

742663

**DALGACIK VE SPEKTRAL ANALİZ YÖNTEMLERİNİN
BİRLEŞİMİ İLE ELEKTRİK MOTORLARINDA ARIZA
TANISINA YÖNELİK YENİ BİR YAKLAŞIM**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. Selim GÜLLÜLÜ
(514991010)

142663

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Mayıs 2003

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Serhat ŞEKER
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Kevork MARDİKYAN (İ.T.Ü.)
Doç.Dr. Osman Nuri UÇAN (İ.Ü.)

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM
DOKÜMENTASYON MERKEZİ**

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Tezin hazırlanması sırasında büyük yardımlarını ve desteğini gördüğüm danışman hocam sayın Doç. Dr. Serhat Şeker'e ve özellikle uygulama bölümündeki yardımları nedeniyle sayın Yrd. Doç. Dr. Emine Ayaz'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca bana hep destek olan aileme teşekkür ederim.

İstanbul, 2003

Selim Güllülü



İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	III
ŞEKİL LİSTESİ	IV
ÖZET	V
SUMMARY	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Arıza Tanısı Yöntemleri	2
2. FOURIER ve DALGACIK DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMELLERİ	5
2.1. Kısa Zaman Fourier Dönüşümü	5
2.2. Dalgacık Dönüşümü	6
2.3. Sürekli Dalgacık Dönüşümü	10
2.4. Ortonormallik Tanımı	11
2.5. Ayırık Dalgacık Dönüşümü	12
2.6. Haar Dalgacığı	17
2.7. İşaretlerin Çoklu-Çözünürlük Analizi	18
2.7.1. Ölçekleme Fonksiyonu ve V_m Alt Uzayları	19
2.7.2. Dalgacık Fonksiyonu ve W_m Detay Uzayları	22
2.8. Bir $f(t)$ İşaretinin Haar Dalgacığına Göre Analiz ve Sentezi	25
2.9. Çift-Bandlı Birimsel TO-KAF ve Dalgacık Bazları	28
2.10. Çoklu Çözünürlük Piramid Ayrıştırması	32
2.11. Güç Spektrumu Yoğunluğu	38
3. MOTOR AKIM İŞARETLERİ	39
4. UYGULAMA	42
4.1. Bozuk Durum İçin İşaretin Yeniden Kazanılması	51
4.2. Orijinal İşaretin ve Yeniden Kazanılmış İşaretin Güç Spektrumu Yoğunluğu	51
4.3. Alt Band Spektrumlarının Birleşimi İle Orijinal İşaretin Spektral Değişiminin Karşılaştırılması	52
5. SONUÇLAR	54
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	58

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.1 Elektrik motoru arızaları dağılımı	3
Tablo 4.1 Yaklaşım ve detay alt bandları frekans aralıkları	42



ŞEKİL LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1	Pencerelenmiş (kısa-zaman) Fourier dönüşümü	6
Şekil 2.2	Ana dalgacık örnekleri	7
Şekil 2.3	Zaman-Frekans domenlerinde dalgacık aileleri	7-8
Şekil 2.4	Logaritmik frekans ölçeğinde bandgeçiren dalgacık filtreleri	8
Şekil 2.5	Dalgacık dönüşümü için rezolüsyon hücrelerini gösteren zaman-frekans düzlemi	9
Şekil 2.6	Ayrık dalgacık dönüşümü filtreleri	15
Şekil 2.7	Frekans ekseninin kaplanması	16
Şekil 2.8	Ayrık dalgacık dönüşümü için diadik örnekleme ızgarası	17
Şekil 2.9	Farklı ölçeklerde iki Haar dalgacığı	18
Şekil 2.10	$f(x)$ fonksiyonu ve $f(x)$ in V_1 ve V_0 uzaylarına izdüşümleri	23
Şekil 2.11	İkili tutucu desimasyon işlemcisi	27
Şekil 2.12	Çift-bandlı filtre bankı yapısı olarak araölçek katsayıları	28
Şekil 2.13	Çoklu çözünürlük işaret ayrıştırmasının ilk adımı	34
Şekil 2.14	Çoklu çözünürlük piramid ayrıştırması	35
Şekil 2.15	İnterpolasyon işlemcisi	35
Şekil 2.16	Yeniden oluşturma adımı	36
Şekil 2.17	İki bandlı diadik altband ağacı için piramid ayrıştırma ve yeniden oluşturma	37
Şekil 3.1	Akım işareti (sağlam durum)	39
Şekil 3.2	Akım işareti (bozuk durum)	40
Şekil 3.3.	Bir periyotta akım işareti (bozuk durum)	40
Şekil 4.1	Sağlam durum için detaylar (yüksek frekans bölgesindeki alt bandlar)	43-44
Şekil 4.2	Sağlam durum içi yaklaşımlar (alçak frekans bölgesindeki alt bandlar)	45-46
Şekil 4.3	Bozuk durum için detaylar (yüksek frekans bölgesindeki alt bandlar)	47-48
Şekil 4.4	Bozuk durum için yaklaşımlar (alçak frekans bölgesindeki alt bandlar)	49-50
Şekil 4.5	Yeniden kazanılmış işaretin ve orijinal işaretin güç spektrumu yoğunlukları	51
Şekil 4.6	Orijinal işaretin ve alt bandların güç spektrumu yoğunlukları	52
Şekil 4.7	Orijinal işaretin ve alt bandların güç spektrumu yoğunlukları II	53

DALGACIK VE SPEKTRAL ANALİZ YÖNTEMLERİNİN BİRLEŞİMİ İLE ELEKTRİK MOTORLARINDA ARIZA TANISINA YÖNELİK YENİ BİR YAKLAŞIM

ÖZET

Bu çalışmada, son senelerde en önemli işaret işleme tekniklerinden biri olan çoklu-çözünürlüklü dalgacık analizi tanıtılmıştır. Bu anlamda arıza tanısındaki bir uygulama olarak elektrik motorlarında rulman arıza tanısı ele alınmıştır. Deneysel çalışma olarak 5HP'lık asenkron elektrik motorunun rulmanları yedi eskitme aşamasında elektriksel olarak yaşlandırılıp performans testi neticesinde, motor akım ve titreşim işaretleri bir işaret koşullandırıcı devre ve 4kHz'lik bir kesim frekansını içeren “anti-aliasing” filtreden geçirilerek 12kHz'de örneklenerek toplanmıştır.

Bu çalışmada mekanik bir arızanın elektriksel veriden elde edilmesi amaçlanıp bu bakımdan motor faz akımlarından birinin alt band analizleri gerçekleştirilmiştir. İşaret sekiz alt banda bölünüp tüm detay alt bandları ve son yaklaşım alt bandı gözönüne alınarak bunların güç spektrumu yoğunlukları hesaplanıp uygun formatta toplanmıştır. Netice olarak bu son durum ile orijinal akım işaretinin bozuk durumuna ilişkin güç spektrumu yoğunluğu hesaplanıp karşılaştırılması yapılmıştır.

Karşılaştırma sonucunda spektrumun alçak frekans bölgesinde 30 Hz civarında (29.03 Hz) yüksek bir genlik değeri gözlenmiştir. Bu bakımdan 30 Hz rotorun dönme frekansındaki kuvvetlenme olarak yorumlanabilir. Bu etkinin dalgacık analizi ile sağlandığı gösterilmiştir. Bu ise tamamen yeni bir yaklaşım olup bu konudaki orijinal bir araştırmanın sonucudur.

A NEW APPROACH FOR FAULT DETECTION PROBLEMS IN ELECTRIC MOTORS UNDER THE COMBINATION OF THE WAVELET AND SPECTRAL ANALYSIS TECHNIQUES

SUMMARY

In this study, one of the most important signal processing techniques (multi-resolutional wavelet analysis) is introduced. The faults for the electric motor bearings are chosen for the fault detection application. The experimental study is consisted of the following steps:

- A 5HP asynchronous electric motor is electrically aged in seven steps and at the end of the performance test the current and vibration signals are obtained.
- The signals are passed through an anti-aliasing filter which has a cutoff frequency at 4 kHz and after that the signals are sampled at 12 kHz.

In this study a mechanical fault is tried to be detected by the help of electrical data. For this purpose the sub-band analysis for one of the motor phase currents is made. The current signal is divided into eight sub-bands. All of the detail sub-bands and the last approximation sub-band are taken into account, the power spectral densities are calculated for these sub-bands and added together in a suitable format. Eventually, this last state and the power spectral density of the original current signal itself is calculated and compared.

After the comparison, a high amplitude value is observed in the low frequency region at 30 Hz (29.03 Hz). This situation can be thought as the strenghtening of the rotor rotation frequency. It can easily be told that this effect is obtained by the help of the wavelet analysis.

1.GİRİŞ

Asenkron motorlar küçük güçlerden büyük güçlere kadar endüstride çok yaygın olarak kullanılan elektrik makinalarıdır. Bu makinalarda meydana gelebilecek arızaların karakterini tespit etmek amacıyla birçok çalışma yapılmıştır. Bu makinalarda elektriksel ve mekaniksel arızalar sökonusu olup bu arızaların %50 den fazlası rulman bozukluğu ve mil dengesizliği gibi basit mekaniksel nedenlerden kaynaklanmaktadır. Asenkron makinalarda meydana gelebilecek arızaların önceden teşhisi, endüstriyel ve sistemde olabilecek beklenmeyen durumları önler ve dolayısıyla üretimin kesintiye uğraması engellenerek sistemin güvenilir ve ekonomik bir biçimde işletimi sağlanır. Bu nedenle arızaların erken teşhisi amacıyla durum izleme çalışmaları yapılır.

Endüstriyel süreçlerde kullanılan elektrik motorlarının elektriksel ve mekanik kısımlarındaki arızaların erken belirlenmesi, süreç güvenilirliği ve ekonomikliği açısından son derece önemlidir. Bu nedenle, öngörülü bakım (Predictive Maintenance) amaçlı durum bilgisinin ortaya çıkarılmasının temelini oluşturur.

Ayrıca bakım teknolojisinin gelişim sıralaması ise düzeltici bakım, periyodik ya da zaman tabanlı bakım ve öngörülü ya da durum tabanlı bakım şeklinde verilebilir.

Düzeltilici bakım ya da arıza sonrası bakım eleman arızalandığında yapılan bakımdır. Bir otomobilde kırık fan kayışının değiştirilmesi, bir su sızıntısı olduktan sonra çatının tamir edilmesi, bir basınç algılayıcısının hatalı okumalar gösterdiğinde değiştirilmesi ya da yeniden kalibrasyonu bu duruma örnek olarak verilebilir.

Periyodik veya zaman tabanlı bakım bir eleman üzerinde önceden belirlenmiş aralıklarda ya da işletme şartları tasarımında önceden belirlenmiş kriterleri sağlamak amacıyla yapılan bakımdır ve önleyici bakım olarak da bilinir. Bir aletin periyodik olarak yapılan kalibrasyonu, filtrelerin periyodik olarak yerleştirilmesi, yapımçı firma

tarafından belirlendiği üzere bir otomobildeki motor yağının değiştirilmesi örnek olarak verilebilir.

Öngörülü veya durum tabanlı bakım, bir elemanın performans parametrelerinin sürekli ya da periyodik olarak izlenmesi ve bunların daha önceden belirlenmiş limitlerle (uyarı ve alarm limitleri) karşılaştırılması esasına dayanır[9]. Bu yolla sürecin çalışmasını devam ettirebilmek için ne çeşit bir önlem alınacağı saptanır. Bu, bakımın gerektiği zaman gerçekleştirilmesi olup, durum tabanlı bakım zamana bağlı değildir. Bir elemanın davranışındaki başlamakta olan değişiklikleri tespit etmek ve problemi zamanında düzeltmek ise bu tür bakımın stratejisini oluşturur. Dönen makinalarda durum izleme, alet kalibrasyonu bulguları, sıcaklık, basınç, akış gibi süreç değişkenlerini izleme örnek olarak verilebilir[11][12]. Bu tür bakımın gerçekleştirilebilmesi amacıyla endüstriyel sistemdeki elemanlar için durum izleme çalışmaları yapılır ve elemanların arıza başlamadan önce hangi karakteristik özellikler gösterdiği belirlenir. Gelişmekte olan bir arızayı gösteren bu karakteristik özelliklerden yararlanarak sistemdeki elemanlar gerektiği zaman devreden çıkartılır ve bakıma alınır. Böylece sistemdeki ani kesintiler önlenerek sistemin daha güvenilir ve ekonomik bir şekilde işletimi söz konusu olur.

1.1. Arıza Tanısı Yöntemleri

Öngörülü ve durum tabanlı bakım teknolojileri son 20 yılda üçüncü kuşak olarak isimlendirilen teknoloji grubu içerisinde yer alır. Bu teknoloji grubundaki yaklaşımlarda en fazla kullanılan yöntemlerden biri ise spektral analiz yöntemi olup bu yolla makina durum bilgisi frekans tanım bölgesinde kolayca ifade edilebilir. Ayrıca durum bilgisi, zaman serisi şeklindeki verilerin istatistiksel analizi yoluyla da elde edilebilir. Literatürde ise endüstriyel uygulamalarda kullanılan asenkron motorların arıza belirleme çalışmalarında kullanılmış birçok durum izleme çalışması gerçekleştirilmiştir. Ancak daha güvenilir ve duyarlı izleme çalışmaları için yeni tekniklere gereksinim duyulduğundan bu amaçla son senelerde birçok mühendislik alanında başarıyla uygulanmış olan dalgacık dönüşümleri, makina durum izleme alanında da kullanılmıştır.

Bu çalışmalardan ortaya çıkartılan sonuçlara göre arızaların dağılımı aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

Tablo 1.1. Elektrik Motoru Arızaları Dağılımı	
<u>Motor Arıza Nedenleri</u>	<u>Tüm Arızalara Olan Oranı</u>
Rulman Kaynaklı	%41
Stator Kaynaklı	%37
Rotor Kaynaklı	%10
Diğer	%12

Arızaya neden olan hata mekanizmaları; aşırı ısınma, yalıtımda bozulmalar, mekanik arızalar ve motor devresi hatalarıdır. Bazı durumlarda motordaki normal dışı durumların nedeni güç kaynağındaki harmonikler de olabilir. Yukarıdaki tablo motor arızalarının %50 den fazlasının rulman bozukluğu, mil dengesizliği, rotor ve yük milinin eş uyumlu olmaması gibi mekaniksel nedenlerden kaynaklandığını göstermektedir[8].

- Rulman Arızaları: Dönme elemanları, iç ve dış bilezik ve dönme elemanlarını tutan kafeste olabilecek arızalardır
- Stator Arızaları: Stator gövdesi, stator çekirdeği ve stator sargılarında meydana gelebilecek arızalardır.
- Rotor Arızaları: Rotor çubukları, mil ve rotor gövdesinde olabilecek arızalardır.
- Diğer Arızalar: Faz empedanslarındaki dengesizlikler nedeniyle gerilim dengesizliğinin oluşması gibi elektriksel hatalar, aşırı yükleme, kötü kavramalar ve motorun iyi yataklanmaması gibi hatalardır.

Elektrik makinalarındaki durum izleme çalışmalarına ilişkin işaret tabanlı analizler bakımından gözönüne alınacak temel teknikler istatistiksel analiz, spektral analiz ve zaman-frekans analizi gibi tekniklerdir[13]. Bu teknikler vasıtasıyla makinadan alınacak olan titreşim, akım, gerilim, sıcaklık ve ses gürültü seviyesi gibi test işaretleri kolayca analiz edilerek arızaya ilişkin özellik çıkarımları yapılabilir.

Endüstriyel süreçlerde uygulanan iyi bir bakım teknolojisinin getireceği en önemli avantajlardan birisi süreç güvenilirliğidir. Bu anlamda işletmeler üretimlerini, kesintiye uğratmadan sürdürebilirler ve üretim ekonomisine de bu yolla önemli katkılar sağlayabilirler. Çünkü ürün rekabeti, güvenilirlik, güvenlik ve maliyet optimizasyonu gibi kavramlar endüstriyel oluşumları, bakım bölümlerini ve bakım aktivitelerindeki mühendislik uygulamalarını yeniden gözden geçirme yönünde etkilemiştir. Endüstriyel bakım masrafları toplam üretim masrafının %4-25' ini oluşturmakta olduğundan, büyük işletmelerde teknik bakım bölümleri önemli bir iş kolunu oluşturmaya başlamıştır. Örneğin A.B.D.' de bu anlamdaki toplam endüstriyel bakım harcamaları yılda yaklaşık 500 milyar \$ dır.

Ayrıca bakım teknolojilerinin diğer önemli bir uygulama alanı ise *Kritik Sistem* uygulamalarıdır. Bu anlamdaki sistemler daha çok askeri amaçlı olup, uzay ve havacılık sektöründe de buna benzer alanlarda uygulamalar mevcuttur.

Bu çalışmada dalgacık analizi yaklaşımı esas alınarak rulman arızasına ilişkin durum için motor akım işaretlerinin Dalgacık yaklaşımı ile analizi gerçekleştirilmiştir[10][14]. Bu amaçla bu tez aşağıdaki gibi organize edilmiştir:

- Giriş
- Fourier ve Dalgacık Dönüşümlerinin Temelleri
- Motor Akım İşaretleri
- Uygulama
- Sonuçlar

2.FOURIER VE DALGACIK DÖNÜŞÜMLERİNİN TEMELLERİ

Bu bölümde çoklu-çözünürlüklü analiz üzerine kurulmuş Dalgacık Dönüşümü ve diğer temel konularda ayrıntılar verilmiştir.

2.1. Kısa - Zaman (Pencerelemiş) Fourier Dönüşümü

Fourier Dönüşümüne benzer olan kısa-zaman Fourier dönüşümünde, $f(t)$ işaretinin, zamandaki pozisyonu τ ile ötelenmiş bir $g(t)$ pencere fonksiyonu ile iç çarpımı alınarak $f(t)$ işaretinin pencerelemiş Fourier dönüşümü bulunur [1],[3]. τ ve Ω sırasıyla zaman ve frekans parametreleri olmak üzere kısa-zaman Fourier dönüşümü

$$F(\Omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t - \tau) e^{-j\Omega t} dt \quad (2.1)$$

ile hesaplanır ve

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega, \tau) g(\tau - t) e^{j\Omega t} d\Omega d\tau \quad (2.2)$$

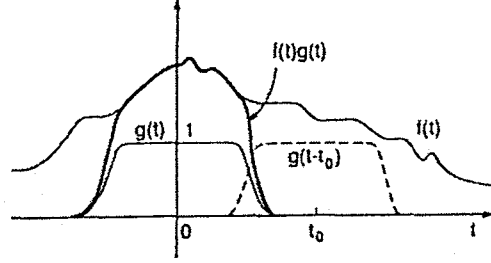
eşitliği ile $f(t)$ işareti yeniden elde edilir.

Kısa-zaman Fourier dönüşümünün sayısal uygulamaları için pencerelemiş ayrık Fourier dönüşümü kullanılır.

$$F(k, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(m-n) f(m) e^{-j2\pi km/M} \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.3)$$

$g(m)$ sonlu dereceden örneklenmiş pencere fonksiyonudur.

Şekil 2.1 de pencerelemiş Fourier dönüşümü gösterilmiştir [2]. $f(t)$ fonksiyonu $g(t)$ pencere fonksiyonuyla çarpılır ve $f(t)g(t)$ çarpımının Fourier katsayıları hesaplanır. $g(t-t_0)$, $g(t-2t_0)$, ... gibi pencerenin ötelenmiş durumlarını alarak işlem tekrarlanır.



Şekil 2.1. Pencerelemiş (kısa-zaman) Fourier dönüşümü [2].

Kısa-zaman Fourier dönüşümünün sakıncası tek bir pencere fonksiyonu kullanmasıdır. Oysa uygulamada seçilen pencere fonksiyonlarının yüksek ve alçak frekans bilgisini elde etmek için farklı olması gerekir. Dolayısıyla band genişliği frekansa bağlı olarak değişen filtreler kullanmaya gerek duyulur.

2.2. Dalgacık Dönüşümü

Dalgacık dönüşümü, bir $\psi(t)$ ana fonksiyonunun öteleme ve yayılmalarıyla oluşturulan baz fonksiyonları ile bir $f(t)$ işaretinin iç çarpımı alınarak bulunur. Bu işlem işaretin zaman ve frekans domenini özelliklerini birarada verir. Baz fonksiyonları, işaretin yüksek frekanslarında kısa süreli, düşük frekanslarında uzun süreli. $f(t)$ işaretinin frekansının yüksek olduğu bölgede aralık küçük tutularak, yavaş değiştiği bölgede de aralık uzun tutularak $f(t)$ daha iyi temsil edilebilir [1].

$\Psi(\Omega)$; $\psi(t)$ nin Fourier dönüşümü olmak üzere ve $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ise

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\Omega)|^2 |\Omega|^{-1} d\Omega < \infty \quad (2.4)$$

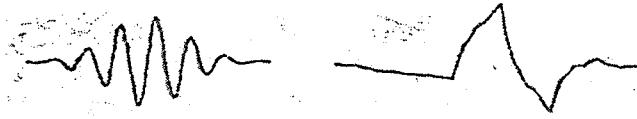
eşitsizliğini sağlıyorsa $\psi(t)$ fonksiyonuna dalgacık denir [4].

$\psi(t) \leftrightarrow \Psi(\Omega)$ Fourier çifti, $a > 0$ sürekli bir değişken olmak üzere

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow \sqrt{a} \Psi(a\Omega) \quad (2.5)$$

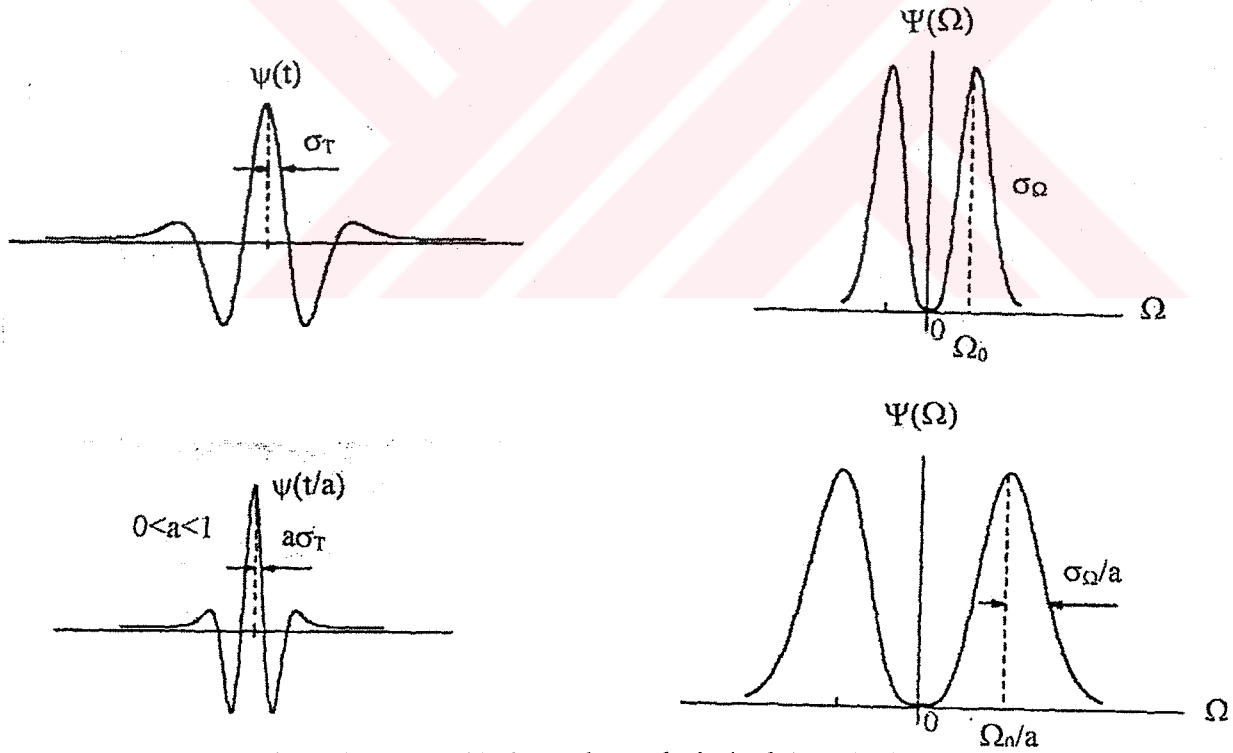
olur.

$\psi(t)$ ana dalgacığının yayılmaları ve ötelemeleri dalgacıklar olarak bilinir. Şekil 2.2 de iki ana dalgacık örneği gösterilmiştir [3].

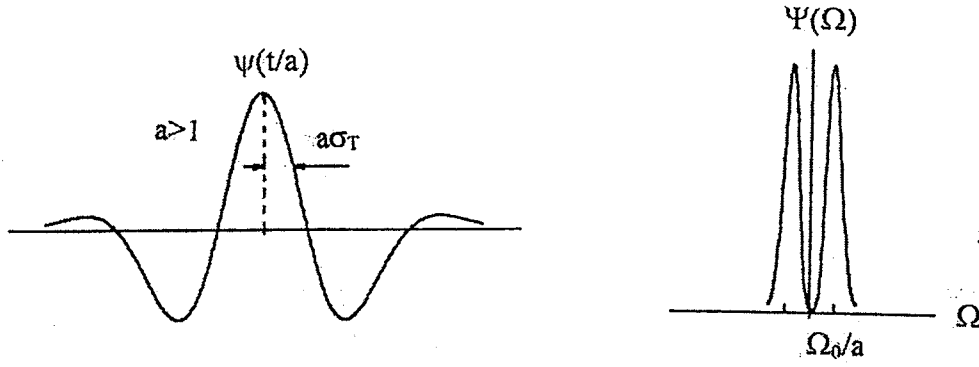


Şekil 2.2 Ana dalgacık örnekleri

Zaman-frekans düzleminde üniform olmayan biçimde bir domendeki büzülme diğer domende genişlemeyi beraberinde getirir [1]. Burada

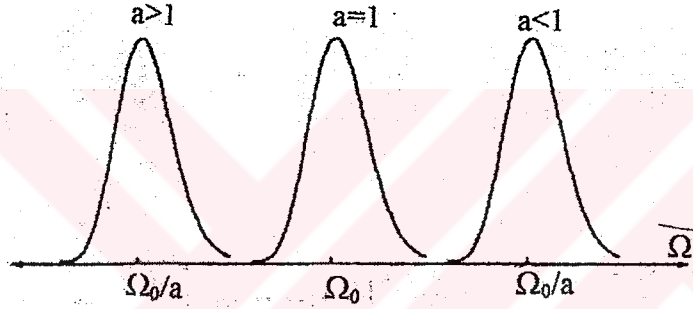


Şekil 2.3 Zaman-Frekans domenlerinde dalgacık aileleri.



Şekil 2.3 (devamı)

Logaritmik frekans ölçeğinde frekans cevapları şekildeki gibidir:



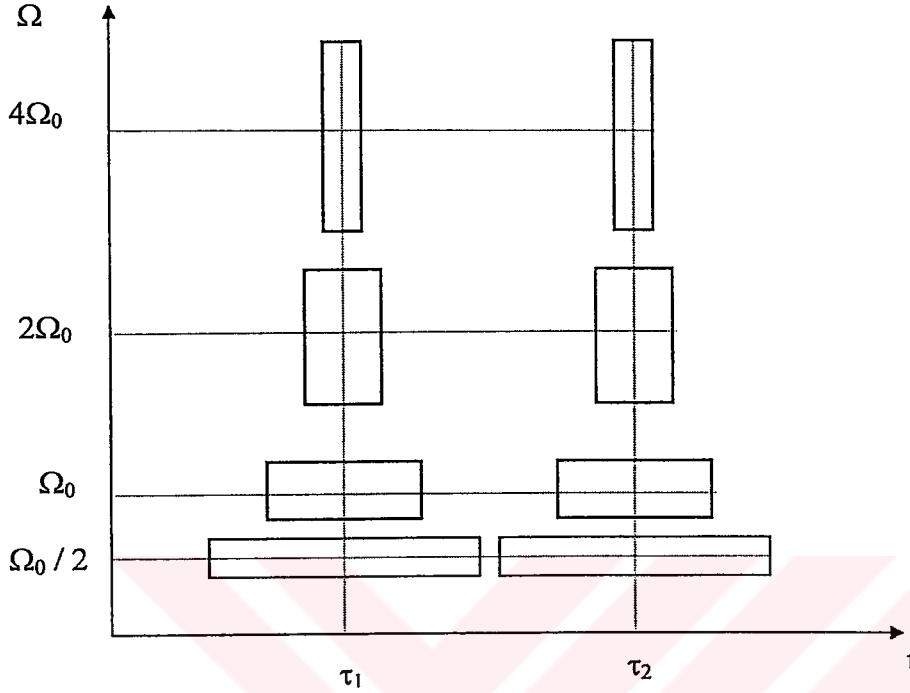
Şekil 2.4 Logaritmik frekans ölçeğinde bandgeçiren dalgacık filtreleri.

Dalgacık ailesi, yayılma parametresi a ve öteleme parametresi b olmak üzere

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \text{ ile belirlenir.} \quad (2.6)$$

$\psi(t)$, band geçiren bir fonksiyon olarak düşünülür. $a^{-1/2}$ katsayısı enerji korunumunu dolayısıyla gelmektedir. a ölçekleme parametresi kısa-zaman Fourier dönüşümünde yoktur. Bu parametreye bağlı olarak dalgacık fonksiyonu zaman domeninde genişler ya da büzülür. Buna karşı frekans domeninde de büzülme ya da genişlemeye yol açar. Dolayısıyla dalgacık dönüşümü esnek bir zaman-frekans rezolüsyonu sağlar. a nın büyük değerleri küçük frekanslara karşı düştüğü için ana fonksiyon genişler. Ters

durumda a nın küçük değerleri yüksek frekanslara karşı düştüğü için ana fonksiyon daralır [1].



şekil 2.5 Dalgacık dönüşümü için rezolüsyon hücrelerini gösteren zaman-frekans düzlemi.

Bir fonksiyonun dalgacık olabilmesi için sağlaması gereken şarta kabul edilebilirlik koşulu denir. Bu özellik, dönüşümün tersinin alınabilmesini garanti eder. Ayrık dalgacık dönüşümü, bir ızgara ya da kafes üzerinde, (a,b) dalgacık parametrelerini örnekleyerek elde edilir. Bir işareti kendisinin dönüşüm değerlerinden elde edebilme problemi örnekleme ızgarasının kabalığına bağlıdır. İyi ızgara düğümleri işareti kolaylıkla yeniden oluşturabilmeye izin verir. Fakat bu, fazlalığa yani aşırı örneklenmiş olmaya yol açar. Çok kaba ızgara haberleşmede kayba neden olur. Bunun için çerçeve (frame) kavramı geliştirilmiştir [1].

2.3. Sürekli Dalgacık Dönüşümü

$$W_f(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{ab}(t) f^*(t) dt = \langle \psi_{ab}(t), f \rangle \quad (2.7)$$

formülüyle verilen sürekli dalgacık dönüşümü, $\psi(t)$ ana fonksiyonunun öteleme ve yayılma terimleriyle belirlenir. $f^*(t)$, $f(t)$ nin eşleniğini gösterir.

Zaman ve Fourier dönüşümü domenlerinde, dalgacık

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \leftrightarrow \Psi_{ab}(\Omega) = \sqrt{a} \Psi(a\Omega) e^{-jb\Omega} \quad (2.8)$$

olup öteleme ve yayılma parametreleri reel eksen üzerinde sürekli olarak değişir. $f(t)$

işareti $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ analiz fonksiyonuyla dönüştürülür. $a \neq 0$ dır.

$W_f(a,b)$: $f(t)$ işaretinin dalgacık dönüşümü

$f(t)$: Dönüşümü alınacak işaret

$\psi(t)$: Dalgacık fonksiyonu

$$f(t) = C_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{da db}{a^2} W_f(a,b) \psi_{ab}(t) \quad (2.9)$$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{\Omega} d\Omega \quad (2.10)$$

Eğer C_ψ sonlu ise seçilen dalgacık kabul edilebilir dalgacıdır. Dolayısıyla ters dönüşüm vardır. $f(t)$ işareti ters dalgacık dönüşümü eşitliği (2.9) ile yeniden oluşturulabilir.

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.11)$$

$\psi(t)$ analiz fonksiyonu kısa ve salınımlı olmalıdır, diğer bir deyişle ortalaması sıfır ve her iki uçta hızlı bozulmalıdır. Bu kısıtlama (2.7) deki integralin sonlu olmasını garanti eder [3].

Böylece, $\psi(t)$; en azından $|t|^{1-\epsilon}$ kadar hızlı bozulan bandgeçiren bir filtrenin impuls cevabı gibi davranır. Pratikte, iyi zaman-frekans sınırlaması sağlamak için $\psi(t)$ daha hızlı bozulmalıdır [1].

Fourier analizinde bir fonksiyonun Fourier dönüşümünden söz edilebilirken dalgacık dönüşümünden söz edilemez [5]. Ana dalgacığa göre dönüşüm bulunur. Bir $f(t)$ fonksiyonu için iki farklı ana dalgacığa göre ($\psi_1(t)$ ve $\psi_2(t)$) olan dalgacık dönüşümleri farklıdır. Bu yüzden ana dalgacığın seçimi önemlidir. Dalgacık dönüşümü literatürünün çoğunda ortogonal, diadik (2 nin kuvvetleri) fonksiyonlar ana dalgacık olarak seçilirler.

Kısa-zaman Fourier dönüşümüne benzer olarak, dalgacık dönüşümü, lineer filtreleme işlemidir. $f(t)$ işareti, transfer fonksiyonu $a^{1/2} \Psi^*(a\Omega)$ olan bir lineer zamanla değişmeyen filtreden geçirilirse t anında filtrenin çıkışı $W_f(a,b)$ olacaktır. Sürekli dalgacık dönüşümüne, sabit a için herbir $W_f(a,b)$ zamanın fonksiyonu olan sonsuz paralel filtre takımı olarak bakılabilir. Bu filtreler genlik ölçeklendirmesi gibi, frekans ekseninin ölçeklenmesi yoluyla sabit bir $\Psi^*(\Omega)$ filtresinden elde edilirler. Genliğin ölçeklenmesi, bütün filtrelerin karesel integral büyüklüğünün aynı olmasını gerektirir. Kısa-zaman Fourier dönüşümündeki filtre takımı sabit bandgenişliğiyle karakterize edilirken, bu dönüşümde bağlı bandgenişliğiyle karakterize edilir. Sürekli dalgacık dönüşümü ile belirlenen filtre takımı boyunca a arttırılırsa, zamanda rezolüsyon azalırken orantılı olarak frekans rezolüsyonu düzelir [4].

2.4 Ortonormallik Tanımı

Herhangi bir fonksiyon $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ve $\Phi(\Omega)$; $\phi(t)$ nin Fourier dönüşümü olmak üzere eğer

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\Phi(\Omega+2\pi n)|^2 = 1 \quad (2.12)$$

ise $\{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ ortonormal bir kümedir [1].

2.5. Ayırık Dalgacık Dönüşümü

Sürekli dalgacık dönüşümünün sakıncaları; fazlalık ve pratik olmamasıdır. Birincisi; dalgacık dönüşümünün kendi doğasındandır, ikincisi; (a,b) dönüşüm parametrelerinin sürekli olmasından dolayıdır. (a,b) parametreleri örneklenerek ayırık dalgacık fonksiyonları kümesi elde edilir. $a=a_0^m$ şeklinde alınarak yayılma parametresi ayırık hale getirilir. m nin farklı değerleri farklı genişlikteki dalgacıklara karşı düşer. Öteleme parametresi b nin ayırıklaştırılması m ye bağlı olmalıdır. Yüksek frekans dalgacıkları (dar) bütün zaman serisini örtmesi için küçük adımlarla ötelenir. Düşük frekans (geniş) dalgacıkları ise daha büyük adımlarla ötelenir. $\psi(a_0^{-m}t)$ nin genişliği a_0^m le orantılı olduğu için $b=n b_0 a_0^m$ $m,n \in \mathbb{Z}$ olarak seçilir [1],[4].

$a_0 > 1, b_0 > 0$ sabit olmak üzere ayırık dalgacık aileleri,

$$\psi_{mn}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m}t - nb_0) \quad (2.13)$$

şeklindedir.

f işaretini $\langle f, \psi_{mn} \rangle$ den sayısal kararlı bir şekilde yeniden elde edebilmek için ψ_{mn} bazı şartları sağlarsa çerçeve oluşturur [1].

$$f(t) = \sum_m \sum_n d_{mn} \psi_{mn}(t) \quad (2.14)$$

d_{mn} dalgacık katsayılarıdır.

$$d_{mn} = \langle f(t), \psi_{mn}(t) \rangle = \frac{1}{a_0^{m/2}} \int f(t) \psi(a_0^{-m} t - nb_0) dt \quad (2.15)$$

Bu gibi tam kümeler çerçeveler (frames) olarak adlandırılırlar.

$$A \|f\|^2 \leq \sum_m \sum_n |\langle f, \psi_{mn} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (2.16)$$

$$\|f\|^2 \triangleq \int |f(t)|^2 dt \quad (2.17)$$

$\psi(t)$ kabul edilebilirlik koşulunu sağlarsa ve $0 < A < B < \infty$ ise $\psi_{mn}(t)$ fonksiyon ailesi bir çerçeve oluşturur. Her a_0, b_0 için çerçeve sınırları,

$$A \leq \frac{\pi}{b_0 \log a_0} \int \frac{|\Psi(\Omega)|^2}{|\Omega|} d\Omega \leq B \quad (2.18)$$

eşitsizliği ile belirlenir.

Kabul edilebilirlik koşulunu sağlamayan dalgacık fonksiyonları için bu sınırlar sapar. $A=B=1$ ise çerçeve dardır. Bir fonksiyonun kaldırılması çerçeveyi eksik bırakırsa o çerçeve keskindir. $A=B=1$ ile dar, kesin çerçeve $L^2(R)$ için ortonormal bir baz meydana getirir.

a_0, b_0 ve ψ nin bazı özel seçimleri için $\psi_{m,n}$; $L^2(R)$ de ortonormal bir baz meydana getirir. Haar modelinden yola çıkılarak $a_0=2, b_0=1$ olursa ψ iyi zaman - frekans sınırlaması sağlar, öyle ki $\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n)$; $L^2(R)$ de ortonormal bir baz meydana getirir. Yani ortonormal dalgacıklar $\{\psi_{mn}(t)\}$,

$$\int \psi_{mn}(t) \psi_{m'n'}(t) dt = \begin{cases} 1, m=m', n=n' \\ 0, \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (2.19)$$

eşitliğini gerçekler ve her iki indis de ortonormaldir. Benzer olarak ileride tanımlanacak olan ölçekleme fonksiyonu aynı ölçek dışında ortonormallik koşulunu sağlar.

$$\int \phi_{mn}(t) \phi_{ml}(t) dt = \delta_{n-l} \quad (2.20)$$

Ölçekleme fonksiyonu, aynı ölçekte bir işareti temsil etmede, dalgacık fonksiyonunun tamamlayıcısı olan alçak geçiren bir filtredir. $f \in L^2(\mathbb{R})$ işareti, ölçek uzayı üzerinde kendisinin izdüşümü yoluyla m ölçeğinde yaklaştırılabilir. Şekil 2.6 da dalgacık filtre dizisi yoluyla verilmiş olan dalgacık katsayıları görülmektedir. $f(t)$ ile $\psi_m(-t)$ nin konvolüsyonu

$$y_m(t) = \int f(\tau) \psi_m(\tau-t) d\tau \quad (2.21)$$

Burada $\psi_m(t) = 2^{-m/2} \psi_m(2^{-m}t)$ dir. $n2^m$ de $y_m(t)$ yi örnekleyerek

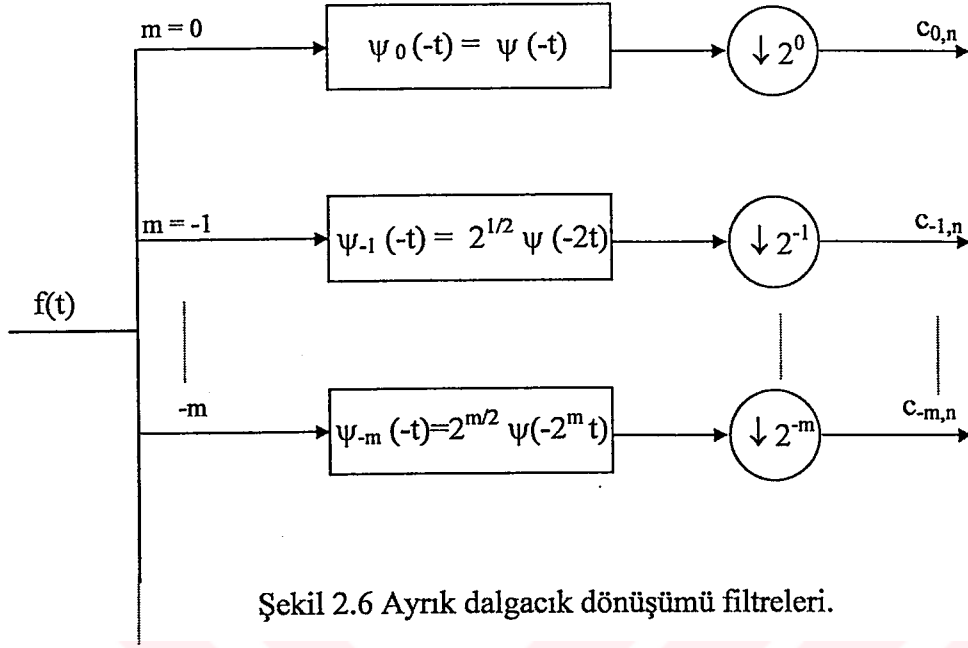
$$y_m(n2^m) = 2^{-m/2} \int f(\tau) \psi_m(2^{-m}\tau-n) d\tau = d_{m,n} \quad (2.22)$$

elde edilir. Dalgacık aşağı örnekleyicisi, bulunduğu pozisyonla ya da dizideki ölçekle değişir. Her bir düğüm 2^{-m} ölçeği ve $n2^{-m}$ kayma ile bir $\psi_{mn}(t)$ ana dalgacık fonksiyonuna karşı düşer. Bu şekilde oluşturulan dalgacık ızgarası şekil 2.8 de gösterilmiştir. Izgara noktalarında dalgacık dönüşümü terimleri ile verilmiş bir işaret temsil edilebilir.

$$\psi(x) = 2 \sum_k d_k \phi(x-k) \quad (2.23)$$

$$\phi(x) = 2 \sum_k c_k \phi(2x-k) \quad (2.24)$$

$\phi(x)$ fonksiyonu, $\int \phi(x) dx = 1$ olması için normalleştirilir.



Şekil 2.6 Ayırık dalgacık dönüşümü filtreleri.

$x(k)$ ayırık işaretleri için ayırık dalgacık dönüşümü

$$w[m, n] = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_k \psi[n/2^m - k] x[k] \quad (2.25)$$

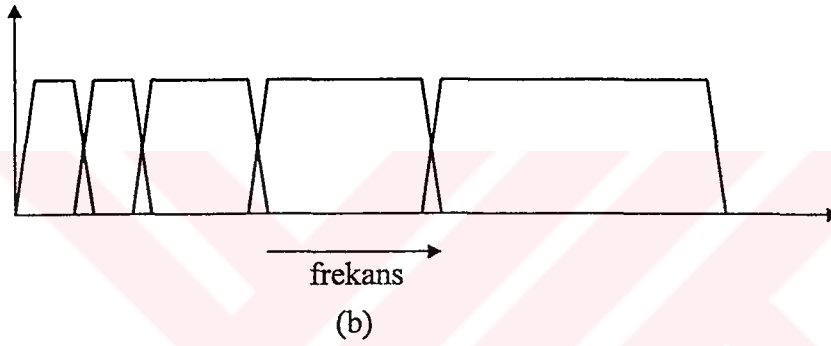
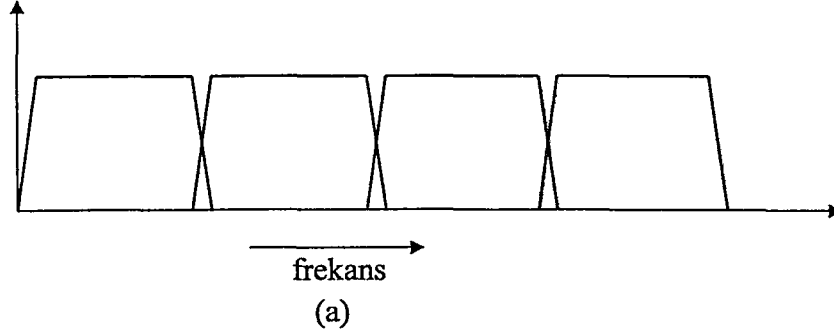
ile verilir [3]. Sonlu impuls cevaplı (FIR) sayısal filtreler için genel eşitlik

$$y[n] = \frac{1}{c} \sum_k x[k] h[n-k] \quad (2.26)$$

ile verilir. Bu benzerlikten dolayı ayırık dalgacık dönüşümü ileride görüleceği gibi filtre bankı yoluyla temsil edilecektir. $\psi[n/2^m - k]$; alçak geçiren sayısal filtrenin impuls cevabıdır.

Dalgacık dönüşümünde $a = a_0^m$ ve $b = n a_0^m$ olarak alındığından $1, 1/a, 1/a^2, \dots$ şeklinde geometrik ölçekleme ve $0, n, 2n, \dots$ ile öteleme vardır. Kısacası Fourier dönüşümünde frekans eksenini üniform olarak kaplanmasına karşın

ayrık dalgacık dönüşümünde frekans eksenini logaritmik olarak örtülür. Her iki durum da şekil 2.7. de gösterilmiştir.

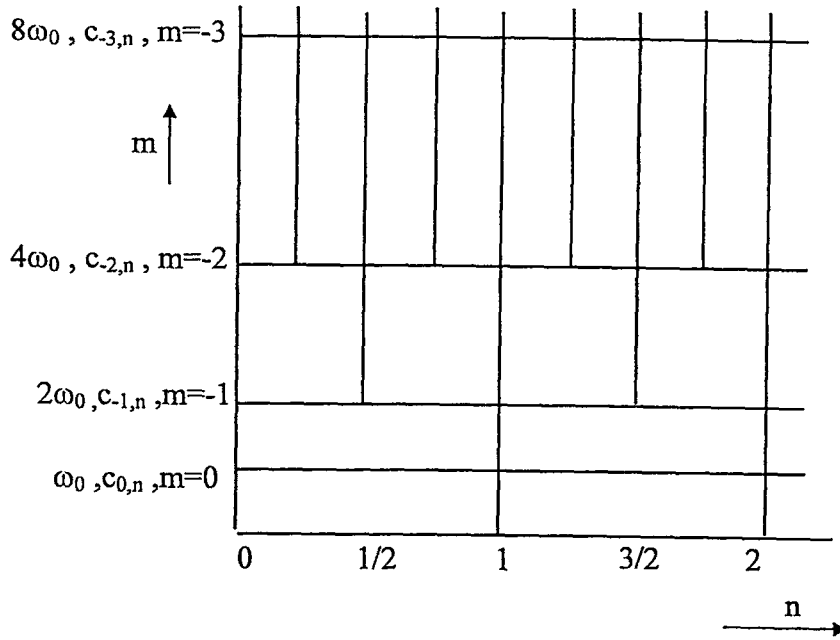


Şekil 2.7 Frekans ekseninin kaplanması

(a) Kısa-zaman Fourier dönüşümünde.

(b) Ayrık dalgacık dönüşümünde.

Ayrık dalgacık dönüşümü çıkışı iki boyutlu ızgarada gösterilir. Fakat zaman ve frekansta farklı bölmeler vardır. Şekil 2.8. deki dikdörtgenler eşit alana ya da sabit zaman-bandgenişliği çarpımına sahiptir. Düşük ölçeklerde (yüksek frekanslar) daralır, yüksek ölçeklerde (düşük frekanslar) genişler.



Şekil 2.8 Ayrık dalgacık dönüşümü için diadik örnekleme ızgarası.

2.6. Haar Dalgacığı

İlk dalgacık ortonormal bazı, Haar bazıdır. Diğer dalgacıklar Haar dalgacığının türetilmesi yoluyla elde edilirler[1]. $\psi(t)$ nin yayılmaları ve ötelemeleri $\psi_{m,n}(t)$ Haar fonksiyonlarını meydana getirir. $a_0=2$, $b_0=1$ olup $\psi_{m,n}(t)=2^{-m/2} \psi(2^{-m}t-n)$; $L^2(\mathbb{R})$ de ortonormal bir baz meydana getirir. Haar dalgacığı,

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (2.27)$$

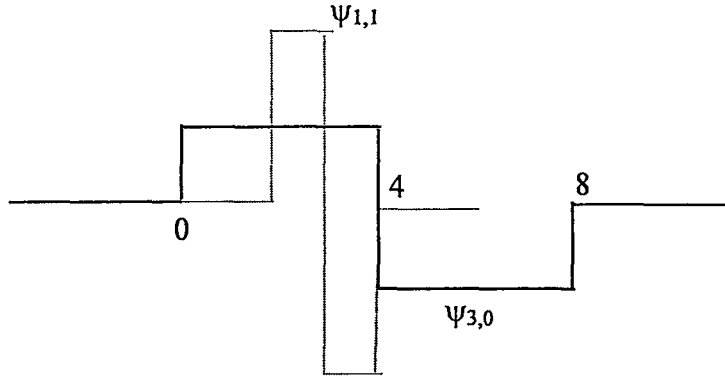
Ölçekleme fonksiyonu,

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 1 \\ 0, \text{diğer} \end{cases} \quad (2.28)$$

şeklinde. Haar fonksiyonu sürekli değildir ve Fourier dönüşümü $|\xi|^{-1}$ şeklinde bozulma gösterdiği için frekansta kötü bir sınırlamaya neden olur.

$(\psi_{m,n}) = [2^m n, 2^m (n+1)]$ olduğu için aynı ölçekteki iki Haar dalgacığı üstüste gelmez. Bu durum şekil 2.9 da gösterilmiştir.

$$\int \phi(t-n) \phi(t-m) dt = \delta_{n-m} \quad \text{ve} \quad \langle \psi_{m,n}, \psi_{m',n'} \rangle = \delta_{n,n'} \quad (2.29)$$



Şekil 2.9 Farklı ölçeklerde iki Haar dalgacığı

Rastgele bir $f(t)$ fonksiyonuna Haar dalgacığının lineer bir birleşimi yoluyla yaklaşım yapılabilir [2].

2.7. İşaretlerin Çoklu -Çözünürlük Analizi

İşaret işleme yönünden dalgacık bandgeçiren bir filtredir [7].

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0) \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad a_0 = 2, b_0 = 1 \quad (2.30)$$

ile verilen diadik ızgarada dalgacık gerçekte bir oktav band filtresidir. Bu yüzden dalgacık dönüşümü takibinde Nyquist frekanslarına göre örneklenme olan oktav band filtre kümesi yoluyla sabit-Q filtreleme olarak gösterilebilir. Mallat ve Meyer çoklu çözünürlük analizi kavramını tanıştırmıştır ve bunu ortonormal dalgacık bazlarını elde etmek için kullanmışlardır.

Bir dizi sonlu uzunlukta ise kompak desteklidir denir. Burada kompak destekli ortonormal dalgacığı oluşturmak için alınan yaklaşımlar incelenmiştir. Amaç; bu

dalgacık aileleri ve bir işaretin piramid - diadik ağaç uzantıları arasındaki bağlantıyı göstermektedir.

2.7.1. Ölçekleme Fonksiyonu ve V_m Alt Uzayları

Çoklu çözünürlük analizi $L^2(\mathbb{R})$ nin kapalı alt uzayları $\{V_m, m \in \mathbb{Z}\}$ nin bir dizisini içerir. Bu alt uzaylar aşağıdaki koşulları sağlarlar [1],[4]:

$$1) \quad \dots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots \quad (2.31a)$$

$$2) \quad \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} V_m = \{0\} \quad \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} V_m = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.31b)$$

$$3) \text{ Her } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ fonksiyonu için } f(x) \in V_m \Leftrightarrow f(2x) \in V_{m-1} \quad (2.31c)$$

$$4) \quad \{\phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}, V_0 \text{ için ortonormal bazdır.}$$

(4) özelliğinden $\{\phi_{0,n}, n \in \mathbb{Z}\}; V_0$ için ortonormal bir baz oluşturur. Dolayısıyla (3) özelliğinden $\{\phi_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\}$ bütün m ler için V_m in ortonormal bir bazıdır. $\phi(t)$ fonksiyonu çoklu çözünürlük analizinin ölçekleme fonksiyonu olarak adlandırılır. $\phi(t) \in V_0$ ölçekleme fonksiyonu, V_m için ortonormal baz olan her $m \in \mathbb{Z}$ için

$$\{\phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \phi(2^{-m}t - n)\} \quad (2.32)$$

kümesi vardır.

$$\int \phi_{m,n}(t) \phi_{m,n'}(t) dt = \delta_{n-n'} \quad (2.33)$$

$\phi(t)$ ölçekleme fonksiyonunun ötelemeleri $\{\phi(t-n)\}, V_0$ ı kaplar. V_0 içindeki fonksiyonun genişlemesi yani $\phi(2t-n)$ yoluyla V_1 kaplanır. V_1 deki baz fonksiyonlar

$$\phi(2(t-n)), n \text{ çift}$$

$\phi(2(t-n)-1)$, n tek

şeklindedir. İki fonksiyonun tamsayı ötelemeleri tarafından V_1 üretilir. $\phi(t)$, $\phi(2t)$ nin tek ve çift ötelemelerinin lineer bir birleşmesidir. $\phi(t) \in V_0 \subseteq V_1$ olduğu için ve $V_1 = \{\phi(2t-n)\}$ fonksiyonlarıyla örtüldüğü için $\{h_0(n)\}$ karesel toplanabilir dizisi vardır ve ölçekleme fonksiyonu (2.34) eşitliğini sağlar. Bu eşitliğe arıtma eşitliği, yayılma eşitliği ya da iki ölçekli fark eşitliği denir.

$$\phi(t) = 2 \sum_n h_0(n) \phi(2t-n) \quad (2.34)$$

Bu eşitliğin her iki tarafı integre edilir ve ϕ nin integralinin sıfır olmayacağı gözönüne alınırsa,

$$\sum_n h_0(n) = 1 \quad (2.35)$$

olur. Genel durumda, ölçekleme fonksiyonu, normalizasyon ve arıtma eşitliği yoluyla tek olarak belirlenecektir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1 \quad (2.36)$$

Çoğu uygulamalarda, ölçekleme fonksiyonunun kendisi kullanılmaz, bunun yerine doğrudan $h_0(n)$ ile çalışılır. (2.34) eşitliğindeki araölçek (interscale) baz katsayıları incelenir.

$\phi(t)$ nin Fourier dönüşüğü $\Phi(\Omega)$ olmak üzere (2.34) eşitliğinde her iki tarafın Fourier dönüşümü alınır

$$\Phi(\Omega) = \sum_n h_0(n) e^{-j\frac{\Omega}{2}nT} \Phi\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (2.37)$$

elde edilir. Burada

$\omega = \Omega T$ olup

Ω : Sürekli zaman işareti frekans değişkeni.

ω : Ayrık zaman işareti frekans değişkenidir.

$$H_0(e^{j\omega}) = \sum_n h_0(n) e^{-j\omega n} \quad (2.38)$$

alınırsa

$$\Phi(\Omega) = H_0(e^{j\omega/2}) \Phi\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (2.39)$$

elde edilir. $H_0(e^{j\omega})$, $\{h_0(n)\}$ dizisinin Fourier dönüşümü olup 2π periyotludur.

$\phi(2t)$ ve $\Phi\left(\frac{\Omega}{2}\right)$ den tekrar $\Phi(\Omega)$ hesaplanır. Bu işlemler yinelenirse ve limit durumunda n sonsuza giderken $\Omega/2^n = 0$ olduğu düşünülürse

$$\Phi(\Omega) = \Phi(0) \prod_{k=1}^{\infty} H_0(e^{j\omega/2^k}) \quad (2.40)$$

eşitliği elde edilir.

Çoklu çözünürlük yaklaşımının bütünlük özelliği (2.31b) her ölçekleme fonksiyonunun sıfırdan farklı bir ortalamaya sahip olması kısıtlamasını getirir.

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \neq 0 \quad (2.41)$$

Eğer $\phi(t)$ gerçelse $\phi_{0n}(t)$ nin ortonormal olması gereksinimi ile $\phi(t)$, işarete bağlı olarak tektir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = \pm 1 \quad (2.42)$$

$$\omega = 0 \text{ için } |\Phi(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt \right| = |H_0(e^{j\omega})| = 1 \quad (2.43)$$

olur.

Dolayısıyla , sürekli zaman ölçekleme fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $\{h_0(n)\}$ ara ölçek katsayılarının ayrık zaman Fourier dönüşümlerinin sonsuz çarpım çözümü olarak elde edilir. Eğer $\{h_0(n)\}$ ara ölçek katsayı dizisi sonlu ise $\phi(t)$ ölçekleme fonksiyonuna tam desteklidir denir. Eğer $h_0(n)$ $0 \leq n \leq N-1$ aralığında ise o zaman $\phi(t)$ de $0 \leq t \leq (N-1)T$ aralığında desteklidir.

Eğer $\phi(t)$ $[0, N-1]$ de tam destekli ise buna karşı düşen $\psi(t)$ dalgacığı $[1-N/2, N/2]$ aralığında tam desteklidir.

$$H_0(\pi) = 0, H_0(0) = 1, \sum_n (-1)^n h_0(n) = 0 \quad (2.44)$$

$\{h_0(n)\}$ katsayı kümesi araölçek baz katsayılarıdır. İki bandlı birimsel filtre bankının alçak geçiren birim örnek cevabına karşı düşer.

2.7.2 Dalgacık Fonksiyonu ve W_m Detay Uzayları

V_{m+1} de V_m in dik tamamlayıcısı W_m olsun.

$$V_{m+1} = V_m + W_m \quad V_m \perp W_m \quad (2.45)$$

Mümkün olan sonsuz W_m uzaylarının doğrudan doğruya toplamı $L^2(R)$ yi kaplar: V_m , m rezolüsyonu yaklaşımından $m+1$ rezolüsyonu yaklaşımına giden fark bilgisini içerir. Bu şekilde belirlenen W_m uzayı tek değildir.

$$\bigoplus_j W_j = L^2(R) \quad (2.46)$$

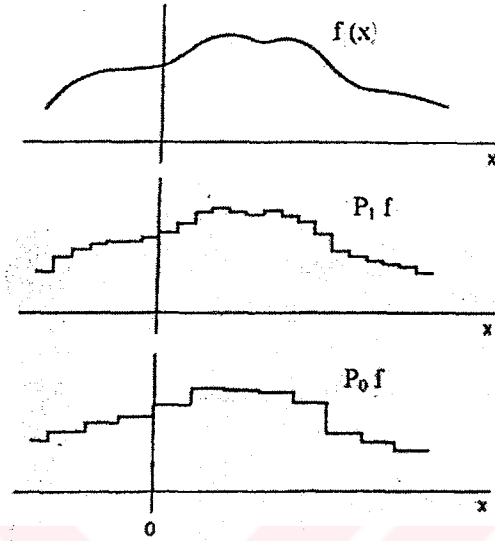
$\phi(t)$ ölçekleme fonksiyonu V_0 uzayı ile, dalgacık fonksiyonu da W_0 ile birleştirilir. P_m ve $Q_m; L^2(R)$ den V_m ve W_m üzerine izdüşüm işlemcileri olmak üzere her $f \in L^2(R)$ için $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m f = f$ olur. m azalırken $P_m f; f$ in

daha iyi yaklaşımlarını sağlar.

$$P_{m+1} f = P_m f + Q_m f \quad (2.47)$$

$P_m f$; V_m de f in alçak geçiren kısmıdır ve $Q_m f$; yüksek frekans detayı ya da farktır. $Q_m f$; V_m den V_{m+1} e giden bilgidir. Ortogonal ya da tamamlayıcı uzay aşağıdaki farkla ifade edilir.

$$Q_m f = P_{m+1} f - P_m f \quad Q_m f \in W_m \quad (2.48)$$



Şekil 2.10 $f(x)$ fonksiyonu ve $f(x)$ in V_1 ve V_0 uzaylarına izdüşümleri W_m terimi, tek bir dalgacık ya da ana fonksiyon $\psi(t)$ nin $\{\psi_{m,n}(t)\}$ öteleme ve yayılmaları yoluyla elde edilir. W_m uzayları hepsi birlikte ortogonaldır ve bunların doğrudan toplamı $L^2(R)$ yi verir. Her m için, $\{\psi_{m,n}(t); n \in \mathbb{Z}\}$ kümesi W_m için ortonormal bir baz meydana getirir. $\{\psi_{m,n}(t); m, n \in \mathbb{Z}\}$ bütün biriktirilmeleri $L^2(R)$ nin ortonormal bir dalgacık bazıdır.

$\{\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n)\}$; çok ölçekli analiz ile birleştirilmiş dalgacık bazıdır.

$$\int \psi_{m,n}(t) \psi_{m',n'}(t) dt = \delta_{m-m'} \delta_{n-n'} \quad (2.49)$$

özellği ile (2.45) eşitliğinden verilen bir rezolüsyonda $P_{m+1} f$ fonksiyonu, farklı ölçeklerde eklenmiş detayların toplamı olarak temsil edilebilir. Benzer olarak bandgeçiren dalgacık fonksiyonu, $\phi(2t)$ nin ötelemelerinin lineer bir birleşimi olarak açıklanabilir. $\psi(t) \in W_0 \subseteq V_1$ olduğu için temel dalgacık eşitliği denilen (2.50) eşitliği yazılır. ψ , V_1 in elemanı olduğu için öyle bir $\{h_1(n)\}$ dizisi vardır ki bu eşitlik sağlanır.

$$\psi(t) = 2 \sum_n h_1(n) \phi(2t-n) \quad (2.50)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (2.51)$$

$H_1(e^{j\omega})$, $\{h_1(n)\}$ dizisinin Fourier dönüşümü ve 2π periyotlu

$$H_1(e^{j\omega}) = \sum_n h_1(n) e^{-jn\omega} \quad (2.52)$$

olmak üzere (2.50) eşitliğinin dönüştürülmesi ile dalgacığın dönüşümü ,

$$\Psi(\Omega) = H_1(e^{j\omega/2}) \Phi\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (2.53)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim terim yerine (2.40) eşitliğindeki sonsuz çarpım yazılırsa

$$\Psi(\Omega) = H_1(e^{j\omega/2}) \prod_{k=2}^{\infty} H_0(e^{j\omega/2^k}) \quad (2.54)$$

elde edilir.

$$\sum_n h_1(n) = 0 \quad H_1(0) = 0 \quad (2.55)$$

$\{h_1(n)\}$ katsayıları, iki kanallı TO(tam oluşturmali) filtre bankı yapısında yüksek geçiren kol olarak tanımlanır. Eğer analiz ve sentez filtreleri yoluyla çıkışta elde edilen işaret girişteki işaretin aynısı ise diğer bir deyişle işaretle herhangi bir bilgi kaybı olmamışsa buna işaretin yeniden tam oluşturulması denir.

2.8. Bir $f(t)$ İşaretinin Haar Dalgacığına Göre Analiz ve Sentezi

Haar fonksiyonları düşünüldüğünde $\psi_{mn}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}t - n)$ dalgacıkları aynı ölçeklerde ve karşı ölçeklerde ortonormaldir.

Ölçekleme Fonksiyonu

$$\phi_{mn}(t) = \begin{cases} 2^{-m/2}, & 2^m n \leq t < 2^m(n+1) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\psi_{m,n}(t) = \begin{cases} 2^{-m/2}, & 2^m n \leq t < 2^m(n+1/2) \\ -2^{-m/2}, & 2^m(n+1/2) \leq t < 2^m(n+1) \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.57)$$

$$\phi_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{m,2n} + \phi_{m,2n+1}) \quad (2.58)$$

$$\psi_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{m,2n} - \phi_{m,2n+1}) \quad (2.59)$$

$n=N/2^m$ alınarak dönüşüm katsayıları hesaplanır.

m ölçeğinde ölçekleme ve dalgacık fonksiyonu katsayıları,

$$c_{m,n} = \langle f, \phi_{m,n} \rangle = 2^{-m/2} \int_{2^m n}^{2^m(n+1)} f(t) dt \quad (2.60)$$

$$d_{m,n} = 2^{-m/2} \int_{2^m n}^{2^m(n+1/2)} f(t) dt - 2^{-m/2} \int_{2^m(n+1/2)}^{2^m(n+1)} f(t) dt \quad (2.61)$$

şeklinde ve bu eşitliklerle dönüşüm katsayıları hesaplanır.

m ölçeğinde f in yaklaşımı,

$$P_m f = \sum_n c_{m,n} \phi_{mn}(t) = \sum_n c_{m,n} 2^{-m/2} \phi(2^{-m} t - n) \quad (2.62)$$

ile hesaplanır.

$$f_m(t) = \sum_{n=0}^{N/2^m} c_{m,n} \phi_{mn}(t) + \sum_{n=0}^{N/2^m} d_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (2.63)$$

bağıntısı ile dalgacık dönüşüm katsayılarından işaret yeniden elde edilir.

$V_{m+1} \subset V_m$ olduğundan bir adım sonraki yaklaşım $P_{m+1} f$ dir. $P_{m+1} f$ in ortogonal tümleyeni

$$Q_{m+1} f = P_m f - P_{m+1} f = 2^{-1} \sum_n (c_{m,2n} - c_{m,2n+1})(\phi_{m,2n} - \phi_{m,2n+1}) \quad (2.64)$$

olur.

Haar fonksiyonları zamanda iyi sınırlanmıştır. Fakat zaman domenini yaklaşımındaki süreksizliklere bağlı olarak frekans sınırlaması iyi değildir.

Haar bazı için araölçek katsayıları şöyledir:

$$h_0(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (2.65)$$

$$h_1(n) = \begin{cases} 1/\sqrt{2}, & n = 0 \\ -1/\sqrt{2}, & n = 1 \\ 0, & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad (2.66)$$

$P_m f$ tek ve çift indislere ayrıştırılabilir:

$$P_m f = \sum_n c_{mn} \phi_{mn} = \sum_{n(\text{çift})} + \sum_{n(\text{tek})} = \sum_n c_{m,2n} \phi_{m,2n} + \sum_n c_{m,2n+1} \phi_{m,2n+1} \quad (2.67)$$

$m+1$ ölçeğindeki katsayı;

$$c_{m+1,n} = \langle f, \phi_{m+1,n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{m,2n} + c_{m,2n+1}) \quad (2.68)$$

şeklindedir.

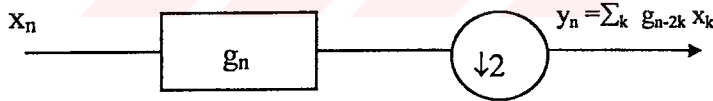
$$P_{m+1}f = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{m,2n} + c_{m,2n+1}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{m,2n} + \phi_{m,2n+1}) \quad (2.69)$$

$$Q_{m+1}f = \sum_n d_{m+1,n} \psi_{m+1,n} \quad (2.70)$$

$$d_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{m,2n} - c_{m,2n+1}) \quad (2.71)$$

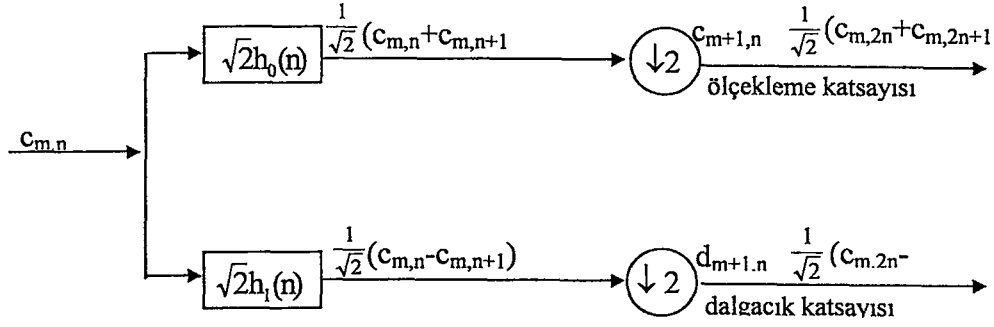
$$\psi_{m+1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{m,2n} - \phi_{m,2n+1}) \quad (2.72)$$

Dolayısıyla f in W_{m+1} üzerine izdüşümü $\psi(t)$ ana fonksiyonunun öteleme ve yayılmalarının lineer birleşimi olarak gösterilebilir.



Şekil 2.11 İkili tutucu desimasyon işlemcisi

Dolayısıyla $c_{m+1,n}$ ve $d_{m+1,n}$ katsayıları $c_{m,n}$ in sırasıyla $\sqrt{2} h_0(n)$ ve $\sqrt{2} h_1(n)$ ile konvolüsyonu alınıp 2 li alt örneklemeden geçirildikten sonra elde edilir. Şekil 2.11 2 li tutucu desimasyon işlemcisini göstermek üzere $h_0(n)$ ve $h_1(n)$ ara katsayıları desime edilmiş bir çift-band filtre bankı olarak gösterilebilir. Üst desimatörün çıkışı, $m+1$ de işaretin yaklaşımındaki katsayıları; alt desimatörün çıkışı da o ölçekteki detay katsayılarını gösterir.



Şekil 2.12 Çift-bandlı filtre bankı yapısı olarak araölçek katsayıları.

2.9. Çift-Bandlı Birimsel TO-KAF ve Dalgacık Bazları

H_0 ve H_1 filtrelerine KAF (Karesel Ayna Filtreleri) denir. Bu kısımda bu filtrelerin sağlaması gereken koşullar incelenecektir.

Her m ölçeğinde $\{\phi_{mn}(t)\}$ ortonormal ve $\phi(t)$ nin ölçekleme fonksiyonu olması için $H_0(e^{j\omega})$ üzerindeki kısıtlamaları bulalım. Bu hususla, eğer $\{\phi(t-n)\}$ V_0 ı kaplarsa, o zaman buna karşı düşen $\Phi(\Omega)$ frekansta birimsellik şartını sağlamalıdır.

$$\sum_k |\Phi(\Omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (2.73)$$

Yani, $\phi(t-n)$ fonksiyon kümesinin ortonormal bir aile oluşturması için bunların Fourier dönüşümleri (2.73) eşitliğini sağlamalıdır.

$$\Phi(2\Omega) = H_0(e^{j\omega}) \Phi(\Omega) \quad (2.74)$$

ile yukardaki eşitlik kullanılır ve bazı düzenlemelerden sonra,

$$\sum_k |H_0(e^{j(\omega+k\pi)})|^2 |\Phi(\Omega+k\pi)|^2 = 1 \quad (2.75)$$

elde edilir. Bu ifade tek ve çift indisli terimlerin toplamı olarak yazılabilir.

$$|H_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2 \sum_{2k+1} |\Phi(\Omega+(2k+1)\pi)|^2 + |H_0(e^{j\omega})|^2 \sum_{2k} |\Phi(\Omega+2\pi k)|^2 = 1 \quad (2.76)$$

Bu eşitlik $\{h_0(n)\}$ ara ölçek katsayılarının karesel büyüklük şartını verir.

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 1 \quad (2.77)$$

Bu, desime edilmiş birimsel TO-KAF de alçak geçiren filtre şartı olarak söylenir. Ortonormal dalgacık bazları için gerekli filtre şartlarını elde etmek için de benzer yöntem izlenecektir.

Ortonormal dalgacık bazları ölçekleme bazlarına bütünleyendir. Bunlar aynı ve farklı ölçeklerde ortonormalliği sağlarlar. Yani,

$$\langle \psi_{mn}(t), \psi_{kl}(t) \rangle = \delta_{m-k} \delta_{n-l} \quad (2.78)$$

m, k : Ölçek parametreleri,
n, l: Öteleme parametreleridir.

$\{\psi(t-n)\}$, W_0 için ortonormal bir baz oluşturduğundan bunların Fourier dönüşümleri birimsellik koşulunu sağlar.

$$\sum_k |\Psi(\Omega+2k\pi)|^2 = 1 \quad (2.79)$$

Önceki gibi $\Psi(2\Omega) = H_1(e^{j\omega})\Phi(\Omega)$ eşitliği kullanılarak

$$|H_1(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 1 \quad (2.80)$$

ya da

$$H_1(z)H_1(z^{-1}) + H_1(-z)H_1(-z^{-1}) = 1 \quad (2.81)$$

elde edilir.

Bu, iki kanallı(çift-bandlı) birimsel TO-KAF de yüksek geçiren (filtre) şartına karşı düşer.

Sonuç olarak bu ölçekleme ve dalgacık fonksiyonları kendileri arasında da ortonormallik koşulunu sağlarlar.

$$\langle \phi_{mn}(t), \psi_{kl}(t) \rangle = 0 \quad (2.82)$$

Aynı ölçekte olduğu gibi farklı ölçeklerde de ölçekleme ve dalgacık fonksiyonlarının ortonormalliği sağladığı görülür.

Zaman domenı şartı frekans domeninde de

$$\sum_k \Phi(\Omega - 2k\pi) \Psi^*(\Omega - 2k\pi) = 0 \quad (2.83)$$

olarak karşılığını gösterir.

(2.40), (2.54), (2.83) eşitlikleri kullanılırsa frekans domenı şartı elde edilir.

$$H_0(e^{j\omega}) H_1(e^{-j\omega}) + H_0(e^{j(\omega+\pi)}) H_1(e^{-j(\omega+\pi)}) = 0 \quad (2.84)$$

ya da

$$H_0(z) H_1(z^{-1}) + H_0(-z) H_1(-z^{-1}) = 0 \quad (2.85)$$

Çapraz filtre ortonormalliği

$$H_1(z) = z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) \quad N \text{ çift} \quad (2.86)$$

ya da zaman domeninde

$$h_1(n) = (-1)^{n+1} h_0(N-1-n) \quad (2.87)$$

seçerek ortogonal ölçekleme fonksiyonundan ortogonal dalgacık türetilir. Ek olarak

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_1(e^{j\omega})|^2 = 1 \quad (2.88)$$

ve

$$\omega = 0 \text{ da } H_0(e^{j\omega}) = 1 \quad (2.89)$$

olduğu için bu takdirde $H_1(e^{j\omega})$ yüksek geçiren bir filtre olmalıdır şöyle ki

$$\omega = 0 \text{ da } H_1(e^{j\omega}) = \sum_k h_1(k) = 0 \quad (2.90)$$

Bu yüzden ele alınan dalgacık kabul edilebilirlik şartını da sağlayarak

$$\Psi(0) = \int \psi(t) dt = 0 \quad (2.91)$$

$H_0(z)$ ve $H_1(z)$; $z = -1$ ve $z = 1$ de en az bir sıfıra sahip olmalıdır. $h_0(n)$ ve $h_1(n)$ sonlu impuls cevaplı filtrelerdir. Dolayısıyla ölçekleme fonksiyonu ve buna bağlı olarak da dalgacık fonksiyonu kompakt desteklidir.

Kısaca, kompakt destekli ortonormal dalgacık bazları, birimsel çift bandlı FIR TO-KAF bankı gösterir. Ters olarak birimsel FIR TO-KAF filtre çifti ($z = -1$ de $H_0(z)$ nin en az bir sıfıra sahip olması kısıntısıyla) kompakt destekli bir ortonormal dalgacık bazı gösterir. Ortonormal dalgacık bazları çoklu çözünürlük analiziyle elde edilebilir.

(2.77) şartından $H_0(0) = H_1(\pi) = 1$ ve $H_1(0) = H_0(\pi) = 0$ dır ve $H_0(\omega)$, $[0, \pi/2]$ aralığı için alçak geçiren bir filtre, $H_1(\omega)$ da $[\pi/2, \pi]$ aralığı için band geçiren bir filtreyi temsil eder. (2.99) ve (2.53) eşitliklerinden $\Phi(\Omega)$ ve $\Psi(\Omega)$ nin enerjisinin ana kısmı, sırasıyla $[0, \pi]$ ve $[\pi, 2\pi]$ aralığında yoğunlaşır. Bu, esas olarak dalgacık uzantısının frekans uzayını diadik bloklara $[2^j \pi, 2^{j+1} \pi]$ bölmesi anlamına gelir. Burada j tam sayıları gösterir [6].

2.10. Çoklu Çözünürlük Piramid Ayrıştırması

Çoklu çözünürlük analizi işareti farklı çözünürlüklerde bileşenlerine ayırıştırır. $f \in V_0$ olan bir f fonksiyonu olsun. O zaman $\{\phi(t-n)\}$ V_0 ı kaplar ve f , ötelenmiş ölçekleme fonksiyonlarının süperpozisyonu olarak temsil edilebilir [1].

$$f(t) = \sum_n c_{0,n} \phi(t-n) = \sum_n c_{0,n} \phi_{0n}(t) \quad (2.92)$$

Burada

$$c_{0,n} = \langle f, \phi_{0n} \rangle = \int f(t) \phi(t-n) dt \quad (2.93)$$

$V_0 = V_1 \oplus W_1$ olduğu için f , biri V_1 de diğeri de V_1 in ortogonal bütünleyeni W_1 de olan iki fonksiyonun toplamı olarak açıklanabilir:

$$f(t) = P_1 f + Q_1 f = \sum_n c_{1,n} \phi_{1,n}(t) + \sum_n d_{1,n} \psi_{1n}(t) = f_v^1(t) + f_w^1(t) \quad (2.94)$$

$c_{1,n}$ ölçekleme katsayıları ve $d_{1,n}$ dalgacık katsayıları

$$c_{1,n} = \langle f_v^1, \phi_{1,n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f_v^1(t) \phi(t/2-n) dt \quad (2.95)$$

$$d_{1,n} = \langle f_w^1, \psi_{1n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f_w^1(t) \phi(t/2-n) dt \quad (2.96)$$

olarak verilir.

Haar fonksiyonları örneğinde, verilmiş $\{c_{0,n}\}$ başlangıç dizisi için, sonraki rezolüsyondaki $\{c_{1,n}\}$ ve $\{d_{1,n}\}$ katsayıları $c_{0,n}$ nin $h_0 \sim = h_0(-n)$ ve $h_1 \sim = h_1(-n)$ ile konvolüsyonunu takiben ikiyle aşağı örnekleyiciyle gösterilebilir. (2.94) eşitliğinin her iki tarafını $\phi_{1n}(t)$ ile çarpıp integre edelim.

$$\langle f, \phi_{1n} \rangle = \langle f_v^1, \phi_{1,n} \rangle + \langle f_w^1, \phi_{1n} \rangle \quad (2.97)$$

Fakat, $f_w^1(t) \{ \psi_{1k}(t) \}$ nin lineer bileşimi olduğundan her bileşeni $\phi_{1,n}(t)$ ye ortogonaldır. Dolayısıyla (2.97) daki ikinci iç çarpım sıfırdır.

$$\langle f, \phi_{1n} \rangle = \langle f_v^1, \phi_{1,n} \rangle = c_{1,n} \quad (2.98)$$

Bu yüzden

$$c_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int f(t) \phi(t/2-n) dt \quad (2.99)$$

(2.34) eşitliğinden

$$\phi(t/2-n) = 2 \sum_k h_0(k) \phi(t-2n-k) \quad (2.100)$$

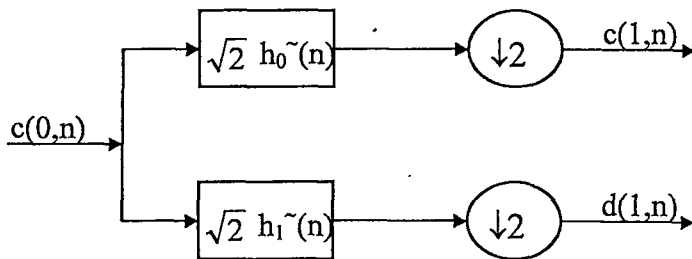
Dolayısıyla

$$c_{1,n} = \sqrt{2} \sum h_0(k) c_{0,2n+k} = \sqrt{2} \sum h_0(k-2n) c_{0,k} \quad (2.101)$$

Benzer yolla

$$d_{1,n} = \sqrt{2} \sum h_1(k-2n) c_{0,k} \quad (2.102)$$

Son iki eşitlik, şekil 2.13 deki gibi takibinde alt örnekleme olan konvolüsyon tanımlar.



Şekil 2.13 Çoklu çözünürlük işaret ayrıştırmasının ilk adımı.

$\{h_0^{\sim}(n), h_1^{\sim}(n)\}$ birimsel FIR filtre çifti meydana getirirler. $d_{1,n}$ ayrık işareti, 1/2 rezolüsyonunda ayrık dalgacık dönüşüm katsayısıdır. Orjinal $c_{0,n}$ işareti ile bunun düzgünleştirilip aşağı örneklenmiş yaklaşımı $c_{1,n}$ arasındaki fark ya da detay bilgisini gösterir. Eğer $c_{0,n}$ birim rezolüsyona sahipse $c_{1,n}$ ve $d_{1,n}$ işaretleri 1/2 rezolüsyonundadır. Her ikiyle aşağı örnekleme rezolüsyonu o faktörle azaltır.

Ayrıştırmanın sonraki adımını görelim. $f_v^1 \in V_1 = V_2 \oplus W_2$

$$f_v^1(t) = f_v^2(t) + f_w^2(t) \quad (2.103)$$

$$f_v^2(t) = \sum c_{2,n} \phi_{2,n}(t) \quad (2.104)$$

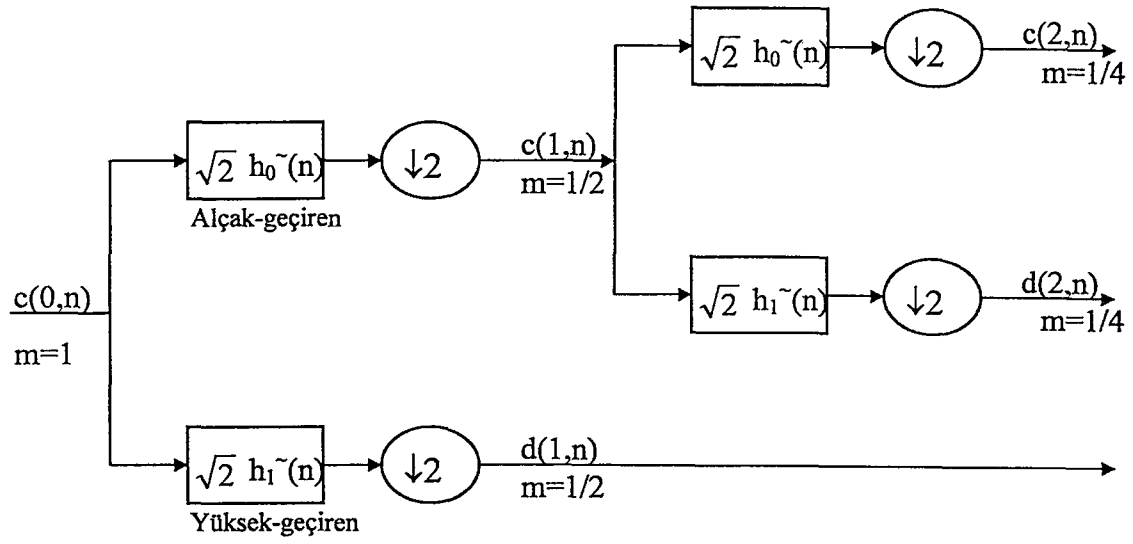
$$f_w^2(t) = \sum d_{2,n} \psi_{2,n}(t) \quad (2.105)$$

1/4 rezolüsyonundaki detay işaretinin (yaklaşım hatası) ve düzgünleşmiş işaretin (yaklaşım) katsayıları

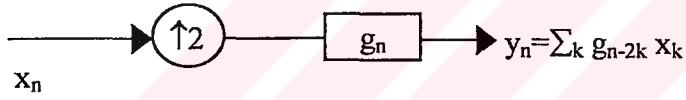
$$c_{2,n} = \sqrt{2} \sum c_{1,k} h_0(k-2n) \quad (2.106)$$

$$d_{2,n} = \sqrt{2} \sum c_{1,k} h_1(k-2n) \quad (2.107)$$

Bu eşitlikler şekil 2.14 de 2-aşamalı çok rezolüsyonlu piramitte gösterilmiştir. Ayrıştırma istediğimiz kadar devam ettirilebilir.

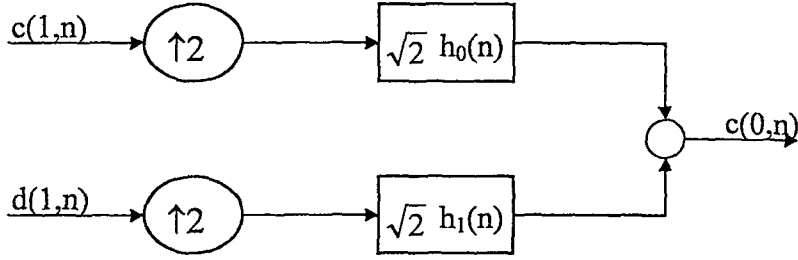


Şekil 2.14 Çoklu çözünürlük piramid ayrıştırması.



Şekil 2.15 Interpolasyon işlemcisi.

Şekil 2.15 interpolasyon işlemcisini göstermek üzere $c_{0,n}$ nin $c_{1,n}$ ve $d_{1,n}$ ayrıştırmasından yeniden oluşturulması şekil 2.16 da gösterilen yukarı örnekleme yapıldıktan sonra ve $h_0(n)$, $h_1(n)$ filtreleriyle konvolüsyonu yoluyla bulunur.



Şekil 2.16 Yeniden oluşturma adımı.

$h_0(n)$ ve $h_1(n)$ i ölçekleme ve dalgacık fonksiyonu terimlerine bağlı olarak yazalım.
 $\{h_0(n)\}$, $\{h_1(n)\}$ araölçek katsayıları

$$\phi(t) = 2 \sum_n h_0(n) \phi(2t-n) \quad (2.108)$$

$$\psi(t) = 2 \sum_n h_1(n) \psi(2t-n) \quad (2.109)$$

O zaman

$$\phi(t/2) = 2 \sum_k h_0(k) \phi(t-k) \quad \text{ve} \quad (2.110)$$

$$\int \phi(t/2) \phi(t-n) dt = 2h_0(n) \quad (2.111)$$

Bu yüzden

$$h_0(n) = 2^{-1} \int \phi(t/2) \phi(t-n) dt \quad (2.112)$$

$$h_1(n) = 2^{-1} \int \psi(t/2) \phi(t-n) dt \quad (2.113)$$

$c_{0,n}$ katsayısı iç çarpımların toplamı olarak yazılabilir.

eşitliği ile $f(t)$ farklı rezolüsyonlardaki detay (dalgacık) bileşenlerinin toplamı ile işaretin L ölçeğindeki alçak-geçiren yaklaşımının toplanması ile temsil edilebilir.

2.11.Güç Spektrumu Yoğunluğu

Bir raslantı işaretine ait frekans bilgisini elde etmekte yaygın olarak kullanılan bir yaklaşım, ayrık Fourier dönüşümü hesaplanarak o işareti frekans tanım bölgesine dönüştürmektir. N örnekli bir veri bloğu için Δf frekans çözünürlüğü ve Δt de örnekleme zamanı olmak üzere $m\Delta f$ frekansındaki dönüşüm:

$$X(m\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp[-j2\pi km / N] \quad (2.118)$$

bağıntısıyla hesaplanır. $x(t)$ işaretinin öz güç spektral yoğunluğu (ÖGSY) da

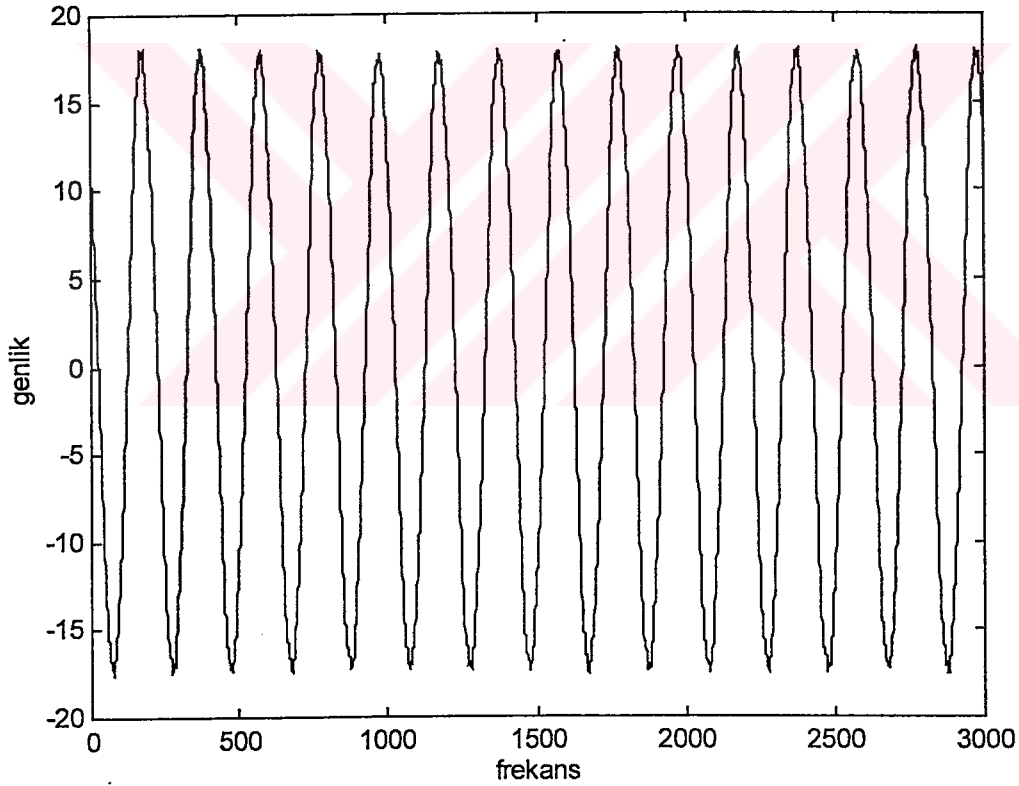
$$S_{xx}(f) = \frac{1}{N} |X(m\Delta f)|^2, f = m\Delta f \quad (2.119)$$

bağıntısıyla hesaplanır.

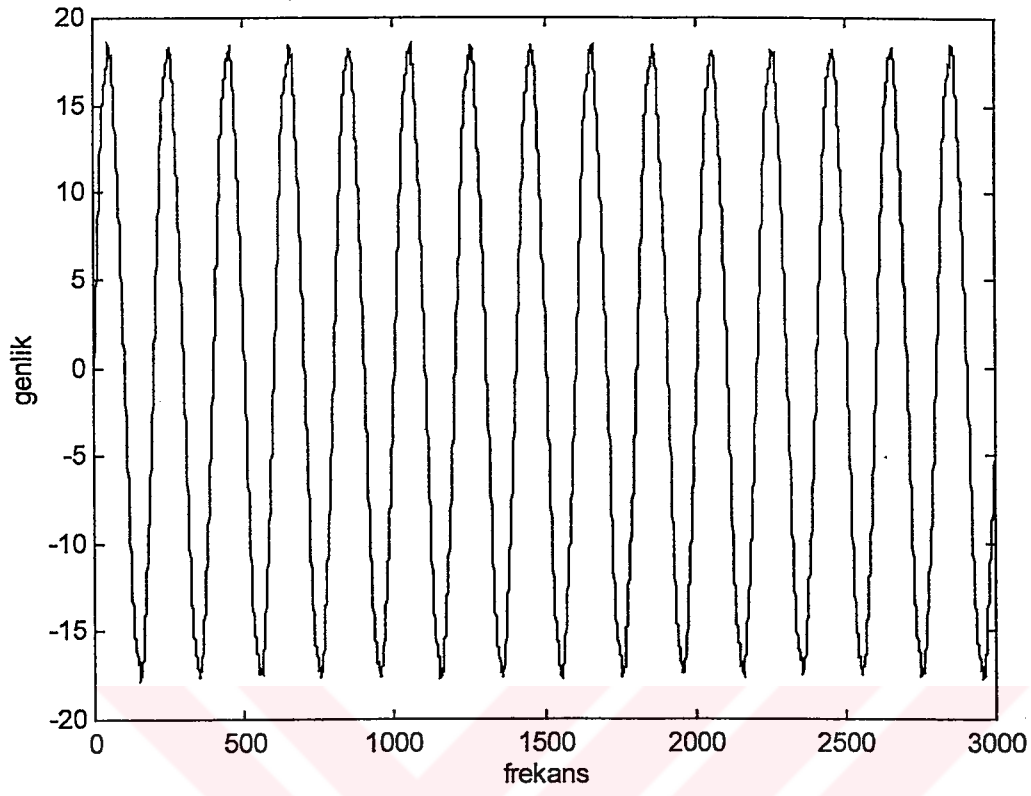
3.MOTOR AKIM İŞARETLERİ

Bu çalışmada 5 HP'lık bir elektrik motorunun sağlam ve rulmanları eskitilmiş haldeki iki durumundan elde edilen akım verileri analiz edilmiştir. Bu veriler 12kHz'de örneklenmiştir. Her iki durum için de veri sayısı 3000'dir. Toplam ölçme süresi 0.25 sn'dir.

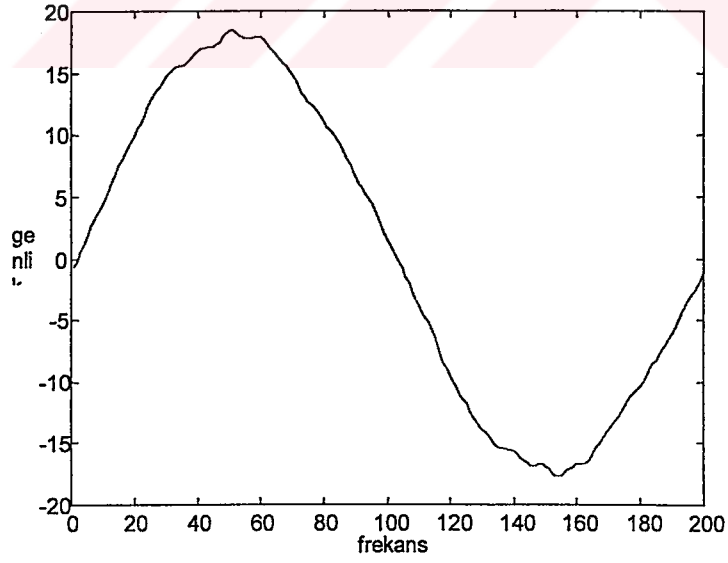
Aşağıdaki grafiklerde sağlam ve bozuk durumlar için akım işaretinin zamana bağlı değişimi görülmektedir:



Şekil 3.1 Akım işareti (sağlam durum)



Şekil 3.2 Akım işareti (bozuk durum)



Şekil 3.3 Bir periyotta akım işareti (bozuk durum)

Bozuk durumdaki akım işareti ile klasik analiz yöntemlerini kullanarak arızayı fiziksel olarak tanımlamak mümkün olamamaktadır.



4.UYGULAMA

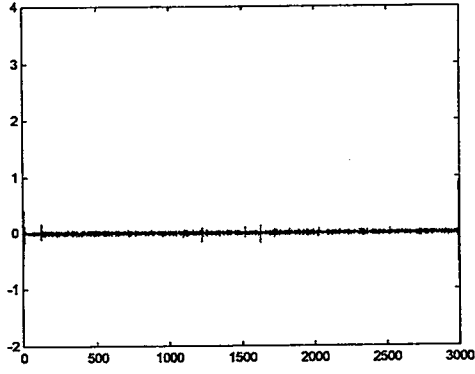
Motor rulmanlarının sağlam ve bozuk durumu için elde edilen akım işareti aşağıdaki tabloda verilen şekilde alt bandlara ayrılmıştır:

Tablo 4.1. Yaklaşım ve Detay Alt Bandları Frekans Aralıkları			
Yaklaşımlar	Alt Bandlar[Hz]	Detaylar	Alt Bandlar[Hz]
a1	0-3000	d1	3000-6000
a2	0-1500	d2	1500-3000
a3	0-750	d3	750-1500
a4	0-375	d4	375-750
a5	0-187.5	d5	187.5-375
a6	0-93.75	d6	93.75-187.5
a7	0-46.88	d7	46.88-93.75
a8	0-23.44	d8	23.44-46.88

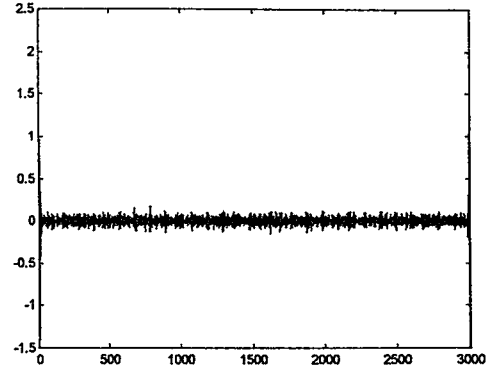
Analizde kullanılan dalgacık tipleri Shannon entropi fonksiyonu şeklinde tanımlanmış enerji fonksiyonunun minimize edilmesiyle saptanmış olup, sağlam durumdaki veri için Deubechies-20, bozuk durumdaki veri için ise Deubechies-15 dalgacık tipleri kullanılmıştır.

Aşağıda sırasıyla motor rulmanının sağlam ve bozuk durumu için alt band grafikleri gösterilmiştir.

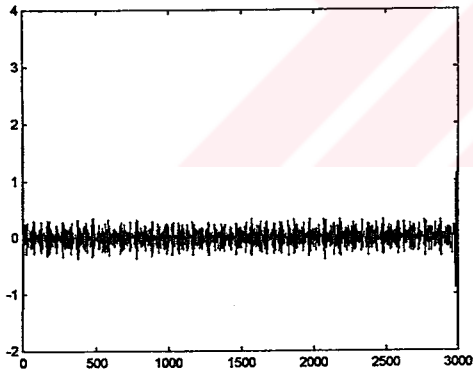
Sağlam Durum-Detay Altbandları



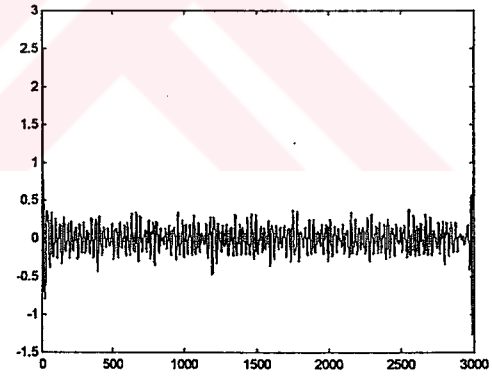
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil4.1.Sağlam durum için detaylar (yüksek frekans bölgesindeki alt bandlar)

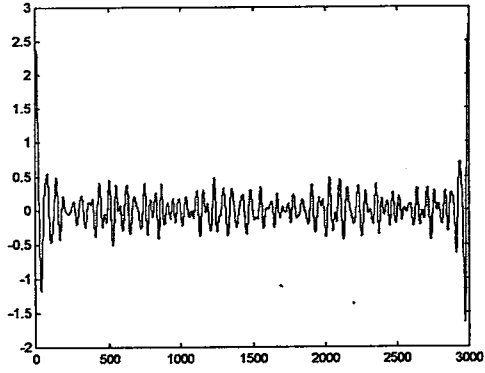
(a)-d1

(b)-d2

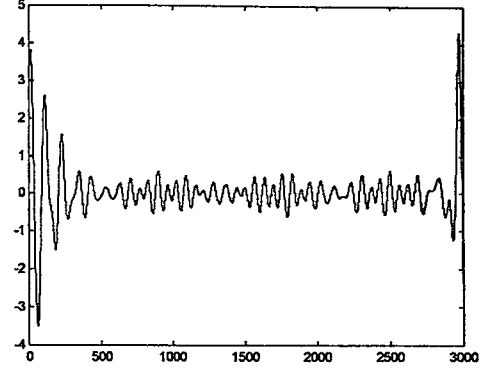
(c)-d3

(d)-d4

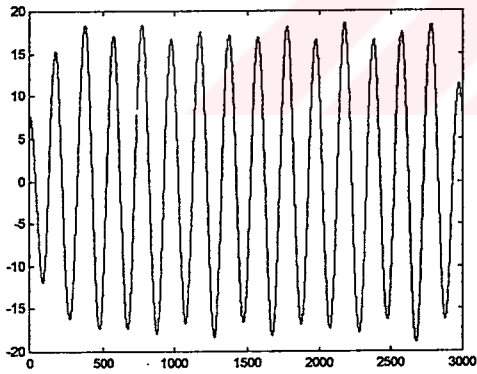
Sağlam Durum-Detay Altbandları



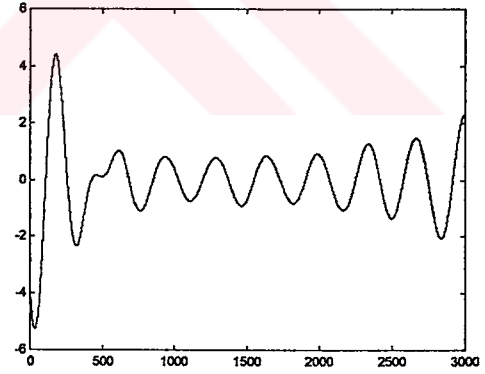
(e)



(f)



(g)



(h)

Şekil4.1.Sağlam durum için detaylar (yüksek frekans bölgesindeki alt bandlar)-devamı

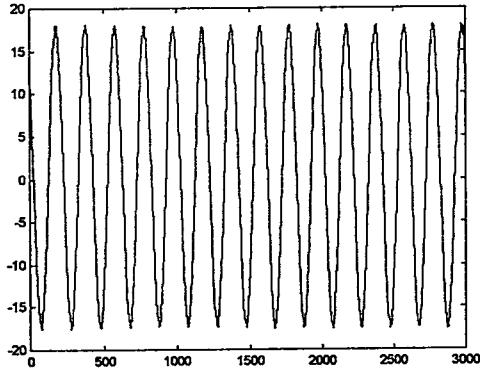
(e)-d5

(f)-d6

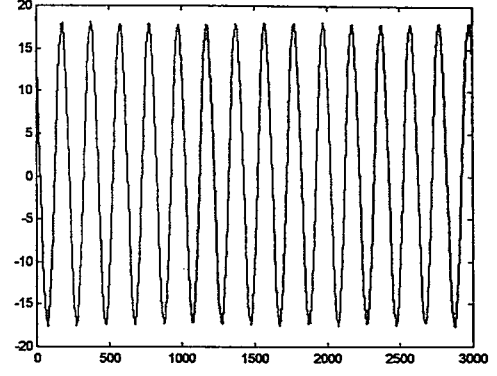
(g)-d7

(h)-d8

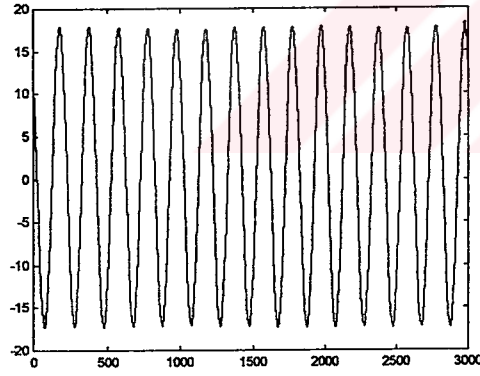
Sağlam Durum-Yaklaşım Altbandları



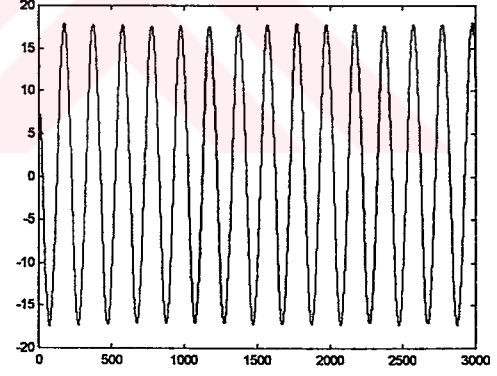
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil4.2.Sağlam durum için yaklaşımlar (alçak frekans bölgesindeki alt bandlar)

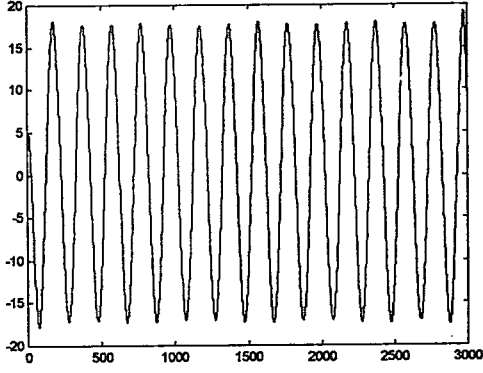
(a)-a1

(b)-a2

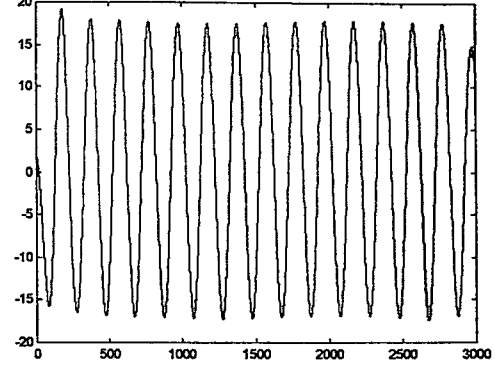
(c)-a3

(d)-a4

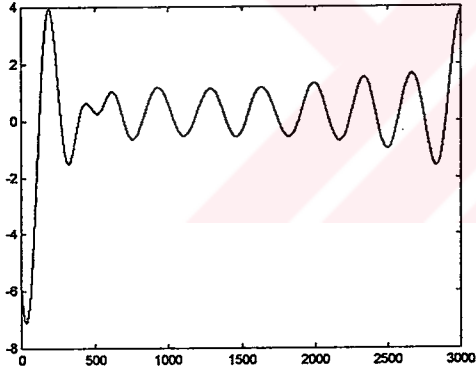
Sağlam Durum-Yaklaşım Altbandları



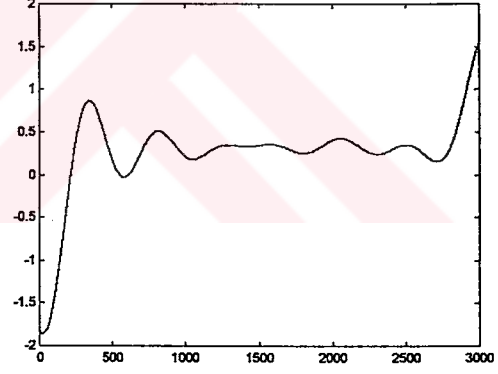
(e)



(f)



(g)



(h)

Şekil4.2.Sağlam durum için yaklaşımlar (alçak frekans bölgesindeki alt bandlar)-devamı

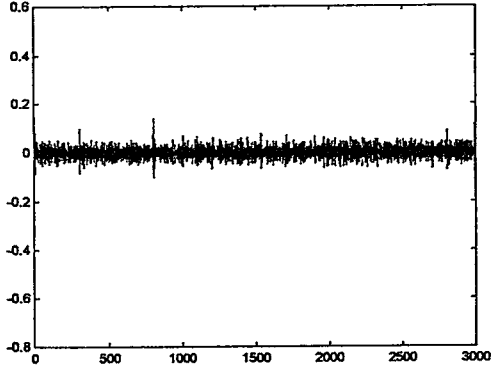
(e)-a5

(f)-a6

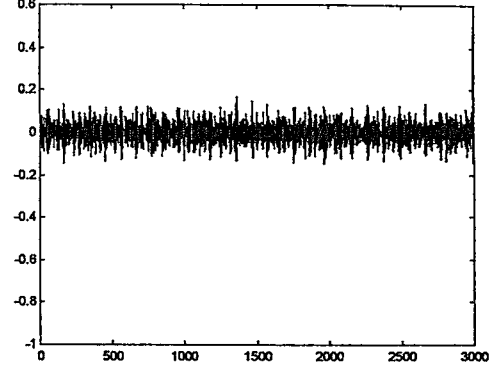
(g)-a7

(h)-a8

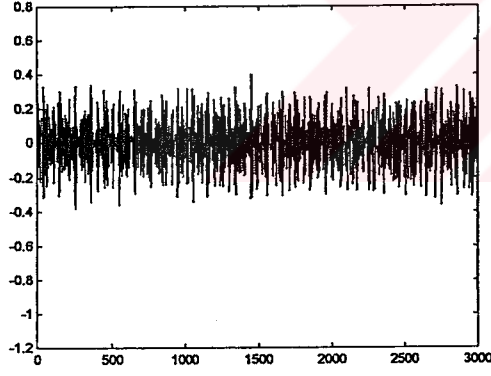
Bozuk Durum-Detay Altbandları



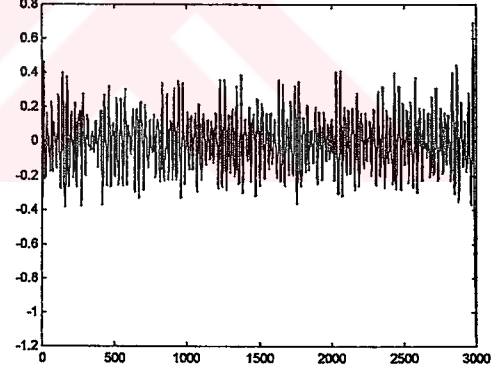
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil4.3.Bozuk durum için detaylar (yüksek frekans bölgesindeki alt bandlar)

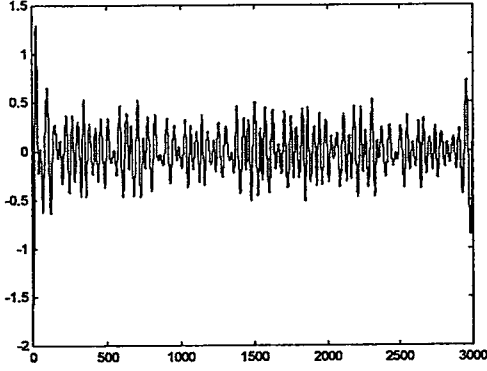
(a)-d1

(b)-d2

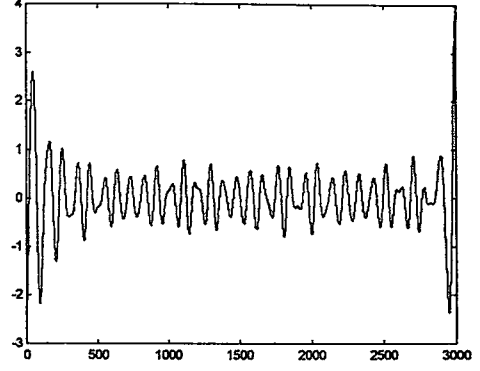
(c)-d3

(d)-d4

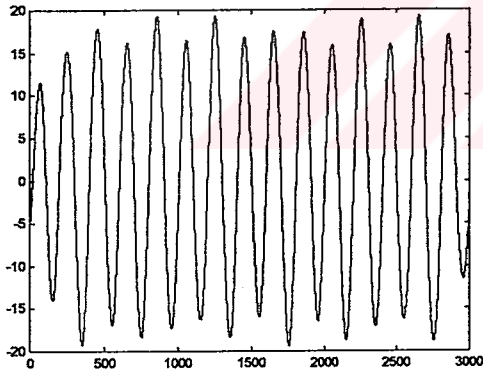
Bozuk Durum-Detay Altbandları



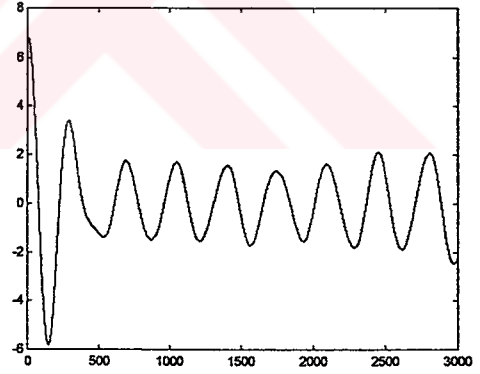
(e)



(f)



(g)



(h)

Şekil4.3.Bozuk durum için detaylar (yüksek frekans bölgesindeki alt bandlar)-devamı

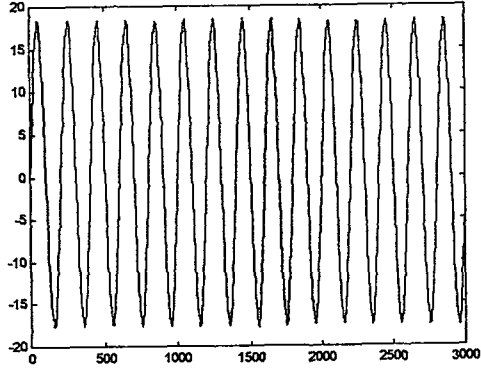
(e)-d5

(f)-d6

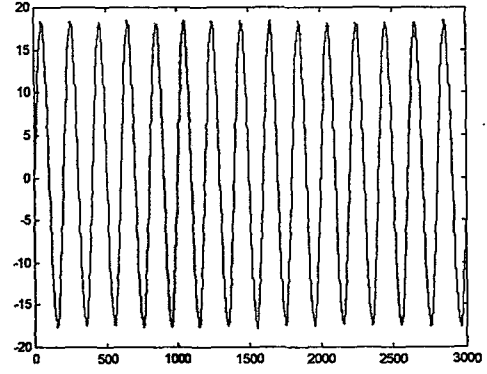
(g)-d7

(h)-d8

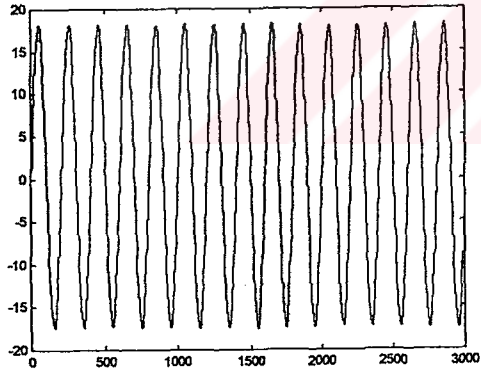
Bozuk Durum-Yaklaşım Altbandları



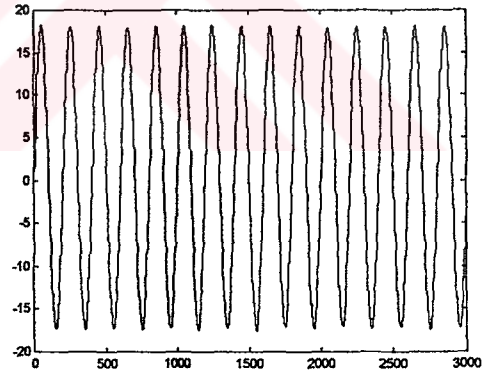
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil4.4.Bozuk durum için yaklaşımlar (alçak frekans bölgesindeki alt bandlar)

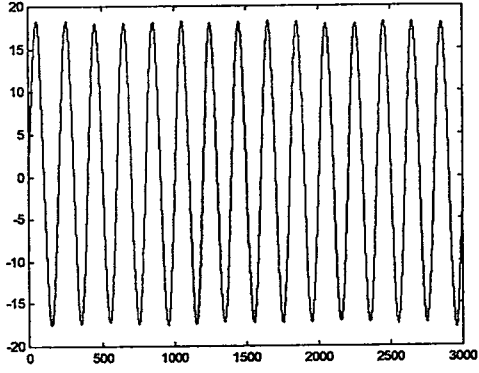
(a)-a1

(b)-a2

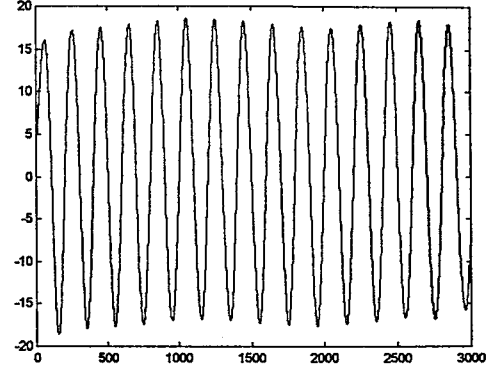
(c)-a3

(d)-a4

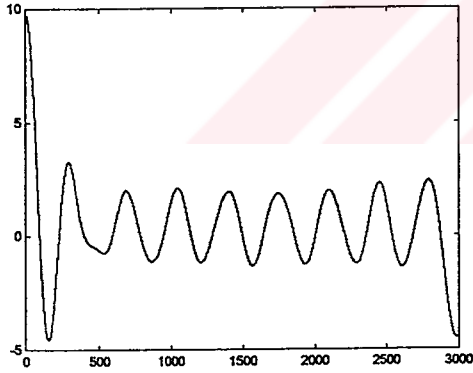
Bozuk Durum-Yaklaşım Altbandları



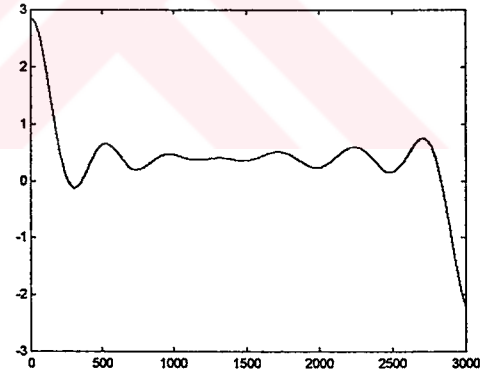
(e)



(f)



(g)



(h)

Şekil4.4.Bozuk durum için yaklaşımlar (alçak frekans bölgesindeki alt bandlar)-devamı

(e)-a5

(f)-a6

(g)-a7

(h)-a8

4.1. Bozuk Durum İçin İşaretin Yeniden Kazanılması

İşaretlerin dalgacık analizi vasıtasıyla yeniden kazanılması aşağıdaki eşitlik ile verilebilir.

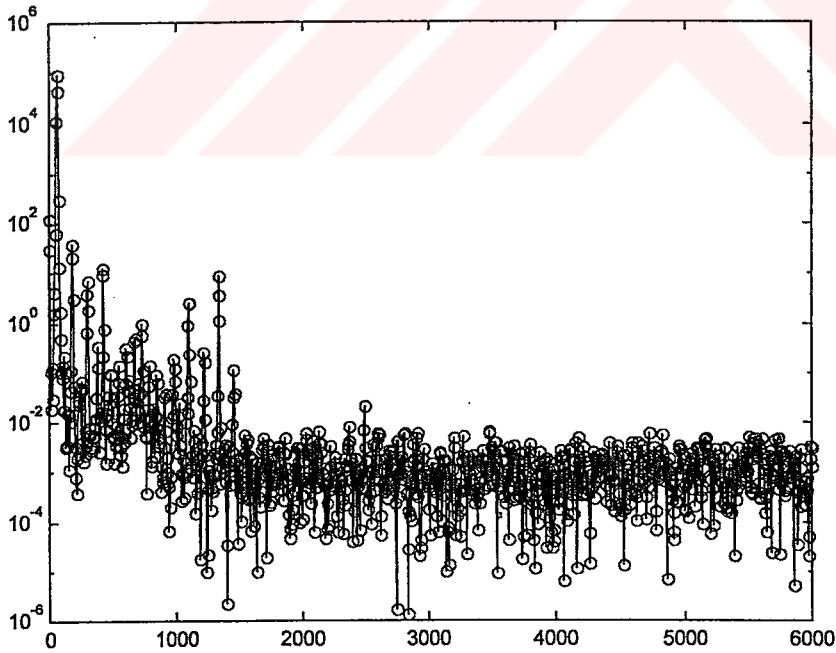
$$y = c_n + \sum_{i=1}^n d_i, n=8 \text{ (Bu uygulamada)} \quad (4.1)$$

Benzer şekilde, yeniden kazanılmış bu işaretin her bir bileşenine ait güç spektrumu yoğunluklarının (GSY) da hesaplanması ile, GSY'lerden oluşan bu birleşim, işaretin spektral değişimi anlamında aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$GSY\{y\} = GSY\{c_n\} + \sum_{i=1}^n GSY\{d_i\} \quad (4.2)$$

4.2. Orijinal İşaretin ve Yeniden Kazanılmış İşaretin Güç Spektrumu Yoğunluğu

Yeniden kazanılmış işaretin ve orijinal işaretin güç spektrum yoğunluklarını aynı grafik üzerinde gösterirsek:

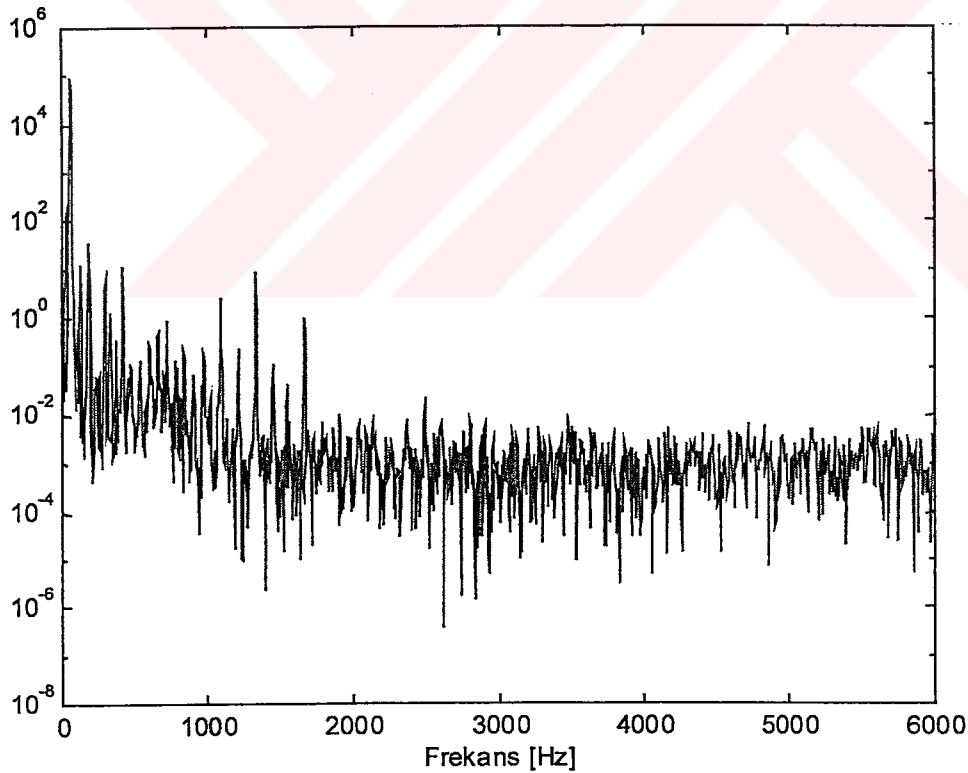


Şekil 4.5. Yeniden kazanılmış işaretin ve orijinal işaretin güç spektrumu yoğunlukları

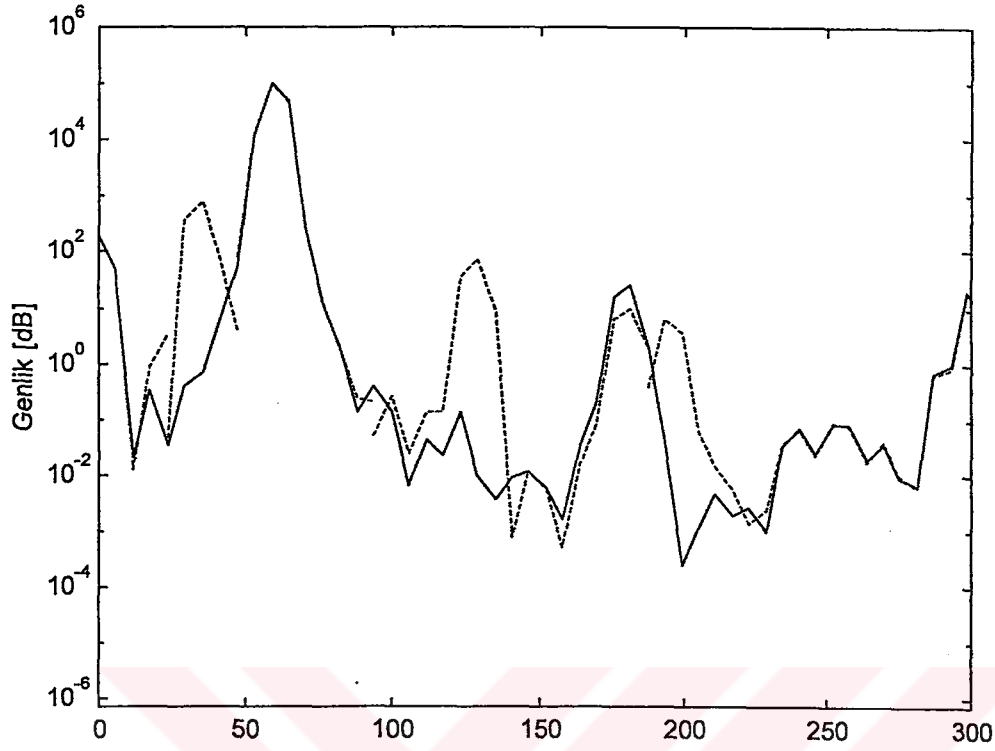
Her iki gösterimin de aynı değerleri aldığını, arıza tanısı ile bir bilgi içermediğini görürüz. Bunun yerine alt bandların önce güç spektrum yoğunluklarını alıp ardından bu sonuçların birbirine ekleyerek orijinal işaretin güç spektrum yoğunluğundan farklı olacağını, bazı frekanslarda güçlenme görülebileceğini söyleyebiliriz.

4.3. Alt Band Spektrumlarının Birleşimi ile Orijinal İşaretin Spektral Değişiminin Karşılaştırılması

Burada denklem (4.2)' de ifade edildiği gibi makinanın faz akımlarından birine ilişkin alt band spektrumları birleştirilebilir. Bu anlamda orijinal işaretin spektral değişimi ile alt bandlardan oluşan spektrum, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'deki gibi üst üste çizdirilerek karşılaştırılabilir.



Şekil 4.6 Orijinal işaretin ve altbandların güç spektrum yoğunlukları



Şekil 4.7 Orijinal işaretin ve altbandların güç spektrumu yoğunlukları II

Şekil 4.7’de görüldüğü gibi dalgacık analizi sonucu elde edilen alt bandlar ve bunlara ilişkin spektrum ifadesinde makinenin dönme frekansı ($29.03 \text{ Hz} \approx 30 \text{ Hz}$) civarında bir kuvvetlenme olduğu görülür. Bu ise rulman arızasına ilişkin elektriksel bozukluktan doğan dönme frekansında görülen bir farklılıktır.

5.SONUÇLAR

Günümüz teknolojilerinde gerek endüstriyel sistemlerde gerekse uzay teknolojileri ve askeri amaçlı sistemlerde süreç güvenliği son derece önemlidir. Bu bağlamda güvenli, kesintisiz ve ekonomik işleme yönelik süreç işletimi için yeni öngörülü-bakım teknolojisinin geliştirilmesine gereksinim duyulur. Bu nedenle öngörülü bakım teknolojileri için daha güvenilir ve etkin yeni yöntemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu açıdan probleme bakıldığında bu çalışma ile elektrik motorları ele alınarak arıza belirlemeye ilişkin yeni bir yöntem geliştirilmeye çalışılmıştır.

Elektrik motorları endüstriyel ve diğer tüm kritik süreçlerde en çok kullanılan elemanlar olup, nedeni basit olmasına rağmen herhangi bir arıza durumunda devre dışı kalması halinde ilgili süreci kesintiye uğratabilmektedir. Bu bakımdan elektrik motorlarında en çok karşılaşılan mekanik arızaya dayalı rulman arızası gözönüne alınarak buna ilişkin arıza tanısı tekniği geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda deteksiyon, motor akımlarından yani elektriksel büyüklüklerden mekanik bir arızayı belirleme şeklinde gerçekleştirilmiştir. Teknik olarak son senelerde ileri işaret işleme konuları dahilinde kabul edilen *dalgacık analizi* yaklaşımı kullanılarak, bu güçlü teknik motor akımlarının analizinde kullanılmıştır. Dalgacık analizinin motor akımlarını alt bandlarına ayırması esas alınarak ve her alt bandın güç spektrumu yoğunlukları hesaplanarak, özel bir birleştirme kuralı altında “spektral-dalgacık” analiz yaklaşımı tanımlanarak işaretin spektrumu ile karşılaştırması yapılmıştır. Karşılaştırmayı daha net yapabilmek için işaretin alçak frekans bölgesine 0-300 Hz’lik aralığına bakıldığında 30Hz civarında yeni yaklaşımın genlik kuvvetlendirmesi yaptığı görülmüştür. Bu, fiziksel olarak 29.03 Hz olarak verilen rotorun dönme frekansıdır ve rulman arızasına dayalı eksenel bozukluktan doğan etkin bir frekans değeridir. Analiz açısından bu frekansın kuvvetlenmesinin nedeni alçak frekanslarda iyice filtrelenmiş işaretin (yüksek frekans bileşenleri uzaklaştırılmış) güç spektrumu yoğunluğu alındığında enerjisinin tam olarak o frekansta yoğunlaşmasıdır. Oysa alt bandlara bölünmeden alınan güç spektrumu

yoğunluğu içerisinde ilgili frekans enerjisi dağılmakta ve bu nedenle herhangi bir kuvvetlenme görülmemektedir.

Sonuç olarak bu çalışma yeni bir tanımlamanın sonuçlarını irdelemekte olup gelecekteki uygulamalar bakımından yöntem daha da geliştirilip Hesaplamalı Zeka (Computational Intelligence) teknikleriyle tümleşik halde gerçek zamanda çalışabilecek yeni tasarımlara doğru yönlendirilebilir.



KAYNAKLAR

- [1] Akansu A.N., Haddad R.A., 1992. Multiresolution Signal Decomposition, Academic Press, USA.
- [2] Daubechies I., 1992. Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Pennsylvania.
- [3] Robertson D.C., Camps O.I., Mayer J.S., Gish W.B., 1996. Wavelets and Electromagnetic Power System Transients, *IEEE Transaction on Power Delivery*, 11, 1050-1068.
- [4] Porat B., 1994. Digital Processing of Random Signals: Theory & Methods, Prentice Hall, New Jersey.
- [5] Weiss L.G., 1994. Wavelets and Wideband Correlation Processing, *IEEE SP Magazine*, Vol:11, No:1.
- [6] Javerth B. Sweldens W., 1993. An Overview of Wavelet Based Multiresolution Analysis pp, 1-40.
- [7] Vetterli M., Herley C., 1992. Wavelets and Filter Banks: Theory and Design, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol.40, No.9, 2207-2231.
- [8] Cho K. R. Lang J. H. and Umans S. D., 1992. Detection of Broken Motor Bars in Induction Motors Using State and Parameter Estimation, *IEEE Transaction on Industry Applications*, 28, 702-709.
- [9] Nicholas J. R., 1993. Predictive Condition Monitoring of Electrical Motors, P/PM Technology, 28-32.
- [10] Schoen R. R., Habetler T. G., Kamran F. and Bartheld R. G., 1994. Motor Bearing Damage Detection Using Stator Current Monitoring, *IEEE Industrial Application Meeting*, 1, 110-116.
- [11] Costello M. J., 1993. Shaft Voltages and Rotating Machinery, *IEEE Transaction on Industry Applications*, 29, 419-425.

- [12] Seker S., Upandhyaya B. R. Erbay A. S. and daSilva A. A., 1998. Rotating Machinery Monitoring and Degradation Trending Using Wavelet Transforms, *MARCON 98 Maintenance and Reliability Conference Proceedings*, 1, 23.01-23.11.
- [13] Vaseghi V. S., 1996. Advanced signal Processing and Digital Noise Reduction, John Wiley, New York.
- [14] Kliman G. B. and Stein J., 1990. Methods of Motor Current Signal Analysis, *Electric Machines and Power Systems*, 20, 463-474.



T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KUR-
TULUŞU
DOKÜMAN NO: 10241
TARİH: 14.05.2014

ÖZGEÇMİŞ

Selim GÜLLÜLÜ 17/06/1976 tarihinde Erzurum'da doğdu. 1994 yılında Erzurum Anadolu Lisesi'ni bitirdikten sonra aynı yıl İ.T.Ü. Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 1998'de bu bölümden mezun oldu. 1999 yılında TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi - Bilişim Teknolojileri Araştırma Enstitüsü - Elektronik Sistemler Bölümü'nde araştırmacı olarak çalışmaya başladı. 2000 yılında Alcatel-Teletaş'ta GSM Sistem Mühendisi olarak çalıştı. Halen Alcatel-Teletaş'ta Kartlı Telefon Sistem Mühendisi olarak çalışmalarına devam etmektedir.

