

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUATERNİON VE GENİŞLETİLMİŞ KALMAN SÜZGEÇİ  
KULLANILARAK ALÇAK YÖRÜNGE UYDUSUNUN YÖNELME  
KESTİRİMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hakan AYKENT**

**Anabilim Dalı : Uçak ve Uzay Bilimleri**

**Programı : Disiplinler Arası Program**

**HAZİRAN 2011**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KUATERNİON VE GENİŞLETİLMİŞ KALMAN SÜZGEÇİ  
KULLANILARAK ALÇAK YÖRÜNGE UYDUSUNUN YÖNELME  
KESTİRİMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hakan AYKENT  
(511071115)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 06 Mayıs 2011**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 08 Haziran 2011**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Çingiz HACIYEV (İTÜ)  
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Alim Rüstem ASLAN (İTÜ)  
Doç. Dr. Fikret ÇALIŞKAN (İTÜ)**

**HAZİRAN 2011**



*Anneme,*



## ÖNSÖZ

Tüm mühendislik ve özellikle uydu teknolojilerinde genel olarak kabul gören, daha az alt sistem ile daha başarılı görevlere ulaşılması yaklaşımı, bu alt sistemlerin uygun yazılımlarla desteklenmesiyle gerçekleşebilmektedir. Bu nedenle, bazı yönelme kestirim algoritmalarının incelenmesi konusunda bir tez çalışması gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışmanın gerçekleşmesini sağlayan, değerli hocam Prof. Dr. Çingiz Hacıyev'e desteği, aydınlatıcı ve yönlendirici tavsiyeleri için teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2011

Hakan Aykent

(Uzay ve Uçak Mühendisi)





|                                                        |             |
|--------------------------------------------------------|-------------|
| <b>ÖNSÖZ.....</b>                                      | <b>v</b>    |
| <b>KISALTMALAR .....</b>                               | <b>ix</b>   |
| <b>ÇİZELGE LİSTESİ.....</b>                            | <b>xi</b>   |
| <b>ŞEKİL LİSTESİ.....</b>                              | <b>xiii</b> |
| <b>SEMBOL LİSTESİ .....</b>                            | <b>xv</b>   |
| <b>ÖZET.....</b>                                       | <b>xvii</b> |
| <b>SUMMARY .....</b>                                   | <b>xix</b>  |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>                                  | <b>1</b>    |
| 1.1 Tezin Amacı .....                                  | 2           |
| 1.2 Literatür Özeti .....                              | 2           |
| 1.3 Hipotez .....                                      | 3           |
| <b>2. YÖNELME DİNAMİĞİ.....</b>                        | <b>5</b>    |
| 2.1 Amaç .....                                         | 5           |
| 2.2 Dönme Dinamiği .....                               | 5           |
| 2.2.1 Doğrultu kosinüsleri.....                        | 5           |
| 2.2.2 Euler açıları .....                              | 6           |
| 2.2.3 Kuaterniyonlar .....                             | 6           |
| 2.2.4 Kinematik diferansiyel denklemler .....          | 7           |
| 2.3 Katı Cisim Dönme Dinamiği.....                     | 9           |
| 2.3.1 Açısal momentum .....                            | 9           |
| 2.3.2 Açısal hareket denklemleri.....                  | 12          |
| 2.4 Dairesel Yörüngedeki Uzak Aracı .....              | 13          |
| <b>3. KULLANILAN TEORİK MODELLER .....</b>             | <b>19</b>   |
| 3.1 Amaç .....                                         | 19          |
| 3.2 Uydu Yönelmesinin Matematiksel Modeli .....        | 19          |
| 3.3 Dünya Manyetik Alan Modeli.....                    | 21          |
| 3.4 Güneş Yönelme Vektörünün Matematiksel Modeli ..... | 22          |
| 3.5 Nadir Vektörü Modeli .....                         | 25          |
| 3.6 Jirooskop Modeli.....                              | 25          |
| <b>4. YÖNELME TESPİT VE KESTİRİM YÖNTEMLERİ .....</b>  | <b>27</b>   |
| 4.1 Wahba Problemi ve $q$ Yöntemi .....                | 27          |
| 4.2 En Yakın Komşu Yöntemi .....                       | 30          |
| 4.3 Optimal Kalman Süzgeci .....                       | 31          |
| 4.3.1 Doğrusal Kalman süzgeci .....                    | 31          |
| 4.3.2 Genişletilmiş Kalman süzgeci.....                | 33          |
| 4.4 Hata Analizi.....                                  | 34          |
| <b>5. BENZETİMLER.....</b>                             | <b>35</b>   |
| 5.1 Amaç .....                                         | 35          |
| 5.2 MODELLERİN BENZETİMİ .....                         | 35          |
| 5.2.1 Uydu modelinin benzetimi.....                    | 35          |
| 5.2.2 Dünya manyetik alan vektörünün benzetimi .....   | 36          |
| 5.2.3 Güneş yönelme vektörünün benzetimi .....         | 37          |
| 5.2.4 Nadir vektörünün benzetimi.....                  | 38          |
| 5.2.5 Jirooskop benzetimi .....                        | 38          |
| 5.3 Q Yöntemi .....                                    | 39          |
| 5.4 En Yakın Komşu Yöntemi .....                       | 40          |
| 5.5 Genişletilmiş Kalman Süzgeci .....                 | 42          |

|                                                          |           |
|----------------------------------------------------------|-----------|
| 5.5.1 Gölge bölgesinde Kalman süzgecinin çalışması ..... | 43        |
| 5.5.2 Güneş bölgesinde Kalman süzgecinin çalışması.....  | 44        |
| 5.6 Kestirim Benzetimlerinin Tümüleştirilmesi .....      | 48        |
| <b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>                         | <b>55</b> |
| 6.1 Çalışmanın Uygulama Alanı .....                      | 56        |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>                                    | <b>57</b> |
| <b>EKLER.....</b>                                        | <b>59</b> |

## **KISALTMALAR**

|             |                                        |
|-------------|----------------------------------------|
| <b>AB</b>   | : Astronomik Birim                     |
| <b>DMY</b>  | : Dünya Merkezli Yörünge               |
| <b>EDM</b>  | : Eylemsiz Dünya merkezli              |
| <b>EYKY</b> | : En Yakın Komşu Yöntemi               |
| <b>GKS</b>  | : Genişletilmiş Kalman Süzgeci         |
| <b>KKS</b>  | : Küresel Koordinat Sistemi            |
| <b>YBKS</b> | : Yönelme Belirleme ve Kontrol Sistemi |
| <b>YKS</b>  | : Yönelme Kontrol Sistemi              |



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 5.1 :</b> Q yönteminden bulunan kuaternionların gerçek değerlerden farkı (Birimsiz). ....                                                 | 42 |
| <b>Çizelge 5.2 :</b> Gölge ve Güneşli bölgelerde çalışan GKS için kestirim hataları (Birimsiz). ....                                                 | 45 |
| <b>Çizelge 5.3 :</b> Gölge bölgede çalışmaya başlayan Q yönteminin hesapladığı sonuçların referans kuaternionlardan farkları (Birimsiz).....         | 46 |
| <b>Çizelge 5.4 :</b> Q yönteminin güneşli ve güneşsiz durumlarda varyans değerleri.....                                                              | 47 |
| <b>Çizelge 5.5 :</b> Tümleştirme sürecinde çalışan GKS kuaternionların ilk elemanı için kestirim hataları ve P'nin diagonal elemanı (Birimsiz) ..... | 50 |
| <b>Çizelge 5.6 :</b> Tümleştirme sürecinde çalışan GKS açısal hızın ilk elemanı için kestirim hataları ve P'nin diagonal elemanı (Rad/Sn) .....      | 51 |
| <b>Çizelge 5.7 :</b> Tümleştirme sürecinde GKS'nin kestirimindeki hata durumu (Birimsiz) .....                                                       | 51 |
| <b>Çizelge 5.8 :</b> Euler açılarının bulunmasındaki mutlak hata ve varyans değerleri. ....                                                          | 53 |



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.1</b> : A ve B referans eksen takımları [6].....                                                                                                        | 5  |
| <b>Şekil 2.2</b> : Ötelenmeden dönen katı cisim [6] .....                                                                                                          | 10 |
| <b>Şekil 2.3</b> : Dünya merkezli çekim merkezi etkisiyle dairesel yörüngedeki uzay aracı [6].....                                                                 | 13 |
| <b>Şekil 5.1</b> : Uydu modelinin benzetimi sonucu elde edilen referans değerler (Açısal hızlar Rad/Sn, Kuaternionlar ise birimsiz).....                           | 36 |
| <b>Şekil 5.2</b> : Dünya manyetik alan vektörü modelinin benzetimi sonucu elde edilen referans değerler (Birimsiz) .....                                           | 37 |
| <b>Şekil 5.3</b> : Güneşe yönelme vektörü modelinin benzetimi sonucu elde edilen referans değerler (Birimsiz) .....                                                | 37 |
| <b>Şekil 5.4</b> : Nadir vektörünün yörünge eksen takımındaki durumu (Birimsiz). ....                                                                              | 38 |
| <b>Şekil 5.5</b> : Jirooskop benzetimi sonuçları (Rad/Sn).....                                                                                                     | 38 |
| <b>Şekil 5.6</b> : Q yönteminin girdi ve çıktıları. ....                                                                                                           | 39 |
| <b>Şekil 5.7</b> : Referans kuaternionlar ve Q yönteminden elde edilen kuaternionlar (Birimsiz). ....                                                              | 40 |
| <b>Şekil 5.8</b> : En yakın komşu yöntemi ile düzeltilmiş sonuçlar (Birimsiz). ....                                                                                | 41 |
| <b>Şekil 5.9</b> : Q yöntemi sonuçlarının düzeltildikten sonra, referans kuaternionlarla aralarındaki değer farkları (Birimsiz).....                               | 41 |
| <b>Şekil 5.10</b> : Kalman süzgecinin akış şeması. ....                                                                                                            | 42 |
| <b>Şekil 5.11</b> : Gölge bölgesinde Kalman süzgecinin $q_1$ kestirimi sonucu (Birimsiz). ..                                                                       | 43 |
| <b>Şekil 5.12</b> : Gölge bölgesinde Kalman süzgecinin $w_1$ kestirimi sonucu (Rad/Sn). ...                                                                        | 44 |
| <b>Şekil 5.13</b> : Güneş bölgesinde Kalman süzgecinin $q_1$ kestirimi sonucu (Birimsiz)...                                                                        | 44 |
| <b>Şekil 5.14</b> : Güneş bölgesinde Kalman süzgecinin $w_1$ kestirimi sonucu (Rad/Sn)...                                                                          | 45 |
| <b>Şekil 5.15</b> : Tümleştirilme sürecinde gölge bölgede çalışan Q yönteminden elde edilen kuaternionların farkları (Birimsiz). ....                              | 46 |
| <b>Şekil 5.16</b> : Tümleştirilme sürecinde gölge bölgede çalışan Q yöntemine giren Manyetik alan ve Nadir vektörleri arasındaki açının derece cinsinden değeri. . | 47 |
| <b>Şekil 5.17</b> : Tümleştirilme süreci akış şeması .....                                                                                                         | 48 |
| <b>Şekil 5.18</b> : Q yöntemi ve Kalman süzgeci sürümlerinin ardışık olarak çalıştırılması sonucu elde edilen $q_1$ kestirimi (Birimsiz). ....                     | 49 |
| <b>Şekil 5.19</b> : Q yöntemi ve Kalman süzgeci sürümlerinin ardışık olarak çalıştırılması sonucu elde edilen $w_1$ kestirimi (Rad/Sn). ....                       | 50 |
| <b>Şekil 5.20</b> : Kestirilen ve referans alınan değerler yardımıyla, Euler açıları arasındaki farklar (Rad). ....                                                | 52 |
| <b>Şekil 5.21</b> : Hata analizi sonucunda elde edilen varyans değerleri.....                                                                                      | 53 |
| <b>Şekil A.1</b> : Tümleştirilmiş senaryoda çalışan GKS'de kestirim ve hata grafikleri (a) $q_2$ (b) $q_3$ (c) $q_4$ (d) $w_2$ (e) $w_3$ .....                     | 61 |





## SEMBOL LİSTESİ

|                            |                                                                                                 |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A</b>                   | : Yörünge referans eksen takımı                                                                 |
| <b>B</b>                   | : Gövde referans eksen takımı                                                                   |
| <b>B<sub>m</sub></b>       | : Manyetik kontrol ( <b>M</b> 'nin katsayı) matrisi                                             |
| <b>C (C<sup>B/A</sup>)</b> | : Doğrultu kosinüsleri matrisi                                                                  |
| <b>e</b>                   | : Kalman innovasyon değeri                                                                      |
| <b>F</b>                   | : Durum geçiş matrisi                                                                           |
| <b>H</b>                   | : Uzay aracının kütle merkezi etrafındaki açısal momentum vektörü<br>Kalman ölçüm geçiş matrisi |
| <b>I</b>                   | : Uzay aracının eylemsizlik matrisi                                                             |
| <b>K</b>                   | : Kontrol kazancı matrisi<br>Kalman kazancı matrisi                                             |
| <b>N</b>                   | : Eylemsiz referans eksen takımı                                                                |
| <b>P</b>                   | : Pozitif tanımlı matris                                                                        |
| <b>Q</b>                   | : Durum ağırlığı matrisi                                                                        |
| <b>R<sub>D</sub></b>       | : Dünya'nın ekvatordaki yarıçapı                                                                |
| <b>T</b>                   | : Uzay aracının yörünge periyodu<br>Uzay aracına etki eden toplam tork vektörü                  |
| <b>h</b>                   | : Birim kütle başına yörüngedeki açısal momentum vektörü                                        |
| <b>i</b>                   | : Yatıklık açısı                                                                                |
| <b>m</b>                   | : Dünya'nın manyetik sabiti                                                                     |
| <b>n</b>                   | : Uzay aracının Dünya etrafındaki açısal dönme hızı, ortalama hareket                           |
| <b>q<sub>i</sub></b>       | : Kuaterniyon (i=1,2,3,4)                                                                       |
| <b>r</b>                   | : Uzay aracının Dünya'nın merkezine göre konum vektörü                                          |
| <b>x</b>                   | : Durum vektörü                                                                                 |
| <b>Υ</b>                   | : İlk bahar noktası                                                                             |
| <b>Ω</b>                   | : ω'nın eğri-simetrik matrisi<br>Yükselme düğümünün sağdan yükselmesi                           |
| <b>γ</b>                   | : Hız doğrultusu açısı                                                                          |
| <b>θ</b>                   | : Yunuslama açısı (üç Euler açısından biri)<br>Gerçek anomali<br>Enlemi 90°'ye tamamlayan açı   |
| <b>μ</b>                   | : Dünya'nın kütle-çekim sabiti                                                                  |
| <b>φ</b>                   | : Yuvarlanma açısı                                                                              |
| <b>ψ</b>                   | : Sapma açısı                                                                                   |
| <b>ω<sub>D</sub></b>       | : Dünya'nın kendi eksenini etrafındaki dönme hızı                                               |
| <b>ω (ω<sup>B/A</sup>)</b> | : B'nin A'ya göre açısal hız vektörü, bağıl açısal hız vektörü                                  |
| <b>ω<sup>B/N</sup></b>     | : B'nin N'ye göre açısal hız vektörü, mutlak açısal hız vektörü                                 |



# KUATERNİON VE GENİŞLETİLMİŞ KALMAN SÜZGEÇİ KULLANILARAK ALÇAK YÖRÜNGE UYDUSUNUN YÖNELME KESTİRİMİ

## ÖZET

Ekonomik olmaları, az enerji sarf etmeleri ve az yer kaplamaları nedeniyle, uydu yönelme tespitinde güneş algılayıcıları ve manyetometreler sıklıkla kullanılmalıdır. Özellikle alçak yörünge uydularında manyetometrelerin kullanımına daha sık rastlanmaktadır. Ancak, manyetometrelerin ölçüm hatalarının yüksek olması, bazı görev isterlerini karşılayamamasına neden olur. Bu hataların azaltılması için uygun algoritmaların kullanılması ve görev isterlerini yerine getirebilecek doğrulukta ölçüm sonuçlarının elde edilmesi gerekir. Uygulanan algoritmaların, her sistem yapılandırılmaya göre ayarlanması, algoritmanın yetersiz kaldığı yerde başka bilgilerle beslenmesi, görev sırasından meydana çıkan anlık hatalara karşı dayanıklı kılınması, yönelme tespit görevinin yerine getirilmesi için hayati önem taşımaktadır. Çalışmada, bir alçak yörünge uydusunun yönelme kestirim yöntemleri incelenmiştir. Öncelikle bir literatür taramasıyla önceki çalışmalar gözden geçirilip, daha sonra teorik modellerin matematiksel geçmişi hakkında kısa bir giriş yapılmıştır. Kuaterniyonlar, Dünya'nın manyetik alan referans vektörü, Güneş vektörü incelenmiştir. Q Yöntemi, En Yakın Komşu Yöntemi ve Genişletilmiş Kalman Süzgeci (GKS) açıklanmış, teorik altyapısından bahsedilmiş ve benzetim çalışmaları verilmiştir. Bu benzetim sonuçlarının ardından, Q Yöntemi, En Yakın Komşu yöntemi ve Genişletilmiş Kalman Süzgeciyle sırasıyla benzetime sokulmuştur. Her algoritması başlangıç koşulları olarak diğerine sonuçlarını almaktadır. Aynı zamanda uydunun gölgede kaldığı ve güneşte kaldığı durumlar ardışık olarak benzetime sokulmuştur. Bu durum Kalman Süzgecinin kullandığı algılayıcı girişlerini etkilemektedir. Sonuçlar kısmında ise yapılan çalışma gözden geçirilmiş ve ileride üzerine neler eklenebileceği konusunda önerilerde bulunulmuştur.



# **ATTITUDE ESTIMATION OF LOW EARTH ORBIT SATELLITE BY USING QUATERNION-BASED EXTENDED KALMAN FILTER**

## **SUMMARY**

Sun sensors and magnetometers are often used in satellite attitude determination systems, because of their low power requirement, low cost and low mass character. In particular, the uses of magnetometers are more common among low-orbit satellites. However, a magnetometer measurement error is high and it does not meet some of the space mission requirement. To obtain accurate measurement results by reducing these errors and to carry out the mission requirement, appropriate algorithms must be used. To fulfill the mission requirements, applied algorithms should be adapted for each system configuration, when the algorithm is inadequate it should be fed by some other inputs, it should be less sensitive to disturbances. In the work, attitude estimation methods of a low earth orbit satellite are investigated. First, a literature review has been done to review the previous works, then a brief introduction about mathematical background of theoretical models is given. Quaternions, Earth's magnetic field reference vector, Sun vector are examined. The theory behind Q Method, Nearest Neighbor Algorithm and Extended Kalman Filtering is given and the simulation studies are shown. After the results of these simulations, Q Method, Nearest Neighbor Algorithm and Extended Kalman Filtering are simulated in order. Each algorithm passes its results to next one as initial conditions. Also a scenario is applied as shadow and sunlit consecutively which effects Kalman Filter input. In discussion, these methods are discussed and the possible future studies are suggested.



## 1. GİRİŞ

İlk insansız uzay aracı olan Sputnik'in, 4 Ekim 1957'de, Sovyet Rusya tarafından fırlatılmasıyla uydular, insanlık tarihindeki varoluşuna başlamıştır. Görevi sadece kendisini tanıtan bir sinyal yollamak olan Sputnik'ten günümüze gelene kadar uzay araçları, iletişim, gözlem, navigasyon ve bilimsel araştırma gibi görevlerle, hem insanlı hem de insansız olarak insanlığa büyük hizmetlerde bulunmuşlardır.

Tüm uzay aracı görevlerinin en önemli parametrelerinden bir tanesi yönelme tespiti ve kontrolüdür. Uzay aracının görevine bağlı olarak yönelme doğruluğunun artması söz konusu olabilir. Bu ister, aynı zamanda yönelme tespit doğruluğunun da artmasını getirir. Yönelme tespiti iç (ataletsel) ve dış kaynaklı ölçüm cihazlarından alınan bilgiler doğrultusunda yapılabilmektedir. Her ölçüm cihazının kendine has avantaj ve dezavantajları olmakta, bunların seçimi ise görev isterlerine bakılarak yapılmaktadır. Örneğin yüksek yönelme hassasiyeti isteyen bir görevde, algılayıcı olarak yıldız kamerası kullanılmaktadır. Ancak yıldız kameralarının fiyatının pahalı ve enerji isterlerinin nispeten yüksek olması onun eksileridir. Manyetik alan algılayıcısı ise enerji isteri ve maliyeti düşük olan bir algılayıcıdır. Ancak manyetik alan algılayıcısının hassasiyetinin düşük olması, yönelme belirleme isteği yüksek olan bir görevde kullanılmasını engeller. Algılama hassasiyetinde ortaya çıkan bu eksikliği ve hataları azaltmak amacıyla, alınan sinyaller, uydu bilgisayarında uygun algoritmalara sokularak giderilmesi yoluna gidilir.

## 1.1 Tezin Amacı

Yere yakın yörüngelerde çalışan uydular, özellikle uzaktan algılama uygulamaları için önem taşımaktadır. Bu tip görevlerin gereksinimi olarak, yüksek yönelim hassasiyeti ortaya çıkmaktadır. Gün geçtikçe, uydu tasarımlarında ortaya çıkan gereksinimler, daha ufak boyutlarla, daha az enerjiyle, daha yüksek başarımla elde etme yönünde gelişmiştir. Bu bağlamda, uydularda yönelme belirleme alt sistemlerinde de, daha az eleman kullanılması, hem boyutu azaltmak hem de maliyeti düşürmek yönünden uygun görülen tasarım yaklaşımı olmuştur. Ancak bu durum, yönelme belirleme başarısının azalmasına sebep olmamalıdır. Yönelim belirleme sisteminin algılayıcılarından gelen bilgiler doğrultusunda, yüksek doğrulukta yönelim bilgisine, bu bilgilerin uygun algoritmalarla işlenmesiyle ulaşılmaktadır.

Bu çalışmada bir alçak yörünge uydusunun modeli alınarak, kuaternionlara dayalı olarak yönelmesi incelenmiştir. Modellenen algılayıcılardan gelen bilgiler doğrultusunda, Q yöntemi ve Genişletilmiş Kalman süzgeci kullanılarak, yönelme hesaplamalarına algılayıcılarından gelen hatalar giderilmeye çalışılmıştır.

## 1.2 Literatür Özeti

1990’lardan itibaren, uyduların yönelme tespit ve kontrol sistemlerinde oldukça önemli gelişmeler kaydedilmiştir. Hem sivil hem de askeri uygulamalarda kullanılan, alçak irtifalı yörüngelerden yer gözlemi yapabilen uyduların kullanımının artması ile uydu yönelme tespit ve kontrol sistemlerinin önemini arttırmıştır. Yüksek çözünürlüklü görüntü alma talebi, gözlem uydusunun yörüngedeki hareketi esnasında, istenen bölgeye yüksek hassasiyetle yönelmesini ihtiyacı doğurmaktadır. Böylesine yüksek hassasiyetli yönelme kontrolüne ulaşabilmek için, kontrol sisteminin güçlü ve hassas bir yönelme tespit bilgisiyle beslenmesi gerekir.

Kalman süzgeci, navigasyon bilgisi elde etmek amacıyla farklı algılayıcıların birlikte çalıştırılması ve uzay araçlarında yönelme bilgisi elde etmek için yaygın biçimde kullanılır. Gelişmiş işlemciler, işlem yükü fazla olan Kalman süzgeciyle, uzay araçlarının yönelme tespitinin uydu bilgisayarında yapılmasına olanak tanımıştır.



Kalman süzgeci ilk olarak 1960 yılında R.E. Kalman tarafından yayınlanan makale ile ortaya çıkmıştır [1]. Apollo programı ve onu izleyen uzay programlarında, uzay aracının yönelme tespitinde de Kalman süzgeci kullanılmıştır [2]. Kalman süzgeci, yönelme tespitinin yanı sıra, dönü ölçerlerin kayma değerlerini de, 3 eksenli *strapdown* dönü ölçerlerden aldığı açısız dönme oranlarının ölçümü ile tespit edebilir [2]. Psiaki de, 3 eksenli kararlaştırılmış uzay aracının yönelim tespitinde, yönelme oranlarının tespitinde ve sabit bozuntu torklarının tespitinde Kalman süzgeci kullanmıştır [3].

Doğrusal olmayan sistem veya ölçüm modellerin yönelme kestirimi, doğrusal modellere göre daha zorlayıcı olmaktadır. Doğrusal olmayan hareket karakterleri, birinci dereceden Taylor serisi tarafından yeterli doğrulukta hesaplanabildiği sistemlerde, Genişletilmiş Kalman Süzgeci iyi kestirimler yapabilmektedir [4]. Ancak daha yüksek seviyeden sistemlerde, Genişletilmiş Kalman Süzgeci, kestirim performansında önemli kayıplara uğramakta, hatta kestirim sonuçları ırraksayabilmektedir. Bu soruna çözüm olabilecek uygun yöntemler tasarlanmaktadır. Ancak bu yöntemler sahip oldukları yüksek hesaplama yükü nedeniyle, hesaplama hatalarının birikmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla, standart Genişletilmiş Kalman Süzgeci yaklaşımı, günümüzde, doğrusal olmayan sistem veya ölçüm modellerinin davranışlarının kestirilmesinde en gözde olan yöntem olma özelliğini korumaktadır. Farklı kestirim yaklaşımları, sadece yüksek performans ihtiyacı ortaya çıktığında araştırılmaktadır [4]. Örneğin, Julier, Uhlman ve Durrant White tarafından geliştirilen Duyumsuz Kalman Süzgeci bunlardan biridir [5].

### 1.3 Hipotez

Bu çalışmanın hipotezi, alçak irtifalı yörüngede seyreden bir uydunun, kuaternion tabanlı olarak yönelmesinin kestirilmesi esnasında, yönelme tespitinde ortaya çıkan, bozuntulara ve matematiksel modellere bağlı olan hataların, Q Yöntemi ve ardı sıra Genişletilmiş Kalman Süzgeci kullanılarak, azaltılabileceğidir.



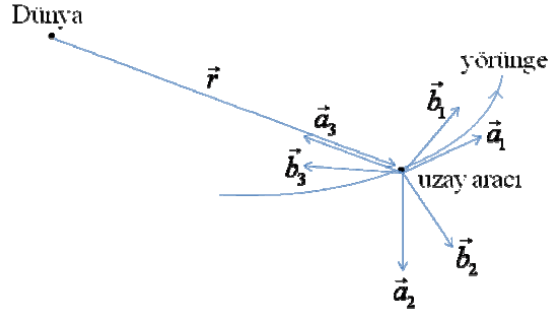
## 2. YÖNELME DİNAMIĞI

### 2.1 Amaç

Modellemelerde ve benzetim aşamasındaki yazılımda kullanılan denklemlerin içerdiği, bazı temel kavramlar ve bunların irdelenmesi, yönelme dinamiği başlığı altında açıklanmıştır.

### 2.2 Dönme Dinamiği

A ve B referans eksen takımlarının birim vektörleri  $\vec{a}$  ve  $\vec{b}$  olarak tanımlanmış ve eksen sırasına göre isimlendirilmiştir.  $\vec{r}$  uzay aracının kütle merkezinin dünyanın kütle merkezine göre konum vektörüdür.



Şekil 2.1 : A ve B referans eksen takımları [6]

#### 2.2.1 Doğrultu kosinüsleri

A ve B referans eksen takımları arasında, eksenler arasında kalan açılarının kosinüslerini tanımlamak için, ortagonal olan bir C matrisi tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = C^{B/A} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

### 2.2.2 Euler açıları

A referans eksen takımının kendi eksenleri etrafında sıralı olarak dönmesi ile B eksenine çakışması durumu A'dan B'ye dönüşümü tanımlar.  $\vec{a}_1$  eksen etrafındaki dönme açısı  $\psi$ ,  $\vec{a}_2$  eksen etrafındaki dönme açısı  $\theta$ ,  $\vec{a}_3$  eksen etrafındaki dönme açısı  $\phi$  olmak üzere C matrisi elemanları aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu ifade de “s” sinüs, “c” kosinüs trigonometrik ifadesine karşılık gelmektedir.

$$\begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi - s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = C^{B/A} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

### 2.2.3 Kuaterniyonlar

Yukarda ifade edilen dönme hareketlerinin bileşkesi, aynı referans eksenin merkezini, başlangıç noktası kabul eden e birim vektörü çevresinde yapıldığı kabul edilir ve dönme açısına  $\Theta$  denirse aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\vec{e} = e_1 \vec{a}_1 + e_2 \vec{a}_2 + e_3 \vec{a}_3 \quad (2.3)$$

Euler parametreleri olarak ifade edilen kuaternionlar ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1 \sin(\Theta / 2) \\ q_2 &= e_2 \sin(\Theta / 2) \\ q_3 &= e_3 \sin(\Theta / 2) \\ q_4 &= \cos(\Theta / 2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ayrıca birim vektör olan e göz önüne alındığından aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$|\vec{e}|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1 \quad (2.5)$$

B'den A'ya dönüşüm matrisini de kuaternionlara bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir [7].

$$C^{B/A} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_2 q_1 - q_3 q_4) & 1 - 2(q_3^2 + q_1^2) & 2(q_2 q_3 + q_4 q_1) \\ 2(q_3 q_1 + q_2 q_4) & 2(q_3 q_2 - q_1 q_4) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

### 2.2.4 Kinematik diferansiyel denklemler

B referans eksen takımının A referans eksen takımına göre, bağıl konumlanmasının zamanla değişimi, kinematik diferansiyel denklemler ile ortaya konur.

Öncelikle, B'nin A'ya göre dönmesinin açısal hızı  $\vec{\omega}$  ise, eğri simetrik matris  $\Omega$  ortogonal matrisinin tanımı aşağıdaki şekilde yapılır [8].

$$\vec{\omega}^{B/A} \equiv \vec{\omega} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 \quad (2.7)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Bağıl konum zaman bağılı olarak değişiyorsa, doğrultu kosinüsleri matrisi de zamanla değişmektedir. O halde;

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = C^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Denklemini zamana göre türevlenebilir. Bu türevleme işlemi A referans eksen takımında gerçekleştirilir [8].

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \Big|_A = \frac{d}{dt} \left\{ C^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \right\} \Big|_A = \dot{C}^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} + C^T \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} \Big|_A = \dot{C}^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} + C^T \begin{bmatrix} \vec{\omega} \times \vec{b}_1 \\ \vec{\omega} \times \vec{b}_2 \\ \vec{\omega} \times \vec{b}_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

A referans eksen takımı sabit olduğundan zamanla yeri değişmez ve türevi sıfırdır.

$$\dot{C}^T \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} - C^T \Omega \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \dot{C}^T - C^T \Omega \begin{bmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Buradan aşağıdaki sonuca varılır.

$$\Omega = C \dot{C}^T \quad (2.12)$$

açılarak, açısal hızın  $B$ ’deki üç bileşeni doğrultu kosinüsleri ve bunların türevleri cinsinden yazılabilir.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= C_{21}\dot{C}_{31} + C_{22}\dot{C}_{32} + C_{23}\dot{C}_{33} \\ \omega_2 &= C_{31}\dot{C}_{11} + C_{32}\dot{C}_{12} + C_{33}\dot{C}_{13} \\ \omega_3 &= C_{11}\dot{C}_{21} + C_{12}\dot{C}_{22} + C_{13}\dot{C}_{23}\end{aligned}\tag{2.13}$$

$B$ ’deki açısal hız ifadeleri, dönüşüm matrisi kullanılarak Euler açıları ve açılarının türevleri cinsinden yazılabilir [9].

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} - \sin \theta \dot{\psi} \\ \omega_2 &= \cos \phi \dot{\theta} + \sin \phi \cos \theta \dot{\psi} \\ \omega_3 &= -\sin \phi \dot{\theta} + \cos \phi \cos \theta \dot{\psi}\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \equiv M \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}\tag{2.15}$$

İfade edilen  $M$  matrisi kullanılarak kinematik ifadeye ulaşılabilir [8,9].

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}\tag{2.16}$$

Aynı yöntemle,  $C$  matrisinin kuaternionlarla olan ifadesini kullanarak, kuaternionlarla kinematik denklemi yazmak mümkündür [8].

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2 \dot{q}_1 q_4 + \dot{q}_2 q_3 - \dot{q}_3 q_2 - \dot{q}_4 q_1 \\ \omega_2 &= 2 \dot{q}_2 q_4 + \dot{q}_3 q_1 - \dot{q}_1 q_3 - \dot{q}_4 q_2 \\ \omega_3 &= 2 \dot{q}_3 q_4 + \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_4 q_3 \\ 0 &= 2 \dot{q}_1 q_1 + \dot{q}_2 q_2 + \dot{q}_3 q_3 + \dot{q}_4 q_4\end{aligned}\tag{2.17}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & -q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & -q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

### 2.3 Katı Cisim Dönme Dinamiği

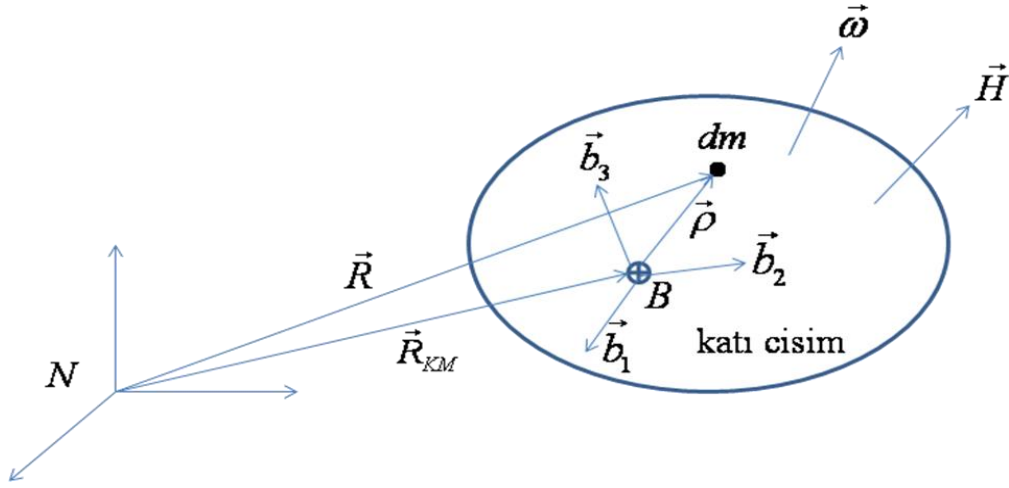
Uzayda konumlanan bir katı cisim için, üçü öteleme ve üçü dönme olmak üzere toplam altı serbestlik derecesinden bahsedilir.

#### 2.3.1 Açısal momentum

Herhangi bir  $O$  noktası etrafında dönmekte olan bir katı cismin açısal hareketi,  $N$  ile gösterilen eylemsiz bir referans eksen takımında (3.24) denklemi ile ifade edilir [8].

$$\int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm = \vec{T}_O \quad (2.20)$$

Bu ifadede  $\vec{r}$  diferansiyel boydaki kütle parçasın  $dm$ 'nin,  $O$  noktasına göre konum vektörüdür.  $\vec{R}$ ,  $N$ 'nin merkeze göre konumu,  $\ddot{\vec{R}}$  eylemsiz ivmesidir.  $\vec{T}_O$  ise  $O$  etrafında,  $dm$ 'nin üzerindeki toplam dış momenttir.  $O$ , gövde eksen takımı ile çakışık olarak kabul edilirse,  $\vec{\rho}$  vektörü  $\vec{r}$ 'nin yerini alır (bkz. Şekil 3.2).



**Şekil 2.2 :** Ötelenmeden dönen katı cisim [6]

$\vec{R}_{KM}$ , ötelenme hareketi olmaksızın dönen katı cismin kütle merkezinin  $N$ 'nin merkezine göre sabit konum vektörüdür,  $\vec{\omega}$  cismin  $N$ 'de tanımlı açısal hızı  $\vec{\omega}^{B/N}$ 'ye eşittir.  $\vec{H}$  ise cismin kütle merkezi etrafındaki açısal momentumudur.  $\vec{\rho}$  ve  $\vec{\omega}$ ,  $B$ 'de aşağıdaki gibi yazılır.

$$\vec{\rho} = \rho_1 \vec{b}_1 + \rho_2 \vec{b}_2 + \rho_3 \vec{b}_3 \quad (2.21)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{b}_1 + \omega_2 \vec{b}_2 + \omega_3 \vec{b}_3 \quad (2.22)$$

$\vec{H}$  vektörü, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [8].

$$\vec{H} = \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{R}} dm = \int \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}} dm = \int \vec{\rho} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} dm \quad (2.23)$$

$\vec{R}_{KM}$  sabit olduğundan türevi de sıfıra eşittir.

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_{KM} + \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}} \quad (2.24)$$

Aynı biçimde, katı cisim kabulü yapıldığı için  $\vec{\rho}$  değişmeyecektir ve türevi sıfırdır.

$$\dot{\vec{\rho}} \equiv \left. \frac{d}{dt} \vec{\rho} \right|_N = \left. \frac{d}{dt} \vec{\rho} \right|_B + \vec{\omega}^{B/N} \times \vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (2.25)$$

Buna göre açısal momentum ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir [73].



$$\vec{H} = \int \vec{\rho} \times \vec{\omega} \times \vec{\rho} \, dm = \int \left[ \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} \, \vec{\omega} - \vec{\rho} \cdot \vec{\omega} \, \vec{\rho} \right] dm \quad (2.26)$$

Bu denklem açılarak, B'deki bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir. İfadenin içine eylemsizlik momentleri ve eylemsizlik çarpanları girmektedir. Açısal momentum, eylemsizlik momentleri ve eylemsizlik çarpanlarının açık hali aşağıdaki denklemlerle ifade edilebilir.  $I$  katı cismin  $B$ 'ye göre eylemsizlik matrisidir.

$$\begin{aligned} \vec{H} &= H_1 \vec{b}_1 + H_2 \vec{b}_2 + H_3 \vec{b}_3 \\ &= I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \, \vec{b}_1 + I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \, \vec{b}_2 + \\ &\quad I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \, \vec{b}_3 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \equiv I \vec{\omega} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int \rho_2^2 + \rho_3^2 \, dm \\ I_{22} &= \int \rho_3^2 + \rho_1^2 \, dm \\ I_{33} &= \int \rho_1^2 + \rho_2^2 \, dm \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= I_{21} = - \int \rho_1 \rho_2 \, dm \\ I_{23} &= I_{32} = - \int \rho_2 \rho_3 \, dm \\ I_{31} &= I_{13} = - \int \rho_3 \rho_1 \, dm \end{aligned} \quad (2.30)$$

Yukarıda tanımlanan eylemsizlik matrisi  $I'$  yı uygun bir eksen takımına göre yazdığımızda, eylemsizlik çarpımlarının tümü o eksen takımında sıfır olur. Sıfırlanmayan köşegen elemanlarına asal eylemsizlik momentleri denir. Uygun görülen eksen takımının eksenlerine ise asal eksenler denir. Asal eksen takımıyla gövde eksen takımı  $B$  çakışık kabul edilirse, açısal momentum ifadesi aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

### 2.3.2 Açısal hareket denklemleri

Kütle merkezi etrafında katı cismin üzerine etki eden toplam dış moment  $\vec{T}$ , açısal momentumun türevine eşittir,

$$\vec{T} = \dot{\vec{H}} \quad (2.32)$$

Bu türev ifadesi açık biçimde şu şekilde yazılır.

$$\dot{\vec{H}} \equiv \frac{d}{dt} \vec{H} \Big|_N = \frac{d}{dt} \vec{H} \Big|_B + \vec{\omega}^{B/N} \times \vec{H} = \vec{T} \quad (2.33)$$

Bahsedildiği üzere  $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{B/N}$  durumu geçerlidir ve  $\vec{T}$  vektörünün  $B$ 'deki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\vec{T} = T_1 \vec{b}_1 + T_2 \vec{b}_2 + T_3 \vec{b}_3$$

$\vec{\omega}^{B/N} \times \vec{H}$  vektörel çarpımıyla beraber,  $T$ 'nin matris ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \Big|_B + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Eylemsizlik momentleri  $B$ 'de tanımlıdır ve bu referans eksen takımında zaman göre türevleri alındığında sıfırı vermektedir. Açısal hız vektörünün zamana göre türevlersek, iki eksen takımın açısal olarak ilişkilendirdiğinden dolayı hem  $B$ 'de hem de  $N$ 'de açısal hız vektörü  $\dot{\vec{\omega}}^{B/N} \equiv \dot{\vec{\omega}}$ 'yi verir.

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_1 \vec{b}_1 + \dot{\omega}_2 \vec{b}_2 + \dot{\omega}_3 \vec{b}_3 \quad (2.35)$$

İfadesiyle beraber moment ifadesi aşağıdaki gibi yazılır ve her satır ifadesi üç açısal hareket denkleminin karşılığı gelmektedir [8,9].

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$I_1 \dot{\omega}_1 + I_3 - I_2 \omega_2 \omega_3 = T_1$$

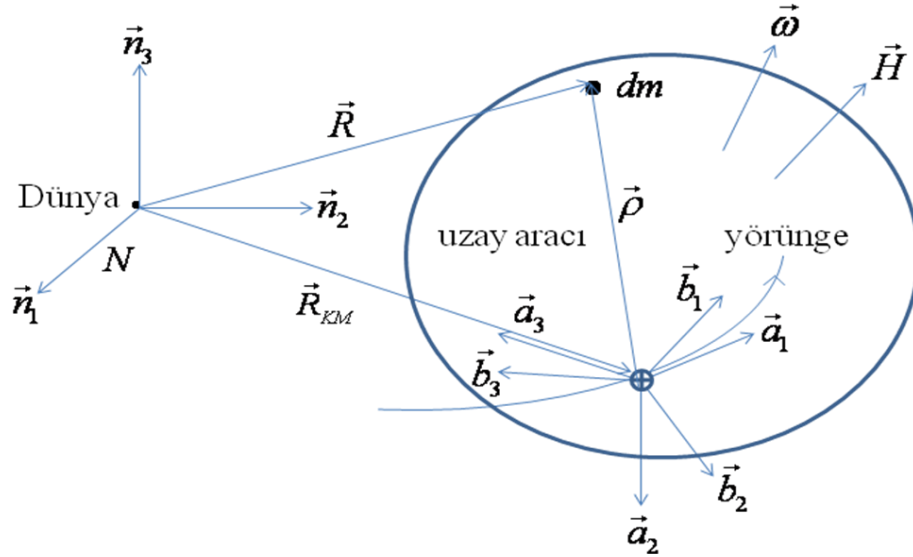
$$I_2 \dot{\omega}_2 + I_1 - I_3 \omega_3 \omega_1 = T_2 \quad (2.37)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + I_2 - I_1 \omega_1 \omega_2 = T_3$$

## 2.4 Dairesel Yörüngedeki Uzay Aracı

Uzay aracının yörünge üzerindeki hareketi, çekim merkezi tarafından uygulanan kütle çekim momenti etkisi ile gerçekleşir. Bu momentin sıfırdan farklı olması, kütle çekim alanının, katı cisim olarak kabul edilen uzay aracı üzerine düzgün yayılı olmaması şartı vardır [8].

Çekim merkezini Dünya'nın merkezi olarak kabul eder ve önceden tanımladığımız  $N$  referans eksen takımı ile Dünya merkezini çakışık kabul edersek aşağıdaki şekle ulaşırız.



**Şekil 2.3 :** Dünya merkezli çekim merkezi etkisiyle dairesel yörüngedeki uzay aracı [6]

Şekilde görüldüğü gibi  $\vec{a}_3$  ile  $\vec{R}_{KM}$  vektörü ile doğrultuları çakışık ancak yönleri ters,  $\vec{a}_1$  eksenini dönme istikametindeki yörünge teğeti ile çakışık ve  $\vec{a}_2$  eksenini yörünge normaline ile hem çakışık hem aynı yöndedir. Önceden tanımladığımız referans eksen takımı  $A$ 'nın  $N$ 'ye göre açısal hızı, uzay aracının Dünya etrafındaki sabit dönme hızı  $n$  ile şu şekilde ifade edilir [8].

$$\vec{\omega}^{A/N} = -n\vec{a}_2 \quad (2.38)$$

$dm$ 'nin üzerine etkiyen kütle-çekim kuvveti, Şekil 2.3'e göre şu şekilde tanımlanır.

$$d\vec{f} = -\mu \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3} dm = -\mu \frac{\vec{R}_{KM} + \vec{\rho}}{|\vec{R}_{KM} + \vec{\rho}|^3} dm \quad (2.39)$$

Kütle merkezi etrafında, uzay aracının üzerine etki eden toplam kütle-çekim momenti

$$\vec{T}_{kç} = \int \vec{\rho} \times d\vec{f} = -\mu \int \frac{\vec{\rho} \times \vec{R}_{KM}}{|\vec{R}_{KM} + \vec{\rho}|^3} dm \quad (2.40)$$

olarak yazılır ve burada  $\mu$ , Dünya'ya ait kütle-çekim sabitidir. Bu denklem,

$$\int \vec{\rho} dm = \vec{0}$$

eşitliği yardımıyla uzay aracının sabit dönme hızı (ortalama hareketi)  $n$ 'nin tanımı yapılır.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{R_{KM}^3}} \quad (2.41)$$

$$R_{KM} = |\vec{R}_{KM}|$$

$$\vec{R}_{KM} \equiv -R_{KM} \vec{a}_3$$

Yukarıdaki ifadeler kullanılarak aşağıdaki denklem biçimine getirilir.

$$\vec{T}_{kç} = 3n^2 \vec{a}_3 \times \left[ I_1 \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1 \vec{b}_1 + I_2 \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2 \vec{b}_2 + I_3 \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3 \vec{b}_3 \right] \quad (2.42)$$

Gövde eksenleri temelli ardışık dönmeler için  $\vec{a}_3$ ,  $C$  dönüşüm matrisi ifadesi yardımıyla da aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\vec{a}_3 = C_{13}\vec{b}_1 + C_{23}\vec{b}_2 + C_{33}\vec{b}_3 = -s_2\vec{b}_1 + s_1c_2\vec{b}_2 + c_1c_2\vec{b}_3 \quad (2.43)$$

Kütle çekim torkunun ifadesi matris ifadesi olarak yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} T_{k\zeta}|_1 \\ T_{k\zeta}|_2 \\ T_{k\zeta}|_3 \end{bmatrix} = 3n^2 \begin{bmatrix} 0 & -C_{33} & C_{23} \\ C_{33} & 0 & -C_{13} \\ -C_{23} & C_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Haline gelir. Bu matris ifadesi, daha önce  $T$  olarak ifade edilmiş moment bileşenlerinin yerine konarak, dairesel yörüngedeki uzay aracının matris biçimindeki dinamik denklemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \\ = 3n^2 \begin{bmatrix} 0 & -C_{33} & C_{23} \\ C_{33} & 0 & -C_{13} \\ -C_{23} & C_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Doğrultu kosinüsleri  $\vec{a}_3$  ifadesinden alınıp yukarıdaki denklemde yerine konulursa açısal hareket denklemleri aşağıdaki hali alır [8,9].

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + I_3 - I_2 \omega_2\omega_3 &= 3n^2 I_3 - I_2 C_{23}C_{33} = 3n^2 I_3 - I_2 s\phi c\theta c\phi c\theta \\ I_2\dot{\omega}_2 + I_1 - I_3 \omega_3\omega_1 &= 3n^2 I_1 - I_3 C_{33}C_{13} = -3n^2 I_1 - I_3 c\phi c\theta s\theta \\ I_3\dot{\omega}_3 + I_2 - I_1 \omega_1\omega_2 &= 3n^2 I_2 - I_1 C_{13}C_{23} = -3n^2 I_2 - I_1 s\theta s\phi c\theta \end{aligned} \quad (2.46)$$

Doğrultu kosinüsleri matrisini kuaternionlara bağlı olarak yazabildiğimizden, açısal hareket denklemleri de kuaternionlara bağlı olarak ( $C_{13} C_{23} C_{33}$  yardımıyla) aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_1 + I_3 - I_2 \omega_2 \omega_3 &= 6n^2 I_3 - I_2 q_2 q_3 + q_4 q_1 \left[ 1 - 2 q_1^2 + q_2^2 \right] \\
I_2 \dot{\omega}_2 + I_1 - I_3 \omega_3 \omega_1 &= 6n^2 I_1 - I_3 \left[ 1 - 2 q_1^2 + q_2^2 \right] q_1 q_3 - q_2 q_4 \\
I_3 \dot{\omega}_3 + I_2 - I_1 \omega_1 \omega_2 &= 12n^2 I_2 - I_1 q_1 q_3 - q_2 q_4 q_2 q_3 + q_4 q_1
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Dairesel yörüngedeki dolaşan uzay aracının kinematik diferansiyel denklemlerine ulaşmak için, B'den A'ya tanımlanmış açısal hız vektörlerine, A'dan N'ye göre tanımlanmış açısal hız ifadeleri eklenir.

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^{B/N} = \vec{\omega}^{B/A} + \vec{\omega}^{A/N} = \vec{\omega}^{B/A} - n \vec{a}_2 \tag{2.48}$$

$\vec{a}_2$  için de benzer şekilde

$$\vec{a}_2 = C_{12} \vec{b}_1 + C_{22} \vec{b}_2 + C_{32} \vec{b}_3 = c_2 s_3 \vec{b}_1 + s_1 s_2 s_3 + c_1 c_3 \vec{b}_2 + c_1 s_2 s_3 - s_1 c_3 \vec{b}_3$$

yazılarak açısal hızların ifadesine ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \psi \\ \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \end{bmatrix} \tag{2.49}$$

Euler açılarının türevleri çekildiğinde, kinematik diferansiyel denklemlerin matris biçimine ulaşılır [8].

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \cos \theta \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \frac{n}{\cos \theta} \begin{bmatrix} \sin \psi \\ \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

Aynı ifadeyi kuaternionlar cinsinden de ifade etmek aşağıdaki şekilde mümkündür [8].

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ 0 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} q_3 \\ q_4 \\ -q_1 \\ -q_2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 + n & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 + n \\ \omega_2 - n & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 - n & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.51}$$





### 3. KULLANILAN TEORİK MODELLER

#### 3.1 Amaç

Benzetimleri oluşturmak için referans alınan uydu modeli, manyetik alan yönelme modeli, güneşe yönelme vektörü modeli, teorik modeller başlığı altında açıklanmıştır.

#### 3.2 Uydu Yönelmesinin Matematiksel Modeli

Alçak yörünge irtifasında ve dairesel bir yörünge üzerinde hareket eden uzay aracının açısal durumunun tespiti için Euler açıları kullanılabilir. Euler açıları dönüş yapan gövdelerin açısal durumunu tanımlamada ve bu gövdelerin açısal konumunu görselleştirmede daha başarılıdır. Ancak, ikinci bölümde açıklandığı üzere, Euler açıları ile ifadede doğacak yozlaşmaların ortadan kaldırılması için açısal durum tespiti kuaternion ifadeleriyle yapılacaktır.

Atalet uzayında, uydunun açısal hareketinin Euler açılarıyla ifade edildiği dinamik denklem şu şekildedir;

$$\dot{\omega} = I^{-1} \omega_{skew} I \omega + N_{BOZ} + N_{KTRL} \quad (3.1)$$

Verilen denklemde  $\omega$  açısal hızları barındıran sütun matrisi;

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.3)$$

$I$  ifadesi uzay aracının her eksenini çevresindeki atalet momentlerini köşegen matrisi;

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Ele alınan uydu modeli için matris elemanlarının değerleri şunlardır;

$$I_1 = 0.9195 \text{ kg.m}^2; \quad I_2 = 0.82 \text{ kg.m}^2; \quad I_3 = 0.8175 \text{ kg.m}^2$$

$\omega_{skew}$  ise elemanları açısal hareket ifadelerinden oluşan matristir.

$$\omega_{skew} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$N_{BOZ}$  ifadesi bozuntu torklarını ifade eder ve bozuntu torklarının ilki yerçekimi ivmesinin yörünge boyunca farklılaşmasından (Gravity Gradient) meydana gelen bozuntudur.

$$N_{GG} = 3n^2 \begin{bmatrix} 0 & -a_{33} & a_{23} \\ a_{33} & 0 & -a_{13} \\ -a_{23} & a_{13} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Denklem takımı içine giren ifadeler 2.8 denklem takımında verilen ifadelerdir. 2.8 denklem takımındaki ifadeleri A matrisi altında toplanırsa, kuaternionlar cinsinden yörünge eksen takımından gövde eksen takımına dönüşüm matrisi elde edilmiş olur.

$$A = \begin{bmatrix} 1-2 & q_2^2 + q_3^2 & 2 & q_1 q_2 + q_3 q_4 & 2 & q_1 q_3 - q_2 q_4 \\ 2 & q_1 q_2 - q_3 q_4 & 1-2 & q_1^2 + q_3^2 & 2 & q_2 q_3 + q_1 q_4 \\ 2 & q_1 q_3 + q_2 q_4 & 2 & q_2 q_3 - q_1 q_4 & 1-2 & q_1^2 + q_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Diğer bozuntular, aerodinamik etkiler doğan bozuntu, güneş rüzgarlarından gelen bozuntu ve manyetik alanın etkisinden doğan bozuntulardır.

$$N_{BOZ} = N_{GG} + N_{Aero} + N_{Güneş} + N_{Manyetik} \quad (3.7)$$

$N_{KTRL}$  ise kontrol torklarını temsil eder.

Yönelmenin tespiti kuaternionlarla yapılacağından, dinamik denklemleri kuaternion bileşenleri cinsinden ifade etmek gereklidir. O halde kuaternionlarla yönelmenin gelen tanımı şu şekilde yapılır;

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \Omega \cdot q \quad (3.8)$$

Denklemin elemanlarından  $\Omega$ , elemanları yörünge düzlemine ait açısal hızlardan oluşan  $(\omega_{yör1}, \omega_{yör2}, \omega_{yör3})$  matristir.

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{yör3} & -\omega_{yör2} & \omega_{yör1} \\ -\omega_{yör3} & 0 & \omega_{yör1} & \omega_{yör2} \\ \omega_{yör2} & -\omega_{yör1} & 0 & \omega_{yör3} \\ -\omega_{yör1} & -\omega_{yör2} & -\omega_{yör3} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\omega_{yör} = \omega + A(q) \begin{bmatrix} 0 & n & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.10)$$

Bu denklemde n yörünge ortalama hızını ifade eder.

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}} \quad (3.11)$$

### 3.3 Dünya Manyetik Alan Modeli

Dünya manyetik alanının (DMA) matematiksel tanımı, navigasyon problemlerinde sıkça başvurulanan bir bilgi kaynağıdır. Model, DMA'nın küresel fonksiyonlara göre seriye açılması teorisi ile yapılır. Düşük yörüngelerde, yerin günlük açısal dönme hızı, yörünge hareketinin hızıyla karşılaştırmada ihmal edilebilir büyüklüktedir. O halde, DMA'nın gerilim vektörünün, yörünge eksen takımındaki matematikse ifadesi,

$$H_x(t) = \frac{M_e}{r_0^3} \cos \omega_0 t \left[ \cos \varepsilon \sin i - \sin \varepsilon \cos i \cos \omega_e t \right] - \sin \omega_0 t \sin \varepsilon \sin \omega_e t \quad (3.12)$$

$$H_y(t) = -\frac{M_e}{r_0^3} \left[ \cos \varepsilon \cos i + \sin \varepsilon \sin i \cos \omega_e t \right] \quad (3.13)$$

$$H_z(t) = \frac{2M_e}{r_0^3} \sin \omega_0 t \left[ \cos \varepsilon \sin i - \sin \varepsilon \cos i \cos \omega_e t \right] - 2 \sin \omega_0 t \sin \varepsilon \sin \omega_e t \quad (3.14)$$

şeklinde olur.

$H_x, H_y, H_z$  ifadeleri, DMA'nın gerilim vektörünün, yörünge eksen takımındaki bileşenleridir;  $M_e$  Dünya'nın manyetik momentidir (manyetik alan şiddeti);  $r_0$  Dünya'nın merkezinden uzay aracının kütle merkezine kadar olan uzaklıktır.  $\delta$  geomanyetik eksenin Dünya'nın günlük dönme eksenine göre eğilme açısıdır;  $\omega_e$  Dünya'nın kendi eksenini etrafında dönme açısal hızı;  $\omega_\pi$  yörünge'nin presesyonunun açısal hızıdır.

DMA gerilim vektörünün doğrultman kosinüsleri, uzay aracının yönelme durumunu iki vektörlü algoritma yardımıyla tespit etmek için kullanılacaktır. Dolayısıyla, gerilim vektörünün  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  bileşenlerinden, DMA vektörünün doğrultman kosinüslerini hesaplamak gereklidir. H vektörünün doğrultman kosinüsleri, eksenlere olan izdüşümleriyle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$H_{x_o} = \frac{H_x}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}}, H_{y_o} = \frac{H_y}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}}, H_{z_o} = \frac{H_z}{\sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}} \quad (3.15)$$

1.1 ve 1.2 denklemleri, yörüngenin parametreleri bilindiği zaman, DMA'nın gerilim vektörünün doğrultman kosinüslerinin bulunabileceğini göstermektedir.

### 3.4 Güneş Yönelme Vektörünün Matematiksel Modeli

$\psi_{gün}, \theta_{gün}$  açıları, Güneş ekliptik-geosentrik eksen takımındaki durumunu belirler [5].

( $\psi_{gün}$  ekliptik-geosentrik eksen takımında güneşin durumunu nitelendiren açı olarak tanımanır)

$$\psi_{gün} = \left[ -\sqrt{1-e_{gün}^2} \sin E(t) + i(\cos E(t) - e_{gün}) \right] \quad \text{ve} \quad \theta_{gün} = \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

$e_{gün}$  denklem içinde güneş yörüngesinin eksantrisi olarak kullanılmıştır ve matematiksel ifadesi ise;

$$e_{gün} = 0.01675104 - 0.00004180T \quad (3.17)$$

olarak tanımlanmaktadır. T olarak belirtilen zaman ifadesi, esas devir olarak kabul edilen 1 Ocak 1900 saat 12:00 tarihinden, uygulamanın yapılacağı tarihe kadar yüzyıllarla ölçülecek ve her yüzyılın 36525 ephemerit gününden oluştuğu kabul edilecektir.

$E(t)$  ise güneşin eksantrik anomalisidir ve aşağıdaki denklemi sağlamaktadır.

$$M(t) = E(t) - e_{gün} \sin E(t) \quad (3.18)$$

$M(t)$  ile ifade edilen ortalama anomalinin ifadesi, güneşin ortalama tropik boylamı olan  $L(t)$  ve güneş perijesinin ortalama boylamı  $\Pi(t)$  ile ifade edilmektedir.

$$M(t) = L(t) - \Pi(t) \quad (3.19)$$

$L(t)$  ve  $\Pi(t)$  ifadelerinin matematiksel tanımı  $d$  olarak belirtilen zaman ifadesiyle tanımlanır ve  $d$  esas devir olarak kabul edilen 1 Ocak 1900 saat 12:00 tarihinden, uygulamanın yapılacağı tarihe kadar geçen gün sayısıdır.

Newcomb'a göre;

$$L(t) = 279.696678^\circ + 0.9856473354^\circ d \quad (3.20)$$

$$\Pi(t) = 281.22083^\circ + 0.0000470684^\circ d \quad (3.21)$$

$S = S(\sin \psi_{gün}, -\cos \psi_{gün}, 0)$  vektörü, ekliptik-geosentrik eksen takımında, güneşe yönelme vektörü olarak tanımlanmaktadır.  $(\sin \psi_{gün}, -\cos \psi_{gün}, 0)$  ifadeleri,  $S$  vektörünün doğrultman kosinüslerini ifade eder.  $S$  vektörünün tanımını yörünge eksen takımında yapmak için, önce ekliptik-geosentrik eksen takımından mutlak-geosentrik eksen takımına taşınmalı, daha sonra mutlak-geosentrik eksen takımından atalet eksen takımına taşınmalıdır. Yörüngeyi tanımlayan  $i, \lambda, u$  parametreleri, yörünge eksen takımını atalet eksen takımına göre tayin edeceklerdir.  $S = S(S_x, S_y, S_z)$  vektörünü mutlak-geosentrik takımda tanımlamak için, takımlar arası geçiş matrisi tanımlanmalıdır [5].

$$S(S_x, S_y, S_z) = CS(\sin \psi_{gün}, -\cos \psi_{gün}, 0) \quad (3.22)$$

1.9 ifadesinde yer alan  $C$  üç satıra üç sütunluk ve elemanları  $\Pi$  ve  $\varepsilon$  (yörünge'nin ekvator düzlemine göre ortalama eğilmesi) ile ifade edilen bir matristir.

$$C = \begin{bmatrix} \cos \Pi & -\sin \Pi & 0 \\ \sin \Pi \cos \varepsilon & \cos \Pi \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ \sin \Pi \sin \varepsilon & \cos \Pi \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon = 23.452294^\circ - 0.0130125^\circ T \quad (3.24)$$

Atalet eksen takımına, mutlak-geosentrik eksen takımından geçiş yapmak için aşağıda tanımlanan  $K$  matrisi kullanılabilir.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Yörünge eksen takımı, daha önce belirtildiği gibi, atalet eksen takımına göre  $i, \lambda, u$  parametreleriyle tanımlanmaktadır. Atalet eksen takımını yörünge eksen takımıyla çakıştırmak için üç dönme hareketi gerekir. Bunlar; OY eksenini etrafında  $\lambda$  kadar; OZ ekseninin yeni durumu etrafında  $i$  kadar; OX ekseninin yeni durumu etrafında  $u$  kadardır. Bu dönmelerin matematiksel ifadesi sonucu, geçiş matrisi elde edilebilir.

$$Y = [u][i][\lambda] = \begin{bmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos i & \sin i & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & 0 & -\sin \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda & 0 & \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$Y = \begin{bmatrix} \cos u \cos i \cos \lambda - \sin u \sin \lambda & \cos u \sin i & -\cos u \cos i \sin \lambda - \sin u \cos \lambda \\ -\sin i \cos \lambda & \cos i & \sin i \sin \lambda \\ \sin u \cos i \cos \lambda + \cos u \sin \lambda & \sin u \sin i & -\sin u \cos i \sin \lambda + \cos u \cos \lambda \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Mutlak-geosentrik takımından yörünge takımına geçiş matrisi aşağıdaki gibidir.

$$P = [Y][K] = \begin{bmatrix} \cos u \cos i \cos \lambda - \sin u \cos \lambda & \cos u \cos i \cos \lambda - \sin u \sin \lambda & \cos u \sin i \\ \sin i \sin \lambda & -\sin i \cos \lambda & \cos i \\ -\sin u \cos i \sin \lambda + \cos u \cos \lambda & \sin u \cos i \cos \lambda + \cos u \sin \lambda & \sin u \sin i \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Güneşe yönelme vektörü ifadesi olan  $S_o = S_o(S_{x_o}, S_{y_o}, S_{z_o})$  ifadesini yörünge eksen takımında bulmak için;

$$S_o(S_{x_o}, S_{y_o}, S_{z_o}) = PS_x, S_y, S_z \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} S_{x_o} &= P(1,1)l + P(1,2)d + P(1,3)v \\ S_{y_o} &= P(2,1)l + P(2,2)d + P(2,3)v \\ S_{z_o} &= P(3,1)l + P(3,2)d + P(3,3)v \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde düzenlenerek ifadenin hesabı kolaylaştırılabilir, denklemlerde kullanılan  $l, d, v$  tanımlarının açık ifadeleri ise;

$$\begin{aligned} l &= \cos \Pi \sin \psi_{gün} + \sin \Pi \cos \psi_{gün} \\ d &= \sin \Pi \cos \varepsilon \sin \psi_{gün} - \cos \Pi \cos \varepsilon \cos \psi_{gün} \\ v &= \sin \Pi \sin \varepsilon \sin \psi_{gün} - \cos \Pi \sin \varepsilon \cos \psi_{gün} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Netice olarak uydunun yörünge parametreleri olan  $i, \lambda, u$  ile beraber güneşin yörünge parametreleri olan  $\Pi, \varepsilon, \psi_{gün}$  kullanılarak 1.12 ve 1.13 denklemleri yardımıyla, güneşe yönelme vektörünün bileşenlerini (doğrultman kosinüslerini) yörünge eksen takımında hesaplamak mümkündür.

### 3.5 Nadir Vektörü Modeli

Nadir vektörü, uydu kütle merkezinden, dünyanın kütle merkezine bakan birim vektördür. Yörünge eksen takımında aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.6 Jirooskop Modeli

Birbirine dik olan 3 uydu gövde eksenini dikkate alınarak yerleştirilmiş 3 adet jirooskop ile bir ataletsel ölçüm modellenenebilir. Bu jirokoplarla elde edilen ölçümler, doğrudan doğruya, gövde eksen takımının, ataletsel eksen takımına göre olan açısal hızları vermektedir. Jirooskop, aşağıdaki gibi modellenmektedir;

$$\bar{\omega}_{BI\_Olcum} = \bar{\omega}_{BI} + \bar{b}_b + \eta_1 \quad (3.33)$$

Bu denklemde,  $\bar{\omega}_{BI\_Olcum}$  ölçülmüş uydu açısal hızları,  $\bar{b}_b$  her bir jirooskop için kayma (*bias*) değerleridir ve  $\bar{b}_b = [b_x \ b_y \ b_z]^T$  şeklinde ifade edilir,  $\eta_1$  ise ortalaması sıfır olan Gauss beyaz gürültüsüdür. Bu gürültünün karakteristiği

$$E[n_k n_j^T] = I_{3 \times 3} \sigma_g^2 \delta_{kj} \quad (3.34)$$

olarak verilir. Burada  $I_{3 \times 3}$  3x3'lük birim matris,  $\sigma_g$  her jirokopun standart sapması ve  $\delta_{kj}$  Kronecker delta fonksiyonudur ve aşağıdaki biçimde tanımlıdır.

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (3.35)$$

Bunun yanında jirokopun kayma karakteristiği ise,  $\eta_2$  ortalaması sıfır olan Gauss beyaz gürültü olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{d\bar{b}_g}{dt} = \eta_2 \tag{3.36}$$



## 4. YÖNELME TESPİT VE KESTİRİM YÖNTEMLERİ

### 4.1 Wahba Problemi ve $q$ Yöntemi

Wahba Problemi ilk olarak 1965 yılında Grace Wahba tarafından ileri sürülmüştür. Problemin amacı, bilinen bir anda, gövde ekseninde verilen, iki ya da daha fazla vektör ölçümünün, bilinen ataletsel vektörlere göre, maliyet fonksiyonunu asgariye indiren ortagonal matrisi (yönelme matrisi veya doğrultu kosinüsleri matrisi) tespit etmektir. Standart Wahba çözümü, doğrusallaştırmadan ortaya çıkan hatalara sahip değildir. Ancak her anda ölçüm bilgisine ihtiyaç duyması, uzay araçlarının yönelmesinin tespitinde, zayıflığını ortaya çıkarır.

Wahba probleminin çözüm yöntemlerinden biri  $q$  yöntemidir. Bu yöntemin üstünlüğü, yönelme belirleme çözümünün asla ıraksamamasıdır.

İkiden fazla vektör ölçümünün eşzamanlı olarak yapılabilirdiği bir sistemde,  $\hat{u}_B^i$  gövde eksenindeki vektör,  $\hat{u}_R^i$  referans eksenindeki vektör,  $A$  ise  $J(A)$  kayıp fonksiyonunu asgariye indiren en uygun dönüşüm matrisi olmak üzere

$$J(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \left| \hat{u}_B^i - A \hat{u}_R^i \right|^2 \quad (4.1)$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadede  $w_i$ ,  $i$  'nci vektör ölçümünün ağırlığıdır.

Kayıp fonksiyonu tekrar şu şekilde yazılabilir.

$$J(A) = -2 \sum_{i=1}^n W_i A V_i + \text{Sabit Terimler} \quad (4.2)$$

Normalize edilmemiş olan  $W_i$  ve  $V_i$  vektörleri

$$W_i = \sqrt{w_i} \hat{u}_B^i \quad V_i = \sqrt{w_i} \hat{u}_R^i \quad (4.3)$$

olur.

$$J'(A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i A V_i \equiv \text{tr}(W^T A W) \quad (4.4)$$

ifadesi azami değerini aldığıda,  $J(A)$  denkleminin asgari değer alacağı görülmektedir. Üçer satırlık vektörler olan  $W_i$  ve  $V_i$  'nin açık ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} W &\equiv W_1 : W_2 : \dots : W_n \\ V &\equiv V_1 : V_2 : \dots : V_n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bahsi geçen en uygun yönelme matrisini bulmak için,  $A$  matrisinin kuaternion parametreleriyle ifade edilmesi gereği ortaya çıkar.

$$A(q) = (q_4^2 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q})\mathbf{1} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_4Q \quad (4.6)$$

Yazılan kuaternion ifadeleri, vektör ve skalar parçalardan oluşmaktadır ve birim matris ifadesiyle birlikte açık bir şekilde aşağıdaki şekilde yazılabilirler.

$$q = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$\mathbf{q}\mathbf{q}^T$  ifadesi ise  $q$  ifadesinin vektör kısımlarının çarpımından oluşmuş 3x3 boyutunda matristir.  $Q$  ifadesi ise çarpık simetrik matris olup aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Yukarıda bahsi geçen en uygun  $A$  matrisi ifadesini, yine yukarıda verilmiş olan  $J'(A)$  denkleminin içine yerleştirip denklemi düzenlersek

$$J'(q) = q^T K q \quad (4.9)$$

ifadesini elde ederiz. Burada  $K$  4x4'lük simetrik matristir.

$$K = \begin{pmatrix} S - \mathbf{1} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T & \sigma \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

K matrisini oluşturan bileşenler ise;

$$\sigma \equiv \text{tr} B \quad (4.11)$$

$$S \equiv B + B^T \quad (4.12)$$

$$B = W V^T \quad (4.13)$$

$$\mathbf{Z} = [B_{23} - B_{32} \quad B_{31} - B_{13} \quad B_{12} - B_{21}]^T \quad (4.14)$$

$J'$  denkleminin uç noktaları (ekstrema) Lagrange çarpanları yardımıyla ve  $q^T q = 1$  normalizasyon koşullarıyla bulunabilir. Yeni bir fonksiyon tanımlanırsa

$$g(q) = q^T K q - \lambda q^T q \quad (4.15)$$

denklemini yazılır ve  $\lambda$  normalizasyon şartını sağlayan Lagrange çarpanı olmak üzere  $g(q)$  ifadesi şart olmaksızın normalize edilmiş denklemini ifade eder.  $g(q)$  denklemini  $q^T$  'ye göre türevini alıp sıfıra eşitlersek özvektör ifadesini elde ederiz.

$$K q = \lambda q \quad (4.16)$$

Bu denklemle elde edilen kuaternionlar, en uygun  $A$  matrisini hesaplamamıza yarayan kuaternionlar olacaktır. O halde elde edilen bu denklemin  $J'(q)$  denklemini içersinde kullanırsak

$$J'(q) = q^T K q = q^T \lambda q = \lambda \quad (4.17)$$

ifadesine ulaşırız. En büyük öz değere karşılık gelen öz vektör seçildiği zaman,  $J'$  azami değerini alır. En az iki  $W_i$  vektörünün doğrusal bağımsız olması,  $K$  'nın özdeğerlerinin her birinin farklı olmasını getirir ki, bu işlem yapısıyla kesin kuaternion değerleri ya da buna denk olan üç ekseninde yönelme tespiti yapılır.

Bu yöntemin aleyhine olan durumlardan bir tanesi, Wahba probleminin esas sıkıntılarından da biri olan, vektör ölçümlerinin oluşturulmasına ihtiyaç duymasındır. Yani her adımda ölçüm bilgisinin işlemlere sokulması gerekmektedir. Bir diğeri de oluşturulan bu vektör ölçümlerinin ağırlığının alınmasıdır.  $q$  yönteminin, özvektörün hesaplanmasına gerek bırakmayan farklı yapıları *Shuster* tarafından tanımlanmıştır.

#### 4.2 En Yakın Komşu Yöntemi

Kuaternionların yapısı sebebiyle, herhangi bir dönü ifadesi  $q$  veya  $-q$  olarak ifade edilebilir ve bu iki ifade aynı anlama gelir. Dolayısıyla,  $Q$  yönteminden bulunan değerler, istenen değerlere yakındır. Ancak hata analizini yapabilmek ve benzetimin ilerleyen adımlarında hataya sebep vermemek için burada karşılaşılan işaret belirsizliğinin giderilmesi gerekmektedir.

Sorunun üstesinden gelebilmek için her adımdaki değerin, bir önceki değere olabildiğince yakın olduğunu düşünerek bir yaklaşım yapmamız gerekmektedir. Burada önemli olan nokta, benzetim adımlarının olabildiğince küçük seçilmesidir. Benzetim adımlarının büyüdüğü durumda, işareti yanlış olarak tespit edilen noktanın, bir önceki değere daha yakın olması durumu ortaya çıkabilmekte ve hatalı değer, doğruymuş gibi kabul edilebilmektedir [10].

Aşağıdaki adımları takip ederek en yakın komşu yöntemi uygulanabilmektedir;

- $i$  ve  $i+1$  'nci adımlardaki kuaternion değerleri ele alınır,
- $q(i)$  ve  $q(i+1)$  değerleri skalar olarak çarpılır,
- Çarpım sonucu negatifse, bulunan  $q(i+1)$  değeri  $-1$  ile çarpılarak işareti değiştirilir. Eğer değer pozitifse hiçbir işlem yapılmadan değer aynı biçimde bırakılır.

Yöntemin mantığı kısaca şu şekilde özetlenebilir. Kuaternionların boyları "1" olacağından, elde edeceğimiz sonuç aradaki açının kosinüsüne bağlı olarak pozitif veya negatif değer alacaktır.  $i$  adımından,  $i+1$  'nci adıma geçerken aradaki açı asgari 0 derece, azami ise 180 derece olacaktır. 0 ile 90 derece arası kosinüs fonksiyonu pozitif değer almakta ve  $i$  adımından  $i+1$  'nci adıma geçişi mantıklı kılmaktadır. Negatif çıkması ise 90 dereceden büyük bir hareket yaptığını ifade edip bu geçişi mantıksız göstermektedir.

### 4.3 Optimal Kalman Süzgeci

Kalman süzgeci, durum uzayı ile ifade edilen dinamik sistemde, modelin önceki zaman adımındaki bilgileriyle birlikte, giriş ve çıkış bilgilerinden, sistemin sonraki zaman adımındaki durumunu kestirebilen bir algoritmadır.

Kalman süzgeci, izlediği sistemin durum vektörünün minimize edilmesi esasına dayalı olan bir optimizasyon kuralı altında çalışır ve buna bağlı olan optimal bir kazanca sahiptir. Eğer ki bu kazanç değeri, değişen durumlara uyarlanmıyorsa optimal Kalman süzgeci adını alır. Kazanç değerinin değişen durumlara göre uyarlanabilen algoritmalara uyarlanabilir Kalman süzgeci denir.

Doğrusal Kalman süzgeci, genişletilmiş Kalman süzgeci ve duyumsuz Kalman süzgeci, optimal Kalman süzgeci esasına göre (sahip oldukları kazanç değerleri optimal değerlere sahip olacak şekilde) incelenebilir.

#### 4.3.1 Doğrusal Kalman süzgeci

Doğrusal Kalman süzgeçleri hem sistem modeli hem de ölçüm modeli doğrusal denklemlerden oluşan sistemler için kullanılır. Ancak Kalman süzgecinin işleyişini anlayabilmek için, doğrusal Kalman süzgecinin temel alınarak incelenmesi gerekliliği vardır.

Üzerine kontrol uygulanmayan bir dinamik sistem için

$$x_k = F_k x_{k-1} + G_k w_k \quad (4.18)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (4.19)$$

denklemleri verildiği durumda,  $x_k$  sistemin dinamik modelinden gelen durum vektörü,  $y_k$  ise ölçüm matrisidir. Bu denklemlerin içine giren,  $G_k$  sistem modeline giren gürültüler için geçiş matrisi,  $H_k$  ölçüm matrisi,  $w_k$  ve  $v_k$  ise sırasıyla durum ve ölçüm vektörleri için beyaz Gauss dağılımına sahip gürültülerdir. Bu gürültüler;

$$E[w_k w_j^T] = Q_k \delta_{kj} \quad (4.20)$$

$$E[v_k v_j^T] = R_k \delta_{kj} \quad (4.21)$$

$$E[w_k v_j^T] = 0 \quad (4.22)$$

denklemleriyle verilir ve  $Q_k$  sistem gürültüsü ortak değişinti matrisi,  $R_k$  ölçüm gürültüsü ortak değişinti matrisi,  $\delta_{kj}$  ise Kronecker delta fonksiyonudur.

Bu tanımlamalardan sonra, optimal doğrusal Kalman süzgecinin işleyişi aşağıdaki adımlarla ortaya konabilir:

Durum öngörüsü:

$$\tilde{x}_{k/k-1} = F_k \hat{x}_{k-1/k-1} \quad (4.23)$$

Ortak değişinti öngörüsü:

$$P_{k/k-1} = F_k P_{k-1/k-1} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \quad (4.24)$$

Yenilenme (innovasyon):

$$\tilde{e}_k = y_k - H_k \tilde{x}_{k/k-1} \quad (4.25)$$

Optimal Kalman kazancı:

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (4.26)$$

Durum kestirimi:

$$\hat{x}_{k/k} = \tilde{x}_{k/k-1} + K_k \tilde{e}_k \quad (4.27)$$

Ortak değişinti kestirimi:

$$P_{k/k} = I - K_k H_k P_{k/k-1} \quad (4.28)$$

Bu denklemlerde,  $\tilde{x}_{k/k-1}$  öngörülen durum vektörü,  $P_{k/k-1}$  öngörülen ortak değişinti matrisi,  $\tilde{e}_k$  yenilenme süreci,  $K_k$  optimal Kalman kazancı,  $\hat{x}_{k/k}$  kestirilen durum vektörü ve  $P_{k/k}$  ise ayrık  $k$  zaman adımı için kestirilen ortak değişinti matrisidir.  $k/k-1$  alt indisi,  $k$  adımındaki hesaplamaların  $k-1$  adımındaki ölçümlerle tamamlandığını ifade eder. Aynı şekilde  $k-1 / k-1$  alt indisi,  $k-1$  adımındaki değişkenin, yine  $k-1$  adımındaki ölçümlerin dikkate alınarak hesaplandığını tanımlar.

### 4.3.2 Genişletilmiş Kalman süzgeci

Genişletilmiş Kalman süzgeci doğrusal olmayan ölçüm veya işlem sistemleri için geliştirilmiştir. Süzgeç, sistem dinamiklerini veya ölçüm modellerini ifade eden ve Jacobian denklemleri olarak anılan türevli ifadelerin, kısmi türevinin alınması esasıyla çalışır [11].

Genişletilmiş Kalman süzgecini tasarlarırken, öncelikli olarak gerçek dünyayı, birinci derece diferansiyel denklemler cinsinden, durum uzayı biçimine getirerek yazılması gerekir.

$$\dot{x} = f(x(t), t) + w \quad (4.29)$$

Burada  $x$  durum vektörü,  $f(x)$  bu durumu ifade eden doğrusal olmayan denklemler,  $w$  ise beyaz gürültüdür. Bunun yanında Kalman süzgecini uygulayabilmek için ölçüm denklemlerine ihtiyaç vardır.

$$y = h(x(t), t) + v \quad (4.30)$$

Burada  $y$  durum vektörü,  $h(x)$  bu durumu ifade eden doğrusal olmayan denklemler,  $v$  ise beyaz gürültüdür.

Kalman süzgecinin en son adımıdaki çıktılarından (kestirilen durumlar)  $f$  fonksiyonu kullanılarak durum öngörülleri yapılır. Durum öngörülerinden ise  $h$  fonksiyonu yardımıyla ölçüm öngörülleri yapılır. Ancak doğrusal olmayan durum denklemlerinin bu algorithmada kullanılabilmesi için öncelikle doğrusallaştırılmaları gerekir. Dolayısıyla Jacobian matrislerinin türevlerinin alınması gerekir.

$$f(x(t), t) \approx f(\tilde{x}(t), t) + \left. \frac{\delta f(x)}{\delta x} \right|_{\tilde{x}, u} \delta x \quad (4.31)$$

$$h(x(t), t) \approx h(\tilde{x}(t), t) + \left. \frac{\delta h(x)}{\delta x} \right|_{\tilde{x}} \delta x \quad (4.32)$$

$$F = \left. \frac{\delta f(x)}{\delta x} \right|_{\tilde{x}, u} \quad (4.33)$$

$$H = \left. \frac{\delta h(x)}{\delta x} \right|_{\tilde{x}} \quad (4.34)$$

$F$  dinamik ifadelerin yer aldığı matris,  $H$  ise ölçüm matrisidir.  $\hat{x}$  önceki adımdan kestirilmiş durum,  $u$  kontrol vektörü,  $\tilde{x}$  şimdiki adımda öngörülen durumdur.  $F$  ve  $H$  matrislerini çözebilmek için sayısal bir yöntem olan Taylor serisini kullanmak ve sadece ilk iki basamağını almak uygun ve yeterli olacaktır.

$$F_k = I + F \Delta t \quad (4.35)$$

$$H_k = I + H \Delta t \quad (4.36)$$

$F_k$  sistem dinamiklerinin ve  $H_k$  ölçüm denklemlerinin ayrıklaştırılmış formdaki matrisleri,  $I$  birim matris,  $\Delta t$  ise saniye cinsinden örnekleme zamanıdır.

Bundan sonraki adımlar (4.23)'den (4.28)'e kadarki denklemlerdeki işlem sırasını izleyecektir. Ancak, durum vektörünün öngörü ve kestirim değerleri her adımda değişeceğinden, her adım için Jacobian matrislerinin tekrar hesaplanması gerektiği göz önünde bulundurulmalıdır.

#### 4.4 Hata Analizi

Kuaternionları tespit eden bir algorithmada, hata analizini yapabilmek ve kestirim hassasiyetini ortaya koyabilmek amacıyla, yönelme tespitinin Euler açılarıyla ifade edilmesi ve bu ifadelerin aşağıdaki denklem takımıyla hata analizinin gerçekleştirilmesi uygun olacaktır.

$$\begin{aligned} Var(\psi) &= \sum_{i=1}^4 \left( \left( \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)^2 \sigma_{q_i}^2 \right) \\ Var(\theta) &= \sum_{i=1}^4 \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial q_i} \right)^2 \sigma_{q_i}^2 \right) \\ Var(\phi) &= \sum_{i=1}^4 \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right)^2 \sigma_{q_i}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Burada her Euler açısı, kuaternionlar cinsinden ifade edilmiş fonksiyonlar olarak tanımlanmıştır. Bu şekilde kuaternionlara göre kısmi türevlerini almak mümkün olmaktadır.



## 5. BENZETİMLER

### 5.1 Amaç

Benzetim işlemi ve kodları, Bölüm 2 ve Bölüm 3'te açıklanan teorik temeller kullanılarak MATLAB ortamında yazılmıştır. İterasyonlar neticesinde sistemlerin nasıl davrandığı, uygulanan yöntemlerin nasıl çalıştığı, hangi seviyelerde doğruluk sağladığı, yöntemlerde oluşan problemlere müdahale edildiğinde, bu müdahalenin ne kadar işe yaradığı izlenebilmiştir.

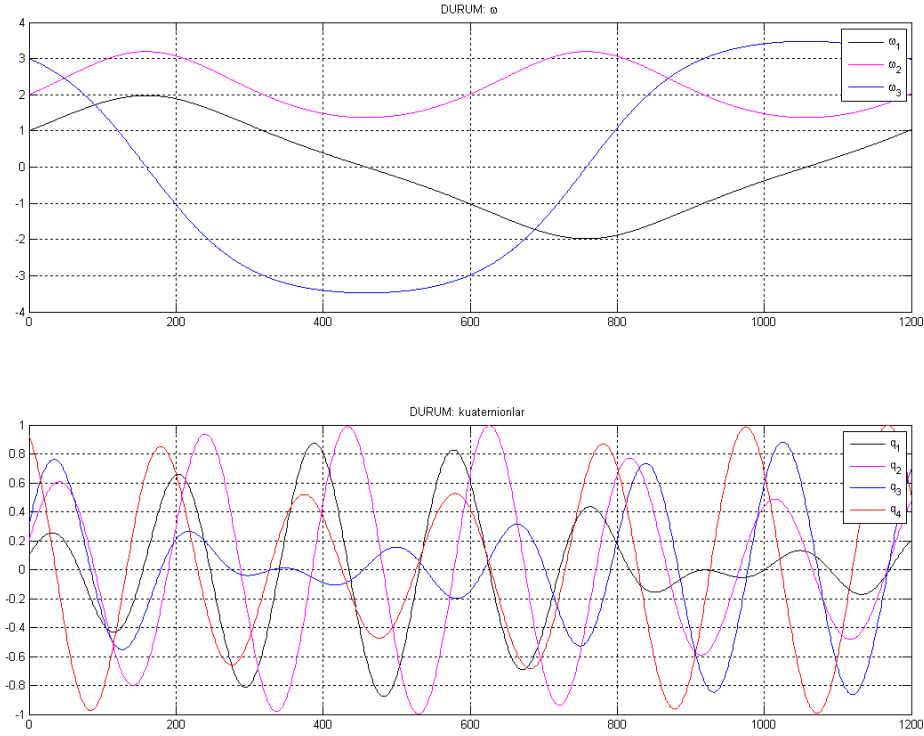
### 5.2 MODELLERİN BENZETİMİ

Benzetim çalışmasına başlarken öncelikli olarak teorik ifadelerden, çalışma esnasında referans alınacak teorik değerlerin elde edilmesi gereklidir. Bu sebepten sırasıyla, uydu dinamik ve kinematik benzetimi, manyetik alan vektörü benzetimi ve güneş vektörü benzetimi yapılmıştır.

#### 5.2.1 Uydu modelinin benzetimi

Uydu modeline giren ifadelerden  $\mu$  yerel çekim sabitidir ( $\mu = 3.986e14 \text{ m}^3 / \text{s}^2$ ). R ise uzay aracının irtifası (h) ve dünyanın yarıçapının ( $R_{\text{Dünya}}$ ) toplamına eşittir (h). Bu değerler çalışma için  $h=650\text{km}$  ve  $R_{\text{Dünya}}=6378\text{km}$  olarak alınmıştır. Bunun yanında çalışmanın yürütülmesi için gerekli başlangıç değerleri  $\omega_0 = 1 \ 2 \ 3^T \text{ der/sn}$  ve  $q = 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.92736^T$  olarak alınmıştır.  $\tilde{\lambda}^* = \lambda$  ve  $E(t) = M(t)$  kabulü yapılmıştır.

Benzetim 1200 saniyelik süreç için, 1 saniye zaman aralığında adımlar için MATLAB programıyla yapılmıştır.



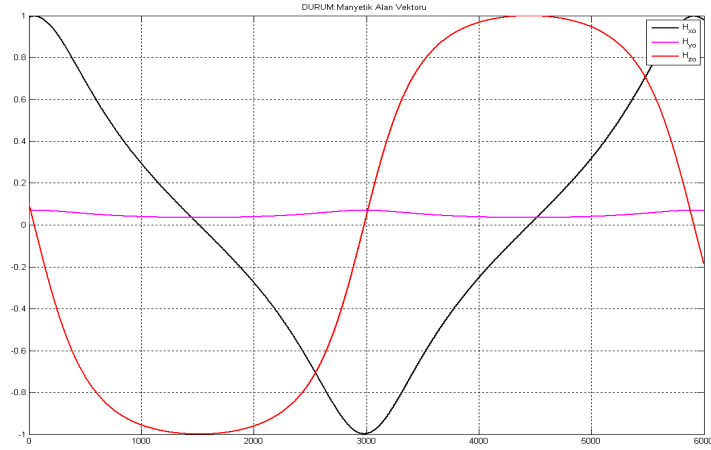
**Şekil 5.1 :** Uydu modelinin benzetimi sonucu elde edilen referans değerler (Açısal hızlar Rad/Sn, Kuaternionlar ise birimsiz)

MATLAB programında 1200 saniye süresince koşturulan benzetim sonucunda elde edilen açısal hızlar ve kuaternionlar aşağıdaki şekil 5.1’de görülmektedir.

### 5.2.2 Dünya manyetik alan vektörünün benzetimi

Dünya manyetik alanını ifade eden denklemlere giren yörünge parametreleri,  $i = 97^\circ$ ,  $\lambda = 15^\circ$ ’dir. Benzetimde kullanılacak olan uzay aracının irtifası  $h = 650$  km alınmıştır. Yörünge dairesel yörünge olarak ele alınacaktır. Hesaplara giren Dünya’nın yarıçap değeri  $r_{yer} = 6378.140$  km, Dünya’nın kendi eksenini etrafında dönme açısal hızı  $\omega_D = 7.28 \cdot 10^{-5}$  rad/sn, Dünya’nın manyetik alan momenti  $M_{yer} = 7.86 \cdot 10^{15}$  Wb.m, Dünya’nın manyetik alanına ait dönme eksenini ile Dünya’nın kendi dönme eksenini arası fark  $\delta = 11.4^\circ$  alınmıştır.

Değişimin daha açık görülebilmesi için yazılım 6000 saniye boyunca koşturulmuştur, manyetik alan vektörünün, yörünge eksen takımıındaki bileşenleri şekil 5.2’de görülmektedir.

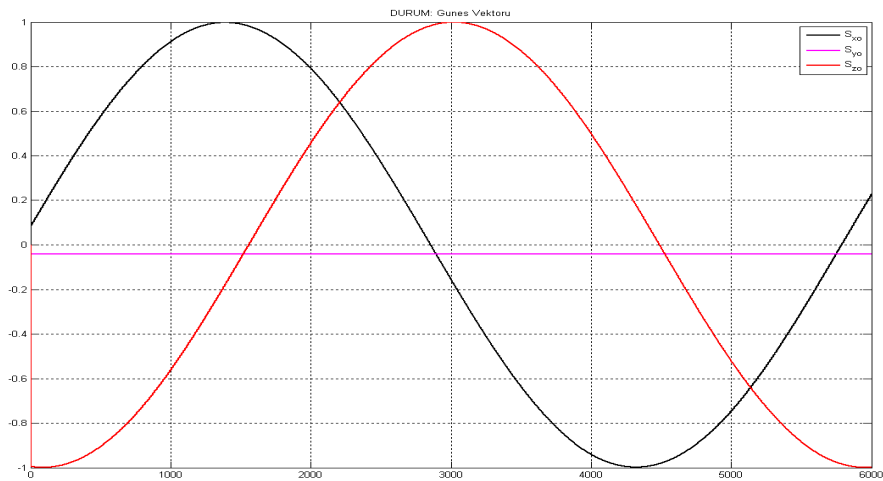


**Şekil 5.2 :** Dünya manyetik alan vektörü modelinin benzetimi sonucu elde edilen referans değerler (Birimsiz)

### 5.2.3 Güneşe yönelme vektörünün benzetimi

Güneş vektörünün oluşturulması için gerekli başlangıç zamanı 1 Ekim 2006 tarihidir. Bu tarih kullanılarak yüzyıl mertebesinde alınan  $T$  zamanı ve gün mertebesinde alınan  $d$  zamanı hesaplanarak işlemlere sokulmuştur.

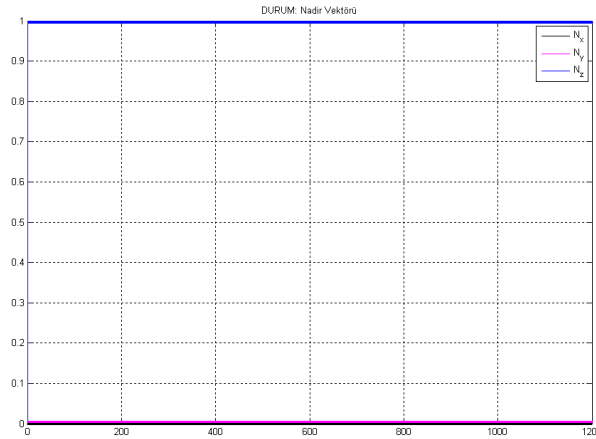
Denklemlerin çözümü 6000 saniye aralığında  $1^\circ$ 'lik adımlar için MATLAB programıyla çözülmüştür. Elde edilen sonuçların yörünge eksen takımındaki bileşenleri şekil 5.3'te görülmektedir.



**Şekil 5.3 :** Güneşe yönelme vektörü modelinin benzetimi sonucu elde edilen referans değerler (Birimsiz)

### 5.2.4 Nadir vektörünün benzetimi

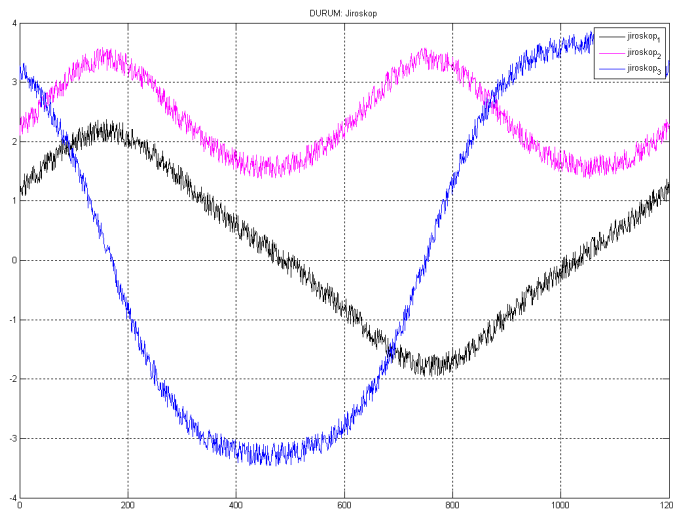
Nadir vektörü, Q yöntemi uygulanırken, güneş algılayıcısının çalışmadığı bölgede algoritmaya besleme sağlaması veya güneş ve manyetik alan vektörleri paralel duruma yaklaştığında ortaya çıkacak olan bozulma durumunun giderilmesi amacıyla benzetim aşamalarına katılmıştır. Aşağıdaki şekilde nadir vektörünün yörünge eksen takımındaki durumu görülmektedir.



Şekil 5.4 : Nadir vektörünün yörünge eksen takımındaki durumu (Birimsiz).

### 5.2.5 Jiroskop benzetimi

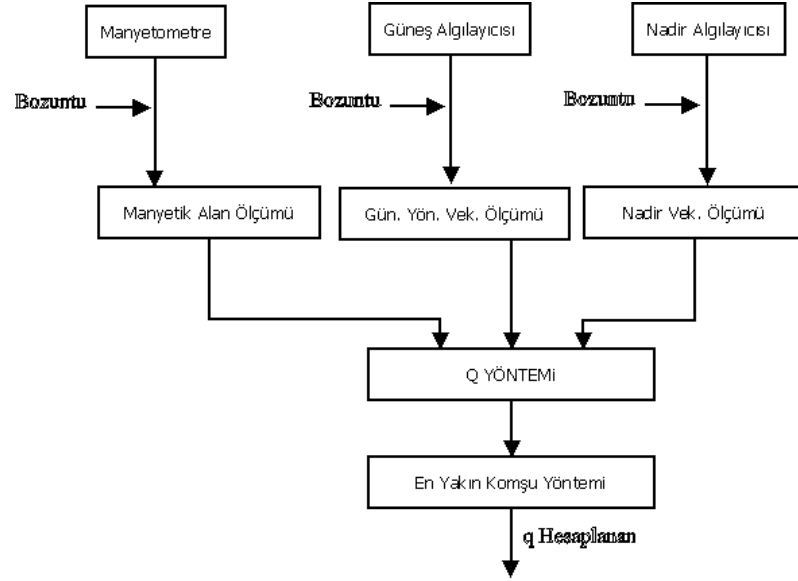
Jiroskop benzetimi, model olarak uydu matematiksel modelindeki açısal hızları temel olarak aldığından, uydu hareketinin benzetim sürecindeki açısal hızlar ile aynı karakterde, ancak ölçüm değerleri farklı sonuç vermektedir. Aşağıdaki şekilde jiroskop benzetiminin durumu görülmektedir.



Şekil 5.5 : Jiroskop benzetimi sonuçları (Rad/Sn).

### 5.3 Q Yöntemi

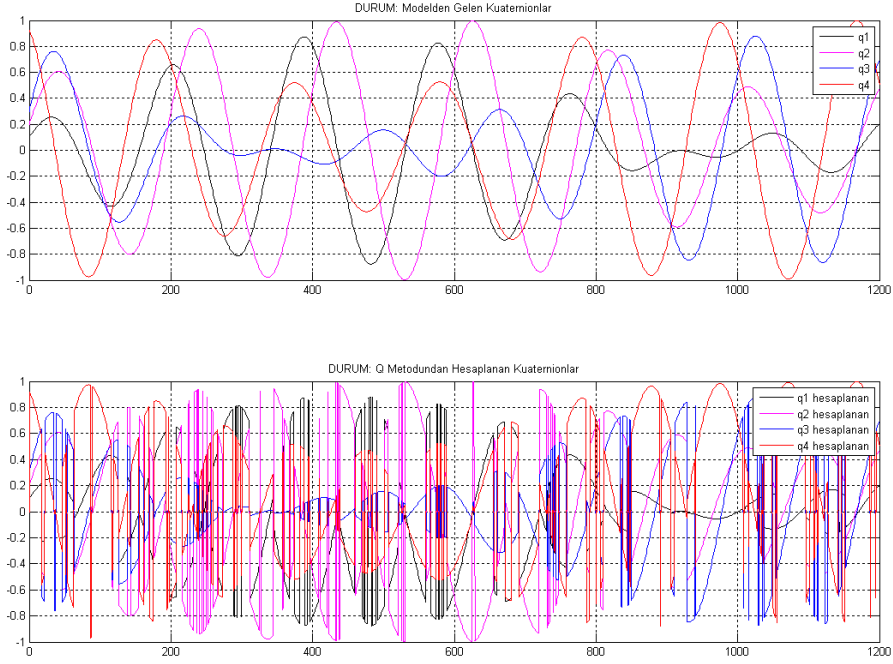
Bu noktaya kadar yapılan benzetimlerde, hiçbir bozuntudan söz edilmemiş, sadece matematiksel modellere göre koşturulan MATLAB kodu sonuçları incelenmiştir. Ancak bu noktadan sonra, Q yöntemi, en yakın komşular yöntemi ve genişletilmiş Kalman süzgeci uygulanırken, algılayıcıdan alınan ölçümlerin modellenmesi gereği vardır. Matematiksel modellerle yapılan benzetimlerin sonuçlarına, uygun değerlerde bozuntular eklenerek, algılayıcıların ölçümleri için benzetimi yapılacaktır.



Şekil 5.6 : Q yönteminin girdi ve çıktıları.

Manyetometre ölçümü için varyans 0.08, güneş algılayıcısı için varyans 0.01, nadir vektörü için varyans, 0.01 alınmıştır. Bu değerlerle ölçümleri oluşturmak ve sistemde oluşan rastgele bozuntuları daha iyi benzetebilmek için, matematiksel modelden gelen değerlere “randn” komutu ile çarpılarak eklenmiştir. 4.3 denkleminde görülen ölçüm ağırlıkları, toplamaları 1 olacak ve daha çok güvenilen algılayıcının oranı daha yüksek olacak şekilde değer alacaktır. Bu değerler Güneş algılayıcısı için 0.6, manyetometre ve nadir algılayıcısı için 0.2 alınmıştır.

Yapılan benzetimlerde, Q yöntemine giren ölçüm verileriyle kuaternionlar bulunmuş ve uydunun yönelim bilgisine ulaşılmıştır. Referans olarak elde edilen kuaternionlar ve Q yönteminden elde edilen kuaternionlar şekil 5.4’te sırasıyla verilmiştir.



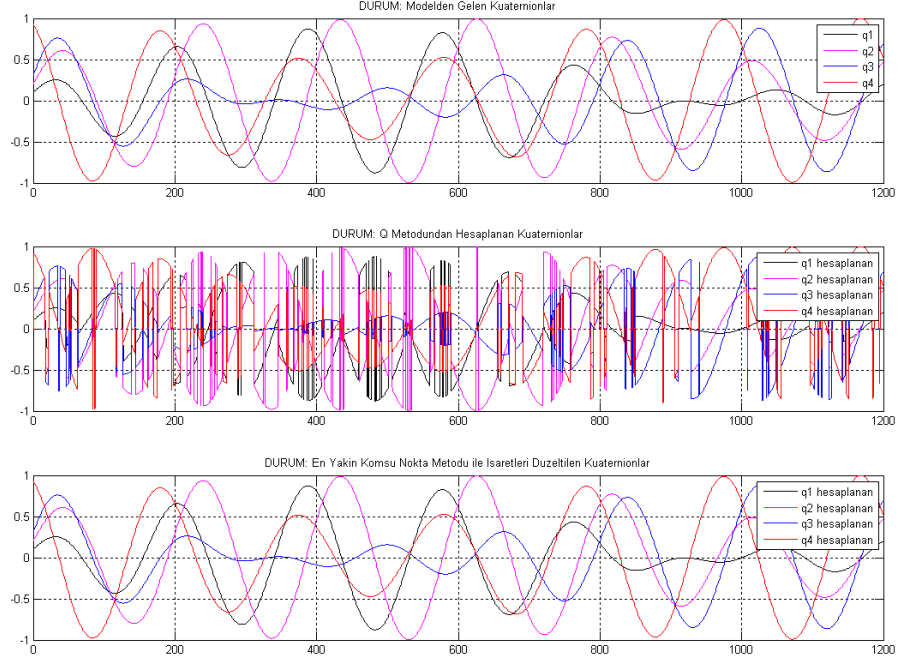
**Şekil 5.7 :** Referans kuaternionlar ve Q yönteminde elde edilen kuaternionlar (Birimsiz).

Grafikten açıkça görülmektedir ki, elde edilen kuaternion değerleri, referans kuaternionlardan farklılık göstermektedir. Bu noktada ortaya çıkan değerleri düzeltme ihtiyacı “En Yakın Komşu Yöntemi” ile giderilmiştir.

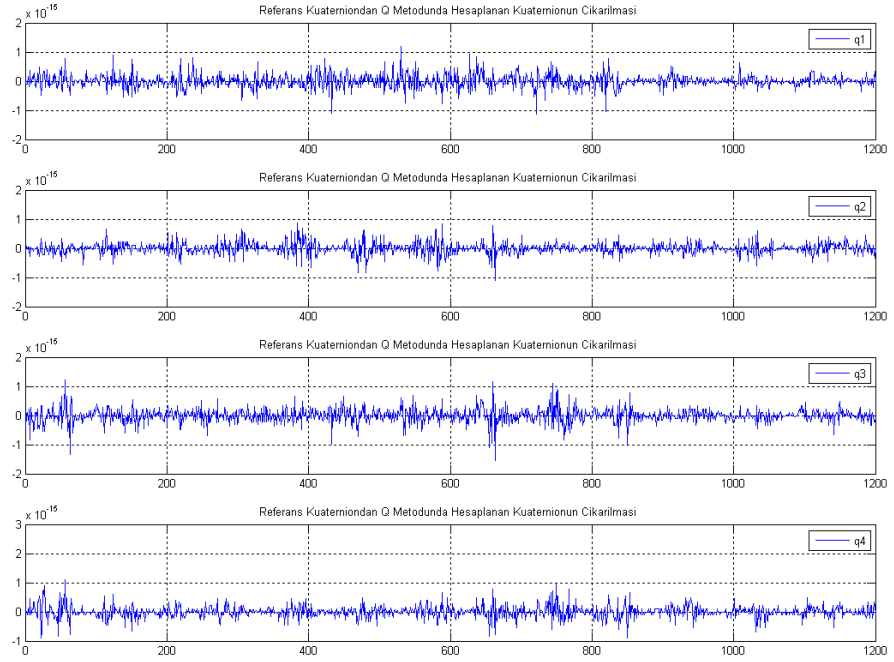
#### 5.4 En Yakın Komşu Yöntemi

Yapılan benzetimlerde, Q Metodu sonucunda elde edilen kuaternionlar, mutlak değer olarak referans kuaternionlara yakın, ancak işaret olarak rastgele olarak farklılık göstermektedir. Verilen akış diyagramında, en yakın komşular yönteminin, Q metodu ile birlikte çalışma şeması gösterilmektedir.

Aşağıdaki grafikte, benzetimde hesaplanan referans kuaternionlar, Q yöntemi sonucunda elde edilen kuaternionlar ve en yakın komşu yöntemi ile işaretleri düzeltilmiş olan kuaternionlar sırasıyla görülmektedir. Sapmaları grafik üzerinden rahat gözlemleyebilmek amacıyla benzetimin 1200 saniyelik bir kısmına ait sonuçlar çizdirilmiştir. Şekil 5.5’de işaretleri düzeltilmiş kuaternionlar ve şekil 5.6’da referans kuaternionlarla hesaplanan kuaternionlar arası fark görülmektedir.



**Şekil 5.8 :** En yakın komşu yöntemi ile düzeltilmiş sonuçlar (Birimsiz).



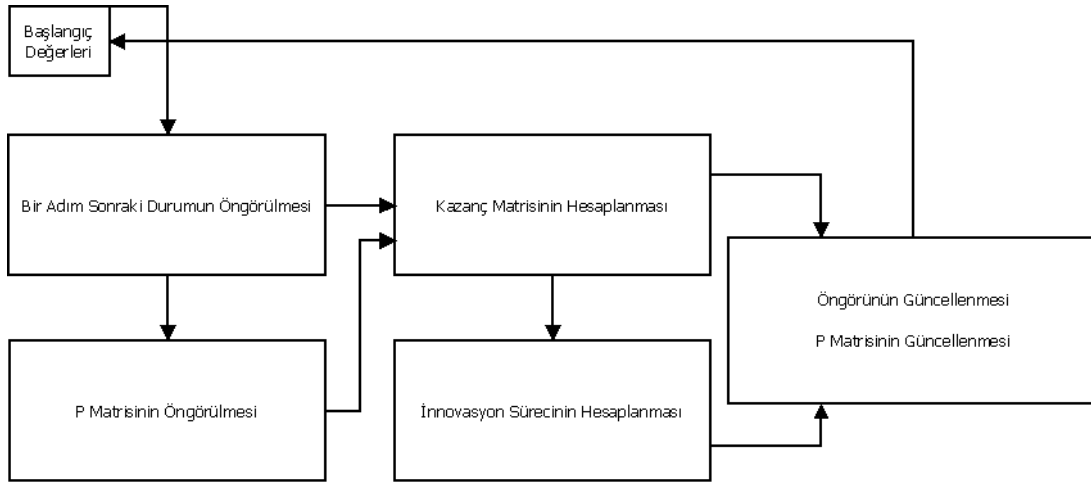
**Şekil 5.9 :** Q yöntemi sonuçlarının düzeltildikten sonra, referans kuaternionlarla aralarındaki değer farkları (Birimsiz).

**Çizelge 5.1 :** Q yönteminden bulunan kuaternionların gerçek değerlerden farkı (Birimsiz).

| Zaman (sn) | q <sub>1</sub> | q <sub>2</sub> | q <sub>3</sub> | q <sub>4</sub> |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 100        | 5,55E-17       | 3,33E-16       | 5,00E-16       | -3,33E-16      |
| 200        | 0              | -3,33E-16      | -3,33E-16      | 2,22E-16       |
| 300        | -3,33E-16      | 3,89E-16       | 3,47E-16       | 1,67E-16       |
| 400        | -1,11E-16      | 1,11E-16       | -2,22E-16      | 1,11E-16       |
| 500        | 0              | 0              | 1,67E-16       | -5,55E-17      |
| 600        | -2,22E-16      | 2,22E-16       | 1,67E-16       | 2,22E-16       |
| 700        | 0              | -1,11E-16      | -3,12E-17      | 0              |
| 800        | 0              | 0              | -5,55E-17      | 0              |
| 900        | 3,82E-17       | 2,22E-16       | 0              | -1,11E-16      |
| 1000       | 3,99E-17       | -5,55E-17      | -2,22E-16      | 1,11E-16       |
| 1200       | -5,55E-17      | 1,11E-16       | 1,11E-16       | 0              |

### 5.5 Genişletilmiş Kalman Süzgeci

Kalman süzgeci, benzetimin önceki adımından gelen durum bilgilerine dayanarak, bir sonraki adım için durum kestirimi yapma esasına dayanmaktadır. Kalman süzgecinin çalışma şeması aşağıdaki şekilde özetlenmiştir.



**Şekil 5.10 :** Kalman süzgecinin akış şeması.

Bu çalışmada kalman süzgecinin durum denklemi aşağıdaki gibi 7 elemanlı sütun vektör şeklinde tanımlanmaktadır. Bu sütun vektöründe ilk 4 eleman kuaternionları, ikinci dört eleman ise açısal hızları ifade etmektedir.

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}^T \quad (3.4)$$



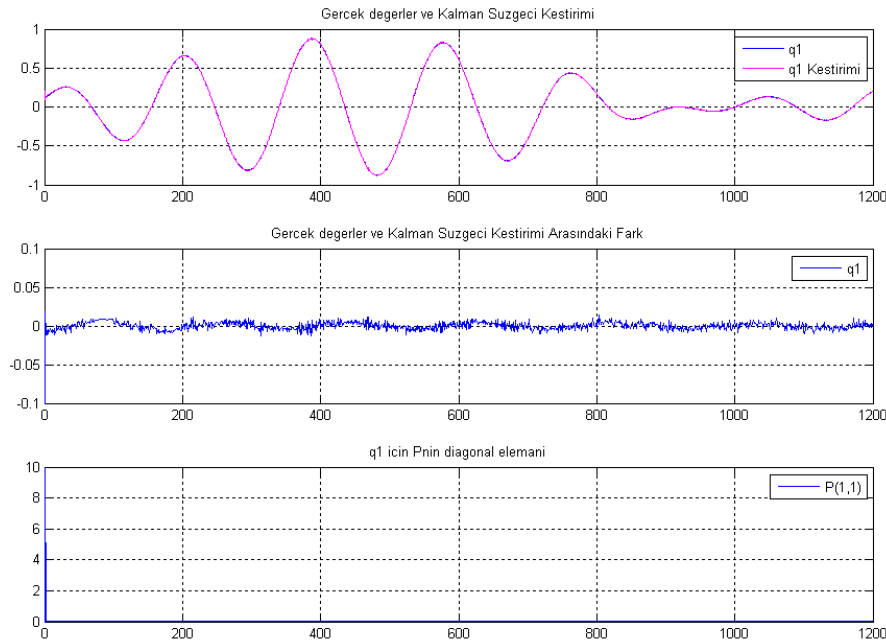
Güneş algılayıcısı ve manyetometrenin yanı sıra, açısal hız bilgisine ulaşmak ve açısal hız ölçümlerini beslemek amacıyla sisteme jiroskop bilgisi eklenmektedir. Jiroskop modelinin radyan ölçüm değerleri için varyansı 0.0069 olarak alınmıştır.

Genişletilmiş Kalman süzgecine başlangıç koşulu olarak verilen değerler ise P matrisi, Q matrisi ve başlangıç adımı için kuaternion ve açısal hızlara giren matristir.

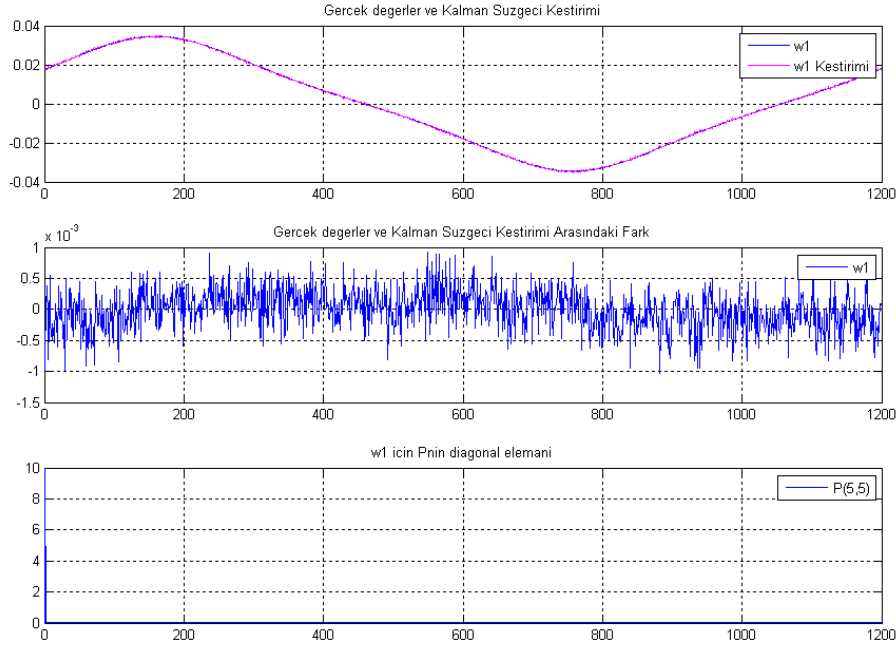
P matrisi 7x7 boyutlarında ve diyagonal elemanı 10, diğer elemanları sıfır olan matris, Q matrisi 7x7 boyutlarında diyagonal elemanı  $10^{-4}$ , diğer elemanları sıfır olan matris, kuaternionlar için başlangıç bozuntusu  $10^{-2}$ , açısal hızlar için başlangıç bozuntusu  $10^{-4}$  olarak verilmiştir.

### 5.5.1 Gölge bölgesinde Kalman süzgecinin çalışması

Uydunun güneşi görmediği süreçte Kalman süzgecine girecek olan ölçüm girdileri sadece manyetometre ve jiroskop ölçümleridir. Bu süreç için benzetim koşturulduğunda sonuçlar aşağıdaki şekilde görülmektedir.



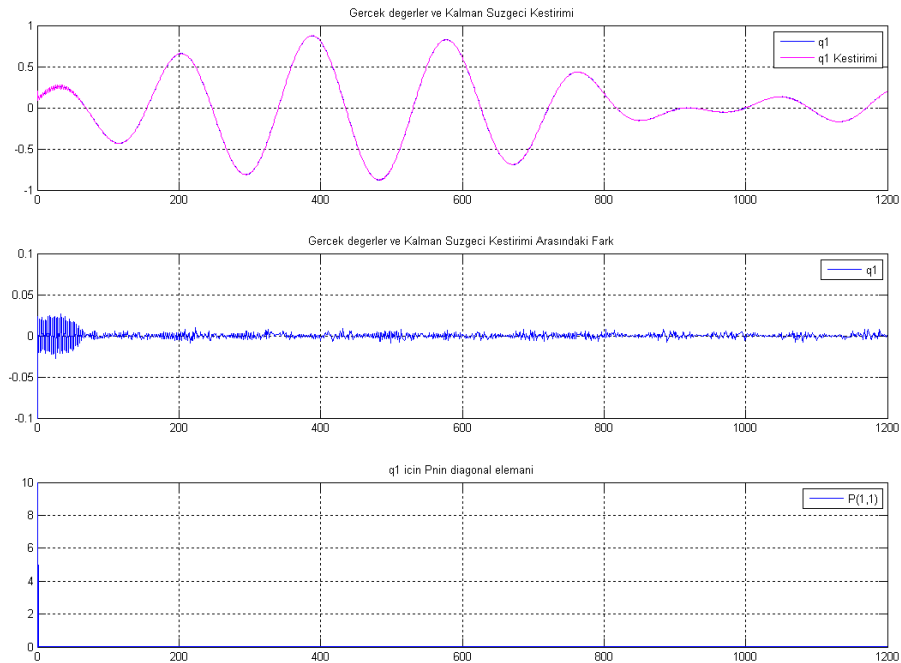
**Şekil 5.11 :** Gölge bölgesinde Kalman süzgecinin  $q_1$  kestirimi sonucu (Birimsiz).



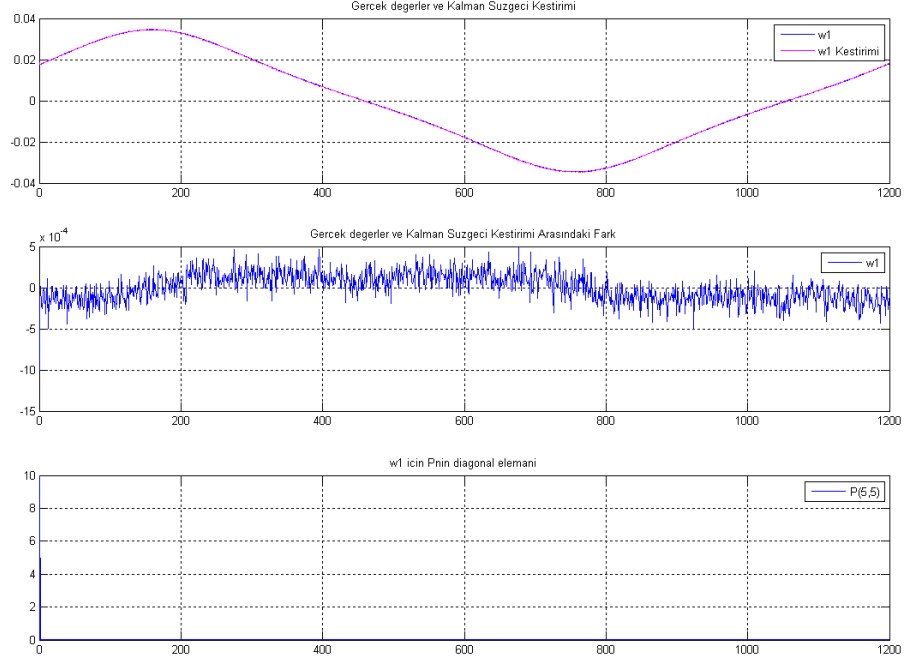
**Şekil 5.12 :** Gölge bölgesinde Kalman süzgecinin  $w_1$  kestirimi sonucu (Rad/Sn).

### 5.5.2 Güneş bölgesinde Kalman süzgecinin çalışması

Uydunun güneşi gördüğü süreçte Kalman süzgecine girecek olan ölçüm girdileri güneş algılayıcısı, manyetometre ve jiroskop ölçümleridir. Bu süreç için benzetim koşturulduğunda sonuçlar aşağıdaki şekilde görülmektedir.



**Şekil 5.13 :** Güneş bölgesinde Kalman süzgecinin  $q_1$  kestirimi sonucu (Birimsiz).

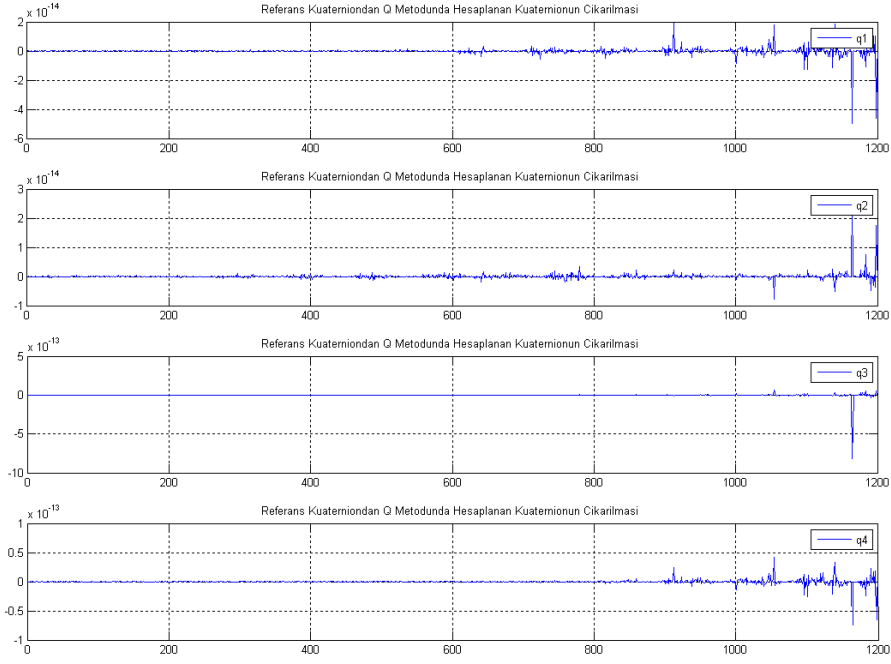


**Şekil 5.14 :** Güneş bölgesinde Kalman süzgecinin  $w_1$  kestirimi sonucu (Rad/Sn).

Güneş algılayıcısının sisteme veri sağladığı ve sağlamadığı durumlar arasındaki, kuaternion ve açısal hız kestirimlerine ait karşılaştırma tablosu aşağıda verilmiştir.

**Çizelge 5.2 :** Gölge ve Güneşli bölgelerde çalışan GKS için kestirim hataları (Birimsiz).

| Zaman (sn) | Güneşli $q_1$ | Gölge $q_1$  | Güneşli $w_1$ | Gölge $w_1$ |
|------------|---------------|--------------|---------------|-------------|
| 100        | 0             | 0,047481857  | -0,00001998   | 0,0000286   |
| 200        | 0,001017503   | -0,026171544 | 0,0002276     | 0,000107879 |
| 300        | 0,001474711   | 0,009970528  | 0,00027176    | 0,000292266 |
| 400        | 0,0000406     | 0,00962006   | 0,0001428     | 0,000180984 |
| 500        | 0,003296868   | -0,010491018 | 0,0000433     | 0,0000505   |
| 600        | -0,005494875  | 0,015966686  | 0,00012457    | 0,00011883  |
| 700        | 0,004565536   | -0,016186356 | -0,00012096   | 0,000330613 |
| 800        | -0,000500154  | 0,018442803  | 0,0000326     | -0,00019423 |
| 900        | -0,00431534   | -0,016514306 | -0,00028825   | 6,16E-06    |
| 1000       | -0,002770246  | 0,003922037  | -0,00011118   | -0,00014642 |
| 1200       | -0,007941912  | -0,019203959 | -0,00010448   | -0,0011592  |

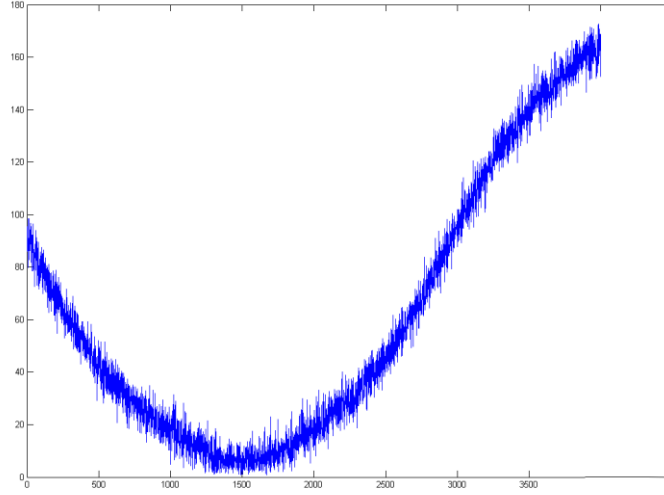


**Şekil 5.15 :** Tümleştirilme sürecinde gölge bölgede çalışan Q yönteminden elde edilen kuaternionların farkları (Birimsiz).

**Çizelge 5.3 :** Gölge bölgede çalışmaya başlayan Q yönteminin hesapladığı sonuçların referans kuaternionlardan farkları (Birimsiz)

| Zaman (sn) | q <sub>1</sub> | q <sub>2</sub> | q <sub>3</sub> | q <sub>4</sub> |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 100        | 1,11E-13       | -8,33E-15      | 0              | 0              |
| 200        | -1,11E-14      | 1,67E-13       | 2,50E-14       | -1,11E-13      |
| 300        | 0,00E+00       | -5,55E-13      | 1,18E-13       | 1,67E-13       |
| 400        | 4,44E-14       | -1,17E-15      | -7,08E-13      | 4,44E-14       |
| 500        | -1,11E-14      | 3,33E-13       | 1,94E-13       | -1,11E-15      |
| 600        | -5,55E-13      | 6,66E-13       | 1,03E-15       | 1,11E-14       |
| 700        | -2,78E-14      | 1,11E-13       | 2,05E-13       | 1,11E-15       |
| 800        | -1,11E-14      | 6,66E-14       | 1,89E-13       | -8,88E-14      |
| 900        | -4,82E-13      | 1,11E-13       | 1,17E-14       | -7,77E-13      |
| 1000       | -2,95E-14      | -4,44E-14      | 6,44E-13       | -5,22E-13      |
| 1200       | 8,19E-12       | -5,00E-11      | -1,29E-13      | 1,43E-12       |

Şekil 5.16'dan görüldüğü üzere, 1000'nci saniyeden sonra Q yöntemi sonuçlarında hatalar görülmektedir. Bu hatanın nedeni araştırıldığında, Q yöntemine giren Nadir ve Manyetik alan vektörlerinin bu bölgede birbirine yaklaştığı aşağıdaki grafikten okunabilmektedir.



**Şekil 5.16 :** Tümlleştirilme sürecinde gölge bölgede çalışan Q yöntemine giren Manyetik alan ve Nadir vektörleri arasındaki açının derece cinsinden değeri.

Bu noktada vektörlerin arasındaki açiya müdahale etmek, modellerin doğası gereği mümkün değildir. Ancak aradaki açiyı her an ölçebildiğimiz için, tümlleştirilmiş koda şu koşulu girilmiştir. Eğer ki manyetik alan arasındaki ve nadir vektörü arasındaki açı 20 dereceden büyükse GKF'yi çalıştırmaya başla, eğer açı 20 dereceden küçükse bir süre daha Q yöntemi ile sistemi çalıştırmaya devam et.

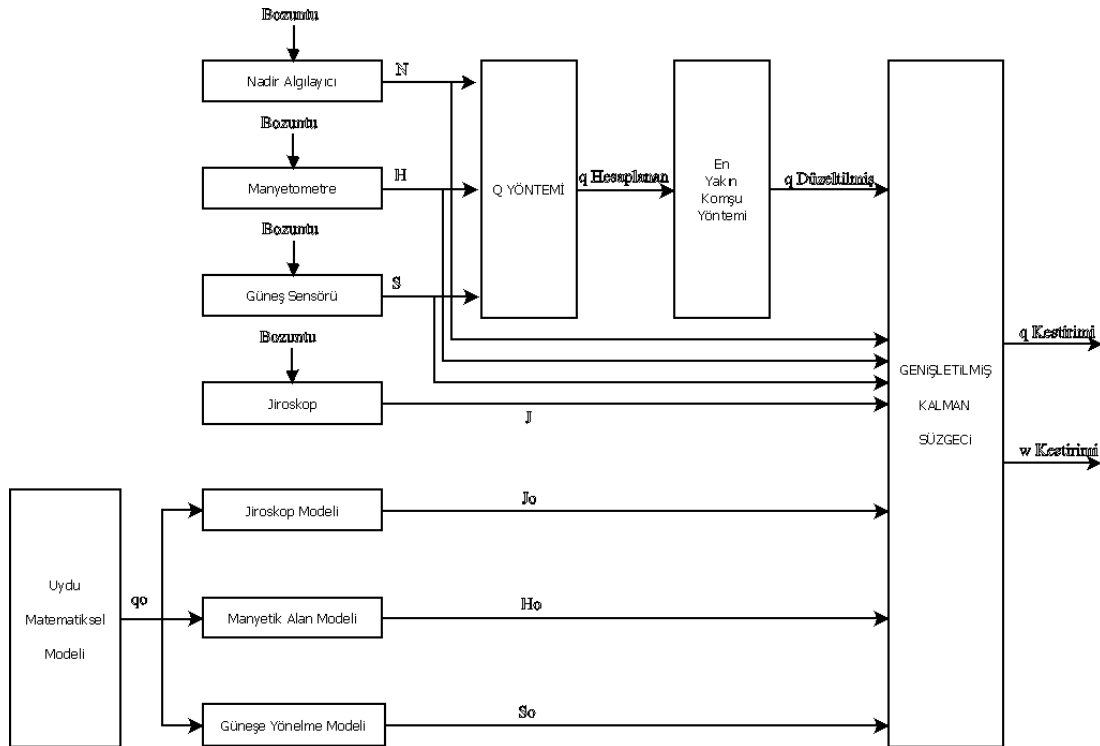
Q yönteminin güneşli ve güneşsiz bölgede çalışma durumlarında sisteme farklı algılayıcılar bilgi sağladığından, hesaplanan kuaternionların varyanslarına ait değerlerini göz önünde bulundurmak faydalı olacaktır. Aşağıdaki tabloda kuaternionlar için varyans değerleri özetlenmiştir.

**Çizelge 5.4 :** Q yönteminin güneşli ve güneşsiz durumlarda varyans değerleri

| Değişken | Güneşli Durumda Varyans Değerleri | Güneşli Durumda Varyans Değerleri |
|----------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| q1       | 0.016915958928189                 | 1,03E-24                          |
| q2       | 0.025335888657498                 | 1,52E-24                          |
| q3       | 0.006327964584747                 | 9,12E-25                          |
| q4       | 0.014116230841484                 | 6,04E-25                          |

## 5.6 Kestirim Benzetimlerinin Tümleştirilmesi

Tüm modeller ve algoritmaların ayrıık olarak çalıştığı görüldükten sonra, yazılımın uydu bilgisayarı üzerinde çalışma durumuna benzetecek şekilde kodlar düzenlenmiştir. Yeni yapılandırmada yazılım algılayıcılardan gelen sinyalleri, manyetometre, güneş algılayıcısı ve jiroskop modellerine uygun bozuntular vererek benzetilerek, sonra yörünge eksen takımında tanımlı olan bu modelleri dönüşüm matrisi ile çarpıp gövde eksen takımına dönüştürür. Gövde eksen takımında elde edilen ölçüm bilgileri önce Q yöntemi içerisine sokup, 75 saniye kadar burada Q yöntemi çalıştıktan sonra, elde edilen kuaternionları genişletilmiş Kalman süzgecine başlangıç koşulu olarak vermiştir. Gölge bölgede çalışan Kalman süzgeci kestirimlerini 300 saniye boyunca yürütüp, en adımda elde ettiği durum vektörü ve P matrisi değerlerini, güneşli bölgede çalışan Kalman süzgecine başlangıç bilgisi olarak vermektedir. Güneşli ve gölge bölgeye geçme durumu 600 ve 900'üncü saniyelerde sıralı olarak tekrarlanmıştır. Aşağıdaki şekilde tümleştirme sürecinin akış şeması görülmektedir.

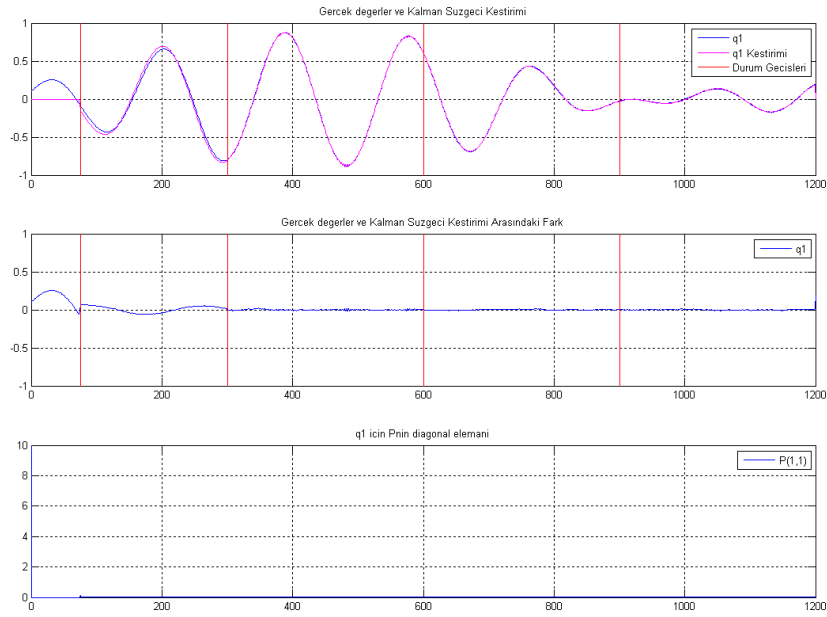


Şekil 5.17 : Tümleştirilme süreci akış şeması

Tümleştirme sürecine sadece başlangıç değerlerinde ve ölçümleri modellerken bozuntu verilmiş, süreç başlatıldıktan sonra ara adımlarda koda müdahale edilmemiştir.

Buradaki beklenti, ardı sıra çalışan farklı yöntemlerin birbirine bilgi sağlayarak çalışmayı sürdürmesi esnasında, herhangi bir mimari bozukluğun ortaya çıkıp çıkmayacağını gözlenmesidir.

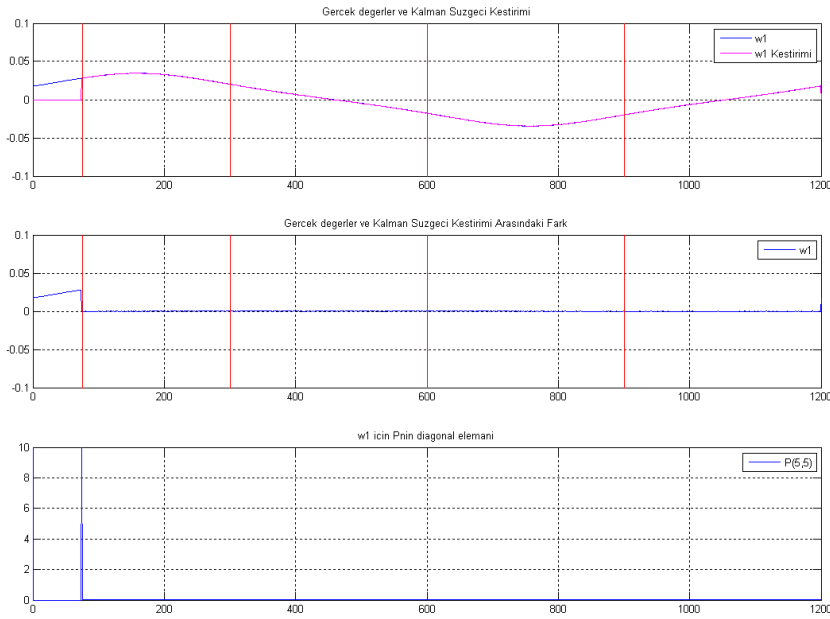
Yapılan tümleştirilmiş benzetim sürecinin grafikleri aşağıda verilmiştir.



**Şekil 5.18 :** Q yöntemi ve Kalman süzgeci sürümlerinin ardışık olarak çalıştırılması sonucu elde edilen  $q_1$  kestirimi (Birimsiz).

**Çizelge 5.5 :** Tümleştirme sürecinde çalışan GKS kuaternionların ilk elemanı için kestirim hataları ve P'nin diagonal elemanı (Birimsiz)

| Zaman (sn) | $q_1$ Kestirim Hatası | P'nin Diagonal Elemanı |
|------------|-----------------------|------------------------|
| 100        | 5,86E+03              | 8,61E-03               |
| 200        | 3,09E-02              | 9,93E-05               |
| 300        | -1,46E-02             | 9,81E-05               |
| 400        | -4,08E-03             | 3,05E-05               |
| 500        | -1,09E-03             | 3,71E-05               |
| 600        | -2,03E-03             | 4,78E-05               |
| 700        | 8,61E-03              | 9,11E-05               |
| 800        | -4,56E-03             | 9,33E-05               |
| 900        | 0,011552              | 9,48E-05               |
| 1000       | 2,23E-03              | 7,88E-05               |
| 1200       | -2,76E-03             | 6,86E-05               |



**Şekil 5.19 :** Q yöntemi ve Kalman süzgeci sürümlerinin ardışık olarak çalıştırılması sonucu elde edilen  $w_1$  kestirimi (Rad/Sn).

Bu grafiklerde dikey eksene paralel kırmızı doğrular senaryodaki durum geçişlerini ifade etmektedir. Birinci kırmızı çizgi Q yönteminden gölge bölgedeki ilk Kalman süzgecine, ikinci çizgi gölgeli bölgeden güneşli bölgeye, sıralı kırmızı çizgiler ise güneşli ve gölge bölgeye geçme durumunu işaret etmektedir.



**Çizelge 5.6 :** Tümleştirme sürecinde çalışan GKS açışal hızın ilk elemanı için kestirim hataları ve P'nin diagonal elemanı (Rad/Sn)

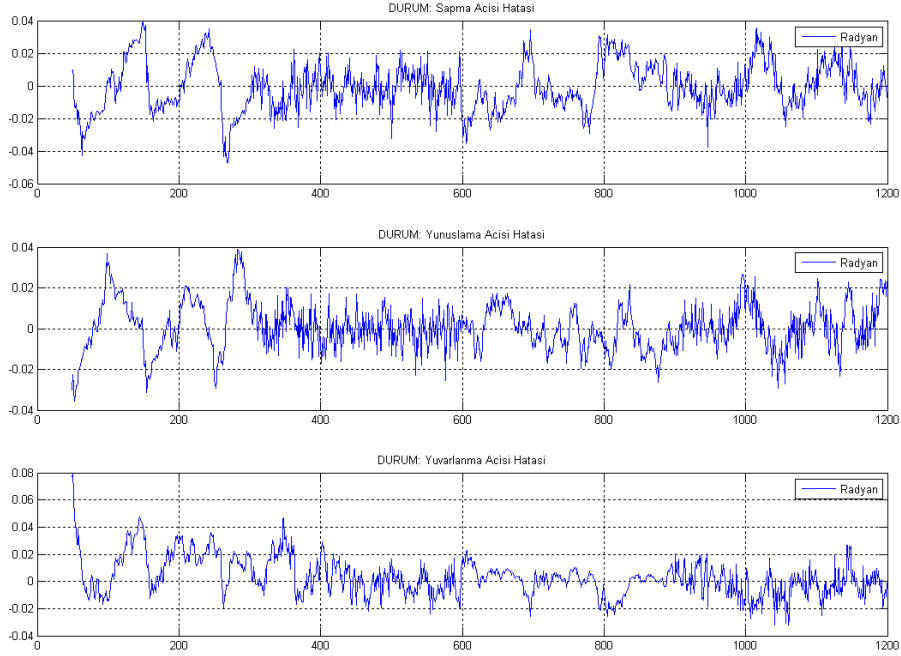
| Zaman (sn) | w <sub>1</sub> Kestirim Hatası | P'nin Diyagonal Elemanı (x10 <sup>-7</sup> ) |
|------------|--------------------------------|----------------------------------------------|
| 100        | -0,00014                       | 0.145007323387126                            |
| 200        | 6,41E-05                       | 0.145007323387052                            |
| 300        | 0,000208                       | 0.145007323387109                            |
| 400        | 0,00015                        | 0.145007323387296                            |
| 500        | 2,56E-05                       | 0.145007323387126                            |
| 600        | 0,000114                       | 0.145007323387122                            |
| 700        | 0,000245                       | 0.145007323387103                            |
| 800        | -5,65E-05                      | 0.145007323387114                            |
| 900        | -0,00026                       | 0.145007323386977                            |
| 1000       | -6,37E-05                      | 0.145007323387292                            |
| 1200       | 1,39E-05                       | 0.145007323387134                            |

Tümleştirme sürecinde, GKS peşi sıra farklı algılayıcılardan bilgi edindiği ve geçişler esnasında bir önceki fazın bitiş değerini, yeni fazda başlangıç değeri olarak kullandığından dolayı, aynı algılayıcıların sisteme bilgi sağladığı, ancak farklı fazlarda çalışan GKS'lerin sonuçlarını göz önüne almak faydalı olacaktır. Bu sebeple aşağıdaki tablo hazırlanmıştır.

**Çizelge 5.7 :** Tümleştirme sürecinde GKS'nin kestirimindeki hata durumu (Birimsiz)

| Zaman (sn) | q <sub>1</sub> Kestirim Hatası | Ortalama Hata | Durum                |
|------------|--------------------------------|---------------|----------------------|
| 100        | 0,035402665                    | 0,005996467   | Gölge İlk Geçiş      |
| 150        | -0,019169367                   |               |                      |
| 200        | -0,021979476                   |               |                      |
| 250        | 0,033602451                    |               |                      |
| 300        | 0,025897563                    | -0,001316925  | Güneşli İlk Geçiş    |
| 350        | -0,003030639                   |               |                      |
| 400        | 0,004895333                    |               |                      |
| 450        | -0,000730235                   |               |                      |
| 500        | -0,004280545                   |               |                      |
| 550        | -0,000964587                   |               |                      |
| 600        | 0,0067826472                   | 0,000125801   | Gölge İkinci Geçiş   |
| 650        | -0,007985769                   |               |                      |
| 700        | -0,004220137                   |               |                      |
| 750        | 0,007678017                    |               |                      |
| 800        | 0,007325218                    |               |                      |
| 850        | -0,00758215                    |               |                      |
| 900        | 0,005698745                    | -0,000188472  | Güneşli İkinci Geçiş |
| 950        | 0,00412729                     |               |                      |
| 1000       | -0,002220125                   |               |                      |
| 1050       | -0,005441062                   |               |                      |
| 1100       | 0,000562132                    |               |                      |
| 1150       | 0,000634785                    |               |                      |

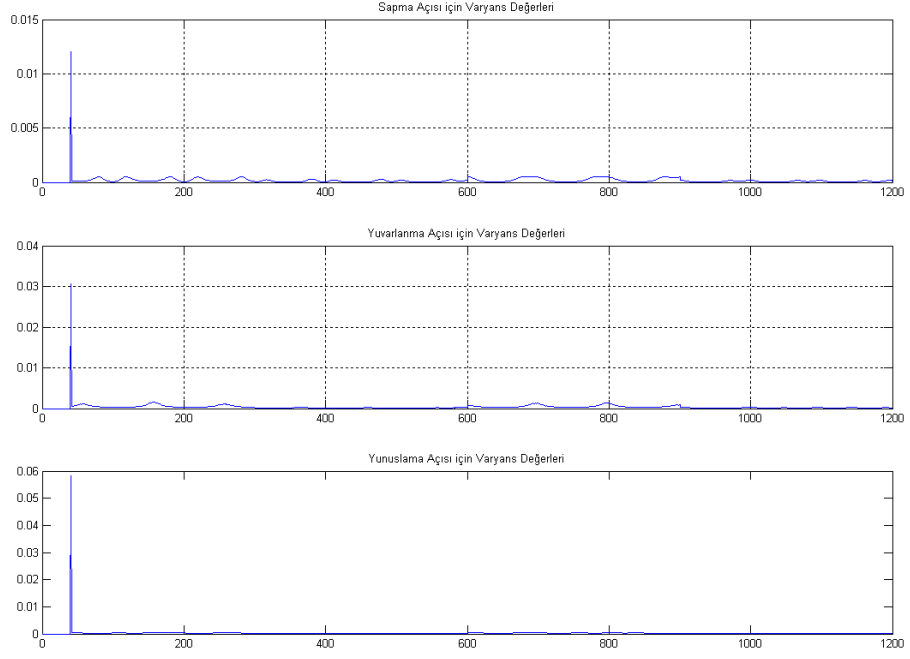
Hata analizi yapıldığında ise, sonuçların anlamlı olması adına öncelikle referans alınan ve kestirilen kuaternionlardan, Euler açılarına geçilmiştir. Radyan cinsinden bu farklar Şekil 5.20’de gösterilmiştir.



**Şekil 5.20 :** Kestirilen ve referans alınan değerler yardımıyla, Euler açıları arasındaki farklar (Rad).

Bu durumda oluşan farkın azami 0,04 radyan (2,2 derece) olduğu görülmektedir. Denklem 4.37’den faydalanılarak, Euler açılarının tespitinde ulaşılan varyans değerleri, Şekil 5.21’de verilmiştir.

Elde edilen bu grafiklerin detaylı incelenebilmesi için, her 100 adımda bir değerlerin alındığı ve Euler açılarının bulunmasındaki hatalar ve varyans değerlerinin bulunduğu değerler, Tablo 5.8’de verilmiştir.



**Şekil 5.21 :** Hata analizi sonucunda elde edilen varyans değerleri.

**Çizelge 5.8 :** Euler açılarının bulunmasındaki mutlak hata ve varyans değerleri.

| Mutlak Hata  |               |              | Varyans     |             |             |
|--------------|---------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| Sapma        | Yunuslama     | Yuvarlanma   | Sapma       | Yunuslama   | Yuvarlanma  |
| -0,002195573 | -0,004581576  | 0,005356596  | 5,92E-05    | 0,000384575 | 0,000332509 |
| -0,001584818 | -0,002950529  | 0,008064948  | 5,94E-05    | 0,000385311 | 0,000408271 |
| -0,005178885 | -0,014061925  | 0,013810465  | 8,83E-05    | 0,000411719 | 0,000101481 |
| 0,004513356  | -0,002569433  | 0,011258139  | 4,89E-05    | 0,000155814 | 5,03E-05    |
| 0,010844024  | -0,010000638  | -0,00731528  | 0,000109898 | 0,0001969   | 9,30E-05    |
| -0,003940375 | 0,001601299   | 0,004219888  | 0,000178962 | 0,000276647 | 0,00013634  |
| -0,02650815  | -0,001365842  | 0,025071891  | 0,000492906 | 0,001278472 | 0,000511231 |
| 0,012940763  | -0,010770851  | -0,00038841  | 0,00048946  | 0,001373905 | 0,000461819 |
| 0,028853152  | -0,014156067  | -0,00757752  | 0,000485224 | 0,000858676 | 0,000303551 |
| -0,006808079 | 0,010133416   | -0,00747219  | 0,000203621 | 0,000312095 | 0,000105629 |
| -0,003444747 | 0,002837027   | -0,00700142  | 0,000189606 | 0,000249161 | 9,58E-05    |
| 0,004852339  | 0,015627184   | -0,00641018  | 0,000176617 | 0,000191242 | 0,000142412 |
| Ortalama     | 0,00103 (Rad) | -0,0025(Rad) | 2,15E-04    | 5,062E-04   | 2,285E-04   |
|              | 0,5959(Der)   | 0,1472(Der)  |             |             | 0,1489(Der) |



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Yapılan çalışmada, bir alçak yörünge uydusunun yönelim tespiti ve kestirimi için, sırasıyla Q yöntemi ve genişletilmiş Kalman süzgeci kullanılması planlanmış, bu yapıya girdi sağlayacak olan veriler ise manyetometre, güneş algılayıcısı, jiroskoptan sağlanması amaçlanmıştır.

Yürütülen benzetimler sonucunda yazılmış olan yönelim belirleme ve kestirim yöntemlerinin, uydu bilgisayarında çalışacak biçimde tümleştirildiğinde, başarılı biçimde çalıştığı görülmüştür.

Süreç boyunca dikkate alınması gereken bazı hususlar mevcuttur. Q yöntemi her adımda ölçüm bilgisine ihtiyaç duymaktadır. Dolayısıyla kuaterniyonları tespit ederken oluşacak ölçüm kesintilerinde veya bozuntularında yöntemin çalışmama durumu ortaya çıkar. Bu sebepten Q yöntemi bir süre sonra kestirim işlemini genişletilmiş Kalman süzgecine devretmelidir.

Q yöntemi güneş görürken, gölgede çalıştığından daha iyi sonuçlar vermektedir. Çizelge 5.4'te Q yönteminin kuaternionları iki durumda da tespit ederken, benzetim süreci sonucu oluşan varyans değerleri, bu durumu göstermektedir.

Q yönteminin yönelim tespit işlemini GKS'ye devretme aşamasında dikkate alınması gereken önemli bir nokta, güneşsiz bölgede çalışan Q yönteminde, manyetik alan vektörü ve nadir vektörü arasındaki açı 20 dereceden büyük olduğunda geçiş yapılmalıdır. Şekil 5.16, şekil 5.17 ve çizelge 5.3 incelendiğinde bu durum açıkça görülebilmektedir. 20 dereceden büyük fark olduğunda Q yöntemi güneş algılayıcısı bilgisi olmadığında bile  $10^{-13}$  değerinde farkla kuaternionları tespit edebilmektedir.

Genişletilmiş Kalman süzgeci başlangıç değerlerine oldukça duyarlı bir yöntemdir. Q yönteminden iyi tespit edilmiş kuaternionların Kalman sürecine girdi olarak verilmesi, tümleştirme sürecine olumlu katkı yapmıştır. Kalman süreci daha hızlı yakınsama göstermiştir. Çizelge 5.2'ye bakıldığında güneş algılayıcısı sisteme veri sağladığında, GKS çok daha iyi kestirim değerlerine sahiptir.

Q yönteminden GKS gölge bölgede çalışma ve GKS güneşli bölgede çalışmaya sıralı geçişler yapıldığında, Güneşli bölge birinci geçiş ve güneşli bölge ikinci geçişte aynı algılayıcılar çalışmasına karşın, ikinci geçişte hata ortalaması daha ufaktır. Aynı durum gölgede çalışan GKS için de geçerlidir. Bunun sebebi başlangıç değerine duyarlı olan GKS'nin, geçişler esnasında, başlangıç değeri olarak bir önceki fazdaki bitiş değerini almasıdır. Bir önceki fazın bitiş değerleri, zaten belli bir süreç boyunca kestirildiği için, hatası azalmış bir başlangıç değeri olarak sıradaki faza geçmektedir. Bu durum Çizelge 5.7'de görülebilmektedir.

Ara adımlarda eklenen bozuntularda, benzetim süreci güneşli bölgedeyken, kestirilen değerlerde yaklaşık  $10^{-2}$  değerinde bir salınıma neden olmuş ancak sistem hızlı biçimde yakınsamıştır. Gölge bölgedeyken verilen ara bozuntuda ise kestirilen değerlerde yaklaşık  $10^{-1}$  değerinde bir salınıma neden olmuş ancak sistem yakınsama eğilimine girmiş, tekrar güneşli bölgeye geçildiğinde ise sonuçların tekrar bozuntu verilmeden önceki yakınsak hale geldiği görülmüştür.

Yapılan çalışmanın ilerletilmesi mümkündür. Algılayıcılar için ölçüm kaymalarından (bias) meydana gelen hataların tespiti ve bunların düzeltilmesi için gerekli müdahaleler çalışılmalıdır.

Yazılan kodun işlemciye gömülmesi için C programlama diline çevrilmesi ve deneysel ortamda çalıştırılması, yönelme tespit ve kontrol düzenekleri üzerinde çalışılmasına katkı sağlayacaktır.

## **6.1 Çalışmanın Uygulama Alanı**

Çalışma, bir alçak yörünge uydusunun yönelme tespit uygulaması olarak başarılı sonuçlar vermektedir. Üniversitemizde, üzerinde çalışılmakta olan nano uyduların, yönelme belirleme sisteminde uygulanabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] **R.E. Kalman**, 1960: “A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”, Transactions of the ASME- Journal of Basic Engineering, 82 (SeriesD):35-45, ASME.
- [2] **W.H. Steyn**, 1995: “A Multi-Mode Attitude Determination and Control System for Small Satellites”, Dissertation presented for the Degree of Doctor of Philosophy (Engineering) at the University of Stellenbosch.
- [3] **M.L. Psiaki**, 1990: “Three-Axis Attitude Determination via Kalman Filtering of Magnetometer Data”, AIAA, Vol.13, No.3, Page.506-514.
- [4] **J.L.Crassidis**, 1990: J.L. Junkins, “Optimal Estimation of Dynamic Systems”, Chapman and Hall / CRC Press LLC, Baco Raton.
- [5] **Barişev, V.A., Krilov, G.N.**, Meteoroloji Uydularının Yönelmesinin İzlenmesi, Gidrometeoizot, Moskova, (Rusça)
- [6] **A. Sofyalı**, 2010: Küçük Uydularda Doğrusal Olmayan Yönelme Dinamiği ve Üç Eksende Manyetik PD Ve Kayma Kipli Kontrolcü Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [7] **Kaplan, M.H.**, 1976. Modern spacecraft dynamics and control, p. 203-204, John Wiley and Sons, New York.
- [8] **Wie, B.**, 1998. Space vehicle dynamics and control, AIAA Education Series, p. 307-369, Ed. Przemieniecki, J.S., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia.
- [9] **Daybelge, U.**, 2005. “Attitude determination and control” dersi notları, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- [10] **Hanson, A.J.** 2006: Visualising Quaternions, p. 267, Elsevier Inc., San Francisco.
- [11] **Hashida, Y.** 2007: Simulation of microsatellite attitude using Kalman filtering in orbit results, Surrey Satellite Technology Limited Guilford, UK



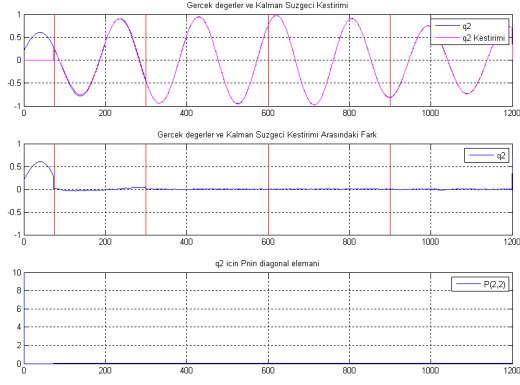


## **EKLER**

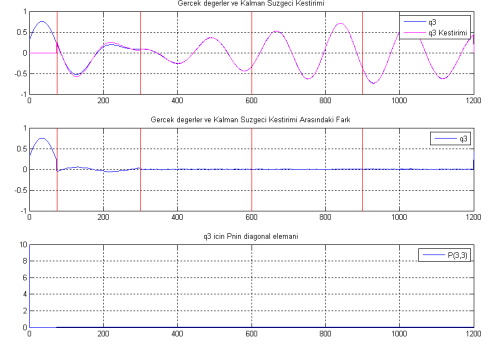
**EK A.1 :** Tmleřtirilmiř senaryoda GKS’de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  iin kestirim ve hata grafikleri.



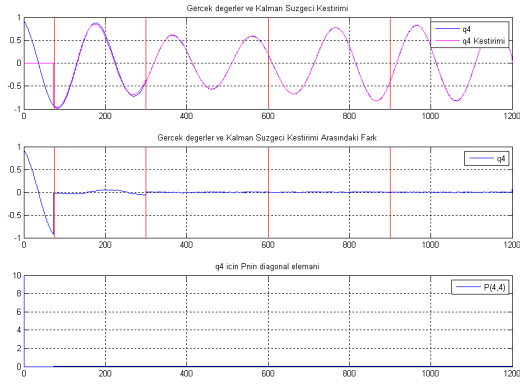
## EK A.1



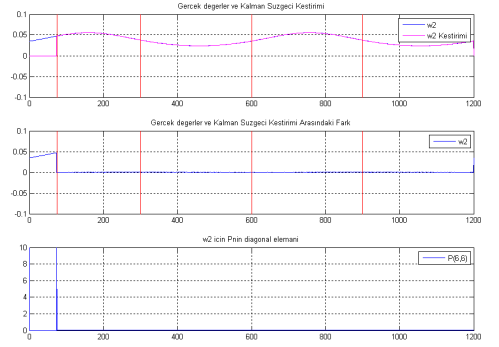
(a)



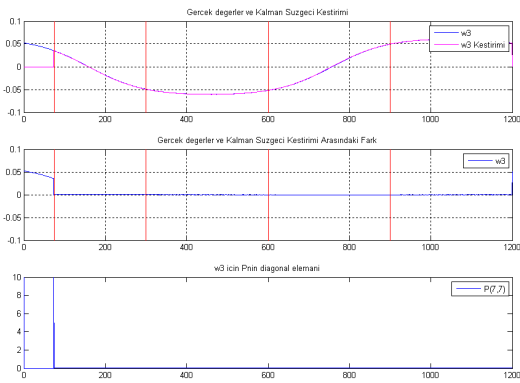
(b)



(c)



(d)



(e)

**Şekil A.1** : Tümleştirilmiş senaryoda çalışan GKS’de kestirim ve hata grafikleri (a)  $q_2$  (b)  $q_3$  (c)  $q_4$  (d)  $w_2$  (e)  $w_3$



## ÖZGEÇMİŞ



**Ad Soyad:** Hakan Aykent

**Doğum Yeri ve Tarihi:** 17.12.1980

**Adres:** Lozan Sokak No:21 Daire:2  
Ortaköy / İSTANBUL PK.34347

**Lisans Üniversite:** Uzay Müh., İstanbul Teknik Üniversitesi (2006)  
Uçak Müh., İstanbul Teknik Üniversitesi (2007, ÇAP)