

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**GENEL SERENDİP ELEMANLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN
PROBLEMLERDE KULLANIMI**



DOKTORA TEZİ

Mustafa YAVUZ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

MAYIS 2021

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**GENEL SERENDİP ELEMANLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN
PROBLEMLERDE KULLANIMI**



DOKTORA TEZİ

**Mustafa YAVUZ
(501992324)**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN

MAYIS 2021

İTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün 501992324 numaralı Doktora Öğrencisi Mustafa YAVUZ, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “GENEL SERENDİP ELEMANLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN PROBLEMLERDE KULLANIMI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Şenol ATAÖĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Akif KUTLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Arif Nihat GÜLLÜOĞLU
Marmara Üniversitesi

Teslim Tarihi : **09 Nisan 2021**
Savunma Tarihi : **07 Mayıs 2021**



ÖNSÖZ

Üstün bilimsel yetkinliğinin yanı sıra yüksek insani değerlerine de yakından tanıklık ettiğim tez danışmanım Prof. Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN'a şükranlarımı arz ederim. Her zaman yardımlarını gördüğüm Prof. Dr. Şenol ATAÖĞLU'na, tez izleme komitesi üyeleri Dr. Öğr. Üyesi Akif KUTLU ve Doç. Dr. Çağrı MOLLAMAHMUTOĞLU'na ve ayrıca Dr. Murat YILMAZ'a teşekkür ederim.

Mayıs 2021

Mustafa YAVUZ



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
SEMBOLLER.....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY.....	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Genel.....	1
1.2 Literatür Özeti	2
1.3 Tezin İçeriği.....	3
2. GENEL SERENDİP ELEMANLARI İÇİN ŞEKİL FONKSİYONLARI.....	5
2.1 Dönüşüm Bozukluklarının Giderilmesi.....	5
2.2 Kenar Noktaları Ayarlanabilir Genel Serendip Elemanları.....	6
3. PLASTİSİTE.....	11
3.1 Giriş	11
3.2 Akma Kriteri	12
3.2.1 Tresca akma kriteri	13
3.2.2 von Mises akma kriteri	15
3.2.3 Drucker - Prager akma kriteri.....	16
3.3 Plastik Birim Uzunlaşmalar ve Gerilmeler	17
3.4 Pekleşme	20
4. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU.....	23
4.1 Giriş	23
5. SAYISAL UYGULAMALAR.....	27
5.1 Elastik Onama Örneği	27
5.2 Elastoplastik Analiz Örneği	29
5.3 Dönüşüm Bozukluğunun Artırılarak İncelenmesi	36
6. SONUÇLAR	41
6.1 Sonuçların İrdelenmesi	41
6.2 Gelecek Araştırma	42
KAYNAKLAR.....	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45



SEMBOLLER

B	: Şekil deęiřtirme matrisi
C	: Orantılılık sabiti
D	: Elastik malzeme matrisi
D^{ep}	: Elastoplastik malzeme matrisi
E	: Elastisite modülü
F	: Eleman yük vektörü
G	: Kayma modülü
K	: Eleman rijitlik matrisi
$\bar{K}$	: Etkin rijitlik matrisi
N_i(r)	: i düęümünün tek boyutlu şekil fonksiyonu
N_i(r,s)	: i düęümünün iki boyutlu şekil fonksiyonu
N_{i,r}	: i düęümünün r koordinatı cinsinden birinci türevi
N_{i,s}	: i düęümünün s koordinatı cinsinden birinci türevi
P_k	: k düęümünün pozisyon vektörü
$\bar{R}$	: Yük vektörü
V_k	: Köşe düęümünden k kenar düęümüne olan vektör uzunluk
dλ	: Pozitif orantılılık çarpanı
f	: Akma fonksiyonu
r_k	: k düęümünün r koordinatı
u	: Deplasman vektörü
u_i	: i düęümünün deplasman vektörü
v	: Düşey deplasman
x	: Global x koordinatının yeri
x_i	: i düğümünün x koordinatının yeri
y	: Global y koordinatının yeri
ϵ	: Şekil deęiřtirme vektörü
ϵ^e	: Elastik şekil deęiřtirme vektörü
ϵ^p	: Plastik şekil deęiřtirme vektörü
ν	: Poisson oranı

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1 : 20 elemanlı çözüm (aynı yönde kaydırma)37

Çizelge 5.2 : 20 elemanlı çözüm (şaşırtmalı/zikzak kaydırma)37





ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Genel serendip elemanlar.....	2
Şekil 2.1 : Eğrisel gerçek elemanın mastır eleman üzerine dönüşümü.....	5
Şekil 2.2 : Kenar iç noktası sabit olmayan genel serendip elemanı.....	6
Şekil 2.3 : Yüksek dereceli genel serendip elemanı.....	6
Şekil 2.4 : 4 noktalıdan 8 noktalı elemana geçiş.....	10
Şekil 3.1 : Doğrusal olmayan elastik malzeme davranışı.....	12
Şekil 3.2 : Doğrusal olmayan malzeme davranışı (elastoplastik davranış)	12
Şekil 3.3 : Matematik modeller.....	12
Şekil 3.4 : İki boyutta akma yüzeyi.....	13
Şekil 3.5 : Tresca akma kriteri	15
Şekil 3.6 : İki boyutta Tresca ve von Mises akma fonksiyonları.....	16
Şekil 3.7 : Üç boyutta von Mises akma fonksiyonu.....	16
Şekil 3.8 : Üç boyutta Drucker-Prager akma kriteri.....	17
Şekil 3.9 : Plastik birim uzama	18
Şekil 3.10 : Pekleşme modelleri.....	20
Şekil 3.11 : Pekleşen elastoplastik malzeme davranışı	21
Şekil 4.1 : Doğrusal olmayan analizde artımsal adımların grafiksel gösterimi	24
Şekil 4.2 : Newton Raphson metodu ile çözüm	25
Şekil 4.3 : Newton Raphson ile elastoplastik gerilme analizi.....	25
Şekil 4.4 : Geliştirilmiş Newton Raphson metodu ile çözüm.....	26
Şekil 4.5 : Geliştirilmiş Newton Raphson ile elastoplastik gerilme analizi	26
Şekil 5.1 : Konsol giriş	28
Şekil 5.2 : İç basınç etkisi altındaki kalın halka silindir.....	29
Şekil 5.3 : Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri	29
Şekil 5.4 : Kalın halka silindirin $\frac{1}{4}$ 'ü	30
Şekil 5.5 : Sonlu eleman ağı (18×24 elemanlı)	30
Şekil 5.6 : İç basınç ile iç yüzeydeki deplasmanın değişimi	31
Şekil 5.7 : İç basınç 8 MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı	31
Şekil 5.8 : İç basınç 12 MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı	32
Şekil 5.9 : İç basınç 16 MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı	32
Şekil 5.10 : İç basınç 8 MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı	33
Şekil 5.11 : İç basınç 12 MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı	33
Şekil 5.12 : İç basınç 16 MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı	34
Şekil 5.13 : Mastır elemanda orta noktanın kenar uzunluğunun $\frac{1}{4}$ oranında kaydırılması	34
Şekil 5.14 : Geliştirilmiş ve standart formülasyonla iç yüzeydeki deplasmanın değişimi	35

Şekil 5.15 : $p = 16$ MPa için geliştirilmiş ve standart formülasyonla radyal gerilme dağılımı.....	35
Şekil 5.16 : $p = 16$ MPa için geliştirilmiş ve standart formülasyonla çembersel gerilme dağılımı.....	36
Şekil 5.17 : 20 elemanlı problemin geometrisi, ağ, eleman ve düğüm noktası özellikleri.....	37
Şekil 5.18 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/4 oranında aynı yönde kenara yakın.....	38
Şekil 5.19 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/8 oranında aynı yönde kenara yakın.....	38
Şekil 5.20 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/4 oranında şaşırtmalı (zikzak) olarak kenara yakın	39
Şekil 5.21 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/8 oranında şaşırtmalı (zikzak) olarak kenara yakın	39
Şekil 5.22 : 24 elemanlı problemin geometrisi, ağ, eleman ve düğüm noktası özellikleri.....	40

GENEL SERENDİP ELEMANLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN PROBLEMLERDE KULLANIMI

ÖZET

Sonlu elemanlar yönteminde, fiziksel eleman ile mastır eleman arasında yapılan koordinat dönüşümünde meydana gelen dönüşüm bozuklukları, mastır elemanın kenar noktalarının fiziksel elemandaki gibi dönüştürülmesiyle giderilir.

Bunun yanında, sonlu elemanlar metodunda gerilmelerin süreksizleştiği bölgelerde ağ sıklaştırılması yapılarak doğru sonuçlara ulaşılması hedeflenir. Bu sıklaştırma işlemi geçiş elemanları kullanarak eleman tiplerinin derecelerini genelde artırmak yoluyla veya geçiş elemanı bölgelerinde sürekliliği de bozmayacak şekilde düğüm noktalarına sınır şartı tanımlanması ile mümkün olmaktadır.

Tezin birinci bölümünde, genel serendip elemanları hakkında bilgiler verilip daha önce yapılmış çalışmalar irdelenmektedir.

Tezin ikinci bölümünde ise dönüşüm bozukluğu sorununu gidermek amacıyla kenar noktaları ayarlanabilir elemanlar için geliştirilen şekil fonksiyonları ve bunlara ait türevler verilmektedir.

Doğrusal olmayan malzeme davranışı kapsamında gerilme-birim uzama ilişkileri ve plastisite ile ilgili bilgiler tezin üçüncü bölümünde mevcuttur.

Elastoplastik davranışın sonlu elemanlar yönteminde uygulanmasında global ve lokal denge denklemlerinin sağlanması gerekir. Doğrusal olmayan malzeme davranışı analizi için bugüne kadar genel serendip elemanlarla yapılmış bir çalışma mevcut değildir. Tezin dördüncü bölümünde, geliştirilmiş serendip elemanların malzeme yönünden doğrusal olmayan problemlere uygulaması yapılarak sonlu elemanlar yöntemindeki dönüşüm bozuklukları kaynaklı hesap hataları giderilmektedir.

Önerilen algoritma, doğrusal olmayan sonlu eleman analizi olup, örneklerle onaması tezin beşinci bölümünde yapılmaktadır. Bu amaçla ilk olarak, analitik çözümü bilinen konsol bir kirişin elastik çözümü ile sonlu eleman çözümü, dönüşüm bozukluklarının gerçekleştiği bir model ile karşılaştırılmaktadır. Daha sonra plastik analiz için kalın halka şeklinde bir silindir, iç basınç etkisi altında mevcut analitik çözümler ile karşılaştırılmaktadır. Bu analizde von Mises akma kriteri kullanılmaktadır. Son olarak iç basınç etkisi altındaki kalın halka şeklindeki silindir örneğinin plastik analizdeki davranışında dönüşüm bozukluklarının etkisi ve bunların düzeltilmesi sonucu elde edilen sonuçlar incelenmektedir.

Tez kapsamında elde edilen sonuçlar, dönüşüm bozukluklarının giderilmesi ve geçiş elemanlı model imkanının sağlanması şeklinde iki temel kazanım olarak özetlenebilir. Orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları ile malzeme yönünden doğrusal olmayan statik problemlerde de dönüşüm bozuklukları giderilmiştir.

Önerilen algoritma sayesinde çok bilinmeyenli yapı sistemlerinin analizinde geçiş elemanlarının kullanılması ile verim artmakta olup, bunun yanında modellemede doğabilecek fiziksel modelle sonlu model (master eleman) arasındaki dönüşüm bozuklukları otomatik olarak elimine edilmektedir. Tezde önerilen formülasyonların kullanılması ile mevcut analiz programlarında daha doğru ve verimli analizlerin elde edilmesi mümkün olacaktır.



THE USE OF UNIVERSAL SERENDIPITY ELEMENTS IN NONLINEAR PROBLEMS

SUMMARY

The order of a master element in the finite element analysis is crucially important when an increased accuracy is needed for stress-strain analyses, although the computation period becomes longer. Using the master elements starting with Lagrange elements and ending with serendipity ones, many researchers tried to improve the accuracy level in the obtained results. These results are very important for the stress concentration zones in solid mechanics problems.

In the finite element analyses, the rectangular shaped serendipity elements are often used. The procedure to obtain the serendipity element requires coordinate transformation. For this purpose, a mapping between a finite master element and a real physical element is done. The real locations of edge nodes on the physical element are important and they affect the mapping process. In the conventional analyses, these edge locations are mapped to predefined fix locations on the finite master elements. If the edge node coordinates of the real element are somehow mispositioned, a distortion occurs in the calculations that causes the polynomial functions in the finite master element to be mapped into nonlinear polynomial functions in the global space.

To get rid of the mapping distortions, an adjustable finite master element was improved in the previous studies. In these researches a modification of the 8-node serendipity element was used. Later, an improved study to fix the accuracy of finite element results was carried out for enriching the finite master elements with addition of interior nodes.

Due to efficiency and accuracy needs in some structural engineering problems, the edge node points are needed to be located not on the midpoints of the finite master element. The improved serendipity elements are capable of allowing the use of different power of finite elements without using a constraint at the transition and have capacity to eliminate node mapping distortions with adjustable edge node coordinates. They are also accepted to be desirable for better accuracy and lesser computation effort in the finite element studies.

In this dissertation, a generalization of improved serendipity elements is presented first time for materially nonlinear problems. The formulation of improved shape functions used in universal serendipity elements are given in the second chapter by following statements:

Shape function of any i^{th} corner node,

$$N_i(r,s) = \frac{(1+r_i r)(1+s_i s)}{4} \left[\prod_{\substack{m=1 \\ |r_m| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_m}{r_i - r_m} + \prod_{\substack{n=1 \\ |s_n| \neq 1}}^k \frac{s - s_n}{s_i - s_n} - 1 \right]$$

where r and s are horizontal and vertical coordinates, limits l and k are the numbers of internal points on the edges.

Shape function of any edge internal point m which is parallel to the “ r ” axis,

$$N_m(r, s) = \frac{(r^2 - 1)(1 + s_m s)}{2(r_m^2 - 1)} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m, |r_j| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_j}{r_m - r_j} \right]$$

Shape function for any edge internal point n which is parallel to the “ s ” axis,

$$N_n(r, s) = \frac{(s^2 - 1)(1 + r_n r)}{2(s_n^2 - 1)} \left[\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n, |s_p| \neq 1}}^k \frac{s - s_p}{s_n - s_p} \right]$$

In the third chapter, one of the simplest yield criterion, von Mises yield criterion, is used in the analysis and performed numerically, since the aim of this thesis is to show the accuracy of the universal serendipity elements in nonlinear behavior. The classical formulation is done shortly in the following steps. The total strain increment is the sum of the elastic strain increment and the plastic strain increment as

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

One can derive a plastic potential g as

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

where $\boldsymbol{\sigma}$ stress components and $d\lambda$ is a positive scalar of proportionality.

In the elastoplastic analysis, one can proceed by applying a load increment which produces a displacement increment, and thus a total strain increment. The stress increment corresponding to this increment in total strain can be determined by a constitutive relation by

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}$$

where $\mathbf{D}^{ep}$ is the elastoplastic constitutive matrix. By arranging the above equations, one can get the elastoplastic constitutive relation as

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right) d\boldsymbol{\varepsilon}$$

where $\mathbf{D}$ is the elastic constitutive matrix and f is the yield function.

As a result, the elastoplastic constitutive matrix becomes as

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$$

By performing the finite element discretization technique in the fourth chapter, one can need to solve the following incremental equilibrium relationship

$$\mathbf{K} \Delta u = \Delta F$$

where ΔF is the applied incremental force, u is the displacement and $\mathbf{K}$ is the stiffness matrix.

The stiffness matrix $\mathbf{K}$ is given by the relationship as following

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{ep} \mathbf{B} dA$$

where $\mathbf{B}$ matrix is the strain displacement matrix and A is the surface area on physical element.

The constitutive matrix $\mathbf{D}^{ep}$ depends on the current state of stress, the response of the system depends on the deformation history and incremental relationship between displacement and force gives the solution.

In the fifth chapter, to examine the validity of the proposed formulations, a thick cylinder subjected to an internal pressure with the plane strain conditions was studied. A von Mises yield criterion was applied and the theoretical results were compared. The developed elements gave accurate results for the test problem used in the examples when compared to those available theoretical results.

As a summary, the improved serendipity elements are used first time for materially nonlinear problems. This has been done by using an adjustable finite master element with a flexible mid-edge node locations. The improved serendipity formulation showed that it eliminates the mapping distortion errors occurred in the case of the standard formulations. Further future work can be done for transition elements.



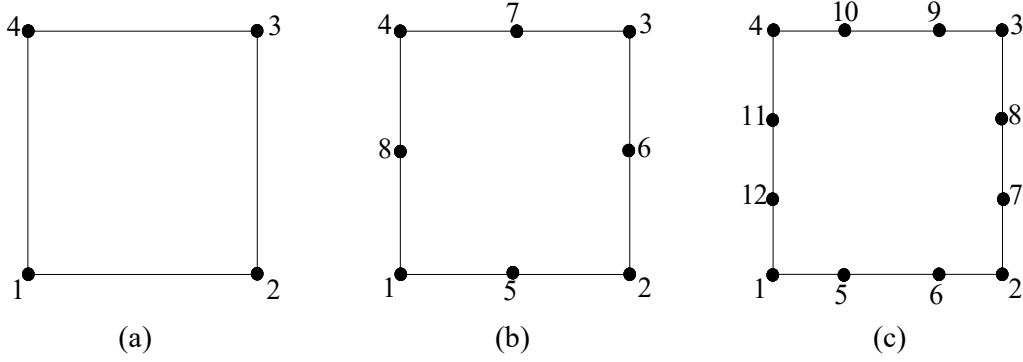
1. GİRİŞ

1.1 Genel

Sonlu elemanlar metodunda gerilmelerin süreksizleştiği bölgelerde ağ inceltilmesi (sıklaştırılması) yapılır. Bu sıklaştırma/inceltme işlemi geçiş elemanları (transition elements) kullanarak eleman tiplerinin derecelerini (mertebelerini artırarak veya azaltarak) değiştirmek yoluyla veya geçiş elemanı bölgelerinde sürekliliği de bozmayacak şekilde düğüm noktalarına sınırlama (constraint) tanımlanması ile mümkündür.

Ağ sıklaştırılması/inceltilmesi, profesyonel anlamda yaygın şekilde düğüm noktasında bir sınırlama (constraint) tanımlamakla yapılır. Buna bir alternatif yöntem Çıtıptıoğlu (1983) tarafından genel serendip elemanları olarak bilinen elemanlar ile geliştirilmiştir (Şekil 1.1). Genel serendip elemanları, sonlu elemanlar metodunda kullanılan izoparametrik serendip elemanlar ile birebir aynıdır, farkı ise mastır elemanların birbirlerine geçişini sağlayacak olan şekil fonksiyonlarına sahip olmasıdır. Çıtıptıoğlu (1983) tarafından sunulan “genel serendip elemanlar” kenar iç düğüm noktaları sabit olan koordinatlar için geliştirilmiştir. Kenar iç noktaların yerlerinin orta noktadan kayması ve/veya ağ sıklaştırılması/inceltilmesi sırasında kenar iç noktanın sabit olan bu orta noktalara denk gelmemesi durumunda dönüşüm bozuklukları olarak bilinen hesaplama hataları ortaya çıkmaktadır.

Hem ağ sıklaştırılmasını/inceltmesini hem de dönüşüm bozukluklarını ortadan kaldıracak olan denklemler ise Küçükarslan (1995) ve Utku (2000) tarafından geliştirilmiştir. Elde edilen şekil fonksiyonları ile kütle ve sönüm matrisleri elde edilerek genel serendip elemanların dinamik problemlere uygulaması yapılmıştır (Küçükarslan ve Demir, 2008).



Şekil 1.1 : Genel serendip elemanlar: (a) Doğrusal, (b) Parabolik (2. derece), (c) Kübik.

1.2 Literatür Özeti

Sonlu eleman metodunda karşılaşılan dönüşüm bozukluklarının ortadan kaldırılması Nicolas ve Çıtıpıtıoğlu (1977) tarafından incelenmiştir. Buna benzer araştırmalar Çıtıpıtıoğlu ve Nicolas (1979), Çıtıpıtıoğlu (1983) ve Celia ve Gray (1984) tarafından sonraki dönemlerde yapılmıştır. Bu araştırmalarda fiziksel elemanla master elemanın ara noktaları arasındaki dönüşümler orantılı bir şekilde ölçeklendirilmiştir.

Orta noktaları ayarlanabilir serendip elemanların formülasyonu Utku ve diğ. (1991) tarafından yapılmış, sonuçları Çıtıpıtıoğlu ve Nicolas (1979) ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmada, şekil fonksiyonları ve türevlerinin ayarlanabilir kenar noktaları için genel formülasyonlar elde edilmiştir.

Genel serendip elemanlarının kenar noktaları ayarlanabilir hal için olan denklemleri Küçükarslan (1995) ve Utku (2000) tarafından elde edilmiştir. Bu araştırmalarda önerilen formülasyonun sınaması ve üstünlüğü analitik sonuçları olan düzlem elastisite problemleriyle karşılaştırılmıştır. İzoparametrik standart formülasyonlarla da karşılaştırmalar yapılmıştır.

Kenar noktaları ayarlanabilir serendip elemanlarına ihtiyaç duyulmasının bir sebebi de betonarme kesitler üzerinde El-Mezaini ve Çıtıpıtıoğlu (1991) tarafından yapılan araştırmada özetlenmiştir. Doğrusal olmayan elastisite problemleri için serendip elemanlarla bir çalışma yapılmıştır (De Bellis ve diğ. (2019)). Ancak elastoplastik malzemelerin analizi için de bugüne kadar geliştirilmiş serendip elemanlar için yapılmış bir çalışma literatürde mevcut değildir. Bu tezde, geliştirilmiş serendip elemanların malzeme yönünden doğrusal olmayan problemlere uygulaması yapılarak

sonlu elemanlar yöntemindeki dönüşüm bozuklukları kaynaklı hesap hataları giderilecektir.

1.3 Tezin İçeriği

Tezin birinci bölümünde genel serendip elemanları hakkında bilgi verilip literatür özeti yapılmaktadır. İkinci bölümde genel serendip elemanlarının genel şekil fonksiyonları ve bunlara ait türevler verilmektedir. Üçüncü bölümde doğrusal olmayan malzeme davranışı kapsamında plastisite ile ilgili teorik bilgiler verilmektedir.

Dördüncü bölümde ise ikinci bölümde verilen şekil fonksiyonlarının yardımı ile doğrusal olmayan analizin sonlu eleman yönteminde nasıl yapılacağı işlenmiştir. Beşinci bölümde sayısal örnekler sunulup, sınamalar yapılmış, literatürden elde edilen problemlerle karşılaştırmalar yapılarak sonuçlar hakkında irdelemeler yapılmıştır.

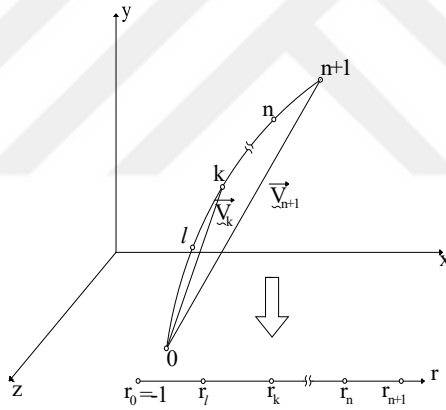
Son bölümde, elde edilen sonuçlar hakkında değerlendirmeler yapılmış ve gelecek çalışmalar hakkında önerilerde bulunulmuştur.



2. GENEL SERENDİP ELEMANLARI İÇİN ŞEKİL FONKSİYONLARI

2.1 Dönüşüm Bozukluklarının Giderilmesi

Sonlu elemanlar metodunda, fiziksel elemanla mastır eleman arasındaki dönüşüm şekilsel olarak Şekil 2.1’de gösterilmiştir. Mastır elemandaki kenar ara noktaların koordinatları standart sonlu elemanlar formülasyonunda sabittir. Fiziksel elemandaki noktalar mastır elemandaki koordinatlarındaki pozisyonları ile orantısız bir şekilde olursa, bu durum dönüşüm bozukluğuna neden olur. Bu da hesaplamada elde edilecek deplasman ve gerilme büyüklüklerinin hatalı hesap edilmesi anlamına gelir.



Şekil 2.1 : Eğrisel gerçek elemanın mastır eleman üzerine dönüşümü.

Bu hataları (dönüşüm bozukluklarını) gidermek için bir orantılılık sabiti herhangi bir k noktası için tanımlanırsa

$$C = \frac{V_k \cdot V_{n+1}}{V_{n+1} \cdot V_{n+1}} \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır.

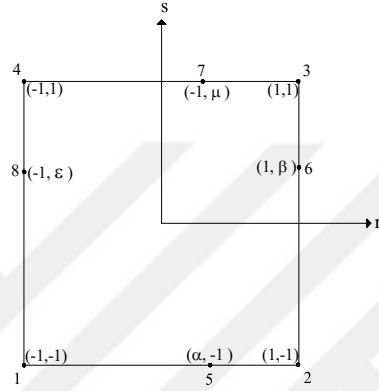
Bu denklemden, $V_k = P_k - P_0$, $V_{n+1} = P_{n+1} - P_0$ ve $0 < C < 1$ dir. P_k k kenar noktasının pozisyon vektörü, ve P_0 and P_{n+1} ise başlangıç ve bitiş noktalarına uzanan vektörleri ifade etmektedir.

k kenar noktası için, r_k koordinatı bu orana bağlı olarak hesaplanmak istenirse:

$$C = \frac{1+r_k}{2} \quad (2.2)$$

biçiminde yazılır. Bu denklemde $-1 < r_k < 1$ aralığındadır.

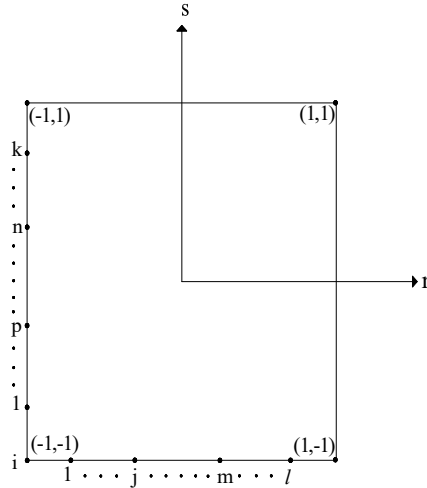
Bu orantılama yoluyla kenar iç noktalara ait şekil fonksiyonları düzeltilmekte ve dönüşüm bozukluğu giderilmektedir. Şekil 2.2 kenar iç noktaları sabit olmayan serendip elemanını temsil etmektedir.



Şekil 2.2 : Kenar iç noktası sabit olmayan genel serendip elemanı.

2.2 Kenar Noktaları Ayarlanabilir Genel Serendip Elemanları

Lineer eleman tiplerinden daha yüksek mertebedeki parabol, 3. derece veya daha yüksek mertebedeki eleman tiplerine geçişı sağlayacak olan geçiş elemanı tipi Şekil 2.3’de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 : Yüksek dereceli genel serendip elemanı.

Bu eleman için gerekli şekil fonksiyonları şu şekilde hesaplanabilir (Küçükarslan, 1995 ve Utku, 2000):

Kenar noktalar için:

$$N_i(r, s) = \frac{(1 + r_i r)(1 + s_i s)}{4} \left[\prod_{\substack{m=1 \\ |r_m| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_m}{r_i - r_m} + \prod_{\substack{n=1 \\ |s_n| \neq 1}}^k \frac{s - s_n}{s_i - s_n} - 1 \right] \quad (2.3a)$$

r ve s bağlı türevleri ise sırayla:

$$N_{i,r}(r, s) = \frac{r_i(1 + s_i s)}{4} \left[\prod_{\substack{m=1 \\ |r_m| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_m}{r_i - r_m} + \prod_{\substack{n=1 \\ |s_n| \neq 1}}^k \frac{s - s_n}{s_i - s_n} - 1 \right] + \frac{(1 + r_i r)(1 + s_i s)}{4} \left[\frac{\sum_{k=1}^1 \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k, |r_m| \neq 1}}^{\ell} r - r_m}{\prod_{\substack{m=1 \\ |r_m| \neq 1}}^{\ell} r_i - r_m} \right] \quad (2.3b)$$

$$N_{i,s}(r, s) = \frac{s_i(1 + r_i r)}{4} \left[\prod_{\substack{m=1 \\ |r_m| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_m}{r_i - r_m} + \prod_{\substack{n=1 \\ |s_n| \neq 1}}^k \frac{s - s_n}{s_i - s_n} - 1 \right] + \frac{(1 + r_i r)(1 + s_i s)}{4} \left[\frac{\sum_{j=1}^k \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq j, |s_n| \neq 1}}^k s - s_n}{\prod_{\substack{n=1 \\ |s_n| \neq 1}}^k s_i - s_n} \right] \quad (2.3c)$$

r -eksenine paralel ara noktalar için:

$$N_m(r, s) = \frac{(r^2 - 1)(1 + s_m s)}{2(r_m^2 - 1)} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m, |r_j| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_j}{r_m - r_j} \right] \quad (2.4a)$$

r ve s bağlı türevleri ise sırayla:

$$N_{m,r}(r, s) = \frac{r(1 + s_m s)}{r_m^2 - 1} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m, |r_j| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_j}{r_m - r_j} \right] + \frac{(r^2 - 1)(1 + s_m s)}{2(r_m^2 - 1)} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\ell} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, m, |r_j| \neq 1}}^{\ell} r - r_j}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m, |r_j| \neq 1}}^{\ell} r_m - r_j} \right] \quad (2.4b)$$

$$N_{m,s}(r, s) = \frac{s_m(r^2 - 1)}{2(r_m^2 - 1)} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m, |r_j| \neq 1}}^{\ell} \frac{r - r_j}{r_m - r_j} \right] \quad (2.4c)$$

s -eksenine paralel ara noktalar için:

$$N_n(r, s) = \frac{(s^2 - 1)(1 + r_n r)}{2(s_n^2 - 1)} \left[\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n, |s_p| \neq 1}}^k \frac{s - s_p}{s_n - s_p} \right] \quad (2.5a)$$

r ve s bağlı türevleri ise sırayla:

$$N_{n,r}(r, s) = \frac{r_n (s^2 - 1)}{2(s_n^2 - 1)} \left[\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n, |s_p| \neq 1}}^k \frac{s - s_p}{s_n - s_p} \right] \quad (2.5b)$$

$$N_{n,s}(r, s) = \frac{s(1 + r_n r)}{s_n^2 - 1} \left[\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n, |s_p| \neq 1}}^k \frac{s - s_p}{s_n - s_p} \right] + \frac{(s^2 - 1)(1 + r_n r)}{2(s_n^2 - 1)} \left[\frac{\sum_{\ell=1, \ell \neq n}^k \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq \ell, n, |s_p| \neq 1}}^k s - s_p}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n, |s_p| \neq 1}}^k s_n - s_p} \right] \quad (2.5c)$$

biçiminde yazılır.

Şekil 2.2’de kenar iç noktaları sabit olmayan serendip elemanın temsili edildiği daha önce ifade edilmişti. Yukarıda sıralanan genel formülasyonlar, ikinci derece serendip elemanı için genelleştirilmek istenirse, şekil fonksiyonları aşağıdaki biçimde ifade edilir.

$$N_1(r, s, r_1, s_1) = \frac{(1-r)(1-s)}{4} \left(\frac{r_1 - \alpha}{-1 - \alpha} + \frac{s_1 - \varepsilon}{-1 - \varepsilon} - 1 \right) \quad (2.6)$$

$$N_2(r, s, r_2, s_2) = \frac{(1+r)(1-s)}{4} \left(\frac{r_2 - \alpha}{1 - \alpha} + \frac{s_2 - \beta}{-1 - \beta} - 1 \right) \quad (2.7)$$

$$N_3(r, s, r_3, s_3) = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \left(\frac{r_3 - \mu}{1 - \mu} + \frac{s_3 - \beta}{1 - \beta} - 1 \right) \quad (2.8)$$

$$N_4(r, s, r_4, s_4) = \frac{(1-r)(1+s)}{4} \left(\frac{r_4 - \mu}{-1 - \mu} + \frac{s_4 - \varepsilon}{1 - \varepsilon} - 1 \right) \quad (2.9)$$

$$N_5(r,s) = \begin{cases} \frac{(r^2-1)(1-s)}{2(\alpha^2-1)}, & \text{Eğer } \alpha \neq 1 \\ 0 & , \text{Eğer } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

$$N_6(r,s) = \begin{cases} \frac{(s^2-1)(1+r)}{2(\beta^2-1)}, & \text{Eğer } \beta \neq 1 \\ 0 & , \text{Eğer } \beta = 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$N_7(r,s) = \begin{cases} \frac{(r^2-1)(1+s)}{2(\mu^2-1)}, & \text{Eğer } \mu \neq 1 \\ 0 & , \text{Eğer } \mu = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$N_8(r,s) = \begin{cases} \frac{(s^2-1)(1-r)}{2(\varepsilon^2-1)}, & \text{Eğer } \varepsilon \neq 1 \\ 0 & , \text{Eğer } \varepsilon = 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Denklemler 2.6 ve 2.9 arası yer alan $r_1, r_2, r_3, r_4, s_1, s_2, s_3$ ve s_4 fonksiyonlarının parçalı olarak tanımları r_i ve s_i fonksiyonları $i=1, 2, 3$ ve 4 için parçalı fonksiyon biçiminde aşağıdaki gibi yazılır.

$$r_1(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \alpha \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \alpha = 1 \end{cases}, r_2(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \alpha \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.14a)$$

$$r_3(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \mu \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \mu = 1 \end{cases}, r_4(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \mu \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \mu = 1 \end{cases} \quad (2.14b)$$

$$s_1(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \varepsilon \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \varepsilon = 1 \end{cases}, s_2(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \beta \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \beta = 1 \end{cases} \quad (2.14c)$$

$$s_3(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \beta \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \beta = 1 \end{cases}, s_4(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \varepsilon \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \varepsilon = 1 \end{cases} \quad (2.14d)$$

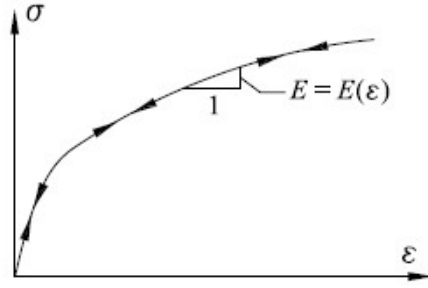
3. PLASTİSİTE

3.1 Giriş

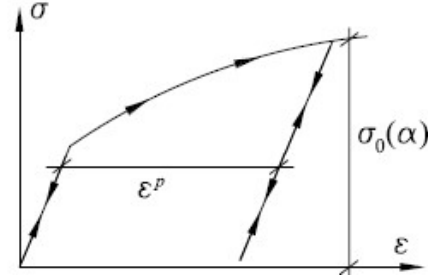
Yapı mekaniğinde, yerdeğiştirmelerin küçük limitlerde olduğu ve Hooke yasasının geçerli olduğu varsayımıyla en yaygın kullanılan analiz türü doğrusal statik analizdir. Buna karşın, aşırı yük seviyelerinde bir dizi doğrusal davranış olmama durumu ile karşılaşılabilir. Bunlardan en yaygın olanı, gerilme-birim uzama ilişkisinin doğrusal olmadığı malzeme davranışı ile ilgili durumdur. Diğer bir yaygın doğrusal olmayan davranış ise yükleme sırasında geometrinin değışmesi olarak bilinen geometrik doğrusal olmayan davranış biçimidir. Bir yapının önemli ölçüde büyüklükte kuvvetlere maruz kalması durumunda, hem malzeme hem de geometrik doğrusal olmayan davranış şekilleri analizlerde ele alınmalıdır.

Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan elastik malzemeler, yükleme yapıldıktan sonra (kalıcı deformasyonlar olmadan) elastik olarak “yüksüz” bir duruma dönecektir, ancak gerilme ve birim uzama arasındaki ilişki her birinde farklıdır. Malzeme yönünden doğrusal olmama durumunun kendisi temelde farklı kategorilere ayrılabilir. Doğrusal elastik malzemeler için Hooke yasası geçerli iken, doğrusal olmayan elastik malzemeler için davranış biçiminde Hooke yasası geçerli olmayıp, doğrusal olmayan bir ilişki Şekil 3.1’de olduğu gibi gösterilmiştir. Bu tür malzemelerde elastisite modülü birim uzamanın bir fonksiyonu şeklinde tanımlanır. Diğer bir davranış biçiminde, gerilme-birim uzama dağılımında yükün ortadan kalktığı durumda, kalıcı birim uzamalar oluşmaktadır. Bununla ilgili dağılım da Şekil 3.2’de gösterilmiştir.

Gerilme ile birim uzama arasındaki doğrusal olmayan ilişkiyi basitleştirmek için malzeme davranışı ile ilgili matematik modeller yapılmakta olup, bunlardan biri Şekil 3.3 (a)’da gösterilen elastoplastik davranış modelidir, bir diğeri ise Şekil 3.3 (b)’de gösterilen rijit, tam plastik modeldir, eğer malzemede pekleşme oluyorsa bu durum da Şekil 3.3 (c)’de gösterilmiştir.

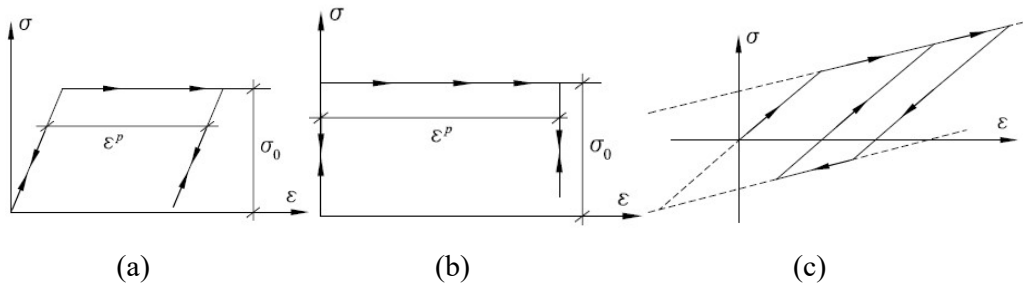


Şekil 3.1 : Doğrusal olmayan elastik malzeme davranışı.



Şekil 3.2 : Doğrusal olmayan malzeme davranışı (elastoplastik davranış).

Plastisite teorisi bazı temel kavramlardan yararlanır: Malzemenin plastik haline geldiği limiti tanımlayan akma kriteri, malzeme plastik olduktan sonra gerilmeler ve birim uzamalar arasındaki ilişki ve gerilmelerin akma sınırını aşmasını önleyen uyumluluk koşulu. Metallerin plastik davranışında, plastik akışı tanımlamak için gerekli teori diğer malzemelere göre daha kolaydır. Bunun nedeni metaller genellikle sıkıştırılmaz, hidrostatik etkiye duyarlıdır. Taş, beton ve granüler malzemeler için koşullar biraz daha karmaşıktır.



Şekil 3.3 : Matematik modeller: (a) Elastoplastik model, (b) Rijit, tam plastik model, (c) Pekleşen elastoplastik model.

3.2 Akma Kriteri

Malzemenin elastik halden plastik hale geçtiği elastik bir sınır vardır. Tek eksenli gerilme testinde bu sınır akma gerilmesi σ_0 olarak tanımlanır. Bununla birlikte, birkaç gerilme bileşeni mevcut olduğunda ve aynı anda etki ettiğinde, malzemenin ne zaman

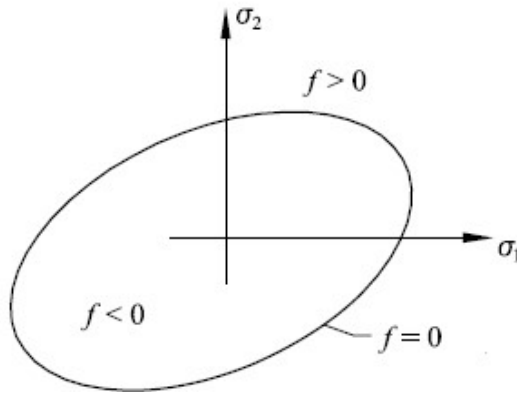
plastik hale geldiği durumu bir akma fonksiyonu ile belirlenir. Genellikle skaler bir akma fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \quad (3.1)$$

veya

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0 \quad (3.2)$$

Bu denklemde σ altı bağımsız gerilme bileşenini, α ise n adet spesifik malzeme sabitini tanımlar. Akma fonksiyonu, Şekil 3.4'te gösterilen gerilme dağılımında eğrinin yüzeyini tanımlar. İki boyutta asal gerilmeler σ_1 ve σ_2 'ye bağlı olarak, akma yüzeyinin içinde kalan alan $f < 0$ olma durumu elastik davranışı, $f = 0$ sınırı ise plastik davranışı gösterir.



Şekil 3.4 : İki boyutta akma yüzeyi.

Farklı malzeme türlerine göre çeşitli akma kriterleri geliştirilmiştir. Bunların belli başlı olanları literatürde Tresca, von Mises, Drucker-Prager ve Mohr-Coulomb akma kriterleri olarak anılmaktadır. Devam eden alt başlıklarda Tresca, von Mises ve Drucker-Prager akma kriterleri hakkında kısa bilgiler verilecektir.

3.2.1 Tresca akma kriteri

Metal test malzemesi üzerinde yapılan bir gerilme yüklemede, asal gerilmelerden faydalanılarak malzemenin maksimum bir kayma gerilmesine ulaştığı belirlenmiştir. Buna ilişkin bağıntı

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \max\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) \\ &= \max(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}) = k \end{aligned} \quad (3.3)$$

biçiminde verilmektedir. Bu bağıntıda, k değeri tek yönlü çekme deneyinden

$$k = \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (3.4)$$

olarak elde edilir. Denklemdaki σ_0 akma gerilmesidir.

Düzlem gerilmelerde asal gerilmelerden biri, σ_3 , sıfıra eşitlendiğinde, akma yüzeyi Şekil 3.5’de gösterildiği gibi $\sigma_1 - \sigma_2$ düzleminde çizilebilir. σ_1 ve σ_2 sıfırdan büyük olduğunda sınırlayıcı koşullar sırasıyla

$$\frac{1}{2} |\sigma_1| = \frac{1}{2} \sigma_1 = k \quad (3.5)$$

AB doğrusu için ve

$$\frac{1}{2} |\sigma_2| = \frac{1}{2} \sigma_2 = k \quad (3.6)$$

BC doğrusu için formülleri ile verilir.

Benzer biçimde, hem σ_1 hem de σ_2 negatif olduğunda,

$$\frac{1}{2} |\sigma_1| = -\frac{1}{2} \sigma_1 = k \quad (3.7)$$

DE doğrusu için ve

$$\frac{1}{2} |\sigma_2| = -\frac{1}{2} \sigma_2 = k \quad (3.8)$$

EF doğrusu için elde edilir.

$\sigma_1 < 0$ ve $\sigma_1 > 0$ olduğu durumda,

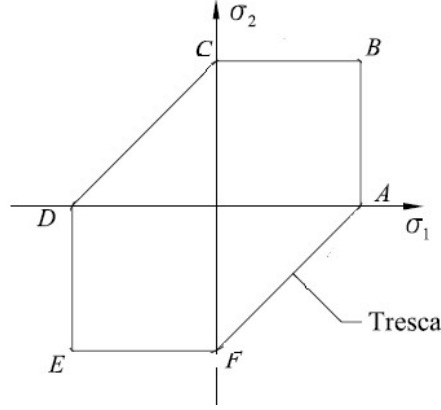
$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_1) = k \quad (3.9)$$

CD doğrusu için

ve son olarak, $\sigma_1 > 0$ ve $\sigma_1 < 0$ olduğu durumda ise;

$$\frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) = k \quad (3.10)$$

CD doğrusu için elde edilir.



Şekil 3.5 : Tresca akma kriteri.

3.2.2 von Mises akma kriteri

Tresca akma kriterinde asal gerilmelerden birinin eksik alınması ve kayma gerilmelerinin hesaba katılmaması nedeni ile bu gerilme etkilerini içeren daha detaylı bir akma kriteri olan von Mises akma kriteri geliştirilmiştir. von Mises akma fonksiyonu

$$f(J_2) = \sqrt{J_2} - k \quad (3.11)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu denklemde, J_2 deviatorik gerilmenin 2. değişmezi, k ise akma gerilmesidir.

Denklem 3.11 eşdeğer gerilme cinsinden yazılacak olursa;

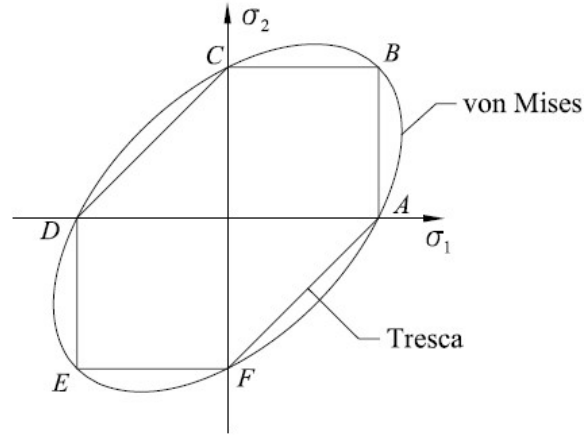
$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_e - \sigma_0 \quad (3.12)$$

biçiminde yazılır.

Bu denklemde σ_0 akma gerilmesidir. σ_e ise eşdeğer gerilme olup,

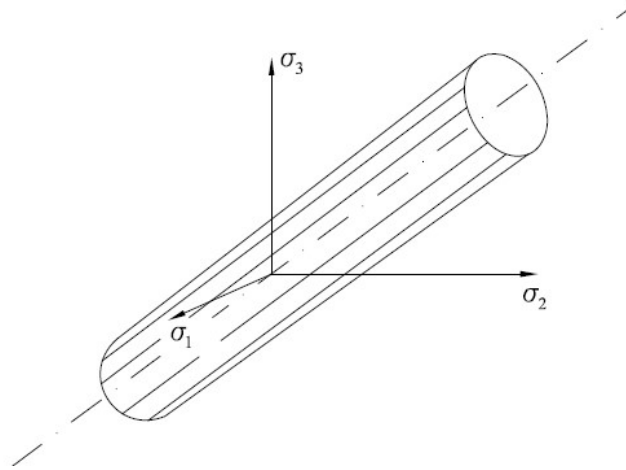
$$\begin{aligned} \sigma_e &= (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

biçiminde ifade edilir. Şekil 3.6’da Tresca ve von Mises akma dağılımları iki boyut için karşılaştırmalı olarak verilmiştir.



Şekil 3.6 : İki boyutta Tresca ve von Mises akma fonksiyonları.

Üç boyutta, von Mises akma fonksiyonu Şekil 3.7’de gösterilmiştir.



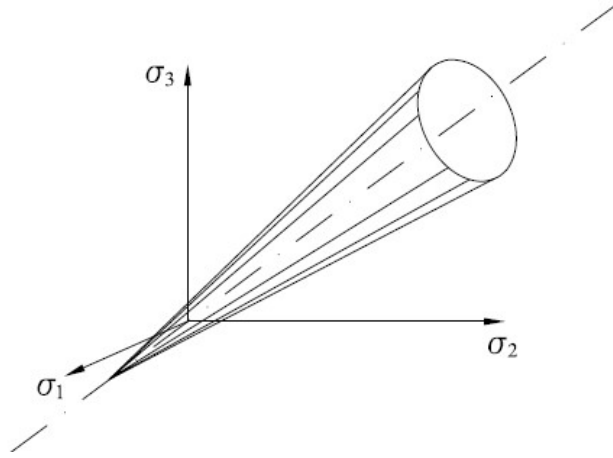
Şekil 3.7 : Üç boyutta von Mises akma fonksiyonu.

3.2.3 Drucker - Prager akma kriteri

Hidrostatik basınçtan bağımsız kullanılan akma kriterleri metaller için gerçekçi bir varsayım olup beton ve toprak gibi diğer malzemeler için geçerli değildir. Bu nedenle beton ve toprak gibi malzemelerde, Drucker-Prager akma kriteri kullanılmaktadır. Bu akma kriteri değiştirilmiş bir çeşit von Mises kriteridir. Akma fonksiyonu

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k \quad (3.14)$$

bağıntısı ile tanımlanmaktadır. Bu denklemde I_1 birinci invariant olup, $I_1 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ olarak tanımlanmaktadır. Şekil 3.8’de akma fonksiyonu dağılımı asal gerilmelere bağlı olarak gösterilmiştir.



Şekil 3.8 : Üç boyutta Drucker-Prager akma kriteri.

3.3 Plastik Birim Uzamalar ve Gerilmeler

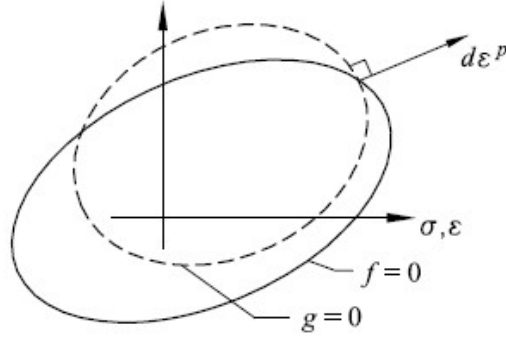
Bir yapı nötr durumdan yüklendiğinde, akma gerilmesine ulaşana kadar Hooke yasasına bağlı olarak elastik birim uzamalar ortaya çıkar. Yükleme arttıkça ve malzeme akmaya başladığında plastik birim uzamalar sistemde gelişecektir. Bir noktada yük taşıma kapasitesi, teorik olarak sonsuz büyüklükteki birim uzamalara ulaşması ile yapının göçmesi gerçekleşir. Bu nedenle, plastik davranış başladığında gerilmeler ve birim uzamalar arasında doğrusal bir ilişki yoktur. Toplam artımsal birim uzama, elastik ve plastik birim uzamanın artımsal toplamı kadardır.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (3.15)$$

Bu denklemde plastik artımsal birim uzama $d\varepsilon^p$, plastik potansiyel fonksiyonu olan g ile ilişkilendirilmektedir.

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.16)$$

Denklem 3.16'da yer alan $d\lambda$ pozitif orantılılık çarpanı olarak tarif edilir. Şekil 3.9'da plastik birim uzamanın gerilme ve birim uzamaya bağlı değişimi gösterilmiştir.



Şekil 3.9 : Plastik birim uzama.

g fonksiyonunun deneysel olarak elde edilmesi gerektiğinden, uygulamada bu fonksiyonun akma fonksiyonuna eşit olduğu kabul edilir. Literatürde buna eşdeğer akma kuralı denilmektedir. Bu kurala göre denklem 3.16 yeniden yazılacak olursa

$$d\epsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (3.17)$$

şeklinde artımsal plastik birim uzama denklemi elde edilir.

Bu denklemi von Mises akma kriterini kullanarak açmak istersek

$$d\epsilon^p = \begin{bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\epsilon_z^p \\ d\gamma_{xy}^p \\ d\gamma_{yz}^p \\ d\gamma_{zx}^p \end{bmatrix} = d\lambda \frac{1}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z \\ 2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x \\ 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \\ 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{yz} \\ 6\tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

şeklinde yazabiliriz. Drucker - Prager için ise aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$d\epsilon^p = \begin{bmatrix} d\epsilon_x^p \\ d\epsilon_y^p \\ d\epsilon_z^p \\ d\gamma_{xy}^p \\ d\gamma_{yz}^p \\ d\gamma_{zx}^p \end{bmatrix} = d\lambda \left(\frac{1}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z \\ 2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x \\ 2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y \\ 6\tau_{xy} \\ 6\tau_{yz} \\ 6\tau_{zx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\alpha\sigma_x \\ \frac{1}{3}\alpha\sigma_y \\ \frac{1}{3}\alpha\sigma_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.19)$$

Hesaplamalı elastoplastik analizde hesaplamalar, artımsal bir yük artışı uygulanarak ilerler. Bu durum bir yerdeğiştirme artışı ve dolayısıyla da toplam bir gerilme artışı meydana getirir. Artımsal olarak gerilme ile birim uzama arasındaki bünye bağıntısı

$$d\sigma = \mathbf{D}^{ep} d\varepsilon \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde $\mathbf{D}^{ep}$ elastoplastik davranışı içeren bünne matrisidir. Zienkiewicz ve diğ. (1969) tarafından ilk kez kullanılmıştır. $\mathbf{D}^{ep}$ matrisinin elde edilişi sırayla aşağıda yapılmaktadır.

Hooke yasası kullanılarak denklem 3.20 yeniden yazılacak olursa aşağıdaki formda yazılabilir.

$$d\sigma = \mathbf{D} (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (3.21)$$

Denklem 3.21’de, denklem 3.17’deki plastik birim uzama yerine yazılırsa,

$$d\sigma = \mathbf{D} d\varepsilon - d\lambda \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (3.22)$$

elde edilir. Akma fonksiyonu $f = 0$ olduğundan,

$$df = \nabla f^T d\sigma = 0 \quad (3.23)$$

bağıntısı türetilir. Bu ifade, denklem 3.22’de kullanılırsa,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \left(\mathbf{D} d\varepsilon - d\lambda \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) = 0 \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu denklemde de $d\lambda$ yalnız bırakılarak aritmetik işlemler yapıldığında, pozitif orantılılık çarpanı şu şekilde elde edilir.

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} d\varepsilon}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (3.25)$$

Sonuç olarak; pozitif orantılılık çarpanı da denklem 3.22’de yerine yazılarak artımsal gerilme ve birim uzama arasındaki bağıntı aşağıdaki biçimde son halini alır.

$$d\sigma = \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right) d\varepsilon \quad (3.26)$$

Bu denklemde parantez içinde kalan kısım elastoplastik bünne matrisi $\mathbf{D}^{ep}$ olarak tanımlanır.

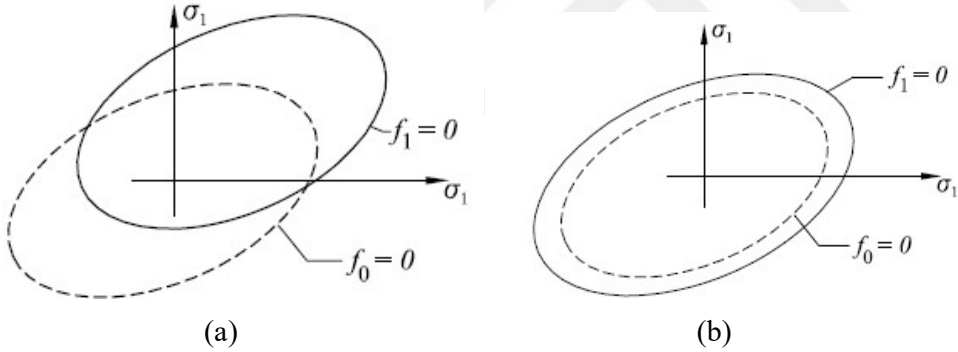
$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (3.27)$$

3.4 Pekleşme

Çoğu malzeme elastik davranıştan sonra artan yüke karşı birim uzaması daha da çoğalarak pekleşme denilen davranışı gösterir. Bu pekleşme izotropik pekleşme ve kinematik pekleşme olmak üzere iki özel türde incelenir. von Mises akma kriteri kullanılarak akma fonksiyonu pekleşen malzemeler için

$$f(\sigma) - \sigma_0(\alpha) = 0 \quad (3.28)$$

bağıntısı ile ifade edilir. Şekil 3.10'da, izotropik pekleşme ve kinematik pekleşme davranışı ayrı ayrı gösterilmiştir.



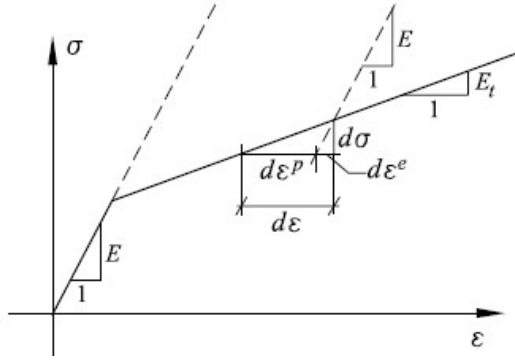
Şekil 3.10 : Pekleşme modelleri: (a) İzotropik pekleşme, (b) Kinematik pekleşme.

Tek eksenli çekme deneyi altında pekleşen malzemenin gerilme ve birim uzama değişimi Şekil 3.11'de gösterilmektedir.

Bölüm 3.3'deki artımsal gerilme ve birim uzama bağıntıları pekleşen malzeme için uyarlandığında, pekleşme modülü H

$$H = \frac{E_t}{1 - E_t / E} \quad (3.29)$$

olarak elde edilir. Denklem 3.26'daki bünye bağıntısı ise



Şekil 3.11 : Pekleşen elastoplastik malzeme davranışı.

$$d\sigma = \left(\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D}}{H + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right) d\epsilon \quad (3.30)$$

halini alır. Matris dönüşümü kullanılarak pekleşen elastoplastik bünye matrisinin tersi

$$\left(\mathbf{D}^{ep} \right)^{-1} = \mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \quad (3.31)$$

bağıntısı ile elde edilir.

Yukarıda elde edilen bağıntıların sayısal olarak çözümlenmesi ile pek çok katı cisim mekaniği probleminde gerilme ve deplasman hesaplamaları yapılabilmektedir. Bunun için sonraki bölümde sayısal yöntem olarak kullanılan sonlu eleman metoduna ait algoritmalar sunulmaktadır.



4. SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU

4.1 Giriş

Sonlu elemanlar yöntemi, yapı mekaniği problemlerinin sayısal olarak analizinde en sık kullanılan yöntemlerdendir. Sonlu elemanlar yöntemi temel olarak kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılmaya başlanmıştır. Yöntemde, çözüm yapılacak bölgede fiziksel eleman küçük elemanlara ayrılır ve bu elemanlar birbirlerine düğüm noktaları ile bağlanarak süreklilik sağlanır. Sonlu eleman sonuçlarının elde edilmesi ise bu düğüm noktalarında yazılmış olan denge denklemleri ile gerçekleştirilir. Bu denklemler minimum potansiyel enerji ilkesinden faydalanılarak elde edilebilir.

Elastoplastik davranışın sonlu elemanlar yönteminde uygulanmasında global ve lokal denge denklemlerinin sağlanması gerekir. Sonlu elemanlar yönteminde malzeme yönünden doğrusal olmayan analizler için aşağıda verilen algoritma standartlaşmış bir çözüm yoludur.

Sonlu elemanlar ile modellenmiş sistemde global denge denklemi

$$\mathbf{K}u = f \quad (4.1)$$

ile ifade edilir. Bu denklemde $\mathbf{K}$ rijitlik matrisini, u deplasman vektörünü ve f ise dış yük vektörünü gösterir.

Rijitlik matrisi ise

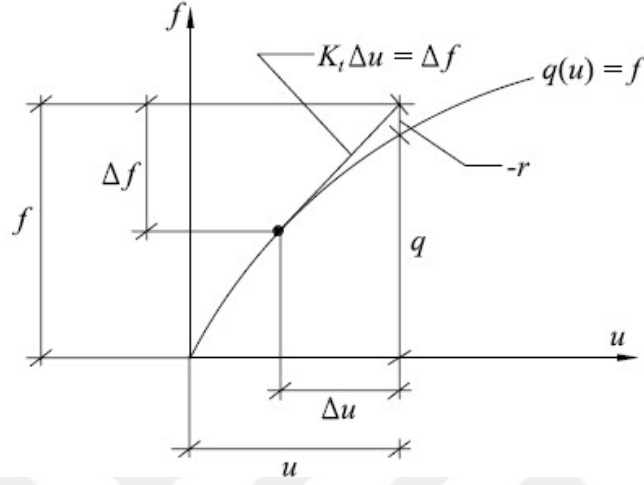
$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}}^{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.2)$$

biçiminde ifade edilir. Bu denklemde $\mathbf{B}$ matrisi birim uzamalar ile deplasmanlar arasındaki ilişkiyi, $\hat{\mathbf{D}}^{ep}$ ise elastoplastik davranıştaki bünye bağıntısını gösterir.

Elastoplastik davranışta analizler artımsal bağıntılar ile yapılmaktadır. Başka bir deyişle artımsal yükleme yapılarak bu yüklemedeki deplasmanlar elde edilir.

$$\mathbf{K}_i \Delta u = \Delta f \quad (4.3)$$

Bu denklemde $\mathbf{K}_t$ teğet rijitlik matrisi olup, Şekil 4.1’de gösterildiği üzere hesaplama yapılacak adımdaki teğet çizilerek doğrusallaştırılmış rijitlik matrisini göstermektedir.



Şekil 4.1 : Doğrusal olmayan analizde artımsal adımların grafiksel gösterimi.

Artımsal bir yük sisteme uygulandıktan sonra, bu yüklemeye karşılık gelen artımsal deplasmanlar hesap edilerek, sonlu elemanların her birinde Gauss noktalarında birim uzamalar

$$\Delta \varepsilon = \mathbf{B} \Delta u \quad (4.4)$$

ilişkisi ile elde edilir. Bir adım sonra ise bünye bağıntısı kullanılarak gerilmeler

$$d\sigma = \mathbf{D}^{ep} d\varepsilon \quad (4.5)$$

bağıntısı ile yine Gauss noktalarında hesap edilir.

Fiziksel problemdeki dengelenmemiş yükler elde edilen bu gerilmeler ile

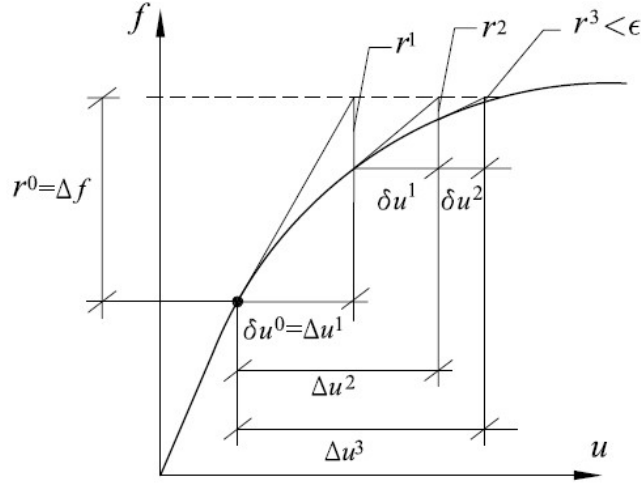
$$q = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega \quad (4.6)$$

işlemi ile hesap edilir. Bu denklemde Ω iki boyutta çözüm alanını tanımlamaktadır. Denklem 4.6’de hesap edilen yükleme ile uygulanan yükleme arasındaki fark, artık kuvvetleri, başka bir deyişle dengelenmemiş kuvvetleri verir.

$$r = q - f \quad (4.7)$$

Sonlu elemanlar yönteminde artık kuvvetler için müsaade edilebilir miktarda sıfıra yakın değerde bir yükleme tanımlanarak belirli bir hassasiyette işlemler tamamlanır. Bu işlemler Newton Raphson olarak bilinen birtakım ardışık işlemler içeren bir

algoritmadan ibaret olup, bu algoritmanın geliştirilmiş veya daha ileri düzeyde olan çeşitleri de mevcuttur. Newton Raphson kullanılarak yapılan çözüm algoritmasının grafiksel gösterimi Şekil 4.2’de aşağıda sunulmuştur.



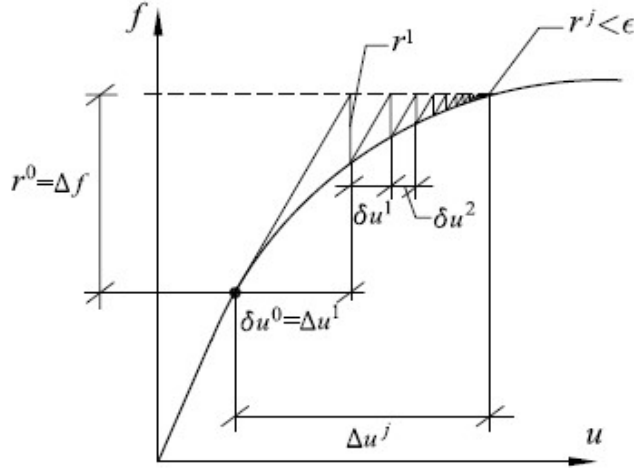
Şekil 4.2 : Newton Raphson metodu ile çözüm.

Newton Raphson yöntemine ait sonlu eleman çözümüne dair algoritma ise aşağıdaki Şekil 4.3’te adım adım verilmektedir.

Başlama $u_0 = 0, f_0 = 0$
Yük adım döngü başlangıcı $k = 0, \dots, k_{max}$
Kuvvet artırımı: Δf_k
Başlama: $\Delta u_k^0 = 0, \Delta \lambda_k^0 = 0$
İterasyon $j = 0, \dots$
Teğet rijitlik matrisi: $\mathbf{K}_t^{k,j}$
Artık kuvvet: $r_k^j = q(u_k + \Delta u_k^j) - (f_k + \Delta f_k)$
Çözüm: $\mathbf{K}_t^{k,j} \delta u_k^j = -r_k^j$
Güncelleme: $\Delta u_k^{j+1} = \Delta u_k^j + \delta u_k^j$
 $\Delta \epsilon_k^{j+1} = \mathbf{B} \Delta u_k^{j+1}$
Düğüm noktasında iterasyon
Hesaplama: $\sigma_{k+1}^{j+1}, \Delta \lambda_k^{j+1}$
Tolerans kontrolü $\|r_k^j\| < \epsilon \|f_k + \Delta f_k\|$
Güncelleme: $u_{k+1} = u_k + \Delta u_k^{j+1}$
 $f_{k+1} = f_k + \Delta f_k$
Yük adım döngü sonu

Şekil 4.3 : Newton Raphson ile elastoplastik gerilme analizi.

Geliştirilmiş Newton Raphson kullanılarak yapılan çözüm algoritmasının grafiksel gösterimi ise Şekil 4.4’de aşağıda sunulmuştur.



Şekil 4.4 : Geliştirilmiş Newton Raphson metodu ile çözüm.

Geliştirilmiş Newton Raphson yöntemine ait sonlu eleman çözümünde yukarıdaki grafikten anlaşılacağı üzere rijitlik matrisi her artımsal adımda tekrar hesaplanmamaktadır. Geliştirilmiş Newton Raphson yöntemine ait sonlu eleman çözümüne ait algoritma ise Şekil 4.5’de verilmektedir.

Başlama $u_0 = 0, f_0 = 0$
Yük adım döngü başlangıcı $k = 0, \dots, k_{max}$
Kuvvet artırımı: Δf_k
Başlama: $\Delta u_k^0 = 0, \Delta \lambda_k^0 = 0$
İterasyon $j = 0, \dots$
Teğet rijitlik matrisi: $\mathbf{K}_t^k$
Artık kuvvet: $r_k^j = q(u_k + \Delta u_k^j) - (f_k + \Delta f_k)$
Çözüm: $\mathbf{K}_t^k \delta u_k^j = -r_k^j$
Güncelleme: $\Delta u_k^{j+1} = \Delta u_k^j + \delta u_k^j$
 $\Delta \varepsilon_k^{j+1} = \mathbf{B} \Delta u_k^{j+1}$
Düğüm noktasında iterasyon
Hesaplama: $\sigma_{k+1}^{j+1}, \Delta \lambda_k^{j+1}$
Tolerans kontrolü $\|r_k^j\| < \varepsilon \|f_k + \Delta f_k\|$
Güncelleme: $u_{k+1} = u_k + \Delta u_k^{j+1}$
 $f_{k+1} = f_k + \Delta f_k$
Yük adım döngü sonu

Şekil 4.5 : Geliştirilmiş Newton Raphson ile elastoplastik gerilme analizi.

5. SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde öncelikle analitik çözümü bilinen konsol bir kirişin elastik çözümü ile sonlu eleman çözümü, dönüşüm bozukluklarının gerçekleştiği bir model ile karşılaştırılmaktadır. Daha sonra plastik analiz için kalın halka şeklinde bir silindir iç basınç etkisi altında mevcut analitik çözümler ile karşılaştırılmaktadır. Bu analizde von Mises akma kriteri kullanılmaktadır. Son olarak; iç basınç etkisi altındaki kalın halka şeklindeki silindir örneğinin plastik analizdeki davranışında dönüşüm bozukluklarının etkisi ve bunların düzeltilmesi sonucu elde edilen sonuçlar incelenmektedir.

5.1 Elastik Onama Örneği

Bölüm 3'te şekil fonksiyonları için önerilen formüllerin ve algoritmanın doğruluğunu test etmek için Şekil 5.1'deki betonarme konsol kiriş, en soldaki kenarında 1, 2 ve 3 nolu düğüm noktalarında toplamda 30 kN'luk düşey yönde bir etkiye maruz bırakılarak incelenmektedir.

Şekil 5.1'de verilen kirişin uzunluğu 1200 mm, derinliği 300 mm, kalınlığı 25 mm'dir. Analiz için geometrik olarak eşit 4 adet serendip eleman kullanılmaktadır.

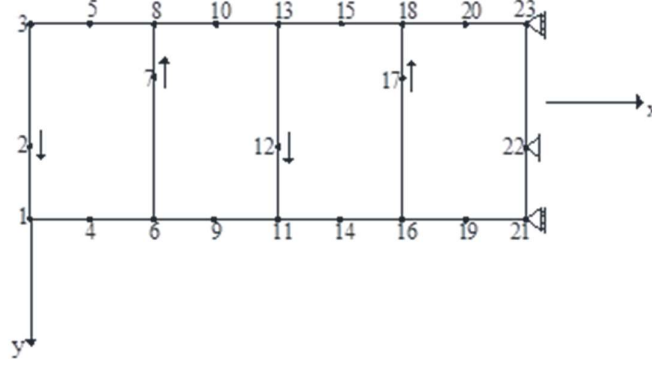
Malzeme Özellikleri: $E = 20000$ MPa, Poisson oranı $\nu = 0.15$ olarak tanımlıdır.

Onama probleminin statik yükleme için elastisite çözümü Timoshenko ve Goodier (1970)'de düşey deplasman için

$$v = \frac{\nu P x y^2}{2EI} + \frac{P y^3}{6EI} - \frac{P l^2 x}{2EI} + \frac{P l^3}{3EI} + \frac{P h^2 (l - x)}{2GI} \quad (5.1)$$

olarak verilmektedir.

Bu denklemde x : x -koordinatını, y : y -koordinatını, P : düşey yükü, I : z -yönündeki atalet momentini, E : elastisite modülünü, G : kayma modülünü, l : kiriş uzunluğunu, h : kiriş derinliğinin yarısını, ν : Poisson oranını göstermektedir.



Şekil 5.1 : Konsol kiriş.

Verilen geometri ve malzeme özellikleri için 3 nolu düğüm noktasındaki düşey deplasman ($x = 0, y = -150$ mm), denklem 5.1 kullanılarak $v_3 = 16.19$ mm bulunur.

Sonlu eleman modeli çözümünde Şekil 5.1'deki gibi 4 eleman kullanılmakta ve dönüşüm bozukluğu oluşturmak için 2, 12 ve 22 nolu düğüm noktaları sırasıyla 25 mm, 50 mm ve 75 mm aşağı yönde, 7 ve 17 nolu düğüm noktaları da yukarı yönde aynı miktarlarda kaydırılarak analizler yapılmakta ve standart şekil fonksiyonlarının düzeltemediği bozuklukların önerilen yöntemle düzeltilmesi mümkün olmaktadır.

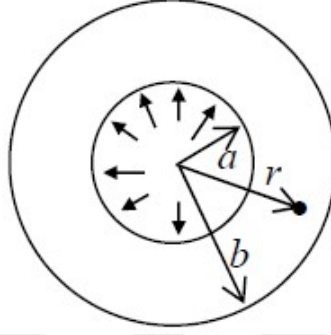
Geliştirilen algoritma ile 25 mm kaydırmalar için 3 nolu düğüm noktasındaki düşey deplasman ($x = 0, y = -150$ mm) 15.86 mm ve standart yöntemle 15.53 mm olarak hesap edilmektedir.

50 mm kaydırmalar için 3 nolu düğüm noktasının geliştirilen algoritma ile düşey deplasmanı 15.86 mm ve standart yöntemle 13.62 mm olarak hesap edilmektedir. Kaydırma miktarı arttıkça geliştirilen yöntemde değişiklik olmamakla birlikte, bulunan miktar standart değere göre daha yakındır. Standart yöntemle elde edilen değerler ise elastisite çözümünden beklendiği gibi uzaklaşmaktadır.

75 mm kaydırmalar için 3 nolu düğüm noktasının düşey deplasmanı geliştirilen algoritma ile 15.86 mm ve standart yöntemle 11.64 mm olarak hesap edilmektedir. Kaydırma en fazla olduğundan, elastisite çözümünden en çok uzaklaşma bu analiz için olmakta ancak geliştirilmiş yöntemde herhangi bir sapma olmamaktadır. Geliştirilmiş yöntem değerlerinin elastisite çözümünden farklı çıkması ise sonlu eleman modelinde sadece 4 eleman kullanılmasından kaynaklanmaktadır.

5.2 Elastoplastik Analiz Örneği

Bu örnekte, p ile ifade edilen iç basınç etkisi altında, kalın halka şeklindeki bir silindirin (Şekil 5.2) elastoplastik analizi için mevcut analitik çözümler ile sonlu elemanlar çözümü karşılaştırılmaktadır. Bu analizde von Mises akma kriteri kullanılmaktadır.



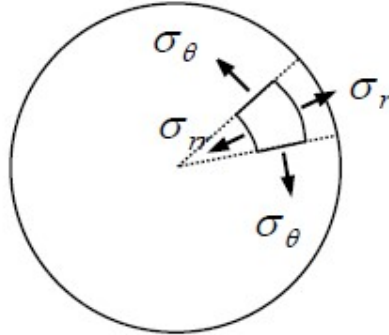
Şekil 5.2 : İç basınç etkisi altındaki kalın halka silindir.

Şekil 5.2’de verilen problemin elastisite çözümleri Timoshenko ve Goodier (1970)’de verilmekte olup, Şekil 5.3’te verilen gerilme bileşenleri radyal gerilme (σ_r) ve çembersel gerilme (σ_θ) cinsinden

$$\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (5.2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (5.3)$$

olarak türetilmiştir.



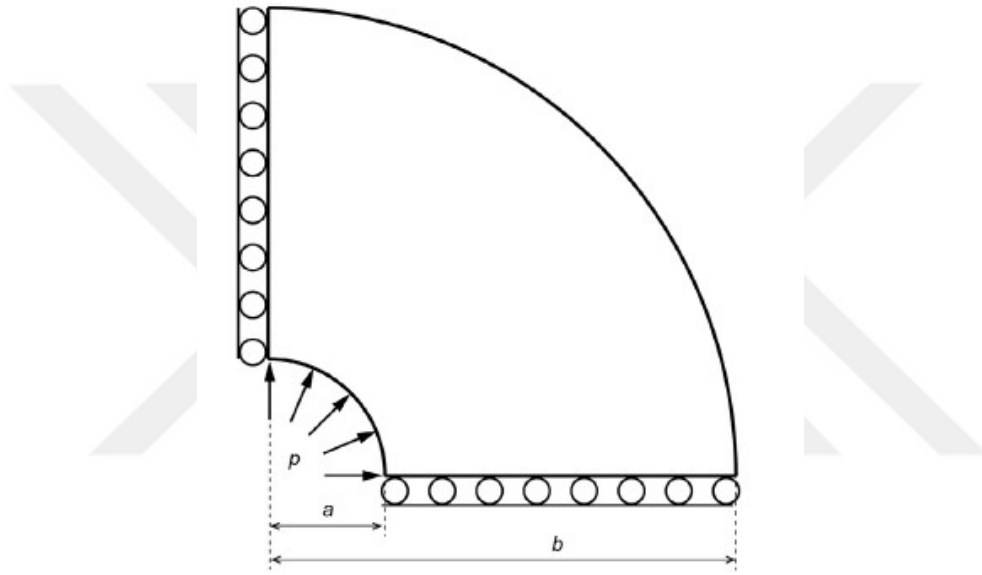
Şekil 5.3 : Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri.

Radyal yöndeki deplasman ise analitik olarak

$$\delta_r = \frac{a^2 p r}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (5.4)$$

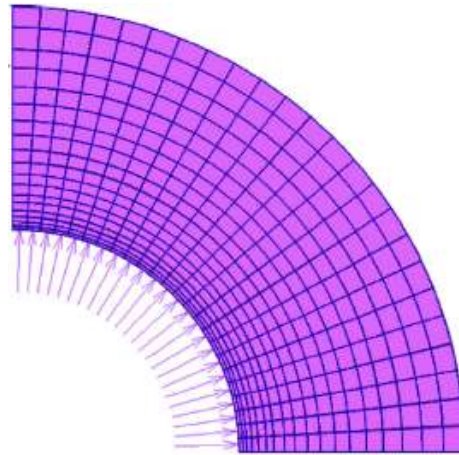
bağıntısı ile tanımlanmaktadır.

Şekil 5.2’de tanımlı problem, simetriden dolayı ¼’ü ele alınarak ve Şekil 5.4’de tanımlı sınır şartları uygulanarak incelenebilir.



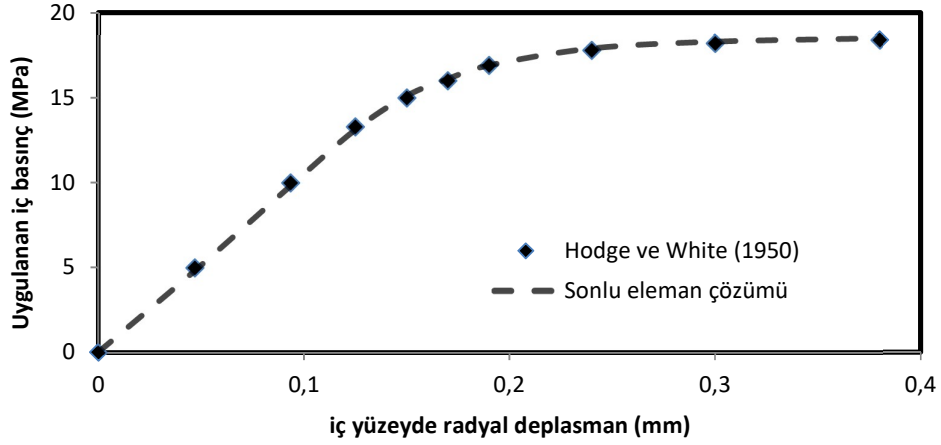
Şekil 5.4 : Kalın halka silindirin ¼’ü.

Şekil 5.4 için sembolik bir sonlu eleman ağı Şekil 5.5’de verilmiştir. Bu sonlu eleman ağında radyal yönde 18 eleman, çembersel yönde ise 24 eleman olmak üzere toplam 432 eleman mevcuttur.



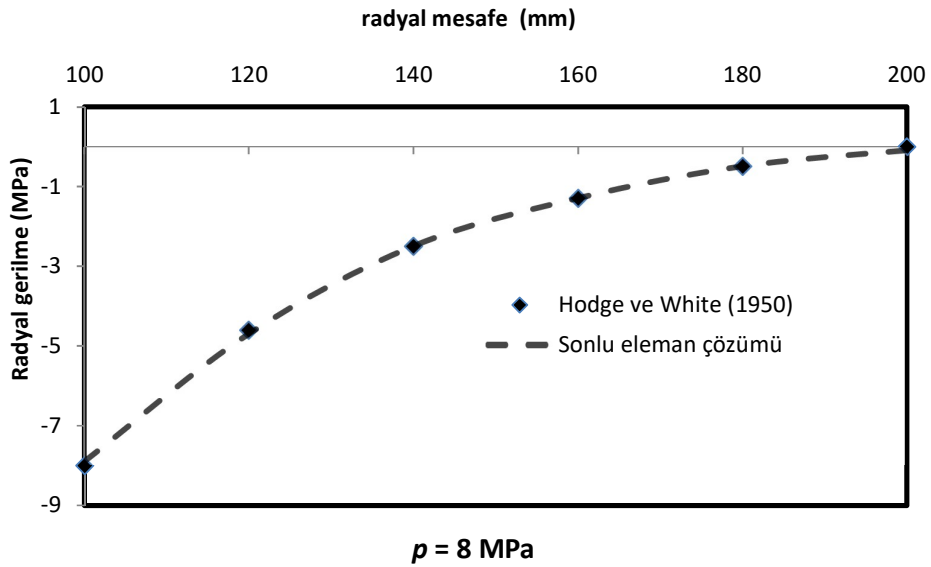
Şekil 5.5 : Sonlu eleman ağı (18x24 elemanlı).

Mevcut algoritmanın onanması için; iç yarıçap $a = 100$ mm, dış yarıçap $b = 200$ mm, elastisite modülü $E = 2.1 \times 10^4$ MPa, Poisson oranı $\nu = 0.3$, akma gerilmesi $\sigma_y = 24.0$ MPa değerleriyle, pekleşme olmadan von Mises akma kriterine göre elastoplastik analiz yapılarak, uygulanan iç basıncın iç yüzeydeki yarıçap deplasmanına bağlı olarak değişimi Şekil 5.6’da Hodge ve White (1950) sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

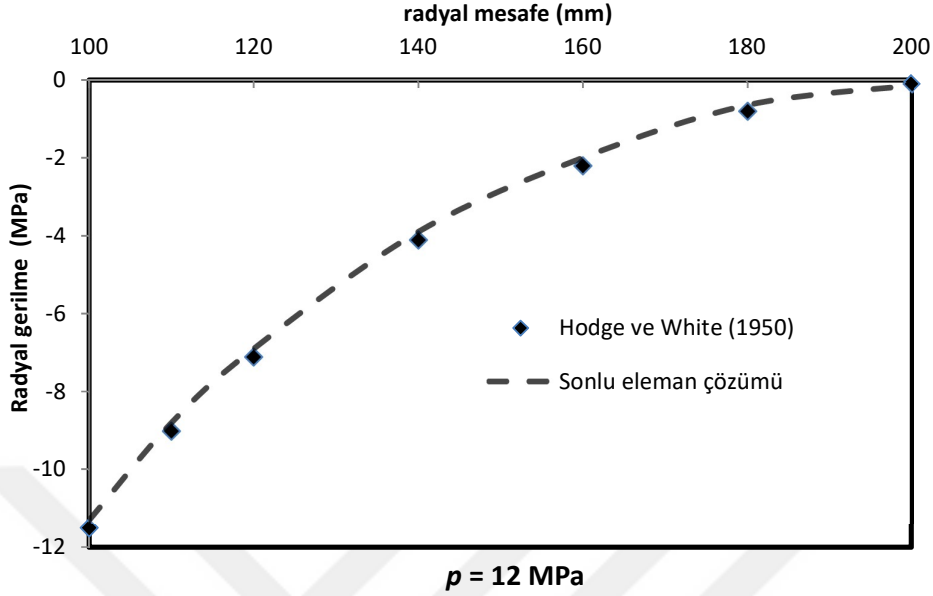


Şekil 5.6 : İç basınç ile iç yüzeydeki deplasmanın değişimi.

İç basınç $p = 8$ MPa olduğu durumda, radyal gerilmenin radyal mesafe ile değişimi Şekil 5.7’de karşılaştırılmaktadır. Şekil 5.6’dan görüleceği üzere $p = 8$ MPa için sistem elastik davranmakta, dolayısıyla Şekil 5.7’deki dağılım, denklem 5.2 ile aynı sonuçları vermektedir.

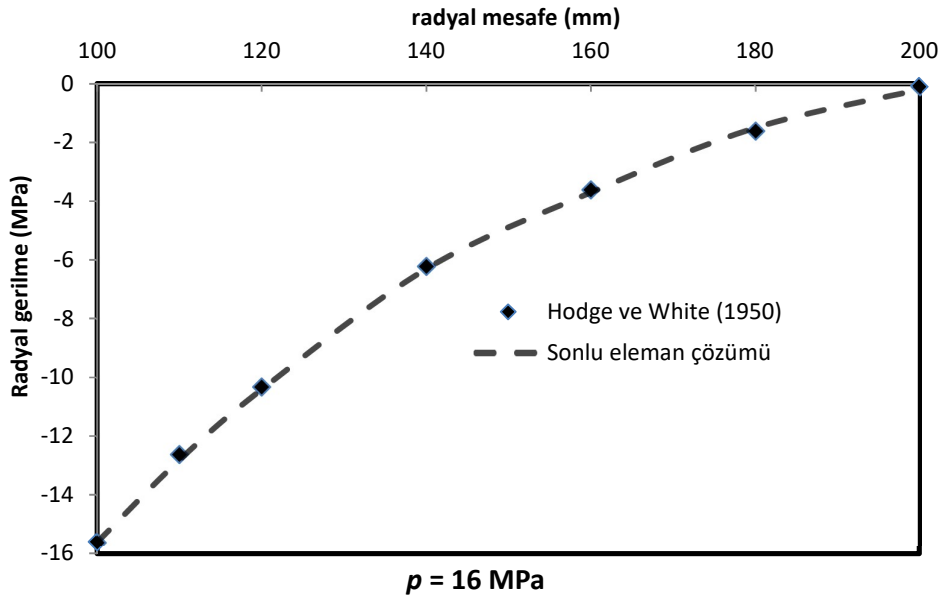


Şekil 5.7 : İç basınç 8 MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı.

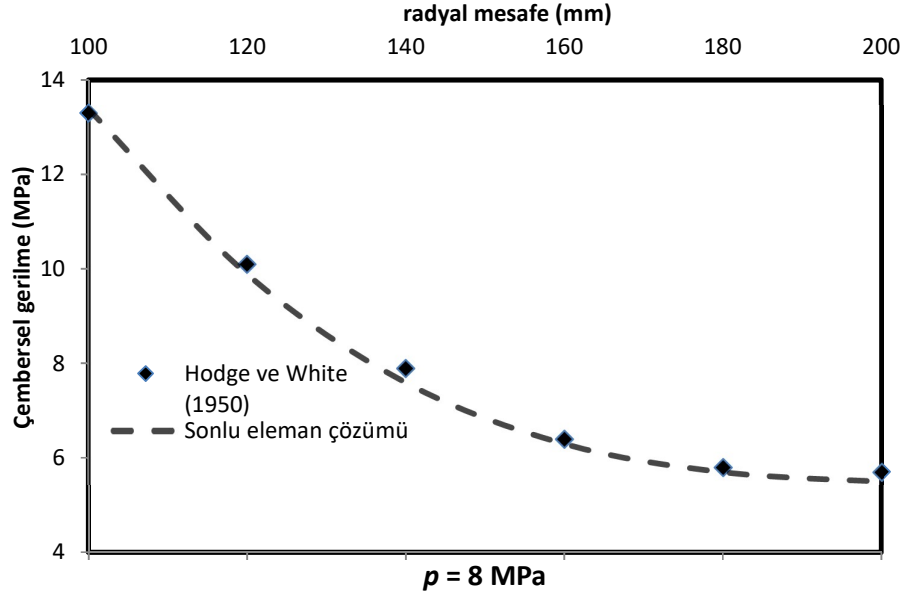


Şekil 5.8 : İç basınç 12 MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı.

İç basınç $p = 12$ MPa olduğu durumda radyal gerilmenin radyal mesafe ile değişimi Şekil 5.8’de, $p = 16$ MPa olduğu durumda ise Şekil 5.9’da karşılaştırılmaktadır. Bu gerilme seviyelerinde plastik bölgeye ulaşılmış olup, sonlu eleman çözümleri ile Hodge ve White (1950) sonuçları birbiriyle örtüşmektedir.

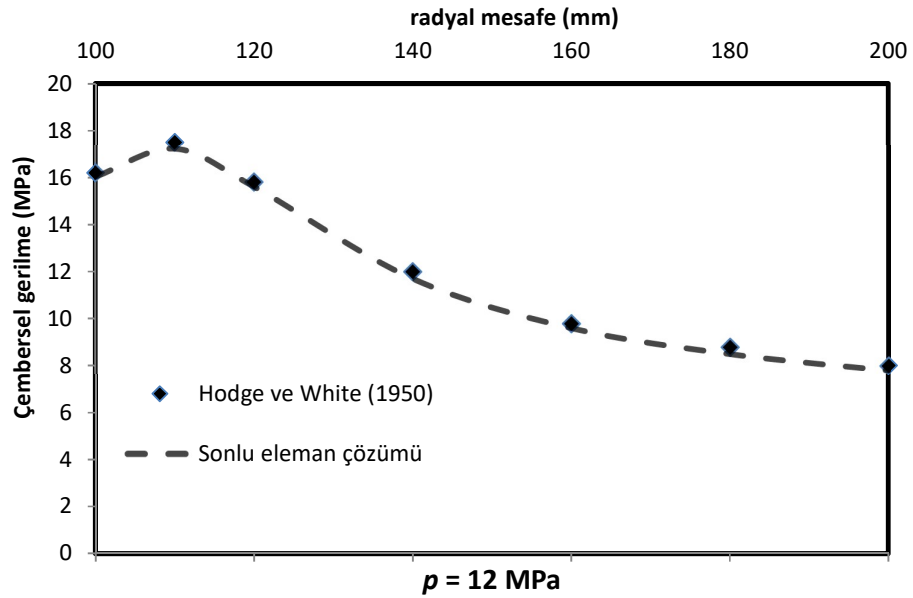


Şekil 5.9 : İç basınç 16 MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı.

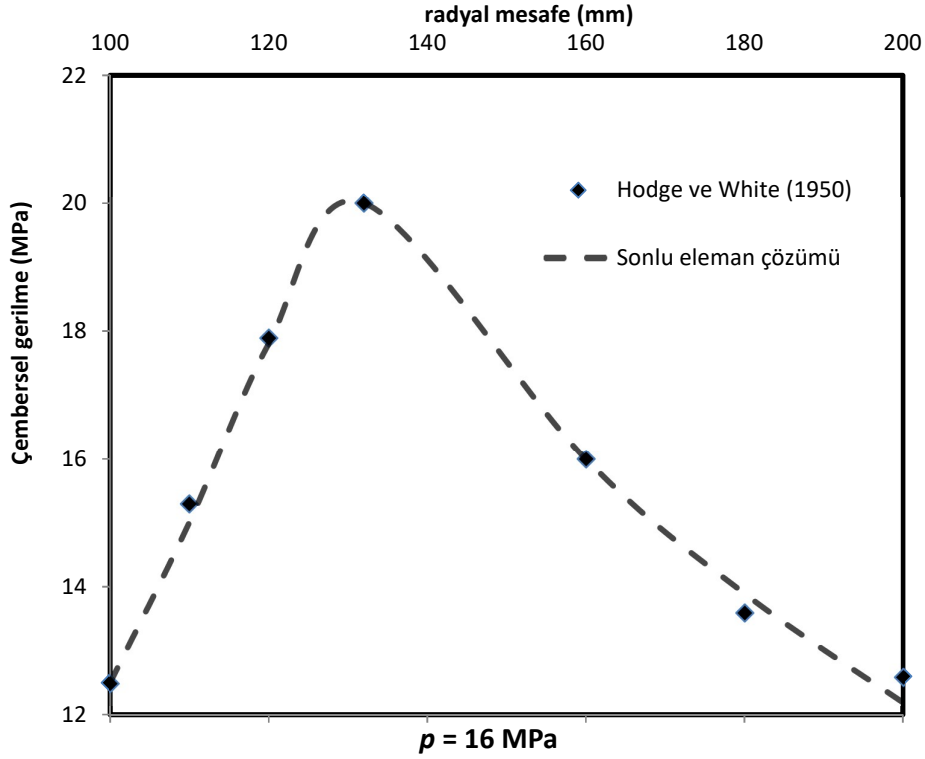


Şekil 5.10 : İç basınç 8 MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı.

İç basınç p 'nin 8 MPa, 12 MPa ve 16 MPa olduğu durumda, çembersel gerilme dağılımları sırasıyla Şekil 5.10, Şekil 5.11 ve Şekil 5.12'de karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırmada da elde edilen sonlu eleman çözümleri ile Hodge ve White (1950) sonuçları birbirleriyle örtüşmektedir.

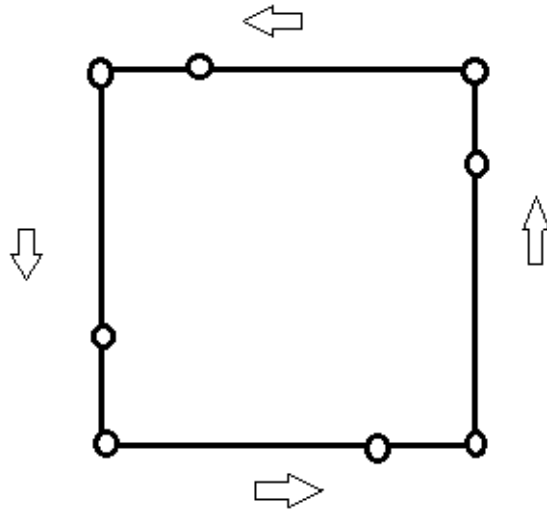


Şekil 5.11 : İç basınç 12 MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı.

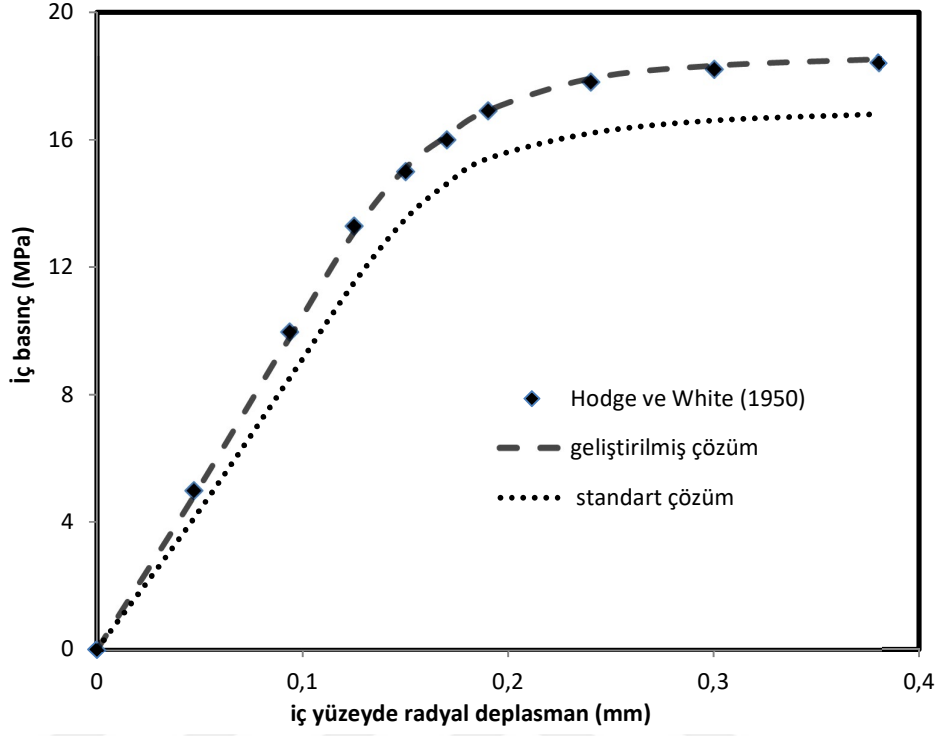


Şekil 5.12 : İç basınç 16 MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı.

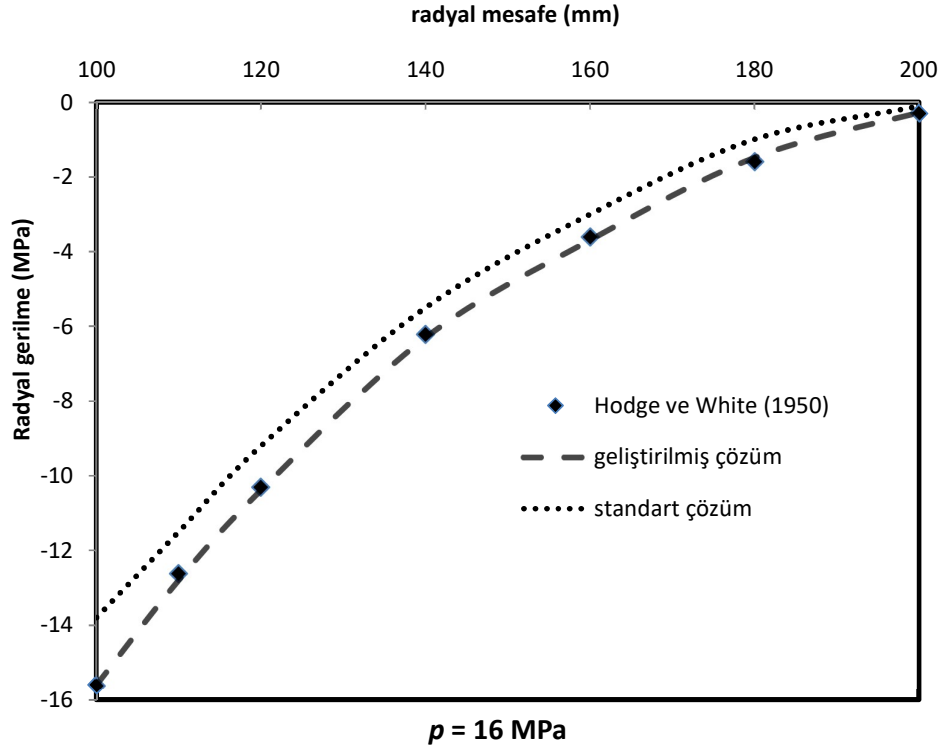
Sonlu eleman mastır elemanındaki kenar içinde yer alan orta noktalar, Şekil 5.13'deki gibi kenar uzunluğunun $\frac{1}{4}$ 'ü oranında kaydırılarak dönüştürme bozukluğu elde edilir. Standart formülasyon ile geliştirilen formülasyon ayrı ayrı kullanılarak elde edilen sonuçlar Şekil 5.14, 5.15 ve 5.16'da karşılaştırılmaktadır.



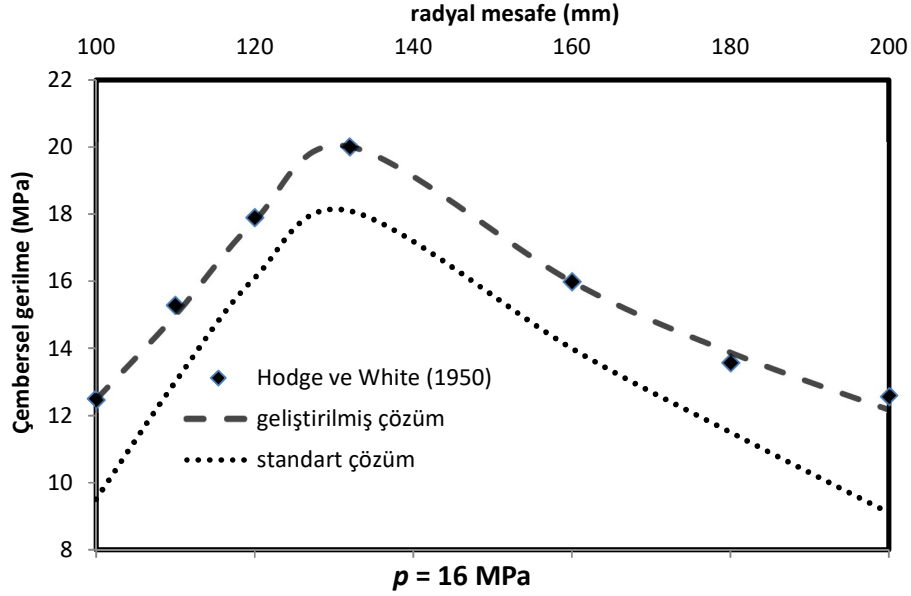
Şekil 5.13 : Mastır elemanda orta noktanın kenar uzunluğunun $\frac{1}{4}$ oranında kaydırılması.



Şekil 5.14 : Geliştirilmiş ve standart formülasyonla iç yüzeydeki deplasmanın değişimi.



Şekil 5.15 : $p = 16$ MPa için geliştirilmiş ve standart formülasyonla radyal gerilme dağılımı.



Şekil 5.16 : $p = 16$ MPa için geliştirilmiş ve standart formülasyonla çembersel gerilme dağılımı.

5.3 Dönüşüm Bozukluğunun Artırılarak İncelenmesi

Bu bölümde; Bölüm 5.2'deki örnek kalın halka silindir, geometri ve malzeme özellikleri aynı kalmak suretiyle sonlu eleman ağında 20 ve 24 adet serendip eleman kullanılarak analiz edilmiştir.

Şekil 5.17'de herhangi bir kaydırma yapılmamıştır. Şekil 5.18'de orta düğüm noktaları 1/4 oranında aynı yönde kenara yakın, Şekil 5.19'da orta düğüm noktaları 1/8 oranında aynı yönde kenara yakın olarak dönüşüm bozukluğu elde edilmiştir.

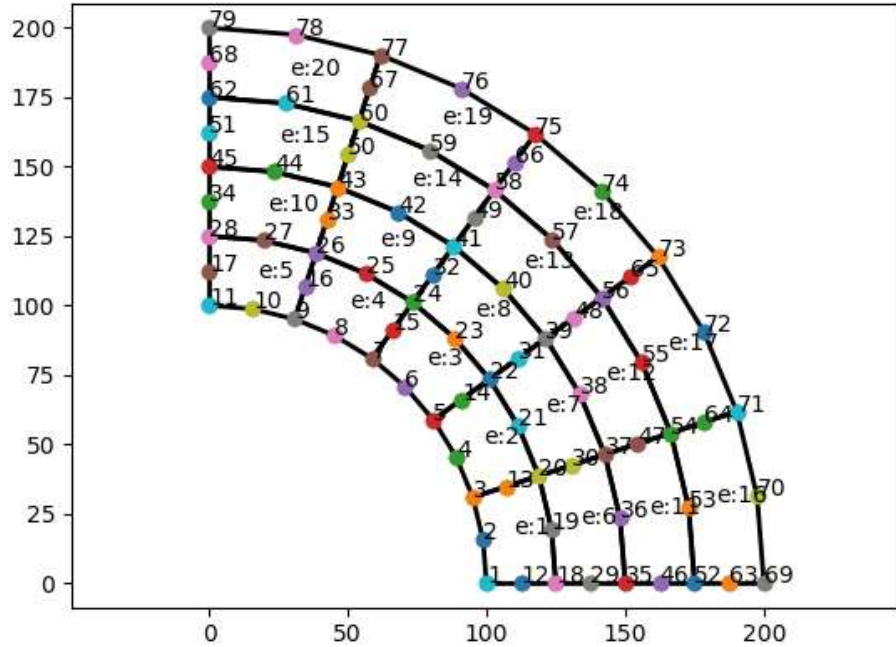
Şekil 5.20'de ise orta düğüm noktaları 1/4 oranında şaşırtmalı (zikzak) olarak, Şekil 5.21'de de 1/8 oranında şaşırtmalı (zikzak) olarak kenara yakın olacak şekilde dönüşüm bozukluğu elde edilmiştir. 24 elemanlı hal (Şekil 5.22) referans çözüm olarak kabul edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.1 : 20 elemanlı çözüm (aynı yönde kaydırma).

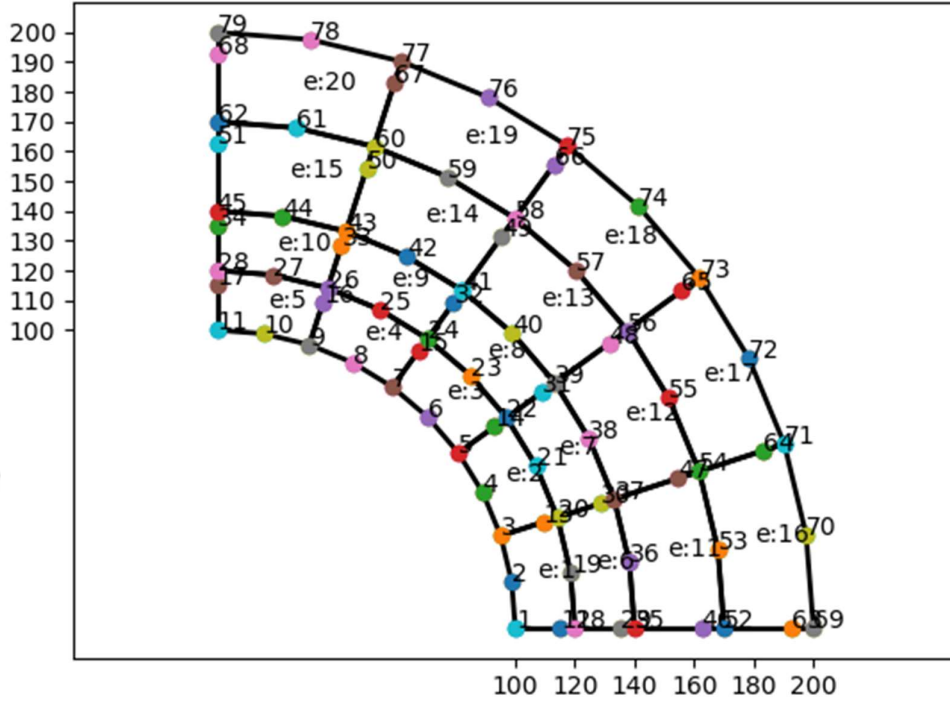
Parametre	Şekil 5.18 (standart formülasyon çözümleri)	Şekil 5.19 (standart formülasyon çözümleri)	Şekil 5.17 (kaydırma yok)	Şekil 5.18 (geliştirilmiş formülasyon çözümleri)	Şekil 5.19 (geliştirilmiş formülasyon çözümleri)	Şekil 5.22 (24 elemanlı referans çözüm)
u_1	0.117908	0.091585	0.127125	0.127117	0.127122	0.127117
v_{11}	0.117909	0.091586	0.127120	0.127108	0.127107	0.127117
Radyal gerilme (MPa)	-9.0406	-5.5062	-9.1617	-9.1294	-9.1126	-9.1991
Çembersel gerilme (MPa)	18.1483	14.4774	18.2514	18.2787	18.2921	18.2893

Çizelge 5.2 : 20 elemanlı çözüm (şaşırtmalı/zikzak kaydırma).

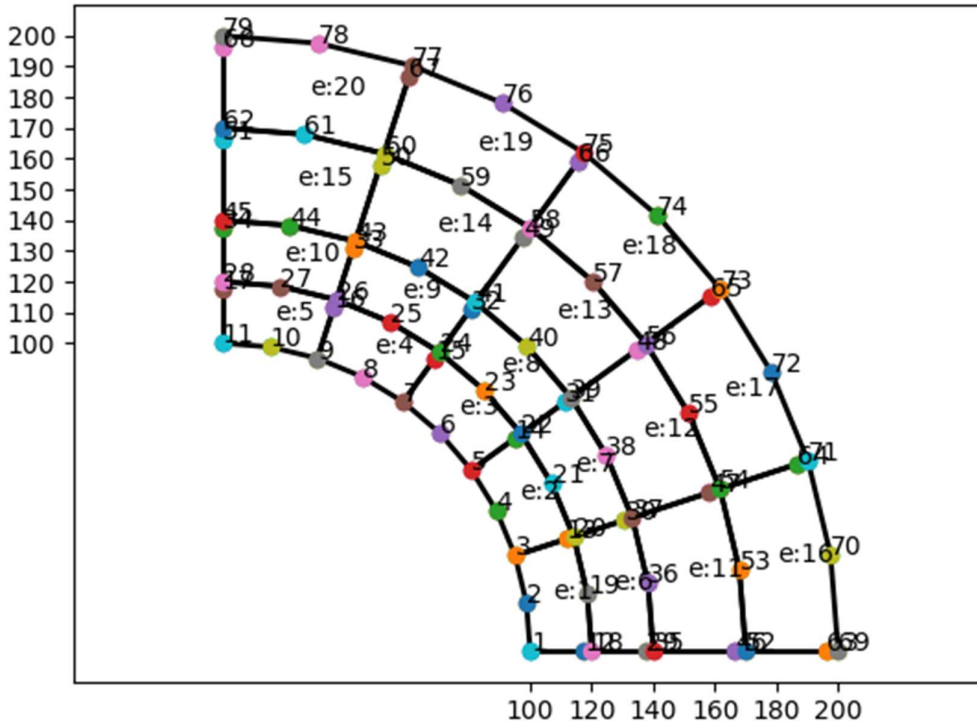
Parametre	Şekil 5.20 (standart formülasyon çözümleri)	Şekil 5.21 (standart formülasyon çözümleri)	Şekil 5.17 (kaydırma yok)	Şekil 5.20 (geliştirilmiş formülasyon çözümleri)	Şekil 5.21 (geliştirilmiş formülasyon çözümleri)	Şekil 22 (24 elemanlı referans çözüm)
u_1	0.117898	0.091578	0.127125	0.127005	0.126158	0.127117
v_{11}	0.117923	0.091604	0.127120	0.125947	0.124760	0.127117
Radyal gerilme (MPa)	-9.039630	-5.505190	-9.161660	-9.246120	-9.084920	-9.199130
Çembersel gerilme (MPa)	18.149300	14.479000	18.251400	18.259800	18.427500	18.289300



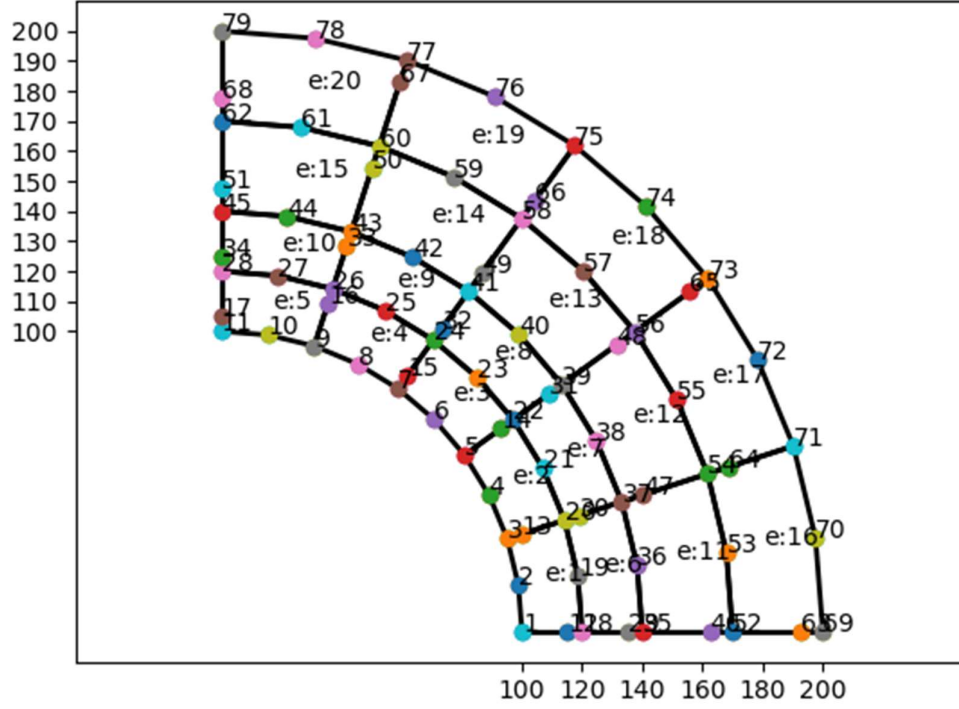
Şekil 5.17 : 20 elemanlı problemin geometrisi, ağ, eleman ve düğüm noktaları özellikleri.



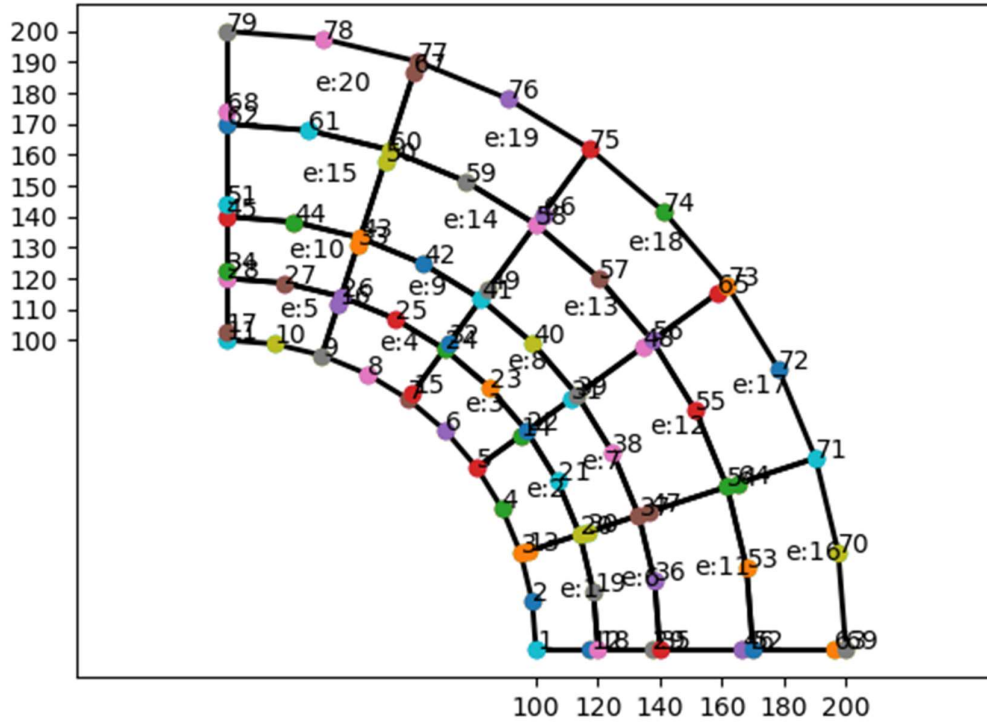
Şekil 5.18 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/4 oranında aynı yönde kenara yakın.



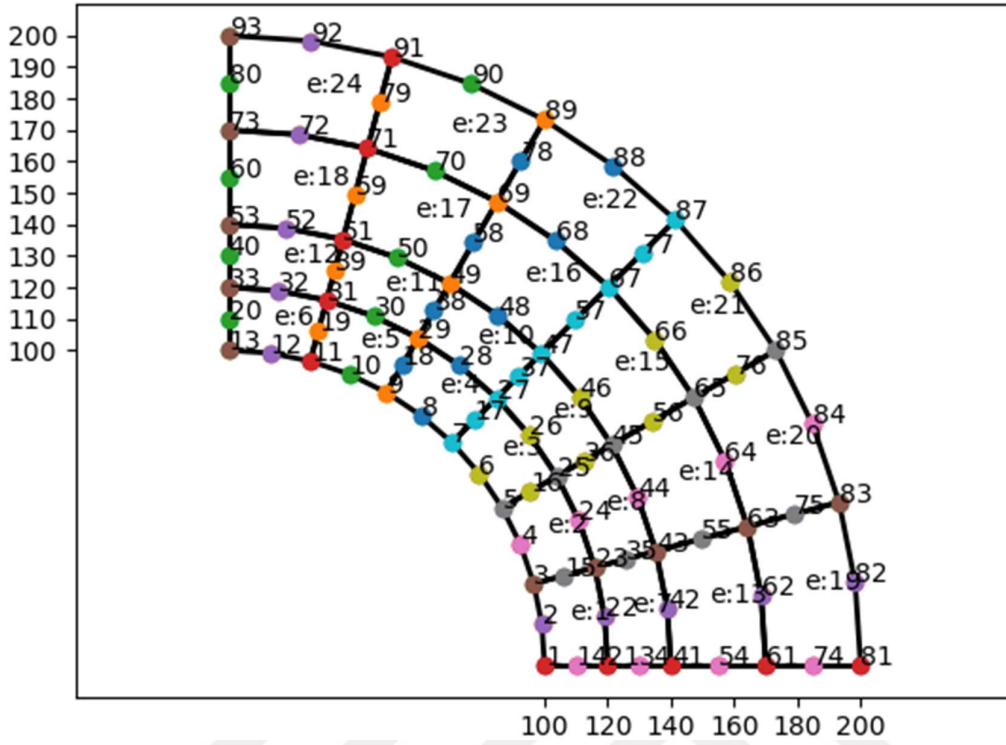
Şekil 5.19 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/8 oranında aynı yönde kenara yakın.



Şekil 5.20 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/4 oranında şaşırtmalı (zikzak) olarak kenara yakın.



Şekil 5.21 : 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/8 oranında şaşırtmalı (zikzak) olarak kenara yakın.



Şekil 5.22 : 24 elemanlı problemin geometrisi, ağ, eleman ve düğüm noktası özellikleri.

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde; standart şekil fonksiyonlarının kullanıldığı durumda, eğer orta noktalar kenarlara doğru kayarsa sonuçların giderek bozulduğu görülmektedir. Kenara çok yakın durumda ($1/8$ oranında kaydığında) sonuçlar daha da bozulmaktadır.

Ancak geliştirilmiş genel serendip elemanlar kullanılırsa, dönüşüm bozuklukları yok olmaktadır ve sonuçlar anlamlı derecede birbirine yakın çıkmaktadır.

6. SONUÇLAR

6.1 Sonuçların İrdelenmesi

Bu tezde, sonlu elemanlar yönteminde fiziksel eleman ile mastır eleman arasındaki geçiş sırasında ortaya çıkan dönüşüm bozuklukları orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları ile elastoplastik problemler için incelenmiş ve oluşan hesap hataları giderilmiştir.

Dönüşüm bozukluğu sorununu gidermek için orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları olan parabol elemanlar kullanılmıştır. Önerilen doğrusal olmayan sonlu eleman algoritması ile çok bilinmeyenli yapı sistemlerinin analizinde gerilme ve deplasman değerlerinde doğruluk derecesi artmakta olup, bunun yanında modellemede doğabilecek fiziksel eleman ile mastır eleman arasındaki dönüşüm bozuklukları otomatik olarak ortadan kaldırılmaktadır. Bu kapsamda, tezin beşinci bölümünde verilen sayısal uygulamalar ile önerilen algoritmanın doğruluğu sınanarak verimli ve doğruluk derecesi yüksek sonuçlar elde edilmiştir.

Tez kapsamında elde edilen sonuçlardan elde edilen kazanımlar, dönüşüm bozukluklarının giderilmesi ve geçiş elemanlı model imkanının sağlanmasıdır. Orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları ile malzeme yönünden doğrusal olmayan statik problemlerde de dönüşüm bozuklukları giderilmiştir. Bunun için öncelikle orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları 8 noktalı elemanlar için formüle edilmiş ve sonlu eleman algoritmaları oluşturulmuştur. Analizler için düzlemsel problem tipi seçildiğinden Bölüm 4'teki sonlu eleman algoritması buna uygun olarak sunulmuştur.

Bölüm 5'te yapılan analizlerin ilki formülasyonu onamak içindir. Algoritmanın doğruluğunu test etmek için betonarme konsol bir kiriş, uç kenarındaki düğüm noktalarında düşey yönde bir etkiye maruz bırakılarak incelenmiştir. Bu örnekte dönüşüm bozuklukları oluşturularak sonuçların nasıl bozulduğu ve buna karşılık doğru sonuçların ne olması gerektiği geliştirilmiş formülasyonla gösterilmiştir. İkinci analizde ise iç basınç etkisi altındaki kalın halka şeklinde bir silindirin elastoplastik analizi için mevcut analitik çözümler ile sonlu elemanlar çözümü karşılaştırılmıştır.

Bu analizde von Mises akma kriteri kullanılmış ve önerilen algoritmanın doğruluğu sınanarak iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Özetle, tezde önerilen algoritmayla çok bilinmeyenli yapı sistemlerinin analizinde geçiş elemanlarının kullanılması ile verim artmakta olup, bunun yanında modellemede doğabilecek fiziksel modelle sonlu model (master elemanlardaki) arasındaki dönüşüm bozuklukları otomatik olarak elimine edilmektedir. Bilinmeyen sayısının azaltılması ile paralel işlem algoritmalarının kullanıldığı yöntemlere alternatif bir yöntem sunulmuştur. Tezde önerilen formülasyonların kullanılması ile mevcut analiz programlarında daha doğru ve verimli analizlerin elde edilmesi mümkün olacaktır.

6.2 Gelecek Araştırma

Bu tezde, malzeme yönünden doğrusal olmayan analiz sadece elastoplastik çalışma için yapılmış olup, aynı algoritma viskoelastik malzemeler için de uygulanabilir. Bunun yanı sıra dinamik etkiler de analizlere katılarak geniş bir spektrumda analizler yapılabilir.

Genel serendip elemanları düzlem problemler için geliştirilmiştir. Kullanılan formülasyonlar şekil fonksiyonları üzerinde yapılmış olduğundan, plak ve kabuk gibi eleman tiplerini içeren modeller de ileriki araştırmalarda kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Celia, M. A. & Gray, W. G.** (1984). An improved isoparametric transformation for finite element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 1443-1459.
- Chen, W. F. & Han, D. J.** (1988). *Plasticity for Structural Engineers*, Springer, New York.
- Çıtıptıoğlu, E. & Nicolas, V. T.** (1979). Mapping distortions in parametric finite element formulation and mesh generation, *Méthodes Numériques dans les Sciences de l'Ingénieur: GAMNI*, Dunod, Bordes, Paris.
- Çıtıptıoğlu, E.** (1983). Universal serendipity elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19, 803-810.
- De Bellis, M. L., Wriggers, P., & Hudobivnik, B.** (2019). Serendipity virtual element formulation for nonlinear elasticity, *Computers & Structures*, 223, 106094.
- El-Mezaini, N. & Çıtıptıoğlu, E.** (1991). Finite element analysis of prestressed and reinforced concrete structures, *Journal of Structural Engineering*, 117, 2851-2864.
- Ho, S. P. & Yeh, Y. L.** (2006). The use of 2D enriched elements with bubble functions for finite element analysis, *Computers & Structures*, 84, 2081-2091.
- Hodge, P. G. & White, G. N.** (1950). A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, 17, 180-184.
- Kikuchi, F., Okabe, M. & Fujio, H.** (1990). Modification of the 8-node serendipity element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, 91-109.
- Küçükarslan, S.** (1995). *Universal serendipity elements with unequally spaced edge nodes*. (Yüksek Lisans Tezi), ODTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Küçükarslan, S. & Demir, A.** (2011). Correction of node mapping distortions using universal serendipity elements in dynamical problems, *Structural Engineering and Mechanics*, 40, 245-256.
- Nicolas, V. T. & Çıtıptıoğlu, E.** (1977). A general isoparametric finite element program SDRC-SUPERB, *Computers & Structures*, 7, 303-313.
- Owen, D. R. J. & Hinton, E.** (1980). *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea.
- Sadd, M.** (2014). *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Academic Press, Burlington.

- Timoshenko, S. P. & Goodier, J. N.** (1970). *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, New York.
- Utku, M., Çıtıpıtıoğlu, E., & Özkan, G.** (1991). Isoparametric elements with unequally spaced edge nodes, *Computers & Structures*, 41, 455-460.
- Utku, M.** (2000). An improved transformation for universal serendipity elements, *Computers & Structures*, 73, 199-206.
- Zienkiewicz, O. C., Valliappan, S. & King, I. P.** (1969). Elasto-plastic solutions of engineering problems; initial stress finite element approach, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1, 75-100.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Mustafa YAVUZ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 1996, İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü.
- **Yüksek lisans** : 1999, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR:

- **Yavuz, M.,** Küçükarslan, S. (2020). Doğrusal Olmayan Malzemeler için Sonlu Eleman Çözümündeki Dönüşüm Bozukluklarının Giderilmesi, *El-Cezeri Journal of Science and Engineering*, 7 (3) , 1140-1151. DOI: 10.31202/ecjse.727463