

46280

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ PARAMETRELİ ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAK PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş.Müh. Maksude G. ÖZDOĞAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Ocak 1995

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 1995

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan ENGİN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ertuç ERGÜVEN

: Doç. Dr. Necla KADIOĞLU

**Y.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOLUMANTASYON MERKEZİ**

ŞUBAT 1995

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardımlarını esirgmeden çalışmamı destekleyerek şevk veren Sayın Hocam Prof. Dr. Hasan ENGİN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında fikir ve ilgilerini esirgmeden yol gösteren başta Araştırma Görevlisi Bahattin KİMENÇE olmak üzere tüm İTÜ İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim Dalı öğretim üyelerine, çalışmamı tamamlamam konusunda yardımcı olan Araştırma Görevlisi Özden ÇAĞLAYAN'a ve İnş. Müh. Gökhan GÜNAL'a teşekkürü bir borç bilirim.

OCAK 1995

İnş. Müh.
Maksude G. ÖZDOĞAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. Genel Bilgiler	1
1.2. Konu ile İlgili Çalışmalar	5
1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı	9
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER	10
2.1. Giriş	10
2.2. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Diferansiyel Denkleminin Genel Çözümü	13
BÖLÜM 3. ÖRNEKLER	18
3.1. Giriş	18
3.2. Merkezinden Tekil Yük ile Yüklü Dairesel Plak Hali	18
3.3. Yalnız Basınç Gerilmesi Aktaran Pasternak Zeminine Oturan Dairesel Plak Hali	23
3.3.1. Merkezinden Tekil Yükle Yüklü Plak	23
3.3.2. Yayılı Yükle Yüklü Plak	27
3.3.2.1. Yayılı Yükün Değme Bölgesinde Olması Hali	27
3.3.2.2. Yayılı Yükün Ayrırma Bölgesini Aşması Hali	32
3.3.3. Şerit Yükle Yüklü Plak Hali	36
BÖLÜM 4. SONUÇLAR	41
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1a Üniorm olmayan yayılı yük altında zeminin çökme durumu	2
Şekil 1.1b Tekil yük altında zeminin çökme durumu	2
Şekil 1.1c Rijit bir yük altında zeminin çökme durumu	2
Şekil 1.1d Üniorm yayılı yük altındaki çökme durumu	2
Şekil 1.2 Pasternak zemin modeli	5
Şekil 2.1a Pasternak zemini üzerine oturan dairesel plak hali	10
Şekil 2.1b $P(r,\theta)$ yükleme altında plak ve zemin yüzeyi	10
Şekil 2.2 Plagın ucu ile zemin arasındaki ilişki	13
Şekil 3.1a Tekil yük ile yüklü plak hali	18
Şekil 3.1b Plak ve yüzeyin elastik eğrisi	19
Şekil 3.2a Tam batma hali	23
Şekil 3.2b Tam batmama hali	24
Şekil 3.3a Değme bölgesinde yayılı yük ile yüklü plak	28
Şekil 3.3b Plak ve yüzeyin elastik eğrisi	28
Şekil 3.4a Ayrılma bölgesini aşacak şekilde yayılı yük ile yüklenmiş plak hali	32
Şekil 3.4b Yayılı yük halinde plak ve yüzeyin elastik eğrisi	32
Şekil 3.5a Şerit yük ile yüklü plak hali	36
Şekil 3.5b Şerit yük halinde plak ve yüzeyin elastik eğrisi	37
Şekil 4.1a Tekil yük ile yüklü plakta düşey yerdeğiştirmenin yarıçap boyunca değişimi	41
Şekil 4.1b Tekil yük ile yüklü plakta radyal eğilme momentinin yarıçap ile değişimi	42

Şekil 4.1c	Tekil yük ile yüklü plakta kesme kuvvetinin yarıçap boyunca değişimi yayılı yük ile yüklü plak	42
Şekil 4.2a	Tekil yük altında ayrılma noktasının plak yarıçapı ile değişimi	43
Şekil 4.2b	Yerdeğiştirmenin yarıçap ile değişimi	43
Şekil 4.2c	Radyal eğilme momentinin yarıçap ile değişimi	43
Şekil 4.2d	Kesme kuvvetinin yarıçap ile değişimi	44
Şekil 4.3	$k=10$ için ara gerilmenin ayrılma noktası ile değişimi	44
Şekil 4.4	$a_1=0.5$ birim olması halinde ayrılma noktasının yarıçap ile değişimi	45



SEMBOL LİSTESİ

P	: Plaka etkiyen dış yük
k	: Zemin yatak katsayısı
T	: Membran kuvveti
G	: Zeminin kayma modülü
h	: Plak kalınlığı
D	: Plak rijitliği
ν	: Poisson oranı
∇^2	: Laplasiyen
M_r, M_θ	: Radyal ve eğilme momenti
Q_r	: Kesme kuvveti
ρ	: Boyutsuz koordinat
L	: Plakta boyutsuz uzunluk
$A_1, \dots, A_4$	: İntegral sabitleri
$B_1, \dots, B_4$	: İntegral sabitleri
$C_1, \dots, C_4$	: İntegral sabitleri
$D_1, \dots, D_4$	: İntegral sabitleri
R	: Plak yarıçapı
X	: Ayrılma bölgesinin sınırı
ω	: Düşey deplasman

ÖZET

Bu çalışmamda iki parametrelili, tek tabakalı elastik bir zemine oturan, ağırlıksız dairesel bir plağın tekil, düzgün yayılı ve şerit düşey yükler etkisindeki davranışı incelenmiştir.

Birinci bölümde, konu ile ilgili genel tanımlar ve açıklamalar yapılmıştır. Konu ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalarla, yapılan çalışmanın amaç ve kapsamı verilmiştir.

İkinci bölümde, elastik zemin üzerine oturan dairesel plak ile yüzeyin elastik eğrisi dönel simetrik dış yük için çözülmüştür.

Üçüncü bölümde ise ilk olarak, zeminin iki yönde de çalıştığı kabul edilerek ortasından tekil yük ile yüklü ince dairesel plak problemi ele alınmıştır. Çözüm sonunda plak ve yüzeye ait çökme, kesme kuvveti ve radyal eğilme momenti değişimleri incelenmiştir. Daha sonra iki parametrelili Pasternak zemininin yalnız basınç aktardığı göz önüne alınarak plağın merkezinden tekil yük, belirli bir bölgesinin düzgün yayılı yük ve şerit yük ile yüklenmesi halinde plağın tam batma ve batmama halleri incelenmiş, tam batmama halinde ayrılma noktasının yeri belirlenmiştir.

Sonuç bölümünde ayrılma noktasının plak yarıçapı ve zemin parametreleri ile değişimi yarıçap boyunca yerdeğiştirme ve kesit tesirlerinin değişimi grafiklerle gösterilmiştir.

SUMMARY

THE CIRCULAR PLATES PROBLEMS ON THE TWO-PARAMETER ELASTIC FOUNDATION

In recent years the development of solid-propellant rocket motors, the increased use of soft filaments in aerospace structures, and the building activities in the cold regions intensified the need for solutions of various problems of beams, plates and shells continuously supported by elastic or viscoelastic media.

The usual approach in formulating these problems are based on the inclusion of the foundation reaction into the corresponding differential equation of the beam, plate or shell.

The foundation is very often a rather complex medium; i.e., a rubber like fuel binder, snow or granular soil. But since of interest here is the response of the foundation at the contact area and not the stresses or displacements inside the foundation material, the problem reduces to finding a relatively simple mathematical expression which should describe the response of the foundation at the contact area with a reasonable degree of accuracy.

The problem of beams on elastic foundation has been examined firstly by Winkler in 1867. According to this hypothesis, the deflection at every point of the foundation is proportional to the pressure applied at that point and independent of pressures acting at near by points of the foundation. This assumption is equivalent to considering the foundation to be composed of independent elastic springs.

In Winkler foundation it is assumed the deflection ω , of the soil medium at any point on the surface is directly proportional to the stress p , applied at that point and independent of stresses applied at the locations i.e.

$$p(x,y)=k \omega(x,y)$$

where k is termed the modulus of subgrade reaction with units of stress per unit length. Physically Winkler's idealisation of the soil medium consists of a system of mutually independent spring elements with spring constant k .

The corresponding deformations of the foundation surface for a uniform load, are shown in Figure 1. It can be seen that for this foundation model, the displacement of the loaded region will be constant whether the foundation is subjected a rigid stamp or uniform load. While for both types of loading the displacements are zero outside the loaded region.

However for most media the displacement of the foundation surface shown in Figure 2, does not exactly follow the previous statements of the theory.

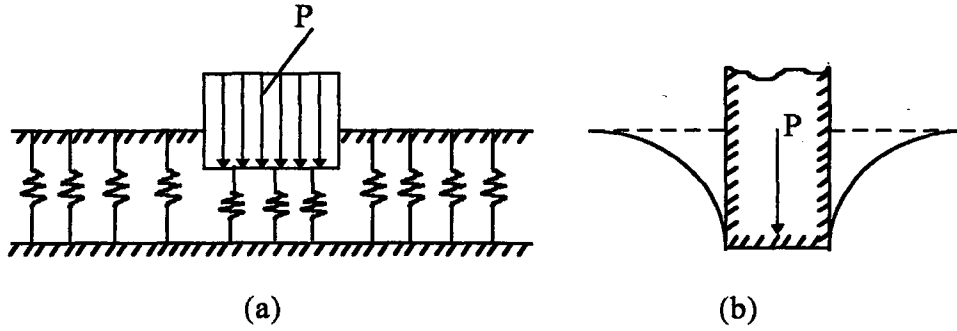


Figure 1. The Corresponding Deformations of the Foundation Surface

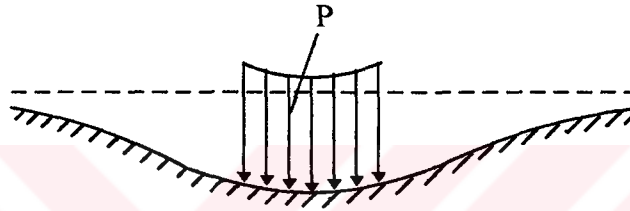


Figure 2. The Displacement of the Foundation Surface

In engineering applications, there are some important problems which can be handled successfully by means of Winkler hypothesis: the frames of ships, space vehicle, grid systems at plates and bridges, continuous foundations in one two directions, rotationally shell and perpendicular piles under the effect of the horizontal load.

In Winkler model there is only one parameter k characterising the foundation but some researchers improved two-parameter models including shear stress to make the foundation to be represented similar to the real foundation as well as possible. Some of these models are given as follows;

- 1) Filonenko-Borodich Model
- 2) Hetényi Model
- 3) Pasternak Model
- 4) Vlasov Model
- 5) Reissner Model

In Pasternak model, a shear layer is assumed which is on the Winkler springs. Pasternak considers the existence of shear interactions between the spring elements.

Assuming a shear layer to be homogeneous and isotropic in the plane (x,y) , the pressure is:

$$p(x,y) = k \omega(x,y) - G \nabla^2 \omega(x,y)$$

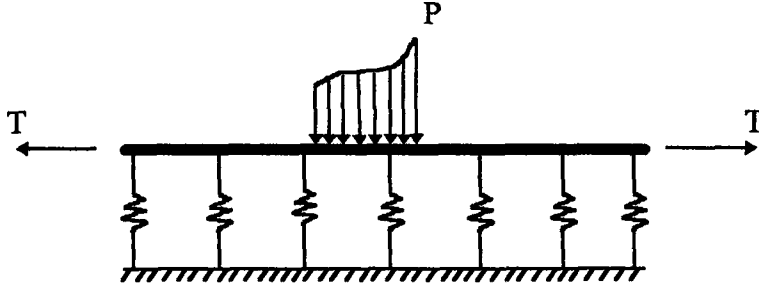


Figure 3. Pasternak Foundation Model

The second term on the right-hand side of equation is the effect of the shear interactions of the vertical elements. Here ω is the deflection of surface and G is the shear modulus of layer ∇^2 is the Laplace operator in x and y .

In the second chapter, problem of axisymmetrical deformation of circular plates on elastic single-layer foundation has been considered. The external load has been applied symmetrical relative to the plate center, so that the plate is subjected to an axisymmetrical deformation. Polar coordinates (θ, r) have been used. The origin of coordinates being placed at the plate center, and the distance from the center to a given point denoted by r . The differential equation of bending of a plate resting on an elastic single-layer foundation is in polar coordinates:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega(r,\theta)-G\nabla^2\omega+k\omega=P(r,\theta)$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

where

P =external load

D =flexural rigidity of plate

h =thickness

E =elastic modulus of plate

ν =Poisson's ratio of material of plate

By virtue of the axial symmetry, the plate deflections $\omega=\omega(r)$ are independent of the polar angle θ , then the governed equation of the plate is:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega(r)-G\nabla^2\omega(r)+k\omega(r)=P(r)$$

Laplacian ∇^2 is:

$$\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}$$

Let us replace the coordinate p by a new dimensionless independent variable

$$\rho = \frac{r}{L}$$

where L stands for a characteristic length defined as follows

$$L = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}$$

∇_ρ^2 the differential operator

$$\nabla_\rho^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}$$

The governed equation of the plate is by the dimensionless coordinate

$$\nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega - 2r_0 \nabla_\rho^2 \omega + \omega = \frac{PL^4}{D} \delta(\rho)$$

This equation differs from the equation of bending a circular plate on an elastic Winkler foundation by the term;

$$- 2r_0 \nabla_\rho^2 \omega$$

through which allowance is made for the work done by the shearing stresses acting in the single-layer foundation.

The differential equation of the plate have been solved according to Bessel and Hankel functions, then constants of integration have been calculated from boundary and continuity conditions. In the last operation, bending moments M_r, M_θ and shearing forces Q_r can be calculated as shown below:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = -D \left(\nabla_r^2 \omega - \frac{1-\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left(\nu \frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = -D \left(\nu \nabla_r^2 \omega + \frac{1-\nu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) \\ Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} \right) = -D \frac{d}{dr} (\nabla_r^2 \omega) \end{aligned}$$

As is mentioned in chapter three, behaviour of a weightless thin circular plate that subjected to a concentrated load at the origin is investigated. Firstly, we assumed that the Pasternak foundation reacts in compression and also tension. At the end of the solution, the changes of vertical displacements, radial bending moments and shear forces via the radius of circular plate are given in the figures. The effect of k (the foundation stiffness), in the displacement, shear force and bending moment is shown in related figures.

Then we assumed that the foundation reacts in compression only. In this chapter, some examples have been considered. Concentrated load at the origin, uniformly distributed load in some coaxial region and the uniformly distributed load on the circumference with radius a . In this case, the plate and foundation is contact in some region. Formulation of problem is carried out in two region. Solution in contact area is obtained using Bessel functions with complex argument. In the lift-off region, solution is calculated with analytical functions.

Using the boundary and continuity condition, some expressions obtained for the integration constants and the lift-off point. These expressions are linear in the integration constants and non-linear in the lift-off point.

Eliminating the integration constants, a tedious function occurred for the lift-off point. The root of this function which represents the lift-off point is calculated using the Newton-Raphson method, numerically.

In the end of the solution, related to the loading case, the variations of lift-off point are calculated with respect to the radius of the plate and the foundation stiffness, numerically.



BÖLÜM 1. GİRİŞ

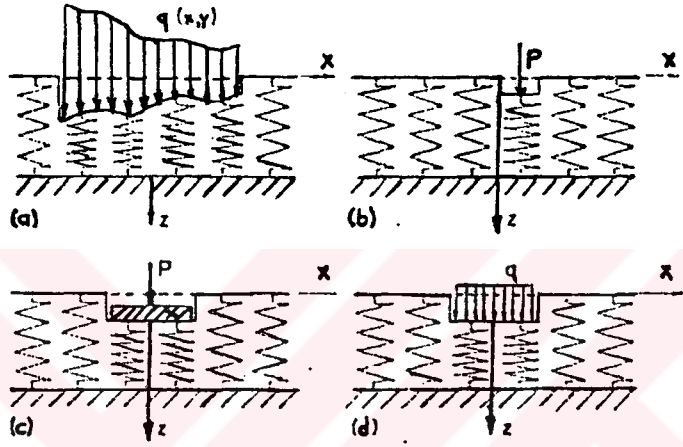
1.1. Genel Bilgiler

Elastik zemine oturan yapılar ile ilgili çalışmalar uygulama alanının genişliği nedeniyle oldukça fazladır. Burada, yapının davranışına zeminin etkisi önemlidir. Yapının bünye bağlantılarının yanısıra zeminin de bünye bağlantılarını ve aralarındaki etkileşimi bilmek gerekmektedir. Geçen yıllarda katı yakıtlı roket motorlarının gelişmesi, havacılık yapılarında yumuşak filamentlerin artan kullanımı ve soğuk bölgelerdeki bina faaliyetlerinin aktivitelerinde kirişlerin, plakların ve kabukların problemlerinin çözümüne olan ihtiyacı artırmıştır. Bu problemlerin formülasyonunda çoğu zaman yapılan yaklaşım kiriş, plak veya kabukların diferansiyel denkleminde zemin reaksiyonunun dahil edilmesine dayanmaktadır. Elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerinin matematiksel bağlantılarla belirlenmesi, zeminin oldukça karmaşık ve belirsiz elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliğinden dolayı, bazı idealleştirmeler gerektirir. Bu da matematiksel çözümlerin geçerliliğini daima sınırlar. Bu yüzden bu tür problemlerde zeminin elastikliğinin bazı kabullere göre göz önüne almak zorunluluğu vardır. Zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini değişik araştırmacılar, değişik şekillerde modellemişlerdir.

Zeminlerin elastik davranışı ile ilgili ilk önemli çalışma Winkler [1] tarafından yapılmıştır. Winkler anılan çalışmada zeminin birbirine sonsuz yakın, lineer ve elastik yaylardan meydana geldiğini kabul etmiştir. Bu hipotez oldukça basit olup, kiriş ve plak problemlerinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Buna göre $w(x,y)$ düşey doğrultudaki çökme olduğunda zeminden gelen tepki:

$$p(x,y) = k w(x,y) \quad (1.1)$$

olarak alınmaktadır. Bu k elastik yay katsayısı olup uygulamada “yatak katsayısı” veya “zemin parametresi” olarak adlandırılmaktadır. Bu parametre, düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade eder. Winkler hipotezine göre komşu yayların birbirine etkisi gözönüne alınmamaktadır. Bu nedenle yükün etki ettiği yay bir miktar çöker fakat diğer yaylarda bir değişiklik olmaz. Yani zemine etkiyen kuvvetler yalnız etki ettikleri noktada şekil değişimi yaparlar.



Şekil 1.1 (a) Üniform olmayan yayılı yük altında zeminin çökme durumu
 (b) Tekil yük altında zeminin çökme durumu
 (c) Rijit bir yük altında zeminin çökme durumu
 (d) Üniform yayılı yük altında zeminin çökme durumu

Mühendislikte Winkler hipotezi aşağıdaki problemlerde uygulanmaktadır. Bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemler, bir ve iki doğrultuda sürekli temeller, gemi kaburgaları, dönel kabuklar, yatay yük etkisindeki düşey kazıklar ve palplanşlar, su tankı ve siloların betonarme temelleri örnek olarak verilebilir.

Winkler modelinde zemini karakterize eden tek bir k parametresi vardır fakat zemini gerçeğe daha yakın modellemek için bazı araştırmacılar kayma gerilmelerini de

içeren iki parametrelili modeller geliştirmişlerdir [2]. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1. Filonenko-Borodich Modeli
2. Hetényi Modeli
3. Pasternak Modeli
4. Vlasov Modeli
5. Reissner Modeli v.b.

Filonenko-Borodich Modelinde, Winkler yaylarının yüzeyinin elastik bir zar gibi olduğı göz önüne alınmıştır. Bu modelde sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde gerilme meydana gelir. Mambran yay sisteminin dengesinden zeminin tepki fonksiyonu:

$$p(x,y) = k \omega(x,y) - T \nabla^2 \omega(x,y) \quad (1.2)$$

olarak elde edilir. T mambran kuvvetidir.

Burada;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

kartezyen koordinatlarda Laplasiyen operatörüdür. Bir boyutlu problemler için (1.2) denklemi tekrar yazılırsa

$$p(x) = k \omega(x) - T \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2} \quad (1.4)$$

bağıntısı elde edilir. Bu modelde elastik zemin parametreleri k ve T 'dir.

Hetényi Modelinde, Winkler yaylarının üzerinde, iki boyutlu problemler için bir plak, tek boyutlu problemler için elastik bir kiriş olduğu kabul edilir. Bu modelde zeminin reaksiyon fonksiyonu:

$$p(x,y) = k \omega(x,y) + D \nabla^2 \nabla^2 \omega(x,y) \quad (1.5)$$

olarak elde edilir.

Burada **D** plağın eğilme rijitliğidir. Tek boyutlu problemler için (1.5) denklemi

$$p(x) = k \omega(x) + D \frac{d^4 \omega(x)}{dx^4} \quad (1.6)$$

şeklini alır.

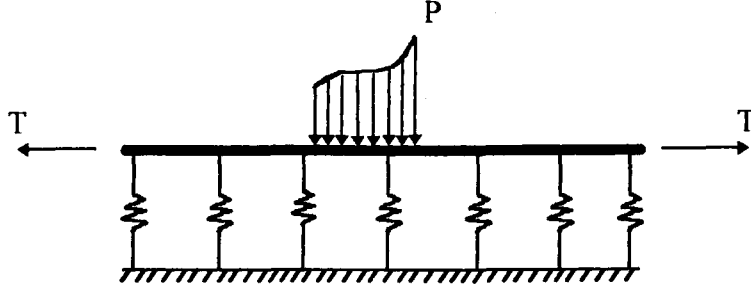
Vlasov Modelinde, diğer zemin modellerinden farklı olarak elastik zemin parametrelerinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmıştır. Bu methoda x-z düzleminde bir elastik tabaka göz önüne alınmıştır.

Zeminin reaksiyon fonksiyonu, z yönündeki virtüel iş prensibi kullanılarak;

$$p(x) = k \omega(x) - 2t \frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad (1.7)$$

şeklinde elde edilir. Bu modeldeki elastik zemin parametreleri **k** ve **t**'dir.

Pasternak Modelinde, yay elemanları üzerinde sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan bir kayma tabakası göz önüne alınmıştır.



Şekil 1.2 Pasternak zemin modeli

Kayma tabakası (x,y) düzleminde izotropik kabul edilmiş olup kayma modülü $G_x=G_y=G'$ dir. Düşey doğrultuda denge denklemleri yazıldığında zeminin tepki fonksiyonu:

$$p(x,y) = k \omega(x,y) - G \nabla^2 \omega(x,y) \quad (1.8)$$

şeklinde elde edilir. Bu modelde elastik zemin parametreleri k ve G' dir.

(1.4), (1.6) ve (1.8) bağıntılarındaki k , T , D , ve G zeminin elastik özelliklerinden doğrudan elde edilebilirler.

1.2. Konu ile İlgili Çalışmalar

Winkler tarafından geliştirilen, birçok etkene ve özellikle zeminin elastik karakteristikleri ile yüklü alanın boyutlarına bağlı olan yatak katsayısının ne alınacağı konusunda birçok araştırma yapılmıştır. Zimmerman [3] tarafından, bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabında kullanılarak, kendi özel uygulamalarında belirli türdeki zeminler için buldukları ve kullandıkları k değerini vermişlerdir.

Mühendislik problemlerinin çözümü için gerekli olan k yatak katsayılarının sayısal değerleri, yayınlanmış gözlemlere dayanarak yaklaşık benzeşimle, ya da yapının inşa edileceği zeminde yapılacak arazi deneyleri sonuçlarından elde edilebilirler. Daha sonraki yapılan araştırmalarda, bir noktadaki çökmenin belirlenmesinde bütün noktalardaki yüklerin etkisi göz önüne alınmıştır. Bu durumda çökme bilinmeyen taban basıncına bağlı olarak bir integral formunda belirlenmektedir. İntegral ifadesinin çekirdek fonksiyonu, elastik ortam olarak varsayılan zemin modellenmesine göre değişmektedir.

Winkler zemin tipi üzerinde 1946'da Hetényi [4] çalışmış ve kesin çözümlerle uğraşmıştır. Kesin çözümler büyük zaman kaybı oluşturduğu için, birçok araştırmacı bu zaman kaybını ortadan kaldırmak için daha hızlı ve genel olan çeşitli metodları geliştirerek problemleri çözmeye çalışmışlardır.

Dodge [5] de elastik zemin üzerine oturan yarı sonsuz ve sonlu uzunlukta kirişlerin davranışları ile ilgili tesir fonksiyonları ve buna ait eğriler hazırlamıştır.

Donalt [6] ise elastik zemine oturan kirişlerin, orta noktadan tekil yük ve eğilme momenti etki etmesi durumunda davranışını incelemiştir.

Miranda ve Nair [7], sonlu uzunlukta elastik zemin üzerine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yapmışlar ve bununla ilgili sayısal örnekler vermişlerdir.

Durelli ve Parks [8] tarafından elastik zemin üzerine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışması yapılmıştır. Bu kirişler bir ve iki noktadan yüklenecek davranışları incelenerek bulunan sonuçlar teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Elastik çözümlerin yanısıra plastik çözümlerde yapılmıştır. Severn [9] hem zemini hem de kirişi plastik, zemini plastik, kirişi elastik veya tam tersi olarak çalışmalar yapmıştır.

Munther [10] de sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve bulunan sonuçları, fotoelastik çalışmadan sonra elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğriler üzerinde göstermiştir.

Weistman [11] yalnız basınca çalışan Winkler ve Reissner zemin modelini kullanarak yaptığı çalışmada, tekil ve yayılı yüklerle yüklü kiriş ve plaklarda ayrılma noktası, sürekli temas, süreksiz temas durumlarını incelemiştir. Ayrıca tekil yükün yukarıya doğru olması halinde de çözüm yapılmıştır.

Ting [12], Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin bir çözümünü ortaya koymuştur. Bu çözüm; farklı sınır şartlarına sahip elastik temeller üzerindeki kirişlere benzetilerek, kullanılabilir.

Özgen [13] ise çalışmada elastik zemine oturan sonsuz uzun plastik kirişi rijit-tam plastik alarak, etkiyen düşey yükün limit değerini araştırmıştır.

Zhaohua ve Cook [14] araştırmalarında sonlu elemanların iki çeşitini bir veya iki parametrelili kirişleri analiz etmek için formüle etmişlerdir. Modeller Winkler, Filonenko-Borodich, Pasternak ve Vlasov zeminlerini içermektedir. İki elemandan biri mutlak yerdeğiştirme fonksiyonuna, diğeri kübik yerdeğiştirme fonksiyonuna dayanmaktadır. Sonuçlar mutlak yerdeğiştirme fonksiyonuna dayanan elemanların mutlak nümerik sonuçlar verdiğini göstermiş; oysa kübik bir fonksiyona dayanan elemanın kabul edilebilir sonuçlar vermesi için çok eleman kullanılması gerektiğini göstermişlerdir.

Katsikadelis ve Armenakas [15] araştırmalarında sınır integral denklemlerin nümerik değerlendirilmesiyle, sınır integral denklem (BIE) metodunu, elastik zemine oturan herhangi bir şekildeki basit destekli plakların analizinde uygulamışlardır. Elde edilen sayısal sonuçlar, analitik çözümlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, BIE metodunun avantajı ispatlanmıştır.

Ting ve Mockry [16], düzlem çerçeve analizi için, tekil yük, tekil moment ve lineer olarak yayılı kuvvetlerine bağlı olarak elastik zemin üzerindeki bir kiriş için yük

eleman vektörleri ve sonlu eleman rijitlik matrisi geliştirmiş ve bu rijitlik matris elemanının bilinen deplasman metoduna kolayca uygulanabileceğini belirtmiştir.

Lin ve Adams [17], çekme gerilmesi olmayan Winkler zeminine oturan, ağırlıklı, üzerinde bir çift yük etkisindeki sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranışını incelemişlerdir. Tekil yüklere aralıklarına, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı olarak sonuçlar elde edilmiştir. Demiryolu sistemlerindeki ilgili parametreler için örnek hesaplar ayrılma etkisinin önemli olduğunu göstermektedir.

Celep, Malaika ve Hussein [18] de çekmeye çalışmayan Winkler zeminine oturan sonlu kirişin zorlanmış titreşimlerini Galerkin yöntemini kullanarak incelemişlerdir ve çeşitli yükleme durumları ve parametreler için ayrılma noktasının değişimi ile çeşitli yerdeğiştirmelerin zamanla değişimini incelemişlerdir.

Elmas [19], elastik zemine oturan sonlu uzunluktaki ahşap ve betonarme kirişlerin davranışını incelemiştir. Bu çalışmasında orta noktadan etkiyen tekil yükün limit değeri artırılarak, kirişlerin davranışına ve limit yüke farklı malzeme ve boyutların etkiside incelemiştir.

Celep [20], gerilmesiz bir Winkler zemini üzerinde dikdörtgensel şekilli elastik plakların davranışını analiz etmiştir. Galerkin metodunu kullanarak problem cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Düzgün yayılan dış yükün çeşitli değerleri için tekil yük ve moment, temas eğrisinin şekli ve yerdeğiştirme şekillerle gösterilmiştir.

Rosa [21] ise Winkler zeminine oturan kirişlerin çeşitli mesnetleme koşulları altında, eksenel kuvvetlerin etkiside dikkate alarak Hamilton ilkesi yardımıyla titreşimini ve stabilitesini incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı kabul edilmiştir.

Kimençe [22] çalışmasında, iki parametrelili tek tabakalı elastik zemine oturan dairesel plak ve basık küresel kabuk problemlerini incelemiştir. Tek tabakalı elastik zemin parametrelerinin belirlenmesi için eksponansiyel varyasyon fonksiyonu

tanımlamıştır. İki parametrelili zemin modelini, tek parametrelili elastik Winkler zemin modeli ile çeşitli durumlar için karşılaştırmıştır.

Engin [23] elastik-plastik zemine oturan ağırlıksız kiriş ve ince dairesel plakların tekil yük altında davranışını incelemiştir. Zeminin yalnız basınç gerilmesi aktardığı ve belirli bir yerdeğiştirmede plastikleştiği kabul edilmiştir. Çözümün sonunda plastik-elastik ve yapının zeminden ayrıldığı sınırın tekil yükün şiddeti ve plağın yarıçap ile değişimi gözlenmiştir.

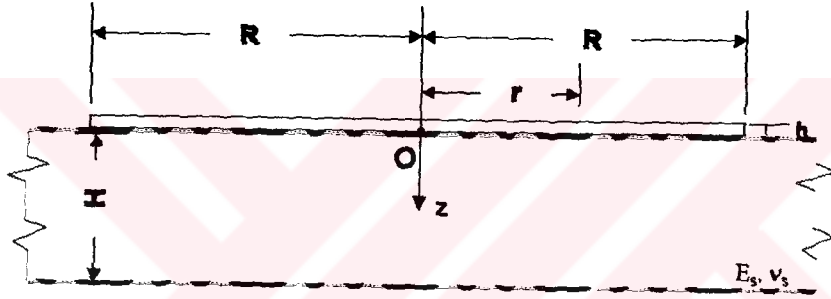
1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Bu çalışmada yalnız basınç aktaran iki parametrelili elastik bir Pasternak zeminine oturan, ağırlıksız dairesel bir plağın tekil, yayılı ve şerit düşey yükler etkisindeki davranışı incelenmiştir. Yükleme durumuna göre ortaya çıkan bölgeler dikkate alınarak yönetici denklemler elde edilmiş ve çözümler karmaşık argümanlı Bessel fonksiyonları ve analitik fonksiyonlar cinsinden elde edilmiştir. Zemin parametreleri ve plağın yarıçapına göre plağın tam batma ve batmama durumları incelenmiştir. Ayrılma olması halinde, ayrılma noktasının yerini veren ifade lineer olmayan bir fonksiyon olmaktadır. Newton-Raphson Yöntemi ile bu fonksiyonunun en küçük kökü ayrılma noktasının yerini vermektedir. Çeşitli yüklemeler altında, zemin parametreleri ve plağın yarıçapına göre ayrılma noktasının değişimi, plağın elastik eğrisi, kesme kuvveti ve radyal eğilme momentinin yarıçap boyunca değişimi grafikler yardımıyla incelenmiştir.

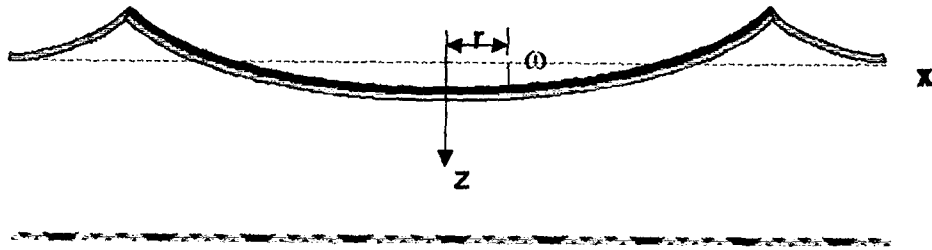
BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER

2.1. Giriş

Şekil 2.1a'da görüldüğü gibi tabaka kalınlığı H olan iki parametrelili bir Pasternak zeminine oturan R yarıçaplı ince bir dairesel plak göz önüne alalım. Plakın rijitliği D olsun. Bir $P(r,\theta)$ yüklemesi altında plak ve zeminin yüzeyi Şekil 2.1b'deki gibi olacaktır.



Şekil 2.1a Pasternak zeminine oturan dairesel plak hali



Şekil 2.1b $P(r,\theta)$ yüklemesi altında plak ve zemin yüzeyi

Herhangi bir (r,θ) noktasında plakın ve yüzeyin düşey yerdeğiştirmesi ω ise plağa ait yönetici denklem

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega(r, \theta) = \frac{P^*}{D} \quad (2.1)$$

şeklinde olacaktır. Burada ∇^2 kutupsal kordinatlardaki Laplasiyendir. Plak malzemesinde elastisite modülü E , poisson oranı ν ve plak kalınlığı h olmak üzere D plak rijitliği

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.2)$$

olarak verilmektedir. $P^*(r, \theta)$ ise plağa etki eden düşey doğrultudaki yayılı yükün bileşkesidir. Zemin ile plak arasındaki tepki kuvveti $q(r, \theta)$ ise P^* kuvveti

$$P^*(r, \theta) = P(r, \theta) - q(r, \theta) \quad (2.3)$$

olarak alınabilir.

Şekil değişimi olduktan sonra zemin yüzeyi bir mambran gibi göz önüne alınabilecektir. Mambran yüzeyinin yönetici denklemi

$$-G_1 \nabla^2 \omega(r, \theta) + k \omega(r, \theta) = q(r, \theta) \quad (2.4)$$

şeklindedir. Vlasov tip zeminlerde G_1 ve k sırasıyla zemine ait kayma katsayısı ve elastik yay sabiti (veya yatak katsayısı) dırlar. $\phi(y)$, zeminin herhangi bir y derinliğinde düşey yerdeğiştirmeyi göstermek üzere G_1 ve k parametreleri sırasıyla

$$G_1 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \int_0^H \phi'^2(y) dy$$

$$k = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \phi'^2(y) dy \quad (2.5)$$

ifadeleri ile verilmektedirler [24]. E_0 ve ν_0 sırasıyla zeminin elastisite modülü ve poisson oranıdır. (2.3)'teki $q(r,\theta)$ ifadesini (2.2) ve (2.1)'de yerine koyup düzenleme yaparsak, plağın yönetici denklemi:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega(r,\theta) - G_1\nabla^2\omega + k\omega = P(r,\theta) \quad (2.6)$$

olur.

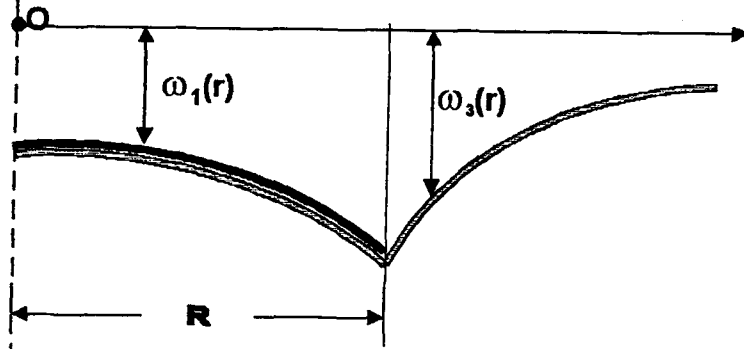
Çalışmamızda dış yüklemeyi eksenel simetrik olarak alacağız. Bu nedenle ω yerdeğiştirmesi de plak merkezine göre simetrik olacağından yönetici denklemlerde θ 'ya bağımlılık ortadan kalkacaktır. Bu durumda kutupsal koordinatlarda Laplasiyen operatörü

$$\nabla_r^2\omega = \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr} \quad (2.7)$$

olur. Eksenel simetri nedeniyle herhangi bir r =sabit yüzeyi üzerinde Q_r kesme kuvveti ve M_r radyal eğilme momenti meydana gelir. Benzer olarak θ =sabit olan radyal kesitlerde ise yalnız M_θ eğilme momenti meydana gelir. Plağa ait kesit tesirleri:

$$\begin{aligned} M_r &= -D\left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{d\omega}{dr}\right) = -D\left(\nabla_r^2\omega - \frac{1-\nu}{r}\frac{d\omega}{dr}\right) \\ M_\theta &= -D\left(\nu\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}\right) = -D\left(\nu\nabla_r^2\omega + \frac{1-\nu}{r}\frac{d\omega}{dr}\right) \\ Q_r &= -D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega}{dr}\right) = -D\frac{d}{dr}(\nabla_r^2\omega) \end{aligned} \quad (2.8)$$

olurlar. Zemin kayma gerilmesi aktarabildiği için plağın ucu ile zemin arasındaki ilişki Şekil 2.2'deki gibi olur.



Şekil 2.2 Plâğın ucu ile zemin arasındaki ilişki

ω_1 plâğın yerdeğiştirmesi, ω_3 ise yüzeyin dış kısımdaki yerdeğiştirmesi ise sınırda

$$\begin{aligned} M_r \Big|_R &= 0, \quad \omega_1(R) = \omega_3(R) \\ Q_r(R) &= -D \frac{d}{dr} \nabla_r^2 \omega_1 \Big|_R = G_1 \left(\frac{d\omega_3}{dr} - \frac{d\omega_1}{dr} \right) \Big|_R \end{aligned} \quad (2.9)$$

bağıntıları sağlanacaktır.

2.2. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Diferansiyel Denkleminin Genel Çözümü

r koordinatına bağlı olarak

$$\rho = \frac{r}{L} \quad (2.10)$$

şeklinde boyutsuz koordinat tanımlayalım [25]. Burada L boyutsuz uzunluk olup

$$L = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} \quad (2.11)$$

bağıntısıyla elde edilir.

Boyutsuz ρ koordinatına göre diferansiyel denklemi tekrar yazarsak:

$$\nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 \omega_1 - 2r_0 \nabla_{\rho}^2 \omega_1 + \omega_1 = \frac{PL^4}{D} \delta(\rho) \quad (2.12)$$

bağıntısı elde edilir.

Burada

$$r_0 = \frac{G_1 L^2}{2D} \quad (2.13)$$

dır. ρ koordinatına göre Laplasiyen operatörü ise

$$\nabla_{\rho}^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \quad (2.14)$$

dır.

(2.12) denkleminin homojen ve özel çözümleri aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$P=0$ yüksüz durumu için (2.12) denklemi

$$\nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 \omega_1 - 2r_0 \nabla_{\rho}^2 \omega_1 + \omega_1 = 0 \quad (2.15)$$

şeklinde bir homojen diferansiyel denklemdir.

Bu denklemin çözümü,

$$\nabla_{\rho}^2 \omega_1 = -\lambda^2 \omega_1 \quad (2.16)$$

bağıntısı tanımlanarak her iki yanın Laplasiyeni alınırsa

$$\nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 \omega_1 = \lambda^4 \omega_1 \quad (2.17)$$

elde edilir.

(2.16) ve (2.17) denklemi de (2.12) denkleminde yerine konulduğunda

$$\lambda^4 + 2r_0^2 \lambda^2 + 1 = 0 \quad (2.18)$$

şeklinde karakteristik denklem elde edilir. Dördüncü dereceden olan bu denklemin çözümü ise

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp \sqrt{-r_0 \mp \sqrt{r_0^2 - 1}} \quad (2.19)$$

dır.

$0 < r_0 < 1$ aralığı için (2.19) denklemi,

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp \sqrt{-r_0 \mp i \sqrt{1 - r_0^2}} \quad (2.20)$$

şeklinde karmaşık sayılarla ifade edilebilir.

$$r_0 = -\cos 2\varphi \quad \sqrt{1 - r_0^2} = \sin 2\varphi \quad (2.21)$$

şeklinde trigonometrik fonksiyonlarını tanımlayarak, (2.20) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp \sqrt{\cos 2\varphi \mp i \sin 2\varphi} = \mp \sqrt{e^{\mp 2i\varphi}} \quad (2.22)$$

Buradan $\mp \sqrt{e^{\mp 2i\varphi}} = \mp e^{\mp i\varphi}$ olarak sadeleştikten sonra (2.22) denklemi,

$$\lambda_{1,2,3,4} = \mp (\cos \varphi \mp i \sin \varphi) \quad (2.23)$$

halini alır.

(2.21) bağıntısından φ parametresi,

$$\varphi = \frac{1}{2} \left[\pi - \arctg \frac{(1-r_0^2)^{1/2}}{r_0} \right] \quad (2.24)$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak (2.12) diferansiyel denkleminin $0 < r_0 < 1$ aralığı için genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\omega_1 = A_1 J_0(\rho e^{i\varphi}) + A_2 J_0(\rho e^{-i\varphi}) + A_3 H_0^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) + A_4 H_0^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}) \quad (2.25)$$

Burada A_1, A_2, A_3 ve A_4 integrasyon sabitleri, J_0 birinci çeşit sıfıncı dereceden Bessel fonksiyonu, $H_0^{(1)}$ ve $H_0^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci çeşit sıfıncı dereceden Hankel fonksiyonlardır. (2.25)'deki fonksiyonlar tamamen karmaşıktır. Buna karşılık çözümün gerçel olabilmesi için A_1, A_2, A_3 ve A_4 integral sabitleri de karmaşık olmalıdır.

Bu yüzden

$$\begin{aligned} J_n(\rho e^{\pm i\varphi}) &= u_n(\rho) \pm i v_n(\rho) \\ u_n(\rho) &= R_e J_n(\rho e^{i\varphi}) \\ v_n(\rho) &= I_m J_n(\rho e^{i\varphi}) \\ H_n^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) &= f_n(\rho) + i g_n(\rho) \\ f_n(\rho) &= R_e H_n^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) \\ g_n(\rho) &= I_m H_n^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) \\ H_n^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}) &= f_n(\rho) - i g_n(\rho) \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklinde argümanı ρ olan $u_0(\rho)$, $v_0(\rho)$, $f_0(\rho)$ ve $g_0(\rho)$ gerçel fonksiyonları tanımlanırsa, genel çözüm ise bu fonksiyonların A_1 , A_2 , A_3 ve A_4 gerçel integral sabitleriyle çarpımı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\omega_1 = A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) + A_4 g_0(\rho) \quad (2.27)$$

Elde edilen bu fonksiyon sadece plak bölgesindeki çözüme karşılık gelir. Plakın dış bölgesindeki çökmeleri bulabilmemiz için r koordinatına bağlı olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$G_1 \nabla_r^2 \omega_3 - k \omega_3 = 0 \quad (2.28)$$

Burada ω_3 plak bölgesinin dışındaki çökme fonksiyonudur. (2.28) diferansiyel denklemini (2.10)'den yararlanarak boyutsuz ρ koordinatına göre tekrar yazarsak

$$\nabla_\rho^2 \omega_3 - \alpha^2 \omega_3 = 0 \quad (2.29)$$

Burada

$$\alpha^2 = \frac{kL^2}{G_1} \quad (2.30)$$

dır. (2.29) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$\omega_3 = D_1 I_0(\alpha\rho) + D_2 K_0(\alpha\rho) \quad (2.31)$$

şeklinde Bessel fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilir. Burada D_1 ve D_2 integral sabitleri, I_0 ve K_0 sıfırıncı dereceden birinci ve ikinci çeşit Bessel fonksiyonlarıdır.

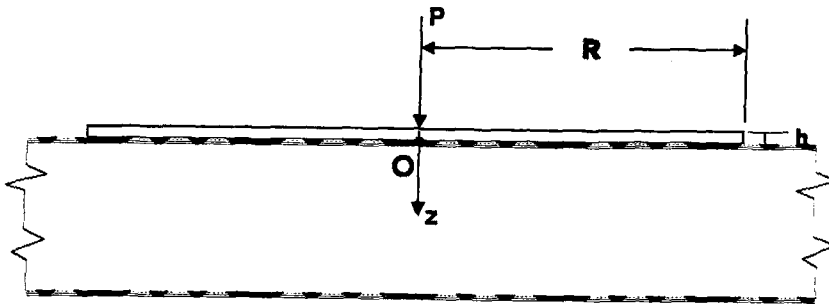
BÖLÜM 3. ÖRNEKLER

3.1. Giriş

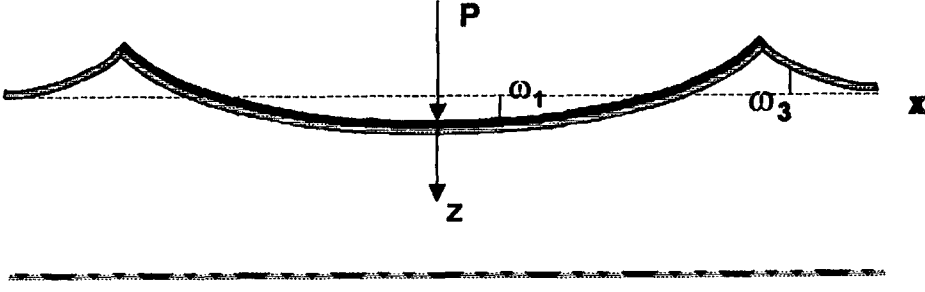
Bu bölümde, önceki bölümde çıkarılan temel denklemler ve çözüm teknikleri örnek problemlere uygulanmıştır. Kısım 3.2’de zeminin iki yönde de çalıştığı kabul edilerek ortasından tekil yük ile yüklü ince dairesel plak problemi ele alınmıştır. Çözüm sonunda plak ve yüzeyin elastik eğrisi, plağa ait kesme kuvveti ve eğilme momenti değişimleri incelenmiştir. Kısım 3.3’de iki parametrelili Pasternak zemininin yalnız basınç aktardığı göz önüne alınarak, plağın tam batması ve batmaması halleri incelenmiş, tam batmama halinde ayrılma noktasının yeri belirlenmiştir. Kısım 3.3.1’de plağın merkezinden tekil yük ile yüklenmesi, Kısım 3.3.2’de ise plağın belirli bir bölgesinin düzgün yayılı yük ile yüklenmesi, Kısım 3.3.3’de ise plağın şerit yük ile yüklenmesi halinde benzer incelemeler yapılmıştır.

3.2. Merkezinden Tekil Yük ile Yüklü Dairesel Plak Hali

Şekil 3.1a’da görüldüğü gibi rijitliği D , yarıçapı R olan dairesel bir plak merkezinden düşey doğrultuda P statik yükü ile yüklendiğini kabul edelim. Şekil değişiminden sonra plak ve yüzeyin bir θ =sabit düzlemi boyunca elastik eğrisi Şekil 3.1b’deki gibi olacaktır. Şekilden de görüldüğü gibi zemin iki yönde de gerilme aktarabilmektedir.



Şekil 3.1a Tekil yük ile yüklü plak hali



Şekil 3.1b Plak ve yüzeyin elastik eğrisi

Plak ve yüzeye ait yönetici denklemler (2.6) ve (2.28)'den

$$\begin{aligned} D\nabla_r^2\nabla_r^2\omega_1 - G_1\nabla_r^2\omega_1 + k\omega_1 &= P\delta(r), \quad 0 \leq r \leq R \\ G_1\nabla_r^2\omega_3 - k\omega_3 &= 0, \quad R \leq r \leq \infty \end{aligned} \quad (3.1)$$

olurlar. Burada ω_1 plağın düşey yerdeğiştirmesini, ω_3 de plağın dışında kalan zemin yüzeyinin düşey yerdeğiştirmesini göstermektedir. $\delta(r)$ ise bilindiği gibi Dirac deltasıdır. Yönetici denklemleri (2.10), (2.11) ve (2.13)'de tanımlanan boyutsuz büyüklükler cinsinden yazarsak

$$\begin{aligned} \nabla_\rho^2\nabla_\rho^2\omega_1 - 2r_0\nabla_\rho^2\omega_1 + \omega_1 &= \frac{PL^4}{D}\delta(\rho) \\ \nabla_\rho^2\omega_3 - \alpha^2\omega_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

olur. Burada α^2 ve r_0

$$r_0 = \frac{G_1L^2}{2D} \quad \alpha^2 = \frac{kL^2}{G_1} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanmıştır. Problemin sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$1) \omega_1 \Big|_{\rho=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
2) (2\pi\rho Q_\rho) \Big|_{\rho=0} &= -\frac{PL^4}{D} = -\bar{P} \\
3) M_\rho \Big|_{\rho=R_1} &= 0 \\
4) \omega_1 \Big|_{R_1} &= \omega_3 \Big|_{R_1} \\
5) Q_\rho \Big|_{R_1} &= 2r_0(\omega'_3 - \omega'_1) \Big|_{R_1} \\
6) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_3(\rho) &= \text{sonlu}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Burada R_1 boyutsuz plak yarıçapı olup $R_1=R/L$ olarak tanımlanmıştır. Önceki bölümdeki bilgilerden faydalanarak (3.2) yönetici denklemlerinin çözümü:

$$\begin{aligned}
\omega_1(\rho) &= A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) + A_4 g_0(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq R_1 \\
\omega_3(\rho) &= B_1 I_0(\alpha\rho) + B_2 K_0(\alpha\rho), \quad R_1 \leq \rho \leq \infty
\end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak alınabilir. A_1, A_2, A_3, A_4, B_1 ve B_2 integrasyon sabitleri olup (3.4) sınır koşullarından hesaplanacaklardır. Yukarıdaki koşullara ilave olarak $\rho=0$ da yerdeğiştirme de sonlu olmalıdır. $\rho \rightarrow 0$ da $f_0(\rho)$, $\rho^2 \ln \rho$ tipinde bir tekilliğe sahiptir. $\rho \rightarrow 0$ da $g_0(\rho)$ fonksiyonu ise sonsuz olmaktadır. $\rho \rightarrow \infty$ için $u_0(\rho)$, $v_0(\rho)$, $f_0(\rho)$ ve $g_0(\rho)$ fonksiyonları sıfıra giderler. $\rho \rightarrow \infty$ için $I_0(\alpha\rho)$ sonsuza gittiği için (3.4)₆ dikkate alındığında $B_1=0$ seçilmelidir. $\rho \rightarrow 0$ da yerdeğiştirmenin sonlu olması nedeniyle $A_4=0$ seçilebilir. Fonksiyonların çeşitli mertebeden türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
u'_0(\rho) &= -u_1(\rho)\cos\varphi + v_1(\rho)\sin\varphi \\
v'_0(\rho) &= -u_1(\rho)\sin\varphi - v_1(\rho)\cos\varphi \\
f'_0(\rho) &= -f_1(\rho)\cos\varphi + g_1(\rho)\sin\varphi \\
g'_0(\rho) &= -f_1(\rho)\sin\varphi - g_1(\rho)\cos\varphi
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
u_0''(\rho) &= u_0(\rho)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + 2v_0(\rho)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{\rho}(u_1(\rho)\cos\varphi - v_1(\rho)\sin\varphi) \\
v_0''(\rho) &= v_0(\rho)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - 2u_0(\rho)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{\rho}(u_1(\rho)\sin\varphi + v_1(\rho)\cos\varphi) \\
f_0''(\rho) &= f_0(\rho)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) + 2g_0(\rho)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{\rho}(f_1(\rho)\cos\varphi - g_1(\rho)\sin\varphi) \\
g_0''(\rho) &= g_0(\rho)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) - 2f_0(\rho)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{\rho}(f_1(\rho)\sin\varphi + g_1(\rho)\cos\varphi)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$K'_0(\alpha\rho) = -\alpha K_1(\alpha\rho) \tag{3.8}$$

$\rho \rightarrow 0$ için $f_1(\rho)$ ve $g_1(\rho)$ fonksiyonlarının davranışı

$$\begin{aligned}
f_1(\rho) &\approx -\frac{2}{\pi\rho} \sin\varphi \\
g_1(\rho) &\approx -\frac{2}{\pi\rho} \cos\varphi
\end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklindedir. $u_1(\rho)$ ve $v_1(\rho)$ fonksiyonları ise $\rho \rightarrow 0$ 'da sifıra giderler. (3.4)₁ sınır koşulu göz önüne alınırsa:

$$\begin{aligned}
\omega'_1 \Big|_{\rho=0} = 0 &\rightarrow A_1(-u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) \Big|_{\rho=0} - A_2(u_1 \sin\varphi + v_1 \cos\varphi) \Big|_{\rho=0} \\
&+ A_3\left(\frac{2}{\pi\rho} \sin\varphi \cos\varphi - \frac{2}{\pi\rho} \cos\varphi \sin\varphi\right) \Big|_{\rho \rightarrow 0} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan bu sınır koşulunun özdeş olarak sağlandığı görülmektedir.

(2.8) ifadeleri ve (3.6), (3.7) ve (3.8)'den faydalananak kesit tesirleri:

$$\begin{aligned}
M_\rho &= -\frac{D}{L^2} \left\{ A_1 \left[-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi + \frac{v-1}{\rho} (-u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) \right] \right. \\
&\quad \left. + A_2 \left[-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi + \frac{v-1}{\rho} (-u_1 \sin\varphi - v_1 \cos\varphi) \right] \right\} \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +A_3 \left[-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi + \frac{v-1}{\rho} (-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) \right] \} \\
Q_\rho = & -\frac{D}{L^3} \{ A_1 [u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi] + A_2 [u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos \varphi] \\
& +A_3 [f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi] \} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

(3.4)₂ sınır koşulunu ele alırsak

$$\begin{aligned}
2\pi(\rho Q_\rho) \Big|_{\rho=0} & = -2\pi A_3 \frac{D}{L^3} \left(-\frac{2}{\pi} \sin \varphi \cos 3\varphi + \frac{2}{\pi} \sin 3\varphi \cos \varphi \right) = -\bar{P} \\
A_3 & = \frac{\bar{P} L^3}{4D \sin 2\varphi} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

olarak A_3 bilinmeyişi elde edilir. (3.4)₃ koşulunun ifadesi:

$$\begin{aligned}
M_\rho = & -\frac{D}{L^2} \left\{ A_1 \left[-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi + \frac{v-1}{\rho} (-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) \right] \right. \\
& +A_2 \left[-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi + \frac{v-1}{\rho} (-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) \right] \\
& \left. +A_3 \left[-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi + \frac{v-1}{\rho} (-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) \right] \right\} \Big|_{\rho=R_1} = 0 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

(3.4)₄ koşulu:

$$A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) \Big|_{\rho=R_1} = B_2 K_0(\alpha \rho) \Big|_{\rho=R_1} \quad (3.14)$$

(3.4)₅ koşulu:

$$\begin{aligned}
& [(u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + A_2 (u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) \\
& +A_3 (f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi)] \Big|_{\rho=R_1} = 2r_0 \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\left[-\alpha B_2 K_1(\alpha \rho) - A_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + A_2(u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) - A_3(-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) \right] \Big|_{\rho=R_1}$$

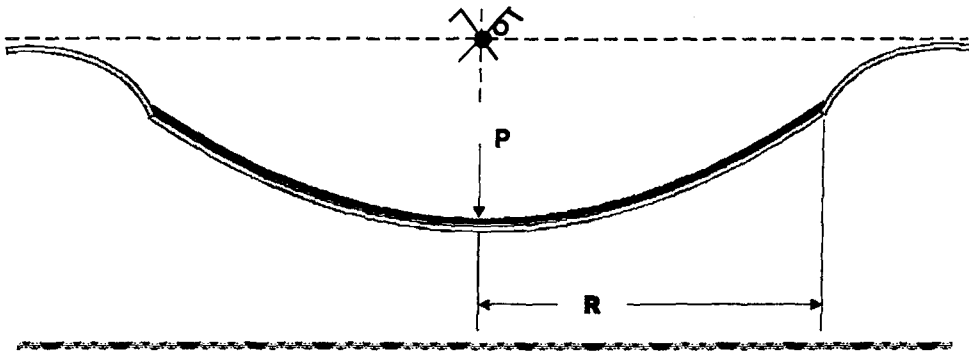
Bu üç koşuldan geri kalan A_1 , A_2 ve B_2 bilinmeyenleri hesaplanacaktır.

Bu işlemler sonunda çözüm tamamlanmış olmaktadır. Sonuçlar bölümünde çeşitli zemin katsayıları ve R plak yarıçapına göre çökme, radyal moment ve kesme kuvvetinin yarıçap boyunca değişimi verilmiştir.

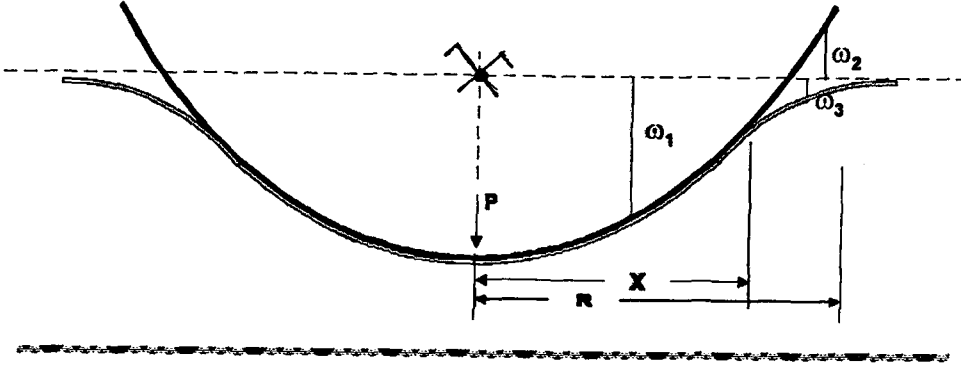
3.3. Yalnız Basınç Gerilmesi Aktaran Pasternak Zeminine Oturan Dairesel Plak Hali

3.3.1. Merkezinden Tekil Yükle Yüklü Plak

Bu kısımda Pasternak zemininin yalnız basınç gerilmesi aktardığı kabul edilerek, merkezinden tekil yükle yüklü bir dairesel plak problemi ele alınmıştır. Bu halde zemin parametreleri ve R plak yarıçapına göre, plak zemine tam olarak gömülebilmekte (Şekil 3.2a), veya plağın bir kısmı zeminden (Şekil 3.2b) ayrılabilir. Şekil 3.2a Tam batma hali



Şekil 3.2a Tam batma hali



Şekil 3.2b Tam batmama hali

Plağın tam batması halinde çözüm Kısım (3.2)'de olduğu gibidir. Bu nedenle burada tekrarlanmayacaktır. Plağın tam batmaması halinde Şekil 3.2b'de görüldüğü gibi $r=X$ çemberi üzerinde plak zeminden ayrılmaktadır. Bu çember üzerinde herhangi bir nokta “ayrılma noktası”, plak ile zeminin temasta olduğu bölge “değme bölgesi”, diğer bölge de “ayrılma bölgesi” olarak adlandırılmıştır. Başlangıçta bu noktanın yeri bilinmemektedir. Plak elastik eğrisi $0 \leq r \leq X$ bölgesinde $\omega_1(r)$, $X \leq r \leq R$ bölgesinde $\omega_2(r)$ olarak adlandırılmıştır. Zemin yüzeyinin elastik eğrisi yine $X \leq r \leq \infty$ için $\omega_3(r)$ olarak alınmıştır. Buna göre boyutsuz büyüklükler cinsinden her üç bölgenin yönetici denklemleri:

$$\nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_1 - 2r_0 \nabla_\rho^2 \omega_1 + \omega_1 = \bar{P}\delta(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq X_1 \quad (3.16)$$

$$\nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_2 = 0, \quad X_1 \leq \rho \leq R_1 \quad (3.17)$$

$$\nabla_\rho^2 \omega_3 - \alpha^2 \omega_3 = 0, \quad X_1 \leq \rho \leq \infty \quad (3.18)$$

olur. ω_1 ve ω_3 için olan çözüm fonksiyonları Kısım 3.2 de verildiği gibidir. ω_2 için olan çözüm ise,

$$\omega_2 = C_1 \rho^2 \ln \rho + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \quad (3.19)$$

olarak bilinmektedir [26]. C_1 , C_2 , C_3 ve C_4 bilinmeyen sabitler olup, sınır koşullarından elde edilirler. Değme bölgesi ile zemin yüzeyine ait genel çözümler

(3.5)'den:

$$\begin{aligned}\omega_1(\rho) &= A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) + A_4 g_0(\rho) \\ \omega_3(\rho) &= B_1 I_0(\alpha\rho) + B_2 K_0(\alpha\rho)\end{aligned}\quad (3.20)$$

olurlar. Problemin sınır koşulları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}1) \omega_1' \Big|_0 &= 0 \\ 2) 2\pi(\rho Q_\rho) \Big|_{\rho \rightarrow 0} &= -\bar{P} \\ 3) \omega_1(X_1) &= \omega_2(X_1) \\ 4) \omega_1'(X_1) &= \omega_2'(X_1) \\ 5) M_\rho^{(1)}(X_1) &= M_\rho^{(2)}(X_1) \\ 6) Q_\rho^{(1)}(X_1) &= Q_\rho^{(2)}(X_1) \\ 7) \omega_1(X_1) &= \omega_3(X_1) \\ 8) \omega_1'(X_1) &= \omega_3'(X_1) \\ 9) M_\rho^{(2)}(R_1) &= 0 \\ 10) Q_\rho^{(2)}(R_1) &= 0 \\ 11) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_3(\rho) &= \text{sonlu}\end{aligned}\quad (3.21)$$

$\rho \rightarrow 0$ ile ilgili durum Kısım 3.2'deki gibi olup aynı muhakeme yolu ile $A_4=0$

$$A_3 = \frac{\bar{P}L^3}{4D\sin 2\varphi}\quad (3.22)$$

olarak elde edilirler. $\omega_1'(\rho) \Big|_0 = 0$ koşulu da özdeş olarak sağlanır. $\rho \rightarrow \infty$ için

$\omega_3(\rho)$ yerdeğiştirmesinin sonlu olabilmesi için $B_1=0$ olmalıdır. (3), (4), (5) ve (6) numaralı koşullar ayrılma noktasında çökme, eğim, radyal eğilme momenti ve kesme kuvvetinin sürekliliğini ifade etmektedirler. (8) ve (9) numaralı koşullar ayrılma noktasında plak ile zemin yüzeyi arasındaki süreklilik koşullarıdır. Eğim ile ilgili süreklilik [27] de ispat edilmiştir. X_1 ayrılma bölgesinin boyutsuz sınırı olup

$X_1 = X/L$ olarak tanımlanmıştır.

Ayrılma bölgesinde dairesel bir kesim yapıp dışta kalan parçayı alırsak, düşey doğrultuda kuvvetlerin dengesinden:

$$2\pi\rho Q_p^{(2)} = 0 \rightarrow Q_p^{(2)} = 0$$

elde edilir. Dönel simetri nedeniyle radyal eğilme momenti ve enine eğilme momentleri kendi aralarında dengede olurlar. Buradan ayrılma bölgesinde kesme kuvveti olmayacağı ortaya çıkar. Bu koşulu (3.19) çözümünde kullanırsak $C_1 = 0$ elde edilir. Buna ilave olarak (6) numaralı koşul

$$Q_p^{(1)}(X_1) = 0 \quad (3.23)$$

olarak değişir ve (10) numaralı koşul da özdeş olarak sağlanır. Bu işlemler sonunda A_1, A_2, C_2, C_3, C_4 ve B_2 sabitleri ile ayrılma noktasının X koordinatı olmak üzere 7 adet bilinmeyen kalmıştır. Geri kalan sınır koşullarının düzenlenmesinden aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

(3)'den:

$$A_1 u_0(X_1) + A_2 v_0(X_1) + A_3 f_0(X_1) = C_2 X_1^2 + C_3 \ln X_1 + C_4$$

(4)'den:

$$A_1(-u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) + A_2(-u_1 \sin\varphi - v_1 \cos\varphi) + A_3(-f_1 \cos\varphi + g_1 \sin\varphi) = 2C_2 X_1 + \frac{C_1}{X_1}$$

(5)'den:

$$A_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) + A_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) + A_3(-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi) = 4C_2$$

(6)'dan:

$$A_1(u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + A_2(u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) + A_3(f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi) = 0 \quad (3.24)$$

(7)'den:

$$A_1 u_0(X_1) + A_2 v_0(X_1) + A_3 f_0(X_1) = B_2 K_0(\alpha X_1)$$

(8)'den:

$$A_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + B_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) + A_3(-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) = -\alpha B_2 K_1(\alpha X_1)$$

(9)'dan:

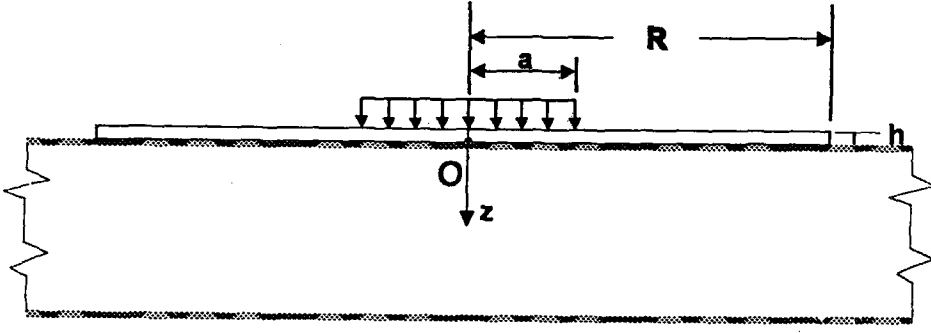
$$2C_2(1+\nu) + \frac{\nu-1}{X_1^2} C_3 = 0$$

olmak üzere 7 bilinmeyen için denklem elde edilmiştir. Denklemlerden de görüldüğü gibi denklemler integral sabitlerine göre lineer, X_1 bilinmeyenine göre ise nonlineerdir. Bu nedenle ilk 6 denklemden integral sabitleri X_1 cinsinden elde edilmekte son denklemden de X_1 koordinatı Newton-Raphson yöntemi ile sayısal olarak hesaplanmaktadır. Sonuçlar bölümündeki şekillerde ayrılma noktasının plak yarıçapı ve zemin parametreleri ile değişimi ve yarıçap boyunca yerdeğiştirme ve kesit tesirlerinin değişimi verilmiştir.

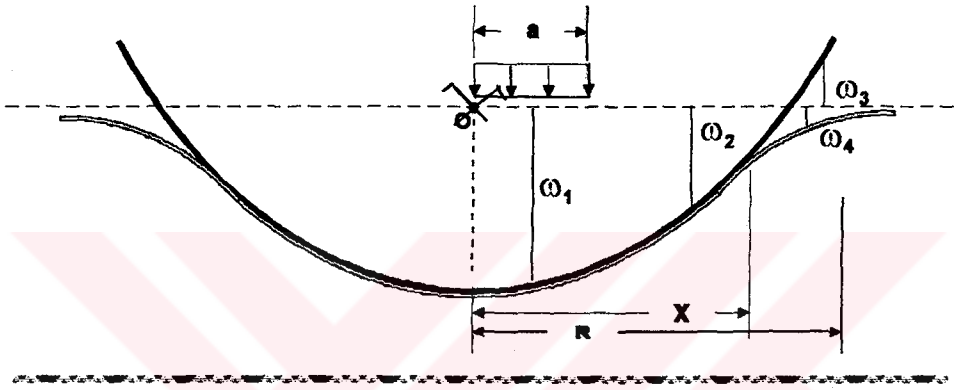
3.3.2. Yayılı Yükle Yüklü Plak

3.3.2.1. Yayılı Yükün Değme Bölgesinde Olması Hali:

Şekil 3.3a'da görüldüğü gibi dairesel plağın a yarıçaplı bölgesi düzgün yayılı yük ile yüklenmiş olsun. Bu durumda ilk olarak plak elastik eğrisini Şekil 3.3b'deki gibi kabul edelim.



Şekil 3.3a Değme bölgesinde yayılı yüklü ile yüklü plak



Şekil 3.3b Plak ve yüzeyin elastik eğrisi

Şekillerden de görüldüğü gibi plak için üç ayrı elastik eğri ve yüzey için bir elastik eğri olur. Yerdeğiştirmeler sırasıyla:

$$\begin{aligned}\omega_1(\rho): & 0 \leq \rho \leq a_1 \quad \text{için} \\ \omega_2(\rho): & a_1 \leq \rho \leq X_1 \quad \text{için} \\ \omega_3(\rho): & X_1 \leq \rho \leq R_1 \quad \text{için} \\ \omega_4(\rho): & X_1 \leq \rho < \infty \quad \text{için (yüzey için)}\end{aligned}$$

olarak alınmıştır. Burada a_1 yayılı yükün yüklendiği boyutsuz yarıçaptır. Bölgelere göre yönetici denklemler

$$\begin{aligned}\nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_1 - 2r_0 \nabla_\rho^2 \omega_1 + \omega_1 &= \bar{p} \\ \nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_2 - 2r_0 \nabla_\rho^2 \omega_2 + \omega_2 &= 0\end{aligned}\tag{3.25}$$

$$\nabla_{\rho}^2 \nabla_{\rho}^2 \omega_3 = 0$$

$$\nabla_{\rho}^2 \omega_4 - \alpha^2 \omega_4 = 0$$

şeklindedir. Burada $\bar{p} = \frac{pL^2}{Dk}$ olarak tanımlanmış boyutsuz yayılı yüküdür. Bu denklemlere ait çözümler önceki kısımlarda olduğu gibi :

$$\omega_1(\rho) = A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) + A_4 g_0(\rho) + \bar{p} \quad (3.26)$$

$$\omega_2(\rho) = B_1 u_0(\rho) + B_2 v_0(\rho) + B_3 f_0(\rho) + B_4 g_0(\rho) \quad (3.27)$$

$$\omega_3(\rho) = C_1 \rho^2 \ln \rho + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \quad (3.28)$$

$$\omega_4(\rho) = D_1 I_0(\alpha\rho) + D_2 K_0(\alpha\rho) \quad (3.29)$$

Problemın sınır koşulları ise aşağıdaki gibidir:

- 1) $\omega_1'(\rho) \Big|_0 = 0$
- 2) $2\pi(\rho Q_{\rho}) \Big|_{\rho \rightarrow 0} = 0$
- 3) $\omega_1(a_1) = \omega_2(a_1)$
- 4) $\omega_1'(a_1) = \omega_2'(a_1)$
- 5) $M_{\rho}^{(1)}(a_1) = M_{\rho}^{(2)}(a_1)$
- 6) $Q_{\rho}^{(1)}(a_1) = Q_{\rho}^{(2)}(a_1) \quad (3.30)$
- 7) $\omega_2(X_1) = \omega_3(X_1)$
- 8) $\omega_2'(X_1) = \omega_3'(X_1)$
- 9) $M_{\rho}^{(2)}(X_1) = M_{\rho}^{(3)}(X_1)$
- 10) $Q_{\rho}^{(2)}(X_1) = 0$
- 11) $M_{\rho}^{(3)}(R_1) = 0$
- 12) $Q_{\rho}^{(3)}(R_1) = 0$
- 13) $\omega_2(X_1) = \omega_4(X_1)$
- 14) $\omega_2'(X_1) = \omega_4'(X_1)$
- 15) $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_4(\rho) = \text{sonlu}$

olarak 15 bilinmeyen için 15 denklem elde edilir. $\rho \rightarrow 0$ daki sonluluk ve kesme kuvvetinin sıfır olmasından, (12) ve (15) koşullarının da kullanılmasından

$$A_3 = A_4 = C_1 = D_1 = 0$$

olur. Geri kalan sınır koşullarının değerlendirilmesinden aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

(3)'den

$$A_1 u_0 + A_2 v_0 + \bar{p} \Big|_{\rho=a_1} = B_1 u_0 + B_2 v_0 + B_3 f_0 + B_4 g_0 \Big|_{\rho=a_1}$$

(4)'den

$$\begin{aligned} A_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + A_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=a_1} &= B_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) \\ &+ B_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) + B_3(-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) + B_4(-f_1 \sin \varphi - g_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=a_1} \end{aligned}$$

(5)'den

$$\begin{aligned} A_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) + A_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=a_1} &= B_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) \\ &+ B_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) + B_3(-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi) + B_4(-f_0 \sin 2\varphi - g_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=a_1} \end{aligned}$$

(6)'dan

$$\begin{aligned} A_1(-u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + A_2(u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) \Big|_{\rho=a_1} &= B_1(u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) \\ &+ B_2(u_1 \sin 3\varphi - v_1 \cos 3\varphi) + B_3(f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi) + B_4(f_1 \sin 3\varphi + g_1 \cos 3\varphi) \Big|_{\rho=a_1} \end{aligned}$$

(7)'den

$$B_1 u_0 + B_2 v_0 + B_3 f_0 + B_4 g_0 \Big|_{\rho=X_1} = C_2 X_1^2 + C_3 \ln X_1 + C_4 \Big|_{\rho=X_1}$$

(8)'den

(3.31)

$$B_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + B_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) + B_3(-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) \\ + B_4(-f_1 \sin \varphi - g_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 2C_2 X_1 + \frac{C_3}{X_1} \Big|_{\rho=X_1}$$

(9)'dan

$$B_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) + B_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) + B_3(-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi) \\ B_4(-f_0 \sin 2\varphi + g_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 4C_2 \Big|_{\rho=X_1}$$

(10)'dan

$$B_1(u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + B_2(u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) + B_3(f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi) \\ + B_4(f_1 \sin 3\varphi + g_1 \cos 3\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 0$$

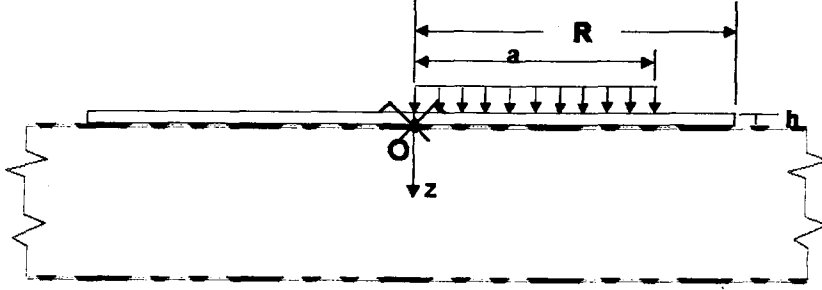
(11)'den

$$2 C_2(1+\nu) + \frac{\nu-1}{R_1^2} C_3 = 0$$

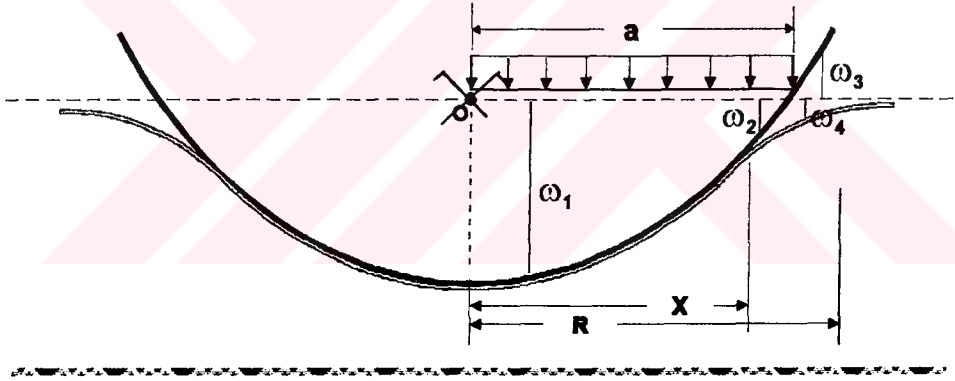
olmak üzere 11 bilinmeyen için 11 adet denklem elde edilmiştir. $A_1, A_2, B_1, B_2, B_3, C_2, C_3, C_4$ ve D_4 integral sabitleri ilk on denklemden X_1 cinsinden elde edilmekte son denklemde de X_1 koordinatı Newton-Raphson yöntemi ile sayısal olarak hesaplanmaktadır. Sonuç bölümünde ayrılma noktasının, plak yarıçapı ve zemin parametreleri ile değişimi ve yarıçap boyunca yerdeğiştirme ve kesit tesirlerinin değişimi verilmiştir.

3.3.2.2. Yayılı Yükün Ayrılma Bölgesini Aşması Hali

Şekil 3.4a'da görüldüğü gibi plağın a yarıçaplı büyük bir bölgesi düzgün yayılı yük ile yüklenmiştir. Bu durumda plak elastik eğrisini Şekil 3.4b'deki gibi kabul edelim.



Şekil 3.4a Ayrılma bölgesini aşacak şekilde yayılı yük ile yüklenmiş plak hali



Şekil 3.4b Yayılı yük halinde plak ve yüzeyin elastik eğrisi

Şekilden de görüldüğü gibi plak için üç ayrı elastik eğri ve yüzey için bir elastik eğri vardır. Yerdeğiştirmeler sırasıyla:

$$\omega_1(\rho): 0 \leq \rho \leq X_1 \quad \text{için}$$

$$\omega_2(\rho): X_1 \leq \rho \leq a_1 \quad \text{için}$$

$$\omega_3(\rho): a_1 \leq \rho \leq R_1 \quad \text{için}$$

$\omega_4(\rho)$: $X_1 \leq \rho < \infty$ için (yüzey için)

yukarıdaki gibi alınmıştır. Bölgelere göre yönetici denklemler

$$\begin{aligned}
 \nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_1 - 2r_0 \nabla_\rho^2 \omega_1 + \omega_1 &= \bar{p} \\
 \nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_2 &= \frac{p}{D} \\
 \nabla_\rho^2 \nabla_\rho^2 \omega_3 &= 0 \\
 \nabla_\rho^2 \omega_4 - \alpha^2 \omega_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

şeklindedir. Bu denklemlere ait çözümler ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 \omega_1(\rho) &= A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) + A_4 g_0(\rho) + \bar{p} \\
 \omega_2(\rho) &= B_1 \rho^2 \ln \rho + B_2 \rho^2 + B_3 \ln \rho + B_4 + \frac{\bar{p} \rho^4}{64} \\
 \omega_3(\rho) &= C_1 \rho^2 \ln \rho + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \\
 \omega_4(\rho) &= D_1 I_0(\alpha \rho) + D_2 K_0(\alpha \rho)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

olur. Problemin sınır koşulları ise:

$$\begin{aligned}
 1) \omega_1'(\rho) \Big|_0 &= 0 \\
 2) 2\pi(\rho Q_\rho) \Big|_{\rho \rightarrow 0} &= 0 \\
 3) \omega_1(X_1) &= \omega_2(X_1) \\
 4) \omega_1'(X_1) &= \omega_2'(X_1) \\
 5) M_1^{(1)}(X_1) &= M_2^{(2)}(X_1) \\
 6) Q_1^{(1)}(X_1) &= Q_2^{(2)}(X_1) \\
 7) \omega_1(X_1) &= \omega_4(X_1) \\
 8) \omega_1'(X_1) &= \omega_4'(X_1) \\
 9) \omega_2(a_1) &= \omega_3(a_1) \\
 10) \omega_2'(a_1) &= \omega_3'(a_1)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$11) M_2^{(2)}(a_1) = M_3^{(2)}(a_1)$$

$$12) Q_2^{(2)}(a_1) = Q_3^{(2)}(a_1)$$

$$13) Q_p^{(3)} = 0$$

$$14) M_p^{(3)}(R_1) = 0$$

$$15) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \omega_4(\rho) = \text{sonlu}$$

olarak 15 bilinmeyen için 15 denklem elde edilir. (1), (2), (13) ve (14) koşullarının kullanılmasında

$$A_3 = A_4 = C_1 = D_1 = 0$$

olur. (12) koşulundan ise

$$B_1 = -\frac{1}{8} \bar{p} a^2 \quad (3.35)$$

olarak elde edilir. Geriye kalan sınır koşullarının değerlendirilmesinden ise aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

(3)'den

$$A_1 u_0 + A_2 v_0 + \bar{p} \Big|_{\rho=X_1} = B_1 X_1^2 \ln X_1 + B_2 X_1^2 + B_3 \ln X_1 + B_4 + \frac{\bar{p} X_1^4}{64} \Big|_{\rho=X_1}$$

(4)'den:

$$A_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + A_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=X_1} = B_1 X_1(2 \ln X_1 + 1) + 2B_2 X_1 +$$

$$B_3 \frac{1}{X_1} + \frac{\bar{p} X_1^3}{16k} \Big|_{\rho=X_1}$$

(3.36)

(5)'den:

$$A_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) + A_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 4B_1(\ln X_1 + 1) \Big|_{\rho=X_1}$$

(6)'dan:

$$A_1(-u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + A_2(u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = \frac{4B_1}{X_1} + \frac{1}{2} \bar{p} X_1 \Big|_{\rho=X_1}$$

(7)'den:

$$A_1 u_0 + A_2 v_0 + \bar{p} \Big|_{\rho=X_1} = D_2 K_0(\alpha X_1) \Big|_{\rho=X_1}$$

(8)'den:

$$A_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + A_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=X_1} = -\alpha D_2 K_1(\alpha X_1) \Big|_{\rho=X_1}$$

(9)'dan:

$$B_1 a_1^2 \ln a_1 + B_2 a_1^2 + B_3 \ln a_1 + B_4 + \frac{\bar{p} a_1^4}{64} \Big|_{\rho=a_1} = C_2 a_1^2 + C_3 \ln a_1 + C_4 \Big|_{\rho=a_1}$$

(10)'dan

$$B_1 a_1(2 \ln a_1 + 1) + 2B_2 a_1 + \frac{B_3}{a_1} + \frac{\bar{p} a_1^3}{16} \Big|_{\rho=a_1} = 2C_2 a_1 + \frac{C_3}{a_1} \Big|_{\rho=a_1}$$

(11)'den

$$4B_1(\ln a_1 + 1) + 4B_2 + \frac{1}{4} \bar{p} a_1^2 \Big|_{\rho=a_1} = 4C_2 \Big|_{\rho=a_1}$$

(15)'den

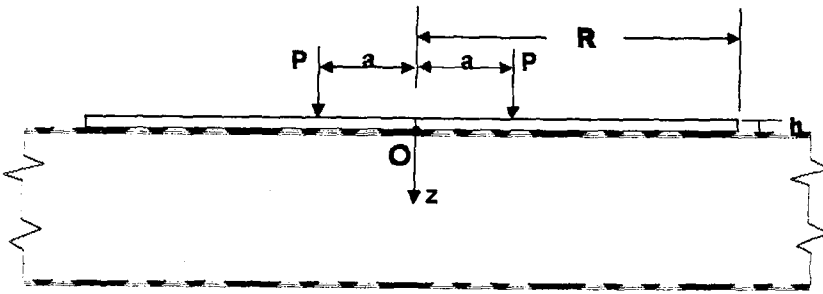
$$C_2 = \frac{1-\nu}{2((1+\nu)(R_1^2))} C_3$$

elde edilen bu 10 denklemden 10 adet bilinmeyen integral sabitleri ve X_1 koordinatı hesaplanır. Şekillerde ayrılma noktasının plak yarıçapı ve zemin parametreleri ile değişimi ve yarıçap boyunca yerdeğiştirme ve kesit tesirlerinin değişimi verilmiştir.

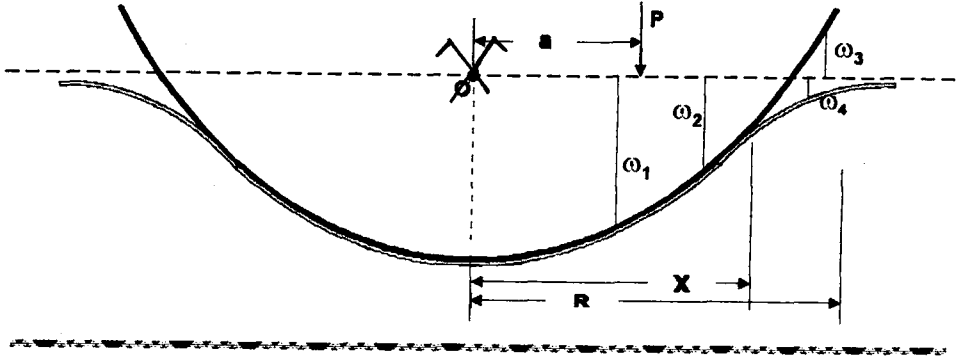
3.3.3. Şerit Yükle Yüklü Plak Hali

Şekil 3.5a'da görüldüğü gibi a yarıçaplı bir çember üzerinde yayılı şerit yükle yüklü plağı göz önüne alalım. Şekil değişiminden sonra plak elastik yüzeyi Şekil 3.5b'deki gibi olacaktır. Plağa ait yönetici denklemler:

$$\begin{aligned} D\nabla_r^2 \nabla_r^2 \omega_1 - G_1 \nabla_r^2 \omega_1 + k\omega_1 &= 0, & 0 \leq r \leq a \\ D\nabla_r^2 \nabla_r^2 \omega_2 - G_1 \nabla_r^2 \omega_2 + k\omega_2 &= 0, & a \leq r \leq X \\ D\nabla_r^2 \nabla_r^2 \omega_3 &= 0, & X \leq r \leq R \\ G_1 \nabla_r^2 \omega_4 - k\omega_4 &= 0, & X \leq r \leq \infty \end{aligned} \quad (3.37)$$



Şekil 3.5a Şerit yük ile yüklü plak hali



Şekil 3.5b Şerit yük halinde plak ve yüzeyin elastik eğrisi

şeklinde olacaktır. Bu halde şerit yükün plak ile yüzeyinin temas bölgesinde olduğu kabul edilmiştir. Yukarıdakilere benzer şekilde boyutsuz büyüklüklere göre

$$\begin{aligned}
 \omega_1(\rho) &= A_1 u_0(\rho) + A_2 v_0(\rho) + A_3 f_0(\rho) + A_4 g_0(\rho) \\
 \omega_2(\rho) &= B_1 u_0(\rho) + B_2 v_0(\rho) + B_3 f_0(\rho) + B_4 g_0(\rho) \\
 \omega_3(\rho) &= C_1 \rho^2 \ln r + C_2 \rho^2 + C_3 \ln \rho + C_4 \\
 \omega_4(\rho) &= D_1 I_0(\alpha \rho) + D_2 K_0(\alpha \rho)
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

olur. Önceki örneklerdekilere benzer nedenlerle:

$$A_3 = A_4 = C_1 = D_1 = 0$$

alınabilir. Geri kalan integrasyon sabiti ve X_1 'in çözümü için sınır koşullarımız

- 1) $\omega_1(a_1) = \omega_2(a_1)$
- 2) $\omega'_1(a_1) = \omega'_2(a_1)$
- 3) $M_p^{(1)}(a_1) = M_p^{(2)}(a_1)$
- 4) $Q_p^{(2)}(a_1) - Q_p^{(1)}(a_1) = -P$
- 5) $\omega_2(X_1) = \omega_3(X_1)$
- 6) $\omega'_2(X_1) = \omega'_3(X_1)$

$$7) \omega''_2(X_1) = \omega''_3(X_1) \quad (3.39)$$

$$8) Q_p^{(2)}(X_1) = 0$$

$$9) M_p^{(3)}(R_1) = 0$$

$$10) \omega_2(X_1) = \omega_4(X_1)$$

$$11) \omega'_2(X_1) = \omega'_4(X_1)$$

Bu sınır koşulları aşağıdaki bağıntılarla ifade edilirler.

(1)'den

$$A_1 u_0 + A_2 v_0 \Big|_{\rho=a_1} = B_1 u_0 + B_2 v_0 + B_3 f_0 + B_4 g_0$$

(2)'den

$$\begin{aligned} A_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + A_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=a_1} &= B_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) \\ + B_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) + B_3(-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) + B_4(-f_1 \sin \varphi - g_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=a_1} \end{aligned}$$

(3)'den

$$\begin{aligned} A_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) + A_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=a_1} &= B_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) \\ + B_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) + B_3(-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi) + B_4(-f_0 \sin 2\varphi - g_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=a_1} \end{aligned}$$

(4)'den

$$\begin{aligned} A_1(-u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + A_2(u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) \Big|_{\rho=a_1} &= B_1(u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) \\ + B_2(u_1 \sin 3\varphi - v_1 \cos 3\varphi) + B_3(f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi) + B_4(f_1 \sin 3\varphi + g_1 \cos 3\varphi) \\ + \frac{\bar{p} L^3}{D} \Big|_{\rho=a_1} \end{aligned}$$

(5)'den

$$B_1 u_0 + B_2 v_0 + B_3 f_0 + B_4 g_0 \Big|_{\rho=X_1} = C_2 X_1^2 + C_3 \ln X_1 + C_4 \Big|_{\rho=X_1}$$

(6)'dan

(3.40)

$$B_1(-u_1 \cos \varphi + v_1 \sin \varphi) + B_2(-u_1 \sin \varphi - v_1 \cos \varphi) + B_3(-f_1 \cos \varphi + g_1 \sin \varphi) \\ + B_4(-f_1 \sin \varphi - g_1 \cos \varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 2 C_2 X_1 + \frac{C_3}{X_1} \Big|_{\rho=X_1}$$

(7)'den

$$B_1(-u_0 \cos 2\varphi + v_0 \sin 2\varphi) + B_2(-u_0 \sin 2\varphi - v_0 \cos 2\varphi) + B_3(-f_0 \cos 2\varphi + g_0 \sin 2\varphi) \\ B_4(-f_0 \sin 2\varphi + g_0 \cos 2\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 4 C_2 \Big|_{\rho=X_1}$$

(8)'den

$$B_1(u_1 \cos 3\varphi - v_1 \sin 3\varphi) + B_2(u_1 \sin 3\varphi + v_1 \cos 3\varphi) + B_3(f_1 \cos 3\varphi - g_1 \sin 3\varphi) \\ + B_4(f_1 \sin 3\varphi + g_1 \cos 3\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = 0$$

(9)'dan

$$2 C_2(1+v) + \frac{v-1}{R_1^2} C_3 = 0$$

(10)'dan

$$B_1 u_0 + B_2 v_0 + B_3 f_0 + B_4 g_0 \Big|_{\rho=X_1} = D_2 K_0(\alpha X_1) \Big|_{\rho=X_1}$$

(11)'den

$$B_1(-u_1 \cos\varphi + v_1 \sin\varphi) + B_2(-u_1 \sin\varphi - v_1 \cos\varphi) + B_3(-f_1 \cos\varphi + g_1 \sin\varphi) \\ + B_4(-f_1 \sin\varphi - g_1 \cos\varphi) \Big|_{\rho=X_1} = -\alpha D_2 K_1(\alpha X_1) \Big|_{\rho=X_1}$$

Bu 11 denklemde önce doğrusal olan 10 adet integrasyon sabitleri hesaplanır, geri kalan denklemden de X_1 bilinmeyeni Newton-Raphson yöntemi ile hesaplanır.

BÖLÜM 4. SONUÇLAR

Bu bölümde, Bölüm 3'de çözülen bazı örnek problemlere ait sayısal sonuçlar verilmiştir. Sayısal işlemlerde

k yatak katsayısı : 5, 10, 15 N/cm^2

G_1 kayma modülü: 2000 N

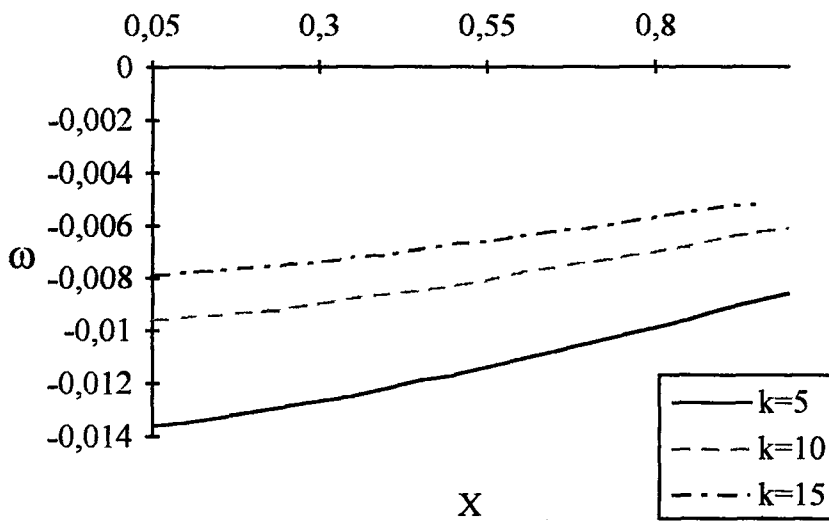
R_1 plak yarıçapı : 2.5, ..., 20 Birim

P tekil yük : 10000 N

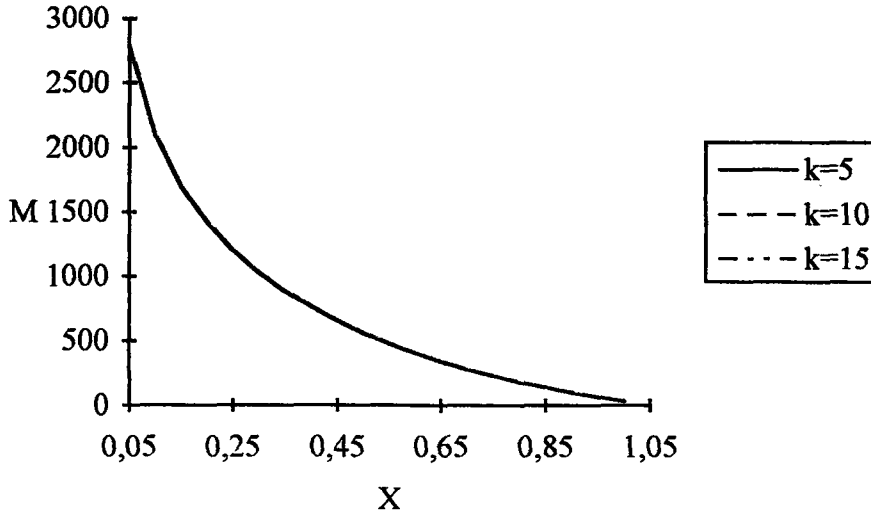
D plak rijitliği : 1.7×10^9 N/cm^2

olarak alınmıştır.

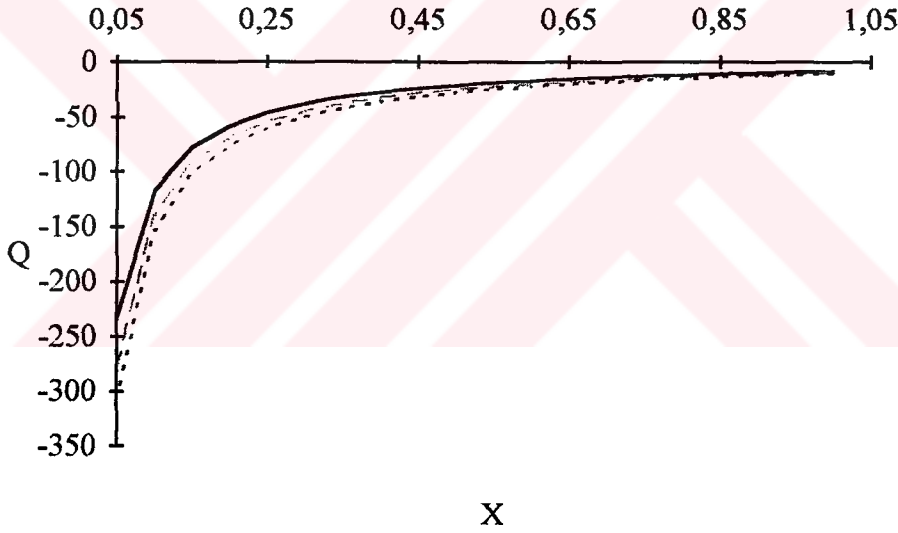
Şekil 4.1a, b, c'de çekme de alabilen iki parametrelili zemine oturan ortasından tekil yük ile yüklü dairesel plakta düşey yerdeğiştirme, radyal eğilme momenti ve kesme kuvvetinin yarıçap boyunca değişimi verilmiştir. Yerdeğiştirme ve kesme kuvveti üzerinde yatak katsayısının etkisi açık olarak görülmektedir.



Şekil 4.1a Tekil yük ile yüklü plakta düşey yerdeğiştirmenin yarıçap boyunca değişimi

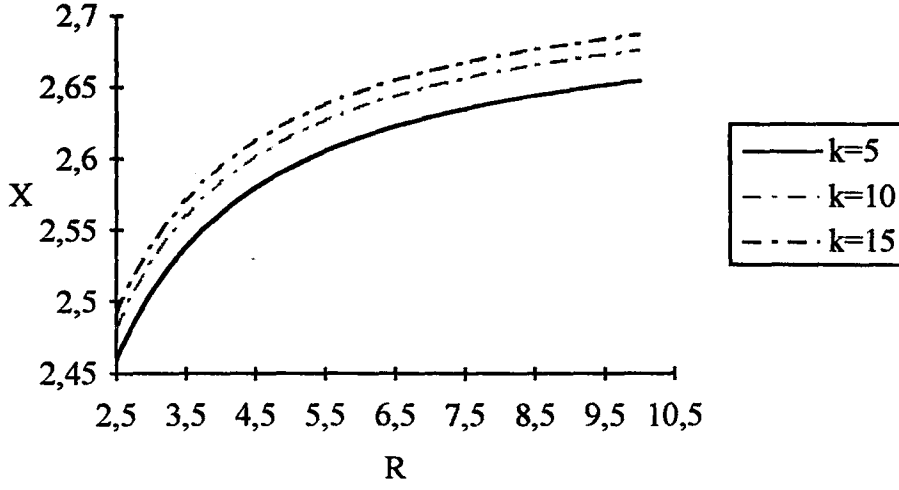


Şekil 4.1b Tekil yük ile yüklü plakta radyal eğilme momentinin yarıçap ile değişimi

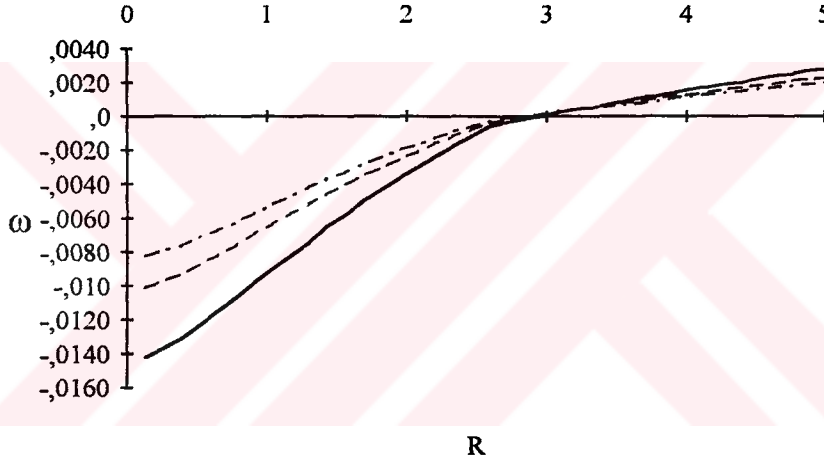


Şekil 4.1c Tekil yük ile yüklü plakta kesme kuvvetinin yarıçap boyunca değişimi

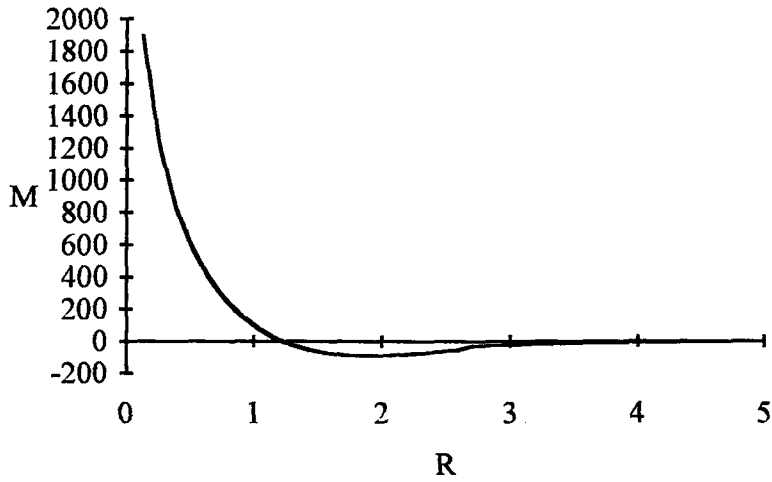
Şekil 4.2a'da yalnız basınç aktaran Pasternak zeminine oturan dairesel plağın tekil yük altında ayrılma noktasının plak yarıçapı ile değişimi verilmiştir. $k=10 \text{ N/cm}^2$ için de yarıçapın 2.5 birimden büyük olması halinde ayrılma olmaktadır. Ayrılma noktasının koordinatı R_1 yarıçapının büyümesi ile 2.68 gibi bir değere asimptotik olmaktadır. Şekil 4.2b, c, d'de yerdeğiştirme, radyal eğilme momenti ve kesme kuvvetinin değişimi verilmiştir.



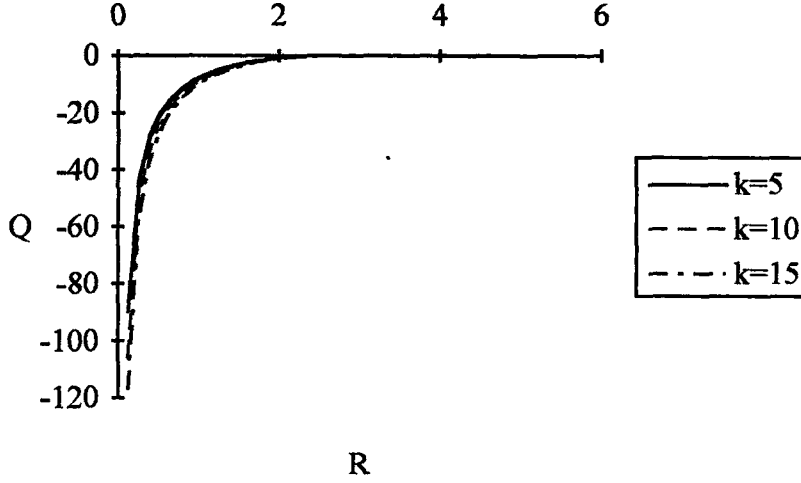
Şekil 4.2a Tekil yük altında ayrılma noktasının plak yarıçap ile değişimi



Şekil 4.2b Yerdeğiştirmenin yarıçap ile değişimi

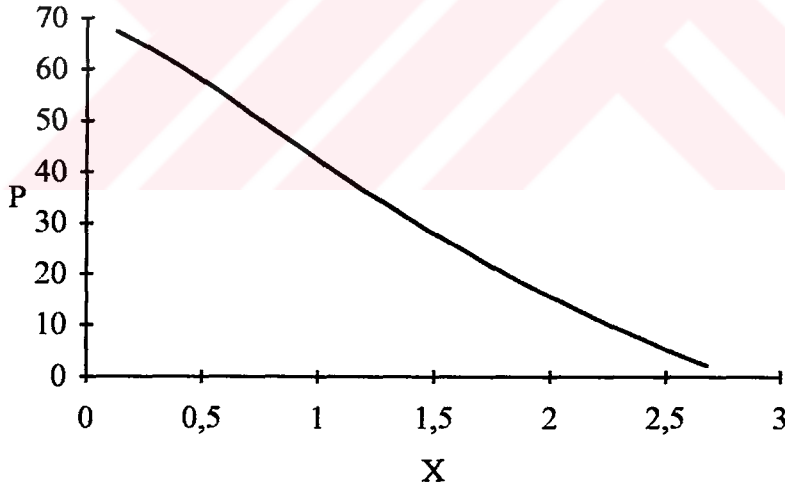


Şekil 4.2c Radyal eğilme momentinin yarıçap ile değişimi



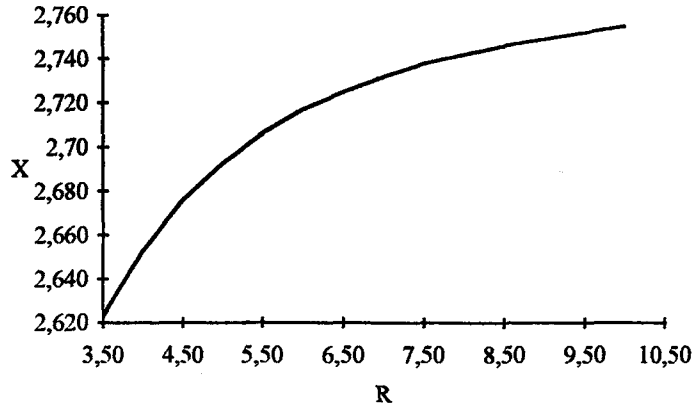
Şekil 4.2d Kesme kuvvetinin yarıçap ile değişimi

Şekil 4.3'de plak ile zeminin temas bölgesinde ara gerilmenin değişimi verilmiştir. [27] numaralı kaynakta da belirtildiği gibi ayrılma noktasında gerilme sıfırdan farklı olmaktadır



Şekil 4.3 k=10 için ara gerilmenin ayrılma noktası ile değişimi

Şekil 4.4'de yukarıdaki problemin $a_1=0.5$ birim yarıçaplı dairesel bölgede düzgün yayılı yükle yüklü plak halinde ele alınmıştır. Bu halde ayrılma ancak R_1 yarıçapının 3.5 birimden büyük olması halinde başlamaktadır.



Şekil 4.4 $a_1=0.5$ birim olması halinde ayrılma noktasının yarıçap ile değişimi

KAYNAKLAR

- [1] Winkler, E., Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Prague, Czechoslovakia, (1867).
- [2] Kerr, A. D., Elastic and Viscoelastic Foundation Models, Journal of Applied Mech., September, (1964).
- [3] Zimmermann, H., Die Berechnung des Eisenbahnbauwerkes, Second Edition, Berlin, Germany, (1888).
- [4] Hetényi, M., Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, (1946).
- [5] Dodge, A., Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div., Proceedings ASCE, August, pp.63-101, (1964).
- [6] Donald, D., ELY, F. J., Sergev, S., Barbarita, B., Influence Functions for Beams on Elastic Foundation Diss. ASCE, April, pp. 187-194, (1965).
- [7] Miranda, C.K., Nair, K., Finite Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, Vol.92, No.ST2, April, pp. 131-142, (1966).
- [8] Durelli A., Parks, V.J., Mok, C.K.C., Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, August, pp.1713-1725, (1966).
- [9] Severn, R.T., The Solution of Foundation Mat. Problems by Finite Elements Methods, Struc. Eng, London, June, (1966).
- [10] Munther, J.H., Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussion, Vol.96, April, ASCE, pp. 864-870, (1970).
- [11] Weistman, Y., On Foundation That React in Compression Only, J. App. Mechanics, Transactions ASME, Vol.37, pp. 1019-1030, December, (1970).
- [12] Ting, B.Y., Finite Beams on Elastic Foundation With Restraints, J. Struc. Div., Proceedings of ASCE, Vol.108, No.ST3, March, pp. 611-621, (1982).
- [13] Özgen, K., Elastik Zeminde Oturan Betonarme Kirişlerin Limit Analizi, Doğa Bilim Dergisi Müh./ Çevre. Cilt 6, 13-19, (1982).

- [14] Zhaohua, F., Cook, R.D., Beam Elements On Two-Parameter Elastic Foundations, Journal of Eng. Mech., Vol.109, No.6, December, (1983).
- [15] Katsikadelis, J.T., Armenakas, A.E., Plates On Elastic Foundation by BIE Method, Journal of Eng. Mech., Vol.110, No.7, July, (1984).
- [16] Ting, B.V., Mockry E.F., Beam on Elastic Foundation Finite Element, Journal of Struc. Eng., Vol.110, No.10, October, pp. 2324-2339, (1984).
- [17] Lin, L., Adams, G.G., Beam on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol.113, No.4, April, pp. 542-553, (1987).
- [18] Celep, Z., Malaika, A., Abu-Hussein, M., Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation, J. Sound and Vibration, pp. 235-246, 128/2,(1988).
- [19] Elmas, M., Elasto-Plastik Zemin Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul, (1988).
- [20] Celep, Z., Rectangular Plates Resting On Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol.114, No.12, December, (1988).
- [21] De Rosa, M.A., Stability and Dynamics Of Beams on Winkler Foundations, Earth. Eng. Struct. Dyn, Vol.18, pp. 377-388, (1989).
- [22] Kimeñçe, B., İki Parametrelili Elastik Zemin Oturan Dairesel Plak ve Basık Küresel Kabuk Problemi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul, (1989).
- [23] Engin, H., Elasto-Plastik Zemin Oturan Kiriş ve Plaklar, İTÜ İnşaat Fak., İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı, III. Sempozyum, İstanbul, Syf. 15-18, Haziran, (1992) .
- [24] Vlasov, V. Z., Leont'ev, U.N., Beams, Plates and Shells On Elastic Foundations, Jerusalem, (1966).
- [25] Panc, V., Theories of Elastic Plates, Noordhoff International Publishing, Leyden, (1975).
- [26] Timoshenko, S., Woinows-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, (1959)
- [27] Kerr, A.D., Douglas, W.C., Beams on a Two-Dimensional Pasternak Base Subjected To Loads That Cause Lift-off, Vol. 28, pp. 413-422, (1991)

ÖZGEÇMİŞ

Maksude G. ÖZDOĞAN, 1969 yılında Trabzon'da doğdu. İlk öğrenimini Sait Çiftçi İlkokulu'nda 1980'de bitirdi. Orta öğrenimini Nilüfer Hatun Ortaokulu'nda 1983'de ve liseyi Nişantaşı Kız Lisesi'nde 1986'da tamamladı.

1986 yılında İTÜ İnşaat Fakültesi'ni kazandı. 1991'de İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalı programında yüksek lisansa başladı. Halen İTÜ İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir.



İTÜ İNŞAAT FAKÜLTESİ KURULU
DOĞUŞU KURULU