

172120

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR HELİKOPTER PALİNİN DİNAMİK VE
AEROELASTİK ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Özge ÖZDEMİR
(511041023)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Aralık 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Ocak 2006**

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Metin Orhan KAYA

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. İbrahim ÖZKOL (İ.T.Ü.)

Doç.Dr. Ata MUĞAN (İ.T.Ü.)

OCAK 2006

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda verdiği destek ve yaptığı katkılarından dolayı tez hocam Doç. Dr. Metin Orhan Kaya'ya,

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgilerinden yararlandığım fakültemiz değerli öğretim üyelerine,

Helikopter aeroelastisitesi konusunda yeterince bilgi sahibi olabilmem için bana gerekli ortamı ve olanakları sağlayan İTÜ Rotorlu Hava Araçları Tasarım ve Mükemmeliyet Merkezi'ne,

Yüksek lisans eğitimim için yaptığım araştırmaları sağladığı burs ile destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na,

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi tez çalışmalarım sırasında da sabırlarını, sevgilerini ve desteklerini benden esirgemeyen aileme ve

Hayat arkadaşım Emrah Özgümüş'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ocak 2006

Özge ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	xi
ÖZET	xiv
SUMMARY	xv
1.GİRİŞ	1
1.1.Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2.KİRİŞ TEORİLERİ VE FORMÜLASYONLARI	3
2.1.Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi	3
2.1.1.Ankastre Euler-Bernoulli kiriş hareket denkleminin Hamilton yöntemi ile çıkarımı	5
2.1.1.1.Dönmeyen, düzgün ve ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	5
2.1.1.2.Merkezkaç kuvveti	11
2.1.1.3.Dönen, düzgün ve ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	12
2.1.2.Ankastre Euler-Bernoulli kiriş hareket denkleminin Newton yöntemi ile çıkarımı	16
2.1.2.1.Dönmeyen, düzgün ve ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	17
2.1.2.2.Dönen, düzgün ve ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	19
2.2.Kayma Şekil Değiştirmesini İçeren Kiriş Teorileri	20
2.2.1.Ankastre Timoshenko kiriş hareket denklemlerinin Hamilton yöntemi ile çıkarımı	22
2.2.1.1.Dönmeyen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	22
2.2.1.2.Dönen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	26
2.2.2.Ankastre Timoshenko kiriş hareket denklemlerinin Newton yöntemi ile çıkarımı	30

2.2.2.1.Dönmeyen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişinin düzlemsel eğilme hareketi	30
2.3.Üç Boyutlu Kiriş Teorileri	33
3.DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ	34
3.1.Tarihçe	34
3.2.Yöntemin Tanımı	34
3.3.Yöntemin Uygulanması	35
4. HELİKOPTER PALİNİN DİNAMİK İNCELEMESİ	37
4.1.Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Ankastre Euler-Bernoulli Kirişinin Düzlemsel Eğilme Serbest Titreşiminin İncelenmesi	37
4.1.1.Kiriş modeli	37
4.1.2.Hareket denklemi ve sınır şartları	38
4.1.3.Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler	39
4.1.4.Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması	41
4.1.5.Sonuçlar	42
4.2.Dönen ve Tek Düzlemde Doğrusal Daralan Ankastre Timoshenko Kirişinin Düzlemsel Eğilme Serbest Titreşiminin İncelenmesi	47
4.2.1.Kiriş modeli	48
4.2.2.Hareket denklemleri ve sınır şartları	48
4.2.3.Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler	49
4.2.4.Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması	51
4.2.5.Sonuçlar	51
4.3.Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Timoshenko Kirişin Düzlemsel Eğilme Serbest Titreşiminin İncelenmesi	55
4.3.1.Kiriş modeli	56
4.3.2.Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz değişkenler	56
4.3.3.Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması	58
4.3.4.Sonuçlar	59
4.4.Dönen, İki Düzlemde Doğrusal Daralan ve Eğilme-Burulma Etkileşimli Timoshenko Kirişin Serbest Titreşim İncelenmesi	64
4.4.1. Kiriş modeli	65
4.4.2. Hareket denklemlerinin Hamilton yöntemi ile çıkarımı	66
4.4.2.1.Potansiyel enerji formülasyonu	67

4.4.2.2.Kinetik enerji formülasyonu	68
4.4.2.3.Hamilton prensibinin uygulanması	70
4.4.3.Hareket denklemleri ve sınır şartları	70
4.4.4.Daralan giriş formülleri ve boyutsuz parametreler	72
4.4.5.Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması	73
4.4.6.Sonuçlar	76
5.ASKIDA KALMA DURUMUNDAKİ BİR HELİKOPTER PALİNİN AEROELASTİK İNCELEMESİ	80
5.1.Tam Menteşeli Rijit Rotor Palinin Kararsızlığı İncelemesi	80
5.1.1.Kanat çırpma–gecikme kararsızlığı	80
5.1.1.1.Pal elemanı incelemesi	81
5.1.1.2.Bozuntu ifadeleri ve boyutsuz parametreler	83
5.1.1.3.Hareket denklemleri	87
5.1.1.4.Çözüm	90
5.1.2.Kanat çırpma–burulma kararsızlığı	95
5.1.2.1.Hareket denklemleri	96
5.1.2.2.Burulma diverjansı	103
5.1.2.3.Burulma çırpınması	105
5.2.Menteşesiz Rotor Sistemindeki Önburulmalı Elastik Palin Kanat Çırpma–Gecikme-Burulma Hareketlerinin Askıda Kalma Durumunda Aeroelastik İncelemesi	108
5.2.1.Hareket denklemlerinin Hamilton yöntemi ile çıkarımı	109
5.2.1.1.Potansiyel enerji formülasyonu	110
5.2.1.2.Kinetik enerji formülasyonu	112
5.2.1.3.Hamilton prensibinin uygulanması ve hareket denklemleri	115
5.2.2.Doğrusal hareket denklemlerinin incelenmesi	118
5.2.2.1.Boyutsuz bozuntu denklemleri	119
5.2.2.2.Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması	122
5.2.2.3.Çözüm	122
6.SONUÇLAR	128
KAYNAKLAR	129
EK	132
ÖZGEÇMİŞ	135

KISALTMALAR

ac	: Aerodinamik merkez (aerodynamic center)
cg	: Ağırlık merkezi (center of gravity)
DTM	: Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Differential Transform Method)
ea	: Elastik eksen (elasticity axis)



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 : Dönmeyen Euler-Bernoulli Kirişi için Mertebe Şeması.....	7
Tablo 2.2 : Potansiyel Enerji Hesabında Kullanılan Alan İntegralleri.....	8
Tablo 2.3 : Kinetik Enerji Hesabında Kullanılan Alan İntegralleri.....	9
Tablo 2.4 : Dönen Euler-Bernoulli Kirişi için Mertebe Şeması.....	14
Tablo 2.5 : Timoshenko Kiriş için Mertebe Şeması.....	25
Tablo 3.1 : Sınır Şartlarına Uygulanan Diferansiyel Dönüşüm Kuralları.....	36
Tablo 4.1 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin Birinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	42
Tablo 4.2 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin İkinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	43
Tablo 4.3 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin Üçüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	43
Tablo 4.4 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin Dördüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	43
Tablo 4.5 : Dönen ve İki Düzlemde Daralan Euler Kirişi Frekanslarının Dönme Hızı ve Rotor Kafası Yarıçapı ile Değişimi.....	46
Tablo 4.6 : Dönen ve Tek Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Frekanslarının Dönme Hızına Bağlı Olarak Değişimi.....	52
Tablo 4.7 : Dönen Düzgün Timoshenko Kirişin Frekanslarının, Dönme Atalet Etkisi ve Dönme Hızına Bağlı Olarak Değişimi.....	54
Tablo 4.8 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Birinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	60
Tablo 4.9 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin İkinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	60
Tablo 4.10 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Üçüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	61
Tablo 4.11 : Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Dördüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi.....	61
Tablo 4.12 : Dönen Düzgün Timoshenko Kirişin Doğal Frekanslarının Rotor Kafası Yarıçapı Parametresine Bağlı Olarak Değişimi.....	64
Tablo 4.13 : Eğilme-Burulma Etkileşimli Dönen Timoshenko Kirişin Frekanslarının Açısız Dönme Hızı ile Değişimi.....	76
Tablo 4.14 : Eğilme-Burulma Etkileşimli Dönmeyen Timoshenko Kirişin İlk Sekiz Frekansı.....	77
Tablo 5.1 : Kanat Çırpma-Gecikme-Burulma Etkileşimli Euler-Bernoulli Kirişi için Mertebe Şeması.....	111
Tablo 5.2 : Hareket Denklemlerinde Kullanılan Elastik Pal Mertebe Şeması.	116

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1	: Euler-Bernoulli Kiriş Teorisinde Kullanılan Birim Uzamalar.... 4
Şekil 2.2	: (a) Euler-Bernoulli Kirişinin Düzlemdışı Eğilme Hareketi (b) Kiriş Elemanının Düzlemdışı Eğilmesi ve Eğilme Kaynaklı Dönme Açısı..... 4
Şekil 2.3	: Dönmeyen, Düzgün, Ankastre Euler-Bernoulli Kirişinin Deplasman Öncesi ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü..... 5
Şekil 2.4	: Dönen Düzgün Ankastre Kiriş Modeli..... 11
Şekil 2.5	: Dönen Kiriş Elemanı Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler... 12
Şekil 2.6	: Dönen, Düzgün, Ankastre Euler-Bernoulli Kirişinin Deplasman Öncesi ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü..... 13
Şekil 2.7	: Dönmeyen Euler-Bernoulli Kiriş Elemanı Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler..... 17
Şekil 2.8	: Dönen Euler-Bernoulli Kiriş Elemanı Üzerine Etki Eden Kuvvet ve Momentler..... 19
Şekil 2.9	: Timoshenko Kiriş Teorisinde Kullanılan Birim Uzamalar..... 21
Şekil 2.10	: Kayma Birim Uzamaları Sonucu Oluşan Düzlemdışı (a) Burulma Çarpılması (b) Kayma Çarpılması..... 21
Şekil 2.11	: Timoshenko Kiriş Elemanının Düzlemdışı Eğilmesi Sonucu Oluşan Dönme Açısı ve Kayma Açısı..... 22
Şekil 2.12	: Dönmeyen, Düzgün, Ankastre Timoshenko Kirişinin Deplasman Öncesinde ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü..... 23
Şekil 2.13	: Dönen, Düzgün, Ankastre Timoshenko Kirişinin Deplasman Öncesinde ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü..... 27
Şekil 2.14	: Düzlemdışı Eğilme Hareketi Sonucunda Timoshenko Kiriş Kesidinde Görülen Dönme Açısı..... 30
Şekil 2.15	: Dönmeyen Timoshenko Kiriş Elemanı Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler..... 31
Şekil 2.16	: Üç Boyutlu Kiriş Teorilerinde Birim Uzamalar..... 33
Şekil 2.17	: Düzlemsel (a) Daralma Çarpılması (b) Eğilme Çarpılması..... 33
Şekil 4.1	: İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin (a) Üstten Görünüşü (b) Yandan Görünüşü..... 38
Şekil 4.2	: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Euler Kirişi (a) Birinci (b) İkinci Frekanslarının Dönme Hızı Parametresi ve Daralma Oranları ile Değişimi..... 44
Şekil 4.3	: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Euler Kirişi (a) Üçüncü (b) Dördüncü Frekanslarının Dönme Hızı Parametresi ve Daralma Oranları ile Değişimi..... 45

Şekil 4.4	: İki Düzlemde Daralan Euler Kirişi Frekanslarının, Dönme Hızı ve Rotor Kafası Yarıçapı ile Değişimi.....	47
Şekil 4.5	: Dönen ve Tek Düzlemde Daralan Timoshenko Kiriş Modeli	48
Şekil 4.6	: Dönen Timoshenko Kiriş Frekanslarının Dönme Hızı ve Daralma Oranına Bağlı Olarak Değişimi.....	53
Şekil 4.7	: Dönen Timoshenko Kirişi Frekanslarının Dönme Atalet Etkisi ve Daralma Oranına Bağlı Olarak Değişimi.....	55
Şekil 4.8	: İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişinin (a) Üstten Görünüşü (b) Yandan Görünüşü.....	56
Şekil 4.9	: Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Kirişlerin (a) Birinci (b) İkinci Frekanslarının Dönme Hızı Parametresine ve Daralma Oranlarına Bağlı Olarak Değişimi.....	62
Şekil 4.10	: Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Kirişlerin (a) Üçüncü (b) Dördüncü Frekanslarının Dönme Hızı Parametresine ve Daralma Oranlarına Bağlı Olarak Değişimi...	63
Şekil 4.11	: İki Düzlemde Daralan, Dönen, Eğilme-Burulma Etkileşimli Timoshenko Kiriş.....	65
Şekil 4.12	: İki Düzlemde Daralan, Deltoid Kesitli Timoshenko Kirişin (a) Kök Bölgesindeki Kesidi (b) Yandan Görünüşü (c) Üstten Görünüşü.....	66
Şekil 4.13	: Dönen ve Eğilme-Burulma Etkileşimli Timoshenko Kirişinin Deplasman Öncesinde ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü.....	66
Şekil 4.14	: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin (a) Birinci (b) İkinci Mod Şekilleri.....	78
Şekil 4.15	: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin (a) Üçüncü (b) Dördüncü Mod Şekilleri.....	79
Şekil 5.1	: Kanat Profiline Etkiyen Kuvvetler, Serbest Akım Bileşenleri ve Profil Açıları.....	81
Şekil 5.2	: Pal Elemanı Üzerine Etkiyen Aerodinamik Yükler.....	83
Şekil 5.3	: (a) Kanat Çırpma Hareketinin Dik Hız Bileşenine Katkısı (b) Gecikme Hareketinin Teğetsel Hız Bileşenine Katkısı.....	84
Şekil 5.4	: Rotor Düzleminin Üstten Görünüşü ve Azimut Açısı.....	86
Şekil 5.5	: (a) Rijit Kanat Çırpma Hareketi (b) Rijit Gecikme Hareketi Sırasında Pal Üzerine Etkiyen Kuvvetler.....	87
Şekil 5.6	: Askıda Kalma Durumundaki Rotor Palinin Kanat Çırpma Frekansları.....	92
Şekil 5.7	: Çırpınma Durumunda Kök Hareketi.....	93
Şekil 5.8	: Askıda Kalma Durumunda Koniklik Açısı.....	94
Şekil 5.9	: Kanat Çırpma-Gecikme Kararlılık Sınırları.....	95
Şekil 5.10	: Kanat Çırpma Hareketi Sonucu Oluşan (a) Burulma (b) Pal Sehimini.....	96
Şekil 5.11	: Kanat Çırpma Momenti Yaratan Merkezkaç Bileşeni.....	98
Şekil 5.12	: Pal Kesidine Etki Eden Momentler ve Moment Yaratan Kuvvetler.....	98
Şekil 5.13	: Diverjans Durumunda Kök Hareketi.....	104
Şekil 5.14	: Pal Profili Üzerinde Elastik Eksen, Aerodinamik Merkez ve Ağırlık Merkezi Konumları ve Aralarındaki Mesafeler.....	105
Şekil 5.15	: Kanat Çırpma-Burulma Hareketleri Kararlılık Sınırları.....	108

Şekil 5.16	: Dönen Önburulmalı Euler–Bernoulli Kirişinin Eğilme-Eğilme-Burulma Deplasmanları Öncesi ve Sonrasında (a) Kesit Görünüşü (b) Üstten ve Yandan Görünüşleri.....	109
Şekil 5.17	: Önkoniklik Açısına Sahip Palin Koordinat Sistemleri.....	112
Şekil 5.18	: Dönen ve Dönmeyen Palin (a) Kanat Çırpma (b) Gecikme (c) Burulma Frekansları Arasındaki Bağlıntılar.....	124
Şekil 5.19	: (a) Düzlemde Katı Olmayan (b) Düzlemde Katı Bir Rotorda Etkileşimsiz Frekansların Açısız Dönme Hızı Oranına Bağlı Olarak Değişimi.....	125
Şekil 5.20	: Elastik Pal Kanat Çırpma ve Gecikme Modlarının Aeroelastik Kararlılık İncelemesi.....	126
Şekil A.1	: Pal Kütle Elemanı Üzerine Etkiyen Merkezkaç Kuvveti.....	132
Şekil A.2	: Merkezkaç Kuvvetinin Düzlem İçindeki Bileşeninin (a) Üstten Görünüşü (b) Pal Kesidinden Görünüşü.....	133
Şekil A.3	: Merkezkaç Kuvveti Düzlem İçi Bileşeninin Yarattığı Moment....	133
Şekil A.4	: (a) Kanat Çırpma Menteşesinin Geometrisi ile Sağlanan Kanat Çırpma-Burulma Etkileşimi (b) Kontrol Sistemi Geometrisi ile Sağlanan Kanat Çırpma-Burulma Etkileşimi.....	134

SEMBOL LİSTESİ

A	: Kesit alanı (m^2)
a	: Taşıma eğrisi eğimi
C(k)	: Theodorsen taşıma katsayısı
C_d	: Profil sürüklenme katsayısı
C_l	: Profil taşıma katsayısı
c	: Veter uzunluğu (m)
c_b	: Genişlik daralma oranı
c_h	: Kalınlık daralma oranı
D	: Pal üzerine etkiyen sürüklenme kuvveti (N)
E	: Elastisite modülü (N/m^2)
EI	: Eğilme katılığı (Nm^2)
e	: Kiriş kütle merkezinden geçen eksen ile elastik eksen arasındaki açıklık (m)
e₁	: Kiriş kesit alanı merkezinden geçen eksen ile elastik eksen arasındaki açıklık (m)
F_u	: Palin birim uzunluğuna etkiyen eksenel aerodinamik kuvvet (N/m)
F_y	: Palin birim uzunluğuna etkiyen düzlemsel aerodinamik kuvvet (N/m)
F_z	: Palin birim uzunluğuna etkiyen düzlemsel aerodinamik kuvvet (N/m)
G	: Kayma modülü (N/m^2)
GJ	: Burulma katılığı (Nm^2)
I_b	: Kanat çırpma kütle atalet momenti (kgm^2)
I_r	: Burulma kütle atalet momenti (kgm^2)
I₀	: Ağırlık merkezi etrafındaki burulma atalet momenti (m^4)
I_y	: Eksen y çevresindeki alan atalet momenti (m^4)
I_z	: Eksen z çevresindeki alan atalet momenti (m^4)
I_α	: Elastik eksen etrafında polar kütle atalet momenti (kgm)
I_ξ	: Gecikme kütle atalet momenti (kgm^2)
I_θ	: Burulma eksen etrafındaki kesit atalet momentidir (m^4)
J	: Burulma modülü (m^4)
K_β	: Kanat çırpma yay sabiti (N/m)
K_θ	: Burulma yay sabiti (N/m)
k	: Kayma gerilmesi düzeltme çarpanı (Shear correction factor)
k_A	: Pal kesit alanı jirasyon yarıçapı (m)
k_m	: Pal kesit alanı kütle jirasyon yarıçapı (m)
k_{m1}	: Pal kesit alanı integrali (m)
k_{m2}	: Pal kesit alanı integrali (m)

$k_{p\beta}$	: Kanat çırpma-burulma etkileşim katsayısı
$k_{p\zeta}$	: Gecikme-burulma etkileşim katsayısı
L	: Pal veya kiriş uzunluğu (m); pale etkiyen taşıma kuvveti (N)
M	: Kiriş elemanına etkiyen eğilme momenti (Nm)
M_{NC}	: Sirkülasyondan kaynaklanmayan aerodinamik moment (Nm/m)
M_β	: Palin birim uzunluğuna etkiyen düzlemsel aerodinamik kuvvetin, F_z , oluşturduğu aerodinamik moment (Nm/m)
M_β	: M_β aerodinamik momentinin boyutsuz ifadesi
M_ζ	: Pale etkiyen düzlemsel aerodinamik kuvvetin, F_z , oluşturduğu aerodinamik moment (Nm/m)
M_ζ	: M_ζ aerodinamik momentinin boyutsuz ifadesi
M_ϕ	: Palin birim uzunluğuna etkiyen aerodinamik burulma momenti (Nm/m)
m	: Birim uzunluğa düşen kütle miktarı ($= \rho A$) (kg/m)
P	: Pal kesidinde referans olarak alınan noktanın deformasyon sonrası durumu
P_0	: Pal kesidinde referans olarak alınan noktanın deformasyon öncesi durumu
p_w	: Birim uzunluk başına uygulanan kuvvet (N/m)
q_∞	: Dinamik basınç ($= \rho_\infty U_\infty^2 / 2$) (kg/ms^2)
r	: Dönme ataleti parametresi (rotary inertia parameter)
S	: Bölgesel kayma kuvveti (N/m^2)
S_b	: Palin birinci atalet momenti (kgm)
s	: Kayma deformasyonu parametresi (shear deformation parameter)
T	: Merkezkaç kuvveti (N)
t	: Zaman (s)
U	: Potansiyel enerji (Nm)
U_D	: Pal üzerine gelen serbest akım hızının dik bileşeni (m/s)
U_T	: Pal üzerine gelen serbest akım hızının teğetsel bileşeni (m/s)
U_∞	: Serbest akım hızı (m/s)
u	: Eksenel uzama (m)
v	: Düzlemsel eğilme deplasmanı (m)
v_1	: Helikopter rotorundaki indüklenme hızı (m/s)
w	: Düzlemsel eğilme deplasmanı (m)
ω	: Frekans (rad/s)
ω_d	: Sönümlenmiş boyutsuz frekans
ω_N	: Boyutsuz doğal frekans
$\omega_{\beta 0}$	: Dönmeyen pal için hesaplanan kanat çırpma frekansı (rad/s)
$\omega_{\beta NR}$	: Dönmeyen pal için hesaplanan boyutsuz kanat çırpma frekansı.
$\omega_{\zeta 0}$	: Dönmeyen pal için hesaplanan gecikme frekansı (rad/s)
$\omega_{\zeta NR}$	: Dönmeyen pal için hesaplanan boyutsuz gecikme frekansı
ω_θ	: Dönmeyen pal için hesaplanan kontrol katılığını simgeleyen boyutsuz burulma frekansı
x_a	: Pal kesidi aerodinamik merkezinin, elastik eksene uzaklığı (m)
x_l	: Pal kesidi ağırlık merkezinin, elastik eksene uzaklığı (m)

$\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$	: Pal kesidinde referans olarak alınan noktanın deformasyon öncesi koordinatları (m)
$\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$	: Pal kesidinde referans olarak alınan noktanın deformasyon sonrası koordinatları (m)
α	: Etkin hücum açısı (rad)
β	: Palin kanat çırpma (flapping) açısı, yukarı yönde pozitifdir (rad)
β_{pc}	: Önkoniklik açısı (rad)
β_1	: Birinci kanat çırpma modu için kullanılan sabit
γ	: Aerodinamik kuvvetlerin atalet kuvvetlere oranını gösteren Lock sayısı ($= \rho_{\infty} c a L^4 / I_h$)
$\gamma_{xx}, \gamma_{xz}, \gamma_{x\eta}$	: Gerçek birim uzama bileşenleri
γ_1	: Birinci burulma modu için kullanılan sabit
δ	: Rotor kafası yarıçap parametresi
ϵ	: Boyut analizinde kullanılan küçük parametre
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{x\eta}$	: Mühendislik birim uzaması bileşenleri
ζ	: Palin gecikme (lagging) açısı, sürüklenme kuvveti yönünde pozitifdir (rad)
ζ_d	: Sönümlleme oranı
ζ_L	: Gecikme frekansının yapısal sönümlleme katsayısı
η	: Kesit alanında referans olarak alınan noktanın x eksenine doğrultusundaki koordinatı (ekler kısmında, m); Dönme hızı parametresi (ana bölümlerde)
θ	: Önburulma açısı (rad)
$\theta_{kontrol}$	: Kontrol sistemi tarafından verilen burulma açısı (rad)
λ_i	: İndüklenmiş akış oranı ($= v_i / \Omega L$)
μ	: Frekans parametresi
ν	: Poisson oranı
ν_p	: Pal dönerken hesaplanan boyutsuz kanat çırpma frekansı
ν_z	: Pal dönerken hesaplanan boyutsuz gecikme frekansı
ν_θ	: Pal dönerken hesaplanan boyutsuz burulma frekansı
ξ	: Kesit alanında referans olarak alınan noktanın z eksenine doğrultusundaki koordinatı (ekler kısmında, m); Konum parametresi (ana bölümlerde)
ρ	: Malzeme yoğunluğu (kg/m^3)
ρ_A	: Birim uzunluğa düşen kütle miktarı (kg/m)
ρ_{∞}	: Havanın yoğunluğu (kg/m^3)
σ	: Rotor katılığı ($= N_p c / \pi L$) (N_p : Pal sayısı)
$\mathfrak{I}$	: Kinetik enerji (Nm)
φ	: Timoshenko kirişte düzlemdışı eğilmeden kaynaklanan dönme açısı (rad)
ϕ	: Burulma açısı (rad)
ϕ_i	: İndüklenme açısı (rad)
ψ	: Azimut açısı ($= \Omega t$) (rad)
Ω	: Açısal dönme hızı (rad/s)
Ω_0	: Referans olarak alınan açısal dönme hızı (rad/s)

BİR HELİKOPTER PALİNİN DİNAMİK VE AEROELASTİK ANALİZİ

ÖZET

Bu çalışmada bir helikopter palı, dinamik ve aeroelastik açıdan incelenmiştir. Dinamik inceleme kapsamında ilk olarak kiriş teorileri hakkında temel bilgiler verilerek kiriş problemlerinde kullanılan hareket denklemlerinin çıkarımları yapılmıştır. Daha sonra bir helikopter palı; dönen, ankastre Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş olarak modellenip bu kirişlerin serbest titreşimi, çeşitli problemler çözülerek incelenmiştir. Serbest titreşim incelemesi yapılan kirişler, tek veya iki düzlemde doğrusal daralan kirişler olmak üzere iki farklı geometride modellenmiştir. Simetrik kesitli kirişlerde düzlemsiz eğilme serbest titreşimi incelenirken tek eksene göre simetrik olan kesitlere sahip kirişlerde eğilme-burulma etkileşimli serbest titreşim incelemesi yapılmıştır. Mathematica bilgisayar programında yazılan kodlar ile kirişlerin frekansları hesaplanmış, mod şekilleri çizdirilmiş ve çeşitli parametrelerin, frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, çeşitli tablo ve grafiklerde sunularak literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Literatürde karşılaştırma yapılacak çalışma bulunmadığı durumlarda ABAQUS sonlu elemanlar programı ile oluşturulan modellerin analiz sonuçları, karşılaştırma için kullanılmıştır.

Aeroelastik inceleme kapsamında helikopter palı, tam menteşeli rotor sisteminde rijit pal ve menteşesiz rotor sisteminde elastik pal olmak üzere iki şekilde modellenmiş ve askıda kalma durumunda kanat çırpma-gecikme, kanat çırpma-burulma ve kanat çırpma-gecikme-burulma kararlılıkları incelenmiştir. Elde edilen formüller, Mathematica programında kodlanarak kararlılık sınırlarını gösteren grafikler çizdirilmiştir. Dinamik ve aeroelastik inceleme kapsamında yapılan çalışmalarda problemlerin çözümü için çoğunlukla Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılmıştır ve her iki bölümün sonuçları, literatürle karşılaştırıldığında sonuçlar arasında mühendislik açısından yeterli yakınsaklığın sağladığı gözlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Daralan Kiriş, Düzgün Olmayan Kiriş, Kanat Çırpma- Gecikme Çırpınması, Kanat Çırpma-Burulma Çırpınması, Kanat Çırpma-Burulma Diverjansı, Tam Menteşeli Rotor, Menteşesiz Rotor

DYNAMIC AND AEROELASTIC ANALYSIS OF A HELICOPTER ROTOR BLADE

SUMMARY

In this study, dynamic and aeroelastic analysis of a helicopter blade is performed. In the dynamic analysis section, some basic information is given about beam theories and derivation of the equations of motion used in many beam problems are made first. Afterwards, a helicopter blade is modeled as rotating cantilever Euler-Bernoulli and Timoshenko beams and free vibration analysis of these beams is performed by solving several problems. The beams whose free vibration characteristics are inspected are modeled with two different geometries, tapered in one plane or double tapered. For the beams with symmetric cross sections, the flapwise bending free vibration analysis is performed and for the ones whose cross sections are symmetric only about one axis, the coupled flapwise bending-torsion free vibration analysis is performed. Computer codes are written in Mathematica and using these codes, natural frequencies are calculated, mode shapes are drawn and the effects of several parameters on the natural frequencies are investigated. The calculated results are tabulated in several tables and graphics and compared with the results in open literature. When a suitable study is not present in open literature to make comparisons, the considered beam model is created in the finite element program, ABAQUS, and results taken from ABAQUS are used for comparison. In the aeroelastic analysis section, a fully articulated rotor system with a rigid blade and a hingeless rotor system with an elastic blade are considered and flap-lag, flap-pitch, flap-lag-pitch stabilities in hover condition are studied. Computer codes are written in Mathematica and using these codes, graphics presenting the stability boundaries are plotted. Both in the dynamic and aeroelastic analysis sections, mostly the Differential Transform Method, DTM, is used to solve the equations of motion. When the results of both sections are compared with the ones in open literature, it is seen that they are in good agreement from an engineering point of view.

Keywords: Tapered Beam, Nonuniform Beam, Flap-Lag Flutter, Flap-Pitch Flutter, Flap-Pitch Divergence, Articulated Rotor, Hingeless Rotor

1. GİRİŞ BÖLÜMÜ

1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

Frekanslar ve mod şekilleri, kirişlerin dinamik özellikleri olarak tanımlanır. Bu özellikler, yapıların maruz kaldıkları titreşimlerin ve bu titreşimlere yapılar tarafından verilen cevapların incelenmesinde kullanılır. Makinelerin dönen parçaları, türbin palleri, helikopter palleri ve robot kolları gibi önemli mühendislik uygulamalarında kullanıldıkları için dönen ve daralan kirişlerin dinamik özellikleri, tasarım ve verim açısından çok önemlidir. Bu nedenle, bu çalışmanın ilk kısmında Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerinin dinamik incelemesi yapılmıştır. Dinamik inceleme kapsamında ilk olarak kiriş teorileri hakkında kısa bilgiler verilerek kiriş problemlerinde kullanılan hareket denklemlerinin çıkarımları yapılmıştır. Daha sonra bir helikopter palı; dönen, ankastre Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş olarak modellenip bu kirişlerin serbest titreşimi, çeşitli problemler çözülerek incelenmiştir. Serbest titreşim incelemesi yapılan kirişler, tek veya iki düzlemde doğrusal daralan kirişler olmak üzere iki farklı geometride modellenmiştir. Simetrik kesitli kirişlerde düzlemsiz eğilme serbest titreşimi incelenirken tek eksene göre simetrik olan kesitlere sahip kirişlerde eğilme-burulma etkileşimli serbest titreşim incelemesi yapılmıştır. Mathematica bilgisayar programında yazılan kodlar ile kirişlerin frekansları hesaplanmış, mod şekilleri çizdirilmiş ve çeşitli parametrelerin, frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, çeşitli tablo ve grafiklerde sunulurken literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Literatürde karşılaştırma yapılacak çalışma bulunamadığı durumlarda ABAQUS sonlu elemanlar programı ile oluşturulan modellerin analiz sonuçları, karşılaştırma için kullanılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci kısmında, bir helikopter palının aeroelastik incelemesi yapılmıştır. Aeroelastik inceleme kapsamında bir helikopter palı, tam menteşeli rotor sisteminde rijit pal ve menteşesiz rotor sisteminde elastik pal olmak üzere iki şekilde modellenerek askıda kalma durumunda kanat çırpma-gecikme, kanat çırpma-

burulma ve kanat çırpma-gecikme-burulma kararlılıkları incelenmiştir. Elde edilen formüller, Mathematica programında kodlanarak kararlılık sınırlarını gösteren grafikler çizdirilmiştir.

Dinamik ve aeroelastik inceleme kapsamında yapılan çalışmalarda problemlerin çözümü için çoğunlukla Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi kullanılmıştır ve her iki bölümün sonuçları, literatürle karşılaştırıldığında sonuçlar arasında mühendislik açısından yeterli yakınsaklığın sağladığı gözlenmiştir.



2. KIRIŞ TEORİLERİ VE FORMÜLASYONLARI

Bu bölümde, kiriş teorileri hakkında temel bilgiler verilmektedir. Ayrıca, Bölüm 4'te bir helikopter palinin dinamik incelemesi kapsamında yapılan çalışmalarda pal, dönen ankastre Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş olarak modellendiği için bu bölümde Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlere ait temel hareket denklemlerinin çıkarımı, hem Hamilton hem de Newton yaklaşımı kullanılarak yapılmaktadır.

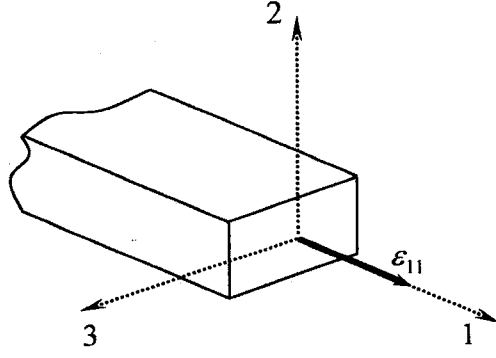
Kiriş teorileri, bir boyutu diğer boyutlarına göre çok daha uzun olan yapılar için kullanılan tek boyutlu modellerdir. Bu teoriler; helikopter rotor pallerinin, uçak kanatlarının, hava türbini pallerinin, uzay aracı yapılarının, vb. modellenmesinde kullanılır. Simetrik kesitli ve izotropik kirişlerde, iki ana düzlemdeki titreşimler etkileşim içinde değildir. Ancak, izotropik olmayan ve/veya sadece bir eksene göre simetrik olan kesitlere sahip kirişlerde eğilme-eğilme veya eğilme-burulma etkileşimi olduğu için iki ana düzlemdeki titreşimler de birbirleri ile etkileşir. Aşağıda açıklaması yapılan kiriş teorilerinde kirişlerin simetrik kesitli ve izotropik olduğu ve sadece bir düzlemde titreşime maruz kaldıkları kabul edilmiştir.

Kiriş teorileri, karmaşıklık derecelerine göre üç ana başlık altında toplanabilir **(Nayfeh ve Pai, 2004)**:

- a. Euler-Bernoulli kiriş teorisi
- b. Kayma şekil değiştirmesini kapsayan kiriş teorileri (Timoshenko kiriş teorisi, üçüncü derece kayma teorisi, düzlemsel kayma teorisi, vb.)
- c. Üç boyutlu kiriş teorileri

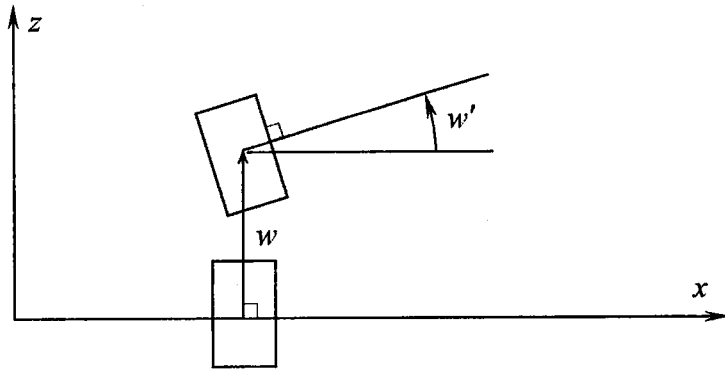
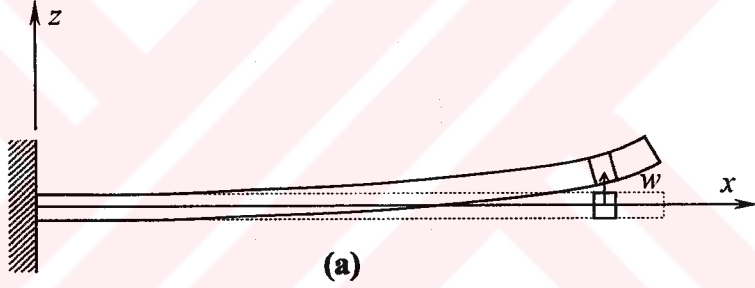
2.1. Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Euler-Bernoulli kiriş teorisinde, Şekil 2.1'de görüldüğü gibi sadece aksenal birim uzama, ε_{11} , kullanılır ve yanal birim uzamalar, ε_{12} ve ε_{13} , ihmal edilir.



Şekil 2.1: Euler-Bernoulli Kiriş Teorisinde Kullanılan Birim Uzunluklar

Bu kiriş teorisinde, deplasmandan önce kiriş eksenine dik olan düzlemsel bir kesidin, deplasmandan sonra da hem düzlemselliğini hem de referans eksene olan dikliğini koruduğu kabul edilir. Euler-Bernoulli kirişinin bu özelliği, Şekil 2.2.(a) ve 2.2.(b)'de görülmektedir.



(b)

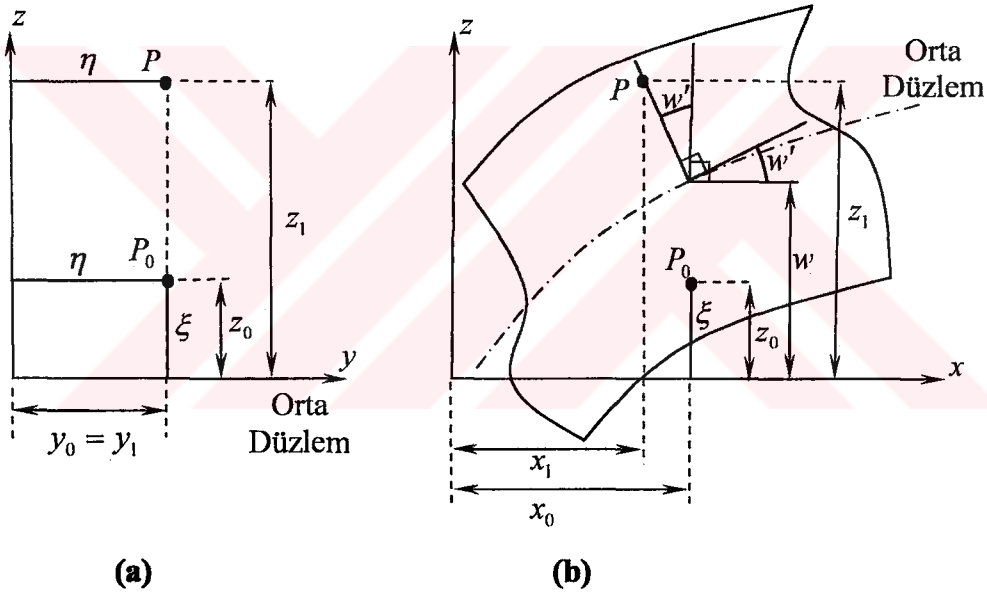
Şekil 2.2: (a) Euler-Bernoulli Kirişinin Düzlemsiz Eğilme Hareketi (b) Kiriş Elemanının Düzlemsiz Eğilmesi ve Eğilme Kaynaklı Dönme Açısı

2.1.1. Ankastre Euler-Bernoulli kirişı hareket denkleminin Hamilton yöntemi ile çıkarımı

Bu bölümde, dönen ve dönmeyen, düzgün (hiçbir düzlemde daralmayan), ankastre Euler-Bernoulli kirişleri için potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinin çıkarımı detaylı bir biçimde yapılmıştır. Ayrıca, elde edilen enerji ifadelerine Hamilton prensibi uygulanarak hareket denklemi ve sınır şartları elde edilmiştir.

2.1.1.1. Dönmeyen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kirişinin düzlemsiz eğilme hareketi

Şekil 2.2.(a)'da görülen dönmeyen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kirişinin hareket denkleminin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.3.(a) ve 2.3.(b)'den yararlanılır.



Şekil 2.3: Dönmeyen, Düzgün, Ankastre Euler-Bernoulli Kirişinin Deplasman Öncesi ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü

Burada referans olarak alınan nokta, deplasmandan önce P_0 ve deplasman sonra P ile gösterilmektedir. Şekil 2.3.(a)'da verilen kiriş kesidi ve 2.3.(b)'de verilen kiriş yandan görünüşü kullanılarak referans noktanın, deplasman öncesi ve sonrasındaki koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Referans noktanın deplasmandan önceki koordinatları:

$$x_0 = R + x \quad (2.1a)$$

$$y_0 = \eta \quad (2.1b)$$

$$z_0 = \xi \quad (2.1c)$$

Referans noktanın deplasmandan sonraki koordinatları:

$$x_1 = R + x - \xi w' \quad (2.2a)$$

$$y_1 = \eta \quad (2.2b)$$

$$z_1 = w + \xi \quad (2.2c)$$

Potansiyel enerji ifadesi için birim uzamalar ile birim açı değişimlerine ihtiyaç duyulur. Bu birim değişimleri elde etmek için aşağıdaki formülden yararlanılır.

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_1 - d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 = 2 \left[dx \quad d\eta \quad d\xi \right] \left[\varepsilon_{ij} \right] \begin{Bmatrix} dx \\ d\eta \\ d\xi \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Burada $\left[\varepsilon_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{x\eta} & \varepsilon_{x\xi} \\ \varepsilon_{\eta x} & \varepsilon_{\eta\eta} & \varepsilon_{\eta\xi} \\ \varepsilon_{\xi x} & \varepsilon_{\xi\eta} & \varepsilon_{\xi\xi} \end{bmatrix}$ olarak tanımlanmaktadır.

Denklem (2.3)'te yer alan ve deplasman öncesinde ve sonrasında referans noktanın konumunu gösteren vektörlerin türevleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$d\vec{r}_0 = (dx_0)\vec{i} + (dy_0)\vec{j} + (dz_0)\vec{k} \quad (2.4a)$$

$$d\vec{r}_1 = (dx_1)\vec{i} + (dy_1)\vec{j} + (dz_1)\vec{k} \quad (2.4b)$$

Denklemler (2.4a) ve (2.4b)'de yerlerine koymak için (2.1a)-(2.2c) no'lu denklemler ile tanımlanan deplasmanların türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$dx_0 = dx \quad (2.5a)$$

$$dy_0 = d\eta \quad (2.5b)$$

$$dz_0 = d\xi \quad (2.5c)$$

$$dx_1 = (1 - \xi w'')dx - w'd\xi \quad (2.6a)$$

$$dy_1 = d\eta \quad (2.6b)$$

$$dz_1 = w'dx + d\xi \quad (2.6c)$$

Denklem (2.3)'ten elde edilen ifadelerden sadece $dx dx$, $dx d\eta$ ve $dx d\xi$ 'nin katsayıları olan ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$, hesaplamalarda kullanılır çünkü **Hodges ve Dowell (1974)**'te ifade edildiği kadarıyla uzun ve ince kirişler için eksenel gerilme, σ_{xx} , yanal gerilmelere, $\sigma_{\eta\eta}$ ile $\sigma_{\xi\xi}$, göre daha baskındır. Bu nedenle, $\varepsilon_{\eta\eta}$ ve $\varepsilon_{\xi\xi}$ ihmal edilebilir. Ayrıca, $\varepsilon_{\eta\xi}$ birim şekil değiştirmesi, merteye olarak $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ birim şekil değiştirmelerinden iki merteye daha küçüktür. Bu nedenle $\sigma_{\eta\xi}$ ve $\varepsilon_{\eta\xi}$, ihmal edilebilir.

Elde edilen ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ mühendislik birim uzama ifadeleri içinde yer alan çok küçük mertebeli terimler, **Hodges ve Dowell (1974)**'te kullanılan ve Tablo 2.1. ile verilen merteye şemasına göre belirlenerek ihmal edilir ve birim uzama ifadeleri daha basit şekilde yazılır. Burada ε , w/L mertebesinde bir değerdir ve diğer büyüklükler, bu değer referans alınarak belirlenmiştir.

Tablo 2.1: Dönmeyen Euler-Bernoulli Kirişi için Merteye Şeması

$\frac{x}{L} = O(1)$	$\frac{\xi}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{\eta}{L} = O(\varepsilon)$

Tablo 2.1. kullanılarak yapılan sadeleştirme sonucunda denklem (2.3)'ten elde edilen birim uzama ve birim şekil değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi basit olarak verilebilir.

$$\gamma_{xx} = \varepsilon_{xx} = -\xi w'' \quad (2.7a)$$

$$\gamma_{x\eta} = 0 \quad (2.7b)$$

$$\gamma_{x\xi} = \xi w'' w' \quad (2.7c)$$

Burada gerçek birim uzama bileşenleri, $\gamma_{xx}, \gamma_{x\xi}$ ve $\gamma_{x\eta}$ olarak tanımlanmıştır.

Potansiyel enerjinin temel ifadesi, aşağıdaki gibidir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \iint_A [E(\epsilon_{xx})^2 + G(\gamma_{x\eta}^2 + \gamma_{x\xi}^2)] d\eta d\xi \right\} dx \quad (2.8)$$

Potansiyel enerji denklemi doğrultusunda hesap yapılarak denklemler (2.7a)-(2.7c) ile verilen birim uzama ve birim şekil değiştirme ifadelerinin kareleri alınır ve Tablo 2.1 ile verilen mertebe şeması kullanılarak çok küçük terimler ihmal edilir. Geri kalan ifadeler, denklem (2.8)'de yerlerine koyularak **Hodges ve Dowell (1974)**'te kullanılan ve Tablo 2.2'de verilen alan integralleri uygulanırsa potansiyel enerji ifadesine ulaşılır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI_y (w'')^2 dx \quad (2.9)$$

Tablo 2.2: Potansiyel Enerji Hesabında Kullanılan Alan İntegralleri

$\iint_A d\eta d\xi = A$	$\iint_A \eta^2 d\eta d\xi = I_z$	$\iint_A \xi d\eta d\xi = \iint_A \eta \xi d\eta d\xi = 0$
$\iint_A \xi^2 d\eta d\xi = I_y$	$\iint_A \eta d\eta d\xi = Ae_1$	$\iint_A (\eta^2 + \xi^2) d\eta d\xi = J = Ak_A^2$

Burada $\iint_A \eta d\eta d\xi = Ae_1$ olarak verilen ifadede yer alan e_1 , kesit alanının merkezinden geçen eksen ile elastik eksen arasındaki mesafe olarak tanımlanır. Bu çalışmada, simetrik kesitli izotropik kiriş incelemesi yapıldığı için bu mesafe sıfırdır ve iki eksen çakışıkır. Bu nedenle, $\iint_A \eta d\eta d\xi = 0$ olarak alınır.

Kinetik enerji hesabında deplasman hızlarına ihtiyaç duyulur ve referans noktanın hız vektörünün ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial t} = \dot{x}_1 \vec{i} + \dot{y}_1 \vec{j} + \dot{z}_1 \vec{k} \quad (2.10)$$

Denklem (2.10)'da yer alan deplasman hızı bileşenleri, (2.2a)-(2.2c) no'lu denklemler ile verilen koordinatların zamana göre türevleri alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_x = \dot{x}_1 = -\xi \dot{w}' \quad (2.11a)$$

$$V_y = \dot{y}_1 = 0 \quad (2.11b)$$

$$V_z = \dot{z}_1 = \dot{w} \quad (2.11c)$$

Kinetik enerjinin temel ifadesi, aşağıdaki gibidir.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \iint_A \rho [(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2] d\eta d\xi \right\} dx \quad (2.12)$$

Denklem (2.12) ile verilen kinetik enerji ifadesi doğrultusunda hesap yapıp hız bileşenlerinin kareleri bulunur ve Tablo 2.1 ile verilen mertebeye şeması kullanılarak çok küçük terimler ihmal edilir. Geri kalan ifadeler, denklem (2.12)'de yerlerine koyularak **Hodges ve Dowell (1974)**'te kullanılan ve Tablo 2.3 ile verilen alan integralleri kullanılırsa kinetik enerji ifadesinin son haline ulaşılır.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{w})^2 dx \quad (2.13)$$

Tablo 2.3: Kinetik Enerji Hesabında Kullanılan Alan İntegralleri

$\iint_A \rho d\eta d\xi = m$	$\iint_A \rho \eta^2 d\eta d\xi = \rho I_z = mk_{m2}^2$	$\iint_A \rho \eta \xi d\eta d\xi = me_1 = 0$
$\iint_A \rho \xi d\eta d\xi = 0$	$\iint_A \rho \xi^2 d\eta d\xi = \rho I_y = mk_{m1}^2$	$\iint_A \rho \eta d\eta d\xi = me$
$\iint_A \rho (\eta^2 + \xi^2) d\eta d\xi = I_a$		

Burada $\iint_A \rho \eta d\eta d\xi = me$ olarak verilen ifadede e , kesidin ağırlık merkezinden geçen eksen ile elastik eksen arasındaki uzaklıktır. Daha önce açıklandığı gibi bu çalışmada, simetrik kesitli izotropik kiriş incelemesi yapıldığı için bu mesafe sıfırdır ve iki eksen çakışmıştır. Bu nedenle, $\iint_A \rho \eta d\eta d\xi = 0$ olarak alınır

Yukarıda elde edilen potansiyel ve kinetik enerji ifadelerine Hamilton prensibi uygulanarak dönmeyen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kiriş için kullanılan hareket denkleminin ve sınır şartlarına ulaşılır. Hamilton prensibi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(U - \mathfrak{T} - W) dt = 0 \quad (2.14)$$

Burada W ile verilen ifade tersinmez kuvvetlerin yaptığı sanal işi simgeler. Bu çalışmada serbest titreşim incelemesi yapıldığı için tersinmez kuvvetlerin etkisi söz konusu değildir ve denklem (2.14)'te kullanmak için sadece enerjilerin varyasyonlarının alınması yeterlidir. Denklemler (2.9) ve (2.13) ile verilen enerji ifadelerinin varyasyonları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta U = \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^L EI_y (w'')^2 dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^L (2EI_y w'' \delta w'') dx \quad (2.15a)$$

$$\delta \mathfrak{T} = \delta \left[\frac{1}{2} \int_0^L m (\dot{w})^2 dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^L (2m \dot{w} \delta \dot{w}) dx \quad (2.15b)$$

Bu varyasyon ifadeleri, denklem (2.14)'te yerlerine koyularak hareket denklemini ve sınır şartlarını veren ifadeye ulaşılır.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta \mathfrak{T}) dt = \left(EI_y w'' \right)' + \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)' \bigg|_0^L \delta \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(EI_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)' \bigg|_0^L \delta w + m \ddot{w} \delta w \quad (2.16)$$

Denklem (2.16)'daki δw 'nin katsayıları alınarak dönmeyen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kirişinin serbest titreşim hareketinin denklemini aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(EI_y w'')'' + m\ddot{w} = 0 \quad (2.17)$$

Denklem (2.16)'da yer alan diğer terimler kullanılarak sınır şartları, dönmeyen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kirişi için aşağıdaki gibi elde edilir.

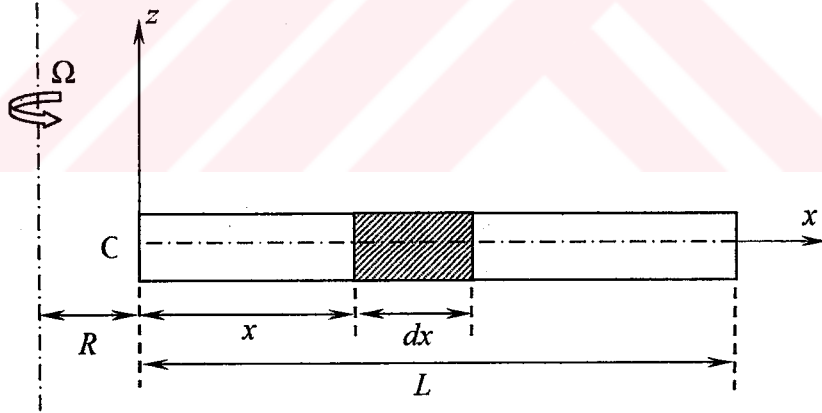
$$x = 0 \text{ 'da} \quad w = w' = 0 \quad (2.18a)$$

$$x = R \text{ 'de} \quad w'' = w''' = 0 \quad (2.18b)$$

2.1.1.2. Merkezkaç kuvveti

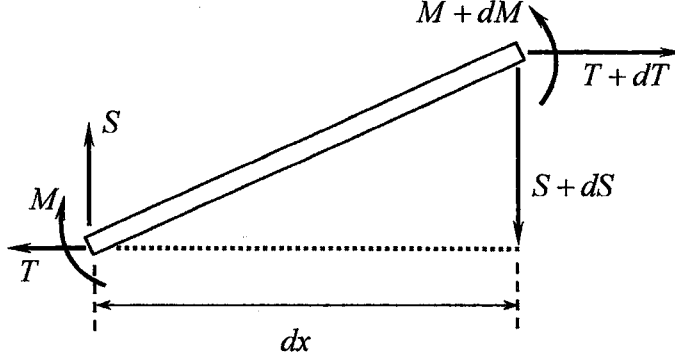
Dönen kiriş denklemlerinde yer alan önemli terimlerden biri merkezkaç kuvvetidir ve bu kuvvet, herhangi bir nokta etrafında dönen rijit cismin, dönme eksenini terketme eğilimi olarak tanımlanır. Bu bölümde, merkezkaç kuvveti ifadesinin çıkarımı yapılmaktadır.

Şekil 2.4'te, sabit Ω açısal hızıyla dönen, R yarıçaplı rijit rotor kafasına O noktasından ankastre olarak bağlanmış L uzunluğunda düzgün bir kiriş görülmektedir. Kiriş; homojen ve izotropik malzeme özelliklerine sahiptir.



Şekil 2.4: Dönen Düzgün Ankastre Kiriş Modeli

Bu kiriş üzerinde dx uzunluğunda bir kiriş elemanı alınarak Şekil 2.5'te bu elemanın incelemesi yapılmaktadır. Bu kiriş elemanına etkiyen kuvvetlerin x doğrultusunda denge denklemleri yazılarak merkezkaç kuvveti ifadesine ulaşılır.



Şekil 2.5: Dönen Kiriş Elemanı Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler

Dönme ekseninden $R + x$ kadar uzaklıkta bulunan ve Şekil 2.4'te görülen kiriş elemanının çizgisel hızı aşağıdaki gibidir.

$$V = \Omega(R + x) \quad (2.19)$$

Denklem (2.19) kullanılarak kiriş elemanı üzerine etkiyen merkezkaç kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F_{MK} = \frac{mV^2}{(R + x)} = m\Omega^2(R + x) \quad (2.20)$$

Kiriş elemanı üzerine etkiyen kuvvetlerin x doğrultusunda dinamik denge denklemi yazılırsa eleman üzerine etkiyen çekme kuvveti ifadesi elde edilir.

$$T + dT - T = m\Omega^2(R + x)dx \quad \Rightarrow \quad dT = m\Omega^2(R + x)dx \quad (2.21)$$

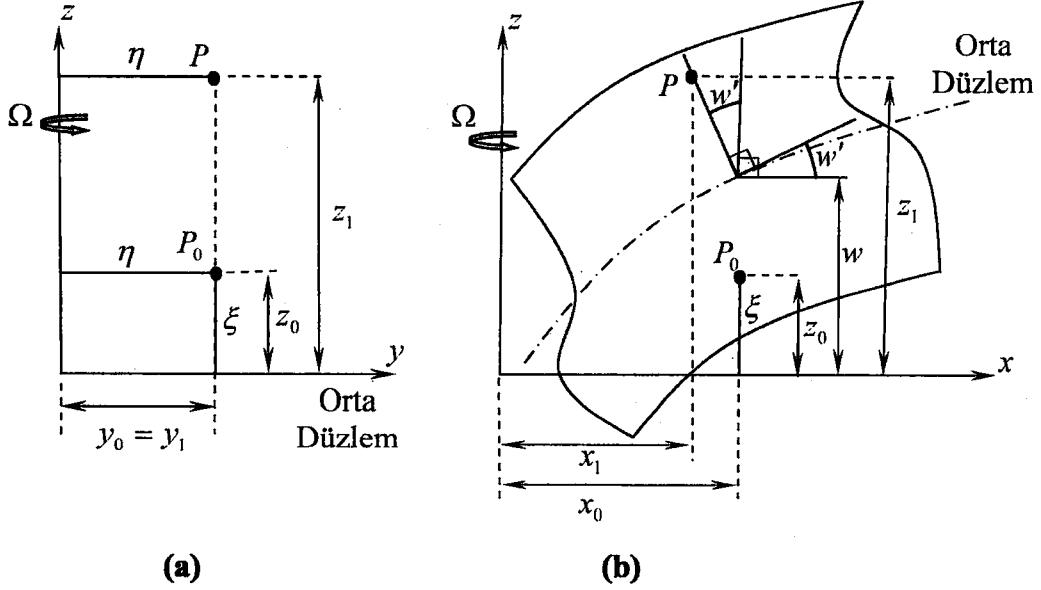
Denklem (2.21)'deki ifadenin integrali alınarak dönen kirişin tümüne etkiyen ve kiriş boyunca değişen çekme kuvvetinin aşağıdaki ifadesine ulaşılır.

$$T = \int_0^L m\Omega^2(R + x)dx \quad (2.22)$$

2.1.1.3. Dönen, düzgün, ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsel eğilme hareketi

Dönen, düzgün, ankastre Euler–Bernoulli kirişinin hareket denkleminin çıkarımında Bölüm 2.1.1.1'deki formüllere ek olarak dönme hareketinden kaynaklanan bazı

terimler gelmektedir. Bu bölümdeki kirişin hareket denkleminin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.6.(a) ve 2.6.(b)'den yararlanılmaktadır.



Şekil 2.6: Dönen, Düzgün, Ankastre Euler–Bernoulli Kirişinin Deplasman Öncesi ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü

Şekil 2.6.(a)'da verilen kiriş kesidi ve 2.6.(b)'de verilen kiriş yandan görünüşü kullanılarak referans noktanın, deplasman öncesi ve sonrasındaki koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Referans noktanın deplasmandan önceki koordinatları:

$$x_0 = R + x \quad (2.23a)$$

$$y_0 = \eta \quad (2.23b)$$

$$z_0 = \xi \quad (2.23c)$$

Deplasmandan sonra referans noktanın koordinatları:

$$x_1 = R + x + u - \xi w' \quad (2.24a)$$

$$y_1 = \eta \quad (2.24b)$$

$$z_1 = w + \xi \quad (2.24c)$$

Burada, merkezkaç kuvvetinin kiriş üzerinde neden olduğu eksenel uzama, u ile ifade edilir.

Koordinatların türevleri, (2.3) no'lu denklemde yerlerine koyulmak için aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$dx_0 = dx \quad (2.25a)$$

$$dy_0 = d\eta \quad (2.25b)$$

$$dz_0 = d\xi \quad (2.25c)$$

$$dx_1 = (1 + u' - \xi w'')dx - w'd\xi \quad (2.26a)$$

$$dy_1 = d\eta \quad (2.26b)$$

$$dz_1 = w'dx + d\xi \quad (2.26c)$$

Bu türevler, denklem (2.3)'te yerlerine koyularak ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ ifadeleri hesaplanır. Elde edilen ifadelerin içinde yer alan küçük terimler, **Hodges ve Dowell (1974)**'te kullanılan ve Tablo 2.4 ile verilen mertebe şemasına göre ihmal edilir.

Tablo 2.4: Dönen Euler-Bernoulli Kirişi için Mertebe Şeması

$\frac{x}{L} = O(1)$	$\frac{\xi}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{\eta}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{u}{L} = O(\varepsilon^2)$	

Mertebe şemasına göre çok küçük olan terimler ihmal edilince birim uzama ve birim şekil değiştirme ifadelerinin basit şekillerine aşağıdaki gibi ulaşılır.

$$\gamma_{xx} = \varepsilon_{xx} = u' - \xi w'' + \frac{1}{2}(w')^2 \quad (2.27a)$$

$$\gamma_{x\eta} = 0 \quad (2.27b)$$

$$\gamma_{x\xi} = -(u' - \xi w'')w' \quad (2.27c)$$

Denklemler (2.27a)-(2.27c)'deki ifadelerin kareleri alınarak Tablo 2.4 ile verilen mertebeye şemasına göre gerekli sadeleştirmeler yapılır ve bulunan ifadeler, denklem (2.8)'de yerlerine koyulur. Alan integrali hesabında Tablo 2.2'de verilen ifadelerden yararlanılırsa potansiyel enerji ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EA(u')^2 + EAu'(w')^2 + EI_y (w'')^2] dx \quad (2.28)$$

Burada, merkezkaç kuvvetinin kirişte neden olduğu eksenel uzama u 'nun türevi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (**Houbolt ve Brooks, 1957**).

$$u' = \frac{T}{EA} \quad (2.29)$$

Kinetik enerji hesabında deplasman hızlarına ihtiyaç duyulur. Dönen kiriş hız vektörünün ifadesi aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \Omega \vec{k} \times \vec{r} = (\dot{x}_1 - \Omega y_1) \vec{i} + (\dot{y}_1 + \Omega x_1) \vec{j} + \dot{z}_1 \vec{k} \quad (2.30)$$

Deplasman hızı bileşenleri, (2.24a)-(2.24c) no'lu denklemlerde yer alan deplasmanların zamana göre türevleri alınarak bulunur.

$$V_x = \dot{x}_1 - \Omega y_1 = \dot{u} - \xi \dot{w}' - \Omega \eta \quad (2.31a)$$

$$V_y = \dot{y}_1 + \Omega x_1 = (R + x + u - \xi w')\Omega \quad (2.31b)$$

$$V_z = \dot{z}_1 = \dot{w} \quad (2.31c)$$

Denklem (2.12) ile verilen kinetik enerji hesabı doğrultusunda, denklemler (2.31a)-(2.31c)'deki hız bileşenlerinin kareleri alınır ve Tablo 2.4'teki mertebeye şemasından yararlanılarak çok küçük terimler ihmal edilir. Sadeleştirilen ifadeler, denklem (2.12)'de yerlerine koyularak ve Tablo 2.3'teki alan integralleri kullanılarak dönen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kirişi için kinetik enerji ifadesine aşağıdaki gibi ulaşılır.

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ m(\dot{w})^2 + (R+x)^2 \Omega^2 + 2(R+x)\mu \Omega^2 \right\} + \rho I_z \Omega^2 \} dx \quad (2.32)$$

Denklem (2.14) ile verilen Hamilton prensibi, yukarıda çıkarımı yapılan potansiyel ve kinetik enerji ifadelerine uygulanır. Bu amaç doğrultusunda enerji varyasyonları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[2EAu' \delta u' + 2EAu'w' \delta w' + EA(w')^2 \delta u' + 2EI_y w'' \delta w'' \right] dx \quad (2.33a)$$

$$\delta \mathfrak{I} = \frac{1}{2} \int_0^L (2m\dot{w} \delta \dot{w}) dx \quad (2.33b)$$

Burada denklem (2.32)'de yer alan $(R+x)^2 \Omega$, $2(R+x)\mu$ ve $\rho I_z \Omega^2$ terimleri sabit ifadelerdir ve varyasyon alınırken sıfır olurlar. Bu varyasyon ifadeleri denklem (2.14)'te yerlerine koyulur ve elde edilen ifadeden δw 'nin katsayıları alınarak, dönen, düzgün, ankastre Euler-Bernoulli kirişinin düzlemsiz serbest titreşim hareket denklemi ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

Hareket denklemi:

$$(EI_y w'')'' + m\ddot{w} - (Tw')' = 0 \quad (2.34)$$

Sınır şartları:

$$x = 0 \text{ 'da} \quad w = w' = 0 \quad (2.35a)$$

$$x = L \text{ 'de} \quad w'' = w''' = 0 \quad (2.35b)$$

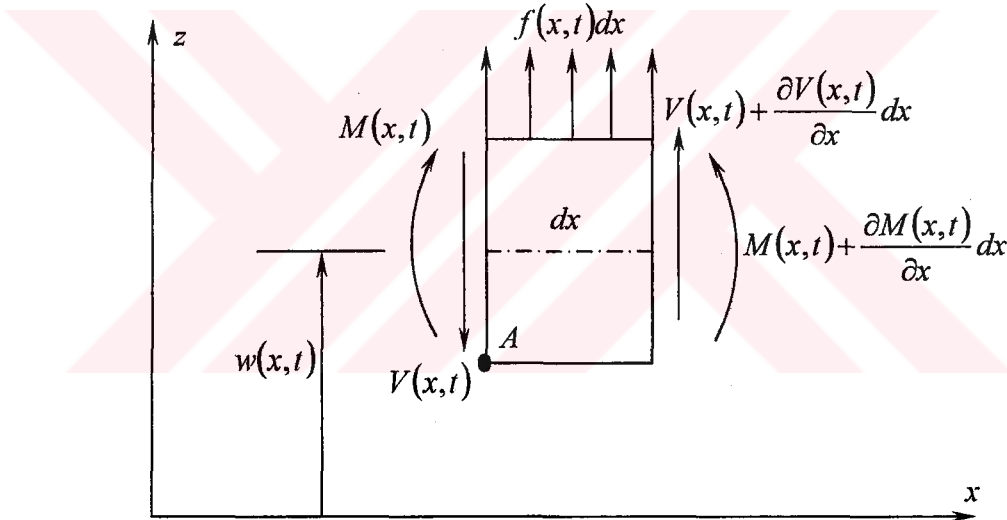
2.1.2. Ankastre Euler-Bernoulli kirişi hareket denklemlerinin Newton yöntemi ile çıkarımı

Bu bölümde, dönen ve dönmeyen, düzgün (hiçbir düzlemde daralmayan), ankastre Euler-Bernoulli kirişleri için hareket denklemleri, Newton yaklaşımı doğrultusunda kuvvet ve moment denge denklemleri yazılarak detaylı bir biçimde çıkartılmıştır. Burada basit kiriş teorisi kullanılacaktır. Buna göre aşağıdaki kabuller yapılmaktadır:

- a. Şekil 2.2.(b)'deki kiriş elemanının dönme açısı, eğilme deplasmanı w 'dan çok küçüktür.
- b. Kayma etkilerinden kaynaklanan deformasyonlar, eğilme deformasyonunun yanında çok küçüktür.
- c. Kirişin kalınlığı h ve uzunluğu L olmak üzere, h/L olarak tanımlanan kiriş açıklık oranı çok küçüktür ($h/L \leq 0.1$).
- d. Eğilmeden dolayı kiriş üzerinde burkulmalar olmamaktadır.

2.1.2.1. Dönmeyen, düzgün, ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsiz eğilme hareketi

Dönmeyen, düzgün, ankastre Euler–Bernoulli kirişinin hareket denkleminin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.7'den yararlanılır.



Şekil 2.7: Dönmeyen Euler-Bernoulli Kiriş Elemanı Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler

Şekil 2.7'de görülen kuvvet ve momentler kullanılarak A noktasına göre moment dengesi yazılırsa ve saat yönünün tersi pozitif yön olarak kabul edilirse aşağıdaki denge denkleminine ulaşılır.

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.36)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklemin her iki tarafı dx 'e bölünüp $dx \rightarrow 0$ limiti uygulanırsa denklem (2.36), aşağıdaki denkleme indirgenir.

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) = 0 \quad (2.37)$$

Şekil 2.7'de görülen kuvvetler kullanılarak düşey ekseninde kuvvet dengesi yazılırsa ve z yönü pozitif yön olarak kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx - V(x,t) + f(x,t)dx = m(x)dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklemin her iki tarafı dx 'e bölünürse denklem (2.38), aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

Denklem (2.37)'den elde edilen $V(x,t)$ ifadesi, denklem (2.39)'da yerine koyulursa hareket denkleminin ana hatlarına ulaşılır.

$$m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (2.40)$$

Eğilme momenti ile kiriş deplasmanı arasındaki bağlantı aşağıda verilmektedir.

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (2.41)$$

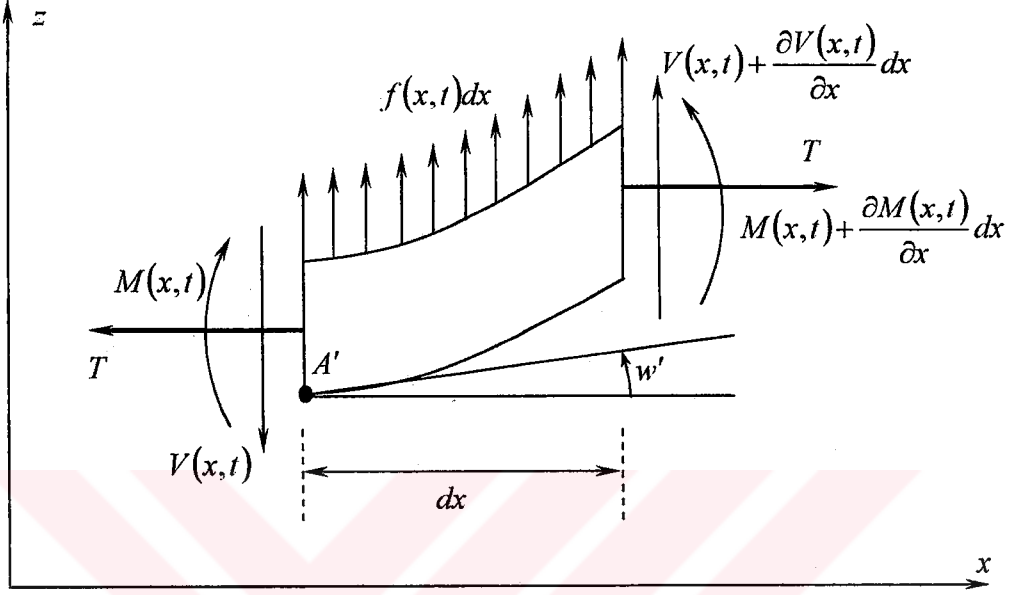
Denklem (2.41), denklem (2.40)'ta yerine koyulursa dönmeyen Euler-Bernoulli kirişi düzlemdışı eğilme hareketi denkleminin, Newton yaklaşımı ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t), \quad 0 < x < L \quad (2.42)$$

Bu çalışmada serbest titreşim incelemesi yapıldığı için denklem (2.42)'deki eşitliğin sağ tarafında yer alan kuvvet ifadesi $f(x,t) = 0$ olarak alınabilir.

2.1.2.2. Dönen, düzgün, ankastre Euler–Bernoulli kirişinin düzlemsi eğilme hareketi

Dönen, düzgün, ankastre Euler–Bernoulli kirişinin hareket denkleminin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.8’den yararlanılır.



Şekil 2.8: Dönen Euler-Bernoulli Kiriş Elemanı Üzerine Etki Eden Kuvvet ve Momentler

Şekil 2.8’deki kuvvet ve momentler kullanılarak A' noktasına göre moment dengesi yazılırsa ve saat yönünün tersi pozitif yön olarak kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} - T \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0 \quad (2.43)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklem dx ’e bölünüp $dx \rightarrow 0$ limiti uygulanırsa denklem (2.43), aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$V(x,t) = T \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \quad (2.44)$$

Şekil 2.8’deki kuvvetler kullanılarak düşey ekseninde kuvvet dengesi yazılırsa ve z yönü pozitif olarak kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx - V(x,t) + f(x,t)dx = m(x)dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklemin her iki tarafı dx 'e bölünürse denklem (2.45), aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.46)$$

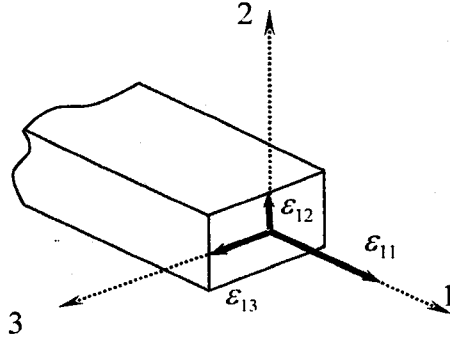
Denklemler (2.41) ve (2.44), denklem (2.46)'da yerlerine koyulursa dönen düzgün Euler-Bernoulli kirişi düzlemdışı eğilme hareketi denklemi, Newton yaklaşımı ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] = f(x,t) \quad (2.47)$$

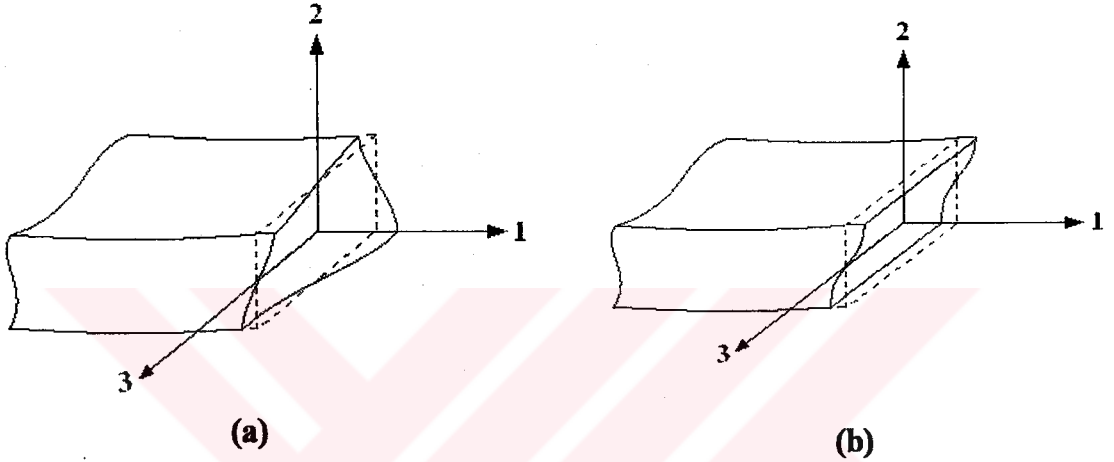
2.2. Kayma Şekil Değiştirmesini İçeren Kiriş Teorileri

Shames ve Dym (1985), üzerine düzgün yayılı yük etkileyen basit mesnetli kirişte oluşan düzlemsel gerilmeleri incelediklerinde, h kiriş kalınlığı ve L kiriş uzunluğu olmak üzere, yanal kayma gerilmelerinin, σ_{12} ve σ_{13} , h/L ile ve yanal normal gerilmelerin, σ_{22} ve σ_{33} , $(h/L)^2$ ile orantılı olduğunu bulmuşlardır. Bu nedenle, kiriş incelemelerinin çoğunda normal yanal gerilmeler hesaba katılmazken; özellikle yüksek açıklık oranlı, h/L , veya yüksek frekanslı kiriş problemlerinde yanal kayma gerilmeleri dikkate alınmaktadır.

Kayma şekil değiştirmesini içeren kiriş teorilerinde, Şekil 2.9'da gösterildiği gibi yanal kayma birim uzamaları, ε_{12} ve ε_{13} , hesaba katılır. Bu nedenle, ε_{12} ve ε_{13} 'den kaynaklanan ve Şekil 2.10.(a) ve 2.10.(b)'de gösterilen düzlemdışı çarpımalara da bu teorilerde yer verilmektedir.



Şekil 2.9: Timoshenko Kiriş Teorisinde Kullanılan Birim Uzamalar

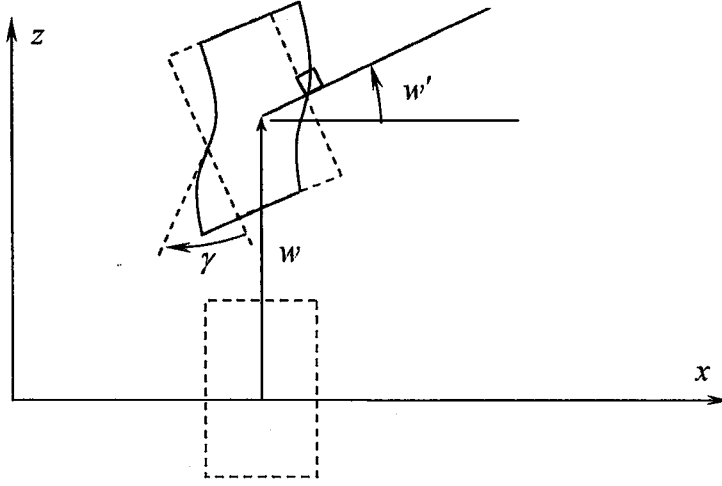


Şekil 2.10: Kayma Birim Uzamaları Sonucu Oluşan Düzlemsizliği (a) Burulma Çarpılması (b) Kayma Çarpılması

Bu çalışmanın dinamik inceleme ile ilgili kısmında kullanılan kiriş modelleri arasında Timoshenko kirişi yer almaktadır. Bu nedenle, kayma şekil değiştirmesini içeren kiriş teorilerinden biri olan Timoshenko kiriş teorisi hakkında aşağıdaki ek bilgiler verilmektedir.

Timoshenko kiriş teorisine göre, deplasmandan önce kiriş eksenine dik olan düzlemsel bir kesit, şekil değişiminden sonra da düzlemselliğini korur; ama kiriş eksenine olan dikliğini kaybeder. Timoshenko kirişinin bu özelliği, Şekil 2.11’de gösterilmektedir.

Yüksek dereceli kiriş teorilerinde deplasmandan önce kiriş eksenine dik olan düzlemsel kesit, deplasmandan sonra hem düzlemselliğini hem de kiriş eksenine olan dikliğini kaybeder. Bu nedenle Timoshenko kiriş teorisi, birinci derece kayma teorisi olarak da adlandırılır.



Şekil 2.11: Timoshenko Kiriş Elemanının Düzlemdışı Eğilmesi Sonucu Oluşan Dönme Açısı ve Kayma Açısı

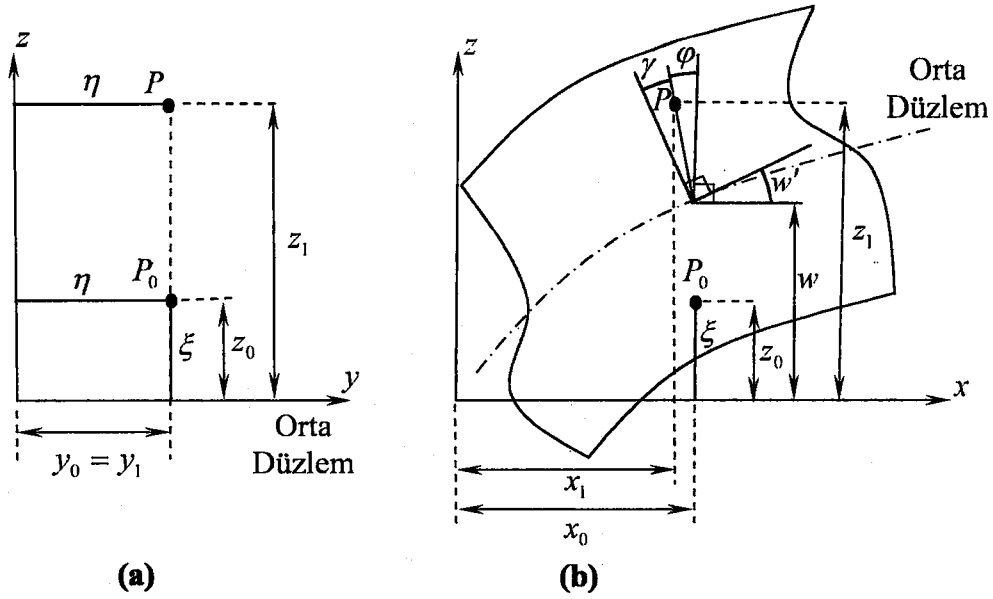
Ayrıca Timoshenko kiriş teorisinde, kayma birim uzamalarının ve yanal kayma gerilmelerin kesit boyunca sabit olduğu kabul edilmektedir. Euler kiriş teorisinde, kayma gerilmesi ve kayma birim uzaması, kesit üzerinde düzgün dağılmadığı için Timoshenko teorisinde, kesidin şekline göre farklı değerler alan kayma gerilmesi düzeltme çarpanı, k , kullanılır.

2.2.1. Ankastre Timoshenko kirişi hareket denklemlerinin Hamilton yöntemi ile çıkarımı

Bu bölümde, dönen ve dönmeyen, düzgün (hiçbir düzlemde daralmayan), ankastre Timoshenko kirişleri için potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinin çıkarımı detaylı bir biçimde yapılmıştır. Ayrıca, elde edilen enerji ifadelerine Hamilton prensibi uygulanarak hareket denklemi ve sınır şartları elde edilmiştir.

2.2.1.1. Dönmeyen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişin düzlemdışı eğilme hareketi

Dönen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişinin hareket denklemlerinin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.12.(a) ve 2.12.(b)'den yararlanılır.



Şekil 2.12: Dönmeyen, Düzgün, Ankastre Timoshenko Kirişinin Deplasman Öncesinde ve Sonrasında **(a)** Kesidi **(b)** Yandan Görünüşü

Şekil 2.12.(a)'da verilen kiriş kesidi ve 2.12.(b)'de verilen kiriş yandan görünüşü kullanılarak referans noktanın, deplasman öncesi ve sonrasındaki koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Referans noktanın deplasmandan önceki koordinatları:

$$x_0 = R + x \quad (2.48a)$$

$$y_0 = \eta \quad (2.48b)$$

$$z_0 = \xi \quad (2.48c)$$

Referans noktanın deplasmandan sonraki koordinatları:

$$x_1 = R + x - \xi\varphi \quad (2.49a)$$

$$y_1 = \eta \quad (2.49b)$$

$$z_1 = w + \xi \quad (2.49c)$$

Burada düzlemsiz eğilmeden kaynaklanan dönme açısı, φ ile tanımlanmaktadır. Bu açı, Euler-Bernoulli kirişinde olduğu gibi tarafsız eksenin eğimi olan w' değerine

eşit değildir çünkü Şekil 2.11'de ve Şekil 2.12.(b)'de görüldüğü gibi Timoshenko kirişte γ kadarlık bir kayma açısı oluşur ve bu nedenle aç kaybı ortaya çıkar. Düzlem dışı eğilme kaynaklı dönme açısı φ , aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\varphi = w' - \gamma \quad (2.50)$$

Denklem (2.3)'te yerlerine koyulmak üzere denklemler (2.48a)-(2.49c) ile verilen koordinatların türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$dx_0 = dx \quad (2.51a)$$

$$dy_0 = d\eta \quad (2.51b)$$

$$dz_0 = d\xi \quad (2.51c)$$

$$dx_1 = (1 - \xi\varphi')dx - \varphi d\xi \quad (2.52a)$$

$$dy_1 = d\eta \quad (2.52b)$$

$$dz_1 = w'dx + d\xi \quad (2.52c)$$

Bu türevler, denklem (2.3)'te yerlerine koyularak ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ ifadeleri hesaplanır. Elde edilen ifadelerin içinde yer alan küçük terimler, Tablo 2.5 ile verilen merteye şemasına göre ihmal edilerek aşağıdaki basit ifadelere ulaşılır.

$$\gamma_{xx} = \varepsilon_{xx} = -\xi\varphi' + \frac{w'^2}{2} \quad (2.53a)$$

$$\gamma_{x\eta} = 0 \quad (2.53b)$$

$$\gamma_{x\xi} = (w' - \varphi) + \xi\varphi\varphi' \quad (2.53c)$$

Tablo 2.5: Timoshenko Kiriş için Mertebe Şeması

$\frac{u}{L} = O(\varepsilon^2)$	$\frac{x}{L} = O(1)$
$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{\eta}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{\xi}{L} = O(\varepsilon)$	$\varphi = O(\varepsilon)$
$\gamma = w' - \varphi = O(\varepsilon^2)$	$\psi = O(\varepsilon)$

Denklem (2.8) ile verilen potansiyel enerji ifadesi doğrultusunda hesap yapılarak (2.53a)-(2.53c) no'lu denklemlerdeki ifadelerin kareleri alınır ve Tablo 2.5 ile verilen mertebe şemasına göre küçük olan terimler ihmal edilir. Sonuçta ulaşılan basitleştirilmiş ifadeler, denklem (2.8)'de yerlerine koyulup Tablo 2.2'deki alan integralleri kullanılırsa potansiyel enerji ifadesinin son haline ulaşılır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EI_y (\varphi')^2 + kAG(w'^2 - 2w'\varphi + \varphi^2)] dx \quad (2.54)$$

Kinetik enerji hesabında deplasman hızlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Hız vektörünün ifadesi denklem (2.10) ile verilmektedir. Deplasman hızlarının bileşenleri, (2.49a)-(2.49c) no'lu denklemlerdeki deplasmanların zamana göre türevleri alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_x = \dot{x}_1 = -\xi\dot{\varphi} \quad (2.55a)$$

$$V_y = \dot{y}_1 = 0 \quad (2.55b)$$

$$V_z = \dot{z}_1 = \dot{w} \quad (2.55c)$$

Denklemler (2.55a)-(2.55c) ile verilen ifadelerin kareleri alınarak (2.12) no'lu denklemle verilen kinetik enerji ifadesinde yerlerine koyulursa ve Tablo 2.3 ile verilen alan integralleri uygulanırsa aşağıdaki kinetik enerji ifadesine ulaşılır.

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho I_y \dot{\varphi}^2 + \rho A \dot{w}^2) dx \quad (2.56)$$

Denklem (2.14) ile verilen Hamilton prensibi ifadesinde kullanmak için potansiyel ve kinetik enerjilerin varyasyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta U = \int_0^L \{EI_y (\varphi' \delta \varphi') + kAG(w' \delta w' - w' \delta \varphi - \varphi \delta w' + \varphi \delta \varphi)\} dx \quad (2.57a)$$

$$\delta \mathfrak{I} = \int_0^L (\rho I_y \dot{\varphi} \delta \dot{\varphi} + \rho A \dot{w} \delta \dot{w}) dx \quad (2.57b)$$

Bu varyasyon ifadeleri denklem (2.14)'te yerlerine koyulur ve elde edilen ifadeden $\delta \varphi$ ve δw 'nun katsayıları alınarak, dönmeyen ankastre Timoshenko kirişinin serbest titreşim hareket denklemi ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

Hareket denklemleri:

$$\underline{\delta w}: \quad \rho A \ddot{w} + kAG(\varphi' - w'') = 0 \quad (2.58a)$$

$$\underline{\delta \varphi}: \quad \rho I_y \ddot{\varphi} - EI_y \varphi'' + kAG(\varphi - w') = 0 \quad (2.58b)$$

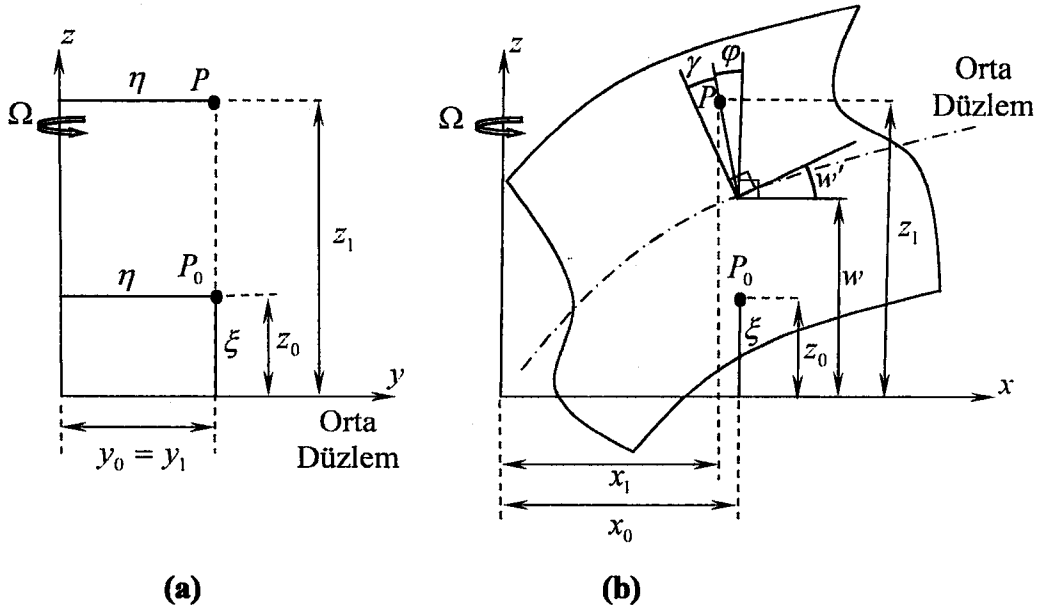
Sınır şartları:

$$\varphi' \delta \varphi \Big|_0^L = 0 \quad (2.59a)$$

$$[Tw' + kAG(w' - \varphi)] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (2.59b)$$

2.2.1.2. Dönen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişinin düzlemsiz eğilme hareketi

Dönen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişinin hareket denkleminin çıkarımında Bölüm 2.2.1.1'deki formüllere ek olarak dönme hareketinden kaynaklanan bazı terimler gelmektedir. Bu bölümdeki kirişin hareket denklemlerinin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.13.(a) ve 2.13.(b)'den yararlanılır.



Şekil 2.13: Dönen, Düzgün, Ankastre Timoshenko Kirişinin Deplasman Öncesinde ve Sonrasında **(a)** Kesidi **(b)** Yandan Görünüşü

Şekil 2.13.(a)'da verilen kiriş kesidi ve 2.13.(b)'de verilen kiriş yandan görünüşü kullanılarak referans noktanın, deplasman öncesi ve sonrasındaki koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Referans noktanın deplasmandan önceki koordinatları:

$$x_0 = R + x \quad (2.60a)$$

$$y_0 = \eta \quad (2.60b)$$

$$z_0 = \xi \quad (2.60c)$$

Referans noktanın deplasmandan sonraki koordinatları:

$$x_1 = R + x + u - \xi\varphi \quad (2.61a)$$

$$y_1 = \eta \quad (2.61b)$$

$$z_1 = w + \xi \quad (2.61c)$$

Denklem (2.3)'te yerlerine koyulmak üzere denklemler (2.60a)-(2.61c) ile verilen koordinatların türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$dx_0 = dx \quad (2.62a)$$

$$dy_0 = d\eta \quad (2.62b)$$

$$dz_0 = d\xi \quad (2.62c)$$

$$dx_1 = (1 + u' - \xi\varphi')dx - \varphi d\xi \quad (2.63a)$$

$$dy_1 = d\eta \quad (2.63b)$$

$$dz_1 = w'dx + d\xi \quad (2.63c)$$

Bu türevler, denklem (2.3)'te yerlerine koyularak ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ ifadeleri hesaplanır. Elde edilen ifadelerin içinde yer alan küçük terimler, Tablo 2.5 ile verilen merteye şemasına göre ihmal edilerek aşağıdaki basit ifadelere ulaşılır.

$$\gamma_{xx} = \varepsilon_{xx} = u' - \xi\varphi' + \frac{w'^2}{2} \quad (2.64a)$$

$$\gamma_{x\eta} = 0 \quad (2.64b)$$

$$\gamma_{x\xi} = (w' - \varphi) + \xi\varphi\varphi' - u'\varphi \quad (2.64c)$$

Denklem (2.8) ile verilen potansiyel enerji ifadesi doğrultusunda hesap yapılarak (2.64a)-(2.64) no'lu denklemlerdeki ifadelerin kareleri alınır ve Tablo 2.5 ile verilen merteye şemasına göre küçük olan terimler ihmal edilir. Sonuçta ulaşılan basitleştirilmiş ifadeler, denklem (2.8)'de yerlerine koyulup Tablo 2.2'deki alan integralleri kullanılırsa potansiyel enerji ifadesinin son haline ulaşılır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EA(u')^2 + EAu'(w')^2 + EI_y(\varphi')^2 + kAG(w' - \varphi)^2] dx \quad (2.65)$$

Kinetik enerji hesabında deplasman hızlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Dönen kirişin hız vektörü, denklem (2.30) ile verilmektedir. Deplasman hızı bileşenleri, (2.60a)-(2.61c) no'lu denklemlerdeki deplasmanların zamana göre türevleri alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_x = \dot{x}_1 - \Omega y_1 = \dot{u} - \xi \dot{\phi} - \Omega \eta \quad (2.66a)$$

$$V_y = \dot{y}_1 + \Omega x_1 = (R + x + u - \xi \phi) \Omega \quad (2.66b)$$

$$V_z = \dot{z}_1 = \dot{w} \quad (2.66c)$$

Denklem (2.12) ile verilen kinetik enerji hesabı doğrultusunda, denklemler (2.66a)-(2.66c)'deki hız bileşenlerinin kareleri alınır ve Tablo 2.5'teki merteye şemasından yararlanılarak çok küçük terimler ihmal edilir. Sadeleştirilen ifadeler, denklem (2.12)'de yerlerine koyularak ve Tablo 2.3'teki alan integralleri kullanılarak dönen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişi için kinetik enerji ifadesine aşağıdaki gibi ulaşılır.

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho I_y \dot{\phi}^2 + \rho A \dot{w}^2 + \rho A \dot{u}^2 + \rho I_y \phi^2 \Omega^2) dx \quad (2.67)$$

Denklem (2.14) ile verilen Hamilton prensibi ifadesinde kullanmak için potansiyel ve kinetik enerjilerin varyasyonları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\delta U = \int_0^L \{ EA(u'w' \delta w) + EI_y(\phi' \delta \phi') + kAG[(w' - \phi) \delta w' - (w' - \phi) \delta \phi] \} dx \quad (2.68a)$$

$$\delta \mathfrak{T} = \int_0^L [\rho I_y(\dot{\phi} \delta \dot{\phi} + \Omega^2 \phi \delta \phi) + \rho A(\dot{w} \delta \dot{w} + \dot{u} \delta \dot{u})] dx \quad (2.68b)$$

Bu varyasyon ifadeleri denklem (2.14)'te yerlerine koyulur ve elde edilen ifadeden $\delta \phi$ ve δw 'nin katsayıları alınarak, dönen ankastre Timoshenko kirişinin serbest titreşim hareket denklemi ve sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

Hareket denklemleri:

$$\underline{\delta w}: \quad \rho A \ddot{w} - (Tw')' + kAG(\phi' - w'') = 0 \quad (2.69a)$$

$$\underline{\delta \phi}: \quad \rho I_y \ddot{\phi} - \rho I_y \phi \Omega^2 - EI_y \phi'' + kAG(\phi - w') = 0 \quad (2.69b)$$

Sınır şartları:

$$\varphi' \delta \varphi \Big|_0^L = 0 \quad (2.70a)$$

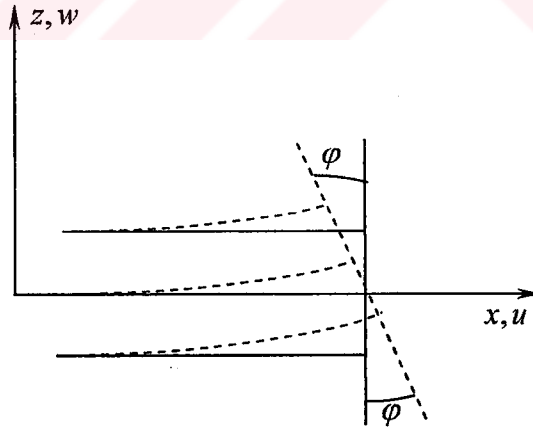
$$[Tw' + kAG(w' - \varphi)] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (2.70b)$$

2.2.2. Ankastre Timoshenko kirişı hareket denklemlerinin Newton yöntemi ile çıkarımı

Bu bölümde, dönen ve dönmeyen, düzgün (hiçbir düzlemde daralmayan) ve ankastre Timoshenko kiriş modelleri için hareket denklemleri, Newton yaklaşımı doğrultusunda kuvvet ve moment denge denklemleri yazılarak detaylı bir biçimde çıkartılmıştır.

2.2.2.1. Dönmeyen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişin düzlemsiz eğilme hareketi

Daha önce Şekil 2.11 ile Şekil 2.12.(b)'de gösterildiği gibi Timoshenko kirişlerde, γ kayma açısı kadarlık bir açı kaybı nedeniyle düzlemsiz eğilmenin, w , sebep olduğu kiriş kesidi dönme açısı, φ , kadar olur. Denklem (2.50) ile verilen bu dönme açısı, Şekil 2.14'te gösterilmektedir.



Şekil 2.14: Düzlemsiz Eğilme Hareketi Sonucunda Timoshenko Kiriş Kesidinde Görülen Dönme Açısı

Şekil 2.14'ten yararlanılarak, sırasıyla x , y ve z eksenleri yönünde u , v ve w olarak tanımlanan deplasmanlar, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u(x, z) = -z\varphi(x) \quad (2.71a)$$

$$v = 0 \quad (2.71b)$$

$$w = w(x) \quad (2.71c)$$

Birim uzamalar ve birim şekil değiştirmeler. birinci mertebeden bir yaklaşımla aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.72a)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (2.72b)$$

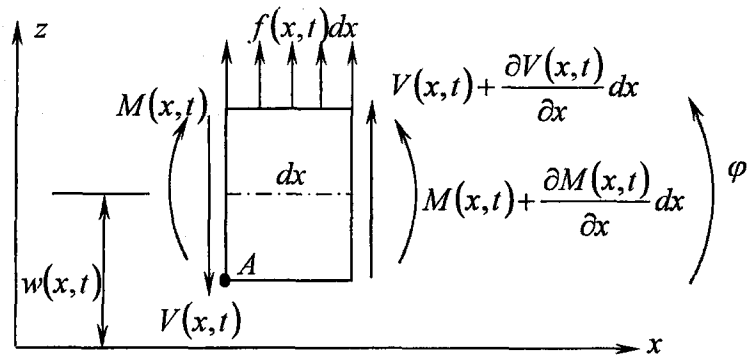
$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\varphi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.72c)$$

Denklemler (2.72a) ve (2.72c) kullanılarak aşağıda verilen ifadelere ulaşılır.

$$M = -\int_A z \sigma_x dA = -\int_A z E \varepsilon_x dA = EI_y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.73)$$

$$T = \int_A \sigma_{xz} dA = kAG \gamma_{xz} = kAG \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \right) \quad (2.74)$$

Dönmeyen, düzgün, ankastre Timoshenko kirişin düzlemsiz eğilme hareket denklemlerinin çıkarımı için gerekli olan ifadelerin yazımında Şekil 2.15'ten yararlanılır.



Şekil 2.15: Dönmeyen Timoshenko Kiriş Elemanı Üzerine Etkiyen Kuvvet ve Momentler

Şekil 2.15'teki kuvvet ve momentler kullanılarak A noktasına göre moment dengesi yazılırsa ve saat yönünün tersi pozitif yön olarak kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$M(x,t) + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} dx - M(x,t) + \left[V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx \right] dx + f(x,t) dx \frac{dx}{2} = \rho I_y \ddot{\phi} dx \quad (2.75)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklemin her iki tarafı dx 'e bölünüp $dx \rightarrow 0$ limiti uygulanırsa denklem (2.75), aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + V(x,t) = \rho I_y \ddot{\phi} \quad (2.76)$$

Şekil 2.15'teki kuvvetler kullanılarak düşey ekseninde kuvvet dengesi yazılırsa ve z yönü pozitif yön olarak kabul edilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$V(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx - V(x,t) + f(x,t) dx = m(x) dx \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.77)$$

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra denklemin her iki tarafı dx 'e bölünürse denklem (2.77) aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + f(x,t) = m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.78)$$

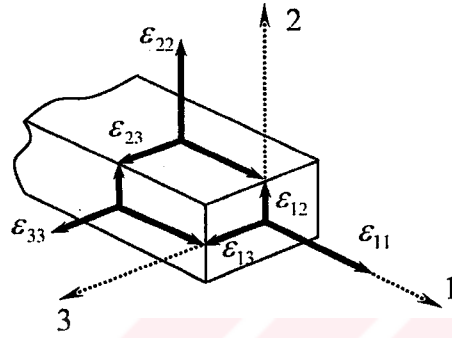
Denklemler (2.73) ve (2.74) ile verilen ifadeler, denklem (2.76) ve denklem (2.78)'de yerlerine koyulursa ve serbest titreşim incelemesi yapıldığı için $f(x,t)$ yayılı yükü sıfır olarak alınırsa dönmeyen, düzgün, ankastre Timoshenko kiriş hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-\rho I \ddot{\phi} + (EI \phi')' + kAG(w' - \phi) = 0 \quad (2.79a)$$

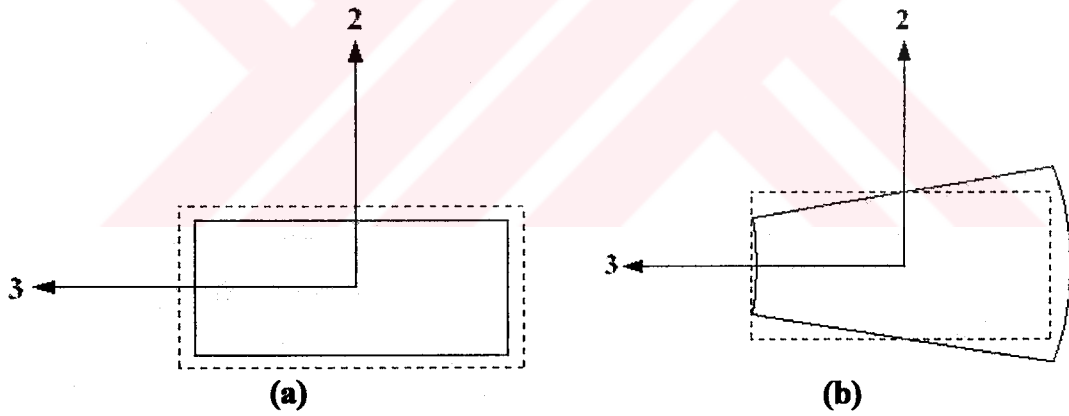
$$-\rho A \ddot{w} + [kAG(w' - \phi)]' = 0 \quad (2.79b)$$

2.3. Üç Boyutlu Kiriş Teorileri

Üç boyutlu kiriş teorilerinde hem düzlemsel hem de düzlemdışı çarpımlara yer verilmektedir. Düzlemdışı çarpımlar, daha önce Şekil 2.10.(a) ve 2.10.(b) ile gösterilmiştir. Şekil 2.16'da yer alan yanal normal birim uzamalar, ε_{22} ve ε_{33} , ile düzlemsel kayma birim uzaması, ε_{23} , Şekil 2.17.(a) ve Şekil 2.17.(b)'de görülen düzlemsel çarpımlara neden olmaktadır.



Şekil 2.16: Üç Boyutlu Kiriş Teorilerinde Birim Uzamalar



Şekil 2.17: Düzlemsel (a) Daralma Çarpılması (b) Eğilme Çarpılması

Yanal normal birim uzamalar, ε_{22} ve ε_{33} , önemli sayılabilecek büyüklükte yanal normal gerilmelere, σ_{22} ve σ_{33} , neden olurken, düzlemsel kayma birim uzaması, ε_{23} , önemli sayılabilecek büyüklükte düzlemsel kayma gerilmesine, σ_{23} , neden olmaktadır. Bu nedenle üç boyutlu kiriş teorilerinde, üç boyutlu gerilmelerin etkilerine tamamen yer verilmektedir.

3. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

3.1. Tarihçe

İlk olarak **Zhou (1986)**, elektrik devreleri analizi için lineer ve nonlinear başlangıç değer problemlerinde diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanmıştır. **Chiou ve Tzeng (1996)**, nonlinear titreşim problemlerinin çözümü için Taylor dönüşümünü kullanmışlardır. Yöntem, hem adi diferansiyel denklemlere hem de kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabildiği için **Jang ve diğ. (2001)**, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ile yapmışlardır. **Abdel ve Hassan (2002)**, özdeğer problemlerinin çözümünde bu yöntemi kullanmışlardır. Önceki çalışmalar, diferansiyel dönüşüm yönteminin nonlinear veya değişken parametrelili problemlerin çözümünde etkin olduğunu gösterdiği için son dönemde pek çok çalışmada bu yöntem kullanılmaktadır (**Özdemir ve Kaya, 2006; Arikoglu ve Ozkol, 2005; Bert ve Zeng, 2004; Chen ve Ju, 2004**)

3.2. Yöntemin Tanıtımı

Diferansiyel dönüşüm yöntemi, Taylor seri açılımına dayanan ve diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bir dönüşüm tekniğidir. Bu yöntemde, bir probleme ait diferansiyel denklemlere ve sınır koşullarına belirli dönüşüm kuralları uygulanarak denklemler, basit analitik ifadelere dönüştürülür ve bu analitik ifadelerin çözülmesi ile istenilen sonuçlar büyük bir hassasiyetle elde edilir. Bu yöntem, Taylor yönteminden farklıdır çünkü Taylor seri açılımında olduğu gibi bir fonksiyonun türevlerinin hesaplanması gerekmez.

D bölgesinde analitik olan bir $f(x)$ fonksiyonu ve aynı bölgede bulunan $x = x_0$ noktası gözönüne alınırsa, $f(x)$ fonksiyonu $x = x_0$ civarında bir seri açılımla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (3.1)$$

Asıl fonksiyon, $f(x)$ ve dönüştürülmüş fonksiyon, $F[k]$ olmak üzere asıl fonksiyonun diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (3.2)$$

Denklemler (3.1) ve (3.2) gözönüne alındığında asıl fonksiyon ile dönüştürülmüş fonksiyon arasındaki bağlantıya ulaşılır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F[k] \quad (3.3)$$

Asıl fonksiyonun seri açılımında sonlu sayıda terim almak genel bir yaklaşımdır. Bu nedenle denklem (3.3)'ün üst sınırı sonlu bir q sayısı ile ifade edilebilir. Bu q üst sınırının değerini elde edilen sonuçların yakınsama hızı belirler.

$$f(x) = \sum_{k=0}^q (x - x_0)^k F[k] \quad (3.4)$$

3.3. Yöntemin Uygulanması

Diferansiyel denklemlerin dönüştürülmesi için kullanılan bazı teoremler aşağıda verilmektedir

Teorem 3.1:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \Rightarrow F[k] = G[k] \pm H[k] \quad (3.5a)$$

Teorem 3.2:

$$f(x) = \lambda g(x) \Rightarrow F[k] = \lambda G[k] \quad (3.5b)$$

Teorem 3.3:

$$f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow F[k] = \sum_{l=0}^k G[k-l]H[l] \quad (3.5c)$$

Teorem 3.4:

$$f(x) = g_1(x)g_2(x) \dots g_{n-1}(x)g_n(x) \Rightarrow F[k] = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2 - k_1) \dots \times G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})G_n(k - k_{n-1}) \quad (3.5d)$$

Teorem 3.5:

$$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n} \Rightarrow F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n] \quad (3.5e)$$

Teorem 3.6:

$$f(x) = x^n \Rightarrow F[k] = \delta(k-n) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq n \\ 1 & \text{if } k = n \end{cases} \quad (3.5f)$$

Teorem 3.7:

$$f(x) = [g_1(x)g_2(x) \dots g_{n-1}(x)g_n(x)] \int_{x_0}^x h_1(t)h_2(t) \dots h_{m-1}(t)h_m(t)dt \Rightarrow F[k] = \sum_{k_{m+n-1}=1}^k \sum_{k_{m+n-2}=1}^{k_{m+n-1}} \dots \sum_{k_2=1}^{k_3} \sum_{k_1=1}^{k_2} \frac{1}{k_m} H_1[k_1-1]H_2[k_2-k_1] \dots H_{m-1}[k_{m-1}-k_{m-2}]H_m[k_m-k_{m-1}] \times G_1[k_{m+1}-k_m]G_2[k_{m+2}-k_{m+1}] \dots G_{n-1}[k_{m+n-1}-k_{m+n-2}]G_n[k-k_{m+n-1}] \quad (3.5g)$$

Sınır koşullarının dönüştürülmesi için kullanılan teoremler Tablo3.1’de verilmektedir.

Tablo 3.1: Sınır Şartlarına Uygulanan Diferansiyel Dönüşüm Kuralları

$x = 0$		$x = 1$	
Asıl Sınır Şartı	Dönüştürülmüş Sınır Şartı	Asıl Sınır Şartı	Dönüştürülmüş Sınır Şartı
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$	$f(1) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F[k] = 0$
$\frac{df(0)}{dx} = 0$	$F[1] = 0$	$\frac{df(1)}{dx} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} kF[k] = 0$
$\frac{d^2 f(0)}{dx^2} = 0$	$F[2] = 0$	$\frac{d^2 f(1)}{dx^2} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)kF[k] = 0$
$\frac{d^3 f(0)}{dx^3} = 0$	$F[3] = 0$	$\frac{d^3 f(1)}{dx^3} = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} (k-2)(k-1)kF[k] = 0$

4. HELİKOPTER PALİNİN DİNAMİK İNCELEMESİ

Bu bölümde bir helikopter palı; dönen, ankastre Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş olarak modellenip bu kirişlerin serbest titreşimi, çeşitli problemler çözülerek incelenmiştir. Serbest titreşim incelemesi yapılan kirişler, tek veya iki düzlemde doğrusal daralan kirişler olmak üzere iki farklı geometride modellenmiştir. Simetrik kesitli kirişlerde düzlemsiz eğilme serbest titreşimi incelenirken asimetrik kesitli kirişlerde eğilme-burulma etkileşimli serbest titreşim incelemesi yapılmıştır. Bu bölümde yapılan çalışmalar, daha önce yapılmış çalışmaların devamı niteliğindedir (**Kaya ve diğ., 2004; Özdemir ve Kaya, 2004a; Özdemir ve Kaya, 2006**).

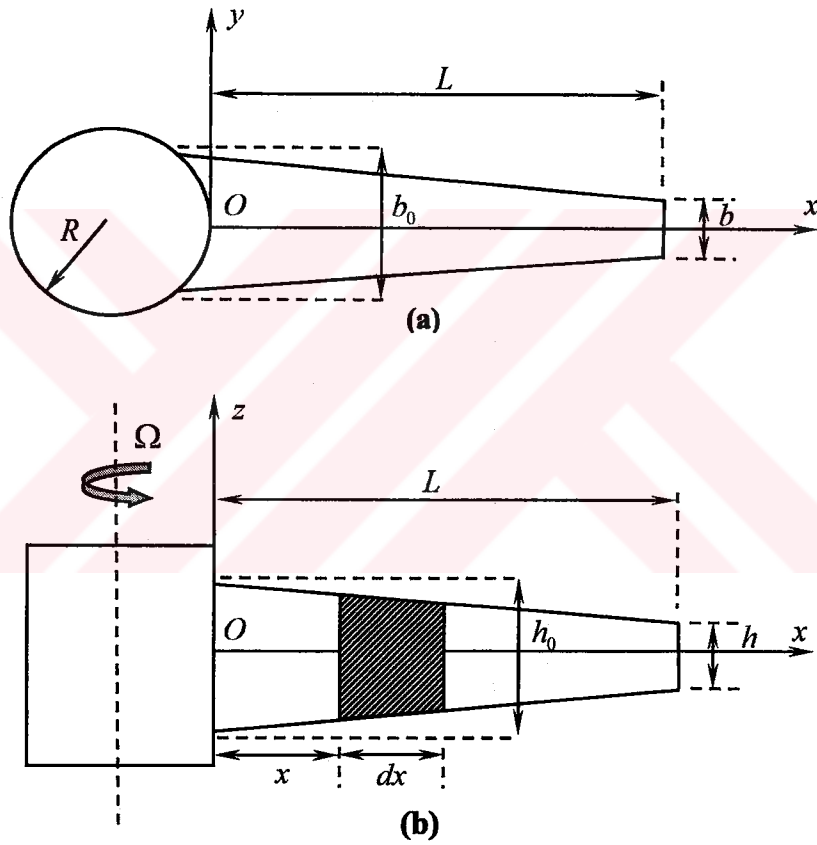
4.1. Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Ankastre Euler-Bernoulli Kirişinin Düzlemsiz Eğilme Serbest Titreşiminin İncelenmesi (Özdemir ve Kaya, 2005a)

Bu bölümde, dönen ve iki düzlemde doğrusal olarak daralan Euler-Bernoulli kirişinin düzlemsiz eğilme serbest titreşiminin incelenmesi yapılmaktadır. Bu çalışmada kullanılan hareket denklemi ve sınır şartlarının çıkarımı, Bölüm 2.1.1.3'te düzgün (daralma yok) bir kiriş için detaylı olarak yapılmıştır. Hareket denkleminin çözümü, Bölüm 3'te anlatılan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Differential Transform Method-DTM) kullanılarak elde edilmiştir. Daralma oranı, dönme hızı ve rotor kafası yarıçapı parametrelerinin, doğal frekanslar üzerindeki etkileri incelenerek elde edilen sonuçlar, çeşitli tablolarda ve grafiklerde sunulmuştur. Literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmalar yapılmış ve sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu gözlenmiştir.

4.1.1. Kiriş modeli

Bu çalışmada kullanılan kiriş modeli, Şekil 4.1'de gösterilmektedir. Şekilde, sabit Ω açısal hızı ile dönen R yarıçaplı rijit bir rotor kafasına O noktasından ankastre olarak bağlanmış, L uzunluğunda bir Euler-Bernoulli kirişi görülmektedir. Kiriş, xz

düzleminde h_0 'dan h yüksekliğine ve xy düzleminde b_0 'dan b genişliğine kadar daralmaktadır. Kullanılan kartezyen koordinat sisteminde x eksen, deforme olmamış kirişin tarafsız eksenine ile çakışmaktadır; z eksen, çakışmayacak şekilde dönme eksenine paraleldir ve y eksen, dönme düzlemi içinde yer almaktadır. Bu eksen düzenine göre kiriş kesidinin ana eksenleri, y ve z eksenlerine paralel olmaktadır. Ayrıca burada incelenen kiriş, hem izotropiktir hem de her iki ana eksene göre simetrik olan kesitlere sahiptir. Bu nedenle, her kesidin elastik eksenine ile kesit ağırlık merkezi çakışmıştır ve düzlemsiz eğilme titreşimi, burulma titreşimi ile etkileşim içinde değildir.



Şekil 4.1: İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin (a) Üstten Görünüşü (b) Yandan Görünüşü

4.1.2. Hareket denklemi ve sınır şartları

Bölüm 2.1.1.3'te çıkarımı detaylı bir biçimde yapılan dönen, düzgün Euler-Bernoulli kirişinin düzlemsiz eğilme hareketi denklemi aşağıda verilmektedir.

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) = p_w \quad (4.1)$$

Bu çalışmada serbest titreşim incelemesi yapıldığı için p_w yayılı yükü sıfır olarak alınır. Burada T olarak geçen merkezkaç kuvvetinin ifadesi, denklem (2.22)'de verilmektedir.

Hamilton prensibinin uygulanması ile hareket denkleminin yanı sıra dönen ankastre Euler-Bernoulli kirişinin sınır şartları da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x = 0 \text{ 'da} \quad w = 0 \text{ ve } \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (4.2a)$$

$$x = L \text{ 'de} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ ve } \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad (4.2b)$$

Denklem (4.1) ile verilen hareket denkleminin çözümü için basit harmonik hareket kabulü yapılarak düzlemsiz eğilme deplasmanı, $w(x, t)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$w(x, t) = \bar{w}(x) e^{i\omega t} \quad (4.3)$$

Basit harmonik hareket kabulü, denklem (4.1)'de yerine koyulursa hareket denkleminin yeni ifadesine aşağıdaki gibi ulaşılır.

$$\omega^2 \rho A \bar{w} - \frac{d^2}{dx^2} \left(E I \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(T \frac{d\bar{w}}{dx} \right) = 0 \quad (4.4)$$

4.1.3. Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler

Kirişin genişliği, $b(x)$, kalınlığı, $h(x)$, kesit alanı, $A(x)$ ve alan atalet momenti, $I(x)$, iki düzlemde daralan bir kiriş için aşağıdaki gibi yazılır.

$$b(x) = b_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L} \right)^m \quad (4.5a)$$

$$h(x) = h_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^n \quad (4.5b)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^n \quad (4.5c)$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L}\right)^{3n} \quad (4.5d)$$

Burada alt indis, $()_0$, kirişin rotor kafasına bağlandığı kök bölgesindeki değerleri ifade etmektedir. Kiriş, bu çalışmada olduğu gibi doğrusal olarak daralıyorsa, $n = 1$ ve $m = 1$ değerleri kullanılır. Buradaki genişlik daralma oranı, c_h , kalınlık daralma oranı, c_h , kök bölgesindeki kesit alanı, $A_0(x)$, ve atalet momenti, $I_0(x)$, aşağıdaki ifadelerle tanımlanır.

$$c_h = 1 - \frac{b}{b_0} \quad (4.6a)$$

$$c_h = 1 - \frac{h}{h_0} \quad (4.6b)$$

$$A_0 = b_0 h_0 \quad (4.7a)$$

$$I_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12} \quad (4.7b)$$

Elastisite modülü E , kayma modülü, G ve malzeme yoğunluğu, ρ 'nun kiriş boyunca sabit kaldığı kabul edilirse birim uzunluk başına düşen kütle, ρA ve eğilme katılığı, EI , (4.5c)-(4.5d) no'lu denklemlere göre değişir. Bu bölümde ve diğer tüm bölümlerde bu kabul yapılmıştır.

Denklemleri basitleştirmek ve literatürdeki çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için kullanılan boyutsuz parametreler aşağıdaki gibidir (**Banerjee, 2001**).

$$\xi = \frac{x}{L}, \delta = \frac{R}{L}, \tilde{w}(\xi) = \frac{\bar{w}}{L}, \eta^2 = \frac{\rho A_0 L^4 \Omega^2}{EI_0}, \mu^2 = \frac{\rho A_0 L^4 \omega^2}{EI_0} \quad (4.8)$$

Boyutsuz parametreler ve daralan kiriş formülleri, denklem (2.2) ile verilen merkezkaç kuvveti ifadesinde yerine koyularak bu kuvvetin boyutsuz denklemi elde

edilir. Daralan giriş formülleri, boyutsuz parametreler ve boyutsuz merkezkaç kuvveti ifadesi, (4.4) no'lu denklemde yerlerine koyulursa boyutsuz hareket denklemi, doğrusal daralma durumu ($m = 1$, $n = 1$) için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{d\xi^2} \left[(1-c_h\xi)(1-c_h\xi)^3 \frac{d^2\tilde{w}}{d\xi^2} \right] - \mu^2(1-c_h\xi)(1-c_h\xi)\tilde{w} - \eta^2 \frac{d}{d\xi} \left\{ \left[\frac{c_h c_h}{4}(1-\xi^4) + \delta(1-\xi) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2}(1-c_h\delta-c_h\delta)(1-\xi^2) + \frac{1}{3}(-c_h-c_h+c_h c_h\delta)(1-\xi^3) \right] \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ayrıca, (4.2a) ve (4.2b) no'lu denklemlerle verilen sınır şartları, boyutsuz olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\xi = 0 \text{ 'da} \quad \tilde{w} = 0 \text{ ve } \frac{d\tilde{w}}{d\xi} = 0 \quad (4.10a)$$

$$\xi = 1 \text{ 'de} \quad \frac{d^2\tilde{w}}{d\xi^2} = 0 \text{ ve } \frac{d^3\tilde{w}}{d\xi^3} = 0 \quad (4.10b)$$

4.1.4. Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması

Bölüm 3'te detayları anlatılan diferansiyel dönüşüm yöntemi, denklem (4.9) ile verilen boyutsuz hareket denkleminin uygulanması aşağıdaki dönüştürülmüş ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W[k+4] - [(k+1)(k+2)^2(k+3)(c_h+3c_h)]W[k+3] + \\ & (k+1)(k+2)[3c_h(c_h+c_h)(k+1)(k+2) + \eta^2 \left[\frac{1}{2}(c_h\delta+c_h\delta-1) + \frac{1}{3}(c_h+c_h-c_h c_h\delta) - \right. \\ & \left. \frac{1}{4}c_h c_h\delta \right]]W[k+2] + [(k+1)^2\delta\eta^2 - c_h^2(3c_h+c_h)(k-2)(k-1)k(k+1)]W[k+1] + \\ & (k+1) \left[c_h c_h^3 k(k+1)(k+2) + \frac{1}{2}(1-c_h\delta-c_h\delta)k\eta^2 - \mu^2 \right]W[k] + [(c_h+c_h)\mu^2 + \\ & \frac{1}{3}(c_h c_h\delta-c_h-c_h)(k-1)(k+1)]W[k-1] + \left[\frac{c_h c_h}{4}(k+1)(k-2)\eta^2 - c_h c_h\mu^2 \right]W[k-2] = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Denklemler (4.10a) ve (4.10b)'ye Tablo 3.1'de yer alan DTM kuralları uygulanarak dönüştürülmüş sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\xi = 0 \text{ 'da} \quad W[0] = 0 \text{ ve } W[1] = 0 \quad (4.12a)$$

$$\xi = 1 \text{ 'de } \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)W[k] = 0 \text{ ve } \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)W[k] = 0 \quad (4.12b)$$

4.1.5. Sonuçlar

Diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak elde edilen denklemler, Mathematica bilgisayar programında kodlanarak hesaplamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçların doğrulunu kontrol etmek amacıyla literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmalar yapılarak, gerekli tablolar ve grafikler oluşturulmuştur. Daralma oranları, dönme hızı ve rotor kafası yarıçapı parametrelerinin, doğal frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir.

İki düzlemde daralan ve dönmeyen ($\eta = 0$) Euler-Bernoulli kiriş modelinin ilk dört frekansının, genişlik ve kalınlık daralma oranlarına bağlı olarak $\delta = 0$ olmak üzere aldığı değerler Tablo 4.1-4.8 ile sunulmaktadır. Elde edilen sonuçlar, **Downs (1977)**'nin sonuçları ile karşılaştırıldığında sonuçlar arasındaki uyumun çok iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.1: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin Birinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

$c_b \backslash c_h$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	3.51602	3.63103	3.76286	3.91603	4.09698	4.31517	4.58531
	3.51602 [§]	-	-	3.91603 [§]	-	-	4.58531 [§]
0.1	3.55870	3.67370	3.80552	3.95870	4.13966	4.35792	4.62822
0.2	3.60828	3.72328	3.85512	4.00831	4.18932	4.40768	4.67816
0.3	3.66675	3.78180	3.91368	4.06693	4.24802	4.46651	4.73721
	3.66675 [§]	-	-	4.06693 [§]	-	-	4.73721 [§]
0.4	3.73708	3.85222	3.98419	4.13755	4.31878	4.53744	4.80842
0.5	3.82379	3.93909	4.07124	4.22480	4.40623	4.62515	4.89647
0.6	3.93428	4.04988	4.18235	4.33622	4.51799	4.73728	5.00903
	3.93428 [§]	-	-	4.33622 [§]	-	-	5.00903 [§]

[§] (Downs, 1977)

Tablo 4.2: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin İkinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

$\begin{matrix} C_b \\ C_h \end{matrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	22.0345	22.2540	22.5018	22.7860	23.1186	23.5193	24.0211
	22.0345 [§]	-	-	22.7860 [§]	-	-	24.0211 [§]
0.1	21.3381	21.5503	21.7898	22.0645	22.3864	22.7741	23.2602
0.2	20.6210	20.8256	21.0567	21.3220	21.6327	22.0074	22.4774
0.3	19.8806	20.0776	20.3001	20.5555	20.8550	21.2163	21.6699
	19.8806 [§]	-	-	20.5555 [§]	-	-	21.6699 [§]
0.4	19.1138	19.3029	19.5166	19.7620	38.4920	20.3975	20.8343
0.5	18.3173	18.4982	18.7029	18.9381	19.2141	19.5476	19.9671
0.6	17.4879	17.6604	17.8557	18.0803	18.3441	18.6631	19.0649
	17.4879 [§]	-	-	18.0803 [§]	-	-	19.0649 [§]

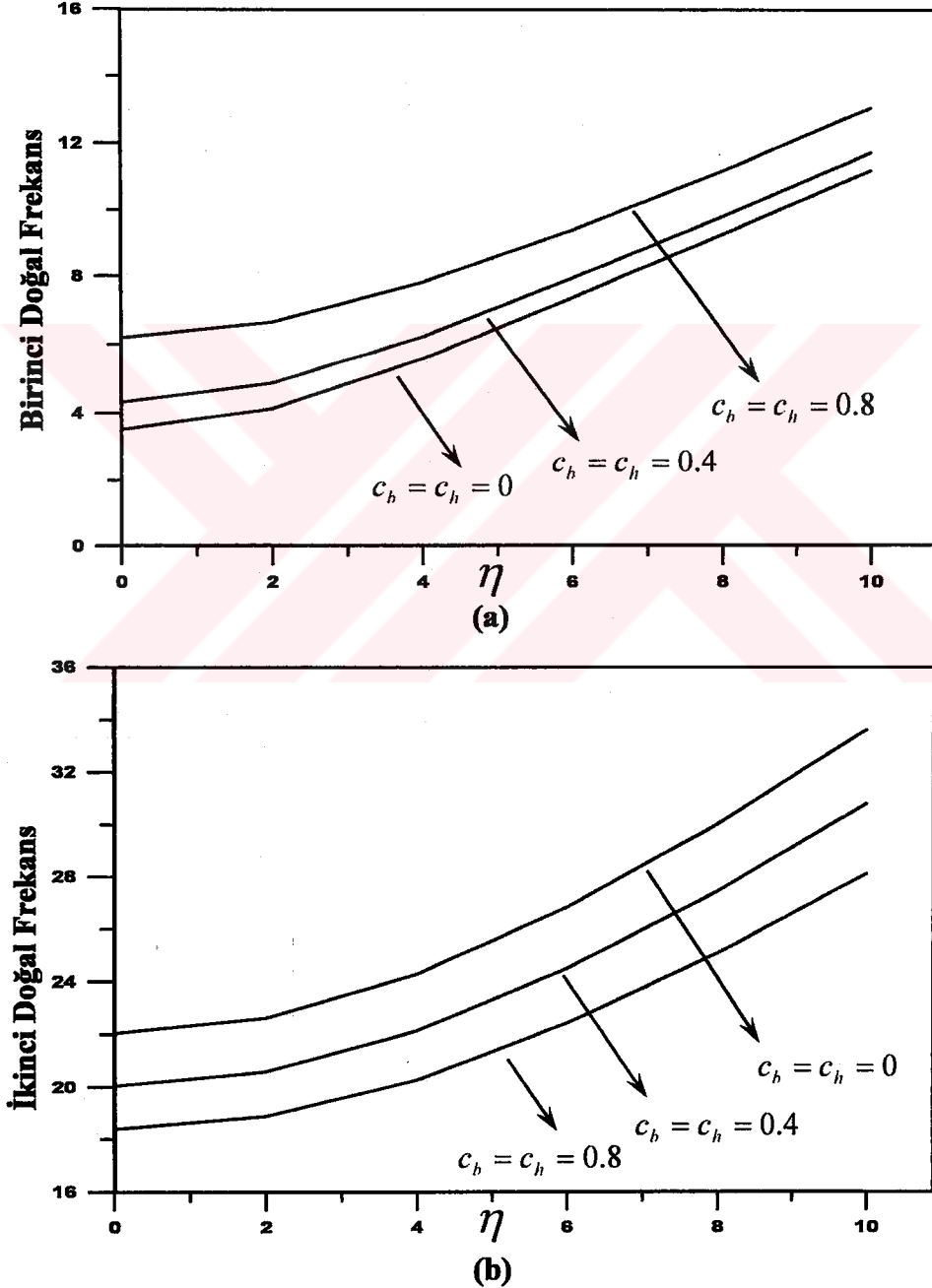
Tablo 4.3: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin Üçüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

$\begin{matrix} C_b \\ C_h \end{matrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	61.6972	61.9096	62.1525	62.4361	62.7763	63.1992	63.7515
	61.6972 [§]	-	-	62.4361 [§]	-	-	63.7515 [§]
0.1	58.9799	59.1886	59.4269	59.7046	60.0369	60.4489	60.9854
0.2	56.1923	56.3970	56.6303	56.9017	57.2257	57.6264	58.1466
0.3	53.3222	53.5226	53.7506	54.0152	54.3304	54.7192	55.2224
	53.3222 [§]	-	-	54.0152 [§]	-	-	55.2224 [§]
0.4	50.3537	50.5492	50.7714	51.0288	51.3346	51.7108	52.1963
0.5	47.2648	47.4550	47.6708	47.9203	48.2161	48.5789	49.0456
0.6	44.0248	44.2090	44.4175	44.6583	44.9432	45.2916	45.7384
	44.0248 [§]	-	-	44.6583 [§]	-	-	45.7384 [§]

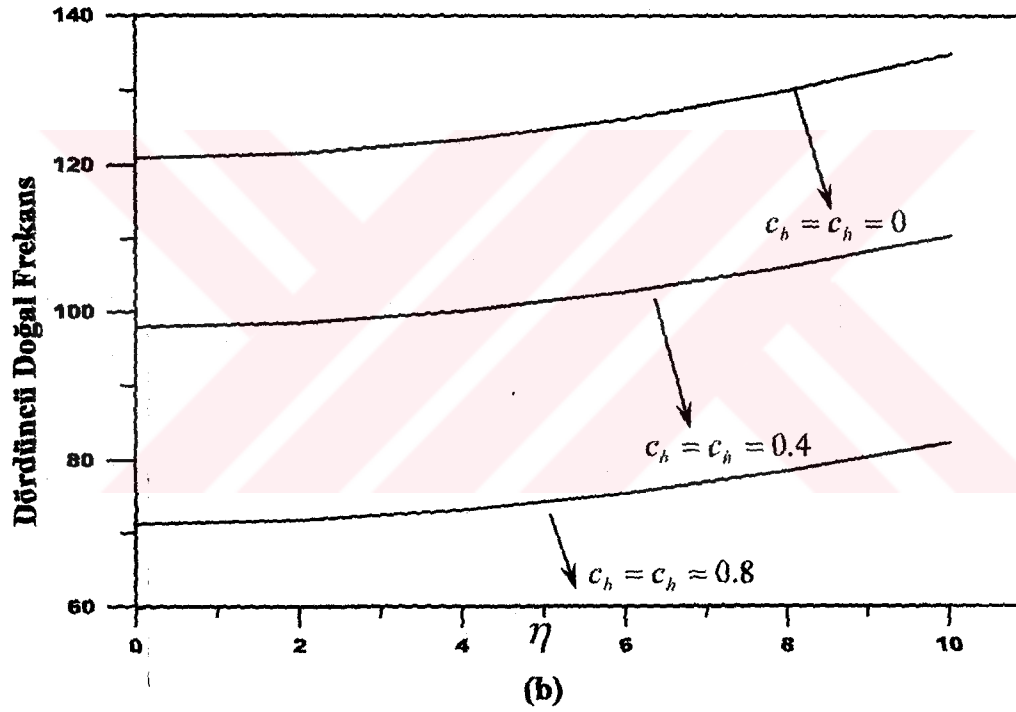
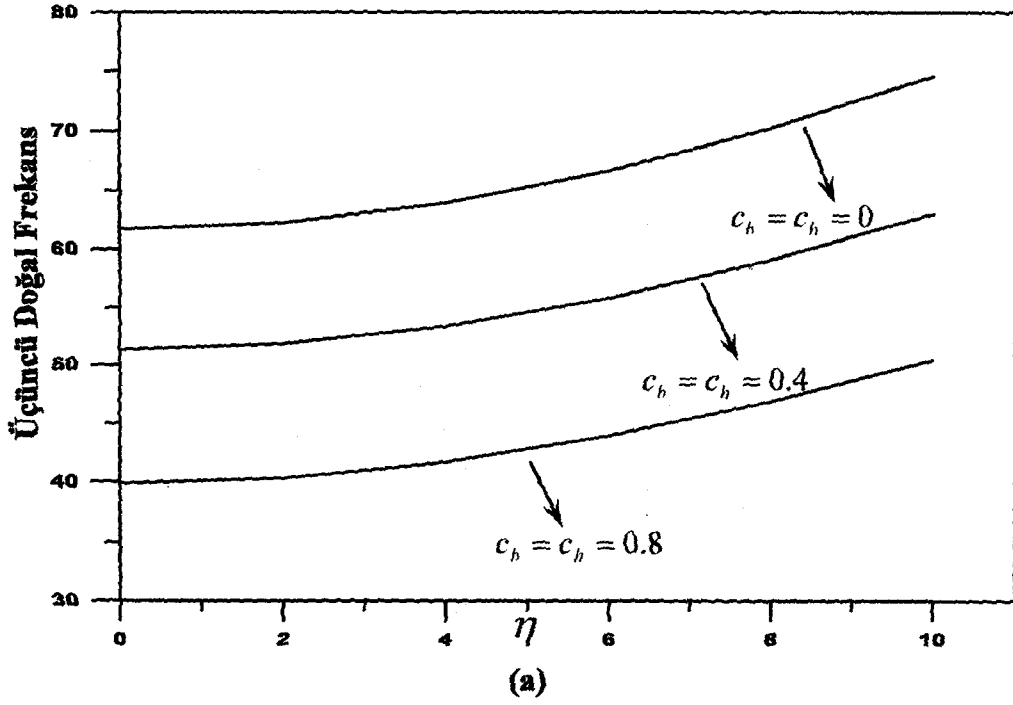
Tablo 4.4: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Euler-Bernoulli Kirişinin Dördüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

$\begin{matrix} C_b \\ C_h \end{matrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	120.902	121.115	121.360	121.648	121.997	122.438	123.025
	120.902 [§]	-	-	121.648 [§]	-	-	123.025 [§]
0.1	115.187	115.398	115.639	115.922	116.264	116.693	117.264
0.2	109.318	109.526	109.763	110.040	110.374	110.792	111.345
0.3	103.267	103.471	103.704	103.975	104.301	104.707	105.241
	103.267 [§]	-	-	103.975 [§]	-	-	105.241 [§]
0.4	96.9954	97.1956	97.4234	97.6883	98.005	98.3982	98.9130
0.5	90.4505	90.6462	90.8685	91.1261	91.4332	91.8128	92.3072
0.6	83.5541	83.7446	83.9605	84.2101	84.5064	84.8712	85.3438
	83.5541 [§]	-	-	84.2101 [§]	-	-	85.3438 [§]

İlk dört frekansın, daralma oranlarına ve dönme hızı parametresine göre değişimi, $\delta = 0$ değeri için Şekil 4.2(a-b) ve Şekil 4.3(a-b)'de sunulmaktadır. Burada dönme hızı parametresinin, her daralma oranında frekanslar üzerinde artırıcı bir etkiye sahip olduğu gözlenmektedir. Bu artışın nedeni, merkezkaç kuvvetinin yapı üzerindeki sertleştirici etkisidir. Merkezkaç kuvveti, (2.22) no'lu denklemde görüldüğü gibi açısal dönme hızının karesi ile doğru orantılıdır. Bunun sonucunda, artan dönme hızı, merkezkaç kuvvetini ve dolayısıyla frekansları arttırmaktadır.



Şekil 4.2: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Euler Kirişi (a) Birinci (b) İkinci Frekanslarının Dönme Hızı Parametresi ve Daralma Oranları ile Değişimi



Şekil 4.3: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Euler Kirişi (a) Birinci (b) İkinci Frekanslarının Dönme Hızı Parametresi ve Daralma Oranları ile Değişimi

Frekansların, rotor kafası yarıçapı parametresi, δ ve dönme hızı parametresi, η ile değişimi $c_h = 0$ ve $c_h = 0.5$ değerleri için Tablo 4.5'te sunulmaktadır ve sonuçlar, **Özdemir ve Kaya (2006)**'nın ve **Hodges ve Rutkowski (1981)**'in sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Ayrıca, rotor kafası yarıçapı parametresinin frekanslar üzerindeki etkisi Şekil 4.4'te sunulmaktadır. Burada ilk üç frekansın, farklı yarıçap

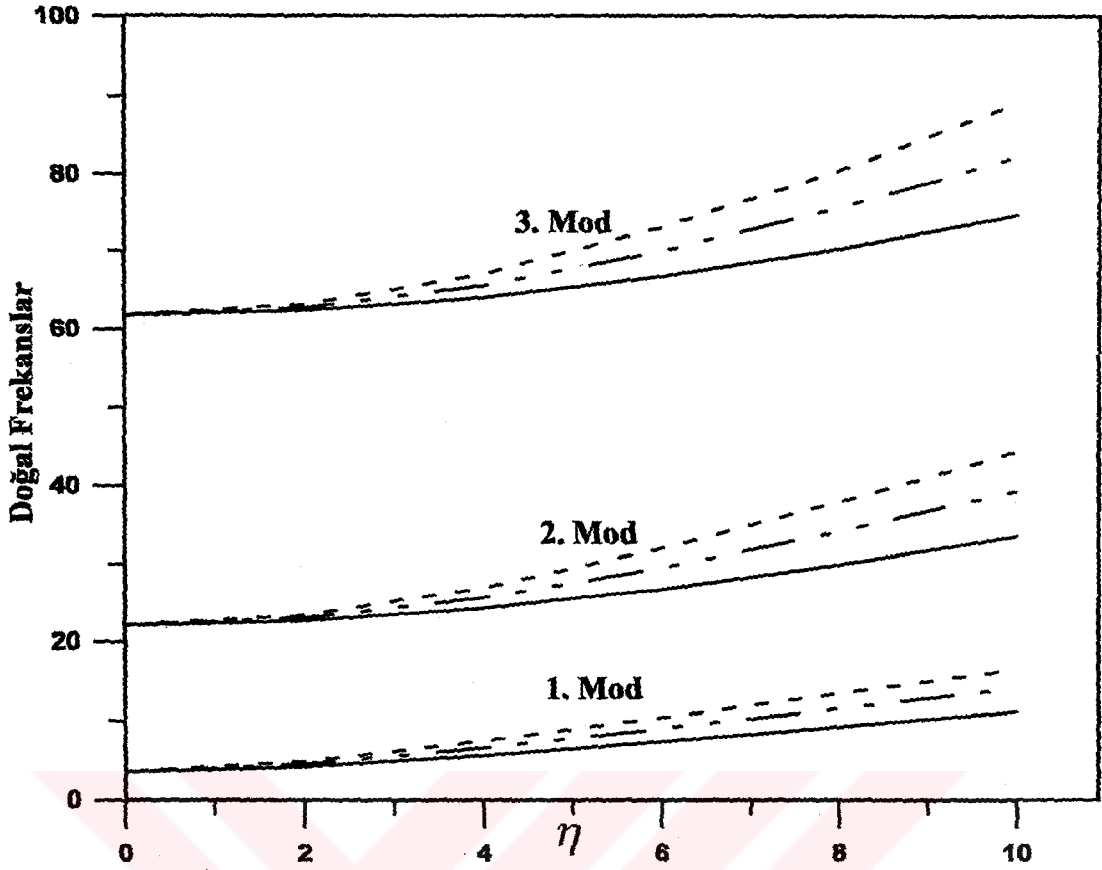
ve dönme hızı parametrelerine bağlı olarak değişimi verilmektedir. Daha önce açıklandığı gibi dönme hızı arttıkça frekanslar da artmaktadır. Buna ek olarak, Şekil 4.4'te görüldüğü gibi rotor kafası yarıçapı arttıkça frekansların artış hızı yükselmektedir. Bunun nedeni yine merkezkaç kuvvetinin yapı üzerindeki sertleştirici etkisidir.

Tablo 4.5: İki Düzlemde Daralan ve Dönen Euler Kirişi Frekanslarının Dönme Hızı ve Rotor Kafası Yarıçapı ile Değişimi

Doğal Frekans Parametresi (μ)						
η	$\delta = 0$			$\delta = 2$		
1	3.98662	18.474	47.4173	4.38668	18.8795	47.8308
	3.98662 [†]	18.474 [†]	47.417 [†]	4.38668 [†]	18.8795 [†]	47.8308 [†]
	3.9866 [‡]	18.474 [‡]	47.417 [‡]	-	-	-
2	4.4368	18.9366	47.8716	5.74259	20.473	49.4867
	4.4368 [†]	18.9366 [†]	47.8716 [†]	5.7426 [†]	20.473 [†]	49.4866 [†]
	4.4368 [‡]	18.937 [‡]	47.872 [‡]	-	-	-
3	5.09267	19.6839	48.619	7.45274	22.8795	52.1206
	5.09268 [†]	19.6839 [†]	48.6189 [†]	7.45275 [†]	22.8795 [†]	52.1205 [†]
	5.0927 [‡]	19.684 [‡]	48.619 [‡]	-	-	-
4	5.87876	20.6852	49.6456	9.31032	25.8663	55.5817
	5.87796 [†]	20.685 [†]	49.6456 [†]	9.31032 [†]	25.8662 [†]	55.5816 [†]
	5.8788 [‡]	20.685 [‡]	49.646 [‡]	-	-	-
Doğal Frekans Parametresi (μ)						
η	$\delta = 0.5$			$\delta = 1$		
1	4.09041	18.5762	47.5210	4.19156	18.6779	47.6245
2	4.79784	19.3325	48.2810	5.1328	19.7202	48.6865
3	5.77735	20.5311	49.5200	6.38678	21.3437	50.4034
4	6.90501	22.0996	51.2013	7.79308	23.4255	52.7063

[†] (Özdemir ve Kaya, 2006)

[‡] (Hodges ve Rutkowski, 1981)



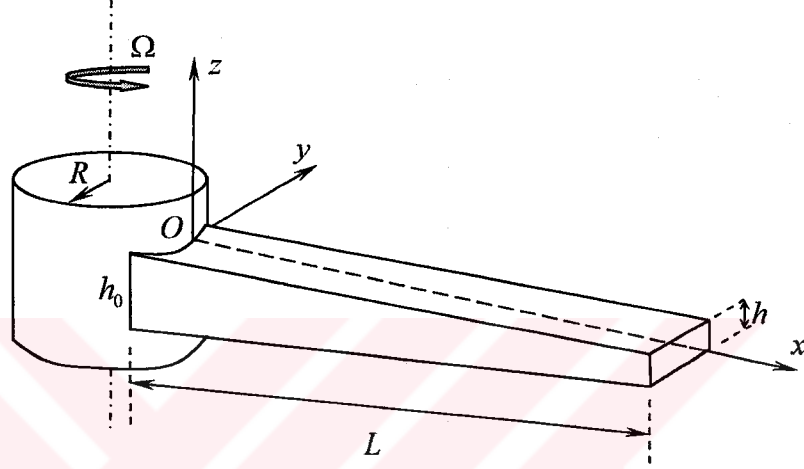
Şekil 4.4: İki Düzlemde Daralann Euler Kirişi Frekanslarının, Dönme Hızı ve Rotor Kafası Yarıçapı ile Değişimi ($\delta = 1$, - - -; $\delta = 0.5$, — · —; $\delta = 0$, —)

4.2. Dönen ve Tek Düzlemde Doğrusal Daralan Timoshenko Kirişin Düzlemsel Eğilme Titreşiminin İncelenmesi (Özdemir ve Kaya, 2005e)

Bu bölümde, dönen ve tek düzlemde doğrusal olarak daralan Timoshenko kirişin eğilme titreşiminin incelenmesi yapılmıştır. Hareket denklemlerinin çıkarımı, Bölüm 2.2.1.2’de düzgün Timoshenko kiriş için detaylı olarak yapılmıştır ve elde edilen denklemlerin çözümü, Bölüm 3’te detayları anlatılan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Differential Transform Method-DTM) kullanılarak elde edilmiştir. Çalışma içerisinde geçen çeşitli parametrelerin frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, çeşitli tablolarda ve grafiklerde sunulularak literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmalar yapılmıştır ve sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu gözlenmiştir.

4.2.1. Kiriş modeli

Bu çalışmada kullanılan kiriş modeli, Şekil 4.5'te gösterilmektedir. Şekilde, sabit Ω açısal hızı ile dönen, R yarıçaplı rijit bir rotor kafasına O noktasından ankastre olarak bağlanmış, L uzunluğunda bir Timoshenko kirişi görülmektedir. Kiriş, xz düzleminde h_0 'dan h yüksekliğine kadar doğrusal olarak daralmaktadır. Kullanılan kartezyen koordinat sistemi, Bölüm 4.1.1'de açıklanan koordinat sistemi ile aynı özelliklere sahiptir.



Şekil 4.5: Dönen ve Tek Düzlemde Daralan Timoshenko Kiriş Modeli

4.2.2. Hareket denklemleri ve sınır şartları

Bölüm 2.2.1.2'de çıkarımı detaylı bir biçimde yapılan dönen, düzgün Timoshenko kirişin düzlemsiz eğilme hareketi denklemleri aşağıda verilmektedir.

$$-\rho A \ddot{w} + (Tw')' + [kAG(w' - \varphi)]' = 0 \quad (4.13a)$$

$$-\rho I \ddot{\varphi} + \rho I \Omega^2 \varphi + (EI\varphi')' + kAG(w' - \varphi) = 0 \quad (4.13b)$$

Hamilton prensibinin uygulanması sonucu hareket denkleminin yanı sıra dönen, ankastre Timoshenko kirişin sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varphi' \delta \varphi \Big|_0^L = 0 \quad (4.14a)$$

$$\left[Tw' + kAG(w' - \varphi) \right] \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (4.14b)$$

Denklemler (4.14a) ve (4.14b) ile verilen hareket denklemlerinin çözümü için ilk adım olarak basit harmonik hareket kabulü yapılarak düzlemdışı eğilme deplasmanı, $w(x,t)$ ve bu deplasmandan kaynaklanan eğilme açısı, $\varphi(x,t)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$w(x,t) = \bar{w}(x)e^{i\omega t} \quad (4.15a)$$

$$\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x)e^{i\omega t} \quad (4.15b)$$

Basit harmonik hareket kabulleri, hareket denklemlerinde yerlerine koyulursa aşağıdaki ifadelere ulaşılır.

$$\rho A \omega^2 \bar{w} + \frac{d}{dx} \left(T \frac{d\bar{w}}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left[kAG \left(\frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\varphi} \right) \right] = 0 \quad (4.16a)$$

$$\rho I \omega^2 \bar{\varphi} + \rho I \Omega^2 \bar{\varphi} + \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\bar{\varphi}}{dx} \right) + kAG \left(\frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\varphi} \right) = 0 \quad (4.16b)$$

4.2.3. Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler

Kirişin kalınlığı, $h(x)$, kesit alanı, $A(x)$ ve alan atalet momenti, $I(x)$, tek düzlemde daralma durumunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$h(x) = h_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^n \quad (4.17a)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^n \quad (4.17b)$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^{n+2} \quad (4.17c)$$

Burada alt indis, $()_0$, kirişin rotor kafasına bağlandığı kök bölgesindeki değerleri ifade etmektedir. Kiriş, bu çalışmada olduğu gibi doğrusal olarak daralıyorsa, $n = 1$

olarak kabul edilir ve kalınlık daralma oranı, c_h , denklem (4.6b)'deki gibi tanımlanır.

Denklemleri basitleştirebilmek ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek için kullanılan boyutsuz ifadeler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (**Banerjee, 2001**).

$$\xi = \frac{x}{L}, \delta = \frac{R}{L}, \tilde{w}(\xi) = \frac{\bar{w}}{L}, r^2 = \frac{I_o}{A_o L^2},$$

$$s^2 = \frac{EI_o}{kA_o GL^2}, \eta^2 = \frac{\rho A_o L^4 \Omega^2}{EI_o}, \mu^2 = \frac{\rho A_o L^4 \omega^2}{EI_o} \quad (4.18)$$

Bu boyutsuz parametrelerden dönme ataleti parametresinin (rotary inertia parameter), r , ve kayma deformasyonu parametresinin (shear deformation parameter), s , değerleri sıfır olarak alınırsa kiriş, Timoshenko özelliklerini kaybederek Euler-Bernoulli kirişine dönüşür.

Boyutsuz parametreler ve daralan kiriş formülleri, denklem (2.2) ile verilen merkezkaç kuvveti ifadesinde yerine koyularak bu kuvvetin boyutsuz denklemi elde edilir. Daralan kiriş formülleri, boyutsuz parametreler ve boyutsuz merkezkaç kuvveti ifadesi, (4.16a) ve (4.16b) no'lu denklemlerinde yerlerine koyulursa boyutsuz hareket denklemleri, doğrusal daralma durumu ($n=1$) için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{d}{d\xi} \left\{ \left[(1 - c_h \xi)^2 (1 + 3c_h \delta + 2c_h \xi) - (1 - c_h)^2 (1 + 3c_h \delta + 2c_h) \right] \frac{dw}{d\xi} \right\} +$$

$$\frac{6c_h^2 \mu^2}{\eta^2} (1 - c_h \xi) w + \frac{6c^2}{s^2 \eta^2} \frac{d}{d\xi} \left[(1 - c_h \xi) \left(\frac{dw}{d\xi} - \varphi \right) \right] = 0 \quad (4.19a)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - c_h \xi)^3 \frac{d\varphi}{d\xi} \right] + r^2 (\mu^2 + \eta^2) (1 - c_h \xi)^3 \varphi + \frac{1}{s^2} (1 - c_h \xi) \left(\frac{dw}{d\xi} - \varphi \right) = 0 \quad (4.19b)$$

Ayrıca boyutsuz parametreler, denklemler (4.14a) ve (4.14b)'de kullanılırsa dönen ankastre Timoshenko kiriş için boyutsuz sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\xi = 0 \text{ 'da} \quad \varphi = 0 \text{ ve } \tilde{w} = 0 \quad (4.20a)$$

$$\xi = 1 \text{ 'de } \frac{d\tilde{w}}{d\xi} - \varphi = 0 \quad (4.20b)$$

4.2.4. Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması

Bölüm 3'te detayları anlatılan diferansiyel dönüşüm yöntemi, denklemler (4.19a) ve (4.19b) ile verilen boyutsuz hareket denklemlerine uygulanırsa aşağıdaki dönüştürülmüş ifadelerle ulaşılır.

$$\begin{aligned} & c_h^2 \left\{ (k+1)(k+2) \left(3 - 2c_h + 6\delta - 3c_h\delta + \frac{6}{s^2\eta^2} \right) W[k+2] - 6 \left(\delta + \frac{c_h}{s^2\eta^2} \right) (k+1)^2 W[k+1] + \right. \\ & \left[3(c_h\delta - 1)(k^2 + k) + \frac{6\mu^2}{\eta^2} \right] W[k] + c_h \left[2(k^2 - 1) - \frac{6\mu^2}{\eta^2} \right] W[k-1] + \frac{6c_h}{s^2\eta^2} (k+1)\varphi[k] - \\ & \left. \frac{6}{s^2\eta^2} (k+1)\varphi[k+1] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)\varphi[k+2] - 3c_h(k+1)^2\varphi[k+1] + \left[3c_h^2k(k+1) - \frac{1}{s^2} + r^2(\eta^2 + \mu^2) \right] \varphi[k] - \\ & \left[c_h^3(k-1)(k+1) - \frac{c_h}{s^2} + 3c_hr^2(\eta^2 + \mu^2) \right] \varphi[k-1] + 3c_h^2r^2(\eta^2 + \mu^2)\varphi[k-2] - \\ & c_h^3r^2(\eta^2 + \mu^2)\varphi[k-3] - \frac{c_hk}{s^2}W[k] + \frac{(k+1)}{s^2}W[k+1] = 0 \end{aligned} \quad (4.21b)$$

Denklemler (4.20a) ve (4.20b)'ye Tablo 3.1'de yer alan DTM kuralları uygulanarak dönüştürülmüş sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\xi = 0 \text{ 'da } W[0] = \varphi[0] = 0 \quad (4.22a)$$

$$\xi = 1 \text{ 'de } \sum_{k=0}^{\infty} [kW[k] - \varphi[k]] = 0 \quad (4.22b)$$

4.2.5. Sonuçlar

Diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak elde edilen denklemler, Mathematica bilgisayar programında kodlanarak hesaplamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçların doğrulunu kontrol etmek amacıyla literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmalar yapılarak, gerekli tablolar ve grafikler oluşturulmuştur. Daralma

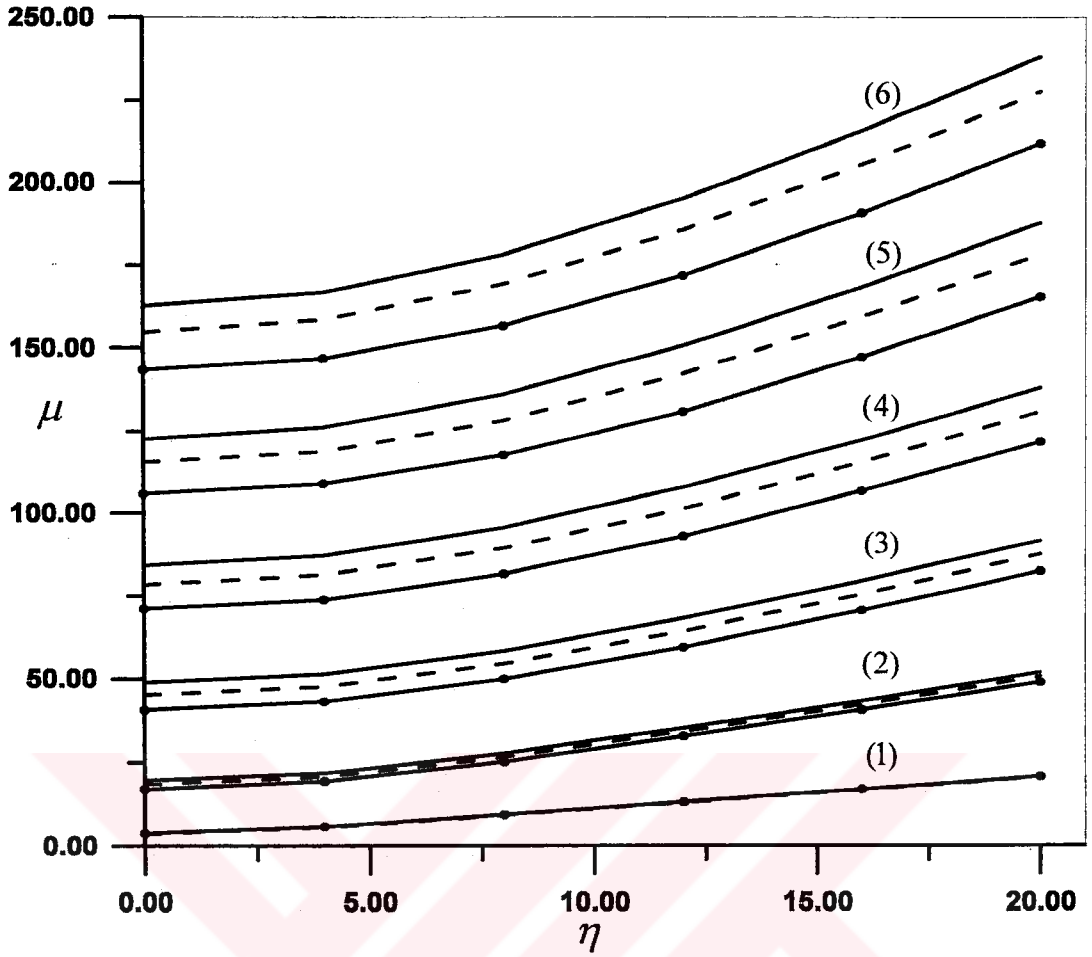
oranı, c_h , dönme hızı, η , dönme atalet etkisi, r , parametrelerinin, doğal frekanslar üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Dönen ve $c_h = 0.5$ daralma oranına sahip bir Timoshenko kirişin ilk altı frekansının, dönme hızı parametresi, η 'ya bağlı olarak aldığı farklı değerler, $r^2 = 0.0064$, $s^2 = 0.01958$, $\delta = 0$ değerleri için Tablo 4.6'da verilerek **Lee ve Lin (1994)** ile karşılaştırma yapılmıştır. Tablo 4.6 incelendiğinde frekansların dönme hızı ile arttığı görülmektedir. Bunun nedeni daha önceden açıklandığı gibi, açısal dönme hızının karesi ile orantılı olan merkezkaç kuvvetinin kirişte neden olduğu sertleştirici etkidir.

Şekil 4.6'da frekansların, dönme hızı ve daralma oranı parametrelerine bağlı olarak değişimi $r = 0.04$, $k = 2/3$, $E/G = 8/3$, $\delta = 0$ değerleri için verilmektedir. Bu şekildeki önemli noktalardan biri, frekansların daralma oranına bağlı olarak değişimidir. Şekilde görüldüğü gibi yükseklik daralma oranı arttıkça frekansların değerinde azalma olmaktadır. Örnek olarak, altıncı frekansın $c_h = 0.5$ için aldığı değerler, $c_h = 0$ ve $c_h = 0.25$ daralma oranları için aldığı değerlerden düşüktür. Bunun nedeni, artan daralma oranı ile kesit alanının ve dolayısıyla denklem (2.22)'de görüldüğü gibi alanla doğru orantılı olan merkezkaç kuvvetinin kiriş üzerindeki sertleştirici etkisinin azalmasıdır.

Tablo 4.6: Dönen ve Tek Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Frekanslarının Dönme Hızına Bağlı Olarak Değişimi

η	0		3		5		10	
μ	Biz	Lee ve Lin (1994)	Biz	Lee ve Lin (1994)	Biz	Lee ve Lin (1994)	Biz	Lee ve Lin (1994)
1	3.64996	3.6500	4.88654	4.8866	6.4711	6.4712	10.9905	10.991
2	15.0218	15.0022	16.4599	16.460	18.7434	18.744	26.9280	26.928
3	32.7840	32.785	34.4564	34.458	37.2226	37.224	47.8827	47.883
4	53.3391	53.341	55.3555	53.358	58.7281	58.730	71.9847	71.986
5	75.4955	-	77.8802	-	81.8834	-	97.6447	-
6	98.1897	-	100.919	-	105.464	-	119.891	-



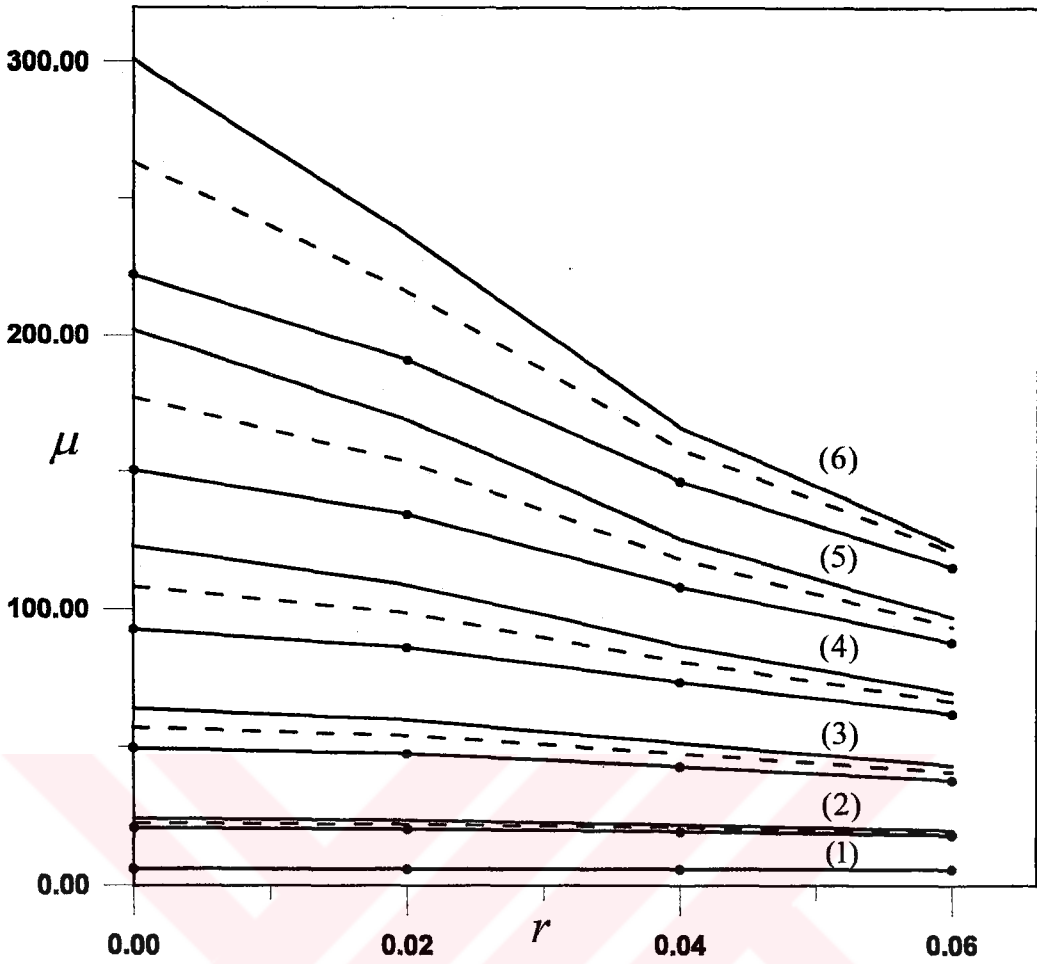
Şekil 4.6: Dönen Timoshenko Kiriş Frekanslarının Dönme Hızı ve Daralma Oranına Bağlı Olarak Değişimi ($c = 0$, ———; $c = 0.25$, - - - - -; $c = 0.5$, ●●●●●)

Dönen, düzgün bir Timoshenko kirişin ilk dört frekansının, dönme ataleti parametresi, r ve dönme hızı parametresi, η 'ya bağlı olarak aldığı farklı değerler, Tablo 4.7'de **Banerjee (2001)** ile karşılaştırma yapılarak $c_h = 0$, $k = 2/3$, $E/G = 8/3$, $\delta = 0$ değerleri için verilmektedir. Tablo 4.7 incelendiğinde frekansların dönme hızı ile artmasının yanı sıra, dönme atalet etkisinin, frekanslar üzerinde azaltıcı bir etkiye sahip olduğu görülmektedir. Buna göre, aynı özelliklere sahip bir Euler-Bernoulli kirişi ile bir Timoshenko kiriş karşılaştırıldığında Euler-Bernoulli kirişinin frekanslarının daha yüksek değerler aldığı görülür.

Tablo 4.7: Dönen Düzgün Timoshenko Kirişin Frekanslarının, Dönme Atalet Etkisi ve Dönme Hızına Bağlı Olarak Değişimi

Doğal Frekans Parametresi (μ)						
η	0		4		8	
r	Biz	Banerjee (2001)	Biz	Banerjee (2001)	Biz	Banerjee (2001)
0	3.51605	3.516	5.58504	5.585	9.25688	9.2568
	22.0338	-	24.2727	-	29.9947	-
	61.6944	-	63.9640	-	70.2902	-
	120.896	-	123.2550	-	130.043	-
0.02	3.49984	3.4998	5.56162	5.5616	9.20963	9.2096
	21.354	-	23.6055	-	29.3209	-
	57.4683	-	59.8095	-	66.2727	-
	106.922	-	109.455	-	116.6610	-
0.04	3.45271	3.4527	5.49515	5.4951	9.08548	9.0854
	19.6492	-	21.9553	-	27.7078	-
	48.8878	-	51.4808	-	58.4493	-
	84.1113	-	87.1815	-	95.6401	-
0.06	3.37877	3.3787	5.39547	5.3954	8.92089	8.9208
	17.5467	-	19.966	-	25.8359	-
	40.7439	-	43.7356	-	51.4145	-
	66.3613	-	70.1287	-	79.9402	-
0.08	3.28375	3.2837	5.27491	5.2749	8.7456	8.7456
	15.4882	-	18.0627	-	24.0478	-
	34.300	-	37.7312	-	45.9678	-
	53.6513	-	57.9488	-	67.8216	-
0.1	3.17382	3.1738	5.14487	5.1448	8.57356	8.5735
	13.6606	-	16.39460	-	22.3507	-
	29.3611	-	33.17900	-	41.4631	-
	43.9105	-	47.81080	-	53.2851	-

Dönme atalet etkisinin frekanslar üzerindeki azaltıcı etkisi, Şekil 4.6'da daha açık olarak görülmektedir. Bu şekilde frekansların, dönme atalet etkisine ve daralma oranına bağlı olarak değişimi $\eta = 4$, $k = 2/3$, $E/G = 8/3$, $\delta = 0$ değerleri için verilmektedir. Şekil 4.7'de görüldüğü gibi dönme atalet etkisi, yüksek modlarda baskın olup yüksek frekansları daha belirgin şekilde azaltırken düşük frekanslar üzerindeki etkisi azdır. Bu beklenen bir sonuçtur çünkü Timoshenko kiriş teorisi, özellikle yüksek modlarda etkin olan bir teoridir.



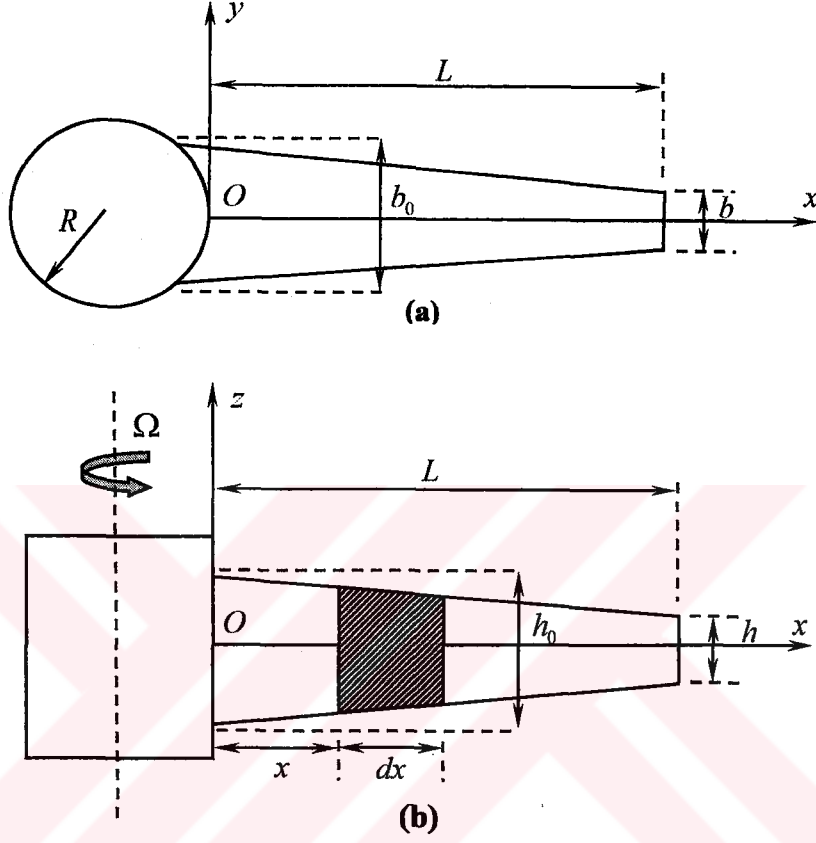
Şekil 4.7: Dönen Timoshenko Kirişi Frekanslarının Dönme Atalet Etkisi ve Daralma Oranına Bağlı Olarak Değişimi ($c = 0$, ———; $c = 0.25$, - - - - - ; $c = 0.5$, ●●●●●)

4.3. Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Timoshenko Kirişin Düzlemsiz Eğilme Titreşiminin İncelenmesi

Bu bölümde, dönen ve iki düzlemde doğrusal olarak daralan Timoshenko kirişin eğilme titreşiminin incelenmesi yapılmaktadır. Hareket denklemlerinin çıkarımı, Bölüm 2.2.1.2’de düzgün Timoshenko kiriş için detaylı olarak yapılmıştır ve elde edilen denklemlerin çözümü, Bölüm 3’te detayları anlatılan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Differential Transform Method-DTM) kullanılarak elde edilmiştir. Çalışma içerisinde geçen çeşitli parametrelerin frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar, çeşitli tablolarda ve grafiklerde sunularak literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmalar yapılmıştır ve sonuçlar arasında oldukça iyi bir uyum olduğu gözlenmiştir.

4.3.1. Kiriş modeli

Bu çalışmada kullanılan kiriş modeli, Şekil 4.8’de gösterilmektedir. Modelin geometrisi ve kullanılan kartezyen koordinat sistemi, Bölüm 4.1.1’dekilerle aynıdır; ama burada Euler-Bernoulli yerine Timoshenko kiriş incelenmiştir.



Şekil 4.8: İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişinin (a) Üstten Görünüşü (b) Yandan Görünüşü

4.3.2. Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler

Bölüm 2.2.1.2’de çıkarımı detaylı bir biçimde yapılan dönen, düzgün Timoshenko kirişinin düzlemsiz eğilme hareketi denklemleri ve sınır şartları (4.13a)-(4.14b) no’lu denklemlerle verilmiştir. Ayrıca, düzlemsiz eğilme deplasmanı, $w(x,t)$ ve bu deplasmandan kaynaklanan eğilme açısı, $\varphi(x,t)$ için yapılan basit harmonik hareket kabulleri sonucu hareket denklemlerinin aldığı son haller, denklemler (4.16a) ve (4.16b)’de gösterilmiştir. Bu bölümde bu denklemlere, iki yönde daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler uygulanmaktadır.

Kirişin genişliği, $b(x)$, kalınlığı, $h(x)$, kesit alanı, $A(x)$ ve alan atalet momenti, $I(x)$, iki düzlemde daralan bir giriş için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$b(x) = b_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L} \right)^m \quad (4.23a)$$

$$h(x) = h_0 \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^n \quad (4.23b)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L} \right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^n \quad (4.23c)$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - c_b \frac{x}{L} \right)^m \left(1 - c_h \frac{x}{L} \right)^{3n} \quad (4.23d)$$

Buradaki genişlik daralma oranı, c_b , kalınlık daralma oranı, c_h , kök bölgesindeki kesit alanı, $A_0(x)$, ve atalet momenti, $I_0(x)$ ifadeleri sırasıyla (4.6a)-(4.7b) denklemleriyle verilmiştir.

Denklemleri basitleştirebilmek ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırma yapabilmek için kullanılan boyutsuz ifadeler, aşağıdaki gibi tanımlanır (**Banerjee, 2001**).

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad \tilde{w}(\xi) = \frac{\bar{w}}{L}, \quad r^2 = \frac{I_0}{A_0 L^2},$$

$$s^2 = \frac{EI_0}{kA_0 GL^2}, \quad \eta^2 = \frac{\rho A_0 L^4 \Omega^2}{EI_0}, \quad \mu^2 = \frac{\rho A_0 L^4 \omega^2}{EI_0} \quad (4.24)$$

Boyutsuz parametreler ve daralan giriş formülleri, denklem (2.2) ile verilen merkezkaç kuvveti ifadesinde yerine koyularak bu kuvvetin boyutsuz denklemi elde edilir. Daralan giriş formülleri, boyutsuz parametreler ve boyutsuz merkezkaç kuvveti ifadesi, (4.16a) ve (4.16b) no'lu denklemlerinde yerlerine koyulursa boyutsuz hareket denklemleri, doğrusal daralma durumu ($m=1$, $n=1$) için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{c_h c_h}{4} + \delta - \frac{1}{2}(c_h \delta + c_h \delta - 1) - \frac{1}{3}(c_h + c_h \delta - c_h c_h \delta) - \xi \delta + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\xi^2}{2}(c_h \delta + c_h \delta - 1) + \frac{\xi^3}{3}(c_h + c_h \delta - c_h c_h \delta) + \frac{\xi^4}{4} c_h c_h \right) \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \right] + \\ & \left(\frac{\mu}{\eta} \right)^2 (1 - c_h \xi)(1 - c_h \xi) \tilde{w} + \left(\frac{1}{s\eta} \right)^2 \frac{d}{d\xi} \left[(1 - c_h \xi)(1 - c_h \xi) \left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi} - \bar{\varphi} \right) \right] = 0 \quad (4.25a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[(1 - c_h \xi)(1 - c_h \xi)^3 \frac{d\bar{\varphi}}{d\xi} \right] + r^2 (\mu^2 + \eta^2) (1 - c_h \xi)(1 - c_h \xi)^3 \bar{\varphi} + \\ & \frac{1}{s^2} (1 - c_h \xi)(1 - c_h \xi) \left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi} - \bar{\varphi} \right) = 0 \quad (4.25b) \end{aligned}$$

Denklemler (4.14a) ve (4.14b)'ye boyutsuz parametreler uygulanarak boyutsuz sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\xi = 0 \text{ 'da} \quad \varphi = 0 \text{ ve } \tilde{w} = 0 \quad (4.26a)$$

$$\xi = 1 \text{ 'de} \quad \frac{d\tilde{w}}{d\xi} - \varphi = 0 \quad (4.26b)$$

4.3.3. Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması

Bölüm 3'te detayları anlatılan diferansiyel dönüşüm yöntemi, denklemler (4.25a) ve (4.25b) ile verilen boyutsuz hareket denklemlerine uygulanırsa aşağıdaki dönüştürülmüş ifadelerle ulaşılır.

$$\begin{aligned} & (k+1) \left\{ -\frac{1}{s^2 \eta^2} \varphi[k+1] + \frac{c_h + c_h}{s^2 \eta^2} \varphi[k] - \frac{c_h c_h}{s^2 \eta^2} \varphi[k-1] \right\} + \left[\frac{1+2\delta}{2} + \frac{1}{s^2 \eta^2} - \right. \\ & \left. \frac{(2+3\delta)}{6} (c_h + c_h) + \frac{(3+4\delta)}{12} c_h c_h \right] (k+1)(k+2) W[k+2] + \left\{ k(k+1) \left[\frac{(c_h + c_h) \delta}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{c_h c_h}{s^2 \eta^2} - \frac{1}{2} \right] + \frac{\mu^2}{\eta^2} \right\} W[k] - (k+1)^2 \left(\delta + \frac{c_h + c_h}{s^2 \eta^2} \right) W[k+1] + \left[\frac{(k^2 - 1)}{3} (c_h + c_h + \delta c_h c_h) - \right. \\ & \left. (c_h + c_h) \frac{\mu^2}{\eta^2} \right] W[k-1] + \left[\frac{\mu^2}{\eta^2} - \frac{(k+1)(k+2)}{4} \right] c_h c_h W[k-2] = 0 \quad (4.27a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (k+1)(k+2)\varphi[k+2] - (c_h + 3c_h)(k+1)^2\varphi[k+1] + [3c_h(c_h + c_h)k(k+1) - \\
& \frac{1}{s^2} + r^2(\mu^2 + \eta^2)]\varphi[k] - \left[c_h^2(k^2 - 1)(3c_h + c_h) - \frac{c_h + c_h}{s^2} + \right. \\
& \left. r^2(\mu^2 + \eta^2)(c_h + 3c_h) \right]\varphi[k-1] + \left[c_h c_h^3(k+1)(k-2) - \frac{c_h c_h}{s^2} + \right. \\
& \left. 3c_h(c_h + c_h)r^2(\mu^2 + \eta^2) \right]\varphi[k-2] - [c_h c_h^3 r^2(\mu^2 + \eta^2)\varphi[k-4] + \\
& c_h^2(3c_h + c_h)r^2(\mu^2 + \eta^2)]\varphi[k-3] + \frac{(k+1)}{s^2}W[k+1] - \\
& \frac{(c_h + c_h)k}{s^2}W[k] + \frac{c_h c_h(k-1)}{s^2}W[k-1] = 0
\end{aligned} \tag{4.27b}$$

Denklemler (4.14a) ve (4.14b)'ye Tablo 3.1'de yer alan DTM kuralları uygulanarak dönüştürülmüş sınır koşulları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\xi = 0 \text{ 'da} \quad W[0] = \varphi[0] = 0 \tag{4.28a}$$

$$\xi = 1 \text{ 'de} \quad \sum_{k=0}^{\infty} [kW[k] - \varphi[k]] = 0 \tag{4.28b}$$

4.3.4. Sonuçlar

Diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak elde edilen denklemler, Mathematica bilgisayar programında kodlanarak hesaplamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçların doğrulunu kontrol etmek amacıyla literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılmalar yapılarak, gerekli tablolar ve grafikler oluşturulmuştur. Daralma oranları, c_h ve c_h , dönme hızı, η , rotor kafası yarıçapı, δ ve dönme atalet etkisi, r için kullanılan parametrelerin, doğal frekanslar üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

İki düzlemde daralan ve dönmeyen Timoshenk kiriş modelinin ilk dört frekansının, genişlik ve kalınlık daralma oranlarına bağlı olarak aldığı değerler Tablo 4.8- 4.11'de $r = 0.08$, $E/kG = 3.059$, $\delta = 0$ değerleri için sunulmaktadır. Elde edilen sonuçlar, **Downs (1977)**'nin sonuçları ile karşılaştırıldığında sonuçlar arasındaki uyumun çok iyi olduğu görülmektedir.

Tablo 4.8: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Birinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

$\frac{C_b}{C_h}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	3.32404	3.42876	3.5485	3.68722	3.85054	4.04668	4.28828
	3.32405 [§]	-	-	3.68723 [§]	-	-	4.28829 [§]
0.1	3.37103	3.47604	3.59611	3.73525	3.89908	4.09587	4.33837
0.2	3.42466	3.52998	3.65042	3.78999	3.95437	4.15186	4.39529
0.3	3.48689	3.59255	3.7134	3.85345	4.0184	4.21664	4.46106
	3.48689 [§]	-	-	3.85346 [§]	-	-	4.46107 [§]
0.4	3.56054	3.66661	3.78791	3.9285	4.0941	4.29314	4.5386
0.5	3.64998	3.75653	3.87837	4.01957	4.1859	4.38582	4.63241
0.6	3.76227	3.86943	3.99193	4.13388	4.30106	4.50198	4.74978
	3.76228 [§]	-	-	4.13389 [§]	-	-	4.74979 [§]

Tablo 4.9: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin İkinci Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

$\frac{C_b}{C_h}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	16.2889	16.4625	16.6561	16.875	17.127	17.4242	17.7869
	16.289 [§]	-	-	16.8752 [§]	-	-	17.7871 [§]
0.1	16.1054	16.2738	16.4618	16.6746	16.9199	17.2098	17.5646
0.2	15.8905	16.0538	16.2362	16.4429	16.6816	16.9642	17.311
0.3	15.6409	15.799	15.9758	16.1764	16.4085	16.6839	17.0227
	15.6411 [§]	-	-	16.1766 [§]	-	-	17.0229
0.4	15.3528	15.5057	15.6769	15.8715	16.097	16.3651	16.6961
0.5	15.0221	15.1697	15.3354	15.5239	15.7427	16.0037	16.3267
0.6	14.6448	14.7872	14.9472	15.1296	15.3418	15.5954	15.9106
	14.6449 [§]	-	-	15.1297 [§]	-	-	15.9107 [§]

[§] (Downs, 1977)

Tablo 4.10: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Üçüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

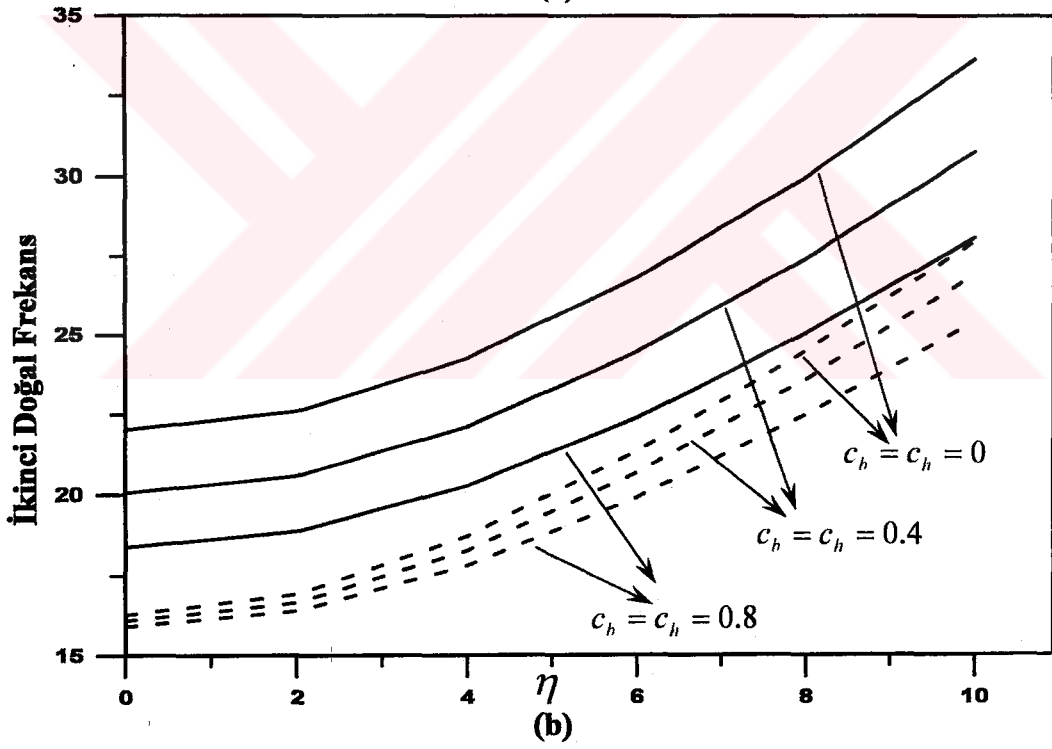
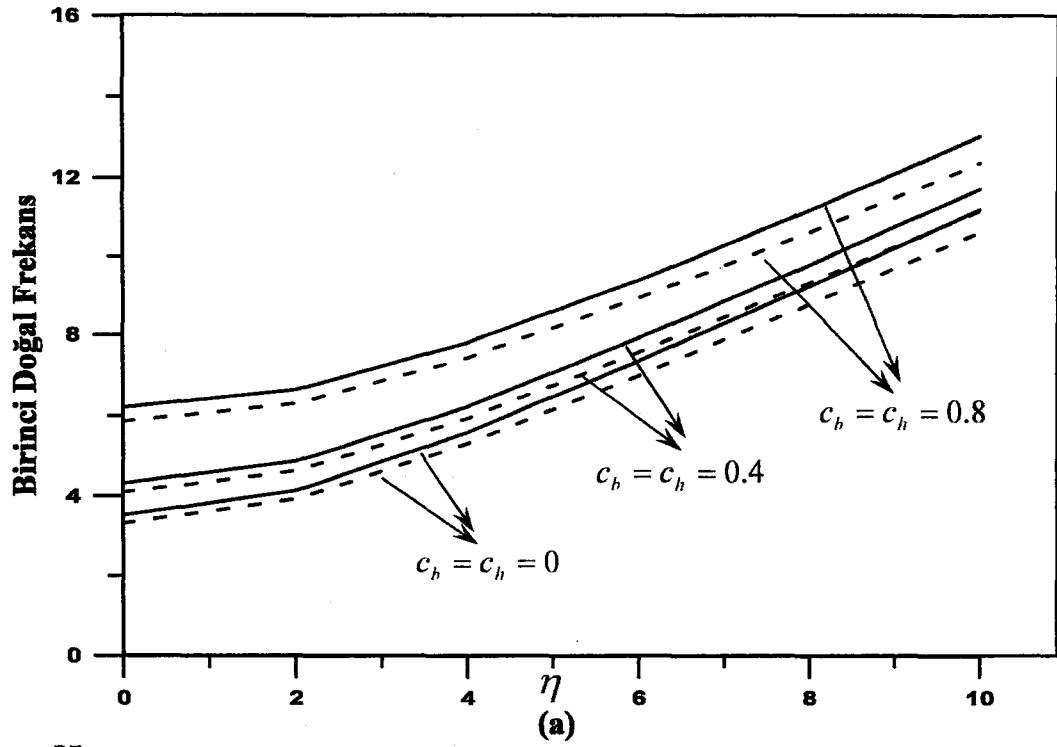
$\begin{matrix} C_b \\ C_h \end{matrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	36.7073	36.8384	36.9869	37.1583	37.3608	37.6076	37.9216
	36.7078 [§]	-	-	37.1588 [§]	-	-	37.9221 [§]
0.1	36.1078	36.2379	36.385	36.5544	36.7541	36.9971	37.3058
0.2	35.4301	35.5595	35.7054	35.8731	36.0704	36.3101	36.6141
0.3	34.6621	34.7909	34.9359	35.1022	35.2975	35.5342	35.8342
	34.6625 [§]	-	-	35.1026 [§]	-	-	35.8346 [§]
0.4	33.7876	33.9159	34.0602	34.2253	34.4189	34.6531	34.9495
0.5	32.7849	32.9128	33.0565	33.2207	33.4128	33.6448	33.9379
0.6	31.6239	31.7515	31.8945	32.0578	32.2486	32.4786	32.7688
	31.6243 [§]	-	-	32.0582 [§]	-	-	32.7693 [§]

Tablo 4.11: Dönmeyen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin Dördüncü Doğal Frekansının Daralma Oranları ile Değişimi

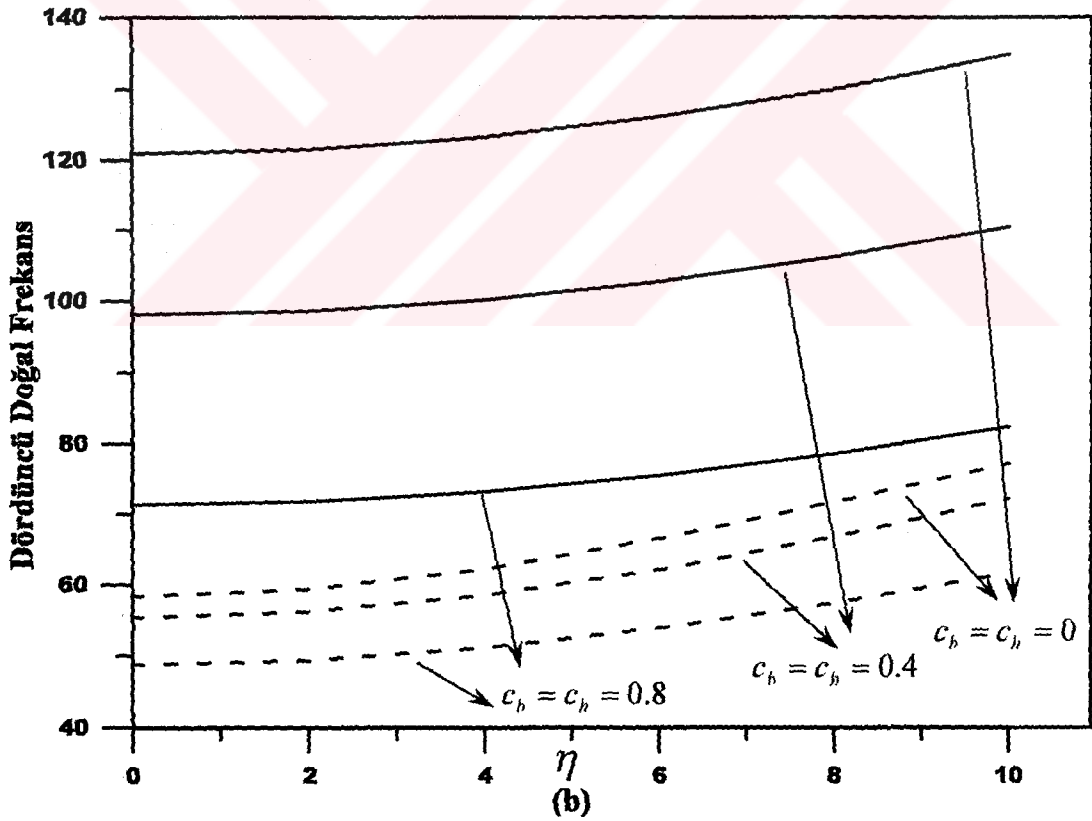
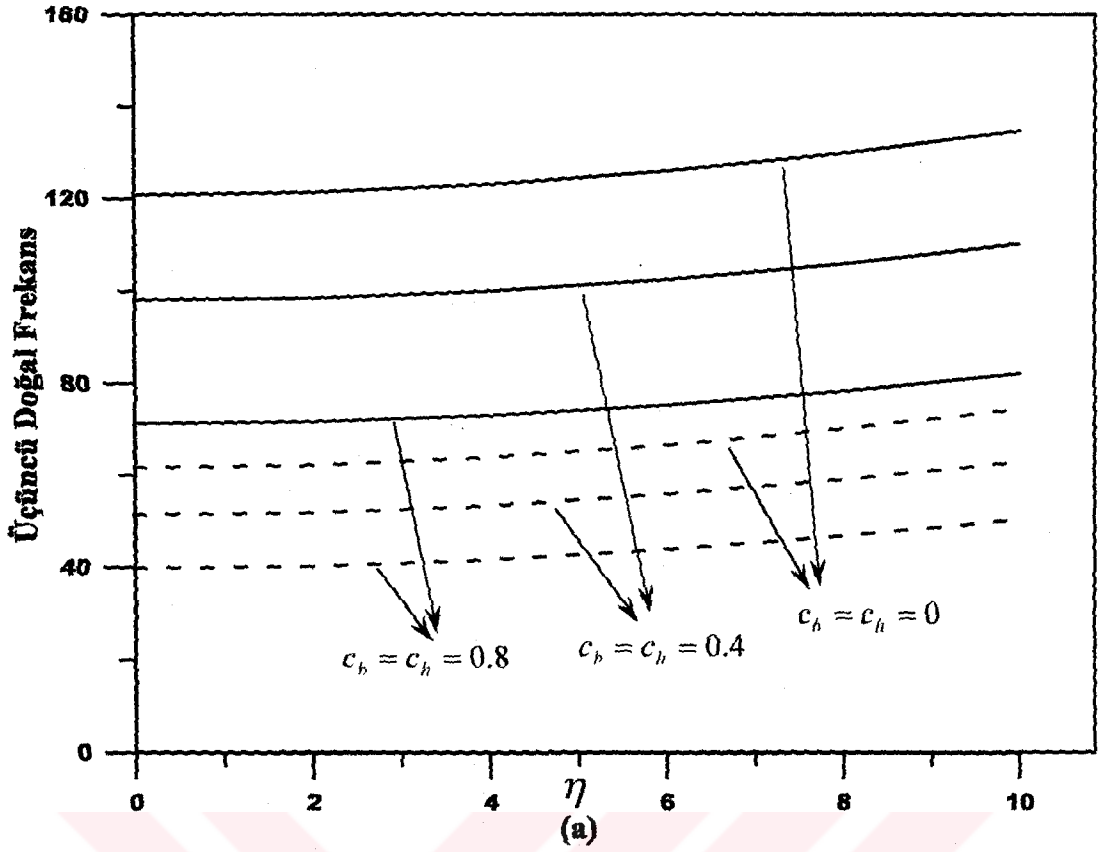
$\begin{matrix} C_b \\ C_h \end{matrix}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	58.2778	58.394	58.5281	58.6862	58.8777	59.1179	59.4326
	58.2788 [§]	-	-	58.6872 [§]	-	-	59.4336 [§]
0.1	57.6705	57.7838	57.9139	58.0664	58.2502	58.4795	58.7789
0.2	56.891	57.0023	57.1293	57.2775	57.4552	57.6759	57.963
0.3	55.9271	56.0371	56.1621	56.3072	56.4803	56.6943	56.9717
	55.9280 [§]	-	-	56.3081 [§]	-	-	56.9726 [§]
0.4	54.7561	54.8654	54.9893	55.1324	55.3024	55.5115	55.7815
0.5	53.3407	53.4502	53.5737	53.7159	53.884	54.0897	54.3543
0.6	51.6225	51.7327	51.8566	51.9987	52.166	52.3699	52.6309
	51.6225 [§]	-	-	51.9995 [§]	-	-	52.6316 [§]

İlk dört frekansın, daralma oranlarına ve dönme hızı parametresine göre değişimi, Şekil 4.9(a-b) ve Şekil 4.10(a-b)'de $\delta = 0$; $r = 0.08$; $\nu = 0.3$; $k = 0.85$ değerleri için sunulmaktadır. Burada, kirişin genişlik ve kalınlık daralma oranları aynıdır. Şekillerde görüldüğü gibi dönme hızı parametresinin artmasıyla doğal frekanslar daha yüksek değerler almaktadır ve bu artış, her daralma oranında oluşmaktadır. Bölüm 4.1.5'te bu konuda daha detaylı açıklamalar yapılmıştır.

[§] (Downs, 1977)



Şekil 4.9: Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Kirişlerin (a) Birinci (b) İkinci Frekanslarının Dönme Hızı Parametresine ve Daralma Oranlarına Bağlı Olarak Değişimi (Euler-Bernoulli, — ; Timoshenko, - - -)



Şekil 4.10: Dönen ve İki Düzlemde Doğrusal Daralan Kirişlerin (a) Üçüncü (b) Dördüncü Frekanslarının Dönme Hızı Parametresine ve Daralma Oranlarına Bağlı Olarak Değişimi (Euler-Bernoulli, — ; Timoshenko, - - -)

Şekil 4.9 ve Şekil 4.10’da, hem Timoshenko hem de Euler-Bernoulli kirişinin frekanslarına yer verilmiştir. Böylece, Bölüm 4.2.5’te anlatılan Timoshenko etkisinin frekanslar üzerindeki azaltıcı etkisi daha açık bir biçimde gözlenmektedir.

Dönen düzgün Timoshenko kirişin doğal frekanslarının rotor kafası yarıçapına bağlı olarak değişimi Tablo 4.12’de $c_h = c_{\theta} = 0$, $r = 0.08$; $\nu = 0.3$; $k = 0.85$ değerleri için verilmektedir. Daha önce Bölüm 4.1.5’te açıklanan nedenlerden ötürü rotor kafası yarıçapı arttıkça frekansların değeri artmaktadır.

Tablo 4.12: Dönen Düzgün Timoshenko Kirişin Doğal Frekanslarının Rotor Kafası Yarıçapı Parametresine Bağlı Olarak Değişimi

Doğal Frekans Parametresi (μ)						
δ	η					
	0	2	4	6	8	10
0	3.32404	3.927	5.315	7.00046	8.79514	10.6387
	16.2889	16.9332	18.7229	21.3446	24.4975	27.9663
	36.7073	37.5187	39.814	43.2611	47.4915	52.1945
	58.2778	59.2885	62.1485	66.4265	71.5894	77.0876
	80.2111	81.3459	84.4971	88.9518	93.5599	97.0735
	94.4493	94.9379	96.1545	97.7625	99.9271	103.12
0.5	3.32404	4.28779	6.31499	8.64996	11.0889	13.5759
	16.2889	17.3725	20.2397	24.1858	28.6885	33.4507
	36.7073	38.1056	41.8975	47.2526	53.4361	59.9464
	58.2778	60.0311	64.7774	71.3748	78.5839	85.1187
	80.2111	82.1753	87.2919	93.4369	97.9724	101.606
	94.4493	95.2801	97.173	99.848	104.093	108.569
1	3.32404	4.61936	7.17219	10.0259	12.9776	15.9748
	16.2889	17.7989	21.6288	26.6611	32.2131	37.9449
	36.7073	38.6782	43.823	50.7424	58.3924	66.1418
	58.2778	60.7553	67.1914	75.561	83.765	89.7333
	80.2111	82.9784	89.7234	96.3626	100.792	106.146
	94.4493	95.5987	98.0921	102.139	107.604	112.075

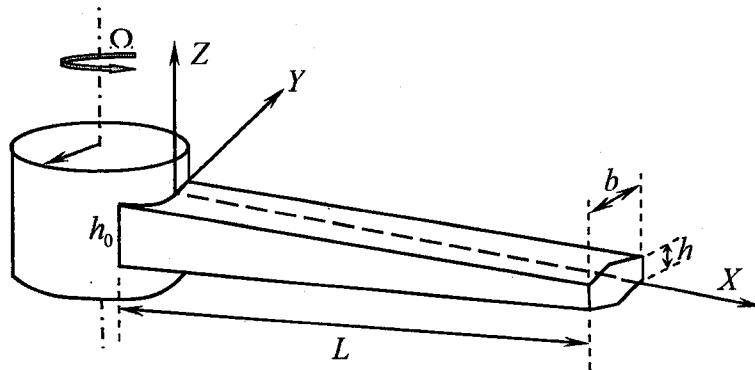
4.4. Dönen, İki Düzlemde Doğrusal Daralan ve Eğilme-Burulma Etkileşimli Timoshenko Kirişinin Titreşim İncelemesi (Özdemir ve Kaya, 2005b)

Bu bölümde; dönen, iki düzlemde doğrusal daralan ve düzlemsiz eğilme hareketi ile burulma hareketi arasında etkileşime sahip deltoid kesitli Timoshenko kirişin titreşim incelemesi yapılmıştır. Hareket denklemleri, Hamilton prensibi uygulanarak elde edilmiştir ve hareket denkleminin çözümü için Bölüm 3’te anlatılan Diferansiyel

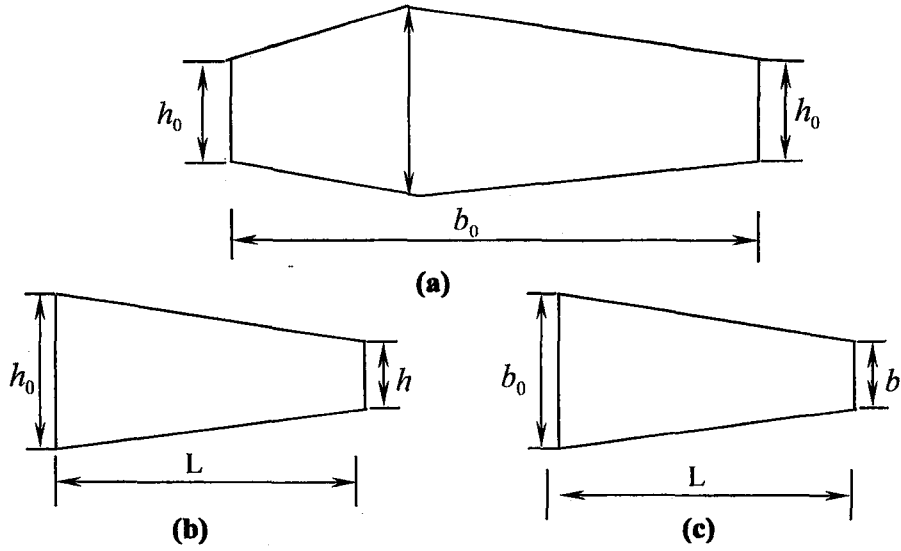
Dönüşüm Yöntemi (Differential Transform Method-DTM) kullanılmıştır. Literatürde iki düzlemde daralan, eğilme-burulma etkileşimli Timoshenko kiriş örneği bulunamadığı için bu çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğunu kanıtlamak amacıyla çözümü yapılan kiriş, ABAQUS sonlu elemanlar programı kullanılarak modellenip elde edilen sonuçlar, ABAQUS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, literatürdeki çalışmaların içerdiği dönmeyen ya da daralmayan etkileşimli kirişler için elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır. Bunlara ek olarak, mod şekilleri çizdirilmiştir.

4.4.1. Kiriş modeli

Bölüm 4.4.2’de çıkarımı yapılacak olan hareket denklemleri için Şekil 4.11’de gösterilen kiriş modeli kullanılmıştır. Şekilde, sabit Ω açısal hızı ile dönen R yarıçaplı rijit bir rotor kafasına O ile gösterilen kök bölgesinden ankastre olarak bağlanmış L uzunluğunda bir Timoshenko kiriş görülmektedir. Kiriş, xz düzleminde h_0 ’dan h ’a ve xy düzleminde b_0 ’dan b ’ye kadar doğrusal olarak daralmaktadır. Şekil 4.12’de kirişin farklı açılardan görüntüleri yer almaktadır. Kiriş kesidi, y eksenine göre simetrik; ama z eksenine göre simetrik değildir. Bu nedenle, kiriş kesit alanı merkezi ile elastik eksen arasında e_1 kadar bir açıklık vardır ve iki eksen çakışmamaktadır. Düzlemsiz eğilme hareketi ile burulma hareketinin birbirleri ile etkileşim içinde olmasının nedeni bu e_1 açıklığıdır.



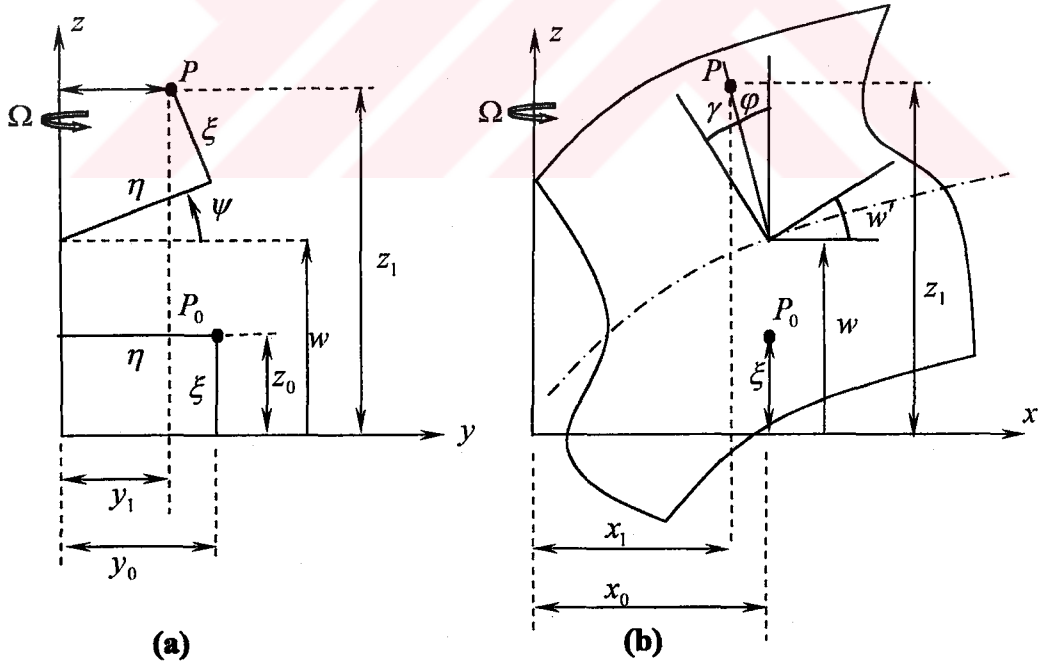
Şekil 4.11: İki Düzlemde Daralan, Dönen, Eğilme-Burulma Etkileşimli Timoshenko Kiriş



Şekil 4.12: İki Düzlemde Daralan, Deltoid Kesitli Timoshenko Kirişin (a) Kök Bölgesindeki Kesidi (b) Yandan Görünüşü (c) Üstten Görünüşü

4.4.2. Hareket denklemlerinin Hamilton yöntemi ile çıkarımı

Dönen ve düzlemsiz eğilme-burulma etkileşimine sahip Timoshenko kirişi hareket denkleminin çıkarımında Şekil 4.13.(a) ve 4.13.(b)'den yararlanılır.



Şekil 4.13: Dönen ve Eğilme-Burulma Etkileşimli Timoshenko Kirişinin Deplasman Öncesinde ve Sonrasında (a) Kesidi (b) Yandan Görünüşü

Şekil 4.13.(a)'da verilen kiriş kesidi ve Şekil 4.13.(b)'de verilen kiriş yandan görünüşü kullanılarak referans noktanın, deplasman öncesi ve sonrasındaki koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Referans noktanın deplasmandan önceki koordinatları:

$$x_0 = R + x \quad (4.29a)$$

$$y_0 = \eta \quad (4.29b)$$

$$z_0 = \xi \quad (4.29c)$$

Referans noktanın deplasmandan sonraki koordinatları:

$$x_1 = R + x + u - (\xi \cos \psi + \eta \sin \psi) \phi \quad (4.30a)$$

$$y_1 = \eta \cos \psi - \xi \sin \psi \quad (4.30b)$$

$$z_1 = w + \eta \sin \psi + \xi \cos \psi \quad (4.30c)$$

4.4.2.1. Potansiyel enerji formülasyonu

Potansiyel enerji hesabında burulma için küçük açı kabulü yapılırsa, $\cos \phi \cong 1$ ve $\sin \phi \cong \phi$ olarak alınabilir ve denklemler (4.30a)-(4.30c), aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$x_1 = R + x + u - (\xi + \eta \psi) \phi \quad (4.31a)$$

$$y_1 = \eta - \xi \psi \quad (4.31b)$$

$$z_1 = w + \eta \psi + \xi \quad (4.31c)$$

Denklem (2.3)'te yerlerine koyulmak üzere denklemler (4.29a)-(2.31c) ile verilen koordinatların türevleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$dx_0 = dx \quad (4.32)$$

$$dy_0 = d\eta \quad (4.32b)$$

$$dz_0 = d\xi \quad (4.32c)$$

$$dx_1 = [1 + u' - (\xi + \eta\psi)\varphi' - \eta\psi'\varphi]dx - \varphi d\xi - \psi\varphi d\eta \quad (4.33a)$$

$$dy_1 = -(\xi\psi')dx + d\eta - \psi d\xi \quad (4.33b)$$

$$dz_1 = (w' + \eta\psi')dx + \psi d\eta + d\xi \quad (4.33c)$$

Bu türevler, denklem (2.3)'te yerlerine koyularak ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ ifadeleri hesaplanır. Elde edilen ifadelerin içinde yer alan küçük terimler, Tablo 2.5 ile verilen merteye şemasına göre ihmal edilerek aşağıdaki basit ifadelere ulaşılır.

$$\gamma_{xx} = \varepsilon_{xx} = u' - \xi\varphi' + \frac{w'^2}{2} + (\eta^2 + \xi^2)\frac{\psi'^2}{2} \quad (4.34a)$$

$$\gamma_{x\eta} = -\xi\psi' \quad (4.34b)$$

$$\gamma_{x\xi} = (w' - \varphi) + \eta\psi' \quad (4.34c)$$

Denklem (2.8) ile verilen potansiyel enerji ifadesi doğrultusunda hesap yapılarak (4.34a)-(4.34c) no'lu denklemlerdeki ifadelerin kareleri alınır ve Tablo 2.5 ile verilen merteye şemasına göre küçük olan terimler ihmal edilir. Sonuçta ulaşılan basitleştirilmiş ifadeler, denklem (2.8)'de yerlerine koyulup Tablo 2.2'deki alan integralleri kullanılırsa potansiyel enerji ifadesinin son haline ulaşılır.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EA(u')^2 + EAu'(w')^2 + EI_y(\varphi')^2 + \frac{T}{A\rho} I_a(\psi')^2 + GJ(\psi')^2 + kAG(w' - \varphi)^2 \right] dx \quad (4.35)$$

4.4.2.2. Kinetik enerji formülasyonu

Kinetik enerji hesabında burulma açısı ϕ , potansiyel enerji hesabından farklı olarak $\cos\phi \cong 1 - \phi^2/2$ şeklinde ifade edilir çünkü hareket denklemlerinin son halinde yer alması gereken bazı önemli terimler, $\cos\phi \cong 1 - \phi^2/2$ 'nin kullanımı ile ortaya çıkmaktadır. Bu durumda (4.30a)-(4.30c) no'lu denklemler, aşağıdaki gibi yeniden tanımlanır.

$$x_1 = R + x + u - \left[\xi \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) + \eta \psi \right] \phi \quad (4.36a)$$

$$y_1 = \eta \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) - \xi \psi \quad (4.36b)$$

$$z_1 = w + \eta \psi + \xi \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) \quad (4.36c)$$

Kinetik enerji hesabında deplasman hızlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Dönen kirişin hız vektörü, denklem (2.30) ile verilmektedir. Deplasman hızı bileşenleri, (4.36a)-(4.36c) no'lu denklemlerdeki deplasmanların zamana göre türevleri alınarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$V_x = \dot{x}_1 = \dot{u} + (\xi \psi \dot{\psi} - \eta \dot{\psi}) \phi - \left[\xi \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) + \eta \psi \right] \dot{\phi} \quad (4.37a)$$

$$V_y = \dot{y}_1 = -(\eta \psi + \xi) \dot{\psi} + \left\{ (R + x) + u - \left[\xi \left(1 - \frac{\psi^2}{2} \right) + \eta \psi \right] \phi \right\} \Omega \quad (4.37b)$$

$$V_z = \dot{z}_1 = \dot{w} + (\eta - \xi \psi) \dot{\psi} \quad (4.37c)$$

Denklem (2.12) ile verilen kinetik enerji hesabı doğrultusunda, denklemler (4.37a)-(4.37c)'deki hız bileşenlerinin kareleri alınır ve Tablo 2.5'teki mertebe şemasından yararlanılarak çok küçük terimler ihmal edilir. Sadeleştirilen ifadeler, denklem (2.12)'de yerlerine koyularak ve Tablo 2.3'teki alan integralleri kullanılır. Burada önemli olan nokta, daha önceki etkileşimsiz örneklerde $\int_A \rho \eta \xi d\eta d\xi = 0$ olarak

tanımlanan ifadenin bu bölümde $\int_A \rho \eta \xi d\eta d\xi = me$ olarak tanımlanmasıdır. Sonuçta,

dönen, eğilme-burulma etkileşimli Timoshenko kirişin kinetik enerji ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \rho I_y \left[\Omega^2 (\phi^2 + \psi^2) + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\Omega(\phi\dot{\psi} - \psi\dot{\phi}) \right] + \right. \\ & \rho I_z \left[\Omega^2 - \Omega^2 \psi^2 + \dot{\psi}^2 + 2\Omega(\phi\dot{\psi} + \psi\dot{\phi}) \right] + \\ & \left. 2\rho A e_1 \left[\dot{\psi}\dot{\psi} - (R+x)\psi\dot{\psi}\Omega - (R+x)\phi\dot{\psi}\Omega^2 \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (4.38)$$

4.4.2.3. Hamilton prensibinin uygulanması

Denklem (2.14) ile verilen Hamilton prensibi, yukarıda çıkarımı yapılan potansiyel ve kinetik enerji ifadelerine uygulanır. Bu amaç doğrultusunda enerji varyasyonları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_0^L \left[(Tw')\delta w' + EI_y (\phi'\delta\phi') + kAG(w' - \phi)(\delta w' - \delta\phi) + \frac{T}{A\rho} I_a \psi' \delta\psi' \right. \\ & \left. + GJ\psi' \delta\psi' \right] dx \end{aligned} \quad (4.39a)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{I} = & \int_0^L \left\{ \rho A (\dot{w}\delta\dot{w}) + \rho I_y \left[\Omega^2 (\phi\delta\phi + \psi\delta\psi) + \dot{\psi}\delta\dot{\psi} + \dot{\phi}\delta\dot{\phi} + \Omega(\phi\delta\dot{\psi} + \right. \right. \\ & \dot{\psi}\delta\phi - \dot{\phi}\delta\psi - \psi\delta\dot{\phi}) \left. \right] + \rho I_z \left[-\Omega^2 \psi\delta\psi + \dot{\psi}\delta\dot{\psi} + \Omega(\phi\delta\dot{\psi} + \right. \\ & \dot{\psi}\delta\phi + \dot{\phi}\delta\psi + \psi\delta\dot{\phi}) \left. \right] + \rho A e_1 \left[\dot{\psi}\delta\dot{w} + \dot{w}\delta\dot{\psi} - (R+x)\Omega(\psi\delta\dot{\psi} + \right. \\ & \left. \dot{\psi}\delta\psi) - (R+x)\Omega^2 (\phi\delta\psi + \psi\delta\phi) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.39b)$$

4.4.3. Hareket denklemleri ve sınır şartları

Bu varyasyon ifadeleri denklem (2.14)'te yerlerine koyulur ve elde edilen ifadeden $\delta\phi$ ve δw 'nin katsayıları alınarak, dönen, eğilme-burulma etkileşimli, ankastre Timoshenko kirişinin serbest titreşim hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho A \ddot{w} + \rho A e \ddot{\psi} - (Tw')' - [kAG(w' - \phi)]' = 0 \quad (4.40a)$$

$$\begin{aligned} \rho I_{\eta\eta} \ddot{\phi} - \rho I_{\eta\eta} \Omega^2 \phi - (EI_{\eta\eta} \phi')' - kAG(w' - \phi) - 2\rho I_{\eta\eta} \Omega \dot{\psi} + \\ \rho A e \Omega^2 (R+x)\psi = 0 \end{aligned} \quad (4.40b)$$

$$\begin{aligned} I_a \ddot{\psi} + \rho A e \ddot{w} - \rho (I_{\eta\eta} - I_{\xi\xi}) \Omega^2 \psi - (GJ\psi')' - \left(T \frac{I_a}{\rho A} \psi' \right)' + 2\rho I_{\eta\eta} \Omega \dot{\phi} + \\ \rho A e \Omega^2 (R+x)\phi = 0 \end{aligned} \quad (4.40c)$$

Hamilton prensibinin uygulanması sonucu hareket denklemi ile birlikte sınır şartları da elde edilmektedir. Etkileşimli Timoshenko kirişin sınır şartları aşağıda verilmektedir.

$$[Tw' + kAG(w' - \theta)]\delta w \Big|_0^L = 0 \quad (4.41a)$$

$$\left(T \frac{I_a}{\rho A} + GJ\right)\varphi'\delta\varphi \Big|_0^L = 0 \quad (4.41b)$$

$$EI_{\eta\eta}\psi'\delta\psi \Big|_0^L = 0 \quad (4.41c)$$

Hareket denklemlerinin çözümü için ilk adım olarak basit harmonik hareket kabulü yapılarak serbestlik dereceleri, $w(x,t)$, $\varphi(x,t)$ ve $\psi(x,t)$, aşağıdaki gibi yazılır.

$$w(x,t) = \bar{w}(x)e^{i\omega t} \quad (4.42a)$$

$$\varphi(x,t) = \bar{\varphi}(x)e^{i\omega t} \quad (4.42b)$$

$$\psi(x,t) = \bar{\psi}(x)e^{i\omega t} \quad (4.42c)$$

Basit harmonik hareket ifadeleri, denklemler (4.40a)-(4.40c) ile verilen hareket denklemlerinde yerlerine konulursa aşağıdaki ifadelere ulaşılır.

$$\omega^2 \rho A \bar{w} + \omega^2 \rho A e \bar{\psi} + (T\bar{w}')' + [kAG(\bar{w}' - \bar{\varphi})]' = 0 \quad (4.43a)$$

$$\omega^2 \rho I_{\eta\eta} \bar{\varphi} + \rho I_{\eta\eta} \Omega^2 \bar{\varphi} + (EI_{\eta\eta} \bar{\varphi}')' + kAG(\bar{w}' - \bar{\varphi}) + 2i\omega \rho I_{\eta\eta} \Omega \bar{\psi} - \rho A e \Omega^2 (R+x) \bar{\psi} = 0 \quad (4.43b)$$

$$\omega^2 I_a \bar{\psi} + \omega^2 \rho A e \bar{w} + \rho (I_{\eta\eta} - I_{\xi\xi}) \Omega^2 \bar{\psi} + (GJ\bar{\psi}')' + \left(T \frac{I_a}{\rho A} \bar{\psi}'\right)' - 2i\omega \rho I_{\eta\eta} \Omega \bar{\varphi} - \rho A e \Omega^2 (R+x) \bar{\varphi} = 0 \quad (4.43c)$$

4.4.4. Daralan kiriş formülleri ve boyutsuz parametreler

Kiriş genişliği, $b(x)$, kiriş kalınlığı, $h(x)$, kesit kütle merkezi ile elastic eksen arasındaki mesafe, $e(x)$, kesit alanı, $A(x)$, atalet momenti, $I(x)$ ve burulma rijitliği $J(x)$, daralan kiriş formül için aşağıdaki gibi verilmektedir. Formüllerde sadece bir daralma oranı, $c_h = c_b = c$, kullanılmasının nedeni formülasyonda kolaylık sağlanmasıdır çünkü her iki düzlemde farklı daralma oranları alınınca, $c_h \neq c_b$, bu kesit şekline sahip kirişin burulma rijitliğinin hesaplanması için kullanılan formüller çok karmaşık bir hal almaktadır.

$$b(x) = b_0 \left(1 - c \frac{x}{L} \right) \quad (4.44a)$$

$$h(x) = h_0 \left(1 - c \frac{x}{L} \right) \quad (4.44b)$$

$$e_1(x) = e_0 \left(1 - c \frac{x}{L} \right) \quad (4.44c)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - c \frac{x}{L} \right)^2 \quad (4.44d)$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - c \frac{x}{L} \right)^4 \quad (4.44e)$$

$$J(x) = J_0 \left(1 - c \frac{x}{L} \right)^4 \quad (4.44f)$$

Denklemlerin basitleştirilmesi ve literatürdeki çalışmalarla karşılaştırma yapılabilmesi için kullanılan boyutsuz parametreler aşağıdaki gibidir.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{R}{L}, \quad \tilde{w}(\xi) = \frac{\bar{w}}{L}, \quad \bar{e} = \frac{e_0}{L}, \quad r^2 = \frac{I_0}{A_0 L^2}, \quad r_\alpha^2 = \frac{I_{\alpha 0}}{\rho A_0 L^2},$$

$$\eta^2 = \frac{\rho A L^4 \Omega^2}{EI_{\eta\eta 0}}, \quad \mu^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI_{\eta\eta 0}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{GJ_0}{EI_{\eta\eta 0}}, \quad s^2 = \frac{EI_{\eta\eta 0}}{k A_0 G L^2} \quad (4.45)$$

Boyutsuz parametreler ve daralan kiriş formülleri, denklem (2.2) ile verilen merkezkaç kuvveti ifadesinde yerine koyularak bu kuvvetin boyutsuz denklemi elde edilir. Daralan kiriş formülleri, boyutsuz parametreler ve boyutsuz merkezkaç kuvveti ifadesi, (4.43a) ve (4.43b) no'lu denklemlerinde yerlerine koyulursa boyutsuz hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left\{ [6 - 8c + 3c^2 + 4\delta(3 - 3c + c^2 - 3\xi) + (12c\delta - 6)\xi^2 + (8c - 4c^2\delta)\xi^3 - 3c^2\xi^4] \frac{d\tilde{w}}{d\xi} \right\} + \\ & 12 \left(\frac{\mu}{\eta} \right)^2 (1 - c\xi)^2 \tilde{w} + 12 \left(\frac{\mu}{\eta} \right)^2 \bar{e} (1 - c\xi)^3 \bar{\psi} + \frac{12}{s^2 \eta^2} \frac{d}{d\xi} \left[(1 - c\xi)^2 \left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi} - \bar{\varphi} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.46a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left[(1 - c\xi)^4 \frac{d\bar{\varphi}}{d\xi} \right] + r^2 (\mu^2 + \eta^2) (1 - c\xi)^4 \bar{\varphi} + \frac{(1 - c\xi)^2}{s^2} \left(\frac{d\tilde{w}}{d\xi} - \bar{\varphi} \right) + \\ & 2i\mu\eta r^2 (1 - c\xi)^4 \bar{\psi} - \bar{e} \eta^2 (1 - c\xi)^3 (\delta + \xi) \bar{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (4.46b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\xi} \left\{ [6 - 8c + 3c^2 + 4\delta(3 - 3c + c^2 - 3\xi) + 6\xi^2(2c\delta - 1) + \right. \\ & \left. 4\xi^3(2c - 1c^2\delta) - 3c^2\xi^4] (1 - c\xi)^4 \frac{d\bar{\psi}}{d\xi} \right\} + 12 \left(\frac{2r^2}{r_a^2} - 1 \right) (1 - c\xi)^4 \bar{\psi} + \\ & 12(1 - c\xi)^3 \left(\frac{\mu}{\eta} \right)^2 \left[(1 - c\xi) \bar{\psi} + \frac{\bar{e}}{r_a^2} \tilde{w} \right] + 12 \left(\frac{\varepsilon}{r_a \eta} \right)^2 \frac{d}{d\xi} \left[(1 - c\xi)^4 \frac{d\bar{\psi}}{d\xi} \right] - \\ & 24i(1 - c\xi)^4 \left(\frac{\mu}{\eta} \right) \left(\frac{r}{r_a} \right)^2 \bar{\varphi} - 12 \frac{\bar{e}}{r_a^2} (\delta + \xi) (1 - c\xi)^3 \bar{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (4.46c)$$

4.4.5. Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması

Boyutsuz hareket denklemlerinin çözümü için, Bölüm 3'te açıklaması yapılan DTM teoremleri kullanılarak diferansiyel dönüşüm yöntemi, (4.46a)-(4.46c) no'lu denklemlere uygulanınca aşağıdaki dönüştürülmüş hareket denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
& 4c \left[(k^2 - 1)(2 - c\delta) - 6\frac{\mu^2}{\eta^2} W[k-1] - 3c^2 \left[(k-2)(k+1) - 4\frac{\mu^2}{\eta^2} \right] W[k-2] + \left[6k \left(2c\delta + \frac{2c^2}{s^2\eta^2} - 1 \right) (k+1) + 12\frac{\mu^2}{\eta^2} \right] W[k] - \right. \\
& \left. 12 \left(\delta + \frac{2c}{s^2\eta^2} \right) (k+1)^2 W[k+1] + \left[(6-8c+3c^2) + 4\delta(3-3c+c^2) + \frac{12}{s^2\eta^2} \right] (k+1)(k+2) W[k+2] - \frac{12}{s^2\eta^2} (k+1) (\phi[k+1] - \right. \\
& \left. 2c\phi[k] + c^2\phi[k-1]) \right] - \frac{12e\mu^2}{\eta^2} \{ c^3 - 3c^2\psi[k-2] + 3c\psi[k-1] - \psi[k]\psi[k-3] \} = 0
\end{aligned}$$

(4.47a)

$$\begin{aligned}
& \frac{c^2}{s^2} (k-1) W[k-1] - \frac{2ck}{s^2} W[k] + \frac{(k+1)}{s^2} W[k+1] + c^4 r^2 (\mu^2 + \eta^2) \phi[k-4] - 4c^3 r^2 (\mu^2 + \eta^2) \phi[k-3] + [c^4 (k+1)(k-2) - \\
& \frac{c^2}{s^2} + 6c^2 r^2 (\mu^2 + \eta^2)] \phi[k-2] + 2c \left[2c^2 (1-k^2) + \frac{1}{s^2} - 2r^2 (\mu^2 + \eta^2) \right] \phi[k-1] + \left[6c^2 k(k+1) - \frac{1}{s^2} + r^2 (\mu^2 + \eta^2) \right] \phi[k] - \\
& 4c(k+1)^2 \phi[k+1] + (k+1)(k+2) \phi[k+2] + c^3 \eta (\bar{e}\eta + 2ic^2 r^2 \mu) \psi[k-4] - c^2 \eta [(3-c\delta) \bar{e}\eta + 8icr^2 \mu] \psi[k-3] + 3c\eta [(1-c\delta) \bar{e}\eta + \\
& 4icr^2 \mu] \psi[k-2] - \eta [(1-3c\delta) \bar{e}\eta + 8icr^2 \mu] \psi[k-1] + 2ir^2 \eta \mu \psi[k] = 0
\end{aligned}$$

(4.47b)

$$\begin{aligned}
& 12\bar{e}\left(\frac{\mu}{\eta r_a}\right)^2 \left\{ -c^3 W[k-3] + 3c^2 W[k-2] - 3cW[k-1] + W[k] \right\} - 3c^6(k-6)(k+1)\psi[k-6] + 4c^5(5-c)(k-5)(k+1)\psi[k-5] + \\
& 4c^4 \left[3\left(\frac{2r^2}{r_a^2} + \frac{\mu^2}{\eta^2} - 1\right) + 7(c\delta - 2)(k-4)(k+1)\psi[k-4] + 12c^3 \left[\left(1 - \frac{2r^2}{r_a^2} - \frac{\mu^2}{\eta^2}\right) + 7(1-c\delta)(k-3)(k+1)\psi[k-3] + \right. \right. \\
& \left. \left. c^2 \left\{ 72\left(\frac{2r^2}{r_a^2} + \frac{\mu^2}{\eta^2} - 1\right) + \left[\frac{12c^2\epsilon^2}{r_a^2\eta^2} + (6c^2 - 8c^3 + 8c^4 - 71) + c\delta(136 + 12c - 12c^2 + 4c^3)\right](k-2)(k+1)\psi[k-2] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. 4c \left\{ 12\left(1 - \frac{2r^2}{r_a^2} - \frac{\mu^2}{\eta^2}\right) + \left[-\frac{12c^2\epsilon^2}{r_a^2\eta^2} + (8 - 6c^2 + 8c^3 - 3c^4) - c\delta(31 + 12c - 12c^2 + 4c^3)\right](k-1)(k+1)\psi[k-1] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. 6 \left\{ 2\left(\frac{2r^2}{r_a^2} + \frac{\mu^2}{\eta^2} - 1\right) + \left[\frac{12c^2\epsilon^2}{r_a^2\eta^2} + (6c^2 - 8c^3 + 3c^4 - 1) + 2c\delta(5 + 6c - 6c^2 + 2c^3)\right]k(k+1)\psi[k] + 4[(8c - 3c^2 - 6) - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \delta(3 + 12c - 12c^2 + 4c^3) - \frac{12c\epsilon^2}{r_a^2\eta^2}(k+1)^2\psi[k+1] + \left[\frac{12\epsilon^2}{r_a^2\eta^2} + (6 - 8c + 3c^2) + 4\delta(3 - 3c + c^2)\right](k+2)(k+1)\psi[k+2] + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{12}{r_a^2} \left\{ c^3 \left(\bar{e} - \frac{2icr^2\mu}{\eta} \right) \varphi[k-4] + c^2 \left(c\bar{e}\delta + \frac{8icr^2\mu}{\eta} - 3\bar{e} \right) \varphi[k-3] + 3c \left(\bar{e} - c\bar{e}\delta - \frac{4icr^2\mu}{\eta} \right) \varphi[k-2] + \left(\bar{e}\delta + \frac{2ir^2\mu}{\eta} \right) \varphi[k] \right\} \right\} = 0 \right. \\
\end{aligned}$$

(4.47c)

4.4.6. Sonuçlar

Diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak elde edilen denklemler, Mathematica bilgisayar programında kodlanarak hesaplamalar yapılmıştır. Literatürde iki düzlemde daralan, eğilme-burulma etkileşimli Timoshenko kiriş örneği bulunamadığı için bu çalışmada elde edilen sonuçların doğruluğunu kanıtlamak amacıyla çözümü yapılan kiriş, ABAQUS sonlu elemanlar programı kullanılarak modellenip elde edilen sonuçlar, ABAQUS sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, literatürdeki çalışmaların içerdiği dönmeyen ya da daralmayan etkileşimli kirişler için elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalar yapılmıştır.

ABAQUS ile yapılan modelleme aşamasında kullanılan kiriş özellikleri aşağıda verilmektedir.

$$GJ_0 = 1.12599 \times 10^6 \text{ Nm}^2 \quad I_0 = 1.17187 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad I_{\alpha 0} = 0.5015 \text{ kgm}$$

$$E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \quad kA_0G = 5.93654 \times 10^8 \text{ N} \quad e_0 = 9.36 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$L = 1 \text{ m} \quad c = 0.5$$

Tablo 4.13'te ilk altı frekansın, ω , açısal dönme hızına, Ω , bağlı olarak değişimi verilerek ABAQUS programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapılmıştır. Daha önceki bölümlerde açıklandığı gibi dönme hızının artması ile frekans değerleri artmaktadır.

Tablo 4.13: Eğilme-Burulma Etkileşimli Dönen Timoshenko Kirişin Frekanslarının Açısal Dönme Hızı ile Değişimi

Doğal Frekanslar(Hertz)	Açısal Dönme Hızı Ω (rad/s)							
	5		20		50		100	
	Biz	Abaqus	Biz	Abaqus	Biz	Abaqus	Biz	Abaqus
	78.2498	78.267	78.3285	78.341	78.7681	78.75	80.3164	80.192
	325.944	326.06	326.018	326.13	326.434	326.52	327.913	327.9
610.33	606.4	610.346	606.42	610.436	606.54	610.756	606.98	
791.405	791.89	791.477	791.95	791.879	792.3	793.316	793.54	
1255.07	1246.8	1255.09	1246.9	1255.19	1247.1	1255.56	1247.9	
1449.41	1450.7	1449.48	1450.7	1449.89	1451.1	1451.33	1452.1	

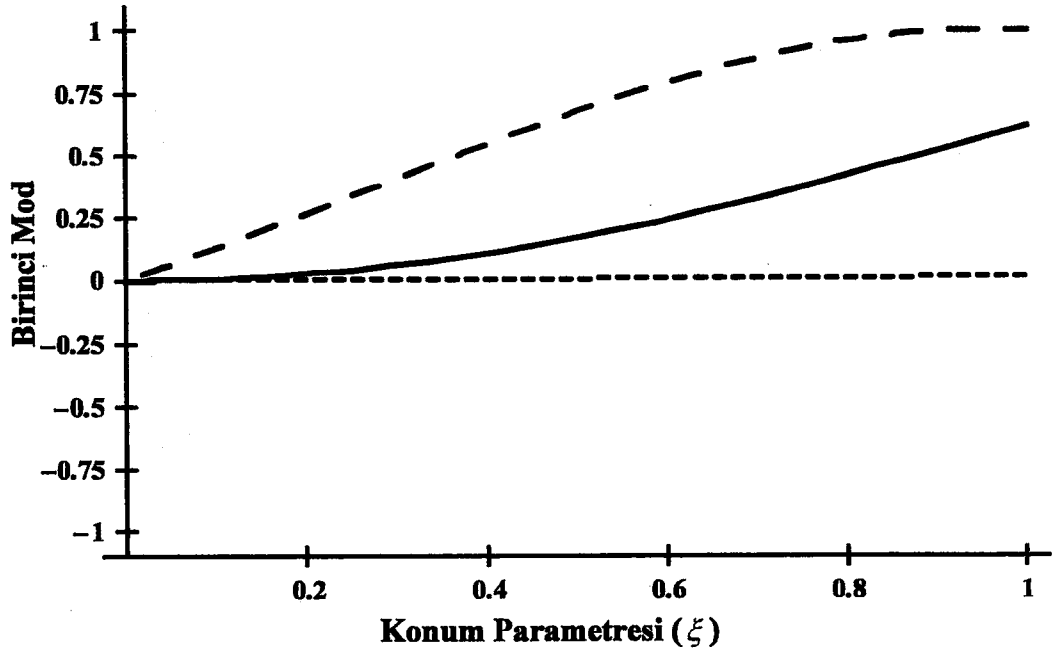
Ayrıca, aşağıda verilen değerler için ilk sekiz frekans hesaplanıp sonuçlar Tablo 4.14'te sunulmuştur. Bu sonuçlar, literatürdeki eğilme-burulma etkileşimli; ama dönmeyen Timoshenko kiriş inceleyen **Isfahany ve Banerjee (2000)**'in sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

$$\begin{aligned}
 GJ_0 &= 9.88 \times 10^5 \text{ Nm}^2 & EI_0 &= 9.75 \times 10^6 \text{ Nm}^2 & I_{\alpha 0} &= 8.65 \text{ kgm} \\
 \rho A_0 &= 35.75 \text{ kg/m} & kA_0 G &= 296154000 \text{ N} & e_0 &= -0.18 \text{ m} \\
 L &= 6 \text{ m} & c &= 0.5
 \end{aligned}$$

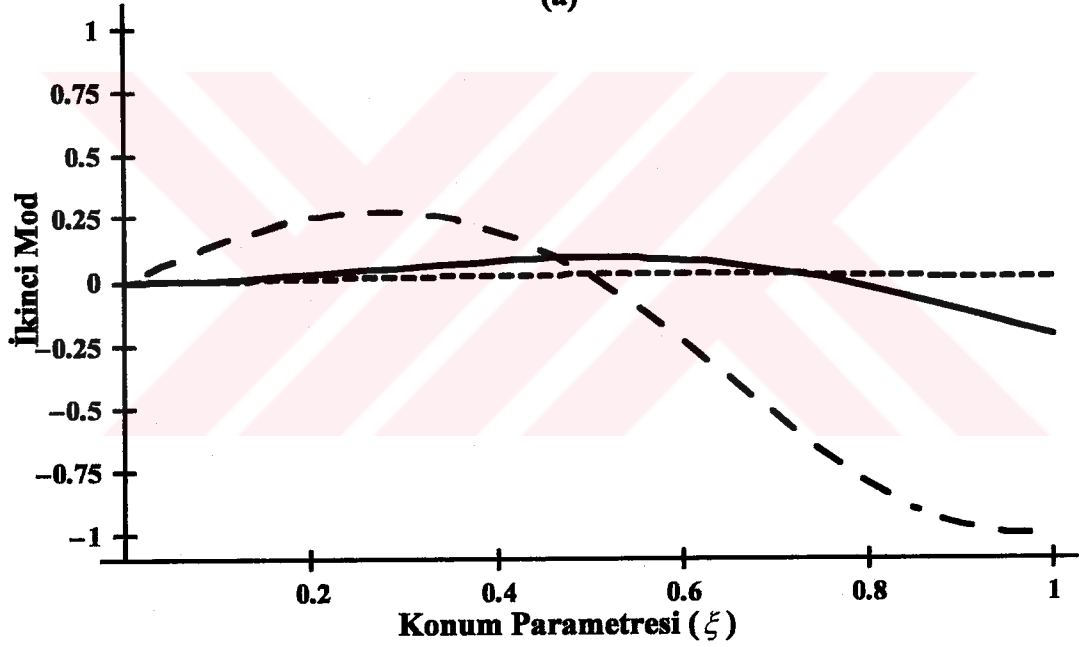
Tablo 4.14: Eğilme-Burulma Etkileşimli Dönmeyen Timoshenko Kirişin İlk Sekiz Frekansı

Doğal Frekanslar	Biz	Eslimy- Isfahany ve Banerjee (2000)
	49.4803	49.6
	97.0028	97.0
	247.631	248.9
	350.921	355.6
	449.395	451.5
	609.273	610.1
	790.255	-
	929.155	-

Dönen ve iki düzlemde daralan Timoshenko kirişin ilk dört mod şekli, Şekil 4.14(a-b) ve Şekil 4.15(a-b)'de $c = 0.5$; $\Omega = 50 \text{ rad/sn}$; $\omega = 4.63668 \text{ Hz}$ değerleri için çizdirilmiştir. Burada görüldüğü gibi ilk iki mod ve dördüncü mod, eğilme moduyken üçüncü mod, burulma modudur.

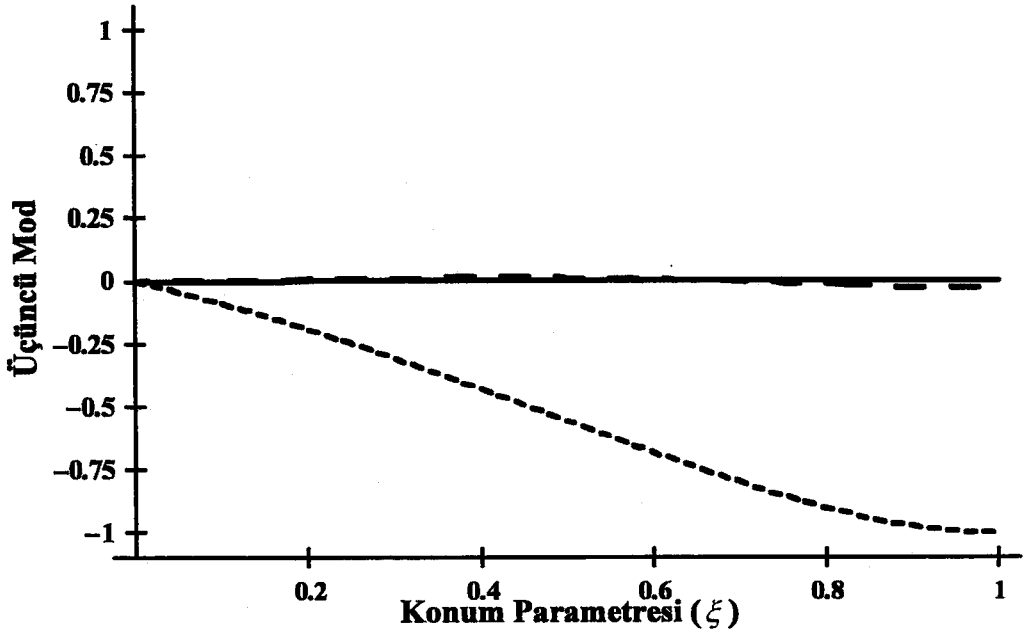


(a)

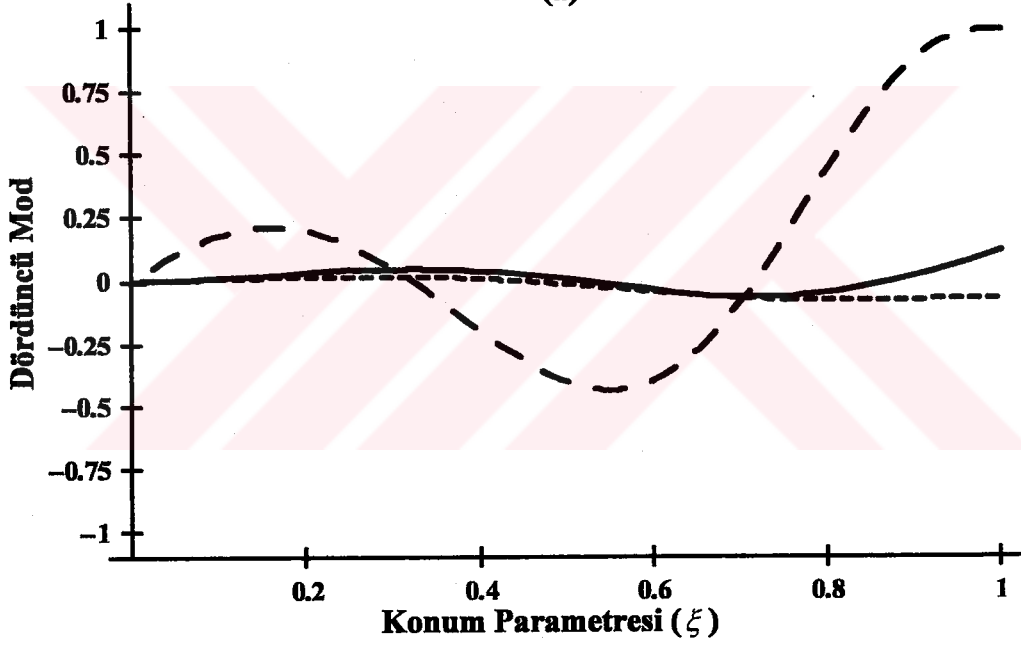


(b)

Şekil 4.14: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin (a) Birinci (b) İkinci Mod Şekli (w , —, φ , - - - ; ψ ,)



(a)



(b)

Şekil 4.15: Dönen ve İki Düzlemde Daralan Timoshenko Kirişin (a) Üçüncü (b) Dördüncü Mod Şekli (w , —, φ , - - - ; ψ ,)

5. ASKIDA KALMA DURUMUNDAKİ BİR HELİKOPTER PALİNİN AEROELASTİK İNCELEMESİ

Bu bölümde ilk olarak, tam menteşeli bir rotor sisteminde yer alan rijit bir palin kanat çırpma-gecikme ve kanat çırpma-burulma hareketlerinin aeroelastik kararsızlık sınırları incelenmektedir. Daha sonra, menteşesiz bir rotor sisteminde yer alan elastik bir palin kanat çırpma-gecikme-burulma hareketlerinin aeroelastik kararsızlık incelemesi yapılmaktadır.

5.1. Tam Menteşeli Rijit Rotor Palinin Kararsızlık İncelemesi (Özdemir ve Kaya, 2004b)

Bu bölümde askıda kalma durumundaki tam menteşeli (fully articulated) bir rotor palinin kanat çırpma-gecikme (flapping-lagging) ve kanat çırpma-burulma (flapping-pitching) hareketlerinin kararsızlık incelemesi yapılmaktadır. Elde edilen denklemler doğrultusunda Mathematica programında kod yazılarak kararlılık sınırlarını gösteren grafikleri çizdirilmiştir.

Tam menteşeli rotor pallerinin aeroelastik incelemesi yapılırken iki serbestlik derecesinin alınması ve menteşeler nedeniyle pallerin rijit kiriş gibi hareket ettikleri kabulü yeterli olmaktadır. Ancak, menteşesiz (hingeless) bir rotor palinin incelenmesi durumunda üçüncü serbestlik derecesinin hesaba katılarak kanat çırpma-gecikme-burulma hareketlerinin birlikte incelenmesi daha doğru sonuçlar vermektedir.

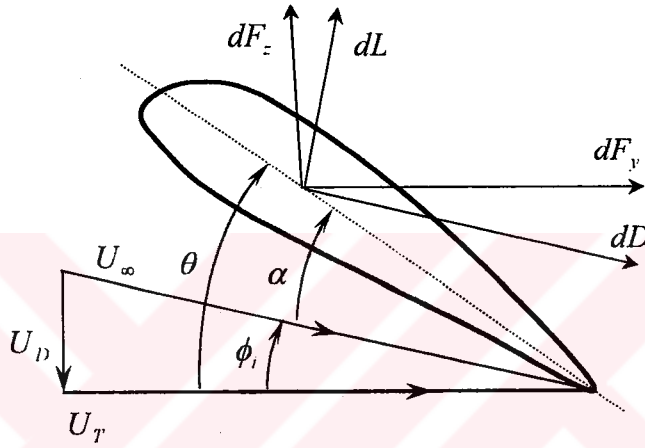
5.1.1. Kanat çırpma-gecikme kararsızlığı

Bu kararsızlık, helikopter pallerine özgüdür ve sabit kanatlı uçaklarda görülmez. 1970'lerin başlarında yapılan araştırmalarda gecikme serbestlik derecesinin helikopter aeroelastisitesinde oldukça önemli bir yere sahip olduğu ve atalet kuvvetleri ile aerodinamik kuvvetlerin etkisiyle iki modun kararsızlık yaratacak şekilde etkileştiği görülmüştür. Kanat çırpma hareketi, merkezkaç kuvveti nedeniyle ile yüksek sönümlenmelidir; ama gecikme hareketi üzerindeki aerodinamik

sönümlenme azdır ve kanat çırpma-gecikme kararsızlığı, gecikme modundan kaynaklanır (Friedmann ve Hodges, 2003).

5.1.1.1. Pal elemanı incelemesi

Pal kesidi üzerine etki eden yük ifadelerini elde etmek için Pal Elemanı Teorisi kullanılabilir. Buna göre pal, kesitlere ayrılarak üzerinde istasyonlar oluşturulur ve bu istasyonlardan birinde yer alan profil üzerine etki eden kuvvetler, serbest akım bileşenleri ve profil açıları incelenir. İstasyonların birinden alınan kanat profili, Şekil 5.1’de gösterilmektedir.



Şekil 5.1: Kanat Profiline Etkiyen Kuvvetler, Serbest Akım Bileşenleri ve Profil Açıları

Şekil 5.1 üzerindeki geometrik bağıntılar kullanılarak profile etkiyen kuvvet bileşenlerine ait ifadeler elde edilir. Bu kuvvet ifadelerine ait formülasyonu basitleştirmek için yapılan kabuller aşağıdaki gibidir.

a. Düzlem dışı dik hız bileşeni U_D , düzlemdeki teğetsel hız bileşeni U_T ’den çok daha küçüktür. Bu nedenle, pal kökü civarı hariç tüm pal için hız ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_\infty = \sqrt{U_D^2 + U_T^2} \approx U_T \quad (5.1)$$

b. İndüklenme açısı ϕ_i çok küçük olduğu için aşağıdaki açı ifadeleri yazılabilir.

$$U_D/U_T = \tan \phi_i \cong \phi_i, \sin \phi_i \cong \phi_i, \cos \phi_i \cong 1 \quad (5.2)$$

Bu kabul sonucu etkin hücum açısı, α , ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\alpha = \theta - \phi_i \cong \theta - \frac{U_D}{U_T} \quad (5.3)$$

Yapılan kabuller ve Şekil 5.1'deki geometrik bağıntılar göz önüne alınarak pal elemanına etkiyen düşey ve yatay kuvvet bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$dF_z = dL \cos \phi_i - dD \sin \phi_i \cong dL - dD \phi_i \quad (5.4a)$$

$$dF_y = dL \sin \phi_i + dD \cos \phi_i \cong dL \phi_i + dD \quad (5.4b)$$

Kalınlığı dr kadar olan pal elemanının profili üzerine etkiyen taşıma ve sürüklenme kuvvetlerinin ifadeleri, yukarıda yapılan kabuller doğrultusunda aşağıdaki gibi yazılır.

$$dL = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c C_l dr = \frac{1}{2} \rho_\infty c a (\theta U_T^2 - U_D U_T) dr \quad (5.5a)$$

$$dD = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c C_d dr = \frac{1}{2} \rho_\infty U_T^2 c a \frac{C_d}{a} dr \quad (5.5b)$$

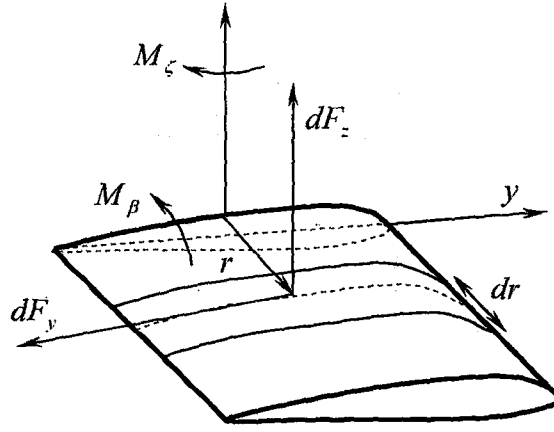
Denklemler (5.5a) ve (5.5b) ile verilen taşıma ve sürüklenme kuvveti ifadeleri, (5.4a) ve (5.4b) no'lu denklemlerde yerlerine koyulursa aşağıdaki düşey ve yatay kuvvet bileşenin yeni ifadelerine ulaşılır.

$$dF_z = \frac{\rho_\infty a c}{2} \left[\theta U_T^2 - \left(1 + \frac{C_d}{a} \right) U_D U_T \right] dr \cong \frac{\rho_\infty a c}{2} (\theta U_T^2 - U_D U_T) dr \quad (5.6a)$$

$$dF_y = \frac{\rho_\infty a c}{2} \left(\theta U_D U_T + U_T^2 \frac{C_d}{a} - U_D^2 \right) dr \quad (5.6b)$$

Denklem (5.6a)'da $(1 + C_d/a) U_D U_T$ ifadesi ile verilen terim, $U_D U_T$ olarak sadeleştirilebilir çünkü **Hodges ve Ormiston (1976)**'da C_d/a 'nın mertebesi $O(\varepsilon^2)$ olarak tanımlanmıştır ve bu mertebe, $O(1)$ 'in yanında ihmal edilebilir.

Pal üzerine etkiyen aerodinamik moment ifadelerine ulaşmak için Şekil 5.2'den yararlanılabilir.



Şekil 5.2: Pal Elemanı Üzerine Etkiyen Aerodinamik Yükler

Şekil 5.2'ye göre kanat çırpma momenti, M_β , ile gecikme momenti, M_ζ , aşağıdaki ifadelerle verilir.

$$M_\beta = \int_0^L F_z r dr \quad (5.7a)$$

$$M_\zeta = \int_0^L F_y r dr \quad (5.7b)$$

Daha sonraki bölümlerde kullanılmak üzere denklemler (5.7a) ve (5.7b) ile verilen aerodinamik momentlerin boyutsuz halleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\bar{M}_\beta = \frac{1}{\rho_\infty a c \Omega^2 L^4} \int_0^L F_z r dr \quad (5.8a)$$

$$\bar{M}_\zeta = \frac{1}{\rho_\infty a c \Omega^2 L^4} \int_0^L F_y r dr \quad (5.8b)$$

5.1.1.2. Bozuntu ifadeleri ve boyutsuz parametreler

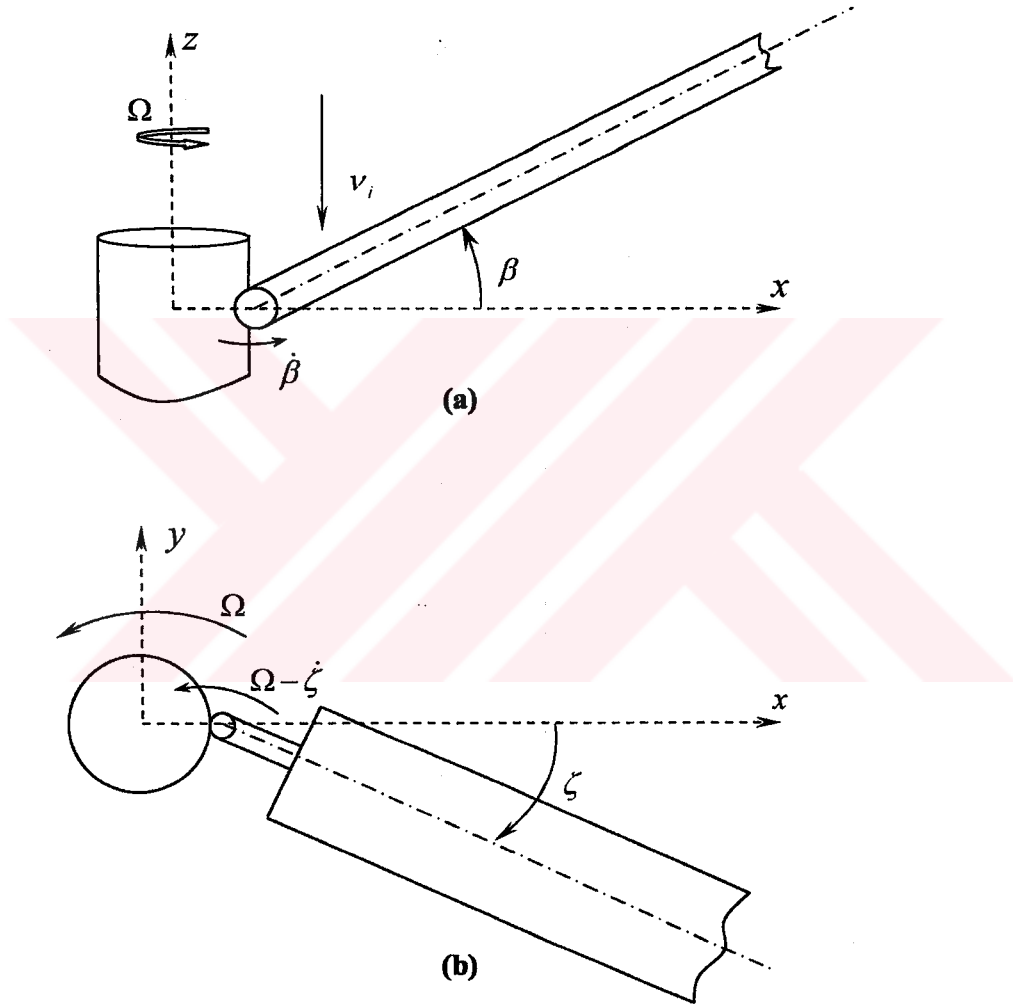
Bu bölümde, bozuntu etkisi ile ortaya çıkan kuvvet ve hız bileşenlerine ait ifadeler elde edilerek bu ifadelerin boyutsuzlaştırılması yapılmaktadır.

Bozuntu sonucu oluşan kuvvet bileşenleri, (5.6a) ve (5.6b) no'lu denklemler kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta F_z = \frac{\rho_\infty ac}{2} \left[(2U_T \theta - U_D) \delta U_T + (-U_T) \delta U_D + U_T^2 \delta \theta \right] \quad (5.9a)$$

$$\delta F_y = \frac{\rho_\infty ac}{2} \left[\left(\frac{2C_d}{a} U_T + U_D \theta \right) \delta U_T + (U_T \theta - 2U_D) \delta U_D + (U_T U_D) \delta \theta \right] \quad (5.9b)$$

Denklemler (5.9a) ve (5.9b) ile verilen bozuntu kuvveti ifadelerinde kullanılan bozuntu hız ifadelerini elde etmek için Şekil 5.3.(a) ve 5.3.(b)'den yararlanılır.



Şekil 5.3: (a) Kanat Çırpma Hareketinin Dik Hız Bileşenine Katkısı (b) Gecikme Hareketinin Teğetsel Hız Bileşenine Katkısı

Şekil 5.3.(a) ve 5.3.(b)'de görülen hız ifadeleri doğrultusunda teğetsel hız bileşeni ile dik hız bileşeni ve bu bileşenlerin boyutsuz ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

Sürekli hal hız bileşenleri:

$$U_T = \Omega r \quad \Rightarrow \quad \frac{U_T}{\Omega L} = \xi \quad (5.10a)$$

$$U_D = v_i = \Omega \lambda_i L \quad \Rightarrow \quad \frac{U_D}{\Omega L} = \lambda_i \quad (5.10b)$$

Bozuntu hız bileşenleri:

$$\delta U_T = -r \dot{\zeta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta U_T}{\Omega L} = -\xi \dot{\zeta} \quad (5.11a)$$

$$\delta U_D = r \dot{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta U_D}{\Omega L} = \xi \dot{\beta} \quad (5.11b)$$

$$\delta \theta = -k_{p\beta} \beta - k_{p\zeta} \zeta \quad (5.11c)$$

Şekil 5.3.(a)'da görülen gecikme hareketi ile oluşan ζ açısının zamana göre türevi alınır ve palin hücum kenarına yönelmiş bir bozuntu hız bileşeni oluşur ve denklem (5.11a)'da ifade edildiği gibi bu bozuntu bileşeni; firar kenarına yönelmiş, dönme düzlemi içindeki hız bileşeni U_T 'den çıkarılır. Şekil 5.3.(b)'de görülen kanat çırpma hareketi ile oluşan β açısının zamana göre türevi alınır ve dönme düzlemine dik bir hız bileşeni oluşur ve bu bileşen, bozuntu bileşeni olarak denklem (5.11b)'de ifade edildiği gibi düzlem dışındaki hız bileşeni U_D 'ye katılır. Denklem (5.11c) ile verilen ifade, kanat çırpma ve gecikme hareketlerinin, etkileşim sonucunda burulma hareketi üzerinde oluşturdukları etkiyi göstermektedir. Kanat çırpma-burulma etkileşim katsayısı olarak tanımlanan $k_{p\beta}$, pozitif kanat çırpma (yukarı doğru) durumunda ve gecikme-burulma etkileşim katsayısı olarak tanımlanan $k_{p\zeta}$, pozitif gecikme (sürüklenme doğrultusunda) durumunda burulma açısını azaltacak şekilde negatif bozuntu yaratır.

Kanat çırpma-gecikme hareketi sırasında ortaya çıkan bozuntu hız bileşenleri, denklemler (5.9a) ve (5.9b)'de yerlerine koyularak bozuntu kuvvetlerinin ifadelerine ulaşılır. Elde edilen bozuntu kuvvetleri, denklemler (5.8a) ve (5.8b) ile verilen boyutsuz aerodinamik moment ifadelerinde yerlerine koyulursa bozuntu sonucu oluşan aerodinamik kanat çırpma ve gecikme momentlerinin boyutsuz ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\overline{M}_\beta)_{bozuntu} = -\zeta^* \left(\frac{\theta}{4} - \frac{\lambda_i}{6} \right) - \frac{1}{8} \beta^* - \frac{1}{8} (k_{p\beta} \beta + k_{p\zeta} \zeta) \quad (5.12a)$$

$$(\overline{M}_\zeta)_{bozuntu} = \zeta^* \left(\frac{C_d}{4a} + \frac{\lambda_i \theta}{6} \right) + \beta^* \left(\frac{\theta}{8} - \frac{\lambda_i}{3} \right) - \frac{\lambda_i}{6} (k_{p\beta} \beta + k_{p\zeta} \zeta) \quad (5.12b)$$

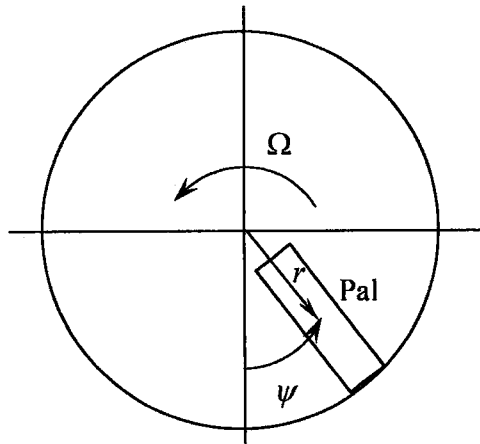
Yukarıda çıkarımı yapılan bozuntu ifadelerinde yer alan boyutsuz parametreler ile bundan sonraki bölümlerde kullanılacak boyutsuz parametreler aşağıda toplu halde verilmektedir.

$$\xi = \frac{r}{L}, \lambda_i = \frac{v_i}{\Omega L}, \gamma = \frac{\rho_\infty a c L^4}{I_h}, \sigma = \frac{PalAlanı}{RotorDiskAlanı} = \frac{N_p c}{L\pi} \quad (5.13a)$$

Burada; indüklenme oranı (inflow ratio), λ_i , Lock sayısı, γ , ve katılık oranı (solidity ratio), σ , olarak tanımlanan boyutsuz parametreler, helikopter hesaplarında kullanılan önemli parametrelerdir.

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \frac{d(\cdot)}{d\psi} = \Omega \frac{d(\cdot)}{d\psi} = \Omega^* (\cdot) \quad (5.13b)$$

Burada yer alan azimut açısı, ψ , Şekil 5.4'te gösterilmektedir. Azimut açısı, helikopter hesaplarında rotor açısal hızı ile zamanın fonksiyonu olarak, $\psi = \Omega t$, şeklinde yazılır ve bu eşitlik kullanılarak denklemleri boyutsuzlaştırmak için denklem (5.13b)'deki dönüşüm uygulanır.



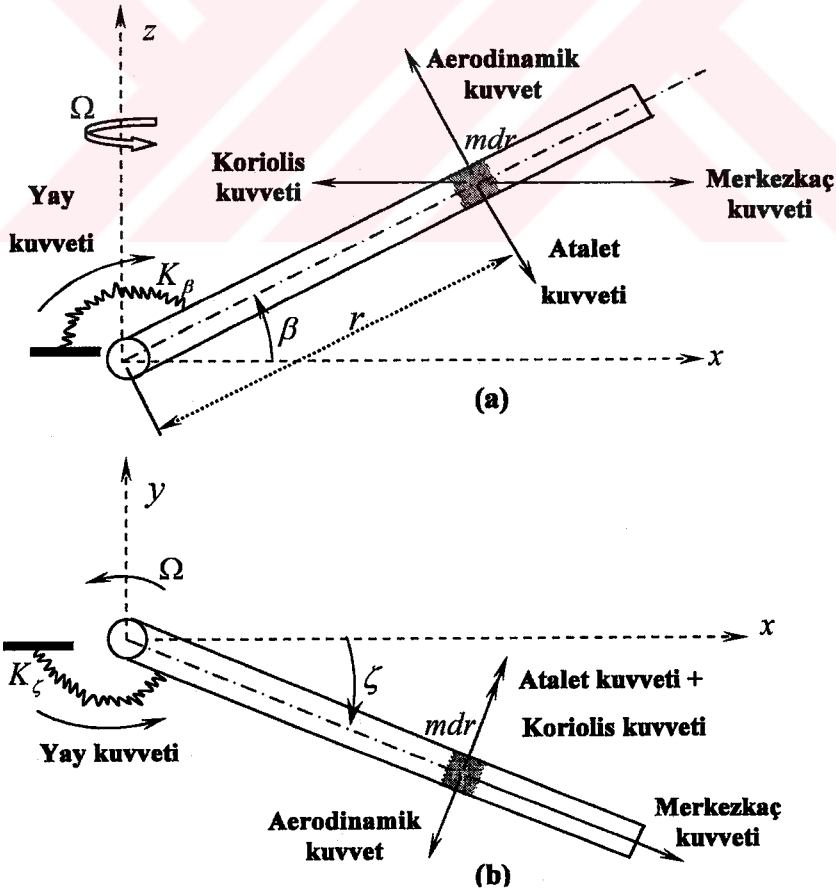
Şekil 5.4: Rotor Düzleminin Üstten Görünüşü ve Azimut Açısı

Denklem (5.13b)'de verilen dönüşüme ek olarak denklem (5.13a)'daki ilk boyutsuz parametre kullanılarak aşağıda verilen dönüşüm elde edilir.

$$\frac{d(\quad)}{dr} = \frac{d\xi}{dr} \frac{d(\quad)}{d\xi} = \frac{1}{L} \frac{d(\quad)}{d\xi} = \frac{1}{L} (\quad)' \quad (5.13c)$$

5.1.1.3. Hareket denklemleri

İncelenen rijit palin, kanat çırpma ve gecikme hareketleri sırasında üzerine gelen kuvvet bileşenleri ve moment kolları, Şekil 5.5(a) ve 5.5(b)'de gösterilmektedir. Şekilde, kanat çırpma ve gecikme hareketlerinin oluşturduğu momentlerin doğrudan rotor kafasına aktarılmasını sağlayan ve böylece rotorun daha etkin bir biçimde kontrol edilmesine yardımcı olan yaylar görülmektedir. Kuvvet bileşenleri içinde yer alan yay kuvveti, bu yay direncinden kaynaklanır. Bunlara ek olarak, menteşesiz rotor pallerinin kök kısmında yapısal bir yay bulunduğu için tam menteşeli bir rotorun incelenmesi sırasında bir yayın varlığını kabul etmek, menteşesiz rotor pallerinin incelemeleri için kolaylık sağlayacaktır.



Şekil 5.5: (a) Rijit Kanat Çırpma Hareketi (b) Rijit Gecikme Hareketi Sırasında Pal Üzerine Etkiyen Kuvvetler

Şekil 5.5(a) ve 5.5(b) incelendiğinde kuvvet bileşenleri ile bu bileşenlerin moment kollarının ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

Kanat çırpma hareketi (**Chopra, ders notları**):

- a. Atalet kuvveti : $mr\ddot{\beta}dr$ ve moment kolu r
- b. Merkezkaç kuvveti: $m\Omega^2rdr$ ve moment kolu $r\beta$
- c. Aerodinamik kuvvet: $F_z dr$ ve moment kolu r
- d. Yay momenti: $K_\beta(\beta - \beta_p)$
- e. Koriolis kuvveti: $2m\Omega r\dot{\zeta}dr$ ve kuvvet kolu $r\beta$

Gecikme hareketi (**Johnson, 1980**):

- a. Atalet kuvveti : $mr\ddot{\zeta}dr$ ve moment kolu r
- b. Merkezkaç kuvveti: $m\Omega^2rdr$ ve moment kolunun uzunluğu $e = 0$ olduğu için sıfırdır.
- c. Aerodinamik kuvvet: $F_y dr$ ve moment kolu $r\zeta$
- d. Koriolis kuvveti: $2m\Omega r\beta\dot{\beta}dr$ ve kuvvet kolu r

Yukarıda tanımlanan kuvvetler ve moment kolları gözönüne alınıp menteşeler çevresinde moment dengesi yazılırsa rijit kanat çırpma ve gecikme hareket denklemlerinin boyutsuz halleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\ddot{\beta} + v_\beta^2 \beta - 2\beta \dot{\zeta} = \gamma \overline{M}_\beta + \frac{\omega_{\beta 0}^2}{\Omega^2} \beta_p \quad (5.14a)$$

$$\ddot{\zeta} + v_\zeta^2 \zeta + 2\frac{\omega_{\zeta 0}}{\Omega} \zeta_L \dot{\zeta} + 2\beta \dot{\beta} = \gamma \overline{M}_\zeta \quad (5.14b)$$

Denklemler (5.14a) ve (5.14b)'de geçen frekans ifadeleri aşağıda tanımlanmaktadır. Dönmeyen pal için hesaplanan frekanslar:

$$\omega_{\beta 0}^2 = \frac{K_\beta}{I_h} \quad (5.15a)$$

$$\omega_{\zeta 0}^2 = \frac{K_{\zeta}}{I_{\zeta}} \quad (5.15b)$$

Dönen pal için hesaplanan boyutsuz frekanslar:

$$\nu_{\beta}^2 = 1 + \frac{K_{\beta}}{I_{\beta} \Omega^2} \quad (5.16a)$$

$$\nu_{\zeta}^2 = \frac{K_{\zeta}}{I_{\zeta} \Omega^2} \quad (5.16b)$$

Kanat çırpma hareketi, sürekli hal terimi, β_0 ve bozuntu hali terimi, $\bar{\beta}$ olmak üzere iki terimin toplamı şeklinde yazılabilir. Gecikme hareketinin sürekli hal terimi, ζ_0 , küçük değerler aldığı için ihmal edilip sadece bozuntu hali terimi, $\bar{\zeta}$ kullanılabilir. Pal hareketlerinin bu şekildeki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\beta = \beta_0 + \bar{\beta} \quad (5.17a)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} \quad (5.17b)$$

Kanat çırpma ve gecikme serbestlik derecelerinin yukarıda verilen ifadeleri ile denklemler (5.12a) ve (5.11b) ile verilen bozuntu momenti ifadeleri, (5.14a) ve (5.14b) no'lu denklemlerde yerlerine koyulursa her denklem sürekli hal ve bozuntu hali olmak üzere iki ayrı denklem şeklinde yazılabilir. Bozuntu ifadelerinin birbirleri ile çarpımları ($\bar{\beta}^2$, $\bar{\beta}\bar{\zeta}$) ihmal edilerek aşağıdaki bozuntu denklemlerine ulaşılır.

$$\beta^{**} + \frac{\gamma}{8} \beta^{*} + \left(\nu_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8} k_{p\beta} \right) \beta + \left[-2\beta_0 + \gamma \left(\frac{\theta}{4} - \frac{\lambda_i}{6} \right) \right] \zeta^{*} + \frac{\gamma}{8} k_{p\zeta} \zeta = 0 \quad (5.18a)$$

$$\zeta^{**} + \left[2 \frac{\omega_{\zeta 0} \zeta_L}{\Omega} + \gamma \left(\frac{C_d}{4a} + \frac{\lambda_i \theta}{6} \right) \right] \zeta^{*} + \left(\nu_{\zeta}^2 + \frac{\lambda_i}{6} k_{p\zeta} \right) \zeta + \left[2\beta_0 - \gamma \left(\frac{\theta}{8} - \frac{\lambda_i}{3} \right) \right] \beta^{*} + \gamma \frac{\lambda_i}{6} k_{p\beta} \beta = 0 \quad (5.18b)$$

5.1.1.4. Çözüm

Çırpınma (flutter) hızı, bir yapıya basit harmonik hareket yaptırmaya başlayan en düşük hız olarak kabul edilir. Kanat çırpma ve gecikme hareketlerinin etkileşimleri sonucunda oluşan çırpınma durumu için serbestlik dereceleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\bar{\beta}(\psi) = \tilde{\beta}e^{s\psi} \quad (5.19a)$$

$$\bar{\zeta}(\psi) = \tilde{\zeta}e^{s\psi} \quad (5.19b)$$

Yukarıda verilen basit harmonik hareket ifadeleri, (5.18a) ve (5.18b) no'lu boyutsuz bozuntu denklemlerinde yerlerine koyulursa çözümü yapılacak aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.20)$$

Burada $[f]$ matrisinin elemanları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f_{11} = s^2 + \frac{\gamma}{8}s + v_{\beta}^2 + \gamma \frac{k_{p\beta}}{8} \quad (5.21a)$$

$$f_{12} = \left(-2\beta_0 + \gamma \frac{\theta}{4} - \gamma \frac{\lambda_i}{6} \right) s + \gamma \frac{k_{p\zeta}}{8} \quad (5.21b)$$

$$f_{21} = \left(2\beta_0 - \gamma \frac{\theta}{8} + \gamma \frac{\lambda_i}{3} \right) s + \gamma \frac{\lambda_i k_{p\beta}}{6} \quad (5.21c)$$

$$f_{22} = s^2 + \left(2 \frac{\omega_{\zeta 0} \zeta_L}{\Omega} + \gamma \frac{C_d}{4a} + \gamma \frac{\lambda_i \theta}{6} \right) s + v_{\zeta}^2 + \gamma \frac{\lambda_i k_{p\zeta}}{6} \quad (5.21d)$$

Sıfırdan farklı çözümlere ulaşmak için $[f]$ matrisinin determinantı alınarak sıfıra eşitlenir ve aşağıdaki karakteristik denkleme ulaşılır.

$$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E = 0 \quad (5.22)$$

Denklem (5.22)'de yer alan katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$A = 1 \quad (5.23a)$$

$$B = 2 \frac{\omega_{\zeta 0} \zeta_L}{\Omega} + \gamma \frac{C_d}{4a} + \gamma \frac{\lambda_i \theta}{6} + \frac{\gamma}{8} \quad (5.23b)$$

$$C = v_{\zeta}^2 + \gamma \frac{\lambda_i k_{p\zeta}}{6} + \frac{\gamma}{8} \left(2 \frac{\omega_{\zeta 0} \zeta_L}{\Omega} + \gamma \frac{C_d}{4a} + \gamma \frac{\lambda_i \theta}{6} \right) + v_{\beta}^2 + \gamma \frac{k_{p\beta}}{8} - \left(\gamma \frac{\theta}{4} - \gamma \frac{\lambda_i}{6} - 2\beta_0 \right) \left(2\beta_0 - \gamma \frac{\theta}{8} + \gamma \frac{\lambda_i}{3} \right) \quad (5.23c)$$

$$D = \frac{\gamma}{8} \left(v_{\zeta}^2 + \gamma \frac{\lambda_i k_{p\zeta}}{6} \right) + \left(v_{\beta}^2 + \gamma \frac{k_{p\beta}}{8} \right) \left(2 \frac{\omega_{\zeta 0} \zeta_L}{\Omega} + \gamma \frac{C_d}{4a} + \gamma \frac{\lambda_i \theta}{6} \right) - \gamma \frac{\lambda_i k_{p\beta}}{6} \left(\gamma \frac{\theta}{4} - \gamma \frac{\lambda_i}{6} - 2\beta_0 \right) - \left(2\beta_0 - \gamma \frac{\theta}{8} + \gamma \frac{\lambda_i}{3} \right) \gamma \frac{k_{p\zeta}}{8} \quad (5.23d)$$

$$E = \left(v_{\beta}^2 + \gamma \frac{k_{p\beta}}{8} \right) \left(v_{\beta}^2 + \gamma \frac{k_{p\beta}}{8} \right) - \left(\gamma \frac{k_{p\zeta}}{8} \right) \left(\gamma \frac{\lambda_i k_{p\beta}}{6} \right) \quad (5.23e)$$

Askıda kalma durumundaki helikopter rotoru için denklem (5.22)'deki dördüncü dereceden denklemin çözümü yapıldığında her serbestlik derecesi için bir çift eşlenik karmaşık kök bulunur. Bu köklerin gerçel kısımları, modun sönümlenmesini gösterirken sanal kısımları, modun sönümlenmiş frekansını vermektedir. Bu konuya örnek olması için sadece kanat çırpma serbestlik derecesinin incelendiği durumu ele alınırsa aşağıda gösterilen eşlenik karmaşık kök ifadesine ulaşılır.

$$s = -\frac{\gamma}{16} \pm i \sqrt{v_{\beta}^2 + k_{p\beta} \frac{\gamma}{8} - \left(\frac{\gamma}{16} \right)^2} \quad (5.24)$$

Denklem (5.24)'te yer alan terimlerin açıklamaları aşağıdaki gibi verilmektedir.

Sönümlenmiş frekans:

$$\omega_d = \text{Im}(s) = \sqrt{v_{\beta}^2 + k_{p\beta} \frac{\gamma}{8} - \left(\frac{\gamma}{16} \right)^2} \quad (5.25a)$$

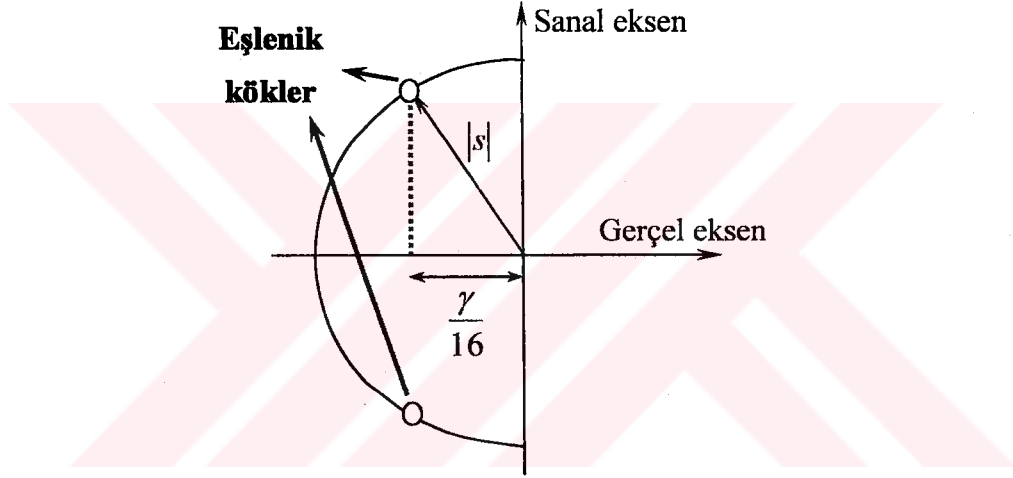
Doğal frekans:

$$\omega_N = |s| = \sqrt{v_\beta^2 + k_{p\beta} \frac{\gamma}{8}} \quad (5.25b)$$

Sönümlenme oranı:

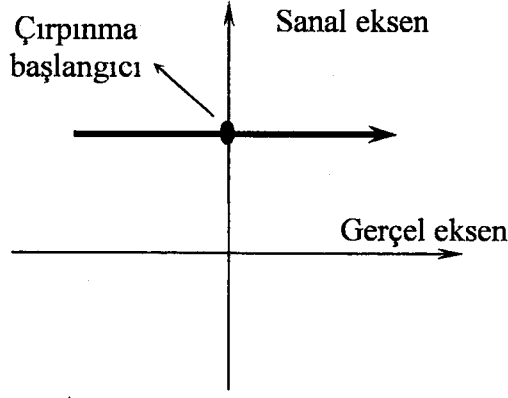
$$\zeta_d = -\text{Re}(s)/|s| \quad (5.25c)$$

Yukarıda örnek olarak denklemleri verilen askıda kalma durumundaki rotorun kanat çırpma frekanslarının grafiği Şekil 5.6'da verilmektedir. Sönümlenmenin negatif olduğu durum (gerçel kısım pozitif), köklerin kararsız hale geldiği durumdur. Buna göre, Şekil 5.6'daki frekansların gerçel kısımları hep negatif olduğu için kanat çırpma modu, askıda kalma durumunda kararlıdır.



Şekil 5.6: Askıda Kalma Durumundaki Rotor Palinin Kanat Çırpma Frekansları

Daha önce de belirtildiği gibi sönümlenmenin negatif olduğu durum (gerçel kısım pozitif), köklerin kararsız hale geldiği durumdur. Bu durumda sistemin özdeğerleri olan ve eşlenik karmaşık sayılar halinde bulunan kökler, sanal eksenin solundan sağına geçerler. Çırpınma durumu, gerçel kısmın sıfır olduğu durumda başlar ve köklerin soldan sağa geçişi Şekil 5.7'de gösterildiği gibi olursa çırpınma (flutter) durumu ortaya çıkar.



Şekil 5.7: Çarpınma Durumunda Kök Hareketi

Çarpınma tanımı gözönünde bulundurularak $s = i\omega$ olarak alınıp denklem (5.22)'e uygulanırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$A\omega^4 - iB\omega^3 - C\omega^2 + iD\omega + E = 0 \quad (5.26)$$

Denklem (5.26)'nın sanal ve gerçel kısımları ayrılarak bir arada çözülürse Routh kararlılık kriteri olarak adlandırılan ifadeye ulaşılır.

$$AD^2 - CDB + EB^2 = 0 \quad (5.27)$$

Denklem (5.27), çarpınma sınırlarını gösteren grafiğin çiziminde kullanılan temel ifadedir. Bu kriter doğrultusunda yapılacak hesaplar için aşağıdaki değerler kullanılmaktadır.

$$\gamma = 8 \quad k_{p\beta} = k_{p\zeta} = 0 \quad a = 2\pi \quad \zeta_L = 0$$

$$\sigma = 0.05 \quad C_d = 0.01 \quad \beta_p = 0$$

Değerleri bilinmeyen bazı parametrelere de ihtiyaç duyulmaktadır. Bu parametrelerin hesaplanmasında kullanılan denklemler aşağıdaki gibidir.

Momentum teorisi kullanılarak itki katsayısına bağlı olarak bulunan indüklenmiş akım katsayısı, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

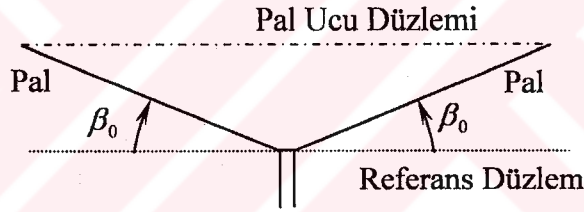
$$\lambda_i = k_h \sqrt{\frac{C_T}{2}} \quad (5.28)$$

Burada k_h , pal ucu kayıpları ve indüklenmiş akımın pal açıklığı boyunca düzensiz dağılımı gibi momentum teorisinde gözardı edilen etkileri hesaba katmak için denkleme katılan deneysel katsayıdır ve yaygın olarak $k_h=1.15$ olarak alınır **(Chopra, ders notları)**.

Bu çalışmada palin burulmasız üretildiği kabul edilmektedir ve buna göre palin maruz kaldığı burulma açısı, sadece yunuslama yatağı çevresinde gerçekleşen hareketten kaynaklanmaktadır. Pal elemanı teorisi ile momentum teorisini bir arada hesaba katıldığında burulma açısı, itki katsayısına ve indüklenmiş akım oranına bağlı olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir **(Leishmann, 2000)**.

$$\theta = \frac{6C_T}{a\sigma} + \frac{3}{2}\lambda_i \quad (5.29)$$

Askıda kalma durumundaki rotor palinin kanat çırpma serbestlik derecesinin sürekli hal bileşeni, β_0 , Şekil 5.8’de gösterilmektedir.



Şekil 5.8: Askıda Kalma Durumunda Koniklik Açısı

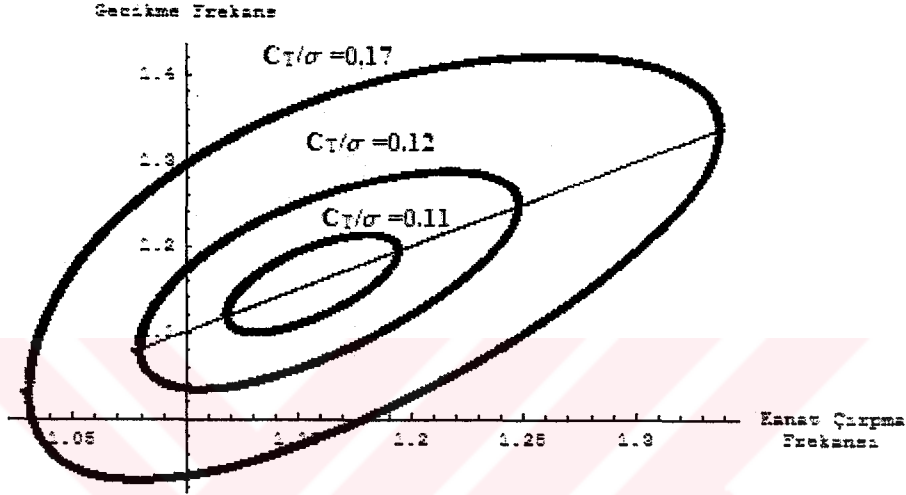
Rotor dönmeye başladıktan bir süre sonra, askıda kalma durumunda pallere etkiyen merkezkaç kuvveti ile aerodinamik kuvvetler arasında denge durumu oluşur ve bozuntuya sebep olacak herhangi bir durumun oluşmaması halinde tüm pallerin kanat çırpma açısı, β_0 kadar olur ve bu açı, azimut açısına göre değişmez. Bu denge hali için sözkonusu olan kanat çırpma açısı, koniklik açısı olarak tanımlanmaktadır ve aşağıdaki ifade ile verilmektedir.

$$\beta_0 = \frac{\gamma}{v_{\beta}^2} \left(\frac{\theta}{8} - \frac{\lambda_i}{6} \right) + \frac{\beta_p \omega_{\beta_0}^2}{\Omega^2 v_{\beta}^2} \quad (5.30)$$

Burada, v_{β} ile gösterilen ve etkin kanat çırpma frekansı olarak tanımlanan ifade aşağıdaki gibidir.

$$v_{\beta'}^2 = v_{\beta}^2 + \frac{\gamma}{8} k_{\gamma\beta} \quad (5.31)$$

Denklemler (5.28)-(5.30)'da verilen hesaplamalar yapılarak değeri verilmeyen parametrelerin değerleri bulunur. Daha sonra, denklem (5.27) ve diğer gerekli ifadeler Mathematica programında kodlanarak farklı C_T/σ değerleri için çırpınma sınırlarını gösteren grafik, Şekil 5.9'daki gibi elde edilir.



Şekil 5.9: Kanat Çırpma-Gecikme Kararlılık Sınırları

Burada, belirli bir itki seviyesi için kanat çırpma-gecikme hareketi, eliptik bölgelerin içinde kararsızdır. Bu bölgeler, $v_{\beta} = v_{\zeta} = 1.15$ değerini merkez olarak almaktadır. Kanat çırpma-gecikme kararsızlığı itki ile yakından ilgilidir. İtkinin arttığı durumlarda özellikle gecikme denklemlerindeki etkileşim terimleri büyük değerlere ulaşır ve kararsızlık olasılığı artar. Sıfır itki durumunda etkileşim en düşük seviyededir ve pal, aeroelastik kararsızlıktan uzaktır (**Chopra, ders notları**).

5.1.2. Kanat çırpma-burulma kararsızlığı

Bu kararsızlık türü hem sabit kanatlı uçaklarda hem de helikopterde görülmektedir. Ancak, helikopterleri uçaklardan ayıran aşağıdaki özellikler nedeniyle sabit kanatlı uçaklar için bu konuda yapılan yaklaşımlar, helikopter denklemlerinde kullanılamamaktadır.

- a. Burulma denkleminde pervane momenti etkisi (tenis raketi etkisi) görülür.
- b. Aerodinamik kuvvetlerin etkisi daha fazladır.

c. İleri uçuş durumu inceleniyorsa zamanla değişen kuvvetler hesaba katılır.

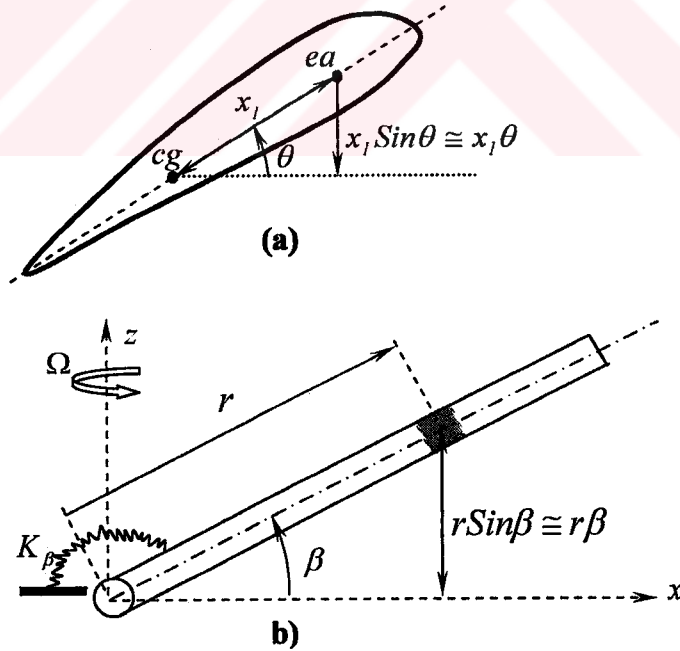
5.1.2.1. Hareket denklemleri

Kanat çırpma ve burulma hareket denklemlerine ulaşabilmek için sırasıyla, kanat çırpma menteşesi ve burulma eksenini çevresinde moment dengesi yazılmalıdır. Bu denge denklemlerinde yer alan kuvvetler ve moment kolları aşağıdaki gibi tanımlanır. Moment kolları; kanat çırpma hareketi için kuvvet ile kanat çırpma menteşesi arasındaki mesafe; burulma hareketi için ise kuvvet ile elastik eksen arasındaki mesafe olarak hesaplanır.

Kanat çırpma hareketi için,

a. Atalet kuvveti:

Atalet kuvveti, $m(\ddot{z} - x_1\ddot{\theta}) = m(r\ddot{\beta} - x_1\ddot{\theta})$ olarak ve moment kolu, x olarak tanımlanır. Bu ifadeler, Şekil 5.10.(a) ve 5.10.(b) incelendiğinde daha açık bir biçimde görülmektedir. Burada $z = r\beta$, palin kanat çırpma sehimini ve $x_1\theta$, palin kanat çırpma sehimini sırasında palde gerçekleşen burulma açısı azalmasından kaynaklanan sehimdir.



Şekil 5.10: Kanat Çırpma Hareketi Sonucu Oluşan (a) Burulma (b) Pal Sehimini

b. Merkezkaç kuvveti:

Merkezkaç kuvvetinin ifadesi denklem (2.22)'den $m\Omega^2 r$ olarak bulunur ve Şekil 5.5.(a) incelendiğinde moment kolu, $z - x, \theta = r\beta - x, \theta$ olarak hesaplanır.

c. Aerodinamik kuvvet:

Şekil 5.2 incelendiğinde denklem (5.6a) ile verilen F_z aerodinamik kuvvetinin moment kolunun r olduğu görülmektedir.

d. Yay momenti:

Bazı rotor sistemlerinde, rotor pallerine yapısal olarak bir önkoniklik açısı verilir ve rotor pallerinde kanat çırpma hareketi olmasa dahi β_p kadarlık bir açı bulunur. Bu açının konulmasının nedeni, rotor palinden rotor kafasına gelen yüklemeyi azaltmaktır.

Şekil 5.10.(b)'de gösterilen K_β katılığındaki kanat çırpma yayı göz önüne alındığında yay momenti, $K_\beta(\beta - \beta_p)$ olarak tanımlanır.

Burulma hareketi için,

a. Kesit ağırlık merkezi etrafındaki atalet momenti: $I_0 \ddot{\theta}$

b. Ağırlık merkezine etkiyen atalet kuvveti:

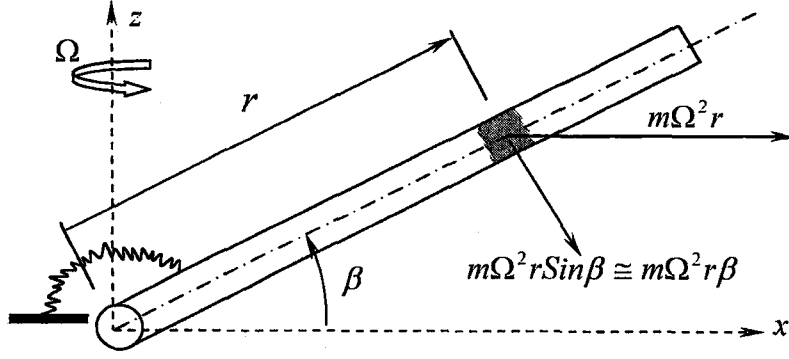
Şekil 5.10.(a) ve 5.10.(b) incelendiğinde ağırlık merkezine etkiyen atalet kuvveti $m(r\ddot{\beta} - x, \ddot{\theta})$ ve moment kolu, x, θ olarak tanımlanır.

c. Burulma eksenini etrafında pervane momenti : $I_\theta \Omega^2 \theta$

Pervane momenti hakkında gerekli bilgiler Ek A'da verilmektedir.

d. Merkezkaç kuvvetinden kaynaklanan, kanat çırpma hareketi üzerinde yay etkisi yapan ve ağırlık merkezine etkiyen kuvvet: $m\Omega^2 r\beta$ ve moment kolu x, θ .

Madde d'de tanımlanan kuvvet, Şekil 5.11'de gösterilmektedir Merkezkaç kuvvetinin bu bileşeni, pale diktir ve pal üzerinde kanat çırpma momenti yarattığı gibi ağırlık merkezinin burulma merkeziyle çakışmadığı durumlarda burulma momenti yaratmaktadır.

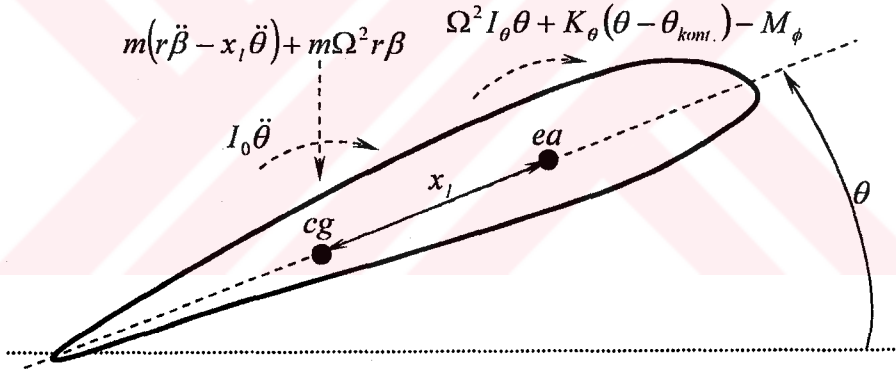


Şekil 5.11: Kanat Çırpma Momenti Yaratan Merkezkaç Bileşeni

e. Burulma eksenini etrafında burun yukarı burulma aerodinamik momenti: M_ϕ

d. Yay momenti: $K_\theta (\theta - \theta_{kont.})$

Burulma eksenini etrafındaki momentler ve moment yaratan kuvvetlerin yerleri, Şekil 5.12’de toplu halde gösterilmektedir.



Şekil 5.12: Pal Kesidine Etki Eden Momentler ve Moment Yaratan Kuvvetler

Yukarıda açıklanan moment ve kuvvet ifadeleri kullanılarak sırasıyla kanat çırpma menteşesi ve elastik eksene göre moment dengesi yazılırsa boyutsuz hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\beta'' + v_\beta^2 \beta - I_x^* (\theta'' + \theta) = (v_\beta^2 - 1) \beta_p + \gamma \int_0^1 \frac{F_z}{ac} r dr \quad (5.32a)$$

$$I_f^* [\ddot{\theta} + (1 + \omega_\theta^2) \theta] - I_x^* (\beta'' + \beta) = \gamma \int_0^1 \frac{M_\phi}{ac} dr + I_f^* \omega_\theta^2 \theta_{kont.} \quad (5.32b)$$

Burada yer alan burulma frekansları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\omega_{\theta} = \frac{K_{\theta}}{I_f \Omega^2} \quad (5.33a)$$

$$\nu_{\theta}^2 = 1 + \frac{K_{\theta}}{I_f \Omega^2} \quad (5.33b)$$

Burada ω_{θ} , dönmeyen pal için hesaplanan boyutsuz burulma frekansı ve ν_{θ} dönen pal için hesaplanan boyutsuz burulma frekansı olarak tanımlanır.

Ayrıca, denklemler (5.32a) ve (5.32b)'de yer alan atalet momentlerinin ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$I_f = \int_0^L I_{\theta} dr \quad (5.34a)$$

$$I_f^* = \frac{I_f}{I_b} \quad (5.34b)$$

$$I_x = \int_0^L m x_l r dr \quad (5.34c)$$

$$I_x^* = \frac{I_x}{I_b} = \frac{1}{I_b} \int_0^L m x_l r dr \quad (5.34d)$$

Ağırlık merkezinin elastik eksene göre konumunun değişmediği kabul edilip Şekil 5.12'de görülen x_l mesafesi sabit olarak alınırsa denklem (5.34) aşağıdaki gibi yeniden tanımlanabilir.

$$\frac{I_x}{I_b} = \frac{x_l S_b}{I_b} \cong \frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \quad (5.35)$$

Burada S_b , palin birinci atalet momenti olarak aşağıdaki ifade ile tanımlanır.

$$S_b = \int_0^L m r dr \quad (5.36)$$

Denklemler (5.32a) ve (5.32b) ile verilen hareket denklemleri, sönümlenme ve etkileşim terimleri katılarak genişletilebilir. Etkileşim terimi hakkında detaylı bilgi Ek A'da verilmektedir. Denklem (5.35)'de yapılan tanım kullanılarak genişletilmiş boyutsuz hareket denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\ddot{\beta} + \nu_{\beta}^2 \dot{\beta} - \frac{3x_l}{2R} \left(\ddot{\theta} + \dot{\theta} \right) = \gamma \bar{M}_{\beta} + \frac{\omega_{\beta 0}^2 \beta_p}{\Omega^2} \quad (5.37a)$$

$$I_f^* \left(\ddot{\theta} + \nu_{\theta}^2 \dot{\theta} + \frac{2\omega_{\theta} \zeta_{\theta}}{\Omega} \dot{\theta} \right) - \frac{3x_l}{2R} \left(\ddot{\beta} + \dot{\beta} \right) + k_{r_{\beta}} \left(\frac{\omega_{\theta}}{\Omega} \right)^2 I_f^* \beta = \gamma \bar{M}_{\theta} + I_f^* \left(\frac{\omega_{\theta}}{\Omega} \right)^2 \theta_{kont.} \quad (5.37b)$$

Burada yer alan moment ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$\bar{M}_{\beta} = \frac{1}{\rho_{\infty} a c \Omega^2 L^4} \int_0^L r L dr \quad (5.38a)$$

$$\bar{M}_{\theta} = \frac{1}{\rho_{\infty} a c \Omega^2 L^4} \left[\int_0^L (-x_a) L dr + M_{Nc} \right] \quad (5.38b)$$

Burada görülen x_a ifadesi, pal kesidindeki aerodinamik merkezin elastik eksene olan uzaklığı olarak tanımlanır.

Denklem (5.38a)'da kanat çırpma momentine neden olan aerodinamik kuvvet olarak sadece taşıma kuvveti alınmıştır. Bunun nedeni, daha önce açıklandığı gibi sürüklenme kuvvetinin kanat çırpma hareketine olan katkısının çok küçük olmasıdır.

Denklem (5.38a) ve (5.38b)'de görülen taşıma kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} a c (U_T^2 \theta - U_D U_T) \bar{C}(k) \quad (5.39)$$

Bu denklemde yer alan $\bar{C}(k)$ terimi, Theodorsen fonksiyonu olarak tanımlanan terimdir. $\bar{C}(k) = F(k) + iG(k)$ şeklinde karmaşık sayı olarak ifade edilir ve indirgenmiş frekans olarak adlandırılan $k = \omega b/U$ ifadesine bağlıdır.

Denklem (5.39) ile verilen taşıma kuvveti için bozuntu ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\delta L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} a c \left[\delta U_T (2U_T \theta - U_D) + \delta U_D (-U_T) + \delta \theta (U_T^2) \right] \bar{C}(k) \quad (5.40)$$

Denklem (5.40), denklemler (5.38a) ve (5.38b)'de yerlerine koyulursa bozuntu momentleri elde edilir.

$$\begin{aligned} (\bar{M}_{\beta})_{\text{bozuntu}} &= \frac{1}{\rho a c \Omega^2 L^4} \int_0^L \delta L r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{C}(k) \left[\frac{\delta U_T}{\Omega L} \left(2 \frac{U_T}{\Omega L} \theta - \frac{U_D}{\Omega L} \right) - \frac{\delta U_D}{\Omega L} \frac{U_T}{\Omega L} + \delta \theta \left(\frac{U_T}{\Omega L} \right)^2 \right] \xi d\xi \end{aligned} \quad (5.41a)$$

$$\begin{aligned} (\bar{M}_{\theta})_{\text{bozuntu}} &= \frac{1}{\rho a c \Omega^2 R^4} \left[\int_0^R (-x_a) \delta L r dr + M_{N_c} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{x_a/R} \bar{C}(k) \left[\frac{\delta U_T}{\Omega R} \left(2 \frac{U_T}{\Omega R} \theta - \frac{U_D}{\Omega R} \right) - \frac{\delta U_D}{\Omega R} \frac{U_T}{\Omega R} + \delta \theta \left(\frac{U_T}{\Omega R} \right)^2 \right] dx + \bar{M}_{N_c} \end{aligned} \quad (5.41b)$$

Burada, $\bar{M}_{N_c}$ ile gösterilen terim pal profili çevresindeki sirkülasyondan bağımsız olarak ortaya çıkan aerodinamik yunuslama momentidir.

$$\bar{M}_{N_c} = \frac{1}{\rho a c \Omega^2 R^4} \left\{ \frac{1}{4} \pi \rho \Omega^2 c^3 \left[r \left(\frac{1}{4} + \frac{x_a}{c} \right) \ddot{\beta} - r \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{c} \right) \dot{\theta} - c \left(\frac{3}{32} + \frac{1}{2} \frac{x_a}{c} \right) \ddot{\theta} \right] \right\} \quad (5.41c)$$

Yukarıda tanımlanan bozuntu momentlerinde yer alan sürekli hal hız bileşenleri, denklemler (5.10a) ve (5.10b)'de verilen ifadelerle aynıdır. Ancak, bozuntu hali hız bileşenleri ve bozuntu burulması aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\delta U_T = -r \dot{\zeta} = 0 \Rightarrow \frac{\delta U_T}{\Omega L} = -\xi \dot{\zeta} = 0 \quad (5.42a)$$

$$\delta U_D = r \dot{\beta} - \left(\frac{c}{2} + x_a \right) \dot{\theta} \Rightarrow \frac{\delta U_D}{\Omega L} = x \dot{\beta} - \frac{c}{L} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{L} \right) \dot{\theta} \quad (5.42b)$$

$$\delta \theta = \theta \quad (5.42c)$$

Denklemler (5.42a)-(5.42c) ile verilen bozuntu ifadeleri, (5.41a) ve (5.41b) no'lu denklemlerde yerlerine konulursa bozuntu momentlerinin son hallerine ulaşılır.

$$\begin{aligned}
(\overline{M}_\beta)_{bozuntu} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \overline{C}(k) \left\{ 0 - \left[\xi \beta^* - \frac{c}{R} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{L} \right) \theta^* \right] \xi + \theta \xi^2 \right\} \xi d\xi \\
&= \frac{1}{2} \overline{C}(k) \left[-\frac{1}{4} \beta^* + \frac{1}{3} \frac{c}{L} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{c} \right) \theta^* + \frac{1}{4} \theta \right]
\end{aligned} \tag{5.43a}$$

$$\begin{aligned}
(\overline{M}_\theta)_{bozuntu} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x_a}{L} \overline{C}(k) \left\{ 0 - \left[\xi \beta^* - \frac{c}{L} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{L} \right) \theta^* \right] \xi + \theta \xi^2 \right\} \xi d\xi + \overline{M}_{Nc} \\
&= -\frac{1}{2} \overline{C}(k) \frac{x_a}{L} \left[-\frac{1}{3} \beta^* + \frac{1}{2} \frac{c}{L} \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{c} \right) \theta^* + \frac{1}{3} \theta \right] - \frac{1}{16} \left(\frac{c}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{c} \right) \theta^*
\end{aligned} \tag{5.43b}$$

Yukarıda verilen bozuntu momentleri, (5.37a) ve (5.37b) no'lu denklemlerde yerlerine koyulup elde edilen bozuntu denklemleri matris halinde yazılırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^* \\ \theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta^* \\ \theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \theta \end{bmatrix} = 0 \tag{5.44}$$

Burada yer alan $[g]$, $[h]$ ve $[k]$ matrislerinin elemanları aşağıdaki gibidir.

$$g_{11} = 1 \tag{5.45a}$$

$$g_{12} = g_{21} = -\frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \tag{5.45b}$$

$$g_{22} = I_f^* \tag{5.45c}$$

$$h_{11} = \gamma \frac{\overline{C}(k)}{8} \tag{5.46a}$$

$$h_{12} = \left(-\frac{\gamma}{12} \frac{c}{L} \right) \left(1 + 2 \frac{x_a}{c} \right) \overline{C}(k) - \left(\frac{\gamma}{24} \frac{c}{L} \right) \tag{5.46b}$$

$$h_{21} = -\frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \overline{C}(k) \tag{5.46c}$$

$$h_{22} = \frac{\gamma}{8} \left(\frac{c}{L} \right)^2 \frac{x_a}{c} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c} \right) \overline{C}(k) + \frac{\gamma}{16} \left(\frac{c}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x_a}{c} \right) + 2I_f^* \frac{\omega_{\theta 0}}{\Omega} \zeta_{\theta} \quad (5.46d)$$

$$k_{11} = v_{\beta}^2 \quad (5.47a)$$

$$k_{12} = -\frac{\gamma}{8} \overline{C}(k) - \frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \quad (5.47b)$$

$$k_{21} = -\frac{3}{2} \frac{x_l}{L} + k_{p\beta} \left(\frac{\omega_{\theta 0}}{\Omega} \right)^2 I_f^* \quad (5.47c)$$

$$k_{22} = I_f^* v_{\theta}^2 + \frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \overline{C}(k) \quad (5.47d)$$

Kararsızlık incelemelerinde çözüm için, basit harmonik hareket kabulü yapılırsa serbestlik dereceleri için yazılan bozuntu ifadeleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\overline{\beta}(\psi) = \tilde{\beta} e^{s\psi} \quad (5.48a)$$

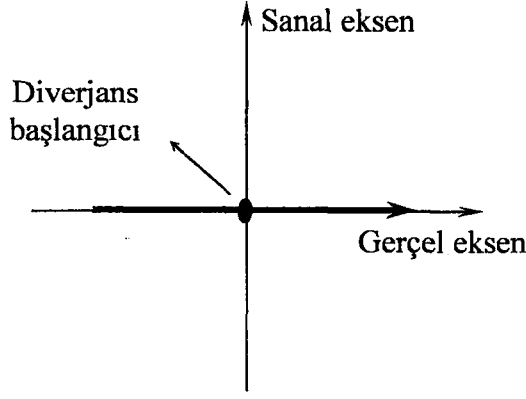
$$\overline{\theta}(\psi) = \tilde{\theta} e^{s\psi} \quad (5.48b)$$

Basit harmonik hareket denklemleri, denklem (5.44)'te verilen matris ifadesinde yerine koyulursa aşağıdaki denkleme ulaşılır

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 \tilde{\beta} \\ s^2 \tilde{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \tilde{\beta} \\ s \tilde{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.49)$$

5.1.2.2 Burulma diverjansı

Belirli koşullar altında, bir pale burulma bozuntusu verilirse burulma genliği gittikçe artar ve sonunda pal parçalanır. Burulma diverjansı, bir gerçel kök s-düzleminin solundan sağına Şekil 5.13'te gösterildiği gibi geçince ortaya çıkar ve diverjans sınırını belirlemek için gerçel kökün sıfır olduğu durum, $s = 0$, alınır (Johnson, 1980).



Şekil 5.13: Diverjans Durumunda Kök Hareketi

Diverjans durumunda ($s = 0$), (5.49) no'lu denklem aşağıdaki basit ifadeye indirgenir.

$$\begin{bmatrix} v_{\beta}^2 & -\frac{\gamma}{8} - \frac{3 x_l}{2 L} \\ -\frac{3 x_l}{2 L} & I_f^* v_{\theta}^2 + \frac{\gamma x_a}{6 L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.50)$$

Denklem (5.50)'nin içinde $\bar{C}(k)$ ifadesi görülmemektedir çünkü incelenen rotor palı, askıda kalma uçuş şartlarında döndüğü için rotor çevresindeki aerodinamik ortamın zamana bağlı olarak değişmediği kabul edilip $\bar{C}(k) = 1$ olarak alınabilir (**Chopra, ders notları**).

Denklem (5.50)'de verilen matris ifadesinin determinanı sifıra eşitlenerek aşağıdaki karakteristik denkleme ulaşılır.

$$v_{\beta}^2 \left(I_f^* v_{\theta}^2 + \frac{\gamma x_a}{6 L} \right) - \frac{3 x_l}{2 L} \left(\frac{\gamma}{8} + \frac{3 x_l}{2 L} \right) = 0 \quad (5.51)$$

Bu karakteristik denklem kullanılarak burulma diverjansı için çizdirilecek grafiklerin iç kısımları kararsız bölgeleri, dış kısımları kararlı bölgeleri göstermektedir. Bu nedenle, kararlılık için karakteristik denklemin sıfırdan büyük olması (yani dış bölgelerin incelenmesi) gerekmektedir.

$$v_{\beta}^2 \left(I_f^* v_{\theta}^2 + \frac{\gamma x_a}{6 L} \right) - \frac{3 x_l}{2 L} \left(\frac{\gamma}{8} + \frac{3 x_l}{2 L} \right) > 0 \quad (5.52)$$

Denklem (5.52) düzenlenince aşağıdaki ifadeler elde edilir.

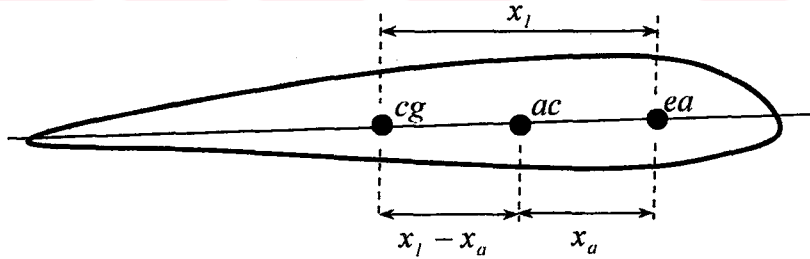
$$\frac{3}{16}\gamma\frac{x_l}{L}-\frac{\gamma}{6}v_\beta^2\frac{x_a}{L}<v_\beta^2I_f^*v_\theta^2 \Rightarrow \frac{x_l}{L}-\frac{8}{9}v_\beta^2\frac{x_a}{L}<\frac{16}{3\gamma}v_\beta^2I_f^*v_\theta^2 \quad (5.53)$$

Burada, $\frac{8}{9}v_\beta^2 \approx 1$ 'dir çünkü kanat çırpma frekansı, menteşeli rotor için $v_\beta = 1$ 'dir ve

$\frac{8}{9} \approx 1$ değerini almaktadır. Bu değerler, yerlerine konulunca burulma diverjansının sınırlarını veren genel ifade aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{x_l - x_a}{L} < \frac{16}{3\gamma}v_\beta^2I_f^*v_\theta^2 \quad (5.54)$$

Burada yer alan $x_l - x_a$ ifadesi, Şekil 5.14'te gösterilmektedir. Denklem (5.54)'te görüldüğü gibi ağırlık merkezinin aerodinamik merkeze göre konumu, $x_l - x_a$, burulma diverjansı için önemlidir. Denklemin sağ tarafı daima pozitifdir. Buna göre ağırlık merkezi ile aerodinamik merkez çakışacak şekilde ($x_l - x_a = 0$) veya ağırlık merkezi, aerodinamik merkezin önünde olacak şekilde ($x_l - x_a < 0$) ağırlık dağılımı ayarlaması yapılırsa burulma diverjansı oluşmaz.



Şekil 5.14: Pal Profili Üzerinde Elastik Eksen, Aerodinamik Merkez ve Ağırlık Merkezi Konumları ve Aralarındaki Mesafeler

5.1.2.3. Burulma çarpınması

Kendi kendini besleyen salınımlar, kanat çırpma-burulma etkileşimi sonucunda ortaya çıkar. Çarpınma sınırı, sistemin basit harmonik hareket yapmaya başladığı durum olarak tanımlanır. Bu tanımdan yola çıkılarak, denklemler (5.48a) ve (5.48b) ile tanımlanan deplasmanlar denklem (5.49) ile verilen matriste yerlerine koyulursa aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\beta} \\ \tilde{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.55)$$

Burada $[m]$ matrisinin elemanları, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$m_{11} = s^2 + \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k)s + \nu_{\beta}^2 \quad (5.56a)$$

$$m_{12} = -\frac{3}{2} \frac{x_l}{L} s^2 - \frac{\gamma}{12} \frac{c}{L} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c}\right) \bar{C}(k)s - \frac{\gamma}{8} \bar{C}(k) - \frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \quad (5.56b)$$

$$m_{21} = -\frac{3}{2} \frac{x_l}{L} s^2 - \frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \bar{C}(k)s - \frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \quad (5.56c)$$

$$m_{22} = I_f^* s^2 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{c}{L}\right)^2 \frac{x_a}{c} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c}\right) \bar{C}(k)s + I_f^* \nu_{\theta}^2 + \frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \bar{C}(k) + 2I_f^* \frac{\omega_{\theta 0}}{\Omega} \zeta_{\theta} \quad (5.56d)$$

Denklem (5.55)'deki matrisin determinantı sıfıra eşitlenerek aşağıdaki karakteristik denkleme ulaşılır.

$$A's^4 + B's^3 + C's^2 + D's + E' = 0 \quad (5.57)$$

Karakteristik denklemin katsayıları, aşağıda verilmektedir.

$$A' = I_f^* - \frac{9}{4} \left(\frac{x_l}{L}\right)^2 \quad (5.58a)$$

$$B' = \left[\frac{\gamma}{8} \left(\frac{c}{L}\right)^2 \frac{x_a}{c} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c}\right) + I_f^* \frac{\gamma}{8} - \left(\frac{3}{2} \frac{x_l}{L}\right) \left(\frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L}\right) - \frac{\gamma}{12} \frac{c}{L} \left(\frac{3}{2} \frac{x_l}{L}\right) \left(1 + 2 \frac{x_a}{c}\right) \right] \bar{C}(k) \quad (5.58b)$$

$$C' = I_f^* \nu_{\theta}^2 + \frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \bar{C}(k) + 2I_f^* \frac{\omega_{\theta 0}}{\Omega} \zeta_{\theta} + \left[\frac{\gamma}{8} \left(\frac{c}{L}\right)^2 \frac{x_a}{c} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c}\right) \right] \frac{\gamma}{8} \bar{C}^2(k) + \nu_{\beta}^2 I_f^* - \frac{\gamma}{12} \frac{c}{L} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c}\right) \left(\frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L}\right) \bar{C}^2(k) - \frac{9}{2} \left(\frac{x_l}{L}\right)^2 \quad (5.58c)$$

$$D' = \left\{ \left(I_f^* v_\theta^2 + \frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \bar{C}(k) + 2I_f^* \frac{\omega_{\theta 0}}{\Omega} \zeta_\theta \right) \frac{\gamma}{8} + v_\beta^2 \left[\frac{\gamma}{8} \left(\frac{c}{L} \right)^2 \frac{x_a}{c} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c} \right) \right] - \left(\frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \right) \frac{\gamma}{12} \frac{c}{L} \left(1 + 2 \frac{x_a}{c} \right) - \left(\frac{3}{2} \frac{x_l}{L} \right) \left(\frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \right) \right\} \bar{C}(k) \quad (5.58d)$$

$$E' = \left(I_f^* v_\theta^2 + \frac{\gamma}{6} \frac{x_a}{L} \bar{C}(k) + 2I_f^* \frac{\omega_{\theta 0}}{\Omega} \zeta_\theta \right) v_\beta^2 - \frac{9}{4} \left(\frac{x_l}{L} \right)^2 \quad (5.58e)$$

Daha önce Bölüm 5.1.1.4'te anlatıldığı gibi çırpınma için $s = i\omega$ olarak tanımlanıp aşağıdaki Routh kararlılık kriterine ulaşılır.

$$A'D'^2 - C'D'B' - E'B'^2 > 0 \quad (5.59)$$

Askıda kalma durumundaki rotor palı incelendiği için, rotor çevresindeki aerodinamik ortam zamana bağlı olarak değişmemektedir ve $\bar{C}(k) = 1$ kabulü yapılabilir. Denklem (5.59) düzenlenirse aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\frac{x_l - x_a}{L} < \left(\frac{c}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{\gamma}{48} \right) \quad (5.60)$$

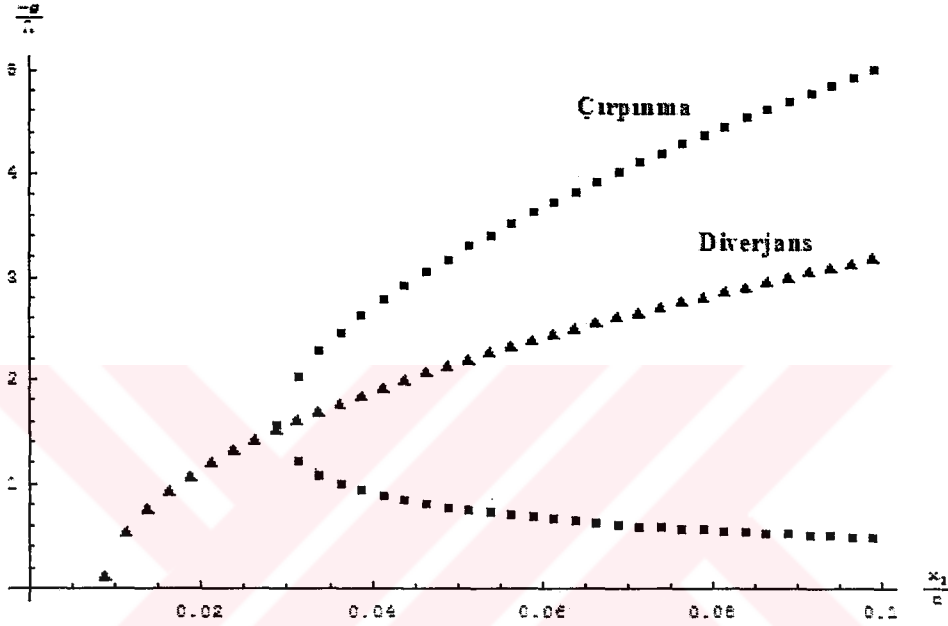
Denklem (5.54)'te ifade edildiği gibi, ağırlık merkezinin aerodinamik merkeze göre konumu burada da önemlidir. Ağırlık merkezi, çeyrek veterde ya da daha önde yer alırsa çırpınma olayının gerçekleşme ihtimali yoktur.

Çırpınma ve diverjans kararlılığını arttırabilmek için kontrol sisteminin katılığını, ω_θ , arttırmak ya da palın ağırlık merkezini, hücum kenarına doğru yaklaştırarak x_l değerini, dolayısıyla I_x değerini azaltmak gerekmektedir. Yapılan uygulamalardan biri ağırlık merkezini, aerodinamik merkezin üzerine ya da hemen gerisine yerleştirmektir. Bu nedenle rotor pallerinin çeyrek veteri etrafında hem yüklemeler hem de kararlılık gözönüne alınarak ağırlık yüklemesi yapılmaktadır. Birçok pal tasarımında bunun sağlanması için hücum kenarında dengeleyici ağırlıklar bulunmaktadır (**Chopra, ders notları**).

Denklemler (5.54) ve (5.60) kullanılarak Mathematica bilgisayar programında yazılan kodlar ile Şekil 5.15'deki diverjans ve çırpınma grafikleri çizdirilmiştir. Burada eğrilerin dışında kalan alanlar kararlı, içindeki alanlar ise kararsız bölgeleri

vermektedir. Bu grafiklerin çiziminde kullanılan rotor değerleri aşağıda verilmektedir.

$$\begin{array}{llll} \gamma = 12 & k_{p\beta} = 0 & \bar{C}(k) = 1 & c/R = 0.05 \\ \nu_\beta = 1 & x_a = 0 & I_f^* = 0.001 & \end{array}$$



Şekil 5.15: Kanat Çarpınma-Burulma Hareketleri Kararlılık Sınırları

5.2. Mentşesiz Rotor Sistemindeki Elastik Önburulmalı Palin Kanat Çarpınma–Gecikme-Burulma Hareketlerinin Askıda Kalma Durumunda Aeroelastik İncelemesi (Kaya ve Özdemir, 2005b; Özdemir ve Kaya, 2005c)

Bu bölümde, askıda kalma durumundaki mentşesiz bir rotor sisteminde yer alan elastik önburulmalı palin kanat çarpınma(flapping), gecikme(lagging) ve yunuslama(feathering) hareketlerinin birbirleri ile etkileşimleri aeroelastik açıdan incelenmektedir.

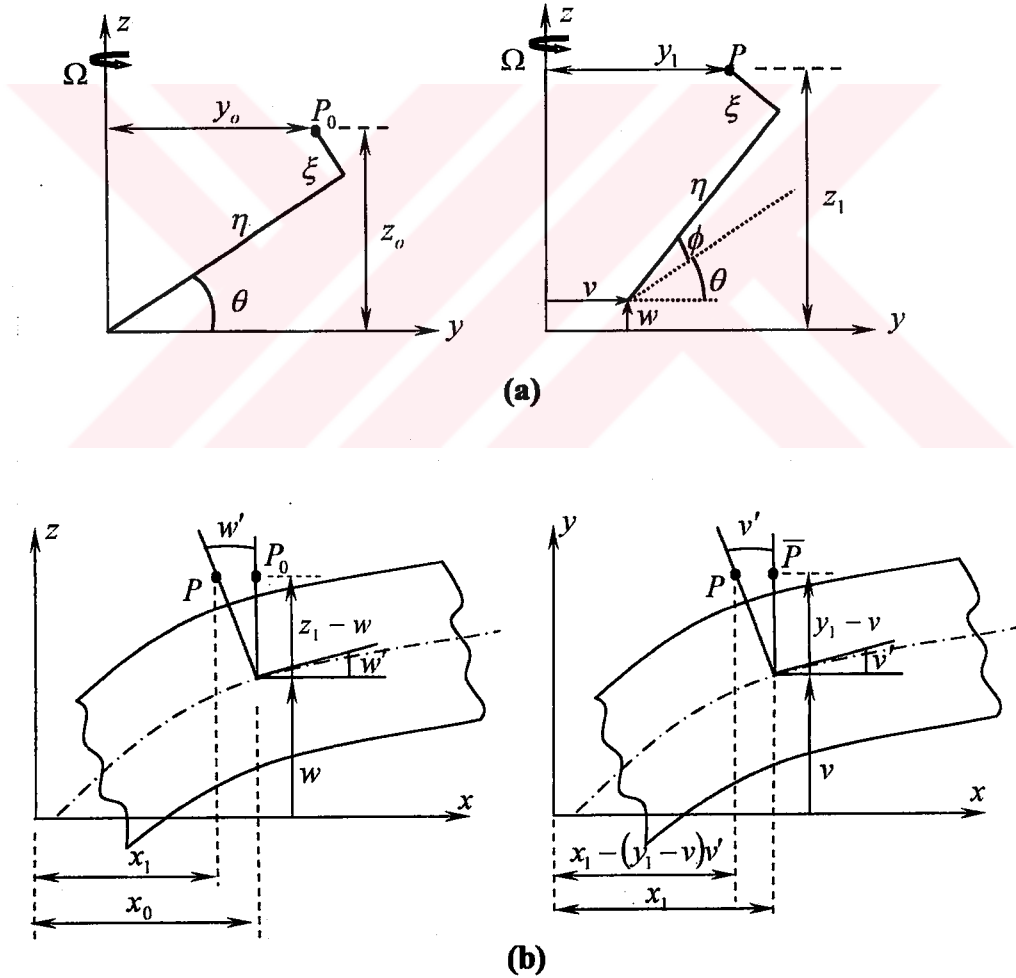
İlk aşamada, dönen ankastre Euler-Bernoulli kirişi olarak modellenen elastik önburulmalı palin potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri çıkartılmaktadır. Daha sonra Hamilton prensibi, bu enerji ifadelerine uygulanarak palin kanat çarpınma–gecikme-yunuslama hareketleri için nonlinear denklemler elde edilmiştir.

İkinci aşamada, ilk aşamada elde edilen nonlinear hareket denklemlerinin doğrusal kısımları alınarak palin dinamik ve aeroelastik incelemesi yapılmış, yapılan çözümler tablo ve grafiklerde sunulmuştur.

Üçüncü aşamada, doğrusal olmayan hareket denklemleri olduğu gibi alınarak çözüm yapılması planlanmaktadır. Üçüncü aşamanın formülasyon kısmı tamamlanmıştır. Ancak, çözüm üzerinde çalışmalar devam etmektedir.

5.2.1. Hareket denklemlerinin Hamilton yöntemi ile çıkarımı

Dönen Euler–Bernoulli kirişi olarak modellenen önburulmalı elastik palin eğilme-eğilme-burulma hareket denklemlerinin çıkarımında kullanılan ifadeleri yazmak için Şekil 5.16.(a) ve 5.16.(b)’den yararlanılır.



Şekil 5.16: Dönen Önburulmalı Euler–Bernoulli Kirişinin Eğilme-Eğilme-Burulma Deplasmanları Öncesi ve Sonrasında (a) Kesit Görünüşü (b) Üstten ve Yandan Görünüşleri

Burada θ , deforme olmamış kirişe yapısal olarak önceden verilen önkoniklik açısı; w , düzlemdışı eğilme (kanat çırpma) deplasmanı; v , düzlemsel eğilme (gecikme) deplasmanı ve ϕ , burulma deplasmanı olarak tanımlanır.

Şekil 2.16(a) ve 2.16(b)'de referans olarak alınan nokta; deplasmandan önce P_0 , düzlemdışı eğilme deplasmanından sonra $\bar{P}$ ve düzlemsel eğilme deplasmanından sonra P ile gösterilmektedir. Bu referans noktanın, deplasman öncesi ve sonrasındaki koordinatları sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

Referans noktanın deplasmandan önceki koordinatları:

$$x_0 = R + x \quad (5.61a)$$

$$y_0 = \eta \cos \theta - \xi \sin \theta \quad (5.61b)$$

$$z_0 = \eta \sin \theta + \xi \cos \theta \quad (5.61c)$$

Referans noktanın deplasmandan sonraki koordinatları:

$$x_1 = R + x + u - [\eta \sin(\theta + \phi) + \xi \cos(\theta + \phi)]w' - [\eta \cos(\theta + \phi) - \xi \sin(\theta + \phi)]v' \quad (5.62a)$$

$$y_1 = v + \eta \cos(\theta + \phi) - \xi \sin(\theta + \phi) \quad (5.62b)$$

$$z_1 = w + \eta \sin(\theta + \phi) + \xi \cos(\theta + \phi) \quad (5.62c)$$

5.2.1.1. Potansiyel enerji formülasyonu

Potansiyel enerji hesabında burulma için küçük açı kabulü yapılırsa $\cos \phi \cong 1$ ve $\sin \phi \cong \phi$ olarak alınabilir ve denklemler (5.62a)-(5.62c), aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$x_1 = R + x + u - [\eta(\phi \cos \theta + \sin \theta) + \xi(\cos \theta - \phi \sin \theta)]w' - [\eta(\cos \theta - \phi \sin \theta) - \xi(\phi \cos \theta + \sin \theta)]v' \quad (5.63a)$$

$$y_1 = v + \eta(\cos \theta - \phi \sin \theta) - \xi \sin(\phi \cos \theta + \sin \theta) \quad (5.63b)$$

$$z_1 = w + \eta(\phi \cos \theta + \sin \theta) + \xi(\cos \theta - \phi \sin \theta) \quad (5.63c)$$

Koordinatların türevleri, (2.3) no'lu denklemde yerlerine koyulmak için aşağıdaki gibi hesaplanır. Burada incelenen palin önburulma açısı, θ , sabit olup pal boyunca değişmediği için $\theta' = 0$ alınır.

$$dx_0 = dx \quad (5.64a)$$

$$dy_0 = (\cos\theta)d\eta - (\sin\theta)d\xi \quad (5.64b)$$

$$dz_0 = (\sin\theta)d\eta + (\cos\theta)d\xi \quad (5.64c)$$

$$\begin{aligned} dx_1 = & \{1 + u' - (\eta\phi'\cos\theta - \xi\phi'\sin\theta)w' - [\eta(\phi\cos\theta + \sin\theta) + \xi(\cos\theta - \phi\sin\theta)]w'' + \\ & (\eta\phi'\sin\theta + \xi\phi'\cos\theta)v' - [\eta(\cos\theta - \phi\sin\theta) - \xi(\phi\cos\theta + \sin\theta)]v''\}dx - \\ & [(\phi\cos\theta + \sin\theta)w' + (\cos\theta - \phi\sin\theta)v']d\eta - \\ & [(\cos\theta - \phi\sin\theta)w' - (\phi\cos\theta + \sin\theta)v']d\xi \end{aligned} \quad (5.65a)$$

$$dy_1 = (v' - \eta\phi'\sin\theta - \xi\phi'\cos\theta)dx + (\cos\theta - \phi\sin\theta)d\eta - (\phi\cos\theta + \sin\theta)d\xi \quad (5.65b)$$

$$dz_1 = (w' + \eta\phi'\cos\theta - \xi\phi'\sin\theta)dx + (\phi\cos\theta + \sin\theta)d\eta + (\cos\theta - \phi\sin\theta)d\xi \quad (5.65c)$$

Bu türevler, denklem (2.3)'te yerlerine koyularak ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ ifadeleri hesaplanır. Elde edilen ifadelerin içinde yer alan küçük terimler, **Hodges ve Dowell (1974)**'te kullanılan ve Tablo 5.1 ile verilen mertebe şemasına göre ihmal edilir.

Tablo 5.1: Kanat Çırpma-Gecikme-Burulma Etkileşimli Euler-Bernoulli Kirişi için Mertebe Şeması

$\frac{x}{L} = O(1)$	$\frac{u}{L} = O(\varepsilon^2)$
$\frac{\xi}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{\eta}{L} = O(\varepsilon)$
$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{v}{L} = O(\varepsilon)$

Tablo 5.1 kullanılarak yapılan sadeleştirmelerden sonra ε_{xx} , $\varepsilon_{x\eta}$ ve $\varepsilon_{x\xi}$ ifadelerinin sadeleştirilmiş halleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_{xx} = u' + \frac{(v')^2}{2} + \frac{(w')^2}{2} + (\eta^2 + \xi^2) \frac{(\phi')^2}{2} - v''[\eta(\cos\theta - \phi\sin\theta) - \xi(\phi\cos\theta + \sin\theta)] - w''[\eta(\phi\cos\theta + \sin\theta) + \xi(\cos\theta - \phi\sin\theta)] \quad (5.66a)$$

$$\gamma_{x\eta} = -\xi\phi' \quad (5.66b)$$

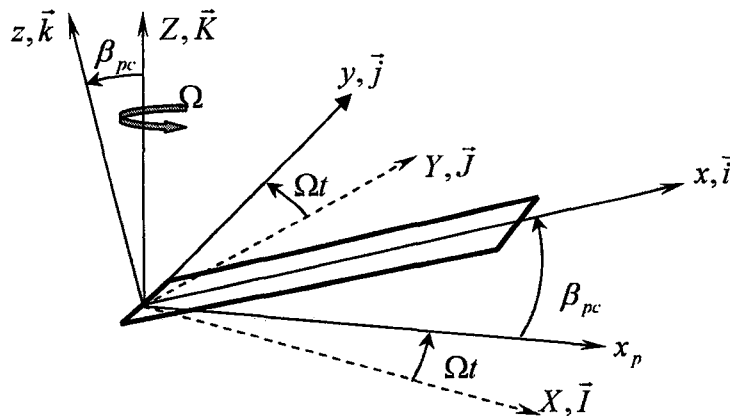
$$\gamma_{x\xi} = \eta\phi' \quad (5.66c)$$

Denklemler (5.66a)-(5.66c)'deki ifadelerin kareleri alınarak Tablo 5.1 ile verilen mertebe şemasına göre gerekli sadeleştirmeler yapılır ve bulunan ifadeler, denklem (2.8)'de yerlerine koyulur. Alan integrali hesabında Tablo 2.2'de verilen ifadelerden yararlanılırsa potansiyel enerji ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA \left[u'(v')^2 + u'(w')^2 + k_A^2 u'(\phi')^2 \right] + EI_z \left[(\cos\theta)^2 (v'')^2 - (\sin 2\theta) \phi (v'')^2 + 2(\cos\theta)^2 \phi v''w'' + (\sin 2\theta) v''w'' - 2\phi (\sin\theta)^2 v''w'' + (\sin 2\theta) \phi (w'')^2 + (\sin\theta)^2 (w'')^2 \right] + EI_y \left[(\sin 2\theta) \phi (v'')^2 + (\sin\theta)^2 (v'')^2 - 2(\cos\theta)^2 \phi v''w'' - (\sin 2\theta) v''w'' + 2(\sin\theta)^2 \phi v''w'' + (\cos\theta)^2 (w'')^2 - (\sin 2\theta) \phi (w'')^2 \right] + GJ (\phi')^2 \right\} \quad (5.67)$$

5.2.1.2. Kinetik enerji formülasyonu

Bu formülasyonda, Şekil 5.17'de gösterilen önkoniklik açısı (precone angle), β_{pc} , hesaba katılmaktadır. Buna göre, palin üzerine bağlı eksen takımı ile sabit eksen takımı arasında β_{pc} kadarlık bir açı farkı bulunmaktadır (Hodges ve Dowell, 1974).



Şekil 5.17: Önkoniklik Açısına Sahip Palin Koordinat Sistemleri

Burada X , Y ve Z koordinat sistemi, atalet eksen takımında bulunmaktadır ve hareketsizdir. Dik eksen takımı, x_p , y ve Z ; atalet eksen takımına göre sabit $\Omega\vec{K}$ açısal hızı ile dönmektedir. Referans düzlemi ya da dönme düzlemi olarak belirlenen düzlem; X , x_p , Y ve y eksenlerini içermektedir. Deformasyondan önce palin elastik eksenini ile çakışık olan $\bar{x}$ eksenini, β_{pc} olarak tanımlanan önkoniklik açısı kadarlık bir açıyla dönme düzleminde yer alır.

Kinetik enerji hesabında deplasman hızlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Referans noktanın hız vektörünün ifadesi, önkoniklik açısı nedeniyle denklem (2.30)'dan farklı olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \Omega\vec{K} \times \vec{r} = (\dot{x}_1 - y_1\Omega\cos\beta_{pc})\vec{i} + (\dot{y}_1 + x_1\Omega\cos\beta_{pc} - z_1\Omega\sin\beta_{pc})\vec{j} + (\dot{z}_1 + y_1\Omega\sin\beta_{pc})\vec{k} \quad (5.68)$$

Kinetik enerji hesabında burulma açısı ϕ , potansiyel enerji hesabından farklı olarak $\cos\phi \cong 1 - \phi^2/2$ ifadesi ile denklemlerde yerine koyulur çünkü hareket denklemlerinin son halinde yer alması gereken bazı önemli terimler, $\cos\phi \cong 1 - \phi^2/2$ 'nin kullanımı ile ortaya çıkmaktadır. Bu durumda (5.63a)-(5.63c) no'lu denklemler, aşağıdaki gibi yeniden tanımlanır.

$$x_1 = R + x + u - \left\{ \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin\theta + \phi \cos\theta \right] + \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos\theta - \phi \sin\theta \right] \right\} w' - \left\{ \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos\theta - \phi \sin\theta \right] - \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin\theta + \phi \cos\theta \right] \right\} v' \quad (5.69a)$$

$$y_1 = v + \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos\theta - \phi \sin\theta \right] - \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin\theta + \phi \cos\theta \right] \quad (5.69b)$$

$$z_1 = w + \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin\theta + \phi \cos\theta \right] + \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos\theta - \phi \sin\theta \right] \quad (5.69c)$$

Önkoniklik açısı için küçük açı kabulü yapılır ve $\cos\beta_{pc} \cong 1$ ve $\sin\beta_{pc} \cong \beta_{pc}$ olarak tanımlanırsa denklem (5.68)'te tanımlanan dönen Euler-Bernoulli kirişinin hız bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
V_x = \dot{x}_1 - y_1 \Omega = \dot{u} - [\eta(-\phi \sin \theta + \cos \theta) + \xi(-\phi \cos \theta - \sin \theta)] \dot{\phi} w' - \\
\left\{ \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] + \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] \right\} w'' - \\
[\eta(-\phi \cos \theta - \sin \theta) - \xi(-\phi \sin \theta + \cos \theta)] \dot{\phi} v' - \\
\left\{ \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] - \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] \right\} v'' - \\
\left\{ v + \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] - \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] \right\} \Omega
\end{aligned} \quad (5.70a)$$

$$\begin{aligned}
V_y = \dot{y}_1 + x_1 \Omega - z_1 \Omega \beta_{pc} = \dot{v} + \eta(-\phi \cos \theta - \sin \theta) \dot{\phi} - \xi(-\phi \sin \theta + \cos \theta) \dot{\phi} + \\
\left[R + x + u - \left\{ \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] + \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] \right\} w' - \right. \\
\left. \left\{ \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] - \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] \right\} v' \right] \Omega - \\
\left\{ w + \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] + \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] \right\} \Omega \beta_{pc}
\end{aligned} \quad (5.70b)$$

$$\begin{aligned}
V_z = \dot{z}_1 + y_1 \Omega \beta_{pc} = \dot{w} + \eta(-\phi \sin \theta + \cos \theta) \dot{\phi} + \xi(-\phi \cos \theta - \sin \theta) \dot{\phi} + \\
\left\{ v + \eta \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \cos \theta - \phi \sin \theta \right] - \xi \left[\left(1 - \frac{\phi^2}{2} \right) \sin \theta + \phi \cos \theta \right] \right\} \Omega \beta_{pc}
\end{aligned} \quad (5.70c)$$

Hodges ve Dowell (1974)'te belirtildiği kadarıyla β_{pc} önkoniklik açısı $O(\varepsilon)$ mertebesinde dir. Denklem (2.12) ile verilen kinetik enerji ifadesi doğrultusunda hesap yapıp hız bileşenlerinin kareleri bulunur ve Tablo 5.1 ile verilen mertebe şeması kullanılarak çok küçük terimler ihmal edilir. Geri kalan ifadeler, denklem (2.12)'de yerlerine koyularak **Hodges ve Dowell (1974)**'te kullanılan ve Tablo 2.3 ile verilen alan integralleri kullanılırsa kinetik enerji ifadesinin son haline ulaşılır.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ m \left[(1 + 2Rx\Omega^2 + x^2\Omega^2) + v^2\Omega^2 - 2v\dot{u}\Omega + 2Ru\Omega^2 + 2xu\Omega^2 - 2R\Omega^2 w\beta_{pc} - \right. \right. \\
2x\Omega^2 w\beta_{pc} + 2R\Omega\dot{v} + 2u\Omega\dot{v} + 2x\Omega\dot{v} - 2\Omega\dot{v}w\beta_{pc} + \dot{v}^2 + 2\Omega v\dot{w}\beta_{pc} + \dot{w}^2 \left. \right] + \\
mk_{m1}^2 \left[2\Omega^2 \phi \cos \theta \sin \theta + (\Omega^2 \sin^2 \theta) + 2\Omega\dot{v}' \sin^2 \theta - 2\Omega \cos \theta \sin \theta \dot{w}' + \dot{\phi}^2 + \right. \\
\phi^2 \Omega^2 \cos 2\theta \left. \right] + mk_{m2}^2 \left[(\Omega^2 \cos^2 \theta) - 2\Omega^2 \phi \cos \theta \sin \theta + 2\Omega\dot{v}' \cos^2 \theta + \dot{\phi}^2 + \right. \\
\left. 2\Omega \cos \theta \sin \theta \dot{w}' - \phi^2 \Omega^2 \cos 2\theta \right] \left. \right\}
\end{aligned} \quad (5.71)$$

5.2.1.3. Hamilton prensibinin uygulanması ve hareket denklemleri

Yukarıda elde edilen potansiyel ve kinetik enerji ifadelerine denklem (2.14) ile verilen Hamilton prensibi uygulanırsa dönen Euler–Bernoulli kirişinin eğilme-eğilme-burulma hareket denklemi elde edilir. Burada W ile gösterilen ifade dış kuvvetlerin yaptığı sanal işi simgelemektedir ve bu çalışmada dış kuvvetler, aerodinamik kuvvetlerdir. Buna göre, sanal işin varyasyonu aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\delta W = \int_0^L (F_u \delta u + F_v \delta v + F_z \delta w + M_\phi \delta \phi) \quad (5.72)$$

Sırasıyla denklemler (5.67) ve (5.71) ile verilen potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinin varyasyonları alınır. Elde edilen ifadeler ve denklem (5.72)'ye Hamilton prensibi uygulanır. Sonuçta elde edilen ifadeler δu , δv , δw ve $\delta \phi$ 'nin katsayıları şeklinde ayrılırsa aşağıdaki nonlinear hareket denklemlerine ulaşılır.

$$\underline{\delta u}: \quad -T' - m\Omega^2(x + R) - 2m\Omega\dot{v} = F_u \quad (5.73a)$$

$$\underline{\delta v}: \quad -(Tv')' + [EI_z - (EI_z - EI_y)\sin^2\theta]v'''' + (EI_z - EI_y)\left[\frac{\sin 2\theta}{2}w'''' - \sin 2\theta(\phi v'')'' + \cos 2\theta(\phi w'')''\right] + 2m\Omega(\dot{u} - \beta_{pc}\dot{w}) + m(\ddot{v} - \Omega v) = F_v \quad (5.73b)$$

$$\underline{\delta w}: \quad -(Tw')' + [EI_y + (EI_z - EI_y)\sin^2\theta]w'''' + (EI_z - EI_y)\left[\frac{\sin 2\theta}{2}v'''' + \cos 2\theta(\phi v'')'' + \sin 2\theta(\phi w'')''\right] + 2m\Omega\beta_{pc}\dot{v} + m\ddot{w} = F_z - m\Omega^2\beta_{pc}(R + x) \quad (5.73c)$$

$$\underline{\delta \phi}: \quad (EI_z - EI_y)\left[(w''^2 - v''^2)\frac{\sin 2\theta}{2} + v''w''\cos 2\theta\right] - (GJ\phi')' - k_A^2(T\phi')' + mk_m^2\ddot{\phi} + m\Omega^2(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)\phi\cos 2\theta = M_\phi - m\Omega^2(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)\frac{\sin 2\theta}{2} \quad (5.73d)$$

Denklemlerde yer alan küçük terimler ihmal edilerek daha sade denklemler elde edebilmek için Tablo 5.2'deki mertbe şemasından yararlanılır (Hodges ve Ormiston, 1976).

Tablo 5.2: Hareket Denklemlerinde Kullanılan Elastik Pal Mertebe Şeması

$\frac{c}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{EA}{m\Omega^2 L^2} = O(\varepsilon^{-2})$	$\phi = O(\varepsilon)$
$\frac{v}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{EI_y}{m\Omega^2 L^4}, \frac{EI_z}{m\Omega^2 L^4} = O(1)$	$\beta_{pc} = O(\varepsilon)$
$\frac{w}{L} = O(\varepsilon)$	$\frac{GJ}{m\Omega^2 L^4} = O(1)$	$L \frac{d(\cdot)}{dx} = O(1)$
$\frac{C_d}{a} = O(\varepsilon^2)$	$\theta = O(1)^{\S}$	$\frac{d(\cdot)}{\Omega dt} = O(1)$
$\frac{v_i}{\Omega L} = O(\varepsilon)$	$\theta = O(\varepsilon)$	$\frac{k_A}{L}, \frac{k_{m1}}{L}, \frac{k_{m2}}{L}, \frac{k_m}{L} = O(\varepsilon)$

Denklem (5.73a)'daki eşitliğin sağında yer alan F_u aerodinamik kuvvet ifadesi mertebe olarak küçük olduğu için ihmal edilir ve (5.73b)-(5.73d) no'lu denklemlerde yer alan diğer aerodinamik yüklemeler, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$F_y = \frac{\rho_{\infty} a c}{2} \left\{ v_i^2 - \Omega^2 x^2 \frac{C_d}{a} - \Omega x v_i (\theta + \phi) - \left[2\Omega x \frac{C_d}{a} + (\theta + \phi) v_i \right] \dot{v} + [2v_i - \Omega x (\theta + \phi)] \dot{w} \right\} \quad (5.74a)$$

$$F_z = \frac{\rho_{\infty} a c}{2} \left\{ -\Omega x v_i^2 + \Omega^2 x^2 \left[(\theta + \phi) + \int_0^x v' w' dx \right] - \Omega^2 x v (\beta_{pc} + w') + \Omega^2 \frac{x c}{2} (\beta_{pc} + w') + [2\Omega x (\theta + \phi) - v_i] \dot{v} - \Omega x \dot{w} + \frac{3c}{4} \Omega x \dot{\phi} - v_i (\theta + \phi) - \frac{c}{4} \ddot{w} \right\} \quad (5.74b)$$

$$M_{\phi} = -\frac{\rho_{\infty} a c}{2} \left(\frac{c^2}{8} \Omega x \dot{\phi} \right) \quad (5.74c)$$

Denklemler (5.74a)-(5.74c) ile verilen aerodinamik yüklemeler, (5.73a)-(5.73d) ile verilen hareket denklemlerinde yerlerine koyulur. Sonuçta elde edilen denklemleri boyutsuzlaştırmak ve literatürdeki çalışmaların sonuçları ile karşılaştırma

^{\S} Aerodinamik kuvvet ifadelerindeki θ açısı

yapabilmek amacıyla aşağıdaki boyutsuz parametreler ve boyutsuzlaştırma dönüşümleri tanımlanır.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad \delta = \frac{R}{L} \quad \gamma = \frac{3\rho acL}{m} \quad \lambda_i = \frac{v_i}{\Omega L} \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{\Omega}$$

$$\bar{c} = \frac{c}{L} \quad \bar{v} = \frac{v}{L} \quad \bar{w} = \frac{w}{L} \quad K = \left(\frac{k_A}{k_m} \right)^2 \quad \mu = \frac{k_m}{L}$$

$$\mu_2 = \frac{k_{m2}}{L} \quad \mu_1 = \frac{k_{m1}}{L} \quad \Lambda_1 = \frac{EI_y}{m\Omega^2 L^4} \quad \Lambda_2 = \frac{EI_z}{m\Omega^2 L^4} \quad \kappa = \frac{GJ}{m\Omega^2 L^4}$$

$$\left(\right)' = \frac{\partial(\)}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial(\)}{\partial \xi} \quad \left(\right) = \frac{\partial(\)}{\partial t} = \Omega \frac{\partial(\)}{\partial \psi} \quad (5.75)$$

Denklem (5.75) ile tanımlanan boyutsuz ifadeler hareket denklemlerinde yerlerine koyulursa aşağıdaki boyutsuz nonlinear hareket denklemlerine ulaşılır.

$$\begin{aligned} & \delta[\bar{v}' - (1 - \xi)\bar{v}'''] - \left[\bar{v}' \int_{\xi}^1 \left(\xi + 2\bar{v} \right) d\xi \right]' + [\Lambda_2 - (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sin^2 \theta] \bar{v}^{IV} + \\ & (\Lambda_2 - \Lambda_1) \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \bar{w}^{IV} - (\phi \bar{v}'')'' \sin 2\theta + (\phi \bar{w}'')'' \cos 2\theta \right] - 2\beta_{pc} \dot{\bar{w}} - \\ & 2 \int_0^{\xi} \left(\bar{v}' \dot{\bar{v}}' + \bar{w}' \dot{\bar{w}}' \right) d\xi + \ddot{\bar{v}} - \bar{v} + \frac{\gamma}{6} \left\{ \xi \lambda_i \phi + \left[2\xi \frac{C_d}{a} + (\theta + \phi) \lambda_i \right] \dot{\bar{v}} - \right. \\ & \left. [2\lambda_i - \xi(\theta + \phi)] \dot{\bar{w}} \right\} = \frac{\gamma}{6} \left(\lambda_i^2 - \xi \lambda_i \theta - \xi^2 \frac{C_d}{a} \right) \end{aligned} \quad (5.76a)$$

$$\begin{aligned} & \delta[\bar{w}' - (1 - \xi)\bar{w}'''] - \left[\bar{w}' \int_{\xi}^1 \left(\xi + 2\bar{v} \right) d\xi \right]' + [\Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sin^2 \theta] \bar{w}^{IV} + \\ & (\Lambda_2 - \Lambda_1) \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \bar{v}^{IV} + (\phi \bar{v}'')'' \cos 2\theta + (\phi \bar{w}'')'' \sin 2\theta \right] + 2\beta_{pc} \dot{\bar{v}} + \\ & \left(1 + \frac{\gamma \bar{c}}{24} \right) \ddot{\bar{w}} + \frac{\gamma}{6} \left\{ -\xi^2 \left(\phi + \int_0^{\xi} \bar{v}' \bar{w}'' d\xi \right) + \xi (\beta_{pc} + \bar{w}') \bar{v} - \frac{\bar{c} \xi}{2} \bar{w}' - \right. \\ & \left. [2\xi(\theta + \phi) - \lambda_i] \dot{\bar{v}} + \xi \dot{\bar{w}} - \frac{3\bar{c} \xi}{4} \dot{\phi} \right\} = \frac{\gamma}{6} \left(-\xi \lambda_i + \frac{\bar{c} \xi}{2} \beta_{pc} + \xi^2 \theta \right) - \xi \beta_{pc} \end{aligned} \quad (5.76b)$$

$$\delta K \mu^2 [\phi' - (1 - \xi) \phi''] - \frac{K \mu^2}{2} [(1 - \xi^2) \phi'] - \kappa \phi'' + \mu^2 \ddot{\phi} + (\mu_2^2 - \mu_1^2) \phi \cos 2\theta + (\Lambda_2 - \Lambda_1) [(\bar{w}''^2 - \bar{v}''^2) \frac{\sin 2\theta}{2} + \bar{v}'' \bar{w}'' \cos 2\theta] + \frac{\gamma}{48} \bar{c}^2 \xi \dot{\phi} = -(\mu_2^2 - \mu_1^2) \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (5.76c)$$

5.2.2. Doğrusal hareket denklemlerinin incelenmesi

Bu bölümde, denklemler (5.76a)-(5.76c) ile verilen nonlinear hareket denklemlerinin sadece doğrusal kısımları alınarak hesaplamalar yapılmıştır. Boyutsuz doğrusal hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\delta [\bar{v}' - (1 - \xi) \bar{v}''] - \left(\bar{v}' \int_{\xi}^1 \xi d\xi \right)' + [\Lambda_2 - (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sin^2 \theta] \bar{v}''' + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\sin 2\theta}{2} \bar{w}''' - 2\beta_{pc} \dot{\bar{w}} + \bar{v} - \bar{v} + \frac{\gamma}{6} \{ \xi \lambda_i \phi + [2\xi \frac{C_d}{a} + (\theta + \phi) \lambda_i] \dot{\bar{v}} - [2\lambda_i - \xi(\theta + \phi)] \dot{\bar{w}} \} = \frac{\gamma}{6} \left(\lambda_i^2 - \xi \lambda_i \theta - \xi^2 \frac{C_d}{a} \right) \quad (5.77a)$$

$$\delta [\bar{w}' - (1 - \xi) \bar{w}''] - \left(\bar{w}' \int_{\xi}^1 \xi d\xi \right)' + [\Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sin^2 \theta] \bar{w}''' + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\sin 2\theta}{2} \bar{v}''' + 2\beta_{pc} \dot{\bar{v}} + \left(1 + \frac{\gamma \bar{c}}{24} \right) \ddot{\bar{w}} + \frac{\gamma}{6} \{ -\xi^2 \phi + \xi (\beta_{pc} + \bar{w}') \bar{v} - \frac{\bar{c} \xi}{2} \bar{w}' - [2\xi(\theta + \phi) - \lambda_i] \dot{\bar{v}} + \xi \dot{\bar{w}} - \frac{3\bar{c} \xi}{4} \dot{\phi} \} = \frac{\gamma}{6} \left(-\xi \lambda_i + \frac{\bar{c} \xi}{2} \beta_{pc} + \xi^2 \theta \right) - \xi \beta_{pc} \quad (5.77b)$$

$$\delta K \mu^2 [\phi' - (1 - \xi) \phi''] - \frac{K \mu^2}{2} [(1 - \xi^2) \phi'] - \kappa \phi'' + \mu^2 \ddot{\phi} + (\mu_2^2 - \mu_1^2) \phi \cos 2\theta + \frac{\gamma}{48} \bar{c}^2 \xi \dot{\phi} = -(\mu_2^2 - \mu_1^2) \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (5.77c)$$

Denklemler (5.77a)-(5.77c) için kullanılan boyutsuz sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\xi = 0 \text{ 'da} \quad \bar{v} = \bar{w} = \phi = 0 \text{ ve } \bar{v}' = \bar{w}' = 0 \quad (5.78a)$$

$$\xi = 1 \text{ 'da} \quad \phi' = 0, \bar{v}'' = \bar{w}'' = 0 \text{ ve } \bar{v}''' = \bar{w}''' = 0 \quad (5.78b)$$

5.2.2.1. Boyutsuz bozuntu denklemleri

Denklemler (5.78a)-(5.78c) ile verilen doğrusal ve boyutsuz denklemlerin kararlılık incelemesini yapabilmek için her serbestlik derecesi aşağıda verildiği gibi sürekli hal bileşeni ve bozuntu hali bileşeni olarak iki kısımdan oluşur.

$$\bar{v}(\xi, \psi) = v_0(\xi) + \tilde{v}(\xi, \psi) \quad (5.79a)$$

$$\bar{w}(\xi, \psi) = w_0(\xi) + \tilde{w}(\xi, \psi) \quad (5.79b)$$

$$\phi(\xi, \psi) = \phi_0(\xi) + \tilde{\phi}(\xi, \psi) \quad (5.79c)$$

Denklemler (5.79a)-(5.79c) ile verilen bileşenler, (5.78a)-(5.78c) no'lu denklemlerde yerlerine koyulursa her denklemden, sürekli hal denklemi ve bozuntu hali denklemi olmak üzere iki denklem ortaya çıkar.

Kararsızlık incelemesi için bozuntu denklemleri kullanılır. Bu denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\delta[\tilde{v}' - (1 - \xi)\tilde{v}''] - \tilde{v}'' \frac{(1 - \xi^2)}{2} + \tilde{v}'\xi + \tilde{v}'' - \tilde{v} + [\Lambda_2 - (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sin^2\theta]\tilde{v}''' + (\Lambda_2 - \Lambda_1)\frac{\sin 2\theta}{2}\tilde{w}'' - 2\beta_{pc}\tilde{w} - \frac{\gamma}{6}\left[\xi\lambda_i\tilde{\phi} + \left(2\xi\frac{C_d}{a} + \theta\lambda_i\right)\tilde{v} - (2\lambda_i - \xi\theta)\tilde{w}\right] = 0 \quad (5.80a)$$

$$\delta[\tilde{w}' - (1 - \xi)\tilde{w}''] - \tilde{w}'' \frac{(1 - \xi^2)}{2} + \tilde{w}'\xi + [\Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_1)\sin^2\theta]\tilde{w}''' + \left(1 + \frac{\gamma}{24}\bar{c}\right)\tilde{w}'' + 2\beta_{pc}\tilde{v} + (\Lambda_2 - \Lambda_1)\frac{\sin 2\theta}{2}\tilde{v}'' + \frac{\gamma}{6}\left[-\xi^2\tilde{\phi} + \xi\beta_{pc}\tilde{v} - \frac{\bar{c}\xi}{2}\tilde{w}' - (2\xi\theta - \lambda_i)\tilde{v} + \xi\tilde{w} - \frac{3}{4}\bar{c}\xi\tilde{\phi}\right] = 0 \quad (5.80b)$$

$$\delta K\mu^2[\tilde{\phi}' - (1 - \xi)\tilde{\phi}''] - \frac{K\mu^2}{2}[(1 - \xi^2)\phi'] - \kappa\tilde{\phi}'' + \mu^2\tilde{\phi}'' + (\mu_2^2 - \mu_1^2)\tilde{\phi}\cos 2\theta + \frac{\gamma\xi}{48}\bar{c}^2\tilde{\phi} = 0 \quad (5.80c)$$

Çırpınma (flutter) hızı, akışkan ile etkileşim halinde olan bir yapının basit harmonik hareket yapmaya başladığı hız olarak tanımlanır. Deplasmanlar, aşağıdaki gibi basit harmonik hareket ifadeleri ile verilebilir.

$$\tilde{v}(x, t) = V(x)e^{i\omega t} \quad (5.81a)$$

$$\tilde{w}(x, t) = W(x)e^{i\omega t} \quad (5.81b)$$

$$\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x)e^{i\omega t} \quad (5.81c)$$

Basit harmonic hareket ifadeleri, (5.80a)-(5.80c) no'lu denklemlerde yerlerine koyulursa aşağıdaki ifadelere ulaşılır. Burada, aynı terimlerin katsayıları A , B , C gibi boyutsuz parametrelerin altında birleştirilerek denklemler daha sade şekilde yazılmıştır.

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{d\xi} \left\{ \left[\frac{1-\xi^2}{2} + \delta(1-\xi) \right] \frac{dV}{d\xi} \right\} + A_1 \frac{d^4 V}{d\xi^4} + A_2 \frac{d^4 W}{d\xi^4} + A_3 W + A_4 V + A_5 \xi \phi + \\ & A_6 \xi V + A_7 \xi W = 0 \end{aligned} \quad (5.82a)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{d\xi} \left\{ \left[\frac{1-\xi^2}{2} + \delta(1-\xi) \right] \frac{dW}{d\xi} \right\} + B_1 \frac{d^4 W}{d\xi^4} + B_2 \frac{d^4 V}{d\xi^4} + B_3 V + B_4 W + B_5 \xi^2 \phi + \\ & B_6 \xi V + B_7 \xi W + B_9 \xi \frac{dW}{d\xi} + B_9 \xi \phi = 0 \end{aligned} \quad (5.82b)$$

$$-C_1 \frac{d}{d\xi} \left\{ \left[\frac{1-\xi^2}{2} + \delta(1-\xi) \right] \frac{d\phi}{d\xi} \right\} + C_2 \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + C_3 \phi + C_4 \xi \phi = 0 \quad (5.82c)$$

Burada kullanılan boyutsuz katsayılar aşağıda verilmektedir.

$$A_1 = [\Lambda_2 - (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sin^2 \theta] \quad (5.83a)$$

$$A_2 = (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (5.83b)$$

$$A_3 = -2i\bar{\omega} \left(\beta_{pc} + \frac{\gamma}{6} \lambda_i \right) \quad (5.83c)$$

$$A_4 = -(1 + \bar{\omega}^2) + i\bar{\omega} \frac{\gamma}{6} \theta \lambda_i \quad (5.83d)$$

$$A_5 = \frac{\gamma}{6} \lambda_i \quad (5.83e)$$

$$A_6 = i\bar{\omega} \frac{\gamma}{3} \frac{C_d}{a} \quad (5.83f)$$

$$A_7 = i\bar{\omega} \frac{\gamma}{6} \theta \quad (5.83g)$$

$$B_1 = [\Lambda_1 + (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sin^2 \theta] \quad (5.84a)$$

$$B_2 = A_2 = (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (5.84b)$$

$$B_3 = i\bar{\omega} \left(2\beta_{pc} + \frac{\gamma}{6} \lambda_i \right) \quad (5.84c)$$

$$B_4 = -\bar{\omega}^2 \left(1 + \frac{\bar{c}\gamma}{24} \right) \quad (5.84d)$$

$$B_5 = -\frac{\gamma}{6} \quad (5.84e)$$

$$B_6 = \frac{\gamma}{6} (\beta_{pc} - 2i\omega\theta) \quad (5.84f)$$

$$B_7 = i\bar{\omega} \frac{\gamma}{6} \quad (5.84g)$$

$$B_8 = -\frac{\bar{c}\gamma}{12} \quad (5.84h)$$

$$B_9 = -i\bar{\omega} \frac{\bar{c}\gamma}{8} \quad (5.84i)$$

$$C_1 = K\mu^2 \quad (5.85a)$$

$$C_2 = -\kappa \quad (5.85b)$$

$$C_4 = i\bar{\omega} \frac{\bar{c}^2 \gamma}{48} \quad (5.85c)$$

$$C_3 = -\bar{\omega}^2 \mu^2 + (\mu_2^2 - \mu_1^2) \cos 2\theta \quad (5.85d)$$

5.2.2.2. Diferansiyel dönüşüm yönteminin uygulanması

Bölüm 3'te detayları anlatılan diferansiyel dönüşüm yöntemi, denklem (5.82a)-(5.82c) ile verilen boyutsuz hareket denklemlerine uygulanırsa aşağıdaki dönüştürülmüş ifadelerle ulaşılır.

$$\begin{aligned} & A_1(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)V[k+4] + A_2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W[k+4] - \\ & (k+1)(k+2)\left(\delta + \frac{1}{2}\right)V[k+2] + \delta(k+1)^2V[k+1] + \left[\frac{k(k+1)}{2} + A_4\right]V[k] + \\ & A_6V[k-1] + A_3W[k] + A_7W[k-1] + A_5\phi[k-1] = 0 \end{aligned} \quad (5.86a)$$

$$\begin{aligned} & B_1(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)W[k+4] + B_2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)V[k+4] - \\ & (k+1)(k+2)\left(\delta + \frac{1}{2}\right)W[k+2] + \delta(k+1)^2W[k+1] + \left[\frac{k(k+1)}{2} + B_4 + kB_8\right]W[k] + \\ & B_7W[k-1] + B_3V[k] + B_6V[k-1] + B_9\phi[k-1] + B_5\phi[k-2] = 0 \end{aligned} \quad (5.86b)$$

$$\begin{aligned} & \left[C_2 - C_1\left(\delta + \frac{1}{2}\right)\right](k+1)(k+2)\phi[k+2] + C_1(k+1)^2\delta\phi[k+1] + C_4\phi[k-1] + \\ & \left[C_3 + C_1\frac{k(k+1)}{2}\right]\phi[k] = 0 \end{aligned} \quad (5.86c)$$

5.2.2.3. Çözüm

Diferansiyel dönüşüm yöntemi uygulanarak basitleştirilen denklemler doğrultusunda Mathematica bilgisayar programında yazılar kodlar kullanılarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçlar, **Hodges ve Ormiston (1976)** ile **Hodges ve Ormiston (1973)**'ün sonuçları ile karşılaştırıldığında sonuçlar arasında uyum gözlenmiştir.

İlk aşamada, hareket denklemlerindeki aerodinamik terimler hesaba katılmadan rotorun boşlukta dönme frekansları elde edilmiştir. Üzerinde yapısal burulma bulunmayan pallerde geometrik yunuslama açısı, θ , sıfır olarak alındığında, palin kanat çırpma, gecikme ve yunuslama hareket denklemleri arasında etkileşim olmadığı görülmüştür. Bu durumda elde edilen frekanslar, etkileşimsiz frekanslar olarak tanımlanır. Palin açısız hızı sıfır iken (dönme yok) hesaplanan etkileşimsiz frekanslar, palin dönmesi durumunda ortaya çıkan frekansların hesabında kullanılmaktadır. Bu iki tür frekans arasındaki ilişki aşağıdaki ifadelerle verilmektedir.

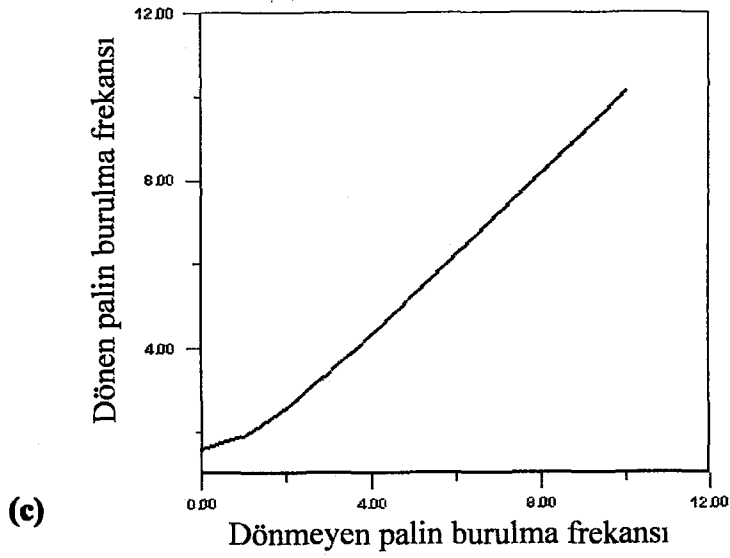
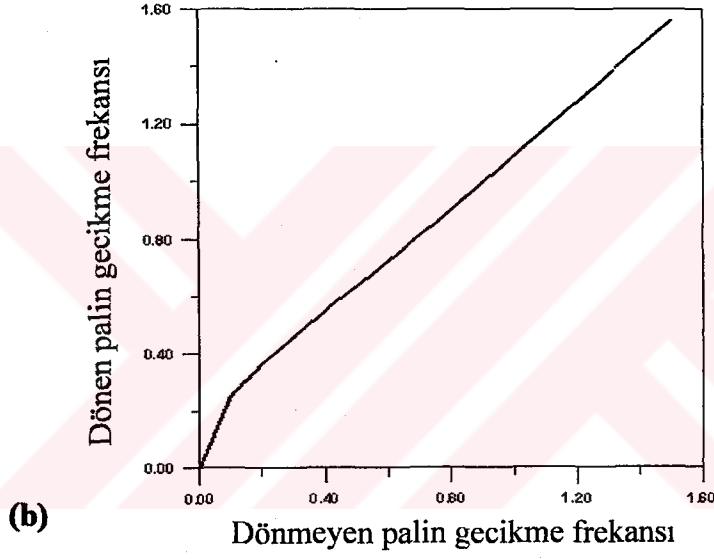
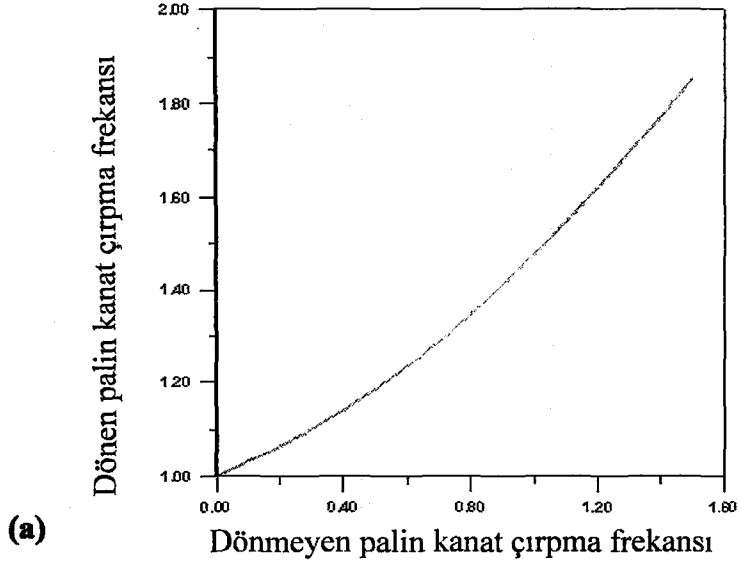
$$\frac{EI_y}{m\Omega^2 R^4} = \frac{(\omega_w)_{NR}^2 / \Omega^2}{\beta_1^4} \quad (5.87a)$$

$$\frac{EI_z}{m\Omega^2 R^4} = \frac{(\omega_v)_{NR}^2 / \Omega^2}{\beta_1^4} \quad (5.87b)$$

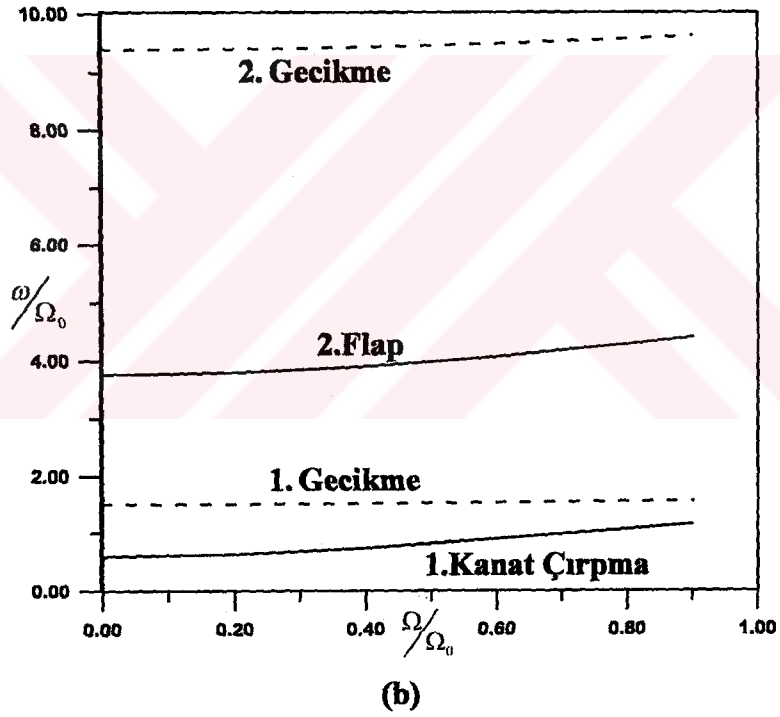
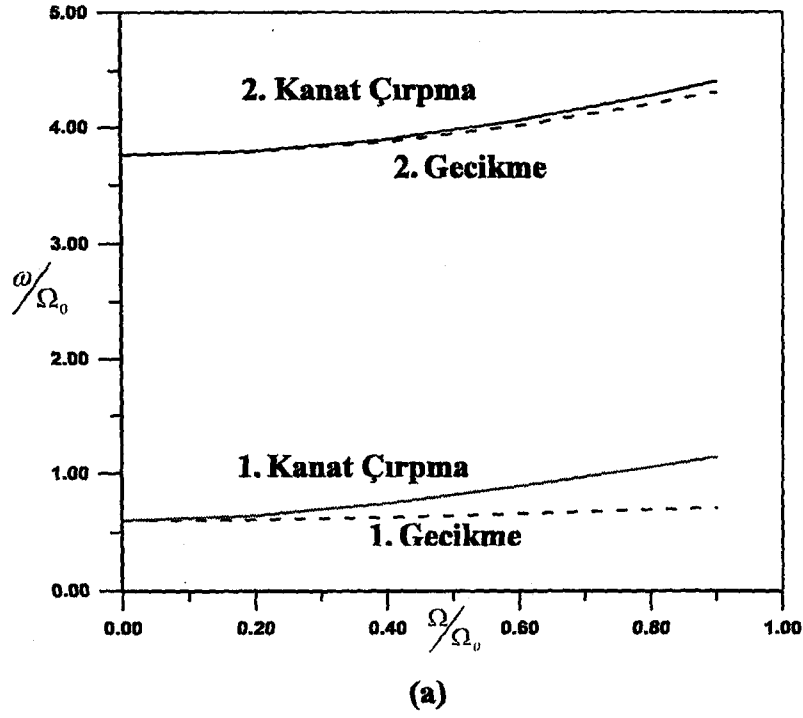
$$\frac{GJ}{m\Omega^2 k_m^2 R^2} = \frac{(\omega_\phi)_{NR}^2 / \Omega^2}{\gamma_1^2} \quad (5.87c)$$

Burada $()_{NR}$ alt indisi, dönmeyen (NonRotating) frekansları belirtmek için kullanılmıştır. Ayrıca, β_1 ve γ_1 ifadeleri sırasıyla kanat çırpma ve burulma birinci modları için kullanılan sabitler olarak tanımlanır. Dönmeyen pal için kullanılan frekanslar ile β_1 ve γ_1 sabitleri, denklemler (5.87a)-(5.87c)'de yerlerine koyulursa bulunan ifadeler hareket denklemlerinde kullanılarak dönen pal frekansları hesaplanır. Bu yolla elde edilen frekans arasındaki ilişki $\theta = 0$, $(k_A/k_m)^2 = 1.5$, $k_A/k_m = 0$ değerleri için Şekil 5.18.(a)-5.18(c) ile gösterilmektedir.

Şekil 5.19(a) ve 5.19 (b)'de etkileşimsiz ve dönen pal için hesaplanan kanat çırpma ve gecikme frekanslarının, açısal dönme hızı oranı ile değişimi gösterilmektedir. Şekil 5.19(a)'da düzlemde katı olmayan (soft inplane) bir rotor için $\bar{\omega}_{\beta NR} = \bar{\omega}_{\xi NR} = 0.6$ değerleri kullanılarak ve Şekil 5.19 (b)'de düzlemde katı (stiff inplane) bir rotor için $\bar{\omega}_{\beta NR} = 0.6, \bar{\omega}_{\xi NR} = 1.5$ değerleri kullanılarak hesaplanan frekans değerleri verilmektedir. Düzlemde katı olmayan bir rotor için temel gecikme frekansı, rotor dönme frekansında düşüktür ve düzlemde katı bir rotor için bunun tam tersi geçerlidir.



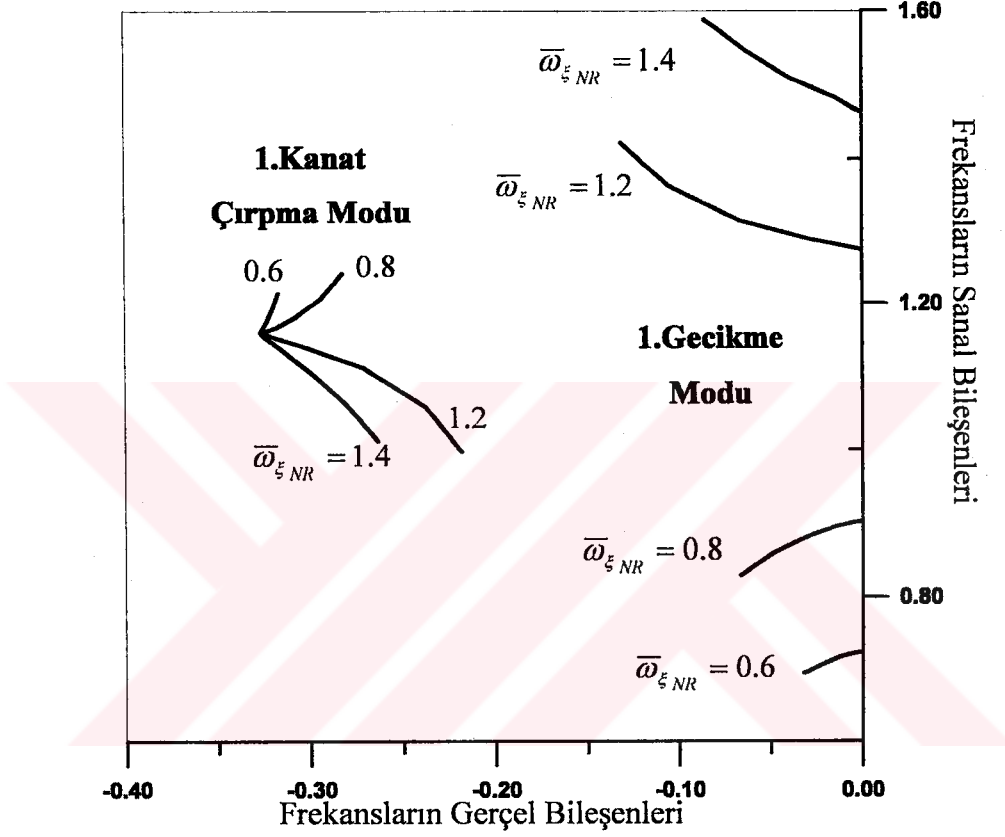
Şekil 5.18: Dönen ve Dönmeyen Palin (a) Kanat Çırpma (b) Gecikme (c) Burulma Frekansları Arasındaki Bağlılıklar



Şekil 5.19: (a) Düzlemde Katı Olmayan (b) Düzlemde Katı Bir Rotorda Etkileşimsiz Frekansların Açısal Dönme Hızı Oranına Bağlı Olarak Değişimi

Burada referans olarak alınan açısal dönme hızı Ω_0 ile verilmiştir ve dönme olmadan hesaplanan frekanslar, bu referans hız ile boyutsuzlaştırılıp $\bar{\omega}_{NR}$ ifadesi ile ifade edilmektedir. Burada $\bar{\omega}_{\beta NR}$ ile $\bar{\omega}_{\xi NR}$ sırasıyla, dönmeyen pal durumunda hesaplanan boyutsuz kanat çırpma ve gecikme frekanslarını göstermektedir.

Bu çalışmada doğrusal formulasyon gözönüne alınarak doğrusal olmayan terimler denklemlerden çıkartıldığı için aerodinamik terimlerin hesaba katıldığı durumlarda dahi burulma modu, diğer modlarla olan etkileşime girmemektedir ve sadece kanat çırpma ile gecikme modları arasında etkileşim oluşmaktadır. Bu iki modun birbirlerini nasıl etkilediği Şekil 5.20’de $\gamma = 5$, $\sigma = 0.05$, $\bar{\omega}_{BNR} = 0.6$, $C_d = 0.01$, $a = 2\pi$, $c/R = \pi/40$ değerleri için çizdirilen kök eğrisi grafiği ile gösterilmektedir.



Şekil 5.20: Elastik Pal Kanat Çırpma ve Gecikme Modlarının Aeroelastik Kararlılık İncelemesi

Burada, kanat çırpma frekansı, $\bar{\omega}_{BNR}$, sabit tutularak gecikme frekansı, $\bar{\omega}_{\xi NR}$ ve geometrik yunuslama açısı, θ , değiştirilmiş ve aeroelastik kararlılık incelemesi yapılmıştır. Daha önceki grafiklerin aksine bu grafiğin çiziminde aerodinamik terimler hesaba katılmıştır. Gecikme frekansının değişimi düzlemde katı olmayan ve düzlemde katı rotor tiplerini kapsayacak şekildedir ve geometrik yunuslama açısı, 0 rad. ile 0.5 rad. arasında değerler almaktadır. Aeroelastik incelemelerde frekanslar, gerçel ve sanal olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Sanal kısım, modun frekansını gösterirken gerçel kısım, modun sönümlemesini vermektedir. Bu bilgi doğrultusunda Şekil 5.20 incelenirse görülmektedir ki kanat çırpma modunun sönümlemesi, gecikme modunun sönümlemesinden daha fazladır çünkü kanat çırpma

hareketi aerodinamik olarak yüksek sönümlenmeliyken, gecikme modu aynı derecede sönümlenmemektedir. Ancak, geometrik yunuslama açısı arttıkça, gecikme modu sönümlemesinin arttığı görülmektedir.



6. SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamında çok çeşitli incelemeler yapılarak farklı bölümler altında toplanmıştır. Her bölümün hesaplamaları ve sonuçları, kendi içerisinde bir bütün oluşturmaktadır. Bu nedenle, her bölümün sonunda sadece o bölüme ait sonuçlar, çeşitli tablo ve grafikler oluşturularak detaylı bir biçimde sunulmuş ve elde edilen veriler yorumlanmıştır.



KAYNAKLAR

- Abdel, I.H. and Hassan, H.**, 2002. On solving some eigenvalue-problems by using a differential transformation, *Appl. Math. Comput.*, **127**, 1–22.
- Arikoglu, A. and Ozkol, I.**, 2005, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method, *Appl. Math. Comput.*, **168**, 1145-1158.
- Banerjee, J.R.**, 2001. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beams, *J. Sound Vib.*, **247(1)**, 97-115.
- Bert, C.W. and Zeng, H.**, 2004. Analysis of axial vibration of compound bars by differential transformation method, *J. Sound Vib.*, **275**, 641–647
- Chen, C.K. and Ju, S.P.**, 2004. Application of differential transformation to transient advective–dispersive transport equation, *Appl. Math. Comput.*, **155**, 25–38.
- Chiou, J.S. and Tzeng, J.R.**, 1996. Application of the Taylor transform to nonlinear vibration problems, *J. Vib. Acoust.*, **118**, 83–87.
- Chopra, I.**, Helicopter Dynamics, University of Maryland, Center for Rotorcraft Education and Research, Lecture Notes
- Done, G. ve Balmford, D.**, 2001. Bramwell’s Helicopter Dynamics, 2nd Edition, AIAA, Butterworth-Heinemann, UK
- Downs, B.**, 1977. Transverse vibrations of cantilever beam having unequal breadth and depth tapers, *J. Appl. Mech.*, **44**, 737-742.
- Du, H., Lim M.K. and Liew K.M.**, 1994. A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam, *J. Sound Vib.*, **175**, 505-523.
- Eslimy-Isfahany, S.H.R. and Banerjee, J.R.**, 2000. Use of generalized mass in the interpretation of dynamic response of bending-torsion coupled beams, *J. Sound Vib.*, **238(2)**, 295-308.
- Friedmann, P.P and Hodges, D.H.**, 2003. Rotary wing aeroelasticity—a historical perspective, *J Aircraft*, **40(6)**, 1019-1046.
- Hodges, D.H. and Dowell, E.H.**, 1974. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades, *NASA Technical Note*, **NASA TN D-7818**, Washington, D.C.
- Hodges, D. H. and Ormiston, R.A.**, 1976. Stability of elastic bending and torsion of uniform cantilever rotor blades in hover with variable structural coupling, *NASA Technical Note*, **NASA TN D-8192**, Washington, D.C.

- Hodges, D. H. and Ormiston, R.A.**, 1973. Nonlinear equations for bending of rotating beams with application to linear flap-lag stability of hingeless rotors, *NASA Technical Note*, **NASA TM X-2770**, Washington, D.C.
- Hodges, D. H. and Rutkowski, M. J.**, 1981. Free vibration analysis of rotating beams by a variable order finite element method. *AIAA*, **19**, 1459-1466.
- Houbolt J.C., Brooks G.W.**, 1957. Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades, *NASA Technical Note*, **NASA TN D-1346**.
- Jang, M.J., Chen, C.L. and Liu, Y.C.**, 2001. Two-dimensional differential transform for partial differential equations, *Appl Math Comput*, **121**, 261-270.
- Johnson, W.**, 1980. Helicopter Theory, Dover Publications, New York.
- Kaya, M.O. and Özdemir, Ö.**, 2005(a). Flexural-torsional coupled vibration analysis of a thin-walled closed section composite Timoshenko beam by using the differential transform method, *The Seventh International Conference on Vibration Problems (ICOVP-2005)*, Işık Üniversitesi, Şile, 05-09 September, (yayın aşamasında).
- Kaya, M.O. and Özdemir, Ö.**, 2005(b). Flutter and vibration of a hingeless helicopter blade in hover, *AIAC-2005-054, 3rd Ankara International Aerospace Conference*, ODTÜ, Ankara, 22-25 August, (cd olarak yayınlandı).
- Kaya, M.O., Arıkoğlu, A., Özdemir, Ö. ve Özkol, I.**, 2004. Dönen bir kirişin flaplama-eğilme titreşiminin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile incelenmesi, *Kayseri 5. Havacılık Sempozyumu*, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 13-14 Mayıs, s.250-253.
- Lee, S.Y. and Lin, S.M.**, 1994. Bending vibrations of rotating non-uniform Timoshenko beams with an elastically restrained root, *J. Appl. Mech.*, **61**, 949-955.
- Lee, S.Y. and Kuo, Y.H.**, 1993. Bending frequency of a rotating Timoshenko beam with general elastically restrained root, *J. Sound Vib.*, **162**, 243-250.
- Leishmann, J.G.**, 2000. Principles of Helicopter Aerodynamics, Cambridge University Press, United States.
- Nayfeh, A.H. and Pai, P.F.**, 2004. Linear and Nonlinear Structural Mechanics, Wiley-Interscience, New Jersey
- Özdemir, Ö. and Kaya, M.O.**, 2006. Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilevered Bernoulli-Euler beam by differential transform method, *J. Sound Vib.*, **289**, 413-420.
- Özdemir, Ö. and Kaya, M.O.**, 2005(a). Vibration analysis of double tapered rotating Euler-Bernoulli beam by using differential transform method, *The 2nd International Basic Research Conference on Rotorcraft Technology*, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, China, 7-9 November, s.449-456.

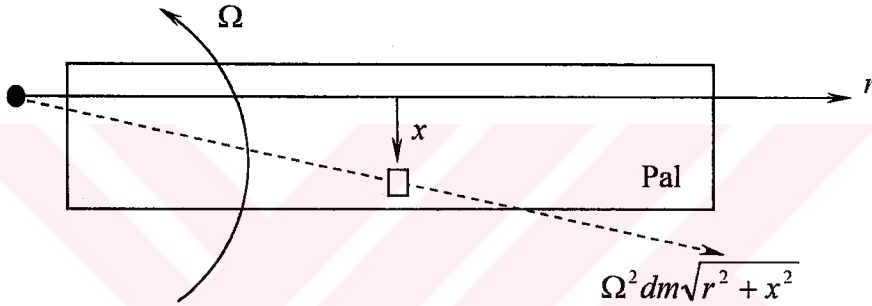
- Özdemir, Ö. and Kaya, M.O.,** 2005(b). Free vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam with bending torsion coupling, *The 2nd International Basic Research Conference on Rotorcraft Technology*, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, China, 7-9 November, s. 457-465.
- Özdemir, Ö. ve Kaya, M.O.,** 2005(c). Askıda kalma durumundaki menteşesiz bir helikopter palinin kanat çırpma-gecikme-burulma dinamiğinin incelenmesi, *XIV. Ulusal Mekanik Kongresi*, Mustafa Kemal Üniversitesi, Antakya, 12-16 Eylül, (yayın aşamasında).
- Özdemir, Ö. ve Kaya, M.O.,** 2005(d). İleri uçuşta bir helikopter palinin kanat çırpma-gecikme dinamiğinin incelenmesi, *XIV. Ulusal Mekanik Kongresi*, Mustafa Kemal Üniversitesi, Antakya, 12-16 Eylül, (yayın aşamasında).
- Özdemir, Ö. and Kaya, M.O.,** 2005(e). Free vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam, AIAC-2005-088, *3rd Ankara International Aerospace Conference*, ODTÜ, Ankara, 22-25 August, (cd olarak yayınlandı).
- Özdemir, Ö. ve Kaya, M.O.,** 2004(a). Düzgün daralan bir Euler kirişinin eğilme titreşiminin diferansiyel dönüşüm yöntemi ile incelenmesi, *Kayseri 5. Havacılık Sempozyumu*, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 13-14 Mayıs, s. 224-228.
- Özdemir, Ö. and Kaya, M.O.,** 2004(b). Askıda kalma durumundaki bir helikopter palinin aeroelastik incelemesi, *Havacılıkta İleri Teknolojiler ve Uygulamaları Sempozyumu*, Hava Harp Okulu Komutanlığı, İstanbul, 9-10 Aralık, s. 37-42.
- Shames, I.H. and Dym, C.L.,** 1985. Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics, pp. 197-204, McGraw-Hill, New York
- Zhou, J.K.,** 1986. Differential transformation and its application for electrical circuits (Çince), Huazhong University Press, P. R., China.

EK A

RİJİT PAL FORMÜLASYONU

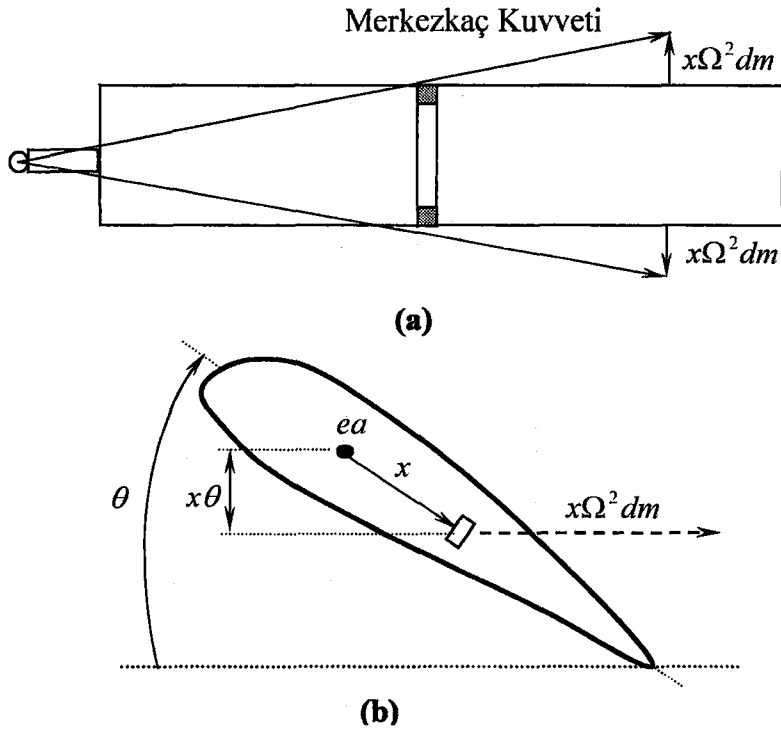
A.1. Pervane Momenti (Tenis Raketi Etkisi)

Pervane momenti, merkezkaç kuvvetinden kaynaklanan bir etkidir. Pal üzerinde alınan ve dm ile gösterilen bir kütle elemanı üzerine $\Omega^2 dm \sqrt{x^2 + r^2}$ şeklinde ifade edilen merkezkaç kuvveti, Şekil A.1’de görüldüğü gibi rotorun dönme merkezi ile kütle elemanını birleştiren doğru boyunca etkir.

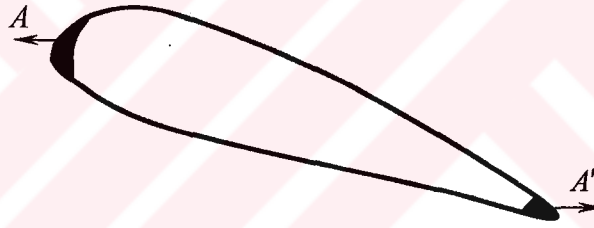


Şekil A.1: Pal Kütle Elemanı Üzerine Etkiyen Merkezkaç Kuvveti

Sonuçta, elastik eksenden x kadar mesafede bulunan kütle elemanı üzerine, merkezkaç kuvvetinin dönme düzlemi içindeki bileşeni, $x\Omega^2 dm$, etki eder. Bu bileşen Şekil A.2(a) ve A.2(b)’de gösterilmektedir. Burulma ekseninin önünde yer alan kütle elemanına etkiyen bileşenin yönü hücum kenarına doğrudur. Burulma ekseninin gerisinde yer alan kütle elemanına etkiyen bileşenin yönü firar kenarına doğrudur. Her iki durumda da palin burulmasını azaltacak şekilde bir moment oluşur. Bu moment etkisi, Şekil A.3’te gösterilmektedir.



Şekil A.2: Merkezkaç Kuvvetinin Düzlem İçindeki Bileşeninin (a) Üstten Görünüşü (b) Pal Kesidinden Görünüşü



Şekil A.3: Merkezkaç Kuvvetinin Düzlem İçindeki Bileşeninin Yarattığı Moment

Şekil A.3'te gösterilen pervane momentini hesaplamak için pal kesidi üzerinde integral alınır.

$$\int_{\text{kesit}} (x\theta) (x\Omega^2 dm) = \theta\Omega^2 \int_{\text{kesit}} x^2 dm = \theta\Omega^2 I_\theta \quad (\text{A.1})$$

Burada I_θ , burulma eksenini etrafında kesit atalet momenti ve I_0 , ağırlık merkezi etrafındaki burulma atalet momenti olarak tanımlanırsa aşağıdaki ifade yazılabilir.

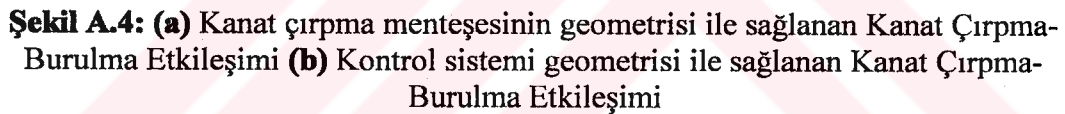
$$I_\theta = I_0 + x_l^2 m \quad (\text{A.2})$$

A.2. Kanat Çırpma-Burulma Etkileşimi

Kanat çırpma hareketinin, burulma hareketi üzerindeki etkisi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\Delta\theta = -k_{p\beta} \beta = (\tan \delta_3) \beta \quad (\text{A.3})$$

- a.** Kanat çırpma menteşesinin geometrisi
- b.** Kontrol sistemi geometrisi



İkinci düzende kanat çırpma menteşesi açısız olarak yerleştirilmiştir. Ancak burulmayı sağlayan boynuz ile menteşe arasında var olduğu kabul edilen hayali eksen etrafında kanat çırpma yapıyor gibi gözlenir. Bu hayali eksen ile gerçek kanat çırpma menteşesi arasındaki açı δ_3 olarak tanımlanır (Johnson, 1980).

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında İstanbul'da doğdum. İlköğrenimimi, Yeşilbahar İlkokulu'nda tamamladım. 1992 yılında girdiğim Kadıköy Anadolu Lisesi'ni 2000 yılında üçüncülükle bitirerek aynı yıl, İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak Mühendisliği bölümünü kazandım. 2004 yılında lisans eğitimimi ikincilikle tamamlayarak yüksek lisans eğitimime başladım. Bu dönemde 1 yıl boyunca İTÜ Rotorlu Hava Araçları Tasarım ve Mükemmeliyet Merkezi'nin Rotor Grubu'nda Ar-Ge mühendisi olarak çalıştım. Şu anda, Uçak-Uzay Bilimleri Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak yüksek lisans eğitimimi sürdürmekteyim.

