

151350

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HELİKOPTER PALLERİNİN TİTREŞİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Mehmet Murat Altuğ BIÇAK

(503021402)

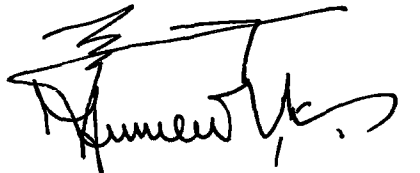
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Nisan 2004

Tezin Savunulduğu Tarih : 18 Mayıs 2004

TEZ DANIŞMANI : Prof.Dr. H. Temel BELEK



Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Metin GÜRGÖZE



Prof.Dr. Tuncer TOPRAK

150350

Nisan 2004

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her evresinde bana yol gösteren, her zaman daha iyisini yapma azmini ve imkanını yaratan İ.T.Ü. Makina Fakültesi öğretim üyesi sayın Prof. Dr. H. Temel Belek 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışmalarımı yakından takip eden ve değerli yorumları ile sürekli destek olan İ.T.Ü. Makina Fakültesi öğretim üyesi sayın Prof. Dr. Metin Gürgöze'ye ve bana, beraber aynı ortamı paylaşma fırsatını tanıyan, İ.T.Ü Makina Teorisi Sistem Dinamiği ve Kontrol anabilim dalı ailesine teşekkür ederim.

Nisan 2004

Mehmet Murat Altuğ BIÇAK

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
SUMMARY	xii
1 PROBLEMİN TANIMI	1
1.1 Giriş	1
1.1.1 Helikopterlerin titreşimleri	2
1.1.2 Motor devir frekansının ve harmoniklerinin yol açtığı titreşimler	2
1.1.3 Rastgele aerodinamik tahrikli titreşimler	3
1.1.4 Kendi kendini tahrik eden titreşimler	4
1.2 Problem	4
2 DİNAMİK DİRENGENLİK YÖNTEMİNİN ESASLARI	7
2.1 Giriş	7
2.2 Dinamik Direngenlik Matrisinin Elde Edilmesi	7
2.3 Uygulama	10
3 ÖZDEĞER PROBLEMİ	11
3.1 Giriş	11
3.2 Dinamik Direngenlik Matrisinin Özdeğerlerinin Sturm Dizisi Algoritması İle Hesaplanması	12
3.3 Wittrick-Williams Algoritması	14
3.4 Titreşim Biçimlerinin Elde Edilmesi	15
4 DÖNEN ROTOR PALLERİNİN HAREKETİNİ TEMSİL EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	17
4.1 Giriş	17
4.2 Önburulmalı Dönen Rotor Pallerinin Bağlı Diferansiyel Denklemlerinin Türetilmesi	18
4.2.1 Diferansiyel denklemlerin türetilmesi için genel yöntem	18
4.2.2 Birim uzama denklemlerinin türetilmesi	19
4.2.3 Kesite ait elastik moment ifadelerinin türetilmesi	24
4.2.4 Atalet Kuvvetlerinin Elde Edilmesi	26
4.2.5 Moment Dönüşümü	31
4.2.6 Denge Koşulları	32

5	ÖNBURULMALI DÖNEN ROTOR PALLERİNİN BAĞLI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ	35
5.1	Giriş	35
5.2	Teori	35
5.2.1	Elemanın hareketini temsil eden diferansiyel denklemlerin boyutsuzlaştırılması ve çözümü	48
5.2.2	Elemanın üzerine etkiyen yüklerin hesaplanması	40
5.2.3	Elemanın düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler, burulma miktarları, kesme kuvvetleri ve momentlerinin hesaplanması	41
5.2.4	Elemanın dinamik direngenlik matrisinin hesaplanması	43
5.3	Çözüm Yöntemi	44
6	DİNAMİK DİRENGENLİK MATRİSİ UYGULAMALARI	46
6.1	Örnekler	46
7	SONUÇLAR VE YORUMLAR	57
8	KAYNAKLAR	60
EKLER		65
ÖZGEÇMİŞ		74

KISALTMALAR

WW	:Wittrick-Williams algoritması
R.M.	:Reissner Metodu
P.E.M.	:Potansiyel Enerji Metodu
R.R.M.	:Rayleigh Ritz Metodu
G.M.	:Galerkin Metodu
G.G.M.	:Genişletilmiş Galerkin Metodu
T.E.S.	:Mesnetlenmiş sistemi oluşturan toplam eleman sayısı
ROTAM.	: İTÜ Rotorlu Hava Araçları Tasarımı ve Mükemmelliyet Merkezi



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 6.1 İncelenen palin özellikleri	46
Tablo 6.2 Durağan, 45° önburulmalı bağlı düzlem içi – düzlem dışı eğilme yapan bir kirisin doğal frekansları (ω_i)	47
Tablo 6.3 Dönen, üniform olmayan önburulmalı palin düzlem içi ve dışı birleşik doğal frekanslarının karşılaştırılması.....	49
Tablo 6.4 İncelenen WADC S-5 model pervanesinin pal uzunluğuna bağlı kesit özellikleri	50
Tablo 6.5 Önburulmalı dönen, WADC S-5 model pervanesinin doğal frekansları	51
Tablo 6.6 Dönen (6 Hz) ve dönmeyen durumlarda helikopter palinin doğal frekanslarının diğer metotlarla elde edilen değerlerle karşılaştırılması.....	53
Tablo 6.7 Durağan durumda ITU-LCH helikopter palinin doğal frekanslarının sonlu elemanlar metoduyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması	55

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1 Bir çubuğun dinamik direngenlik matrisinin determinantı.....	13
Şekil 4.1 Eğilme ve burulma deformasyonlarına uğramış bir önburulmalı kiriş.....	31
Şekil 4.2 Fiktif kesitin şekil değiştirmemiş durumu	32
Şekil 4.3 Kiriş deformasyona uğradıktan sonra fiktif kesitin durumu.....	33
Şekil 4.4 Kesit alanı üzerinde oluşan gerilme dağılımı	36
Şekil 4.5 n maddesel noktasının sabit XYZ eksen takımı ve hareketli xyz eksen takımlarına göre konumu.....	38
Şekil 4.6 Diferansiyel elemanın üzerine etkiyen tüm kuvvetler	44
Şekil 4.7 Diferansiyel elemanın üzerine etkiyen tüm momentler.....	44
Şekil 5.1 Palin üzerindeki bir eleman.....	46
Şekil 6.1 İlk 4 doğal frekans için yakınsama testi.....	48
Şekil 6.2 WADC S-5 pervanesinin Campbell diyagramı.....	51
Şekil 6.3 ITU-LCH pal kesiti (ROTAM'ın izni ile).....	53
Şekil 6.4 Doğal frekans numarasına bağlı, yapılan mutlak hata yüzdesi.....	54
Şekil 6.5 ITU-LCH helikopteri palinin Campbell diyagramı.....	55
Şekil 6.6 ITU-LCH helikopteri palinin dönüş frekansına göre normalize edilmiş Campbell diyagramı.....	55

SEMBOL LİSTESİ

B_1, B_2	: Kesit sabitleri
e_A	: Elemanın geometrik merkezi ile elastik merkezi arasındaki mesafe
e_o	: Dönme merkezindeki kökte elastik eksenle dönme eksenindeki mesafe
e	: Kesitin elastik merkezi ile kütle merkezi arasındaki mesafe
E	: Young modülü
F	: Elemana, dönme eksenine göre dışta kalan komşu eleman tarafından uygulanan kuvvet
G	: Kayma modülü
I_ξ, I_η	: Ana eksene ve bu eksene dik olan diğer eksene göre olan atalet momentleri
j	: Wittrick-Williams algoritması uygulanırken, $0-\omega^*$ frekans aralığındaki doğal frekans sayısı
j_m	: Sistemi oluşturan m. elemanın ω^* frekansının altında kalan doğal frekans sayısı
J	: Burulma direngenlik sabiti
k_A	: Gerilme taşıyan elemanın elastik eksenine göre kesit alanının polar jirasyon yarıçapı
k_m	: Elastik eksene göre kesit kütlesi jirasyon yarıçapı
k_{m1}, k_{m2}	: Elastik eksene dik olan sırasıyla tarafsız eksene ve bu eksene dik olan eksene göre kütle jirasyon yarıçapları
L	: Kiriş elemanın uzunluğu
m	: Kiriş elemanının birim uzunluğunun kütlesi
M_x, M_y, M_z	: Elemanın üzerine x, y ve z yönlerinde etkiyen bileşke momentler
$\tilde{f}$	: Global koordinat sistemi ile yerel koordinat sistemi arasındaki mesafe
T	: Eleman üzerindeki gerilme
$\tilde{v}, \tilde{w}$	: Palin dönme düzlemindeki ve dönme düzlemine dik doğrultudaki yanıl yerdeğiştirmeleri
V_x	: Elemanın kesiti üzerine etkiyen aksenal kuvvet
V_y, V_z	: Elemanın kesiti üzerine etkiyen y ve z doğrultularındaki kesme kuvvetleri
x, y, z	: Pal ile beraber dönen elemanın yerel koordinat eksenleri
X_G, Y_G, Z_G	: Global koordinat eksenleri
Ω	: Palin dönüşaışsal hızı
ξ, η	: Kesit koordinatları; η eksenı ana eksen doğrultusunda, ξ eksenı ise ana eksene dik doğrultuda yönlenmiştir
ω	: Titreřimin frekansı
ω^*	: Wittrick-Williams algoritması uygulanırken seçilen alelade bir frekans

ω_{ALT}	: Wittrick-Williams algoritmasında içinde doğal frekans bulunduğu bilinen frekans aralığının alt sınırı
$\omega_{ÜST}$	: Wittrick-Williams algoritmasında içinde doğal frekans bulunduğu bilinen frekans aralığının üst sınırı
$\tilde{\varphi}$	: Burulma açısı
β	: Palin ucunun toplam burulma açısı
$s\{.\}$	: Bir matrisin işaret değişimlerinin sayısı
$[.]'$	: x'e göre türev



HELİKOPTER PALLERİNİN TİTREŞİMLERİ

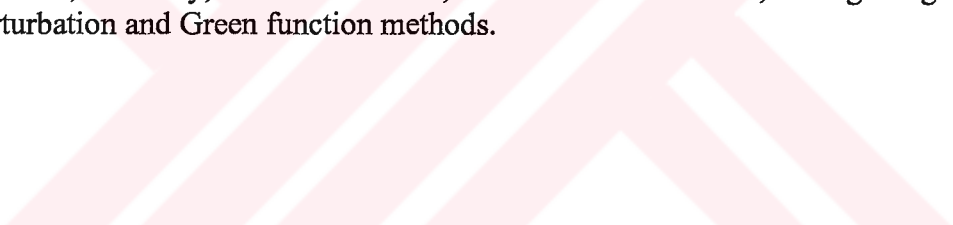
ÖZET

Bu çalışmada, dönen önburulmalı kirişlerin düzlem içi, dışı ve burulma bağlı titreşimlerinin doğal frekanslarının belirlenmesi için dinamik direngenlik matrisi yöntemi geliştirilmiştir. Daha sonra, dinamik direngenlik matrisi yönteminin simetrik bir uçak kanadı profiline sahip, kökte elastik ekseni ile dönme ekseni çakışan ve elastik ekseninin geometrik çakıştığı durumlarda dönen önburulmalı kirişlerin titreşim analizlerinde kullanılmaya uygun ve tutarlı sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Dönen önburulmalı Euler-Bernoulli kirişlerinin hareketini temsil eden diferansiyel denklemler Frobenius kuvvet serisi yardımıyla çözülmüştür. Elde edilen dinamik direngenlik matrisi “tekil değerlere ayrıştırma yöntemi” ile modifiye edildikten sonra, doğal frekanslar Wittrick-Williams algoritması ile bulunmuştur. Dinamik direngenlik matrisi yöntemi ile hesaplanan doğal frekansların, iletim matrisi metodu, sonlu elemanlar metodu, Green fonksiyonu yaklaşımı ve diğer metotlarla hesaplanan doğal frekanslarla uyumlu sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

VIBRATIONS OF HELICOPTER BLADES

SUMMARY

Dynamic Stiffness Matrix (DSM) method has been extended for the calculation of coupled bending-bending-torsion natural frequencies of rotating blades. In the present study DSM method has been demonstrated as a viable tool for the estimation of natural frequencies of rotating blades with the assumption that the blade has a symmetric airfoil cross-section, the distance at root between the elastic axis and the axis of rotation is zero and the area centroid of the cross section coincides with the elastic axis. Frobenius power series method was used to solve the differential equations of motion. DSM was further modified by means of Singular Value Decomposition (SVD) technique, and then Wittrick-Williams Algorithm (WW) was used to extract the natural frequencies. The frequencies calculated by the present method are in good agreement with the results obtained by using other theoretical methods, namely; finite element, transmission matrix, integrating matrix, perturbation and Green function methods.



1 PROBLEMİN TANIMI

1.1 Giriş

Dinamik, cisimlerin zaman içerisindeki hareketlerini ve bu hareketlere yol açan kuvvetleri ve momentleri inceler. Newton dinamiği tarif ederken “kuvvetlerin etkimesi sonucu oluşan hareketlerin ve hareketi yaratmak için gerekli kuvvetlerin bilimi” ifadesini kullanmıştır. Ayrıca “Fiziksel sistemlerin dinamik davranışlarının analizi modern teknolojinin köşe taşlarından birisidir.” sözünden de anlaşılacağı üzere dinamik, doğayı anlama biliminin ta kendisidir.

Dinamiğin alt konularından birisi olan titreşimler ya da mekanik titreşimler bir maddesel noktanın veya maddesel noktalar sisteminin denge konumu etrafındaki salınımıdır. Mekanik bir titreşim genellikle, bir sistemin kararlı denge konumundan saptırılması halinde ortaya çıkar. Sistem, geriye döndürücü kuvvetlerin etkisi altında ilk konumuna dönme eğilimi gösterir. Fakat sistem genellikle, ilk konumuna belli bir hız kazanmış olarak döner. Eğer sistemde sönüm yoksa saptırılmış konum ile kararlı konumu arasında daimi olarak gider gelir. Bu gibi bir sisteme örnek olarak, helikopter palleri gösterilebilir. Helikopterlerin palleri, helikopter uçarken zamanla değişen aerodinamik kuvvetlere maruz kalırlar. Bu kuvvetlerin zaman bağlı oldukları, paller dönerken, pallerin üzerindeki hız dağılımlarının ve hücum açılarının değişimlerinden anlaşılabilir. Zamana bağlı olan bu kuvvetlerin palleri izleyerek, pallerin helikopter gövdesine bağlandıkları rotor göbeğinden geçer ve gövdeyi tahrik eder. Bu akış şemasının tam ters yönündeki kuvvet iletimiyle de gövdede oluşan kuvvet ve momentler, kök kısmı vasıtasıyla palleri tahrik ederler. Bütünüyle ele alınırsa, helikopter, motor, dişliler, şaftlar, kuyruk pervanesi ve bunun gibi bir çok alt parçalar tarafından üretilen kuvvet ve momentlerinin etkisi altındadır.

Mekanik titreşimler ya da daha genel anlamda dinamik, günümüzün modern helikopterlerinin tasarımında hayati öneme sahiptir. Öyle ki, bir hava aracının başarısı yahut başarısızlığı o hava aracının dinamik gerekleri yerine getirip getirememesine bağlıdır. Bu dinamik gereklilikler öylesine önemlidirler ki, dünya

pazarına çıkmış olan helikopterlerde ortaya çıkan sorunlar dolayısı ile üretimlerinin problem çözülene dek durdurulması bir çok devlet tarafından uygulanan bir yoldur. Bunun en dramatik örneği Lockheed isimli hava araçları üreten bir firmanın, piyasaya sürdüğü AH-56A Cheyenne isimli helikopterlerinin üretimini, yaşanan ölümcül bir kaza sonrası iptal etmesidir. Dinamiğin önemini anlatmak için başka bir örnek olarak, uluslararası pazarlarda helikopterlerin her zaman en sorunsuz yani dinamik açıdan en iyi etüt edilmiş olanlarının en geniş pazar payını kazanmış oldukları gösterilebilir.

Helikopterlerin dinamiği veya titreşimlerinin önemini ifade ettikten sonra bu gibi sorunlara yol açan nedenleri incelemek ve gidermeye çalışmak iyi bir helikopterin tasarım amaçlarından en önde geleni olmalıdır.

1.1.1 Helikopterlerin titreşimleri

Helikopterlerin maruz kaldığı titreşimlerin kaynaklarını 3 grupta sınıflandırılabilme mümkündür. Bunlar,

1. Motor devir frekansının ve harmoniklerinin yol açtığı
2. Helikopterlerin kafes yapılarının doğal frekansları ile aerodinamik yüklerin frekanslarının birbirleriyle çakışması sebebiyle sıklıkla meydana gelen ve
3. Kendi kendini tahrik eden

titreşimlerdir.

1.1.2 Motor devir frekansının ve harmoniklerinin yol açtığı titreşimler

Helikopter gövdesindeki titreşimlerin temel kaynağı rotorun yani pallerin kendisidir. Paller, gövdeye rotor göbeği ile bağlandığından dolayı, pallere uygulanan yükler nedeniyle oluşan pallerin hareketleri, rotor göbeği üzerinden gövdeye kesme kuvvetleri ve momentler şeklinde iletilir. Helikopter uçarken, aerodinamik etkiler nedeniyle ortaya çıkan yükler, pallerden rotor göbeğine iletilir. Rotor göbeği ise pallerden gelen yükleri, mafsallı göbeklerde mafsallar vasıtasıyla, elastik göbeklerde ise elastik uzuvlar vasıtasıyla kuvvet patikaları üzerinden ana rotoru hareket ettiren mile iletir. Mil ise bu yükleri dişlilere, dişliler ise yataklar vasıtasıyla dişli kutusuna iletir. Dişli kutusu kabuğu da yükleri bağlandıkları noktalar üzerinden helikopter

şasisine iletir. N adet pale sahip olan bir helikopterin, pallerin iletim patikasından geçebilen kritik frekansları sırasıyla $N \times (\text{devir sayısı})$ ve $2N \times (\text{devir sayısı})$ ve katlarıdır. Genel olarak helikopterlerde düşük frekanslı tahrik genliklerinin, yüksek frekanslı tahrik genliklerinden daha büyük olduğu düşünülürse, en önemli tahrik frekansının $N \times (\text{devir sayısı})$ olduğu anlaşılır. Önceki yıllarda bu konu üzerine yapılan çalışmalardan edinilen deneyimler, gövdenin $N \times (\text{devir sayısı})$ frekansındaki titreşimlerinin pallerdeki $(N-1) \times (\text{devir sayısı})$, $N \times (\text{devir sayısı})$ ve $(N+1) \times (\text{devir sayısı})$ frekanslarındaki titreşim hareketlerinden kaynaklandığını göstermiştir.

Örnek olarak 4 palli bir helikopteri ele alırsak, gövdenin doğal frekansları $4 \times (\text{devir sayısı})$ olduğu hesap edilebilir. Bu titreşimlerin sebebi, pallerin $3 \times (\text{devir sayısı})$, $4 \times (\text{devir sayısı})$ ve $5 \times (\text{devir sayısı})$ frekanslarında titreşim hareketi yapmasıdır. Paller bir başka deyişle $3 \times (\text{devir sayısı})$, $4 \times (\text{devir sayısı})$ ve $5 \times (\text{devir sayısı})$ frekanslarındaki aerodinamik kuvvetler etkisine maruz kalmaktadırlar. Aerodinamik kaynaklı tahrikin kontrolü zor olmakla beraber, pallerin titreşimlerini ve gövdenin titreşimlerinin optimize edecek metotlar geliştirilmiştir.

Gövdenin titreşimlerinin etüdü, yukarıda bahsedilen birincil etkilerin yanında genlik olarak daha düşük mertebelerde olan ikincil etkilerin de incelenmesini gerektirebilir. Mesela herhangi bir palin izlemesi gereken yolun dışında olması, gövdeyi $1 \times (\text{devir sayısı})$ frekansında düşük genlikli bir kuvvet ile tahrik eder. Başka bir örnek olarak da pal sönümleyicilerinin yanlış ayarlanması sonucu gövdeye $1 \times (\text{devir sayısı})$ frekansında titreşim geçmesidir.

1.1.3 Rastgele aerodinamik tahrikli titreşimler

Türbülans ve türbülans modelleri üzerine oldukça fazla bilimsel çalışma olmasına karşın, gövdeyi ve rotoru etkileyen aerodinamik tahrikli titreşimleri tam olarak modellenememiştir. Aerodinamik tahrikinin karakteristik özelliği, beyaz gürültüye benzer bir frekans spektrumuna sahip olmasıdır. Yani aerodinamik tahriki, tüm frekansları tahrik edebilir. Bu tahrik ve tahrikin harmonikleri, genelde gövdenin doğal frekanslarında bir kaçını tahrik eder. Bazen bu problem rotor devir sayısının belirli aralıklarında mevcut olur. Rotor etrafındaki akış değiştirilerek rotor kaynaklı titreşimlerin önüne geçilebilir.

1.1.4 Kendi kendini tahrik eden titreşimler

Kendi kendini tahrik eden titreşimler sonucu oluşan rezonans durumu, genelde negatif sönüm yüzünden meydana gelmektedir. Negatif sönüm durumunda, sönüm kuvveti sistemin enerjisini azalmak yerine artırır. Yani sistem üzerinde pozitif iş yapar. Bu kuvvet tarafından yapılan iş, sisteme ilave kinetik enerji olarak dahil olur ve çok ciddi titreşime neden olur. Negatif sönüm durumu ancak, sistemin dışındaki bir enerji kaynağının varlığı sonucu mevcut olabilir. Bu durumun bilinen en iyi örneği, yüksek hızda uçan uçakların kanatlarında meydana gelen yüksek eğilme titreşimleridir (kanat çırpma hareketi). Bu durumda hava akışının kendisi böyle bir enerji kaynağıdır. Uçaklardaki bu duruma ek olarak, helikopterlerde gövde-pal etkileşiminin ve pallerin dönme eksenindeki eğilme hareketlerinin çok iyi analiz edilmesi gerekmektedir. Pallerin dönme eksenindeki eğilme hareketlerini nedeniyle oluşabilen pallerin göbek üzerinde eşit merkezkaç kuvveti yaratamaması olayına yer rezonansı denir.

1.2 Problem

Özet olarak, helikopter palleri dönme frekansında periyodik bir tahrike maruz kalırlar. Titreşim analizi yaparken, tahrik periyodik olduğundan, tahrik frekansının harmonikleri de göz önüne alınmalıdır. Bir başka deyişle rezonans frekanslarını belirlerken, tahrik frekansının harmoniklerinin yapının doğal frekansıyla çakışıp çakışmadığının belirlenmesi gerekir. Bu tip analizlerde genelde tahrik frekansı ve harmoniklerinin, incelenen yapının doğal frekanslarıyla beraber dönüş frekansına bağlı olarak çizildiği (Campbell diyagramı denilen) grafiklerden faydalanılır.

Yukarıda bahsi geçen nedenlerden dolayı, iyi bir helikopter pali tasarımı için

1. Doğal frekansların ve titreşim biçimlerinin belirlenmesi
2. Değişken kuvvetlerin belirlenmesi
3. Sönümün değerlendirilmesi ve uygun bir model oluşturulması
4. Seçilen bir yorulma teorisine göre ömür hesabı
5. Teorik olarak çözümü yapılan sistemin deneysel modal analiz yardımıyla elde edilen sonuçları arasındaki ilişkilerin incelenmesi ve teorik sistemin düzeltilmesi

gereklidir.

İyi bir helikopter palı tasarımı için gerekli olan ilk adımın, yani doğal frekansların ve titreşim biçimlerinin belirlenmesi, bir çok yöntemin geliştirilmesi ve bu yöntemlerin ticari bilgisayar programları haline dönüştürülmesi ile aşılmaya çalışılmaktadır. Bu sayısız yöntemlere örnek olarak iletim matrisi yöntemi, dinamik rijitlik matrisi yöntemi, sınır elemanları yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu farklar yöntemi gösterilebilir. Ancak, ANSYS, NASTRAN ve ABAQUS gibi popüler ticari yazılımların neredeyse tamamına yakını sonlu elemanlar yöntemini kullanmaktadırlar. Günümüzde bu tip ticari yazılımlarla beraber süper hızlı bilgisayarlar kullanılarak milyonlarca serbestlik derecesine sahip sistemlerin dahi analizleri gerçekleştirilmektedir. Ancak, sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık bir çözüm sağladığı için, iletim matrisi yöntemi, dinamik rijitlik matrisi yöntemi gibi yöntemlerin aynı problemi çözmek için kullandığı eleman sayısının çok daha fazlasını kullanmaktadır. Ayrıca sonlu elemanlar metodu yaklaşık bir çözüm yöntemi olduğundan sistemi modellemede kullanılan elemanın özelliklerine bağlıdır. Elemanın düğüm noktaları dışındaki tüm noktadaki yerdeğiştirmeleri tanımlayan şekil fonksiyonlarının lineer, kuadratik veya kübik olması sonuçları etkilemektedir. Pratikte mümkün olmamasına rağmen, sonlu elemanlar yönteminde seçilen düğüm noktalarının titreşim nodlarına denk gelmesi durumunda oldukça hatalı sonuçlar elde edilebilmektedir. Genel olarak eğer bir sistemin hareketini temsil eden diferansiyel denklemler kesin (exact) olarak çözülebiliyorsa bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerini aramak pek bir anlam ifade etmemektedir. Ayrıca sonlu elemanlar yöntemi, titreşim problemlerinde sistemin lineer olmayan frekans cevaplarını rezonans civarında adeta lineerleştirmektedir. Yaklaşık metotların bu gibi dezavantajlarının yanında basit, çabuk ve ticari programlamaya uygun olmaları ağır basan yönlerindendir.

Bu çalışmada, kesin çözümü bulunmayan fakat helikopter, türbin kanadı gibi titreşim özelliklerinin tasarım öncesinde belirlenmesinde büyük faydası bulunan ve parametrik olarak çalışılmaya müsait olan dönen önburulmalı kirişlerin diferansiyel denklemlerinin kuvvet serileri yardımıyla yapılan çözümleri ile geliştirilen dinamik direngenlik matrisi metodu bu tip problemleri çözmek üzere sunulmuştur .

Sonlu elemanlar metodunun aksine, problemlerin çözümlerini çok daha az eleman sayıları ile yapabilen dinamik direngenlik matrisi yöntemi, oturduğu temellerin

sayesinde problemlerin kesin çözümlerini yapabilmektedir. İşte be yüzden bir problemi tanımlayan diferansiyel denklemlerin dinamik direngenlik metodu yardımıyla çözülmesi oldukça arzu edilen bir husustur.



2 DİNAMİK DİRENGENLİK YÖNTEMİNİN ESASLARI

2.1 Giriş

Yapıların (veya yapısal elemanların) serbest ve zorlanmış titreşimlerini çözebilen dinamik direngenlik matrisi metodu son yıllarda büyük bir ilgi çekmiştir. Yapısal elemanların hareketlerini ifade eden diferansiyel denklemlerinin tam çözümü ile elde edilen tam şekil fonksiyonlarını temel aldığı için, dinamik direngenlik matrisi metodu kesin (exact) bir metot olarak ifade edilmektedir. Dinamik direngenlik matrisi metodu, diğer yaklaşık çözümler yapan metotlardan ve sonlu elemanlar metodundan daha iyi sonuçlar vermektedir. Bunun nedeni ise dinamik direngenlik matrisi metodunun kullanılan eleman sayısından bağımsız olmasıdır. Bu metodun kullanışlılığı ise yüksek frekanslarda analiz ve yüksek doğruluk istendiğinde ortaya çıkmaktadır. Dinamik direngenlik matrisi metodunun yapıtaşı, kütle ve direngenlik özelliklerini aynı anda birarada bulunduran frekansa bağlı tek bir matristir. İlgili temel hareket denklemlerinden başlayarak Banerjee, değişik kiriş elemanları için [1]-[6], uzay yapılarının serbest titreşimleri için [7]-[8], kompozit kirişlerin bileşik eğilme-burulma titreşimleri için [9], hava araçlarının kanatlarının kanat çırpma analizi için [10]-[11] uygulamıştır. Kirişlerin dinamik direngenlik matrisi formülasyonlarındaki ve çözümlerindeki ilerlemeler, BUNVIS [12], BUNVIS-RG [13] ve CALFUN [14] gibi bilgisayar programlarının geliştirilmesini mümkün kılmıştır.

2.2 Dinamik Direngenlik Matrisinin Elde Edilmesi

Bir yapısal elemanın dinamik direngenlik matrisini yazabilmek için ilk adım olarak elemanın serbest titreşimlerini temsil eden diferansiyel denklemlerin türetilmesi

gereklidir. İlk adım, literatürde sıklıkla kullanılan Newton kanunları, D'Alembert prensibi, virtüel işler prensibi, Lagrange denklemleri veya Hamilton denklemleri yardımıyla rahatlıkla aşılabılır. Bir elemanın sönümsüz serbest titreşimlerini temsil eden diferansiyel denklemler, L diferansiyel operatör ve u yerdeğiştirme vektörünü göstermek üzere

$$L(u) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanabilir.

İkinci adım ise (2.1) ifadesinde tanımlanan diferansiyel denklemleri, harmonik değiştiği kabul edilen u yerdeğiştirme vektörüne göre analitik olarak çözülmesidir. (Dinamik direngenlik matrisi, elemanın düğüm noktalarındaki harmonik olarak değişen kuvvetlerin, harmonik olarak değişen yerdeğiştirmelerin birbirleriyle olan ilişkisidir). Böylelikle, u yerdeğiştirmelerin genliklerini, ω (rad/s) frekansı, t (s) zamanı ve $i=\sqrt{-1}$ göstermek üzere

$$u = u e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilebilir. (2.2) numaralı denklem, (2.1) ifadesinde yerine yazılırsa zamana bağlı terimler elenir ve

$$L_1(u, \omega) = 0 \quad (2.3)$$

denkleme ulaşılır. Bu denklemdeki L_1 , bir diferansiyel operatörü göstermektedir. (2.3) diferansiyel denklemlerinin çözüm kabulü olarak değişkenlere ayırıştırma tekniği ile

$$u = A c \quad (2.4)$$

ele alınmış olsun. Buradaki c sabitleri içeren bir vektör, A ise frekansa bağımlı kare bir matristir. Kuvvet – yerdeğiştirme bağıntısını yani dinamik direngenlik matrisini elde etmek amacıyla (2.4) denklemindeki c katsayılar vektörünün, elemanın düğüm noktalarındaki kuvvet ve yerdeğiştirme genlik değerleri yardımıyla yok edilmesi gereklidir. İlk olarak elemanın düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmelerin genlik değerleri, bir başka deyişle sınır koşulları (2.4) denkleme uygulanırsa

$$\delta = B c \quad (2.5)$$

elde edilir. Bu denklemdeki δ matrisi, düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmelerin genliklerine, B matrisi ise sınır koşullarının A matrisine uygulanmasıyla elde edilen kare bir matrise tekabül etmektedir.

Bu işlemlerden sonraki adım, kuvvetlere ilişkin sınır değerlerin bulunmasıdır. Kuvvetlerin sınır genlik değerleri (2.3) denklemde uygulanırsa, (2.4) denklemine benzer bir ifadeyle

$$f = D c \quad (2.6)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu denklemdeki f düğüm noktalarındaki kuvvet genlik değerlerini, c ise sabit katsayılar vektörünü ifade etmektedir. Artık (2.5) ve (2.6) denklemlerinin yardımıyla

$$f = D B^{-1} \delta = K \delta \quad (2.7)$$

c sabit katsayılar vektörü yok edilebilir. Bu denklemdeki K , yani dinamik direngenlik matrisi

$$K = D B^{-1} \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilmektedir. (2.8) denklemde dinamik direngenlik matrisini elde etmek için iki adet işleme ihtiyaç vardır; bunlardan birincisi B matrisinin tersinin alınması, ikincisi ise elde edilen B^{-1} matrisinin soldan D matrisi ile çarpılmasıdır. Bu bahsi geçen işlemler nümerik veya cebirsel olarak elde edilebilir. Banerjee [5], [6] ve [9] referanslarında bilgisayar hesaplama süresinin, cebirsel hesaplama yapılırsa, oldukça azalacağını göstermiştir. Ancak B ve D matrisleri cebirsel olarak hesaplandıktan sonra B matrisinin tersinin alınması ve D matrisiyle çarpılması çok zahmetli ve kimi zaman imkansızdır [6], [9]. Cebirsel olarak hesaplama yapabilen bilgisayar programlarındaki gelişmeler [15], bu işlem yükünü kısmen de olsa hafifletebilmektedirler. Banerjee, cebirsel olarak hesaplama yapabilen bilgisayar programları kullanarak işlem zamanını altıda birine düşürmüştür [4]-[6], [9]. Bunun yanında, yalnızca dinamik direngenlik matrisi içindeki bazı elemanları hesaplamak gerek olursa cebirsel hesaplama çok daha kullanışlı olmaktadır.

2.3 Uygulama

Yapıların dinamik direngenlik matrisi yardımıyla serbest titreşim problemlerinin çözümü oldukça basittir. İlk olarak yapıyı oluşturan her elemanın dinamik direngenlik matrisleri sonlu elemanlar metodunda olduğu gibi uygun şekilde birleştirilerek yapının dinamik direngenliği elde edilir. Yalnız dikkat edilmesi gereken bu metotta birleştirilecek tek bir matris vardır. Yani kütle ve direngenlik tek bir matriste toplanmıştır. Daha sonra uygun bir özdeğer çözüm tekniği ile doğal frekanslar elde edilir. Dinamik direngenlik matrisinin kullanılması beraberinde lineer olmayan özdeğer problemini yaratır. Hemen hemen her zaman elemanların dinamik direngenlik matrisleri oldukça düzensizdir. Bir başka deyişle lineer değildir. Bu tip, lineer olmayan özdeğer probleminin çözümünde bilinen en güvenilir metot Wittrick-Williams algoritmasıdır [16]. Bu algoritma kullanılarak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilir. Wittrick-Williams algoritmasının temel özellikleri [1]-[4] referanslarında verilmiştir. Temel olarak bu algoritma tüm yapının hareketini temsil eden genel dinamik direngenlik matrisine ve bu yapıyı oluşturan elemanların ankastre mesnetlenmiş durumdaki doğal frekanslarına ihtiyaç duyar. Her elemanın mesnetlenmiş durumdaki doğal frekansları kolaylıkla $\Delta = 0$ yapılarak elde edilebilir [17]-[18]. Buradaki Δ genelde elemanın dinamik direngenlik matrisini oluştururken ortaya çıkan payda ifadesidir. Bu algoritmanın kullanılışı üzerine literatürde birçok kaynak bulmak mümkündür. Fakat daha ayrıntılı bilgi için referans [16]'ya başvurulması tavsiye edilir. Wittrick-Williams algoritması aslında incelenen yapının seçilen bir frekansın altında kalan doğal frekans sayısını vermektedir. Algoritmanın en önemli avantajı sistem ne kadar karmaşık olursa olsun istenilen hassasiyette doğal frekansları verebilmektedir.

3 ÖZDEĞER PROBLEMİ

3.1 Giriş

Elemanların rijitliklerini içeren dinamik direngenlik matrisleri elde edildikten sonra bu matrisler, tüm yapıyı temsil eden global direngenlik matrisi $K_G(\omega)$ 'yı oluşturmak üzere biraraya getirilirler. Sonra sınır koşullarının hesaba katılmasıyla aşağıdaki, ω 'ya lineer olarak bağlı olmayan özdeğer problemi elde edilir. Bu elde edilen özdeğer problemi (2.7) denkleminin serbest titreşimler için elde edilmiş halidir.

$$K_G(\omega) \delta = 0 \quad (3.1)$$

δ yerdeğiştirme vektörünün elemanları, düğüm noktalarındaki zamanla değişen genlik değerlerine karşılık gelmektedirler. Sonlu elemanlar yöntemindeki yaklaşımdan farklı olarak $K_G(\omega)$, ω 'nın gelişigüzel fonksiyonlarıdır. Şöyle ki, $K_G(\omega)$ 'nin determinanı bazı ω değerleri için $\pm\infty$ değerini alabilmektedir. Ayrıca, lineer olmayan 2.7 denkleminin çözümü olan

$$\det K_G(\omega) = 0 \quad (3.2)$$

denkleminin sonsuz adet kökü mevcuttur. Bu (3.2) denklemindeki çözüm δ yerdeğiştirme vektörünün tüm elemanlarının 0'a eşit olduğundaki çözümdür. Halbuki, $\delta = 0$ 'ın da triviyal olmayan yani yararlı bir çözüm olduğu inkar edilemez. $\delta = 0$ olması durumundaki titreşim biçimleri, zihinde tüm düğüm noktalarının nod olduğu durum olarak canlandırılabilir. Gerçekte ise $\delta = 0$ çözümü, $\det K_G(\omega) \rightarrow \infty$ 'a gitmesi durumunda ortaya çıkar ki, bu ω frekansının yapının doğal frekanslarından biri olup olmadığı sorusunu akla getirir. İşte bu gibi sürekli sistemlerde, çözüm yöntemi ayrık sistemlerden farklıdır. Bu gibi durumlarda güvenilir sonuçlara ulaşabilmek için Sturm dizisine dayanan determinant arama çözüm metotları kullanılması önerilir.[19]

3.2 Dinamik Direngenlik Matrisinin Özdeğerlerinin Sturm Dizisi Algoritması İle Hesaplanması

Sonlu elemanlar metodundaki ayrık sistemlerin meydana getirdiği lineer özdeğer probleminin çözümü için birçok kuvvetli algoritma mevcuttur. Bu algoritmaların arasında dikkate değer olanlardan bir tanesi Householder yöntemidir. Sturm dizisi özelliğini kullanarak, alelade seçilen bir frekansın altında kaç tane doğal frekansın olduğu bulunabilir, bu münasebetle istenilen doğal frekansın istenilen doğrulukla bulunması mümkündür. Sturm dizisinin bu özelliği kullanılarak lineer olmayan özdeğer problemleri çözülebilir [16].

(3.1) denkleminin sonsuz serbestlik derecesine sahip sürekli sistemlerin yerini tutan sonlu δ yerdeğiştirme vektörü için elde edildiği düşünülerek, bu denklemin çözümleri

$$\text{I. } \det \mathbf{K}_G(\omega) = 0 \quad \delta \neq 0$$

$$\text{II. } \det \mathbf{K}_G(\omega) = \infty \quad \delta = 0$$

olarak ifade edilebilir. I. çözüm, sistemin düğüm noktalarının hareket ettiği işe yarar bir çözüm olmasına rağmen II. çözümdeki sistemin düğüm noktaları, sistemin doğal titreşim modlarından birinin nodları olması durumudur. (2.7) denkleminin yeniden irdelenmesi II. çözümün daha iyi anlaşılabilmesine yardım edebilir. Şöyle ki sistem dışarıdan uygulanan kuvvetlerin etkisi altında şekil değiştiremez durumda yani tüm düğüm noktalarından mesnetlenmiş olduğu durumda (2.7) denklemi

$$\mathbf{K}_G^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

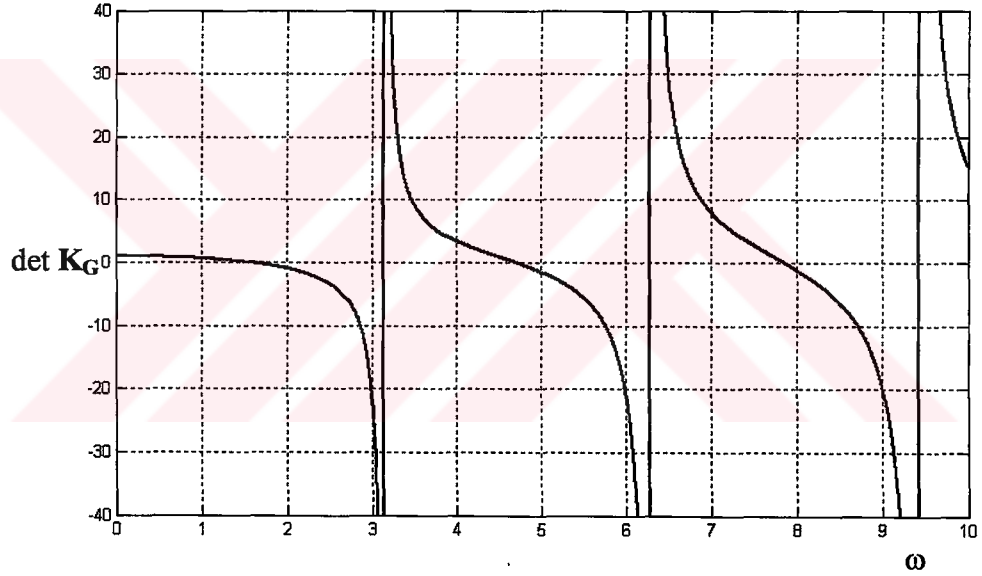
halini alır. (3.3) denkleminin çözümü ise $\mathbf{F}$ zaten mesnetleme kuvvetleri mevcut olduğundan ($\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$), $\mathbf{K}_G^{-1}$ in determinantının 0 olması ile mümkündür, yani

$$\det \mathbf{K}_G^{-1} = 0 \quad (3.4)$$

olmalıdır. Bu ise $\det \mathbf{K}_G = \infty$ olması gerekliliğini ifade eder.

Sonsuz serbestlik derecesine sahip sürekli sistemlerin doğal frekanslarının hesaplanmasının tek yolu ω 'yı çok küçük miktarlarda arttırıp bu artımlardaki $\det \mathbf{K}_G$ 'nın hesaplanması ve $\det \mathbf{K}_G$ 'nın 0 olduğu ω değerinin araştırılmasıdır. Fakat bu

yöntemin dezavantajları ve tehlikeleri mevcuttur. İlk olarak, II. çözümün yani tüm düğüm noktalarının nod olması durumu ($\delta = 0$) bu tip bir yöntemle bulunamaz. İkinci olarak, çok basitmiş gibi gözüken bazı sistemlerin doğal frekansları birbirlerine çok yakın olabilir [16], hiç bir doğal frekansı atlamamak için ω için seçilen arttırım miktarlarının çok küçük olması gerekir. Son olarak da K_G matrisinin determinanı işaret değişimini yalnızca 0'dan geçerek yapmaz, sonsuza gittiği durumlarda da yapabilir. Şöyle ki K_G matrisinin determinantlarının matrisin determinantının dikey asimtotlarının sağ ve sol tarafında farklı işaretlerde bulunması durumu ile sıklıkla yüzleşilir. Bu sayılan nedenler otomatik doğal frekans bulma bilgisayar programlarının karşılaştığı belli başlı sorunlardan birkaçıdır.



Şekil 3.1 Bir çubuğun dinamik direngenlik matrisinin determinanı

Şekil 3.1'de üniform bir kirişin dinamik direngenlik matrisinin determinantının davranışı görülmektedir. Şekil 3.1'deki determinanta sahip kirişin belirtilen aralıkta dört adet doğal frekansı mevcuttur. Şekilden de anlaşılabacağı gibi ilk doğal frekans $\det K_G = 0$ durumunu temsil etmektedir. Diğer doğal frekanslar ya da kutuplar [19] ise $\det K_G = \infty$ halini ifade etmektedirler. Bu örnekteki kutuplar kirişin tüm düğüm noktalarının mesnetlenmiş durumda sahip olduğu doğal frekanslardır. Daha fazla düğüm noktasına sahip sistemlerin davranışları çok karmaşık olabilmektedir.

Aşağıda, bu tezdeki örneklerin doğal frekanslarının hesaplanmasında kullanılan Wittrick-Williams algoritması açıklanacaktır.

3.3 Wittrick-Williams Algoritması

Wittrick-Williams (WW) algoritması bu tezin 3.1 ve 3.2 bölümlerinde bahsedilen tehlikelerin ve güçlüklerin üstesinden gelebilmektedir. WW algoritması ile doğal frekansların kesin değerleri bulunmaksızın, seçilen bir frekansın altında kaç adet doğal frekansın olduğu ve doğal frekansların istenilen hassasiyette değerleri bulunabilmektedir. $\det \mathbf{K}_G = 0$ 'a denk gelen doğal frekansların yanında WW algoritması düğüm noktalarının nodlara denk geldiği durumdaki doğal frekansları da hesaplayabilmektedir. Ayrıca tüm özdeğer problemlerine uygulanabilir. En kullanışlı alanı ise sürekli sistemlerdir.[16]

$s\{\mathbf{K}_G\}$, bir matrisin işaret değişiminin sayısını ve $\mathbf{K}_G$ ilgilenilen sistemin genel ya da global dinamik direngenlik matrisini ifade etmek üzere, 0'dan seçilen herhangi bir ω^* frekansı aralığındaki doğal frekans sayısı j

$$j = j_0 + s\{\mathbf{K}_G\} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanmıştır [16]. Yukarıdaki denklemde kullanılan j_0 ise tüm düğüm noktalarının nodlara denk gelmesi durumundaki bir başka deyişle sistemin mesnetlenmesi durumundaki sistemin sahip olduğu ω^* doğal frekansının altında kalan doğal frekans sayısıdır. (2.5) denklemdeki $s\{\mathbf{K}_G(\omega^*)\}$ ise standart yani pivotsuz Gauss eliminasyon yöntemi uygulanarak elde edilen üst diyagonal $\mathbf{K}_G^\Delta(\omega^*)$ matrisinin ana köşegenindeki negatif elemanların sayısıdır. WW algoritmasının uygulandığı sistemler sürekli olduğundan mesnetlenmiş sistemi oluşturan her elemanın belirlenen bir ω^* frekansının altında kalan doğal frekansları sayısı toplamı T.E.S. toplam eleman sayısını göstermek üzere

$$j_0 = \sum_{m=1}^{T.E.S} j_m \quad (3.6)$$

şeklinde bulunabilir. Burada kullanılan j_m , sistemi oluşturan m. elemanın ω^* frekansının altında kalan doğal frekans sayısıdır.

ω^* frekansı artarak bir kutbu geçtiğinde bir başka deyişle ω^* frekansı bir kutubun sol tarafından sağ tarafına geçtiğinde j_0 bir artarken $s\{K_G\}$ değeri bir azalır. Öte yandan ω^* frekansı bir kökü geçerse j_0 'da bir değişim olmazken $s\{K_G\}$ değeri bir artar. ω^* frekansının bir kökü geçmesi j değerini bir artırır. Eğer kök m katlı kök ise j_0 değişmezken $s\{K_G\}$ m kadar artar, böylelikle j değeri m kadar artar.

WW algoritması eğer sistemin alt elemanları birbirine eş veya büyük bir kısmı aynı tip ise hesaplama zamanı oldukça azalır. Çünkü eş tip elemanlar için mesnetlenmiş durum bir kere hesap edilmektedir. Böylelikle, (eleman sayısı) $\times$ (bir elemanın matrislerini hesaplamak için geçen süre) oldukça azalır.

Bir sistemin i . doğal frekansının (ω_i) hesaplanması istenilmiş olsun. (3.5) denklemi, herhangi bir çözüme yakınsama algoritmasında rahatlıkla kullanılabilir. Bunlardan bir tanesi için kullanılan yakınsama metodu şu şekilde açıklanabilir: İlk adım alt sınır frekansın belirlenmesidir. Daha sonra deneme frekansını küçük $\Delta\omega$ adımlarıyla arttırarak istenilen ω_i frekansının geçilip geçilmediği (3.5) denklemiyle kontrol edilmelidir. Daha sonra ω_i frekansının aşıldığı anlaşıldığında bu yeni frekans değeri artık üst sınır değeri için kullanılacaktır. ω_{ALT} ve $\omega_{ÜST}$ sınır frekansları belirlendikten sonra ikiye bölme metodu kullanılarak yeni üst veya alt frekans değeri

$$\omega = \frac{(\omega_{ÜST} - \omega_{ALT})}{2} \quad (3.7)$$

denklemiyle hesaplanabilir. Bu gibi bir yaklaşımla istenilen aralıktaki doğal frekans istenilen hassasiyet ve doğrulukla elde edilebilir [16],[20].

3.4 Titreşim Biçimlerinin Elde Edilmesi

ω_i doğal frekansına karşı gelen titreşim biçimi u_i , ω_i doğal frekansının pertürbe edilmesiyle elde edilen küçük ω_p frekansının (3.7) denkleminde yeniden kullanılmasıyla elde edilen

$$K_G(\omega_p) u_i = f_p \quad (3.8)$$

denklemindeki u_i 'nin bulunabilir [19]. u_i basitçe

$$u_i = \{K_G(\omega_p)\}^{-1} f_p \quad (3.9)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu yaklaşımla elde edilen bir çok metotun temel ayrılığı (2.9) denkleminde kullanılan $\mathbf{f}_p$ vektörünün genlik değerleridir [20]. Bu tezde kullanılan değerler ise aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{f}(i) = i \times 10^{-10}$$

$$\omega_p = (1 + 10^{-4}) \times \omega_i \quad (3.10)$$



4 DÖNEN ROTOR PALLERİNİN HAREKETİNİ TEMSİL EDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1 Giriş

Türbin, kompresör, helikopter ve bunlara benzer merkezkaç kuvveti etkisine maruz kalan yapıların titreşim karakteristiklerinin belirlenmesi bir çok araştırmacının ilgisini çekmiştir. Bunun başlıca nedeni dönen yapıların aeroelastik davranışlarının incelenmesi istendiğinde dinamik analizin gerekli olmasıdır. Dönen bir palin en sade temsili, dönme düzlemi içindeki eğilme veya bu düzleme dik eğilme yapabilen dönen bir Euler-Bernoulli kirişidir. Bu tip bir modelleme çalışmaları, referans [21]-[24] tarafından yapılmıştır. Bu Euler-Bernoulli kirişi teorisine dayanan modelin diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümü, referans [25] tarafından Rayleigh-Ritz methodu ile, referans [26] ve [27] 'de Galerkin metodu ile, referans [28]'de Southwell metodu ile, referans [29], [30], [31], [32]'de sonlu elemanlar metodu ile, referans [33]'da perturbasyon tekniği ile, referans [34]'de dinamik direngenlik matrisi metodu ile, referans [35] ve [36]'de integral metotlarıyla ve referans [23]'de kuvvet serisi ile yapılmıştır. Fakat bir palin bu tip modellenmesi, bağlı etkiler ihmal edildiğinden gerçeklikten oldukça uzak ve olabildiğince sadedir. Houbolt & Brooks [37] tarafından önburulmaya sahip dönen rotor pallerinin düzlemiçi yanal eğilme, düzlem dışı (dikey) eğilme ve burulma hareketini bağlı olarak temsil eden diferansiyel denklemler, 1958 yılında türetilmiştir. Bu bölümde, bu diferansiyel denklemler ayrıntıya girmeksizin yeniden türetilecek ve bu yaklaşım ile ilgili yapılan varsayımlar açıklanacaktır.

4.2 Önburulmalı Dönen Rotor Pallerinin Bağlı Diferansiyel Denklemlerinin Türetilmesi

Pallerin deformasyonu ile ilgili birçok teori ortaya konmuş olmasına rağmen, bu teoriler bazı etkileri gözardı etmekte veya yaklaşık olarak hesaplara koymaktadırlar. Kütle ve direngenlik dağılımlarının hesaba katılmaması, elastik ve kütle eksenlerinin çakışmaması, önburulma, eylemsizlik kuvvetleri ile merkezkaç kuvvetlerinin beraber etkimesi sonucu oluşan yeni kuvvetler, bu etkilere örnek olarak gösterilebilir. Bu kısımda ise tüm bu etkiler gözönüne alınacaktır. Denklemlerin türetilişinde Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanılmıştır. Yani kesme kuvvetinin yol açtığı deformasyon ihmal edilmiştir. Bu bölümde çıkartılan ifadeler referans [37]'in kısaltılmış bir tercümesidir. Daha detaylı bilgi için referansa başvurulması önerilir.

4.2.1 Diferansiyel denklemlerin türetilmesi için genel yöntem

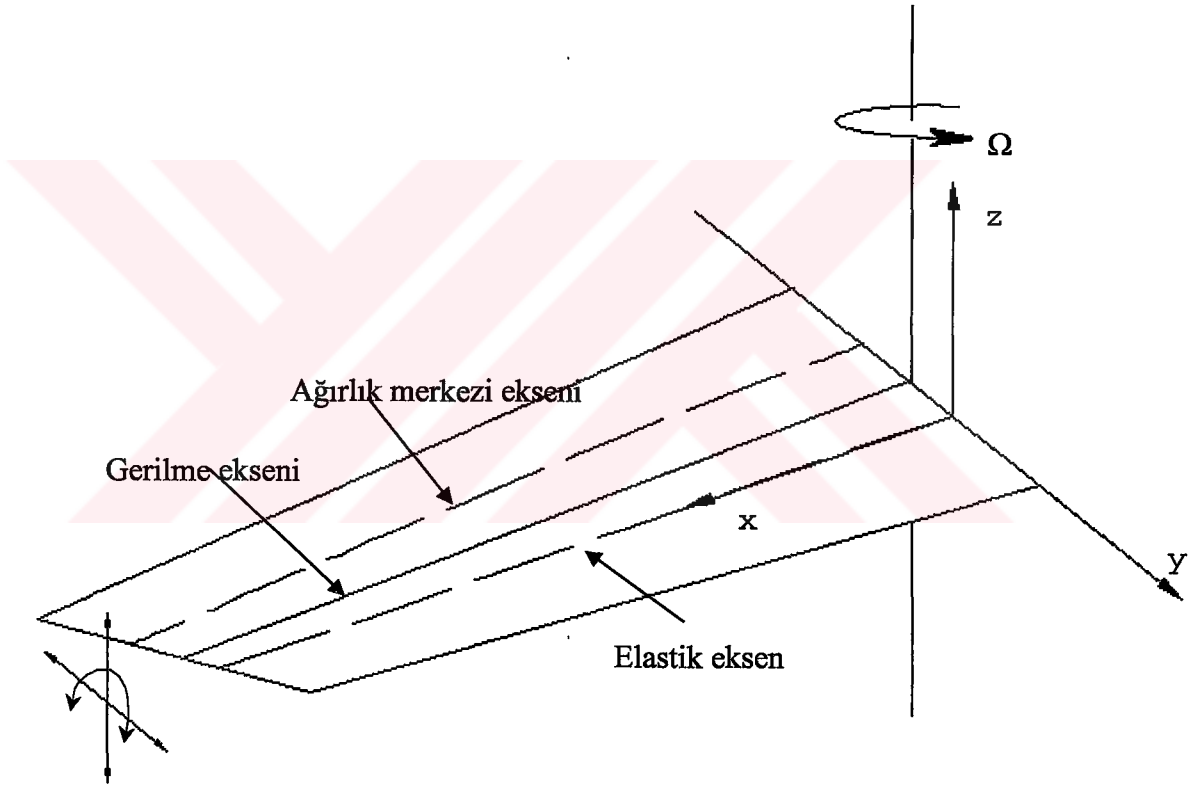
Helikopter pali, Şekil 4.1'de görüldüğü gibi saat ibrelerinin ters yönünde Ω açısal hızıyla dönüş yapmaktadır. Hareketli eksen takımı xyz, Şekil 4.1'deki gibi x eksenini palin şekil değiştirmemiş durumundaki elastik eksenle üst üste olacak biçimde yönlenmiştir. Palin birim uzunluğuna tesir eden aerodinamik etkilerin, y ve z eksenlerinde L_y , L_z kuvvetleri, x ekseninde ise M momentine sebep olduğu kabul edilmiştir. Pal içindeki gerilme ise T ile ifade edilmektedir.

Şekil 4.2'de pal kesitine ait η - ζ koordinat sistemi ve tanımlanan uzunluklar görülmektedir. η ve ζ eksenlerinin kesişim noktası elastik eksen üzerindedir ve η eksenini kesitin ana eksenini olarak tanımlanmıştır. Pal deformasyonları v, w ve ϕ , sırasıyla palin dönme eksenini içindeki eğilmesi, palin dönme eksenine dik yöndeki eğilmesi ve x eksenini etrafındaki burulması olarak tanımlanmıştır. β önburulma açısı ve ϕ saat ibrelerinin ters yönünde pozitif olarak alınmıştır. Diferansiyel denklemlerin türetilişi aşağıdaki altı adımda sırayla gösterilmiştir.

1. Pal kesiti içerisindeki herhangi bir noktanın birim uzama ifadesini yerdeğiştirmeler cinsinden veren boyuna birim uzama denklemlerinin türetilmesi
2. 1. adımda bulunan birim uzama ifadelerinin yardımıyla kesite ait elastik moment ifadelerinin türetilmesi

3. 2. denklemde elde edilen moment ifadelerinin hareketli eksen takımına uygun hale koordinat transformasyonu ile getirilmesi
4. Pal kesiti üzerindeki denge denklemlerinin türetilmesi
5. Tüm atalet yüklerinin ve gövdeye etkiyen yüklerin türetilmesi
6. 3, 4 ve 5. adımlarda elde edilen denklemlerin bir araya getirilerek nihayi diferansiyel denklemlerin oluşturulması

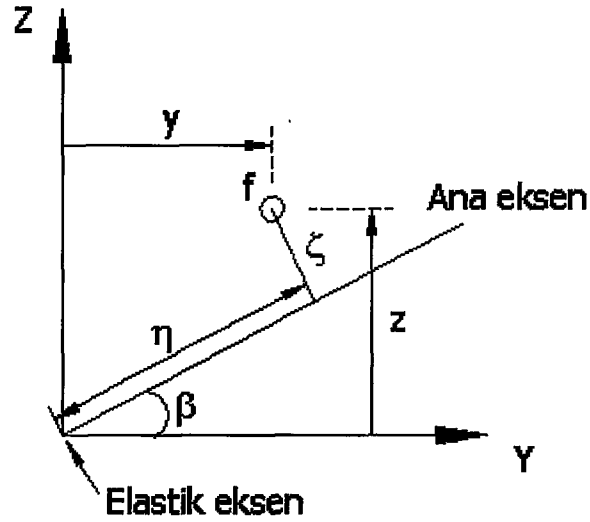
4.2.2 Birim uzama denklemlerinin türetilmesi



Şekil 4.1 Eğilme ve burulma deformasyonlarına uğramış bir önburulmalı kiriş

Şekil 4.1’de görülen, eğilme ve burulma deformasyonlarına uğrayan bir önburulmalı kirişin eksenel birim uzamasını hesaplamak için kirişin elastik eksenine dik olan fiktif bir kesit alınsın.

Şekil 4.2’de fiktif kesitin şekil değiştirmemiş hali gösterilmektedir.



Şekil 4.2 Fiktif kesitin şekil değiştirmemiş durumu

Şekil 4.2’de gösterilen f fiktif kesitte η , f lifinin elastik eksene kesitin ana ekseninden uzaklığıdır. ζ , f lifinin kesitin ana eksenine olan uzaklığı, β ise kesitin önburulma açısıdır. f lifinin orijine olan uzaklığı yazılıp, bu uzaklıkların x eksenine göre değişim oranları yazılırsa;

$$\begin{aligned} y &= \eta \cos \beta - \zeta \sin \beta \\ z &= \eta \sin \beta + \zeta \cos \beta \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} y' &= -\eta \beta' \sin \beta - \zeta \beta' \cos \beta = -\beta' z \\ z' &= \eta \beta' \cos \beta - \zeta \beta' \sin \beta = \beta' y \end{aligned} \quad (4.2)$$

elde edilir.

Şekil 4.3’de fiktif kesitin, kiriş deformasyona uğradıktan sonraki durumu görülmektedir.

$$z'_l = w' + \beta'y - \beta'z\phi + y\phi' = w' + y(\beta' + \phi') - z\beta'\phi \quad (4.8)$$

elde edilir. f lifinin deformasyon sonrası toplam uzunluğunu hesaplamak için lifin x, y ve z yönlerindeki yer değiştirmelerini diferansiyel elemanlar cinsinden

$$ds_l^2 = dx_l^2 + dy_l^2 + dz_l^2 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir (4.9) denkleminin her iki tarafı da $(dx)^2$ ifadesine bölünürse

$$\left(\frac{ds_l}{dx}\right)^2 = (x'_l)^2 + (y'_l)^2 + (z'_l)^2 \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) ifadesi (4.6), (4.7), ve (4.8) denklemlerinin yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds_l}{dx}\right)^2 = & 1 + 2[u' - y(v'' + \beta'w') - z(w'' - \beta'v')] + z^2\beta'^2 \\ & - 2z\beta'(v' - y\beta'\phi - z\phi') + y^2\beta'^2 + 2y\beta'(w' + y\phi' - z\beta'\phi) \end{aligned} \quad (4.11)$$

(4.11) ifadesi düzenlenecek olursa

$$\frac{ds_l}{dx} = \left\{ 1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2 + 2[u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi'] \right\}^{1/2} \quad (4.12)$$

elde edilir. Bu denklem bir lif elemanının dx elemanı boyunca lifin toplam uzama miktarını verir. (4.12) ifadesinden deformasyon nedeniyle oluşan etki çıkartılırsa ($u = v = w = \phi = 0$), lifin deformasyona uğramadan önceki dx elemanı boyunca uzunluğu ds, aşağıdaki (4.13) ifadesinde

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2 \right]^{1/2} \quad (4.13)$$

gösterilebilir. Gerilme nedeniyle oluşan birim uzama

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{ds_1}{ds} - 1 \\ &= \left\{ 1 + \left[\frac{2}{1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2} \right] [u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi'] \right\}^{\frac{1}{2}} - 1\end{aligned}\quad (4.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade kuvvet serisi yardımıyla,

$$\varepsilon = \left[\frac{1}{1 + (y^2 + z^2)(\beta')^2} \right] [u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi'] \quad (4.15)$$

şeklinde düzenlenebilir. $(y^2 + z^2)(\beta')^2$ terimi genelde 0.03 ve 0.04 aralığında bir değere sahip olduğundan [37] ihmal edilebilir ve gerilme nedeniyle oluşan birim uzama

$$\varepsilon = u' - yv'' - zw'' + (y^2 + z^2)\beta'\phi' \quad (4.16)$$

şeklinde gösterilebilir [37]. Birim uzama ifadesi kesitle ilgili koordinatlarla cinsinden ifadesi (4.1) ifadesi yardımıyla,

$$\varepsilon = u' - \eta(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - \zeta(w'' \cos \beta - v'' \sin \beta) + (\eta^2 + \zeta^2)\beta'\phi' \quad (4.17)$$

yazılabilir.

Kesitte meydana gelen kuvvet nedeniyle oluşan eksenel gerilmelerin toplamı, kirişteki gerilme kuvvetine eşittir. Kesitin ana eksenine göre simetrik olduğu kabulü yapılırsa, kirişteki toplam gerilme kuvveti,

$$\begin{aligned}T &= E \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varepsilon d\zeta d\eta = E \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [u' - \eta(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - \\ &\quad \zeta(w'' \cos \beta - v'' \sin \beta) + (\eta^2 + \zeta^2)\beta'\phi'] d\zeta d\eta\end{aligned}\quad (4.18)$$

kesitin aksenal birim uzamasının alan üzerinden integralinin elastisite modülü ile çarpımına eşittir. Burada t kesitin kalınlığını, $\eta_{\text{ÖN}}$ ve η_{ARKA} ise kesitin ön ve arka kısımlarının elastik eksene olan uzaklığı göstermektedir.

(4.18) ifadesi hesaplanırsa

$$T = E \left[A u' - A e_A (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) + A k_A^2 \beta' \phi' \right] \quad (4.19)$$

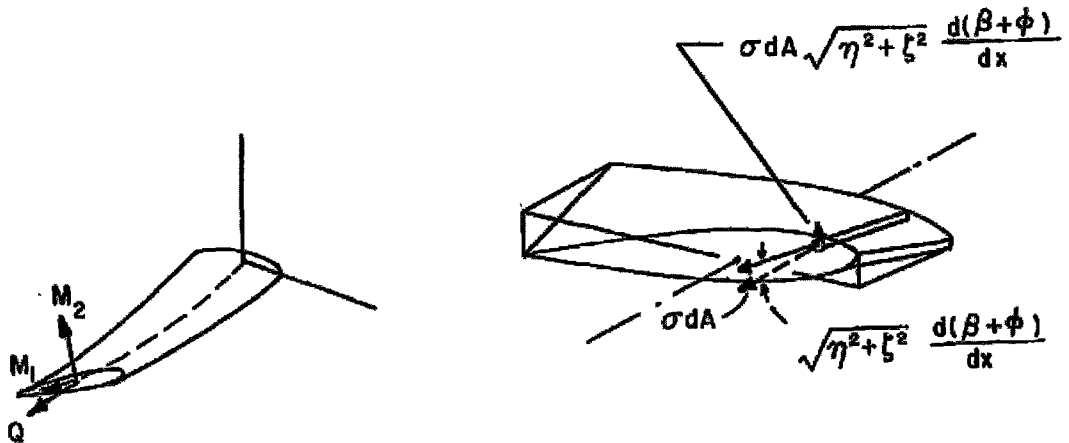
kesit üzerindeki toplam kuvvetin ifadesi elde edilir. Bu denklemde e_A , elastik eksenle çekme kuvvetinin etkidiği nokta arasındaki mesafe, k_A , kesit alanının elastik eksene göre alan atalet yarıçapıdır. (4.17) ifadesindeki gerekli u' terimi (4.19) ifadesinden çekip (4.17) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\varepsilon = \varepsilon_T + (e_A - \eta)(v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - \zeta(w'' \cos \beta - v'' \sin \beta) + (\eta^2 + \zeta^2 - k_A^2) \beta' \phi' \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) ifadesinde ε_T , T kuvveti nedeniyle yalnızca kuvvet doğrultusunda oluşan T/EA büyüklüğündeki birim uzamadır.

4.2.3 Kesite ait elastik moment ifadelerinin türetilmesi

Kesit alanı üzerinde oluşan gerilme dağılımı, kesitin elastik eksenine, kesit alanının yüzey normali yönünde yönelmiş olan eksene göre ve bu iki eksene dik olan üçüncü bir eksene göre alınabilecek momentlere aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi ayrıştırılabilir.



Şekil 4.3 Kesit alanı üzerinde oluşan gerilme dağılımı

Bunu gerçekleştirebilmek için önburulmaya maruz kalmış bir lif düşünölsün. Bir lif üzerindeki gerilmenin isteğe göre belirlenebilen eksenlere göre momentleri gözönüne alınarak, tüm liflerin düşey ve yatay yönde eğilme elastik momentleri toplamı, sırasıyla

$$M_1 = - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma \zeta d\zeta d\eta \quad (4.21)$$

$$M_2 = - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma \eta d\zeta d\eta \quad (4.22)$$

şeklinde hesap edilebilir. Tüm liflerin kesit alanının yüzey normali yönünde yönlenmiş olan eksene bir başka deyişle elastik eksene dik olan eksene göre oluşturdukları moment

$$Q = GJ\phi' + \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma (\beta + \phi)' (\eta^2 + \zeta^2) d\zeta d\eta \quad (4.23)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.21), (4.22) ve (4.23). ifadelerindeki σ ifadesi yerine (4.20) ifadesindeki birim uzamanın elastisite modöülü ile çarpımı yazılıp, ($\sigma = E\varepsilon$) bu denklemler hesaplanırsa palin düşey yönündeki, yatay yönündeki ve eksenel yöndeki elastik momentleri sırasıyla

$$M_1 = EI_1 (-v'' \sin \beta + w'' \cos \beta) \quad (4.24)$$

$$M_2 = EI_2 (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - Te_A - EB_2 \beta' \phi' \quad (4.25)$$

$$Q = [GJ + Tk_A^2 + EB_1 (\beta')^2] \phi' + Tk_A^2 \beta' (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) \quad (4.26)$$

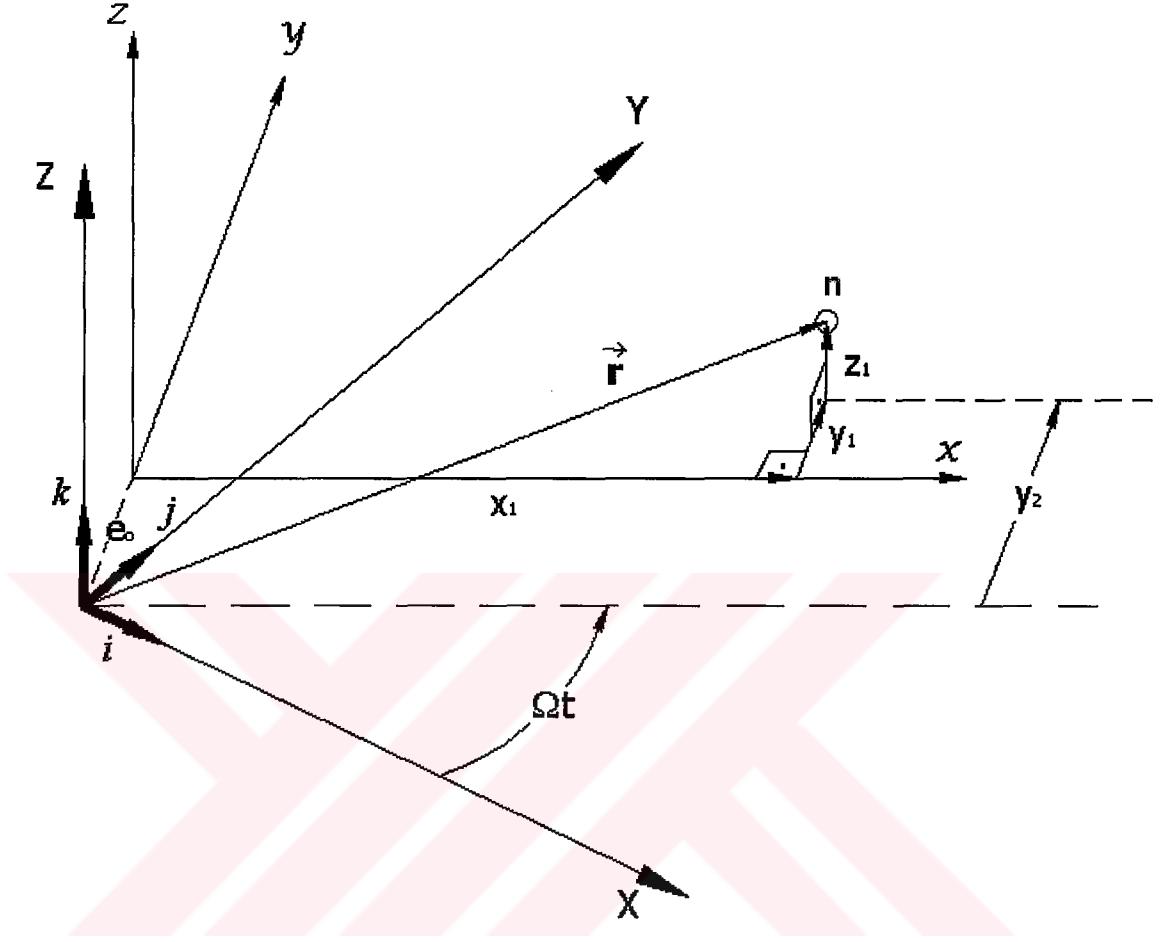
biçiminde ifade edilebilir. Bu denklemlerdeki I_1 ve I_2 gerilmeye maruz kalan alanın asal eksenlere göre alan atalet momentleridir. B_1 ve B_2 ise yalnızca kesit ile alakalı sabitler olup

$$B_1 = \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} t \eta^2 \left(\eta^2 + \frac{t^2}{6} - k_A^2 \right) d\eta$$

$$B_2 = \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} t \eta \left(\eta^2 + \frac{t^2}{12} - k_A^2 \right) d\eta \quad (4.27)$$

şeklinde tanımlanırlar.

4.2.4 Atalet Kuvvetlerinin Elde Edilmesi



Şekil 4.4 n maddesel noktasının sabit XYZ eksen takımı ve hareketli xyz eksen takımlarına göre konumu

Bu bölümün amacı önburulmalı dönen bir palin içindeki bir n maddesel noktasının ivme analizinin yapılarak bu noktaya ait atalet kuvvetlerinin türetilmesidir. Şekil 4.4'de n maddesel noktasının sabit **XYZ** eksen takımı ve sabit eksen takımına göre Ωt açısı kadar dönmüş hareketli xyz eksen takımlarına göre konumu gösterilmiştir. n maddesel noktasının hareketli xyz eksen takımına göre konumu sırasıyla x_1, y_1 ve z_1 vektörleriyle gösterilmiştir. n maddesel noktasının yer vektörü $\mathbf{r}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ birim vektörleri cinsinden

$$\mathbf{r} = (x_1 \cos \Omega t - y_2 \sin \Omega t) \mathbf{i} + (x_1 \sin \Omega t + y_2 \cos \Omega t) \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} \quad (4.28)$$

ifade edilebilir. $\mathbf{r}$ yer vektörünün zamana göre türevi, yani n maddesel noktasının sabit eksen takımına göre hızı

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} = & (\dot{x}_1 \cos \Omega t - \dot{y}_2 \sin \Omega t - x_1 \Omega \sin \Omega t - y_2 \Omega \cos \Omega t) \mathbf{i} + \\ & (\dot{x}_1 \sin \Omega t + \dot{y}_2 \cos \Omega t + x_1 \Omega \cos \Omega t - y_2 \Omega \sin \Omega t) \mathbf{j} + \dot{z}_1 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.29)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. (4.29) ifadesinde elde edilen hız ifadesinin de zamana göre türevi alınırsa n maddesel noktasının mutlak ivmesi,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & [(\ddot{x}_1 - \Omega \dot{y}_2) \cos \Omega t - \Omega(\dot{x}_1 - \Omega y_2) \sin \Omega t - (\ddot{y}_2 + \Omega \dot{x}_1) \sin \Omega t \\ & - (\dot{y}_2 + \Omega x_1) \cos \Omega t] \mathbf{i} + [(\ddot{x}_1 - \Omega \dot{y}_2) \sin \Omega t + \Omega(\dot{x}_1 - \Omega y_2) \cos \Omega t \\ & - (\ddot{y}_2 + \Omega \dot{x}_1) \cos \Omega t - (\dot{y}_2 + \Omega x_1) \sin \Omega t] \mathbf{j} + \ddot{z}_1 \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde bulunur. Noktanın, hareketli xyz eksen takımına göre ivmesi ise yukarıdaki denklemde $t = 0$ konularak

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & (\ddot{x}_1 - \Omega^2 x_1 - 2\Omega \dot{y}_2) \mathbf{i} + (\ddot{y}_2 - \Omega^2 y_2 + 2\Omega \dot{x}_1) \mathbf{j} + \ddot{z}_1 \mathbf{k} \\ = & a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.31)$$

şeklinde elde edilebilir. (4.3), (4.4) ve (4.5) ifadelerindeki $x_1 = x + u - v'y - w'z$, $y_1 = v + y - z\phi$, $z_1 = w + z - y\phi$ ifadeleri $y_2 = y_1 + e_o$ eşitliği kullanılarak $y_2 = v + y - z\phi + e_o$ şeklinde güncellendikten sonra, bu ifadelerin zamana bağlı türevleri olan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{u} - \dot{v}' - \dot{w}'z \\ \dot{y}_2 &= \dot{v} - z\dot{\phi} \\ \dot{z}_1 &= \dot{w} + y\dot{\phi} \end{aligned} \quad (4.32)$$

bağıntılarını ve (4.32) ifadesindeki bağıntıların zamana bağlı türevleri olan

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{u} - \ddot{v}' - \ddot{w}'z \\ \ddot{y}_2 &= \ddot{v} - z\ddot{\phi} \\ \ddot{z}_1 &= \ddot{w} + y\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (4.33)$$

ifadeleri (4.31) ifadesinde kullanılırsa, hareketli eksen takımına göre ivmelenme vektörü ($\ddot{\mathbf{r}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$)'nün bileşenleri

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{u} - \ddot{v}' - \ddot{w}'z - \Omega^2(x + u - v'y - w'z) - 2\Omega(\dot{v} - z\dot{\phi}) \\ a_y &= \ddot{v} - z\ddot{\phi} + \Omega^2(v + y - z\phi + e_o) + 2\Omega(\dot{u} - \dot{v}'y - \dot{w}'z) \\ a_z &= \ddot{w} + y\ddot{\phi} \end{aligned} \quad (4.34)$$

şeklinde elde edilir.

(4.34) ifadesindeki , hareketli eksen takımındaki x , y ve z ivme bileşenlerindeki y ve z terimleri yerine (4.1) ifadesindeki karşılıkları konulursa

$$\begin{aligned} a_x &= \ddot{u} - \Omega^2(x + u) - 2\Omega v + \\ &\eta \left[-\dot{v}' \cos \beta - \dot{w}' \sin \beta + \Omega^2(v' \cos \beta + w' \sin \beta) + 2\Omega \phi \sin \beta \right] + \\ &\zeta \left[\dot{v}' \sin \beta - \dot{w}' \cos \beta + \Omega^2(-v' \sin \beta + w' \cos \beta) + 2\Omega \dot{\phi} \cos \beta \right] \\ a_y &= \ddot{v} - \Omega^2(v + e_o) + 2\Omega \dot{u} \\ &+ \eta \left[-\dot{\phi} \sin \beta - \Omega^2(\cos \beta - \phi \sin \beta) + 2\Omega(-\dot{v}' \cos \beta - \dot{w}' \sin \beta) \right] \\ &+ \zeta \left[-\dot{\phi} \cos \beta - \Omega^2(-\sin \beta - \phi \cos \beta) + 2\Omega(\dot{v}' \sin \beta - \dot{w}' \cos \beta) \right] \\ a_z &= \ddot{w} + \eta \ddot{\phi} \cos \beta - \zeta \ddot{\phi} \sin \beta \end{aligned} \quad (4.35)$$

Elde edilen bu ivmelenme vektörünün yardımıyla kirişin kesit alanı üzerinden alınan uygun integrasyonlardan faydalanılarak kirişin üzerine etkiyen atalet kuvvetleri aşağıdaki gibi türetilir. Kesitin ana eksene göre simetrik olduğu kabulü altında, hareketli xyz eksen takımına göre p_x , p_y , p_z , atalet kuvvetleri ve q_x , q_y , q_z atalet momentleri

$$\begin{aligned}
p_x &= - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-1/2}^{1/2} a_x \rho \, d\zeta \, d\eta \\
p_y &= L_y - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-1/2}^{1/2} a_y \rho \, d\zeta \, d\eta \\
p_z &= L_z - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-1/2}^{1/2} a_z \rho \, d\zeta \, d\eta \\
q_x &= M - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-1/2}^{1/2} [-a_y(z_1 - w) + a_z(y_1 - v)] \rho \, d\zeta \, d\eta \\
q_y &= - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-1/2}^{1/2} [-a_x(z_1 - w)] \rho \, d\zeta \, d\eta \\
q_z &= - \int_{\eta_{ARKA}}^{\eta_{ON}} \int_{-1/2}^{1/2} [-a_y(y_1 - v)] \rho \, d\zeta \, d\eta
\end{aligned} \tag{4.36}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ρ kirişin yoğunluğu olup, istenirse kesitin özelliklerine bağlı olarak parametrik bir ifade ile yerdıştirebilir. Aynı ifadede görülen L ve M terimleri aerodinamik etkiler nedeniyle pal kesitine etkileyen kuvvet ve momenti ifade etmektedir. (4.36). deklemdaki ifadeler hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
p_x &= -m \left[\ddot{u} - \Omega^2 (x + u) - 2\Omega v \right] \\
&\quad - me \left[-\ddot{v}' \cos \beta - \ddot{w}' \sin \beta + \Omega^2 (v' \cos \beta + w' \sin \beta) + 2\Omega \dot{\phi} \sin \beta \right]
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
p_y &= L_y - m \left[\ddot{v} - \Omega^2 (v + e_0) - 2\Omega \dot{u} \right] \\
&\quad - me \left[-\dot{\phi} \sin \beta - \Omega^2 (\cos \beta - \phi \sin \beta) + 2\Omega (-\dot{v}' \cos \beta - \dot{w}' \sin \beta) \right]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$p_z = L_z - m\ddot{w} - me\ddot{\phi} \cos \beta \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
q_x &= M - \Omega^2 me [(v + e_0) \sin \beta + e_0 \phi \cos \beta] + me (\ddot{v} \sin \beta - \ddot{w} \cos \beta + 2\Omega \dot{u} \sin \beta) \\
&\quad - \Omega^2 m [(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \sin \beta \cos \beta + (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \phi \cos 2\beta] - \ddot{\phi} m k_m^2 \\
&\quad - 2\Omega m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \dot{v}' \cos \beta \sin \beta - 2\Omega m (k_{m2}^2 \sin^2 \beta - k_{m1}^2 \cos^2 \beta) \dot{w}'
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
q_y = & -\Omega^2 me[(x+u)\sin\beta + x\phi\cos\beta] + me(\ddot{u}\sin\beta - 2\Omega\dot{v}\sin\beta) \\
& + \Omega^2 m[(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)v'\sin\beta\cos\beta + (k_{m2}^2\sin^2\beta + k_{m1}^2\cos^2\beta)w'] \\
& + m(k_{m2}^2\sin^2\beta + k_{m1}^2\cos^2\beta)(2\Omega\dot{\phi} - \ddot{w}') - m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)\dot{v}'\cos\beta\sin\beta
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
q_z = & -\Omega^2 me[(x+u)\cos\beta - x\phi\sin\beta] + me(\ddot{u}\cos\beta - 2\Omega\dot{v}\cos\beta) \\
& + \Omega^2 m[(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)w'\sin\beta\cos\beta + (k_{m2}^2\cos^2\beta + k_{m1}^2\sin^2\beta)v'] \\
& - m(k_{m2}^2\cos^2\beta + k_{m1}^2\sin^2\beta)\ddot{v}' + 2\Omega m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)\dot{\phi}\sin\beta\cos\beta - m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)\dot{w}'\cos\beta\sin\beta
\end{aligned} \tag{4.42}$$

elde edilir. Bu denklemlerdeki m , k_m , k_{m1} ve k_{m2} terimleri sırasıyla palin birim uzunluğunun kütlesini, palin kesit alanının elastik eksene göre kütleli atalet yarıçapını, palin kesit alanının asal eksene göre kütleli atalet yarıçapını ve palin kesit alanının asal eksene dik olan eksene göre kütleli atalet yarıçapını ifade etmektedir.

Dönen bir palin kesitine gelen en genel kuvvet ve moment ifadeleri yukarıda verilmiştir. Bu denklemler aslında bir çok ikinci dereceden genel mühendislik hesaplarında ihmal edilebilecek terimlerle doludur. Aşağıdaki denklemlerde, genel helikopter palleri ve pervane kanatları için uygulanabilecek basitleştirilmiş, birinci mertebeden diferansiyel denklemler gerekli sadeleştirmeler yapılarak elde edilmiştir.

$$p_x = m\Omega^2 x \tag{4.43}$$

$$p_y = L_y - m[\ddot{v} - \Omega^2(v + e_o)] + me[\dot{\phi}\sin\beta + \Omega^2(\cos\beta - \phi\sin\beta)] \tag{4.44}$$

$$p_z = L_z - m\ddot{w} - me\ddot{\phi}\cos\beta \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
q_x = & M - \Omega^2 me[(v + e_o)\sin\beta + e_o\phi\cos\beta] + me(\ddot{v}\sin\beta - \ddot{w}\cos\beta) \\
& - \Omega^2 m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2)[\sin\beta\cos\beta + \phi\cos 2\beta] - \ddot{\phi}mk_m^2
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$q_y = -\Omega^2 mex(\sin\beta + \phi\cos\beta) \tag{4.47}$$

$$q_z = -\Omega^2 mex(\cos\beta - \phi\sin\beta) \tag{4.48}$$

4.2.5 Moment Dönüşümü

Bir önceki bölümde elde edilen moment ifadeleri hareketli eksen takımında ifade edilirse

$$\begin{aligned}M_x &= Q + M_1(\cos \beta - \phi \sin \beta)v' + M_1(\sin \beta + \phi \cos \beta)w' \\&\quad + M_2(\sin \beta + \phi \cos \beta)v' - M_2(\cos \beta - \phi \sin \beta)w' \\M_y &= M_1(\cos \beta - \phi \sin \beta) + M_2(\sin \beta + \phi \cos \beta) - Qv' \\M_z &= -M_1(\sin \beta + \phi \cos \beta) + M_2(\cos \beta - \phi \sin \beta) + Qw'\end{aligned}\tag{4.49}$$

elde edilir. (4.24), (4.25) ve (4.26) ifadelerindeki M_1 , M_2 ve Q ifadeleri (4.49) ifadesinde yerlerine konulursa

$$\begin{aligned}M_x &= \left[GJ + Tk_A^2 + EB_1(\beta')^2 \right] \phi' + Tk_A^2 \beta' \\&\quad - EB_2 \beta' (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) - Te_A (v' \sin \beta - w' \cos \beta)\end{aligned}\tag{4.50}$$

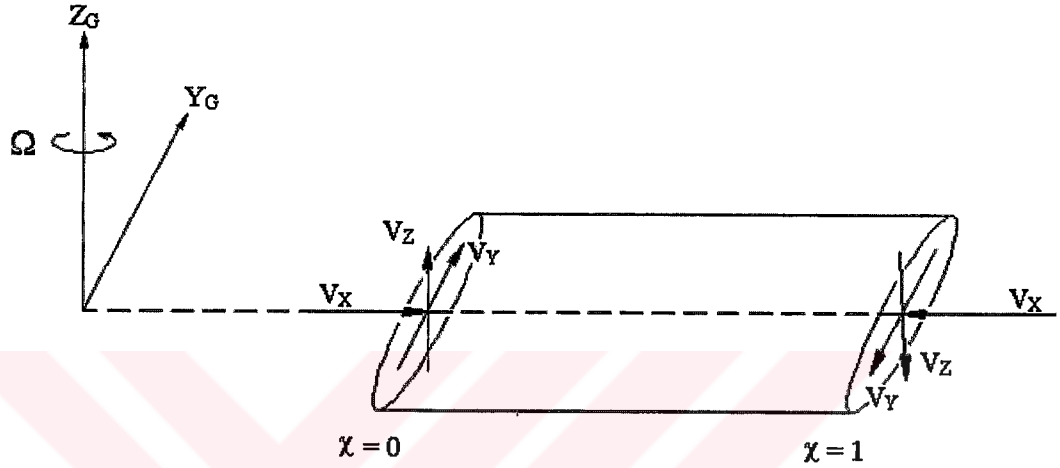
$$\begin{aligned}M_y &= (EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' + E(I_2 - I_1) v'' \sin \beta \cos \beta \\&\quad - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \sin \beta - Te_A \phi \cos \beta\end{aligned}\tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}M_z &= E(I_2 - I_1) w'' \sin \beta \cos \beta + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v'' \\&\quad - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \cos \beta - Te_A \phi \sin \beta\end{aligned}\tag{4.52}$$

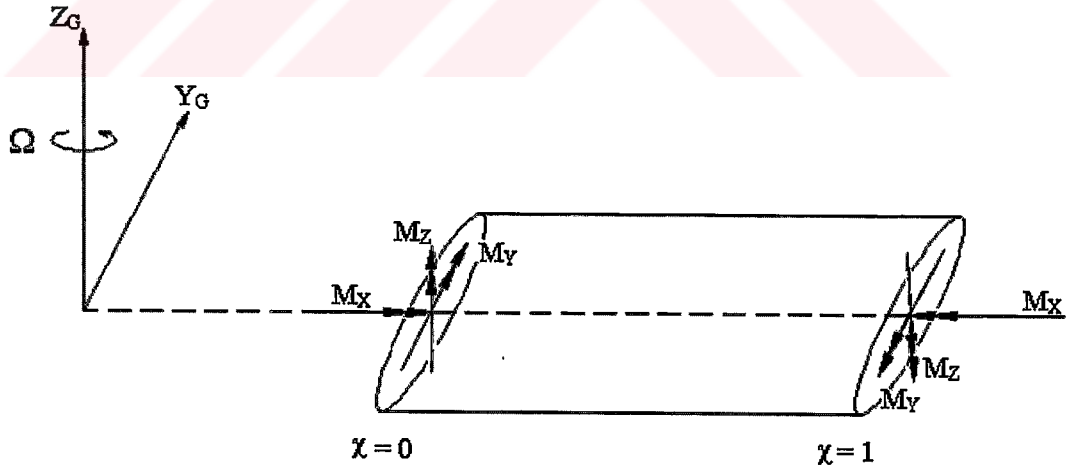
elde edilir.

4.2.6 Denge Koşulları

Şekil 4.5 ve Şekil 4.6'da kirişin üzerindeki bir diferansiyel elemanın üzerine etkiyen tüm kuvvet ve momentler görülmektedir. Diferansiyel eleman, kiriş üzerinden yz düzlemine paralel olarak alınan iki kesit ile oluşturulmuştur. Diferansiyel elemanın üzerine etkiyen bileşke kuvvet ve momentler, p_x , p_y , p_z , q_x , q_y ve q_z atalet etkilerini ihtiva ettikleri gibi aerodinamik etkileri de içermektedirler.



Şekil 4.5 Diferansiyel elemanın üzerine etkiyen tüm kuvvetler



Şekil 4.6 Diferansiyel elemanın üzerine etkiyen tüm momentler

x , y ve z doğrultularındaki kuvvet ve moment dengeleri

$$\begin{aligned} T' + p_x &= 0 \\ V_y' + p_y &= 0 \\ V_z' + p_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} M_x' + V_y w' + V_x v' + q_x &= 0 \\ M_y' - T w' + V_z + q_y &= 0 \\ M_z' - T v' + V_y + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki V_x , V_y ve V_z indislerle belirtilen eksenlerdeki kesme kuvvetleridir. (4.53) ifadesindeki kesme kuvvetleri ifadeleri (4.54) ifadesinde yerine yazılırsa temel denge denklemleri olan

$$\begin{aligned} M_x' - M_y' v' + M_z' w' - q_y v' + q_z w' + q_x &= 0 \\ M_y'' - (T w')' + q_y' - p_z &= 0 \\ M_z'' - (T v')' + q_z' - p_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.55)$$

denklemleri elde edilir. (4.55) ifadesindeki moment ifadelerinin yerine (4.50), (4.51) ve (4.52) ifadelerindeki karşılıkları konulup, hesap edilirse

$$\begin{aligned} - \left\{ GJ + Tk_A^2 + EB_1 (\beta')^2 \right\} \phi' + Tk_A^2 \beta' - EB_2 \beta' (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) \\ - Te_A (v' \sin \beta - w' \cos \beta) \Big\} + Te_A v'' \sin \beta - Te_A w'' \cos \beta + q_y v' - q_z w' - q_x = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} \left[(EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' + E(I_2 - I_1) \sin \beta \cos \beta v'' \right. \\ \left. - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \sin \beta - Te_A \phi \cos \beta \right]'' - (T w')' + q_y' - p_z = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \left[E(I_2 - I_1) \sin \beta \cos \beta w'' + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v'' \right. \\ \left. - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \cos \beta - Te_A \phi \sin \beta \right]'' - (T v')' + q_z' - p_y = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

denklemlerine ulaşılır.

Yukarıda da belirtildiği üzere bileşke veya toplam kuvvet ve momentler aerodinamik kuvvetlerinin yanısıra eylemsizlik etkilerini de içermektedirler. Kirişin üzerinden alınan diferansiyel elemanın ivmelenme vektörüne tam zıt yönde yönlendiği kabul edilen atalet etkileri açıkça (4.56), (4.57) ve (4.58) ifadelerinde yer almasına karşılık, aerodinamik etkiler açık olarak ifade edilmemiştir. Aerodinamik etkiler (4.43)-(4.48) denklemlerinde L_y , L_z ve M olarak ifade edilmiştir. (4.56), (4.57) ve (4.58) ifadeler aerodinamik etkileri açıkça gösterecek şekilde düzenlenirse, nihayi

$$\begin{aligned}
& - \left[GJ + Tk_A^2 + EB_1(\beta')^2 \right] \phi' + Tk_A^2 \beta' - EB_2 \beta' (v'' \cos \beta + w'' \sin \beta) \\
& - Te_A (v' \sin \beta - w' \cos \beta) \Big\} - \Omega^2 m \cos(\sin \beta + \phi \cos \beta) v' + \Omega^2 m \cos(\cos \beta - \phi \sin \beta) w' \\
& + Te_A v'' \sin \beta - Te_A w'' \cos \beta + \ddot{\phi} m k_m^2 = M + m e (\ddot{v} \sin \beta - \ddot{w} \cos \beta) \\
& - \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) [\sin \beta \cos \beta + \phi \cos 2\beta] - \Omega^2 m e [(v + e_o) \sin \beta + e_o \phi \cos \beta]
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
& \left[(EI_1 \cos^2 \beta + EI_2 \sin^2 \beta) w'' + E(I_2 - I_1) \sin \beta \cos \beta v'' - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \sin \beta \right. \\
& \left. - Te_A \phi \cos \beta \right] - (Tw')' + m \ddot{w} + m e \ddot{\phi} \cos \beta = L_z + (\Omega^2 m \cos(\sin \beta + \phi \cos \beta))'
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
& \left[E(I_2 - I_1) \sin \beta \cos \beta w'' + (EI_1 \sin^2 \beta + EI_2 \cos^2 \beta) v'' - (Te_A + EB_2 \beta' \phi') \cos \beta \right. \\
& \left. - Te_A \phi \sin \beta \right] - (Tv')' = m \Omega^2 x + (\Omega^2 m \cos(\cos \beta - \phi \sin \beta))'
\end{aligned} \tag{4.61}$$

diferansiyel denklemlerine ulaşılır.

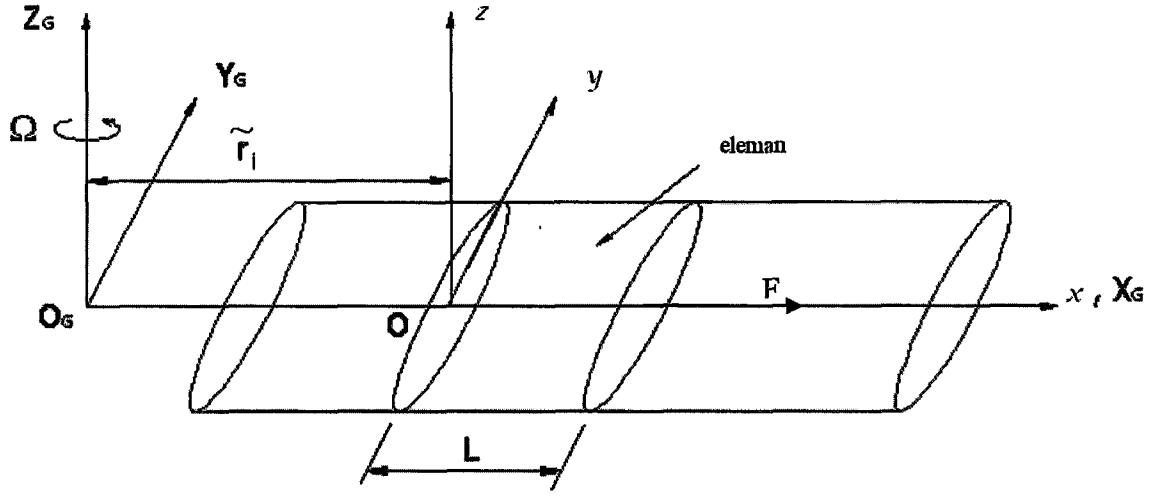
5 ÖNBURULMALI DÖNEN ROTOR PALLERİNİN BAĞLI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

5.1 Giriş

Elde edilen nihayi (4.59), (4.60) ve (4.61) diferansiyel denklemlerinin tam çözümü olmadığından dolayı bir çok araştırmacı yaklaşık metotlar kullanmışlardır. İlgili diferansiyel denklemlerin üzerinde bazı basitleştirmeler yapılan çözüm teknikleri referans [38]'da özetlenmiştir. Bu tekniklerden bazıları integrasyon matris metodu [38], [39], [40], döner kanat aeroelastik analizi [41], iletim (transmission) matrisi metodu [42] ve Green fonksiyonları yaklaşımı [43] olarak gösterilebilir. Bu yüksek lisans tezi çalışmasının getirdiği yenilik, ilgili diferansiyel denklemlerinin dinamik direngenlik matrisi metodu kullanılarak çözüm yapılmasıdır. Yalnız, bu metodun uygulanışı ve çözümü esnasında diğer algoritma ve yöntemlerden de yararlanılmıştır. Bunlar, lineer olmayan özdeğer problemini çözmekte kullanılan Wittrick-Williams algoritması ve numerik kararsızlığı gidermek için bu çalışmada kullanılan tekil değerlere ayrıştırma metodudur. Bu metodun kısa bir açıklaması EK F'de bulunmaktadır. Kullanılan algoritma ve metotlar hakkında gerekli bilgiler yeri geldiğinde verilecektir.

5.2 Teori

Dinamik direngenlik matris metodu ya da analizinde, transfer matrisi metoduna benzer şekilde dönen bir pal çok sayıda elemana ayrılır, Şekil 5.1'te bir palin üzerinden alınan bir eleman görülmektedir. Her bir elemana gelen kuvvetler ve momentler diğer komşu elemanlar tarafından uygulanmaktadır



Şekil5.1 Palin üzerindeki bir eleman

Seçilen elemanın üzerine gelen kuvvet ve moment dengesi diğer komşu elemanlarla kesiştiği noktalarda yazılır ve bu ifadelerden faydalanılarak her eleman için dinamik direngenlik matrisi hesaplanabilir sonra tüm bu matrisler uygun şekilde sonlu elemanlar metodunda olduğu gibi birleştirilerek genel dinamik direngenlik matrisi elde edilir. Şu farkla ki, sonlu elemanlar metodunda kütle ve direngenlik matrisi ayrı ayrı hesaplanır bu metotta ise sistemin kütle ve direngenliği tek bir matriste toplanmıştır. Bir başka deyişle sonlu elemanlar metodunda iki tane matris birleştirilmesi işlemi varken, dinamik direngenlik matrisi metodunda ise bu iş yükü sonlu elemanlar metoduna göre yarıya inmiştir.

Elde edilen nihayi (4.59), (4.60) ve (4.61) diferansiyel denklemleri, seçilen palin

- Kesitinin ana eksenine göre simetrik
- Elastik eksenini ile dönme ekseninin çakışık
- Kesitinin geometrik merkezinin elastik eksen üzerinde

olduğu kabulleri altında

$$(EI_y \tilde{w}'' + EI_{zy} \tilde{v}'')' = (T \tilde{w}')' + S_1 \quad (5.1)$$

$$(GJ \phi')' = S_3 \quad (5.2)$$

$$\left(EI_z \tilde{v}'' + EI_{zy} \tilde{w}'' \right)'' = (T \tilde{v}')' + S_2 \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlerdeki $\sim$ işareti ilgili değişkenin boyutunun birimini ile ilgilidir ve sembol listesinde ayrıntılı olarak açıklanmıştır. (5.1), (5.2) ve (5.3) denklemlerinde görülen I_y , I_z ve I_{yz} kesitin simetrik olmasından dolayı

$$I_y = I_\zeta \cos^2 \beta + I_\eta \sin^2 \beta \quad (5.4)$$

$$I_z = I_\eta \cos^2 \beta + I_\zeta \sin^2 \beta \quad (5.5)$$

$$I_{zy} = \left(I_\zeta - I_\eta \right) \sin \beta \cos \beta \quad (5.6)$$

şeklinde ifade edilebilmektedir, S_1 , S_2 , S_3 ve T ifadeleri ise merkezkaç etkilerini ve düzlem içi eğilme, düzlem dışı eğilme ve burulma titreşimlerinin birbirlerine olan etkilerini ifade etmektedir:

$$T = \frac{1}{2} m \Omega^2 (L^2 + 2L\tilde{r}_i - 2\tilde{r}_i x - x^2) + F \quad (5.7)$$

$$S_1 = \left[\Omega^2 em (x + \tilde{r}_i) \phi \cos \beta \right]' + \omega^2 m (\tilde{w} + e \phi \cos \beta) \quad (5.8)$$

$$S_2 = - \left[\Omega^2 em (x + \tilde{r}_i) \phi \sin \beta \right] - \Omega^2 em \phi \sin \beta + \omega^2 m (\tilde{v} - e \phi \sin \beta) + \Omega^2 m \tilde{v} \quad (5.9)$$

$$S_3 = \Omega^2 em [(x + \tilde{r}_i)(\tilde{w}' \cos \beta - \tilde{v}' \sin \beta) + \tilde{v} \sin \beta] + \Omega^2 m (k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \phi \cos 2\beta - \omega^2 m [k_m^2 \phi - e(\tilde{v} \sin \beta - \tilde{w} \cos \beta)] \quad (5.10)$$

5.2.1 Elemanın hareketini temsil eden diferansiyel denklemlerin boyutsuzlaştırılması ve çözümü

(5.1), (5.2) ve (5.3) ifadeleri boyutsuz hale getirmek için birim uzunluk başına düzlem içi eğilme, düzlem dışı eğilme, burulma değişkenleri tanımlanırsa

$$D = \frac{d}{d\chi} \quad , \quad w = \tilde{w}/L \quad , \quad v = \tilde{v}/L \quad , \quad \varphi = \phi/L \quad , \quad \chi = x/L \quad (5.11)$$

(5.1), (5.2) ve (5.3) denklemleri,

$$\begin{aligned} D^4 w + P_{A1} D^3 w + (P_{A2} \chi^2 + P_{A3} \chi + P_{A4}) D^2 w + (P_{A5} \chi + P_{A6}) D w + P_{A7} w \\ + P_{A8} D^4 v + P_{A9} D^3 v + P_{A10} D^2 v + (P_{A11} \chi + P_{A12}) D \varphi + (P_{A13} \chi + P_{A14}) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} D^4 v + P_{B1} D^3 v + (P_{B2} \chi^2 + P_{B3} \chi + P_{B4}) D^2 v + (P_{B5} \chi + P_{B6}) D v + P_{B7} v \\ + P_{B8} D^4 w + P_{B9} D^3 w + P_{B10} D^2 w + (P_{B11} \chi + P_{B12}) D \varphi + (P_{B13} \chi + P_{B14}) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} D^2 \varphi + P_{C1} D \varphi + P_{C2} \varphi + (P_{C3} \chi + P_{C4}) D w + (P_{C5} \chi + P_{C6}) D v \\ + (P_{C7} \chi + P_{C8}) w + (P_{C9} \chi + P_{C10}) v = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

haline gelir. Bu denklemlerde görülen P_{Ai} , P_{Bi} ve P_{Ci} katsayıları EK A'da ayrıntılı olarak verilmiştir. (5.12), (5.13) ve (5.14). diferansiyel denklemlerini Frobenius kuvvet serisi yardımıyla çözebilmek için boyutsuz w , v ve rad/m boyutundaki ϕ değişkenlerinin χ 'nin fonksiyonu oldukları kabulü altında

$$w(\chi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(\lambda) \chi^{n+\lambda} \quad (5.15)$$

$$v(\chi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1}(\lambda) \chi^{n+\lambda} \quad (5.16)$$

$$\varphi(\chi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(\lambda) \chi^{n+\lambda} \quad (5.17)$$

yazılabilir. (5.15), (5.16) ve (5.17) denklemlerindeki ifadeler (5.12), (5.13) ve (5.14) ifadelerinde yerlerine yazılırsa

$$\lambda (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad (5.18)$$

indis denklemine ve

$$a_{n+5} + P_{A8} b_{n+5} = \Gamma_a(n, \lambda) \quad (5.19)$$

$$b_{n+5} + P_{B8} a_{n+5} = \Gamma_b(n, \lambda) \quad (5.20)$$

$$c_{n+3} = \Gamma_c(n, \lambda) \quad (5.21)$$

rekürsif (tekrarlanan) eşitliklerine ulaşılır. (5.19), (5.20) ve (5.21) ifadelerindeki Γ sembolü ile gösterilen ifadeler

EK B’de ayrıntılı olarak açıklanmıştır. (5.19), (5.20) ve (5.21) ifadelerindeki en yüksek indise sahip a ve b terimleri bu denklemlerden çekilirse bir başka deyişle yalnız bırakılırsa

$$a_{n+5} = \frac{\Gamma_b(n, \lambda) - P_{B8} \Gamma_a(n, \lambda)}{1 - P_{A8} P_{B8}} \quad (5.22)$$

$$b_{n+5} = \frac{\Gamma_a(n, \lambda) - P_{A8} \Gamma_b(n, \lambda)}{1 - P_{A8} P_{B8}} \quad (n = 1, 2, \dots, \infty) \quad (5.23)$$

elde edilir. Bu denklemlere ait ilk beş terim ($a_1 - a_5, b_1 - b_5$) ve c terimlerine ait ilk üç terim ($c_1 - c_3$),

EK C’de ayrıntılı olarak verilmiştir.

(5.18) indis denkleminin dört adet kökü olduğundan, her bir değişken için (w, v, φ) birbirinden bağımsız dört adet çözüm mevcuttur. (5.18) indis denkleminin dört adet kökü sırasıyla $\lambda_{1,2,3,4} = 0, 1, 2$ ve 3 ’dür. O halde, bu değişkenlere ait tüm çözümler

$$w(\chi) = C_{A1}w(\chi,0) + C_{A2}w(\chi,1) + C_{A3}w(\chi,2) + C_{A4}w(\chi,3) \quad (5.24)$$

$$v(\chi) = C_{B1}v(\chi,0) + C_{B2}v(\chi,1) + C_{B3}v(\chi,2) + C_{B4}v(\chi,3) \quad (5.25)$$

$$\varphi(\chi) = C_{C1}\varphi(\chi,0) + C_{C2}\varphi(\chi,1) + C_{C3}\varphi(\chi,2) + C_{C4}\varphi(\chi,3) \quad (5.26)$$

biçiminde ifade edilebilir. Ya da daha kısaltılarak,

$$w(\chi) = \sum_{i=1}^4 C_{Ai}w(\chi, \lambda_i) \quad (5.27)$$

$$v(\chi) = \sum_{i=1}^4 C_{Bi}v(\chi, \lambda_i) \quad (5.28)$$

$$\varphi(\chi) = \sum_{i=1}^4 C_{Ci}\varphi(\chi, \lambda_i) \quad (5.29)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. (5.27), (5.28) ve (5.29) denklemlerinde C sembolleri tamamen alelade sabit katsayılardır.

5.2.2 Elemanın üzerine etkiyen yüklerin hesaplanması

Elemanın hareketini temsil eden diferansiyel denklemlerin çözümünden sonra, elemanın dinamik direngenlik matrisini bulabilmek için elemanın üzerine x, y, z yönlerinde etkiyen bileşke momentlerin, y ve z yönlerindeki bileşke kesme kuvvetlerinin ve x yönündeki bileşke çekme kuvvetlerinin belirlenmesi gerekir. (4.53), (4.56), (4.57) ve (4.58) denklemleriyle daha önce türetilen kesme kuvvetleri ve moment ifadeleri yeniden (5.11) denklemindeki boyutsuzlaştırma işlemleri yardımıyla

$$M_x = GJ\varphi' \quad (5.30)$$

$$M_y = EI_y Lw'' + EI_{yz} Lv'' \quad (5.31)$$

$$M_z = EI_{yz}Lw'' + EI_zLv'' \quad (5.32)$$

$$V_x = \frac{1}{2}m\Omega^2L^2(1 + 2r_i - 2r_i\chi - \chi^2) + F \quad (5.33)$$

$$V_y = Tv' - M'_z + \Omega^2 me\chi L(\cos \beta - \phi L \sin \beta) \quad (5.34)$$

$$V_z = Tw' - M'_y + \Omega^2 me\chi L(\sin \beta + \phi L \cos \beta) \quad (5.35)$$

yazılabilir. Değişkenlerin, (5.27), (5.28) ve (5.29) ifadelerde bulunan çözümleri (5.30)-(5.35). eşitliklerde gerekli yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} V_y = T \sum_{i=1}^4 C_{Bi}v'(\chi, \lambda_i) - EI_{yz}L^2 \sum_{i=1}^4 C_{Ai}w'''(\chi, \lambda_i) \\ - EI_zL^2 \sum_{i=1}^4 C_{Bi}v'''(\chi, \lambda_i) + \Omega^2 me \chi L(\cos \beta - \phi L \sin \beta) \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} V_z = T \sum_{i=1}^4 C_{Ai}w'(\chi, \lambda_i) - EI_yL^2 \sum_{i=1}^4 C_{Ai}w'''(\chi, \lambda_i) - EI_{yz}L^2 \sum_{i=1}^4 C_{Bi}v'''(\chi, \lambda_i) \\ + \Omega^2 me \chi L(\sin \beta + \phi L \cos \beta) \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$M_x = GJ \sum_{i=1}^4 C_{Ci}\phi'(\chi, \lambda_i) \quad (5.38)$$

$$M_y = EI_yL \sum_{i=1}^4 C_{Ai}w''(\chi, \lambda_i) + EI_{yz}L \sum_{i=1}^4 C_{Bi}v''(\chi, \lambda_i) \quad (5.39)$$

$$M_z = EI_{yz}L \sum_{i=1}^4 C_{Ai}w''(\chi, \lambda_i) + EI_zL \sum_{i=1}^4 C_{Bi}v''(\chi, \lambda_i) \quad (5.40)$$

denklemlerine ulaşılır.

5.2.3 Elemanın düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler, burulma miktarları, kesme kuvvetleri ve momentlerinin hesaplanması

Şekil5.1'de gösterilen elemanın dinamik direngenlik matrisini bulabilmek için elemanın başlangıç ve bitiş noktalarındaki yerdeğiştirmelerin, dönüş miktarının, kesme kuvvetleri ve momentlerin bilinmesi gerekir. Elemanın dönme eksenine yakın

olan tarafının sol ve elemanın başlangıç noktası olduğu olarak kabul edilsin. Elemanın sol tarafı olan başlangıç kısmındaki yerdeğişmeler ve burulma miktarı ($\chi = 0$) :

$$w = w(0), w' = w'(0), v = v(0), v' = v'(0), \varphi = \varphi(0), \varphi' = \varphi'(0) \quad (5.41)$$

Sağ tarafındaki veya bitiş kısmındaki yerdeğişmeler ve dönüş miktarı ($\chi = 1$) :

$$w = w(1), w' = w'(1), v = v(1), v' = v'(1), \varphi = \varphi(1), \varphi' = \varphi'(1) \quad (5.42)$$

Elemanın başlangıç noktasındaki kesme kuvvetleri ve momentleri (5.36)-(5.40) denklemlerinde $\chi = 0$ konularak

$$M_x = GJ\varphi'(0) \quad (5.43)$$

$$M_y = EI_y Lw''(0) + EI_{yz} Lv''(0) \quad (5.44)$$

$$M_z = EI_{yz} Lw''(0) + EI_z Lv''(0) \quad (5.45)$$

$$V_x = \frac{1}{2} m \Omega^2 L^2 (1 + 2r_i) + F \quad (5.46)$$

$$V_y = Tv'(0) - EI_{yz} Lw'''(0) - EI_z Lv'''(0) + \Omega^2 m e \chi L (\cos \beta(0) - \varphi(0) L \sin \beta(0)) \quad (5.47)$$

$$V_z = Tw'(0) - EI_y Lw'''(0) - EI_{yz} Lv'''(0) + \Omega^2 m e \chi L (\sin \beta(0) + \varphi(0) L \sin \beta(0)) \quad (5.48)$$

şeklinde elde edilir. Elemanın bitiş noktasındaki kesme kuvvetleri ve momentleri benzer şekilde aynı denklemlere bu sefer $\chi = 1$ konularak

$$M_x = -GJ\varphi'(1) \quad (5.49)$$

$$M_y = -EI_y Lw''(1) - EI_{yz} Lv''(1) \quad (5.50)$$

$$M_z = -EI_{yz} Lw''(1) - EI_z Lv''(1) \quad (5.51)$$

$$V_x = F \quad (5.52)$$

$$V_Y = -Tv'(1) + EI_{YZ}Lw'''(1) + EI_ZLv'''(1) - \Omega^2 me\chi L(\cos \beta(1) - \varphi(1)L \sin \beta(1)) \quad (5.53)$$

$$V_Z = -Tw'(1) + EI_YLw'''(1) + EI_{YZ}Lv'''(1) - \Omega^2 me\chi L(\sin \beta(1) + \varphi(1)L \sin \beta(1)) \quad (5.54)$$

şeklinde elde edilir.

5.2.4 Elemanın dinamik direngenlik matrisinin hesaplanması

(5.43)-(5.54) denklemlerinde kullanılan yerdeğiştirmelerin ve burulma miktarlarının boyutsuz χ 'e göre türevi ve türevlerinin elde edilmesi gerekir. Bu istenilenler (5.27), (5.28) ve (5.29) denklemlerinin χ 'e göre türevlerini almakla mümkün olur.

(5.41) ve (5.42) denklemlerindeki ifadeler matris formunda sabitlerin fonksiyonu olarak yazılırsa

$$\{u\}_{12 \times 1} = [Z]_{12 \times 12} \{c\}_{12 \times 1} \quad (5.55)$$

elde edilir. u , Z ve c matrislerinin açık ifadeleri EK D'de ayrıntılı olarak ifade edilmiştir. (5.27), (5.28) ve (5.29) denklemlerindeki yerdeğiştirme ve burulma miktarları, (5.43)-(5.54) denklemlerinde kullanılmak suretiyle

$$\begin{Bmatrix} \tilde{f} \\ 1 \end{Bmatrix}_{13 \times 1} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & Y & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{13 \times 13} \begin{Bmatrix} c \\ 1 \end{Bmatrix}_{13 \times 1} \quad (5.56)$$

matris formu elde edilebilir. (5.56) ifadesindeki $\tilde{f}$ ve Y matrisleri EK E'de ayrıntılı biçimde gösterilmiştir. (5.56) denklemini içindeki katsayılar vektörü c 'nin yerine, (5.55) denklemindeki c matrisini çekilip yerine yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{13 \times 1} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & \tilde{K} & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{13 \times 13} \begin{Bmatrix} u \\ 1 \end{Bmatrix}_{13 \times 1} \quad (5.57)$$

elde edilebilir. (5.57) ifadesindeki $\tilde{\mathbf{K}}$ matrisi

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{Y}\mathbf{Z}^{-1} \quad (5.58)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (5.57) ifadesi daha kısa biçimde

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (5.59)$$

olarak da gösterilebilir. İşte bu (5.59) ifadesi aranılan, elemanı temsil eden dinamik direngenlik matrisidir.

(5.58) denkleminde $\mathbf{Z}$ matrisinin tersinin alınması gereklidir. Fakat bu her zaman mümkün olmayabilir. Çünkü eğer $\mathbf{Z}$ matrisinin determinantı 0'a eşit veya çok yakınsa, bir başka deyişle en yüksek tekil değerinin en küçüğüne oranına eşit olan kararsızlık katsayısı (condition number) çok büyükse matrisin tersinin alınması bir o kadar güçleşir. Bu yüksek lisans tezinde, bu problemin aşılması için tekil değerlere ayrıştırma metodu kullanılmıştır. Yani $\mathbf{Z}$ matrisinin tekil değerleri bulunduktan sonra belli bir sınır değerinin altında kalan tekil değerler elendi. Daha sonra kalan tekil değerlerle yeniden $\mathbf{Z}$ matrisi oluşturuldu ve matrisin tersi daha sorunsuz bir şekilde elde edildi. Bu metodun püf noktası seçilecek olan sınır değeri olduğu için literatürde bu konuyla ilgili araştırma yapıldı, fakat bu konuda henüz uzlaşılan bir değer bulunamadı.

Tüm elemanlar için dinamik direngenlik matrislerinin türetilmesi tamamlandıktan sonra bu matrisler sonlu elemanlar metodundaki gibi tüm sistemin davranışını temsil eden genel dinamik direngenlik matrisini oluşturmak için biraraya getirilirler. Elde edilen genel dinamik direngenlik matrisi

$$\mathbf{f}_G = \mathbf{K}_G \mathbf{u}_G \quad (5.60)$$

şeklinde gösterilebilir. (5.60) denklemindeki $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{u}$ matrisleri sırasıyla sistemin üzerine etkiyen tüm dahili ve harici kuvvetleri ve sistemin tüm serbestlik derecelerini göstermektedir.

5.3 Çözüm Yöntemi

Dönen bir pal elemanının serbest titreşimleri, yani elemanın üzerine hiçbir kuvvet etkimemesi durumunda, (5.57) denklemindeki zorlayıcı terimler

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{13 \times 1} = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & \tilde{\mathbf{K}} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{13 \times 13} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ 1 \end{Bmatrix}_{13 \times 1} \quad (5.61)$$

şeklinde sıfırlanır. (5.61) denklemindeki 13. eleman olarak eklenen 1 elemanı, eksenel santrifuj kuvveti etkisini modellemeye katılmasına yardım etmektedir. Bu tip işlemlere literatürde sıklıkla rastlanılmaktadır [52]. Elemanın dinamik direngenlik matrisine eklenen 13. terim genel dinamik direngenlik matrisi birleştirilmesi işlemi sırasında değişmeden kalmaktadır. $\mathbf{K}_G$, genel dinamik direngenlik matrisi 100 terimli Frobenius serisi yardımıyla elde edilmiştir ve lineer değildir. Bu gibi lineer olmayan özdeğer problemlerinin çözümlerinde literatürde sıklıkla karşılaşılan Wittrick-Williams algoritması [16] kullanılmaktadır. Eklenen fazlalık terimler, ya da kısaca 1'ler genel dinamik direngenlik matrisi elde edilirken değişmeden kalırlar, ve Sturm dizisi hesabından sonraki işaret değişimi sayımında atlanarak hesaptan çıkarılabilirler. Özdeğerlerin hesaplanma sırası

- i) Öncelikle helikopter pali elemanlara bölünür
- ii) Her elemanın hareketini temsil eden diferansiyel denklemler Frobenius serisi yardımıyla cebirsel ifadeler şeklinde çözülür
- iii) Elemanların düğüm noktalarındaki kuvvet ve yerdeğiştirmelerin genlikleri $\mathbf{Z}$ matrisini oluşturmak üzere tanımlanır
- iv) Elemanın $\mathbf{Z}$ matrisindeki tekilliği engelleyip tersini alabilmek için tekil değerlere ayrıştırma metodu kullanılır
- v) Elemanın dinamik direngenlik matrisi elde edilir
- vi) Her elemanın dinamik direngenlik matrisi genel direngenlik matrisini elde etmek için uygun şekilde birleştirilir
- vii) Elde edilen lineer olmayan özdeğer problemi Wittrick-Williams algoritması çözülür

şeklinde sıralanabilir.

6 DİNAMİK DİRENGENLİK MATRİSİ UYGULAMALARI

6.1 Örnekler

Bu çalışmada türetilen teori ve çözüm yönteminin doğruluğu bu bölümde test edilmektedir. İlk önce kullanılan çözüm yönteminde kullanılan eleman sayısının yakınsamayla olan ilişkisi incelenmiştir. Aslında dinamik direngenlik matrisi metodu kullanılan eleman sayısından bağımsız olmakla beraber, Frobenius serisi çözümünde alınan terim sayısı, tekil değerlere ayrıştırma metodundaki kesme yapılan tekil değer çözümün doğruluğunu azaltmaktadır. İşte bu yüzden kullanılan eleman sayısının yapılan hata üzerindeki etkisi eleman sayısı arttıkça etkili olabilmektedir.

İlk örnekte dönme etkisinde olmayan ($\Omega = 0$) bir palin düzlemiçi ve düzlemdışı eğilmenin birbirlerini etkilediği durumda doğal frekanları incelenmiştir. İncelenen palin özellikleri Tablo 6.1’de verilmiştir.

Tablo 6.1 İncelenen palin özellikleri

EI_y (Nm ²)	EI_x (Nm ²)	kGA (Nm ²)	ρA_0 (kg/m)	ρI_x	ρI_y	Uzunluk L (m)
487.9	2.26	$3.076 \cdot 10^6$	0.3447	$8.57 \cdot 10^{-8}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	0.1524

Bu pal, çeşitli araştırmacılar tarafından bir çok kez farklı metotlarla çözülmüştür [46]- [50]. 20 eleman kullanılarak oluşturulan genel dinamik direngenlik matrisinin Wittrick-Williams algoritması ile çözülmesiyle elde edilen sonuçlarla literatürdeki

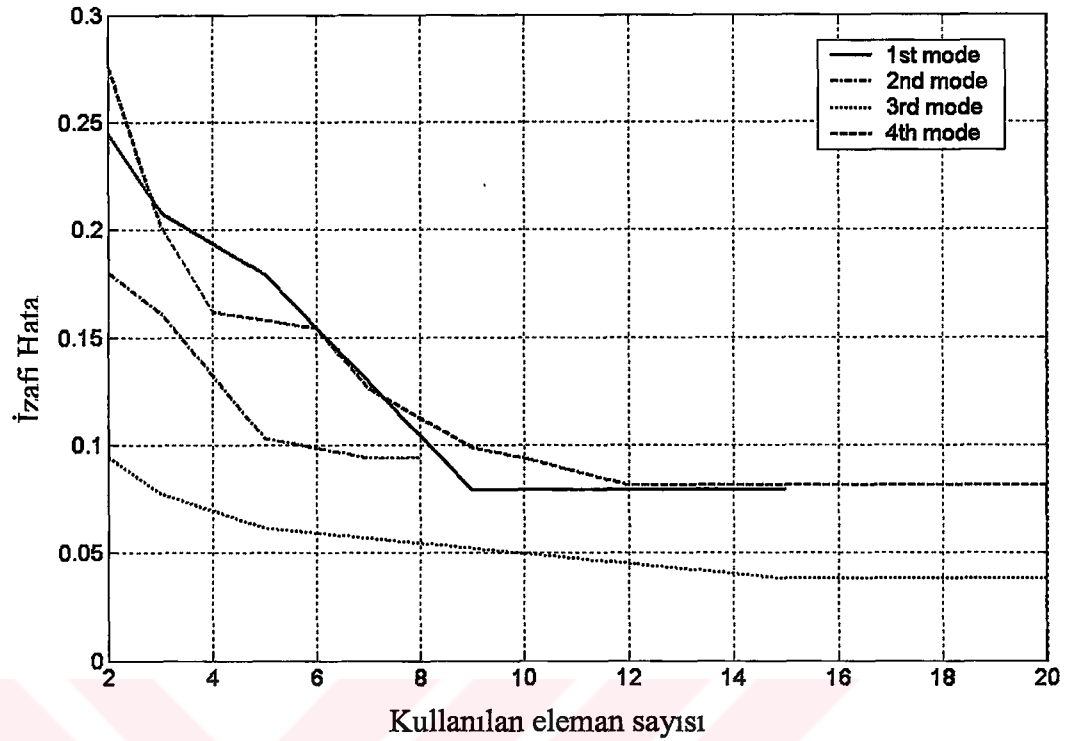
sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu örnek için, literatürdeki elde edilen doğal frekanslarla elde edilen sonuçların karşılaştırılması Tablo 6.2’de gösterilmiştir.

Tablo 6.2 Durağan, 45° önburulmalı bağlı düzlem içi – düzlem dışı eğilme yapan bir kirişin doğal frekansları (ω_i)

ω_i	Subrahmanyam [48]		Dawson [49]	Rao [48]	Carnegie [46]	Librescu [47]	Mevcut çalışma	Hata
	R.M	P.E.M	R.R.M.	G.M.	Deney	G.G.M.	DRM	Deneye göre (%)
1	61.9	62.0	62.0	61.9	59.0	62.0	63.67	2.7
2	304.7	305.1	301.0	305.0	290.0	305.1	317.2	3.99
3	937.0	955.1	953.0	949.0	920.0	949.0	954.9	0.62
4	1205.1	1214.7	1230.0	1220	1110.0	1206.1	1200	0.51

R.M. : Reissner Metodu, P.E.M. : Potansiyel Enerji Metodu, R.R.M. :Rayleigh Ritz Metodu, G.M. :Galerkin Metodu, G.G.M. :Genişletilmiş Galerkin Metodu

Tablo 6.2’de elde edilen sonuçlarda elastik eksenle kütle eksenini çakışmaktadır. Bu uygulama üzerinde yapılan diğer bir çalışma da sonuçların eleman sayısına olan bağlılığının araştırılmasıdır. Kullanılan eleman sayısının 2’den 20 kadar değiştirilmesiyle elde edilen sonuçlar Şekil 6.1’de gösterilmektedir.



Şekil 6.1 İlk 4 doğal frekans için yakınsama testi

Şekilden de rahatlıkla anlaşılabileceği gibi dinamik direngenlik matrisinde 15 eleman kullanmak yeterli doğruluğu sağlamaktadır. Ya da bir başka deyişle 15’den fazla eleman kullanılması yarasızdır, hatta bilgisayarın hesaplama süresini arttıracığı için zararlıdır denebilir.

Önerilen çözüm yönteminin elastik eksenle kütle eksenini çakışmayan bir uçak kanadı profiline sahip dönmeyen önburulmalı bir kirişe de uygulanabileceği ikinci örneğin konusudur. İkinci örnekte kullanılan uçak kanadı profiline sahip kirişin boyu 1.016m uzunluğundadır ve elastik eksenle kütle eksenini arasında 3.59 cm mesafe bulunmaktadır. Kesitin ana eksenine göre eğilme direngenliği 71.74 Nm^2 ve burulma direngenliği 25.83 Nm^2 dir. Ana tarafsız eksene ve eksene dik olan eksene göre olan jirasyon yarıçapları birbirine eşit ve 2.54 cm.’dir. İkinci örnekte incelenen pal 20 eşit elemana bölünmüş ve elde edilen sonuçlar iletim matrisi metodu, Green fonksiyonu yaklaşımı ile elde edilen sonuçlarla Tablo 6.3’te karşılaştırılmıştır.

Tablo 6.3 Dönen, üniform olmayan önburulmalı palin düzlem içi ve dışı birleşik doğal frekanslarının karşılaştırılması

Mod	İletim Matrisi Metodu [9]	Green Fonksiyonu Yaklaşımı [13]	Mevcut Çalışma	Hata [9]'a göre (%)
1	30.8295	30.8380	30.3333	1.69
2	53.8277	53.8404	53.0519	1.44
3	184.6175	184.6821	187.0067	1.29
4	337.3333	337.4116	334.2253	0.92
5	484.3373	484.2932	487.9408	0.74

Üçüncü örnekte dönen üniform olmayan önburulmalı ticari bir palin (WADC S-5 modeli) düzlem içi ve dışı birleşik doğal frekanslarının karşılaştırılması yapılmıştır. Palin uzunluğu boyunca alınan çeşitli noktalardaki kesitin rijitliği ve kesit özellikleri Tablo 6.4'de verilmiştir.

Tablo 6.4 İncelenen WADC S-5 model pervanesinin pal uzunluğuna bağlı kesit özellikleri

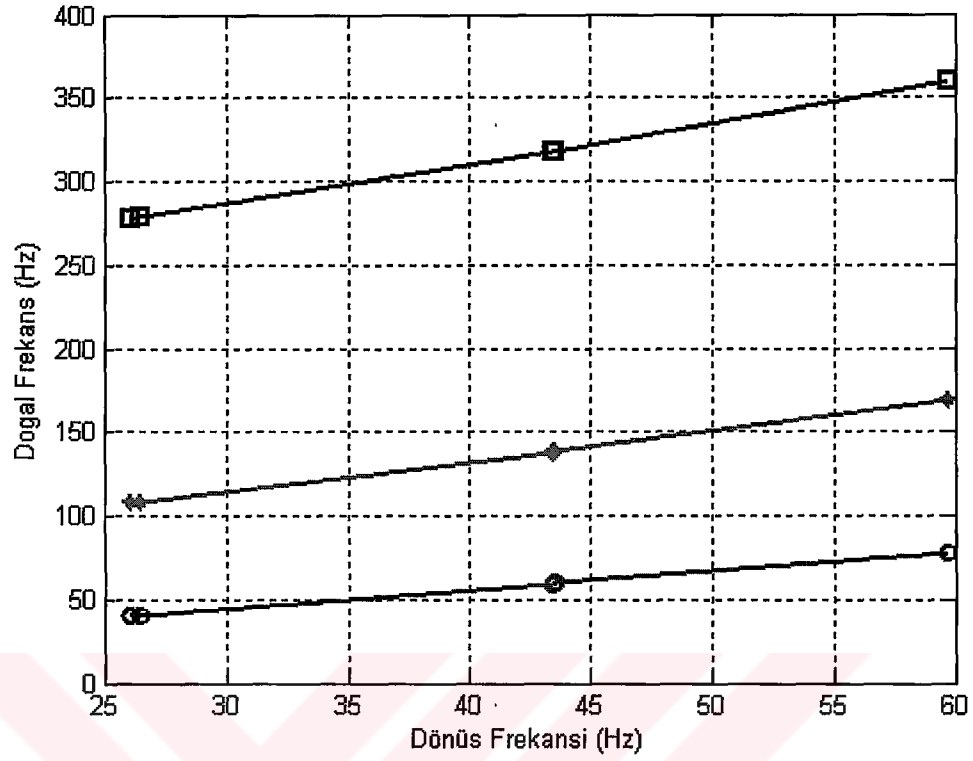
Pal boyunca alınan noktanın uzaklığı x (mm)	m (kg/m)	EI_y (kgm ⁴)	EI_z (kgm ⁴ × 10 ⁴)	β (deg)
152.4	7.0737	58.5050	1.8429	30.5
203.2	4.7985	32.1778	1.4334	25.2
250.4	4.5503	24.2796	1.3456	20.1
304.8	4.1918	16.9665	1.2871	14.8
355.6	3.8884	12.2861	1.2579	9.6
406.4	3.6885	9.0683	1.2579	4.7
457.2	3.5851	7.8982	1.2871	0
508.0	3.4886	7.6057	1.3749	-4.2
558.8	3.4334	7.3131	1.4919	-7.5
609.6	3.4334	7.0206	1.6381	-10

x_0 : 152.4 mm (pal kökü ile dönme merkezi arasındaki mesafe)

Dinamik direngenlik matrisi yöntemiyle elde edilen sonuçlar, diğer araştırmacıların elde ettikleri sonuçlarla ve deneyle Tablo 6.5'te karşılaştırılmıştır.

Tablo 6.5 Önburulmalı dönen, WADC S-5 model pervanenin doğal frekansları

Dönüş Frekansı (Hz)	Mod Sayısı	Murthy [22]	Surace [23]	Deney Hunter [31]	Lang [32]	Mevcut Çalışma
26.12	1	39.89	40.87	40.08	40.96	39.92
	2	107.40	108.83		109.22	107.93
	3	276.32	278.18		279.79	278.06
26.48	1	40.26	41.26	107.53	41.35	40.59
	2	107.93	109.38		109.77	108.57
	3	276.97	278.86		280.47	278.64
43.48	1	58.05	60.04	58.73	60.07	58.92
	2	135.99	139.18		139.52	137.95
	3	313.98	317.71		319.40	317.11
43.57	1	58.14	60.13	137.02	60.16	59.65
	2	136.14	139.34		139.68	138.42
	3	314.19	317.93		319.62	317.50
59.72	1	75.30	78.31	76.52	78.34	77.26
	2	166.25	171.62			169.56
	3	357.70	364.54			359.31



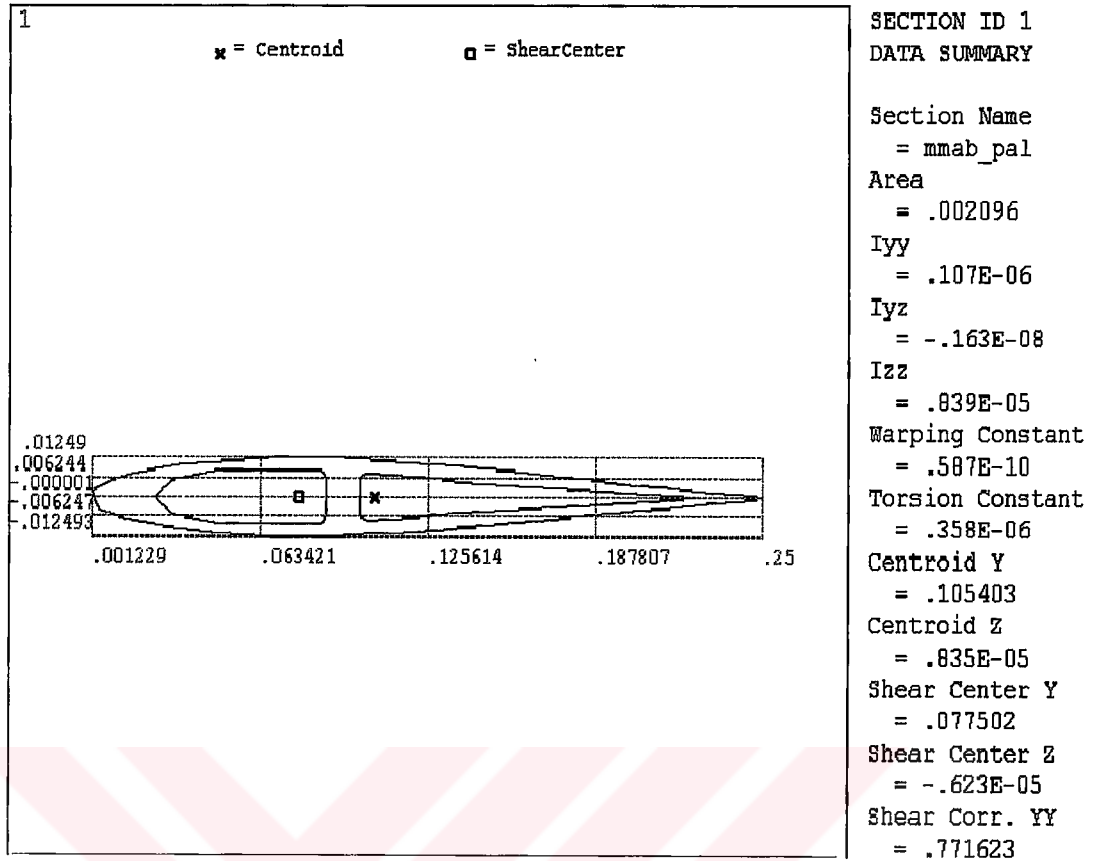
Şekil 6.2 WADC S-5 pervanesinin Campbell diyagramı

Dördüncü örnekte ise bir helikopter palı için dönen ve dönmeyen durumlarda düzlem içi ve dışı eğilme, burulma bağlı doğal frekansları incelenmiştir. Helikopter palinin, pal kökü ile dönme merkezi arasındaki mesafe 1.32m, palin uzunluğu 6.6m, düzlem içi rijitliği $8.54 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$, düzlem dışı rijitliği $2.87 \cdot 10^6 \text{ Nm}^2$, burulma rijitliği $5.74 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$ 'dir. Helikopter palinin birim uzunluğunun kütlesi 1.05 kg/m, kesitin elastik merkezi ile kütle merkezi arasındaki mesafe -15.2 mm, elastik eksene dik olan sırasıyla tarafsız eksene ve bu eksene dik olan eksene göre kütle jirasyon yarıçapları 1.96cm ve 1.31cm'dir. Helikopter palı üniform ve önburulmasızdır. Dinamik direngenlik matrisi metodu ile elde edilen sonuçlar Tablo 6.6'te sonlu elemanlar metodu ve iletim matrisi metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 6.6 Dönen (6 Hz) ve dönmeyen durumlarda helikopter palinin doğal frekanslarının diğer metotlarla elde edilen değerlerle karşılaştırılması

Mod	Durağan			$\Omega = 6 \text{ Hz}$		
	SEY [16]	İMM [22]	Mevcut Çalışma	SEY [16]	İMM [22]	Mevcut Çalışma
1	1.164	1.165	1.163	5.844	5.850	5.843
2	6.753	6.757	6.743	7.648	7.654	7.630
3	7.304	7.302	7.134	16.725	16.694	16.678
4	20.454	20.444	20.440	21.968	22.001	21.964
5	21.259	21.261	20.553	32.234	32.200	32.197
6	40.084	40.063	39.993	44.633	44.640	44.545
7	42.337	42.340	40.304	53.572	53.508	53.455
8	63.861	63.731	62.837	64.095	64.042	63.955
9	66.266	66.251	64.255	80.877	80.748	80.659
10	98.999	98.798	97.947	106.855	106.458	106.273

Beşinci örnekte ise ITU-LCH helikopter projesinde kullanılan palin basitleştirilmiş hali seçilmiştir. Şekil 6.3’de helikopter palinin kesit alanı görülmektedir.



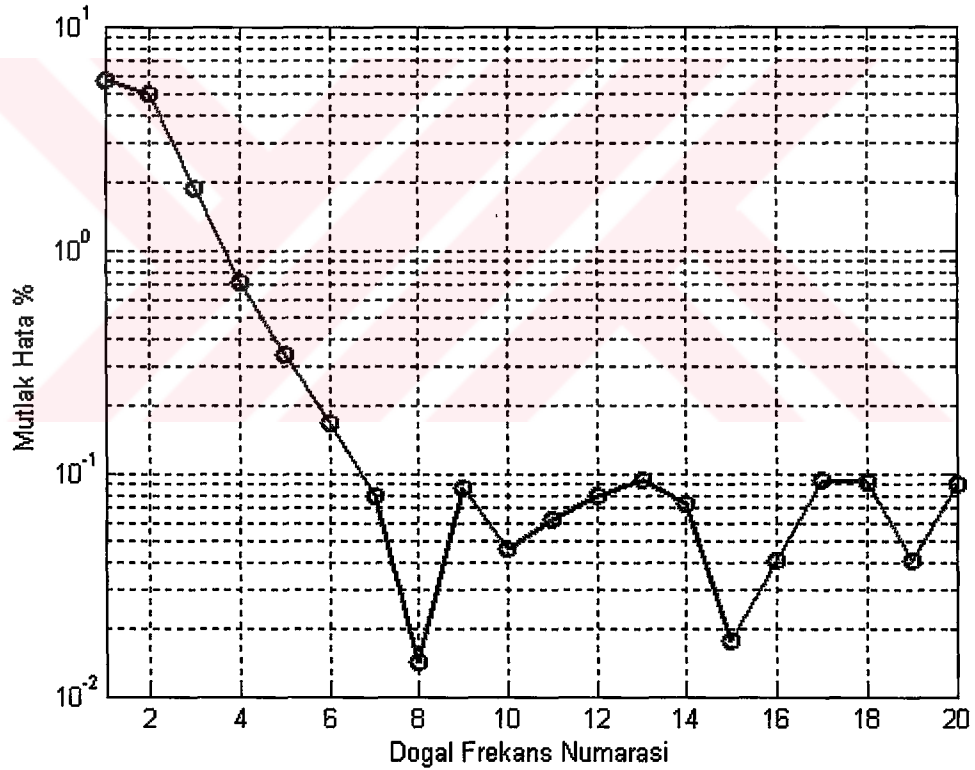
Şekil 6.3 ITU-LCH pal kesiti (ROTAM'ın izni ile)

Bu örnekte incelenen pal için Cambell diyagramı çizilmiş ve elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Palin uzunluğu 4m, alanı 20.96cm^2 , düzlem dışı eğilme atalet momenti $0.839 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$, düzlem içi eğilme atalet momenti $0.107 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, çarpım atalet momenti $-0.163 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$, burulma atalet momenti $0.358 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, elastik eksen ile kütle eksen arasındaki mesafe 27.9mm'dir. Tablo 6.7'de dönmeyen durumda iken Dinamik direngenlik matrisi ve sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Yapılan mutlak hata yüzdesi grafiği Şekil 6.4'de gösterilmektedir.

Tablo 6.7 Durağan durumda ITU-LCH helikopter palinin doğal frekanslarının sonlu elemanlar metoduyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması

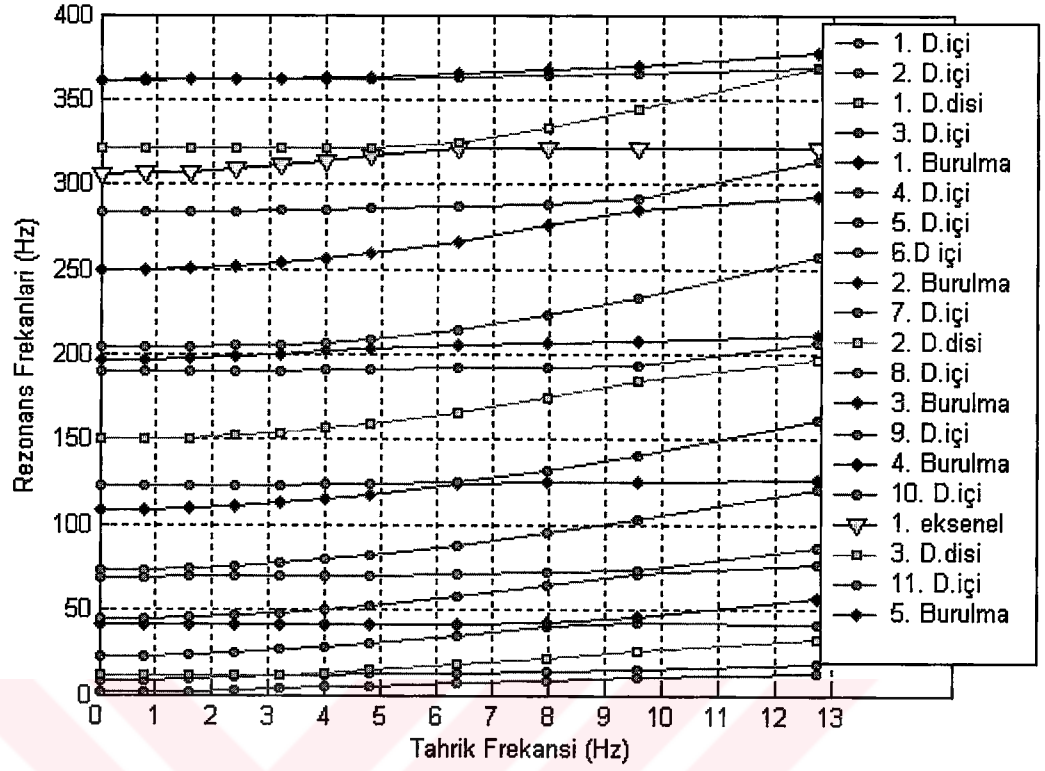
Yöntem	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8
ANSYS SEY	0.2615	1.6357	2.245	4.5648	8.2168	8.9142	13.87	14.622
DDM [†]	0.2764	1.7171	2.2861	4.5956	8.2372	8.9223	13.875	14.624
Hata %	5.6737	4.9787	1.8316	0.6737	0.2478	0.09118	0.0335	0.0123

[†] 20 eleman kullanılmıştır

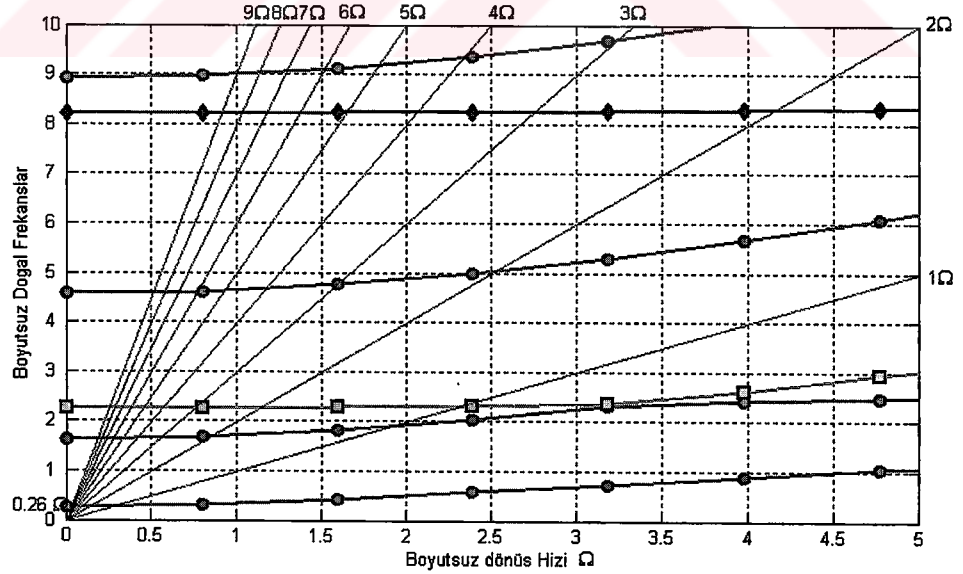


Şekil 6.4 Doğal frekans numarasına bağlı yapılan mutlak hata yüzdesi

Şekil 6.3'te geometrisi ve atılmış sonlu elemanlar ağı görülen pal için çizilen Campbell diyagramı Şekil 6.5'de ve dönüş açısall hızına göre normalize edilmiş hali Şekil 6.6'da görülmektedir.



Şekil 6.5 ITU-LCH helikopteri palinin Campbell diyagramı



Şekil 6.6 ITU-LCH helikopteri palinin dönüş frekansına göre normalize edilmiş Campbell diyagramı

7 SONUÇLAR VE YORUMLAR

6. Bölümde seçilen ilk örnekte, bir kirişin birleşik olmayan düzlem içi ve dışı titreşim karakteristikleri araştırılmıştır. Aynı zamanda bu örnek için kullanılan eleman sayısının sonuca nasıl etki yaptığı da incelenmiştir. Dinamik direngenlik matrisi yönteminde kullanılan elemanların kesin çözümü Frobenius serisi ile yapıldığı için sonuçların aslında eleman sayısından bağımsız olması beklenir. Ancak, Frobenius serisinde kullanılan terim sayısının önceden belirlenmesi yani sabit olması yüzünden bir kesme hatası oluşmaktadır. Eleman sayısına bağlı olarak bu hata da artabilmektedir. Fakat kullanılan terim sayısı nedeniyle oluşan bu hata oldukça küçüktür ve diğer hata kaynakları yanında ihmal edilebilirler. Bundan başka, teorik anlamda Houbolt ve Brooks'un ilgili diferansiyel denklemleri türetirken ihmal ettiği ve kendilerinin de mühendislik anlamda sonuçlar üzerinde çok küçük etkileri olduğunu ifade ettikleri büyüklüklerin ve ikinci mertebeden terimlerin yol açtıkları hatalar mevcuttur. Ancak, hatanın asıl nedeni ve giderilmesi neredeyse imkansız olanı, tekil değerlere ayrıştırma metodunda alınan işe yarar tekil değerleri sayısıdır. Ne var ki işe yarar tekil değer sayısı, ancak her eleman için teker teker en büyük tekil değere göre normalize edilmiş ve tüm tekil değerlerin büyükten küçüğe doğru sıralanmış olduğu grafiklere bakılarak yapılabilir. Ya da önceden belirlenen bir kesme miktarı karar verme algoritması ile yapılabilir. Bu çalışmada kullanılan algoritmada uygulanan mantık silsilesi ise en büyük tekil değerın %5'inden küçük olan tekil değerlerin matristen atılmasıdır. Yapılan bu işlem vasıtasıyla matrisin tersinin alınması mümkün hale gelirken elemanın dinamik direngenlik matrisinin içerdiği bilgi miktarı azalmaktadır.

İlk örnekten alınan sonuçlar Reissner metodu, potansiyel enerji metodu, Rayleigh Ritz metodu, Galerkin metodu, Genişletilmiş Galerkin metodu ile karşılaştırılmıştır. Tablo 6.2'de görülen ilgili karşılaştırmalar, geliştirilen metodun doğru sonuç

verdiğini işaret etmektedir. Bu karşılaştırmalar sırasında dikkati çeken ilk nokta, teorik sonuçlarının tümünün Carnegie'nin yaptığı deneyden oldukça farklı değerlerde olmasıdır. Bu gibi bir hata akla, kullanılan metotların yanlışlığından ziyade yapılan deneylerin sağlıklı olmadıklarını getirmektedir. Göz ardı edilmemesi gereken diğer bir nokta ise deneyin 1959 yılındaki teknolojik imkanlarla yapılmış olduğudur. Bu ilk örnekte yapılan en büyük hata % 4'ler mertebesinde. İlk örnekte ayrıca, kullanılan eleman sayısının hata miktarına olan etkisi incelenmiştir. Şekil 6.1'de de görülebileceği üzere 15 elemanın ilk örnek için yeterli olduğudur. Diğer tüm örneklerde standart olarak 20 eleman alınmış ve gayet tatminkar sonuçlar elde edilmiştir.

İkinci örnekte ise literatürden elastik ekseni ile kütle ekseni çakışmayan bir örnek seçilmiş ve titreşim karakteristikleri incelenmiştir. Dinamik direngenlik matrisi metodu uygulanarak elde edilen sonuçlar Tablo 6.3'de iletim matrisi metodu ve Green fonksiyonu yaklaşımı kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. İletim matrisi metodu kullanılarak elde edilen sonuçlarla yapılan karşılaştırmada en büyük yüzde hata ilk doğal frekansta ortaya çıkmıştır. Tekil değerlere ayrıştırma metodunda kesme nedeniyle oluşan hata 3. doğal frekansta yüksekken 4. doğal frekansta düşüktür. Bu demektir ki 3. doğal frekans değeri tekil değerlere ayrıştırma metodundaki kesme miktarına karşı 4. doğal frekanstan daha duyarlıdır denebilir. Elde edilen sonuçlarda yapılan en büyük hata yüzdesi 1.7'nin altında kalmaktadır.

Üçüncü örnekte ise dönen, ticari, üniform olmayan özelliklere sahip bir pervanenin titreşim karakteristikleri incelenmiştir. 5 farklı dönüş hızında, ilk 3 doğal frekans elde edilmiş ve Campbell diyagramı çizilmiştir. Murthy tarafından elde edilen sonuçlarla yapılan karşılaştırmada dinamik direngenlik matrisi metoduyla elde edilen sonuçların daha yüksek olduğu görülebilir. Elde edilen sonuçlar, literatürdeki elde edilen sonuçlarla gayet tutarlıdır. Campbell diyagramında da beklenildiği gibi doğal frekanslar dönüş frekansının artmasıyla artmaktadır.

Dördüncü örnekte bir helikopter palinin düzlem içi ve dışı eğilme ve burulma bağlı doğal frekansları pal dönerken ve sükunetteyken incelenmiştir. Dinamik direngenlik matrisi metoduyla elde edilen doğal frekanslar sonlu elemanlar yöntemi ve iletim matrisi metodu kullanılarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Tablo 6.6'da görüldüğü gibi sonlu elemanlar metodunda hazırlanmış iyi bir model, gerçek çözüme daha yakın olduğunu iddia ettiğimiz sonlu elemanlar metoduna oldukça yakındır.

Beşinci örnekte ise ITU-LCH helikopter projesinde kullanılan VR-7 kesitli palin basitleştirilmiş hali için doğal frekanslar hesaplanmış ve Campbell diyagramı çizilmiştir. Elde edilen sonuçlar ANSYS sonlu elemanlar programı ile hesaplanıp, dinamik direngenlik matrisi metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Pal sükunetteyken en büyük yapılan en büyük hata ilk doğal fekansta olup yüzde yaklaşık olarak 5.7'dir. Yüksek frekanslarda ise hata miktarı oldukça düşmektedir.

Dönen önburulmalı bir kirişin hareketini temsil eden bağlı diferansiyel denklemler $\chi = 0$ civarında Frobenius serisine açılarak çözülmüştür. Herhangi bir diferansiyel denklemin çözümünde alınması gereken terim sayısı konusunda kesin bir kural olmamakla beraber, genelde 20-30 adet terim kullanılır. Bu çalışmada ise 100 adet terim alınmıştır. 100 terimin yakınsama konusunda bir problem yaratmadığı gözlemlenmiştir. Tam çözümü bilinen diferansiyel denklemlerin, dinamik direngenlik matrisi metodu kullanılarak yapılan çözümleri eleman sayısından bağımsızdır. Ancak, bu çalışmada yapıldığı gibi kuvvet serisi ile elde edilen çözümlerde sonuçlar, eleman sayısına bağımlıdır. İncelenen uygulamalarda 20 adet eleman kullanmanın oldukça iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Tekil değerlere ayrıştırma metodu, dinamik direngenlik matrisini elde ederken karşılaşılan sayısal kararsızlığı azaltmak üzere uygulanmış ve başarılı sayılabilecek sonuçlar elde edilmiştir.

Basitten karmaşığa doğru incelenerek toplam beş adet farklı tip problem seçilmiş ve geliştirilen yöntem bu problemlere uygulanmıştır. 10. doğal frekansa kadar yapılan hesaplarda elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve gayet ilintili sonuçlar elde edilmiştir. MATLAB paket programı kullanılarak 10. doğal frekansa kadar yapılan hesaplarda en fazla % 5.7'lik bir hata yapılmıştır.

Bu çalışma, dönen helikopter palleri için tekil değerlere ayrıştırma metodu ile beraber kullanılan Wittrick-Williams algoritmasının sayısal kararsızlık problemlerine yakalanmadığını işaret etmektedir. Ayrıca tekil değerlere ayrıştırma metodunda elde edilen tekil değerlerin en küçüğü, istendiğinde elemanın kutbu olarak seçilebilmektedir. Bunlara ilaveten, eğer istenirse aerodinamik yükler de formülasyonun içine katılabilir, bunlardan en bilinenlerinden biri ve dinamik direngenlik matrisi metoduna uygulanabilir olanı pal elemanı teorisidir.

8 KAYNAKLAR

- [1].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1985. Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **21**, 2289-2302.
- [2].**J. R. Banerjee**, 1989. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **28**, 1283-1298 .
- [3].**J. R. Banerjee and S. A. Fisher**, 1992. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for axially loaded beam elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng* **33**, 739-751.
- [4].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1992. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam elements. *Comput. Struct.* **42**, 301-310.
- [5].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1994. An exact dynamic stiffness matrix for coupled extensional-torsional vibration of structural members. *Comput. Struct.* **50**, 161-166.
- [6].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1994. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix of an axially loaded Timoshenko beam element. *Int. J. Solids Struct.* **31**, 749-762.
- [7].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1983. Vibration characteristics of self-expanding stayed columns for use in space. *J. Sound Vibr.* **90**, 245-261.
- [8].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1984. Evaluation of efficiently computed exact vibration characteristics of space platforms assembled from stayed columns. *J. Sound Vibr.* **95**, 405-414.
- [9].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1995. Vibration of composite beams—an exact method using symbolic computation. *J. Aircraft* **32**, 636-642.

-
- [10].**J. R. Banerjee**, 1984. Flutter characteristics of tailless aircraft. *J. Aircraft* **21**, 733-735.
- [11].**J. R. Banerjee**, 1988. Flutter modes of high aspect ratio tailless aircraft. *J. Aircraft* **25**, 473-476.
- [12].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1982. User's guide to the computer program BUNVIS (BUckling or Natural Vibration of Space frames). Department of Civil Engineering and Building Technology, University of Wales Institute of Science and Technology, Report no. 5.
- [13].**M. S. Anderson, F. W. Williams, J. R. Banerjee, B. J. Durling, C. L. Herstrom, D. Kennedy and D. B. Warnaar**, 1986. User manual for BUNVIS-RG: An exact buckling and vibration program for lattice structures, with repetitive geometry and substructuring option. NASA Technical Memo 87669.
- [14].**J. R. Banerjee**, 1984. Use and capability of CALFUN-a program for CALculation of Flutter speed Using Normal modes. *Proc. Int. 84 Athens Summer Con/, on Modelling and Simulation*, Athens, Greece June 27-29.
- [15].**J. Fitch**, 1985. Solving algebraic problems with REDUCE *J. Symbol. Comput.* **1**, 211-227.
- [16].**F. W. Wittrick and W. H. Williams**, 1971. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **24**, 263-284.
- [17].**J. R. Banerjee and F. W. Williams**, 1994. Clamped-clamped natural frequencies of a bending-torsion coupled beam. *J. Sound Vibr.* **176**, 301-306.
- [18].**J. R. Banerjee, S. Guo and W. P. Howson**, 1996. Exact dynamic stiffness matrix of a bending-torsion coupled beam including warping. *Comput. Struct.* **59**, 613-621.
- [19].**S.M. Hashemi**, 1998. Free vibrational analysis of rotating beam-like structures: A dynamic finite element approach. *Ph.D Thesis-Université Laval*.
- [20].**C.T. Hopper and F.W. Williams**, 1977. Mode finding in nonlinear structural eigenvalue calculation. *Journal of Structural Mechanics*. **5**(3), 255-278.

- [21].**A. Wright, C. Smith, R. Thresher and J. Wang**, 1982. Vibration modes of centrifugally stiffened beams. *Journal of Applied Mechanics* **49**, 197-202.
- [22]. **D. Storti and Y. Aboelnaga**, 1987. Bending vibration of a class of rotating beams with hypergeometric solutions. *Journal of Applied Mechanics* **54**, 311-314.
- [23].**S. Naguleswaran**, 1994. Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam. *Journal of Sound and Vibration* **176**, 613-624.
- [24].**S. Naguleswaran**, 1997. Out-of-plane vibration of a uniform Euler-Bernoulli beam attached to the inside of a rotating beam. *Journal of Sound and Vibration* **200**, 63-81.
- [25].**D. Pnueli**, 1972. Natural bending frequency comparable to rotational frequency in a rotating cantilever beam. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* **39**, 602-604.
- [26].**V. T. Nagaraj and P. Shanthakumar**, 1975. Rotor blade vibrations by the Galerkin finite element method. *Journal of Sound and Vibration* **43**, 575-577.
- [27].**C. H. J. Fox and J. S. Burdess**, 1979. The Natural frequency of a thin rotating cantilever with offset root. *Journal of Sound and Vibration* **65**,151-158.
- [28].**W. E. Boyce**, 1956. Effect of hub radius on the vibration of uniform bar. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* **23**, 287-290.
- [29].**D. H. Hodges**, 1981. An approximate formula for the fundamental frequency of a uniform rotating beam clamped off the axis of rotation. *Journal of Sound and Vibration* **77**, 11-18.
- [30].**S. Putter and H. Manor**, 1978. Natural frequencies of radial rotating beams. *Journal of Sound and Vibration* **56**, 175-185.
- [31].**D. H. Hodges and M. J. Rutkowski**, 1981. Free vibration analysis of rotating beams by a variable order finite element method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* **19**, 1459,1466.
- [32].**K. M. Udupa and T. K. Varadan**, 1990. Hierarchical finite element method for rotating systems. *Journal of Sound and Vibration* **138**, 447-456.

- [33].**H. Lo, J. E. Goldberg and J. L. Bogdanoff**, 1960. Effect of small hub-radius change on bending frequencies of a rotating beam. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* **27**, 548-550.
- [34].**J. R. Banerjee**, 2000. Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration* **233**, 857-875.
- [35].**P. J. Magari, L. A. Shultz and V. R. Murthy**, 1988. Dynamics of helicopter rotor blades. *Computers and Structures* **29**, 763-776.
- [36].**L. H. Jones**, 1975. The transverse vibration of a rotating beam with tip mass: the method of integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics* **33**, 193-203.
- [37].**J. C. Houbolt and G. W. Brooks**, 1958. Differential equations of motion for combined flapwise bending, chordwise bending and torsion of twisted non-uniform rotor blades. *NACA Report 1346*.
- [38].**A. Rosen**, 1991. Structural and dynamic behaviour of pretwisted rods and beams. *Applied Mechanics Reviews* **44**, 483-515.
- [39].**W. F. White and R. E. Malatino**, 1975. A numerical method for determining the natural vibration characteristics of rotating nonuniform cantilever blades. *NASA TM X-72*, 751.
- [40].**V. R. Murthy**, 1977. Dynamic characteristics of rotor blades: Integrating matrix method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* **15**, 595-597.
- [41].**Nitzske and E. J. Breithach**, 1994. Using adaptive structures to attenuate rotary wing aeroelastic response. *Journal of Aircraft* **31**, 1178-1188.
- [42].**V. R. Murthy**, 1976. Dynamic characteristics of rotor blades. *Journal of Sound and Vibration* **49**, 483-500.
- [43].**G. Surace, V. Anghel and C. Mares**, 1997. Coupled bending-bending-torsion vibration of rotating pretwisted blades: An integral formulation and numerical examples. *Journal of Sound and Vibration* **206**, 473-486.
- [44].**K. W. Lang and S. Nemat-Nasser**, 1979. An approach for estimating vibration characteristics of rotor blades. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* **17**, 955-1002.
- [45].**W. F. Hunter**, 1970. The integrating matrix method for determining the natural vibration characteristics of propeller blades. *NASA TN D6064*.

-
- [46].**W. Carnegie**, 1959. Vibrations of pre-twisted cantilever blading. *Proceedings of Institute of Mechanical Engineers*, London **173**, 343.
- [47].**S.-Y. Oh , O. Song , L. Librescu**, 2003. Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams. *Int. Journal of Solids and Structures* **40**,1203–1224.
- [48].**K. B. Subrahmanyam, S. V. Kulkarni and J. S. Rao**, 1981. Coupled bending–bending vibrations of pretwisted blading allowing for shear deformation and rotary inertia by the Reissner method. *Int. Journal of Mechanical Sciences* **23**, 517–530.
- [49].**B. Dawson**, 1968. Coupled bending vibrations of pretwisted cantilever blading treated by Rayleigh–Ritz method. *Journal of Mechanical Engineering Science* **10**, 381-403.
- [50].**J. S. Rao**, 1977. Coupled vibrations of turbomachine blades. *Shock and Vibration Bulletin* **47**, 107-125.
- [51] **D.W.Tufts, R.Kumaresan**, 1982. Singular value decomposition and improved frequency estimation using linear prdiction. *Quarterly IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* **30**(4), 671-675.
- [52].**M. J. Goodwin**, 1988. Dynamics of rotor-bearing systems, *London, McGraw-Hill Press*
- [53].**R. A. Horn and C.R. Johnson**, 1991. Topics in Matrix Analysis,*New York, Cambridge University Press*.

EK A

Sayfa 38'deki P_{Ai} , P_{Bi} ve P_{Ci} terimlerinin açık ifadeleri aşağıdadır.

$$P_{A1} = 2 \frac{I'_y}{I_y L} \quad P_{A2} = \frac{m\Omega^2}{2EI_y} \quad P_{A3} = \frac{m\Omega^2 r_i}{EI_y}$$

$$P_{A4} = \frac{I''_y}{I_y L^2} - \frac{m\Omega^2}{2EI_y} (1 + 2r_i) + \frac{F}{EI_y L^2}$$

$$P_{A5} = \frac{m\Omega^2}{EI_y L^2} \quad P_{A6} = \frac{m\Omega^2}{EI_y L^2} r_i \quad P_{A7} = -\frac{\omega^2 m}{EI_y L^3} \quad P_{A8} = \frac{I_{zy}}{I_y} \quad P_{A9} = 2 \frac{I'_{zy}}{I_y L}$$

$$P_{A10} = \frac{I''_{zy}}{I_y L^2} \quad P_{A11} = -\frac{\Omega^2 em}{EI_y L^2} \cos \beta \quad P_{A12} = -\frac{\Omega^2 em r_i}{EI_y L^2} \cos \beta \quad P_{A13} = -\frac{\Omega^2 em}{EI_y L} \beta' \sin \beta$$

$$P_{A14} = \frac{em}{EI_y L^2} \left[-\Omega^2 (\cos \beta - L r_i \beta' \sin \beta) - \omega^2 \cos \beta \right]$$

Benzer şekilde P_{Bi} terimleri, yukarıdaki ifadelerde I_y 'lerin I_z ile değiştirilmesi ile kolaylıkla elde edilebilir.

$$P_{C1} = \frac{J'}{JL}, \quad P_{C2} = -\frac{\Omega^2 m(k_{m2}^2 - k_{m1}^2) \cos 2\beta + \omega^2 m k_m^2}{GJ}, \quad P_{C3} = -\frac{\Omega^2 em \cos \beta}{GJ}$$

$$P_{C4} = -\frac{\Omega^2 em r_i \cos \beta}{GJ}, \quad P_{C5} = -\frac{\Omega^2 em \sin \beta}{GJ}, \quad P_{C6} = -\frac{\Omega^2 em r_i \sin \beta}{GJ},$$

$$P_{C7} = 0, \quad P_{C8} = -\frac{\omega^2 em \cos \beta}{GJ}, \quad P_{C9} = 0, \quad P_{C10} = -\frac{em \sin \beta}{GJ} (\Omega^2 + \omega^2)$$

EK B

Sayfa 39'daki tekrarlanan dizi terimleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
a_{n+5} + P_{A8} b_{n+5} = & -\frac{P_{A1}}{n+\lambda+4} a_{n+4} - \frac{P_{A4}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)} a_{n+3} - \frac{(n+\lambda)P_{A3} + P_{A6}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} a_{n+2} \\
& - \frac{(n+\lambda)[(n+\lambda-1)P_{A2}(1-\delta_{2n}) + P_{A5}] + P_{A7}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} a_{n+1} - \frac{P_{A9}}{(n+\lambda+4)} b_{n+4} - \frac{P_{A10}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)} b_{n+3} \\
& - \frac{P_{A12}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} c_{n+2} - \frac{(n+\lambda)P_{A11} + P_{A14}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} c_{n+1} \\
& - \frac{P_{A13}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} c_n \\
b_{n+5} + P_{A8} a_{n+5} = & -\frac{P_{B1}}{n+\lambda+4} b_{n+4} - \frac{P_{B4}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)} b_{n+3} - \frac{(n+\lambda)P_{B3} + P_{B6}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} b_{n+2} \\
& - \frac{(n+\lambda)[(n+\lambda-1)P_{B2}(1-\delta_{2n}) + P_{B5}] + P_{B7}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} b_{n+1} - \frac{P_{B9}}{(n+\lambda+4)} a_{n+4} - \frac{P_{B10}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)} a_{n+3} \\
& - \frac{P_{B12}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} c_{n+2} - \frac{(n+\lambda)P_{B11} + P_{B14}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} c_{n+1} \\
& - \frac{P_{B13}}{(n+\lambda+4)(n+\lambda+3)(n+\lambda+2)} c_n \\
c_{n+3} = & -\frac{P_{C1}}{(n+\lambda+2)} c_{n+2} - \frac{P_{C2}}{(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} c_{n+1} - \frac{P_{C4}}{(n+\lambda+2)} a_{n+2} - \frac{(n+\lambda)P_{C3} + P_{C8}}{(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} a_{n+2} \\
& - \frac{P_{C7}}{(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} a_n - \frac{P_{C6}}{(n+\lambda+2)} b_{n+2} - \frac{(n+\lambda)P_{C5} + P_{C10}}{(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} b_{n+1} - \frac{P_{C9}}{(n+\lambda+2)(n+\lambda+1)} b_n
\end{aligned}$$

EK C

Sayfa 39'daki tekrarlanan dizi terimlerinin a ve b'ler için ilk beş c için ise ilk üç terimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 a_5 &= \frac{1}{24} \frac{P_{B7} (P_{A14} P_{C8} - P_{A7} P_{C2}) (P_{A6} P_{C6} + P_{A8} P_{B6} P_{C4}) + P_{A6} P_{A7}^2 P_{A8} P_{B6} P_{B14}^2 P_{C4} P_{C6} P_{C10}^2}{(1 - P_{A8} P_{B8}) (P_{A6} P_{B7} P_{C6} P_{C8} - P_{A7} P_{B6} P_{C4} P_{C10})} \\
 a_4 &= \frac{2}{3} \frac{(P_{A14} P_{B7} P_{C8} + P_{A7} P_{B14} P_{C10} - P_{A7} P_{B7} P_{C2}) (P_{B1} P_{C6} P_{A6} + P_{A9} P_{B6} P_{C4})}{(P_{A7} P_{B6} P_{C4} P_{C10} - P_{A6} P_{B7} P_{C6} P_{C8}) (P_{A1} P_{B1} - P_{A9} P_{B9})} \\
 a_3 &= 3 \frac{(P_{B4} P_{A6} P_{C6} + P_{A10} P_{C4} P_{B6}) (P_{A7} P_{B14} P_{C10} + P_{A14} P_{B7} P_{C8} - P_{A7} P_{B7} P_{C2})}{(P_{A10} P_{B10} - P_{A4} P_{B4}) (P_{A7} P_{B6} P_{C4} P_{C10} - P_{A6} P_{B7} P_{C6} P_{C8})} \\
 a_2 &= 4 \frac{P_{C6} (P_{A14} P_{B7} P_{C8} + P_{A7} P_{B14} P_{C10} - P_{A7} P_{B7} P_{C2})}{P_{C10} P_{A7} P_{B6} P_{C4} - P_{B7} P_{C6} P_{A6} P_{C8}} \\
 a_1 &= \frac{(P_{C10} P_{B6} P_{C4} P_{A14} + P_{C6} P_{A6} P_{C10} P_{B14} - P_{A6} P_{C2} P_{B7} P_{C6})}{(P_{B7} P_{C6} P_{A6} P_{C8} - P_{C10} P_{A7} P_{B6} P_{C4})} \\
 b_5 &= \frac{1}{24} \frac{(P_{A14} P_{B7} P_{C8} + P_{A7} P_{B14} P_{C10} - P_{A7} P_{B7} P_{C2}) (P_{A6} P_{B8} P_{C6} + P_{B6} P_{C4})}{(P_{A7} P_{B6} P_{C4} P_{C10} - P_{A6} P_{B7} P_{C6} P_{C8}) (1 - P_{B8} P_{A8})} \\
 b_4 &= \frac{2}{3} \frac{(P_{A14} P_{B7} P_{C8} + P_{A7} P_{B14} P_{C10} - P_{A7} P_{B7} P_{C2}) (P_{A6} P_{B9} P_{C6} + P_{A1} P_{B6} P_{C4})}{(P_{A9} P_{B9} - P_{A1} P_{B1}) (P_{B6} P_{C10} P_{C4} P_{A7} - P_{B7} P_{C6} P_{C8} P_{A6})} \\
 b_3 &= 3 \frac{(P_{A7} P_{B14} P_{C10} + P_{A14} P_{B7} P_{C8} - P_{A7} P_{B7} P_{C2}) (P_{B10} P_{A6} P_{C6} + P_{C4} P_{A4} P_{B6})}{(P_{A4} P_{B4} - P_{A10} P_{B10}) (P_{B6} P_{C10} P_{A7} P_{C4} - P_{C6} P_{A6} P_{C8} P_{B7})} \\
 b_2 &= 4 \frac{P_{C4} (P_{B7} P_{C8} P_{A14} + P_{A7} P_{C10} P_{B14} - P_{B7} P_{C2} P_{A7})}{P_{B7} P_{C6} P_{A6} P_{C8} - P_{C10} P_{A7} P_{B6} P_{C4}} \\
 b_1 &= \frac{P_{B6} P_{C4} (P_{A14} P_{C8} - P_{A7} P_{C2}) + P_{A6} P_{C6} P_{C8} P_{B14}}{P_{A7} P_{B6} P_{C4} P_{C10} - P_{A6} P_{B7} P_{C6} P_{C8}} \\
 c_3 &= 0 \\
 c_2 &= 0 \\
 c_1 &= 1
 \end{aligned}$$

EK D

Kiriş elemanın düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmelerin ve eğimlerin sabitlere bağlı ifadeleri matris formunda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ v(0) \\ \varphi(0) \\ w'(0) \\ v'(0) \\ \varphi'(0) \\ w(1) \\ v(1) \\ \varphi(1) \\ w'(1) \\ v'(1) \\ \varphi'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w(0,0) & w(0,1) & w(0,2) & w(0,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v(0,0) & v(0,1) & v(0,2) & v(0,3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(0,0) & \varphi(0,1) & \varphi(0,2) & \varphi(0,3) \\ w'(0,0) & w'(0,1) & w'(0,2) & w'(0,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v'(0,0) & v'(0,1) & v'(0,2) & v'(0,3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi'(0,0) & \varphi'(0,1) & \varphi'(0,2) & \varphi'(0,3) \\ w(1,0) & w(1,1) & w(1,2) & w(1,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v(1,0) & v(1,1) & v(1,2) & v(1,3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi(1,0) & \varphi(1,1) & \varphi(1,2) & \varphi(1,3) \\ w'(1,0) & w'(1,1) & w'(1,2) & w'(1,3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v'(1,0) & v'(1,1) & v'(1,2) & v'(1,3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi'(1,0) & \varphi'(1,1) & \varphi'(1,2) & \varphi'(1,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{A1} \\ C_{A2} \\ C_{A3} \\ C_{A4} \\ C_{B1} \\ C_{B2} \\ C_{B3} \\ C_{B4} \\ C_{C1} \\ C_{C2} \\ C_{C3} \\ C_{C4} \end{bmatrix}$$

EKE

Kiriş elemanın düğüm noktalarındaki kuvvetlerin ve momentlerin sabitlere bağlı ifadeleri matris formunda

verilmiştir.”

$$\begin{Bmatrix} V_x(0) \\ V_y(0) \\ V_z(0) \\ M_x(0) \\ M_y(0) \\ M_z(0) \\ V_x(1) \\ V_y(1) \\ V_z(1) \\ M_x(1) \\ M_y(1) \\ M_z(1) \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{2a}(0) & Y_{2a}(1) & Y_{2a}(2) & Y_{2a}(3) & Y_{2b}(0) & Y_{2b}(1) & Y_{2b}(2) & Y_{2b}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{3a}(0) & Y_{3a}(1) & Y_{3a}(2) & Y_{3a}(3) & Y_{3b}(0) & Y_{3b}(1) & Y_{3b}(2) & Y_{3b}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{4c}(0) & Y_{4c}(1) & Y_{4c}(2) & Y_{4c}(3) & 0 \\ Y_{5a}(0) & Y_{5a}(1) & Y_{5a}(2) & Y_{5a}(3) & Y_{5b}(0) & Y_{5b}(1) & Y_{5b}(2) & Y_{5b}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{6a}(0) & Y_{6a}(1) & Y_{6a}(2) & Y_{6a}(3) & Y_{6b}(0) & Y_{6b}(1) & Y_{6b}(2) & Y_{6b}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{8b}(0) & Y_{8b}(1) & Y_{8b}(2) & Y_{8b}(3) & Y_{8c}(0) & Y_{8c}(1) & Y_{8c}(2) & Y_{8c}(3) & 0 \\ Y_{9a}(0) & Y_{9a}(1) & Y_{9a}(2) & Y_{9a}(3) & Y_{9b}(0) & Y_{9b}(1) & Y_{9b}(2) & Y_{9b}(3) & Y_{9c}(0) & Y_{9c}(1) & Y_{9c}(2) & Y_{9c}(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_{10c}(0) & Y_{10c}(1) & Y_{10c}(2) & Y_{10c}(3) & 0 \\ Y_{11a}(0) & Y_{11a}(1) & Y_{11a}(2) & Y_{11a}(3) & Y_{11b}(0) & Y_{11b}(1) & Y_{11b}(2) & Y_{11b}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{12a}(0) & Y_{12a}(1) & Y_{12a}(2) & Y_{12a}(3) & Y_{12a}(0) & Y_{12a}(1) & Y_{12a}(2) & Y_{12a}(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_{A1} \\ C_{A2} \\ C_{A3} \\ C_{A4} \\ C_{B1} \\ C_{B2} \\ C_{B3} \\ C_{B4} \\ C_{C1} \\ C_{C2} \\ C_{C3} \\ C_{C4} \\ 1 \end{Bmatrix} + F$$

Kiriş elemanın düğüm noktalarındaki kuvvetlerin ve momentlerin matris formundaki

Y katsayılarının açık ifadeleri sabitlere aşağıdadır

$$Y_{2a}(\lambda) = [\beta'EI'_{YZ}w(0,\lambda) + EI_{YZ}w'''(0,\lambda)]$$

$$Y_{2b} = \left[\left\{ \frac{1}{2}m\Omega^2 [L^2 + 2Lr_i] + F \right\} v'(0,\lambda) + \beta'EI'_Z v''(0,\lambda) + EI_Z j'''(0,\lambda) \right]$$

$$Y_{3a} = \left[\left\{ \frac{1}{2}m\Omega^2 [L^2 + 2Lr_i] + F \right\} w'(0,\lambda) + \beta'EI'_Y w''(0,\lambda) + EI_Y w'''(0,\lambda) \right]$$

$$Y_{3b}(\lambda) = [\beta'EI'_{YZ}v''(0,\lambda) + EI_{YZ}v'''(0,\lambda)]$$

$$Y_{4c}(\lambda) = [GJj'(0,\lambda)]$$

$$Y_{5a}(\lambda) = [EI_Y w''(0,\lambda)]$$

$$Y_{5b}(\lambda) = [EI_{YZ} v''(0,\lambda)]$$

$$Y_{6a}(\lambda) = [EI_{YZ} w''(0,\lambda)]$$

$$Y_{6b}(\lambda) = [EI_Z v''(0,\lambda)]$$

$$Y_{8a}(\lambda) = [\beta'EI_{YZ}w''(1,\lambda) + EI_Y w'''(1,\lambda)]$$

$$Y_{8b}(\lambda) = [Fv'(1,\lambda) + \beta'EI'_Z v''(1,\lambda) + EI_Z v'''(1,\lambda)]$$

$$Y_{8c}(\lambda) = [-\Omega^2 mLj(1,\lambda)\sin\beta]$$

$$Y_{9a}(\lambda) = [Fw'(1,\lambda) + \beta'EI'_Y w''(1,\lambda) + EI_Y w'''(1,\lambda)]$$

$$Y_{9b}(\lambda) = [\beta'EI'_{YZ}v''(1,\lambda) + EI_{YZ}v'''(1,\lambda)]$$

$$Y_{9c}(\lambda) = [\Omega^2 mLj(1,\lambda)\cos\beta]$$

$$Y_{10a}(\lambda) = [GJj'(1,\lambda)]$$

$$Y_{11a}(\lambda) = [EI_Y w''(1, \lambda)]$$

$$Y_{11b}(\lambda) = [EI_{YZ} v''(1, \lambda)]$$

$$Y_{12a}(\lambda) = [EI_{YZ} w''(1, \lambda)]$$

$$Y_{12b}(\lambda) = [EI_Z v''(1, \lambda)]$$



EK F

Tekil değerlere ayrıştırma metodu

Herhangi bir A matrisi, $A = U \Sigma V^*$ şeklinde üç adet alt matrisin çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Bu matrislerden U ve V matrisleri içinde bulundukları uzayda birim hacim tanımlamaktadırlar. Σ ise diyagonal bir matristir ve diyagonaldeki elemanlar A matrisinin tekil değerleri ismini alır. Σ matrisinin elemanları eğer A matrisi reel bir matris ise U ve V matrisleri reel ve birbirlerine ortogonaldır. Böyle bir dönüşüme literatürde “tekil değerlere ayrıştırma” metodu adı verilmektedir.

Tekil değerlere ayrıştırma yönteminin geliştirilmesi 1840 yıllarından günümüze kadar bir çok matematikçinin katkılarıyla olmuştur. Bunlardan en önemlileri E. Beltrami, C. Jordan, J. Sylvester, E. Schmidt ve H.Weyl’dir. Tekil değerlere ayrıştırma yönteminin tarihsel gelişimi için referans [53] ‘e başvurulması tavsiye edilir.

Tekil değerlere ayrıştırma metodunu bir örnekle kısa ve öz bir şekilde açıklamanın metodun anlaşılmasında yararlı olacağı ortadadır.

Örnek :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisine tekil değerlere ayrıştırma metodu uygulansın;

1.Adım $A^T A$ matrisinin özdeğerlerinin bulunması

$$\sigma_1 = (42.86)^{0.5} = 6.5468 \quad , \quad \sigma_2 = (0.14)^{0.5} = 0.3742$$

2.Adım V matrisinin elde edilmesi ; $A^T A$ matrisinin özvektörlerinin sıralı olarak dizilmesi ile oluşturulur.

$$V = [v_1 \ v_2] = [0.5696 \ -0.8219; 0.8219 \ 0.5696]$$

$$\mathbf{v}_1 = [0.5696 \ 0.8219]^T, \quad \mathbf{v}_2 = [-0.8219 \ 0.5696]^T$$

3.Adım U matrisinin bulunması

$$\mathbf{u}_1 = (1/\sigma_1)\mathbf{A} \mathbf{v}_1 = [0.3381 \ 0.5506 \ 0.7632]^T$$

$$\mathbf{u}_2 = (1/\sigma_2)\mathbf{A} \mathbf{v}_2 = [0.8480 \ 0.1735 \ -0.5009]^T$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$$

Düzgün bir şekilde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3381 & 0.8480 \\ 0.5506 & 0.1735 \\ 0.7632 & -0.5009 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.5468 & 0 \\ 0 & 0.3742 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5696 & -0.8219 \\ 0.8219 & 0.5696 \end{bmatrix}^T$$

yazılabilir. Böylece, $\mathbf{A}$ matrisi yukarıda görüldüğü gibi 3 adet matrisin çarpımı şeklinde ifade edilmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Murat Altuğ BIÇAK, 1979 yılında İstanbul'da doğdu, liseyi Zeytinburnu Adile Mermerci Anadolu Lisesi'nde okuduktan sonra, 1997 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümünü kazandı. Mezun olduğu 2003 yılında İTÜ Makina Fakültesi Makina Teorisi, Sistem Dinamiği ve Kontrol Anabilim dalına Araştırma görevlisi olarak atandı. Kendisi halen bu görevde bulunmaktadır.

