_{12} v_{22}}{2qJ^2} = 0 \quad \Rightarrow v_{11} = 0 \\
 \dot{v}_{22} &= -2v_{12} + \frac{v_{22}}{2qJ^2} - 2 = 0 \quad \Rightarrow v_{22} = \pm 2J\sqrt{q}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$u(t) = -Q^{-1}B^T Vx(t)$$

$$u_{1,2}^*(t) = -\frac{1}{2q} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2J\sqrt{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2q} \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$u_1^*(t) = -\frac{1}{\sqrt{q}} x_1$$

$$u_2^*(t) = -\frac{1}{\sqrt{q}} x_2$$

Optimal kontrol sisteminin söndürme oranının $1/\sqrt{2}$ olduğunu gösterelim:

$$J \dot{c} = 0$$

$a_2 = J$; $a_1 = 0$; $a_0 = 0$ olduğundan

$$\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{2a_2 \sqrt{a_0^2 + 1/q}} \right)^{1/2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + 0/(2J \sqrt{1/q}) \right)^{1/2} = 1/\sqrt{2}$$

Doğal frekansın optimal kontrol kuralı ile ilişkisi

$$w_0 = a_2^{-1/2} \left(a_0 + \frac{1}{q} \right)^{1/4} = \frac{1}{\sqrt{J}^4 \sqrt{q}}$$

$$u(t) = - \left(\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{q}} - a_0 \right) c(t) - \left(\sqrt{a_1^2 + 2a_2 \left(\sqrt{a_0^2 + \frac{1}{q}} - a_0 - a_1 \right)} \right) \dot{c}(t)$$

$$u(t) = -\frac{1}{\sqrt{q}} c(t) - \sqrt{\frac{2J}{\sqrt{q}}} \dot{c}(t)$$

$$w_0^* = \frac{1}{\sqrt{J}^4 \sqrt{2J}}$$

dir.

BÖLÜM III

OPTİMAL LİNEER, GERİ BESLEMELİ KONTROLÖR

III-1 Giriş

Bölüm II'de anlatıldığı gibi optimal kontrol teori, kontrol edilen sistemin x dinamik durumunun değişen değerinin bir fonksiyonu olarak temsil edilen optimal kontrol çözümlerine yol gösterir. Örneğin Şekil II-7'deki blok diagrama sahip verilen kontrol sisteminde; lineer zamanla değişmeyen kontrol edilen sistemin durum denklemi

$$\dot{x} \quad \text{yada} \quad x(i+1) = Ax + Bu$$

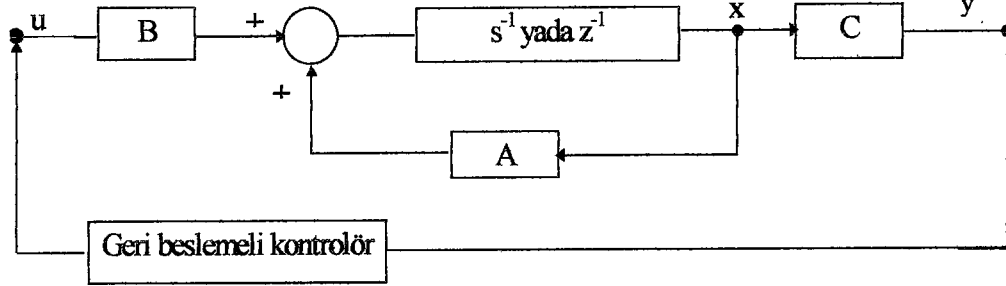
biçimindedir. Verilen sistemde geri besleme Bölüm II-5'de anlatıldığı gibi:

$$u = -Kx \quad (III-1)$$

biçimindedir.

Şekil II-7'deki kontrol edilen sistemden Bölüm I-3'de anlatıldığı gibi x durumları ölçülmüş çıkışlar olarak direk alınamadığından genelde kullanılamaz. Gerçek geri besleme kontrol, sadece (I-4) eşitliğindeki

$y = Cx$ 'den elde edilen gerçek y çıkışlarıyla sürülmesiyle sağlanır. Böylece; gerçek lineer, geri beslemeli kontrol sistemlerinin Şekil III-1'deki blok diagrama sahip oldukları görülür.

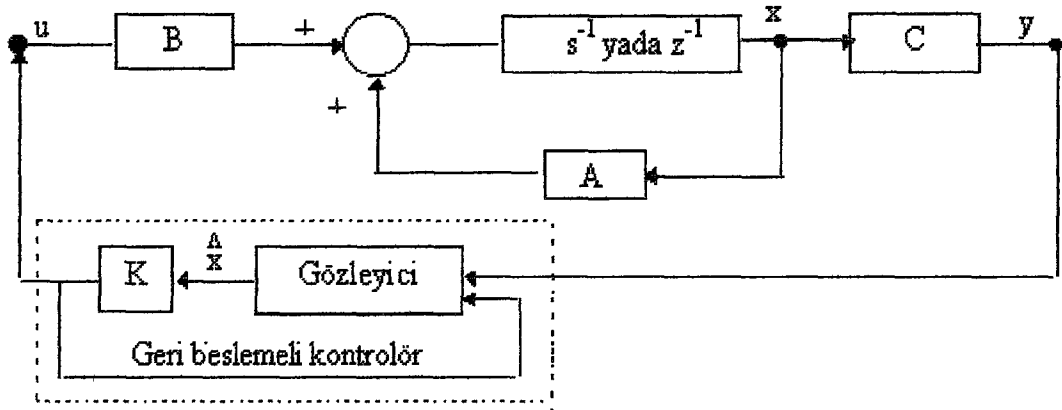


ŞEKİL III-1: Geri Beslemeli Kontrol Sistemi

Optimal kontrol teoriden, bir gözleyici nedir tanımıyla Şekil III-1'deki geri beslemeli kontrolörün tasarımından yararlanılır. Bu, x durumunun bir $\hat{x}$ tahminini üretmek için gerçek u, y sinyallerini kullanan bir sistem tasarımıdır. $\hat{x}$ gözleyici çıkışı, Şekil III-2'de gösterilen yapıya sahip geri beslemeli kontrolör (III-1) denklemine benzer bir;

$$u = -K \hat{x} \quad (III-2)$$

kontrol kuralını sürmek için kullanılabilir. Bu yapının optimallliği LQG kontrol ayrımı teoremiyle belirlenir.



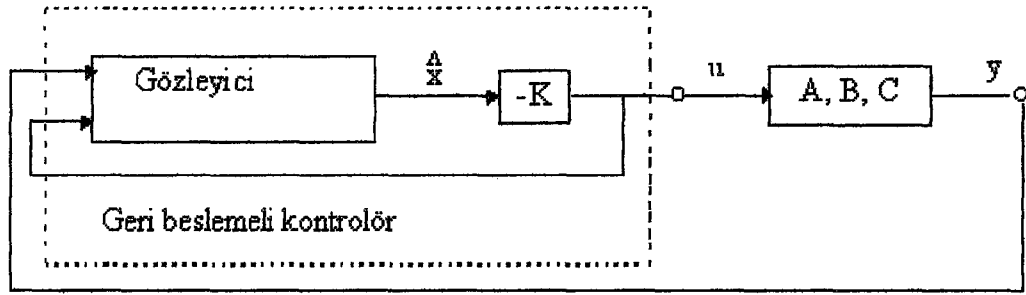
ŞEKİL III-2: Bir Gözleyici Kullanarak Geri Besleme Kontrolü

Zamanla değişmeyen lineer dinamik sistemler için gözleyicilerin tasarımı Bölüm III-2'de incelenecektir. Bir lineer kontrol kuralı ile sürülen ve bir gözleyici içeren geri beslemeli kontrolörler Bölüm III-3'de incelenecektir. Böyle LQP kontrolörler, klasik kontrolörlerin özel bir dalı olarak ortaya çıkan birçok pratik problemin tüm etkilerini içeren bir matematiksel durumun matematiksel optimal çözümü için idealdirler. Bazı genel sonuçların sadece LQP problemlerine uygulanabilir olmadığını Bölüm III-4'de inceleyeceğiz.

III-1.1 Kullanılan Notasyonlar

Boşluk uzayında kullanılan notasyonlar; x , kontrol edilen bir sistemin ve bozucularının dinamik davranışlarını belirleyen bir x durum vektörünün elemanıdır. y , kontrol edilen değişken ve istenilen değerin ölçümünde olduğu gibi kontrolörü tüm ölçümünde temsil eden y vektörünün elemanıdır.

Şekil III-2'deki geri beslemeli kontrol sisteminin genel formatta ve durum uzayında kullanılan notasyonları kullanarak yeniden çizimini Şekil III-3'de görülür. İstenilen değerler ve bozucular gibi dış değişkenler açıkça görülmez. Bozucular genişletilmiş A , B , C durum uzayında kullanılan notasyonlarda içermelidir. Burada, bozucular ihmal edilmiştir.



ŞEKİL III-3: Gözleyici ile Geri Beslemeli Kontrol Sistemi

III-2 Gözleyiciler

Verilen bir dinamik sistemin x durumları, gözleyici olarak tasarlanmış dinamik sistemle tahmin edilebilir. Gözleyici; verilen sistemi belirleyen A, B, C matrislerinden alınan gözlenen sistemin y çıkışları ve u girişi ile sürülür. Gözleyici, x durumlarının tahmin edilen $\hat{x}$ durumlarına yakınsamasını sağlamak için n dinamik durumların sayısı aynı olmalıdır. Şekil III-1'deki blok diagrama sahip lineer kontrol edilen sistemler için, $\hat{x}(t)$ 'nin sürekli-zamanlı durum denklemi:

$$\dot{\hat{x}} = A \hat{x} + Bu + K_o(y - C \hat{x}) \quad (\text{III-3})$$

dir veya ayrık-zamanlı $\hat{x}(i)$ durum denklemi:

$$\hat{x}(i) = A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1) + K_o\{y(i) - C[A\hat{x}(i-1) + Bu(i-1)]\} \quad (\text{III-4})$$

dir. (III-3) ve (III-4) denklemlerinin herbirinin sağ tarafı $A\hat{x} + Bu$ ile birlikte düzeltici terimde içerecektir. Düzeltici terim $K_o(y - \tilde{y})$ yazıldığından

e_o hatası sıfıra yakınsayacak şekilde seçilmelidir. K_o 'daki gerek koşul; (I-2) ve (I-3) durum denklemlerinde (III-3) ve (III-4) gözleyici denklemleri sırasıyla konularak elde edilir. Sürekli-zamanlı fark denklemleri;

$$\dot{e}_o = A(x - \hat{x}) - K_o(Cx - C\hat{x}) = (A - K_oC)e_o \quad (\text{III-5})$$

ve ayrık-zamanlı fark denklemleri;

$$\begin{aligned} e_o(i) &= A[x(i-1) - \hat{x}(i-1)] - K_o[CAx(i-1) - CA\hat{x}(i-1)] \\ &= (I - K_oC)Ae_o(i-1) \end{aligned} \quad (\text{III-6})$$

biçimindedir.

Böylece e_o gözleme hatasının sıfıra yakınsaması sürekli-zamanlı sistemleri için;

$A - K_oC$ ve ayrık-zamanlı sistemler için $(I - K_oC)A$ 'nın özdeğerlerine bağlıdır.

Sürekli-zamanlı sistemler için $A - K_oC$ 'nin tüm özdeğerleri sol yarı düzlemde olmalıdır.

Ayrık-zaman sistemleri için $(I - K_oC)A$ 'nın özdeğerleri birim daire içinde olmalıdır.

Bunlar, karakteristik denklemin köklerinin genel kararlılık koşuludur. Gözleyici karakteristik denklemi; sürekli-zamanlı için;

$$|sI - (A - K_oC)| = 0 \quad (\text{III-7})$$

ve ayrık-zamanlı için;

$$|sI - (I - K_oC)A| = 0 \quad (\text{III-8})$$

dir. Gözleyici kazancı diyede adlandırılan kazanç matrisi K_o 'ın seçimine karar veren diğer faktörler (III-2.1)'de incelenecektir.

Sürekli-zamanlı gözleyicinin Laplace dönüşümü;

$$(sI - A + K_o C) \hat{X}(s) = BU(s) + K_o Y(s)$$

dır, denkleminin ters dönüşümü alınarak

$$\hat{X}(s) = [sI - A + K_o C]^{-1} BU(s) + [sI - A + K_o C]^{-1} K_o Y(s) \quad (III-9)$$

elde edilir.

Ayrık-zamanlı gözleyicinin z- dönüşümü;

$$[zI - (I - K_o C)A] \hat{X}(z) = (I - K_o C)BU(z) + K_o Y(z)$$

dır, denkleminin ters dönüşümü alınarak

$$\hat{X}(z) = [zI - (I - K_o C)A]^{-1} (I - K_o C)BU(z) + [zI - (I - K_o C)A]^{-1} K_o Y(z) \quad (III-10)$$

elde edilir.

III-2.1 Kazanç Matrisi K_o

Pratikte, bazı değerlerde gözleyici kararlılığını sağlamak için seçilmiş olan K_o 'i belirlemek yeterli değildir.

Şekil III-4'deki geri beslemeli sistem örneğinde olduğu gibi, K_o 'ı belirlemek için bir yol, (III-7) veya (III-8) gözleyici karakteristik denkleminin köklerini sabitlemektir. Bu işlem; kutup yerleştirme olarak bilinir, çünkü (III-9) ve (III-10) denklemlerinde transfer fonksiyonlarının kutuplarını (s-düzleminde) karakteristik denklemin sabitleyici köklerine gelecek şekilde kaydırır.

K_o 'yu seçmek için daha sistematik yol, tahmini $\hat{x}$ değeri ile gerçek x değeri arasındaki herhangi bir e_o farkına sebep olan cevabı almaktadır. Çünkü esas farklar olasılık analizinin istediği rastgele gürültülere ve rastgele bozuculara bağlıdır. Bu ise Kalman filtresi olarak tanımlanır.

Bir gözleyici örneğini;

$$G(s) = \frac{1}{Js^2}$$

transfer fonksiyonuna sahip atalet momentli sistemin durumlarının

$$x \equiv \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

tahmininin nasıl yapılacağını düşünerek çözümleyelim.

Durum uzayı matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$$K_0 \equiv \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \text{ seçilirse}$$

$$K_0 C = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A - K_0 C = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - K_0 C) = \begin{bmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{bmatrix}$$

elde edilir ve (III-9) denkleminde yerine konursa;

$$\hat{X}_1(s) = \frac{(1/J)U(s) + (sk_1 + k_2)Y(s)}{s^2 + k_1s + k_2}$$

$$\hat{X}_2(s) = \frac{[(s+k_1)/J]U(s) + sk_1Y(s)}{s^2 + k_1s + k_2}$$

bulunur. Gözleyicinin karakteristik polinomu:

$$|sI - A + K_0 C| = s^2 + k_1s + k_2$$

dır ve kutupları

$$s_{1,2} = \frac{-k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2}}{2}$$

dir.

Burada gözleyicinin yakınsaması için gerek koşul; her iki kutbunda sol yarı düzlemde olması için hem k_1 hemde k_2 pozitif olmalıdır. Kritik sönümlü cevabı sağlamak için kutup yerleştirmeye ikinci dereceden gözleyicinin iki kazanç elemanı k_1, k_2 belirlenir. Bu durumda $s_1 = s_2$ dır. Böylece;

$$k_2 = k_1^2 / 4$$

verilen w_o doğal frekansıyla;

$$k_2 = w_o^2, \quad k_1 = 2w_o$$

olarak belirlenir. Burada w_o , sistemin gözleyici kullandığı farz edilerek zaman skalasına uygunlaştırmak için seçilmelidir.

III-3 İdeal LQP Kontrol

Şekil III-3'deki geri beslemeli kontrolör (III-2) kontrol kuralı ile sürülen

Bölüm III-2'deki bir gözleyici içerir. Kontrolör (gözleyici kazancı K_o 'dan ayırt etmek için) kazancını K_c yazarsak (III-9) sürekli-zamanlı gözleyici denklemi;

$$[sI - (A - K_o C)]\hat{X}(s) = -BK_c \hat{X}(s) + K_o Y(s)$$

biçimindedir. Her iki tarafı $-K_c$ ile çarparak ve $\hat{X}$ 'in terimlerini birleştirirsek;

$$\begin{aligned} U(s) &= -K_c \hat{X}(s) = -K_c [sI - A + K_o C + BK_c]^{-1} K_o Y(s) \\ &\equiv -H(s) Y(s) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada;

$$H(s) \equiv K_c [sI - A + K_o C + BK_c]^{-1} K_o \quad (\text{III-11})$$

dır ve $H(s)$ sürekli-zamanlı geri beslemeli kontrolörün transfer fonksiyon matrisidir.

Benzer şekilde III-10 ayrık-zamanlı gözleyici denklemi;

$$[zI - (I - K_o C)A] \hat{X}(z) = - (I - K_o C)BK_o \hat{X}(z) + K_o Y(z)$$

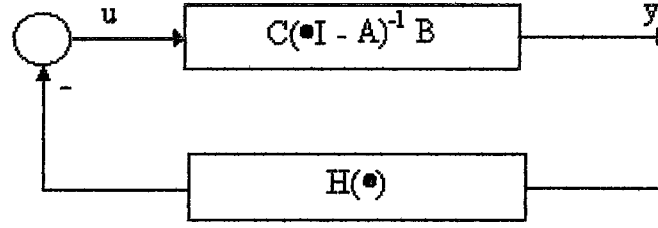
biçimindedir. $-K_c$ ile her iki taraf çarparak ve $\hat{X}$ terimlerini birleştirirsek;

$$\begin{aligned} U(z) &= -K_c \hat{X}(z) = -K_c [zI - (I - K_o C)(A - BK_o)]^{-1} K_o \\ &\equiv -H(z) Y(z) \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$H(z) \equiv K_c [zI - (I - K_o C)(A - BK_o)]^{-1} K_o \quad (\text{III-12})$$

dir, ve $H(z)$ ayrık-zamanlı geri beslemeli kontrolörün transfer fonksiyon matrisidir.



ŞEKİL III-5 : İdeal LQP Kontrol Sistemleri Blok Diagramı

Şekil III-5 kontrol sisteminin bir blok diagramıdır. Bu blok diagram (I-10) transfer fonksiyon matrisine sahip bir sistemin, geri besleme kontrolünü sağlayan (III-11) veya (III-12) denklemlerinin belirlediği $H(•)$ transfer fonksiyonuna sahip bir kontrolörü gösterir. Burada s veya z 'den uygun olanının kullanılacağını göstermek için $(•)$ sembolü kullanılmıştır.

LQP teori lineer kontrolörün $H(•)$ transfer fonksiyon matrisinin tasarımı için tek yol değildir. LQP teori burada kısmen ideal olarak gösterilir. Çünkü kontrolörün (III-11) ve (III-12) denklemlerinin yapısına niçin sahip olduğunun ilerki bölümlerde kavranmasını sağlar ve kısmen de herhangi bir tasarımda karar verilen serbest parametrelerin (K_c , K_o ' ın elemanları) bir minimal sayısını gösterir. Şekil II-7'deki sistemde olduğu gibi tüm x durumlarının geri besleme kontrolünü sürmek için uygun olduğunu farz etsek bile; Şekil III-2 ve III-3'deki geri beslemeli kontrol sistemlerinin iyi kararlık payı gibi sınırlara sahip olacağının garantisi olmadığı görülür. Loop - recovery metodları; loop kararlılığını arttırmak için gözleyici kazancı K_o 'ı ayarlayarak bozucuların etkisi azaltılarak kararlılık sınırını garanti etmek için geliştirilmiştir.

III-3.1 Bir İdeal Kontrolör Transfer Fonksiyonunun Yapısı

(III-11) ve (III-12) denklemlerinin $H(\bullet)$ kontrolör transfer fonksiyon matrisleri $m \times p$ (satır x kolon) boyutundadır. Burada m ; u kontrol girişlerinin sayısı, p ; y ölçümlerinin sayısıdır.

$H(\bullet)$ 'nın içindeki matrisler;

$$(sI - A + K_o C + B K_c) \quad , \quad [zI - (I - K_o C)(A - B K_c)]$$

$n \times n$ boyutundadır. Burada n ; dinamik durumların sayısıdır ve böylece daima tersi ;

$$H^{-1}(\bullet) = \frac{\text{Adj}[H(\bullet)]}{|H(\bullet)|}$$

vardır. Karakteristik polinomların

$$|\bullet I - A + K_o C + B K_c| \quad , \quad |zI - (I - K_o C)(A - B K_c)|$$

da derecesi n 'dir ve Bölüm I-3'de olduğu gibi $H(\bullet)$ 'ın mp elemanının herbiri bir transfer fonksiyonu biçimindedir.

$$H(\bullet) = \frac{c_0 + c_1 \bullet + \dots + c_{n-1} \bullet^{n-1}}{d_0 + d_1 \bullet + \dots + d_{n-1} \bullet^{n-1} + \bullet^n} \quad (\text{III-13})$$

Burada payın c katsayıları bir elemandan diğerine farklıdır, fakat payda kontrolörün karakteristik polinomu olduğundan her eleman için aynıdır.

III-3.2 Klasik Kontrolörler

Yaygın kullanılan klasik kontrolörün transfer fonksiyonları (III - 13), genel ideal transfer fonksiyonun özel bir kolu olarak elde edilebilir.

İntegral Kontrol

Bir sürekli- zamanlı sistemde A, B, C, K_o, K_c'nin değerleri paydanın d_o katsayısını sıfır yapıyorsa kontrolörün transfer fonksiyonu;

$$H(s) = \frac{c_0 + c_1s + \dots + c_{n-1}s^{n-1}}{s(d_1 + \dots + d_{n-1}s^{n-2} + s^{n-1})}$$

biçimindedir. Bu bir integral kontrolördür. Ayrık-zamanlı sistemler için benzer koşul; payda polinomunda z = 1 olmalıdır.

PID Kontrol

Sürekli-zamanlı PID kontrolün transfer fonksiyonunda ;

$$H_{PID}(s) = K(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d) = K \frac{1 + T_i s + \frac{T_i T_d}{T_i} s^2}{T_i s} \quad (III-14)$$

pay polinomunun derecesi paydadan büyüktür. PID kontrol bir limitleyici olarak ortaya çıkabileceğinden (III-13) ideal transfer fonksiyonunda normal olarak oluşmaz.

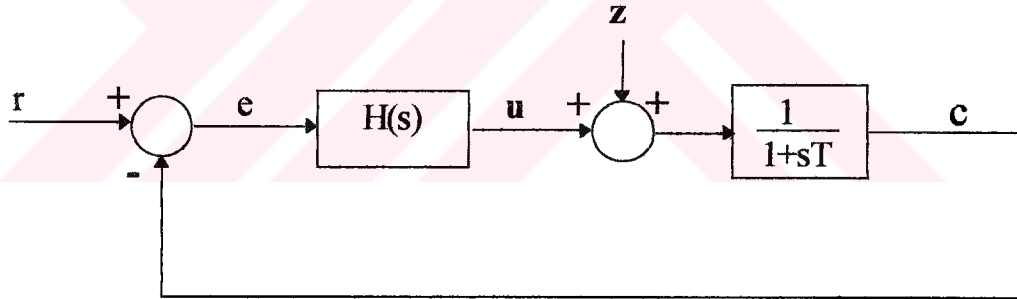
Bu yaklaşım; payda katsayısı d_1 çok baskın olduğunda meydana gelebileceğinden transfer fonksiyonu yaklaşık olarak

$$H(s) \approx \frac{c_0 + c_1 s + \dots + c_{n-1} s^{n-1}}{d_1 s}$$

biçimindedir. $n = 3$ için sürekli-zamanlı sistemde (III-14) denklemi bir PID kontrolüdür.

III-3.3 Bir İdeal PID Kontrolör Örneği

z bozucusuna rağmen r hedef değerini alabilen birinci dereceden bir sistemi $e \equiv r - c$ kontrol hatası ile sürülebilir bir gözleyiciyi farz ederek Bölüm II-4 ve II-5.1'de anlatılan örneğe devam edelim. Şekil III-6'daki blok diagram kontrol sistemini gösterir. Burada kontrol edilen sistem T sabit zamanına sahiptir.



ŞEKİL III-6: r - c Hatasıyla Sürülen $H(s)$ Kontrolör

Burada r , z bozucuları

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{z} = 0$$

özdeş dinamiklere sahip olduklarından Bölüm I-5.2'de anlatıldığı gibi e 'den ayrı gözlenemezler. Bu gözlenememezlikten, sadece iki genişletilmiş durumları

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{c} \\ \mathbf{z} - \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

düşünerek sakınabiliriz

$\dot{\mathbf{x}}$ 'in durum denklemi;

$$\dot{x}_1 = \dot{r} - \dot{c} = 0 - \frac{1}{T}(-c + z + u)$$

$$= -\frac{1}{T}(r - c + z - r + u) \equiv -\frac{1}{T}(x_1 + x_2 + u)$$

biçimindedir. Durum matrisleri;

$$\mathbf{A} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

dır.

$$\mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = [k_{c1} \quad k_{c2}]$$

yazarak (III-11) denklemiyle verilen kontrolörün $H(s)$ transfer fonksiyonu;

-1

$$H(s) = [k_{c1} \quad k_{c2}] \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{c1} & k_{c2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{T} + k_{o1} - \frac{1}{T} k_{c1} & \frac{1}{T} - \frac{1}{T} k_{c2} \\ k_{o2} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \frac{(k_{o1} k_{c1} + k_{o2} k_{c2}) Ts + k_{o2} (k_{c2} - k_{c1})}{Ts^2 + (Tk_{o1} - k_{c1} + 1)s + k_{o2}(k_{c2} - 1)} \quad (\text{III-15})$$

elde edilir.

Gözleyici kazanç K_o 'a

$$|sI - A + K_o C| = s^2 + \left(\frac{1}{T} + k_{o1}\right)s - \frac{k_{o2}}{T} = 0$$

verilen (III-7) karakteristik denklemi düşünerek Bölüm III-2.1'de olduğu gibi karar verilebilir. Standart parametrelerle denklemi yeniden;

$$s^2 + 2\xi \omega_o s + \omega_o^2 = 0$$

yazalım. ω_o doğal frekans ile kritik sönümlenme; K_o elemanlarının değerleri verilerek elde edilebileceği görülür.

$$k_{01} = 2w_0 - \frac{1}{T}, \quad k_{02} = -w_0^2 T$$

Burada;

$$w_0 \equiv \frac{\alpha}{T}$$

yazıldığında gözleyici cevabı, kontrol edilen sistemin T zaman sabiti karşılaştırmasının hızlı olmasını sağlamak için $\alpha > 1$ 'dir.

Böylece;

$$k_{01} = \frac{2\alpha-1}{T}, \quad k_{02} = -\frac{\alpha^2}{T}$$

dır.

Şekil III-6'daki kontrol sisteminde $\hat{x} \rightarrow x$ olduğunda gözleyicinin limit içinde yakınsaması

$$T\dot{c} = -c - k_{c1}(r - c) - k_{c2}(z - r) + z \quad (\text{III-16})$$

biçiminde davranacaktır. $\dot{c} = 0$ olduğundan c_{ss} sürekli-hal değeri

$$0 = -c_{ss} - k_{c1}(r - c_{ss}) - k_{c2}(z - r) + z$$

dir ve sürekli-hal hatası

$$r - c_{ss} = \frac{1 - k_{c2}}{1 - k_{c1}} (r - z) \quad (\text{III-17})$$

elde edilir.

Kontrolörün kazancı K_c 'a LQP analiz yöntemiyle karar verilir. Bölüm II-5.1'deki

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = q \quad \text{için;} \quad$$

matematiksel işlemler yapılarak

$$k_{c1} = - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{q}} - 1 \right), \quad k_{c2} = 0$$

elde edilir. Buradan LQP kontrol kuralı

$$u^* = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{q}} - 1 \right) \hat{x}_1$$

ve (III-15) denkleminde kontrolörün transfer fonksiyonu

$$H_{LQP}(s) = - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{q}} - 1 \right) \frac{\alpha^2 + (2\alpha - 1)Ts}{T^2 s^2 + \left[2\alpha + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{q}} - 1 \right) \right] s T + \alpha^2}$$

yazılır. Bu LQP kontrolör (III-17) ile verilen sürekli-hal hatası

$$r - c_{ss} = \frac{r - Z}{\sqrt{1 + \frac{1}{q}}}$$

sıfır değildir.

Kontrolör kazancı K_c 'nin tasarımı için diğer bir yol sürekli-hal hatasını ($r - c_{ss}$) sıfır yapmak için bir güç uygulamak olacaktır. (III-17) denklemi bunun, (III-15) fonksiyonunun paydasında $d_o = 0$ yapılarak;

$$k_{c2} = 1$$

'in elde edilmesiyle sağlanacağını gösterir. Böylece, Bölüm III-3.2'de anlatılan integral işlemi sağlanmış olur. (III-16) denklemi;

$$c + T'c' = r$$

biçimine gelir. Burada

$$T' \equiv T / \beta \quad \text{ve} \quad \beta \equiv 1 - k_{c1}$$

dir.

Bu denklem k_{c1} 'in kapalı çevrim cevabının T' zaman sabitine karar vereceğini ve $k_{c1} < 0$ ise T' 'nün T 'den daha hızlı olmasını sağlayacağını gösterir. (II-15)'den sonuç kontrolör transfer fonksiyonu;

$$H_{oss}(s) = K \frac{1+s T_1}{s (1+s T_2)}$$

elde edilir. Burada;

$$K = \frac{\alpha^2 \beta}{(2\alpha + \beta - 1) T}$$

$$T_1 = \left(\frac{1}{\beta} + \frac{(2\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha^2 \beta} \right) T > \frac{T}{\beta} \quad \text{için } \alpha > 1/2 ; \beta > 1$$

$$T_2 = \frac{1}{2\alpha + \beta - 1} T < \frac{T}{\beta} \quad \text{için } \alpha > 1/2$$

dır.

$T_1 > T_2$ eşitsizliği $H_{oss}(s)$ transfer fonksiyonuna aktarıldığında kontrolör integral işleminde anlatıldığı gibi faz ilerlemeli kontrolör olur.

Çok hızlı gözleyici cevabını (α 1'den çok büyük değerler için) $\rightarrow \infty$)

limitlemenin diğer yolu; kontrol parametrelerinin

$$K \rightarrow \alpha \beta / 2 T, \quad T_1 \rightarrow T / \beta, \quad T_2 \rightarrow 0$$

değerlerini almasıdır. Bu parametre değerleri kullanıldığında paydanın d_1 katsayısı dominant olacağından kontrolör transfer fonksiyonu yaklaşık PI kontrol transfer fonksiyonu

$$H_{oss}(s) \rightarrow K_{PI} \left(1 + \frac{1}{s T_i} \right) = H_{PI}(s)$$

olacaktır.

Burada; $K_{PI} = -KT_1$ ve $T_i = T_1$ dir.

Yaklaşım; kontrol edilen sistemin düşük derecesi ($n = 2$) nedeniyle Bölüm III-3.2'de anlatıldığı gibi PID'den daha ziyade PT'dir.

III -3.4 Kapalı-Çevrim Kontrol Sisteminin Davranışı

Şekil III-5'deki LQP kontrol sistemi $2n$ dereceden bir dinamik sistemdir. Kontrol edilen sistemin n tane x durumuna ilave gözleyicinin n tane $\hat{x}$ durumuna sahiptir. (III-5) denkleminde $\hat{x}$ tahmini yerine e_o gözlem hatasını yazarak bir alternatif durum uzayı gerçekleştirilmesi kullanılarak sistem davranışını tartışmak daha uygundur. Sistemi yöneten ardaşık durum denklemleri;

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} \text{ yada } x(i+1) &= Ax - BK_c \hat{x} \\ &= Ax - B K_c (x - e_o) \\ \dot{e}_o &= (A - K_o C)e_o \end{aligned} \quad (\text{sürekli-zamanlı})$$

yada

$$e_o(i+1) = (I - K_o C)Ae_o \quad (\text{ayrık-zamanlı})$$

biçimindedir ve bu denklemler genişletilmiş durumların terimleri olarak

$$X \equiv \begin{bmatrix} x \\ e_o \end{bmatrix}$$

yazılır. Burada

$$\dot{X} \quad \text{yada} \quad X(i+1) = AX, \quad y = CX$$

dir.

Sürekli -zamanlı parçalı yapıya sahip A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & A - CK_o \end{bmatrix}$$

ve benzer yapıya sahip ayrık-zamanlı A matrisi

$$A = \begin{bmatrix} A - BK_c & BK_c \\ 0 & (I - K_o C)A \end{bmatrix}$$

biçiminde ve

$$C = \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir.

Bu lineer sistemin kapalı-çevrim davranışına genel olarak karakteristik denklemi

$$[sI - A] = 0$$

ile karar verilir ve A 'nın parçalı yapısından giderek sürekli-zamanlı sistemlerde determinant

$$|sI - A| = |sI - (A - BK_c)| |sI - (A - K_oC)|$$

ve ayrık-zamanlı sistemlerde determinant;

$$|sI - A| = |sI - (A - BK_c)| |sI - (I - K_oC)A|$$

çarpanlarıyla elde edilir.

Bu, karakteristik denkleminin birbirinden bağımsız n kök takımına sahip olduğunu gösterir:

1-) $|sI - (A - BK_c)| = 0$ 'ın kökleri;

Kontrol kazancı K_c 'ye ve x durumlarının gerçek değerleriyle sürülebilen kontrole sahip Şekil III-7'deki sistemin karakteristik köklerine bağlıdır. Bu sistem, orjinal problemle ilişkili kesinlikle eşdeğer sistem olarak bilinir.

2-) Gözleyici karakteristik denklemi (III-7) yada (III-8)'in kökleri gözleyici kazancı K_o 'a bağlıdır.

Böylece, bir ideal geri besleme kontrolörün tasarımında kazanç matrislerinin K_c ve K_o 'ın özelliklerini istemesine rağmen kontrol yada gözleyici fonksiyonlarının sahip oldukları özellikleri sadece referans olarak K_c ve K_o 'ın herbirine ayrı ayrı karar verilmiş olması istenir.

III -4 Genel Değerlendirme

Bölüm III-3'de ideal lineer kontrolörlere en iyi şekilde yol gösteren LQP teorisinin, bütün kontrol problemlerine uygulanabileceği ileri sürülür.

III -4.1 Problemin Özelleştirilmesi

Optimal kontrol teorisinde problem, matematiksel olarak iyi olmasına ve matematiğinin iyi belirlenmesine rağmen, problemin çözümleri anlamsız yada önemsiz olabilir. Bunu önlemek için kontrol problemlerinin özelliklerinin iyi kavranması gereklidir. LQP teori (A, B, C, P, Q matrisleriyle belirlenen) bunların beşini gösterir.

- * (A_g, B_g) kontrol edilen sistemin karakteristikleri;
- * (A_r, A_z, B_z) bozucuların karakteristikleri;
- * (C_g, C_r) ölçülen çıkışlar olarak durumların uygun olmaması;
- * (P) istenilen performans;
- * (Q) kontrol işlemindeki sınırlamalar.

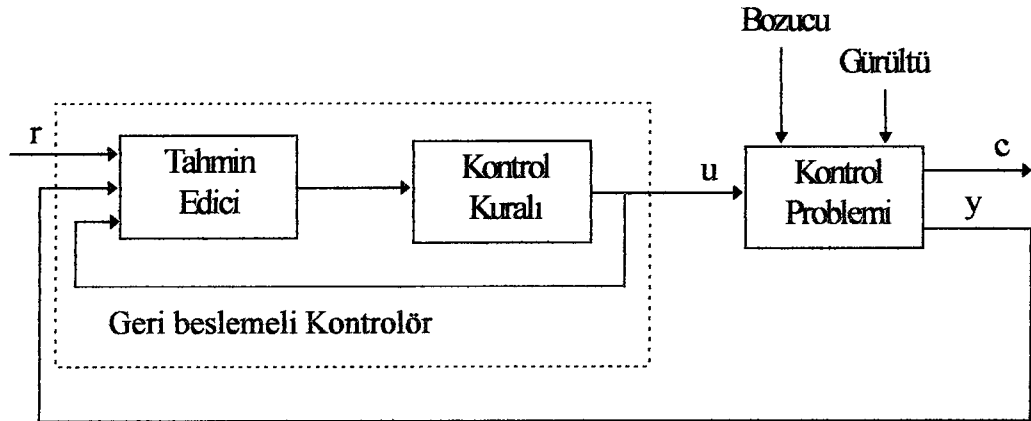
Ardaşık lineer denklemler grubunu temsil eden matrislerin tümünün belirlenmesinin gerekli olmadığı benzer özellikler tüm kontrol problemlerinden istenmelidir, ve herhangi bir başarılı tasarım için düşünülmüş olmalıdır.

III -4.2 Kontrolör Yapısı

Şekil III-2 ve Şekil III-3'de gösterildiği gibi ideal LQP kontrolör iki ayrı fonksiyonu yapar.

- * Bir gözleyici, x durumunun değişen değerini tahmin eder.
- * Bir kontrol kuralı kontrol işlemine karar vermek için tahmin kullanır.

Bu teori, bütün geri beslemeli kontrolörlerin bu iki fonksiyonu yapması ve Şekil III-7'deki genel yapıya sahip olması gerekliliğini ileri sürer.



ŞEKİL III -7: Kontrolörün İki Fonksiyonu Yapması

Lineer kontrol edilen sistemler için lineer kontrolörleri tasarlarken gerekli olsun yada olmasın iki ayrı fonksiyonun çıkışını bilmek isteğe bağlı olmalıdır. Klasik kontrolörler bu basit anlayışı kullanmadan tasarlanmalarına iki fonksiyonlu tasarımda Bölüm III-3.4’de anlatıldığı gibi K_c ve K_o kazançlarının seçiminde olduğu gibi ayrılmış olmalıdır. LQP olmayan problemlerde başarılı kontrolör tasarımı için önceden gerekli iki fonksiyonun ayrımı çok daha uygundur.

III -4.3 Kontrolör Dinamikleri

Geri beslemeli kontrolörlerde dinamikler (III-1) denklemindeki kontrol kuralı ile değil gözleyici ile birleştirilir. Kontrolörün bir kısmı kontrol probleminin kendi iç modelidirler [7] ve durum, tahmin amacı için gereklidir.

Geri beslemeli kontrolörde kullanılan integratörler zamanla değişmeyen polinomlarda değişkenlerin, bir grubunun dinamiklerinin modeli olarak çalıştığını gösterir. Bu, kontrol problemlerinde bozucuların modeli sınıfındadır. Böylece optimal kontrol teori, geri beslemeli kontrolörlerde neden integral işleminin kullanıldığını açıklar. İntegral işlemi bozucuların değerlerini tahmin eden bir gözleyicinin ihtiyacı olan iç modelin sağlaması içindir.

Türev işlemi, hız yada faz ilerlemeli biçimde olsun yada olmasın durum tahmini içindir. Tahmin, kontrol edilen sistemin bir ilave dinamik durumudur. y ölçülen

çıkışında x_g durumunu bir dinamik olarak $\bar{y}$, y 'nin türevidir. Bu, diğer durumun tahminidir ve türev işlemi durum geri beslemeli kontrolde gürültü nedeniyle sağlanması zordur.

III-5 Örnekler

Örnek:1

$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(1+sT)}$ transfer fonksiyonuna sahip kontrol edilen sistemin $\alpha = 1/T$ ve $\beta = K/T$ olduğunda durum uzayı gerçekleştirilmesi

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \bar{x}$$

dir, doğal frekans ω_0 ve söndürme oranı ζ olan bir gözleyici için gözleyici kazancını hesaplayalım:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

$$K_o = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - K_o C) = \begin{bmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s + \alpha \end{bmatrix}$$

$$\det [sI - (A - K_o C)] = s^2 + (k_1 + \alpha)s + k_1\alpha + k_2$$

standart gösterimde

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$2\zeta\omega_0 = k_1 + \alpha \quad \Rightarrow k_1 = 2\zeta\omega_0 - \frac{1}{T}$$

$$k_1\alpha + k_2 = \omega_0^2 \quad \Rightarrow k_2 = \omega_0^2 - \frac{2\zeta\omega_0}{T} + \frac{1}{T^2}$$

$$K_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\zeta\omega_0 - \frac{1}{T}} \\ \omega_0^2 - \frac{2\zeta\omega_0}{T} + \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_o(y - C\hat{x})$$

Laplace dönüşümü alınıp, düzenlenirse

$$\hat{X}(s) = [sI - A + K_o C]^{-1} B U(s) + [sI - A + K_o C]^{-1} K_o Y(s)$$

A, B, C, K_o matrisleri kullanılarak matrisel işlemler yapılırsa;

$$\hat{X}(s) = \frac{1}{s^2 + (k_1 + \alpha)s + k_1\alpha + k_2} \begin{bmatrix} \beta \\ (s + k_1)\beta \end{bmatrix} U(s) + \frac{1}{s^2 + (k_1 + \alpha)s + k_1\alpha + k_2} \begin{bmatrix} k_1(s + \alpha) + k_2 \\ -k_1k_2 + k_2(s + k_1) \end{bmatrix} Y(s)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + (k_1 + \alpha)s + k_1\alpha + k_2} \begin{bmatrix} \beta & k_1(s + \alpha) + k_2 \\ (s + k_1)\beta & -k_1k_2 + k_2(s + k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\omega_0 = 5\alpha$ ve $\zeta = 0.5$ aldığımızda

$$k_1 = 5\alpha - \frac{1}{T}$$

$$k_2 = 25\alpha^2 - 5\alpha \frac{1}{T} + \frac{1}{T^2}$$

(1)'de yerine konursa

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1(s) \\ \hat{X}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + (6\alpha - 1/T)s + 5\alpha^2(5\alpha + 1 - 1/T) - \alpha(1/T - 1/T^2)} \begin{bmatrix} \beta & (5\alpha - 1/T)(s + 6\alpha) + 1/T^2 \\ (s + 5\alpha - 1/T)\beta & s(25\alpha^2 - 5\alpha/T + 1/T^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek:2

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

$$y = [1 \quad \epsilon] x$$

Durum uzayı gerçekleştirilmesine sahip sistemde gözlenebilirlik matrisini elde edelim:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad \epsilon], \quad K_o = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - K_o C) = \begin{bmatrix} s + 1 + k_1 & k_1 \epsilon \\ k_2 - 2 & s + 1 + k_2 \epsilon \end{bmatrix}$$

$$\det [sI - (A - K_o C)] = (s + 1)^2 + (s + 1)k_1 + \epsilon[sk_2 + 2k_1 + k_2] = 0$$

Bu $K_o = [k_1 \quad k_2]^T$ kazancına sahip bir gözleyicinin karakteristik denklemdir.

$$s^2 + (2 + k_1 + \epsilon k_2)s + (1 + k_1 + 2k_1 \epsilon + k_2 \epsilon) = 0$$

Karakteristik denklemin kökleri sol yarı düzlemde olması gerektiğinden diskriminantın sıfıra eşit olması gereklidir.

$$(2 + k_1 + \epsilon k_2)^2 - 4(1 + k_1 + 2k_1 \epsilon + k_2 \epsilon) = 0$$

Düzenlenirse;

$$[(1 + k_1 + \epsilon k_2) - 1]^2 = 8k_1 \epsilon$$

$$\epsilon = 1 \Rightarrow \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1} = 8 \Rightarrow k_1 = 2, \quad k_2 = 2 \quad K_o = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\epsilon = 0 \Rightarrow k_1^2 = 2k_1 \Rightarrow k_1 = 2 \quad K_o = \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}$$

Transfer fonksiyonunu

$$\epsilon = 0$$

$$\frac{\hat{X}_1(s)}{Y(s)} = \frac{2(s+1)}{(s+1)(s+3)}$$

$$\epsilon = 1$$

$$\frac{\hat{X}_1(s)}{Y(s)} = \frac{2(s+2)}{(s+3)^2}$$

$$\frac{\hat{X}_2(s)}{Y(s)} = \frac{k(s+1)+4}{(s+1)(s+3)}$$

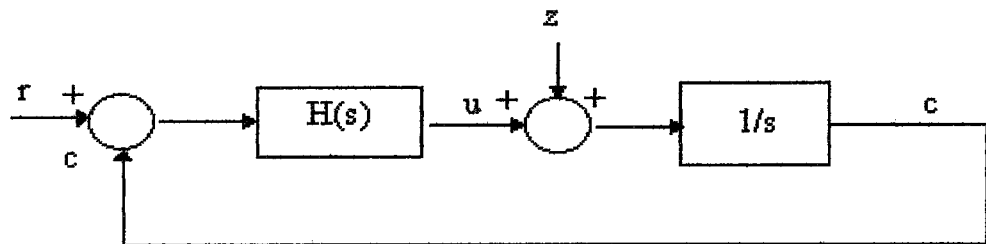
$$\frac{\hat{X}_2(s)}{Y(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+3)^2}$$

dir.

Örnek:3

$\dot{c} = u + z$ göre davranan c çıkışına sahip kontrol edilen bir sistemde $\dot{z} = 0$ göre davranan bir bozucu olduğunda

$$I = \int_0^{\infty} (c^2 + u^2) dt$$



'yi minimize etmek için düzenlenmişse ve sadece c çıkışının kontrolörü sürmek için uygun olduğunu kabul ederek bir LQP kontrolörün transfer fonksiyonunun genel gösterilimini elde edelim.

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{u} + \mathbf{z}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{c}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} - \mathbf{c} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad \mathbf{K}_o = \begin{bmatrix} k_{o1} \\ k_{o2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = [k_{c1} \quad k_{c2}]$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{c}} = 0 - (\mathbf{u} + \mathbf{z}) = -(\mathbf{x}_2 + \mathbf{u})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

$$s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} s + k_{o1} & -1 \\ k_{o2} & s \end{bmatrix}$$

$$\det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_o\mathbf{C})] = s^2 + k_{o1}s + k_{o2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-k_{o1} \pm \sqrt{k_{o1}^2 - 4k_{o2}}}{2}$$

$$k_{o1}^2 - 4k_{o2} = 0 \Rightarrow k_{o1}^2 = 4k_{o2} \quad k_{o2} > 0 \quad \text{ve} \quad k_{o1} > 0$$

Standard gösterilimde

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

$$2\omega_0 = k_{o1}$$

$$\omega_0^2 = k_{o2} = \left(\frac{k_{o1}^2}{4} \right) = \frac{k_{o1}^2}{4} \Rightarrow \omega_0 = \pm \frac{k_{o1}}{2}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_o(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

Laplace dönüşümü alınıp, düzenlenirse

$$\hat{\mathbf{X}}(s) = [\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_o\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{B}U(s) + [\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_o\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{K}_o\mathbf{Y}(s)$$

A, B, C, $\mathbf{K}_o$ matrisleri kullanılarak matrisel işlemler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_1(s) \\ \hat{X}_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + k_{o1}s + k_{o2}} \begin{bmatrix} s & sk_{o1} + k_{o2} \\ k_{o2} & k_{o2}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

$$H(s) \equiv \mathbf{K}_c[\mathbf{sI} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_o\mathbf{C} + \mathbf{BK}_c]^{-1}\mathbf{K}_o$$

A, B, C, $\mathbf{K}_o$, $\mathbf{K}_c$ matrisleri yerine konulup matrisel işlemler yapılırsa

$$H(s)_{LQP} = \frac{s(k_{o1}k_{c1} + k_{o2}k_{c2}) + k_{c1}k_{o2}}{s^2 + (k_{o1} + k_{c1})s + k_{o2}(1 - k_{c2})}$$

Sürekli-hal hatasının sıfır olması için tasarlandığında LQP kontrolörün integral işlemiyle faz ilerlemeli kontrolör olduğunu gösterelim.

Bu durumda $k_{c2} = 1$ olmalıdır. Transfer fonksiyonu

$$H_{Oss}(s) = \frac{s(k_{o1}k_{c1} + k_{o2}) + k_{c1}k_{o2}}{s(s + k_{o1} + k_{c1})}$$

biçimindedir.

Çok hızlı bir gözleyici cevabı veren tasarımda kontrolörün PI kontrolör olduğunu gösterelim.

Genel formda

$$H_{Oss}(s) = K \frac{1 + sT_1}{s(1 + sT_2)}$$

olduğuna göre

$$H_{Oss}(s) = \frac{k_{c1}k_{o2} \left(\frac{s(k_{o1}k_{c1} + k_{o2}) + k_{c1}k_{o2}}{k_{c1}k_{o2}} \right)}{(k_{c1} + k_{o1})s \left(\frac{(s + k_{c1} + k_{o1})}{k_{c1} + k_{o1}} \right)}$$

$$K = \frac{k_{c1}k_{o2}}{k_{c1} + k_{o1}}$$

$$T_1 = \frac{k_{o1}k_{c1} + k_{o2}}{k_{c1}k_{o2}} = \frac{k_{o1}}{k_{o2}} + \frac{1}{k_{c1}}$$

$$T_2 = \frac{1}{k_{c1} + k_{o1}}$$

$T_1 > T_2$ 'den büyük ise faz ilerlemeli kontrolörün transfer fonksiyonudur.

$$k_{c1} \rightarrow \infty \Rightarrow K \rightarrow k_{o2}$$

$$\begin{aligned} T_1 &\rightarrow \frac{k_{o1}}{k_{o2}} \\ T_2 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$H_{Oss}(s) \rightarrow K_{PI} \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = H_{PI}(s)$$

$$H_{Oss}(s) = \frac{k_{c1}k_{c2}}{k_{c1} + k_{o1}} \frac{\left(\frac{k_{o1}k_{c1} + k_{o2}}{k_{c1}k_{o2}} s + 1 \right)}{s \left(\frac{1}{k_{c1} + k_{o1}} s + 1 \right)}$$

$$H_{PI}(s) = k_{o2} \frac{\frac{k_{o1}}{k_{o2}} s + 1}{s} = k_{o1} \left(1 + \frac{1}{\frac{k_{o1}}{k_{o2}} s} \right)$$

$$K_{PI} = K T_1 = k_{o2} \frac{k_{o1}}{k_{o2}} = k_{o1}$$

elde edilir.

BÖLÜM IV

OPTIMAL KONTROL TEORİSİ

IV. 1 Giriş

Bölüm II'deki LQP teori, dinamik sistemlerin x durumunu kontrol etmek için u girişlerinin nasıl seçilmesi gerektiğini veren en genel optimal teoremin bir dalıdır. Bu genel teori,

$$\dot{x} = g(x, u, t) \quad (\text{sürekli- zamanlı}) \quad (\text{IV-1a})$$

$$x(i + 1) = G[x(i), u(i), i] \quad (\text{ayrık-zamanlı}) \quad (\text{IV-1b})$$

ardaşık birinci dereceden dinamik denklemlerin belirli bir grubu biçiminde durum uzayı gerçekleşmesine sahip kontrol edilen sistemin dinamikleri olan problemlere uygulanır. Burada g ve G uygun boyutlu herhangi bir vektör fonksiyonu olacaktır.

Lineer dinamiklerinin bu genellemesini tüm kontrol edilebilen dinamik sistemlerin kısmi diferansiyel denklemlerinin karşılaştırılmasının sağlanmasını içerir. Performans genel yapıdaki I ölçütüyle ölçülür,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} h(x, u, t) dt \quad (\text{sürekli-zamanlı}) \quad (\text{IV-2a})$$

$$I = \sum_{i=i_1}^{i_2} H(x(i), u(i), i) \quad (\text{ayrık-zamanlı}) \quad (IV-2b)$$

fakat Bölüm-II'de olduğu gibi h yada H karesel fonksiyonları üzerinde herhangi bir koşul yoktur. (IV-1) ve (IV-2) denklemlerinin zamana bağlı değiştiklerini göstermek için g , G , h , H fonksiyonları zamanı veya i 'yi içermelidir.

Optimal dinamik sistemlerin bu en genel grubunun nasıl kontrol edileceği kontrol teorisinin en önemli sorunlarından birisidir. Burada matematiksel teknik, dinamik programlama olarak bilinen sorunun cevabını tercih eder.

Dinamik programlama; çok katlı karar verici sistemlerin, bir matematiksel modeline dayanan biraz yanlış olan bir isimdir ve 1950'de Bellman tarafından geliştirilmiştir. Çok katlı karar vericiye bir örnek ayrık-zaman optimal kontrol problemidir. Burada $i = 1, 2, \dots$ zaman aralığında (ya da adımlarında) $u(1), u(2), \dots$ kontrol değerlerine karar vermek istenir. Bu teori, digital computer kullanan nümerik çözümler için uygun gözüken genel denklemlere yol gösterdiğinden dinamik programlama adını alır. Düşük boyutlu problemlerin nümerik çözümlerinin yapıldığı diğer tekniklere göre pratik kullanılabilirlik sınırlıdır. Bununla beraber çok katlı karar verici sistem teorisi, hem ayrık-zamanlı hem de sürekli-zamanlı problemler için optimal kontrol teorisinin teorik iskeletini sağlar. Bu teori, analitik olarak çözülebilen LQP problemlerine Bölüm II'de anlatıldığı gibi yol gösterir.

Dinamik programlama analizinin esasları skaler LQP problemleri için Bölüm II-2'de kullanılan analiz biçiminden farklı bir biçimde incelenecektir. Aynı analiz metodları hem ayrık-zamanlı hemde sürekli-zamanlı skaler problemlerinin en genel hali Bölüm IV-2'de incelenecektir. Tüm sınıflandırmayı kapsayan (IV-1) ve (IV-2) denklemlerinin skaler sonuçları Bölüm IV-3'de incelenecektir. Genel sonuçlar, Bölüm II-3'den aktarılan genel LQP sonuçlarını elde etmek için Bölüm IV-4'deki genel sonuçlar kullanılır. Euler denklemleri ve Pontriagin denklemleri gibi varyasyonel hesapların diğer matematiksel metodları, zaman zaman sürekli-zamanlı problemlerin uygulanmasıdır. Dinamik programlama ve klasik metodlar arasındaki

ilişki Bölüm IV-5’de incelenecektir ve optimal kontrol teorisinde dinamik programlamanın neden tercih edildiğinin sebepleri Bölüm IV-6’da özetlenecektir.

Bölüm II’deki LQP teoriye benzer şekilde dinamik programlamanın optimal kontrol teorisi, x dinamik durumlarının değişen değerlerinin bir $u(x)$ fonksiyonu olarak kontrol işlemini belirler. Bölüm II ’de anlatılan LQP sistemlerinde olduğu gibi x durumlarını ölçülen çıkışlar olarak direk almak mümkün olmadığından pratik zorluklar vardır.

Bunun yerine,

$$y = g_2(x, t) \quad (\text{sürekli-zamanlı}) \quad (\text{IV-3a})$$

$$y(i) = G_2[x(i), i] \quad (\text{ayrık-zamanlı}) \quad (\text{IV-3b})$$

biçimindeki denklemlerle durumların ilişkili olduğu ölçülebilen y çıkışları vardır. Geri beslemeli kontrolörlerin tasarımı için genel metod; kararsız ve rasgele değişkenlerin etki ettiği kontrol edilen sistemler ele alındığında (IV-I) denklemleri lineer değilse (IV-3) denklemleri de lineer değildir.

IV-2 Skaler - Zamanla Değişmeyen Problemler

IV-2.1. Ayrık-Zamanlı Sistem

Tek girişli zamanla değişmeyen ayrık-zamanlı problemlerin bir alt sınıfının genel skaler dinamik denklemini

$$x(i + 1) = G[x(i), u(i)]$$

ve performans ölçütünü

$$I = \sum_{i_1}^{i_2} H[x(i), u(i)]$$

biçiminde olduğunu düşünelim. Bölüm II-2.1'in LQP kısmındaki gibi I ölçütünün sadece $x(i_1)$ başlangıç durumuna ve $u(i_1), \dots, u(i_2)$ kontrol dizisine bağlı olduğunu göstermek için $N = i_2 - i_1 + 1$ alınarak,

$$\begin{aligned} I &= H[x(i_1), u(i_1)] + H\{G[x(i_1), u(i_1)], u(i_1 + 1)\} \\ &\quad + H\{G[G(x(i_1), u(i_1)), u(i_1 + 1)], u(i_1 + 2)\} + \dots + H(i_2) \\ &\equiv I_N[x(i_1), u(i_1), u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)] \end{aligned}$$

yazılabilir.

Verilen G, H için $u(i_1), \dots, u(i_2)$ göre minimizasyonda I_N 'nin optimal değeri sadece $x(i_1)$ başlangıç durumuna bağlı olacaktır. Bu bağlılık:

$f_N(x) \equiv; x(i_1) = x$ başlangıç durumundan başlayarak ve optimal kontrol kullanarak

N -zaman aralığında I performans ölçütünün değeri.

$$= \min_{u(i_1), \dots, u(i_2)} \{I_N[x, u(i_1), \dots, u(i_2)]\}$$

fonksiyonel gösterimle vurgulanır.

Yukarıdaki yazılımın bir matematiksel fonksiyonu olarak tümüyle I_N 'nin N minimizasyonları herhangi bir derecede yapılabilir. Pratikte $u(i_1)$ 'e göre minimizasyon

$$f_N(x) = \min_{u(i_1)} \{ \min_{u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)} [I_N] \}$$

dır ve başlangıç $x(i_1)$ durumu yerine gösterilimin basitliği için x yazılmıştır. I_N 'deki birinci terim $H[x, u(i_1)]$ 'ye dikkat edersek, $u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)$ bağımsız olduğundan iç minimizasyon

$$\min_{u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)} \{I_N\} = H[x, u(i_1)] + \min_{u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)} \{H[G(x, u(i_1)), u(i_1 + 1)] + \dots + H(i_2)\}$$

yazılabilir.

Bu gösterilimdeki ikinci terim

$$\min_{u(i_1 + 1), \dots, u(i_2)} \{H[G(x, u(i_1)), u(i_1 + 1)] + \dots + H(i_2)\} \equiv f_{N-1}[G(x, u(i_1))]$$

olarak $f_N(x)$ 'i belirlemek için kullanılan denklemin terimleri olarak yazılabilir. $f_N(x)$ eşitliğini basitleştirmek için $u(i_1)$ yerine u yazılırsa

$$f_N(x) = \min_u \{H(x, u) + f_{N-1}[G(x, u)]\} \quad (IV-4)$$

elde edilir. Bu, N 'nin başlangıç koşulunda bilinen çözüm fonksiyonunu sağlayan N değerlerinde çözülebilen f_N için ardaşıl denklemin fonksiyonelidir. İstenen başlangıç çözümü $N = 1$ olduğunda bir tek aralıklı sistem için bulunabilir ve gösterilim

$$f_1(x) = \min_u \{H(x, u)\} \quad (IV-5)$$

biçimindedir.

Bu (IV-4) ve (IV-5) fonksiyonel denklemleri, optimal kontrolü tipik dinamik programlama anlamında formüle eder. Bunların çözümleri, u kontrollerinin optimal yada minimize değerini veren fonksiyonların bir grubunun uygunlaştırılmasıyla birlikte I performans ölçütünün optimal değerlerini veren $f_N(x)$ fonksiyonlar grubunu içerir. Optimal kontrol, I 'nın optimal değerleri için verilen gösterilimle benzerdir.

$u_N(x) \equiv$; Başlangıç durumu $x(i_1) = x$ ve N zaman aralığında sistemin $u(i_1)$ optimal değeri.

Bu gösterimle (IV-4) denklemindeki u 'nun minimize değeri $u_N(x)$ olarak yazılacaktır.

Gerçek zamanda optimal kontrol $u^*(i)$ zaman adımlarının artan N sayısının bir dizisi için, optimal birinci kontrolün bir serisi olarak (IV-4) ardışıl fonksiyonel denklemleriyle verilir. i gerçek zamanı ve N geri dönüş zamanı Şekil II-2'de gösterildiği gibi $N = i_2 - i_1 + 1$ denklemleriyle anlatılmaktadır.

IV-2.2 Sürekli -Zamanlı Sistem

Ayrık-zamanlı problemler için dinamik programlama tartışması, Bölüm II-2.2'nin LQP önsöz kısmında anlatıldığı gibi sürekli-zaman problemlerinin çözümünü sağlamak için birlikte yapılabilir.

Tek değişkenli zamanla değişmeyen sürekli-zamanlı problemlerin dinamik denklemi

$$\dot{x} = g(x, u)$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_{t_1}^{t_2} h(x, u) dt \quad (t_2 = t_1 + T \text{ olmak üzere})$$

nun genel sınıflandırması için I'nin optimal değeri.

$f(x, T) \equiv; x(t_1) = x$ durumundan başlayıp optimal kontrol kullanarak $(t_1, t_1 + T)$ zaman aralığında I'nın değeri.

fonksiyonel eşitliği ile belirlenir ve benzer gösterilimi kullanarak optimal kontrol $u(x, T) \equiv; x(t_1) = x$ durumundan başlayıp optimal kontrol kullanarak $(t_1, t_1 + T)$ zaman aralığında $u(t_1)$ 'in optimal değeri ve $x(t_1) = x$ başlangıç değeri.

fonksiyonel eşitliği ile belirlenir.

(t_1, t_2) zaman aralığı Δ bölünemeyecek kadar küçük olma koşulu altında $(t_1, t_1 + \Delta)$ ve $(t_1 + \Delta, t_2)$ olmak üzere iki aralığa bölünebildiğinden birinci terim

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta} h(x, u) dt \approx h(x, u) \Delta$$

yaklaşık olarak yazılabilir ve birinci varyasyon esnasında durum δx arttırılırsa,

$$\delta x \approx g(x, u) \Delta$$

yaklaşık olarak yazılabilir. Optimal kontrol kullanıldığında, ikinci terim (IV-4) ayrık-zamanlı denklemin sağındaki ikinci terime benzer bir optimal çözümdür.

$$\int_{t_1 + \Delta}^{t_2} h(x, u) dt = f(x + \delta x, T - \Delta)$$

$f(x, T)$ çözüm fonksiyonunun fark fonksiyonu olduğunu farz edersek, ikinci terim birinci dereceden Taylor serisine,

$$\int_{t_1 + \Delta}^{t_2} h(x, u) dt \approx f(x, T) + \frac{\partial f}{\partial x} g(x, u) \Delta - \frac{\partial f}{\partial T} \Delta$$

yakınsar. Δ aralığının üzerinde sabit olduğunu ve Δ 'nın sıfıra gittiğini farz ederek iki terimi toplarsak, kontrol u 'ya göre minimizasyonda I 'nın f optimal değeri için fonksiyonel fark denklemi

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \min_u \left\{ h(x, u) + \frac{\partial f}{\partial x} g(x, u) \right\} \quad (IV-6)$$

elde edilir. (IV-6) denklemindeki u 'nun minimizasyonu optimal kontrol $u(x, T)$ 'dir.

IV-3 Birden Fazla Durum İçeren Problemler

(IV-4) ve (IV-6) denklemlerini çıkarmak için kullanılan düşünceler, skaler problemler için açık değildir. Zamandan bağımsız birden fazla durum olduğunda,

$$x(i+1) = G[x(i), u(i)] \quad , \quad I = \sum_{i_1}^{i_2} H[x(i), u(i)] \quad (\text{ayrık-zamanlı}) \quad (IV-7)$$

$$\dot{x} = g(x, u) \quad , \quad I = \int_{t_1}^{t_2} h(x, u) dt \quad (\text{sürekli-zamanlı}) \quad (IV-8)$$

biçimindedir.

Bu düşünceler, ayrık-zamanlı ardaşıl fonksiyonel denklemlere

$$f_N(x) = \min_u \{H(x, u) + f_{N-1}[G(x, u)]\} \quad (IV-9)$$

ve sürekli-zamanlı ardaşıl fonksiyonel denklemlere

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \min_u \left\{ h(x, u) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j(x, u) \right\} \quad (IV-10)$$

yol gösterir.

Sabit olmayan problemler için ilave edilen bu genelleştirme, Bölüm IV-I'de söylendiği gibi dinamiklerin ve maliyet fonksiyonunun her ikisi birden yada sadece birisi zamandan bağımsız olduğunda, gerçek zaman i veya t 'nin mutlak değerleri ölçümü için ilave gösterilim ister. Kontrol u ve I 'nin optimal değerleri için genel çözüm fonksiyonlarının açıklaması ayrık-zamanlı için,

$f_N(x, i_2) \equiv$ i_2 son zamanında ve $x(i_2 - N + 1) = x$ durumundan başlayarak N zaman

adımlarında optimal kontrolü kullanan I değeri.

$u_N(x, i_2) \equiv$ bir sistemde t_2 son zamanında ve $x(i_2 - N + 1) = x$ durumundan

başlayarak $u(i_2 - N + 1)$ 'nin optimal değeri .

ve sürekli-zamanlı için

$f(x, T, t_2) \equiv$ t_2 son zamanında ve $x(t_2 - T) = x$ durumundan başlayarak T zamanında

optimal kontrolü kullanan I değeri.

$u(x, T, t_2) \equiv$ bir sistemde t_2 son zamanında ve $x(t_2 - T) = x$ durumundan başlayarak

$u(t_2 - T)$ 'nin optimal değeri.

Bu gösterimle; genel dinamik programlama denklemlerini formüle eden optimal kontrol skaler problemler için Bölüm IV-2.2'nin sonuçlarının genelleştirilmesi olarak yazılabilir.

Ayrık-zamanlı genel fonksiyonel denklemlerini yeniden düzenlersek,

$$f_N(x, i_2) = \min_u \{ H[x, u, i_2 - N + 1] + f_{N-1}[G(x, u, i_2 - N + 1), i_2] \} \quad (IV-11)$$

ve başlangıç çözümü

$$f_1(x, i_2) = \min_u H(x, u, i_2) \quad (IV-12)$$

dir.

Sürekli-zamanlı genel fonksiyonel fark denklemi

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \min_u \left\{ h(x, u, t_2 - T) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j(x, u, t_2 - T) \right\} \quad (IV-13)$$

ve ilk koşul

$$f(x, 0, t_2) = \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \min_{u(t)} \left\{ \int_{t_2 - T}^{t_2} h(x(t), u(t), t) dt \right\} \right\} \quad (IV-14)$$

dir.

Performans ölçütü, bir sınırlı skaler h 'nın integrali olduğunda, (IV-2.a) eşitliğinde olduğu gibi (IV-14)'ün ilk koşulu

$$f(x, 0, t_2) = 0$$

dir.

Diğer kriter, sınır zamanında durumun değeri üzerindeki özel istekleri yansıtır. Örneğin

$$I = h_1(x_2) + \int_{t_1}^{t_2} h(x, u, t) dt$$

(II-24) LQP denklemlerinde olduğu gibi, durum sınır değerleri üzerine bir hata yerleştirilse, sürekli-zamanlı sistemlerde ilk koşul

$$f(x, 0, t_2) = h_1(x)$$

biçiminde elde edilir. Ayrık-zamanlı sistemlerde $u(i_2)$ son kontrol $x(i_2 + 1)$ durum değerini alırsa, bu durumu göstermek çok kolay olacaktır. Son kontrol, (IV-1.a) dinamik denkleminde

$$x(i_2 + 1) = G[x, u(i_2), i_2]$$

herhangibir minimizasyonla bulunacaktır ve ardaşıl fonksiyonel denkleminin başlangıç çözümü

$$f_1(x, i_2) = H[x, u(i_2), i_2]$$

olacaktır.

(IV-14) denkleminin sürekli-zamanlı ilk koşulu; diğer bir deyişle keyfi katılan sabitin değerini sabitler, fakat çözüm fonksiyonunun biçimine karar vermez.

(IV-12) denklemine benzer şekilde ilk koşul

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{T=0} = \min_u \{h(x, u, t_2)\} \quad (IV-15)$$

dir.

IV-3.1 Optimallik Prensibi

(IV-11) denkleminde olduğu gibi dinamik programlamanın ardaşıl fonksiyonel denklemleri optimallik prensibi adı ile özetlenebilen bir yapıya sahiptirler.

Bir optimal kontrol dizisi, optimallik prensibi gereği verilen N değeri için optimaldir.

Optimal kontrol denklemleri direk olarak bu prensipten çıkarılır.

Bölüm IV-2.1'in skaler, zamandan bağımsız, ayrık-zamanlı kısmı, örneğin kontrol $u(i_1)$ 'den elde edilen $x(i_1 + 1)$ durumu

$$x(i_1 + 1) = G[x(i_1), u(i_1)]$$

dir ve optimallik prensibi, optimal kontrol, (N - 1) adım için I performans ölçütünde kullanıldığında $f_{N-1}[x(i_1 + 1)]$ olacaktır. Burada

$$f_{N-1}[x(i_1 + 1)] = f_{N-1}[G(x(i_1), u(i_1))]$$

dir.

Birinci adımda $H[x(i_1), u(i_1)]$ 'dır, böylece optimal kontrol N adım için kullanıldığında performans ölçütü

$$I = H[x(i_1), u(i_1)] + f_{N-1}[G(x(i_1), u(i_1))]$$

biçimindedir. Optimal kontrol, $u(i_1)$ 'i içeren tüm kontrollara göre I 'yi minimize edeceğinden, N adım için I 'nin optimal değeri (IV-4) eşitliğinin tekrarlanması

$$f_N[x(i_1)] = \min_{u(i_1)} \{H[x(i_1), u(i_1)] + f_{N-1}[G(x(i_1), u(i_1))]\}$$

biçimindedir.

IV-4 LQP problemleri

(IV-11) ve (IV-13) genel dinamik programlama eşitlikleri Bölüm II-3'den aktarılan genel LQP çözümlerini vermesi için özelleştirilmiştir.

LQP problemleri için başlangıç durumu olarak f çözüm fonksiyonunun x durumunda karesel ve zamanın mutlak değerine bağlı V simetrik matrisinin terimleri olarak gösterildiğini farz edelim.

$$f_N(x, i_2) = x^T V_{i_2-N+1} x \quad (\text{ayrık-zamanlı})$$

$$f(x, T, t_2) = x^T V(t_2 - T) x \quad (\text{sürekli-zamanlı})$$

Dinamik denklemlerin çözümü, yapılan başlangıç kabulünü doğrulayacak şekilde elde edilen çözümdür. Lineer dinamiklerle birlikte (II-24) veya (II-22) denklemlerinin kabul edilen karesel biçimini (IV-11) veya (IV-13) denklemlerinde yerine koyarsak, Bölüm II-3.1'in genel LQP sonuçlarına direk olarak yol göstereceği görülür.

Bu türetme, zamandan bağımsız sistemler için gösterilecektir. Benzer türetme işlemiyle genel zamana bağımlı sistemler için de verilebilir. Zamandan bağımsız sistemler için V matrisleri sadece T veya N geri dönüş zamanının fonksiyonu olarak gösterilebilir. Böylece (IV-11) ardaşıl ayrık-zamanlı fonksiyonel denklemi

$$x^T V_N x = \min_u \{ x^T P x + u^T Q u + (Ax + Bu)^T V_{N-1} (Ax + Bu) \}$$

biçimindedir ve (VI-13) sürekli-zamanlı fonksiyonel fark denklemi

$$x^T \frac{dV}{dT} x = \min_u \{ x^T P x + u^T Q u + 2x^T V(Ax + Bu) \}$$

elde edilir. Basit bir işlemle bu denklemden sürekli-zamanlı denklemin

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j = 2(V_x)^T = 2x^T V(Ax + Bu)$$

'nın elde edileceğini göstermek mümkündür.

LQP problemlerinin çözülebilmesi için yol, yukarıdaki dinamik programlama denklemlerinden u 'nın minimize değerlerinin hesapla bulunabilmesidir. Bu denklemler

$$\frac{d\{ \}}{du} = 2u^T Q + 2(Ax + Bu)^T V_{N-1} B = 0 \quad (\text{ayrık-zamanlı})$$

$$\frac{d\{ \}}{du} = 2u^T Q + 2x^T V B = 0 \quad (\text{sürekli-zamanlı})$$

biçimindedir. Bu koşullar x durumunda lineer optimal kontrolleri verir. Ayrık-zamanlı problemler için

$$u_N(x) = -K_N x$$

dir. Burada

$$K_N = (Q + B^T V_{N-1})^{-1} B V_{N-1} A \quad (\text{IV-16})$$

dir, ve sürekli-zamanlı problemleri için

$$u(x, T) = -K(T)x$$

dir. Burada

$$K(T) = Q^{-1}B^T V \quad (IV-17)$$

dir.

Optimal kontrol için bu ifadeleri dinamik programlama denklemlerine P, Q simetrik olmak şartıyla yerleştirip matematiksel işlemler yapılırsa

$$V_N = P + A^T V_{N-1} A - A^T V_{N-1} B (Q + B^T V_{N-1} B)^{-1} B V_{N-1} A \quad (IV-18)$$

elde edilir, burada ilk koşul

$$V_1 = P_1 + P \quad (IV-19)$$

dir ve sürekli-zamanlı problemler için

$$\frac{dV}{dT} = P + A^T V + V A - V B Q^{-1} B^T V \quad (IV-20)$$

dır ve burada ilk koşul

$$V(0) = P_1$$

dır.

(IV-16) ve (IV-21) denklemleri, Bölüm II-3'den aktarılan optimal LQP kontrolün (II-25) ve (II-23) genel denklemlerinin zamanla değişmeyen bir şeklidir.

IV-5 Varyasyonel Hesap

Sürekli-zamanlı dinamik programlama denklemleri; varyasyonel hesapta, matematiksel tekniklerle elde edilen sonuçların genelleştirilmesi olarak kabul edilir. Örneğin (IV-13) denkleminde eğer u optimal değerinin alındığı farz ediliyorsa, ve eğer zaman $t = t_2 - T$ 'nin mutlak değeri ile veriliyorsa

$$\frac{\partial f}{\partial t} + h(x, u, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j(x, u, t) = 0 \quad (IV-22)$$

elde edilir.

Bu, varyasyonel hesapta Hamilton - Jacobi - Bellman denklemi olarak bilinir.

Buna rağmen problem, (IV-13) denklemindeki gibi ise minimizasyon hesapla bulunabilir, örneğin LQP problemlerinde ilave denklemlerin (n_u ; u 'nun elemanlarının sayısı olmak üzere) bir n_u sayısı

$$\frac{\partial h}{\partial u_k} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g_j}{\partial u_k} = 0 \quad k = 1, \dots, n_u \quad (IV-23)$$

yazılabilir. (IV-22) Hamilton - Jacobi - Bellman denklemleri ve (IV-23) denklemleri varyasyonel hesabın Euler denklemi ile ilişkili olduğu gösterir.

IV-5.1 Pontriagin Maksimum Prensibi

Pontriagin maksimum prensibi, optimizasyon hesapla yapılamadığında varyasyonel hesabını içeren problemlerde genelleştirilir. Bir işaretleme değişimi ile (IV-13) denkleminde direk olarak izlenir. Co-state olarak bilinen p , bir optimal eğri boyunca f çözüm fonksiyonunun zamanla değişen kısmı türevlerinin değerlerini gösterir.

$$p_j \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, n$$

Bu p 'ler sadece zamanın fonksiyonudur. Yeni H fonksiyonu bir optimal eğri boyunca (IV-13) denkleminin parantez içindeki ifadesinin minimal değerini gösterir. O halde $\{ \}$ klasik mekanik Hamiltonian fonksiyonuyla ilişkili olduğundan Hamiltonian olarak bilinen fonksiyonla gösterilebilir.

$$H(x, u, t) \equiv h(x, u, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j(x, u, t)$$

$$= h + \sum_{j=1}^n p_j \dot{x}_j \quad (IV-24)$$

(IV-24) denklemi, p co-statelerin varyasyonel hesapta Lagrange multiplier'la da ilişkili olduğunu gösterir.

Bu gösterilimle (IV-22) Hamilton - Jacobi - Bellman denklemi

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -H$$

biçimindedir ve x_j durum değişkenine göre türevini alırsak

$$-\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \equiv \dot{p}_j$$

elde edilir, yada

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (IV-25)$$

dir. Bir p , co-statete göre (IV-24) denkleminin türevini alırsak,

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (IV-26)$$

elde edilir. Bir optimal eğri boyunca (IV-24) denklemine göre (IV-25) ve (IV-26) denklemleri, Hamiltonian değerlerini belirleyen $2n$ ardışık birinci dereceden fark denklemlerinin bir grubu biçimindedir. Bunlar Pontriagin denklemleri olarak bilinir. (IV-25) co-state denklemleri için ilk koşullar genellikle t_2 son zamanına göre verilmesine rağmen, (IV-26) durum denklemleri için ilk koşullar genellikle t_1 başlangıç zamanına göre verildiğinden, çözümü zor olacaktır. Böyle iki noktalı ilk koşullu problemler kolay kontrol edilmeyen problemlerdir.

Pontriagin maksimum prensibi (ki burada gerçek olarak minimum olmalıdır.) (IV-13) genel dinamik programlama denklemlerinde minimizasyon kelimesi tam yerinde kullanılmıştır. (IV-24) denkleminin H Hamiltonian'u zamanın her anında kontrol u'ya göre minimum olması, eğrinin optimal olması için koşuldur.

IV-5.2 Durum Sınırlamalı Optimal Kontrol

Kontrol teorisinde maksimum prensibi, gerçek kontrol edilen sistemlerin bir genel özelliği, olarak kontrol u 'ların bulunan değerleri üzerinde sınırlanmış durumlara sahip sürekli-zamanlı problemlerle ilişkilidirler. Böyle sınırlanmış durumların bir matematiksel gösterilimi, LQP'nin $u^T Q u$ terimini performans ölçütünde maliyet - kontrol terimi olarak göstermek için kullanılır. Daha gerçekçi gösterilim, kontrol u 'ların üzerindeki doyum eşitsizliklerinin bir grubuyla gösterilmesidir.

$$U_{j1} \leq u_j \leq U_{j2} \quad j = 1, \dots, m \quad (IV-27)$$

Doyum eşitsizliklerine sahip problemler için genel analitik çözümler çıkarmak, bu eşitsizlikler lineer olmadığından mümkün değildir. Buna rağmen sınırlanmış durumlara sahip lineer dinamikli problemler için Pontriagin maksimum prensip uygulamaları kullanışlı sonuçlara yol gösterir.

Dinamiklerin lineer olduğu bu tip problemlerden biri, mümkün olduğu kadar hızlı x durumundan belirlenen yörünge değerine sürülmesi istendiğinde ve (IV-27) ile

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

dir. Performans ölçütü

$$I = \int_{t_1}^{t_2} 1 \, dt$$

optimizasyonla karar verilmiş olan t_2 son zamanında problem bir minimum zaman problemi olacaktır. (IV-24) Hamiltonian denklemi

$$H = 1 + p^T A x + p^T B u$$

dir. Burada son terim $p^T B u$ kontrol u 'ya bağlıdır.

Böylece maksimum prensiple istenen minimizasyon, u 'nun lineer olduğu $p^T B u$ 'nun u 'ya göre minimizasyonudur. Bu hesaplama sağlanamaz, ancak $p^T B$ satır vektörünün elemanlarının işaretlerine bağlı olarak u 'nun elemanlarının negatif yada pozitif yapılmasıyla sağlanır; u 'nun üzerinde herhangi bir sınırlama olmadığına optimal kontrol sonsuz olacaktır. (IV-27)'de sınırlama olduğunda optimal kontrol, $p^T B$ 'de katsayılarının işaretinin pozitif yada negatif olmasına bağlı olarak minimum yada maksimum müsaade edilen değer, kontrol u 'nun her bir elemanı için saptanır. Bu, **bang - bang kontrol** diye adlandırılan iki limit değerinden biri ya da diğerini almak için kontrol değişkeninin istediği kontrol kuralıdır.

Dönebilen atalet momenti ile sürülen sistemin sahip olduğu transfer fonksiyonu

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Js^2}$$

ve u dönme momenti üzerinde simetrik sınırlama

$$-U \leq u \leq U$$

olabildiğince hızlı yörünge durumunu belirleyebilen problem bir örnek olacaktır.

Eğer J atalet momenti birim değer ve durum değişkenleri x_1, x_2 y konum ve $\dot{y}$ hız ilişkisine sahipse kontrol edilen sistemin dinamik denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

dir.

Hamiltonian ile

$$H = 1 + p_1 x_2 + p_2 u$$

dir. Bu, bang - bang optimal kontrol ile minimize edilir.

$$u = -U \text{sign}(p_2) \quad (\text{IV-28})$$

(IV-25) Pontriagin denklemleri

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 &= -p_1\end{aligned}$$

biçiminde optimal yörüngeleri belirleyen dört ardaşık fark denklemlerini veren

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -U \text{sign}(p_2)\end{aligned}$$

denklemler elde edilir.

x_2 eşitliğindeki lineer olmayan işaret fonksiyonu analitik çözümü önler, fakat optimal kontrol, yinede A, B, C, D ilk koşullara karar verilen integrasyon sabitleri olduğunda

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \pm Ut + A \\ x_1(t) &= \pm 0.5 Ut^2 + At + B \\ p_1(t) &= C \\ p_2(t) &= -Ct + D \end{aligned} \quad (IV-29)$$

dır, ancak x ve u için dört fark denkleminin çözüm biçimine dikkat edilmelidir. Boşluk uzayında optimal eğrilerin şekli, iki benzer parabollerin özelleşmesinin bir gösterilimini vermesi için

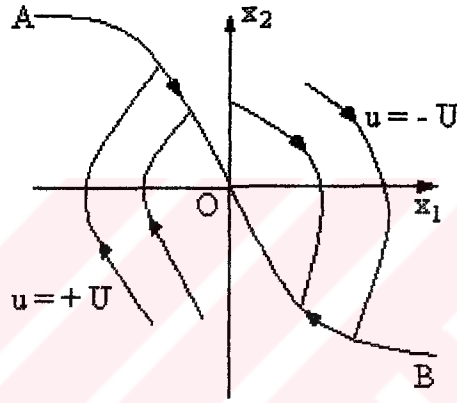
$$\begin{aligned} x_2^2 &= \pm Ux_1 + A^2 \pm 2UB \\ &= \pm Ux_1 + \text{sabit} \end{aligned}$$

biçimindedir. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ için denklemlerden t zamanı yok edilerek bulunur.

(IV-28) denklemleriyle belirlenen bir optimal kontrol, co-state p_2 işaretini değiştirdiğinde eğriler bir grubundan diğerine anahtarlanır. (IV-29) denklemi $p_2(t)$ 'nin t zamanında lineer olduğunu gösterir ve $t_1 \leq t \leq t_2$ aralığının herhangi bir yerinde işaretini değiştirebilir. Herhangibir zaman yada durum uzayının herhangi bir yerinde bu anahtarlama, yörünge durumunu içeren ilk koşullara bağlı olarak oluşur. $x_1 = 0$ ile ilişkili y çıkışının yörünge değerlerinde kayıp olmadığını farz edersek, x_2 daima sıfır olduğundan durum uzayının merkezi istenilen denge noktasıdır ve optimal kontrol için yörünge durumudur. Şekil IV-1'de AOB hattı

$$2Ux_1 + x_2 |x_2| = 0 \quad (IV-30)$$

dönme momentine herhangi bir anahtarlama yapılmaksızın yörünge durumunun elde edilmesi mümkün olduğundan, durum uzayında tüm noktalar grubunun temsil edilmesi için, bu iki boyutlu durum uzayının kalanı Şekil IV-1'de gösterildiği gibi AOB hattı üzerinde tek anahtarlama ile yörünge üzerindeki tüm noktaları içermelidir.



ŞEKİL IV-1: Minimum- zaman Eğrileri

Böylece optimal kontrol kuralı, herhangi bir eğri üzerinde dönme momentinin en fazla bir anahtarlama isteyen minimum zaman anahtarlama olarak bilinen bang - bang kontrolüdür.

$$u = -U \text{sign}(2Ux_1 + x_2 |x_2|) \quad (IV-31)$$

(IV-30) denkleminin anahtarlama hattına kontrol x_2 değerini referans almaksızın x_1 işaretinden karar verilebilir. Buna tekil olma denir.

Yukarıdaki tartışma, durum değişkenlerinin herhangi n sayısı ile problemi genelleştirmiş olabilir, fakat (IV-31) denkleminde olduğu gibi aşıkâr çözüme

genellikle yol göstermez. Kontrol edilen sistemin A matrisinin tüm özdeğerleri reel olduğunda her kontrol u_j 'nin optimal zaman eğrileri üzerinde en fazla $(n - 1)$ defa limit değerleri arasında anahtarlanmasının ispatı nasıl yapılabilir. [8] Birden fazla kontrol değişkeni olduğunda aynı zamanda anahtarlama gerekli değildir.

Bang - bang kontrol optimal olduğunda performans ölçütü

$$I = \int_{t_1}^{t_2} x^T P x dt$$

dır ve LQP'deki $u^T q u$ kontrol teriminin maliyeti (IV-27) doyum sınırlamasıyla yer değiştirecektir.

Bu tip problemler için Hamiltonian

$$H = x^T P x + p^T A x + p^T B u$$

dır, böylece yukarıdaki sebep gereğince bang - bang kontrol optimaldir.

IV-6 Dinamik Programlamaya Giriş

Dinamik programlama, optimal kontrol teorisinin matematiksel tekniği kullanılarak anlatılacaktır. Dinamik programlama, (IV-11) ve (IV-13) genel denklemlerinin nümerik çözümünden dolayı optimallik temel prensibi, Pontriagin maksimum prensibi ve varyasyonel hesaba göre daha kullanışlıdır

Ayrık-zamanlı problemler, (IV-11) ardaşıl fonksiyonel denklemini kullanarak basit şekilde formüle edilirler. Bu denklemin yapısı nümerik çözümü ileri sürer. Nümerik işlem sırası aşağıdaki gibi özetlenir:

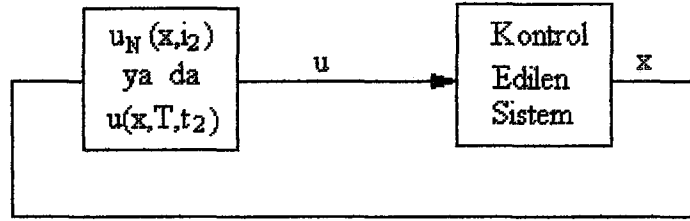
1-Bu problemin nümerik tanımı olmalıdır. Kapalı analitik biçimde verilmiş olan (IV-1) ve (IV-2) denklemlerinde G, H fonksiyonlarının belirlenmesine ihtiyaç yoktur.

2- Optimal kontrol u'ya karar veren (IV-11) denkleminin bir minimizasyonu nümerik analiz ile elde edilir. x durumu veya kontrol u değerleri üzerindeki sınırlamaların ihtimal sayısı azaltılarak analizin etkinliği geliştirilebilir.

3- Dinamik programlamanın yeterli olamadığı yüksek boyutlu problemlerde Curse of dimensionality kullanılır. (IV-11) denkleminin nümerik çözümünde artan N sayısına karşılık gelen her uygun x durumu için optimal kontrol $u_N(x)$ ve $f_N(x)$ çözüm fonksiyonunun değerlerini kayıt etmek için gereklidir. Böylece computer hafızasının istediği uygun durumların sayısı, durum değişkenlerinin n sayısı ile üstel artar.

(IV-13) denklemini kullanarak formüle edilen sürekli-zamanlı problemler, nümerik çözüm için uygun olmayan iki nokta sınır değer problemleri (IV-25) ve (IV-26) Pontriagin denklemlerinin terimlerinde gösterilirler. Dinamik programlama bu tip problemlere alternatif nümerik çözümler önerir. Birinci yol; yukarıda anlatıldığı gibi bir eşdeğer ayrık-zamanlı problemi sürekli-zamanlı probleme yakınsatmak nümerik çözüm için uygundur. Diğer yol; (IV-13) denkleminde ya çözüm fonksiyonu $f(x, T, t_2)$ yada optimal kontrol fonksiyonu $u(x, T, t_2)$ ' yi birbirine yakınsar yapmaktır. Bu çözüm yolları, curse of dimensionality ile limitlenmiş olmasına rağmen iki nokta sınır değer problemlerinden sakınılmalıdır.

Dinamik programlama, optimal performansı tanımlayan $f_N(x, i_2)$, $f(x, T, t_2)$ fonksiyonlarına yol gösteren analizin bir sonucu olarak hemen hemen optimal kontrolü belirler. Optimal kontrolün $u_N(x, i_2)$, $u(x, T, t_2)$ sonuç fonksiyonları zamanın mutlak değerinin ve x durumunun değişen değerinin bir fonksiyonu olarak kontrol işlemini belirler. Bu fonksiyonlar Şekil IV-2'de gösterilen yapıya sahip Bölüm- II ve Bölüm- III'de anlatıldığı gibi geri besleme kontrol kuralı olarak tanımlanmıştır. Bu özellik



Şekil IV-2: Durum Geri Beslemesiyle Optimal Kontrol

optimal kontrolü durum geri beslemesi biçiminde özelleştirir. Bu ise optimallik prensibidir, varyasyonel hesap teknikleriyle paylaşılamaz. Bu nedenle dinamik programlama, kesin belirlenemeyen kontrol problemlerinin analizi için uygundur.

I-7 Örnekler

Örnek:1

Kontrol edilen sistemin diferansiyel denklemi

$$\dot{x} = -x + u$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (x^2 + u^2) dt$$

dir. Hamiltonian'ını yazarak u optimal değerinin $-p/2$ olduğunu gösterelim. Burada p ; co-state'dir.

$$H[x, \dot{x}, p, u, t] = x^2 + u^2 + p(-x + u)$$

$$(1) \frac{\partial H[\bullet]}{\partial x} = -\dot{p} \quad \Rightarrow \quad 2x - p = \dot{p}$$

$$(2) \frac{\partial H[\bullet]}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u + p = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -p/2$$

$$(3) \frac{\partial H[\bullet]}{\partial p} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -x + u$$

x ve p için ardaşık diferansiyel denklemlerin bir çiftini elde edelim:

$$(2)'den \quad p = -2u \\ \dot{p} = -2\dot{u}$$

$$(1)'de \text{ yerine konursa} \quad x = u - \dot{u} \quad (4)$$

$$(1)'den \quad x = -\frac{\dot{p}}{2} + \frac{p}{2}$$

$$\dot{x} = -\frac{\ddot{p}}{2} + \frac{\dot{p}}{2}$$

$$(3)'de \text{ yerine konursa} \quad \ddot{p} = 2p$$

$$s^2 p - 2p = 0$$

$$s = \pm \sqrt{2}$$

$$p(t) = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$u(t) = -\frac{C_1}{2} e^{\sqrt{2}t} - \frac{C_2}{2} e^{-\sqrt{2}t}$$

$$u(t) = C_3 e^{\sqrt{2}t} + C_4 e^{-\sqrt{2}t}$$

(4)'de yerine konursa

$$x(t) = (\sqrt{2}-1)C_3 e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2}+1)C_4 e^{-\sqrt{2}t}$$

İlk koşullara bağlı olarak $p(t)$, $u(t)$ ve $x(t)$ çözümleri bulunur.

Örnek:2

Kontrol edilen sistemin diferansiyel denklemi $\dot{x} = -x + u$ ve performans ölçütü

$$I = \int_0^{t_2} (x^2 + u^2) dt$$

dir ve $u = -Kx$ biçiminde olan bir optimal geri besleme kuralıyla

$$K = -2 + 2K + \frac{K^2}{2}$$

'yi sağladığını gösterelim ve bu denklemde K 'nın sınır değerini belirliyelim.

1.Örnekteki (1) no.lu denklemden

$$\dot{p} = p - 2x$$

$$\dot{x} = -x + u$$

$$p = Kx$$

$$\dot{p} = K\dot{x} + K\dot{x} = (K - K)x + Ku = p - 2x$$

1. Örnekteki (2) no.lu denklemden

$$u^* = -\frac{p}{2}$$

$$p^* = Kx$$

$$p = (K - K)x - K \frac{p}{2} = Kx - 2x = (K - 2K + 2 - \frac{K^2}{2})x$$

Optimal olması için

$$\dot{p} = 0 \text{ dır.}$$

$$\left(\dot{K} - 2K + 2 - \frac{K^2}{2} \right) x^* = 0$$

$$\dot{K} = \frac{K^2}{2} + 2K - 2$$

K'nın bu eşitlikteki sınır değeri;

$$\frac{K^2}{2} + 2K - 2 = 0 \quad \text{denklem çözülürse}$$

$$K = 2(-1 + \sqrt{2}) \approx 0,8$$

elde edilir.

Örnek:3

Kontrol edilen bir sistemin diferansiyel denklemi

$$\dot{x} = -x + u$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_0^1 u^2 dt$$

başlangıç durumu $x(0)$ ve son durumu $x(1)$ belirlidir. Kontrol kuralı

$$u = Kx$$

biçiminde ve

$$\dot{K} = \frac{K^2}{2} + 2K$$

olduğunu gösterelim.

$$H[x, \dot{x}, p, t] = u^2 + p(-\dot{x} + u)$$

$$(1) \quad \frac{\partial H[\bullet]}{\partial x} = -\dot{p} \quad \Rightarrow \quad p = \dot{p}$$

$$(2) \quad \frac{\partial H[\bullet]}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u + p = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial H[\bullet]}{\partial p} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -x + u$$

$$(1)'den \quad \dot{p} - p = 0$$

$$sP - P = 0$$

$$p(t) = C_1 e^t$$

$$(2)'den \quad u(t) = \frac{p}{2} = -\frac{1}{2} C_1 e^t$$

$$(3)'den \quad \dot{x} + x = -\frac{1}{2} C_1 e^t$$

elde edilir.

$$sX(s) + X(s) = 0$$

$$(s + 1)X(s) = 0$$

$$x(t) = C_2 e^t$$

$$(3)'den \quad C_4 e^t + C_4 e^t = -\frac{1}{2} C_1 e^t \quad \Rightarrow \quad C_4 = -\frac{C_1}{4} \quad \text{dir.}$$

$$x(t) = C_2 e^{-t} - \frac{C_1}{4} e^t \quad (4)$$

t = 0 için;

$$x(0) = C_2 - C_1/4 \quad \Rightarrow \quad C_2 = x(0) + C_1/4 \quad (5)$$

t = 1 için;

$$x(1) = (x(0) + C_1/4) e^{-1} - C_1 e^1 / 4$$

Matematiksel işlemler yapılnca

$$C_1 = \frac{4(x(1) e^1 - x(0))}{1 - e^2}$$

elde edilir. (5)'de yerine konulup düzenlenirse;

$$C_2 = \frac{x(1) e^1 - x(0) e^2}{1 - e^2}$$

elde edilir.

$$(1)'den \quad p(t) = \frac{4(x(1)e^1 - x(0))}{1-e^2} e^t$$

$$(2)'den \quad u(t) = - \frac{2(x(1)e^1 - x(0))}{1-e^2}$$

$$(4)'den \quad x(t) = \frac{x(1)(e^{1-t} - e^{1+t}) + x(0)(e^t - e^{2t})}{1-e^2}$$

elde edilir.

$$\dot{x} = -x + u$$

$$2u + p = 0$$

$$p = Kx$$

$$\dot{p} = \bar{K}\dot{x} + K\dot{x} = \bar{K}x - Kx + Ku$$

(1) ve (2) denklemleri yazılırsa

$$(K - 2K - \frac{K^2}{2})x = 0$$

$$K = \frac{K^2}{2} + 2K$$

elde edilir. K için sınır değeri

$$\frac{K^2}{2} + 2K = 0$$

$$K(K + 4) = 0$$

$$K = 0 \quad \text{ve} \quad K = -4$$

elde edilir.

Örnek:4

Kontrol edilen sistemin diferansiyel denklemi

$$\dot{x} = u$$

ve performans ölçütü

$$I = \int_0^{t_2} u^2 dt$$

başlangıç ve sınır değerleri

$$x(0) = X, \quad x(t_2) = 0$$

dir. Kontrol kuralının bir eğri üzerindeki sonucu

$$x(t) = X(1 - \frac{t}{t_2})$$

olduğunu gösterelim.

$$H[x, \dot{x}, p, t] = u^2 + pu$$

$$(1) \quad \frac{\partial H[\bullet]}{\partial x} = -\dot{p} \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(t) = C_1$$

$$(2) \quad \frac{\partial H[\bullet]}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u + p = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = -\frac{C_1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{\partial H[\bullet]}{\partial p} = \dot{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = u \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -\frac{C_1}{2}$$

$$(3)'den \quad x(t) = -\frac{C_1}{2} t + C_2$$

(3)'de başlangıç ve sınır değerleri yerine konursa

$$x(0) = X = C_2$$

$$x(t_2) = -\frac{C_1}{2} t_2 + X = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{2X}{t_2}$$

$$(1)'den \quad p(t) = -\frac{X}{t_2}$$

$$(2)'den \quad u(t) = -\frac{X}{t_2}$$

(3)'den
$$x(t) = X\left(1 - \frac{t}{t_2}\right)$$

elde edilir.

Örnek:5

Kontrol edilen sistem

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+s}$$

transfer fonksiyonuna sahiptir ve

$$|u| \leq 1$$

doyum sınırlamasıyla mümkün olduğu kadar hızlı durum uzayının ($x_1 \equiv \dot{y}$, $x_2 \equiv y$) orjinine doğru sürülmektedir. Bang-bang kontrolün optimal olduğunu gösterelim, ve herhangi bir eğri üzerinde bir kontrol anahtarlamasından başka anahtarlama olmadığını grafiğini çizerek gösterelim.

$$(1+s)Y(s) = U(s) \text{ 'den}$$

$$\dot{y}(t) = -y(t) + u(t)$$

elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$H = 1 + p^T(-x_1 + u) = 1 + p(-x_1 + u)$$

$$(1) \quad \frac{\partial H}{\partial x_1} = -p \quad \Rightarrow \quad -p = -\dot{p}$$

$$(2) \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + u = \dot{x}_1$$

$$H(u^*) \leq H(u)$$

$$H(x^*, u^*, p^*, t) \leq H(x^*, u, p^*, t)$$

$$1 + p^*(-x_1^* + u^*) \leq 1 + p^*(-x_1^* + u)$$

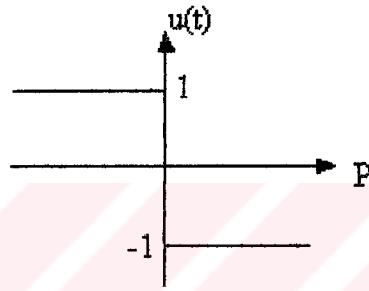
$$p^*u^* \leq p^*u$$

$$p^*u^* \leq p^*u \quad \left\{ \begin{array}{ll} u^* = -1 & \begin{array}{l} -p^* < p^*u \\ 0 < p^*(u+1) \\ p > 0 \end{array} \\ u^* = -1 & \begin{array}{l} p^* > p^*u \\ 0 > p^*(u-1) \\ p^* < 0 \end{array} \end{array} \right.$$

$$u_i^* = \begin{cases} u_{i+} & p^* < 0 \\ u_{i-} & p^* > 0 \\ \text{Belirsiz} & 0 \end{cases}$$

u_i 'ye ilişkin katsayı 0 olduğundan belirsizdir.

$$U = -\text{sign}(p^*)$$



SONUÇ

Bu çalışmada optimal kontrolde, yaygın olarak kullanılan lineer karesel davranış ölçütünü temel alan ve kısaca LQP olarak bilinen kontrol problemi hem sürekli-zaman hemde ayrık-zamanlı sistemler için incelenmiştir.

Tezin 1.inci Bölümünde genel optimal kontrol problemlerini formüle etmek için gerekli olan n boyutlu durum uzayı tanıtılmıştır. Kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik kavramları verilmiştir.

Bölüm-II'de lineer sistemlerin LQP(lineer karesel davranış) ölçütü temel alınarak optimal kontrol ile ilgili temeller verilmiş ve elde edilen temel sonuçlar irdelenmiştir. Sonuçta elde edilen optimal kontrol kuralı, durum geri beslemesi ile gerçekleşmiştir.

Bölüm-III'de ise , kontrol edilen sistemin davranışları yerine, ölçülebilen büyüklükleri olan çıkışlar kullanılarak gerçekleşen optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu amaçla gözleyiciler incelenmiş ve gözleyici temelli optimal kontrolör ile ilgili temel sonuçlar elde edilmiş ve geleneksel yöntemler ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Böylece, durumları tam olarak ölçülemeyen sistemlerin optimal kontrolu konusunda temel sonuçlar verilmiştir. Elde edilen optimal kontrolörlerin genel yapısı tartışılmıştır.

Bölüm-IV'de ise optimal kontrol probleminin dinamik programlamaya ilişkin formülasyonu tartışılmış, modelleneyen bozucu giderme problemi incelenmiştir. Sonuçlar analitik olarak verilmesede çözümünün durum geri beslemesiyle çözülebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **JACOBS O.L.R.** Introduction to Control Theory (2nd edn.) (1993)
- [2] **KREYSİG E.** Advanced Engineering Mathematics (5th edn.) (1983)
- [3] **GERE J.M. & W. Weaver** Matrix Algebra For Engineers Van Nostrand (1965)
- [4] **KALMAN R.E.** On The General Theory Of Control Systems. In Proceedings Of First IFAC Congrees, Moscow, 1960, Vol. 1, pp. 481-492 Butterworths, 1961 (1960)
- [5] **FRIEDLAND B.** Control System Design. McGraw-Hill (1986)
- [6] **KAILATH R.E.** Linear Systems. Prentice-Hall. (1980)
- [7] **WONHAM W.M.** Lineer Multivariable Control. Springer-Verlag.(1974)
- [8] **MACIEJOWSKI J.M.** Multivariable Feedback Design. Addison Wesley. (1989)

ÖZGEÇMİŞ

S.Fusun Dede, 1955 yılında İstanbul’da doğdu. İlk, Orta-Lise öğrenimini İstanbul’da tamamladıktan sonra 1972 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Bölümüne girdi. 1977 yılında mezun olarak özel sektörde görev aldı. 1980 yılında yüksek lisans öğrenimine başladı. Çalışma şartları nedeniyle ara verdiği öğrenimine 1996 yılında devam etti. Halen özel sektörde üst düzey yönetici olarak çalışmaktadır.

