



EĞİLME MOMENTİ ETKİSİNDEKİ BASİT MESNETLİ I KİRİŞLERİNDE YANAL DESTEKLERİN YANAL BURKULMAYA ETKİSİ

Selahattin ALBAYRAK¹
Gümüşhane Üniversitesi, GÜMÜŞHANE

Ümit UZMAN²
Karadeniz Teknik Üniversitesi, TRABZON

ÖZET

İnce cidarlı I kesitli kirişler günümüz yapı tekniğinde sıkça kullanılan yapı elemanlarıdır. Burulma rijitlikleri zayıf olan ince cidarlı I kesitli kirişlerin burulmaya karşı dayanımları bir takım desteklerle artırılabilir. Bu çalışmada eğilme momenti etkisindeki kirişlere eklenen yanal desteklerin yanal burkulma momentini nasıl etkilediği ve elemana eklenecek olan desteklerin ideal yay sabitlerinin sonlu eleman yöntemi ile belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın sonunda, sonlu eleman yöntemi ile bulunan sonuçlar enerji yönteminden bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çalışmada her iki yöntemle bulunan sonuçların birbirine yakın çıktığı gözlenmiştir.

ABSTRACT

Thin-walled I beams are the structural elements that are used frequently in today's construction techniques. Resistance against torsion of the thin-walled I-beams having weak torsional rigidity can be increased through some bracing. In this study, it is aimed to see how lateral bracings attached to the beams subjected to bending moment affects lateral buckling moment, and to determine the ideal spring constants of the bracings to be attached to the beam by finite element method. In the end of this study, the comparison of the results obtained through finite element method and the ones obtained through energy method is presented. It is observed that the results are close to each other.

GİRİŞ

İnce cidarlı elemanlar günümüz yapı tekniğinde sıkça kullanılan yapı elemanlarıdır. Bu elemanlar oldukça ince plaklardan oluşurlar. Burulma rijitlikleri zayıf olan ince cidarlı elemanların burulmaya karşı dayanımları bir takım desteklerle artırılabilir. Bununla beraber alternatif yapılara göre çok hafiftirler. Bu nedenle uzun açıklıklı köprüler, ağırlık ve maliyetin düşük olması istenen yapılarda kullanılmaları yaygındır.

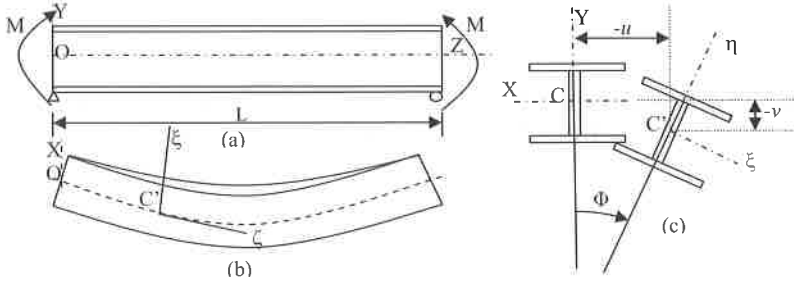
Yanal burkulma; yatay hareket yapması engellenmemiş ince cidarlı kirişlerde, yükleme belli bir kritik değeri aştığında meydana gelir (Şekil1). Bu kritik değer, kirişin eğilme momenti taşıma kapasitesinden büyük ise kiriş narin değildir. Yanal burkulma olmaksızın kiriş eğilme momenti kapasitesi aşıldığında geçer. Bu çalışmada eğilme momenti etkisindeki kirişlere eklenen yanal desteklerin yanal burkulma yükünü nasıl etkilediği ve elemana eklenecek olan desteklerin ideal yay sabitlerinin sonlu eleman yöntemi ile belirlenmesi amaçlanmıştır.

¹ Yrd.Doç.Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: albayrak@gumushane.edu.tr

² Prof. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: uzman@ktu.edu.tr

Yanal burkulma davranışının teorik esasları geçen yüzyılın başlarında ortaya konulmuş ve günümüzde ise, gelişmiş bilgisayar teknolojisi ile yanal burkulma davranışı ve nedenleri daha sağlıklı bir şekilde incelenabilmektedir. Kirişin sınır şartları, yanal mesnetler ve yükün uygulama şekli yanal burkulma davranışını belirler.

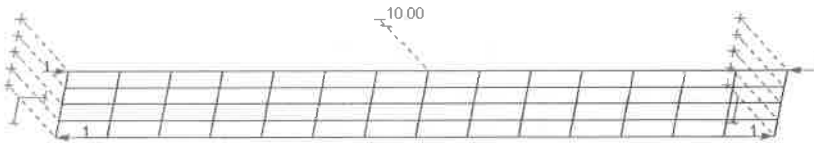
Yanal burkulma davranışına yanal desteklerin etkileri (Liu 2003), (Shu 1988), (Yura 2001) vd. çalışmalarında ele alınmaktadır. Bu çalışmalarda yanal ve burulma desteklerinin yanal burkulmaya etkisi değişik yöntemlerle ele alınmaktadır.



Şekil 1. Yanal burkulmuş kiriş: a) Basit mesnetli kiriş ve moment yüklemesi, b) Yanal burkulmuş kirişin üstten görünüşü (uç kesitlerin yanal hareketi önlenmiştir), c) Yanal burkulmada bir kesitin ötelenme ve dönmesi.

SONLU ELEMAN YÖNTEMİ VE YANAL BURKULMA ANALİZİ

Genellikle klasik yöntemleri kullanarak kesin burkulma analizi yapmak oldukça karmaşıktır. Bundan dolayı, bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak burkulma analizlerinde yaklaşık sonuçlar üreten sonlu eleman yöntemini kullanmak oldukça yaygın hale gelmiştir. Bu yöntem kullanıldığında Timoshenko (1961)'de belirtilen diferansiyel denklemler için yaklaşık çözümler elde edilir. Düzlem içi yer değiştirmelerin sağladığı diferansiyel denklemler, düzlem dışı yer değiştirmelerden bağımsız olduğu için kendi aralarında hesaplanabilmektedir. Daha sonra bunlar düzlem dışı yer değiştirmelerin sağlayacağı diferansiyel denkleme konularak kullanılmaktadır. Yapı mühendisliğinde, sonlu eleman modeli, ince cidarlı elemanlar için kritik burkulma yükünün hesabının tahmininde Akay vd. (1977) tarafından etkili bir yöntem olarak kullanılmaya başlanmıştır. Bu çalışmada sonlu eleman yöntemi ile hazırlanmış olan BASP bilgisayar programı kullanılmıştır. Basit mesnetli I kesitli bir kirişin gövdesinin sonlu eleman modeli Şekil 2'de görülmektedir. BASP programı istenirse, kiriş başlıklarını çizimlerde göstermemektedir. Aynı program, kiriş uç kesitlerinin yanal hareketlerinin nod noktalarında önlendiğini, Şekil 2'deki gibi kesikli çizgilerle göstermektedir. Kiriş ortasında üst başlık hizasında yanal doğrultuda kesikli çizginin devamındaki yay işareti, bir yay desteği olduğunu yanındaki 10 rakamı ise yay sabitinin şiddetini bu örnekte 10 kN/m olarak göstermektedir.



Şekil 2. Yanal (10 kN/m) desteklenmiş eğilme momenti etkisindeki basit mesnetli kiriş

Sonlu eleman modelinde, yanal burkulma yükünün hesabında düzlem dışı yer değiştirmelerin sağlayacağı diferansiyel denklem,

$$[K_c]\{r\} + \lambda[K_g]\{r\} = \{0\} \quad (1)$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada, K_c elastik yapısal rijitlik matrisi, K_g geometrik rijitlik matrisi, r sistemin burkulma halindeki yer değiştirme vektörü ve λ ise uygulanan yüke bağlı olarak kritik

burkulma yükü hesabında kullanılan özdeğer ifadesidir. Yine Şekil 2'de kiriş uç momentleri kiriş yüksekliği kadar aralıklı 1 kN şiddetinde kuvvet çifti olarak yüklenmiştir. Yukarıda hesaplanan λ özdeğeri yardımıyla yanal burkulma veren moment değeri $M = 1h\lambda$ olarak elde edilir. Burada h kiriş yüksekliğidir.

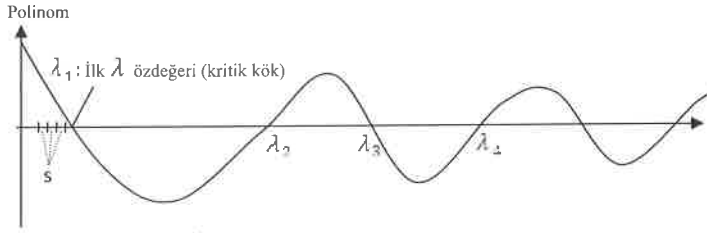
Kullanılan sonlu eleman modelinde (BASP), kiriş gövdesinin düzlem içi kuvvetleri için, önce

$$[K_i]\{r_i\} = \{R_i\} \quad (2)$$

denklemini çözmektedir. Burada K_i ara kesitin düzlem içi yapısal rijitlik matrisini, r_i hesabı yapılan noktanın yer değiştirmesini ve R_i de düzlem içi yükleme durumu için nodal kuvvetleri göstermektedir. r_i yardımı ile daha sonra düzlem içi gerilmeler hesaplanır. Yanal burkulma yükünün hesabında ilk olarak, düzlem içi analiz tamamlanır, daha sonra program düzlem içi gerilmelere bağlı olarak (1) denklemindeki K_g geometrik rijitlik matrisini oluşturur. Düzlem dışı yer değiştirmelerin hesaplanacağı K_c yapısal rijitlik matrislerini elde eder. Bu denklemde katsayılar matrisinin determinantın sıfıra eşitlenerek elde edilen karakteristik denklem λ 'nın bir polinomudur. BASP programı düzlem dışı ilk yanal burkulma yükünü (kritik olanı) hesaplamak için bu polinomun ilk kökü olan ilk λ özdeğerini bulmakta

$$[K_c]\{r\} + (\lambda^2 + s)[K_g]\{r\} = \{0\} \quad (3)$$

denklemini kullanır (Liu, 2003), böylece ardışık s kadar artırımlarla ilerleyerek polinomun işaret değiştirdiği adımdaki λ özdeğerini elde etmiş olur. Şekil 3'te bu durum şematik olarak çizilmiştir.



Şekil 3. Yanal burkulma analizinde λ özdeğerleri

Shu (1988) çalışmasında açıklık ortasından yanal desteklenmiş ve uçlarından eğilme momenti etkisindeki basit mesnetli kiriş için elemanın tam desteklenme durumuna karşılık gelen yay sabitini

$$Q = \frac{1}{\frac{Ld_1d_2}{24EI_y} + \frac{L^3}{48EI_y} + \frac{Ld_1d_2}{24EI_y}} \quad (4)$$

şeklinde belirlemiştir. Burada d_1 , d_2 , d_3 elemanın mesnetlenmesine, kesit özelliklerine ve boyuna bağlı ifadeler, e yanal desteğin kesit merkezine olan mesafesi, L ise kiriş boyunu ifade etmektedir. M_{kr} ise yanal burkulma boyu l ($L/2$) olan kirişin desteksiz yanal burkulma momentidir.

Bu denklemde E elastisite modülü, G kayma modülü, C_w çarpılma katsayısı, I_y kesit atalet momenti ve J polar atalet momenti olmak üzere $B^2 = (GJ)/(EC_w)$, $k^4 = M^2/(EI_y EC_w)$,

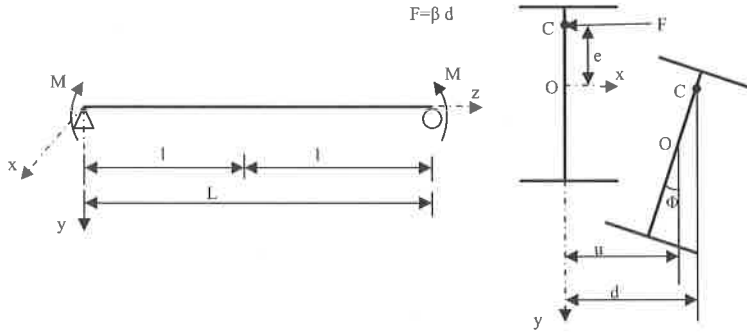
$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{B^2 + 4k^4} + B^2}$ ve $\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\sqrt{B^2 + 4k^4} - B^2}$ 'dir. Bunlara bağlı olarak;

$$\bar{d}_1 = 1 - \frac{\alpha_1^2 \tanh(\alpha_1 l)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (5)$$

$$\bar{d}_2 = 1 + \frac{\alpha_2^4 \tanh(\alpha_2 l)}{B^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \quad (6)$$

$$\bar{d}_3 = \frac{B^2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} \left(\frac{\tanh(\alpha_1 l)}{\alpha_1^2} - \frac{\tanh(\alpha_2 l)}{\alpha_2^2} \right) \quad (7)$$

$$M_{kr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y \left(GJ + EC_w \frac{\pi^2}{l^2} \right)} \text{ ifadelerine karşılık gelir.} \quad (8)$$



Şekil 4. Açıklık ortasından yanal desteklenmiş kiriş

Tablo 1. Yanal desteğin yerine göre ideal destek yay sabiti (Shu 1988)

e/h	0.5	0.25	0
β (kN/m)	1007	1884	6168
M_{kr} (kNm)	627.50	627.50	627.50

SAYISAL UYGULAMA

Yanal desteklerin, uçlarından tekil eğilme momenti etkisindeki basit mesnetli kirişlerde yanal burkulmaya etkisini incelemek için 6 m uzunluğunda IPE 400 kesitli çelik kiriş kullanılmıştır. Desteğin yay sabiti ve uygulama noktasının yanal burkulma momentine etkisinin belirlenmesi için seçilen elemana değişik yay sabitlerindeki destek elemanları farklı noktalara uygulanmışlardır. Uygulama sonucunda elde edilen yanal burkulma değerleri aşağıda tablolar yardımı ile verilmiştir.

Tablo 2. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişte $\beta = 600 \text{ kN/m}$ için $M = 1 \text{ kNm}$ yanal burkulma momentleri (kNm)

h_y/h	L_y/L										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	194.81	220.22	276.72	345.88	420.65	468.95	SİMETRİK				
0.25	194.81	210.38	246.83	291.23	333.02	352.52					
0.5	194.81	203.03	222.04	244.03	262.16	269.44					
0.75	194.81	198.23	205.69	213.60	219.50	221.68					
1	194.81	195.48	196.84	198.18	199.11	199.43					

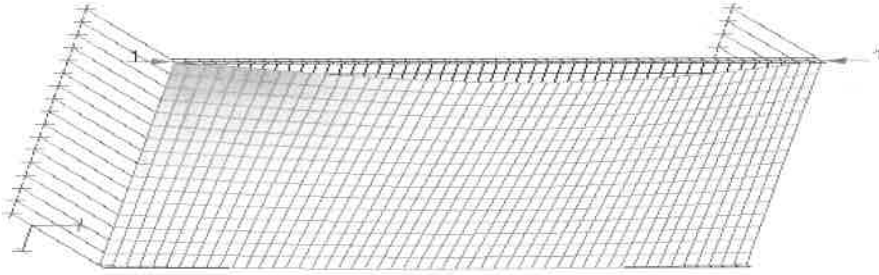
Tablo 3. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişte $\beta = 1800 \text{ kN/m}$ için $M = 1 \text{ kNm}$ yanal burkulma momentleri (kNm)

h_y/h	L_y/L										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	194.81	258.62	357.09	451.66	550.66	820.24	SİMETRİK				
0.25	194.81	233.18	307.00	390.05	484.44	579.60					
0.5	194.81	214.39	253.48	296.63	335.71	358.72					
0.75	194.81	203.16	217.69	231.19	240.85	244.42					
1	194.81	196.44	198.80	200.67	201.87	202.29					

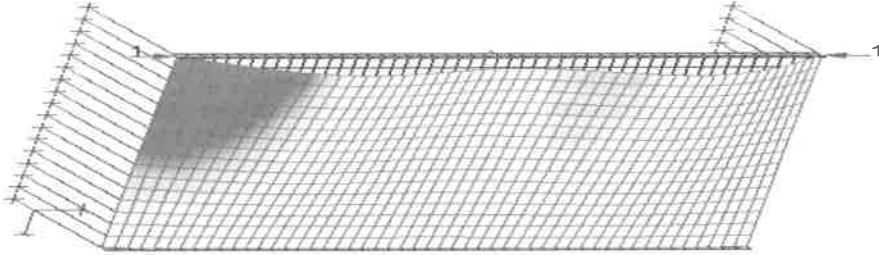
Tablo 4. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişte $\beta = 3000 \text{ kN/m}$ için $M = 1 \text{ kNm}$ yanal burkulma momentleri (kNm)

h_y/h	L_y/L										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	194.81	285.54	388.69	476.95	565.59	1054.79	SİMETRİK				
0.25	194.81	249.25	338.46	429.79	531.37	734.50					
0.5	194.81	222.06	271.52	325.07	377.31	449.78					
0.75	194.81	206.62	224.41	239.99	253.57	255.24					
1	194.81	197.13	199.79	201.74	202.96	203.37					

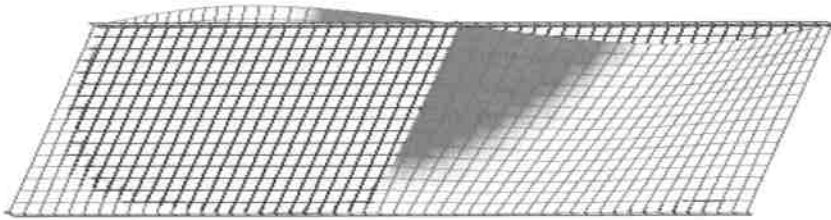
Burada h_y yanal desteğin I kesitinin üst başlığından düşey mesafesini, L_y sol mesnede yatay mesafesini, β ise yanal desteğin yay sabitini göstermektedir.



Şekil 5. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişin yanal burkulmuş hali (birinci yanal burkulma modu)

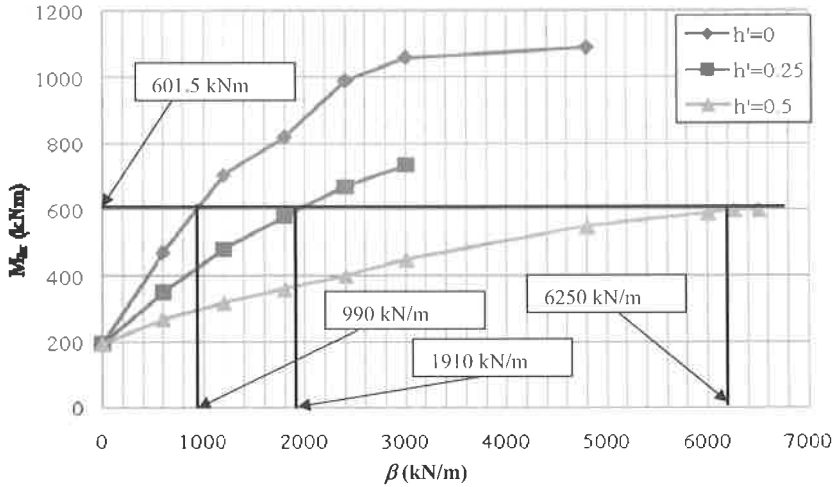


Şekil 6. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişin yanal desteklenmiş haldeki burkulması



Şekil 7. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişin ikinci yanal burkulma modu

Şekil 5'te eğilme momentine maruz bir kirişin yanal burkulmuş hali gösterilmektedir. Şekil 6~7'de ise değişik yanal destek yay sabitlerinde kirişin yanal burkulmuş halleri verilmektedir. Destek yay sabiti arttıkça yanal burkulma meydana getiren momentin arttığı Şekil 8'deki eğrilerden görülmektedir. Bu eğriler karşılaştırıldığında yay desteği üst başlıkta iken en etkilidir. Aynı yay sabiti değeri üst başlıkta iken yanal burkulmanın oluşması için daha büyük yanal burkulma momenti gerekmektedir. Örnek olması için destek yay sabiti 600 kN/m iken bu moment değerleri Tablo 3'te verilen 468.95; 352.52 ve 269.44 kNm değerleridir. 468.95 kNm değeri üst başlığa konulan yaya aittir.

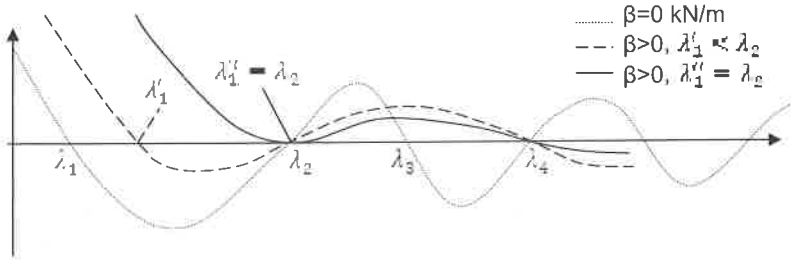


Şekil 8. Eğilme momenti etkisindeki basit kirişte en büyük yanal burkulma momentleri ve ideal yay sabitleri

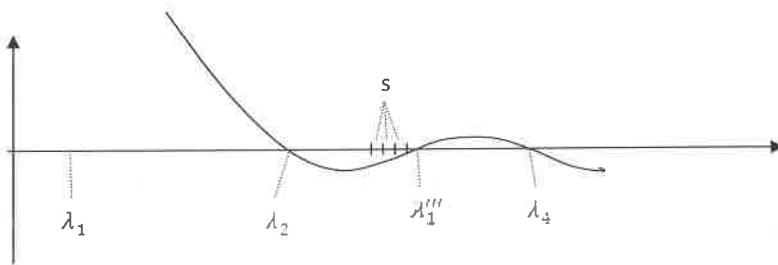
Orta kesiti serbest olan kirişte ikinci moddaki yanal burkulma momenti, kiriş orta kesiti rijit olarak desteklendiğinde elde edilen yanal burkulma moment değeri ile aynı olup 601.5 kNm dir. Bu değer Şekil 8'de yatay bir çizgi ile gösterilmiştir. Şekil 8'deki eğrilerde bu çizginin üzerinde kalan kısımlar gerçekleşmeyecektir. Çünkü kiriş daha küçük olan 601.5 kNm değerinde iken ikinci burkulma modunda burkulmuş olacaktır. Bu eğrilerin yatay çizgi ile kesim noktalarındaki yay sabiti değerleri (990, 1910 ve 6250 kN/m) ideal değerlerdir. Yay sabitini bu değerden fazla artırmak gereksizdir. Bu belirtilen değerler yeterli destek yay sabiti değerleridir. Üst başlığa konulması yeterli olan yay sabiti en küçüktür. Üst başlığa konulmasının en etkili olduğu buradan da anlaşılmaktadır.

Eğrilerin Şekil 8'deki yatay çizginin üstündeki kısmının BASP programındaki elde edilişi aşağıda açıklanmaktadır:

BASP programında özdeğerleri belirlemek için, (3) bağıntısında gösterilen s artırımları kullanılmaktadır. Bu artırımlar şematik olarak Şekil 3'te gösterilmiştir. Destek yay sabitinin artırılmasının Şekil 3'teki polinomu nasıl etkileyeceği değerlendirilecek olursa; şematik olarak Şekil 9, ve Şekil 10'da gösterildiği gibi λ özdeğerlerinin yerleri değişmeye başlar. Yay desteği açıklık ortasında olduğu için ikinci ve dördüncü burkulma modlarına karşılık gelen λ_2 ve λ_4 özdeğerlerinin yerleri değişmez. λ_1 özdeğeri ise λ_2 ye yaklaşır (λ_1'). Üçüncü burkulma modu ise oluşamayacaktır. Bunun için λ_3 değeri üçüncü özdeğer haline gelir. Destek yay sabiti arttıkça önce λ_1 özdeğeri λ_2 ye eşit hale gelir (λ_1''). Sonra daha büyük olur (λ_1'''). İşte bu durumda eğrinin eksenini kestiği λ_1''' özdeğerini BASP programı s artırımları ile ilerleyerek işaretin değiştiği yer olarak belirlemektedir. Şekil 8'deki birinci yanal burkulma moduna ait yanal burkulma eğrilerinin çizgi üstündeki kısımları böyle çizilebilmiştir. Bu kısımlar pratikte gerçekleşmeyecektir. Çünkü kiriş daha küçük olan 601.5 kNm değerinde iken ikinci yanal burkulma modunda burkulmuş olacaktır.



Şekil 9. β yay sabiti arttıkça λ_1 in λ_2 ye yaklaşması ($\lambda_1^i < \lambda_2$), sonunda eşit olması ($\lambda_1^i = \lambda_2$)



Şekil 10. BASP programını kullanarak s artırımlarla $\lambda_1^i \approx \lambda_2$ değerinin aranması

Şekil 8'deki eğriler incelendiğinde yanal desteğin yay sabiti artırıldıkça yanal burkulma momentindeki artım, yani eğim giderek azalmaktadır. Üst başlığa yerleştirilen yay desteği halinde $\beta = 3000 \text{ kN/m}$ değerinden sonra yay sabitini artırmanın etkisi olmamaktadır. Yay desteği artık giriş kesitini rijit şekilde tutabilmektedir.

Yapılan çalışma sonucunda, BASP ve Shu (1988)'de elde edilen sonuçlar Tablo 5'te karşılaştırılmıştır. Şekil 8'de belirlenen ideal (yeterli) yay sabiti değerlerinin Shu (1988) ile bulunan değerlere yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Tablo 5. Açıklık orta kesitinde yanal desteğin yerine göre ideal destek yay sabiti

	e/h	0.5	0.25	0
M_{kr} (627.5 kNm) (Shu 1988)	β (kN/m)	1007	1884	6168
M_{kr} (601.5 kNm) (Bu çalışma)	β (kN/m)	990	1910	6250

Açıklık ortası dışında bir kesite yerleştirilmesi halinde, yanal destek sağlayan yayın ideal yay sabiti değerleri benzer düşüncelerle hesaplanarak Tablo 6'da gösterilmiştir. Tablo 6'nın son satırı açıklık ortasındaki yay desteği halini göstermekte olup değerleri Tablo 5'te verilmektedir.

Tablo 6. Yanal desteğin kiriş gövdesindeki yerine göre ideal destek yay sabitleri: β (kN/m)

L_y/L	M_{kr} (kNm)	$\frac{e}{\lambda} = 0.5$ $r^2 = \frac{h_y^2}{\lambda^2} - 0$	$\frac{e}{\lambda} = 0.25$ $r^2 = \frac{h_y^2}{\lambda^2} = 0.25$	$\frac{e}{\lambda} = 0$ $r^2 = \frac{h_y^2}{\lambda^2} = 0.5$
0	194.81	0	0	0
0.1	390.72	35000	62000	260000
0.2	445.58	8800	22000	52000
0.3	512.79	4400	14000	44000
0.4	575.20	1750	8800	14000
0.5	601.50	990	1910	6250

BULGULAR

Yapılan çalışmada, yanal destek kiriş uzunluğunun orta noktasına ve üst başlığa yerleştirildiğinde yanal burkulma momenti önemli ölçüde artmakta, yanal destek, bu noktadan uzaklaştırıldığında ise yanal burkulma momenti daha fazla artmamakta ve giderek desteklenmemiş kirişin yanal burkulma momentine yaklaşmaktadır. Destek, alt başlığa veya alt başlığa yakın bölgelere yerleştirildiğinde ise yanal burkulma momenti destek yay sabitinin artması ile pek de artmamaktadır. Üst başlığa yerleştirilen yanal desteğin yay sabiti artırıldıkça yanal burkulma momentindeki artım, yani eğim giderek azalmaktadır. Üst başlığa yerleştirilen desteğin belli bir yay sabitinden sonra etkisi olmamaktadır. Yay desteği artık kiriş kesitini rijit şekilde tutabilmektedir. Çalışmada ayrıca, destek açıklık ortası dışında bir kesite yerleştirilmesi halinde, kritik yanal burkulma momenti desteğin açıklık ortasına yerleştirilmesi durumuna göre azalmakta ve yanal destek sağlayan yayın ideal yay sabiti değerleri benzer düşüncelerle hesaplandığında gerekli olan yay sabitinin arttığı gözlenmektedir.

Bu çalışmada, destek yay sabiti artırıldıkça, BASP programıyla elde edilen λ özdeğerleri hesaplanarak bulunan ideal destek yay sabiti değerleri ile [6] çalışmasından elde edilen veriler karşılaştırıldığında sonuçların birbirine ortalama %1.5 civarında yakın çıktığı görülmektedir. Bu çalışmada olmayan farklı yükleme ve mesnetlenme halindeki kirişlerde de (ortasından tekil yüklü basit kiriş, serbest ucundan tekil yüklü konsol kiriş vb. için) benzer yöntemle ideal destek yay sabitleri belirlenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Güneş, B., Bilgen, Y., Çelik, T., Damcı, E. ve Öztörün, N. M., "İnce Cidarlı Yapı Elemanlarında Yanal Burkulma Kritik Yüğü Hesabı İçin Farklı Bir Yöntem", II. Mühendislik Bilimleri Genç Araştırmacılar Kongresi, Kasım, İstanbul, Bildiriler Kitabı:381-389, 2005.
- [2] Liu, S., "Lateral Bracing Requirements for Cantilever Steel I Beams", Postdoctoral Thesis, McGill University, Montreal, 2003.
- [3] Emrem, H. T., 2002. Sürekli Kirişlerde Yanal Burkulma, 1. Baskı, Birsan Yayınevi, İstanbul.
- [4] Yura, J. A., "Fundamentals of Beam Bracing", Engineering Journal, 38, 1, 11-26, 2001.
- [5] Yura, J. A. ve Kim, J. H., "Buckling Analysis of Stiffened Plates (BASP)", 1993.
- [6] Shu, T. G. ve Fan, C. S., "Buckling of Laterally and Torsionally Braced Beams", Journal of Constructional Steel Research, 11, 41-55, 1988.
- [7] Akay, H.U., Johnson, C.P. ve Will, K.M., "Lateral and Local Buckling of Beams and Frames", ASCE, Paper 13226 ST9, 1821-1832, 1977.
- [8] Chajes, A., "Principles of Structural Stability Theory", Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [9] Timoshenko, S. P. ve Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [10] Prandtl, L., Kipperscheinungen, Dissertation der Universität München, Munich, 1899.