

166146

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİRLEŞTİRİLMİŞ SONLU ELEMAN VE SINIR
ELEMAN METODUYLA GERİLME ANALİZİ VE
DÜZ DİŞLİ ÇARKLARA UYGULANMASI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. Muzaffer Barış YAVUZ
(503031209)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2005

Tez Danışmanı : Doç.Dr. C. Erdem İMRAK

Diğer Jüri Üyeleri : Y.Doç.Dr. İsmail GERDEMELİ (İ.T.Ü.)

Doç.Dr. Murat VURAL (İ.T.Ü.)

Doç. Dr. C. Erdem İmraK
Y. Doç. Dr. İsmail Gerdemeli
Doç. Dr. Murat Vural

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte sayısal yöntemler daha geniş uygulama alanı bulmuş, birçok disiplini ilgilendirir hale gelmiştir. Bu yöntemler çeşitli uygulama alanları için kendilerine göre avantajlar sunar. Fakat öyle durumlar vardır ki en iyi sonucu bulabilmek için yöntemleri birleştirmek gerekir. Bu çalışmada da en çok kullanılan iki sayısal yöntem; sonlu elemanlar metodu ve sınır elemanlar metodunun birleştirilmesi incelenmiştir. Bu çalışmanın, benzer konularda yapılacak çalışmalara katkıda bulunmasını dilerim.

Öncelikle her konuda desteğini eksik etmeyen tez danışmanım Doç.Dr. C. Erdem İmrak'a, dişliler ve dişli analizi konularında yardımcı olan Y.Doç.Dr. Cüneyt Fetvacı'ya ve Arş. Gör. Koray Kesikçi'ye teşekkürü borç bilirim.

Mayıs 2005

Muzaffer Barış YAVUZ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
KISALTMALAR	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1. GİRİŞ	1
1.1 Sayısal Yöntemler	1
1.1.1 Sonlu farklar metodu	2
1.1.2 Sonlu elemanlar metodu	2
1.1.3 Sınır elemanlar metodu	3
1.1.4 Ağ yapısız metotlar	3
1.1.5 Birleştirilmiş yöntemler	3
1.2 Konuyla İlgili Daha Önceden Yapılmış Çalışmalar	4
1.2.1 Birleştirilmiş sınır eleman ve sonlu eleman metoduyla ilgili çalışmalar	4
1.2.2 Düz dişli analiziyle ilgili çalışmalar	5
2. SONLU ELEMANLAR METODU	6
2.1 Giriş	6
2.2 Sonlu Elemanlar Metodunun Adımları	7
2.2.1 Problemin tanımı	7
2.2.2 İdealleştirme	7
2.2.3 Problem geometrisinin elemanlara ayrılması	7
2.2.4 Eleman davranış matrisinin belirlenmesi	8
2.2.5 Eleman matrislerinin birleştirilmesi	9
2.2.6 Başlangıç ve sınır koşullarının eklenmesi	9
2.2.7 Sistem denklemlerinin çözümü	10
2.2.8 Bağımlı değişkenlerin hesaplanması	10
2.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Teorisi	10
2.3.1 Katılık matrisinin türetilmesinde virtüel işler prensibi	12
2.3.2 İnterpolasyon fonksiyonları	14
2.3.3 Sonlu elemanlar metodunda bant genişliği kavramı	17
3. SINIR ELEMANLAR METODU	18
3.1 Giriş	18
3.2 Sınır Elemanlar Metodunun Teorisi	20
3.2.1 Dirac – Delta fonksiyonu ve temel çözümler	20
3.2.1.1 Dirac - Delta fonksiyonu	20

3.2.1.2 Temel çözümler	22
3.2.2 İki Boyutlu sınır elemanlar metodu	25
3.2.3 Sınır integral eşitliği için sayısal çözüm prosedürü	29
3.2.4 Katsayı integrallerinin sayısal hesaplanması	31
3.2.5 Üç boyutlu sınır elemanlar metodu	33
4. SINIR VE SONLU ELEMANLAR METODLARININ KARŞILAŞTIRILMASI	35
4.1 Sınır Elemanlar Metodunun Üstünlükleri	35
4.1.1 Elemanlara ayırma	35
4.1.2 Problemi çözme süresi	36
4.1.3 İstenmeyen bilgi miktarının azalması	37
4.1.4 Aynı seviyede eleman yoğunluğu için daha yaklaşık sonuçlar	37
4.1.5 Sıkıştırılamayan malzemeler için uygulanabilirlik	38
4.1.6 Sadece sınır koşullarında yaklaşıklık	38
4.1.7 Sonsuz ve yarı sonsuz bölgeler için uygulanabilirlik	38
4.2 Sonlu Elemanlar Metodunun Üstünlükleri	38
4.2.1 Geniş uygulanabilirlik koşulları	38
4.2.2 Seyrek ve simetrik matris yapısı	39
4.2.3 Kabuk analizi	39
4.2.4 Kolay matematik	39
4.2.5 Bilimsel kaynak çokluğu	40
4.2.6 Yazılım çokluğu	40
5. BİRLEŞTİRİLMİŞ SINIR ELEMAN VE SONLU ELEMAN METODU	41
5.1 Giriş	41
5.2 SEM Tabanlı Yaklaşım	42
5.2.1 SEM tabanlı yaklaşımın teorisi	43
5.3 SIEM Tabanlı Yaklaşım	47
5.3.1 SIEM tabanlı yaklaşımın teorisi	47
5.4 İteratif Bölge Ayırıştırma Tekniği	48
5.4.1 İteratif bölge ayırıştırma tekniğinin teorisi	48
6. DIŞLI ÇARKLAR	51
6.1 Genel İfadeler ve Sınıflandırma	51
6.1.1 Alın dişli çarklar	51
6.1.2 Konik dişli çarklar	52
6.1.3 Spiral dişli çarklar	52
6.2 Düz Dişli Çarklarda Temel Büyüklükler	53
6.3 Dişli Çark Malzemeleri	54
6.4 Dişli Çarkların İmalatı	56
6.4.1 Form freze	56
6.4.2 Çubuk dişli takım	56
6.4.3 Helisel frezeleme	57
6.4.4 Pinyon şeklinde takım	58
6.5 Dişli Çarklarda Meydana Gelen Kusurlar	59
6.5.1 Diş dibi kırılması	59
6.5.2 Diş yan yüzeylerinde karıncalanma	59
6.5.3 Diş uçlarında aşınma	60

7. YAPILAN ÇALIŞMALAR	61
7.1 Diş Dibi Gerilmesi Hesaplama Yöntemleri	61
7.1.1 Cornell metodu	61
7.1.2 Chabert'in gerilme ifadesi	63
7.1.3 Tobe'nin gerilme ifadesi	63
7.2 Diş Profilinin Oluşturulması	64
7.3 Yapılan Analizler	64
7.3.1 Sonlu elemanlar analizi	65
7.3.2 Sınır elemanlar analizi	67
7.3.3 Birleştirilmiş sınır ve sonlu eleman analizi	68
7.4 Analiz Sonuçlarının Değerlendirilmesi	68
8. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER	72
KAYNAKLAR	74
EKLER	77
ÖZGEÇMİŞ	82

KISALTMALAR

SEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
SIEM	: Sınır Elemanlar Metodu
BDM	: Bilgisayar Destekli Mühendislik



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 6.1 : Dişli çark malzemelerinin mekanik özellikleri.....	55
Tablo 7.1 : Analizi yapılan dişliye ait büyüklükler.....	64
Tablo 7.2 : Kullanılan yöntemler ve elde edilen sonuçlar.....	68



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : Eleman sayısının artmasının çözüme etkisi.....	1
Şekil 1.2 : Problem geometrisinin a) sonlu farklar, b) sonlu elemanlar ve c) sınır elemanlar metodu ile gösterimi.....	2
Şekil 1.3 : Ağ yapısız metotta düğüm noktası kümesi.....	3
Şekil 1.4 : Ağ yapısız ve sonlu elemanlar metodlarının birleştirilmesi.....	4
Şekil 2.1 : Bir boyutlu yay elemanı.....	10
Şekil 2.2 : Yay elemanı üzerindeki kuvvetler ve şekil değiştirmeler.....	11
Şekil 2.3 : İki yaydan oluşan bir sistem.....	12
Şekil 2.4 : Üçgen eleman ve düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler.....	15
Şekil 3.1 : Aynı parça için SEM ve SIEM ayrıştırması.....	19
Şekil 3.2 : w_n birim kuvvetlerinin grafik gösterimi.....	20
Şekil 3.3 : Temel çözüm katsayılarının hesabı için kullanılan bölge.....	24
Şekil 3.4 : Tekil nokta sınır üzerindeyken genişletilmiş bölgenin gösterilmesi.....	26
Şekil 3.5 : P noktasındaki α açısı.....	28
Şekil 3.6 : i düğüm noktasının elemana yaklaşmasıyla r_i 'nin azalışını gösteren resim.....	33
Şekil 4.1 : Kanat profilinin SIEM ve SEM ile ayrıştırılmış hali.....	35
Şekil 4.2 : 1965 – 1999 arası yayınlanan çalışma sayıları.....	39
Şekil 5.1 : Bir geomekanik problemi için sonlu ve sınır eleman bölgeleri.....	43
Şekil 5.2 : Bölge ayrıştırma tekniği.....	49
Şekil 6.1 : Alın dişliler: a) Düz dişli b) Helisel dişli c) Çift helis dişli d) Herringbone dişli e) İç dişli f) Kremayer dişli.....	51
Şekil 6.2 : Düz ve helisel konik dişliler.....	52
Şekil 6.3 : Spiral dişli çarklar.....	53
Şekil 6.4 : DIN 867'ye göre düz alın dişli çark.....	53
Şekil 6.5 : Form freze.....	56
Şekil 6.6 : Çubuk dişli takım ile dişli imalatı.....	57
Şekil 6.7 : Helisel freze ile dişli imalatı.....	58
Şekil 6.8 : Pinyon bıçak ile dişli imalatı.....	58
Şekil 6.9 : Diş dibinde çatlak ilerleyişi.....	59
Şekil 6.10 : Diş yüzeylerinde karıncalanma.....	60
Şekil 7.1 : Cornell metoduyla ilgili sembollerin gösterimi.....	62
Şekil 7.2 : Düz dişli çark geometrisi.....	64
Şekil 7.3 : Dişli modelinin elemanlara ayrılmış hali.....	66
Şekil 7.4 : Dişli üzerindeki gerilme dağılımı.....	67
Şekil 7.5 : Sınır elemanlar modelinde eleman dış normalleri.....	68
Şekil 7.6 : Dişlinin kök bölgesindeki gerilme dağılımı.....	70

SEMBOL LİSTESİ

a_0	: Eksenler arası uzaklık
B	: Bant genişliği
$[B]$	: Gradyen matrisi
b	: Diş genişliği
D	: Sınır eleman hesabı için integral bölgesi
d_0	: Taksimat dairesi çapı
d_f	: Taban dairesi çapı
d_k	: Diş başı dairesi çapı
E	: Elastiklik modülü
e_0	: Diş aralığı
$\{F\}$	: Toplam kuvvet vektörü
F_l^e	: e elemanının l düğüm noktasındaki kuvvet
$\{f\}$	: Eleman katılık vektörü
g	: Çember kalınlık faktörü
$H(\xi - t)$	: Heaviside basamak fonksiyonu
h_f	: Taban yüksekliği
h_g	: Müşterek diş yüksekliği
h_k	: Diş başı yüksekliği
h_z	: Toplam diş yüksekliği
I	: Birim matris
i	: Çevrim oranı
$J(\zeta)$	: Jacobien matrisi
$[K]$	: Toplam rijitlik matrisi
$[k]$	: Eleman katılık matrisi
$[M]$	: Katsayı matrisi
m	: Modül
$NDOF$	: Eleman serbestlik derecesi
$[N]$	: İnterpolasyon fonksiyonu
P	: Sınır eleman çözüm bölgesinde bir nokta
Q	: Yerdeğiştirmelerden kaynaklı çözüm matrisi
$\mathbb{R}^2$	: İki boyutlu uzay
r	: Yarıçap
S_k	: Diş başı boşluğu
s_0	: Diş kalınlığı

t	: Eleman kalınlığı
$\{t\}$	: Çekme vektörü
t_e	: Kavrama taksimatı
t_0	: Taksimat
$\{U\}$	: Toplam yerdeğiştirme vektörü
$\{u\}$	: Eleman yerdeğiştirme vektörü
w_i	: i nodundaki temel çözüm
x	: Modifikasyon katsayısı
z	: Dış sayısı
α	: P noktasındaki açı
α_0	: Kavrama açısı
α_r	: Gevşeme parametresi
$[\Delta T], [\Delta U]$	: Sınır eleman katsayı matrisleri
δU_e	: İç gerilmelerin virtüel şekil değiştirme enerjisi
δW_e	: Dış kuvvetlerin virtüel işi
ε	: Kavrama oranı
$\{\varepsilon\}$	: Birim şekil değiştirme vektörü
ε_c	: Yakınsama toleransı
Γ	: Bölge
ρ	: Kesici takım köşe yuvarlatması
ν	: Poisson oranı
$\omega_n(x)$	: Birim kuvvet fonksiyonu
$[\partial]$	: Diferansiyel operatör matrisi

BİRLEŞTİRİLMİŞ SONLU ELEMAN VE SINIR ELEMAN METODUYLA GERİLME ANALİZİ VE DÜZ DİŞLİ ÇARKLARA UYGULANMASI

ÖZET

Bu çalışmada, birleştirilmiş sonlu eleman ve sınır eleman metodunun teorisi incelenmiş, dişliler üzerinde pratik uygulaması yapılmıştır. Bunun için öncelikle sonlu elemanlar metodu ve sınır elemanlar metodu ayrıntılı olarak incelenmiş ve karşılaştırılmıştır. Daha sonra birleştirme yöntemine ilişkin sonlu elemanlar tabanlı yaklaşım, sınır elemanlar tabanlı yaklaşım ve iteratif bölge ayrıştırma tekniği ayrıntılı olarak belirtilmiştir. Uygulama çalışması için dişli çarklar incelenmiş, diş dibi gerilmelerinin hesaplanması için kullanılan yöntemler anlatılmıştır. Yapılan analizler diş dibi gerilmeleriyle ilgili çeşitli analitik ifadelerle karşılaştırılmış, sonuçlar üzerinden yorum yapılmıştır.

COUPLING FINITE ELEMENT AND BOUNDARY ELEMENT METHODS AND ITS APPLICATION ON SPUR GEAR STRESS ANALYSIS

SUMMARY

In this study, coupling of boundary element and finite element method is studied and an illustrative example is given for spur gears. Therefore, finite element method and boundary element method are studied widely and compared. Three approaches for coupling; finite element based, boundary element based and iterative domain decomposition techniques are examined in detail. To implement the methods on spur gear tooth stress analysis, gears are studied and analytical gear tooth stress formulations are mentioned. The results of analysis are compared and discussed.

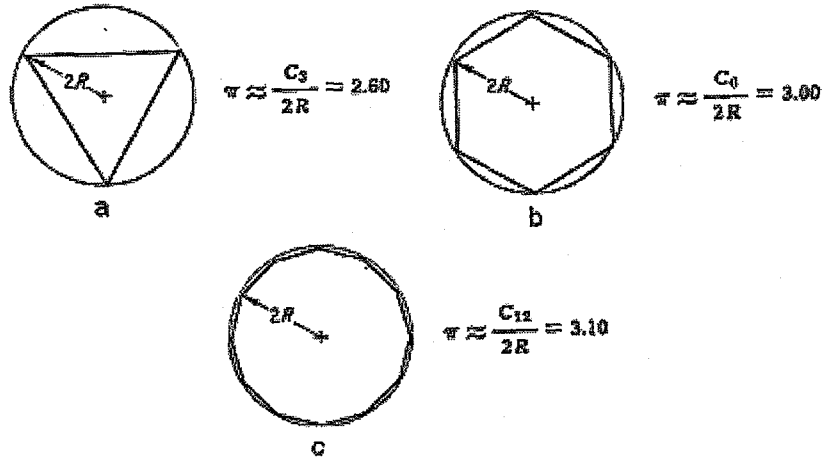


1. GİRİŞ

Mühendislik ve uygulamalı bilimlerde pek çok problem, diferansiyel ya da integral denklemler üzerinden ifade edilebilir. Analitik bir çözüme ulaşmak için bu denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi gerekir. Fakat geometri, sınır şartları ve malzeme yapısı gibi birçok yerde karşınıza çıkabilecek karmaşık yapılar (ki gerçekte problemler böyledir) kesin çözümün elde edilebilmesini engelleyebilir. Bazı durumlarda kesin çözüm elde edilse bile çözüm süresi mantıklı sınırlar içerisinde olmayabilir. Tasarım süresini mümkün olduğunca kısaltmak, en azından mantıklı bir seviyeye çekmek gerekir. Bu tip problemlerde bunu yapmanın yolu kesin çözüm aramak yerine yaklaşık çözümler elde etmekten geçer. Diferansiyel ve integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için sayısal yöntemler kullanılır.

1.1 Sayısal Yöntemler

Sayısal yöntemlerin temel özeliği, problem bölgesinin sonlu büyüklükte, kolay hesaplanabilir parçalara ayrılmasıdır. Bu parçaları birbirine bağlayacak ifadeler belirlenerek çözüm bölgesindeki (katı mekaniği problemleri için) gerilme ve yerdeğiştirme gibi değişkenlerin tatminkar derecede hesaplanması mümkündür. Bu bölgeler ne kadar küçük olursa ve değerlerin elde edildiği nokta sayısı ne kadar çok ise çözüme o kadar yakınsanır. Şekil 1.1'de pi sayısının hesaplanmasında eleman sayısının artmasının çözümü etkisi görülmektedir.



Şekil 1.1: Eleman Sayısının Artmasının Çözümüne Etkisi a) 3 Eleman b) 6 Eleman
c) 12 Eleman

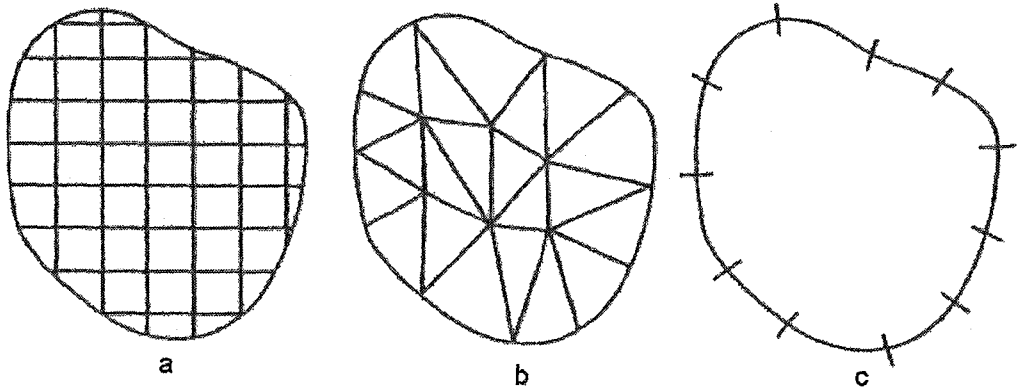
Sayısal yöntemlerde çözüme ulaşmak için çok sayıda denklemin eşzamanlı olarak çözülmesi gerekmektedir. Bu noktada oldukça büyük hesaplama gücüne ihtiyaç duyulur. 1950'lerden sonra, dijital bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle birlikte sayısal yöntemler ancak uygulanmaya başlanmıştır. Dolayısıyla teknoloji bağımlı yöntemlerdir. Günümüzde bilgisayar teknolojisinin ucuzlaması, bu yöntemlerin küçük işletmeler, hatta öğrenciler tarafından kullanımına olanak sağlamıştır.

1.1.1 Sonlu farklar metodu

Sonlu farklar metodunda diferansiyel denklemler, fark denklemleri vasıtasıyla çözülür. Öncelikler koordinat eksenlerine paralel artımlar ile düğüm noktaları oluşturulur. Her bir artım için fark denklemleri düzenlenir. Düğüm noktaları birbirlerine eşit mesafede yerleştirilir. Eleman yoktur ve düğüm noktaları arasındaki boşluklara herhangi bir özellik atanmaz. Bu özellikler diferansiyel denklemlerin içinde tanımlanmıştır. Noktaların koordinat eksenlerine paralel olması ve sadece eşit aralıklarla dizilmesi nedeniyle karmaşık geometri, karmaşık malzeme yapısı olan ve gerilme yığılmalarının olduğu problemler için kullanılması uygun değildir. Sonlu farklar metodu özellikle ısı ve akış problemleri için kullanılır. Ayrıca programlanması oldukça kolay bir yöntemdir.

1.1.2 Sonlu elemanlar metodu

Sonlu elemanlar metodu (SEM), oldukça geniş uygulama alanına sahip bir yöntemdir. Hemen hemen bütün mühendislik alanlarında kullanılabilir. Eleman yapısı itibarıyla karmaşık yapıli uygulamalarda kullanılabilir (Şekil 1.2). Sonlu elemanlar metoduna ilişkin piyasada çok sayıda yazılım bulmak mümkündür. Bu nedenle kolay ulaşılabilir bir yöntemdir.



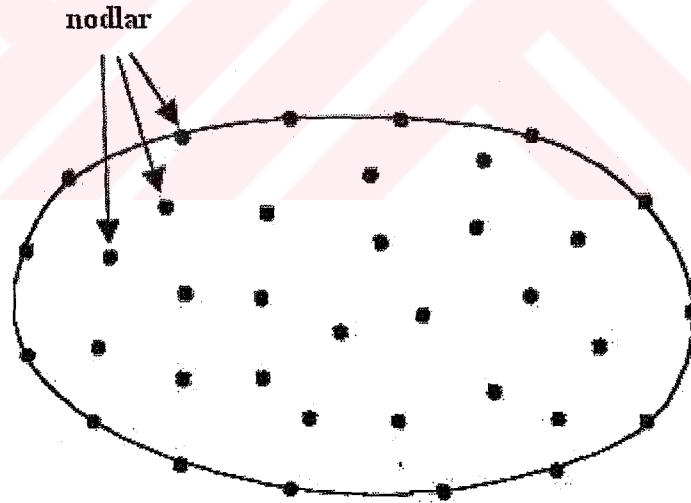
Şekil 1.2: Problem Geometrisinin a) Sonlu Farklar, b) Sonlu Elemanlar ve c) Sınır Elemanlar Metodu ile Gösterimi

1.1.3 Sınır elemanlar metodu

Sınır elemanlar metodu (SIEM), problemi sınır integral denklemleri cinsinden ifade ederek çözer. Bu denklemlerin çözümünü bulmak her zaman için mümkün olmayabilir. Özellikle lineer olmayan problemlerde uygulaması sınırlıdır. Ayrıştırma işlemi sadece sınırlarda yapıldığı için problemin boyutu bir düşer. Ayrıca teorisindeki karmaşık matematiksel ifadeler nedeniyle kolay anlaşılabilir bir yöntem değildir.

1.1.4 Ağ yapısız metotlar

Bundan önce bahsedilen yöntemler, problem bölgesini davranışı bilinen küçük parçalara ayırarak bu parçalar üzerinden çözüme gitmektedir. Burada ise, problem bölgesinin içine ve sınırlarına serpiştirilmiş nod (düğüm noktası) kümesi kullanılır (Şekil 1.3). Dikkat edilmelidir ki bu bir diskritizasyon değildir. Bu nod kümesi bir eleman ağı oluşturmaz, yani nodlar arasında bir ilişki kurmaya gerek yoktur. Uygulama alanı daha çok büyük şekil değişimi olan lineer olmayan problemlerdir. Çözüm esnasında kullanıcı müdahalesi gerektiği için tamamen otomatik hale getirilmiş bir yöntem değildir.



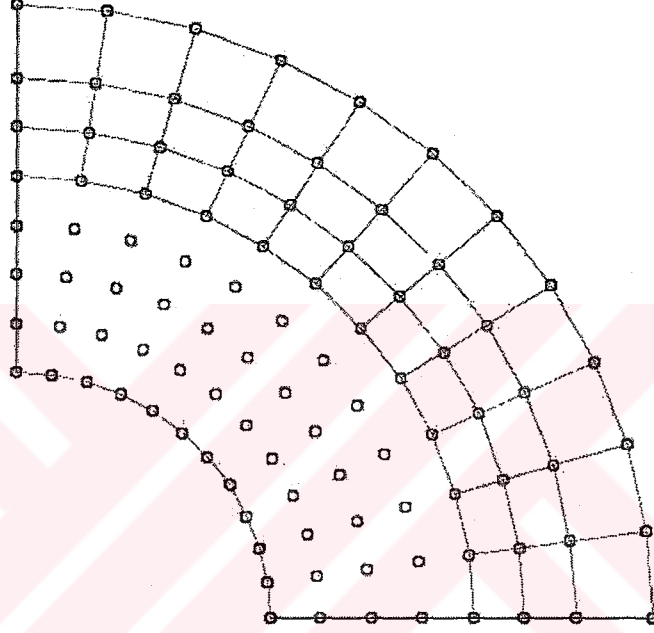
Şekil 1.3: Ağ Yapısız Metotta Düğüm Noktası Kümesi

1.1.5 Birleştirilmiş yöntemler

Yöntemleri birleştirmenin amacı, birleştirilen yöntemlerin üstün yönlerini aynı problem üzerinde değerlendirmektir. Çok çeşitli birleştirme yöntemleri vardır (Şekil 1.4). Birleştirme sadece farklı yöntemler arasında olmaz. Mesela farklı malzeme

özelliklerini modelleyebilmek için problem bölgesi, birden fazla sayıda sınır elemanlar bölgesine ayrıştırılabilir.

Birleştirme yöntemleri için genelde iki yöntem kullanılır. Bunlardan ilkinde ayrık bölgelerden biri diğer bölge için eşdeğer süper elemana çevrilir. Böylece ortak bir denklem takımı elde edilerek çözüme gidilir. Diğer yöntem iteratif bölge ayrıştırma yöntemidir. Bu yöntemde iki bölge ayrı ayrı hesaplanır. Ara yüz için bir bölgeden gelen sınır şartları diğer bölgeye uygulanır ve bu şekilde sıralı ve iteratif olarak çözüme gidilir.



Şekil 1.4: Ağ Yapısız ve Sonlu Elemanlar Metotlarının Birleştirilmesi

1.2 Konuyla İlgili Daha Önceden Yapılmış Çalışmalar

1.2.1 Birleştirilmiş sınır eleman ve sonlu eleman metoduyla ilgili çalışmalar

Sonlu ve sınır elemanlar metotlarının birleştirilmesi fikri ilk defa 1977 yılında Prof. O. C. Zienkiewicz tarafından ortaya atılmış ve 'Marriage ala mode – finite elements and boundary integrals' adlı dersinde gösterilmiştir. Bu konudaki ilk yayın da yine Zienkiewicz ve arkadaşları tarafından yapılmıştır [1].

Bu metodu uygulayabilmek için üç adet yöntem geliştirilmiştir. Bunlar sırasıyla sonlu elemanlar metodu tabanlı yöntem, sınır elemanlar metodu tabanlı yöntem ve iteratif bölge ayrıştırma yöntemidir.

İlk iki yöntem Beer ve Watson'un kitabında ayrıntılı olarak gösterilmiştir[2]. Bu kitapta önce SEM tabanlı yöntem geniş olarak incelenmiş, ardından SIEM tabanlı yöntemin ifadesi verilmiştir. Daha sonra birleştirme yönteminin keskin hatlı ara yüzler için incelemesi yapılmış ve son olarak da konuyla ilgili sayısal örnekler gösterilmiştir. Beer ve Watson'un kitabı dışında bu konuyla ilgili çok sayıda çalışma bulmak mümkündür [3-6].

İteratif bölge ayrıştırma tekniği diğer iki yöneme nazaran daha elverişli koşullar sunar. Bilalecki'nin çalışmasında [7] birleştirme metodu üç yönüyle birden incelenmiş, yöntemlerin üstünlükleri tartışılmıştır. Bu çalışmada sayısal örnekler üzerinden karşılaştırılma da yapılmıştır.

İteratif bölge ayrıştırması tekniğine ilişkin çok sayıda çalışma bulmak mümkündür [8-11]. Bu çalışmalar bu teknik için farklı yöntemler sunar. Tanaka [12], yaptığı çalışmada, mevcut bölge ayrıştırma yöntemleri için ara yüz gevşeme algoritmaları geliştirmiştir.

1.2.2 Düz dişli analiziyle ilgili çalışmalar

Bu konudaki çalışmaları SEM ile yapılanlar ve SIEM ile yapılanlar olarak ikiye ayırabiliriz.

SEM kullanılarak yapılan analizlere temel olabilecek bir çalışma Chabert tarafından yapılmıştır [13]. Bu çalışmada statik yük altında diş diplerinde meydana gelen gerilmeler incelenmiş, farklı diş sayıları için analizler yapılmıştır. Bulunan değerler üzerinden diş dibi gerilmesiyle ilgili çeşitli bağıntılar oluşturulmuştur.

Tobe [14], Chabert'in makalesinden farklı olarak aynı durumu diş modifikasyonları için incelemiştir. Bu çalışmada diş modifikasyonlarının diş dibi gerilmesine etkisiyle ilgili bağıntılar çıkartılmıştır.

Çelik, dişli analizinde SIEM'in kullanımıyla ilgili yaptığı çalışmada, analiz sonuçlarını deney sonuçlarıyla karşılaştırmıştır [15].

Diğerlerinden farklı olarak Sun, dişli analizini SEM ve SIEM için ayrı ayrı yapıp sonuçları karşılaştırmıştır [16]. Çıkan sonuçlara göre SIEM, benzer eleman yoğunluğu için daha iyi sonuçlar vermektedir.

2. SONLU ELEMANLAR METODU

2.1 Giriş

Genelde mühendislik problemleri, fiziksel durumların matematiksel modelleridir. Matematiksel modeller ise, başlangıç ve sınır koşullarına bağlı diferansiyel denklemlerdir. Mümkün olduğunda, kesin sonuçlar sistemin belirlenen koşullar altındaki davranışını ayrıntılı olarak ortaya koyar. Bu, analitik yaklaşımdır. Diğer taraftan, kesin sonuçlara ulaşılamayan birçok mühendislik problemi vardır. Kesin sonuca ulaşamamasının nedeni, problemin yapısındaki diferansiyel denklemlerin karmaşıklığı ya da önceden belirlenemeyen başlangıç ve sınır koşulları olabilir. Bu tür problemlerin üstesinden gelebilmek için sayısal yaklaşımlara başvurulur.

Mekanikte sayısal yaklaşımlar, ana sistemin, davranışı doğru bir şekilde belirlenebilen diferansiyel parçalara ayrılması prensibine dayanır. Yapıyı küçük parçalara ayırıp, bu parçaları uygun bir biçimde birleştirerek, makul ölçülerde doğruluğa sahip sonuçlar elde edilmesi mümkündür.

Sonlu elemanlar metodu (SEM), gerilme analizi, ısı geçişi, elektromanyetizma ve akış analizini içeren büyük çaplı mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan bir sayısal yaklaşımdır [17].

Sonlu elemanlar kavramı yeni değildir. Karmaşık alan ve hacimlerin, geometrik özellikleri belli temel figürlerle (elemanlarla) hesaplanması yöntemi yüzyıllardır kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar metodunun bugün ifade ettiği, sınır ve başlangıç koşulları belli bir sistemin, iyi tanımlanmış alt-bölgelere (elemanlara) ayrıldığını kabul edip, bilinmeyen fonksiyon durum değişkeninin hesaplanmasıdır. Durum değişkeni her eleman için yaklaşık olarak tanımlandıktan sonra, elemanların düğüm noktaları vasıtasıyla birleştirilerek tüm sistem için belirlenir. Bu, kaçınılmaz olarak denklemlerin eşzamanlı çözümünü gerektirmektedir. Bu nedenle sonlu elemanlar metodu, bilgisayarların gelişmiş bir hesaplama cihazı olarak kullanılmasına kadar yaygın olarak kullanılmamıştır.

Sonlu elemanlar metodu, hesaplamalı metotlar alanında son yüzyılın en büyük gelişmelerinden biridir. 20. yüzyılın ikinci yarısında, yapısal mühendislik alanlarına özelleşmiş birikiminden geliştirilerek, bütün mühendislik kategorilerine hitap etmeye

başlamıştır. Günümüzde biyomekanikten nükleer teknolojiye farklı disiplinlerdeki problemlerin çözümünde kullanılmaktadır.

2.2 Sonlu Elemanlar Metodunun Adımları

SEM, geometriden, malzemedan, sınır koşullarından ve problemin tipinden bağımsız olarak genel ve adım adım tanımlanmış bir prosedürü takip eder.

2.2.1 Problemin tanımı

Başlangıçta önce problemin ne tür bir problem olduğuna (katı cisimler mekaniği, akışkanlar mekaniği, ısı transferi, manyetizma vb.) ve buna bağlı olarak alan değişkeninin (yerdeğiştirme, sıcaklık vb.) ne olacağına karar verilir.

2.2.2 İdealleştirme

Fiziksel sistemler, doğada bulundukları halleri idealleştirmeden hesaplamalı yöntemlerle analiz edilemezler. Mesela doğadaki hiçbir disk tam yuvarlak değildir. Birçok problemde idealden sapma göz ardı edilebilir. Böyle durumlarda fiziksel sistemler hesaplanması kolay ideal şekiller ya da koşullarla ifade edilir. Sistemin geometrisinin yanı sıra, malzeme özellikleri ve sınır koşulları da idealleştirilmelidir. İdealleştirme her zaman için problemin boyutunu küçültür.

Bu adım tam bir mühendislik muhakemesidir. Hangi sistemin ne şekilde idealleştirileceğinin belirlenmesi gerekir. Bu aşamada yapılacak ufak hatalar analizin sonucunda büyük değişikliklere sebep olabilir. Bu nedenle sonlu elemanlar metoduyla analiz, çoğunlukla tecrübe ve mühendislik birikimi gerektiren bir iştir.

2.2.3 Problem geometrisinin elemanlara ayrılması

Elemanlara ayrılma, SEM'in en önemli adımlarından biridir. Doğal bir sistem sonsuz sayıda bileşenden meydana gelir. Böyle bir sistem üzerinden hesaplama yapılamayacağı için sistem sonlu sayıda elemandan oluşan bir yapıya ayrıştırılır. Bu işlem, problemin çözümünün gerçeğe yaklaşırlığı açısından oldukça önemlidir.

Elemanların geometrik şekli, düğüm noktalarının koordinatları cinsinden interpolasyon fonksiyonu ile ifade edilir. Buradaki interpolasyon eğrileri, genellikle düşük dereceli polinomlardır (lineer, kuadratik vb.).

Elemanlar, çözüm bölgesinin geometrik yapısına ve problemin tipine göre farklılıklar gösterir. Örneğin, bir kafes sistemin incelenmesinde genelde tek boyutlu elemanlar kullanılırken, bazı durumlarda istenilen çözüme ulaşmak için 3 boyutlu eleman kullanımı gerekebilir.

Analiz yapılacak alanın elemanlara ayrıştırılması esnasında iki kritere dikkat edilmesi gerekir.

- i) Şekli uygun biçimde, uygun elemanlar kullanarak bölmek
- ii) Elemanlar üzerindeki düğüm noktalarını en uygun şekilde numaralandırmak

Probleme uygun elemanın seçimi çok önemlidir. Bazı eleman tipleri, elde edilmek istenen çözümle ilgili özellikleri taşımayabilir. Mesela kiriş elemanları moment iletirken bağlantı elemanları iletmez.

Metodun bu aşamasında elemanlar için kullanılacak interpolasyon fonksiyonlarının seçilmesi gerekir. Alan değişkeninin, dolayısıyla buna bağlı diğer büyüklüklerin eleman içerisinde nasıl değişeceği bu fonksiyon ile tanımlanır. İnterpolasyon fonksiyonu, değişkenlerin çözüm bölgesi içerisindeki yaklaşık değişimini verir. Fonksiyon gerçeğe ne kadar yakın seçilirse çözümdeki yaklaşıklık da o kadar fazla olur. Polinomlar, türev alma ve integrasyon işlemlerinin kolaylığından dolayı sıklıkla interpolasyon fonksiyonu olarak kullanılır. İnterpolasyon fonksiyonunun çıkartılmasında Pascal Üçgeni kullanılır.

Elemanlara ayrıştırma işlemi yapıldıktan sonra elemanların görünüşlerinin kontrol edilmesi gerekir. Elemanlar ideal şekillerine ne kadar yakınsalar o kadar gerçekçi sonuç verirler. Üçgen elemanların eşkenar üçgene, dörtgen elemanların kareye, 3 boyutlu elemanların da düzgün dörtyüzlü ve küp gibi şekillere benzetilmesi uygundur. Örneğin dörtgen elemanların görünüm oranının (aspect ratio) 1/3'ü geçmemesi tavsiye edilir. Ayrıca elemandaki açısız çarpımlara da dikkat edilmelidir.

Düğüm noktalarını uygun bir biçimde numaralandırmak katsayı matrisinde yayılmaları azaltacağından çözüm süresini kısıltacaktır.

Sistemi elemanlara ayırma işi genelde zahmetli ve zaman alıcı bir iştir. Bu yüzden birçok sonlu elemanlar paket programı bünyesinde otomatik eleman ayırıcı (mesher) barındırır. Bu özelliği kullanarak birtakım seçenekler vasıtasıyla da uygun elemana bölme işlemi yapılabilir.

2.2.4 Eleman davranış matrisinin belirlenmesi

Sistem elemanlara ayrıştırıldıktan sonra, başta tanımı yapılan problemin cinsine göre, alan değişkenleri ve dış etkenler arasındaki ilişkinin formüle edilmesi gerekir. Bu ilişki, elemanın fiziksel davranışını tanımlayan katsayı matrisi ile kurulur. Katı cisimler mekaniği üzerinden bakıldığında şu eşitlik yazılabilir:

$$\{f\}=[k]\{u\} \quad (2.1)$$

Burada $[k]$ elemanın rijitlik matrisini göstermektedir. Rijitlik matrisini türetmek için mevcut 3 yöntem kullanılır:

- i) Doğrudan türetme; sezgisel bir yöntem olmakla birlikte kullanım alanı basit elemanlarla sınırlıdır.
- ii) Varyasyonel metod; varyasyonel ifadeler içeren herhangi bir tip problemin çözümünde etkilidir.
- iii) Ağırlıklandırılmış artanlar metodu; herhangi bir tip diferansiyel probleme uygulanabilir.

2.2.5 Eleman matrislerinin birleştirilmesi

Bu aşamada her eleman için bulunan denklem sistemleri birleştirilerek tüm çözüm bölgesinin özelliklerini ifade eden, sistemin toplam serbestlik derecesi sayısınca denklem takımı elde edilir.

Düğüm noktaları üzerinde alan değişkininin değeri, bu noktayı paylaşan her elemanda aynıdır. Eleman özelliklerinin birleştirilmesi sırasında farklı elemanlardaki ortak düğüm noktalarına ait denklemler toplanarak birleştirme yapılır.

$$[K]\{U\}=\{F\} \quad (2.2)$$

Düğüm noktalarının doğru biçimde numaralandırılması bu aşamada büyük önem taşımaktadır. Genel denklem takımını ifade eden matris birçok sıfır içerir. Doğru numaralandırma, sıfırdan farklı sayıların köşegen üzerinde toplanmasını sağlar. Sadece köşegen üzerinde belli bant genişliğindeki sayıları hafızada saklamak, zamandan ve maliyetten tasarruf anlamına gelir. Daha matematiksel bir dille anlatmak gerekirse, B bant genişliği olmak üzere:

$$B=(R+1)*NDOF \quad (2.3)$$

olarak gösterilebilir. R aynı elemandaki düğüm noktası numaraları arasındaki en büyük fark ve $NDOF$ elemanın serbestlik derecesini göstermektedir. Burada, bant genişliğini küçültmek için düğüm noktalarını uygun şekilde numaralandırarak R 'yi küçültmek gerekir.

2.2.6 Başlangıç ve sınır koşullarının eklenmesi

Birleştirme işlemindeki eşitlikler hiçbir başlangıç ve sınır koşulu içermediği için elde edilen genel rijitlik matrisi tekildir. Yani rijit cisim hareketi mevcuttur. Başlangıç ve

sınır koşullarının (bilinen dış ve iç kuvvetler, bilinen yerdeğiştirmeler) eklenmesiyle denklem 2.2, denklem 2.4'e indirgenir.

$$[K']\{U'\}=\{F'\} \quad (2.4)$$

Burada, $\{F'\}$ bilinen kuvvetleri, $\{U'\}$ ise bilinmeyen yerdeğiştirmeleri gösterir.

2.2.7 Sistem denklemlerinin çözümü

Elde edilen denklem takımı sınır ve başlangıç koşullarının eklenmesiyle çözülebilecek duruma gelmiştir. Bu aşamada denklem takımı eşzamanlı olarak çözülr. Sonuçta istene alan değişkenlerinin değerleri bulunur.

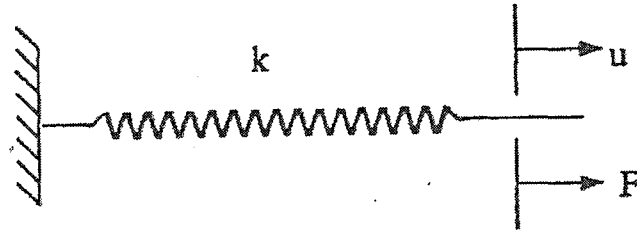
$$\{U'\}=[K']^{-1}\{F'\} \quad (2.5)$$

2.2.8 Bağımlı değişkenlerin hesaplanması

Denklem sisteminin çözülmesinden sonra istenirse bulunan alan değişkenleri kullanarak buna bağımlı diğer değişkenler hesaplanabilir. Mesela, bir gerilme analizinde alan değişkenleri yerdeğiştirmelerdir. Elastisite teorisi kullanılarak birim şekil değişimleri ve buradan da Hooke kanunu kullanılarak gerilmeler hesaplanabilir.

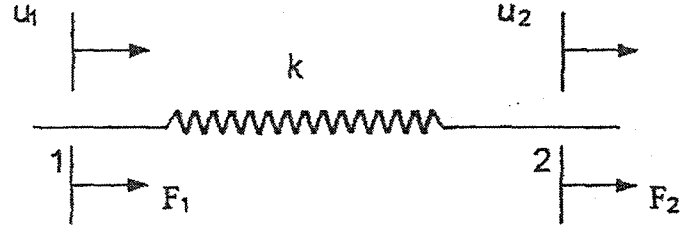
2.3 Sonlu Elemanlar Metodunun Teorisi

Sonlu elemanlar metodunun teorisinin daha anlaşılır olması için şu aşamada bir boyutlu yay elemanı esas alınarak başlanabilir.



şekil 2.1: Bir Boyutlu Yay Elemanı

şekil 2.1'de gösterilen yay elemanının yay katsayısı k , sisteme etkiyen kuvvet F , ve bu durum için yayda meydana gelen şekil değişimi u ile gösterilmiştir. O halde bu sistem, $F = k.u$ denklemiyle ifade edilebilir.



Şekil 2.2: Yay Elemanı Üzerindeki Kuvvetler ve Şekil Değişiklikler

Şekil 2.2’de verilen yay elemanı için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir;

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= 0 & F_2 &= k.(u_2 - u_1) = k.u_2 - k.u_1 \\ F_1 &= -F_2 & F_1 &= k.(-u_2 + u_1) = -k.u_2 + k.u_1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\{F\} = [k] \cdot \{u\} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

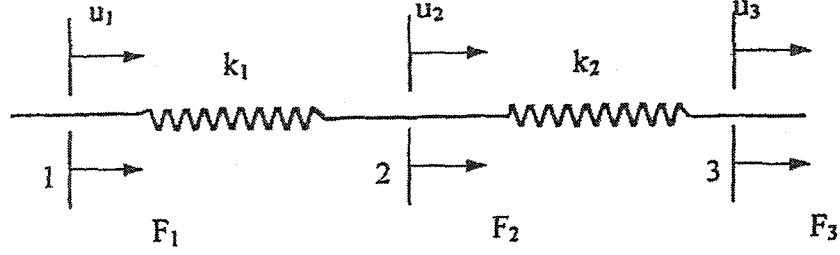
Buradan, yay elemanının matris eşitliğine geçilirse;

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \\ \{F\} = \{f^e\} &= \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eleman kuvvet vektörü} \\ [k] = [k^e] &= \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad \text{Eleman katılık matrisi} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\{u\} = \{u^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Eleman yerdeğiştirme vektörü}$$

$$\{f^e\} = [k^e] \{u^e\}$$

İki adet yay elemanını seri bağlayarak Şekil 2.3’te görülen sistem elde edilir. Burada, her bir yay elemanının iki bağ noktasına (1 ve 2 nolu noktalar) ve bu bağ noktalarının da birer tane bilinmeyene sahip olduğu görülmektedir. Bu durumda her yay elemanının iki bilinmeyeni (u_1 ve u_2) yani iki serbestlik derecesi bulunmaktadır. Sistemin toplam serbestlik derecesi ise üçtür.



Şekil 2.3: İki Yaydan Oluşan Bir Sistem

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$F_2 = -F_1 - F_3 = k_1 u_1 - (k_1 + k_2) u_2 + k_2 u_3 \quad F_1 = k_1 (u_1 - u_2) = k_1 u_1 - k_1 u_2$$

$$F_3 = k_2 (u_3 - u_2) = k_2 u_3 - k_2 u_2 \quad (2.8)$$

$$\{F\} = [K] \cdot \{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$[K]$ sistemin toplam katılık matrisi olup, eleman katılık matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilir.

$$[K] = [k_1] + [k_2]$$

$$[k_1] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad [k_2] = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

2.3.1 Katılık matrisinin türetilmesinde virtüel işler prensibi

Eleman rijitlik matrisini elde etmek için virtüel işler prensibinden faydalanılabilir. Bu prensibe göre tatbik edilen kuvvetler ile dengede olan bir yapının virtüel yer değiştirmesi halinde dış kuvvetlerin virtüel işi, yapıdaki iç gerilmelerin virtüel şekil değiştirme enerjisine eşittir.

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (2.10)$$

δU_e : iç gerilmelerin virtüel şekil değiştirme enerjisi

δW_e : dış kuvvetlerin virtüel işi

Yapıdaki gerilme ve birim şekil değiştirme dağılımlarını hesaplamak için öncelikle birim şekil değiştirmeler ile yer değiştirmeler arasındaki bağıntıyı belirlemek gerekmektedir. Eleman içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi o noktanın koordinatlarının bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon düğüm noktalarının koordinatları cinsinden ifade edilebilir. Bu polinom ifadesi ile düğüm noktalarındaki değerlerden elemanın içindeki herhangi bir noktanın yer değiştirmesi tayin edilebilmektedir. Bu fonksiyon interpolasyon fonksiyonu olarak adlandırılır.

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (2.11)$$

$\{u\}$ yer değiştirme bileşenleri $u(x, y)$ ve $v(x, y)$

$[N]$ interpolasyon fonksiyonu

$\{u\}^e$ düğüm noktalarındaki yer değiştirme bileşenleri

Birim şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntısı bu durumda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][N]\{u\}^e = [B]\{u\}^e \quad (2.12)$$

$[B]$ gradyen matrisi

$\{\varepsilon\}$ birim şekil değiştirme sütun matrisi

$[\partial]$ diferansiyel operatör matrisi

Gradyen matrisi birim şekil değiştirme bileşenleri ile düğüm noktası yer değiştirme bileşenlerini birbirine bağlamaktadır.

Gerilme matrisi şu şekilde yazılabilir;

$$\{\sigma\} = [E][B]\{u\}^e \quad (2.13)$$

Virtüel düğüm noktası yer değiştirmeleri $\{\delta u^e\}$ için virtüel birim şekil değiştirme enerjisi;

$$\delta U_e = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (2.14)$$

Dış kuvvetlerin virtüel işi;

$$\delta W_e = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (2.15)$$

Virtüel işler prensibinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (2.16)$$

Gerilme ve birim şekil değiştirme ifadeleri yerine eşitlikleri konursa;

$$\int_V \{\delta u^e\}^T [B]^T [E] [B] \{u^e\} dV = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (2.17)$$

Virtüel ve gerçek yer değiştirmeler hacimsel integrallerden bağımsız olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\{\delta u^e\}^T \left(\int_V [B]^T [E] [B] dV \right) \{u^e\} = \{\delta u^e\}^T \{f\} \quad (2.18)$$

Eşitliğin her iki tarafından $\{\delta u^e\}^T$ silinirse, düğüm noktalarındaki yer değiştirmeleri, tatbik edilen kuvvetlere bağlayan aşağıdaki ifade elde edilir.

$$[k] \{u\}^e = \{f\} \quad (2.19)$$

Bu ifadenin eleman katılık matrisi;

$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad (2.20)$$

İki boyutlu problemlerde ise t eleman kalınlığı ve A eleman alanı olmak üzere şu ifade kullanılır:

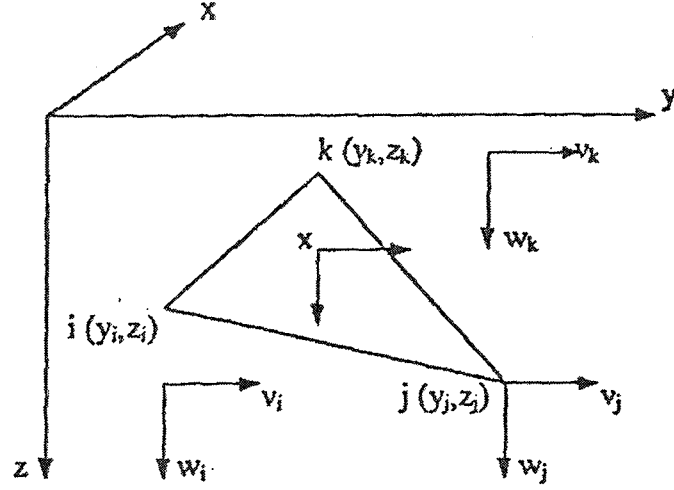
$$[k] = \int_V [B]^T [E] [B] t dA \quad (2.21)$$

Bu şekilde kabul edilen yer değiştirme fonksiyonunu esas alan herhangi bir elemanın genel matematik ifadesi elde edilmiş olur. Elemanın katılık matrisi interpolasyon fonksiyonlarının formuna ve gradyen matrisini oluşturan türevlerine bağlıdır.

2.3.2 İnterpolasyon fonksiyonları

Sonlu elemanlar metodunda, düğüm noktalarında elde edilen sonuçlardan hareketle alan değişkenlerinin çözüm bölgesi içinde nasıl değiştiği bir fonksiyon yardımıyla tanımlanır. Bu fonksiyon alan değişkenlerinin çözüm bölgesi içindeki yaklaşık değerini verir. İnterpolasyon fonksiyonu gerçeğe ne kadar yakın seçilirse çözümdeki yaklaşıklık da o derece artar. Türev alma ve integrasyon işlemlerindeki kolaylıktan dolayı en çok tercih edilen fonksiyonlar polinomlardır.

Örnek olarak Şekil 2.4'te gösterilen üçgen elemanı kullanılabilir. Bu eleman iki boyutlu düzlem deformasyon hali için kullanılmaktadır.



Şekil 2.4: Üçgen Eleman ve Düğüm Noktalarındaki Yer Değiştirmeler

Düzlem deformasyon halinde üçgen eleman için yer değiştirmeler genelde doğrusal kabul edilir.

$$\{u^e\}^T = [v_i w_i \quad v_j w_j \quad v_k w_k] \quad (2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ w &= \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_6 z \end{aligned} \right\} \text{Eleman fonksiyonları} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \alpha_1 + \alpha_2 y_i + \alpha_3 z_i \\ v_j &= \alpha_1 + \alpha_2 y_j + \alpha_3 z_j \\ v_k &= \alpha_1 + \alpha_2 y_k + \alpha_3 z_k \end{aligned} \right\} \text{Üç bilinmeyenli üç denklem} \quad (2.24)$$

Diğer bir deyişle;

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

yazılabilir. Bu denklem sistemi aşağıdaki gibi çözülebilir. Δ , üçgenin alanı olmak üzere:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/2 \Delta (a_i v_i + a_j v_j + a_k v_k) \\ \alpha_2 &= 1/2 \Delta (b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k) \\ \alpha_3 &= 1/2 \Delta (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{vmatrix} y_j & z_j \\ y_k & z_k \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & z_j \\ 1 & z_k \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_k \end{vmatrix} \\ -\det \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ y_k & z_k \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & z_i \\ 1 & z_k \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix} \\ \det \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ y_j & z_j \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & z_i \\ 1 & z_j \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$V = 1/2 \Delta \left[(a_i + b_i y + c_i z) v_i + (a_j + b_j y + c_j z) v_j + (a_k + b_k y + c_k z) v_k \right] \quad (2.29)$$

$$W = 1/2 \Delta \left[(a_i + b_i y + c_i z) w_i + (a_j + b_j y + c_j z) w_j + (a_k + b_k y + c_k z) w_k \right] \quad (2.30)$$

elde edilir. Burada;

$$\begin{aligned} N_i &= 1/2 \Delta (a_i + b_i y + c_i z) \\ N_j &= 1/2 \Delta (a_j + b_j y + c_j z) \\ N_k &= 1/2 \Delta (a_k + b_k y + c_k z) \end{aligned} \quad (2.31)$$

fonksiyonlarına şekil fonksiyonları denir. Şekil fonksiyonu düğüm noktaları dışındaki bir noktada bilinmeyen değerleri bulmak için interpolasyon işleminde kullanılmaktadır.

Yukarıdaki ifadeler şu şekilde düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} V &= N_i V_i + N_j V_j + N_k V_k \\ W &= N_i W_i + N_j W_j + N_k W_k \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ W_i \\ V_j \\ W_j \\ V_k \\ W_k \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Şekil fonksiyonlarının önemli bir özelliği, bazı noktalarda 1 bazı noktalarda 0 değerini almasıdır. Burada N_i i noktasında 1 diğer j ve k noktasında ise 0 değerini alır. N_j ve N_k için de aynı durum geçerlidir.

Düzlem zorlanma durumunda birim şekil değiştirme bileşenleri ε_y , ε_z , γ_{yz} noktasal yer değiştirmeler kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \partial v / \partial y = (\partial N_i / \partial y) v_i + (\partial N_j / \partial y) v_j + (\partial N_k / \partial y) v_k \\ \varepsilon_z &= \partial w / \partial z = (\partial N_i / \partial z) w_i + (\partial N_j / \partial z) w_j + (\partial N_k / \partial z) w_k \\ \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \\ &= (\partial N_i / \partial z) v_i + (\partial N_j / \partial z) v_j + (\partial N_k / \partial z) v_k + (\partial N_i / \partial y) w_i + (\partial N_j / \partial y) w_j \\ &\quad + (\partial N_k / \partial y) w_k\end{aligned}\tag{2.34}$$

2.3.3 Sonlu elemanlar metodunda bant genişliği kavramı

Sonlu elemanlar analizinde her bir elemana ait katılık matrislerinin birleştirilmesiyle elde edilen toplam katılık matrisinde bant genişliği kavramı oldukça önemlidir.

Toplam katılık matrisinin köşegeni üzerindeki terimler de dahil olmak üzere, sağa doğru bir satır üzerinde yer alan sıfırdan farklı elemanların sayısının en büyüğüne yarım bant genişliği denir. Bant genişliği, $B = (F + 1)S$ şeklinde ifade edilir. Burada;

B : Bant genişliği,

F : Bütün elemanlar dikkate alınarak, bir elemanda iki düğüm numarası arasındaki en büyük fark,

S : Düğüm noktalarındaki serbestlik derecesidir.

3. SINIR ELEMANLAR METODU

3.1 Giriş

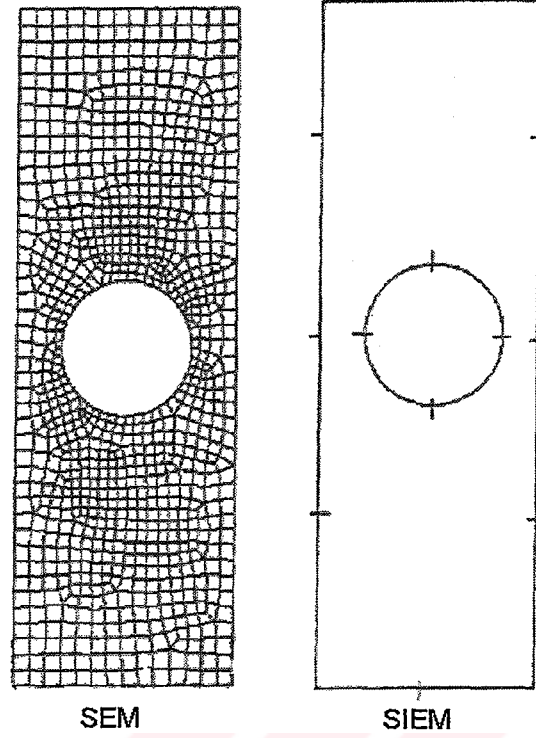
Mühendislik tasarım yöntemleri, gün geçtikçe daha zor ve birçok disiplini ilgilendirir hale gelmektedir. Uygun maliyetli bir makina tasarlayabilmek için bilgisayar destekli mühendislik uygulamalarının kısmen laboratuvar testlerinin yerini alması gerekmektedir. Bilgisayar teknolojisinin ve gücünün artmasıyla, sayısal modellemenin de avantajlarını kullanarak, integral denklem bazlı modelleme teknikleri, birçok mühendislik uygulamasının gerçekleştirilmesinde kullanılabilir. Bu integral denklemlerini çözmenin en genel ve efektif yolu sınır elemanlar metodudur (SIEM).

Sonlu elemanlar metodu (SEM), endüstride genel amaçlı bir analiz aracı olarak kullanılmaktadır. SIEM'in kullanımı ise SEM kadar yaygın olmamakla birlikte, bugün geldiği nokta, SEM'e alternatif olabilecek düzeydedir.

SEM kullanıcıları, neden diğer bir hesaplamalı yöntem kullanmaya gereksinim duyalım diye sorabilirler. Kanıtlanmıştır ki; SEM, birçok mühendislik uygulamalarında yetersiz ve verimsiz kalmakla birlikte 'hantal'dır. Aynı zamanda bilgisayar destekli mühendislik (BDM) uygulamalarıyla birleştirilmesi zordur [20] .

SIEM'in en büyük cazibesi, problemin boyutunda yaptığı küçültmedir. İki boyutlu analizlerde çizgi sınırların diskritizasyonu yapılırken (Şekil 3.1), üç boyutlu analizlerde yüzey diskritizasyonu yapılır. Bu, SEM ve diğer analiz yöntemleriyle karşılaştırıldığında modellemeye sarf edilen çabanın azaldığını gösterir. Bununla birlikte, gerilme ve genleme gibi bilinmeyen parametreler, yüzey üzerinde değerlendirildiğinden, SEM'e göre çok daha küçük denklem sistemleri elde edilmektedir.

SIEM'in hacim yerine yüzey diskritizasyonu yapmasından dolayı SIEM kodları kolaylıkla katı modelleme programları ve eleman ağı geliştiricileriyle birlikte kullanılabilir. Bu özellik, tasarım işi açısından önemlidir. Özellikle bir dizi değişiklik gerektiren uygulamalarda SEM'e göre büyük avantaj sağlamaktadır. Eleman ağının kolayca oluşturulmasının yanı sıra, tasarımda yapılan değişiklikler, eleman ağının tamamen değiştirilmesini gerektirmez.



Şekil 3.1: Aynı Parça İçin SEM ve SIEM Ayırıştırması

SIEM'in SEM üzerindeki diğer bir avantajı, yüzeydeki gerilme yığılmalarındaki performansdır. Yapılan çalışmalar göstermektedir ki; SIEM, köşeler gibi gerilme yoğunlaşması olan bölgelerde ve kırılma mekaniği problemlerinde yüksek doğruluklu sonuçlar vermektedir [20].

Aynı seviyede eleman ağı için SIEM'in çözüm süresi SEM'den daha uzundur. Fakat çözümlerde aynı doğruluğu yakalayabilmek için SEM'in daha sık eleman ağı kullanması gerekir.

Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi, problemin çözüm safhasını oldukça kısaltmış, 2 boyutlu analiz süresi saniyelerle, 3 boyutlu analiz süresi dakikalarla ifade edilmeye başlanmıştır. Böyle bir ortamda tasarımcının en çok vaktini alan kısım modelleme ve elemanlara ayırıştırma adımlarıdır. Bu bağlamda SIEM diğer analiz metotlarına göre avantajlıdır.

SIEM'in birçok avantajı, teorisindeki karmaşık matematiksel ifadelerden kaynaklıdır. SIEM, bilgisayarda doğru biçimde kodlandığında çok yönlülük ve yüksek derecede doğruluk sağlanabilir, fakat, zayıf kodlama, feci sonuçlara neden olacaktır. Bu nedene yazılım üreticileri SIEM'in teorisini baştan sona doğru bir biçimde öğrenip kodlamalıdır.

3.2 Sınır Elemanlar Metodunun Teorisi

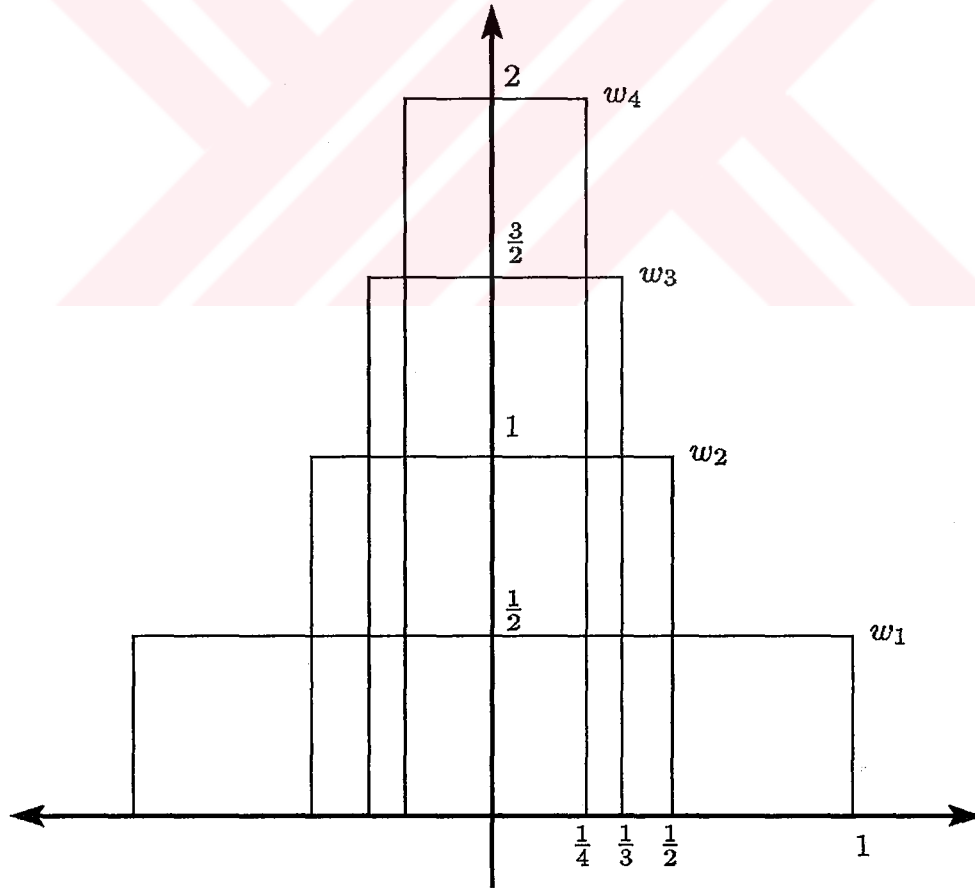
Sınır elemanlar metodu ve sonlu elemanlar metodu arasında birçok temel farklılık vardır. Bu farklılıklardan biri de ağırlıklandırma fonksiyonlarından gelir. Sınır elemanlar teorisine geçmeden önce bu yöntemde kullanılan ağırlıklandırma fonksiyonunu geliştirmekte fayda var.

3.2.1 Dirac – Delta fonksiyonu ve temel çözümler

Sınır elemanlar metodunu özel bir probleme uygulamadan önce ağırlıklandırma fonksiyonu olan temel çözümün (fundamental solution) elde edilmesi gerekir. Bu fikir temelde sıradan diferansiyel denklemlerdeki özel çözümle aynıdır. Temel çözümler Dirac Delta fonksiyonuna bağlıdır.

3.2.1.1 Dirac - Delta fonksiyonu

Bu sıra dışı fonksiyona sezgisel bir yaklaşım yapmak için, şekil 3.2’de gösterilen ve büyük bir plak üzerine etkiyen kuvvet dağılımları incelenebilir.



Şekil 3.2: w_n Birim Kuvvetlerinin Grafik Gösterimi

$$\omega_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (3.1)$$

Bütün kuvvetlerin ortak özelliği olarak:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(x) dx = 1 \quad (3.2)$$

Burada n arttığı takdirde kuvvetin etkidiği alan azalacak ve bununla birlikte kuvvet / birim alan artacaktır.

Kolayca görülmektedir ki, n arttıkça kuvvetin etki ettiği alan daha da küçülmekte, kuvvetin büyüklüğü artmakta fakat toplam etkiyen kuvvet sabit kalmaktadır. n 'nin sonsuza gittiğini düşünülürse: $n \rightarrow \infty$ $x = 0$ 'da noktasal kuvvet $\delta(x)$ 'i elde edilir.

Buradan:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(x) \quad (3.3)$$

Dirac Delta fonksiyonu elde edilir. Burada ilgilenilen fonksiyon bu değildir, çünkü, fonksiyon orijin dışında her yerde sıfır ve orijinde sonsuzdur. Buna karşın $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(x) dx = 1$ olduğundan $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ elde edilir.

Aslında Dirac Delta bir fonksiyondan çok bir dağılımı ifade eder. Herhangi bir sürekli $h(x)$ fonksiyonu için:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) h(x) dx = h(0) \quad (3.4)$$

elde edilir.

Bunu kısa bir şekilde ispat etmek gerekirse:

$\delta(x)$ 'in tanımından;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(x) h(x) dx \quad (3.5)$$

$\omega_n(x)$ 'in tanımından;

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(x) dx \quad (3.6)$$

Ortalama değer teoreminden, $\xi \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ için;

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} h(\xi) \frac{2}{n} \quad (3.7)$$

$n \rightarrow \infty$ ve $\xi \rightarrow 0$ için;

$$= h(0) \quad (3.8)$$

Burada önemli olan Dirac Delta'nın bir noktadaki değerinden çok oradaki integral davranışdır. Bu fonksiyonun diğer bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x) h(x) dx = h(\xi) \quad (3.9)$$

Burada, Dirac Delta dağılımının $x=0$ yerine $x=\xi$ etrafında olduğuna dikkat edilmelidir.

$$H(\xi - t) = \begin{cases} 0 & \xi < t \\ 1 & \xi > t \end{cases} \quad (3.10)$$

için;

$$\delta(\xi - x) = H'(\xi - t) \quad (3.11)$$

Burada, Dirac Delta, Heaviside basamak fonksiyonunun eğimini ifade eder.

$$\delta(\xi - x, \eta - y) = \delta(\xi - x) \delta(\eta - y) \quad (3.12)$$

İki boyutlu Dirac Delta, tek boyutlularının çarpımından elde edilebilir.

3.2.1.2 Temel çözümler

Burada yapılması gereken, iki değişkenli Laplace Eşitliği için temel çözümü (aynı zamanda serbest uzay Green Fonksiyonu olarak da geçer) bulmaktır. Bir belirli eşitliğin (particular equation) temel çözümü, eşitliğin sınır eleman ifadesindeki ağırlıklandırma fonksiyonudur. Bu nedenle bir belirli eşitliğin temel çözümünün bulunabilirliği önemlidir. Birçok yaygın eşitliğin bilinen temel çözümleri mevcuttur.

$\Omega \in \mathbb{R}^2$ 'de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace Eşitliği çözülmeye çalışılsın:

Bu eşitliğin çözümü:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \delta(\xi - x, \eta - y) = 0 \quad (3.13)$$

denkleminin $\mathbb{R}^2$ 'deki çözümüdür. Metot, (ξ, η) noktasında tekillik arz eden $\mathbb{R}^2$ 'deki $\nabla^2 w = 0$ 'ın çözümünü bulma çabasıdır. Bu, görüldüğü kadar zor bir iş değildir. $\delta(\xi - x, \eta - y)$, (ξ, η) noktası etrafında simetrik olduğu sürece çözümün de bu nokta etrafında simetrik olması beklenir. Bu nedenle bu nokta üzerinde lokal bir polar koordinat sistemi olduğu kabul edilir.

Diyelim ki:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \quad (3.14)$$

buradan,

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \quad (3.15)$$

elde edilir.

$r > 0$, $\delta(\xi - x, \eta - y) = 0$ ve simetri koşulları altında, $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = 0$ 'dır. Buna göre, üstteki eşitlik,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.16)$$

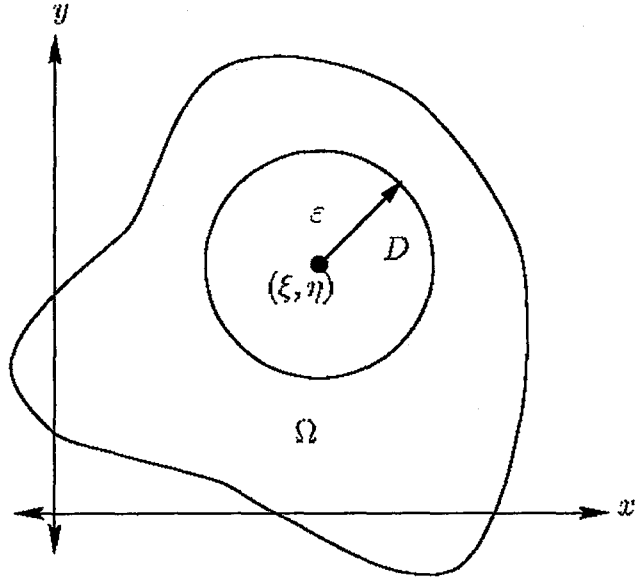
halini alır. Bu eşitlik düz integrasyonla çözüldüğü zaman,

$$\omega = A \log r + B \quad (3.17)$$

sonucu elde edilir. A ve B katsayılarını bulmak için delta fonksiyonunun integral özelliğinin kullanılması gerekir. Denklem (3.13)'ten,

$$\int_D \nabla^2 \omega dD = - \int_D \delta dD = -1 \quad (3.18)$$

bulunur. Burada, D , $r=0$ 'ı kapsayan bölgedir (Şekil 3.3). Yukarıdaki entegralleri hesaplayabilmek için basit bir bölge seçilmesi gerekir.



Şekil 3.3: Temel Çözüm Katsayılarının Hesabı İçin Kullanılan Bölge

D , $\varepsilon > 0$ yarıçapında ve merkezi $r=0$ 'da olan küçük bir disk ise, Green – Gauss teoremine göre, ∂D , D 'nin yüzeyi olmak üzere:

$$\int_D \nabla^2 \omega dD = \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial n} dS \quad (3.19)$$

D , $r=0$ merkezli bir disk olduğundan r ve n aynı yöndedir;

$$= \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial r} dS \quad (3.20)$$

D , ε yarıçaplı bir disk olduğundan ve denklem (3.17)'den:

$$= \frac{A}{\varepsilon} 2\pi\varepsilon \quad (3.21)$$

$$= 2\pi A \quad (3.22)$$

Buna göre, denklem (3.18)'den:

$$A = -\frac{1}{2\pi} \quad (3.23)$$

Dolayısıyla:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \log r + B \quad (3.24)$$

Burada, B hala keyfi bir değer olmakla birlikte genellikle sıfır olarak kabul edilir. Bu kabulde birlikte iki boyutlu Laplace Eşitliği'nin temel çözümü:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \log r \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{r} \right) \quad (3.25)$$

olarak bulunur. $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 'dir.

Üç boyutlu Laplace Eşitliği'nin çözümü de benzer bir teknikle bulunabilir.

$$\omega = \frac{1}{4\pi r} \quad (3.26)$$

Burada, r, üç boyutta ölçülen mesafedir.

3.2.2 İki boyutlu sınır elemanlar metodu

Gelinen noktada, iki boyutlu Ω bölgesinde $\nabla^2 u = 0$ 'ın çözümü için sınır elemanlar metodunu geliştirilebilir. Burada kullanılan ana adımlar temelde sonlu elemanlar metodunununkilerle benzerlik göstermektedir. İlk önce bir ağırlıklandırılmış integral eşitliği kullanarak Laplace Eşitliği'nden integral eşitliği türetilmeli, ardından da Green – Gauss Teoremi kullanılmalıdır.

$$0 = \int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot \omega d\Omega = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega \quad (3.27)$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega d\Omega \quad (3.28)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT + \int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega \quad (3.29)$$

Galerkin, sonlu elemanlar metodunda ağırlıklandırma fonksiyonu w 'yi, u 'ya yaklaşmak için kullanılan ana fonksiyonlardan biri olarak kullanılır. Burada ise Laplace Eşitliği'ne temel çözüm olması için kullanılır.

Denklem (3.29)'da Dirac – Delta özelliğini kullanarak:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega = - \int_{\Omega} u \delta(\xi - x, \eta - y) d\Omega = -u(\xi, \eta) \quad (\xi, \eta) \in \Omega \quad (3.30)$$

Yani, bölge integrali bir nokta değeri ile değiştirilmiştir. Böylece:

$$u(\xi, n) + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (\xi, n) \in \Omega \quad (3.31)$$

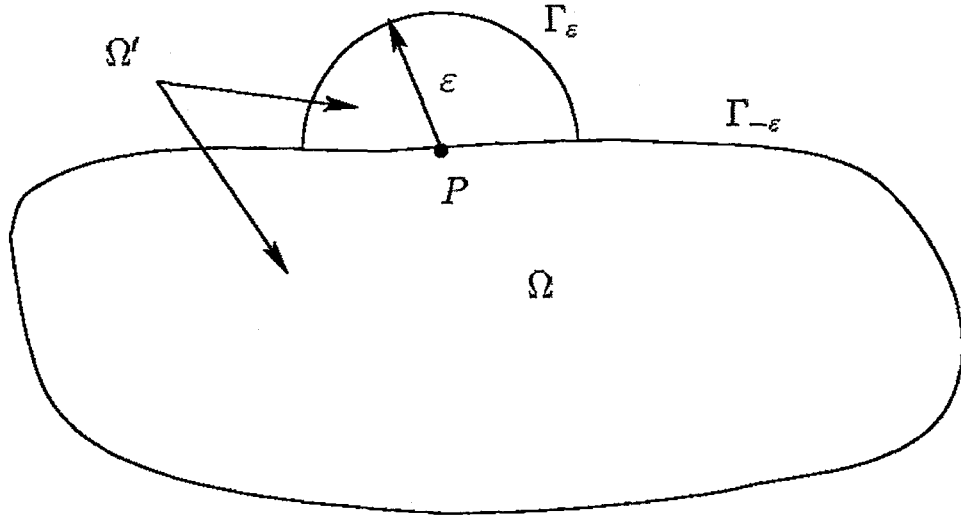
Bu eşitlik sadece sınır integralleri içerir. Bu nedenle, sınır integral eşitliği (boundary integral equation) olarak anılır. Bu eşitlik, çözüm bölgesindeki herhangi bir noktada u 'nun değeri ile çözüm bölgesi sınırında u ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ 'yi ihtiva eden integral ifadesini ilişkilendirir. Daha kullanışlı bir ifade ise, sınırdaki bir noktada u 'nun değeri ile sınır integralini ilişkilendirmektir. denklem (3.31) $(\xi, \eta) \in \Omega$ 'da geçerlidir. Eğer, $(\xi, \eta) \in \Omega$ dışındaysa:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega = - \int_{\Omega} u \delta(\xi - x, \eta - y) d\Omega = 0 \quad (3.32)$$

ifadesi yazılabilir. Burada, ikinci integralin integrandı (ξ, η) dışında bütün noktalarda sıfırdır. Ayrıca bu nokta, integral bölgesinin dışındadır. Özellikle dikkat edilmesi gereken husus ise, tekil (ξ, η) noktasının Ω bölgesinin sınırında olması durumudur. Son olarak elde edilecek ifade, basitçe denklem (3.31)'deki $u(\xi, \eta)$ 'nin $\frac{1}{2}u(\xi, \eta)$ ile yer değiştirilmesi sonucu meydana gelecektir.

$(\xi, \eta) \in \Omega$ noktasına P denilirse; $\int_{\Omega} u \nabla^2 \omega d\Omega$ integralini hesaplayabilmek için Ω

bölgesini, P 'nin etrafında ε yarıçaplı diski içine alacak şekilde genişletmek gerekir (şekil 3.4). Bu genişletilmiş bölgeye Ω' densin. Ayrıca, $\Gamma' = \Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}$ olsun.



Şekil 3.4: Tekil Nokta Sınır Üzerindeyken Genişletilmiş Bölgenin Gösterilmesi

P noktası artık genişletilmiş Ω' bölgesi içerisinde kaldığı için denklem (3.31) şöyle değiştirilebilir:

$$u(P) + \int_{\Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \int_{\Gamma_{-\varepsilon} \cup \Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (3.33)$$

Şimdi bu eşitliği $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ koşulu altında incelemek gerekir. Sırayla dört adet integral değerlendirilecektir.

Öncelikle, w 'nin tanımından:

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi} \log r \right) dT \quad (3.34)$$

Γ_{ε} üzerinde $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \frac{\partial}{\partial r}$ olduğundan:

$$= \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2\pi} \log r \right) dT \quad (3.35)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{u}{r} dT \quad (3.36)$$

Γ_{ε} üzerinde $r = \varepsilon$ olduğundan:

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u dT \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} u(P) \pi \varepsilon \quad (3.37)$$

P noktasında tek türevi olan bir yüzey için ortalama değer teoreminden:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{u(P)}{\varepsilon} \pi \varepsilon \right) = -\frac{u(P)}{2} \quad (3.38)$$

Benzer bir işlemle,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \omega \frac{\partial u}{\partial n} dT = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n}(P) \pi \varepsilon \log \varepsilon \right) = 0 \quad (3.39)$$

elde edilir.

Geriye sadece $\Gamma_{-\varepsilon}$ üzerindeki integrandın incelenmesi kaldı. Bahsi geçen integraller için, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Rightarrow \Gamma_{-\varepsilon} \rightarrow \Gamma$ koşulu altında:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{\Gamma_{-\varepsilon}} (\text{integrand}) dT \right) = \int_{\Gamma} (\text{integrand}) dT \quad (3.40)$$

Böylece:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_{-\varepsilon}} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (3.41)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_{-\varepsilon}} \frac{\partial \omega}{\partial n} u dT \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega}{\partial n} u dT \quad (3.42)$$

Denklem (3.33) ve denklem (3.42) birleştirilirse:

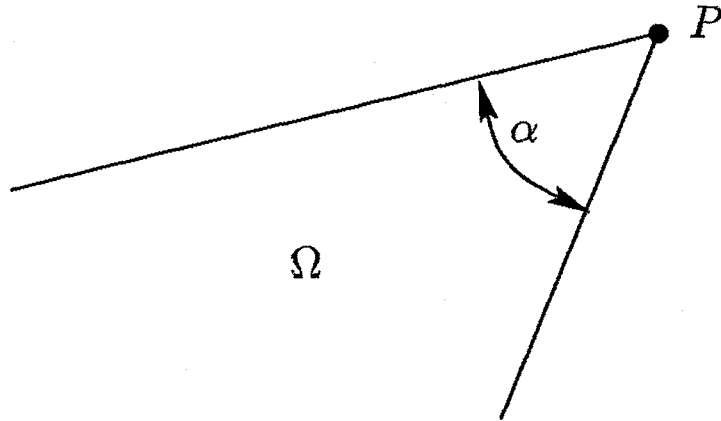
$$u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \frac{1}{2} u(P) + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (3.43)$$

ya da,

$$\frac{1}{2} u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (3.44)$$

elde edilir.

Burada dikkat edilmesi gereken husus P'nin yüzey üzerinde tekil tanjantı olan bir noktada bulunuyor olması gerekliliğidir. P, herhangi bir köşe nokta üzerinde bulunuyorsa, $\frac{1}{2}$ katsayısı $\frac{\alpha}{2\pi}$ ile değiştirilir. α , şekil 3.5'te gösterildiği gibi köşe noktasının iç açısıdır.



Şekil 3.5: P Noktasındaki α Açısı

Sonuç olarak aşağıdaki sınır integral eşitliği elde edilir:

$$c(P)u(P) + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (3.45)$$

Burada, $c(P)$ yukarıda bahsedilen katsayıdır. $c(P)$ katsayısı, $P \in \Omega$ iken 1, $P \in \Gamma$ ve Γ , P noktasında türetilbilir iken $\frac{1}{2}$, $P \in \Gamma$ ve Γ , P noktasında türetilemez iken $\frac{\alpha}{2\pi}$ 'dir.

Denklem (3.45), u 'nun yüzey dağılımlarını, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 'yi ve u 'nun P noktasındaki değerini bir araya getirir. u 'nun yüzey dağılımları ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ biliniyorsa P noktasındaki u değerini hesaplanabilir. Bunun için ilk önce denklem (3.45)'i kullanarak u 'nun yüzey dağılımları ve $\frac{\partial u}{\partial n}$ bulunur. Ardından da gerekiyorsa Ω 'daki herhangi bir nokta için çözüm bulunur.

Denklem (3.45), sonlu elemanlar metodundaki hacim integrallerinin aksine sadece yüzey integralleri içerdiği için, problemin genel boyutu bir düşer. Bu durum hacmin yüzeye oranının fazla olduğu problemlerde tasarruf sağlar. Ayrıca, karmaşık bir şeklin üç boyulu elemanlara ayrılması için harcanan efor yüzeyin elemanlara ayrılmasında harcanan efordan oldukça fazladır.

3.2.3 Sınır integral eşitliği için sayısal çözüm prosedürü

İlk adım Γ yüzeyini elemanlar kümesine ayıştırmaktır.

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j \quad (3.46)$$

Denklem (3.45) kullanılarak:

$$c(P)u(P) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \frac{\partial u}{\partial n} \omega dT \quad (3.47)$$

Standart ana fonksiyonlar her Γ_j elemanı üzerinde uygulanır.

$$u_j = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} u_{j\alpha} \quad \text{ve} \quad q_j \equiv \frac{\partial u_j}{\partial n} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} q_{j\alpha} \quad (3.48)$$

Burada, u_j ve q_j , Γ_j elemanın u ve q değerleri, $u_{j\alpha}$ ve $q_{j\alpha}$ ise Γ_j elemanı üzerindeki α düğüm noktasındaki (nod) u ve q değerleridir. Bu ana fonksiyonlar, standart sonlu elemanlar ana fonksiyonlarından biri olabilir. Problem iki boyutlu olmasına rağmen, tek yapılması gereken fonksiyonları tek boyutlu eleman üzerine uydurmaktır (interpolate). Genelde u ve q için kullanılan ana fonksiyonlar aynı olmak zorunda değildir (tipik olarak da böyledir). Geometri için kullanılan ana fonksiyonlardan bile farklı olabilirler ama aynı alınır (izoparametrik formülasyon).

$$c(P)u(P) + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega}{\partial n} dT = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega dT \quad (3.49)$$

Bu eşitlik Γ üzerindeki herhangi P noktası için geçerlidir. P noktası, i nodunun üzerinde olduğu kabul edilirse:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} dT = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega_i dT \quad (3.50)$$

Burada, ω_i , i nodundaki temel çözümü temsil etmektedir. Denklem (3.50)'yi daha genel bir biçimde yazmak gerekirse:

$$a_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} dT \quad \text{ve} \quad b_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega_i dT \quad (3.51)$$

için;

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} a_{ij}^{\alpha} = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} b_{ij}^{\alpha} \quad (3.52)$$

Denklem (3.51) sadece i nodu için yazılmıştır. L adet nod için adet eşitlik yazabilir, daha sonra bu eşitlikler matris sistemi içerisinde birleştirilebilir.

$$Au = Bq \quad (3.53)$$

Bu eşitliği sonlu elemanlar metodundaki $Ku=f$ eşitliğine benzetmek mümkündür. Burada, u ve q vektörleri u ve q 'nin nodal değerleridir. Dikkat edilmelidir ki, A matrisinin ij sütun ve satırındaki değeri a_{ij}^{α} ile aynı olmayabilir. Aynı durum B matrisi için de geçerlidir.

İyi tanımlanmış bir problem için, her nod için u ve q değerleri belirtilmelidir. Böylece L adet bilinmeyene karşın L adet denklem elde edilmiş olur. Yukarıdaki eşitlik sistemin tekrar düzenlenirse:

$$Cx = f \quad (3.54)$$

Burada, x bilinmeyenler vektörüdür. Bun, lineer denklem çözümleri kullanarak çözülebilir. Diğer taraftan, büyük sistemler için daha özel çözümler gerekmektedir.

A ve B matrisleri (dolayısıyla da C matrisi), sonlu elemanlar metodundaki katılık matrisi K 'nin aksine tamamen doludur. Bununla birlikte genelde de simetrik değildir. A ve B matrislerinin boyutları yüzeydeki nod sayısına bağlıdır (sonlu elemanlarda bölgenin tamamındaki nodlar söz konusuydu). Hangi yöntemin daha kolay ve çabuk çözümü vereceği yüzey – hacim oranına bağlıdır.

x vektörü, u ve q 'nun sınırdaki bilinmeyen değerlerini ihtiva eder. Bunlar bulunduktan sonra sınırdaki bütün u ve q değerleri bulunabilir. Eğer bölgenin sınırında değil de içerisinde bir noktanın çözümü isteniyorsa, denklem (3.55) kullanılabilir.

$$u(P) = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} q_{j\alpha} b_{Pj}^{\alpha} - \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha} u_{j\alpha} a_{Pj}^{\alpha} \quad (3.55)$$

Denklem (3.55)'in sağ tarafı hiçbir bilinmeyeni barındırmamakla birlikte, P noktasıyla temel çözümü kullanarak yüzey integrallerinin çözümünü gerektirmektedir.

3.2.4 Katsayı integrallerinin sayısal hesaplanması

Bu bölümde a_{ij}^{α} ve b_{ij}^{α} integrallerinin iki boyutlu problemler için nasıl hesaplanacağı incelenmiştir. Hatırlamak gerekirse, $\omega_i = -\frac{1}{2\pi} \log r_i$ ve r_i , i noduna olan mesafe olmak üzere:

$$a_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \frac{\partial \omega_i}{\partial n} dT \quad \text{ve} \quad b_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha} \omega_i dT \quad (3.56)$$

Bir lokal ξ koordinatı için:

$$b_{ij}^{\alpha} = \int_0^1 \varphi_{\alpha}(\xi) \omega_i(\xi) |J(\xi)| d\xi \quad (3.57)$$

$$a_{ij}^{\alpha} = \int_{\Gamma_j} \varphi_{\alpha}(\xi) \frac{\partial \omega_i(\xi)}{\partial n} |J(\xi)| d\xi = \int_0^1 \varphi_{\alpha}(\xi) \frac{\partial \omega_i}{\partial r_i}(\xi) \frac{dr_i}{dn} |J(\xi)| d\xi \quad (3.58)$$

kullanılabilir. Ayrıca, Jacobien Matrisi $J(\xi)$:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (3.59)$$

şeklinde bulunabilir. Burada, s ark uzunluğunu, $\frac{dx}{d\xi}$ ve $\frac{dy}{d\xi}$ ise $x(\xi)$ ve $y(\xi)$ interpolasyon ifadelerinin türevleridir.

Temel çözüm, (x_i, y_i) i nodunun koordinatları olmak üzere:

$$\omega_i = -\frac{1}{2\pi} \log(r_i(\xi)) \quad (3.60)$$

$$r_i(\xi) = \sqrt{(x(\xi) - x_i)^2 + (y(\xi) - y_i)^2}$$

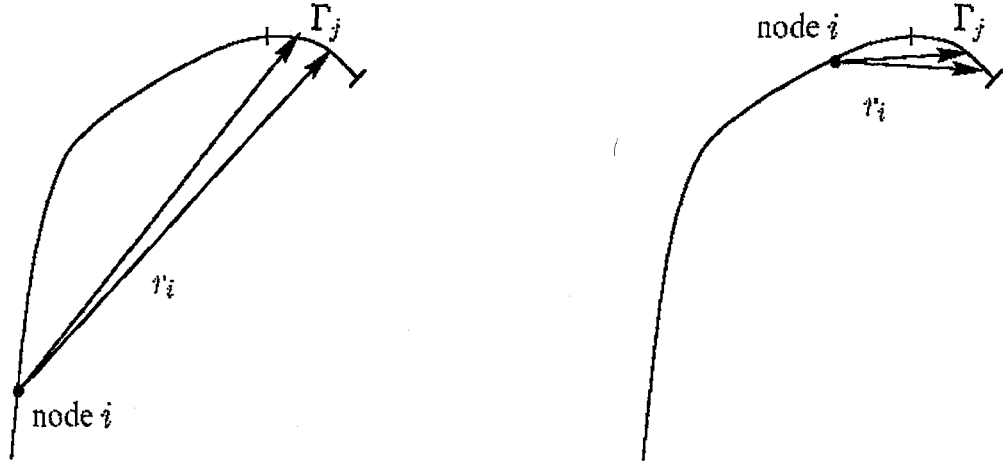
$\frac{dr_i}{dn}$ ifadesini bulmak için $\frac{dr_i}{dn} = \nabla r_i \cdot \hat{n}$ formülasyonu kullanılabilir. Burada $\hat{n}$, dış normal birim vektörünü belirtmektedir. Normal birim vektörünü bulmak için, tanjant vektörünün $(x'(\xi), y'(\xi))$ uygun yönde $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülüp normalize edilmesi gerekir. a_{ij}^α ve b_{ij}^α integrallerinin integrandlarındaki ifadeler, ξ 'nin her değeri için hesaplanabildiğinden, uygun kuadratur planları kullanılarak bunların sayısal hesaplamaları yapılabilir.

Eğer i nodu Γ_j elemanından ayrılmışsa standart Gaussian kuadratürü integralleri çözmek için kullanılabilir. Eğer i nodu Γ_j 'nin içindeyse (ya da yakınsa) r_i 'nin sıfıra, w_i 'nin ise sonsuza gittiği görülür (Şekil 3.6). İntegral hala mevcuttur, fakat, integrand tekillleşmiştir. Bu tür durumlarda özel tedbirler alınması gerekir.

i nodunun Γ_j elemanı içinde olduğu durumlar, integralin büyüklük açısından en büyük olmasına ve diyagonal olarak baskın matris eşitliklerine yol açar. Bu tür durumlarda terimler sonucu büyük şekilde etkileyeceğinden integrallerin yüksek doğrulukta çözülmesi gerekir. Bu, SIEM'in dezavantajlarından biridir.

Bütün integralleri anlaşılır ve basit bir şekilde çözmek için, tekil noktanın mevcut elemana uzaklığına bağlı olarak değişken sayılı kuadratur noktalarının kullanıldığı Gaussian kuadratürü kullanılabilir. Bu yöntem pek verimli ve şık olmamakla birlikte, gerçekleştirilmesi daha kolaydır. i nodunun mevcut eleman içeriğinde olma durumu için kullanılacak diğer bir yöntem ise log tipi fonksiyonları integre etmek için tasarlanmış özel kuadratur planlarıdır. Eğer Laplace eşitlikleriyle uğraşıyorsa bu tercih edilebilir. Diğer taraftan bu log tipi özel planlar genel durumlar için kullanılabilir değildir. En genel form Gaussian kuadratürüdür. Kuadratur noktalarının sayısını artırarak hata miktarını istenen seviyeye çekecek birtakım adaptif

entegrasyon planları da kullanılabilir. Ayrıca elemanı alt elemanlara bölerek integrali bu alt elemanlar üzerinden çözmek de mümkündür.



Şekil 3.6: *i* Düğüm Noktasının Elemana Yaklaşmasıyla r_i 'nin Azalışını Gösteren Resim

Sınır integral eşitliklerini çözmek için birçok yöntem halihazırda mevcuttur. Ayrıca bu konudaki çalışmalar devam etmektedir.

3.2.5 Üç boyutlu sınır elemanlar metodu

Üç boyutlu sınır elemanlar metodu, yukarıda tartışılan iki boyutlu metodla büyük benzerlikler taşır. Üç boyutlu sınır integral eşitliği, iki boyut için verilen denklem (3.45) ile aynıdır. Nümerik çözüm prosedürü, bölüm 3.2.3'te gösterilene paralel ilerlemekle birlikte, a_{ij}^a ve b_{ij}^a , üç boyut için düzenlenmelidir. İki prosedür arasındaki tek reel fark, katsayı integrallerinin integrandlarının nümerik olarak nasıl hesaplanacağıdır. Bu ifadeler şu şekilde gösterilebilir:

$$a_{ij}^a = \int_{\Gamma_j} \varphi_a \frac{\partial \omega_i}{\partial n} d\Gamma \quad (3.61)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_a(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial \omega_i}{\partial r_i}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial r_i}{\partial n} |J(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.62)$$

$$b_{ij}^a = \int_{\Gamma_j} \varphi_a \omega_i d\Gamma \quad (3.63)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2) \omega_i(\xi_1, \xi_2) |J(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.64)$$

Temel çözümler ise:

$$r_i(\xi_1, \xi_2) = \sqrt{(x(\xi_1, \xi_2) - x_i)^2 + (y(\xi_1, \xi_2) - y_i)^2 + (z(\xi_1, \xi_2) - z_i)^2} \quad (3.65)$$

için

$$\omega_i(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4\pi r_i(\xi_1, \xi_2)} \quad (3.66)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, (x_i, y_i, z_i) i nodunun koordinatlarıdır. Daha önce $\frac{dr_i}{dn} = \nabla r_i \cdot \vec{n}$ olduğu belirtilmişti. Üç boyutlu problemlerde $\vec{n}$ dış normal vektörü,

$$t_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial y}{\partial \xi_1}, \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \right) \quad \text{ve} \quad t_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2}, \frac{\partial y}{\partial \xi_2}, \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \right) \quad \text{tanjant vektörlerinin çarpımının}$$

normalize edilmesiyle elde edilir.

$J(\xi_1, \xi_2)$, t_1 ve t_2 iki tanjant vektör olmak üzere, $\|t_1 \times t_2\|$ ifadesi ile verilir. Bu ifade iki boyutlu sonlu elemanlarda farklıdır. Orada iki boyutlu yüzey, iki boyutlu uzay içindeyken, burada iki boyutlu yüzey üç boyutlu uzay içerisinde ifade edilir.

4. SINIR VE SONLU ELEMANLAR METODLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

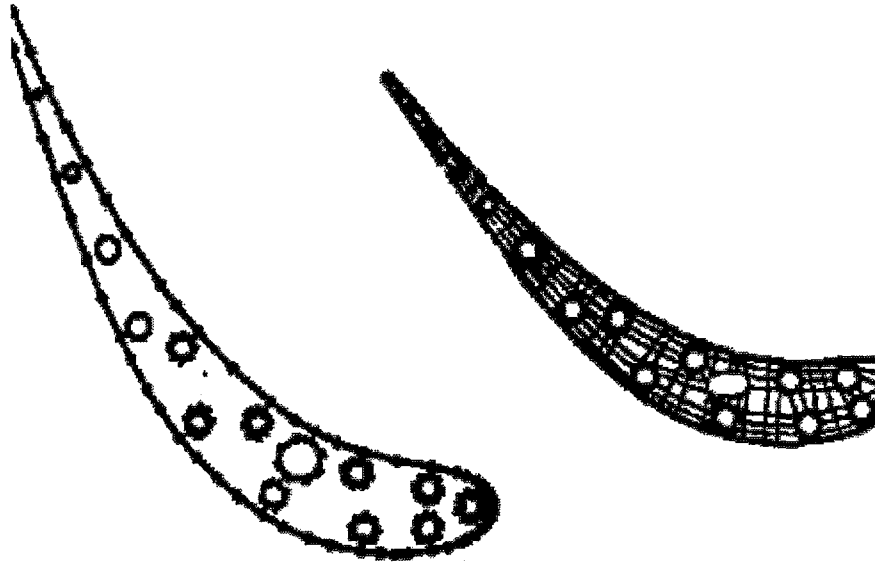
Bu bölümde iki yöntemin birbirine göre belirgin farklılıkları incelenmiş ve karşılaştırılmıştır. Bu farklı özelliklerin bir avantaj ya da dezavantaj olması, yapılan uygulamaya ya da kullanılan yazılıma göre değişiklik gösterebilir. Bu yöntemlerin birbirlerine göre üstünlükleri aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

4.1 Sınır Elemanlar Metodunun Üstünlükleri

4.1.1 Elemanlara ayırma

Daha önce bahsedildiği üzere SIEM, SEM'e göre problem boyutunda eksilme sağlar. Aslında bu, SIEM'in SEM'e göre en büyük üstünlüğüdür. Diğer bir çok özellik, boyut azalmasının sonucu olarak ortaya çıkar.

Boyutta meydana gelen azalma elemanlara ayırma işleminde de kendini gösterir. Üç boyutlu problemlerde SEM için bütün çözüm bölgesi elemanlara ayrılırken, SIEM için sadece yüzeyi elemanlara ayırmak yeterlidir. Aynı şekilde iki boyutlu problemlerde de SEM alan diskritizasyonu yaparken SIEM sınır çizgileri elemanlara ayırır (Şekil 4.1). Bu durum özellikle bilgisayar destekli modelleme(BDM) sistemleriyle entegrasyonu kolaylaştıran bir özelliktir.



Şekil 4.1: Kanat Profilinin SIEM ve SEM ile Ayrıştırılmış Hali

SIEM’de elemanlara ayırma işlemindeki diğer bir üstünlük ise eleman sürekliliğinin gerekmemesidir. SEM’de bütün elemanlar birbirine düğüm noktaları üzerinden bağlanmak zorundadır. Dolayısıyla eleman ağında yapılacak ufak değişiklikler bile tüm elemanların yeniden yapılandırılmasını gerektirebilir. SIEM’de böyle bir zorunluluk yoktur. Yüzey diskritizasyonu gerektiren problemlerde bile süreklilik şart değildir.

Eleman ağı oluşturma kolaylığı, her adımda eleman ağının yenilenmesi gereken iteratif çözümlü problemlerde, oldukça kolaylık ve zaman kazancı sağlamaktadır. Çatlak ilerlemesi ve temas durumu bu tip problemlere örnek olarak gösterilebilir.

4.1.2 Problemi çözme süresi

Yapılan araştırmalar göstermiştir ki; aynı sayıda eleman yoğunluğu için SEM, SIEM’e göre daha az işlem gerektirmektedir. Dolayısıyla hesaplama için harcanan efor daha azdır. Bu durum eleman sayısı artıp problemin boyutu büyüdükçe etkisini azaltır. Hatta yeterince büyük problemler için SIEM daha az işlem sayısına sahip olur. Bettess [22] yaptığı çalışmada, bu durumu bir küp için incelemiştir. Eleman sayısı $n \times n \times n$ olan SEM modeli için gerekli işlem sayısı $(n^7 + 9n^6)/2$ iken, küpün bir yüzeyindeki eleman sayısı $m \times m$ olan SIEM modeli için bu sayı $216m^6/3$ ’tür. Görülmektedir ki $n = m = 135$ eleman yoğunluğu sonucunda gerekli matris işlemi sayısı iki yöntem için eşit olmaktadır. Burada göz önünde bulundurulması gereken bir durum da bu çalışmada SIEM için iç noktalar kullanılmamış olmasıdır. Ayrıca dikkat edilmelidir ki incelenen şekil bir küptür. Her şekil için bu koşullar geçerli değildir. Hacim – yüzey oranı küçük olan problemlerde eleman sayısı fazla olsa bile SIEM’in avantajlı olabileceği söylenemez.

Burada değerlendirilmesi gereken durum matris çözüm süresi değil analiz için harcama toplam süredir. Bir mühendislik analizi sadece denklem çözme işlemi üzerinden değerlendirilemez. Üç temel aşamanın gerçekleştirilmesi gerekir. Bu aşamalar sırasıyla ön işlem, çözümleme ve son işlemdir.

Ön işlem, analiz edilecek problemin tanımlanması, modellenmesi ve elemanlara ayrılması gibi adımları içine alır. Yukarıda da belirtildiği gibi SIEM’in elemanlara ayırma işleminde belirgin bir üstünlüğü vardır. Özellikle analiz boyunca eleman yapısının sürekli değiştiği problemlerde (temas analizi, çatlak ilerlemesi gibi) SEM oldukça hantal kalmaktadır.

Günümüzde bilgisayar teknolojisinin de ilerlemesiyle iki boyutlu analizlerde çözümleme süreleri saniyelerle, üç boyutlu analizlerde ise dakikalarla ölçülmektedir.

Dolayısıyla çözümleme aşamasında SEM SIEM'e göre daha hızlı olsa da bu çok radikal bir üstünlük sayılamaz.

Son işlem bölümünde de problem boyutunun bir derece azalmasından kaynaklı SIEM'in belirgin bir üstünlüğü olduğu söylenebilir. Üç boyutlu elemanların enterpolasyon fonksiyonlarının hesaplanmasının iki boyutluya göre daha uzun süreceği aşikardır.

4.1.3 İstenmeyen bilgi miktarının azalması

Birçok mühendislik probleminde kritik durumlar yüzeylerde meydana gelir. Böyle durumlarda yüzeyle ilgili verilerin elde edilmesi yeterlidir. SEM bütün çözüm bölgesine ait sonuçları hesaplarken SIEM sadece sınır ile ilgilenir. İstenildiği takdirde iç bölgelere ait analiz sonuçları ayrıca hesaplanabilir. Böylece kullanıcı istediği verileri elde etmek için tüm bölgeyi taramak zorunda kalmaz [21].

4.1.4 Aynı seviyede eleman yoğunluğu için daha yaklaşık sonuçlar

Yapılan çalışmalar sonucu görülmektedir ki; aynı seviyede eleman yoğunluğu için SIEM genelde daha yaklaşık sonuçlar vermektedir [23]. Banerjee ve Butterfield [24], kitaplarında bu konuyla ilgili karmaşık geometrili endüstriyel uygulamalar üzerinden karşılaştırmalı hesaplamalar yapmış, bu fikri destekleyen sonuçlar bulmuşlardır. Ayrıca Cruse [25], çatlak etrafındaki gerilme yığılması faktörünü incelediği çalışmasında, SEM'in aynı yaklaşıklık için çok daha fazla eleman yoğunluğu gerektirdiğini belirtmiştir.

Aslında analiz sonuçlarını eleman yoğunluğuna bağlı olarak yorumlamak yetersizdir. İncelenmesi gereken durum, aynı yaklaşıklıkta sonuçlar için gerekli hesaplama eforudur. Daha önce de belirtildiği gibi, özellikle düşük eleman yoğunluğu içeren modellerde, SEM daha az matris işlemi yapmaktadır. Bu nedenle iki durumun birlikte değerlendirilmesi icap eder. Mukherjee ve Morjaria [23] bu konuda bir çalışma yaparak şu sonuçları elde etmişlerdir:

1. Aynı eleman yoğunluğu için SIEM daha yaklaşık sonuçlar vermektedir.
2. SIEM'in sonuç yakınsaklığı, iç noktaların sayısı ile hissedilir bir şekilde değişmemektedir. Diğer taraftan, harcanan efor iç nokta sayısı ile doğru orantılı şekilde artmaktadır.

3. Eğer sınırdaki sonuçlar analiz edilecekse, aynı yaklaşıklıkta sonuç için daha az efor harcanacaktır. Eğer bölgenin iç tarafı incelenecekse, duruma göre SEM daha az eforla aynı seviyede yaklaşıklık yakalayabilir.

Dikkat edilmelidir ki bu çalışmadaki model kare şeklindedir. Yani SIEM için daha uygun bir koşulda yapılmıştır. Diğer taraftan modelde kullanılan eleman yoğunluğu nispeten küçüktür. Bu da SEM için daha uygundur. Burada bulunan sonuçlar bu ve benzeri koşullar için geçerlidir, değişik yapılar için aynı sonuçlara ulaşılacağı düşünülemez.

4.1.5 Sıkıştırılamayan malzemeler için uygulanabilirlik

Yer değiştirme temelli, düzlem gerinme sonlu elemanlar formülasyonu, Poisson oranının 0.5 olduğu durumlarda (sıkıştırılamaz malzeme) başarılı olamamaktadır. Oysa sınır elemanlar formülasyonu bu tip problemlerin altından kolayca kalkabilmektedir. Dolayısıyla lastik – kauçuk türü malzemelerde SIEM, SEM'e göre çok daha uygundur [21].

4.1.6 Sadece sınır koşullarında yaklaşıklık

SEM, diferansiyel denklem için yaklaşıklık yaparken, SIEM sınır koşulları için yapar. Elde edilen sınır integral denklemi için herhangi bir yaklaşıklık yoktur, kesin olarak çözülür. Dolayısıyla iç bölgede sürekli ve yüksek çözünürlüklü sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu durum bir yandan da SIEM için bir dezavantajdır, çünkü, sınır integral denklemin kesin çözümü her koşul için (özellikle lineer olmayan problemlerde) bulunamayabilir.

4.1.7 Sonsuz ve yarı sonsuz bölgeler için uygulanabilirlik

Sınır elemanlar metodunda sonsuz ve yarı sonsuz bölgeler için sınır koşulları tam olarak uygulanabilirken, sonlu elemanlar metodunda bu değerler için yakınsama yapılır.

4.2 Sonlu Elemanlar Metodunun Üstünlükleri

4.2.1 Geniş uygulanabilirlik koşulları

SEM, lineer olsun ya da olmasın, hemen her türlü problemde kullanılabilir. Hatta birçok lineer olmayan problem tipi için vazgeçilmezdir. Diğer taraftan SIEM, lineer olmayan problemler için genelde uygun olmamakla birlikte lineer problemlerin de tamamına çözüm bulamaz. Bunun sebebi, sınır integral denklemi için bir temel

çözümün bulunma gerekliliğidir. Temel çözümü bilinmeyen birçok lineer problem vardır. SIEM bazı koşullar için üstün olsa da genelde uygulanabilirliği sınırlıdır.

4.2.2 Seyrek ve simetrik matris yapısı

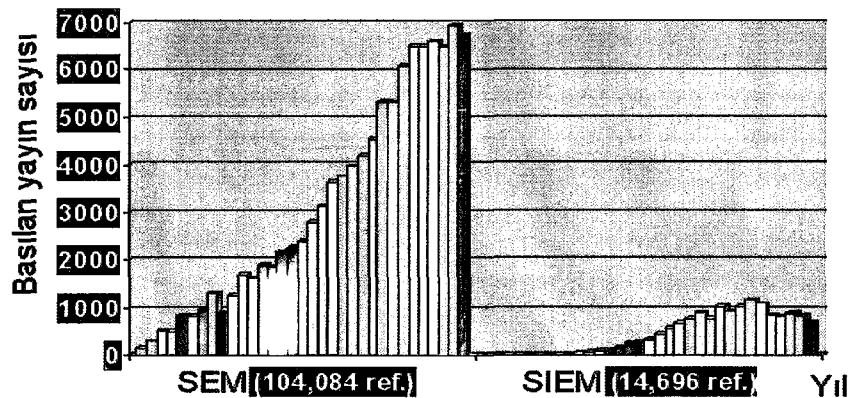
SEM'in çözüm matrisi büyük olmasına rağmen seyrek ve simetrik bir yapıya sahiptir. Değerler genellikle diyagonal üzerindedir. Değerlerin diyagonalden sapma miktarına bant genişliği denir. Bant genişliği dışında kalan yerler sıfırdır. Sonlu eleman yazılımları sadece bant içerisinde kalan bölgedeki değerleri depolayarak hafızadan tasarruf ederler. Simetrik matrisler için hafızada saklanan bölge yarı bant genişliği kadardır. İyi yapılandırılmış bir eleman ağı için bant genişliği küçük olur. Buna karşılık SIEM'in çözüm matrisi tamamen doludur. Bu da daha fazla hafıza ihtiyacı yani daha fazla hesaplama gücü gerektirir.

4.2.3 Kabuk analizi

SEM şüphesiz kabuk analizi problemlerinde SIEM'e göre daha iyi sonuçlar vermektedir. Bunun temel sebebi, SIEM'in kabuk analizi için uygun olmayışındır. Bu tip problemler öncelikle yüzey – hacim oranı yüksek problemlerdir. Yani SIEM modelleme özelliğini kaybeder. Diğer bir sorun ise, sınır eleman düğüm noktalarının kabuk kalınlığının her iki tarafından birbirlerine çok yakın olmalarıdır. Bu durum integrasyonda hatalı sonuçlara neden olabilmektedir.

4.2.4 Kolay matematik

Bugün SEM'in SIEM'den daha popüler olmasının en büyük nedeni, SEM'in matematiksel teorisinin mühendisler tarafından daha anlaşılır bulunmasıdır. SIEM'in teorisi daha zordur ama beraberinde getirdiği birçok avantaj, teorisindeki karmaşık matematiksel ifadelerden kaynaklanmaktadır.



Şekil 4.2: 1965 – 1999 Arası Yayınlanan Çalışma Sayıları

4.2.5 Bilimsel kaynak çokluğu

Şekil 4.2’de 1965 – 1999 seneleri arasında yayınlanmış çalışma sayılarının karşılaştırılması gösterilmiştir. Buna göre, SEM ile ilgili 7 kat daha fazla çalışma yapıldığı görülmektedir. Bu, bir SEM kullanıcısı için ortalama 7 kat fazla kaynak demektir.

4.2.6 Yazılım çokluğu

Günümüzde, hem modelleme programlarına entegre hem de tek başına çok sayıda sonlu elemanlar yazılımı mevcuttur. Ansys, Marc, Abaqus ve Hypermesh, önde gelen sonlu elemanlar yazılımlarıdır. I-DEAS, SolidWORKS, CATIA gibi modelleme programları kendi içlerinde sonlu elemanlar analizi modülü bulundurmaktadırlar. Ayrıca, probleme özel yazılım bulma imkanı çok daha fazladır. Örneğin Superform, plastik şekil verme işlemlerinin analizi için çok kullanılan yazılımlardan biridir. Diğer taraftan piyasadaki sınır elemanlar yazılımı sayısı bir elin parmaklarını geçmemektedir. Beasy ve BEST, genel amaçlı sınır eleman yazılımlarıdır.

5. BİRLEŞTİRİLMİŞ SINIR ELEMAN VE SONLU ELEMAN METODU

5.1. Giriş

Önceki bölümlerde SEM ve SIEM incelenmiş, birbirlerine göre avantajları sıralanmıştı. Şüphesiz, iki yöntemin birbirlerine tartışmasız üstünlük sağladığı koşullar mevcuttur. Bunun yanında öyle durumlar vardır ki en iyi çözümü bulabilmek için iki yöntemin birleştirilmesi gerekir.

Birleştirilmiş analizin sık olarak kullanıldığı temelde üç adet koşul mevcuttur [7]:

- a) Yerel nonlineerlik: Bu tip problemlerde nonlineerlik, problem bölgesinin ufak bir bölümünde yoğunlaşmıştır. Geri kalan bölgeler için lineer yaklaşım yapılabilir.
- b) Şekil optimizasyonu: Bölgenin sadece bir kısmı optimize edilecekse, sadece o bölgede şekil değişimine izin verilir.
- c) Boyut değişimi ya da sonsuz/yarı sonsuz bölge: Bazı durumlarda çözümün kolaylaştırılması için problem içinde bazı bölgelerde boyut küçültmesi ya da sonsuz/yarı sonsuz bölge yaklaşımı yapılabilir.

Birleştirme işlemi için üç adet teknik geliştirilmiştir:

- i) SEM tabanlı yaklaşım: Bu yaklaşımda SIEM bölgesi eşdeğer sonlu süper elemana dönüştürülerek sonlu elemanlar matrisine entegre edilir.
- ii) SIEM tabanlı yaklaşım: Burada bir önceki yaklaşımın tam tersi geçerlidir. Yani SEM bölgesi eşdeğer sınır süper elemanına dönüştürülerek sınır elemanlar matrisine entegre edilir.
- iii) İteratif bölge ayrıştırma tekniği: Bu yöntemde SEM ve SIEM bölgeleri iteratif bir sıra halinde birbirinden ayrı olarak çözülür. İki bölge için de sınır koşulları diğer bölgenin çözümünden elde edilir.

Bu bölümde bu üç teknik ayrıntılı olarak incelenmiş, kuvvetli ve zayıf özellikleri değerlendirilmiştir.

5.2 SEM Tabanlı Yaklaşım

Standart yaklaşım, SIEM bölgesinden gelen katkılar ile sonlu elemanlar katılık matrisinin düzenlenmesidir. Bu fikir, düşünce olarak basit gibi görünse de sayısal uygulamada karışık durumlar mevcuttur. Bu zorluğun kaynağı, sınır eleman ve sonlu eleman matrislerinin birbirleriyle uyum sağlamayan yapısıdır. Sonlu elemanlar matrisi seyrek ve çoğu zaman için simetrik iken, sınır elemanlar matrisi, bazı özel teknikler uygulanmadığı takdirde, kalabalık ve asimetriktir.

Birleştirme işlemi adına yapılan ilk araştırmalarda, sınır elemanlar denklem sistemiyle orijinal sistemin transpoze matrisinin çarpımı uygulanmıştır. Bu teknik, fazla beceri gerektirmemekle birlikte zaman alıcıdır. Ayrıca, ortaya çıkan simetrik denklem sistemi 'hasarlı'dır [7]. Bu sebepten dolayı artık kullanılmamaktadır.

Simetrik denklem elde etmek için kullanılan diğer bir yöntem ise, varyasyonel prensibinin sınır ve hacim integrallerinin toplamı olarak yazılmasıdır. Standart minimizasyon kullanılarak sınır eleman bölgesi süper sonlu eleman olarak tanımlanabilir. Bu prosedür simetrik denklem sistemi oluşturur fakat, sınırdaki çekmelerin dağılımında ek sınırlamalar getirir.

Sınır elemanlar matrisine simetri kazandırmanın doğal bir yolu, Galerkin ifadesinin kullanılmasıdır. Sistemin tamamen simetri kazanabilmesi için, iki integral ifadesinden biri seçilmelidir: standart olanı veya onun türevi. Bunlardan hangisinin seçileceği sınır koşullarına bağlıdır. Simetrik matrisin elde edilmesi iki boyutu veya düz elemanlar için kolay olsa da üç boyutlu veya eğri elemanlar için zordur [5]. Bu konuda yakın zamanda yapılmış çalışmalar mevcuttur [4,6,18].

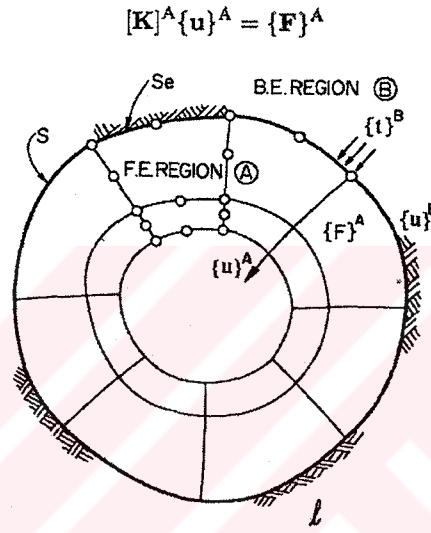
SEM tabanlı yaklaşım üç dezavantaja sahiptir. Bunardan ilki, matriste yapılacak modifikasyonlar için SEM ve SIEM kaynak kodlarına ulaşma gerekliliğidir. Yani mevcut ticari SEM ve SIEM yazılımları kullanılarak çözüme ulaşılamaz. Diğer bir dezavantaj ise, elde edilen sonlu eleman matrisinin çok büyümesidir. Bunun sebebi sınır eleman bölgesinden oluşturulan süper elemanın dolu matris yapısında olması ve bilinmeyenlerinin sayısının ara yüzdeki yerdeğiştirmelere eşit olmasıdır. Bu yöntem için üçüncü zorluk ise sınır eleman etki matrisindeki çekmelerdir. Sonlu eleman denklemlerindeki tek bilinmeyen yerdeğiştirme olduğu için ek olarak gelen bilinmeyenlerin kondensasyonu gerekmektedir.

5.2.1 SEM tabanlı yaklaşımın teorisi

Sonlu elemanlarda, elde edilen eşzamanlı denklem takımı, düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmeler ile kuvvetler arasında ilişki kurar. Diğerk taraftan, sınır elemanlarda bu ilişki yerdeğiştirmeler ile çekmeler arasındadır.

şekil 5.1’de ortak bir ara yüz ile bağlanmış iki bölge görölmektedir. Burada A bölgesi sonlu elemanlar bölgesini, B bölgesi ise sınır elemanlar bölgesini göstermektedir. Sonlu elemanlar bölgesi için şu denklem sistemi elde edilir:

$$[K]^A \{u\}^A = \{F\}^A \quad (5.1)$$



şekil 5.1: Bir Geomekanik Problemi için Sonlu ve Sınır Eleman Bölgeleri [2]

Burada $\{u\}^A$ ve $\{F\}^A$, A bölgesindeki düğüm noktaları için sırasıyla yerdeğiştirme ve kuvvet vektörleri olup, $[K]^A$ katılık matrisidir. Sınır elemanlar bölgesinde ise şu denklem sistemleri yazılabilir:

$$[\Delta T]^B \{u\}^B = [\Delta U]^B \{t\}^B \quad (5.2)$$

Burada $\{u\}^B$ ve $\{t\}^B$, B bölgesinin ara yüzündeki yerdeğiştirme ve çekmeleri, $[\Delta T]^B$ ve $[\Delta U]^B$ ise nodal düzenleme ile elde edilmiş katsayı matrislerini göstermektedir. Buradaki yaklaşım, denklem (5.2)’deki ifadeyi denklem (5.1) formunda ifade etmektir. Bunun için çekmelerin nodal kuvvetlere çevrilmesi icap eder.

Nodal sınır çekme değerleri ile nodal nokta kuvvetleri arasındaki ilişki virtüel iş prensibi ile kurulabilir. e elemanın l düğüm noktasındaki kuvvet, F_l^e , t çekmesine şu şekilde bağlanabilir:

$$F_l^e = \int_{S_e} N_l t dS \quad (5.3)$$

Bu denklemdeki integral, S_e elemanın uzunluğu ya da alanı boyunca alınır. J düğüm noktasındaki çekmelerin enterpolasyonunu kullanarak:

$$t = \sum_{j=1}^J N_j t_j^e \quad (5.4)$$

denklemini elde edilir. t_j^e , e elemanın düğüm noktalarındaki çekme olmak üzere, denklem (5.4), denklem (5.3) ile birleştirirsek şu ifade elde edilir:

$$F_l^e \sum_{j=1}^J \left(\int N_l N_j dS \right) t_j^e \quad (5.5)$$

t^e ile F^e arasındaki ilişkiyi matris formunda yazılırsa:

$$F^e = M^e t^e \quad (5.6)$$

Burada:

$$M^e = \begin{pmatrix} N_{11}^e I & \dots & N_{1J}^e I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{J1}^e I & \dots & N_{JJ}^e I \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Yukarıdaki ifadede I , problemin iki ya da üç boyutlu olmasına göre, 2x2 ya da 3x3 birim matrisi ifade eder. Ayrıca:

$$N_{ij}^e I = \int_{S_e} N_i N_j dS \quad (5.8)$$

Denklem (5.2), ara yüz düğüm noktalarındaki çekmeler için çözülebilir:

$$\{t\}^B = Q \{u\}^B \quad (5.9)$$

Burada Q , birim yerdeğiştirmelerden kaynaklı çözüm matrisidir.

$$Q = [\Delta U]^{-1} [\Delta T] \quad (5.10)$$

Ara yüzün yumuşak hatlı olduğunu kabul ederek denklem (5.6)'dan, nodal çekme değerleri, küresel nodal nokta kuvvetlerine dönüştürülebilir.

$$\{F\}^B = M \{t\}^B = MQ \{u\}^B \quad (5.11)$$

Burada M, M^e eleman katkılarıyla yapılandırılmış, diyagonal olarak baskın bir matristir. Buna göre sınır eleman bölgesinin katılık matrisi şu denklem ile verilebilir:

$$[K]^B = MQ \quad (5.12)$$

Bu katılık matrisi, genelde sonlu elemanlardaki kadar simetrik değildir, çünkü, $N_{ij} = N_{ji}$ için M simetrik olduğu halde Q birçok durumda simetrik değildir. Görülecektir ki, sınır eleman yoğunluğu arttıkça katsayı matrisi daha simetrik hale gelecektir.

Minimum potansiyel enerji prensibi, katılık matrisinin hesaplanması için alternatif bir yöntem olabilir. Şekil 5.1'deki sınır eleman bölgesi, ara yüz üzerinden sonlu eleman bölgesine etkiyen $\hat{t}$ çekmesi ile değiştirilirse, sonlu eleman bölgesinin potansiyel enerjisi:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dV - \frac{1}{2} \int_S u^T \hat{t} dS \quad (5.13)$$

ifadesiyle verilebilir. Burada ikinci integral sadece ara yüz üzerinden alınır.

Sonlu eleman bölgesi için standart diskritizasyon prosedürü kullanılarak, birinci integral ve nodal nokta kuvvetlerinin enerjisi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{1}{2} \left(\{u\}^A \right)^T [K]^A \{u\}^A - \left(\{u\}^A \right)^T \{F\}^A \quad (5.14)$$

İkinci integral de ayrıştırılırsa:

$$\frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \int_{S_e} (N^e u^e)^T N^e \hat{t}^e dS \quad (5.15)$$

Burada E sınırdaki eleman sayısı olup,

$$N^e = [N_1 \dots N_j] \quad (5.16)$$

Denklem (5.15) $\{u\}^B$ ve $\{\hat{t}\}$ için yeniden düzenlenirse:

$$\frac{1}{2}(\{u\}^B)^T M \{\hat{t}\} \quad (5.17)$$

Burada M, denklem (5.11)'dekiyle aynıdır.

$\{\hat{t}\}$ global çekme vektörü,

$$\{\hat{t}\} = -\{t\}^B = -Q\{u\}^B \quad (5.18)$$

ifadesiyle verilebilir. Buna göre denklem (5.13)'ün ayrıştırılmış hali:

$$\pi = \frac{1}{2}(\{u\}^A)^T [K]^A \{u\}^A - (\{u\}^A)^T \{F\}^A + \frac{1}{2}(\{u\}^B)^T MQ\{u\}^B \quad (5.19)$$

Bütün yerdeğştirmeler için potansiyel enerjiyi minimize edersek:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{u\}} = [K]^A \{u\}^A - \{F\}^A + [K]^B \{u\}^B = 0 \quad (5.20)$$

Burada,

$$[K]^B = \frac{1}{2}[(MQ)^T + MQ] \quad (5.21)$$

olup, ara yüzdeki katılığı göstermektedir.

Bir sonraki adımda $\{u\}^A$ yerdeğştirme vektörü, $\{u\}^F$ ve $\{u\}^I$ vektörlerine bölünüp denklem (5.20) tekrar düzenlenirse:

$$[K]^F \{u\}^F + [K]^I \{u\}^I - \{F\}^A + [K]^B \{u\}^B = 0 \quad (5.22)$$

Burada $[K]^F$ ve $[K]^I$, sonlu eleman bölgesinin içinde ve ara yüz üzerindeki katılık katsayılarını içeren alt matrislerdir. Ara yüzdeki uygunluk koşulu olarak:

$$\{u\}^I = \{u\}^B \quad (5.23)$$

yazılırsa şu denklem elde edilir:

$$[[K]^F, [K]^I + [K]^B] \begin{Bmatrix} \{u\}^F \\ \{u\}^I \end{Bmatrix} - \{F\}^A = 0 \quad (5.24)$$

$[K]^I + [K]^B$ toplamı, sınır eleman bölgesinin normal yoldan sonlu eleman bölgesine süper sonlu eleman olarak birleştirilebileceğini göstermektedir.

$[K]^B$ katılık matrisinin bu şekilde türetilmesi tamamen doğru değildir. Çünkü, denklem (5.15)'te hem yerdeğştirmeler hem de çekmeler için bir dağılım farz edilmiştir. Bu şekilde bir dağılım için, diskritizasyon işlemi nedeniyle ek sınırlamalar gelir. Yine bir önceki yöntemdeki gibi sınır eleman yoğunluğu arttırıldığı takdirde oluşan hata azalacaktır. Ayrıca bir önceki yöntemde $[\Delta U]$ matrisinin (denklem (5.10)) tersinin alınması gerekirken burada gerekmemektedir.

5.3 SIEM Tabanlı Yaklaşım

Birleştirme işlemine alternatif bir yaklaşım da, SEM bölgesini SIEM alt bölgesine çevirip süper sınır eleman olarak SIEM bölgesine eklemektir. Ancak bu yöntem pratikte pek kullanılmaz. Bilindiği üzere SEM – SIEM birleştirmesi daha çok küçük lineer olmayan kısımların SEM tarafından kolayca halledilebilmesi için kullanılır. Doğal olarak SEM bölgesinden gelen matrisler de lineer olmayan olacaktır. SIEM çözücülerinin daha çok lineer matris çözümleri için tasarlandığı düşünülürse, bu yaklaşım ile lineer olmayan içeren problemlerin çözülemeyeceği anlaşılmaktadır. Buna ek olarak SEM denklemlerini SIEM alt bölgesi olarak tanımlamak için ara yüzde çekmelerin oluşturulması gerekmektedir. Bu serbestlik derecelerini oluşturmak için sayısal türev alma işlemleri gerekmektedir. Bunun sonucu olarak büyük tepe kesme (truncation) hataları oluşabilir [7].

5.3.1 SIEM tabanlı yaklaşımın teorisi

Şekil 5.1'deki problem tekrar ele alınırsa, ara yüzdeki bilinmeyenler bu sefer yerdeğştirmeler ile çekmeler olacaktır. Denklem (5.2)'teki bilinmeyenler denklemin sol tarafına atılırsa:

$$\left[[\Delta T]^B, -[\Delta U]^B \right] \begin{Bmatrix} \{u\}^B \\ \{t\}^B \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.25)$$

Çok sayıda bilinmeyen olmasına rağmen yeterli sayıda denklem bulunmamaktadır. Ek denklemler sonlu elemanlar bölgesinden gelir. Sonlu eleman bölgesinde $[K]^4$ parçalanırsa, denklem (5.1) için:

$$\begin{pmatrix} [K]^{II} & [K]^{IF} \\ [K]^{FI} & [K]^{FF} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^I \\ \{u\}^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\}^I \\ \{F\}^F \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Burada I ve F, sırasıyla ara yüzdeki ve iç sonlu eleman bölgesindeki düğüm noktalarını göstermektedir.

Ara yüzdeki kuvvetler $\{F\}^I$ ve çekmeler $\{t\}^I$ arasındaki ilişki kullanılarak şu ifade elde edilir:

$$\begin{pmatrix} [K]^{II} & [K]^{IF} \\ [K]^{FI} & [K]^{FF} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^I \\ \{u\}^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M\{t\}^I \\ \{F\}^F \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

Ara yüzdeki uygunluk şartları yazılırsa:

$$\{u\}^I = \{u\}^B \quad (5.28)$$

$$\{t\}^I = -\{t\}^B \quad (5.29)$$

Denklem (5.25) ve denklem (5.27)'yi birlikte kullanarak aşağıdaki denklem takımı elde edilir:

$$\begin{pmatrix} [\Delta T]^B & [\Delta U]^B & 0 \\ [K]^{II} & M & [K]^{IF} \\ [K]^{FI} & 0 & [K]^{FF} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}^B \\ \{t\}^B \\ \{u\}^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \{F\}^F \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

Bu denklem artık tüm bilinmeyenler için çözülebilir durumdadır.

5.4 İteratif Bölge Ayrıştırma Tekniği

Yukarıda belirtilen yaklaşımların ortak sakıncası SEM ve SIEM kodlarında bulunan matris ifadelerine ulaşabilme zorunluluğudur. Bu zorunluluk, kullanıcının birleştirme işlemi için ticari SEM ve SIEM yazılımları kullanmasını engeller. Bölge ayrıştırma tekniği, iteratif bir prosedürle bu sakıncanın üstesinden gelmektedir. Bu yaklaşımda SEM ve SIEM matrisleriyle ilgili herhangi bir bilgi gerekmemektedir. Yani matris işlemleri, simetrikleştirme ve sayısal türev alma işlemleri yapılmaz. Bununla birlikte yeni matris oluşturulmadığı için veri depolaması konusunda optimal bir çözümdür.

Bu yaklaşımın en büyük sakıncası her iterasyonda iki bölgedeki denklemlerin tekrar tekrar çözülmesidir. Bu nedenle çözüm süresi diğerlerine nazaran uzundur.

5.4.1 İteratif bölge ayrıştırma tekniğinin teorisi

Bölge ayrıştırma tekniğine ilişkin literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur [8-11,19]. Burada bu teknik Feng ve Owen'in çalışmasındaki şekliyle verilmiştir [11].

Şekil 5.2’de orijinal problem sonlu eleman ve sınır eleman bölgelerine ayrılmıştır. Bu bölgeler için sırasıyla şu eşitlikler yazılabilir:

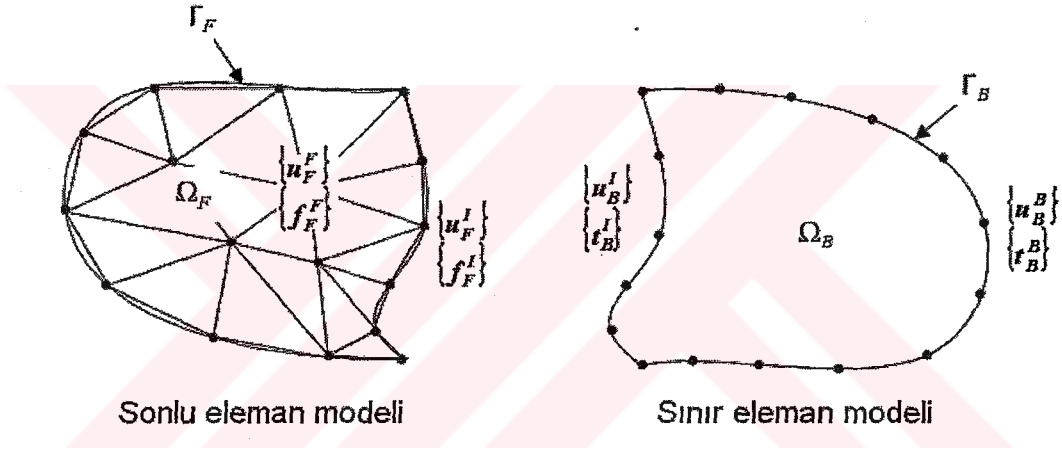
$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_F^F \\ u_F^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_F^F \\ f_F^I \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_B^B \\ u_B^I \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} t_B^B \\ t_B^I \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Ara yüzde için uygunluk denklemleri:

$$\{u_B^I\} = \{u_F^I\} \quad (5.33)$$

$$\{f_F^I\} + M \{t_B^I\} \quad (5.34)$$



Şekil 5.2: Bölge Ayrıştırma Tekniği

İteratif birleştirme metodu için şu sıra takip edilebilir [19]:

1. Problem bölgesi iki alt bölgeye ayrılarak sonlu eleman ve sınır eleman bölgeleri ilgili metotlarla modellenir.
2. Ara yüzdeki yerdeğiştirme için başlangıç değeri verilir (mesela $\{u_B^I\} = 0$).
3. Sınır eleman alt bölgesi için denklem (5.32)’den ara yüzdeki $\{t_B^I\}$ değerleri elde edilir.
4. Sınır eleman ara yüzü için nodal kuvvetler denklem (5.34)’ten elde edilir.
5. Bulunan kuvvetlere göre denklem (5.31)’den ara yüzdeki $\{u_F^I\}$ değerleri bulunur.

6. Bu aşamada yakınsama testine geçilir. Yakınsama testi için aşağıdaki ifade kullanılabilir:

$$\frac{\|\{u_{B,n+1}^I\} - \{u_{B,n}^I\}\|}{\|\{u_{B,n+1}^I\}\|} < \varepsilon_c \quad (5.35)$$

Burada ε_c , önceden tanımlanmış yakınsama toleransıdır. Eğer yakınsama sağlanmışsa bu adımda durulur. Eğer sayılanmamışsa bir sonraki iterasyon için $\{u_{B,n+1}^I\} = (1 - \alpha_r)\{u_{B,n}^I\} + \alpha_r\{u_{F,n}^I\}$ işlemi yapılır. Burada α_r , yakınsamayı hızlandırmak için kullanılan gevşeme parametresidir.

7. Yakınsama sağlanıncaya kadar 3. adımdan 6. adıma kadar olan kısım tekrar edilir.



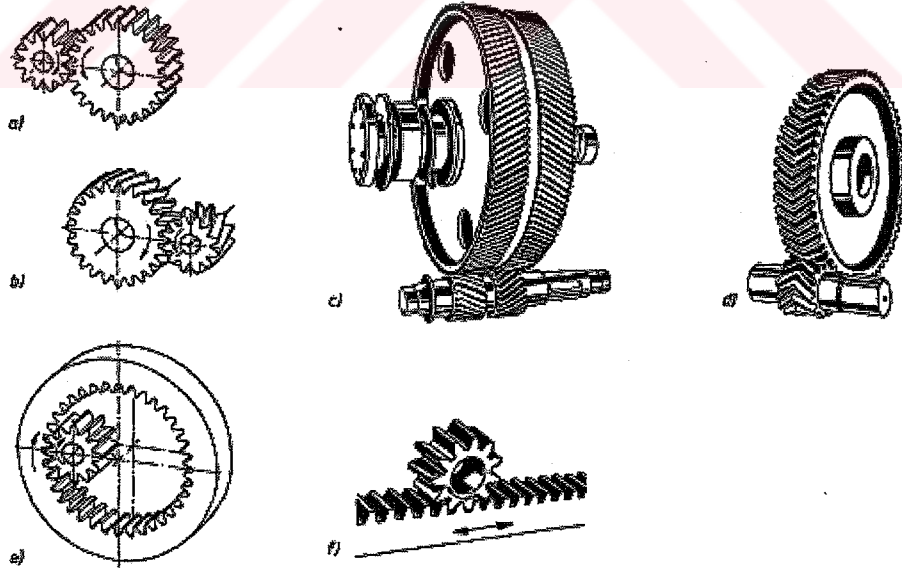
6. DIŞLİ ÇARKLAR

6.1 Genel İfadeler ve Sınıflandırma

Dişli çarklar; aralarında bir kayma oluşmadan, iki mil arasında kuvvet ve hareket ileten elemanlardır. Güç iletme bakımından, mekanizmanın bir döndüren ve bir veya birkaç döndürülen elemanı vardır. Genellikle mekanizmanın küçük dişlisine pinyon, diğerine çark denir. Millerin konumuna göre dişli çarklar ve çark mekanizmaları şu şekilde sınıflandırılabilir:

6.1.1 Alın dişli çarklar

Eksenleri aynı düzlemde paralel olan iki mil arasında güç ve devir ileten çarklara silindirik veya alın dişli çarklar denir. Dişlerin yönü çark eksenine göre paralel ise düz silindirik, eğik ise helisel silindirik veya çift helisel silindirik dişli çark adını alırlar. Ayrıca çarklar, birbirinin dışında veya içinde yuvarlamalarına göre dış veya iç silindirik dişli çarklar şeklinde adlandırılırlar. İç dişli çarklar düz, helisel ve çift helisel olabilirler. Şekil 6.1’de alın dişli çarklara ilişkin resimler görülmektedir.

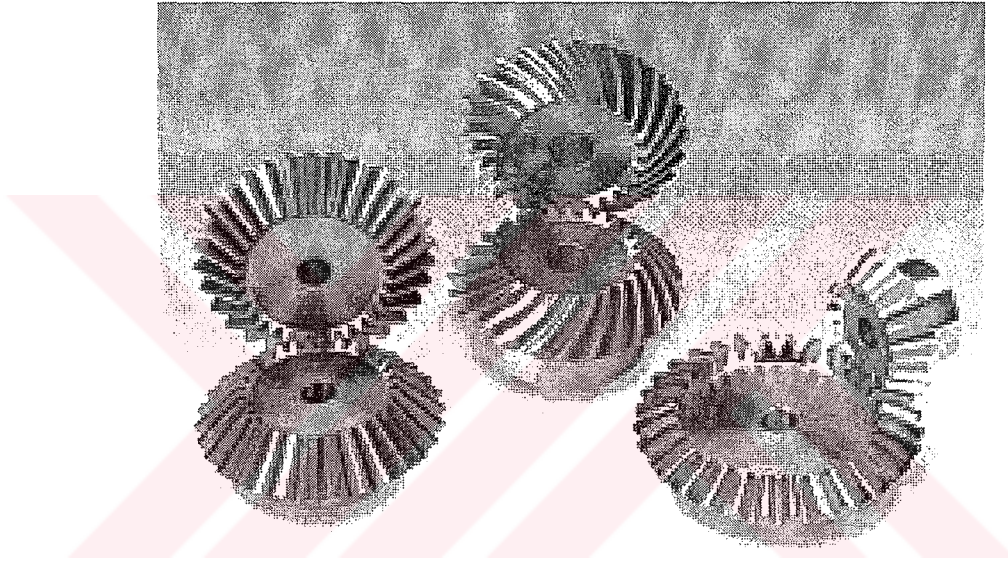


Şekil 6.1: Alın Dişliler: a) Düz Dişli b) Helisel Dişli c) Çift Helis Dişli
d) Herringbone Dişli e) İç Dişli f) Kremayer Dişli

Herhangi bir dişli çarkın yarıçapı sonsuz yapıldığında kremayer denilen çubuk şeklinde bir dişli eleman elde edilir. Bu elemanın düz veya helisel silindirik dişli çarkla çalışmasına göre düz kremayer mekanizması veya helisel kremayer mekanizması meydana gelir. En önemli kullanış yeri kesici bıçak olarak dişli imalatındadır. Ayrıca dik yamaçlara tırmanan trenlerde, bazı tip asansörlerde; dişli tekerleklere şekilsel bağlantılı bir ray (kılavuz) olarak kullanılırlar.

6.1.2 Konik dişli çarklar

Eksenleri aynı düzlemde bulunan fakat kesişen iki mil arasında güç ve devir ileten çarklara konik dişli çarklar denir (Şekil 6.2). Konik dişliler, dişlerin uzunluk yönündeki durumlarına göre düz veya helisel olabilir.



Şekil 6.2: Düz ve Helisel Konik Dişliler

6.1.3 Spiral dişli çarklar

Eksenleri aynı düzlemde olmayan miller arasında güç ve devir ileten dişli çarklara spiral dişli çarklar denir (Şekil 6.3). Bu dişlilerin pratikte çok kullanılan özel bir hali, uzayda eksenleri birbirine dik olan sonsuz vida mekanizmasıdır. Bu mekanizmanın silindirik ve globoid tipleri vardır. Ayrıca spiral dişli çark grubuna dahil olmayan fakat eksenleri aynı düzlemde olmayan ve kesişmeyen hipoid konik dişliler de vardır.

Diş başı dairesi çapı	: $d_k = d_0 + 2.m$
Taban dairesi çapı	: $d_f = d_0 - 2.h_f$
Diş kalınlığı	: $s_0 = \frac{t_0}{2}$
Diş aralığı	: $e_0 = \frac{t_0}{2}$
Eksenler arası uzaklık	: $a_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.m$
Müşterek diş yüksekliği	: $h_g = 2.m$
Diş başı yüksekliği	: $h_k = m$
Taban yüksekliği	: $h_f = m + S_k \approx 1,2.m$
Diş başı boşluğu	: $S_k \approx 0,2.m$
Toplam diş yüksekliği	: $h_z = 2.m + S_k \approx 2,2.m$
Kavrama açısı	: $\alpha_0 = 20^\circ$
Çevrim oranı	: $i = z_2/z_1$
Diş genişliği	: b
Kavrama taksimatı	: $t_e = t_0 \cdot \cos \alpha_0$
Kavrama oranı	: $\varepsilon = \overline{E_1 E_2} / t_e$

6.3 Dişli Çark Malzemeleri

Dişli çarkların mukavemet ve yüzey basıncı bakımından yük taşıma kabiliyetlerinin geniş ölçüde etkileyen önemli bir faktör malzemedir. Genellikle güç ileten dişliler çelikten; hassas cihaz alanında olduğu gibi yalnız devir ileten dişli çarklar bronz, naylon, teflon ve sinterlenmiş malzemelerden yapılır. Önemsiz ve çok düşük hızlarda çalışan dişli çarklar dökme demirden de imal edilebilir.

Çelikler, birim hacme göre büyük yük taşıma kabiliyetine ve birim ağırlığa göre nispeten düşük maliyete sahip olduklarından, dişli çarkların imalinde en çok kullanılan malzemelerdir. Pratikte karbonlu ve alaşımlı çelikler olmak üzere birçok

çelik çeşidi kullanılmaktadır. Bunların bazıları DIN standardına göre tablo 6.1’de verilmiştir. Son zamanlarda dişli çarkların imalatında naylon (polyamid 6) ve teflon gibi plastik malzemeler kullanılmaktadır. Büyük bir sönümleme kabiliyetine sahip olan bu malzemeler sessiz çalışma istenilen yerlerde kullanılmaktadır.

Tablo 6.1: Dişli Çark Malzemelerinin Mekanik Özellikleri

Malzeme		σ_K [N/mm ²]	Sertlik HB [N/mm ²]		σ_{GD} [N/mm ²]	PGD [N/mm ²]
Grubu	Simgesi		Çekirdek	Yanak		
Genel İmalat Çelikleri	St 50	500... 600	1500		190	340
	St 60	600...700	1800		210 (200)	400
	St 70	700...850	2100		240 (220)	460
İslah Çelikleri	C 22	500...600	1400		170	440
	C 45	650...800	1850	1850	200	540
	C 60	750...900	2100	2100	220	620
	34Cr4	750...900	2600	2600	260	650
	37MnSi5	700...800	2300		300	640
	42CrMo4	950...1100	3000	3000	290	670
	34CrMo6	1000...1300	3100	3100	320	770
Sementasyon Çelikleri	C 15	500...650	1900	6360	230	1600
	16MnCr5	800...1100	2700	6500	440	1630
	20MnCr5	1000...1300	3600	6500	480	1630
	15CrNi6	900...1200	3100	6500	500	1630
	18CrNi8	1200...1450	4000	6500	500	1630
Endüksiyon veya Alevle sertleştirilmiş İslah Çelikleri	Ck 45	650...800	1900	5600	270	1100
	34CrMo4	-	2700	5900	480	1070
	42CrMo4	950...1100	2800	6100	430	1360
	34CrNiMo6	1000...1300	2500	5900	450	1270
Nitrürleme (Banyo)	Ck 45	650...800	1900	-	350	1100
	42CrMo4	950...1100	2750	-	430	1220
Gaznitrleme	31CrMoV9	-	3200	7000	500	-
Dökme Çelikler	GS 52	520	1500	1500	150	340
	GS 60	600	1750	1750	170	420
Dökme Demir	GG 20	200	1700	1700	50	270
	GG 25	250	2000	2000	60	310
	GG 35	350	2300	2300	80	360
Sfero Döküm	GGG 42	420	1800	1800	200	360
	GGG 60	600	2500	2500	220	490
	GGG 100	1000	3500	3500	240	700
Temper Döküm	GTS 35	350...400	1400	1400	190	320
	GTS 65	650...700	2350	2350	230	460

6.4 Dişli Çarkların İmalatı

Dişli çarkların talaşlı imalatında kullanılan metotlar iki grupta toplanabilir.

1) Kopyalama Metodu (Form Freze)

2) Yuvarlanma Metodu (Çubuk Dişli Takım, Helisel Freze, Pinyon Bıçak)

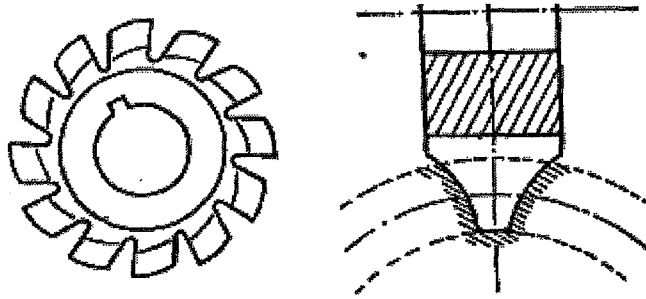
Kopyalama metodunda imal edilen diş şekli Kesici Takımın aynısıdır. Kesici Takımın profilinde herhangi bir hata aynı şekilde diş profilinde oluşur. Az sayıda imalat için küçük atölyelerde tercih edilmektedir. İmalatta Üiversal Freze Tezgahları kullanılır.

Yuvarlanma metodunda diş şekli Kesici Takımın ve Ham Dişlinin izafi hareketi ile hasıl edilir. Bu metotla imalat daha kısa sürede büyük hassasiyetle gerçekleştirilir. Orta ve büyük ölçekli işletmelerde seri imalatta kullanılır.

Talaşsız imalat metodu, özellikle küçük alın ve konik dişli çark imalatında uygulama alanı bulmaktadır. Yaygın olarak (örneğin mikro teknoloji, ayrıca ev ve büro makinalarında) püskürtme dökümlü plastik maddeden yapılmış dişli çarklar kullanılır.

6.4.1 Form freze

Form freze ile imalatta bıçak ham dişlide diş boşluğunu hasıl etmektedir. İşleme sırasında Form Freze kendi şeklini diş boşluğuna kopya eder ve böylece yan yana iki dişlinin iki yarım profilini meydana getirir (Şekil 6.5).

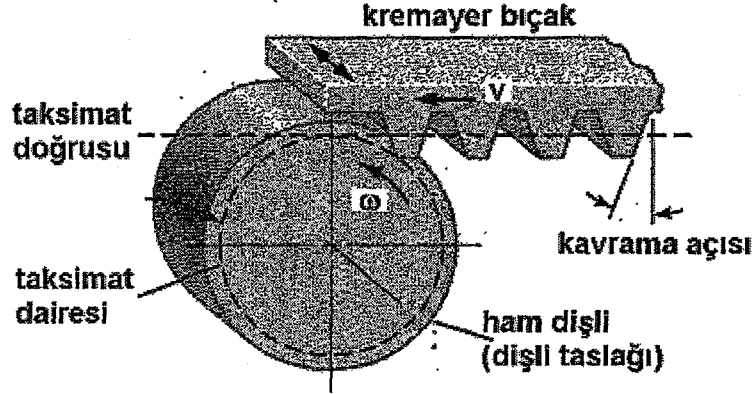


Şekil 6.5: Form Freze

6.4.2 Çubuk dişli takım

Şekil 6.6'da Çubuk Dişli (Kremayer) takım ile diş imalatı prensibi görülmektedir. Takımın hareketi, v üniform hızlı sağdan sola düzgün bir yer değiştirmedir. Ham dişlinin hareketi ise, v hızına ve r_p ham dişli yarıçapına bağlı olarak, $\omega = v / r_p$

denklemini ile ifade edilen uniform açısal hızlı bir dönme hareketidir. Takıma aynı zamanda taslağın dönme eksenine paralel olarak bir ileri-geri hareketi verilmektedir.



Şekil 6.6: Çubuk Dişli Takım ile Dişli İmalatı

6.4.3 Helisel frezeleme

Helisel Freze sonsuz vida olarak ele alınabilir (genel olarak ağız sayısı 1'dir). Vidaya aksenal yönde yivler açılarak kesici bıçak serisi oluşturulur. Vidanın aksenal kesiti çubuk dişli olarak düşünülür. Frezenin dönmesi imajiner kremayerin öteleme hareketini simüle eder. Kesme işlemi esnasında Freze ve Ham Dişli çark kendi eksenleri etrafında dönerler. Freze dönme hareketine ilave olarak çark eksenine paralel öteleme hareketi yapar.

Freze ve Ham Dişli dönme hızları arasındaki bağıntı aşağıda verilmiştir.

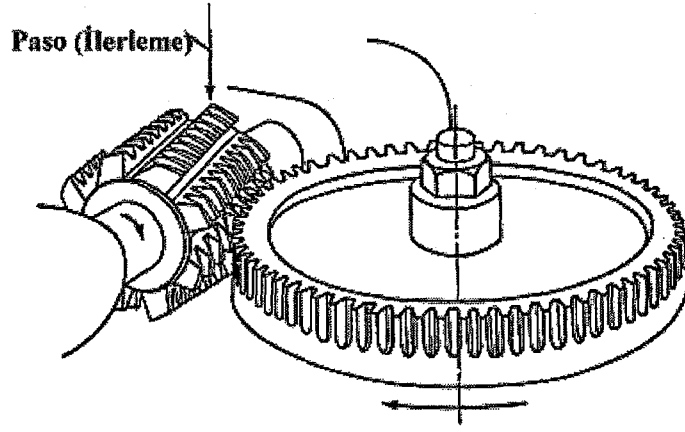
$$\frac{n_h}{n_g} = \frac{z_g}{z_h} \quad (6.1)$$

n_h ve n_g Frezenin ve Ham Dişlinin hızları

z_h : frezenin vida ağız sayısı

z_g : dişlinin diş sayısı

Helisel Freze ile (Azdırma) profil oluşturma Şekil 6.7'de görülmektedir.



Şekil 6.7: Helisel Freze ile Dişli İmalatı

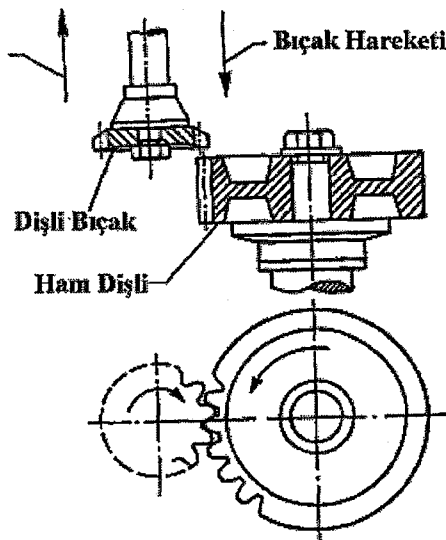
6.4.4 Pinyon şeklinde takım (Fellows)

Pinyon bıçak gerçekte, diş alınlarının yüzeyleri taşlanıp arka kısımları boşaltılarak kesici ağız haline getirilmiş bir dişlidir. Bu kesici ile profil hasıl etme biri takım olan iki dişli çarkın eş çalışmasını simüle etmektedir (Şekil 6.8). Temel dairesi yarıçapı r_{bc} olan pinyon takım aşağıdaki ifade ile tayin edilen temel dairesi yarıçapı r_{bg} olan dişli çarkı hasıl eder.

$$r_{bg} = \frac{z_g}{z_c} r_{bc} \quad (6.2)$$

z_c : takımın diş sayısı

z_g : dişlinin diş sayısı



Şekil 6.8: Pinyon Bıçak ile Dişli İmalatı

6.5 Dişli Çarklarda Meydana Gelen Kusurlar

Dişli çarklarda meydana gelen kusurları şu şekilde sıralayabiliriz:

- Diş dibi kırılması
- Diş yan yüzeylerinde karıncalanma (pitting)
- Diş uçlarında aşınma (grippage)

6.5.1 Diş dibi kırılması

Diş kırılması, genelde dişli malzemesinin dayanma limitinin çok üzerinde periyodik gerilmelere maruz kalması ile ortaya çıkar. Zaman içerisinde çekme bölgesinde çatlak oluşumu başlar. Çatlak belli bir mesafe ilerledikten sonra tamamen ya da kısmen kopar (Şekil 6.9).



Şekil 6.9: Diş Dibinde Çatlak İlerleyişi

Bazen tahmin edilenden daha fazla kök gerilmelerine maruz kalan dişlilerde, gerilme yoğunlaşma bölgeleri bu durumun ortaya çıkmasında yardımcı olurlar. Bu tür gerilme yoğunlaşma bölgeleri kök dibindeki çentikler, kalıntılar, mikro düzeyde ısıtım işlem çatlakları, taşlama yanıkları ve parça üzerindeki kalıcı gerilmelerdir.

Bu tip hasarlar genelde çok küçük devir sayılarında dönen, zaman zaman çalışan, çok büyük döndürme momentlerini ileten ve darbeli yükler altında çalışan dişlilerde meydana gelir.

6.5.2 Diş yan yüzeylerinde karıncalanma

Dişlilerde maksimum yüzey basıncı ani dönme merkezinde meydana gelir. Bu noktada kayma hareketi yön değiştirir ve saf yuvarlanma hareketi vardır. Dolayısıyla yağ filmi bu noktada kopar. Temas durumunda maksimum kayma gerilmesi yüzeyde değil, yüzeyin biraz altında meydana gelir. Tekrarlı yükler yüzünden bu noktada zamanla çatlak oluşumu başlar. Çatlağa sızan yağ basıncının da katkısıyla çatlak

ilerleyerek yüzeye ulaşır. Bu nedenle yüzeyde pul pul dökülmeler meydana gelir (Şekil 6.10).



Şekil 6.10: Diş Yüzeylerinde Karıncalanma

6.5.3 Diş uçlarında aşınma

İki diş teması geçtikleri anda yüksek kayma hızı ve yüksek yüzey basıncından dolayı anlık büyük sıcaklıklar meydana gelir. Sıcaklığın da etkisiyle yüzeyden kopan küçük partiküller sürtünme yüzeyi boyunca sürüklenerek diş başında kazınmış şekilde radyal izler bırakırlar. Bu hasar, malzeme seçimi, sertleştirme ve yağlama gibi yöntemlerle önlenabilir.

7. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde uygulama olarak diş dibi gerilmelerinin sonlu eleman, sınır eleman ve birleştirilmiş sınır eleman ve sonlu eleman metoduyla analizi yapılarak elde edilen sonuçlar çeşitli analitik ifadelerle karşılaştırılmıştır.

7.1 Diş Dibi Gerilmesi Hesaplama Yöntemleri

Diş dibi gerilmelerinin hesabında kullanılan analitik ifadeler iki kısımda incelenebilir.

Bu ifadeleri elde etmenin ilk yolu basit mukavemet hesap yöntemlerinden faydalanmaktır. Diş dibine etkiyen gerilmeler, eğilme gerilmesi, basma gerilmesi ve kayma gerilmesidir. Bu konuda çeşitli yaklaşımlar vardır. Bu yaklaşımlar DIN, AGMA ve JGMA standartlarında tanımlanmış olup en etkili sonuç vereni Cornell metodudur [27].

Diğer yöntem ise, sayısal metotlar kullanılarak elde edilmiş sonuçlardan analitik ifadelerin türetilmesidir. Bu konuda önemli iki çalışma Chabert'in [13] ve Tobe'nin [14] çalışmalarıdır.

7.1.1 Cornell metodu

Cornell metodu, analitik metotlar arasında en iyi çözüm veren ifadelerden biridir. Yapısında, eğilme gerilmeleri, basma gerilmeleri ve kesme gerilmeleri ile birlikte gerilme konsantrasyonu ifadelerini barındırır. Cornell metodu için gerilme ifadesi şu şekilde gösterilir [27]:

$$\sigma = \left(\frac{F \cos \phi}{W} \right) * \left[1 + 0.26 * \left(\frac{h_s}{2 * r} \right)^{0.7} \right] * \left[\left(\frac{6 * l'_s}{h_s^2} \right) + \sqrt{\frac{0.72}{h_s * l_s}} * \left(1 - \left\{ \frac{h_t}{h_s} \right\} * v * \tan \phi \right) - \frac{\tan \phi}{h_s} \right] \quad (7.1)$$

Burada:

h_s : Kök bölgelerinde maksimum gerilmelerin olduğu noktaların birbirine uzaklığı.

l_s : Yükün uygulandığı noktanın h_s 'ye uzaklığı.

l'_s : Uygulanan yükün merkez çizgisi üzerindeki izdüşümünün h_s 'ye uzaklığı

r : Kök yuvarlatma yarıçapı.

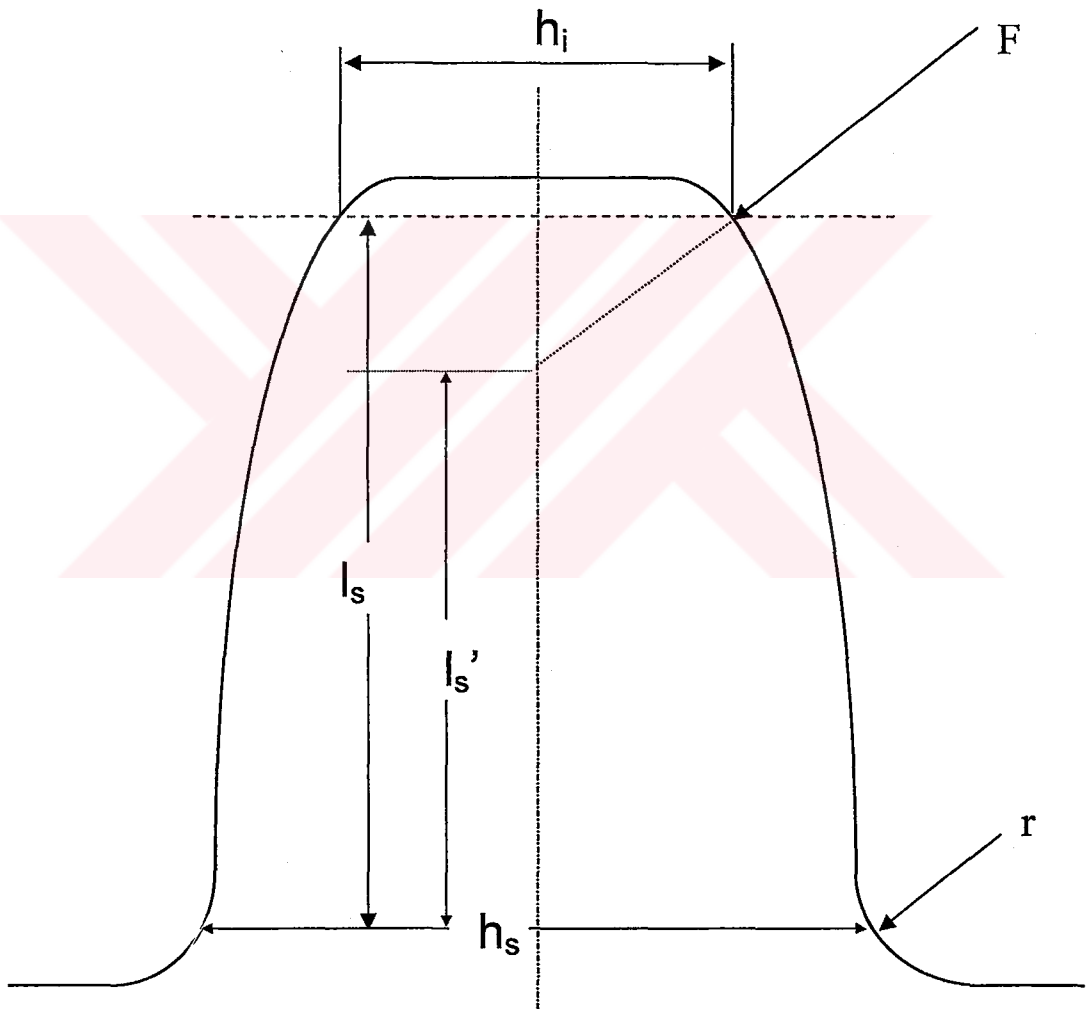
ϕ : Kuvvet doğrultusunun yatay eksenle yaptığı açı.

W : Diş genişliği.

v : Gerilme yakınlık katsayısı.

F : Kuvvet.

İlgili semboller Şekil 7.1’de gösterilmiştir.



Şekil 7.1: Cornell Metoduyla İlgili Sembollerin Gösterimi

7.1.2 Chabert'in gerilme ifadesi

Chabert, çalışmasında[13] standart kavrama açısı ve modifikasyon koşulları altında çeşitli diş sayıları için diş dibi gerilmesi ifadesi elde etmiştir. Bunu yaparken sonlu elemanlar analizi sonuçlarından yola çıkmıştır. Buna göre çekme tarafındaki maksimum gerilme:

$$\sigma = \left[3 + \left(38 - 50 \frac{\rho}{m} \right) \frac{1}{z} \right] \frac{F}{b.m} \quad (7.2)$$

ifadesiyle verilebilir. Burada:

ρ : Kesici takım köşe yuvarlatması.

m : Modül.

z : Diş sayısı.

b : Diş genişliği.

7.1.3 Tobe'nin gerilme ifadesi

Tobe de Chabert gibi sonlu eleman analizi sonuçlarından faydalanarak diş dibi gerilmesine ilişkin bir ifade çıkartmıştır [14]. Chabert'in çalışmasından farklı olarak modifikasyon koşulların da içermektedir. Tobe'nin gerilme bağıntısı aşağıdaki gibidir:

$$\sigma = \frac{F}{b.m} \left[a_1 \left(\frac{1}{z} \right) + a_2 \left(\frac{1}{z} \right)^3 + 3,50 \right] \cdot \exp \left[\left(2,50 \left(\frac{1}{z} \right) - 0,50 \right) \frac{\lambda_p}{m} \right] \quad (7.3)$$

Burada a_1 ve a_2 modifikasyonla ilgili katsayılar olup aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$a_1 = 2,50 - 18,00.x \quad (7.4)$$

$$a_2 = 2600 \exp(-2,75.x) \quad (x < 0,4) \quad (7.5)$$

$$a_2 = 2600 \exp(-2,75.0,4) \quad (x \geq 0,4) \quad (7.6)$$

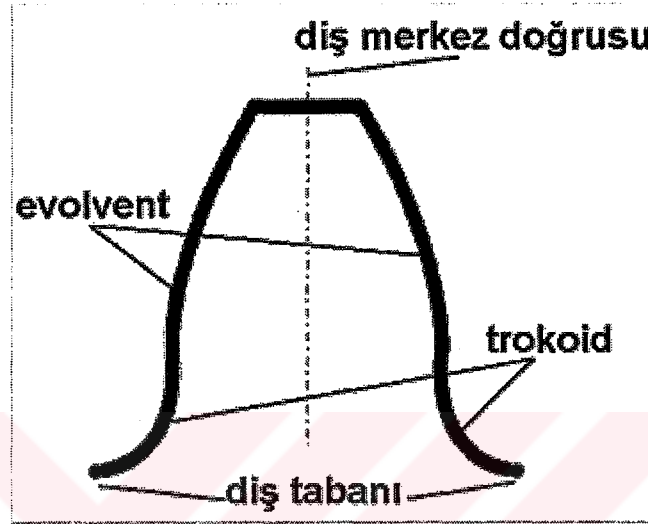
Ayrıca:

x : Modifikasyon katsayısı.

λ_p : Yük uygulanan noktanın diş tepesine mesafesi.

7.2 Diş Profiline Oluşturulması

Bir evolvent düz dişli çarkın geometrisi iki bölümden oluşur. Çalışan bölge evolvent iken kök bölgesi trokoiddir (Şekil 7.2). Geometriyle ilgili bağıntılar Fetvacı ve İmrak'ın çalışmasında bulunabilir [28]. Bu çalışmada dişli profiline oluşturulması için Basic dilinde yazılmış bir program kullanılmıştır. Programın kaynak kodları EK A'da verilmiştir.



Şekil 7.2: Düz Dişli Çark Geometrisi

7.3 Yapılan Analizler

Birleştirilmiş sınır eleman ve sonlu eleman metoduna ilişkin uygulama çalışması düz dişlinin diş dibi gerilmelerinin tespiti üzerinden gerçekleştirilmiştir. Sırasıyla sonlu elemanlar, sınır elemanlar ve birleştirme yöntemi ile analizler yapılmıştır. Analizi yapılan dişliye ait temel büyüklükler Tablo 7.1'deki gibidir.

Tablo 7.1: Analizi Yapılan Dişliye Ait Büyüklükler

Değişken	Değer	Değişken	Değer
m	3	x	0
z	20	F	500N
α_0	20°	b	5mm
ρ	$0.375 \cdot m$	g	$2 \cdot m$

Analize geçilmeden önce EK A'da verilen Basic dilinde yazılmış program ile diş profiline ait nokta koordinatları elde edilmiştir. Programa girdi olarak modül, diş sayısı, kavrama açısı ve çember kalınlık faktörü girilmiş, çıktı olarak profili oluşturan nokta koordinatlarını içeren dosya alınmıştır. Bu dosya, analizde kullanılan paket programa okutulabilmek için uygun formatta olmadığından programın kodunda ufak değişiklikler yapılarak çıktının uygun formata gelmesi sağlanmıştır. Ayrıca program çıktısı olarak verilen ikinci bir dosyadan, profilin bazı noktalarına ait normal açıları elde edilebilir. Bu açılar yük tatbik açısı olarak kullanılabilir.

Yapılacak analizde sınır şartlarının doğru uygulanması büyük önem taşımaktadır. Bir yandan doğruluğu arttırmak diğer yandan da çözüm süresini makul ölçülerde tutabilmek gerekir. Bu noktada idealleştirme doğru biçimde yapılması gerekir. Chabert'in çalışmasındaki model [13] örnek alınarak, sınır şartları bu çalışmadaki şekliyle uygulanmıştır. Buna göre dişlinin göbek ve çember bölgesi sabitlenmiş, kuvvet diş başından, profile dik olarak uygulanmıştır. Chabert'in modeli, çember kalınlık faktörü $1.5 \cdot m$ 'nin üzerinde olan dişliler için geçerlidir. Dolayısıyla bu analizde uygulanabilir.

Yük uygulamasında tekil yük kabulü yapılmıştır. Saint Venant prensibine göre, aynı bölgeye etki eden iki farklı yük dağılımı, yeteri kadar uzak bir bölge için aynı etkiyi yapar. Yani uygulanan kuvvetin yayılı ya da tekil olması diş dibi gerilmelerini etkilemeyecektir. Bu nedenle karmaşık sınır şartları eklemenin gereği yoktur.

Probleme bakılırsa uygulanan kuvvet neticesinde dişli eksenini doğrultusunda gerilme oluşmayacağı aşikardır. Bu nedenle düzlem gerilme kabulü yapılmış, problem kolaylık açısından iki boyutta incelenmiştir.

Analiz sonuçlarının daha iyi karşılaştırılabilmesi için üç metotla da çözüm yapabilen bir ticari yazılım kullanılmıştır.

Dişli malzemesi için kullanılan değerler aşağıdaki gibidir:

$$E=2E5 \text{ MPa}$$

$$\nu=0.3$$

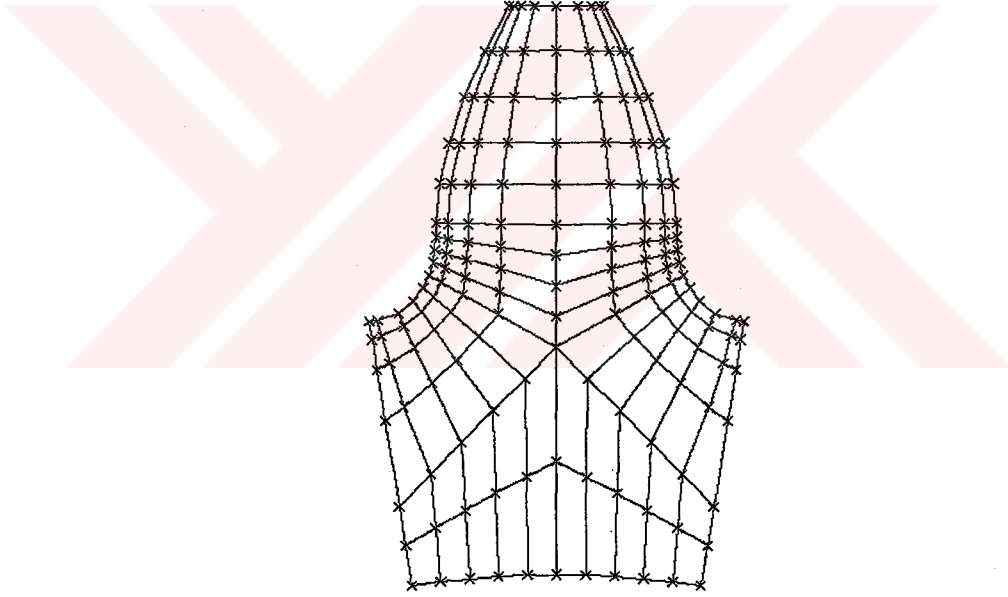
7.3.1 Sonlu elemanlar analizi

Kullanılan yazılımın sonlu elemanlar modülü, standart sonlu elemanlar yazılımlarıyla benzer olup üç ana bölümden oluşmaktadır; ön işlemci, çözümleyici ve son işlemci.

Ön işlemci bölümünde ilk olarak malzeme bilgileri girilmiştir. Daha sonra ön işlemcinin bir alt modülü olan modelleyiciye geçilmiştir. Burada daha önceden oluşturulmuş nokta koordinatları okutulup programa aktarılmıştır.

Oluşturulan noktalar, uygun eğrilerle birleştirilerek dişli modeli oluşturulmuştur. Diş dibi bölgesinde gerilme yığılması olacağından bu bölgenin diğer kısımlara göre daha gerçekçi modellenmesinde fayda vardır. Bütün kök bölgesi için tek parça spline eğrileri kullanmak yerinde bir fikirdir, çünkü, yüzeydeki süreklilik koşulları, gerilme dağılımındaki sürekliliği de etkilemektedir. Fakat kullanılan yazılımda bu tip eğriler bulunmadığından dolayı kök bölgesi yaylar vasıtasıyla modellenmiştir.

Ön işlemci bölümünün en önemli adımı, eleman ağının oluşturulmasıdır. Bu noktada Sun'un modelinden faydalanılmış, benzer bir eleman ağı oluşturulmuştur (Şekil 7.3). Eleman tipinin sonuçlara etkilini inceleyebilmek için iki farklı eleman için iki farklı analiz yapılmıştır. Kullanılan elemanlar sırasıyla lineer ve kuadratik elemanlardır.



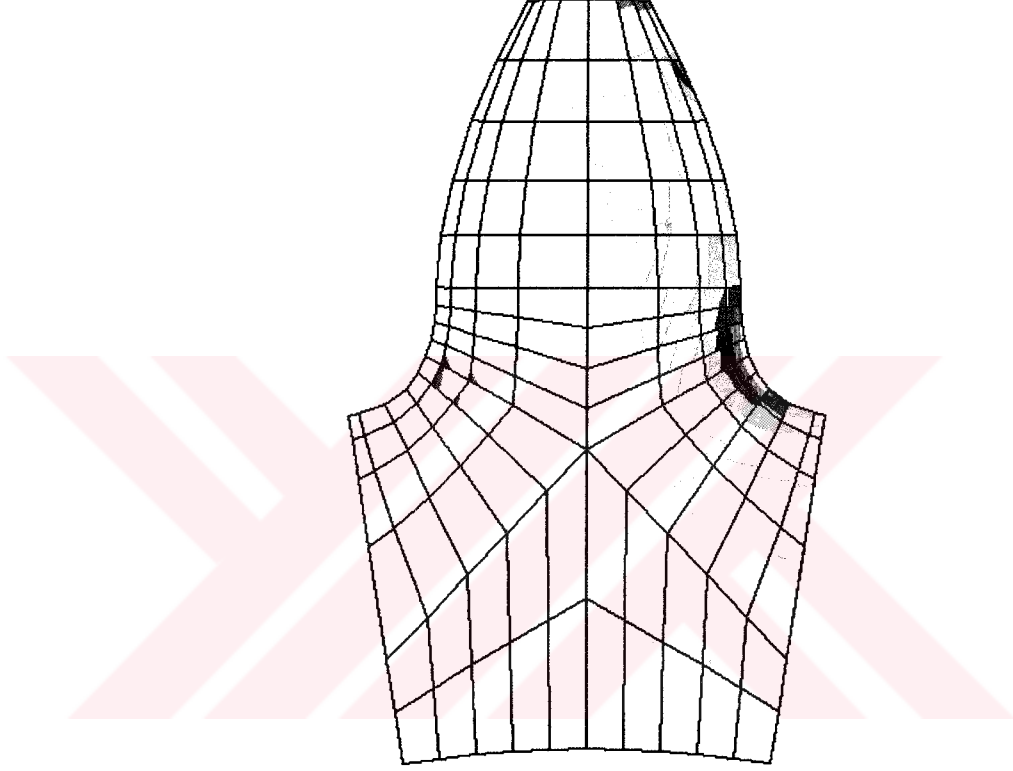
Şekil 7.3: Dişli Modelinin Elemanlara Ayrılmış Hali

Elemanlara ayırma işlemi yapıldıktan sonra sınır şartları girilmiştir. Sınır şartı olarak göbek ve göbeğe bağlı kenarlarda hareketler kısıtlanmış, diş başında profile dik nokta kuvvet uygulanmıştır.

Daha sonra çözümleyici bölümüne geçip oluşturulan sistemin çözülmesi için gerekli komut verilmiştir.

Kullanılan yazılımda son işlemci bölümü iki modülden oluşmaktadır. Bunlardan ilki sonuçların grafik olarak gözlenmesini sağlarken, diğeri sonuçları ayrıntılı olarak metin halinde verir

Şekil 7.4'te sonlu elemanlar analizinden elde edilen sonuçlar doğrultusunda dişli üzerinde gerilme dağılımı görülebilir. Ayrıca, analiz sonuçlarının değerlendirilmesi bölüm 7.4'te yapılmıştır.



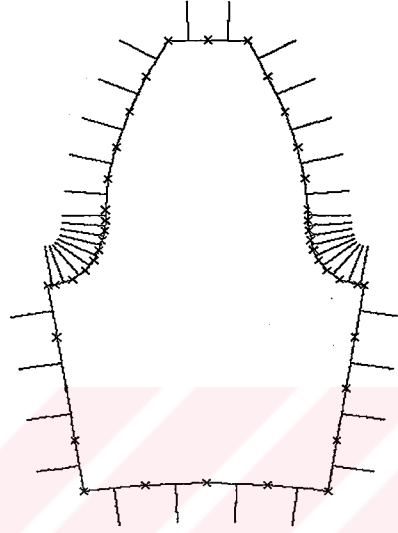
Şekil 7.4: Dişli Üzerindeki Gerilme Dağılımı

7.3.2 Sınır elemanlar analizi

Sınır elemanlar analizi, sonlu elemanlar analizine çok yakın bir prosedür takip eder. Yazılımın sınır elemanlar modülü yine üç bölümden oluşmaktadır; ön işlemci, çözümleyici ve son işlemci.

Bu analiz için öncelikle malzeme özellikleri belirtilmiş ve ardından modellemeye geçilmiştir. Önceden hazırlanan nokta koordinatları dosyası okutularak programa aktarılmıştır. Daha sonra bu noktalar üzerinden çeşitli eğrilere dişli modeli oluşturulmuştur. Dişlinin kök bölgesi yaylarla, geri kalan kısımlar lineer çizgilerle oluşturulmuştur.

Burada kullanılan analiz prosedürü elemanlara ayırma kısmında sonlu elemanlardan ayrılmaktadır. Sınır elemanlarda alan diskritizasyonu yerine eğri diskritizasyonu yapılır. Bu nedenle bu aşama oldukça kolay ve hızlı yapılır. Dikkat edilmesi gereken bir husus, eleman dış normallerinin, kapalı bir bölge oluşturacak şekilde (sonlu bölge analizi için) malzeme bölgesinin dışına doğru uzanması gerekliliğidir (Şekil 7.5). Eleman oluşturmak için saat yönünün tersi bir rota izlenirse uygun yönlenme elde edilebilir (delikler için tam tersidir).



Şekil 7.5: Sınır Elemanlar Modelinde Eleman Dış Normalleri

Bu analizde de bir önceki gibi eleman tipinin çözüme etkisini gözlemleyebilmek için iki farklı eleman tipi kullanılmıştır. Bu elemanlar sırasıyla lineer ve kuadrattır.

Elemanlara ayırma işleminin ardından sonlu elemanlardaki sınır koşullarının aynısı bu modele uygulanmıştır. Burada tek fark uygulanan kuvvetin düğüm noktasından değil eleman üzerinden uygulanmasıdır. Bu durum yazılım özelliklerinden kaynaklı bir değişikliktir. Sonuçların çok etkilenmemesi için bir önceki analizde kuvvet uygulanan düğüm noktasının yanına çok küçük bir eleman oluşturulmuş böylece kuvvetin uygulanma noktası bahsedilen düğüm noktasına mümkün olduğunca yaklaştırılmıştır.

Modelleme tamamlandıktan sonra ön işlemci bölümü terk edilerek çözümleyici bölümüne geçilmiştir. Bu bölümde ilgili komut verilerek sistem çözümlenmiştir.

Son işlemci bölümü sonlu elemanlardakinin aynıdır. Sadece, sınır elemanlar için gerilme dağılımının grafik gösterimi mevcut değildir. Bu da yazılımdan kaynaklı bir durumdur. Elde edilen sonuçlar bölüm 7.4'te tartışılmıştır.

7.4 Analiz Sonuçlarının Değerlendirilmesi

Cornell, Chabert ve Tobe'ye ait analitik ifadelerden elde edilen sonuçlar ile sonlu elemanlar ve sınır elemanlar analizinden elde edilen sonuçlar Tablo 7.2'de gösterilmiştir.

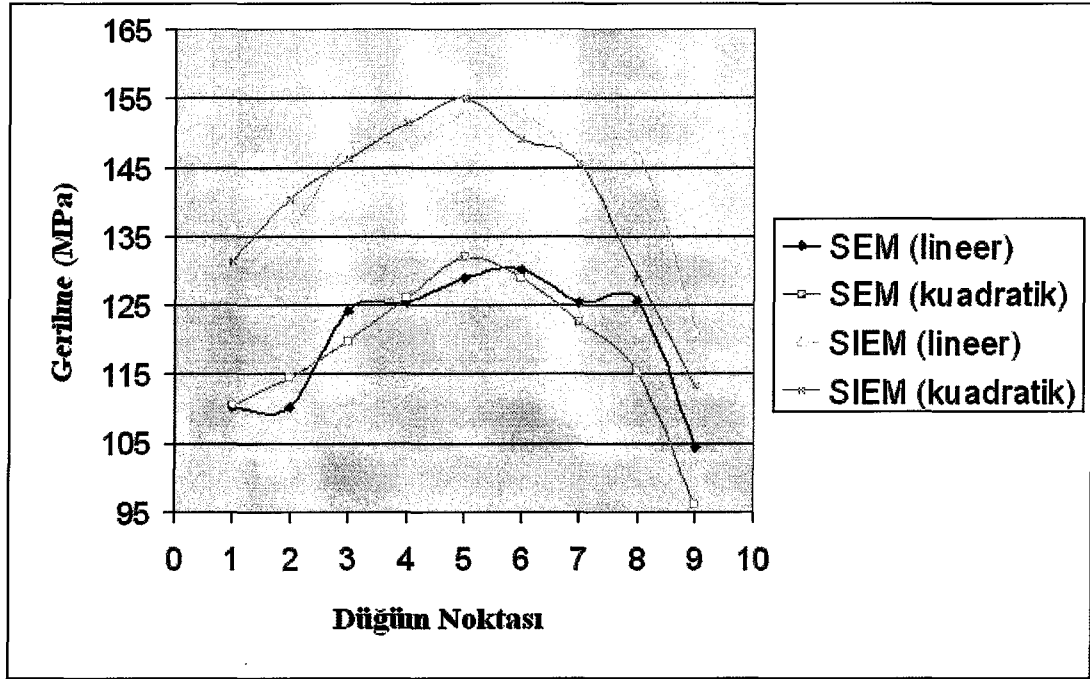
Tablo 7.2: Kullanılan Yöntemler ve Elde Edilen Sonuçlar

Kullanılan Yöntem	Çekme Tarafındaki Maks. Gerilme
SEM (lineer eleman)	130.2 MPa
SEM (kuadratik eleman)	131.9 MPa
SIEM (lineer eleman)	152.8 MPa
SIEM (kuadratik eleman)	155.0 MPa
Cornell Metodu	139.1 MPa
Chabert'in denklemi	132.1 MPa
Tobe'nin denklemi	131.7 MPa

Elde edilen sonuçlara bakıldığında analitik hesaplar ve sonlu elemanlar analizi sonuçları birbirine uyum gösterirken sınır elemanlar analizi sonuçları bu gruptan belirgin olarak daha fazla çıkmıştır.

Sonlu elemanlar analizi sonuçları ile analitik sonuçlar arasında % 2-3 farkla benzerlik olmuştur. Burada Chabert ve Tobe'ye ait ifadelerin SEM üzerinden elde edildiği göz ardı edilmemelidir.

Sınır elemanlar analizi sonuçları, sonlu elemanlara nazaran daha yüksek çıkmıştır. Meydana gelen % 16 gibi bir fark ihmal edilebilir boyutlarda değildir. Bu sonuç aslında bir bakıma Sun'un çalışmasındaki sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Sun'un çalışmasında da sınır elemanlardan elde edilen sonuçlar diğerine göre daha yüksektir. Fakat oradaki fark % 5 civarındadır. Ayrıca Sun, elde ettiği değerleri deney sonuçlarıyla karşılaştırmış, sınır elemanların daha iyi sonuçlar verdiğini belirtmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken bir husus da Sun'un analizlerinin üç boyutlu modeller üzerinden yapılmasıdır. Şekil 7.6'da, SEM ve SIEM analiz sonuçlarına göre dişlinin kök bölgesindeki gerilme dağılımı görülmektedir.



Şekil 7.5: Dişlinin Kök Bölgesindeki Gerilme Dağılımı

Sağlıklı bir karşılaştırma yapabilmek için analiz sonuçlarının deney sonuçlarıyla karşılaştırılmasında fayda vardır. Diğer taraftan burada referans alınan ifadeler kendi içlerinde tutarlı ifadelerdir. Örnek vermek gerekirse, Cornell Metodu, ilgili çalışmada karşılaştırılan deney sonuçlarına maksimum % 5 hatayla yaklaşmıştır. Chabert'in çalışmasında ise 18 diş sayısına sahip bir dişli için deney sonuçlarına % 3 civarında yaklaşmıştır. Bu koşullar göz önüne alındığında sonlu elemanlar analizinin daha gerçekçi sonuçlar verdiği görülmektedir. Teorik olarak sınırlarda meydana gelen yük birikmelerinde sınır elemanlar metodunun daha iyi çözümler vermesi beklenmektedir. Fakat sonucun bu doğrultuda çıkmaması sonucu görülmüştür ki seçilecek yöntem kadar kullanılacak yazılımın da çözüme etkisi olmaktadır. Analiz yapılmadan önce yazılımın ilgili problem için doğrulama (verification) örneklerinin bulunup bulunmadığına bakmak gerekir.

Bu uygulama çalışmasının asıl amacı birleştirilmiş yöntemin sonuçlarını karşılaştırmaktır. Fakat, analiz sonuçlarından elde edilen veriler tatmin edici değildir. Sonuçlara bakıldığında sınır elemanlar ve sonlu elemanlar arayüzünde yer değiştirme sürekliliği mevcutken bu süreklilik gerilmelerde yoktur. Ara yüzdeki gerilme değerleri arasında yaklaşık 2 kat farklılık gözlemlenmiştir. Yazılımın sınır eleman tabanlı yaklaşımı kullandığı düşünülürse, arayüz bölgesinde sonlu eleman kuvvetleri ve sınır eleman çekmeleri arasındaki ilişkinin sağlanamadığı düşünülebilir. Bu nedenlerden dolayı birleştirilmiş yöntem sonuçları kayda değer veriler olarak görülmemiştir.

Sonlu elemanlar analizi ve sınır elemanlar analizi sonuçlarına bakıldığında sonlu elemanların daha iyi netice verdiği görülebilir. Diğer taraftan sonlu eleman modeli oluşturmak için harcana çaba sınır eleman modeli için harcana çabanın oldukça üstündedir. Bu noktada dişlinin gövdesinin sınır elemanlarla, kök bölgesinin ise sonlu elemanlarla modellenmesi, kabul edilebilir sonuçların daha az çaba harcanarak elde edilmesini sağlayabilir.



8. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada sonlu elemanlar metodu, sınır elemanlar metodu ve birleştirilmiş sınır eleman ve sonlu eleman metodu incelenmiş ve yapılan uygulamayla değerlendirilmiştir.

Öncelikle sayısal yöntemlerin gerekliliği tartışılmış ve yaygın kullanılan birkaç sayısal yöntem kısaca anlatılmış ve karşılaştırılmıştır.

Günümüzde en çok kullanılan sayısal yöntem olan sonlu elemanlar metodu, ayrıntılı bir biçimde incelenmiş, teorik esasları belirtilmiştir. Ayrıca konu anlatılırken çeşitli püf noktaları belirtilerek yazı zenginleştirilmiştir.

İncelenen diğer bir sayısal yöntem ise sınır elemanlar metodudur. Bu metodun uygulama koşulları belirtilmiş, teorik esasları verilmiştir.

İki yöntem ayrıntılı olarak incelendikten sonra çeşitli koşullar için karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma yapılırken çok sayıda bilimsel çalışmadan faydalanılmış, iki yöntemin uygulamaları için sınırlar belirlenmiştir.

Birleştirilmiş sınır eleman ve sonlu eleman yöntemi, üç ayrı yaklaşım üzerinden değerlendirilmiştir. Bu yaklaşımlar sırasıyla SEM tabanlı yaklaşım, SIEM tabanlı yaklaşım ve iteratif bölge ayrıştırma tekniğidir. Bu üç yaklaşım ayrı ayrı incelenmiş, teorik ve matematiksel ifadeleri verilmiş ve birbirlerine üstünlükleri tartışılmıştır.

Uygulama aşamasında karşılaştırma ifadeleri belirlenmiş, sırayla sonlu elemanlar analizi ve sınır elemanlar analizi iki farklı eleman tipi için yapıp bahsedilen analitik ifadelerle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda sonlu elemanlar analizinin belirtilen referans ifadelere daha yakın sonuç verdiği görülmüştür. Bu sonuç teorik tahminlerle uyuşmamakla birlikte farklı yazılımlar için farklı sonuçlar elde edilebileceğini göstermiştir. Bu durum, çözülecek problem için sadece metod seçiminin yeterli olmadığı, kullanılacak yazılımın da probleme uyum göstermesi gerektiği anlaşılmıştır.

Birleştirilmiş analiz, kaynağı tam olarak belirlenemeyen bir nedenden dolayı karşılaştırma yapılamayacak mertebede kötü sonuçlar vermiştir. Bu problem, kullanıcı hatasından kaynaklanabileceği gibi yazılımdan da kaynaklanıyor olabilir.

SEM – SIEM ara yüzünde yerdeğiştirme sürekliliği olduğu halde gerilmelerin süreksiz olması, ara yüzde çekme (traction) ve kuvvetler arasındaki ilişkinin tam olarak sağlanamadığını göstermektedir. Bu da ikinci savı güçlendirir. Kaynak yetersizliğinden dolayı yazılımın tam sürümü edinilememiş, dolayısıyla teknik destek alınamamıştır.

Sonuç olarak uygulaması yapılamasa da, birleştirilmiş yöntemin esasları her yönüyle öğrenilmiş, ileride yapılabilecek çalışmalar için altyapı oluşturulmuştur.



KAYNAKLAR

- [1] Zienkiewicz, O.C., Kelly, O.C., Bettles, P., 1977. The coupling of finite element method and boundary solution procedures, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **11**, 355-375.
- [2] Beer, G., Watson, J.O., 1992. Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers, Wiley, Chichester.
- [3] Schnack, E., 1985. Stress analysis with a combination of HSM and BEM, in *Mathematics of Finite Elements and Applications*, Ed. Whiteman, J.R., Academic Press, London, 273-281.
- [4] Andrä, H., Schnack, E., 1997. Integration of singular Galerkin-type boundary integrals for 3D elasticity problems, *Numerische Mathematik*, **76**, 143-165.
- [5] Bonnet, M., 1999. Boundary integral equation methods for solids and fluids, Wiley, Chichester.
- [6] Haas, M., Kuhn, G., 1999. Implementation of an advanced symmetric Galerkin-BEM formulation for 3D elastostatics, in *Boundary elements*, vol. XXI, Eds. Brebbia, C.A., Power, H., WIT Press, Southampton, 687-696.
- [7] Bilalecki, R.A., et al, 2002. Coupling BEM, FEM and analytic solutions in steady-state potential problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**, 597-661.
- [8] Elleithy, W.M., Al-Gahtani, H.J., 2000. An overlapping domain decomposition approach for coupling the finite and boundary element methods, *Engrg. Anal. Boundary Elem.*, **24**, 391-398.
- [9] Kamiya, N., Iwase, H., Kita, E., 1996. Parallel computing for the combination method of BEM and FEM, *Engrg. Anal. Boundary Elem.*, **18**, 221-229.
- [10] Lin, C.C., Lawton, E.C., Caliendo, J.A., Anderson, L.R., 1996. An iterative finite element – boundary element algorithm, *Comput. Struct.*, **39**, 899-909.
- [11] Feng, Y.T., Owen D.R.J., 1996. Iterative solution of coupled FE/BE discretization for plate-foundation interaction problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 1889-1901.

- [12] **Tanaka, M., Elleithy, W.M.**, 2003. Interface relaxation algorithms for BEM–BEM coupling and FEM–BEM coupling, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192**, 2977-2992.
- [13] **Chabert, G., Tran, T.D., Mathis, R.**, 1974. An evaluation of stresses and deflection of spur gear teeth under strain, *Journal of Eng. for Industry*, **96**, 85-93.
- [14] **Tobe, T., Kato, M., Inoue, K.**, 1979. True stress and stiffness of spur gear tooth, in *Proceedings of the fifth world congress on theory of machines and mechanisms*, 1105-1108.
- [15] **Çelik, M.**, 1998. Application of the different boundary elements to spur gears, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **177**, 127-135.
- [16] **Sun, H., Mavripis, D., Houston, R.L., Oswald, F.B.**, 1989. Comparison of boundary element and finite element method in spur gear root stress analysis, in *ASME 5th Pow. Trans. And Gearing Conf.*, **1**, April, 189-196.
- [17] **Moaveni, S.**, 1999. Finite Element Analysis. Theory and Applications with ANSYS, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [18] **Haas, M., Kuhn, G.**, 2002. A symmetric Galerkin BEM implementation for 3D elastostatics with an extension to curved elements, *Comput. Mech.*, **28**, 250-259.
- [19] **Elleithy, W.M., Al-Gahtani, H.J., El-Gebeily, M.**, 2001. Iterative coupling of BE and FE methods in elastostatics, *Eng. Analysis with Boundary Elements*, **25**, 685-695.
- [20] **Brebbia, C.A., Dominguez, J.**, 1992. Boundary Elements; An Introductory Course Second Edition, McGraw-Hill, Great Britain.
- [21] **Becker, A.A.**, 1992. The Boundary Element Method in Engineering; A Complete Course, McGraw-Hill, London.
- [22] **Bettes, P.**, 1981. Operation counts for boundary integral and finite element methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **17**, 306-308.
- [23] **Mukherjee, S., Morjaria, M.**, 1984. On the efficiency and accuracy of the boundary element method and the finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **20**, 515-522.
- [24] **Banerjee, P.K., Butterfield, R.**, 1981. Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, London.
- [25] **Cruse, T.A.**, 1973. Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis, *Comp. Struct.*, **3**, 509-527.
- [26] **Gediktaş, M., Savcı, M.**, 1985. Dişli Çarklar; Mukavemet Hesapları, Teknik Üniversite Matbaası, Gümüşsuyu.

- [27] **Cornell, R.W.**, 1981. Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth, *ASME Journal of Mechanical Design*, **103**, 447-449.
- [28] **Fetvacı, C., İmrak, E.**, 2004. Design of visual spur gear materials with computer, *Journal of Engineering and Natural Sciences*, April, 201-208.



EK A

```
10 REM revise 9 Ocak 1997
20 INPUT"modul";M
30 REM standart no ya gore dis profili genere eden program
40 REM bicak ISO R53 yuvarlatma .375*m
50 REM yazilim * cuneyt fetvaci* 1995
60 REM profil genere eder ve fem paket program kodu ile model hazirlar
70 REM *** parametrik yuk yeri 3 2 1
80 REM
90 INPUT"pinyon dis sayisi ";Z1
100 INPUT"kavrama acisi ";DA
110 INPUT"cember kal faktor ";J
120 BA=M
130 B1=1.25*M
140 RD=DA*3.141592/180
150 R=M*Z1/2
160 RTAK=R
170 RT=R+M
180 RDD=R-1.25*M
190 RB=R*COS(RD)
200 T1=M*3.141592/2
210 RF1=R*SIN(RD)
220 RF2=BA/SIN(RD)
230 RF3=(RF1-RF2)^2
240 RB2=RB*RB
250 RF=(RF3+RB2)^.5
260 PRINT RF,RB,RDD
270 REM trachoid
280 REM *****
290 REM A=(B1-BA)/(1-SIN(RD))
300 A=.375*M
310 B=B1-A
320 BB=(T1/2)-((B*TAN(RD)))+(A/COS(RD))) :REM ucgen
330 PRINT BB
340 P=M*3.141592
350 REM *****
360 PB=P*COS(RD)
370 KAVOR=((SQR(RT*RT-RB*RB))+SQR(RT*RT-RB*RB))-(R+R)*SIN(RD))/PB
380 KITA=((SQR(RT*RT-RB*RB))+SQR(RT*RT-RB*RB))-(R+R)*SIN(RD))
390 RAP=SQR(RB*RB+((R+R)*SIN(RD)-SQR(RT*RT-RB*RB))^2)
400 RHSC=SQR(RB*RB+((R+R)*SIN(RD)-SQR(RT*RT-RB*RB)+PB)^2)
410 RW=SQR(RB*RB+(SQR(RT*RT-RB*RB)-(KAVOR-1)*PB)^2)
420 RLSC=SQR(RB*RB+(SQR(RT*RT-RB*RB)-PB)^2)
430 REM *****
440 REM DELTT=BB/R : REM *****Tooth Space
450 DELTT=((P/2)-BB)/R : REM origin of tooth : rem beta
460 OPEN"kompl.dat" FOR OUTPUT AS #1
470 OPEN"fillet.dat"FOR OUTPUT AS #2
480 PRINT#2,"a=";A
490 PRINT#2,"m=";M
500 PRINT#2,"deltt=";DELTT
510 PRINT#2,"z=";Z1
520 PRINT#2,"rtak=";R
530 PRINT#2,"ekar=";R*2
540 PRINT#2,"kava=";DA
550 PRINT#2,"kavr=";RD
560 PRINT#2,"kavor=";KAVOR
570 PRINT#2,"daci=";90/Z1
580 PRINT#2,"rim=";RDD-(M*J) : REM KALINLIK MODUL KATI
590 PRINT#2,"j=";J
600 PRINT#2,"base=";RB
610 PRINT#2,"kita=";KITA
620 CLOSE#2
630 REM merkez noktasi
640 REM PRINT#1,"k","",0,"",0 : REM center of tooth
```

```

650 REM disdibinin geometrik yeri
660 DX=0 :DY=RDD
670 LRDD=J*M
680 DYC=RDD-LRDD
690 DER=3.141592/Z1
700 CX1=DX*COS(DER)-DYC*SIN(DER)
710 CY1=DX*SIN(DER)+DYC*COS(DER)
720 PRINT#1,"k",,,CX1,,CY1
730 PRINT#1,"k",,,CX1,,CY1
740 DX1=DX*COS(DER)-DY*SIN(DER)
750 DY1=DX*SIN(DER)+DY*COS(DER)
760 PRINT#1,"k",,,DX1,,DY1
770 PRINT#1,"k",,,DX1,,DY1
780 REM *****
790 TMIN=0
800 TMAX=B/(R*TAN(RD))
810 FOR RVAR=TMIN TO TMAX+.01 STEP TMAX/8
820 O1=(R-B1+A)*SIN(DELT+RVAR)
830 O2=R*RVAR*COS(DELT+RVAR)
840 O31=SQR((B*B)+(R*R*RVAR*RVAR))
850 O32=A/O31
860 O33=(B*SIN(DELT+RVAR))+(R*RVAR*COS(DELT+RVAR))
870 CXF=O1-O2-(O32*O33)
880 CO1=(R-B1+A)*COS(DELT+RVAR)
890 CO2=R*RVAR*SIN(DELT+RVAR)
900 CO31=SQR((B*B)+(R*R*RVAR*RVAR))
910 CO32=A/O31
920 CO33=(B*COS(DELT+RVAR))+(R*RVAR*SIN(DELT+RVAR))
930 CYF=CO1+CO2+(CO32*CO33)
940 PRINT#1,"k",,,CXF,,CYF
950 PRINT#1,"k",,,CXF,,CYF
960 PRINT CXF,CYF,RVAR,SQR(CXF*CXF+CYF*CYF)
970 IF RVAR=TMAX THEN TRA=SQR(CXF*CXF+CYF*CYF)
980 NEXT RVAR
990 OPEN"taks.dat"FOR OUTPUT AS#3
1000 OPEN"fillet.dat"FOR APPEND AS#2
1010 FOR RVAR=TRA TO RTAK+.03 STEP (RTAK-TRA)/2
1020 X=RB/RVAR
1030 REM IF RVAR=RB THEN 13700
1040 ANG=1.570796-ATN(X/SQR(1-X*X))
1050 EV=TAN(RD)-RD
1060 EVX=TAN(ANG)-ANG
1070 REM T1=(3.141592*M)/2
1080 T=2*RVAR*((T1/(2*R))+EV-EVX)
1090 T2V=(T/2)/RVAR
1100 Y1=RVAR*COS(T2V)
1110 X1=RVAR*SIN(T2V)
1120 REM *****
1130 IF RVAR=RTAK THEN 1140 ELSE 1200
1140 BETAT=ANG-T2V
1150 PRINT#3,"atak=";T2V*180/3.141592
1160 PRINT#3,"betat=";BETAT*180/3.141592
1170 PRINT#3,"btr=";BETAT
1180 CLOSE#3
1190 REM *****
1200 PRINT RVAR,T,X1,Y1,T2V
1210 REM ****
1220 FSAY=FSAY+1
1230 PRINT RVAR,ANG-T2V,T2V*180/3.141592
1240 PRINT#2,"yuk";FSAY;"=";ANG-T2V
1250 PRINT#2,"koor";FSAY;"=";T2V*180/3.141592
1260 PRINT#2,"crad";FSAY;"=";RVAR
1270 REM ****
1280 PRINT#1,"k",,,X1,,Y1
1290 Q=-X1 : QY=Y1
1300 PRINT#1,"k",,,Q,,Y1
1310 NEXT RVAR
1320 REM *****
1330 REM OPEN"fillet.dat"FOR APPEND AS#2
1340 FOR RVAR=RTAK TO RT+.03 STEP (RT-RTAK)/3
1350 X=RB/RVAR
1360 IF RVAR=RTAK THEN 1610
1370 ANG=1.570796-ATN(X/SQR(1-X*X))
1380 EV=TAN(RD)-RD
1390 EVX=TAN(ANG)-ANG
1400 REM T1=(3.141592*M)/2

```

```

1410 T=2*RVAR*((T1/(2*R))+EV-EVX)
1420 T2V=(T/2)/RVAR
1430 REM IF RVAR=RT THEN 1690 ELSE 1740
1440 IF ABS(RVAR-RT)<.00001 THEN 1450 ELSE 1510
1450 PRINT#2,"rt=";RT
1460 BETA=ANG-T2V
1470 PRINT#2,"atip=";T2V*180/3.141592
1480 PRINT#2,"beta=";BETA*180/3.141592
1490 PRINT#2,"betar=";BETA
1500 REM CLOSE#2
1510 Y1=RVAR*COS(T2V)
1520 X1=RVAR*SIN(T2V)
1530 FSAY=FSAY+1
1540 PRINT RVAR,ANG-T2V,T2V*180/3.141592
1550 PRINT#2,"yuk";FSAY;"=";ANG-T2V
1560 PRINT#2,"koor";FSAY;"=";T2V*180/3.141592
1570 PRINT#2,"crad";FSAY;"=";RVAR
1580 PRINT#1,"k","",X1,"",Y1
1590 Q=-X1 : QY=Y1
1600 PRINT#1,"k","",Q,"",Y1
1610 NEXT RVAR
1620 REM *****
1630 PRINT#1,"k","",0,"",RT
1640 CLOSE#1,2
2000 REM revise 9 Ocak 1997
2080 INPUT"pinyon dis sayisi ";Z2
2100 INPUT"cember kal faktor ";JC
2110 BA=M
2120 B1=1.25*M
2140 R2C=M*Z2/2
2150 RTAKC=R2C
2160 RTC=R2C+M
2170 RDDC=R2C-1.25*M
2180 RBC=R2C*COS(RD)
2190 T1=M*3.141592/2
2200 RF1C=R2C*SIN(RD)
2210 RF2=BA/SIN(RD)
2220 RF3C=(RF1C-RF2)^2
2230 RBC2=RBC*RBC
2240 RFC=(RF3C+RBC2)^.5
2250 PRINT RFC,RBC,RDDC
2260 REM trachoid
2270 REM *****
2280 REM A=(B1-BA)/(1-SIN(RD))
2290 A=.375*M
2300 B=B1-A
2310 BB=(T1/2)-((B*TAN(RD))+(A/COS(RD))) : REM ucgen
2320 PRINT BB
2330 P=M*3.141592
2340 REM *****
2350 PB=P*COS(RD)
2360 KAVOR=((SQR(RT*RT-RB*RB))+((SQR(RT*RT-RB*RB))-(R+R)*SIN(RD)))/PB
2370 KITA=((SQR(RT*RT-RB*RB))+((SQR(RT*RT-RB*RB))-(R+R)*SIN(RD)))
2380 RAP=SQR(RB*RB+((R+R)*SIN(RD))-SQR(RT*RT-RB*RB))^2
2390 RHSC=SQR(RB*RB+((R+R)*SIN(RD))-SQR(RT*RT-RB*RB)+PB)^2
2400 RW=SQR(RBC*RBC+(SQR(RTC*RTC-RBC*RBC)-(KAVOR-1)*PB)^2)
2410 RLSC=SQR(RBC*RBC+(SQR(RTC*RTC-RBC*RBC)-PB)^2)
2420 REM *****
2430 REM DELTT=BB/R : REM *****Tooth Space
2440 DELTTC=((P/2)-BB)/R2C : REM origin of tooth : rem beta
2450 OPEN"kompl2.dat" FOR OUTPUT AS #4
2460 OPEN"fillet2.dat" FOR OUTPUT AS #5
2470 PRINT#5,"a=";A
2480 PRINT#5,"m=";M
2490 PRINT#5,"delttc=";DELTTC
2500 PRINT#5,"z2=";Z2
2510 PRINT#5,"rtakc=";R2C
2520 PRINT#5,"ekar=";R+R2C
2530 PRINT#5,"kava=";DA
2540 PRINT#5,"kavr=";RD
2550 PRINT#5,"kavor=";KAVOR
2560 PRINT#5,"daci2=";.90/Z2
2570 PRINT#5,"rim2=";RDDC-(M*JC) : REM KALINLIK MODUL KATI
2580 PRINT#5,"jc=";JC
2590 PRINT#5,"base2=";RBC
2600 PRINT#5,"kita=";KITA

```

```

2610 CLOSE#5
2620 REM merkez noktasi
2630 REM PRINT#1,"k",",",",0",",",0 : REM center of tooth
2640 REM disdibinin geometrik yeri
2650 DXC=0 :DYC=RDDC
2660 LRDDC=JC*M
2670 DYCC=RDDC-LRDDC
2680 DER2=3.141592/Z2
2690 CX1C=DXC*COS(DER2)-DYCC*SIN(DER2)
2700 CY1C=DXC*SIN(DER2)+DYCC*COS(DER2)
2710 PRINT#4,"k",",",",CX1C",",",CY1C
2720 PRINT#4,"k",",",",-CX1C",",",CY1C
2730 DX1C=DXC*COS(DER2)-DYC*SIN(DER2)
2740 DY1C=DXC*SIN(DER2)+DYC*COS(DER2)
2750 PRINT#4,"k",",",",DX1C",",",DY1C
2760 PRINT#4,"k",",",",-DX1C",",",DY1C
2770 REM *****
2780 TMIN2=0
2790 TMAX2=B/(R2C*TAN(RD))
2800 FOR RVAR2=TMIN2 TO TMAX2+.01 STEP TMAX2/8
2810 O1C=(R2C-B1+A)*SIN(DELTTC+RVAR2)
2820 O2C=R2C*RVAR2*COS(DELTTC+RVAR2)
2830 O31C=SQR((B*B)+(R2C*R2C*RVAR2*RVAR2))
2840 O32C=A/O31C
2850 O33C=(B*SIN(DELTTC+RVAR2))+(R2C*RVAR2*COS(DELTTC+RVAR2))
2860 CXFC=O1C-O2C-(O32C*O33C)
2870 CO1C=(R2C-B1+A)*COS(DELTTC+RVAR2)
2880 CO2C=R2C*RVAR2*SIN(DELTTC+RVAR2)
2890 CO31C=SQR((B*B)+(R2C*R2C*RVAR2*RVAR2))
2900 CO32C=A/O31C
2910 CO33C=(B*COS(DELTTC+RVAR2))+(R2C*RVAR2*SIN(DELTTC+RVAR2))
2920 CYFC=CO1C+CO2C+(CO32C*CO33C)
2930 PRINT#4,"k",",",",CXFC",",",CYFC
2940 PRINT#4,"k",",",",-CXFC",",",CYFC
2950 PRINT CXFC,CYFC,RVAR2,SQR(CXFC*CXFC+CYFC*CYFC)
2960 IF RVAR2=TMAX2 THEN TRAC=SQR(CXFC*CXFC+CYFC*CYFC)
2970 NEXT RVAR2
2980 OPEN"taks.dat"FOR OUTPUT AS#6
2990 OPEN"fillet.dat"FOR APPEND AS#5
3000 FOR RVAR2=TRAC TO RTAKC+.03 STEP (RTAKC-TRAC)/2
3010 X=RBC/RVAR2
3020 REM IF RVAR=RB THEN 13700
3030 ANG=1.570796-ATN(X/SQR(1-X*X))
3040 EV=TAN(RD)-RD
3050 EVX=TAN(ANG)-ANG
3060 REM T1=(3.141592*M)/2
3070 T=2*RVAR2*((T1/(2*R2C))+EV-EVX)
3080 T2V=(T/2)/RVAR2
3090 Y1=RVAR2*COS(T2V)
3100 X1=RVAR2*SIN(T2V)
3110 REM *****
3120 IF RVAR2=RTAKC THEN 3130 ELSE 3190
3130 BETAT=ANG-T2V
3140 PRINT#5,"atak2=";T2V*180/3.141592
3150 PRINT#5,"betat2=";BETAT*180/3.141592
3160 PRINT#5,"btr2=";BETAT
3170 CLOSE#5
3180 REM *****
3190 PRINT RVAR2,T,X1,Y1,T2V
3200 REM ****
3210 FSAY2=FSAY2+1
3220 PRINT RVAR2,ANG-T2V,T2V*180/3.141592
3230 PRINT#6,"yuk2";FSAY2;"=";ANG-T2V
3240 PRINT#6,"koor2";FSAY2;"=";T2V*180/3.141592
3250 PRINT#6,"crad2";FSAY2;"=";RVAR2
3260 REM ****
3270 PRINT#4,"k",",",",X1",",",Y1
3280 Q=X1 : QY=Y1
3290 PRINT#4,"k",",",",Q",",",Y1
3300 NEXT RVAR2
3310 REM *****
3320 REM OPEN"fillet2.dat"FOR APPEND AS#2
3330 FOR RVAR2=RTAKC TO RTC+.03 STEP (RTC-RTAKC)/3
3340 X=RBC/RVAR2
3350 IF RVAR2=RTAKC THEN 3600
3360 ANG=1.570796-ATN(X/SQR(1-X*X))

```

```

3370 EV=TAN(RD)-RD
3380 EVX=TAN(ANG)-ANG
3390 REM T1=(3.141592*M)/2
3400 T=2*RVAR2*((T1/(2*R2C))+EV-EVX)
3410 T2V=(T/2)/RVAR2
3420 REM IF RVAR2=RTc THEN 1690 ELSE 1740
3430 IF ABS(RVAR2-RTC)<.00001 THEN 3440 ELSE 3500
3440 PRINT#6,"rtc=";RTC
3450 BETA=ANG-T2V
3460 PRINT#6,"atip2=";T2V*180/3.141592
3470 PRINT#6,"beta2=";BETA*180/3.141592
3480 PRINT#6,"betar2=";BETA
3490 REM CLOSE#2
3500 Y1=RVAR2*COS(T2V)
3510 X1=RVAR2*SIN(T2V)
3520 FSAY2=FSAY2+1
3530 PRINT RVAR2,ANG-T2V,T2V*180/3.141592
3540 PRINT#6,"yuk2";FSAY2;"=";ANG-T2V
3550 PRINT#6,"koor2";FSAY2;"=";T2V*180/3.141592
3560 PRINT#6,"crad2";FSAY2;"=";RVAR2
3570 PRINT#4,"k","X1","Y1
3580 Q=-X1 : QY=Y1
3590 PRINT#4,"k","Q","Y1
3600 NEXT RVAR2
3610 REM *****
3620 PRINT#4,"k","0","RTC

3630 CLOSE#4,6

```

ÖZGEÇMİŞ

Muzaffer Barış YAVUZ 1980 yılında Ankara’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmit’te tamamladıktan sonra 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği bölümünü kazandı. 2003 yılında bu bölümden mezun oldu. 2003 yılında İ.T.Ü. Makina Fakültesi Konstrüksiyon yüksek lisans programına yerleşti.

