

ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN BİR AKIŞKANIN, BİRİ HAREKETLİ KESİŞEN İKİ PLAKA ARASINDAKİ AKIŞI

Serdar Barış, Boğaç Bilgiç

İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, İstanbul.

Özet – Bu problem, üçüncü mertebeden bir akışkanın, biri sabit diğeri hareketli olan kesişen iki düzlem arasındaki, iki boyutlu daimi akışının analizi ile ilgilidir. Strauss [1] tarafından verilen seri açılımları kullanılarak, problemi yöneten denklemler, lineer adi diferansiyel denklemlere indirgenmiştir. Bu denklemler ilgili sınır koşulları altında analitik olarak çözülmüştür. Non-newtonian parametrelerin akış üzerindeki etkisi dikkatlice incelenmiştir. Newtonian akışkandan farklı olarak, köşe noktası civarında sirkülasyon halkalarının oluştuğu görülmüştür.

Abstract – The problem dealing with the two dimensional steady and slow flow of a third grade fluid between intersecting planes, one of which is fixed and the other moving, has been analysed. Using a truncated series expansion given by Strauss [1] for the stream function, the governing equations of the problem are reduced to linear ordinary differential equations. These equations have been solved analytically subject to the relevant boundary conditions. The effects of the non-Newtonian parameters on the flow pattern are carefully delineated. There is, unlike the case of Newtonian fluid, a secondary flow near the corner.

1. GİRİŞ

İlgili akış problemleri birçok araştırmacı tarafından tartışılmıştır. Moffatt [2] ve Batchelor [3], Newtonian akışkan için köşe noktası civarındaki yavaş akımı incelemişlerdir. Hancock ve Lewis [4], bilinen benzerlik çözümleri ile alakalı, akım fonksiyonları için düzgün pertürbasyon serileri kullanarak atalet kuvvetlerinin etkisini araştırdılar. İki düzlem tarafından oluşturulan bir köşe içinde sıkıştırılamayan Maxwell akışkanının iki boyutlu daimi akımını ilk olarak Strauss [1], akım fonksiyonunun seri açılım formunu

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{n=1}^N \frac{\Psi_n(\theta)}{r^n} \quad (1.1)$$

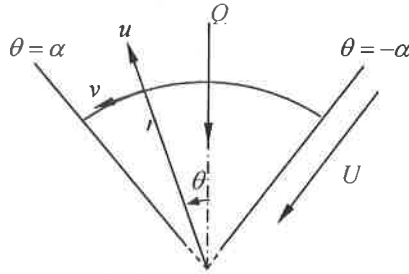
olarak incelemiştir. Burada $\Psi(r, \theta)$, polar koordinatlardaki akım fonksiyonudur. Strauss [1] problemi (1.1) ile verilen serinin ilk üç terimini ($N=1$) göz önüne alarak çözdü ve hareketli yüzeye bitişik bölgelerde sirkülasyon halkalarının oluştuğunu gösterdi. Riedler ve Schneider [5], üstel akışkanın, biri sabit diğeri hareketli olan kesişen iki düzlem arasındaki akımlarını incelemişlerdir. Akım çizgilerini çizdirerek, üstel sayının bilhassa sabit levha civarındaki akış üzerinde etkili olduğunu göstermişlerdir. Strauss'un [1] Maxwell akışkanı üzerine olan çalışması, Huang ve diğ. [6] tarafından, aynı geometri ve sınır şartları için Oldroyd-B akışkanı

için genişletilmiştir. Elastik parametredeki artışın $\sigma = \Lambda_2/\Lambda_1$ (Λ_1 :gevşeme zamanı, Λ_2 : gecikme zamanı), sirkülasyon halkalarının boyutunu azalttığını bulmuşlardır. Elde ettikleri denklemde $\sigma = 0$ alındığı zaman, Strauss'un [1] Maxwell akışkanı için bulduğu sonuçlara gelinmektedir. Bhatnagar ve diğ. [7], Strauss'un [1] problemindeki seri açılımında $N=2$ olarak $\Psi_2(\theta)/r^2$ terimini de eklemiştir ve bu ilave terimin çözüm üzerinde kayda değer bir farklılık ortaya çıkardığını göstermişlerdir.

Bu çalışmada, özetle belirtildiği gibi non Newtonian parametrenin akış üzerindeki etkisi kalitatif (nitel) olarak incelenmiştir. Buna ilave olarak, yapısal parametrelere verilen özel değerler yardımıyla, farklı tipten akışkan modellerinin kullanıldığı çalışmalara geçiş yapılabileceği de gösterilmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

Üçüncü mertebeden sıkıştırılmaz bir akışkanın biri sabit, diğeri sabit U hızıyla çekilen iki düzlem tarafından oluşturulan kanal boyunca daimi, iki boyutlu ve laminar akış probleminin geometrisi şekil 2.1'de gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Problemin Geometrisi

Üçüncü mertebeden Rivlin-Ericsen akışkanı ile ilgili gerilme tansörü (Truesdel ve Noll [8], Rivlin ve Ericksen [9], Fosdick ve Rajagopal [10], Szeri ve Rajagopal [11] ve Bird ve diğ. [12]), hareket denklemlerinde konularak seri açılımları yapıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır.

$$\psi_{(-1)}^{IV} + 2\psi_{(-1)}'' + \psi_{(-1)} = 0 \quad (2.1)$$

$$\psi_{(0)}^{IV} + 4\psi_{(0)}'' + \varepsilon \left(-4\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}' - 6\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}'' - 2\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}''' - 3\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}^{IV} - \psi_{(-1)}\psi_{(-1)}^V \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \psi_{(1)}^{IV} + 10\psi_{(1)}'' + 9\psi_{(1)} + \varepsilon \left(-3\psi_{(-1)}\psi_{(0)}' - 16\psi_{(-1)}'\psi_{(0)}'' - 6\psi_{(-1)}''\psi_{(0)}' - 4\psi_{(-1)}\psi_{(0)}''' \right. \\ & - 4\psi_{(-1)}'\psi_{(0)}^{IV} - 3\psi_{(-1)}^{IV}\psi_{(0)}' - \psi_{(-1)}\psi_{(0)}^V \left. \right) + \gamma_1 \left(30\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}'^2 + 6\psi_{(-1)}^2\psi_{(-1)}'' \right. \\ & + 32\psi_{(-1)}''\psi_{(-1)}'^2 + 5\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}''^2 - 3\psi_{(-1)}'''^2 + 28\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}''' + 8\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}''\psi_{(-1)}''' \\ & + 2\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}''^2 + 7\psi_{(-1)}^2\psi_{(-1)}^{IV} + 12\psi_{(-1)}'^2\psi_{(-1)}^{IV} + 8\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}''\psi_{(-1)}^{IV} + 8\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}^V \\ & + \psi_{(-1)}^2\psi_{(-1)}^V \left. \right) + (\gamma_2 + \gamma_3) \left(-6\psi_{(-1)}^3 + 12\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}'^2 - 12\psi_{(-1)}^2\psi_{(-1)}'' + 12\psi_{(-1)}'^2\psi_{(-1)}'' \right. \\ & - 6\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}''^2 + 24\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}''' + 24\psi_{(-1)}'\psi_{(-1)}''\psi_{(-1)}''' + 12\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}'''^2 \\ & + 12\psi_{(-1)}''\psi_{(-1)}'''^2 + 6\psi_{(-1)}^2\psi_{(-1)}^{IV} + 12\psi_{(-1)}\psi_{(-1)}''\psi_{(-1)}^{IV} + 6\psi_{(-1)}'^2\psi_{(-1)}^{IV} \left. \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.1),(2.2) ve(2.3) denklemleri, aşağıda verilen sınır şartlarına göre çözülecektir.

$$\psi_{(-1)}(\pm\alpha)=0, \quad \psi'_{(-1)}(-\alpha)=-1, \quad \psi'_{(-1)}(+\alpha)=0 \quad (2.4)$$

$$\psi_{(0)}(\pm\alpha)=\pm\frac{Q}{2}, \quad \psi'_{(0)}(\pm\alpha)=0 \quad (2.5)$$

$$\psi_{(1)}(\pm\alpha)=0, \quad \psi'_{(1)}(\pm\alpha)=0 \quad (2.6)$$

Burada;

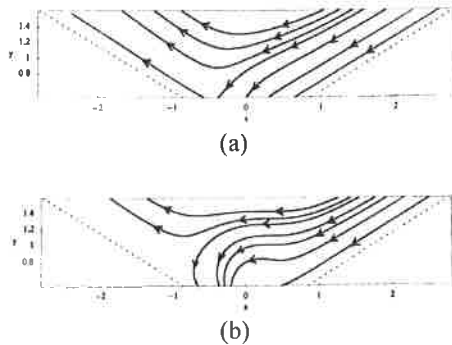
$$Re = \frac{\rho U r_0}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_1 \mu}{\alpha_2^2}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2 \mu}{\alpha_2^2}, \quad \gamma_3 = \frac{\beta_3 \mu}{\alpha_2^2} \quad (2.7)$$

dir. μ viskozite sabiti, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ akışkan ile ilgili yapısal sabitlerdir.

3. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Rivlin-Ericksen akışkanlarının hız gradyentlerinin küçük olduğu akışların modellenmesinde iyi bir yaklaşım olduğu literatürden bilinmektedir. Bu çalışmada incelenen problemde köşe noktası civarında hız gradyentleri büyük olduğundan, kullanılan akışkan modelinin köşe noktası civarındaki akışı iyi bir şekilde tanımlaması beklenemez. Yukarıda bahsettiğimiz eksikliğe rağmen üçüncü mertebeden Rivlin-Ericksen akışkan modeli, polimer eriyiklerin köşe noktası civarındaki hareketlerinde deneysel olarak gözlemlenen ilginç olaylardan biri olan akım çizgisi halkalarının, nispeten basit sayılabilecek analitik ifadeler yardımıyla, viskoelastisite teorisine dayandırılarak izah edilmesine imkan verdiği için kullanışlı sayılabilir.

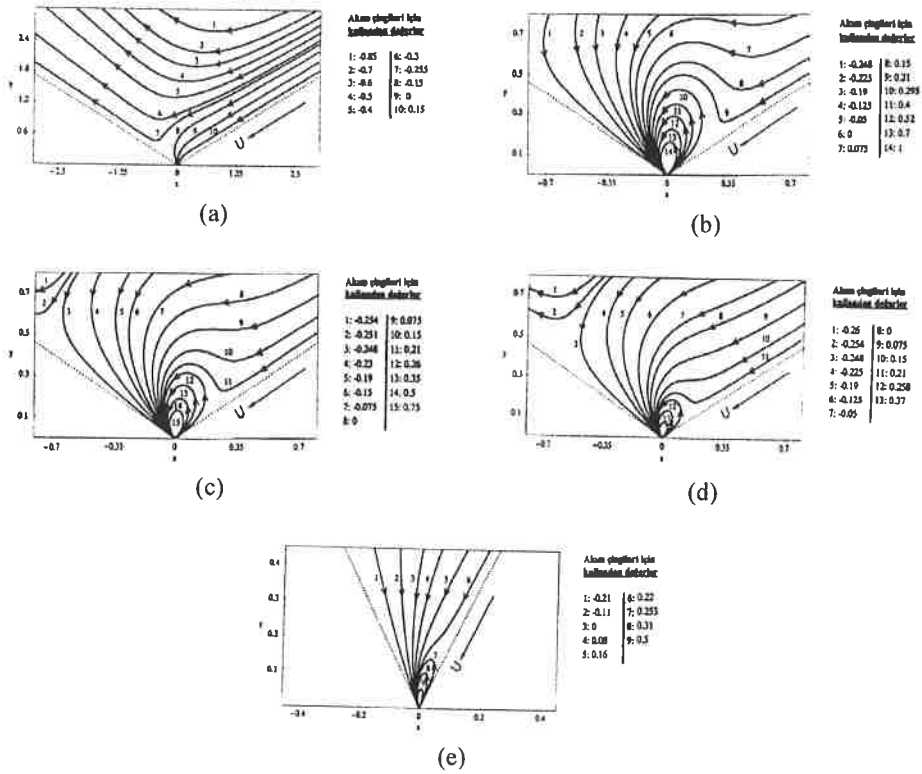
(1.1) denkleminde verilen seri açılımının pertürbasyon çözümlerini temsil edebilmesi için, toplam işareti altındaki her bir terim ana çözüme bir önceki terimden daha az katkı yapmalıdır. Bu şartın gerçekleşmediği durumlarda radyal koordinatın $r < 1$ olması halinde ortaya çıkabileceğinden, üçüncü mertebeden Rivlin-Ericksen akışkanının hareketini temsil eden $\psi(r, \theta)$ akım fonksiyonu için elde edilen analitik ifadenin $r < 1$ akış bölgesinde yeterince hassas sonuçlar vermesi beklenmemelidir. Bununla birlikte $r > 1$ şartının sağlandığı akış bölgesinde güvenilir sonuçlar vermesi beklenir.



Şekil 3.1, $0.5 \leq y \leq 1.6$ aralığında akım çizgileri (a) $\alpha = 60^\circ$, $Q = -0.5$ (Newtonian akışkan),

(b) $\alpha = 60^\circ$, $Q = -0.5$, $\gamma_1 = 0.75$, $\gamma_2 + \gamma_3 = 0.02$

O halde $r > 1$ bölgesindeki akım çizgilerinin yapısına bakarak $r < 1$ bölgesindeki akım çizgilerinin yapısının tahmin edilip edilemeyeceğinin araştırılması gerekir. Şekil 3.1'de verilmiş olan grafikler böyle bir tahminin mümkün olabileceğini göstermektedir. Gerçekten de, şekil 3.1 (a)'daki akım çizgileri şekil 3.2 (a)'daki halkasız akışın varlığını; şekil 3.1 (b)'deki akım çizgileri ise şekil 3.4 (b)'deki halkalı akışın varlığını ortaya koymaktadır.



Şekil 3.2. Akım çizgileri (a) $\alpha = 60^\circ, Q = -0.5$ (Newtonian Akışkan),

(b) $\alpha = 60^\circ, Q = -0.5, \gamma_1 = 0.75, \gamma_2 + \gamma_3 = 0.02$, (c) $\alpha = 60^\circ, Q = -0.5, \gamma_1 = 0.75, \gamma_2 + \gamma_3 = 0.16$

(d) $\alpha = 60^\circ, Q = -0.5, \gamma_1 = 0.25, \gamma_2 + \gamma_3 = 0.02$, (e) $\alpha = 30^\circ, Q = -0.5, \gamma_1 = 0.75, \gamma_2 + \gamma_3 = 0.02$

γ_1 ve $\gamma_2 + \gamma_3$ yapısal sabitleri, $\theta = -\alpha$ konumundaki hareketli levha tarafında bulunan akışkan zerreciklerinin radyal hızlarını pozitif değerlere doğru yükselttikleri için, şekil 3.2 (b), (c), (d) ve (e) grafiklerinde gösterilmiş olan akım çizgisi halkalarının oluşumuna neden olmaktadır. Sabit γ_1 değeri için $\gamma_2 + \gamma_3$ üzerinde meydana gelen artış, akım çizgisi halka boyutunu küçültürken (şekil 3.2 (b) ve (c)); sabit $\gamma_2 + \gamma_3$ değeri için γ_1 üzerinde meydana gelen artış ise, akım çizgisi halkalarının boyutlarını büyötmektedir (şekil 3.2 (b) ve (d)). Ayrıca kesişme açısı arttırıldığına akım çizgisi halkalarının boyutunda bir büyüme meydana geldiği görölmektedir (şekil 3.2 (b) ve (e)).

Son olarak, incelemiş olduğumuz akış problemini yöneten diferansiyel denklemler ve sınır şartlarında ortaya çıkan karakteristik parametrelere bazı özel değerler vererek, benzer akış

problemlerine ne şekilde geçiş yapılabilceğini göstermek istiyoruz. Parametrik limit haller olarak adlandıracağımız bu problemler aşığıda listelenmektedir.

a- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, $U \neq 0$, $Q = 0$ için Newtonian bir akışkanın köşe içindeki iki boyutlu ve yavaş akımına geçilir (Batchelor [3]).

b- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, $U = 0$, $Q \neq 0$ Newtonian bir akışkanın kesişen sabit iki düzlem arasındaki yavaş akımına geçilir (Birkhoff ve Zarantonella [13]).

c- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, $U \neq 0$, $Q \neq 0$ için Newtonian bir akışkanın biri sabit, diğeri hareketli olan kesişen iki düzlem arasındaki yavaş akımına geçilir (Taylor [14]).

d- $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$, $U \neq 0$, $Q \neq 0$ için Maxwell akışkanının biri sabit, diğeri hareketli olan kesişen iki düzlem arasındaki yavaş akımına geçilir (Strauss [1]).

e- $\gamma_1 = 1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$, $\gamma_2 + \gamma_3 = 0$, $U \neq 0$, $Q \neq 0$ için Oldroyd-B akışkanının biri sabit, diğeri hareketli olan kesişen iki düzlem arasındaki yavaş akımına geçilir (Huang ve diğ. [6]).

f- $\gamma_1 = 1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$, $\gamma_2 + \gamma_3 = \left(\frac{\Lambda_3 + \Lambda_5}{2\Lambda_1} \right) \left(\frac{\Lambda_2 + \Lambda_3 - \Lambda_4}{2\Lambda_1} \right) + \left(\frac{\Lambda_4 - \Lambda_5 - 2\Lambda_3}{2\Lambda_1} \right)$, $U \neq 0$, $Q \neq 0$ için 6 sabitli Oldroyd akışkanının biri sabit, diğeri hareketli olan kesişen iki düzlem arasındaki yavaş akımına geçilir (Barış [15]).

Λ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) sözü edilen akışkan modellerindeki yapısal sabitlerdir.

KAYNAKLAR

- [1] Strauss K. "Modell der Strömung, die sich am Rakelmesser einer Beschichtungsanlage einstellt" Rheological Acta, 14, 1058-1065, 1975.
- [2] Moffatt H.K. "Viscous and resistive eddies near a sharp corner" Journal of Fluid Mechanics, 18, 1-18, 1964.
- [3] Batchelor G.K. "An introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press, 1970.
- [4] Hancock C., Lewis E. and Moffatt H.K. "Effects of inertia in forced corner flows" Journal of Fluid Mechanics, 112, 315-327, 1981.
- [5] Riedler J. and Schneider W. "Viscous flow in corner regions with a moving wall and leakage of fluid" Acta Mechanica, 48, 95-101, 1983.
- [6] Huang Y.N., Bhatnagar R.K. and Rajakopal K.R. "Flow of a non Newtonian fluid between intersecting planes of which one is moving" Rheological Acta, 32, 490-498, 1993.
- [7] Bhatnagar R.K., Rajakopal K.R. and Robertson A. M. "Flow of a non Newtonian fluid between intersecting planes, one of which is moving" Rheological Acta, 35, 520-522, 1996.
- [8] Truesdell C. and Noll W., "The non-linear field theories of mechanics", Springer, 1965.
- [9] Rivlin R.S. and Ericksen J.L. "Stress-deformation relations for isotropic materials" Journal of Rational Mechanics and Analysis, 4, 323-425, 1955.
- [10] Fosdick R.L. and Rajagopal K.R. "Thermodynamics and stability of fluids of third grade" Proceeding of The Royal Society of London, A-339, 351-277, 1980.
- [11] Szeri A.Z. and Rajagopal K.R. "Flow of a non-Newtonian fluid between heated parallel plates" Journal of Non-Linear Mechanics, 20, 91-101, 1985.
- [12] Bird R.B., Armstrong R.C. and Hassager O., "Dynamics of Polymeric Liquids, Vol.1", John-Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [13] Birkhoff G.D. and Zarantonella E.H., "Jets, Wakes and Cavities", Academic Press Inc., 1957
- [14] Taylor G.I. "Similarity solutions of hydrodynamic problems", Pergamon Press, 1960.
- [15] Barış S. "Flow of an Oldroyd 6-constant fluid between intersecting planes, one of which is moving" Acta Mechanica, 147, 125-135, 2001.

