

**MOMENTUM VE ENERJİ DENKLEMLERİ İÇİN
DÜŞÜK BOYUTLU MODELLER
GELİŞTİRİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Kenan GÖÇMEN**

**Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ
Program : ENERJİ**

MAYIS 2003

**MOMENTUM VE ENERJİ DENKLEMLERİ İÇİN
DÜŞÜK BOYUTLU MODELLER
GELİŞTİRİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Kenan GÖÇMEN
(503981009)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Mayıs 2003**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hasan GÜNEŞ (İ. T. Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Kadir KIRKKÖPRÜ (İ. T. Ü.)

Doç. Dr. Seyhan UYGUR ONBAŞI OĞLU (İ. T. Ü.)

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Momentum ve enerji denklemleri için düşük boyutlu modeller geliştirilmesi konulu bu çalışmada danışmanlığı yapan sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hasan GÜNEŞ'e değerli yardımları ve bütün çalışmam boyunca yaptığı yönlendirmeler için teşekkür ederim.

Tezin hazırlanması sırasında yardımcı geçen tüm hocalarıma ve İ.T.Ü. Mekanik Fakültesi Hidromekanik Laboratuvarı elemanlarına da teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2003

Müh. Kenan GÖÇMEN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	xii
ÖZET	xiv
SUMMARY	xv

1. GİRİŞ	1
----------------	---

2. KAYNAK TARAMASI	3
--------------------------	---

3. YANAL DUVARLAR İLE SINIRLANDIRILMIŞ BİR BÖLGEDE

İKİZ-JET AKIŞININ DÜŞÜK BOYUTLU MODELLENMESİ	11
--	----

3.1 İkiz-Jet Akış Geometrisi	11
3.2 Matematiksel Model ve Çözüm Yöntemi	13
3.2.1 Navier-stokes ve enerji denklemleri: tam model	13
3.2.2 Navier-stokes model (sayısal simülasyon) sonuçları	14
3.2.2.1 Kuvvetli sınırlandırılmış jetler ($SH=0.7$)	14
3.2.2.2 Zayıf sınırlandırılmış jetler ($SH=0.3$)	16
3.2.2.3 Kuvvetli ve zayıf sınırlandırma durumlarının karşılaştırılması	18
3.3 Düşük Boyutlu Modeller	20
3.3.1 Düşük boyutlu modelin oluşturulması	20
3.3.2 Uygun ortogonal ayrıştırma metodu (POD)	20
3.3.3 POD sonuçları (kuvvetli sınırlandırılmış ikiz-jet, $SH=0.7$)	24
3.3.3.1 Özdeğerler ($SH=0.7$)	24
3.3.3.2 Deneysel özdeğer fonksiyonlar ($SH=0.7$)	25
3.3.4 Düşük boyutlu model sonuçları ($SH=0.7$)	25
3.3.4.1 $Re=40$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller	26
3.3.4.2 $Re=90$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller	27
3.3.4.3 Frekans analizleri	27
3.3.5 POD sonuçları (zayıf sınırlandırılmış ikiz-jet, $SH=0.3$)	28
3.3.5.1 Özdeğerler ($SH=0.3$)	28
3.3.5.2 Deneysel özdeğer fonksiyonlar ($SH=0.3$)	30
3.3.6 Navier-stokes denklemlerinden elde edilen düşük boyutlu model sonuçları, $SH=0.3$ (sabit sıcaklık)	30
3.3.6.1 $Re=40$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller	30
3.3.6.2 $Re=70$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller	31
3.3.7 Navier-stokes ve enerji denklemlerinden elde edilen düşük boyutlu modeller	31

3.3.8	Kuvvetli ve zayıf sınırlandırma durumlarının POD ve düşük boyutlu modeller açısından karşılaştırılması	33
3.4	Genel Sonuçlar	34
3.4.1	Sayısal simülasyon sonuçları	34
3.4.2	Düşük boyutlu model sonuçları	34
4.	İÇİNDEKİSİ KAYNAĞI BULUNAN DİKDÖRTGENSEL BİR BÖLGEDE KARIŞIK TAŞINIMIN DÜŞÜK BOYUTLU MODELLENMESİ	64
4.1	Karışık Taşınım Problemi Geometrisi	64
4.2	Matematiksel Model ve Çözüm Yöntemi	65
4.3	Karışık Taşınım Probleminin Doğrudan Sayısal Simülasyon Sonuçları	69
4.3.1	Doğal taşınım etkisi	69
4.3.2	Zorlanmış taşınım etkisi	71
4.3.3	Karışık taşınım probleminin dinamik yapısı	73
4.3.4	Levha ısı iletim katsayısının akış ve sıcaklık üzerindeki etkisi	74
4.4	Düşük Boyutlu Modeller	75
4.4.1	POD sonuçları	76
4.4.1.1	Özdeğerler	76
4.4.1.2	DeneySEL özdeğer fonksiyonlar	79
4.4.1.3	Navier-stokes ve enerji denklemlerinin POD projeksiyon (izdüşüm) sonuçları	80
4.5	Düşük Boyutlu Model Sonuçları	82
4.5.1	Tasarım şartları	82
4.5.1.1	Açılımkatsayıları	82
4.5.1.2	Frekans analizleri	83
4.5.2	Tasarım dışı şartlar	84
4.5.2.1	Açılımkatsayıları	84
4.5.2.2	Frekans analizleri	85
4.5.2.3	Hpf bifürkasyon eğrisi	85
4.6	Genel Sonuçlar	86
4.6.1	Sayısal simülasyon sonuçları	86
4.6.2	Düşük boyutlu model sonuçları	87
5.	DEĞERLENDİRME VE ÖNERİLER	116
	KAYNAKLAR	119
	EK A DÜŞÜK BOYUTLU MODEL DENKLEMLERİ	122
	ÖZGEÇMİŞ	124

KISALTMALAR

POD	: Proper Orthogonal Decomposition (Uygun Ortogonal Ayırım)
LOM	: Low Order Model (Düşük Boyutlu Model)
ODE	: Ordinary Differential Equation (Adi Diferansiyel Denklem)

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 3.1	: H ₂ i için normalize edilmiş en büyük on özdeğer ve onların toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar (S/H=0.7) 24
Tablo 3.2	: H ₂ i için normalize edilmiş en büyük on özdeğer ve onların toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar (S/H=0.3) 28
Tablo 3.3	: Sıcaklık için normalize edilmiş en büyük on özdeğer ve onların toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar (S/H=0.3) 29
Tablo 4.1	: Fluent ile elde edilen sayısal simülasyon sonuçları ile doğruluğu kanıtlanmış çözümlerin (Benchmark çözümleri) farklı Rayleigh sayılarında (Ra=Gr Pr) karşılaştırılması. 69
Tablo 4.2	: Re=10 de, R sayısı ile maksimum boyutsuz sıcaklık (θ_{max}), boyutsuz akı mçizgisi (ψ_{min}), maksimum hızın şiddeti (V_{max}) ve Nusselt sayısı (Nu) değerlerini n değişi m. 70
Tablo 4.3	: Re=100 de, R sayısı ile boyutsuz sıcaklık (θ_{max}), maksimum hızın şiddeti (V_{max}) ve Nusselt sayısı (Nu) değerlerini n değişi m. 71
Tablo 4.4	: R=1 de, Reynolds sayısı ile maksimum boyutsuz sıcaklık (θ_{max}), hızın maksimum şiddeti (V_{max}) ve Nusselt sayısı (Nu) değerlerini n değişi m. 72
Tablo 4.5	: R=1, Re=100' de elde edilen sayısal simülasyonlarda farklı r_k değerleri ile θ_{max} , V_{max} ve Nu sayılarının değişimi. 74
Tablo 4.6	: R=10, Re=100' de normalize edilmiş en enerjik ilk on özdeğer ve onların toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar. 76
Tablo 4.7	: R=10, Re=500' de normalize edilmiş en enerjik ilk on özdeğer ve onların toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar. 77
Tablo 4.8	: R=1, Re=500' de normalize edilmiş en enerjik ilk on modun özdeğerleri ve toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar. 78
Tablo 4.9	: R=1, Re=1000' de normalize edilmiş en enerjik ilk on özdeğer ve toplam ortalıkantı enerjisi ne olan katkılar. 79

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1	: Kuvvetli sınırlandırılmış ikiz-jet akış geometrisi 12
Şekil 3.2	: Zayıf sınırlandırılmış ikiz-jet akış geometrisi ve ısıl şartlar . . . 12
Şekil 3.3a	: Reynolds sayısının çeşitli değerlerinde, doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen akımcı çizgileri. ($S/H=0.7$) 36
Şekil 3.3b	: $Re=40$ 'ta bir periyod için eşit zaman aralıklarında alınmış akımcı çizgileri. ($S/H=0.7$) 37
Şekil 3.3c	: $Re=70$ 'te bir periyod için eşit zaman aralıklarında alınmış akımcı çizgileri. ($S/H=0.7$) 38
Şekil 3.3d	: $Re=90$ 'da eşit zaman aralıklarında alınmış akımcı çizgileri. ($S/H=0.7$) 39
Şekil 3.4	: Farklı Reynolds sayıları için Navier-Stokes modeliyle elde edilen simülasyonlarda, ($X=5.4$, $Y=0$) noktası için alınmış u ve v hızlarının zanaana göre değişimi. ($S/H=0.7$) 40
Şekil 3.5	: Farklı Reynolds sayıları için elde edilen sayısal simülasyonların ($X=5.4$, $Y=0$) noktasındaki spektrumanalizleri. ($S/H=0.7$) 41
Şekil 3.6	: Reynolds sayısının çeşitli değerleri için akımcı çizgileri. ($S/H=0.3$) 42
Şekil 3.7a	: $Re=40$ 'ta, bir periyod için eşit aralıklarla alınmış akımcı çizgileri. ($S/H=0.3$) 43
Şekil 3.7b	: $Re=40$ 'ta, bir periyod için eşit aralıklarla alınmış eş sıcaklık eğrileri. ($S/H=0.3$) 43
Şekil 3.8	: $Re=70$ 'te, bir periyod için eşit aralıklarla alınmış akımcı çizgileri. ($S/H=0.3$) 44
Şekil 3.9	: Farklı Reynolds sayıları için Navier-Stokes modeliyle elde edilen simülasyonlarda, ($X=6.3$, $Y=0$) noktası için alınmış u ve v hızlarının ve T sıcaklığının zanaana göre değişimi. ($S/H=0.3$) . 45
Şekil 3.10	: $Re=40$ ve 70 için elde edilen sayısal simülasyonların ($X=5.4$, $Y=0$) noktasındaki spektrumanalizleri. ($S/H=0.3$) 46
Şekil 3.11a	: $Re=40$ için en enerjik altı özdeğer fonksiyon ($S/H=0.7$) 47
Şekil 3.11b	: $Re=70$ için en enerjik altı özdeğer fonksiyon ($S/H=0.7$) 48
Şekil 3.11c	: $Re=90$ için en enerjik altı özdeğer fonksiyon ($S/H=0.7$) 49
Şekil 3.12a	: $Re=40$ ve 70 'te yeniden duşumformülleriyle hesaplanan açılım katsayıları. ($S/H=0.7$) 50

Şekil 3.12b	: $Re=90'$ da yeni den oluşturm for mül leri yle hesaplanan açılı m katsayıları. ($S/H=0.7$) 50
Şekil 3.13	: $Re=40$ iç i n tasar ı mş artları nda farklı sayı da denk le m e ol uşt ur ul an düşük boyut lu modeller i n açılı m katsayıları nı n za ma na göre değ i ş i mleri. ($S/H=0.7$) 51
Şekil 3.14	: $Re=40'$ ta, 4- denk le mden ol uş an düşük boyut lu model i n tasar ı m dış ı ş artlar daki d i na m i k dav ran ı ş ı. ($S/H=0.7$) 52
Şekil 3.15	: $Re=40'$ ta 4- denk le mden ol uş an düşük boyut lu model i n tasar ı m dış ı ş artlar daki ($Re=90$) açılı m katsayıları nı n faz pl anı ndaki yör ü ngel eri. ($S/H=0.7$) 53
Şekil 3.16a	: $Re=90'$ da, tasar ı mş artları nda 8- denk le m i düşük boyut lu model i n açılı m katsayıları nı n za ma nla değ i ş i m i. ($S/H=0.7$) 54
Şekil 3.16b	: $Re=90'$ da, tasar ı mş artları nda 10- denk le m i düşük boyut lu model i n açılı m katsayıları nı n za ma nla değ i ş i m i. ($S/H=0.7$) . . . 55
Şekil 3.17a	: $Re=40'$ da 4- denk le m e ol uşt ur ul an düşük boyut lu model i n tasar ı m dış ı ş artlar da ($Re=90'$ da) el de edil mi ş açılı m katsayıları nı n spektru manali zleri. ($S/H=0.7$) 56
Şekil 3.17b	: $Re=90'$ da 10- denk le m e ol uşt ur ul an düşük boyut lu model i n tasar ı mş artları nda ($Re=90'$ da) el de edil mi ş açılı m katsayıları nı n spektru manali zleri. ($S/H=0.7$) 56
Şekil 3.18	: $Re=40$ iç i n en enerj i k sek i z özdeğ er fonksi yon, a) H z al anı, b) S ıcaklı k al anı. ($S/H=0.3$) 57
Şekil 3.19	: $Re=70$ iç i n en enerj i k sek i z özdeğ er fonksi yon, ($S/H=0.3$) . . . 58
Şekil 3.20	: $Re=40'$ ta yeni den ol uş um for mül leri yle hesaplanan açılı m katsayıları. a) H z katsayıları, b) S ıcaklı k katsayıları. ($S/H=0.3$) 59
Şekil 3.21	: $Re=70'$ te yeni den ol uş um for mül leri yle h ız iç i n hesaplanan açılı m katsayıları. ($S/H=0.3$) 59
Şekil 3.22	: $Re=40'$ ta tasar ı mş artları nda farklı sayı da denk le m e ol uşt ur ul an düşük boyut lu modeller i n açılı m katsayıları nı n za ma nla değ i ş i m i. a) 4- denk le m i model, b) 6- denk le m i model, c) 8- denk le m i model. ($S/H=0.3$) 60
Şekil 3.23	: $Re=70'$ te tasar ı mş artları nda 8- denk le m e ol uşt ur ul an düşük boyut lu model i n açılı m katsayıları nı n za ma nla değ i ş i m i. ($S/H=0.3$) 60
Şekil 3.24	: $Re=40'$ ta tasar ı mş artları nda h ız ve s ıcaklı k iç i n farklı sayı da denk le m e ol uşt ur ul an düşük boyut lu modeller i n açılı m katsayıları nı n za ma nla değ i ş i m i. a) (4+3)- denk le m i model, b) (4+4)- denk le m i model, c) (3+4)- denk le m i model. ($S/H=0.3$) 61
Şekil 3.25	: $Re=40'$ ta faz al anı yör ü ngel eri. Sürekli çizgi: (4+3)- denk le m e tasar ı mş artları nda ol uşt ur ul an düşük boyut lu model, Kes i kli çizgi: doğ ru dan izdüş ü m ($S/H=0.3$) 62

Şekil 3 26	: $Re=40$ 'ta tasarımdışı şartlarda (farklı Re sayılarında), (4+3)-denklemlle elde edilen düşük boyutlu modelle tahmin edilen dinamik sistem davranışları. ($SH=0.3$) 62
Şekil 3 27	: $Re=40$ 'ta (8+8)-denklemlle oluşturulan düşük boyutlu modelin tasarımdışı şartlarda ($Re=70$, $Pr=0.71$) tahmin ettiği dinamik sistem davranışları. a) hız ve sıcaklık için açılımkatsayısının zamanla değişimi, b) hız için faz planı, c) hız ve sıcaklık için spektrumanalizleri. ($SH=0.3$) 63
Şekil 4 1	: Karışıktaşınımproblem geometrisi 64
Şekil 4 2	: Sayısal simülasyonlarda kullanılan gridler a) 72x112 grid b) 144x222 grid. 65
Şekil 4 3	: Farklı Ra ($Gr \times Pr$) değerleri için a) Eş sıcaklık eğrileri b) Akı çizgileri. 89
Şekil 4 4	: $Re=10$ 'da farklı R sayıları için doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen a) eş sıcaklık eğrileri, b) akı çizgileri, c) hız vektörleri. 90
Şekil 4 5a	: $Re=100$ de farklı R sayıları için elde edilmiş eş sıcaklık eğrileri a) $R=0.1$ ($Dai n i$), b) $R=1$ ($Dai n i$), c) $R=10$ (Periyodik), d) $R=20$ (Periyodik), e) $R=100$ (Sanki-Periyodik), f) $R=1000$ (Kaotik). 91
Şekil 4 5b	: $Re=100$ de farklı R sayıları için elde edilmiş hız vektörleri, a) $R=0.1$, b) $R=1$, c) $R=10$, d) $R=20$, e) $R=100$, f) $R=1000$. . . 91
Şekil 4 6	: $R=1$ 'de farklı Reynolds sayıları için a) eş sıcaklık eğrileri, b) hız vektörleri. 92
Şekil 4 7	: $R=10$, $Re=500$ de bir periyod için eşit aralıklarla alınmış anlık a) eş sıcaklık eğrileri, b) akı çizgileri. 93
Şekil 4 8	: V_{max} , θ_{max} ve Nu sayısının R ve Re ile değişimleri. 94
Şekil 4 9a	: Doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen ($X=3.14$, $Y=1.19$) noktasındaki u ve T değerlerinin zamanla göre değişimleri. ($R=1$) 95
Şekil 4 9b	: Doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen ($X=3.14$, $Y=1.19$) noktasındaki u ve T değerlerinin zamanla göre değişimleri. ($Re=100$) 96
Şekil 4 10	: Farklı Re ve R sayılarında elde edilen sayısal simülasyonlarda hız ve sıcaklık için ($X=3.14$, $Y=1.19$) noktasındaki spektrum analizleri 97
Şekil 4 11	: $R=1$ ve $Re=100$ 'de, farklı r_k değerleri için elde edilen a) eş sıcaklık eğrileri, b) hız vektörleri. 98
Şekil 4 12a	: $R=10$ ve $Re=100$ için POD ile elde edilen en enerjik dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri). 99

Şekil 4 12b	: $R=10$ ve $Re=500$ için POD ile elde edilen en enerjik dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).	100
Şekil 4 12c	: $R=1$ ve $Re=500$ için POD ile elde edilen en enerjik dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).	101
Şekil 4 12d	: $R=1$ ve $Re=1000$ için POD ile elde edilen en enerjik dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).	102
Şekil 4 13a	: $R=10$ ve $Re=100$ için yeniden düşümfor mülleriyle elde edilen açılı mkatsayıları nın zamanla değış i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	103
Şekil 4 13b	: $R=10$ ve $Re=500$ için yeniden düşümfor mülleriyle elde edilen açılı mkatsayıları nın zamanla değış i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	103
Şekil 4 13c	: $R=1$ ve $Re=500$ için yeniden düşümfor mülleriyle elde edilen açılı mkatsayıları nın zamanla değış i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	104
Şekil 4 13d	: $R=1$ ve $Re=1000$ için yeniden düşümfor mülleriyle elde edilen açılı mkatsayıları nın zamanla değış i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	105
Şekil 4 14a	: $R=10$ ve $Re=100$ ' de tasarımı şartları nda farklı sayıdaki özdeğer fonksiyonla oluşt urulan düşük boyutlu model tahmini leri. a) (4+4)-denkle m i model, b) (5+5)-denkle m i model, c) (6+8)-denkle m i model.	106
Şekil 4 14b	: $R=10$ ve $Re=500$ ' de tasarımı şartları nda farklı sayıdaki özdeğer fonksiyonla oluşt urulan düşük boyutlu model tahmini leri. a) (5+5)-denkle m i model, b) (6+6)-denkle m i model, c) (6+8)-denkle m i model.	107
Şekil 4 14c	: $R=1$ ve $Re=500$ ' de tasarımı şartları nda farklı sayıdaki özdeğer fonksiyonla oluşt urulan düşük boyutlu model tahmini leri. a) (5+5)-denkle m i model, b) (6+6)-denkle m i model, c) (6+8)-denkle m i model.	108
Şekil 4 14d	: $R=1$, $Re=1000$ ' de tasarımı şartları nda (6+6)-denkle m i e oluşt urulan düşük boyutlu model tahmini ni. a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	109
Şekil 4 14e	: $R=1$, $Re=1000$ ' de tasarımı şartları nda (6+8)-denkle m i e oluşt urulan düşük boyutlu model tahmini ni. a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	110
Şekil 4 15a	: $R=1$, $Re=500$ ' de tasarımı şartları nda, (6+8)-denkle m i e oluşt urulan düşük boyutlu model in frekans analizi. a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları	111
Şekil 4 15b	: $R=1$, $Re=1000$ ' de tasarımı şartları nda, (6+8)-denkle m i e	

	oluşturulan düşük boyutlu modelin frekans analizi.	
	a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	112
Şekil 4 16	: $Ri=1$, $Re=1000$ ' de farklı sayıda denklemle tasarım dışı şartlarda ($Ri=1$, $Re=500$) çalıştırılan düşük boyutlu model tahminleri	
	a) (8+8)-denklemli model, b) (8+10)-denklemli model.	113
Şekil 4 17	: $Ri=1$, $Re=1000$ ' de, (8+8)-denklemle tasarım dışı şartlarında ($Ri=1$, $Re=500$) çalıştırılan düşük boyutlu model için frekans analizi. a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.	114
Şekil 4 18	: Farklı Ri ve Re sayıları için Navier-Stokes modeliyle elde edilen akış rejimleri ile (6+8)-denklemle oluşturulan düşük boyutlu modelle tahmin edilen akış rejimlerinin karşılaştırılması.	
	□ Daimi olmayan akış (Navier-Stokes Modeli)	
	■ Daimi akış (Navier-Stokes Modeli)	
	● $Ri=1$, $Re=500$ tasarım şartlarında oluşturulan düşük boyutlu model	
	▲ $Ri=10$, $Re=100$ tasarım şartlarında oluşturulan düşük boyutlu model.....	115

SEMBOL LİSTESİ

Genel semboller

$\mathbf{a}_k$	: Hz i ç i n a ç ı l ı m k a t s a y ı l a r ı
$\mathbf{b}_k$	: S ı c a k l ı k i ç i n a ç ı l ı m k a t s a y ı l a r ı
c_p	: A k ı ş k a n ö z g ü l ı s ı s ı
f	: F r e k a n s
k	: A k ı ş k a n ı s ı i l e t i m k a t s a y ı s ı
p	: B o y u t l u b a s ı n ç
t	: B o y u t l u z a m a n
$\mathbf{u}, \mathbf{v}$	: B o y u t l u h ız b i l e ş e n l e r i
$\frac{\mathbf{p}}{V}$	: B o y u t l u h ız v e k t ö r ü
x, y	: B o y u t l u k a r t e z y e n k o o r d i n a t l a r
$\mathbf{A}_k$	: H z i ç i n ö z d e ğ e r v e k t ö r ü
$\mathbf{B}_k$	: S ı c a k l ı k i ç i n ö z d e ğ e r v e k t ö r ü
$\mathbf{C}$	: K o r e l a s y o n m a t r i s i
E_T	: T o p l a m ç a l k a n t ı k i n e t i k e n e r j i s i
$\mathbf{I}$	: B r i m m a t r i s
L	: H z i ç i n a l ı n a n e n e r j i k ö z d e ğ e r f o n k s i y o n s a y ı s ı
M	: A n l ı k v e r i s a y ı s ı (s n a p s h o t s)
N	: S ı c a k l ı k i ç i n a l ı n a n e n e r j i k ö z d e ğ e r f o n k s i y o n s a y ı s ı
T	: B o y u t l u s ı c a k l ı k
$\frac{\mathbf{p}}{V}$	: B o y u t s u z h ız v e k t ö r ü, $\frac{\mathbf{p}}{V} / U_j$
$\frac{\mathbf{p}'}{V}$	: B o y u t s u z h ız n ı n ç a l k a n t ı b i l e ş e n i
$\bar{V}$	: B o y u t s u z o r t a l a m a h ız
Pr	: P r a n d t l s a y ı s ı, ν / α
$Re_{C,H}$	: H ö p f b i f ü r k a s y o n u i ç i n k r i t i k R e y n o l d s s a y ı s ı
$Re_{C,P}$	: F i t c h f o r k b i f ü r k a s y o n u i ç i n k r i t i k R e y n o l d s s a y ı s ı
α	: A k ı ş k a n ı s ı l y a y ı l m a k a t s a y ı s ı, $k / \rho c_p$
δ_j^p	: K r o n e c k e r d e l t a
ϕ_k	: H z i ç i n k ' n c ı ö z d e ğ e r f o n k s i y o n
λ	: Ö z d e ğ e r
μ	: A k ı ş k a n d i n a m i k v i s k o z i t e s i
ν	: A k ı ş k a n k i n e m a t i k v i s k o z i t e s i, μ / ρ
θ'	: B o y u t s u z s ı c a k l ı ğ ı n ç a l k a n t ı b i l e ş e n i
$\bar{\theta}$	: B o y u t s u z o r t a l a m a s ı c a k l ı k
ρ	: A k ı ş k a n y o ğ u n l u ğ u
ψ_k	: S ı c a k l ı k i ç i n k ' n c ı ö z d e ğ e r f o n k s i y o n

Jet akış problemi için semboller

D	: Jet delik genişliği
H	: Yanal duvarlar arasındaki mesafe
L_0	: Jet akış problemi nde kanal uzunluğu
P	: Boyutsuz basınç, $p/\rho U^2$
S	: Jet delikleri arasındaki mesafe
T_c	: Duvar sıcaklığı
T_j	: Jet sıcaklığı
U, V	: Boyutsuz hız bileşenleri, $u/U, v/U$
U	: Jet hızı
X, Y	: Boyutsuz Kartezyen koordinatlar, $x/D, y/D$
Re	: Reynolds sayısı, $U D/\mu$
θ	: Boyutsuz sıcaklık, $(T - T_c)/(T_j - T_c)$
τ	: Boyutsuz zaman, $U t/D$

Karışıktaşıma problemi için semboller

d	: Çıkış aralığının merkezi ile alt kenar arasındaki mesafe
e	: Isı kaynağının merkezi ile alt kenar arasındaki mesafe
g	: Yerçekimi ivmesi
h	: Isı taşıma katsayısı
k_b	: Levha ısı iletim katsayısı
l_b	: Levha uzunluğu
l_0	: Çıkış aralığının uzunluğu
l_s	: Isı kaynağı uzunluğu
q	: Kaynaktan yayılan ısı akısı
r_k	: Isıl iletkenlik oranı, k_b/k
r_α	: Isıl yayılma oranı, α_b/α
w	: Levha kalınlığı
D	: Giriş ve çıkış aralıklarının genişliği
G	: Dörtgensel bölgenin yüksekliği
T_f	: Giriş akışkan sıcaklığı
U, V	: Boyutsuz hız bileşenleri, $u/U, v/U$
U	: Giriş hızı
W	: Dörtgensel bölgenin genişliği
X, Y	: Boyutsuz kartezyen koordinatlar, $x/D, y/D$
Gr	: Grashof sayısı, $g \beta q D^4 / k \nu^2$
Nu	: Nusselt sayısı, $h D / k$
Ra	: Rayleigh sayısı, $Gr \times Pr$
Re	: Reynolds sayısı, $U D / \mu$
Ri	: Richardson sayısı, Gr / Re^2
α_b	: Levha ısı yayılma katsayısı
β	: Isıl genleşme katsayısı
θ	: Boyutsuz sıcaklık, $k(T - T_f) / q D$
τ	: Boyutsuz zaman, $U t / D$
ψ	: Akım fonksiyonu

MOMENTUM VE ENERJİ DENKLEMLERİ İÇİN DÜŞÜK BOYUTLU MODELLER GELİŞTİRİLMESİ

ÖZET

Yapılan bu tez çalışmasında, momentum ve enerji denklemleri için düşük boyutlu modeller geliştirilerek bu modellerin farklı akış rejimindeki performansları incelenmiştir. Akış ve ısı geçişi problemlerinde doğrudan sayısal simülasyonlarla momentum ve enerji denklemlerinin zamana bağlı çözümleri, karmaşık geometrilerde çok uzun işlemler gerektirdiğinden, araştırmacıya oldukça fazla zaman kaybettirmektedir. Az sayıda adi diferansiyel denklemleri çözen düşük boyutlu modeller kullanılarak sistem davranışı çok daha kısa sürede ve daha kolay bir şekilde tahmin edilebilmektedir. Bu durum düşük boyutlu modelleri, kararlılık ve kontrol analizleri için elverişli bir hale getirmektedir.

Ele alınan problemlerde ilk olarak, yapılan kabullerde dikkate alınarak, Navier-Stokes ve enerji denklemleri uygun sınır şartları kullanılarak, sonlu hacimler tekniğinin kullanıldığı ticari bir program olan FLUENT yazılımı ile çözülerek sayısal simülasyonlar yapılmıştır. Daha sonra elde edilen zamana bağlı (enstantane) hız ve sıcaklık alanlarına uygun ortogonal ayırım metodu (Proper Orthogonal Decomposition, POD) uygulanarak (deneysel) özdeğer fonksiyonlar oluşturulmuştur. Momentum ve enerji denklemlerine, en enerjik özdeğer fonksiyonların kullanıldığı Galerkin yöntemi uygulanarak, az sayıda lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerden oluşan düşük boyutlu modeller elde edilmiştir. Bir ölçüde sistem davranışını yansıtmakta olan POD kullanılarak, düşük boyutlu modeller elde edilmiş ve bu modellerin performansları incelenmiştir.

Yukarıda anlatılan yöntemler zorlanmış taşınım ve karışık taşınım olma üzere iki farklı temel problemi için uygulanmıştır. İlk çalışmada bir kanal içinde iki-zet akış problemi önce sadece akış alanı için çözülmüştür. Daha sonra aynı probleme enerji denklemi dahil edilerek, sıcaklık alanı da elde edilmiştir. Akış parametrelerindeki değişimin, bifürkasyon ve kararlılık olaylarına, POD sonuçlarına ve düşük boyutlu modellere olan etkilerinin incelenmesinin yanı sıra, geometrik parametrelerin (yan duvarlarla jetin sınırlandırma oranı) değiştirilmesiyle elde edilen akışın dinamik yapısı da incelenmiş ve düşük boyutlu modellerin karşılaştırması yapılmıştır.

İkinci çalışmada ise elektronik elemanların soğutulması ile ilgili olarak, içinde ısı kaynağı bulunan bir bölgede dışardan zorlanmış akışın (örneğin bir fan ile) uygulandığı karışık taşınım olayı ele alınmış, böylece doğal taşınım ile zorlanmış taşınımın etkileri birlikte incelenmiştir. Bu şartlarda oluşturulan sistemde, değiştirilen parametrelerle karışık taşınım olayının akışın (dinamik) yapısı ve oluşturulan düşük boyutlu modeller üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Her iki çalışmada da sonuçlar göstermiştir ki, sayısal simülasyonlar ile elde edilen enstantane hız ve sıcaklık alanlarına POD yöntemi uygulanarak bu alanların temel yapıları hakkında detaylı bilgi edinmek mümkündür. Bunun yanı sıra POD ve Galerkin yöntemi birlikte kullanılarak elde edilen düşük boyutlu modeller sistemin dinamik davranışını temsil edebilmektedir. Ayrıca bu modelleri tasarımı ve tasarımı dışı şartlarda performanslarının yüksek olması, bu modellerin tasarımı simülasyon ve akış kontrol sistemlerinde kullanılabilir nitelikte olduğunu göstermiştir.

DEVELOPMENT OF LOW ORDER MODELS FOR MOMENTUM AND ENERGY EQUATIONS

SUMMARY

In this study, low order models are developed for Navier-stokes and energy equations and the performance of the models are investigated in different flow parameters, namely Re and/or Ra . In the flow and heat transfer problems concerning complex geometries, direct numerical simulations require very long time to solve momentum and energy equations. System behaviors are effectively estimated using low order models consisting of few nonlinear ordinary differential equations. Therefore low order models become suitable for stability and control analysis.

The dynamic structure of the flow and its physical properties has been investigated for two different problems in this thesis. The numerical simulations of the governing equations with related boundary conditions are performed using a finite volume technique (based on FLUENT software). Then, the proper orthogonal decomposition (POD) is applied to the instantaneous flow and temperature data to obtain POD-based basis functions for velocity and temperature fields. These basis functions are capable to identify the coherent structures. Low-order models consisting of few nonlinear ordinary differential equations are obtained using the most energetic empirical eigenfunctions as basis functions and applying Galerkin's method for governing equations. The size of the low-dimensional models depends on the number of eigenfunctions which are used as basis functions in a series expansion.

The mentioned method above has been applied to two different problems namely forced and mixed convection. In the first study, confined twin-jet flow problem has been solved. Then, the temperature field has been obtained by considering the energy equation to the same problem. Performance of low-order models, and their stability predictions are investigated.

The second study constitutes a typical configuration encountered in air-cooled electronic devices. A discrete heat source, flush-mounted on a vertical board, is mounted on the bottom wall of a partially open cavity. An external airflow enters the cavity through an opening (inlet) in the left vertical wall and exits from the opposite opening (outlet) in the right vertical wall. Low-order models are developed accounting both effects of forced and natural convective flow.

Both of the studies show that detailed knowledge about dynamical system behavior can be obtained by the proper orthogonal decomposition (POD), which is applied to the instantaneous flow and temperature data. In addition, low order models, which are obtained by applied Galerkin projection onto Navier-Stokes equations, represent dynamical behavior of the system. The fact that, in general, low order models show high performance characteristics at design and off-design conditions, these models can be used for design, simulation and control systems.

1. GİRİŞ

Son yıllarda enerji ve transport problemlerinin düşük boyutlu modellerle (Low Order Model, LOM) temsil edilmesi konusunda çok önemli çalışmalar yapılmaktadır. Düşük boyutlu izotermal ve izotermal olmayan, tipik olarak az sayıda adi diferansiyel denklemsisteminden oluşan matematiksel modeller, kararlılık ve kontrol analizleri için son derece avantajlıdır.

Karmaşık geometrilerde akış ve ısı geçişi problemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinde, kısmi diferansiyel denklemler, ağırlıklı artıklar (weighted residuals) gibi metodların kullanılmasıyla adi diferansiyel denklemlerine (Ordinary Differential Equations, ODEs) dönüştürülür. Ancak bu gibi metodlarla elde edilen adi diferansiyel denklemler çok büyük boyutlu olurlar. Çünkü bu tür yaklaşımlarda kullanılan esas fonksiyonlar, ele alınan sistemin dinamik davranış hakkında hiçbir bilgi içermezler. Bizim amacımız en az sayıda adi diferansiyel denklemleri içeren düşük boyutlu bir gösterim olduğundan, ancak her bir sistemi için özel olarak sistemin dinamik davranışını yansıtan bir yöntem sistemin bir optimal gösterimini sağlayabilir. Düşük boyutlu modeller elde etmenin yolu, kontrol parametrelerinin bazı aralıklarında sistemin davranışlarını yansıtan ve her bir akış ve/veya sıcaklık alanı için ayrı olarak oluşturulan esas fonksiyonları kullanarak alan değişkenlerini (hız, sıcaklık vs.) seri açılımında kullanmaktır. Bu seri açma işlemiyle, akış ve ısı geçişini belirleyen kısmi diferansiyel denklemler (Navier-Stokes ve enerji denklemleri), Galerkin metoduyla uygulanmasıyla düşük boyutlu modellerle temsil edilebilir.

Ele alınan sisteme ait optimal esas fonksiyonların oluşturulması için Uygun Ortogonal Ayırım (Proper Orthogonal Decomposition, POD) uluslararası seviyede rağbet görmüş objektif bir yöntemdir. POD deneysel veya genellikle sayısal simülasyonlardan elde edilen verileri kullanan ve sistemin dinamik yapısını belirleyebilmek için yeterli bilgi içeren özdeğer fonksiyonları sistematik olarak belirleyen bir yöntemdir. Maksimum enerji içeren özdeğer fonksiyonlar, sistemin enerjisinin çoğunu içeren, az sayıda tutulan denklemlerle oluşturulmuş bir modelle

sistemin dinamik davranışını temsil etme olanağı sağlar. Diğer bir deyişle, alan değişkenlerinin serilere açılmasında esas fonksiyonlar olarak deneysel özdeğer fonksiyonların kullanılmasıyla, orijinal hız ve sıcaklık alanlarının yeniden oluşturulması optimal bir şekilde başarılmıştır. POD yöntemi ısı ve akış problemlerinin yanı sıra literatürde meteoroloji, okyanus bilimi, kimya ve fizyoloji gibi çeşitli alanlarda değişik problemlere uygulanmıştır.

Türbülanslı akışlarda tutarlı yapıları (coherent structures) çıkartmak için POD'yi akışkanlar mekaniğinde kullanan ilk bilimadamı **Lumley (1967)** olmuştur. Ancak yöntemi uygulamak için yüksek çözünürlüklü hız alan verilerinin yetersizliği yüzünden metodun uygulama kapsamı uzun yıllar sınırlı kalmıştır. Son yıllarda karmaşık deneylerden elde edilen detaylı sonuçların ve özellikle doğrudan sayısal simülasyon çözümlerinin yüksek çözünürlüklü veri sağlayabilmesi, karmaşık akış problemlerine POD'nin uygulanabilmesini mümkün hale getirmiştir. Bunun yanı sıra, **Sirovich (1987)** tarafından ortaya atılan POD'nin anlık veriler (snapshots) versiyonu, yüksek çözünürlüklü iki ve üç boyutlu akışlara etkili bir şekilde uygulanabilen bir methodur. Bu çalışmada POD için gerekli olan yüksek çözünürlüklü veriler, sonlu hacimler tekniğini esas alan Fluent yazılımı kullanılarak yapılan sayısal simülasyonlar ile sağlanmaktadır. Fluent yazılımının POD'nin anlık veriler versiyonuna uygulanabilmesi için, sayısal simülasyonlar zamanla bağlı olarak yapılmalı, elde edilen enstantane (anlık) akış ve sıcaklık alanları, problemi temsil eden bir zaman boyutunda (periyodik problemler için bir periyod) eşit zaman aralıklarında anlık veri alanları oluşturulmalıdır. Daha sonra bu enstantane veri alanları, POD ile elde edilen düşük boyutlu modellerin oluşturulmasında kullanılırlar. Düşük boyutlu modellerin, tasarım ve tasarım dışı şartlarda, sistemin dinamik davranışlarını tahmin etme konusunda ne ölçüde başarılı oldukları bu tez çalışmasıyla belirlenmeye çalışılmıştır.

2 KAYNAK TARAMASI

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin hızlı bir şekilde gelişmesiyle birlikte, hemen her alanda yapılan sayısal simülasyon çalışmaları da hız kazanmıştır. Özellikle akış ve sıcaklık problemlerinin çözümüyle ilgili yapılmış çalışmalar son derece dikkat çekicidir. Güneş kolektörleri tasarımı, reaktör yalıtımı, binaların havalandırılması, elektronik ekipmanların soğutulması, roketlerde yanma, fırtına tasarımı gibi pek çok konuda sayısal yöntemlere başvurulmaktadır. Zamanla bağlı, karmaşık bir akış ve sıcaklık probleminin çözümünde uygulanan sayısal simülasyonlar genellikle uzun zaman alan ve güçlü bir bilgisayar gerektiren işlemlerdir ve problemin parametreleri değiştirildiğinde (Re, Gr gibi) yeni çözümlere ulaşılması oldukça büyük zaman kayıplarına sebep olur. Bu yüzden kurulan sistemlerin değişen sistem parametreleri ile ne tür davranışlar sergileyeceğini ve sistemin karakteristik özelliklerini büyük bir kısmını elde edebilecek güvenilir model tahminlerinin yapılması önem kazanmaktadır. Bu amaçla kurulmuş POD esaslı düşük boyutlu modeller pek çok araştırmacı tarafından incelenmektedir.

Lumley (1967) rastgele bir türbülans alanından en enerjik modların çıkartılabileceğini göstermek için matematisel olarak güçlü bir model önerdi. Bugün bu yöntem POD, Karhunen-Loeve ayrımı veya deneysel özdeğer fonksiyonlar metodu olarak adlandırılmaktadır. Karmaşık akışın doğrudan sayısal simülasyonu veya PIV gibi gelişmiş deney tesisatları kullanılarak, detaylı veriler elde edilmesiyle beraber, POD'nin karmaşık akış problemlerine uygulanması, ancak son yıllarda gerçekleştirilmeye başlanmıştır. Yöntemin uygulamasındaki gecikmenin başka bir sebebi ise 2 ve 3 boyutlu problemler için deneysel özdeğer fonksiyonların hesaplanma güçlüğü olmuştur. Ancak **Sirovich (1987)** tarafından sunulan anlık veri (snapshots) metodu, bu zorlukları tamamen ortadan kaldırmıştır. Şimdi metodiki ve üç boyutlu tam gelişmiş akışların en enerjik özdeğer modlarını çıkartmak için uygulanabilir hale gelmiştir.

POD önceleri sadece veri sıkıştırma amacıyla kullanılmaktayken, son yıllarda, daha çok düşük boyutlu modeller türetmek için kullanılmaya başlanmıştır. **Aubry ve diğ. (1988)** enerjinin büyük bir kısmını içeren büyük tutarlı yapılardaki belli akış tipleri için, düşük boyutlu modeller geliştirilmesiinde POD'nin kullanılabilirliğini göstermişlerdir. **Deane ve diğ. (1991)**, oyuklu bir kanalda iki boyutlu izotermal akış için düşük boyutlu bir model uygulamışlar ve yaptıkları simülasyonlarla, süreklilik ve bifürkasyon analizleri ile kısa ve uzun zamanlı model tahminlerinin doğruluğunu incelemişlerdir. **Deane ve Mavriplis (1994)** uçak kanadı etrafındaki akışın ayrılması (separation) olayını POD'ye uygulamışlar ve düşük boyutlu modelini integrasyonu ile elde edilen açılım katsayılarının, tam gelişmiş modelin doğrudan tahminiyle hesaplanan değerlerden çok daha yüksek olduğunu görmüşlerdir. Gelecekte bu konuda ortaya konulacak çalışmaların, tutulan modların ve anlık veri sayılarının etkilerinin incelenmesi olduğunu vurgulamışlardır.

Ly ve Tran (2001) yaptıkları çalışmada, daimi haldeki Rayleigh-Benard taşınım problemini incelemişler ve sayısal olarak elde edilen anlık verilerle, esas fonksiyonları (deneysel özdeğer fonksiyonlar) elde etmek için POD yöntemi uygulamışlardır. Daha sonra, elde edilen esas fonksiyonlar bir Galerkin metoduunda kullanılarak, mümkün olan en düşük serbestlik derecesine sahip sonlu bir dinamik sisteme ulaşılmıştır. Bunun yanı sıra elde edilen anlık veri grubu ile POD'nin, bir doğal taşınım modelinde, doğru bir şekilde kullanılabileceğini ve işlem kontrolü için son derece uygun olduğunu belirtmişlerdir.

Güneş (1997) yaptığı doktora çalışmasında, açık dikey kanallarda ve diferansiyel olarak ısıtılan kapalı bir bölgede doğal taşınımın düşük boyutlu dinamik modellerini sunmuştur. Uygun sınır şartları kullanarak akışı karakterize eden tam gelişmiş kısmi diferansiyel denklemler (Navier-Stokes ve enerji denklemleri), bir spektral eleman metodu yardımıyla çözülmüştür. Belirli bir Grashof sayısı (Gr_0) ile Prandtl sayısı (Pr_0)'nda Navier-Stokes modeli için elde edilen periyodik salınım çalkantı çözümlerine Uygun Ortogonal Ayırım metodu uygulanmış ve deneysel özdeğer fonksiyonlar oluşturulmuştur. Esas fonksiyonlar olarak en enerjik deneysel özdeğer fonksiyonları kullanılarak ve Galerkin metodu uygulanarak, az sayıdalineer olmaayan adi diferansiyel denklemleri içeren düşük boyutlu modeller elde edilmiştir. Daha sonra tüm durumlar için, tasarımı şartlarında (Pr_0 , Gr_0) oluşturulan düşük boyutlu model (LOM) tahminlerinin, Navier-Stokes model tahminleriyle mükemmel bir şekilde

uyuştuğu gör÷l müştür. En sonunda tasarımışartlarından uzaklaşarak ($Pr \neq Pr_0$, $Gr \neq Gr_0$) alıştırılan düşük boyutlu modellerin aynı şartlardaki Navier-Stokes modeli öz÷mlerinin bazı önemli karakteristik özelliklerini yakalayabildiği gör÷l müştür.

Güneş ve Kavurmacıoğlu (2000) akışın üst yatay yüzeyin hareketi ile sağlandığı dikdörtgen kesitli bir kanalda zamana bağlı periyodik akışın tutarlı yapılarını çıkartmak için Uygun Ortogonal Ayırım metodunu uygulamışlardır. Sayısal simülasyonlar Reynolds sayısının 1000 ile 25000 aralığında gerçekleştirilmiştir. Oyuklu kanalda, ilk dört en enerjik özdeğer fonksiyonun, akışın toplam kinetik (alkantı) enerjisinin %99'undan fazlasını içerdiği gör÷l müştür. Burada özdeğer fonksiyonların çiftler halinde ve her bir çifti oluşturan özdeğer modların şiddetinin birbirine yakın değerde olduğu gör÷l müştür. Bir çifti oluşturan özdeğer modların arasında yaklaşık çeyrek periyod kadar bir faz kayması olduğu vurgulanmıştır. Buna karşılık özdeğer çiftleri arasında büyük farklar vardır. Baskın model çifti toplamakış enerjisine en yüksek katkıyı sağlanmaktadır. Bununla birlikte daha az enerji seviyeli modlar daha küçük ölçek özelliklerini barındırmaktadırlar.

Podvin ve Quere (2001) yaptıkları çalışmada, diferansiyel olarak ısıtılan bir ortamdaki akışa POD'yi uygulamışlardır. POD ile deneysel özdeğer fonksiyonlar elde edilmiş ve düşük boyutlu modeller oluşturularak, sayısal simülasyonla karşılaştırılmıştır. İki durum için incelemeler yapılmıştır. Birinci durumda, kararsızlık mekanizmalarını açık bir şekilde tanımlayabilmek için nispeten basit akışlara odaklanılmıştır. Bu şekilde çatallanma olayları incelenmiş ve model performansını değerlendirmek için güç spektrumu ve istatistiksel değerlendirilmeler yapılmıştır. İkinci durumda, kontrol parametreleri (Re , Pr ve boyut oranı) değiştirilerek akışta, tahmini dinamik değişikliklerle POD esaslı modelin kapasitesi araştırılmıştır. Bir çok düşük boyutlu modelle akışın daha iyi nasıl temsil edilebileceğini saptamak için bu çalışmalar yapılmış ve on-denklemlilik modelin akış dinamiklerini başarılı bir şekilde yakalayabildiği gör÷l müştür.

Sahan ve diğ (1997) periyodik bir şekilde oyuklar açılmış bir kanalda ısı transferi ve zamana bağlı akış için indirgenmiş dinamik modeller türetmişlerdir. Navier-Stokes ve enerji denklemleri bir spektral eleman metoduyla öz÷lmüştür. Kendi kendine salınım öz÷mleri Reynolds'un 300'den küçük değerleri için hesaplanmış ve $Re=430, 750, 1050$ ve $Pr=0.71$ 'de deneysel özdeğer fonksiyonları çıkartmak için uygun ortogonal ayırım metodu (POD) uygulanmıştır. Uygulanan Galerkin metodu ve

esas fonksiyonlar olarak hesaplanan deneysel özdeğer fonksiyonlar kullanılarak $Re=430, 750$ ve 1050 için düşük boyutlu modeller elde edilmiştir. Her bir alan değişkeni için en az dört özdeğer mod, tasarım şartlarında doğru ve güvenilir genlikteki kendiliğinden devam eden salınımların ve kararlılığın tahmin edilmesi için gerekli olduğu bulunmuştur. Düşük boyutlu modeller, tasarım şartlarına yakın Reynolds değerleri için akışın dinamik karakteristiklerini başarılı bir şekilde tanımlamışlardır. Tasarım şartlarından uzaktaki düşük boyutlu modeller sanki-periyodik veya Re sayısının artırılmasıyla kaosa gidiş olan periyod katlanmalarını tahmin edebilmektedir.

Soong ve Tzeng (1998) yaptıkları çalışmada, yanal duvarlarla sınırlandırılmış bir bölgede iki-jet akışında, sınırlandırma etkisini araştırmak için, iki boyutlu, laminar ve sıkıştırılmaz akışta Navier-Stokes denklemlerini sayısal bir metod kullanarak çözmüşlerdir. Yan duvarlarla sınırlandırılmış iki-jet akışı basit bir geometriye sahip olmasına karşın, akışın fiziksel davranışı Reynolda sayısına ve sınırlandırma oranına bağlı olarak oldukça karmaşıktır. Yapılan bu çalışmada akış karakteristikleri faz diyagramları ve spektrum analizleriyle birlikte ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Akış kararsızlıkları, çoklu çözümler ve bifürkasyon olayları, Reynolds sayısı, yan-duvar sınırlandırması ve jetlerin birbirine olan yakınlığı parametrelerin etkileri ile yakından ilişkilidir. Yan-duvar sınırlandırma etkilerine göre akış, zayıf ve kuvvetli sınırlandırılmış akış olmak üzere iki grupta sınıflandırılmıştır. Zayıf sınırlandırma (weak-confinement) etkisinde, iki jet arasındaki mesafenin duvarlar arasındaki mesafeye oranı küçüktür. Bu durumda jetler birbirlerine yakın olduklarından, yan duvar etkilerine oranla, iki jetin birbirleriyle olan etkileşimi akış mekanizmasında çok daha baskındır ve özellikle akışın ilerleme yönünde akışkan yüksek bir serbestlik derecesine sahiptir. Zayıf sınırlandırma durumunda, yeterince büyük Re sayılarında her ne kadar daimi bir akış söz konusu olsa da yapısal metrik olma eğilimindedir. Kuvvetli sınırlandırma (strong-confinement) durumunda ise jetler birbirine oranla yan duvarlara daha yakın olduklarından jet-duvar etkileşimi akışta daha baskın rol oynamakta ve bu durumda akış serbestliği zayıf sınırlandırmaya göre azalmaktadır. Serbestlik derecesinin azalması akışın daha yüksek Re sayılarında daimi kalmakta ve akış daha kararlı bir yapıya sahip olmaktadır. Kaotik davranışlar ise geciktirilebilmektedir. İki-jetler duvara yaklaştıkça yan duvar girdaplarının sayısında da artış olmaktadır. Re sayısı ve duvar sınırlandırması sabit tutulup jet

yakınlığı parametresi azaltılarak, başka bir deyişle, jetlerin hüznne aralıkları artırılarak pitchfork ve Hopf bifürkasyonları geciktirilnkte, böylece hüznne aralıklarının artırılmasıyla akışın kararlılığı artmaktadır. Kuvvetli sınırlandırılmış durumu için, önerilen ikiz-jet akış problemünde kaosa gidiş aşamaları şu şekilde sıralanmıştır; daimi simetrik, daimi asimetrik, yüksek harmoniklerle periyodik, periyod katlanması ve kaotik durum. Bu yapılan çalışmayla ikiz-jet akışlarının fiziksel ve karakteristik özellikleri ayrıntılı ve tatmin edici nitelikte olduğundan bu konuda yaptığımız sayısal simülasyon çalışmalarında bize önemli bilgiler sağlamıştır.

Sarın ve diğ. (2000) bir kanal içinde iki boyutlusı kıştırılmalı tek bir jet gelişimini laminar akış rejiminde giriş sınırlanmasının olduğu ve olmadığı iki farklı durumu için incelemişlerdir. Giriş sınırlanmasının olduğu durumda, jet ile kanal genişlikleri oranının çeşitli değerlerinde zamanla bağlı salınımların başlangıcı ve daimi asimetrik jet gelişimi için kritik Reynolds sayısının değerleri ve akış yapısı için sonuçlar elde edilmiştir. Kanal genişliğinin jet giriş genişliğine olan oran düşük olduğu durumda ve düşük Re sayılarında, kanal içindeki akış gelişimi simetrik olarak bulunmuştur. Kanal genişliğinin jet giriş genişliğine olan oran ve Re sayısının yüksek olduğu durumlarda, akışın serbestlik derecesi artmakta ve daimi haldeki akış jeti asimetrik bir davranış göstermekle birlikte salınım hareketleri yapmaktadır. Giriş sınırlanmasının olmadığı durumda ise, asimetrik gelişimin kararsızlığının ve geçici salınımların, verilen bir sabit kanal-jet genişlikleri oranı için çok daha yüksek kritik Reynolds sayılarında meydana geldiği belirlenmiştir. Bu da göstermiştir ki, giriş sınırlandırması olmadığı durumu için jet akışının kararlılığı daha yüksektir.

Hsu ve Wang (2000) yaptıkları sayısal çalışmada çevresel bir bölgede karışık taşınımı ısı transferi problemi incelemişler ve karışık taşınımın ısı ve akış alanı üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Karesel bir boşluk içerisinde alt kenarı üzerine, dış yüzeyinde ısı kaynağı bulunan düşey bir levha yerleştirilmiştir. Düşey sol kenar üzerinde açılmış bir aralıktan içeri giren hava akışı, karşı duvar üzerinde açılmış başka bir aralıktan dışarı çıkmaktadır. Bu çalışmada ısı üreten elemanlar (chips) içeren elektronik ekipmanların havayla soğutulması gibi uygulamaya yönelik bir problem ele alınmıştır. Reynolds sayısı (Re), Richardson sayısı ($Ri = Gr / Re^2$), ısı kaynağının konumu, ve levha-akışkan iletkenlik oranı (r_k) gibi sistemi karakterize eden parametrelerin etkileri incelenmiştir. Sonuçlar göstermiştir ki, maksimum levha

sıcaklığı ve ortalama Nusselt sayısı (Nu)'nın her ikisinde büyük ölçüde, akışı karakterize eden parametrelere, ısı kaynağının pozisyonuna ve bunun yanı sıra içine ısı kaynağı yerleştirilmiş levhanın ısı iletim katsayısına son derece bağlıdır.

Hsue ve Wang (1999) yaptıkları başka bir çalışmada ise sol düşey kenarının iç yüzeyi üzerine ısı kaynağı yerleştirilmiş karesel bir ortamda mikropolar akışkanlarınlamıner karışık taşınım olayını incelemişlerdir. Çevre sıcaklığında dışardan içeriye sevkedilen akış (zorlanmış taşınım) ile ısı kaynağının etkisiyle oluşan serbest akış (doğal taşınım), ortam boşluğundaki karışık taşınımı akışı oluşturur. Momentum ve enerji denklemleri kübik spline düzenleme metodunun yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Simülasyonlar, Reynolds sayısı, Grashof sayısı ve mikropolar olarak adlandırılmış akışkan özelliklerinin geniş aralıklarında yapılmıştır. Burada mikropolar akışkanlarla sergilenen belirli özelliklerin vurgulanması amaçlanmıştır. Mikropolar akışkanlar ile Newtonian akışkanlar karşılaştırılmış ve mikropolar akışkanların ısı transfer katsayılarının daha düşük olduğu görülmüştür. Re veya Gr sayılarının artması, ısı taşınım katsayısının ve ısı kaynağından çekilen ısı miktarının ve sirkülasyon şiddetinin artmasına yol açmıştır.

Papanicolaou ve Jaluria (1993) yaptıkları çalışmada, belli bir kalınlıktaki, ısı iletkenliğe sahip, dış yüzeyleri yalıtılmış duvarlarla çevrelenmiş dikdörtgenel bir ortam içerisinde, bir ısı kaynağından sabit ısı akışı girişi olayını incelemişlerdir. Burada sol düşey duvar üzerindeki bir aralıktan dış etkiyle giren akışkan sağ dik duvar üzerindeki başka bir aralıktan çıkmaktadır. Bu sistemi çin karışık taşınım olayı sayısal olarak incelenmiştir. Isı kaynağının, dikey sağ duvarın, sol duvarın ve yatay alt duvarının iç yüzeyine yerleştirildiği durumlar ayrı ayrı ele alınmış ve üç hal için sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu problemde Reynolds sayısı (Re), Richardson sayısı ($R = Gr / Re^2$), duvar-akışkan malzemesinin ısı iletkenlik oranı ve ısı kaynağının konumu, sistem parametreleri olarak belirlenmiştir. Kaynaktan ısı giriş miktarının artması, kaynaktan olan ısı transferinin yükselmesine, ortamda sirkülasyon miktarının ve kaynak sıcaklığının artmasına yol açmaktadır. Isı iletkenlik oranı sonuçlar üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Katı duvarın iletkenliği arttıkça, kaynaktan duvara olan ısı transferi de artmaktadır. Duvarın ısı iletkenliği arttığında duvar içinde ısı yayılımı daha fazla olmakta, buna karşın kaynağın maksimum sıcaklık değeri azalmakta ve akış fonksiyonunun maksimum değeri çok az da olsa azalmaktadır. Çünkü ortam, yani akışkana taşınımına geçen ısı iletkenliği miktarı

azalmaktadır. Isı kaynağının farklı konumları için durum karşılaştırıldığında farklılıklar dikkat çekicidir. Isı kaynağı sağ duvarda olduğunda kaldırma (doğal taşınım) etkili akış, zorlanmış taşınım etkili akışa karşı koymakta ve birbirine zıt yönde hareket eden iki sirkülasyon hücresi oluşmaktadır. Isı kaynağının sol ve alt duvar üzerinde olduğu durumlar için böyle bir etki sözkonusu olmayıp her iki akışta aynı yönde ilerlemektedir. Bu yüzden ısı kaynağının sağ duvarda olduğu durumda, maksimum kaynak sıcaklığı en yüksek, ısı kaynağının yüzeyindeki ortalama Nusselt sayısı ve maksimum akım fonksiyonu ise en düşük değerdedir.

Howe ve Hu (1997) bir iletken levha ile parçalara bölünmüş iki boyutlu bir ortamda geçici laminar karışık taşınım problemi ni sayısal olarak incelemişlerdir. Pr sayısı 0.72 (hava) alınarak sayısal çözümler elde edilmiştir. Isı kaynağının çıkış aralığının ve levhanın konumu değiştirilerek çeşitli geometriler ele alınmıştır. Geçiş işlemi (geçici rejimden daimi rejime geçiş) sırasında ısı transferi üzerinde Reynolds sayısı ve Richardson sayısının (Gr/Re^2) etkileri ve daimi hale ulaşma durumları incelenmiştir. Genel olarak Re sayısının yükselmesi ya da Gr/Re^2 değerinin düşmesi daimi hale ulaşmayı geciktirmektedir. Re ve Gr/Re^2 değerlerinin her ikisinin birden artması ısı transfer katsayısının artmasına yol açmaktadır (give rise). Geçiş işlemi sırasında ilk şartlar başlangıç aşamasında baskın bir rol oynar. Daha sonra hava akışı, doğal taşınım etkisi (buoyancy-induced) git gide kuvvetlendirmekte ve en sonunda ortamda eksiksi bir karışık taşınım başarıyla elde edilebilmektedir. Bunun yanı sıra ısı taşınım katsayısı ve sirkülasyon hücrelerinin şiddeti levhanın konumuna ve yüksekliğine bağlı olduğu belirtilmiştir.

Göçmen ve Güneş (2002), Güneş ve Göçmen (2002) bu tezin kapsamında yaptıkları çalışmalarda iki boyutlu içine ısı kaynağı yerleştirilmiş kısmen açık dikdörtgensel bir bölgede laminar karışık taşınım problemi ni sayısal olarak incelemişler ve elde edilen zamana bağlı hız ve sıcaklık alan verilerini kullanarak düşük boyutlu modeller oluşturarak, bu modellerin performanslarını test etmişlerdir. Yapılan bu çalışmalar bildiri olarak sunulmuştur.

Literatürde bu çalışma kapsamında incelenen makalelerin bir kısmı, yaptığı çalışmalarda yalnızca düşük boyutlu modeli geliştirilecek sistemle ilgili (iki-zet akış problemi ve karışık taşınım) bilgiler içermektedir. Böylece, uyguladığımız POD için gerekli sayısal simülasyonların literatürde yapılmış benzer çalışmalarla karşılaştırması yapılarak, Navier-Stokes ve enerji denklemlerinin sayısal simülasyon

sonuçlarının güvenilirliği konusunda bize yardımcı olmaktadır. İncelenen makalelerin diğer bir kısmı ise, incelediğimiz sistemlerin fiziği ile doğrudan ilişkili olmayıp yalnızca uyguladığımız POD yöntemi ve düşük boyutlu modellerin oluşturulması hakkında bize bilgiler vermektedir. Bunun yanı sıra, bu uygulamalar, POD'nin ve düşük boyutlu modellerin değişen sistem parametreleriyle ne tür davranışlar sergilediğini ve bu parametrik değişimlerin, yapılan analizi ne şekilde etkilediğinin anlaşılması açısından son derece önemlidir. Bu da elde ettiğimiz sonuçları yorumlama konusunda bize ışık tutmaktadır. Bu şekilde akış ve sıcaklık olaylarının dinamik yapısı ile POD ve düşük boyutlu model uygulamaları birlikte ele alınmıştır.

3. YANAL DUVARLAR İLE SINIRLANDIRILMIŞ BİR BÖLGEDE, İKİZ-JET AKIŞININ DÜŞÜK BOYUTLU MODELLENMESİ

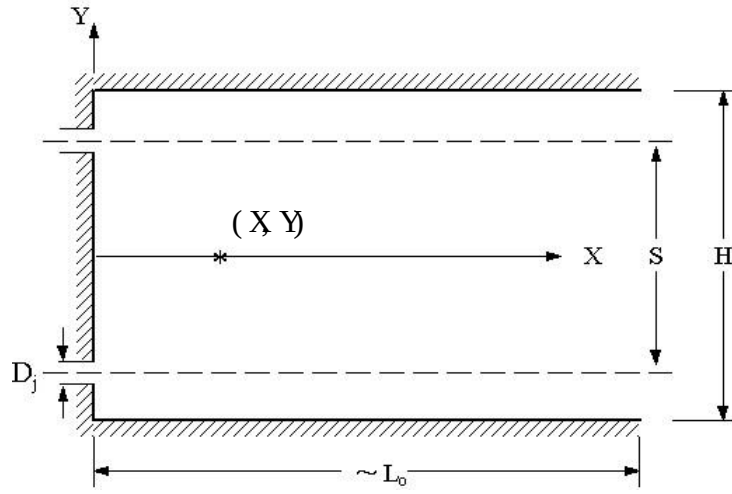
3.1 İkiz-Jet Akış Geometrisi

Yapılan bu tez çalışmasında ele alınan ilk problem olarak yanal duvarlar ile sınırlanmış bir bölgede ikiz-jet akışı için düşük boyutlu modeller geliştirilmiştir. Jetlerin yanal duvarlarla kuvvetli ve zayıf olarak sınırlanmış (strong and weak confinement) olduğu iki farklı jet akış geometrisi kullanılmıştır.

Kuvvetli sınırlanmış ikiz-jet akış geometrisi Şekil 3.1’de gösterilmiştir. Aralarında S mesafesi bulunan D genişliğinde özdeş iki delikten x -eksenine paralel jetler püskürtülmektedir. Paralel yan-duvarlar arasındaki mesafe H ’dır. Akış için istenilen çıkış sınır şartını elde etmek için akış yönündeki kanal uzunluğu (L_0) yeterince uzun seçilmiştir. S/D jet yakınlığı oranını, S/H jetin yan duvarlarla sınırlanma oranını, L_0/H ise kanal uzunluğunu gösteren geometrik boyutsuz parametreler olarak belirlenmiştir. Boyutsuz oran S/H yanal duvarlar ile jetlerin etkileşimini belirler. S/H oranı 0’ dan 1’e kadar değişir ve $S/H=0$ olması, ikiz jet akışının tek jete indirgiendiğini, $S/H=1$ olması ise ikiz jet akışının genişliği $D/2$ olan iki duvar jetine dönüştüğünü gösterir. $S/H \geq 0.6$ olduğu durumlar kuvvetli sınırlanma olarak adlandırılır (Soong ve Tzeng, 1998). Bu durumda yanal duvarlar, jet deliklerine daha yakındır ve jet ile duvar etkileşimi, jetlerin birbirleriyle olan etkileşimine kıyasla oldukça fazladır. Bu yüzden, yanal duvarların akış salınımlarının sönümlenmesinden dolayı akışın serbestliği oldukça düşüktür ve akışın kararsızlık eğilimi daha az olup türbülansa geçiş olayı Reynolds sayısının daha büyük değerlerinde gerçekleşir. Bu çalışmada ilk olarak $S/H=0.7$ (kuvvetli sınırlanma), $S/D=10$ ve $L_0/H=15$ değerleri için sayısal simülasyonlar gerçekleştirilmiştir. $X-Y$ koordinatının merkezi iki jetin orta noktasına yerleştirilmiştir.

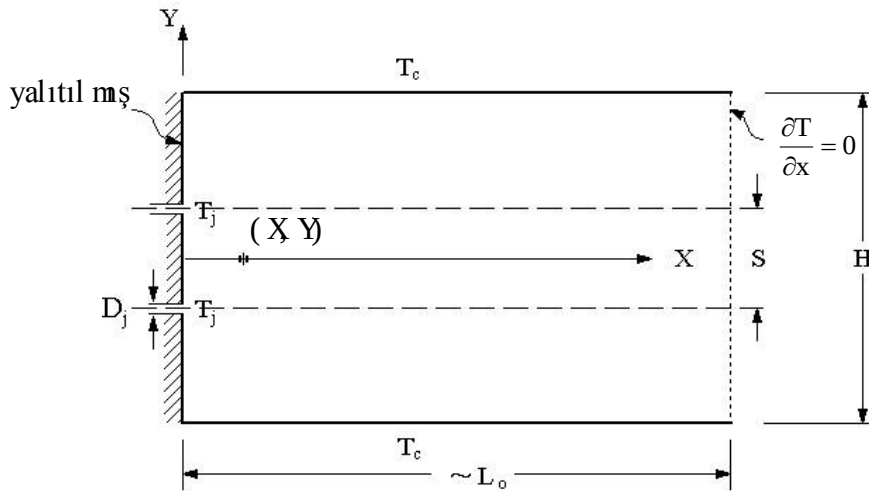
Şekil 3.2’de yanal duvarlarla zayıf sınırlanmış ikiz-jetin geometrisi, ısı sınır şartları ile beraber gösterilmiştir. Burada S/H oranı dışında tüm geometrik boyutlar

ve akışkan özellikleri tamamen aynı olup, bu koşullara sıcaklık sınır şartları eklenerek enerji denklemi de çözülmüştür. Genellikle, $S/H < 0.6$ olduğu durumlar zayıf sınırlandırma olarak adlandırılır. Zayıf sınırlandırılmış (burada $S/H=0.3$) geometride, akış daha fazla serbestliğe sahiptir ve duvarların jet salınımını söndürme etkisinin çok az olmasından dolayı akış kararlılığı daha az olup türbülansa geçiş olayı düşük Reynolds sayılarında gerçekleşir. Buna ilaveten, zayıf sınırlandırma durumunda, jetlerin birbirleriyle olan etkileşimi duvar etkileşimine göre çok daha baskın olup, daimi akışın düşük Re sayılarında (kuvvetli sınırlandırılmış jetlere göre) daha kararsız olması beklenir.



Şekil 3.1. Kuvvetli sınırlandırılmış iki-jet akış geometrisi. ($S/H=0.7$)

*($X=5.4$, $Y=0$)



Şekil 3.2. Zayıf sınırlandırılmış iki-jet akış geometrisi ve ısı sınır şartları. ($S/H=0.3$)

*($X=6.3$, $Y=0$)

3.2 Matematiksel Model ve Çözüm Yöntemi

3.2.1 Navier-stokes ve enerji denklemleri : tam model

Bir sistemde akış ve sıcaklık alanını karakterize eden, zamana bağlı, laminar, akışkan özelliklerinin (ρ , μ , k ve c_p) sabit tutulduğu kısmi diferansiyel denklemler (Navier-Stokes ve Enerji denklemleri) boyutsuz olarak aşağıdaki gibi verilebilir;

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{V} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + (\vec{V} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{RePr} \nabla^2 \theta \quad (3.3)$$

Burada (3.1) süreklilik denklemi, (3.2) momentum denklemi ve (3.3) enerji denklemi olarak adlandırılır. Yukarıda yazılan denklemlerdeki değişkenler, jet hızı U_j , jet delik genişliği D_j , akışkan yoğunluğu ρ , jet çıkış sıcaklığı T_j ve yanal duvar sıcaklığı T_c 'nin kullanılmasıyla, aşağıdaki dönüşümler yapılarak boyutsuzlaştırılmıştır ;

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{(x, y)}{D_j}, \quad \bar{V} = \frac{V}{U_j}, \quad \tau = \frac{U_j}{D_j} t, \quad P = \frac{p}{\rho U_j^2}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_j - T_c} \quad (3.4)$$

Burada $Re = \frac{U_j D_j \rho}{\mu}$ ifadesi jet Reynolds sayısını gösterir ve jet akışının momentumunu ifade eder. $Pr = \nu / \alpha$ ifadesi ise akışkanın Prandtl sayısını gösterir. Burada $\nu = \mu / \rho$ akışkanın kinematik viskozitesini, μ akışkanın dinamik viskozitesini, $\alpha = k / \rho c_p$ akışkanın ısıl geçirgenliğini, k akışkan ısı iletim katsayısını ve c_p ise akışkan özgül ısısını göstermektedir.

Yanal duvarlarla kuvvetli ve zayıf sınırlandırılmış iki jet akışının sayısal simülasyonunda akış sınır şartları olarak duvarlarda kaynama şartı (no-slip) verilmiş, yani duvar üzerinde hız bileşenleri sıfır alınmıştır. Akış doğrultusunda kanalın sonunda çıkış sınır şartı vardır. Yani çıkış kesitinde, hızın kesitin normaline göre üretilmesi sıfırdır. Deliklerin girişinde jet hızı, U_j üniform olarak alınmıştır. Akış iki

boyutlu, laminar ve sıkıştırılabilir olarak alınmıştır. Düşük Reynolds sayılarında akışkan olarak belirlenen hava, sıkıştırılabilir olarak kabul edilebilir. Kuvvetli sınırlandırma sadece sabit sıcaklıkta akış olayı incelenirken, zayıf sınırlandırılmış akış geometrisi ilk önce, yalnızca akış problemi için çözülmüş, daha sonra sıcaklık etkileri de hesaba katılarak, süreklilik ve momentum denklemlerine enerji denklemi ilave edilmiştir. Sıcaklık sınır şartları olarak, jet sıcaklığı T_j sabittir ve jet deliklerinin bulunduğu düşey duvarlar yalıtılmıştır. Yanal duvarlar, sabit T_c sıcaklığında tutulmaktadır ve $T_j > T_c$ dir. Akış probleminde olduğu gibi, kanal uzunluğu yeterince büyük alınarak, çıkış kesitinde sıcaklık çıkış sınır şartı ($\partial T / \partial x = 0$) kullanılmıştır. Farklı kanal uzunlukları alınarak bu şartın sağlandığı görülmüştür.

Sınır şartları tanımlanan (3.1)-(3.2) ve (3.3) denklemleri sonlu hacim yöntemi kullanıldığı ticari bir program olan FLUENT ile çözülmüştür. Çözümlerde ikinci derece doğrulukta ayrıştırma kullanılmıştır. Yapılan çalışmada akış alanı üniform olmayan 162×112 grid üzerinde tanımlanmıştır. Çözümün griddan bağımsızlığını kontrol etmek için zayıf sınırlandırılmış geometride, grid yoğunluğu 324×244 'e çıkartılmış ve seçilen Reynolds sayısının değerleri için maksimum alan değişkenlerinin %2 den daha az değiştiği görülmüş ve yeniden elde edilen POD esaslı özdeğer fonksiyonlarla eskileri arasında dikkate değer bir farklılık oluşmamıştır. Dolayısıyla bu çalışmada 162×112 grid esas alınmıştır ve gridler duvarlara, jetlere ve kanalın girişine doğru sıkıştırılmıştır.

3.2.2 Navier-stokes model (sayısal simülasyon) sonuçları

3.2.2.1 Kuvvetli sınırlandırılmış jetler ($S/H=0.7$)

Kuvvetli sınırlandırılmış geometri için yapılan sayısal simülasyonlar Reynolds sayısının, 10 ile 90 arasında değişen değerleri için elde edilmiştir. Reynolds sayısının çeşitli değerleri için elde edilmiş akım çizgileri Şekil 3.3a'da gösterilmiştir. $10 \leq Re \leq 30$ aralığında, Reynolds sayısının düşük değerleri için, daimi (zamana göre değişmeyen), x-eksenine göre simetrik çözümler elde edilmiştir. Bu aralıkta Reynolds sayısının artmasıyla birlikte, iki jetin arasındaki çekirdek bölgede oluşan girdapların büyüklüğü de artmakta, köşe girdapları ise jet ile duvar arasında sıkıştığından dolayı çok küçük kalmakta ve gelişmemektedir. Kuvvetli sınırlandırma Coanda etkisinden dolayı, iki jet yanal duvarlara doğru dayanma eğilimi gösterirler (Soong ve Tzeng, 1998). Daimi çözümden zamana bağlı

peri yodik çözüme geçiş, Hopf bifürkasyonu olarak adlandırılır ve akışın periyodik olduğu bu kritik Reynolds sayısı Re_{CH} olarak gösterilir. **Soong ve Tzeng (1998)** yaptıkları çalışmada, kritik Reynolds sayısını, $S/H=0.7$ için $Re_{CH}=33$ olarak belirlemişler ve kuvvetli sınırlandırma aynı geometrik ve akış şartlarında çoklu çözüme (daimi asimetrik çözüme) rastlamışlardır. Benzer şekilde farklı ilk şartlar verilerek yapılan bu çalışmada daimi akış şartlarında ($Re < Re_{CH}$) asimetrik çözüm elde edilememiştir. $Re=40$ ve 70 için akış zamanına göre periyodik bulunmuştur. $Re=40$ ve 70 'de bir periyot için eşit zaman aralıklarında alınan enstantane (anlık) akımcı çizimleri Şekil 3.3b ve 3.3c'de sırasıyla gösterilmiştir. Şekil 3.3b'de $Re=40$ için tipik bir ikiz jet akışının bir periyot içerisindeki salınım verilmiştir. Burada, çekirdek ve köşe girdaplarının etkisi açık bir şekilde görülmektedir. Salınım hareketi sırasında jetler çekirdek bölgede birbirine doğru yaklaşmakta ve belli zaman aralıklarında birbirlerinin önüne geçmektedirler. Bir jet diğeri önüne geçtiğinde, önü kesilen jetin akış yönü çekirdek bölgeye doğru ilerlemekte ve bölgeyi doldurarak oluşturduğu çekirdek girdabının büyümesine yol açmaktadır. Bu çekirdek girdabı belli bir büyüklüğe ulaştığında diğer jetin önüne geçmekte ve bu şekilde jetler arasında bir salınım olayı meydana gelmektedir. Buna ek olarak çekirdek girdabının büyümesiyle birlikte, karşısındaki jeti, duvara doğru sıkıştırarak ve bu jet ile duvar arasındaki köşe girdabının gelişmesine izin vermezken, çekirdek girdabının büyümesine yol açan jet ile duvar arasındaki köşe girdabı akış yönünde ilerleyerek çekirdek girdabının arkasında bir kenar girdabına dönüşmektedir. Daha sonra güçlü viskoz (sürtünme) etkiler yüzünden bu kenar girdabı git git de sönümlenirken yerini başka bir girdaba bırakmaktadır. Aynı olaylar akış alanının her iki yanında değişmeli olarak tekrarlanarak devam etmektedir. Akışkan kanal içinde ilerlerken viskoz etkilerle sönümlenir ve akış doğrultusunda belirli bir mesafeden sonra tamamen bir boyutlu akışa dönüşür. Şekil 3.3c'de ise $Re=70$ 'te bir periyot için eşit aralıklarla alınmış akımcı çizimleri gösterilmiştir. Re sayısının artmasıyla birlikte oluşan çekirdek girdaplarının büyüklüğü azalırken, köşe girdaplarının etkisi ve büyüklüğü artmakta, buna bağlı olarak kenar girdaplarının büyüklüğü ve sayısı da artmaktadır. Jet salınımlarının akış doğrultusundaki dalga boyları da azalmaktadır. Bütün bunlara bağlı olarak akış yapısının periyodik olmasına rağmen, daha karmaşık bir yapı oluşmakla birlikte yapının kararlılığı azalmaktadır. Şekil 3.3d'de görüldüğü gibi, Re sayısının daha da artmasıyla ($Re=90$), jetlerin salınımının akış doğrultusundaki dalga

boyları daha da azalırken, ancak akışa dik doğrultudaki salınımların artmasıyla birlikte akış yapısı daha karmaşık bir hale gelmektedir.

Şekil 3.4’de $Re=40$, 70 ve 90 için elde edilen sayısal simülasyonların tensili bir noktadaki ($X=x/D$, $Y=y/D=5.4, 0$) hız değerlerinin zamana göre değişimi verilmiştir. Burada Re sayısı 40 ve 70 için akış periyodik olup, $Re=40$ için periyot $T_p=10sn$ ($T_{p, boyutsuz}=T_p U/D \cong 143$) iken $Re=70$ ’te periyot $T_p \cong 6.8sn$ ’ye ($T_{p, boyutsuz} \cong 97$) düşmektedir. Re sayısının 90’a çıkmasıyla akışın periyodik yapıdan karmaşık bir yapıya (sanki-periyodik) dönüşüğü daha açık bir şekilde görülmektedir.

Akışın dinamik yapısını daha iyi analiz etmek için hızın zamana göre değişiminin spektrum analizleri (FFT) yapılmıştır. $Re=40$, 70 ve $Re=90$ değerleri için yapılan spektrumanalizleri sırasıyla Şekil 3.5’te verilmiştir. $Re=40$ ’ta akış, boyutsuz değeri $f_0=0.007$ olan temel (baskın) bir frekans ve onun basit harmoniklerinden oluşmaktadır. $Re=70$ ’de ise baskın frekansın değeri ($f_0=0.0103$) artarken şiddeti azalırken, bununla birlikte frekans yoğunluğu ve harmoniklerin sayısı az da olsa artmaktadır. $Re=90$ ’da ise akış sanki-periyodik olup, frekans yoğunluğu oldukça artmaktadır. Bunun yanı sıra temel iki boyutsuz frekans değeri $f_1=0.0150$ ve $f_2=0.0161$ ’dir ve diğer frekanslar bunların katlarını topla veya farkı şeklinde ifade edilebilmektedir. **Soong ve Tzeng (1998)** aynı şartlarda yaptıkları spektrum analizlerinde benzer sonuçlar elde etmişler, $Re>75$ için gürültünün daha da yoğunlaştığı geniş bantlı rastgele gürültü haline ulaşmışlardır. Bu durumu, sistemin rahatsız edici periyodik bir salınımdavranışı olarak nitelenmişler ve Re sayısının 82 ile 90 arasındaki değerleri için, akışın kaosa giden bir hal aldığıı belirlemişlerdir.

3.2.2.2 Zayıf sınırlanmış jetler ($St=0.3$)

İlk olarak izotermal (sıcaklık etkisinin olmadığı) durumu için yalnızca süreklilik ve momentum denklemleri ile akış sınır şartları gözönüne alınarak yapılan sayısal simülasyonlar, Reynolds sayısının 10 ile 70 arasında değişen değerleri için elde edilmiştir. Yapılan çalışmanın bir sonraki aşamasında, $Re=40$ için sıcaklık şartları da göz önüne alınarak enerji denklemi de çözülerek sistemin akış ve sıcaklık davranışları birlikte incelenmiştir. Navier-Stokes denklemlerinden de anlaşılacağı gibi, akışkan viskozitesinin sıcaklıkla değişimi ihmal edildiğinde, sıcaklık alanının momentum denklemine, dolayısıyla akışın dinamik davranışına herhangi bir etkisi yoktur. Sistemde denklemler çözülürken, ilk önce süreklilik ve momentum daha

sonrada enerji denklemini çözülmemektedir. Fakat enerji denkleminde, taşınım terimleri ve Re sayısı olduğu için, akış alanı sıcaklık dağılımı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Bu sebeplerden dolayı, akış ve sıcaklık olayları birlikte ele alınmasına rağmen, bu problem bir zorlanmış taşınım problemi olarak ortaya çıkmaktadır.

Çoklu çözümler:

Reynolds ve Grashof sayılarının yeterince büyük değerlerinde Navier-Stokes denklemlerinin çoklu çözümlerinin olabileceğini göstermek için, yapılan çalışmada Re sayısı yavaş yavaş azaltılarak veya artırılarak ikiz jet akışı için çoklu çözümler bulunmaya çalışılmıştır. Mühtemel çoklu çözümleri bulabilmek için yapılan çalışmalarda, akış yapısının başlangıç şartlarına bağlılığını ortaya çıkarmak için farklı başlangıç şartlarında simülasyonlar yapılmıştır. Reynolds sayısının belirli bir değerinde farklı başlangıç şartlarının kullanıldığı simülasyonlarda, ikiz-jet akış yapısının daimi kaldığı simetrik çözümden asimetrik çözüme geçiş pitchfork (ikinci bir daimi çözüm) bifürkasyonu olarak adlandırılmaktadır. Bizim problemi mizde bu olay kritik Reynolds sayısı, $Re_{CP} \approx 16$ 'da (başlangıç şartı olarak $Re=20$ 'deki çözüm kullanılarak) gerçekleşmiştir. Burada farklı başlangıç şartlarında aynı Reynolds sayısında daimi akış sözkonusu olmakla birlikte simetrik ve asimetrik olmak üzere iki farklı çözüm vardır. Bu daimi asimetrik çözüm genellikle periyodik çözümden önce elde edilir.

Reynolds sayısının çeşitli değerleri için elde edilmiş akım çizgileri Şekil 3.6'da gösterilmiştir. $1 \leq Re < 16$ aralığında tek, daimi simetrik çözümler elde edilmiştir. Bunun yanı sıra $Re=20$ 'deki çoklu çözüm Şekil 3.6'da gösterilmiştir. $Re=20$ 'deki simetrik daimi çözüme, yavaş yavaş artırılan başlangıç değeriyle (başlangıç şartı olarak $Re=10$ 'daki çözüm kullanılarak) ulaşılmıştır. Bununla birlikte $Re=20$ 'deki daimi asimetrik çözüme ise başlangıç şartı olarak $Re=30$ 'daki çözüm kullanılarak ulaşılmıştır. **Soong ve Tzeng (1998)** yaptıkları çalışmada, daimi halde simetrik çözümden asimetrik çözüme geçiş için kritik Reynolds sayısını $Re_{CP}=16$ olarak bildirmişlerdir. Buda yaptığımız sayısal simülasyon sonuçlarıyla örtüşmektedir.

Soong ve Tzeng (1998), incelenen problem için Hopf bifürkasyonunu (akışın periyodik olduğu en düşük Reynolds sayısı) $Re_{CH}=29$ olarak belirlemişlerdir. Yaptığımız çalışmada ise, $Re=30$ için, akış zamanına göre periyodik bulunmuştur. $Re=40$ 'ta bir periyot için eşit zaman aralıklarında alınan anlık akım çizgileri ve eş

sıcaklık eğrileri Şekil 3.7a ve 3.7b’de gösterilmiştir. $Re=40$ ’da, $Pr=0.71$ (hava) için sıcaklık etkisinin de incelendiği sayısal simülasyonda, eş sıcaklık eğrileri de zanaana göre periyodiktir. Buna ilaveten jetlerin salınımları açısından hız ve eş sıcaklık eğrileri de paralellik göstermektedir.

Şekil 3.8’de ise $Re=70$ ’te bir periyod içinde eşit zaman aralıklarında alınmış akımlar çizimleri gösterilmiştir. Kuvvetli sınırlandırılmış iki jete benzer şekilde Re sayısının artmasıyla birlikte jetlerin akış doğrultusundaki salınımın dalga boyları azalmakta, her iki yanal duvar üzerinde kenar girdaplarının sayısı ve akışa dik yöndeki çalkantıların şiddeti arttığından akış daha karmaşık bir hale gelmektedir.

Şekil 3.9’da temsili bir nokta ($X/Y=x/D, y/D=6.3, 0$) için sırasıyla, $Re=40$ ’ta elde edilen doğrudan sayısal simülasyonlarda u ve v hız bileşenleri ile sıcaklığın zanaana göre değişimi, $Re=70$ ’te ise hızın u ve v bileşenlerinin zanaana göre değişimi gösterilmiştir. Hız ve sıcaklığın zanaana göre değişimi, $Re=40$ için periyodik (hızın v -bileşeni için $T_p \approx 2.65$ sn; $T_{p, boyutsuz} = T_p U_j / D \approx 88.2$), $Re=70$ için ise sanki-periyodiktir.

$Re=40$ ve $Re=70$ için spektrum analizleri Şekil 3.10’da gösterilmiştir. $Re=40$ için elde edilen frekans analizine bakıldığında, hızın u -bileşeni için baskın frekansın değeri $f_0=0.02268$ ’dır ve harmonikleri baskın frekansın katları şeklindedir. (hızın v -bileşeni için $f_0=0.01134$ ’tür) Bunun yanı sıra harmonikler arasından düşük şiddette alt-harmonikler belirlemektedir. Baskın frekansın v -yönündeki şiddetinin, u -yönündeki şiddetine oranla oldukça yüksek olması, akışın kanal içerisindeki salınım hareketinin doğal bir sonucudur. Re sayısı $Re=70$ ’e çıkartıldığında baskın frekans ve harmoniklerinin şiddetleri azalmakta ve frekans yoğunluğu artmaktadır. Bu durum içinde temel iki frekansın değeri $f_0=0.0149$ ve $f_1=0.0168$ olan sanki-periyodik bir akış söz konusudur.

3.2.2.3. Kuvvetli ve zayıf sınırlandırma durumlarının karşılaştırılması

Zayıf sınırlandırılmış durumla kuvvetli sınırlandırılmış durumu karşılaştırdığımızda, daimi akış halinde S/H sınırlandırma oranı arttıkça iki jet arasındaki çekirdek girdaplarının büyüklüğü artarken, köşe girdaplarının büyüklüğü azalmaktadır. Periyodik akış halinde duvar sınırlandırma etkisi belirgin bir şekilde görülmektedir. Zayıf sınırlandırma ($S/H=0.3$) durumunda akışta iki jet arasındaki etkileşim yanal duvarlarla jetlerin etkileşmesine göre baskın olup, yanal duvarlar jetlerden yeterince

uzak oldukları için akışın serbestliği kuvvetli sınırlandırma ($S/H=0.7$) oranla oldukça yüksektir ve akış doğrultusundaki salınımlar büyük genliklerde (large amplitude), başka bir ifadeyle büyük dalga boylarında gerçekleşmektedir. Başka bir ifadeyle kuvvetli sınırlandırma durumunda, akışa dik doğrultudaki salınımların yanal duvarlar vasıtasıyla etkili bir şekilde bastırılmasından dolayı, bu salınım hareketi akış doğrultusunda zayıf sınırlandırma durumuna kıyasla daha kısa bir mesafe sonunda sönümlenmektedir.

Bifürkasyonlar açısından karşılaştırdığımızda, pitchfork bifürkasyonu kuvvetli sınırlandırmada görülmezken, zayıf sınırlandırmada görülmektedir. Bizim problemiğimizde pitchfork bifürkasyonu ($S/H=0.3$) için $Re_{CP}=16$ 'da görülmüştür. Literatürde kritik Reynolds sayısı da $Re_{CP}=16$ olarak bulunmuştur. Buna ilaveten $S/H \geq 0.5$ için pitchfork çatallanması görülmektedir (**Soong ve Tzeng 1998**). Zayıf sınırlandırılmış iki-jet akışı kuvvetli sınırlandırmaya göre daha kararsız olduğundan daimi rejiden periyodik rejie geçiş olayı daha düşük kritik Reynolds sayılarında gerçekleşmektedir. Bizim problemiğimizde $S/H=0.7$ için $Re=30$ 'da akış daimi, $Re=40$ 'ta ise periyodiktir. $S/H=0.3$ için ise $Re \geq 30$ 'da daimi olmayan akış söz konusudur. Literatürde Hopf çatallanmasının görüldüğü kritik Re sayısı, ($S/H=0.3$ için) $Re_{CH}=29$, $S/H=0.7$ için ise $Re_{CH}=33$ olarak belirlenmiştir. (**Soong ve Tzeng 1998**). $Re=70$ için kuvvetli sınırlandırmada akış periyodik iken, zayıf sınırlandırmada sanki-periyodik akış söz konusudur. Dolayısıyla sınırlandırma etkisinin (S/H oranı) artmasıyla birlikte, akışın kararlılığı artmakta ve daimi rejiden kaotik rejie geçiş aşamaları daha yüksek kritik Reynolds sayılarında gerçekleşmektedir.

Frekans analizlerine bakıldığında, $Re=40$ 'da kuvvetli sınırlandırmaya göre zayıf sınırlandırmada baskın frekans değeri daha yüksektir. Başka bir ifadeyle periyod daha düşüktür. Duvar sınırlandırma etkisinin (S/H oranı) azalmasıyla birlikte baskın frekansın yoğunluğu artmaktadır. Frekans yoğunluğunun artması akış yapısının kararsızlığının arttığını göstermektedir. $Re=70$ 'de zayıf sınırlandırmada, kuvvetli sınırlandırmaya oranla baskın frekansın değeri daha düşük olup, frekans yoğunluğu oldukça artmıştır. Frekans yoğunluğunun aşırı derecede artması, akış rejiminin değiştiğinin göstergesidir. Zayıf sınırlandırma durumunda, hızın v -bileşeninin frekans şiddetinin, kuvvetli sınırlandırmaya göre daha yüksek olması akışın serbestliğinin daha yüksek olduğunu göstermektedir.

3.3 Düşük Boyutlu Modeller

3.3.1 Düşük boyutlu modellerin oluşturulması

Navier-Stokes ve enerji denklemlerini düşük boyutlu olarak modelleyebilmek için ele alınan probleme özgü özdeğer fonksiyonlar kullanılmaktadır. Ancak bu şekilde Navier-Stokes ve enerji denklemleri birkaç adi diferansiyel denklemden oluşan düşük boyutlu modele indirgenebilir. Geçerli bir düşük boyutlu model elde edildiğinde, Navier-Stokes denklemlerine doğrudan uygulanması çok zor olan kararlılık ve bifürkasyon analizleri bu modellere rahatlıkla uygulanabilir. Ayrıca son yıllarda düşük boyutlu modeller akış kontrol amaçlı olarak kullanılmaya başlanmıştır.

3.3.2 Uygun ortogonal ayırma metodu (POD)

POD, bir sistemin dinamik davranışlarını belirleyen en enerjik modları objektif olarak bulunmasını sağlayan bir yöntemdir. Akışkanlar mekaniğine **Lumley (1967)** tarafından sunulmuştur. Literatürde yöntem aynı zamanda Karhunen-Loeve ayırma adıyla da anılmaktadır. POD **Sirovich (1987)**'in anlık veri yöntemi (method of snapshots) sayesinde 1990'lı yıllardan bu yana popüler bir yöntem olarak bir çok alana uygulanmıştır. Aşağıda bu çalışmada kullanılan POD'nin anlık veri (snapshot) versiyonu özet olarak açıklanmıştır:

DeneySEL veya sayısal yoldan elde edilen anlık veriler POD'nin başlangıç noktasını oluşturur. Örnek olarak, iki z jet akışının zamanla bağlı sayısal çözümünde önce Navier-Stokes denklemi, daha sonra ise enerji denklemi çözülürken, bu şekilde akış ve sıcaklık alanları elde edilmektedir. Zamanla bağlı hız ve sıcaklık alanlarının anlık verilerinin sayısı (M), bir periyod için eşit zaman aralıklarında alınmıştır. (3.5) denklemlerine göre ortalama değerleri çıkartılarak elde edilen hız ve sıcaklığın çalkantı bileşenleriyle yeni bir veri sistemi oluşturulmaktadır. Bunlara ilaveten, yapılan başka bir çalışmada, akış alanlarına doğrudan POD uygulanarak elde edilen özdeğer fonksiyonlar kullanılarak geliştirilen düşük boyutlu modeller, birkaç istisna dışında başarılı olmuştur.

Hız ve sıcaklık alanının çalkantı bileşenleri, anlık hız ve sıcaklık değerlerinden ortalama hız ve sıcaklık değerleri çıkartılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\bar{V}'(x, y, t) = \bar{V}(x, y, t) - \bar{V}(x, y) \quad (3.5a)$$

$$\bar{\theta}'(x, y, t) = \bar{\theta}(x, y, t) - \bar{\theta}(x, y) \quad (3.5b)$$

Zamana göre değişen hız ve sıcaklık alanının çalkantı bileşenleri ($\bar{V}'$ ve $\bar{\theta}'$) aşağıdaki gibi lineer bir şekilde birleştirilerek hız ve sıcaklığı için deneysel özdeğer fonksiyonlar aşağıdaki gibi oluşturulur (**Srovich, 1987**):

$$\bar{\phi}_k(x, y) = \sum_{i=1}^M A_{ki} \bar{V}'(x, y, t_i) \quad (3.6a)$$

$$\bar{\psi}_k(x, y) = \sum_{i=1}^M B_{ki} \bar{\theta}'(x, y, t_i) \quad (3.6b)$$

Burada Mönceden seçilen anlık veri alanı sayısını, $\bar{V}'(x, y, t_i)$ ve $\bar{\theta}'(x, y, t_i)$ sırasıyla çalkantı hız ve sıcaklık alanlarının i 'nci anlık veri değerlerini belirtir.

A_{ki} ve B_{ki} , (3.7a) ve (3.7b)'de verilen özdeğer probleminde C ($M \times M$) matrislerinin k 'nci özdeğer vektörlerinin elemanlarıdır.

$$C A = \lambda A, \quad (3.7a)$$

$$C B = \lambda B. \quad (3.7b)$$

Denklem (3.7a) ve (3.7b)'deki C matrisleri hız ve sıcaklık alanlarının çalkantı değerleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır. (**Srovich, 1987**)

$$C_{ij} = \frac{1}{M} \iint \bar{V}'(x, y, t_i) \bar{V}'(x, y, t_j) dx dy, \quad (3.8a)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{M} \iint \bar{\theta}'(x, y, t_i) \bar{\theta}'(x, y, t_j) dx dy. \quad (3.8b)$$

Hız ve sıcaklık alanları için oluşturulan C matrisleri simetrik ve pozitif-belirli (definite) olduklarından dolayı özdeğerler gerçek pozitif sayılardır. Bu nedenle C matrisinin bütün özdeğerleri büyükten küçüğe doğru aşağıdaki gibi düzenlenebilirler:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_M \geq 0. \quad (3.9)$$

Burada $\sum_{i=1}^M \lambda_i = E_T$ toplam çalkantı enerjisi ni oluşturur ve her bir özdeğer (λ) ilgili özdeğer fonksiyonun (esas fonksiyon) toplam çalkantı enerjisine katkısını temsil eder. (**Berkooz ve diğ., 1993**). Bu nedenle, uygun ortogonal ayırma en enerjik özdeğer fonksiyonların tanımlanması için objektif bir methodur. Dolayısıyla düşük boyutlu modellerin oluşturulmasında en enerjik özdeğer fonksiyonlardan yararlanılır. Ayrıca uygun bir şekilde normalize edildiğinde ($\phi_i^p \rightarrow \phi_i^p / \sqrt{\lambda_i}$, $\psi_i \rightarrow \psi_i / \sqrt{\lambda_i}$), özdeğer fonksiyonlar ortonormal bir takım oluştururlar.

$$\iint \phi_i^p \phi_j^p dx dy = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$\iint \psi_i \psi_j dx dy = \delta_{ij}. \quad (3.10b)$$

Burada δ_{ij} Kronecker delta ve I birim matris olmak üzere ortonormallik şartı

$$I = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & M & O & M \\ 0 & 0 & K & 1 \end{bmatrix} \quad [M \times M] \text{ kare matrisi} \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilebilir.

POD ile elde edilen normalize edilmiş (deneysel) özdeğer fonksiyonlar bir seri açılımında kullanılarak, hız ve sıcaklık alanlarının çalkantı bileşenleri $\hat{V}^p(x, y, t_i)$ ve $\theta'(x, y, t_i)$, sırasıyla aşağıdaki gibi temsil edilebilir;

$$\hat{V}^p(x, y, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \phi_k^p(x, y), \quad (3.12a)$$

$$\theta'(x, y, t) = \sum_{k=1}^L b_k(t) \psi_k(x, y). \quad (3.12b)$$

Burada N hız için, L ise sıcaklık için, seri açılımlarında alınan en enerjik özdeğer fonksiyon sayılarını gösterir ve genellikle (N ve L) $\ll M$ dir. Özdeğer fonksiyonların ortonormal olmasından faydalananarak, yukarıdaki denklemlerde POD ile elde edilen özdeğer fonksiyonlarının zamana bağlı açılım katsayıları (a_k ve b_k), (3.12a) ve (3.12b) denklemleri kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanır;

$$a_k(t) = \iint \bar{V}'(x, y, t) \cdot \bar{\phi}_k(x, y) dx dy \quad k=1, 2, \dots, N \quad (3.13a)$$

$$b_k(t) = \iint \bar{\theta}'(x, y, t) \cdot \bar{\psi}_k(x, y) dx dy \quad k=1, 2, \dots, L \quad (3.13b)$$

Yukardaki (3.13a) ve (3.13b) denklemleri sistemi yeniden oluşturma formleri olarak adlandırılırlar. Bu denklemler ile bulunan açılı mkatsayıları Navier-Stokes ve Enerji denklemlerinin POD ile elde edilen özdeğer fonksiyonlar üzerine izdüşümünü ifade eder. Bu şekilde farklı N ve L değerleri için POD ile (3.6a) ve (3.6b) denklemleri kullanılarak elde edilen $\bar{\phi}_k$ ve $\bar{\psi}_k$ değerleri ile (3.13a) ve (3.13b) denklemlerinden bulunan a_k , b_k açılı mkatsayıları (3.12a) ve (3.12b) denklemlerinde yerine konularak elde edilen çalkantı hız ve sıcaklık alanlarına ortalama hız ve sıcaklık değerleri eklenerek, doğrudan simülasyonla elde edilen hız ve sıcaklık alanları karşılaştırılabilir. Bu şekilde POD kullanılarak elde edilen özdeğer fonksiyonların sistemi temsil etme yeteneği belirlenebilir. (Güneş ve Kavrımcıoğlu, 2000).

Düşük boyutlu model elde etmek için (3.12a) ve (3.12b) denklemleri Navier-Stokes ve enerji denklemlerinde, (3.1), (3.2) ve (3.3) yerine konularak Galerkin metodu uygulanır ve deneysel özdeğer fonksiyonların ortonormallik özelliğinden faydalananarak Navier-Stokes denklemleri, hız ve sıcaklığın açılım katsayıları cinsinden, N ve L denklemden oluşan, lineer olmayan (N+L) adet, adi diferansiyel denklemsistemine dönüştürülürler:

$$\frac{da_k}{dt} = A_k + \frac{B_k}{Re} + \sum_{i=1}^N a_i \left(C_{ki} + \frac{D_{ki}}{Re} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j E_{kij} \quad (3.14a)$$

$$\frac{db_k}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L a_i b_j U_{kij} + \sum_{i=1}^N a_i V_{ki} + \sum_{i=1}^L b_i \left(W_{ki} + \frac{Z_{ki}}{Pr Re} \right) + \frac{Q_k}{Pr Re} + R_k \quad (3.14b)$$

Burada k, denklem sayısını temsil eder ve hız için $k=1, 2, \dots, N$ sıcaklık için $k=1, 2, \dots, L$ dir. (3.14a) ve (3.14b) denklemleri zorlanmış taşıma problemi için yarı bağımlıdır ve dördüncü mertebeden bir Runge-Kutta çözücüsü kullanılarak sayısal olarak integre edilirler. Yukarıdaki denklemlerin katsayıları Ek A' da verilmiştir. Runge-Kutta yöntemi için gerekli başlangıç şartları aşağıdaki denklemler kullanılarak hesaplanır:

$$a_k(0) = \iint \tilde{V}'(x, y, 0) \phi_k(x, y) dx dy \quad k=1, 2, \dots, N \quad (3.15a)$$

$$b_k(0) = \iint \theta'(x, y, 0) \psi_k(x, y) dx dy \quad k=1, 2, \dots, L \quad (3.15b)$$

3.3.3. POD sonuçları (kuvvetli sınırlandırılmış iliz-jet, $SH=0.7$)

3.3.3.1. Özdeğerler ($SH=0.7$)

POD için akış alanının anlık verileri, $Re=40$, $Re=60$ ve $Re=90$ 'da kuvvetli sınırlandırılmış jet geometrisi için Navier-Stokes denklemlerinin doğrudan sayısal simülasyonu ile elde edilmiştir. $Re=40$ ve 60 'ta, bir periyot için eşit zaman aralıklarında alınmış yirmi anlık veri ($M=20$), POD uygulamasında kullanılmıştır. Sanki-periyodik akışın olduğu $Re=90$ 'da ise, POD yöntemi için anlık veri alanı sayısı $M=100$ olarak seçilmiştir. Normalize edilmiş en enerjik on özdeğer ve onların çal kantı enerjisi ne olan toplam kat kıları Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1. Hız için normalize edilmiş en büyük on özdeğer ve onların toplam çal kantı enerjisi ne olan kat kıları. ($SH=0.7$)

Modlar	Hız					
	Re = 40		Re = 70		Re = 90	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji, %	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji, %	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji, %
1	0,56190	56,190	0,52993	52,993	0,37160	37,160
2	0,40850	97,040	0,43108	96,100	0,31328	68,489
3	0,01839	98,879	0,01987	98,087	0,12360	80,848
4	0,00586	99,465	0,01007	99,095	0,05052	85,900
5	0,00299	99,765	0,00486	99,580	0,04110	90,010
6	0,00174	99,938	0,00168	99,748	0,01915	91,925
7	0,00028	99,967	0,00108	99,857	0,01059	92,984
8	0,00019	99,985	0,00056	99,913	0,00909	93,893
9	0,00006	99,992	0,00031	99,945	0,00860	94,753
10	0,00005	99,997	0,00023	99,968	0,00695	95,448

Tablo 3.1'de görüldüğü gibi, $Re=40$ 'ta, ilki ki özdeğer birbirine yakın değerde olup, sistemin enerjisinin büyük bir kısmını (%97) içermektedir. Daha sonraki modların yakalayabildiği enerji miktarları git gide azalmaktadır. $Re=70$ içinde aynı durum söz konusu olup, enerjinin modlara yayılma oranları birbirine yakındır. Burada, $Re=40$ ve $Re=70$ için, akış yapılarının benzer davranışlar sergilemesinden kaynaklanmaktadır. Bu yayılma akışın karakterinde hiçbir değişme olmadığı zaman monoton (tek düze) olarak gerçekleşir. Bu durum $Re=40$ ve $Re=70$ 'te açıkça görülmektedir. Halbuki, $Re=90$ 'a çıkıldığında zaman, sistemin toplam enerjisi, daha

yüksek dereceli modlara doğru aşırı bir şekilde yayılmaktadır. Bu da akış yapısının değiştiğinin bir göstergesidir. Niteki makış $Re=40$ ve 70 'te periyodikken, $Re=90$ 'da sanki-periyodik yapıdadır.

3.3.3.2 Deneysel özdeğer fonksiyonlar ($S/H=0.7$)

$Re=40$, $Re=70$ ve $Re=90$ için deneysel özdeğer fonksiyonlar (Çalırkin metodu için esas fonksiyonlar) sırasıyla Şekil 3.11a, 3.11b ve 3.11c'de gösterilmiştir. Tüm Re sayıları için özdeğer fonksiyonlar, yanal duvarlar arasındaki akış bölgesini tamamen kaplamaktadırlar. $Re=40$ ve 70 değerleri için özdeğer fonksiyonlar ve enerjinin kanal içindeki yayılım benzerlik gösterirken, $Re=90$ 'da belirgin bir farklılık göze çarpmaktadır. Re sayıları arasında, en enerjik ilk iki özdeğer modları karşılaştırdığımızda, $Re=40$ ve 70 'e oranla $Re=90$ 'daki deneysel özdeğer fonksiyonların enerjisinin, akış doğrultusunda daha az yayıldığı görülmektedir. Bu durum Re sayısının artmasıyla birlikte jet akışının birbirine doğru daha fazla yaklaşması, başka bir deyişle çekirdek girdaplarının büyüklüğünün azalmasıyla ve köşe girdaplarının, buna bağlı olarak kenar girdaplarının büyüklüğünün artmasıyla açıklanabilir.

Sırasıyla $Re=40$, $Re=70$ ve $Re=90$ için yeniden oluşum formülü olan denklem (3.13a)'dan hesaplanan zamanla bağlı açılımkatsayıları (Çalırkin metodu için esas fonksiyonların katsayıları) Şekil 3.12a ve 3.12b.'de gösterilmiştir. Bunlar POD ile elde edilen doğrudan projeksiyon sonuçları olarak adlandırılır. Doğrudan projeksiyon sonuçları tasarım şartlarında geliştirilen düşük boyutlu modellerin performansını değerlendirmek için kullanılır. Şekil 3.12a'da görüldüğü gibi $Re=40$ ve $Re=70$ 'te birinci ve ikinci modlar arasında bir periyodun dörtte biri kadar faz kayması vardır ($Re=40$ için $T_{p, \text{boyutsuz}} \cong 143$, $Re=70$ için $T_{p, \text{boyutsuz}} \cong 97$) ve modlar arttıkça açılım katsayılarının genlikleri azalmaktadır. Buna ilaveten Re sayısı arttığında da açılım katsayılarının şiddetleri artmaktadır. Şekil 3.12b'de görüldüğü gibi $Re=90$ 'da, periyodik bir durumsöz konusu olmayıp akış sanki-periyodiktir ve modlar arttıkça açılımkatsayılarının şiddetleri de azalmaktadır. Açılımkatsayılarının büyüklükleri ile bunlara karşılık gelen özdeğerler arasında doğrusal bir ilişki mevcuttur.

3.3.4 Düşük boyutlu model sonuçları ($S/H=0.7$)

Yapılan çalışmalarda, mümkün olan en az sayıda denklemle, düşük boyutlu dinamik bir modele ulaşılmak istenirken, bu düşük boyutlu dinamik modelin Navier-

Stokes modelini doğru bir şekilde temsil edebilmesi için de yeterli sayıda esas fonksiyon içermesi gerekir. Böylece, potansiyel olarak önemli olan bilgilerin çoğunu içeren esas fonksiyonlar kullanılarak düşük boyutlu modeller oluşturulabilir. Geçerli bir düşük boyutlu model, en azından tasarım Reynolds sayısında Navier-Stokes denklemini temsil edebilmelidir.

3.3.4.1. $Re=40$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller

$Re=40$ 'ta POD ile oluşturulan esas fonksiyonların denklem (3.14a)'da kullanılmasıyla elde edilen düşük boyutlu modeller farklı sayıdaki modlar için incelenmiştir. Denklem(3.14a)'nın lineer olması ve katsayı hesaplarındaki sayısal türev ve integrasyonlar yüzünden bu denklemin katsayılarında küçük sapmaların mümkün olması, düşük boyutlu model sonuçlarının performansının düşmesine sebep olabilir. Bu nedenle, düşük boyutlu modelin Navier-Stokes denklemini en iyi şekilde temsil edebilmesi için alınması gerekli esas fonksiyonların sayısının önceden belirlenmesi genellikle mümkün değildir. Dolayısıyla “uygun” mod sayısı ancak deneysel yöntemlerle bulunabilir. Bu sonuçlar için, tasarım şartlarında (burada $Re=40$) en iyi modele karar vermek ve her bir düşük boyutlu modelin performansını değerlendirmek için (3.14a)-denklemi $Re=40$ 'ta sabit tutulur ve her bir denklem sistemi için $N=2, 3, 4, 5, 6, 7$ ve 8 'de, açılım katsayıları bulmak için, dördüncü dereceden bir Runge-Kutta çözücüsü kullanılarak çözülür. Denklem (3.14a) esas alınarak hesaplanan farklı sayılardaki özdeğer fonksiyonlarla oluşturulan düşük boyutlu modellerin açılım katsayıları Şekil 3.13'de gösterilmiştir. Bu düşük boyutlu model tahminleri, yeniden oluşturma (yapılandırma) formülü olan denklem(3.13a) ile hesaplanan açılım katsayılarıyla karşılaştırılarak farklı sayıdaki denklemden oluşan her bir modelin tasarım şartındaki performans değerlendirilebilir. Tasarım şartlarında 2-denklemlilik model iyi sonuç verirken, 3-denklemlilik model yapı olarak tasarım şartlarını yakalamakta, ancak açılım katsayılarının genliği daha büyük çıkmaktadır. Halbuki 4-5-6-7-8-denklemden oluşan modeller, hem yapı (periyo, $T_p, \text{boyutsuz} \cong 143$) olarak hem de açılım katsayılarının şiddetleri açısından tasarım şartlarıyla büyük bir benzerlik göstermektedir (bkz Şekil 3.5 ve 3.12a). Bunun yanı sıra, bu modellerin ilk iki modu arasındaki faz kayması yeniden yapılandırmada olduğu gibi çeyrek periyottur. Denklemleri en az sayıda tutmak için, Re sayısının 40'tan farklı değerleri için adi diferansiyel denklem sistemi çözüldüğü müz tasarım dışı şartlarda, 4-denklemlilik model esas alınmıştır. Re sayısının çeşitli değerleri için 4-

denklemleri model tahmini Şekil 3.14'te gösterilmiştir. $Re=25$ ve 30 'da çözüm zandan bağımsız (daimi)'dir, $Re=33$ 'te ise daimi çözümden daimi olmayan çözüme geçiş safhası görülmektedir. $Re=70$ 'de zana bağıli periyodik çözüm elde edilmesi ne rağmen, zana bağıli açılı m katsayılarının genlikleri, tasarımı şartındaki sonuçlara göre daha yüksek bulunmuştur. $Re=90$ 'da ise, yine açılı m katsayılarının genlikleri tasarımı şartlarına (POD sonuçlarına) kıyasla artmasına rağmen, Navier-Stokes denklemlerinin çözümüne ($Re=90$ 'daki yeniden oluşum formleriyle elde edilen açılı m katsayılarına) benzer şekilde kaotiğe yakın sanki-periyodik bir yapı yakalanmaktadır. Bu da genel olarak baktığımızda düşük boyutlu modelin, sistemin temel dinamik davranışını temsil edebildiğini göstermektedir. Şekil 3.15'te ise tasarımı şartlarında, $Re=90$ 'da elde edilen 4-denklemli düşük boyutlu modelin faz planında açılı m katsayılarının yörüngeleri görülmektedir. Burada da görüldüğü gibi akış sanki-periyodiktir.

3.3.4.2 $Re=90$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller

$Re=90$ için oluşturulan esas fonksiyonların kullanıldığı düşük boyutlu modeller, esas fonksiyonların alınan farklı sayıları için incelenmiştir. $Re=40$ 'tan farklı olarak, tasarımı şartlarında, açılım katsayılarında, kararlı/uygun salınımlar elde etmek için, minimum esas fonksiyon sayısı $N=8$ olarak bulunmuş ve $N=8$ ve 10 için analizler yapılmıştır. Tasarımı şartlarında, 8 ve 10 -denklemlerle elde edilen düşük boyutlu model tahminleri sırasıyla, Şekil 3.16a ve 3.16b'de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi her iki model de birbirine göre yakın sonuçlar vermekte ve POD ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında (bkz Şekil 3.12b) yapı olarak büyük bir benzerlik göstermektedir. Ancak açılı m katsayılarının genlikleri düşük boyutlu modeller tarafından daha büyük olarak tahmin edilmiştir. Bu durum düşük boyutlu modellerin genel bir özelliği olarak karşımıza çıkmaktadır.

3.3.4.3 Frekans analizleri

Düşük boyutlu model davranışını daha iyi analiz edebilmek için spektrumanalizleri yapılmıştır. Açılı m katsayılarının frekans spektrumanalizleri, 10 -denklemleri model için yapılmıştır. Şekil 3.17a'da görüldüğü gibi, akış sanki-periyodik olup temel frekansın değeri sırasıyla $f_0=0.0152$ ve $f_1=0.0166$ 'dır. Frekans yoğunluğunun oldukça fazla olması sanki-periyodik bir yapının olduğunu göstermektedir.

$Re=40$ için elde edilen POD sonuçlarıyla, tasarım dışı şartlarda ($Re=90$) oluşturulan 4-denklemlilik düşük boyutlu modelin spektrum analizi Şekil 3.17b’de gösterilmiştir. Burada da sanki-periyodik yapı söz konusu olup, temel iki frekans değeri, $f_0=0.0155$ ve $f_1=0.0170$ ’tir. Sonuç olarak, düşük boyutlu modeller ile sayısal simülasyonların frekans analizlerinde doğrudan karşılaştırma yapılmasına rağmen (çünkü sayısal simülasyonlarda hızlar esas alınırken, düşük boyutlu modellerde açılım katsayıları esas alınmaktadır), tasarım ve tasarım dışı şartlardaki düşük boyutlu modellerin frekans analizlerine bakıldığında, genel olarak frekans yoğunluğu ve temel frekans değerleri bakımından sistem davranışını iyi bir şekilde temsil edebildiği görülmektedir. (bkz. Şekil 3.5)

3.3.5 POD sonuçları (zayıf sınırlandırılmış jet, $St=0.3$)

3.3.5.1 Özdeğerler ($St=0.3$)

POD için gereken anlık akış verileri, $Re=40$ ve $Re=70$ te zayıf sınırlandırılmış jet geometrisi Navier-Stokes denkleminin doğrudan sayısal simülasyonu ile elde edilmiştir. $Re=40$ de, bir periyot için eşit zaman aralıklarında alınmış yirmi anlık veri ($M=20$), POD uygulamasında kullanılmıştır. $Re=70$ ’te ise sanki-periyodik bir akış yapısı söz konusu olduğundan dolayı daha sağlıklı sonuçlar elde etmek için anlık veri sayısı kırk’a ($M=40$) çıkartılmıştır. Normalize edilmiş en enerjik on özdeğer ve onların çalkantı enerjisi ne olan toplam katkılar Tablo 3.2’de verilmiştir.

Tablo 3.2 Hız için normalize edilmiş en büyük on özdeğer ve onların toplam çalkantı enerjisi ne olan katkılar. ($St=0.3$)

Modes	Hız			
	Re = 40		Re = 70	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)
1	0,54513	54,513	0,23728	23,728
2	0,41013	95,526	0,21974	45,702
3	0,02437	97,963	0,17779	63,481
4	0,01348	99,311	0,10286	73,767
5	0,00375	99,686	0,05202	78,969
6	0,00192	99,878	0,04014	82,983
7	0,00054	99,932	0,02432	85,415
8	0,00034	99,966	0,02096	87,511
9	0,00012	99,978	0,01719	89,230
10	0,00010	99,988	0,01358	90,588
20			0,00336	97,513

Görül düğü gibi $Re=40$ ve 70 için hızın özdeğerleri çiftler halindedir ve her bir çift e ait özdeğerler yaklaşık olarak eşit büyüklükte dirler. $Re=40$ 'ta, ilk iki mod akışın toplam çal kantı kinetik enerjisinin büyük bir kısmını (%5.5) yakalarken, Re sayısı 70 'e çıkarıld ı ğ za man akış enerjisinin daha yüksek modlara doğru aşırı bir şekilde yayıld ı ğ, ilk iki modda toplam akış enerjisinin sadece %45.7'sini, on mod sonunda ise ancak %90.6'ını yakalayabil di ği görülmektedir.

Re sayısının artırılmasıyla enerjinin yüksek modlara doğru yayılması olayı, akışın karakterinde hiçbir değişme olmad ı ğ za man tekdüze/monoton olarak gerçekleşir ve Reynolds sayısının artırılmasıyla akışta kararsızlık oluşmaz ve bifürkasyon meydana gelmez. Ancak, bizim problemi mizde oldu ğu gibi Reynolds sayısı 40 'tan 70 'e çıkarıld ı ğ nda bifürkasyon olayı meydana gelmekle birlikte büyük yayılma oranları gözlenmekte ve enerjinin büyük miktarı ancak yüksek dereceli modlarla yakalanabilmektedir. Bu durum doğal olarak $Re=70$ için oluşturulan düşük boyutlu modelde denklem sayısının artmasına yol açmaktadır.

Zayıf sınırlandırılmış iki z-jet akışında, enerji denklemi eklenerek, $Re=40$ ve $Pr=0.71$ 'de ısı l jet akış problemi ni n, doğrudan sayısal simülasyonundan elde edilen sıcaklık alanı için POD esaslı deneysel özdeğer fonksiyonlar yeniden oluşturulmuştur. POD uygulamasında, iki periyot üzerinde eşit aralıklarla alınmış kırk anlık veri ($M=40$) alanı kullanılmıştır. Sıcaklık için, normalize edilmiş en büyük on özdeğer mod ve onların çal kantı enerjisine olan toplam katkılar Tablo 3.3'de verilmiştir.

Tablo 3.3. Sıcaklık için normalize edilmiş en büyük on özdeğer ve onların toplam çal kantı enerjisine olan katkılar. ($St=0.3$)

Modes	Sıcaklık ($Re=40$ için)	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)
1	0,40990	40,990
2	0,36516	77,506
3	0,05443	82,949
4	0,05227	88,176
5	0,04447	92,622
6	0,04345	96,967
7	0,00996	97,963
8	0,00974	98,937
9	0,00241	99,178
10	0,00233	99,412

Sıcaklık değışiminin sözkonusu olduğu durumu için, hızlarda olduğu gibi, sıcaklığın özdeğerleri de çiftler halinde ve bir çifte ait özdeğerler yaklaşık olarak eşit büyüklüktedir. Hız için ilk iki özdeğer mod toplam çalkantı enerjisinin büyük bir kısmını oluştururken, sıcaklık özdeğer modlarında çalkantı enerjisi diğer modlara doğru daha fazla yayılmaktadır. Ancak hız modlarında olduğu gibi, sıcaklığın ilk on modu toplam enerjinin %99'undan fazlasını içermektedir.

3.3.5.2 Deneysel özdeğer fonksiyonlar ($S/H=0.3$)

$Re=40$ ve $Re=70$ için deneysel özdeğer fonksiyonlar sırasıyla Şekil 3.18. ve 3.19.'da gösterilmiştir. $Re=40$ 'ta özdeğer fonksiyonlar iki jetin arasında yoğunlaşmıştır. Burada jetler birbirleri ile serbestçe etkileşirler. Zayıf sınırlandırılmış jet akışında, jetlerin birbirleriyle etkileşmesi, kararsızlık mekanizmasını oluşturmakta, yani daimi akış yeterince büyük Re sayısında jetlerin birbirleriyle olan etkileşimi neticesinde kararsız hale gelmektedir. Re sayısı $Re=40$ 'tan $Re=70$ 'e çıkarıldığında çalkantı enerjisi kanal içinde akış doğrultusunda daha geniş bir mesafeye yayılmakta, bunun yanı sıra akış dinamiklerini temsil eden esas fonksiyonlar (tutarlı yapılar) akış bölgesinde daha büyük bir alana yayılmaktadır.

$Re=40$ 'da hız ve sıcaklık alanları için, $Re=70$ 'de ise yalnızca hız alanı için tekrar oluşum formleri olan (3.13a) ve (3.13b) denklemlerinden hesaplanan açılım katsayıları (Galerkin metodu için esas fonksiyonların katsayıları) Şekil 3.20. ve 3.21'de bir periyod aralığında sırasıyla gösterilmiştir. Burada da açılım katsayıları çiftler halinde bulunmakta ve ilk iki açılım katsayısı arasında çeyrek periyotluk bir faz kayması meydana gelmektedir. Elde edilen bu sonuçlar akışın dinamik davranışını yansıttıklarından dolayı tasarım şartlarında düşük boyutlu Galerkin modelinin performansını değerlendirmek için kullanılırlar.

3.3.6 Navier-stokes denklemlerinden elde edilen düşük boyutlu model sonuçları, $S/H=0.3$ (sabit sıcaklıkta)

3.3.6.1 $Re=40$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller

Bu bölümde, $Re=40$ 'ta oluşturulan deneysel özdeğer fonksiyonların kullanılmasıyla elde edilen düşük boyutlu modeller, farklı denklem sayıları için Şekil 3.22'de gösterilmiştir. Tasarım şartlarında (burada $Re=40$) en iyi modele karar vermek ve her bir düşük boyutlu modelin performansını değerlendirmek için, (3.14a) denklemi

$Re=40$ 'ta ayarlanmış ve $N=4, 6, 8$ için dördüncü dereceden bir Runge- Kutta çözücüsü kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemi, zamana bağlı açılım katsayılarını bulmak için çözülmüştür. Bu düşük boyutlu model tahminleri, tekrar yapılandırma (yeniden oluşum) formülü olan denklem (3.13a) ile hesaplanan açılım katsayılarıyla karşılaştırıldığında gerek genlik, gerekse frekans açısından son derece uyumludur. Denklemsayısını en az sayıda tutmak için Re sayısının 40'tan farklı değerleri için adi diferansiyel denklem sistemini çözdüğümüz tasarımı dışı şartlarda, 4-denklemlilik model seçilmiştir

3.3.6.2 $Re=70$ için geliştirilen düşük boyutlu modeller

$Re=70$ 'te oluşturulan esas fonksiyonların kullanıldığı düşük boyutlu modeller, farklı esas fonksiyon sayıları için incelenmiştir. Burada $Re=40$ 'tan farklı olarak, kararlı bir salınım davranışı elde etmek için minimum esas fonksiyon sayısı $N=6$ olarak bulunmuştur. Ancak düşük boyutlu modelin performansının makul doğrulukta elde edilebilmesi için, $N \geq 8$ alınmalıdır. 8-denklemden oluşturulan düşük boyutlu model tahminleri Şekil 3.23'te gösterilmiştir. Zamana bağlı açılım katsayılarının frekans spektrum analizleri, 8-denklemlilik model için yapılmıştır. Sonuçlar, akışın sanki-periyodik olduğunu göstermekte ve Navier-Stokes denklemlerinin çözümünüyle elde edilen sanki-periyodik çözüme uyumaktadır. 8-denklemlilik düşük boyutlu model akış dinamiklerini yapısal olarak tahmin etmekle birlikte, sanki-periyodik çözüm için temel iki frekansın değerini ve açılım katsayılarının genliklerinin değerini yakalamada yetersiz kalmıştır. Düşük boyutlu modelde esas fonksiyonların sayısı artırılarak ve/veya uygun ortogonal ayırma (POD) 'da anlamlı verilerin sayısı artırılarak bu eksiklik giderilebilir.

3.3.7. Navier-stokes ve enerji denkleminde edilen düşük boyutlu model sonuçları

(3.14a) ve (3.14b) denklemleri dördüncü dereceden Runge- Kutta çözücüsü kullanılarak verilen başlangıç şartlarından integre edilerek kolayca bulunabilir. Bu şekilde elde edilen açılım katsayıları ile (3.13a) ve (3.13b) denklemlerinden POD kullanılarak elde edilen katsayılar ile karşılaştırılır. Daha önce açıklandığı gibi, seri açılımında alınan esas fonksiyonların sayısı, dinamik modelin doğru bir şekilde tahmin edilmesinde son derece önemlidir. (3.14a) ve (3.14b) denklemleri, tasarımı şartları ($Re=40$, $Pr=0.71$) için ayarlanır ve N ile L' nin çeşitli değerleri için adi

diferansiyel denklem sistemi çözülür. Hz ve sıcaklık için belirlenen esas fonksiyonların sayısını belirlerken (N ve L), POD esaslı esas fonksiyonların yalnızca enerji içeriklerine dikkat etmek yanıltıcı olabilir. Şekil 3.24, tasarım şartlarında farklı sayılarda alınan esas fonksiyonlarla oluşturulan düşük boyutlu modellerle hesaplanan açılım katsayılarının, yaklaşık iki periyot için zamanla değişimini göstermektedir. (4+3)-denklemlilik ($N=4$, $L=3$) düşük boyutlu model tahminleri, açılım katsayılarındaki terimlerin genliklerini en iyi yansıtan modeldir. Şekil 3.25’de, faz alanında açılım katsayılarının yörüngeleri, (4+3)-denklemlilik model için gösterilmiştir. Üst üste çizilen ilk iki esas fonksiyonun katsayıları çok yakın sonuçlar vermekte, fakat daha yüksek modlarda düşük boyutlu modelin açılım katsayıları genliklerini, doğrudan izdüşüm (3.14a) ve (3.14b) denklemiyle elde edilenlere oranla daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu farklılığın, daha yüksek dereceden esas fonksiyonların türev işlemleriyle başlatılan olası hatalardan kaynaklandığı düşünülmektedir.

Tasarım dışı ($Re \neq 40$) şartlarda problemin dinamik davranışını incelemek için (4+3)-denklemlilik düşük boyutlu model kullanılmıştır. Ayrıca $Pr \neq 0.71$ için sistemin dinamik davranışını incelemek mümkündür, ancak Prandtl sayısının çeşitli değerleri için POD esaslı özdeğer fonksiyonların güvenilirliği öncelikli olarak kontrol edilmek zorundadır. Bu yüzden, bu problemde $Pr=0.71$ ’de sabit tutulup, çeşitli Re sayıları için analizler yapılmıştır. Re sayısının çeşitli değerleri için (4+3)-denklemlilik düşük boyutlu model tahminleri Şekil 3.26’da gösterilmiştir. Navier-Stokes denklemlerinden de görüldüğü gibi, akış problemi sıcaklık probleminden bağımsız olarak incelenmiş ve (4+3)-denklemlilik model, eş zamanlı olarak integre edilmiştir. Başka bir ifadeyle sıcaklık etkisinin ilave edilmesi akış probleminin sonuçlarını değiştirilmemektedir. Şekil 3.26’de görüldüğü gibi $Re=20$ ve 25 için çözüm zamanından bağımsızdır. Bununla birlikte $Re=30$ ve 50 için zamana bağlı çözümler elde edilmiştir. Hopf bifürkasyonunun görüldüğü kritik Re sayısı, 25 ile 30 arasında bir değerdedir. Ancak tasarım dışı şartlarda yüksek Reynolds sayıları için (örneğin $Re=70$), (4+3)-denklemlilik model, sistemin dinamiklerini yakalamada yetersiz kalmıştır. Başka bir deyişle, tasarım dışı şartlarda Re sayısı çok fazla yükseltildiğinde, (4+3)-denklemlilikten oluşan düşük boyutlu model, sistemin dinamik davranışlarını temsil edememektedir. Öte yandan denklem sayısı artırıldığında sistemin dinamik davranışlarını yakalamak mümkün olabilmektedir. Örneğin, tasarım dışı şartlarda (burada $Re=70$), (8+8)-denklemlilik düşük boyutlu modelin açılım katsayılarının

zamana bağılı değişimi, faz yörüngeleri ve frekans spektrum analizleri Şekil 3.27’de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi çözümsanki-periyodiktir ve (8+8)-denklemlî model, tasarımı dışı şartlarda sistem davranışlarını doğru olarak temsil etmektedir. Düşük boyutlu model kontrol uygulamalarında kullanılmadan önce, alınan esas fonksiyonların sayısı artırılarak modelin uygulama alanı belirlenmelidir.

3.3.8 Kuvvetli ve zayıf sınırlandırma durumlarının POD ve düşük boyutlu modeller açısından karşılaştırılması

$Re=40$ ’ta, $S/H=0.7$ ve 0.3 için elde edilen özdeğerlere bakıldığında her iki durum içinde özdeğerler çiftler halinde olmakla birlikte, kuvvetli sınırlandırmada enerji düşük dereceli modlarda (çok az da olsa) daha fazla toplanmaktadır. Bu da akışın daha kararlı olduğunun bir göstergesidir. Buna ilaveten enerjinin modlara yayılışındaki bu değişim çok az ve aşamalı bir şekilde gerçekleştiğinden akış yapısında çatalanma meydana gelmemiştir. Her iki durumu için bakıldığında kuvvetli sınırlandırmada özdeğer fonksiyonların akış bölgesinde daha fazla yayıldıkları görülmektedir. Dolayısıyla kararsızlık mekanizması, kuvvetli sınırlandırmada duvar ile jet etkileşimi olurken, zayıf sınırlandırmada iki jetin birbiriyle olan etkileşimi olarak açıklanabilir. Bunun yanı sıra zayıf ve kuvvetli sınırlandırmada birbirine karşılık gelen modların özdeğer fonksiyonları arasındaki yapısal benzerlik dikkat çekicidir. Zayıf ve kuvvetli sınırlandırma durumları için $Re=40$ ’da oluşturulan sayısal simülasyonların POD’i ile elde edilen düşük boyutlu modelin tasarımı dışı şartlarda yaptığı tahminlere baktığımızda, kuvvetli sınırlandırma durumunda Hopf bifürkasyonunun daha yüksek kritik Re sayısında gerçekleştiği görülmektedir. Bu sonuçlar literatürde (**Soong ve Tzeng, 1998**) elde edilen sonuçlarla büyük ölçüde uyumaktadır.

3.4 Genel Sonuçlar

3.4.1 Sayısal sınırlama sonuçları

Yanal duvarların sınırlama etkisine göre jet akışı kuvvetli ve zayıf sınırlanmış akışlar olarak sınıflandırılabilir. Zayıf sınırlama durumunda akış kararsızlık mekanizması olarak iki jetin birbiriyle etkileşimi baskın rol oynamakla birlikte, özellikle jetlerin akış doğrultusuna dik yöndeki serbestliği kuvvetli sınırlamaya oranla daha yüksektir. Zayıf sınırlama durumunda, daimi hal söz konusu olsa da, akış asimmetrik olma eğilimindedir ve çoklu çözümler mevcuttur. Kuvvetli sınırlama durumunda, akış kararsızlığında duvar ile jetlerin etkileşimi baskın olup, jet akışının salınım hareketi kanala dik yöndedir ve akış kararsızlığı etkili bir şekilde sönmelenir/bastırılır. Bu kararlılaştırma etkisiyle periyodik olmayan salınımlar ve kaotik davranışlar geciktirilebilir. Dolayısıyla Hopf bifürkasyonu daha yüksek kritik Reynolds sayılarında gerçekleşir. Aynı zamanda her bir Re içinde tek bir çözüm vardır ve daimi akışta çözümsimetriktir.

Bu problemi çini iki-jet akışının dinamik davranışında kaosa geçiş aşamaları, daimisi metrik, daimi asimmetrik (yalnızca zayıf sınırlama durumunda), periyodik, yüksek harmoniklerle periyodik, sanki-periyodik ve kaotik durum şeklinde sıralanabilir. Bu çalışmada kaosa geçiş aşamaları periyot katlanmalarıyla değil, sanki-periyodiklikle olmaktadır.

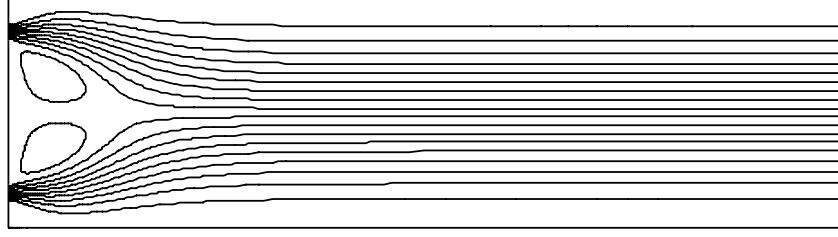
Yapılan bu araştırmalar, iki-jet akışında daimi rejimden zamana bağlı rejime geçiş aşamalarının ve kararlılık mekanizmalarının anlaşılması açısından oldukça önem taşımaktadır.

3.4.2 Düşük boyutlu model sonuçları

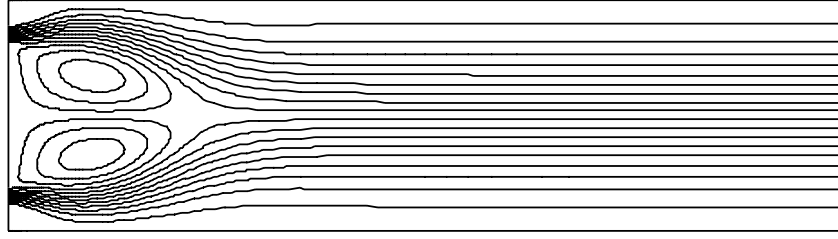
Çok az sayıda POD esaslı deneysel özdeğer fonksiyon kullanılarak tasarlanmışartlarına yakın ve Re sayısının düşük değerlerinde, sistemin dinamik davranışını yeterince temsil eden düşük boyutlu modeller elde etmek mümkündür. Re sayısının daha yüksek değerleri için, genel olarak dinamik sistem davranışları karmaşık bir hale gelir. Daha tutarlı dinamik sistem davranışları elde edebilmek için, seri açılımlarında alınan esas fonksiyonların sayılarının artırılması gerekir. Ama bu artış sıradan esas fonksiyonlarla (örneğin, trigonometrik polinomlar) karşılaştırılamayacak kadar azdır.

Sonuçlar göstermiştir ki, düşük boyutlu modellerle elde edilen açılı m katsayılarının genlikleri, doğrudan çözümle elde edilenlere kıyasla daha büyük olabilmekte, buna karşın akışın dinamik yapısı doğru olarak belirlenebilmektedir. Kararlı yapılarda düşük boyutlu modelin performansı artmaktadır. Örneğin jet akışında kuvvetli sınırlanmış geometri, zayıf sınırlanmış geometriye göre daha kararlı olduğundan, türbülansa geçiş olayı Reynolds sayısının daha yüksek değerlerinde gerçekleşir. Dolayısıyla kuvvetli sınırlandırılmış jetler için geliştirilen düşük boyutlu modellerin geçerlilik alanı daha fazla olduğu saptanmıştır.

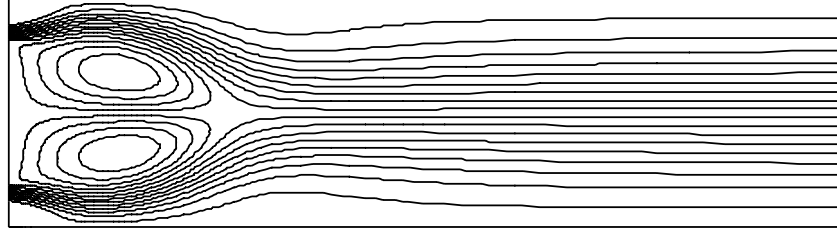
Re = 10



Re = 20



Re = 30



Şekil 3.3a. Reynold s sayısı n ın eşitli değerleri nde, doğrudan sayısal si mül asyonla el de edil en akı mi zleri. ($S H=0.7$)

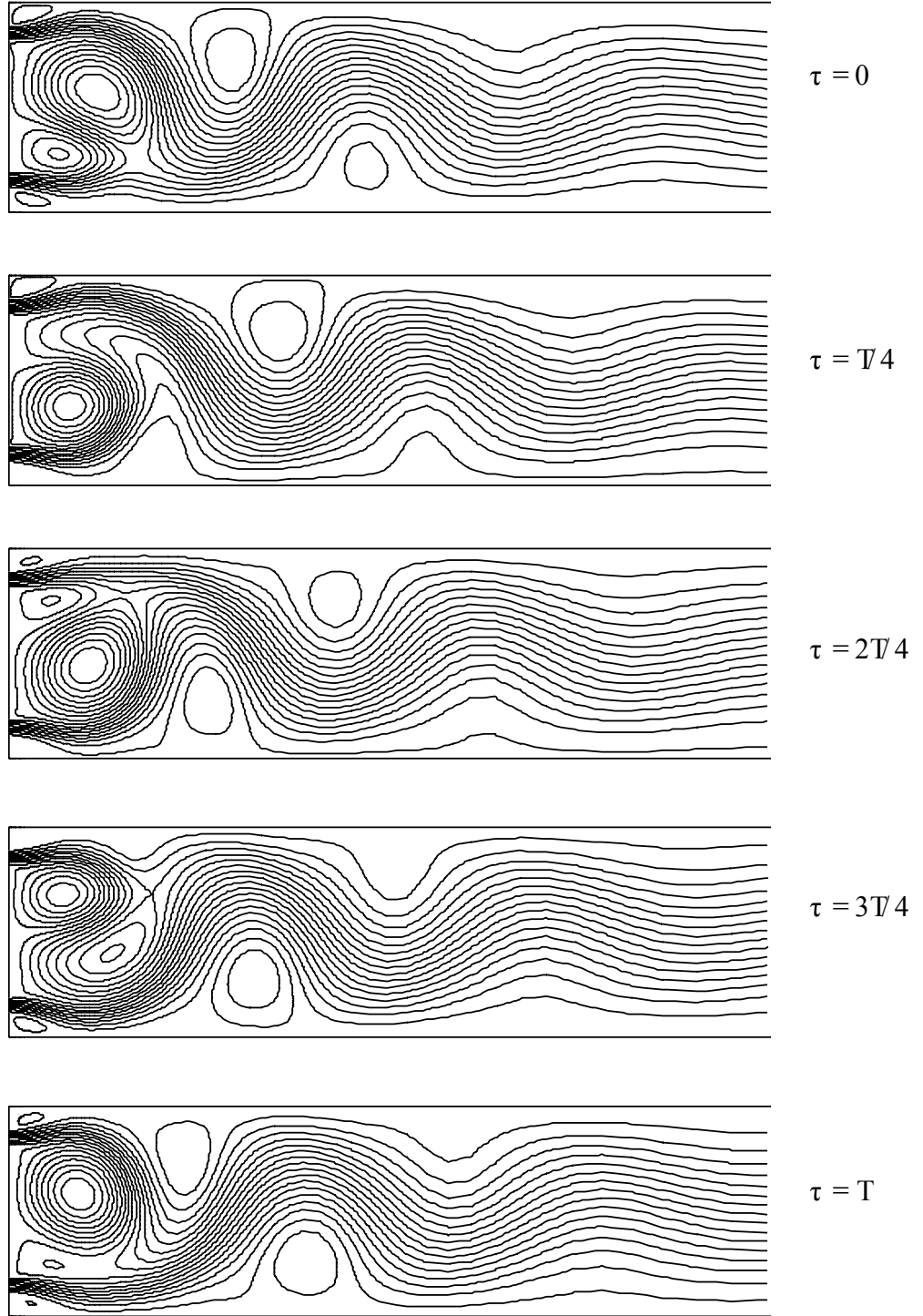
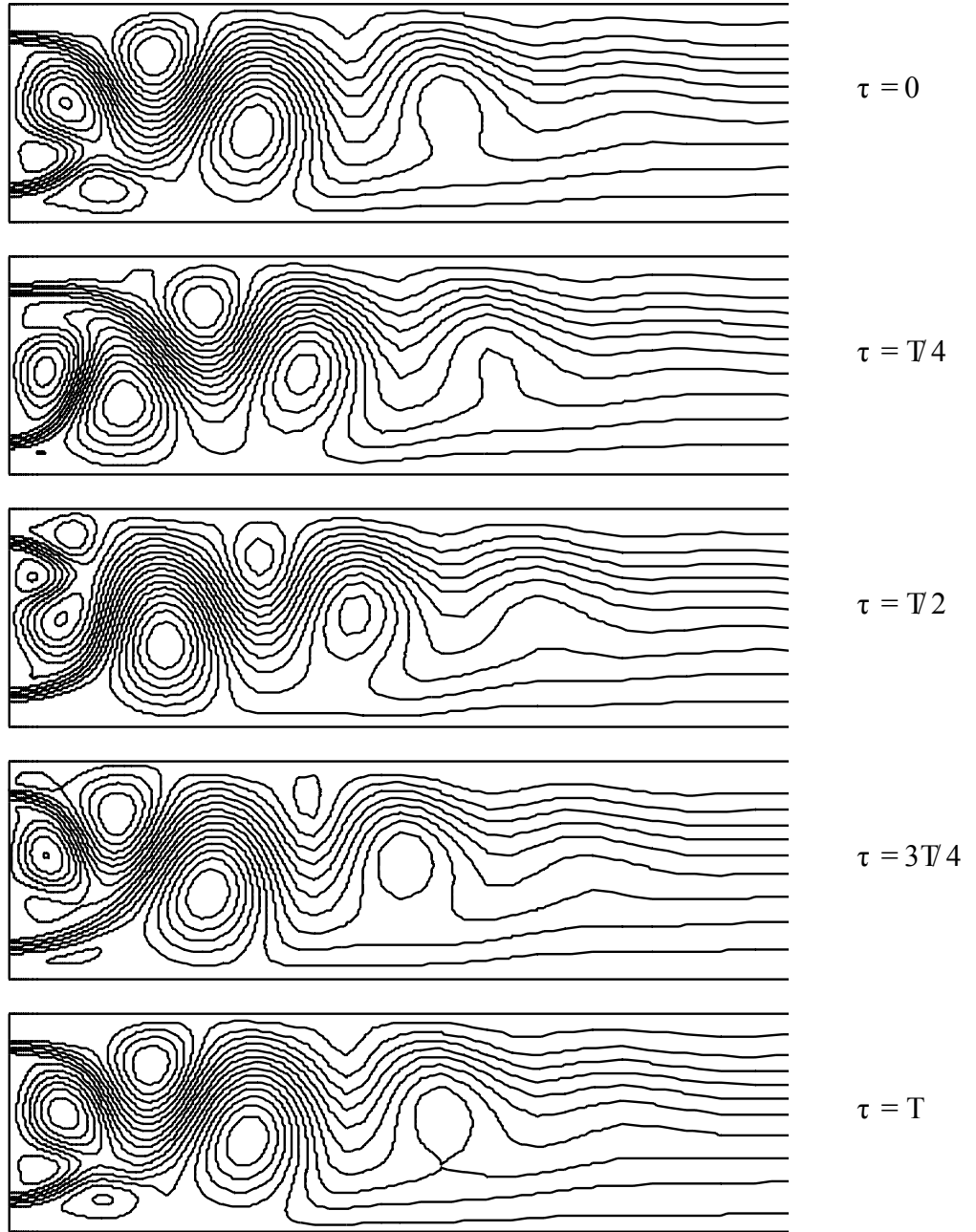
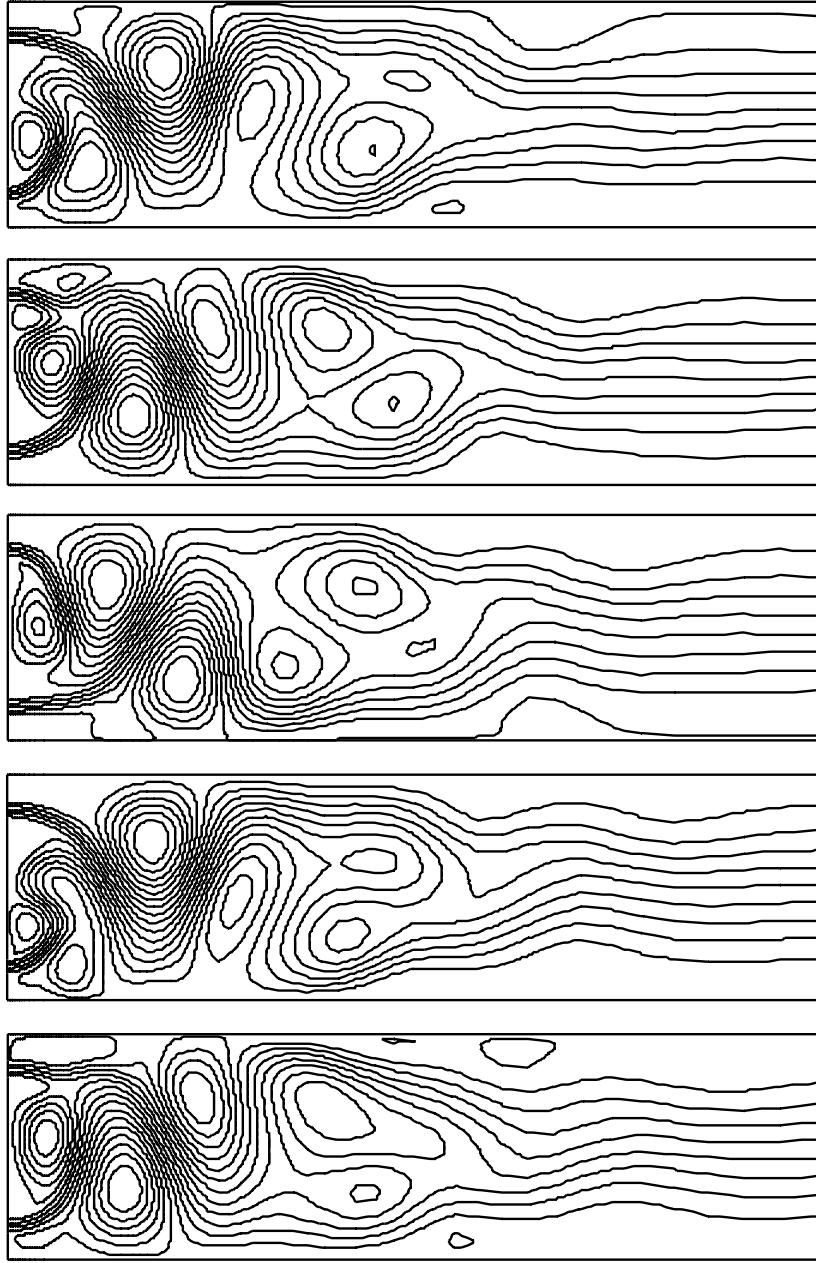


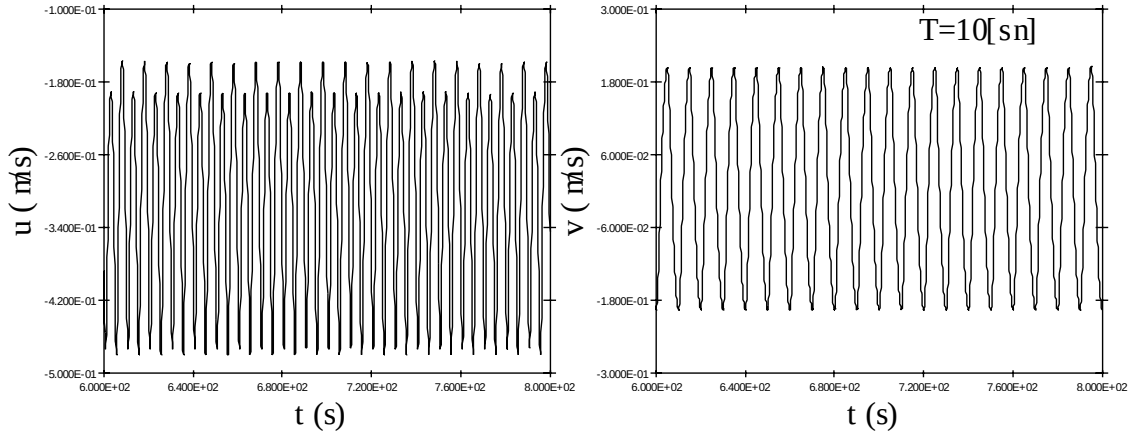
Figure 3.3b. $Re=40$ 'ta bir periyod için eşit zaman aralıklarında alınmış akım çizgileri. ($S/H=0.7$)



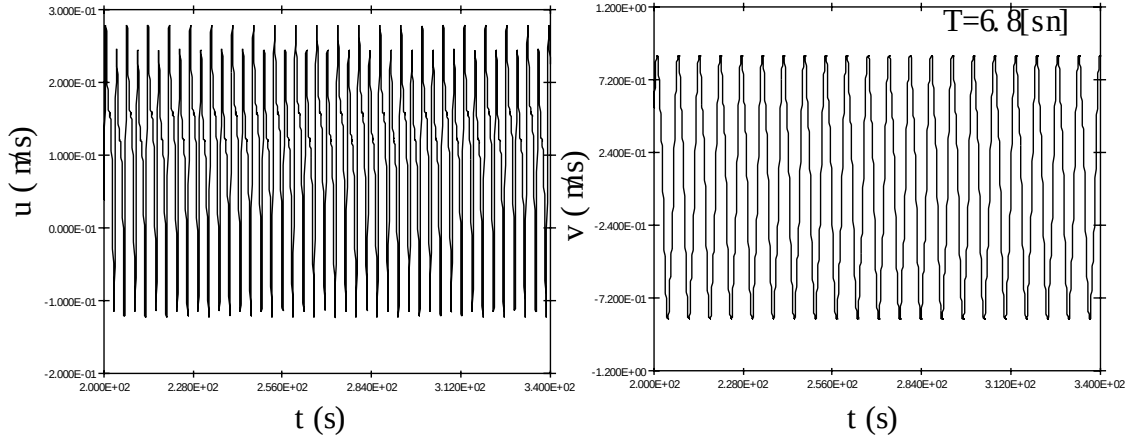
Şekil 3.3c. $Re=70$ 'te bir periyod için eşit zaman aralıklarında alınmış akı çizgileri.
($S/H=0.7$)



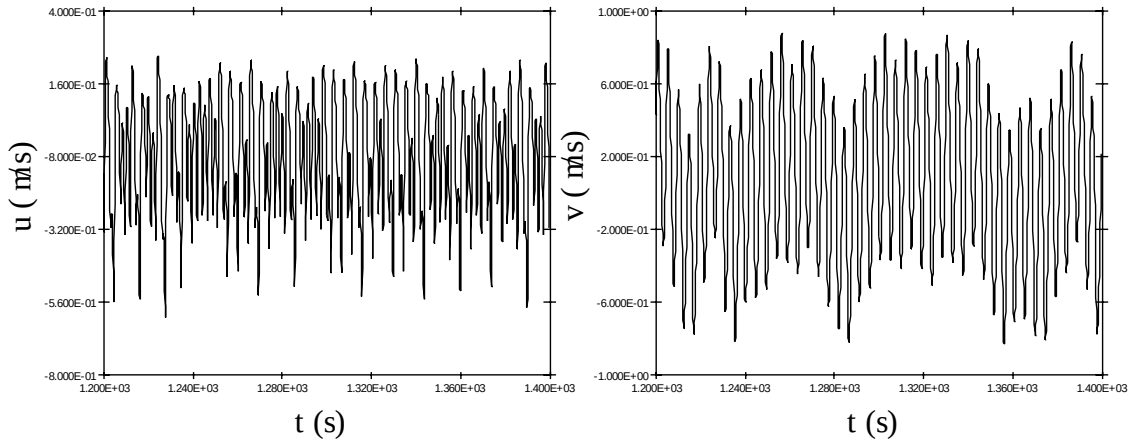
Şekil 3.3d $Re=90$ 'da eşit zaman aralıklarında alınmış akı çizimleri. ($S/H=0.7$)



a) $Re=40$

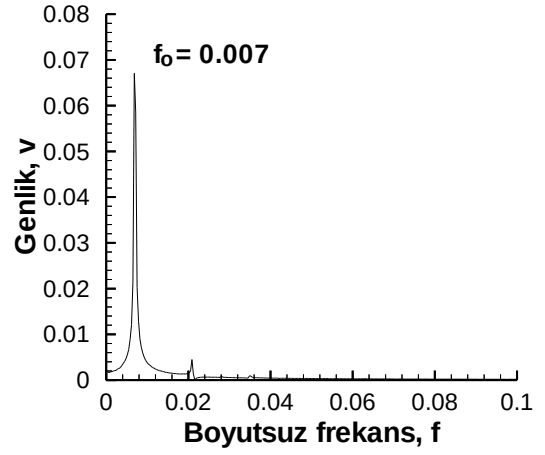
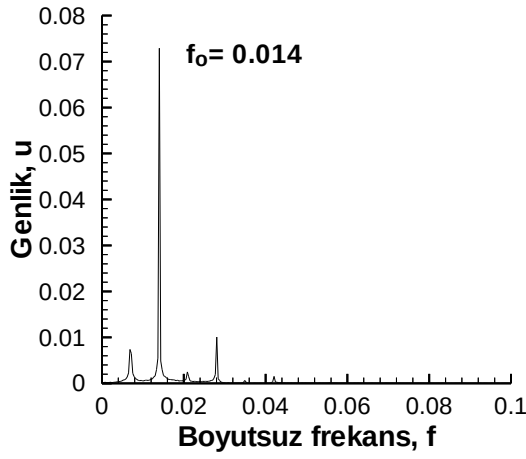


b) $Re=70$

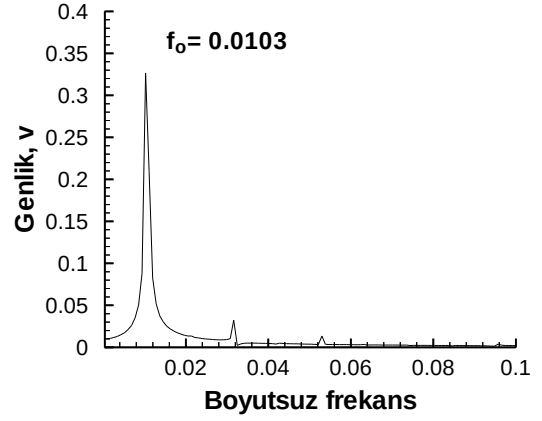
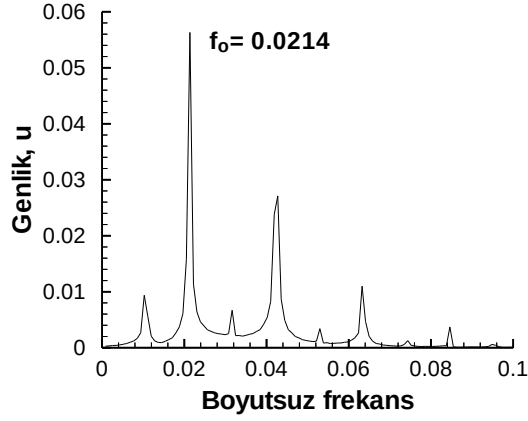


c) $Re=90$

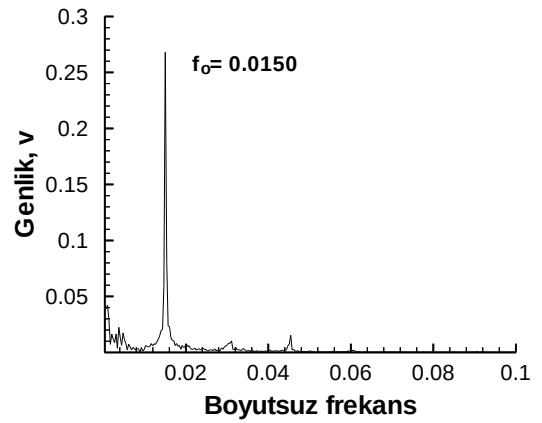
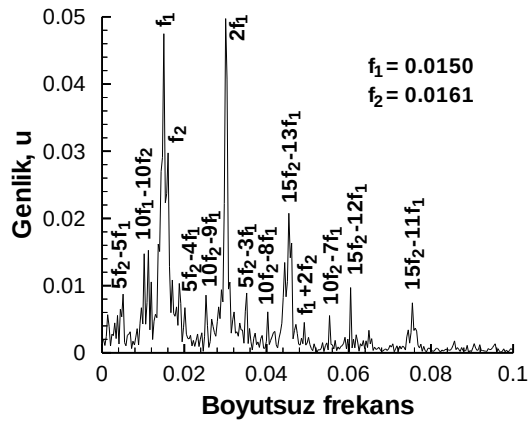
Şekil 3.4 Farklı Reynold s sayılarında için Navier-St okes modeli yle el de edilen sayısal s i mül asyonlarda, ($X=5.4$, $Y=0$) noktası için alınmış u , v hızlarının zaman a göre değ iş i m i. ($S/H=0.7$)



a) $Re=40$

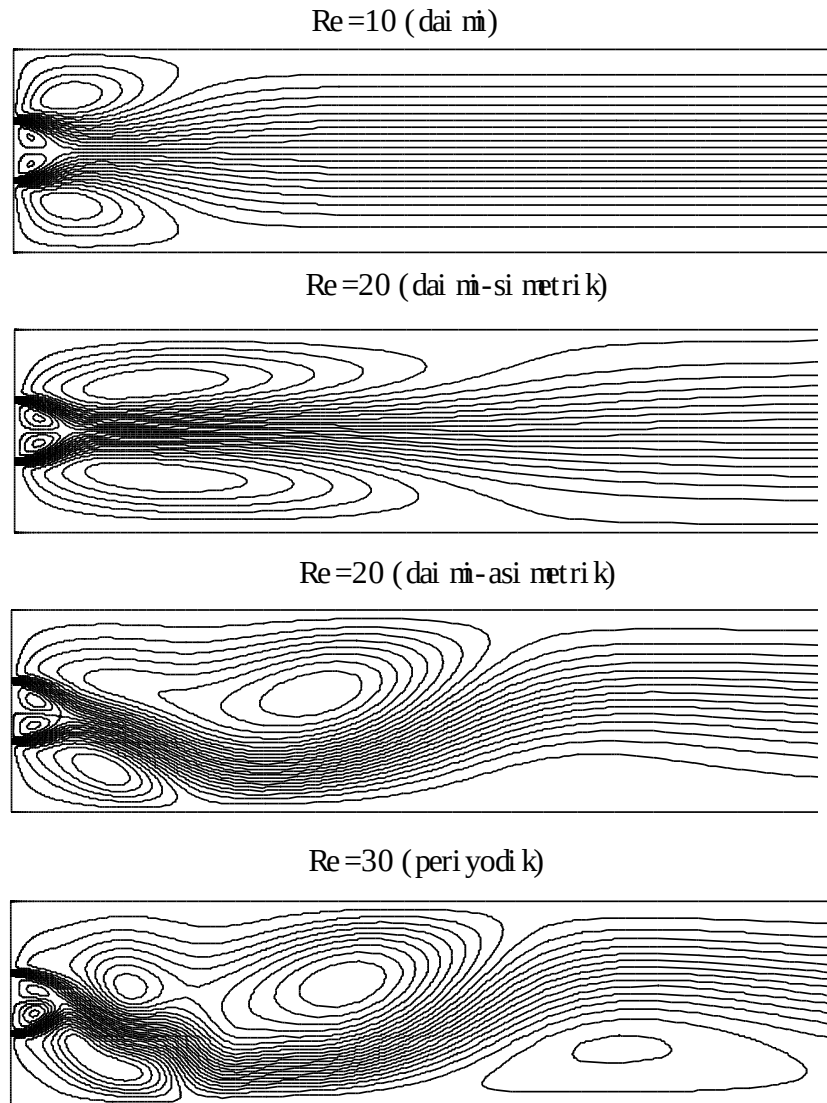


b) $Re=70$

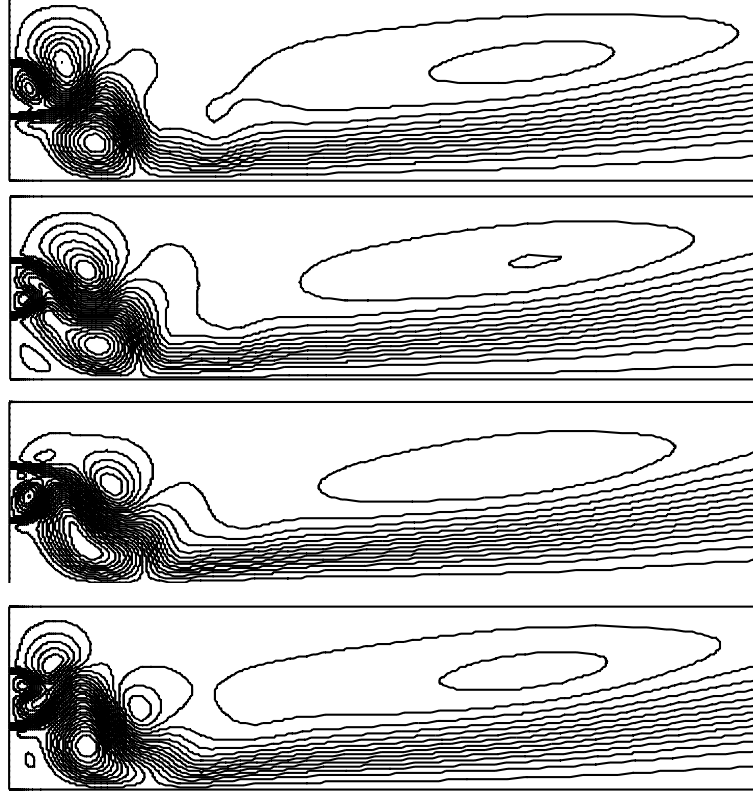


c) $Re=90$

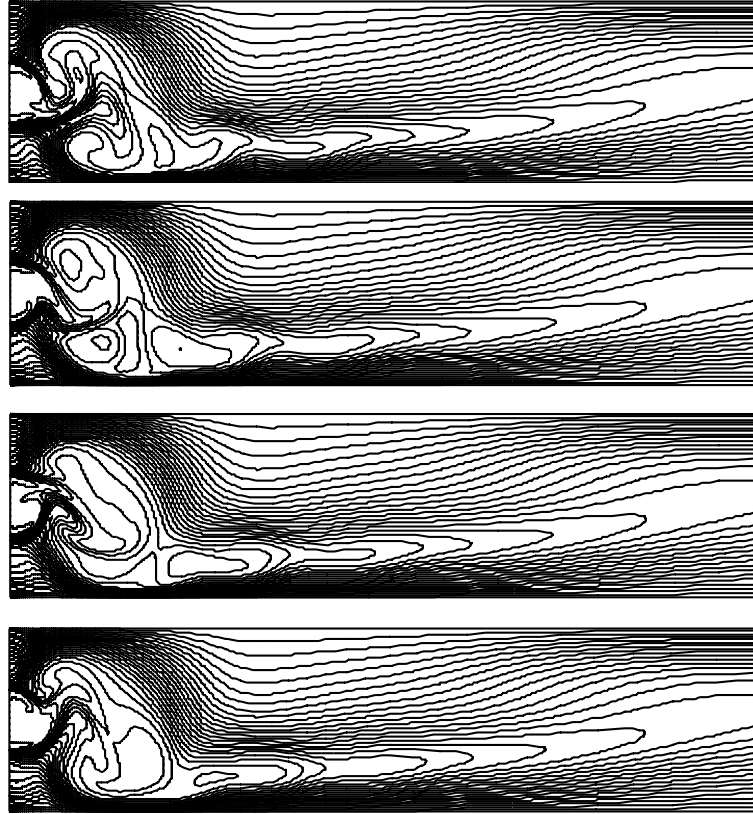
Şekil 3.5. Farklı Reynolds sayıları için elde edilen sayısal simülasyonların
($X=5.4$, $Y=0$) noktasındaki spektrumanalizleri. ($SiH=0.7$)



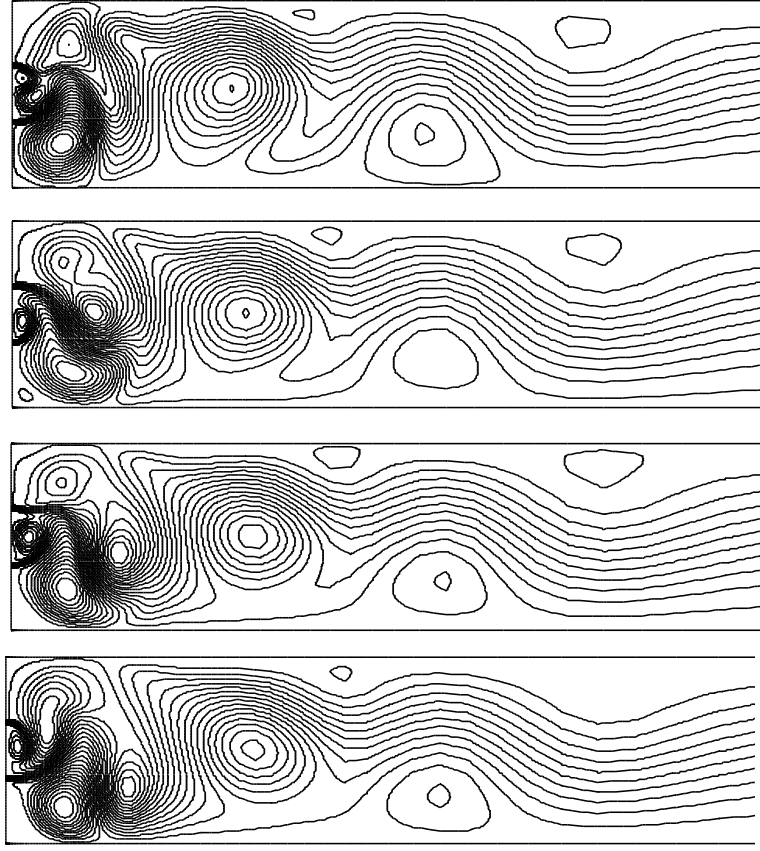
Şekil 3.6 Reynolds sayısının çeşitli değerleri için akı mçizgileri. ($S/H=0.3$)



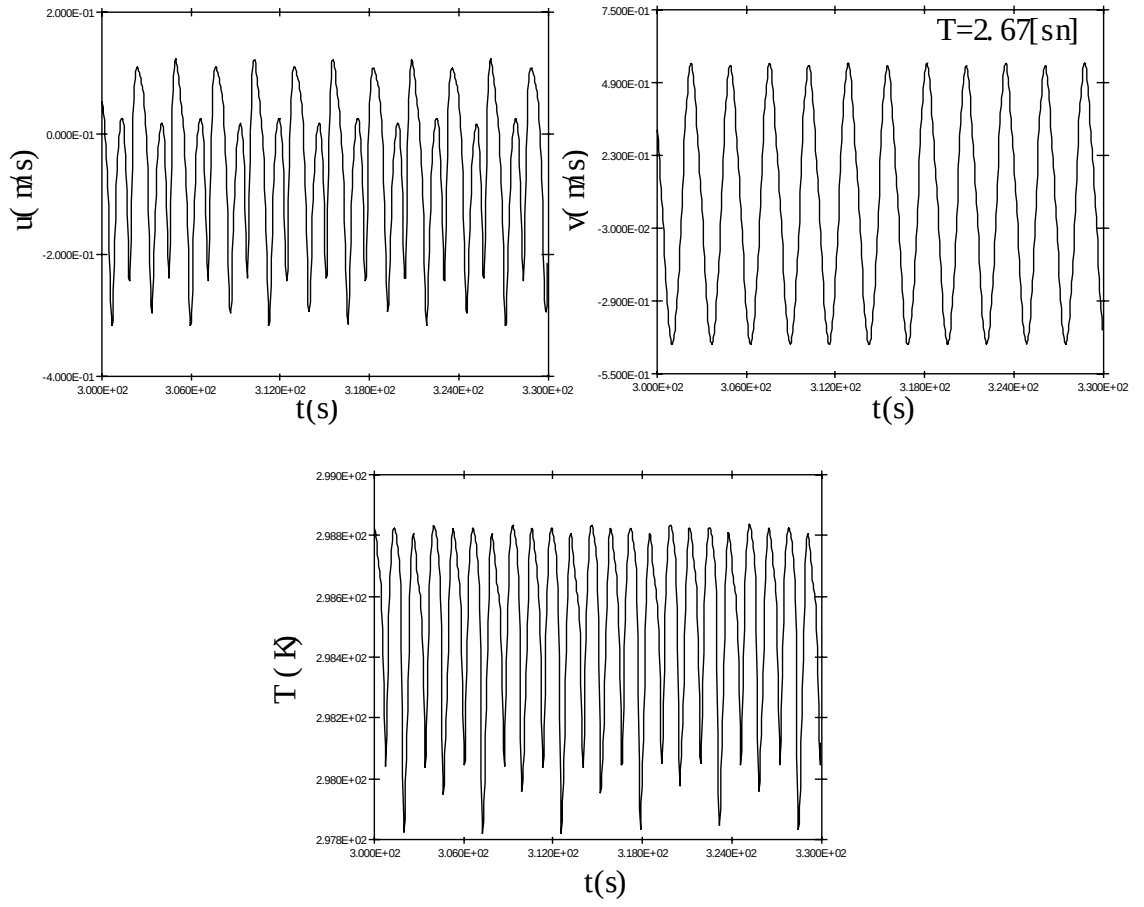
Şekil 3.7a. $Re=40$ 'ta, bir periyot için eşit aralıklarla alınmış akı mıçizgileri. ($St=0.3$)



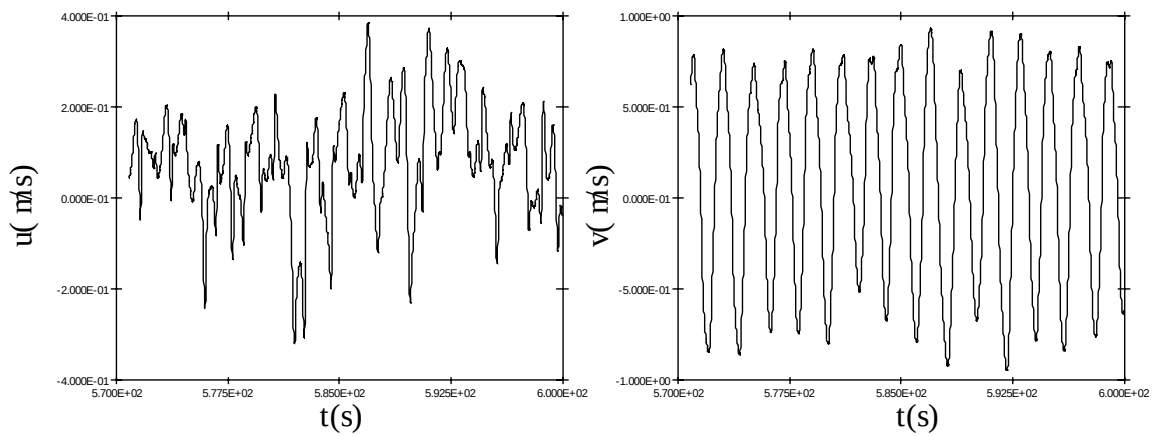
Şekil 3.7b. $Re=40$ 'ta, bir periyot için eşit aralıklarla alınmış eş sıcaklık eğrileri. ($St=0.3$)



Şekil 3.8 $Re=70$ 'te, bir periyot için eşit aralıklarla alınmış akı çizimleri. ($S/H=0.3$)

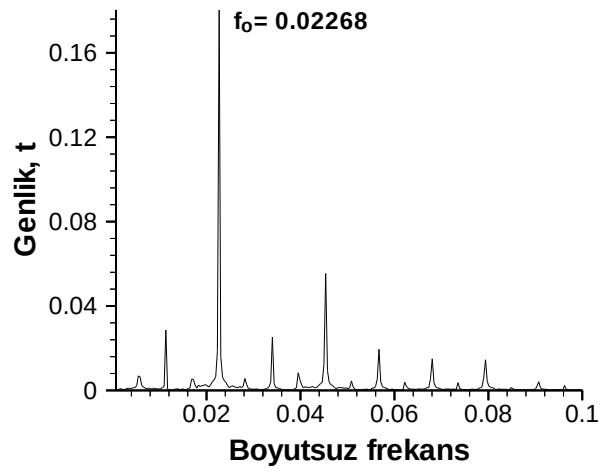
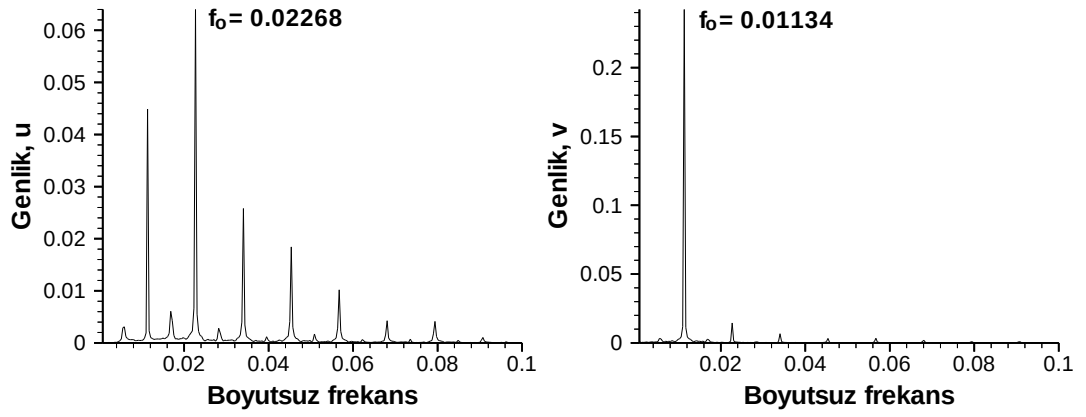


a) $Re=40$

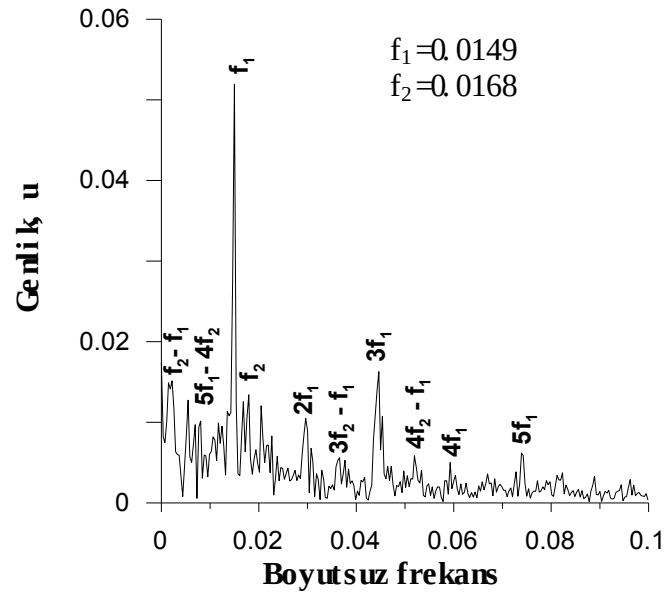


b) $Re=70$

Şekil 3.9. Farklı Reynolds sayıları için Navier-Stokes modeliyle elde edilen simülasyonlarda, $(X=6.3, Y=0)$ noktası için alınmış u ve v hızlarının ve T sıcaklığının zamanına göre değişimi. ($S/H=0.3$)

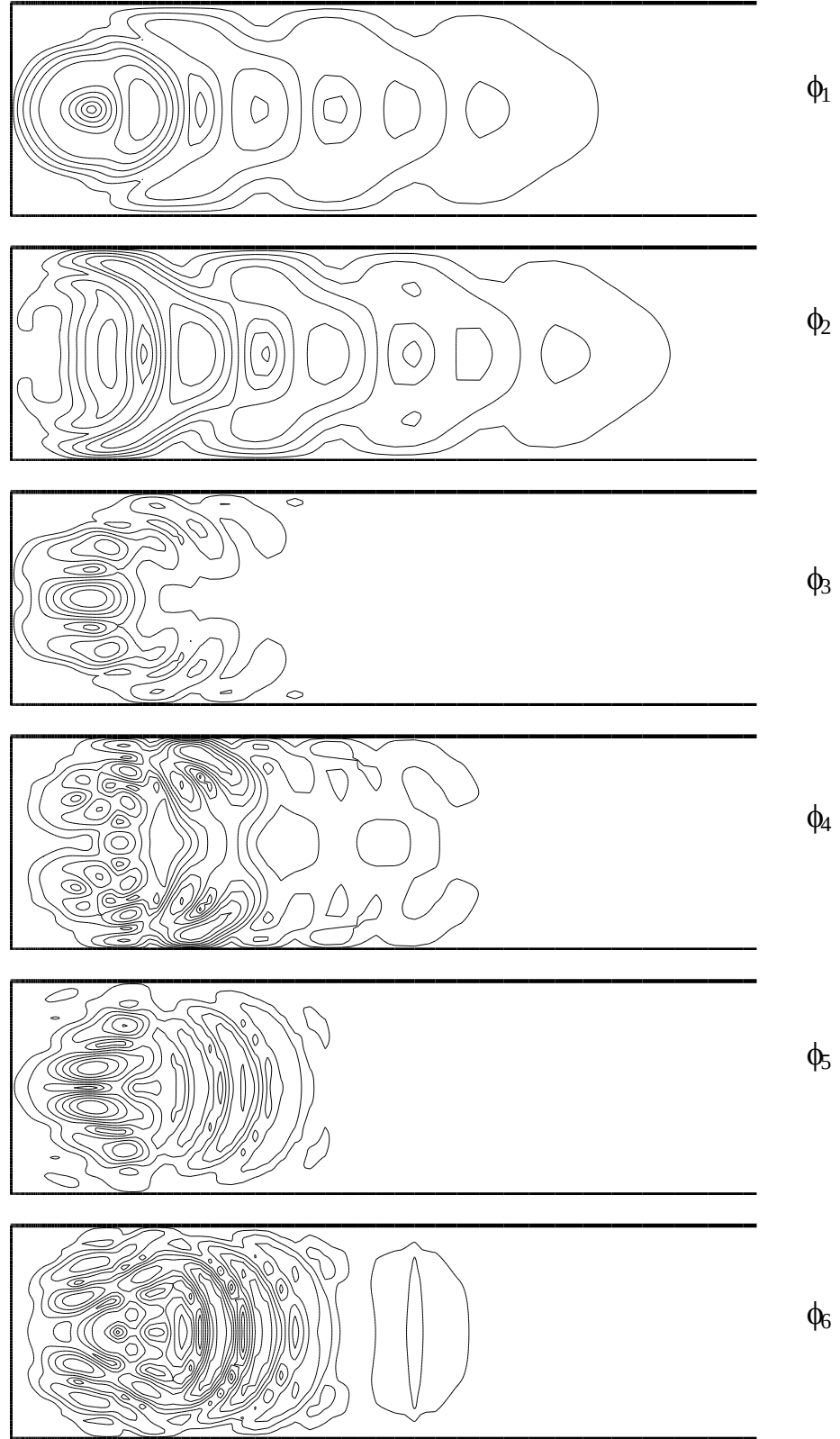


a) $Re=40$

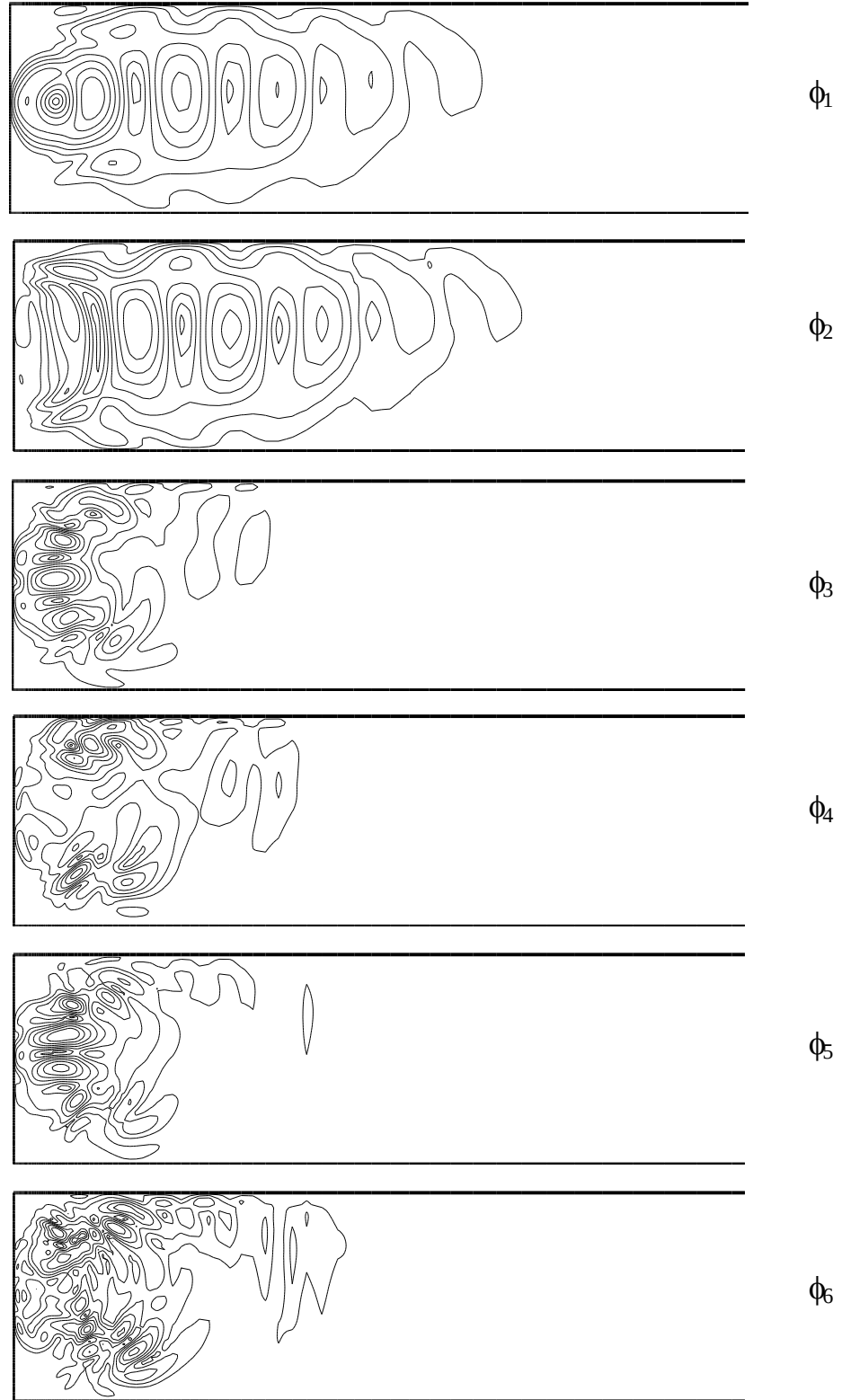


b) $Re=70$

Şekil 3.10. $Re=40$ ve 70 için elde edilen sayısal simülasyonların ($X=5.4$, $Y=0$) noktasındaki spektrum analizleri. ($SH=0.3$)



Şekil 3.11a. $Re=40$ için en enerjik altı özdeğer fonksiyon. ($S/H=0.7$)



Şekil 3.11b. $Re=70$ için en enerjik altı özdeğer fonksiyon. ($S/H=0.7$)

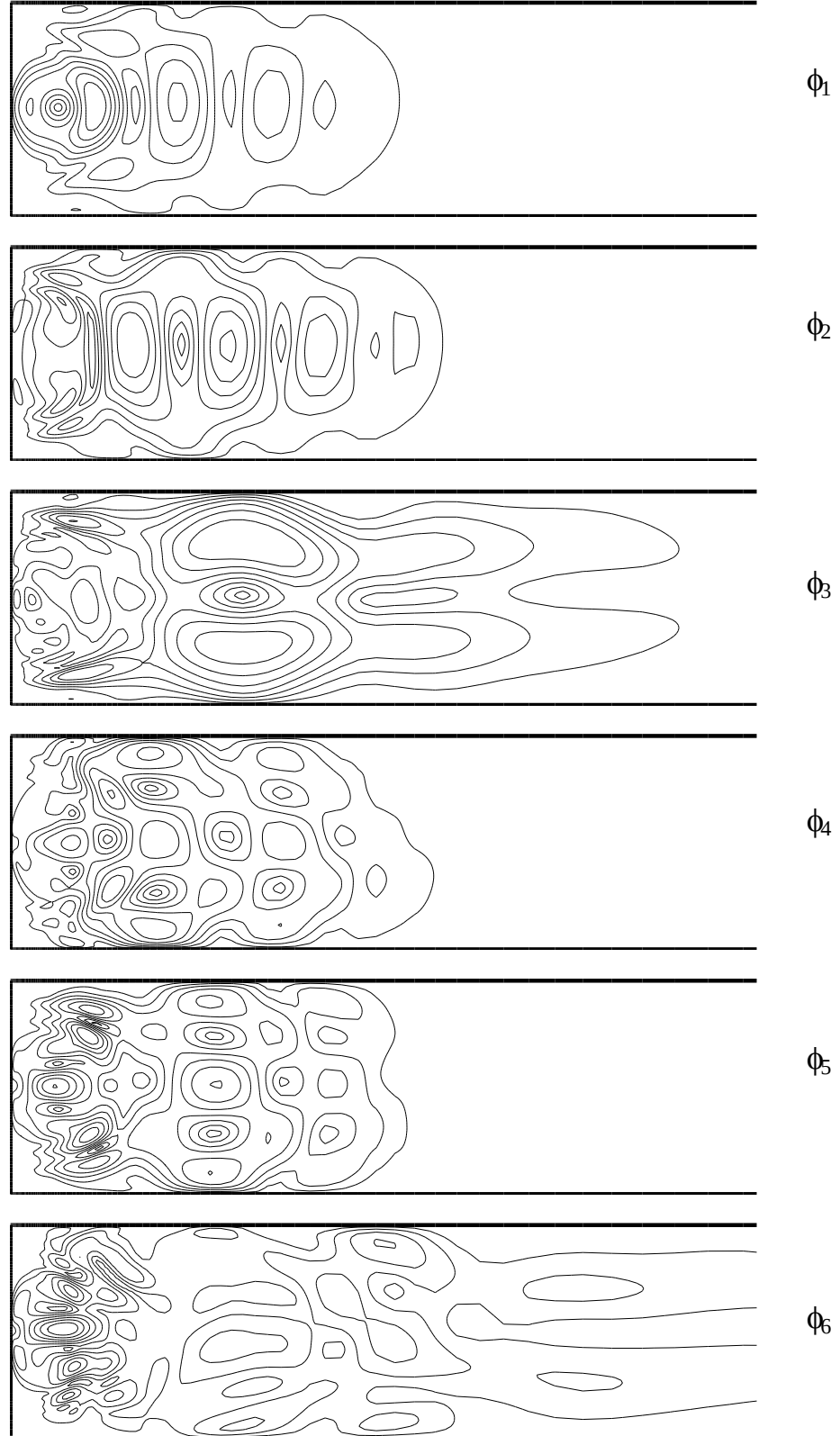
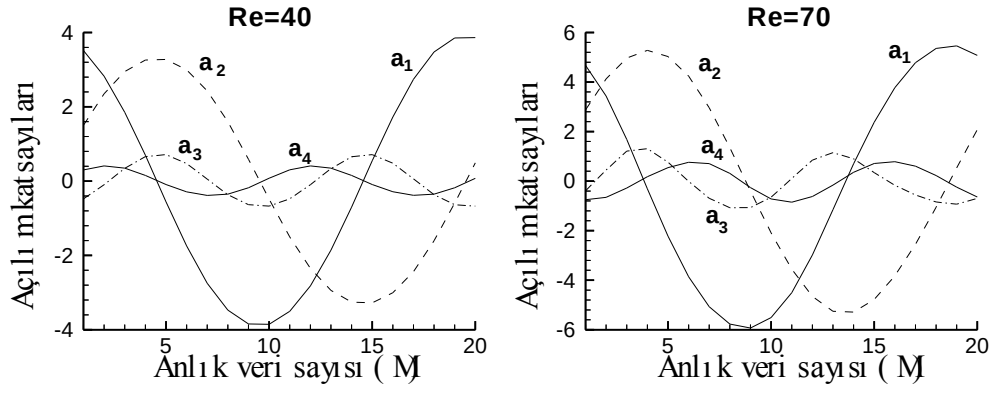
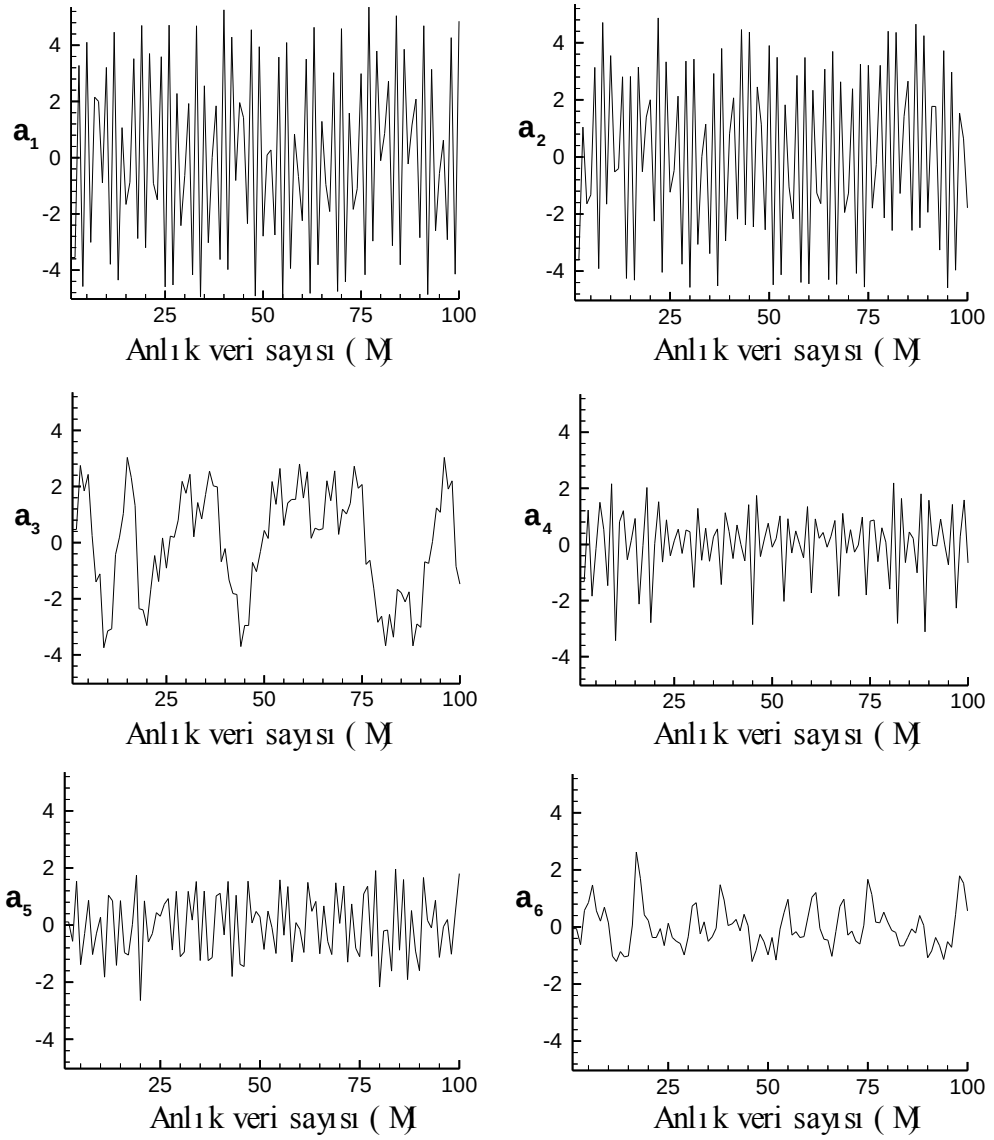


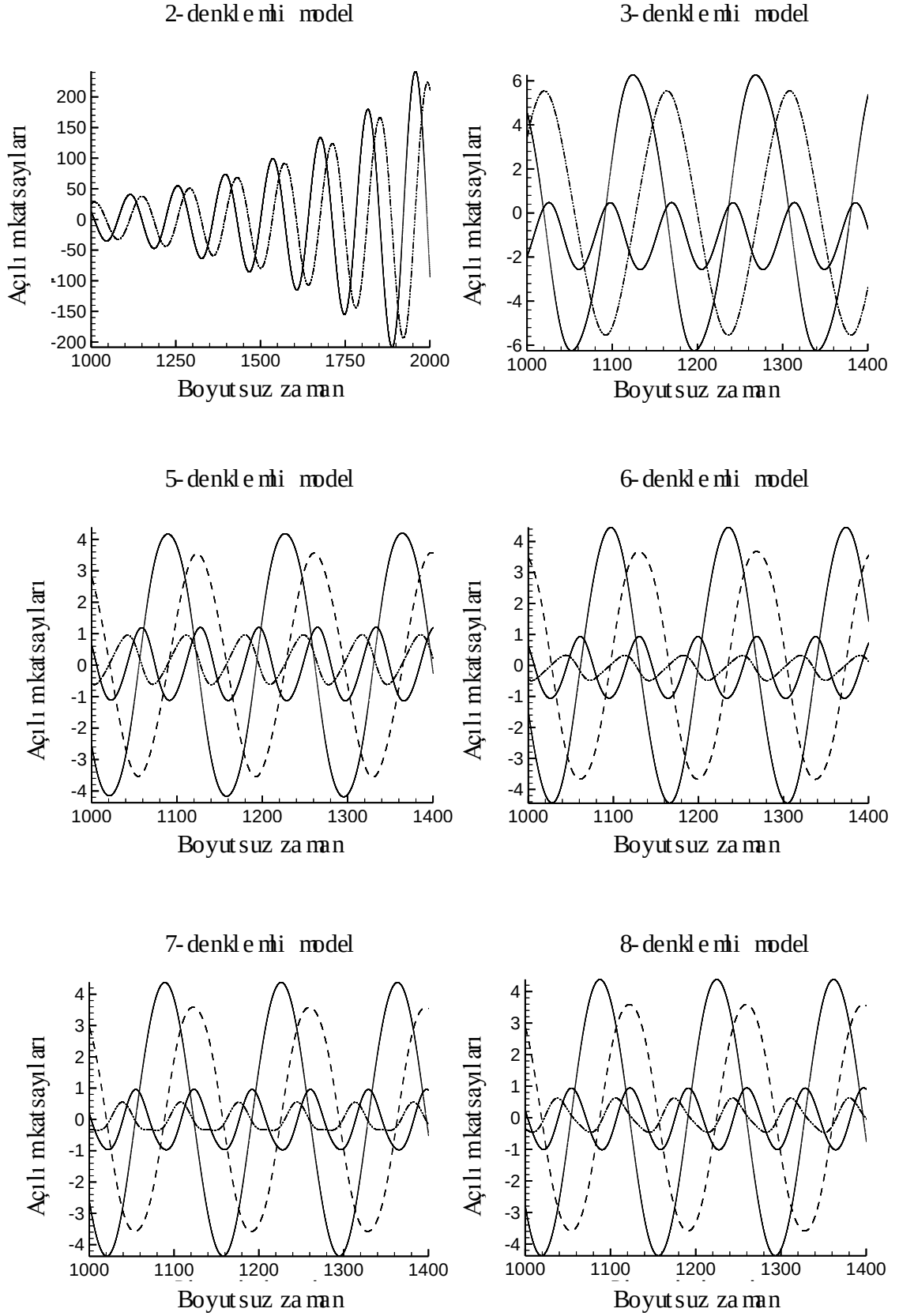
Figure 3.11c. $Re=90$ için en enerjik altı özdeğer fonksiyon ($S/H=0.7$)



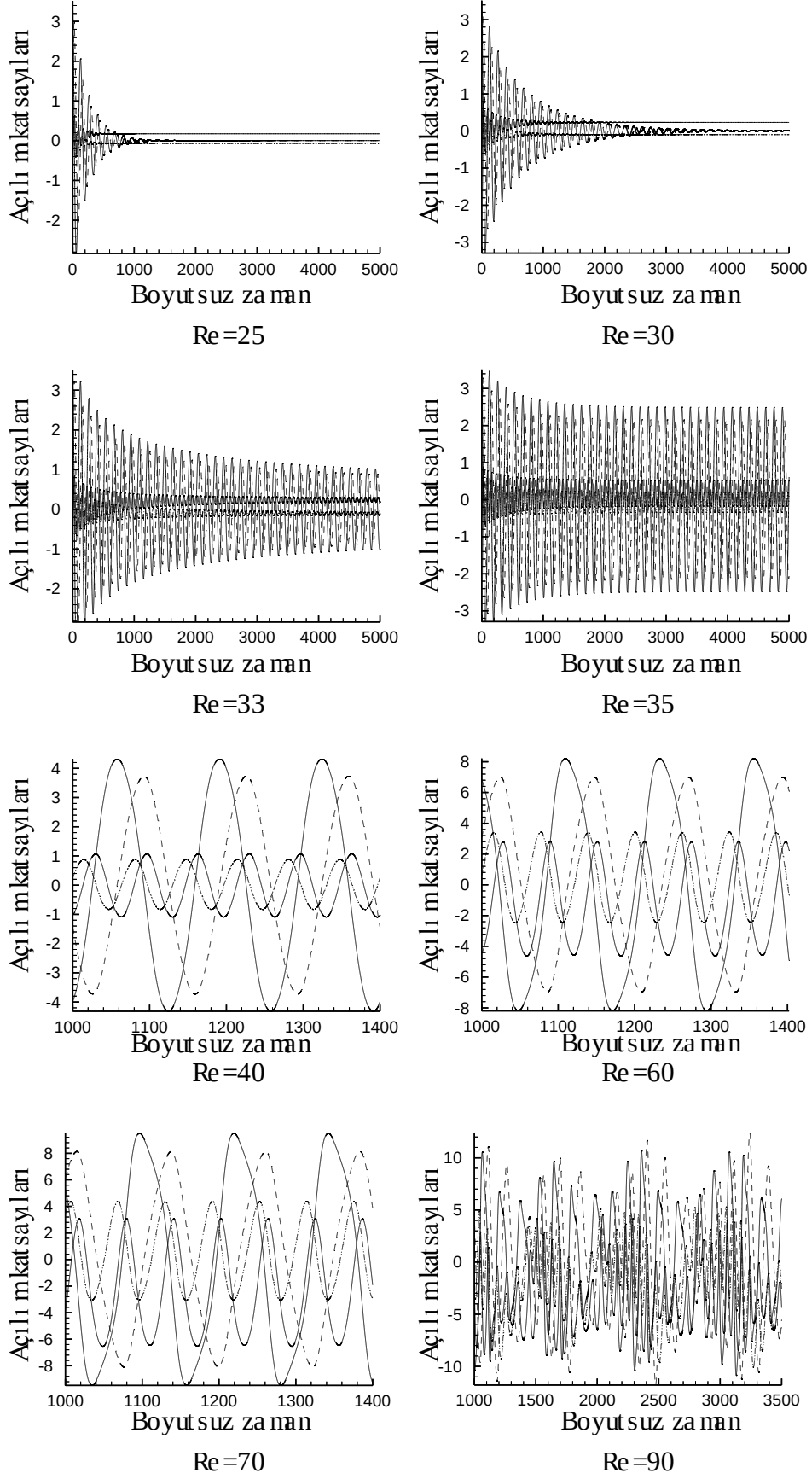
Şekil 3.12a. $Re=40$ ve 70 'te yeniden oluşan for mül üle hesaplanan açılı m kat sayıları. ($S/H=0.7$)



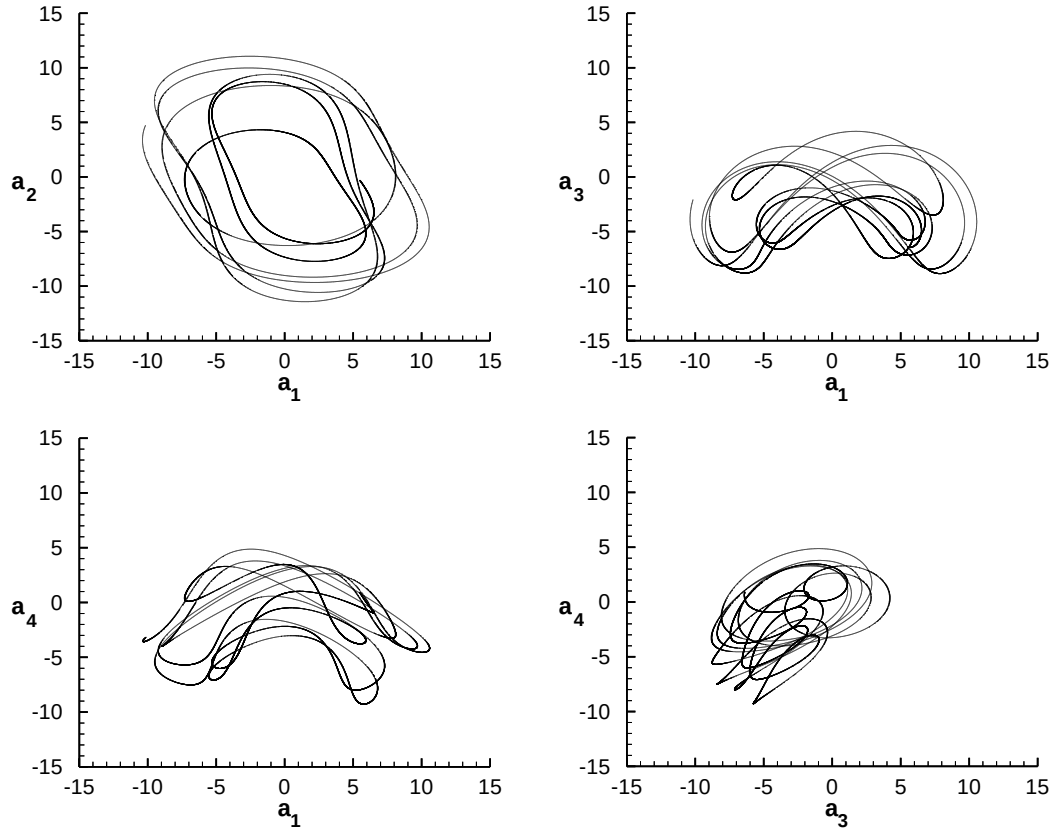
Şekil 3.12b. $Re=90$ 'da yeniden oluşan for mül üle hesaplanan açılı m kat sayıları. ($S/H=0.7$)



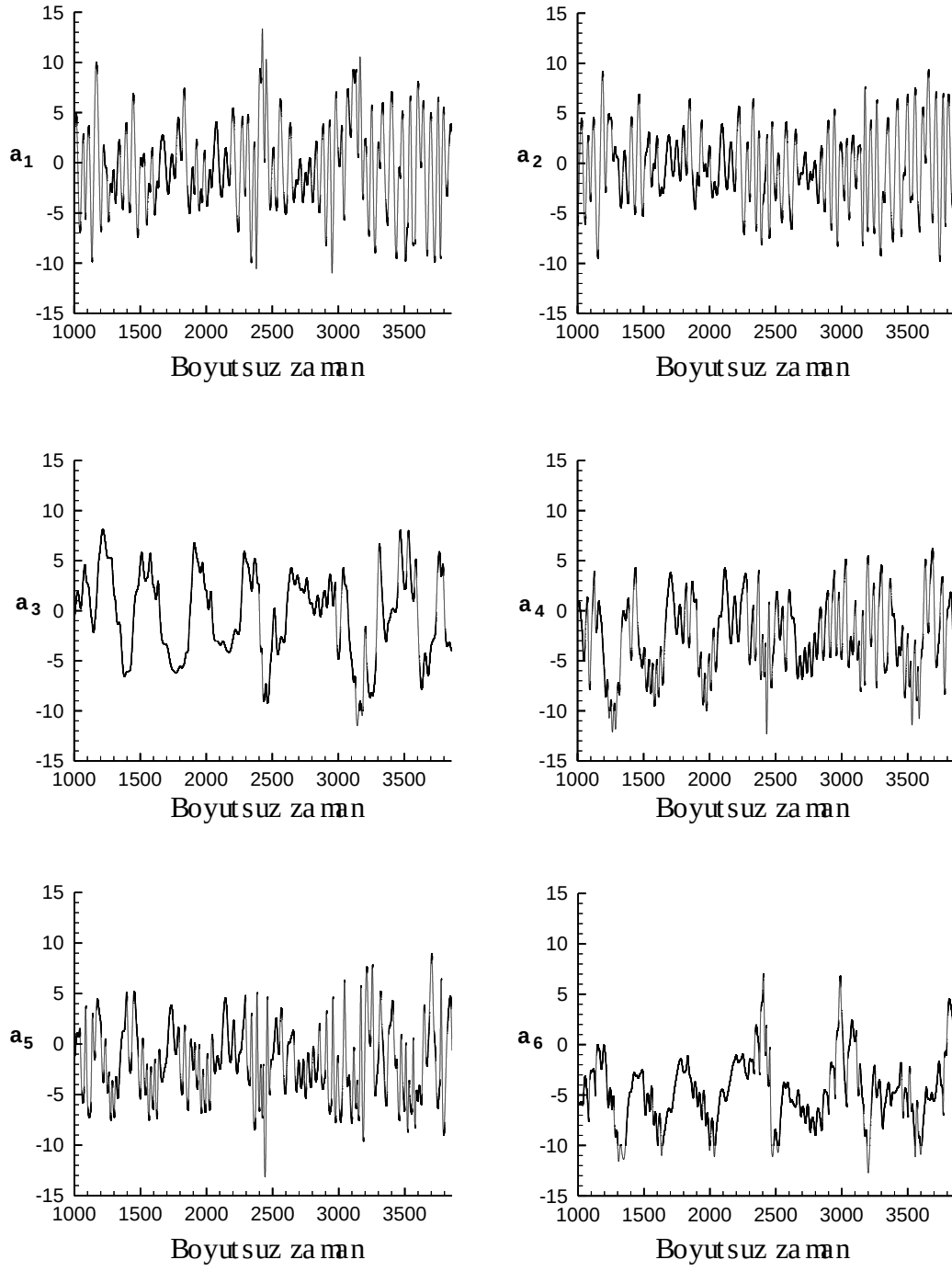
Şekil 3.13. $Re=40$ için tasarımı şartlarında farklı sayıda denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modellerin açılım katsayılarının zamanına göre değişimi. ($S/H=0.7$)



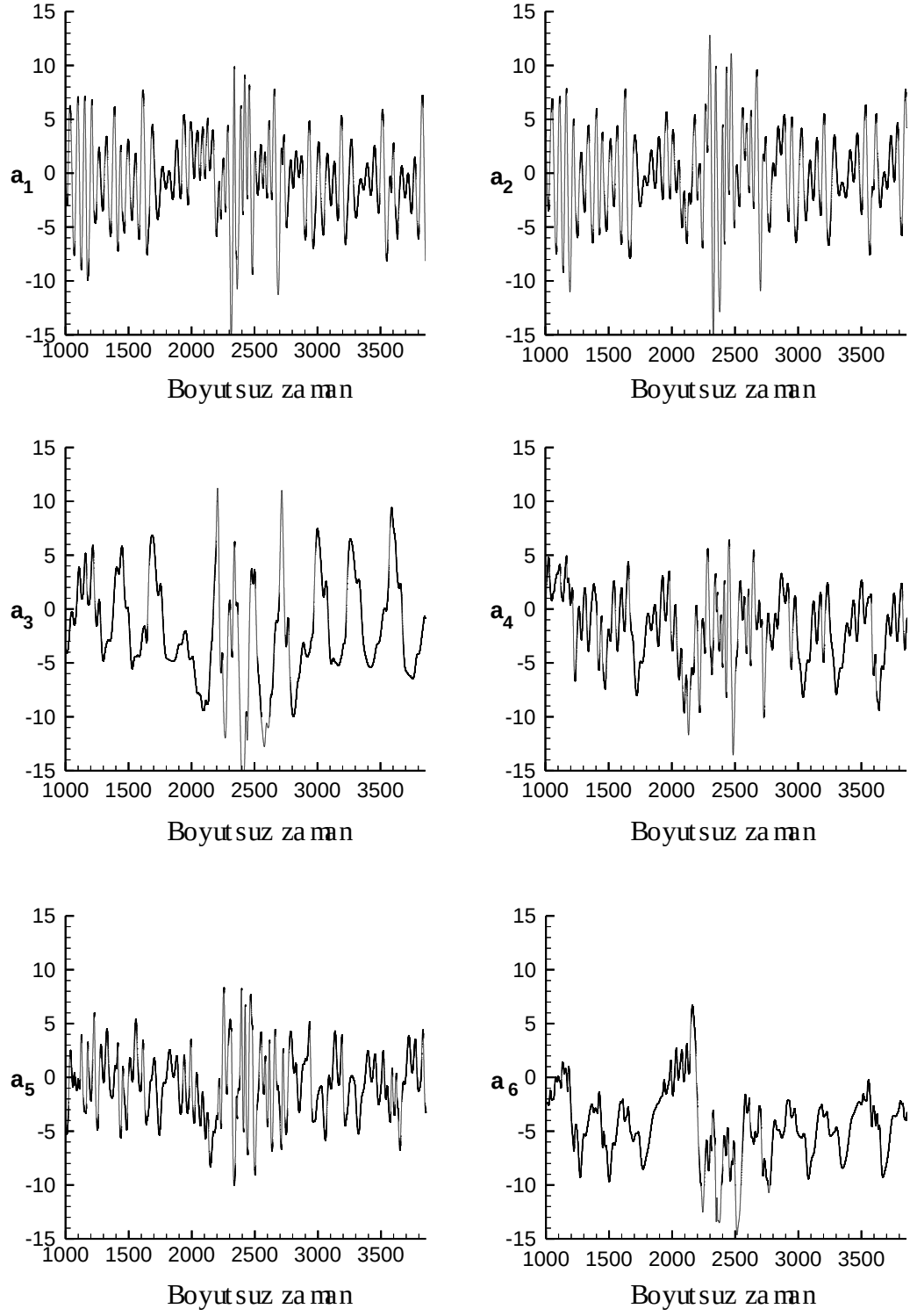
Şekil 3.14. $Re=40$ 'ta, 4 denklemden oluşan düşük boyutlu modelin tasarım şartlarındaki dinamik davranışı. ($SH=0.7$)



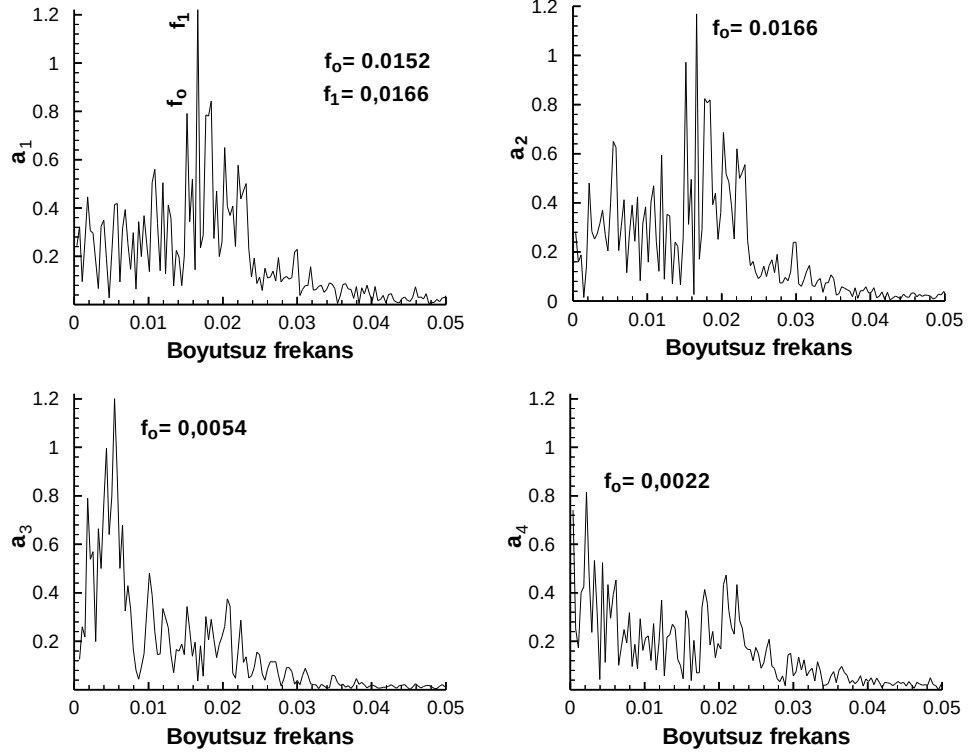
Şekil 3.15. $Re=40$ 'ta 4-denklemden oluşan düşük boyutlu modelin tasarımdışı şartlardaki ($Re=90$) açılım katsayılarının faz planındaki yörüngeleri. ($S/H=0.7$)



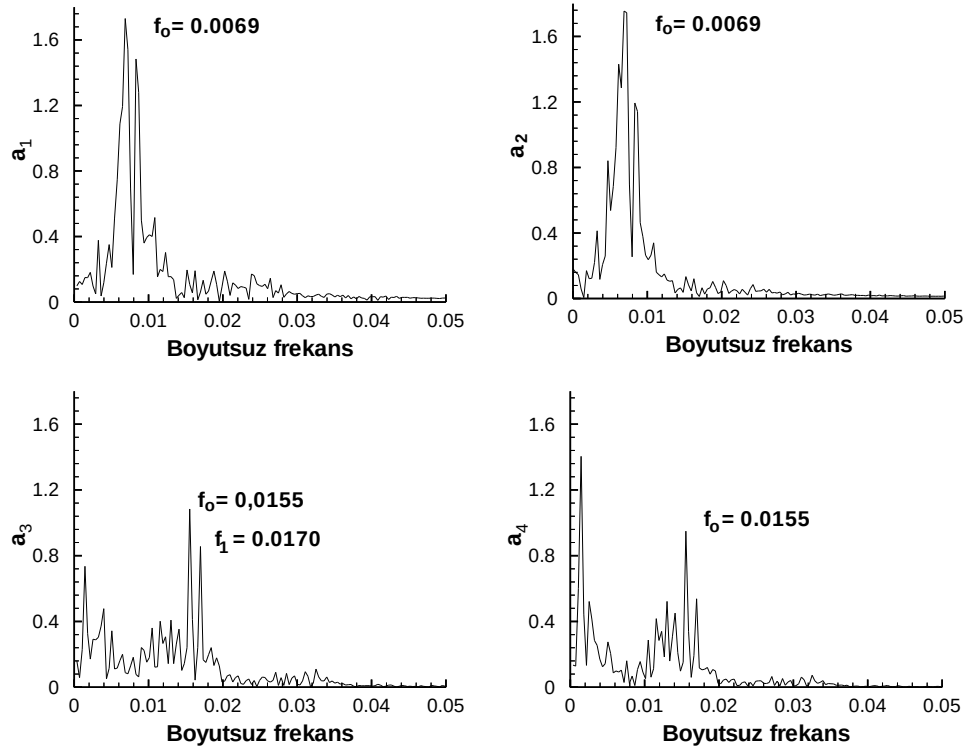
Şekil 3.16a. $Re=90$ 'da, tasarım şartlarında 8-denklemlili düşük boyutlu modelin açılı m katsayılarının zamanla değişimi. ($St=0.7$)



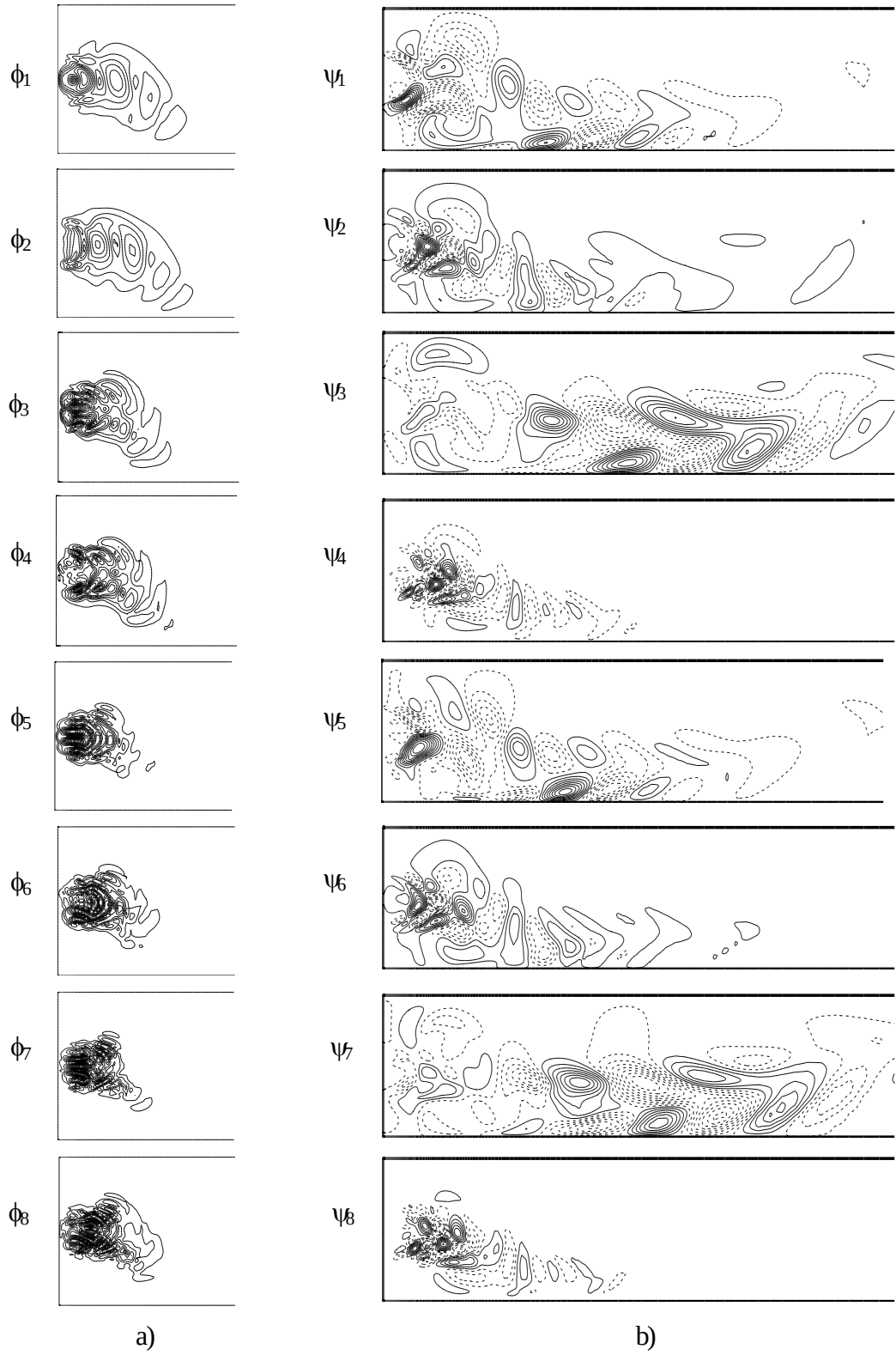
Şekil 3.16b. $Re=90$ 'da, tasarım şartlarında 10-denklemlili düşük boyutlu modelin açılı mıkatsayılarının zamanla değışi mi. ($S/H=0.7$)



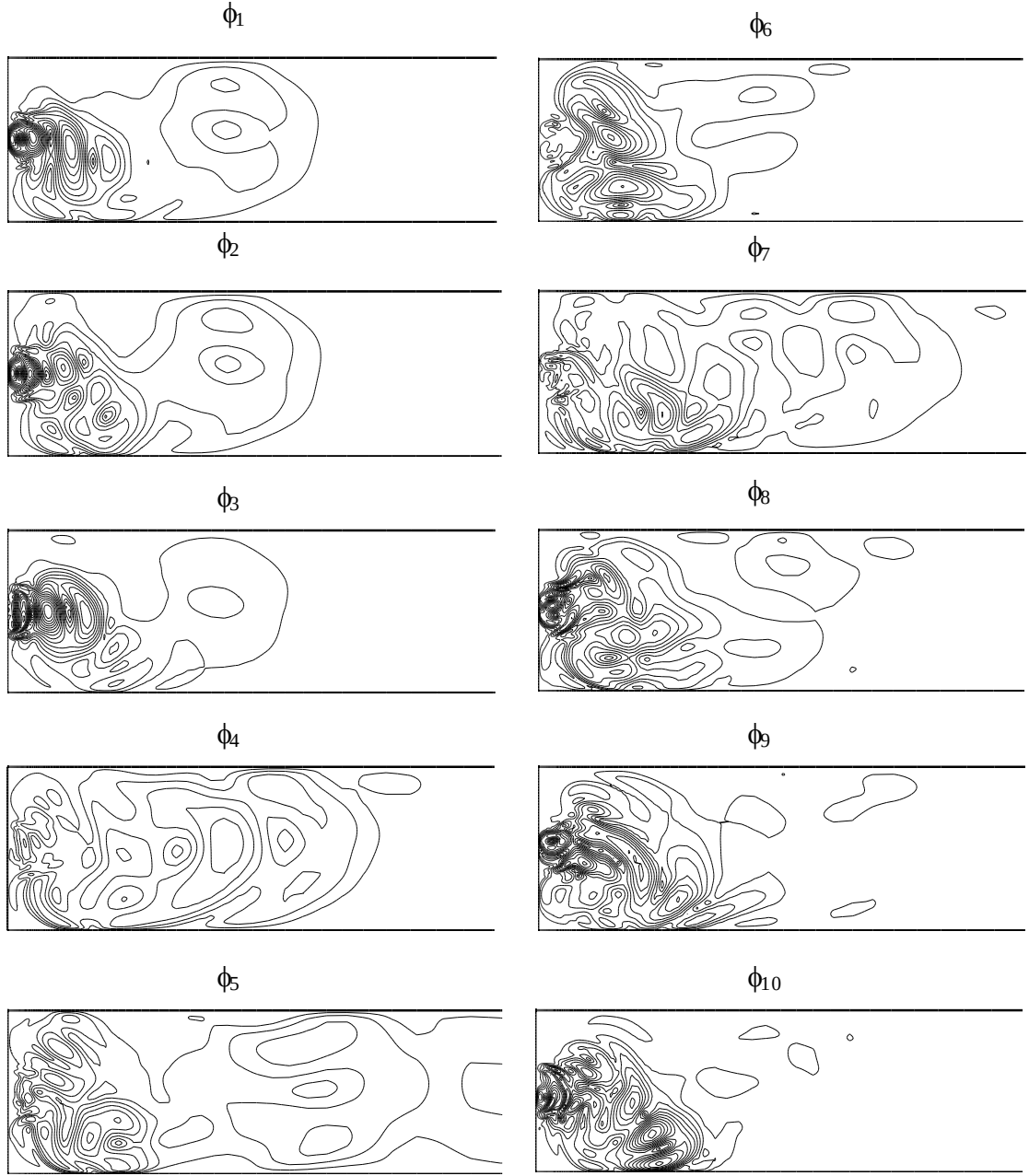
Şekil 3.17a. $Re=90^\circ$ da 10-denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modelin tasarım şartlarında ($Re=90^\circ$ da) elde edilmiş açılımlı katsayılarının spektrum analizi. ($St=0.7$)



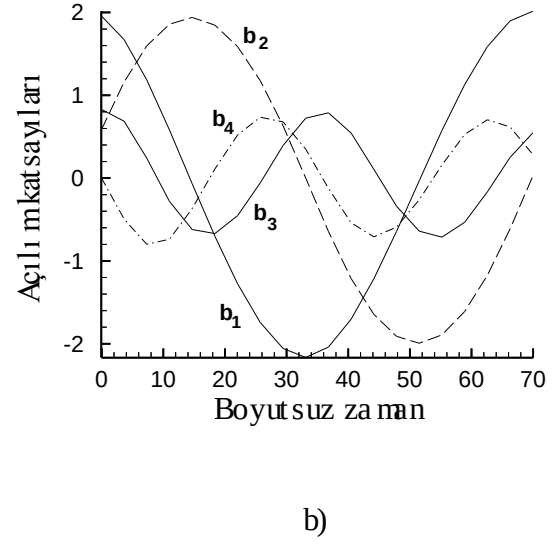
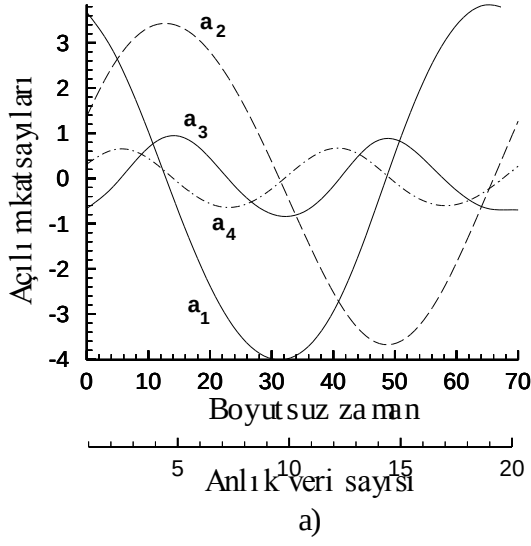
Şekil 3.17b. $Re=40^\circ$ da 4-denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modelin tasarım şartlarında ($Re=90^\circ$ da) elde edilmiş açılımlı katsayılarının spektrum analizi. ($St=0.7$)



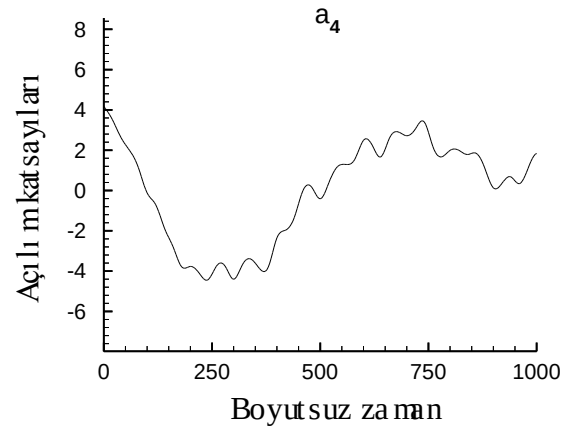
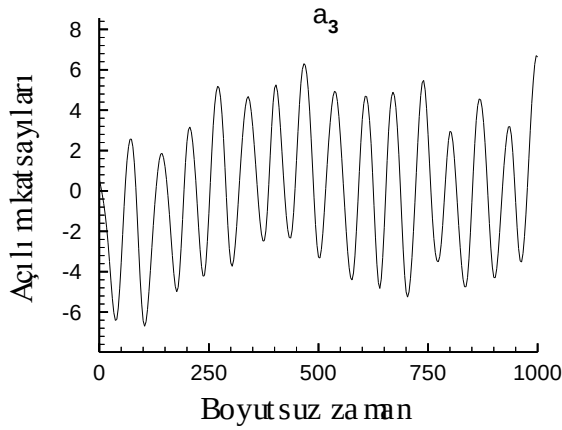
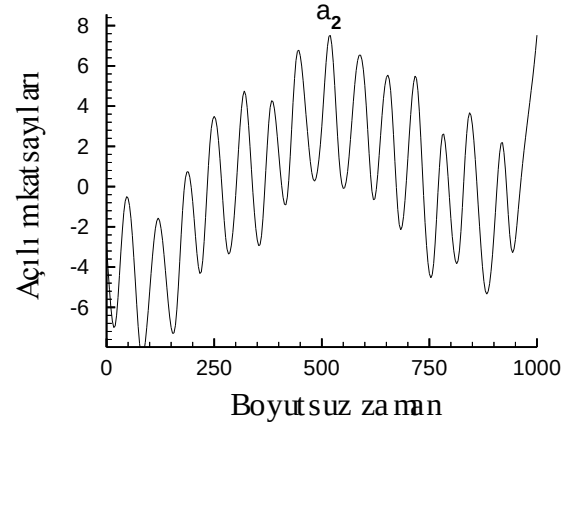
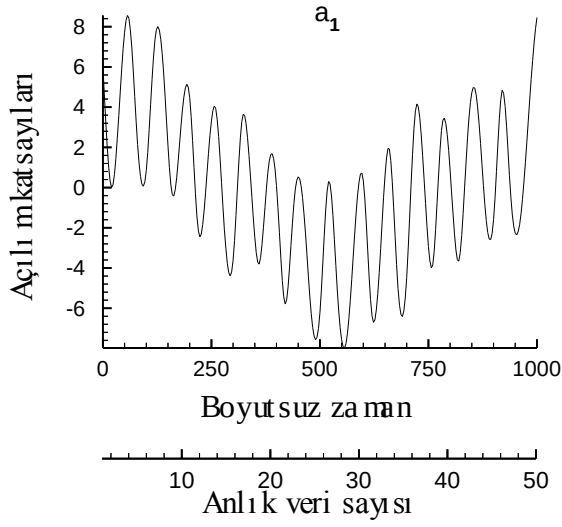
Şekil 3.18. $Re=40$ ' da, en enerjik sekiz özdeğer fonksiyon
a) Hız alanı, b) Sıcaklık alanı. ($St=0.3$)



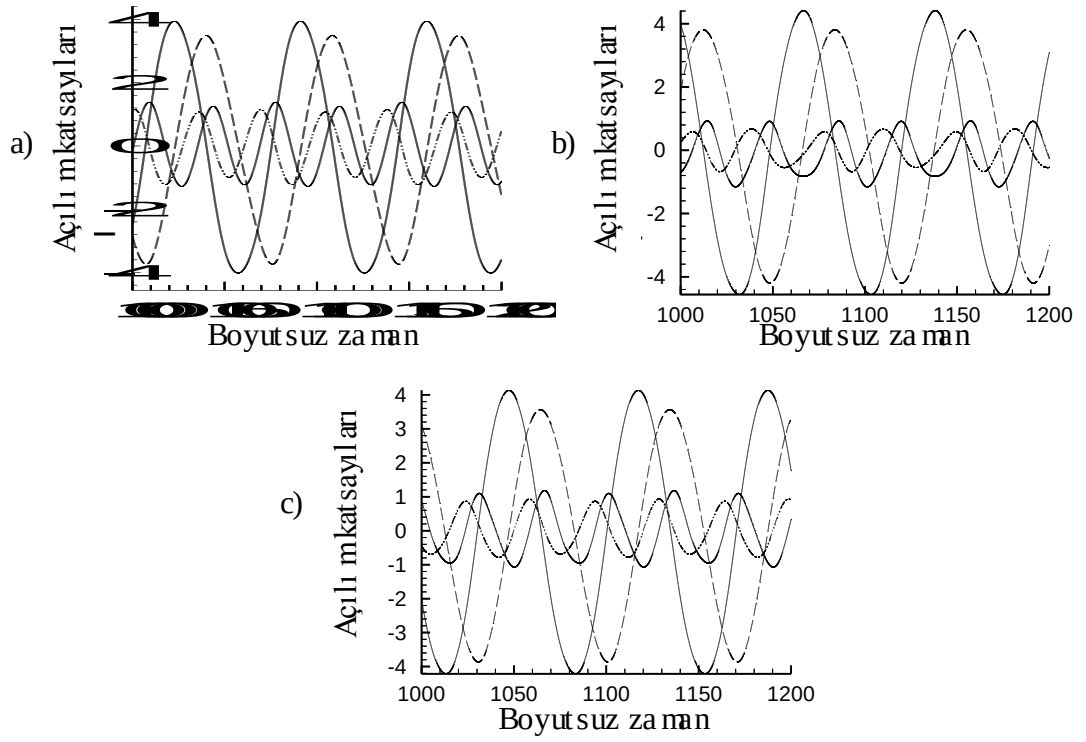
Şekil 3.19. $Re=70$ 'te, en enerjik on özdeğer fonksiyon ($S/H=0.3$)



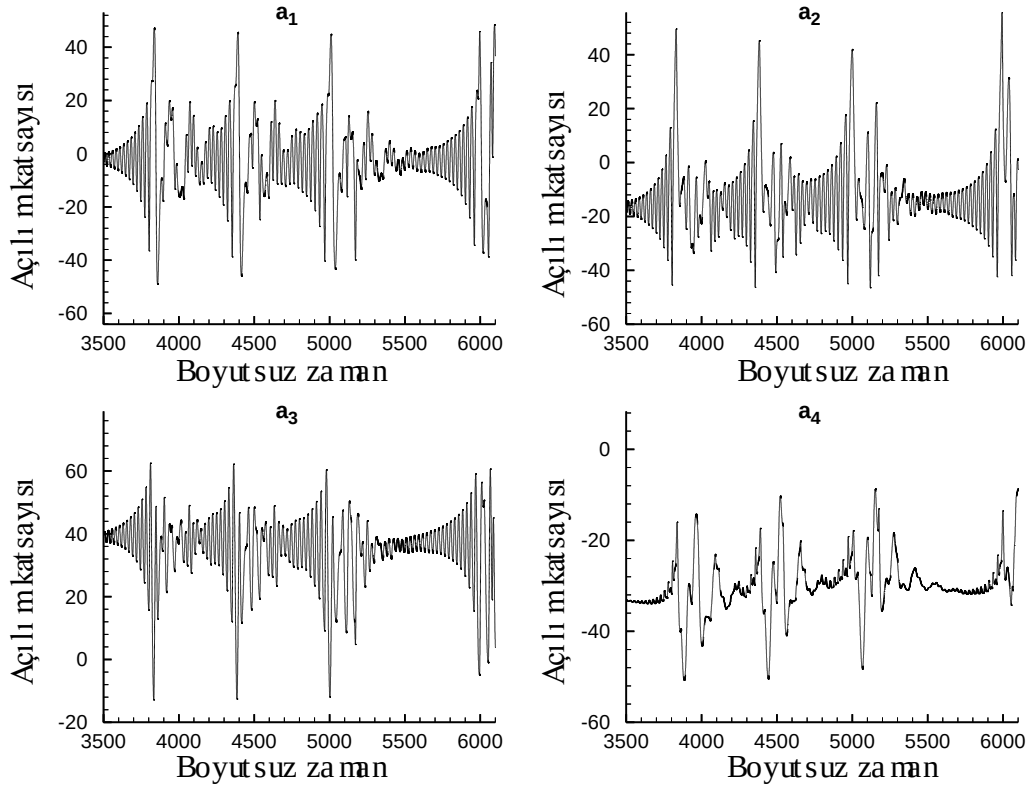
Şekil 3.20. $Re=40'$ da yeniden oluşum for mülleriyle hesaplanan açılı m kat sayıları.
a) Hz katsayıları, b) S caklık katsayıları. ($S/H=0.3$)



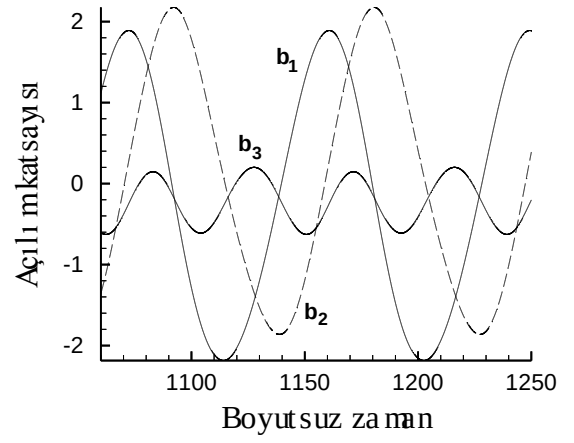
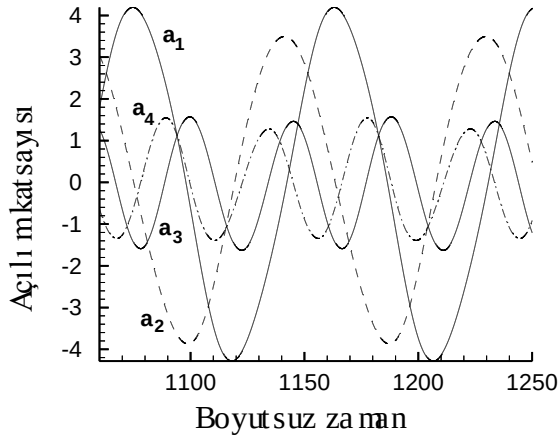
Şekil 3.21. $Re=70'$ da yeniden oluşum for mülleriyle h ız iç in hesaplanan açılı m kat sayıları. ($S/H=0.3$)



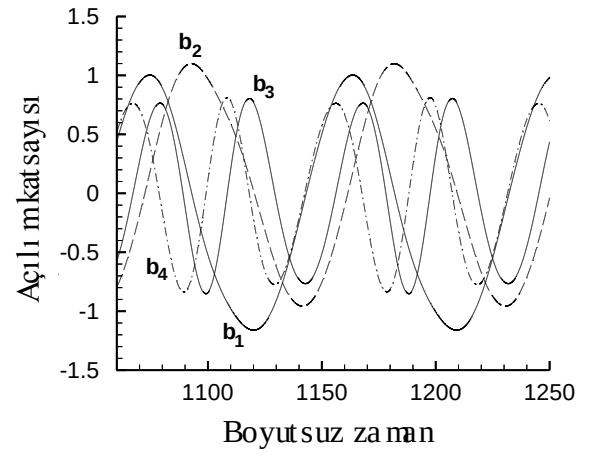
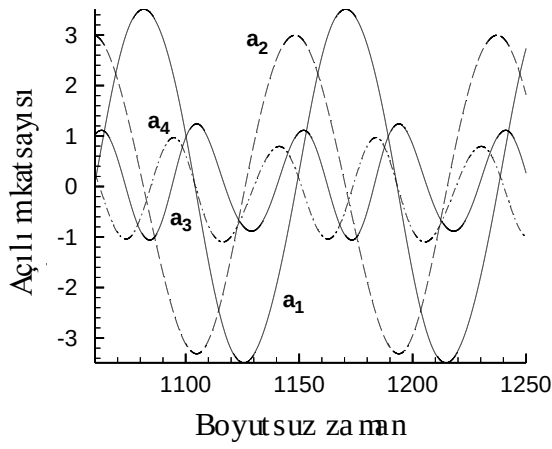
Şekil 3.22. $Re=40$ 'ta tasarımı şartlarında farklı sayıda denklemle oluşturulan düşük boyutlu modellerin açılım katsayılarının zamanla değişimi. ($S/H=0.3$)
a) 4-denklemlilik model, b) 6-denklemlilik model, c) 8-denklemlilik model.



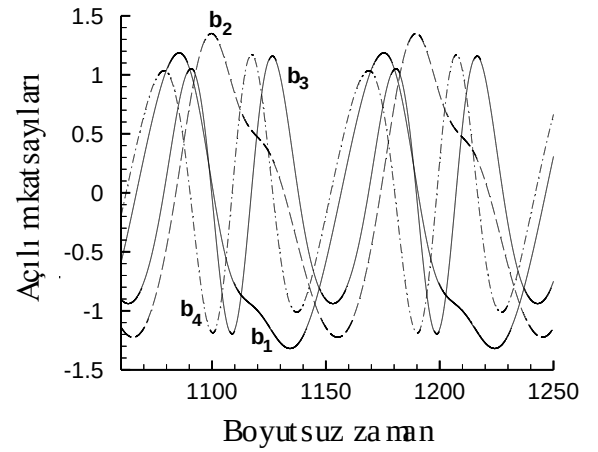
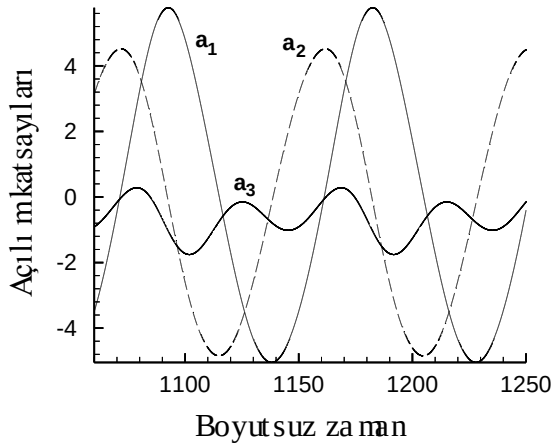
Şekil 3.23. $Re=70$ 'te tasarımı şartlarında 8-denklemlilik oluşturulan düşük boyutlu modelin açılım katsayılarının zamanla değişimi. ($S/H=0.3$)



a)

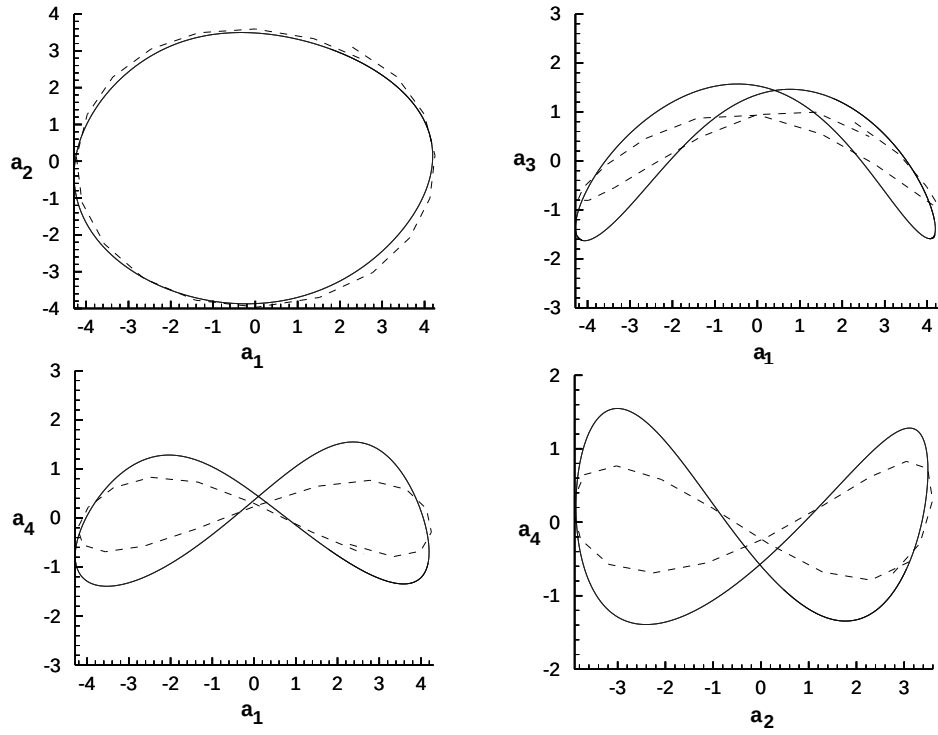


b)

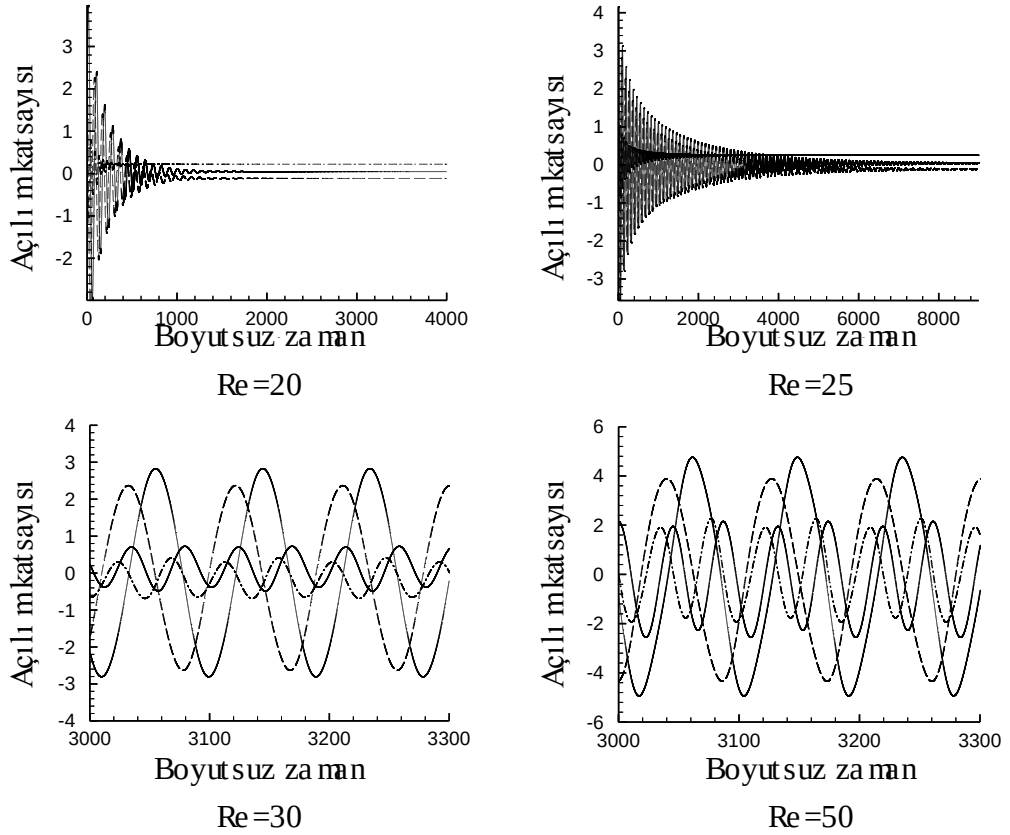


c)

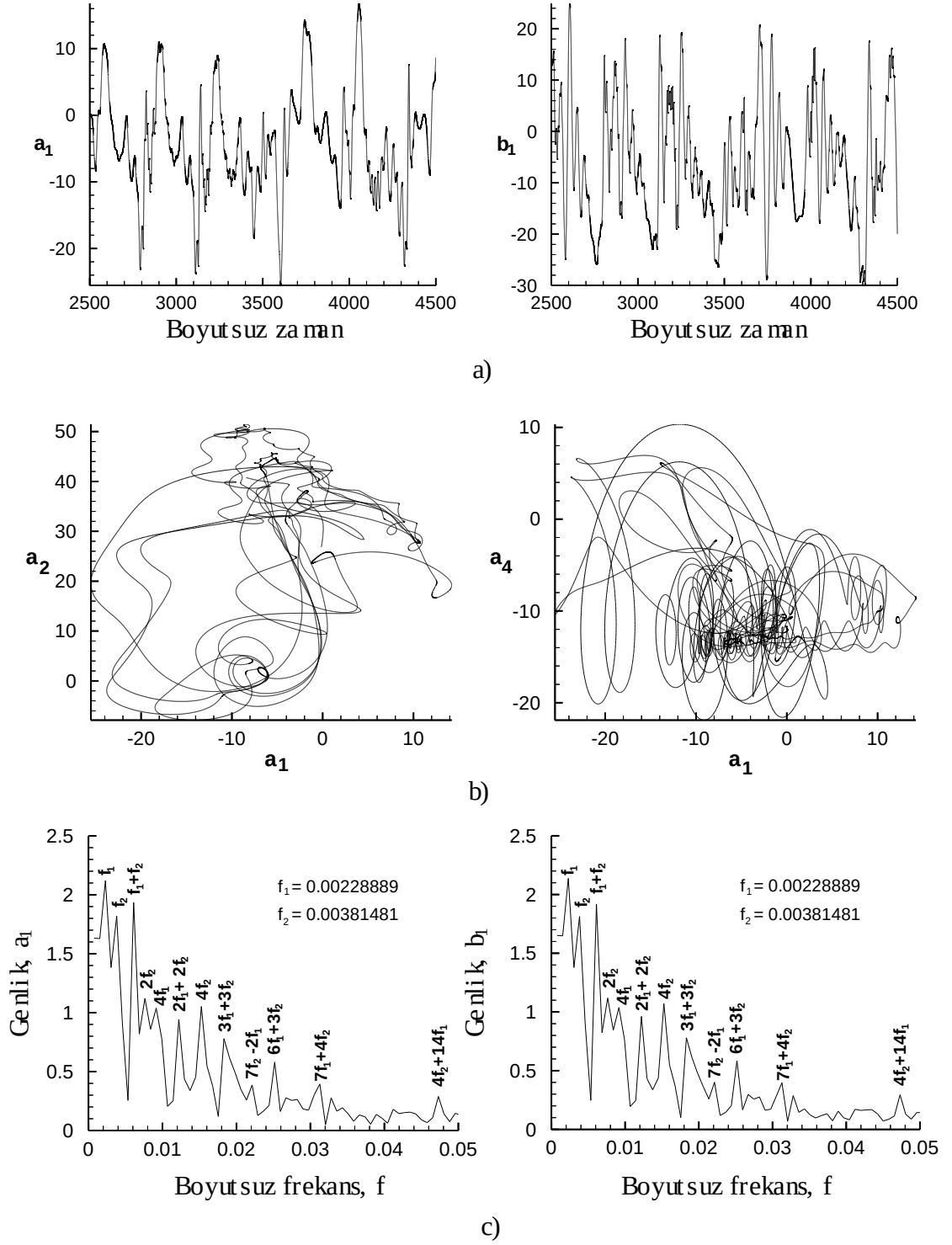
Şekil 3.24. $Re=40$ 'ta tasarım şartlarında hız ve sıcaklık için farklı sayıda denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modellerin açılı mksayılarının zamanla değişimi.
a) (4+3)-denklemlerli model, b) (4+4)-denklemlerli model, c) (3+4)-denklemlerli model.
($St=0.3$)



Şekil 3.25. $Re=40$ 'ta faz alanı yörüngeleri. Sürekli çizgi: (4+3)-denklemlerle tasarımı şartları altında oluşturulan düşük boyutlu model, Kesikli çizgi: doğrudan indirgenim ($S/H=0.3$)



Şekil 3.26. $Re=40$ 'ta tasarımı dışı şartlarda (farklı Re sayılarında), (4+3)-denklemlerle elde edilen düşük boyutlu modelle tahmin edilen dinamik sistem davranışları. ($S/H=0.3$)

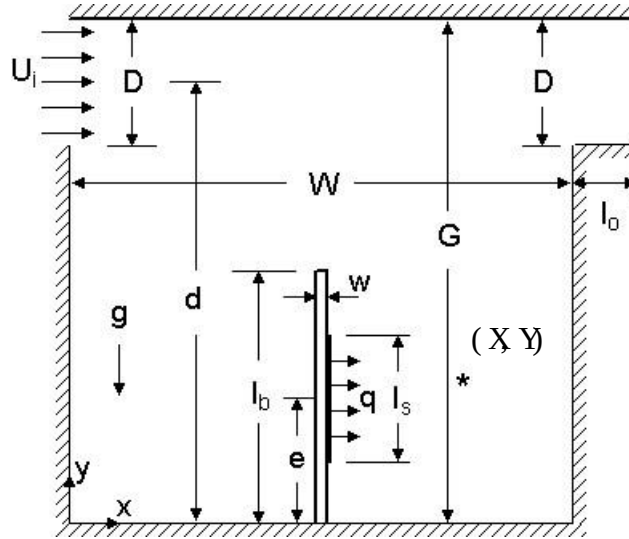


Şekil 3.27. $Re=40$ 'ta (8+8)-denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modelin tasarımı dışı şartlarda ($Re=70$, $Pr=0.71$) tahmin ettiği dinamik sistem davranışları. ($S/H=0.3$)
a) hız ve sıcaklık için açılımlı katsayılarının zamanla değişimi, b) hız için faz planı, c) hız ve sıcaklık için spektrumanalizleri.

4. İÇİNDE ISI KAYNAĞI BULUNAN DİKDÖRTGENSEL BİR BÖLGEDE KARIŞIK TAŞINIM

4.1. Karışık Taşınım Problemi Geometrisi

Ele alınan problem tipik olarak bilgisayarlar gibi bir çok elektronik ekipmandaki transistör gibi elemanların soğutulması olayının basitleştirilmiş bir modeli olarak düşünülmektedir. Şekil 4.1’de görüldüğü gibi, dikdörtgenel bir bölgenin alt kenarı üzerine, içinde ısı kaynağı bulunan bir levha yerleştirilmiştir. Isı kaynağından yayılan ısıyı çekebilmek için bölgedeki sol dikey duvar üzerinde açılan bir aralıktan giren hava (örneğin bir fan vasıtasıyla), karşı duvar üzerinde açılan başka bir aralıktan dışarı çıkmaktadır. Problemin geometrisini belirleyen geometrik oranlar, $G/W=1$, $D/G=0.25$, $l_b/G=0.5$, $w/W=0.025$, $e/l_b=0.5$ ve $l_s/l_b=0.5$ olarak belirlenmiştir. Griş ve çıkış aralıklarının yeri sabit olup, $d/G=0.875$ ’dir. Çıkış aralığında tam gelişmiş şartları sağlamak üzere uygun kontrol uzunluğu, $l_o/G=1/8$ alınmıştır.



Şekil 4.1. Karışık taşınım problemi geometrisi. * (X=3.14, Y=1.19)

4.2 Matematisel Model ve Çözüm Yöntemi

Sayısal simülasyonlar için detaylı geometri, Şekil 4.1’de gösterilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi, hesap bölgesini çevreleyen dış kenarlar ısıya karşı yalıtılmıştır. Isı kaynağı levhanın yüzeyine yerleştirilmiş ve sıfır kalınlıkta kabul edilmiştir. Akış ve sıcaklık alanını karakterize eden geometrik parametreler haricindeki, akış ile ilgili parametreler olarak Reynolds sayısı ve Grashof sayısı (yada Richardson sayısı, Gr/Re^2) esas alınmıştır. Giriş kesitinde akışkan hızı üniformdur ve zorlanmış taşımının etkisi Re sayısı ile temsil edilmiştir. Grashof sayısı ise doğal taşımının bir ölçüsüdür. Bu çalışmada Re ve Gr sayılarının her ikisinin etkisi geniş bir aralıkta detaylı olarak incelenmiştir. Soğutucu akışkan olarak seçilen hava ($Pr=0.71$), problemde karşılaşılan hız değerleri küçük olduğu için, genellikle doğal taşımın problemlerinde olduğu gibi sıkıştırılmaz kabul edilmiştir. Ancak burada belirtilmesi gereken nokta yoğunluğun y-kordinatı yönünde yazılan momentum denklemindeki doğal taşımın terimi için sabit olmadığı, $\rho=\rho_0[1-\beta(T-T_f)]$ şeklinde sıcaklıkla değiştiğidir. Bu değişim düşük sıcaklık farklarında %1’den az olduğu için genellikle diğer terimlerde yoğunluk sabit kabul edilerek akışı temsil eden süreklilik ve momentum denklemleri sıkıştırılmaz akışkan durumu için yazılabilir. Bu kabul literatürde Boussinesq kabulü olarak adlandırılır ve doğal taşım problemlerinde yaygın olarak kullanılır.

Girişte akışkan sıcaklığının değeri T_f sabit tutulmuştur. Üzerinde ısı kaynağı bulunan levha ısı iletkenliğine sahiptir. Dolayısıyla levha ısı iletim katsayısı k_b , ısı transferine etki eden bağımsız bir parametre olarak ele alınmış ve etkileri incelenmiştir.

Yukarıda açıklanan Boussinesq kabulü ile 2-boyutlu laminar akışta karışık taşım olayını temsil eden süreklilik, Navier-Stokes ve enerji denklemleri boyutsuz olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \nabla^2 U \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{Re^2} \theta + \frac{1}{Re} \nabla^2 V \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{r_k}{r_\alpha \text{Pr Re}} \nabla^2 \theta \quad (4.4)$$

Enerji denklemindeki (4.4) viskoz dissipasyon terimi düşük hızlar dolayısıyla ihmal edilmiştir. Yukarıdaki denklemlerdeki değişkenler, üniform giriş hızı U_i , akışkan sıcaklığı T_i , giriş aralığının genişliği D , akışkan yoğunluğu ρ , ısı kaynağından yayılan ısı akısı q ve akışkanın ısı iletim katsayısı k' nin kullanılmasıyla aşağıdaki dönüşümler yapılarak boyutsuzlaştırılmıştır:

$$(X, Y) = \frac{(x, y)}{D}, \quad (U, V) = \frac{(u, v)}{U_i}, \quad \theta = \frac{k(T - T_i)}{qD}, \quad \tau = \frac{U_i t}{D}, \quad P = \frac{P}{\rho U_i^2}. \quad (4.5)$$

Genel olarak büyük harfler boyutsuz değişkenleri göstermektedir. Ancak boyutlu sıcaklık T ile, boyutsuz sıcaklık ise θ ile gösterilmiştir.

(4.4) denklemi hem katı hem de akışkan bölgeleri için geçerlidir. $r_k = k_b/k$, levha ısı iletim katsayısının akışkanın ısı iletim katsayısına oranını (ısıl iletkenlik oranı), $r_\alpha = \alpha_b/\alpha$ ise levha ısı yayılma katsayısının (α_b) akışkanın ısı yayılma katsayısına ($\alpha = k/\rho c_p$) oranını (ısı yayılma oranı) göstermektedir. Bu oranlar (r_k ve r_α) akışkan bölgesini temsil ediyorsa, her iki değer 1'e eşittir. Yukarıdaki denklemlerden de açık olarak görüldüğü gibi, problemi karakterize eden boyutsuz parametreler, zorlanmış taşınım etkisini gösteren Reynolds sayısı, $Re = U_i D/\nu$, doğal taşınımın zorlanmış taşınma göre önemi gösteren Richardson sayısı, $Ri = Gr/Re^2$ ve soğutucu akışkan tanımlayan Prandtl sayısı, $Pr = \nu/\alpha$ dır. Ayrıca r_k ve r_α levha içerisindeki ısı iletiminde etkili, bu çalışmada ikincil öneme sahip parametrelerdir.

Burada Grashof sayısı, $Gr = \frac{g\beta q D^4}{k\nu^2}$ olarak verilmiştir. g yerçekimi ivmesi, β ısı genleşme katsayısı, k akışkanın ısı iletim katsayısı, ν ise akışkanın kinematik viskozitesini göstermektedir.

Akış sınırlar şartları olarak tüm katı yüzeylerde hız bileşenleri sıfırdır. Yani katı duvarlarda kayma şartı ($U=V=0$) vardır. Giriş aralığında hız x-yönünde sabit olup üniformdur ve hızın y bileşeni sıfırdır ($U=1, V=0$). Çıkış aralığında çıkış sınırları şartı olarak tüm değişkenlerin (U, V, θ) gradientleri ($\frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial V}{\partial X}$ ve $\frac{\partial \theta}{\partial X}$) sıfıra eşit alınmıştır.

Bu şartı elde etmek için geometriye l_0 uzunluğu eklenmiştir. $l_0 = 1/8$ Wuzunluğu çıkış

sınır şartını sağlayabilmek için yeterli olduğu literatürde belirtilmiştir. (Hu ve Wang, 2000)

Sıcaklık şartları olarak n , duvara dik normal yön vektörü, θ ise boyutsuz sıcaklık olmak üzere, $\partial\theta/\partial n=0$ şartı tüm yalıtılmış duvarlarda geçerlidir ve giriş aralığı için $\theta=0$ 'dır. Bunun yanı sıra levha-akışkan ara yüzeylerinde, ısı akısının sürekliliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_{\text{akışkan}} = r_k \left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_{\text{levha}} \quad (4.6)$$

Isı kaynağının yüzeyi üzerinde yersel (lokal) ısı taşıma katsayısı h , ve Nusselt sayısı Nu olmak üzere, aşağıdaki gibi verilmiştir;

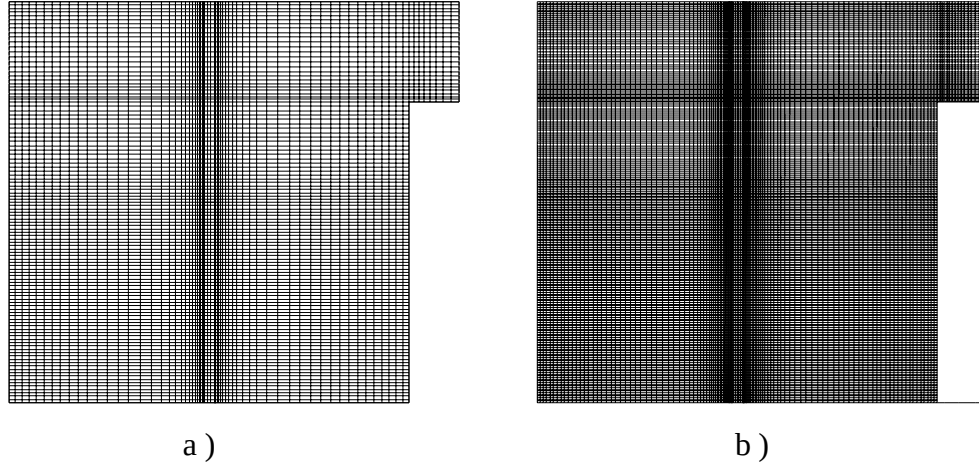
$$h = \frac{q}{T - T_i}, \quad Nu = \frac{hD}{k} \quad (4.7)$$

Simülasyonlarda akışkan olarak alınan havanın ve levhanın fiziksel özellikleri sabit olup, $\rho_{\text{hava}} = 1.293 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, $\mu_{\text{hava}} = 1.72 \times 10^{-5} \text{ [kg/m}\cdot\text{s]}$, $(c_p)_{\text{hava}} = 1000 \text{ [J/kg}\cdot\text{K]}$, $k_{\text{levha}} = k_{\text{hava}} = 0.024225 \text{ [W/m}\cdot\text{K]}$ ve $\beta_{\text{hava}} = 3 \times 10^{-3} \text{ [K}^{-1}\text{]}$ olarak belirlenmiştir.

Aksi belirtilmedikçe simülasyonlarda, $r_k=1$ olarak alınmıştır. Çünkü, fiberglass, polystyrene levha gibi bazı yalıtkan malzemeler için ısı iletkenlik oranı 1'dir.

Yukarıda açıklanan süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin çözümü, bir önceki bölümde olduğu gibi sonlu hacimler tekniğinin kullanıldığı Fluent yazılımı ile zamana bağlı sayısal simülasyonlarla gerçekleştirilmiş ve hesap bölgesinde hız ve sıcaklık alanları elde edilmiştir. Simülasyonlar $t \rightarrow \infty$ hali için çözümdedir (düşük Re sayılarında) veya zamana bağlı olarak (büyük Re sayılarında) elde edilmiştir. Bu çalışmada akış ve sıcaklık alanları 72x112 grid kullanılarak oluşturulmuştur ve gridler üniform olmayıp duvarlara ve levha'ya doğru sıklaştırılmıştır. Bu şekilde kenarlarda ve levha çevresinde hız ve sıcaklık gradienlerinin yeterli ölçüde çözümlenebilmesi sağlanmıştır. Çözümün gridden bağımsızlığını belirtmek için $Ri=1$ ve $Re=100$ değerleri kullanılarak hava için ($Pr=0.71$) elde edilen çözümler, grid sayısı 144x222'e çıkartılarak tekrarlanmış ve minimum boyutsuz hız ve boyutsuz sıcaklık değerlerinde yaklaşık %1'den daha az, ortalama Nu sayısında ise yaklaşık %3'lük bir değişim görülmüştür. Ancak, elde edilen simülasyon sonuçları, düşük

boyutlu model oluşturulmasında kullanılacağı için ve düşük boyutlu modellerin yüksek çözünürlüklü çözümlere çok bağı olması nedeniyle POD'nin uygulandığı sayısal simülasyonlarda 144x222 grid kullanılmıştır. Grid dağılımları Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2 Sayısal simülasyonlarda kullanılan gridler.
a) 72x112 grid b) 144x222 grid

Bunlara ilaveten Fluent yazılımının taşınım problemlerinin çözümündeki güvenilirliğini test etmek amacıyla, daha önce değişik yöntemlerle doğruluğu kanıtlanmış, karşılıklı dikey yüzeylerinde diferansiyel bir sıcaklık farkı ΔT olan, yatay duvarları yalıtılmış kare şeklindeki kapalı bir bölge içerisindeki doğal taşınımın incelendiği problem test amacıyla çözülmüştür. Doğruluğu kanıtlanmış sonuçlarla (Benchmark çözümleri) (David ve Jones, 1983), aynı şartlarda Fluent ile elde ettiğimiz sonuçlar karşılaştırılmış ve Tablo 4.1'de verilmiştir. Şekil 4.3'te ise, eş sıcaklık eğrileri ve akı çizgileri gösterilmiştir. Tablo 4.1'de görüldüğü gibi (50x50) üniform olmayan grid kullanılarak yapılan çözümler ile Benchmark sonuçları arasındaki fark minimum akım fonksiyonlarında (ψ_{min}) ve ortalama Nu sayısında (Nu_{av}) %1'den daha azdır. Bu da gerekli özen ve dikkat gösterildiğinde Fluent yazılımıyla gerçekleştirilen taşınım problemlerinin güvenilir olabildiğini göstermektedir.

Tablo 4.1. Fluent ile elde edilen sayısal simülasyon sonuçları ile doğruluğu kanıtlanmış çözümlerin (Benchmark çözümleri) farklı Rayleigh sayılarında ($Ra=GrPr$) karşılaştırılması.

Ra	10^3		10^4		10^5	
	Fluent çözümleri	Doğrulugu kanıtlanmış çözümleri	Fluent çözümleri	Doğrulugu kanıtlanmış çözümleri	Fluent çözümleri	Doğrulugu kanıtlanmış çözümleri
ψ_{min}	1,170	1,174	5,068	5,071	9,616	9,616
Nu_{av}	1,117	1,118	2,242	2,243	4,520	4,519
Nu_{max}	1,504	1,505	3,530	3,528	7,721	7,717
Nu_{min}	0,692	0,692	0,584	0,586	0,726	0,729

4.3. Karışık Taşınım Probleminin Doğrudan Sayısal Simülasyon Sonuçları

Yapılan bu çalışmada, Reynolds ve Grashof (veya Richardson) sayılarının, başka bir ifadeyle, zorlanmış ve doğal taşınımın karışık taşınım problemine etkileri incelenmiştir. Öncelikle, Richardson sayısı (Ri) sabit tutulup, Reynolds sayısı (Re), 1 ile 1000 aralığında değiştirilerek zorlanmış taşınımın problem üzerindeki etkisi incelenmiş, daha sonra belirli ve sabit Re sayılarında Ri sayısı değiştirilerek, doğal taşınım olayının akış ve sıcaklık üzerindeki etkileri değerlendirilmiştir.

4.3.1. Doğal taşınım etkisi

İlk olarak daimi akışın söz konusu olduğu, $Re=10$ ve sırasıyla $Ri=1$, $Ri=10$ ve $Ri=100$ için, doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen eş sıcaklık eğrileri, akım çizgileri ve hız vektörleri Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Zorlanmış taşınım etkisi (Re) sabit tutulup, ısı kaynağından yayılan ısı akısı, dolayısıyla doğal taşınım etkisi (Gr) artırıldığında farklı hız ve sıcaklık dağılımları elde edilmektedir. $Ri=1$ 'de kaldırma etkisi (doğal taşınım) zayıf olduğundan, hesap bölgesine giren soğutucu akışkan (hava) levhanın ikiye ayırdığı bölgeleri hemen hemen hiç süpürmeden çıkmakta, dolayısıyla levha çevresinde oluşan hava akışının etkisi çok zayıf kalmaktadır. Böylece, hesap bölgesine giren havanın büyük bir bölümü, levhayı etkilemeden doğrudan dışarı çıktığından, iyi bir soğutma elde edilememektedir. Nitekim Şekil 4.4'te $Ri=1$ için elde edilmiş olan eş sıcaklık eğrilerinden görüldüğü gibi bu durumda ısı ortamdan pratik olarak sadece iletimle atılmaktadır. Ri sayısı artırıldığında, kaldırma etkisinin artmasından dolayı levhanın her iki yüzeyinden yukarı doğru bir hava akışı meydana gelmektedir. Bu akış, giriş bölgesinden ortama giren havanın

önünü keserek, akışı levhanın solundaki bölgeye doğru yönlendirmekte ve böylece hava bu bölgeyi iyi bir şekilde süpürerek, daha iyi bir soğutma elde edilmektedir. Kaynaktan yayılan ısı akısının artması, kaynağın sağında oluşan sirkülasyon hücrelerinin şiddetini artırmakta, böylece Nu sayısı da artmaktadır. Bu durum Tablo 4.2’de verilmiştir.

Tablo 4.2 Re=10’da, Ri sayısı ile maksimum boyutsuz sıcaklık (θ_{max}), boyutsuz akı mıçizgisi (ψ_{min}), maksimum hızın şiddeti (V_{max}) ve Nusselt sayısı (Nu) değerlerinin değişimi.

Re=10				
Ri	θ_{max}	ψ_{min}	V_{max}	Nu
1	1,481	1,071	1,499	1,167
10	0,912	1,414	1,514	1,734
100	0,641	2,361	5,135	2,940

Ri=1 ile Ri=10 karşılaştırıldığında zaman maksimum hızda fazla artış olmasına rağmen, Ri=10’da maksimum hızın levha üzerinde olmasından ve özellikle sirkülasyon hücrelerinin belirgin bir şekilde oluşmasından dolayı ısı kaynağı (chip) üzerinde oluşan en yüksek boyutsuz sıcaklık θ_{max} büyük oranda düşmektedir. Ri=1’de iletiletti metkisi, Ri=10’da iletiletti metkisi ağırlıklıdır. Aslında, Ri sayısı 1’den 10’a ve 10’dan 100’e çıktığında, sirkülasyon hücrelerinin şiddeti sırasıyla 1.33 ve 1.67 katına, Nu sayıları da sırasıyla 1.49 ve 1.70 katına çıkmaktadır. Bu da gösteriyor ki, Ri sayısı arttıkça, sirkülasyon hücrelerinin şiddetindeki artış oranıyla, Nu sayısındaki artış oranı arasında doğrusal ilişki vardır. Fakat sirkülasyon hücrelerinin şiddetindeki artış oranı kadar boyutsuz sıcaklıkta da o oranda azalma beklenirken, Ri sayısının artmasıyla birlikte minimum sıcaklıkla kaynak sıcaklığı farkındaki artış oranının da artması, boyutsuz sıcaklığın daha az düşmesine yol açmıştır (Burada minimum sıcaklıkla kaynak sıcaklığı arasındaki fark Ri=1’den 10’a yükseltildiğinde yaklaşık 6 katına çıkarken, Ri=10’dan 100’e yükseltildiğinde ise yaklaşık 7 katına çıkmaktadır). Başka bir ifadeyle kaynak sıcaklığındaki artışın yüksek olması boyutsuz sıcaklığın azalma oranının düşmesine yol açmaktadır.

Şekil 4.5a ve 4.5b’de, Re=100’de sabit tutulup Ri=Gr/Re² sayısının değiştirilmesiyle elde edilen eş sıcaklık eğrileri ve hız vektörleri sırasıyla gösterilmiştir. Ri sayısı, dolayısıyla doğal taşınım etkisi arttıkça, sirkülasyon hücrelerinin büyüklüklerinin artmasından dolayı, levhaya doğru eş sıcaklık eğrilerinin yoğunluğu artmaktadır. Ri sayısının artmasıyla birlikte sirkülasyonların şiddetinin artması, ısı kaynağından

yayılan ısı nın levha üzerinden daha iyi bir şekilde çekilmesine sebep olmaktadır ve böylece maksimum boyutsuz sıcaklık (θ_{max}) düşerken, Nu sayısı artmaktadır. Nu değerinin artması, taşınım ile olan ısı transferinin artması anlamına geleceğinden, ısı kaynağının soğutulması işlemi daha iyi bir şekilde gerçekleşmektedir. $Re=100$ 'de sabit tutulup, farklı Ri sayıları ile θ_{max} , V_{max} ve Nu değerlerinin değişimi Tablo 4.3'te verilmiştir.

Tablo 4.3. $Re=100$ de, Ri sayısı ile boyutsuz sıcaklık (θ_{max}), maksimum hızın şiddeti (V_{max}) ve Nusselt sayısı (Nu) değerlerinin değişimi.

Re=100			
Ri	θ_{max}	V_{max}	Nu
0,1	0,967	1,368	2,474
1	0,740	1,383	3,940
10	0,330	1,706	4,160
20	0,279	2,120	4,810
100	0,221	3,293	6,850
1000	0,207	6,901	10,085

4.3.2 Zorlanmış taşınım etkisi

Çalışmanın ikinci aşamasında, Ri sayısı sabit tutulup, Re sayısı değiştirilerek zorlanmış taşınımın problem üzerindeki etkisi incelenmiştir. $Ri=1$ 'de sabit tutulup, farklı Re sayıları için elde edilen eş sıcaklık eğrileri ve hız vektörleri Şekil 4.6'da gösterilmiştir. Burada Re sayısının artmasıyla birlikte sirkülasyon hücrelerinin şiddetleri de artmakta, fakat bu artış yalnızca zorlanmış taşınım etkisiinden değil, aynı zamanda doğal taşınım etkisinin artmasından da kaynaklanmaktadır. Bu yüzden, sirkülasyon hücrelerinin şiddetlerinin artması, eş sıcaklık dağılımlarında doğal taşınım olayına benzer sonuçların ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Re sayısının artmasıyla, eş sıcaklık eğrileri levha çevresinde yoğunlaşmakta ve hesap bölgesinin büyük bir kısmı giriş aralığından içeri giren havanın sıcaklığına yakın bir sıcaklıkta tutulmaktadır (bkz. Şekil 4.6). Sirkülasyon hücrelerinin şiddetinin artmasıyla birlikte maksimum boyutsuz sıcaklık azalırken, Nu sayısı arttığından soğutma işlemi daha iyi gerçekleşmektedir. Bu da gösteriyor ki, doğal ve zorlanmış taşınım olaylarında, ana mekanizma sirkülasyon oluşumu ve sirkülasyon hücrelerinin şiddetlerindeki değişimdir. Sabit $Ri=1$ değeri için, Re sayısının θ_{max} , V_{max} ve Nu sayısı ile değişimi Tablo 4.4'te verilmiştir. Burada, $Re=500$ ve 1000 için yakın değerler elde edilmiştir.

Tablo 4.4. $Ri=1$ de, Reynolds sayısı ile maksimum boyutsuz sıcaklık (θ_{max}), hızın maksimum şiddeti (V_{max}) ve Nusselt sayısı (Nu) değerlerinin değişimi.

$Ri=1$			
Re	θ_{max}	V_{max}	Nu
10	1.480	1.499	1.167
100	0.740	1.384	3.940
500	0.281	1.386	7.430
1000	0.277	1.470	9.812

Şekil 4.7’de $Ri=10$ ve $Re=500$ için bir periyodun eşit aralıklarında alınmış anlık eş sıcaklık eğrileri ve akım çizgileri gösterilmiştir. Burada oluşan periyodik olayın açıklanabilmesi için eş sıcaklık eğrilerinin ve akım çizgilerinin birlikte incelenmesi gerekmektedir. $\tau=0$ anında levhanın solunda bir, üstünde ise iki parçadan oluşan sirkülasyon hücreleri oluşmuştur. $\tau=T/3$ anına kadar levhadan yayılan ısı akısının, başka bir ifadeyle doğal taşınım olayının etkisiyle levhanın solundaki sirkülasyon hücresi ile levhanın üstündeki ikili sirkülasyon hücresinin sağ parçasının büyüklükleri artarak yukarı doğru hareket etmekte ve bu hareketin etkisiyle ikili sirkülasyon hücresinin sol parçası sıkışarak küçülmektedir. Levha üzerindeki kaynaktan yayılan ısı (eş sıcaklık eğrileri) ise bu iki sirkülasyon hücresi arasında yoğunlaşmaktadır. Bu aşamada sirkülasyon hücrelerinde biriken ısı henüz ortamdan dışarı atılmamıştır. Bu aşamadan sonra, $\tau=2T/3$ anına kadar, büyüyen ve yukarı doğru yükselen sirkülasyon hücrelerinin etkisiyle zorlanmış taşınım ile ortama giren havanın bir kısmı levhanın sol bölgesine yönelmekte ve bu bölgeyi süpürdükten sonra levhanın üstündeki ikili sirkülasyon hücresini ikiye bölerek ortasından geçtikten sonra çıkış aralığından sistemi terk etmektedir. Böylece bu süpürme işlemiyle sirkülasyon hücrelerinde toplanan ısı ortamdan dışarı atılmaktadır. Bu duruma eş sıcaklık eğrilerinde daha açık bir şekilde görülmektedir. $\tau=T$ anına kadar ise doğal taşınım etkisiyle sirkülasyon hücreleri $\tau=0$ anındaki şeklini almaktadır. Sonuç olarak, doğal taşınım etkisiyle ısı'nın sirkülasyon hücrelerinde toplanması, bu hücrelerin büyüyerek yükselmesi ve dışarıdan ortama giren havanın bir kısmının levhaya doğru yönlendirilmesi soğutma işleminin birinci aşamasını, zorlanmış taşınım ile ortama girerek, levhanın sol bölgesine yönelen bir miktar havanın ortam süpürmesi ve sirkülasyon hücrelerindeki ısıyı alarak dışarı çıkması soğutma işleminin ikinci aşamasını oluşturmaktadır. Bu şekilde karışık taşınım soğutma

işlemi iki aşamalı olarak tekrarlanmaktadır. Farklı Ri ve Re sayıları için elde edilen zamana bağlı akışlarda da benzer durumlar ortaya çıkmıştır.

Farklı Ri ve Re sayıları için V_{max} , θ_{max} ve Nu sayısının değişimleri Şekil 4.8’de verilmiştir. Görüldüğü gibi doğal taşınmı etkiyle zorlanmış taşınmı etkisinden herhangi biri yada her ikisi birden artırıldığında maksimum hız ve Nu sayısı artmakta, boyutsuz sıcaklık ise azalmaktadır.

4.3.3. Karışık taşınmı problemi nin dinamik yapısı

Re veya Ri sayılarından herhangi birinin artmasıyla birlikte akış bölgesinde daha karmaşık bir yapı oluşmakta ve akış, daimi rejimden, periyodik rejime geçmektedir. Re ve/veya Ri sayısının daha da artması, akışın periyodik yapıdan türbülanslı (kaotik) yapıya doğru ilerlemesine sebep olmaktadır. Geometri üzerinde tensili bir noktada ($X/Y=3/4$, $y/D=3.14$, 1.19) alınan hız ve sıcaklığın zamana göre değişimi Şekil 4.9a ve 4.9b’de gösterilmiştir. $Ri=1$ ’de sabit tutulup Re sayısı değiştirildiğinde $Re=100$ ’de daimi, $Re=500$ ’de periyodik ($T_{p(boyutsuz)}=7.5$), $Re=1000$ ’de ise sanki-periyodik bir yapı elde edilmektedir (Şekil 4.9a). Öe yandan, $Re=100$ ’de sabit tutulup, Ri sayısı değiştirildiğinde ise $Ri=1$ için daimi, $Ri=10$ için periyodik ($T_{p(boyutsuz)}=10.3$), $Ri=100$ için intermittent (fasıllı) davranış, $Ri=1000$ ’de ise kaotik bir yapı söz konusudur (Şekil 4.9b). Oaya etki eden boyutsuz sayılar daha sık aralıklarla artırılarak bifürkasyon (çatallanma) olaylarının hangi kritik Re veya Ri değerinde meydana geldiği belirlenebilir. Ancak doğrudan sayısal simülasyonlar her bir parametre değeri için uzun zaman gerektirdiğinden kesin değerleri bulmak çok zahmetli bir iştir. Bu aşamada ileride geliştirilecek düşük boyutlu modelleri kullanmak faydalı olacaktır.

Doğrudan simülasyonla belirli bir noktada ($X/Y=3.14$, 1.19) hızın x-eksenindeki bileşeni ve sıcaklık için elde edilen frekans analizleri Şekil 4.10’da gösterilmiştir. ($Ri=10$, $Re=100$), ($Ri=10$, $Re=500$) ve ($Ri=1$, $Re=500$)’de görüldüğü gibi doğal taşınmı etkisi ile zorlanmış taşınmı etkisinden herhangi biri veya her ikisi arttığında akış yapısında önemli bir değişim olmadığında, başka bir ifadeyle rejim değişikliği (bifürkasyon) olmadığında, frekans şiddetleri ve onun harmoniklerinin sayısı ve şiddeti artmakta, fakat frekans bandının yapısında (frekans yoğunluğunda) belirgin bir değişim görülmemektedir. Söz konusu parametreler için akış yapısı periyodik olup, harmonikler baskın frekansın katları şeklindedir.

($Ri=1$, $Re=1000$)’de ise akış yapısının değiştiği açık bir şekilde görülmektedir. Hız ve sıcaklığı için baskın frekansın değeri düşmekte, şiddeti ise yükselmektedir. Burada hız ve sıcaklığın her ikisinde de frekans yoğunluğunun oldukça artması akış yapısının değiştiğinin en belirgin göstergesidir. Burada, harmoniklerin değerinin baskın frekansın katları nın toplamı veya farkı şeklinde olduğu sanki-periyodik bir yapı söz konusudur. Yani göz önüne alınan noktada belirli aralıklarla hızın ve sıcaklığın aynı değere gelmesi mümkün değildir. Ancak tamamen kaotik bir durum yoktur. Çünkü her ne kadar zamanda “sanki rastgelelik” mevcut ise de sistemde bir düzen mevcuttur. Re sayısının daha da artmasıyla yeni ve bağımsız frekanslar gittikçe daha sıklıkla oluşmakta, sanki-periyodik yapıdan sonra ise akış kaosa girmektedir (Özgür, 2000).

4.3.4 Levha ısı iletim katsayısının akış ve sıcaklık üzerindeki etkisi

$Ri=1$ ve $Re=100$ ’de sabitt tutularak, ısıl iletkenlik oranı r_k değerinin değiştirilmesiyle elde edilen sayısal simülasyonlarda, eş sıcaklık eğrileri ve hız vektörleri Şekil 4.11’de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi r_k değeri, başka bir ifadeyle, levhanın ısı iletim katsayısı arttıkça, ısı kaynağından yayılan ısı akısı, levha içinde daha kolay bir şekilde yayılmakta, böylece ortamdaki akışkana aktarılan ısı miktarının payı azaldığından, sirkülasyon hücrelerinin şiddeti çok az da olsa azalmaktadır. Bu azalma kaynaktan havaya olan ısı taşımında önemli bir etkiye sahip değildir. Buna ilaveten, r_k değerinin artmasıyla, levhaya iletimle geçen ısı miktarı arttığından, kaynak sıcaklığı belirgin bir şekilde düşmekte ve böylece maksimum boyutsuz sıcaklık (θ_{max}) azalmaktadır. Sirkülasyon hücrelerinin şiddetlerinin ve kaynak sıcaklığının azalması akışkana olan ısı transferini azalttığından, Nu sayısı da düşmektedir (Tablo 4.5).

Tablo 4.5. $Ri=1$, $Re=100$ ’de elde edilen sayısal simülasyonlarda farklı r_k değerleri ile θ_{max} , V_{max} ve Nu sayılarının değişimi.

$Ri=1, Re=100$			
r_k	θ_{max}	V_{max}	Nu
0.1	1.667	1.38359	4.505
1	0.730	1.38400	3.934
5	0.582	1.37907	3.673
10	0.529	1.37614	3.591
20	0.492	1.37602	3.527
50	0.488	1.37592	3.471
100	0.489	1.37587	3.452

Sirkülasyon hücrelerinin şiddetinin azalması soğutma bakımından olumsuz bir etki yapmasına rağmen, levhanın iletilemediği ısı miktarı çok daha baskın olduğundan, daha iyi bir soğutma elde edilmekte ve bu yüzden maksimum boyutsuz sıcaklık düşmektedir.

Şekil 4.11'deki hız vektörleri pratik olarak aynı, fakat levha ısı iletilemedi dolayısıyla eş sıcaklık eğrileri ile büyük oranda değişmektedir. Ancak levhanın iletilemediği ısı transfer kapasitesi sınırlı olduğu için, eş sıcaklık eğrileri belirli değerin üzerindeki r_k ile de fazla değişmemektedir. Dolayısıyla $r_k \geq 20$ değerinden sonra θ_{max} , V_{max} ve Nu değerlerinde önemli bir değişim görülmemektedir. (bkz. Tablo 4.5)

4.4 Düşük Boyutlu Modeller

En az sayıda denklem içeren düşük boyutlu modeller elde etmek için, kontrol parametreleri olan Re , Ri ve Pr sayılarının bazı değerlerinde, Navier-Stokes ve enerji denklemlerinin ele alınan sistemi için davranışlarını yansıtan (deneysel) özdeğer fonksiyonları, hız ve sıcaklık değişkenlerinin seri açılımında kullanılmışlardır. Özdeğer fonksiyonları oluşturmak için uygun ortogonal ayırma (POD)'ın anlık veri versiyonu (method of snapshots) kullanılmıştır. Bu çalışmada, düşük boyutlu model sonuçlarının daha hassas bir şekilde elde edilebilmesi için, POD uygulanan sayısal simülasyonlarda her bir eksenindeki grid sayısı iki katına (144×224) çikartılmıştır. (bkz. Şekil 3.2b)

POD ve düşük boyutlu modeller ile ilgili Bölüm 3'te yapılan açıklamalar ve çözüm yöntemi bu bölümde karışık taşıma problemi ne uygulanmıştır. Karışık taşımaından dolayı Navier-Stokes ve enerji denklemlerindeki Pr , Re ve Ri boyutsuz sayıları, bu denklemlere uygulanan Galerkin metodunun sonucunda elde edilen lineer olmayan adi diferansiyel denklemsisteminde de benzer şekilde ortaya çıkmaktadır. Karışık taşıma olayı için elde edilen düşük boyutlu modelin adi diferansiyel denklemsistemi, Navier-Stokes ve enerji denklemleri için sırasıyla aşağıda verilmiştir:

$$\frac{da_k}{dt} = A_k + \frac{B_k}{Re} + \sum_{i=1}^N a_i \left(C_{ki} + \frac{D_{ki}}{Re} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j E_{kij} + Ri \left(\sum_{i=1}^L b_i K_{ki} + L_k \right) \quad (4.7)$$

$$\frac{db_k}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L a_i b_j U_{kij} + \sum_{i=1}^N a_i V_{ki} + \sum_{i=1}^L b_i \left(W_{ki} + \frac{Z_{ki}}{Pr Re} \right) + \frac{Q_k}{Pr Re} + R_k \quad (4.8)$$

Burada k denklem sayısını temsil eder ve hız için $k=1,2,...,N$ sıcaklık için $k=1,2,...,L$ dir. (4.7) ve (4.8) denklemleri tambağımlıdır (fully coupled) ve dördüncü mertebeden bir Runge-Kutta çözücüsü kullanılarak sayısal olarak birarada integre edilmeleri zorunludur. Yukarıdaki denklemlerin katsayıları Ek A’da verilmiştir. Runge- Kutta yöntemi için gerekli olan başlangıç şartları aşağıdaki denklemler kullanılarak hesaplanmıştır:

$$a_k(0) = \iint \hat{V}'(x, y, 0) \phi_k(x, y) dx dy \quad k=1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

$$b_k(0) = \iint \theta'(x, y, 0) \psi_k(x, y) dx dy \quad k=1, 2, \dots, L \quad (4.9)$$

4.4.1. POD sonuçları

Farklı boyutsuz sayılarla (Re , Ri) elde edilen doğrudan sayısal simülasyonların POD uygulamalarında, hız ve sıcaklık alanları için eşit zaman aralıklarında alınmış 50 adet anlık veri takım ($M=50$) kullanılmıştır. Burada, özdeğer fonksiyonların özelliklerinin vurgulanmasının yanı sıra, POD uygulamalarında değişen parametrelerle özdeğer modların yakalayabildiği enerji miktarları ve bu enerjinin yüzde olarak modlara yayılımları da karşılaştırılmıştır.

4.4.1.1. Özdeğerler

$Ri=10$ ve $Re=100$ için elde edilmiş doğrudan simülasyonun sonuçlarına uygulanan POD ile elde edilen normalize edilmiş ilk on modun özdeğerleri ve onların çal kantı enerjisine olan toplam katkıları Tablo 4.6’de gösterilmiştir.

Tablo 4.6. $Ri=10$, $Re=100$ ’de normalize edilmiş en enerjik ilk on özdeğer ve bu özdeğerlerin toplam çal kantı enerjisine olan katkıları.

Ri = 10, Re=100 (Periyodik)				
Modlar	Hız		Sıcaklık	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)
1	0,62274	62,274	0,52228	52,228
2	0,32741	95,016	0,42298	94,526
3	0,02054	97,069	0,02861	97,387
4	0,01488	98,557	0,01902	99,289
5	0,00683	99,240	0,00339	99,628
6	0,00623	99,863	0,00231	99,859
7	0,00063	99,926	0,00066	99,925
8	0,00056	99,982	0,00055	99,980
9	0,00007	99,990	0,00009	99,989
10	0,00006	99,996	0,00008	99,998

Görül düğü gibi özdeğer modları yaklaşık olarak çiftler halinde olup, her bir çifte ait modların özdeğerleri mertebe olarak birbirine yakın değerdedir. Hz ve sıcaklık için toplam enerjinin büyük bir bölümü düşük dereceli modlarda toplanmıştır. İlk iki modun özdeğerleri, hız için toplam çalkantı enerjisinin %05'ini, sıcaklık için ise %04.5'ini temsil etmektedir. İlk on modun özdeğerler toplamı, her iki alan için toplam çalkantı enerjisinin pratik olarak tamamını oluşturmaktadır.

$Ri=10$ ve $Re=500$ için elde edilmiş doğrudan sayısal simülasyon sonuçlarına uygulanan POD ile elde edilen ilk on modun özdeğerleri ve onların toplam çalkantı enerjisine olan toplam katkıları Tablo 4.7'de gösterilmiştir.

Tablo 4.7. $Ri=10$, $Re=500$ 'de normalize edilmiş en enerjik ilk on özdeğer ve bu özdeğerlerin toplam çalkantı enerjisine olan katkıları.

$Ri = 10, Re=500$ (Periyodik)				
Modlar	Hız		Sıcaklık	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam enerji (%)
1	0,52837	52,837	0,38832	38,832
2	0,30673	83,509	0,29148	67,980
3	0,06693	90,202	0,11771	79,751
4	0,05202	95,405	0,09627	89,378
5	0,01588	96,992	0,03618	92,996
6	0,01505	98,498	0,02860	95,857
7	0,00475	98,972	0,01230	97,087
8	0,00434	99,406	0,01202	98,290
9	0,00188	99,594	0,00588	98,877
10	0,00175	99,769	0,00444	99,321

Burada da özdeğerler mertebe olarak çiftler halindedir ve her bir çifte ait özdeğer modların enerjileri ilk iki mod dışında birbirine yakın değerdedir. Re sayısının 100'den 500'e artmasıyla birlikte baskın modların enerjileri yüksek dereceli modlara doğru yayılmaktadır. Hz için ilk iki modun özdeğerleri toplam enerjinin %83.5'ini yakalarken, sıcaklık için ilk iki modun özdeğerleri toplam enerjinin ancak %68'ini yakalayabilmektedir. Zorlanmış taşınım ile doğal taşınım etkilerinin her ikisinde artmasıyla birlikte akışkanın kinetik enerjisinde artış olmakta ve böylece sirkülasyon hücrelerinin şiddetleri arttığından, hız için enerji, yüksek dereceli modlara doğru yayılmaktadır. Soğutma işlemi daha iyi yapıldığından, boyutsuz sıcaklıkta belirgin bir şekilde düşmektedir. Başka bir ifadeyle sı daha iyi bir şekilde sistemden çekilmektedir. Re sayısının beş katına çıkmasıyla (sabit Ri sayısı için) birlikte Gr sayısı, dolayısıyla ısı kaynağından sisteme giren ısı miktarı yirmi beş kat

arttığından sıcaklık için enerji, yüksek dereceli modlara doğru daha fazla yayılmaktadır. Bu da sıcaklık alanının (isoterm) daha karışık hale geldiğinin bir göstergesidir. Enerjinin yüksek dereceli modlara doğru yayılmasıyla birlikte sistemin kararsızlığı da artmaktadır.

$Ri=1$ ve $Re=500$ için elde edilmiş doğrudan sayısal simülasyon sonuçlarına uygulanan POD ile elde edilen ilk on modun özdeğerleri ve onların toplam çalkantı enerjisine olan katkıları Tablo 4.8’de verilmiştir.

Tablo 4.8 $Ri=1$, $Re=500$ ’de normalize edilmiş en enerjik ilk on modun özdeğerleri ve toplam çalkantı enerjisine olan katkıları.

$Ri=1, Re=500$ (Periyodik)				
Modlar	Hız		Sıcaklık	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam Enerji (%)	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam Enerji (%)
1	0,55209	55,209	0,41811	41,811
2	0,38451	93,660	0,26109	67,920
3	0,02455	96,115	0,10838	78,758
4	0,02290	98,405	0,10516	89,274
5	0,00630	99,036	0,03741	93,015
6	0,00545	99,581	0,03438	96,453
7	0,00131	99,712	0,01231	97,684
8	0,00129	99,841	0,01186	98,870
9	0,00052	99,893	0,00405	99,275
10	0,00051	99,943	0,00388	99,663

Re sayısı 500’de sabit tutulup, $Ri=10$ ’dan $Ri=1$ ’e düştüğünde, başka bir ifadeyle doğal taşınım etkisi on kat azaldığında, akışkanın çalkantı kinetik enerjisi de azaldığından, sirkülasyon hücrelerinin şiddetleri azalmakta, böylece sistemin kararlılığının artmasıyla birlikte, hız için toplam çalkantı enerjisi yüksek dereceli modlarda toplanmaktadır. Sıcaklık için ise modlara olan enerji yayılım oranında önemli bir değişim olmadığı görülmektedir. Bu durum ise sirkülasyon şiddetindeki azalmaya rağmen boyutsuz sıcaklıktaki değişimin çok az miktarda olmasından kaynaklanmaktadır.

$Ri=1$ ve $Re=1000$ ’de doğrudan sayısal simülasyon sonuçlarına uygulanan POD ile elde edilen ilk on modun özdeğerleri ve toplam çalkantı enerjisine olan katkıları Tablo 4.9’de verilmiştir. Ri sayısı 1’de sabit tutulup, $Re=500$ ’den $Re=1000$ ’e yükseltildiğinde hız ve özellikle sıcaklık için toplam çalkantı enerjisinin yüksek dereceli modlara doğru oldukça fazla miktarda yayıldığı görülmektedir. Hız için ilk

iki modun özdeğerleri toplam çalkantı kinetik enerjisinin yaklaşık %80'ini yakalayabilirken, sıcaklığın en enerjik ilk iki özdeğeri toplam çalkantı kinetik enerjisinin sadece %42.5'ini yakalayabilmiştir. Enerjinin yüksek dereceli modlara doğru aşırı miktarda yayılması akış yapısının değiştiğinin bir göstergesidir. Nitekim $Re=500$ için yapı periyodik iken, $Re=1000$ için sanki periyodiktir.

Tablo 4.9. $Ri=1$, $Re=1000$ 'de normalize edilmiş en enerjik ilk on özdeğer ve toplam çalkantı kinetik enerjisine olan katkıları.

Ri=1, Re=1000 (Sanki-Periyodik)				
Modlar	Hız		Sıcaklık	
	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam Enerji (%)	Normalize edilmiş özdeğerler	Toplam Enerji (%)
1	0,47808	47,808	0,27444	27,444
2	0,32125	79,933	0,15092	42,536
3	0,03985	83,917	0,10133	52,669
4	0,03201	87,118	0,06929	59,598
5	0,02697	89,815	0,06107	65,705
6	0,02350	92,165	0,05428	71,133
7	0,01786	93,951	0,04573	75,707
8	0,01105	95,056	0,03619	79,326
9	0,00831	95,887	0,02845	82,171
10	0,00672	96,559	0,02633	84,804

Sonuç olarak Ri veya Re sayısının artırılmasıyla birlikte sirkülasyon hücrelerinin şiddetinin artmasıyla daha iyi bir soğutma işlemi yapıldığından, maksimum boyutsuz sıcaklık düşmekte, akış daha karmaşık hale gelmekte ve çalkantı enerjisi yüksek dereceli modlara doğru yayılmaktadır. Enerjinin yayılması sistemin daha kararsız bir yapıya dönüşmesine sebep olmakta ve belirli bir noktadan sonra bifürkasyon meydana gelerek akış yapısının değişmesine yol açmaktadır.

4.4.1.2 Deneysel özdeğer fonksiyonlar

POD yöntemiyle elde edilen deneysel özdeğer fonksiyonlar akışın esas yapısını temsil etmekle birlikte, düşük boyutlu modellerin oluşturulmasında kullanılırlar.

Periyodik yapının sözkonusu olduğu ($Ri=10$, $Re=100$), ($Ri=10$, $Re=500$) ve ($Ri=1$, $Re=500$) ile sanki-periyodik yapının sözkonusu olduğu ($Ri=1$, $Re=1000$)'de elde edilmiş 4 farklı hız ve sıcaklık alanı için özdeğer fonksiyonlar sırasıyla Şekil 4.12a, 4.12b, 4.12c ve 4.12d' de gösterilmiştir. Farklı parametrelerle elde edilmiş deneysel özdeğer fonksiyonları karşılaştırdığımızda, Ri sayısı sabit tutulup Re sayısı artırıldığında zorlanmış taşınımın etkisi ile doğal taşınımın etkisinin her ikisi birden

arttığından, sisteme giren enerji miktarı artmakta ve özdeğer fonksiyonların yayıldığı alan genişlemektedir. Re sayısı sabit tutulup Ri sayısı azaltıldığında, zorlanmış taşınım etkisi değişmesine rağmen, Gr sayısının değerinin azalmasıyla, başka bir ifadeyle doğal taşınım etkisinin azalmasıyla birlikte, sisteme giren enerji miktarı da azalmakta, böylece özdeğer fonksiyonlar, ortam içerisinde daha az bir alana yayılmaktadır. Bütün bunlara ilaveten, farklı parametrelere rağmen aynı enerji modları arasındaki yapısal benzerlik dikkat çekicidir. Özdeğer fonksiyonların özellikle en enerjetik olanların, Ri ve Re sayılarının değişiminden fazla etkilenmesi düşük boyutlu model oluşturmada istenen bir özelliktir.

4.4.1.3 Navier-stokes ve enerji denklemlerinin POD projeksiyon (izdüşüm) sonuçları

($Ri=10$, $Re=100$), ($Ri=10$, $Re=500$) ve ($Ri=1$, $Re=500$) için yeniden oluşum formleri olan denklem (3.16) ve (3.17)'den elde edilen açılım katsayılarının zamanına göre değişimleri hız ve sıcaklık alanları için sırasıyla Şekil 4.13a, 4.13b ve 4.13c'de gösterilmiştir. Genel olarak bakıldığında, açılım katsayılarının salınımları periyodik olup, modlar çiftler halindedir ve her bir çifte ait modların açılım katsayılarının şiddetleri birbirine yakın değerdedir. Yüksek dereceli modlara doğru açılım katsayılarının şiddetleri azalmaktadır. Ayrıca ilk iki özdeğer mod arasında çeyrek periyotluk faz kayması vardır.

Ri sayısı 10'da sabit tutulup ($Gr/Re^2=10$), Re sayısı 100'den 500'e çıkartıldığında (bkz Şekil 4.13a&b), zorlanmış taşınım etkisinin 5 kat artmasıyla birlikte ($U \rightarrow 5U$), doğal taşınım etkisi 25 katına ($q \rightarrow 25q$) çıkmaktadır. Böylece sisteme giren enerji miktarındaki artış, enerjinin yüksek dereceli modlara doğru yayılmasına rağmen, hız için tüm modlarda, açılım katsayılarının genliklerinde belirgin bir yükselmeye yol açmaktadır. Halbuki Şekil 4.13a ve 4.13b'ye baktığımızda, sisteme giren enerji miktarının artmasıyla birlikte sıcaklık için açılım katsayılarının genliklerinin artması beklenirken, enerjinin yüksek dereceli modlara doğru çok daha fazla oranda yayılmasıyla birlikte, düşük dereceli modların açılım katsayılarının genlikleri (b_1 ve b_2) azalırken, yüksek dereceli modların genliklerinin arttığı görülmektedir.

$Re=500$ 'de sabit tutulup ($U \rightarrow bt.$), $Ri=10$ 'dan $Ri=1$ 'e düşürüldüğünde (bkz Şekil 4.13b&c), doğal taşınım etkisi 10 kat azalırken zorlanmış taşınım etkisi değişmektedir. Sisteme giren enerjinin azalmasına rağmen, bu enerjinin düşük

dereceli modlarda toplanması, hız için ilki ki modun açılı mkatsayılarında önemli bir değişme meydana getirmezken, daha yüksek dereceli modların açılı mkatsayılarında dikkate değer oranda düşmeye yol açmıştır. Sıcaklık için ise enerji yayılımında önemli bir değişme olmadığından (bkz Tablo 4.7 ve 4.8), sıcaklık modlarının açılı mkatsayılarının genliklerinde de önemli bir değişme görülmemektedir. Bütün bunlardan çıkarılacak sonuç, enerjinin modlar arasındaki yayılım, açılı mkatsayılarının genlikleriyle doğrudan ilişkilidir. Bir modun içerdiği enerji miktarını belirten özdeğer (λ) arttıkça o modun açılı mkatsayısının şiddeti de artmaktadır.

($Ri=10$, $Re=100$) için boyutsuz periyot $T_{p(boyutsuz)} = T_p U / D \cong 13$, ($Ri=10$, $Re=500$) için $T_{p(boyutsuz)} \cong 11$ ve ($Ri=1$, $Re=500$) için $T_{p(boyutsuz)} \cong 10$ olarak elde edilmiştir.

$Ri=1$, $Re=1000$ için yeniden oluşumformleri olan denklem (3.16) ve (3.17)'den elde edilen açılı mkatsayılarının zamanına göre değişimleri $a_k(t)$ ve $b_k(t)$ Şekil 4.13d' de gösterilmiştir. $Ri=1$ 'de sabit tutup, $Re=500$ 'den $Re=1000$ 'e çıkartıldığında, zorlanmış taşınım etkisi 2 kat artmakla beraber, doğal taşınım etkisi de 4 kat artmaktadır. Bu durumda hızın çalkantı kinetik enerjisi artmasına rağmen, bu enerjinin yüksek dereceli modlara doğru yayılması (bkz Tablo 4.8 ve 4.9), hız modlarının açılı mkatsayılarının genliklerinde çok az bir artış olmasına sebep olmaktadır. Sıcaklık enerjisinin ise yüksek dereceli modlara aşırı ölçüde yayılmasından dolayı, düşük dereceli modların açılı mkatsayılarının genliklerinde az da olsa düşme görülmemektedir. Bütün bunların yanı sıra hız çalkantı kinetik enerjisinin ve özellikle sıcaklık enerjisinin yüksek dereceli modlara aşırı derecede yayılması, açılı mkatsayılarının salınımında da yapı olarak belirgin bir değişme sebep olmuştur. Şekil 4.13d' de görüldüğü gibi artık periyodik bir yapı değil, periyodik ile kaotik yapı arasında bir durum olan sanki-periyodik bir yapı söz konusudur. Daha önce belirtildiği gibi enerji yayılımındaki aşırı değişme, akış yapısının da değişmesine yol açmıştır.

Sonuç olarak sistemin enerjisinin artması açılı mkatsayılarının genliklerinin artmasına, enerjinin yüksek dereceli modlara doğru yayılması ise açılı mkatsayılarının genliklerinin azalmasına sebep olmaktadır. Ri ve Re sayıları arttığında, sistemin enerjisinin artmasıyla birlikte bu enerji yüksek dereceli modlara doğru yayılmaktadır. Bu noktada açılı mkatsayılarının genliklerindeki değişimi değerlendirebilmek için, sistemin enerjisindeki artışın, yoksa bu enerjinin yüksek dereceli modlara yayılımının daha etkili/baskın olduğunun belirlenmesi önem kazanmaktadır.

Yeni den oluşum for m ller iyle elde edilen bu sonuçlar, Navier-Stokes ve Enerji denklemlerinin POD i zd ş n  olup, değişen parametreler karşısında akış yapısının POD kullanılarak irdelenmesini sağlamakla birlikte, düşük boyutlu modellerin performansını test etmek için de kullanılacaktır.

4.5 Düşük Boyutlu Model Sonuçları

4.5.1. Tasarım Şartları

Periyodik yapının söz konusu olduğu ($Ri=10$, $Re=100$), ($Ri=10$, $Re=500$) ve ($Ri=1$, $Re=500$) değerleri ile sanki-periyodik yapının söz konusu olduğu ($Ri=1$, $Re=1000$) değeri için gerçekleştirilen doğrudan sayısal simülasyon sonuçlarından elde edilen POD esaslı  zdeğer fonksiyonlar, Galerkin yöntemiyle birlikte kullanılarak düşük boyutlu modeller elde edilmiştir. Düşük boyutlu modelin tasarım Şartları, o modelin tasarımı için kullanılan POD esaslı  zdeğer fonksiyonların elde edilmesinde kullanılan Şartlar, yani Re , Ri ve Pr sayılarının değerleri olarak adlandırılmaktadır. Tasarım Şartlarında, farklı denklem sayılarında düşük boyutlu modeller oluşturulmuştur. (4.7) ve (4.8) denklemleri kullanılarak, hız ve sıcaklık için açılı m katsayıları hesaplanmıştır. Düşük boyutlu modellerle elde edilen bu açılı m katsayıları, yeni den oluşum for m ller iyle elde edilen açılı m katsayılarıyla karşılaştırılarak b ş k boyutlu modellerin performansı tasarım Şartlarında test edilmiştir. Bunun yanı sıra (6+8)-denklemlle oluşturulan düşük boyutlu modeller için frekans analizleri yapılmış ve böylece sistemin yapısı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

4.5.1.1. Açılı m katsayıları

Tasarım Şartlarında farklı sistem parametreleri ve denklemsayılarında oluşturulan açılı m katsayılarının zamana göre değişimleri Şekil 4.14a, 4.14b ve 4.14c’de gösterilmiştir.

$Ri=10$, $Re=100$ için (4+4), (5+5) ve (6+8)-denklemlle oluşturulan düşük boyutlu modeller (bkz Şekil 4.14a), tasarım Şartlarında POD ile elde edilen açılı m katsayılarını (bkz Şekil 4.13a) başarılı bir şekilde tahmin/tenkil edebilmiştir. Salınımın periyodu en enerjik modun açılı m katsayısı için $T_{p(boyutsuz)} \cong 8.4$ olarak bulunmuş olup, bu değer yeni den oluşum for m ller iyle elde edilen değerden daha düşüktür. Açılı m katsayılarının genlikleri ise yeni den oluşum for m ller iyle elde edilen açılı m katsayılarının genliklerine yakın değerdedir.

($Ri=10$, $Re=500$) için (5+5), (6+6) ve (6+8)-denklemden oluşan düşük boyutlu modellerin tasarım şartlarındaki açılım katsayılarının zamanına göre değişimleri Şekil 4.14b’de gösterilmiştir. En enerjik modun açılım katsayısının periyodu $T_{p(boyutsuz)} \cong 8.3$ olarak bulunmuştur. Açılım katsayılarının genlikleri yeniden oluşum formülleriyle elde edilen açılım katsayılarının genliklerine yakın değerde olmakla beraber, sistemin kararlılığının azalmasından dolayı, hız ve özellikle sıcaklık için elde edilen açılım katsayılarının salınımında yüksek dereceli modlara doğru bozulmalar görülmektedir.

($Ri=1$, $Re=500$) için ise, Şekil 4.14c’de gösterilen (5+5), (6+6) ve (6+8)-denklemleri düşük boyutlu modeller hız ve sıcaklığın açılım katsayılarını hem frekans hem de genlik bakımından başarılı bir şekilde tahmin edebilir. En enerjik modun açılım katsayısının periyodu da $T_{p(boyutsuz)} \cong 8.2$ civarındadır.

Genel olarak baktığımızda, periyodik yapıya sahip düşük boyutlu modellerde Ri ve/veya Re sayılarının artmasıyla birlikte sistemin kararlılığı azaldığından, açılım katsayılarında özellikle yüksek mertebedeki modlarda bozulmalar görülmektedir. Ayrıca düşük boyutlu modellerle, hız için yapılan tahminlerin, sıcaklık için yapılan tahminlere oranla çok daha başarılı oldukları görülmektedir. Bu durum büyük ölçüde, sistemde hıza oranla sıcaklık için enerjisinin, yüksek dereceli modlara doğru daha fazla yayılmasından kaynaklanmaktadır.

$Ri=1$, $Re=1000$ için, Şekil 2.14d ve 2.14e’de görüldüğü gibi, (6+6) ve (6+8)-denklemleri modellerde açılım katsayılarının genlikleri yeniden oluşum formülleriyle elde edilen açılım katsayılarının genliklerine oranla oldukça yüksek olmasına rağmen, sistem davranışını (sanki-periyodik yapıyı) temsil etme konusunda son derece başarılıdır. Daha az sayıda denkleme çeren düşük boyutlu modeller sistem davranışını tahmin etme konusunda yetersiz kalmışlardır.

4.5.1.2 Frekans analizleri

Periyodik yapının söz konusu olduğu ($Ri=1$, $Re=500$) ve sanki-periyodik yapının söz konusu olduğu ($Ri=1$, $Re=1000$) için, tasarım şartlarında (6+8)-denklemlerle oluşturulan açılım katsayılarının frekans analizleri, Şekil 4.15a ve 4.15b’de gösterilmiştir. Şekil 4.15a’da görüldüğü gibi tek bir baskın frekans vardır ve değeri $f_0=0,12225$ ’dir. Bu değer doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen değerden ($f_0=0,0978$) biraz daha yüksektir (bkz Şekil 4.10). Açılım katsayılarında yüksek

dereceli modlara doğru gidildikçe, baskın frekansın şiddeti azalmaktadır. Düşük boyutlu model frekans değerini tam olarak yakalayamasa da sistem yapısını tahmin etme konusunda oldukça başarılıdır.

Sanki-periyodik yapının söz konusu olduğu durum için frekans analizleri incelendiğinde (Şekil 4.15b), Re sayısının 500'den 1000'e yükseltilmesiyle birlikte frekans yoğunluğu belirgin bir şekilde artmış, böylece baskın frekansın harmoniklerinin sayısının ve şiddetinin de arttığı görülmektedir. Bu durum akış yapısının değiştiğinin en önemli belirtisidir. Baskın frekansın değerleri ise $f_1=0.06113$ $f_2=0.41565$ olarak bulunmuştur. Bu değerler doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen baskın frekans değerlerinden farklı olsada, baskın iki frekans değerinin katlarının toplam veya farkı şeklinde harmonik değerlerin matematiksel olarak yakalanabilmesi, modelin sanki-periyodik yapının söz konusu olduğu sistem davranışını yeterli ölçüde temsil edebildiğini göstermektedir.

4.5.2. Tasarım dışı şartlar

4.5.2.1. Açılım katsayıları

Tasarım dışı şartlar olarak belirli bir (Re , Ri) değeri için elde edilen modelin bu değerden farklı Re veya Ri değerleri için gözönüne alındığı durum kastedilmektedir. Tasarım şartlarında ($Ri=1$, $Re=1000$), (8+8) ve (8+10)-denklemlerle elde edilen düşük boyutlu modellerin, tasarım dışı şartlarda ($Ri=1$, $Re=500$) çözülmesiyle elde edilen açılım katsayılarının zamana göre değişimleri Şekil 4.16'da gösterilmiştir. Şekil 4.13c ve 4.16'yı karşılaştırdığımızda, düşük boyutlu modellerin tasarım dışı şartlarda sistemin genel dinamik yapısını belirleyebildiği ortaya çıkmaktadır. En enerjik mod için açılım katsayısının periyodu $T_{p(boyutsuz)} \cong 9$ olarak bulunmuş olup bu değer, yeniden oluşum formlü için $T_{p(boyutsuz)} \cong 10$ ve tasarım şartlarında elde edilen düşük boyutlu model için ise $T_{p(boyutsuz)} \cong 8.2$ olarak bulunmuştur.

$Ri=1$, $Re=1000$ 'deki POD kullanılarak oluşturulan düşük boyutlu modelle tasarım dışı şartlarda ($Ri=1$, $Re=500$) yapılan tahminler, $Ri=1$, $Re=500$ 'de yeniden oluşum formleriyle elde edilen açılım katsayılarını hem yapı olarak (periyod) hem de genlik değerleri olarak yeterli ölçüde temsil edebilmektedir. $Ri=1$, $Re=1000$ 'de POD ile elde edilen özdeğerlerde hız ve özellikle sıcaklık için enerjinin yüksek dereceli modlara doğru aşırı derecede yayılması, düşük boyutlu modellerin oluşturulması sırasında alınan denklemsayısının artırılması zorunlu hale getirmektedir. Tasarım

dışı şartlarda elde edilen (8+8)-denklemlerli modeller sistem davranışının tahmin edilmesinde yeterli olurken, daha düşük sayıda denklemlerli modeller yetersiz kalmıştır. Sıcaklık için enerjinin yüksek dereceli modlara aşırı yayılması düşük boyutlu model sonuçlarını da olumsuz yönde etkilemiştir.

4.5.2.2 Frekans analizleri

$Ri = 1$, $Re = 1000$ 'de oluşturulan düşük boyutlu modelin tasarım dışı şartlarda ($Ri = 1$, $Re = 500$), (8+8)-denklemlerle çalıştırılmasıyla elde edilen frekans analizleri Şekil 4.17'de gösterilmiştir. Bu model için elde edilen baskın frekans değeri ($f_0 = 0.11003$), sayısal simülasyonla ve tasarım şartlarında elde edilen değerlere (bkz. Şekil 4.10 ve 4.15a) yakın bulunmuştur. Bunun yanı sıra baskın frekansın şiddeti ve harmonikleri bakımından da mevcut periyodik yapıyı yeterli düzeyde temsil edebilmektedir.

4.5.2.3 Hopf bifürkasyon eğrisi

Şekil 4.18'de, belirli Re ve Ri değerlerinde, doğrudan sayısal simülasyonlarla elde edilen akış rejimiyle, ($Ri = 1$, $Re = 500$) ve ($Ri = 10$, $Re = 100$) tasarım şartları kullanılarak oluşturulan (6+8)-denklemlerli düşük boyutlu modellerin akış rejim tahminleri karşılaştırılmıştır. Böylece farklı Ri ve Re sayılarında, daimi ve daimi olmayan akış yapılarını tahmin etme konusunda düşük boyutlu modellerin performansı test edilmiştir. Düşük boyutlu modellerin tasarım şartlarına yakın parametrelerde daha doğru tahminler yapacağı ve tasarım şartlarından uzaklaştıkça elde edilen sonuçların güvenilirliğini azalacağı gözönüne alınarak, iki farklı model eğrisini ikiye ayıran kesişim noktasından, eğrilerin tasarım noktasına yakın kısımları esas alınarak, bu iki eğri tek bir eğriye indirgenmiştir. Şekil 4.18 üzerinde daimi ve daimi olmayan olmak üzere iki bölge vardır ve bu bölgeleri birbirinden ayıran kritik Re ve Ri değerlerinde Hopf bifürkasyonunun olduğu bir sınır hat söz konusudur. Şekil 4.18'deki eğriler düşük boyutlu modellerle elde edilen sınır çizgisini göstermektedir. Bu eğri ve üzerinde kalan alan daimi olmayan (genellikle periyodik), altında kalan alan ise daimi akış bölgesini göstermektedir. Dolayısıyla bu eğri, gözönüne alınan taşınım problemi için Hopf bifürkasyon eğrisi olarak adlandırılabilir.

4.6 Genel Sonuçlar

4.6.1 Sayısal simülasyon sonuçları

Üzerine ısı kaynağı yerleştirilmiş bir levhanın bulunduğu yalıtılmış duvarlarla sınırlanmış dikdörtgensel bir bölge içerisine, dışardan giren soğutucu akışkan ile (örneğin bir fan vasıtasıyla) bölgede ortaya çıkan ısıyı taşıyıcı maddenin incelenmiştir. Bu şekilde doğal ve zorlanmış taşınım etkisiyle sistemin soğutulması işleminde, Re ve Ri (G/Re^2) parametrelerinin sistemin dinamik davranışı üzerinde önemli etkilere sahip olduğu görülmüştür. Bu iki parametreden birisinin veya her ikisinin artmasıyla, sistem benzer dinamik davranışlar sergilemektedir. Başka bir ifadeyle doğal ve zorlanmış taşınım olayları, sistemin davranışını aynı yönde etkilemektedir. Örneğin zorlanmış taşınım etkisinin artması, sirkülasyon hücrelerinin şiddetini artırdığından, Nu sayısının yükselmesine, böylece daha iyi bir soğutma işlemi yapılmasına sebep olduğundan, maksimum boyutsuz sıcaklık düşmektedir. Benzer şekilde doğal taşınım etkisi artırıldığında, başka bir ifadeyle kaynaktan çıkan ısı akışı yükseltildiğinde, ortamdaki havanın kinetik enerjisi kaldırma etkisinden dolayı arttığından, sirkülasyon hücrelerinin şiddeti de artmakta ve böylece Nu sayısı artarken, maksimum boyutsuz sıcaklık düşmektedir. Bu iki olaydan, sistemin dinamik davranışında sirkülasyon hücrelerinin önemli bir rol oynadığı görülmektedir. Bunun yanı sıra, soğutma işleminde, doğal ve zorlanmış taşınım etkileri birbirini tanımlayıcı özelliktedirler. Bu durumu makışın daimi ve periyodik yapıya sahip olduğu sistemlerin her ikisinde de görülmektedir.

Bu çalışmada incelenen bir başka durum ise, üzerine ısı kaynağı yerleştirilen levhanın ısı iletim katsayısının, taşınım problemine etkisinin belirlenmesidir. Böylece taşınım etkisinin yanı sıra iletim etkisi de incelenmiştir. Levhanın ısı iletim katsayısının artması, kaynaktan levhaya geçen ısı miktarını artırdığından, taşınımın payına düşen ısı miktarı azalmaktadır. Bu durum sirkülasyon hücrelerinin şiddetinde çok az da olsa bir düşme meydana getirirken, maksimum kaynak sıcaklığının belirgin bir şekilde azalmasına, Nu sayısının da düşmesine sebep olmaktadır (bkz. Tablo 4.5). Burada soğutma işleminin daha iyi gerçekleşmesinin esas sebebi, sirkülasyon hücreleri değil, ısı iletim ile levhaya olan ısı geçişindeki artışın, kaynak sıcaklığını düşürmesidir. Levhanın ısı kapasitesi sınırlı olduğundan belli bir değerden sonra

levhamın sı iletim katsayısındaki artış, Nu ve maksimum boyutsuz sıcaklığı (θ_{max}) değeri nde belirgin bir değ iş i kli ğ e sebep ol na maktadır. (bkz. Tablo 4.5)

4.6.2. Düşük boyutlu model sonuçları

Periyodik yapının söz konusu oldu ğ u akış şartlarında elde edilen düşük boyutlu modeller genel olarak, akış yapısını başarılı bir şekilde temsil edebil mektedir. POD yönteminde yeniden oluşturma for mülleriyle elde edilen açılı m katsayıları ile tasarımı şartlarında elde edilen düşük boyutlu modellerin açılı m katsayıları genel olarak genlik ve periyod açısından uyum göster mektedir. Re sayısı ve/veya Ri sayısı artırıld ığında düşük boyutlu modellerle elde edilen açılı m katsayıları nın genlikleri de art makt a, bunun yanı sıra sistemin kararlılı ğ azald ığı ndan, modların derecesi arttıkça açılı m katsayıları nın frekans spektrumu daha karmaş ık bir hale gel mektedir. Bu da Navier-Stokes çözümlerinden de bildi ğ imiz beklenen bir durum olarak karş ımıza çı kmaktadır. Genel olarak bakıld ığında, oluşturulan düşük boyutlu modellerle hız iç in yapılan tahminlerin, sıcaklık iç in yapılan tahminlere oranla daha tutarlı oldu ğ u gör ü l mektedir.

Sistem dinamik davranış ının sanki-periyodik oldu ğ u durum ($Ri=1$, $Re=1000$) iç in geliştirilen (6+6) ve (6+8)-denkle m kullanılarak elde edilen düşük boyutlu modeller sistemin dinamik yapısını tahmin et me konusunda iyi sonuçlar verirken, denkle m sayısı azaltıld ığında model tahminleri başarısız ol maktadır. Ancak sistem dinamik davranış ının basit periyodik oldu ğ u durumlarda, örne ğ in ($Ri=100$, $Re=10$), daha az sayıda denkle mden oluş an modeller, örne ğ in (4+4)-denkle mli model, sistemin dinamik davranış ını yeterince temsil edebil mektedir.

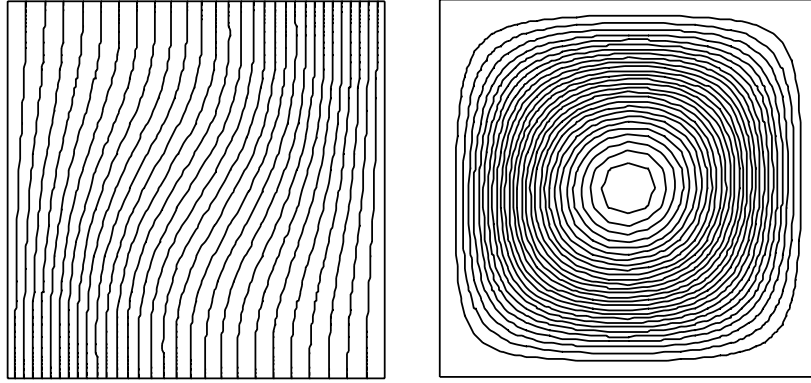
Sistem dinamik davranış ının ayrı ntılı bir şekilde belirlenebil mesi iç in yapılan frekans analizlerinde, periyodik yapının söz konusu oldu ğ u durumlarda, Ri ve/veya Re sayılarının art masıyla birlikte, frekans yoğunlu ğ unda ö ne mli bir değ iş im gör ü l me mekle birlikte, tüm durumlar iç in yalnızca tek bir baskın frekans vardır. Bu da yapının periyodik olduğunu daha belirgin bir şekilde göster mektedir. Ayrıca yüksek dereceli modlara doğru frekans şiddeti azal maktadır.

Yapının sanki-periyodik oldu ğ u durum iç in yapılan frekans analizinde, frekans yoğunlu ğ u belirgin bir şekilde arttık, bunun yanı sıra baskın frekans sayısında da artış oldu ğ u gör ü l mektedir. Bu durum artık yapının periyodik hal den, kaotik yapıya geçiş aşaması olan sanki-periyodik yapıya ulaşt ığını bir göstergesidir.

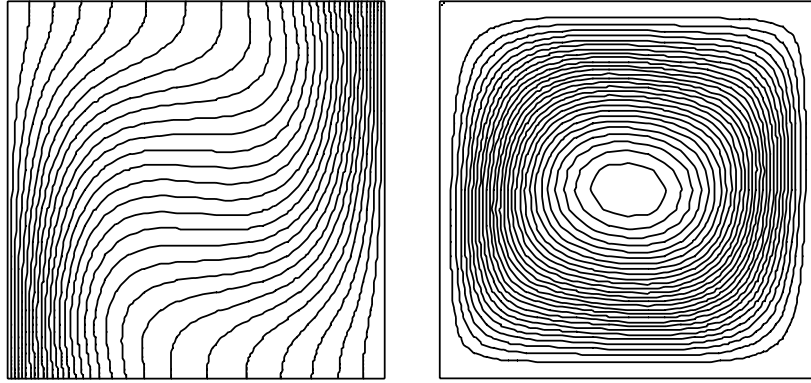
Bir düşük boyutlu modelin kontrol amaçlı kullanılabilmesi için değişen parametrelerin geniş bir aralığında (tasarım ve tasarım dışı şartlarda) sistem davranışını yeterli ölçüde temsil edebilmesi istenir. Genel olarak tasarım şartlarından uzaklaştıkça, düşük boyutlu modellerle yapılan tahminlerin güvenilirliği de azalmaktadır. Bu olumsuzluk geniş parametrik değişimlerin söz konusu olduğu durumlarda, belli parametrik aralıklarda birden fazla düşük boyutlu model kullanılarak aşılabılır. Bu amaçla, yaptığımız çalışmada ($Ri=1$, $Re=500$) ve ($Ri=10$, $Re=100$) şartlarında oluşturulan düşük boyutlu modellerle farklı parametreler için yapılan uygulamalarda sistem dinamik davranışları (daimi ve periyodik akış) belirlenmiştir. Bu şekilde düşük boyutlu modellerle elde edilen Hopf bifürkasyon eğrisi, doğrudan sayısal simülasyonlarla elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında sistemin genel davranışını oldukça başarılı bir şekilde temsil edebildiği görülmüştür.

Sonuç olarak düşük boyutlu modeller, momentum ve enerji problemlerinin analizlerinin yapılmasında, sistem davranışlarının belirli bir parametre aralığında kolaylıkla belirlenebilmesinde ve dolayısıyla kontrol amaçlı olarak kullanılmasında önemli bir role sahiptir.

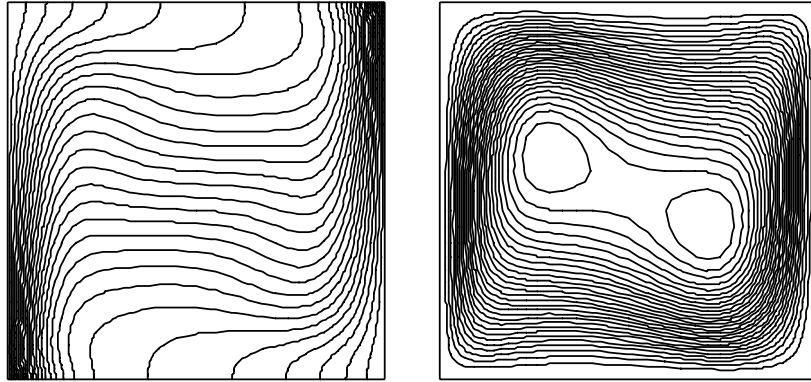
$Ra = 10^5$



$Ra = 10^4$



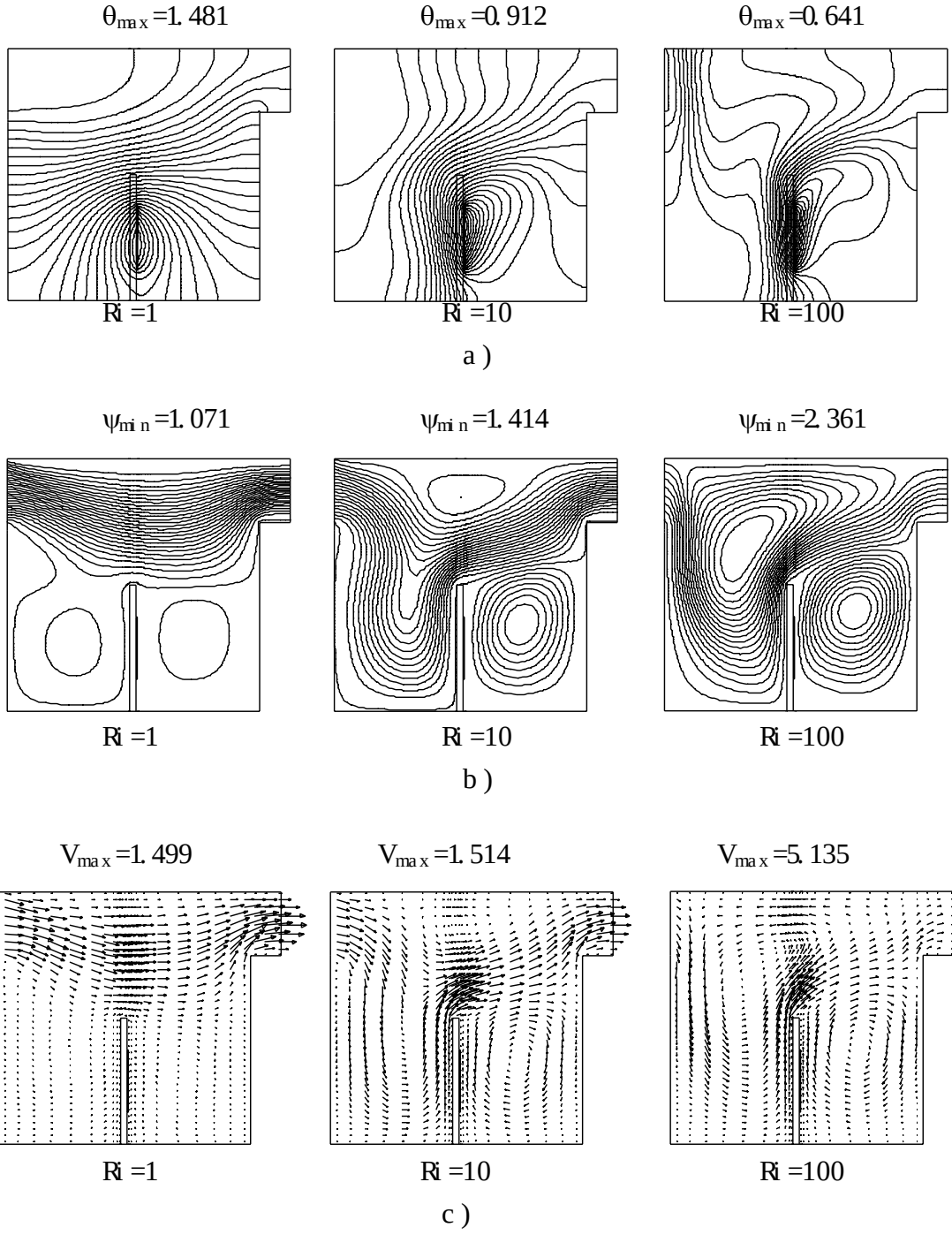
$Ra = 10^3$



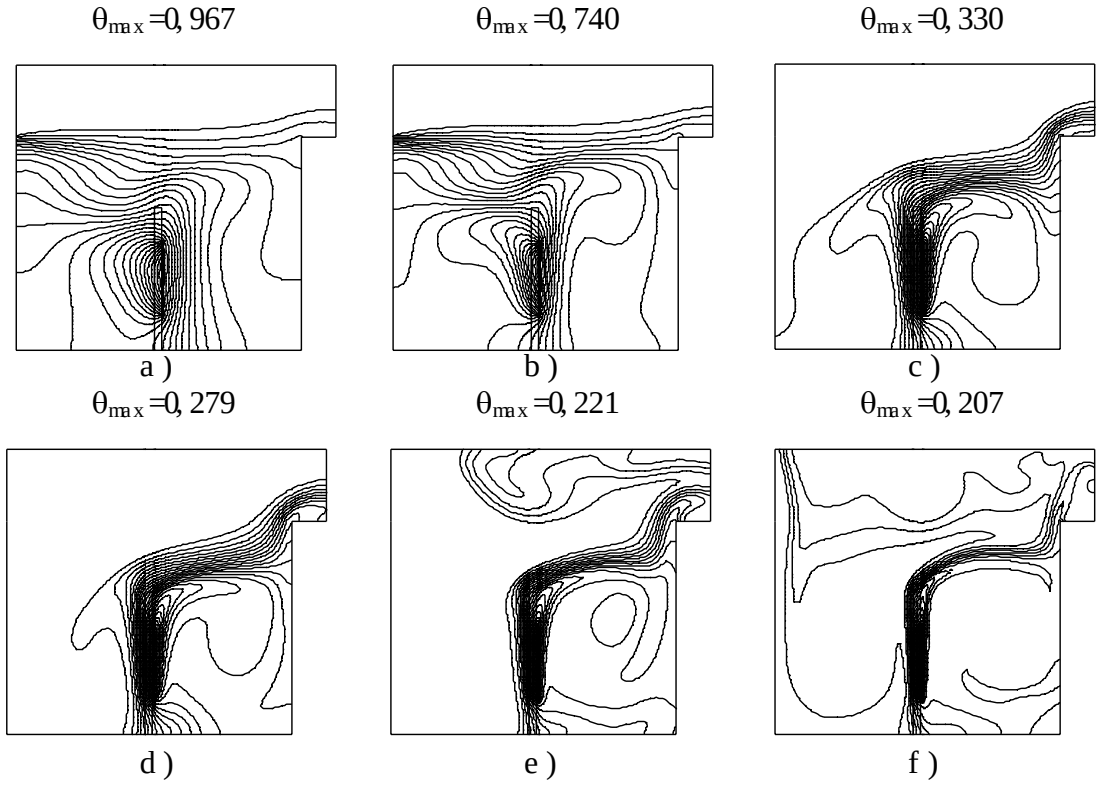
(a)

(b)

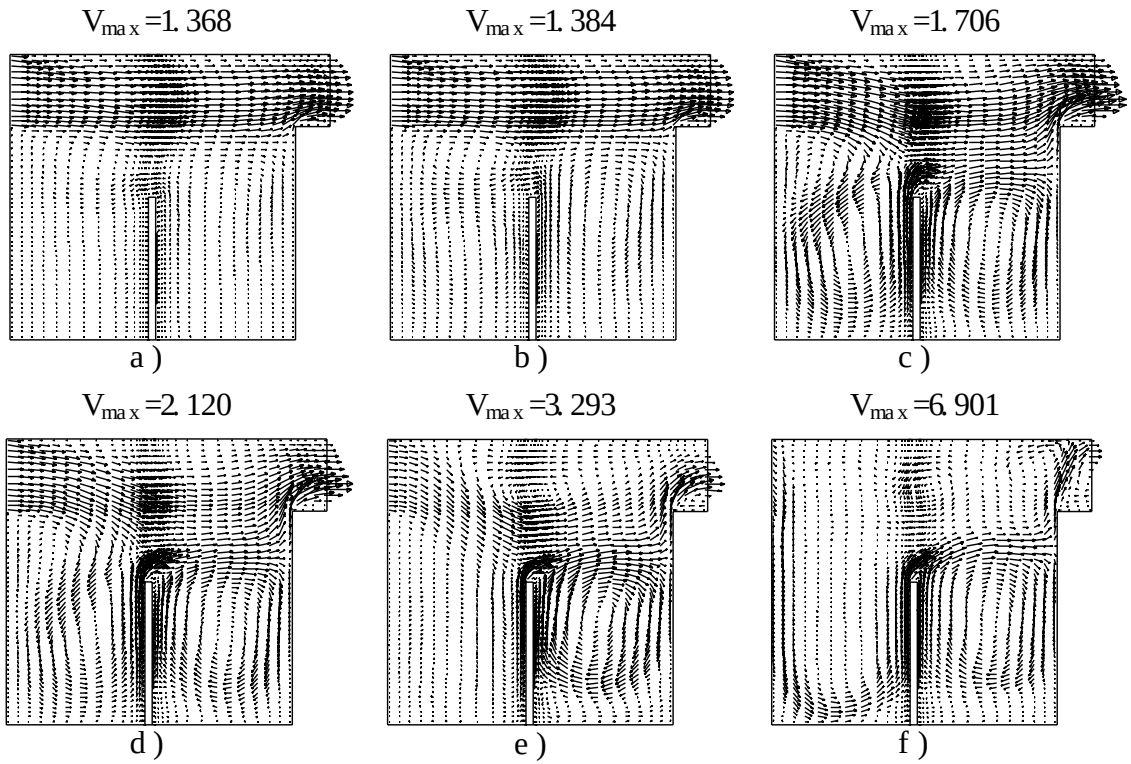
Şekil 4.3. Farklı $Ra (Gr \times Pr)$ değerleri için, a) Eş sıcaklık eğrileri, b) Akı mçizgileri.



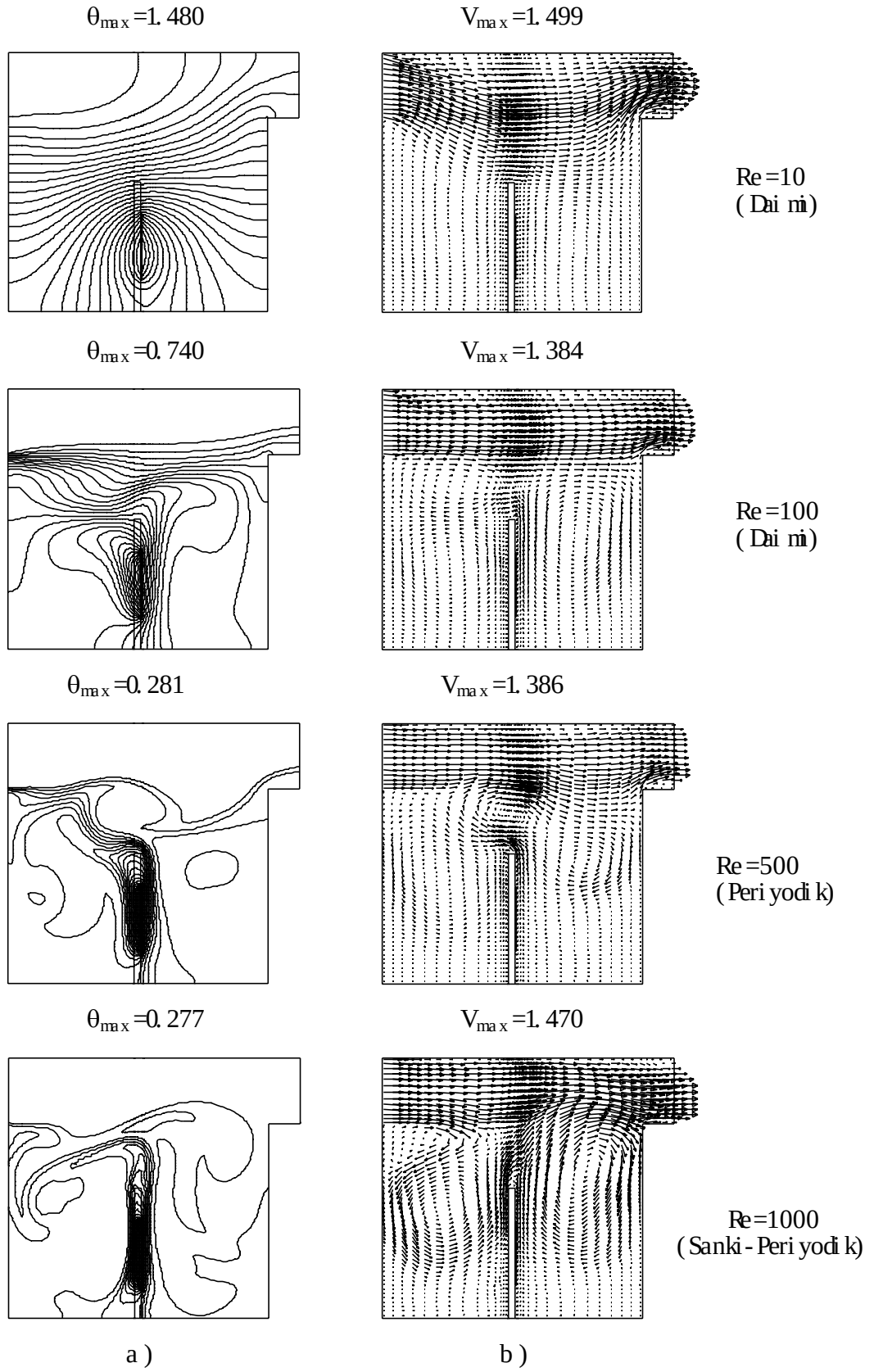
Şekil 4.4. $Re=10$ 'da farklı Ri sayıları için, doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen a) eş sıcaklık eğrileri, b) akı çizgileri, c) hız vektörleri.



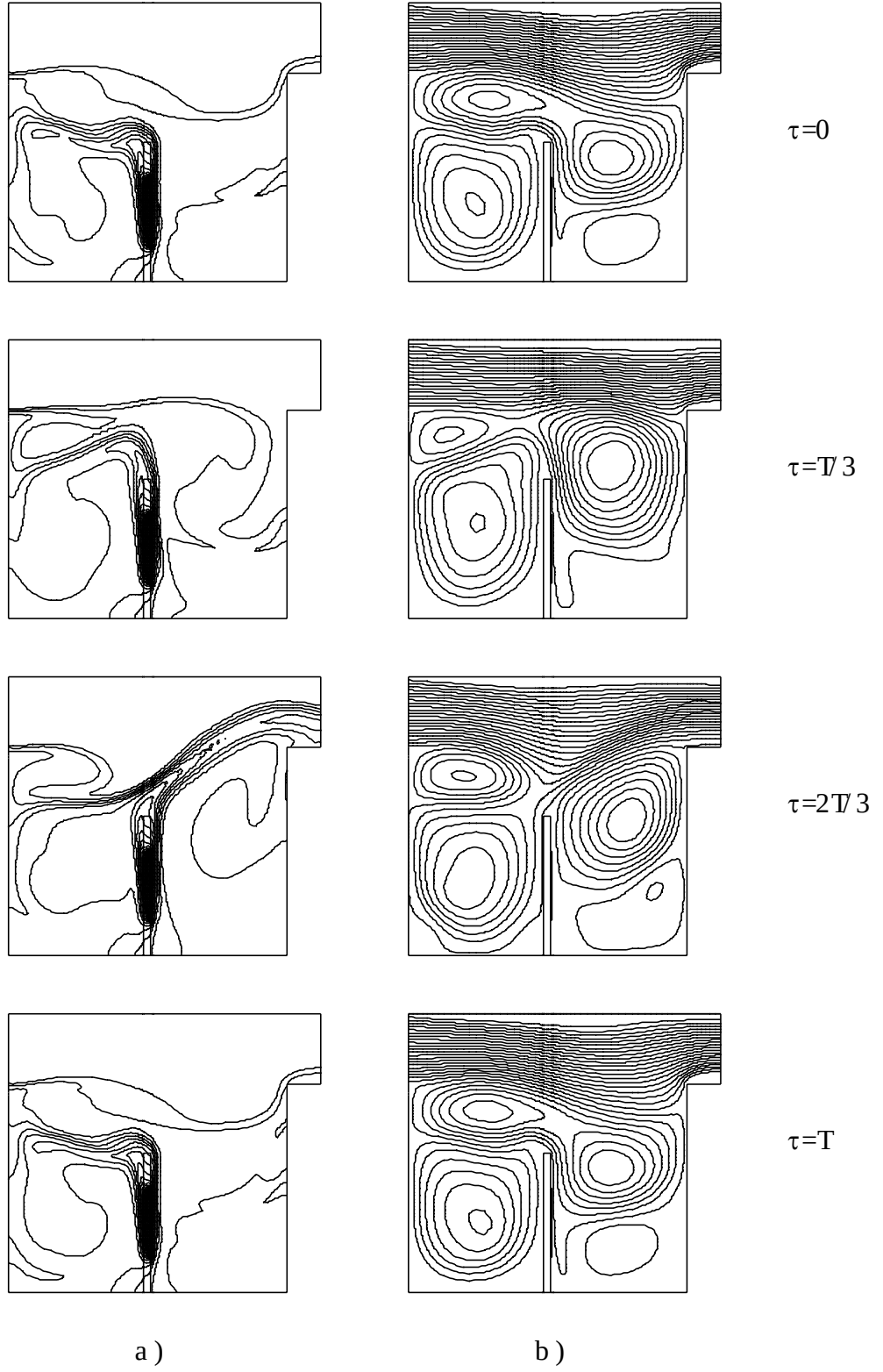
Şekil 4.5a. $Re=100$ de farklı Ra sayıları için elde edilmiş eş sıcaklık eğrileri
 a) $Ra=0,1$ (Dai ni), b) $Ra=1$ (Dai ni), c) $Ra=10$ (Periyodik), d) $Ra=20$ (Periyodik),
 e) $Ra=100$ (Sanki-Periyodik), f) $Ra=1000$ (Kaotik).



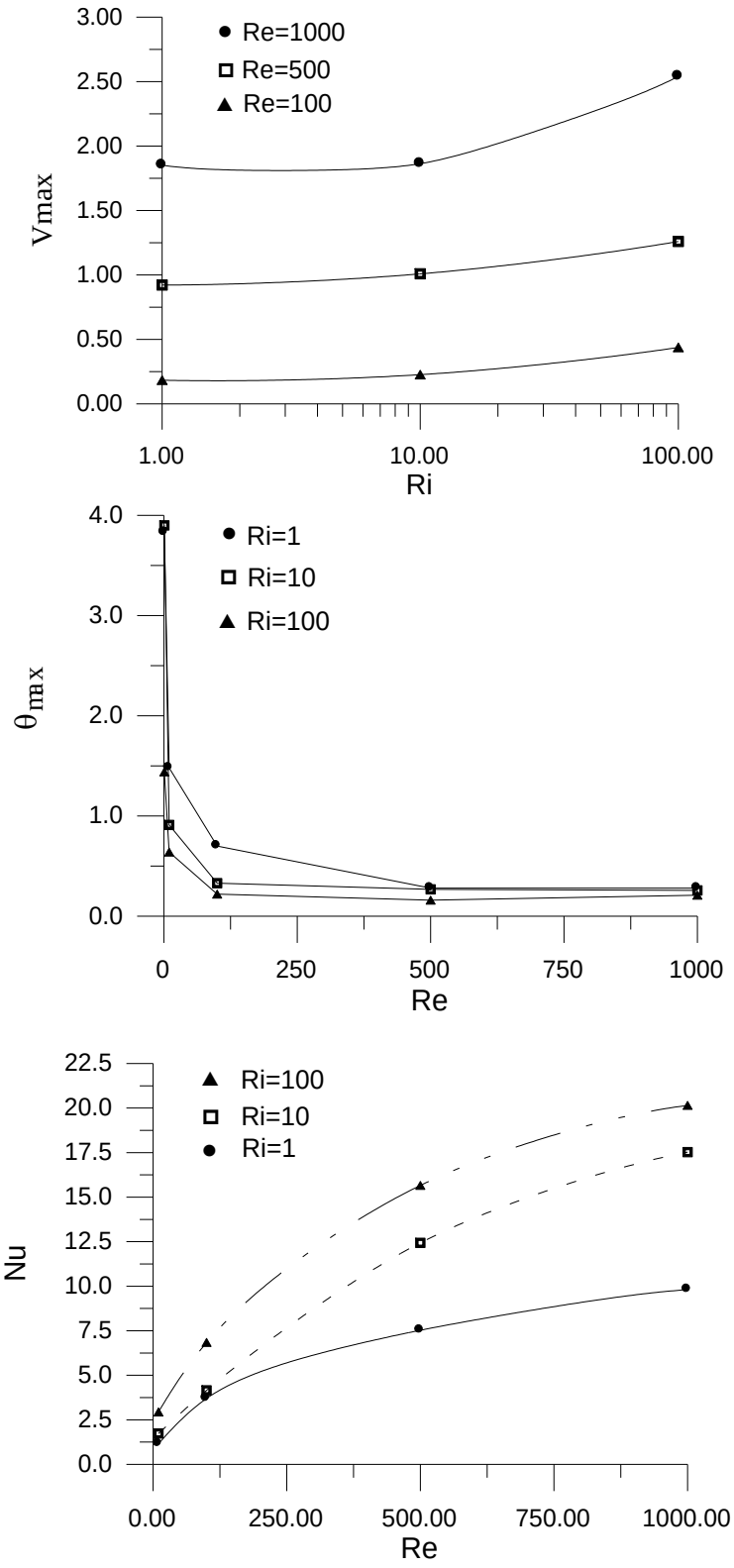
Şekil 4.5b. $Re=100$ de farklı Ra sayıları için elde edilmiş hız vektörleri,
 a) $Ra=0,1$, b) $Ra=1$, c) $Ra=10$, d) $Ra=20$, e) $Ra=100$, f) $Ra=1000$



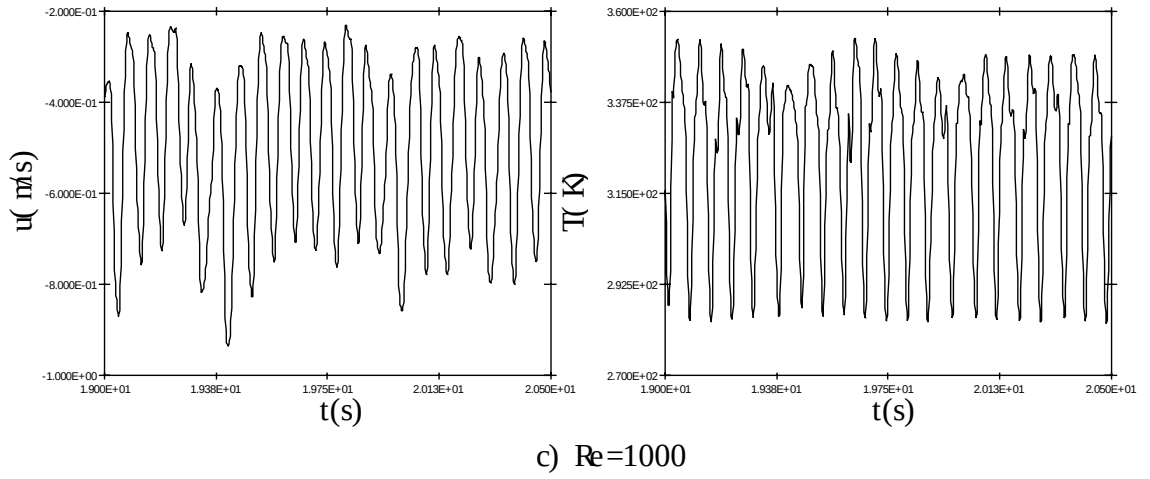
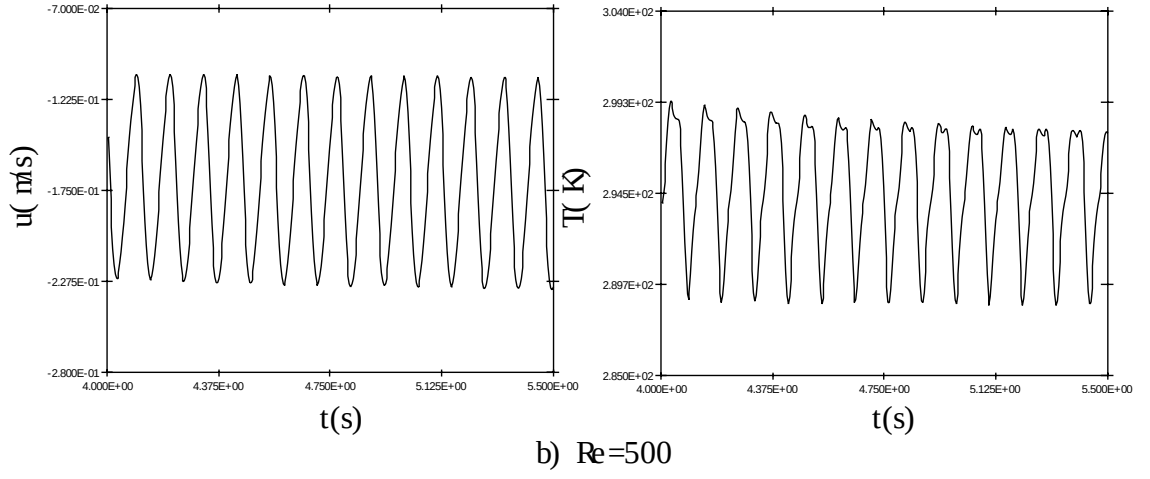
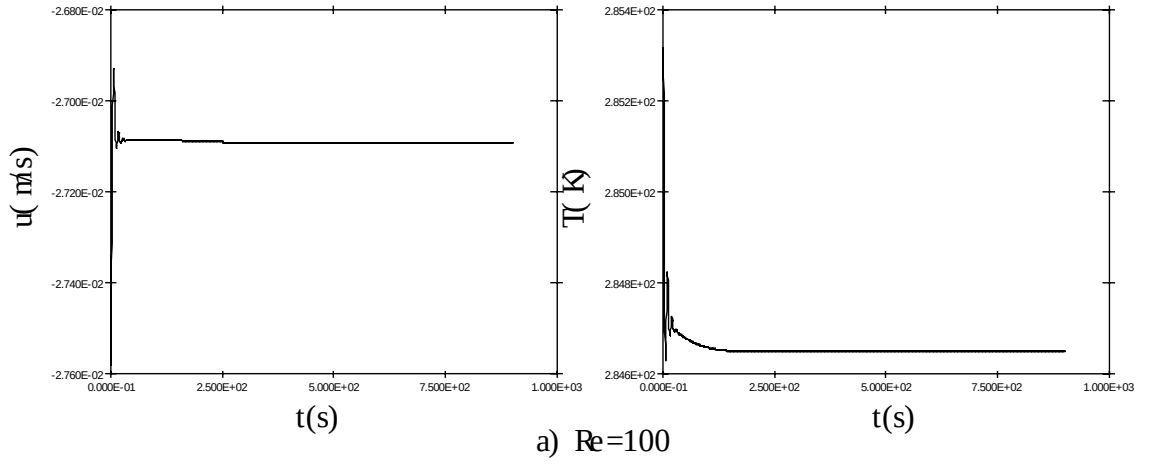
Şekil 4.6 $R=1$ de farklı Reynold s sayıları için a) eş sıcaklık eğrileri,
b) hız vektörleri.



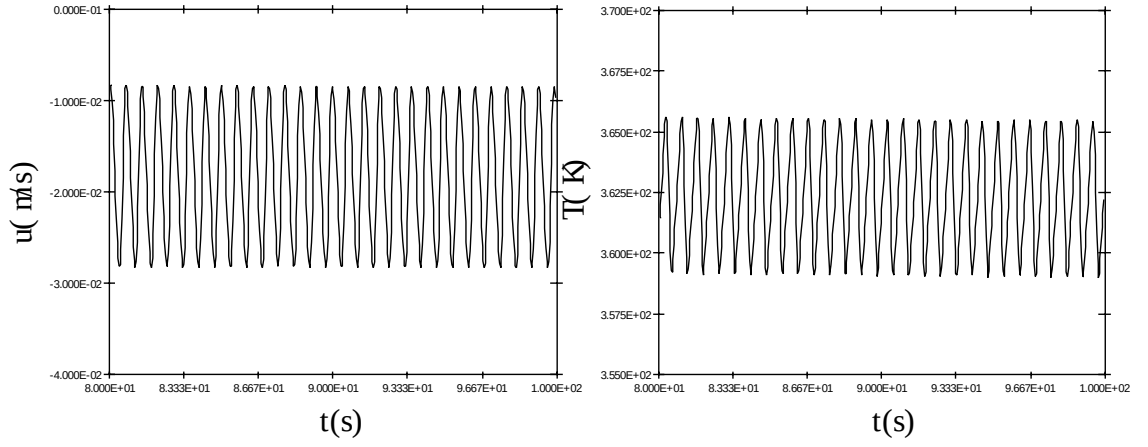
Şekil 4.7. $R=10$, $Re=500$ de bir periyod için eşit aralıklarla alınmış anlık
a) eş sıcaklık eğrileri, b) akı mçizgileri.



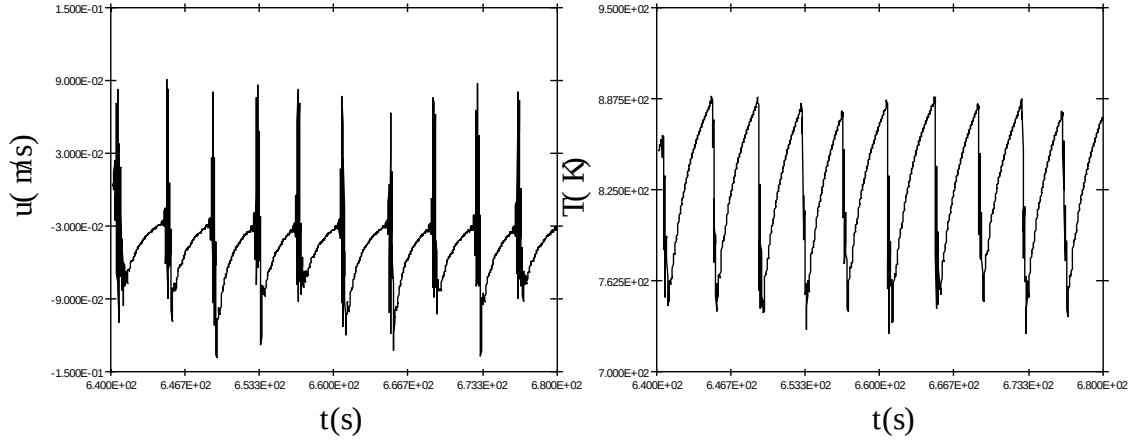
Şekil 4.8 $V_{\max}$, $\theta_{\max}$ ve Nu sayısının Ri ve Re ile değişimleri.



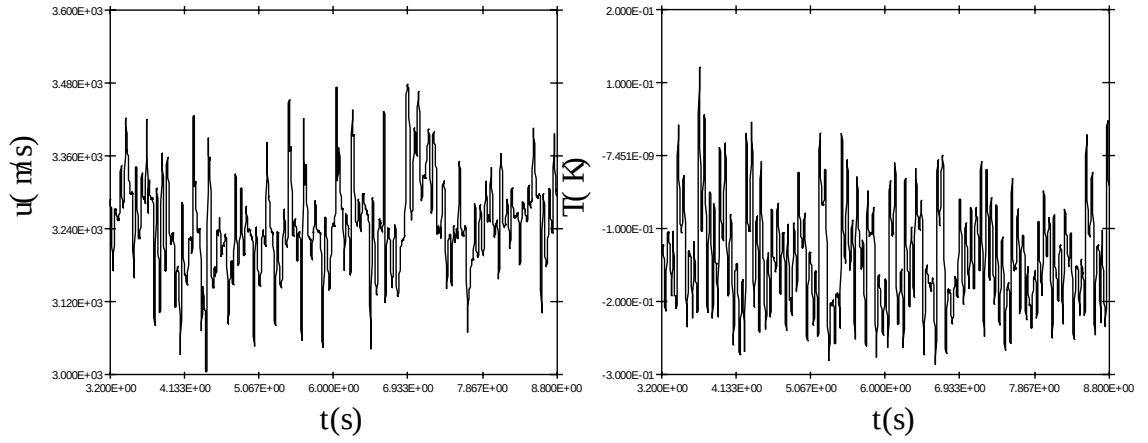
Şekil 4 9a Doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen, ($X=3.14$, $Y=1.19$) noktasındaki u ve T değerlerinin zamanla göre değişimleri. ($R=1$)



a) $R = 10$

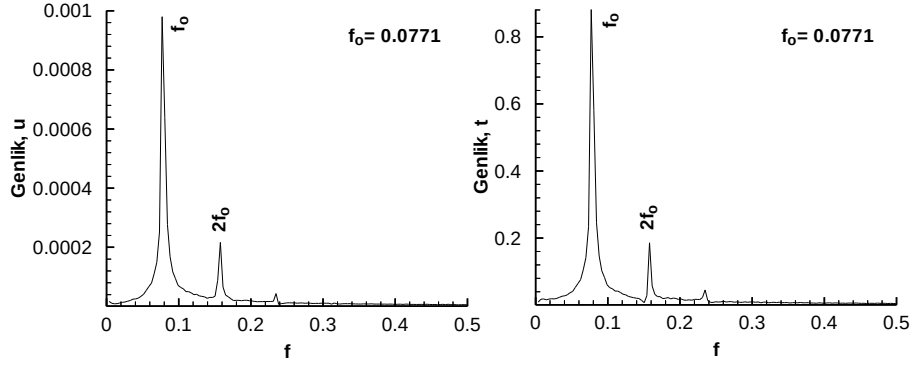


b) $R = 100$

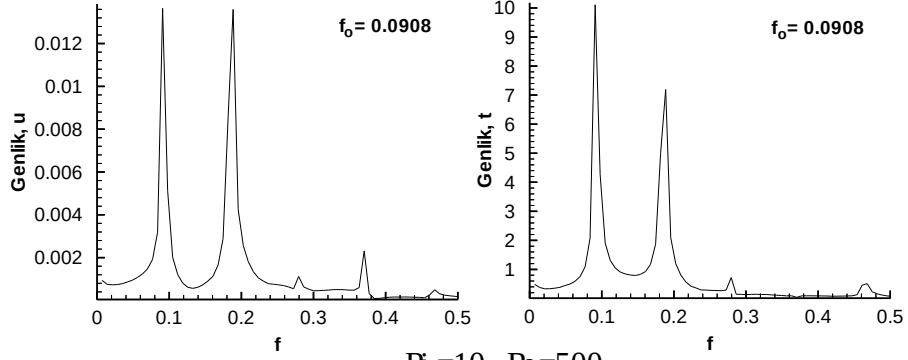


c) $R = 1000$

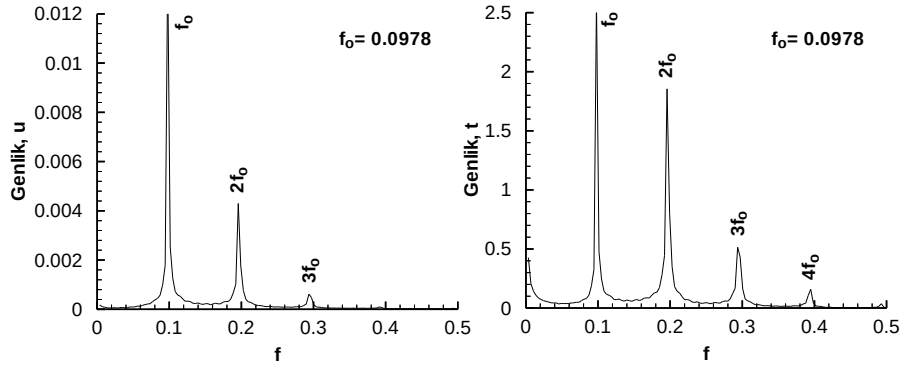
Şekil 4 9b Doğrudan sayısal simülasyonla elde edilen, ($X=3.14$, $Y=1.19$) noktasındaki u ve T değerlerinin zamanla değişimi. ($Re=100$)



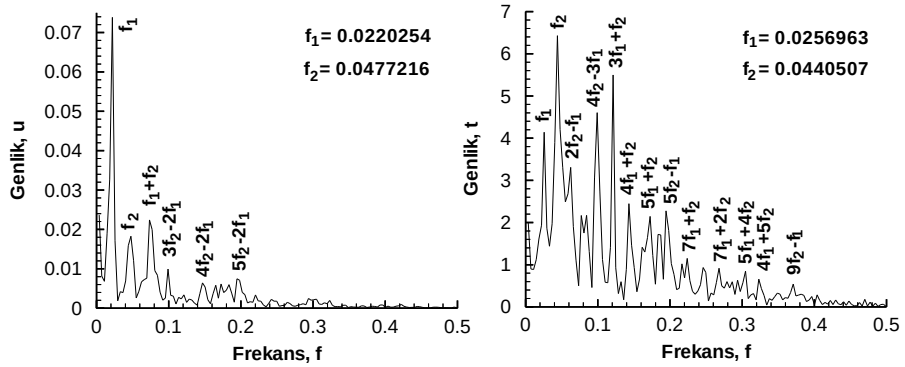
$Ri=10, Re=100$



$Ri=10, Re=500$

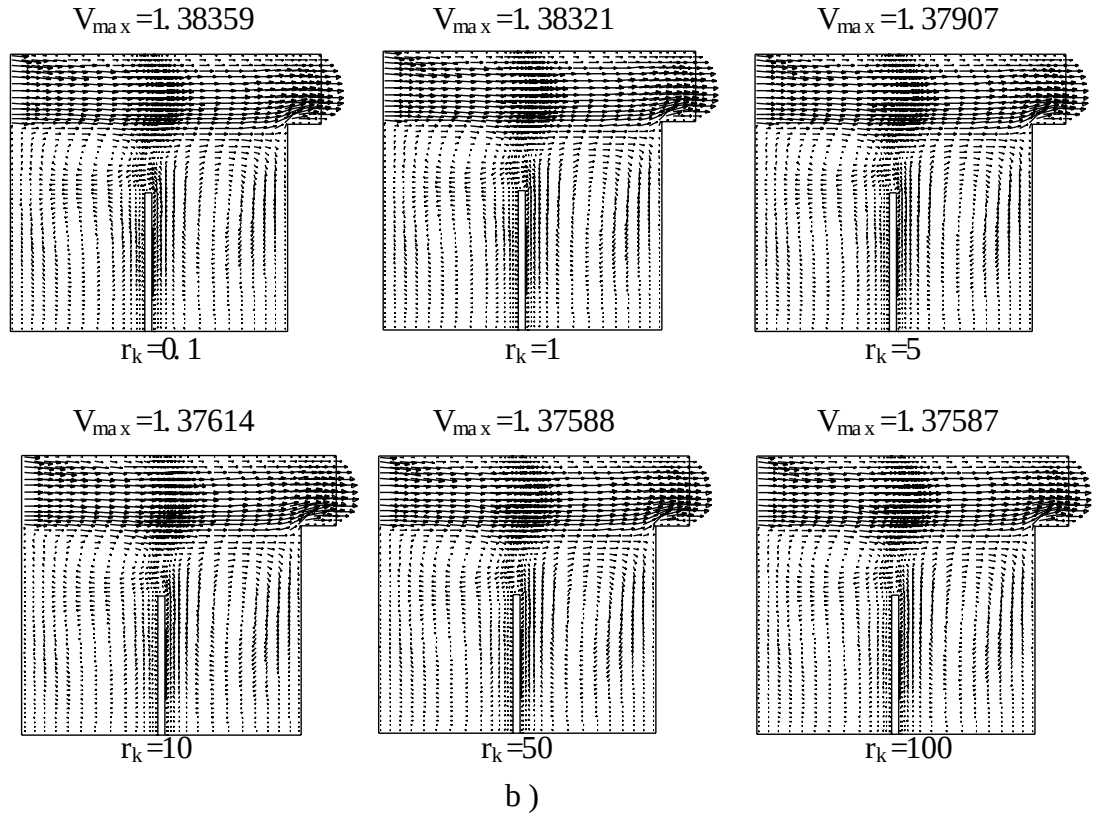
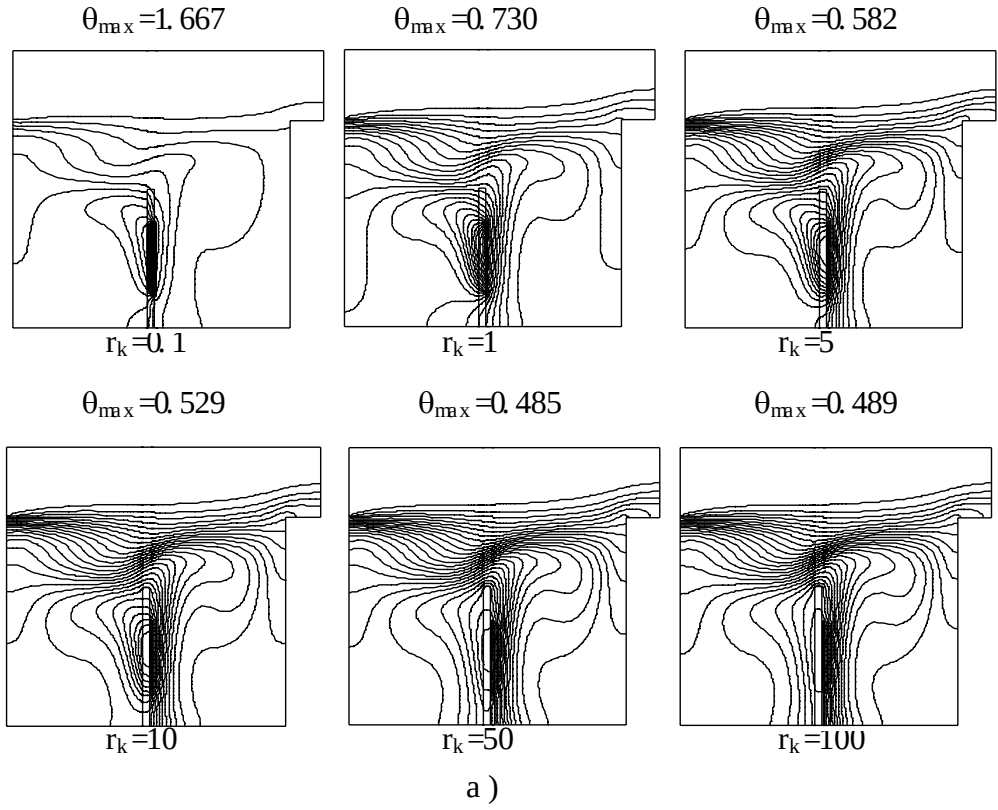


$Ri=1, Re=500$

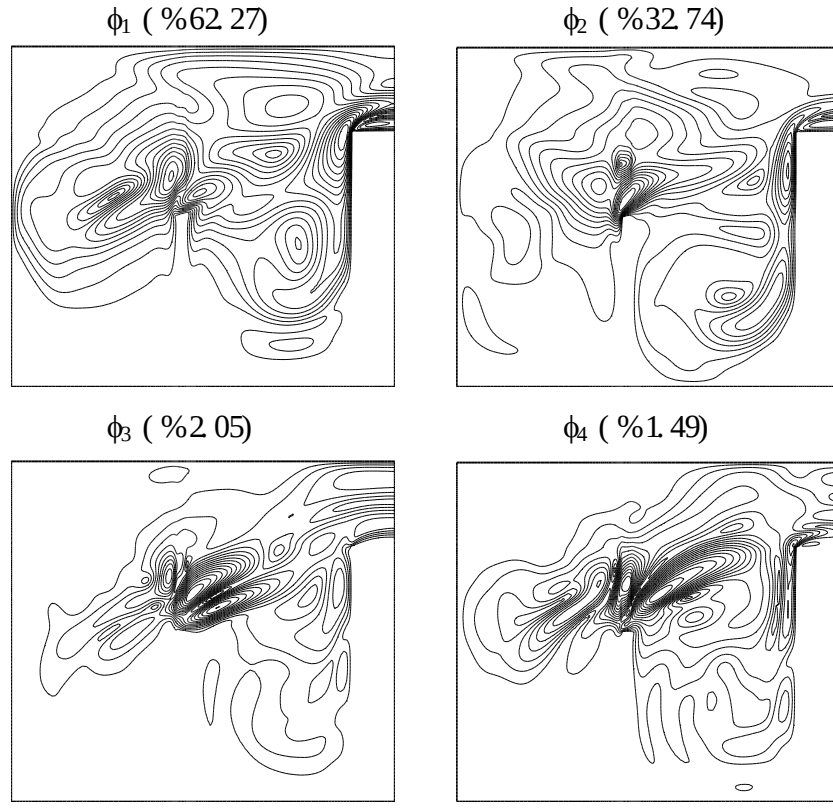


$Ri=1, Re=1000$

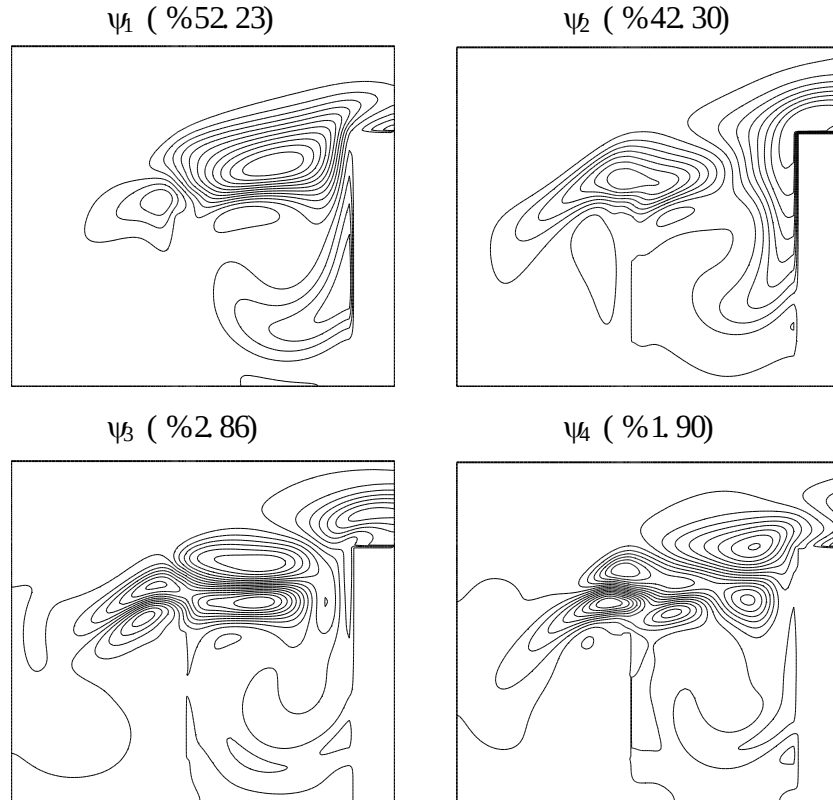
Şekil 4.10. Farklı Re ve Ri sayılarında elde edilen sayısal simülasyonlarda, hız ve sıcaklık için ($X=3.14$, $Y=1.19$) noktasındaki spektrumanalizleri.



Şekil 4.11. $Ri=1$ ve $Re=100$ 'de, farklı r_k değerleri için elde edilen,
a) eş sıcaklık eğrileri , b) hız vektörleri.

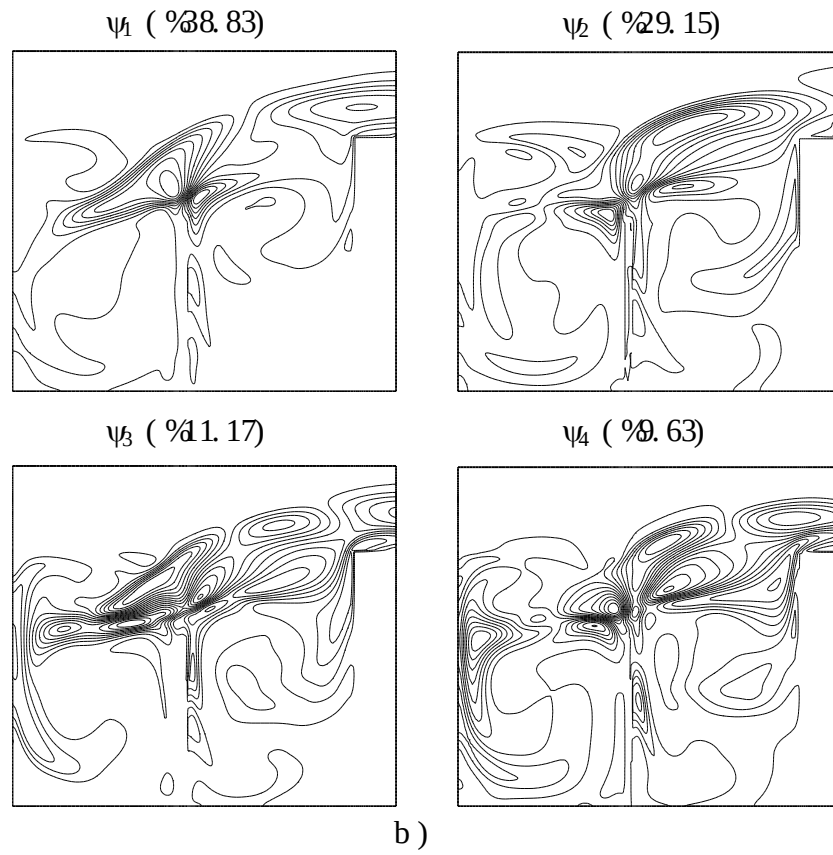
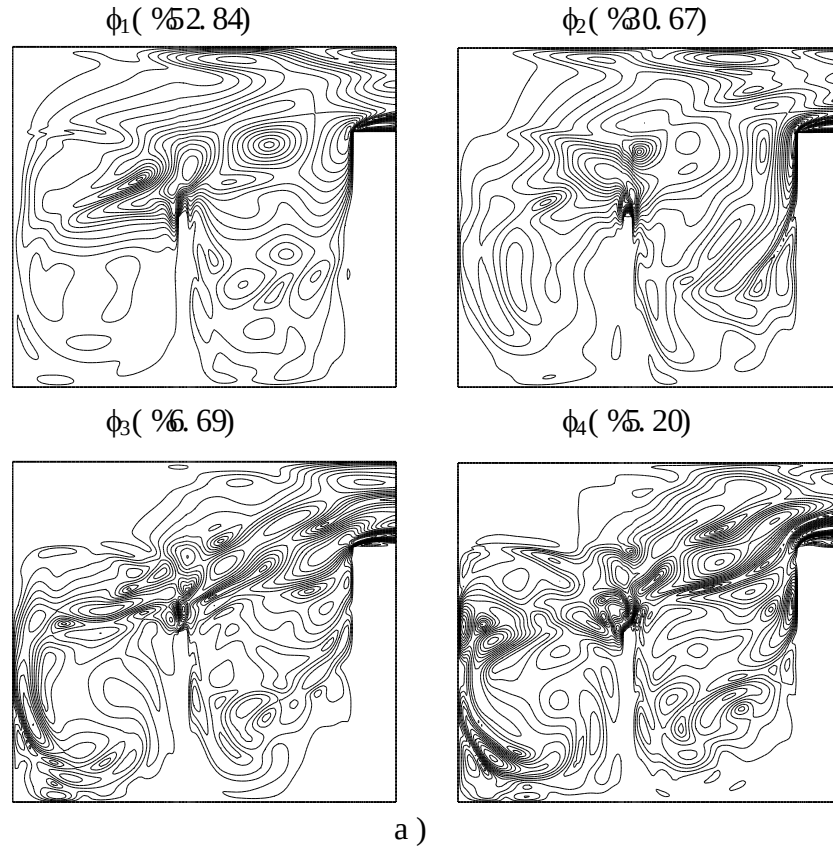


a)

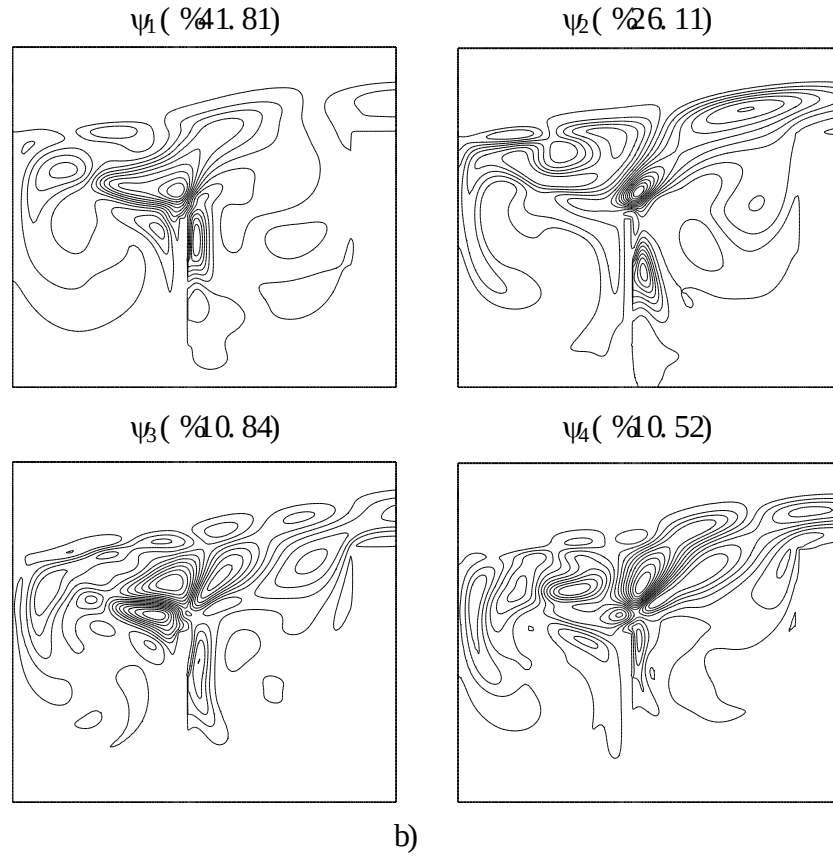
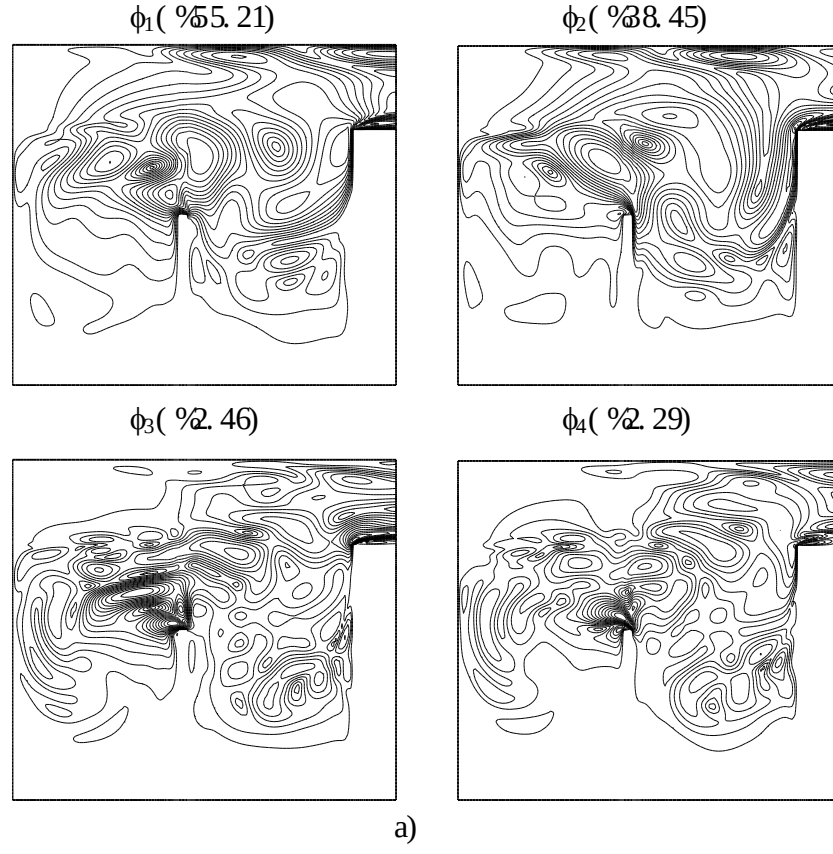


b)

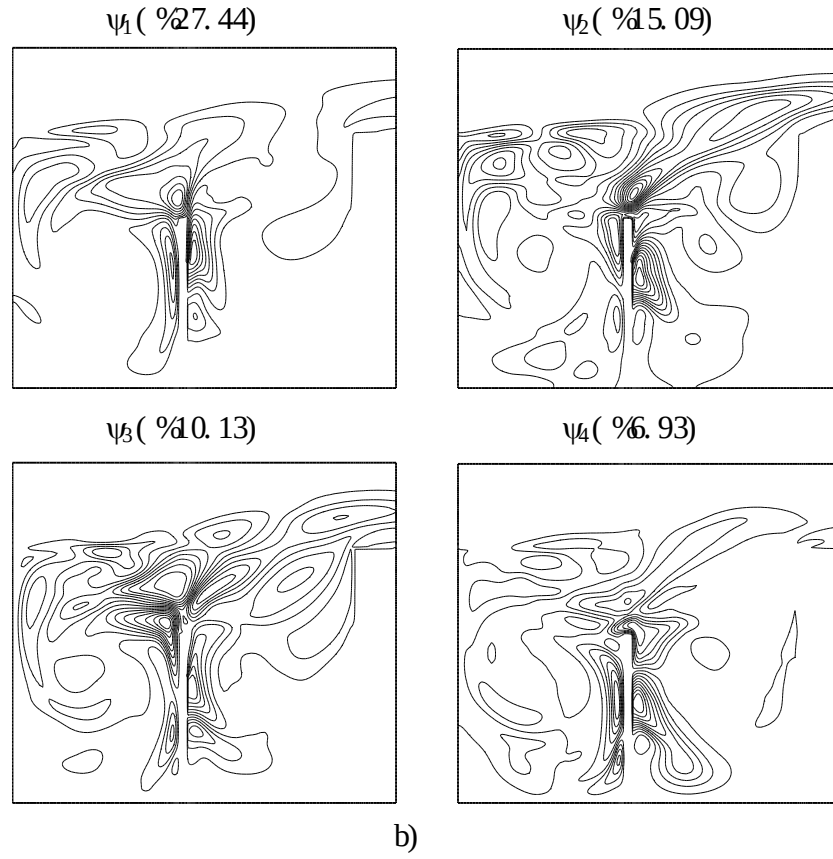
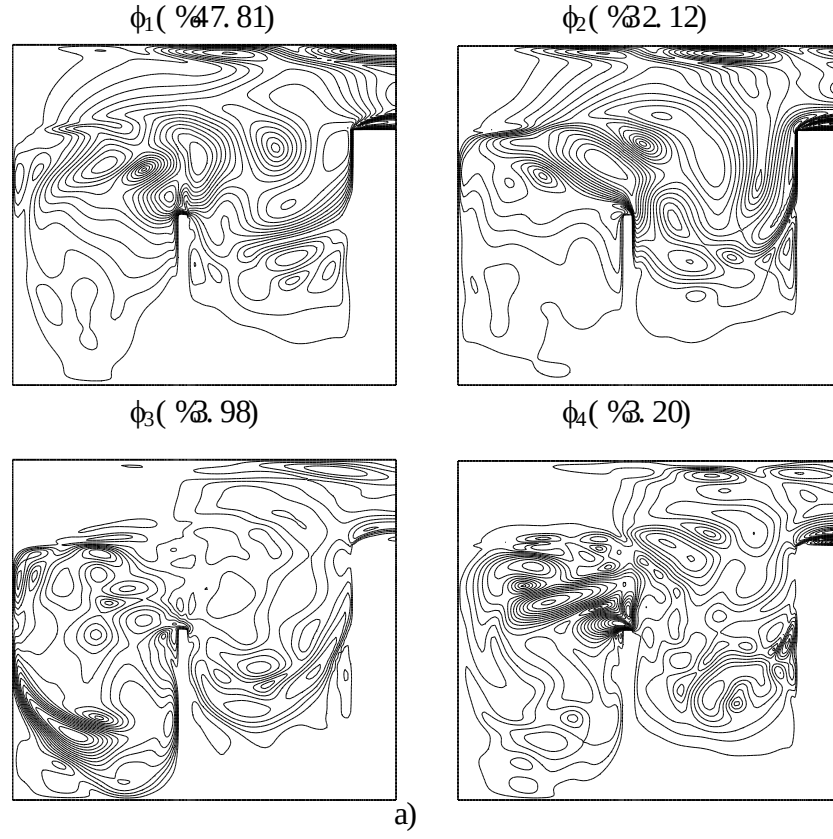
Şekil 4.12a. $R=10$ ve $Re=100$ için POD ile elde edilen en enerjik ilk dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).



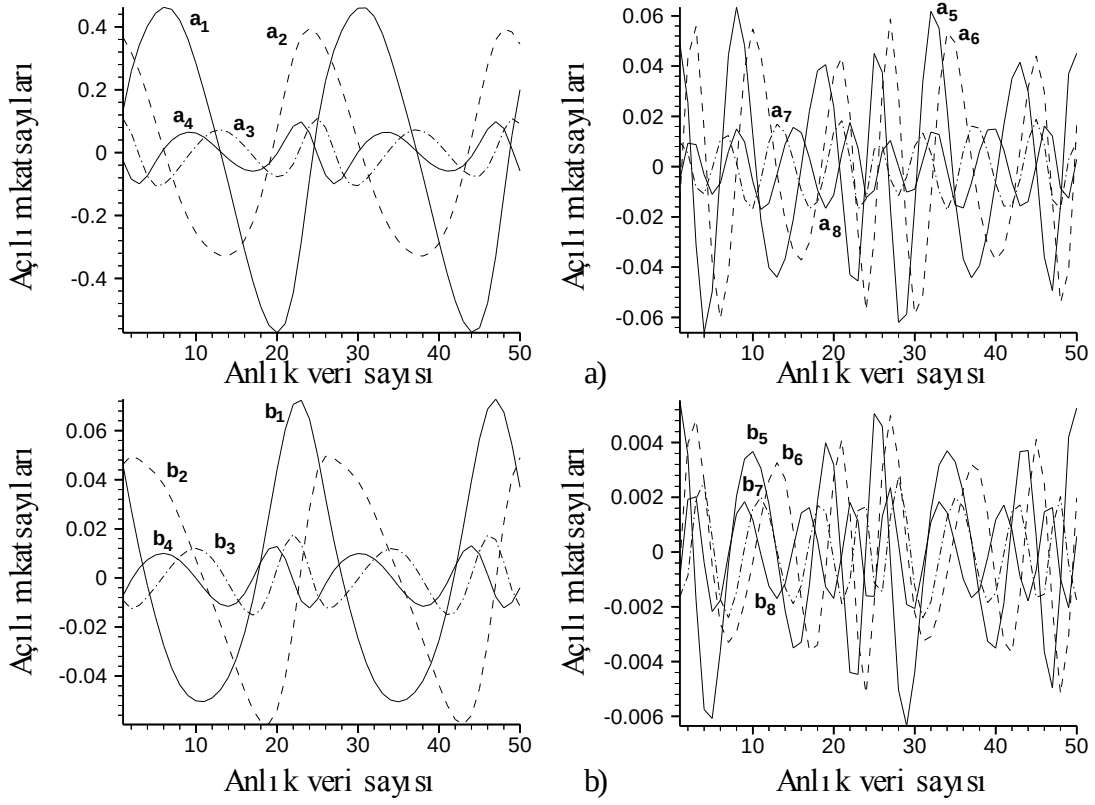
Şekil 4.12b. $R=10$ ve $Re=500$ için POD ile elde edilen en enerjik ilk dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).



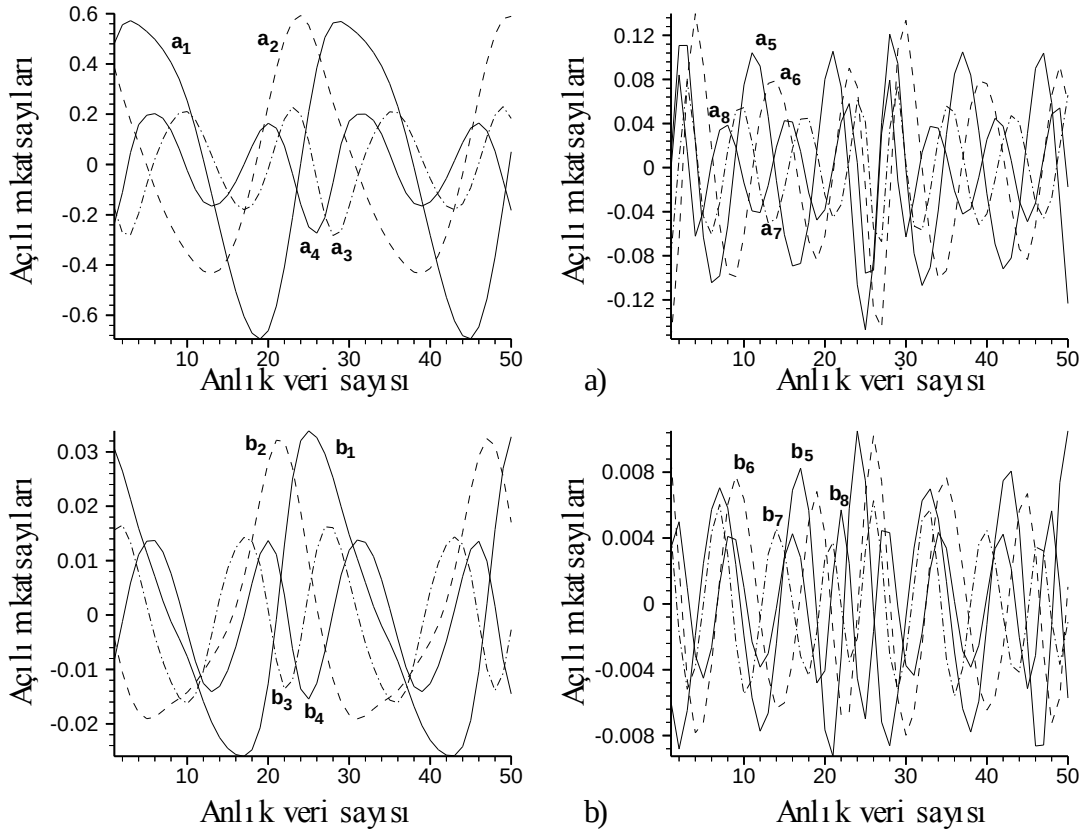
Şekil 4.12c. $R=1$ ve $Re=500$ için POD ile elde edilen en enerjik ilk dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).



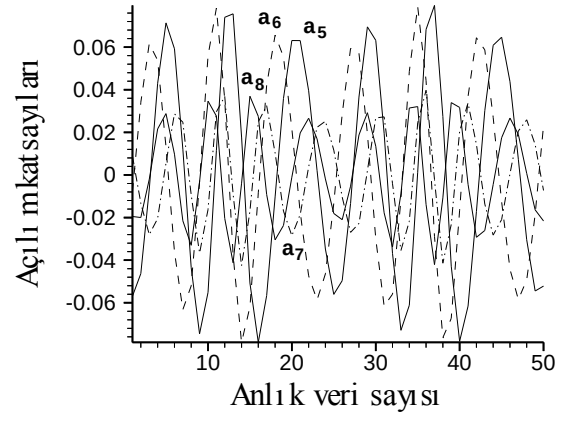
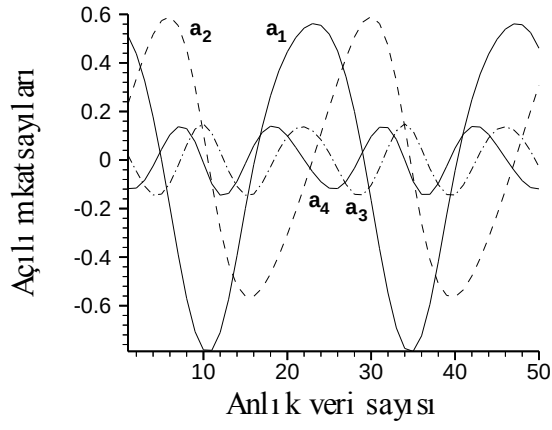
Şekil 4.12d $R=1$ ve $Re=1000$ için POD ile elde edilen en enerjik ilk dört deneysel özdeğer fonksiyon; a) hız alanı (hızın şiddeti), b) sıcaklık alanı (eş sıcaklık eğrileri).



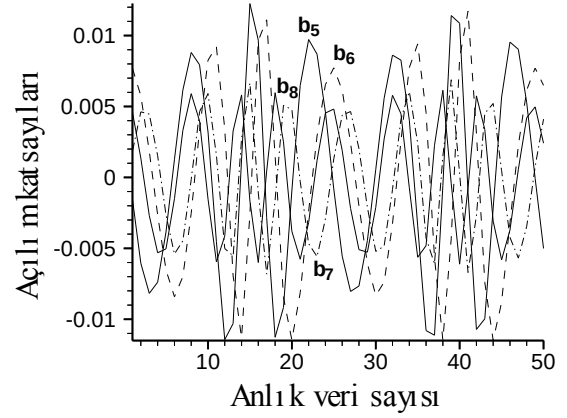
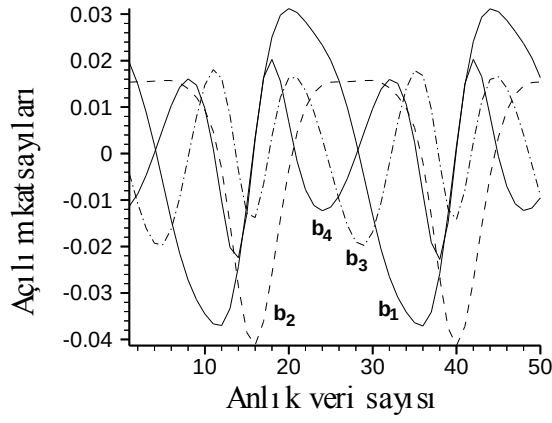
Şekil 4.13a. $R=10$ ve $Re=100$ için yeniden oluşum formleriyle elde edilen açılı m katsayıları nın zamanla değ iş i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.



Şekil 4.13b. $R=10$ ve $Re=500$ için yeniden oluşum formleriyle elde edilen açılı m katsayıları nın zamanla değ iş i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.

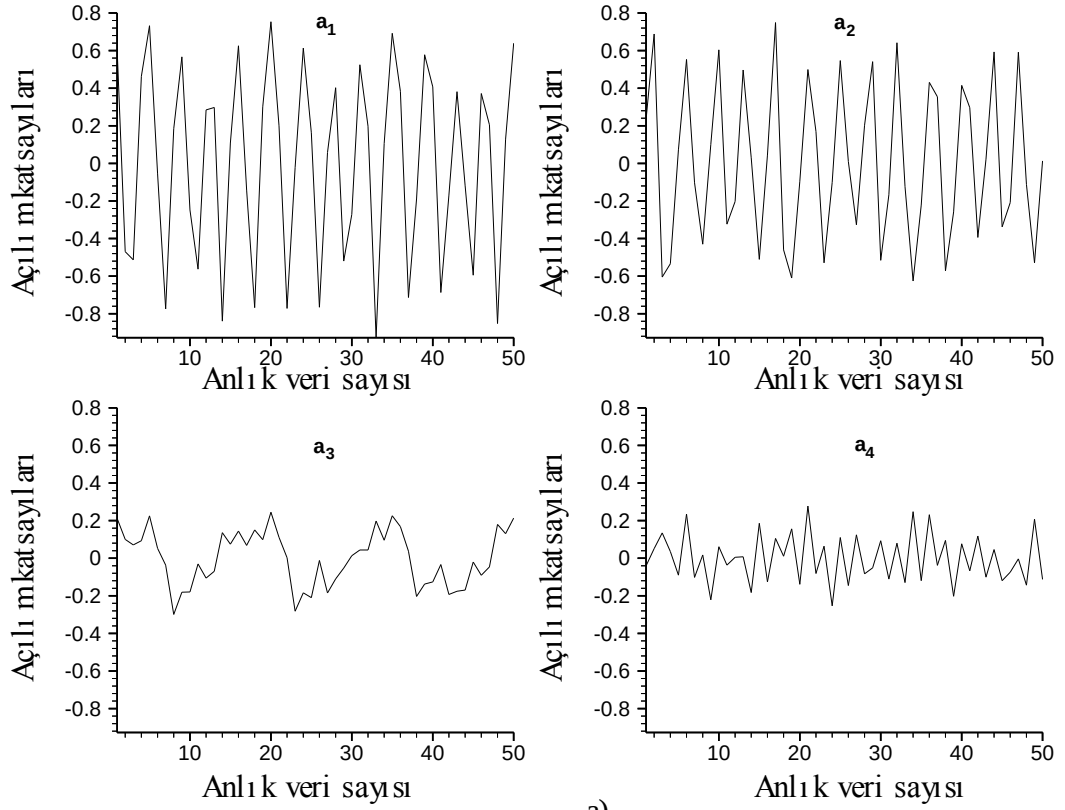


a)

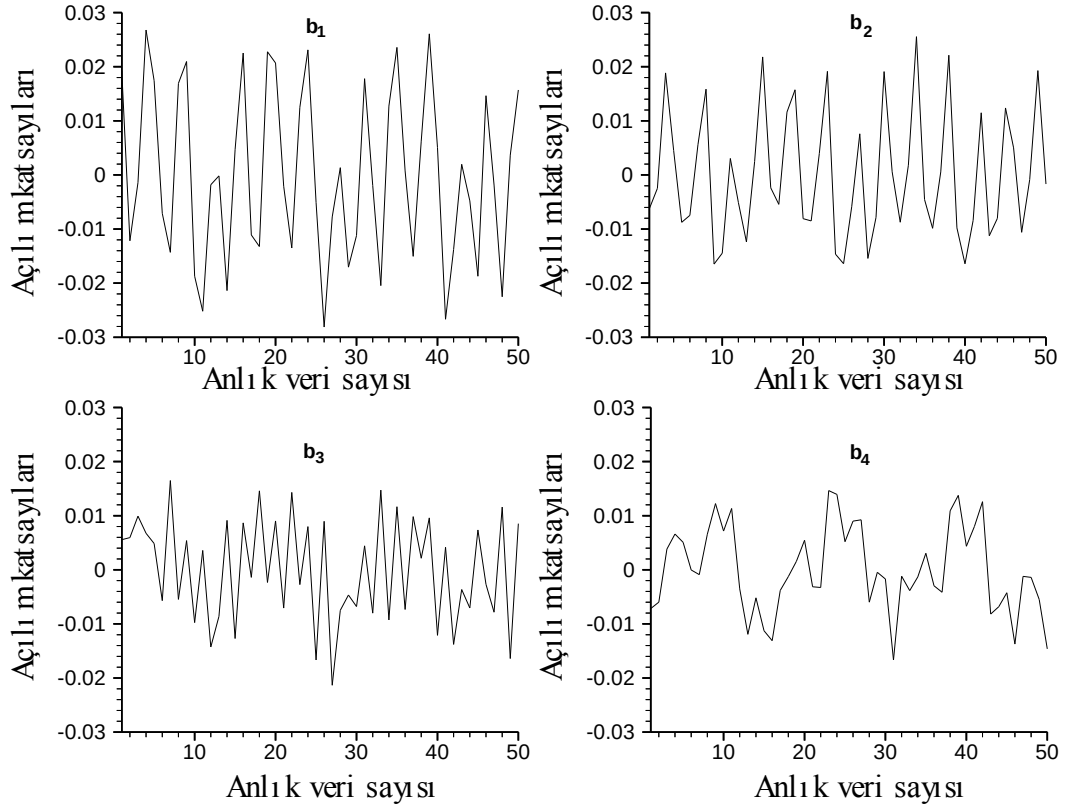


b)

Şekil 4.13c. $R=1$ ve $Re=500$ için yeniden düşümfor mülleriyle elde edilen açılı m kat sayıları nın zamanla değışi mi, a) hız kat sayıları, b) sıcaklık kat sayıları.

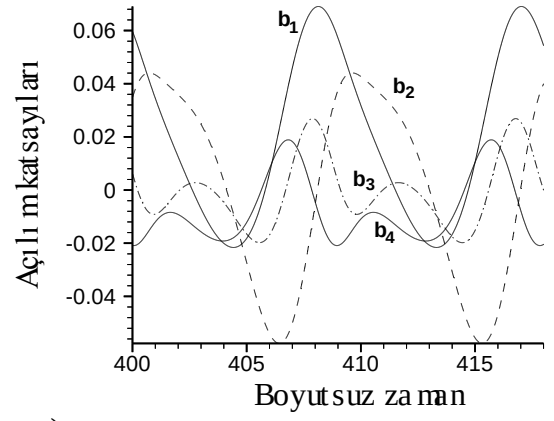
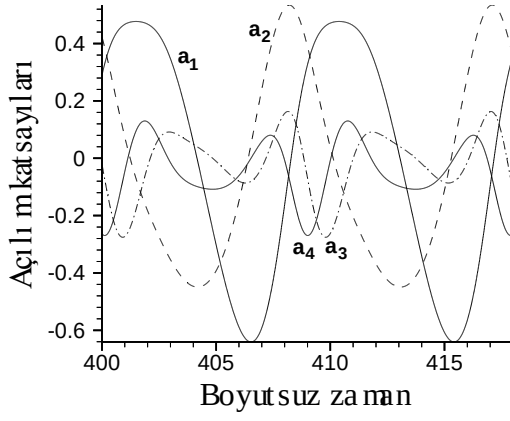


a)

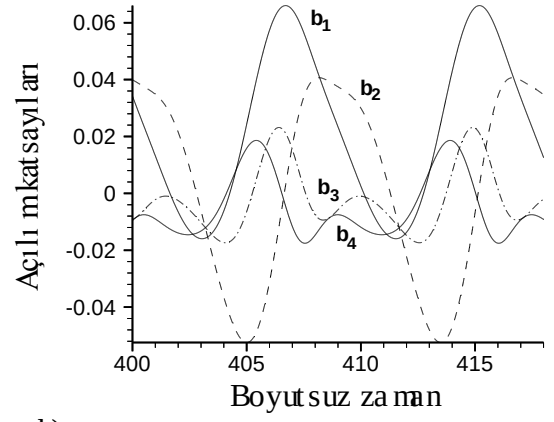
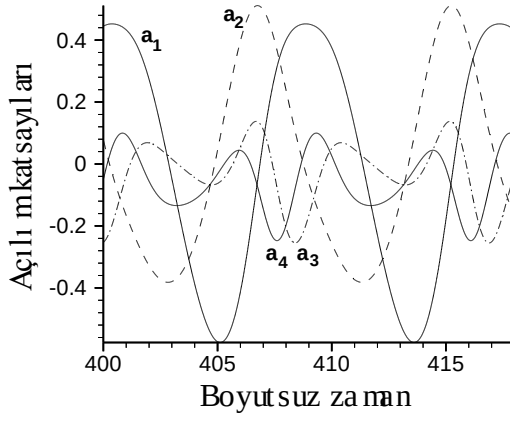


b)

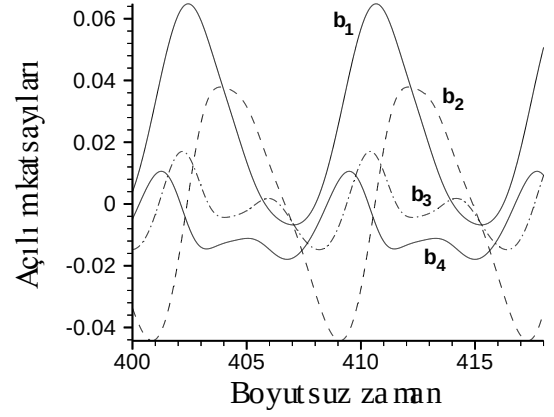
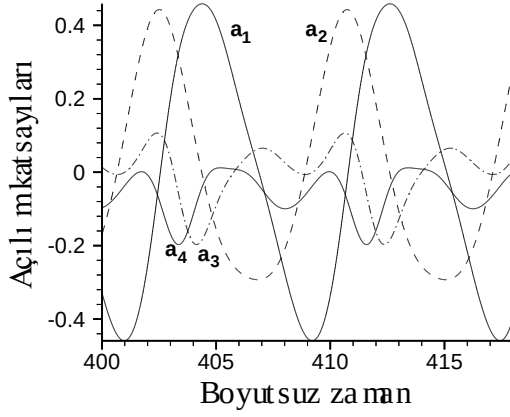
Şekil 4.13d $R=1$ ve $Re=1000$ için yeni den oluşum for mülleri yle elde edilen açılı m katsayıları nın zamanla değ iş i m i, a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.



a)

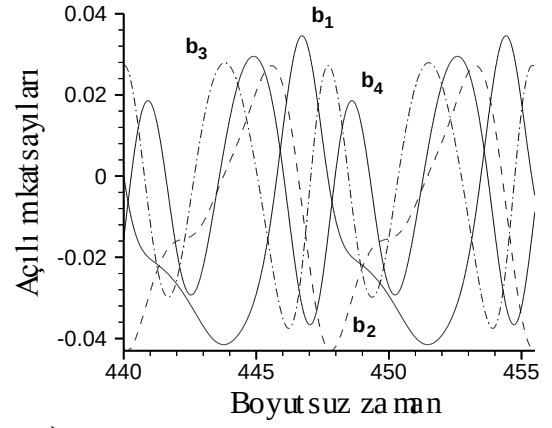
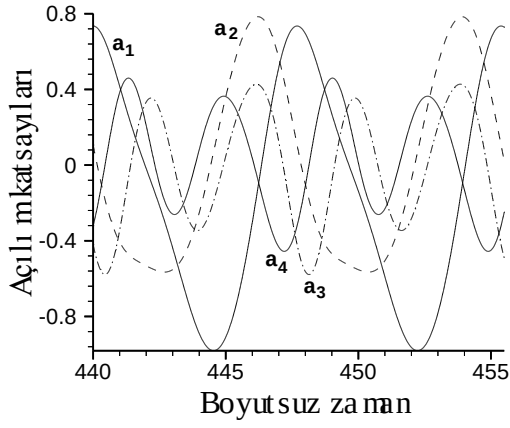


b)

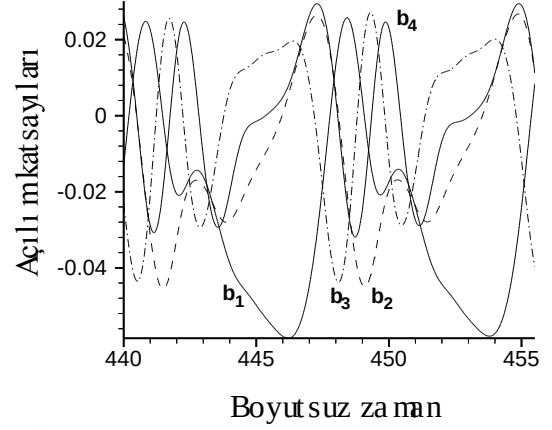
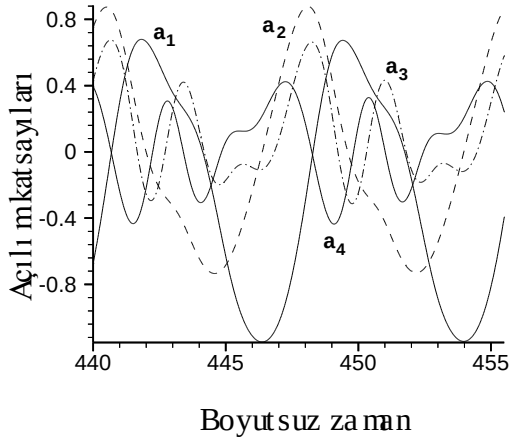


c)

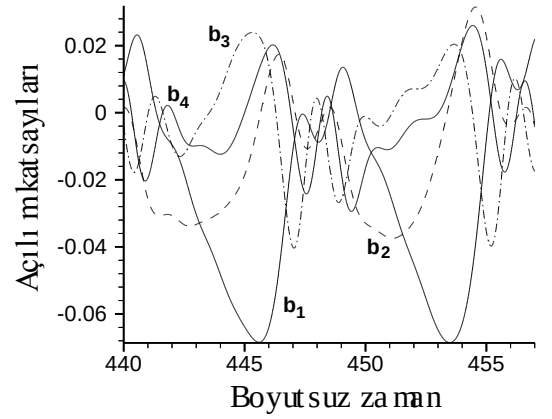
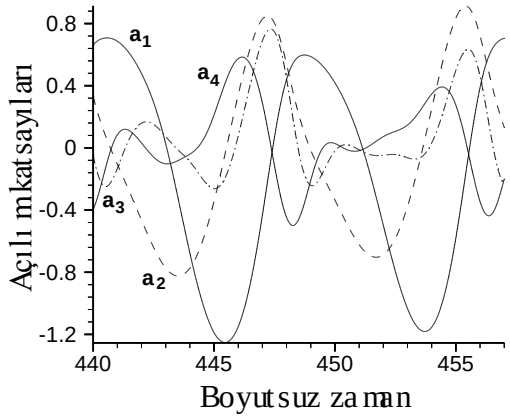
Şekil 4 14a. $Ri=10$ ve $Re=100$ ' de tasarım şartlarında farklı sayıda özdeğer fonksiyonla oluşturulan düşük boyutlu model tahminleri.
a) (4+4)-denklemler model, b) (5+5)-denklemler model, c) (6+8)-denklemler model.



a)

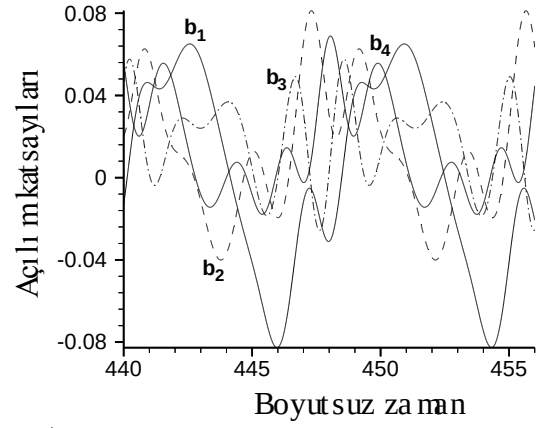
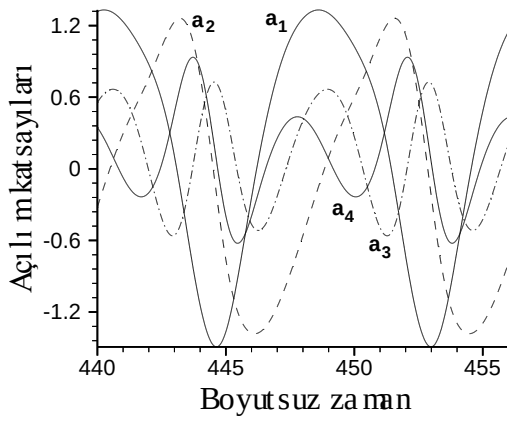


b)

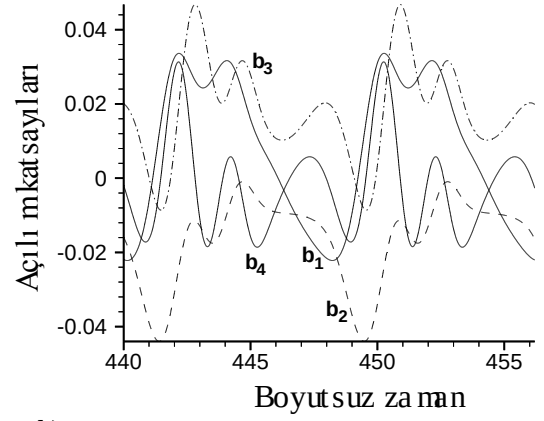
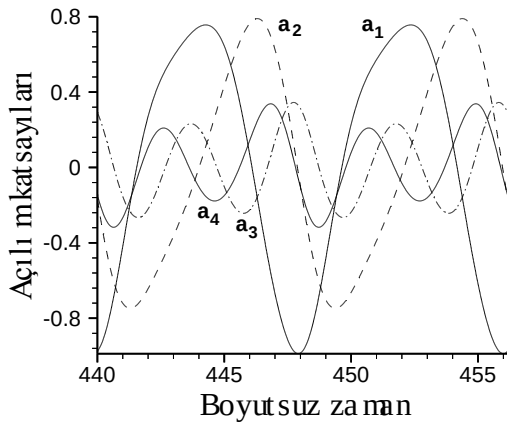


c)

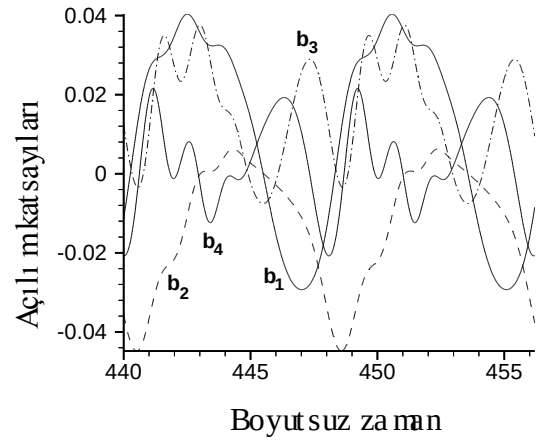
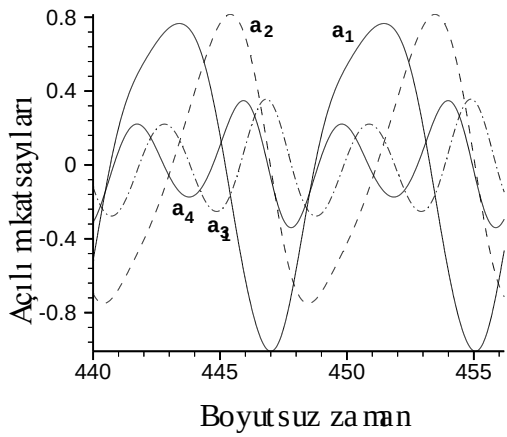
Şekil 4 14b. $Ri=10$ ve $Re=500$ ' de tasarımı şartlarında farklı sayıdaki özdeğer fonksiyonla oluşturulan düşük boyutlu model tahminleri.
a) (5+5)-denklemlerli model, b) (6+6)-denklemlerli model, c) (6+8)-denklemlerli model.



a)

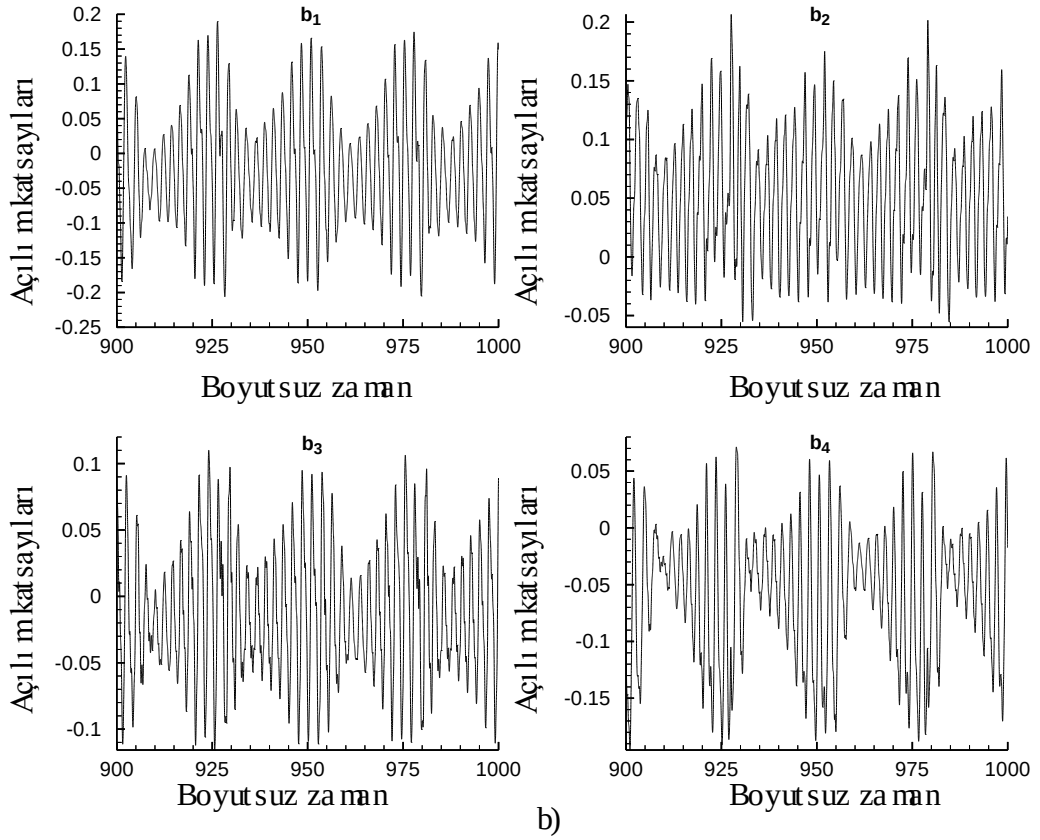
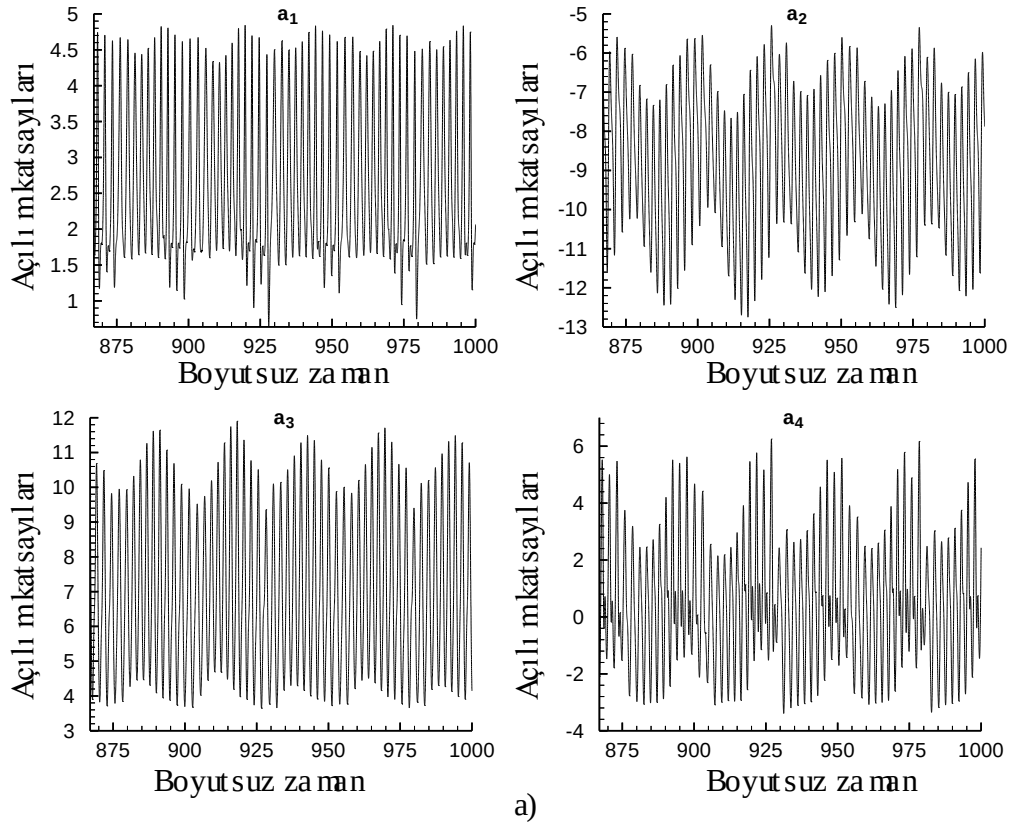


b)

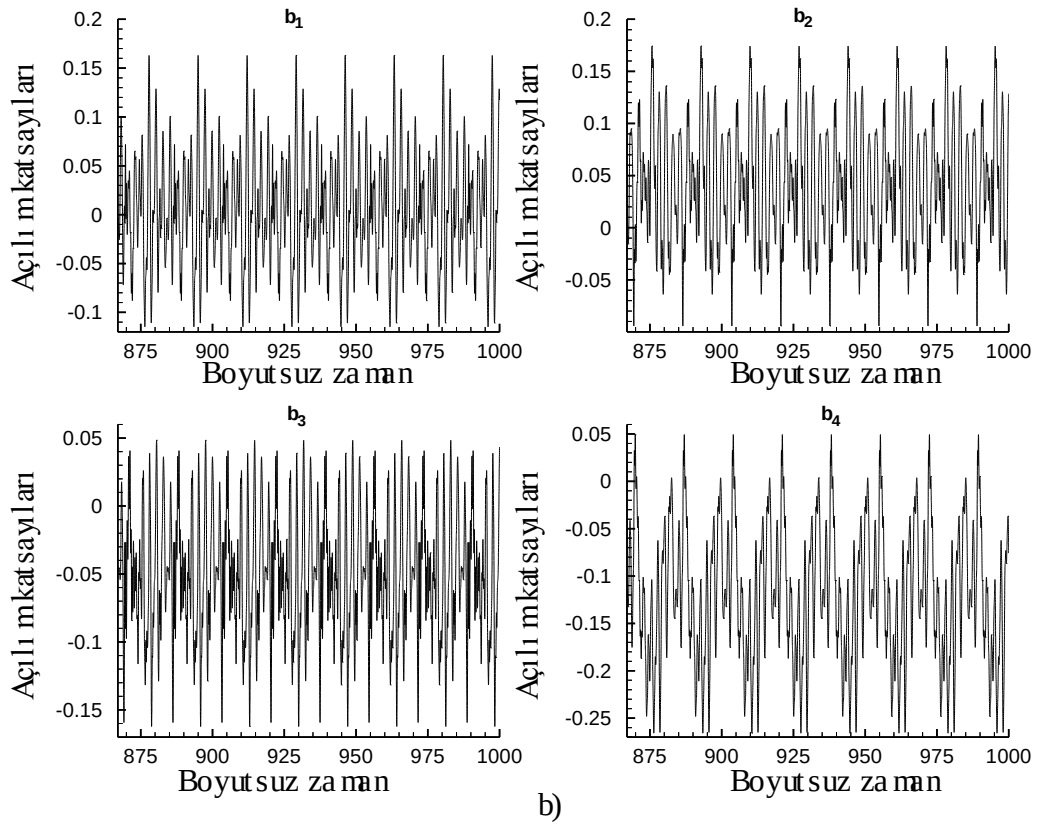
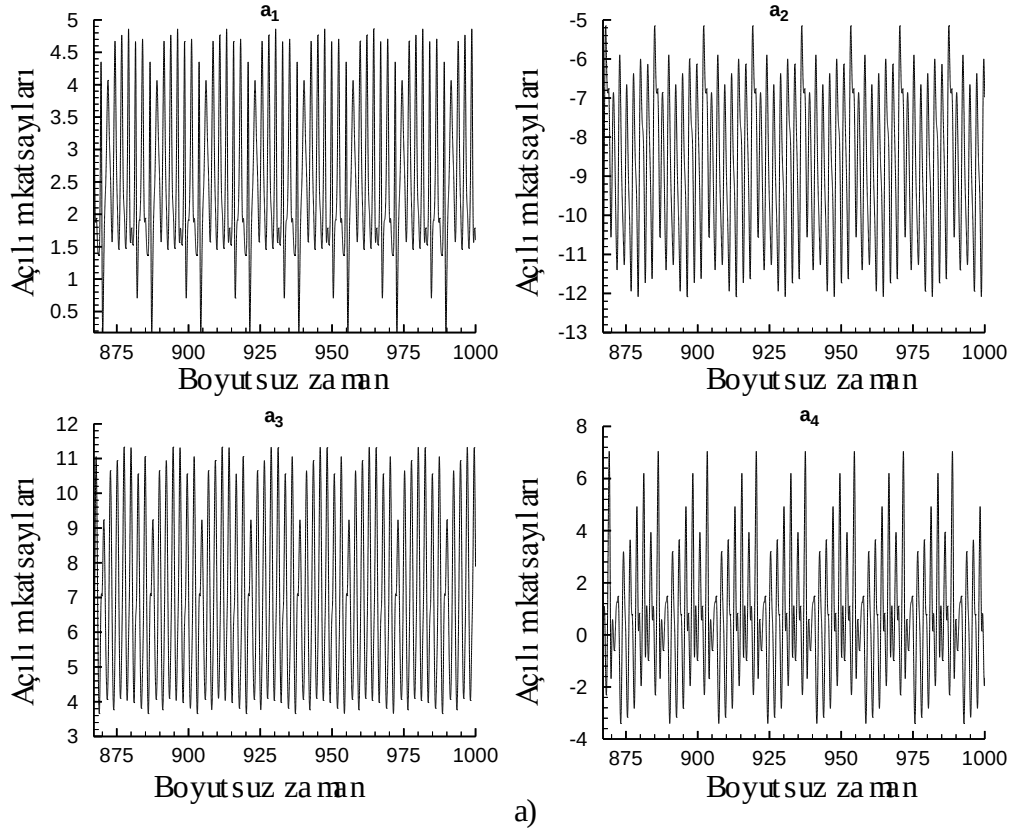


c)

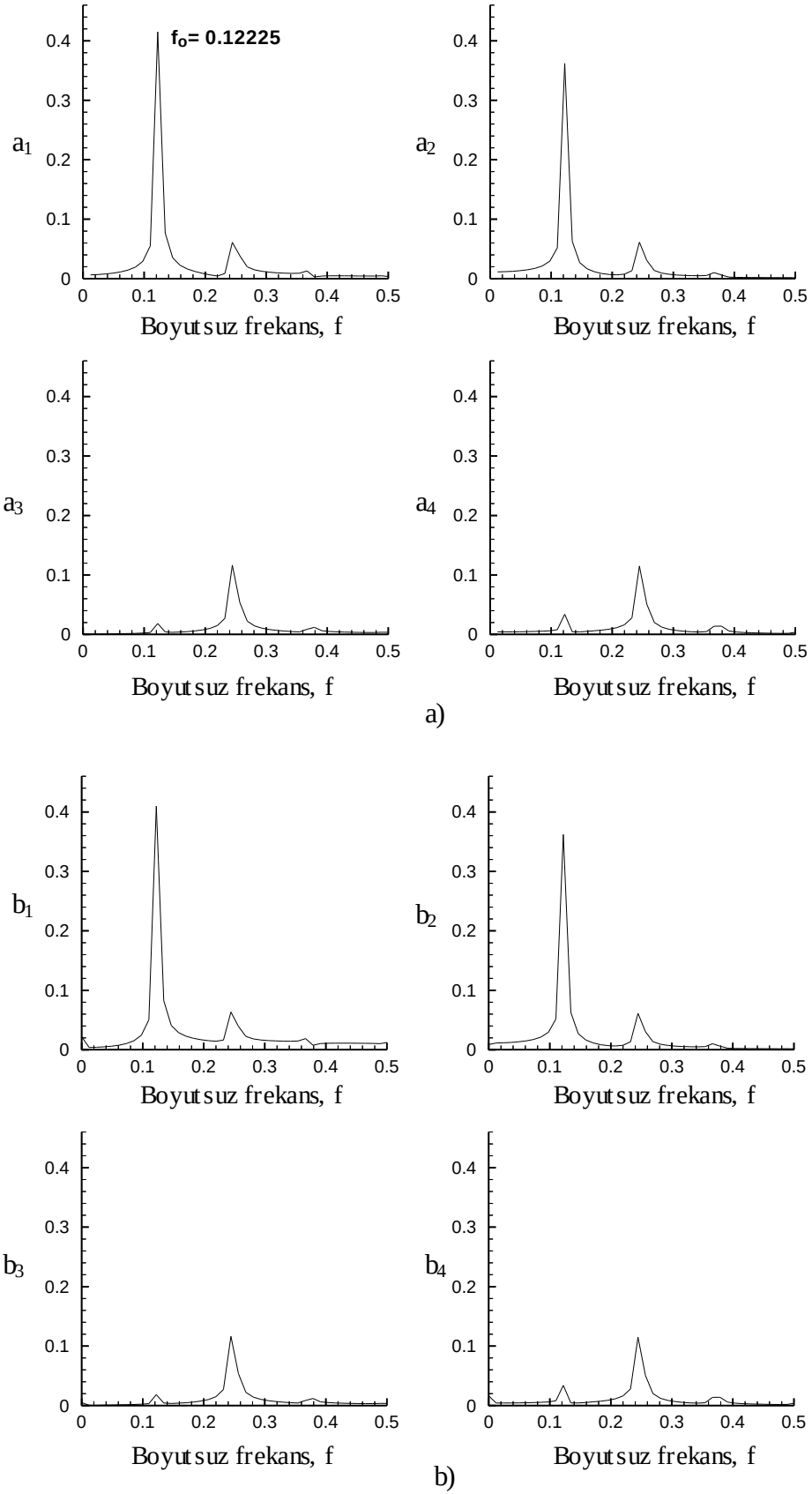
Şekil 4 14c. $R=1$ ve $Re=500$ 'de tasarımı şartlarında farklı sayıdaki özdeğer fonksiyonla oluşturulan düşük boyutlu model tahminleri.
a) (5+5)-denklemlerli model, b) (6+6)-denklemlerli model, c) (6+8)-denklemlerli model.



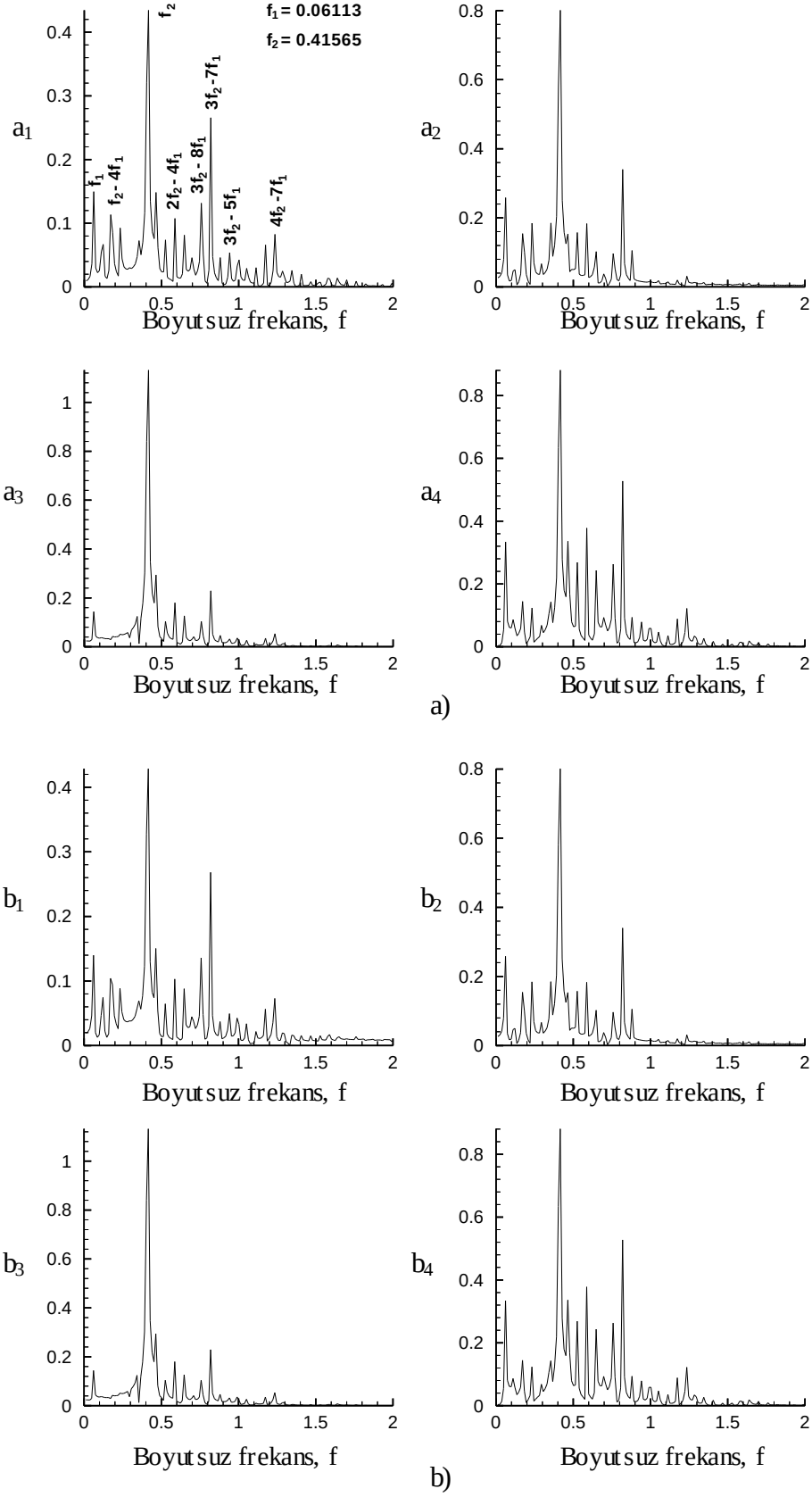
Şekil 4.14d $R=1$, $Re=1000$ 'de tasarım şartları nda (6+6)-denkle m ile oluştur ulan düşük boyut lu model tahm in i. a) hız katsayıları , b) sıcaklık katsayıları.



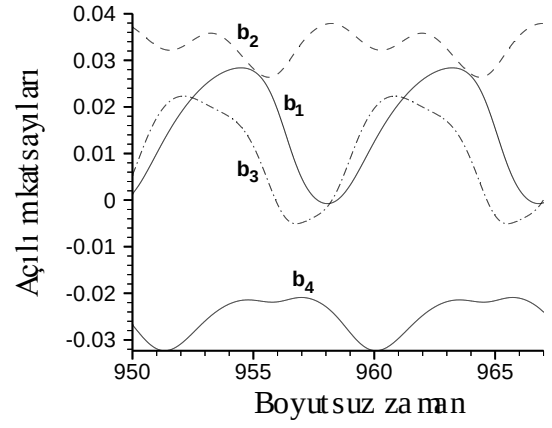
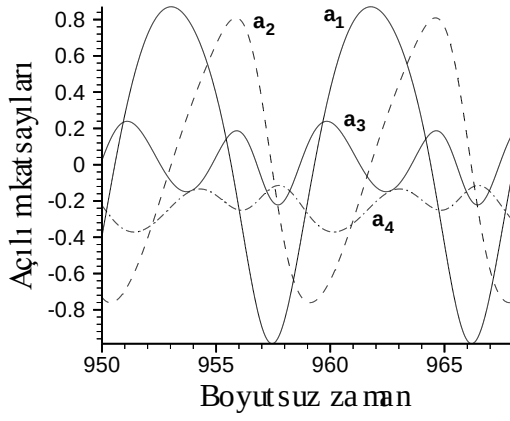
Şekil 4.14e. $Ri=1$, $Re=1000$ 'de tasarım şartları nda (6+8)-denkle m ile oluşturulan düşük boyutlu model tahmini. a) hız katsayıları , b) sıcaklık katsayıları.



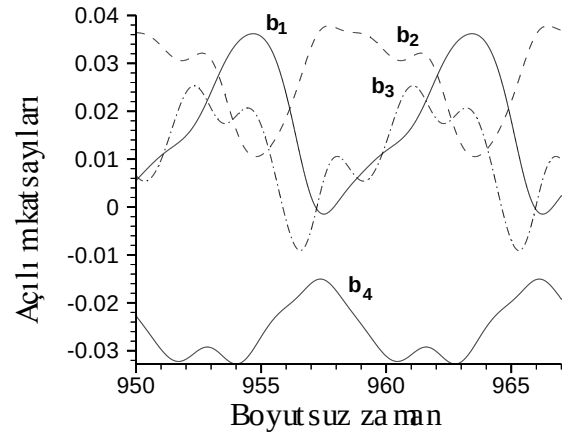
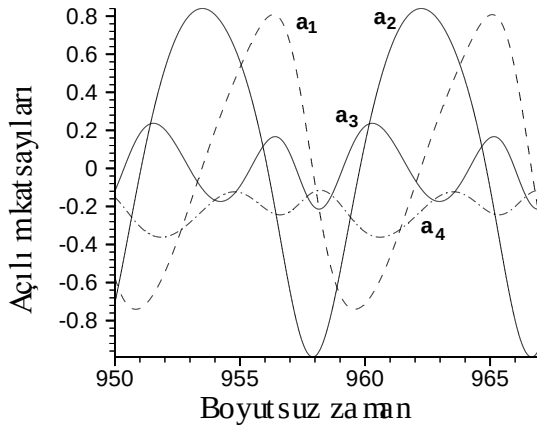
Şekil 4.15a. $R=1$, $Re=500$ 'de tasarımı şartlarında, (6+8)-denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modelin frekans analizi. a) Hız katsayıları, b) Sıcaklık katsayıları.



Şekil 4.15b. $R=1$, $Re=1000$ 'de tasarımı şartlarında, (6+8)-denklemlle oluşturulan düşük boyutlu modelin frekans analizi. a) H_z katsayılar, b) Sıcaklık katsayıları.

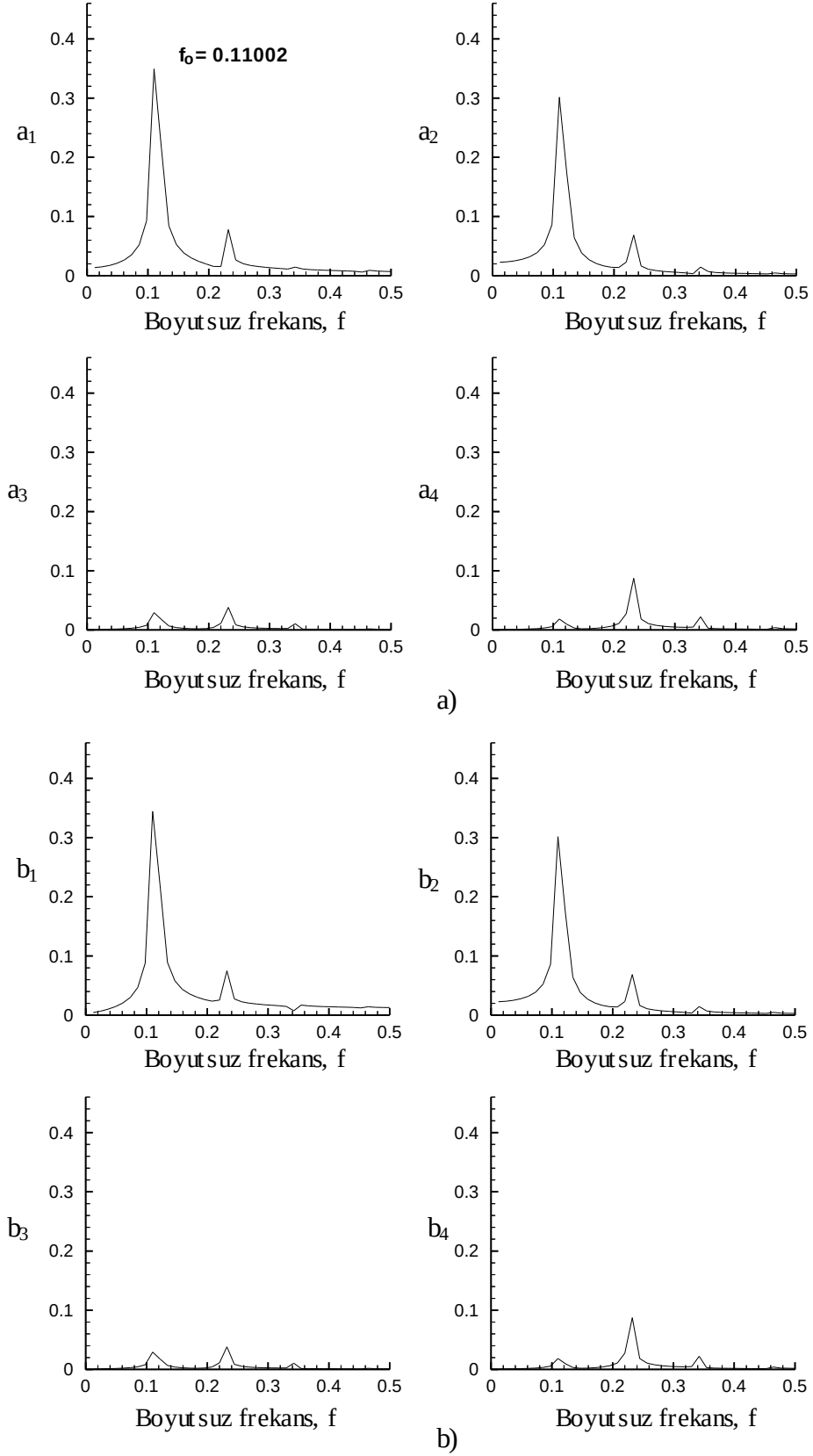


a)

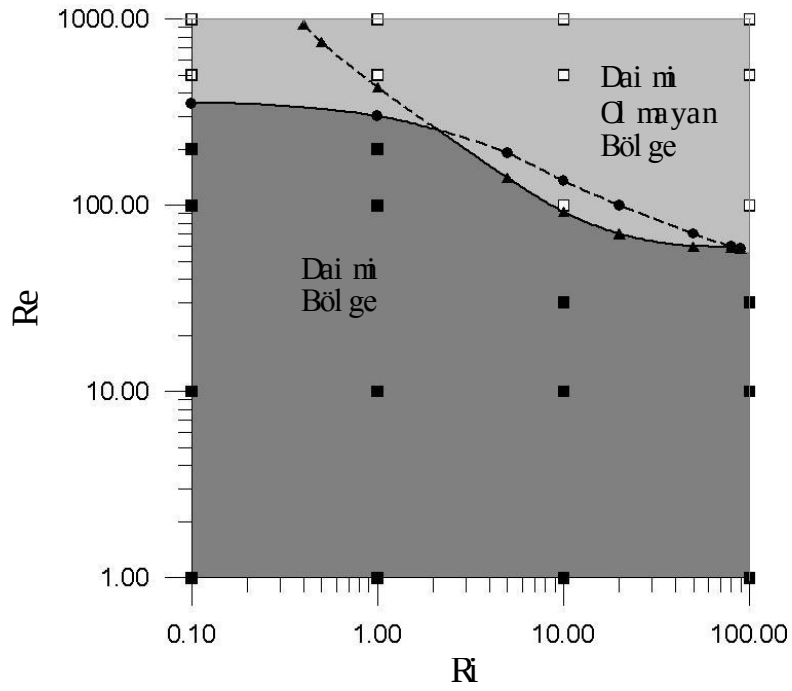


b)

Şekil 4.16. $R=1$, $Re=1000$ 'de farklı sayıda denklemlerle tasarımı dışı şartlarda ($R=1$, $Re=500$) çalıştırılan düşük boyutlu model tahminleri
a) (8+8)-denklemlerli model, b) (8+10)-denklemlerli model.



Şekil 4.17. $R=1$, $Re=1000$ 'de, (8+8)-denklemler tasarımı dışı şartlarda ($R=1$, $Re=500$) çalıştırılan düşük boyutlu modelin frekans analizi.
a) hız katsayıları, b) sıcaklık katsayıları.



Şekil 4.18. Farklı Ri ve Re sayıları için, Navier-Stokes modeliyle elde edilen akış rejimleri ile (6+8)-denklemlerle oluşturulan düşük boyutlu modellerle tahmin edilen akış rejimlerinin karşılaştırılması.

- Dai mi Ol mayan akış (Navier-Stokes Modeli)
- Dai mi akış (Navier-Stokes Modeli)
- $Ri=1, Re=500$ tasarımlarıyla oluşturulan düşük boyutlu model
- ▲ $Ri=10, Re=100$ tasarımlarıyla oluşturulan düşük boyutlu model

5. DEĞERLENDİRME VE ÖNERİLER

Yapılan bu tez çalışması, ele alınan zorlanmış ve karışık taşınım problemlerinin sayısal olarak ayrıntılı bir şekilde incelenmesinin yanı sıra, bu problemler için geliştirilen düşük boyutlu modellerin sistemin dinamik yapısını temsil edebilme yeteneğinin belirlenmesini, başka bir deyişle bu modellerin performansının test edilmesini kapsamaktadır.

Yanal duvarlarla sınırlandırılmış bir bölgede ikiz-jet akış problemi ile içinde ısı kaynağı bulunan dikdörtgensel bir bölgede karışık taşınım problemi olmak üzere iki farklı problemele alınmıştır.

İlk olarak yalnızca zorlanmış taşınım etkisinin söz konusu olduğu iki farklı jet geometrisi için (kuvvetli ve zayıf sınırlandırılmış akış geometrisi) ikiz-jet akış problemi, değişen parametrik şartlarda (farklı Reynolds sayılarında) incelenmiş ve bununla birlikte kuvvetli ve zayıf sınırlandırma etkileri karşılaştırılmıştır. Ayrıca, akış parametrelerinin yanı sıra geometrik parametrelerde göz önüne alınmıştır.

İkinci olarak elektronik ekipmanların soğutulması ile ilgili olarak, zorlanmış ve doğal taşınım olaylarının her ikisinin de etkili olduğu dikdörtgensel bir bölge içerisindeki bir levha üzerine yerleştirilmiş bir ısı kaynağının dışardan bir hava akışı etkisiyle (örneğin bir fan ile) soğutulması problemi incelenmiştir. Bu problemde Re ve Gr (veya Ri) sayılarının değişiminin sisteme olan etkileri değerlendirilmiştir.

Her iki problemi için elde edilen hız ve sıcaklık alanlarına, uygun ortogonal ayırım (POD) metodu uygulanarak, optimal özdeğer fonksiyonlar elde edilmiş, daha sonra bu özdeğer fonksiyonlar bir seri açılımında esas fonksiyon olarak kullanılarak Galerkin metodu yardımıyla akış ve sıcaklığı karakterize eden kısmi diferansiyel denklemler (Navier-Stokes ve enerji denklemleri), lineer olmayan az sayıda adi diferansiyel denkleme dönüştürülerek düşük boyutlu modeller oluşturulmuştur. Dolayısıyla düşük boyutlu modeller bize akış ve sıcaklık problemini az sayıda denkleme temsil edebilme imkanı sağlamıştır. Bu da değişen parametrik şartlar karşısında sistem davranışlarının hızlı ve etkili bir şekilde tahmin edilebilmesinde son derece önemlidir. Bu durum düşük boyutlu modellerin zamanla değişen bir sistemle ilgili otomatik kontrol sistemlerinde kullanılabilme olanağını sağlamaktadır.

Doğal olarak kurulacak böyle bir kontrol sisteminin güvenilirliği düşük boyutlu modellerin başarısına bağlıdır.

Yapılan çalışmada ele alınan problemlere uygulanan sayısal simülasyonlar, hem görsel olarak (örneğin akımcı çizimleri, eş sıcaklık eğrileri ve vektörel hız dağılımları), hem de kararlılık ve bifürkasyonlar açısından (örneğin faz diyagramları ve frekans analizleri yardımıyla) ayrıntılı bir şekilde incelenerek, sistemin dinamik davranışının saptanması, bu problemler için geliştirilen düşük boyutlu modellerin performansının sağlıklı bir şekilde test edilebilmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

Yaptığımız çalışmalarla, literatürde yapılan benzer çalışmalar karşılaştırıldığında her iki problemi çinde elde edilen sonuçlar (örneğin bifürkasyon olaylarının görüldüğü kritik Reynolds sayıları, hız vektörleri ile eş sıcaklık eğrileri, değişen parametrelerle birlikte Nu ve boyutsuz sıcaklık değişimleri) paralellik göstermektedir. Düşük boyutlu modeller açısından bakıldığında literatürde yapılan benzer çalışmalarla doğrudan karşılaştırma yapamamıza rağmen, bu modellerin genel özellikleri (örneğin özdeğerlerin çiftler halinde olması, enerjinin düşük dereceli modlarda toplanması, sistemin kararlılığının azalmasıyla birlikte enerjinin yüksek dereceli modlara doğru yayılması) uygunluk göstermektedir.

Her iki problemde de tasarım ve tasarımdışı şartlarda elde edilen düşük boyutlu model tahminleri oldukça başarılıdır. Özellikle karışık taşıma problemiinde düşük boyutlu modellerle elde edilen Hopf bifürkasyon eğrisi, düşük boyutlu modellerin akış ve sıcaklık problemlerine etkili bir şekilde uygulanabileceğinin bir göstergesidir.

Sonuç olarak Fluent yazılımı, problemin fiziksel özellikleri doğru bir şekilde girildiği ve sınır şartlarla birlikte model, grid ve çözümyöntemi uygun bir şekilde belirlendiği takdirde tatmin edici sonuçlar vermekte, elde edilen hız ve sıcaklık alan verileri düşük boyutlu modellerin oluşturulmasında büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu şekilde momentum ve enerji denklemleri için geliştirilen düşük boyutlu modeller sistemin dinamik davranışlarını başarılı bir şekilde tahmin/teşkil edebilmektedir.

Bu çalışmada laminar ve iki boyutlu akış kabulleri yapılmış ve çözümde kullanılan parametreler (örneğin Re sayısı) bu kabule uygun olacak şekilde belirlenmiştir. Fluent yazılımıyla veya başka bir programla çözülecek üç boyutlu ve/veya türbülanslı akış modellerine düşük boyutlu modeller rahatlıkla uygulanabilir. Ancak

bu takdirde, yüksek çözünürlükte sayısal çözümlerinin doğru ve hızlı bir şekilde yapılabilmesi için çok güçlü bilgisayarların kullanımı kaçınılmaz hale gelecektir.

KAYNAKLAR

- Aubry, N, Lunley, J. L., Holmes, P., and Stone, E., 1988. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **192**, 115.
- Berkooz, G, Holmes, P., and Lunley, J. L., 1993. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **25**, 539-575.
- David, G. V., and Jones, I. P., 1983. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, **3**, 227-248.
- Deane, A. E., Kevrekidis, I. G., Karniadakis, G. E., and Orszag, S. A., 1991. Low dimensional models for complex geometry flows: application to grooved channels and circular cylinders. *Phys. Fluids A* **3**, 2337-2354.
- Deane, A. E., and Mavriplis, C., 1994. Low dimensional description of the dynamics in separated flow past thick airfoils. *AIAA J.*, **32(6)**, 1222-1227.
- Gocmen, K., and Gunes, H., 2002. Mixed convection in a partially open rectangular cavity. *Proc. ESDA2002, 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, Istanbul, Turkey, July 8-11.
- Gunes, H., and Gocmen, K., 2002. Reduced models for oscillatory mixed convection. *Proc. ESDA2002, 6th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis*, Istanbul, Turkey, July 8-11.
- Gunes, H., Sahan, R. A., and Liakopoulos, A., 1997. Low dimensional description of oscillatory thermal convection: the small Prandtl number limit. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **9(1)**.
- Gunes, H., 1997. Low dimensional models of transitional convective flows. PhD Dissertation, Lehigh University.
- Gunes, H., 2002. Low-order dynamical models of thermal convection in high-aspect ratio enclosures. *Fluid Dynamics Research*, **30**, 1-30.
- Gunes, H., and Kavurmacioglu, L., 2000. Identification of coherent structures in driven-cavity flows using proper orthogonal decomposition. *12th Int. Symp. Transport Phenomena*, Istanbul.
- How, S. P., and Hu, T. H., 1998. Transient mixed convection in a partially divided enclosure. *Computers Math Applic.* **36(8)**, 95-115.

- Hsu, T. H., and Wang, S. G.**, 2000. Mixed convection in a rectangular enclosure with discrete heat sources. *Num Heat Trans., Part A* **38**, 627-652.
- Hsu, T. H., and Wang, S. G.**, 2000. Mixed convection of micropolar fluids in a cavity. *I. J. Heat Mass Trans.* **43**, 1563-1572.
- Kavurmacioglu, L., and Gunes, H.**, 2001. A reduced order model of a weakly-confined twin jet flow and its stability analysis. *Proc. ASME FEDS M01, New Orleans, Louisiana, May 29-June 1*.
- Liakopoulos, A., Hrythe, P. A., Gunes, H.**, 1997. A reduced dynamical model of convective flows in all laterally heated cavities. *Proc. Roy. Soc. London, A* **453**, 663-672.
- Lumley, J. L.**, 1967. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, pp. 166-178, Nauka, Moscow.
- Ly, H. V., and Tran, H. T.**, 2001. Modelling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition. *Mathematical and Computer Modelling*, **33**, 223-236.
- Özgür, C.**, 2000. Fraktal Geometri ve Kaos: Dinamik Sistemlere Uygulamalar. *Ders notları*.
- Papanicolaou, E., and Jaluria, Y.**, 1993. Mixed convection from a localized heat source in a cavity with conducting walls: A numerical study. *Num Heat Trans., Part A* **23**, 463-484.
- Podvin, B., and Quéré, J.**, 2001. Low-order models for the flow in a differentially heated cavity. *Phys. Fluids*, **13(11)**, 3204-3214.
- Sahan, R. A., Liakopoulos, A., and Gunes, H.**, 1997. Reduced dynamical models of nonisothermal transitional grooved-channel flow. *Phys. Fluids, A* **9(3)**, 551-565.
- Sarma, A. S. R., Sundararajan, T., and Ranjee, V.**, 2000. Numerical simulation of confined laminar jet flows. *Int. J. Numer. Meth Fluids*, **33**, 609-626.
- Sirovich, L.**, 1987. Turbulence and the dynamics of coherent structures, *Part I-III*. *Quart. Appl. Math.*, **45(3)**, 561-590.
- Sirovich, L.**, 1991. Analysis of turbulent flows by means of the empirical eigenfunctions. *Fluid Dyn. Res.* **8**, 85-100.
- Soong, C. Y., Tzeng, P. Y.**, 1998. Numerical investigation of flow structure and bifurcation phenomena of confined plane twin-jet flows, *Phys. Fluids*, **10(11)**, 2910-2921.

Tar man, I. H, S rovi ch, L, 1998. Extensions to Karhunen-Loeve based approximation of complicated phenomena. *Comput. Met hods Appl. Mech. Eng.* **155**, 359.

EK A

DÜŞÜK BOYUTLU MODEL DENKLEMLERİ

I. Jet Akış Problemi için Momentum Denklemi

$$\frac{da_k(t)}{dt} = A_k + \frac{B_k}{Re} + \sum_{i=1}^N a_i(t) \left(C_{ki} + \frac{D_{ki}}{Re} \right) + \sum_i^N \sum_j^N a_i(t) a_j(t) E_{kij}$$

II. Karışık Taşıma Problemi için Momentum Denklemi

$$\begin{aligned} \frac{da_k(t)}{dt} = & A_k + \frac{B_k}{Re} + \sum_1^N a_i(t) \left(C_{ki} + \frac{D_{ki}}{Re} \right) + \sum_i^N \sum_j^N a_i(t) a_j(t) E_{kij} \\ & + Ri \left(\sum_{i=1}^L b_i(t) K_{ki} + L_k \right) \end{aligned}$$

III. Enerji Denklemi

$$\begin{aligned} \frac{db_k(t)}{dt} = & \sum_i^N \sum_j^L a_i(t) b_j(t) U_{kij} + \sum_1^N a_i(t) V_{ki} \\ & + \sum_1^L b_i(t) \left(W_{ki} + \frac{1}{Pr Re} Z_{ki} \right) + \frac{1}{Pr Re} Q_k + R_k \end{aligned}$$

Katsayılar

$$A_k = \int_{\Omega} \left(\left[\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - F_x \right] \phi_{u_k} + \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - F_y \right] \phi_{v_k} \right) d\Omega$$

$$B_k = \int_{\Omega} (\nabla^2 \bar{u} \phi_{u_k} + \nabla^2 \bar{v} \phi_{v_k}) d\Omega$$

$$\begin{aligned} C_{ki} = & \int_{\Omega} \left(\left[\bar{u} \frac{\partial \phi_{u_i}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \phi_{u_i} + \bar{v} \frac{\partial \phi_{u_i}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \phi_{v_i} \right] \phi_{u_k} \right. \\ & \left. + \left[\bar{u} \frac{\partial \phi_{v_i}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \phi_{u_i} + \bar{v} \frac{\partial \phi_{v_i}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \phi_{v_i} \right] \phi_{v_k} \right) d\Omega \end{aligned}$$

$$D_{ki} = \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi_{u_i} \phi_{u_k} + \nabla^2 \phi_{v_i} \phi_{v_k}) d\Omega$$

$$E_{kij} = \int_{\Omega} \left(\left[\varphi_{u_i} \frac{\partial \varphi_{u_j}}{\partial x} + \varphi_{v_i} \frac{\partial \varphi_{u_j}}{\partial y} \right] \varphi_{u_k} + \left[\varphi_{u_i} \frac{\partial \varphi_{v_j}}{\partial x} + \varphi_{v_i} \frac{\partial \varphi_{v_j}}{\partial y} \right] \varphi_{v_k} \right) d\Omega$$

$$K_{ki} = \int_{\Omega} \psi_i \varphi_{v_k} d\Omega$$

$$L_k = \int_{\Omega} \bar{\theta} \varphi_{v_k} d\Omega$$

$$U_{kij} = - \int_{\Omega} \left(\varphi_{u_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \varphi_{v_i} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \psi_k d\Omega$$

$$V_{ki} = - \int_{\Omega} \left(\varphi_{u_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \varphi_{v_i} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right) \psi_k d\Omega$$

$$W_{ki} = - \int_{\Omega} \left(\bar{u} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \psi_k d\Omega$$

$$Z_{ki} = \int_{\Omega} \nabla^2 \psi_i \psi_k d\Omega$$

$$Q_k = \int_{\Omega} \nabla^2 \bar{\theta} \psi_k d\Omega$$

$$R_k = - \int_{\Omega} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - F_y \right) \psi_k d\Omega$$

ÖZGEÇMİŞ

Kenan GÖÇMEN 1976 yılında Ankara’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankara’da tamamladı. 1998 yılında İ. T. Ü. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği bölümünden mezun oldu. Aynı yıl İ. T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Bölümü Enerji programına girerek bir yıl İngilizce hazırlık öğrenimi aldıktan sonra 1999 yılında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Aynı yıl İ. T. Ü. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği Hidrolik Makinalar Anabilim Dalı’nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2002 yılında kısa dönem deniz er’i olarak askerlik hizmetini tamamladı.

Halen İ. T. Ü. Makina Fakültesi’nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta ve Yüksek Lisans eğitimini sürdürmektedir.