İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ⋆ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI SINIR ÖZELLİKLERİ HAKKINDA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Nurhan ÇOLAKOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Haziran 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Haziran 1995

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tahir Aliyev

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet Can

: Yrd. Doç. Dr. Engin Haliloğlu

HAZİRAN 1995

# ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında değerli yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof.Dr. Tahir ALİYEV'e teşekkürlerimi arz ederim.

Nurhan ÇOLAKOĞLU

# İÇİNDEKİLER

# ÖZET

İki bölümden oluşan bu tezde analitik fonksiyonların Hardy-Littlewood tipi teoremlerle verilen aşağıdaki sınır özellikleri incelenmiştir:

$G$ bölgesinde analitik, $\overline{G}$ de sürekli $f$ fonksiyonu ve bazı koşulları sağlayan $\omega\colon(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ majorantı için sınırdaki

$$|f(\zeta)-f(z)|\leq\omega(|\zeta-z|),\qquad \forall\zeta,z\in\partial G,\zeta\neq z$$

özelliğinden

$$|f(\zeta)-f(z)|\leq C\omega(|\zeta-z|),\qquad \forall\zeta,z\in\overline{G},\zeta\neq z$$

bölge özelliği elde edilir.

Geçtiğimiz yirmibeş yılda Tamrazov P. M., Hayman W. K., Ghering F. W. v.b.nın çalışmalarıyla bu konuda büyük ilerlemeler gerçekleştirilmiştir.

Son yıllarda bu tip teoremlerde, ele alınan holomorf fonksiyonların yalınkat olup olmamasının etkisi ve meromorf fonksiyonlar için benzer problemler araştırılmaya başlanmıştır.

Tezde ağırlıklı olarak bu konu ele alınmıştır. Önceki sonuçlar bazı hallerde iyileştirilmiştir.

İki kısımdan oluşan birinci bölümde önce problemin koyuluşu ve tarihçesi verilmiştir. Birinci kısımda majorant sınıfları tanımlanmış, ikinci kısımda ise potansiyel teorisinden kapasite ve Green fonksiyonu gibi kavramlar tanıtılmıştır.

İki kısımdan oluşan ikinci bölümde ise Hardy-Littlewood tipi teoremlerde yalınkat olmamanın etkisi verilmiştir. Birinci kısımda yerel sonuçlar, ikinci kısımda global sonuçlar yer almaktadır.

# SUMMARY

## ON SOME BOUNDARY PROPERTIES OF ANALYTIC FUNCTIONS

This work is devoted to strenghtening of the theorems of Hardy-Littlewood type with normal majorants.

Investigation of finite differences of the classes of functions defined on compact subsets of the complex plane has an important role in the modern function theory. This subject has applications in the study of smoothness of functions on the closure of their domain, of smoothness of complex homeomorphisms, of singular integrals and integrals of Cauchy type, of the Riemmann boundary value problem, in approximation theory etc.

Let $\overline{\mathbf{C}}$ be one-point compactification of the complex plane. For a set $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ let the boundary of $D$ in $\overline{\mathbf{C}}$ be denoted by $\widehat{\partial D}$ and let $\partial D = \mathbf{C} \cap \widehat{\partial D}$.

Let $G \subset \mathbf{C}$ be an open set, and let $f$ be a function continous on $\overline{G}$ and analytic on $G$. Under which conditions on $G \subset \mathbf{C}$ and the majorant $\omega(\delta)$ (a function $\omega\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ satisfying certain conditions) the following implications are true:

1) If

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

then

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq C\omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z \tag{1}$$

where $C \geq 1$ is a constant independent of $\zeta$ and $z$.

2) For a given point $z_0 \in \partial G$, if

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq \omega(|\zeta - z_0|), \qquad \forall \zeta \in \partial G, \zeta \neq z_0$$

then

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq C\omega(|\zeta - z_0|), \qquad \forall \zeta \in \overline{G}, \zeta \neq z_0 \tag{2}$$

where $C \geq 1$ is a constant independent of $\zeta$.

Hardy G. H. and Littlewood J. E. [1] proved the implication 1) for $G$ a circle and $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha = \text{const} \in (0,1]$). For $G$ a Jordan domain and $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ Warschawski S. E. [2] proved the implication 2), Walsh J. L. and Sewell W. E. [3] proved the implication 1) so that in both results $C = 1$ (Similar results are also obtained for $\omega(\delta) = \delta|\ln\delta|$.)

In 1942, Sewell in his monograph [4] put forward a group of open problems now called Warschawski-Walsh-Sewell problems. One of them is the generalization of the results obtained by Warshawski-Walsh-Sewell to domains more general than Jordan domains and to majorants of modulus of continuity type more general than $\delta^\alpha$, $\delta|\ln\delta|$.

On this subject, certain results are obtained by Magnaradze L. G., Gagua M. B., Geronimus Y. L., Brudny Y. A., Hopenhaus I. E. and Trahimchuk Y. Y.

Since 1979 the problems above are completely solved for $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ majorants by Schekorskii A. I. [13],, Tamrazov P. M. [11], Gehring F. W., Hayman W. K. and Hinkkanen A. [14].

In 1984, Aliyev T. H. and Tamrazov P. M. put forward the following problems:

1. Effect of nonunivalence of the function in the inequalities (1) and (2),
2. Generalization of the above results to meromorphic functions.

For $\delta^\alpha$ and bilogarithmic concave majorants (that is, $\log\omega(e^t)$ is concave) both problems are completely solved in terms of Green function by Aliyev T. H. and Tamrazov P. M. [15, 16]. Also the effect of nonunivalence in (1) and (2) is solved [17].

For normal majorants and sufficiently general set the problems 1 and 2 are solved by Aliyev T. H. [17]. Intersection of the class of normal majorants and the class of bilogarithmic majorants is not empty and they don't include each other.

In this work, the problems 1 and 2 are studied for the class of normal majorants and the inequality (2) is stregthened.

A function $\omega_f(\delta)$ continuous on positive real-axis, nondecreasing and semi-additive, which satifies the condition $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0$ is called modulus of continuity majorant.

For a nondecreasing function $\omega(\delta)\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$, if there exist numbers $\sigma \geq 1$ and $\gamma \geq 0$ so that

$$\omega(t\delta) \leq \sigma t^\gamma \omega(\delta), \qquad \forall\delta > 0, \forall t > 1$$

then $\omega(\delta)$ is called normal majorant of class of $(\sigma, \gamma)$.

For a function $\psi(t)\colon [1, +\infty) \to (0, +\infty)$, if the function $\log \psi(e^t)$ is concave on $(0, +\infty)$ then $\psi(t)$ is called bilogarithmic concave function.

For a nondecreasing function $\omega(\delta)\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, if there exist a bilogarithmic concave function $\psi(t)$ defined on $(1, +\infty)$ and satisfying the condition

$$\omega(t\delta) \leq \psi(t)\,\omega(\delta), \qquad \forall \delta > 0, \forall t > 1$$

then $\omega(t)$ is called majorant having coefficient of normality $\psi(t)$.

The classes of normal majorants and of nondecreasing majorants having normality coefficients coincide, every majorant of modulus of continuity type is a normal majorant of class $(2, 1)$.

Let $\mathrm{Cap}(K) = \mathrm{C}(K)$ denote the logarithmic capacity of the set $K$.

Let $\mathcal{N}$ denote the class of sets $E \subset \overline{\mathbf{C}}$ having zero capacity.

Let $G \subset \mathbf{C}$ be an open set. For $z \in G$ and $t \in (0, +\infty)$ let

$$C^* = \mathrm{Cap}(\{\, \zeta : |\zeta - z| \leq t \,\} \setminus G)$$

and

$$u(z, t) = \frac{27\,t}{4C^*\left(z, \frac{1}{2}t\right)}, \qquad t > 0.$$

Let

$$\begin{aligned}
\chi(t) &= \chi(G, z_0, t) = \inf_{v \geq t} \omega(v)\psi(u(z_0, v)), \qquad z_0 \notin G, t > 0 \\
\varepsilon(G, z) &= \sup_{t > 0} \frac{t}{C^*(G, z, t)}, \qquad (z \in \partial G) \\
\varepsilon(G) &= \sup_{z \in \partial G} \varepsilon(G, z).
\end{aligned}$$

If the function $f$ is meromorphic on $G$ let $k(f, w)$ denote order of value $f(w)$ for $w \in G$.

For a point $z \in \mathbf{C}$ and a set $K \subset \mathbf{C}$ let us define

$$\rho(z, K) \equiv \inf_{\zeta \in K} |z - \zeta|.$$

For a domain $G \subset \mathbf{C}$ and a point $\zeta_0 \in G$ let $g_G(\cdot, \zeta_0)$ denote generalized Green function of $G$.

Let $B \subset \mathbf{C}$ be an open set. If two points $w$, $\zeta$ belong to same connected component $B_j$ of $B$, then $g_B(w, \zeta)$ is denoted by $g_{B_j}(w, \zeta)$, generalized Green function of the domain $B_j$. If $w, \zeta$ belong to different connected components of $B$ then $g_B(w, \zeta) = 0$. In this case $g_B(w, \zeta)$ is called generalized Green function of the open set $B$ [22].

In the first section of the second chapter the following local result is given:

**Theorem** [23, 16] Let $G \subset \mathbf{C}$ be a bounded open set; $Q \subset \mathbf{C} \setminus G$ a set containing the point $z_0$, $Q \in \mathcal{N}$; $\omega$ a majorant having coefficient of normality $\psi$; $f: G \to \overline{\mathbf{C}}$ a mermorphic function with a finite number of poles, $\mathcal{P}$ denote the set of all poles of $f$ in $G$. If the function $f$ is bounded on every portion of $G$ separated from the poles and

$$\varlimsup_{\substack{\zeta \to z \\ (\zeta \in G)}} |f(\zeta)| \leq \omega(|z - z_0|), \qquad \forall z \in \partial G \setminus Q$$

then

$$|f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(p, \zeta)\, k(f, p)\right] \leq \chi(|\zeta - z_0|) \times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta)\, k(f, w)\right], \qquad \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P}$$

hence if $z_0$ is an isolated point of $\partial G$ also the term corresponding to the point $w = z_0$ is also included in the sum in the inequality above.

In the second section the following global corollary is given:

**Corollary** [23, 16] Let $G \subset \mathbf{C}$ be a bounded open set; $\omega$ a majorant of modulus of continuity type (or more generally a semi-additive majorant); $f: \overline{G} \to \overline{\mathbf{C}}$ a continuous function mermorphic in $G$, $\mathcal{P}$ the set of all poles of $f$ in $G$. If

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

then for all $\zeta_0 \in G \setminus \mathcal{P}$

$$|f(\zeta_0) - f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p \in \mathcal{P}} (g_G(p, \zeta) + g_G(p, \zeta_0)) k(f, p)\right] \leq C\omega(4|\zeta - \zeta_0|) \times$$

$$\begin{cases} \exp\left[-\displaystyle\sum_{w \in G \setminus \{\zeta_0\}: f(w) = f(\zeta_0)} g_G(w, \zeta) k(f, w)\right], \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P} : 0 < |\zeta - \zeta_0| \leq \rho(\zeta_0, \partial G) \\ \exp\left[-\displaystyle\sum_{w: f(w) = f(\zeta_0)} g_G(w, \zeta) k(f, w)\right], \quad \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P} : |\zeta - \zeta_0| \geq \rho(\zeta_0, \partial G) \end{cases}$$

where $C = (54\varepsilon(G))^2$ dir.

And the following results are obtained:

**Corollary** Let $G \subset \mathbf{C}$ be a bounded open set; $\omega$ a normal majorant of class $(\sigma, \gamma)$ where $0 < \gamma < 1$; $f : \overline{G} \to \overline{\mathbf{C}}$ a continuous function mermorphic in $G$, $\mathcal{P}$ the set of all poles of $f$ in $G$. If

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

then for all $\zeta_0 \in G \setminus \mathcal{P}$

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \exp\left[\sum_{p \in \mathcal{P}} (g_G(p, \zeta_0) + g_G(\zeta, p))k(f, p)\right] \leq C\omega(4|\zeta - \zeta_0|) \times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{w \in G \setminus \{\zeta_0\} : f(w) = f(\zeta_0)} g_G(w, \zeta)k(f, w) - (1 - \gamma)g_G(\zeta_0, \zeta)\right], \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P}$$

where $C = \sigma^3(27\varepsilon(G))^{2\gamma}2^{-\gamma}$.

**Theorem** Let $G \subset \mathbf{C}$ be a bounded open set; $\omega$ a normal majorant of class $(\sigma, \gamma)$ where $0 < \gamma < 1$; $f : \overline{G} \to \mathbf{C}$ a continuous function analytic in $G$ and

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

then for all $\zeta_0 \in G$

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq C\omega(|\zeta - \zeta_0|) \times$$

$$\times \exp\left[-\sum_{w \in G \setminus \zeta_0 : f(w) = f(\zeta_0)} g_G(\zeta, w)k(f, w) - (1 - \gamma)g_G(\zeta, \zeta_0)\right], \forall \zeta \in G$$

where $C = \sigma^4(54\varepsilon(G))^{2\gamma}2^{-\gamma}$. In the case of a simply connected domain can be chosen as $C = \sigma^4(108\sqrt{2})^{2\gamma}$.

# BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bu tezde normal majorantlı Hardy-Littlewood tipi teoremlerin güçlendirilmesi ele alınmıştır.

Kompleks düzlemin kompakt alt kümelerinde tanımlı fonksiyon sınıflarının, sonlu farklar bakımından incelenmesi, modern fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer tutar. Bu konu aşağıda sıralanan uygulama alanlarına sahiptir:

1. Fonksiyonların, tanım bölgelerinin kapanışında, düzgünlüğü,
2. Fonksiyonların yüksek mertebeli sonlu-fark-düzgünlük özellikleri,
3. Konform homeomorfizmaların düzgünlüğü,
4. Cauchy tipi ve singüler integraller,
5. Riemann sınır değer problemi,
6. Yaklaşım teorisinin düz ve ters problemleri, v.s.

$\overline{\mathbf{C}}$ kompleks düzlemin bir noktalı kompaktlaştırılışı olsun. Bir $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ kümesi için $D$'nin $\overline{\mathbf{C}}$'deki sınırı $\widehat{\partial D}$ ile gösterilsin ve $\partial D = \overline{\mathbf{C}} \cap \widehat{\partial D}$ olsun.

$G \subset \mathbf{C}$ açık küme, $f$ fonksiyonu $\overline{G}$ de sürekli ve $G$ de analitik olsun. $G \subset \mathbf{C}$ kümesi ve $\omega(\delta)$ majorantı (yani bazı koşulları sağlayan $\omega\colon (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ fonksiyonu) hangi koşulları sağlamalılar ki aşağıdaki gerektirmeler doğru olsunlar:

1) Eğer

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

ise bu takdirde

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq C\omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z \tag{1.1}$$

burada $C \geq 1$ $\zeta$ ve $z$'den bağımsız sabittir.

2) $z_0 \in \partial G$ sabit noktası için

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq \omega(|\zeta - z_0|), \qquad \forall \zeta \in \partial G, \zeta \neq z_0$$

ise bu takdirde

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq C\omega(|\zeta - z_0|), \qquad \forall \zeta \in \overline{G}, \zeta \neq z_0 \tag{1.2}$$

burada $C \geq 1$ $\zeta$'dan bağımsız sabittir.

Hardy G. H. ve Littlewood J. E. [1], 1) gerektirmesini, $G$ daire ve $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha =$ sabit $\in (0,1\,]$) durumunda ispatlamışlardır. $G$ Jordan bölgesi ve $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ durumunda Warschawski S. E. [2], 2) gerektirmesini, Walsh J. L. ve Sewell W. E. [3], 1) gerektirmesini ispatlamışlardır, öyle ki her iki sonuçta da $C = 1$ dir. ($\omega(\delta) = \delta|\ln\delta|$ için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.)

Sewell 1942 yılında yayınlanan [4] monografında şimdi Warschawski-Walsh-Sewell problemleri olarak adlandırılan bir dizi açık problem ortaya koymuştur. Bunlardan birisi Warschawski-Walsh-Sewell'in yukarıdaki sonuçlarını Jordan bölgelerinden daha genel bölgelere ve $\delta^\alpha$, $\delta|\ln\delta|$ gibi majorantlardan daha genel süreklilik tipi majorantlara genelleştirilmesi problemidir.

Bu konuda bazı sonuçlar Magnaradze L. G., Gagua M. B., Geronimus Y. L., Brudny Y. A. ve Hopenhaus I. E. tarafından elde edilmiştir. Jordan bölgeleri (bazı sınırlamalar ile) ve $\omega(\delta) = |\log\delta|^{-p}$, $(p > 0)$ (ve buna benzer diğer somut majorantlar)için de sonuçlar alınmıştır [5, 6]. Daire için genellikle kesin olmayan (süreklilik modülü üzerine ek şartlar koşulduğunda kesin olan) bazı sonuçlar da elde edilmiştir [7, 8].

1971 yılında Tamrazov P. M., Warschawski-Walsh-Sewell problemini çözmüştür [9]. Problemin çözümü için yeni metodlar ortaya koymuştur. Bu metodlar problemi daha genel olarak formüle etmeye imkan vermiştir. Tamrazov P. M. çok genel olan, çok bağlantılı (hatta sonsuz bağlantılı) bölge sınıfları ve sınırının aşağı kapasite yoğunluğu pozitif olan açık kümeler ve normal majorantlar sınıfı (bu sınıf süreklilik modülü tipli majorantlar sınıfından çok daha geniştir) için yukarıdaki sonuçları elde etmiştir [9–11].

1979 yılından başlayarak yukarıdaki problemler kuvvet majorantları (yani $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$) için Trahimchuk Y. Y. [12], Schekorskii A. I. [13], Tamrazov P. M. [11], Gehring F. W., Hayman W. K. ve Hinkkanen A. [14] tarafından tam çözülmüşlerdir.

1984 yılında Aliyev T. H. ve Tamrazov P. M. tarafından aşağıdaki problemler ortaya konulmuştur:

1. (1.1) ve (1.2) eşitsizliklerinde fonksiyonun yalınkat olmamasının etkisinin incelenmesi,
2. Yukarıdaki sonuçların meromorf fonksiyonlara genelleştirilmesi.

Kuvvet ve daha genel olan bilogaritmik konkav majorantlar (yani $\log \omega(e^t)$ konkav) için her iki problem Aliyev T. H. ve Tamrazov P. M. [15, 16] tarafından Green fonksiyonu dilinde tam çözülmüştür. (1.1) ve (1.2)'de sınırda yalınkat olmamanın etkisi problemi de çözülmüştür [17].

Normal majorantlar ve yeterince geniş kümeler için 1 ve 2 problemleri Aliyev T. H. tarafından çözülmüştür [17]. Normal majorantlar sınıfı ile bilogaritmik majorantlar sınıfının arakesiti boş değildir ve hiçbiri diğerini kapsamaz. Bu nedenle bu sınıflar için olan ispat yöntemleri esaslı biçimde birbirinden farklıdır.

Bu tezde normal majorantlar sınıfı için 1 ve 2 problemleri incelenmiş ve (1.2) eşitsizliği daha güçlendirilmiştir.

### 1.1 Majorantlar

Majorantlar, foksiyonların sonlu-fark-düzgünlük ve aproksimatif özelliklerine göre sınıflandırılması amacıyla kullanılırlar. En basit majorantlar kuvvet majorantlarıdır ve bunlar yardımıyla da Hölder-Lipschitz fonksiyonel sınıfları tanımlanır.

**Tanım 1** $f$ fonksiyonu reel değişkenli, düzgün sürekli ve

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} |f(t_1) - f(t_2)|$$

olsun. $\omega_f(\delta)$'ya $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

$\omega_f(\delta)$'nın aşağıdaki koşulları sağladığı kolayca gösterilebilir:

1. $\omega_f(\delta)$ pozitif yarı-eksende süreklidir,
2. $\omega_f(\delta)$ azalmayandır,
3. $\omega_f(\delta)$ yarı-toplamsaldır, yani her $\delta_1, \delta_1 > 0$ için $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ olur,
4. $\lim\limits_{\delta \to +0} \omega_f(\delta) = 0$'dır.

Nikolskii S. M. göstermiştir ki 1–4 koşullarını sağlayan her fonksiyon süreklilik modülüdür (kendi kendisinin). Bundan dolayı 1–4 koşullarını sağlayan fonksiyonlara süreklilik modülü tipi fonksiyonlar veya süreklilik modülü denir. Biz bunlara **süreklilik modülü tipi majorantlar** diyeceğiz. Bu tip majorantlar sınıfı, kuvvet majorantları sınıfından daha geniştir; ancak bazı maksatlar için bunlardan daha geniş majorant sınıfları da kullanılır. Böyle bir genelleştirmeye bakalım [18, 8].

**Tanım 2** $\nu(t)$ fonksiyonu $(a, b) \in \mathbf{R}$ aralığında tanımlı olsun. Eğer

$$2\nu\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \geq \nu(t_1) + \nu(t_2), \qquad \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

özelliğini sağlanıyorsa $\nu(t)$ ye konkav fonksiyon denir.

$(a,b)$ de azalamayan konkav fonksiyon süreklidir. $(a,+\infty)$ aralığında konkav ve aşağıdan sınırlı fonksiyon sürekli ve azalmayandır [19].

**Tanım 3** $(0,+\infty)$ aralığında azalmayan, pozitif fonksiyona azalmayan majorant denir.

**Tanım 4** $\omega(\delta)$ azalmayan majorant olsun.

$$\omega(t\delta) \leq \sigma t^{\gamma}\omega(\delta), \qquad \forall\delta > 0, \forall t > 1$$

olacak şekilde $\sigma \geq 1$ ve $\gamma \geq 0$ sayıları bulunabiliyorsa, $\omega(\delta)$ ya normal majorant denir. $\sigma$ ve $\gamma$ nın değerlerinin önemli olduğu durumlarda $\omega(\delta)$ fonksiyonu $(\sigma,\gamma)$ sınıfından normal majoranttır denir.

**Tanım 5** $\psi(t)\colon [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ fonksiyonu için $\log\psi(e^t)$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ aralığında konkav ise $\psi(t)$ ye bilogaritmik konkav fonksiyon denir.

**Tanım 6** $\omega(\delta)$ azalmayan majorant olsun. Eğer $(1,+\infty)$ aralığında tanımlı ve

$$\omega(t\delta) \leq \psi(t)\,\omega(\delta), \qquad \forall\delta > 0, \forall t > 1$$

şartını sağlayan bilogaritmik konkav $\psi(t)$ fonksiyonu varsa, $\omega(t)$ majorantı $\psi(t)$ normallik katsayısına sahiptir denir.

Bütün normal majorantlar sınıfı ile bütün azalmayan normallik katsayısına sahip majorantlar sınıfı çakışır. Her yarı-toplamsal azalmayan majorant $(2,1)$ sınıfından normal majoranttır.

## 1.2 Kapasite ve Genelleştirilmiş Dirichlet Problemi

Potansiyel teorisinden bazı tanımlar verelim [20, 21, 19].

$K \subset \mathbf{C}$ kompakt küme olsun. $\mathcal{M}(K)$ ile $K$ nın Borel alt kümelerinin $\sigma$-cebrinde tanımlanmış, toplam kütlesi $\mu(K) = 1$ olan ve negatif olmayan $\mu(z)$ ölçüleri sınıfı gösterilsin. $\mathcal{M}(K)$ sınıfında

$$\gamma(\mu) = \int\limits_{K\times K} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta)\, d\mu(z)$$

integraline minimal değer veren tek bir $\mu_0$ ölçüsü vardır.

**Tanım 7** $\mathrm{Cap}(K) = \mathrm{C}(K) = \exp[-\gamma(\mu_0)]$ sayısına $K$ kompaktının logaritmik kapasitesi,

$$\int\limits_{K} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_0(z)$$

integraline ise Roben potansiyeli denir.

**Tanım 8** $F$ kapalı kümesine dahil olan kompaktlardan en az birinin kapasitesi sıfırdan farklı ise, $F$ ye kapasitesi sıfır olmayan kapalı küme denir.

**Tanım 9** $O$ açık kümesinin aşağı kapasitesi

$$\sup_{K\subset O} \mathrm{C}(K)$$

şeklinde tanımlanır, burada supremum $O$ ya dahil olan bütün $K$ kompaktları sınıfında alınır.

**Tanım 10** Sınırlı $B$ kümesini içeren açık kümelerin aşağı kapasitelerinin infimumu sıfır ise $B$ ye sıfır kapasiteli küme denir.

**Tanım 11** $B \subset \overline{\mathbf{C}}$ kümesinin her sınırlı alt kümesinin kapasitesi sıfır ise $B$ ye sıfır kapasiteli küme denir.

$F \subset \mathbf{C}$ kapalı küme olsun. $z \in \mathbf{C}$ noktası ve $t \in (0, +\infty)$ sayısı için $C_F(z,t)$ fonksiyonu

$$C_F(z,t) = \operatorname{Cap}\left(F \cap \{\, \zeta : |\zeta - z| \le t \,\}\right)$$

şeklinde tanımlansın.

**Tanım 12** $F \subset \mathbf{C}$ kapalı küme ve $z \in \mathbf{C}$ olsun. Eğer

$$C_F(z) \equiv \varliminf_{t \to 0} \frac{1}{t} C_F(z,t) > 0$$

ise $F$ kümesi $z$ noktasında $C$-yoğundur denir.

$G \subset \mathbf{C}$ açık küme olsun. $z \notin G$ noktası ve $t \in (0, +\infty)$ sayısı için

$$C^*(z,t) = \operatorname{Cap}\left(\{\, \zeta : |\zeta - z| \le t \,\} \setminus G\right)$$

ve

$$u(z,t) = \frac{27\,t}{4C^*\left(z, \frac{1}{2}t\right)}, \qquad t > 0 \tag{1.3}$$

tanımlansın.

$r\colon G \to \mathbf{R}$ fonksiyonu için $\widetilde{\partial G}$ de

$$B(z, r(\zeta)) = \varlimsup_{\substack{\zeta \to z \\ (\zeta \in G)}} r(\zeta), \qquad z \in \widetilde{\partial G}$$

fonksiyonu tanımlansın. Eğer $r(\zeta)$ fonksiyonu $G \cup \widetilde{\partial G}$ kümesinde sürekli ise

$$B(z, r(\zeta)) \equiv r(z), \qquad \forall z \in \widetilde{\partial G}$$

olacaktır.

**Tanım 13** $G$ sonlu bağlantılı Jordan bölgesi ve $a \in G$ olsun. $G \setminus \{a\}$ üzerinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan $g_G(\cdot, a)$ fonksiyonuna $G$ bölgesinin $a$ kutuplu Green fonksiyonu denir:

1. $g_G(\zeta, a)$ fonksiyonu $G \setminus \{a\}$ kümesinde harmoniktir,

2. Her $z \in \partial G$ için $\lim\limits_{\substack{\zeta \to z \\ (\zeta \in G)}} g_G(\zeta, a) = 0$,

3. $g_G(\zeta, a) + \ln|\zeta - a|$ fonksiyonu $a$ noktası civarında sınırlıdır.

**Tanım 14** $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ bölge olsun. $G$ ye dahil olan sonlu bağlantılı Jordan bölgelerinin Green fonksiyonlarının noktasal supremumuna $G$ nin genelleştirilmiş Green fonksiyonu denir [20, 21].

Sınırının kapasitesi sıfır olmayan her $G \subset \overline{\mathbf{C}}$ bölgesi genelleştirilmiş Green fonksiyonuna sahiptir.

Genelleştirilmiş Green fonksiyonu ile Roben potansiyeli arasında

$$g_G(\zeta, \infty) = -\log \mathrm{C}(\partial G) - \int\limits_{\partial G} \log \frac{1}{|z - \zeta|} \, d\mu_0(z), \qquad (\mu_0(\partial G) = 1) \tag{1.4}$$

bağıntısı vardır.

Subharmonik fonksiyonlar için aşağıdaki maksimum prensibi geçerlidir:

$G$ açık küme ve $\mathrm{Cap}(\partial G) \neq 0$, $r(\zeta)$ fonksiyonu $G$ kümesinde subharmonik ve yukarıdan sınırlı olsun. $B\,(z, r(\zeta))$ fonksiyonu $\partial G$ deki sıfır kapasiteli bir küme hariç pozitif olmasın. Bu takdirde

$$r(\zeta) \leq 0, \qquad \forall \zeta \in G$$

dir.

$G$ açık kümesinin $\widehat{\partial G}$ sınırında tanımlı, reel değerli (sonlu olmayabilir) $l(z)$ fonksiyonu ele alınsın. $\underline{H}\,(\zeta, l(z))$ ile

$$B\,(z, r(\zeta)) \leq l(z), \qquad \forall z \in \widehat{\partial G}$$

koşulunu sağlayan, $G$ de yukarıdan sınırlı subharmonik fonksiyonların supremumu gösterilsin.

**Tanım 15** $\underline{H}(\zeta, l(z))$ fonksiyonuna $l(z)$ için $G$ de genelleştirilmiş Dirichlet probleminin aşağı çözümü denir.

$G$ nin her bağlantılı bileşeninde $\underline{H}(\zeta, l(z))$ ya özdeşlikle $\infty$ ya da harmoniktir.

Eğer $s, l \in \mathbf{R}$ ve $s \geq 0$ ise

$$\underline{H}(\zeta, s\,l(z) + l) = s\,\underline{H}(\zeta, l(z)) + l, \qquad \forall\zeta \in G$$

eşitliği geçerlidir.

Eğer $l_1(z)$, $l_2(z)$ ve $l_1(z) + l_2(z)$ fonksiyonları $\widehat{\partial G}$ de tanımlı iseler

$$\underline{H}(\zeta, l_1(z) + l_2(z)) \geq \underline{H}(\zeta, l_1(z)) + \underline{H}(\zeta, l_2(z)), \qquad \forall\zeta \in G$$

eşitsizliği geçerlidir.

**Tanım 16** Eğer $\underline{H}(\zeta, l(z))$ ve $-\underline{H}(\zeta, -l(z))$ fonksiyonları $G$ de sonlu ve aynı iseler $l(z)$ çözülebilendir denir ve

$$H_G(\zeta, l(z)) = \underline{H}(\zeta, l(z)) = -\underline{H}(\zeta, -l(z)), \qquad \forall z \in G$$

yazılır. $H_G(\zeta, l(z))$ harmonik fonsiyonuna $l(z)$ için $G$ de genelleştirilmiş Dirichlet probleminin çözümü denir.

Cap$(\widehat{\partial G}) > 0$ ise her $l(z) \in C_{\widehat{\partial G}}$ fonksiyonu çözülebilendir.

Açıktır ki

$$\inf_{z\in\widehat{\partial G}} l(z) \leq H_G(\zeta, l(z)) \leq \sup_{z\in\widehat{\partial G}} l(z), \qquad \forall\zeta \in G$$

olur.

**Tanım 17** $\widehat{\partial G}$ de tanımlı her sonlu ve sürekli $l(z)$ fonksiyonu için

$$\lim_{\substack{\zeta\to z_0 \\ (\zeta\in G)}} H_G(\zeta, l(z)) = l(z_0)$$

ise $z_0 \in \widehat{\partial G}$ regüler noktadır denir. Regüler olmayan sınır noktasına irregüler nokta denir.

$z_0 \in \partial G$ noktasının regüler olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{\substack{\zeta \to z_0 \\ (\zeta \in G)}} g_G(\zeta, a) = 0, \qquad (a \in G)$$

olmasıdır [21, 4]. Wiener kriterine göre $\partial G$ kümesi $z_0$ noktasında $C$-yoğun ise $z_0$ regüler noktadır.

**Önerme 1** [10] $D \subset \overline{\mathbf{C}}$ açık küme, $\eta(t)$ fonksiyonu reel eksenin bir $L$ aralığında tanımlı, sürekli, reel değerli ve konkav olsun. Bu takdirde

1. $D$ de harmonik olan $H\colon D \to L$ fonksiyonu için $\eta(H(\zeta))$ fonksiyonu $D$ de süperharmoniktir.

2. Eğer $\mathrm{Cap}(\partial D) > 0$ ise, sonlu değerli $l(z)\colon \widehat{\partial D} \to L \subset \mathbf{R}$ sürekli fonksiyonu için

$$H_D(\zeta, \eta(l(z))) - \eta\left(H_D(\zeta, l(z))\right) \leq 0, \qquad \forall \zeta \in D \tag{1.5}$$

olur. Burada $H_D(\zeta, \varphi(z))$ fonksiyonu $\varphi(z)$ sınır fonksiyonu için $D$ de genelleştirilmiş Dirichlet probleminin çözümüdür.

**İspat.** $l(z)$ ve $\eta(l(z))$ fonksiyonlarının çözülebilen olduğu ve onlar için genelleştirilmiş Dirichlet probleminin çözümünün varlığı koşullardan açıktır.

Önce 1. şık ispatlansın. Eğer $\zeta_0 \in D$ ve $\zeta_0 \neq \infty$ ise yeterince küçük $\rho > 0$ sayıları için

$$H(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H\left(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta \tag{1.6}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda konkav fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğine göre

$$\eta\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H\left(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}\right)\, d\theta\right) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta\left(H\left(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right)\, d\theta \tag{1.7}$$

dır.

(1.6) ve (1.7)'den

$$\eta(H(\zeta_0)) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta\left(H\left(\zeta_0 + \rho e^{i\theta}\right)\right)\, d\theta$$

elde edilir. Benzer eşitsizlik $\zeta_0 = \infty$ ve yeterince büyük $\rho$ sayıları için de gösterilebilir.

2. şıkkın doğruluğu ise, maksimum prensibi ve (1.5) ifadesinin sol yanının $D$ de yukarıdan sınırlı, subharmonik olması ve $D$ nin regüler sınır noktalarında pozitif olmamasından elde edilir.

Bu fonksiyonun sınırlılığı $\widehat{\partial D}$ nin $l$ altındaki görüntüsünün $L$ aralığında kompakt olmasından, subharmonikliği 1. şıktan elde edilir. $D$ de pozitif olmaması ise $D$ nin her bağlantılı $D_j$ bileşeninin her regüler sınır noktasında bu ifadenin sıfıra yaklaşmasından ve $D_j$ bileşenlerinde sınırlılığından çıkar.

**Önerme 2** $\zeta = \infty$ noktasını içeren $D$ bölgesi için $\mathrm{Cap}(\partial D) > 0$ olsun.

$$A(\zeta, \partial D) = \max_{z \in \partial D} |\zeta - z|$$

olmak üzere, her $\zeta, \zeta_0 \quad \zeta \neq \zeta_0$ noktaları için

$$g_D(\zeta, \zeta_0) + \ln |\zeta - \zeta_0| \leq \ln \frac{A(\zeta, \partial D)\, A(\zeta_0, \partial D)}{\mathrm{C}(\partial D)} \tag{1.8}$$

olur. Burada $g_D(\zeta, \zeta_0)$, $D$ bölgesinin genelleştirilmiş Green fonksiyonudur.

**İspat.** $D$ bölgesinde

$$g_D(\zeta, \zeta_0) - g_D(\zeta, \infty) + \ln |\zeta - \zeta_0| \leq \max_{z \in \partial D} \ln |z - \zeta_0|.$$

olduğu açıktır. Bundan dolayı

$$g_D(\zeta, \zeta_0) + \ln |\zeta - \zeta_0| \leq g_D(\zeta, \infty) + \ln A(\zeta_0, \partial D) \tag{1.9}$$

dır. (1.4)'den hemen çıkan

$$g_D(\zeta, \infty) \leq \ln \frac{A(\zeta, \partial D)}{\mathrm{C}(\partial D)}$$

eşitsizliği (1.9)'da gözönüne alınırsa (1.8) ifadesi elde edilir.

$G$ de yukarıdan sınırlı ve subharmonik $r(\zeta)$ fonksiyonu için

$$r(w) \leq \underline{H}(w, B(z, r(\zeta))), \qquad \forall w \in G$$

olduğu açıktır.

# BÖLÜM 2. NORMAL MAJORANTLI HARDY-LITTLEWOOD TİPİ TEOREMLER

$B \subset \mathbf{C}$ açık küme olsun. $w$, $\zeta$ noktaları $B$ kümesinin aynı $B_j$ bağlantılı bileşenine dahil iseler $g_B(w,\zeta)$ ile $B_j$ nin $g_{B_j}(w,\zeta)$ genelleştirilmiş Green fonksiyonu gösterilsin. Eğer $w$, $\zeta$ noktaları $B$ nin farklı bağlantılı bileşenlerine dahil iseler $g_B(w,\zeta) = 0$ olsun. Bu şekilde tanımlanan $g_B(w,\zeta)$ fonksiyonuna $B$ açık kümesinin genelleştirilmiş Green fonksiyonu adı verilir [22].

Eğer $f$ fonksiyonu $G$ de meromorf ise $k(f,w)$ ile $f(w)$ değerinin $w \in G$ noktasındaki mertebesi gösterilsin.

$\mathcal{N}$ ile sıfır kapasiteli bütün $E \subset \overline{\mathbf{C}}$ kümeleri sınıfı gösterilsin.

$$\begin{aligned}
\chi(t) &= \chi(G,z_0,t) = \inf_{v\geq t} \omega(v)\psi(u(z_0,v)), \qquad (z_0 \notin G, t>0)\\
\varepsilon(G,z) &= \sup_{t>0} \frac{t}{C^*(G,z,t)}, \qquad (z \in \partial G)\\
\varepsilon(G) &= \sup_{z\in\partial G} \varepsilon(G,z)
\end{aligned}$$

olsun. Açıktır ki her basit bağlantılı $G \neq \mathbf{C}$ bölgesi için $\varepsilon(G) \leq 4$ tür.

## 2.1 Yerel Sonuçlar

**Teorem 1** $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı açık küme; $z_0 \in \mathbf{C} \setminus G$ sabit nokta; $\omega$ fonksiyonu $\psi$ normallik katsayısına sahip majorant; $f$ fonksiyonu $G$ de holomorf ve sınırlı olsun. Eğer

$$\varlimsup_{\substack{\zeta\to z\\ (\zeta\in G)}} |f(\zeta)| \leq \omega(|z-z_0|), \qquad \forall z \in \partial G \setminus \{z_0\} \tag{2.1}$$

ise

$$|f(\zeta)| \leq \chi(|\zeta - z_0|) \exp\left[-\sum_{w:f(w)=0} g_G(w,\zeta)\, k(f,w)\right] \qquad \forall \zeta \in G \tag{2.2}$$

olur, öyle ki $z_0$ noktası $\partial G$ nin ayrık noktası ise (2.2) eşitsizliğindeki toplama $w = z_0$ noktasına karşı gelen terim de dahildir. (Bu halde $g_G(z_0, \zeta) \equiv g_{G\cup\{z_0\}}(z_0, \zeta)$ ve $k(f, z_0) \geq 0$ ile $f$ fonksiyonunun $z_0$ noktasına analitik devamının bu noktadaki sıfırının mertebesi gösterilir.)

Aşağıdaki sonuç Teorem 1'nin genelleşmesidir. Hem $f$ meromorf seçilir, hem de (2.1) sınır koşulu yerine daha zayıf bir koşul konur.

**Teorem 2** [23, 16] $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı açık küme; $Q \subset \mathbf{C} \setminus G$ kümesi $z_0$ noktasını içersin ve $Q \in \mathcal{N}$ olsun; $\omega$ fonksiyonu $\psi$ normallik katsayısına sahip majorant; $f: G \to \overline{\mathbf{C}}$ sonlu sayıda kutup noktasına sahip meromorf fonksiyon, $f$ in $G$ deki bütün kutup noktaları kümesi $\mathcal{P}$ olsun. Eğer $f$ fonksiyonu $G$ nin, kutup noktalarından ayrık her kısmında sınırlı ve

$$\varlimsup_{\substack{\zeta\to z\\(\zeta\in G)}} |f(\zeta)| \leq \omega(|z - z_0|), \qquad \forall z \in \partial G \setminus Q \tag{2.3}$$

ise bu takdirde

$$\begin{aligned} |f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}} g_G(p, \zeta)\, k(f, p)\right] &\leq \chi(|\zeta - z_0|)\times \\ \times \exp\left[-\sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta)\, k(f, w)\right], &\qquad \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P} \end{aligned} \tag{2.4}$$

olur, öyle ki $z_0$ noktası $\partial G$ nin ayrık noktası ise (2.4) eşitsizliğindeki toplama $w = z_0$ noktasına karşı gelen terim de dahildir.

Önce teoremin ispatında yardımcı olan bir önerme verelim.

$a \in G$ noktası için $\widehat{\partial G}$ de

$$\lambda(z, a, z_0) = \begin{cases} \ln\max\left\{\dfrac{3\,|z-a|}{|a-z_0|}, \dfrac{3}{2}\right\}, & z \in \partial G \\ +\infty &, \quad z = \infty \in \widehat{\partial G}. \end{cases} \tag{2.5}$$

fonksiyonu tanımlansın. Tanımdan

$$\lambda(z, a, z_0) \geq \ln\frac{3}{2}, \qquad \forall z \in \widehat{\partial G} \tag{2.6}$$

olduğu açıktır.

**Önerme 3** [10] $\theta(t)\colon (0,+\infty] \to (-\infty,+\infty)$ fonksiyonu $t = +\infty$ noktasında sürekli, $(0,+\infty)$ aralığında azalmayan ve konkav olsun. Eğer $q(z)\colon \widehat{\partial G} \to [-\infty,+\infty)$ fonksiyonu $\widehat{\partial G}$ de yukarıdan sınırlı ve

$$q(z) \leq \theta(\lambda(z,a,z_0)), \qquad \forall z \in \partial G \tag{2.7}$$

ise bu takdirde

$$\underline{H}(a,q(z)) \leq \theta\left[\ln(u(z_0,|a-z_0|))\right] \tag{2.8}$$

dır.

**İspat.** Önermenin şartlarından $\theta(t) \in C_{(0,+\infty)}$ olduğu görülür. $\beta > 0$ olmak üzere

$$\theta_\beta(t) = \theta(t) + \beta t, \qquad t > 0$$

olsun. Bu takdirde

$$\lim_{t\to+\infty} \theta_\beta(t) = +\infty \tag{2.9}$$

dur. $q(z)$ yukarıdan sınırlı olduğu için (2.9)'den, yeterince büyük $N > \ln\dfrac{3}{2}$ sayısı için

$$q(z) \leq \theta_\beta(N), \qquad \forall z \in \widehat{\partial G} \tag{2.10}$$

sonucu alınır.

$$\lambda_N(z) = \min\{\lambda(z,a,z_0), N\}, \qquad \forall z \in \widehat{\partial G} \tag{2.11}$$

olsun. Bu takdirde (2.7),(2.10) ve (2.11)'den

$$q(z) \leq \theta_\beta(\lambda_N(z)), \qquad \forall z \in \partial G \tag{2.12}$$

dir.

$\lambda_N(z)$ fonksiyonu $\widehat{\partial G}$ de sürekli, sınırlı ve pozitiftir. $\theta_\beta(t)$ fonksiyonu $t > 0$ için sürekli ve konkav olduğu için, Önerme 1'den

$$H_G(\zeta, \theta_\beta(\lambda_N(z))) \leq \theta_\beta(H_G(\zeta, \lambda_N(z))), \qquad \forall \zeta \in G \tag{2.13}$$

(2.12) ve maksimum prensibinden

$$\underline{H}(\zeta, q(z)) \leq H_G(\zeta, \theta_\beta(\lambda_N(z))), \qquad \forall \zeta \in G \tag{2.14}$$

elde edilir.

$G \cup \{\, \zeta : |\zeta - z_0| > \frac{1}{2}|a - z_0| \,\} \cup \{\infty\}$ açık kümesinin $a$ noktasını içeren bağlantılı bileşeni $D$ olsun. $K$ ile $\{\, \zeta : |\zeta - a| < \frac{1}{2}|a - z_0| \,\}$ kümesi gösterilsin. (2.5) ve (2.11)'dan

$$\lambda_N(z) \leq \ln \frac{3\,|z-a|}{|a-z_0|}, \qquad \forall z \in \widehat{\partial G} \backslash K \tag{2.15}$$

elde edilir.

$g_D(\zeta, a) + \ln [3|\zeta - a|\,|a - z_0|^{-1}]$ fonksiyonu $D$ de süperharmonik ve aşağıdan sınırlı, $\partial K$ da ise (bir nokta hariç olabilir) $\ln \dfrac{3}{2}$ den büyüktür. Buradan

$$g_D(z,a) + \ln \frac{3\,|z-a|}{|a-z_0|} \geq \ln \frac{3}{2} = \lambda(z,a,z_0), \qquad \forall z \in K \cap \partial G \tag{2.16}$$

elde edilir. (2.16) ve (2.15) den, $G \cap D$ de yukarıdan sınırlı, subharmonik $-g_D(\zeta,a) - \ln \dfrac{3\,|\zeta - a|}{|a-z_0|}$ fonksiyonu ve çözülebilir $-\lambda_N(z)$ sınır fonksiyonun

$$B\left(z, -g_D(\zeta,a) - \ln \frac{3\,|\zeta-a|}{|a-z_0|}\right) \leq -\lambda_N(z), \qquad \forall z \in \widehat{\partial(G\cap D)}$$

eşitsizliğini sağladıkları görülür $\left(\widehat{\partial(G\cap D)} \subset \widehat{\partial G}\right)$

Buradan

$$-\,g_D(\zeta,a) - \ln \frac{3\,|\zeta-a|}{|a-z_0|} \leq \underline{H}(\zeta, -\lambda_N(z)) = -H_G(\zeta, \lambda_N(z)), \qquad \forall \zeta \in G \cap D \tag{2.17}$$

sonucu çıkar.

Önerme 2 uygulanırsa

$$g_D(\zeta,a) + \ln|\zeta - a| \leq \ln \frac{3\left(|\zeta - z_0| + \frac{1}{2}|a-z_0|\right)|a-z_0|}{2\,\mathrm{C}(\partial D)}, \qquad \forall \zeta \in D\backslash\{a\} \tag{2.18}$$

alınır. $\mathrm{C}(\partial D) \geq C^*(z_0, \frac{1}{2}|a-z_0|)$ olduğu için (2.18) den

$$g_D(\zeta,a) + \ln|\zeta - a| \leq \ln \frac{3\left(|\zeta - z_0| + \frac{1}{2}|a-z_0|\right)|a-z_0|}{2\,C^*(z_0, \frac{1}{2}|a-z_0|)}, \qquad \forall \zeta \in D\backslash\{a\} \tag{2.19}$$

elde edilir.

(2.17) ve (2.19) birleştirip $\zeta \to a$ için limite geçilirse

$$H_G(a, \lambda_N(z)) \leq \ln \frac{27\,|a - z_0|}{4\,C^*(z_0, \frac{1}{2}|a - z_0|)} \tag{2.20}$$

olur.

Şimdi (2.20), (2.13) ve (2.14) den

$$\underline{H}(a, q(z)) \leq \theta_\beta \left[ \ln \frac{27\,|a - z_0|}{4\,C^*\left(z_0, \frac{1}{2}|a - z_0|\right)} \right]$$

alınır. Bu sonuçta $\beta \to 0$ için limite geçilirse önermede söylendiği gibi (2.8) elde edilir.

**Teoremin ispatı.** $f$ fonksiyonun sıfırlarının keyfi bir $S$ sonlu kümesi gözönüne alınsın.

$$v_S(\zeta) \equiv \log|f(\zeta)| - \sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(\zeta, p) k(f, p) + \sum_{w \in S} g_G(w, \zeta) k(f, w)$$

olsun, öyle ki $z_0$ noktası $\partial G$ nin ayrık bir noktası ise sonuncu toplama $w = z_0$ noktasına karşı gelen terim de dahildir.

$a \in G$ noktası alınsın.

$v_S(\zeta) - \log \omega(|a - z_0|)$ fonksiyonu $G$ de subharmonik ve yukarıdan sınırlıdır. Bundan dolayı

$$v_S(w) - \log \omega(|a - z_0|) \leq \underline{H}(w, B(z, v_S(\zeta) - \log \omega(|a - z_0|)), \qquad \forall w \in G \tag{2.21}$$

dır.

Önerme (3)'ün koşullarının

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \begin{cases} \ln \psi(e^t) \quad , & \forall t \in (0, +\infty) \\ \lim\limits_{\tau \to +\infty} \ln \psi(e^\tau), & t = +\infty \end{cases} \\ q(z) &= B(z, v_S(\zeta) - \log \omega(|a - z_0|)), \qquad \forall z \in \widehat{\partial G} \end{aligned} \tag{2.22}$$

fonksiyonları için sağlandığı gösterilsin.

$q(z)$ nin $\widehat{\partial G}$ de yukarıdan sınırlı olduğu açıktır.

Diğer yandan

$$|z - z_0| \le |z - a| + |a - z_0|$$

eşitsizliğinden ve (2.5)'den

$$|z - z_0| \le |a - z_0| \left(1 + \frac{|z - a|}{|a - z_0|}\right) \le |a - z_0| \exp \lambda(z, a, z_0), \qquad \forall z \in \partial G \quad (2.23)$$

(2.3), (2.22) ve (2.23)'den

$$q(z) \le \ln \frac{\omega(|z - z_0|)}{\omega(|a - z_0|)} \le \ln \frac{\omega(|a - z_0| \exp \lambda(z, a, z_0))}{\omega(|a - z_0|)}, \qquad \forall z \in \partial G \setminus Q_1 \quad (2.24)$$

elde edilir. Burada $Q_1$ kümesi $Q$ ile $G$ nin irregüler sınır noktaları kümesinin birleşimidir. Açıktır ki $Q_1 \in \mathcal{N}$ çünkü irregüler sınır noktaları kümesinin kapasitesi sıfırdır. Diğer yandan regüler noktalarda Green fonksiyonu sıfıra yaklaşır.

$\psi(t)$ normallik katsayısının tanımından ve (2.5) ve (2.24)'den

$$q(z) \le \ln \psi(\exp \lambda(z, a, z_0)), \qquad z \in \partial G \setminus Q_1$$

dir. Bu $q(z)$ için Önerme 3'ün koşullarının sağlandığını gösterir. Bu durumda

$$\underline{H}(a, q(z)) \le \theta(\ln u(z_0, |a - z_0|)) \quad (2.25)$$

dir. (2.21)'dan elde ederiz ki (2.22) fonksiyonu için

$$v_S(\zeta) - \log \omega(|a - z_0|) \le \underline{H}(\zeta, q(z)) \quad (2.26)$$

özel halde $\zeta = a$ için (2.25) ve (2.26)'den

$$v_S(a) - \ln \omega(|a - z_0|) \le \theta(\ln u(z_0, |a - z_0|) \quad (2.27)$$

dır.

Her $t \ge |a - z_0|$ için $G_t \equiv G \cap \{ \zeta : |\zeta - z_0| < t \}$ olsun. $a \in G$ keyfi nokta olduğu için (2.27)'den ve normal majorantın tanımından

$$v_S(\zeta) \le \log[\omega(t)\psi(u(z_0, t))], \qquad \forall \zeta \in \partial(G \cap G_t) \setminus Q_2 \quad (2.28)$$

elde edilir. Burada $Q_2$ kümesi $Q$ ile $G \cap G_t$ nin irregüler sınır noktalarının birleşimidir. $Q_2 \in \mathcal{N}$ olduğu açıktır.

$v_S$ fonksiyonu $G \cap G_t$ de yukarıdan sınırlı olduğundan dolayı (2.28)'den maksimium prensibine göre

$$v_S(\zeta) \leq \log[\omega(t)\psi(u(z_0, t))], \qquad \zeta \in G \cap G_t$$

alınır. Burada $\zeta = a$ gözönüne alınırsa

$$v_S(a) \leq \log[\omega(t)\psi(u(z_0, t))]. \tag{2.29}$$

(2.29)'de $t \geq |a - z_0|$ keyfi olduğundan dolayı

$$v_S(a) \leq \log\left[\inf_{t \geq |a-z_0|} \omega(t)\psi(u(z_0, t))\right]$$

alınır.Buradan ise

$$|f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(p, \zeta)k(f, p)\right] \leq \chi(|\zeta - z_0|) \exp\left[-\sum_{w \in S} g_G(w, \zeta)k(f, w)\right]$$

alınır. Bu sonuncuda $S$ sıfırlar kümesinin keyfi olduğu gözönüne alınırsa (2.4) elde edilir.

**Sonuç 1** Teorem 2'nin koşulları sağlansın. Bu takdirde

$$|f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(p, \zeta)k(f, p)\right] \leq \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G, z_0)\right) \times$$
$$\times\, \omega(|\zeta - z_0|) \exp\left[-\sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta)k(f, w)\right], \qquad \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P}$$

dir.

Bu sonuç $\psi(t)$'nin artan olmasından ve $\varepsilon(G, z_0)$ nın tanımından hemen çıkar.

Sonradan kullanılacak olan aşağıdaki hal ayrılsın.

**Sonuç 2** $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı açık küme; $Q \subset \mathbf{C} \setminus G$, $Q \in \mathcal{N}$ olsun; $\omega$ fonksiyonu $\psi$ normallik katsayısına sahip normal majorant; $f: G \to \overline{\mathbf{C}}$ sonlu sayıda kutuba sahip meromorf fonksiyon, $f$ in $G$ deki bütün kutup noktaları kümesi $P$ olsun. Eğer $\zeta_0 \in G \setminus \mathcal{P}$ için

$$\varlimsup_{\substack{\zeta \to z \\ (\zeta \in G)}} |f(\zeta) - f(\zeta_0)| \le \omega(|z - \zeta_0|), \qquad \forall z \in \partial G \setminus Q$$

ise bu takdirde

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \exp\left[-\sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(p, \zeta) k(f, p)\right] \le \chi(G \setminus \{\zeta_0\}, \zeta_0, |\zeta - \zeta_0|) \times$$
$$\times \exp\left[-\sum_{w: f(w) = f(\zeta_0)} g_G(w, \zeta) k(f, w)\right], \qquad \forall \zeta \in G \setminus (\mathcal{P} \cup \{\zeta_0\}) \quad (2.30)$$

dır.

## 2.2 Global Sonuçlar

$z \in \mathbf{C}$ noktası ve $K \subset \mathbf{C}$ kümesi için

$$\rho(z, K) \equiv \inf_{\zeta \in K} |z - \zeta|$$

tanımı yapılsın.

Bazı global sonuçlara bakalım.

**Teorem 3** [23, 16] $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı açık küme; $\omega$ azalmayan $\psi$ normallik katsayısına sahip majorant; $f$, $G$ de holomorf, $\overline{G}$ de sürekli fonksiyon olsun. Eğer

$$|f(\zeta) - f(z)| \le \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \ne z$$

ise bu takdirde her $\zeta_0 \in G$ için

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \le \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right) \psi(27\varepsilon(G)) \exp\left[-\sum_{w: f(w) = f(\zeta_0)} g_G(w, \zeta) k(f, w)\right] \times$$
$$\times \begin{cases} \omega(4\rho(\zeta_0, \partial G)), & \forall \zeta \in G : 0 < |\zeta - \zeta_0| \le 4\rho(\zeta_0, \partial G), \\ \omega(4|\zeta - \zeta_0|), & \forall \zeta \in G : |\zeta - \zeta_0| \ge \rho(\zeta_0, \partial G), \end{cases}$$

ve her $z_0 \in \partial G$ için

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \le \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right)\omega(|\zeta - z_0|)\times$$
$$\times \exp\left[-\sum_{w\in G: f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right], \qquad \forall\zeta\in G$$

eşitsizlikleri sağlanır.

**Sonuç 3** $\omega$ süreklilik modülü tipi majorant olmak üzere Teorem 3'ün şartları sağlansın. Bu takdirde her $\zeta_0 \in G$ için

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \le C\omega(|\zeta - \zeta_0|)\times$$
$$\times\begin{cases} \exp\left[-\sum\limits_{w\in G\setminus\{\zeta_0\}: f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right], & \forall\zeta : 0 < |\zeta-\zeta_0| < \rho(\zeta_0,\partial G) \\ \exp\left[-\sum\limits_{w\in G: f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right], & \forall\zeta : |\zeta-\zeta_0| \ge \rho(\zeta_0,\partial G)\end{cases} \tag{2.31}$$

dir. Burada $C = 8(54\varepsilon(G))^2$ dir.

Sınırlı basit bağlantılı bölge için Sonuç 3'de $C = 8(216)^2$ alınabilir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3'ün meromorf fonksiyonlara genelleşmesidir.

**Teorem 4** $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı açık küme; $\omega$ azalmayan $\psi$ normallik katsayısına sahip majorant; $f:\overline{G} \to \overline{\mathbf{C}}$ sürekli ve $G$ de meromorf fonksiyon, $f$ in $G$ deki bütün kutup noktaları kümesi $\mathcal{P}$ olsun. Eğer

$$|f(\zeta) - f(z)| \le \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall\zeta, z \in \partial G, \zeta \ne z$$

ise bu takdirde her $\zeta_0 \in G \setminus \mathcal{P}$ için

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)|\exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}}(g_G(p,\zeta) + g_G(p,\zeta_0))k(f,p)\right] \le$$
$$\le \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right)\psi(27\varepsilon(G))\exp\left[-\sum_{w: f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right]\times$$
$$\times\begin{cases}\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G)), & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : 0 < |\zeta-\zeta_0| \le 4\rho(\zeta_0,\partial G)\\ \omega(4|\zeta-\zeta_0|), & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : |\zeta-\zeta_0| \ge \rho(\zeta_0,\partial G)\end{cases} \tag{2.32}$$

dir.

Önce aşağıdaki önermeyi ispat edelim.

**Önerme 4** [23, 16] Sonuç 2'nin koşulları dahilinde eşitsizlik geçerlidir.

$$
\begin{aligned}
&|f(\zeta)-f(\zeta_0)|\exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}} g_G(p,\zeta)k(f,p)\right]\le\\
&\quad\le\psi(27\,\varepsilon(G))\exp\left[-\sum_{w:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right]\times\\
&\quad\times\begin{cases}\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G)), & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P}:0<|\zeta-\zeta_0|\le 4\rho(\zeta_0,\partial G)\\ \omega(4|\zeta-\zeta_0|), & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P}:|\zeta-\zeta_0|\ge\rho(\zeta_0,\partial G)\end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

dir.

**İspat.** Sonuç 2'ye göre (2.30) eşitsizliği sağlanır. $\chi(G\setminus\{\zeta_0\},\zeta_0,|\zeta-\zeta_0|)$ için üst sınır belirleyelim.

$|z_1-\zeta_0|=\rho(\zeta_0,\partial G)$ olacak şekilde bir $z_1\in\partial G$ noktasının varlığı açıktır.

$$\{\,\tau:|\tau-z_1|\le\rho(\zeta_0,\partial G)\,\}\subset\{\,\tau:|\tau-\zeta_0|\le 2\rho(\zeta_0,\partial G)\,\}$$

ve kapasitenin kümenin artan fonksiyonu olmasından dolayı

$$C^*(\zeta_0,2\rho(\zeta_0,\partial G))\ge C^*(z_1,\rho(\zeta_0,\partial G))$$

dir.

Varsayalım ki $\zeta\in G$ ve $|\zeta-\zeta_0|\le 4\rho(\zeta_0,\partial G)$ dir. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
\chi(|\zeta-\zeta_0|) &\le \chi(4\rho(\zeta_0,\partial G))\\
&\le \omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\psi\left(\frac{27\rho(\zeta_0,\partial G)}{C^*(\zeta_0,2\rho(\zeta_0,\partial G))}\right)\\
&\le \omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\psi\left(\frac{27\rho(\zeta_0,\partial G)}{C^*(z_1,\rho(\zeta_0,\partial G))}\right)\\
&\le \omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\psi(27\varepsilon(G,z_1))\\
&\le \omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\psi(27\varepsilon(G))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani $\zeta\in G$ ve $|\zeta-\zeta_0|\le 4\rho(\zeta_0,\partial G)$ için

$$\chi(|\zeta-\zeta_0|)\le\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\psi(27\varepsilon(G)) \tag{2.34}$$

olur.

Şimdi ise $\zeta \in G$ ve $|\zeta - \zeta_0| \geq \rho(\zeta_0, \partial G)$ olsun.

$$\{\, \tau : |\tau - z_1| \leq |\zeta - \zeta_0| \,\} \subset \{\, \tau : |\tau - \zeta_0| \leq 2|\zeta - \zeta_0| \,\}$$

olduğu açıktır.

Bundan dolayı $C^*(z_1, |\zeta - \zeta_0|) \leq C^*(\zeta_0, 2|\zeta - \zeta_0|)$ olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
\chi(|\zeta - \zeta_0|) &\leq \chi(4|\zeta - \zeta_0|) \\
&\leq \omega(4|\zeta - \zeta_0|)\psi\left(\frac{27|\zeta - \zeta_0|}{C^*(\zeta_0, 2|\zeta - \zeta_0|)}\right) \\
&\leq \omega(4|\zeta - \zeta_0|)\psi\left(\frac{27|\zeta - \zeta_0|}{C^*(z_1, |\zeta - \zeta_0|)}\right) \\
&\leq \omega(4|\zeta - \zeta_0|)\psi(27\varepsilon(G, z_1)) \\
&\leq \omega(4|\zeta - \zeta_0|)\psi(27\varepsilon(G))
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\zeta \in G$ ve $|\zeta - \zeta_0| \geq \rho(\zeta_0, \partial G)$ ise

$$\chi(|\zeta - \zeta_0|) \leq \omega(4|\zeta - \zeta_0|)\psi(27\varepsilon(G)) \tag{2.35}$$

olur.

Sonuç olarak (2.34) ve (2.35)'den (2.33) elde edilir.

**Teoremin ispatı.** $z_0 \in \partial G$ sabit nokta olsun. Teorem 2 uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&|f(\zeta) - f(z_0)| \exp\left[-\sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(p, \zeta) k(f, p)\right] \leq \\
&\leq \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right)\omega(|\zeta - z_0|), \qquad \forall \zeta \in G \setminus \mathcal{P}
\end{aligned}$$

alınır. Burada $z_0 \in \partial G$ keyfi olduğu için her $\zeta_0 \in G \setminus \mathcal{P}$ sabit noktası için

$$\begin{aligned}
&|f(\zeta_0) - f(z)| \leq \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right) \times \\
&\times \exp\left[\sum_{p \in \mathcal{P}} g_G(p, \zeta_0) k(f, p)\right] \omega(|\zeta_0 - z|), \qquad \forall z \in \partial G
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 4 kullanılırsa

$$|f(\zeta_0) - f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}} g_G(p,\zeta)k(f,p)\right] \le \psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right)\psi(27\varepsilon(G))\times$$

$$\times \exp\left[\sum_{p\in\mathcal{P}} g_G(p,\zeta_0)k(f,p)\right] \exp\left[-\sum_{w:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right]\times$$

$$\times\begin{cases} \omega(4\rho(\zeta_0,\partial G)), & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : 0<|\zeta-\zeta_0|\le 4\rho(\zeta_0,\partial G) \\ \omega(4|\zeta-\zeta_0|), & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : |\zeta-\zeta_0|\ge \rho(\zeta_0,\partial G) \end{cases}$$

alınır. Bu sonuncudan (2.32) hemen çıkar.

Eğer $\zeta\in G$ ve $|\zeta-\zeta_0|\le\rho(\zeta_0,\partial G)$ ise

$$-g_G(\zeta_0,\zeta)\le\log\frac{|\zeta-\zeta_0|}{\rho(\zeta_0,\partial G)} \tag{2.36}$$

olacağı Green fonksiyonunun tanımından ve maksimum prensibinden hemen görülür.

**Sonuç 4** Teorem 4'ün koşulları dahilinde her $\zeta_0\in G\setminus\mathcal{P}$ için

$$|f(\zeta_0) - f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}} (g_G(p,\zeta)+g_G(p,\zeta_0))k(f,p)\right] \le$$

$$\le\psi\left(\frac{27}{2}\varepsilon(G)\right)\psi(27\varepsilon(G))\exp\left[-\sum_{w\in G\setminus\{\zeta_0\}:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right]\times$$

$$\times\begin{cases} \omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\left(\dfrac{|\zeta-\zeta_0|}{\rho(\zeta_0,\partial G)}\right)^{k(f,\zeta_0)}, & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : 0<|\zeta-\zeta_0|\le \rho(\zeta_0,\partial G) \\ \omega(4|\zeta-\zeta_0|)\exp\left[-g_G(\zeta_0,\zeta)k(f,\zeta_0)\right], & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : |\zeta-\zeta_0|\ge \rho(\zeta_0,\partial G) \end{cases}$$

sağlanır.

**Sonuç 5** [23, 16] $\omega$ süreklilik tipi (veya daha genel olarak yarı-toplamsal) majorant olsun. Bu takdirde Teorem 4'in koşulları dahilinde $\zeta_0\in G\setminus\mathcal{P}$ için

$$|f(\zeta_0) - f(\zeta)| \exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}} (g_G(p,\zeta)+g_G(p,\zeta_0))k(f,p)\right] \le C\omega(4|\zeta-\zeta_0|)\times$$

$$\begin{cases} \exp\left[-\sum_{w\in G\setminus\{\zeta_0\}:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right], & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : 0<|\zeta-\zeta_0|\le \rho(\zeta_0,\partial G) \\ \exp\left[-\sum_{w:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right], & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P} : |\zeta-\zeta_0|\ge \rho(\zeta_0,\partial G) \end{cases} \tag{2.37}$$

dir. Burada $C=(54\varepsilon(G))^2$ dir.

**Teorem 5** $\omega$ fonksiyonu $(\sigma,\gamma), 0<\gamma<1$ sınıfından olan normal majorant olsun. Bu takdirde Teorem 4'nin koşulları dahilinde

$$|f(\zeta_0)-f(\zeta)|\exp\left[-\sum_{p\in\mathcal{P}}(g_G(p,\zeta)+g_G(p,\zeta_0))k(f,p)\right]\le C\omega(4|\zeta-\zeta_0|)\times$$

$$\times\begin{cases}\exp\left[-\displaystyle\sum_{w:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)\right], & \forall\zeta\in G\setminus\mathcal{P}:|\zeta-\zeta_0|\ge\rho(\zeta_0,\partial G)\\ \exp\left[-\displaystyle\sum_{w\in G\setminus\{\zeta_0\}:f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w)-(k(f,\zeta_0)-\gamma)g_G(\zeta,\zeta_0)\right], & \text{diğer}\end{cases}\tag{2.38}$$

dir. Burada $C=\sigma^3(27\varepsilon(G))^{2\gamma}2^{-\gamma}$ dır.

**İspat.** $\omega$ normal majorantı $(\sigma,\gamma)$ sınıfından ise

$$\omega(t\delta)\le\sigma t^\gamma\omega(\delta),\qquad\forall t>1,\forall\delta>0$$

dir. Buradan her $\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_1<\delta_2$ için

$$\omega(\delta_2)=\omega\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\delta_1\right)\le\sigma\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^\gamma\omega(\delta_1)$$

elde edilir.

Teorem 4'in koşulları dahilinde (2.32) sağlanır. Bu halde $\zeta\in G\backslash\mathcal{P}$ ve $|\zeta-\zeta_0|\le\rho(\zeta_0,\partial G)$ için

$$\exp\left[-g_G(\zeta_0,\zeta)k(f,\zeta_0)\right]\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))$$

terimine bakalım: (2.36) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}&\exp\left[-g_G(\zeta_0,\zeta)(k(f,\zeta_0)-\gamma)\right]\exp\left[-\gamma g_G(\zeta_0,\zeta)\right]\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\\ \le\;&\exp\left[-g_G(\zeta_0,\zeta)(k(f,\zeta_0)-\gamma)\right]\exp\left[\gamma\ln\frac{|\zeta-\zeta_0|}{\rho(\zeta_0,\partial G)}\right]\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\\ \le\;&\exp\left[-g_G(\zeta_0,\zeta)(k(f,\zeta_0)-\gamma)\right]\left(\frac{|\zeta-\zeta_0|}{\rho(\zeta_0,\partial G)}\right)^\gamma\omega(4\rho(\zeta_0,\partial G))\\ \le\;&\sigma\exp\left[-g_G(\zeta_0,\zeta)(k(f,\zeta_0)-\gamma)\right]\omega(4|\zeta-\zeta_0|)\end{aligned}$$

Bu sonucu ifade ve $\psi(t)=\sigma t^\gamma$ olduğu (2.32)'da göz önüne alınırsa (2.38)'nin sağlandığı görülür.

$\gamma\in(0,1)$ olduğu takdirde $k(f,w)-\gamma\ge 1-\gamma>0$ olduğundan dolayı aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

**Sonuç 6** $\omega$ fonksiyonu $(\sigma, \gamma)$, $0 < \gamma < 1$ sınıfından olan normal majorant olsun. Bu takdirde Teorem 4'in koşulları dahilinde her $\zeta_0 \in G \setminus \mathcal{P}$ için

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \exp\left[\sum_{p\in\mathcal{P}}(g_G(p,\zeta_0) + g_G(\zeta,p))k(f,p)\right] \le C\omega(4|\zeta-\zeta_0|)\times$$
$$\times \exp\left[-\sum_{w\in G\setminus\{\zeta_0\}: f(w)=f(\zeta_0)} g_G(w,\zeta)k(f,w) - (1-\gamma)g_G(\zeta_0,\zeta)\right], \forall\zeta \in G\setminus\mathcal{P} \quad (2.39)$$

Burada $C = \sigma^3(27\varepsilon(G))^{2\gamma}2^{-\gamma}$ dır.

Bu sonucu analitik fonksiyonlar için ayrıca yazalım.

**Teorem 6** $G \subset \mathbf{C}$ sınırlı açık küme; $\omega$ fonksiyonu $(\sigma, \gamma)$ $0 < \gamma < 1$ sınıfından olan normal majorant; $f : \overline{G} \to \mathbf{C}$ sürekli fonksiyonu $G$ de analitik ve

$$|f(\zeta) - f(z)| \le \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall\zeta, z \in \partial G, \zeta \ne z$$

olsun. Bu takdirde her $\zeta_0 \in G$ için

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \le C\omega(|\zeta-\zeta_0|)\times$$
$$\times \exp\left[-\sum_{w\in G\setminus\{\zeta_0\}: f(w)=f(\zeta_0)} g_G(\zeta,w)k(f,w) - (1-\gamma)g_G(\zeta,\zeta_0)\right], \forall\zeta \in G \quad (2.40)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C = \sigma^4(54\varepsilon(G))^{2\gamma}2^{-\gamma}$ dır. Eğer $G$ basit bağlantılı ise $C = \sigma^4(108\sqrt{2})^{2\gamma}$ alınabilir.

$0 < \gamma < 1$ için $\exp[-(1-\gamma)g_G(\zeta,\zeta_0)] < 1$ olduğundan dolayı (2.40) eşitsizliği normal majorantlar için [23, 16]'de alınmış ve bu terimi gözönüne almayan uygun eşitsizliklerden $0 < \gamma < 1$ halinde daha iyidir.

# SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada analitik fonksiyonların Hardy-Littlewood tipi teoremlerle verilen sınır özellikleri incelenmiştir. Buna göre:

$G$ bölgesinde analitik, $\overline{G}$'de sürekli $f$ fonksiyonu ve bazı koşulları sağlayan $\omega\colon (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ majorantı için sınırdaki

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

özelliğinden

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq C\omega(|\zeta - z|), \qquad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z$$

bölge özelliği elde edilir.

Geçtiğimiz yirmibeş yılda Tamrazov P. M., Hayman W. K., Gehring F. W. v.b.nın çalışmalarıyla bu konuda büyük ilerlemeler gerçekleştirilmiştir.

Son yıllarda bu tip teoremlerde, ele alınan holomorf fonksiyonların yalınkat olup olmamasının etkisi ve meromorf fonksiyonlar için benzer problemler araştırılmaya başlanmıştır.

Tezde ağırlıklı olarak bu konu ele alınmıştır. Önceki sonuçlar bazı hallerde iyileştirilmiştir.

Burada alınmış sonuçlar, bölgenin sınırı $C$-yoğun küme olduğu zaman anlamlıdır. İleride normal majorantlar için benzer sonuçları daha genel bölgelerde ispatlamaya çalışacağız.

# KAYNAKLAR


[1] HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E. Some properties of fractional integrals II. , Mat. Zs. 34, 3, (1932).

[2] WARSCHAWSKI S. E., Bemerkung zu meiner arbeit: über das randverhalten der ableitung abbildungsfunktion bei konformer abbildung , Math. Zs., v. 38, p. 669–683, (1934).

[3] WALSH I. L., SEWELL W. E., Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials , Duke Math., v. 6, p. 658-705, (1971).

[4] SEWELL W. E. Degrees of approximation by polynomials in the complex domain , Princeton, (1942).

[5] GAGUA M. B. On a theorem of Hardy-Littlewood , Uspechi Mat. Nauk., v. 8, no. 1(53), p.121–125 (Russian), (1953).

[6] MAGNARADZE L. G. On a generalization of the Plemelj-Privalov theorem , Soobsch. AN. Gruz. SSR., v. 8, no. 8, p. 509-516 (Russian), (1947).

[7] BRUDNY Y. A, HOPENHAUS I. E. On a generalization of the Hardy-Littlewood theorem , Mat. Zb., v. 52, no. 3(94), p. 891–894, (1960).

[8] GERONIMUS Y. L. Some properties of functions analytic on a circle or circular sector , Mat. Zb., v. 39, no. 3(80), p. 319–330, (1956).

[9] TAMRAZOV P. M. Structural contour-solid properties of functions of a complex variable , Uspechi Mat. Nauk., v. 28, no. 1(169), p. 131–161 (Russian), (1973).

[10] TAMRAZOV P. M. Smoothness and poynomial approximation , Kiev.: Nauk. Dumka (Russian), (1975).

[11] TAMRAZOV P. M. Contour-solid problems for holomorphic functions and mappings , preprint 83.65, Mat. Akad. Sci. Ukrainian SSR (Russian), (1983).

[12] TROHIMCHUK Y. Y. Differential properties of real and complex functions , Ukrainian Mat. J, Vol 31, No. 4, p. 465–469, (1979).

[13] SCHEKORSKII A. I. Majorant properties of funtions of Hölder class , preprint 82.41, Ins. Mat. Akad. Ukrainian SSR, Kiev (Russian), (1982).

[14] GEHRING F. W., HAYMAN W. K., HINKKANEN A. Analytic functions satisfying Hölder conditions on the boundary , J.Approx.Theory, no. 3, p. 243–249, (1982).

[15] TAMRAZOV P. M., ALIYEV T. H. A Contour-solid problem for meromorphic functions, taking account of zeros and nonunivalence , Dokl. AN. SSSR, v 228, no. 2, (1986), English translation Soviet Math. Dokl., Vol 33, No. 3, (1986).

[16] ALIYEV T. H. Contour-solid problems , preprint 85.84, Math. Akad. Sci. Ukrainian SSR, Kiev (Russian), (1985).

[17] ALIYEV T. H. TAMRAZOV P. M. Contour-solid problems for meromorphic functions, taking account of zeros and nonunivalence , Ukrainian Math. J., v. 39, no. 6, p 683–690 (Russian), (1987).

[18] LEBEDEV H. A., TAMRAZOV P. M. Inverse theorems of approximation theory, on regular compacts of the complex plain , Izv. AN. SSSR, Mat. 34, 6 (Russian), (1970).

[19] HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E., POLYA G. Inequalities , Cambridge University Press, New York, (1934).

[20] TSUJI M. Potential theory in modern functions theory , Chelsea Publishing, New York, (1959).

[21] NEVALLINNA R. Eindeutige analytische Funktionen , Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1953).

[22] BRELOT M. Elements de theorie classique du potential les cours de Sorbonne , Paris, (1959).

[23] ALIYEV T. H. A contour-solid problem with normal majorant for meromorphic functions , Izv. AN. Az. SSR Mat. unpublished (Russian).

# ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında İstanbul'da doğan Nurhan ÇOLAKOĞLU 1989 yılında İtalyan Lisesinden mezun oldu. 1994 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisiliği bölümünü bitirerek aynı yıl İ.T.Ü. Matematik Bölümü Reel ve Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Bu görevini halen sürdürmektedir.

## ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI SINIR ÖZELLİKLERİ HAKKINDA

**Nurhan Çolakoğlu**

Anahtar Kelimeler: Hardy-Littlewood tipi teorem, analitik fonksiyon, meromorf fonksiyon, yalınkat olmama, normal majorant.

Özet: İki bölümden oluşan bu çalışmada analitik fonksiyonların Hardy-Littlewood tipi teoremlerle verilen bazı sınır özellikleri incelenmiştir. Bu tip teoremlerde yalınkat olmamanın etkisi verilmiş ve normal majorantlar sınıfı için bazı hallerde, analitik ve mermorf fonksiyonlar için, önceki sonuçlar iyileştirilmiştir.

## ON SOME BOUNDARY PROPERTIES OF ANALYTIC FUNCTIONS

**Nurhan Çolakoğlu**

Keywords: Analytic function, meromorphic function, theorems of Hardy-Littlewood type, nonunivalence, normal majorant.

Abstract: This work is concerned with some boundary properties of analytic functions given by theorems of Hardy-Littlewood type. The effect of nonunivalence in the theorems of this type is given and for the class of normal majorants in some cases, for analytic and meromorphic functions, the preceding results are strenghtened.