

T.C.
İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜNİVERSAL LOJİK DEVRELER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANABİLİM DALI : ELEKTRİK
PROGRAMI : ELEKTRONİK VE HABERLEŞME

ELEK. MÜH. YUSUF LEBLEBİCİ

TEZ DANIŞMANI : PROF. DR. İ. CEM GÖKNAR

TEMMUZ 1986

Yakın ilgisi, desteği ve bana yol göstermesi ile bu çalışmanın gerçekleşmesine büyük katkısı olan Hocam Cem Gökner'a teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu çalışmada, giriş uçlarına farklı değişken atamaları uygulanarak tüm n değişkenli Boole fonksiyonlarını gerçeklemesi sağlanan üniversal lojik devreler (ULD) incelenmiştir. Standart lojik yapı elemanlarının bütün özelliklerine sahip olan ULD'lerin tasarımında, Boole fonksiyonlarının eşdeğerlik sınıflarından yararlanılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca ULD tasarımına yönelik bazı yaklaşımlar ele alınarak, bu yaklaşımlarla tasarlanan yeni ULD örnekleri ortaya konulmuş ve bunlar mevcut ULD'lerle çeşitli yönlerden karşılaştırılmıştır.

İÇİNDEKİLER

I. GİRİŞ	I
I.1. ÜNİVERSAL LOJİK DEVRE (ULD)'LERİN TANITIMI	I
I.2. ÇALIŞMANIN İÇERİĞİ	5
II. EŞDEĞER BOOLE FONKSİYONLARI	6
2.1. EŞDEĞER BOOLE FONKSİYONLARININ ULD'LER AÇISINDAN ÖNEMİ	6
2.2. BOOLE FONKSİYONLARI ARASINDAKİ BAZI EŞDEĞERLİK BAĞINTILARI	7
2.3. EŞDEĞER BOOLE FONKSİYONLARININ ELDE EDİLMESİ	14
III. POLYA TEOREMİ	23
3.1. BİR PERMÜTASYON GRUBUNUN OLUŞTURDUĞU EŞDEĞERLİK SINIFLARI	23
3.2. FONKSİYONLARA İLİŞKİN EŞDEĞERLİK SINIFLARI	25
3.3. EŞDEĞERLİK SINIFLARININ BULUNMASI	30
IV. ULD'LERİN TASARIMI	32
4.1. MİNTERİMLERE GÖRE SEÇME YÖNTEMİ	33
4.2. KARNAUGH DİYAGRAMINA YERLEŞTİRME YÖNTEMİ	37
4.3. SEMİ-ÜNİVERSAL LOJİK DEVRELER	42
V. ELDE EDİLEN ULD'LER	43
VI. SONUÇ	55
KAYNAKLAR	57
EK	

I. BÖLÜM

GİRİŞ

1.1. UNİVERSAL LOJİK DEVRE (ULD)'LERİN TANITIMI

Tümdevre teknolojisinde son yıllarda gerçekleşen gelişmelere paralel olarak kombinezonsal/ardışıl lojik devrelerin ve sayısal sistemlerin tasarımında standart lojik yapı elemanlarına dayalı sentez yöntemleri geliştirilmeye başlanmıştır. İç yapısında veya giriş uçlarının bağlantısında yapılan değişikliklerle çok sayıda farklı lojik fonksiyonu gerçekleyebilen standart lojik yapı elemanlarının tercih edilmesinin başlıca nedenleri i) aynı elemanların devre içinde farklı amaçlarla kullanılması sonucu devre elemanı sayısının ve çeşitliliğinin azaltılması ve ii) bu yolla lojik devrelerin tasarımının önemli ölçüde basitleştirilmesidir.

Birbirinden farklı fonksiyonları gerçeklemesi gereken çok sayıda bloktan oluşmuş bir sayısal sistemin tasarımında, her bloğun AND, OR, NAND vb. kapı elemanlarıyla gerçekleştirilmesinin devre elemanı sayısı ve devre karmaşıklığı bakımından elverişsiz olacağı görülmektedir. Sistem tasarımını kolaylaştırmak açısından amaçlanan, her bir lojik bloğun fonksiyonunun gerçekleştirilmesinde yalnız bir tümdevre kullanılmasıdır. Ancak söz konusu sayısal sistemin imalat hacminin çok fazla olmaması

durumunda her bir lojik blok için ayrı bir özel tümdevre tasarlanıp üretilmesi de ekonomik olmamaktadır.

Temel özellikleri yukarıda açıklanan standart lojik yapı elemanlarının gerekliliği burada ortaya çıkmaktadır. Günümüzde bu amaca yönelik olarak kullanılan tümdevreler üç ana gruba ayrılabilirler :

- a) Giriş uçlarının bağlantıları değiştirilerek, amaçlanan Boole fonksiyonunu gerçeklemesi sağlanan standart tümdevreler.
- b) Üzerinde birbirinden bağımsız olarak bulunan çok sayıda kapı elemanı arasında gerekli metal bağlantılar yapılarak istenen özellikleri gerçeklemesi sağlanan tümdevreler (gate array, uncommitted logic array).
- c) Yapımcı veya kullanıcı tarafından "programlanabilen" tümdevreler (PLA, PROM, EPROM).

Yukarıda sözü edilen tümdevrelerden (b) ve (c) gruplarına girenler, devrenin iç yapısı üzerinde amaca uygun bir değişiklik yapılmasını gerektirmektedirler. Bu ise üretim aşamasında ek bir masrafa sebep olmaktadır. İç yapılarında bir değişiklik gerektirmediklerinden sistem tasarımı açısından (a) grubuna giren tümdevrelerin daha elverişli oldukları görülmektedir. Bu gruptaki tümdevrelerin en çok tanınan temsilcileri çoğullayıcı (multiplexer) devreleridir. Ancak ileride açıklanacak nedenlerden dolayı daha farklı bir yaklaşıma gereksinim duyulmuş ve Üniversal Lojik Devreler (ULD) geliştirilmiştir.

Tanım 1.1.1. : Üniversal Lojik Devre

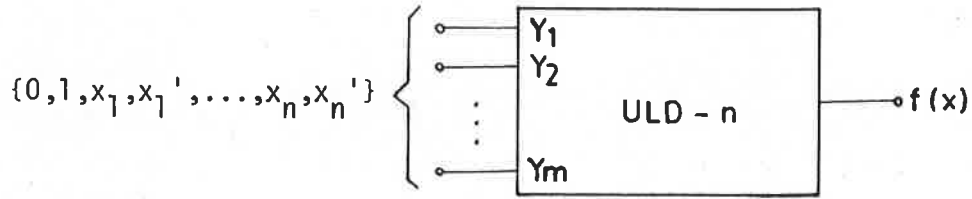
$S=\{0,1\}$ bir Boole cebri olsun. $F=\{f:S^n \rightarrow S\}$, değişkenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan tüm Boole fonksiyonlarının kümesi, M devresi de değişkenleri $y_1, y_2, \dots, y_m$ olan $g:S^m \rightarrow S$ fonksiyonunu gerçekleyen m girişli bir çıkışlı bir kombinezonsal devre olsun (Şekil 1.1.).

$\Phi:\{y_1, y_2, \dots, y_m\} \rightarrow \{0,1, x_1, x_1', \dots, x_n, x_n'\}$ fonksiyonu da M devresinin girişlerine uygulanabilecek bir değişken atamasını gösterebilir.

Eğer, her $f \in F$ için

$$\exists \Phi \ni g(\Phi(y_1), \Phi(y_2), \dots, \Phi(y_m)) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ise, M devresi n değişkenli Boole fonksiyonlarını gerçekleyen bir Üniversal Lojik Devre (ULD- n)'dir.



Şekil 1.1. m girişli bir ULD-n

Her bir atama için $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenlerinin ya da tümleyenlerinin her biri M devresinin girişlerinden en az birine bağlanmak zorunda olduğundan $m \geq n$ olmalıdır. n değişkenli Boole fonksiyonlarının sayıları ve bu fonksiyonları gerçeklemede kullanılacak çoğullayıcı devrelerinin giriş sayıları Tablo 1.1.'de verilmiştir.

n	2	3	4	5
Fonksiyonların sayısı	16	256	65536	4294967300
Kullanılması gereken çoğullayıcının giriş sayısı	3	6	11	20

Tablo 1.1. n değişkenli Boole fonksiyonlarının sayısı

m girişli bir M devresinin giriş uçlarına uygulanabilecek $\Phi: \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \rightarrow \{0, 1, x_1, x_1', \dots, x_n, x_n'\}$ atamalarının sayısı da, m ve n 'ye bağlı olarak Tablo 1.2.'de görülmektedir[6].

		n		
		2	3	4
m	2	8	-	-
	3	96	48	-
	4	800	960	384
	5	5760	12480	11520

Tablo 1.2. Farklı Φ atamalarının sayısı

Tanım 1.1.1.'e göre M devresinin gerçekleyeceği her f fonksiyonu için ayrı bir Φ ataması gerekli olduğundan Tablo 1.1. ve Tablo 1.2. incelenerek şu sonuçlar çıkarılabilir. Φ atamalarının sayısından, 2 değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçekleyen bir ULD-2 için 3 giriş ucunun, 3 değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçekleyen bir ULD-3 için de 4 giriş ucunun yeterli olabileceği görülmektedir. Ancak her Φ atamasıyla farklı bir f fonksiyonu üretilemediğinden 4 girişli bir ULD-3'ün gerçekleşmesinin olanaksız olduğu ileride gösterilecektir. Ayrıca bir ULD-4 için gerekli olan giriş ucu sayısı da $m > 5$ olmalıdır.

Görüldüğü gibi n değişkenli Boole fonksiyonlarının gerçekleşmesinde çoğullayıcı yerine ULD kullanılmasının, devrenin giriş ucu sayısı bakımından daha elverişli sonuçlar vermesi beklenebilir. Nitekim yapılan çalışmalar 5 girişli ULD-3 ve 9 girişli ULD-4 devrelerinin gerçekleştirilebilir olduğunu göstermiştir[9].

ULD kavramının ilk defa 1966'da Forslund ve Waxman [1] tarafından ortaya atılmasından bugüne kadar yapılan çalışmalar, basit devrelerden daha çok sayıda değişkenli ULD'lere ve ULD sistemlerine doğru bir gelişme göstermektedir. Tasarımı fazla karmaşık yöntemler gerektirmeyen ULD-2 için çok sayıda farklı gerçekleştirme önerilmiş ve bunlar ayrıntılarıyla incelenmiştir[2],[3],[4],[5],[6]. Uzunca bir süre $n > 2$ değişkenli fonksiyonlar için ULD tasarımı konusunda etkin bir yöntem geliştirilemediğinden, çok değişkenli fonksiyonların birden fazla ULD-2'nin uygun şekilde bağlanması ile gerçekleştirilmesi yoluna gidilmiştir. Yau ve Tang (1969) ULD'ler kullanılarak sistem tasarımı alanında önemli çalışmalar yapmışlardır[7]. Özellikle ULD'lerden oluşan ağaç yapılar, $n > 2$ değişkenli fonksiyonların gerçekleştirilmesinde yaygın olarak kullanılmıştır. 1971'de Preparata'nın ULD'lerin giriş ucu sayısının belirlenmesi ve ULD tasarımı konusunda yaptığı çalışmalar, bunu izleyen bazı gelişmelere de ışık tutmuştur[8]. Son yıllarda Chen, hem spektral lojik yaklaşımına, hem de eşdeğer Boole fonksiyonları yaklaşımına dayanan ULD tasarım yöntemleri önermiş ve bu yöntemlerle tasarımı yapılan bazı ULD-3'leri de ortaya koymuştur[6],[9].

1.2. ÇALIŞMANIN İÇERİĞİ

Bu çalışmada n değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçekleyebilen ULD'lerin tasarımı incelenmiş ve tasarımda Boole fonksiyonlarının eşdeğerlik sınıflarına göre bölmelenmesinden yararlanılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca yeni bazı ULD-2 ve ULD-3'ler ortaya koyularak mevcut ULD örnekleriyle karşılaştırması da yapılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde Boole fonksiyonları arasında tanımlanabilecek bazı eşdeğerlik bağıntıları incelenmektedir. Bu bağıntılar altında fonksiyonların ayrıldığı eşdeğerlik sınıfları da geliştirilen bir algoritmayla bulunmaktadır. Bu bölümde verilen 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları çalışmanın daha ilerideki bölümlerinde geniş ölçüde kullanılmaktadır.

Üçüncü bölümde, belirli bir eşdeğerlik bağıntısı altında fonksiyonlara ilişkin eşdeğerlik sınıflarının sayısının ve yapısının belirlenmesini sağlayan POLYA Teoremi verilmektedir. Probleme getirdiği sade ve değişik yaklaşımla kombinatoryal matematikte önemli bir yeri olan bu teoremin tanıtı ve uygulamaları da incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, bu çalışmada ele alınan ULD tasarım yöntemleri etraflıca incelenmiştir. Uygulama örnekleri verilmiş, ayrıca "semi-üniversal lojik devre" kavramı ortaya atılarak tanıtılmıştır. Beşinci bölümde ise bu çalışmada geliştirilen ULD'ler verilerek mevcut örnekleriyle çeşitli yönlerden karşılaştırılmaktadır.

Sonuç bölümü olan altıncı bölümde çalışmanın genel bir değerlendirilmesi yapılmakta ve elde edilen sonuçlar özetlenmektedir. Ayrıca bu alandaki çalışmaların hangi yönde sürdürülebileceği konusuna da değinilmektedir.

II. BÖLÜM

EŞDEĞER BOOLE FONKSİYONLARI

2.1. EŞDEĞER BOOLE FONKSİYONLARININ ULD'LER AÇISINDAN ÖNEMİ

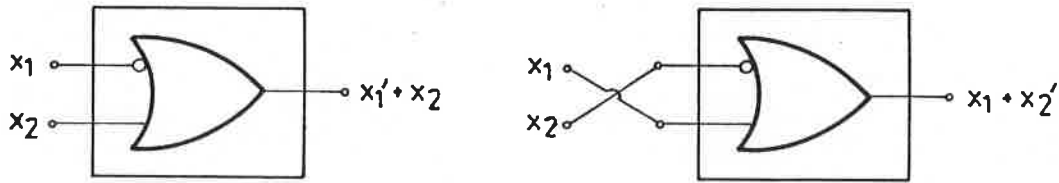
Birinci bölümde açıklandığı gibi n değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçeklemesi istenen bir ULD-n'in, giriş uçlarının farklı bağlantıları için 2^{2^n} farklı Boole fonksiyonunu gerçeklemesi gerekmektedir. ULD tasarımı bakımından ilk akla gelen yöntem, bu fonksiyonların tümünü göz önüne alıp, bunları gerçekleyen bir devre tasarlanmasıdır. Ancak $n > 2$ için incelenmesi gereken fonksiyonların sayısı çok artmakta, bu ise tasarımı güçleştirmekte hatta belli bir yerden sonra imkansız hale getirmektedir. Boole fonksiyonlarını herhangi bir sınıflamaya tabi tutmadan tasarlanacak ULD'nin, bilinen çoğullayıcı devrelerinden ileri geçemeyeceği görülmektedir.

Boole fonksiyonları uygun eşdeğerlik sınıflarına ayrılarak ULD'lerin tasarımı önemli ölçüde basitleştirilebilir. Örneğin n değişkenli tüm Boole fonksiyonlarının k tane eşdeğerlik sınıfına bölmelendiğini varsayalım. Bu durumda her bir eşdeğerlik sınıfından birer temsilci fonksiyon seçilerek, giriş uçlarının farklı bağlantıları için bu k tane farklı fonksiyonu gerçekleyen bir devre tasarlanabilir. Eşdeğerliğin tanımından dolayı, belli bir eşdeğerlik sınıfından bir fonksiyonu gerçekleyen bir devre, aynı eşdeğerlik sınıfındaki diğer

tüm fonksiyonları da gerçekleyeceğinden tasarlanan devre bir ULD olacaktır. Eşdeğerlik bölmelemelerinin sayısı k , tüm Boole fonksiyonlarının sayısından daha küçük olacağından bu yolla tasarımın kolaylaşacağı hemen görülebilir.

n değişkenli Boole fonksiyonları eşdeğerlik sınıflarına ayrılırken kullanılacak eşdeğerlik bağıntılarının bu fonksiyonları gerçekleyen kapı devrelerinin özellikleri ile yakından ilişkili olması gerekmektedir. Çünkü yukarıda da belirtildiği gibi aynı eşdeğerlik sınıfından olan fonksiyonları gerçekleyen kapı devresinin de, iç yapı açısından, aynı olması gerekmektedir.

Örneğin $f_1(x_1, x_2) = x_1' + x_2$ fonksiyonunu gerçekleyen kapı devresinde giriş uçlarının çaprazlanması sonucu aynı devre $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2'$ fonksiyonunu gerçekleyecektir. Böylece tek bir kapı devresi ile iki ayrı Boole fonksiyonu gerçekleştirilmektedir (Şekil 2.1.).



Şekil 2.1. Giriş uçlarının çaprazlanması

Yukarıdaki örnekte kullanılan çaprazlama işleminin bir eşdeğerlik bağıntısı olduğu gösterilebilirse f_1 ve f_2 fonksiyonlarının aynı eşdeğerlik sınıfının iki elemanı olduğu söylenebilecektir.

2.2. BOOLE FONKSİYONLARI ARASINDAKİ BAZI EŞDEĞERLİK BAĞINTILARI

Bu bölümde Boole fonksiyonları arasında tanımlanacak bazı eşdeğerlik bağıntıları ele alınacaktır. Ancak daha önce "eşdeğerlik bağıntısı" kavramının incelenmesinde yarar vardır.

Herhangi bir S kümesi ve bu küme üzerinde tanımlı R bağıntısı göz önüne alınsın.

i) $xRx, \forall x \in S$ ise R bağıntısında yansımaya özelliği vardır.

- ii) $xRy \Leftrightarrow yRx$, $\forall x,y \in S$ ise R bağıntısında simetri özelliği vardır.
 iii) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$, $\forall x,y,z \in S$ ise R bağıntısında geçişlilik özelliği vardır.

Tanım 2.2.1. : Eşdeğerlik Bağıntısı

Bir R bağıntısı yansıma, simetri ve geçişlilik özelliklerinin üçüne de sahipse R bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanım 2.2.2. : Bölmeleme

S, sonlu sayıda elemanı olan bir küme, $S_1, S_2, \dots, S_n \subset S$ olsun. Eğer

i) $S_i \cap S_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ ve

ii) $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = S$ ise $S_1, S_2, \dots, S_n$ kümelerine S'in bir bölmelemesi denir.

Tanım 2.2.3. :

R, S kümesinde tanımlı bir eşdeğerlik bağıntısı olsun. $s \in S$ için

$[s] = \{t \in S \mid tRs\}$ kümesine s'e eşdeğer elemanlar kümesi denir.

Teorem 2.2.1. :

R, S kümesi üzerinde tanımlı bir eşdeğerlik bağıntısı olsun. $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ için, s_1 'e eşdeğer elemanlar kümesi $[s_1]$, s_2 'ye eşdeğer elemanlar kümesi $[s_2]$...vs. olsun. Bu durumda $\{[s_i] \mid s_i \in S, i=1,2,3,\dots\}$ kümesi S'in bir bölmelemesidir.

Tanıt :

i) Tanım 2.2.2.'ye göre birbirinden farklı her $[s_i] \in S$ ve $[s_j] \in S$ için $[s_i] \cap [s_j] = \emptyset$ olduğu gösterilmelidir. $[s_i]$ ve $[s_j]$ 'nin birbirinden farklı olması için gerek ve yeter koşul, s_i ve s_j 'nin arasında bir eşdeğerlik bağıntısı bulunmamasıdır. Çünkü eğer $s_i R s_j$ olursa, Tanım 2.2.3. gereği $[s_i] = [s_j]$ olacaktır.

$s_i R s_j$ için $t \in [s_i] \wedge t \in [s_j]$ olsun.

$s_i R t \wedge t R s_j \Rightarrow s_i R s_j$ (çelişki)

Dolayısıyla

$[s_i] \neq [s_j] \Rightarrow [s_i] \cap [s_j] = \emptyset$ olacaktır.

ii) $\#(S) = n$ olsun. Yukarıda görüldüğü gibi $[s_1], [s_2], \dots, [s_n]$ kümelerinin bazıları birbirine eşit olabilir. Ancak her $[s_i]$ kümesi en az

bir eleman içermektedir. Böylece

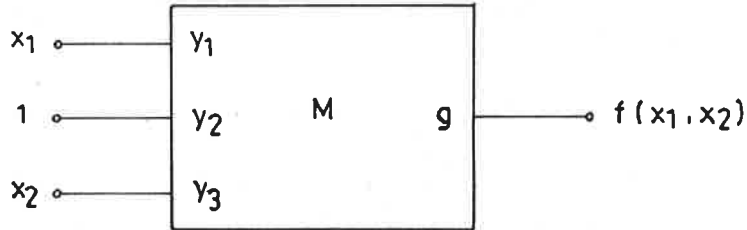
$$[s_1] \cup [s_2] \cup \dots \cup [s_n] = S \text{ olacaktır. } \Delta$$

Eşdeğerlik kavramı böylece tanıtıldıktan sonra aşağıda Boole fonksiyonları arasında tanımlanan bazı bağıntılar ele alınarak bunların eşdeğerlik bağıntısı olup olmadığı incelenecektir.

Tanım 2.2.4. : İçerme Bağıntısı

$g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ fonksiyonunu gerçekleyen kapı devresi M olsun. M devresinin bazı giriş uçlarına sabit 0 veya 1, diğer giriş uçlarına da $x_1, x_1', \dots, x_n, x_n'$ değişkenlerinin bazıları bağlanarak gerçekleştirilen fonksiyon da $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun ($m \geq n$). Bu durumda g fonksiyonu f fonksiyonunu içeriyor denir ($g R_i f$).

Örneğin M devresinin gerçeklediği fonksiyon $g(y_1, y_2, y_3) = y_1 y_2 + y_1' y_3$ olsun. Bu devrenin giriş uçlarına $x_1 \rightarrow y_1$, $1 \rightarrow y_2$, $x_2 \rightarrow y_3$ bağlantıları yapılacak olursa devrenin gerçekleyeceği fonksiyon $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ olacaktır (Şekil 2.2.). Bu durumda g fonksiyonu f 'i içermektedir, yani fonksiyonların arasında $g R_i f$ bağıntısı mevcuttur.



Şekil 2.2. İçerme bağıntısına örnek

Yukarıdaki örnek incelendiğinde, g fonksiyonunun f fonksiyonunu içermesine rağmen, f 'in g 'yi içermediği görülmektedir. Yani $f(x_1, x_2)$ fonksiyonunu gerçekleyen bir devre kullanılarak $g(y_1, y_2, y_3)$ fonksiyonunun elde edilmesi mümkün değildir. Dolayısıyla içerme bağıntısı simetri özelliğini sağlamamaktadır ve bu nedenle bir eşdeğerlik bağıntısı da değildir. Ancak içerme özelliğinin ULD'lerin kullanımında önemli bir rol oynadığı görülecektir[12].

Tanım 2.2.5. : Değişken Çaprazlama Bağıntısı

$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunu gerçekleyen kapı devresi M olsun. M 'nin bazı giriş uçlarının çaprazlanmasıyla elde edilen fonksiyon da $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun. Bu durumda f_1 ile f_2 arasında değişken çaprazlama bağıntısı vardır ($f_1 R_c f_2$).

Teorem 2.2.2. :

Değişken çaprazlama bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanıt :

i) Yansıma özelliği : Yapılan değişken çaprazlaması tüm değişkenleri yerlerinde bırakıyorsa (birim çaprazlama) $f R_c f$ özelliği geçerlidir.

ii) Simetri özelliği : Bir değişken çaprazlaması ile f_1 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_2 elde ediliyorsa, aynı çaprazlama yapılarak f_2 fonksiyonunu gerçekleyen devreden de f_1 fonksiyonu elde edilir. Yani $f_1 R_c f_2 \Leftrightarrow f_2 R_c f_1$ özelliği geçerlidir.

iii) Geçişlilik özelliği : Bir değişken çaprazlaması ile f_1 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_2 fonksiyonu, başka bir değişken çaprazlaması ile de f_2 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_3 elde ediliyorsa, bu iki çaprazlamanın ardarda uygulanması ile f_1 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_3 fonksiyonu elde edilir. Yani

$$f_1 R_c f_2 \wedge f_2 R_c f_3 \Rightarrow f_1 R_c f_3 \text{ özelliği geçerlidir.}$$

Her üç özellik de sağlandığından değişken çaprazlama bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Δ

F , tüm Boole fonksiyonlarının kümesi, $f_1, f_2 \in F$, ve P de F üzerinde tanımlı bir permütasyon grubu olsun. Bu durumda değişken çaprazlama bağıntısı aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

$$f_1 R_c f_2 \Leftrightarrow \exists P_i \in P \ni f_1 = P_i(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in F$$

Tanım 2.2.6. : Değişken Tümleme Bağıntısı

$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunu gerçekleyen kapı devresi M olsun. M 'nin bazı giriş uçlarına bağlı olan değişkenlerin önce tümleyenini alınarak, bunların ilgili girişlere bağlanmasıyla elde edilen fonksiyon da $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun. Bu durumda f_1 ile f_2 arasında değişken tümleme bağıntısı vardır ($f_1 R_T f_2$).

Teorem 2.2.3. :

Değişken tümleme bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanıt :

i) Yansıma özelliği : Yapılan değişken tümlemesi bütün değişkenleri aynı bırakıyorsa (birim tümleme) $f R_T f$ özelliği geçerlidir.

ii) Simetri özelliği : Bir değişken tümlemesi ile f_1 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_2 fonksiyonu elde ediliyorsa, aynı değişken tümlemesi yapılarak f_2 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_1 elde edilir. Yani $f_1 R_T f_2 \Leftrightarrow f_2 R_T f_1$ özelliği geçerlidir.

iii) Geçişlilik özelliği : Bir değişken tümlemesi ile f_1 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_2 fonksiyonu, başka bir değişken tümlemesi ile de f_2 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_3 fonksiyonu elde ediliyorsa, bu iki değişken tümlemesinin ardarda uygulanması ile f_1 fonksiyonunu gerçekleyen devreden f_3 fonksiyonu elde edilir. Yani

$$f_1 R_T f_2 \wedge f_2 R_T f_3 \Rightarrow f_1 R_T f_3 \text{ özelliği geçerlidir.}$$

Her üç özellik de sağlandığından değişken tümleme bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Δ

F , tüm Boole fonksiyonlarının kümesi, $f_1, f_2 \in F$, ve T de F üzerinde tanımlı bir permütasyon grubu olsun. Bu durumda değişken tümleme bağıntısı aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

$$f_1 R_T f_2 \Leftrightarrow \exists T_j \in T \ni f_1 = T_j(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in F$$

Tanım 2.2.7. : Değişken Çaprazlama-Tümleme Bağıntısı

$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunu gerçekleyen kapı devresi M olsun. M 'nin bazı giriş uçlarının çaprazlanması, bazı giriş uçlarına bağlı olan değişkenlerin de tümlenmesinin alınmasıyla elde edilen fonksiyon $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun. Bu durumda f_1 ile f_2 arasında değişken çaprazlama-tümleme bağıntısı vardır ($f_1 R_E f_2$).

F , tüm Boole fonksiyonlarının kümesi, $f_1, f_2 \in F$, P ve T de F üzerinde tanımlı birer permütasyon grubu olsun. Bu durumda değişken çaprazlama-tümleme bağıntısı aşağıdaki gibi de tanımlanabilir.

$$f_1 R_E f_2 \Leftrightarrow \exists P_i \in P \wedge \exists T_j \in T \ni f_1 = P_i(T_j(f_2)) \quad \forall f_1, f_2 \in F$$

Teorem 2.2.4. :

Değişken çaprazlama-tümlleme bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanıt :

i) Yansıma özelliği : P ve T birer grup oluşturduğundan birim permütasyonlar (P_e ve T_e) da vardır. Dolayısıyla

$$f R_E f \Leftrightarrow \exists P_e \in P \wedge \exists T_e \in T \ni f = P_e(T_e(f)) \quad \text{özelligi geçerlidir.}$$

ii) Simetri özelliği : P ve T birer grup oluşturduğundan her $P_i \in P$ ve $T_j \in T$ permütasyonunun bir ters permütasyonu vardır.

$$f_1 = P_i(T_j(f_2)) \Leftrightarrow \exists P_i^{-1} \in P \wedge \exists T_j^{-1} \in T \ni f_2 = P_i^{-1}(T_j^{-1}(f_1))$$

Böylece $f_1 R_E f_2 \Leftrightarrow f_2 R_E f_1$ özelliği sağlanır.

iii) Geçişlilik özelliği : P ve T permütasyon gruplarının elemanları için şu özellikler geçerlidir.

$$P_1(T_1(f)) = T_1(P_1(f)) \quad P_1 \in P, T_1 \in T$$

$$P_1(P_2(f)) = P_3(f) \quad P_1, P_2, P_3 \in P$$

$$T_1(T_2(f)) = T_3(f) \quad T_1, T_2, T_3 \in T$$

Bunlardan yararlanılarak,

$$f_1 R_E f_2 \wedge f_2 R_E f_3 \Rightarrow \exists P_i, P_k, P_q \in P \wedge \exists T_j, T_m, T_r \in T \ni$$

$$f_1 = P_i(T_j(P_k(T_m(f_3)))) = T_j(T_m(P_i(P_k(f_3)))) = T_r(P_q(f_3))$$

özelligi sağlanır.

Her üç özellik de sağlandığından değişken çaprazlama-tümlleme bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Δ

Aşağıdaki basit teoremler değişken tümlleme ve değişken çaprazlama permütasyonlarının sayısını vermektedirler.

Teorem 2.2.5. :

n girişli bir devrede uygulanabilecek değişken tümlleme permütasyonlarının sayısı 2^n 'dir.

Teorem 2.2.6. :

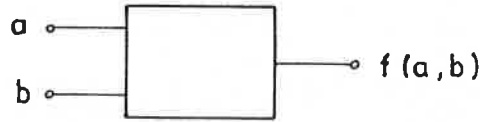
n girişli bir devrede uygulanabilecek değişken çaprazlama permütasyonlarının sayısı $n!$ 'dir.

Sonuç Teorem 2.2.7. :

n değişkenli Boole fonksiyonları kümesi içinde R_E eşdeğerlik bağıntısı tarafından belirlenen her bir eşdeğerlik sınıfı en fazla permütasyonların sayısı kadar ($2^n \cdot n!$) fonksiyon bulundurabilir.

Yukarıda ayrıntılı olarak incelenen ve ilerideki bölümlerde üzerinde sıkça durulacak olan R_E çaprazlama-tümleme bağıntısı, n değişkenli bir Boole fonksiyonunun giriş uzayı üzerinde bir permütasyona karşılık düşmektedir.

Örneğin 2 değişkenli bir Boole fonksiyonunun giriş uzayı $\{00,01,10,11\}$ şeklindedir. Giriş uzayının elemanları onlu tabanda kodlanarak $\{0,1,2,3\}$ şeklinde de verilebilirler. İki değişkenli $f(a,b)$ fonksiyonunu gerçekleyen devrenin giriş uçlarına R_E bağıntısı ile tanımlanan değişken atamalarının uygulanması sonucu oluşan giriş uzayı permütasyonları Tablo 2.1.'de verilmiştir.



a	b	Giriş Uzayının Permütasyonları			
x_1	x_2	0	1	2	3
x_1	x_2'	1	0	3	2
x_1'	x_2	2	3	0	1
x_1'	x_2'	3	2	1	0
x_2	x_1	0	2	1	3
x_2	x_1'	1	3	0	2
x_2'	x_1	2	0	3	1
x_2'	x_1'	3	1	2	0

Tablo 2.1. Farklı değişken atamaları için giriş uzayı permütasyonları

Görüldüğü gibi devrenin giriş uçlarının çaprazlanması ve/veya tümlemesi sonucu devrenin gerçeklediği fonksiyonun giriş uzayı üzerinde oluşan permütasyon kümesi, tüm mümkün permütasyonlar kümesinin bir alt

kümesidir. R_E bağıntısının oluşturduğu bu alt kümeye "uygulanabilir permütasyonlar" kümesi denir.

Lemma 2.2.8. :

Uygulanabilir permütasyonlar kümesi bir grup oluşturur.

R_E eşdeğerlik bağıntısının özellikleri incelendiğinde uygulanabilir permütasyonlar kümesinin i) kapalılık, ii) birim eleman, iii) ters eleman hakkındaki grup aksiyomlarının tümünü sağladığı görülür.

2.3. EŞDEĞER BOOLE FONKSİYONLARININ ELDE EDİLMESİ

Değişken çaprazlama-tümleme bağıntısı R_E 'nin, Boole fonksiyonlarının giriş uzayı üzerinde oluşturduğu permütasyonlardan yararlanılarak Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları kolaylıkla elde edilebilir. Bunun için önce aşağıda verilen iki lemma incelenecektir.

Lemma 2.3.1. :

n değişkenli Boole fonksiyonlarının giriş uzayı D olsun. R_E bağıntısının, n değişkenli Boole fonksiyonlarının giriş uzayı üzerinde oluşturduğu permütasyon grubu da P olsun. O zaman

$$f_i R_E f_j \Leftrightarrow \exists P_k \in P \ni f_i(d_m) = f_j(P_k(d_m)) \quad \forall d_m \in D$$

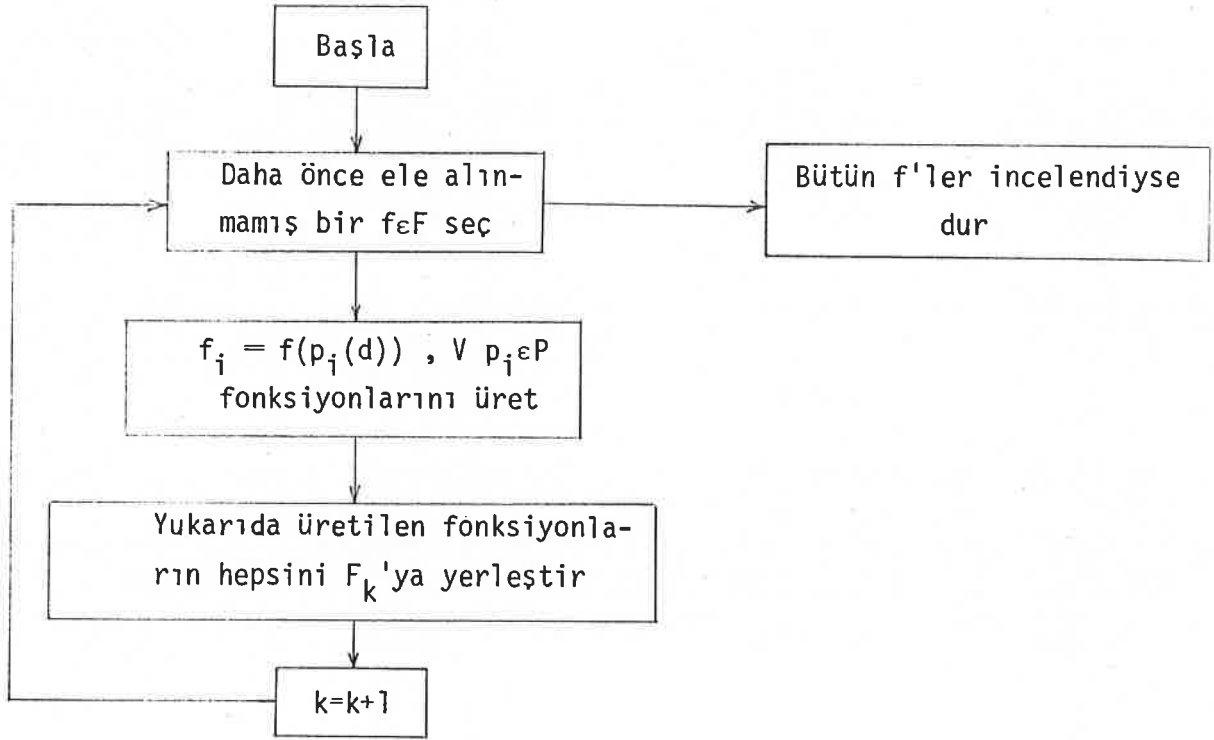
özelliği geçerlidir.

Lemma 2.3.2. :

n değişkenli tüm Boole fonksiyonlarının kümesi F , R_E bağıntısının belirlediği eşdeğer fonksiyonlar kümeleri de $F_1, F_2, \dots, F_k$ olsun. O zaman $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ kümesi F 'in bir bölmelemesidir.

Bu lemmanın tanıtı Teorem 2.2.1.'den yararlanarak yapılabilir.

P kümesinin elemanlarının bilindiği varsayımıyla, aşağıdaki algoritma kullanılarak n değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları ve bu sınıfların elemanları bulunabilir.



Şekil 2.3. Eşdeğer Boole fonksiyonlarını bulan algoritmanın basitleştirilmiş akış diyagramı

Üç değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları, verilen algoritmayla elde edilerek aşağıdaki tabloda listelenmiştir. Sabit 1 ve sabit 0'ın da birer Boole fonksiyonu olduğu göz önüne alınarak, eşdeğerlik sınıflarının toplam sayısının 22 olduğu görülmektedir. Ayrıca eşdeğerlik sınıflarındaki fonksiyonların sayısı en çok 24 olmaktadır. Bu sayı, uygulanabilir permütasyonların sayısının yarısı olduğundan her permütasyonun ayrı bir fonksiyon üretmediği de gösterilmiş olmaktadır.

1. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1

Temsilci fonksiyon :

$$x_1 x_2 x_3$$

2. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0

$$x_1 + x_2 + x_3$$

3. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1

$$x_1 x_2$$

4. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

$$x_1 + x_2$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları

5. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	0

Temsilci fonksiyon :

$$x_1 x_2 x_3 + x_1' x_2' x_3'$$

6. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1

$$x_1 x_2' + x_2 x_3' + x_1' x_3$$

7. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0

$$x_1 x_2 x_3 + x_1' x_2 x_3'$$

8. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1

$$x_3 + x_1' x_2 + x_1 x_2'$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları (devam)

9. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1

Temsilci fonksiyon :

$$x_1'x_3' + x_1'x_2$$

10. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0

$$x_1 + x_2'x_3$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları (devam)

11. EŞDEĞERLİK SINIFI

Temsilci fonksiyon :

000	001	010	011	100	101	110	111
1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1

$$x_1x_2 + x_1'x_2'x_3$$

12. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0

$$x_1x_2 + x_1'x_3' + x_1x_3$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları (devam)

13. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1

Temsilci fonksiyon :

$$x_1 x_2 x_3 + x_1' x_2' x_3 + x_1 x_2' x_3'$$

14. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0

$$x_1' x_2 + x_1' x_3' + x_2 x_3' + x_1 x_2' x_3$$

15. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1

$$x_1 x_2 + x_1' x_3$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları (devam)

16. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0

Temsilci fonksiyon :

$$x_1x_2 + x_1x_3' + x_1'x_2'x_3$$

17. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

18. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1

$$x_1$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları (devam)

19. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1

Temsilci fonksiyon :

$$x_1x_2 + x_1'x_2'$$

20. EŞDEĞERLİK SINIFI

000	001	010	011	100	101	110	111
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1

$$x_1x_2x_3 + x_1'x_2'x_3 + x_1'x_2x_3' + x_1x_2'x_3'$$

Tablo 2.2. 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları (devam)

III. BÖLÜM

POLYA TEOREMİ

Yukarıda ana hatlarıyla verilen algoritma kullanılarak n değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıfları bulunabilir. Ancak bu işlem, n değişkenli tüm Boole fonksiyonlarının incelenmesini gerektirdiğinden $n > 3$ için bilgisayardan yararlanılması zorunlu olmaktadır. Belirli bir eşdeğerlik bağıntısı altında fonksiyonlara ilişkin eşdeğerlik sınıflarının sayısının ve yapısının belirlenmesi, G. Polya tarafından 1938 yılında ortaya koyulan bir teorem sayesinde çok daha basit bir şekilde yapılabilmektedir. Bu bölümde, Boole fonksiyonlarının sınıflandırılması problemine değişik bir ışık tutan Polya Teoremi ayrıntılı olarak incelenecektir [10],[11].

3.1. BİR PERMÜTASYON GRUBUNUN OLUŞTURDUĞU EŞDEĞERLİK SINIFLARI

S kümesi üzerinde tanımlanan bire-bir fonksiyona S kümesinin bir permütasyonu denir. Permütasyonların gösterilimi için aşağıdaki yol izlenebilir.

$$S = \{a, b, c, d\} \text{ için } p: S \rightarrow S, \quad p = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{bmatrix}$$

p_1 ve p_2 S kümesinin iki permütasyonu olsunlar. Bu permütasyonların bileşiminin $(p_1 \circ p_2)$ de yine S kümesinin bir permütasyonu olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.1.1. :

Sonlu S kümesi üzerinde tanımlanan bir permütasyon grubu G ile gösterilsin. Bu permütasyon grubunun S kümesinin elemanları arasında oluşturduğu bağıntı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Yani,

$$s_1 R_G s_2 \Leftrightarrow \exists p \in G \ni s_1 = p(s_2) \quad , \quad \forall s_1, s_2 \in S$$

Tanıt :

i) Yansıma özelliği : G bir grup oluşturduğundan birim permütasyon (e) da vardır.

$$e(s) = s \quad , \quad \forall s \in S \Leftrightarrow s R_G s$$

ii) Simetri özelliği : G bir grup oluşturduğundan her p permütasyonunun bir ters permütasyonu vardır.

$$p(s_1) = s_2 \Leftrightarrow p^{-1}(s_2) = s_1$$

$$s_1 R_G s_2 \Leftrightarrow s_2 R_G s_1$$

iii) Geçişlilik özelliği : İki permütasyonun bileşimi yine aynı permütasyon grubunun elemanı olduğundan aşağıdaki özellik sağlanır.

$$p_1(s_1)=s_2 \wedge p_2(s_2)=s_3 \Rightarrow p_1 p_2(s_1)=s_3 \quad , \quad \forall s_1, s_2, s_3 \in S$$

$$s_1 R_G s_2 \wedge s_2 R_G s_3 \Rightarrow s_1 R_G s_3$$

Her üç özellik de sağlandığından G permütasyon grubunun oluşturduğu bağıntı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Δ

Sonlu S kümesi ve bu küme üzerinde tanımlanan permütasyon grubu G verilmiş olsun. G permütasyon grubunun oluşturduğu eşdeğerlik bağıntısı altında S 'nin kaç eşdeğerlik sınıfına bölündüğü Burnside Teoremi ile bulunabilir. Ancak daha önce aşağıdaki tanım incelenecektir.

Tanım 3.1.1. : Değişmezlik Özelliği

G , S kümesi üzerinde tanımlanmış bir permütasyon grubu olsun. Eğer bir $p \in G$ ve $s \in S$ için $p(s)=s$ ise s elemanı p permütasyonu altında değişmezlik özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.1.2. : Burnside Teoremi

S kümesinin, G permütasyon grubunun oluşturduğu eşdeğerlik bağıntısı altında ayrıldığı eşdeğerlik sınıflarının sayısı k olsun.

0 zaman

$$k = \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} \psi(p) \quad (3.1)$$

şeklinde verilir. Burada $\psi(p)$, p permütasyonu altında değişmezlik özelliğine sahip olan elemanların sayısıdır.

Örnek :

S kümesi $S=\{a,b,c,d\}$ ve bu küme üzerinde tanımlı permütasyon grubu da $G=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ olsun. G 'nin elemanları aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} p_1 &= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{bmatrix} & p_2 &= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{bmatrix} \\ p_3 &= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{bmatrix} & p_4 &= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Burnside Teoremi uygulanacağına göre önce her permütasyon altında değişmezlik özelliğine sahip olan elemanların sayısı belirlenmelidir. p_1 permütasyonu incelendiğinde, tüm elemanların değişmezlik özelliğine sahip olduğu görülür. Birim permütasyon olan p_1 için $\psi(p_1)=4$ olacaktır. p_2 permütasyonu, c ve d elemanlarını değişmeden bırakmaktadır, dolayısıyla $\psi(p_2)=2$ 'dir. Benzer şekilde $\psi(p_3)=2$ ve $\psi(p_4)=0$ olduğu da bulunabilir. G permütasyon grubunda 4 permütasyon bulunduğundan $\#G=4$ tür. Böylece elde edilen değerler (3.1.) ifadesinde yerine koyularak k bulunur.

$$k = \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} \psi(p) = \frac{1}{4} (4+2+2+0) = 2$$

Verilen permütasyon grubu altında S kümesi 2 eşdeğerlik sınıfına bölünmektedir. Permütasyonlar incelenerek bu eşdeğerlik sınıflarının $\{a,b\}$ ve $\{c,d\}$ olduğu da gösterilebilir.

3.2. FONKSİYONLARA İLİŞKİN EŞDEĞERLİK SINIFLARI

Bu kısımda $f:D \rightarrow R$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlara ilişkin eşdeğerlik sınıflarının sayısının belirlenmesi incelenecektir.

Tanım 3.2.1. :

F tüm $f:D \rightarrow R$ fonksiyonların kümesi, G de D üzerinde tanımlanmış bir permütasyon grubu olsun. G 'nin F üzerinde oluşturduğu bağıntı şöyle tanımlanır :

$$f_1 R_E f_2 \Leftrightarrow \exists p \in G \exists f_1(d) = f_2(p(d)) , \forall d \in D , \forall f_1, f_2 \in F$$

Bu R_E bağıntısının bir eşdeğerlik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir (Bkz. Teorem 3.1.1.'in tanıtı). F 'in elemanları arasında tanımlanan R_E bağıntısı bir fonksiyonla da gösterilebilir.

$$f_1(d) = f_2(p(d)) , \forall d \in D \Leftrightarrow \exists \pi_p : F \rightarrow F \exists f_1 = \pi_p(f_2)$$

Teorem 3.2.1. :

$\pi_p : F \rightarrow F$ fonksiyonu bire-bir ve örtendir.

Tanıt :

$$\pi_p(f_1) = \pi_p(f_2) = f_3 \quad \text{olsun.}$$

$$f_1(d) = f_3(p(d)) \quad \text{ve} \quad f_2(d) = f_3(p(d)) , \quad \forall d \in D$$

$$f_1(d) = f_2(d) , \quad \forall d \in D$$

Sonlu bir küme üzerinde tanımlı bire-bir fonksiyon aynı zamanda örtendir. Yukarıda π_p fonksiyonunun bire-bir olduğu gösterildiğine göre teorem tanıtlanmıştır olur. Δ

Sonuç Teorem 3.2.2. :

D kümesi üzerinde tanımlanmış G permütasyon grubunun oluşturduğu π_p fonksiyonları da F kümesi üzerinde bir permütasyon grubu oluşturur.

G permütasyon grubunun oluşturduğu eşdeğerlik bağıntısı altında F fonksiyonlar kümesinin kaç eşdeğerlik sınıfına bölündüğü Burnside Teoremi kullanılarak bulunabilir.

Teorem 3.2.3. :

F fonksiyonlar kümesine ilişkin eşdeğerlik sınıflarının sayısı k olsun. O zaman

$$k = \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} \psi(\pi_p)$$

şeklinde verilir. Burada $\psi(\pi_p)$, π_p permütasyonu altında değişmezlik özelliğine sahip olan fonksiyonların sayısıdır.

Görüldüğü gibi Burnside Teoremi'nin uygulanması için F kümesindeki tüm fonksiyonların incelenmesi gerekmektedir. Şimdi verilecek olan Polya Teoremi ile hem sadece G permütasyon grubunun özellikleri kullanılarak sonuca gidilmekte, hem de eşdeğerlik sınıflarının sayısı ve

yapısı hakkında önemli bilgiler kazanılmaktadır.

Tanım 3.2.2. : Fonksiyonun Ağırlığı

F kümesindeki fonksiyonların tanım kümesi D, değer kümesi de R olsun. Her $r \in R$ için tanımlanan $w(r)$ 'ye değer kümesi elemanı r 'nin ağırlığı denir. $w(r)$ bir sayı veya sembol olabilir. $f: D \rightarrow R$ fonksiyonunun ağırlığı da

$$W(f) = \prod_{d \in D} w(f(d)) \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Bu tanıma göre bir Boole fonksiyonunun ağırlığı, o fonksiyonun Karnaugh diyagramındaki 1'lerin ve 0'ların sayısını verecektir. Bu ise söz konusu fonksiyonun yapısı hakkında oldukça değerli bir bilgidir.

Tanım 3.2.3. :

F fonksiyonlar kümesinin dökümü (inventory),

$$I = \sum_{f \in F} W(f) \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Böylece F kümesindeki fonksiyonların sayısı, bunların kaç tanesinin ağırlığının ne olduğu döküm ifadesi incelenerek bulunabilir.

Teorem 3.2.4. :

Aynı eşdeğerlik sınıfındaki fonksiyonların ağırlıkları da birbirine eşittir.

Tanıt :

$f_1: D \rightarrow R$ ve $f_2: D \rightarrow R$ olsun. G de D üzerinde tanımlanmış bir permütasyon grubu olsun. f_1 ve f_2 'nin aynı eşdeğerlik sınıfından oldukları kabul edilirse aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\begin{aligned} W(f_1) &= \prod_{d \in D} w(f_1(d)) = \prod_{d \in D} w(f_2(p(d))) \\ &= \prod_{d \in D} w(f_2(d)) = W(f_2) \end{aligned}$$

Çünkü çarpım terimi içinde yalnız çarpanların yerleri değişmektedir, bu ise ağırlık ifadesinin değerini etkilememektedir. Δ

Dolayısıyla F fonksiyonlar kümesinin dökümü elde edilebilirse kaç tane eşdeğerlik sınıfının bulunduğu, ve bu sınıflara giren fonksiyonların ağırlıklarının ne olduğu bulunabilir.

F kümesindeki fonksiyonlar ağırlıklarına göre sınıflandırılırlar. $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ için

$$F_i = \{f \in F \mid W(f) = W_i\}$$

kümelerinin F 'in bir bölmelemesini oluşturdukları açıktır.

Tanım 3.2.4. :

Her $p \in G$ permütasyonu bir $\pi_p^{(i)}: F_i \rightarrow F_i$ fonksiyonu oluşturur.

$$f_1(d) = f_2(p(d)) \text{ , } \forall d \in D \Leftrightarrow \exists \pi_p^{(i)} \ni f_1 = \pi_p^{(i)}(f_2) \text{ , } \forall f_1, f_2 \in F_i$$

Lemma 3.2.5. :

$\pi_p^{(i)}$ fonksiyonu F_i aynı ağırlıklı fonksiyonlar kümesinin bir permütasyonudur.

Tanıt için Teorem 3.2.1.'dekine benzer bir yol izlenebilir.

Lemma 3.2.6. :

$$\pi_{p_1 p_2}^{(i)} = \pi_{p_1}^{(i)} \pi_{p_2}^{(i)} \text{ , } \forall p_1, p_2 \in G$$

Aşağıda, Polya Teoremi'nin ifadesinde kullanılan bazı önemli kavramlar tanımlanacaktır.

Tanım 3.2.5. :

i) Bir permütasyona ilişkin çevrim, permütasyonun çevrimsel olarak birbirine atadığı elemanların oluşturduğu alt kümedir.

ii) Çevrim uzunluğu, bir çevrimde bulunan elemanların sayısıdır.

iii) Bir p permütasyonu b_1 tane 1 uzunluklu çevrim, b_2 tane 2 uzunluklu çevrim ...vs. bulundursun. $x_1, x_2, x_3, \dots$ formel değişkenler olmak üzere bu permütasyonun çevrim yapısı

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} \dots x_k^{b_k}$$

şeklinde gösterilir.

iv) G permütasyon grubuna ilişkin çevrim indeksi

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.7. : POLYA Teoremi

$F = \{f \mid f:D \rightarrow R\}$ ve G, D üzerinde tanımlanmış bir permütasyon grubu olsun. F fonksiyonlar kümesinin döküm ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$I = p_G \left[\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} (w(r))^2, \dots, \sum_{r \in R} (w(r))^k \right]$$

$$= \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} \left[\sum_{r \in R} w(r) \right]^{b_1} \left[\sum_{r \in R} (w(r))^2 \right]^{b_2} \dots \left[\sum_{r \in R} (w(r))^k \right]^{b_k} \quad (3.2.)$$

Tanıt :

Ağırlığı W_i olan fonksiyonlara ilişkin eşdeğerlik sınıflarının sayısı m_i olsun. 0 zaman Tanım 3.2.3.'e göre fonksiyonların dökümü

$$I = \sum_i m_i W_i \quad \text{olacaktır.}$$

Burnside Teoremi kullanılarak m_i hesaplanabilir.

$$m_i = \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} \psi(\pi_p^{(i)})$$

Dolayısıyla döküm ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$I = \sum_i m_i W_i = \frac{1}{\# G} \sum_{p \in G} \left[\sum_i \psi(\pi_p^{(i)}) W_i \right]$$

Burada $\sum_i \psi(\pi_p^{(i)}) W_i$ ifadesi, p permütasyonu altında değişmezlik özelliğine sahip olan fonksiyonların dökümüdür. Herhangi bir $f \in F$ fonksiyonunun p permütasyonu altında değişmezlik özelliğine sahip olması,

f fonksiyonunun, p 'nin aynı çevrimine ait olan tanım kümesi elemanlarına aynı değeri karşı düşürmesi demektir. Bu nedenle

$$\sum_i \psi(\pi_p^{(i)}) W_i = \left[\sum_{r \in R} w(r) \right]^{b_1} \left[\sum_{r \in R} (w(r))^2 \right]^{b_2} \dots$$

olacaktır. Δ

3.3. EŞDEĞERLİK SINIFLARININ BULUNMASI

Polya Teoremi kullanılarak Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıflarının sayısı ve yapısı kolaylıkla bulunabilir. Önce 2 değişkenli Boole fonksiyonları ele alınarak Polya Teoremi'nin kullanımı gösterilecektir.

Bilindiği gibi iki değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin tanım ve değer kümeleri

$$D = \{00,01,10,11\} \quad \text{ve} \quad R = \{0,1\} \quad \text{şeklindedir.}$$

İki değişkenli fonksiyonlar için R_E bağıntısı altında oluşturulan G permütasyon grubunun elemanları Tablo 2.1.'de verilmişti. Bu 8 uygulanabilir permütasyonun bulundurdıkları çevrimler ve çevrim uzunlukları da aşağıdaki gibidir.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
b_1	4	0	0	0	2	0	0	2
b_2	0	2	2	2	1	0	0	1
b_3	0	0	0	0	0	0	0	0
b_4	0	0	0	0	0	1	1	0

Değer uzayının elemanlarına ilişkin ağırlıklar $w(0)=0$ ve $w(1)=1$ olarak alınabilir. Buradan çevrim indeksi ifadesinin formel değişkenlerine karşı düşen terimler aşağıdaki gibi bulunurlar.

$$\begin{aligned} \sum_{r \in R} w(r) &= (0 + 1) \\ \sum_{r \in R} (w(r))^2 &= (0^2 + 1^2) \\ \sum_{r \in R} (w(r))^3 &= (0^3 + 1^3) \\ \sum_{r \in R} (w(r))^4 &= (0^4 + 1^4) \end{aligned}$$

Bu terimler (3.2.) ifadesinde yerine koyularak 2 değişkenli Boole fonksiyonlarının dökümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{8} \left[(0+1)^4 + (0^2+1^2)^2 + (0^2+1^2)^2 + (0^2+1^2)^2 + (0+1)^2(0^2+1^2) + \right. \\
&\quad \left. (0^4+1^4) + (0^4+1^4) + (0+1)^2(0^2+1^2) \right] \\
&= \frac{1}{8} \left[8(0^4) + 8(1^4) + 8(0^3 1) + 16(0^2 1^2) + 8(0 1^3) \right] \\
&= 0^4 + 1^4 + 0^3 1 + 0 1^3 + 2 0^2 1^2
\end{aligned}$$

Görüldüğü gibi 2 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin 6 eşdeğerlik sınıfı vardır. Bunlardan ikisinin ağırlıklarının eşit olduğu $(0^2 1^2)$ da döküm ifadesinden görülmektedir.

3 değişkenli Boole fonksiyonları için G permütasyon grubunun 48 uygulanabilir permütasyon içerdiği bulunabilir. Bu durum için çevrim indeksi [11]

$$P_G = \frac{1}{48} (x_1^8 + 13 x_2^4 + 8 x_1^2 x_3^2 + 8 x_2 x_6 + 6 x_1^4 x_2^2 + 12 x_4^2)$$

olduğundan, 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin eşdeğerlik sınıflarını veren döküm ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$I = 0^8 + 1^8 + 0^7 1 + 0 1^7 + 3 0^6 1^2 + 3 0^2 1^6 + 3 0^5 1^3 + 3 0^3 1^5 + 6 0^4 1^4$$

Yukarıdaki döküm ifadesinden 22 farklı eşdeğerlik sınıfı olduğu görülmektedir. Tablo 2.2. ile verilen 3 değişkenli fonksiyonlar listesi incelendiğinde her bir eşdeğerlik sınıfına giren fonksiyonlar ve sayıları da bulunabilir.

Tablo 2.2.'den görülen diğer bir özellik, bazı eşdeğerlik sınıflarına giren fonksiyonların tümleyenlerinin, başka bir eşdeğerlik sınıfını oluşturmasıdır. Örneğin 1. eşdeğerlik sınıfındaki fonksiyonların tümleyenleri 2. eşdeğerlik sınıfını oluşturmaktadırlar. Diğer bir deyişle 1. eşdeğerlik sınıfındaki fonksiyonları gerçekleyen bir devre, çıkışının tümlenmesi sonucu 2. eşdeğerlik sınıfındaki fonksiyonları da gerçekleyecektir. Dolayısıyla, örneğin 1. ve 2. eşdeğerlik sınıflarındaki fonksiyonların "çıkış tümlemesi altında eşdeğer" oldukları söylenebilir.

"Çıkış tümlemesi" eşdeğerliği kullanıldığında eşdeğerlik sınıflarının sayısının 14'e düştüğü görülmektedir. Böylece tasarım önemli ölçüde kolaylaşmaktadır. Buna karşılık tasarlanacak devrenin asıl çıkış ve tümlenmiş çıkış olmak üzere iki çıkışı olması gerekmektedir.

IV. BÖLÜM

ULD'LERİN TASARIMI

Bundan önceki bölümlerde ULD'lerin tasarımına temel oluşturacak bazı kavramlar incelenmişti. Bu bölümde ise, Tanım 1.1.1. ile verilen ve "universal fonksiyon" adı ile de anılan m değişkenli $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ fonksiyonunun bulunmasına ilişkin bazı yaklaşımlar tanıtılacaktır. Bugüne kadar, ULD'nin gerçeklediği fonksiyon olan g 'nin elde edilmesine ilişkin çok az sayıda yöntem geliştirilmiştir. Genellikle izlenen yol, uygun bulunan m değişkenli bir Boole fonksiyonuna farklı ϕ değişken atamaları uygulanarak tüm n değişkenli Boole fonksiyonlarının bu atamalarla elde edilip edilemeyeceğinin araştırılması şeklindedir. Bu yöntemle $n=2$ için tüm universal fonksiyonları bulmak mümkündür. Ancak $n \geq 3$ için incelenmesi gereken fonksiyon sayısı çok arttığından yöntemin bilgisayarla uygulanması bile olanaksız hale gelmektedir.

İkinci bölümde belirtildiği gibi, n değişkenli Boole fonksiyonlarının eşdeğerlik sınıflarına ayrılması ile ULD tasarımı önemli ölçüde basitleştirilebilir. Bu yaklaşıma göre $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ fonksiyonuna uygulanacak değişken atamalarıyla her bir eşdeğerlik sınıfından bir temsilci fonksiyonun elde edildiğini göstermek yeterli olmaktadır. Çünkü eşdeğerliğin tanımına göre aynı sınıfa dahil olan diğer tüm fonksiyonlar, sadece giriş değişkenlerinin çaprazlanması ve/veya tümleyeninin alınmasıyla elde edilebilmektedir. Eşdeğerlik sınıflarının

sayısı, fonksiyonların sayısından çok daha az olduğundan bu yolla tasarımın kolaylaşabileceği hemen görülebilir.

4.1. MİNERİMLERE GÖRE SEÇME YÖNTEMİ

Aşağıda incelenecek olan yaklaşım, çoğullayıcıya benzer bir yapıyı esas almaktadır. Bu yaklaşımda devrenin giriş uçlarından hangilerinin değişken girişi ve hangilerinin kontrol girişi olduğunun baştan belirlendiği varsayılmaktadır. Böylece Boole fonksiyonlarına ilişkin belli bir eşdeğerlik sınıfının bir temsilcisi, kontrol girişlerine uygulanacak bir değişken ataması ile elde edilebilir. Aynı eşdeğerlik sınıfındaki diğer fonksiyonları elde etmek için ise, ikinci bölümde açıklandığı gibi, değişken girişlerinin çaprazlanması ve/veya tümleyeninin alınması gerekecektir. Devrenin giriş uçlarının, işlevleri bakımından bu şekilde sınıflandırılabilmesi, devrenin kullanımını basitleştiren bir etken olmaktadır.

n değişkenli Boole fonksiyonları kümesi F , bu kümenin eşdeğerlik sınıfları da $F_1, F_2, \dots, F_k$ olsun. Her bir eşdeğerlik sınıfından $f_1 \in F$, $f_2 \in F, \dots$ şeklinde birer temsilci fonksiyon seçilmiş olsun. Bu temsilci fonksiyonların tümünü içeren $(n+k)$ değişkenli bir Boole fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir.

$$f_u = a_1 f_1(x_1, \dots, x_n) + a_2 f_2(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_k f_k(x_1, \dots, x_n) \quad (4.1.)$$

Burada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $a_i \in \{0, 1\}$ ve $a_i = 1 \Rightarrow a_j = 0, \forall j \neq i$ olmaktadır. Her bir farklı atama için $a_1, a_2, \dots, a_k$ değişkenlerinden yalnızca biri "1" değerini alacağından, a_i değişkenini "1" yapan atama için f_u fonksiyonu f_i fonksiyonuna eşit olacaktır. Dolayısıyla f_u , Tanım 1.1.1.'e uygun bir universal fonksiyondur. Ancak değişken sayısının oldukça fazla olduğu görülmektedir. $f_1, f_2, \dots, f_k$ temsilci fonksiyonlarının uygun seçimi ile değişken sayısının azaltılabileceği aşağıda gösterilecektir.

$f_1(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonunun minterimleri $q_{11}, q_{12}, \dots, f_2(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonunun minterimleri $q_{21}, q_{22}, \dots$ vs. olsun. Böylece (4.1.) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f_u = a_1(q_{11}+q_{12}+\dots) + a_2(q_{21}+q_{22}+\dots) + \dots + a_k(q_{k1}+q_{k2}+\dots) \quad (4.2.)$$

Temsilci fonksiyonların uygun seçimi ile tüm fonksiyonlarda ortak bir minterim bulunması sağlanabilir. Örneğin $q=q_{11}=q_{21}=\dots=q_{k1}$ minterimi bütün temsilci fonksiyonlarda ortak olsun. Bu minterim parantez dışına çıkartılırsa (4.2.) ifadesi şu şekli alacaktır.

$$f_u = q(a_1+a_2+\dots+a_k) + a_1(q_{12}+q_{13}+\dots) + \dots + a_k(q_{k2}+q_{k3}+\dots) \quad (4.3.)$$

$(a_1+a_2+\dots+a_k)$ terimi tanım gereği her zaman "1" değerini alacağından ifade basitleşecektir.

$$f_u = q + a_1(q_{12}+q_{13}+\dots) + \dots + a_k(q_{k2}+q_{k3}+\dots) \quad (4.4.)$$

Tüm Boole fonksiyonları göz önüne alındığına göre ortak minterim sayısı birden fazla olamayacaktır.

Bu aşamaya kadar değişken sayısında bir azalma olmamıştır, f_u fonksiyonunun değişkenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve k tane de kontrol değişkeni olmak üzere toplam $n+k$ tanedir. Ancak ortak minterim sayesinde, göz önüne alınması gereken minterimlerin sayısı azaltılmıştır.

(4.4.) ifadesinde görülen minterimlerden bazılarının birbirine eşit olacağı söylenebilir. Bazı minterimler ise birbirinden sadece, bir değişkenin kendini ya da tümleyenini bulundurmaları farkıyla ayrılmaktadırlar. (Örneğin $x_1x_2'x_3$ ile $x_1x_2'x_3'$ gibi). Dolayısıyla söz konusu minterimlerde $(n-1)$ değişkenden oluşan bir ortak terim bulunacağı görülmektedir. Bu durum, n değişkenli Karnaugh diyagramında bu minterimlerin 2. mertebeden bir alt küp oluşturmalarına karşı düşer.

Örneğin (4.4.) ifadesinde $q_{12}=x_1x_2'x_3$, $q_{22}=x_1x_2'x_3'$, ve $q_{34}=x_1x_2'x_3$ olsun. Bu minterimlerin tümünde ortak olan x_1x_2' terimi parantez dışına alınırsa

$$f_u = \dots + x_1x_2'(a_1x_3 + a_2x_3' + a_3x_3) + \dots$$

elde edilir. Yukarıdaki parantez, a_1, a_2, a_3 kontrol değişkenlerine yapılacak atamalara bağlı olarak $0, 1, x_3$ veya x_3' değerini almaktadır. Şimdi bu parantezin yerine yeni bir kontrol değişkeni tanımlanacaktır.

$$f_u = \dots + x_1 x_2' y + \dots \quad y \in \{0, 1, x_3, x_3'\}$$

$a_1, a_2, \dots, a_k$ değişkenlerinden farklı olarak, y değişkeni 0 ve 1'in yanı sıra x_3 ve x_3' değerlerini de alabilmektedir. Bunun fiziksel anlamı, örneğin x_3 değişkenine karşı düşen girişe gelen işaretin aynı anda y değişkenine karşı düşen girişe de gelmesidir. Bu ise Tanım 1.1.1.'e uygun bir değişken ataması olmaktadır. Böylece a_1, a_2 ve a_3 kontrol değişkenlerinin yerine y değişkeni getirilerek değişken sayısı 2 azaltılmıştır.

Görüldüğü gibi, (4.4.) ifadesindeki minterimler 2. mertebeden alt küpler oluşturacak şekilde gruplanabilirlerse f_u fonksiyonunun değişkenlerinin sayısı önemli ölçüde azalmaktadır. Bir ULD-n için kontrol değişkenlerinin sayısının bu yöntemle en az kaç tane olabileceği aşağıda hesaplanmıştır.

Temsilci fonksiyonlar uygun seçilerek bütün fonksiyonlarda ortak bir minterim bulunması sağlanabilir. Ayrıca ele alınan fonksiyonlardan biri, $2^n - 1$ tane minterim bulundurmak zorundadır. Ortak minterim hariç olmak üzere, bu fonksiyonun minterimlerinin tümü, 2. mertebeden alt küplere gireceklerdir. Alt küplerin kesişmedikleri düşünülürse, alt küp sayısının en az

$$k = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{(n-1)} - 1$$

olacağı görülür. Yukarıda açıklandığı gibi, her bir alt küp bir kontrol değişkenine karşı düştüğünden bu aynı zamanda kontrol değişkenlerinin de minimum sayısıdır.

Devrenin toplam giriş sayısı göz önüne alındığında, bu yöntemle tasarlanacak bir ULD-n ile $(n-1)$ değişkenli bir çoğullayıcı devresinin girişsayılarının aynı olacağı görülmektedir. Bilindiği gibi $(n-1)$ değişkenli çoğullayıcı devresi de n değişkenli Boole fonksiyonlarının gerçekleşmesinde kullanılabilmektedir. Ancak değişken ve kontrol girişlerinin birbirinden ayrılmış olması bakımından, önerilen yöntemle tasarlanacak bir ULD'nin daha kullanışlı olacağı söylenebilir.

Örnek :

2 değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçekleyecek bir ULD-2, minterimlere göre seçme yöntemiyle tasarlanacaktır. Tasarım için gerekli olduğundan, 2 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin 6 eşdeğerlik sınıfı ve bu sınıflara giren fonksiyonlar aşağıda verilmiştir.

1. Eşdeğerlik sınıfı : $f_1 = 0$
2. Eşdeğerlik sınıfı : $f_2 = 1$
3. Eşdeğerlik sınıfı : $f_3 = x_1$
 $f_4 = x_1'$
 $f_5 = x_2$
 $f_6 = x_2'$
4. Eşdeğerlik sınıfı : $f_7 = x_1 x_2$
 $f_8 = x_1 x_2'$
 $f_9 = x_1' x_2$
 $f_{10} = x_1' x_2'$
5. Eşdeğerlik sınıfı : $f_{11} = x_1' x_2' + x_1' x_2 + x_1 x_2$
 $f_{12} = x_1' x_2' + x_1 x_2' + x_1 x_2'$
 $f_{13} = x_1' x_2' + x_1' x_2 + x_1 x_2'$
 $f_{14} = x_1' x_2' + x_1 x_2' + x_1 x_2'$
6. Eşdeğerlik sınıfı : $f_{15} = x_1 x_2 + x_1' x_2'$
 $f_{16} = x_1 x_2' + x_1' x_2$

Görüldüğü gibi 3. eşdeğerlik sınıfına giren fonksiyonlar, tek bir değişkenin fonksiyonu oldukları için, 4. ve 5. eşdeğerlik sınıflarındaki fonksiyonlar tarafından içerilmektedirler. Bu nedenle tasarımda bu fonksiyonların göz önüne alınmasına gerek yoktur[12]. Benzer şekilde sabit fonksiyonlar f_1 ve f_2 de göz önüne alınmayacaktır. Diğer eşdeğerlik sınıflarından, yukarıda açıklanan tasarım kriterlerine göre seçilen temsilci fonksiyonlar aşağıda verilmişlerdir.

$$\begin{aligned} f_7 &= x_1 x_2 \\ f_{14} &= x_1' x_2' + x_1 x_2' + x_1 x_2' \\ f_{15} &= x_1 x_2 + x_1' x_2' \end{aligned}$$

Bu temsilci fonksiyonlar (4.1.) ifadesinde yerine koyularak

$$f_u = a_1(x_1x_2) + a_2(x_1x_2 + x_1x_2' + x_1'x_2') + a_3(x_1x_2 + x_1'x_2')$$

elde edilir. Görüldüğü gibi her üç fonksiyonda da (x_1x_2) minterimi ortaktır. Bu minterim paranteze alınırsa f_u fonksiyonu şu şekli alır.

$$f_u = x_1x_2(a_1 + a_2 + a_3) + a_2(x_1x_2' + x_1'x_2') + a_3(x_1'x_2')$$

Bilindiği gibi $(a_1 + a_2 + a_3)$ parantezi her zaman 1'e eşittir. Ayrıca diğer minterimler incelendiğinde hepsinin ikinci mertebeden bir alt küpe girdikleri görülmektedir. Bütün minterimlerde ortak olan x_2' değişkeni paranteze alınarak f_u ifadesi aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$f_u = x_1x_2 + x_2'(a_2x_1 + a_2x_1' + a_3x_1')$$

Yukarıdaki parantezin yerine de y_3 değişkeni koyularak değişken sayısı 3'e indirilir. x_1 ve x_2 değişkenlerinin, y_1 ve y_2 ile değiştirilmesi sonucu elde edilen universal fonksiyon, aşağıda verilmiştir.

$$f_u = y_1y_2 + y_2'y_3 \quad y_3 \in \{0,1,x_1,x_1'\}$$

4.2. KARNAUGH DİYAGRAMINA YERLEŞTİRME YÖNTEMİ

Minterimlere göre seçme yöntemiyle tasarlanan ULD'lerin giriş sayısının, $(n-1)$ değişkenli bir çoğullayıcı devresinin giriş sayısına eşit olduğu bundan önceki kısımda gösterilmişti. Oysa daha az sayıda giriş ucu kullanılarak aynı işi yapabilen ULD'lerin tasarımı mümkün görülmektedir [7],[8]. Bunun için, devrenin değişken ve kontrol girişlerinin birbirinden ayrı kabul edilmesi yerine, bütün girişlerin değişken veya kontrol girişi olarak kullanılabileceği varsayılacaktır. Böylece, aynı sayıda giriş ucu için yapılabilecek farklı değişken atamalarının sayısı da arttırılabilecektir.

m değişkenli bir Boole fonksiyonuna uygulanacak bir değişken ataması, söz konusu fonksiyonun Karnaugh diyagramında belli alt küplerin seçilmesi demektir. Her bir atamanın hangi alt küplerin seçimine karşı düştüğü belirlenecek olursa, m değişkenli bir Karnaugh diyagramından yararlanılarak tasarım kolaylaştırılabilir. Bilindiği gibi iki

tane $(m-1)$ değişkenli Boole fonksiyonu birbirinden bağımsız olarak seçilerek m değişkenli bir Boole fonksiyonu aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})x_m + f_2(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})x_m'$$

Dolayısıyla f fonksiyonu verildiğinde, $1 \rightarrow x_m$ ataması ile f_1 fonksiyonu, $0 \rightarrow x_m$ ataması ile de f_2 fonksiyonu elde edilecektir. Bu ise, f fonksiyonunun Karnaugh diyagramında birbiriyle keşişmeyen iki alt küpün seçilmesine karşı düşmektedir. Bu alt küplere "yerleştirilecek" f_1 ve f_2 fonksiyonlarının belirlenmesiyle, f fonksiyonu tek olarak belli olmaktadır. Böylece, yukarıda verilen değişken atamalarının dışında başka atamalar yapıldığında elde edilecek olan $(m-1)$ değişkenli fonksiyonlar da belirlenmiş olmaktadır. Her bir değişken atamasıyla farklı bir eşdeğerlik grubunun temsilci fonksiyonunun gerçeklenmesi istendiğinde, fonksiyonların birbirlerine bu yönden bağımlı oldukları göz önüne alınmalıdır.

Aşağıda $m = 4$ için yöntemin uygulanması açıklanacaktır. Önce 4 değişkenli Karnaugh diyagramındaki gözler şu şekilde numaralanmıştır.

		$y_1 y_2$			
		00	01	11	10
$y_3 y_4$	00	0	4	12	8
	01	1	5	13	9
	11	3	7	15	11
	10	2	6	14	10

şekil 4.1. Karnaugh diyagramındaki gözlerin numaralanması

4 değişkenli $g(y_1, y_2, y_3, y_4)$ fonksiyonundan, 3 değişkenli $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun elde edilmesi için uygulanabilecek değişken atamaları ve bu atamalarla seçilen gözler aşağıda verilmiştir.

Değişken ataması	Elde edilen 3 değişkenli fonksiyonun minterimlerine karşı düşen gözler							
	000	001	010	011	100	101	110	111
0 $\rightarrow y_4$	0	4	8	12	2	6	10	14
1 $\rightarrow y_4$	1	5	9	13	3	7	11	15
$x_1 \rightarrow y_4$	0	2	4	6	9	11	13	15
$x_1' \rightarrow y_4$	1	3	5	7	8	10	12	14
$x_2 \rightarrow y_4$	0	2	8	10	5	7	13	15
$x_2' \rightarrow y_4$	4	6	12	14	1	3	9	11
$x_3 \rightarrow y_4$	0	4	8	12	3	7	11	15
$x_3' \rightarrow y_4$	1	5	9	13	2	6	10	14
0 $\rightarrow y_3$	0	4	8	12	1	5	9	13
1 $\rightarrow y_3$	2	6	10	14	3	7	11	15
$x_1 \rightarrow y_3$	0	1	4	5	10	11	14	15
$x_1' \rightarrow y_3$	2	3	6	7	8	9	12	13
$x_2 \rightarrow y_3$	0	1	8	9	6	7	14	15
$x_2' \rightarrow y_3$	4	5	12	13	2	3	10	11
0 $\rightarrow y_2$	0	1	2	3	8	9	10	11
1 $\rightarrow y_2$	4	5	6	7	12	13	14	15
$x_1 \rightarrow y_2$	0	1	2	3	12	13	14	15
$x_1' \rightarrow y_2$	4	5	6	7	8	9	10	11
0 $\rightarrow y_1$	0	1	2	3	4	5	6	7
1 $\rightarrow y_1$	8	9	10	11	12	13	14	15

Tablo 4.1. Değişken atamaları

Örnek :

		$y_1 y_2$			
		00	01	11	10
$y_3 y_4$	00				
	01				
	11				
	10				

		$y_1 y_2$			
		00	01	11	10
$y_3 y_4$	00				
	01				
	11				
	10				

Şekil 4.2. İki farklı değişken atamasıyla seçilen alt küpler

Karnaugh diyagramına yerleştirme yöntemi kullanılarak ULD tasarımı, farklı değişken atamaları ile her bir eşdeğerlik sınıfının bir temsilcisi elde edilecek şekilde söz konusu alt küplerin belirlenmesini gerektirmektedir. Bunun için izlenmesi önerilen yol aşağıda açıklanmıştır.

- a) Önce 8 gözden oluşan bir alt küp seçilerek ilk temsilci fonksiyon buraya yerleştirilir.
- b) Daha sonra 4 gözden oluşan yeni bir alt küp seçilir ve birinci adımda belirlenen 8 gözden 4 tanesi ile birlikte ikinci temsilci fonksiyon, mümkünse diğer 4 tanesi ile de üçüncü temsilci fonksiyon gerçekleştirilecek şekilde bu alt küpe de 0 ve 1'ler yerleştirilir.
- c) 2 gözden oluşan bir alt küp daha seçilerek, birinci ve ikinci adımlarda yerleştirilen 12 gözden 6 tanesi ile birlikte bir temsilci fonksiyon, diğer 6 tanesi ile de bir başka temsilci fonksiyon vs... gerçekleştirilecek şekilde bu gözlerle de 0 ve 1'ler yerleştirilir.
- d) Son kalan 2 göz de benzer şekilde belirlenerek tüm eşdeğerlik sınıflarına ilişkin en az bir temsilci fonksiyonun yukarıda verilen atamalardan biri ile gerçekleştirilmesi sağlanır.

Tasarımda yardımcı olması amacıyla, 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin 256 adet Karnaugh diyagramı, eşdeğerlik sınıflarına ayrılarak ekte verilmiştir. Bu 3 değişkenli fonksiyonlardan sabit 0 ve sabit 1 olanlarla, diğerleri tarafından içerilen fonksiyonlar ayrılacak olurlarsa, geride 16 eşdeğerlik sınıfı kalmaktadır. Bir ULD-3 tarafından gerçekleştirilmeleri gerekli olan bu eşdeğerlik sınıfları 1., 2., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 12., 13., 14., 15., 16., 17. ve 20. sınıflardır. Aşağıda bir ULD-3'ün, 4 girişli bir devreyle gerçekleştirilmesinin mümkün olup olmadığı araştırılacaktır.

Tablo 4.1.'de görüldüğü gibi 4 girişli bir devre üzerinde uygulanabilecek olan değişken atamalarının sayısı 20'dir. Tanım gereği bu atamalardan biri ile 1. eşdeğerlik sınıfının bir temsilcisi, bir diğeri ile de 20. eşdeğerlik sınıfının bir temsilcisi vs... elde edilmelidir. Buna göre 4 değişkenli Karnaugh diyagramında 8 gözden oluşan herhangi bir alt küp, 1. eşdeğerlik sınıfının bir temsilcisinin

yerleştirilmesine ayrılacaktır (Şekil 4.3.a.). 20. eşdeğerlik sınıfına ilişkin iki fonksiyon incelendiğinde bunların 4 minterim bulundurduğu ve hiç bir minterimin bir diğeriyle komşuluk ilişkisine girmediği görülmektedir. Dolayısıyla 1. eşdeğerlik sınıfına ayrılan 8 gözden bazılarının, 20. eşdeğerlik sınıfının temsilcisinin gerçekleşmesi için kullanılması mümkün değildir. Böylece 20. eşdeğerlik sınıfının temsilcisi de boş kalan diğer 8'lik alt küpe yerleştirilmek zorundadır (Şekil 4.3.b.). Bu durumda 4 değişkenli Karnaugh diyagramında 5 tane "1" bulunacaktır. Sonuç olarak, 6 ve 7 minterimli eşdeğerlik sınıflarının bu yolla elde edilmesi imkansız olduğundan 4 girişli bir ULD-3 gerçekleştirilememektedir.

		$Y_1 Y_2$			
		00	01	11	10
$Y_3 Y_4$	00	0	0	1	0
	01	0	0	0	0
	11				
	10				

Şekil 4.3.a.

		$Y_1 Y_2$			
		00	01	11	10
$Y_3 Y_4$	00	0	0	1	0
	01	0	0	0	0
	11	1	0	1	0
	10	0	1	0	1

Şekil 4.3.b.

ULD'nin çıkışının tümleyeninin alınması durumunda eşdeğerlik sınıflarının sayısının azaltılabileceği bilinmektedir. Bu özellik kullanılarak 4 girişli bir ULD-3 tasarlanması düşünülebilir. Ancak burada da 6 ve 7 minterimli fonksiyonlara gerek olmamasına rağmen, minterimleri arasında birden fazla komşuluk ilişkisi olan bazı fonksiyonların (örneğin 9. eşdeğerlik sınıfı) gerçekleşmesi gerekmektedir. Bu ise Şekil 4.3.b.'den görüleceği gibi mümkün değildir. Böylece, çıkış tümleme özelliği olsa bile 4 girişli bir ULD-3'ün gerçekleştirilemez olduğu gösterilmiştir.

Karnaugh diyagramına yerleştirme yöntemiyle tasarlanan bazı 5 girişli ULD-3'ler V. Bölüm'de verilmişlerdir.

4.3. SEMİ-ÜNİVERSAL LOJİK DEVRELER

Bundan önceki kısımda gösterildiği gibi, bütün eşdeğerlik sınıflarının temsilci fonksiyonları elde edilmek istendiğinde 4 girişli bir ULD-3'ün tasarımına olanak bulunmamaktadır. Ancak bazı fonksiyonların gerçekleşmesinden vazgeçilecek olursa bunun yapılabilir olduğu görülmektedir. Bu durumda söz konusu devre 256 Boole fonksiyonunun önemli bir kısmını gerçekleyebilecek, sadece bazı fonksiyonların gerçekleşmesinde ek kapı devrelerine gerek duyulacaktır. Giriş sayısı az olduğu için kullanım bakımından oldukça değerli olan bu tür devrelere "semi-üniversal lojik devre" adı verilmiştir.

Bir semi -üniversal lojik devrenin gerçekleyemediği eşdeğerlik sınıflarındaki fonksiyon sayısının mümkün olduğunca az olması gerektiği açıktır. Örneğin 16.,17. ve 20. eşdeğerlik sınıflarındaki fonksiyonların sayısı daha az olduğundan, bu sınıflardan birini hatta ikisini gerçekleyemeyen bir semi-üniversal lojik devre bile oldukça geniş bir kullanım alanı bulabilir.

V. Bölüm'de bu tür devrelere de iki örnek verilmiştir.

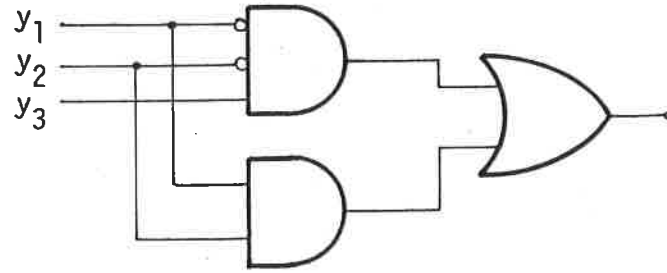
V. BÖLÜM

ELDE EDİLEN ULD'LER

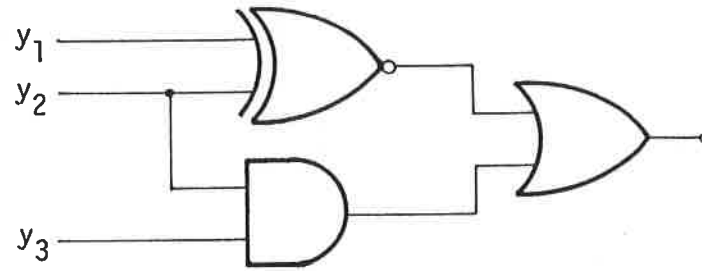
Bu bölümde, minterimlere göre seçme yöntemi ve Karnaugh diyagramına yerleştirme yöntemleri kullanılarak tasarlanan bazı ULD-2 ve ULD-3'ler tanıtılacaktır. Geliştirilen devreler, giriş ucu sayısı ve devre karmaşıklığı bakımından mevcut ULD örnekleriyle benzer özelliklere sahiptirler. Özellikle literatürde çok az örneği bulunan 5 girişli ULD-3'ler için 4 ayrı devre önerilmektedir. Ayrıca bundan önce ele alınmamış bir ULD-2 sınıfı bulunarak bu çalışmada incelenmiştir.

Önce, Tablo 2.2.'de verilen 3 değişkenli Boole fonksiyonları listesi incelenerek elde edilen ULD-2'ler tanıtılacaktır. Chen ve Hurst, çıkış tümlemesi yapılmaması durumunda 3 girişli ULD-2 sınıflarının sayısını 3 olarak vermektedir [5]. Oysa Karnaugh diyagramına yerleştirme yöntemi kullanılarak yapılan incelemede 11., 12., 15. ve 16. eşdeğerlik sınıflarına ilişkin fonksiyonların ULD-2 özelliklerini sağladıkları görülmektedir.

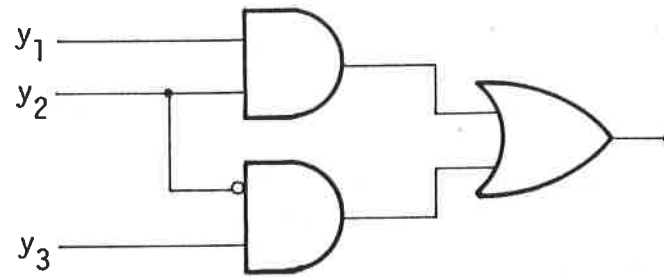
Söz konusu eşdeğerlik sınıflarından bir temsilci fonksiyonu gerçekleyen kapı devreleri aşağıda verilmişlerdir. Bilindiği gibi, gerekli değişken atamaları yapılarak bu devreler yardımıyla tüm 2 değişkenli Boole fonksiyonlarının elde edilmesi mümkündür.



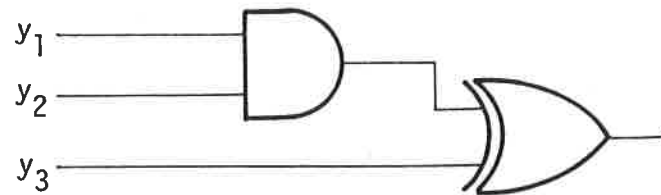
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 5.1. 3 girişli ULD-2'lerin devre yapıları

Şekil 5.1.b. ile verilen ve 3 değişkenli Boole fonksiyonlarına ilişkin 12. eşdeğerlik sınıfının bir temsilci fonksiyonunu gerçekleyen devre de, verilen diğer devreler gibi bir ULD-2'dir. Ancak Chen ve Hurst, 3 girişli ULD-2 sınıflarının sayısını 3 olarak vermekte ve sözü geçen devrenin bir ULD-2 olduğunu belirtmemektedirler [5],[6]. Bu devrenin, uygun değişken atamaları ile 2 değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçeklediği Tablo 5.1.'de gösterilmiştir.

Değişken Ataması			Gerçeklenen Fonksiyon
y_1	y_2	y_3	
0	0	1	0
1	1	1	1
x_1	0	1	x_1
x_1'	0	1	x_1'
1	x_2	0	x_2
1	x_2'	0	x_2'
x_1	x_2	x_1'	$x_1 x_2$
x_1	x_2'	x_1'	$x_1 x_2'$
x_1'	x_2	x_1	$x_1' x_2$
x_1'	x_2'	x_1	$x_1' x_2'$
x_1	x_2	x_2'	$x_1 + x_2'$
x_1	x_2'	x_2'	$x_1 + x_2'$
x_1'	x_2	x_2'	$x_1' + x_2'$
x_1'	x_2'	x_2'	$x_1' + x_2'$
x_1	0	x_2	$x_1 x_2 + x_1' x_2'$
x_1	0	x_2'	$x_1 x_2' + x_1' x_2$

Tablo 5.1. Önerilen ULD-2'ye uygulanacak değişken atamaları

Böylece 3 girişli ULD-2 sınıflarının sayısının 4 olduğu görülmektedir. Çıkışın tümleyeninin alınmadığı varsayımı altında belirlenen bu 4 eşdeğerlik sınıfının temsilci fonksiyonları da aşağıdaki gibidir.

$$f_a = y_1 y_2 + y_1' y_2' y_3$$

$$f_b = y_1 y_2 + y_1' y_3' + y_1 y_3$$

$$f_c = y_1 y_2 + y_1' y_3$$

$$f_d = y_1 y_2 + y_1 y_3' + y_1' y_2' y_3$$

Daha önce de belirtildiği gibi, literatürde 5 girişli ULD-3'ler konusunda çok az sayıda örnek vardır. Aşağıda, Karnaugh diyagramına yerleştirme yöntemi ile geliştirilen bazı ULD-3 fonksiyonları ve bunlara ilişkin devreler verilecektir.

$$f_A = y_1 y_3 y_4 y_5' + y_2 y_3' y_4 y_5 + y_1 y_2' y_3' y_5' + y_1 y_3' y_4' y_5' + y_1 y_2' y_3 y_5 + y_1' y_3 y_4' y_5 + y_1' y_2' y_3 y_5 + y_1' y_2' y_4'$$

$$f_B = y_1 y_2' y_4 y_5' + y_1 y_3 y_4 y_5' + y_1 y_2' y_3 y_5 + y_2 y_3' y_4 y_5 + y_1' y_2' y_3 y_5 + y_1' y_3 y_4' y_5 + y_3' y_4' y_5' + y_1' y_2' y_4'$$

$$f_C = y_1 y_3' y_4' y_5' + y_1 y_2' y_4 y_5' + y_1 y_3 y_4 y_5' + y_1 y_2' y_3 y_5 + y_2 y_3' y_4 y_5 + y_1' y_2' y_3 y_5 + y_1' y_3 y_4' + y_1' y_2' y_4'$$

Yukarıda verilen fonksiyonlara ilişkin 5 girişli devreler, çıkışın tümleyeninin alınmasına gerek kalmaksızın 3 değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçeklemektedirler. Aşağıda verilecek olan fonksiyon ise çıkış tümlemesi yapıldığı varsayımı altında bir ULD-3 fonksiyonudur.

$$f_D = y_1 y_2 y_3 y_4' y_5' + y_1 y_3 y_4 y_5 + y_1 y_2' y_3' y_4' y_5 + y_2 y_3 y_5 + y_1' y_2' y_3' + y_2 y_3' y_4$$

Görüldüğü gibi bu durumda devre karmaşıklığı bir miktar azalmaktadır.

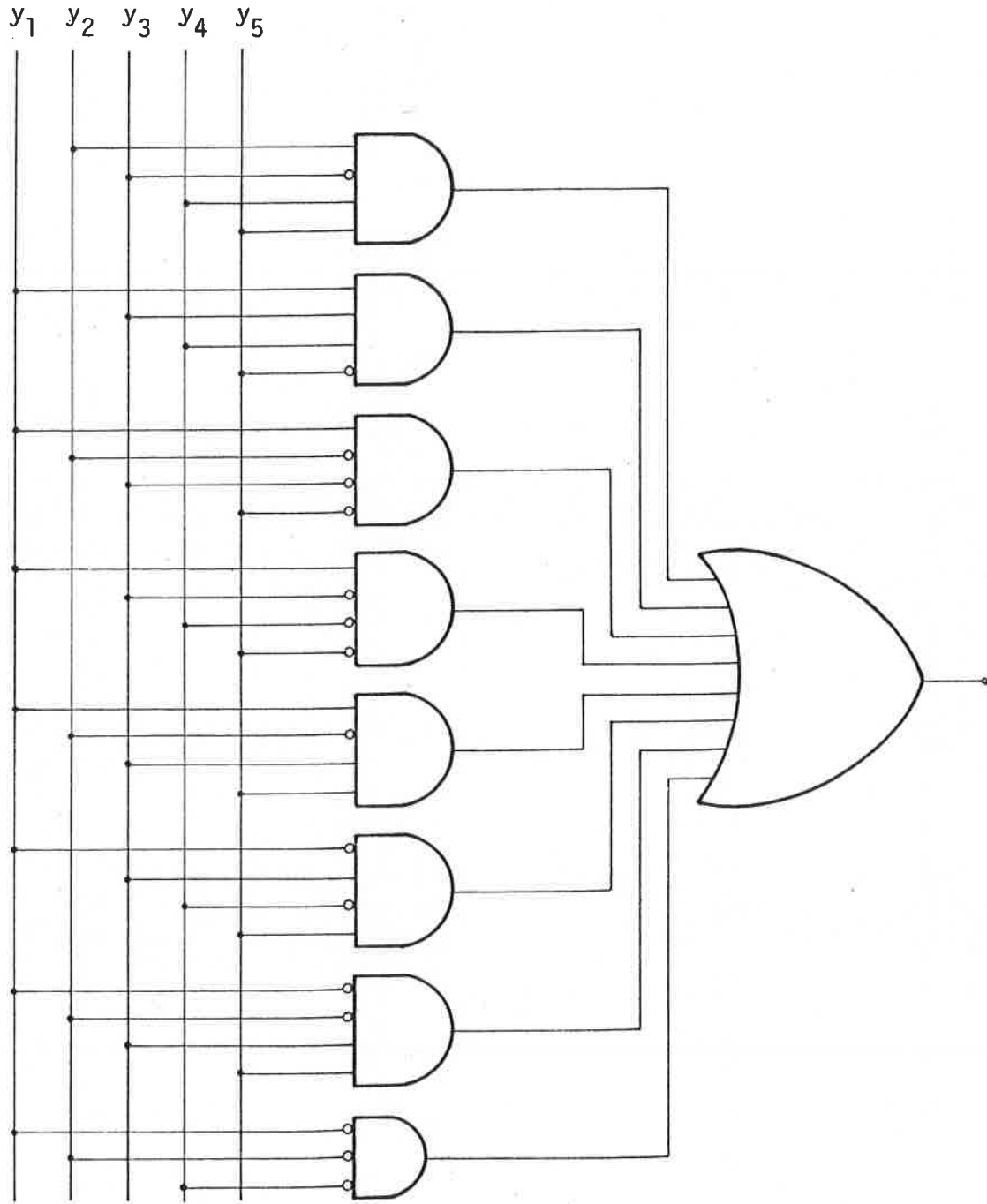
Üç değişkenli Boole fonksiyonlarının her bir eşdeğerlik sınıfından bir temsilci fonksiyon elde edilmesi için f_A universal fonksiyonuna uygulanması gereken değişken atamaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Değişken Ataması					Gerçeklenen Fonksiyonun Ait Olduğu Eşdeğerlik Sınıfı
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
x_1	1	x_2	x_3	x_1	1
x_1	x_2	0	x_3	x_1	5
x_1	x_2	x_3	1	x_1	7
1	x_1	x_2	x_3	1	11
x_1	x_2	1	x_3	x_1	9
x_1	0	x_2	x_3	x_1	15
1	1	x_1	x_2	x_3	13
x_1	x_1	x_2	x_3	0	16
1	x_1	x_2	x_3	x_1	17
x_1	0	x_2	x_3	0	12
x_1	1	x_2	x_3	x_1	20
x_1	x_1	x_2	x_3	x_1	14
0	0	x_1	x_2	x_3	10
x_1	0	x_2	0	x_3	8
x_1	0	x_2	x_3	x_1	6
x_1	0	x_2	x_3	x_2	2

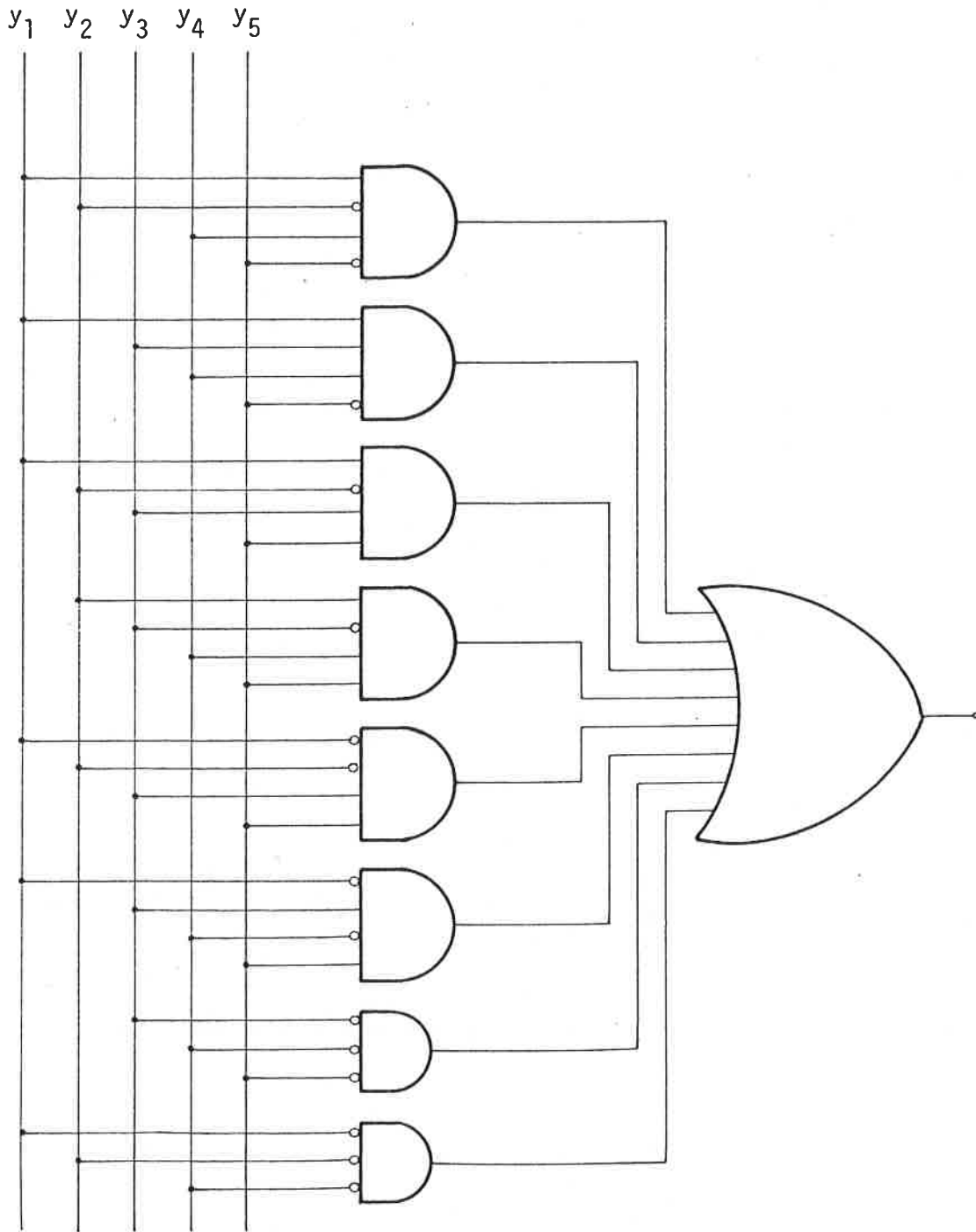
Tablo 5.2. f_A fonksiyonuna uygulanacak değişken atamaları

Görüldüğü gibi Tablo 5.2.'de bütün eşdeğerlik sınıfları bulunmamaktadır. Sabit 0 ve sabit 1 fonksiyonları ile, diğerleri tarafından içerilen fonksiyonların gerçekleşmesi için gerekli olan atamaların verilmesine gerek duyulmamıştır.

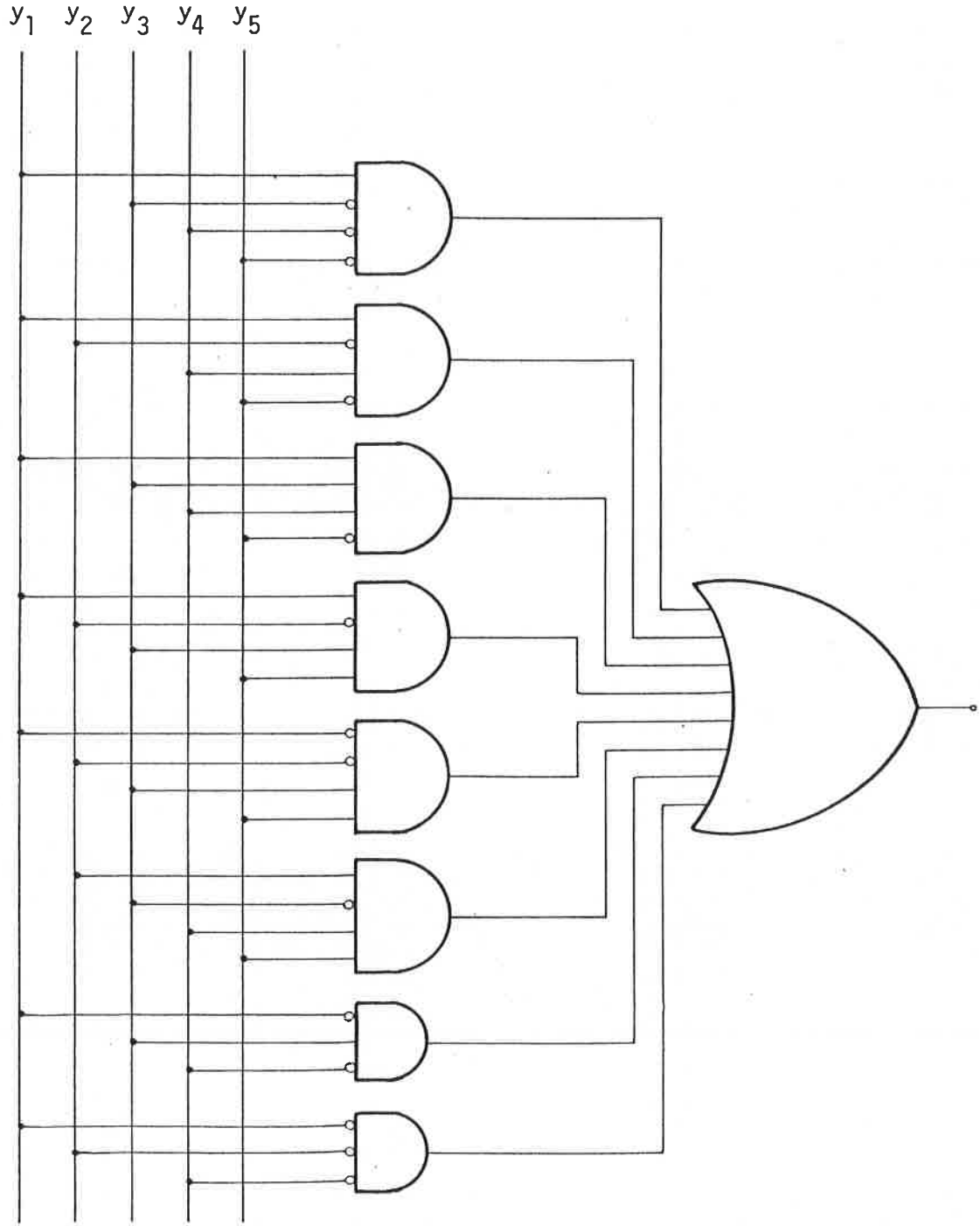
Aşağıda f_A , f_B , f_C ve f_D fonksiyonlarına ilişkin ULD-3'lerin devre şemaları verilmektedir.



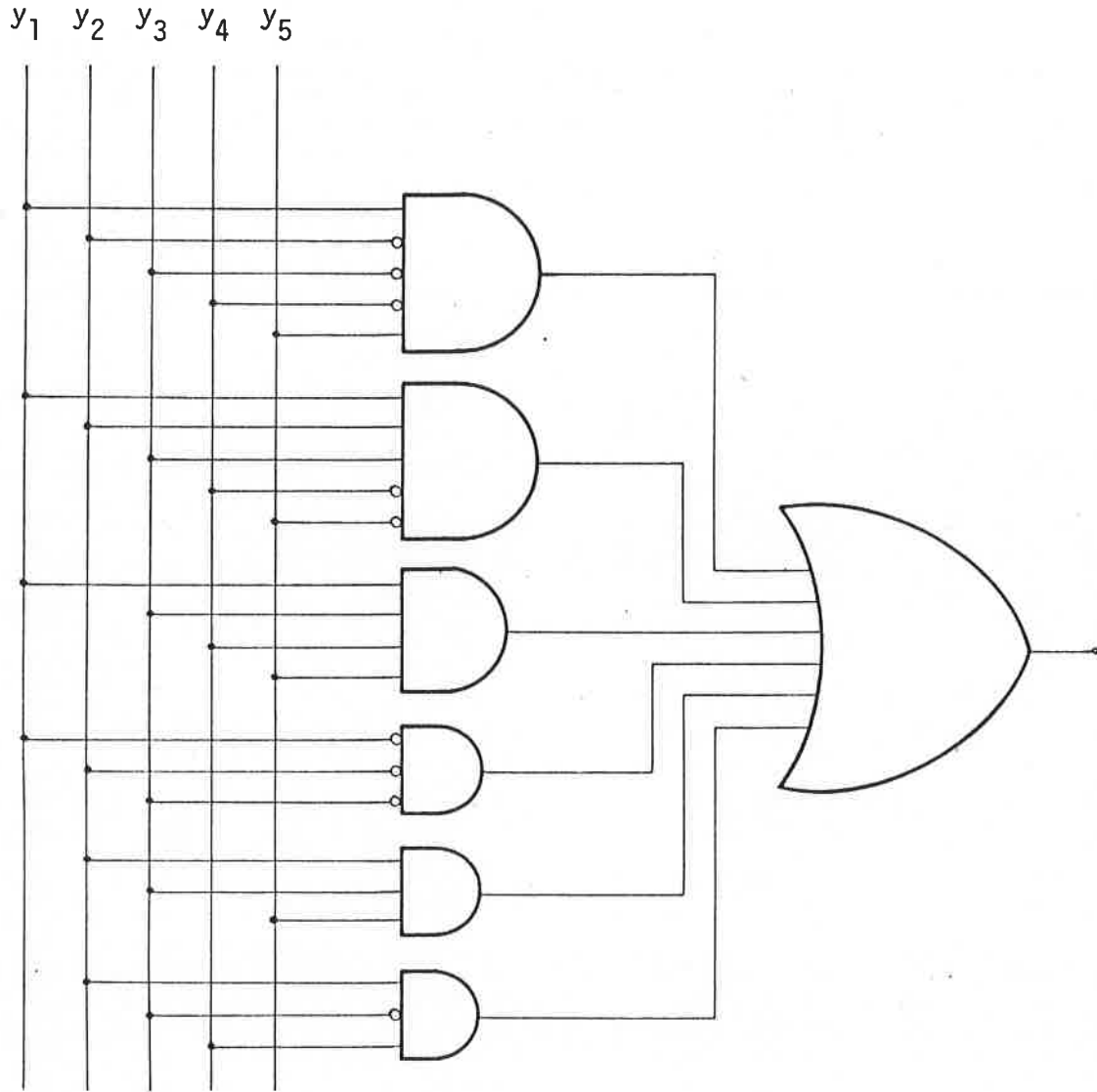
Şekil 5.2. f_A fonksiyonunu gerçekleyen ULD-3 devresi



Şekil 5.3. f_B fonksiyonunu gerçekleyen ULD-3 devresi

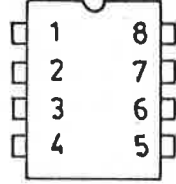


Şekil 5.4. f_C fonksiyonunu gerçekleyen ULD-3 devresi

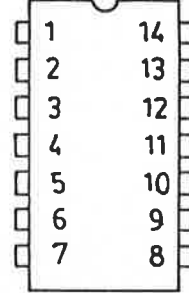


Şekil 5.5. f_D fonksiyonunu gerçekleyen ULD-3 devresi

Bilindiği gibi 3 değişkenli tüm Boole fonksiyonlarının gerçekleştirilmesinde kullanılacak bir çoğullayıcı en az 6 girişli (2 değişken, 4 kontrol girişi) olmalıdır. Çıkış ucu ile DA besleme ve toprak uçları da buna eklenecek olursa 6 girişli bir çoğullayıcı tümdevresinin en az 9 bacaklı olması gerektiği görülmektedir. Dolayısıyla böyle bir devre Şekil 5.6.a.'da verilen en küçük tümdevre kılıfına sığmayacak ve zorunlu olarak bundan sonra gelen standart kılıf olan 14 bacaklı tümdevre kılıfı kullanılacaktır (Şekil 5.6.b.). Gereksiz yer kaybına yol açan bu durum, yukarıda önerilen ULD-3'ler kullanıldığında ortadan kalkmaktadır. Yine çıkış, besleme ve toprak uçları ile birlikte gerekli olan toplam uç sayısı bu durumda 8 olduğundan, Şekil 5.6.a. ile verilen 8 bacaklı tümdevre kılıfı kullanılabilir. Bu ULD-3'lerden iki tanesi için besleme ve toprak uçlarının ortak olacağı düşünülmürse, Şekil 5.6.b. ile verilen 14 bacaklı tümdevre kılıfına da iki ayrı ULD-3'ün sığdırılabileceği görülmektedir.



Şekil 5.6.a.



Şekil 5.6.b.

Semi-üniversal lojik devrelerin birçok durumda kullanışlı olabileceği daha önce açıklanmıştır. Aşağıda bu tür devrelere iki örnek verilmiştir. Bunlardan ilki, minterimlere göre seçme yöntemi kullanılarak tasarlanmıştır.

$$f_E = y_1' y_2' y_3' + y_2 y_3' y_4 + y_2 y_3 y_5$$

Görüldüğü gibi 5 girişli olan bu devrenin özelliği, y_4 ve y_5 giriş değişkenlerinin kontrol değişkeni olmalarıdır.

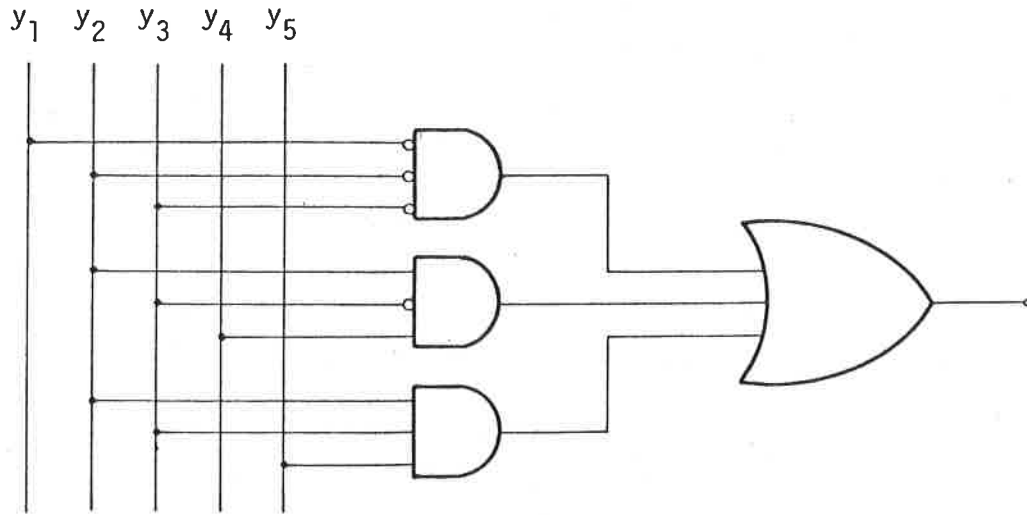
İlk üç girişe sırasıyla x_1, x_2 ve x_3 atanacaktır. Bu atama, gerçekleştirilecek bütün fonksiyonlar için aynı olduğundan, yalnızca kontrol girişlerine yapılan değişken atamalarının belirtilmesi yeterli olacaktır. Aşağıdaki tabloda f_E fonksiyonuna yapılacak atamalar verilmiştir.

Değişken Ataması		Gerçeklenen Fonksiyonun Ait Olduğu Eşdeğerlik Sınıfı
y_4	y_5	
0	x_1	5
x_1	0	7
x_1'	x_1'	9
x_1'	x_1	11
x_1	x_1'	13
1	x_1	15
x_1	1	16
1	x_1'	17
0	0	1

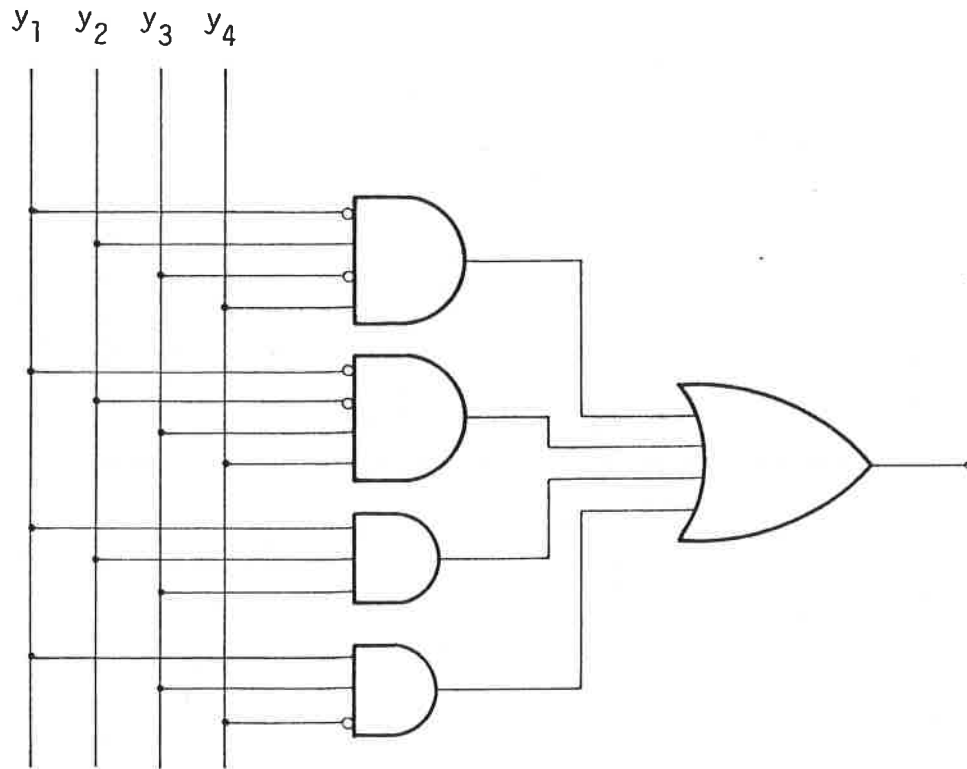
Çıkışın da tümleyeninin alınabildiği varsayılarak, biri dışında tüm 3 değişkenli eşdeğerlik sınıflarının gerçekleştirilebileceği görülmektedir. Gerçeklenemeyen yegane eşdeğerlik sınıfı olan 20. eşdeğerlik sınıfı toplam 2 tane fonksiyon bulundurmaktadır. Dolayısıyla 3 değişkenli 256 Boole fonksiyonundan 254 tanesi gerçekleştirilebilmektedir. Bu ise devrenin "hemen hemen" universal olduğunun bir göstergesidir. İncelenen f_E fonksiyonuna ilişkin devre şeması aşağıda verilmiştir.

Ayrıca Karnaugh diyagramına yerleştirme yöntemiyle tasarlanan bir başka semi-ULD-3 de aşağıda verilmektedir. 17. ve 20. eşdeğerlik sınıflarındaki toplam 10 fonksiyonu gerçekleyemeyen bu 4 girişli devrenin de çıkışının tümleyeninin alınabileceği varsayılmaktadır.

$$f_F = y_1 y_2 y_3 + y_1 y_3 y_4' + y_1' y_2 y_3' y_4 + y_1' y_2' y_3 y_4$$



Şekil 5.7. f_E fonksiyonunu gerçekleyen semi-ULD-3 devresi



Şekil 5.8. f_F fonksiyonunu gerçekleyen semi-ULD-3 devresi

VI. BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada, giriş uçlarına farklı değişken atamaları uygulanarak n değişkenli tüm Boole fonksiyonlarını gerçeklemesi sağlanan universal lojik devreler (ULD) incelenmiştir. Standart lojik yapı elemanlarının bütün özelliklerine sahip olan ULD'lerin tasarımına yönelik bazı yaklaşımlar ele alınarak, bu yaklaşımlarla tasarlanan yeni ULD örnekleri ortaya koyulmuştur.

İkinci bölümde, Boole fonksiyonları arasında tanımlanan bazı eşdeğerlik bağıntıları incelenmiştir. Bu bağıntılar altında fonksiyonların ayrıldığı eşdeğerlik sınıflarının bulunmasına yönelik bir algoritma geliştirilerek 3 değişkenli fonksiyonların eşdeğerlik sınıfları elde edilmiş ve bu sınıflardan yararlanılarak ULD tasarımının önemli ölçüde basitleştirilebileceği gösterilmiştir. Belli bir eşdeğerlik bağıntısı altında fonksiyonların ayrıldığı eşdeğerlik sınıflarının sayısını ve yapısını belirleyen Polya Teoremi de üçüncü bölümde incelenmiştir.

ULD'lerin tasarımı için önerilen yaklaşımlar, dördüncü bölümde açıklanmıştır. Bir ULD-3 için giriş ucu sayısının en az 5 olması gerektiği gösterilmiş ve 5 girişli bazı yeni ULD'ler geliştirilmiştir. Ayrıca n değişkenli Boole fonksiyonlarının tümünü gerçekleyemeyen semi-universal lojik devreler de tanıtılmıştır. Çalışmada 3 girişli

bütün ULD-2'ler incelenerek, bunların 4 eşdeğerlik sınıfında toplanabileceği gösterilmiştir. Bu sınıflardan birinin, [5] numaralı kaynakta ULD-2 kapsamına alınmamış olmasına rağmen, içerdiği fonksiyonların üniversal olduğu ve dolayısıyla bu eşdeğerlik sınıfının da bir ULD-2 sınıfı olduğu tanıtlanmıştır.

İleride bu konu üzerinde yapılacak olan çalışmalarda daha etkin ve sistematik ULD tasarım yöntemlerinin geliştirilmesine öncelik verilmesi yararlı olacaktır. Örneğin Fonksiyon Ağırlığı'nın tanımı genişletilerek Polya Teoremi yardımıyla her bir eşdeğerlik sınıfındaki fonksiyonların da bulunması sağlanabilirse, ULD tasarımında bu bilgilerden yararlanılabilecektir. Ayrıca, ULD'ler kullanılarak sayısal sistem tasarımı konusu da, üzerinde fazla çalışma yapılmamış geniş ve ilginç bir araştırma alanıdır.

KAYNAKLAR

- [1] D.C. Forslund and R. Waxman, "The universal logic block (ULB) and its application to logic design," 1966 Seventh Annual Symp. Switching and Automata Theory, Conf. Rec., pp. 236-250.
- [2] S.L. Hurst, "Universal logic element or superfunction arrays," Microelectronics, Vol. 8, No. 2, pp. 13-19.
- [3] C.R. Edwards and S.L. Hurst, "An analysis of universal logic modules," Int. J. Electronics, 1976, Vol. 41, No. 6, pp. 625-628.
- [4] S. Murugesan, "Universal logic gate and its applications," Int. J. Electronics, 1977, Vol. 42, No. 1, pp. 55-63.
- [5] X. Chen and S.L. Hurst, "A comparison of universal-logic-module realizations and their application in the synthesis of combinatorial and sequential networks," IEEE Trans. Comput., vol. C-31, pp. 140-147, Feb. 1982.
- [6] X. Chen and S.L. Hurst, "A consideration of the minimum number of input terminals on universal logic gates and their realization," Int. J. Electronics, 1981, Vol. 50, No. 1, pp. 1-13.
- [7] S.S. Yau and C.K. Tang, "Universal logic modules and their applications," IEEE Trans. Comput., vol. C-19, pp. 141-149, Feb. 1970.
- [8] F.P. Preparata, "On the design of universal logic functions," IEEE Trans. Comput., vol. C-20, pp. 418-423, Apr. 1971.
- [9] X. Chen and X. Wu, "Derivation of universal logic modules, for $n > 3$, by algebraic means," IEE Proc., Vol. 128, Pt. E, No. 5, Sept. 1981.
- [10] F.P. Preparata and R.T. Yeh, Introduction to Discrete Structures, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973.
- [11] C.L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, New York: McGraw-Hill, 1968.
- [12] K. Sönmez, "Üniversal Boole Fonksiyonları," Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enst., Temmuz 1985.