

66399

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN LİNEER OLMAYAN TİTREŞİMLERİ

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. İrfan COŞKUN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Aralık 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 12 Mayıs 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan ENGİN

13.6.1997 Hasan Engin

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Vural CİNEMRE

13/6/1997 Vural Cinemre

Prof. Dr. M. Ertaç ERGÜVEN

19/6/97 M. Ertaç Ergüven

Prof. Dr.ERCÜMENT KÖKSAL

16.6.1997 E. Köksal

Doç. Dr. A. Rana ATILGAN

16/6/1997 A. Rana Atılgan

MAYIS 1997 İ. T. C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
TASLAKTAN TAYİN MURAT

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında bana yol gösteren ve değerli yardımlarını esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Hasan ENGİN' e teşekkür ederim.

Aralık 1996

İrfan COŞKUN



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	ii
SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Giriş ve Konuyla İlgili Çalışmalar	1
BÖLÜM 2 FORMÜLASYON VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ	8
2.1 Problemin Formülasyonu ve Sınır Koşulları	8
2.2 Çözüm Yöntemleri	11
BÖLÜM 3 HARMONİK YÜKE GÖRE ÇÖZÜM	14
3.1 $\bar{\Omega} < 1/3$ Olması Durumu	21
3.2 $1/3 < \bar{\Omega} < 1$ Olması Durumu	23
3.3 $\bar{\Omega} = 1$ Olması Durumu	24
3.3.1 Lineer Hale Ait Çözüm	24
3.3.2 Nonlineer Hale Ait Çözüm	25
3.4 $\bar{\Omega} > 1$ Olması Durumu	27
3.4.1 Zorlamanın Yukarı Doğru Olması Durumu	27
3.4.2 Zorlamanın Aşağı Doğru Olması Durumu	29
BÖLÜM 4 RASGELE YÜKE GÖRE ÇÖZÜM	32
BÖLÜM 5 SONUÇLAR	37
KAYNAKLAR	59
EKLER	65
ÖZGEÇMİŞ	

SEMBOL LİSTESİ

A	: Kiriş kesit alanı
$C_1, \dots, C_4$	: İntegral sabitleri
$D_1, \dots, D_4$	: İntegral sabitleri
D_{31}, D_{32}	: İntegral sabitleri
$E_1, \dots, E_4$	: İntegral sabitleri
$F_1, \dots, F_4$	: İntegral sabitleri
F_{31}, F_{32}	: İntegral sabitleri
$G_1, \dots, G_4$	: İntegral sabitleri
G_{31}, G_{32}	: İntegral sabitleri
$H_1, \dots, H_4$	: İntegral sabitleri
H_{31}, H_{32}	: İntegral sabitleri
EI	: Kiriş eğilme rijitliği
k_1, k_3	: Lineer ve nonlinear yatak katsayıları
L	: Kiriş yarı boyu
P	: Kirişe etkiyen tekil yük
$\bar{p}$	: Boyutsuz tekil yük
ξ	: Boyutsuz uzunluk
η	: Boyutsuz yarı boy
Ω	: Zorlama frekansı
ω	: Doğal frekans

ε	: Pertürbasyon parametresi
ρ	: Birim boyun kütlesi
$\delta(x)$	: Dirac delta fonksiyonu
τ	: Boyutsuz zaman
λ_n	: n. moda ait boyutsuz doğal frekans



ŞEKİL LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1	Elastik zemine oturan kiriş	8
Şekil 5.1a-5.1f	Ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi	41
Şekil 5.2a	Birinci çözüm için kiriş elastik eğrileri	42
Şekil 5.2b	İkinci çözüm için kiriş elastik eğrileri	43
Şekil 5.3	Zeminin çekme gerilmesi aktarması halinde elastik eğriler	43
Şekil 5.4	Zorlama yukarı doğru iken ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi	44
Şekil 5.5	Zorlama yukarı doğru iken kiriş elastik eğrileri	44
Şekil 5.6	Değişen kiriş boyları için ayrılma noktasının yerinin değişimi	45
Şekil 5.7	Zorlama aşağı doğru iken kiriş elastik eğrileri	45
Şekil 5.8	$\bar{\Omega}=1$ için ayrılma noktasının yerinin kiriş boyu ile değişimi	46
Şekil 5.9	Nonlinear halde ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi	46
Şekil 5.10	Ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi ($\epsilon > 0$)	47
Şekil 5.11	Ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi ($\epsilon < 0$)	47
Şekil 5.12	Kiriş ortasındaki yerdeğiştirmenin yükle değişimi	48
Şekil 5.13	$\bar{\Omega} > 1$ iken ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi ($\epsilon > 0$)	48
Şekil 5.14	$\bar{\Omega} > 1$ iken ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi ($\epsilon < 0$)	48
Şekil 5.15	$\bar{\Omega}=1$ için nonlinear halde ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi	49
Şekil 5.16	Statik halde ayrılma noktasının yerinin k_1 ile değişimi	50
Şekil 5.17	Değme bölgesinde kiriş elastik eğrileri	50

Şekil 5.18	Orta noktadaki yerdeğiştirmenin nonlinear terimle değişimi	51
Şekil 5.19	Ayrılma noktasının yerinin nonlinear terimle değişimi	51
Şekil 5.20	Ayrılma noktasının yerinin boyutsuz zamanla değişimi	52
Şekil 5.21	Nonlinear halde ayrılma noktasının yerinin zamanla değişimi	52
Şekil 5.22	Kiriş ortasındaki yerdeğiştirmenin boyutsuz zamanla değişimi	53
Şekil 5.23	Kiriş uç deplasmanının boyutsuz zamanla değişimi	53
Şekil 5.24	Orta noktadaki yerdeğiştirmenin çeşitli parametreler ile değişimi	54
Şekil 5.25	Nonlinearlięin iřaret deęiřtirmesi halinde orta noktadaki dūřey yerdeęiřtirmeler	54
Şekil 5.26	Nonlinearliğin işaret değiştirmesi halinde uçtaki deplasmanlar	55



ÖZET

Bu çalışmada, çekme almayan kübik nonlinearlikli Winkler zeminine oturan üniform, ağırlıksız kabul edilen sonlu bir kirişin lineer olmayan titreşimleri incelenmiştir. Zeminin çekme gerilmesi aktarmadığı kabul edildiğinden kiriş zeminden ayrılabilmekte ve değme ve ayrılma bölgesi dediğimiz farklı bölgeler ortaya çıkmaktadır. Kiriş bazen tümüyle zeminden ayrılabilmekte bazen de tümüyle zemine gömülebilmektedir. Ayrılma bölgesinde zeminin etkisi ortadan kalktığından kirişin bu bölgedeki davranışı da farklı olmaktadır. Ayrılma noktasının yeri başlangıçta bilinmediği için yönetici denklemler lineer olsa bile bu noktanın yerini veren ve lineer olmayan bir denklem takımıyla karşılaşılmaktadır. Bu denklem takımının kökleri bize kirişin zeminden ayrıldığı noktaların koordinatlarını vermektedir. Her adımda bu denklem takımının köklerini hesaplamak gerektiğinden bu tür problemler ayrı bir zorluk göstermektedir.

İncelenen problemde nonlinearlik yalnızca kirişin zeminden ayrılmasından (sınır koşulundan) kaynaklanmamakta, zemin modelindeki kübik terim dolayısıyla da problem nonlinear olmaktadır. Çözümde ilk olarak harmonik yük etkisi dikkate alınmıştır. Zayıf nonlinearlikten dolayı pertürbasyon yöntemi kullanılarak yer değiştirmeler ve kirişin zeminden ayrıldığı nokta pertürbasyon serisine açılmış, pertürbasyon parametresinin kuvvetlerine göre düzenleme yapılarak bir kısmi türevli diferansiyel denklem takımına gelinmiştir. Diğer bir deyişle, problem lineerleştirilmiş kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne indirgenmiştir. Elde edilen bu denklemler çarpım metodu uygulanarak düz türevli diferansiyel denklemlere dönüştürülmüş ve sınır ve süreklilik koşulları yardımıyla da bu denklemlerin çözümüne gidilmiştir.

İkinci olarak rasgele yük etkisi dikkate alınmış, tamamen serbest kirişin serbest titreşimine ait mod fonksiyonları ve ortagonallik koşulu kullanılarak lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem takımına gelinmiştir. Önce statik hale ait çözüm yapılmış, daha sonra dinamik hal için Runge- Kutta metodu kullanılarak denklem takımı sayısal olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda her iki yükleme durumu için lineer ve nonlinear haldeki ayrılma noktasının yeri ve düşey yerdeğiştirmeler elde edilmiş, ayrılma noktasının koordinatı ve düşey yerdeğiştirmelerin çeşitli parametrelere göre değişimi ve nonlinearliğin bu büyüklükler üzerindeki etkisi şekiller yardımıyla açıklanmıştır.

SUMMARY

NONLINEAR VIBRATIONS OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

1. INTRODUCTION

In this study, nonlinear vibrations of a uniform, weightless, finite beam resting on a nonlinear tensionless Winkler foundation is investigated. Two types of loading are used. Because of the tensionless character of the foundation, the beam may lift off the foundation. In this case there exist two different regions, contact and non-contact regions. In the non-contact regions there is no effect of the foundation and the behaviour of the beam becomes different. Since the lift-off points are not known in advance, the problem appears to be a nonlinear one even there were no nonlinear term in the foundation model. In such problems, usually, one might calculate roots of a nonlinear equation which appears in the solution for giving the contact length. The solution of this type of problems are considerably difficult since the calculation of roots is required at each step.

There are many studies on the behaviour of beams and plates resting on elastic foundation. In these studies, various types of foundation models such as Winkler, Pasternak, Vlasov, Filonenko-Borodic i.e. [1] have been used. Among these, the Winkler model, in which the medium is taken into account as a system composed of infinitely close linear springs, is the simplest one. It assumes that the foundation applies only a reaction normal to the beam that is proportional to the beam deflection. Nonlinear Winkler foundation models like hyperbolic [4] and cubic types [5], [6], [9], [60] are also used.

Some of the studies on the vibration of beams resting on elastic foundation are Raju and Rao [6], Pawlovic and Wylie [7], Eisenberger [8], Doyle and Pavlovic [13], Williams and Kennedy [18], Karamanlidis and Prakash [19], Roza [20] and Ding [23]. In these studies it has been assumed that the foundation reacts in compression as well as in tension. Weitsman [24], Celep [28], Celep [29], studied the static behaviour of beam and plates supported by tensionless Winkler foundation. Weitsman [30], Rao [31], Choros and Adams [32], Celep, Malaika and Abu-Hussein [34], studied the dynamic response of a beam on tensionless foundations. Although there are many studies on the nonlinear vibration of plates resting on elastic foundation, like Dumir, Kumar and Gandhi [60], Bhaskar and Dumir [61], Nath, Varma and Mahrenholtz [62], Chandrasekharappa [63], there is limited attention to that on the behaviour of beams supported by nonlinear tensionless Winkler foundation.

2. STATEMENT OF THE PROBLEM

It is considered here a uniform, weightless beam with finite length $2L$. The beam is subjected to a concentrated dynamic load at the centre and a random load, separately, and is supported by a tensionless Winkler foundation with linear and nonlinear parameters k_1 and k_3 .

3. EQUATIONS OF MOTION AND BOUNDARY CONDITIONS

Because of the tensionless character of the foundation, the governing equations will be different in the contact and non-contact regions. Neglecting damping forces these are

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = P(t)\delta(x) - k_1 y_i - k_3 y_i^3 \quad (1)$$

for contact regions and

$$EI \frac{\partial^4 y_j}{\partial x_j^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

for non-contact regions. In these equations, EI is the beam rigidity, ρ the mass density, A the cross section of the beam, k_1 and k_3 are linear and nonlinear foundation parameters, respectively, x_i and x_j the space coordinates, t the time and $\delta(x)$ is the Dirac delta function. The boundary and continuity conditions are as follows.

$$y_1' \Big|_{x_1=0} = 0 \quad , \quad EI y_1'' \Big|_{x_1=0} = \frac{P}{2} \quad , \quad y_1 \Big|_{x_1=X_1} = 0 \quad (3)$$

for region 1,

$$\begin{aligned}
y_i \Big|_{x_i=0} &= 0 \quad , \quad y_i \Big|_{x_i=X_i} = 0 \quad , \quad y'_i \Big|_{x_i=0} = y'_{i-1} \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}} \\
y''_i \Big|_{x_i=0} &= y''_{i-1} \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}} \quad , \quad y'''_i \Big|_{x_i=0} = y'''_{i-1} \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}}
\end{aligned} \tag{4}$$

for region i,

$$\begin{aligned}
y_N \Big|_{x_N=0} &= 0 \quad , \quad y'_N \Big|_{x_N=0} = y'_{N-1} \Big|_{x_{N-1}=X_{N-1}} \\
y'''_N \Big|_{x_N=0} &= y'''_{N-1} \Big|_{x_{N-1}=X_{N-1}} \quad , \quad y'''_N \Big|_{x_N=0} = y'''_{N-1} \Big|_{x_{N-1}=X_{N-1}} \\
y''_N \Big|_{x_N=\bar{X}_N} &= 0 \quad , \quad y'''_N \Big|_{x_N=\bar{X}_N} = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

for region N. Where X_i represent the contact points and ‘ ’ indicates the derivative with respect to space coordinates.

4. SOLUTION FOR HARMONIC LOADING

In this case the load is taken as $P(t)=P_0\cos\Omega t$. The solutions of eq.(1) and (2) are carried out by using perturbation technique. In this method, initial and boundary conditions and the convenient parameters are expanded to the perturbation series. After this, making coefficients of each power of ϵ equal to zero, linear equations of various order are obtained. Using nondimensional quantities, the perturbation expansion for y and X can be written as

$$\begin{aligned}
y_i(\xi_i, t, \epsilon) &= y_{i,0}(\xi_i, t) + \epsilon y_{i,1}(\xi_i, t) + \dots \\
y_j(\xi_j, t, \epsilon) &= y_{j,0}(\xi_j, t) + \epsilon y_{j,1}(\xi_j, t) + \dots \\
\xi_i &= \xi_{i,0} + \epsilon \xi_{i,1} + \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Using these expansions in eq.(1) and (2), we get four partial differential equations. These equations reduced to a set of ordinary differential equations using the following functions.

$$y_{i,0}(\xi_i, t) = Y_{i,0}(\xi_i) \cos \Omega t$$

$$y_{i,1}(\xi_i, t) = Y_{i,1}(\xi_i) \cos \Omega t + Y_{i,2} \cos 3\Omega t$$

$$y_{j,0}(\xi_j, t) = Y_{j,0}(\xi_j) \cos \Omega t \quad (7)$$

$$y_{j,1}(\xi_j, t) = Y_{j,1}(\xi_j) \cos \Omega t + Y_{j,2} \cos 3\Omega t$$

The solution of these ordinary differential equations depends on the frequency ratio $\bar{\Omega}$, ($\bar{\Omega} = \Omega/\omega$). There exist 12 integral constants in an ordinary region. The system has N regions and the beam lifts off or touch the foundation in N-1 points. In this case, the number of unknowns including the constants and the lift off points, become $14*N-2$. The boundary and continuity conditions are expanded to Taylor series to get the necessary equations for obtaining these unknowns. Only two regions are considered here. Various solutions with respect to the value of $\bar{\Omega}$ are given as follows.

4.1. The Case $\bar{\Omega} < 1/3$

In this case, the linear and nonlinear solutions become as follows.

$$Y_{10} = C_1 e^{m\xi} + C_2 e^{\bar{m}\xi} + C_3 e^{-\bar{m}\xi} + C_4 e^{-m\xi}$$

$$Y_{20} = D_1 e^{\theta_{20}\xi} + D_2 e^{-\theta_{20}\xi} + D_3 e^{i\theta_{20}\xi} + D_4 e^{-i\theta_{20}\xi}$$

$$Y_{11} = E_1 e^{m\xi} + E_2 e^{\bar{m}\xi} + E_3 e^{-\bar{m}\xi} + E_4 e^{-m\xi} - k_{11} [\alpha_1(C_i, m, \theta)] - \frac{3k_{11}}{4} \xi [\alpha_2(C_i, m, \theta)]$$

$$Y_{12} = G_1 e^{n\xi} + G_2 e^{\bar{n}\xi} + G_3 e^{-\bar{n}\xi} + G_4 e^{-n\xi} - k_{12} [\alpha_3 (C_i, m, \theta)]$$

$$Y_{21} = F_1 e^{\theta_{21}\xi} + F_2 e^{-\theta_{21}\xi} + F_3 e^{i\theta_{21}\xi} + F_4 e^{-i\theta_{21}\xi} \quad (8)$$

$$Y_{22} = H_1 e^{\theta_{22}\xi} + H_2 e^{-\theta_{22}\xi} + H_3 e^{i\theta_{22}\xi} + H_4 e^{-i\theta_{22}\xi}$$

4.2 The Case $1/3 < \bar{\Omega} < 1$

In this case, all solutions will be the same as in the previous case, except Y_{12} . This solution is

$$Y_{12} = G_1 e^{\theta_{12}\xi} + G_2 e^{-\theta_{12}\xi} + G_3 e^{i\theta_{12}\xi} + G_4 e^{-i\theta_{12}\xi} - k_{12} [\alpha_3 (C_i, m, \theta)] \quad (9)$$

4.3 The Case $\bar{\Omega} = 1$

The solutions for this case are as follows.

$$Y_{10} = C_1 + C_2 \xi + C_3 \xi^2 + C_4 \xi^3$$

$$Y_{20} = D_1 e^{\theta_{20}\xi} + D_2 e^{-\theta_{20}\xi} + D_{31} \cos \theta_{20} \xi - D_{32} \sin \theta_{20} \xi$$

$$Y_{11} = E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2 + E_4 \xi^3 - k_{11} \left(\frac{C_{11}^3}{24} \xi^4 + \frac{C_1^2 C_3}{120} \xi^6 + \dots + \frac{C_4^3}{1760} \xi^{13} \right)$$

$$Y_{12} = G_1 e^{\theta_{12}\xi} + G_2 e^{-\theta_{12}\xi} + G_{31} \cos \theta_{12} \xi - G_{32} \sin \theta_{12} \xi + \frac{k_{12}}{\theta_{12}^4} (m_1 + m_2 \xi + m_3 \xi^2 + \dots + m_{10} \xi^9) \quad (10)$$

$$Y_{21} = F_1 e^{\theta_{21}\xi} + F_2 e^{-\theta_{21}\xi} + F_{31} \cos \theta_{21}\xi - F_{32} \sin \theta_{21}\xi$$

$$Y_{22} = H_1 e^{\theta_{22}\xi} + H_2 e^{-\theta_{22}\xi} + H_{31} \cos \theta_{22}\xi - H_{32} \sin \theta_{22}\xi$$

4.4 The Case $\bar{\Omega} > 1$

For this frequency, we can obtain solutions only if the forcing and the displacement are in different directions. That is, if the forcing is upwards, the contact region will be the same as in previous cases, otherwise this region will be the non-contact region and the centre of the beam separates from the foundation. When we take the loading upwards, the solutions can be obtained using similar functions as in the other cases. In the case of downwards loading, the cubic term appears in the solutions Y_{21} and Y_{22} .

In all these equations, $C_i, \dots, H_i$ indicate the integral constants and the parameters $\theta_{10}, \dots, \theta_{22}$, m , n , are the functions of $\bar{\Omega}$.

5. SOLUTION FOR ARBITRARY LOADING

In this case the beam is subjected to an arbitrary load $P(t)$. The governing equation of the beam is

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (k_1 y + k_3 y^3) H(x, t) = P(t) \delta(x) \quad (11)$$

where $H(x, t)$ is an auxiliary function which represents the tensionless character of the foundation and is defined as $H(x, t) = 1$ if $y(x, t) > 0$ and $H(x, t) = 0$ if $y(x, t) < 0$. The solution of equation (11) is obtained by using the method of normal mode functions. In this method, free vibration mode functions of a beam which satisfy the boundary conditions of the problem are used in the solution. For eq. (11), using nondimensional quantities, a series solution is taken as follows.

$$y(x, \tau) = T_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_{n+1}(\tau) \quad (12)$$

where $T_{n+1}(\tau)$ are the time dependent parts of the solution in which T_1 represents the right translation of the beam, and $Y_n(x)$ are the n th free vibration mode functions of completely free beam.

The mode functions $Y_n(x)$ are the solutions of the differential equation

$$Y_n^{iv} - \lambda_n^4 Y_n = 0 \text{ for the boundary conditions } Y_n''(-1) = Y_n''(1) = Y_n'''(-1) = Y_n'''(1) = 0.$$

Here, λ_n are the solutions of the equation $\cosh(2\lambda)\cos(2\lambda)=1$ and known as the nondimensional natural frequencies of the beam. The mode functions $Y_n(x)$ are orthogonal in the interval $(-1,+1)$.

Using the series (12) in eq. (11) and multiplying both sides of the resultant equation by the mode functions, and considering orthogonality condition, it is obtained a system of differential equations as follows.

$$\underline{A}\ddot{\underline{T}} + \underline{B}\dot{\underline{T}} = \underline{\bar{P}} - \underline{\bar{Q}}_T \quad (13)$$

In this equation, $\underline{A}$ and $\underline{B}$ are diagonal and symmetric matrices, respectively, and $\underline{\bar{P}}$ is the loading vector. The vector $\underline{\bar{Q}}_T$ represents the effect of nonlinearity. First of all, assuming $T=\text{constant}$ and $k_3=0$, that is linear static case, the solution is carried out. After this, using these results, it is gone through the nonlinear case that is $k_3 \neq 0$. In the common case in which T is not constant, the equation (13) is solved by using the Runge-Kutta method.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Giriş ve Konuyla İlgili Çalışmalar

Elastik zemine oturan yapılar ile ilgili çalışmalar uygulama alanının genişliği nedeniyle oldukça fazladır. Burada, yapının davranışına zeminin etkisi önemlidir ve yapının bünye bağıntılarının yanısıra zeminin de bünye bağıntılarını ve zemin ile yapı arasındaki etkileşimi bilmek gerekmektedir. Bu tür zemine oturan yapılarla ilgili problemin matematik bağıntılarla belirlenmesi zeminin karışık ve belirsiz elastik özellikleri ve plastik şekil değiştirme yapabilme özelliği nedeniyle zemin davranışı için bazı kabuller yapılmasını yani bir zemin modelinin baştan kabul edilmesini gerektirmektedir. Zeminin davranışı sürekli bir ortam olarak alınabildiği gibi tekil yaylardan oluşan bir sistem gibi de alınabilmektedir. Yapısının kolaylığı nedeniyle tekil yaylardan oluşan model araştırmacı ve mühendisler tarafından sıkça kullanılmaktadır. Bu modeller Winkler, Pasternak, Filonenko-Borodich, Hétenyi, Vlasov, Reissner, vs. modelleri olarak sayılabilir [1]. Bu modeller içinde Winkler modeli en basiti olup, zeminin yerdeğiştirme ile orantılı olarak üstteki yapıya tepki gösterdiği kabul edilmektedir. Orantı katsayısı, “zemin modülü” veya “yatak katsayısı” olarak da anılmaktadır. Diğer modellerde bu tepki kuvvetine ilave olarak kesme kuvveti ve eğilme momentinin de etkisi hesaba katılmaktadır. Bunlardan Pasternak modelinde, yaylar arasındaki kesme kuvveti yaylar üzerinde alınan bir kayma tabakası ile, Filonenko-Borodich modelinde, yine yaylar üzerinde alınan bir elastik zarla dikkate alınmaktadır. Vlasov modelinde ise zemin yarı sonsuz bir ortam olarak ele alınmakta ve zemin parametresini elde etmek için zeminin elastisite modülü, Poisson oranı ve derinliği ile kiriş genişliğinden yararlanılmaktadır [2], [3]. Bundan başka lineer

olmayan tipten Winkler modelleri de kullanılmaktadır. Soldatos ve Selvadurai [4], lineer olmayan Winkler zeminine oturan Bernoulli-Euler kirişinin eğilme problemini hiperbolik tipten bir zemin modeli olarak, Smaill [5], Pasternak zeminine oturan ortotrop plak problemini zemin modelinde kübik nonlinearlikli Winkler terimi de olarak, Raju ve Rao [6], zemin parametrelerinin elastik zemine oturan kirişin serbest titreşim ve burkulma mod fonksiyonları üzerindeki etkisini, zemin modelini lineer olmayan Winkler modeli olarak incelemişlerdir. Bunlardan başka Pavlovic ve Wylie [7], zemin modeli olarak kiriş boyunca yatak katsayısı lineer olarak değişen bir model, Eisenberger [8], kiriş boyunca polinom şeklinde değişen bir model olarak bu tür zeminlere oturan kirişlerin titreşimlerini incelemişler, Shih ve Blotter [9] ise elastik zemine oturan dikdörtgen plağın lineer olmayan titreşimlerini, zemin modeli olarak lineer ve nonlinear (kübik) Winkler zemin parametreleri ile Pasternak parametresini birlikte olarak incelemişlerdir.

Elastik zemine oturan kiriş ve plakların statik/dinamik davranışı konusunda çok sayıda çalışma bulunmaktadır [10], [11]. Kameswara, Das ve Anandakrishnan [12], elastik zemine oturan kirişlerin dinamik davranışını zemin modeli olarak Vlasov ve Leontev tarafından önerilen modeli kullanarak başlangıç parametreleri metoduyla incelemişler ve rasgele dinamik yük ve moment etkisindeki kirişler için genel çözümler vermişler, Doyle ve Pavlovic [13], kısmen elastik zemine oturan kirişlerin serbest titreşimini iki tür mesnetlenme durumu için inceleyerek kısmen zemine oturmanın kirişin doğal frekansları üzerindeki etkilerini göstermişler, Eisenberger, Yankelevski ve Adin [14], kısmen veya tamamen elastik zemine oturan kirişlerin titreşimlerini çeşitli mesnetlenme durumları için kütle ve rijitlik matrislerini elde ederek incelemişler ve kirişin doğal frekansları ve mod fonksiyonlarını elde etmişlerdir.

Valsangkar ve Pradhanang [15], iki parametrelili zemine oturan kiriş-kolonun titreşimlerini çeşitli mesnetlenme durumları için parametrik olarak inceleyerek doğal frekansları Winkler zemininden elde edilen sonuçlarla karşılaştırmışlar, Eisenberger ve Clastornik [16], zemin parametreleri kiriş boyunca polinom şeklinde değişen iki parametrelili zemine oturan kirişlerin statik ve dinamik davranışları ile burkulmasını sonlu elamanlar yöntemiyle incelemişlerdir. Chen [17], Timoshenko kirişinin dinamik rijitlik matrisini düşey titreşimler için elde ederek doğal frekansları ve Gauss eliminasyonu ile da mod fonksiyonlarını hesaplamış, problemde kirişin dönme

eylemsizliğini, kayma etkisini, eksenel kuvveti, elastik yayları ve sönüm etkisini de hesaba katmıştır. Williams ve Kennedy [18], elastik zemine oturan kirişlerin dinamik rijitlik matrisini serbest ve zorlanmış titreşimleri de dikkate alarak yönetici denklemin aldığı farklı şekillere göre vermişler, Karamanlidis ve Prakash [19], iki parametrelili elastik yarı düzleme oturan kirişlerin burkulma ve titreşimini analitik ve sonlu elamanlar yöntemlerinden faydalananarak incelemiş ve çeşitli mesnetlenme durumları için öz frekansları elde etmişlerdir. Roza [20], Winkler zeminine oturan kirişlerin stabilite ve burkulmasını Hamilton ilkesi yardımıyla inceleyerek lineer ve hiperbolik değişen Winkler modelleri için çeşitli titreşim modlarını vermiş, Yokoyama [21], sonlu elamanlar yöntemini kullanarak iki parametrelili zemine kısmen veya tamamen oturan kiriş-kolonların titreşimini yine Hamilton ilkesinden yararlanarak incelemiş ve çeşitli parametrelerin (eksenel yük, zemin rijitliği, dönme eylemsizliği vb.) doğal frekanslar üzerindeki etkisini göstermiştir. Lai, Ting, Lee ve Becker [22], elastik zemine oturan kirişlerin dinamik analizini, kütle ve rijitlik matrislerinin bulunması için yeni bir formülasyon yaparak, sonlu elamanlar metoduyla incelemiş ve kiriş doğal frekanslarını elde etmişlerdir. Ding [23], kiriş boyunca değişen Winkler zeminine oturan kirişlerin titreşimini inceleyerek çözüm için zemin tepkilerini kirişin yer değiştirmesini içeren bir integral denklem şeklinde dış yük olarak almış ve sayısal çözüm yaparak frekans parametrelerini elde etmiştir.

Bütün bu çalışmalarda zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı kabul edilmiştir. Daha gerçekçi bir yaklaşım olarak zeminin çekme gerilmesi almadığı veya çok az aldığı kabul edilmektedir. Weitsman [24], çekme gerilmesi aktarmayan zemine oturan tekil yük etkisindeki kiriş ve plağın davranışını inceleyerek zemine tam değme ve zeminden ayrılma noktalarını elde etmiş, ayrılma noktasının yerinin yükün şiddetinden bağımsız olduğunu göstermiştir. Kerr ve Coffin [25], iki parametrelili Pasternak zeminine oturan kirişleri incelemişler ve kirişin kayma tabakasından ayrılma bölgeleri ile kesit tesiri ifadelerini elde etmişlerdir. Kamiye [26], iki modüllü ve çekme almayan zeminlere oturan dairesel plak problemini incelemiş ve düşey yerdeğiştirmeleri ankastre hal için vermiş, Willaggio [27], çekme almayan Winkler zeminine serbestçe oturan tekil yük etkisindeki dikdörtgen plağın davranışını inceleyerek değme bölgesinin yükten bağımsız olduğunu göstermiştir. Celep [28], çekme almayan Winkler zeminine oturan dairesel plağın çeşitli yükler etkisi altındaki

davranışını sistemin potansiyel enerjisi ve serbest titreşim mod fonksiyonlarını, Celep [29], bu tür zemine oturan dikdörtgen plağın davranışını benzer yükler altında Galerkin metodu ve serbest kirişin öz fonksiyonlarını kullanarak incelemiş, temas bölgesinin tek tip yükleme için ilgili yükün şiddetinden bağımsız olduğunu göstermiştir. Bu çalışmalarda, problem lineer olduğu halde, zeminin çekme almamasından dolayı değme bölgesinin tayini için çoğunlukla lineer olmayan denklemlerle karşılaşılmaktadır.

Yalnız basınca çalışan zemine oturan kiriş ve plakların dinamik davranışları son yirmi yıl içinde araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Kirişin zeminden ayrıldığı bölgelerde zemin etkisinin olmaması nedeniyle sistemin davranışı da değişmektedir. Ayrılma noktasının yerinin bilinmemesi nedeniyle, yönetici denklemler ve sınır koşulları doğrusal olduğu halde ayrılma noktasının koordinatlarını veren ve genellikle lineer olmayan bir denklem takımı ile karşılaşılmaktadır. Bu lineer olmayan denklem takımının en küçük kökleri kirişin zeminden ayrıldığı noktaları belirlemektedir. Her adımda bu denklem takımının kök hesabı gerektiği için bu tür problemler ayrı bir zorluk göstermektedir. Bu konudaki ilk çalışmalar Weitsman [30] ve Rao [31] tarafından yapılmış, Choros ve Adams [32], çekme almayan Winkler zeminine oturan sonsuz uzunluktaki kirişin hareketli yük etkisi altındaki davranışını, Lin ve Adams [33], yine bu tür zemine oturan sonsuz uzun kirişin hareketli iki yük etkisi altındaki davranışını eksenel kuvveti de dikkate alarak incelemiş ve kapalı çözümler vererek kirişin zemine tam değmesini ve zeminden ayrılma bölgelerini tayin etmişlerdir. Celep, Malaika ve Abu-Hussein [34], çekmeye çalışmayan Winkler zeminine oturan sonlu kirişin zorlanmış titreşimlerini Galerkin yöntemini kullanarak incelemişler ve çeşitli yükleme durumları ve parametreler için ayrılma noktasının değişimi ile çeşitli yerdeğiştirmelerin zamanla değişimini vermişlerdir. Celep ve Turhan [35], çekme gerilmesi almayan Winkler zeminine oturan ortasından dinamik tekil yükle yüklü dairesel plağın titreşimlerini, Güler ve Celep [36], aynı zemine oturan dairesel plağın tekil yük, yayılı yük ve tekil moment etkisi altındaki davranışını yine Galerkin metoduyla incelemişlerdir.

Yapılan bazı çalışmalarda, yapılar, çekme almayan zemine rijit bir plak vasıtasıyla oturan elastik bir kolon üzerinde tek kütle olarak modellenmiş ve depreme

karşı davranışı incelenmiştir Yim ve Chopra [37], Chopra ve Yim [38], Yim ve Chopra [39], Celep ve Güler [40].

Kiriş ve plakların lineer olmayan titreşimleri ile ilgili çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalarda nonlinearlik geometrik veya fiziksel olmakta, bazı problemlerde de her ikisi birlikte bulunabilmektedir. Aravamudan ve Murthy [41], geometrik nonlinearliği dikkate alarak pertürbasyon tekniği ve Mindlin-Galerkin metodu ile, Atluri [42], geometri ve eylemsizlik nonlinearliğini dikkate alarak Galerkin metodu ile kirişlerin lineer olmayan titreşimlerini incelemişlerdir. Verma ve Murthy [43], değişken kesitli ankastre kirişin büyük genlikli titreşimlerini, Lou ve Sikarskie [44], basit kirişin harmonik yük etkisi altındaki, Bhashyam ve Prathap [45], sonlu elemanlar yöntemiyle yatay hareketi önlenmiş kirişin lineer olmayan titreşimlerini incelemişlerdir. Silva ve Zaretzky [46], geometri ve eylemsizlik nonlinearlığına sahip kirişlerin periyodik zorlama altındaki davranışını pertürbasyon tekniğiyle, Lewandowski [47], geometrik nonlinearliğe sahip kirişlerin titreşimini Fourier serileri ve sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve genlik-frekans ilişkisini grafikler yardımıyla vermişler, Cveticanin ve Atanackovic [48], basit mesnetli kirişin büyük genlikli düşey titreşimlerini kirişin boyuna yöndeki eylemsizliğini ve dönme eylemsizliğini de dikkate alarak incelemiş ve dönme eylemsizliği ile narinliğin frekans üzerindeki etkisini ve genlik-frekans değişimini grafikler yardımıyla vermişlerdir. Kung ve Pao [49], ankastre dairesel plağın lineer olmayan titreşimlerini Ritz- Galerkin metoduyla teorik ve deneysel olarak, Vendhan ve Das [50], ankastre üçgen ve dikdörtgen plakların lineer olmayan titreşimlerini Rayleigh- Ritz ve Galerkin metodlarıyla, Sridhar, Mook ve Nayfeh [51] ve [52], dairesel plakların lineer olmayan rezonans titreşimlerini katlı ölçek metoduyla, Wang, Qian ve Huang [53], ince plakların lineer olmayan serbest titreşimini sınır eleman formülasyonu ve harmonik balans metodu ile, Bhimaraddi [54], kompozit plakların lineer olmayan serbest titreşimini pertürbasyon tekniği ile incelemişlerdir.

Kiriş ve plakların lineer olmayan titreşimi konusunda yapılan bazı çalışmalarda kiriş ve plak lineer veya lineer olmayan elastik yaylara mesnetlendirilmiştir. Bu çalışmalardan Saito ve Mori [55], uçlarından lineer olmayan (kübik) yaylara oturan, üzerinde tekil kütle bulunan ve periyodik olarak zorlanan kirişin titreşimlerini çeşitli

harmonikleri gözönünde tutarak, Nagaya ve Kato [56], lineer olmayan yaylara oturan dinamik yük etkisindeki kirişin davranışını Laplace dönüşümü ve Fourier serileri yardımıyla, Lee, Ke ve Kuo [57], elastik yaylara mesnetlendirilmiş değişken kesitli kirişin serbest ve zorlanmış titreşimlerini Laplace dönüşümü yardımıyla, Ramachandran ve Bhaskar [58], karşılıklı iki kenarı boyunca parabolik olarak değişen yaylara oturan dikdörtgen plakların lineer olmayan titreşimini Galerkin metoduyla, Dumir, Kumar ve Gandhi [59], kenarlarından elastik yaylara oturan değişken kalınlıklı ortotropik dairesel plağın lineer olmayan titreşimini Kantorovich metoduyla incelemişlerdir.

Elastik zemine oturan plakların lineer olmayan titreşimi ile ilgili çok sayıda çalışma olmasına rağmen, bu tür zemine oturan kirişlerin lineer olmayan titreşimi ile ilgili çalışmalar oldukça sınırlıdır. Dumir, Kumar ve Gandhi [60], Winkler, Pasternak ve lineer olmayan Winkler zeminine oturan geometrik nonlinearliğe sahip ortotrop dairesel plakların, Bhaskar ve Dumir [61], aynı tür zemine oturan geometrik nonlinearliğe sahip ortotrop dikdörtgen plakların serbest titreşimlerini, Nath, Varma ve Mahrenholtz [62], Winkler-Pasternak zeminine oturan harmonik yük etkisindeki dikdörtgen plakların dinamik davranışını çeşitli mesnetlenme durumlarına göre incelemişler, Chandrasekharappa [63], iki parametrelili elastik zemine oturan ankastre mesnetli dikdörtgen kompozit plağın lineer olmayan statik ve dinamik davranışını sönüm etkisini de hesaba katarak incelemiş ve çeşitli parametrelerin sistemin davranışına etkisini grafikler yardımıyla vermişlerdir.

Bu çalışmada lineer olmayan Winkler zeminine oturan üniform, ağırlıksız kabul edilen sonlu boydaki kirişin harmonik tekil yük ve rasgele yük etkisi altındaki davranışı incelenmiştir. Zeminin çekme gerilmesi aktarmamasından dolayı kiriş belirli noktalardan zeminden ayrılabilmekte ve bu nedenle zemin parametresi lineer olsa bile problem lineer olmayan bir karakter göstermektedir. İlk olarak kirişe harmonik yük etkimesi halinde pertürbasyon tekniği kullanılarak çözüm yapılmış, lineer ve nonlinear halde ayrılma noktasının yeri ve düşey yerdeğiştirmeler elde edilerek bunların çeşitli parametrelere göre değişimleri incelenmiştir. Lineer halde (statik) ayrılma noktasının yeri yükün şiddetinden bağımsız iken [24], nonlinear halde bu noktanın yerininin yükün şiddetine bağlı olduğu gösterilmiştir. Lineer halde bile bu noktanın yeri dinamik etkiden dolayı bir parametreye bağlı olarak değişmektedir.

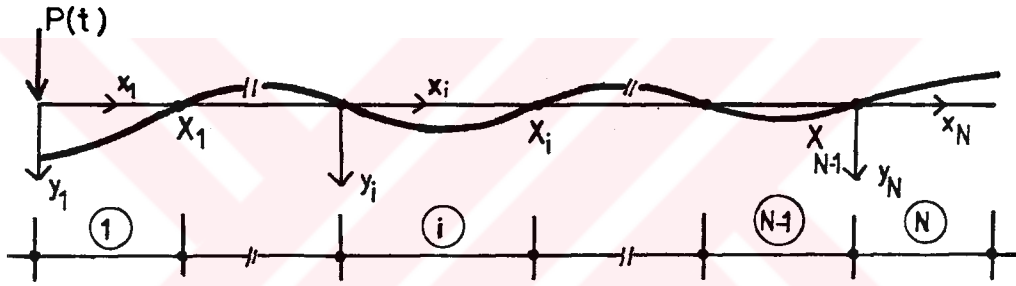
İkinci olarak rasgele yük etkisi dikkate alınmış, Galerkin metodu kullanılarak matris formunda yine lineer olmayan bir denklem takımı oluşturularak Runge- Kutta metoduyla sayısal olarak çözüm yapılmıştır. Çözüm sonunda ayrılma noktasının koordinatı ile orta ve uç deplasmanları elde edilmiş, nonlineerliğin etkisi şekiller yardımıyla gösterilmiştir.



BÖLÜM 2

FORMÜLASYON VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

2.1 Problemin Formülasyonu ve Sınır Koşulları



Şekil 2.1 Elastik zemine oturan kiriş

Elastik zemine oturan oturan 2L boyundaki homogen kiriş, şekil (2.1) de görüldüğü gibi ortasından etkiyen dinamik tekil yükün etkisi altındadır. Elastik zemin için Winkler modeli dikkate alınmaktadır. Bilindiği gibi bu modelde zeminin birbirine yakın çok sayıda yaydan oluşmuş bir sistem gibi davrandığı kabul edilmektedir. Yayların birbirine etkisi ihmal edilmekte, böylece zeminin her noktada yalnızca yerdeğiştirme ile orantılı olarak kirişe bir tepki kuvveti uyguladığı, yani zeminin sürekli bir ortam gibi davrandığı kabul edilmektedir. Zemin modülü veya yatak katayısı olarak da bilinen orantı katsayısının tüm kiriş boyunca sabit olduğu kabul edilmektedir. Bu çalışmada, zeminin çekme gerilmesi aktarmadığı kabul edilmekte ve zemin modeli olarak $k=k_1y+k_3y^3$ şeklinde iki parametrelili lineer olmayan bir Winkler modeli alınmaktadır. Burada k_1 lineer zemin parametresini (bilinen Winkler modülünü), k_3 ise pozitif veya negatif olarak alınabilen lineer olmayan zemin

parametresini göstermekte ve daha önceki bazı çalışmalarda kullanılmış bulunmaktadır [5], [6], [9], [60]. Zemin modelindeki kübik terim dolayısıyla sistemin davranışı nonlinear olmaktadır. Bilindiği gibi nonlinearliğin kaynağı çeşitlidir ve bunlar; geometrik nonlinearlik, fiziksel nonlinearlik, eylemsizlik nonlinearliği veya bunların karışımı şeklindedir [64]. Geometrik nonlinearlik, sonlu yerdeğiştirme halinde yerdeğiştirme-şekildeğiştirme arasındaki bağıntıdan kaynaklanmakta ve hesaplarda birinci mertebe terimler yanında diğer terimler de dikkate alınmaktadır. Fiziksel nonlinearlik ise bazen malzeme nonlinearliği olarak da adlandırılmakta olup, gerilme-şekildeğiştirme arasındaki ilişkinin lineer olmayan bir fonksiyon olması nedeniyle ortaya çıkmaktadır.

Zeminin çekme almamasından dolayı kiriş zeminden ayrılabilmekte ve değme-ayrılma bölgesi olarak adlandırılan farklı bölgeler ortaya çıkmaktadır. Ortaya çıkan bu bölgelerin sayısı kirişin geometrik boyutları, malzeme özelliği, zeminin davranışı ve dinamik yükün karakterine bağlı olarak değişmektedir. Kiriş bazen tümü ile zemine gömülmekte, bazen de tümüyle zeminden ayrılabilmektedir. Ortaya çıkan bölge sayısına bağlı olarak yönetici denklemler ve bunların çözümü için gerekli sınır ve süreklilik koşullarının sayısı da artmaktadır. Kirişin zeminden ayrılması nedeniyle ayrılma bölgelerinde zemin etkisi ortadan kalkmakta ve yönetici denklemler değme ve ayrılma bölgelerinde farklılık göstermektedir. Sönüm ve kütle kuvvetlerinin ihmal edilmesi halinde bu denklemler aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$EI \frac{\partial^4 y_i}{\partial x_i^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = P(t)\delta(x) - k_1 y_i - k_3 y_i^3, \quad X_{i-1} \leq x_i \leq X_i \quad i = 1,3,5,\dots \quad (2.1)$$

$$EI \frac{\partial^4 y_j}{\partial x_j^4} + \rho A \frac{\partial^2 y_j}{\partial t^2} = 0, \quad X_i \leq x_j \leq X_{i+1} \quad j = 2,4,6,\dots \quad (2.2)$$

Burada EI kirişin eğilme rijitliğini, ρ kütle yoğunluğunu, A kesit alanını, y_i ve y_j düşey yerdeğiştirmeleri, k_1 ve k_3 lineer ve nonlinear yatak katsayılarını, $P(t)$ tekil yükün şiddetini, x_i ve x_j uzay koordinatlarını, X_i ayrılma-batma noktalarının

koordinatlarını, t zamanı ve $\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. Probleme ait sınır ve süreklilik koşulları ise aşağıdaki gibidir.

1. bölgede:

$$y_1' \Big|_{x_1=0} = 0, \quad EI y_1''' \Big|_{x_1=0} = \frac{P(t)}{2}, \quad y_1 \Big|_{x_1=X_1} = 0 \quad (2.3)$$

i.bölgede:

$$y_i \Big|_{x_i=0} = 0, \quad y_i \Big|_{x_i=X_i} = 0, \quad y_i' \Big|_{x_i=0} = y_{i-1}' \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}} \quad (2.4)$$

$$y_i'' \Big|_{x_i=0} = y_{i-1}'' \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}}, \quad y_i''' \Big|_{x_i=0} = y_{i-1}''' \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}}$$

N.bölgede :

$$y_N \Big|_{x_N=0} = 0, \quad y_N' \Big|_{x_N=0} = y_{N-1}' \Big|_{x_{N-1}=X_{N-1}}$$

$$y_N'' \Big|_{x_N=0} = y_{N-1}'' \Big|_{x_{N-1}=X_{N-1}}, \quad y_N''' \Big|_{x_N=0} = y_{N-1}''' \Big|_{x_{N-1}=X_{N-1}}$$

(2.5)

$$y_N'' \Big|_{x_N=\bar{X}_N} = 0, \quad y_N''' \Big|_{x_N=\bar{X}_N} = 0$$

Burada N.bölge son bölgeyi göstermekte ve $\bar{X}_N = L - X_{N-1}$ olarak tanımlanmaktadır.

2.2 Çözüm Yöntemleri

2.2.1 Harmonik Yükleme Hali

Bu yükleme hali için çözümde pertürbasyon yöntemi kullanılmıştır. Pertürbasyon yöntemi, lineer olmayan adi yada parça türevli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde ve kesin çözümü yapılamayan bir kısım değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde sıkça kullanılan analitik bir yöntemdir. Uygun bir dönüşüm ve boyutsuzlaştırma sonucu ortaya çıkan yada diferansiyel denklemin başlangıç ve sınır koşulları içinde açık olarak verilen ve pertürbasyon parametresi olarak adlandırılan $\varepsilon \ll 1$ gibi bir parametrenin varlığı yöntemin esasını teşkil eder. Pertürbasyon yönteminde istenilen büyüklükler, başlangıç ve sınır koşulları ile elverişli parametreler pertürbasyon serisine açılır. Pertürbasyon serisine açılan terimlerin pertürbasyon parametresinin kuvvetlerine göre düzenlenip karşılıklı olarak eşitlenmesiyle parametrenin her kuvveti için bir diferansiyel denklem ile buna karşı gelen başlangıç ve sınır koşulları elde edilir. Sonuçta sıfıncı, birinci, ikinci, ...mertebe denklemlere varılır. Üst mertebelere doğru gidildikçe problemde işlem hacminin hızla büyüdüğü ve işlemlerin içinden çıkılmaz bir hal aldığı bilinmektedir. Bu nedenle çözüm genel olarak ilk birkaç mertebede bırakılır. Pek çok halde birinci mertebe çözüm dahi problemin sonuçları hakkında yeterli bilgi verebilmektedir.

Pertürbasyon yöntemi ilk olarak gezegenlerin hareketi ile ilgili problemlerin çözümü için Poisson tafından yalnız bağlı değişkenin seriye açılması şeklinde kullanılmıştır. Hesap sonuçlarının zaman geçtikçe deneysel sonuçlar ile uyuşmaması nedeniyle çalışmalar devam etmiş ve Lindstedt- Poincaré tekniği ile uygun çözümler elde edilmiştir. Burada bağlı değişkenin yanısıra frekans parametresi de seriye açılarak periyodik çözüm elde etme koşulları kullanılmıştır. Karşılaşılan problemin karakterine göre "ortalama yöntemi", "genel ortalama yöntemi", "ardışık yerine koyma yöntemi", "harmonik dengeleme yöntemi" ve "katlı ölçek yöntemi" gibi çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Günümüzde katlı ölçek yöntemi diğerlerine göre daha ağırlıklı olarak kullanılmaktadır. Katlı ölçek yönteminde bağlı değişken pertürbasyon serisine açılmakta, zaman ise ε na bağlı olarak ölçeklendirilmektedir [64], [65], [66]. Bu çalışmada ise bağlı değişkenin yanısıra, ayrılma noktasının koordinatı da pertürbasyon

serisine açılmış, dolayısı ile yukarıda sayılan pertürbasyon tekniklerine bir genişletme yapılmıştır.

2.2.2 Rasgele Yükleme Hali

Kirişe etki eden kuvvetin zamana göre herhangi bir şekilde değişmesi halinde çeşitli çözüm yöntemleri uygulanabilmektedir. Bunlar arasında Fourier dönüşümü, ayrık Fourier dönüşümü, hızlı Fourier dönüşümü, sayısal integrasyon ve normal mod fonksiyonları yöntemleri sayılabilir. Bu çalışmada normal mod fonksiyonları yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde çözüm

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) T_n(t) \quad (2.6)$$

şeklinde bir seri olarak alınmaktadır. Burada $V_n(x)$,

$$\frac{d^4 V_n}{dx^4} - \beta_n^4 V_n = 0 \quad (2.7)$$

diferansiyel denkleminin problemimiz ile aynı sınır koşullarını sağlayan ve serbest kirişin n . mod fonksiyonu adı verilen ortogonal bir fonksiyondur. Bu yöntemin etkili olarak kullanılabilmesi için (2.1) ve (2.2) denklemleri aşağıdaki gibi yazılmaktadır

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (k_1 y + k_3 y^3) H(x, t) = P(t) \delta(x) \quad (2.8)$$

Burada $H(x,t)$:

$$H(x,t) = \begin{cases} 1, & y(x,t) > 0 \\ 0, & y(x,t) < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

olarak tanımlanmaktadır. (2.8) denkleminde mod fonksiyonlarının ortogonalite özelliği kullanılarak zamana bağlı kısım için adi diferansiyel denklem takımı elde edilmektedir. Bu denklem takımı da Runge-Kutta yöntemi ile sayısal olarak çözülmektedir. Bu çözümde kirişin zeminden ayrıldığı nokta ve / veya noktaların koordinatları başlangıçta bilinmediğinden ilk adım için tahmin yapılmakta, daha sonra çözümde $y(x,t)=0$ ifadesinin kökleri hesaplanarak ayrılma noktasının yeri ardışık olarak bulunmaktadır. Daha önceleri lineer hal için kullanılan yöntem problemimizde nonlineer hale genişletilmiştir.

BÖLÜM 3

HARMONİK YÜKE GÖRE ÇÖZÜM

Bu durumda dinamik yük $P(t)=P_0\cos\Omega t$ şeklinde alınmakta ve aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmaktadır.

$$\begin{aligned}\bar{y}_i &= \frac{y_i}{y_0}, \quad y_0 = \frac{P_0}{k_1}, \quad \beta^4 = \frac{k_1}{4EI}, \quad \xi_i = \beta x_i, \quad \eta = \beta L \\ \epsilon \bar{k} &= \frac{4k_3 y_0^2}{k_1}, \quad \bar{P} = \frac{P_0}{\beta^3 EI y_0}, \quad \bar{y}_j = \frac{y_j}{y_0}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Bu boyutsuzlaştırmalarla (2.1) ve (2.2) denklemleri aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\frac{\partial^4 \bar{y}_i}{\partial \xi_i^4} + (4/\omega^2) \frac{\partial^2 \bar{y}_i}{\partial \tau^2} = \bar{P} \delta(\xi) - 4\bar{y}_i - \epsilon \bar{k} \bar{y}_i^3, \quad \xi_{i-1} \leq \xi_i \leq \xi_i \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{y}_j}{\partial \xi_j^4} + (4/\omega^2) \frac{\partial^2 \bar{y}_j}{\partial \tau^2} = 0, \quad \xi_i \leq \xi_j \leq \xi_{i+1} \quad j = 2, 4, 6, \dots \quad (3.3)$$

(3.1) boyutsuz büyüklükleri kullanılarak değme ve ayrılma bölgelerindeki düşey yer değişimleri ve ayrılma noktasının koordinatları

$$y_i(\xi_i, t; \varepsilon) = y_{i,0}(\xi_i, t) + \varepsilon y_{i,1}(\xi_i, t) + \dots \quad (3.4)$$

$$y_j(\xi_j, t; \varepsilon) = y_{j,0}(\xi_j, t) + \varepsilon y_{j,1}(\xi_j, t) + \dots \quad (3.5)$$

$$\xi_i = \xi_{i,0} + \varepsilon \xi_{i,1} + \dots \quad (3.6)$$

şeklinde pertürbasyon serisine açılıp ε parametresine göre düzenlenirse, değme ve ayrılma bölgeleri için aşağıdaki denklemler elde edilir

$$\frac{\partial^4 y_{i,0}}{\partial \xi_i^4} + \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 y_{i,0}}{\partial t^2} + 4y_{i,0} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^4 y_{i,1}}{\partial \xi_i^4} + \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 y_{i,1}}{\partial t^2} + 4y_{i,1} = -\bar{k}y_{i,0}^3 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^4 y_{j,0}}{\partial \xi_j^4} + \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 y_{j,0}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^4 y_{j,1}}{\partial \xi_j^4} + \frac{4}{\omega^2} \frac{\partial^2 y_{j,1}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

Burada ω^2 terimi doğal frekans olup $\omega^2 = k_1/\rho A$ olarak tanımlanmakta, $\xi_{i,0}$ lineer halde ayrılma noktalarının koordinatlarını, $\xi_{i,1}$ ayrılma noktasına nonlineerliğin katkısını göstermekte, $\bar{k}$ nonlineerliği karakterize eden bir parametreyi, $y_{i,0}$ ile $y_{j,0}$ terimleri sırasıyla değme ve ayrılma bölgelerindeki lineer yer değiştirmeleri, $y_{i,1}$ ve $y_{j,1}$ de yer değiştirmelere nonlineerliğin katkısını göstermektedir. Farklı bölgelerde yazılan bu denklemlerde aşağıdaki çözüm fonksiyonları alınmaktadır.

$$y_{i,0}(\xi_i, t) = Y_{i,0}(\xi_i) \cos \Omega t$$

$$y_{i,1}(\xi_i, t) = Y_{i,1}(\xi_i) \cos \Omega t + Y_{i,2}(\xi_i) \cos 3\Omega t$$

(3.11)

$$y_{j,0}(\xi_j, t) = Y_{j,0}(\xi_j) \cos \Omega t$$

$$y_{j,1}(\xi_j, t) = Y_{j,1}(\xi_j) \cos \Omega t + Y_{j,2}(\xi_j) \cos 3\Omega t$$

Bu fonksiyonlar (3.5-3.8) denklemlerinde yerine koyulursa hareket denklemleri, $k_{11}=3\bar{k}/4$, $k_{12}=\bar{k}/4$ ve $\bar{\Omega} = \Omega/\omega$ tanımları ile aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{d^4 Y_{i,0}}{d\xi_i^4} + 4(1 - \bar{\Omega}^2) Y_{i,0} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{d^4 Y_{i,1}}{d\xi_i^4} + 4(1 - \bar{\Omega}^2) Y_{i,1} = -k_{11} Y_{i,0}^3 \quad (3.13)$$

$$\frac{d^4 Y_{i,2}}{d\xi_i^4} + 4(1 - 9\bar{\Omega}^2) Y_{i,2} = -k_{12} Y_{i,0}^3 \quad (3.14)$$

$$\frac{d^4 Y_{j,0}}{d\xi_j^4} - 4\bar{\Omega}^2 Y_{j,0} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{d^4 Y_{j,1}}{d\xi_j^4} - 4\bar{\Omega}^2 Y_{j,1} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{d^4 Y_{j,2}}{d\xi_j^4} - 4 * 9\bar{\Omega}^2 Y_{j,2} = 0 \quad (3.17)$$

Bu işlem sonunda parça türevli diferansiyel denklem takımından, zaman ortadan kaldırılarak bir adi diferansiyel denklem takımına geçilmiştir.

Yukarıdaki diferansiyel denklemlerin çözümleri $\bar{\Omega}$ frekans oranına bağlı olarak değişmektedir. Herhangi bir bölgede çözüm sonunda 12 adet integral değişmezi ortaya çıkmaktadır. Sistemde N adet bölge bulunmakta ve giriş N-1 adet noktadan zeminden ayrılmakta veya zemine batmaktadır. Çözümde ortaya çıkan integral değişmezleri ve ayrılma noktalarındaki bilinmeyenlerle birlikte toplam bilinmeyen sayısı $N*12+(N-1)*2 = 14*N-2$ olmaktadır. Ortaya çıkan bu bilinmeyenlerin hesabı için (2.3), (2.4) ve (2.5) sınır ve süreklilik koşulları kullanılmakta ve bu ifadelerdeki yer değiştirmeler ilgili nokta civarında Taylor serisine açılarak yeteri kadar bağıntı elde edilmektedir. Bu kısımda 1. bölgede girişin zemine battığı kabul edilmiştir. Sözü edilen sınır ve süreklilik koşulları şunlardır: 1. bölgede, simetriden giriş ortasında teğetin eğimi sıfır olmakta, kesme kuvveti de tekil yükün yarısına eşit olmaktadır. Bölgenin sağında girişin zeminden ayrıldığı noktada düşey yerdeğiştirme sıfır olmaktadır. Herhangi bir ara bölge için, girişin zeminden ayrıldığı ve zemine battığı noktalarda düşey yerdeğiştirme sıfır olmakta, ayrılma/batma noktasında seçilen koordinat başlangıcında teğetlerin eğimleri, kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri sürekli olmaktadır. Son bölge için ise serbest uçta kesme kuvveti ile eğilme momentinin sıfır olmasından yararlanılarak sınır koşulları yazılmaktadır. Bu durumda, söylenen sınır ve süreklilik koşullarından aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

1. bölgede :

$$\frac{dY_{1,0}(0)}{d\xi} = 0 \quad , \quad \frac{dY_{1,1}(0)}{d\xi} = 0 \quad , \quad \frac{dY_{1,2}(0)}{d\xi} = 0 \quad (3.18.a,b,c)$$

$$\frac{d^3Y_{1,0}(0)}{d\xi^3} = \frac{\bar{p}}{2} \quad , \quad \frac{d^3Y_{1,1}(0)}{d\xi^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^3Y_{1,2}(0)}{d\xi^3} = 0 \quad (3.19.a,b,c)$$

$$Y_{1,0}(\xi_{1,0}) = 0 \quad , \quad Y_{1,2}(\xi_{1,0}) = 0 \quad , \quad \xi_{1,1} = -\frac{Y_{1,1}(\xi_{1,0})}{dY_{1,0}(\xi_{1,0})/d\xi} \quad (3.20.a,b,c)$$

i. bölgede :

$$Y_{i,0}(0) = 0 \quad , \quad Y_{i,2}(0) = 0 \quad , \quad \xi_{i-1,1} = -\frac{Y_{i,1}(0)}{dY_{i,0}(0)/d\xi} \quad (3.21.a,b,c)$$

$$\frac{dY_{i,0}(0)}{d\xi} = \frac{dY_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})}{d\xi}$$

$$\frac{dY_{i,1}(0)}{d\xi} = \frac{dY_{i-1,1}(\xi_{i-1,0})}{d\xi} \quad (3.22.a,b,c)$$

$$\frac{dY_{i,2}(0)}{d\xi} = \frac{dY_{i-1,2}(\xi_{i-1,0})}{d\xi}$$

$$\frac{d^2Y_{i,0}(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2Y_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2Y_{i,1}(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2Y_{i-1,1}(\xi_{i-1,0})}{d\xi^2} \quad (3.23.a,b,c)$$

$$\frac{d^2Y_{i,2}(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2Y_{i-1,2}(\xi_{i-1,0})}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3 Y_{i,0}(0)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^3 Y_{i,1}(0)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_{i-1,1}(\xi_{i-1,0})}{d\xi^3}$$

(3.24.a,b,c)

$$\frac{d^3 Y_{i,2}(0)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_{i-1,2}(\xi_{i-1,0})}{d\xi^3}$$

$$Y_{i,0}(\xi_{i,0}) = 0$$

$$Y_{i-1,1}(\xi_{i-1,0}) = Y_{i,1}(0)$$

(3.25.a,b,c,d)

$$Y_{i,2}(\xi_{i,0}) = 0 \quad , \quad \xi_{i,1} = -\frac{Y_{i,1}(\xi_{i,0})}{dY_{i,0}(\xi_{i,0})/d\xi}$$

N. bölgede :

$$Y_{N,0}(0) = 0 \quad , \quad Y_{N,2}(0) = 0 \quad , \quad \xi_{N-1,1} = -\frac{Y_{N,1}(0)}{dY_{N,0}(0)/d\xi} \quad (3.26.a,b,c)$$

$$\frac{dY_{N,0}(0)}{d\xi} = \frac{dY_{N-1,0}(\xi_{N-1,0})}{d\xi}$$

$$\frac{dY_{N,1}(0)}{d\xi} = \frac{dY_{N-1,1}(\xi_{N-1,0})}{d\xi}$$

(3.27.a,b,c)

$$\frac{dY_{N,2}(0)}{d\xi} = \frac{dY_{N-1,2}(\xi_{N-1,0})}{d\xi}$$

$$\frac{d^2 Y_{N,0}(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2 Y_{N-1,0}(\xi_{N-1,0})}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^2 Y_{N,1}(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2 Y_{N-1,1}(\xi_{N-1,0})}{d\xi^2}$$

(3.28.a,b,c)

$$\frac{d^2 Y_{N,2}(0)}{d\xi^2} = \frac{d^2 Y_{N-1,2}(\xi_{N-1,0})}{d\xi^2}$$

$$\frac{d^3 Y_{N,0}(0)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_{N-1,0}(\xi_{N-1,0})}{d\xi^3}$$

(3.29.a,b,c)

$$\frac{d^3 Y_{N,1}(0)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_{N-1,1}(\xi_{N-1,0})}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^3 Y_{N,2}(0)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_{N-1,2}(\xi_{N-1,0})}{d\xi^3}$$

$$\frac{d^2 Y_{N,0}(\bar{\xi}_N)}{d\xi^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y_{N,1}(\bar{\xi}_N)}{d\xi^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y_{N,2}(\bar{\xi}_N)}{d\xi^2} = 0 \quad (3.30.a,b,c)$$

$$\frac{d^3 Y_{N,0}(\bar{\xi}_N)}{d\xi^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^3 Y_{N,1}(\bar{\xi}_N)}{d\xi^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^3 Y_{N,2}(\bar{\xi}_N)}{d\xi^3} = 0 \quad (3.31.a,b,c)$$

$$Y_{N,1}(0) = Y_{N-1,1}(\xi_{N-1,0}) \quad (\bar{\xi}_N = \eta - (\xi_{N-1,0} + \epsilon \xi_{N-1,1})) \quad (3.32)$$

Yukarıda verilen sınır ve süreklilik koşullarının elde edilişi herhangi bir i . bölge için Ek A da verilmiştir.

Yukarıda belirtildiği gibi bölge sayısının büyümesi ile çözümlerde ortaya çıkan bilinmeyenlerin (integral değişmezleri ve ayrılma noktalarının koordinatları) sayısı hızla büyümekte ve çözüm oldukça güçleşmektedir. Sayısal işlemleri biraz hafifletmek için bir değme ve bir de ayrılma bölgesi olması hali ele alınmıştır. (3.12-3.17) diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin $\bar{\Omega}$ frekans oranına bağlı olmasından dolayı farklı durumlar ortaya çıkmaktadır. Bu durumlara ait çözümler aşağıda verilmiştir.

3.1 $\bar{\Omega} < 1/3$ Olması Durumu

Bu frekans oranı için lineer ve nonlinear hale ait çözüm fonksiyonları aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$Y_{10}(\xi) = C_1 e^{m\xi} + C_2 e^{\bar{m}\xi} + C_3 e^{-\bar{m}\xi} + C_4 e^{-m\xi} \quad (3.33)$$

$$Y_{20}(\xi) = D_1 e^{\theta_{20}\xi} + D_2 e^{-\theta_{20}\xi} + D_3 e^{i\theta_{20}\xi} + D_4 e^{-i\theta_{20}\xi} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} Y_{11}(\xi) = & E_1 e^{m\xi} + E_2 e^{\bar{m}\xi} + E_3 e^{-\bar{m}\xi} + E_4 e^{-m\xi} - k_{11} \left[\frac{C_1^3 e^{3m\xi}}{(3m)^4 + 4\theta_{11}^4} \right. \\ & + \frac{C_3^3 e^{-3\bar{m}\xi}}{(3\bar{m})^4 + 4\theta_{11}^4} + \frac{3C_1^2 C_2 e^{(2m+\bar{m})\xi}}{(2m+\bar{m})^4 + 4\theta_{11}^4} + \frac{3C_1^2 C_3 e^{(2m-\bar{m})\xi}}{(2m-\bar{m})^4 + 4\theta_{11}^4} \\ & + \frac{3C_3^2 C_1 e^{(m-2\bar{m})\xi}}{(m-2\bar{m})^4 + 4\theta_{11}^4} + \left. \frac{3C_3^2 C_4 e^{-(m+2\bar{m})\xi}}{(m+2\bar{m})^4 + 4\theta_{11}^4} \right] - \frac{3k_{11}}{4} \xi * \\ & * \left[\frac{C_1^2 C_4 e^{m\xi}}{m^3} - \frac{C_3^2 C_2 e^{-\bar{m}\xi}}{\bar{m}^3} + \frac{2C_1 C_2 C_3 e^{m\xi}}{m^3} - \frac{2C_1 C_3 C_4 e^{-\bar{m}\xi}}{\bar{m}^3} \right] + K.E. \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
Y_{12}(\xi) = & G_1 e^{n\xi} + G_2 e^{\bar{n}\xi} + G_3 e^{-\bar{n}\xi} + G_4 e^{-n\xi} - k_{12} \left[\frac{C_1^3 e^{3m\xi}}{(3m)^4 + 4\theta_{12}^4} \right. \\
& + \frac{C_3^3 e^{-3\bar{m}\xi}}{(3\bar{m})^4 + 4\theta_{12}^4} + \frac{3C_1^2 C_2 e^{(2m+\bar{m})\xi}}{(2m+\bar{m})^4 + 4\theta_{12}^4} + \frac{3C_1^2 C_3 e^{(2m-\bar{m})\xi}}{(2m-\bar{m})^4 + 4\theta_{12}^4} \\
& + \frac{3C_3^2 C_1 e^{(m-2\bar{m})\xi}}{(m-2\bar{m})^4 + 4\theta_{12}^4} + \frac{3C_3^2 C_4 e^{-(m+2\bar{m})\xi}}{(m+2\bar{m})^4 + 4\theta_{12}^4} + \frac{3C_1^2 C_4 e^{m\xi}}{m^4 + 4\theta_{12}^4} \\
& \left. + \frac{3C_3^2 C_2 e^{-\bar{m}\xi}}{\bar{m}^4 + 4\theta_{12}^4} + \frac{6C_1 C_2 C_3 e^{m\xi}}{m^4 + 4\theta_{12}^4} + \frac{6C_1 C_3 C_4 e^{-\bar{m}\xi}}{\bar{m}^4 + 4\theta_{12}^4} \right] + K.E.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$Y_{21}(\xi) = F_1 e^{\theta_{21}\xi} + F_2 e^{-\theta_{21}\xi} + F_3 e^{i\theta_{21}\xi} + F_4 e^{-i\theta_{21}\xi} \tag{3.37}$$

$$Y_{22}(\xi) = H_1 e^{\theta_{22}\xi} + H_2 e^{-\theta_{22}\xi} + H_3 e^{i\theta_{22}\xi} + H_4 e^{-i\theta_{22}\xi} \tag{3.38}$$

Bu ifadelerde K.E., lineer çözümünden gelen terimlere ait kompleks eşleniği göstermekte, diğer kısaltmalar ise aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\theta_{10}^4 = \theta_{11}^4 = 1 - \bar{\Omega}^2, \quad \theta_{12}^4 = 1 - 9\bar{\Omega}^2, \quad \theta_{20}^4 = \theta_{21}^4 = 4\bar{\Omega}^2 \tag{3.39}$$

$$\theta_{22}^4 = 4 * 9\bar{\Omega}^2, \quad m = (1+i)\theta_{10}, \quad \bar{m} = (1-i)\theta_{10}, \quad n = (1+i)\theta_{12}, \quad \bar{n} = (1-i)\theta_{12}$$

İki bölge için elde edilen bu çözümlerde $C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i$, $i=1,4$ olmak üzere 24 integral sabiti ortaya çıkmakta ve ayrılma noktasının koordinatlarına ait bilinmeyenlerle (ξ_{10} ve ξ_{11}) birlikte bilinmeyen sayısı 26 olmaktadır. Çözüm için bu bilinmeyenlerin hesabı gerekmektedir. Bunun için önce lineer hale ait (3.18-a), (3.19-a), (3.20-a), (3.26-a), (3.27-a), (3.28-a), (3.29-a), (3.30-a) ve (3.31-a) sınır ve süreklilik koşullarının kullanılması ile $\bar{\Omega}$ frekansı ve ξ_{10} ayrılma noktasının koordinatını içeren lineer olmayan bir denkleme gelinmektedir. $\bar{\Omega}$ frekansının seçimi ile Newton - Raphson tekniği kullanılarak ξ_{10} koordinatı $\bar{\Omega}$ ye bağlı olarak elde edilmektedir. Daha sonra geriye dönülerek bu hale ait integral sabitleri (C_i, D_i)

hesaplanmaktadır. Lineer hale ait çözüm yapıldıktan sonra bu çözüm ve kullanılmayan sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak önce integral sabitleri (E_i , F_i , G_i , H_i) bulunmakta daha sonra ξ_{11} bilinmeyeni (3.20-c) veya (3.26-c) eşitliklerinden biri ile elde edilmektedir.

3.2 $1/3 < \overline{\Omega} < 1$ Olması Durumu

Bu frekans oranı için değme bölgesinde Y_{10} ve Y_{11} çözümleri (3.33) ve (3.34) ile aynı olmakta, yalnızca Y_{12} çözümü değişmektedir. Bu çözüm ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 Y_{12}(\xi) = & G_1 e^{\theta_{12}\xi} + G_2 e^{-\theta_{12}\xi} + G_3 e^{i\theta_{12}\xi} + G_4 e^{-i\theta_{12}\xi} - k_{12} \left[\frac{C_1^3 e^{3m\xi}}{(3m)^4 - \theta_{12}^4} \right. \\
 & + \frac{C_3^3 e^{-3\bar{m}\xi}}{(-3\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} + \frac{3C_1^2 C_2 e^{(2m+\bar{m})\xi}}{(2m+\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} + \frac{3C_1^2 C_3 e^{(2m-\bar{m})\xi}}{(2m-\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} \\
 & + \frac{3C_3^2 C_1 e^{(m-2\bar{m})\xi}}{(m-2\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} + \frac{3C_3^2 C_4 e^{-(m+2\bar{m})\xi}}{(m+2\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} + \frac{3C_1^2 C_4 e^{m\xi}}{m^4 - \theta_{12}^4} \\
 & \left. + \frac{3C_3^2 C_2 e^{-\bar{m}\xi}}{(-\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} + \frac{6C_1 C_2 C_3 e^{m\xi}}{m^4 - \theta_{12}^4} + \frac{6C_1 C_3 C_4 e^{-\bar{m}\xi}}{(-\bar{m})^4 - \theta_{12}^4} \right] + K.E.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Burada, $\theta_{12}^4 = 4(9\overline{\Omega}^2 - 1)$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrılma bölgesine ait Y_{20} , Y_{21} ve Y_{22} çözümlerinde bir değişiklik olmamaktadır. Bu halde çözüm fonksiyonlarında ortaya çıkan integral değişmezlerinden yalnızca G_i ve H_i sabitlerinin hesabı için sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak bunlar elde edilmekte, diğer sabitler ise bir önceki halden yararlanılarak bulunmakta ve ayrılma noktasının hesabı ile çözüm tamamlanmaktadır.

3.3 $\overline{\Omega} = 1$ Olması Durumu

3.3.1 Lineer Hale Ait Çözüm

Bu frekans oranında lineer hale ait diferansiyel denklemlerin çözümleri şöyle olmaktadır.

$$Y_{10}(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3\xi^2 + C_4\xi^3 \quad (3.41)$$

$$Y_{20}(\xi) = D_1e^{\theta_{20}\xi} + D_2e^{-\theta_{20}\xi} + 2D_{31}\cos\theta_{20}\xi - 2D_{32}\sin\theta_{20}\xi \quad (3.42)$$

Bu çözümlerdeki sabitlerin hesabı için lineer hale ait sınır koşulları kullanılmakta ve bazı sınır koşullarından $C_2 = 0$, $C_4 = \bar{P}/12$ olarak elde edilmektedir. Diğer sınır koşulları kullanılarak ise sabitler arasında şu bağıntılar elde edilmektedir.

$$D_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_3 + 3C_4\xi_{10}}{\theta_{20}^2} + \frac{C_3\xi_{10} + 1.5C_4\xi_{10}^2}{\theta_{20}} + \frac{3C_4}{\theta_{20}^3} \right) \quad (3.43)$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{C_3 + 3C_4\xi_{10}}{\theta_{20}^2} - \frac{C_3\xi_{10} + 1.5C_4\xi_{10}^2}{\theta_{20}} - \frac{3C_4}{\theta_{20}^3} \right) \quad (3.44)$$

$$D_{31} = \frac{1}{2\theta_{20}^2} (-C_3 - 3C_4\xi_{10}) \quad (3.45)$$

$$D_{32} = \frac{1}{4} \left(-\frac{2C_3\xi_{10} + 3C_4\xi_{10}^2}{\theta_{20}} + \frac{6C_4}{\theta_{20}^3} \right) \quad (3.46)$$

$$C_1 = -C_3\xi_{10}^2 - C_4\xi_{10}^3 \quad (3.47)$$

Burada $\theta_{20}^4 = 4\overline{\Omega}^2$ olarak tanımlanmaktadır. Düzenlenen bu sabitlerle (3.30-a) ve (3.31-a) sınır koşullarından elde edilen denklemlere gidilmekte ve lineer olmayan bir denklem takımının kökleri olarak sabitler ve ayrılma noktasının koordinatı elde edilmektedir.

3.3.2. Nonlinear Hale Ait Çözüm

Bu halde diferansiyel denklemlerin çözümleri, Y_{10} ve Y_{20} çözümleri lineer halden alındıktan sonra, aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$Y_{11}(\xi) = E_1 + E_2\xi + E_3\xi^2 + E_4\xi^3 - k_{11}\left[\frac{C_1^3}{24}\xi^4 + \frac{C_1^2C_3}{120}\xi^6 + \frac{C_1^2C_4}{280}\xi^7 + \frac{C_3^2C_1}{560}\xi^8 + \frac{C_1C_3C_4}{504}\xi^9 + \frac{C_3^3 + 3C_4^2C_1}{5040}\xi^{10} + \frac{C_3^2C_4}{2640}\xi^{11} + \frac{C_4^2C_3}{3960}\xi^{12} + \frac{C_4^3}{17160}\xi^{13}\right] \quad (3.48)$$

$$Y_{12}(\xi) = G_1e^{\theta_{12}\xi} + G_2e^{-\theta_{12}\xi} + G_{31}\cos\theta_{12}\xi - G_{32}\sin\theta_{12}\xi + \frac{k_{12}}{\theta_{12}^4}[m_1 + m_2\xi + m_3\xi^2 + m_4\xi^3 + m_5\xi^4 + m_6\xi^5 + m_7\xi^6 + m_8\xi^7 + m_9\xi^8 + m_{10}\xi^9] \quad (3.49)$$

$$Y_{21}(\xi) = F_1e^{\theta_{21}\xi} + F_2e^{-\theta_{21}\xi} + F_{31}\cos\theta_{21}\xi - F_{32}\sin\theta_{21}\xi \quad (3.50)$$

$$Y_{22}(\xi) = H_1e^{\theta_{22}\xi} + H_2e^{-\theta_{22}\xi} + H_{31}\cos\theta_{22}\xi - H_{32}\sin\theta_{22}\xi \quad (3.51)$$

Burada; $\theta_{12}^4 = 4(1 - 9\overline{\Omega}^2)$, $\theta_{22}^4 = 4 * 9\overline{\Omega}^2$, $\theta_{21}^4 = \theta_{20}^4$ olarak tanımlanmaktadır. Yukarıdaki fonksiyonlarda tanımlanan m_i ler C_i nin fonksiyonları olup Ek B de verilmektedir. Sabitlerin hesabı için kullanılan sınır koşullarından (3.18-b) ve (3.19-b); $E_2=0$, $E_4=0$ değerlerini vermektedir. Diğer koşullardan ise aşağıdaki denklemlere gelinmektedir.

$$\frac{2\xi_{10}}{\theta_{21}}E_3 - Z_1 = F_1 - F_2 - 2F_{32} \quad (3.52)$$

$$\frac{2}{\theta_{21}^2}E_3 - Z_3 = F_1 + F_2 - 2F_{31} \quad (3.53)$$

$$Z_5 = F_1 - F_2 + 2F_{32} \quad (3.54)$$

$$E_1 + \xi_{10}^2 E_3 - Z_7 = F_1 + F_2 + 2F_{31} \quad (3.55)$$

$$e^{\bar{\lambda}_{21}}F_1 + e^{-\bar{\lambda}_{21}}F_2 - 2F_{31}\cos\bar{\lambda}_{21} + 2F_{32}\sin\bar{\lambda}_{21} = 0 \quad (3.56)$$

$$e^{\bar{\lambda}_{21}}F_1 - e^{-\bar{\lambda}_{21}}F_2 + 2F_{31}\sin\bar{\lambda}_{21} + 2F_{32}\cos\bar{\lambda}_{21} = 0 \quad (3.57)$$

$$G_1 - G_2 - 2G_{32} + \frac{k_{12}m_2}{\theta_{12}^5} = 0 \quad (3.58)$$

$$G_1 - G_2 + 2G_{32} + \frac{6k_{12}m_4}{\theta_{12}^7} = 0 \quad (3.59)$$

$$\frac{\theta_{12}}{\theta_{22}}(e^{\lambda_{12}}G_1 - e^{-\lambda_{12}}G_2 - 2G_{31}\sin\lambda_{12} - 2G_{32}\cos\lambda_{12}) + Z_2 = H_1 - H_2 - 2H_{32} \quad (3.60)$$

$$\frac{\theta_{12}^2}{\theta_{22}^2}(e^{\lambda_{12}}G_1 + e^{-\lambda_{12}}G_2 - 2G_{31}\cos\lambda_{12} + 2G_{32}\sin\lambda_{12}) + Z_4 = H_1 + H_2 - 2H_{31} \quad (3.61)$$

$$\frac{\theta_{12}^3}{\theta_{22}^3}(e^{\lambda_{12}}G_1 - e^{-\lambda_{12}}G_2 + 2G_{31}\sin\lambda_{12} + 2G_{32}\cos\lambda_{12}) + Z_6 = H_1 - H_2 + 2H_{32} \quad (3.62)$$

$$e^{\lambda_{12}}G_1 + e^{-\lambda_{12}}G_2 + 2G_{31}\cos\lambda_{12} - 2G_{32}\sin\lambda_{12} + Z_8 = 0 \quad (3.63)$$

$$H_1 + H_2 + 2H_{31} = 0 \quad (3.64)$$

$$e^{\bar{\lambda}_{22}} H_1 + e^{-\bar{\lambda}_{22}} H_2 - 2H_{31} \cos \bar{\lambda}_{22} + 2H_{32} \sin \bar{\lambda}_{22} = 0 \quad (3.65)$$

$$e^{\bar{\lambda}_{22}} H_1 - e^{-\bar{\lambda}_{22}} H_2 + 2H_{31} \sin \bar{\lambda}_{22} + 2H_{32} \cos \bar{\lambda}_{22} = 0 \quad (3.66)$$

Burada;

$$\lambda_{12} = \theta_{12} \xi_{10} \quad , \quad \bar{\lambda}_{21} = \theta_{21} \bar{\xi} \quad , \quad \bar{\lambda}_{22} = \theta_{22} \bar{\xi} \quad (3.67)$$

olarak tanımlanmakta, Z_i değerleri ise ξ_{10} ve m_i değerlerinin fonksiyonu olup ek B de verilmektedir. İntegral değişmezlerinin hesabı için de benzer bir yol izlenmekte ve bu hale ait çözüm tamamlanmaktadır.

3.4 $\bar{\Omega} > 1$ Olması Durumu

Bu frekans oranında, zorlamanın yönüne göre farklı iki durum ortaya çıkmakta ve ancak zorlama ile yer yerdeğiştirmenin farklı yönlerde olması halinde çözüm elde edilebilmektedir. Birinci halde değme bölgesi diğer frekans oranları için ortaya çıkan bölge olmakta , ikinci halde ise bu bölge ayrılma bölgesi olmakta (zorlama aşağı doğru), yani kiriş ortası zeminden ayrılmaktadır.

3.4.1 Zorlamanın Yukarı Doğru Olması Durumu

Bu halde diferansiyel denklemlerin çözümleri şöyle olmaktadır.

$$Y_{10}(\xi) = C_1 e^{\theta_{10} \xi} + C_2 e^{-\theta_{10} \xi} + C_3 e^{i\theta_{10} \xi} + C_4 e^{-i\theta_{10} \xi} \quad (3.68)$$

$$Y_{20}(\xi) = D_1 e^{\theta_{20} \xi} + D_2 e^{-\theta_{20} \xi} + D_3 e^{i\theta_{20} \xi} + D_4 e^{-i\theta_{20} \xi} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned}
Y_{11}(\xi) = & E_1 e^{\theta_{11}\xi} + E_2 e^{-\theta_{11}\xi} + E_3 e^{i\theta_{11}\xi} + E_4 e^{-i\theta_{11}\xi} - \frac{k_{11}}{80\theta_{10}^4} \left[C_1^3 e^{3\theta_{10}\xi} \right. \\
& + C_2^3 e^{-3\theta_{10}\xi} + C_3^3 e^{3i\theta_{10}\xi} + C_4^3 e^{-3i\theta_{10}\xi} \left. \right] + \frac{3k_{11}}{8\theta_{10}^4} \left[\frac{C_1^2 C_3}{1-3i} e^{(2+i)\theta_{10}\xi} \right. \\
& + \frac{C_1^2 C_4}{1+3i} e^{(2-i)\theta_{10}\xi} + \frac{C_2^2 C_3}{1+3i} e^{(-2+i)\theta_{10}\xi} + \frac{C_2^2 C_4}{1-3i} e^{-(2+i)\theta_{10}\xi} \\
& + \frac{C_3^2 C_1}{1+3i} e^{(2i+1)\theta_{10}\xi} + \frac{C_3^2 C_2}{1-3i} e^{(2i-1)\theta_{10}\xi} + \frac{C_4^2 C_1}{1-3i} e^{(-2i+1)\theta_{10}\xi} \\
& + \frac{C_4^2 C_2}{1+3i} e^{-(2i+1)\theta_{10}\xi} \left. \right] - \frac{3k_{11}}{4\theta_{10}^3} \xi \left[(C_1^2 C_2 + 2C_1 C_3 C_4) e^{\theta_{10}\xi} - (C_1 C_2^2 \right. \\
& + 2C_2 C_3 C_4) e^{-\theta_{10}\xi} + i(C_3^2 C_4 + 2C_1 C_2 C_3) e^{i\theta_{10}\xi} - i(C_4^2 C_3 + 2C_1 C_2 C_4) \\
& \left. \left. * e^{-i\theta_{10}\xi} \right] \right] \quad (3.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{12}(\xi) = & G_1 e^{\theta_{12}\xi} + G_2 e^{-\theta_{12}\xi} + G_3 e^{i\theta_{12}\xi} + G_4 e^{-i\theta_{12}\xi} - \frac{k_{12}}{8\theta_{10}^4 - \theta_{12}^4} \\
& * \left[C_1^3 e^{3\theta_{10}\xi} + C_2^3 e^{-3\theta_{10}\xi} + C_3^3 e^{3i\theta_{10}\xi} + C_4^3 e^{-3i\theta_{10}\xi} \right] - \frac{3k_{12}}{\theta_{10}^4 - \theta_{12}^4} \left[(C_1^2 C_2 \right. \\
& + 2C_1 C_3 C_4) e^{\theta_{10}\xi} + (C_1 C_2^2 + 2C_2 C_3 C_4) e^{-\theta_{10}\xi} + (C_3^2 C_4 + 2C_1 C_2 C_3) e^{i\theta_{10}\xi} \left. \right] \\
& + (C_4^2 C_3 + 2C_1 C_2 C_4) e^{-i\theta_{10}\xi} \left. \right] - \frac{3k_{12}}{\theta_{10}^4} \left[\frac{C_1^2 C_3}{24i - r_1} e^{(2+i)\theta_{10}\xi} \right. \\
& - \frac{C_1^2 C_4}{24i + r_1} e^{(2-i)\theta_{10}\xi} - \frac{C_2^2 C_3}{24i + r_1} e^{(-2+i)\theta_{10}\xi} + \frac{C_2^2 C_4}{24i - r_1} e^{-(2+i)\theta_{10}\xi} \\
& - \frac{C_3^2 C_1}{24i + r_1} e^{(2i+1)\theta_{10}\xi} + \frac{C_3^2 C_2}{24i - r_1} e^{(2i-1)\theta_{10}\xi} + \frac{C_4^2 C_1}{24i - r_1} e^{(-2i+1)\theta_{10}\xi} \\
& \left. \left. - \frac{C_4^2 C_2}{24i + r_1} e^{-(2i+1)\theta_{10}\xi} \right] \right] \quad (3.71)
\end{aligned}$$

$$Y_{21}(\xi) = F_1 e^{\theta_{21}\xi} + F_2 e^{-\theta_{21}\xi} + F_3 e^{i\theta_{21}\xi} + F_4 e^{-i\theta_{21}\xi} \quad (3.72)$$

$$Y_{22}(\xi) = H_1 e^{\theta_{22}\xi} + H_2 e^{-\theta_{22}\xi} + H_3 e^{i\theta_{22}\xi} + H_4 e^{-i\theta_{22}\xi} \quad (3.73)$$

Bu denklemlerde görülen bazı büyüklükler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \theta_{10}^4 &= 4(\overline{\Omega}^2 - 1) \quad , \quad \theta_{20}^4 = 4\overline{\Omega}^2 \quad , \quad \theta_{11}^4 = \theta_{10}^4 \quad , \quad \theta_{21}^4 = \theta_{20}^4 \\ \theta_{12}^4 &= 4(9\overline{\Omega}^2 - 1) \quad , \quad \theta_{22}^4 = 4 * 9\overline{\Omega}^2 \quad , \quad r_1 = 7 + \frac{\theta_{12}^4}{\theta_{10}^4} \end{aligned} \quad (3.74)$$

İntegral değişmezlerinin ve ayrılma noktasının koordinatlarının hesabı için yine önce lineer hale ait sınır ve süreklilik koşulları kullanılarak bu hale ait çözüm yapılmakta, elde edilen çözüm nonlinear hale ait denklemlerde kullanılarak bu hale ait sabitler ve ayrılma noktasının koordinatı bulunarak çözüm tamamlanmaktadır.

3.4.2 Zorlamanın Aşağı Doğru Olması Durumu

Bu halde değme ve ayrılma bölgeleri değiştiğinden, lineer hale ait çözümler için θ_{10} ve θ_{20} ifadeleri yeniden tanımlanarak (3.68) ve (3.69) çözümleri aynen kullanılmakta, sabitlerin ve ayrılma noktasının hesabı için yine (3.18-a)-(3.31-a) koşullarına gidilmektedir. Nonlinear halde ise bu kez değme bölgesinden kübik terim gelmekte ve çözüm fonksiyonları:

$$Y_{11}(\xi) = E_1 e^{\theta_{11}\xi} + E_2 e^{-\theta_{11}\xi} + E_3 e^{i\theta_{11}\xi} + E_4 e^{-i\theta_{11}\xi} \quad (3.75)$$

$$Y_{12}(\xi) = G_1 e^{\theta_{12}\xi} + G_2 e^{-\theta_{12}\xi} + G_3 e^{i\theta_{12}\xi} + G_4 e^{-i\theta_{12}\xi} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned}
Y_{21}(\xi) = & F_1 e^{\theta_{21}\xi} + F_2 e^{-\theta_{21}\xi} + F_3 e^{i\theta_{21}\xi} + F_4 e^{-i\theta_{21}\xi} - \frac{k_{11}}{80\theta_{20}^4} \left[D_1^3 e^{3\theta_{20}\xi} \right. \\
& + D_2^3 e^{-3\theta_{20}\xi} + D_3^3 e^{3i\theta_{20}\xi} + D_4^3 e^{-3i\theta_{20}\xi} \left. \right] + \frac{3k_{11}}{80\theta_{20}^4} \left[\frac{D_1^2 D_3}{1-3i} e^{(2+i)\theta_{20}\xi} \right. \\
& + \frac{D_1^2 D_4}{1+3i} e^{(2-i)\theta_{20}\xi} + \frac{D_2^2 D_3}{1+3i} e^{(-2+i)\theta_{20}\xi} + \frac{D_2^2 D_4}{1-3i} e^{-(2+i)\theta_{20}\xi} \\
& + \frac{D_3^2 D_1}{1+3i} e^{(2i+1)\theta_{20}\xi} + \frac{D_3^2 D_2}{1-3i} e^{(2i-1)\theta_{20}\xi} + \frac{D_4^2 D_1}{1-3i} e^{(-2i+1)\theta_{20}\xi} \\
& + \frac{D_4^2 D_2}{1+3i} e^{-(2i+1)\theta_{20}\xi} \left. \right] - \frac{3k_{11}}{40\theta_{20}^3} \xi \left[(D_1^2 D_2 + 2D_1 D_2 D_3) e^{\theta_{20}\xi} - (D_1 D_2^2 \right. \\
& + 2D_2 D_3 D_4) e^{-\theta_{20}\xi} + i(D_3^2 D_4 + 2D_1 D_2 D_3) e^{i\theta_{20}\xi} - i(D_4^2 D_3 + 2D_1 D_2 D_4) \\
& \left. * e^{-i\theta_{20}\xi} \right]
\end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
Y_{22}(\xi) = & H_1 e^{\theta_{22}\xi} + H_2 e^{-\theta_{22}\xi} + H_3 e^{i\theta_{22}\xi} + H_4 e^{-i\theta_{22}\xi} - \frac{k_{12}}{81\theta_{20}^4 - \theta_{22}^4} \\
& * \left[D_1^3 e^{3\theta_{20}\xi} + D_2^3 e^{-3\theta_{20}\xi} + D_3^3 e^{3i\theta_{20}\xi} + D_4^3 e^{-3i\theta_{20}\xi} \right] - \frac{3k_{12}}{\theta_{10}^4 - \theta_{12}^4} \left[(D_1^2 D_2 \right. \\
& + 2D_1 D_3 D_4) e^{\theta_{20}\xi} + (D_1 D_2^2 + 2D_2 D_3 D_4) e^{-\theta_{20}\xi} + (D_3^2 D_4 + 2D_1 D_2 D_3) e^{i\theta_{20}\xi} \left. \right] \\
& + (D_4^2 D_3 + 2D_1 D_2 D_4) e^{-i\theta_{20}\xi} \left. \right] - \frac{3k_{12}}{\theta_{20}^4} \left[\frac{D_1^2 D_3}{24i - r_1} e^{(2+i)\theta_{20}\xi} \right. \\
& - \frac{D_1^2 D_4}{24i + r_1} e^{(2-i)\theta_{20}\xi} - \frac{D_2^2 D_3}{24i + r_1} e^{(-2+i)\theta_{20}\xi} + \frac{D_2^2 D_4}{24i - r_1} e^{-(2+i)\theta_{20}\xi} \\
& - \frac{D_3^2 D_1}{24i + r_1} e^{(2i+1)\theta_{20}\xi} + \frac{D_3^2 D_2}{24i - r_1} e^{(2i-1)\theta_{20}\xi} + \frac{D_4^2 D_1}{24i - r_1} e^{(-2i+1)\theta_{20}\xi} \\
& \left. - \frac{D_4^2 D_2}{24i + r_1} e^{-(2i+1)\theta_{20}\xi} \right]
\end{aligned} \tag{3.78}$$

olarak elde edilmektedir. Bu ifadelerdeki bazı büyüklükler şöyle tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \theta_{10}^4 &= 4\overline{\Omega}^2, & \theta_{20}^4 &= 4(\overline{\Omega}^2 - 1), & \theta_{11}^4 &= \theta_{10}^4, & \theta_{21}^4 &= \theta_{20}^4, \\ \theta_{12}^4 &= 4 * 9\overline{\Omega}^2, & \theta_{22}^4 &= 4(9\overline{\Omega}^2 - 1), & r_1 &= 7 + \frac{\theta_{22}^4}{\theta_{20}^4} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Sabitlerin ve ayrılma noktasının hesabı ile çözüm tamamlanmaktadır. Harmonik yükleme haline ait çözümler için elde edilen sonuçlar hakkında açıklamalar ve grafikler, “ Sonuç ” bölümünde geniş olarak verilmiştir.



BÖLÜM 4

RASGELE YÜKLEME HALİ

Bu yükleme halinde kirişe $P(t)$ gibi rasgele bir yük etki etmektedir. Bu durumda kirişin yönetici denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (k_1 y + k_3 y^3) H(x, t) = P_0(t) \delta(x) \quad (4.1)$$

Burada $H(x, t)$ zeminin çekme almamasını karakterize eden bir fonksiyonu göstermekte ve kirişin zemine temas ettiği bölgede 1, zeminden ayrıldığı bölgede ise 0 değerini almaktadır. Çözüme geçmeden önce aşağıdaki boyutsuzlaştırmalar yapılmaktadır.

$$\bar{y} = \frac{y}{L} \quad , \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \quad , \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{EI/\rho A} \quad , \quad \bar{k}_1 = \frac{k_1 L^4}{EI}$$
$$P(\tau) = \frac{P_0(t) L^2}{EI} \quad , \quad \bar{k}_3 = \frac{k_3 L^6}{EI} \quad (4.2)$$

Bu boyutsuz büyüklüklerin kullanılması ile (4.1) hareket denklemi aşağıdaki gibi olmaktadır.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + (k_1 y + k_3 y^3) H(x, \tau) = P(\tau) \delta(x) \quad (4.3)$$

$P(\tau)$ fonksiyonunun rasgele değişimi nedeniyle (4.3) hareket denkleminin çözümünde Fourier analizi, Laplace dönüşümü veya normal mod fonksiyonlarının kullanımı şeklinde çeşitli çözüm yöntemleri alınabilir. Fourier analizi ve Laplace dönüşümlerinde ters dönüşümün bazı hallerde kapalı olarak elde edilememesi nedeniyle bu çalışmada normal mod fonksiyonları yöntemi kullanılmıştır. (4.3) diferansiyel denkleminin çözümü için

$$y(x, \tau) = T_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_{n+1}(\tau) \quad (4.4)$$

şeklinde bir seri alınabilir [34], [64]. Burada T_1 kirişin rijit ötelemesini, T_{n+1} terimleri çözüm fonksiyonunun zamana bağlı terimlerini, $Y_n(x)$ terimleri de tamamen serbest kirişin serbest titreşim mod fonksiyonlarını göstermektedir. Sistem orta noktaya göre simetrik olduğundan rijit dönme terimi alınmamış, mod fonksiyonları da simetriye uygun olarak çift sayılı olarak alınmıştır. $Y_n(x)$ normal mod fonksiyonları,

$$\frac{d^4 Y_n}{dx^4} - \lambda_n^4 Y_n = 0 \quad (4.5)$$

diferansiyel denkleminin

$$Y''(-1) = Y''(1) = Y'''(-1) = Y'''(1) = 0 \quad (4.6)$$

sınır koşulları altında çözümleridir. (4.5) denkleminin çözümü yapıp (4.6) sınır koşulları kullanılırsa, λ_n köklerini veren frekans denklemi

$$\cosh(2\lambda)\cos(2\lambda)=1 \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. Bu denklemin kökleri

$\lambda_1=2.365020372$	$\lambda_6=10.210176122$
$\lambda_2=3.926602312$	$\lambda_7=11.780972451$
$\lambda_3=5.497803919$	$\lambda_8=13.351768777$
$\lambda_4=7.068582745$	$\lambda_9=14.922565104$
$\lambda_5=8.639379828$	$\lambda_{10}=16.49336143$

olarak serbest kirişin boyutsuz doğal frekanslarını vermektedir. n . doğal frekansa karşı gelen $Y_n(x)$ mod fonksiyonu

$$Y_n(x) = \cos \lambda_n(1+x) + \cosh \lambda_n(1+x) - \frac{\cosh 2\lambda_n - \cos 2\lambda_n}{\sinh 2\lambda_n - \sin 2\lambda_n} \cdot (\sin \lambda_n(1+x) + \sinh \lambda_n(1+x)) \quad , \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.8)$$

olarak elde edilmektedir. Bu fonksiyonlar $(-1, +1)$ aralığında birbirine ortogonaldır. (4.4) serisi (4.3) denkleminde yerine koyularak (4.5) bağıntısı kullanılır ve düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \ddot{T}_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \ddot{T}_{n+1}(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 Y_n(x) T_{n+1}(\tau) + k_1 T_1(\tau) H(x, \tau) \\
& + k_1 \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_{n+1}(\tau) H(x, \tau) + k_3 \left(T_1(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_{n+1}(\tau) \right)^3 H(x, \tau) = P(\tau) \delta(x)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

bağıntısı elde edilir. Bu ifade $Y_0(x)=1$ olmak üzere $Y_m(x)$, $m=0,1,\dots$, mod fonksiyonu ile çarpılıp ortogonalite koşulu kullanılırsa

$$\underline{A} \ddot{\vec{T}} + \underline{B} \vec{T} = \vec{P} - \vec{Q}_T \tag{4.10}$$

değişken katsayılı adi diferansiyel denklem takımına gelir. Burada A diyagonal B simetrik birer matrisi, P yük vektörünü, Q ise nonlineer terimin etkisini gösteren bir vektörü göstermektedir. Bu matrislerin elemanları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2, \quad A_{n+1} = \int_{-1}^{+1} Y_n^2(x) dx \\
B_{1,1} &= k_1 \int_{-1}^{+1} H(x, \tau) dx, \quad B_{1,n+1} = k_1 \int_{-1}^{+1} Y_n(x) H(x, \tau) dx \\
B_{n+1,m+1} &= \delta_{nm} \lambda_n^4 A_{n+1} + k_1 \int_{-1}^{+1} Y_n(x) Y_m(x) H(x, \tau) dx \\
P_1 &= P(\tau), \quad P_{n+1} = P_n(\tau) Y_n(0)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$Q_1 = k_3 \int_{-1}^{+1} (T_1^3 + 3T_1^2 Y_m T_{m+1} + 3T_1 Y_m Y_n T_{m+1} T_{n+1} + Y_m Y_n Y_p T_{m+1} T_{n+1} T_{p+1}) H(x, \tau) dx$$

$$Q_{s+1} = k_3 \int_{-1}^1 (T_1^3 Y_s + 3T_1^2 Y_m Y_s T_{m+1} + 3T_1 Y_m Y_n Y_s T_{m+1} T_{n+1} + Y_m Y_n Y_p Y_s T_{m+1} T_{n+1} T_{p+1}) H(x, \tau) dx \quad , \quad n, m, p, s, = 1, 2, \dots$$

Bu ifadelerde tekrarlanan indisler üzerinde 1 den ∞' a kadar toplama işlemi yapılmaktadır. Önce T = sabit kabul edilerek (4.10) denkleminde ilk olarak sistemin statik haldeki lineer ($k_3=0$) davranışına ait çözüm elde edilmekte, daha sonra bu çözümden yararlanılarak nonlinear hale ait ($k_3 \neq 0$) çözüme geçilmektedir. Başlangıçta ayrılma noktasının koordinatı bilinmediğinden çözümde ardışık yaklaşım kullanılmaktadır. Bu nedenle (4.11) integralleri her adımda çözülerek ilgili matrisler oluşturulmakta ve Gauss-Jordan yöntemi ile de denklem takımı çözülerek ayrılma noktasının koordinatı (temas bölgesi) elde edilmektedir.

T nin sabit olmadığı genel halde ise, (4.10) denklemi, ayrılma noktasının yerinin başlangıçta bilinmemesinden ve matris elemanlarının zamana bağlı olmasından dolayı (k_3 sıfır olsa bile) lineer olmayan bir denklemi göstermektedir. Bu denklemi çözmek için Runge-Kutta metodu kullanılmış ve çözümde rijit ötelemeyi gösteren terime ilaveten üç mod alınmasının yeterli olduğu görülmüştür. Sayısal işlem sırasında $y(x,t)=0$ koşulundan ayrılma noktasının koordinatı her zaman aralığı için hesaplanmaktadır. Bunu sağlamak üzere sayısal çözüm yapılırken çözümde ilgili yerlere kontrol terimleri konulmuştur. Lineer hal için elde edilen sonuçlar iterasyon ile nonlinear hale genişletilmiştir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR

5.1 Harmonik Yükleme Hali için Sonuçlar

Şekil 5.1.a-5.1.f de değişen kiriş boyları için ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega} \leq 1$) değerlerine göre değişimi görülmektedir. Burada değişen $\bar{\Omega}$ değerleri için iki farklı çözüm elde edilmektedir. Artan $\bar{\Omega}$ ler için belirli bir kiriş boyuna kadar ($\eta \approx 2$) ayrılma noktasının koordinatı büyümekte (değme bölgesi büyümekte) ve $\eta_{\theta_{20}} \geq 3\pi/5$ olduğunda ikinci bir çözüm bölgesi ortaya çıkmaktadır. Birinci çözüm ile birlikte bu çözüm bölgesinde de değme bölgesi büyümektedir. Kiriş boyunun yukarıdaki değerden büyük olması halinde, farklı kiriş boyları için bazı frekans bölgelerinde çözüm kaybolmakta ve kiriş boyu büyüdükçe çözüm bölgeleri küçülmektedir. Bu durumda herhangi bir çözüm bölgesinde $\bar{\Omega}$ büyüdükçe bir çözüm için değme bölgesi küçülürken diğer çözüm için büyümektedir. $\eta_{\theta_{20}} \geq 3\pi/2$ olduğunda bu kez $\bar{\Omega}$ değerleri büyüdükçe sistemde bölge sayısı da artmaktadır.

Şekil 5.2a ve şekil 5.2b de değişen frekans oranları için, elde edilen iki köke ait kiriş elastik eğrileri verilmiştir. Şekilden artan $\bar{\Omega}$ değerleri için değme bölgesinde düşey yerdeğiştirmelerin ve ayrılma noktasının koordinatının büyüdüğü görülmektedir.

Şekil 5.3 de zeminin çekme de alması halinde çeşitli $\bar{\Omega}$ değerleri için kiriş elastik eğrileri verilmiştir. Düşey yerdeğiştirmelerin, zeminin çekme gerilmesi de alması halinde küçüldüğü görülmektedir.

Şekil 5.4 de $\bar{\Omega} > 1$ olması durumunda çeşitli kiriş boyları için ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi verilmiştir. Bu halde birinci bölgede değme ancak zorlamanın yukarı doğru olması ile sağlanmakta (bir anlamda sistem ters faza geçmekte) dir. Şekilden, kiriş boyunun büyümesi ile küçük frekanslar için çözüm

elde edilebildiği ve ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile büyüdüğü görülmektedir. Herhangi bir kiriş boyu için değme ve ayrılma bölgesindeki düşey yerdeğiştirmeler $\bar{\Omega}$ ile küçülmekte ve $\bar{\Omega}$ nin daha da büyümesi ile değme ve ayrılma bölgelerinin yeri değişmektedir (şekil 5.5).

Şekil 5.6 da bu kez değme bölgesinin ikinci bölge olması halinde (zorlama aşağı doğru) ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi görülmektedir. Bu hal de de kiriş boyunun büyümesi ile küçük frekanslar için çözüm elde edilebilmekte ve $\bar{\Omega}$ nin büyümesi ile ayrılma noktasının koordinatı (ayrılma bölgesi) büyümektedir. Herhangi bir kiriş boyu için orta noktadaki yerdeğiştirmeler $\bar{\Omega}$ nin büyümesi ile küçülmekte, $\bar{\Omega}$ nin daha da büyümesi halinde kiriş orta noktası zemine değmektedir (şekil 5.7).

Şekil 5.8 de $\bar{\Omega}$ nin 1 olması halinde ayrılma noktasının yerinin kiriş boyuna göre değişimi görülmektedir. Görüldüğü gibi η büyüdükçe tüm kiriş boyları için (değme birinci bölgede) temas bölgesi büyümekte, özellikle büyük boylarda kirişin çok büyük bir kısmı zemine batmakta (örneğin $\eta=4$ için $\xi_{10}=3.744$) temas bölgesinde düşey yerdeğiştirmeler hızla büyümektedir. Bu durumda $\bar{\Omega}=1$ olmasının sistemin ters faza geçme sınırını belirlediği söylenebilir. Diğer bir deyişle, $\bar{\Omega} \leq 1$ kalmak koşuluyla $\bar{\Omega}$ büyüdükçe ayrılma noktası ve düşey deplasmanlar büyümekte (zorlama ve yerdeğiştirme aynı yönde), $\bar{\Omega} > 1$ olduğunda ise zorlama ile yerdeğiştirme farklı yönlerde ise çözüm elde edilebilmekte, yani sistem bir anlamda ters faza geçmektedir.

Şekil 5.9 da lineer ve nonlinear halde ayrılma noktasının koordinatının $\bar{\Omega}$ ile değişimi verilmiştir. Şekilden, büyüyen $\bar{\Omega}$ değerleri için ayrılma noktasının yerinin (değme bölgesinin) büyüdüğü görülmektedir. Nonlineerliğin pozitif olması halinde ($\epsilon > 0$), ayrılma noktası lineer hale göre küçülmekte, negatif olması halinde ise ($\epsilon < 0$) büyümektedir. Bu da beklenen bir sonuçtur. Çünkü birinci halde zemin tepkisi büyümekte (sertleşen zemin) ikinci halde ise bu tepki kuvveti küçülmektedir (yumuşayan zemin).

Şekil 5.10 ve 5.11 de değişen frekans oranları için ($\bar{\Omega} < 1$), nonlinearliğin etkisi de dikkate alınarak ayrılma noktasının yerinin yük ile değişimi verilmiştir. Lineer halde (ve statik halde [24]) ayrılma noktasının yeri yükten bağımsız iken ($\bar{\Omega}$ sabit), nonlinear halde bu nokta yükün şiddetine bağlı olarak değişmekte ve bu değişime yükteki artışın karesi ile orantılı olarak meydana gelmektedir.

Örneğin : $p \rightarrow 3p$; $\xi_{11} \rightarrow 9\xi_{11}$. Nonlineerliğin pozitif ($\varepsilon > 0$) olması halinde (şekil 5.10) herhangi bir $\bar{\Omega}$ için ayrılma noktasının yerinin yük ile küçüldüğü, nonlinearliğin negatif olması halinde ise (şekil 5.11) büyüdüğü görülmektedir. Ayrılma noktasının yerindeki bu büyüme / küçülme yukarıda söylenen nedenden dolayı oldukça hızlı olmaktadır.

Şekil 5.12 de kiriş ortasındaki düşey yerdeğiştirmenin yüklerle değişimi verilmiştir. Lineer hale ait Y_{10} ve nonlinear hale ait Y_{11} ve Y_{12} çözümleri kullanılarak $Y_1(0) = [(Y_{10}(0) + \varepsilon Y_{11}(0))^2 + (\varepsilon Y_{12}(0))^2]^{1/2}$ ifadesi ile bu noktadaki düşey yerdeğiştirme elde edilmektedir. $\varepsilon > 0$ iken yerdeğiştirme lineer hale oranla küçülmekte $\varepsilon < 0$ iken ise büyümektedir. Bu durumda sistemin birinci halde kütle-yay sistemindeki yumuşak yay, ikinci halde ise sertleşen yay gibi davrandığı söylenebilir.

Şekil 5.13 ve 5.14 de değişen frekans oranları için ($\bar{\Omega} > 1$), temas ikinci bölgede iken (zorlama aşağı doğru), nonlinearliğin etkisi de dikkate alınarak ayrılma noktasının yerinin yüklerle değişimi görülmektedir. Şekil 5.13 de ($\varepsilon > 0$), ayrılma noktasının yeri yük ile küçülmekte olup bu küçülme küçük $\bar{\Omega}$ ler için hızlı olmakta, büyüyen $\bar{\Omega}$ değerleri için ise neredeyse değişmemektedir. Şekil 5.14 de ise ($\varepsilon < 0$), koordinatın bu kez yüklerle büyümekte olduğu ve bu halde de küçük $\bar{\Omega}$ ler için büyümenin hızlı olduğu görülmektedir.

Şekil 5.15 de ayrılma noktasının yerinin ($\bar{\Omega} = 1$) değişen ε değerleri için yüklerle değişimi görülmektedir. Pozitif ε lar için ayrılma noktasının yeri yüklerle küçülmekte , negatif değerler için ise büyümektedir. Birinci halde (daha önce de belirtildiği gibi), zemin bir anlamda sertleşmekte ikinci halde ise yumuşamaktadır. Yine şekilden ε nun koordinatdaki değişimde oldukça etkili olduğu görülmektedir.

5.2 Rasgele Yükleme Hali için Sonuçlar

Bu yükleme hali için $P(\tau) = e^{-|\tau - \tau_1|}$ şeklinde değişen impulsif bir yük alınmaktadır. Şekil 5.16 da statik hal için ayrılma noktasının yerinin k_1 lineer zemin parametresine göre değişimi görülmektedir. Şekilden, büyüyen k_1 değerleri için

ayrılma noktasının yerinin küçüldüğü görülmektedir. Zeminin rijitleştiği bu durumda temas bölgesinin küçülmesi beklenen bir sonuçtur [24].

Şekil 5.17 de statik hal için temas bölgesinde kiriş elastik eğrileri görülmektedir. Nonlineerlik etkisinin (k_3) de dikkate alındığı bu durumda, bu etkinin büyümesi ile düşey yerdeğiştirmelerin ve ayrılma noktasının koordinatının küçüldüğü görülmektedir.

Şekil 5.18 ve 5.19 da statik hal için nonlineerliğin orta nokta deplasmanı ve ayrılma noktası koordinatı üzerindeki etkisi verilmiştir. Nonlineer terimin pozitif olması halinde ($k_3 > 0$) orta nokta deplasmanın ve ayrılma noktası koordinatının küçüldüğü, bu terimin negatif olması halinde ise her iki değerin de büyüdüğü görülmektedir.

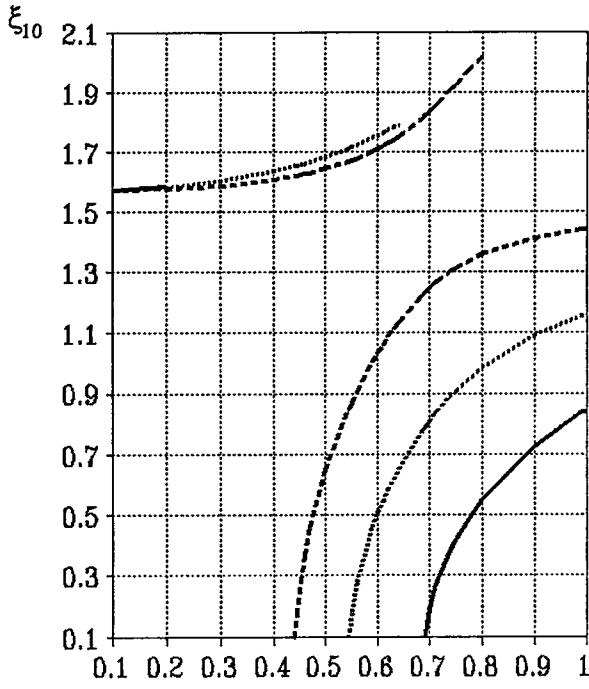
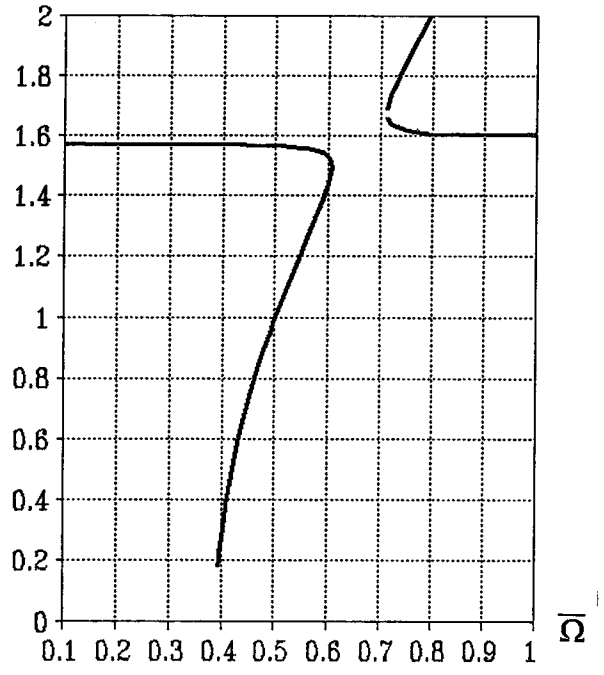
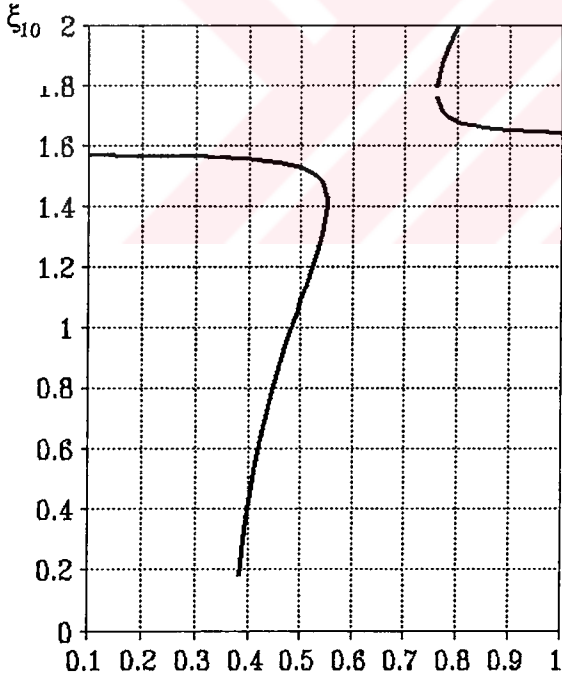
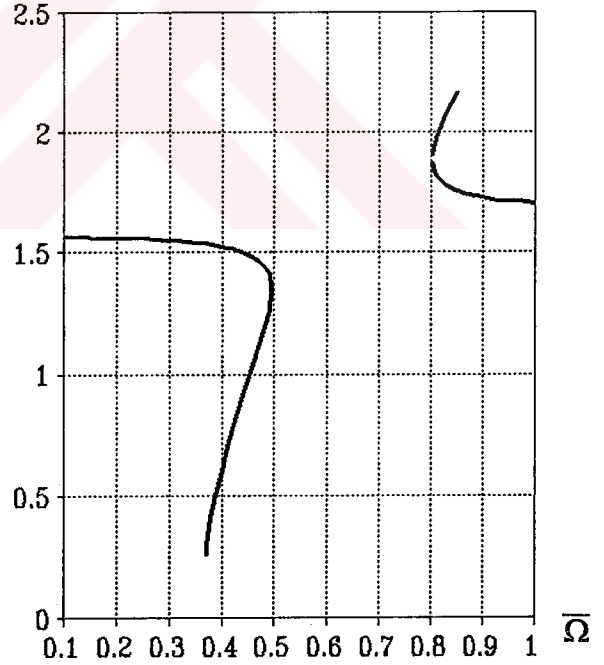
Şekil 5.20 de dinamik hal için ayrılma noktasının yerinin çeşitli k_1 parametrelerine göre boyutsuz zamanla değişimi verilmiştir. Herhangi bir k_1 değeri için bu noktanın τ ile büyüdüğü, özellikle büyüyen τ değerleri için bu büyümenin daha da belirgin olduğu görülmekte, yine şekilden, büyüyen k_1 değerleri için ayrılma noktasının koordinatının da küçüldüğü görülmektedir.

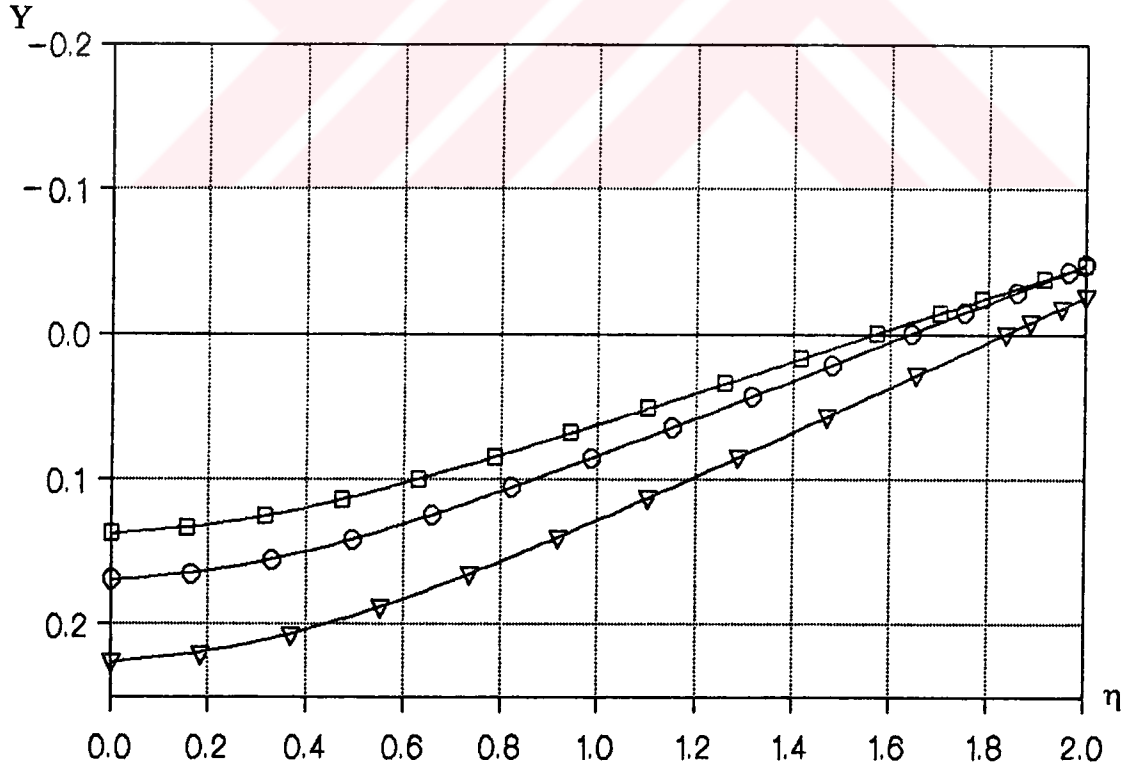
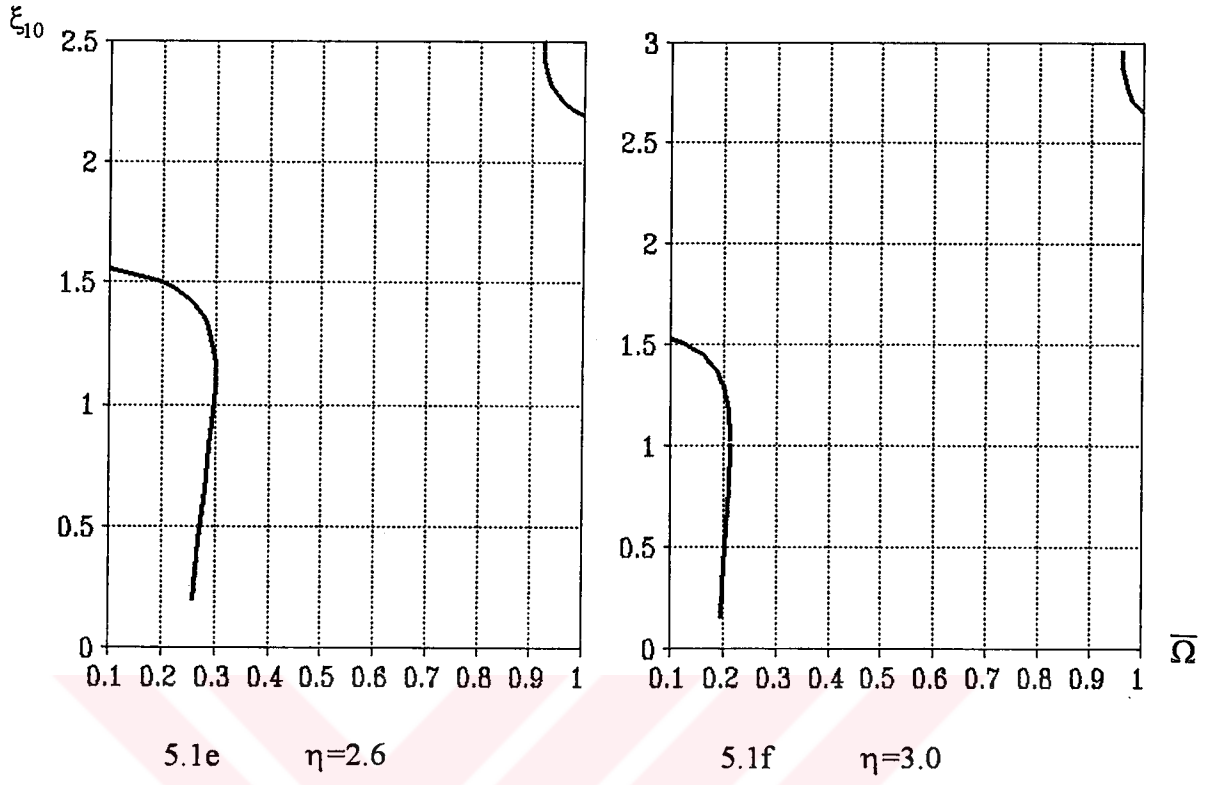
Şekil 5.21 de nonlineer terimlerin, ayrılma noktası koordinatındaki değişime etkisi görülmektedir. Burada, özellikle büyük τ değerleri için, $k_3 > 0$ iken lineer hale oranla noktanın koordinatının büyüdüğü, $k_3 < 0$ iken ise küçüldüğü görülmektedir.

Şekil 5.22 ve 5.23 de çeşitli k_1 parametreleri için kiriş ortası ve ucundaki deplasmanların τ ile değişimi verilmiştir. Tespit edilmiş bir τ değeri için k_1 büyüdükçe (zemin rijitleşmekte) ortadaki deplasmanın küçüldüğü, uçtaki deplasmanın ise büyüdüğü görülmektedir. Şekil 5.20 de dikkata alınarak, şekil 5.23 den, belli bir τ değerinden sonra zeminden ayrılmanın ortadan kalktığı görülmektedir.

Şekil 5.24 de çeşitli nonlineerlik parametreleri dikkate alınarak orta nokta deplasmanının τ ile değişimi verilmiştir. Şekilden nonlineer terimlerin deplasmanlar üzerinde oldukça etkili olduğu ve bu terimlerin büyümesi ile deplasmanların da hızla küçüldüğü görülmektedir.

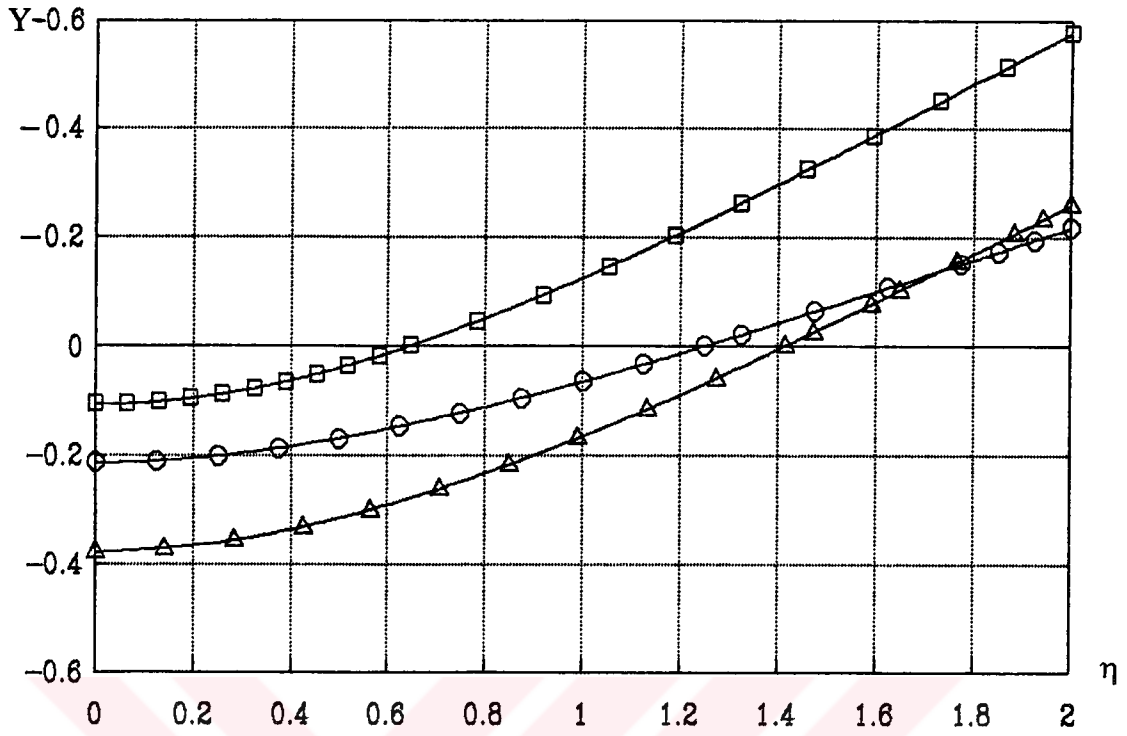
Şekil 5.25 ve 5.26 da nonlineerliğin işaret değiştirmesi halinde kiriş orta ve uç deplasmanlarının τ ile değişimi verilmiştir. Pozitif halde ortadaki ve uçtaki deplasmanın lineer hale göre küçüldüğü, negatif halde ise büyüdüğü görülmektedir

5.1a — $\eta=1.6$, 1.8 , --- 2 5.1b $\eta=2.12$ 5.1c $\eta=2.15$ 5.1d $\eta=2.2$ Şekil 5.1. Değişen kiriş boyları için ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi.

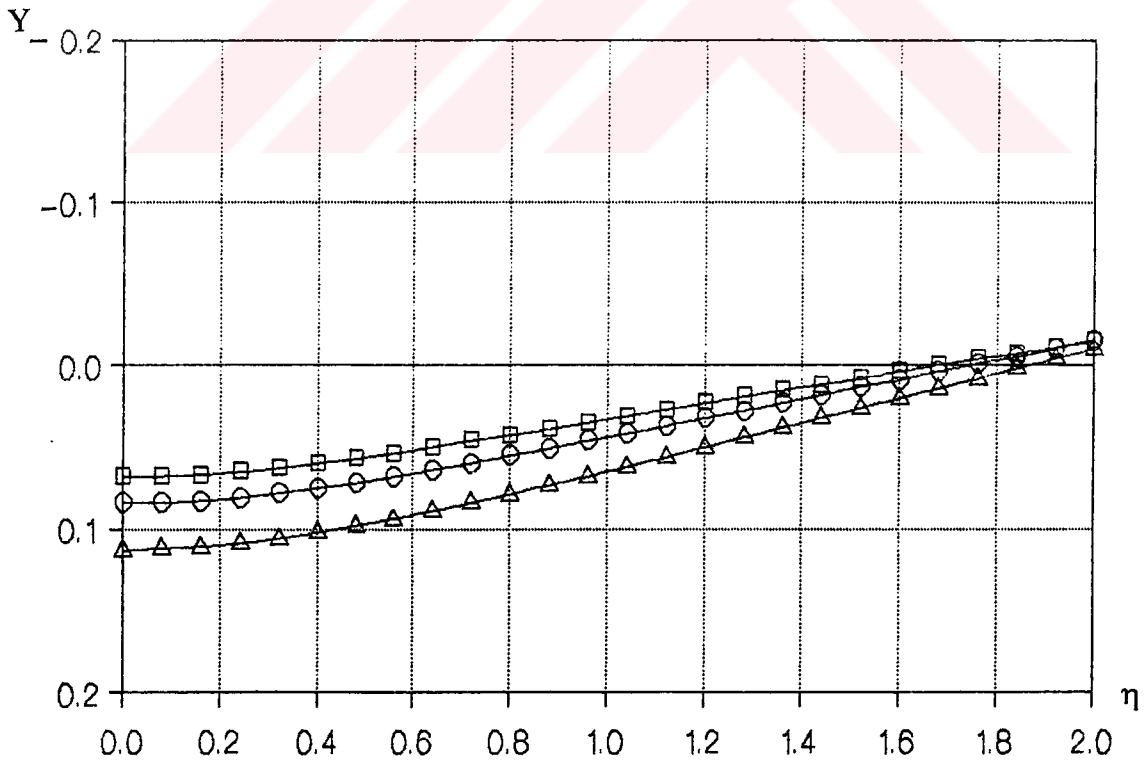


Şekil 5.2a Birinci çözüm için kiriş elastik eğrileri.

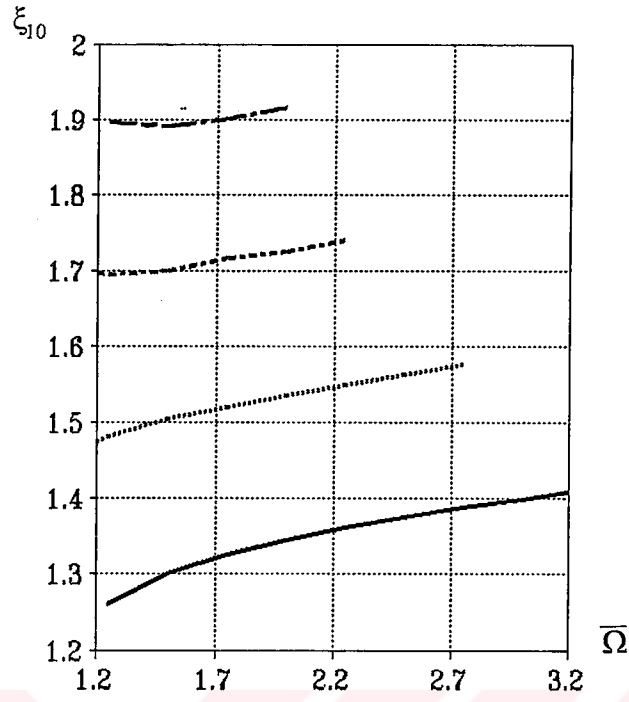
$\eta=2$; $\square \bar{\Omega}=0.1$, $\circ \bar{\Omega}=0.5$, $\nabla \bar{\Omega}=0.7$



Şekil 5.2b İkinci çözüm için kiriş elastik eğrileri.
 $\eta=2$; $\square \bar{\Omega}=0.5$, $\circ \bar{\Omega}=0.7$, $\nabla \bar{\Omega}=0.9$

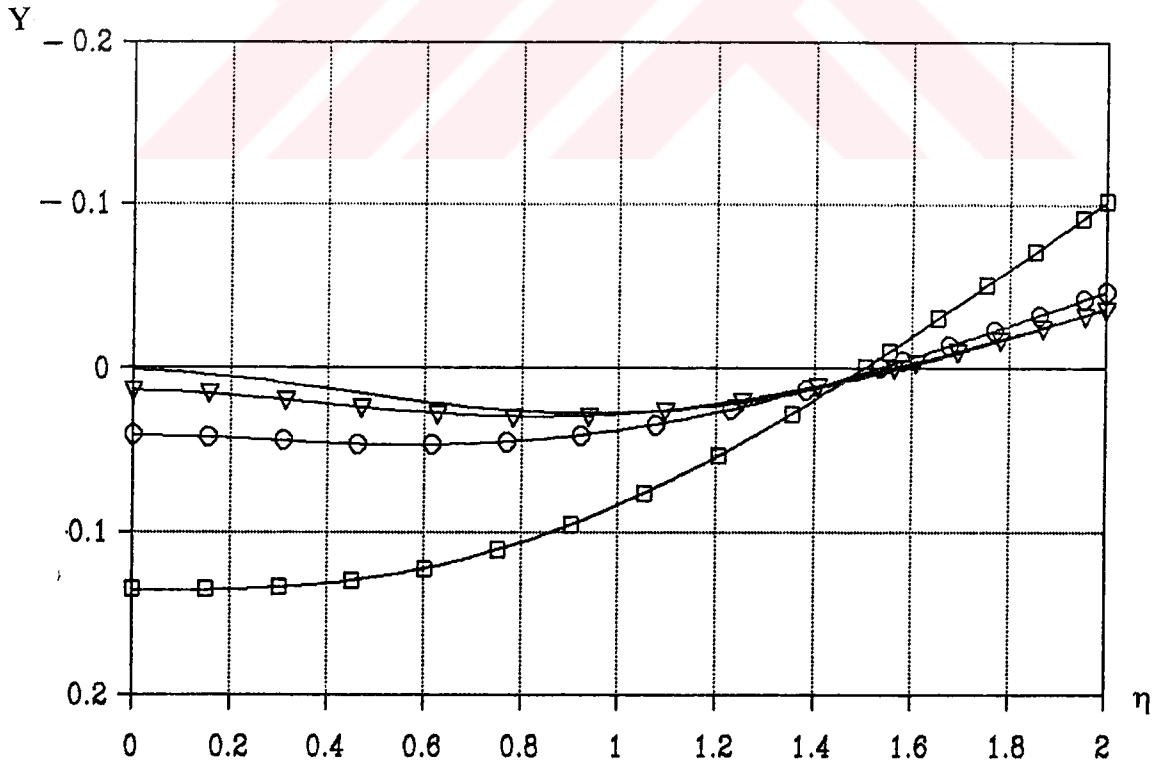


Şekil 5.3 Zeminin çekme aktarması halinde elastik eğriler.
 $\eta=2$; $\square \bar{\Omega}=0.1$, $\circ \bar{\Omega}=0.5$, $\nabla \bar{\Omega}=0.9$



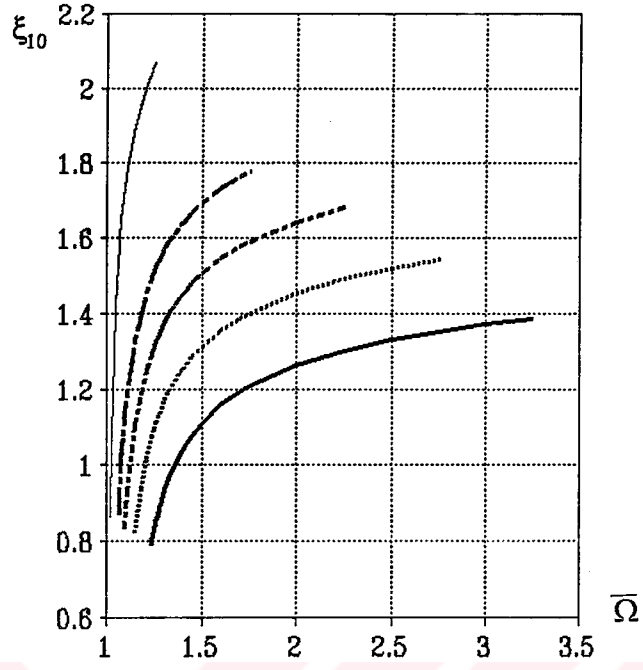
Şekil 5.4. Değişen kiriş boyları için ayrılma noktasının yerinin zorlama yukarı doğru iken $\bar{\Omega}$ ile değişimi.

— $\eta=1.8$, $\eta=2.0$, ---- $\eta=2.2$, - · - $\eta=2.4$



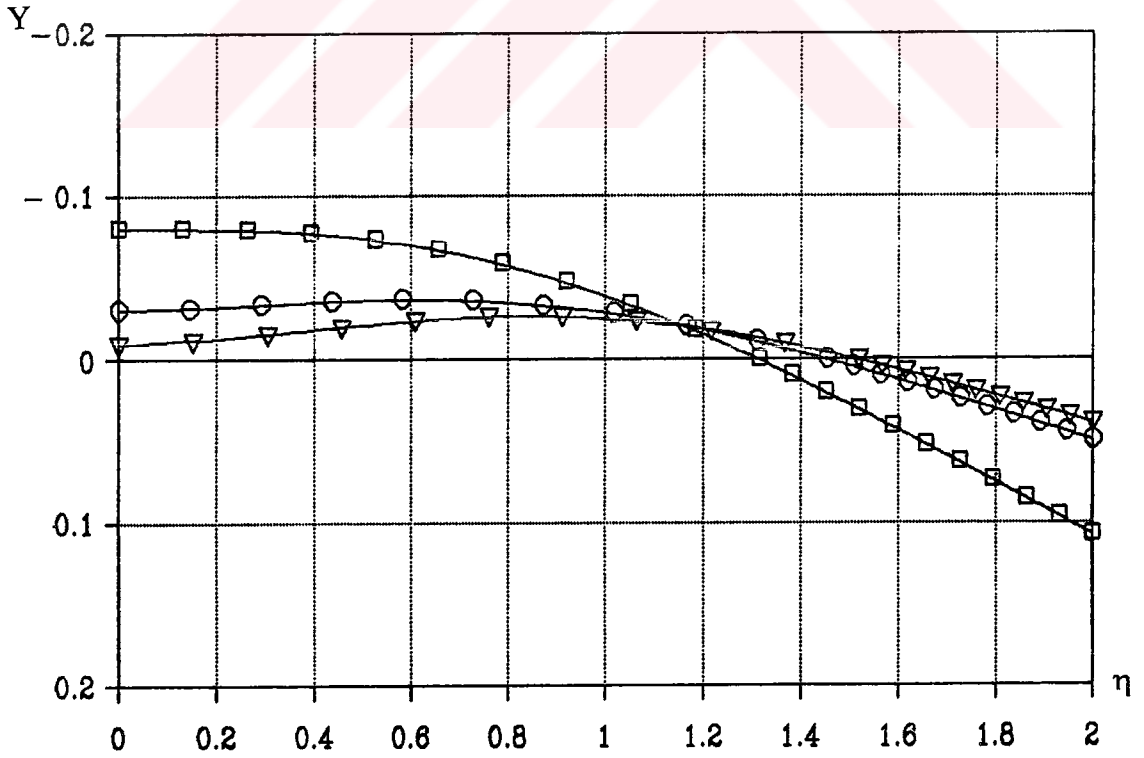
Şekil 5.5. Zorlama yukarı doğru iken kiriş elastik eğrileri.

$\eta=2$; $\square$ $\bar{\Omega}=1.5$, $\circ$ $\bar{\Omega}=2.0$, ∇ $\bar{\Omega}=2.5$, — $\bar{\Omega}=2.85$



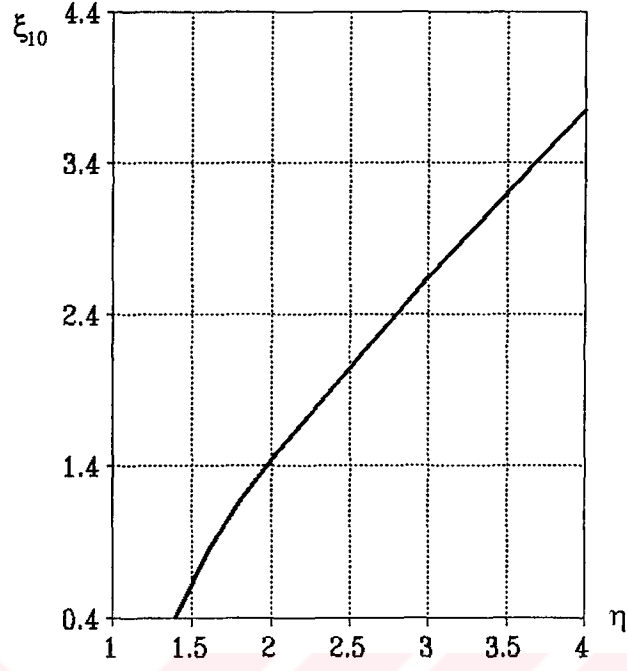
Şekil 5.6. Değişen kiriş boyları için ayrılma noktasının yerinin zorlama aşağı doğru iken $\bar{\Omega}$ ile değişimi.

— $\eta=1.8$, $\eta=2.0$, ---- $\eta=2.2$, - - - $\eta=2.4$, — $\eta=3$

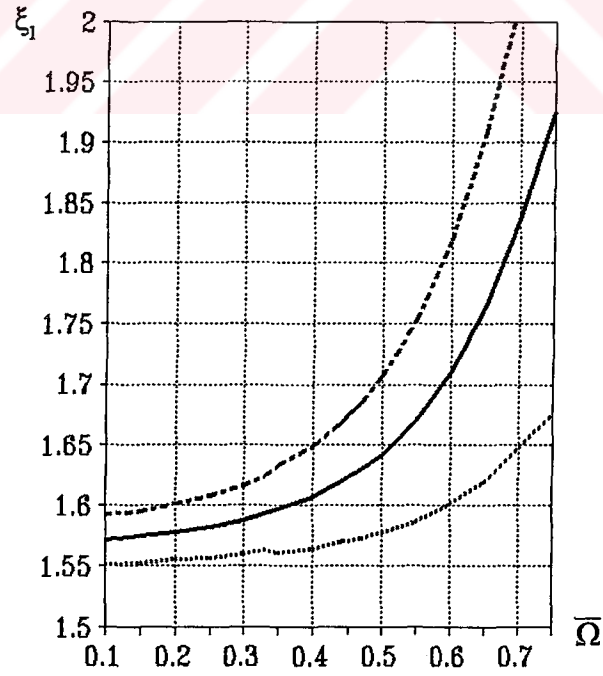


Şekil 5.7. Zorlama aşağı doğru iken kiriş elastik eğrileri.

$\eta=2$; $\square$ $\bar{\Omega}=1.5$, $\circ$ $\bar{\Omega}=2.0$, ∇ $\bar{\Omega}=2.5$,

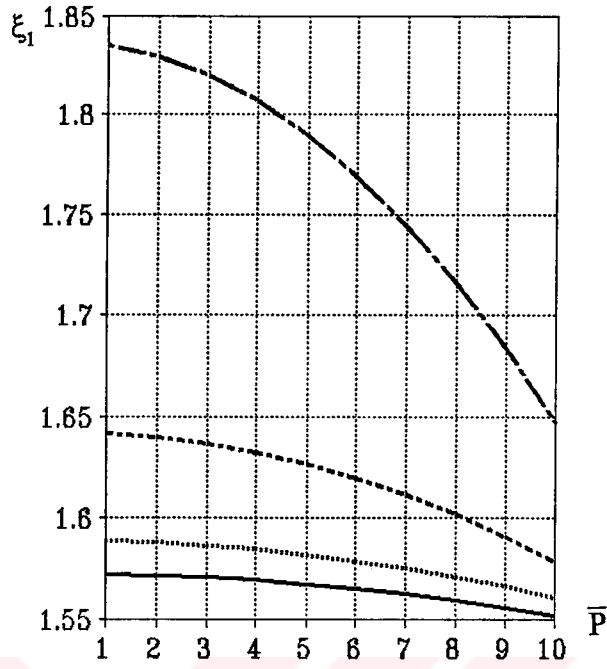


Şekil 5.8. $\bar{\Omega}=1$ olması halinde ayrılma noktasının yerinin kiriş boyu ile değişimi.

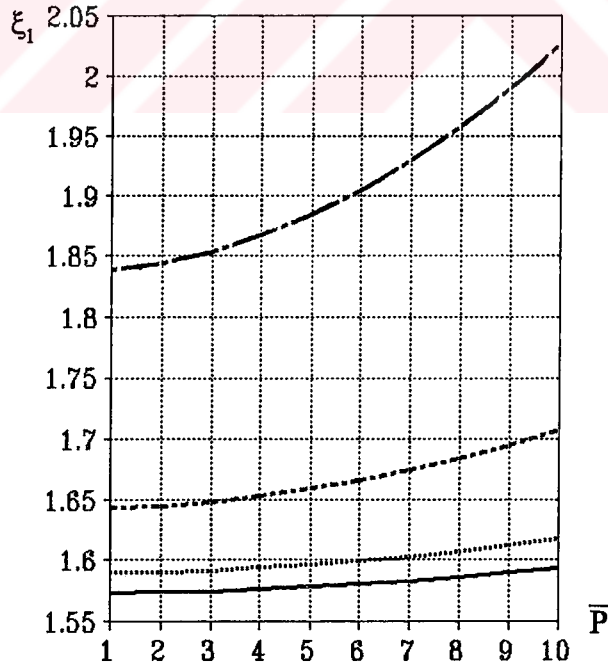


Şekil 5.9. Nonlinear halde ayrılma noktasının yerinin $\bar{\Omega}$ ile değişimi.

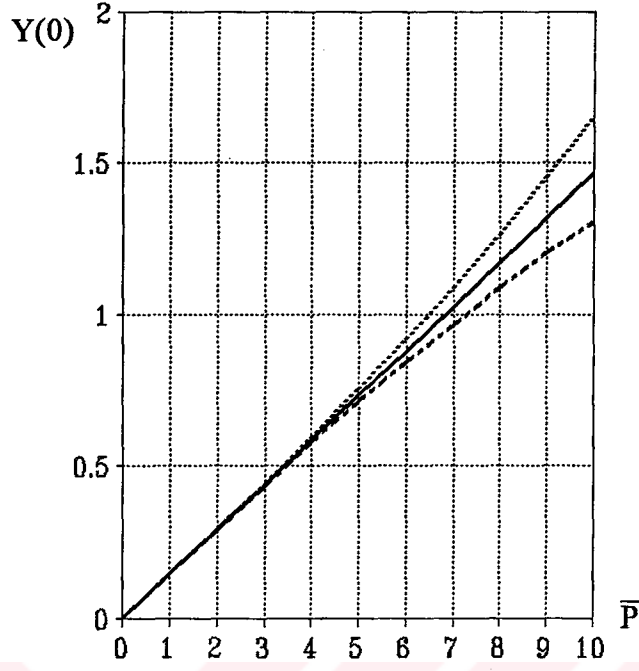
$P=1, \eta=2.0$; — $\varepsilon=0.0$, $\varepsilon=0.5$, --- $\varepsilon=-0.5$ ($\xi_1 = \xi_{10} + \varepsilon\xi_{11}$)



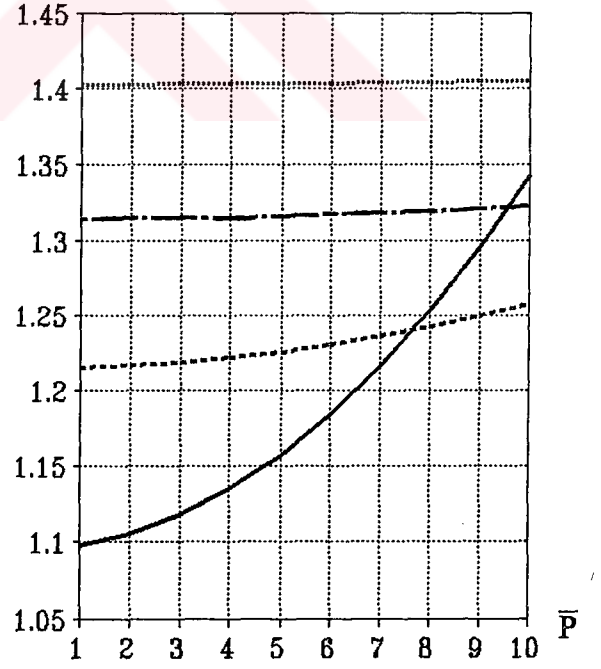
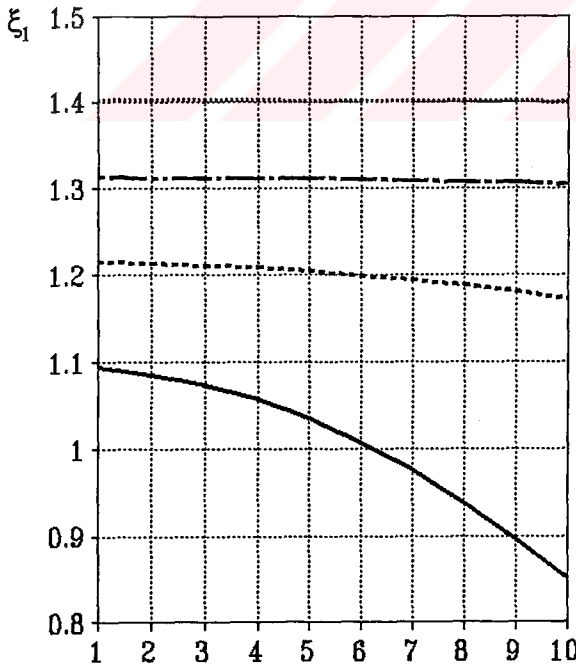
Şekil 5.10. Çeşitli $\bar{\Omega}$ değerleri için ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi.
 $\varepsilon=0.5$; — $\bar{\Omega}=0.1$, $\bar{\Omega}=0.3$, — — — $\bar{\Omega}=0.5$, — — — $\bar{\Omega}=0.7$



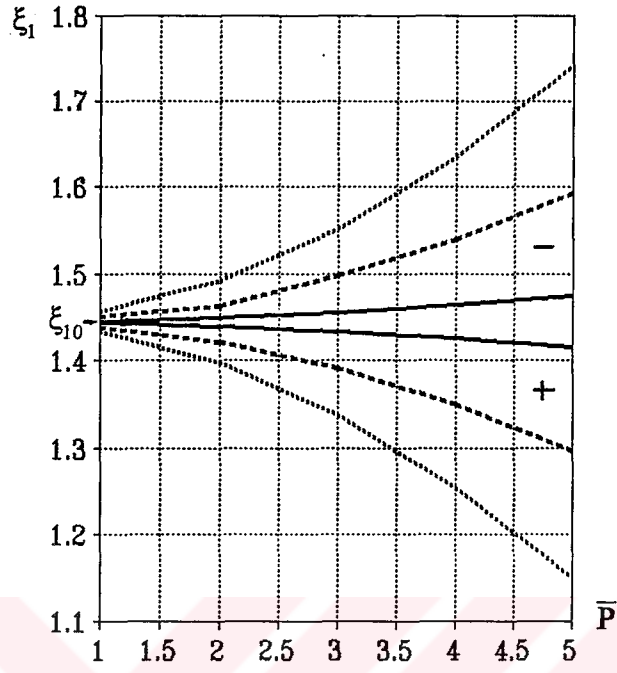
Şekil 5.11. Çeşitli $\bar{\Omega}$ değerleri için ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi.
 $\varepsilon=-0.5$; — $\bar{\Omega}=0.1$, $\bar{\Omega}=0.3$, — — — $\bar{\Omega}=0.5$, — — — $\bar{\Omega}=0.7$



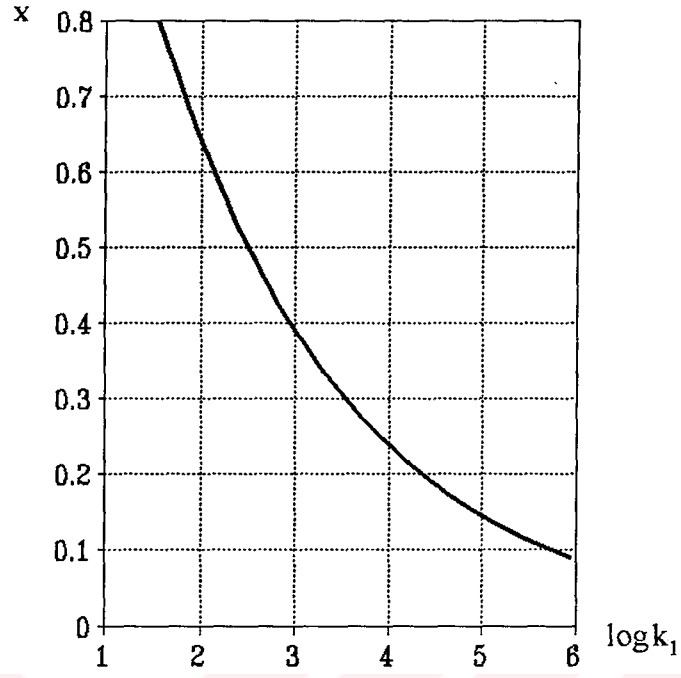
Şekil 5.12. Kiriş ortasındaki yerdeğiştirmenin yükle değişimi.
 $\bar{\Omega}=0.3$, $\eta=2$; — $\varepsilon=0.0$, $\varepsilon=-0.5$, ---- $\varepsilon=0.5$



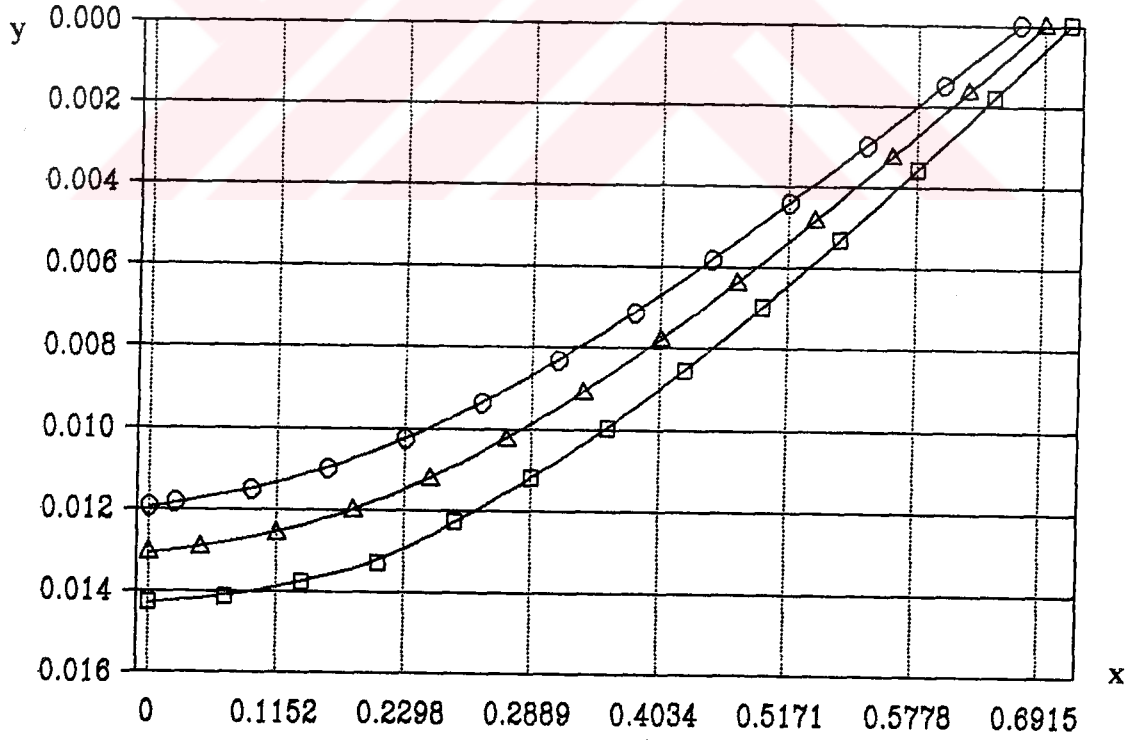
Şekil 5.13 ve 5.14. Nonlineer halde ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi.
 Zorlama aşağı doğru ve $\eta=2$
 — $\bar{\Omega}=1.25$, ---- $\bar{\Omega}=1.35$, $\bar{\Omega}=1.5$, -.-.- $\bar{\Omega}=1.75$. ($\varepsilon=0.5$, $\varepsilon=-0.5$)



Şekil 5.15. Nonlineer halde $\bar{\Omega}=1$ için ayrılma noktasının yerinin yükle değişimi.
 — $\epsilon = \pm 0.01$, - - - $\epsilon = \pm 0.05$, $\epsilon = \pm 0.1$

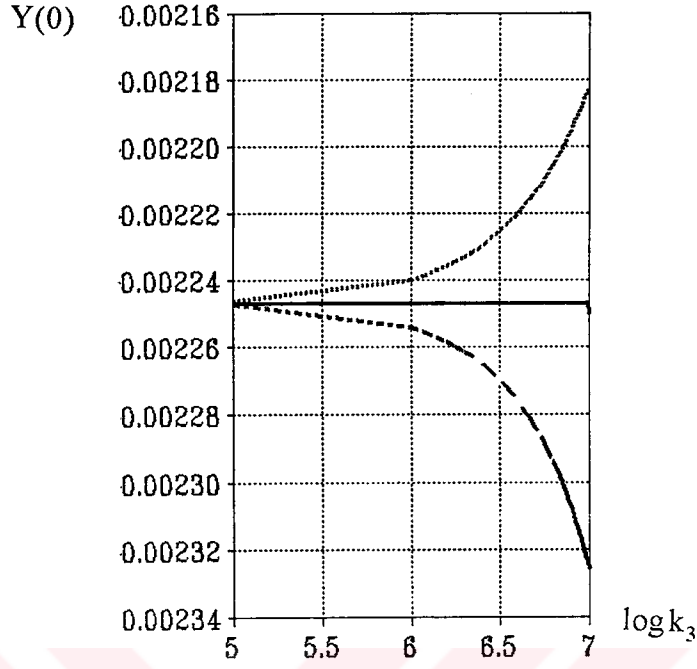


Şekil 5.16. Statik halde ayrılma noktasının yerinin k_1 ile değişimi.

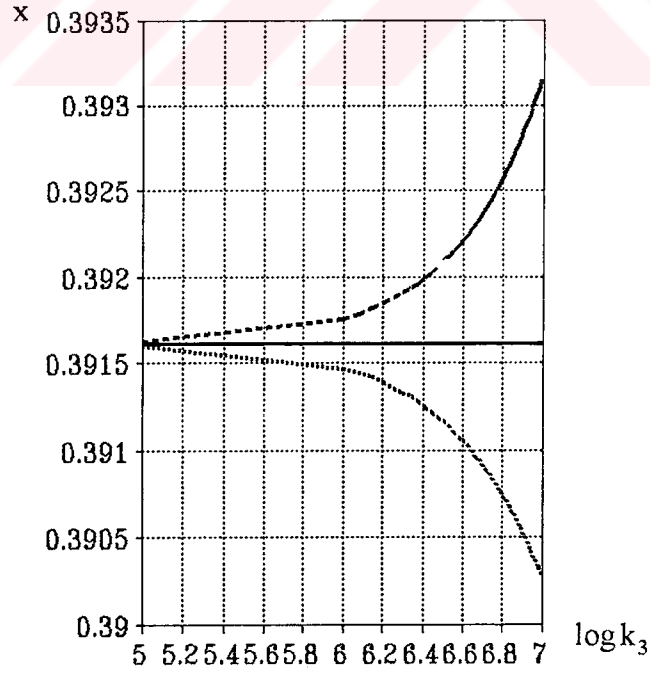


Şekil 5.17. Değme bölgesinde kiriş elastik eğrileri.

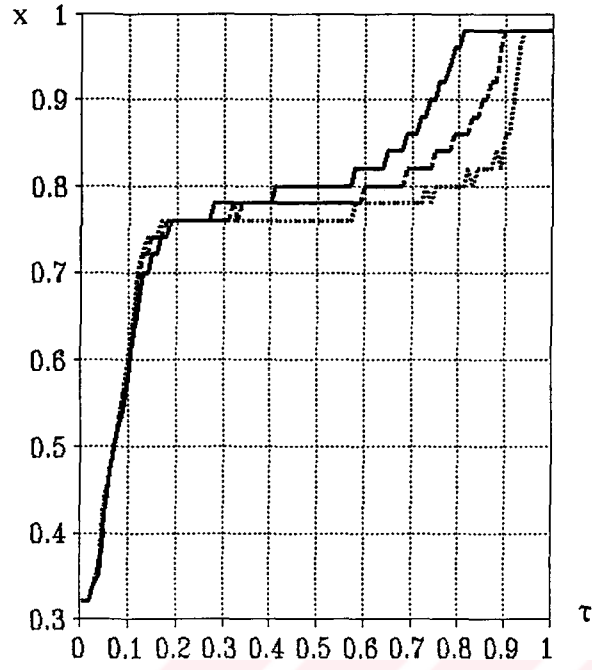
$k_1=100$; $\square$ $k_3=0$, Δ $k_3=100000$, $\circ$ $k_3=250000$



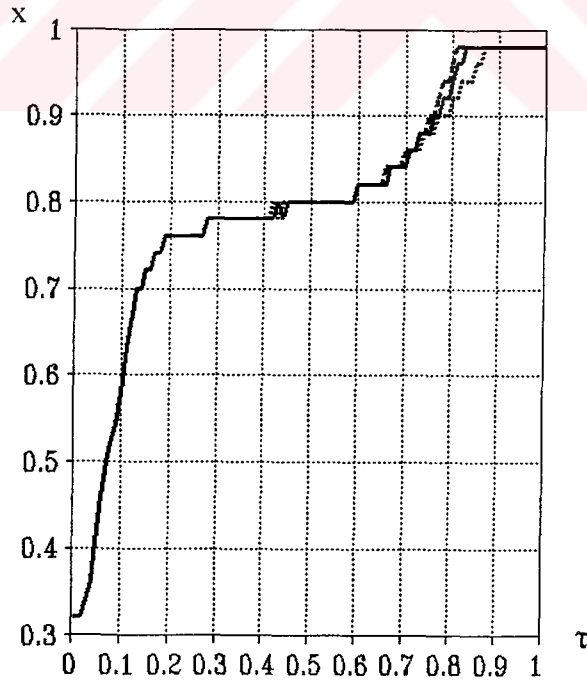
Şekil 5.18. Orta noktadaki yerdeğiştirmenin nonlinear terimle değişimi.
 $k_1=1000$; — $k_3=0$, $k_3>0$, ---- $k_3<0$



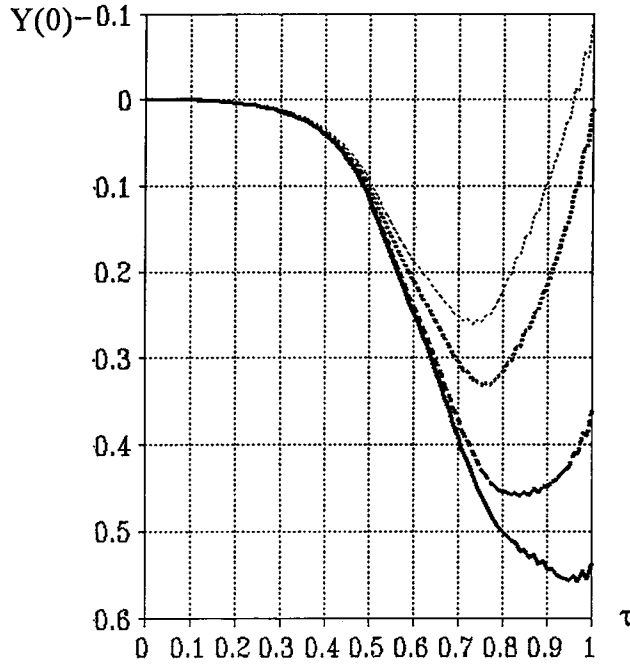
Şekil 5.19. Ayrılma noktasının yerinin nonlinear terimle değişimi.
 $k_1=1000$; — $k_3=0$, $k_3>0$, ---- $k_3<0$



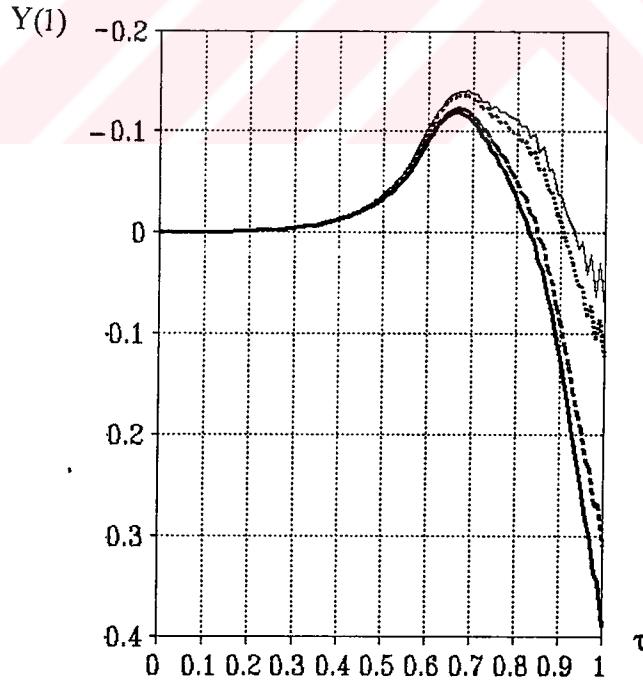
Şekil 5.20. Ayrılma noktasının yerinin boyutsuz zamanla değişimi.
 — $k_1=1$, ---- $k_1=50$, $k_1=100$



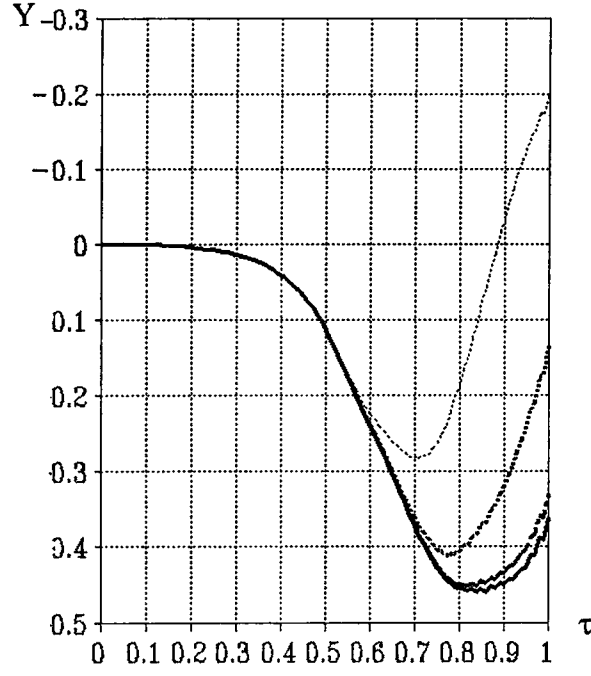
Şekil 5.21. Nonlineer halde ayrılma noktasının yerinin boyutsuz zamanla değişimi
 $k_1=10$; — $k_3=0$, ---- $k_3=100$, $k_3=-100$



Şekil 5.22. Kiriş ortasındaki yerdeğiştirmenin τ ile değişimi.
 — $k_1=1$, — $k_1=10$, $k_1=50$, — $k_1=100$

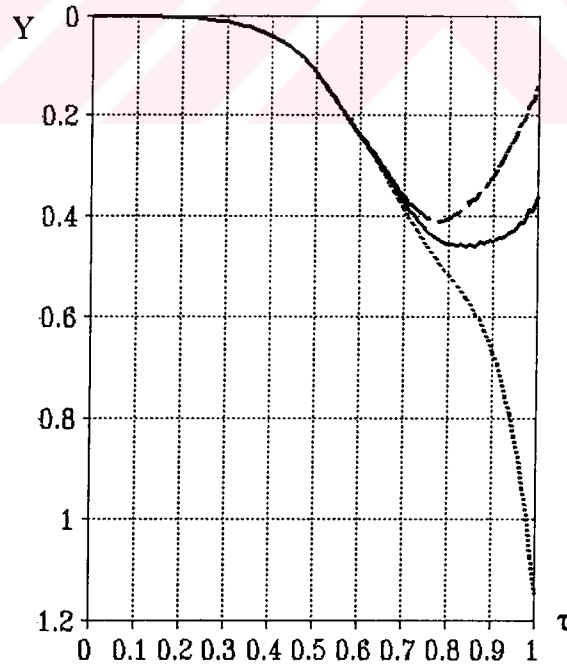


Şekil 5.23. Kiriş uç deplasmanının τ ile değişimi.
 — $k_1=1$, — $k_1=10$, $k_1=50$, — $k_1=100$



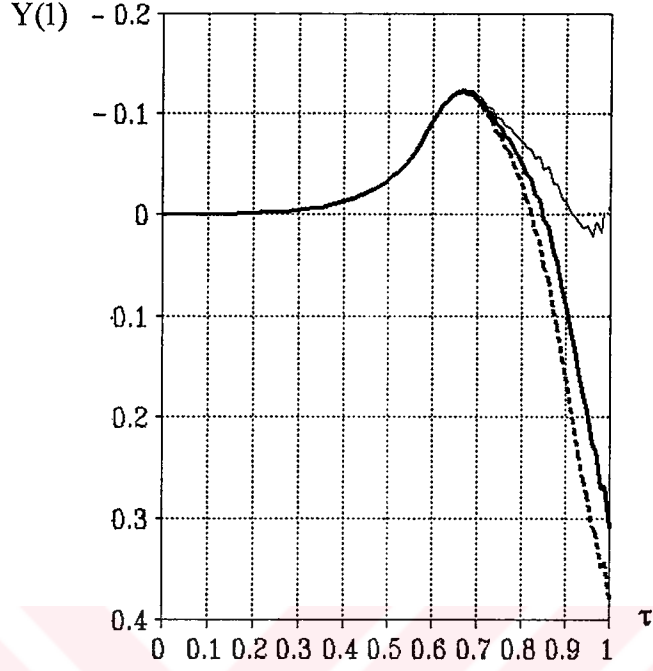
Şekil 5.24. Orta noktadaki yerdeğiştirmenin çeşitli nonlineerlik parametrelerine göre değişimi.

$k_1=10$; — $k_3=0$, ---- $k_3=10$, $k_3=100$, $k_3=1000$



Şekil 5.25. Nonlineerliğin işaret değiştirmesi halinde orta nokta deplasmanları.

$k_1=10$; — $k_3=0$, ---- $k_3=100$, $k_3=-100$



Şekil 5.26. Nonlineerliğin işaret değiştirmesi halinde uçtaki deplasmanlar.
 $k_1=10$; — $k_3=0$, --- $k_3=100$, — $k_3=-100$

5.3 Çalışmada Gözlenen Özgün Sonuçlar

5.3.1 Harmonik yükleme hali

Düşey yerdeğiştirmeler ve ayrılma noktasının koordinatı için yapılan pertürbasyon açılımında ilk terim, sistemin lineer haldeki davranışına karşı gelmekte, diğeri terimler ise lineer olmamanın etkisini göstermektedir.

Bu durumda, lineer hale ait çözüm dikkate alındığında, aşağıdaki sonuçlar görülmektedir.

a- Zemin modelinden nonlinear terim gelmemesine rağmen ($k_3=0$), zeminin çekme gerilmesi aktarmaması nedeniyle (sınır koşulu nedeniyle) problem lineer olmayan bir karakter göstermektedir. Kirişin zeminden ayrıldığı noktaların koordinatları zemin modülüne, kirişin fiziksel ve geometrik özelliklerine ve zorlamanın frekansına bağlı olmaktadır. Çözümde lineer olmayan bir denklem takımı ile karşılaşıldığından, birden çok çözüm, diğeri bir deyişle, aynı frekans oranında birden çok temas/ayrılma bölgesi ortaya çıkabilmektedir. Frekans oranının 1 den küçük olduğu bu halde, sözü edilen parametrelere bağlı olarak bölge sayısı da artabilmektedir. Frekans oranı olarak adlandırılan parametre 1 den büyük olduğunda, ancak zorlama kuvvetinin yönü ile yerdeğiştirme farklı yönlerde (ters fazda) ise çözüm elde edilebilmektedir.

b- Ayrılma noktasının koordinatı tesbit edilmiş bir frekans oranı için (statik halde olduğu gibi [24], [34]) yükün şiddeti ile değişmemekte, düşey yerdeğiştirmeler ise yükün şiddeti ile orantılı olmaktadır. Bunun nedeni yükün direkt olarak sınır koşullarına girmesidir. Tesbit edilmiş bir yük için ise, ayrılma noktasının koordinatı frekans oranına ($\bar{\Omega} = \Omega / \sqrt{k / \rho A}$) bağlı olarak değişmektedir.

c- Çekmesiz haldeki düşey yerdeğiştirmeler, zeminin çekme de alması halinde elde edilen yerdeğiştirmelerden büyük olmaktadır. Bu da beklenen bir sonuçtur. Çünkü, zeminin çekme de aktarması halinde çekmeye çalışan bölge oldukça küçüktür. Aynı kuvvet altında, çekme almayan zeminin çalışan bölgesi daha küçük olduğundan tepki kuvveti (dolayısıyla yerdeğiştirme) daha büyük olacaktır.

Açılımda üst mertebeye gidildiğinde zemindeki lineer olmayan parametrenin etkisi ortaya çıkmaktadır. Bu durumda aşağıdaki bulgular görülmektedir.

d- Ayrılma noktasının koordinatı yükün şiddetine bağlı olarak değişmektedir. Ayrılma noktasının koordinatındaki bu değişmeye yükün etkisi, yükün şiddetinin karesi mertebesinde. Bunun nedeni $\xi_{11} = -Y_{11}(0)/Y'_{10}(0)$ ifadesinde üstteki terimin lineer çözümün kübünü (P nin kübünü) ihtiva etmesidir.

e- Nonlineerlik parametresinin pozitif olması halinde temas bölgesi küçülme, negatif olması halinde ise büyümektedir. Bu ise, birinci halde zeminin lineer hale oranla sertleşmesinden ikinci halde ise yumuşamasından kaynaklanmaktadır.

f- Tesbit edilmiş bir frekans oranı için hem nonlineerliğin işaretinin hem de yükün şiddetinin düşey deplasmanlara etkisi, giriş orta noktasının deplasmanından kolayca görülmektedir. Lineer halde bu deplasmanlar yükün şiddeti ile doğrusal değişirken, nonlineer halde bu değişim doğrusal olmamaktadır. Pozitif halde deplasmanlar (lineer hale göre) küçülürken, negatif halde büyümektedir. Bu durumda sistemin davranışının kübik nonlineerlikli kütle yay sisteminin davranışına benzediği söylenebilir.

5.3.2 Rasgele yükleme hali

g- $\ddot{T}=0$ (statik hal) ve $k_3=0$ iken ayrılma noktasının koordinatı (temas bölgesi) k_1 rijitliği ile küçülme. Bu da kaynak [34] deki sonuçlar ile uyumaktadır.

h- $\ddot{T}=0$ (statik hal) ve nonlineer halde ($k_3 \neq 0$), k_3 parametresi büyüdükçe, bu parametrenin pozitif veya negatif olmasına göre, ayrılma noktasının koordinatı ve düşey yerdeğiştirmeler lineer haldekinden büyük veya küçük olmakta, bu ise nonlineerliğin deplasmanlar ve ayrılma noktasının koordinatı üzerindeki etkisini göstermektedir.

i- $\ddot{T} \neq 0$ ve $k_3=0$ iken ayrılma noktasının koordinatı yükü büyümekte, aynı yük altında ise k_1 rijitliği ile küçülme. $k_3 \neq 0$ alındığında ise, tesbit edilmiş bir k_1 rijitliği için,

k_3 parametresinin işaretine göre bu noktanın koordinatı büyümekte veya küçülmektedir. Örneğin pozitif halde, temas bölgesindeki düşey yerdeğiştirmeler (dolayısıyla tepki kuvvetleri) küçüldüğünden, kirişin düşey dengesi için, dış yükü karşılayacak zemin tepki kuvvetlerinin lineer hale göre daha geniş bir alana yayılması gerekmektedir. Elde edilen sonuçlar da bunu doğrulamakta ve pozitif halde bu bölge büyürken negatif halde küçülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] KERR, A.D., Elastic and Viscoelastic Foundation Models, J. Appl. Mechanics Vol.31, pp. 491-498, 1964.
- [2] ZHAOHUA, F. and COOK, R.D., Beam Elements on Two Parameter Elastic Foundations, J. of Engineering Mech. Vol. 109, No. 6, pp. 1390 - 1402, 1983.
- [3] RAZAQPUR, A. G. and SHAH, K.R., Exact Analysis of Beams on Two-Parameter Elastic Foundations, Int. J. Solids Structures, Vol. 27, No. 4, pp. 435-4454, 1991.
- [4] SOLDATOS, K.P. and SELVADURAI, A.P.S., Flexure of Beams Resting on Hyperbolic Elastic Foundations, Int. J. Solids Structures Vol. 21, No. 4, pp. 373- 388, 1985.
- [5] SMAIL, J.S., Large Deflection Response of Annular Plates on Pasternak Foundations, Int. J. Solids Structures, Vol. 27, No.8, pp. 1073- 1084, 1991.
- [6] RAJU, K.K., and RAO, G.V., Effect of a Non-Linear Elastic Foundation on the Mode Shapes in Stability and Vibration Problems of Uniform Columns / Beams, J. of Sound and Vibration, Vol.16, pp.369-371, 1993.
- [7] PAVLOVIC, M.N. and WYLIE, G.B., Vibration of Beams on Non-Homogenous Elastic Foundations. Earthquake Eng. and Structural Dynamics , Vol.11, pp. 797- 08, 1983.
- [8] EISENBERGER, M., Vibration Frequencies for Beams on Variable One and Two Parameter Elastic Foundations. Journal of Sound and Vibration, Vol.176, pp.577-584, 1994.
- [9] SHIH, Y.S. and BLOTTER, P.T., Nonlinear Vibration Analysis of Arbitrarily Laminated Thin Rectangular Plates on Elastic Foundations, J. of Sound and Vibration, Vol. 167, pp. 433-459, 1993.
- [10] HETENYI, M., Beams on Elastic Foundation. The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1964.

- [11] VLASOV, V.Z. and LEONTEV, U.N., Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Jerusalem, 1966.
- [12] RAO, N.S.V.K. , DAS, Y.C. and ANANDAKRISHNAN, M. , Dynamic Response of Beams on Generalised Elastic Foundations, Int. Solids Structures , Vol.11, pp. 255-273, 1975.
- [13] DOYLE, P.F. and PAVLOVIC, M.N., Vibration of Beams on Partial Elastic Foundations, Earthquake Eng. and Struct. Dynamics. Vol. 10, pp. 663-674, 1982.
- [14] EISENBERGER, M., YANKELEVSKY, D.Z. and ADIN, M. M., Vibrations of Beams Fully or Partially Supported on Elastic Foundations. Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol. 13, pp. 651- 660, 1985.
- [15] VALSANGKAR, A. J. and PRADHANANG, R., Vibrations of Beam - Columns on Two-Parameter Elastic Foundations, Earthquake Eng. and Structural Dynamics. Vol. 16, pp. 217-225, 1988.
- [16] EISENBERGER, M. and CLASTORNIK, J. Beams on Variable Two-Parameter Elastic Foundation, Journal of Eng. Mechanics. Vol. 113, No. 10, pp. 1454-1466, 1986.
- [17] CHEN, Y.H., General Dynamic- Stiffness Matrix of a Timoshenko Beam for Transverse Vibrations, Earthquake Eng. and Struct. Dynamics. Vol. 15, pp. 391-402, 1987.
- [18] WILLIAMS, F.W. and KENNEDY, D., Exact Dynamic Member Stiffnesses for a Beam on an Elastic Foundation, Earthquake Eng. and Structural Dynamics. Vol.15, pp. 133-136, 1987.
- [19] KARAMANLIDIS, D. and PRAKASH, V., Buckling and Vibration Analysis of Flexible Beams Resting on an Elastic Half-Space, Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol. 16, pp. 1103-1114, 1988.
- [20] DE ROSA, M.A., Stability and Dynamics of Beams on Winkler Elastic Foundations, Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 18, pp. 377-388, 1989.
- [21] YOKOYAMA, T., Vibrations of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations, Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 20, pp. 355- 370, 1991.
- [22] LAI, C.L., TING, B.Y., LEE, W.S. and BECKER, B.R., Dynamic Response of Beams on Elastic Foundation, Journal of Struct. Engineering, Vol. 118, No. 3, pp. 853-858, 1992.

- [23] DING, Z., A General Solution to Vibrations of Beams on Variable Winkler Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol. 47, No. 1, pp. 83-90, 1993.
- [24] WEITSMAN, Y., On Foundations that React in Compression Only, Journal of Applied Mechanics, Vol.37, pp. 1019-1030, 1970.
- [25] KERR, A.D. and COFFIN, D.W., Beams on a Two-Dimensional Pasternak Base Subjected to Loads that Cause Lift-Off, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 28, pp. 413-422, 1991.
- [26] KAMIYA, N., Circular Plates Resting on Bimodulus and No - Tension Foundations. Journal of the Eng. Mech. Division, Vol. 103, No. EM6, pp. 1161-1164, 1977.
- [27] VILLIAGGIO, P., A Free Boundary Value Problem in Plate Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 297-302, 1983.
- [28] CELEP, Z., Circular Plate on Tensionless Winkler Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol. 114, No. 10, pp. 1723-1739, 1988.
- [29] CELEP, Z., Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol. 114, No. 12, pp. 2083-2092, 1988.
- [30] WEITSMAN, Y., Onset of Separation Between a Beam and Tensionless Elastic Foundation Under a Moving Load, Int. J. of Mech. Sciences, Vol. 13, pp. 707-711, 1971.
- [31] RAO, N.S.V.K., Onset of Separation Between a Beam and Tensionless Elastic Foundation due to a Moving Load, J. of Applied Mech., Vol. 41, pp. 303-305, 1974.
- [32] CHOROS, J. and ADAMS, G.G., A Steadily Moving Load on an Elastic Beam Resting on a Tensionless Winkler Foundation, J. of Appl. Mech., Vol. 46, pp. 175-180, 1979.
- [33] LIN, L. and ADAMS, G.G., Beam on Tensionless Elastic Foundation, J. of Eng. Mech., Vol. 113, No. 4, pp. 542-553, 1987.
- [34] CELEP, Z., MALAIKA, A. and ABU-HUSSEIN, M., Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation, J. of Sound and Vibration, Vol.128, No. 2, pp. 235-246, 1989.
- [35] CELEP, Z., TURHAN, D., Axisymmetric Vibrations of Circular Plates on Tensionless Elastic Foundations, Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, pp.677-681, 1990.

- [36] GÜLER, K., CELEP, Z., Static and Dynamic Responses of a Circular Plate on a Tensionless Elastic Foundation, *Journal of Applied Mech.*, Vol.57, pp. 185-193, 1993.
- [37] YIM, C.S. and CHOPRA, A.K., Earthquake Response of Structures with Partial Uplift on Winkler Foundation, *Earthquake Eng. Structural Dynamics*, Vol. 12, pp. 263-281, 1984.
- [38] CHOPRA, A.K. and YIM, C.S., Simplified Earthquake Analysis of Structures with Foundation Uplift, *J. of Structural Eng.*, Vol.111, pp. 906-930, 1985.
- [39] YIM, C.S. and CHOPRA, A.K., Simplified Earthquake Analysis of Multistory Structures with Foundation Uplift, *J. of Structural Eng.* Vol.111, pp. 2708-2731, 1985.
- [40] CELEP, Z., GÜLER, K., Dynamic Response of a Column with Foundation Uplift, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 285-296, 1991.
- [41] ARAVAMUDAN, K.S., and MURTHY, P.N., Non-Linear Vibration of Beams with Time-Dependent Boundary Conditions, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 8, pp. 195-212, 1973.
- [42] ATLURI, S. Nonlinear Vibrations of a Hinged Beam Including Nonlinear Inertia Effects, *J. of Applied Mechanics*, pp. 121-126, 1973.
- [43] VERMA, M.K. and MURTHY, A.V.K., Non-Linear Vibrations of Non - Uniform Beams with Concentrated Masses, *J. of Sound and Vibration*, Vol. 33, No. 1, pp. 1-12, 1974.
- [44] LOU, C.L. and SKARSKIE, D.L., Nonlinear Vibration of Beams Using a Form-Function Approximation, *J. of Applied Mechanics*, pp. 209-214, 1975.
- [45] BRASHYAM, G.R. and PRADHAP, G., Galerkin Finite Element Method for Non-Linear Beam Vibrations, *J. of Sound and Vibration*, Vol. 72, No. 1, pp. 191 -203, 1980.
- [46] CRESPO DA SILVA, M.R.M., and ZARETZKY, C.L., Nonlinear Modal Coupling in Planar and Non-Planar Response of Inextensional Beams, *Int. J. of Non-Linear Mechanics*, Vol. 25, No.2/2, pp.227- 239, 1990.
- [47] LEWANDOWSKI, R., Non-Linear Free Vibrations of Beams by the Finite Element and Continuation Methods. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 170, pp.577-593, 1994.
- [48] CETICANIN, L., ATANACKOVIC, T., Non-Linear Vibration of an Extensible Elastic Beam. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 177, pp.159-171, 1994.

- [49] KUNG, G.C., PAO, Y.H., Nonlinear Flexural Vibrations of a Clamped Circular Plate, *Journal of Applied Mech.*, pp. 1050-1054, December, 1972.
- [50] DAS, C.P. and DAS, Y.C., Application of Rayleigh-Ritz and Galerkin Methods Non-Linear Vibration of Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 39(2), pp. 147-157, 1975.
- [51] SRIDHAR, S., MOOK, D.T. and NAYFEH, A.H., Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part 1: Symmetric Responses of Circular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41(3), pp.359-373, 1975.
- [52] SRIDHAR, S., MOOK, D.T. and NAYFEH, A.H., Nonlinear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part 2: Asymmetric Responses of Circular Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59(2), pp. 159-170, 1978.
- [53] WANG, X.X., QIAN, J. and HUANG, M.K., A Boundary Integral Equation Formulation for Large Amplitude Nonlinear Vibration of Thin Elastic Plates, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 86, pp. 73-86, 1991.
- [54] BHIMARADDI, A., Nonlinear Free Vibration of Laminated Composite Plates, *Journal of Engineering Mech.*, Vol. 118, pp. 174-189, 1992.
- [55] SAITO, H. and MORI, K., Vibrations of a Beam with Non-Linear Elastic Constraints, *J. of Sound and Vibration*, 66, No. 1, pp.1-8, 1979.
- [56] NAGAYA, K. and KATO, S., Transient Response of a Multi-Span Beam on Non-Symmetric Non-Linear Supports, *Journal of Sound and Vibration*, 138(1), pp. 59-71, 1990.
- [57] LEE, S.Y., KE, H.Y. and KUO, Y. H., Analysis of Non-Uniform Beam Vibration, *Journal of Sound and Vibration*, 142(1), pp. 15-29, 1990.
- [58] RAMACHANDRAN, J. and BHASKAR, K., Large Amplitude Vibrations of Rectangular Plates with Non- Uniform Elastic Edge Supports, *Journal of Sound and Vibration*, 103(2), pp. 153,158, 1985.
- [59] DUMIR, P.C., KUMAR, R. and GANDHI, M.L., Nonlinear Axisymmetric Vibration of Orthotropic Thin Circular Plates with Elastically Restrained Edges. *Journal of Sound and Vibration* 78, pp 677-686, 1985
- [60] DUMIR, P.C., KUMAR, R. and GANDHI, M.L., Nonlinear Axisymmetric Vibration of Orthotropic Thin Circular Plates on Elastic Foundations, *Journal of Sound and Vibration*, 103(2), pp. 273-285, 1985.

- [61] BHASKAR, A. and DUMIR, P.C., Non-Linear Vibration of Orthotropic Thin Rectangular Plates on Elastic Foundations, Journal of Sound and Vibration, 125(1), pp. 1-11, 1988.
- [62] NATH, Y. and VARMA, K.K., Nonlinear Dynamic Response of Rectangular Plates on Linear Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol. 24, No. 3, pp. 391-399, 1985.
- [63] CHANDRASEKHARAPPA, G., Nonlinear Static and Dynamic Damped Response of a Composite Rectangular Plate Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol. 44, No. 3, pp.609-618, 1992.
- [64] NAYFEH, A.H. and MOOK, D.T., Nonlinear Oscillations, Wiley and Sons, New-York. 1979.
- [65] NAYFEH, A.H., Perturbation Methods, John Wiley and Sons , New-York , 1973.
- [66] MINORSKY, N., Nonlinear Oscillations, Robert H. Krieger Publishing Co., Inc., New-York , 1974.

EK A

Herhangi bir i . Bölgede Sınır Koşullarının Elde Edilişi.

1) Koordinat başlangıcında (bölgenin solunda) düşey yerdeğiştirme sıfırdır.

$$y_i \Big|_{x_i=0} = 0 \quad y_{i,0} + \varepsilon y_{i,1} \Big|_{\xi_i = \varepsilon \xi_{i-1,1}} = 0$$

(3.11) çözümleri bu sınır koşulunda kullanılsa ve bu nokta civarında Taylor açılımı yapılarak birinci mertebeden daha yüksek mertebe terimler ihmal edilse

$$[Y_{i,0}(0) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y'_{i,0}(0)] \cos \Omega t + \varepsilon [Y_{i,1}(0) \cos \Omega t + Y_{i,2}(0) \cos 3\Omega t] = 0$$

eşitliği, ve bu eşitliğin ε parametresine göre düzenlenmesi ile de

$$Y_{i,0}(0) \cos \Omega t + \varepsilon [(Y_{i,1}(0) + \xi_{i-1,1} Y'_{i,0}(0)) \cos \Omega t + Y_{i,2}(0) \cos 3\Omega t] = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$Y_{i,0}(0) = 0$$

$$Y_{i,2}(0) = 0$$

$$\xi_{i-1,1} = -\frac{Y_{i,1}(0)}{Y'_{i,0}(0)}$$

olarak elde edilir.

2) Koordinat başlangıcında teğetlerin eğimleri birbirine eşittir.

$$y'_i \Big|_{x_i=0} = y'_{i-1} \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}}$$

$$y'_{i,0} + \varepsilon y'_{i,1} \Big|_{\xi_i = \varepsilon \xi_{i-1,1}} = y'_{i-1,0} + \varepsilon y'_{i-1,1} \Big|_{\xi_{i-1} = \xi_{i-1,0} + \varepsilon \xi_{i-1,1}}$$

(3.11) çözümlerinin bu koşullarda kullanılması ve Taylor açılımı ile aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} & [Y'_{i,0}(0) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y''_{i,0}(0)] \cos \Omega t + \varepsilon [Y'_{i,1}(0) \cos \Omega t + Y'_{i,2}(0) \cos 3\Omega t] \\ &= [Y'_{i-1,0}(\xi_{i-1,0}) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y''_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})] \cos \Omega t + \varepsilon [Y'_{i-1,1}(\xi_{i-1,0}) \cos \Omega t \\ &+ Y'_{i-1,2}(\xi_{i-1,0}) \cos 3\Omega t] \end{aligned}$$

Denklem ε parametresine göre düzenlendikten sonra

$$Y'_{i,0}(0) = Y'_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})$$

$$Y'_{i,2}(0) = Y'_{i-1,2}(\xi_{i-1,0})$$

eşitlikleri ve bir sonraki sınır koşulundan yararlanılarak da

$$Y'_{i,1}(0) = Y'_{i-1,1}(\xi_{i-1,0})$$

eşitliği elde edilir.

3) Koordinat başlangıcında momentler birbirine eşittir.

$$y''_i \Big|_{x_i=0} = y''_{i-1} \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}}$$

$$y''_{i,0} + \varepsilon y''_{i,1} \Big|_{\xi_i = \varepsilon \xi_{i-1,1}} = y''_{i-1,0} + \varepsilon y''_{i-1,1} \Big|_{\xi_{i-1} = \xi_{i-1,0} + \varepsilon \xi_{i-1,1}}$$

(3.11) çözüm fonksiyonları ve Taylor açılımı ile

$$\begin{aligned} & [Y''_{i,0}(0) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y'''_{i,0}(0)] \cos \Omega t + \varepsilon [Y''_{i,1}(0) \cos \Omega t + Y''_{i,2}(0) \cos 3\Omega t] \\ &= [Y''_{i-1,0}(\xi_{i-1,0}) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y'''_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})] \cos \Omega t + \varepsilon [Y''_{i-1,1}(\xi_{i-1,0}) \cos \Omega t \\ &+ Y''_{i-1,2}(\xi_{i-1,0}) \cos 3\Omega t] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin ε parametresine göre düzenlenmesi ile

$$Y''_{i,0}(0) = Y''_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})$$

$$Y''_{i,2}(0) = Y''_{i-1,2}(\xi_{i-1,0})$$

eşitlikleri ve bir sonraki sınır koşulundan yararlanarak da

$$Y''_{i,1}(0) = Y''_{i-1,1}(\xi_{i-1,0})$$

eşitliği elde edilir.

4) Koordinat başlangıcında kesme kuvvetleri birbirine eşittir.

$$y_i''' \Big|_{x_i=0} = y_{i-1}''' \Big|_{x_{i-1}=X_{i-1}}$$

$$y_{i,0}''' + \varepsilon y_{i,1}''' \Big|_{\xi_i = \varepsilon \xi_{i-1,1}} = y_{i-1,0}''' + \varepsilon y_{i-1,1}''' \Big|_{\xi_{i-1} = \xi_{i-1,0} + \varepsilon \xi_{i-1,1}}$$

(3.11) çözümleri ve Taylor açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} & [Y_{i,0}'''(0) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y_{i,0}^{IV}(0)] \cos \Omega t + \varepsilon [Y_{i,1}'''(0) \cos \Omega t + Y_{i,2}'''(0) \cos 3\Omega t] \\ &= [Y_{i-1,0}'''(\xi_{i-1,0}) + \varepsilon \xi_{i-1,1} Y_{i-1,0}^{IV}(\xi_{i-1,0})] \cos \Omega t + \varepsilon [Y_{i-1,1}'''(\xi_{i-1,0}) \cos \Omega t \\ &+ Y_{i-1,2}'''(\xi_{i-1,0}) \cos 3\Omega t] \end{aligned}$$

eşitliği ve bu eşitliğin de ε parametresine göre düzenlenmesi ile

$$Y_{i,0}'''(0) = Y_{i-1,0}'''(\xi_{i-1,0})$$

$$Y_{i,2}'''(0) = Y_{i-1,2}'''(\xi_{i-1,0})$$

eşitliği elde edilir. $Y_{i,0}^{IV}(0) + 4\theta_{10}^4 Y_{i,0}(0) = 0$ denkleminde $Y_{i,0}(0) = 0$ olduğundan,

$Y_{i,0}^{IV}(0) = 0$ olur. Bundan yararlanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$Y_{i,1}'''(0) = Y_{i-1,1}'''(\xi_{i-1,0})$$

5) Bölgenin sağında düşey yerdeğiştirme sıfır olmaktadır.

$$y_i \Big|_{x_i=X_i} = 0 \quad y_{i,0} + \varepsilon y_{i,1} \Big|_{\xi_i=\xi_{i,0}+\varepsilon\xi_{i,1}} = 0$$

(3.11) çözümleri ve Taylor açılımı ile aşağıdaki denklem elde edilir.

$$[Y_{i,0}(\xi_{i,0}) + \varepsilon \xi_{i,1} Y'_{i,0}(\xi_{i,0})] \cos \Omega t + \varepsilon [Y_{i,1}(\xi_{i,0}) \cos \Omega t + Y_{i,2}(\xi_{i,0}) \cos 3\Omega t] = 0$$

Bu denklemin ε parametresine göre düzenlenmesi ile de

$$Y_{i,0}(\xi_{i,0}) = 0$$

$$Y_{i,2}(\xi_{i,0}) = 0$$

$$\xi_{i,1} = -\frac{Y_{i,1}(\xi_{i,0})}{Y'_{i,0}(\xi_{i,0})}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $Y'_{i,0}(0) = Y'_{i-1,0}(\xi_{i-1,0})$ olduğundan

$$Y_{i,1}(0) = Y_{i-1,1}(\xi_{i-1,0})$$

olmaktadır.

EK B

Bölüm 3.3.2 de Verilen Fonksiyonlar

$$m_1 = C_1^3 + \frac{72}{\theta_{12}^4} C_3^2 C_1 + \frac{120960}{\theta_{12}^8} C_4^2 C_3$$

$$m_2 = \frac{720}{\theta_{12}^4} C_1 C_3 C_4 + \frac{362880}{\theta_{12}^8} C_4^3$$

$$m_3 = 3C_1^2 C_3 + \frac{1080}{\theta_{12}^4} C_4^2 C_1 + \frac{360}{\theta_{12}^4} C_3^3$$

$$m_4 = 3C_1^2 C_4 + \frac{2520}{\theta_{12}^4} C_3^2 C_4$$

$$m_5 = 3C_3^2 C_1 + \frac{5040}{\theta_{12}^4} C_4^2 C_3$$

$$m_6 = 6C_1 C_3 C_4 + \frac{3024}{\theta_{12}^4} C_4^3$$

$$m_7 = C_3^3 + 3C_4^2 C_1$$

$$m_8 = 3C_3^2 C_4$$

$$m_9 = 3C_4^2 C_3$$

$$m_{10} = C_4^3$$

$$\begin{aligned} Z_1 = & \frac{k_{11}}{\theta_{21}} \left(\frac{C_1^3}{6} \xi_{10}^3 + \frac{C_1^2 C_3}{20} \xi_{10}^5 + \frac{C_1^2 C_4}{40} \xi_{10}^6 + \frac{C_3^2 C_1}{70} \xi_{10}^7 + \frac{C_1 C_3 C_4}{56} \xi_{10}^8 \right. \\ & \left. + \frac{C_3^3 + 3C_4^2 C_1}{504} \xi_{10}^9 + \frac{C_3^2 C_4}{240} \xi_{10}^{10} + \frac{C_4^2 C_3}{330} \xi_{10}^{11} + \frac{C_4^3}{1320} \xi_{10}^{12} \right) \end{aligned}$$

$$Z_3 = \frac{k_{11}}{\theta_{21}^2} \left(\frac{C_1^3}{2} \xi_{10}^2 + \frac{C_1^2 C_3}{4} \xi_{10}^4 + \frac{6C_1^2 C_4}{40} \xi_{10}^5 + \frac{C_3^2 C_1}{10} \xi_{10}^6 + \frac{C_1 C_3 C_4}{7} \xi_{10}^7 \right. \\ \left. + \frac{C_3^3 + 3C_4^2 C_1}{56} \xi_{10}^8 + \frac{C_3^2 C_4}{24} \xi_{10}^9 + \frac{C_4^2 C_3}{30} \xi_{10}^{10} + \frac{C_4^3}{110} \xi_{10}^{11} \right)$$

$$Z_5 = \frac{k_{11}}{\theta_{21}^3} (C_1^3 \xi_{10} + C_1^2 C_3 \xi_{10}^3 + \frac{6C_1^2 C_4}{8} \xi_{10}^4 + \frac{6C_3^2 C_1}{10} \xi_{10}^5 + C_1 C_3 C_4 \xi_{10}^6 \\ + \frac{C_3^3 + 3C_4^2 C_1}{7} \xi_{10}^7 + \frac{9C_3^2 C_4}{24} \xi_{10}^8 + \frac{C_4^2 C_3}{3} \xi_{10}^9 + \frac{C_4^3}{10} \xi_{10}^{10})$$

$$Z_7 = k_{11} \left(\frac{C_1^3}{624} \xi_{10}^4 + \frac{C_1^2 C_3}{120} \xi_{10}^6 + \frac{C_1^2 C_4}{280} \xi_{10}^7 + \frac{C_3^2 C_1}{560} \xi_{10}^8 + \frac{C_1 C_3 C_4}{504} \xi_{10}^9 \right. \\ \left. + \frac{C_3^3 + 3C_4^2 C_1}{5040} \xi_{10}^{10} + \frac{C_3^2 C_4}{2640} \xi_{10}^{11} + \frac{C_4^2 C_3}{3960} \xi_{10}^{12} + \frac{C_4^3}{17160} \xi_{10}^{13} \right)$$

$$Z_2 = \frac{k_{12}}{\theta_{22} \theta_{12}^4} (m_2 + 2m_3 \xi_{10} + 3m_4 \xi_{10}^2 + 4m_5 \xi_{10}^3 + 5m_6 \xi_{10}^4 + 6m_7 \xi_{10}^5 \\ + 7m_8 \xi_{10}^6 + 8m_9 \xi_{10}^7 + 9m_{10} \xi_{10}^8)$$

$$Z_4 = \frac{k_{12}}{\theta_{22}^2 \theta_{12}^4} (2m_3 + 6m_4 \xi_{10} + 12m_5 \xi_{10}^2 + 20m_6 \xi_{10}^3 + 30m_7 \xi_{10}^4 + 42m_8 \xi_{10}^5 \\ + 56m_9 \xi_{10}^6 + 72m_{10} \xi_{10}^7)$$

$$Z_6 = \frac{k_{12}}{\theta_{22}^3 \theta_{12}^4} (6m_4 + 24m_5 \xi_{10} + 60m_6 \xi_{10}^2 + 120m_7 \xi_{10}^3 + 210m_8 \xi_{10}^4 \\ + 336m_9 \xi_{10}^5 + 504m_{10} \xi_{10}^6)$$

$$Z_8 = \frac{k_{12}}{\theta_{12}^4} (m_1 + m_2 \xi_{10} + m_3 \xi_{10}^2 + m_4 \xi_{10}^3 + m_5 \xi_{10}^4 + m_6 \xi_{10}^5 + m_7 \xi_{10}^6 + \\ m_8 \xi_{10}^7 + m_9 \xi_{10}^8 + m_{10} \xi_{10}^9)$$

ÖZGEÇMİŞ

İrfan Coşkun 1963 yılında Erzincan’da doğdu. Lise öğrenimini Kartal Endüstri Meslek Lisesi’nde tamamladı.

1982 yılında girdiği Yıldız Üniversitesi Müh. Fak. İnşaat Mühendisliği Bölümü’nden 1986 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Anabilim Dalı Tatbiki Mekanik Programında lisansüstü öğrenimine başlayarak buradan 1988 yılında mezun oldu ve Yıldız Üniversitesi Müh. Fak. İnşaat Müh. Böl. Mekanik Anabilim Dalı’na araştırma görevlisi olarak girdi. 1993 yılında askerlik görevini tamamladı. Halen aynı anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir.

