İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

NİCEM DEVİNBİLİMDE OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI, EVRİLTEÇ DEVİNBİLİMİ, KONAÇ BÜKÜMÜ VE YANAŞIK AÇILIMLAR: BAKIŞIK ÜSTEL GİZİLGÜÇLÜ DİZGELER

DOKTORA TEZİ

Semra BAYAT ÖZDEMİR

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

HAZİRAN 2021

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

NİCEM DEVİNBİLİMDE OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI, EVRİLTEÇ DEVİNBİLİMİ, KONAÇ BÜKÜMÜ VE YANAŞIK AÇILIMLAR: BAKIŞIK ÜSTEL GİZİLGÜÇLÜ DİZGELER

DOKTORA TEZİ

Semra BAYAT ÖZDEMİR
(702072005)

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı

Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Metin DEMİRALP

HAZİRAN 2021

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 702072005 numaralı Doktora Öğrencisi Semra BAYAT ÖZDEMİR, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "NİCEM DEVİNBİLİMDE OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI, EVRİLTEÇ DEVİNBİLİMİ, KONAÇ BÜKÜMÜ VE YANAŞIK AÇILIMLAR: BAKIŞIK ÜSTEL GİZİLGÜÇLÜ DİZGELER" başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Metin DEMİRALP** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Fethiye Aylin SUNGUR** ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Özlem YILMAZ ....
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Prof. Dr. Adem TEKİN ....
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Süha TUNA ....
Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi

Teslim Tarihi : **22 Nisan 2021**
Savunma Tarihi : **18 Haziran 2021**

Sevdiklerime,

ÖNSÖZ

Sav çalışmam sırasında bilgi ve deneyimlerini koşulsuzca aktaran ve bu yolda devam etmem konusunda yüreklendiren değerli hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'e teşekkürlerimi sunmak istiyorum. İsimleri aklıma geldikçe iyi ki tanımışım, iyi ki hayatımda varlar dediğim maddi, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen hocalarım ve arkadaşlarıma da teşekkür borçluyum. Bu uzun süreci beraber geçirdiğim, her anımda yanımda olan ve bana inanan sevgili aileme de özellikle teşekkür etmek istiyorum.

Haziran 2021 Semra BAYAT ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ .... **vii**
İÇİNDEKİLER .... **ix**
KISALTMALAR .... **xiii**
ÇİZELGE LİSTESİ .... **xv**
ÖZET .... **xvii**
SUMMARY .... **xxi**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Savın Amacı 2
1.2 Bilimcil Yazın Araştırması 4
2. ARTI ERKEDE YERLEŞİK DİPLİ SONSUZ KUYU GİZİLGÜÇLÜ DİZGELERİN DEVİNBİLİMİ **7**
2.1 Bakışık Üstel Uyumsuz Salıngaç Dizgesi 8
2.2 Doğabilimcil Birimsizleştirim (Boyutsuzlaştırım) 10
2.3 Olasılıkçıl Evrim Kuramı 11
2.3.1 Uzay genişletim 18
2.3.2 Uyumsuz üstel salıngacın nicem devinbiliminde Poisson Kümesimgelisi cebiri ve uzay genişletim 18
2.3.3 Evrim yetkinişleci ve dolaysız üslü toplamdiziler 20
2.3.4 Evrim dizeyinde esneklik yaratımı ve kullanımı 23
2.3.5 Uzay genişletimiyle esneklik çoğaltımı 26
2.3.6 Beklenen değer devinimi ve Olasılıkçıl Evrim Kuramı 27
3. UYUMSUZ ÜSTEL SALINGAÇ GİZİLGÜÇLÜ NİCEM DİZGELERDE BEKLENEN DEĞERLERİN ZAMANDA TOPLAMDİZİLERİ VE SENDELENİM KURAMCIL İNCELEYİŞLER **29**
3.1 Beklenen Değer Devinimi 29
3.1.1 Yetkinişleç ve onun altında kapalılık 31
3.2 Uzbilimcil Sendelenim Kuramı 33
3.2.1 Beklenen değer deviniminde sendelenim 34
3.2.2 Erkede sendelenim ve erkede sendelenim işleci 36
3.2.3 Zamanda sendelenim açılımı 37
3.2.4 Uyumsuz nicem salıngaç için sendelenim açılımında yakınsaklık 38
3.3 Özelsizleştirilmiş Dalga Çıkını 42
4. BEKLENEN DEĞER DEVİNİMİ VE UZAY GENİŞLETİMİYLE İKİNCİ DERECELİLİĞE İNDİRGEYİŞ **47**
4.1 Uzay Genişletimi ile İkinci Derecelilik Sağlanışı 48
4.1.1 Evrim dizeyinin sıfır özdeğerli özyöneyleri 50
4.2 Olasıklıkçıl Evrim Kuramı ve Özyineleyişli Denklemler 52

4.3 Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi 54
4.4 Evrilteç Devinbilimi 56
4.5 Evrilteç Devinbiliminde OLEVKU Çözümü 58
4.5.1 Arı ikinci derecelilik elde ediş.. 59
4.5.2 Evrilteç deviniminde arı dördül sıradan türevli denklemlerde OLEVKU çözüm yöntemleri.. 59
4.5.2.1 Toplamdizi açılımıyla çözüm.. 60
4.5.2.2 Kronecker üslü toplamdizi açılımıyla çözüm 60
4.5.3 Evrilteç denkleminin çözümü.. 62
4.5.3.1 Dördülleştirim.. 63
4.5.3.2 Evrilteç zaman üslü toplamdizilerde yakınsaklık 64
4.5.4 Sendelenimsizlik ereyinde dizge beklenen değerleri............................ 68
4.6 OLEVKU Çokçokterimlilerinde Derece Yükseltimi ile En Yüksek Tek Tekterimliyi Elde Ediş 69
4.6.1 Tek tekterimlinin katsayı dizeyinde değişebiliş ilişkileri kullanarak belirsiz değiştirge belirleyişleri 77
5. DIŞARLAK SÖBEKÇİL GİZİLGÜÇLÜ DİZGELERDE YALIN KONAÇ BÜKÜMÜ 85
5.1 Bir Özgürlük Dereceli Nicem Dizgelerde Konaç Bükümü 86
5.1.1 Konaç bükümcül işlev seçimi... 87
5.1.2 Dışarlak söbekçil konaç bükümü... 89
5.1.3 Belirtken gizilgüç belirlenmesi.. 90
5.1.4 Ağırlık işlevinin belirlenmesi ve özişlev yalınlaştırımı......................... 92
5.1.5 Sonsuz κ ereyinde çözümleyiş.. 94
5.1.6 Sonlu köşegencil dizey gösterilimli yanaşık baskın özdeğer belirleyişleri 95
5.1.7 Betik ve sonuçlar 100
5.2 Saptırım Açılımı Üzerine 103
5.2.1 Birinci kerteden saptırım açılımı terimleri 105
5.2.2 Betik ve sonuçlar 107
6. BÜTÜNLEŞİK BAKIŞIK ÜSTEL KUYU GİZİLGÜÇLÜ NİCEM DİZGE İÇİN ÖNGÖRÜLEN BİR KONAÇ BÜKÜMLÜ VE SAPTIRIMLI İZGECİL YÖNTEM GELİŞTİRİMİ 109
6.1 Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu (BBÜK) Gizilgüçlü Dizge 110
6.2 Bir Boyutlu Nicem Uyumlu Salıngaç... 111
6.3 Nicem Uyumlu Salıngaçtan Başlayan Konaç Bükümü 112
6.4 Dizgelerle Hamilton İşleçleri ve Karşılaştırımları.. 116
6.5 Erkeye Özgü Dönümcül Esneklik Katsayıları ve Yöntembilimcil Önemleri. 118
6.6 Saptırım Hamilton İşleci.. 119
6.7 Esneklik Gücey Katsayısının Dönümcül Değerinin Saptırım İşleci Boyunun Bastırımıyla Yaklaşık Olarak Belirlenişi 120
6.8 Esnek Gücey Katsayısı'nın Dönümcül Değeri'nin Kıyılandırımı................. 120
6.8.1 Birkesim özişlev özellikleri 121
6.8.2 Birkesim büyüklüklerin kıyılandırımı 124
6.8.3 Birkesim işlevle çarpım işleçleri için geçiş tümlevlerinin belirlenişi..... 126
6.8.4 Geçiş dizeyleri asal köşegen öğelerinin birkesim önemli özellikleri 128

6.8.5 Gizilgüçle ilgili beklenen değer belirlenişi 133
6.8.6 Devinirlikle ilgili beklenen değer belirlenişi 134
6.9 Saptırım Açılımı 136
6.10 Değerlendirimler, Yorumlar, Öneriler, ve de, Uyarılar 139
7. SONUÇLAR 141
KAYNAKLAR 143
EKLER 157
ÖZGEÇMİŞ 208

KISALTMALAR

BEBBYT	: Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu
OLEVKU	: Olasılıkçıl Evrim Kuramı
GTD	: Göre Türevli Denklem
STD	: Sıradan Türevli Denklem
DEUG	: Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletim
PREVTH	: Probabilistic Evolution Theory
G4SMC	: Group for Science and Methods of Computing
CASE	: Constancy Adding Space Extension
PKD	: Poisson Kümesimgeli Denklemleri
KB	: Konaç Bükümü
BBÜK	: Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu
NUS	: Nicem Uyumlu Salıngaç
KBNUS	: Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngaç
SHİ	: Saptırım Hamilton İşleci
KD	: Katsayı Dizeyi
GSTD	: Gecikimli Sıradan Türevli Denklem
us	: Uyumlu Salıngaç
tib	: Türevi İşlevcil Bağımsız

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 5.1: $\alpha_0 = 0, 0.5, 1$ değerleri için 49×49 ve 50×50 alt dizey kesimlerinin ilk 20 özdeğeri.. 101
Çizelge 5.2: $\alpha_0 = 1$ için 50×50, 100×100, 200×200 ve 500×500 alt dizey kesimlerinin seçili özdeğerleri. 102
Çizelge 5.3: $\alpha_0 = 1$ için 50×50, 100×100, 200×200 ve 500×500 alt dizey kesimlerinin saptırım düzeltimli seçili özdeğerleri............................. 108

NİCEM DEVİNBİLİMDE OLASILIKÇIL EVRİM KURAMI, EVRİLTEÇ DEVİNBİLİMİ, KONAÇ BÜKÜMÜ VE YANAŞIK AÇILIMLAR: BAKIŞIK ÜSTEL GİZİLGÜÇLÜ DİZGELER

ÖZET

Nicem İşleybilim (ing: Quantum Mechanics), durumu duyularla dolaysız algılanamayacak, ancak, aygıtlar yardımıyla algılanabilecek düzeyde küçük nesnecikler üzerinde çalışılan bir bilim dalıdır. Bu nesneciklerin konum, devinirlik (momentum), erke (enerji) gibi tüm bilgilerine dalga işlevi (ing: wave function) yardımıyla ulaşılmaya çalışılır. Bu işlev "Shrödinger Denklemi"nin çözümüdür. Göre türevli bir denklem olan Schrödinger Denkleminin çözümünün belirlenişinde yaşanan sorunlar türlü yöntemlerin geliştirilişi ile aşılmaya çalışılmıştır. Ancak, bir nicem dizge için işe yarayan ve çözümü önemli ölçüde yalınlaştıran yöntem bir başka dizgeye uygulanırken sorunlar çıkabilmekte, verimin düşüşü ve üstelik çözümden uzaklaşım görülebilmektedir. Bu anlamda, özelsizde (genelde) geçerli bir yöntem geliştirmek büyük önem taşımaktadır. Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) üyelerince son yıllarda yapılan çalışmalar ile bu çözüm karmaşasını giderebilecek ve tüm durumlarda uygulanabilecek yöntemler geliştirilmesi amaçlanmıştır. Olasılıkçıl Evrim Kuramı (OLEVKU) Prof. Dr Metin Demiralp'çe üretilen ve topluluk çalışmalarıyla geliştirilen, bu savın odağında olan yöntemlerden biridir. Nicem dizgelerin olasılıkçıl doğası, bu yöntemle çalışmamız için en önemli güdüleyiş (motivasyon) kaynaklarından biridir. Çünkü, geliştirmeye çalıştığımız çözüme yaklaşımın temelinde beklenen değerlerin devinimi bulunmaktadır. Aslında, bu yöntemin kullanımı nicem dizgeleriyle kısıtlı değildir. OLEVKU, sağ yanları ikinci derece çokçokterimli işlevler olan birinci kerteden, belirtik (ing: explicit), özerk (ing: autonomous) sıradan türevli denklem takımlarının herhangi birinin başlangıç değer sorununu çözmek için kullanılabilir. Kuram, çok değişkenli Taylor toplamdizilerinin özelsizleştirimi olan Kronecker üs toplamdizilerine dayanmaktadır. Türlü doğrucul cebir araçlarıyla katsayı dizeylerinin öğelerindeki esneklikleri kullanışın yararları bu yöntemden kaynaklanmaktadır. Ancak bu sav kapsamında uygulayımcıl olarak Nicem Devinbilim sorunları ele alınmıştır.

Nicem devinbilim sorunlarınının çözümü de dalga işlevinin uzbilimcil (matematikçil) yapısından dolayı güçlükler taşımaktadır. Bu savda dalga işlevini belirlemeksizin, başlangıç değerlerini ve göre türevli denklemi (GTD) sıradan türevli denklem (STD) kümesine dönüştürerek kullanan bir yaklaşım geliştirilmeye çalışılmaktadır. Dizge Hamilton İşlecinde görünen işleçleri kapsayan, işlevcil olarak bağımlı, ancak, doğrucul olarak bağımsız öğelerden oluşan "İşleç taban kümesi" ele alınarak ve bu küme öğelerinin beklenen değerleri arasında bir sıradan türevli denklem kümesi oluşturup herhangi bir işlecin beklenen değerini bu kümenin çözümü üzerinden belirleyişe çalışmak bu savın amaçlarından birisidir. OLEVKU ile beklenen değerlerin zamanda deviniminin açıklanışına çalışılmaktadır. Sonuçta, kuramsal yapısını oluşturduğumuz bu yöntem ile bir nicem dizgenin erke düzeylerinin ve karşılık gelen beklenen

değerlerin belirlenişine çabalanmıştır. Göstermelik (örnek) dizge olan "bir özgürlük dereceli uyumsuz üstel bakışık salıngaç (ing: one-degree-of-freedom anharmonic exponential symmetric oscillator)" dizgesinin yapısından kaynaklanan sorunlar her çalışma evresinde yeni bir çözüm arayışına iteklemiş ve bu da kuramın gelişimi için önemli katkılar sağlamıştır.

Savın her bir bölümü, kuramcıl ve/veya uygulayımcıl katkılar içermektedir. İlk bölüm, giriş niteliklidir. Savda ilgilenilen sorun ve savın amacı yeterince ayrıntılı olarak açıklanmaktadır. Sorun, çözüm yöntemleri ve topluluk çalışmalarımız ile ilgili bilimcil yazın araştırımları bu bölümde verilmiştir.

Hamilton İşleci ve öteki dizge işleçleri ile özelsiz (genel) Schrödinger denklemi ikinci bölümün başında verilmektedir. Sonrasında, uygulayışlar için özel olarak seçtiğimiz biçe olan "Üstel Uyumsuz Bakışık Nicem Salıngaç (ing: Exponentially Anharmonic Symmetric Quantum Oscillator)" tanımlanmaktadır. Çözümleyişleri yalınlaştırmak için kullanılan "Doğabilimcil Birimsizleştirim" kavramı, o bölümün geri kalanında verilmiştir. Yukarıda sözedilen "Olasılıkçıl Evrim Kuramı" bu bölümde ayrıntılı olarak açıklanmaktadır. Ayrıca, "Uzay Genişletim" kavramı da bölümün temel içeriğinden önce verilmiştir. İkinci bölüm, uyumsuz üstel salıngacın evrim dizeyi ile nicem devinimin temel tanımları ve denklemleri ile sona ermektedir.

Üçüncü bölüm, beklenen değer devinimi denklemlerinin oluşturuluşuyla başlamakta ve "Uzbilimcil Sendelenim Kuramı (ing: Mathematical Fluctuation Theory)" ile ilerlemektedir. Burada, "Sendelenimsizlik Yaklaştırımı" kavramı da verilmiştir. Daha sonra, beklenen değer deviniminde sendelenim olgusu incelenmektedir. Bu arada, zamanda toplamdizilerin (ing: series in time) sendelenim açılımı ve yakınsaklık çözümleyişleri de incelenmektedir. Ortaya çıkan durumda, "Özelsizleştirilmiş Dalga Çıkını (ing: Generalized Wave Packet)" tanımının çözümleyişleri yalınlaştırabileceği sonucuna varılmıştır. Bununla ilgili öneriler bu bölümün sonunda verilmiştir.

Uzay genişletiminin yeniden ele alındığı dördüncü bölümde, ikinci dereceliliğe indirgeyiş sağlandıktıktan sonra OLEVKU kullanımı ele alınmıştır. Beklenen değerlerinin devinimi için belirlenen işleç tabanı ile iki terim özyineleyişli sıradan türevli yöney denklem oluşturulmuş ve bu denklemi çözmek için bir yöntem geliştiriş adımları da bu bölümde verilmiştir. Uzay genişletimine dayalı bir yöntem olan "Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletim (DEUG)" tanımlanmış ve sıradan türevli yöney denklem de yeniden düzenlenmiş ve eşsiz olmayan katsayı dizeylerini elde etmek için kullanılmıştır. Dördüncü bölüm, DEUG'u "Evrilteç Devinimi"nde kullanarak, dördül (ikinci dereceden) bir çokterimli elde ederek, "Tek Tekterimli OLEVKU" ile en yüksek dereceden tekterimli denklemi oluşturduktan sonra çözümü gerçekleştirişin kuramcıl bilgisiyle sona ermektedir.

Beş ve altıncı bölümlerde "Konaç Büküm (ing: Coordinate Bending)" yöntemi ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Yöntemin ortaya çıkışı, geliştirilişi, "Konaç bükümcül işlev" seçimi beşinci bölümde verilirken, ilk uygulayış "Dışarlak Söbekçil Konaç Bükümü (ing: Hyperbolic Coordinate Bending)" de yine bu bölümde yapılmıştır. "Saptırım Açılımı (ing: Perturbation Expansion)" nın ayrıntılı anlatımı, açılımın en baskın öğesinin bulunuşu ile yanaşık özdeğerlerin Mupad betikleriyle elde edilişi ve çözümlemeler de bu bölümün sonunda verilmiştir.

"Bütünleşik Bakışık Tümlevcil Üstel Kuyu Gizilgüçlü Nicem Dizge" için "Konaç Büküm" yönteminin açıklandığı altıncı bölümde, $\varkappa$ ile simgelenen gizilgüç değiştirgesinin erkenin çok büyük değerleri dolaylarında çalışılacağı öngörülerek bir saptırım açılımından nasıl yararlanılabileceği ve bu yolda Nicem Uyumlu Salıngaç'ın (ing: Quantum Harmonic Oscillator) dizgecil özelliklerinin yardımcı olarak nasıl kullanılabileceği gündeme getirilmiş ve yukarıda belirtilen çok büyüklük bağlamında bir saptırım açılımı geliştirilebileceği de vurgulanmıştır. Saptırım açılımının en baskın öğelerine odaklanılmış, erke değeri belirleyişinde kesin anlatımların nasıl elde edilebileceğinden sözedilmiş, ancak, daha yalın bir yapılandırım elde edebilmek için baskın erke anlatımları yerine onların kıyılandırımına ağırlık verilmiştir. Saptırım açılımının taban öğeleri bölümün sonundan biraz önce verilmiştir.

Savda elde edilen sonuçlar, öneriler, ve de uyarılar yedinci bölümde verilmiş ve böylece savın ana bölümleri bütünleştirilmiştir.

Sav kapsamında çalışılan ve kuramcıl olarak oluşturulan öteki çalışmalar da savın sonunda ek bölümler olarak sunulmuştur.

PROBABILISTIC EVOLUTION THEORY, EVOLVER DYNAMICS, COORDINATE BENDING AND ASYMPTOTIC EXPANSIONS: QUANTUM SYMMETRIC EXPONENTIAL POTENTIAL SYSTEMS

SUMMARY

Classical mechanics investigates the motion behaviours of objects, which can be perceived directly with the senses, under various forces. The models under consideration are in macroscale and they are created with position and momentum data. Determination of both momentum and position of a particle with absolute accuracy at the same time is impossible in microscale. This point of view, proposed by Werner Heisenberg in 1927, is called the “Uncertainty Principle”. The Uncertainty Principle is one of the fundamental principles of Quantum Mechanics. Quantum Mechanics deals with the states of particles indirectly perceptible with devices. In the theory of quantum mechanics, a function containing all the information/state (position, momentum, energy...) of a particle is defined. This function is called “Wave Function”. The requested information is found with the help of this function. The wave function is the solution of the Schrödinger equation, which is a partial differential equation. The determination of the wave function is one of the main issues of quantum mechanics problems. Cases that can be solved analytically are very few in number and can only occur under certain specific conditions. For most of the quantum systems, determining spectral properties is not easy. The use of approximation methods comes to the fore here. Considerable number of approximation methods have been developed for various special cases. However, when a method, which works for a problem and facilitates the solution significantly, is applied to another problem, certain difficulties may arise, efficiency decreases and divergence from the solution can be seen. There is a need to develop a method that is general-oriented and is used to calculate observable values without solving the Schrödinger equation.

The observables of quantum mechanics are determined from a known wave function through the expectation values of suitable set of operators. However, their determination by wave function is not a situation that can be easily overcome as it appears. The process calls for integral computation over the wave function. For this, first of all, the wave function has to be determined. In this case, it is required to solve the Schrödinger equation one way or another. The aim here is to avoid this solution process. Even if we seem to be using the wave function, it is possible to perform this avoidance action by disabling it and creating equations that take the expected values as unknown. The equations between expected values are not necessary to be merely algebraic. Taking derivative over time and then creating ordinary differential equations is also preferable to a partial differential equation solution. For this purpose, an approach is developed to solve quantum mechanics problems in this thesis. According to this approach, instead of the wave function itself, the initial structure at the beginning of the motion is preferred, so that it is desirable to solve a set of ordinary differential equations instead of a partial differential equation. In this regard, it is aimed to use a “Operator Basis Set” that includes operators appearing in the system Hamiltonian and

newly defined operators which are functionally dependent but linearly independent to the system operators. It is envisaged that the basis set will be closed under the action of commutation that is to say that commutator of each element and system Hamiltonian can be described by a linear combination of basis set elements. Under this prediction, it is a fact which can be easily demonstrated that the expected value of any operator, which can be described with a linear combination of finite or infinite terms on these basis set elements, can be given with an equivalent linear combination on the expected values of these basis set elements, due to the linear structure of the expected value. Therefore, it is one of the preliminary goals of this thesis to create a set of ordinary differential equations between the expected values of the set elements and determine the expected value of any operator mentioned above through the solutions of this equation set. The determination of the variations of the expected values in time with the set of ordinary differential equations obtained in this way is called Probabilistic Evolution Theory (PREVTH). PREVTH is constructed and developed by Prof. Dr. Metin Demiralp at the base and related with the fields of the topics studied by members of "Group for Science and Methods of Computing (G4SMC)". Probabilistic nature of quantum systems is the motivation for us to work with this method. Because expectation value dynamics is at the basis of the approach we are trying to develop. In fact, the use of this method is not limited to quantum systems. PREVTH can be used to solve any initial value problem of first order explicit autonomous ordinary differential equation sets with second degree multinomial right hand side functions. The theory is based on the Kronecker power series which are the generalization of multivariate Taylor series. The advantages of using flexibilities in the parameters of coefficient matrices with various linear algebra tools results from the method.

The content of this thesis has contributed to the development of PREVTH in many ways. Each section contains theoretical and/or practical contents regarding the contribution.

The first section is the introduction section. The problem of interest and aim of the thesis are explained globally in detail. The literature review about the problem, the solution methodologies and our group studies are given in that section.

The general Schrödinger equation with Hamiltonian and other system operators are given in the beginning of the second section. Later, the Exponentially Anharmonic Symmetric Quantum Oscillator, the model we have chosen specifically for applications, is defined. The concept of "Physical Dimensionlessness" for convenience in the analysis is given without loss of generality in the continuation of that part. The "Probabilistic Evolution Theory" mentioned above, is described in detail in this section. Also the concept of "Space Extension" is given before the essential content. The second section ends up with the basic definitions and equations of quantum dynamics of anharmonic exponential oscillator with evolution matrix.

The third section begins with the formation of expectation value dynamics equations and continues with the "Mathematical Fluctuation Theory". Here, the concept of "Fluctuationlessness Approach" is given. Afterwards, the fact of fluctuation in expectation value dynamics is studied. Meanwhile, fluctuation expansion in time series and the convergence analysis are studied. In the resulting case, it is concluded that the definition of "Generalized Wave Package" may facilitate analysis. Suggestions for this are given at the end of this section.

In the fourth section where space expansion is reconsidered, a reduction to the second degree is achieved and then the use of PREVTH is handled. A two-term recursive ordinary differential equation is created on the operator basis set for the dynamics of the expectation values, and the steps of developing a method for solving this equation are also given in this section. A method based on space extension, "Constancy Adding Space Extension (CASE)" is described and used to get rearranged and non-unique coefficient matrices in ordinary derivative equations set. The fourth section ends up with the theoretical knowledge of using the CASE in the "Evolver Dynamics" obtaining a quadratic (second degree) polynomial and solving it after getting the highest order monomial equation with "Single Monomial PREVTH".

In the fifth and sixth sections, the "Coordinate Bending" method is explained in detail. While the emergence and development of the method with the selection of coordinate bending functions are given in the fifth section. The first practice "Hyperbolic Coordinate Bending" is also made in this section. Analysis for anharmonicity parameter at infinite limit is given before the determination of dominant asymptotic eigenvalues. Asymptotic eigenvalues are obtained by scripting in Mupad and analyzed later. "Perturbation Expansion" concept is also given at the end of fifth section.

In the sixth chapter in which Coordinate Bending methodology for "Integrated Symmetric Exponential Well Potential Quantum System" is expained, how to make use of perturbation expansion by assuming that the potential energy parameter represented by κ will work around very high energy values, how the systemic properties of the"Quantum Harmonic Oscillator System" can be used through this way are discussed and it is emphasized that perturbation expansion can be developed in the context of the high values mentioned above. While focusing on the most dominant term of the perturbation expansion, it was mentioned how to obtain precise expressions in determining the energy value, but, in order to obtain a simpler structure, emphasis has been placed on the upper and lower bounds of dominant energy instead of its expressions. The basics of perturbation expansion are given just before the end of the section.

The results obtained in the thesis, suggestions, and warnings are given in the seventh section and thus the main parts of the thesis have been integrated.

Other topics studied and theoretically created within the scope of the thesis are presented as appendix sections at the end of the thesis. These are the search for approximate solutions in recursive equations with the help of dominant above series, obtaining non-recursive ordinary differential equation and search for solution with "Delay Differential Equations" new Hamilton operator definition with interval folding, space pruning method, solution search with Rayleigh and Ostrowski ratios for applications based on "Differential Difference Equation".

1. GİRİŞ

Duyularla dolaysız algılanabilir (ing: macro) düzeyde, konum (ing: position) ve devinirlik (ing: momentum) bilgileri kullanılarak elde edilen biçeler (ing: models) ile nesnelerin türlü gücey (ing: force) altında devinimleri başal işleybilim (ing: classical mechanics) yardımı ile incelenebilmektedir. Nesnenin konumunun ve hızının kesin doğrulukla belirlenebilişi durumu aygıtlarla dolaylı algılanabilir (ing: micro) düzeye inildiğinde ortadan kalkmaktadır. Heisenberg belirsizlik ilkesi ile açıklanan bu duruma göre bir eksiciğin (ing: electron) devinirlik ve konumu aynı anda kesin doğrulukla ölçülemez. Belirsizlik ilkesi, dolaylı algılanabilir düzeydeki nesnecikler ile ilgilenen Nicem İşleybilimin (ing: Quantum Mechanics) en temel ilkelerinden biridir. Nicem İşleybilim kuramında nesneciğin tüm bilgilerini/durumunu (konum, devinim, erke,...) içeren bir Dalga İşlevi (ing: Wave Function) tanımlanır. İstenen bilgiler bu işlev yardımı ile bulunur. Dalga işlevi, göre türevli denklem (ing: partial differential equation) olan Schrödinger denkleminin çözümüdür. Dalga işlevinin belirlenişi nicem işleybilimcil sorunlarının ana konularından biridir. Kesin (ing: analytic) olarak çözülebilen durumlar sayıca oldukça azdır ve ancak belirli özel koşullar altında gerçekleşebilir. Türlü özel durumlar için azımsanmayacak sayıda yaklaştırım yöntemleri gelistirilmiş olsa da, özelsize (genele) yönelik nitelikte olan ve Schrödinger denklemini çözmeden gözlemlenebilir değerleri bilgisayımla (hesaplamayla) bulmaya yarayan bir yöntem geliştiriş gereksinimi vardır.

Nicem işleybilimin gözlemlenebilen büyüklükleri, bilinen bir dalga işlevi üzerinden uygun bir takım işleçlerin (ing: operators) beklenen değerleri (ing: expectation values, expected values) aracılığıyla tanımlanabilen değerlerdir. Ancak, bunların dalga işlevi üzerinden belirlenişi, göründüğü düzeyde kolaylıkla aşılabilecek nitelikte bir durum değildir. Her şeyden önce dalga işlevi üzerinden tümlev (integral) bilgisayımı ve bunun için de dalga işlevinin belirlenişini gerektirir. Bu ise, Schrödinger denkleminin, öyle ya da böyle, çözümünü gerektirir. Buradaki amaç ise bu çözümden kaçınmaktır. Bu da, dalga işlevini kullanıyor gibi görünsek bile onu devre dışı bırakmaktır. Dolayısıyla, dalga işlevi değil de beklenen değerleri bilinmeyen olarak alan denklemler oluşturmak bu kaçınım eylemini gerçekleştirebilecek nitelikte görünmektedir. Beklenen değerler arası denklemlerin ille de yalnızca cebircil nitelikli oluşu gerekmemektedir. Zamana göre türev alımını gündeme getirmek ve dolayısıyla sıradan türevli denklemler (ing: ordinary differential equations) oluşturmak da göre türevli denklem çözümüne karşın yeğlenebilecek eylemlerdendir.

1.1 Savın Amacı

Bu savda (tezde) nicem işleybilimcil sorunların çözümü için, dalga işlevini değil onun yalnızca devinimin başlangıç anındaki yapısını kullanan ve göre türevli denklem yerine sıradan türevli denklem takımı çözümünü gündeme getiren bir yaklaşım sergilenmek istenmektedir. Bu doğrultuda, dizge Hamiltonyen'inde görünen işleçleri kapsayan, onlara işlevcil olarak bağlı olup doğrucul olarak bağımlı olmayan işleçleri de içeren bir "İşleç Taban Kümesi"nin kullanıma alınımı ereklenmektedir (hedeflenmektedir). Bu kümenin, dizge Hamiltonyen'i ile değiştirim eylemi altında kapalı olacak, yani her bir küme öğesinin dizge Hamiltoniyen'i ile değişecinin (ing: commutator), yine bu kümenin öğeleri türünden bir doğrucul birleşim ile anlatılabilişine özen gösterecek biçimde oluşturulacağı öngörülmektedir. Bu öngörüm altında, bu küme öğeleri üzerinde sonlu ya da sonsuz terimli bir doğrucul birleşimle anlatılabilen herhangi bir işlecin beklenen değerinin de, beklenen değerin doğrucul bir yapı taşıyışı nedeniyle, bu küme öğelerinin beklenen değerleri üzerinde eşdeğer bir doğrucul birleşimle verilebileceği kolayca gösterilebilecek bir olgudur. Dolayısıyla, küme öğelerinin beklenen değerleri arasında bir sıradan türevli denklem takımı (STDT) oluşturarak yukarıda belirtilen türden herhangi bir işlecin beklenen değerinin bu STDT çözümleri üzerinden belirlenişi bu savın öncül amaçlarından birisidir. Bu yoldan elde edilen STDT ile beklenen değerlerin zamanda deviniminin belirlenişi "Olasılıkçıl Evrim Kuramı (OLEVKU)" (ing: Probabilistic Evolution Theory (PREVTH)) olarak adlandırılan ve tabanda Prof. Dr. Metin Demiralp'çe üretilip "Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT)" üyelerince değişik doğrultularda geliştirilmiş ve geliştirilmekte olan konularının alanına girmektedir. Bu bağlamda, kuramın ana çizgilerinde topluluk içindeki çalışmalarda ortaklıklar söz konusudur. Ancak tüm çalışmalar birkesim çok önemli ayrıntılarda, gerek kavramcıl gerekse uygulayımcıl düzeyde, özgün ayrılıklar içermektedir.

Çalışma sırasında inceleyişleri yalınlaştırabilmek için “Doğabilimcil Birimsizleştirim” uygulanmış ve denklem içlerindeki büyüklükler uygun ölçeklendirim çarpanları ile birimsizleştirilmiştir. “Uzay Genişletim” yöntemi ile boyut arttırımı yaparak ve dolaysızüslü (ya da Kronecker) toplamdizilerindeki esnekliklerden yararlanılarak yapıcıl indirgeyişler elde edilmiştir. “Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletim (DEUG)” ile sıradan türevli denklem takımlarındaki katsayı dizeylerinin eşsiz olmayacak biçimde yeniden düzenlenebileceği ve bunun çözümleyişleri yalınlaştırmak için kullanabileceği gözlenmiştir.

Beklenen değerlerin devinimi için işleç taban kümesinin üzerinde iki terimli özyineleyişli (ing: recursive) STD oluşturulmuş ve elde edilen bu denklemin çözümüne yönelik bir yöntem geliştirimine gidilmiştir. İşleçlerin beklenen değer denklemleri üzerinde uzbilimcil sendelenim kuramı ve sendelenimsizlik yaklaştırımı incelenerek, elde edilen denklemlerde erke korunumu yasaları ve yakınsaklık koşulları gözlemlenmiştir. Başlangıç beklenen değerleri belirlenişi için özelsizleştirilmiş (genelleştirilmiş) dalga çıkını oluşturumu yoluna da gidilebileceğinden sözedilmiştir.

Evrilteç Devinbiliminde DEUG kullanarak yalnızca dördül (ikinci derece) çokterimli elde ediminin ve “Tek Tekterimli OLEVKU” (ing: Single Monomial PREVTH) ile en yüksek dereceli tekterimli denklem elde edilerek çözüme gidilebileceğinin kuramcıl bilgisi verilmiştir.

Yeni bir yöntem olan “Konaç Bükümü” ile biçelenen dizgenin konacı dışında bir konaç ile çalışarak elimizdeki sorunu, çözümü bilinen dizgeleri andırtmak ve bu biçimde izgecil değerleri elde etmek amacıyla iki ayrı bölümde araştırımlar gerçekleştirilmiştir. Bu bölümlerde saptırım açılımı ile düzeltim terimleri eklenerek gerçek çözüme yaklaşık değer elde edilişi üzerine kuramcıl ve uygulayımcıl araştırımlar da anlatılmıştır.

Savda, uygulayımcıl olarak “bir özgürlük dereceli uyumsuz üstel bakışık salıngaç (ing: one-degree-of-freedom anharmonic exponential symmetric oscillator)” dizgesi biçe olarak alınmıştır. Bu, savın özgün uygulayımcıl kesimlerinden birisidir.

Sav evrelerinde üzerinde çalışılan ve kuramcıl yapıları oluşturulan diğer konular da ek bölümler olarak savın sonunda verilmiştir. Bunlar özyineleyişli denklemlerde büyültke (ing: majorant) toplamdizi yardımıyla yaklaşık çözüm arayışları, özyineleyişsiz sıradan türevli denklem oluşturumu ve Doğrucul Gecikimli Sıradan Türevli Denklemler ile çözüm arayışları, aralık katlılaştırımı ile yeni Hamilton işleci tanımı, uzay budayış yöntemi, Sıradan Türevli ve Değişimli Denklemler tabanlı uygulayışlarda Rayleigh ve Ostrowski oranları ile çözüm arayışlarıdır.

Çalışmanın sonuçta ulaşılmak istenen amacı ise dizgenin evrim dizeyinin sıfır özdeğerlerini ve onların her birine karşılık gelen özyöneylerini belirlemektir. Bu, kavramcıl tabandaki özgünlüktür. Daha ötedeki amaç ise yalıtılmış, ve dolayısıyla özerk durumda olan, dizgelerin erke değerlerini ve onlara karşılık gelen beklenen değerleri belirlemek için, en azından yaklaştırım amaçlı, yöntemler geliştirmektir. Sav çalışmasında ulaşılan sonuçlar, bu sonuçlara ilişkin yorumlar ve de uyarılar savın son bölümünde verilmiştir.

1.2 Bilimcil Yazın Araştırması

1900'lü yılların başından bu yana, üzerinde araştırımlar gerçekleştirilen nicem devinbilimde önemli aşamalar gerçekleştirilmiştir. Özellikle 1927 yılında ileri sürülen, Heisenberg belirsizlik ilkesi [1] yeni bir yaklaşımın kapısını aralamıştır. Nicem devinbilim sorunları için önerilen çözümler arasında Schrödinger denklemi [2] ve Feynman erişimyolu tümlevi bağıntılandırımı (ing: Feynman path integral formulation) [3] kullanım kolaylığı ve yaygın kullanışlılıkları ile öne çıkar [4, 5]. Doğrudan çözümleri özel durumlar için bulunabilen bu denklemlerin, özelsiz (genel) çözümlerini belirlemek bilim bireylerinin yıllardır uğraştığı ve günümüzde de üzerinde oldukça çalışılan önemli bir sorundur [6–8]. Hemen her nicem devinbilim okunağında birbirlerine üstünlükleri tartışılan türlü yöntemler bulunmaktadır [5, 9–11].

Prof. Dr. Metin Demiralp'in de nicem devinbilim alanında araştırımları olmuş ve sıradan türevli denklemlerin çözümüne yönelik geliştirdiği yöntemleri [12–15] türlü sorunlara uygulamıştır. Bilimcil araştırım ortağı H. Rabitz ile geliştirdikleri saptırım açılımı ve onu andıran yöntemler ile nicem dizgelerin eniyileyişli denetimi sorunlarına etkin çözümler getirmişlerdir. [16–18].

Uyumlu ve uyumsuz salıngaç biçeleri nicem devinbilim sorunlarını anlamaya yönelik ele alınabilecek en yalın biçelerdendir. Çok sayıda araştırım bu iki sorunu temel alarak gerçekleştirilmiştir [5, 11, 19–22]. BEBBYT içerisinde de geliştirilen yöntemler bu sorunları çözmek icin uygulanmış ve öneme değer sonuçlar elde edilmiştir [23–28].

Son yıllarda Prof. Demiralp ve topluluğunca geliştirilen Olasılıkçıl Evrim Kuramı ise başlangıç değer koşullu sıradan türevli denklemlerin çözümüne değişik bir bakış açısı getirmiş ve doğrucul olmayan denklem takımlarını, doğrucul özerk denklem takımlarına dönüştürerek çözüşü ereklemiştir [29–39]. Emre Demiralp, Metin Demiralp ve Luis Hernandez Garcia'nın ortak araştırımları, bu yöntemin devinir dizgelere (ing: dynamic systems) uygulayışlarını içerir [40, 41]. BEBBYT üyelerince yapılan araştırımlar ile bu yöntem olgunlaştırılmaktadır [42–62].

2. ARTI ERKEDE YERLEŞİK DİPLİ SONSUZ KUYU GİZİLGÜÇLÜ DİZGELERİN DEVİNBİLİMİ

Herhangi bir nicem (ing: quantum) dizgenin (sistemin) devinimini betimleyişimize yarayan eşitlik aşağıda (2.1) ile verilen "Schrödinger Denklemi" dir. Dizgeyi oluşturan nesnecik ya da nesneciklerin tüm durum bilgileri, Schrödinger denkleminin de çözümü olan ve "dalga işlevi" (ψ) olarak adlandırılan, büyüklük aracılığıyla tanımlanır [4]. Dalga işlevi zaman (t) ve konum (x) değişkenlerine bağımlı olarak değer alabilen bir büyüklüktür.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=\widehat{H}\psi(x,t), \qquad \psi(x,0)=\psi_0(x) \tag{2.1}$$

Burada, $\widehat{H}$ Hamilton işlecini (ing: operator), $\hbar$ indirgenmiş Planck değişmezini (evrencil bir büyüklük olan Planck Değişmezi'nden, h'dan, $\hbar\equiv\frac{h}{2\pi}$ ile üretilir) simgelemektedir. Schrödinger denkleminin çözümü Hamilton işlecinin yapısının ne düzeyde yalın olduğu ile ilintilidir. Dizgenin Hamilton işleci onun toplam erkesini (enerjisini) betimler. Özgürlük düzeyi 1 olan ve $V(\widehat{q})$ gizilgüç (ing: potential) işlevi altında devinen bir dizgenin Hamilton işleci aşağıdaki eşitlikteki gibi devincil (kinetik) kesimle gizilgüç kesiminin toplamı olarak yazılabilir.

$$\widehat{H}=\frac{1}{2\mu}\widehat{p}^2+V(\widehat{q}) \tag{2.2}$$

Burada $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, ve de, μ sırasıyla devinirlik ve konum işleçleri (ing: operators) ile kütleyi (ing: mass) simgelemektedir. Devinirlik ve konum işleçleri bir $f(x)$ işlevine

$$\widehat{p}f(x)\equiv-i\hbar f'(x), \qquad \widehat{q}f(x)\equiv xf(x) \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{2.3}$$

biçiminde etki ederler.

Schrödinger denkleminin çözümü nicem işleybilim (ing: mechanics) sorunlarının en başında gelir. Dalga işlevini kesin olarak belirlemek oldukça az sayıda dizge için olanaklıdır. Birkesim özel dizgeler için denklemi çözmeye yarayan yaklaştırım yöntemleri bilimcil yazında (literatürde) bulunmaktadır. Ancak, Schrödinger denklemini çözmeden istenilen büyüklükleri elde edebilecek ve de özelsize uygulanabilecek bir yöntem bu an için geliştirilmiş değildir. Schrödinger denklemi, birden çok bağımsız değişken ve onlara bağımlı türevleri içerdiğinden dolayı, göre türevli (ing: partial derivative) bir denklemdir. Denklemdeki zamana göre türevin kertesi (mertebesi), (2.1) bağıntısından da görülebileceği üzere, 1'dir. Konuma göre türevin kertesi ise ele alınan dizgenin (2.2)'de verilen Hamilton işlecinden görülebilir. Hamilton işleci içindeki devincil erke (ing: kinetic energy) anlatımının, devinirlik işlecinin en yüksek ikinci derece anlatımlarını içerişinden dolayı, konuma göre türev de ikinci kerteden olur. Zamana ve konuma göre değişik kertelerden türev içerişinden dolayı, bu Schrödinger denklemini "parabolik" göre türevli denklem olarak nitelendirebiliriz. Bu denklemleri çözerken başlangıç ve/veya kıyı (ing: boundary) değerlerine gereksinim vardır. (2.1)'de dalga işlevinin $t = 0$ anındaki değeri $\psi_0(x)$ ile simgelenmiş ve böylelikle bir başlangıç değer sorunu tanımlanmıştır. Başlangıç anındaki işlev açık olarak verilmişse, ilkecil olarak, öteki tüm artı t anları için dalga işlevi belirlenebilir [6]. Ancak bu araştırımda amaç dalga işlevinin başlangıç yapısı dışındaki işlevlere gerek kalmaksızın, beklenen değerler üzerinden bilgisayım (hesaplama) yapacak yöntemler geliştirmektir.

2.1 Bakışık Üstel Uyumsuz Salıngaç Dizgesi

Nicem devinbilim sorunlarını anlayışa yönelik olarak ele alabileceğimiz en yalın biçeler (ing: models) uyumlu ve uyumsuz salıngaçlardır. Sav kapsamında, Hamilton İşleci'nde gizilgüç anlatımı aşağıdaki gibi tanımlanan, üstel yapı içeren, bu nedenle bakışık üstel uyumsuz salıngaç (ing: symmetric exponential anharmonic oscillator) olarak adlandırdığımız biçe üzerine odaklanacağız. Özelsiz kavramcıl bakışlar dışında, özellikle, uygulayımcıl kesimlerde odağımızda bu dizge bulunacaktır.

$$V(\widehat{q}) \equiv \alpha \left(\mathrm{e}^{\kappa \frac{\widehat{q}^2}{2}} - \widehat{I} \right) \tag{2.4}$$

Burada $\widehat{I}$ birim işleçtir. α ve κ gizilgüç genliği ile uyumsuzluk (ing: anharmonicity) değiştirgeleri adı verilen ve biçeyi tanımlayan bilinenler olan büyüklüklerdir. κ "Yay Değişmezi" olarak da adlandırılabilecek niteliktedir ve, aslında, bir anlamda, esneksizlikle de ilgilidir. Yine de onun yeterince küçük değerlerinde gizilgücün esnek bir yayı yaklaşık olarak betimleyebileceğini görmek hiç de güç değildir. Gerçekten de, $\widehat{q}$'nun özdeğeri olarak da düşünülebilecek olan konum değişkeni x'in sıfıra yeterince yakın değerler alışında, gizilgüç işlevi, onun toplamdizicil açılımının en küçük üslü konum değişkeni anlatımının alıkonulduğu anlatımla yaklaşık olarak gösterilebilir ve gizilgüç yerine $\alpha\kappa\widehat{q}^2/2$ yazılabilir. Uyumlu salıngaç, özelsizde olduğu gibi, $k\widehat{q}^2/2$ ile gösterildiğinde, $\alpha\kappa$'nın k'nın yerini aldığı görülür. Ancak, bu durumda, gizilgücün iki değiştirgesi (α ve κ) olduğundan, bu değiştirgeler, uyumlu salıngaçın esneklik yay değiştirgesi olan k'ya, ayrı ayrı değil, çarpımları üzerinden bağımlı olur.

(2.4) eşitliğiyle verilen gizilgüçteki iki değiştirgeyi, en yalın ama uyumlu olmayan bir salıngacın değiştirgelerine bağlamak istersek odağa alabileceğimiz en yalın uyumsuz salıngaç dördüncü dereceden bakışık salıngaçtır (ing: Fourth Degree Anharmonic Oscillator). Bu salıngacın konum değişkeni x türünden anlatımı, özelsizde kullanılan yapısıyla, $k_1x^2/2+k_2x^4/4$ olup burada k_1 ve k_2, sırasıyla, uyumlu (ing: harmonic) ve uyumsuz (ing: anharmonic) yay değişmezleridir.

(2.4) eşitliğindeki gizilgücün α ve κ değiştirgeleri yukarıda sözü edilen dördüncü dereceden çokterimli (ing: polynomial) yapısındaki bakışık uyumsuz salıngaç biçesindeki k_1 ve k_2 değiştirgeleri türünden belirlenmek istenirse, konum değişkeni x'in 0'a en küçük üslü ilk iki toplamcıl anlatımda tutarlı olarak yanaştığında, gizilgüç işlevi için aşağıdaki yanaşık eşitlik yazılabilir.

$$\alpha\left(\exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right)-1\right)\approx\frac{\alpha k}{2}\widehat{q}^2+\frac{\alpha k^2}{4}\widehat{q}^4 \tag{2.5}$$

Buradan,

$$\alpha\kappa=k_1, \qquad \alpha\kappa^2=2k_2 \tag{2.6}$$

eşitlikleri yazılabilir ve bunların α ile κ için k_1 ve k_2 türünden çözümleri

$$\alpha=\frac{k_1^2}{2k_2}, \qquad \kappa=\frac{2k_2}{k_1} \tag{2.7}$$

sonuçlarına ulaşılabilir. Gizilgüçte α ile simgelenen çarpan değiştirgenin kullanımının gerekçesi, yalnızca, bu iki değiştirgeli en yalın gizilgüce yanaşım sağlanışı değildir. Üstel terimin birimsiz oluşundan dolayı, gizilgüce erke birimi kazandırımı da, ancak, bu çarpan ile sağlanabilmektedir.

Tanımlanan dizge için işleçlerin dalga işlevine etkilerini gözönünde bulundurarak Schrödinger Denklemi (2.1)'i yeniden yazacak olursak,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\alpha\left(e^{\frac{\kappa}{2}x^2}-1\right)\psi, \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{2.8}$$

dizgenin evrimini tanımlayan parabolik göre türevli denklemi elde ederiz.

Bu gizilgücün tanımladığı dizge, artı erke değerlerinde yerleşik sonlu dipli sonsuz kuyu biçemindedir. Bu dizge gibi gizilgücü tek dönümlü kuyu betimleyen başka dizgeler de bulunmaktadır. Örnek verecek olursak nicem uyumlu salıngaç (ing: quantum harmonic oscillator), suözdeği öğeciği (hidrojen atomu), sonsuz dördül kuyu (ing: infinite square well) sorunları gündeme getirilebilir [6]. Bu dizgelerin birbirleri aralarında örtüşen özellikleri bulunmaktadır. Erke değerlerinin oluşturduğu kümenin ayrık izgeli oluşu, erkelerin sayılabilir sonsuzlukta ve de artı değerli oluşu gibi.

Savda bu altbölümdeki gizilgüce böylesine önem verilip odağa alış nedeni, gizilgüç işlevinin, konum değişkeninin sonsuza gittiğindeki, davranışının, bilimcil yazında bu ana dek incelenmiş bulunan biçelere göre, çok daha yüksek ve karmaşık tekillikte oluşu yanısıra, yazarın ve danışmanının bilgileri çerçevesinde, incelenmemiş bulunuşudur.

2.2 Doğabilimcil Birimsizleştirim (Boyutsuzlaştırım)

İnceleyişlerimizi yalınlaştırabilmek için daha az sayıda değişmez ve değiştirge ile çalışabiliriz. Birimli doğabilimcil (fiziksel) bir büyüklük uygun bir ölçeklendirim çarpanı ile eşdeğer birimsiz büyüklüğe dönüştürülebilir. Bunun evriği (tersi) de her zaman olanaklıdır. Öteki bir deyişle, birimsiz büyüklük de uygun çarpan ile doğabilimcil birimli büyüklüğe geri dönüştürülebilir. Ölçeklendirim için bir boyutsuz birim çarpanı seçişimiz gereklidir. Bunu, büyüklüklerin özlerini (kütle, uzunluk ve zaman gibi) veya türlü birleşimlerini seçerek yapabiliriz. Ancak, bu birleşimler tüm işlemler boyunca tutarlı olmalıdır. Bilimcil yazında türlü örnekleri ve uygulayışları olan birimsizleştirimi [63] bu savdaki dizgeye uygulayabilmek için öncelikle aşağıdaki büyüklükleri tanımlayalım.

$$\bar{t} \equiv \frac{t}{t_{bd}}, \qquad \bar{x} \equiv \frac{x}{x_{bd}} \tag{2.9}$$

Burada t_{bd} ve x_{bd}, zaman ve konum üzerinde birim ölçeklendirim için kullanılacak olan bilinmeyen değiştirgeleri simgelemektedir. Yeni tanımları gizilgücü (2.4)'de verilen dizgenin Hamiltonyeni ile kullanırsak bakışık uyumsuz üstel salıngaç için (2.8)'deki Schrödinger denklemini

$$i\frac{\partial \overline{\psi}(\bar{x},\bar{t})}{\partial \bar{t}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{t_{bd}\hbar}{\mu x_{bd}^2}\right)\frac{\partial^2 \overline{\psi}(\bar{x},\bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{\alpha t_{bd}}{\hbar}\right)\left(e^{\frac{\kappa x_{bd}^2}{2}\bar{x}^2} - 1\right)\overline{\psi}(\bar{x},\bar{t}) \tag{2.10}$$

anlatımıyla yazabiliriz. Burada birimsiz büyüklükler üzeri çizgili simgelerle gösterilmiştir. Ayıraçlar arasındaki büyüklükleri, inceleyişleri yalınlaştırmak amacıyla, 1 alabiliriz.

$$\frac{t_{bd}\hbar}{\mu x_{bd}^2} = 1, \qquad \frac{\alpha t_{bd}}{\hbar} = 1 \tag{2.11}$$

Sonuç olarak birimsiz çıkışı beklenen bu büyüklükler için bu denklemleri çözecek olursak

$$t_{bd} = \frac{\hbar}{\alpha}, \qquad x_{bd} = \frac{\hbar}{\sqrt{\alpha\mu}} \tag{2.12}$$

eşitlikleri yazılabilir. t_{bd} ve x_{bd}'nin birimlerini inceleyecek olursak; Planck değişmezinin $\texttt{erg} \times \texttt{sec}$, gizilgüç genliğinin $\texttt{erg}$ ve kütlenin $\texttt{gr}$ birimli olduğu bilgisinden yola çıkarak, t_{bd} ve x_{bd} sırasıyla $\texttt{sec}$ ve $\texttt{cm}$ birimli olarak ortaya çıkar. Birimsiz büyüklüklerle Schrödinger denklemi

$$i\frac{\partial \overline{\psi}(\overline{x},\overline{t})}{\partial \overline{t}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overline{\psi}(\overline{x},\overline{t})}{\partial \overline{x}^2} + \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}\overline{x}^2} - 1\right)\overline{\psi}(\overline{x},\overline{t}), \qquad k \equiv \frac{\kappa\hbar^2}{\alpha\mu} \tag{2.13}$$

yapısında yeniden yazılabilir. Bu denklem, Schrödinger denkleminin dizge Hamilton İşleci ile ilk yazımında, $\hbar$, μ, α değiştirgeleri 1 alınarak, ve κ yerine k yazılarak da, elde edilebilirdi. Savın geri kalanında birimsiz denklem, üstçizgili büyüklüklerde üstçizgi kaldırılarak, aşağıdaki biçimde, kullanılacaktır.

$$i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}x^2} - 1\right)\psi(x,t) \tag{2.14}$$

Birimsizleştirim sonucunda elde ettiğimiz devinirlik ve konum işleçleri ile bu denkleme karşılık gelen Hamilton İşleci aşağıdaki yapıdadır.

$$\widehat{p} \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \widehat{q} \equiv x, \qquad \widehat{H} \equiv \frac{1}{2}\widehat{p}^2 + \left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}\widehat{q}^2} - \widehat{I}\right) \tag{2.15}$$

Bundan sonraki kesimlerde (2.14)'te verilen tek değiştirgeli denkleme odaklanılacaktır.

2.3 Olasılıkçıl Evrim Kuramı

Özelsizde, doğabilimcil sorunlar doğrucul olmayan denklem kümeleri ile betimlenebilmektedir. Bu durum, sorunun yapısına bağımlı olarak, birçok güçlük getirmektedir. Doğrucul olmayan dizgeleri doğrucul yapıya getirerek çözmeyi amaçlayan birçok araştırım gerçekleştirilmiştir. Taban küme'si açılımları da doğrucul olmayan sıradan türevli denklemlerle verilen sorunları değişmez katsayı dizeyli, sonsuz sayıda doğrucul sıradan türevli denkleme dönüştürerek çözüşü amaçlar. Topluluğumuzca son yıllarda gerçekleştirilen araştırımlarda bu sorunları taban küme'si açılımı ile çözebilecek bir yöntem geliştirilişi amaçlanmıştır. "Olasılıkçıl Evrim Kuramı" [29–41,64–66] en son geliştirilen ve üzerinde çalışılan yöntemlerden birisidir. Bu savın yan amaçlarından biri de bu yöntemin geliştirilişine katkıda bulunmaktır.

Nicem devinbilim (ing: quantum dynamics) sorunlarınının çözümü de, dalga işlevinin yapısından dolayı, güçlükler taşımaktadır. Bu savda dalga işlevini belirlemeksizin, başlangıç değerlerini ve göre türevli denklemi sıradan türevli denklem (STD) küme'si durumuna getirerek kullanan bir yaklaşım geliştirilişe çalışılmaktadır. Dizge Hamilton İşleci'nde görünen işleçleri kapsayan, işlevcil olarak bağımlı, ancak, doğrucul olarak bağımsız öğelerden oluşan "İşleç Taban Küme'si" ele alınarak ve bu küme öğelerinin beklenen değerleri arasında bir sıradan türevli denklem küme'si oluşturup, herhangi bir işlecin beklenen değerini bu STDnin çözümü üzerinden belirleyişe çalışmak istenmektedir. OLEVKU ile beklenen değerlerin zamanda deviniminin açıklanışına çalışılmaktadır. Sonuçta, kuramcıl yapısını oluşturduğumuz bu yöntem ile bir nicem dizgenin erke düzeylerinin ve karşılık gelen beklenen değerlerin belirlenişine çabalanacaktır.

Bu yöntemi anlamak ve Nicem Devinbilim sorunlarına uygulanışını göstermek için bir kesim kavramları vermek gerekmektedir. Bunun için sıradan türevli, tek değişkenli, özerk (ing: autonomous) bir başlangıç değer sorununu ele alacak olursak,

$$\dot{x} = f(x(t)), \qquad x(0) = a \qquad t \in [0, \infty) \tag{2.16}$$

yazabiliriz. t bağımsız değişkeni simgeleyen bir büyüklük olup, özelsizde, zaman değişkeni olarak adlandırılır, f ise betimleyici işlevdir (ing: descriptive function). Bu işlevin yapısı bizi çözüm konusunda yönlendirir. Denklem belirtik (ing: explicit) ve özerk yapıda verilmiştir.

Tanımlayıcı işlev olan f'nin, x-karmaşık düzleminde çözümcül olduğu öngörülürse, Taylor açılımı kullanarak, aşağıdaki gibi doğrucul bir birleştirimle anlatılabilir.

$$f(x(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(x(t) - x^{(r)} \right)^j \tag{2.17}$$

Burada

$$f_j = \frac{f^{(j)}(x^{(r)})}{j!} \tag{2.18}$$

ile katsayılar verilmiş olup $x^{(r)}$ açılım konumunu simgelemektedir. (2.17)'de verilen eşitlik, aslında,

$$x_k(t) \equiv \left(x(t) - x^{(r)}\right)^k, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{2.19}$$

ile tanımlanan işlevlerin doğrucul birleşimlerinden bir anlatımla sol yandaki işlevi tanımlamış olur. Bu işlevler, işlevcil olarak bağımlı oluşlarına karşın, doğrucul olarak bağımsızdırlar. Bu durumda x_k'lar sonsuz boyutlu işlev uzayının tümünü örten ve zamanla değişen taban işlevleridir.

Zamanla evrilen bu dizgelerin değişim durumunu belirlemek amacıyla, $x_k(t)$ işlevlerinin zamana göre türevlerine gereksinim vardır. Bunun için (2.19)'un her iki yanının t'ye göre türevi alınırsa, (2.16) ve (2.17) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= \left[\left(x(t) - x^{(r)}\right)^k\right]' = k\left(x(t) - x^{(r)}\right)^{k-1} \dot{x}(t) \\ &= k\left(x(t) - x^{(r)}\right)^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(x(t) - x^{(r)}\right)^j = k \sum_{j=0}^{\infty} f_j \left(x(t) - x^{(r)}\right)^{k-1+j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} k f_j x_{k-1+j}(t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

yazılabilir. Bu eşitlikleri kullanarak, bu sayılabilir sonsuz sayıda sıradan türevli denklemin bütüncül yapısı aşağıdaki gibi yazılabilır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & 2f_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 3f_0 & 3f_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 4f_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

$\mathbf{x}(t) \equiv [x_0(t)\ x_1(t)\ x_2(t)\ ...]^T$ yapısında bir yöney tanımlayarak dizgeyi tıkız biçimde anlatabiliriz.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t)$$

Burada **E**, öğeleri bilinen değişmez değerlerden oluşan (2.21) yöney denklemindeki dizeydir. **E** dizeyi söz konusu dizgenin evrimini tanımlar. Bu nedenle, "Evrim Dizeyi" olarak adlandırılır. Sıradan türevli denklemlerin çözümünden anımsanacağı üzere, (2.22)'nin özelsiz çözümü

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{E}}\mathbf{x}(0) \tag{2.22}$$

biçimindedir. $\mathbf{x}(t)$ ve $x_k(t)$'nin tanımları kullanılarak, elde edilen yeni dizgenin başlangıç değer yöneyi $\mathbf{x}(0)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(a - x^{(r)}\right) \\ \left(a - x^{(r)}\right)^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

(2.22) eşitliğini kullanarak $\mathbf{x}(t)$'yi, öteki bir deyişle, çözüm yöneyini buluruz: ancak, amacımız $x(t)$'yi belirlemekti. Çözüm yöneyinin yapısına bakacak olursak tek bir işlevin doğalsayı üslülerini içerdiğini görürüz. Ancak, içeriş, ilk bakışta pek de yalın görünmez. Yine de durum, sanıldığından çok daha yalındır. Bunu göstermek için, yalnızca, yöneyin ikinci öğesini kullanarak

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathbf{e_2}^T \mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{e_2}^T \mathbf{e}^{t\mathbf{E}} \mathbf{x}(0) \\ &= x(t) - x^{(r)} \end{aligned} \tag{2.24}$$

eşitliğini elde edebiliriz. Bu eşitlikte, $\mathbf{e}_2$, 1 değerli ikincisi dışındaki, sayılabilir sonsuz sayıdaki, tüm öğeleri 0 olan Kartezyen birim yöneyi simgelemektedir. Buradan $x(t)$'yi çekersek

$$x(t) = \mathbf{e_2}^T \mathbf{e}^{t\mathbf{E}} \mathbf{x}(0) + x^{(r)} \tag{2.25}$$

tek değişkenli sıradan türevli bir başlangıç değer sorununun çözümünü belirlemiş oluruz. Bu sorunda $x^{(r)}$'nin $f(x)$'in kökü olarak seçilişi çok önemlidir. (2.21)'de verilen üst Hessenberg biçemindeki Evrim Dizeyi'nin yapısı bu seçime bağımlı olarak üst üçgencil duruma gelir. Üst üçgencil dizeyde özdeğerler köşegen üzerindeki öğelerdir. Böylelikle, bu özel durumda, $\mathbf{E}$'nin özdeğerleri, f_1 değerinin bütünsayı (tamsayı) katlarını kullanarak (2.25) elde edilirler.

İki değişkenli durum için

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= f\left(x_1(t), x_2(t)\right), \qquad x_1(0) = a_1 \\ \dot{x_2}(t) &= f\left(x_1(t), x_2(t)\right), \qquad x_2(0) = a_2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

yöneycil sıradan türevli denklem küme'si yazılabilir. Bilinmeyen ve zamana bağımlı olan konum işlevlerince tanımlanan betimleyici f_1 ve f_2 işlevleri, $\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}\right)$ konumunu kullanarak, çokdeğişkenli Taylor toplamdizisine, aşağıdaki gibi, açılabilir.

$$f_i\left(x_1(t), x_2(t)\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_{j,k}^{(i)} \left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right)^j \left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right)^k, \quad i = 1,2 \tag{2.27}$$

Burada $f_{j,k}^{(i)}$ ile f_i işlevinin ilk değişkenine göre j., ikinci değişkenine göreyse k. göre türevinin $j!k!$ ile bölümüne eşit katsayı değeri simgelenmektedir. Bu açılımı kullanarak Olasılıkçıl Evrim Kuramı ile ilerlemek olanaklıdır. Ancak, araştırımlarda yüzleşilebilecek karmaşayı önlemek için birkesim yöney tanımlayışları gerçekleştirmek işleri yalınlaştıracak görünmektedir. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^{(r)} \\ x_2(t) - x_2^{(r)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}(t) &= \begin{bmatrix} f_1\left(x_1(t), x_2(t)\right) \\ f_2\left(x_1(t), x_2(t)\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.28}$$

tanım eşitlikleri yazılabilir. Bunlarda, $\mathbf{s}$ dizge (ing: system) yöneyini simgelemektedir. (2.28) kullanılarak $\mathbf{f}(t)$ aşağıdaki dolaysız üs açılımı ile gösterilebilir.

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(k)} \mathbf{s}^{\otimes k} \tag{2.29}$$

Eşitlikteki $\mathbf{s}$'nin k. dolaysız üslüsü, k sayıda $\mathbf{s}$ yöneyinin dolaysız çarpımı anlamına gelmektedir. Dolaysız çarpım, bilimcil yazında Kronecker Çarpımı, Çapraz Çarpım veya Tensör (gerey) Çarpımı olarak da geçer ve birinci çarpanın her öğesi ile ikinci çarpanın öğelerinin tümünün çarpılıp ilgili öğenin yerine öbek (ing: block) olarak yerleştirimi biçiminde tanımlanır. [67, 68]

$$\mathbf{s}^{\otimes k} \equiv \bigotimes_{j=1}^{k} \mathbf{s} \equiv \underbrace{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \otimes \cdots \otimes \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}_{\text{(k-1) dolaysız çarpım}} \tag{2.30}$$

Tanıma göre $\mathbf{s}$'nin dolaysız üslüleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{\otimes 0} &= 1 \\ \mathbf{s}^{\otimes 1} &= \mathbf{s} \\ \mathbf{s}^{\otimes 2} &= \begin{bmatrix} \left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right)^2 \\ \left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right)\left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right) \\ \left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right)\left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right) \\ \left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right)^2 \end{bmatrix} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.31}$$

Bu durumda, $\mathbf{s}$'nin k. dolaysız üslüsü 2^k sayıda öğe içeren bir yöneydir. Dolaysız üs açılımının (2.29) katsayılarını belirlerken eldeki yöneylerin boyutlarına özen gösterilmelidir. Bu, toplamcıl anlatımların yöneycil türünün korunumu için gereklidir. $\mathbf{f}(t)$, 2×1 yapıda bir yöneydir. Bu durumda ilk katsayı $\mathbf{f}^{(0)}$ da 2×1 olmalıdır.

$$\mathbf{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) \\ f_2(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Toplamdizi açılımında ikinci toplamcıl anlatım aşağıdaki gibi yazılır. $\mathbf{s}^{\otimes 1}$, 2×1 türünde bir dizey olduğu için, $\mathbf{f}^{(1)}$ de 2×2 türünde olmalıdır.

$$\mathbf{f}^{(1)}\mathbf{s}^{\otimes 1} = \begin{bmatrix} f_{1,1}^{(1,c)}\left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right) + f_{1,2}^{(1,c)}\left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right) \\ \\ f_{2,1}^{(1,c)}\left(x_1(t) - x_1^{(r)}\right) + f_{2,2}^{(1,c)}\left(x_2(t) - x_2^{(r)}\right) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Burada, i ve j, sırasıyla, yataysırayı ve düşeysırayı belirtecek biçimde bütünsayı değerler alabilmektedir. Bir yandan da, betimleyici işlevlerin çokdeğişkenli Taylor açılım katsayılarıyla ilgilidirler. Bu bağlamda, i, f_i işlevini; j ise, türev kertesini çağrıştırır. Üst simgeleyişte görünen c ingilizcedeki "coefficient" sözcüğünü çağrıştırarak Taylor açılımlarıyla ilinti sağlamaktadır. Yine o üstsimgeleyişte görünen 1 ise betimleyici yöneyin hangi dolaysız üslünün katsayısı olduğunu anlatmaktadır. Böylece,

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_r & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_r \\ \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_r & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_r \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

yazılabilir. Burada, r altsimgesi açılım konumunda belirleyişi anlatmaktadır.

Andıran biçimde belirlenebilen $\mathbf{f}^{(2)}$ de, bağıntılandırım ara aşamaları belirtilmeksizin, aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$\mathbf{f}^{(2)} = \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_1}\right)_r & \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_r & \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1}\right)_r & \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial^2 x_2}\right)_r \\ \\ \left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_1}\right)_r & \left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_r & \left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_2 \partial x_1}\right)_r & \left(\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial^2 x_2}\right)_r \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Öteki tüm $\mathbf{f}^{(k)}$ katsayıları da, k. göre türevleri içeren 2×2^k türünde dizeylerdir.

Zamanla değişen $\mathbf{s}^{\otimes k}(t)$ yöneyleri, aralarında, işlevcil olarak bağımlı olsalar da, doğrucul olarak bağımsızdırlar. Bu durumu kullanarak tek değişkenli durumda doğrucul bağımsız taban küme'lerini anlatan $x_k(t)$'nin türevlerini alarak ilerlediğimiz gibi, iki değişkenli sorunlarda da, aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathbf{s}_k(t)$'ların türevi alınarak ilerlenebilir.

$$\mathbf{s}_k(t) \equiv \mathbf{s}^{\otimes k}(t) \tag{2.36}$$

Dolaysız çarpım işlemi değiştirimli (ing: commutative) olmadığı için türev alırken sıralanımlar gözetilerek Leibniz kuralı uygulanmalıdır.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}_k}(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \right) \otimes \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \otimes \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Dolaysız üs alış işleminin dağılış özelliği varolduğundan, 2×2'lik birim dizey olan $\mathbf{I}$ kullanılarak

$$\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \equiv (\mathbf{I}\mathbf{s}(t))^{\otimes j} = \mathbf{I}^{\otimes j} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \tag{2.38}$$

anlatımı yazılabilir. Bu anlatımı kullanarak toplam anlatımların içini düzenleyebiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \otimes \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t) &= \left(\mathbf{I}^{\otimes j} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \right) \otimes \left(\mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \right) \\ &\quad \otimes \left(\mathbf{I}^{\otimes (k-j-1)} \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t) \right) \\ &= \left(\mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes (k-j-1)} \right) \mathbf{s}^{\otimes k+m-1}(t) \end{aligned} \tag{2.39}$$

(2.37)'deki türevli denklemi

$$\dot{\mathbf{s}_k}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}_{k,m} \mathbf{s}^{\otimes m}(t), \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{2.40}$$

gibi bir anlatım ile yazabilmek için (2.39)'ta m yerine $m-k+1$ yazarak içerideki toplamı Evrim Dizeyi yapısında gündeme getirebiliriz.

$$\mathbf{E}_{k,m} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m-k+1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes (k-j-1)}, \quad k, m = 0, 1, 2, ... \tag{2.41}$$

Dolaysız üs açılımının katsayıları $\mathbf{f}^{(m)}$'ler $m < 0$ için tanımlı değillerdir. Ayrıca, $m < k-1$ durumunda da bütün $\mathbf{E}_{k,m}$ öbekleri sıfırlanır. Bu değerler ile $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{s}(t)$'yi yazacak olursak

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbf{E}_{1,0} & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{E}_{1,2} & \cdots \\ 0 & \mathbf{E}_{2,1} & \mathbf{E}_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$\mathbf{s}(t) = \left[\mathbf{s}^{\otimes 0} \, \mathbf{s}^{\otimes 1} \, \mathbf{s}^{\otimes 2} \, \cdots \right]^T \tag{2.43}$$

üst Hessenberg biçeminde bir **E** dizeyi elde ederiz. Türevli denklem, en tıkız biçimde, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{s}(t) \tag{2.44}$$

(2.44)'te verilen sonsuz, doğrucul ve bağdaşık (ing: homogenous) yöney sıradan türevli denkleminin özelsiz çözümü

$$\mathbf{s}(t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{E}}\mathbf{s}(0) \tag{2.45}$$

eşitliğiyle verilebilir. Bu son denklemin çözümü ile ilgili konular tek değişkenli sorunlar ile andırışlar taşımaktadır. Bu durumda da, açılım konumları tanımlayıcı işlevleri aynı anda sıfırlayacak biçimde seçilerek, **E** dizeyinin üst üçgencil yapıya gelişi sağlanabilır. İki denklemi eşzamanlı sıfırlayacak konumlar bulunamadığı durumlarda taban küme'sine varolan öğelere işlevcil veya doğrucul bağımlı sonlu ya da sonsuz sayıda yeni öğe ekleyerek sorun aşılabilir ve yine üst üçgencil yapıda bir Evrim Dizeyi elde edilir. Bu biçimde taban küme'sinin boyutunu arttırışına dayanan yönteme "Uzay Genişletim" denir [69–72]. Ayrıntıları ileride anlatılacak bu yöntem ile boyut artırımı ederine karşılık indirgeyimcil yalınlıklar elde edilir. Elde edilen Evrim Dizeyi'nin özdeğerleri kullanılarak da dizgenin çözümü (2.45) belirlenebilir.

2.3.1 Uzay genişletim

Uzay genişletimi, taban küme'sine sonlu ya da sonsuz sayıda yeni öğe eklenimine dayanır. Yeni öğeler, özelsizde, varolan öğelere işlevcil ya da birkesim durumlarda doğrucul bağımlı olarak verilen yeni anlatımlarla gündeme getirilir. Bu anlatımların, sanki bu bağımlılıkları yokmuş gibi kullanımıyla türlü anlatımların daha yalın yapılara kavuşturuluşu amaçlanır. Sav araştırımları süresince bu olgudan gerekli konularda yararlanılmıştır.

2.3.2 Uyumsuz üstel salıngacın nicem devinbiliminde Poisson Kümesimgelisi cebiri ve uzay genişletim

Schrödinger denklemindeki göre türevli denklem yerine işleçlerin beklenen değerleri ve dalga işlevinin başlangıç anındaki yapısını kullanan sıradan türevli denklem küme'sini çözüşü yeğliyor oluşumuzu belirtmiştik. Ancak, bu amaçla, önce, çözülecek sıradan türevli denklem küme'sini ve eşlik edecek başlangıç koşullarını oluşturmak gerekir. Bu oluşturum, aslında, hiç de yalın bir eylem değildir. Önceden de dile getirildiği gibi beklenen değer aracılığıyla sonuca varılabilecek bir olgu yaratmak gerekmektedir. Nicem devinbilimde, bir yerde beklenen değerden sözediliyorsa, odakta birkesim işleçlerin oluşu gerekir. İşleçler varsa onlar arasındaki değiştirim olayı da ister istemez gündeme gelecek demektir. Nicem devinbilimde özellikle üç tür işleç büyük önem kazanır. Bunlar, evrencil ve taban işleç nitelikli devinirlik ve konum işleçleri ile odaktaki dizgeyi, bir biçimde, yansıtan Hamilton İşleci'dir. Bir özgürlük düzeyli dizgelerde bunların toplam sayısı 3 olup özgürlük düzeyinin her bir artışına karşılık toplam sayı iki yükselir. Bu savda odaklanacağımızı belirttiğimiz dizge için özgürlük düzeyi 1 olduğundan, bizi ilgilendiren işleçler, devinirlik $(\widehat{p})$, konum $(\widehat{q})$, ve de, Hamilton $\left(\widehat{H}\right)$ işleçleridir.

Burada odakta, (2.4)'te verilen gizilgüç ile tanımlanmış bakışık uyumsuz üstel salıngaç dizgesinin Hamilton İşleci ile konum ve devinirlik işleçlerini içeren bir dizge yöneyinin Poisson kümesimgelisini (ing: bracket) ele alarak yola çıkacağız. Öncelikle, Hamilton İşleci ile devinirlik işlecinin Poisson kümesimgelisini aşağıdaki gibi belirlemek olanaklıdır.

$$\begin{aligned}
\left\{\widehat{H},\widehat{p}\right\} &= \frac{1}{2\mu}\left\{\widehat{p}^2,\widehat{p}\right\}+\left\{V\left(\widehat{q}\right),\widehat{p}\right\} = -\left\{\widehat{p},V\left(\widehat{q}\right)\right\} = -\sum_{j=0}^{\infty} V_j\left\{\widehat{p},\widehat{q}^{\,j}\right\} \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} V_j \sum_{\ell=0}^{j-1} \widehat{q}^{\,\ell}\left\{\widehat{p},\widehat{q}\right\}\widehat{q}^{\,j-1-\ell} \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} jV_j\widehat{q}^{\,j-1} = -V'\left(\widehat{q}\right) = -\alpha k\widehat{q}\exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right) \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

Burada, $\left\{\widehat{p}^2,\widehat{p}\right\}=0$ oluşu ve $\left\{\widehat{p},\widehat{q}\right\}=\widehat{I}$ indirgeyimcil eşitliği ile gizilgücü betimleyen V işlevinin toplamdizi açılımından yararlanılmıştır. Bunlardan indirgeyimcil eşitlik, ilerleyen kesimlerde yeniden önümüze çıkacak ve işimizi yalınlaştıracaktır. Hamiton ve konum işleci için Poisson kümesimgelisi belirlenimine geçecek olursak

$$\left\{\widehat{H},\widehat{q}\right\} = \frac{1}{2\mu}\left\{\widehat{p}^2,\widehat{q}\right\} = \frac{1}{2\mu}\left[\left\{\widehat{p},\widehat{q}\right\}\widehat{p}+\widehat{p}\left\{\widehat{p},\widehat{q}\right\}\right] = \frac{1}{\mu}\widehat{p} \qquad (2.47)$$

sonucuna ulaşılır. Dizge yöneyimizi birimsizleştirilmiş işleçler türünden aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\widehat{\mathbf{s}} \equiv \begin{bmatrix} \hat{s}_1 \\ \hat{s}_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{p_r}\widehat{p} \\ \frac{1}{q_r}\widehat{q} \end{bmatrix} \qquad (2.48)$$

Ancak, bu yapıda tanımlayacağımız bir dizge yöneyi ile (2.46)'deki üstel yapı bizi, dizge yöneyinin Hamilton işleci ile Poisson kümesimgelisi anlatımında sayılabilir sonsuz sayıda katsayı içeren ve dizge yöneyinden oluşturulacak genişletilmiş yöney üzerinde yapılanan bir doğrucul birleşime götürür. Oysa, bu türde ama sonlu sayıda toplamcıl anlatım içeren yapılar yeğlenecek durumdadır. Uzay genişletiminden yararlanarak dizge yöneyine yeni bir öğe eklenimiyle bu durumu aşmak için çabalamak düşünülebilir. Böylece, yeni dizge yöneyi için,

$$\widehat{\mathbf{s}} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{p_r}\widehat{p} \\ \frac{1}{q_r}\widehat{q} \\ \exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

yapısında verilen anlatım, tanım olarak gündeme getirilebilir. Burada, ilk iki öğe için önceden gerçekleştirilen belirleyişler geçerli kalır. Yeni eklenen öğenin Hamilton işleci ile Poisson kümesimgelisine bakacak olursak

$$\left\{\widehat{H}, \exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right)\right\} = \frac{k}{2\mu}\left[\widehat{p}\,\widehat{q}\exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right) + \exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right)\widehat{q}\,\widehat{p}\right] \tag{2.50}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda, dizge yöneyinin Hamilton işleciyle Poisson kümesimgelisinin birinci, ikinci, ve de, üçüncü öğesi, dizge yöneyine göre, sırasıyla, ikinci, birinci, ve de, üçüncü derecedendir. Bu durum, (2.46), (2.47), ve de, (2.50) eşitliklerinden görülebilir. Öteki bir deyişle, bu genişletilmiş uzay üzerinde, Hamilton işlecinin dizge yöneyi ile Poisson kümesimgelisi eşitliklerinin betimleyici yöney işlevi dizge yöneyinin bir 3. derece çokterimlisi olup sonlu sayıda toplamcıl anlatım içermektedir.

2.3.3 Evrim yetkinişleci ve dolaysız üslü toplamdiziler

Yukarıda, dizge Hamilton İşleci ile dizge işleçler yöneyi arasındaki Poisson kümesimgelisi'nin sol yanda yalnız olarak bulunduğu, sağ yanın ise öğeleri yalnızca dizge yöneyine bağımlı olan denklemlere, "Dizge Devinimi Poisson Kümesimgeli Denklemleri" adını verebileceğimizi önceki kesimde dile getirmiştik. Bunlara, daha da yalın olarak "Poisson Kümesimgeli Denklemleri (PKD)" adını da verebiliriz. Bu denklemlerde, ya Hamilton işlecinin verilip dizge yöneyinin belirleneceğini, ya da dizge yöneyinin verilip Hamilton işlecinin belirleneceğini, öngörmek olanaklıdır. Ad'a "denklem" sözcüğünün yerleştirilim nedeni bu durumdur ve ileride aranan büyüklüğün dizge yöneyi olduğu öngörüme odaklanacağız. Bu durumda, Poisson Kümesimgeli

Denklem'in işlenişini yalınlaştırmak ve bir anlamda tıkızlaştırmak için doğabilimcil birimsiz Poisson kümesimgelisini veren bir "Yetkinişleç (ing: superoperator)" ($\mathscr{D}$) tanımı yapalım. (2.46) eşitliğini kullanarak

$$\mathscr{D}\widehat{s}_1 \equiv \frac{t_r}{p_r}\left\{\widehat{H},\widehat{p}\right\} = \overline{\alpha}\widehat{s}_2\widehat{s}_3 \tag{2.51}$$

yazabiliriz. Burada $\overline{\alpha}$ ve $\overline{k}$ birimsizleştirim için kullanılan değerleri ve değiştirgeleri yapılarında toplayan değerleri simgelemekte olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$\overline{\alpha} \equiv -\frac{\alpha t_r}{p_r q_r}\overline{k}, \qquad \overline{k} \equiv k q_r^2 \tag{2.52}$$

Eşbiçimde (2.47) ve yeni tanımlanan birimsiz kütle değeri kullanılarak

$$\mathscr{D}\widehat{s}_2 = \frac{t_r}{q_r}\left\{\widehat{H},\widehat{q}\right\} = \frac{1}{\overline{\mu}}\widehat{s}_1 \tag{2.53}$$

$$\overline{\mu} \equiv \frac{q_r \mu}{t_r p_r} \tag{2.54}$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.50) için de eşişlemler uygulanırsa

$$\mathscr{D}\widehat{s}_3 = t_r\left\{\widehat{H},\exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right)\right\} = \frac{\overline{k}}{2\overline{\mu}}\left(\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_3 + \widehat{s}_3\widehat{s}_2\widehat{s}_1\right) \tag{2.55}$$

eşitliği elde edilir. Dizge yöneyinin dolaysız üslerini kullanarak elde edeceğimiz çarpanlar ile eylemimizi sürdürecek olursak

$$\widehat{\overline{p}} \equiv \frac{1}{p_r}\widehat{p}, \qquad \widehat{\overline{q}} \equiv \frac{1}{q_r}\widehat{q} \tag{2.56}$$

olmak üzere, dolaysız üsler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 1} &\equiv \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{\overline{p}} \\ \widehat{\overline{q}} \\ \exp\left(k\frac{\widehat{\overline{q}}^2}{2}\right) \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} &\equiv \left[\widehat{s}_1^2\ \widehat{s}_1\widehat{s}_2\ \widehat{s}_1\widehat{s}_3\ \widehat{s}_2\widehat{s}_1\ \widehat{s}_2^2\ \widehat{s}_2\widehat{s}_3\ \widehat{s}_3\widehat{s}_1\ \widehat{s}_3\widehat{s}_2\ \widehat{s}_3^2\right]^T \end{aligned} \tag{2.57}$$

Bu durumda, (2.51), (2.53), (2.55) eşitliklerinden yalınca ayırdına varılabileceği gibi, uzay genişletim bizi sonsuz sayıda terim içeren bir doğrucul birleşimden, yalnızca üç toplamcıl anlatımlı bir doğrucul birleşim yapısına götürmektedir. Böylece,

$$\mathscr{D}\widehat{\mathbf{s}} = \mathbf{D}_1\widehat{\mathbf{s}} + \mathbf{D}_2\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} + \mathbf{D}_3\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{2.58}$$

ve

$$\mathbf{D}_1 \equiv \frac{1}{\overline{\mu}}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^T, \quad \mathbf{D}_2 \equiv \overline{\alpha}\mathbf{e}_1\left(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3\right)^T,$$
$$\mathbf{D}_3 \equiv \frac{\overline{k}}{2\overline{\mu}}\mathbf{e}_3\left(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\right)^T \tag{2.59}$$

tanım eşitlikleri yazılabilmektedir. Bunlardan (2.58) ile verileni dizge yöneyinin Evrim Yetkinişleci altındaki görüntüsünü yine dizge yöneyine ve onun dolaysız üslerinden iki ile üç üssüne bağlamaktadır. Bu durum, bütünlük sağlamak açısından, bizi dizge yöneyinin özü yanısıra tüm artı üslerinin Evrim Yetkinişleci altında görüntülerinin belirlenimine itekler. Evrim işleci, bir çarpım üzerinde, sıra gözeterek, türevdeki Leibniz kuralına göre dağılır. Bu ise, sonuçta, aşağıdaki eşitliklerin yazımına olanak sağlar.

$$\mathscr{D}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j} = \sum_{k=1}^{j-1}\mathbf{s}^{\otimes k}\left(\mathscr{D}\widehat{\mathbf{s}}\right)\mathbf{s}^{\otimes(j-1-k)} = \mathbf{E}_{j,j}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}+\mathbf{E}_{j,j+1}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes(j+1)}+\mathbf{E}_{j,j+2}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes(j+2)} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{j,j} &\equiv \sum_{k=1}^{j-1}\mathbf{I}_3{}^{\otimes k}\otimes\mathbf{D}_1\otimes\mathbf{I}_3{}^{\otimes(j-1-k)}, \qquad j=0,1,2,\ldots\\
\mathbf{E}_{j,j+1} &\equiv \sum_{k=1}^{j-1}\mathbf{I}_3{}^{\otimes k}\otimes\mathbf{D}_2\otimes\mathbf{I}_3{}^{\otimes(j-1-k)}, \qquad j=0,1,2,\ldots\\
\mathbf{E}_{j,j+2} &\equiv \sum_{k=1}^{j-1}\mathbf{I}_3{}^{\otimes k}\otimes\mathbf{D}_3\otimes\mathbf{I}_3{}^{\otimes(j-1-k)}, \qquad j=0,1,2,\ldots
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Burada, $\mathbf{E}_{j,j}$, $\mathbf{E}_{j,j+1}$, ve de, $\mathbf{E}_{j,j+2}$ ile Evrim Dizeyi olarak adlandırabileceğimiz sayılabilir sonsuz sayıda yatay ve düşey sırası olan bir dizeyin asal köşegeninin, sırasıyla, özü ile en yakın birinci ve ikinci üst köşegen öbekleri simgelenmektedir. $\mathbf{E}_{j,j}$, $\mathbf{E}_{j,j+1}$, ve de, $\mathbf{E}_{j,j+2}$, sırasıyla, $3^j\times 3^j$, $3^j\times 3^{j+1}$, ve de, $3^j\times 3^{j+2}$ türünde sayıl öğeli dizeylerdir.

(2.60) eşitliğini özyineli bir yapı olarak yorumlamak olanaklıdır. Eğer,

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_j \equiv \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}, \qquad j=0,1,2,\ldots \tag{2.62}$$

tanımına geçilirse, (2.60) yerine aşağıdaki özyineli ilişki kurulabilir.

$$\mathscr{D}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_j = \mathbf{E}_{j,j}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_j+\mathbf{E}_{j,j+1}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{j+1}+\mathbf{E}_{j,j+2}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{j+2}, \qquad j=0,1,2,\ldots \tag{2.63}$$

Buradan,

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_0\\ \vdots\\ \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n\\ \vdots\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix}\mathbf{E}_{0,0} & \cdots & \mathbf{E}_{0,n} & \cdots\\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots\\ \mathbf{E}_{n,0} & \cdots & \mathbf{E}_{n,n} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix} \tag{2.64}$$

tanımlarıyla,

$$\mathscr{D}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.65}$$

sonsuz boyutlu işleç eşitlik takımına geçilebilir. Bu eşitlik, **E *dizeyinin*** $\mathscr{D}$ ***yetkinişlecinin, dizge işleç yöneyinin dolaysız üslüleri üzerinde, dizey gösterilimi*** olduğu yargısına götürür. Bu durum, $\mathscr{D}$ için "Evrim Yetkinişleci" adlandırımının tutarlı olduğunu gösterir. **E** dizeyinin yapısı, dizge yöneyinin nasıl tanımlandığına bağımlıdır. Dizge yöneyi tanımı değiştikçe **D** dizeyleri de değişir ve Evrim Dizeyi'nde değişikliğe neden olur. Bu nedenle, dizge yöneyi öğelerini bir taban işleci küme'sinin öğeleri gibi yorumlamak olanaklıdır.

Yukarıda eğik koyu simgelerle yazdığımız üzere, oradaki dizey gösterilimiyle, Evrim Yetkinişleci'nin belli bir soyutluktan somutluğa geçirildiğini söyleyebiliriz. Bu yüzden bu bulgu ***kuramcıllık yanısıra uygulayımcıllık*** açısından da çok önemlidir.

Buradaki yapısıyla, Evrim Dizeyi üst öbekcil üçgen niteliklidir. Onun da ötesinde, üç yapışık köşegenli bir yapıdadır. Bu durum σ işleçlerinin özyineleyimcil olarak belirlenimine olanak sağlar ve çözümleyişe çok önemli yalınlıklar getirir.

2.3.4 Evrim dizeyinde esneklik yaratımı ve kullanımı

Dizge işleç yöneyi öğelerinde değiştirimlilik (ing: commutativity) söz konusuysa, yöneyin özünde olmasa da, 2'den başlayarak artan dolaysız üslülerinde, işleç öğeleri ne olursa olsun, yöneyin birkesim değişmez öğeli yöneylere dikgen olacağı bilinen bir olgudur. Bu durum, bu dizge işleç yöneyinin, bu dikgen olduğu yöneylerin örtüğü uzayda bir bileşeni olmayacağı, o uzayın tümleyicisinde bulunacağı anlamına gelir. Bu ise Evrim Yetkinişleci'nde, bir anlamda, tekillik bulunduğu ve eşsiz evirtilebilirliği konusunda özenli davranmak gerektiği anlamına da gelir. İlk bakışta olumsuzluk gibi görünebilen bu olguyu Poisson Kümesimgeli Denklem'e belirsiz değiştirgeler yerleştirmek ve sonra da bu değiştirgeleri birkesim istediklerimizi yerine getirmek amacıyla kullanarak birkesim eniyileyişlere ya da indirgeyişlere geçişimiz olanaklı görünmektedir.

Bu kesimde, ilk olarak nicem işleybilim (kuvantum mekaniği) işleçlerinin özelsiz bir indirgeyimcil eşitliğinden yola çıkarak işimize yarayacak denklemler üretişe çabalanacaktır. bu bağlamda, devinirlik ve konum işleçleri arasındaki Poisson kümesimgelisinin sağladığı eşitliği odağa alabiliriz.

$$\{\widehat{p},\widehat{q}\} = \widehat{I} \implies i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_1\widehat{s}_2 - \widehat{s}_2\widehat{s}_1\right) = \widehat{I} \tag{2.66}$$

Yukarıdaki denklemi sağdan veya soldan dizge yöneyinin öğeleri ile çarpacak olursak

$$i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_1^2\,\widehat{s}_2 - \widehat{s}_1\,\widehat{s}_2\,\widehat{s}_1\right) = \widehat{s}_1, \qquad i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_1\,\widehat{s}_2\,\widehat{s}_1 - \widehat{s}_2\,\widehat{s}_1^2\right) = \widehat{s}_1 \tag{2.67}$$

$$i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_2\,\widehat{s}_1\,\widehat{s}_2 - \widehat{s}_2^2\,\widehat{s}_1\right) = \widehat{s}_2, \qquad i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_1\,\widehat{s}_2^2 - \widehat{s}_2\,\widehat{s}_1\,\widehat{s}_2\right) = \widehat{s}_2 \tag{2.68}$$

$$i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_3\,\widehat{s}_1\,\widehat{s}_2 - \widehat{s}_3\,\widehat{s}_2\,\widehat{s}_1\right) = \widehat{s}_3, \qquad i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_1\,\widehat{s}_2\,\widehat{s}_3 - \widehat{s}_2\,\widehat{s}_1\,\widehat{s}_3\right) = \widehat{s}_3 \tag{2.69}$$

eşitliklerini elde etmiş oluruz. (2.67), (2.68), ve de, (2.69), eşitliklerini daha tıkızlaştırmak için aşağıdaki yöney tanımları gündeme getirilebilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &\equiv i\hbar_{sys}\left(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\right)\\
\mathbf{u}_2 &\equiv i\hbar_{sys}\left(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\right)\\
\mathbf{u}_3 &\equiv i\hbar_{sys}\left(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\right)
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &\equiv i\hbar_{sys}\left(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\right)\\
\mathbf{v}_2 &\equiv i\hbar_{sys}\left(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\right)\\
\mathbf{v}_3 &\equiv i\hbar_{sys}\left(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3\right)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Burada ve daha önceki incelemelerimizde, altsırasayılı **e**'lerle simgelenmiş büyüklükler görünmektedir. Bunlar ilgili Kartezyen uzayın ölçün (ing: standard) birim yöneyleridir. Bu yöneylerden her biri ilgili uzayın boyutu sayısında öğeden oluşur ve değeri 1 olan biri dışında tüm öğeler 0 değerlidir. 1 değerli öğenin yöney içindeki konumu yöneyin altsırasayısı ile belirtilir. Burada, 2, 3, 4 gibi değişik boyutlu uzaylarda çalışabilişimize karşın, bu yöneylerde hangi uzayda oldukları bir bakışta görünmemektedir. Eğer, uzay boyutu ile ilgili ayırımın görüntülendirimi isteniyorsa, yöney simgesinin sağ üstünde sıradan (ayça biçimli) ayıraçlar arasında sayı vererek boyut belirtimine gidilebilir. Bu yöney tanımları (2.67), (2.68), (2.69) yerine

$$\mathbf{u}_j^T\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j} = \mathbf{e}_j^T\widehat{\mathbf{s}}, \qquad \mathbf{v}_j^T\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j} = \mathbf{e}_j^T\widehat{\mathbf{s}}, \qquad j = 1,2,3 \tag{2.72}$$

yazımına olanak sağlar. Bunlardan da, doğrucul birleştirimle, α_j'lar karmaşık değer de alabilen sayıllar olabilmek üzere,

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_j\mathbf{u}_j + \alpha_{j+3}\mathbf{v}_j\right), \qquad \mathbf{e}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \sum_{j=1}^{3}\left(\alpha_j + \alpha_{j+3}\right)\mathbf{e}_j \tag{2.73}$$

tanımlarıyla

$$\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)^{T}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3}-\mathbf{e}^{T}\left(\boldsymbol{\alpha}\right)\widehat{\mathbf{s}}=0 \tag{2.74}$$

altı değiştirgeli sayıl eşitliğe ulaşılır. Bu sayıl eşitlikten, **e**'lerle çarpım yoluyla, her bir **e** çarpımı için yeni değiştirgeler kullanarak aşağıdaki yöney eşitliğine de ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{e}_1\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)^{T}+\mathbf{e}_2\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\right)^{T}+\mathbf{e}_3\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(3)}\right)^{T}\right)\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3}-&\\ \left(\mathbf{e}_1\mathbf{e}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)^{T}+\mathbf{e}_2\mathbf{e}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\right)^{T}+\mathbf{e}_3\mathbf{e}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(3)}\right)^{T}\right)\widehat{\mathbf{s}}=\mathbf{0}_{3\times 1}&\end{aligned} \tag{2.75}$$

Burada, en sağdaki koyu $\mathbf{0}_{3\times 1}$ ile 3×1 türünde sıfır dizeyi (yöneyi) simgelenmekte olup $\alpha^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ ile simgelenen 6 öğeli yöneyin öğeleri bu an için belirsiz olan $\alpha_1^{(j)}$, $\alpha_2^{(j)}$, $\alpha_3^{(j)}$, $\alpha_4^{(j)}$, $\alpha_5^{(j)}$, $\alpha_6^{(j)}$ değişmezleridir. Bu durumda, bu son eşitlikte 18 belirsiz değiştirge, ya da, esneklik bulunmaktadır.

Bu eşitliği daha tıkızlaştırmak için aşağıdaki tanımlar yapılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_3 &\equiv \mathbf{e}_1\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)^{T}+\mathbf{e}_2\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\right)^{T}+\mathbf{e}_3\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(3)}\right)^{T}\\ \mathbf{B}_1 &\equiv \mathbf{e}_1\mathbf{e}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(1)}\right)+\mathbf{e}_2\mathbf{e}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(2)}\right)+\mathbf{e}_3\mathbf{e}\left(\boldsymbol{\alpha}^{(3)}\right)\end{aligned} \tag{2.76}$$

Burada **B** simgesi, bir anlamda, "Bağımlılık" sözcüğünü çağrıştırmakta, bu simgenin altsırasayısı olan 1 ve 3 ise dizge işleç yöneyinin hangi dolaysız üssünün doğrucul birleşim katsayısı olduğunu göstermektedir.

Böylece, (2.75) denklemini aşağıdaki daha tıkız biçemde yazmak olanaklıdır.

$$\mathbf{B}_3\mathbf{s}^{\otimes 3}-\mathbf{B}_1\mathbf{s}=\mathbf{0}_{3\times 1} \tag{2.77}$$

Bu eşitliğin sol yanı (2.58) eşitliğinin sağına yerleştirilirse (2.58) bozulmaz. Böylece onun yerine aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathscr{D}\widehat{\mathbf{s}}=\left(\mathbf{D}_1-\mathbf{B}_1\right)\widehat{\mathbf{s}}+\mathbf{D}_2\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2}+\left(\mathbf{D}_3+\mathbf{B}_3\right)\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{2.78}$$

Bu durumda, $\mathbf{D}_1$ ve $\mathbf{D}_3$ dizeyleri yerine, sırasıyla, $\mathbf{D}_1-\mathbf{B}_1$ ile $\mathbf{D}_3+\mathbf{B}_3$ gelmiş olur. Buna karşın, bu yeni gelen dizey yapılarda 18 belirsiz değiştirgelik bir esneklik de yaratılmış olur. Bu esneklikler, ilgili değiştirgelere özel değerler verilerek giderilebilir ya da azaltılabilir. Bu süreçte, istenilenin ne olduğuna bağımlı olarak, olanaklar çerçevesinde, seçimler yapılabilir. Sözgelimi, $\mathbf{D}_1-\mathbf{B}_1$ dizeyinin istenilen ya da ona en yakın yapıda olduğu duruma geçebilmek olanaklı olabilir. Bu bile çok önemli yalınlıklar getirebilir. Ancak, burada, bu an için bu düzey içerikle yetinerek ileride konuya belli bir düzeyde odaklanımı us'ta tutacağız.

2.3.5 Uzay genişletimiyle esneklik çoğaltımı

Daha çok sayıda esneklik değiştirgesini gündeme getirebilmek için bir aşama öteye giderek uzayı genişletmek olanaklıdır. Böylece, dizge yöneyi olarak, sözgelimi aşağıdaki yapıyla yola çıkılabilir.

$$\widehat{\mathbf{s}} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_3 \\ \widehat{s}_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{p_r}\widehat{p} \\ \frac{1}{q_r}\widehat{q} \\ \exp\left(k\frac{\widehat{q}^2}{2}\right) \\ q_r\widehat{q}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Buradaki dizge işleç yöneyinin ilk üç öğesi önceki kesimde incelediğimiz üç öğeli dizge işleç yöneyiyle örtüşür. Dolayısıyla, buradaki yenilik sondaki $\widehat{s}_4$ bileşini üzerindeki öğecil eşitliktir. O eşitlikten aşağıdaki ek eşitliğe geçilebilir.

$$\mathscr{D}\widehat{s}_4 = \frac{t_r}{q_r}\left\{\widehat{H},\widehat{q}^{-1}\right\} = -\frac{1}{\mu}\widehat{s}_4\widehat{s}_1\widehat{s}_4 \tag{2.80}$$

Bu yeni işleç ,$\widehat{s}_4$, tanımı ile uzay genişler. Buradan katsayı dizeyleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{D}_1 \equiv \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^T, \qquad \mathbf{D}_2 \equiv \overline{\alpha}\mathbf{e}_1\left(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3\right)^T,$$
$$\mathbf{D}_3 \equiv \frac{\overline{k}}{\mu}\mathbf{e}_3\left(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1\right)^T, \quad \mathbf{D}_4 \equiv -\frac{1}{\mu}\mathbf{e}_4\left(\mathbf{e}_4\otimes\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_4\right)^T \tag{2.81}$$

Yeni öğenin katılımıyla ortaya aşağıdaki gibi indirgeyimcil bağıntılar da elde edilir.

$$i\hbar_{sys}\left(\widehat{s}_1\widehat{s}_2-\widehat{s}_2\widehat{s}_1\right)=\widehat{I} \tag{2.82}$$

$$\widehat{s}_2\widehat{s}_4=\widehat{I}, \qquad \widehat{s}_4\widehat{s}_2=\widehat{I} \tag{2.83}$$

Bu bağıntı ile 24 yeni değiştirge devreye sokulabilir. Dolayısıyla, hem 16 öğeli $\mathbf{D}_1$ dizeyi daha az kısıt altında istenilen yapıya büründürülebilir. hem de biraz daha esneklik kalabilır. Daha çok indirgeyimcil bağıntının varoluşu ve belirlenişi durumunda esneklik de artabilecektir. Bu esneklikler, sözgelimi yakınsaklık yükseltimi gibi, birkesim gereksinimleri karşılamak amacıyla kullanılabilir.

2.3.6 Beklenen değer devinimi ve Olasılıkçıl Evrim Kuramı

Buraya dek verilen anlatımlar, açık yapılı, birinci kerteden, sıradan türevli denklem küme'leri için geliştirilen Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nın "Beklenen Değer Devinimleri"nde eş bir başarım düzeyinde kullanılabileceğini us'a getirir. Bu amaçla, "İlgilenilen Dizge'nin Dizge Yetkinişleci Altında Görüntü Tanımı" olarak da adlandırılabilecek olan (2.65)'dan yola çıkılabilir. Beklenen değerinin zamanla değişimi incelenecek olan işleç $\widehat{o}$ ile simgelenecek olursa ve $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$ sonsuz yöneyinden, $\mathbf{s}$ ile simgelenen ve yalnızca sayıl değişmezlerle tanımlanan sayılabilir sonsuzlukta öğeden oluşan bir yöney aracılığıyla,

$$\widehat{o} \equiv \mathbf{s}^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.84}$$

anlatımı ile verilirse, onun beklenen değeri için,

$$\langle \widehat{o} \rangle (t) \equiv \mathbf{s}^T \left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (t) \tag{2.85}$$

anlatımı yazılabilir. Bu ise, "Dizge'nin Taban İşleçleri Yöneyi" olarak da adlandırılabilecek olan $\boldsymbol{\sigma}$'nın beklenen değerinin belirlenimine gereksinim duyurur. Bu amaçla, (2.65) eşitliğinin her iki yanının beklenen değeri alınır ve "Beklenen Değer Belirleyiş İşlemi'nin Doğrucul Niteliği" ile "Dizge'nin Taban İşleç Yöneyi'nin Dizge Yetkinişleci altındaki görüntüsünün beklenen değerinin o yöneyin beklenen değerinin zamana göre türevi olduğu" gerçeği kullanılacak olursa, aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\frac{d \left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (t)}{dt} = \mathbf{E} \left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (t) \tag{2.86}$$

Bu denklem sayılabilir sonsuzlukta zamana bağımlı öğe içeren bir işlevler yöneyini bilinmeyen olarak alan bir STD'dır. Denklem doğrucul ve birinci kerteden olup bağdaşık yapı da taşır. Bunların ötesinde, $\mathbf{E}$ ile simgelenen ve sayılabilir sonsuzlukta yatay ve düşey sırası olan bir dizeyi katsayı olarak da alır. Bu yapısıyla, denklem bir "Olasılıkçıl Evrim" betimler niteliktedir. $\mathbf{E}$'nin yukarıda "Evrim Dizeyi" olarak adlandırılmış oluşunun en önemli nedenlerinden biri bu olgudur. Buradaki dizge için üretilen Evrim Dizeyi'nde aşağıdaki özellikler barındırılmaktadır.

1. Tüm olasılıkçıl evrim yaklaşımlarında olduğu gibi, bu dizey, değişmez öğelerden oluşur ve sayılabilir sonsuzluklu bir dördül (kare) yapı altında öbekler içerir.

2. Bu dizey üçgencil niteliktedir ve bu nedenle izgesi kolaylıkla belirlenebilir. Bu kolaylığın en önemli nedeni asal köşegen öbeklerinin sonlu sayıda sıralar içeren dördül dizeyler oluşudur. Bu öbeklerin sıralarının sayısı asal köşegen üzerinde aşağıya doğru ilerlendikçe büyüse de bunların tümünün tek bir ortak dizeyden ($\mathbf{D}_1$) ürüyor oluşu, bunların izgelerinin de yalnızca o ortak dizeyin izgesinden üretilebileceği anlamına gelir. İzgede yani özdeğerlerdeki bu ortaktan üreyiş olgusu özyöneyler için de geçerlidir ve çözümleyişi olabildiğince yalınlaştırır. Sonuçta, her bir öbeğe karşılık gelen izge belirleyişi sonlu dördül dizeyleri odağa aldığından, dizey boyutu büyüdükçe artsa da, sonlu dizey izge belirlenim işlemidir ve en azından buyrukdizileyiş (programlayış) ya da betikleyiş (ing: scripting) açısından yordamı (ing: routine) bellidir.

3. Dizeyde, üçgencilliğin ötesinde, üç öbek köşegenlilik de varolmaktadır. Bu, yaklaştırım oluşturumunda önemli yalınlıklar sağladığı gibi çözümcül anlatımlar üretilişine de olanak sağlar. Ama anlatımlar sonsuz sayıda toplamcıl anlatım içeren toplamdiziler niteliğinde olacaktır.

(2.86)'in biçimcil çözümünü yalınca yazmak olanaklıdır.

$$\left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (t) = \mathrm{e}^{t\mathbf{E}} \left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (0) \tag{2.87}$$

Ancak, burada, özel bir yapı atanmadıkça, $\left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (0)$ yöneyinin belirsiz kalacağını unutmamak gerekir. Nicem işleybilimde beklenen değerlerin bir başlangıç anındaki yapıları dalga işlevinin başlangıçta verilen yapısı üzerinden beklenen değerler olarak alınımı gerektiğinden burada da öyle yapılacaktır. Bu gereksinim, $\left\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle (0)$ yöneyi için özel bir yapılandırım demektir ve bu yöneyin boyunun sonlu kalamayış olasılığı da söz konusudur. Oysa, yakınsayış güvencesi açısından, Olasılıkçıl Evrim Kuramı'nda, sonsuz öğeli olsa da, sonlu boylu olan yöneylerle çalışmak istenir. Özellikle, dalga işlevinin Dirac delta işlevi gibi çok keskin yerleşimli bir yapıda verilmeyişi, ve de, dizge yöneyinin boyca sonsuz nitelik taşıyabilen öğeler içerimi durumunda bu boy sonsuzluğu ile karşılaşılır. Bu durumlarda, yakınsayış çözümleyişleri artık "düzgün (ing: uniform)" değil de, ancak "yanaşık (ing: asymptotic)" yakınsaklık düzeyinde götürülebilir. Yanaşıklıktan kaçınışın yolu sonlu boylu dizge yöneyleri tanımlamak ve onlarla çalışmaktır.

3. UYUMSUZ ÜSTEL SALINGAÇ GİZİLGÜÇLÜ NİCEM DİZGELERDE BEKLENEN DEĞERLERİN ZAMANDA TOPLAMDİZİLERİ VE SENDELENİM KURAMCIL İNCELEYİŞLER

Schrödinger denklemini çözerek nicem işleybilimin (ing: quantum mechanics) gözlemlenebilen büyüklüklerini elde edişin çoğu dizge için olanaklı olmadığını, ya da, kesin çözülebilirlik olmadığında, sayılabilir sonsuz büyüklüklerle uğraşmak gerektiğini, önceki bölümde belirtmiştik. Bu durum, büyüklükleri birkesim işleçlerin beklenen değerleri aracılığıyla belirleyişi de güçleştirir. Çünkü, bunun için, öncelikle dalga işlevinin belirlenişi, sonra da tümlev (ing: integral) belirleyiş işlemi gerekir. Bunun için de, Schrödinger denklemini çözmek gerekir. Bu eylemden kaçınmak için dalga işlevini değil de beklenen değerleri bilinmeyen olarak alan denklemler oluşturmak olanaklıdır. Denklemler, ilgilenilen dizgenin durağan (ing: stationary) çözümlerinin (erke, ya da enerji, düzeylerinin) belirleneceği durumlarda olduğu gibi, bütünüyle cebircil olabileceği yanısıra, zamana göre sıradan türevli denklemler de olabilir. Bu durum, göre türevli denklem çözümüne karşın yeğlenebilecek bir eylem yapısındadır. Denklemleri oluşturmak ve buradan yöntem geliştirebilmek için öncelikle özelsizde, sonrasında da incelediğimiz dizge için, beklenen değerler ve devinim denklemlerini elde ederek ilerleyebiliriz.

3.1 Beklenen Değer Devinimi

Heisenberg belirsizlik ilkesine göre, bir nicem nesneciğin (ing: quantum particle) konum (x) ve devinirliği (p) aynı anda eşkesinlikle belirlenemez [1]. Bu durumda konum ve devinirliğin Newton devinim denklemlerini sağlayışını beklemek anlamsız olacaktır. Belirsizlik ilkesini günlük yaşamda, büyük boyutlu evrende gözlemlemek olanaksızdır. Çünkü, konum ve devinirliği ölçüş belirsizliğindeki alt kıyı olan aşağıdaki bağıntıda da görebileceğimiz Planck değişmezi ($h = 6,62607015 \times 10^{-34}$J.s) büyük nesneler için gözardı edilebilecek kadar küçük bir değerdir.

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \tag{3.1}$$

Burada σ_x, σ_p sırasıyla konum ve devinirlik ölçün sapış (ing: standard deviation) değerlerini, $\hbar$ ise indirgenmiş Planck değişmezini simgelemektedir. Bohr'un Eşleşim İlkesi (ing: Correspondence Principle) büyük nesneler, büyük erkeler için, öteki bir deyişle, dizgeyi tanımlayan nicem sayıları büyük olduğunda, nicem devinbilim (ing: quantum dynamics) yasalarının başal devinbilim (ing: classical dynamics) yasalarına indirgenebileceğini söyler [73]. Ehrenfest, konum ve devinirliğin beklenen değerlerinin, belli koşullar altında, Newton yasalarını sağladığını göstermiştir [74]. Böylece beklenen değerlerin zamanla evrimini öngören Ehrenfest kanıtsavı Eşleşim İlkesini doğrular.

Öğecik (atom) ve temel nesneciklerin özellik ve davranışlarını tanımlamak için kullanabileceğimiz nicem devinbilimin ikinci koyutuna (ing: postulate) göre başal devinbilimde ölçülebilen bir büyüklük nicem devinbiliminde doğrucul Hermitçil (ing: Hermitian) bir işleç ile ilintilidir. Bir nicem dizgenin devinimini tanımlamak ve devinim denklemlerini oluşturmak için öncelikle beklenen değerlerine odaklanmak gerekir. Herhangi bir birimboylulaştırılmış (ing: normalized) bir dalga işlevi ($\psi(\mathbf{x},t)$) ile tanımlanmış bir dizge için bir $\widehat{o}$ işlecinin beklenen değeri

$$\langle \widehat{o} \rangle (t) \equiv \int_V dV \, \psi(\mathbf{x},t)^* \, \widehat{o} \psi(\mathbf{x},t) \tag{3.2}$$

olarak tanımlanır [6]. Burada, $\mathbf{x}$ konum değişkenleri topluluğunu, V ve dV, sırasıyla konum değişkenleri (ing: position coordinates, space coordinates) üzerinde tümlevleyiş oylumunu (ing: integration volume) ve sonsuz küçük oylum öğesini (ing: infinitesimal volume element) simgeler. $(^*)$ üstsimgesi ile karmaşık eşlenik (ing: complex conjugate) nitelendirimi gerçekleştirilmektedir. İşleç beklenen değerinin zamana bağlı olarak değiştiğini (3.2) denkleminden görebiliriz. Bu durumda, beklenen değerin zamana göre türevini belirlemek için beklenen değer denkleminin her iki yanının zamana göre türevi alınır ve

$$\frac{d \langle \widehat{o} \rangle (t)}{dt} = \int_V dV \left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t} \widehat{o} \psi + \psi^* \frac{\partial \widehat{o}}{\partial t} \psi + \psi^* \widehat{o} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \tag{3.3}$$

elde edilir. $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ve $\frac{\partial \psi^*}{\partial t}$ değerlerini Schrödinger denklemi (2.1) ve onun karmaşık eşleniğini kullanarak belirleyebiliriz.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \widehat{H} \psi \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \widehat{H} \psi^* \tag{3.4}$$

Burada, özelsiz durumların çoğunda olduğu gibi, Hamilton işlecinin gerçel büyüklüklerden oluştuğu öngörülmektedir. (3.3) denkleminin sağ yanının orta anlatımını ise beklenen değer tanımından

$$\int_V dV\,\psi^* \frac{\partial \widehat{o}}{\partial t}\psi = \left\langle \frac{\partial \widehat{o}}{\partial t} \right\rangle \tag{3.5}$$

olarak buluruz. Her zaman olmasa da, özelsizde $\widehat{o}$ işleci zamandan bağımsızdır. Bu durumda, türevi 0 olur. $\widehat{H}$ işleci özüne eş (ing: self-adjoint) bir niteliktedir. Öteki bir deyişle, $\widehat{H}^\dagger = \widehat{H}$ eşitliği doğrudur. Bunu kullanarak (3.3) denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\int_V dV \left(\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\psi^*\widehat{o}\psi - \frac{i}{\hbar}\psi^*\widehat{o}\widehat{H}\psi \right) = \int_V dV\,\psi^* \frac{i}{\hbar}\left(\widehat{H}\widehat{o} - \widehat{o}\widehat{H}\right)\psi \tag{3.6}$$

Buradan işlecin beklenen değerinin türevi, dizgenin Hamilton işleciyle bu işlecin değişecinin beklenen değerinin katı olarak belirlenir.

$$\frac{d\left\langle \widehat{o} \right\rangle(t)}{dt} = -\left\langle \frac{i}{\hbar}\left(\widehat{H}\widehat{o} - \widehat{o}\widehat{H}\right) \right\rangle(t) = -\frac{i}{\hbar}\left\langle \left[\widehat{H},\widehat{o}\right] \right\rangle \tag{3.7}$$

Bir işlecin beklenen değerinin zamana göre değişimi, yalnızca birinci türev bağlamında, Poisson kümesimgelisi (ing: bracket) kullanılarak aşağıdaki biçimde de betimlenebilir. Buradan Poisson kümesimgelisinin belirtik tanımını anlayabilmek de olanaklıdır.

$$\frac{d\left\langle \widehat{o} \right\rangle(t)}{dt} = \left\langle \left\{\widehat{H},\widehat{o}\right\} \right\rangle(t) \tag{3.8}$$

3.1.1 Yetkinişleç ve onun altında kapalılık

(3.8)'de verilen bağıntının sağ yan beklenen değer çekirdek işleci, aslında, Hamilton işleci ile $\widehat{o}$ işleci arasındaki değişeçle orantılıdır. Doğabilimcil (fiziksel) birimsizleştirim durumunda bu olgu Poisson kümesimgelisiyle orantılılığa da dönüşebilmektedir. Poisson kümesimgelisi, $\widehat{o}$ işlecinden Hamilton işleci kullanarak üretilen bir işleçtir. Nicem devinbilimin işleçleri, dizgenin dalga işlevinin içinde bulunduğu doğrucul bir yöney uzayından (Hilbert uzayından) yine o uzaya dönüşüm gerçekleştiren büyüklüklerdir. Hamilton işlecinde tekillik oluşu durumunda o uzayın dışına taşım da söz konusu olabilir. Nasıl olurlarsa olsunlar, sonuçta doğrucul işleçlerdir ve bunlar da bir işleç uzayı oluştururlar. Poisson kümesimgelisi bu işleç uzayından yine o işleç uzayına dönüşüm gerçekleştirir. Dolayısıyla, "Yetkinişleç (ing: superoperator)" oluş durumundadır. Tıkızlaştırım amaçlı olarak

$$\widehat{D}\widehat{o} \equiv \left\{\widehat{H},\widehat{o}\right\} \tag{3.9}$$

eşitliğini gündeme getirebiliriz. Burada $\widehat{D}$ ile betimlediğimiz ve kısaca "Dizge Yetkinişleci" diye adlandırabileceğimiz bu işleci kullanarak, (3.8)'deki beklenen değerin zamana göre birinci türevini aşağıdaki biçimde yeniden yazabiliriz.

$$\frac{d\left\langle \widehat{o}\right\rangle(t)}{dt} = \left\langle \widehat{D}\widehat{o}\right\rangle(t) \tag{3.10}$$

Eğer, $\widehat{D}\widehat{o}$ için, c_1 ve c_2 bilinen iki sayılı simgelemek üzere,

$$\widehat{D}\widehat{o} = c_1\widehat{I} + c_2\widehat{o} \tag{3.11}$$

yazılabiliyorsa, birim işlecin beklenen değerinin değişmez ve 1 olacağı gerçeğinden de yararlanarak, (3.10) yerine

$$\begin{aligned} \frac{d\left\langle \widehat{I}\right\rangle(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\left\langle \widehat{o}\right\rangle(t)}{dt} &= c_1\left\langle \widehat{I}\right\rangle(t) + c_2\left\langle \widehat{o}\right\rangle(t) \end{aligned} \tag{3.12}$$

denklemleri yazılabilir.

(3.12) eşitlikleri $\widehat{I}$ ile $\widehat{o}$ işleçlerinin beklenen değerleri üzerinde iki STD (Sıradan Türevli Denklem) tanımlar. Bunlara eşlik ettirilecek başlangıç koşullarıyla, bu beklenen değerlerin zamana bağımlılığının açık olarak belirlenimi olanaklıdır ve bu olanaklılığa, $\widehat{o}$ işlecinin Poisson kümesimgelisi altındaki görüntüsünün birim işleç ve $\widehat{o}$ işleci üzerinde bir doğrucul birleşim olarak yazılabilişi olanak sağlamaktadır. Bu yazım, öteki bir deyişle, (3.11) eşitliği, $\widehat{I}$ ve $\widehat{o}$ işleçlerinden oluşan kümenin $\widehat{D}$ yetkinişleci (ya da eşdeğer olarak, Poisson kümesimgelisi) altında kapalı olduğu anlamına gelir. Bunun nedeni de, bu iki öğeli küme öğelerinin yetkinişleç altındaki görüntülerinin yine bu küme içinde kalışıdır.

Eğer (3.11) eşitliği geçersizse, diğer bir deyişle yukarıdaki kapalılık söz konusu değilse, o zaman (3.12) denklemleri de geçerli olmaktan çıkar, onun da ötesinde, oradaki iki beklenen değer üzerinde bir STD oluşturulamaz. Bu durumda, artık, $\widehat{D}\widehat{o}$ büyüklüğüne yeni bir işleç ve onun beklenen değerine de yeni bir bilinmeyen gözüyle bakmak gerekecektir. Bu durumda, bu yeni bilinmeyen için de bir STD üretmek gerekecektir.

$\widehat{o}$ işlecinin beklenen değerinin zamana göre ikinci türevini yazmak için Dizge yetkinişlecini kullanırsak

$$\frac{d^2\left\langle \widehat{o}\right\rangle(t)}{dt^2} = \frac{d\left\langle \widehat{D}\widehat{o}\right\rangle(t)}{dt} = \left\langle \widehat{D}^2\widehat{o}\right\rangle(t) \tag{3.13}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada da yetkinişleç altında kapalılık olgusunu gündeme getirmek olanaklıdır. Eğer, c'ler bilinen sayıllar olmak üzere,

$$\widehat{D}^2\widehat{o} = c_1\widehat{I} + c_2\widehat{o} + c_3\widehat{D}\widehat{o} \tag{3.14}$$

yazılabildiği öngörülecek olursa aşağıdaki STD küme'sine ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{d\left\langle \widehat{I}\right\rangle(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{d\left\langle \widehat{o}\right\rangle(t)}{dt} &= \left\langle \widehat{D}\widehat{o}\right\rangle(t) \\ \frac{d\left\langle \widehat{D}\widehat{o}\right\rangle(t)}{dt} &= c_1\left\langle \widehat{I}\right\rangle + c_2\left\langle \widehat{o}\right\rangle + c_3\left\langle \widehat{D}\widehat{o}\right\rangle\end{aligned} \tag{3.15}$$

ve bunlara uygun başlangıç koşulları eşlik ettirilerek eşsiz çözüm üretilebilir.

(3.14) öngörümü, $\widehat{I}$, $\widehat{o}$, ve de, $\widehat{D}\widehat{o}$ işleçlerinden oluşan üç öğeli kümenin yetkinişleç altında kapalı olduğu anlamına gelir. (3.14) öngörümünün geçerli olmadığı durumlarda, (3.15) geçerliliğini yitirir. Onun da ötesinde, böyle üç bilinmeyenli bir denklem oluşturulamaz. $\widehat{D}$ işlecinin üçüncü üslüsüyle de ilgilenmek gerekir. O yapılırsa, dört terimli bir kapalılık öngörümü gündeme getirilebilir. Bu yapılamıyorsa, $\widehat{D}$ işlecinin daha yüksek üslülerine çıkmak gerekebilir ve döngü ya sonluda ya da ancak sonsuzda kapatılabilecek duruma gidebilir.

Kapalılık, aslında, değiştirim eylemi altında da kapalılık olgusuyla çok yakından ilintilidir. Bir işleçle değiştirim bilimcil yazında Lie Cebiri olarak bilinen bir alanın odak konusudur ve o alanda, bilimcil yazında özellikle sonlu kümelerden oluşan yapılar için önemli bilgi birikimi [75–79] bulunmaktadır. Ancak, o sonlu kümeler, en azından bu tez için birincil nitelikli olgulardan değildir. Bu nedenle, burada, bu düzeyde bilgi ile yetineceğiz.

3.2 Uzbilimcil Sendelenim Kuramı

Sendelenim (ing: fluctuation), nicem devinbilim araştırımlarında doğal olarak ortaya çıkan olasılık (ing: probability) olgusunun içinde tanımlanan ve ortalama değerden (ing: mean value) sapışı betimleyen olgudur. Bilimcil yazında türlü adlandırımları olan bu olgu kulanılarak BEBBYT üyelerince Uzbilimcil Sendelenim Kuramı (ing: Mathematical Fluctuation Theory) geliştirilmiş ve bir çok temel soruna uygulanabilecek bir yöntem ortaya çıkmıştır [14, 15, 45, 80–88]. Bu kuram, bir sonsuz boyutlu $\mathscr{H}$ Hilbert Uzayı içerisinde tanımlı, tek değişkenli, çözümcül (ing: analytic) f işlevinin dizey gösteriliminin (ing: matrix representation), bağımsız değişkeninin aynı uzay ve taban kümesi ile dizey gösteriliminin bu f işlevi altındaki görüntüsüne eşit olduğunu söyler. Ancak, bu eşitlik tüm işlev taban küme'si (ing: complete basis set), öteki bir deyişle, sonsuz yatay ve düşey sıra kullanıldığında geçerlidir. Eğer sonlu dizey gösterilimi yani n boyutlu kesişler gerçekleştirilerek elde edilen alt dizeyler odağa alınırsa, artık, eşitlikten değil aşağıdaki gibi tanımlanan yaklaşıklıktan söz edilebilir.

$$\mathbf{M}_f^{(n)} \approx f\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \tag{3.16}$$

Burada $\mathbf{M}_f^{(n)}$, f ile çarpım işlecinin dizey gösteriliminin n boyutlu alt dizeyini, aynı biçimde $\mathbf{X}^{(n)}$ de f işlevinin bağımsız değişkenin dizey gösteriliminin n boyutlu alt dizeyini belirtir. (3.16) bağıntısında sendelenimler gözardı edilmiştir. Bu biçimde tanımlanan yaklaştırım "Sendelenimsizlik Yaklaştırımı" olarak adlandırılır. [15, 55, 71, 88–96]

3.2.1 Beklenen değer deviniminde sendelenim

Beklenen değer belli bir ağırlık altında belirlenen ortalama bir değerdir. Beklenen değerlerden kaynaklı sapışları işlemlerimize katmak istersek sendelenim işleçlerini (ing: fluctuation operators) inceleyişlere katmak gerekir. Devinirlik ($\widehat{p}$) ve konum ($\widehat{q}$) için sendelenim işleçleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir. [81]

$$\widehat{\phi}_p \equiv \widehat{p} - \langle \widehat{p} \rangle \widehat{I} \qquad \widehat{\phi}_q \equiv \widehat{q} - \langle \widehat{q} \rangle \widehat{I} \tag{3.17}$$

Bu durumda, $\widehat{p}$ ve $\widehat{q}$ işleçleri beklenen değerler ve sendelenim işleçleri kulanaraktan

$$\widehat{p} = \langle \widehat{p} \rangle \widehat{I} + \widehat{\phi}_p \qquad \widehat{q} = \langle \widehat{q} \rangle \widehat{I} + \widehat{\phi}_q \tag{3.18}$$

yapısında yazılır. Sav kapsamında ele alınan uyumsuz üstel bakışık salıngaç dizgesinin (2.4)'te verilen gizilgüç terimi sendelenim işleçleri kullanarak aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} V\left(\widehat{q}\right) &= V\left(\langle \widehat{q} \rangle \widehat{I} + \widehat{\phi}_q\right) = \alpha\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}\left(\langle \widehat{q} \rangle \widehat{I} + \widehat{\phi}_q\right)^2} - \widehat{I}\right) \\ &= \alpha\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{2}\langle \widehat{q} \rangle^2 \widehat{I}} \mathrm{e}^{2\left(-i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\langle \widehat{q} \rangle\right)\left(i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\widehat{\phi}_q\right) - \left(i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\widehat{\phi}_q\right)^2} - \widehat{I}\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Buradaki yapıdan konumdaki sendelenim işlecinin doğalsayı üslüleri türünde bir açılıma giderek sendelenim açılımına ulaşımın olanaklı olduğu yalınca görülebilir. Ancak, açılımı çok daha somut yazabilmek için Hermite çokterimlilerinin üreteç işlev tanımlarından [97–99] en yaygın bilinenini gündeme getirişte yarar bulunmaktadır. O üreteç işlevi, x ile t karmaşık değer de alabilen iki sayılı, ya da, onun da ötesinde, aralarında değiştirimli iki doğrucul işleci de simgeleyebilmek üzere, aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(x) \frac{t^k}{k!} \tag{3.20}$$

Burada $H_k(x)$ ile x'in k. dereceden Hermite çokterimlisi simgelenmektedir. Bu eşitlikten, aşağıdaki eşitliğin yazımına geçilebilir.

$$\begin{aligned} e^{2\left(-i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\langle\widehat{q}\rangle\right)\left(i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\widehat{\phi}_q\right)-\left(i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\widehat{\phi}_q\right)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(-i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\langle\widehat{q}\rangle\right)\frac{\left(i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\widehat{\phi}_q\right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(-i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\langle\widehat{q}\rangle\right)\frac{i^n k^{\frac{n}{2}}\widehat{\phi}_q^{\,n}}{2^{\frac{n}{2}}n!} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Bu eşitliğin (3.19) ile bütünleştirimi aşağıdaki denkleme götürür.

$$V(\widehat{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \widehat{\phi}_q^{\,n} \tag{3.22}$$

Burada, sağ yandaki gizilgüç açılım katsayıları, belirtik olarak aşağıdaki eşitliklerle verilirler.

$$V_n \equiv -\alpha\delta_{n,0} + \alpha e^{\frac{k}{2}\langle\widehat{q}\rangle^2} H_n\left(-i\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}\langle\widehat{q}\rangle\right)\frac{i^n k^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}n!} \tag{3.23}$$

Burada, aslında, üstel işlev anlatımda varolan birim işleç, bir anlamda etkisiz olduğundan, 1 ile değiştirilmiştir. Bu değişim, yalınca ayırdına varılabileceği gibi, özelsizlikten herhangi bir yitime neden olmaz. Birim işlecin tüm üslüleri birim işlecin özüne eşit olduğundan onların tümü katsayının sağında tek bir çarpan gibi yorumlanabilir. Bu çarpan ise, toplamdizide ilgili sendelenim işleçlerinin üslülerine, onlarda bir değişikliğe neden olmaksızın, gömülebilir. Bu nedenle de birim işlecin katsayılarda 1 ile değiştirimi geçerli bir işlemdir.

(3.22)'in her iki yanının beklenen değeri alınır ve beklenen değer alış işleminin doğrucul bir eylem gerçekleştirdiği gözönünde tutulursa, bu an için yakınsayış sorununa odaklanılmaksızın, yalnızca biçimcil olarak çalışaraktan, aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$\langle V(\widehat{q})\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} V_n \left\langle \widehat{\phi}_q^n \right\rangle \tag{3.24}$$

Sendelenimsizlik Ereyi (ing: Fluctuationlessness Limit) bir işlecin sendelenim açılımında üslüleri görünen sendelenim işleçlerinin her birinin sıfır işlecine götürülüşü durumunda elde edilecek anlatım olarak tanımlanır. Bu tanıma göre yukarıdaki gizilgüç işlevi için sendelenimsizlik ereyi yaklaştırımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V(\widehat{q}) \approx V_0\widehat{I} = \alpha\left(e^{\frac{k}{2}\langle\widehat{q}\rangle^2} - 1\right)\widehat{I} \tag{3.25}$$

Buradan, sendelenimsizlik ereyinde gizilgüçün beklenen değeri için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\langle V(\widehat{q})\rangle \approx V_0 = \alpha\left(e^{\frac{k}{2}\langle\widehat{q}\rangle^2} - 1\right) \tag{3.26}$$

Bu anlatım, sendelenimsizlik ereyinde, gizilgücün beklenen değerinin, konum işlevi yerine konum işlevinin beklenen değerini yerleştirmek üzere, Başal Devinbilim'deki gizilgüç işlevine eşit olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, beklenen değer devinim denklemlerinin de, Başal Devinbilim denklemlerine dönüşeceğini görmek hiç de güç değildir. Sendelenimsizlik ereyinde çalışmak demek, belli konumlarda desteği olan Dirac delta işlevi gibi davranan dalga işlevleriyle çalışmak demektir. Bu durum, Ehrenfest Kanıtsavı ile de tutarlıdır.

Herhangi bir sendelenim işleci, tanımı gereği sıfır beklenen değerlidir. Bu yüzden, sendelenim açılımlarında sendelenim ereyinden sapış nitelendiren ilk anlatımlar sendelenim işleçlerinin ikinci dereceden üslülerinin beklenen değerleridir. Daha yüksek dereceden üslülerin beklenen değerlerinin üs arttıkça azalışı için dalga işlevinin olabildiğince sonlu sayıda konumcul yoğunlaşımlar gösterişi gerekmektedir. Burada bu düzeyde içerikle yetineceğiz.

3.2.2 Erkede sendelenim ve erkede sendelenim işleci

Yalıtılmış, yani çevresiyle etkileşimde bulunmayan bir dizgenin Hamilton işleci özerktir. Bir işlecin özerk oluşu bir değişkene açık olarak bağımlı olmadığı anlamına gelir. Eğer değişken zaman ise dizge zamandan bağımsız (ing: time-invariant) dizge olarak da adlandırılır. Bu dizgenin Hamiton işlecinin zamana göre türevi 0 olur. Bu sonucu Hamilton işlecinin özüyle Poisson kümesimgelisinin sıfır işleci oluşu gerekliliğinden de görmek olanaklıdır. Bu durum, bizi yalıtılmış nicem dizgenin Hamilton işlecinin beklenen değerinin zamanla değişmez olduğu yargısına ulaştırır.

Özerk Hamilton işlecinin değişmez olan beklenen değerini başlangıçta da geçerliliği çağrıştırmak üzere H_0 ile simgelersek, Hamilton işlecinin sendelenim işleci için aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

$$\widehat{\phi}_H \equiv \widehat{H} - H_0\widehat{I} \tag{3.27}$$

Dizge Hamilton işleci dizgenin toplam erkesiyle ilgili olduğundan (3.27)'deki tanımı "Erkede Sendelenim İşleci" olarak adlandırmak olanaklıdır. Bu işlecin de beklenen değeri 0 olmalıdır. Ancak, bu işlecin iki ve daha yüksek artı bütünsayı üslülerinin beklenen değerlerinin 0 oluşu için bir gereklilik yoktur. Dolayısıyla, bu beklenen değerlere "Erkede Sendelenim" demek olanaklıdır. Eğer,

$$\varphi_j(t) \equiv \left\langle \widehat{\phi}_H^{\,j+1} \right\rangle \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{3.28}$$

tanımları yapılacak olursa ($\varphi_j(t)$) işlevine "Erkede j. Kerteden Sendelenim" adı verilebilir.

3.2.3 Zamanda sendelenim açılımı

Beklenen değer deviniminde işleçlerin beklenen değerlerinin türevlerini alırken beklenen değerlerin toplamdizi açılımı ile yazılabilir oluşundan yararlanabiliriz. Bir işlecin beklenen değeri, $\langle \widehat{o} \rangle$, $t = 0$ konumunu da içeren belirli bir aralıkta tanımlı ve türevlenebiliyorsa Maclaurin toplamdizi açılımıyla

$$\langle \widehat{o} \rangle (t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \langle \widehat{o} \rangle_0^{(j)} t^j \tag{3.29}$$

biçimcil (ing: formal) olarak yazılabilir. Burada, 0 altsimgesi beklenen değerin başlangıç dalga işlevi üzerinden tanımlandığını, (j) üstsimgesi ise zamana göre j. türev katsayısı olduğunu gösterir.

Bu toplamdizi açılımının (3.29) da bir sendelenim açılımı olduğunu göstermek olanaklıdır. Poisson kümesimgelisini, tanımbölgesi bir işleçler kümesi olan, bir "Yetkinişleç" oluşu özelliğini kullanarak $\widehat{D}$ simgesi ile tıkız biçemde (3.9)'da yazmıştık. İşlecin beklenen değerinin zamana göre birinci ve ikinci türevleri sırasıyla (3.10) ve (3.13)'te elde edilmişti. Yetkinişleç tanımı işleç beklenen değerinin j. türevinin aşağıdaki gibi yazımına olanak sağlar.

$$\frac{d^j \langle \widehat{o} \rangle (t)}{dt^j} = \left\langle \widehat{D}^j \widehat{o} \right\rangle (t), \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{3.30}$$

$\widehat{D}$ yetkinişlecini kullanarak (3.29) eşitliğini yeniden yazacak olursak

$$\langle \widehat{o} \rangle (t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left\langle \widehat{D}^j \widehat{o} \right\rangle_0 t^j \tag{3.31}$$

elde edilir. Buradaki yapının varolabilişi için en azından, tüm katsayıların sonlu ve eşsiz nitelikli oluşu gerekir. (3.31)'in sendelenim ile olan ilgisini açığa çıkarmak için yetkinişlece odaklanımda yarar bulunmaktadır. Bu doğrultuda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\widehat{D}\widehat{o} = \left\{ \widehat{H}, \widehat{o} \right\} = \left\{ \widehat{\phi}_H + H_0 \widehat{I}, \widehat{o} \right\} = \left\{ \widehat{\phi}_H, \widehat{o} \right\} \tag{3.32}$$

Bu eşitlik, sendelenim işlecinin bir çarpan değiştirge ile ölçeklenimi durumunda, dizge yetkinişlecinin de o çarpan değiştirgeyle ölçekleneceği anlamına gelir. Bu durum, $\widehat{D}$ yetkinişlecinin yalnızca özü için değil onun eksi olmayan tüm bütünsayı üslüleri için de geçerlidir. Bunun nedeni, bu yetkinişlecin dizge Hamilton işleci yanısıra erkede sendelenim işleciyle de Poisson kümesimgelisi oluşudur. Dolayısıyla, eğer, $\widehat{D}$ yetkinişleci bir çarpan değiştirgeyle ölçekleniyorsa, onun herhangi bir eksi olmayan üslüsü de bu çarpan değiştirgenin bu eksi olmayan üslüsüyle ölçeklenir. Bu da, (3.31) ile verilen açılımın bir sendelenim açılımı olduğu anlamına gelir. Ancak, burada sendelenim "erkede sendelenim" türündedir. Bu nedenle, (3.31) ile verilen toplamdizinin, $\widehat{o}$ işlecinin beklenen değerini "Erkede Sendelenim Açılımı" olarak adlandırabiliriz.

3.2.4 Uyumsuz nicem salıngaç için sendelenim açılımında yakınsaklık

Zamanda Maclaurin toplamdizisi ile verilen Erkede Sendelenim Açılımı, ilgilenilen dizge ve işlece bağımlı olarak yakınsayabilir ya da yakınsamayabilir. Yakınsamayışın ötesinde toplamdizi katsayılarından sonlu ya da sonsuz bir kesimi, tümlevlenemezlik nedeniyle, tanımsız olabilir.

Burada, bakışık (ing: symmetric) üstel uyumsuz salıngaç için toplamdizi katsayıları ve toplamdizi yakınsayışı üzerine odaklanılacaktır. Bu amaçla, $\widehat{o}$ işlecini konum işleci

($\widehat{q}$) olarak alalım. Bu konum işlecinin beklenen değerinin ve türevinin başlangıç anındaki değerleri

$$\langle \widehat{q} \rangle (0) = q_0 \tag{3.33}$$

$$\frac{d \langle \widehat{q} \rangle}{dt} (0) = \frac{p_0}{\mu} \tag{3.34}$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Burada, q_0 ve p_0, sırasıyla, konum ve devinirlik işleçlerinin başlangıç beklenen değerlerini simgeler. Bu başlangıç değerlerinin sonlu kalıp kalmayacağı, bütünüyle, başlangıç dalga işlevinin yapısına bağımlıdır. İnceleyişlerimize, öncelikle, Gauss dalga işlevi ile başlayacağız. Bir nesnecikli durum için birimboylulaştırılmış Gauss dalga işlevi

$$\psi_0 (x) \equiv \frac{1}{\left(2\pi\sigma_0^2\right)^{\frac{1}{4}}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-q_0)^2}{4\sigma_0^2} + i\frac{p_0}{\hbar}x} \tag{3.35}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Burada, σ_0 ile simgelenen değiştirge

$$\sigma_0 \equiv \sqrt{\langle \widehat{q}^2 \rangle_0 - \langle \widehat{q} \rangle_0^2} \tag{3.36}$$

eşitliğiyle tanımlanan, başlangıç anındaki sendelenim anlatımlarının ilkinin (ilgili sendelenim işlecinin dördülünün beklenen değeri) dördülköküne (kareköküne) eşit olan değerdir. Bu değer, “Gauss Dalga Çıkını” (ing: Gauss Wave Packet) olarak adlandırılabilen bu işlevin $x = q_0$ konumunda tepe oluşturan yapısının, bu konum çevresinde ne düzeyde yayıldığını betimler [100].

Beklenen değerin Erkede Sendelenim Açılımı’nın ilk iki katsayısının belirleniminde, başlangıç verileri ve sendelenimleri sonlu kaldıkça, herhangi bir sonsuzlukla karşılaşılamayacağı (3.33) ve (3.34)’den yalınlıkla görülebilir. Öteki katsayıları incelemek için Hamilton işlecinin, öteki işleçler ile Poisson kümesimgelilerini kullanarak bağıntılar oluşturmak gerekir. Burada, yalnızca, konum işlecine odaklanarak başladığımızdan konum işleci sendelenim açılımında ikinci türevli katsayıyı belirlemek için,

$$\begin{aligned}\left\{\widehat{H}, \left\{\widehat{H}, f(\widehat{q})\right\}\right\} = & -\frac{1}{\mu} V'(\widehat{q}) f'(\widehat{q}) - \frac{2}{\mu} V(\widehat{q}) f''(\widehat{q}) + \frac{\hbar^2}{4\mu^2} f^{(4)}(\widehat{q}) \\ & + \frac{1}{\mu}\left[\widehat{H} f''(\widehat{q}) + f''(\widehat{q})\widehat{H}\right]\end{aligned} \tag{3.37}$$

(biraz daha özelsiz) bağıntısını kullanmak olanaklıdır. Bu bağıntıda, f Maclaurin toplamdizisine açılabilen, yalnızca konum işlecine bağımlı, tek bağımsız değişkenli bir işlevi, $\widehat{H}$ Hamilton işlecini, V ise özerk, öteki deyişle, zamandan bağımsız olan gizilgüç işlevini simgelemektedir. Durum, yalnızca uyumsuz üstel salıngaçla kısıtlanmamış ve biraz daha özelsiz tutulmuştur. Bu eşitliğin her iki yanının beklenen değeri alınacak olursa

$$\frac{d^2\langle f(\widehat{q})\rangle(t)}{dt^2} = -\frac{1}{\mu}\left\langle V'(\widehat{q})f'(\widehat{q})\right\rangle(t) - \frac{2}{\mu}\left\langle V(\widehat{q})f''(\widehat{q})\right\rangle(t) + \frac{\hbar^2}{4\mu^2}\left\langle f^{(4)}(\widehat{q})\right\rangle(t) + \frac{1}{\mu}\left\langle\left[\widehat{H}f''(\widehat{q}) + f''(\widehat{q})\widehat{H}\right]\right\rangle(t) \qquad (3.38)$$

eşitliği elde edilir. Burada $f(\widehat{q}) \equiv \widehat{q}$ alınır ve gizilgüç olarak bakışık uyumsuz nicem salıngacın gizilgüç işlevi alınıp, başlangıç anında değer belirleyişine gidilirse, $f''(\widehat{q}) \equiv 0$ ve $f^{(4)}(\widehat{q}) \equiv 0$ olacağından (3.38)'nin son üç terimi sıfırlanır. Buna göre konum işlecinin beklenen değerinin zamana göre ikinci türevinin başlangıç anındaki değeri

$$\frac{d^2\langle\widehat{q}\rangle}{dt^2}(0) = -\frac{1}{\mu}\left\langle k\widehat{q}e^{\frac{k}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle_0 = -\frac{k}{\mu}\frac{1}{\left(2\pi\sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x e^{-\frac{(x-q_0)^2}{2\sigma_0^2}+\frac{k}{2}x^2} \qquad (3.39)$$

eşitliğiyle belirlenebilecek duruma gelir. Ancak, bu eşitlikteki tümlevin tanımlı olabilişi için aşağıdaki koşulun sağlanımı gerekir.

$$\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{k}{2} > 0 \qquad (3.40)$$

İkinci türevli katsayının belirlenimi, aslında, ilk sendelenim anlatımının belirlenimi anlamına gelir ve bu belirlenimde ortaya çıkan bu koşul, daha önce uyumsuz salıngaç değiştirgesi (k) için öngörülen gerçel artı değerlilik kısıtını, (3.40) ile tanımlı sonlu aralıkta artı değerliliğe indirger. Böylece, k değiştirgesi için ilk sendelenimde tanım aralığı büzülüşü gözlemlenmiş olur. İkinci türevli katsayıda ortaya çıkan bu durumun öteki türevli katsayılar için de olup olmadığını incelemekte yarar vardır. Bu amaçla üçüncü türevli katsayıya bakalım.

$$\frac{d^3\langle f(\widehat{q})\rangle(t)}{dt^3} = \left\langle\left\{\widehat{H},\left\{\widehat{H},\left\{\widehat{H},f(\widehat{q})\right\}\right\}\right\}\right\rangle(t) \qquad (3.41)$$

Burada, $f(\widehat{q}) \equiv \widehat{q}$ alınır ve dizgemize özgü gizilgüç kullanılıp (3.37) de odağa alınırsa başlangıç anı için

$$\begin{aligned}\frac{d^3\langle\widehat{q}\rangle}{dt^3}(0) &= -\frac{1}{\mu}\left\langle\left\{\widehat{H},V'(\widehat{q})\right\}\right\rangle(0)\\ &= -\frac{1}{2\mu^2}\left\langle\widehat{p}V''(\widehat{q}) + V''(\widehat{q})\widehat{p}\right\rangle(0) \qquad (3.42)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilebilir. Bu eşitlik belirtik olarak yazılırsa ortaya çıkan tümlevde k üzerine yeni bir kısıt gelmeyeceği görülür. Bir özelsizleştirime gidebilmek için dördüncü türevli katsayıyı da incelemek gerekir. Aşağıdaki bağıntı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left\{\widehat{H},\widehat{p}V''(\widehat{q})+V''(\widehat{q})\,\widehat{p}\right\} &= \left\{\widehat{H},\widehat{p}\right\}V''(\widehat{q})+V''(\widehat{q})\left\{\widehat{H},\widehat{p}\right\} \\ &\quad +\widehat{p}\left\{\widehat{H},V''(\widehat{q})\right\}+\left\{\widehat{H},V''(\widehat{q})\right\}\widehat{p} \\ &= -2V'(\widehat{q})\,V''(\widehat{q})+\widehat{p}\left\{\widehat{H},V''(\widehat{q})\right\} \\ &\quad +\left\{\widehat{H},V''(\widehat{q})\right\}\widehat{p} \end{aligned} \tag{3.43}$$

dördüncü türevli katsayı için

$$\frac{d^4\langle\widehat{q}\rangle}{dt^4}(0) = -\frac{1}{2\mu^2}\left\langle -2V'(\widehat{q})\,V''(\widehat{q})+\widehat{p}\left\{\widehat{H},V''(\widehat{q})\right\}+\left\{\widehat{H},V''(\widehat{q})\right\}\widehat{p}\right\rangle(0) \tag{3.44}$$

bağıntısına ulaşılır. Buradan görülebileceği üzere, sağ yan birinci anlatımda gizilgüç üstel işlev yapısının dördülü görünmektedir. Bu durum, beklenen değerdeki tümlev belirlenebilirliği için k üzerine yeni bir kısıt getirecektir. Tümlevin sonlu kalabilişi için

$$\frac{1}{2\sigma_0^2}-k>0 \tag{3.45}$$

kısıtının sağlanımı gerekir. Bu durum k'nın değerinin daha küçük bir sonlu aralığa kısıtlanımına neden olur. Bu inceleyişler sürdürülürse, kertesi 2'nin bütün katları olan türevlerdeki beklenen değer belirlenimlerinde, kertenin yarısı derecesinde gizilgüç çarpanları görülür. Özelsizleştirmek istersek, kertesi $2m$ olan türevli terimdeki beklenen değer için tümlevin yakınsayışının koşulu

$$\frac{1}{\sigma_0^2}-mk>0 \tag{3.46}$$

olarak ortaya çıkar. m değeri yükseldikçe, k'nın alabileceği değer aralığı gittikçe küçülür. m sonsuza giderken bu aralık sıfıra gider, öteki deyişle $k=0$ için yakınsayıştan sözedilebilir. Sonuç olarak, $\widehat{q}$'nın beklenen değerinin, artı k değerleri için, t'nin üslüleri olarak toplamdizi açılımı sıfır dışında hiçbir t değeri için yakınsamaz. Bu durumda, bu beklenen değer tanımı dışında başka beklenen değer tanımlarına giderek yakınsayış sağlanımına çalışılabilir. Ya da başlangıç dalga işlevi yapısı, yakınsaklığın kazanımına uygun biçimde seçilebilir. Bunun için gelecek altbölümde Gauss dalga çıkınının getirilerinden uzaklaşıma çalışarak yeni bir özelsizleştirilmiş başlangıç dalga çıkını tanımlayacağız.

3.3 Özelsizleştirilmiş Dalga Çıkını

Konum ve devinirlik işleçlerinin başlangıç beklenen değerlerinin belirlenimi sürecinde değerlerin sonlu kalıp kalmayacağı seçeceğimiz başlangıç dalga işlevi ile doğrudan ilintilidir. Ayrıca, beklenen değerlerin sendelenim açılım katsayılarının sonlu kalıp kalmayacağı, sendelenim açılımlarının yakınsayıp yakınsamayacağı da, yine, başlangıç dalga işlevi ile doğrudan ilintilidir. Gauss dalga işlevinin tanımlı dizge için sonsuzluğu bastırmada yetersiz kaldığı, önceki altbölümlerimizdeki gözlemlerimizde görülmüştür. Bu durumda, dalga işlevimizi öyle özelsizleştirmeliyiz ki, dizgemizi tanımlayan üstel gizilgüç işlevinin sonsuzda büyüyüşünü bastıracak ve böylelikle yakınsayışı sağlayacak anlatımlar içersin. Bunun için, $u(x)$ ile simgelediğimiz bir işlev alalım. $x = 0$'da sıfır değeri alan ve x'in artımıyla tekdüze artan $u(x)$ ile başlangıç dalga işlevini aşağıdaki gibi yeniden düzenleyelim.

$$\psi_0(x) \equiv \frac{1}{\left(2\pi\sigma_0^{(u)2}\right)^{\frac{1}{4}}} \left[u'(x)\right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(u(x)-u_0\right)^2}{4\sigma_0^{(u)2}}+i\frac{u_0^{(dev)}}{\hbar}} \tag{3.47}$$

Burada u_0, $u(x)$ işlevinin başlangıç değerine, $u_0^{(dev)}$ de türevinin $-i\hbar$ ile çarpımının başlangıç değerine karşılık gelmektedir. $\sigma_0^{(u)}$ da $u(x)$'deki başlangıç sendelenimini verir. Gauss dalga çıkınında $u(x)$, x olarak alınmıştır. Ancak, x değerindeki artış gizilgüç değerindeki artışa göre çok yavaş kalmakta ve bu da yakınsayış aralığının tek bir konuma dönüşümüne neden olmaktadır. Seçilecek $u(x)$ işlevi gizilgüç işlevinin ($V(x)$) yapısına bağımlı olmalıdır. Çözümleyişlerde (ing: analyses)

$$u(x) \equiv \int_0^x dy\sqrt{V(y)} \tag{3.48}$$

gibi bir tanımın işe yarayabileceği gözlemlenmiştir.

$$V(x) = \alpha\left(\mathrm{e}^{\frac{kx^2}{2}} - 1\right) \tag{3.49}$$

biçiminde tanımlanmış bir gizilgüç işlevi için, elimizdeki koşullayışa göre, $u(x)$

$$u(x) \equiv \int_0^x dy\sqrt{V(y)} \equiv \mp\int_0^x dy\alpha^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{ky^2}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.50}$$

ile tanımlanan bir anlatımda bulunmalıdır. $u(x)$ ile betimlenen yeni bağımsız değişkeni ile ileri çözümleyişlerde, tümlev altında dönüşümler yapılmalı ve tümlevler $u(x)$'e bağımlı duruma getirilmelidir. Bu değişken dönüşümü gerçekleştirilirken, değişkenin eski değişkene olan bağımlılığı hep tekdüze (artan ya da azalan) olmalıdır. Bu nedenle, dördülkök alış işlevinin getirdiği dallanış ele alınmalı ve $u(x)$'in her iki imlisi (işaretlisi) seçenek olarak çıktığında, im öyle iyi seçilmelidir ki ortaya çıkan $u(x)$ işlevi x, $-\infty$'dan $+\infty$'a doğru değişirken hep artan kalsın.

Bu aşamada tümlev alıp sonuca gitmek yerine yanaşık (ing: asymptotic) çözümleyiş yoluyla bir ölçün işlev (ing: gauge) elde ederek çözüm gerçekleştirmek amaçlanmaktadır. Çözümün belirlenişi eylemine girişmeden önce tümlev altındaki anlatımı düzenlemek için yeni bir değişken (z) tanımlayarak bir dönüşüm gerçekleştirmek istersek

$$z \equiv \left(e^{\frac{ky^2}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2}{k}}\left(ln(1+z^2)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} dy &= \sqrt{\frac{2}{k}}\frac{1}{2}\left(ln(1+z^2)\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1+z^2}2zdz \\ &= \sqrt{\frac{2}{k}}\frac{z}{\sqrt{ln(1+z^2)}\,(1+z^2)}dz \end{aligned} \tag{3.52}$$

yazabiliriz. z, y arttıkça artan bir bağımsız değişkendir. Tümlevin uç konumlarını da yeni değişkene göre düzenleyelim.

$$u(x) = \mp\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2}{k}}\int_0^{\sqrt{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}} dz\frac{z}{\sqrt{ln(1+z^2)}\,(1+z^2)} \tag{3.53}$$

Tümlevin uç konumlarını değişmez kılmak için z değişkenini ölçekleyelim. Bunun için son eşitlikte z gördüğümüz her yere $z\left(e^{\frac{kx^2}{2}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}$ yazarsak

$$\begin{aligned} u(x) = &\mp\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2}{k}}\left(e^{\frac{kx^2}{2}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\times\int_0^1 dz\frac{z^2}{\sqrt{ln\left(1+\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)z^2\right)}\left(1+\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)z^2\right)} \end{aligned} \tag{3.54}$$

sonucuna varırız. Böylelikle, x sonsuza giderken uç konumlarda oluşacak büyüyüşlerden kurtulmuş oluruz. Elde ettiğimiz, (3.54)'te verilen eşitliğin, tüm yalınlaştırımlardan sonraki yanaşık davranışını çözümleyerek bir ölçün işlev elde edişe çabalayalım.

x sonsuza giderken $\left(e^{\frac{kx^2}{2}} - 1\right)$ de sonsuza gider. Bu yapıyı evriküstel (logaritmik) yapılardan dışarı çıkartarak çözümleyişe başlayalım.

$$1+\left(e^{\frac{kx^2}{2}} - 1\right)z^2 = \left(e^{\frac{kx^2}{2}} - 1\right)\left(z^2 + \frac{1}{e^{\frac{kx^2}{2}} - 1}\right) \tag{3.55}$$

$$ln\left(1+\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)z^2\right)=\ln\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)+ln\left(z^2+\frac{1}{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}\right) \tag{3.56}$$

(3.54)'de yerine yerleştirimle

$$\begin{aligned} u(x) = &\mp\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{e^{\frac{kx^2}{2}}-1} \\ &\times\int_0^1 dz\frac{z^2}{\sqrt{ln\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)+ln\left(z^2+\frac{1}{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}\right)}\left(z^2+\frac{1}{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}\right)} \end{aligned} \tag{3.57}$$

yazılabilir. x sonsuza giderken, $1/\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)$ sıfıra gider. Böylelikle,

$$z^2+\frac{1}{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}\longrightarrow z^2 \tag{3.58}$$

elde edilebilir.

Yanaşık biçimde geriye kalan pay ve paydadaki z^2'ler birbirini götürür. Evriküstel anlatımlar içerisine bakacak olursak, $\ln\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)$, x sonsuza giderken, $\ln(z^2)$'nin yanında daha tez büyür. Öteki bir deyişle, çok çok büyük x değerleri için $\ln(z^2)$ gözardı edilebilir. Andıran biçimde, yanaşık olarak üstel anlatımın yanında 1 gözardı edilebilir.

$$ln\left(e^{\frac{kx^2}{2}}-1\right)\approx\ln\left(e^{\frac{kx^2}{2}}\right)=\frac{kx^2}{2} \tag{3.59}$$

Artık, $u(x)$ için yanaşık olarak elde ettiğimiz işlev

$$\begin{aligned} u(x) &\approx \mp\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\sqrt{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}\int_0^1 dz\frac{1}{\sqrt{\frac{kx^2}{2}}} \\ &= \mp\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\sqrt{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{1}{x}=\mp\frac{2\sqrt{\alpha}}{k}\frac{\sqrt{e^{\frac{kx^2}{2}}-1}}{x} \end{aligned} \tag{3.60}$$

olarak yazılabilir. Aslında, yanaşık açılım daha ilerilere götürülerek işlev hem yalınlaştırılabilir hem de nitelikte etkinleştirilebilir. Ancak, burada özen gösterişimiz gereken birkesim olgular bulunmaktadır. Öncelikle işlevimizin, x, $-\infty$'dan $+\infty$'a giderken tanımlı oluşu gerekmektedir ve bu aralıkta işlevin artan nitelikli oluş gereksiniminden sözetmiştik. Bu durumu, $u(x)$'in $+$ değerlisini alarak denetleyecek olursak, $x=0$ bu işlev için bir tekil konum olmaktadır. x, 0'dan sonsuza giderken, üstel kesim daha tez biçimde arttığı için, işlev sonsuza gitmektedir. x, 0'dan eksi sonsuza giderken ise, işlev eksi sonsuza gitmektedir. Bu durumda artanlık olgusu varolmaktadır.

$x = 0$'da tanımsızlık durumu, paydadaki x'in yanına sonsuzda sonucu değiştirmeyecek bir değişmez eklenerek ortadan kaldırılabilir. Yapı değişir ama istenen olgular da elde edilmiş olur.

Burada, yanaşık çözümleyişte, ilk anlatımı, öteki bir deyişle, en baskın anlatımı aldık ve türlü gözardı edişler gerçekleştirdik. Ancak, bu davranış ortaya başka sorunlar çıkarmıştır. Bu durumda, x'in çok büyük değerlerinde, sonucu değiştirmeyecek, gözardı edilebilir ekleyişler ile sorunların çözülebileceği anlaşılmıştır. Bu biçimde dalga çıkını oluşturumu, inceleme, doğrulayış ve uygulayış kesimleri gelecekte bir araştırım konusu olabilecek biçimde burada sonlandırılmıştır.

4. BEKLENEN DEĞER DEVİNİMİ VE UZAY GENİŞLETİMİYLE İKİNCİ DERECELİLİĞE İNDİRGEYİŞ

Önceki bölümlerde, Schrödinger denklemindeki göre türevli denklemi çözmek yerine işleçlerin beklenen değerlerini ve dalga işlevinin başlangıç anındaki yapısını kullanarak sıradan türevli denklem kümesi oluşturup, çözüşü yeğleyeceğimizden sözetmiştik. Bunun için, öncelikle, tanımlı dizge Hamilton işleci ile devinirlik $(\widehat{p})$ ve konum $(\widehat{q})$ işleçlerinin Poisson kümesimgelilerini (2.46) ve (2.47)'de aşağıdaki gibi belirlemiştik.

$$\begin{aligned} \left\{\widehat{H},\widehat{p}\right\} &= -\alpha\kappa\widehat{q}e^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} \\ \left\{\widehat{H},\widehat{q}\right\} &= \frac{1}{\mu}\widehat{p} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bilgisayımlarımızda işleç cebirini kullanarak çalışabilmek için öğeleri devinirlik ve konum işleçleri olan aşağıdaki gibi bir dizge yöneyi $(\widehat{\mathbf{s}})$ tanımlamıştık.

$$\widehat{\mathbf{s}} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{q} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Dizgeyi tanımlayan gizilgüç işlevi (2.4)'te bulunan üstel yapı (4.1)'deki birinci bağıntının bir üstel yapı içerişine neden olmuştur. Bu durum, işleç dizey cebiri kullanırken devinim bağıntılarının sonlu sayıda anlatım ile gösterilişi olanağını ortadan kaldırır. Bu da, istediğimiz bağıntı yapılarına ulaşımımızı güçleştirir. Bu yapıda tanımlayacağımız bir dizge yöneyinin (4.2) Hamilton işleci ile değiştirimi, sonsuz sayıda katsayı içeren ve dizge yöneyinden oluşturulacak genişletilmiş yöney üzerinde yapılanan, Kronecker üslü toplamdizi nitelikli, bir doğrucul birleşime götürür. Oysa, bu türde, ancak, sonlu sayıda anlatım içeren yapılar yeğlenecek durumdadır. Uzay genişletimi ile bu sorun aşılabilir.

Bu bölümde önceki bölümlerde söz edilen doğabilimcil birimsizleştirim uygulanmadan bağıntılandırım yapılmıştır. Sav kapsamında yazılan bildirilerde bilgisayımlar bu biçimde yapıldığı için bu bölümde de bağıntıların aynı biçimde verilmesi uygun görülmüştür. İstenildiğinde Schrödinger denkleminin dizge Hamilton işleci ile ilk yazımında, ya da elde edilen son bilgisayım bağıntılarında $\hbar$, μ, α değiştirgeleri 1 alınarak, ve κ yerine k yazılarak doğabilimcil birimsizleştirim elde edilebilir.

4.1 Uzay Genişletimi ile İkinci Derecelilik Sağlanışı

Sav kapsamında ele alınan üstel gizilgüçlü dizge sorununa (2.8) bakacak olursak, sonsuzda son derece karmaşık tekilliği bulunan üstel işlevin değişkenine göre türevinin, özüne (işleç nitelikli) eş oluş (ing: self-adjointness) özelliği çözüme önemli katkılar sağlar. Üstel işlevin sonlu sayıda değiştirgesinin üslülerine doğrucul bağımlılığı olmayışına karşın işlevcil bağımlılığı vardır. Bu da bize (4.1)'de ortaya çıkan üstel yapıyı yeni bir bağımsız değişken olarak tanımlayıp, dizge yöneyine bir öğe olarak eklenimiyle, genişletilmiş bir uzayda çalışmak olanağı verir. Bunun için, öncelikle aşağıdaki gibi yeni bir dizge yöneyi tanımı yapalım.

$$\widehat{\mathbf{s}} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 \\ \widehat{s}_2 \\ \widehat{s}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{q} \\ \mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Beklenen değer deviniminde kullanılmak üzere işleçlerin Poisson kümesimgelilerine bakacak olursak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\left\{\widehat{H},\widehat{s}_1\right\} &= \left\{\widehat{H},\widehat{p}\right\} = -\alpha\kappa\widehat{q}\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} = -\alpha\kappa\widehat{s}_2\widehat{s}_3 \\
\left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\right\} &= \left\{\widehat{H},\widehat{q}\right\} = \frac{1}{\mu}\widehat{p} = \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1 \\
\left\{\widehat{H},\widehat{s}_3\right\} &= \left\{\widehat{H},\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\} = \frac{\kappa}{2\mu}\left[\widehat{p}\widehat{q}\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} + \mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\widehat{q}\widehat{p}\right] \\
&= \frac{\kappa}{2\mu}\left[\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_3 + \widehat{s}_3\widehat{s}_2\widehat{s}_1\right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4)'ten görülebileceği üzere, gerçekleştirdiğimiz uzay genişletimi, eşitlikleri bütün anlamıyla doğrucul duruma getirememiştir. Birinci ve üçüncü eşitlikte çokçokterimlilik (ing: multinomiality) gözükmektedir. İlk iki eşitliğin en sağ yanında elde edilen bağıntılar önceki bölümde de elde edilmişti. Burada, eşitlikler, yeni tanımlanan $\widehat{s}_3$ öğesi ile yeniden yazılmış ve böylece ikinci dereceden çokçokterimlilik elde edilmiştir. Ancak, üçüncü bağıntı yeni elde edilmiş olup sağ yanda üçüncü dereceden çokçokterimlilik ortaya çıkmıştır. Doğrucul olamayış durumundan kurtulamasak da, sonlu sayıda anlatım içeren eşitlikler ile çalışabilmek için, yine de, özel olan yapıları yeğleriz. Bunun için, en yalın doğrucul olmayan yapı olan dördül [32, 36, 37, 46, 47, 50, 65, 101, 102], öteki deyişle, ikinci dereceden çokçokterimli bir eşitlik kümesi, çözümleyişleri daha yalınlaştıracaktır. Eşitliklerin istediğimiz yapıya gelişi için yeniden uzay genişletimine gidebiliriz.

(4.4)'ün son yataysırasında ortaya çıkan eşitliği, üçüncü dereceden ikinci derece çokçokterimliliğe indirmek için ikili çarpımları anlatan yeni dizge yöneyi öğelerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\widehat{s}_4 \equiv \widehat{s}_2\widehat{s}_3 = \widehat{s}_3\widehat{s}_2 \tag{4.5}$$

$$\widehat{s}_5 \equiv \widehat{s}_2\widehat{s}_1 \tag{4.6}$$

Bu yeni tanımlar ile genişletilmiş dizge yöneyi $\widehat{\mathbf{s}}_G$ aşağıdaki gibi yazılabilır.

$$\widehat{\mathbf{s}}_G \equiv \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 & \widehat{s}_2 & \widehat{s}_3 & \widehat{s}_4 & \widehat{s}_5 \end{bmatrix}^T \tag{4.7}$$

$\widehat{s}_4$ ve $\widehat{s}_5$'in Hamilton işleciyle Poisson kümesimgelisini yazacak olursak

$$\begin{aligned} \left\{\widehat{H},\widehat{s}_4\right\} &= \left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\widehat{s}_3\right\} = \left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\right\}\widehat{s}_3 + \widehat{s}_2\left\{\widehat{H},\widehat{s}_3\right\} \\ &= \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1\widehat{s}_3 + \frac{\kappa}{2\mu}\left[\widehat{s}_2\widehat{s}_1\widehat{s}_2\widehat{s}_3 + \widehat{s}_2\widehat{s}_3\widehat{s}_2\widehat{s}_1\right] \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \left\{\widehat{H},\widehat{s}_5\right\} &= \left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\widehat{s}_1\right\} = \left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\right\}\widehat{s}_1 + \widehat{s}_2\left\{\widehat{H},\widehat{s}_1\right\} \\ &= \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1^2 - \alpha\kappa\widehat{s}_2\widehat{s}_2\widehat{s}_3 \end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliklerini elde ederiz. Yeni tanımlar ve elde edilen eşitlikler ile

$$\begin{aligned} &\left\{\widehat{H},\widehat{s}_1\right\} = -\alpha\kappa\widehat{s}_4 && \left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\right\} = \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1 \\ &\left\{\widehat{H},\widehat{s}_3\right\} = \frac{\kappa}{2\mu}\left(\widehat{s}_1\widehat{s}_4 + \widehat{s}_4\widehat{s}_1\right) && \left\{\widehat{H},\widehat{s}_4\right\} = \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1\widehat{s}_3 + \frac{\kappa}{2\mu}\left(\widehat{s}_5\widehat{s}_4 + \widehat{s}_4\widehat{s}_5\right) \\ &\left\{\widehat{H},\widehat{s}_5\right\} = \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1^2 - \alpha\kappa\widehat{s}_2\widehat{s}_4 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ikinci dereceden çokçokterimli eşitlik kümesini yazabiliriz.

$\widehat{\mathbf{s}}_G$ ile tanımladığımız, öğeleri, eşitliklerimizin bilinmeyenleri $\widehat{s}_1, \widehat{s}_2$ ve, uzay genişletimlerde kullanmak üzere yeni tanımlanan, $\widehat{s}_3, \widehat{s}_4, \widehat{s}_5$ olan dizge yöneyi ve de onun ikinci Kronecker üslüsünü kullanarak (4.10)'da elde ettiğimiz eşitlik kümesini tıkız (ing: compact) bir biçimde yazmak olanaklıdır. Bunun için, öncelikle $\widehat{\mathbf{s}}_G$ yöneyinin ikinci Kronecker üslüsünü yazalım.

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{s}}_G^{\otimes 2} = \big[&\widehat{s}_1^2 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_2^2 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_5 \\ &\widehat{s}_3\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_3^2 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_4^2 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_5 \\ &\widehat{s}_5\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_5^2\big]^T \end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.10)’da elde ettiğimiz eşitliklerin sağ yan katsayı toplamcıl anlatımlarını

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_1 \equiv & \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_{5,2}\mathbf{e}_{5,1}^T - \alpha\kappa\mathbf{e}_{5,1}\mathbf{e}_{5,4}^T \\
\mathbf{H}_2 \equiv & \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{5,3}\left(\mathbf{e}_{5,1}\otimes\mathbf{e}_{5,4}+\mathbf{e}_{5,4}\otimes\mathbf{e}_{5,1}\right)^T \\
& + \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_{5,4}\left(\mathbf{e}_{5,1}\otimes\mathbf{e}_{5,3}+\frac{\kappa}{2}\left(\mathbf{e}_{5,4}\otimes\mathbf{e}_{5,5}+\mathbf{e}_{5,5}\otimes\mathbf{e}_{5,4}\right)\right)^T \\
& + \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_{5,5}\left(\mathbf{e}_{5,1}\otimes\mathbf{e}_{5,1}-\alpha\kappa\mathbf{e}_{5,2}\otimes\mathbf{e}_{5,4}\right)^T
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

biçiminde tanımını yaptığımız $\mathbf{H}_1$ ve $\mathbf{H}_2$ katsayı dizeylerini kullanarak bir araya toplayabiliriz. Burada $\mathbf{e}_{5,i}$’ler beş boyutlu Kartezyen uzayın i. öğesi 1, öteki öğeleri 0, olan birim yöneyleridir. (4.11) ve (4.12)’yi kullanarak Hamilton işlecinin genişletilmiş işleç dizge yöneyi ile Poisson kümesimgelisi

$$
\left\{\widehat{H},\widehat{\mathbf{s}}_G\right\} = \mathbf{H}_1\widehat{\mathbf{s}}_G + \mathbf{H}_2\widehat{\mathbf{s}}_G^{\otimes 2} \tag{4.13}
$$

bağıntısıyla verilebilir. İşleçlerin beklenen değerlerinin zamana göre türevini yazabilmek için, elde ettiğimiz bu tıkız eşitlik kümesi (4.13)’ü kullanabiliriz.

$$
\frac{d\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_G\right\rangle(t)}{dt} = \left\langle\left\{\widehat{H},\widehat{\mathbf{s}}_G\right\}\right\rangle = \mathbf{H}_1\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_G\right\rangle(t) + \mathbf{H}_2\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_G^{\otimes 2}\right\rangle(t) \tag{4.14}
$$

Eşitlik kümesinin yapısında gerçekleştirdiğimiz bu değişiklikler işimize yarayacak nitelikte olsa da, katsayı dizeyleri $\mathbf{H}_1$ ve $\mathbf{H}_2$’nin dizey yapısından kaynaklanan nedenlerden dolayı, bu sıradan türevli denklemi çözmek öyle pek de yalın olmayacaktır. Burada, Kronecker çarpımlar ile elde edilecek üslülerde oluşan esnek yapıları kullanarak, katsayı dizeylerini araştırımımızı yalınlaştıracak biçimde yeniden elde etmek olanaklıdır. Bundan sonra, önümüzdeki aşamalarda yalınlık sağlayabilmek için, genişletilmiş dizge yöneyini simgeleyen $\widehat{\mathbf{s}}_G$ yerine altsimge (G) olmaksızın $\widehat{\mathbf{s}}$ kullanacağız.

4.1.1 Evrim dizeyinin sıfır özdeğerli özyöneyleri

(4.14)’te elde edilen eşitlik kümesi, aslında, $\mathbf{E}$ sayılabilir sonsuz bir dördül (kare) dizeyi simgelemek üzere, tek bir tıkız yöney eşitlikle de verilebilir. Bu tıkız eşitlik kümesi,

$$
\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \left\langle\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 0}\right\rangle(t) \\ \left\langle\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 1}\right\rangle(t) \\ \left\langle\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2}\right\rangle(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4.15}
$$

tanımı üzerinden,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{E}\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 0} \right\rangle (0) \\ \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 1} \right\rangle (0) \\ \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle (0) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

yapısında verilebilmekteydi. Bu denklemde, **E** zamanla değişmeyen "Evrim Dizeyi"ni simgelemekteydi.

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{0,0} & \cdots & \mathbf{E}_{0,j} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ \mathbf{E}_{j,0} & \cdots & \mathbf{E}_{j,j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Buradaki Evrim Dizeyi, daha önceden üretilen bulgular bağlamında, öbek köşegencil (ing: block diagonal) yapıdadır ve sıfır olmayan öbekleri aşağıdaki eşitliklerle verilir.

$$\mathbf{E}_{j,j} \equiv \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\mathbf{I}}_5^{\otimes k} \otimes \mathbf{H}_1 \otimes \widehat{\mathbf{I}}_5^{\otimes j-k}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.18}$$

$$\mathbf{E}_{j,j+1} \equiv \sum_{k=0}^{j-1} \widehat{\mathbf{I}}_5^{\otimes k} \otimes \mathbf{H}_2 \otimes \widehat{\mathbf{I}}_5^{\otimes j-k}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.19}$$

(4.16)'nın değişmez çözümünün varlığından sözedebilmek için $\mathbf{H}_1$ dizeyinin sıfır özdeğerinin varoluşu gerekir. Eğer bu varlık geçerliyse $\mathbf{E}_{j,j}$ ile simgelenen öbeğin de katlı sıfır özdeğerleri olacağını göstermek olanaklıdır. Bu ise, sayılabilir sonsuzluklu **E** dizeyine sayılabilir sonsuz katlılıklı sıfır özdeğer olarak yansır. Bu özdeğere karşılık gelen özyöneyler, sonsuz sayıda esneklikler içerebilen sayılabilir sonsuz sayıda öğeler içeren tek bir simge ile, **u** ile, simgelenirse, **0** sayılabilir sonsuz sayıda ve 0 değerli öğe içeren yöneyi simgelemek üzere,

$$\mathbf{E}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{4.20}$$

ya da, $\mathbf{0}_{5^j}$ ile 5^j öğeli sıfır yöneyi simgelenmek üzere, onun özyineleyişli yazılışı olan

$$\mathbf{E}_{j,j}\mathbf{u}_j + \mathbf{E}_{j,j+1}\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{0}_{5^j}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.21}$$

denklemlerinin sağlanımını gerektirir. Cebircil nitelikli olan bu özyineleyişin çözümünün belirlenimi, bu savın yan amaçlarından biridir. Bu an için de bu sorunun doğrudan çözümüne geçilmeyecek ve altyapı oluşturumu sürdürülecektir.

4.2 Olasıklıkçıl Evrim Kuramı ve Özyineleyişli Denklemler

Önceki bölümlerde ayrıntıları verilmiş olan Olasılıkçıl Evrim Kuramı ve Evrim yetkinişleci ile (4.14)'ün çözümü için özyineleyişli denklemler elde edilebilir. Bunun için öncelikle dizge yöneyi $\mathbf{s}(t)$'in Kronecker j. üslüsünün beklenen değerini elde edebilecek denklemi yazmak gerekir. Bu doğrultuda geçerli olacak olan sıradan türevli denklem

$$\frac{d\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}\right\rangle(t)}{dt}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{E}_{j,l}\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes l}\right\rangle(t), \qquad j=0,1,2,\ldots \tag{4.22}$$

gibi bir anlatım ile yazılabilir. Katsayı dizeyleri $\mathbf{E}_{j,l}$ ile verilen Evrim dizeyi öbekleri Leibniz kuralı kullanarak

$$\mathbf{E}_{j,\ell}=\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_5^{\otimes k}\otimes\mathbf{H}_{\ell-j+1}\otimes\mathbf{I}_5^{\otimes j-1-k}, \qquad j,l=0,1,2,... \tag{4.23}$$

eşitliği ile verilen anlatımlarla tanımlanırlar. $\mathbf{H}_1$ ve $\mathbf{H}_2$ dizeyleri bir önceki bölümde (4.12) sırasayılı eşitlikte yazılmıştı. (4.23)'de verilen eşitlikteki $\mathbf{H}_m$'ler ise $m=3,4,...$ için sıfır dizeyleridir. Böylelikle, (4.22) yerine

$$\frac{d\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}\right\rangle(t)}{dt}=\mathbf{E}_{j,j}\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}\right\rangle(t)+\mathbf{E}_{j,j+1}\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j+1}\right\rangle(t), \quad j=0,1,2,... \tag{4.24}$$

özyineleyişli sıradan türevli denklemi yazılabilir. Başlangıç değerleri $t=0$ anında $\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}\right\rangle(0)$'larla verilen (4.24)'ün özyineli tümlev yapısındaki çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}\right\rangle(t)=\mathrm{e}^{t\mathbf{E}_{j,j}}\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j}\right\rangle(0)+\int_0^t d\tau\mathrm{e}^{(t-\tau)\mathbf{E}_{j,j}}\mathbf{E}_{j,j+1}\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j+1}\right\rangle(\tau) \tag{4.25}$$

Burada $e^{t\mathbf{E}_{j,j}}$'lerin belirlenimine gereksinim duyulmaktadır. (4.23) eşitliğinden $\ell=j$ için

$$\mathbf{E}_{j,j}=\sum_{k=0}^{j-1}\mathbf{I}_5^{\otimes k}\otimes\mathbf{H}_1\otimes\mathbf{I}_5^{\otimes j-1-k}, \qquad j=0,1,2,... \tag{4.26}$$

yazılabilir. Burada, sağ yandaki toplananların aralarında değiştirimli olduğunu göstermek hiç de güç değildir. Bu gerçek, aşağıdaki üstel işlev çarpanlara ayrıştırımını geçerli kılar.

$$\mathrm{e}^{t\mathbf{E}_{j,j}}=\prod_{k=0}^{j-1}\mathrm{e}^{t\left(\mathbf{I}_n^{\otimes k}\otimes\mathbf{H}_1\otimes\mathbf{I}_n^{\otimes j-1-k}\right)} \tag{4.27}$$

Buradaki her bir üstel çarpan üslü toplamdiziye açılır ve dizey çarpımlarının Kronecker çarpımları üzerinde dağılabilirliği anımsanırsa

$$e^{t\mathbf{E}_{j,j}} = \prod_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes e^{t\mathbf{H}_1} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes j-1-k} = \left(e^{t\mathbf{H}_1}\right)^{\otimes j} \tag{4.28}$$

tıkız anlatımına ulaşılabilir. Eğer,

$$\mathbf{F}(t) \equiv e^{t\mathbf{H}_1} \tag{4.29}$$

tanımı yapılır ve (4.28) ile birlikte (4.25)'te $j = 1$ için kullanılırsa

$$\langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (t) = \mathbf{F}(t) \langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (0) + \int_0^t d\tau \mathbf{F}(t-\tau) \mathbf{H}_2 \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle (\tau) \tag{4.30}$$

ara sonucuna ulaşılır. Belirleyişi sürdürmek için $\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle$'nin saptanımına gereksinim bulunmaktadır. Bunun için (4.25) ve (4.28)'de $j = 2$ alınırsa

$$\left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle (t) = \mathbf{F}^{\otimes 2}(t) \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle (0) + \int_0^t d\tau \mathbf{F}(t-\tau)^{\otimes 2} \left(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{H}_2\right) \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \right\rangle (\tau) \tag{4.31}$$

elde edilir. Bu sonuç (4.30)'da kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (t) = {} & \mathbf{F}(t) \langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (0) + \int_0^t d\tau_1 \mathbf{F}(t-\tau_1) \mathbf{H}_2 \mathbf{F}(\tau_1)^{\otimes 2} \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle (0) \\ & + \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \mathbf{F}(t-\tau_1) \mathbf{H}_2 \mathbf{F}(\tau_1-\tau_2)^{\otimes 2} \left(\mathbf{H}_2 \otimes \mathbf{I}_n + \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{H}_2\right) \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \right\rangle (\tau_2) \end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. Sonunda daha tıkız bir yapı ile çalışabilmek için yeni tanımlar yapılabilir. Öncelikle $\mathbf{F}(t)$'nin üstel bir işlev oluşundan yararlanarak

$$\mathbf{F}(t-\tau) \mathbf{H}_2 \mathbf{F}(\tau)^{\otimes 2} = \mathbf{F}(t) \mathbf{F}(-\tau) \mathbf{H}_2 \mathbf{F}(\tau)^{\otimes 2} \tag{4.33}$$

$$\overline{\mathbf{H}}_2(\tau) \equiv \mathbf{F}(-\tau) \mathbf{H}_2 \mathbf{F}(\tau)^{\otimes 2} \tag{4.34}$$

tanımları yapılır. Özyineleyişli belirleyiş adımları Kronecker üç üslüsünün beklenen değeri saptanıp yerine konularak sürdürülebilir.

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (t) = \mathbf{F}(t) \Bigg\{ & \langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (0) + \int_0^t d\tau_1 \overline{\mathbf{H}}_2(\tau_1) \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 2} \right\rangle (0) \\ & + \int_0^t d\tau_1 \overline{\mathbf{H}}_2(\tau_1) \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \left(\mathbf{I}_n \otimes \overline{\mathbf{H}}_2(\tau_2) + \overline{\mathbf{H}}_2(\tau_2) \otimes \mathbf{I}_n\right) \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \right\rangle (0) + \cdots \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.35}$$

Bu yapı birkesim işleç tanımlarıyla daha tıkız bir görünüme kavuşturulabilir. Bu doğrultuda, aşağıdaki bağıntılandırıma gidilebilir.

$$\mathscr{I}_j \mathbf{f}(t) = \int_0^t d\tau \left(\sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \overline{\mathbf{H}}_2(\tau) \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes j-1-k} \right) \mathbf{f}(\tau), \quad j = 1, 2, ... \tag{4.36}$$

$$\langle \widehat{\mathbf{s}} \rangle (t) = \mathbf{F}(t) \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{I}_1 \cdots \mathscr{I}_{j-1} \left\langle \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes j} \right\rangle (0) \right\} \tag{4.37}$$

Bu bölümde ayrıntıları verilen adımlar ile OLEVKU kullanarak çözüm için nasıl özyineleyişli denklem oluşturabileceğimizi görmüş olduk. Elde ettiğimiz bu eşitlik (4.37) ve bunu andıran eşitliklere dayandırılan yapılar üzerinden belirlenimleri bilgisayar betikleri kullanarak gerçekleştirmek gerekir. Ayrıca yöntemi incelemek için yakınsaklık inceleyişleri de ele alınmalıdır.

4.3 Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi

(4.13)'te verilen dizge Hamilton işlecinin genişletilmiş işleç dizge yöneyi ile Poisson kümesimgelisi anlatımı eşsiz değildir. Katsayı dizeylerinde yapılacak düzenleyişler ile bağıntı yeniden yazılabilir. Bunun için türlü esnekliklere gereksinim vardır. Dizge yöneyinin özü ve Kronecker dördülünün öğeleri arasındaki doğrucul bağıntılar kullanılarak bu esneklikler elde edilebilir. Bu aşamada kullanacağımız dizge yöneyi ($\widehat{\mathbf{s}}_D$) (4.7)'de tanımlanan dizge yöneyine bir bilinmez eklenerek yapılan uzay genişletimi ile elde edilmiş yeni bir yöneydir. Bu olgu çalışmalarımızda "Değişmezlik Eklenimli Uzay Genişletimi (DEUG)" olarak adlandırılmıştır [54, 56, 94, 95, 101, 103–106].

Öncelikle esneklik yaratımı için bir değişmez işleç (zamanla değişmeyen işleç) tanımlayalım. $\widehat{s}_6$ olarak yöneye ekleyeceğimiz bu işleç birim işleç ($\widehat{I}$) ile sıfırdan değişik bir değişmez a'nın çarpımı olarak tanımlanabilir.

$$\widehat{s}_6 \equiv a\widehat{I} \tag{4.38}$$

Hamilton işleci ile bu işlecin Poisson kümesimgelisi, işleç birim işleçle orantılı olduğundan aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left\{ \widehat{H}, \widehat{s}_6 \right\} = 0 \tag{4.39}$$

Çarpım işlemlerinde sonucu değiştirmeyen birim işleci bağıntılarımıza eklemek için $\widehat{s}_6$ türünden yazabiliriz.

$$\widehat{I} = \frac{1}{a}\widehat{s}_6 \tag{4.40}$$

(4.40) eşitliğini kullanarak aşağıdaki gibi esneklik yaratacak denklemler oluşturmak olanaklıdır.

$$\frac{1}{a^2}\widehat{s}_6^2 - \frac{1}{a}\widehat{s}_6 = 0 \qquad\qquad \beta\widehat{s}_6 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_6^2 = 0 \tag{4.41}$$

Burada β sıfırdan değişik bilinmeyen bir değişmezi simgelemektedir.

Yeni değişmez işleci çalıştığımız dizge yöneyi $(\widehat{\mathbf{s}}_G)$'ye ekleyerek altı öğeli bir dizge yöneyi elde edelim.

$$\widehat{\mathbf{s}}_D \equiv \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{s}}_G \\ a\widehat{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{s}_1 & \widehat{s}_2 & \widehat{s}_3 & \widehat{s}_4 & \widehat{s}_5 & \widehat{s}_6 \end{bmatrix}^T \tag{4.42}$$

Burada $\mathbf{s}_D$, DEUG ile oluşturulan genişletilmiş dizge yöneyini simgelemektedir. Bu yöneyin Kronecker dördülü 36 öğe içerir ve asağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{s}}_D^{\otimes 2} = \big[&\widehat{s}_1^2 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_1\widehat{s}_6 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_2^2 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_2\widehat{s}_6 \\ &\widehat{s}_3\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_3^2 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_3\widehat{s}_6 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_4^2 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_4\widehat{s}_6 \\ &\widehat{s}_5\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_5^2 \;\; \widehat{s}_5\widehat{s}_6 \;\; \widehat{s}_6\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_6\widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_6\widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_6\widehat{s}_4 \;\; \widehat{s}_6\widehat{s}_5 \;\; \widehat{s}_6^2\big]^T\end{aligned} \tag{4.43}$$

(4.10)'da elde ettiğimiz denklem kümesini yeni eklenen $\widehat{s}_6$ ile sonucu değiştirmeyecek biçimde yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}\left\{\widehat{H},\widehat{s}_1\right\} &= -\alpha\kappa\widehat{s}_4\frac{\widehat{s}_6}{a} + \beta\widehat{s}_1 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_1\widehat{s}_6 \\ \left\{\widehat{H},\widehat{s}_2\right\} &= \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1\frac{\widehat{s}_6}{a} + \beta\widehat{s}_2 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_2\widehat{s}_6 \\ \left\{\widehat{H},\widehat{s}_3\right\} &= \frac{\kappa}{2\mu}\left(\widehat{s}_1\widehat{s}_4 + \widehat{s}_4\widehat{s}_1\right) + \beta\widehat{s}_3 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_3\widehat{s}_6 \\ \left\{\widehat{H},\widehat{s}_4\right\} &= \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1\widehat{s}_3 + \frac{\kappa}{2\mu}\left(\widehat{s}_5\widehat{s}_4 + \widehat{s}_4\widehat{s}_5\right) + \beta\widehat{s}_4 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_4\widehat{s}_6 \\ \left\{\widehat{H},\widehat{s}_5\right\} &= \frac{1}{\mu}\widehat{s}_1^2 - \alpha\kappa\widehat{s}_2\widehat{s}_4 + \beta\widehat{s}_5 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_5\widehat{s}_6 \\ \left\{\widehat{H},\widehat{s}_6\right\} &= \beta\widehat{s}_6 - \frac{\beta}{a}\widehat{s}_6^2\end{aligned}$$

$$\left\{\widehat{H},\widehat{\mathbf{s}}_D\right\} = \mathbf{F}_1\widehat{\mathbf{s}}_D + \mathbf{F}_2\widehat{\mathbf{s}}_D^{\otimes 2} \tag{4.44}$$

(4.44)'ün en altındaki tıkız yöney denklemde görünen ve sırasıyla 6×6 ile 6×36 türünde dizeyler olan $\mathbf{F}_1$ ile $\mathbf{F}_2$, belirtik olarak, aşağıdaki biçiminde verilebilirler.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_1 \equiv\ & \beta \mathbf{I}_6 \\
\mathbf{F}_2 \equiv\ & -\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{6,1}\left(\mathbf{e}_{6,4}\otimes\mathbf{e}_{6,6}\right)+\frac{1}{a\mu}\mathbf{e}_{6,2}\left(\mathbf{e}_{6,1}\otimes\mathbf{e}_{6,6}\right) \\
& +\frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{6,3}\left(\mathbf{e}_{6,1}\otimes\mathbf{e}_{6,4}+\mathbf{e}_{6,4}\otimes\mathbf{e}_{6,1}\right)^T \\
& +\frac{1}{\mu}\mathbf{e}_{6,4}\left(\mathbf{e}_{6,1}\otimes\mathbf{e}_{6,3}+\frac{\kappa}{2}\left(\mathbf{e}_{6,4}\otimes\mathbf{e}_{6,5}+\mathbf{e}_{6,5}\otimes\mathbf{e}_{6,4}\right)\right)^T \\
& +\frac{1}{\mu}\mathbf{e}_{6,5}\left(\mathbf{e}_{6,1}\otimes\mathbf{e}_{6,1}-\alpha\kappa\mathbf{e}_{6,2}\otimes\mathbf{e}_{6,4}\right)^T \\
& -\frac{\beta}{a}\left(\mathbf{e}_{6,1}(\mathbf{e}_{6,1}\otimes\mathbf{e}_{6,6}+\mathbf{e}_{6,4}\otimes\mathbf{e}_{6,6})+\mathbf{e}_{6,2}(\mathbf{e}_{6,2}\otimes\mathbf{e}_{6,6}+\mathbf{e}_{6,1}\otimes\mathbf{e}_{6,6})\right. \\
& \qquad +\mathbf{e}_{6,3}(\mathbf{e}_{6,3}\otimes\mathbf{e}_{6,6})+\mathbf{e}_{6,4}(\mathbf{e}_{6,4}\otimes\mathbf{e}_{6,6})+\mathbf{e}_{6,5}(\mathbf{e}_{6,5}\otimes\mathbf{e}_{6,6}) \\
& \qquad \left.+\mathbf{e}_{6,6}(\mathbf{e}_{6,6}\otimes\mathbf{e}_{6,6})\right)
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

Altı boyutlu Kartezyen uzayın i. öğesi 1, öteki öğeleri 0 olan birim yöneyleri, $\mathbf{e}_{6,i}$'leri, kullanarak $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ katsayı dizeyleri yazılabilmiştir. (4.45)'ten görülebileceği üzere, yaratılan esneklikler ve uygun seçimler ile oluşturulabilecek bir $\mathbf{F}_2$ dizeyi yardımıyla, $\mathbf{F}_1$ dizeyi bir sayıl (β) ile çarpılmış 6×6 birim dizey olarak elde edilebilmiştir. Bu, bize, birim dizeyin çözüme getireceği yalınlıkları kullanış olanağı sağlar.

Burada β ve a bu anda da belirsiz olarak durmaktadır ve bunları belirli ölçütlere (kriterlere) göre belirlemek olanaklıdır. Tüm bu çıkarımlar, $\mathbf{F}_1$ ve $\mathbf{F}_2$ katsayı dizeyleri ile $\widehat{\mathbf{s}}_D$ ve onun Kronecker dördülü, (4.44)'teki denklemlerin aşağıdaki gibi daha yalın biçimde yazılışını sağlar.

$$
\left\{\widehat{H},\widehat{\mathbf{s}}_D\right\} = \beta\widehat{\mathbf{s}}_D+\mathbf{F}\widehat{\mathbf{s}}_D^{\otimes 2} \tag{4.46}
$$

$\mathbf{F}_1$, denklemin en sağında görünmediğinden, 2 altsimgesi $\mathbf{F}_2$'den düşürülmüş ve böylece ikinci terimin katsayı dizeyi $\mathbf{F}$ olmuştur. (4.46)'da elde ettiğimiz denklem bir önceki bölümde elde ettiğimiz ikinci dereceden çokçokterimli değiştirim bağıntısı (4.13)'ün eşsiz olmadığının da kanıtıdır. Elde ettiğimiz bağıntı (4.46) Olasılıkçıl Evrim Kuramı kullanacağımız inceleyişleri yalınlaştıracaktır.

4.4 Evrilteç Devinbilimi

Bu ana dek ele aldığımız denklemlerde Schrödinger gösterimine (ing: picture) odaklanmış, gözlemlenebilir işleçlerin değişmez olduğu ve durumun (ing: state) zamanla evrildiğini varsaymıştık. Ancak, OLEVKU ile çözüm ararken (4.46) denkleminin üzerinde çalışmak için bütün olarak uygun bir denklem olmayışı bizi yeni arayışlara itmektedir. Çünkü, bu yöntemde bilinmeyenlerin zamanla evrimi üzerinden bir çözüm aranmaktadır. Nicem dizgelerin devinbiliminin uzbilimcil bağıntılandırımı eşsiz değildir. Schrödinger gösteriminin yanısıra, işleçlerin zamana bağlı olarak değiştiği Heisenberg ve de Dirac gösterimleri ile de devinbilim bağıntıları yazılabilir [5].

Durum yöneylerinin zaman içinde değişmez kaldığı, gözlemlenebilir işleçlerin ise zamanla değiştiği Heisenberg gösterimi ile Schrödinger gösterimi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi bir denklemde tanımlanan $\widehat{T}$ işleci yardımıyla anlatılabilir.

$$\psi(\mathbf{x},t) = \widehat{T}\,(t_0,t)\,\psi\,(\mathbf{x},t_0) \tag{4.47}$$

$T\,(t_0,t)$, çevresi ile etkileşimiyle ilgili herhangi bir özel durum belirtilmemiş nicem dizgenin, geçiş işlecini (ing: transition operator) simgeler ve bu doğrucul işleç, dizgenin dalga işlevinin iki değişik zamandaki (t_0 ve t) değerlerini birbiri ile ilişkilendirir. Bu geçiş işleci ile verilen dalga işlevi tanımını (4.47), Schrödinger Denklemi (2.1)'de kullanacak olursak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\frac{d\widehat{T}}{dt}\,(t_0,t) = -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t)\widehat{T}\,(t_0,t)\,, \qquad \widehat{T}\,(t_0,t_0) = \widehat{I} \tag{4.48}$$

Bu geçiş işlecinin kullanımının amacı konu edilen dizge üzerinde "Evrilteç Devinbilimi" (ing: Evolver Dynamics) denklemlerini kurmaktır [53–57]. Böylelikle, bilimcil yazında Heisenberg gösterimi olarak geçen ve Schrödinger gösteriminden değişik olarak dalga işlevini kullanmadan işlem yapmayı sağlayan denklemlere dayanan yapıyı elde etmemizi sağlar. Bu işleçleri ve onlara bağlı OLEVKU uygulayabileceğimiz denklemleri elde etmek için öncelikle geçiş işleci ($\widehat{T}\,(t_0,t)$) ve ele alınan işleç ($\widehat{o}$) ile bir yetkinişleç üretilir.

$$\widehat{\mathbb{E}}(\,\widehat{o}\,)(t) \equiv \widehat{T}\,(t_0,t)^{\dagger}\,\widehat{o}(t)\widehat{T}\,(t_0,t) \tag{4.49}$$

Evrilteç işleci, ya da kısaca, "Evrilteç" diye adlandırdığımız $\widehat{\mathbb{E}}(\,\widehat{o}\,)(t)$, $\widehat{o}(t)$'nin bulunduğu işleç uzayından yine aynı uzaya eşleyiş (ing: mapping) gerçekleştirir. Bu işleç, kullanılan geçiş işleci ve ele alınan işlecin zamana bağlı oluşundan dolayı zamanla evrilir. Zamana bağlı oluşu ikinci değişken olarak, ayrıca, belirtilmiştir.

Evrilteç, zamana bağlı olduğu için zamana göre türevi incelenebilir.

$$\begin{aligned}
\frac{d\widehat{\mathbb{E}}(\widehat{o})(t)}{dt} \\
&= \frac{d\widehat{T}(t_0,t)^\dagger}{dt}\widehat{o}(t)\widehat{T}(t_0,t) + \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \frac{d\widehat{o}(t)}{dt}\widehat{T}(t_0,t) + \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \widehat{o}(t)\frac{d\widehat{T}(t_0,t)}{dt} \\
&= \frac{i}{\hbar}\widehat{T}(t_0,t)^\dagger \widehat{H}(t)\widehat{o}(t)\widehat{T}(t_0,t) - \frac{i}{\hbar}\widehat{T}(t_0,t)^\dagger \widehat{o}(t)\widehat{H}\widehat{T}(t_0,t) + \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \frac{d\widehat{o}(t)}{dt}\widehat{T}(t_0,t) \\
&= \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \frac{i}{\hbar}\left(\widehat{H}\widehat{o}(t) - \widehat{o}(t)\widehat{H}\right)\widehat{T}(t_0,t) + \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \frac{d\widehat{o}(t)}{dt}\widehat{T}(t_0,t) \\
&= \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \{\widehat{H},\widehat{o}(t)\}\widehat{T}(t_0,t) + \widehat{T}(t_0,t)^\dagger \frac{d\widehat{o}(t)}{dt}\widehat{T}(t_0,t) \\
&= \widehat{\mathbb{E}}\left(\{\widehat{H},\widehat{o}(t)\}\right)(t) + \widehat{\mathbb{E}}\left(\frac{d\widehat{o}(t)}{dt}\right)(t)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

(4.50)'de elde ettiğimiz sonucu (4.46) üzerinde uygulayacak olursak, $\widehat{\mathbf{s}}_D$ zamana bağlı olmayan bir dizge işleç yöneyi olduğu için, sağ yandaki son anlatım 0 olur ve aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{d\widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\mathbf{s}}_D)(t)}{dt} = \beta\widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\mathbf{s}}_D)(t) + \mathbf{F}\widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\mathbf{s}}_D)(t)^{\otimes 2}, \qquad \widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\mathbf{s}}_D)(t_0) = \widehat{\mathbf{s}}_D \tag{4.51}$$

(4.51)'de verilen denklem işleç bilinmeyenleri üzerinde OLEVKU biçeminde istenen yetkinişleç STD kümesidir. Bundan sonra yapılacak işlem OLEVKU çözümünü bulmaktır.

4.5 Evrilteç Devinbiliminde OLEVKU Çözümü

Yukarıda, (4.51)'de verilen denklemler ve onunla ilgili üretilecek bilgilerin, yöntemlerin içerildiği alana "Evrilteç Devinbilimi" adını verebiliriz. Bu bağlamda, (4.51)'de verilen denklemlerin de "Evrilteç Yöneycil Devinim Denklemi", ya da kısaca, "Evrilteç Devinim Denklemi" olarak adlandırımı da bizce yerinde görülmektedir. Evrilteç devinim denkleminin çözümünü olabildiğince yalınlaştırılmış olarak elde edebilmek için izleyeceğimiz yolda, önce, arı ikinci derecelilik elde edimine, sonra da, ulaşılan arı ikinci derece denklemlerin çözümünde BEBBYT'de kullandığımız yöntemlerin gündeme getirilişine odaklanacağız. Bunların yakınsaklık inceliyişiyle izlenişini de öngörmekteyiz.

4.5.1 Arı ikinci derecelilik elde ediş

(4.51)'de elde ettiğimiz birinci kerteden, ikinci dereceden sıradan türevli denklemin OLEVKU kullanarak çözümünü yalınlaştırmak için birinci derece ve ikinci derece öğeler içeren bu denklemi, yalnızca ikinci derece tek terim ile yazalım.

Öncelikle aşağıdaki gibi anlatılabilen herhangi bir birinci kerteden, ikinci dereceden, sıradan türevli bir denklemi ele alalım.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \beta\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2} \tag{4.52}$$

Bu eşitlikte, β, dizgede oluşan durumlara göre belirlenebilecek, isteğe bağlı, bir değişmezdir. Bu STD'de $\mathbf{x}(t)$ bilinmeyenini, zamana bağlı bir değişken olan $u(t)$'ye bağlı olan, bir başka değişken işlevi $\mathbf{y}(u(t))$ ile, aşağıdaki gibi, yazmak olanaklıdır.

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\beta t}\mathbf{y}(u(t)) \tag{4.53}$$

Bu eşitlikteki $u(t)$, aşağıdaki dönüşümü sağlayacak biçimde tanımlanmaktadır.

$$u(t) \equiv \frac{\mathrm{e}^{\beta t} - 1}{\beta} \tag{4.54}$$

Bu dönüşüm ile (4.52) denklemini aşağıdaki gibi arı dördül STD olarak yazabiliriz.

$$\frac{d\mathbf{y}(u)}{du} = \mathbf{F}\mathbf{y}(u)^{\otimes 2}, \qquad \mathbf{y}(0) = \mathbf{a} \tag{4.55}$$

Bu denklemde, zaman değişkeni t, zamanla değişen u değişkeni ile değiştirilmiştir. Bu, bir biçimde, zamanın bükülüşüdür. Denklemi bu biçimde ele alışın çözümde kesiş (ing: truncation) yaklaştırımları yapıldığında olumlu etkileri olacaktır.

4.5.2 Evrilteç deviniminde arı dördül sıradan türevli denklemlerde OLEVKU çözüm yöntemleri

Arı dördül yöneycil bir STD, betimleyici işlevi, dizge yöneyinin yalnızca ikinci Kronecker üslüsünü içeren, bir yöneycil sıradan türevli denklemdir. Bu STD'yi, aşağıdaki bağıntıdaki gibi yazabiliriz.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t)^{\otimes 2}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a} \tag{4.56}$$

Bu denklemin, uygun uzay genişletimleri gerçekleştirilerek elde edilmiş olduğu öngörülmektedir. Burada $\mathbf{x}(t)$ ve $\mathbf{a}$ sırasıyla dizge yöneyi işlevi ve onun başlangıç değeridir. Dizge yöneyinin öğeleri için işleç niteliği öngörülmektedir. $\mathbf{x}(t)$ ve $\mathbf{a}$ yöneylerinin her ikisi de N öğe içermektedir.

4.5.2.1 Toplamdizi açılımıyla çözüm

(4.56)'nın çözümü için us'a (akla) ilk gelebilecek olan, çözümü zaman değişkeninin üslüleri üzerinde bir toplamdizi olarak öngörmektir. Buna göre, aşağıdaki tanım eşitliği yazılabilir.

$$\mathbf{x}(t) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} t^j \mathbf{x}_j \tag{4.57}$$

Burada, $\mathbf{x}_j$ katsayıları bilinmeyenler olan, N öğeli, yöneyleri simgelemektedir. Bu öngörümlerin (4.56)'da kullanımı ile elde edilecek denklemin sol ve sağındaki toplamdizilerin karşılık gelen t üslüleri katsayılarının eşitlenimiyle aşağıdaki denklemler elde edilebilir.

$$(j+1)\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{F} \sum_{k=0}^{j} \mathbf{x}_k \mathbf{x}_{j-k}, \qquad \mathbf{x}_0 = \mathbf{a}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.58}$$

Bu bir özyineleyiş (ing: recursion) olup eşsiz bir çözümünün varolduğu, güçlüksüz (kolayca), görülebilecek bir olgudur. Katsayıların varlığı, onlardan oluşturulacak toplamdizinin hangi t aralığında yakınsayacağını belirtmez. Belirtim için yakınsayış çözümleyişi gerekmektedir. Bu çözümleyişi biraz ileride vereceğiz.

4.5.2.2 Kronecker üslü toplamdizi açılımıyla çözüm

BEBBYT araştırımlarında, OLEVKU'da toplamdizi açılımına, OLEVKU'nun geliştiriminin başlangıcında odaklanılmamıştı. Bunun da başlıca nedeni, çokdeğişgenlilik durumunda Taylor toplamdizilerinin karmaşıklığından kaçınmak için Kronecker üslü toplamdizilerin kullanımına yöneliş olmuştur. Bu yüzden de, bu kesimde verilecek olan çözümleyiş çok daha önceden gerçekleştirilmiştir.

(4.56)'daki $\mathbf{x}(t)$ ile simgelenen dizge yöneyinin dördülünün zamana göre türevini yazacak olursak

$$\frac{d\mathbf{x}(t)^{\otimes 2}}{dt} = \mathbf{M}_2 \mathbf{x}(t)^{\otimes 3}, \qquad \mathbf{x}(0)^{\otimes 2} = \mathbf{a}^{\otimes 2} \tag{4.59}$$
$$\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_N + \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{F}$$

bağıntısını elde ederiz. Burada, $\mathbf{M}_2$, $\mathbf{x}(t)^{\otimes 2}$'nin türevi alınırken, öncelikle zincir kuralı, sonraysa Kronecker çarpımın dizey çarpımı, ya da, dizey çarpımının Kronecker çarpımı üzerinde dağılım özdeşliğiyle dikdörtgen katsayı dizeyi yaratımından yararlanılarak elde edilmiştir.

Andıran biçimde dizge yöneyinin j. Kronecker üslüsünün zamana göre türevleri de elde edilebilir.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)^{\otimes j}}{dt} = \mathbf{M}_j \mathbf{x}(t)^{\otimes (j+1)}, \qquad \mathbf{x}(0)^{\otimes j} = \mathbf{a}^{\otimes j}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.60}$$

Burada $N^j \times N^{j+1}$ türünde bir dikdörtgencil dizey olan "Bakaç Dizey" (ing: Monocular Matrix) diye adlandırdığımız $\mathbf{M}_j$'ler aşağıdaki bağıntılarda tanımlanırlar.

$$\mathbf{M}_j \equiv \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{I}_N^{\otimes k} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_N^{\otimes (j-1-k)}, \qquad \mathbf{M}_0 \equiv \mathbf{I}_N, \qquad j = 1, 2, ..., \tag{4.61}$$

Bu eşitlikte, $\mathbf{F}$ dizeyi (4.56) denklemindeki ikinci Kronecker üslü bilinmeyenin önünde bulunan $N \times N^2$ türünde bir dikdörtgencil katsayı dizeyidir. $\mathbf{M}_j$ dizeyi elde edilirken N boyutlu birim dizeylerin gereken Kronecker üslülerinin kullanımı ile Kronecker üssün dizey çarpımları üzerindeki dağılış özelliği (ing: distributive property) kullanılmıştır.

(4.60) denkleminde her iki yanın tümlevi alınarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\mathbf{x}(t)^{\otimes j} = \mathbf{a}^{\otimes j} + \mathbf{M}_j \int_0^t dt_1 \mathbf{x}(t_1)^{\otimes (j+1)}, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.62}$$

Burada $j = 1$ alındığında

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{M}_1 \int_0^t dt_1 \mathbf{x}(t_1)^{\otimes 2} \tag{4.63}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı kullanılarak (4.62) denkleminde $j = 2$ alındığında aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{M}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} + \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \mathbf{x}(t_2)^{\otimes 3} \tag{4.64}$$

Andıran biçimde (4.62) kullanılarak ardışık artan j değerleri için denklemler elde edilir ve aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes (j+1)} \tag{4.65}$$

Burada $\mathbf{T}_j$'ler "Irakgörür Dizey" (ing: Telescope Matrix) diye adlandırdığımız aşağıdaki çarpımı anlatan dizeylerdir.

$$\mathbf{T}_j \equiv \prod_{k=0}^{j} \mathbf{M}_k, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.66}$$

(4.65) bir sonsuz toplam anlatımı olduğu için kalan tümlev anlatımının ortadan kalktığı öngörülmüştür. Bu öngörümün, birkesim $\mathbf{a}$ ve t tanımbölgeleri için geçerli olacağını kanıtlamak olanaklıdır. Öteki bölgeler için geçerli anlatımlar (özelsizde toplamdizi türündedirler), çözümcül sürdürüm (ing: analytic continuation) ile, durumun türüne bağımlı olarak, oluşturulabilir gibi görünmektedir.

Kronecker üslülerin sonsuz toplam dizisi olan (4.65)'in yakınsayış alanındaki (ing: convergence domain) yaklaştırım (ing: approximation) sonucunu elde etmek için sonlu bir yerde kesiş gerçekleştirilebilir. Burada bir önceki bölümde, zaman büküşü ile, elde ettiğimiz arı ikinci dereceden denklem çözülmüştür. Zaman büküşü için yaptığımız değişken dönüşümünü (4.54) anımsayacak olursak çözüm için aşağıdaki eşitlik ortaya çıkar.

$$\mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{\beta t} - 1\right)^{j}}{j!\beta^{j}} \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} \tag{4.67}$$

4.5.3 Evrilteç denkleminin çözümü

Bir önceki bölümde elde ettiğimiz (4.67) bağıntısı ile (4.51)'de verilen ikinci kerteden sıradan türevli Evrilteç Devinim Denklemi için, bilinmeyen evrilteç üzerinde artı bütünsayı Kronecker üslüleri arasında bir tümlev özyineleyişi kurarak çözüm aranabilir. Buradan OLEVKU çözümü aşağıdaki gibi yazılır [42–44, 54, 60].

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)(t) = \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)} - 1}{\beta}\right)^{j} \mathbf{T}_j \widehat{\mathbf{s}}_D^{\otimes(j+1)} \tag{4.68}$$

Burada $\widehat{\mathbf{s}}_D$, başlangıçta DEUG ile oluşturulan dizge yöneyidir. Bir önceki bölümde de tanımı verilen $\mathbf{T}_j$ ıraksgörür dizeyi, $\mathbf{M}_k$ bakaç dizeylerinin çarpımı ile oluşturulan dizeylerdir. $N^j \times N^{j+1}$ türünde dikdörtgencil dizeyler olan bakaç dizeyler, $N \times N^2$ türündeki $\mathbf{F}$ katsayı dizeyi ve $N \times N$ türünde birim dizeylerin gereken Kronecker üslülerinin Kronecker çarpımlarının toplamından oluştuğu için seyrek (ing: sparse) dizeylerdir. Seyrek dikdörtgencil dizey oluş durumu ırakgörür dizeylere daha çok yansır. Burada, seyrek diktörtgen bir dizeyi yoğun (ing: dense) dördül bir dizeye sıkıştırmak ile ilerleyiş sürdürülebilir. Böylelikle, daha tıkız denklemler yazabiliş olanağı ortaya çıkar. Bu olgu, topluğumuz araştırımlarında ortaya çıkmış ve yayınlanmış "Dördülleştirim" yöntemidir [42, 46–51, 54, 58, 59]. Bu, gelecek alt bölümde ayrıntıları ile anlatılacak ve evrilteç çözümüne uygulanacaktır.

4.5.3.1 Dördülleştirim

$N \times N^2$ türündeki $\mathbf{F}$ dizeyini, N sayıda, $N \times N$ türünde $\mathbf{F}_i$ alt dizeyleri türünden, aşağıdaki gibi ayrıştırabiliriz.

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \;\; \mathbf{F}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{F}_N] \tag{4.69}$$

Bu ayrıştırım yardımıyla, herhangi N öğeli $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ yöneyleri için aşağıdaki Kronecker çarpım eşitliğini yazabiliriz.

$$\mathbf{F}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{F}_i \right) \mathbf{b} \tag{4.70}$$

Burada a_i'ler, $\mathbf{a}$ yöneyinin öğeleridir. $\mathbf{b}$ yöneyinin önünde oluşan katsayı dizeyi, $\mathbf{a}$ yardımıyla $\mathbf{F}$'den dördülleştirilen (ing: squared) $N \times N$ türünde dizeydir. Dördülleştirim (ing: squarification) eylemi için aşağıdaki gösterilimi kullanabiliriz.

$$\lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \equiv \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbf{F}_i \tag{4.71}$$

(4.71)'de tanımı verilen, dördülleştirim ile elde edilmiş bu dizeye "Dördül Irakgörür Dizey (DördIrDiz)" (ing: Squarified Telescopic Matrix, ya da kısaca, "SquTelMat") adını verebiliriz. Dördülleştirim işleciyle (4.70)'i de kullanarak $\mathbf{T}_1 \equiv \mathbf{F}$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{a}^{\otimes 2} = \mathbf{F} \mathbf{a}^{\otimes 2} = \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \mathbf{a} = \mathbf{S}_1(\mathbf{a}) \mathbf{a} \tag{4.72}$$

Burada oluşan DördIrDiz'i $\mathbf{S}_1(\mathbf{a})$ ile gösterişimiz yazım biçimine önemli bir tıkızlık getirmek amaçlıdır. Bunun kullanımıyla çözüm denklemi (4.68)'de elde ettiğimiz $\mathbf{T}_j \widehat{\mathbf{s}}_D^{\otimes(j+1)}$ çarpımını yeniden yazabiliriz. Bunun için j. dördülleştirimi tanımlayacak olan DördIrDiz $\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$ ile

$$\mathbf{T}_j \widehat{\mathbf{s}}_D^{\otimes(j+1)} = \widehat{\mathbf{S}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D) \widehat{\mathbf{s}}_D \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.73}$$

yazılır. Her DördIrDiz dizeyi $N \times N$ türündedir.

j. DördIrDiz'in uygulanışını görmek için öncelikle ilk üç DördIrDiz'in anlatımlarını yazalım.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1(\mathbf{a}) &= \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \\
\mathbf{S}_2(\mathbf{a}) &= \lfloor \mathbf{F} \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \mathbf{a} \rceil + \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil = \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{S}_1(\mathbf{a}) \mathbf{a} \rceil + \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \mathbf{S}_1(\mathbf{a}) \\
\mathbf{S}_3(\mathbf{a}) &= \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{a} \rceil \mathbf{S}_2(\mathbf{a}) + 2 \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{S}_1(\mathbf{a}) \mathbf{a} \rceil \mathbf{S}_1(\mathbf{a}) + \lfloor \mathbf{F}, \mathbf{S}_2(\mathbf{a}) \mathbf{a} \rceil
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Irakgörür dizeyler için DördIrDiz'lerin açık anlatımlarının yazımı oldukça karmaşık ve zaman alan bir süreçtir. Ancak, bilgisayımlar ve değerlendirimler sonunda, $\mathbf{S}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D)$ için aşağıdaki özyineleyişin yazılabildiği gözlemlenmiştir [60, 61].

$$\widehat{\mathbf{S}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D) = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} \lfloor \mathbf{F}, \widehat{\mathbf{S}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\mathbf{s}}_D \rceil \widehat{\mathbf{S}}_{j-1-k}(\widehat{\mathbf{s}}_D)$$
$$\widehat{\mathbf{S}}_0(\widehat{\mathbf{s}}_D) = \widehat{\mathbf{I}}, \qquad j = 1, 2, ... \tag{4.75}$$

Burada $\widehat{\mathbf{I}}$ köşegen öğeleri birim işleç ($\widehat{I}$) olan birim işleç dizeyidir. (4.75) bir dizey özyineleyişidir ve bu nedenle bilgisayım karmaşıklığı çok yüksektir. Bu yüzden, onu,

$$\widehat{\mathbf{v}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D) \equiv \widehat{\mathbf{S}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\mathbf{s}}_D, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.76}$$

tanımıyla verilen bir işleç yöneyi üzerinden, yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\widehat{\mathbf{v}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \lfloor \mathbf{F}, \widehat{\mathbf{v}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D) \rceil \widehat{\mathbf{v}}_{j-k}(\widehat{\mathbf{s}}_D),$$
$$\widehat{\mathbf{v}}_0(\widehat{\mathbf{s}}_D) = \widehat{\mathbf{s}}_D, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.77}$$

Bu eşitlikte $\widehat{\mathbf{v}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D)$ yerine $j!\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D)$ yerleştirecek bir dönüşüm gerçekleştirilirse aşağıdaki özyöneleyişe geçilebilir.

$$(j+1)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D) = \sum_{k=0}^{j} \mathbf{F}\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D) \otimes \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}(\widehat{\mathbf{s}}_D),$$
$$\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_0(\widehat{\mathbf{s}}_D) = \widehat{\mathbf{s}}_D, \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{4.78}$$

Elde edilen son bağıntı (4.78)'i evrilteç çözümü (4.68)'de kullanacak olursak

$$\mathbb{E}(\widehat{\mathbf{s}}_D)(t) = e^{\beta(t-t_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\beta(t-t_0)} - 1}{\beta} \right)^j \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D) \tag{4.79}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik (4.79) ile (4.78), sırasıyla, (4.57) ile (4.58) eşitlikleriyle, t yerine $u(t)$, x_j yerine de $\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_j$ gelişi dışında özdeş olarak örtüşür. Öteki bir deyişle buradaki iki çözüm belirleyiş yöntemi eşdeğer sonuçlara götürmektedir.

4.5.3.2 Evrilteç zaman üslü toplamdizilerde yakınsaklık

(4.79)'un her iki yanının bir ψ_0 başlangıç işlevine göre beklenen değeri alınacak olursa, beklenen değer alış işleminin doğruculluğundan da yararalanarak aşağıdaki eşitliğe geçilebilir.

$$\langle \mathbb{E}(\widehat{\mathbf{s}}_D)(t) \rangle_{\psi_0} = e^{\beta(t-t_0)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\beta(t-t_0)} - 1}{\beta} \right)^j \left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_j(\widehat{\mathbf{s}}_D) \right\rangle_{\psi_0} \tag{4.80}$$

Ancak, bu eşitliğin sağ yanındaki beklenen değerin de, bu an için bilinmeyen oluşu, bir beklenen değer denkleminin daha yazımına gerek duyurur. Bu ek denklem, (4.78)'in her iki eşitliğinin her iki yanının, yine ψ_0'a göre beklenen değerini alarak yaratılabilir ve böylece,

$$(j+1)\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0} = \sum_{k=0}^{j} \mathbf{F}\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\otimes\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0},$$
$$\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_0\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0} = \left\langle \widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle, \qquad j=0,1,2,... \qquad (4.81)$$

yazılabilir. Bu denklemler de, buradaki ilk denklemin sağ yanında bulunan ikili Kronecker çarpımı beklenen değerinin yeni bir bilinmeyen olarak ortaya çıkışından dolayı, $\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_j\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)$'lerin beklenen değerlerinin belirlenimi için yetersiz kalırlar. Ancak, bu denklemlerden imsiz (mutlak) değerde üst kıyılandırım için yararlanılabilir. Bu bağlamda önce, ψ_0'ın içinde bulunduğu dalga işlevleri uzayından yine o uzaya dönüşüm gerçekleştiren herhangi iki doğrucul işleç $\widehat{L}_1$ ve $\widehat{L}_2$ ile simgelenirse, bunların ikili çarpımının beklenen değeri için aşağıdaki Cauchy-Schwarz eşitsizliği [107] yazılabilir.

$$\left|\left\langle \widehat{L}_1\widehat{L}_2\right\rangle\right| \leq \left\langle \widehat{L}_1^{\dagger}\widehat{L}_1\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle \widehat{L}_2^{\dagger}\widehat{L}_2\right\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (4.82)$$

Burada † kama simgesiyle, sayıl (yöneycil değil) işleçler üzerinde Hermitçil eş alış işlemi belirtilmektedir. Bu özelsiz eşitsizliğin (4.81)'te kullanımı aşağıdaki eşitsizlik ve eşlik eden eşitliğin yazılabilişine olanak sağlar.

$$(j+1)\left|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}\right| \leq \sum_{k=0}^{j} \mathbf{F}\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k^{\dagger}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\otimes\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}^{\dagger}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}},$$
$$\left|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_0\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}\right| = \left|\left\langle \widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle_{\psi_0}\right|, \qquad j=0,1,2,... \qquad (4.83)$$

Burada imsiz değer alınırken eylem sayıl düzeyde gerçekleştirilmiştir. Öteki bir deyişle, eşitliğin her iki yanındaki yöneylerin imsiz değeri alınırken öğelerin yerine onların imsiz değerleri yerleştirilmiştir. Bu yüzden de, bu büyüklüklerin yöney oluş nitelikleri oldukları gibi korunmuştur. Bu eşitsizlikten sayıl nitelikte bir eşitsizlik üretmek için her iki yanın Frobenius boyu alınabilir ve aşağıdaki bağıntıya geçilebilir.

$$(j+1)\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr} \leq \sum_{k=0}^{j} \mathbf{F}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k^{\dagger}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\otimes\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}^{\dagger}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|,$$
$$\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_0\left(\widehat{\mathbf{s}}_D\right)\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr} = \left\|\left\langle \widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr}, \qquad j=0,1,2,... \qquad (4.84)$$

Burada, ilk eşitlikte, Frobenius boyun altçarpımcıllık özelliği (bir çarpımın Frobenius boyu çarpanların Frobenius boylarının çarpımından küçük kalır ya da ona eşit olur), sağ yandaki Kronecker çarpımının Frobenius boyu yerine çarpanların Frobenius boylarının çarpımı yazılacak olursa sağ yan büyütülmüş olur. Böylece, (4.84) yerine aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$\begin{aligned}(j+1)\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr} \leq \sum_{k=0}^{j}\|\mathbf{F}\|_{Fr}&\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|_{Fr}\\ &\times\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|,\\ \left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_0(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr} = \left\|\langle \widehat{\mathbf{s}}_D\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr}, \qquad & j=0,1,2,...\end{aligned} \tag{4.85}$$

Buradaki eşitsizliğin her iki yanı, eksisiz değerler aldığı öngörülen zaman değişkeni olarak kullandğımız t'nin üslüsü, t^j, ile çarpılır ve j'nin eksisiz tüm bütünsayı değerleri için toplamı alınacak, sonra da belirtik olarak verilen birkesim toplamdizi işlemleri gerçekleştirilecek olursa aşağıdaki eşitsizlik ve eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr} t^j\\ &\quad\leq \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\|\mathbf{F}\|_{Fr}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|_{Fr}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\| t^j\\ &\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\|\mathbf{F}\|_{Fr}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|_{Fr}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j-k}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\| t^j\\ &\quad= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\|\mathbf{F}\|_{Fr}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_k(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|_{Fr}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\| t^{j+k}\\ &\quad= \|\mathbf{F}\|_{Fr}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|_{Fr} t^j\right)^2\end{aligned} \tag{4.86}$$

Bu aşamada, (4.82)'da $\widehat{L}_1$ yerine $\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)$ ve $\widehat{L}_2$ yerine de birim işleç alacak, ve de, beklenen değeri ψ_0'a göre yazdığımızı altsimgeyle belirtecek olursak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}\right| \leq \left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)^2\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}} \tag{4.87}$$

Bu eşitsizliğin her iki yanının Frobenius boyunu aldıktan sonra oluşan eşitsizliğin her iki yanını $(j+1)t^j$ ile çarpıp, oluşan eşitsizliğin her iki yanı j'nin eksisiz bütünsayı değerleri üzerinde toplanırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır.

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}\right\|_{Fr} t^j \leq \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\left\|\left\langle \widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\widehat{\widehat{\mathbf{v}}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}}\right\|_{Fr} t^j \tag{4.88}$$

Eğer, B büyültke (ing: majorant) sözcüğünü, tib ise “türevi işlevcil bağımsız” tümceciğini çağrıştırmak üzere,

$$B_{tib}(t) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_{j+1}^{\dagger}(\widehat{\mathbf{s}}_D)\,\widehat{\mathbf{v}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D) \right\rangle_{\psi_0}^{\frac{1}{2}} \right\|_{Fr} t^j \tag{4.89}$$

tanımı yapılacak olursa, (4.86) ve (4.88), aşağıdaki yapılarda, yeniden yazılabilir.

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \left\| \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D) \right\rangle_{\psi_0} \right\|_{Fr} t^j \leq \|\mathbf{F}\|_{Fr} B_{tib}(t)^2 \tag{4.90}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \left\| \left\langle \widehat{\mathbf{v}}_{j+1}(\widehat{\mathbf{s}}_D) \right\rangle_{\psi_0} \right\|_{Fr} t^j \leq B'_{tib}(t) \tag{4.91}$$

Bu eşitsizliklerin sol yanları eşittir. Sağ yanların da birbirine eşit olduğu konusunda bir bilgimiz yoktur. Bunun nedeni de, $B_{tib}(t)$’nin toplamdizi katsayılarının bu anda bilinmiyor oluşudur. Bilinse de, o değerler ne olursa olsun eşitlik olacaktır denilemeyişidir. Bu yüzden, $B'_{tib}(t)$, $\|\mathbf{F}\|_{Fr} B_{tib}(t)^2$’ye eşit, küçük, ya da, büyük olabilir ve bize de pek bilgi üretemez (Özelsizde, burada eşitsizliğin olmayabileceği düşünüldüğünde, bu kesimdeki tib altsimgesinin neden kullanıldığı daha iyi anlaşılacaktır). Ancak, bu üç durumdan hangisi olursa olsun bu $B_{tib}(t)$ işlevini ve dolayısıyla türevini büyüterek yeni bir $B(t)$ işlevi (öteki deyişle büyültke) tanımlayabiliriz. Böylece,

$$B(t) > B_{tib}(t), \qquad B'(t) > B'_{tib}(t) \tag{4.92}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradaki büyütüş öyle bir biçimde gerçekleştirilebilir ki

$$B'(t) = \|\mathbf{F}\|_{Fr} B(t)^2 \tag{4.93}$$

eşitliği sağlanabilsin. Bu birinci kerteden bir STD olduğundan bir de başlangıç koşulu verilişi gerekir. Bu koşul ise, (4.84)’te tüm katsayılarla ilgili beklenen değer Frobenius boyundaki eşitsizliklerin yalnızca başlangıç koşulundan dolayı 0 altsırasayılı katsayı için bir eşitliğe dönüşümünden dolayı, $B(t)$’nin sağlayacağı başlangıç koşulu da oradaki koşulla örtüşmelidir. Bu yüzden,

$$B(0) = \left\| \langle \widehat{\mathbf{s}}_D \rangle_{\psi_0} \right\|_{Fr} \tag{4.94}$$

eşitliği yazılmalıdır. (4.93)’nin (4.94) koşulu altında çözümü sıradan sayılabilecek bir eylem gerektirir ve aşağıda verilen sonuca götürür.

$$B(t) = \frac{\left\| \langle \widehat{\mathbf{s}}_D \rangle_{\psi_0} \right\|_{Fr}}{1 - \|\mathbf{F}\|_{Fr} \left\| \langle \widehat{\mathbf{s}}_D \rangle_{\psi_0} \right\|_{Fr} t} \tag{4.95}$$

Bu işlevin büyültke oluşu, onun yakınsadığı t değerlerinde evrilteç devinimini veren çözümün de yakınsayacağı anlamına gelir. Bu işlevin, t_u t'de yerleşik ucayını (kutubunu) simgelemek üzere, $t \in [0, t_u)$ aralığında yakınsayışı, bu aralığın evrilteç devinimi için de yakınsayış aralığıdır ve burada

$$t_u = \frac{1}{\| \mathbf{F} \|_{Fr} \left\| \langle \widehat{\mathbf{s}}_D \rangle_{\psi_0} \right\|_{Fr}} \tag{4.96}$$

tanım eşitliği geçerlidir. Buradan görüldüğü üzere, t_u ne düzeyde büyük olursa evrilteç devinimi de o düzeyde uzun süreli olur.

Yakınsayış süresinin arttırmak için, (4.96)'nin sağ yanındaki oranın paydasındaki çarpanların ayrı ayrı ya da bütüncül olarak, varolan esneklikleri kullanarak ya da esneklikler yaratarak, enazlaştırımı (ing: minimization) gündeme getirilebilir. Bu doğrultuda, iki önemli öğe, katsayı dizeyi olan $\mathbf{F}$ ile başlangıç dalga işlevi ψ_0'dır. $\mathbf{F}$'de esneklik yaratımı ve sonra da değiştirge saptayışlarıyla yol alınabilir. Bu eyleme, belli bir düzeyde, gelecek altbölümlerde odaklanacağız. ψ_0 seçimi ise öylesine elimizde olan bir olgu değildir. Sayılabilir sonsuzluklu bir taban kümesinden seçime göre, onunla ilgili yukarıdaki anlatım, değer alacaktır. Özelsizde, en iyi durumla en düşük erke veren bir kesim özişlevler durumunda yüzleşilir. Erke düzeyi yükseldikçe, bununla ilgili boy da büyür ve yakınsayışa olumsuz etki de bulunur. Burada, bu düzeyde, çözümleyişle yetineceğiz.

4.5.4 Sendelenimsizlik ereyinde dizge beklenen değerleri

Öğeleri işleçler olan bir dizge yöneyinin beklenen değeri, (4.79)'un her iki yanının başlangıç dalga işlevi altında beklenen değerinin alınışı ile bulunabilir. Bu, $\widehat{\mathbf{v}}_j$'lerin beklenen değerlerinin belirlenişini gerektirir ve bunun için de (4.77) denkleminde her iki yanın beklenen değerinin alınışı gerekir. Ancak, (4.77)'de bulunan özyineleyişli beklenen değer alım işlemi, uygulayışı güçleştirir. Bu durumda, önceki bölümlerde ele alınan sendelenim olgusu üzerinden elde edilen Sendelenimsizlik Kanıtsavı'nı (ing: Fluctuationlessness Theorem) kullanabiliriz. Sendelenimsizlik yaklaştırımına (ing: no fluctuation approximation) göre, doğrucul işleçlere bağımlı bir çokdeğişkenli işlevin beklenen değeri, sendelenimsizlik ereyinde, işleçlerin beklenen değerlerinin aynı işlev altındaki görüntüsüne eşittir. [15, 55, 71, 88–96]. Bu durumda, bir eşitlikte her iki yanın beklenen değerleri alınarak elde edilen eşitliğe, her bağımsız değişken işlecin, aynı başlangıç dalga işlevi altındaki beklenen değeri ile değiştirilişiyle elde edilen eşitlik ile yaklaştırım yapılabilir. (4.77)'de her iki yanın beklenen değerini alarak ve sendelenimsizlik yaklaştırımı kullanarak aşağıdaki yaklaşık eşitliği yazabiliriz.

$$\widehat{\mathbf{v}}_j\left(\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j-1}{k}\left\lfloor\mathbf{F},\widehat{\mathbf{v}}_k\left(\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\right)\right\rceil\widehat{\mathbf{v}}_{j-1-k}\left(\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\right),$$
$$\widehat{\mathbf{v}}_0\left(\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\right)=\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle, \qquad j=0,1,2,.. \tag{4.97}$$

Çok andıran biçimde (4.79)'dan aşağıdaki yanaşık (asimtotik) beklenen değer eşitliği yazılabilir.

$$\mathbb{E}\left(\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\right)(t)=\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}-1}{\beta}\right)^j\widehat{\mathbf{v}}_j\left(\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\right) \tag{4.98}$$

Sendelenimsizlik yaklaştırımı ile elde ettiğimiz tüm bu eşitlikler yardımıyla işleç öğeli dizge yöneyinin beklenen değeri ölçün (standart) doğrucul cebircil yöneye dönüşmüştür. Bu denklem elde edildikten sonra us'a (akla) sendelenim düzeltimlerinin çözüme nasıl ekleneceği gelir. Bunun için öncelikle dizge yöneyi ile beklenen değerinin değişimini veren bir sendelenim işleci yöneyi tanımlanır.

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}}=\widehat{\mathbf{s}}_D-\left\langle\widehat{\mathbf{s}}_D\right\rangle\widehat{\mathbf{I}} \tag{4.99}$$

OLEVKU ile elde edilen beklenen değerler, bu sendelenim yöneyinin Kronecker üs toplamdizisinin (eksi olmayan Kronecker üslüleri üzerinde sonsuz bir doğrucul birleşim) beklenen değerlerine açılabilir. Bu toplamdizinin yakınsayışı başlangıç dalga işlevi ile ilintilidir. Düzgün yakınsayış (ing: uniform convergence) elde etmek için, başlangıç dalga işlevini betimleyen taban işlev, tüm anlatımların beklenen değerlerinin sonlu ve çözümcül olarak belirlenebileceği biçimde uygun bir ağırlık işlevi içermelidir.

4.6 OLEVKU Çokçokterimlilerinde Derece Yükseltimi ile En Yüksek Tek Tekterimliyi Elde Ediş

Bir dizgede, dizge Hamilton işleci ile işleç yöneyinin Poisson kümesimgelisinin ($\{\widehat{H},\widehat{\mathbf{s}}\}$) katsayı dizeyleri ve işleç yöneyinin Kronecker üslüleri yardımı ile tıkız biçimde yazılabildiğini önceki bölümlerde görmüştük. Tıkız bağıntıyı çözümümüzde kullanmak üzere en işlevcil biçimde yalınlaştırabilmek için uzay genişletimi yapmak olanaklıydı. Böylelikle bu bağıntının eşsiz olmadığını göstermiştik.

OLEVKU kullanmak için en uygun denklem biçimini elde edişin bir başka yolu da yine uzay genişletimi yaparak dizgedeki tüm, sağ yanı çokçokterimli olan, denklemleri en yüksek dereceli tekterimli denklemlere dönüştürmektir [52, 53, 58, 108]. "Tek Tekterimli OLEVKU" (ing: Single Monomial PREVTH) diye adlandıracağımız bu yaklaşımda (ing: approach), önceki bölümlerde uyumsuz üstel salıngaç dizgesi için tanımladığımız aşağıda yeniden verilen dizge yöneyini DEUG kullanarak genişleteceğiz.

$$\underline{\widehat{\mathbf{s}}} \equiv \begin{bmatrix} \underline{\widehat{s}}_1 \\ \underline{\widehat{s}}_2 \\ \underline{\widehat{s}}_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{q} \\ \mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} \end{bmatrix} \tag{4.100}$$

Dizge Hamilton işleci ile $\underline{\widehat{\mathbf{s}}}$ yöneyinin Poisson kümesimgelisini de

$$\left\{\widehat{\mathbf{H}},\underline{\widehat{\mathbf{s}}}\right\} = \begin{bmatrix} -\alpha\kappa\widehat{q}\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} \\ \frac{1}{\mu}\widehat{p} \\ \frac{\kappa}{2\mu}\widehat{p}\widehat{q}\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} + \frac{\kappa}{2\mu}\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\widehat{q}\widehat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha\kappa\underline{\widehat{s}}_2\underline{\widehat{s}}_3 \\ \frac{1}{\mu}\underline{\widehat{s}}_1 \\ \frac{\kappa}{2\mu}\left(\underline{\widehat{s}}_1\underline{\widehat{s}}_2\underline{\widehat{s}}_3 + \underline{\widehat{s}}_3\underline{\widehat{s}}_2\underline{\widehat{s}}_1\right) \end{bmatrix} \tag{4.101}$$

yöney biçiminde yazabiliriz. (4.101)'de verilen eşitliğin en sağ yanında, en yüksek derecenin üç olduğunu görüyoruz. Dizge yöneyinin Kronecker üslülerini kullanarak (4.101)'i tıkız biçimde, aşağıdaki gibi, yazmak olanaklıdır.

$$\left\{\widehat{H},\underline{\widehat{\mathbf{s}}}\right\} = \underline{\mathbf{F}}_0 + \underline{\mathbf{F}}_1\underline{\widehat{\mathbf{s}}} + \underline{\mathbf{F}}_2\underline{\widehat{\mathbf{s}}}^{\otimes 2} + \underline{\mathbf{F}}_3\underline{\widehat{\mathbf{s}}}^{\otimes 3} \tag{4.102}$$

Burada $\underline{\mathbf{F}}_0$ ve $\underline{\mathbf{F}}_1$, sırasıyla, 3×1 and 3×3 türünde dizeylerdir. $\underline{\mathbf{F}}_0$'ın tüm öğelerinin sıfır oluşuna karşın yazılış nedeni, yalnızca, varolduğunu vurgulamak içindir. Her zaman 0 oluşu gerekli değildir. $\underline{\mathbf{F}}_1$'in ise sıfır olmayan yalnızca bir öğesi vardır. O da ikinci yataysıra birinci düşeysıra kesişiminde yerleşik olup $1/\mu$ değerindedir. $\underline{\mathbf{F}}_2$ ise 3×9 türünde dikdörtgen bir dizeydir ve ilk yataysırasının altıncı düşeysırasında $-\alpha\kappa$ değeri vardır. Öteki tüm öğeleri sıfırdır. $\underline{\mathbf{F}}_3$ de 3×27 türünde dikdörtgen dizeydir ve sıfırdan değişik iki öğesi vardır. Bunlar üçüncü yataysıranın altıncı ve yirminci düşeysırasında bulunur ve $\kappa/2\mu$ değerindedir.

(4.101)'de görünen tüm Poisson Kümesimgelisi sonuçları, DEUG kullanılarak arı üçüncü derece çokçokterimli biçiminde yazılabilir. Bunun için ara işlemlerde kullanılmak üzere, aşağıdaki gibi, yeni bir işleç, $\widehat{s}_4$, tanımlayarak dizge yöneyi ($\underline{\widehat{\mathbf{s}}}$)'ya bir öğe olarak eklemeli ve yöneyi genişletmeliyiz.

$$\widehat{s}_4 \equiv a\widehat{I}. \tag{4.103}$$

Burada a seçkisiz bir değişmezi ve $\widehat{I}$'da birim isleci simgelemektedir. Bu işlecin eklenişi ile yeni dizge yöneyini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\widehat{\mathbf{s}} \equiv [\widehat{s}_1 \;\; \widehat{s}_2 \;\; \widehat{s}_3 \;\; \widehat{s}_4]^T \tag{4.104}$$

Burada, $\widehat{s}_1$, $\widehat{s}_2$ ve $\widehat{s}_3$ karşılık gelen altı çizgili simgeler ile eşdeğerdir. (4.104)'deki tanımlayış ile, aşağıdaki, gibi bir eşitlik yazabiliş olanağını elde ederiz.

$$\left\{\widehat{H}, \widehat{\mathbf{s}}\right\} = \mathbf{F}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.105}$$

Bu eşitlikte, katsayı dizeyi $\mathbf{F}$, 4×64 türünde dikdörtgen bir dizeydir. Şimdi, $\mathbf{F}$ dizeyinin açık yapısını buluşa odaklanabiliriz. Bunun için

$$\left(\underline{\mathbf{F}}_j \underline{\widehat{\mathbf{s}}}^{\otimes j}\right)_{g,1} = \mathbf{A}_j \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3}, \qquad j = 0, 1, 2, 3 \tag{4.106}$$

yazılabileceği gerçeğinden yola çıkabiliriz. Burada ilk kez kullanılan bir gösterilim olan $(\;)_{g,1}$ ayıraçları, sarmaladıkları yöneyin, en altına bir 0 öğesi ekleyerek, öğe sayısını 1 arttırmakta; içinde bulunduğu Kartezyen uzaydan, boyutu 1 yüksek olan Kartezyen uzayda yöney durumuna getirilmektedir. (4.106)'de, $\mathbf{A}_j$ dizeyi 4×64 türünde, en alt sırası sıfır öğeler ile dolu dikdörtgen bir dizeydir. $\mathbf{A}_j$'leri teker teker elde etmek olanaklıdır. $\underline{\mathbf{F}}_0$ tüm öğeleri sıfır olan bir dizey olduğu için $\mathbf{A}_0$'ı yazmak hiç de güç değildir. Bu durumda $\mathbf{A}_0$, 4×64 türünde bütün öğeleri sıfır olan bir dizeydir. $\mathbf{A}_1$ dizeyini yazmak için öncelikle aşağıdaki eşitlikleri gündeme getirelim.

$$\underline{\mathbf{F}}_1 \underline{\widehat{\mathbf{s}}}^{\otimes 1} = \underline{\mathbf{F}}_1 \underline{\mathbf{I}}_3 \widehat{\mathbf{s}} = \sum_{k=1}^{3} \underline{\mathbf{F}}_1 \underline{\mathbf{I}}_3 \mathbf{e}_{4,k} \widehat{s}_k \tag{4.107}$$

Burada $\mathbf{e}_{4,k}$, k. öğesi 1 ötekileri sıfır olan, dört boyutlu Kartezyen uzayın birim yöneyini simgelemekte olup, 3×4 türünde olan $\underline{\mathbf{I}}_3$ de, 4×4 türünde bir birim dizeyin en alt yataysırasının silinişi ile elde edilen, dikdörtgen bir dizeydir. Bu yüzden, ilgili bağıntıda, toplam 4'e dek değil de 3'e dek alınmaktadır.

$\widehat{s}_4$'ün birim işlecin bir değişmez (a) ile çarpımı olduğu tanımını kullanarak

$$\widehat{s}_k = \frac{1}{a^2}\widehat{s}_k \widehat{s}_4^2 = \frac{1}{a^2}\widehat{s}_4 \widehat{s}_k \widehat{s}_4 = \frac{1}{a^2}\widehat{s}_4^2 \widehat{s}_k, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{4.108}$$

eşitliklerini yazabiliriz. (4.108) bize aşağıdaki eşitliği yazabiliş olanağı sağlar.

$$\begin{aligned}
\widehat{s}_k &= \frac{1}{a^2}\left(\alpha_{k,1}\widehat{s}_k \widehat{s}_4^2 + \alpha_{k,2}\widehat{s}_4 \widehat{s}_k \widehat{s}_4 + \alpha_{k,3}\widehat{s}_4^2 \widehat{s}_k\right) = \frac{1}{a^2}\sum_{m=0}^{2} \alpha_{k,m+1}\widehat{s}_4^m \widehat{s}_k \widehat{s}_4^{2-m} \\
&= \frac{1}{a^2}\left(\sum_{m=0}^{2} \alpha_{k,m+1}\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes m} \otimes \mathbf{e}_{4,k} \otimes \mathbf{e}_{4,4}^{\otimes(2-m)}\right)^T \mathbf{s}^{\otimes 3}, \qquad k = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Burada, $\alpha_{k,m+1}$'ler seçkisiz oluşla birlikte,

$$\alpha_{k,1}+\alpha_{k,2}+\alpha_{k,3}=1, \qquad k=1,2,3 \tag{4.110}$$

birim boylulaştırım (ing: normalization) koşullarını sağlamak durumundadırlar. (4.109)'da elde edilen eşitliği (4.107)'de kullanarak

$$\underline{\mathbf{F}}_1\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^{\otimes 1}=\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=0}^{2}\alpha_{k,m+1}\mathbf{O}_{k,m}\right)\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.111}$$

$$\mathbf{O}_{k,m}\equiv\frac{1}{a^2}\underline{\mathbf{F}}_1\underline{\mathbf{I}}_3\mathbf{e}_{4,k}\left(\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes m}\otimes\mathbf{e}_{4,k}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes(2-m)}\right)^T,$$
$$k=1,2,3; \qquad m=0,1,2 \tag{4.112}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada $\mathbf{O}_{k,m}$, 3×1 ve 64×1 türünde yöneylerin dış çarpımından oluşan, yukarıdaki gibi tanımlanmış, 3×64 türünde bir dizeydir. Derece yükseltimi için bu dış çarpım dizeylerini 4×64 türüne genişletişimiz gerekiyor. Bunu, $\mathbf{O}_{k,m}$'nin en alt yataysırasına 1×64 türünde tüm öğeleri sıfır olan bir yöney ekleyerek gerçekleştirebiliriz. Yeni dizeyimizi $\mathbf{A}_1^{(k,m)}$ ile simgeleyelim. Bu dizey tanımı ile (4.111)'i aşağıdaki gibi yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\left(\underline{\mathbf{F}}_1\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^{\otimes 1}\right)_{g,1}=\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=0}^{2}\alpha_{k,m+1}\mathbf{A}_1^{(k,m)}\right)\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.113}$$

(4.113)'ten 4×64 türündeki $\mathbf{A}_1$'i aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\mathbf{A}_1\equiv\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=0}^{2}\alpha_{k,m+1}\mathbf{A}_1^{(k,m)} \tag{4.114}$$

Ele aldığımız $\underline{\mathbf{F}}_i$ dizeyleri çokça sıfır içeren seyrek dizeylerdir. Bu yüzden $\mathbf{A}_i$ dizeylerini bulurken ölçün birim yöneyleri kullanırız. $\mathbf{A}_1$'i belirlemeden önce inceleyişlerimizi yalınlaştırmak için Kartezyen uzayın ölçün birim yöneylerinin bir kesim özelliklerini anımsamak yararlı olacaktır.

İki altsimge ile tanımladığımız $\mathbf{e}_{M,m}$ birim yöneylerinde M'nin Kartezyen uzayın boyutunu, m'nin de öteki konumlardaki öğelerin sıfır olduğu yöneyde 1'in konumunu belirttiğini biliyoruz. Buradan iki birim yöneyin Kronecker çarpımını

$$\mathbf{e}_{M_1,m_1}\otimes\mathbf{e}_{M_2,m_2}=\mathbf{e}_{M_1M_2,(m_1-1)M_2+m_2},$$
$$m_1{=}1,2,3,\ldots,M_1;\ \ m_2{=}1,2,3,\ldots,M_2 \tag{4.115}$$

gibi yazabiliriz. Aynı biçimde üç birim yöneyin çarpımını da aşağıdaki gibi yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{M_1,m_1} \otimes \mathbf{e}_{M_2,m_2} \otimes \mathbf{e}_{M_3,m_2} &= \mathbf{e}_{M_1M_2,(m_1-1)M_2+m_2} \otimes \mathbf{e}_{M_3,m_2} \\ &= \mathbf{e}_{M_1M_2M_3,(m_1-1)M_2M_3+(m_2-1)M_3+m_3}, \\ &\qquad m_1{=}1,2,...,M_1;\ m_2{=}1,2,...,M_2;\ m_3{=}1,2,...,M_3\end{aligned} \tag{4.116}$$

Bu araştırımda kullanacağımız için, birim yöneyin k. Kronecker üslüsünün eşitliğini de, üretim ara aşamalarını vermeksizin, yazalım.

$$\mathbf{e}_{M,m}^{\otimes k} = \mathbf{e}_{M^k,(m-1)\frac{M^k-1}{M-1}+1}, \qquad m{=}1,2,...,M;\ k{=}1,2,... \tag{4.117}$$

Artık, $\mathbf{A}_i$ dizeylerini belirleyişi sürdürebiliriz. Öncelikle, (4.112)'de tanımlanan dış çarpım dizeyi $\mathbf{O}_{k,m}$'ye odaklanalım. (4.101)'de verilen eşitliğe göre

$$\underline{\mathbf{F}}_1\,\underline{\mathbf{I}}_3\mathbf{e}_{4,k} = \frac{1}{\mu}\mathbf{e}_{3,2}\delta_{k,1}, \qquad k = 1,2,3 \tag{4.118}$$

yazılabilir. Buradaki sağ yanda görünen altsırasayılı δ ile çok yaygın olarak bilinen Kronecker simgesi gündeme getirilmektedir. Yukarıda verilen birim yöney özelliklerinden de aşağıdaki eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

$$\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes m} = \mathbf{e}_{4^m,4^m}, \qquad \mathbf{e}_{4,4}^{\otimes(2-m)} = \mathbf{e}_{4^{2-m},4^{2-m}} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes m} \otimes \mathbf{e}_{4,k} \otimes \mathbf{e}_{4,4}^{\otimes(2-m)} &= \mathbf{e}_{4^m,4^m} \otimes \mathbf{e}_{4,k} \otimes \mathbf{e}_{4^{2-m},4^{2-m}} \\ &= \mathbf{e}_{64,64-4^{3-m}+k4^{2-m}}\end{aligned} \tag{4.120}$$

Buraya dek, katsayılar 3 boyuttaki dizge yöneyinin özünün ve Kronecker üslülerinin doğrucul birleşimi olacak biçimde düşünülmekteydiler. Oysa, bizim, 4 boyuttaki dizge yöneyinin özünün ve Kronecker üslüleri doğrucul birleşimi olacak biçimde katsayılara gereksinimimiz bulunmaktadır. Bu yüzden, 3 boyutlu değil 4 boyutlu uzayın birim yöneyleri ve onlardan üretilen Kronecker çarpımları bu katsayıların yapılarına girmektedir. Yukarıda bu amaçla hazırlık yapılmış olmaktadır.

Yukarıda anlatılan bağlamda, $k = 1,2,3$ için $\mathbf{O}_{k,m}$'yi yazmak istersek,

$$\mathbf{O}_{1,m} = \frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{3,2}\mathbf{e}_{64,64-4^{3-m}+k4^{2-m}}^T, \quad \mathbf{O}_{2,m} = \mathbf{0}_{3\times 64}, \quad \mathbf{O}_{3,m} = \mathbf{0}_{3\times 64} \qquad m = 0,1,2 \tag{4.121}$$

eşitliklerini verebiliriz. Tüm bunları kullanarak $\mathbf{A}_1$'i oluşturacak altdizeyleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1^{(1,m)} = \frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,64-3\times 4^{2-m}}^T, \qquad m = 0,1,2 \\
&\mathbf{A}_1^{(1,0)} = \frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,16}^T, \quad \mathbf{A}_1^{(1,1)} = \frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,52}^T, \quad \mathbf{A}_1^{(1,2)} = \frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,61}^T, \\
&\mathbf{A}_1^{(2,m)} = \mathbf{0}_{4\times 64}, \qquad \mathbf{A}_1^{(3,m)} = \mathbf{0}_{4\times 64}, \qquad m = 0,1,2
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Böylelikle $\mathbf{A}_1$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 = \sum_{m=0}^{2}\alpha_{1,m+1}\mathbf{A}_1^{(1,m)} =& \alpha_{1,1}\frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,16}^T + \alpha_{1,2}\frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,52}^T \\
&+ (1-\alpha_{1,1}-\alpha_{1,2})\frac{1}{a^2\mu}\mathbf{e}_{4,2}\mathbf{e}_{64,61}^T
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Yukarıdaki toplamın en son öğesinin katsayısı daha önce (4.110)'da verilen birim boylulaştırım koşulu kullanılarak yazılmıştır.

$\mathbf{A}_2$'yi belirlemek için de $\mathbf{A}_1$ için gerçekleştirilen inceleyişleri geliştirmek gerekmektedir. (4.109)'da verilen eşitlikten yola çıkarak, andıran biçimde, $\widehat{s}_{j_1}\widehat{s}_{j_2}$ çarpımı için de $\widehat{s}_4$ içeren bir eşitlik yazılabilir. Buradan, üretim ayrıntılarını vermeksizin, aşağıdaki gibi, bir dış çarpım dizeyi tanımlamak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}
\mathbf{O}_{j_1,j_2,k_1,k_2} \equiv& \frac{1}{a}\underline{\mathbf{F}}_2\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 2}\left(\mathbf{e}_{4,j_1}\otimes\mathbf{e}_{4,j_2}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes k_1}\otimes\mathbf{e}_{4,j_1}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes k_2}\otimes\mathbf{e}_{4,j_2}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes(1-k_1-k_2)}\right)^T \\
& j_1,j_2 = 1,2,3; \;\; k_1 = 0,1; \;\; k_2 = 0,1,2,...,1-k_1
\end{aligned} \tag{4.124}$$

Bu tanım ile aşağıdaki eşitliği üretebiliriz.

$$\underline{\mathbf{F}}_2\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^2 = \sum_{j_1,j_2=1}^{3}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1-k_1}\alpha_{j_1,j_2,k_1,k_2}\mathbf{O}_{j_1,j_2,k_1,k_2}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.125}$$

Burada, dört altsimgeli α'lar aşağıdaki birim boylulaştırım koşulları altında seçkisiz değişkenlerdir.

$$\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1-k_1}\alpha_{j_1,j_2,k_1,k_2} = 1, \qquad j_1,j_2 = 1,2,3 \tag{4.126}$$

(4.125)'teki tüm $\mathbf{O}_{j_1,j_2,k_1,k_2}$'lar 3×64 türünde dizeylerdir ve derece yükseltimi için 4×64 türü dizeylere genişletilişleri gerekmektedir. Bunun için, her bir dış çarpımın en alt yataysırasına, tüm öğeleri sıfır olan 1×64 türünde bir yöney eklenmelidir. Oluşan yeni dizeyleri $\mathbf{A}_2^{(j_1,j_2,k_1,k_2)}$ ile simgeleyebiliriz. (4.124) eşitliğinden aşağıdaki tanımı yazabiliriz.

$$\mathbf{A}_2=\sum_{j_1,j_2=1}^{3}\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1-k_1}\alpha_{j_1,j_2,k_1,k_2}\mathbf{A}_2^{(j_1,j_2,k_1,k_2)} \tag{4.127}$$

$\mathbf{A}_2$'yi belirlemek için öncelikle $\underline{\mathbf{F}}_2\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 2}$ dizeyinin yapısını anlamak gerekmektedir. 9×16 türündeki $\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 2}$ dizeyinin açık yapısı aşağıdaki gibidir.

$$\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 2}=\left[\mathbf{e}_{9,1}\ \ \mathbf{e}_{9,2}\ \ \mathbf{e}_{9,3}\ \ \mathbf{0}_{9\times 1}\ \ \mathbf{e}_{9,4}\ \ \mathbf{e}_{9,5}\ \ \mathbf{e}_{9,6}\ \ \mathbf{0}_{9\times 1}\ \ \mathbf{e}_{9,7}\ \ \mathbf{e}_{9,8}\ \ \mathbf{e}_{9,9}\ \ \mathbf{0}_{9\times 5}\right] \tag{4.128}$$

(4.124)'te verilen çoğu dış çarpım 3×64 türünde sıfır dizeyi verir. Ancak, aşağıdaki birkaç dizey, sıfır dışında öğe içerir.

$$\mathbf{O}_{2,3,k_1,k_2}\equiv-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{3,1}\left(\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes k_1}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes k_2}\otimes\mathbf{e}_{4,3}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes(1-k_1-k_2)}\right)^T,$$
$$(k_1,k_2)=(0,0),(0,1),(1,0) \tag{4.129}$$

Sağ yanları yalınlaştırırsak

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_{2,3,0,0}&=-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{3,1}\mathbf{e}_{64,28}^T, \qquad \mathbf{O}_{2,3,1,0}=-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{3,1}\mathbf{e}_{64,55}^T,\\ \mathbf{O}_{2,3,0,1}&=-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{3,1}\mathbf{e}_{64,31}^T\end{aligned} \tag{4.130}$$

elde ederiz. Bunları, $\mathbf{A}_2$'nin aşağıdaki alt dizeylerini yazabilmek için kullanmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2^{(2,3,0,0)}&=-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{4,1}\mathbf{e}_{64,28}^T, \qquad \mathbf{A}_2^{(2,3,1,0)}=-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{4,1}\mathbf{e}_{64,55}^T,\\ \mathbf{A}_2^{(2,3,0,1)}&=-\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{4,1}\mathbf{e}_{64,31}^T\end{aligned} \tag{4.131}$$

Bunların dışında kalan tüm $\mathbf{A}_2^{(j_1,j_2,k_1,k_2)}$ dizeyleri sıfır dizeylerdir. Buradan $\mathbf{A}_2$ aşağıdaki biçimde, yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_2&=\sum_{k_1=0}^{1}\sum_{k_2=0}^{1-k_1}\alpha_{2,3,k_1,k_2}\mathbf{A}_2^{(2,3,k_1,k_2)}\\ &=\alpha_{2,3,0,0}\mathbf{A}_2^{(2,3,0,0)}+\alpha_{2,3,0,1}\mathbf{A}_2^{(2,3,0,1)}+\alpha_{2,3,1,0}\mathbf{A}_2^{(2,3,1,0)}\\ &=-\alpha_{2,3,0,0}\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{4,1}\mathbf{e}_{64,28}^T-\alpha_{2,3,0,1}\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{4,1}\mathbf{e}_{64,55}^T\\ &\quad-(1-\alpha_{2,3,0,0}-\alpha_{2,3,0,1})\frac{\alpha\kappa}{a}\mathbf{e}_{4,1}\mathbf{e}_{64,31}^T\end{aligned} \tag{4.132}$$

Son eşitlik yazılırken birim boylulaştırım koşulu (4.126) kullanılmıştır.

Andıran biçimde $\mathbf{A}_3$'ü belirlemek için, öncelikle, $\underline{\mathbf{F}}_3\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 3}$'ün yapısını belirlemeliyiz. Bunun için, $\underline{\mathbf{F}}_3$, açık olarak dış çarpım biçiminde, ara aşamaları vermeden, aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}}_3 &= \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\mathbf{e}_{27,6}^T + \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\mathbf{e}_{27,22}^T \\
&= \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\left(\mathbf{e}_{3,1}\otimes\mathbf{e}_{3,2}\otimes\mathbf{e}_{3,3}\right)^T + \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\left(\mathbf{e}_{3,3}\otimes\mathbf{e}_{3,2}\otimes\mathbf{e}_{3,1}\right)^T
\end{aligned} \tag{4.133}
$$

Bundan sonra, aşağıdaki anlatımları açık olarak yazmak ilerleyiş için önemli bir adım oluşturur.

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{e}_{3,1}\otimes\mathbf{e}_{3,2}\otimes\mathbf{e}_{3,3}\right)^T\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 3} &= \left(\mathbf{e}_{3,1}^T\underline{\mathbf{I}}_3\right)\otimes\left(\mathbf{e}_{3,2}^T\underline{\mathbf{I}}_3\right)\otimes\left(\mathbf{e}_{3,3}^T\underline{\mathbf{I}}_3\right) \\
&= \left(\mathbf{e}_{4,1}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,3}\right)^T
\end{aligned} \tag{4.134}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbf{e}_{3,3}\otimes\mathbf{e}_{3,2}\otimes\mathbf{e}_{3,1}\right)^T\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 3} &= \left(\mathbf{e}_{3,3}^T\underline{\mathbf{I}}_3\right)\otimes\left(\mathbf{e}_{3,2}^T\underline{\mathbf{I}}_3\right)\otimes\left(\mathbf{e}_{3,1}^T\underline{\mathbf{I}}_3\right) \\
&= \left(\mathbf{e}_{4,3}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,1}\right)^T
\end{aligned} \tag{4.135}
$$

Buradan $\underline{\mathbf{F}}_3\,\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 3}$, aşağıdaki biçimde, yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\underline{\mathbf{F}}_3\,\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 3} &= \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\left(\mathbf{e}_{4,1}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,3}\right)^T + \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{4,3}\left(\mathbf{e}_{4,3}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,1}\right)^T \\
&= \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\mathbf{e}_{64,7}^T + \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{3,3}\mathbf{e}_{64,37}^T
\end{aligned} \tag{4.136}
$$

$\underline{\mathbf{F}}_3\,\underline{\mathbf{I}}_3^{\otimes 3}$, 3×64 türünde bir dizeydir. $\mathbf{A}_3$'ü elde etmek için 4×64 türünde bir dizeye gereksinimimiz bulunmaktadır. Bu yüzden, en alt yataysıraya 1×64 türünde bir sıfır yöneyi eklemek gerekir. Buradan $\mathbf{A}_3$, aşağıdaki biçimde, yazılabilir.

$$
\mathbf{A}_3 = \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{4,3}\mathbf{e}_{64,7}^T + \frac{\kappa}{2\mu}\mathbf{e}_{4,3}\mathbf{e}_{64,37}^T \tag{4.137}
$$

Bu eşitlik hiçbir belirsiz değişken içermemektedir.

Buraya dek gerçekleştirilen işlemler sonucunda, artık, uzay genişletiminin son aşamasına geçebiliriz. Bu amaçla, (4.102)'deki anlatımlar üzerinde gerçekleştirilebilecek işlemler aşağıdaki eşitliklerle verilebilir.

$$
\begin{aligned}
&\left(\left\{\widehat{H},\widehat{\underline{\mathbf{s}}}\right\}\right)_{g,1} = \left\{\widehat{H},\left(\widehat{\underline{\mathbf{s}}}\right)_{g,1}\right\} = \left\{\widehat{H},\widehat{\mathbf{s}}\right\} \\
&\left(\underline{\mathbf{F}}_0+\underline{\mathbf{F}}_1\widehat{\underline{\mathbf{s}}}+\underline{\mathbf{F}}_2\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^{\otimes 2}+\underline{\mathbf{F}}_3\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^{\otimes 3}\right)_{g,1} = \left(\underline{\mathbf{F}}_0\right)_{g,1}+\left(\underline{\mathbf{F}}_1\widehat{\underline{\mathbf{s}}}\right)_{g,1}+\left(\underline{\mathbf{F}}_2\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^{\otimes 2}\right)_{g,1}+\left(\underline{\mathbf{F}}_3\widehat{\underline{\mathbf{s}}}^{\otimes 3}\right)_{g,1} \\
&\qquad = \left(\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\mathbf{A}_3\right)\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3}
\end{aligned} \tag{4.138}
$$

Burada, en sağdaki son anlatım yalnızca en yüksek dereceli anlatımı vermektedir.

Böylelikle, DEUG kullanarak en yüksek dereceli anlatımın katsayı dizeyi, $\mathbf{F}$, bulunmuş olur ve aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F_A} \equiv & \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \\
= & \alpha_{1,1} \frac{1}{a^2\mu} \mathbf{e}_{4,2} \mathbf{e}_{64,16}^T + \alpha_{1,2} \frac{1}{a^2\mu} \mathbf{e}_{4,2} \mathbf{e}_{64,52}^T + \left(1 - \alpha_{1,1} - \alpha_{1,2}\right) \frac{1}{a^2\mu} \mathbf{e}_{4,2} \mathbf{e}_{64,61}^T \\
& - \alpha_{2,3,0,0} \frac{\alpha\kappa}{a} \mathbf{e}_{4,1} \mathbf{e}_{64,28}^T - \alpha_{2,3,0,1} \frac{\alpha\kappa}{a} \mathbf{e}_{4,1} \mathbf{e}_{64,55}^T \\
& - \left(1 - \alpha_{2,3,0,0} - \alpha_{2,3,0,1}\right) \frac{\alpha\kappa}{a} \mathbf{e}_{4,1} \mathbf{e}_{64,31}^T + \frac{\kappa}{2\mu} \mathbf{e}_{4,3} \mathbf{e}_{64,7}^T + \frac{\kappa}{2\mu} \mathbf{e}_{4,3} \mathbf{e}_{64,37}^T
\end{aligned} \tag{4.139}$$

Burada, $\mathbf{F}$ yerine $\mathbf{F_A}$ yazılışının nedeni, bu dizeyde α'larla simgelenen belirsiz değiştirgelere bağımlılık bulunduğunu, bu değiştirgeleri içeren dizeyleri özelsizde çağrıştırarak, vurgulamak amacımızdır. Bu vurgulayışın, biraz ileride ilgileneceğimiz eniyileyişle değiştirge saptayışımızda yararlı olacağı öngörülmektedir. Bu sonuç ile derece yükseltimi süreci bitmiş olmaktadır.

4.6.1 Tek tekterimlinin katsayı dizeyinde değişebiliş ilişkileri kullanarak belirsiz değiştirge belirleyişleri

DEUG sonrası oluşturulan $\widehat{s}_2$ ve $\widehat{s}_3$ işleçleri, özleri aralarında, değiştirimlidir. Bu durumda, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\widehat{s}_2\widehat{s}_3 - \widehat{s}_3\widehat{s}_2 = \widehat{0} \tag{4.140}$$

Buradan, özdeş olarak sıfır olan, üçüncü dereceden çokçokterimli bağdaşık bir işlev yazabilir ve sonucu değiştirmeyeceği için, tek tekterimli denkleme, bir biçimde, katabiliriz. Bunun için, DEUG ile tanımladığımız $\widehat{s}_4$ işlevini aşağıdaki gibi kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}
& \widehat{s}_4^{k_1}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{k_2}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{1-k_1-k_2} - \widehat{s}_4^{k_3}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{k_4}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{1-k_3-k_4} = \widehat{0}, \\
& k_1 = 0,1; \;\; k_2 = 0,\ldots,1-k_1; \qquad k_3 = 0,1; \;\; k_4 = 0,\ldots,1-k_3
\end{aligned} \tag{4.141}$$

Burada, $\widehat{s}_4$'ün, aslında, birim işleç ile orantılı oluşundan dolayı, $\widehat{s}$'ler arasında yazılmış olan eşitliklerin her birinde, sol yan sürekli 3. derecedendir ve bağdaşık eşitlik yapısı bulunmaktadır. Ancak, tümü de, aslında, aynı eşitliktir.

(4.141)'teki ilk eşitlik çok daha yalın bir biçimde yazılabilir. Bu amaçla, Kronecker çarpımının birkesim özelliklerini de kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\widehat{s}_j = \mathbf{e}_{4,j}^T\widehat{\mathbf{s}}, \qquad j = 1,2,3,4 \tag{4.142}$$

$$\left(\mathbf{e}_{4,j}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{k}=\mathbf{e}_{4,j}^{T\ \otimes k}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes k},\qquad k=0,1,2,3,... \tag{4.143}$$

Bu eşitlikler, **a** ile **b**, öğe sayıları eşit olan, herhangi iki yöneyi simgelemek üzere, aşağıdaki, çok daha özelsiz eşitliğin özel durumlarıdır.

$$\left(\mathbf{a}^{T}\mathbf{b}\right)^{k}=\mathbf{a}^{T\ \otimes k}\mathbf{b}^{\otimes k},\qquad k=0,1,2,3,... \tag{4.144}$$

Bu eşitliklerin doğruluğunu göstermek için, her iki yandaki iç çarpımları belirtik olarak yazmak ve sonra da sol yandaki k. üssün alımını gerçekleştirmek gerekir ve yeterlidir de. Ancak, daha özenli olmak isteyenler uzbilimcil (matematik) tümevarım ile kanıtlayışa gidebilirler.

(4.142), (4.143) eşitliklerini (4.141)'da kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\widehat{s}_4^{k_1}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{k_2}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{1-k_1-k_2} &= \left(\mathbf{e}_{4,4}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{k_1}\left(\mathbf{e}_{4,2}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{k_2}\left(\mathbf{e}_{4,3}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{1-k_1-k_2}\\ &= \left(\mathbf{e}_{4,4}^{T\ \otimes k_1}\widehat{\mathbf{s}}^{k_1}\right)\left(\mathbf{e}_{4,2}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T\ \otimes k_2}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes k_2}\right)\left(\mathbf{e}_{4,3}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\\ &\quad\times\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T\ \otimes 1-k_1-k_2}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 1-k_1-k_2}\right)\end{aligned} \tag{4.145}$$

$$\begin{aligned}\widehat{s}_4^{k_3}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{k_4}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{1-k_3-k_4} &= \left(\mathbf{e}_{4,4}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{k_3}\left(\mathbf{e}_{4,3}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{k_4}\left(\mathbf{e}_{4,2}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)^{1-k_3-k_4}\\ &= \left(\mathbf{e}_{4,4}^{T\ \otimes k_3}\widehat{\mathbf{s}}^{k_3}\right)\left(\mathbf{e}_{4,3}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T\ \otimes k_4}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes k_4}\right)\left(\mathbf{e}_{4,2}^{T}\widehat{\mathbf{s}}\right)\\ &\quad\times\left(\mathbf{e}_{4,4}^{T\ \otimes 1-k_3-k_4}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 1-k_3-k_4}\right)\end{aligned} \tag{4.146}$$

Bunları daha da yalınlaştırabilmek için aşağıdaki eşitlikten yararlanılabilir.

$$\left(\mathbf{a}_1^{T}\mathbf{b}_1\right)\left(\mathbf{a}_2^{T}\mathbf{b}_2\right)=\left(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\right)^{T}\left(\mathbf{b}_1\otimes\mathbf{b}_2\right) \tag{4.147}$$

Burada, $\mathbf{a}_1$ ile $\mathbf{b}_1$'in ve $\mathbf{a}_2$ ile $\mathbf{b}_2$'nin öğe sayıları eşit olmalıdır. Bu eşitliğin kullanımıyla, (4.145) ve (4.146) yeniden, aşağıdaki yapıda yazılabilirler.

$$\widehat{s}_4^{k_1}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{k_2}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{1-k_1-k_2}=\left(\mathbf{e}_{4,4}^{\ \otimes k_1}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes k_2}\otimes\mathbf{e}_{4,3}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes 1-k_1-k_2}\right)^{T}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.148}$$

$$\widehat{s}_4^{k_3}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{k_4}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{1-k_3-k_4}=\left(\mathbf{e}_{4,4}^{\ \otimes k_3}\otimes\mathbf{e}_{4,3}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes k_4}\otimes\mathbf{e}_{4,2}\otimes\mathbf{e}_{4,4}^{\otimes 1-k_3-k_4}\right)^{T}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.149}$$

Bunların sağ yanlarını daha da yalınlaştırmak olanaklıdır. Bu amaçla, daha önceden de kullandığımız (4.117) eşitliğinden aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_{4,4}^{k_1}=\mathbf{e}_{4^{k_1},4^{k_1}}, &&\mathbf{e}_{4,4}^{k_2}=\mathbf{e}_{4^{k_2},4^{k_2}}, &&\mathbf{e}_{4,4}^{1-k_1-k_2}=\mathbf{e}_{4^{1-k_1-k_2},4^{1-k_1-k_2}}\\ &\mathbf{e}_{4,4}^{k_3}=\mathbf{e}_{4^{k_3},4^{k_3}}, &&\mathbf{e}_{4,4}^{k_4}=\mathbf{e}_{4^{k_4},4^{k_4}}, &&\mathbf{e}_{4,4}^{1-k_3-k_4}=\mathbf{e}_{4^{1-k_3-k_4},4^{1-k_3-k_4}}\end{aligned} \tag{4.150}$$

Bunlar, özlenen yalınlaştırımın bütünü değildir. Ancak, ilerleyiş için, (4.115)'ten de yararlanarak, aşağıdaki eşitliklere geçilebilir.

$$\mathbf{e}_{4,4}{}^{\otimes k_1}\otimes\mathbf{e}_{4,2}=\mathbf{e}_{4^{k_1+1},4^{k_1+1}-2},\qquad \mathbf{e}_{4,4}{}^{\otimes k_2}\otimes\mathbf{e}_{4,3}=\mathbf{e}_{4^{k_2+1},4^{k_2+1}-1}$$
$$\mathbf{e}_{4,4}{}^{\otimes k_3}\otimes\mathbf{e}_{4,3}=\mathbf{e}_{4^{k_3+1},4^{k_3+1}-1},\qquad \mathbf{e}_{4,4}{}^{\otimes k_4}\otimes\mathbf{e}_{4,2}=\mathbf{e}_{4^{k_4+1},4^{k_4+1}-2} \tag{4.151}$$

Bunların (4.148) ile (4.149)'da kullanımı aşağıdaki, daha yalın, eşitliklere götürür.

$$\widehat{s}_4^{k_1}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{k_2}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{1-k_1-k_2}=\left(\mathbf{e}_{4^{k_1+1},4^{k_1+1}-2}\otimes\mathbf{e}_{4^{k_2+1},4^{k_2+1}-1}\otimes\mathbf{e}_{4^{1-k_1-k_2},4^{1-k_1-k_2}}\right)^T\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.152}$$

$$\widehat{s}_4^{k_3}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{k_4}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{1-k_3-k_4}=\left(\mathbf{e}_{4^{k_3+1},4^{k_3+1}-1}\otimes\mathbf{e}_{4^{k_4+1},4^{k_4+1}-2}\otimes\mathbf{e}_{4^{1-k_3-k_4},4^{1-k_3-k_4}}\right)^T\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} \tag{4.153}$$

Son iki eşitliğin sağ yanındaki ayça ayıraçların arasındaki üçlü Kronecker çarpımlarını daha da yalınlaştırmak olanaklıdır. Bu doğrultuda, (4.116)'tan yararlanılabilir ve sonuçta aşağıdaki eşitliklere ulaşılabilir.

$$\begin{aligned}\widehat{s}_4^{k_1}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{k_2}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{1-k_1-k_2} &= \mathbf{e}^T_{64,64-2\times4^{2-k_1}-4^{1-k_1-k_2}}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3},\\ &\quad \{k_1,k_2\}\in\{\{0,0\},\{1,0\},\{0,1\}\}\\ \widehat{s}_4^{k_3}\widehat{s}_3\widehat{s}_4^{k_4}\widehat{s}_2\widehat{s}_4^{1-k_3-k_4} &= \mathbf{e}^T_{64,64-4^{2-k_3}-2\times4^{1-k_3-k_4}}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3},\\ &\quad \{k_3,k_4\}\in\{\{0,0\},\{1,0\},\{0,1\}\}\end{aligned} \tag{4.154}$$

Bu eşitliklerin (4.141)'teki ilk eşitlikte kullanımı aşağıdaki eşitliklerin yazımına izin verir.

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{e}_{64,64-2\times4^{2-k_1}-4^{1-k_1-k_2}}-\mathbf{e}_{64,64-4^{2-k_3}-2\times4^{1-k_3-k_4}}\right)^T\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3}=0,\\ &\{k\}\equiv\{k_1,k_2,k_3,k_4\},\qquad \{k\}\in\{\{0,0,0,0\},\{0,0,0,1\},\{0,0,1,0\},\\ &\qquad\{0,1,0,0\},\{0,1,0,1\},\{0,1,1,0\},\\ &\qquad\{1,0,0,0\},\{1,0,0,1\},\{1,0,1,0\}\}\end{aligned} \tag{4.155}$$

Bu eşitliklerin her birinde 64 öğeli dizge işleç yöneyinin 64 boyutlu doğrucul yöney uzayından seçilmiş ve o uzayın birkesim birim yöneylerin aralarındaki ikili değişimlerin (farkların) her birine dikgen olduğunu belirten bir anlatım bulunmaktadır. Öteki (ve çok daha somut bir deyişle, dizge işleç yöneyi) öğeleri doğrucul işleç olarak ne olursa olsun, $(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,40})$, $(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,58})$, $(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,46})$, $(\mathbf{e}_{64,55}-\mathbf{e}_{64,40})$,

$(\mathbf{e}_{64,55}-\mathbf{e}_{64,58})$, $(\mathbf{e}_{64,55}-\mathbf{e}_{64,46})$, $(\mathbf{e}_{64,47}-\mathbf{e}_{64,40})$, $(\mathbf{e}_{64,47}-\mathbf{e}_{64,58})$, $(\mathbf{e}_{64,47}-\mathbf{e}_{64,46})$ yöneylerince örtülen altuzaya dikgendirler. Bu yargıdan, bu dikgen olunan altuzayın 9 boyutlu olduğu sonucu çıkarılmamalıdır. Burada, bu altuzayın 9 yöneyce örtüldüğü söylenmekteyse de, bu dokuz yöney aralarında doğrucul bağımlıdır. Bunun nedeni de, bu yöneylerin, aslında, yalnızca 6 doğrucul bağımsız yöney olan $\mathbf{e}_{64,28}$, $\mathbf{e}_{64,55}$, $\mathbf{e}_{64,47}$, $\mathbf{e}_{64,40}$, $\mathbf{e}_{64,58}$, $\mathbf{e}_{64,46}$ yöneylerinden doğrucul birleşimlerle üretilmiş oluşudur. Bu da, altuzayın boyutunun 6 olduğu anlamına gelmez. Değişimler oluşturumu boyutu 1 düşürür.

Bundan sonraki aşamamızda, yukarıda gündeme getirilen ve doğrucul birleştirimlerle oluşturulmuş bulunan 9 yöneyden, aralarında doğrucul bağımsız olan 6 yöneyin seçilerek Gram-Schmidt Yöntemi ile dikgenleştirimidir. Özenli bir inceleyiş, $(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,40})$, $(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,58})$, $(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,46})$, $(\mathbf{e}_{64,55}-\mathbf{e}_{64,40})$, $(\mathbf{e}_{64,47}-\mathbf{e}_{64,40})$ yöneylerinin aralarında doğrucul bağımsız olduğunu gösterir. Bunlara, Gram-Schmidt yöntemi uygulanarak aşağıdaki tanımlara geçilebilir.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{64,28}-\mathbf{e}_{64,40}\right)\\
\mathbf{u}_2 &\equiv \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\mathbf{e}_{64,28}+\mathbf{e}_{64,40}-2\mathbf{e}_{64,58}\right)\\
\mathbf{u}_3 &\equiv \frac{1}{\sqrt{12}}\left(\mathbf{e}_{64,28}+\mathbf{e}_{64,40}-3\mathbf{e}_{64,46}+\mathbf{e}_{64,58}\right)\\
\mathbf{u}_4 &\equiv \frac{1}{\sqrt{20}}\left(\mathbf{e}_{64,28}+\mathbf{e}_{64,40}+\mathbf{e}_{64,46}-4\mathbf{e}_{64,55}+\mathbf{e}_{64,58}\right)\\
\mathbf{u}_5 &\equiv \frac{1}{\sqrt{30}}\left(\mathbf{e}_{64,28}+\mathbf{e}_{64,40}+\mathbf{e}_{64,46}-5\mathbf{e}_{64,47}+\mathbf{e}_{64,55}+\mathbf{e}_{64,55}\right) \qquad (4.156)
\end{aligned}$$

Buradaki, $\mathbf{u}$ yöneyleri birimboylu ve birbirine dikgendirler. Bu arada, $(\mathbf{e}_{64,55}-\mathbf{e}_{64,58})$, $(\mathbf{e}_{64,55}-\mathbf{e}_{64,46})$, $(\mathbf{e}_{64,47}-\mathbf{e}_{64,58})$, $(\mathbf{e}_{64,47}-\mathbf{e}_{64,46})$ yöneyleri yukarıdaki $\mathbf{u}$ yöneylerinin oluşturumunda kullanılan değişimlere doğrucul bağımlıdır. Öteki bir deyişle, bunlar $\mathbf{u}$'lar türünden doğrucul birleştirimlerle anlatılabilirler. Ancak, bu anlatımları, burada, belirtik olarak veriş gerekli görünmemektedir.

Böylece, (4.155)'teki denklemler, yukarıdaki anlatılanlar bağlamında, aşağıdaki gibi yeniden yazılabilirler.

$$\mathbf{u}_j^T \widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} = 0, \qquad j = 1,2,3,4,5 \qquad (4.157)$$

Bunların her biri, devrik yöney katsayılı sayıl bir denklemdir ve katsayı 1×64 türündedir. Bu yapısıyla, katsayısı $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ dizeyi olan denklemle bağdaştırılamaz.

Bağdaştırımın sağlanışı için, bu denklem yerine, katsayısı 4×64 türünde bir dizey olan bir denklem üretmek gerekir. Bunun, us'a (akla) gelen ilk yolu, bu denklemde katsayının yerine onun 4 öğeli bir yöneyle dış çarpımını almaktır. Ancak, bu yolda, aralarında doğrucul bağımsız olan 4 yöneyden herhangi biri kullanılabilir. Öyle de olsa, bu yöneyleri $\mathbf{e}_{4,j} \quad (j = 1,2,3,4)$'lerden biri olarak seçmek ölçünlere (standartlara) uymak olarak görünmektedir. Böylece, (4.157)'den aşağıdaki dizey katsayılı denklemlerin yazımına gidilebilir.

$$\mathbf{B}_{j,k}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} = \mathbf{0}_{4\times 1}, \qquad j = 1,2,3,4 \quad k = 1,2,3,4,5 \tag{4.158}$$

$$\mathbf{B}_{j,k} \equiv \mathbf{e}_{4,j}\mathbf{u}_k^T, \qquad j = 1,2,3,4 \quad k = 1,2,3,4,5. \tag{4.159}$$

Dizge işleç yöneyinin burada tıkız biçimde yazılan dikgenlik (ing: orthonormality) denklemlerini değiştirgelendirimle (ing: parametrization) tek bir denkleme dönüştürmek olanaklıdır. Bu bağlamda değiştirgeleri β'larla simgeleyerek aşağıdaki tanımın ve, sonunda, denklemin yazımına geçilebilir.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}} \equiv \sum_{j=0}^{4}\sum_{j=0}^{5} \beta_{j,k}\mathbf{B}_{j,k} \tag{4.160}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}}\widehat{\mathbf{s}}^{\otimes 3} = \mathbf{0}_{4\times 1} \tag{4.161}$$

Buraya dek olan son eşitliklerde $\mathbf{0}_{4\times 1}$ dört öğeli sıfır yöneyini simgelemektedir. Görülebileceği üzere, buradaki $\mathbf{B}$'ler 4×64 türünde dikdörtgen dizeylerdir. Burada da, $\mathbf{F}_{\mathbf{B}}$ simgesinin kullanılış nedeni, böyle simgelenen dizeyin $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ ile eştür oluşudur.

Burada, önemli olan, β değiştirgelerinin ortaya çıkışı ve $\mathbf{F}_{\mathbf{B}}$'nin DEUG sonrası elde edilen $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ katsayı dizeyi ile, deyim yerindeyse, bütünleştirilebilişidir. Gerçekten de, (4.105)'teki $\mathbf{F}$, ondan biraz sonra yapılan değişiklik bağlamında, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ ile değiştirildikten sonra, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ yerine $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} + \mathbf{F}_{\mathbf{B}}$ yerleştirilirse, (aslında) $\mathbf{F}_{\mathbf{B}}$'nin dizge yöneyi üzerine sıfır dizey etkisi göstereceğinden dolayı, (4.105) değişmeyecektir.

Bu yüzden, önceki inceleyişlerimizde, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ yerine, "Genişletilmiş" çağrıştırımlı,

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F}_{\mathbf{A}} + \mathbf{F}_{\mathbf{B}} \tag{4.162}$$

ile tanımlanan $\mathbf{F}_G$ dizeyi kullanılabilir. Bu kullanım inceleyişlerimize belirsiz yirmi ek değiştirge katar. Böylelikle, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ dizeyinde (daha doğrusu onun yerini alan $\mathbf{F}_G$'de), yeni esneklikler yaratılmış olur. Bu esneklikler, eğer olabiliyorsa, sözgelimi yakınsaklık arttırımı gibi amaçlar için kullanılabilir. Bu yolda, β'larla ilgili bir görüş belirtebilmek için, $\mathbf{F}_G$'nin Frobenius boy (ing: norm) dördülünü (karesini) ele almak gerekir.

$$\|\mathbf{F}_G\|_{Fr}^2 = \|\mathbf{F}_\mathbf{A}\|^2 + 2Tr\left(\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{F}_\mathbf{B}^T\right) + \|\mathbf{F}_\mathbf{B}\|_{Fr}^2 \tag{4.163}$$

Burada, dizeylerdeki tüm öğelerin gerçel olduğu öngörülmektedir. Karmaşık sayı değerlilik durumu da odağa alınabilir. Ancak, o durumda, değiştirge sayısı ve inceleyiş karmaşıklığı yükselir. Burada, gerçellikle yetineceğiz.

(4.139)'dan aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{F}_\mathbf{A}\|_{Fr}^2 = &\frac{1}{a^4\mu^2}\alpha_{1,1}^2 + \frac{1}{a^4\mu^2}\alpha_{1,2}^2 + \frac{1}{a^4\mu^2}(1-\alpha_{1,1}-\alpha_{1,2})^2 - \frac{\alpha^2\kappa^2}{a^2}\alpha_{2,3,0,0}^2 \\ &- \frac{\alpha^2\kappa^2}{a^2}\alpha_{2,3,0,1}^2 - \frac{\alpha^2\kappa^2}{a^2}(1-\alpha_{2,3,0,0}-\alpha_{2,3,0,1})^2 + \frac{\kappa^2}{4\mu^2} + \frac{\kappa^2}{4\mu^2}.\end{aligned} \tag{4.164}$$

$\mathbf{F}_\mathbf{B}$ tanımından da,

$$\|\mathbf{F}_\mathbf{B}\|_{Fr}^2 = \sum_{j=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}\beta_{j,k}^2 \tag{4.165}$$

sonucuna varılabilir. $\mathbf{F}_\mathbf{A}$ ile $\mathbf{F}_\mathbf{B}$'nın çarpımından ise aşağıdaki eşitlik üretilebilir.

$$\begin{aligned}Tr\left(\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{F}_\mathbf{B}^T\right) &= \sum_{j=0}^{4}\sum_{j=0}^{5}\beta_{j,k}Tr\left(\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{B}_{j,k}^T\right) = \sum_{j=0}^{4}\sum_{j=0}^{5}\beta_{j,k}Tr\left(\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{u}_k\mathbf{e}_{4,j}^T\right) \\ &= \sum_{j=0}^{4}\sum_{j=0}^{5}\beta_{j,k}\mathbf{e}_{4,j}^T\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{u}_k\end{aligned} \tag{4.166}$$

Son iki eşitliğin (4.163)'te kullanımı aşağıdaki eşitliğe götürür.

$$\|\mathbf{F}_G\|_{fr}^2 = \|\mathbf{F}_\mathbf{A}\|^2 + 2\sum_{j=0}^{4}\sum_{j=0}^{5}\beta_{j,k}\mathbf{e}_{4,j}^T\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{u}_k + \sum_{j=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}\beta_{j,k}^2 \tag{4.167}$$

Bu büyüklüğün $\beta_{m,n}$, $(m = 1,2,3,4;\ n = 1,2,3,4,5)$ değiştirgesine göre en küçükleni̇şi için sağ yanın $\beta_{m,n}$'ye göre türevlenişi sonrasında ele geçen anlatımın 0'a eşitlenimi ve bu yoldan elde edilen cebircil denklemin çözümü gerekir. Bu yapılır, ve m ile n, sırasıyla, j ve k ile değiştirilirse aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\beta_{j,k} = -\mathbf{e}_{4,j}^T\mathbf{F}_\mathbf{A}\mathbf{u}_k, \qquad j = 1,2,3,4;\ \ k = 1,2,3,4,5 \tag{4.168}$$

Bu eşitlikten, $\|\mathbf{F}_G\|$ dizeyinde boy bastırımı sağlayışı için, son eşitliklerdeki sağ yanlardan en azından birisinin 0'dan değişik oluşu gerekir. Yoksa, bu kesimdeki çözümleyişin tümü anlamsız duruma gelir. Buradaki inceleyişlerimiz bağlamında $\mathbf{F_A}$ dizeyi (4.139) ile belirtik olarak verilen yapıdadır ve, (4.168)'de sağ yanların en azından birisinin sıfırdan değişik oluşu için, 28, 40, 46, 47, 55, 58 sırasayılı düşeysıralarından en azından birisinde sıfırdan değişik öğe bulunduruşu gerekmektedir. (4.139)'dan görüleceği üzere, yalnızca 55. düşeysıra da olsa da, böyle bir durum söz konusudur. Öte yandan, (4.168)'deki eşitliklerde, $\mathbf{e}_{64,55}$ birim yöneyi yalnızca $k = 4,5$ değerleri için ($\mathbf{u}_5$ ile $\mathbf{u}_6$'da) gözükmektedir. Bu yüzden, (4.168)'de, $k = 5,6$ dışındaki sağ yanlar sıfırlanacaktır. Bu ise, sıfırlanmayan β sayısını 20'den 8'e indirecektir. Buna karşın, yine (4.139)'dan görüleceği üzere, $\mathbf{F_A}$'da 55. düşeysıranın yalnızca ilk öğesi sıfırdan değişik olduğundan, (4.168)'de j yalnızca 1 değerini aldığında sağ yan sıfırlanımı olmayacaktır. Sonuçta, buradaki özel durumda, yalnızca $\beta_{1,4}$ ile $\beta_{1,5}$ sıfırdan değişik olacaktır. Beta sayısı çok azalmış olsa da, β'ların boy bastırımında etkili olduğu görülmektedir.

Tüm β'ların sıfırlandığı durumlarda bu kesimdeki çözümleyişin gereksiz gibi görüneceğini dile getirmek olanaklıdır. Yine de, bu çözümleyiş, artık, gerçekleştirilmiş bulunmakta ve yalnızca (4.168) bağıntısına gereksinim bulunmaktadır ve onun kullanımı da, öylesine güç bir eylem değildir, yalındır.

5. DIŞARLAK SÖBEKÇİL GİZİLGÜÇLÜ DİZGELERDE YALIN KONAÇ BÜKÜMÜ

Bu bölümde önceki bölümlerden değişik olarak yeni bir yöntem arayışına girilmiş ve topluluk içinde ortaya çıkan, oldukça yeni bir yöntem olan "Konaç Bükümü" ile biçelenen dizge için çözüm aranmıştır [109–112]. Bu yöntemin amacı üzerinde çalışılan dizgenin konacı (ing: coordinate) dışında bir konaç ile çalışarak elimizdeki sorunu çözümü bilinen dizgeleri andıran yapıya götürmek ve buradan izgecil değerleri elde etmektir. Bunun için ilk olarak konaç bükülür ve yeni bir değişken elde edilir. Büküm işlemi uygun koşulları sağlayan bir işlev ile yapılır. Bu işleve "Konaç Büküm İşlevi" denir. Bu işlevin doğru seçimi çözümleyişleri ve sonuca gidişi kolaylaştıracaktır. Olabildiğince yalın seçilmesi işlem karmaşasını azaltır. Konaç bükümüyle yeni bir gizilgüç elde edilir ve bu gizilgücün tanımladığı Hamiltonyen ile bir izgecil denklem yazılır. Ortaya çıkan denklemde bükülmüş değişkene bağlı bir ağırlık işlevi de ortaya çıkar. Çözüm aşamasında, Hermite çokçokterimlilerinin yardımı ile oluşturulan bir öziştev kümesi kullanılarak kesimcil dizey gösterilimi ile bir yaklaştırım yapılabilir. Sav kapsamında örnek olarak ele alınan dizge özerk (otonom), bir özgürlük düzeyli üstel bakışık uyumsuz salıngaç dizgesidir. Bu dizgeyi betimlemek için aşağıdaki gibi bir gizilgüç kullanılmıştır.

$$V(\widehat{q}) \equiv \alpha\left(\exp\left(\kappa\frac{\widehat{q}^2}{2}\right) - \widehat{I}\right) \tag{5.1}$$

Uygun koşullar altında yeni konacı oluşturacak ve yeni değişken u'yu x türünden betimleyecek işlev $u(x)$ olsun. Aslında bu işlev gereksinimleri karşılayacak biçimde başka değişkenlere de bağlı olabilir. Bizim çalışmamızda gizilgüçte gördüğümüz eksi olmayan değer κ'yı da değişken olarak ekledik. Bu durumda konaç bükümcül işlev $u(x,\kappa)$'dır. α bir değiştirge olarak işin içine katılmamıştır çünkü önceki bölümlerde ele alınan doğabilimcil birimsizleştirim ile denklemde açık olarak gözükmez olmuş ve gizilgücün katsayısı 1 olmuştur. Konaç bükümü uygulayarak bu dizgenin izgecil niceliklerini belirlemek ya da en azından bilgi edinebilmek için öncelikle uygun büküm işlevi bulma arayışına girilmiştir. Gizilgüç terimindeki üstel yapı öncelikle çok terimli kullanımını aklımıza getirir. Yapılan seçimler ve sonrasında yapılan iyileştirimler sonucunda izgecil değerlere daha iyi yaklaştırım yapabildiğimiz görülmüştür.

5.1 Bir Özgürlük Dereceli Nicem Dizgelerde Konaç Bükümü

Bir özgürlük dereceli nicem dizgenin Hamilton işlecinin izgecil denklemi aşağıdaki bağıntı ile gösterilebilir [4].

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\,\psi(x)=E\,\psi(x), \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{5.2}$$

Burada gizilgüç işlevinin sonlu, her yerde sürekli, bağımsız değişkenine göre bakışık, alttan artı değerle kıyılandırılmış olduğu ve x sonsuza giderken işlevin sonsuza gittiği öngörülmektedir. Bu çalışmada biçelenen dizge, bakışık üstel nicem uyumsuz salıngaçtır. Bu dizgenin gizilgüç işlevi sonsuz bir kuyu yapısı tanımladığından, özdeğerlerin yani erke değerlerinin gerçel ve artı değerli oluşu beklenir. Burada, uygun ölçekleyiş oranları ile indirgenmiş kütle (μ) ve gizilgüç çarpanının (α) 1 olacağı biçimde doğabilimcil birimsizleştirim uygulanmıştır.

İnceleyişlerimiz sonucunda, x sonsuza giderken, (5.2) eşitliğinin yanaşık eşdeğerinin (ing: asymptotic equivalent) kullanımının çözümün sonsuzdaki davranışıyla ilgili bir görüş oluşturuşumuzu sağladığı bilgisine varmış bulunuyoruz. Ancak, x konum değişkeni yerine, ona bağlı başka bir değişken tanımı ile yalınlaştırımlar gerçekleştirerek, çözümleyişleri kolaylaştırabileceğimizi düşünmüş bulunuyoruz. Bu amaçla yeni değişkeni betimleyen bir işlev, $u(x,\kappa)$, tanımlayalım. Burada, κ eksi olmayan ve bakışık üstel nicem uyumsuz salıngaç denkleminin gizilgüç teriminde görülen bir değişkendir. Bu işlevin, bir konaç tanımlayışı için x eksi sonsuzdan, artı sonsuza giderken bu işlevin gerçel ve azalmayan değerler üretmesi gerekmektedir. Ayrıca bu işlevin evriğinin tek değerli olabilişi için, işlevin x'e göre türevi, x artarak sonsuzluğa gittiğinde, sıfırı veren sonlu sayıda x değerleri dışında, artan olmalıdır. Konaç bükümcül işlev diyebileceğimiz bu işlevin ürettiği bağımsız değişkeni u ile simgeleyelim. Bu yeni işlev ve değişken tanımı ile dalga işlevini aşağıdaki gibi yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\psi(x)\equiv u'(x,\kappa)^{-\frac{1}{2}}f(u(x,\kappa),\kappa) \tag{5.3}$$

Eşitliğin her iki yanının x'e göre birinci ve ikinci türevini alırsak sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\psi'(x) \equiv -\frac{1}{2}u'(x,\kappa)^{-\frac{3}{2}}u''(x,\kappa)f(u(x,\kappa),\kappa) + u'(x,\kappa)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,\kappa),\kappa) \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\psi''(x) \equiv & \frac{3}{4}u'(x,\kappa)^{-\frac{5}{2}}u''(x,\kappa)^2 f(u(x,\kappa),\kappa) \\ & -\frac{1}{2}u'(x,\kappa)^{-\frac{3}{2}}u'''(x,\kappa)f(u(x,\kappa),\kappa) + u'(x,\kappa)^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u(x,\kappa),\kappa)\end{aligned} \tag{5.5}$$

(5.4) ve (5.5)'in beraber kullanımıyla izgecil denklem (5.2) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{2}\psi''(x) + V(x)\psi(x) - E\psi(x) \equiv \\ & u'(u,\kappa)^{-\frac{1}{2}}\left\{-\frac{1}{2}u'(x,\kappa)^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u(x,\kappa),\kappa) + V(x)f(u(x,\kappa),\kappa)\right. \\ & \left. + \left(-\frac{3}{8}\frac{u''(x,\kappa)^2}{u'(x,\kappa)^2} + \frac{1}{4}\frac{u'''(x,\kappa)}{u'(x,\kappa)}\right)f(u(x,\kappa),\kappa) - Ef(u(x,\kappa),\kappa)\right\} = 0\end{aligned} \tag{5.6}$$

Çözümleyişlerimizi yalınlaştırmak amacıyla $V(x)$ gizilgüç işlevini, u'ya göre kesin çözümü bilinen örneğin uyumlu salıngaç gibi bir Schrödinger denklemi oluşturacak biçimde seçebilmeliyiz. (5.6) denkleminde küme imleri arasındaki anlatım sıfıra eşit olmalıdır. Bundan yola çıkarak aşağıdaki tanım eşitliğini yazalım.

$$V_{KB}(x,\kappa) = \frac{1}{2}u'(x,\kappa)^2 u(x,\kappa)^2 + \frac{3}{8}\frac{u''(x,\kappa)^2}{u'(x,\kappa)^2} - \frac{1}{4}\frac{u'''(x,\kappa)}{u'(x,\kappa)} \tag{5.7}$$

Burada KB "Konaç Bükümcül" gizilgüç anlatımını simgelemektedir. Dizge gizilgücü $V_{KB}(x,\kappa)$'ye eşit olursa, (5.6)'dan aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{du^2}(u,\kappa) + \frac{1}{2}u^2 f(u,\kappa) = \frac{E(\kappa)}{u'(x,\kappa)^2}f(u,\kappa) \tag{5.8}$$

Çözüm için aranan yalın denklemin oluşturulması amacıyla $u(x,\kappa)$ işlevinin seçimi ve onun kullanımı ile $V_{KB}(x,\kappa)$'nın yapısının belirlenimi gerekmektedir.

5.1.1 Konaç bükümcül işlev seçimi

Amacımız inceleyişleri kolaylaştıracak en yalın konaç bükümcül işlevi bulmak olduğu için öncelikle en basit çokterimliler ile çözümlemelerimize başlayalım. Bu doğrultuda ele alacağımız en yalın işlev $u(x,\kappa) \equiv x$ olacaktır. Ancak bu işlev bir konaç değişimine neden olmaz. $u(x,\kappa) \equiv x^2$ seçimi ise bire bir (ing: one-to-one) olmadığı için koşullarımıza uymamaktadır. Burada x yerine $-x$ yerleştirildiğinde imi (işareti) değişen işlevlerle ilgilenmek en doğru seçim olacaktır. Bu yüzden bu seçimlerden sonra alabileceğimiz en yalın çokterimli işlev

$$u(x,\kappa) \equiv x^3 \tag{5.9}$$

olacaktır. $V_{KB}(x,\kappa)$'yi belirlemek için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$u'(x,\kappa) = 3x^2, \qquad u''(x,\kappa) = 6x, \qquad u'''(x,\kappa) = 6 \tag{5.10}$$

Bu eşitlikleri kullanarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz.

$$V_{KB}(\kappa x) = \frac{9}{2}x^{10} + \frac{1}{x^2} \tag{5.11}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{du^2}(u) + \frac{1}{2}u^2 f(u) = E\frac{u^{-\frac{4}{3}}}{9}f(u) \tag{5.12}$$

(5.12)'deki gizilgüç iki kuyulu bir yapıdadır ve $x \to 0$'da, sonsuza büyüyüş türünde, bir tekilliği vardır. Bu tür gizilgüçlü zamandan bağımsız Schrödinger denklemine, Frobenius yöntemiyle, toplamdizi çözümü bulunmak istenirse, biri $1/x$, ötekisi x^2 ile orantılı iki doğrucul bağımsız, ama her biri x^2'nin birer toplamdizisi olan, çözüm elde edilir. x^2 bağımlılığı, doğrudan u'ya değil $u^{\frac{2}{3}}$'e bağımlılık anlamına gelir. Bu yüzden, yalnızca u'nun üslüleri türünden bir çözüm üretilemez. Oysa ki, uyumlu salıngaç özişlevleri yalnızca u'nun üslüleri türünden toplamdizi açılımlarıyla anlatılabilir ve burada taban kümesi olarak kullanımları sayıcıl yakınsayışı ya ortadan kaldırabilir ya da çok güçsüzleşebilir. Bu nedenle konaç bükümcül işlev için başka arayışlara geçeceğiz.

Andıran bir inceleyişi aşağıdaki üstüçül büküm işlevi için de yazabiliriz.

$$u(x,\kappa) \equiv x + \kappa x^3 \tag{5.13}$$

Büküm işlevi κ değiştirgesinin eksi olmayan değerleri için, x artı değerlerde tekdüze arttıkça, tekdüze artar. $V_{KB}(x,\kappa)$'yi yazabilmek için aşağıdaki eşitlikleri yazalım.

$$\frac{du}{dx} = 1 + 3\kappa x^2, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = 6\kappa x, \qquad \frac{d^3u}{dx^3} = 6\kappa \tag{5.14}$$

Buradan konaç bükümcül gizilgüç denklemini aşağıdaki gibi yazarız.

$$V_{KB}(x,\kappa) = \frac{1}{2}\left(1+3\kappa x^2\right)^2\left(x+\kappa x^3\right)^2 + \frac{21\kappa^2 x^2}{(1+3\kappa x^2)^2} - \frac{3\kappa}{2(1+3\kappa x^2)} \tag{5.15}$$

Bu gizilgüç işlevi, x bağımsız değişkenine göre, onuncu dereceden bir çokterimli ve orancıl iki işlevin toplamından oluşmaktadır. Çokterimli kesimi, x'in tüm sonlu gerçel değerleri için sonlu kalır. Ama, orancıl kesimin, paydasının sıfırlandığı yerlerde, ikişer katlı iki ucay (kutup) tekilliği bulunmaktadır. Bunların, x karmaşık düzleminde, yerleşim yerlerini saptamak gizilgücün davranışının belirlenimi açısından çok önemlidir. Bu saptayış için aşağıdaki cebircil denklem yazılabilir.

$$\left(1+3\kappa x^2\right)^2 = 0 \tag{5.16}$$

Bunun çözüm seçenekleri iki katlı iki eşlenik sanal kök olarak ortaya çıkar. Bu kökler ikişer katlı olarak $i/\sqrt{3\kappa}$ ve $-i/\sqrt{3\kappa}$ konumlarına yerleşiktir. Bu nedenle, (5.15) ile verilen gizilgüç işlevi gerçel eksen üzerinde sonlu, her yerde sürekli ve türevlenebilirdir. $x \to \pm\infty$ için artı sonsuza gider.

Yukarıdaki gizilgüçün birden çok kuyulu oluşu da olanaklıdır ve üzerinde durmak gerekirse gerçel sayı doğrusu üzerinde aşıt (ing: extremum) değerlerine bakmak gerekir ve onların sayısını belirleyecek olan öğenin κ değeri olacağını düşünmek olanaklıdır. Yine de, etkin bir çözümleyiş gerçekleştirimi gerekir.

Bu büküm işlevinin (5.8) denklemini çözümleyiş için yalınlaştırması amaçlanmıştır. Konaç bükümcül işlevin evirtimi ve sonrasındaki ara inceleyişler istenen yalınlaşmanın çok da olası olmadığını göstermiştir. Bu nedenle üstüçül işlevin kullanımından da dönülmüştür

5.1.2 Dışarlak söbekçil konaç bükümü

Çokterimliler ile ilgili inceleyişler sonucunda istenilen yalın denkleme indirgeyiş sağlanamadığından biçelenen dizgenin üstel yapısına uygun olarak konaç bükümcül işlevi, üstellik içeren bir yapıda seçme olasılığını da değerlendirmemiz gerekir. Buradan yola çıkarak Dışarlak Söbekçil (ing: Hyperbolic) Konaç Bükümlü bir işlev gündeme getirilebilir. $\sinh(x)$ işlevinin toplamdizi açılımını ele alalım.

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \tag{5.17}$$

Bu açılımdan esinlenerek büküm işlevini aşağıdaki gibi belirlemek olanaklıdır.

$$u(x,\kappa) \equiv \frac{1}{\kappa} sinh(\kappa x) = x + \frac{\kappa^2}{6}x^3 + \frac{\kappa^3}{120}x^5 + \ldots, \qquad \kappa \geq 0 \tag{5.18}$$

κ eksi olmayan bir değişken olduğundan $u(x,\kappa)$ için tekdüze artan bir işlev diyebiliriz. $x \to 0$ için kalan bir terimi x^5 ile orantılı bir yanaşım elde etmek isteniyorsa, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\frac{1}{\kappa} sinh\left(\kappa x\right) \approx x + \frac{\kappa^2}{6} x^3 \tag{5.19}$$

Bu yanaşım, bu konaç bükümünün en azından $x = 0$ komşuluğunda üstüçül konaç bükümü andıran özellikler gösterdiğini belirtir. $1/\kappa$ ile çarpılma nedeni de bu yanaşımı sağlamaktır. $x = 0$ komşuluğunda geçerli olan bu yanaşım, $x \to \infty$ için üstüçül ve dışarlak söbekçil konaç bükümleri büyük ayrılıklar gösterir.

(5.18)'de tanımlanan konaç büküm işlevinin evriğini belirlemek oldukça kolaydır. Öncelikle (5.18)'in sol yan tanımını üstel biçimde yeniden yazalım.

$$\mathrm{e}^{2\kappa x} - 2\kappa u \mathrm{e}^{\kappa x} - 1 = 0 \tag{5.20}$$

Çözüm için aşağıdaki gibi iki eşitlik yazılabilir.

$$\mathrm{e}^{\kappa x} = \kappa u \pm \sqrt{\kappa^2 u^2 + 1} \tag{5.21}$$

Burada evirtim için belirlenecek olan bilinmeyen, x'dir. x ve u eşzamanlı olarak sıfıra gittiğinde, (5.21) denkleminin sağ yanı 1 değeri, sağ yan ise ± 1 değerlerinden birini alır. Bu durumda her iki yanın eşit olabilmesi ancak aradaki imin $+$ olması ile sağlanabilir. Böylece konaç büküm işlevinin evirtimi olan denklemin çözümü

$$x = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\kappa u + \sqrt{\kappa^2 u^2 + 1}\right) \tag{5.22}$$

eşitliği ile belirtik olarak yazılır.

5.1.3 Belirtken gizilgüç belirlenmesi

Konaç bükümüyle, bilinmeyen işlevin, amaca uygun tanımlanmış bir uyumlu salıngacın Schrödinger işlecine, bükümlü değişkene bağımlı bir orancıl işlevle çarpma işlecinin eklenişiyle oluşturulan, işlecin altındaki görüntüsüyle, bilinmeyen erke değiştirgesi ve bükülmüş değişkene bağımlı olan bir ağırlık işlevinin çarpımına eşit olan bir sıradan türevli denkleme erişebiliş amaçlanmaktadır. Ancak, bunun için gizilgücün yapısının belirlenişi gerekmektedir.

V_{KB} ile simgelenebilen "Konaç Bükümcül Gizilgüç"ün ya da öteki bir adıyla "Belirtken Gizilgüç"ün belirlenişi için iki önemli bilgiye gereksinim vardır. Bunlardan birisi konaç bükümü olup önceki altbölümde ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Diğer bilgi ise, dizge için tanımlanmış başta varolan özdenklemden daha yalın, çözümü kolay ya da bilinen bir özdenkleme geçmek için yeni özdenklemdeki gizilgüçtür. Gereksinim duyulan başlangıç ve erek (ing: target) özdenklemlerini sırasıyla aşağıdaki gibi uzbilimcil olarak yazmak olanaklıdır.

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi(x,\kappa)}{dx^2}+V_{KB}(x,\kappa)\psi(x,\kappa)=E(\kappa)\psi(x,\kappa), \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{5.23}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 f(u,\kappa)}{du^2}+V_E(u,\kappa)f(u,\kappa)=E(\kappa)W(u,\kappa)f(u,\kappa), \qquad u\in(-\infty,\infty) \tag{5.24}$$

Burada V_E, verilmiş olan ya da elde edilmesi istenen, erek gizilgüce karşılık gelmektedir. V_E öyle bir biçimde seçilmelidir ki, (5.24)'ün kesin ya da yaklaşık çözümü olabildiğince yalın bir yoldan elde edilebilsin. Bu doğrultuda, yalnızca ayrık izgesi bulunup sonsuz ama dipli bir kuyu olan uyumlu bir salıngacı erek biçe olarak seçmek çözümlemeleri oldukça yalınlaştırabilecek olgulardan biridir. Bunun nedeni de, böyle bir dizgenin Schrödinger işlecinin izgecil büyüklüklerinin çok yalın biçimde belirlenebilişi ve bu yüzden de çok iyi bilinişleridir. Ancak, bu biçimde tanımlanabilecek sonsuz sayıda uyumlu salıngaç biçe vardır. Yalınlık açısından biçede gizilgücün u yerine $-u$ alındığında im değiştirmeyen yani bakışık ve $u=0$ için sıfırlanan bir işlev olmasını yeğleriz. Bunun için önceki altbölümlerdeki inceleyişlerden elde edilen (5.7) ve (5.8) denklemlerinden görülebileceği üzere u^2 ile orantılı bir V_E'nin seçilmesi yerinde olacaktır. Bunun için aşağıdaki gibi özelsiz bir tanım yapalım.

$$V_E(u,\kappa)\equiv\alpha(\kappa)u^2 \tag{5.25}$$

Burada, $\alpha(\kappa)$, κ'nın tüm eksi olmayan, gerçel değerleri için, sıfıra eşit veya artı değerlerde kalan bir değiştirge nitelikli işlevdir. $V_{KB}(x,\kappa)$ ile $V_E(u,\kappa)$ arasında ilişki daha önceki inceleyiş sonuçlarımıza dayanarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$V_{KB}(x,\kappa)=u'(x,\kappa)^2V_E(u(x,\kappa),\kappa)+\frac{3}{8}\frac{u''(x,\kappa)^2}{u''(x,\kappa)^2}-\frac{1}{4}\frac{u'''(x,\kappa)}{u'(x,\kappa)} \tag{5.26}$$

Buradan belirtken gizilgücün belirlenişi için $u(x,\kappa)$'nun x'e göre ilk üç türevinin bulunması gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{du}{dx}=\cosh(\kappa x), \qquad \frac{d^2u}{dx^2}=\kappa\sinh(\kappa x), \qquad \frac{d^3u}{dx^3}=\kappa^2\cosh(\kappa x) \tag{5.27}$$

Bulunan eşitlikler ve tanımlı erek gizilgüç (5.26) denkleminde yerine yerleştirilirse aşağıdaki belirtken gizilgücü elde ederiz.

$$V_{KB}(x,\kappa) = \frac{\alpha(\kappa)}{4\kappa^2}\sinh(2\kappa x)^2 + \frac{3\kappa^2}{8}\tanh(\kappa x)^2 - \frac{\kappa^2}{4} \tag{5.28}$$

Bu işlevde en sağdaki iki toplamcıl anlatım, x gerçel sayı doğrusu üzerinde ilerledikçe, $-\kappa^2/4$ ile $\kappa^2/8$ arasında kalır. Buna karşın, ilk toplamcıl terim 0 ile artı sonsuz arasında değerler alır ve $x \to \pm\infty$ için artı sonsuza hep üstel olarak gider. Böylelikle sonsuz bir kuyu biçimi oluşturur. Buna karşılık gelecek izgenin ayrık olması beklenir.

Ancak bu biçimde tanımlanmış bir konaç bükümünde olumsuzluk yaratabilecek olgular da bulunmaktadır. κ değiştirgesine olan bağımlılık açık olarak belirtilmediğinde $\kappa \to \infty$ ereyinde karşılaşabileceğimiz sorunlar ortaya çıkabilir. (5.28)'de en sağda görünen $-\frac{\kappa^2}{4}$ terimi κ büyüdükçe gizilgüç işlevinin eksi değerler almasına neden olabilir. Bunu gidermek ve artılığı güvence altına almak amacıyla konaç bükümü sonrasında, uyumlu salıngaç gizilgücü olan $\alpha(\kappa)u^2$ anlatımı yanına $1+\kappa^2u^2$ anlatımının evriğinin dördülünün uygun bir katını tanıma katmak işe yarar gözükmektedir.

$$V_E(u,\kappa) \equiv \alpha(\kappa)u^2 + \frac{\beta(\kappa)}{(1+\kappa^2u^2)^2} \tag{5.29}$$

Böylece (5.28)'in en sağındaki terimi ortadan kaldıracak ya da bastırıp artılaştıracak biçimde bir öğe eklenmiş olur ve buradan aşağıdaki konaç bükümcül gizilgüç elde edilir.

$$V_{KB}(u,\kappa) = \frac{\alpha(\kappa)}{4}\sinh(2\kappa x)^2 + \frac{3\kappa^2}{8}\tanh(\kappa x)^2 + \left(\beta(\kappa) - \frac{\kappa^2}{4}\right) \tag{5.30}$$

Burada $\beta(\kappa)$, bu an için, $\kappa^2/4$'ten büyük olmak koşulu altında, belirsiz bir işlevcil değiştirgedir. Böyle bir erek gizilgüç işlevi uyumlu salıngaç izgecil özelliklerinden sapışlara neden olacaktır. Ancak bu tanım çözümü yalınlaştıracak nitelikler taşımaktadır.

5.1.4 Ağırlık işlevinin belirlenmesi ve özişlev yalınlaştırımı

Aslında (5.8)'de verilen denklem bir ağırlıklı özdeğer sorunudur. Bu denklemdeki u^2 uyumlu salıngaç gizilgücünün $1/2$ olan katsayısının $\alpha(\kappa)$ işlevcil değiştirgesi ile değiştirilmesi ve κ büyüyüşünde eksi olmaması durumunu güvence altına almak için terim eklenmesi sonrası ağırlıklı özdeğer sorunu aşağıdaki gibi güncellenmiştir.

$$\begin{aligned}\widehat{L}(u,\kappa)f(u,\kappa) \equiv & -\frac{1}{2}\frac{d^2 f(u,\kappa)}{du^2} + \alpha(\kappa)u^2 f(u,\kappa) + \frac{\beta(\kappa)}{(1+\kappa^2u^2)^2}f(u,\kappa) \\ =& E(\kappa)W(u,\kappa)f(u,\kappa)\end{aligned} \tag{5.31}$$

(5.8) denkleminden $W(u,\kappa)$ ağırlık işlevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$W(u,\kappa) \equiv \left(\frac{du}{dx}\right)^{-2} = \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{1}{\cosh(\kappa x)^2} = \frac{1}{1+\sinh(\kappa x)^2} = \frac{1}{1+\kappa^2u^2} \tag{5.32}$$

Görüldüğü üzere κ eksisiz kaldığı sürece $W(u,\kappa)$ hep artı değerlidir.

ψ işlevi birimboylulaştırılmış olduğundan, $f(u,\kappa)$ işlevinin dördülünün $W(u,\kappa)$ ağırlığı altında u'ya göre tümlevi de 1 olur. Buradan aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du f(u,\kappa)W(u,\kappa)f(u,\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{f(u,\kappa)^2}{1+\kappa^2u^2} = 1 \tag{5.33}$$

Bu denklemden aşağıdaki ölçekleyiş dönüşümünü yapmak akla gelmektedir.

$$f(u,\kappa) \equiv W(u,\kappa)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{f}(u,\kappa) \equiv \sqrt{1+\kappa^2u^2}\widetilde{f}(u,\kappa) \tag{5.34}$$

Böylece aşağıdaki birimboylulaştırım geçerli olur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \widetilde{f}(u,\kappa)^2 = 1 \tag{5.35}$$

(5.34) dönüşümü ile (5.31) denklemi aşağıdaki ağırlıksız yapıya dönüşür.

$$W(u,\kappa)^{-\frac{1}{2}}\widehat{L}(u,\kappa)W(u,\kappa)^{-\frac{1}{2}}\widetilde{f}(u,\kappa) = E(\kappa)\widetilde{f}(u,\kappa) \tag{5.36}$$

Burada sol yanda görünen üç çarpanlı işleç, bir anlamda, bükümlü konaçlardaki Hamilton işleci niteliğindedir. Bu işleci $\widehat{H}_{KB}$ simgesiyle tanımlayabiliriz.

$$\widehat{H}_{KB}(u,\kappa) \equiv W(u,\kappa)^{-\frac{1}{2}}\widehat{L}(u,\kappa)W(u,\kappa)^{-\frac{1}{2}} \tag{5.37}$$

$\widehat{H}_{KB}$ işleci belirtik olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\widehat{H}_{KB}(u,\kappa) = \left(1+\kappa^2u^2\right)\widehat{L}(u,\kappa) - \kappa^2 u\frac{d}{du} - \frac{\kappa^2}{2\left(1+\kappa^2u^2\right)}\widehat{I} \tag{5.38}$$

Bu tanım ile (5.36) denklemini, aşağıdaki gibi, daha yalın yazmamız olanaklıdır.

$$\widehat{H}_{KB}(\kappa)\widetilde{f}(u,\kappa) = E(\kappa)\widetilde{f}(u,\kappa) \tag{5.39}$$

(5.8)'de verilen denklemde (5.31)'deki $\alpha(\kappa) = 1/2$ ve $\beta(\kappa) = 0$ özel durumu için verilen $\widehat{L}(u,\kappa)$ işlecinin izgesi ayrık ve tüm özdeğerleri artı değerlidir. Ayrıca bu işleç özüne eş yani Hermite türündedir. Sonuçta, artı tanımlıdır. Bu altbölümde ise o işlecin çok daha özelsiz durumu vardır. Ama bu işleçteki dipli sonsuz kuyu niteliği önceki durumdakiyle olabildiğince koşuttur. Bu yüzden, ayrık izge ve özdeğerlerin, en azından belli bir eksi sayıdan büyük olan, değerler alabileceğinden sözedilebilir.

5.1.5 Sonsuz κ ereyinde çözümleyiş

κ'nın evrik doğalsayı üslüleri üzerinden yapılacak bir yanaşık açılım, konaç bükümü ile oluşan denklemin izgecil özelliklerini belirleyişi yalınlaştırır. Bunun için (5.31) denkleminden aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\widehat{L}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right) f\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right) = \kappa^2\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}+\frac{\alpha(\kappa)}{\kappa^4}u^2\widehat{I}+\frac{\beta(\kappa)}{\kappa^2}\frac{1}{(1+u^2)^2}\widehat{I}\right] f\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right) \quad (5.40)$$

Bu işleçten düzgün ve anlamlı bir yanaşık açılım gerçekleştirebilmek için aşağıdaki yanaşık açılımlar öngörülebilir.

$$\alpha(\kappa) \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\kappa^{4-j}, \qquad \beta(\kappa) \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\kappa^{2-j}, \quad (5.41)$$

Bu öngörümlerden yararlanarak aşağıdaki açılım yazılabilir.

$$\widehat{L}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{2-j}\widehat{L}_j(u) \quad (5.42)$$

Buradan

$$\begin{aligned}\widehat{L}_0(u) &\equiv -\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}+\alpha_0 u^2\widehat{I}+\beta_0\frac{1}{(1+u^2)^2}\widehat{I},\\ \widehat{L}_j(u) &\equiv \alpha_j u^2\widehat{I}+\beta_j\frac{1}{(1+u^2)^2}\widehat{I}, \qquad j=1,2,3,\ldots\end{aligned} \quad (5.43)$$

denklemleri belirtik olarak yazılabilir. κ'nın evrik doğalsayı üslüleri üzerinden yapılacak bir yanaşık açılım için (5.38) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{KB}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right) &= \left(1+u^2\right)\widehat{L}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right)-\kappa^2 u\frac{d}{du}-\frac{\kappa^2}{2(1+u^2)}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{2-j}\widehat{H}_j^{(KB)}(u)\end{aligned} \quad (5.44)$$

Denklemin son satırındaki gibi öngörülen bir toplamdizi açılımının öğelerini belirlemek için (5.42) kullanılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}\widehat{H}_0^{(KB)}(u) &\equiv \left(1+u^2\right)\widehat{L}_0(u)-u\frac{d}{du}-\frac{1}{2(1+u^2)},\\ \widehat{H}_j^{(KB)}(u) &\equiv \widehat{L}_j(u), \qquad j=1,2,3,\ldots\end{aligned} \quad (5.45)$$

tanımları geçerli olur. Bu açılım öngörümleri aşağıdaki yanaşık eşitlikleri yazmamıza olanak sağlar.

$$\widehat{L}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right)\Big|_{\kappa\to\infty}\approx\kappa^2\widehat{L}_0(u),\qquad \widehat{H}_{KB}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right)\Big|_{\kappa\to\infty}\approx\kappa^2\widehat{H}_0^{(KB)}(u) \tag{5.46}$$

Bunlarda belirtik olarak görünen κ^2 orantılılığı, özdeğer olan erke değerlerinin, $\kappa\to\infty$ ereyinde, κ^2 ile orantılı olduğu ve bu yüzden Erke ve çözümcül işlev için aşağıdaki toplamdizi açılımlarının öngörülebileceği anlamına gelir.

$$E(\kappa)=\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{2-j}E_k,\qquad \widetilde{f}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{-j}\widetilde{f}_j(u) \tag{5.47}$$

Böylece $\kappa\to\infty$ ereyinde yanaşık baskın STD'e aşağıdaki gibi ulaşılabilir.

$$\widehat{H}_0^{(KB)}(u)\widetilde{f}_0(u)=E_0\widetilde{f}_0(u) \tag{5.48}$$

Bu denklem κ'ya bağlı olmadığından daha yalın bir denklemdir. Bundan sonra $\kappa\to\infty$ ereyinde bu denklem üzerinden ilerleyeceğiz.

5.1.6 Sonlu köşegencil dizey gösterilimli yanaşık baskın özdeğer belirleyişleri

κ evriğinin doğalsayı üslüleri üzerindeki açılımlar saptırım açılımı (ing: perturbation expansion) olarak da yorumlanabilir. Ancak, bu açılımların ille de düzgün yakınsak oluşu gerekmez. Ama, özelsizde, en azından, yanaşık yakınsayıştan sözetmek olanaklıdır. Bu altbölümde, açılımların sıfırıncı kerte anlatımlarına odaklanacağız.

Konaç Bükümcül Hamilton İşleci'nin dizey gösterilimine dayalı özdeğer belirleyişlerine geçmek için bir taban işlev kümesi seçimine gereksinim bulunmaktadır. Bu doğrultuda, ilk olarak, Hermite İşlevleri'ni [97–99] içeren işlev kümesi düşünülebilir. Çözüm için dizey gösterilimi oluşturulurken oluşacak dizeyin olabildiğince yalın yapıda oluşu istenir. En çok istenen yapı da sıfır olmayan öğeleri yalnızca ana köşegen üzerinde yerleşik bulunan dizey yapısıdır. Bu biçimde dizey gösterilimi olan sıradan türevli Hamilton işlecinin üzerinde kurulan özdeğer sorununun doğrudan ve olabildiğince yalın bir biçimde çözülebildiği bilinmektedir. Bu yüzden bu durumla ilgilenmeyeceğiz. Onun yerine, sonlu çokköşegencil dizey gösterilimler oluşturmak için çaba gösterecek ve buradan çözüme gitmeye odaklanacağız.

(5.48)'deki $\widehat{H}_0^{(KB)}(u)$ işlecinin belirtik yapısı aşağıdaki eşitlikle yazılabilir.

$$\begin{aligned}\widehat{H}_0^{(KB)}(u) &= -\frac{\left(1+u^2\right)}{2}\frac{d^2}{du^2} - u\frac{d}{du} + \alpha_0 u^2\left(1+u^2\right)\widehat{I} + \left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+u^2}\widehat{I} \\ &= \left(1+u^2\right)\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2} - \frac{u}{1+u^2}\frac{d}{du} + \alpha_0 u^2\widehat{I} + \left(\beta_0 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(1+u^2\right)^2}\widehat{I}\right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

Buradaki ilk eşitlikteki son anlatım, paydasında u bağımlılığı olan bir orancıl yapı içermektedir. Bu anlatım ile sonlu sayıda köşegen içeren bir dizey gösterilimi oluşturmak olanaksızdır. Bu terimden kurtulmakta yarar vardır. Bunun için aşağıdaki gibi bir seçim yeterlidir.

$$\beta_0 \equiv \frac{1}{2} \quad (5.50)$$

Böyle yapıldığında esneklik azaltımı söz konusu olur. Ancak, esneklik azaltımınına karşın elde edilecek olan sonlu çokköşegenliliğin önemli getirileri olacaktır. Bu yüzden, bundan sonra (5.50)'nin geçerliliği öngörülecektir. Bu öngörüm ile (5.49) aşağıdaki gibi yazılır.

$$\widehat{H}_0^{(KB)}(u) = -\frac{\left(1+u^2\right)}{2}\frac{d^2}{du^2} - u\frac{d}{du} + \alpha_0 u^2\left(1+u^2\right)\widehat{I} \quad (5.51)$$

Bu işleç u'ya göre çift işleçtir. Yani im değişimi altında değişmezdir. Bu yüzden, özişlevlerini de u'nun tek ve çift işlevleri olarak sayılabilir sonsuzlukta öğe içeren ve birbirine dikgen olan ayrık iki kümede toplayabiliriz. Burada çift yani im değiştirmeyen işlevleri ele alacağız.

(5.48) eşitliğinde $\widetilde{f}_0(u)$ işlevinin çift ve tek oluşuna bağlı olarak ayrıştırım gerçekleştirmek olanaklıdır. $\widetilde{f}_0(u)$ işlevinin çift oluşu durumunda, $c_{+,j}$'ler bu an için bilinmeyen katsayılar, ν ise daha sonradan seçilecek uygun bir artı değerli değiştirge olmak üzere $\widetilde{f}_0(u)$ için

$$\widetilde{f}_0(u) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{+,j}\sqrt{\nu}\Upsilon_{2j}(\nu u) \quad (5.52)$$

açılımı öngörülebilir. Burada $\Upsilon_{2j}(\nu u)$, ν ile ölçeklenmiş $2j$. derece Hermite işlevini simgelemektedir. Bu işlev aşağıdaki dikgenlik ilişkilerini sağlar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \Upsilon_{2j}(u)\Upsilon_{2k}(u) = \delta_{j,k}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} du \nu \Upsilon_{2j}(\nu u)\Upsilon_{2k}(\nu u) = \delta_{j,k}, \qquad j,k = 0,1,2,... \quad (5.53)$$

(5.52) toplamdizi bağıntısında görünen $c_{+,j}$ katsayılarının tümü için aşağıdaki gibi bir tanım yapılım.

$$\mathbf{c}_{+} \equiv [c_{+,0} \;\; c_{+,1} \;\; ...]^{T} \tag{5.54}$$

Her bir öğesi aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathbf{H}_{+}$ dizeyi de $\widehat{H}_0^{(KB)}(u)$ işlecinin ölçeklenimli çift Hermite işlevleri tabanı üzerinde dizey gösterilimi olsun.

$$[\mathbf{H}_{+}]_{j,k} = \nu \left[\int_{-\infty}^{\infty} du \Upsilon_{2j}(\nu u) \widehat{H}_0^{(KB)}(u) \Upsilon_{2k}(\nu u) \right], \qquad j,k = 0,1,2,... \tag{5.55}$$

Bu tanımlar yardımıyla (5.48) denkleminden aşağıdaki cebircil özdenklemi yazabiliriz.

$$\mathbf{H}_{+}\mathbf{c}_{+} = E_0 \mathbf{c}_{+} \tag{5.56}$$

Sol yandaki sonsuz dizeyin öğelerinin (5.55)'ten belirlenimi için ölçeklenmiş Hermite işlevleri arasındaki özyineleyişli eşitlikleri kullanabiliriz.

$$u\Upsilon_{2j}(\nu u) = \frac{1}{\nu}\sqrt{j+\frac{1}{2}}\Upsilon_{2j+1}(\nu u) + \frac{1}{\nu}\sqrt{j}\Upsilon_{2j-1}(\nu u), \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned} u^2\Upsilon_{2j}(\nu u) =& \frac{1}{\nu^2}\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)(j+1)}\Upsilon_{2j+2}(\nu u) + \frac{1}{\nu^2}\left(2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) \\ &+ \frac{1}{\nu^2}\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}\Upsilon_{2j-2}(\nu u), \qquad j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.58}$$

Aynı biçimde ölçeklenmiş Hermite işlevinin birinci ve ikinci türevleri ile ilgili de özyinelemeler yazılabilir.

$$\frac{d\Upsilon_{2j}(\nu u)}{du} = -\nu\sqrt{j+\frac{1}{2}}\Upsilon_{2j+1}(\nu u) + \nu\sqrt{j}\Upsilon_{2j-1}(\nu u), \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Upsilon_{2j}(\nu u)}{du^2} =& \nu^2\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)(j+1)}\Upsilon_{2j+2}(\nu u) - \nu^2\left(j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) \\ &+ \nu^2\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}\Upsilon_{2j-2}(\nu u), \qquad j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.60}$$

(5.58) ve (5.60) yardımıyla aşağıdaki eşitliğe ulaşabiliriz.

$$\begin{aligned} \left(\alpha_0 u^2 \widehat{I} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) = & \left(\frac{\alpha_0}{\nu^2} - \frac{\nu^2}{2}\right)\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)(j+1)}\Upsilon_{2j+2}(\nu u) \\ & + \left(\frac{\alpha_0}{\nu^2} + \frac{\nu^2}{2}\right)\left(2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) \\ & + \left(\frac{\alpha_0}{\nu^2} - \frac{\nu^2}{2}\right)\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}\Upsilon_{2j-2}(\nu u), \\ & j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.61}$$

Bu denklem $\Upsilon_{2j}(\nu u)$ işlevi üzerine etki eden türev içeren sol baştaki işlecin görüntüsün üç ardışık çift Υ işlevi üzerinde bir doğrucul birleşimle verildiğini göstermektedir. Bu eşitlik ile bu işlecin dizey gösteriliminin üçköşegencil olduğunu görebiliriz. Ancak

$$\frac{\alpha_0}{\nu^2} - \frac{\nu^2}{2} = 0 \tag{5.62}$$

eşitliği geçerli olursa, bu üçköşegencillik tekköşegencilliğe inmektedir. (5.51)'den görülebileceği üzere Hamilton işlecinde, $\left(\alpha_0 u^2 \widehat{I} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}\right)$ işleci $\left(1+u^2\right)$ ile çarpılmaktadır. Bu durumda üçköşegencillik beşköşegencilliğe çıkar ve çok da istediğimiz bir olgu değildir. Bu yüzden üçköşegencillik yerine tekköşegencillik elde edebilirse, o çarpım ile dizey gösterilimi beşköşegencilliğe değil üçköşegencilliğe yükselecektir ve bu yeğleyeceğimiz bir durumdur. Böylece, (5.62)'nin geçerli oluşunu benimsersek

$$\alpha_0 = \frac{\nu^4}{2}, \qquad \nu = (2\alpha_0)^{\frac{1}{4}} \tag{5.63}$$

eşitliğini yazabiliriz. α_0 değerini (5.61) eşitliğinde yerine yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\left(\alpha_0 u^2 \widehat{I} - \frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) = \nu^2\left(2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.64}$$

Tüm bu elde edilen bağıntılardan Hamiltonyenin dizey gösterilimini belirleyebilmek için öncelikle (5.58)'den aşağıdaki eşitliği yazalım.

$$\begin{aligned}\left(1+u^2\right)\Upsilon_{2j}(\nu u) =& \frac{1}{\nu^2}\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)(j+1)}\Upsilon_{2j+2}(\nu u)\\ &+\frac{1}{\nu^2}\left(\nu^2+2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u)\\ &+\frac{1}{\nu^2}\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}\Upsilon_{2j-2}(\nu u), \qquad j = 0,1,2,...\end{aligned} \tag{5.65}$$

Buradan sol baştaki $\left(1+u^2\right)$ ile çarpım işlecinin $\Upsilon_{2j}(\nu u)$ işlevi üzerine etkisinin $\Upsilon_{2j}(\nu u)$, $\Upsilon_{2j-2}(\nu u)$ ve $\Upsilon_{2j+2}(\nu u)$ içlevlerinin doğrucul birleşimi ile anlatılabildiğini görüyoruz. Bu ise, $\left(1+u^2\right)$ ile çarpım işlecinin Υ işlevleri türünden dizey gösteriliminin üçköşegencil olduğu anlamına gelir.

(5.65)’in (5.64) ile birleştiriminden aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
\left(1+u^2\right)\left(\alpha_0 u^2\widehat{I}-\frac{1}{2}\frac{d^2}{du^2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u)=&\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)(j+1)}\left(2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j+2}(\nu u)\\
&+\left(\nu^2+2j+\frac{1}{2}\right)\left(2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j}(\nu u)\\
&+\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}\left(2j+\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2j-2}(\nu u),\\
&\qquad j=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

İşlecin tüm denklemini yazabilmek için aşağıdaki anlatımın da belirlenimine gereksinim vardır. Eşitliği yazabilmek için (5.57), (5.59) üzerine uygulanmış ve

$$
\begin{aligned}
u\frac{d\Upsilon_{2j}(\nu u)}{du}=-\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)(j+1)}\Upsilon_{2j+2}(\nu u)-\frac{1}{2}\Upsilon_{2j}(\nu u)+\sqrt{j\left(j-\frac{1}{2}\right)}\Upsilon_{2j-2}(\nu u),\\
j=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

elde edilmiştir. Hamilton işlecinin dizey gösterilimini belirleyebilmek için (5.67) ve (5.66)’nın (5.51) eşitliğini yazmak üzere birleştirilmesi gerekir. Buradan aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklı olur.

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}_0^{(KB)}(u)\Upsilon_{2k}(u)=&\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)}\left(2k+\frac{3}{2}\right)\Upsilon_{2k+2}(\nu u)\\
&+\left[\left(\nu^2+2k+\frac{1}{2}\right)\left(2k+\frac{1}{2}\right)+1\right]\Upsilon_{2k}(\nu u)\\
&+\sqrt{k\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(2k-\frac{1}{2}\right)\Upsilon_{2k-2}(\nu u),\qquad k=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

Bu eşitliğin (5.55)’te kullanımıyla elde edilen bağıntıdan Hamilton işlecinin dizey gösterilimindeki her bir öğe aşağıdaki eşitlik ile bulunur.

$$
\begin{aligned}
\left[\mathbf{H}_+\right]_{j,k}=&\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)(k+1)}\left(2k+\frac{3}{2}\right)\delta_{j,k+1}\\
&+\left[\left(\nu^2+2k+\frac{1}{2}\right)\left(2k+\frac{1}{2}\right)+1\right]\delta_{j,k}\\
&+\sqrt{k\left(k-\frac{1}{2}\right)}\left(2k-\frac{1}{2}\right)\delta_{j,k-1},\qquad j,k=0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

Böylece Hamilton işlecinin dizey gösterilimi, üçköşegencil ve bakışık olarak belirlenmiş olur. Bu gösterilim ν değiştirgesine bağımlıdır ve $\nu\to\infty$ için asal köşegencil duruma gelir. Bu yüzden de $\nu\to\infty$ ereyinde yanaşık bir saptırım açılımı gerçekleştirilebilir. Ya da kesimcil dizey cebircil özdeğer belirlenimine gidilebilir.

Sayılabilir sonsuz sayıda öğesi olan $\mathbf{H}_+$ dördül dizeyin özdeğerlerinin belirleniminde izlenebilecek yollardan birisi, onun ilk M sayıda yatay ve düşey sırasının ele alınarak oluşturulan $M \times M$ türü dizeyin izgecil bileşenlerini belirlemek ve elde edilen özdeğerlerin, yine onun en küçük M sayıda özdeğerleri için bir yaklaştırım kümesi olacağını öngörmektir. Dizey bağıntısı belirlendikten sonra bilgisayım yapmak ve değişik değişkenler ile yeni değerler elde etmek kolaydır. Bu amaçla betiklerden yararlanılabilir.

5.1.7 Betik ve sonuçlar

$\mathbf{H}_+$ dizey öğelerinin bağıntısı önceki altbölümde belirlenmiş ve (5.69)'da verilmiştir. Aşağıdaki MuPAD [113] betiği, bu bağıntıya göre kesimcil alt dizeyin yaklaşık özdeğerlerini bilgisayım yapar.

```
DIGITS:=100;

/* M: Hesaplanan alt dizeyin büyüklüğü */
M:=100;

/* alpha_0: Değeri istenen biçimde seçilebilen değiştirge */
alpha_0:=1;

/* nu: Yalınlaştırım amacıyla değeri alpha_0 bağlı
belirlenen değiştirge */
nu:=(2*alpha_0)^(1/4);

/* Konaç Bükümcül Hamilton işlecinin dizey gösterilimi */
H:=matrix(M,M):
for i from 1 to M do
H[i,i]:=(nu^2+2*i-3/2)*(2*i-3/2)+1:
end_for:

for i from 1 to M-1 do
H[i,i+1]:=sqrt((i-1/2)*i)*(2*i-1/2):
H[i+1,i]:=sqrt((i)*(i-1/2))*(2*i-1/2):
end_for:
H:

/* 20x20 - MxM boyutlu alt dizeylerin özdeğerlerinin belirlenmesi */
for m from 20 to M do
eig[m]:=numeric::eigenvalues(H[1..m,1..m]):
end_for:

for i from 1 to 20 do
for m from M-1 to M do
print(Unquoted,"-----------------------------------------------"):
print(Unquoted,"eig[".expr2text(m)."\
,".expr2text(i)."]=".eig[m][m+1-i]):
end_for:
end_for:
```

Bu betik ile önce alt dizey kesiminin boyutu, $M \times M$, değiştirilmeksizin α_0'ın 0 ile 1 arasındaki değişik değerleri için bilgisayım yapılmış ve seçili α_0 değerleri için Çizelge 5.1 oluşturulmuştur. Sonra α_0'ın değişmez olduğu benimsenerek, alt dizeyin boyutu değiştirilerek özdeğerlerdeki değişikliklerin gözlemlenmesi amaçlanmış ve buradan

Çizelge 5.1 : $\alpha_0 = 0, 0.5, 1$ değerleri için 49×49 ve 50×50 alt dizey kesimlerinin ilk 20 özdeğeri.

	$\alpha_0 = 0$	$\alpha_0 = 0.5$	$\alpha_0 = 1$
$[49, 1]$	**0.78**3568395671	**1.56509458698**8	**1.799290110870**
$[50, 1]$	**0.78**2836564850	**1.56509458698**2	**1.799290110870**
$[49, 2]$	**1.7**20008992269	**6.54114187**6904	**7.902715111**103
$[50, 2]$	**1.7**12546030255	**6.54114187**3500	**7.902715111**026
$[49, 3]$	**4**.117531406715	**14.170111**610030	**16.975942**145110
$[50, 3]$	**4**.090013167400	**14.170111**242656	**16.975942**132568
$[49, 4]$	**8.3**98237671233	**23.9047**84197061	**28.40503**3664349
$[50, 4]$	**8.3**31238972174	**23.9047**68034087	**28.40503**2848528
$[49, 5]$	**14**.938389340484	**35.50**3152358940	**41.9122**53869923
$[50, 5]$	**14**.805985939238	**35.50**2788088734	**41.9122**26509547
$[49, 6]$	24.106681618137	**48.8**32833893569	**57.325**559421794
$[50, 6]$	23.876007816415	**48.8**28279300490	**57.325**033648331
$[49, 7]$	36.270729205519	**63**.923207568082	**74.5**44260242058
$[50, 7]$	35.901414706896	**63**.891114550452	**74.5**38258024251
$[49, 8]$	**51**.802583751036	**81**.188725709960	**93**.624438029782
$[50, 8]$	**51**.246084155844	**81**.058337941368	**93**.583880844983
$[49, 9]$	71.082746405642	101.481929674599	115.029931149639
$[50, 9]$	70.281576612887	101.144410303733	114.866685609801
$[49, 10]$	94.503299812768	125.686964345568	139.713120577251
$[50, 10]$	93.390167065784	125.038565766474	139.289316059514
$[49, 11]$	122.470585699854	154.442621192129	168.679053247071
$[50, 11]$	120.967413853536	153.393261831649	167.863933412752
$[49, 12]$	155.407666757116	188.228115166639	202.645443868386
$[50, 12]$	153.424499778981	186.686922037762	201.330794283412
$[49, 13]$	193.756718102433	227.484384995329	242.126092916147
$[50, 13]$	191.190487569003	225.349994696849	240.207408322303
$[49, 14]$	237.981446964610	272.663695037672	287.579954611562
$[50, 14]$	234.714584922194	269.820251752481	284.942452986194
$[49, 15]$	288.569615559947	324.243746483322	339.476328098629
$[50, 15]$	284.468490311405	320.558828534428	335.989244104028
$[49, 16]$	346.035730815206	382.731942501171	398.313586156015
$[50, 16]$	340.948878747726	378.054808675962	393.827548720276
$[49, 17]$	410.923960592935	448.667802582650	464.624297250497
$[50, 17]$	404.680081849069	442.827489876595	458.969326813320
$[49, 18]$	483.811336995619	522.625470000724	538.977676168473
$[50, 18]$	476.217016348998	515.428606295688	531.961059619742
$[49, 19]$	565.311312060039	605.216726717753	621.982102095417
$[50, 19]$	556.148418466119	596.444997564907	613.385935432870
$[49, 20]$	656.077739328063	697.094601755136	714.288286412987
$[50, 20]$	645.100447868268	686.501818381356	703.866602871290

da seçili alt dizey boyutları için Çizelge 5.2 oluşturulmuştur. Betiğin son bölümü, isteğimiz doğrultusunda çıktı yazdırmak için değişik aşamalarda değiştirilmiş ve göze çarpan değişim ve eğilimleri yansıtmak için belli özdeğerler ile seçilmiştir.

Çizelge 5.1, α_0 değeri 0, 0.5 ve 1 olduğunda elde edilen yanaşık özdeğerleri içerir. Aslında, daha fazla sayıda α_0 değeri için bilgisayım yapılmış ancak özdeğerlerdeki değişim eğilimini anlamak için bu üç değere ilişkin sonuçları vermek yeterli görülmüştür. Çizelgeye 49×49 ve 50×50 alt dizey kesimleri için ilk 20 özdeğer yansıtılmıştır. α_0 arttıkça kesin özdeğerlere yakınsayış aşamalı olarak iyileşmektedir. Bu durum 49×49 ve 50×50 alt dizey kesimleri için elde edilen karşılıklı özdeğer arasındaki farkın azalmasından gözlemlenebilir. Çizelgede kalın simge ile yazılmış sayılar, karşılık gelen özdeğerlerdeki tutarlı basamakları göstermektedir. Ancak, özdeğerler büyüdükçe iki özdeğer arasında tutarlı basamak sayısı giderek azalmaktadır. Artan α_0 değerleri için sonuçlar iyileşmekle beraber, bir özdeğerden sonra tüm $\alpha_0$lar için tutarlılık ortadan kalkmaktadır. Sonuçları iyileştirmek için inceleyişi değişik değişkenler ile yenileyip, bilgisayımlar yapmak yeterlidir.

Çizelge 5.2 : $\alpha_0 = 1$ için 50×50, 100×100, 200×200 ve 500×500 alt dizey kesimlerinin seçili özdeğerleri.

	50×50	100×100	200×200	500×500
[1]	**1.799290110869**899	**1.799290110869705**	**1.799290110869705**	**1.799290110869705**
[5]	**41.912**22650954743	**41.91214265**124650	**41.91214265088966**	**41.91214265088966**
[10]	139.2893160595145	**135.92**54517370953	**135.924084082**953	**135.924084082**7954
[15]	335.9892441040288	271.4655490940194	**267.7850**99064742	**267.7850**422464648
[20]	703.8666028712908	486.6638256589419	433.110122452692	432.8156115743678
[25]	1317.158394724236	818.9070790207671	645.029955890966	628.2733220036234
[30]	2281.272641101590	1293.746415763341	938.381006588822	852.2718570585408
[35]	3757.125999447977	1941.187835122635	1325.67063632468	1103.535546423191
[40]	6021.128030212345	2796.101391801306	1817.36813149609	1388.330460409682
[45]	9662.754464730803	3899.276759306386	2425.46434454373	1732.791602811527
[50]	17061.82140008620	5299.101114541387	3162.93636108043	2147.130912767717

Dizey kesiminin boyutu ile özdeğerlerin yakınsayışı arasındaki ilişkiyi gözlemlemek için α_0 değeri değişmez alınarak değişik alt dizey kesimleri için bilgisayım yapılması öngörülmüştür. Bunun için, bir önceki çözümlemede karşılıklı özdeğerler arası basamak tutarlılığı en yüksek olduğu gözlemlenen $\alpha_0 = 1$ değeri alınarak, 50×50, 100×100, 200×200 ve 500×500 alt dizey kesimlerinin ilk 50 özdeğeri için bilgisayımlar yapılmıştır. Seçilmiş 11 bilgisayım Çizelge 5.2'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bilgisayım yapılan dizey kesiminin boyutunun arttırılmasının kesin özdeğerlere yakınsayışı olumlu etkilediği gözlemlenmiştir. Çizelge 5.1'de verilen bir önceki çözümleyişte de görüldüğü gibi karşılık gelen özdeğerlerdeki tutarlılık değer büyüdükçe azalmış ve bir değerden sonra kaybolmuştur.

5.2 Saptırım Açılımı Üzerine

Saptırım açılımı, izgecil özellikleri açık olarak bulunamayan dizgeleri, çözümü kolay elde edilen dizgelere görece küçük katkısı olan saptırım terimlerini ardışık olarak ekleyerek çözmek için kullanılır [16, 100, 114–116]. Saptırım açılımını yapabilmek için önce terimlerin etkilerinin göz ardı edildiği saptırımsız (ing: unperturbed) denklem çözülür. Sonra varsa asıl denklemde bulunan bir değiştirge saptırım terimlerini ölçekleyen bir değer olarak seçilir yoksa da yapay bir ε değiştirgesi denklemde uygun yerlere konur ve açılım yapılır. Bu açılım ile özdeğer ve/veya özişlevlere gittikçe küçülen sonsuz terim dizisi ile düzeltim yapılır. Böylece çözümü istenen asıl dizgeye yaklaşık bir değer elde edilmesi beklenir.

Önceki altbölümde izgecil denklemin saptırımsız hali elde edilmiş ve saptırımsız Hamiltonyen ($\widehat{H}_0^{(KB)}$) üzerinden özdeğerler yani Erke değerleri elde edilmiştir. Bu altbölümde saptırım açılımı yapılarak yüksek doğruluklu bilgisayımlar yapılması için gereken bağıntıların oluşturulması amaçlanmıştır.

Saptırımlı denklem oluşturmak için öncelikle çözmek istediğimiz asıl dizgedeki Hamilton işlecinin ($\widehat{H}$) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\widehat{H} \equiv \widehat{H}_0 + \varepsilon \widehat{H}_p \tag{5.70}$$

Burada $\widehat{H}_0$ özdeğerleri önceden elde edilen ya da bilinen saptırımsız Hamilton işleci, ε, 0 ile 1 arasında değişen birimsiz saptırım değiştirgesi ve $\widehat{H}_p$ ise saptırım uygulanan bir Hermitçil işleçtir. $\widehat{H}_0$ özdeğerleri (erkeleri) bilindiğine göre zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$\widehat{H}_0 f_{0,j} = E_{0,j} f_{0,j}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.71}$$

yazılabilir. Burada j erke düzeyini belirtmektedir. Saptırılmış (ing: perturbed) Hamiltonyen ile Schrödinger Denklemi ise

$$(\widehat{H}_0 + \varepsilon \widehat{H}_p) f_j = E_j f_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.72}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Amacımız E_j ve f_j'yi saptırımsız Hamiltonyenin enerji düzeyleri ve özdurumları ile betimleyebilmektir. Bunun için öncelikle bu değerleri ε'un Maclaurin toplamdizisi olarak yazalım.

$$\begin{aligned} E_j &= \varepsilon^0 E_{0,j} + \varepsilon^1 E_{1,j} + \varepsilon^2 E_{2,j} + \ldots \\ f_j &= \varepsilon^0 f_{0,j} + \varepsilon^1 f_{1,j} + \varepsilon^2 f_{2,j} + \ldots, \qquad j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.73}$$

Bu açılımları (5.72) denkleminde kullanırsak

$$\begin{aligned} &\left(\widehat{H}_0 + \varepsilon \widehat{H}_p\right)\left(f_{0,j} + \varepsilon f_{1,j} + \varepsilon^2 f_{2,j} + \ldots\right) \\ &\quad = \left(E_{0,j} + \varepsilon E_{1,j} + \varepsilon^2 E_{2,j} + \ldots\right)\left(f_{0,j} + \varepsilon f_{1,j} + \varepsilon^2 f_{2,j} + \ldots\right), \qquad j = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.74}$$

denklemini elde ederiz. Saptırım açılımını yazabilmek için öncelikle (5.74)'te görünen çarpım yapılır ve ε üslülerinin katsayıları eşleştirilir. Burada ε^0'ın denklemin sağ ve sol yanındaki katsayıları sıfırıncı kerte saptırım açılımını verir. Bu bağıntı (5.71)'de verilmiştir. Birinci kerteden saptırım açılımını bulmak için karşılıklı eşleşen ε katsayılarından aşağıdaki bağıntı ortaya çıkar.

$$\widehat{H}_0 f_{1,j} + \widehat{H}_p f_{0,j} = E_{0,j} f_{1,j} + E_{1,j} f_{0,j}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.75}$$

Erke için birinci kerteden düzeltim terimi ($E_{1,j}$)'yi bulmak için $f_{0,j}$'nin $f_{1,j}$'ye dikgen oluş özelliğini kullanabiliriz. Bunun için aşağıdaki iç çarpımları yazalım.

$$\left(f_{0,j}, \widehat{H}_0 f_{1,j}\right) + \left(f_{0,j}, \widehat{H}_p f_{0,j}\right) = \left(f_{0,j}, E_{0,j} f_{1,j}\right) + \left(f_{0,j}, E_{1,j} f_{0,j}\right), \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.76}$$

Buradan

$$E_{1,j} = \left(f_{0,j}, \widehat{H}_p f_{0,j}\right), \qquad j = 0,1,2,... \tag{5.77}$$

bağıntısını elde ederiz. Özişlev için birinci kerteden düzeltim terimi ($f_{1,n}$) ara aşamalar verilmeksizin aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_{1,n} = \left(\sum_{m \neq n} \frac{\left(f_{0,m}, \widehat{H}_p f_{0,n}\right)}{E_{0,m} - E_{0,n}}, f_{0,m} \right), \qquad n = 0,1,2,... \tag{5.78}$$

Saptırım açılımının tüm terimleri için toplamdizilerin Cauchy çarpımından elde edilen ve yalınlaştırılan özelsiz bağıntı aşağıdaki gibidir.

$$\widehat{H}_0 f_j + \widehat{H}_p f_{j-1} = \sum_{k=0}^{j} E_k f_{j-k}, \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad f_{-1} \equiv 0 \tag{5.79}$$

5.2.1 Birinci kerteden saptırım açılımı terimleri

Bir önceki altbölümde konaç bükümü ile elde edilen yeni Hamitonyeni, κ evriğinin doğal sayı üslüleri üzerindeki toplamdizi açılımı ile yazabildiğimizi (5.44)'te öngörmüştük. Aslında, bu açılım bir $\kappa \to \infty$ ereyinde yanaşık bir saptırım açılımı olarak yorumlanabilir. Konaç bükümcül Hamiltonyen $\widehat{H}^{(KB)}$ için aşağıdaki toplamdizi açılımını yazmıştık.

$$\widehat{H}^{(KB)}\left(\frac{u}{\kappa},\kappa\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\kappa^{2-j}\widehat{H}_j^{(KB)}(u) \tag{5.80}$$

Burada saptırımsız Hamiltonyeni toplamdizi açılımının ilk terimi ve saptırım işlevini de ikinci toplamcıl terim olarak aşağıdaki gibi alırsak

$$\widehat{H}_0(u)=\widehat{H}_0^{(KB)}(u) \qquad \widehat{H}_p(u)=\widehat{H}_1^{(KB)}(u) \tag{5.81}$$

saptırım açılımının 1. kerteden düzeltim terimlerini bulabiliriz. Bunun için, öncelikle saptırımsız Hamiltonyeni ve özişlevi belirlemek gereklidir. (5.79)'da $j=0$ alalım ve saptırımsız özdenklemi yazalım.

$$\widehat{H}_0 f_0 = E_0 f_0 \tag{5.82}$$

Bu denklemin çözümü (5.51)'de aşağıdaki bağıntıyı verecek biçimde bulunmuştu.

$$\widehat{H}_0(u)=-\frac{1+u^2}{2}\frac{d^2}{du^2}-u\frac{d}{du}+\alpha_0u^2(1+u^2)\widehat{I} \tag{5.83}$$

Özdeğer sorununun çözümü için önceki altbölümle uyumlu olacak biçimde özişlevi $f_0=\widetilde{f}_0$ alalım. Bu işlev için ölçeklenmiş Hermite işlevlerini taban kümesi olarak kullanan bir açılım öneriyoruz.

$$\widetilde{f}_0(u)=\sum_{j=0}^{\infty}c_{+,j}\sqrt{\nu}\Upsilon_{2j}(\nu u) \tag{5.84}$$

1. kerteden saptırım açılımı terimini bulmak için (5.77)'den

$$E_1=\left(\widetilde{f}_0,\widehat{H}_1^{(KB)}\widetilde{f}_0\right) \tag{5.85}$$

eşitliği yazılır. Burada $\widehat{H}_1^{(KB)}$, (5.45)'ten aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\widehat{H}_1^{(KB)}(u)=\widehat{L}_1(u)=\alpha_1u^2\widehat{I}+\beta_1\frac{1}{(1+u^2)^2}\widehat{I} \tag{5.86}$$

İnceleyişleri yalınlaştırmak için $\beta_1 = 0$ seçelim ve (5.85)'te öğeleri yerlerine koyalım.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} du \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{+,j} \sqrt{\nu}\Upsilon_{2j}(\nu u) \right)^{*} \widehat{H}_1^{(KB)}(u) \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_{+,j} \sqrt{\nu}\Upsilon_{2j}(\nu u) \right) \\
&= \nu \int_{-\infty}^{\infty} du \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} c_{+,k} c_{+,j-k} \Upsilon_{2k}(\nu u)^{*} \widehat{H}_1^{(KB)}(u) \Upsilon_{2j-2k}(\nu u) \right) \\
&= \nu \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} c_{+,k} c_{+,j-k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} du \Upsilon_{2k}(\nu u)^{*} \widehat{H}_1^{(KB)}(u) \Upsilon_{2j-2k}(\nu u) \right)
\end{aligned}
\tag{5.87}
$$

Burada ayıraçlar içerisindeki tümleve $[\mathbf{H}_{p+}]_{k,j-k}$ diyelim.

$$
[\mathbf{H}_{p+}]_{k,j-k} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} du \Upsilon_{2k}(\nu u)^{*} \widehat{H}_1^{(KB)}(u) \Upsilon_{2j-2k}(\nu u), \qquad j,k = 0,1,2,... \tag{5.88}
$$

$[\mathbf{H}_{p+}]$ dizeyini belirlemek için, Hermite taban işlevleri ve aralarındaki özyineleyişli eşitlikler kullanılabilir. (5.86)'dan (5.58) yardımıyla aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$
\begin{aligned}
\left(\alpha_1 u^2 \widehat{I} \right) \Upsilon_{2j-2k} = & \frac{\alpha_1}{\nu^2} \sqrt{\left(j-k-\frac{1}{2} \right)(j-k)} \Upsilon_{2j-2k-2} \\
& + \frac{\alpha_1}{\nu^2} \left(2j-2k+\frac{1}{2} \right) \Upsilon_{2j-2k} \\
& + \frac{\alpha_1}{\nu^2} \sqrt{\left(j-k+\frac{1}{2} \right)(j-k+1)} \Upsilon_{2j-2k+2}, \qquad j,k = 0,1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{5.89}
$$

Elde edilen bağıntı ile $[\mathbf{H}_{p+}]$'nin dizey gösterilimindeki her bir öğe aşağıdaki eşitlik ile bulunur.

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{H}_{p+}]_{k,j-k} = & \frac{\alpha_1}{\nu^2} \sqrt{\left(j-k-\frac{1}{2} \right)(j-k)} \delta_{k,j-k-1} \\
& + \frac{\alpha_1}{\nu^2} \left(2j-2k+\frac{1}{2} \right) \delta_{k,j-k} \\
& + \frac{\alpha_1}{\nu^2} \sqrt{\left(j-k+\frac{1}{2} \right)(j-k+1)} \delta_{k,j-k+1}, \qquad j,k = 0,1,2,...
\end{aligned}
\tag{5.90}
$$

Buradan 1. kerteden saptırım Erke değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$
E_1 = \nu \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} c_{+,k} c_{+,j-k} [\mathbf{H}_{p+}]_{k,j-k} \tag{5.91}
$$

E_1'in bulunuşuyla 1. kerteden saptırım düzeltimli Erke değeri

$$
E = E_0 + E_1 \tag{5.92}
$$

olarak bulunur.

5.2.2 Betik ve sonuçlar

(5.90), (5.91) ve (5.92) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki MUPAD betiği yazılmıştır. Bu betikte α_1 ve ona bağlı ν değeri isteğe bağlı olarak değiştirilerek değişik değerler için bilgisayımlar yapılabilir. Burada bilgisayım yapılacak dizey kesiminin boyutu M değeri ile belirtilmiştir. Betik ile M tane özdeğer ve karşılık gelen özyöneyleri bulabilmektedir. İstenen değerlere göre betikte değişiklik yapmak olanaklıdır.

```
DIGITS:=100:

/* M: hesaplanan bloğun büyüklüğü */
M:=100:

/* alpha değeri istenen  şekilde seçilebilir. */
alpha_0:=1/2:
nu:=(2*alpha_0)^(1/4):

H:=matrix(M,M):

for i from 1 to M do
    H[i,i]:=(nu^2+2*i-3/2)*(2*i-3/2)+1/2:
end_for:

for i from 1 to M-1 do
    H[i,i+1]:=sqrt((i-1/2)*i)*(2*i-1/2):
    H[i+1,i]:=sqrt((i)*(i-1/2))*(2*i-1/2):
end_for:
H:

/* saptırımsız özdeğerler (Erke) ve özyöneyler */

[Eig,c,res]:=numeric::eigenvectors(H):

/* 1. kerteden saptırım Hamiltonyeni */

H1:=matrix(M,M):
for k from 1 to M do
    H1[k,k]:=(2*(k-1)+1/2):
end_for:
for l from 1 to M-1 do
    H1[l,l+1]:=sqrt(((l+1)-3/2)*((l+1)-1)):
    H1[l+1,l]:=sqrt((l-1/2)*l):
end_for:
H1:=H1*alpha_0/nu^2:

E0 := matrix(M,1):
E1 := matrix(M,1):

for i from 1 to M do
    E0[i]:=Eig[i];
    for j from 1 to M do
        for k from 1 to j do
            E1[i]:=E1[i]+nu*c[k,i]*c[j-k+1,i]*H1[k,j-k+1]:
        end_for:
    end_for:
end_for:

/* Saptırımsız Erke değeri */

SaptirimsizErke:=float(E0):

/* 1. kerteden saptırım terimi eklenmiş Erke değeri */

BirinciKertedenSaptirimliErke:=float(E0+E1):

[Eig1,c1,res]:=numeric::eigenvectors(H+H1):
```

Bu betik ile $\alpha_0 = 1$ değeri değiştirilmeksizin, 50×50, 100×100, 200×200 ve 500×500 alt dizey kesimlerinin ilk 50 özdeğeri için bilgisayımlar yapılmıştır. Böylelikle, boyut arttıkça seçili özdeğerlerdeki değişikliklerin gözlemlenmesi amaçlanmıştır. Betiğin son kısımları, isteğimiz doğrultusunda çıktı yazdırmak için değişik aşamalarda değiştirilmiş ve göze çarpan değişim ve eğilimleri yansıtmak için seçili özdeğerler ile Çizelge 5.3 oluşturulmuştur. Bu çizelgede 11 bilgisayım karşılaştırmalı olarak

Çizelge 5.3 : $\alpha_0 = 1$ için 50×50, 100×100, 200×200 ve 500×500 alt dizey kesimlerinin saptırım düzeltimli seçili özdeğerleri.

	50×50	100×100	200×200	500×500
[1]	**1.855810888**279091	**1.85581088830602**3	**1.855810888306024**	**1.855810888306024**
[5]	**42.42**568742441697	**42.42739**071298821	**42.4273912722**1845	**42.4273912722**2433
[10]	140.2794321338393	**136**.7614382896733	**136.8066**629697201	**136.8066**703334261
[15]	337.8245737537188	272.6873971361574	**268.9**370393329945	**268.9**771207982289
[20]	707.0132179037143	488.6577509224769	**434**.5831656296270	**434.**2870159570674
[25]	1321.443376526018	821.9130969684191	646.9554517293895	629.9897134158361
[30]	2286.672678767896	1297.770812336868	941.0095500513446	854.1025219533422
[35]	3762.375943196615	1946.272056016449	1329.101070443424	1105.652489586954
[40]	6021.150603784814	2802.573998996482	1821.670135650679	1390.913999500117
[45]	9662.754464730914	3906.931541492224	2430.676408064430	1735.934845062878
[50]	17061.82140008620	5307.988941530318	3169.055745312072	2150.834090645553

verilmiştir. Bilgisayım yapılan dizey kesiminin boyutunun arttırılmasının kesin özdeğerlere yakınsayışı olumlu etkilediği gözlemlenmiştir. Çizelge 5.2'de verilen bir önceki çözümleyişte de görüldüğü gibi karşılık gelen özdeğerlerdeki tutarlılık değer büyüdükçe azalmış ve bir değerden sonra kaybolmuştur. Saptırım teriminin ekleniminin yakınsayışı olumlu etkilediği, tutarlılığın daha büyük özdeğerlerde görülmesi ile ortaya konulmuştur. Sonraki aşamalarda değişik α_1 ve M değerleri için bilgisayımlar yapılıp Erke değerlerinin saptırım terimi eklendikten sonraki iyileşmesi hakkında yorum yapmak olanaklıdır.

6. BÜTÜNLEŞİK BAKIŞIK ÜSTEL KUYU GİZİLGÜÇLÜ NİCEM DİZGE İÇİN ÖNGÖRÜLEN BİR KONAÇ BÜKÜMLÜ VE SAPTIRIMLI İZGECİL YÖNTEM GELİŞTİRİMİ

Bölümün taban amacı, odaktaki bir kuyu gizilgüçlü (potansiyelli) dizgenin izgecil (spektral) büyüklüklerinin belirlenişinde konaç bükümlü (ing: coordinate bending) bir yöntemin geliştirimidir. Böyle bir gereksinim duyuluşunun nedeni nicem dizgelerin (ing: quantum systems) izgecil özelliklerinin kesin (ing: exact) çözümlerinin, çoğunlukla, elde edilemeyişidir. Bu da, yaklaştırım yöntemlerinin kullanılışını gündeme getirir. Saptırım (ing: Perturbation) Açılımları da yalın ve kullanışlı yöntemler arasında önemli bir konumda bulunur. Bu yöntemleri uygulamak için de, öncelikle, dizge için uygun devinim denklemini yazmak, bu bağlamda da biçe (ing: method) oluşturmak gerekir. Bu doğrultuda, hem araştırım topluluğumuzda (BEBBYT) hem de bilimcil yazında geliştirilmiş türlü yöntemler [109–112, 114–116] bulunmaktadır. Son yıllarda araştırımlarımızda öne çıkan, ayrıntıları önceki bölümde de verilmiş olan "Konaç Bükümü" yöntemi de bunlardan biridir. Bu yöntemde amaç, denklemin bağımsız değişkenini, uygun yeni tanımlananacak başka bir bağımsız değişken ile değiştirip, denklemi, çözümü bilinen bir dizgenin denklemini andırtarak sonuca gitmektir. Bu bölümde, gizilgücü seçkisiz (ing: arbitrary) bir esnek güç değişmezi (ing: elastic force constant) içeren uyumlu salıngaç erek (ing: target) dizgesi için konaç bükümü yöntemine dayanan bir yöntemin geliştirimine çabalanmaktadır. Erek dizgemizdeki gizilgüç işlevi, uygun bir konaç büküm işlevi ile seçilir. Savın içeriğinde odaklanılan dizgenin, bakışık üstel gizilgüç işlevini andırışı için, onun arttığı biçimde artan bir gizilgüce odaklanabiliriz. Ancak, üstel işlevin değil de tümlevinin kullanışı, sunum yalınlığı açısından yeğlenmektedir (başlıkta, "bütünleşik" sözcüğü bu bağlamda kullanılmıştır). Konaç bükümü için dönüşüm işlevi belirleyiş işlemi, yardımcı Sıradan Türevli Denklemler'in (STD'lerin) özişlevlerinin seçkisiz esnek güç değişmezini içermeyeceği biçimde gerçekleştirilmektedir. Sonrasında, yaklaşık da olsa, bir çözüm elde edebilmek için, saptırım açılımının kullanımına yönelinmektedir. Bu savda, öncelikle, sıfırıncı kerteden saptırım bileşenlerinin nasıl belirlenebileceğine odaklanılmaktadır. Burada, seçkisiz esnek güç değişmezi, yardımcı işleç özişlevine göre saptırım işlecinin boyunu bir tür baskılayacak biçimde belirlenmektedir. Bu belirleyişten sonraki en küçük boy (ing: minimum norm), erek (hedef) Hamilton İşleci'ndeki sendelenimle ilintili olmaktadır.

6.1 Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu (BBÜK) Gizilgüçlü Dizge

Odaklanacağımız dizgeyi, açık yapısı aşağıda verilen, Hamilton İşleci üzerinden tanımlayalım.

$$\widehat{H}_{\scriptscriptstyle BBÜK}\left(\,\widehat{p},\widehat{q}\,\right)\equiv\frac{1}{2}\widehat{p}^{\,2}+\frac{1}{8}\left(\int_{-\widehat{q}}^{\widehat{q}}dq_1\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}q_1^2}\right)^2 \tag{6.1}$$

Burada, $\widehat{p}$ birimsiz devinirlik işlecini, $\widehat{q}$ da konum işlecini simgelemektedir. $\varkappa$ ise eksisiz tanımlı (ing: nonnegative definite) değiştirge olarak dizge gizilgücünün uyumsuzluk (ing: anharmonicity) değişmezidir. Buradaki gizilgüç işlevindeki tümlev, biraz ileride vereceğimiz çözümleyişleri (analizleri) yalınlaştırmak için, devreye alınmaktadır. Tümlevsiz üstel işlev yapılı (savda taban dizge olarak seçilmiş bulunan) gizilgüç gündemde olsaydı konaç büküm işlevi belirlenişinde yanılgı (ing: error) ve sanal yanılgı (ing: imaginary error) işlevleriyle yüzleşilecek ve onların gerekli olabilecek evirtimleri, yalınlıktan olabildiğince uzak olacaktı. (6.1)'de tanımladığımız bu dizgeye "Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu Gizilgüçlü Dizge" adını verebiliriz. Bu dizgenin gizilgücü, artan imsiz bağımsız değişkene göre, tekdüze artan çift bir işlev olup bağımsız değişkeni eksi ya da artı sonsuza gidiş eğilimi gösterdiğinde artı sonsuza gider. Gizilgücün bu biçimde seçilişinin nedeni özel bir dizge sorununu çözmek değil, yöntemi anlamak için oldukça yalın bir üstel işleve odaklanıp andıran sorunlara uygulanabilirliğini görmektir.

(6.1)'deki Hamilton İşleci'ne karşılık gelen zamandan bağımsız Schrödinger denkleminin açık biçimi aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{\scriptscriptstyle BBÜK}\psi_{\scriptscriptstyle BBÜK}(x) &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi_{\scriptscriptstyle BBÜK}(x)}{\partial^2 x}+\frac{1}{8}\left(\int_{-x}^{x}dx_1\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}x_1^2}\right)^2\psi_{\scriptscriptstyle BBÜK}(x)=E_{\scriptscriptstyle BBÜK}\psi_{\scriptscriptstyle BBÜK}(x),\\ & x\in(-\infty,\infty)\end{aligned} \tag{6.2}$$

Burada, Hamilton İşleci'nin değişken ve değiştirgelere olan bağımlılığı, ayıraçlar arasında, belirtik olarak gösterilmemiştir.

6.2 Bir Boyutlu Nicem Uyumlu Salıngaç

Konaç büküm yöntemimizi uygulayarak bütünleşik bakışık üstel kuyu gizilgüçlü dizgeye ulaşmak için çabalarken, yola çıkış konumu olarak seçeceğimiz dizge bir boyutlu nicem uyumlu salıngaç olacaktır. Bu tür dizgenin devinim denklemi, aslında, gizilgücü konum değişkenine bir ikinci derece çokterimlisi üzerinden bağımlı olarak yazılabilir. Ancak, bu çokterimlinin birinci derece terimi, bağımsız değişken üzerinde, bir öteleyiş dönüşümüyle ortadan kaldırılabilir. Sıfırıncı derece (ya da değişmez) terimi ise erke içine katılarak ilerlenebilir. Böylece, gizilgüç çokterimlisinin, konum değişkeninin, yalnızca, ikinci derece terimini içereceği öngörülebilir. Bu yüzden, bu dizge için, ilgili zamandan bağımsız Schrödinger denklemi, *NUS* altsimgedizisiyle, özelsizlikten herhangi bir yitim olmaksızın aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi_{NUS}(x)}{dx^2}+\frac{k}{2}x^2\psi_{NUS}(x)=E_{NUS}\psi_{NUS}(x), \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{6.3}$$

Bu denklemde de, (6.2)'de olduğu gibi, doğabilimcil birimsizleştirim uygulanmıştır. Ancak, tüm doğabilimcil büyüklüklerin 1 ile değiştirilişine karşın esneklik değişmezi olan k, birimsiz ama 1 oluşu illede gerekmeyen, bir büyüklük olacak biçimde, denklemde özellikle tutulmuştur. Bunun nedeni, yöntemin ilerleyen aşamalarında k'yı eniyileyiş değiştirgesi olarak kullanabilecek oluşumuzdur. (6.3)'te verilen sıradan türevli denkleme eşlik eden ve dalga işlevinin sağlayışı beklenen kıyı koşulları (ing: boundary conditions) süreklilik, sonsuz kez türevlenebilirlik, ve bunun ötesinde, x'in tüm gerçel değerleri üzerinden dördül tümlevlenebilirliktir. Ayrıca, bu işlev, x sonsuz büyüdüğünde yeterince tezce sıfıra gitme eğiliminde olmalıdır.

(6.3)'teki, kıyı sorunu olan, sıradan türevli denklemin çözümü, bilimcil yazında bilinen ve çözümcül (analitik) olarak bulunabilen, bir yapıdadır. Bu denklemin izgecil değerleri, yani özdeğer ve özişlevleri, aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} E_{NUS,n}(k) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k} \\ \Psi_{NUS,n}(x,k) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{\sqrt{k}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\sqrt{k}}{2}x^2}H_n\left(k^{\frac{1}{4}}x\right), \qquad n=0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{6.4}$$

Bu eşitliklerde görünen k da seçkisiz esneklik değişmezini simgeler ve saptırım etmenlerini baskılamak için, uyumlu salıngacın belirli bir özdurumunda, belirli bir saptırım işlecinin ya da işleçlerinin boyunu en aza indirgeyebilecek biçimde belirlenebilir. İnceleyişlerimizin geri kalan kesiminde, izgecil değerlere gereksinim duyduğumuzda, bu eşitlikleri kullanabiliriz.

6.3 Nicem Uyumlu Salıngaçtan Başlayan Konaç Bükümü

Öncelikle, (6.3) denklemini ele alalım. Aşağıdaki konaç (koordinat) dönüşümünü ve ilgili türev anlatımlarını kullanarak bağımsız değişken x'in yerine yeni bükülmüş konaç y'yi kullanışı düşünelim.

$$\begin{aligned}
x \equiv \xi\,(y,k) &= \frac{k^{-\frac{1}{4}}}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} = k^{-\frac{1}{4}}\int_{0}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2},\\
\xi_y(y,k) &\equiv \frac{dx}{dy} = k^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2},\\
\xi_{yy}(y,k) &\equiv \frac{d^2x}{dy^2} = k^{-\frac{1}{4}}\varkappa y \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2},\\
\xi_{yyy}(y,k) &\equiv \frac{d^3x}{dy^3} = k^{-\frac{1}{4}}\left(\varkappa^2 y^2+\varkappa\right)\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Bu dört eşitlikten ilkinde görünen tümlev, bilimsel yazında "sanal yanılgı işlevi (ing: imaginary error function)" olarak bilinir ve simgecil olarak "erfi" ile adlandırılıp bu tümlev gösterilimle tanımlanır. "erf" simgecil adlandırımlı "yanılgı işlevinin (ing: error function)" [98, 117] özel bir durumudur. İyi bilinen işlevler türünden en az özelsizlikli belirtimi istenilecek olursa toplamdizi gösterilimlerine (ing: series representations) başvurmak gerekir [118]. Evirtimi de olanaklı oluşla birlikte kullanımı pek de yalın değildir. Ancak, burada, baskın olarak her olguyu, olabildiğince, x üzerinden gerçekleştirmek eğilimimiz söz konusu olduğundan, bu evirtimden olabildiğince kaçınışa çabalayacağız.

Yeni elde ettiğimiz ve (6.5)'te verdiğimiz bu eşitlikleri kullanarak (6.3)'ü aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$-\frac{1}{2\xi_y(y,k)^2}\frac{d^2\overline{\psi}(y,k)}{dy^2}+\frac{\xi_{yy}(y,k)}{2\xi_y(y,k)^3}\frac{d\overline{\psi}(y,k)}{dy}+\frac{k}{2}\xi\,(y,k)^2\,\overline{\psi}(y,k) = E_{NUS}(k)\overline{\psi}(y,k) \tag{6.6}$$

Burada, üstü çizgili ψ de dalga işlevi anlamına gelmektedir. Ancak, bu işlev x'e değil y'ye (ayrıca k'ya da) bağımlıdır. Burada, $\psi_{NUS}(x,k) = \psi_{NUS}(\xi\,(y,k),k) = \overline{\psi}(y,k)$ dönüşümü gerçekleştirilmiştir. Bu denklem bütünleşik bakışık üstel kuyu gizilgüç dizgesi için verilen Schrödinger denklemi (6.2)'de gözükmeyen birinci kerteden türevli bir anlatım içerir. Öncelikle bu anlatımdan kurtulmak için çabalamalıyız. Bunun için, bilinmeyen dalga işlevi $\overline{\psi}(y,k)$'yı, aşağıdaki bağıntı ile yeniden tanımlarmışçasına, yazalım.

$$\overline{\psi}(y,k) \equiv g(y,k)f(y,k) \tag{6.7}$$

Burada f yeni bilinmeyen dalga işlevini simgelemektedir. g ise bu an için bilinmeyen ancak denklemde birinci kerteden türevden kurtulmak için belirlenecek ve kullanılacak olan işlevdir. (6.7)'de verilen yeniden yazımı (6.6)'da kullanacak olursak aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\xi_y(y,k)^2}\frac{d^2f(y,k)}{dy^2}+\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\left(-\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}+\frac{\xi_{yy}(y,k)}{2\xi_y(y,k)}\right)\frac{df(y,k)}{dy}\\
&+\left(-\frac{1}{2\xi_y(y,k)^2}\frac{g_{yy}(y,k)}{g(y,k)}+\frac{1}{2\xi_y(y,k)^2}\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}\frac{\xi_{yy}(y,k)}{\xi_y(y,k)}+\frac{k}{2}\xi(y,k)^2\right)f(y,k)\\
&=E_{NUS}(k)f(y,k)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

(6.8)'de yine de birinci kerteden türev bulunmaktadır. Ayrıca, y'ye göre ikinci kerteden türevi içeren toplamcıl anlatım özüne eş değildir. Nicem devinimin terimdizgesinde (ing: terminology) daha çok "Hermitçil (ing: Hermitian) olmayan" diye kullanılır. Birinci kerteden türevli anlatımdan kurtulmadan önce ikinci kerteden türevli anlatım Hermitçil olmaya iteklenmeli, ve böylece, saptırımcıl bakış açısı altında bu özelliğin korunumu gündemde tutulabilmelidir. Bu amaçla, öncelikle, aşağıdaki eşitliği yazalım.

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\frac{df(y,k)}{dy}\right)=\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\frac{d^2f(y,k)}{dy^2}-2\frac{\xi_{yy}(y,k)}{\xi_y(y,k)^3}\frac{df(y,k)}{dy} \tag{6.9}$$

Buradan aşağıdaki eşitliğe geçebiliriz.

$$\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\frac{d^2f(y,k)}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\frac{df(y,k)}{dy}\right)+2\frac{\xi_{yy}(y,k)}{\xi_y(y,k)^3}\frac{df(y,k)}{dy} \tag{6.10}$$

Bu eşitliği (6.8)'de kullanırsak aşağıdaki sıradan türevli denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\frac{df(y,k)}{dy}\right)+\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\left(-\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}-\frac{1\xi_{yy}(y,k)}{2\xi_y(y,k)}\right)\frac{df(y,k)}{dy}\\
&+\left(-\frac{1}{2\xi_y(y,k)^2}\frac{g_{yy}(y,k)}{g(y,k)}+\frac{1}{2\xi_y(y,k)^2}\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}\frac{\xi_{yy}(y,k)}{\xi_y(y,k)}+\frac{k}{2}\xi(y,k)^2\right)f(y,k)\\
&=E_{NUS}(k)f(y,k)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Bu denklemin de özüne eşliği birinci kerteden türevli anlatımın varlığından dolayı bozulmuştur. İşte bu durumda, $g(y,k)$'nın ne olduğunu gereksinimimize göre belirleyebiliriz. Bu anlatımdan kurtulmak için aşağıdaki eşitliği yazalım.

$$\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}=-\frac{1}{2}\frac{\xi_{yy}(y,k)}{\xi_y(y,k)} \tag{6.12}$$

(6.11)'deki g'ye bağlı öteki anlatımı elde edebilmek için (6.12)'nin y'ye göre türevini alalım.

$$\left(\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}\right)_y = \frac{g_{yy}(y,k)}{g(y,k)} - \frac{g_y(y,k)^2}{g(y,k)^2} \tag{6.13}$$

Buradan aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$\frac{g_{yy}(y,k)}{g(y,k)} = \left(\frac{g_y(y,k)}{g(y,k)}\right)_y + \frac{g_y(y,k)^2}{g(y,k)^2} \tag{6.14}$$

Bu eşitliğin (6.12) ile birleşiminden aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\frac{g_{yy}(y,k)}{g(y,k)} = -\frac{1}{2}\frac{\xi_{yyy}(y,k)}{\xi_y(y,k)} + \frac{1}{2}\frac{\xi_{yy}(y,k)^2}{\xi_y(y,k)^2} \tag{6.15}$$

Birinci dereceden türevli anlatımı yok etmek için, (6.12) ve (6.15)'in (6.11)'de kullanımı ile

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\xi_y(y,k)^2}\frac{df(y,k)}{dy}\right) + \left(\frac{1}{4}\frac{\xi_{yyy}(y,k)}{\xi_y(y,k)^3} - \frac{1}{2}\frac{\xi_{yy}(y,k)^2}{\xi_y(y,k)^4} + \frac{k}{2}\xi(y,k)^2\right) f(y,k)$$
$$= E_{NUS}(k) f(y,k) \tag{6.16}$$

denklemini yazabiliriz. (6.5)'te yapılan konaç bükümü tanımı ve karşılık gelen türev eşitlikleri ile (6.16) denklemi, bu tanıma özel, aşağıdaki biçimde, yeniden yazılabilir.

$$-\frac{\sqrt{k}}{2}\frac{d}{dy}\left(\mathrm{e}^{-\varkappa y^2}\frac{df(y,k)}{dy}\right) + \left(\frac{\sqrt{k}}{4}\left(\varkappa - \varkappa^2 y^2\right)\mathrm{e}^{-\varkappa y^2} + \frac{\sqrt{k}}{8}\left(\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2}\right)^2\right) f(y,k)$$
$$= E_{NUS}(k) f(y,k) \tag{6.17}$$

Bu kıyı değer sorununu çözmemize gerek yoktur. Çünkü, çözüm olan f, başlangıç dizge olan uyumlu salıngaç kıyı değer sorunu ile ilintilir. Daha önce verdiğimiz tanım denklemi (6.7)'den

$$f(y,k) = \frac{1}{g(y,k)}\overline{\psi}(y,k) = \frac{1}{g(y,k)}\psi_{NUS}(\xi(y),k) \tag{6.18}$$

eşitliğini elde etmek olanaklıdır. Burada n. özdurumu incelersek, (6.18) denkleminde $\overline{\psi}(y,k)$ yerine başlangıç uyumlu salıngacın n. özdurumu (6.4)'ten yazılabilir ve buradan $f_n(y,k)$ da aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned} f_n(y,k) =& \frac{1}{g(y,k)}\overline{\psi}_n(y,k) \\ =& \frac{1}{g(y,k)}\Psi_{NUS,n}(\xi(y),k) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2^n n!}\,g(y,k)}\left(\frac{\sqrt{k}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{k}}{2}\xi(y,k)^2} H_n\left(k^{\frac{1}{4}}\xi(y,k)\right), \qquad n = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.19}$$

Bu denklem $g(y,k)$ ve $\xi(y,k)$'nın belirtik anlatımları verilerek daha da özelleştirilebilir. $\xi(y,k)$'nın açık yapısı (6.5)'te verilmişti. $g(y,k)$'nin açık anlatımını ise (6.12)'nin tümlevini alarak belirleyebiliriz.

$$g(y,k) = C\xi_y(y,k)^{-\frac{1}{2}} = Ck^{\frac{1}{8}}\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{4}y^2} \tag{6.20}$$

Burada, C tümlevleyiş değişmezidir ve bu anda değeri seçkisizdir. (6.20) kullanılarak (6.19), yeniden, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} f_n(y,k) &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{4}y^2}}{\sqrt{2^n n!}\pi^{\frac{1}{4}}C}\exp\left(-\frac{1}{8}\left(\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2\right) H_n\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right), \\ & n = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.21}$$

$\Psi_{NUS,n}(\xi(y),k)$'nın tüm gerçel y değerleri için $\xi_y(y,k)dy$ ağırlığı altında dördül tümlevi 1'e eşittir. Bu durumda $f(y,k)g(y,k)$'nın da aynı ağırlık altında dördül tümlevi 1'e eşit olmalıdır. $f(y,k)g(y,k)$ üzerindeki birimboylulaştırım koşuluna baktığımızda tümlevleyiş değişmezi C'yi içermediğini görürüz. Bu durumda C değeri, $f(y,k)$'nın birimboylulaştırımına bağımlı olmaksızın seçkisiz kalır. Öte yandan, (6.17)'deki özdeğer sorununun (6.1)'deki Hamilton İşleci'nin özdeğer sorunuyla karşılaştırılabilirliğini istiyor oluşumuzdan dolayı, $f(y,k)$'nın birimboylulaştırım koşulunun da, $\psi_{BBÜK}(y,k)$ üzerindeki koşulla eşdeğer oluşunu isteyişimiz gerekir. Bu ise,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y,k)^2 = 1 \tag{6.22}$$

yazılışının gerekliliği anlamına gelir. Böylelikle, sonuçta, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz ve (6.17)'deki sıradan türevli özdeğer sorununa karşılık gelen n. durum özdeğerini ve özişlevini aşağıdaki eşitliklerle verebiliriz.

$$\begin{aligned} E_{KBNUS,n}(k) &= E_{NUS,n}(k) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{k}, \\ \Psi_{KBNUS,n}(y,k) &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{4}y^2}}{\sqrt{2^n n!}\pi^{\frac{1}{4}}C_n}\exp\left(-\frac{1}{8}\left(\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2\right) H_n\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right), \\ C_n &= \frac{1}{2^n n!\pi^{\frac{1}{2}}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} d\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{4}\left(\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2\right)\right. \\ & \left.\times H_n\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= 1, \qquad n = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.23}$$

Burada, değerinin 1 olduğunun belirlenmiş oluşuna karşın, nasıl belirlendiğini anlatacak ipucu vermek amacıyla, C_n'nin tümlev gösterilimi de yazılmış olup altsimgedizisi *KBNUS*, "Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngaç"ı simgelemektedir. C_n ile ilgili tümlevde y yerine $exp(\varkappa y^2/2)$'nin $-y$'den y'ye dek tümlevinin yarısının tümlev değişkeni olarak kullanımı durumunda tümlev n. Hermite çokterimlisinin boyunun tümlevi durumuna gelmekte ve bu yüzden 1 olmaktadır.

Gelecek altbölümde bu dizge kullanılarak, odaktaki dizge olan "Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu" dizgesinin özdurum ve özişlevinin, hiç değilse belli bir yaklaştırım bağlamında, belirlenişine çalışılacaktır. Buradaki büyüklükler kullanılarak (6.17) eşitliği aşağıdaki biçemde yeniden verilebilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{\sqrt{k}}{2}\frac{d}{dy}\left(\mathrm{e}^{-\varkappa y^2}\frac{d\psi_{KBNUS}(y,k)}{dy}\right) \\ & +\left(\frac{\sqrt{k}}{4}\left(\varkappa-\varkappa^2y^2\right)\mathrm{e}^{-\varkappa y^2}+\frac{\sqrt{k}}{8}\left(\int_{-y}^{y}dy_1\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2}\right)^2\right)\psi_{KBNUS}(y,k) \\ & \qquad = E_{KBNUS}(k)\psi_{KBNUS}(y,k) \end{aligned} \tag{6.24}$$

Bu, Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngaç dizgesinin devinim denklemidir. Bu bölümün geri kalan kesiminde dizge için bu denklem kullanılacaktır.

6.4 Dizgelerle Hamilton İşleçleri ve Karşılaştırımları

Bu ana dek odağa almış bulunduğumuz dizgelerin Hamilton İşleçleri aşağıda belirtik olarak (yeniden) verilmektedir.

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{BBÜK} &\equiv \frac{1}{2}\widehat{p}^2+\frac{1}{8}\left(\int_{-\widehat{q}}^{\widehat{q}}dq_1\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}q_1^2}\right)^2, \\ \widehat{H}_{NUS} &\equiv \frac{1}{2}\widehat{p}^2+k\widehat{q}^2, \\ \widehat{H}_{KBNUS} &\equiv \frac{\sqrt{k}}{2}\widehat{p}\mathrm{e}^{-\varkappa\widehat{q}^2}\widehat{p}-\frac{\sqrt{k}}{4}\left(\varkappa\widehat{I}-\varkappa^2\widehat{q}^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}\widehat{q}^2}+\frac{\sqrt{k}}{8}\left(\int_{-\widehat{q}}^{\widehat{q}}dq_1\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}q_1^2}\right)^2 \\ \widehat{H}_{SHİ} &\equiv \widehat{H}_{BBÜK}-\widehat{H}_{KBNUS} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{p}\left(\widehat{I}-\sqrt{k}\mathrm{e}^{-\varkappa\widehat{q}^2}\right)\widehat{p}+\frac{\sqrt{k}}{4}\left(\varkappa\widehat{I}-\varkappa^2\widehat{q}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}\widehat{q}^2} \\ &\quad +\frac{1-\sqrt{k}}{8}\left(\int_{-\widehat{q}}^{\widehat{q}}dq_1\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}q_1^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Bunlarla ilgili vurgulamak istediğimiz gerçekler aşağıdaki sırasayılandırılmış biçemde verilmektedir.

1. Burada dört ayrı Hamilton işleci verilmekte olup bunlar, sırasıyla, (1) Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu (*BBÜK*), (2) Nicem Uyumlu Salıngaç (*NUS*), (3) Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngaç (*KBNUS*), (4) Saptırım Hamilton İşleci (*SHİ*).

2. Bunlardan ikinci ve üçüncü dizgeler, doğabilimcil (fizikçil) olarak, aslında, özdeştirler. Ama, Hamilton İşleçleri iki değişik konum değişkeni üzerinde verilmektedir. Bu yüzden, bunların erkecil izgeleri birebir örtüşür ve herhangi bir özdeğere karşılık gelen özişlevler (dalga işlevleri), birbirlerine konaç bükümcül bir işlev dönüşümü üzerinden bağımlı, iki değişik konaç değişkenine bağımlıdırlar.

3. *BBÜK* ile *NUS* dizgelerinin ikisinde de gizilgüçler bakışıktır. Öteki bir deyişle, bağımsız değişkenin eksilisi ile değiştirilişi durumunda değişmezler ve bağımsız değişkene göre Maclaurin açılımları, bağımsız değişkenin yalnız çift üslülerini içerir. Bunlar, bağımsız değişkenin imsiz (mutlak) değeri arttıkça artarlar.

4. Bağımsız değişkenin imsiz değerinin artışı durumunda gizilgüçteki artış, bağımsız değişkenin yeterince büyük değerlerinde, artı değerli olarak öngörülen $\varkappa$ ve k (artılık kısıtı altında) ne olursa olsun, *BBÜK* dizgesinde, *NUS* dizgesindekine göre, daha yüksektir. Bu yüzden de, *BBÜK* dizgesinin n. erke değeri (bu erke değerlerinin tümü artı olmak ve n arttıkça artmak durumundadır), yeterince büyük n değerlerinde *NUS* dizgesindeki n. erke değerinden büyük olmalıdır.

5. (4)'teki durum, *BBÜK* ile *KBNUS* dizgelerinin karşılaştırımında doğruluğunu korumaz. Bunun nedeni, bu iki dizgenin Hamilton İşleçleri'nde değişiklik gösteren tek öğe gizilgüç değildir. Onun dışındaki işleçler özdeş değildir. Bu yüzden de, erke değerleri karşılaştırımı için yukarıdaki gibi bir yorumlayış kullanılamaz. Yalnızca gizilgüçlere bakılacak olsaydı, *KBNUS* dizgesindeki gizilgüç, $k > 1$ için, tüm bağımsız değişken değerlerinde, *BBÜK*'deki gizilgüçten büyük ($k = 1$ için özdeş, $k < 1$ için küçük) olacaktı.

6. *KBNUS* dizgesinin Hamilton işlecinde k bağımlılığı $\sqrt{k}$ ile ölçekleniş biçemlidir. Öteki bir deyişle,

$$\widehat{H}_{KBNUS} = \sqrt{k}\widehat{H}_{KBNUS,k=1} \tag{6.26}$$

yazılabilir. Burada, $\widehat{H}_{KBNUS,k=1}$ ile $\widehat{H}_{KBNUS}$'nın $k = 1$ değeri için büründüğü yapı simgelenmektedir. Bu eşitlik, bu dizgenin izgesindeki tüm erke değerlerinin de

$\sqrt{k}$ ile orantılı oluşunun gerekliliğini gösterir. Gerçekten de, daha önceden vermiş olduğumuz erke değerlerinin belirtik anlatımları da bu olguyu gösterir.

7. (6.26)'daki özellik bir yandan da çok önemli başka bir olguyu gündeme getirir. O da, *KBNUS* dizgesinin özişlevlerinin, hangi düzey için olursa olsun, k'dan bağımsız oluşunun gerekliliğidir. Daha önceden, bu dizge için verdiğimiz özişlev ya da dalga işlevlerinde, gerçekten de, k bağımlılığı bulunmamaktadır.

6.5 Erkeye Özgü Dönümcül Esneklik Katsayıları ve Yöntembilimcil Önemleri

(6.25)'teki Hamilton İşleçleri'nden herhangi birisinin, o işlecin erke özdeğerlerinden herhangi birine karşılık gelen özişlev altında beklenen değeri o erke değerine eşit olmak durumundadır. Bu nedenle, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\left\langle \widehat{H}_{BBÜK} \right\rangle_{BBÜK,n} = E_{BBÜK,n}, \qquad \left\langle \widehat{H}_{KBNUS} \right\rangle_{KBNUS,n} = E_{KBNUS,n} \tag{6.27}$$

Burada, beklenen değerler altsimgedizilerinde belirtilen özişlev altında belirlenmektedir. Öteki bir deyişle, *BBÜK,n* ile *KBNUS,n*, sırasıyla, *BBÜK* ile *KBNUS* dizgelerinin n. özişlevlerine göre beklenen değer alındığını anlatmaktadır.

(6.27)'deki ikinci eşitlikte (6.26) kullanılacak olursa aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\sqrt{k} \left\langle \widehat{H}_{KBNUS,k=1} \right\rangle_{KBNUS,n} = E_{KBNUS,n} \tag{6.28}$$

Önceki altbölümde belirtilen bilgilerden çıkarımlarla görülebileceği üzere buradaki beklenen değer k değiştirgesine bağımlı değildir. Bir yandan da, daha da önceki anlatımlarımızdan anımsanacağı üzere, bu beklenen değer, aslında, $(n+1/2)$'ye eşittir. Böylece, (6.27)'deki ikinci eşitlik ile ilgili bir sıkıntımız olmadığı görülmüş olur.

(6.27)'deki birinci eşitlik ise *BBÜK* dizgesinin bilinmeyen izgecil büyüklüklerine dayandırılmıştır. Bu açıdan bakıldığında, oradaki beklenen değerin ve de erke değerinin, eldeki bilgiler bağlamında, bilinemeyeceği çok açıktır. Ancak, bu durum, belirli bir $\varkappa$ değeri için, eksisiz tüm değerleri alabilen k'ya özel bir değer seçerek $E_{BBÜK,n} = E_{KBNUS,n}$ eşitliğinin sağlatılabilişine engel değildir. Dolayısıyla, bu bağlamda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\left\langle \widehat{H}_{BBÜK} \right\rangle_{BBÜK,n} = \sqrt{k}\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{6.29}$$

Buradan, k aşağıdaki eşitlikle verilen biçemde belirlenebilir.

$$k_d(\varkappa,n) \equiv \frac{\left\langle \widehat{H}_{BBÜK} \right\rangle_{BBÜK,n} (\varkappa,n)^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \tag{6.30}$$

Bu eşitlikte, hem k_d ile simgelenen dönümcül (kritik) k'nın, hem de ilgili beklenen değerin $\varkappa$ ile n bağımlılıkları, ayıraçlar arasında, ilgili büyüklük anlatımının sağına eklenerek vurgulanmaktadır.

(6.30) ile verilen tanım eşitliğinin sağ yanındaki anlatım, *BBÜK* dizgesinin izgecil büyüklüklerinin bu anda bilinemiyor oluşundan dolayı, bu an için bilinememektedir. Yani, bu eşitlik, bu an için, yalnızca, *BBÜK* dizgesinin belirli bir erke düzeyinin erke değerini üretebilecek dönümcül bir k değerinin varlığını vurgulayışın ötesine geçememektedir.

Yukarıda verilen dönümcül k değeri belli bir nicem uyumlu salıngaç için esneklik gücey (ing: force) katsayısı olmak durumundadır. Ancak, her bir erke düzeyi için değişik bir nicem uyumlu salıngaçtan yola çıkmak gerekeceği de buradaki çözümleyişten anlaşılmaktadır.

6.6 Saptırım Hamilton İşleci

Yukarıda verilen H_{KBNUS} işleci, oradaki $H_{BBÜK}$ işlecine belli bir erke düzeyinde çakıştırım amaçlı olarak gündeme getirilmektedir. Öteki bir deyişle, belli bir dönümcül k değeri için, H_{KBNUS}'ne $H_{BBÜK}$'den saptırılmış bir işleç olarak bakmak olanaklıdır. Bu ise, yukarıda daha önceden tanımlanmış bulunan $H_{SHİ}$'nin bir saptırım işleci olduğunu gösterir ve bu yüzden *SHİ* ile altsimgedizilendirilmiştir. Bu işlecin beklenen değeri, bir biçimde, $E_{BBÜK}$ ile onun (bir anlamda) saptırımı olan E_{KBNUS} arasındaki değer değişimine karşılık gelmektedir. Ancak, bu işlecin beklenen değerinin hangi özişlev üzerinden belirleneceği sorusu da azımsanmayacak bir önem kazanmaktadır. Bu işleç aralarında değiştirimli olmayan ya da oluşu gerekmeyen iki işleçten üretildiğinden bu işleçlerden birisinin özişlevi ile iş görmek düşünülebilir. Öteki bir seçenek de bu işlecin özünün özişlevlerinin gündeme getirilişidir. Ancak, buradaki üç değişik tür özişlevden yalnız $\widehat{H}_{KBNUS}$'in özişlevlerinin yapıları belirtik olarak elimizde bulunmaktadır. Bu da, uygulayımcıl açıdan, elimizdeki tek seçenek olarak, çok önemlidir.

6.7 Esneklik Gücey Katsayısının Dönümcül Değerinin Saptırım İşleci Boyunun Bastırımıyla Yaklaşık Olarak Belirlenişi

(6.25)'ten aşağıdaki eşitsizliği ve eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \widehat{H}_{SH\dot{I}} \right\rangle_{KBNUS,n}\right|^2 &= \left|\left(\psi_{KBNUS,n}, \widehat{H}_{SH\dot{I}}\psi_{KBNUS,n}\right)\right|^2 \leq \\
&\leq \left(\psi_{KBNUS,n}, \psi_{KBNUS,n}\right)\left(\widehat{H}_{SH\dot{I}}\,\psi_{KBNUS,n}, \widehat{H}_{SH\dot{I}}\,\psi_{KBNUS,n}\right) \\
&= \left(\left[\widehat{H}_{BB\ddot{U}K} - \widehat{H}_{KBNUS}\right]\psi_{KBNUS,n}, \left[\widehat{H}_{BB\ddot{U}K} - \widehat{H}_{KBNUS}\right]\psi_{KBNUS,n}\right) \\
&= \left(\left[\widehat{H}_{BB\ddot{U}K} - \sqrt{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)\widehat{I}\right]\psi_{KBNUS,n}, \left[\widehat{H}_{BB\ddot{U}K} - \sqrt{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\psi_{KBNUS,n}\right) \\
&= \left\langle \widehat{H}^2_{BB\ddot{U}K} \right\rangle_{KBNUS,n} - 2\sqrt{k}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\langle \widehat{H}_{BB\ddot{U}K} \right\rangle_{KBNUS,n} + k\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (6.31)
\end{aligned}$$

Bu bağıntının son yataysırasının sağ yanı (öte yandan da, eşitsizlikteki üst kıyı olmaktadır) seçkisiz esnek gücey katsayısına bağımlıdır. Bu bağımlılık, anlatımdaki beklenen değerlerde k bağımlılığı bulunmadığından $\sqrt{k}$'da bir ikinci derece çokterimlisi biçemlidir. Bu çokterimlinin, $\sqrt{k}$'ya göre türevi sıfırlanırsa, çokterimli bastırılmış ya da enaza indirgenmiş olur. Bu türevleyiş sonrası ele geçecek olan denklem k için eşsiz çözüm verir. Onun belirtik yapısı aşağıda verilmektedir.

$$k_d\left(\varkappa, n\right) = \frac{\left\langle \widehat{H}_{BB\ddot{U}K} \right\rangle^2_{KBNUS,n}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (6.32)$$

Bu k değerini (6.31)'de kullanacak olursak aşağıdaki arasonucu elde ederiz.

$$\left|\left\langle \widehat{H}_{SH\dot{I}} \right\rangle_{KBNUS,n}\right| \leq \sqrt{\left\langle \widehat{H}^2_{BB\ddot{U}K} \right\rangle_{KBNUS,n} - \left\langle \widehat{H}_{BB\ddot{U}K} \right\rangle^2_{KBNUS,n}} \qquad (6.33)$$

Bu eşitlik, saptırım işlecinin en küçük boyunun, saptırım işlecinin, $\widehat{H}_{BB\ddot{U}K}$'nın n. özişlevine göre beklenen değerindeki sendelenimin dördül köküyle kıyılandırıldığını belirtir. Bu, bir yandan da sayıtımcıl (ing: statistical) bir değer olan ölçünlü sapışa (ing: standart deviation) eşittir.

6.8 Esnek Gücey Katsayısı'nın Dönümcül Değeri'nin Kıyılandırımı

Esnek gücey katsayısın (6.32)'de verilen ve $k_d\left(\varkappa, n\right)$ ile gösterilen dönümcül değeri kesin değil yaklaşık bir anlatımdır. Nasıl bir yaklaştırım kullanarak üretildiği, aslında, gelecek altbölümde, orada sunulacak olan saptırım açılımında en baskın terim olduğu gösterilerek, gözler önüne serilecektir. Bu nedenle, (6.32)'de verilen anlatımın belirlenişi önem kazanır. Öyle de olsa, çözümleyişimizin ilerleyen kesimlerinde, çok daha açık olarak, kesin bir belirlenimin olabildiğince güç olduğu, ancak, yaklaştırımlar üretilebileceği anlaşılacaktır. Bu yüzden, bu altbölümde bu büyüklüğün kesin anlatımını bulmak yerine kıyılandırımına yönelecek ve ilgili eşitsizliklerin üretimine çabalayacağız.

İlerleyebilmek için, (6.25)'deki ilk tanımdaki iki toplamcıl anlatımdan ilki odaktaki dizgenin devinim erkesine, ikincisi ise gizilgüç erkesine karşılık gelmekte olduğuna odaklanımda yarar bulunmaktadır. Bunların üzerindeki beklenen değerlerin ayrı ayrı incelenişi, amaçlarımıza daha uygun düşmektedir. Bu doğrultuda

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{BBÜK} &= \widehat{H}_{BBÜK,dev} + \widehat{H}_{BBÜK,giz}, \\
\widehat{H}_{BBÜK,dev} &\equiv \frac{1}{2}\widehat{p}^{2}, \\
\widehat{H}_{BBÜK,giz} &\equiv \frac{1}{8}\left(\int_{-\widehat{q}}^{\widehat{q}} dq_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}\widehat{q}_1^2}\right)^2
\end{aligned} \tag{6.34}$$

eşitlik ve tanımları yazılarak yola çıkılabilir.

Bunların belirlenişine biraz daha sonra odaklanacağız. Bu an için, bu belirleniş için gerekli olduğu düşünülen olguları gündeme getireceğiz.

6.8.1 Birkesim özişlev özellikleri

(6.4) ve (6.23)'den aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$\psi_{KBNUS,n}(y) = \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{4}y^2}\psi_{NUS,n}\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}, 1\right) \tag{6.35}$$

KBNUS dizgesinin özişlevinin tanımında, y değişkeninin yanısıra k değiştirgesine olan bağımlılığının, ilgili eşitliğin solunda, belirtik olarak gösterilişine karşın, burada, o işlevin aslında bu değiştirgeye bağımlı olmayışından dolayı, (solda) gösterilmemiştir.

Hermite çokterimlilerinin, bilimsel yazında iyi bilinen özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

Dikgenlik:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dy \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2}\psi_{NUS,n_1}\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}, 1\right)\psi_{NUS,n_2}\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}, 1\right) = \delta_{n_1,n_2}, \\
n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Eğer, burada,

$$\widetilde{\psi}_{NUS,n}(y) \equiv \psi_{NUS,n}\left(\frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}, 1\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.37}$$

tanımına gidilirse ve, $f_1(y)$ ile $f_2(y)$, $e^{\frac{\varkappa}{2}y^2}$ ağırlık işlevi altında, tüm gerçel y değerleri için, dördülü tümlevlenebilen herhangi iki işlev olduğunda,

$$(f_1, f_2)_{y,exp(\varkappa y^2/2)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d_y e^{\frac{\varkappa}{2}y^2} f_1(y) f_2(y) \tag{6.38}$$

ile verilen iççarpım tanımı kullanılacak olursa, (6.36) aşağıdaki çok daha tıkız yapıya bürünür.

$$(\widetilde{\psi}_{NUS,n_1}, \widetilde{\psi}_{NUS,n_2})_{y,exp(\varkappa y^2/2)} = \delta_{n_1,n_2}, \qquad n_1, n_2 = 0, 1, 2, ... \tag{6.39}$$

Özyineleyişler:

Hermite çokterimlileri aşağıdaki özyineleyiş bağıntısını sağlarlar.

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{6.40}$$

Bu tek bir özyineleyiş değildir. Daha değişik özyineleyişler de vardır. Bir kesimine daha sonra değineceğiz. Bu özyineleyiş, dereceleri üç ardışık bütünsayı olan Hermite çokterimlileri arasındaki ilintilendiriliştir. Ara aşamalarını burada vermeyecek olduğumuz birkesim işlemlerden sonra NUS özişlevleri arasındaki aşağıdaki özyineleyişe varılabilir.

$$\left(\int_{-y}^{y} dy_1 e^{\frac{\kappa}{2}y_1^2}\right) \widetilde{\psi}_{NUS,n}(y) = \sqrt{2n+2}\,\widetilde{\psi}_{NUS,n+1}(y) + \sqrt{2n}\,\widetilde{\psi}_{NUS,n-1}(y), \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{6.41}$$

Yukarıdaki ve bir önceki özyineleyişlerde, eksi altsırasayılı işlevlerin yoksayılacağı öngörülmektedir.

(6.41)'deki özyineleyişi çok daha yalın bir yapıya büründürmek için aşağıdaki tanım kullanılabilir.

$$x \equiv x(y) \equiv \frac{1}{2}\int_{-y}^{y} dy_1 e^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} \tag{6.42}$$

Bu eşitlik, y'nin tüm gerçel değerleri için geçerliliğini korur ve y sayı doğrusundan x sayı doğrusunun eksisiz değerler kesimine dönüşüm gerçekleştiren bir işlev tanımlar. Beklenen değer belirleyişlerimizde, y değişkenine göre, uygulayımcıl nedenlerle, yalnızca y'nin çift işlevlerinin tümlevleriyle ilgilendiğimizden; bu dönüşümün sağ yanının eksi imlisini x sayı doğrusunun artısız kesimine dönüşüm gerçekleştiren işlev olarak tanımlayışımızda yarar bulunmaktadır. Burada da öyle yapacağız.

Bu tanımı kullanarak (6.41)'i aşağıdaki biçemde yeniden yazmak olanaklıdır.

$$x\psi_{NUS,n}(x,1) \quad = \quad \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}\psi_{NUS,n+1}(x,1)+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\psi_{NUS,n-1}(x,1)\,, \quad n=0,1,2,... \quad (6.43)$$

Bu özyineleyişten, ardışık kullanımlarla, yararlanarak, $\psi_{NUS,n}(x,1)$ işleviyle x'in artı bütünsayı üslülerinin tümünün, ayrı ayrı, çarpımının belirlenişi olanaklıdır. Bunlardan ilk ikisi, yukarıdakine ek olarak, aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} x^2\psi_{NUS,n}(x,1) =& \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}\psi_{NUS,n+2}(x,1)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\psi_{NUS,n}(x,1) \\ &+\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}\psi_{NUS,n-2}(x,1) \quad n=0,1,2,... \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} x^3\psi_{NUS,n}(x,1) =& \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{2\sqrt{2}}\psi_{NUS,n+3}(x,1)+\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}\frac{(3n+3)}{2}\psi_{NUS,n+1}(x,1) \\ &+\frac{3n}{2}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\psi_{NUS,n-1}(x,1)+\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{2\sqrt{2}}\psi_{NUS,n-3}(x,1)\,, \quad n=0,1,2,... \end{aligned} \quad (6.45)$$

Bunlarda da eksi altsırasayılı işlevcil büyüklükler yoksayılmaktadır.

Bu kesimde vereceğimiz son özyineleyiş, Hermite çokterimlilerinin sağladığı aşağıdaki ilişkiye dayandırılmaktadır.

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x), \qquad n=0,1,2,... \quad (6.46)$$

Bunun ve $xH_n(x)$ ile ilgili olan özyineleyişin $\widetilde{\psi}_{NUS,n}(x,1)$ işlevinin açık anlatımının x'e göre türevinde kullanımıyla belirlemek istediğimiz özyineleyişe ulaşabiliriz. Bu yapılırsa, ele geçecek olan özyineleyiş, üretiliş ara aşamaları verilmeksizin, aşağıdaki bağıntı olarak yazılabilir.

$$\frac{d}{dx}\psi_{NUS,n}(x,1) = -\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}\psi_{NUS,n+1}(x,1)+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\psi_{NUS,n-1}(x,1)\,, \;\; n=0,1,2,... \quad (6.47)$$

Bunun da ötesinde, ileride gereksinim duyacağımız öteki iki özyineleyiş de, üretiliş ara aşamaları verilmeksizin, aşağıda sunulmaktadır.

$$
\begin{aligned}
x\frac{d}{dx}\psi_{NUS,n}(x,1) &= -\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2}\psi_{NUS,n+2}(x,1)-\frac{1}{2}\psi_{NUS,n}(x,1)\\
&\quad+\frac{\sqrt{n(n-1)}}{2}\psi_{NUS,n-2}(x,1), \qquad n=0,1,2,...\\
x^2\frac{d}{dx}\psi_{NUS,n}(x,1) &= -\frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{2\sqrt{2}}\psi_{NUS,n+3}(x,1)\\
&\quad-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}\left(\frac{n+3}{2}\right)\psi_{NUS,n+1}(x,1)+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}\left(\frac{n-2}{2}\right)\psi_{NUS,n-1}(x,1)\\
&\quad+\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{2\sqrt{2}}\psi_{NUS,n-3}(x,1), \qquad n=0,1,2,...\\
x^\ell\frac{d}{dx}\psi_{NUS,n}(x,1) &= \sum_{j=0}^{\ell+1}X_{\ell,-\ell-1+2j}(n)\psi_{NUS,n-\ell-1+2j}(x,1), \qquad \ell=0,1,2,... \qquad (6.48)
\end{aligned}
$$

Burada yalnızca $\ell=0,1,2$ durumlarına gereksinim duyacak olsak da, eksisiz bütünsayı ℓ değerleri için özelsiz durumu belirtiş nedenimiz daha tıkız sağ yanlar kullanabilmektir. Ancak, $X_{\ell,j}(n)$ değerleri, belirtik olarak ya da özyineleyişle vermek olanaklı olsa da, burada örtük olarak verilmektedir. Yine de, en azından $\ell=0,1,2$ için, belirtik değerler, (6.47), (6.48)'deki sağ yan anlatımlarından üretilebilirler.

Buradaki bilgiler bağlamında ve biraz da ek eyleme geçerek azımsanmayacak sayıda işlecin beklenen değerini belirlemek olanaklıdır. Bu altbölümün sonlarında bu tür geliştirimlere yöneleceğiz.

6.8.2 Birkesim büyüklüklerin kıyılandırımı

Önce $x(y)$ işlevine odaklanalım. Bunun için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$x(y)=\frac{1}{2}\int_{-y}^{y}dy_1 e^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}=\int_0^y dy_1 e^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} \qquad (6.49)$$

Burada, önce, tümlevleyiş aralığı olan $[-y,y]$, $[-y,0]$ ve $[0,y]$ aralıklarının birleşimi olarak düşünülüp tümlev iki tümleve ayrıştırılmakta, sonra da, ilk ayrışık tümlevde tümlev değişkeni yerine eksilisi alınarak tümlev ikinci ayrışık tümleve dönüştürülmektedir.

(6.49)'dan aşağıdaki toplamdizi açılımına geçilebilir ve o toplamdiziye bir büyültke toplamdizi (ing: majorant series) oluşturulabilir.

$$\int_0^y dy_1 e^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varkappa^j}{2^j j!(2j+1)}y^{2j+1}\le\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varkappa^j}{2^j j!}y^{2j+1}=ye^{\frac{\varkappa}{2}y^2} \qquad (6.50)$$

Buradan da, y için bir alt kıyı (ing: lower bound) verecek olan, aşağıdaki ilk eşitsizliğimize ulaşabiliriz.

$$y \geq \mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}y^2} \int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} = \mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}y^2} x(y) \tag{6.51}$$

(6.50)'deki toplamdizinin ilk toplamcıl anlatımı, yalnızca y'den oluşmaktadır ve tüm toplamcıl anlatımlar, y'nin tüm artı değerleri için artı olduklarından, oradaki toplamdizi, artı y'ler için y'den büyüktür. Böylece, üst kıyı (ing: upper bound) belirleyicisi durumunda olan aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$y \leq \int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} = x(y) \tag{6.52}$$

Kıyılandırmak istediğimiz öteki büyüklük $\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2}$ işlevidir. Bunun için önce aşağıdaki, eşitlik ve eşitsizlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varkappa^j}{2^j j!(2j+1)} y^{2j+1} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varkappa^j}{2^j (j+1)!} y^{2j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varkappa^j}{2^j j!(j+1)} y^{2j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa^{j-1}}{2^{j-1} j!} y^{2j-1} = \frac{2}{\varkappa y} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa^j}{2^j j!} y^{2j} \right) = \frac{2}{\varkappa y} \left(\mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Buradan, aşağıdaki alt kıyı belirleyici eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$1 + \frac{\varkappa}{2} y \int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} \leq \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2} \tag{6.54}$$

Buraya ulaşırken, (6.53)'te ilk toplamdizi açılımında, paydadaki $(2j+1)$ anlatımı yerine (artı j değerlerinde ondan daha küçük olan) $(j+1)$ anlatımı yerleştirerek toplamdizi büyütülmüştür. Oysa, orada, $(2j+1)$ yerine $(2j+2)$ yerleştirerek toplamdiziyi azaltmak da olanaklıdır. Böyle yapılırsa, ulaşılan sonuç, ara işlemler verilmeksizin, aşağıdaki bağıntı ile verilebilir.

$$1 + \varkappa y \int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} \geq \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2} \tag{6.55}$$

(6.54) ve (6.55)'teki eşitsizlikleri, y içeren çarpanların yerine kıyılarını kullanarak, ve de, daha kötümser eşitsizlikler elde edişi göze alarak, aşağıdaki kıyılandırımlara geçilebilir.

$$1 + \frac{\varkappa}{2} \mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}y^2} \left(\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} \right)^2 \leq \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2} \leq 1 + \varkappa \left(\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2} \right)^2 \tag{6.56}$$

Bu eşitliğin alt kıyısında $\exp(-\varkappa y^2/2)$ işlevi bulunmaktadır ve alt kıyının, işlev olarak, yalnızca, $x(y)$ karşılığı tümlev türünden anlatımını engellemektedir. Bu durumdan kurtulmak için, (6.52)'deki eşitsizlikten yararlanarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}y^2} \geq \exp\left(-\frac{\varkappa}{2}\left(\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}x(y)^2} \tag{6.57}$$

Bunun (6.56)'da kullanımı aşağıdaki eşitsizliklerin yazımına olanak sağlar.

$$\begin{aligned} 1+\frac{\varkappa}{2}\left(\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2 \exp\left(-\frac{\varkappa}{2}\left(\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2\right) &\leq \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y^2} \leq \\ &\leq 1+\varkappa\left(\int_0^y dy_1 \mathrm{e}^{\frac{\varkappa}{2}y_1^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{6.58}$$

6.8.3 Birkesim işlevle çarpım işleçleri için geçiş tümlevlerinin belirlenişi

Bu bölümdeki çözümleyişin, saptırımsızlık beklenen değerinin kıyılandırımında ortaya çıkan tümlevler arasında, *NUS* dizgesinin herhangi iki düzeyi arasında, $\ell = 0,1,2$ için $x^{2\ell}\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}x^2}$ anlatımlı işlevler üzerinden geçişi betimleyen tümlevlerle de karşılaşılmaktadır. Bu kesimde, bu tümlevlerin önce tanımını verip, ardından da, bir kesim özelliklerine ve ilgili geçiş dizeylerinin asal köşegenin ve ona en yakın komşu köşegenlerin öğelerinin çözümcül anlatımlarına nasıl erişilebileceğini göstereceğiz.

Önce, aşağıdaki tanımla verilen, üç değiştirgeli büyüklüklere odaklanalım.

$$\begin{aligned} T_{\ell,m,n}(\varkappa) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{NUS,m}(x,1) x^{2\ell} \mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}x^2} \psi_{NUS,n}(x,1) \\ &= \frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{m!n!}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2\ell} \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)x^2} H_m(x) H_n(x) \\ &= \frac{\left(1+\frac{\varkappa}{2}\right)^{-\ell-\frac{1}{2}}}{2^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{\pi}\sqrt{m!n!}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2\ell} \mathrm{e}^{-x^2} H_m\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{\varkappa}{2}}}\right) H_n\left(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{\varkappa}{2}}}\right), \\ &\qquad \ell,m,n = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.59}$$

Bunlar için, önemli olgular, aşağıda sırasayılandırımlı biçemde verilmektedir.

1. Bu büyüklükler, $\mathbf{T}_\ell(\varkappa)$ ile simgelenen ve sayılabilir sonsuzlukta çok yataysırası ve düşeysırası olan, sayılabilir sonsuz sayıda, dizeyin öğeleri olarak düşünülebilirler. $T_{\ell,m,n}(\varkappa)$ bunlardan ℓ. dizeyin m. yataysırasıyla n. düşeysırasının kesiştiği konumda yerleşiktir.

2. $T_{\ell,m,n}(\varkappa)$, $\varkappa$'nın bir işlevi olup bir yandan da üç yönlü bir çokludizi tanımlar. Bu nitelik, bu işlevin, aslında, $\varkappa$'nın karmaşık düzlemi üzerindeki tüm açkıcıl

özelliklerinin bilinişini gerektirir. Ancak, burada, $\varkappa$'nın artı gerçel değerleri için işlevi bilmek yeterlidir. Yine de, varsa, gerçel sayı ekseni üzerinde olmayan tekilliklerin de işlevcil yapıya etkilerinin bilinişi gerekebilir. Burada, çok öncelikli olarak, gerçel $\varkappa$ değerli durumlara odaklanacağız.

3. $\mathbf{T}_\ell(\varkappa)$ bilimsel yazında kısaca "Geçiş Dizeyi (ing: Transition Matrix)" olarak bilinir. Bu dizey, burada, *NUS* dizgesinin taban kümesince örtülen doğrucul uzaydaki bir işlevin $x^{2\ell}e^{-\frac{\varkappa}{2}x^2}$ ile çarpış işleci altındaki görüntüsünün ne olacağını belirler. Öteki bir deyişle, bir düzeyden başka bir düzeye bu işleç aracılığıyla geçişi tanımlar.

4. $\mathbf{T}_\ell(\varkappa)$ ile simgelediğimiz "Geçis Dizey Soyocağı (Ailesi)" sayılabilir sonsuz sayıda olmakla birlikte burada, en baskınlıkla kısıtlanan çözümleyişimiz için, yalnızca $\ell = 0,1,2$ durumlarına odaklanacağız. Ancak, bağıntılandırımımızı, özelleştirim ve/veya yalınlaştırım gerekmedikçe, en özelsizde tutmakta bir sakınca görmemekteyiz.

5. $\varkappa = 0$ olduğunda $\mathbf{T}_0(\varkappa)$ dizeyi, sayılabilir sonsuzlukta yataysırası ve düşeysırası olan birim dizeye dönüşür. $\mathbf{T}_\ell(\varkappa)$ dizeyi ise, sayılabilir sonsuzlukta yataysırası ve düşeysırası olan ve $\mathbf{X}$ ile gösterebileceğimiz, x ile çarpış işleci üzerinden *NUS* taban kümesi öğeleri arasında geçişi gösteren, geçiş dizeyinin 2ℓ. üslüsüne dönüşür.

6. $\varkappa \neq 0$ olduğunda da, $(m+n)$'nin tek bütünsayı olduğu durumlarda $T_{\ell,m,n}(\varkappa)$ sıfırlanır. Bu durumda, tek işlev nitelikli taban işlevleri arasında ve çift işlev nitelikli taban işlevleri arasında, ayrı ayrı, geçiş dizeyleri gündeme getirilebilir. Öyle yapıldığında, tek işlev nitelikliler ile çift işlev nitelikliler arasında geçiş yoktur. Bundan yararlanarak, Geçiş Dizeyi'ni, yalnızca asal köşegeni üzerinde iki sonsuz öbek dizeyi olan, öteki öğeleri 0 olan bir yapıya büründürmek olanaklıdır.

7. $T_{\ell,m,n}(\varkappa)$, $(m+n)$'nin tek değerleri için 0 oluşunun yanısıra çift değerleri için de oldukça yalın yapıda olup $1/\sqrt{1+\varkappa/2}$'nin $(m+n+1)$. dereceden bir çokterimlisi ile $1/\sqrt{1+\varkappa/2}$'nin 2ℓ. üslüsünün çarpımıdır. Bu durum, (6.59)'daki yapıdan da görülebileceği üzere, Hermite çokterimlilerinin varlığından kaynaklanır.

8. $\mathbf{T}_\ell(\varkappa)$ Geçiş Dizeyi, ister sıralı ister tek-çift öbek yapılı olsun, artı gerçel değerli $\varkappa$'lar için, bakışıktır. Bu durum, uzbilimcil (matematik) dilde aşağıdaki

değiştirgecil eşitlikle verilebilir.

$$T_{\ell,m,n}(\varkappa)=T_{\ell,n,m}(\varkappa),\qquad \ell,m,n=0,1,2,... \tag{6.60}$$

9. $\mathbf{T}_{\ell}(\varkappa)$ Geçiş Dizeyi'nin öğelerinde (yine artı değerli $\varkappa$'lar için ve bundan sonra da öyle olarak) çok önemli bir kıyılandırım söz konusudur. $T_{\ell,m,n}(\varkappa)$'nın tanımındaki tümlevlenenin $\exp(-\varkappa/4)\psi_{NUS,m}$ ile $\exp(-\varkappa/4)\psi_{NUS,n}$ işlevinin çarpımı olarak düşünülebiliyor oluşu bu büyüklüğün, bu iki işlevin iççarpımı olarak düşünülebileceği anlamına gelir. Bu iççarpıma Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$-1\le-\left(T_{\ell,m,m}(\varkappa)\right)^{\frac{1}{2}}\left(T_{\ell,n,n}(\varkappa)\right)^{\frac{1}{2}}\le T_{\ell,m,n}(\varkappa)\le\left(T_{\ell,m,m}(\varkappa)\right)^{\frac{1}{2}}\left(T_{\ell,n,n}(\varkappa)\right)^{\frac{1}{2}}\le 1,\quad m,n=0,1,2,... \tag{6.61}$$

Burada, aslında, içiçe yuvalanmış iki kıyılandırım bağıntılandırımı söz konusudur. İçteki kıyılandırım daha iyimser olmakla birlikte daha az yalın anlatımlara götürebilir.

10. Son eşitsizlik, kıyılandırım işlemlerinde ve yeterince kötümser sonuçları benimseyebileceğimiz işlemlerde, $m\neq n$ olduğunda, $T_{m,n}(\varkappa)$'nın çözümcül olarak belirlenişinden kaçınıp bu eşitsizlikleri kullanmak olanaklıdır. Ancak, kıyılandırımlarda, eksi ve artı arasında, im değişimi oluşu, kötümserliği benimsenemeyecek olumsuzluğa iter. Bu yüzden, çok umarsız kalınmadıkça bunlardan kaçınmakta yarar bulunmaktadır.

11. Böylece, yalnızca, $\ell=0,1,2$ için, Geçiş Dizeylerinin asal köşegen ve onun en yakın komşu köşegen öğelerinin çözümcül belirleyişlerine odaklanım yeterli olarak görülebilir. Çünkü, buradaki uygulayışlarımız için bunlar yeterli olacaktır. Bunlarla ilgilenişe geçtiğimizde bu olgu çok daha iyi anlaşılacaktır.

6.8.4 Geçiş dizeyleri asal köşegen öğelerinin birkesim önemli özellikleri

Bu altbölümdeki Geçiş Dizeyleri'nin asal köşegen öğelerinin belirlenişi için, uyumlu salıngaç dalga işlevleri üzerinde aşağıda verilen, Mehler bağıntısına [119, 120] odaklanarak yola çıkabiliriz.

$$\sum_{m=0}^{\infty}t^n\psi_{NUS,m}(x,1)\psi_{NUS,m}(y,1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}e^{-\frac{1-t}{1+t}\frac{(x+y)^2}{4}-\frac{1+t}{1-t}\frac{(x-y)^2}{4}},\quad -1<t<1 \tag{6.62}$$

Toplamdizi açılım katsayıları $T_{\ell,n,n}(\varkappa)$'ler olan bir üreteç işlevini $U_\ell(t,\varkappa)$ ile simgelersek aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$U_\ell(t,\varkappa) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_{\ell,n,n}(\varkappa), \qquad -1 < t < 1 \tag{6.63}$$

Bu eşitlik, (6.59)'da $m = n$ alınarak elde edilecek olan, eşitlikle birleştirilirse, ara geçiş işlemleri belirtilmeksizin, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
U_\ell(t,\varkappa) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2\ell} e^{-\left(\frac{\varkappa}{2}+\frac{1-t}{1+t}\right)x^2} \\
&= \frac{\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{\ell+\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1+t}{(\varkappa+2)+(\varkappa-2)t}\right)^{\ell+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{2^{\ell+\frac{1}{2}}\left(1-t^2\right)^{\ell}}{\left[\varkappa+2-4t-(\varkappa-2)t^2\right]^{\ell+\frac{1}{2}}} \\
&\quad \ell = 0,1,2,...; \qquad -1 < t < 1
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Bu eşitliklerden t'ye göre türevleyişle aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklıdır.

$$T_{\ell,n,n}(\varkappa) = \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^n U_\ell(t,\varkappa)}{\partial t^n}\right\}_{t=0}, \qquad \ell,n = 0,1,2,...; \qquad -1 < t < 1 \tag{6.65}$$

Son eşitlik, $U_\ell(t,\varkappa)$'nın kesin anlatımının biliniyor oluşundan ve $T_{\ell,n,n}(\varkappa)$'nın sonlu kerteden türevinin sonlu sayıda toplamcıl anlatım içerecek oluşundan dolayı kesin bir anlatım verir. Ancak, onun toplamcıl yapısındaki toplanan sayısı, n arttıkça artar ve birkesim n değerlerinden sonra, yapı neredeyse bir toplamdiziye dönüşür. Bu durum, inceleyişlerimizi bütünüyle olanaksızlaştırmasa da, olabildiğince güçleştirir. Bu yüzden, burada, bu kesin anlatım yerine kıyılandırıma geçişi yeğleyeceğiz.

(6.64)'te paydada görünen anlatımla ilgili olarak aşağıdaki tanım ve eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\zeta_\ell(t,\varkappa) &\equiv \left(\varkappa+2-4t-(\varkappa-2)t^2\right)^{-\ell-\frac{1}{2}} = \zeta_{\ell,+}(t,\varkappa)+t\zeta_{\ell,-}(t,\varkappa) \\
\zeta_{\ell,+}(t,\varkappa) &\equiv \frac{1}{2}\left(\left(\varkappa+2-4t-(\varkappa-2)t^2\right)^{-\ell-\frac{1}{2}}+\left(\varkappa+2+4t-(\varkappa-2)t^2\right)^{-\ell-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2n+\ell+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(2n)!}\frac{4^{2n}}{\left(\varkappa+2-(\varkappa-2)t^2\right)^{2n+\ell+\frac{1}{2}}}t^{2n} \\
\zeta_{\ell,-}(t,\varkappa) &\equiv \frac{1}{2t}\left[\left(\varkappa+2-4t-(\varkappa-2)t^2\right)^{-\ell-\frac{1}{2}}-\left(\varkappa+2+4t-(\varkappa-2)t^2\right)^{-\ell-\frac{1}{2}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2n+\ell+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)(2n+1)!}\frac{4^{2n+1}}{\left(\varkappa+2-(\varkappa-2)t^2\right)^{2n+\ell+\frac{3}{2}}}t^{2n} \\
&\quad \ell = 0,1,2,...; \qquad -1 < t < 1
\end{aligned} \tag{6.66}$$

Burada görünen toplamdizilerin toplananlarında üslüleri gözüken $\varkappa+2-(\varkappa-2)t^2$ çokterimlisi, t^2, 0'dan 1'e doğru büyüdükçe, $(\varkappa+2)$'den tekdüze olarak azalır ve 1'de 4'e erişir. Bu nedenle, aşağıdaki kıyılandırımları yazmak olanaklıdır.

$$
\begin{aligned}
\frac{4^{2n}}{(\varkappa+2)^{2n+\ell+\frac{1}{2}}}t^{2n} &\leq \frac{4^{2n}}{\left(\varkappa+2-(\varkappa-2)t^2\right)^{2n+\ell+\frac{1}{2}}}t^{2n} \leq \frac{1}{4^{\ell+\frac{1}{2}}}t^{2n} \\
\frac{4^{2n+1}}{(\varkappa+2)^{2n+\ell+\frac{3}{2}}}t^{2n} &\leq \frac{4^{2n+1}}{\left(\varkappa+2-(\varkappa-2)t^2\right)^{2n+\ell+\frac{3}{2}}}t^{2n} \leq \frac{1}{4^{\ell+\frac{1}{2}}}t^{2n} \\
&\qquad \ell=0,1,2,\ldots; \qquad -1\leq t\leq 1
\end{aligned}
\tag{6.67}
$$

Bu kıyılandırımlardan ilkinin, önce (6.66) ile, sonra da (6.63) ile, bir biçimde birleştirimi aşağıdaki işlevcil kıyılandırımın yazılışına olanak sağlar.

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{\ell+\frac{1}{2}}\left(1-t^2\right)^{\ell}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2n+\ell+\frac{1}{2}\right)}{(2n)!}\frac{t^{2n}}{4^{\ell+\frac{1}{2}}} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}T_{\ell,2n,2n}(\varkappa) \\
&\leq \frac{\left(1-t^2\right)^{\ell}}{2^{\ell+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(2n+\ell+\frac{1}{2}\right)}{(2n)!}t^{2n}
\end{aligned}
\tag{6.68}
$$

Bunun alt ve üst kıyılarında bulunan $\left(1-t^2\right)^{\ell}$ anlatımını t^2'nin sonlu sayıda eksisiz ve 2ℓ'i aşmayan üslülerinin bir doğrucul birleşimi olarak açılımı olanaklıdır (ikiterimli ya da binom açılımı). Ancak, bu açılımın katsayılarının orancıl yapılarının paydalarında, ℓ_1 toplayış değiştirgesi olmak üzere, $(\ell-\ell_1)!$ anlatımı bulunur. Bu çarpınım (faktöryel) yapılı anlatımın Gamma işlevinin özel bir durumu olduğu anımsanırsa $\ell<\ell_1$ koşulunu sağlayan ℓ_1 değerleri için bu çarpınım sonsuz değerli olarak gündeme gelecek ve, ilgili katsayıda bu sonsuzluğu giderecek bir olgu olmadığından, katsayı sıfır olarak algılanabilecektir. Böylece, bu düşünce altında, buradaki bu ikiterimli üslüsü anlatımını bir toplamdizi (seri) olarak düşünmek olanaklıdır. Bu durumda, (6.68)'in alt ve üst kıyılarının, iki toplamdizi çarpımıyla orantılı olduğunu düşünmek olanaklıdır. Böyle düşünülünce de, bu toplamdizi için Cauchy çarpımını kullanmak yoluna gidilebilir. Bu yapılırsa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}K_{+,\ell,n}^{(\text{alt})}(\varkappa)t^{2n} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}T_{\ell,2n,2n}(\varkappa) \leq \sum_{n=0}^{\infty}K_{+,\ell,n}^{(\text{üst})}t^{2n} \\
K_{+,\ell,n}^{(\text{alt})}(\varkappa) &\equiv \frac{2^{\ell+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{\ell_1=0}^{n}\frac{\ell!(-1)^{\ell_1}}{\ell_1!\,(\ell-\ell_1)!}\frac{4^{2n-2\ell_1}\Gamma\left(2n+\ell-2\ell_1+\frac{1}{2}\right)}{(2n-2\ell_1)!\,(\varkappa+2)^{2n+\ell-2\ell_1+\frac{1}{2}}} \\
K_{+,\ell,n}^{(\text{üst})} &\equiv \frac{2^{-\ell-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{\ell_1=0}^{n}\frac{\ell!(-1)^{\ell_1}}{\ell_1!\,(\ell-\ell_1)!}\frac{\Gamma\left(2n+\ell-2\ell_1+\frac{1}{2}\right)}{(2n-2\ell_1)!}
\end{aligned}
\tag{6.69}
$$

Buradaki alt ve üst kıyıların n-bağımlılıkları $\Gamma\left(2n-2\ell_1+\ell+\frac{1}{2}\right)/(2n-2\ell_1)!$ oranından ve ayrıca alt kıyıda $4^{2n-2\ell_1}/(\varkappa+2)^{2n-2\ell_1+\frac{1}{2}}$ oranından gelir.

$\Gamma\left(2n-2\ell_1+\ell+\frac{1}{2}\right)/(2n-2\ell_1)!$ oranında paydadaki anlatımı da Γ işlevi türünden yazmak olanaklı oluşundan ve iki Gamma işlevi oranının $n \to \infty$ için yanaşık davranışından yararlanarak, bu oranın $n \to \infty$ için yanaşık davranışının $(2n)^{\ell-\frac{1}{2}}$ olduğunu göstermek olanaklıdır. Biraz ilerideki inceleyişlerimizde $\ell = 0,1,2$ durumlarına odaklanacağımızdan dolayı da $(2n)^{\frac{3}{2}}$ yanaşık davranışıyla yüzleşeceğiz.

(6.69)'daki son iki eşitliğin sağ yanındaki sonlu toplamlar n'e dek uzanıyor görünseler de, $n > \ell$ durumlarında, paydadaki $(\ell-\ell_1)!$ anlatımının sonsuza gidişinin ilgili toplanan değeri sıfırlayışından dolayı, o sonlu toplamların üst kıyıları n değil ℓ değerini alır. Bu yüzden sonlu toplamdaki toplananlar sayısı $n > \ell$ için, n ne olursa olsun, n'den bağımsız kalır. Böylece, $n \to \infty$ ereyinde toplam için herhangi bir yakınsayış sorunu yaşanmaz, ve böylece, sıkıntısız bir yanaşım inceleyişi gerçekleştirilebilir.

Buraya varabilmek için üreteç işlevinin çift kesimiyle ilgili ζ_+ işlevi üzerinden ilerlenilmişti. Andıran işlemleri, yine o üreteç işlevinin (ancak bu kez tek kesimiyle ilgili) ζ_- işlevi üzerinden gerçekleştirerek aşağıdaki sonuçlara ulaşmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} K^{(\text{alt})}_{-,\ell,n}(\varkappa)t^{2n} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} T_{\ell,2n+1,2n+1}(\varkappa) \leq \sum_{n=0}^{\infty} K^{(\text{üst})}_{-,\ell,n} t^{2n} \\
K^{(\text{alt})}_{-,\ell,n}(\varkappa) &\equiv \frac{2^{\ell+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell_1=0}^{n} \frac{\ell!(-1)^{\ell_1}}{\ell_1!\,(\ell-\ell_1)!} \frac{4^{2n-2\ell_1+1}\Gamma\left(2n+\ell-2\ell_1+\frac{3}{2}\right)}{(2n-2\ell_1+1)!\,(\varkappa+2)^{2n+\ell-2\ell_1+\frac{3}{2}}} \\
K^{(\text{üst})}_{-,\ell,n} &\equiv \frac{2^{-\ell-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{\ell_1=0}^{n} \frac{\ell!(-1)^{\ell_1}}{\ell_1!\,(\ell-\ell_1)!} \frac{\Gamma\left(2n+\ell-2\ell_1+\frac{3}{2}\right)}{(2n-2\ell_1+1)!}
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Bu sonuçlardaki $n \to \infty$ davranışı için de, $n \to \infty$ için baskın anlatımda (6.69)'dekine eş, bir yanaşık durumla yüzleşilir.

Son iki eşitlik topluluğundan aşağıdaki kıyılandırımlar elde edilebilir.

$$\begin{aligned}
K^{(\text{alt})}_{+,\ell,n}(\varkappa) &\leq T_{\ell,2n,2n}(\varkappa) \leq K^{(\text{üst})}_{+,\ell,n}, \\
K^{(\text{alt})}_{-,\ell,n}(\varkappa) &\leq T_{\ell,2n+1,2n+1}(\varkappa) \leq K^{(\text{üst})}_{-,\ell,n}
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Böylece, taban sayılabilecek bir tümlev türüyle ilgili önemli bilgiler ortaya çıkarılmış olmaktadır. Bu bilgilerden daha değişik ama andıran türden başka tümlevleri de, ya da onların birkesim özelliklerini de belirlemek olanaklıdır. Burada, biraz ileride odaklanacağımız türden tümlevleri de gündeme getirmekte yarar bulunmaktadır. Bu yolda, aşağıdaki tanımı verebiliriz.

$$\overline{T}_{\ell,m,n}(\varkappa) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2\ell} e^{-\frac{\varkappa}{2}x^2} \frac{d\psi_{NUS,m}(x,1)}{dx} \frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx} \tag{6.72}$$

Bu tümlevler de sonlu anlatımlarla anlatılabilir olmakla birlikte burada o ayrıntıya girmeyeceğiz. Buna karşın, bu tümlevlerin $m = n$ durumu için olanlarını katsayı olarak alan bir toplamdizi üzerinden aşağıdaki üreteç işlevini gündeme getireceğiz.

$$\overline{U}_\ell(t,\varkappa) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} t^n \overline{T}_{\ell,n,n}(\varkappa) \tag{6.73}$$

Buradaki toplamdizinin sonlu ya da tıkız anlatımlı karşılığını belirlemek için (6.62)'de verilen Mehler eşitliğinin her iki yanının, önce x'e sonra y'ye göre türevi alındıktan sonra ele geçen eşitlikte y yerine x yerleştirilir, ve de, ulaşılan eşitliğin her iki yanı $x^{2\ell}\exp(-\varkappa x^2/2)$ ile çarpılıp tüm gerçel x değerleri için tümlevlenirse, birkesim ara işlemlerden sonra, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\overline{U}_\ell(t,\varkappa) = \frac{2t}{1-t^2}U_\ell(t,\varkappa) + \frac{(1-t)^4}{(1-t^2)^2}U_{\ell+1}(t,\varkappa) \tag{6.74}$$

Bu eşitliğin sağ yanı t'de bir toplamdizi olarak yazılırsa, t^n'nin katsayısının $\overline{T}_{\ell,n,n}(\varkappa)$'e eşit olacağı bilinen bir gerçektir. Bu yüzden, üstçizgili T'leri üstçizgisiz T'ler türünden sonlu doğrucul birleşimlerle anlatmak olanaklıdır.

(6.74)'te sağ yandaki orancıl anlatımlar, bilinçli olarak, paydalarında $(1-t^2)$ türünden t bağımlılığı görünecek biçemde yazılmışlardır. O eşitliğin sağ yanında $U_\ell(t,\varkappa)/(1-t^2)$ ve $U_{\ell+1}(t,\varkappa)/(1-t^2)^2$ anlatımlı iki işlev de, yalnızca $U_\ell(t,\varkappa)$ için gerçekleştirdiğimiz çözümleyişle kıyılandırılabilir. Bu iki işlevin de, $t = \pm 1$ için $(1-t^2)^{\ell-1}$ çarpanından dolayı $\ell - 1$ katlı birer kökü bulunmaktadır. Önceki çözümleyişte $(1-t^2)^\ell$ ikianlatımlısının açılışı yerine burada $(1-t^2)^{\ell-1}$'in açılışı gerçekleştirilmelidir. Böyle yapılarak $t = \pm 1$'deki kaldırılabilir tekillikten de kaçınılmış olur (bu durumun ancak $\ell \geq 1$ durumu için geçerli olduğunu, $\ell = 0$ durumunda sonlu toplamla, buradaki bağlamlarda, çalışılamayacağı gerçeğini vurgulamakta da yarar görmekteyiz). Böylece, $U_\ell(t,\varkappa)/(1-t^2)$ ve $U_{\ell+1}(t,\varkappa)/(1-t^2)^2$'nın kıyılandırımı gerçekleştirilebilir. Bu eylemden sonra da bu anlatımların t'ye bağımlı birer çokterimliyle çarpımlarının kıyılandırımı gerçekleştirilebilir. Sonunda da $\overline{T}_{\ell,n,n}(\varkappa)$'nın kıyılandırımı gerçekleştirilebilir. Sonuçta, kıyılar, $T_{\ell,n,n}(\varkappa)$'nın kıyılarında gözlediğimiz niteliklerin tümünü yansıtan, ancak, nicelikte değişiklikler gösteren yapıda elde edilirler. Ancak, burada, bu düzeyde yakalanabilen bilgilerle yetinip kesin anlatımları belirtik olarak vermemek eğilimindeyiz.

6.8.5 Gizilgüçle ilgili beklenen değer belirlenişi

BBÜK dizgesi ile ilgili Hamilton İşleci'nin beklenen değerini; Hamilton İşleci'ni, birisi devinirlikle ilgili kesimini, ötekisi ise gizilgüçle ilgili kesimini göstermek üzere; iki işlecin toplamı olarak öngörmüştük. Bunlardan, öncelikle, gizilgüç ile ilgili olan ikincisinin beklenen değerinin belirlenişine girişeceğiz. Bu amaçla aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\left\langle \widehat{H}_{BBÜK,giz} \right\rangle_{KBNUS,n} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \psi_{KBNUS,n}(y_1) \widehat{H}_{BBÜK,giz} \psi_{KBNUS,n}(y_1) \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad (6.75)$$

Burada, $\psi_{KBNUS,n}$ *KBNUS* dizgesinin n. düzey dalga işlevini göstermektedir. Bu işlevin açık yapısı (6.23) bağıntılandırımında verilmişti. Orada, ilgili eşitliğin sol yanında, k bağımlılığı varmış gibi yazılmıştı. Bunun nedeni, onun C belirsiz katsayısına bağımlı oluşu ve C'de k bağımlılığı varsa onun bu işleve de yansıyacağını vurgulamaktı. Oysa ki, C ya da daha belirtik olarak C_n, daha sonra, 1 olarak ortaya çıkarılmıştı. Bu yüzden bu işlevde, aslında k bağımlılığı yoktur ve bu nedenle burada gösterilmemiştir. Geriye kalan kesimlerde de gösterilmeyecektir. Aslında, bu işlevin, Nicem Uyumlu Salıngaç dizgesinin dalga işleviyle ilintisini de (6.35) eşitliği ile vermiştik. Bu ilinti kullanılacak olursa ve (6.42)'den yararlanacak olursak aşağıdaki eşitliğe geçebiliriz.

$$\left\langle \widehat{H}_{BBÜK,giz} \right\rangle_{KBNUS,n} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{NUS,n}(x,1)^2 x^2, \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad (6.76)$$

Bu tümlev, değeri kesin olarak belirlenebilen türdendir. Bu kesin değeri belirlemek için (6.44)'ün sol yanındaki kesimin bu tümlevin tümlevleneninde varolduğunu görmekte yarar vardır. Bu kesimin yerine (6.44)'ün sağ yanındaki anlatımı yerleştirir ve oluşan tümlevlerin *NUS* dizgesinin dalga işlev ikilileri arasında iççarpımlar olduğunun ayırdına varıp dikgenlikten de yararlanırsak aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

$$\left\langle \widehat{H}_{BBÜK,giz} \right\rangle_{KBNUS,n} = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad n = 0, 1, 2, ... \quad (6.77)$$

Bu, hem kesin sonuçtur hem de olabildiğince yalındır. Kesin çözüm oluşu, bunun kıyılandırımı olmadığı anlamına gelir. Aslında, alt ve üst kıyılar vardır, ancak, birbirlerine eşittir.

6.8.6 Devinirlikle ilgili beklenen değer belirlenişi

Bu altbölümün bu altaltbölümünde aşağıdaki eşitlikten yola çıkacağız.

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{H}_{BBÜK,dev} \right\rangle_{KBNUS,n} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \psi_{KBNUS,n}(y_1) \widehat{H}_{BBÜK,dev} \psi_{KBNUS,n}(y_1) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \psi_{KBNUS,n}(y_1) \frac{d^2\psi_{KBNUS,n}(y_1)}{dy_1^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy_1 \left(\frac{d\psi_{KBNUS,n}(y_1)}{dy_1}\right)^2
\end{aligned} \tag{6.78}$$

Burada, en alttaki eşitliğin sağındaki sonuç, bir üstteki eşitliğin sağındaki anlatımdan kesimcil tümlevleyişle (ing: integration by parts) ve sonsuzdaki sıfıra gidişten yararlanarak üretilmiştir. Buradan bir kıyılandırıma geçmek için, önce, buradaki tümlevlenende bulunan türev dördülü içeren anlatımı *KBNUS* dizgesinin dalga işlevleri yerine *NUS* dizgesinin dalga işlevlerinin göründüğü anlatıma çevirmekte yarar bulunmaktadır. Bu amaçla, (6.35) eşitliğinden yararlanmak olanaklıdır. O eşitliğin her iki yanının y'ye göre türevi alınırsa, ara aşamaları belirtmeden ya da açıklayışa gerek görmeden, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\frac{d\psi_{KBNUS,n}(y)}{dy} = e^{\frac{\varkappa}{4}y^2}\left(e^{\frac{\varkappa}{2}y^2}\frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx} + \frac{\varkappa}{2}y\psi_{NUS,n}(x,1)\right) \tag{6.79}$$

Bu eşitliğin (6.78)'in sonundaki tümlevde kullanımı aşağıdaki eşitliklerin yazımına olanak sağlar.

$$\left\langle \widehat{H}_{BBÜK,dev} \right\rangle_{KBNUS,n} = \mathscr{I}_1 + \mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_3 \tag{6.80}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{I}_1 &\equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx(y) e^{\varkappa y^2}\left(\frac{d\psi_{NUS,n}(x(y),1)}{dx(y)}\right)^2, \\
\mathscr{I}_2 &\equiv \frac{\varkappa}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx(y) e^{\frac{\varkappa}{2}y^2}\frac{d\psi_{NUS,n}(x(y),1)}{dx(y)} y\psi_{NUS,n}(x(y),1), \\
&= -\frac{\varkappa}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\frac{\varkappa}{2}y^2}\left(1+\varkappa y^2\right)\psi_{NUS,n}(x(y),1)^2, \\
&= -\frac{\varkappa}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dx(y)\left(1+\varkappa y^2\right)\psi_{NUS,n}(x(y),1)^2, \\
&= -\frac{\varkappa}{4} - 2\mathscr{I}_3 \\
\mathscr{I}_3 &\equiv \frac{\varkappa^2}{8}\int_{-\infty}^{\infty} dx(y) y^2 \psi_{NUS,n}(x(y),1)^2, \\
\left\langle \widehat{H}_{BBÜK,dev} \right\rangle_{KBNUS,n} &= \mathscr{I}_1 - \mathscr{I}_3 - \frac{\varkappa}{4}
\end{aligned} \tag{6.81}$$

Buradaki tümlevlerden $\mathscr{I}_2$ ile ilgili olanda, önce x üzerindekinden y üzerindeki tümlevleyişe geçilip kesimcil tümlevleyiş kullanılarak yeni bir tümlev anlatımına geçilmiş; sonra da bu tümlev x üzerinde bir tümleve dönüştürülmüştür. x ve y üzerinde tümlevleyişler arasında geçişlerde, daha önceden vurguladığımız üzere, eksi y'lere eksi x'lerin karşı geleceği bir dönüşüm gerçekleştirilmiştir.

İlerleyebilmek için, (6.58) eşitsizliğinin alt ve üst kıyı kesimlerinde görünen tümlevin, aslında, $x(y)$ olduğu gözönüne alınırsa, (6.58) aşağıdaki yapıda yeniden yazılabilir.

$$1+\frac{\varkappa}{2}e^{-\frac{\varkappa}{2}x(y)^2}x(y)^2 \leq e^{\frac{\varkappa}{2}y^2} \leq 1+\varkappa x(y)^2 \tag{6.82}$$

Bu, bir anlamda, kıyılandırım eşitliğidir. y'nin tüm gerçel değerleriyle, $\varkappa$'nın tüm artı gerçel değerleri için, alt ve üst kıyı değerleri hep artı kalır. Bu yüzden, bunun dördüllenişi kıyılandırımı bozmaz. Böylece, aşağıdaki kıyılandırıma geçilebilir.

$$\left(1+\frac{\varkappa}{2}e^{-\frac{\varkappa}{2}x(y)^2}x(y)^2\right)^2 \leq e^{\varkappa y^2} \leq \left(1+\varkappa x(y)^2\right)^2 \tag{6.83}$$

Kıyılandırımda öncelikle $\mathscr{I}_1$ tümlevini odağa alıp aşağıdaki kıyılandırım tanımını yapabiliriz.

$$\mathscr{I}_{1,alt} \leq \mathscr{I}_1 \leq \mathscr{I}_{1,üst} \tag{6.84}$$

Burada önce üst kıyıya odaklanacağız. Bu bağlamda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{1,üst} &\equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(1+\varkappa x^2\right)^2\left(\frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx}\right)^2\\ &= \mathscr{I}_{1,üst,1}+\varkappa\mathscr{I}_{1,üst,2}+\varkappa^2\mathscr{I}_{1,üst,3}\end{aligned} \tag{6.85}$$

Bunun sonundaki eşitlikte görünen tümlevlerin tanımları ve belirtik değerleri, üretim ara aşamaları verilmeksizin, aşağıdaki anlatımlarla verilmektedir.

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{1,üst,1} &\equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\\ \mathscr{I}_{1,üst,2} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(x\frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx}\right)^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{4}+\frac{1}{4}+\frac{n(n-1)}{4}\\ \mathscr{I}_{1,üst,3} &\equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(x^2\frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx}\right)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{16}+\frac{(n+1)(n+3)^2}{16}\\ &\qquad +\frac{n(n-2)^2}{16}+\frac{n(n-1)(n-2)}{16}\end{aligned} \tag{6.86}$$

Buradan görüldüğü üzere, üst kıyı, $\varkappa$ değiştirgesine bir ikinci derece çokterimli üzerinden bağımlı durumda olup, $n\to\infty$ ereyinde n^3 ile orantılı olacak bir yanaşım sergilemektedir.

Bundan sonraki adım $\mathscr{I}_1$ tümlevinin alt kıyısını belirlemektir. Bu amaçla, (6.83)'teki eşitsizliklerin alt kıyı nitelikli anlatımından yola çıkarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_{1,alt} &\equiv \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(1+\frac{\varkappa}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\varkappa}{2}x^2}x^2\right)^2 \left(\frac{d\psi_{NUS,n}(x,1)}{dx}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\overline{T}_{0,n,n}(0)+\frac{\varkappa}{2}\overline{T}_{1,n,n}(\varkappa)+\frac{\varkappa^2}{8}\overline{T}_{2,n,n}(2\varkappa) \end{aligned} \tag{6.87}$$

Burada görünen $\overline{T}$'lerin nasıl kıyılandırılabileceğini daha önceden vermiş, ancak, belirtik anlatımlar sunmamıştık. Ancak, burada, bunların her biri yerine onun alt kıyısını yerleştirerek, daha kötümserleşik de olsa bir kıyılandırım gerçekleştirilebileceğini vurgulamakla yetineceğiz.

(6.87)'de $\ell = 0$ durumunda tümlev olabildiğince yalınlaşır. *NUS* dizgesinin n. düzey dalga işlevinin tümlevinin dördülünün, tüm gerçel konumlar üzerinde, belirlenişi gerekir. Bu yolda, (6.47)'ten yararlanılacak olursa, ara işlemler verilmeksizin, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\mathscr{I}_{1,alt,1} = n+\frac{1}{2} \tag{6.88}$$

Bu altbölümdeki kıyılandırımı sonlandırmak için (6.81)'de gözüken eşitliklerle tanımlanan $\mathscr{I}_3$'ün yapısında görünen y^2 çarpanını kıyılandırmakta yarar bulunmaktadır. (6.51), (6.52), ve de, (6.57)'den aşağıdaki kıyılandırıma ulaşılabilir.

$$\mathrm{e}^{-\varkappa x(y)^2}x(y)^2 \le y^2 \le x(y)^2 \tag{6.89}$$

Bunun kullanımıyla, $\mathscr{I}_3$'e bir alt kıyı olarak $\varkappa^2 T_{1,n,n}(2\varkappa)/8$ elde edilir. Bunu da, daha önce anlatılanlar bağlamında yeniden kıyılandırarak yeni, ancak daha kötümser bir kıyı elde edilebilir. Üstkıyıda ise $\varkappa$ bağımlılığı yoktur ve x^2'nin beklenen değeridir ve daha önceden belirlenmişti. Böylece, kıyılandırım eylemi bütünüyle gerçekleştirilmiş olur.

6.9 Saptırım Açılımı

(6.25)'te verilen Hamilton işleçleri, nicem uyumlu salıngaca dayanan bir saptırım açılımı geliştirebileceğimizi akla getirmektedir. Bu amaçla, aşağıdaki özdeğer sorununu yazabiliriz.

$$\widehat{H}_{KBNUS}\psi(x)+\varepsilon\widehat{H}_{SH\dot{I}}\psi(x) = E\psi(x) \tag{6.90}$$

Burada herhangi bir altsimge kullanılmadan yazılan bilinmeyen işlev ile erke, saptırım toplamdizisi kurulduktan sonra Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu dizgesinin sırasıyla dalga işlevi ve erkesi olacaktır. Burada, ε da saptırım değiştirgesidir. Değeri 1 olduğunda dizge Bütünleşik Bakışık Üstel Kuyu dizgesini belirtirken değeri 0 olduğunda saptırımsız (ing: unperturbed) duruma karşılık gelir, buradan da Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngacın izgecil öğeleri bulunur. Denkleme sonradan yapay olarak eklenen bu saptırım değiştirgesi, dizgenin dalga işlevini ve karşılık gelen erke değerini ε'a bağımlı biçime getirir. Böylece izgecil öğeleri, saptırım değişkeninin 1'e eşit oluşu durumunda ortaya çıkan toplamdizinin yakınsayacağını umarak, ε'nun Maclaurin toplamdizisine aşağıdaki biçimde açabiliriz.

$$\psi(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi^{(j)}(x), \qquad E \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j E^{(j)} \tag{6.91}$$

Burada $\psi^{(j)}$'ler bağımsız değişken olarak yalnızca konuma bağlı işlevler, $E^{(j)}$'ler de bilinmeyen değişmezlerdir. (6.91)'de verilen toplamdizi açılımlarının (6.90)'da kullanımı ile aşağıdaki özyineleyişli denklemi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{KBNUS}\psi^{(j)}(x) + \widehat{H}_{SH\dot{I}}\psi^{(j-1)}(x) &= \sum_{j_1=0}^{j} E^{(j_1)}\psi^{(j-j_1)}(x), \\ j = 0,1,2,\ldots \qquad & \psi^{(-1)}(x) \equiv 0 \end{aligned} \tag{6.92}$$

İlk olarak, j'nin 0'a eşit olduğu duruma odaklanalım.

$$\widehat{H}_{KBNUS}\psi^{(0)}(x) = E^{(0)}\psi^{(0)}(x) \tag{6.93}$$

Bu, bize saptırımsız durumu verir ve bu denklemin çözümü Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngaç dizgesinin (6.23)'te verilen izgecil değerleridir.

$$\psi^{(0)}(x) = \psi_{KBNUS,n}(x), \qquad E^{(0)} = E_{KBNUS,n} \tag{6.94}$$

$j = 1$ alınırsa da, aşağıdaki bağdaşık olmayan (ing: inhomogeneous) STD elde edilir.

$$\widehat{H}_{KBNUS}\psi^{(1)}(x) + \widehat{H}_{SH\dot{I}}\psi^{(0)}(x) = E^{(0)}\psi^{(1)}(x) + E^{(1)}\psi^{(0)}(x) \tag{6.95}$$

Bu denklemi yeniden düzenleyip (6.94)'te elde ettiğimiz değerleri de kullanırsak aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$\left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]\psi^{(1)}(x) = -\left[\widehat{H}_{SH\dot{I}} - E^{(1)}\widehat{I}\right]\psi_{KBNUS,n}(x) \tag{6.96}$$

Denklemin her iki yanının $\psi_{KBNUS,n}$ ile iççarpımını yazarsak,

$$\left(\psi_{KBNUS,n}, \left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]\psi^{(1)}\right) = -\left(\psi_{KBNUS,n}, \left[\widehat{H}_{SH\dot{I}} - E^{(1)}\widehat{I}\right]\psi_{KBNUS,n}\right) \tag{6.97}$$

eşitliğini elde ederiz. $\widehat{H}_{KBNUS}$ işlecinin ve dolayısıyla $\left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]$ işlecinin özüne eş oluşunu kullanarak aşağıdaki eşitliği yazmak olanaklı.

$$\left(\psi_{KBNUS,n}, \left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]\psi^{(1)}\right) = \left(\left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]\psi_{KBNUS,n}, \psi^{(1)}\right) = 0 \quad (6.98)$$

Bu durumda (6.97)'den aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\left(\psi_{KBNUS,n}, \left[\widehat{H}_{SHİ} - E^{(1)}\widehat{I}\right]\psi_{KBNUS,n}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \qquad E^{(1)} = \left(\psi_{KBNUS,n}, \widehat{H}_{SHİ}\psi_{KBNUS,n}\right) \equiv \left\langle \widehat{H}_{SHİ} \right\rangle_{KBNUS,n} \quad (6.99)$$

Burada en sağdaki anlatım, saptırım işleci $\widehat{H}_{SHİ}$'nin $\psi_{KBNUS,n}$ dalga işlevi altındaki beklenen değerinin tanımıdır. Bu da bize, birinci kerteden saptırım erkesinin, saptırım işlecinin Konaç Bükümcül Nicem Uyumlu Salıngacın n. özdurumdaki dalga işlevi altındaki beklenen değeri olduğu bilgisini verir.

Birinci kerte saptırım belirlenirken tek bilinmeyen erke değeri $E^{(1)}$ değildir. $\psi^{(1)}(x)$'nin de belirlenişi gerekir. Bu amaçla, katsayıları bilinmeyen $C_j^{(1)}$'ler olan aşağıdaki özişlev açılımını önerelim.

$$\psi^{(1)}(x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(1)}\psi_{KBNUS,j}(x) \quad (6.100)$$

Bu açılımı (6.96)'da yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j-n)\sqrt{k}C_j^{(1)}\psi_{KBNUS,j}(x) = -\left[\widehat{H}_{SHİ} - E^{(1)}\widehat{I}\right]\psi_{KBNUS,n}(x) \quad (6.101)$$

Bu eşitlikte her iki yanın $\psi_{KBNUS,\ell}$ ile iççarpımını alırsak, ℓ, n'den değişik olduğu sürece $C_j^{(1)}$ aşağıdaki eşitlikle belirlenebilir.

$$C_\ell^{(1)} = -\frac{1}{(\ell-n)\sqrt{k}}\left(\psi_{KBNUS,\ell}, \widehat{H}_{SHİ}\,\psi_{KBNUS,n}\right), \qquad \ell \neq n \quad (6.102)$$

burada (6.101)'in sağ yanı $\psi_{KBNUS,n}(x)$'e dikgen olduğu için $C_n^{(1)}$ belirlenemez. Bu aşamada değeri seçkisizdir. Ancak, bu seçkisizlikten kurtulabilmek için herhangi bir özelsizlik (ing: generality) yitimi olmaksızın $C_n^{(1)} = 0$ alınabilir.

(6.102)'de ℓ'i j ile değiştirip ve (6.100)'de yerine koyarsak dikgenlik özelliklerini de gözönünde bulundurarak

$$\psi^{(1)}(x) = -\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq n}}^{\infty}\frac{1}{(j-n)\sqrt{k}}\psi_{KBNUS,j}(x)\left(\psi_{KBNUS,j}, \widehat{H}_{SHİ}\,\psi_{KBNUS,n}\right) \quad (6.103)$$

denklemini elde ederiz. Bu anlatım daha tıkız biçimde yazılabilir. Bunun için aşağıdaki gibi bir izdüşüm (ing: projection) işleci tanımlayalım.

$$\widehat{P}_j \equiv \psi_{KBNUS,j}(x)\left(\psi_{KBNUS,j}, G\right), \qquad j = 0, 1, 2, ... \tag{6.104}$$

burada G, dalga işlevleri uzayından seçkisiz olarak alınan bir işlevi simgeler. Bu izdüşüm işleçleri özüne dönendir (ing: idempotent), yani tüm artı bütünsayı üsleri özüne eşittir. Ayrıca, karşılıklı olarak birimboylu dikgendirler. Aşağıdaki gibi bir evrik işleç tanımı yapalım.

$$\left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]^{-1*} \equiv \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{1}{(j-n)\sqrt{k}} \widehat{P}_j \tag{6.105}$$

Burada $-1*$ üssü taban işlecin koşullu evriğini simgeler. Yani evrik işleç, eğer değişkeni $\psi_{KBNUS,j}$ ile orantılı ise değişkenini sıfıra eşitler. Bu yeni işleç tanımının kullanılışı (6.103) için aşağıdaki tıkız anlatımı yazışımıza olanak verir.

$$\psi^{(1)}(x) = -\left[\widehat{H}_{KBNUS} - E_{KBNUS,n}\widehat{I}\right]^{-1*} \widehat{H}_{SHİ}\, \psi_{KBNUS,n} \tag{6.106}$$

Bu bölümde birinci kerte saptırımın iki bilinmeyenini belirledik. Burada yaptıklarımız, ikinci ve daha yüksek kerteli saptırım aşamalarına da uyarlanabilir. Bununla birlikte, saptırım kertesi büyüdükçe karmaşıklık artar. Bu aşamada yüksek kerteden saptırım bileşenlerini belirleyişi sürdürmeyeceğiz.

6.10 Değerlendirimler, Yorumlar, Öneriler, ve de, Uyarılar

Bu bölümde, görüş belirtimi için, sırasayılandırımlı bir biçem kullanımını yeğlemekteyiz:

1. Burada, özel bir nicem dizgenin erke düzey bilgilerinin belirlenişi için yardımcı bir dizgeden konaç bükümüyle yola çıkarak saptırım açılımı tabanlı bir yanaşık bir belirleyiş yöntemi tasarımına başlanmıştır.

2. Yanaşımın yüksek erke düzeylerine çıkıldıkça niteliğinin yükseleceği düşünülmüştür. Bu, gizilgüce bağımlı bir olgudur ve buradaki gizilgüç için de iyi işleyeceğinin belirtileri çözümleyişten anlaşılmaktadır.

3. Saptırım açılımıyla ilgili bir altbölüm, bölümün sonundan önce verilmiş bulunmakla birlikte, saptırım açılımının en baskın anlatımına odaklanılmıştır. Bu

odaklanımdaki inceleyiş bile olabildiğince kapsamlı içeriktedir ve bu an için yeterince uygulayımcıl nitelikte değildir. Yine de, erke değerinin büyüklüğüyle de çok yakından ilintili olan n sayısının sonsuza doğru artışı durumda erke değerinin yanaşık kıyıları belirlenebilmiştir.

4. Kıyılandırıma gereksinim duymadan da erkenin n. düzey değerinin kesin yanaşık yapısının belirlenişi için yapı üretilmiştir. Ancak, oldukça karmaşık yapılı olan sonuçların (sonlu sayıda anlatımlı olsa da) verilişine gerek görülmemiştir. Bunun nedeni de savdaki yalınlığın olabildiğince yüksek tutulmak istenişidir.

5. Burada odağa alınan nicem dizgeler, bilimsel yazında, üzerinde araştırım olmayan ya da doyurucu sonuçlar bulunmayanlardır. Bu durum, onların incelenişinin değerini, öyle bir izlenim verebilse de, anlamsızlaştırmamaktadır. Bunun nedeni de bu savda yöntembilimcil bir tutum izlenip uzbilimcil olarak sonsuzdaki davranışı alışılmış işlevlerin dışında olan yapılarda konaç bükümünün nasıl işleyeceğinin görülmek istenişidir, ve de, önemli olgular ortaya çıkarılmıştır.

6. Bu kesim, bir başlangıçtır ve türlü değişikliklerle yöntemin hem çok daha özelsizleştirimi hem de çok daha yalın anlatımlı olarak uygulayışlarda kullanılabilecek bağıntıların üretilebileceği görülmüştür. Ancak, bu kesim, sav yazım sırasında, yakalanan esinlenişlerle gündeme getirildiğinden bu savda çok daha ileri götürülmemiştir. Yine de sav sonrası bir araştırım konusu olarak önemli adaylar arasında tutulmaktadır.

7. SONUÇLAR

Bu bölümde, savda ulaşılan sonuçlar, onlarla ilgili yorumlar, ve de, ilgilendiren uyarılar, sırasayılandırılmış biçemde aşağıda verilmektedir.

1. Savda seçilen gizilgüç bilimsel yazında, yazar ve danışmanının bilgisi çerçevesinde, görünmeyen bir biçenin gizilgücüdür. Böyle bir seçime yönelişin nedeni, yöntembilimcil açıdan az bilinen bir dizgeye odaklanımdır. Geliştirilmek istenen yöntem ya da yöntemlerin özelsizliği için bu gerekli bir olgudur. Uzbilimcil olarak geliştirilen yöntemin de, bir anlamda, sınanışı için iyi bir göstermeliktir (örnektir).
2. Odaktaki dizgenin OLEVKU bağlamında incelenişi ilk kez yapılmakta olduğundan bütünüyle özgündür.
3. Poisson kümesimgelileri (ing: Poisson brackets) üzerinde odenklem oluşturumu da bu dizge bağlamında özgündür.
4. Beklenen değer devinbilim denklemlerinin bu dizge için oluşturumu da bütünüyle özgündür.
5. Beklenen değer denklemlerinin sağ yanlarının ikinci derece çokçokterimlilerine indirgenişi de bu dizge için, uzay genişletimi kullanarak, başarılmıştır ve özgündür.
6. Dizgenin beklenen değer deviniminin OLEVKU kullanarak nasıl saptanacağı ile ilgili, ikincil düzeyde de olsa, birkesim önemli ve özgün adımlar atılmıştır.
7. Bu dizgeyle ilgili olarak ilk kez evrilteç devinbilimine başvurulmuş ve birkesim önemli özgün adımlar atılmıştır.
8. Yukarıdaki devinbilimcil olgularda, sendelenim kuramından yararlanarak yaklaştırım olanaklarının incelenişi de özgün ve önemli katkılardan birisidir.
9. Konaç bükümüyle devinbilimcil inceleyişlere birkesim yalın yaklaştırım yöntemleri getirimi başarılmış bu yolda beşinci bölümde sayıcıl sonuçlar da verilmiş ve yüksek duyarlılıklar elde edilebileceği özgün olarak gösterilmiştir.

10. Konaç bükümü yanaşıklık (ing: asymptoticity) bağlamında özgün olarak gündeme getirilmiştir. Altıncı bölüm bu doğrultuda vurgulanabilir.

11. Türlü yöntemlerle birleşik olarak saptırım açılımları kullanılmıştır. Bu eylem, altıncı bölümde yalnızca en baskın anlatım bağlamında gündeme getirilmiştir. Sonuçlar, sayıcıl biçemde değil sayıcıllığı üretecek nitelikte bağıntılarla verilmiştir. Kesin anlatımlar üretilebilecek olmakla birlikte, karmaşık yapıları nedeniyle, kıyılandırımları verilmiş ve böylece belli bir düzeyde yalınlık sağlanmıştır.

12. Saptırım açılımları, özellikle sendelenim açılımları bağlamında, daha çok baskın anlatımlı kesimcil yaklaştırımları da vurgulanmıştır.

13. Altıncı bölümde uygulayımcıl açıdan önemli bulgu, erke düzeyinin sonsuza gidişi durumunda, erkenin erke sırasayısına nasıl bağımlı olduğunun, kıyılandırım belirsizliği içinde, belirlenmiş oluşudur. Bu hem dizgenin doğabilimcil özellikleri açısından hem de o bölümde geliştirilimine başlanan yöntemin gücünü göstermek açısından önemlidir.

14. İlk dört bölümde geliştirilen ve uygulanışları gerçekleştirilen olgular olabildiğince olgun duruma getirilmişlerdir ve ulaşılan kuramcıl sonuçlar, çok büyük çaba gerektirmeden buyrukdizilenebilecek (programlanabilecek) niteliktedir (bu yüzden de orada destekleyici sayıcıl sonuçlar üretimi ve sunumu için yer ayrılmamıştır).

15. Beşinci bölümdeki sayıcıl üretimler doğrulayıcı niteliktedir. Ancak, bütünüyle olgunlaştırım bitirilememiştir. Yine de varolan kesimin çok önemli olduğunu, buna karşın sav sonrası araştırımlarla daha da olgunlaşım sağlanabileceği düşünülmektedir.

16. Hemen yukarıdaki bölümcecil kesimde yazılanlar altıncı bölüm için de geçerlidir. Olgunlaştırım için çok daha ileri düzeyde yalınlaştırım gerekmektedir. Bunun ötesinde, dizgeye bağımlı olarak yalınlığı değişmeyen bir yapıya büründürüm de sağlanırsa, beşinci ve altıncı bölümdeki içerikler üzerine önemli bir kuram oturtuşun olanaklı olabileceği bile düşünülebilmektedir. Ancak, bu doğrultuda araştırım sav sonrasına bırakılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] **Heisenberg, W.** (1927). Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, *Zeitschrift für Physik*, *43*(3), 172–198.

[2] **Schrödinger, E.** (1926). An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules, *Physical Review*, *28*, 1049–1070.

[3] **Feynman, R.P.** (1948). Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics, *Reviews of Modern Physics*, *20*, 367–387.

[4] **Dirac, P.A.M.** (1981). *The Principles of Quantum Mechanics*, International series of monographs on physics, Clarendon Press, 4. sürüm.

[5] **Müller-Kirsten, H.J.W.** (2006). *Introduction to Quantum Mechanics: Schrödinger Equation And Path Integral*, World Scientific, Singapur.

[6] **Griffiths, D.J.** (1995). *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey.

[7] **Atkin, R.** (1956). *Mathematics and wave mechanics*, John Wiley & Sons, New York.

[8] **Shifman, M.** (1989). New Findings in Quantum Mechanics (Partial Algebraization Of The Spectral Problem), *International Journal of Modern Physics A*, *04*(12), 2897–2952.

[9] **Strocchi, F.** (2005). *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*, World Scientific.

[10] **Isham, C.J.** (1995). *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College Press, London.

[11] **Teschl, G.** (2009). *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrödinger Operators*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, USA.

[12] **Demiralp, M.** (1984). An evolution operator approach to approximate the solutions of ordinary differential equations, *Bulletin of the Technical University of Istanbul*, *37*(4), 425–445.

[13] **Demiralp, M.** (1986). A New Algebraic Approach to the Eigenvalue Problems of Linear Differential Operators Without Integrations, *International Journal of Quantum Chemistry*, *29*(2), 221–227.

[14] **Demiralp, M.** (2007). Fluctuation Expansion at the Horizon as a New and Efficient Tool for Integration ODE and PDE Solving, *11th World Scientific and Engininering Academy and Society (WSEAS) Conference on Applied Mathematics (MATH'07), 22-24 March 2007*, Dallas.

[15] **Altay, N. ve Demiralp, M.** (2010). Numerical solution of ordinary differential equations by Fluctuationlessness theorem, *Journal of Mathematical Chemistry*, *47*(4), 1323–1343.

[16] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1993). Optimally controlled quantum molecular dynamics: A perturbation formulation and the existence of multiple solutions, *Physical Review A*, *47*(2), 809–816.

[17] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (1993). Optimally controlled quantum molecular dynamics: The effect of nonlinearities on the magnitude and multiplicity of control field solutions, *Physical Review A*, *47*(2), 831–837.

[18] **Demiralp, M. ve Rabitz, H.** (2000). Assessing optimality and robustness for the control of dynamical systems, *Physical Review E*, *61*(3), 2569–2578.

[19] **Bender, C.M. ve Wu, T.T.** (1969). Anharmonic Oscillator, *Physical Review*, *184*, 1231–1260.

[20] **Bender, C.M.**, **Happ, H.J. ve Svetitsky, B.** (1974). Numerical study of energy-level crossing, *Physical Review D*, *9*, 2324–2329.

[21] **Flessas, G.P.** (1981). Exact solutions for anharmonic oscillators, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *14*(6), L209–L211.

[22] **Fernández C, D.**, **Hussin, V. ve Mielnik, B.** (1998). A simple generation of exactly solvable anharmonic oscillators, *Physics Letters A*, *244*(5), 309 – 316.

[23] **Demiralp, M.** (1994). Determination of the quantum motion of the one dimensional harmonic oscillator via expectation value evolutions, *Bulletin of the Technical University of Istanbul*, *47*(4), 357–375.

[24] **Kurşunlu, A.**, **Yaman, İ. ve Demiralp, M.** (2004). Optimal control of one dimensional quantum harmonic oscillator under an external field with quadratic dipole function and penalty on momentum: Construction of the linearised field amplitude integral equation, *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, *1*(1), 270–279.

[25] **Tunga, B. ve Demiralp, M.** (2004). Optimally controlled dynamics of one dimensional Harmonic oscillator: linear dipole function and quadratic penalty, *Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics*, *1*(1), 242–250.

[26] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2009). Expectation Value Evolutions for the One Dimensional Quantum Harmonic Oscillator under the Influence of External Dipol Effects, *Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Mathematical Methods and Computational Techniques in Electrical Engineering*, MMACTEE'09, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS), Atina, s.419–424.

[27] **Arı, N. ve Demiralp, M.** (1983). A characteristic function approach to The eigenvalues of an anharmonic oscillator, *Bulletin of the Technical University of Istanbul*, *36*(3), 345–359.

[28] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2010). A Fluctuation Analysis at the Classical Limit for the Expectation Dynamics of a Single Quartic Quantum Anharmonic Oscillator, *AIP Conference Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2010), Symposium 112, Recent Developments in Hilbert Space Tools and Methodology for Scientific Computing, 19-26 September 2010*, 3, Rodos, s.1950–1953.

[29] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2013). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: probabilistic evolutions and related approximants for unidimensional autonomous systems, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(1), 58–72.

[30] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2013). A contemporary linear representation theory for ordinary differential equations: multilinear algebra in folded arrays (folarrs) perspective and its use in multidimensional case, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(1), 38–57.

[31] **Baykara, N.A.**, **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2012). Univariate single quantum harmonic oscillator from probabilistic evolution perspective, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12)*, s.27–32.

[32] **Hunutlu, F.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2012). Conicalization of the Probabilistic Evolutions for the ordinary and forced Van der Pol equation under given initial conditions, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), 13-15 June 2012*, 4, Yaş, s.39–44.

[33] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2012). Quantum expected value dynamics in probabilistic evolution perspective for systems under dynamic weak external fields, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12)*, s.241–245.

[34] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2012). Convergence of Probabilistic Evolution Truncation Approximants via Eigenfunctions of Evolution Operator, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), 13-15 June 2012*, Yaş, s.45–50.

[35] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution for the Most General First Order Single Unknown Explicit ODEs: Autonomization, Triangularization, and , Certain Important Aspects in the Analysis for Multi Unknown Case, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), 13-15 June 2012*, Yaş, s.57–62.

[36] **Öztürk, T.N. ve Demiralp, M.** (2012). Probabilistic Evolution in Purely Second Order One Unknown Autonomous Explicit ODEs Under Initial Conditions, *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), 13-15 June 2012*, Yaş, s.63–68.

[37] **Demiralp, M.** (2013). A probabilistic evolution approach trilogy, part 1: quantum expectation value evolutions, block triangularity and conicality, truncation approximants and their convergence, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(4), 1170–1186.

[38] **Demiralp, M. ve Baykara, N.A.** (2013). A probabilistic evolution approach trilogy, part 2: spectral issues for block triangular evolution matrix, singularities, space extension, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(4), 1187–1197.

[39] **Demiralp, M. ve Tunga, B.** (2013). A probabilistic evolution approach trilogy, part 3: temporal variation of state variable expectation values from Liouville equation perspective, *Journal of Mathematical Chemistry*, *51*(4), 1198–1210.

[40] **Demiralp, M.**, **Demiralp, E. ve Hernandez-Garcia, L.** (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: theoretical background and mathematical formulation, *Journal of Mathematical Chemistry*, *50*(4), 850–869.

[41] **Demiralp, E.**, **Demiralp, M. ve Hernandez-Garcia, L.** (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: phenomenological reasoning and principal characteristics of probabilistic evolution, *Journal of Mathematical Chemistry*, *50*(4), 870–880.

[42] **Demiralp, M.** (2014). Squarificating the Telescope Matrix Images of Initial Value Vector in Probabilistic Evolution Theory (PET), *Proceedings of 19th International Conference on Applied Mathematics (AMATH 2014), a World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS) Conference), 15-17 December 2014*, 1, İstanbul, s.99–104.

[43] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic Evolution Approach for the Solution of Explicit Autonomous Ordinary Differential equations. Part 1: Arbitrariness and Equipartition Theorem in Kronecker Power Series, *Journal of Mathematical Chemistry*, *52*(3), 866–880.

[44] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. Part 2: Kernel separability, space extension, and, series solution via telescopic matrices, *Journal of Mathematical Chemistry*, *52*(3), 881–898.

[45] **Demiralp, M.** (2015). A Fluctuation Expansion for Kronecker Power Series Obtained Through Probabilistic Evolution Theory for the Case of Probabilistic Initial Value Impositions, *Proceedings of the 4th International Conference on Applied and Computational Mathematics (ICACM'15), 5-7 September 2015*, Seul, s.117–124.

[46] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2015). Probabilistic evolution theory for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions: Implementation, *AIP Conference Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2015), 20-23 March 2015*, cilt1702, Atina, s.170002.

[47] **Kırkın, M.E. ve Gözükırmızı, C.** (2015). Probabilistic Evolution Theory for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions: Certain reductive cases, *AIP Conference Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2015), 20-23 March 2015*, cilt1702, Atina, s.170012.

[48] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2016). A Case Study on Squarification in Probabilistic Evolution Theory (PREVTH) for Henon-Heiles Systems, *International Journal of Computers*, *1*, 158–165.

[49] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2017). More practicalization of probabilistic evolution theory: Case studies for the squarification of telescope matrices, *AIP Conference Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences ICNPAA 2016 World Congress, 5-8 July 2016*, cilt1798, La Rochelle, s.020077.

[50] **Gözükırmızı, C. ve Kırkın, M.E.** (2017). Classical symmetric fourth degree potential systems in probabilistic evolution theoretical perspective: Most facilitative conicalization and squarification of telescope matrices, *AIP Conference Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, ICNPAA 2016 World Congress, 5-8 July 2016*, cilt1798, La Rochelle, s.020061.

[51] **Gözükırmızı, C. ve Tataroğlu, E.** (2017). Squarification of telescope matrices in the probabilistic evolution theoretical approach to the two particle classical mechanics as an illustrative implementation, *AIP Conference Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, ICNPAA 2016 World Congress, 5-8 July 2016*, cilt1798, La Rochelle, s.020062.

[52] **Demiralp, M.** (2017). Highest Monomiality Based Probabilistic Evolution Theoretical (PREVTH) Solutions to Explicit Ordinary Differential Equations, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017, 4-8 July 2017*, Kadiz, s.754–764.

[53] **Demiralp, M.** (2018). Promenading in the enchanted realm of Kronecker powers: single monomial probabilistic evolution theory (PREVTH) in evolver dynamics, *Journal of Mathematical Chemistry*, *56*(7), 2001–2023.

[54] **Bayat Özdemir, S. ve Demiralp, M.** (2017). Probabilistic Evolution Theoretical Formulation of Anharmonic Symmetric Quantum Oscillator by Using Quantum Evolver Dynamics, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017, 4-8 July 2017*, Kadiz, s.221–232.

[55] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2017). A Probabilistic Evolution Theoretical (PREVTH) Approach to Quantum Evolver Dynamical Equations for Singular Hamiltonians: Fluctuationlessness Approximation, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017, 4-8 July 2017*, Kadiz, s.1124–1135.

[56] **Bayat Özdemir, S. ve Demiralp, M.** (2018). Using enchanted features of Constancy Adding Space Extension (CASE) to reduce the dimension of evolver dynamics: Single Monomial Probabilistic Evolution Theory, *Journal of Mathematical Chemistry*, *56*(7), 2044–2068.

[57] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2017). Initial Wavefunction Construction for Probabilistic Evolution Theoretical (PREVTH) Evolver Dynamics via PREVTH Parameters and Initial Wave Function Optimization, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017, 4-8 July 2017*, Kadiz, s.1136–1147.

[58] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2018). Somehow emancipating Probabilistic Evolution Theory (PREVTH) from singularities via getting single monomial PREVTH, *Journal of Mathematical Chemistry*, *56*(7), 2024–2043.

[59] **Gözükırmızı, C.**, **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2017). Probabilistic Evolution Theory for the solution of explicit autonomous Ordinary Differential Equations: Squarified telescope matrices, *Journal of Mathematical Chemistry*, *55*(1), 175–194.

[60] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2018). Probabilistic evolution theory for explicit autonomous ordinary differential equations: recursion of squarified telescope matrices and optimal space extension, *Journal of Mathematical Chemistry*, *56*(7), 1826–1848.

[61] **Demiralp, M.** (2018). Probabilistic evolution theory in its basic aspects, and, its fundamental progressive stages, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, *9*, 245–275.

[62] **Tataroğlu, E. ve Demiralp, M.** (2017). An implementative application of probabilistic evolution theory: A case study for two particles celestical mechanical system, *AIP Conference Proceedings of the 11th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, ICNPAA 2016 World Congress, 5-8 July 2016*, cilt1798, La Rochelle, s.020160.

[63] **Landau, L.D. ve Lifshitz, E.M.** (1981). *Quantum mechanics : non relativistic theory*, cilt 3 of *Course of Theoretical Physics*, Elsevier, 3. sürüm.

[64] **Demiralp, M. ve Demiralp, E.** (2011). Probabilistic Evolutions: The Ultimate, Natural and Exact Linearisation of ODEs, *AIP Conference Proceedings of the 9th International Conference on Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE2011), 2-7 October 2011*, Halkidiki.

[65] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2012). Getting Triangularity and Conicality in the Probabilistic Evolutionary Expectation Dynamics of the Purely Quartic Quantum Anharmonic Oscillator, *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation (ISTASC12), 21-23 August 2012*, İstanbul, s.268–271.

[66] **Demiralp, M.** (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective, *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012, 2-5 July 2012*, Murcia, s.449–459.

[67] **Golub, G.H. ve Loan, C.F.v.** (2013). *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 4. sürüm.

[68] **Steeb, W.H. ve Hardy, Y.** (2011). *Matrix Calculus and Kronecker Product: A Practical Approach to Linear and Multilinear Algebra*, World Scientific, 2. sürüm.

[69] **Kurşunlu, A.**, **Yaman, İ. ve Demiralp, M.** (2004). A space extension reductive approach to the solution of eigenvalue problems: Anharmonic oscillator, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2004)*, Halkis, s.224–227.

[70] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.** (2008). Conversion of PDEs to Certain Universal and Easily Handleable Forms Via Space Extension, *1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '08), 29-31 May 2008*, İstanbul, s.179–182.

[71] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.** (2008). Univariate integration via space extension based no fluctuation approximation, *AIP Conference Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008), 15-20 September 2008*, cilt1048, Kos, s.566–569.

[72] **Gözükırmızı, C.** (2012). Space extension possibilities for probabilistic evolution with multinomial right hand side functions, *AIP Conference Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2012), 15-20 September 2012*, cilt1479, Kos, s.2019–2022.

[73] **Bohr, N.** (1920). Über die Serienspektra der Elemente, *Zeitschrift für Physik*, *2*(5), 423–469.

[74] **Ehrenfest, P.** (1927). Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik, *Zeitschrift für Physik*, *45*(7), 455–457.

[75] **Erdmann, K. ve Wildon, M.** (2006). *Introduction to Lie algebras*, Spriger undergraduate mathematics series, Springer-Verlag London.

[76] **de Graaf, W.** (2000). *Lie Algebras: Theory and Algorithms*, Elsevier Science.

[77] **Jacobson, N.** (1979). *Lie Algebras*, Dover Publications, Inc.

[78] **Humphreys, J.E.** (1994). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag London.

[79] **Kamran, N. ve Olver, P.J.** (1994). *Lie algebras, cohomology, and new applications to quantum mechanics: AMS special session on lie algebras, cohomology, and new applications to quantum mechanics, March 20-21, 1992, Southern Missouri State University*, American Mathematical Society, Providence, RI.

[80] **Demiralp, M.** (2005). Determination of Quantum Expectation Values via Fluctuation Expansion, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, selected papers from International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2005 (ICCMSE 2005), 21-26 October 2005*, Loutraki, s.146–149.

[81] **Demiralp, M.** (2005). A Fluctuation Expansion Method for the Evaluation of a Function's Expectation Value, *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2005), 16-20 September 2005*, Rodos, s.711–714.

[82] **Meral, E. ve Demiralp, M.** (2005). Phase Space Consideration in Quantum Dynamical Fluctuation Expansion, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, selected papers from International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering 2005 (ICCMSE 2005), 21-26 October 2005*, Loutraki, s.406–409.

[83] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2008). Evaluation of fluctuation coefficients for three consecutive term recursive basis functions, *AIP Conference Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008), 15-20 September 2008*, cilt1048, Kos, s.231–234.

[84] **Gürvit, E.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2009). Taylor series expansion with the fluctuation freely approximated remainder over highly oscillatory basis functions, *AIP Conference Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2009), 18-22 September 2009*, cilt1168, Girit, s.432–435.

[85] **Demiralp, M.** (2012). Various parallel and diversive aspects of the mathematical fluctuations theory with the related standing issues, *AIP Conference Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2009), 29 September-4 October 2009*, cilt1504, Rodos, s.364–376.

[86] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2013). Conservation law construction via mathematical fluctuation theory for exponentially anharmonic, symmetric, quantum oscillator, *Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 13)*, s.218–225.

[87] **Demiralp, M. ve Kalay, B.** (2013). Singular One Dimensional Quantum Systems in Fluctuation Free Expectation Dynamics: Reciprocal Interparticle Distance Dependent Systems, *Proceedings of the WSEAS 15th International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering (MACMESE'13), 2-4 April 2013*, Kuala Lumpur, s.207–211.

[88] **Demiralp, M. ve Ayvaz, M.** (2013). Expectation value dynamics for isolated quantum systems in the fluctuationlessness perspective: One dimensional symmetric quartic anharmonic oscillator, *Proceedings of the WSEAS 15th International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering (MACMESE'13)*, s.195–200.

[89] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2008). Utilization of the Fluctuationlessness Theorem in the Evaluation of Certain Operator Matrix Representations for Optimally Controlled Simple Quantum Harmonic Oscillator Wave Function, *1st WSEAS International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering (MAASE '08), 29-31 May 2008*, İstanbul, s.216–220.

[90] **Gürvit, E.**, **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (2008). Evaluation of Univariate Integrals via Fluctuationlessness Theorem, *AIP Conference Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2008), 15-20 September 2008*, cilt1048, Kos, s.239–243.

[91] **Demiralp, M.** (2009). No fluctuation approximation in any desired precision for univariate function matrix representations, *Journal of Mathematical Chemistry*, *47*(1), 99–110.

[92] **Baykara, N.A.**, **Gürvit, E. ve Demiralp, M.** (2011). The fluctuationlessness approach to the numerical integration of functions with a single variable by integrating Taylor expansion with explicit remainder term, *Journal of Mathematical Chemistry*, *49*(2), 393–406.

[93] **Demiralp, M.** (2013). Fluctuation Expansion in the Expected Value Evolution for Quantum Dynamics: Basic Issues and the Fluctuation Free Equations, *Latest Trends in Applied Computational Science, Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Applied Computer and Applied Computational Science (ACACOS'13), 2-4 April 2013*, Kuala Lumpur.

[94] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2013). Space Extensions Including Constancy Addition for Exponentially Anharmonic Symmetric Quantum Oscillator in Fluctuation Free Expectation Value Dynamics, *Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 August 2013*, 9, Valensiya, s.111–116.

[95] **Kalay, B. ve Demiralp, M.** (2013). Constancy Added Space Extension for the Fluctuation Free Expectation Value Dynamics of Hydrogen-like Quantum Systems, *Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 August 2013*, Valensiya, s.96–100.

[96] **Baykara, N.A. ve Gürvit, E.** (2014). Approximation of Multivariate Functions via Fluctuationlessness Theorem by Using Nested Taylor Decomposition, *Proceedings of the 14th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2014, 3-7 July 2014*, cilt 1, Kadiz, s.144–150.

[97] **Hermite, C.** (1864). Sur un nouveau développement en série de fonctions., *Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Compt. Rend. Acad. Sci.)*, *58*, 93–100 ve 266–273.

[98] **Abramowitz, M. ve Stegun, I.** (1964). *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Cambridge University Press.

[99] **Arfken, G. ve Weber, H.** (2005). *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Science, USA, 6. sürüm.

[100] **B.Karaoğlu** (2003). *Kuantum Mekaniğine Giriş*, Seyir Yayıncılık, Ankara.

[101] **Demiralp, M.** (2013). Constancy adding space extension (CASE) to get Kronecker Power Series kernel separability in conical explicit ordinary differential equations, *Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE 13), 24-27 June 2013*, Almeria, s.496–503.

[102] **Gözükırmızı, C.** (2013). Enhanced Multivariance Products Representation based scalarization of integrals appearing in solutions of Probabilistic Evolution Equations of conical ODEs, *Proceedings of the WSEAS 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13), 8-10 October 2013*, Antalya, s.79–85.

[103] **Ayvaz, M. ve Demiralp, M.** (2013). Space Extension Strategies for Probabilistic Evolution Approach: Classical Symmetric Quartic Anharmonic Oscillator, *Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 August 2013*, 3, Valensiya, s.81–86.

[104] **Bayat, S. ve Demiralp, M.** (2013). Governing the Reductive Flexibilities in the Kronecker Power Representation of Ordinary Differential Equations Constancy Added Space Extension, *Proceedings of the WSEAS 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13), 8-10 October 2013*, Antalya, s.120–124.

[105] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.** (2014). Constancy adding space extension for ODE sets with second degree multinomial right hand side functions, *AIP Conference Proceedings of the International Conference of Computational Methods in Science and Engineering (ICCMSE 2014), 4-7 April 2014*, cilt1618, Atina, s.875–878.

[106] **Demiralp, M.** (2017). Tricky Aspects of Kronecker Power Series in Constancy Adding Space Extention (CASE) Perspective, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2017, 4-8 July 2017*, Kadiz, s.734–743.

[107] **Kreyszig, E.** (1999). *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, 8. sürüm.

[108] **Kırkın, M.E. ve Demiralp, M.** (2018). A case study for single monomial probabilistic evolution theory (PREVTH), *AIP Conference Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, ICNPAA 2018 World Congress, 16-17 December 2018*, cilt2046, Erivan, s.020045.

[109] **Demiralp, M.** (2018). Coordinate bending studies for univariate Schrödinger equation: Cubic and inverse cubic bending functions, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, *9*, 347–364.

[110] **Bayat Özdemir, S.** (2018). Coordinate axis bending in univariate Schrödinger equations, *AIP Conference Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, ICNPAA 2018 World Congress, 16-17 December 2018*, cilt2046, Erivan, s.020007.

[111] **Kalay, B.** (2018). Energy dependent coordinate bending for quantum dynamics of screened Coulomb potential systems, *AIP Conference Proceedings of the 12th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, ICNPAA 2018 World Congress, 16-17 December 2018*, cilt2046, Erivan, s.020041.

[112] **Bayat Özdemir, S.** (2018). Determination of spectral quantities in hyperbolically Bent coordinates with characteristic potentials, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, *9*, 177–188.

[113] **The Mathworks Inc.**, MuPAD, Sürüm 7.2.0.

[114] **Bender, C. ve Orszag, S.** (1999). *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer-Verlag New York.

[115] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2017). On Autonomy Imposition in Zero Interval Limit Perturbation Expansion for the Spectral Entities of Hilbert-Schmidt Integral Operators, *MDPI Mathematics*, *5*(1), 2.

[116] **Tuna, S. ve Demiralp, M.** (2017). Zero interval limit perturbation expansion for the spectral entities of Hilbert-Schmidt operators combined with most dominant spectral component extraction: formulation and certain techniques, *Journal of Mathematical Chemistry*, *55*(6), 1253–1277.

[117] **Glaisher, J.**, **B.A.**, **F.R.A.S. ve F.C.P.S.** (1871). XXXII. On a class of definite integrals, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *42*(280), 294–302.

[118] **van Z. Wadsworth, D.** (1964). Improved Asymptotic Expansion for the Error Function with Imaginary Argument, *Mathematics of Computation*, *18*(88), 662–664.

[119] **Mehler, F.** (1866). Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variablen nach Laplaceschen Functionen höherer Ordnung., *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *66*, 161–176.

[120] **Wiener, N.** (1988). *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge University Press.

[121] **Bellman, R. ve Cooke, K.L.** (1963). *Differential-difference equations*, Academic Press, New York- London.

[122] **Ryder, G.H.** (1969). Solutions of a Functional Differential Equation, *The American Mathematical Monthly*, *76*(9), 1031–1033.

[123] **Driver, R.D.** (1977). *Ordinary and delay differential equations*, Springer-Verlag New York.

[124] **Guo, S. ve Wu, J.** (2013). *Bifurcation theory of functional differential equations*, Springer-Verlag New York.

[125] **Briat, C.** (2015). *Linear parameter-varying and time-delay systems: analysis, observation, filtering & control*, Advances in Delays and Dynamics (3), Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[126] **Falbo, C.E.**, Some Elementary Methods for Solving Functional Differential Equations.

[127] **Howell, K.** (2015). *Ordinary Differential Equations: An Introduction to the Fundamentals*, CRC Press.

[128] **Reid, W.** (1972). *Riccati Differential Equations*, Mathematics in science and engineering, Academic Press.

[129] **Ince, E.L.** (1956). *Ordinary Differential Equations*, Dover Publications, Inc.

[130] **Chou, C.C. ve Wyatt, R.E.** (2008). Riccati differential equation for quantum mechanical bound states: Comparison of numerical integrators, *International Journal of Quantum Chemistry*, *108*(2), 238–248.

[131] **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.** (1988). Eigenlevel calculations for screened Coulomb potential systems via an integration free algorithm: Space pruning technique, *International Journal of Quantum Chemistry*, *34*(3), 231–245.

[132] **Demiralp, M. ve Altan, B.S.** (1990). An integration-free algorithm for the solution of regular boundary value problems: space pruning approach, *International Journal of Engineering Science*, *28*(4), 239–302.

[133] **Parlett, B.N.** (1998). *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2. sürüm.

[134] **Horn, R.A. ve Johnson, C.R.** (1985). *Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

[135] **Ostrowski, A.M.** (1959). On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristic roots and vectors. III, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *3*(1), 325–340.

[136] **Absil, P.A. ve Van Dooren, P.** (2010). Two-sided Grassmann–Rayleigh quotient iteration, *Numerische Mathematik*, *114*(4), 549–571.

[137] **Parlett, B.N.** (1974). The Rayleigh Quotient Iteration and Some Generalizations for Nonnormal Matrices, *Mathematics of Computation*, *28*(127), 679–693.

EKLER

EK A : Büyültke Toplamdizi Yardımıyla Yaklaşık Çözüm Arayışları
EK B : Gecikimli Sıradan Türevli Denklem İnceleyimleri
EK C : Aralık Katlılaştırımı ile Yeni Hamilton İşleci Tanımı
EK D : Uzay Budayış Yöntemi
EK E : Üstel Dönüşüm Altında Yanaşık Çözüm Tabanlı Saptırım Açılımları
EK F : Sıradan Türevli ve Değişimli Denklemler Tabanlı Uygulayışlar

EK A: Büyültke Toplamdizi Yardımıyla Yaklaşık Çözüm Arayışları

Beklenen değer tanımları ile özyineleyişli bir denklem veya denklem takımları oluşturabilmek için Poisson kümesimgelileri ile ilgili anlatımlara geri dönmeliyiz. Bunun için bir konum işlecine bağımlı çözümcül bir $f(\widehat{q})$ işlevinin Hamilton işleci ile Poisson kümesimgelisine bakalım. Toplamcıllığın kümesimgelideki dağılım özelliğinden

$$\left\{\widehat{H}, f(\widehat{q})\right\} = \frac{1}{2\mu}\left\{\widehat{p}^2, f(\widehat{q})\right\} + \left\{V(\widehat{q}), f(\widehat{q})\right\} = \frac{1}{2\mu}\left\{\widehat{p}^2, f(\widehat{q})\right\} \tag{A.1}$$

yazılabilir. $f(\widehat{q})$ işlevinin beklenen değerinin ikinci dereceden türevli devinim denklemini yazabilmek için iç içe iki Poisson kümesimgelisinin belirlenimi ve üzerinden beklenen değerin alımı gereklidir. Ara aşamalar verilmeksizin (A.1)'den

$$\begin{aligned}\left\{\widehat{H}, \left\{\widehat{H}, f(\widehat{q})\right\}\right\} = &-\frac{1}{\mu}V'(\widehat{q})f'(\widehat{q}) - \frac{2}{\mu}V(\widehat{q})f''(\widehat{q}) + \frac{\hbar^2}{4\mu^2}f^{(4)}(\widehat{q}) \\ &+\frac{1}{\mu}\left[\widehat{H}f''(\widehat{q}) + f''(\widehat{q})\widehat{H}\right]\end{aligned} \tag{A.2}$$

eşitliğini yazılabiliriz. Bu eşitliğin her iki yanını dizgenin dalga işlevi altında beklenen değerini alacak olursak

$$\begin{aligned}\frac{d^2\langle f(\widehat{q})\rangle(t)}{dt^2} = &-\frac{1}{\mu}\left\langle V'(\widehat{q})f'(\widehat{q})\right\rangle(t) - \frac{2}{\mu}\left\langle V(\widehat{q})f''(\widehat{q})\right\rangle(t) \\ &+\frac{\hbar^2}{4\mu^2}\left\langle f^{(4)}(\widehat{q})\right\rangle(t) + \frac{1}{\mu}\left\langle \widehat{H}f''(\widehat{q}) + f''(\widehat{q})\widehat{H}\right\rangle(t)\end{aligned} \tag{A.3}$$

devinim eşitliğine ulaşılırız. (A.3)'te elde edilen eşitlik f işlevinin çözümcüllük dışında bir kısıtı olmayışından dolayı esnek yapıda ve bu nedenle de evrencil yapıdadır. Ayrıca başlangıç dalga işlevinin belirli kısıtlar altında nasıl seçildiğine bağımlı olarak beklenen değerler de değişebilmektedir. Diğer bir deyişle, başlangıç değer esnekliği de söz konusudur.

Durağan düzeyler için (A.3) eşitliği aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\mu}\left\langle V'(\widehat{q})f'(\widehat{q})\right\rangle - \frac{2}{\mu}\left\langle V(\widehat{q})f''(\widehat{q})\right\rangle + \frac{\hbar^2}{4\mu^2}\left\langle f^{(4)}(\widehat{q})\right\rangle \\ &\qquad +\frac{1}{\mu}\left\langle \widehat{H}f''(\widehat{q}) + f''(\widehat{q})\widehat{H}\right\rangle = 0\end{aligned} \tag{A.4}$$

Bu eşitlik özdüzey üzerinde konum işlecine bağlı herhangi bir işlevin kullanımı için temel bir denklemdir. Önceki bölümlerde anlatılan birimsizleştirim olgusu uygun ölçeklendirimler kullanılarak yeniden sağlanabilir. Burada bu değişim eşitliğe $\mu = 1$ ve $\hbar = 1$ alınarak yansıtılabilir. Buna bağlı olan değişikliklerin gizilgüç işlevine de yansıtılması gerekmektedir. Bunlar yapılır ve eşitliğin sol yanındaki en son toplamcıl anlatımın özdenklem karşılığı erke cinsinden birimsiz E ile yazılacak olursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$-\left\langle V'\left(\widehat{q}\right)f'\left(\widehat{q}\right)\right\rangle - 2\left\langle V\left(\widehat{q}\right)f''\left(\widehat{q}\right)\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle f^{(4)}\left(\widehat{q}\right)\right\rangle + 2E\left\langle f''\left(\widehat{q}\right)\right\rangle = 0 \qquad \text{(A.5)}$$

Taban Kümesi İçin İşlev Belirleyimleri

Elde edilen bulguların yardımı ile daha karışık dizgeler için de özyineleyiş oluşturumu ve çözümü ile erke değerinin belirlenimi ya da onun yerine ona yakın bulgular elde edimine girişebilir. Bu sav kapsamında dizgemiz için aşağıdaki üstel gizilgüç işlevi seçilmişti.

$$V\left(\widehat{q}\right) \equiv e^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} - \widehat{I}, \qquad \kappa > 0 \qquad \text{(A.6)}$$

Gizilgüç işlevinin katkısıyla ortaya çıkabilecek olan üstel büyümeyi sonsuzda bastırabilmek için f işlevini aşağıdaki gibi seçmeyi önerebiliriz.

$$f\left(\widehat{q}\right) \equiv \widehat{q}^{2j-2} e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}, \qquad \kappa > 0, \;\; j = 1,2,3,... \qquad \text{(A.7)}$$

(A.5)'te kullanabilmek amacıyla bu işlevin gerekli türevilerini elde edelim.

$$f'\left(\widehat{q}\right) = \left(-\kappa\widehat{q}^{2j-1} + (2j-2)\widehat{q}^{2j-3}\right) e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}, \qquad \kappa > 0, \;\; j = 1,2,3,... \qquad \text{(A.8)}$$

$$f''\left(\widehat{q}\right) = \left(\kappa^2\widehat{q}^{2j} - (4j-3)\kappa\widehat{q}^{2j-2} + (2j-2)(2j-3)\widehat{q}^{2j-4}\right) e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}, \qquad \kappa > 0, \;\; j = 1,2,3,... \qquad \text{(A.9)}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}\left(\widehat{q}\right) = & \left(\kappa^4\widehat{q}^{2j+2} - (8j-2)\kappa^3\widehat{q}^{2j} + (24j^2 - 36j + 15)\kappa^2\widehat{q}^{2j-2}\right. \\ & -(32j^3 - 120j^2 + 148j - 60)\kappa\widehat{q}^{2j-4} \\ & \left. +(2j-2)(2j-3)(2j-4)(2j-5)\widehat{q}^{2j-6}\right) e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}, \\ & \kappa > 0, \;\; j = 1,2,3,... \end{aligned} \qquad \text{(A.10)}$$

(A.6)'dan gizilgüç türevi aşağıdaki anlatımla elde edilebilir.

$$V'\left(\widehat{q}\right) = \kappa\widehat{q}\, e^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}, \qquad \kappa > 0 \qquad \text{(A.11)}$$

(A.8) ve (A.11)'in birleştiriminin her iki yanının beklenen değeri alınarak

$$\left\langle V'\left(\widehat{q}\right)f'\left(\widehat{q}\right)\right\rangle = -\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}\right\rangle + (2j-2)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}\right\rangle, \qquad j = 1,2,3,... \qquad \text{(A.12)}$$

yazılabilir. Öte yandan, (A.6) ve (A.9)'nin birleştiriminin her iki yanının beklenen değeri alındığında aşağıdaki eşitlik yazılablir.

$$\begin{aligned} \left\langle V\left(\widehat{q}\right)f''\left(\widehat{q}\right)\right\rangle = & \kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}\right\rangle - (4j-3)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}\right\rangle + (2j-2)(2j-3)\left\langle \widehat{q}^{2j-4}\right\rangle \\ & - \kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j} e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle + (4j-3)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2} e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle \\ & - (2j-2)(2j-3)\left\langle \widehat{q}^{2j-4} e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle, \qquad j = 1,2,3,... \end{aligned} \qquad \text{(A.13)}$$

Aşağıdaki eşitlikler de daha önce üretilenlerden beklenen değer alımıyla elde edilebilmektedirler.

$$\begin{aligned}\left\langle f''(\widehat{q})\right\rangle &= \kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle-(4j-3)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &\quad+(2j-2)(2j-3)\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle,\\ &\qquad\qquad \kappa>0,\quad j=1,2,3,\ldots\end{aligned}\tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}\left\langle f^{(4)}(\widehat{q})\right\rangle &= \kappa^4\left\langle \widehat{q}^{2j+2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle-(8j-2)\kappa^3\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &\quad+(24j^2-36j+15)\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &\quad-(32j^3-120j^2+148j-60)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &\quad+(2j-2)(2j-3)(2j-4)(2j-5)\left\langle \widehat{q}^{2j-6}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle,\\ &\qquad\qquad \kappa>0,\quad j=1,2,3,\ldots\end{aligned}\tag{A.15}$$

Tüm bu eşitliklerin (A.5)'te kullanımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned}&-\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}\right\rangle+(6j-4)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}\right\rangle-2(2j-2)(2j-3)\left\langle \widehat{q}^{2j-4}\right\rangle\\ &+2\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle-2(4j-3)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+2(2j-2)(2j-3)\\ &\times\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+\frac{1}{4}\kappa^4\left\langle \widehat{q}^{2j+2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle-\left(2j-\frac{1}{4}\right)\kappa^3\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+\left(\frac{3}{2}j^2-\frac{9}{2}j+\frac{15}{16}\right)\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &-(8j^3-30j^2+37j-15)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+(j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5)\\ &\times\left\langle \widehat{q}^{2j-6}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+2\kappa^2E\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle-2(4j-3)\kappa E\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+2(2j-2)(2j-3)E\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle=0,\qquad \kappa>0,\quad j=1,2,3,\ldots\end{aligned}\tag{A.16}$$

Bu bağdaşık (homojen) eşitliği, her iki yanda yalnızca artı anlatımların toplamlarının bulunacağı bir bağdaşımsız eşitlik durumuna getirmek olanaklıdır. Bu amaçla,

$$\begin{aligned}&a_{soy}(j,\kappa)\equiv\\ &(6j-4)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}\right\rangle+2\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+2(2j-2)(2j-3)\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+\frac{1}{4}\kappa^4\left\langle \widehat{q}^{2j+2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+\left(\frac{3}{2}j^2-\frac{9}{2}j+\frac{15}{16}\right)\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+(j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5)\left\langle \widehat{q}^{2j-6}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+2\kappa^2E\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+2(2j-2)(2j-3)E\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \kappa>0,\quad j=1,2,3,\ldots\end{aligned}\tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}&a_{say}(j,\kappa)\equiv\\ &\kappa^2\left\langle \widehat{q}^{2j}\right\rangle+2(2j-2)(2j-3)\left\langle \widehat{q}^{2j-4}\right\rangle+(4j-3)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+\left(2j-\frac{1}{4}\right)\kappa^3\left\langle \widehat{q}^{2j}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle+(8j^3-30j^2+37j-15)\kappa\left\langle \widehat{q}^{2j-4}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle\\ &+2(4j-3)\kappa E\left\langle \widehat{q}^{2j-2}e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}\right\rangle,\qquad \kappa>0,\quad j=1,2,3,\ldots\end{aligned}\tag{A.18}$$

Burada, *soy* ve *say* altsimgeleri “sol yan” ve “sağ yan” sözcüklerini çağrıştırım amaçlı kullanılmıştır. Aşağıdaki eşitlik (A.16) eşitliğine karşılık gelmektedir.

$$a_{soy}(j,\kappa) = a_{say}(j,\kappa) \tag{A.19}$$

(A.16) ve/veya (A.19) özyineleyiş eşitlikleri çözümcül anlatımlı bir çözüm elde edimine olanak verecek gibi görünmemektedir. Bu yüzden, yaklaşık ama sonlu anlatımlı kesin çözüm arayışına girmek gerekmektedir.

Büyültke Toplamdizi Oluşturumu

(A.17) ve (A.18)’deki eşitlikleri, üstel işleç ile çarpım durumunda olan konum işlecininin beklenen değer anlatımlarını beklenen değer tanım eşitlikleri ve ondan üretilebilecek eşitsizlikleri kullanarak üstten sınırlamak olanaklıdır. Bu doğrultuda,

$$\left\langle \widehat{q}^{2j} e^{-\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2} \right\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) x^{2j} e^{-\frac{\kappa}{2}x^2} \phi(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) x^{2j} \phi(x) \equiv \left\langle \widehat{q}^{2j} \right\rangle \tag{A.20}$$

eşitsizliğini ele alalım. Burada, eşitlik, ancak $\kappa = 0$ için geçerli olmaktadır. Bu eşitsizlikten aşağıdaki yargılara varılabilir.

$$\begin{aligned} a_{soy}(j,\kappa) \leq\; & (6j-4)\kappa \left\langle \widehat{q}^{2j-2} \right\rangle + 2\kappa^2 \left\langle \widehat{q}^{2j} \right\rangle + 2(2j-2)(2j-3) \left\langle \widehat{q}^{2j-4} \right\rangle \\ & + \frac{1}{4}\kappa^4 \left\langle \widehat{q}^{2j+2} \right\rangle + \left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{9}{2}j + \frac{15}{16} \right) \kappa^2 \left\langle \widehat{q}^{2j-2} \right\rangle \\ & + (j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5) \left\langle \widehat{q}^{2j-6} \right\rangle + 2\kappa^2 E \left\langle \widehat{q}^{2j} \right\rangle \\ & + 2(2j-2)(2j-3) E \left\langle \widehat{q}^{2j-4} \right\rangle, \\ & \qquad \kappa > 0, \;\; j = 3,4,5,... \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned} a_{say}(j,\kappa) \leq\; & \kappa^2 \left\langle \widehat{q}^{2j} \right\rangle + 2(2j-2)(2j-3) \left\langle \widehat{q}^{2j-4} \right\rangle + (4j-3)\kappa \left\langle \widehat{q}^{2j-2} \right\rangle \\ & + \left(2j - \frac{1}{4} \right) \kappa^3 \left\langle \widehat{q}^{2j} \right\rangle + (8j^3 - 30j^2 + 37j - 15)\kappa \left\langle \widehat{q}^{2j-4} \right\rangle \\ & + 2(4j-3)\kappa E \left\langle \widehat{q}^{2j-2} \right\rangle, \qquad \kappa > 0, \;\; j = 3,4,5,... \end{aligned} \tag{A.22}$$

Burada, (A.21)’de, anlatımlardan birindeki bir çarpan 3’ten küçük j değerleri için eksi olmaktadır. O nedenle, orada, j değerleri 3’ten başlatılmıştır. Tutarlılık açısından, aslında gereksinim olmayışına karşın, (A.22)’de de eş değerlendirime geçmek yerinde görüldüğü için j değerleri 3’ten başlatılmış bulunmaktadır. Bu son iki eşitsizliğin sol yanlarının birbirine eşit oluşuna karşın sağ yanlarının birbirine eşit oluşu gerekmez. Bunun nedeni de, sağ yanların denetlenebilir biçimde büyütülmemiş oluşudur. Bu yüzden de, sağ yanların, birbirine eşit olacak biçimde biraz daha büyütülüşüne gitmek gerekir. Bu amaçla, kullanılabilecek olgu, bilinmeyenler olan beklenen değerlerin büyütülüşüdür. Dolayısıyla,

$$\left\langle \widehat{q}^{2j} \right\rangle \leq \sigma_{2j}(\kappa), \qquad j = 0,1,2,... \tag{A.23}$$

öngörümü yazılabilir. Ama beklenen değerleri büyütürken erke değerini de büyütmek gerekir. Bu nedenle, E_B erkenin büyütülmüş değerini simgelemek üzere

$$E \leq E_B \tag{A.24}$$

öngörümü de gündeme getirilmelidir.

Bu iki öngörümün (A.21) ve (A.22)'de kullanılımıyla sağ yanlar daha da büyütülerek aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$
\begin{aligned}
a_{soy}(j,\kappa) \quad \leq \quad & \frac{1}{4}\kappa^4\sigma_{2j+2}(\kappa)+(1+E_B)\,\kappa^2\sigma_{2j}(\kappa) \\
& +\left\{\left(\frac{3}{2}j^2-\frac{9}{2}j+\frac{15}{16}\right)\kappa^2+(6j-4)\kappa\right\}\sigma_{2j-2}(\kappa) \\
& +2\,(1+E_B)\,(2j-2)(2j-3)\sigma_{2j-4}(\kappa) \\
& +(j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5)\sigma_{2j-6}(\kappa), \\
& \qquad \kappa>0, \quad j=2,3,4,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.25}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{say}(j,\kappa) \quad \leq \quad & \left\{\kappa^2+\left(2j-\frac{1}{4}\right)\kappa^3\right\}\sigma_{2j}(\kappa) \\
& +(4j-3)\kappa\,(1+2E_B)\,\sigma_{2j-2}(\kappa) \\
& +\left\{2(2j-2)(2j-3)+(8j^3-30j^2+37j-15)\kappa\right\}\sigma_{2j-4}(\kappa), \\
& \qquad \kappa>0, \quad j=3,4,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

Bu eşitsizliklerin sağ yanlarının öylesine büyütülmüş oldukları düşünülebilir ki, birbirlerine eşit olabilsinler. Böylece, sağ yanların eşitlenimi $\sigma_{2j+2}(\kappa)$, $\sigma_{2j}(\kappa)$, $\sigma_{2j-2}(\kappa)$, $\sigma_{2j-4}(\kappa)$, ve de, $\sigma_{2j-6}(\kappa)$, arasında bir özyineleyiş oluşturur. Bu özyineleyiş, σ'ların en büyük ve en küçük altsırasayılarının, sırasıyla, $(2j+2)$ ve $(2j-6)$ oluşundan dolayı sekizinci kertedendir. Ancak, burada, yalnızca 2 ile bölünebilen altsırasayılar gündemde olduğundan; özyineleyiş kertesi dört olarak da düşünülebilir. Özyineleyiş kertesi sekiz de olsa dört de olsa; özyineleyiş doğrucul ve bağdaşık olup değişken katsayılıdır. Değişkenlik de j türünden çokterimli katsayılarla nitelendirilebilmektedir. Daha önceki, nicem işleybilimcil uyumlu salıngaç ile ilgili inceleyişlerimizde yaptığımıza andıran biçimde, bilinmeyen için, α_1 ile α_2 ve K, j'den bağımsız ama κ değiştirgesine bağımlı bilinmeyen değişmezler olmak üzere,

$$
\sigma_{2j}(\kappa) \equiv \Gamma\,(j+\alpha_1)\,\alpha_2^j K \tag{A.27}
$$

öngörümüne gidilebilir. Bu öngörüm j'de dördüncü dereceden bir çokterimlinin, j ne olursa olsun, sıfırlanımına götürür. Dördüncü dereceden bir çokterimlinin sıfırlanımı beş doğrucul denklemin sıfırlanımı demektir ve bu denklemlere α_1 ve α_2'nin etkin olarak girişine karşın; K, orantı çarpanı niteliğinden dolayı, etkin olarak girmez. Böylece, (A.27) öngörümü iki sayıl bilinmeyen getirir. E_B'de özyineleyişten gelen bir bilinmeyen olarak sayıyı üçe çıkarır. Ancak, bu üç bilinmeyen o beş cebircil denklemin sağlanımını gerçekleştirmeyebilir. Bu nedenle, en azından iki sayıl bilinmeyenin daha devreye alınımında yarar bulunmaktadır. Bu ise, (A.25) ve (A.26)'nın sağ yanlarının birbirlerine eşitleniminden önce biraz daha büyütülüşleriyle sağlanabilir.

Bu büyütülüş, j büyüdükçe baskınlaşan değil gözardı edilebilecek düzeye inen yapıda olabilmesi için katsayılarda ve tüm j değerleriiçin geçerli olacak biçimde belirlenmelidir. Yeni eklenecek belirsiz değişmezler, altsırasayılı β'larla simgelenirse

(A.25) ve (A.26) aşağıdaki eşitizlikler ile yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
a_{soy}(j,\kappa) \leq & \frac{1}{4}\kappa^4\sigma_{2j+2}(\kappa) + (1+E_B)\,\kappa^2\sigma_{2j}(\kappa) \\
& + \left\{ \left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{9}{2}j + \frac{15}{16}\right)\kappa^2 + (6j-4)\kappa + \beta_1 \right\} \sigma_{2j-2}(\kappa) \\
& + \{2\,(1+E_B)\,(2j-2)(2j-3) + \beta_2\}\,\sigma_{2j-4}(\kappa) \\
& + \{(j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5) + \beta_3\}\,\sigma_{2j-6}(\kappa), \\
& \qquad \kappa > 0, \;\; \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0, \;\; j = 3,4,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.28}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{say}(j,\kappa) \leq & \left\{ \kappa^2 + \left(2j - \frac{1}{4}\right)\kappa^3 + \beta_4 \right\} \sigma_{2j}(\kappa) \\
& + \{(4j-3)\kappa\,(1+2E_B) + \beta_5\}\,\sigma_{2j-2}(\kappa) \\
& + \left\{2(2j-2)(2j-3) + (8j^3 - 30j^2 + 37j - 15)\kappa + \beta_6\right\} \sigma_{2j-4}(\kappa), \\
& \qquad \kappa > 0, \;\; \beta_4, \beta_5, \beta_6 > 0, \;\; j = 3,4,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.29}
$$

Bu eşitsizliklerin sağ yanları birbirlerine eşitlenerek bilinmeyenlerin saptanışına geçilecektir. Bunun için sağ yanlararası farkı ifade eden sapış terimi tanımlayıp sonra da bu sapışın sıfırlanımını sağlamayı amaçlayalım. Bu doğrultuda, aşağıdaki tanım gerçekleştirilebilir.

$$
\begin{aligned}
S_j \equiv & \frac{1}{4}\kappa^4\sigma_{2j+2}(\kappa) - \left\{ \left(2j - \frac{1}{4}\right)\kappa^3 - E_B\kappa^2 + \beta_4 \right\} \sigma_{2j}(\kappa) \\
& + \left\{ \left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{9}{2}j + \frac{15}{16}\right)\kappa^2 + (6j-4)\kappa - (4j-3)\kappa\,(1+2E_B) + \beta_1 - \beta_5 \right\} \\
& \times \sigma_{2j-2}(\kappa) \\
& + \left\{-(8j^3 - 30j^2 + 37j - 15)\kappa + 2E_B(2j-2)(2j-3) + \beta_2 - \beta_6\right\} \sigma_{2j-4}(\kappa) \\
& + \{(j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5) + \beta_3\}\,\sigma_{2j-6}(\kappa), \\
& \qquad \kappa > 0, \;\; \beta_i > 0, \;\; i = 1,2,3,4,5,6, \;\; j = 3,4,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.30}
$$

Burada, S_j ile simgelenen büyüklük κ ile E_B bilinmeyen değiştirgeleri yanısıra β bilinmeyen değiştirgelerine de bağımlıdır. Bu büyüklüğün j'nin 2'den büyük tüm bütünsayı değerleri için sıfırlanımı öngörülmektedir. Dolayısıyla, aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
S_j = S_j\,(& \kappa, E_B, \beta_1 - \beta_5, \beta_2 - \beta_6, \beta_3, \beta_4, \\
& \sigma_{2j+2}(\kappa), \sigma_{2j}(\kappa), \sigma_{2j-2}(\kappa), \sigma_{2j-4}(\kappa), \sigma_{2j-6}(\kappa)\big) = 0, \\
& j = 3,4,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.31}
$$

Bu denkleme çözüm getirebilmek için (A.27)'deki öngörümü, diğer tüm altsırasayılı σ'ları σ_{2j-6} türünden yazabilmek için kullanabiliriz. Böylece

$$
\begin{aligned}
\sigma_{2j+2}(\kappa) &= (j+\alpha_1)\,(j+\alpha_1-1)\,(j+\alpha_1-2)\,(j+\alpha_1-3)\,\alpha_2^4\sigma_{2j-6}(\kappa) \\
\sigma_{2j}(\kappa) &= (j+\alpha_1-1)\,(j+\alpha_1-2)\,(j+\alpha_1-3)\,\alpha_2^3\sigma_{2j-6}(\kappa) \\
\sigma_{2j-2}(\kappa) &= (j+\alpha_1-2)\,(j+\alpha_1-3)\,\alpha_2^2\sigma_{2j-6}(\kappa) \\
\sigma_{2j-4}(\kappa) &= (j+\alpha_1-1)\,\alpha_2\sigma_{2j-6}(\kappa), \\
& \qquad\qquad j = 3,4,5,\ldots
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

eşitliklerini elde ederiz. Bunlardan aşağıdaki eşitlikler ve denklemler üretilebilir.

$$S_j(\kappa, E_B) \equiv P_j(\kappa, E_B)\,\sigma_{2j-6}(\kappa)\,\alpha_2^{j-3}, \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.33)}$$

$$P_j(\kappa, E_B) = 0, \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.34)}$$

Burada P_j (A.32)'deki tüm eşitliklerin (A.30)'da kullanımıyla elde edilen σ_{2j-6}'ların katsayılarını ifade eden çokterimlilerdir. (A.31)'in doğru olabilmesi için tüm bu katsayıların sıfırlanımı gerekir ve bu da (A.34)'te gösterilmiştir. Bu katsayı çokterimlisi açık olarak ifade edilmek istenirse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$P_j(\kappa, E_B) \equiv \sum_{k=1}^{5} P_j^{(k)}(\kappa, E_B), \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.35)}$$

$$P_j^{(1)}(\kappa, E_B) \equiv \frac{\alpha_2^4}{4}\kappa^4 (j+\alpha_1)(j+\alpha_1-1)(j+\alpha_1-2)(j+\alpha_1-3), \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.36)}$$

$$P_j^{(2)}(\kappa, E_B) \equiv -\alpha_2^3\left\{\left(2j-\frac{1}{4}\right)\kappa^3 - E_B\kappa^2 - \beta_4\right\}(j+\alpha_1-1)(j+\alpha_1-2)(j+\alpha_1-3), \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.37)}$$

$$P_j^{(3)}(\kappa, E_B) \equiv \alpha_2^2\left\{\left(\frac{3}{2}j^2 - \frac{9}{2}j + \frac{15}{16}\right)\kappa^2 + (6j-4)\kappa - (4j-3)\kappa(1+2E_B) + \beta_1 - \beta_5\right\}(j+\alpha_1-2)(j+\alpha_1-3), \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.38)}$$

$$P_j^{(4)}(\kappa, E_B) \equiv \alpha_2\left\{-(8j^3 - 30j^2 + 37j - 15)\kappa + 2E_B(2j-2)(2j-3) + \beta_2 - \beta_6\right\}(j+\alpha_1-3), \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.39)}$$

$$P_j^{(5)}(\kappa, E_B) \equiv \{(j-1)(j-2)(2j-3)(2j-5) + \beta_3\}, \qquad j = 3,4,5,... \qquad \text{(A.40)}$$

Son beş eşitlikten görülebileceği üzere, P büyüklüğü j bütünsayı değişkenine göre dördüncü dereceden bir çokterimlidir. Bu çokterimlinin, j ne olursa olsun, sıfırlanımı için onun toplamcıl açılımının her bir katsayısının ayrı ayrı sıfırlanımı gerekmektedir. Bu amaçla ilk olarak, j^4'ün katsayısının sıfırlanımı gündeme getirilecek olursa aşağıdaki cebircil denklem elde edilir.

$$(\alpha_2\kappa)^4 - 8(\alpha_2\kappa)^3 + 6(\alpha_2\kappa)^2 - 32(\alpha_2\kappa) + 16 = 0 \qquad \text{(A.41)}$$

Bu denklem $(\alpha_2\kappa)$ çarpımına göre dördüncü derecedendir ve kökler için çözümcül anlatımlar bulunabilir. Ancak, bu tür anlatımlar özelsizde çok karışık yapıda olurlar.

Bu olumsuzluktan kaçınım için sayı değerli sonuçlar üretimi yeğlenebilir. MuPAD ile belirlenen dört kökten ikisi eşlenik karmaşık değerli, diğer ikisi ise artı değerlidir. Artı değerler, MuPAD'ın benimsenen duyarlılığı çerçevesinde 0.5178107523 ve 7.724829935 olarak elde edilmişlerdir. Dolayısıyla, α_2 değiştirgesi κ türünden, seçenekli olarak,

$$(\alpha_2)_1 = \frac{0,5718107523}{\kappa}, \qquad (\alpha_2)_2 = \frac{7.724829935}{\kappa} \tag{A.42}$$

değerleri yapısında belirlenmiş olur. Diğer iki karmaşık değer, sorun yaratım olasılığından dolayı devre dışı bırakılmıştır. Ama gerçekten gereksinim doğarsa, ileride onlara odaklanımdan da sözedilebilir.

Yukarıdaki P çokterimlisinde j^3 üslüsünün katsayısının sıfırlanım denklemi aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned}\alpha_2^3\beta_4 + 2\alpha_2^2\kappa - 12\alpha_2^2\kappa^2 + \tfrac{49}{4}\alpha_2^3\kappa^3 - \tfrac{3}{2}\alpha_2^4\kappa^4 + 8E_B\alpha_2 + 54\alpha_2\kappa - 8\alpha_1\alpha_2\kappa \\ -8E_B\alpha_2^2\kappa + E_B\alpha_2^3\kappa^2 + 3\alpha_1\alpha_2^2\kappa^2 - 6\alpha_1\alpha_2^3\kappa^3 + \alpha_1\alpha_2^4\kappa^4 - 28 = 0\end{aligned} \tag{A.43}$$

Simgecil olarak daha rahat çalışabilmek için türü tanımlar yapılabilir. Böylece, (A.43) çok daha elverişli yapıda düzenlenerek, aşağıdaki biçimde de yazılabilir.

$$d_1^3\frac{\beta_4}{\kappa^3} + 2d_1^2\frac{1}{\kappa} + d_2\frac{E_B}{\kappa} + d_3\alpha_1 + d_4 = 0 \tag{A.44}$$

Burada, altsırasayılı d'ler bilinen sayı değerli büyüklükler olup açık tanımları aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} d_1 &\equiv \alpha_2\kappa \\ d_2 &\equiv 8d_1 - 8d_1^2 + d_1^3 \\ d_3 &\equiv d_1^4 - 6d_1^3 + 3d_1^2 - 8d_1 \\ d_4 &\equiv -\frac{3}{2}d_1^4 + \frac{49}{4}d_1^3 - 12d_1^2 + 54d_1 - 28 \end{aligned} \tag{A.45}$$

(A.44), β_4/κ^3, E_B/κ, ve de, α_1 bilinmeyenlerinin her üçüne göre de doğruculdur ve bunlardan biri diğerleri türünden sorunsuz ve eşsiz olarak belirlenebilir. Burada, α_1'in diğerleri türünden belirlenimi yeğlenecektir. Bu durumda, aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\alpha_1 = -d_5\frac{\beta_4}{\kappa^3} - d_6\frac{1}{\kappa} - d_7\frac{E_B}{\kappa} - d_8 \tag{A.46}$$

Burada, altsırasayılandırımlı d'ler sayı değerli bilinen büyüklükler olup açık olarak aşağıda tanımlanmaktadırlar.

$$d_5 \equiv \frac{d_1^3}{d_3}, \qquad d_6 \equiv 2\frac{d_1^2}{d_3}, \qquad d_7 \equiv 2\frac{d_2}{d_3}, \qquad d_8 \equiv 2\frac{d_4}{d_3} \tag{A.47}$$

MuPAD betikleri ile elde edilen bu sonuçlar ve P çokterimlisinin diğer j üslülerinin katsayılarının sıfırlanımı ile elde edilen denklemler bu tutamağa yansıtılmamıştır. Ancak tüm üsler için bilinmeyenleri içerecek biçimde aşağıdaki denklemler yazılabildiği gözlemlenmiştir. Altsırasayılı KD katsayı dizeylerini ve sy ise sağ yan değerlerini göstermek üzere

$$
\begin{aligned}
&KD_{11}\frac{E_B}{\kappa}+KD_{12}\frac{\beta_4}{\kappa^4}=sy_1\\
&KD_{21}\frac{E_B}{\kappa}+KD_{22}\frac{\beta_4}{\kappa^4}+KD_{23}\frac{\beta_1-\beta_5}{\kappa^2}=sy_2\\
&KD_{31}\frac{E_B}{\kappa}+KD_{32}\frac{\beta_4}{\kappa^4}+KD_{33}\frac{\beta_1-\beta_5}{\kappa^2}+KD_{34}\frac{\beta_2-\beta_6}{\kappa}=sy_3\\
&KD_{41}\frac{E_B}{\kappa}+KD_{42}\frac{\beta_4}{\kappa^4}+KD_{43}\frac{\beta_1-\beta_5}{\kappa^2}+KD_{44}\frac{\beta_2-\beta_6}{\kappa}=sy_4
\end{aligned}
\qquad \text{(A.48)}
$$

Bu denklem takımının dizey çözümünden σ_1 ve β_3'e bağlı bir çözüm çıkacağı öngörülüyor. Bu durumda dizgenin erkesi E yi üstten baskılayan E_B değerini en küçük kılacak biçimde en iyileyiş yapmak gerekmektedir. Ancak dizey çözümünde katsayı dizeyinin evirtimi güvence altında değildir. Bu sorunun hangi değiştirgelere bağlı olarak ortaya çıkacağı veya çıkmayacağı da sorgulanması gereken bir durumdur.

EK B: Gecikimli Sıradan Türevli Denklem İnceleyimleri

Nicem işleç beklenen değer belirlenimi için önceki bölümlerde işleç taban kümesi kullanılarak iki terimli özyineleyişli bir sıradan türevli denklem oluşturumu ve bunun çözümü çabasına girilmişti. Bu ek bölümde işleç taban kümeli oluşturulan bu denklem yeniden ele alınarak özyineleyişsiz çözüm aşamaları irdelenmiştir. Özyineleyişsiz denklem oluşturumu sırasında elde edilen en son bağıntı "Gecikimli Sıradan Türevli Denklem (ing: Delay Ordinary Differential Equation)" türünde olup, bu ek bölümde bu olgu anlatılıp, denklemin çözümü üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Özyineleyişsiz Sıradan Türevli Denklem Oluşturumu

Bir önceki bölümde beklenen değer tanımları ile bir denklem kurabilmek için herhangi bir konum işlecine bağlı çözümcül $f(\widehat{q})$ işlevinin Hamilton işleci ile Poisson kümesimgelilerini ele almış ve burada devinim denklemlerini oluşturmuştuk. Erkesi E olan durağan düzeyler için devinim denklemini aşağıdaki gibi yenidem yazabilmiştik.

$$-\left\langle V'(\widehat{q})\,f'(\widehat{q})\right\rangle - 2\left\langle V(\widehat{q})\,f''(\widehat{q})\right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle f^{(4)}(\widehat{q})\right\rangle + 2E\left\langle f''(\widehat{q})\right\rangle = 0 \qquad \text{(B.1)}$$

Gizilgücü üstel yapıyla verilen Nicem Devinbilimcil Bakışık Üstel Uyumsuz Salıngaç dizgesi için inceleyişlerimizde f işlevi için aşağıda verilen bir değiştirgeli anlatımı öngöreceğiz.

$$f(\widehat{q}) \equiv \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}, \qquad \nu > 0 \qquad \text{(B.2)}$$

Burada görünen ve gerçel olduğu öngörülen ν değiştirgesinin başlangıç dalga işlevinin uzbilimcil yapısında varolmadığı öngörülmektedir. (B.1) denkleminde kullanılmak üzere bu işlevin ilk dört türevi aşağıdaki anlatımlarla yazılır

$$\begin{aligned}
f'(\widehat{q}) &= -2\nu\widehat{q}\mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}, \\
f''(\widehat{q}) &= 2\nu\left(2\nu\widehat{q}^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}, \\
f'''(\widehat{q}) &= -4\nu^2\widehat{q}\left(2\nu\widehat{q}^2 - 3\right)\mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}, \\
f^{(4)}(\widehat{q}) &= 4\nu^2\left(4\nu^2\widehat{q}^4 - 12\nu\widehat{q}^2 + 3\right)\mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}, \qquad \kappa > 0 \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

Gizilgüç türevi aşağıdaki anlatımla elde edilebilir.

$$V'(\widehat{q}) = \kappa\widehat{q}\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\widehat{q}^2}, \qquad \kappa > 0 \qquad \text{(B.4)}$$

(B.3)'teki birinci eşitlik ve (B.4)'ün birleştiriminin her iki yanının beklenen değeri alınarak

$$\left\langle V'(\widehat{q})\,f'(\widehat{q})\right\rangle = -2\kappa\nu\left\langle \widehat{q}^2\mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle, \qquad \kappa,\nu > 0 \qquad \text{(B.5)}$$

yazılabilir. Öte yandan, (B.3)'teki ikinci eşitlik ve gizilgücün birleştiriminin her iki yanının beklenen değerinin alımı da aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak verir.

$$\begin{aligned}
\left\langle V(\widehat{q})\,f''(\widehat{q})\right\rangle \;=\;& 4\nu^2\left\langle \widehat{q}^2\mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle - 4\nu^2\left\langle \widehat{q}^2\mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle \\
& -2\nu\left\langle \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle + 2\nu\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle, \qquad \kappa,\nu > 1 \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

f işlevinin ikinci ve dördüncü türevlerinin beklenen değerleri de aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned}
&\left\langle f''(\widehat{q})\right\rangle = 4\nu^2\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle - 2\nu\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle, \\
&\left\langle f^{(4)}(\widehat{q})\right\rangle = 16\nu^4\left\langle \widehat{q}^4 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle - 48\nu^3\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle + 12\nu^2\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle \quad \nu > 0
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Elde edilen tüm bağıntıların (B.1)'de kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak verir.

$$\begin{aligned}
&2\kappa\nu\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle - 8\nu^2\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle + 8\nu^2\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle + 4\nu\left\langle \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle \\
&-4\nu\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle + 4\nu^4\left\langle \widehat{q}^4 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle - 12\nu^3\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle + 3\nu^2\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle \\
&+8\nu^2 E\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle - 4\nu E\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle = 0 \qquad \kappa, \nu > 0
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Bu denklemi, ortak beklenen değer terimlerini biraraya getirerek aşağıdaki biçimde yeniden yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned}
&4\nu^4\left\langle \widehat{q}^4 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle + \left(8\nu^2 E + 8\nu^2 - 12\nu^3\right)\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle + \left(3\nu^2 - 4\nu - 4\nu E\right)\left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle \\
&= \left(8\nu^2 - 2\kappa\nu\right)\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle - 4\nu\left\langle \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle = 0, \qquad \kappa, \nu > 0
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Bu denklem yeni tanımlanacak bir işlev ve onun türevlerinin kullanımı ile sıradan türevli bir denkleme dönüştürülebilir. Bu amaçla,

$$\sigma(\nu) \equiv \left\langle \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle \tag{B.10}$$

tanımı yapılacak olursa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle &= -\sigma'(\nu) \\
\left\langle \widehat{q}^4 \mathrm{e}^{-\nu\widehat{q}^2}\right\rangle &= \sigma''(\nu) \\
\left\langle \widehat{q}^2 \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle &= -\sigma'\left(\nu - \frac{\kappa}{2}\right) \\
\left\langle \widehat{q}^4 \mathrm{e}^{\left(\frac{\kappa}{2}-\nu\right)\widehat{q}^2}\right\rangle &= \sigma''\left(\nu - \frac{\kappa}{2}\right)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Bu tanım ve eşitliklerin (B.9)'te kullanımı aşağıdaki denkleme götürür.

$$\begin{aligned}
&4\nu^4\sigma''(\nu) + \left(-8\nu^2 - 8\nu^2 E + 12\nu^3\right)\sigma'(\nu) + \left(3\nu^3 - 4\nu - 4\nu E\right)\sigma(\nu) \\
&= \left(2\kappa\nu - 8\nu^2\right)\sigma'\left(\nu - \frac{\kappa}{2}\right) - 4\sigma\left(\nu - \frac{\kappa}{2}\right) \qquad \kappa, \nu > 0
\end{aligned} \tag{B.12}$$

İşlev ve/veya türevinde işlev tipli değişken içeren bu ve andıran biçimdeki denklemler bilimcil yazında "İşlevimsi Türevli Denklem (ing: Functional Differential Equation)" başlığı altında ele alınmıştır. Bu çalışmada elde ettiğimiz (B.12) bağıntısı ise bir alt türü olan "Gecikimli Türevli Denklem (ing: Delay Differential Equation)"dir. [121–126]. (B.12) denklemi değişmez katsayılı olsaydı belirtkeler (karakteristikler) aracılığıyla çözülebilirdi. Ancak burada değişken katsayıların varlığı söz konusudur. Bu nedenle, belirtkeler yerine "Ardışık Altaralıklarda Çözüm Yönteminin" kullanımı çok daha uygun olacaktır.

Doğrucul Gecikimli Sıradan Türevli Denklemler

Bilimcil yazında "Doğrucul Gecikimli Sıradan Türevli Denklemler" aşağıdaki eşitlik ile tanımlanır.

$$D_0 f(t) + D_1 f(t-\tau_1) + \ldots + D_m f(t-\tau_m) = 0 \tag{B.13}$$

Burada $f(t)$ herhangi t değişkenine bağlı çözümcül bir işlev, alt indisli D'ler türev işleçleri ve τ'lar da gecikim belirten değerlerdir. Bir gecikimli STD

$$D_0 f(t) + D_1 f(t-\tau) = 0 \qquad t \in [0,\infty) \tag{B.14}$$

eşitliği ile yazılabilir. Değişken tanım aralığı alt aralıklara bölünebilir. $\tau > 0$ için

$$T_j \equiv [j\tau, (j+1)\tau] \tag{B.15}$$

şeklinde yapacağımız alt aralık tanımıyla, tanım aralığını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$[0,\infty) = \bigcup_{j=0}^{\infty} T_j \tag{B.16}$$

Her j. alt aralıkta tanımlı, dışında 0 değerini alacak yeni bir $f_j(t)$ işlevi tanımlayalım.

$$f_j(t) \equiv \begin{cases} f(t) & t \in T_j \\ 0 & t \notin T_j \end{cases} \tag{B.17}$$

Bu yeni işlev ile gecikimli sıradan türev denklemini alt aralıklar için aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$D_0 f_j(t) + D_1 f_{j-1}(t) = 0 \qquad j = 1,2,\ldots \qquad t \in T_j \tag{B.18}$$

Aslında bu D işlevleri sabit katsayılı olduğu durumlar için geçerlidir. D işlevleri değişken katsayılı olduğu durumda aralıklarda değişir. Örneğin

$$D_0 \equiv a_2(t)\frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_2(t)\widehat{I} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned} t \in T_j \qquad &\Longrightarrow \qquad j\tau \leq t \leq (j+1)\tau \\ \bar{t}_{min} \Leftrightarrow j\tau, \qquad &\bar{t}_{max} \Leftrightarrow (j+1)\tau \end{aligned} \tag{B.20}$$

$$t \equiv \alpha_1 \bar{t} + \alpha_2 \qquad \Longrightarrow \qquad j\tau \leq \alpha_1 \bar{t} + \alpha_2 \leq (j+1)\tau \tag{B.21}$$

Eğer

$$\begin{gathered} \bar{t}_{min} \equiv 0 \qquad \bar{t}_{max} \equiv \tau \\ j\tau = \alpha_1 \bar{t}_{min} + \alpha_2 = \alpha_2 \\ (j+1)\tau = \alpha_1 \bar{t}_{max} + \alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \tau = \alpha_1 \tau \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 1 \\ t = \bar{t} + j\tau \end{gathered} \tag{B.22}$$

(B.19)'da yerine koyduğumuzda değişken katsayılı türev işleci D_0 için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$D_0|_{t\to\bar{t}+j\tau} = a_2(\bar{t}+j\tau)\frac{d^2}{d\bar{t}^2} + a_1(\bar{t}+j\tau)\frac{d}{d\bar{t}} + a_2(\bar{t}+j\tau)\widehat{I} \tag{B.23}$$

Değişken katsayılı gecikimli STD (B.18)'i aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$D_0^{(j)} f_j(\bar{t}) + D_1^{(j)} f_{j-1}(\bar{t}) = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad \bar{t} \in [0,1] \tag{B.24}$$

İşlevimiz için bir sonsuzda sıfırlanım kısıtı tanımlayacak olursak GSTD'yi çözebiliriz. Öncelikle bir kesme yaparak bu kısıtı ele alalım.

$$f_j(\bar{t}) \equiv 0 \qquad j \geq m+1 \tag{B.25}$$

$$j = m+1 \qquad \Longrightarrow \qquad D_1^{(m+1)} f_m(\bar{t}) = 0 \tag{B.26}$$

sıradan türevli bağdaşık bir denklem elde ederiz ve bu denklemin geriye doğru çözümünden özelsiz çözüme gidebiliriz.

$$D_1^{(m+1)} \equiv a_1^{(m+1)}(\bar{t}) \frac{d}{d\bar{t}} + a_0^{(m+1)}(\bar{t}) \widehat{I} \tag{B.27}$$

Bu tanımı (B.26)'da yerine koyarsak

$$a_1^{(m+1)}(\bar{t}) f_m'(\bar{t}) + a_0^{(m+1)}(\bar{t}) f_m(\bar{t}) = 0 \tag{B.28}$$

$$\frac{f_m'(\bar{t})}{f_m(\bar{t})} = -\frac{a_0^{(m+1)}(\bar{t})}{a_1^{(m+1)}(\bar{t})} \tag{B.29}$$

Üstel evrik tümlevleyiş kullanarak bu denklemi çözebiliriz.

$$[ln(f_m(\bar{t}))]' = -\frac{a_0^{(m+1)}(\bar{t})}{a_1^{(m+1)}(\bar{t})} \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned} ln(f_m(\bar{t})) - ln(f_m(0)) &= -\int_0^{\bar{t}} dt_1 \frac{a_0^{(m+1)}(t_1)}{a_1^{(m+1)}(t_1)} \\ \Longrightarrow f_m(\bar{t}) = f_m(0) & \underbrace{e^{-\int_0^{\bar{t}} dt_1 \frac{a_0^{(m+1)}(t_1)}{a_1^{(m+1)}(t_1)}}}_{f_m^{(b)}(\hat{t})} \end{aligned} \tag{B.31}$$

Buradan bir belirsiz değiştirgeli bir çözüm ürettik ama çözüm üretebilmek için $f_m(0)$ bilinmiyor. (B.24)'te j yerine m koyduğumuzda

$$D_1^{(m)} f_{m-1}(\bar{t}) + D_0^{(m)} f_m(\bar{t}) = 0 \tag{B.32}$$

denklemini elde ederiz. Yine doğrucul, birinci kerteden bağdaşık bir denklem ettik. Bağdaşık çözümü bilinen bir denklemin bağdaşık olmayan çözümü "Değişmezlerin (Sabitlerin) Değişimi (ing:Variations of Constants)" [127] yöntemiyle bulunur.

Bağdaşık çözüm $f_m^{(b)}(\bar{t})$ biliniyor. Bunun $D_1^{(m+1)}$ altındaki görüntüsü de 0 bulunur.

$$\begin{aligned} D_1^{(m+1)} f_m^{(b)}(\bar{t}) &= 0 \\ m \to m-1 \Longrightarrow D_1^{(m)} f_{m-1}^{(b)}(\bar{t}) &= 0 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Bu olguyu bilerekten $f_{m-1}(\bar{t})$ için bir öngörümde bulunalım.

$$f_{m-1}(\bar{t}) \equiv g(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t}) \tag{B.34}$$

Bu öngörümü (B.32)'de yerine koyacak olursak

$$a_1^{(m)}(\bar{t})\left(g(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t})\right)' + a_0^{(m)}(\bar{t})\left(g(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t})\right) + D_0^{(m)} f_m(\bar{t}) = 0 \tag{B.35}$$

$$a_1^{(m)}(\bar{t})\left(g'(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t}) + g(\bar{t})\, {f_{m-1}^{(b)}}'(\bar{t})\right) + a_0^{(m)}(\bar{t})\left(g(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t})\right) + D_0^{(m)} f_m(\bar{t}) = 0 \tag{B.36}$$

$$a_1^{(m)}(\bar{t})\, {f_{m-1}^{(b)}}'(\bar{t}) + a_0^{(m)}(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t}) = 0 \tag{B.37}$$

bağdaşık çözüm bilindiği için denklem aşağıdaki hale dönüşür.

$$a_1^{(m)}(\bar{t})\, g'(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t}) + D_0^{(m)} f_m(\bar{t}) = 0 \tag{B.38}$$

Buradan $g(\bar{t})$ bulunabilir.

$$g'(\bar{t}) = -\frac{D_0^{(m)} f_m(\bar{t})}{a_1^{(m)}(\bar{t})\, f_{m-1}^{(b)}(\bar{t})} \tag{B.39}$$

Buradan da çıkacak keyfilik ile $f_{m-1}(\bar{t})$ için de bir belirsiz değiştirgeli bir çözüm üretilebilir. İlerleyiş sürdürüldüğünde sayılabilir sonsuzlukta denklem elde edilir.

Özyineleyişsiz sıradan türevli denklem oluşturmak için içine girdiğimiz çabada karşımıza gecikimli sıradan türevli denklemler çıktı. Ancak anlatımlardan da görüldüğü üzere gecikimli STD'ler de kavramcıl olarak özyineleyişlidirler. Burada özyineleyiş değişik işlevler arasında değil, tek bir işlevin alt aralıklardaki yapıları arasında ortaya çıkmaktadır. İşlev için sonsuzda sıfırlanım kısıtı üzerinde kesme ile yaptığımız çözümleyişten geriye doğru giderek sonlu sayıda denklem elde edelir. Bu aşamada oluşacak yapıyı bilgisayar betikleri ile çözmek olanaklı gözükmektedir.

Nicem Üstel uyumsuz Salıngaç İçin GSTD Çözümü

(B.12)'de verilen GSTD'in çözümü için $\frac{\kappa}{2}$ boylu alt aralıklarda çalışacak biçimde işlevde değişken dönüşümü yapıyoruz. Bunun için önce ν yerine $\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}$ koyuyoruz. Burada m sonsuza kadar giden aralık sıra sayısını belirtmekte.

$$\begin{aligned}
&4\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)^4\sigma''\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)\\
&-\left(8\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)^2-12\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)^3+8E\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)^2\right)\\
&\qquad\times\sigma'\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)\\
&+\left(3\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)^2-4\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)-4E\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)\right)\\
&\qquad\times\sigma\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)=\\
&\left(2\kappa\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)-8\left(\nu+(m+1)\frac{\kappa}{2}\right)^2\right)\sigma'\left(\nu+\frac{m}{2}\kappa\right)-4\sigma\left(\nu+\frac{m}{2}\kappa\right)
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Her $\frac{\kappa}{2}$ boylu aralığı $[0,1]$ aralığına ölçeklemek amacıyla ν yerine $\bar{\nu}\frac{\kappa}{2}$ değişkenini koyuyoruz.

$$\sigma_m(\bar{\nu})\equiv\begin{cases}\sigma\left((\bar{\nu}+m)\frac{\kappa}{2}\right) & \bar{\nu}\in[0,1]\\ 0 & \bar{\nu}\notin[0,1]\end{cases} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
&4(\bar{\nu}+m+1)^4\frac{\kappa^4}{2^4}\frac{2^2}{\kappa^2}\ddot{\sigma}_{m+1}(\bar{\nu})\\
&-\left(8(\bar{\nu}+m+1)^2\frac{\kappa^2}{2^2}-12(\bar{\nu}+m+1)^3\frac{\kappa^3}{2^3}+8E(\bar{\nu}+m+1)^2\frac{\kappa^2}{2^2}\right)\frac{2}{\kappa}\dot{\sigma}_{m+1}(\bar{\nu})\\
&+\left(3(\bar{\nu}+m+1)^2\frac{\kappa^2}{2^2}-4(\bar{\nu}+m+1)\frac{\kappa}{2}-4E(\bar{\nu}+m+1)\frac{\kappa}{2}\right)\sigma_{m+1}(\bar{\nu})=\\
&\left(2\kappa(\bar{\nu}+m+1)\frac{\kappa}{2}-8(\bar{\nu}+m+1)^2\frac{\kappa^2}{2^2}\right)\frac{2}{\kappa}\dot{\sigma}_m(\bar{\nu})-4\sigma_m(\bar{\nu})
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Üstel işlevin beklenen değeri olarak tanımlanan $\sigma(\nu)$'nın sonsuzda sıfırlanıyor olması koşulunu denklemimizi çözmek için kullanabiliriz.

$$\sigma(\nu)|_{\nu\to\infty}=0 \tag{B.43}$$

koşulu altında (B.42) denkleminin sol yanını yanaşık olarak sıfır alırız ve her alt aralık için sağ yanını bağdaşık olarak çözeriz.

$$\kappa(\bar{\nu}+m+1)(2\bar{\nu}+2m+1)\dot{\sigma}_m(\bar{\nu})+2\sigma_m(\bar{\nu})=0 \tag{B.44}$$

$$\sigma_m(\bar{\nu})=C_m\left(\frac{\bar{\nu}+m+1}{2\bar{\nu}+2m+1}\right)^{\frac{2}{k}} \tag{B.45}$$

(B.42)de m yerine $m-1$ koyarak ilerleyelim.

$$\kappa^2 (\bar{v}+m)^4 \ddot{\sigma}_m(\bar{v}) - \kappa (\bar{v}+m)^2 (4-3\kappa(\bar{v}+m)+4E)\dot{\sigma}_m(\bar{v})$$
$$+\frac{\kappa}{2}(\bar{v}+m)\left(\frac{3}{2}\kappa(\bar{v}+m)-4-4E\right)\sigma_m(\bar{v}) =$$
$$2\kappa(\bar{v}+m)(1-2\bar{v}-2m)\dot{\sigma}_{m-1}(\bar{v}) - 4\sigma_{m-1}(\bar{v}) \tag{B.46}$$

$\sigma_m(\bar{v})$ bilindiğine göre yerine konularak buradan $\sigma_{m-1}(\bar{v})$ bulunur. (B.42) denklemimde m yerine $m-2$ konularak bir alt aralık için denklem elde edilir ve buradan $\sigma_{m-2}(\bar{v})$ bulunur.

$$\kappa^2 (\bar{v}+m-1)^4 \ddot{\sigma}_{m-1}(\bar{v}) - \kappa (\bar{v}+m-1)^2 (4-3\kappa(\bar{v}+m-1)+4E)\dot{\sigma}_{m-1}(\bar{v})$$
$$+\frac{\kappa}{2}(\bar{v}+m-1)\left(\frac{3}{2}\kappa(\bar{v}+m-1)-4-4E\right)\sigma_{m-1}(\bar{v}) =$$
$$2\kappa(\bar{v}+m-1)(1-2\bar{v}-2m+2)\dot{\sigma}_{m-2}(\bar{v}) - 4\sigma_{m-2}(\bar{v}) \tag{B.47}$$

$\sigma_m(\bar{v})$'lar üzerinde oluşan bu özyineleyiş m yerine 0 konulana kadar sürer. Böylece $m+1$ tane denklem elde edilmiş olunur. Aslında özyineleyişsiz bir sıradan türevli denklem elde ederek çözmek istediğimiz sorunumuzda önümüze yine özyineleyişli bir çözüm çıktı. (B.42), (B.46), (B.47) ve ilerleyiş sürdürüldüğünde oluşacak tüm sıradan türevli denklemlerde katsayılar o alt aralığa göre değişecektir. Bu durumda oluşacak özyinelemeli yapı için bilgisayar betiği yazmak ve oradan çözüme gitmek gerekmektedir.

EK C: Aralık Katlılaştırımı ile Yeni Hamilton İşleci Tanımı

Nicem üstel uyumsuz salıngaç dizgesinin Hamilton işlecinin özdeğer sorunu

$$\widehat{H}\psi = E\psi \qquad -\frac{1}{2}\psi'' + \left(\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}x^2} - 1\right)\psi = E\psi \qquad x \in (-\infty, \infty) \tag{C.1}$$

olarak tanımlanır. Dalga işlevi tanımlı aralıkta her yerde sürekli olmalı ayrıca

$$\psi|_{x\to\infty} = 0 \tag{C.2}$$

koşulunu sağlamalıdır. Dalga işlevinin bakışık ve evrik bakışık çözümleri vardır. Biz çalışmamızda bakışık olan ile ilerleyişi sürdüreceğiz.

$$\psi(-x) = \psi(x) \tag{C.3}$$

Bu durum x^2 şeklinde gözüken bağımsız değişkenimizi yeni bir değişken olarak tanımlamamıza olanak sağlar.

$$\begin{aligned} y \equiv \frac{x^2}{2} & \qquad x = \sqrt{2y} \\ \frac{d}{dx} &= \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} = \sqrt{2y}\frac{d}{dy} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= 2\sqrt{y}\frac{d}{dy}\sqrt{y}\frac{d}{dy} = 2y\frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy} \end{aligned} \tag{C.4}$$

Burada x eksi sonsuz, sonsuz aralığında tanımlı iken y sıfır, sonsuz aralığında tanımlı olur. Böylelikle aralık katlılaştırımı gerçekleştirilmiş olur. Yeni değişken y'ye göre Hamilton işlecini yazacak olursak

$$\widehat{H}|_{x^2\to 2y} = -y\frac{d^2}{dy^2} - \frac{1}{2}\frac{d}{dy} + (\mathrm{e}^{\kappa y} - 1)\widehat{I} \qquad y \in [0, \infty) \tag{C.5}$$

$\widehat{H}$ başlangıç tanımında özüne eş ama şu anda bu koşulu sağlamıyor. Elimizdeki işlevleri bunu sağlayacak biçimde yeniden düzenleyelim.

Birim ağırlık altında birimboylulaştırım koşulu aşağıdaki biçimdedir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x)\psi(x) = 1 \tag{C.6}$$

Değişken dönüşümü uygularsak

$$dx = \frac{1}{\sqrt{2y}}dy \tag{C.7}$$

elde ederiz. Böylece tümlevde ağırlık $1/\sqrt{2y}$ olur.

y değişkenine bağlı olan yeni bir dalga işlevi tanımı yaparak aralık katlılaştırımı uygulayalım.

$$\psi(x) \equiv 2^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}f(y) \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x)\psi(x) &= 2\int_0^{\infty} dx\psi^*(x)\psi(x)\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\infty} dy\frac{1}{\sqrt{y}}\psi^*(x)|_{x\to\sqrt{2y}}\psi(x)|_{x\to\sqrt{2y}}\\ &= \int_0^{\infty} dyf^*(y)f(y) \end{aligned} \tag{C.9}$$

Hamilton işlecinin beklenen değerini yeni değişken y üzerinden yazacak olursak

$$\begin{aligned}\langle\widehat{H}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*(x)\widehat{H}\psi(x) &= 2\int_0^{\infty} dx\psi^*(x)\widehat{H}\psi(x)\\ &= \sqrt{2}\int_0^{\infty} dy\frac{1}{\sqrt{y}}2^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}f^*(y)\widehat{H}2^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}f(y)\\ &= \int_0^{\infty} dyy^{-\frac{1}{4}}f^*(y)\widehat{H}y^{\frac{1}{4}}f(y) \end{aligned} \tag{C.10}$$

eşitliğini elde ederiz. Denklemin sağ yanındaki tümlevin içini çözümleyelim.

$$(y^{\frac{1}{4}}f(y))' = \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}f(y) + y^{\frac{1}{4}}f'(y) \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}(y^{\frac{1}{4}}f(y))'' &= \left(\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}f(y) + y^{\frac{1}{4}}f'(y)\right)'\\ &= -\frac{3}{16}y^{-\frac{7}{4}}f(y) + \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{4}}f'(y) + y^{\frac{1}{4}}f''(y) \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}\widehat{H}|_{x^2=2y}y^{\frac{1}{4}}f(y) &= -y\left(\frac{3}{16}y^{-\frac{7}{4}}f(y) + \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{4}}f'(y) + y^{\frac{1}{4}}f''(y))\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}f(y) + y^{\frac{1}{4}}f'(y)\right) + y^{\frac{1}{4}}\left(\mathrm{e}^{\kappa y}-1\right)f(y)\\ &= -y^{\frac{5}{4}}f''(y) - y^{\frac{1}{4}}f'(y) + \left(\frac{1}{16}y^{-\frac{3}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\left(\mathrm{e}^{\kappa y}-1\right)\right)f(y) \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}y^{-\frac{1}{4}}f^*(y)\widehat{H}|_{x^2=2y}y^{\frac{1}{4}}f(y) &= -yf^*(y)f''(y) - f^*(y)f'(y) + \left(\frac{1}{16y} + \mathrm{e}^{\kappa y} - 1\right)f^*(y)f(y)\\ &= f^*(y)\left(-y\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy} + \left(\frac{1}{16y} + \mathrm{e}^{\kappa y} - 1\right)\widehat{I}\right)f(y) \end{aligned} \tag{C.14}$$

Buradan yeni Hamilton işleci tanımına gidersek

$$\begin{aligned}\widetilde{H} &\equiv -y\frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy} + \left(\frac{1}{16y} + \mathrm{e}^{\kappa y} - 1\right)\widehat{I}\\ &= -\frac{d}{dy}\left(y\frac{d}{dy}\right) + \left(\frac{1}{16y} + \mathrm{e}^{\kappa y} - 1\right)\widehat{I} \end{aligned} \tag{C.15}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada özüne eşliğin sağlandığı bir işleç elde ettik. Bundan sonra bu Hamilton işlecinin özdeğer sorununu ele alalım.

$$\widetilde{H}f(y) = Ef(y) \quad \Longrightarrow \quad -(yf(y))' + \left(\frac{1}{16y} + \mathrm{e}^{\kappa y} - 1\right)f(y) = Ef(y) \tag{C.16}$$

Elimizde sıfırda düzgün tekilliği, sonsuzda düzgün olmayan tekilliği olan bir bağıntı var. Bu denklemi Riccati denklemine [128–130] benzeterek çözmeye çalışalım. Bunun için

$$
\begin{aligned}
f(y) &\equiv \mathrm{e}^{-\mathrm{u(y)}}, \qquad\qquad \mathrm{f}'(\mathrm{y}) = -\mathrm{u}'\mathrm{e}^{-\mathrm{u}} \\
\left(yf'(y)\right)' &= -\left(yu'\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}\right)' = -u'\mathrm{e}^{-\mathrm{u}} - \mathrm{yu}''\mathrm{e}^{-\mathrm{u}} + \mathrm{y}(\mathrm{u}')^2\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}
\end{aligned}
\tag{C.17}
$$

tanımını yapalım ve denklemde yerine koyalım.

$$
u' + \mathrm{yu}'' - \mathrm{y}(\mathrm{u}')^2 + \left(\frac{1}{16\mathrm{y}} + \mathrm{e}^{\kappa \mathrm{y}} - 1\right) - \mathrm{E} = 0 \tag{C.18}
$$

gerekli değişken dönüşümlerini yapalım.

$$
u' \equiv v \qquad \Longrightarrow \qquad yv' + v - yv^2 + \left(\frac{1}{16y} + \mathrm{e}^{\kappa y} - 1\right) - E = 0 \tag{C.19}
$$

Elde ettiğimiz denklemin sonsuzdaki davranışını inceleyecek olursak

$$
yv_\infty^2 \mathrm{e}^{\kappa y} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_\infty = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\mathrm{y}}}{\sqrt{y}} \tag{C.20}
$$

yanaşık çözümünü buluruz. Bulunan bu çözüme sonsuzda sönecek yeni anlatımlar ekleyerek yanaşık çözümün iyileştirilmesi çabasına gidilebilir.

$$
v(y) \equiv \frac{\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\mathrm{y}}}{\sqrt{y}} + v_1(y) + v_2(y)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}y} \tag{C.21}
$$

$$
v'(y) = \left(\frac{\kappa}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}y} + v_1'(y) + v_2'(y)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}y} - \frac{\kappa}{2}v_2(y)\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}y} \tag{C.22}
$$

Yeni çözüm önerimizi ve türevini (C.19)'de yerine koyacak olursak

$$
y\left(\frac{\kappa}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}y} + yv_1' + yv_2'\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}y} - y\frac{\kappa}{2}v_2\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}y} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{\kappa}{2}\mathrm{y}}}{\sqrt{y}} + v_1 + v_2\mathrm{e}^{-\frac{\kappa}{2}y} + \ldots = 0 \tag{C.23}
$$

eşitliğini elde ederiz. Burada E değerinin de işin içine girdiği görülür. Denklem erke değerine bağlı olarak çözülür.

EK D: Uzay Budayış Yöntemi

"Uzay Budayış Yöntemi (ing: Space Pruning Method)" [131, 132] aranan özişlevin gösterilimi için dizge deviniminde sağlanımı gereken kıyı koşullarını sağlayan bir taban kümesi oluşturumuna dayanır. Oluşturumda temel ilke, yalnızca işlevin özünün değil onun Hamilton işlecinin belli sayıda ilk doğalsayı üslülerinin altındaki görüntülerinin koşulları sağlayacak yapıya büründürülüşüdür.

Nicem Uyumsuz Salıngaç İçin Denklem ve Arı Üstel Çözümü

Söz konusu dizgenin Hamilton işlecinin izgecil denklemi aşağıdaki anlatımlarla verilebilir.

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+\left(e^{\frac{\kappa}{2}x^2}-1\right)f(x)=Ef(x), \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{D.1}$$

İnceleyişlerimizide x sonsuza gittiğinde (D.1) denkleminin yanaşık eşdeğerinin (ing: asymptotik equivalent) kullanımı çözümün sonsuzdaki davranışı konusunda görüş yaratır. Ancak, burada denklemin özü yerine onun üstel çözüm üzerindeki karşılığının kullanımı daha yalın bir inceleyiş için olanak sağlar. (D.1) için aşağıdaki üstel çözüm yapısı öngörülebilir.

$$f(x)\equiv e^{u(x)} \tag{D.2}$$

Bu anlatımdaki yeni bilinmeyen $u(x)$'in, x artı ve eksi sonsuza giderken, eksi sonsuza giden ama onun dışında sonlu kalan bir işlev olduğu öngörülmektedir. Bu işlevi, izgecil denklemde yerine koyar isek, gerekli yalınlaştırımlardan sonra $u(x)$ için aşağıdaki denklemi yazabiliriz.

$$-\frac{1}{2}\left(u''(x)+u'(x)^2\right)+e^{\kappa\frac{x^2}{2}}-1-E=0 \tag{D.3}$$

Bunun aşağıdaki yapıda yeniden düzenlenişi yanaşık inceleyişler için çok daha uygundur.

$$u'(x)^2=2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}-2-2E-u''(x) \tag{D.4}$$

Buradan dördül kök alarak

$$u'(x)=\pm\sqrt{2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}-2-2E-u''(x)} \tag{D.5}$$

ve bunun da ötesinde uygunluk taşıyan

$$u'(x)=-\sqrt{2}e^{\kappa\frac{x^2}{4}}\sqrt{1-(1+E)e^{-\kappa\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{2}u''(x)e^{-\kappa\frac{x^2}{2}}} \tag{D.6}$$

denklemine ulaşılabilir. Bu sonuca ulaşılırken artı, eksi im ikileminde eksilik seçilmiştir. Bunun nedeni de, x artı ya da eksi sonsuza giderken $u(x)$'in eksi sonsuza gidişinin sağlanımıdır. Böylece, özişlevin de sonsuzda sönümü sağlanmış olmaktadır.

(D.6)'nın sağ yanındaki dördül kök içinde, 1'i izleyen eksi imli anlatım, x'in imsiz değerde sonsuza gidişi durumunda sıfıra yanaşır. Diğer bir deyişle, 1'in yanında sonsuz küçülür. Bu anlatımı izleyen diğer anlatım ise bilinmeyen işlev olan $u(x)$'in ikinci türeviyle orantılıdır ve neye yanaşacağını ilk anda kestirebilmek kolay değildir. Yine de bu anlatımın da sıfıra yanaşacağı öngörülerek ilerleyiş çabasına girişilebilir. Böyle yapılırsa, (D.6)'dan aşağıdaki yanaşık eşitliğe ulaşılır.

$$u'(x)\Big|_{x\to\pm\infty} \approx -\sqrt{2}e^{\kappa\frac{x^2}{4}} \tag{D.7}$$

Yanaşık bir eşitliğin her iki yanının yanaşıklık değişkenine türevlenimi yanaşıklığın geçerliliğini korur. Böylece, (D.7)'den aşağıdaki yanaşık eşitliğe ulaşılabilir.

$$u''(x)\Big|_{x\to\pm\infty} \approx -\frac{\kappa}{\sqrt{2}}xe^{\kappa\frac{x^2}{4}} \tag{D.8}$$

Bu ise

$$-\frac{1}{2}u''(x)e^{-\kappa\frac{x^2}{2}}\Bigg|_{x\to\pm\infty} \approx \frac{\kappa}{2\sqrt{2}}xe^{-\kappa\frac{x^2}{4}} \tag{D.9}$$

anlamına gelir. Böylece, soldaki anlatımın, daha önceden öngörülen, sıfıra yanaşım olgusu kanıtlanmış olur. Bu anlatımda görünen üstel işlevin dördülü $-(1+E)$ anlatımının çarpanı olarak ortaya çıkar. Bu yüzden, (D.9)'un solundaki yanaşımı belirtilen anlatım içerdiği üstel işlevle sıfıra yanaşırken, 1 dışındaki diğer anlatım yine bu üstel işlevle, ama özü yerine dördülüyle sıfıra yanaşır. Bu durum saptırım açılımı kullanımına olanak sağlar.

Yanaşıklık Tabanlı Saptırım Açılımı

(D.6) denkleminde x değişkeni artı ya da eksi sonsuza giderken yukarıda saptanan yanaşım düzeylerini yansıtacak biçimde ilgili anlatımların her birinin önüne bir özelsizleştirim değiştirgesi ya da onun bütünsayı üslülerini yerleştirerek çok daha yaygın nitelikli bir denklem elde edilebilir.

$$u'(x,\varepsilon) = -\sqrt{2}e^{\kappa\frac{x^2}{4}}\sqrt{1-\varepsilon\frac{1}{2}u''(x,\varepsilon)e^{-\kappa\frac{x^2}{2}}-\varepsilon^2(1+E)e^{-\kappa\frac{x^2}{2}}} \tag{D.10}$$

Bu denklem $\varepsilon = 1$ için (D.6) ile örtüşür. $\varepsilon = 0$ için de yanaşık açılımın ilk anlatımını verir. Diğer bir deyişle, $u(x,0)$ işlevi, yukarıda verilen yanaşık açılımın ilk anlatımıyla örtüşür.

(D.10)'un çözümü için aşağıdaki saptırım açılımı öngörülebilir.

$$u(x,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j(x) \tag{D.11}$$

Burada, Saptırım Kuramı'ndan [16,114] bilindiği üzere, $u(x,\varepsilon)$ işlevinin ε'a çözümcül olarak bağımlı olduğu öngörülmektedir.

Bu açılım (D.10)'da yerine yerleştirilip, $u_j(x)$ bilinmeyen işlevlerinin belirlenimine geçilebilir Ancak, (D.10)'un içerdiği dördül kök yapısı işlemleri güçleştirir. Bu yüzden, daha yalın belirleyişler için, (D.10)'un her iki yanın dördülü alınarak elde edilebilen aşağıdaki denkleme odaklanalım.

$$u'(x,\varepsilon)^2 = 2e^{\kappa\frac{x^2}{2}} - \varepsilon u''(x,\varepsilon) - \varepsilon^2(2+2E) \tag{D.12}$$

Buradan çözüme geçebilmek için (D.11)'den aşağıdaki eşitlikleri yazmak gerekmektedir.

$$u'(x,\varepsilon)^2=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{k=0}^{j}u'_k(x)u'_{j-k}(x) \tag{D.13}$$

$$2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j 2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}\delta_{j,0} \tag{D.14}$$

$$-\varepsilon u''(x,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\left\{-u''_{j-1}(x)\right\},\qquad u_{-1}(x)\equiv 0 \tag{D.15}$$

$$-\varepsilon^2(2+2E)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\left\{-(2+2E)\right\}\delta_{j,2} \tag{D.16}$$

Burada δ Kronecker simgesini göstermektedir. Bu eşitliklerin (D.12)'de kullanımı aşağıdaki eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\sum_{k=0}^{j}u'_k(x)u'_{j-k}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\left\{2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}\delta_{j,0}-u''_{j-1}(x)-(2+2E)\delta_{j,2}\right\},\quad u_{-1}(x)\equiv 0 \tag{D.17}$$

Bu toplamdizi eşitliğin her iki yanında, ε^j'nin katsayıları olan anlatımlar ε'dan bağımsız olarak öngörülmektedir. Bu yüzden, (D.17)'nin her iki yanındaki anlatımlarda, ε^j katsayı anlatımları birbirlerine eşit olmalıdırlar. Bu ise

$$\sum_{k=0}^{j}u'_k(x)u'_{j-k}(x)=2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}\delta_{j,0}-u''_{j-1}(x)-(2+2E)\delta_{j,2},\quad j=0,1,2,\ldots\quad u_{-1}(x)\equiv 0 \tag{D.18}$$

özyineleyiş denklemlerinin yazımına olanak verir. (D.18)'de $j=0$ alınırsa,

$$u'_0(x)^2=2e^{\kappa\frac{x^2}{2}} \tag{D.19}$$

ve buradan da

$$u'_0(x)=\pm\sqrt{2}e^{\kappa\frac{x^2}{4}} \tag{D.20}$$

iki seçenekli sonucuna ulaşılır. Bu seçeneklerden, ancak, $u_0(x)$'i sonsuzda eksi sonsuza götürecek olan çözüm olarak belirlenmelidir. Böylece, saptırım açılımının taban işlevinin birinci türevi

$$u'_0(x)=-\sqrt{2}e^{\kappa\frac{x^2}{4}} \tag{D.21}$$

eştiliğiyle verilen biçimde saptanmış olur. (D.18)'de $j=1$ alınırsa

$$2u'_0(x)u'_1(x)=-u''_0(x) \tag{D.22}$$

ve burada $u_0(x)$ yerine yukarıda bulunan yapısının kullanımıyla

$$u_1'(x) = -\frac{\kappa}{4}x \tag{D.23}$$

elde edilir. Buna karşın, (D.18)'de $j = 2$ alınışı

$$2u_0'(x)u_2'(x) = -u_1''(x) - (1+E) - u_1'(x)^2 \tag{D.24}$$

denklemine ve onun çözümüyle de

$$u_2'(x) = \frac{1}{32\sqrt{2}}\left(32 + 32E - 4\kappa + \kappa^2 x^2\right) e^{-\frac{\kappa}{4}x^2} \tag{D.25}$$

sonucuna götürür. (D.18)'de $j = 3$ alınışıyla elde edilecek olan denklemin çözümü aşağıda verilmektedir.

$$u_3'(x) = \frac{1}{128}\left(6\kappa^2 x - 32\kappa(1+E)x + -\kappa^3 x^3\right) e^{-\frac{\kappa}{2}x^2} \tag{D.26}$$

Bu ana dek, $u_0'(x)$, $u_1'(x)$, $u_2'(x)$, $u_3'(x)$ işlevleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki özelsizleştirim öngörümüne olanak sağlar.

$$u_j'(x) = p_j(x)e^{-\frac{(j-1)}{4}\kappa x^2}, \qquad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{D.27}$$

Burada $p_j(x)$ ile simgelenen büyüklük j.dereceden bir çokterimli olarak öngörülmektedir. Bu öngörümden aşağıdaki eşitlikleri yazmak olanaklıdır.

$$\sum_{k=0}^{j} u_k'(x)u_{j-k}'(x) = e^{-\frac{(j-2)}{4}\kappa x^2}\sum_{k=0}^{j} p_k(x)p_{j-k}(x), \qquad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{D.28}$$

$$2e^{\kappa\frac{x^2}{2}}\delta_{j,0} = 2e^{-\frac{(j-2)}{4}\kappa x^2}\delta_{j,0}, \qquad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{D.29}$$

$$-u_{j-1}''(x) = \left(\frac{(j-2)}{4}\kappa p_{j-1}(x) - p_{j-1}'(x)\right)e^{-\frac{(j-2)}{4}\kappa x^2}, \quad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{D.30}$$

$$-(2+2E)\delta_{j,2} = -(2+2E)e^{-\frac{(j-2)}{4}\kappa x^2}\delta_{j,2}, \qquad j = 0,1,2,3,\ldots \tag{D.31}$$

Son dört eşitliğin (D.18)'de kullanımı aşağıdaki çokterimli özyineleyişine götürür.

$$\sum_{k=0}^{j} p_k(x)p_{j-k}(x) = 2\delta_{j,0} + \frac{(j-2)}{4}\kappa p_{j-1}(x) - p_{j-1}'(x) - (2+2E)\delta_{j,2},$$
$$j = 0,1,2,3,\ldots \tag{D.32}$$

Buradan $p_0(x)$ için aşağıdaki anlatım yazılabilir.

$$p_0(x) = -\sqrt{2} \tag{D.33}$$

Bunun kullanımıyla, aslında örtük (ing: implicit) yapıda olan (D.32)'yi aşağıdaki belirtik (ing: explicit) yapıda yazmak olanaklıdır.

$$p_j(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{(j-2)}{4}\kappa p_{j-1}(x) - p_{j-1}'(x) - (2+2E)\delta_{j,2} - \sum_{k=1}^{j-1} p_k(x)p_{j-k}(x)\right\},$$
$$j = 1,2,3,\ldots \tag{D.34}$$

Burada, sağdaki sonlu toplam $j = 1$ için 0 olarak öngörülmektedir.

Bu özyineleyiş betiklenim için oldukça yalın bir yapı taşımaktadır ve $p_j(x)$ çokterimlilerinin belirlendiği öngörülecek olursa yanaşık üstel açılım, saptırım kuramcıl yoldan belirlenmiş olur.

Yalın Kalan Bastırımı Üzerinden Erke Belirleyişleri

Eğer $u(x)$ işlevi $u_0(x)$ işleviyle yaklaştırılacak olursa $f(x)$ işlevi de $e^{u_0(x)}$ ile yaklaştırılmış olur. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
K_0(x,\kappa,E) &\equiv \frac{\widehat{H}f(x)-Ef(x)}{f(x)} = \frac{\widehat{H}e^{u_0(x)}-Ee^{u_0(x)}}{e^{u_0(x)}} \\
&= -\frac{1}{2}u_0'(x)^2-\frac{1}{2}u_0''(x)+e^{\kappa\frac{x^2}{2}}-1-E \\
&= \frac{\kappa}{2\sqrt{2}}xe^{\kappa\frac{x^2}{2}}-1-E
\end{aligned}
\tag{D.35}
$$

$u(x)\approx u_0(x)$ yaklaştırımı olan bu işlevin, aslında, tüm x değerleri için sıfırlanması istenir. Ancak, burada o durum gerçekleşmemektedir. Bunun da nedeni, bu kalanın, x değişkeni eksi sonsuzdan artı sonsuza dek değiştiğinde, eksi sonsuz ile artı sonsuz arasında her değeri alabilecek durumda oluşudur. Bu sonsuza gidişler yalın (değişmez ağırlık işlevi kullanan) bir boy tanımına da olanak vermez. Bu yüzden, boy bastırımı yaparak E değerini belirlemek de olanaksızdır. Bu durumda $u(x)\approx u_0(x)$ yaklaştırımının yetersiz olduğu görülür.

$u(x)\approx u_0(x)$ yaklaştırımından daha iyi bir durum $u(x)\approx u_0(x)+u_1(x)$ yaklaştırımı yeğlenebilir. Bu durum için kalanın belirtik anlatımı, ara oluşturum aşamaları verilmeksizin, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$
K_1(x,\kappa,E)\equiv -\frac{\kappa^2}{32}x^2+\frac{\kappa}{8}-1-E
\tag{D.36}
$$

Bu anlatımda da eksi sonsuza gidiş vardır. Ama artı değerlerin bir en büyüğünden sözedilebilmektedir. Diğer bir deyişle, artı sonsuza gidiş yoktur. Bunun yanısıra, eksi sonsuza gidiş de önceki duruma göre çok çok yavaşlamış görünmektedir. Ama yine yalın boy bastırımına olanak vermeyen bir yapı söz konusudur. Açıkçası, azalmış olmakla birlikte yine oldukça kötü bir durum söz konusudur. Ancak, kötülüğün azalışı daha çok anlatım eklenerek yeni bir yaklaştırımın işe yarayabilme olasığını ortaya çıkarır. $u(x)\approx u_0(x)+u_1(x)$ yaklaştırımından daha iyi bir durum $u(x)\approx u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)$ yaklaştırımı olabilir. Bu durum için de kalanın belirtik anlatımı, ara oluşturum aşamaları verilmeksizin, aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
K_2(x,\kappa,E) &\equiv \left\{\left(\frac{\sqrt{2}\kappa}{4}(1+E)-\frac{3\sqrt{2}}{64}\kappa^2\right)x+\frac{\sqrt{2}\kappa^3}{128}x^3\right\}e^{-\kappa\frac{x^2}{4}} \\
&\quad -\frac{\left(32+32E-4\kappa+\kappa^2x^2\right)^2}{4096}e^{-\kappa\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}
\tag{D.37}
$$

Buradaki anlatım önceki iki anlatımdan daha iyi bir yapıdadır. Ne eksi ne de artı sonsuza doğru gidiş yoktur. Diğer bir deyişle x değişkeni ister artı ister eksi sonsuza gitsin, anlatımın değeri kapalı bir aralıktan değerler alır. Bu olgu, bu kalan için yalın bastırıma gidilebileceğini gösterir. $u_j(x)$ işlevinin, j büyüdükçe aldığı, yapı da daha sonraki kalanlarda da, bundan da öte, iyileşimler gözlenebileceği beklentisini gündeme getirir. Bu andaki durumumuz, elimize seçenek geçmişken, yalın boy bastırımına gitmek ve oradan E değerini belirlemektir.

(D.37)'de boy dördülü bastırımı için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\|K_2(x,\kappa,E)\|^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}\kappa}{4}(1+E) - \frac{3\sqrt{2}}{64}\kappa^2 \right) x + \frac{\sqrt{2}\kappa^3}{128} x^3 \right\}^2 \mathrm{e}^{-\kappa\frac{x^2}{2}}$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\left(32+32E-4\kappa+\kappa^2x^2\right)^4}{16777216} \mathrm{e}^{-\kappa x^2} \qquad \text{(D.38)}$$

Burada üstelli anlatımların çarpımı üzerindeki tümlev yazılmamıştır. Bunun nedeni, o tümlevin tümlevleneninin evrik bakışımlı (ing: anti-symmetric) oluşu ve bu yüzden sıfırlanışıdır.

Eğer,

$$\sigma_1 \equiv \left(\frac{\sqrt{2}\kappa}{4}(1+E) - \frac{3\sqrt{2}}{64}\kappa^2 \right), \qquad \sigma_2 \equiv \frac{\sqrt{2}\kappa^3}{128} \qquad \text{(D.39)}$$

tanımları yapılırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}\kappa}{4}(1+E) - \frac{3\sqrt{2}}{64}\kappa^2 \right) x + \frac{\sqrt{2}\kappa^3}{128} x^3 \right\}^2 \mathrm{e}^{-\kappa\frac{x^2}{2}}$$
$$= \sigma_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \mathrm{e}^{-\kappa\frac{x^2}{2}} + 2\sigma_1\sigma_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 \mathrm{e}^{-\kappa\frac{x^2}{2}} + \sigma_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^6 \mathrm{e}^{-\kappa\frac{x^2}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \left(\frac{\sigma_1^2}{\kappa} + 6\frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa^2} + 15\frac{\sigma_2^2}{\kappa^3} \right) \qquad \text{(D.40)}$$

yazılabilir. Eğer, andıran biçimde,

$$\sigma_3 \equiv 32+32E-4\kappa, \qquad \sigma_4 \equiv \kappa^2 \qquad \text{(D.41)}$$

tanımları yapılırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sigma_3 + \sigma_4 x^2\right)^4 \mathrm{e}^{-\kappa x^2}$$
$$= \sigma_3^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathrm{e}^{-\kappa x^2} + 4\sigma_3^3\sigma_4 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \mathrm{e}^{-\kappa x^2} + 6\sigma_3^2\sigma_4^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^4 \mathrm{e}^{-\kappa x^2}$$
$$+ 4\sigma_3\sigma_4^3 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^6 \mathrm{e}^{-\kappa x^2} + \sigma_4^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^8 \mathrm{e}^{-\kappa x^2}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \left(\sigma_3^4 + \sigma_3^3\sigma_4\frac{2}{\kappa} + \sigma_3^2\sigma_4^2\frac{9}{2\kappa^2} + \sigma_3\sigma_4^3\frac{15}{2\kappa^3} + \sigma_4^4\frac{105}{16\kappa^4} \right) \qquad \text{(D.42)}$$

yazılabilir. Yukarıda yeni tanımlanan σ'lar ile üzerinde elde edilen tümlevler (D.38)'de kullanılırsa,

$$\|K_2(x,\kappa,E)\|^2 = \sqrt{\frac{2\pi}{\kappa}} \left(\frac{\sigma_1^2}{\kappa} + 6\frac{\sigma_1\sigma_2}{\kappa^2} + 15\frac{\sigma_2^2}{\kappa^3} \right)$$
$$+ \sqrt{\frac{\pi}{\kappa}} \left(\sigma_3^4 + \sigma_3^3\sigma_4\frac{2}{\kappa} + \sigma_3^2\sigma_4^2\frac{9}{2\kappa^2} + \sigma_3\sigma_4^3\frac{15}{2\kappa^3} + \sigma_4^4\frac{105}{16\kappa^4} \right) 116777216$$
$$\text{(D.43)}$$

cebircil sonucuna ulaşılır. Bu eşitliğin sağ yanı E'de dördüncü dereceden bir çokterimlidir. Onu eniyilemek için E'ye göre türevleyip sıfıra eşitlemek gerekir. Bu yapılırsa ortaya çıkan denklem E'de üçüncü dereceden olur ve 3 kök verir. Bunların incelenip anlamlılıkları irdelenip tartışılmalıdır.

EK E: Üstel Dönüşüm Altında Yanaşık Çözüm Tabanlı Saptırım Açılımları

Özelsizde tüm $V(x)$ gizilgücleri için Hamilton işlecinin izgecil denklemi

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}+V(x)f(x)=Ef(x), \qquad x\in(-\infty,\infty) \tag{E.1}$$

eşitliği ile yazılır. Bu denklemde gizilgüç işlevini simgeleyen $V(x)$'in $x=0$ konumuna göre bakışık, x'in tüm değerleri için artı olan, ve de, x artı ya da eksi sonsuza giderken sonsuz büyüyen bir yapıda olduğu öngörülmektedir.

$$f(x)\equiv e^{u(x)} \tag{E.2}$$

İnceleyişlerimizi etkinleştirmek için, denklemin kendisi yerine onun üstel çözüm üzerindeki karşılığının (E.2) kullanımını yeğlliyoruz. Bu kullanım (E.1) denkleminin bir Riccati denklemi olarak aşağıdaki gibi yazımına olanak verir.

$$-\frac{1}{2}\left(u''(x)+u'(x)^2\right)+V(x)-E=0 \tag{E.3}$$

Burada $u(x)$'in ikinci türevinin yalnız bırakılarak denklemin yeniden düzenlenmesinin yanaşık inceleyişler için daha uygun olabileceği düşünülerek yola çıkılmıştır.

$$u''(x)=2V(x)-u'(x)^2-2E \tag{E.4}$$

Temelde sonsuz büyüyüş $V(x)$ işlevinden kaynaklanmaktadır. Bu yüzden, x eksi ya da artı sonsuza giderken $V(x)$'in eksi üslülerinin paydada bulunacağı katsayı anlatımlı eşitlikler kurmakta yarar bulunmaktadır. $V(x)$'in sonsuzdaki büyüyüşünü dengeleyebilecek tek büyüklük $u(x)$ işlevinin türevidir. Dengeleyiş için bu türevin de, x sonsuza giderken, imsiz değerde sonsuza doğru büyüyüşünün öngörümü gerekir. Orada, x'in sonsuza gidişindeki büyüyüşü bir ölçekleyiş çarpanıyla yansıtıp $u(x)$'in birinci türevi yerine, x üzerinde (belki sıfır dışındaki) her yerde sonlu olarak öngörülebilecek bir yeni bilinmeyenle iş görmek, yalınlaştırım için önemli bir adım olacaktır. Bu bağlamda, aşağıdaki bilinmeyen dönüşümünü gündeme getirelim.

$$u'(x)\equiv\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\Upsilon(x) \tag{E.5}$$

Türevleyiş yoluyla $u(x)$'in ikinci türevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$u''(x)=\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\Upsilon'(x)+\frac{V'(x)}{\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}}\Upsilon(x) \tag{E.6}$$

Buradan (E.4)'ü bilinmeyen türevli anlatım solda ama diğerleri sağda olacak biçimde düzenleyip, her iki yanı $2V(x)$ ile bölelim.

$$\frac{1}{\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}}\Upsilon'(x)=1-\Upsilon(x)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}}\frac{V'(x)}{V(x)}\Upsilon(x)+\frac{1}{V(x)}E \tag{E.7}$$

Burada, x bağımsız değişkeni yerine, ona bağımlılığı aşağıdaki biçimde verilen bir y bağımsız değişkeninin kullanımına geçebiliriz.

$$y'(x) \equiv \sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}} \tag{E.8}$$

Bu örtük STD'den tümlevleyişle aşağıdaki denkleme geçilebilir.

$$y(x) \equiv \sqrt{2}\int_{x_0}^{x} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} \tag{E.9}$$

Burada, belirsiz değişmez değiştirge x_0'in belirlenişi için ek bir koşul verilişi gerekmektedir. $V(-x) = V(x)$ olgusu da gözönüne alınarak,

$$\begin{aligned} y(-x) &= \sqrt{2}\int_{x_0}^{-x} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}\int_{-x_0}^{x} d\xi V(-\xi)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\sqrt{2}\int_{x_0}^{x} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\int_{-x_0}^{x_0} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} \\ &= -y(x) - \sqrt{2}\int_{-x_0}^{x_0} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{E.10}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin $y(-x) = -y(x)$ eşitliğine dönüşebilişi için aşağıdaki eşitliğin sağlanışı gerekir.

$$\int_{-x_0}^{x_0} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{E.11}$$

Bu ise $x_0 = 0$'a bir kısıtını getirir. Böylece, (E.9) özelsiz olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$y(x) \equiv \sqrt{2}\int_{0}^{x} d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}} \tag{E.12}$$

(E.7)'deki x bağımlılığı V ve Υ için yeni tanımlar yapılarak y bağımlılığına dönüştürülebilir.

$$V(x) \equiv \overline{V}(y), \qquad \Upsilon(x) \equiv \overline{\Upsilon}(y) \tag{E.13}$$

Bunlardan aşağıdaki eşitlikler üretilebilir.

$$V'(x) = \dot{\overline{V}}(y)y'(x) = \dot{\overline{V}}(y)\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}} \tag{E.14}$$

$$\dot{\overline{V}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}}V'(x) \tag{E.15}$$

$$\dot{\overline{\Upsilon}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}\Upsilon(x)^{\frac{1}{2}}}\Upsilon'(x) \tag{E.16}$$

Bu denklemlerde üs ile üstnokta simgeleri, sırasıyla x ve y değişkenlerine göre türevleri simgelemektedir.

Yeni eşitlikler kullanılarak (E.7) denklemini yeniden yazacak olursak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\dot{\overline{\Upsilon}}(y) = 1 - \overline{\Upsilon}(y)^2 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\overline{V}}(y)}{\overline{V}(y)}\overline{\Upsilon}(y) + \frac{1}{\overline{V}(y)}E \tag{E.17}$$

Saptırımlı Sıradan Türevli Denklem Oluşturumu

ε bir saptırım değiştirgesini olmak üzere, (E.17) yerine aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\dot{\overline{\Upsilon}}(y,\varepsilon) = 1 - \overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)^2 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\dot{\overline{V}}(y)}{\overline{V}(y)}\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{\overline{V}(y)}E \tag{E.18}$$

Burada, E aranan değil verilen bir değiştirge olarak öngörülmektedir. Bu nedenle, ε'dan bağımsız olarak nitelendirilmiştir. (E.18)'de $\varepsilon = 0$ alınırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\dot{\overline{\Upsilon}}(y,0) = 1 - \overline{\Upsilon}(y,0)^2 \tag{E.19}$$

Bunun sonsuz küçük değişimli yapısı aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\frac{1}{1-\overline{\Upsilon}(y,0)^2}d\overline{\Upsilon}(y,0) = dy \tag{E.20}$$

Burada,

$$\overline{\Upsilon}(y,0) \equiv \tanh(\theta(y)) \tag{E.21}$$

bilinmeyen dönüşümü gerçekleştirilecek olursa, (E.20) aşağıdaki yapıya kavuşur

$$d\{\theta(y) - y\} = 0 \tag{E.22}$$

Bu sonsuz küçük değişim denkleminin çözümü, c belirsiz bir değişmez olmak üzere,

$$\theta(y) = y + c \tag{E.23}$$

olarak elde edilir. Bu ise,

$$\overline{\Upsilon}(y,0) = \tanh(y + c_1) = \frac{Ce^{2y} - 1}{Ce^{2y} + 1}, \qquad C \equiv e^{2c} \tag{E.24}$$

anlamına gelir.

(E.24) ile verilen $\overline{\Upsilon}(y,0)$'ın y'de evrik bakışık yapıda olacak olursa, $u(x,0)$'ın türevinin x'te evrik bakışık oluşu, bu yüzden de $u(x,0)$'ın x'te bakışık oluşu sağlanır ki, bu da istenen bir durumdur. Bu doğrultuda, (E.24) 'den

$$\overline{\Upsilon}(-y,0) = -\frac{C^{-1}e^{2y} - 1}{C^{-1}e^{2y} + 1} \tag{E.25}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ yanı ile (E.24)'ın en sağ yanının, imsiz değerde, örtüşebilişi istenilen evrik bakışımı sağlayacaktır. Bu ise

$$C^{-1} = C, \qquad C = \pm 1 \tag{E.26}$$

bağıntısındaki son eşitliklerden birisinin sağlanımını gerektirir.

Önce $C = 1$ alırsak (E.24)'ten

$$\overline{\Upsilon}(y,0) = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = \tanh(y) \tag{E.27}$$

anlatımına ulaşılır. Bu anlatımın $y=-\infty$'da -1'e, $y=\infty$'de 1'e yatay olarak yanaşan ve, y arttıkça, tekdüze artan bir davranışı vardır.

y bağımlılığından x bağımlılığına geçmek istenirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\Upsilon(x,0)=\frac{e^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}-1}}{e^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}+1}=\tanh\left(\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{E.28}$$

(E.5)'te $\Upsilon(x)$ işlevi yerine onun saptırılmışı olan $\Upsilon(x,\varepsilon)$ yerleştirilecek olursa $u'(x)$'in de ε değiştirgesine bağımlı olacağı düşünülmeli aşağıdaki saptırımlı eşitlik yazılmalıdır.

$$u'(x,\varepsilon)\equiv\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\Upsilon(x,\varepsilon) \tag{E.29}$$

$\varepsilon=0$ alınırsa, aşağıdaki saptırımsız eşitliğin yazımına olanak sağlar.

$$\begin{aligned}u'(x,0)&=\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\Upsilon(x,0)\\&=\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}-1}{e^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}+1}\\&=\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\tanh\left(\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{E.30}$$

Buradan $u(x,0)$ çözülmek istenirse

$$\begin{aligned}du(x,0)=&\sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}-1}{e^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}+1}dx\\=&\frac{e^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}-e^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}}{e^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}+e^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}}d\left(\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{E.31}$$

eşitliği yazılır. Evriküstelcil sonsuz küçük değişim (ing: logarithmic differential) kullanarak

$$d\left\{u(x,0)-\ln\left(e^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}+e^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}=0 \tag{E.32}$$

ve buradan

$$u(x,0)=\ln\left(e^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}+e^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right)+c_1 \tag{E.33}$$

sonucuna varılabilir. Bu eşitlik, x değişkeni artı ya da eksi sonsuza giderken, $u(x,0)$'ın hep artı sonsuza gideceğini gösterir. Bu durum, $u(x,0)$'ın, o durumda hep eksi sonsuza gidişi istemiyle çelişir. Başka bir deyişle, $u(x,0)$'i değişken anlatımı olarak alan üstel işlevin dalga işlevi olabilişi olanaksızdır. Bu nedenle bir de $C=-1$ durumunu ele alalım. Bu durumda (E.24)'ten

$$\overline{\Upsilon}(y,0)=\frac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1} \tag{E.34}$$

anlatımına ulaşılır. Bu anlatımın $y = -\infty$'da -1'e, $y = \infty$'da 1'e yatay olarak yanaşan bir yapısı vardır ve $y = 0$'da oradaki düşey doğruya soldan artı sonsuzda, sağdan eksi sonsuzda yanaşır. O düşey doğrunun her iki yanında da artan bir işlevdir.

y bağımlılığından x bağımlılığına geçmek istenirse aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\Upsilon(x,0) = \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} + 1}{\mathrm{e}^{2\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}} \tag{E.35}$$

Buradan da,

$$u'(x,0) = \sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}} \tag{E.36}$$

eşitliğine ulaşılabilir. Eşitlik yeniden yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
du(x,0) &= \sqrt{2}V(x)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}} dx \\
&= \frac{d\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right)^2} \\
&= d\ln\left(\left|\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right|\right)
\end{aligned} \tag{E.37}$$

elde edilir. Buradan, c_2 yeni bir belirsiz değişmez olmak üzere,

$$u(x,0) = \ln\left(\left|\mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}}\right|\right) + c_2 \tag{E.38}$$

sonucuna varılır. Bu da, x artı ya da eksi sonsuza giderken artı sonsuza giden bir çözümdür. Üstelik, bir de $x = 0$ değerinde de tekilliği vardır. Sonuçta benimsenemez bir yapıdadır. Bu inceleyişler çözüm bulunamıyormuş gibi bir izlenimi yarattı. Ama bütüncül anlatım yerine kesimcillik benimsenebilecek olursa durum değişebilir.

(E.24)'te C sonsuza götürülecek olursa $\overline{\Upsilon}(y,0) = 1$ değişmez bir çözüm elde edilir. Bu, $y = 0$'da sıfır olan, y'ye göre tümlevi $\overline{u}(y,0) = y$ işlevini üretir. Bu işlevden

$$u(x,0) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} \tag{E.39}$$

sonucu elde edilir. Gerek bu sonuç, gerekse $\overline{u}(y,0) = y$, x'in eksi sonsuza gidişi durumunda istediğimiz eksi sonsuza gidiş özelliğini sağlar. Ancak, x'in artı sonsuza gidişi durumunda bu işlev, istenenin evriğine, artı sonsuza gider. Başka bir deyişle, $\overline{\Upsilon}(y,0) = 1$'e karşılık gelen bu durum $u(x,0)$'dan sonsuzdaki beklentilerimizden yalnız eksi sonsuzdakini gerçekleştirir.

Öte yandan, (E.24)'te C sıfır alınacak olursa $\overline{\Upsilon}(y,0) = -1$ yine değişmez bir çözüm elde edilir. Bunun, $y = 0$'da sıfır olan, y'ye göre tümlevi $\overline{u}(y,0) = -y$ işlevini üretir. Bu işlevden

$$u(x,0) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}} \tag{E.40}$$

sonucu elde edilir. Gerek bu sonuç, gerekse $\overline{u}(y,0) = -y$, x'in artı sonsuza gidişi durumunda istediğimiz eksi sonsuza gidiş özelliğini sağlar. Ancak, x'in eksi sonsuza gidişi durumunda bu işlev, istenenin evriğine, artı sonsuza gider. Başka bir deyişle, $\overline{\Upsilon}(y,0) = -1$'e karşılık gelen bu durum $u(x,0)$'dan sonsuzdaki beklentilerimizden yalnız artı sonsuzdakini gerçekleştirir.

Bu iki olgunun birleştirimi ile $\overline{\Upsilon}(y,0)$ im (ing: signum) işlevi olarak seçilmiş olur ve bu seçim, ilgili saptırımsız denklemi $x = 0$ ya da $y = 0$ dışında sağlar. $x = 0$ ya da $y = 0$'da da sağlanım istenecek olursa, $\overline{\Upsilon}(y,0)$'ın bu konumda 1 ya da -1 değerli olarak seçilişi gerekir. Bu durumda, im işlevinden tek bir konumda sapış vardır. Kesimcil çözümler

$$\overline{\Upsilon}(y,0) = im(y) \tag{E.41}$$

$$u(x,0) = \mathrm{e}^{-\left|\sqrt{2}\int_0^x d\xi V(\xi)^{\frac{1}{2}}\right|} \tag{E.42}$$

eşitlikleriyle yazılır.

Saptırım Açılımının Özyineleyiş Denklemleri

Saptırım denklemlerini belirlemek için (E.18)'ün her iki yanının saptırım değiştirgesi olan ε'a göre istenilen kerteden türevlenip ε yerine sıfır yerleştirilmelidir. (E.18)'in her iki yanı ε'a göre j kez türevlenecek olursa, tüm doğalsayı j değerleri için aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\left\{\frac{\partial^j \dot{\overline{\Upsilon}}(y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = \left\{\frac{\partial^j 1}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} - \left\{\frac{\partial^j \overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)^2}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\overline{V}}(y)}{\overline{V}(y)}\left\{\frac{\partial^j \varepsilon \overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0}$$
$$+ \frac{E}{\overline{V}(y)}\left\{\frac{\partial^j \varepsilon^2}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} \qquad j = 0,1,2,... \tag{E.43}$$

Burada, sağ yandaki ilk anlatımda 1 değişmezinin ε'a göre j. kerteden türevi görünmektedir. j'nin artı bütünsayı değerleri için bu türev sıfır değerini alır. $j = 0$ için ise yine 1 olarak kalır. Bu durum, bu türevin $\delta_{j,0}$ ile simgelenen Kronecker deltası'na eşit olduğu yargısına götürür. Bu yargı, bu türevde ε yerine 0 değeri konulsa da değişmez. Sonuçta, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\left\{\frac{\partial^j \varepsilon^1}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = \delta_{j,0}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{E.44}$$

Bunu andıran bir durum ε^2'nin ε'a göre j. kerteden türevi için geçerlidir. j'nin 2'den büyük değerleri için bu türev sıfırlanır. j'nin 0 ve 1 değerleri için sıfırlanmasa da, ε yerine 0 yerleştirildiğinde sıfırlanır. Bu durumda, ancak ve ancak, ε'un eksi olmayan bütünsayı değerlerinden 2'de sıfırlanış söz konusu olmaz, 2 değeri üretilir. Bu ise bu büyüklüğün ε'a göre j. türevinin $\varepsilon = 0$'daki değerinin $2\delta_{j,2}$ oluşunu gerektirir. Böylece,

$$\left\{\frac{\partial^j \varepsilon^2}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = 2\delta_{j,2}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{E.45}$$

yazılabileceği ortaya çıkar.

(E.43)'ün sağında sondan ikinci anlatımdaki, ε'a göre j. türev için Leibnitz kuralından yararlanılabilir ve aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\left\{\frac{\partial^j \varepsilon\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = \left\{\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(\varepsilon)^{(k)}\overline{\Upsilon}^{(j-k)}(y,\varepsilon)\right\}_{\varepsilon=0} \qquad j = 0,1,2... \tag{E.46}$$

Burada üstsimge olarak verilen, sıradan ayıraçlar arasındaki sayılar ya da sayıcıl simgeler, ilgili büyüklüklerin ε'a göre kaçıncı kerteden türevleri olduğunu göstermektedirler. ε'un $\varepsilon = 0$'da sıfırlanmayan türevi $k = 1$ üstsimge değerine karşılık gelir ve bu değerde ikili toplam açılım (binom) katsayısı da j değerini alır. Böylece, (E.46) yerine

$$\left\{\frac{\partial^j \varepsilon\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = j\overline{\Upsilon}^{(j-1)}(y,0) \qquad j = 0,1,2... \tag{E.47}$$

daha yalın eşitliği yazılabilir. Aynı biçimde (E.43)'ün sağındaki ikinci toplamcıl anlatım için de aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\left\{\frac{\partial^j \overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)^2}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\overline{\Upsilon}^{(k)}(y,0)\overline{\Upsilon}^{(j-k)}(y,0) \qquad j = 0,1,2... \tag{E.48}$$

Yukarıdaki inceleyişler, j'nin tüm doğalsayı değerleri için geçerlidir ve $\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)$ işlevinin ε'da Maclaurin açılımının yazılımını sağlar. Açılım için

$$\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\overline{\Upsilon}^{(j)}(y,0)}{j!}\varepsilon^j, \qquad j = 0,1,2... \tag{E.49}$$

yazılabilir. Tıkız simgelendirim için

$$\overline{\Upsilon}_j(y) \equiv \frac{\overline{\Upsilon}^{(j)}(y,0)}{j!}, \qquad j = 0,1,2... \tag{E.50}$$

tanımları yapılacak olursa, (E.49) yerine

$$\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty}\overline{\Upsilon}_j(y)\varepsilon^j, \qquad j = 0,1,2... \tag{E.51}$$

yazılabilir. Tıkız anlatımlar j. türevleri aşağıdaki gibi yazmamıza olanak sağlar.

$$\left\{\frac{\partial^j \varepsilon\overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = j!\overline{\Upsilon}_{j-1}(y), \qquad j = 0,1,2... \tag{E.52}$$

$$\left\{\frac{\partial^j \overline{\Upsilon}(y,\varepsilon)^2}{\partial \varepsilon^j}\right\}_{\varepsilon=0} = j!\sum_{k=0}^{j}\overline{\Upsilon}_k(y)\overline{\Upsilon}_{j-k}(y), \qquad j = 0,1,2... \tag{E.53}$$

Yine (E.50)'nin kullanımı

$$\left\{ \frac{\partial^j \dot{\overline{\Upsilon}}(y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^j} \right\}_{\varepsilon=0} = j! \dot{\overline{\Upsilon}}_j(y), \qquad j = 0,1,2,... \tag{E.54}$$

eşitliğinin yazımına olanak sağlar. Bu tıkızlaştırımdan sonra (E.43) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\overline{\Upsilon}}_j(y) = \delta_{j,0} - \sum_{k=0}^{j} \overline{\Upsilon}_k(y)\overline{\Upsilon}_{j-k}(y) - \frac{1}{2}\frac{\dot{\overline{V}}(y)}{\overline{V}(y)}\overline{\Upsilon}_{j-1}(y) - \frac{E}{\overline{V(y)}}\delta_{j,2}, \qquad j = 0,1,2,... \tag{E.55}$$

Bu örtük bir özyineleyiş gösterir. Bunun nedeni de, j Maclaurin katsayısı işlevinin belirleniminin, daha küçük altsırasayılı katsayı işlevleri belirlenmiş olsa da, bir STD çözümüne gerek duyuruşudur.

(E.55)'te $j = 0$ yerleştirilir ve eksi altsırasayılı bileşenler özdeş olarak sıfır alınırsa

$$\dot{\overline{\Upsilon}}_0(y) = 1 - \overline{\Upsilon}_0(y)^2 \tag{E.56}$$

yazılabilir. Bu eşitlik yukarıda saptırımsız durumda üretilen yapıdadır. Yalnızca bilinmeyeninin simgelenişi değişmiştir. Saptırımsızlık açısından değişen bir olgu yoktur.

EK F: Sıradan Türevli ve Değişimli Denklemler Tabanlı Uygulayışlar

Önceki bölümlerde işleç taban kümesi kullanılarak nicem işleç beklenen değerlerin belirlenimi üzerine çalışılmış ve oluşturulan denklemin çözümünde son aşamada "Gecikimli Sıradan Türevli Denklem (ing: Delay Ordinary Differential Equation)" diye adlandırdırılan denklem elde edilmişti. "Sıradan Türevli ve Değişimli Denklem (ing: Difference-Differential Equation)" diye de adlandırabileceğimiz bu denklemin çözümü için bu ek bölümde bir yöntem geliştirilmesine çalışılmış ve de uygulayışlar ile kuramcıl yapının desteklenmesine çalışılmıştır. Ayrıca bu ek bölümde bilimcil yazında özüne eş (ing: self-adjoint) olmayan bir işlecin beklenen değerinin belirleniminde kullanılan "İki-Yanlı Rayleigh Oranı (ing: Two-Sided Rayleigh Quotient)" veya öteki adıyla "Ostrowski Oranı" olgusu ele alınmış ve buradan erke değerini verecek bağıntı elde edilmeye çalışılmıştır. Elde edilen bağıntıdan uyumlu salıngaç için yaklaşık erke değerleri MuPAD betiği yardımıyla elde edilmiştir.

Sıfır Üstellik Ereyinde Çözüm

Önceki bölümlerde elde edilen sıradan türevli ve değişimli denklemin çözümü üzerinde çalışırken inceleyişlerimizi yalınlaştıracak biçimde denklemi yeniden elde etmekte yarar bulunmaktadır. Bu amaçla aşağıda verilen nicem devinbilimcil bakışık üstel uyumsuz salıngaç denklemine doğabilimcil birimsizleştirim uygulayalım.

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \alpha\left(\mathrm{e}^{\kappa x^2}-1\right)\psi(x,t) \tag{F.1}$$

Burada, konum (x) ve zaman (t) değişkeni uzunluk ve zaman biriminde, indirgenmiş Planck değişmezi ($\hbar$) erke ile uzunluk çarpımı biriminde, μ kütle biriminde, gizilgüç genliği (α) ile etkileşim yay değişmezi (κ) ise, sırasıyla, erke ve uzunluk karekökü birimindedir. Bu denklemi doğabilimcil birimsizleştirmek için, zamanda ve uzunlukta bilinmeyen birim değerleri simgeleyen t_{bd} ve x_{bd}'yi aşağıdaki ölçekleyiş eşitlikleri ile yazabiliriz.

$$\bar{t} \equiv \frac{t}{t_{bd}}, \qquad \bar{x} \equiv \frac{x}{x_{bd}} \tag{F.2}$$

Bunların (F.1) denkleminde kullanımı ile

$$i\frac{\partial\overline{\psi}(\bar{x},\bar{t})}{\partial\bar{t}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar t_{bd}}{\mu x_{bd}^2}\right)\frac{\partial^2\overline{\psi}(\bar{x},\bar{t})}{\partial\bar{x}^2} + \left(\frac{\alpha t_{bd}}{\hbar}\right)\left(\mathrm{e}^{\kappa x_{bd}^2\bar{x}^2}-1\right)\overline{\psi}(\bar{x},\bar{t}) \tag{F.3}$$

elde edilir. Doğabilimcil birimsizleştirim için yeni bir yaklaşım olarak ayıraçlar arasındaki büyüklükleri inceleyişlerimizi yalınlaştıracak biçimde aşağıdaki gibi alabiliriz.

$$\frac{\hbar t_{bd}}{\mu x_{bd}^2} = 1, \qquad \varepsilon = \kappa^2 x_{bd}^2, \qquad \frac{\alpha t_{bd}}{\hbar} = \frac{1}{2\varepsilon} \tag{F.4}$$

Önceki uygulayışta ikinci denklemin sol yanında ε yerine $\frac{k}{2}$ bulunmaktaydı. Üçüncü denklemin sağ yanındaysa yalnızca 1 bulunmaktaydı. Bu birimsizleştirim de $\hbar = 1$ ve

$\mu = 1$ alımına eşdeğerdir. Bu durumda gizilgüç aşağıdaki gibidir.

$$V(x) = \frac{e^{\varepsilon x^2} - 1}{2\varepsilon} \tag{F.5}$$

Burada ve anlatımların süregelen kesimlerinde x üzerindeki çizgi, özelsizlikten birşey yitirmeksizin kaldırılmıştır. "Üstellik Değiştirgesi" diye adlandırabileceğimiz ε, sıfıra götürüldüğünde gizilgüç uyumlu salıngaç gizilgücüne yanaşmaktadır ve bu yanaşım tam belirtik (ing: explicit) durumdadır.

Konum işlecine bağlı herhangi bir çözümcül $f(\widehat{q})$ işlevi için durağan düzeylerde aşağıda verilen eşitliğin

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle f(\widehat{q}) \rangle = 0 \tag{F.6}$$

gizilgüç işlevinde değişken yerine konum işleci yerleştirilerek, erkesi E değerine karşılık geldiği durumlarda aşağıdaki denklem ile yazılabileceğini göstermiştik.

$$-\left\langle V'(\widehat{q}) f'(\widehat{q}) \right\rangle - 2\left\langle V(\widehat{q}) f''(\widehat{q}) \right\rangle + \frac{1}{4}\left\langle f^{(4)}(\widehat{q}) \right\rangle + 2E\left\langle f''(\widehat{q}) \right\rangle = 0 \tag{F.7}$$

Bu denklemde görülen nicem devinbilimcil bakışık üstel uyumsuz salıngaç dizgesi için (F.5)'te yeniden tanımlanan $V(\widehat{q})$ ve inceleyişlerimizi yalınlaştıracak biçimde üstel işlev olarak seçtiğimiz $f(\widehat{q})$'u aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$V(\widehat{q}) \equiv \frac{1}{2\varepsilon}\left(e^{\varepsilon \widehat{q}^2} - 1\right), \qquad f(\widehat{q}) \equiv e^{-\nu \widehat{q}} \tag{F.8}$$

Özişlevde varoluşu gereken ε bağımlılığının yansıyacağını göz önüne aralarak $f(\widehat{q})$'in beklenen değeri için

$$\sigma(\nu, \varepsilon) \equiv \langle f(\widehat{q}) \rangle \tag{F.9}$$

tanımını da yapacak olursak (F.7)'yi aşağıdaki gibi bir sıradan türevli denklem olarak yazmak olanaklıdır.

$$\begin{aligned} &4\nu^4 \sigma''(\nu,\varepsilon) + \left(12\nu^3 - 8E(\varepsilon)\nu^2\right)\sigma'(\nu,\varepsilon) + \left(3\nu^2 - 4E(\varepsilon)\nu\right)\sigma(\nu,\varepsilon) \\ &-4\nu^2 \frac{\sigma'(\nu,\varepsilon) - \sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon} - 2\nu\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon) - 2\nu\frac{\sigma(\nu,\varepsilon) - \sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \tag{F.10}$$

Burada üs simgeleri ν'ya göre türevi simgelemektedir. En sağda ve en sağdan üçüncü toplamcıl anlatımda görünen orancıl yapılar aslında değişim oranlarıdır ve ε değişim bağımsız değiştirgesi olarak düşünüldüğünde, ν'daki ε değerindeki azalıma karşın sırasıyla σ'daki ve onun ν'ya göre türevindeki değişimin orancıl değerlerini anlatmaktadırlar.

ε'un sıfıra yakın oluşu durumunda aşağıdaki yaklaştırım eşitlikleri yazılabilir.

$$\left\{\frac{\sigma(\nu,\varepsilon) - \sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\to 0} \to \sigma'(\nu,0), \quad \left\{\frac{\sigma'(\nu,\varepsilon) - \sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}_{\varepsilon\to 0} \to \sigma''(\nu,0) \tag{F.11}$$

$\varepsilon = 0$ olduğunda yani sıfır üstellik ereyinde (limitinde), (F.10) denklemi aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir

$$4\nu^2\left(\nu^2-1\right)\sigma''(\nu,0)+\left(12\nu^3-8E(0)\nu^2-4\nu\right)\sigma'(\nu,0) + \left(3\nu^2-4E(0)\nu\right)\sigma(\nu,0)=0 \quad \text{(F.12)}$$

Bu denklemin değişik $E(0)$ değerlerine karşılık gelen $\sigma(\nu,0)$ çözüm değerleri bulunmaktadır. Bunlardan biri aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$E(0)=\frac{1}{2}, \qquad \sigma(\nu,0)=(1+\nu)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(F.13)}$$

Sıfır üstellik ereyi "Uyumlu Salıngac"a karşılık gelir. Bu yüzden, (F.13)'teki bulgular da bir biçimde uyumlu salıngacın erke düzeylerinden birine karşılık gelmelidir. İlk olarak uyumlu salıngacın taban düzeyine odaklanalım. İndirgenmiş Hamilton işlecinin özdenklemi, sıfır üstellik ereyinde aşağıdaki yapıdadır.

$$-\frac{1}{2}\psi''_{us}(x)+\frac{x^2}{2}\psi_{us}(x)=E_{us}\psi_{us}(x) \quad \text{(F.14)}$$

us altsimgedizisi uyumlu salıngacı çağrıştırmak amacıyla kullanılmaktadır. Bu denklemin taban özdeğeri ve birimboylulaştırılmış özişlevi çözümcül olarak belirlenebilir ve aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir.

$$E_{us}=\frac{1}{2}, \qquad \psi_{us}(x)=\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{(F.15)}$$

Buradaki özişlev kullanılarak beklenen değer $\sigma_{us}(\nu)$ aşağıdaki eşitlikler ile belirlenebilir.

$$\sigma_{us}(\nu)\equiv\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\psi_{us}(x)^*e^{-\nu x^2}\psi_{us}(x)=\pi^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{-(1+\nu)x^2}=(1+\nu)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(F.16)}$$

Bu sonuç, (F.13)'te elde edilen sonuçların uyumlu salıngacın taban düzeyine karşılık geldiğini gösterir. Ancak, (F.12) için başka çözüm ikilileri de elde etmek olanaklıdır. Örneğin,

$$E(0)=\frac{3}{2}, \qquad \sigma(\nu,0)=(1+\nu)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{(F.17)}$$

Bu çözümlerin de uyumlu salıngaç için aşağıdaki özikiliye karşılık geldiğini gösterilebilir.

$$E_{us}=\frac{3}{2}, \qquad \psi_{us}(x)=\sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}}xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{(F.18)}$$

Önceki çözümün bakışık dalga işlevli düzeylerin tabanına karşılık gelişine karşın bu çözüm evrik bakışık dalga işlevli düzeylerin tabanına karşılık gelir.

Aslında, (F.12)'nin sayılabilir sonsuz sayıda çözümü vardır. Bunların yarısı bakışık, öteki yarısıysa evrik bakışık düzeylere karşılık gelir. Bu çözümler de, $\sigma(\nu,0)$ $(1+\nu)$'nun eksi yarımlı $(-1/2, -3/2, ...)$ üslülerinden oluşan bir sonlu sayıda anlatım içeren anlatım olarak saptanabilır. Sözgelimi, taban üzeri ilk bakışık düzeye karşılık gelen σ çözümü $\sigma(\nu,0)$ $(1+\nu)$'nun $-1/2$, $-3/2$, ve de, $-5/2$ üslülerinin bir doğrucul birleşimi olarak öngörülüp, birleşim katsayıları, bu doğrucul birleşimin ilgili denklemi sağlayacağı biçimde saptanabilir. Taban üzerindeki ikinci bakışık düzey için bunu andıran biçimde ama bu kez beş anlatım alarak (üs için $-1/2$, $-3/2$, $-5/2$, $-7/2$, $-9/2$ kullanarak) sonuca ulaşılabilir. Taban üzerindeki n. bakışık düzey için $-1/2$'den başlayıp birer birer azalan $(2n+1)$ anlatım alınarak sonuca ulaşılabilir. Evrik bakışık düzeyler için de durum eş yapıdadır. Ama azalan üsler $-1/2$'den değil $-3/2$'den başlamalıdır.

Değişimcil Bilgisayım Tabanlı Yaklaştırımlar

Bir önceki altbölümde sıfır üstellik ereyinde kuramcıl tabanını doğruladığımız yapıyı değişimcil bilgisayım yaklaştırımı ile ele alarak uyumsuz üstel salıngaç için çözüm arayışına girelim. Bunun için bir önceki altbölümde elde aldığımız (F.10) denklemini ağırlıklı özdeğer sorunu olacak biçimde yeniden yazalım.

$$\begin{aligned}&4\nu^4\sigma''(\nu,\varepsilon)+12\nu^3\sigma'(\nu,\varepsilon)+3\nu^2\sigma(\nu,\varepsilon)-4\nu^2\frac{\sigma'(\nu,\varepsilon)-\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\\&-2\nu\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)-2\nu\frac{\sigma(\nu,\varepsilon)-\sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}=E(\varepsilon)\left[8\nu^2\sigma'(\nu,\varepsilon)+4\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\right]\end{aligned} \tag{F.19}$$

Bu denklemi bir işlevimsi (ing: functional) elde edecek biçimde yazmak olanaklıdır. Bunun için denklemin her iki yanı herhangi bir işlev ile çarpıp ν üzerinde sıfırdan sonsuza dek tümlev almak gerekecek. Biz herhangi bir işlev yerine $\sigma(\nu,\varepsilon)$'i seçersek aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\Bigg[&4\nu^4\sigma''(\nu,\varepsilon)+12\nu^3\sigma'(\nu,\varepsilon)+3\nu^2\sigma(\nu,\varepsilon)\\&-4\nu^2\frac{\sigma'(\nu,\varepsilon)-\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\\&-2\nu\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)-2\nu\frac{\sigma(\nu,\varepsilon)-\sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\Bigg]\\&=E(\varepsilon)\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\left[8\nu^2\sigma'(\nu,\varepsilon)+4\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\right]\end{aligned} \tag{F.20}$$

Bu denklem, $\sigma(\nu,\varepsilon)$ ve E ikilisi gerçek çözüm değerlerinden birinde olduğunda, kesin olarak sağlanır. Ama, eğer $\sigma(\nu,\varepsilon)$ yerine bir kestirimcil yapı yerleştirilirse, kesin E yerine yaklaşık bir değerce sağlanır. Bu değerlere "değişimcil bilgisayım yaklaştırımı (ing: Variational Computational Approximation) adı verilebilir.

(F.20)'de tümlev aralığı sıfır ile sonsuz arasında seçilmiştir. Bunun nedeni, $\sigma(\nu,\varepsilon)$ işlevinin bu aralıkta sürekli oluşunun gerekliliğindendir. Bu işlev, $\nu=0$'da 1 değerini alır, ν artı değerlerinde sonlu kalır ve ν sonsuza giderken sıfıra doğru söner yani tümlev aralığı içinde tekillik içermez.

Yaklaşık da olsa bir çözüm elde edebilmek için aşağıdaki gibi bir öngörümde bulunabiliriz.

$$\sigma(\nu,\varepsilon)\equiv A\mathrm{e}^{-\gamma\nu} \tag{F.21}$$

Burada A ve γ bilinmeyen değiştirgelerdir. Bu öngörüme dayalı olarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\left[4\nu^4\sigma''(\nu,\varepsilon)+12\nu^3\sigma'(\nu,\varepsilon)+3\nu^2\sigma(\nu,\varepsilon)\right]\\&\quad=A^2\int_0^\infty d\nu \mathrm{e}^{-2\gamma\nu}\left(4\gamma^2\nu^4-12\gamma\nu^3+3\nu^2\right)=-\frac{3A^2}{4\gamma^3}\end{aligned}\tag{F.22}$$

$$\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\left[-4\nu^2\frac{\sigma'(\nu,\varepsilon)-\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\right]=\frac{1-\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{\varepsilon\gamma^2}A^2\tag{F.23}$$

$$\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\left[-2\nu\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)\right]=\frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{2\gamma}A^2\tag{F.24}$$

$$\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\left[-2\nu\frac{\sigma(\nu,\varepsilon)-\sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon}\right]=-\frac{1-\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{2\varepsilon\gamma^2}A^2\tag{F.25}$$

$$\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\left[8\nu^2\sigma'(\nu,\varepsilon)+4\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\right]=-\frac{A^2}{\gamma^2}\tag{F.26}$$

$$E_{yak}(\varepsilon,\gamma)=\frac{3}{4\gamma}+\frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{2\varepsilon}-\frac{\gamma}{2}\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}\tag{F.27}$$

Yaklaşık erke için bulduğumuz bu anlatımı γ üzerinde artı kalışı inceleyebilmek için aşağıdaki biçimde yeniden yazabiliriz.

$$E_{yak}(\varepsilon,\gamma)=\left(\frac{3}{4\gamma}-\frac{\gamma}{2}\right)+\frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{2\varepsilon}(1-\gamma\varepsilon)\tag{F.28}$$

Bu eşitliğin sağ yanındaki ilk öğesi $\gamma<\sqrt{3/2}$ olduğunda, toplamın diğer öğeleri de $\gamma<1/\varepsilon$ olduğunda artı kalır. Böylelikle aşağıdaki koşul sağlandığında E_{yak}'ın artılığı güvence altındadır.

$$\gamma<\min\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{\varepsilon}\right)\tag{F.29}$$

Bu koşulun tanımladığı γ bölgesinin dışında da artılık sağlanabilir. Ancak, o bölgenin çözümcül olarak belirlenişi olanaklı değildir. Sayıcıl olaraksa belirlenebilir.

En küçük E_{yak} değerini verecek γ'yı bulmak için (F.28)'in her iki yanı γ'ya göre türevlenmeli ve sıfıra eşitlenmelidir.

$$E'_{yak}(\varepsilon,\gamma)=-\frac{3}{4\gamma^2}-\varepsilon\frac{\gamma}{2}\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}\tag{F.30}$$

Türev alınarak elde edilen (F.30) eşitliği eksi olmayan γ ve ε değerleri için hep eksi kalmaktadır. Buradan bir γ belirlenmesi ve sonlu bir en küçük erke değerinin belirlenemesi olanaklı olmamaktadır. γ'nın alacağı değerlerden biri taban erke değerine denk geleceği bilindiği halde, bu değerin belirlenimi için buradan ilerlemek doğru değildir.

Çözüm için yeni bir yol sendelenim bastırımını ele almaktır. Yukarıdaki inceleyişler yaklaşık erke değeri üreten bir işlevimsiye ve uygun seçilen bir taban işlevine dayandırılmıştır. Erkedeki sendelenimi tanımlamak için beklenen değeri erkeyi verecek aşağıdaki gibi bir $\widehat{\mathscr{L}}$ işleci

$$\widehat{\mathscr{L}}\sigma(\nu,\varepsilon) = E(\varepsilon)\sigma(\nu,\varepsilon) \tag{F.31}$$

ve erkenin dördülü için de bir işlevimsi tanımına gereksinim vardır. (F.31)'de tanımlanan özdenklemi yazabilmek için (F.19)'u yeniden ele almak ve aşağıdaki özdeşlikleri yazmak gerekir.

$$8\nu^2\sigma'(\nu,\varepsilon) + 4\nu\sigma(\nu,\varepsilon) \equiv 8\nu^{\frac{3}{2}}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\sigma(\nu,\varepsilon)\right) \tag{F.32}$$

$$4\nu^4\sigma''(\nu,\varepsilon) + 12\nu^3\sigma'(\nu,\varepsilon) + 3\nu^2\sigma(\nu,\varepsilon) \equiv 4\nu^{\frac{3}{2}}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^2\frac{d}{d\nu}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\sigma(\nu,\varepsilon)\right)\right) \tag{F.33}$$

$$\begin{aligned} 4\nu^2\frac{\sigma'(\nu,\varepsilon)-\sigma'(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\nu\frac{\sigma(\nu,\varepsilon)-\sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon} &\equiv \\ 4\nu^{\frac{3}{2}}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\left[\sigma(\nu,\varepsilon)-\sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)\right]\right)& \end{aligned} \tag{F.34}$$

Bunların (F.19)'da yerlerine yerleştiriminden sonra oluşacak denklemin her iki yanı $\nu^{-3/2}/8$ ile çarpıldıktan sonra ν yerine η yerleştirilip η üzerinde 0'dan ν'ya dek tümlevlenirse; bu yapılırken ν sıfır olduğunda $\sigma(\nu,\varepsilon)$ değerinin sonlu kaldığı anımsanırsa; ve de, elde edilen denklemin her iki yanı $\nu^{-1/2}$ ile çarpılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\sigma(\nu,\varepsilon)\right) - \frac{1}{2}\frac{\sigma(\nu,\varepsilon)-\sigma(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\nu^{-\frac{1}{2}}}{4}\int_0^\nu d\eta\,\eta^{-\frac{1}{2}}\frac{d\sigma}{d\eta}(\eta-\varepsilon,\varepsilon) \\ \equiv \widehat{\mathscr{L}}\sigma(\nu,\varepsilon) = E(\varepsilon)\sigma(\nu,\varepsilon) \end{aligned} \tag{F.35}$$

Bu denklem, sıradan türevli, tümlevli, değişimtirimli bir doğrucul olan $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin özdenklemini tanımlamaktadır. Bu eşitliğin her iki yanı herhangi bir işlev olan $g(\nu,\varepsilon)$ ile çarpıldıktan sonra ν üzerinde sıfırdan sonsuza dek tümlevlenecek olursa bir "Rayleigh Oranı"nı [133, 134] veren aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$E(\varepsilon) = \frac{\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)\widehat{\mathscr{L}}\sigma(\nu,\varepsilon)}{\int_0^\infty d\nu\sigma(\nu,\varepsilon)^2} \equiv \left\langle\widehat{\mathscr{L}}\right\rangle(\sigma) \tag{F.36}$$

Bu eşitlik g işlevi $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin özişlevlerinden biri oldukça kesin olarak doğrudur ve $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin g özişlevine karşılık gelen özdeğerini üretir. Yoksa, üretilen değer bir özdeğer eşit olmaz. Böyle durumlarda

$$E_{yak}(\varepsilon) \equiv \frac{\int_0^\infty d\nu\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\widehat{\mathscr{L}}\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)}{\int_0^\infty d\nu\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)^2} \equiv \left\langle\widehat{\mathscr{L}}\right\rangle(\sigma) \tag{F.37}$$

ile tanımlanan işlevimsiden, verilen bir σ_{yak} işlevi için yaklaşık bir erke değeri belirlenebilir.

Uygulayımcıl bir adım atmak için σ_{yak}'a önceden de kullandığımız öngörümü yeniden yazalım.

$$\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon) \equiv \mathrm{e}^{-\gamma\nu} \tag{F.38}$$

Burada belirlenişi beklenen γ ve diğer büyüklük ν eksi olmayan değerler olarak düşünülmektedir. Önceden varolan A değişmez çarpanı erke belirleyici yapılarda görünmediğinden ve de σ işlevinin $\nu = 0$'da 1 değerini alışının gerekliliğinden dolayı burada 1 alınmıştır.

Bu öngörüm ile (F.36)'dan yaklaşık erke değerini bulmak için öncelikle (F.35)'i kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazmamız gerekmektedir.

$$\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\right) = \left(\frac{\nu}{4}-\frac{\gamma\nu^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-\gamma\nu} \tag{F.39}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)-\sigma_{yak}(\nu-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{2\varepsilon}\mathrm{e}^{-\gamma\nu} \tag{F.40}$$

$$-\frac{\nu^{-\frac{1}{2}}}{4}\int_0^{\nu} d\eta\,\eta^{-\frac{1}{2}}\frac{d\sigma_{yak}}{d\eta}(\eta-\varepsilon,\varepsilon) = \frac{\gamma\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{4\sqrt{\nu}}\int_0^{\nu}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}\mathrm{e}^{-\gamma\eta} \tag{F.41}$$

(F.36)'nın pay ve paydasını bu eşitlikleri kullanarak bulmak olanaklı.

$$\int_0^{\infty} d\nu\,\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\frac{\nu^{\frac{3}{2}}}{2}\frac{d}{d\nu}\left(\nu^{\frac{1}{2}}\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\right) = \int_0^{\infty} d\nu\left(\frac{\nu}{4}-\frac{\gamma\nu^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-2\gamma\nu} = -\frac{1}{16\gamma^2} \tag{F.42}$$

$$-\int_0^{\infty} d\nu\,\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\frac{1}{2}\frac{\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)-\sigma_{yak}(\nu-\varepsilon,\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{2\varepsilon}\int_0^{\infty} d\nu\,\mathrm{e}^{-2\gamma\nu} = \frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{4\gamma\varepsilon} \tag{F.43}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{\infty} d\nu\,\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\frac{\nu^{-\frac{1}{2}}}{4}\int_0^{\nu} d\eta\,\eta^{-\frac{1}{2}}\frac{d\sigma_{yak}}{d\eta}(\eta-\varepsilon,\varepsilon)\\
&\quad = \frac{\gamma\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{4}\int_0^{\infty}\frac{d\nu}{\sqrt{\nu}}\mathrm{e}^{-\gamma\nu}\int_0^{\nu}\frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}\mathrm{e}^{-\gamma\eta} = \frac{\gamma\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{8}\left(\int_0^{\infty} d\eta\,\mathrm{e}^{-\gamma\eta}\eta^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{\pi\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{8}
\end{aligned} \tag{F.44}$$

$$\int_0^{\infty} d\nu\,\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)^2 = \frac{1}{2\gamma} \tag{F.45}$$

Elde edilenler yerine konulduğunda

$$E_{yak}(\gamma,\varepsilon) = \frac{\pi\gamma}{4}-\frac{1}{8\gamma}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi\gamma\varepsilon}{4}\right)\frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{\varepsilon} \tag{F.46}$$

bulunur. Bu bağıntı γ $1/2\pi$'den büyük oldukça hep artı erke değeri üretir. Bu γ değerlerinden birisinin taban erke değerini kesin olarak vereceğini söylemek olanaklıdır. Ancak, bulunan eşitliğin hep artan nitelikte oluşundan dolayı ek bir bilgi olmadıkça bu değeri bulmak olanaklı gözükmemektedir.

Özüne eş $\widehat{\mathscr{L}}$ işleci için

Verilen bir $\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)$ işlevi için

$$
\begin{aligned}
E^{(2)}_{yak}(\varepsilon) \equiv & \frac{\int_0^\infty d\nu \left(\widehat{\mathscr{L}}\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\right)^2}{\int_0^\infty d\nu \sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)^2} \\
= & \frac{\int_0^\infty d\nu \sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)\widehat{\mathscr{L}}^\dagger \widehat{\mathscr{L}}\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)}{\int_0^\infty d\nu \sigma_{yak}(\nu,\varepsilon)^2} \equiv \left\langle \widehat{\mathscr{L}}^\dagger \widehat{\mathscr{L}} \right\rangle(\sigma)
\end{aligned}
\tag{F.47}
$$

ile tanımlanan († simgesi eş için (2) üstyazısı ise dördül için kullanılmaktadır) ve erke dördülüne yaklaştırım üreten işlevimsi bakışık bir işlecin beklenen değerini betimler. Bu işlevimsi bir Rayleigh Oranı olup durağan (ing: stationary) değerleri erke dördülü izgesini oluşturur. Bu izgedeki taban değer bu oranı en küçük kılar.

(F.38)'deki öngörüm için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$
\widehat{\mathscr{L}}\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}-1}{\varepsilon} + \frac{\nu}{4} - \frac{\gamma\nu^2}{4}\right)\mathrm{e}^{-\gamma\nu} + \frac{\gamma \mathrm{e}^{\gamma\varepsilon}}{4\sqrt{\nu}}\int_0^\nu \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}}\mathrm{e}^{-\gamma\eta}
\tag{F.48}
$$

Buradaki sağ yan anlatımının dördülünün ν üzerinde 0'dan sonsuza dek tümlevi erke dördül değerlerinin belirlenimine olanak sağlar. Elde edilecek ilgili beklenen değer γ değiştirgesine göre bir ya da birden çok eniyileyiş değeri üretir. Bunlardan en az değerli olanı taban erke değerine buradaki öngörüm bağlamında en iyi yaklaştırımı üretir.

σ için değiştirge sayısı yeterince yüksek olan yaklaştırım öngörümleri de gündeme getirilebilir. Bu bağlamda

$$
\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon) \equiv \mathrm{e}^{-\gamma\nu}\sum_{j=0}^{n} c_j P_j(\nu)
\tag{F.49}
$$

Burada n eksi olmayan bir bütünsayı olarak seçilecek olup $P_j(\nu)$ ile simgelenen büyüklük j. dereceden bir çokterimliyi göstermektedir. Bu çokterimliler aralarında $\exp(-2\gamma\nu)$ ağırlık işlevi altında dikgenleştirilmiş ve birim boylulaştırılmış olarak düşünülmektedirler. $c_j$ler belirlenecek doğrucul birleşim katsayıları olup bilgisayımı dizeyler ve yöneylerle ilintilendirecek olan olgudur. Bundan sonrası tümlevcil bilgisayımla dizey öğesi belirleyişi olup ele geçen dizeyin izgesi erke dördül değerleri için yaklaştırım değerlerinden oluşacaktır. Bunların artı dördülkökleri aranan erke değerlerini verecektir. Erke değerlerinden her birine bir c_0,...,c_n takımı karşılık gelecek ve bu da ilgili özişlevin üretimine olanak sağlayacaktır.

Özüne eş olmayan $\widehat{\mathscr{L}}$ işleci için

$\widehat{\mathscr{L}}$ işleci için özüne eş oluş durumu güvence altında olmadığından bir önceki kesimde verilen yaklaşımı yeniden ele almak ve kuramı tekrar oluşturmak uygun olacaktır. (F.47)'de tanımlanan işlevimsi, $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin eşi ile o işlecin özünün çarpımının beklenen değeridir. Beklenen değerde kullanılan işlev de yalnızca σ_{yak}'dır. Bu durum, bu beklenen değerin $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin dördülü üzerinde tanımlanmamış olduğundan, erke değerinin dördülünü vermez.

Beklenen değeri alınan işleç, aslında, $\widehat{\mathscr{L}}$'ın çarpımcıl bakışıklaştırımıdır. Erke ile dolaylı olarak ilgili olduğu düşünülse bile doğrudan bir doğabilimcil anlam vermek pek de olanaklı değildir. Bu yüzden (F.47) eşitliğini erke belirleyişinde kullanmak yerine $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin özdenklemine yeniden odaklanıp beklenen değerini yeniden tanımlamak gerekecektir. İşlecin özdenklemi aşağıdaki gibidir.

$$\widehat{\mathscr{L}}\sigma(\nu,\varepsilon) = E(\varepsilon)\sigma(\nu,\varepsilon) \tag{F.50}$$

Yukarıdaki denklem, aslında, $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin sağ özdenklemi, $\sigma(\nu,\varepsilon)$ da sağ özişlevi ve karşılık geldiği özdeğer $E(\varepsilon)$'dur. $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin sol özdenklemi aşağıdaki gibidir.

$$\widehat{\mathscr{L}}^{\dagger}\rho(\nu,\varepsilon) = E(\varepsilon)\rho(\nu,\varepsilon) \tag{F.51}$$

Burada, $\rho(\nu,\varepsilon)$ $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin $E(\varepsilon)$ özdeğerine karşılık gelen sol özişlevini simgeler. Görüldüğü gibi her bir katsız özdeğere bir sağ bir de sol özişlev karşılık gelir. Özdeğer katlılığı durumunda, katlılık sayısına eş sayıda sağ-sol özişlev ikilisi bulunabilir.

$\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin özüne eş oluşu durumunda (F.51) ile (F.50) örtüşür. Bu durumda yalnızca, tek bir özişleve, σ'ya odaklanılır ve bir önceki kesimdeki gibi ilerlenir.

Özüne eş olmayan bir $\widehat{\mathscr{L}}$ işleci için beklenen değer ya da o tabanda bir işlevimsi tanımında da yalnızca tek bir işlev değil hem sağ hem de sol özişlevlerle ilgili yapıları kullanmak gerekir. Bilimcil yazında "İki-Yanlı Rayleigh Oranı"ve "Ostrowski Oranı" [135–137] olarak geçen oran aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E(\varepsilon) = \frac{\int_0^\infty d\nu\rho(\nu,\varepsilon)\widehat{\mathscr{L}}\sigma(\nu,\varepsilon)}{\int_0^\infty d\nu\rho(\nu,\varepsilon)\sigma(\nu,\varepsilon)} \equiv \left\langle \widehat{\mathscr{L}} \right\rangle(\rho,\sigma) \tag{F.52}$$

$\widehat{\mathscr{L}}$ işleci ile onun eşinin tanım bölgelerinin farklıdır. Bunun nedeni sol ve sağ özişlevlerin işlevcil özelliklerinde tam bir örtüşümün olmayışı ya da sonlu adımlı dönüşümlere dayandırılma durumunun pek varolmayışıdır. $\widehat{\mathscr{L}}$ öztanım bölgesinden eştanım bölgesine, eşi ise eş tanım bölgesinden öztanım bölgesine dönüşüm gerçekleştirir. Bu işleçler tanım bölgelerinde görüntü yaratamazlar. Başka uzaya götürürler. Bu durumda görüntülerini tanım bölgelerinde yaratan işleçleri bulmak gerekir. Bunun için $\widehat{\mathscr{L}}$ ile eşinin ve eşi ile özünün çarpımları ele alınabilir. Bu durum, tekil değer ayrıştırımlarında bulunur. Bu ikili çarpımlarla oluşturulan işleçler özüne eş olup birincisinin özişlevleri sol, ikincisinin özişlevleri ise sağ olmak üzere $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin özişlevlerine karşılık gelir. Sırasıyla sol ve sağ tekil işlev adı verilen bu işlevlere karşılık gelen ortak özdeğerler ise tekil değerlerinin dördüllerine karşılık gelir. Bu nedenle, $E_{yak}^{(2)}(\varepsilon)$ ile simgelenen işlevimsi, $\widehat{\mathscr{L}}$ işlecinin özdeğer dördüllerine değil, tekil değer dördüllerini verir.

Bu çıkarımdan sonra sol ve sağ özişlev yaklaştırımları için aşağıdaki öngörümleri yaparak ilerleyelim.

$$\sigma_{yak}(\nu,\varepsilon) \equiv \mathrm{e}^{-\gamma_1\nu}, \qquad \rho_{yak}(\nu,\varepsilon) \equiv \mathrm{e}^{-\gamma_2\nu} \tag{F.53}$$

Ara aşamalar verilmeksizin bu öngörümlerin kullanımı ile aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{\mathscr{L}} \right\rangle(\sigma,\rho) = & \frac{1}{4(\gamma_1+\gamma_2)} + \frac{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}{4\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\right) - \frac{\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)^2} \\ & + \left(1+\frac{\gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)}{2\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\varepsilon\arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\right)\right)\frac{\mathrm{e}^{\gamma_1\varepsilon}-1}{2\varepsilon}\end{aligned} \tag{F.54}$$

Bu eşitliğin sağ yanı dört toplamcıl anlatımdan oluşmaktadır. Bunlardan ikincisi ve sonuncusu γ'lar hep artı kaldıkça artı kalırlar. Birinci ve üçüncü anlatımların toplamı ise eksi değer de alabilir. Ancak, γ_1 değiştirgesi $3\gamma_2$'den büyük kaldıkça bu toplam da hep artı değerler alır. Bu durum bir yeterlilik koşuludur. Uygun seçimler altında artılık durumu hep sağlanabilir. Artılık durumunda (F.54)'ün sağ yanının davranışını olabildiğince yalınlaştırabilmek için aşağıdaki dönüşümleri yapalım.

$$\gamma_1 \equiv r\sin(\varphi)^2, \qquad \gamma_2 \equiv r\cos(\varphi)^2, \tag{F.55}$$

Burada, γ'lar eksi olmadıkça, r de eksi olmaksızın değerler alır. Buna karşın φ de 0 ile $\pi/2$ arasında değişir. Bu dönüşümlerin (F.54)'te kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\left\langle \widehat{\mathscr{L}} \right\rangle(\sigma,\rho) = \left(\frac{1}{4} - \cos(\varphi)^2\right)\frac{1}{r} + \frac{e^{r\cos(\varphi)^2\varepsilon} - 1}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{2}\tan(\varphi)\left(e^{r\cos(\varphi)^2\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)r \tag{F.56}$$

Sağ yan anlatımı, φ değiştirgesi $\pi/3$'ten büyük değer aldıkça, r'nin eksi olmayan tüm değerleri için hep artı kalır ve bir en küçük değer alır. φ değiştirgesi $\pi/3$'ten küçük kalsa da, ε'a bağlı olarak değişebilen birkesim değerlerde artı kalabilir ama, artık, en küçük sonlu bir değeri olamaz. En küçük değeri belirleyebilmek için sağ yan anlatımının r'ye göre türevini alıp sıfıra eşitlemek ve elde edilecek cebircil denklemi çözmek gerekir. ε sıfır olmadıkça bu eylem çözümcül olarak gerçekleştirilemez. $\varepsilon = 0$ içinse (F.56) aşağıdaki yapıya bürünür

$$\left\langle \widehat{\mathscr{L}} \right\rangle(\sigma,\rho)\Big|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{1}{4} - \cos(\varphi)^2\right)\frac{1}{r} + \left(\frac{\varphi}{4}\tan(\varphi) + \cos(\varphi)^2\right)r = E_{us} \tag{F.57}$$

(F.57)'yi r'ye göre türevleyip sıfıra eşitler isek oluşan denklemin r için çözümü

$$r_{ei} = \sqrt{\frac{1 - 4\cos(\varphi)^2}{\varphi\tan(\varphi) + 4\cos(\varphi)^2}} \tag{F.58}$$

bulunur. Burada *ei* altyazısı eniyilenmiş değer anlamındadır. Bu eniyilenmiş değere karşılık gelen erke değeri E_{ei} için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$E_{ei} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\cos(\varphi)^2}\sqrt{\varphi\tan(\varphi) + 4\cos(\varphi)^2} \tag{F.59}$$

Bu eşitliğin φ, $\pi/3$ ile $\pi/2$ arasında değer alırken bir en küçük değer alması gerekir. Yoksa, φ değerinin seçiminde ne gibi ölçüt kullanılacağı sorunu ortaya çıkar. O durumda, en küçük sendelenim arayışına gitmek bir çözüm olarak görülebilir. Öte yandan, yukarıdaki r_{ei} değeri $\varphi = \pi/3$ için de, $\varphi = \pi/2$ için de sıfırlanır ve bu iki değerin arasında, sürekliliği nedeniyle, en azından bir yerel en büyük değer alır. Bunu veren φ değeri kullanmak olanaklıdır.

Düzleşiklik ya da gürbüzlük ilkesi

Önceki altbölümde (F.57) ile verilen eşitliğin r 'ye göre türevini alınıp, sıfıra eşitlenimi ile elde edilen denklemin sonuçları (F.58) ve (F.59) eşitlikleri ile verilmişti. (F.59)'un sağ yanındaki anlatım φ, $\pi/3$'ten $\pi/2$'ye dek değiştikçe tekdüze artar ve φ'nin belirlenimi için bir ölçüt getirmez. Buna karşın, r_{ei} için verilen eşitlik (F.58) incelendiğinde sağ yanın 0'dan başlayarak tekdüze arttığı ve belli bir değere ulaştıktan sonra 0'a doğru tekdüze azaldığı görülür. Bu durum, φ'nin belirlenimi için bir önemlidir. Çünkü r_{ei} bir en küçük değerdir. Bu en küçük değerden sapışın E_{us}'de büyük değişikliklere yolaçmaması istenir. E_{us}'daki bu özellik onun olabildiğince düzleşik (ing: flat) ya da gürbüz (sağlıklı, az etkilenen, ing: robust) oluşu olarak nitelendirilir. E_{us}'un r'ye göre ikinci türevi, r_{ei} dolaylarında, ne düzeyde küçükse (en küçüklük için artılık gereklidir); E_{us} r'ye göre o yörede o düzeyde düzleşiktir. E_{us}'un r'ye göre ikinci türevinin φ'ye göre enküçüklenimi aranan φ değer(ler)ini verecektir.

(F.57)'nin her iki yanının r'ye göre 2. türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 E_{us}}{\partial r^2}(r,\varphi) = \frac{1}{2}\left(1-4\cos(\varphi)^2\right)\frac{1}{r^3}. \tag{F.60}$$

elde edilir. Burada, r yerine r_{ei} alınarak, eniyileniş sonucu kullanılırsa aşağıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

$$\frac{\partial^2 E_{us}}{\partial r^2}(r_{ei},\varphi) = \frac{1}{2}\left(1-4\cos(\varphi)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\varphi\tan(\varphi)+4\cos(\varphi)^2\right)^{\frac{3}{2}} \tag{F.61}$$

Bunun sağ yan anlatımının, φ $\pi/3$'ten $\pi/2$'ye değişirken, alacağı en küçük değer(ler)in ve onu yaratan φ değer(ler)inin saptanışı, E_{us}'in en düzleşik ya da en gürbüz durumunu elde edişe olanak sağlayacaktır.

(F.61)'in her iki yanı φ'ye göre türevlenecek olursa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^2 E_{us}}{\partial r^2}(r_{ei},\varphi)\right) = \left(1-4\cos(\varphi)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\varphi\tan(\varphi)+4\cos(\varphi)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Phi(\varphi) \tag{F.62}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) = &-\sin(2\varphi)\left(\varphi\tan(\varphi)+4\cos(\varphi)^2\right)+\frac{3}{4}\left(1-4\cos(\varphi)^2\right)\\ &\times\left(\tan(\varphi)+\varphi+\varphi\tan(\varphi)^2-4\sin(2\varphi)\right)\end{aligned} \tag{F.63}$$

(F.62)'nin sağ yanının, φ değiştirgesi $\pi/3$ ile $\pi/2$ arasında değişirken 0 olacağı beklenmektedir. Oradaki yapı ancak $\Phi(\varphi) = 0$ denklemi sıfırlanırsa sıfır olur. $\Phi(\varphi) = 0$ denkleminin belirtilen aralıkta tek bir gerçel kökü olmakla birlikte çözümcül olarak belirlenemez. Ancak sayıcıl ve simgecil bilgisayım yapabilen buyrukdiziler (programlar) ile belirlenebilir. Ekte verilen MuPAD betiği ile 20 ondalık basamak duyarlık düzeyinde gerçekleştirilmiş ve ilk dokuz ondalık basamak gösterilim düzeyinde ama son basamak yuvarlanarak $\varphi = 1.179713302$ elde edilmiştir. Buna karşıllık gelen uyumlu salıngaç erke değeri de eş düzeyde, $E_{us} = 0.600330425$ olarak bulunur. Öngörülen işlev yapısının oldukça kaba seçilmiş oluşuna karşın, elde edilen yaklaşık değer, kesin taban erke değeri olan $E_{us} = 1/2$ değerine göre kötü bir yaklaştırım değildir.

MuPAD betiği

```
DIGITS:=20;
Eus:=(r,varphi)->(1/4-cos(varphi)^2)/r+\
(varphi*tan(varphi)/4+cos(varphi)^2)*r;
Eus(x,y);
Eus1nTur2r:=(r,varphi)->diff(Eus(r,varphi),r);
Eus1nTur2r(r,varphi);
rei:=varphi->sqrt(1-4*cos(varphi)^2)/sqrt(varphi*\
tan(varphi)+4*cos(varphi)^2);
Eei:=varphi->simplify(Eus(rei(varphi),varphi));
Eus2nTur2r:=(r,varphi)->diff(Eus(r,varphi),r$2);
Eus2nTur2r(r,varphi);
Eus2nTur2rSubsrei:=varphi->\
simplify(subs(Eus2nTur2r(r,varphi),r=rei(varphi)));
Eus2nTur2rSubsrei(varphi);
Phi:=varphi->expand(subs(simplify((1-4*cos(varphi)^2)\
^(3/2)*(varphi*tan(varphi)+4*cos(varphi)^2)^(-1/2)*\
diff(Eus2nTur2rSubsrei(varphi),varphi)),\
tan(varphi)=sin(varphi)/cos(varphi)));
Phi(varphi);
PhiOte:=varphi->-2*sin(varphi)*cos(varphi)*(varphi*\
sin(varphi)/cos(varphi)+4*cos(varphi)^2)+(3/4)*\
(1-4*cos(varphi)^2)*\
(sin(varphi)/cos(varphi)+varphi+varphi*sin(varphi)^2/\
cos(varphi)^2-8*cos(varphi)*sin(varphi));
PhiOte(varphi);
simplify(expand(Phi(varphi)-PhiOte(varphi)));
numeric::solve(Phi(varphi)=0,varphi=PI/3..PI/2);
numeric::solve(PhiOte(varphi)=0,varphi=PI/3..PI/2);
varphi:=numeric::solve(Phi(varphi)=0,varphi=\
PI/3..PI/2)[1];
Eei(varphi);
```

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Semra Bayat Özdemir

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2004, Bilkent Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2007, İstanbul Teknik Üniversitesi, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Anabilim Dalı, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik Programı.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Bayat Özdemir, S.**, 2018. Determination of Spectral Quantities in Hyperbolically Bent Coordinates With Characteristic Potentials, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*, 9, 177–188.
- **Bayat Özdemir, S.**, Demiralp, M., 2018. Using Enchanted Features of Constancy Adding Space Extension (CASE) to Reduce the Dimension of Evolver Dynamics: Single Monomial Probabilistic Evolution Theory, *Journal of Mathematical Chemistry*, 56(7), 2044–2068.
- **Bayat Özdemir, S.**, 2018. Coordinate Axis Bending in Univariate Schrödinger Equations, *AIP Conference Proceedings, ICNPAA 2018 World Congress, 16-17 December 2018*, Erivan, 2046, s.020007.
- **Bayat Özdemir, S.**, Demiralp, M., 2017. Probabilistic Evolution Theoretical Formulation of Anharmonic Symmetric Quantum Oscillator by Using Quantum Evolver Dynamics, *Proceedings of the 17th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE'17), 4-8 July 2017*, Kadiz, s.221–232.
- **Bayat Ozdemir, S.**, Demiralp, M., 2016. Approximation to Expectation Value of Non-Selfadjoint Operator in Anharmonic Exponential Oscillator System with Use of Two-Sided Rayleigh Quotient. *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1, 170-175.
- **Bayat Ozdemir, S.**, Demiralp, M., 2015. Majorant Recursions to Determine Eigenstate Bounds of a Symmetric Exponential Quantum Anharmonic Oscillator, *AIP Conference Proceedings*, 1702, s.170010.
- **Bayat, S.**, Demiralp, M., 2013. Governing the Reductive Flexibilities in the Kronecker Power Representation of Ordinary Differential Equations Constancy Added Space Extension, *Proceedings of the WSEAS 1st International Conference on Optimization Techniques in Engineering (OTENG'13), 8-10 October 2013*, Antalya, s.120–124.

- **Bayat, S.**, Demiralp, M., 2013. Space Extensions Including Constancy Addition for Exponentially Anharmonic Symmetric Quantum Oscillator in Fluctuation Free Expectation Value Dynamics, *Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on System Theory and Scientific Computation (ISTASC'13), 6-8 Agust 2013*, Valensiya, 9, s.111–116.

- **Bayat, S.**, Demiralp, M., 2013. Conservation Law Construction via Mathematical Fluctuation Theory for Exponentially Anharmonic, Symmetric, Quantum Oscillator, *Proceedings of the 13th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (CMMSE'13)*, s.218–225.

- Demiralp, M., **Bayat, S.**, 2013. Fluctuation Free Limit Behavior of the One Dimensional Quantum Systems in Space Extension Perspective: Exponentially Anharmonic Symmetric Oscillator, *Proceedings of the WSEAS 15th International Conference on Mathematical and Computational Methods in Science and Engineering, 2-4 April 2013*, Kuala Lumpur, Malezya, s. 201–206.

- **Bayat, S.**, Demiralp, M., 2012. Quantum Optimal Control Theoretical Observable Transitions Between State and Costate in Probabilistic Evolution Perspective, *Proceedings of the WSEAS 12th International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, (ISTASC'12), 21-23 August 2012*, İstanbul, Türkiye, s.272-277.

- **Bayat, S.**, Demiralp, M., 2012. Probabilistic Evolution for the Most General First Order Single Unknown Explicit ODEs: Autonomization, Triangularization, and , Certain Important Aspects in the Analysis for Multi Unknown Case, *Proceedings of the WSEAS 13th International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), 13-15 June 2012*, Yaş, s.57–62.