İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN HARMONİKLİ GERİLİMLERİN KAFESLİ ASENKRON MAKİNADA YARATTIĞI ETKİLERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Duygu BAYRAM

Anabilim Dalı : Elektrik Mühendisliği

Programı : Elektrik Mühendisliği

Tez Danışmanı: Prof. Dr A. Faik MERGEN

OCAK 2009

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN HARMONİKLİ GERİLİMLERİN KAFESLİ ASENKRON MAKİNADA YARATTIĞI ETKİLERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Duygu BAYRAM
(504061008)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Aralık 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Ocak 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Faik MERGEN (İTÜ)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Feriha ERFAN (KOÜ)
Doç. Dr. Özcan KALENDERLİ (İTÜ)

OCAK 2009

ÖNSÖZ

Hayatımın her evresinde ve son derece zorlu bir süreç olan yüksek lisans tez çalışmamın hazırlanma sürecinde, bana maddi ve manevi olarak sonsuz destek veren sevgili annem, babam ve biricik kardeşime sonsuz teşekkürler ederim.

Yönlendirmeleriyle ufkumu açan tez danışmanım, Prof. Dr. A. Faik Mergen'e, yardımlarıyla ve manevi destekleriyle beni yalnız bırakmayan Elektrik Makinaları Laboratuvarı çalışanlarına ve özellikle de her türlü bilgisini benimle paylaşıp, yardımlarını esirgemeyen Araş. Gör. Dr. Murat Yılmaz ve Araş. Gör. Murat İmeryüz'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bununla beraber, her türlü yardımları ve çok değerli dostlukları için Araş. Gör. Suna Bolat Sert, Araş. Gör. Sezen Yıldırım, Araş. Gör. Lale Erdem'e ve çok kıymetli manevi desteği ve yol göstermeleri için Araş. Gör. Berk Canberk'e sonsuz teşekkürler ediyorum.

Aralık 2008

Duygu Bayram

Elektrik Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **xvii**
SUMMARY ..... **xix**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Tezin Amacı 6
2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ **7**
2.1 Fiziksel Matematik Denklemlerinin Temelleri 9
2.1.1 Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı ve sınır koşulları 9
2.1.2 Parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı ve sınır koşulları 10
2.1.3 Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı ve sınır koşulları 11
2.2 Sınır Değer Problemleri 11
2.2.1 Ritz yöntemi 12
2.2.1.1 Varyasyonel ilkesi 12
2.2.2 Galerkin yöntemi 14
2.3 Sonlu Elemanlar Yönteminin İki Boyutlu Elektromanyetik Alan Hesaplarında Kullanımı 15
2.3.1 Enerjinin en küçük değere indirgenmesi ilkesi 15
2.3.2 Sonlu elemanlar yöntemi temelleri 17
2.3.2.1 Birinci dereceden elemanlar 17
2.3.3 İki boyutlu elektromanyetik analiz 21
2.3.3.1 Genel ve yerel numaralandırma 21
2.3.3.2 İnterpolasyon (yaklaşım) fonksiyonu 22
2.3.3.3 Fonksiyonelin elde edilmesi 24
2.3.3.4 Fonksiyonelin minimumlaştırılması 28
3. ELEKTROMANYETİKTE TEMEL KAVRAMLAR **31**
3.1 Elektromanyetik Alan Temelleri 31
3.1.1 Manyetostatik 31
3.1.1.1 Skaler manyetik potansiyel 31
3.1.1.2 Vektör manyetik potansiyel 32
3.1.1.3 Vektör manyetik potansiyel ve akı çizgileri 33
3.1.2 Manyetodinamik 33
3.1.2.1 Değişken alan etkisi 33
3.1.2.2 Sinüzoidal değişen alanlar 34
3.1.2.3 Masif elemanlardaki akı 34
3.2 Maxwell Denklemleri 35
3.3 Güç ve Güç Dağılımları 36
3.3.1 Lorentz kuvveti yöntemi 37
3.3.2 Maxwell- zorlanma (stress tensor) yöntemi: yüzey integrali 37
3.3.3 Birleşik enerjinin türevi yöntemi 37
4. HARMONİKLER **39**
4.1 Harmonik Analizinde Kullanılan Yöntemler ve Harmoniklerle İlgili Tanımlar ve Temel Bağıntılar 39
4.1.1 Harmoniklerin matematiksel ifadesi 40

4.1.2 Fourier katsayılarının belirlenmesi 41
4.1.2.1 Analitik yöntem 41
4.1.2.2 Ölçme yöntemi 42
4.1.2.3 Grafik yöntemi 43
4.1.3 Harmonik analizinde kullanılan yöntemler 43
4.1.3.1 Zamana bağlı analiz 43
4.1.3.2 Frekansa bağlı analiz 44
4.1.4 Harmoniklerle ilgili tanımlar ve temel bağıntılar 48
4.1.4.1 Sinüzoidal olmayan akım ve gerilim dalgaları ile ilgili bağıntılar 48
4.1.4.2 Bir fazlı sistemde güç ifadeleri 50
5.1.5.3. Üç fazlı dengesiz sistemlerde eşdeğer görünür güç, eşdeğer akım ve gerilim kavramları 52
4.2 Elektrik Makinalarında Harmonikler 54
4.2.1 Asenkron makinada harmonikler 54
4.2.1.1 Uzay harmonikleri 54
Asenkron makinanın uzay harmoniği eşdeğer devresi 55
4.2.1.2 Zaman harmonikleri 57
Asenkron makinanın zaman harmoniği eşdeğer devresi 58
4.2.2 Asenkron makinanın harmonikli gerilim altındaki davranışının analitik olarak incelenmesi 60
4.2.2.1 Amper sarım dağılımı 60
4.2.2.2 Herhangi bir harmonik bileşen için makina davranışı 64
5. MAXWELL 2D İLE SONLU ELEMANLAR ANALİZİ 71
5.1 Maxwell 2D & RMxprt Beraber Çalışma Olanağı 73
5.2 Maxwell 2D 74
5.2.1 Maxwell 2D'de simülatör tipleri 74
5.2.1.1 Transient simülatör (Geçici durum simülatörü) 75
5.2.2 Zamana bağlı manyetik alan simülasyonu 75
5.3 RMxprt (Rotational Machine Expert) 78
6. ANALİZLER VE YORUMLAR 81
6.1 Gerilim Dalga Şekilleri 83
6.2 Stator Sargı Akımı Dalga Şekilleri 89
6.3 Moment Dalga Şekilleri 96
6.4 Halkalanma Akısı ve Endüklenen Elektromotorkuvvet Dalga Şekilleri 103
6.5 Kayıp Güç Dalga Şekilleri 117
6.6 Manyetik Akı Yoğunluğu Dağılımları 126
6.7 Akım Yoğunluğu Dağılımları 143
7. SONUÇLAR 153
8. KAYNAKLAR 157

KISALTMALAR

EMK	**:** Elektromotor Kuvvet
IEEE	**:** Institute of Electrical and Electronics Engineers
Maxwell 2D	**:** İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Analizi Programı
RMxprt	**:** Rotational Machine Expert
THB	**:** Toplam Harmonik Bozunum

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : K katsayılar matrisinin genel yapısı 27

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Herhangi bir p elemanı 19
Şekil 2.2 : Yerel ve genel numaralandırma 21
Şekil 4.1 : Asenkron Makina Uzay Harmoniği Eşdeğer Devresi 55
Şekil 4.2 : Asenkron Makina Zaman Harmoniği Eşdeğer Devresi 58
Şekil 4.3 : Sistemin Eşdeğer Devresi 63
Şekil 5.1 : Makinanın statoru 71
Şekil 5.2 : Makinanın rotoru 72
Şekil 5.3 : RMxprt ve Maxwell 2D çalışma diyagramı 74
Şekil 5.4 : Maxwell 2D Akış Diyagramı 77
Şekil 5.5 : RMxprt Akış Diyagramı 79
Şekil 6.1 : Temel bileşen için faz gerilimleri dalga şekilleri 83
Şekil 6.2 : $V5$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 84
Şekil 6.3 : $V7$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 84
Şekil 6.4 : $V11$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 85
Şekil 6.5 : $V1 + V5$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 85
Şekil 6.6 : $V1 + V7$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 86
Şekil 6.7 : $V1 + V11$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 87
Şekil 6.8 : $V1 + V5 + V7$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 87
Şekil 6.9 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri 88
Şekil 6.10 : $V1$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 89
Şekil 6.11 : $V5$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 89
Şekil 6.12 : $V5$ durumunun stator sargı akımları dalga şekillerinin ayrıntısı 90
Şekil 6.13 : $V7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 91
Şekil 6.14 : $V7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri ayrıntısı 91
Şekil 6.15 : $V11$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 92
Şekil 6.16 : $V11$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri ayrıntısı 92
Şekil 6.17 : $V1 + V5$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 93
Şekil 6.18 : $V1 + V7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 93
Şekil 6.19 : $V1 + V7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 94
Şekil 6.20 : $V1 + V5 + V7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri 95
Şekil 6.21 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri. 95
Şekil 6.22 : $V1$ durumu moment – zaman grafiği 96
Şekil 6.23 : $V5$ durumu moment – zaman grafiği 97
Şekil 6.24 : $V7$ durumu moment – zaman grafiği 97
Şekil 6.25 : $V11$ durumu moment – zaman grafiği 98
Şekil 6.26 : $V1 + V5$ durumu moment – zaman grafiği 99
Şekil 6.27 : $V1 + V7$ durumu moment – zaman grafiği 99
Şekil 6.28 : $V1 + V11$ durumu moment – zaman grafiği 100
Şekil 6.29 : $V1 + V5 + V7$ durumu moment – zaman grafiği 101
Şekil 6.30 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumu moment – zaman grafiği 102
Şekil 6.31 : $V1$ durumunun fazlarda endüklenen EMK dalga şekilleri 103
Şekil 6.32 : V1 durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 103

Şekil 6.33 : $V5$ durumunun fazlarda endüklenen EMK dalga şekilleri 104
Şekil 6.34 : $V5$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri ayrıntısı 105
Şekil 6.35 : $V5$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 105
Şekil 6.36 : $V5$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri ayrıntısı 106
Şekil 6.37 : $V7$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri 106
Şekil 6.38 : $V7$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri ayrıntısı 107
Şekil 6.39 : $V7$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 107
Şekil 6.40 : $V7$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri ayrıntısı 108
Şekil 6.41 : $V11$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri 108
Şekil 6.42 : $V11$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri ayrıntısı 109
Şekil 6.43 : $V11$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 109
Şekil 6.44 : $V11$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri ayrıntısı 110
Şekil 6.45 : $V1 + V5$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri 110
Şekil 6.46 : $V1 + V5$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 111
Şekil 6.47 : $V1 + V7$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri 112
Şekil 6.48 : $V1 + V7$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 112
Şekil 6.49 : $V1 + V11$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri..... 113
Şekil 6.50 : $V1 + V11$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri..... 113
Şekil 6.51 : $V1 + V5 + V7$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri . 114
Şekil 6.52 : $V1 + V5 + V7$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri .. 115
Şekil 6.53 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri 116
Şekil 6.54 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri 116
Şekil 6.55 : $V1$ durumu için güç kaybı dalga şekli 117
Şekil 6.56 : $V5$ durumu için güç kaybı dalga şekli 118
Şekil 6.57 : $V7$ durumu için güç kaybı dalga şekli 119
Şekil 6.58 : $V11$ durumu için güç kaybı dalga şekli 120
Şekil 6.59 : $V1 + V5$ durumu için güç kaybı dalga şekli..... 121
Şekil 6.60 : $V1 + V7$ durumu için güç kaybı dalga şekli..... 122
Şekil 6.61 : $V1 + V11$ durumu için güç kaybı dalga şekli 123
Şekil 6.62 : $V1 + V5 + V7$ durumu için güç kaybı dalga şekli 124
Şekil 6.63 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumu için güç kaybı dalga şekli 125
Şekil 6.64 : $V1$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı 126
Şekil 6.65 : $V1$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 127
Şekil 6.66 : $V5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı 128
Şekil 6.67 : $V5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 128
Şekil 6.68 : $V5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı (2)..... 129
Şekil 6.69 : $V5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı (2)... 129
Şekil 6.70 : $V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı 130
Şekil 6.71 : $V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 131
Şekil 6.72 : $V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı (2)..... 131
Şekil 6.73 : $V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 132
Şekil 6.74 : $V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı 133
Şekil 6.75 : $V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 133
Şekil 6.76 : $V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı (2) 134
Şekil 6.77 : $V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı (2) 134
Şekil 6.78 : $V1 + V5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı..... 135

Şekil 6.79 : $V1 + V5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 136
Şekil 6.80 : $V1 + V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı..... 137
Şekil 6.81 : $V1 + V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 137
Şekil 6.82 : $V1 + V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı 138
Şekil 6.83 : $V1 + V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı 139
Şekil 6.84 : $V1 + V5 + V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ... 140
Şekil 6.85 : $V1 + V5 + V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı..... 140
Şekil 6.86 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı..... 141
Şekil 6.87 : $V1 + V5 + V7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı..... 142
Şekil 6.88 : $V1$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı..... 143
Şekil 6.89 : $V5$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı..... 144
Şekil 6.90 : $V7$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı..... 145
Şekil 6.91 : $V11$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı..... 146
Şekil 6.92 : $V1 + V5$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı 147
Şekil 6.93 : $V1 + V7$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı 148
Şekil 6.94 : $V1 + V11$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı 149
Şekil 6.95 : $V1 + V5 + V7$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı..... 150
Şekil 6.96 : $V1 + V5 + V7 + V11$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı 151

SEMBOL LİSTESİ

L	: Diferansiyel operatörü
f	: Kaynak fonksiyonu
Φ	: Akı
Ω	: Sonlu elemanlar probleminde tanımlanan bir bölge
Ψ	: Φ ile aynı sınır koşullarına uyan keyfi fonksiyon
S	: Sınır
v_j , v_i	: Bütün bölgelerde tanımlanmış açılım fonksiyonu
k_{ij}	: Sabit katsayılar
$[K]$	: Katsayılar matrisi
r	: Kalan (fark)
w_i	: Seçilen ağırlık
R_i	: Ağırlıklı kalan integrali
A	: Vektör manyetik potansiyel veya Vektör potansiyel fonksiyonu
J	: Akım yoğunluğu
υ	: Manyetik relüktivite
W	: Enerji fonksiyoneli
μ	: Manyetik geçirgenlik
μ_r	: Bağıl manyetik geçirgenliği
μ_0	: Boşluğun manyetik geçirgenliği
p	: Sonlu elemanlara bölünmüş alandaki bir eleman
N_p	: Çözüm bölgesinin bölündüğü eleman sayısı
F_p	: ‘p’ elemanına ilişkin fonksiyonel
N_d	: Çözüm bölgesindeki düğüm sayısı
M	: Ω bölgesindeki bir m elemanının köşesi
U	: Skaler manyetik potansiyel
B	: Akı Yoğunluğu
H	: Manyetik alan şiddeti
E	: Elektrik alan
T	: Elektromanyetik moment
ω	: Açısal frekans
δ	: Deri kalınlığı
n	: Zaman harmoniği mertebesi
e	: Uzay harmoniği mertebesi
V_0	: Doğru gerilim bileşeni
I_0	: Doğru akım bileşeni
$S_{eş}$	: Eşdeğer görünür güç
$V_{eş}$	: Eşdeğer gerilim
$I_{eş}$	: Eşdeğer akım
n_1	: Temel bileşene ilişkin senkron hız
ω_1	: Temel bileşene ilişkin açısal frekans
s_1	: Temel bileşene ilişkin kayma
n_r	: Rotor hızı

s_e : e. uzay harmoniğine ilişkin kayma
n_e : e. uzay harmoniğine ilişkin hız
ω_e : e. uzay harmoniğine ilişkin açısal frekans
R_1 : Stator sargı direnci
R_2 : Statora indirgenmiş rotor sargı direnci
X_1 : Stator kaçak reaktansı
X_2 : Rotor kaçak reaktansı
X_m : Mıknatıslanma reaktansı
V_e : Uzay harmoniği gerilimi
V_n : Zaman harmoniği gerilimi
k_{x_e} : Seri reaktans değişim katsayısı
k_{xm_e} : Mıknatıslanma reaktansı değişim katsayısı
k_{r_e} : Uzay harmoniği devresinde seri direnç değişim katsayısı
k_{r_n} : Zaman harmoniği devresinde Seri direnç değişim katsayısı
σ_{1n} : n. Harmonik için Heyland Dağılma faktörü
$\mathcal{R}$: Manyetik direnç (Relüktans)
F : Amper Sarım
N : Sarım sayısı
ρ : Özdirenç
D : İletken çapı
σ_0 : Öziletkenlik
J_s : Kaynak tarafından yaratılan akım yoğunluğu
V : Elektriksel skaler potansiyel
H_c : Sabit mıknatısın alan şiddeti

ZAMAN HARMONİKLİ GERİLİMLERİN KAFESLİ ASENKRON MAKİNADA YARATTIĞI ETKİLERİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

ÖZET

Asenkron makinalar, basit yapısı ve güvenilirliği dolayısıyla çok tercih edilen makinalardır. Günümüzde, güç elektroniği düzenlerinin gelişmesiyle de kontrolü son derece kolaylaşan bu makinalar, kontrol amacına yönelik olarak, her zaman saf sinüzoidal gerilimle beslenmeyebilirler. Bu durum, makina içinde zaman harmonikleri oluşmasına neden olur. Zaman harmoniğinin frekansı temel frekanstan farklıdır. Bu durumuyla makina, farklı frekanslarda bileşenler içeren karmaşık bir sistem haline gelmiştir. Zaman harmonikleri, elektrik makinalarında, milde titreşim ve ses gibi problemler oluşturabilir. Bu karmaşık sistemi çözümleyebilmek için süperpozisyon ilkesinden yararlanılmaktadır.

Bu çalışmada, çeşitli zaman harmoniği bileşenleri içeren kaynaklar bir asenkron makinaya uygulanmış ve problemlere ilişkin performans grafikleri ve alan dağılımları çıkartılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi yardımı ile yapılan bu inceleme sonrasında çıkan sonuçların, analitik gerçeklerle uyuşup uyuşmadığı hakkında yorumlar yapılmıştır.

Bu amaçla, incelemenin üstüne kurulduğu yöntem olan sonlu elemanlar yönteminin genel makina analizi ve makinanın harmonik analizindeki yeri birinci bölümde açıklanmıştır. Yapılan çalışmayı tüm boyutlarıyla görebilmek amacıyla sonlu elemanlar yöntemi, ikinci bölümde ayrıntısıyla tanıtılmıştır. Ardından, tez konusunun aslında sonlu elemanlar yöntemiyle çözülecek bir elektromanyetik problemi olduğu düşünülerek, üçüncü bölümde elektromanyetik alanlar hakkında temel bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümde, çalışmanın hareket noktasını oluşturan harmonik kavramı ve asenkron makinadaki etkileri detaylı olarak incelenmiştir. Bu bağlamda, zaman harmoniği içeren kaynakla beslenen asenkron makinanın analitik çözümü anlatılmıştır.

Buna ek olarak, çözümde yararlanılan program olan Maxwell 2D ve RMxprt hakkında özet bilgi de, okuyucuyu bilgilendirmek üzere beşinci bölümde sunulmuş, izlenecek yol ve yöntem açıklanmıştır. Son olarak, altıncı bölümde, problem ve çözümü sunulmuş, durum analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF EFFECTS OF TIME HARMONIC VOLTAGES ON SQUIRREL CAGE INDUCTION MACHINE

SUMMARY

Induction machines are widely preferred electric machines due to their simple construction and reliability. With the advances in the field of power electronics, the control of these machines has become very simple. For control reasons, these machines may not always be fed by pure sinusoidal voltage waveforms. This situation causes time harmonics to occur within the machine. The frequency of time harmonics is different from the fundamental frequency. At this point, the machine becomes a complex system, containing different frequency components. Time harmonics may cause problems such as vibrations on the shaft and noise in electric machines. In order to solve this complex system, the principle of superposition is used.

In this study, sources with various time harmonic components have been applied to an induction machine and performance plots and field distributions have been obtained for each problem. This evaluation has been performed through the Finite Elements Method and has been analyzed through a comparison with analytical facts.

For this aim, the importance of the finite elements method, which is the basis of this study, in the analysis of general machinery and the harmonic analysis of electric machines has been explained in the first chapter. In the chapter two, the method of finite elements has been thoroughly presented in order to visualize the study with all its aspects. The third chapter has been prepared to provide basic information on electromagnetics, as the main subject of the thesis is an electromagnetic problem solved through finite elements method. The forth chapter gives detailed information on the harmonics concept, which is the starting point of this study and explores the effects of harmonics on induction machines. The chapter also includes the analytical solution of an induction machine fed with a source containing time harmonics.

In addition to this, a summary has been prepared in order to inform the reader about the programs used for the analysis, Maxwell 2D and RMxprt and the followed methodology has been explained in the fifth chapter. The sixth chapter defines the problem explored in this study and gives the solution, in comparison to analytical results.

1. GİRİŞ

Asenkron makinalar yüz yılı aşkın süredir kullanılan ve güç elektroniği sistemlerinin gelişmesi sayesinde daha çok tercih edilen makinalardır. Bilezikli ve kafesli olmak üzere yapısal olarak ikiye ayrılırlar. Bilezikli makinalar, maliyetli oluşu ve rotorunda el sargısına ihtiyaç duyulması sebebi ile çok daha az tercih edilirler. Bununla beraber kafesli makinalar ise üretim kolaylığı ve dolayısıyla düşük maliyeti sayesinde çok yaygınlaşmışlardır.

Asenkron makinalar, normal şartlarda saf sinüs bir kaynaktan beslenmektedirler. Ancak bu halde bile makinanın yapısından dolayı hava aralığında sinüsten farklı bir manyetomotorkuvvet (mmk) oluşacaktır. Basamak fonksiyon şeklindeki bu manyetomotorkuvvet (mmk) Fourier serisine açıldığında, uzay harmonikleri bulunur. Başka bir deyişle, besleme gerilimi saf sinüs olsa bile, makinada harmonik bileşen bulunacaktır [1].

Ancak asenkron makinalar her zaman saf sinüzoidal gerilimle beslenemezler. Güç elektroniği düzenlerinin yaygınlaşması, hız kontrolü ve sürüş gibi konularda kullanılması besleme gerilimlerindeki harmonik içeriğin de artmasına neden olmaktadır. R. Yacamini ve S. C. Chang'ın yaptığı çalışmaya göre söz konusu harmonikler kaynaktan geldiği için zaman harmonikleri olarak adlandırılmakla beraber titreşim, ses gibi mekanik sorunlara neden olmaktadır [2].

Kaynak gerilimi Fourier serisine açıldığında, bu harmonikler belirlenebilir. Zaman harmonikleri adıyla anılan bu bileşenleri incelerken en çok kullanılan yöntem süperpozisyondur. Sinüs biçiminden uzak olan kaynaklarla beslenen makinalarda, farklı frekanslara sahip bileşenler bulunur. Bu bileşenlerin ve etkilerinin incelenmesi, araştırmacılara birçok yeni konular sunmuştur. Örneğin, bunlardan biri, oluşacak olan farklı frekanslardaki manyetik alanların demir kaybı üzerinde etkileridir. Bu konuyla ilgili olarak, F. Ruiming, demirin farklı frekanslar altındaki davranışını yapay sinir ağları ile modelleyerek konuya değişik yaklaşımlar getirmiştir. Bu şekilde makina analizi, akıllı sistemlerle de desteklenebilmiştir [3].

Süperpozisyon gereği toplanacak olan bu harmonik etkilerin ayrı ayrı bulunması ise başlı başına bir makina analizi konusudur. Bu konuda, X. Liang, Y. Luy' un yaptığı çalışmada sayısal yöntemlerden yararlanılmıştır. Makina analizi sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemiyle incelenen makinaya, farklı gerilimler uygulanmış, her ayrı kaynakla oluşan çalışma durumlarının analitik yorumlarla karşılaştırması yapılmıştır [4].

L. M. Neto, J. R. Camacho, C. H. Salerno, B. P. Alvarenga adlı araştırmacıların beraber sundukları çalışmada, harmonik kavramı için tasarlanmış matematiksel modeller bulunmaktadır. Bu modeller, farklı kaynaklar altında moment ve gerilim hesaplamaktadır. Araştırmacılar, günümüzde, bu modelleri biraz değiştirerek uzay harmoniği uygulaması da yapmaya ve optimum makina tasarımına ulaşmaya çalışılmaktadır [5].

Bundan başka rotor akımı ve bu büyüklüğe göre şekillenecek olan ferromanyetik malzemenin manyetik iletkenliğinin geometri üzerinde nokta nokta hesaplanması, doğru bir makina analizi sağlayacaktır. Bunun için Z. K. Papazacharopoulos, K. V. Tatis, A. G. Kladas, S. N. Manias, sonlu elemanlar yardımıyla makinada harmonik analizi yapmıştır ve büyük yakınlıklarla başarıya ulaştırmıştır [6].

Ancak, S. J. Salon'a göre ise bu konudaki en verimli yaklaşım harmonik analizinde sonlu elemanlar kullanmaktır çünkü sonlu elemanlarla alan analizi yaparak, makina frekans tanım kümesinde ayrıştırılabilmektir. Bu özellik, hesaba deri etkisinin katılmasını sağlamaktadır. Deri etkisinin hesaba katılmasıyla, analitik hesap ile sonlu elemanlarla yapılan hesap arasındaki fark karşılaştırılabilir. Düşük frekans değerlerinde iki yöntem yakınlık gösterirken, frekans yükseldikçe sonuçlar birbirinden uzaklaşmaktadır [7].

Bu bağlamda, asenkron makina analizinde sonlu elemanlar yönteminin yerini irdelemek bu çalışma için anlamlı bir yaklaşımdır.

Döner alanlı elektrik makinaları elektriksel güç endüstrisinin üstüne kurulduğu temel bileşenlerdir. Özellikle son 20 yıldır, yeni malzemeler, yeni işletme stratejileri, uyarlamalı kontrol sistemleri, güç elektroniği, yüksek verimli iletkenler ve bilgisayar destekli hesap yöntemleriyle kullanımları kolaylaştırılmış ve yaygınlaştırılmıştır. Bilgisayar destekli analiz konusundaki gelişmeler, araştırmacıları elektromanyetik alanları sonlu elemanlar yöntemi ile analiz etmeye yönlendirmiştir [8].

Önceleri asenkron makinanın basitleştirilmiş analizini ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerini çözmek için analitik yöntemler kullanılmıştır. Dijital hesap yöntemlerinin kullanımının artmasıyla, devre denklemlerinin çözümü için standart sayısal integrasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Bu gelişmeyle eş zamanlı olarak, makinanın manyetomotor kuvvetinin hesaplanması amacıyla iki boyuta indirgeme çalışmaları geliştirilmiştir. Bütün bu gelişmeler asenkron makinanın karmaşık içyapısını inceleyen araştırmacıları sonlu farklar yöntemi ve sonrasında da sonlu elemanlar yöntemi kullanmaya yöneltmiştir [9].

Sonlu elemanlar yönteminin temel üstünlüğü asenkron makina yapısı gibi karmaşık yapıları kolay modelleyebilmesidir. Bununla beraber temel olumsuzluğu da uzun simülasyon zamanı ve hatırı sayılır bir kapasitede işlemci ihtiyacıdır. Ama her şeye rağmen çalışmanın sonuç olarak verdiği renklendirilmiş görsel çıkışlar ve diğer türlü bilgisayar grafikleri, çok yönlülüğü ve kullanılırlılığı açısından bulunmazdır [10]. Bununla beraber analitik yöntemlerden temel bir farkı vardır. Analitik çözümde matematiksel kabullerden dolayı ortaya çıkan analitik hata, sonlu elemanlar çözümünde ise gerçek geometriyi taklit eden ağ yapıdan kaynaklanan geometrik hata bulunmaktadır [7]. Bu konudaki çalışmalarıyla S. J. Salon literatürde öne çıkmaktadır.

Böylece asenkron makinada alanın sonlu elemanlar yöntemiyle analizi, iki boyutta gerçekleştirilmeye başlanmış ve kısa sürede tasarım prosedürlerinin temelinde hak ettiği yeri almıştır [11]. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak adım adım gerçekleştirilen çalışmalar devre denklemlerinin ve mekanik denklemlerin yöntem içine katılmasıyla kullanıcıya büyük bir esneklik sağlamıştır. Böylece söz konusu model, sonlu elemanlar yöntemi ile çözülen elektromekanik enerji dönüşümünü inceleyebilecek bir model haline gelmiştir. Bunun yanı sıra doğrudan doğruya devre ile irtibatta olmak, araştırmacıya, kaynağı herhangi bir matematiksel fonksiyon olarak tanımlama şansı vermiştir [12].

Her geçen gün sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan analizlerin olanaklarının son derece geniş olduğu görülmektedir. Konuyla ilgili R. Belmans'ın öncü olduğu çalışmalarda, gerçekte yapılması güç olan deneyler, sonlu elemanlarla çözüm yapan yazılımlar sayesinde kolaylıkla uygulanabilmektedir. Bu deneyler araştırmacıya makina parametreleri hakkında fikir sağlamaktadır [13].

Sonlu elemanlar yöntemiyle üç fazlı asenkron makina analiziyle ilgili değişik yaklaşımlar geliştirilmiştir. N. Bianchi, S. Bolognani, ve G. Comelato adlı araştırmacıların kullanıldığı bu temel yaklaşımlardan biri, motorun eşdeğer devresine dayanan bir yöntemdir; alan sonuçlarının kısa devre ve boşta deney sonuçlarını tekrar üretmesi sağlanarak eşdeğer devre parametrelerinin doğrulanmaya çalışıldığı çalışmalar yapılmıştır. Yani bu iki dolaylı deney ile motor performansına ulaşılmaya çalışılmaktadır. Bir diğer yöntem ise; sadece yükte deney halindeki alan analizine dayandırılan, böylece devre çözümü ile gerilimin giriş olduğu alan analizini karşılaştıran yöntemdir. Bu yola ise sadece birkaç işletme noktasına ihtiyaç duyulduğunda başvurulur [14].

Bu analizler yapılırken, araştırmacılar manyetik alan dağılımı grafikleriyle, makinaların harmonik haritaları arasında bağlantılar keşfetmeye çalışmışlardır. Bu çalışmalar günümüzde de tüm hızıyla devam etmektedir [15-16].

İleriye dönük olarak ise bütün bu gelişmelerin ardından makinanın üç boyutlu analizi konusunda çalışmalar yapılmıştır. Bu analizi iki boyutlu analizden ayıran ve üstünde durulması gereken nokta, elektrik makinalarında manyetik alanın eksenel doğrultuda değişebildiği ve bu değişimin simülasyona nasıl yansıtılabileceği konusundadır [17-19].

Asenkron makinanın sonlu elemanlar yöntemi ile analizinde araştırma konuları ise dört temel başlık altında incelenebilir. Bunlardan ilki dönme hareketinin tanımlanmasıdır. Asenkron makinada iki boyutlu analizin geliştirilmesi amacıyla rotorun dönme hareketinin ve hava aralığının ayrıntılı bir şekilde tanımlanması konusu üstünde durulmuş ve karma yöntemler geliştirilmiştir. Bu çalışmalardan hava aralığı üzerine yoğunlaşmış olanlar, genel olarak eksen kaçıklığının (eksantrikliğin) uygun modellenmesi üzerine yapılmıştır. Çünkü bu derece eksantirik bir yapıyı sonlu elemanlara bölmek kolay değildir. Bu noktada karşılaşılan çalışmalar, çözümdeki hassaslık sırasına göre sınıflanırsa; bir kısmında hava aralığı yok sayılır yani hava aralığında bir ağ tanımlanmaz. Ancak bu durumda çok fazla ihmal olacağı göz önünde bulundurularak, bu tip çalışmalar başka yöntemlerle desteklenmiştir. Kalan kısmında ise hava aralığı, rotora ve statora ilişkin alanlar şeklinde ikiye ayrılır. Bazen bu iki bölge arasında bir serbest bölge de tanımlanır ve söz konusu alanlar ayrı ayrı ağlara ayrılır [20-22].

İkinci araştırma konusu olarak sonlu elemanlar yöntemiyle analizde, makina yapısında kullanılan doğrusal olmayan manyetik alana maruz kalan ferromanyetik malzemenin tanımlanması gösterilebilir. Bu malzemenin manyetik direnci çoğu zaman diferansiyel bir fonksiyonla tanımlanır [23-25].

Bundan başka, özel olarak asenkron makina için düşünüldüğünde kısa devre halkasını modelleyebilmek, derin bir araştırma konusu olmuştur. Bu tip çalışmalarda iki boyutlu analizin yetersiz kaldığı açıktır. Kısa devre halkası üzerine yoğunlaşmış araştırmalarda, iki boyutlu analizde kısa devre halkası sadece sınır değer koşulu tanımlamasında işin içine katılabilirken, üç boyutlu analizde; bobin başları ve kısa devre halkası bütün detaylarıyla tanımlanabilmekte ve incelenebilmektedir [26].

Son olarak ise analizde elde edilmek istenen bilgi doğrultusunda simülatör mantığı seçilmelidir. Örneğin iki boyutlu manyetostatik analiz yapıldığında; statora indirgenmiş hava aralığı faktörü, iletkenlerdeki oluk kaçak reaktansları gibi büyüklükler bulunmaktadır. Girdap akımlarını temel alan bir simülatörle çalışıldığında ve rotor hareketsiz varsayıldığında ise kalkış akımı ve kalkışa ilişkin diğer veriler bulunmaktadır. Buradan açıkça görülmektedir ki, farklı simülatör tiplerine uyarlanmış sonlu elemanlar çözümleri; sırasıyla boşta ve kısa devre deneylerine ilişkin bilgiler vermektedir. Dinamik simülasyonun söz konusu edildiği bir sonlu elemanlar çözümünde ise simülatörün zaman basamaklı devre denklemleriyle mekanik denklemlerin beraber ele alınması gerekmektedir. Son modeli kurabilen simülatör ile, gerçeğe en yakın sonuçlar elde edilir. Bu modelden uzay ve zaman harmoniklerinin yarattıkları alanlar da doğrudan elde edilebilir. Doğal olarak, daha fazla işlemci zamanı gerektiren bu çalışma, dolaylı bağıntılarla moment hesabı da sağlamaktadır. Dinamik simülasyonun söz konusu edildiği bu sonlu elemanlar çözümünde anlık değer hesapları yapabilmek için anlık değer kaydı gerekmektedir. O halde seçilmesi gereken simülatör tipi geçici durum (transient) analizi yapabilen simülatör olmalıdır. Her bir simülatörün üstünlükleri ve olumsuzlukları bulunmaktadır, açıktır ki, her biri çalışma zamanı ve çalışma hassasiyeti açısından farklılıklar gösterecektir [27-28].

Sonlu elemanlarla geçici durum analizi yapabilen simülatöründe çözüm yaparken frekansa bağlı ya da frekanstan bağımsız çözüm yapılabilir. Bu demektir ki, kullanıcı isterse, frekansın elektrik ve manyetik alanlar üzerindeki etkisini hesaba

katabilir ya da katmayabilir. Bu tip çalışmalarla sistemdeki frekans haritaları elde edilebilmekte ve incelenebilmektedir. Bu tip ayrıntılı incelemelerin hesaplama zamanı uzun olabilir. Bu incelemeler sonucunda makina parametreleri elde edilebilir [29].

1.1 Tezin Amacı

Tezin amacı, kafesli bir asenkron makinanın, farklı içerikte harmonik bileşene sahip gerilimlerle beslendiğindeki durumunun, sonlu elemanlar yöntemi ile ayrıntılı olarak incelenmesidir. Ortaya çıkan sonuçlar, analitik çözümle karşılaştırıldığında anlamlı olmaları beklenmektedir.

Çalışma esnasında önceki kısımdaki literatür araştırmasından ve sonlu elemanlar çözümü yapan bir çözüm programından yararlanılmıştır.

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Mühendislikte sayısal analize ihtiyaç duyulmasının sebebi, her türlü güç uygulaması için elektriksel donanım hazırlayan mühendislerin, kullanıcıları pek çok konuda memnun etmekle yükümlü olmasıdır. Tipik ölçütler:

- Düşük çıkış maliyeti
- Düşük işletme maliyeti
- Yüksek verim
- Yüksek güvenilirlik
- Minimum ağırlık ve hacim
- Belirlenmiş performans ve parametre değerlerine yakın toleranslar
- Nadiren gerçekleşen, şiddetli, normal dışı durumlara dayanıklılık
- Generatörlerde, düşük harmonik bozunumlu gerilim üretebilme

Bu ölçütleri belirli seviyelerde tutmak ise, sistemin manyetik ve elektrik alan dağılımlarına ve bu büyüklüklerin analitik prosedürlerle yakalanamayan doğruluktaki hesaplarına bağlıdır. Karmaşık geometri, demirin doyması ve içinde girdap akımları endüklenebilen masif malzemelerin varlığı, çözümlemede sayısal yöntemlerin tercih edilme nedenlerindendir.

Tasarımcılar yukarda verilen ölçütleri yakalayabilmek için aşağıdaki maddeleri dikkate almak zorundadır:

- Düzensiz geometrik yapılar
- Doğrusal olmayan manyetik ve elektriksel malzemeler
- Düzensiz bileşenlerin içinde endüklenen akımlar
- Anizotropik malzemeler ve yapılar
- Harici devreler
- Isıl ve mekanik etkilerin integrasyonu
- Akım ve alanların sinüs olmayan zaman varyasyonları

Açıkça görülmektedir ki yukarıdaki liste, düzensiz geometri ve doğrusal olmayan malzeme içeren maddeleriyle, analitik çözümleri saf dışı bırakmaktadır. Ancak

sayısal yöntemler iki veya üç boyutlu gerçek geometriyi modelleyebilme özelliğine sahiptir. Aynı şekilde doğrusal olmayan malzemeler, Newton-Raphson gibi yinelemeli düzenlerle ve sinüs olmayan zaman varyasyonları da zaman aralıklı yapılarla modellenebilir.

Söz konusu sayısal yöntemler, özellikle son elli yılda bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle çok yaygınlaşmıştır. Bu aşamada tasarımcıların aşması gereken temel sorun, hangi sayısal yöntemin kullanılacağıdır. Temel sayısal yöntemler:

- Sonlu Farklar
- Sonlu Elemanlar
- Sınır Elemanları

Bütün bu yöntemlerin göreceli olarak listelenebilecek üstünlükleri ve olumsuzlukları bulunmaktadır. Örneğin "Sonlu Farklar Yöntemi" eğri ve bükülmüş yüzeyler içeren düzensiz geometrik yapılara uygulanamamaktadır. Düğüm dağılımı çok verimsiz olabilir. Aynı şekilde "Sınır Elemanları Yöntemi" doğrusal malzemeleri modellerken son derece verimli olmasına karşın, doğrusal olmayan malzemeleri modellerken çok verimsiz olmaktadır. Bütün bunlara karşın, "Sonlu Elemanlar Yöntemi" ile doğrusal olmayan malzemeler başarılıyla modellendiği gibi düzensiz geometriler de kolaylıkla incelenebilmektedir [30].

Pek çok bilim adamı ilgilendikleri fiziksel sistemi matematiksel olarak ifade edebilmek ister. Her ne kadar matematiksel eşitlikler yoluyla ulaşılan sonuçlar ufak hatalar içerse de, tüm sistemin işletmesi ve analizinde karşılaşılacak zorluklar düşünüldüğünde, bu yöntem, sistemi anlamak için uygun bir yoldur. Matematiksel eşitliklerle sistemleri ifade ederken karşılaşılan en büyük zorluk, karmaşık yapıdaki eşitliklerin çözümlerine ulaşmak olacaktır. Bunun için matematiksel yöntemler izlenmeli, belirli hata paylarında kalmak koşuluyla sayısal benzetimler yapılmalıdır.

Bu yöntemlerden biri olan **Sonlu Elemanlar Yöntemi**, kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen problemleri çözmek için kullanılan sayısal bir yöntemdir. Sonlu elemanlardaki yaklaşık fonksiyonlar, araştırılan fiziksel alanın düğüm değer terimlerinden belirlenmektedir. Sürekli fiziksel problem, kesikli sonlu eleman problemine dönüştürülmektedir.

Sonlu elemanlar yöntemi, katı mekaniği, sıvı mekaniği, akustik, elektromanyetizma, biyomekanik, ısı transferi gibi alanlarda kullanılmaktadır [31-32]. Son derece yaygın

uygulama alanı olmasına karşın, bu tez çalışmasında sonlu elemanlar yönteminin sadece elektromanyetik problemlerine uygulanması incelenecektir. Bunun için öncelikle fiziksel matematik denklemlerin temelleri ve sınır koşullarının üzerinde durulacak ve problem bu boyutta ortaya konmaya çalışılacaktır.

2.1 Fiziksel Matematik Denklemlerinin Temelleri

Pek çok fiziksel ve matematiksel problemin çözümünde diferansiyel denklemler ile karşılaşılır. Özellikle mühendislik problemlerinde karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çoğu ikinci dereceden diferansiyel denklemlerdir. Bağımsız değişkenleri x ve y, bağımlı değişkeni Φ olan ikinci dereceden bir kısmı diferansiyel denklem, genel olarak şu şekilde yazılır:

$$\mathrm{a}.\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{x}^2}+\ \mathrm{b}.\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}+\ \mathrm{c}.\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{y}^2}+\ \mathrm{d}.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{x}}+\ \mathrm{e}.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{y}}+\ \mathrm{f}.\Phi+\mathrm{g}=0 \tag{2.1}$$

Bu tür kısmı diferansiyel denklemlerde a, b, c, d, e, f ve g katsayıları x ve y'nin fonksiyonu olduklarında diferansiyel denklemler "doğrusal (lineer) diferansiyel denklemler", x, y ve Φ'nin fonksiyonu olduklarında ise "doğrusal olmayan (non-lineer) diferansiyel denklemler" olarak adlandırılırlar. Sonlu elemanlar yöntemi aşağıda verilen türdeki diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılabilecek bir sayısal yöntemdir.

Fiziksel olayları tanımlayan bu kısmi diferansiyel denklemler grubu, çok sayıda özel durum içerir. Bu durumlar, diskriminantın işaretine göre şekil alırlar. Bu denklemler kabaca 3 ana grupta sınıflanabilir:

- Eliptik Kısmi Diferansiyel Denklemler
- Parabolik Kısmi Diferansiyel Denklemler
- Hiperbolik Kısmi Diferansiyel Denklemler

2.1.1 Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı ve sınır koşulları

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{y}^2}=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad \text{Poisson denklemi} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \qquad \text{Laplace denklemi} \qquad (2.3)$$

Diskriminantın negatif olduğu diferansiyel denklemlerdir. Eliptik tipteki denklemler, bir potansiyel ile tanımlanan pek çok problemi temsil ederler. Yukarıda da görüldüğü üzere Laplace denklemi doğrusal, Poisson denklemi ise doğrusal olmayan bir eliptik kısmi diferansiyel denklemdir. Ayrıca problemlerin büyük çoğunluğu eliptik kısmi diferansiyel denklem özelliği gösterir.

Eliptik denklemlerde sınır koşulları şu şekilde ifade edilir:

Bir fiziksel problemi tanımlayan diferansiyel denklem veya denklemler, belli bir bölge için ve belli koşullarla verilirler. Bu bölge bir, iki veya üç boyutlu olabilir. Bölgenin durumuna göre bölgenin sınırları üzerindeki koşulların bilinmesi veya verilmesi gerekir. Verilen bilgiler bölgenin içi için geçerli olup, bölgenin sınırlarında geçerli değildir. Bu nedenle, bölgenin sınırlarına da koşullar tanımlamak gerekmektedir. Sınır koşulları üç ana sınıfa ayrılabilmektedir.

$$\Phi(s)=\Phi_0=f_0(s) \qquad \text{Dirichlet Sınır Koşulu}$$

$$\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n}=f_n(s) \qquad \text{Neumann Sınır Koşulu}$$

$$\Phi(s)+\frac{\partial\Phi(s)}{\partial n}=f_0(s) \qquad \text{Karma Sınır Koşulu}$$

2.1.2 Parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı ve sınır koşulları

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \qquad \text{Difüzyon denklemi} \qquad (2.4)$$

Diskriminantın sıfır olduğu diferansiyel denklemlerdir. Parabolik denklemler difüzyon problemlerini temsil ederler. Sıkıştırılamaz bir gövdedeki ısı difüzyon problemi buna tipik bir örnektir. Aynı denklem, iletken bir gövde içinde endüklenerek oluşan akım problemlerini de tanımlamak için kullanılır.

Parabolik denklemlerde sınır koşulları şöyle ifade edilir:

1. Dirichlet, Neumann ya da Karma Sınır koşulları (alan sınırlarına uygulanır).
2. Başlangıç koşulları, t = 0 (tüm alanlara uygulanır).

2.1.3 Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin tanımı ve sınır koşulları

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{Bir boyutlu dalga denklemi} \qquad (2.5)$$

Diskriminantın pozitif olduğu diferansiyel denklemlerdir. Hiperbolik denklemler ise dalga yayılması olayını temsil ederler. Bunlar hem mekanik titreşim dalgaları hem de elektromanyetik dalgalar olabilir. Kaynak periyodik ise bu denklemler eliptik denklemlere dönüştürülebilir.

Bu denklemlerle tanımlanan problemlerde ise Cauchy sınır koşulu olarak adlandırılan ve sınırda bir fonksiyonun ve türevinin başlangıç değerleri ile verildiği, değişkenin zamanın fonksiyonu olarak bulunduğu koşuldan yararlanılır.

Sonlu elemanlar yöntemi bu üç tür diferansiyel denklemin çözümü için kullanılan bir sayısal yöntemdir.

2.2 Sınır Değer Problemleri

Bu bölümde ilk olarak sınır değer problemleri anlatılacak, sonrasında sınır değer problemlerini çözmek için kullanılan iki klasik yöntemle ilgili bilgi verilecektir. Bu iki yöntem günümüzde uygulanan sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturmaktadır.

1. Ritz, Varyasyonel Yöntemi
2. Galerkin Yöntemi

Fiziksel sistemlerin matematiksel olarak modellenmesinde ortaya çıkan sınır değer problemleri ve bunların çözümü, fiziksel matematiğin önemli bir konusunu oluşturmaktadır. Tipik bir sınır değer problemi, bir Ω bölgesinde, bölgeyi kuşatan S sınırı üzerindeki sınır koşulları ile birlikte;

$$L\Phi = f \qquad (2.6)$$

temel diferansiyel eşitliği ile tanımlanabilir. (2.6) eşitliğinde, L bir diferansiyel operatör, f kaynak fonksiyonu ve Φ ise bilinmeyen büyüklük olan akıdır. Elektromanyetikte böyle bir diferansiyel eşitlik, basit bir Laplace veya Poisson eşitliği veya karmaşık skaler dalga eşitlikleri veya daha da karmaşık vektörel dalga eşitliklerinden biri olabilir. Bunun yanında sınır koşulları da, basit Dirichlet ve

Neumann koşullarından, karmaşık empedans ve radyasyon koşullarına kadar hatta daha karmaşık yüksek dereceden koşullara kadar değişebilmektedir.

Sınır değer problemlerinin mümkün olduğu kadar analitik yollardan çözülmesi istenir. Bununla beraber, genellikle analitik çözüm çok az durumda elde edilir. Mühendislik alanında, pratik öneme sahip diğer birçok problemin analitik çözümü yoktur veya çok zordur. Bu zorluğu aşmak için, çeşitli yaklaşım yöntemleri geliştirilmiştir. Bunlar arasında Ritz ve Galerkin yöntemleri en yaygın olarak kullanılanlardır.

2.2.1 Ritz yöntemi

Rayleigh-Ritz yöntemi olarak da bilinen Ritz yöntemi, verilen sınır koşulları altında temel diferansiyel denklemi en küçük yapan, sınır değer problemlerinin fonksiyonel olarak adlandırılan varyasyonel bir bağıntı ile verildiği varyasyonel yöntemdir.

2.2.1.1 Varyasyonel ilkesi

Verilen sınır koşulları altında (2.6) eşitliğinin varyasyonel ilkesine göre çözümü, fonksiyonel olarak adlandırılan varyasyonel bir bağlantının değişkenlerine göre en küçük değere indirgenmesi ile elde edilir. Yöntemi geliştirmek için önce açısal parantezle gösterilen iç çarpım tanımı aşağıdaki gibidir:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_{\Omega} \Phi . \Psi^{*} . d\Omega \tag{2.7}$$

Burada Ψ, Φ ile aynı sınır koşullarına uyan keyfi bir fonksiyonu, yıldız işareti de kompleks eşlenik işlemi göstermektedir. Bu tanımla, eğer (2.6)'daki L operatörü özeşlenik ise:

$$\langle L\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, L\Psi \rangle \tag{2.8}$$

olduğu ve pozitif tanımlı ise:

$$\langle L\Phi, \Phi \rangle = \begin{cases} > 0, & \Phi \neq 0 \\ = 0, & \Phi = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

olduğu gösterilebilir. (2.6)'nın çözümü, fonksiyonelin Φ ile gösterilen yaklaşım (interpolasyon) fonksiyonuna göre en küçük değere indirgenmesi ile elde edilir.

$$F(\Phi) = \frac{1}{2}\langle L\Phi, \Phi\rangle - \frac{1}{2}\langle \Phi, f\rangle - \frac{1}{2}\langle f, \Phi\rangle \tag{2.10}$$

Burada (2.10)'un ispatı ve elektromanyetikteki genel durumlarla ilgili uygulamaları verilmemiştir.

Varyasyonel yönteme göre öncelikle fonksiyonel bulunur, çözüm aşağıda açıklanan yolla elde edilebilir. Basitleştirmek bakımından, problemin gerçel (reel) değerli bir problem olduğu kabul edilir. Kompleks değerli problemler için formülasyon ayrıca çıkartılabilir. (2.10)'daki eşitlik için aşağıdaki gibi bir yaklaşım bağıntısı bulunduğu varsayılır.

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n} k_j \,.\, v_j = \{k\}^T\{v\} = \{v\}^T\{k\} \tag{2.11}$$

Burada v_j bütün bölgede tanımlanmış seçilen açılım fonksiyonları ve k_j de belirlenecek sabit katsayılardır. {} simgesi sütün matrisi (vektörü), T üst simgesi de vektörün (sütün matrisinin) devriğini (transpozesini) göstermektedir. (2.11), (2.10)'da yerine konularak aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$F(\Phi) = \frac{1}{2}\{k\}^T \int_\Omega \{v\}.\,L.\,\{v\}^T.\,d\Omega.\,\{k\} - \{k\}^T.\int_\Omega \{v\}.\,f.\,d\Omega \tag{2.12}$$

$F(\Phi)$'yi en küçük değere indirmek için, k_i'lere göre kısmi türevleri alınırsa bir doğrusal cebirsel denklem takımı elde edilir:

$$\frac{\partial F}{\partial k_i} = \frac{1}{2}\int_\Omega v_i\,L.\,\{v\}^T.\,d\Omega.\,\{k\} + \frac{1}{2}\{k\}^T\int_\Omega \{v\}.\,L.\,v_i.\,d\Omega - \int_\Omega v_i\,.\,f.\,d\Omega \tag{2.13}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_j\,.\int_\Omega (v_i\,Lv_j + v_j Lv_i).\,d\Omega - \int_\Omega v_i\,f.\,d\Omega = 0 \tag{2.14}$$

(i=1, 2, 3, ..., n)

Bu bağıntı aşağıdaki gibi matrissel biçimde yazılabilir;

$$[K]\{v\} = \{B\} \tag{2.15}$$

Burada [k] matrisinin terimleri:

$$k_{ij} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (v_i\, Lv_j + v_j Lv_i).\, d\Omega \tag{2.16}$$

ve {b} matrisinin terimleri ise:

$$b_i = \frac{1}{2}\int_{\Omega} v_i\, f.\, d\Omega \tag{2.17}$$

şeklinde verilir. [K] matrisi simetrik bir matristir. L operatörünün özeşlenik olması durumunda k_{ij} terimleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k_{ij} = \int_{\Omega} v_i\, Lv_j.\, d\Omega \tag{2.18}$$

2.2.2 Galerkin yöntemi

Galerkin yöntemi ağırlıklı kalan (fark) yöntemler ailesindendir, adından da anlaşılacağı gibi diferansiyel denklemin kalanının (farkının) küçülmesi ile çözüm aranır. $\overline{\Phi}$'nin (2.6)'nın yaklaşık çözümü olduğu varsayılırsa, (2.6)'daki Φ yerine $\overline{\Phi}$'nin yerleştirilmesi ile sıfırdan farklı bir kalan (fark) ortaya çıkar.

$$r = L\overline{\Phi} - f \neq 0 \tag{2.19}$$

$\overline{\Phi}$ için en iyi yaklaşım, Ω bölgesindeki her noktada r kalanının en küçük değerde olmasını sağlayan yaklaşımdır. Ağırlıklı kalan yöntemleri, w_i seçilen ağırlık fonksiyonunu, R_i de ağırlıklı kalan integralini göstermek üzere,

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r.\ d\Omega \tag{2.20}$$

koşulunu sağlamaktadır.

Galerkin yönteminde, ağırlık fonksiyonu, yaklaşık çözüm için kullanılan interpolasyon fonksiyonuna benzer olarak seçilir. Bu seçim genellikle en doğru çözüme götürür ve bu nedenle sonlu elemanlar eşitliklerinin çözümünde en yaygın kullanılan yaklaşımdır. Yöntemi daha açık olarak anlatmak için, çözümün (2.12)'de olduğu gibi gösterildiği varsayılırsa, ağırlık fonksiyonları aşağıdaki gibi seçilir.

$$w_i = v_i \qquad i=1,2,3 \tag{2.21}$$

buna göre (2.20) aşağıdaki şekli alır:

$$R_i = \int_{\Omega} (v_i L\{v\}^T\{k\} - v_i f).\, d\Omega = 0 \tag{2.22}$$

Bu işlemlerle yeniden (2.15)'de verilen matris sistemi elde edilir, [K] matrisi, L operatörü özeşlenik olmadıkça simetrik olmak zorunda değildir. Bu durumda, Galerkin yöntemi de Ritz yöntemindeki ile aynı denklem sistemini verir [31].

2.3 Sonlu Elemanlar Yönteminin İki Boyutlu Elektromanyetik Alan Hesaplarında Kullanımı

Günümüzde pek çok sayısal yöntem kullanılıyor olmasına karşın sonlu elemanlar yönteminin daha yaygınlaşmasının nedeni uygulama kolaylığı yani fiziksel problemi doğru modelleyebilme yeteneğidir. Burada sonlu elemanlar yönteminin iki boyutlu manyetik alan problemlerine uygulanışı, birinci dereceden doğrusal elemanlar kullanılarak ele alınacaktır. Bu temeller basit örnekler ele alınarak gösterilecektir.

Elektrik mühendisliğinde sonlu elemanlar yöntemi, elektrik veya manyetik alanı incelenecek bölge içindeki enerjinin en küçük değere indirgenmesi (minimumlaştırılması) ilkesine dayanır. Bölge içindeki alan Laplace veya Poisson tipinde bir elektrik veya manyetik alan olabilir.

Sonlu elemanlar yönteminde de diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi, bir sistemin sonlu sayıdaki bilinmeyen büyüklüğünün, sistemin bilinen büyüklükleri cinsinden bulunması yöntemi izlenir.

Elektromanyetik alan problemlerinin çoğu ya kısmi türevli ya da integralli denklemler içerir. Kısmi türevli denklemler sonlu farklar ya da sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilir [31].

2.3.1 Enerjinin en küçük değere indirgenmesi ilkesi

Enerji bağıntısından yararlanarak enerjiyi en küçük değer yapan vektör potansiyel değerlerini bulabilmek için öncelikle katsayıları henüz bilinmeyen ve basit

fonksiyonların toplamından oluşmuş bir A(x,y) vektör potansiyel yaklaşım fonksiyonunun tanımlanmış olması gerekir.

Tanımlanacak bu vektör potansiyel fonksiyonunun bölge içinde sürekli olduğu ve sonlu sayıda türevi bulunacağı göz önünde bulundurulmalıdır.

Manyetik alan içindeki kaynaklar J ile ve manyetik relüktivite υ ile gösterilirse, böyle bir Poisson alanında kartezyen koordinatlar sisteminde enerji fonksiyoneli şu şekilde ifade edilir [32].

$$W = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2}\upsilon|\nabla A|^2 - JA\right].\,dxdy \tag{2.23}$$

$$|\nabla A|^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 \tag{2.24}$$

Yukarıda W enerji bağıntısında $\frac{1}{2}\upsilon|\nabla A|^2 - JA$ terimi, $\Omega = dxdy$ yüzeyindeki enerji yoğunluğunu göstermektedir.

Bir çözüm bölgesi için de sınır koşullarını sağlayan birden fazla vektör potansiyel fonksiyonu elde etmek olasıdır, ancak bunlardan bir tanesi;

$$\nabla^2 A = \Delta A = \frac{1}{\upsilon} J = \mu J \tag{2.25}$$

Poisson denklemini sağlar ve bu fonksiyon tektir. Poisson denklemini sağlayan bu çözüm aynı zamanda bölge içindeki vektör potansiyel enerjiyi en küçük yapan çözümdür. Bunun tersi de söylenebilir, bölge içinde enerjiyi en küçük yapan vektör potansiyel çözümü, Poisson denklemini sağlayan vektör potansiyel çözümüdür.

Bu nedenle sonlu elemanlar yönteminde Poisson denklemini çözmek yerine enerji denklemini en küçük yapan bir vektör potansiyel çözümünü bulmak yoluna gidilir [33].

Bunu şu şekilde ifade etmek mümkündür:

Minimum enerji koşulunu sağlayan vektör potansiyel fonksiyonu	$\Longleftrightarrow$	Poisson denklemini sağlayan vektör potansiyel fonksiyonu

2.3.2 Sonlu elemanlar yöntemi temelleri

Herhangi bir fiziksel problemin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü yapabilmek için öncelikle problemin geometrisi çizilmeli, problemin içerdiği malzemeler, başlangıç ve sınır koşulları tanımlanmalıdır. Bu aşamada sonlu elemanlar yönteminin dört temel adımına geçilir.

Bu adımlar:

- Çözüm bölgesinin sonlu elemanlara veya alt bölgelere ayrılması
- Her bir eleman için temel denklemlerin yazılması
- Çözüm bölgesindeki tüm elemanların birleştirilmesi
- Elde edilen denklemlerin çözümü

Kapalı bir bölgenin sonlu elemanlara bölünmesi, boyutları, konumları ve şekilleri isteğe bağlı olarak seçilen elemanlarla yapılabilir. Bu elemanlar, bir boyutlu problemlerde doğru parçaları şeklinde, iki boyutlu problemlerde üçgen, dörtgen veya çokgen gibi şekillerde, üç boyutlu problemlerde ise küp, prizma, dörtyüzlü gibi şekillerde olabilir.

Bölge içinde eleman sayısı ve dağılımı çözümün doğruluğuna etki eden etkenlerdendir. Bir bölge içinde elemanların nerede yoğunlaştırılacağı kolayca kestirilebilir. Bu sayede gereksiz elemanlar nedeniyle doğrusal denklem sisteminin ve çözüm süresinin gereksiz büyümesi önlenmiş olur [31].

2.3.2.1 Birinci dereceden elemanlar

Sonlu elemanlar yöntemi ile bir vektör potansiyel problemini çözümlemede, vektör potansiyel için yaklaşık bir çözüm elde etmek için, sonlu bölge elemanlara ayrılır. Bölgedeki her eleman içinde vektör potansiyelinin belirli bir bağıntı ile değiştiği kabul edilerek, vektör potansiyelin sürekli olarak değiştiği bir bölgede, bölgenin tümü için yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. Bir elemandaki vektör potansiyelin değişimi olarak alınan böyle bir vektör potansiyel fonksiyonuna, yaklaşım fonksiyonu veya interpolasyon fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyon genellikle bir polinom şeklinde seçilir. Birinci dereceden (doğrusal) yaklaşım fonksiyonları (interpolasyon polinomları) şu şekilde gösterilirler:

$$A(x) = a + bx \qquad \text{(Bir boyutlu)} \qquad (2.26)$$

$$A(x,y) = a + bx + cy \qquad \text{(İki boyutlu)} \qquad (2.27)$$

$$A(x,y,z) = a + bx + cy + dz \qquad \text{(Üç boyutlu)} \qquad (2.28)$$

Seçilen polinomların derecesi ne kadar yüksek ise doğru çözüme o kadar iyi yaklaşılır. Polinom şeklindeki fonksiyonlar karmaşık durumların daha iyi tanımlanmasını sağlarken, türev alma işlemlerini de kolaylaştırır. Yüksek dereceli polinomlarda doğruluk artarsa da hesap süresi, bellek ihtiyacı ve karışıklık da o ölçüde artar.

Bir polinomun katsayıları, eleman üzerinde ve içinde seçilmiş düğümlerin koordinatları ve vektör potansiyelleri cinsinden bulunabilir. Polinomun derecesinin yüksek olması, daha fazla düğüm tanımlama olanağını verir. Basitleştirmek bakımından algoritmaların çoğunda birinci dereceden yaklaşım fonksiyonları kullanılır. Üçgen elemanlarla böyle bir yaklaşımda çokterimlinin üç katsayısı vardır. Bu tür bir birinci dereceden iki boyutlu polinom şu şekilde yazılabilir:

$$A(x,y) = a + bx + cy \qquad (2.29)$$

Burada a, b ve c sabit birer katsayı, x ve y de kartezyen koordinatlardır. Bu polinomda katsayıları belirleyebilmek için üçgen elemanların üç köşe (düğüm) noktasına ilişkin koordinatların ve vektör potansiyel değerinin bilinmesi gerekir.

Birinci dereceden bir yaklaşımda, A(x,y)'nin eleman içinde ve kenarlarında doğrusal olarak değiştiği kabul edilir. Bu vektör potansiyelin konuma göre değeri, eleman içinde sıfırdan farklı, eleman dışında ise sıfırdır. Eleman içinde vektör potansiyelin doğrusal olarak değişmesi, vektör potansiyel bağıntısından x'e ve y'ye göre türevler alarak bulunan alan yoğunluğunun eleman içinde sabit olması anlamını taşır. Sonuç olarak, bu durumda bir eleman içinde:

1. Vektör potansiyel doğrusal olarak değişir.
2. Alan yoğunluğu sabittir.

Görüldüğü gibi gerçek çözümün yerini parça parça doğrusal bir fonksiyon almaktadır. Eğer tanımlanan bölgedeki elemanların köşe noktaları ortak ise, vektör potansiyel değişimi iki elemanın arasındaki sınırda da sürekli olacaktır. Bu sınırlar

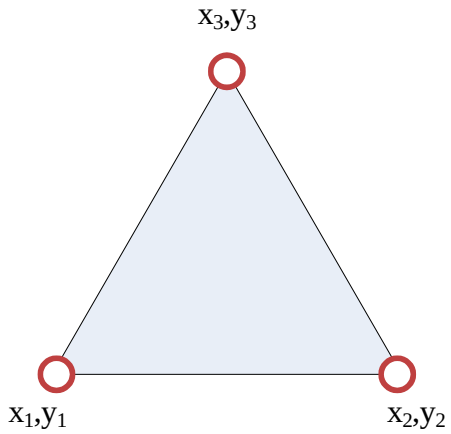
arasında aralık olmadığından çözüm olarak bulunan A(x,y), parça parça fakat tüm bölge içinde sürekli olan bir çözümdür.

Bir çözüm bölgesinin bölündüğü eleman sayısı N_p olmak üzere çözüm bölgesine ilişkin vektör potansiyel bağıntısı şu şekilde yazılabilir:

$$A(x,y) = \sum_{p=1}^{N_p} A^p(x,y) \tag{2.30}$$

Burada $A^p(x,y)$ bir p elemanı içindeki vektör potansiyel fonksiyonudur [2].

Sonlu elemanlar yönteminin uygulamasında temel işlem, çalışma bölgesinin basit sonlu boyutta alt bölgelere ayrılmasıdır. Sonlu elemanlar denilen bu bölgelerin her biri için, bilinmeyen bir yaklaşım fonksiyonu elde edilir. Üçgen ya da dörtgen, düz kenarlı ya da eğri kenarlı olan bu elemanlar, çalışma bölgesini bölümlere ayırmalıdır. Genellikle "ağ" diye isimlendirilen bu bölümler, hesaplamanın iyi sonuçlar vermesi için belirli kurallara uymalıdır. Şekil 2.1'de üç düğümlü bir eleman verilmiştir.



Şekil 2.1 : Herhangi bir p elemanı

$$A_1 = A(x_1,y_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 \tag{2.31}$$

$$A_2 = A(x_2,y_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2y_2 \tag{2.32}$$

$$A_3 = A(x_3,y_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2y_3 \tag{2.33}$$

Problemin varyasyonel şekli bilindiğine göre:

$$A^{min}\left\{F(A) = \iint_{\Omega}\left[A, A'_x, A'_y, x, y\right].dx.dy\right\} \tag{2.34}$$

Şimdi bölge içinde sonlu elemanların F'nin katlı integralinin yerine toplam şekliyle ifade edilecektir. Burada N_p ağ içindeki elemanların sayısını ve F_p ise, p elemanına ilişkin fonksiyoneli gösterir.

$$F(A) = \sum_{p=1}^{N_p} F_p(A) \tag{2.35}$$

Her bir eleman için, A, p elemanının sadece A_A^p, A_B^p, A_C^p parametrelerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilen bir F(A), A = $P(A_A^p, A_B^p, A_C^p, x, y)$ yaklaşım fonksiyonu ile değiştirilir.

$$F_p(A) = F_p(A_A^p, A_B^p, A_C^p) \tag{2.36}$$

Toplama işlemi gerçekleştirilirse, birçok elemanın paylaştığı 1,2,...,N_d adet düğüm hesaba katılır. Her elemanın katılması o düğümlerdeki bilinmeyen A_1,A_2,...,A_{Nd} fonksiyonların bütün değerlerini içeren fonksiyonel tarafından göz önünde bulundurulur.

Bütün bölge üzerinde F'nin en küçük değerleri aranır. Bunun için fonksiyonelin A_1,A_2,...,A_N değerlerine göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$F(A) = \sum_{p=1}^{N_p} F_p\left(A_A^p, A_B^p, A_C^p\right) = F\left(A_1, A_2, \dots, A_{N_d}\right) \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial A_2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial A_{N_d}} = 0 \tag{2.38}$$

Bu işlemler ağın düğümlerinde $A_1, A_2, \dots, A_{N_d}$ ile tanımlanan N_d adet bilinmeyen için N_d sayıda denklem sisteminin oluşturulmasını sağlar. Bu denklemlerin ikinci terimi hem kaynak terimleri (manyetostatik problemde akım yoğunluğunu) içeren fonksiyonelin bir bölümünden, hem de sınır koşullarında değeri bilinen A ifadesinden elde edilir [33].

2.3.3 İki boyutlu elektromanyetik analiz

İki boyutlu manyetostatik problemin denklem sistemi sınır koşullarıyla aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - J = 0 \tag{2.39}$$

Sınır koşulları:

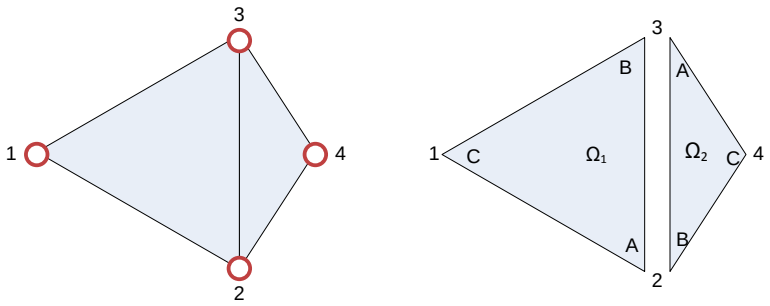
$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \qquad \partial\Omega_1 \text{ üzerinde,}$$

$$A = 0 \qquad \partial\Omega_2 \text{ üzerinde}$$

olup, Şekil 2.2'de görüldüğü gibi bölgenin 1, 2, 3, 4 kenarlarından oluşan bir dörtgen olduğu ve Ω_1 ile Ω_2 gibi iki üçgen elemana bölündüğü kabul edilecektir.

2.3.3.1 Genel ve yerel numaralandırma

Her bir elemanın numaralandırması içine yani üçgen köşelerine harfler yerleştirilerek gerçekleştirilmiştir. Düğümlerin genel ve yerel numaralandırmaları arasındaki ilişki matris olarak şu şekildedir:



Şekil 2.2 : Yerel ve genel numaralandırma

$$M_A^1 = M_2 \qquad M_B^1 = M_3 \qquad M_C^1 = M_1 \tag{2.40}$$

$$M_A^2 = M_3 \qquad M_B^2 = M_2 \qquad M_C^2 = M_4 \tag{2.41}$$

$$\Delta^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

$$M^1 = \Delta^1 . M \qquad\qquad M^2 = \Delta^2 . M \tag{2.43}$$

$$M^1 = \begin{bmatrix} M_A^1 \\ M_B^1 \\ M_C^1 \end{bmatrix} \qquad\qquad M^2 = \begin{bmatrix} M_A^2 \\ M_B^2 \\ M_C^2 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

2.3.3.2 İnterpolasyon (yaklaşım) fonksiyonu

Bir üçgen eleman için doğrusal yaklaşım fonksiyonu seçilmiş ise bu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$A^p = \alpha_0^p + \alpha_1^p . x + \alpha_2^p . y \tag{2.45}$$

$$A^p = \begin{bmatrix} A_A^p \\ A_B^p \\ A_C^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0^p + \alpha_1^p . x_A + \alpha_2^p . y_A \\ \alpha_0^p + \alpha_1^p . x_B + \alpha_2^p . y_B \\ \alpha_0^p + \alpha_1^p . x_C + \alpha_2^p . y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha_0^p \\ \alpha_1^p \\ \alpha_2^p \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0^p \\ \alpha_1^p \\ \alpha_2^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_A^p \\ A_B^p \\ A_C^p \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} x_B y_C - x_C y_B & x_C y_A - x_A y_C & x_A y_B - x_B y_A \\ y_B - y_C & y_C - y_A & y_A - y_B \\ x_C - x_B & x_A - x_C & x_B - x_A \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Matrisin determinantı Δ, üçgeninin alanının iki katıdır.

$$A = [1 \quad x \quad y] . \begin{bmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_A^p \\ A_B^p \\ A_C^p \end{bmatrix} = \Phi_A^p . A_A^p + \Phi_B^p . A_B^p + \Phi_C^p . A_C^p \tag{2.49}$$

Burada $\Phi_A^p, \Phi_B^p, \Phi_C^p$ doğrusal şekil fonksiyonlarını tanımlar.

$$\Phi_A^p = a_N^p + b_N^p . x + c_N^p . y \tag{2.50}$$

$$a_A = \frac{1}{2\Delta}(x_B y_C - x_C y_B) \qquad a_B = \frac{1}{2\Delta}(y_B - y_C) \qquad a_C = \frac{1}{2\Delta}(x_C - x_B) \tag{2.51}$$

$$b_A = \frac{1}{2\Delta}(x_C y_A - x_A y_C) \qquad b_B = \frac{1}{2\Delta}(y_C - y_A) \qquad b_C = \frac{1}{2\Delta}(x_A - x_C) \tag{2.52}$$

$$c_A = \frac{1}{2\Delta}(x_A y_B - x_B y_A) \qquad c_B = \frac{1}{2\Delta}(y_A - y_B) \qquad c_C = \frac{1}{2\Delta}(x_B - x_A) \tag{2.53}$$

$$\Phi_A^p = a_A^p + b_A^p . x + c_A^p . y \tag{2.54}$$

$$\Phi_B^p = a_B^p + b_B^p . x + c_B^p . y \tag{2.55}$$

$$\Phi_C^p = a_C^p + b_C^p . x + c_C^p . y \tag{2.56}$$

Sonuçta, aşağıdaki eşitlik (2.57) elde edilir.

$$A^p(x, y) = \Phi^{p^T} A = A^{p^T} \Phi^p \tag{2.57}$$

$$\Phi^p = \begin{bmatrix} a_A^p & b_A^p & c_A^p \\ a_B^p & b_B^p & c_B^p \\ a_C^p & b_C^p & c_C^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

$$A(x, y) = \sum_{p=1}^{N_p} A^p(x, y) = \sum_{p=1}^{N_p} \Phi^{p^T} A^p = \sum_{p=1}^{N_p} \Phi_i A_i = \Phi^T A \tag{2.59}$$

Φ vektörünü hesaplayabilmek için Δ^p bağlantı matrisi kullanılır.

$$A^p = \Delta^p A \Rightarrow \Phi^T A = \sum_{p=1}^{N_p} \Phi^{p^T} \Delta^p A = \sum_{p=1}^{N_p} (\Delta^{p^T} \Phi^p)_A^T \tag{2.60}$$

$$\Phi^T = \sum_{p=1}^{N_p} \Phi^{p^T} \Delta^p = \sum_{p=1}^{N_p} (\Delta^{p^T} \Phi^p)^T \tag{2.61}$$

$$\Phi = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T} \Phi^p \tag{2.62}$$

Bu şekil fonksiyonları her bir eleman için oluşturulur. (x,y) koordinatları ile tanımlanan nokta K olarak adlandırıldığından, $\Phi_i^p(K_j) = \delta_{ij}$ şeklinde değerlendirilebilir.

$$\Phi_A^p(x_A,y_A) = 1 \qquad \Phi_A^p(x_B,y_B) = 0 \qquad \Phi_A^p(x_C,y_C) = 0 \tag{2.63}$$

$$\Phi_B^p(x_A,y_A) = 0 \qquad \Phi_B^p(x_B,y_B) = 1 \qquad \Phi_B^p(x_C,y_C) = 0 \tag{2.64}$$

$$\Phi_C^p(x_A,y_A) = 0 \qquad \Phi_C^p(x_B,y_B) = 0 \qquad \Phi_C^p(x_C,y_C) = 1 \tag{2.65}$$

2.3.3.3 Fonksiyonelin elde edilmesi

$A(x,y) = \Phi_1 A_1 + \Phi_2 A_2 + \Phi_3 A_3 + \Phi_4 A_4$ eşitliği için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\Phi_A^1\\ \Phi_B^1\\ \Phi_C^1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}\Phi_A^2\\ \Phi_B^2\\ \Phi_C^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Phi_C^1\\ \Phi_A^1 + \Phi_A^2\\ \Phi_B^1 + \Phi_C^2\\ \Phi_B^2\end{bmatrix} \tag{2.66}$$

$$A(x,y) = \Phi_C^1 A_1 + (\Phi_A^1 + \Phi_A^2)A_2 + (\Phi_B^1 + \Phi_C^2)A_3 + \Phi_B^2 A_4 \tag{2.67}$$

$$A(x,y) = \Phi^T A = A^T \Phi \tag{2.68}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^T A = A^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^T A = A^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \tag{2.69}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = A^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi^T}{\partial x}\right) A \qquad \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 = A^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Phi^T}{\partial y}\right) A \tag{2.70}$$

$$fA = f\Phi^T A \tag{2.71}$$

$$F(A) = \iint \frac{1}{2}\left[A^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi^T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Phi^T}{\partial y}\right) A\right] . dxdy - \iint f\Phi^T A . dxdy \tag{2.72}$$

$$= \frac{1}{2} A^T \left[\iint \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi^T}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Phi^T}{\partial y}\right) . dxdy\right] . A - \left(\iint f\Phi^T dxdy\right) . A \tag{2.73}$$

$$F(A) = \frac{1}{2}A^T KA - F^T A \tag{2.74}$$

$$K = \iint \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^T}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi^T}{\partial y}\right).\,dxdy \tag{2.75}$$

$$F = \iint \Phi f dxdy \tag{2.76}$$

Elemanlar için tanımlanan fonksiyon tekrar incelenirse:

$$\Phi = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\,\Phi^p \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\frac{\partial\Phi^p}{\partial x} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\frac{\partial\Phi^p}{\partial y} \tag{2.77}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^T}{\partial x} = \left(\sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\frac{\partial\Phi^p}{\partial x}\right).\left(\sum_{p'=1}^{N_p} \Delta^{p'^T}\frac{\partial\Phi^{p'}}{\partial x}\right) = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\left(\frac{\partial\Phi^p}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{p\,T}}{\partial x}\right).\Delta^p \tag{2.78}$$

Fakat $\forall p' \neq p \Rightarrow \Phi^{p'}.\Phi^p = 0$ olduğu için:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi^T}{\partial y} = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\left(\frac{\partial\Phi^p}{\partial y}\frac{\partial\Phi^{p\,T}}{\partial y}\right).\Delta^p \tag{2.79}$$

$$K = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T}\left(\iint_{\Omega_p}\left(\frac{\partial\Phi^p}{\partial x}\frac{\partial\Phi^{p\,T}}{\partial x} + \frac{\partial\Phi^p}{\partial y}\frac{\partial\Phi^{p\,T}}{\partial y}\right).\,d\Omega_p\right).\Delta^p \tag{2.80}$$

$$F = \iint_{\Omega} f\Phi^T.\,d\Omega = \sum_{p=1}^{N_p}\left(\iint_{\Omega_p} f\,\Phi^{p\,T}.\,d\Omega_p\right).\Delta^p \tag{2.81}$$

$$K = \sum_{p=1}^{N_p} \Delta^{p^T} K^p \Delta^p \qquad K^p = \iint_{\Omega_p}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi^T}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi^T}{\partial y}\right)d\Omega_p \tag{2.82}$$

$$F = \sum_{p=1}^{N_p} F^p \Delta^p \qquad F^p = \iint_{\Omega_p}\left(f\Phi^{p\,T}\right).\,d\Omega_p \tag{2.83}$$

$\nabla\vec{\Phi} = \Phi$ nin gradyantı ile vektör olarak gösterilirse:

$$K^p = \iint_{\Omega_p} \left(\nabla\vec{\Phi}^p \nabla\vec{\Phi}^{p\,T} \right) . d\Omega_p \tag{2.84}$$

$$F^p = \iint_{\Omega_p} \left(f\Phi^{p\,T} \right) . d\Omega_p \tag{2.85}$$

$$\frac{\partial\Phi_1^1}{\partial x} = b_A^1 \qquad \frac{\partial\Phi_2^1}{\partial x} = b_B^1 \qquad \frac{\partial\Phi_3^1}{\partial x} = b_C^1 \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial\Phi_1^1}{\partial y} = c_A^1 \qquad \frac{\partial\Phi_2^1}{\partial y} = c_B^1 \qquad \frac{\partial\Phi_3^1}{\partial y} = c_C^1 \tag{2.87}$$

$$\frac{\partial\Phi^1}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_A^1 \\ b_B^1 \\ b_C^1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial\Phi^2}{\partial x} = \begin{bmatrix} b_A^2 \\ b_B^2 \\ b_C^2 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

$$\frac{\partial\Phi^1}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_A^1 \\ c_B^1 \\ c_C^1 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial\Phi^2}{\partial y} = \begin{bmatrix} c_A^2 \\ c_B^2 \\ c_C^2 \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

$$K_{p=1,2}^p = \iint \left\{ \begin{bmatrix} {b_A^p}^2 & b_A^p b_B^p & b_A^p b_C^p \\ b_B^p b_A^p & {b_B^p}^2 & b_B^p b_C^p \\ b_C^p b_A^p & b_C^p b_B^p & {b_C^p}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {c_A^p}^2 & c_A^p c_B^p & c_A^p c_C^p \\ c_B^p c_A^p & {c_B^p}^2 & c_B^p c_C^p \\ c_C^p c_A^p & c_C^p c_B^p & {c_C^p}^2 \end{bmatrix} \right\} . d\Omega \tag{2.90}$$

$$F_{p=1,2}^p = \left\{ \iint \left(a_A^p + b_A^p . x + c_A^p . y\right) d\Omega \quad \iint \left(a_B^p + b_B^p . x + c_B^p . y\right) d\Omega \quad \iint \left(a_C^p + b_C^p . x + c_C^p . y\right) d\Omega \right\}$$

$$F_{p=1,2}^p = \left[F_1^p \quad F_2^p \quad F_3^p \right] \tag{2.91}$$

Böylece, eşitlik (2.92)'deki iki matrisi elde edilir:

$$K^1 = \begin{bmatrix} K_{AA}^1 & K_{AB}^1 & K_{AC}^1 \\ K_{BA}^1 & K_{BB}^1 & K_{BC}^1 \\ K_{CA}^1 & K_{CB}^1 & K_{CC}^1 \end{bmatrix} \qquad K^2 = \begin{bmatrix} K_{AA}^2 & K_{AB}^2 & K_{AC}^2 \\ K_{BA}^2 & K_{BB}^2 & K_{BC}^2 \\ K_{CA}^2 & K_{CB}^2 & K_{CC}^2 \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

$$K_{MN}^p = (b_M^p b_N^p + c_M^p c_N^p) \qquad \text{x Elemanın yüzey alanı(e)} \tag{2.93}$$

$$F^p = \iint \left(a_N^p + b_N^p . x + c_N^p . y\right) . d\Omega \tag{2.94}$$

Matris çarpımı ile $\sum \Delta^{p^T} M^p \Delta^p$'den K'nın yapısı elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} K_{AA}^1 & K_{AB}^1 & K_{AC}^1 \\ K_{BA}^1 & K_{BB}^1 & K_{BC}^1 \\ K_{CA}^1 & K_{CB}^1 & K_{CC}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{CA}^1 & K_{CB}^1 & K_{CC}^1 \\ K_{AA}^1 & K_{AB}^1 & K_{AC}^1 \\ K_{BA}^1 & K_{BB}^1 & K_{BC}^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.95}$$

$$\begin{bmatrix} K_{CA}^1 & K_{CB}^1 & K_{CC}^1 \\ K_{AA}^1 & K_{AB}^1 & K_{AC}^1 \\ K_{BA}^1 & K_{BB}^1 & K_{BC}^1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{CC}^1 & K_{CA}^1 & K_{CB}^1 & 0 \\ K_{AC}^1 & K_{AA}^1 & K_{AB}^1 & 0 \\ K_{BC}^1 & K_{BA}^1 & K_{BB}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} K_{AA}^2 & K_{AB}^2 & K_{AC}^2 \\ K_{BA}^2 & K_{BB}^2 & K_{BC}^2 \\ K_{CA}^2 & K_{CB}^2 & K_{CC}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{BA}^2 & K_{BB}^2 & K_{BC}^2 \\ K_{AA}^2 & K_{AB}^2 & K_{AC}^2 \\ K_{CA}^2 & K_{CB}^2 & K_{CC}^2 \end{bmatrix} \tag{2.97}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{BA}^2 & K_{BB}^2 & K_{BC}^2 \\ K_{AA}^2 & K_{AB}^2 & K_{AC}^2 \\ K_{CA}^2 & K_{CB}^2 & K_{CC}^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{BB}^2 & K_{BA}^2 & K_{BC}^2 \\ 0 & K_{AB}^2 & K_{AA}^2 & K_{AC}^2 \\ 0 & K_{CB}^2 & K_{CA}^2 & K_{CC}^2 \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

Çizelge 2.1 : K katsayılar matrisinin genel yapısı

No	1	2	3	4
1	$K_{CC}^1 + 0$	$K_{CA}^1 + 0$	$K_{CB}^1 + 0$	0+0
2	$K_{CA}^1 + 0$	$K_{AA}^1 + K_{BB}^2$	$K_{AB}^1 + K_{BA}^2$	$0 + K_{BC}^2$
3	$K_{BC}^1 + 0$	$K_{BA}^1 + K_{AB}^2$	$K_{BB}^1 + K_{AA}^2$	$0 + K_{AC}^2$
4	0+0	$0 + K_{CB}^2$	$0 + K_{CA}^2$	$0 + K_{CC}^2$

$$F = [F_A^1 \quad F_B^1 \quad F_C^1\,].\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + [F_A^2 \quad F_B^2 \quad F_C^2\,].\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

$$F = [F_A^1 \quad F_B^1 \quad F_C^1 \quad 0\,] + [0 \quad F_B^2 \quad F_A^2 \quad F_C^2] \tag{2.100}$$

$$F = [\;F_C^1 \quad F_A^1 + F_B^2 \quad F_B^1 + F_A^2 \quad F_C^2\;] \tag{2.101}$$

Bu matris bir elemanına ilişkin katsayılar (katılık, stiffness) matrisi olarak adlandırılır. Simetrik ve kare matrisi olan katsayılar matrisinin K_{ij}^{p} terimleri, i ve j düğümleri arasında bağıntıları gösteren terimlerdir [33].

2.3.3.4 Fonksiyonelin minimumlaştırılması

$F(A)$, A vektörünün ve K matrisinin bir fonksiyonu olarak ifade edilir.

$$F(A) = \frac{1}{2}A^T K A - F^T A \tag{2.102}$$

Bu fonksiyonelin A vektör potansiyelinin $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_{N_d}$ değerlerine göre türevleri alınırsa eşitlik (2.103) elde edilir:

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial A_i} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial A_{N_d}} = 0 \tag{2.103}$$

$F(A)$ ifadesini tekrar yazılırsa eşitlik (2.104) ve (2.105) elde edilir.

$$F(A) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_d}.\sum_{j=1}^{N_d} K_{kj}A_kA_j - \sum_{k=1}^{N_d} F_kA_k \tag{2.104}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_d} K_{ij}A_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_d} K_{ki}A_k - F_i \tag{2.105}$$

(2.104) ve (2.105) eşitliklerinde, indislerde gerekli düzenlemeler yapılırsa eşitlik (2.106) bulunur.

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_d} K_{ij} A_j - F_i \qquad \forall_i = 1,2, \dots . N_d \tag{2.106}$$

böylece doğrusal denklem sistemi elde edilir.

$$KA = F \tag{2.107}$$

3. ELEKTROMANYETİKTE TEMEL KAVRAMLAR

Elektrik makinalarını ve bu çalışmanın içeriğinde yer alan asenkron makinayı tüm yönleriyle kavrayabilmek için elektromanyetik alanlara ilişkin temel bilgileri incelenmelidir. Bu amaçla, bu bölümde elektrodinamik alanlar üzerinde tanımlanmış en önemli denklem takımı olan Maxwell denklemleri hatırlatılmıştır.

3.1 Elektromanyetik Alan Temelleri

3.1.1 Manyetostatik

Elektrik mühendisliğinde yoğun olarak elektromanyetik alan teorisi kullanılmaktadır. Bu teoriden seçilen teoremlerden en yaygın olanları da, akı yoğunluğu, (B), alan şiddeti (H) ve akı dağılımlarını (Φ) barındıran ifadelerdir. Bu ifadelerdeki B akı yoğunluğu dağılımına, sadece iki boyutlu alanlarda ulaşmak bile en az iki vektör bileşeni gerektirir. Bu nedenle, birçok hesaplama yöntemi; çözümü, içinde bolca skaler bulunduran, potansiyel fonksiyonlar kullanarak bulur. Sıkça kullanılan potansiyel fonksiyonlar:

1. Skaler manyetik potansiyel, U: Bu potansiyel amper-sarımlarla ifade edilip manyetomotor kuvvet hesabında kullanılır. Üç boyutlu sistemlerde bile tamamen skaler bir ifadedir.
2. Vektör manyetik potansiyel, A: Bu potansiyel, vektör bileşeni yönündeki büyüklük ve kendisini oluşturan akım yardımıyla ifade edilir. Kısacası bu potansiyel akının bir ölçüsüdür. Adından da anlaşılacağı gibi vektörel bir büyüklüktür, ancak iki boyutlu problemlerde skaler büyüklüğe indirgenebilir [30].

3.1.1.1 Skaler manyetik potansiyel

Akım taşıyıcı hiç bir öğenin olmadığı ortamda, alan şiddeti olan H, skaler manyetik potansiyel olan U'ye bağlıdır.

$$\mathrm{H} = -\mathrm{grad}U \tag{3.1}$$

Alan şiddeti ve akı yoğunluğunun sadece iki boyutlu olduğunu düşünürsek izotropik malzemeler için;

$$H_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad B_x = -\mu_0\mu_r\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$H_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad B_y = -\mu_0\mu_r\frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.2}$$

Herhangi bir birim alanda akının sürekli olduğunu ve bununla beraber hiç kayıp ya da kazanç olmadığını düşünülürse, matematiksel olarak akı yoğunluğunun diverjansı sıfır olacaktır. Bu haliyle eşitlik bir Laplace denklemine dönüşür [30].

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_0\mu_r\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_0\mu_r\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.3}$$

3.1.1.2 Vektör manyetik potansiyel

A akımının (z) yönünde sadece A_z'yi ve x-y düzlemlerinde de B'nin bileşenlerini ürettiği düşünülürse; A_z, x-y düzlemlerinde dolaşan akının birim z derinliğindeki bir ölçüsü olmaktadır. Bu şekilde düşünülürse birimi Wb/m olmalıdır. İki boyutlu düzlemler içi A_z skaler kabul edilebilir.

B, akı yoğunluğunun da diverjansı sıfır olduğu için; $B = \mathrm{rot}\,(A)$ denebilir.

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \qquad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{3.4}$$

Bu denklem takımına ek olarak, $\mathrm{rot}H = J$ de bilindiğine göre $B = \mu_0\mu_r H$ eşitliği kullanılarak eşitlik (3.5) elde edilebilir.

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu_0\mu_r}\mathrm{rot}A\right) = J \tag{3.5}$$

İki boyutlu düzlemlerde ve bu tip düzlemlerle ifade edilen problemlerde;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_0\mu_r}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_0\mu_r}\frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = J_z \tag{3.6}$$

şeklindedir.

Bu eşitliğin, sabit μ_r için bir Poisson Denklemi olduğu açıkça görülmektedir [30].

3.1.1.3 Vektör manyetik potansiyel ve akı çizgileri

İki boyutlu sistemler için, vektör potansiyeli A'nın bir skaler ve sabit potansiyel çizgisinin de akı çizgisi olduğu bilgilerinden hareketle aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\frac{\partial A}{\partial x}.\delta x + \frac{\partial A}{\partial y}.\delta y = 0 \qquad \frac{\partial A}{\partial x}.\delta x = -\frac{\partial A}{\partial y}.\delta y \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -B_y \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = B_x \tag{3.8}$$

$$\frac{B_y}{B_x} = \frac{\partial y}{\partial x} \tag{3.9}$$

Bu halde, üç boyutlu sistemler için vektörel bir büyüklük olan A'nın yönü akı yoğunluğu B'nin yönünü vermektedir.

3.1.2 Manyetodinamik

3.1.2.1 Değişken alan etkisi

Elektrik mühendisliğinde zamanla değişen alanın, beraberindeki devreleri ve çevrelerindeki metalleri etkilediği uygulamalarla çok karşılaşılmaktadır. Elektrodinamik problemler genelde vektör manyetik potansiyel cinsinden ifade edilir. İki boyutlu problemlerde endüklenen gerilim, akının zamana göre türevi şeklinde yazılır:

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \text{ veya } \int E dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{3.10}$$

Bu durumda iletken akım yoğunluğu:

$$J_e = \frac{E}{\rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial A}{\partial t} = -\sigma\frac{\partial A}{\partial t} \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir. Kaynak var iken akım yoğunluğu toplamı eşitlik (3.12)'deki gibidir.

$$-(J_s + J_e) = -(J_s - \sigma\frac{\partial A}{\partial t}) \tag{3.12}$$

burada

J_s = Kaynağın oluşturduğu akım yoğunluğu

J_e = Endüklenen akım yoğunluğu

Eşitlik (3.12) iki boyutta tekrar yazılırsa eşitlik (3.13) elde edilir.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial y}\right) = -(J_s - \sigma\frac{\partial A}{\partial t}) \tag{3.13}$$

3.1.2.2 Sinüzoidal değişen alanlar

Kaynağın akımının zamanla sinüzoidal bir biçimde değiştiği durumların özel bir önemi vardır. Manyetik malzemelerin doğrusal olmamasının yanı sıra, bütün alanlar, akımlar ve bunlarla ilgili diğer bütün büyüklükler de sinüzoidal olarak değişecektirler. O halde (3.11) eşitliği (3.14) şekline gelir [30].

$$J_e = -\sigma\frac{\partial A}{\partial t} = -j\omega\sigma\hat{A} \tag{3.14}$$

3.1.2.3 Masif elemanlardaki akı

Masif iletkenlerin alternatif alana maruz kalması sıkça karşılaşılan bir durumdur. Ancak buradaki önemli nokta, akının ve endüklenen akımların iletkenin her noktasında düzgün bir biçimde var olmamasıdır. Akı ve endüklenen akımların kullandığı yüzey; direnç, manyetik geçirgenlik ve frekansa bağlı olan bir derinlik sabitine bağlı olarak değişir.

$$\delta = \left(\frac{2\rho}{\mu_0\mu_r\omega}\right)^{1/2} \qquad \text{Derinlik sabiti} \tag{3.15}$$

X derinliğindeki akı yoğunluğu ise,

$$B = B_s e^{-(x/\delta)(1+j)} \tag{3.16}$$

Buradaki B_s'in s indisi yüzey akı değerinin etkin değerini, $e^{-(x/\delta)}$ genlikte derinliğe bağlı oluşan değişimi, $e^{-j(x/\delta)}$ ise derinlikle fazın değişimini vermektedir.

O halde, birim alanın z doğrultusunda bir metre boyunca toplam akısı eşitlik (3.17)'deki gibi gösterilebilir.

$$\Phi = \int_0^\infty Bdx = B_s \frac{\delta}{2}(1-j) \tag{3.17}$$

Yüzeyde endüklenen elektrik alan ise aşağıdaki eşitliklerdeki gibi hesaplanır.

$$E_s = -j\omega\Phi = -\omega B_s \frac{\delta}{2}(1+j) \tag{3.18}$$

$$J_s = \frac{E_s}{\rho} = -\omega B_s (1+j)\frac{\delta}{2\rho} = -\frac{B_s(1+j)}{\mu_0\mu_r\delta} \tag{3.19}$$

$$\sum I = \int_0^\infty Jdx = J_s \frac{\delta}{2}(1-j) \tag{3.20}$$

$$= -\frac{B_s(1+j)}{2\mu_0\mu_r}(1-j) = -\frac{B_s}{\mu_0\mu_r} \tag{3.21}$$

3.2 Maxwell Denklemleri

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J_s} + \vec{J_e} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Burada;

$\vec{H}$: Manyetik Alan şiddeti Vektörü

$\vec{J}$: Akım Yoğunluğu Vektörü

$\vec{D}$: Deplasman Vektörü

$\vec{J_s}$: Sabit kaynak akımı yoğunluğu vektörü

$\vec{J_e}$: Endüklenen girdap akımı yoğunluğu vektörü

ρ : Toplam elektriksel yük yoğunluğu [5].

3.3 Güç ve Güç Dağılımları

Bir nesne üzerindeki toplam elektromanyetik güç, tasarımcıların ve analizcilerin sıkça kullandıkları bir büyüklüktür. Daha az sıklıkla, aktif bir bobindeki güç dağılımı ve bir bileşen yüzeyindeki zorlanma ya da elektromanyetik olarak endüklenen titreşim veya akustik davranışa da ihtiyaç duyulabilir. Elektromanyetik güç hesapları, özellikle de güç dağılımı hesapları ve bunların yöntemleri, yıllardır çok ciddi biçimde yürütülen felsefi argümanlarla beslenmektedir [35-36].

Sayısal olarak güç ve dolayısıyla da moment hesaplama yöntemleri şu şekilde özetlenebilir [36]:

- Lorentz Kuvveti Yöntemi: Bu yöntem, hava aralığının demir veya sabit mıknatısa komşu olan ağlarının her birinde akı yoğunluğu ve akımın hesaplanması temeline dayanır.
- Maxwell Zorlanma (Stress Tensor) Yöntemi: Burada kuvvet ve moment manyetik alan dağılımlarından direkt olarak elde edilebilirler. Moment incelenen bölgeyi çevreleyen bir çember üzerinde kuvvetin integrali ile elde edilir.
- Birleşik-Enerjinin Türevi Yöntemi: Akım sabit tutulurken, sistemde depolanan birleşik-enerjinin rotorun pozisyonuna göre türevinin alınması ile moment hesaplanır.
- Coulomb'un Görünen İş (Virtual Work) Yöntemi: Sabit ve hareketli kısımların arasındaki elementlerde meydana gelen görünen bozulma (deformasyon) temeline dayanır.
- Arkkio'nun Yöntemi: Bu yöntem Maxwell Zorlanmanın bir değişik şeklidir. Hava aralığındaki manyetik akı yoğunluğu radyal ve teğetsel bileşenlerine ayrılarak yüzeysel integrali alınır [36].

3.3.1 Lorentz kuvveti yöntemi

Bu kolay ve açık yöntem, aktif bir bobindeki ya da iletkendeki güç şiddetinin büyüklüğü ve yönünün tayini için kullanılır. İletkenin havada ya da demirin içinde olması gücün yönünü değiştirecektir.

Güç şiddeti (N/m^2), sonlu elemanlar çalışmasından da bulunabilecek olan B akı yoğunluğu vektörü bileşenleri ile söz konusu alan üzerindeki akım yoğunluğunun dik bileşeninin çarpımına eşittir. Toplam güç şiddeti ise istenen yüzeylerdeki bu çarpımların integrasyonu ile bulunur.

Örneğin bir asenkron makinada, oluklardaki sargılar düşünüldüğünde bir iletken üzerinde üretilen güç çok düşük, ancak bir sargı boyunca toplam güç şiddeti kayda değer büyüklüğe denk olmaktadır. Bu nedenle oluk dibindeki güç şiddeti büyük olmaktadır. Örneğin Carter tarafından da ortaya konduğu gibi momentin ciddi bir kısmı dış yüzeylerde yoğunlaşır. Ancak Lorentz kuvvet yöntemi makina momentini hesaplarken (hava aralığı hariç) çok kullanışlı bir araç değildir. Sadece hava aralığı gücü ve bobin başı güç tahmini için kullanılır [30].

3.3.2 Maxwell- zorlanma (stress tensor) yöntemi: yüzey integrali

Kuvvet, rotoru çevreleyen kapalı S yüzeyi üzerinde Maxwell Stress Tensor'ünün integrali olarak tanımlanır. Yani zorlanma birim derinlikteki alana düşen kuvvettir. Burada τ ise alan tensoru yani elektromanyetik alandaki zorlanmadır.

$$\vec{F} = \int_S \tau . ds \tag{3.22}$$

İntegral alınan yüzeydeki radyal yönde yarıçap $\vec{r}$ ise, kuvvet ile yarıçapın vektörel çarpımından moment bulunur.

$$\vec{T} = \vec{F} . \vec{r} \tag{3.23}$$

3.3.3 Birleşik enerjinin türevi yöntemi

Sistemdeki birleşik enerjiden moment elde edilebilir. Rotor pozisyonunun $\partial\theta$ kadar değişimine karşılık manyetik birleşik enerjinin değişimi ∂W ise, elektromanyetik moment eşitlik (3.24)'teki gibi ifade edilebilir.

$$T = L.\frac{\partial W}{\partial \theta}|_{i=sabit} = \frac{\partial\left[\int_v \int_0^H B.dHdV\right]}{\partial \theta} \tag{3.24}$$

Buradaki L rotorun eksenel uzunluğudur. Sayısal modellemede türev işlemi fark eşitliği olarak ifade edilebilir. Böylece eşitlik (3.24), tekrar düzenlenerek eşitlik (3.25) yazılabilir.

$$T = L.\frac{(W_{\theta+\delta} - W_{\theta})}{\delta} \tag{3.25}$$

Eşitlik (3.25)'teki δ yer değiştirme miktarını belirtir. Rotorun yer değiştirmesi ne kadar küçük adımlarla yapılırsa bu hesaplama yöntemi o kadar hassas çözüm verecektir [37].

4. HARMONİKLER

Günümüzde güç sistemlerinde sayıları sürekli artan, gerilim ve akım karakteristikleri nedeniyle "doğrusal olmayan yükler" olarak tanımlanan unsurlar, sinüs şeklinin dışında dalga şekillerinin meydana gelmesine neden olurlar. Bu durum harmonik kavramını ortaya çıkarmıştır. Çalışmanın bu bölümünde, harmonik kavramı tanıtılmış, elektrik makinaları üzerindeki etkileri irdelenmiştir.

4.1 Harmonik Analizinde Kullanılan Yöntemler ve Harmoniklerle İlgili Tanımlar ve Temel Bağıntılar

Bir elektrik güç sisteminde, tüketiciye sabit gerilim ve frekansta enerji verilmeli, gerilim dalga şekli sinüs şeklinde olmalıdır. İdealde olması umulan durum budur. Aşağıda sıralanmış unsurlar kaynak dalga şeklinin bozulmasına ve harmoniklerin meydana gelmesine yol açmıştır.

Harmoniklerin meydana gelmesine neden olan başlıca sistem elemanları şunlardır;

- Güç elektroniği elemanları ve devreleri
- Doğru akım ile enerji iletimi (HVDC)
- Transformatörler
- Döner makinalar
- Statik VAR generatörleri
- Ark fırınları
- Kesintisiz güç kaynakları
- Deşarj lambaları
- Elektronik balastlar
- Bilgisayarlar ve bilgisayar ile ilişkili tüm bilişim cihazları
- Fotovoltaik sistemler

Yukarıdaki unsurlar şebekede bozulmuş sinüs şeklinde (bozunumlu) akım akmasına neden olurlar. Bu sinüzoidal olmayan akımlar, şebeke geriliminin de dalga şeklini bozarlar. Sonuç olarak doğrusal olmayan yük akımları ve şebeke gerilimleri, temel bileşen olarak tanımlanan, frekansı (sistemin sinüzoidal sürekli halde kararlı çalışmak üzere tasarlandığı) temel frekansa denk olan bileşenden başka, frekansı temel bileşenin tam katları olan harmonik bileşenleri de içerirler [38-40].

Harmoniğin elektrik sistemleri üzerindeki etkileri:

- Şebekede rezonans olayları, rezonansın neden olduğu aşırı gerilim ve akım,
- Generatör ve şebeke gerilimlerinin bozulması,
- Asenkron ve senkron motorlarda moment salınımları ve aşırı ısınmalar,
- Kompanzasyon sistemlerinin dielektrik zorlanma nedeniyle bozulma ve aşırı reaktif güç yüklenmeleri,
- Endüksiyon tipi sayaçlarda meydana gelebilecek yanlış ölçümler,
- Koruma ve kontrol sistemlerinde meydana gelebilecek sinyal hataları,
- Gerilim düşümünün artması,
- Enerji sisteminin tümünde meydana gelecek olan ilave kayıplar,
- Sistem elemanlarının ömürlerinin azalması,
- Yalıtım malzemelerinin delinmesi,
- Sesli ve görüntülü iletişim sistemlerinde parazit ve anormal çalışma [39].

4.1.1 Harmoniklerin matematiksel ifadesi

Sinüzoidal olmayan ve f(x) ile ifade edilen herhangi bir periyodik dalga, Fransız matematikçisi Fourier tarafından temel frekanslı bir sinüs bileşeni ile harmonik frekanslı sinüs bileşenlerinin ve varsa doğru bileşenin toplamıyla,

$$y = f(x) = c_0 + c_1 \sin(x + \phi_1) + c_2 \sin(2x + \phi_2) + \ldots + c_n \sin(nx + \phi_n) \qquad (4.1)$$

şeklinde matematiksel olarak ifade edilmiştir. Bu eşitlikten yararlanarak harmonik bileşenleri içeren, doğrusal olmayan bir yükün akımı, zamana bağlı yazılırsa,

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \phi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \phi_2) + .. + I_{mn} \sin(n\omega t + \phi_n) \qquad \mathbf{(4.2)}$$

ile ifade edilebilir. Burada ω açısal frekanstır. Açısal frekans, $\omega = 2\pi f$ olup, f temel bileşen frekansıdır. n harmonik mertebesi olmak üzere $(n = 1,2,..,n)$ n, en yüksek harmonik mertebesi, I_0 ise akımın doğru bileşenidir. O halde I_{mn} ve ϕ_n sırasıyla n. harmonik akım bileşeninin maksimum değeri ve faz açısıdır.

Yukarıdaki (4.1) eşitliği zamana bağlı tanımlanan doğru bileşen ile sinüs ve kosinüs bileşenlerinden oluşan ve "Fourier Serisi" olarak adlandırılan bir seri şeklinde,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt) \tag{4.3}$$

olarak da gösterilebilir. Bu serideki a_0, a_n ve b_n katsayıları Fourier bileşenleri olarak adlandırılır. Aşağıda Fourier katsayılarının elde edilmesi ile ilgili yöntemler kısaca açıklanmıştır.

4.1.2 Fourier katsayılarının belirlenmesi

Harmonik analizi, sinüzoidal olmayan periyodik bir dalganın Fourier katsayılarının ya da başka bir deyişle temel bileşen ve daha yüksek dereceli harmoniklerin genlik ve faz açılarının ve varsa doğru bileşeninin hesaplanması işlemi ile tanımlanabilir [41]. Fourier katsayılarının belirlenmesi için analitik yöntem, ölçme yöntemi, grafik yöntemi ile Ayrık Fourier Dönüşümü (BFT) ve Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT) gibi sayısal analiz yöntemlerinden yararlanılmakta olup aşağıda bunlardan bir kısmı kısaca açıklanmıştır [39].

4.1.2.1 Analitik yöntem

Fourier serisindeki terimlerin a_0, a_n ve b_n katsayıları analitik yöntem kullanılarak,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \tag{4.4}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

eşitlikleri ile hesaplanabilir. Bu eşitliklerde işaretin periyodu, 2π olarak alınmıştır. Bu katsayılar elde edildikten sonra (4.3) eşitliği ile verilen Fourier Serisi, $c_0 = a_0$ olmak üzere zaman tanım kümesinde,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nt + \phi_n) \tag{4.5}$$

olarak da ifade edilebilir. Bu eşitlikte c_n ve ϕ_n,

$$c_n = ({a_n}^2 + {b_n}^2)^{1/2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{4.6}$$

eşitlikleri ile hesaplanır [32]. Yukarıdaki (4.5) eşitliği ile tanımlanan Fourier serisinde $c_1 \sin(t + \phi_1)$ terimine $f(t)$ fonksiyonunun temel bileşeni denir. Temel bileşen aynı zamanda tam sinüzoidal değişime karşılık düşen dalgayı belirler [39].

Periyodik bir fonksiyonun Fourier bileşenleri fonksiyonun dalga şekline bağlıdır. Fourier analizi sonunda dalganın şekline bağlı olarak bazı bileşenler bulunmayabilir [39]. Bir $f(t)$ fonksiyonu göz önüne alındığında dalga simetrisi nedeniyle seride bulunmayan bileşenler şöyle açıklanabilir;

- $f(t) = -f(-t)$ ise $b_n = 0$ olur ve seride kosinüslü terimler bulunmaz.
- $f(t) = f(-t)$ ise $a_n = 0$ olur ve seride sinüslü terimler bulunmaz.
- $f(t) = f(\pi + t)$ ise seride çift harmonikler bulunmaz.
- $f(t)$ fonksiyonunun grafiğinde negatif ve pozitif yarı dalgaların alanları birbirine eşit ise a_0 sıfır olur ve seride doğru bileşen bulunmaz.

4.1.2.2 Ölçme yöntemi

Ölçme yöntemi ile harmonik bileşenlerin genlik, faz açısı ve frekanslarını belirlemek için günümüzde Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT) kullanan dalga analizörü veya harmonik analizörü adı verilen cihazlardan yararlanılır. Bu cihazlarda sistem gerilimi bir gerilim probu ile akım ise bir pens akım transformatörü yardımıyla örneklenerek cihaz girişine uygulanır ve harmonik bileşenleri gözlenerek ölçülür [39]. Günümüzde, gerçek zamanda sürekli harmonik analizi yapılarak sinüzoidal

olmayan akım veya gerilimi bir ekran üzerindeki dalga şekli ile veya temel bileşenin yüzdesi cinsinden akım veya gerilim harmonik spektrumu 50. harmonik bileşenine kadar gösterebilen harmonik analizörleri bulunmaktadır [42]. Harmonik ölçme yönteminde ölçüm sonuçları genelde harmonik akım veya gerilim bileşenlerinin genliğinin etkin (rms) değerinin ölçümüne dayanır. İncelenen sistem için doğru bir harmonik eşdeğer devresi elde edebilmek için genlik ile birlikte faz açısının da ölçümü gereklidir. Ancak doğru eşdeğer devre ile sistemin harmonik seviyelerinde oluşacak değişiklikler önceden tahmin edilebilir, sistemin farklı düğümlerindeki ölçmeler karşılaştırılabilir ve harmonik yük akışı değerlendirilebilir [39].

4.1.2.3 Grafik yöntemi

Grafik yöntemi, periyodik dalganın bir fonksiyon ile ifade edilmediği durumlarda kullanılır. Genel olarak osiloskoptan alınan veya bir deneydeki ölçüm sonuçlarına göre elde edilen sinüzoidal olmayan dalganın grafiği bir periyot içinde q eşit parçaya bölünerek; a_0, a_n ve b_n katsayıları,

$$a_0 = \frac{2}{q}\sum_{r=1}^{q} f_r$$

$$a_n = \frac{2}{q}\sum_{r=1}^{q} f_r \sin\left(r\frac{2\pi n}{q}\right) \tag{4.7}$$

$$b_n = \frac{2}{q}\sum_{r=1}^{q} f_r \cos\left(r\frac{2\pi n}{q}\right)$$

eşitlikleri ile hesaplanabilir [39]. Bu eşitliklerde f_r, r dilimine karşılık düşen fonksiyon değeridir.

4.1.3 Harmonik analizinde kullanılan yöntemler

Genel anlamda, işaret analizi için bir model şekli olan frekans tanım kümesine geçişin ve bu yolla işaretin frekansa bağlı analizinin de, işareti oluşturan sistemin davranışını ve çalışmasını incelemek açısından ayrı bir önemi vardır.

4.1.3.1 Zamana bağlı analiz

Bir işaretin, incelenebilecek olan ve işareti karakterize eden, birçok değişik zamana bağlı ölçümü veya zamana bağlı parametresi vardır. Bunların en önemlileri, işaretin

ortalama ve etkin değerleridir. İşaret rastgele ise bu parametreler, işaretin ortalama değeri ile varyansı (veya karekökü olan standart sapması) olmaktadır. Bunlar, $x(n)$ ayrık zaman ve $x(t)$ sürekli zaman işaretleri için, (4.8) eşitliklerindeki gibi ifade edilirler. Bu eşitliklerde, bilgisayar hesaplama işlemine uygun olan ayrık zaman işaretleri için, sadece $x(n)$ ve $x^2(n)$ toplamlarının kullanıldığına, bunun da tüm parametrelerin hesaplanmasında kolaylık getireceğine dikkat edilmelidir. İşaret analizine başlamadan önce, analizde yapılacak işlemler ve bu işlemlerin geçerliliği açısından, her zaman şu basit soruları sormakta fayda vardır: İşaret rastgele midir? Durağan mıdır? Periyodik midir? İşaretin ortalama ve standart sapması nedir?

Ortalama: $x_0 = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$ $\qquad \bar{x} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x(t)dt$

Etkin değer: $x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x^2(n)}$ $\qquad x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} x^2(t)dt}$ (4.8)

Varyans: $\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}[x(n) - x_0]^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{n=1}^{N} x^2(n) - N.x_0{}^2\right]$

"T" (ayrık işaret için ise "N") periyodu ile periyodik olan işaret için, k tamsayı olmak üzere, (4.9) eşitliği geçerlidir.

Sürekli: $x(t + kT) = x(t)$

(4.9)

Ayrık: x(n+kN)

4.1.3.2 Frekansa bağlı analiz

İşaretler zamana bağlı analizde yapılan işlemlerin sonucu olarak ortaya çıkmalarına karşın, bu işaretlerin analizlerinin frekansa bağlı yapılması bazı durumlarda daha elverişli olmaktadır.

Zamana bağlı verilen $x(t)$ işaretinin frekans tanım kümesine olan dönüşümü $x(t)$, genel olarak (4.10) eşitliği ile gösterilen, Fourier Dönüşümü (ya da Fourier İntegrali, FT) ile gerçekleştirilmektedir.

$$X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t).\exp(-j\omega t).dt \tag{4.10}$$

Frekansa tanım kümesinden, zamana tanım kümesine olan ters dönüşüm, Ters Fourier Dönüşümü (IFT) ile (4.11) eşitliğindeki gibi verilir.

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} X(\omega).\exp(j\omega t).d\omega \tag{4.11}$$

$x(t)$ reel olmasına karşılık, $X(\omega)$ karmaşıktır. $X(\omega)$'nın elde edilebilmesi için aşağıda belirtilen Dirichlet koşullarının sağlanması gerekir:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \tag{4.12}$$

şartı sağlanmalıdır.

b) $x(t)$'nin sonlu sayıda süreksizlik noktası ve sonlu aralıkta, sonlu sayıda ekstremum noktası olmalıdır.

Dirichlet koşullarına uymayan, darbe (delta) fonksiyonu, basamak fonksiyonu, sinüs ve kosinüs fonksiyonları gibi matematikte çok kullanılan fonksiyonlar vardır. Bu fonksiyonların Fourier Dönüşümü yoktur, ancak bunların, belli sınırlar içinde dönüşümü alınabilmektedir. Bu fonksiyonların limitlerinin olduğu yerde Fourier Dönüşümünden bahsedilebilir.

Periyodik işaretler için Dirichlet koşulları sağlanamaz ve bu durumda da Fourier Dönüşümleri alınamaz. Ancak, işaretin sonlu $(-\pi/2,\ \pi/2)$ zaman aralığında var olduğu kabul edildiğinde, Fourier Dönüşümü alınabilmektedir. Periyodik bir işaretin Fourier Dönüşümü başka bir yoldan da bulunabilir. İşaretin kompleks Fourier serisi, eşitlik (4.13)'teki gibidir.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(jn\omega_0 t) \tag{4.13}$$

Burada $T = 2\pi/\omega_0$, işaretin periyodu ve a_n, Fourier katsayısıdır. (4.13) eşitliğinin Fourier Dönüşümü alındığında,

$$X(\omega) = F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(jn\omega_0 t)\right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n . \delta(\omega - n\omega_0) \tag{4.14}$$

elde edilir. Dolayısıyla periyodik işaretin Fourier Dönüşümü, temel frekans ω_0'ın harmoniklerine yerleştirilmiş bir impuls fonksiyonunun, Fourier serisinin ilgili katsayıları ve 2π ile çarpımlarının toplamına eşittir.

Ayrık ve Hızlı Fourier Dönüşümü (BF**T, FFT)**

T_s örnekleme aralığında $\omega_s = 2\pi/T_s$ açısal frekansıyla örneklenmiş $x(t)$ işaretinin, sonlu örnekleme dizisi $\{x(nT_s), n = 0,1, \dots, (N-1)\}$ ile gösterilirse, Ayrık Fourier Dönüşümü (BFT), $\{x(nT_s)\}$ dizisi üzerinde doğrusal operatörler olarak eşitlik (4.15) tanımlanır:

$$X(k\omega_0) = \sum_{n=0}^{N} x(nT_s) . \exp(-j2\pi knT_s) \qquad k = 0,1,2 \dots, (N-1) \tag{4.15}$$

bu eşitlikte ω_0 frekansı,

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{N} \tag{4.16}$$

olarak tanımlanır ve Fourier Dönüşümündeki frekans seçiciliği olarak bilinmektedir. Frekans seçiciliğinin mümkün olduğu kadar yüksek (ω_0'ın küçük) olabilmesi için, işaretin gözlendiği $T_0 = 2\pi/\omega_0$ aralık süresinin mümkün olduğu kadar büyük tutulması gerekir. Yüksek frekans seçiciliği için bazen, kısa gözlem süreli işaretten alınan örneklerin sonuna sıfırlar eklenerek işaretin uzunluğu yapay olarak arttırılmaktadır. (4.15) eşitliğinde görüldüğü gibi, N elemanlı ayrık $x_n = x(n) = x(nT_s)$ dizisinin BFT sonucunda, N elemanlı $X_k = X(k) = X(k\omega_0)$ dizisi elde edilmekte ve bunun için de, N^2 çarpma-toplama işlemi yapmak gerekmektedir.

Kompleks $X(k)$ serisini, $x(n)$ serisine dönüştürecek Ters Ayrık Fourier Dönüşümü (IBFT) eşitlik (4.17)'deki gibi tanımlanır;

$$\mathrm{IBFT}(X_k) = x_n = x(nT_s) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x\left(k\frac{\omega_s}{N}\right).exp\left(2\pi n\frac{k}{N}\right) \tag{4.17}$$

$n = 0,1,2, \dots (N-1)$

Bu aşamada, örneklenmiş $\{x(nT_s)\}$ dizisi, zamana bağlı $x(t)$ işaretiyle ideal örnekleyici $\delta(t)$'nin çarpımı olarak, örneklenmiş işaret de $x^*(t)$ ile gösterilirse,

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t).\delta(t - nT_s) \tag{4.18}$$

elde edilir. $x^*(t)$ işaretinin Fourier Dönüşümü FT, $X^*(\omega)$ olarak isimlendirilir ve

$$F\{\delta(t - nT_s)\} = \exp(-jn\omega T_s) \tag{4.19}$$

olarak göz önüne alınırsa,

$$X^*(\omega) = F\{x^*(t)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s).\exp(-jn\omega T_s) \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. (4.20) eşitliğinde $X^*(\omega)$ Fourier Dönüşümü, ω'nin sürekli bir fonksiyonudur. Ayrıca bu fonksiyon ωT_s veya $\omega = \omega_s$ frekansıyla periyodiktir.

Ayrık $x(n)$ işaretiyle uğraşıldığı durumlarda, örnekleme frekansı ω_s, işaretin en yüksek frekans bileşeni ω_{max}'in iki katından büyük olduğu sürece, periyodik FT cevabındaki periyodik parçalar birbirinin içine girmeyeceğinden, başka bir deyişle örtüşme olmayacağından, bilgi kaybı da olmayacaktır. Bu durumda,

$$\omega_s \geq 2.\omega_{max} \tag{4.21}$$

şartı gerçekleştiğinde, orijinal işaretin $-\omega_{max} \leq \omega \leq \omega_{max}$ frekans bölgesi içindeki bileşenlerinin hepsi uygun bir alçak geçiren filtreden geçirilerek, işaretin gerçek spektrumu elde edilebilecektir. "Örnekleme Teoremi" adı verilen bu ifadeye göre, örnekleme frekansının en az işaretin Nyquist frekansı adı verilen en yüksek frekans bileşeninin iki katı frekansında seçilmesi gerekmektedir. Pratikte ise örnekleme frekansı, $2{,}5.\omega_{max}$ ile $10.\omega_{max}$ arasında seçilmelidir.

Ayrık Fourier Dönüşümü örneklerinin $k = 0,1,2,\dots,N/2$ için olan parçası, Fourier - Dönüşümünün pozitif frekans bölgesine karşı gelmektedir. Geriye kalan $k = (N/2+1),\dots,N-1$ örnekleri ise, Fourier Dönüşümünün negatif frekanslarının örnekleridir. Fourier Dönüşümü cevabının genliği (modülü), $\omega = 0$ eksenine göre simetrik olduğundan, Fourier Dönüşümünün negatif frekans bölgesindeki ve dolayısıyla BFT'nin $k = N/2$'den büyük indisli parçaları, ilave bilgi taşımazlar. Başka bir deyişle, N örnekli Ayrık Fourier Dönüşümü serisinde sadece ilk $N/2+1$ örnek gereklidir, geri kalanlar fazlalıktır.

Ayrık işaret işlemede Ayrık Fourier Dönüşümü, sürekli işaret işlemede Fourier Dönüşümü, aynı nedenlerle çok önemli operatörlerdir. Ayrık Fourier Dönüşümünün direkt hesaplanması yaklaşık N^2 adet karmaşık çarpma ve toplama işlemi gerektirir.

1965 yılında Cooley ve Tukey, Ayrık Fourier Dönüşümünün hesaplanmasında çok verimli bir yöntem sundular. Bu yönteme, Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT) denir ve bu yöntem, N, 2'nin kuvveti olmak şartıyla, $N\log_2 N$ işlem gerektirir. N=1024 alındığında, Hızlı Fourier Dönüşümünü almak için gerekli işlem sayısı, direkt hesaplamada (BFT) için gerekli olan işlem sayısından 10 kat daha azdır. FFT ile BFT arasındaki fark, işarete ilişkin N örnek sayısının 2'nin kuvveti şeklinde olması zorunluluğudur [39]. Bu haliyle FFT ve BFT en çok tercih edilen harmonik analizi yöntemleridirler.

4.1.4 Harmoniklerle ilgili tanımlar ve temel bağıntılar

Elektrik güç sistemlerinde harmonik kaynağı durumundaki doğrusal olmayan yüklerin sayısının ve anma güçlerinin her geçen gün artması, harmoniklerin etkilerinin göz önüne alınmasını zorunlu hale getirmiş, harmonikleri filtre sistemleriyle elemek ve sınırlandırmak için baz alınan, harmoniklerle ilgili bazı temel büyüklükler tanımlanmıştır. Harmonik bileşenleri bilinen, sinüzoidal olmayan akım ve gerilimler ile ilgili olarak aşağıdaki tanımlar yapılabilir.

4.1.4.1 Sinüzoidal olmayan akım ve gerilim dalgaları ile ilgili bağıntılar

Göz önüne alınan sinüzoidal olmayan akım ve gerilim dalgalarının ani değerlerinin,

$$v(t) = V_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin(n\omega t + \delta_n)$$

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} I_n \sin(n\omega t + \gamma_n) \tag{4.22}$$

olarak ifade edilmesi halinde akım ve gerilim etkin değeri,

$$I = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} {I_n}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt\right)} = \left({I_0}^2 + {I_1}^2 + {I_2}^2 \dots\right)^{1/2}$$

$$V = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} {V_n}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt\right)} = \left({V_0}^2 + {V_1}^2 + {V_2}^2 \dots\right)^{1/2} \tag{4.23}$$

olarak tanımlanabilir [43]. Bu eşitliklerde I_0 ve V_0 sırasıyla akım ve gerilim doğru bileşeni, n harmonik mertebesi I_h ve γ_h n. harmonik akımının etkin değeri ve faz açısı, V_h ve δ_h n. harmonik geriliminin etkin değeri ve faz açısıdır. Harmoniklerle ilgili tanımlar arasında en yaygın olarak kullanılan, hem akım ve hem de gerilim için verilen "Toplam Harmonik Bozunumu (THB)" kavramıdır. IEEE ve ülkeler kabul ettikleri harmonik standartlarında harmonikleri sınırlandırmak için gerilim ve/veya akım için izin verilen en yüksek THB değerlerini vermektedir. n, göz önüne alınan en yüksek harmonik derecesi olmak üzere, akım ve gerilim için Toplam Harmonik Bozunumu sırasıyla,

$$THB_I = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{N} {I_n}^2}}{I_1} \tag{4.24}$$

$$THB_v = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{N} {V_n}^2}}{V_1} \tag{4.25}$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca akım ve gerilim dalga seklindeki bozulmanın toplam harmonik bozunumundan başka diğer bir göstergesi olarak "Bozunum Faktörü (BF)" tanımlanmıştır. Akım ve gerilim için Bozunum Faktörü,

$$BF_I = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{N} {I_n}^2}}{I}$$

$$BF_v = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{N} {V_n}^2}}{V} \tag{4.26}$$

olarak ifade edilir.

Periyodik olarak değişen sinüzoidal olmayan dalgalar için tepe faktörü veya Crest faktörü (CF),

$$CF = \frac{\text{İşaretin Tepe Değeri}}{\text{İşaretin Etkin Değeri}} \tag{4.27}$$

şeklinde belirlenir [40].

4.1.4.2 Bir fazlı sistemde güç ifadeleri

Bir fazlı sistemde bir doğrusal olmayan yükün akım ve geriliminin (4.22) eşitliğindeki gibi ifade edilmesi halinde aktif güç,

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{N} V_n I_n \cos(\delta_n - \gamma_n) \tag{4.28}$$

olarak ifade edilir. Bu durumda reaktif güç,

$$Q = \sum_{n=1}^{N} V_n I_n \sin(\delta_n - \gamma_n) \tag{4.29}$$

olarak tanımlanır. Görünür güç ise,

$$S = VI = \left(\sum_{n=0}^{N} {V_n}^2\right)^{1/2} . \left(\sum_{n=0}^{N} {I_n}^2\right)^{1/2} \tag{4.30}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu güç ifadelerinden görüleceği gibi akımın ve gerilimin sinüzoidal olduğu durumdan farklı olarak burada $S^2 \neq P^2 + Q^2$ olmaktadır. Bu nedenle aktif ve reaktif güçten farklı olarak "Bozunum Gücü" tanımlanmıştır.

Bozunum Gücü,

$$D = (S^2 - P^2 - Q^2\ )^{1/2} \tag{4.31}$$

olarak ifade edilir [39]. Bozunum gücünün fiziksel anlamının tam olarak açıklanamaması sebebiyle literatürde bozunum gücünün tanımı, fiziksel anlamı ve reaktif güç ile ilişkisi tartışılmakta, aynı frekanstaki akım ve gerilimlerin meydana getirdiği aktif ve reaktif güç dışında kalan farklı frekanstaki akım ve gerilim bileşenlerinin çarpımından oluşan ve bozunum gücünü oluşturan terimler için akımın bozunum gücü, gerilimin bozunum gücü, reaktif güc, aktif güç vb. tanımlar yapılmış olsa da henüz tam bir görüş birliği sağlanamamıştır [43-44], Bu konuda tam bir görüş birliği sağlanamaması sebebiyle (4.31) eşitliği ile verilen güç bağıntısı geçerliliğini sürdürmektedir.

Literatürde göz önüne alınan bir yükün doğrusal olmasına ya da olmamasına ve yük uçlarındaki gerilimin sinüzoidal olmasına ya da olmamasına göre güç faktörü ayrı ayrı tanımlanmış ve bunlara ait bağıntılar verilmiştir [39]. En genel halde gerilimin sinüzoidal olmayan ve yükün doğrusal olmaması halinde, yük uçlarındaki gerilim ve yük akımı harmonik bileşenleri içerir. Bu durumda gerilim ve akım,

$$\begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^{N} \sqrt{2} V_n \sin(n\omega t + \delta_n) \\ i &= \sum_{1}^{N} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \delta_n + \Psi_n) \end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak ifade edilir [31]. Bu durumda T akım ve gerilimin periyodu olmak üzere güç faktörü,

$$PF = \frac{P}{S} = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T vidt}{VI} = \frac{\sum_1^N V_n I_n \cos\Psi_n}{\left\{\left(\sum_1^N {V_n}^2 + \sum^M {V_m}^2\right).\left(\sum_1^N {I_n}^2 + \sum^P {I_p}^2\right)\right\}^{1/2}} \tag{4.33}$$

olarak ifade edilir. Pratikte en çok karşılaşılan durum olan gerilimin sinüzoidal olması yani sadece temel bileşenden ibaret olması $V = V_1$ halinde yukarıdaki güç faktörü ifadesi,

$$PF = \frac{V_1 I_1 \cos\Psi_1}{V_1 I} = \frac{I_1}{I}\cos\Psi_1 = \mu\cos\Psi_1 \tag{4.34}$$

biçiminde daha basit olarak ifade edilebilir. Burada, μ akım bozunum faktörü ve $cos\Psi_1$ deplasman güç faktörü olarak tanımlanır. $I_1 < I$ olması nedeniyle güç faktörü daima 1'den küçüktür. Sadece gerilimin ve akımın sinüzoidal olması halinde güç faktörünü 1 yapmak mümkündür [41].

5.1.5.3. Üç fazlı dengesiz sistemlerde eşdeğer görünür güç, eşdeğer akım ve gerilim kavramları

Dengeli üç fazlı sistemlerin modellenmesinde bir faz eşdeğerinin kullanılabilmesi nedeniyle bu sistemler için güç bağıntıları yukarıdaki yaklaşımlar ile elde edilir. Ancak üç fazlı dengesiz sistemler için bazı ilave kabuller gereklidir. Bu konuda dengesiz üç fazlı sistemler için "Sistem görünür gücü" veya "Eşdeğer görünür güç" olarak tanımlanan $S_{eş}$ için literatürde artan bir destek söz konusudur [14,10]. Eşdeğer görünür güç,

$$S_{eş} = 3V_{eş}I_{eş} \tag{4.35}$$

olarak tanımlanabilir. Bu ifadede $V_{eş}$ ve $I_{eş}$ eşdeğer gerilim ve akım olup aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$V_{eş} = \sqrt{\frac{{V_a}^2 + {V_b}^2 + {V_c}^2}{3}} \tag{4.36}$$

Bu eşitlikte V_a, V_b ve V_c nötr hattı olan üç fazlı bir sistemde a, b ve c fazlarının faz-nötr gerilimlerinin etkin değerleridir. Sistem nötr hattı yok ise eşdeğer gerilim fazlar arası gerilimler yardımıyla hesaplanabilir. Bu durumda eşdeğer gerilim,

$$V_{eş} = \sqrt{\frac{{V_{ab}}^2 + {V_{bc}}^2 + {V_{ca}}^2}{9}} \tag{4.37}$$

olarak ifade edilebilir. Burada, V_{ab}, V_{bc}, V_{ca} fazlar arası gerilimlerin etkin değerleridir.

Eşdeğer hat akımı,

$$I_{eş} = \sqrt{\frac{{I_a}^2 + {I_b}^2 + {I_c}^2}{3}} \tag{4.38}$$

olarak tanımlanabilir. Bu eşitlikte I_a, I_b ve I_c fazlarının hat akımlarının etkin değerleridir.

Dengesiz üç fazlı sistemde gerilim ve akım sinüzoidal olmayıp harmonik bileşenler içeriyor ise n, harmonik derecesi olmak üzere eşdeğer gerilim ve akım,

$$V_{eş} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{{V_{a_n}}^2 + {V_{b_n}}^2 + {V_{c_n}}^2}{3}\right)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} {V_{eş_n}}^2} \tag{4.39}$$

$$I_{eş} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{{I_{a_n}}^2 + {I_{b_n}}^2 + {I_{c_n}}^2}{3}\right)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{n} {I_{eş_n}}^2} \tag{4.40}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada verilen eşdeğer gerilim ve eşdeğer akım bağıntılarından yararlanarak akım ve gerilim için Toplam Harmonik Bozunumu (4.39) ve (4.40) eşitliklerine göre belirlenebilir [43].

Bunun yanı sıra üç fazlı bir sistemde toplam ani güç,

$$p = v_a . i_a + v_b . i_b + v_c . i_c \tag{4.41}$$

olmak üzere, sistemin dengesizlik derecesini belirleyen bir büyüklük olan Dengesiz güç BFT kullanılarak,

$$P_u = \frac{2}{D}\sum_{d=0}^{D-1} p(d) e^{-4j\pi d/D} \tag{4.42}$$

şeklinde hesaplanır. Burada D örnekleme sayısı ve d ise ani gücün örnekleme anıdır. Üç fazlı bir sistemde toplam ani güç Fourier serisine açıldığında bir doğru bileşen ve sinüzoidal bileşenlerden oluşmaktadır. Doğru bileşen P_a, P_b, P_C aktif güçlerinin toplamına eşittir ve ortalama (gerçek) güç olarak adlandırılır. Sistem tam olarak dengeli ise sinüzoidal terimler gözükmez ve ani güç sadece ortalama güce eşit olur. Fourier serisindeki ikinci bileşeni veren (4.42) eşitliği ile sistemin dengesizlik derecesini belirleyen dengesiz güç hesaplanmaktadır [39].

4.2 Elektrik Makinalarında Harmonikler

Gerek gerilim, gerekse akım harmonikleri döner makinalar üzerinde olumsuz etkiler yapmaktadırlar. Bu etkilerden biri, harmonik kayıplardan oluşan ısıdır. Harmoniklerin varlığı diğer elemanlarda olduğu gibi stator sargılarında, rotor devresinde, stator ve rotor saçlarında ek kayıplara yol açar. Stator ve rotor uç sargılarında harmonik akımlarının oluşturduğu kaçak alanlar da ek kayıplar üretir. Harmoniklerin varlığı, makina kayıplarını yaklaşık olarak %10-12,5 arttırır. Harmoniklerin yol açtığı diğer bir etki de, harmonik momentleridir. Sinüzoidal olmayan gerilim uygulandığında motor veriminde ve momentinde bir düşüş olur; motor verimi yaklaşık olarak %2 düşer [45]. Harmoniklerin ortalama moment üzerindeki etkisi çoğu zaman ihmal edilebilir, ancak önemli sayılabilecek moment salınımlarına yol açabilir. Diğer taraftan harmoniklerin motor ömründe azalmaya neden olduğu da literatürde vurgulanmıştır.

Standartlar, motorlar için kesin gerilim veya akım harmonikleri için sınır değerleri vermemesine rağmen, endüksiyon motorları için %5'lik bir gerilim harmoniği sınırlaması kabul edilebilir [41].

4.2.1 Asenkron makinada harmonikler

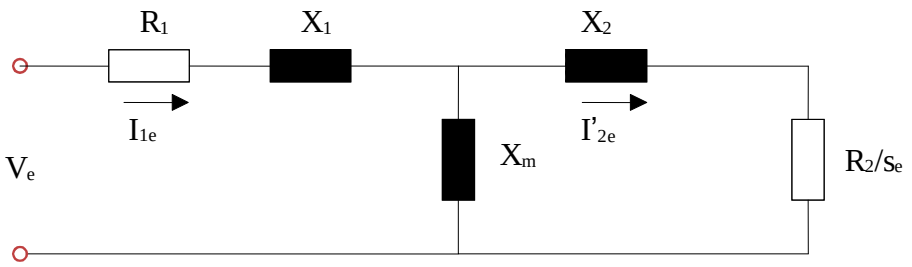
Elektrik makinaları için iki tür harmonik kavramı tanımlanmıştır. Bunlardan birincisi makina geometrisinin neden olduğu uzay harmonikleri, ötekisi ise kaynağın sinüs biçiminden uzak olmasından kaynaklanan zaman harmonikleridir. İki tür harmonik için de üç ve üçün katı olan harmonikler dikkate alınmazlar. Çünkü bu bileşenler makina içinde döner alan oluşturmazlar.

4.2.1.1 Uzay harmonikleri

Çoğunlukla makina tasarımcılarının irdelediği bir konudur. Makina sinüzoidal gerilimle beslendiğinde manyetomotor kuvvette (mmk) meydana gelen harmoniklerdir. Uzay harmonikleri, motoru kalkış esnasında etkilemelerinin yanı sıra manyetik ses ve titreşime neden olurlar. Makina geometrisinden dolayı var olan bu harmonikleri azaltmak için çeşitli yollar denenmektedir. Değişik sargı dağılımlarına yönelmek veya tasarımda uzay harmoniği optimizasyonu uygulamak gibi çözümler bunlar arasında sayılabilir. Görüldüğü gibi uzay harmoniği için yani tasarıma ilişkin iyileştirmeler öngörülmektedir [4].

Asenkron makinanın uzay harmoniği eşdeğer devresi

Asenkron makinanın uzay harmoniği eşdeğer devresi aşağıdaki gibi oluşturulabilir. Bu devrede, V_e harmonik gerilimi, $R_1 = r_{1e} = r_1$ ise stator sargı direnci olarak tanımlanmıştır. Ancak bu noktada devre üzerinde tanımlanmış olan X_2 devrenin temel bileşenine ait bir parametre olmayıp, $X_2 = x_2^{'}.k_{x_e}$ şeklinde yorumlanmıştır. Burada k_{x_e}, uzay harmoniği mertebesine göre reaktans değişimini ifade eden katsayıdır. Bununla beraber X_m devrenin temel bileşenine ait parametre olmayıp, $X_m = x_m.k_{xm_e}$ şeklinde yorumlanmıştır ve büyük bir yakınlıkla $X_m = x_m/e^2$'dir. Son olarak da $R_2 = r_2^{'}.k_{r_e}$ şeklinde yorumlanmıştır [4].



Şekil 4.1 : Asenkron Makina Uzay Harmoniği Eşdeğer Devresi

Asenkron makina içinde oluşan uzay harmoniği bileşenlerini, makinanın içinde oluşan küçük ek makinalar olarak düşünmek, kavramı anlamayı kolaylaştırmaktadır. Bu bağlamda, bu bileşenlerin bir kısmı temel bileşenle aynı yönde kalanları ise ters yönde dönmektedirler. Bu durum aşağıdaki gibi listelenebilmektedir: (k = 1, 2, 3, … olduğu düşünülürse;)

- İleri harmonik dereceleri: 6k + 1 (örneğin:7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49)
- Geri harmonik dereceleri: 6k - 1 (örneğin:5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47)

Makinanın temel bileşenine ilişkin kayma, senkron hız n_1 ve rotor hızı n_r iken;

$$s_1 = \frac{n_1 - n_r}{n_1} \tag{4.43}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Uzay harmoniğinin senkron hızı, temel bileşen senkron hızının $1/e$ katı olacağından;

$$n_{\mathrm{e}} = \frac{n_1}{\mathrm{e}} \tag{4.44}$$

şeklinde ifade edilir. Asenkron motorda uzay harmoniği frekansı temel bileşen frekansıyla aynı olduğundan ($f_e = f_1$) ileri harmonikler için kayma aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$s_e = \frac{n_e - n_r}{n_e} = \frac{\frac{n_1}{e} - n_r}{\frac{n_1}{e}} = 1 - e(1 - s_1) = (1 - e) + e.s_1 \tag{4.45}$$

Benzer şekilde geri harmonikler için kayma da aşağıdaki gibi bulunmaktadır:

$$s_e = \frac{n_e + n_r}{n_e} = \frac{\frac{n_1}{e} + n_r}{\frac{n_1}{e}} = 1 + e(1 - s_1) = (1 + e) - e.s_1 \tag{4.46}$$

Harmonik momentler ise aşağıdaki formülle bulunabilmektedir:

$$T_{emk} = \frac{P_{emk}}{\omega_e} = \frac{\frac{P_{cu2e}}{s_e}}{\omega_e} = \frac{3{I'_{2k}}^2 R_2}{\omega_e S_e} \tag{4.47}$$

Bu eşitlikte ω_e derece cinsinden harmoniğin dönüş hızı, I'_{1e} statordaki harmonik akımı ve I'_{2e} ise statora indirgenmiş rotor harmonik akımıdır. Bu büyüklükler aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\omega_e = \frac{2\pi n_e}{60} = \frac{2\pi \frac{n_1}{e}}{60} = \frac{1}{e}\frac{2\pi n_1}{60} = \frac{1}{e}\omega_1 \tag{4.48}$$

$$I_{1e} = \frac{V_e}{(R_1 + jX_1) + \frac{\left(\frac{R_2}{s_e} + jX_2\right)(jX_m)}{\frac{R_2}{s_e} + j(X_2 + X_m)}} \tag{4.49}$$

$$I'_{2e} = \frac{jX_m}{\frac{R_2}{s_e} + j(X_2 + X_m)} I_{1e} \tag{4.50}$$

ω_1, temel bileşenin derece cinsinden dönüş hızıdır. Yukarıdaki (4.48) ve (4.50) eşitlikleri (4.47)'nin içinde yorumlandığında ise uzay harmoniği momenti;

$$T_{emk} = \frac{3R_2 \left| \frac{jX_m}{\frac{R_2}{s_e} + j(X_2 + X_m)} \right|^2 {I_{1e}}^2}{\frac{1}{e}\omega_1 s_e} \tag{4.51}$$

s_e, uzay harmoniklerinde bire yakın bir değer olduğu için, R_2/s_e ifadesi, $(X_2 + X_m)$'ye göre çok küçük olur. Bu nedenle ihmal edilebilir. Bu kabule ek olarak, $X_2 \ll X_m$ olduğundan,

$$\left| \frac{jX_m}{\frac{R_2}{s_e} + j(X_2 + X_m)} \right| \approx 1 \tag{4.52}$$

şeklinde yazılabilir. O halde basitleştirilmiş rotor harmonik akımı I'_{2e}, stator harmonik akımına eşit olmaktadır. Bu haliyle basitleştirilmiş uzay harmoniği momenti ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$T_{emk} = \frac{3{I'_{2e}}^2 R_2}{\omega_e s_e} \approx \frac{3R_2 {I^2}_{1e}}{\frac{1}{e}\omega_1 s_e} = \frac{3R_2}{\omega_1} \frac{{I^2}_{1e}}{(\frac{s_e}{e})} \tag{4.53}$$

Bu eşitliklerden çıkarılabilecek sonuçlar şöyledir:

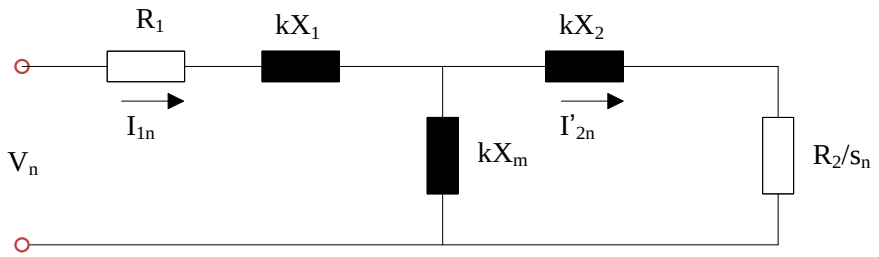
- Sabit hava aralığı mevcut iken endüklenen hamonik gerilimi, temel bileşen geriliminin belirli bir yüzdesi kadar olmaktadır.
- Hava aralığında oluşacak bir artış, temel bileşen gerilimini ve hamonik gerilimini belirli bir yüzdede azaltacaktır.
- Uzay harmoniği kayması büyük ve normal işletme koşullarında, hemen hemen harmonik derecesine eşittir [4].

4.2.1.2 Zaman harmonikleri

Zaman harmoniği makina kaynağına ilişkin bir konudur. Günümüzde değişken frekanslı sürücüler sayesinde güç sistemleri bolca harmonik bileşen içermektedir. Zaman harmoniklerinin, elektrik makinaları üzerindeki temel etkisi ısınmayı artırması ve verimi düşürmesidir. Özetle, zaman harmoniğinin varlığı elektrik makinasından performans incelemesi açısından önemli bir araştırma konusudur [4].

Asenkron makinanın zaman harmoniği eşdeğer devresi

Asenkron makinanın zaman harmoniği eşdeğer devresi aşağıdaki gibi oluşturulabilir. Bu devrede, V_n harmonik gerilimi, $R_1 = r_{1n} = r_1$ ise stator sargı direnci olarak tanımlanmıştır. Buna ek olarak, $R_2 = r_2^{'}.k_{r_n}$ şeklinde kabul edilmiştir [4].



Şekil 4.2 : Asenkron Makina Zaman Harmoniği Eşdeğer Devresi

Zaman harmoniği söz konusu iken ise n. harmoniğin hızı olan n_n, senkron hız olan n_1'in n katı olacaktır.

$$n_k = n.n_1 \qquad \mathrm{n} = 1, 2, \dots, \mathrm{k} \qquad \mathrm{n:\ tamsayı} \tag{4.54}$$

Zaman harmoniğinin frekansı ise temel frekansın n katıdır.

$$f_n = nf_1 \tag{4.55}$$

İleri yönde dönen harmonikler için kayma:

$$s_n = \frac{n.n_1 - n_r}{n.n_1} = \frac{n.n_1 - (1 - s_1)n_1}{n.n_1} = \frac{(n-1) + s_1}{n} \tag{4.56}$$

Geri yönde dönen harmonikler için kayma:

$$s_\mathrm{n} = \frac{n.n_1 + n_r}{n.n_1} = \frac{n.n_1 + (1 - s_1)n_1}{n.n_1} = \frac{(n+1) - s_1}{n} \tag{4.57}$$

Zaman harmoniği momenti (4.47) formülünü kullanarak elde edilebilir, ancak ω_n aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\omega_n = \frac{2\pi n_n}{60} = \frac{2\pi(n.n_1)}{60} = n\frac{2\pi n_1}{60} = n.\omega_1 \tag{4.58}$$

$$I_{1n} = \frac{V_n}{(R_1 + jnX_1) + \frac{\left(\frac{R_2}{S_\mathrm{n}} + jnX_2\right)(jnX_m)}{\frac{R_2}{S_\mathrm{n}} + jn(X_2 + X_m)}} \tag{4.59}$$

$$I'_{2n} = \frac{jnX_m}{\frac{R_2}{S_\mathrm{n}} + jn(X_2 + X_m)} I_{1n} \tag{4.60}$$

Yukarıdaki eşitliklerden (4.58) ve (4.60) eşitlikleri (4.47)'nin içine yerleştirilince (4.61) elde edilir.

$$T_{emk} = \frac{3R_2 \left| \frac{jnX_m}{\frac{R_2}{S_\mathrm{n}} + jn(X_2 + X_m)} \right|^2 {I_{1n}}^2}{n\omega_1 S_\mathrm{k}} \tag{4.61}$$

Harmonik kayması olan s_n, 1'e çok yakın olduğundan, R_2/s_n ifadesi, $n(X_2 + X_m)$ ile karşılaştırıldığında çok küçük kalır ve ihmal edilebilir. Bu durumda (4.61) aşağıdaki şekli alır.

$$T_{emk} = \frac{3{I'_{2n}}^2 R_2}{\omega_n s_\mathrm{n}} \approx \frac{3R_2 {I^2}_{1n}}{n\omega_1 s_\mathrm{n}} = \frac{3R_2}{\omega_1} \frac{{I^2}_{1n}}{(ns_\mathrm{n})} \tag{6.20}$$

Bu eşitliklerden çıkarılabilecek sonuçlar şöyledir:

- Sabit hava aralığı mevcut iken endüklenen harmonik gerilimi, temel bileşen geriliminin belirli bir yüzdesi kadar olmaktadır.
- Zaman harmoniği kayması 1'e çok yakın olduğu için, zaman harmoniği akımı, özellikle de yüksek dereceli harmonikler için, motor yükünden bağımsızdır, n. dereceden harmonik için harmonik akımı boşta durumda da tam yük durumunda da sabittir.
- Zaman harmoniği eşdeğer devresinden çıkan sonuçlar, zaman harmoniğinin makinaya en büyük etkisinin ısınma olduğunu göstermektedir [4].

4.2.2 Asenkron makinanın harmonikli gerilim altındaki davranışının analitik olarak incelenmesi

Bu çalışmada asenkron makinaya çeşitli zaman harmoniği bileşenlerine sahip gerilimler uygulanıp, söz konusu koşullar altındaki durumu gözlemlenecektir. Bu nedenle, öncelikle analitik olarak yeni durumun nasıl şekilleneceği hakkında bazı çıkarımlarda bulunmak yararlı olacaktır.

Bu çıkarımlar sırasıyla, asenkron makinanın amper-sarım dağılımı, uzay ve zaman harmoniği etkilerini içeren eşdeğer devre ve analitik akışın anlatımından oluşmaktadır.

4.2.2.1 Amper sarım dağılımı

Asenkron makinalar geometrik yapılarından ötürü sinüs biçiminden farklı bir manyetomotorkuvvet (mmk) eğrisi çıkartan sistemlerdir. Kaynaktan tamamen sinüzoidal bir gerilim uygulandığında, hava aralığı akısını oluşturan stator iletkenlerinin, yuvarlak düzlemde 120'şer derece arayla dağılırken sinüs biçimini oluşturamamasından, sargı dağılımı ve kaynak akımı çarpımından oluşan amper-sarım dağılımı, saf sinüsten uzak olacaktır. Oluşacak olan amper-sarım dağılımı, sabit bir akım değeri için yaratılmaya çalışıldığında, konuma bağlı değişen bir basamak fonksiyon oluşacaktır. Bu basamak fonksiyon Fourier serisine açıldığında uzay harmonikleri elde edilir. Özetle, uzay harmoniği makinanın yapısından ötürü oluşan ve tasarlandığı andan itibaren var olacağı kesin olan harmoniklerdir.

Söz konusu makinaya zamana bağlı kaynak uygulanınca ise, akımın her t anı için farklı olan değeri, amper-sarım dağılımını değiştireceğinden dağılım, konuma ve zamana bağlı bir şekil alır. Bu basamaklı ifade de Fourier serisine açıldığında zaman harmonikleri hesap edilebilir.

Bu bilgiler doğrultusunda, makinada zaman harmoniği, uzay harmoniğinden ayrı düşünülemez. Kaynağın da saf sinüs olmadığı düşünülürse, makina içinde uzay ve zaman harmoniğinin etkiselliği giderek artacaktır, çünkü uygulanan zaman harmoniklerinin tümü kendi uzay harmoniğini oluşturacaktır. Bu etki, karşılıklı olarak tekrar edecektir [1]. Bu etkiyi amper-sarım dağılımında gözlemlemek mümkündür. Daha önce de söz edildiği gibi amper-sarım dağılımı konuma ve zamana bağlı olacaktır:

$$F = F(\theta, t) \tag{4.63}$$

Bu koşulda herhangi bir n zaman harmoniği için amper-sarım dağılımı,

$$F_n(\theta, t) = F_{Rn}(\theta, t) + F_{Sn}(\theta, t) + F_{Tn}(\theta, t) \tag{4.64}$$

$$F_n(\theta, t) = N_R(\theta).\, i_{Rn}(t) + N_S(\theta).\, i_{Sn}(t) + N_T(\theta).\, i_{Tn}(t) \tag{4.65}$$

şeklinde olacaktır. Bu eşitlik içindeki ifadeler aşağıdaki gibi açılabilir.

$$N_R(\theta) = N.\, e^{j\,0} \tag{4.66}$$

$$N_S(\theta) = N.\, e^{-j\,120} \tag{4.67}$$

$$N_T(\theta) = N.\, e^{-j\,240} \tag{4.68}$$

$$i_{Rn}(t) = I_{Rn\,max}.\cos(n\omega t) = I_{Rn\,max}.\left(\frac{e^{jnwt} + e^{-jnwt}}{2}\right) \tag{4.69}$$

$$i_{Sn}(t) = I_{Sn\,max}.\cos(n\omega t - 120)$$

$$= I_{Sn\,max}.\left(\frac{e^{jnwt}.\, e^{-j\,120} + e^{-jnwt}.\, e^{j\,120}}{2}\right) \tag{4.70}$$

$$i_{Tn}(t) = I_{Tn\,max}.\cos(n\omega t - 240)$$

$$= I_{Tn\,max}.\left(\frac{e^{jnwt}.\, e^{-j\,240} + e^{-jnwt}.\, e^{j\,240}}{2}\right) \tag{4.71}$$

Sonunda amper-sarım dağılımı her faz için ayrı ayrı çıkartılırsa aşağıdaki biçimi alır;

$$F_{Rn}(t) = \frac{I_{Rn\,max}}{2} N\left(e^{jnwt} + e^{-jnwt}\right)$$

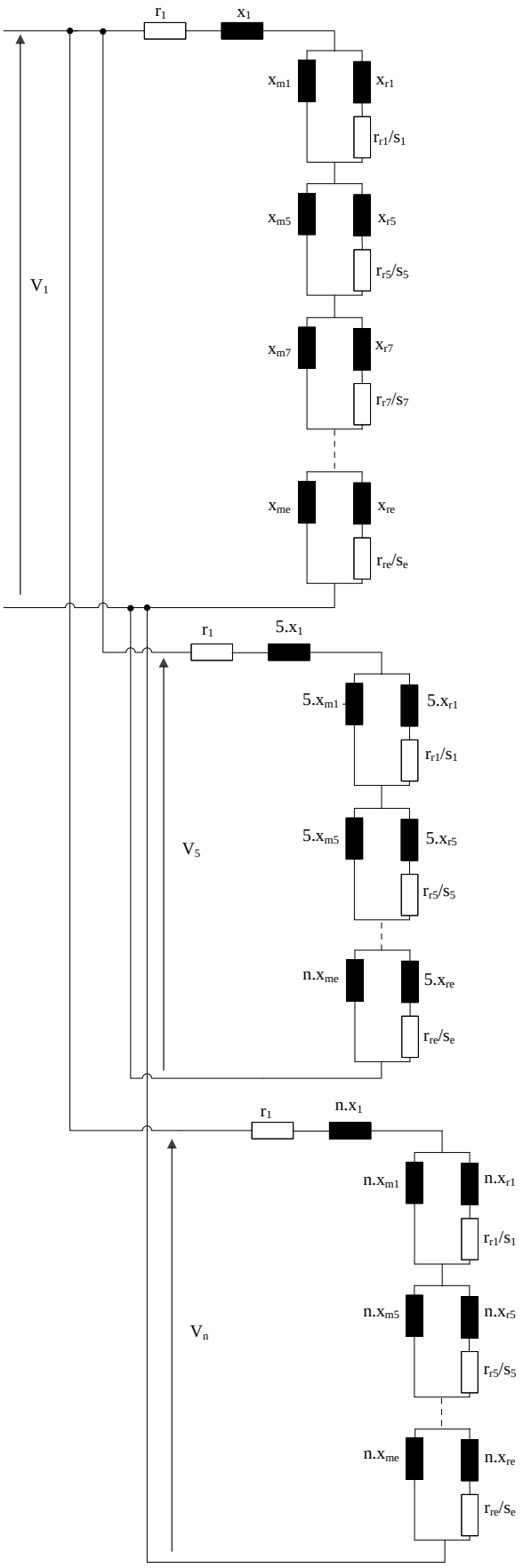
$$F_{Sn}(t) = \frac{I_{Sn\,max}}{2} N\left(e^{jnwt}\, e^{-j\,240} + e^{-jnwt}\right) \tag{4.72}$$

$$F_{Tn}(t) = \frac{I_{Tn\,max}}{2} N\left(e^{jnwt}\, e^{-j\,480} + e^{-jnwt}\right)$$

Yukarıda görülen üç faz için amper-sarım ifadeleri toplanınca makinanın zaman harmoniği içeren kaynak altında ürettiği toplam amper-sarımı yani

manyetomotorkuvveti (mmk) bulunabilmektedir. Ancak ifadenin çok karmaşık olduğu açıkça bellidir. Bu nedenle asenkron makinanın zaman harmoniği incelemesi yapılırken, analitik hesap çok zor olacaktır. Bu zorluk araştırmacıları çeşitli hesaplama yöntemlerine yönlendirmektedir.

Gerçek hayatta olduğu gibi kaynağın, temel harmonik bileşeni yanında birçok başka harmonik bileşeni bulunan bir kaynak olduğu da düşünülürse, makina davranışını irdelemek için, süperpozisyon ilkesinden yararlanmak en anlamlı yaklaşım olacaktır. Bunun anlamı, her harmonik bileşenini, aynı makinanın farklı çalışma durumu olarak ele almak ve sonrasında her birinin etkisini toplamaktır. Bu sistemi matematiksel olarak ifade etmek de her bileşeni temsil eden makina için ayrı birer eşdeğer devre oluşturmakla olacaktır. Sonuçta oluşacak olan sistemin eşdeğer devresi Şekil 4.3'de görüldüğü gibidir [46].



Şekil 4.3 : Sistemin Eşdeğer Devresi

4.2.2.2 Herhangi bir harmonik bileşen için makina davranışı

İncelenen harmoniğin gerilim ifadesi aşağıdaki gibi olduğu kabul edilmiştir;

$$V_n = V_{n_{max}} \sin(n\omega t) \tag{4.73}$$

Stator iletkenlerinin demet iletken, yani çok küçük kesitli olduğu düşünülürse, söz konusu iletkenlerde deri etkisi (skin effect) ihmal edilebilmektedir. Dolayısıyla, stator sargı direnci, değişmiş olan kaynak frekansından etkilenmemekte ve $R_1 = r_{1n} = r_1$ şeklinde kalmaktadır. Bununla beraber, statora ait ikinci parametre olan primer kaçak reaktansı, frekansla doğrusal olarak değişeceğinden $X_1 = x_{1n} = n.x_1$ durumuna gelecektir. Tahmin edileceği gibi harmonik mertebesi arttıkça, direnç reaktans yanında çok küçük kalacaktır. Bu nedenle, çoğu zaman stator sargı direnci ihmal edilmektedir. Bu ihmal sonucu n. harmonik için stator sargı empedansı, temel bileşen için stator sargı empedansının yaklaşık n katı olacaktır. Bu durumda, devrenin sekonderinin dikkate alınmadığı özel bir durumda stator sargı akımı yaklaşık olarak;

$$i_n = \frac{V_n}{Z_{1n}} = \frac{V_{n_{max}}}{n.Z_1} \sin(n\omega t) \tag{4.74}$$

şeklinde olur. Eşitlik (4.74), zaman harmoniği akımının, harmonik mertebesiyle ters orantılı olarak değişeceğini göstermektedir. Söz konusu harmoniğin genliğinin temel bileşen genliğine eşit olduğu düşünüldüğünde bile, bu azalma çok ciddi boyutlardadır. Bununla beraber, harmonik gerilimleri genel olarak temel bileşen gerilimlerine göre daha küçüktür. Bu durumda, gerçekte harmonik akımının oldukça küçük olacağı açıktır. Ek olarak devrenin frekansı da harmonik mertebesiyle doğru orantılı olarak artacaktır. Bu noktaya kadar makinanın rotoru (sekonderi) hiç göz önünde bulundurulmamıştır. Bu nedenle, eşitlik (4.74)'teki stator akımı, harmoniğin maksimum akımı olacaktır ve gerçekte hiç bu seviyede bir akıma ulaşılamayacaktır.

Oluşan bu harmonik akımı, eşitlik (4.75)'e göre söz konusu harmoniğe ilişkin bir akı oluşturacaktır.

$$F = \sum NI = \Phi.\mathcal{R} \tag{4.75}$$

Eşitlik (4.75)'te $\mathcal{R}$, relüktans, hava aralığı manyetik direncidir. Görüldüğü gibi toplam amper-sarım, akı ve manyetik direncin çarpımına eşittir. Harmoniğin akımı ne denli küçükse, akısı da o denli küçük olacaktır.

Rotora geçmesi beklenen akının yarattığı akım, rotor parametrelerinde de birtakım değişiklikler yaratacaktır. Normal şartlarda asenkron makinada rotor frekansı, stator frekansı ve kaymanın çarpımına eşit olduğundan son derece düşüktür. Ancak harmonikli gerilimlerde bu durum değişecektir. n_n, n. zaman harmoniğinin hızıdır ve aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$n_n = n.n_{nominal} \tag{4.76}$$

İleri dönen harmonikler için kayma, s_n, (4.77) gibi ifade edilmektedir.

$$s_n = \frac{n.n_{senkron} - n_{nominal}}{n.n_{senkron}} = \frac{n.n_{senkron} - (1-s)n_{senkron}}{n.n_{senkron}}$$
$$s_n = \frac{(n-1)+s}{n} \tag{4.77}$$

Geri dönen harmonikler için ise kayma, (4.78) gibidir.

$$s_n = \frac{n.n_{senkron} + n_{nominal}}{n.n_{senkron}} = \frac{n.n_{senkron} + (1-s)n_{senkron}}{n.n_{senkron}}$$
$$s_n = \frac{(n+1)-s}{n} \tag{4.78}$$

Yukarıdaki ifadelerde harmonik mertebesi olan n arttıkça kayma 1'e yaklaşmaktadır. O halde, rotor akımı frekansı da $f_{rotor} = s.f_{stator}$ olduğu için yüksek olacaktır.

Frekansla doğru orantılı olan rotor kaçak reaktansı, statorda olduğu gibi harmonik mertebesiyle doğru orantılı olarak artacak ve $X_2 = x_{2n}{}' = n.x_2{}'$ şeklinde ifade edilebilir.

Rotor sargı direncinin değişimi ise makina tipine göre farklılık göstermektedir. Eğer makina bilezikli asenkron makina ise rotor iletkenleri statordakiler gibi demet iletkendir ve artan frekansın bu iletkenler üzerindeki etkisi ihmal edilebilir. Kafesli asenkron makina için rotor iletkenleri masif çubuklar olduğundan, artan frekans iletkenler üzerinde direnç değişikliğine neden olacaktır. Yani,

$$R_2 = r'_{2n} \neq r'_2$$

olacaktır. Değişen rotor direnci için aşağıdaki ifadeler söylenebilir;

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} \tag{4.79}$$

burada eşitlikteki değişkenler; δ deri kalınlığı, ρ elektriksel özdirenç, ω açısal frekans, μ manyetik geçirgenliktir. Bu bilgi ışığında alternatif akım geçen iletkenin direnci ise (4.80)'deki gibi olacaktır.

$$R = \frac{\rho}{\delta}\left(\frac{L}{\pi(D-\delta)}\right) \tag{4.80}$$

burada D, iletken çapıdır. Bu eşitliği kolaylaştırmak için $D \gg \delta$'den yararlanarak (4.80) eşitliği (4.81) biçimine getirilebilir.

$$R = \frac{\rho}{\delta}\left(\frac{L}{\pi D}\right) \tag{4.81}$$

Bu bilgilerden açığa çıkacağı gibi deri kalınlığının karesi, frekansın tersiyle orantılıdır. Başka bir deyişle direnç, frekansın kareköküyle doğru orantılıdır.

Bu konuya başka bir çözüm yaklaşımı ise şu şekilde getirilebilir:

$$\begin{aligned} r'_{2n} &\neq r'_2 \\ r'_{2n} &= k_{r_n}.r'_2 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Buradaki k_{r_n} çarpanı iletkenin frekansa bağlı olarak değişme oranını temsil eden bir çarpandır ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$k_{r_n} = \epsilon.\frac{sh(2\epsilon) + \sin(2\epsilon)}{ch(2\epsilon) - \cos(2\epsilon)} \tag{4.83}$$

burada ϵ (4.84)'teki gibi hesaplanır.

$$\epsilon = 2\pi h\sqrt{f_n \sigma_0 \mu_r 10^{-7}} \tag{4.84}$$

Bu eşitlikteki h, iletken derinliği; f_n, söz konusu harmonik bileşene ait frekans; μ_r bağıl manyetik geçirgenlik ve σ_0 ise öziletkenliktir.

(4.83) ve (4.84) eşitlikleri yüksek mertebeli harmoniklerin yarattıkları akımların aktığı alan çok küçük olacağını göstermektedir. Çok küçük olan bu akımların yarattığı akılar, sabit bir büyüklük olan $\mathcal{R}$ manyetik direncini geçmekte zorlanacaklardır. Geçen akıların ise rotorda endükledikleri gerilimin akıttığı akım, masif rotor oluğunun bütün alanını kullanamayacak ve küçük bir alana sıkışacaktır. Bundan ötürü rotorun direnci artacaktır.

Akının bu davranışı incelenirken, normal çalışma koşullarında statorda bile düzgün dağılan bir büyüklük olmadığı bilgisinin verilmesi gerekmektedir. Bu dağılımı Heyland dağılma faktörü ile açıklamak mümkündür.

Heyland dağılma faktörü, σ_1 ile gösterilmektedir ve açılımı aşağıdaki gibidir.

$$E_1 = V_1 - I_\mu X_{1\sigma} = V_1 . \frac{1}{1+\sigma_1} \tag{4.85}$$

Dağılma faktörü akı yayılımını tanımlarken gerekli bir büyüklüktür. Standart bir oluk içine akı yayılımı düzgün olmayıp (4.86)'daki gibi olacaktır:

$$\Phi_{dip} = \Phi(1+\sigma_1) \xrightarrow{n.harmonik\ \ için} \Phi_{dip} = \frac{\Phi}{\mathrm{n}}(1+\sigma_{1n})$$

$$\Phi_{ort} = \Phi(1+\frac{2}{3}\sigma_1) \xrightarrow{n.harmonik\ \ için} \Phi_{ort} = \frac{\Phi}{\mathrm{n}}(1+\frac{2}{3}\sigma_{1n}) \tag{4.86}$$

$$\Phi_{baş} = \Phi(1+\frac{1}{3}\sigma_1) \xrightarrow{n.harmonik\ \ için} \Phi_{baş} = \frac{\Phi}{\mathrm{n}}(1+\frac{1}{3}\sigma_{1n})$$

Görüldüğü gibi, harmonik gerilimi, besleme gerilimi ile aynı genlikte olsa bile oluşan akı, akıma benzer şekilde, harmonik mertebesi ile ters orantılı olarak düşmektedir, ancak harmonik gerilimi de, besleme geriliminden düşük genlikte olacaktır [47].

Bu akılar, oransal olarak aynı sırayla rotor oluğuna uygulanabilmektedir. Rotorda akıdan söz edebilmek için temel şart, akının $\mathcal{R}$ manyetik direncini geçmesidir.

Çok azalan bu akı, rotorda yüksek frekansta küçük genlikte bir akım yaratacak ve bu akım da deri etkisinden ötürü rotor iletkeninin küçük bir kısmını kullanacaktır. Söz konusu rotor akımının azalması eşdeğer devre üzerinden de açıklanabilmektedir.

Eşdeğer devrenin sekonder tarafında ${x_{2n}}' \neq {x_2}'$ olacaktır. Frekansla orantılı olan bu eşdeğer devre elemanı, harmonik mertebesi oranında artacaktır.

$X_2 = x'_{2n} = n.x_2{}'$

Buna ek olarak, deri etkisinden dolayı, daha önce anlatıldığı gibi frekansın köküyle orantılı olarak direnç de artacağından, $r_{2n}{}' \neq r_2{}'$ olacaktır. Sonuçta, $Z'_{2n} \gg Z_2{}'$ olacağından sekonder akımı, sadece sekonder devre parametrelerine bağlı olarak da oldukça azalacaktır.

Öte yandan moment de, bütün bu değişimler sonucu etkilenecektir. Bu değişim şöyle açıklanabilir; mil hızı sabit kabul edilen bir asenkron makinaya temel bileşen ve diğer harmonik bileşenlerini içeren bir gerilim uygulandığı kabul edildiğinde, aşağıdaki eşitlikler geçerli olacaktır.

n. harmoniğin senkron hızı

$$n_{n_{senkron}} = \frac{60f}{p}n$$

n. harmoniğin senkron açısal hızı

$$\omega_{n_{senkron}} = \frac{2\pi 60f}{p}n = n.\omega_{1_{senkron}}$$

Milin açısal hızı

$$\omega_{mil} = (1-s).n.\omega_{1_{senkron}} \tag{4.87}$$

O halde harmonik mertebesi arttıkça $n.\omega_{1_{senkron}}$ artacağından, sabit mil hızında $(1-s)$ ifadesi küçülecektir. Asenkron makinanın eşdeğer devresi üzerinden düşünürsek, mil momenti n. harmonik bileşen için (4.88)'deki gibi ifade edilebilir:

$$M = \frac{60}{2\pi n_n}.3.I'_{2n}.r_2{}'\frac{(1-s)}{s} \tag{4.88}$$

Bu ifadede, $r_2{}'\frac{(1-s)}{s}$ terimi de harmonik mertebesi arttıkça küçülecektir. Başka bir deyişle, harmonik mertebesi arttıkça, zaman harmoniği moment oluşturmayacaktır. Yüksek mertebeli harmonikler için, makina eşdeğer devresi, nüvesinde hava boşluğu olan kısa devre edilmiş bir transformatör devresine benzetilebilir.

Sonuç olarak, akı yoğunluğu, akım ve moment hakkında yapılmış olan çıkarımlar, toplu bir halde verilmiştir.

- Akının genliği düşük olduğundan hava aralığına geldiğinde rotora geçmekte zorlanacaktır. Rotora tahmin edildiğinden daha az akı geçecektir.
- Harmonik bileşenin genliği temel bileşen genliğinden küçük olduğundan, anlatılan olaylar gereği, etkisel olarak artmasına rağmen, genlik olarak iyice azalacaktır.
- Rotor akımı, yüksek frekanstan ötürü masif iletkenin üst kısmında biriktiğinden, iletken içindeki akım yoğunluğu durumu her harmonik bileşen için farklı olacaktır.
- Rotorda akım yığılmasından ötürü, oluk ağzının hizasına gelen diş başında, akı birikimi olacaktır. Söz konusu harmonik bileşeni yüksek genlikte bir akım üretmişse de onun akısı diş başlarını doymaya sokabilecektir.
- Eğer harmonik bileşenin akımının genliği, yeterince büyük değilse, akı rotora geçemeyecek, $\mathcal{R}$ manyetik direncini aşamayacak ve hava aralığında ve girişinde sıkışacaktır. Böyle durumlarda stator diş başlarında doyma olabilir.
- Azalan akım genliği ve 1'e yaklaşan kaymadan ötürü harmonik mertebesi arttıkça, o bileşene ait momentin oluşumu zorlaşacaktır.
- Belirgin bir moment oluşturmasa da zaman harmoniği milde titreşim olarak kendini gösterecektir.

5. MAXWELL 2D İLE SONLU ELEMANLAR ANALİZİ

Bu çalışmanın içeriği iki ayrı bölümden oluşmaktadır:

- Ansoft RMxprt ile analitik çözümle veri almak,
- Ansoft Maxwell 2D'de alınan analitik veriler ışığında sonlu elemanlarla harmonik analizi yapmaktır.

Çalışmada kullanılan makinanın RMxprt modeli çıkartılıp incelenmiştir. RMxprt analizi için makinanın rotoru çıkarılıp ayrıntılı metrik ölçümler alınmıştır.
Söz konusu asenkron motorun plaka değerleri aşağıdaki gibidir:

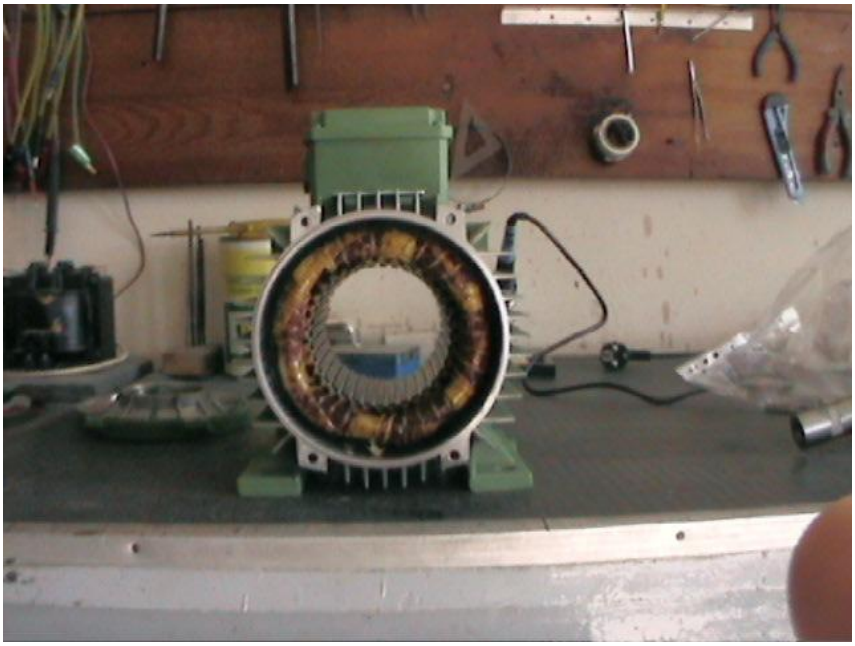
Motor çıkış gücü: P = 3 kW,

Anma gerilimi: V = 220/380 V,

Anma akımı: I = 10,5/6,1 A,

Anma hızı: N_n = 2870 d/d,

Güç faktörü: $cos\varphi$ = 0,88



Şekil 5.1 : Makinanın statoru

Şekil 5.2 : Makinanın rotoru

Ölçümlerden çıkarılan boyutlar yaklaşık olarak aşağıdaki gibidir:

Stator dış çapı: 150 mm

Rotor dış çapı: 79 mm

Mil çapı: 34 mm

Derinlik: 90 mm

Stator oluk sayısı: 36 oluk

Rotor oluk sayısı: 28 oluk

Stator oluk boyu: 12 mm

Kısa devre halkası yüksekliği: 15mm

Kısa devre halkası genişliği: 16mm

Bu bilgiler ışığında; anma, kısa devre, açık devre ve devrilme durumlarında moment, kayıp ve akım bilgilerine ulaşılmıştır. Bu bilgilerle gerçek makinaya en yakın model kurulmuştur. Bütün bu analizler, kaynak tam ve temiz bir sinüs biçiminde iken yapılmıştır.

Ancak RMxprt model; analitik çözümden ve eşdeğer devre kabullerinden kaynaklanan hatalardan ötürü tam olarak bir örtüşmeye kesinlikle izin vermeyecektir. Sonrasında, Maxwell 2D programına çalıştığımız model

tanıtılacaktır. Yine Maxwell 2D ile RMxprt sonuçları da kesin bir örtüşme göstermeyecektir. Son olarak da farklı zaman harmoniği karakterlerine sahip kaynaklarla makinanın bir takım eğrileri ve yüzey dağılım görüntüleri çıkarılacaktır. Bütün bu verilerle karşılaştırmalı yorumlar yapılacaktır.

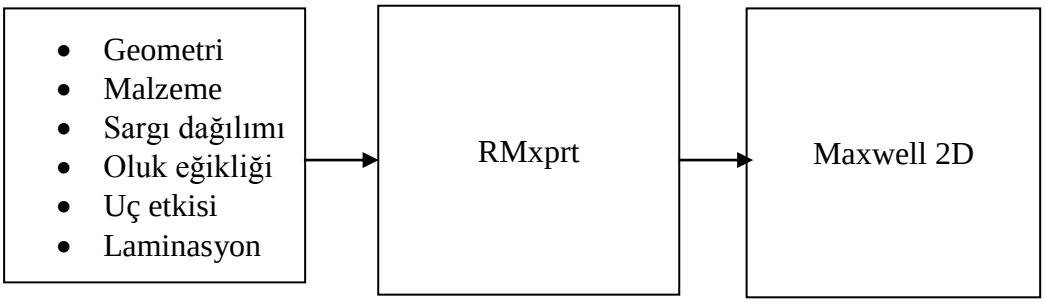
Maxwell 2D, elektromanyetik alan simülasyonu için geliştirilmiş başlıca yazılımlardandır. Bu yazılım, motorlar, transformatörler, diğer elektrik ve elektromekanik dönüşüm araçları gibi iki veya üç boyutlu yapıların tasarım ve analizinde kullanılmış ve endüstriyel sistemler, otomotiv, havacılık alanlarında yeni açılımlar getirmiştir.

5.1 Maxwell 2D & RMxprt Beraber Çalışma Olanağı

RMxprt, Ansoft'un Maxwell içinde yer alan, dönen makinalar için düşünülmüş, en tercih edilen analitik tasarım aracıdır. RMxprt ve Maxwell 2D'nin, bu birlikte çalışabilirlik durumu, kullanıcının RMxprt'da temel büyüklük ayarlaması ve gerçek sisteme yaklaşmasıyla başlamaktadır, bu büyüklükleri Maxwell 2D'de kullanılabilir şekilde yorumlamasıyla devam etmektedir. Yani RMxprt'da eşdeğer devre ve analitik çözümden alınan sonuç, geometri ve ek parametrelerin (malzeme, sargı dağılımı vs.) de varlığı ile bütün bir makina analizi olmakla beraber sonlu elemanlar çözümü için de gereken verinin tamamını içermektedir. Eldeki veri ile makina, Maxwell 2D'de, sonlu elemanlar yöntemi ile incelenir. Bu haliyle bakıldığında, RMxprt, Maxwell 2D sonlu elemanlar programı için ön verinin oluşturulmasında kullanılmaktadır. Ancak bir makinanın RMxprt'da analitik çözümünün yapılması ile Maxwell 2D'de sonlu elemanlar çözümü yapılması sonunda, çıkan sonuçlar kesinlikle birbirinin aynı olmayacaktır. Bunun sebebi;

- RMxprt makinanın üç boyutunu da ele alırken, Maxwell 2D adından da anlaşılacağı gibi sadece iki boyutlu inceleme yapmaktadır.
- RMxprt'un kullandığı analitik yöntemin hataları matematiksel iken, Maxwell 2D'nin hataları sonlu elemanlardan kaynaklanan geometrik hatalardır.

Bütün bu bilgiler ışığında bu iki Ansoft programının çalışma diyagramı aşağıdaki gibi olacaktır [48]:



Şekil 5.3 : RMxprt ve Maxwell 2D çalışma diyagramı

5.2 Maxwell 2D

Sonlu elemanlar yöntemine dayandırılan Maxwell 2D, büyük bir doğrulukla, statik, frekans ve zaman bağlı elektromanyetik ve elektrik alanları çözebilmektedir. Bu çözümleri düzgün kesitlerde ya da dönen simetriler üzerinde gerçekleştirebilmektedir.

5.2.1 Maxwell 2D'de simülatör tipleri

Maxwell 2D'de var olan 7 adet simülatör tipine göre çeşitli alan büyüklükleri ve bu alanlardan elde edilen büyüklükler hesaplanabilir. Bu simülatörler aşağıdaki gibidir [48]:

- **Elektrostatik alan simülatörü:** Doğru gerilim ve statik yüklerin verildiği bir yapıdaki statik elektrik alanı hesaplar. Bu alanda depolanan enerjiden yola çıkarak bir kapasiteler matrisi, güç, moment, halkalanan akı da hesaplanabilir.
- **Manyetostatik alan simülatörü:** Doğru akım dağılımının verildiği bir yapıdaki statik elektrik alanı hesaplar. Doğrusal ve doğrusal olmayan malzemelerdeki manyetik alan hesapları yapılabilir. Buna ek olarak, bu alanda depolanan enerjiden yola çıkarak bir endüktans matrisi, güç, moment, halkalanan akı da hesap edilebilir.
- **AC iletim simülatörü:** Üzerine alternatif gerilim uygulanmış bir iletkendeki alternatif akım dağılımını vermektedir. İletken üzerindeki enerji kayıplarından hareketle, bir admitans matrisi ve akım dağılımı da elde edilebilir.

- **DC iletim simülatörü:** Üzerine doğru gerilim uygulanmış bir iletkendeki doğru akım dağılımını vermektedir. İletkenler üzerindeki enerji kayıplarından hareketle, bir iletkenlik matrisi ve akım dağılımı da elde edilebilir.
- **Eddy akımı alanı simülatörü:** Alternatif akım dağılımı verilmiş bir yapıda oluşan manyetik alanı hesaplar. Buna ek olarak, deri etkisini de içeren akım yoğunluklarını ve iletkenlerdeki kayıplar ve manyetik alanda depolanan enerjiden yola çıkılarak, empedans matrisini, gücü, momenti, çekirdek kayıplarını da hesaplayabilmektedir.
- **Eddy eksenel alan simülatörü:** Dış tarafa ilişkin alan tarafından endüklenen manyetik alanı hesaplar. İletkenlerdeki kayıplar ve manyetik alanda depolanan enerjiden yola çıkılarak, akım hesaplanabilir.
- **Transient simülatör:** Geçici durum analizi yapabilmektedir. Hareket eden cisimler üzerindeki güçleri, momenti, hızı ve enerjiyi hesaplar.

5.2.1.1 Transient simülatör (Geçici durum simülatörü)

Asenkron makinanın analizi yapılırken kullanılacak olan simülatör geçici durum simülasyonu yapabilen "transient simülatör" olacaktır. Çünkü geçici durum analizi yapabilen simülatör, kullanıcının belirli zaman aralıklarıyla, bir periyot boyunca; manyetik alan, enerji, güç, kayıp, hız ve akı bilgilerini elde etmesini sağlar. Bu simülatör sinüs biçiminde olmayan akım ve gerilim girdisine de, rotasyonel hareket tanımına da izin vermektedir. Geçici durum manyetik alan çözümlerinin belirli varsayımları vardır [48].

Geçici durum simülatörü, problem üzerinde aşağıdaki kabullerle çalışır:

- Modelde hareket varsa; hareket, "band" nesnesi içinde gerçekleşmektedir. Dışındaki bölgeler ise sabit konumlu kabul edilir.
- Model üzerinde sadece bir tip hareket tipine izin verilir; dönen hareket ya da doğrusal hareket.
- "Band" nesnesi içinde hareketli kaydedilen kısımlar birden fazla nesneden oluşabilir.

5.2.2 Zamana bağlı manyetik alan simülasyonu

Zamana bağlı manyetik alan eşitliği aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\nabla \times \nabla V \times A = J_s - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla v + \nabla \times H_c + \sigma v \times \nabla \times A \tag{5.1}$$

Bu eşitlikte;

V: Elektriksel skaler potansiyel

H_c: Sabit mıknatısın alan şiddeti (varsa)

v: Hareketli kısımların hızı

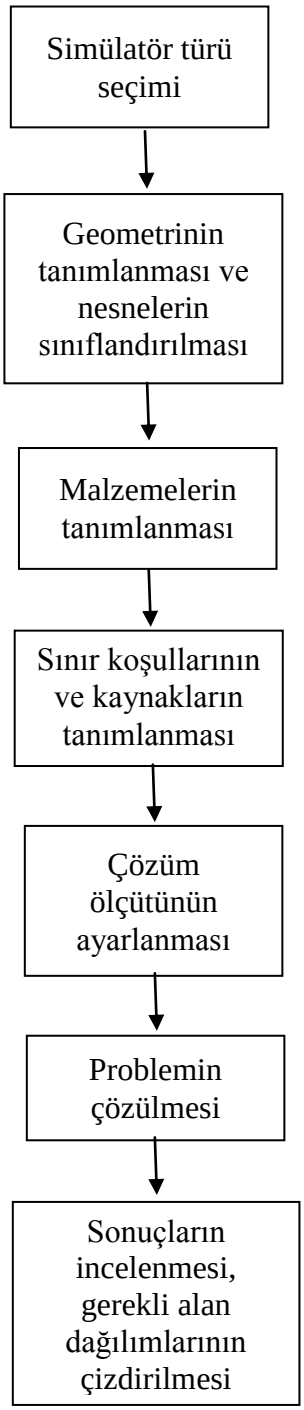
A: Manyetik vektör potansiyeli

J_s: Kaynak tarafından yaratılan akım yoğunluğu

Geçici durum simülatörü, modelin duran nesneleri temel alarak bir referans çerçevesi oluşturur. Hareketli kısımlar ise vektör potansiyellerini kendi koordinat sistemlerinin fonksiyonu olarak değiştirdiklerinden, A manyetik vektör potansiyeli, kısmi diferansiyel eşitlik olmaktan çıkar. O zaman (5.1), (5.2) haline gelir ve bu eşitlik de sonlu elemanlar modelinde her düğüm için her zaman basamağında elde edilebilir [48].

$$\nabla \times \nabla V \times A = J_s - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \nabla v + \nabla \times H_c \tag{5.2}$$

Maxwell 2D'de işlem akışı, aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.4 : Maxwell 2D Akış Diyagramı

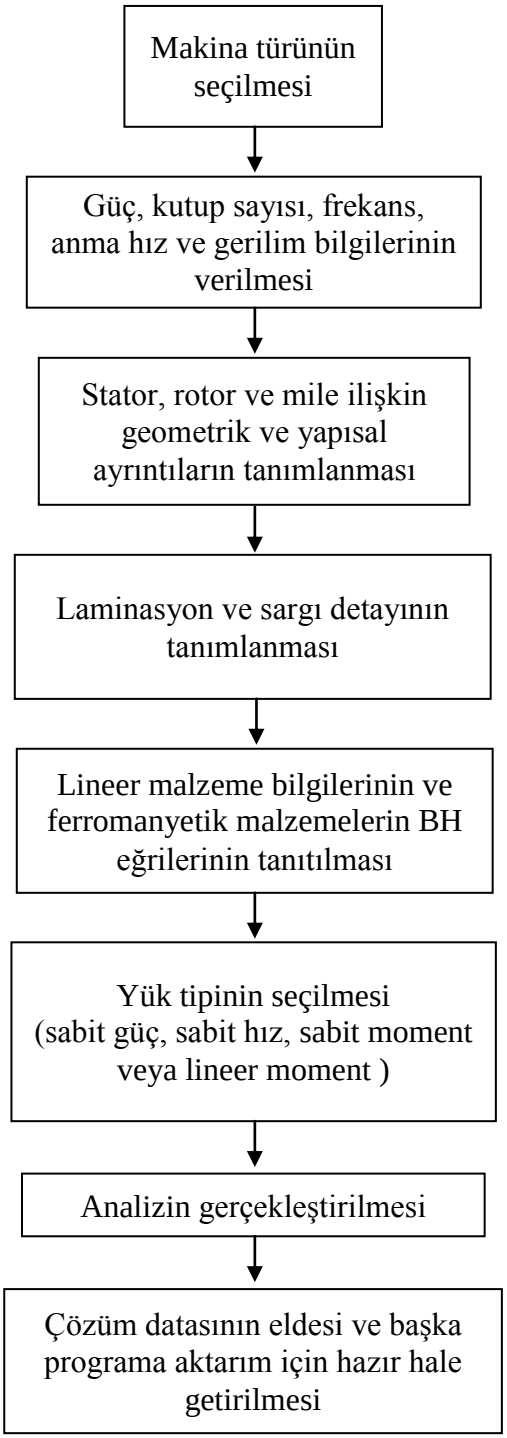
5.3 RMxprt (Rotational Machine Expert)

RMxprt, dönen elektrik makinalarının tasarım ve optimizasyonunu geliştiren ve hızlandıran çok yönlü bir yazılımdır. Bu yazılım sayesinde makina performansı, yüksek duyarlılıkla birçok farklı durum için kısa sürede incelenebilir.

Program, klasik analitik motor teorisi ve manyetik eşdeğer devre yöntemlerinden hareketle, doğrusal olmayan manyetik malzemelerin varlığını ve üçüncü boyuttaki etkileri de hesaba katarak makinayı ayrıntılı inceler.

RMxprt, kullanıcının malzeme bilgilerini, sargı detayını ve geometrik bilgileri programa tanıtması sonucunda, makinanın moment-hız, kayıp güç, hava aralığı akısı, güç faktörü ve verimini hesaplar. Tasarıma ilişkin hemen hemen bütün detaylar, program girdisi olduğu için tasarımcıların da sıkça kullandıkları bir yazılımdır [48].

RMxprt'da işlem akışı, aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.5 : RMxprt Akış Diyagramı

6. ANALİZLER VE YORUMLAR

Bu çalışmada, temel bileşene belirlenmiş oranlarda katılan harmonik bileşenlerinin varlığı ile makina davranışının incelenmesi amaçlanmaktadır. Bunun için öncelikle bu bileşenlerin teker teker, sonrasında da ikili ve üçlü kombinasyonlarının incelenmesi ile zaman harmoniğinin makina üstündeki etkileri hakkında genellemeler yapılmış ve bu genellemeler analitik çözümle karşılaştırılmıştır. Söz konusu bileşenler aşağıda listelenmiştir.

$$V_1 = V_{temel\,max} \,.\cos(\omega t)$$

$$V_5 = \frac{V_{temel\,max}}{5} \,.\cos(5\omega t)$$

$$V_7 = \frac{V_{temel\,max}}{7} \,.\cos(7\omega t) \tag{6.1}$$

$$V_{11} = \frac{V_{temel\,max}}{11} \,.\cos(11\omega t)$$

Yukarıda (6.1) nolu eşitliklerle ifade edilmiş olan bileşenler ve kombinasyonları dokuz farklı durumda, Maxwell 2D adlı sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözüm yapan program sayesinde makinaya uygulanmıştır. Makinanın analizinin yapılacağı dokuz durumun içeriği aşağıdaki gibidir.

1. V_1
2. V_5
3. V_7
4. V_{11}
5. $V_1 + V_5$
6. $V_1 + V_7$
7. $V_1 + V_{11}$
8. $V_1 + V_5 + V_7$
9. $V_1 + V_5 + V_7 + V_{11}$

Makina tanımı:

Simülasyonlar için temel alınan makinanın temel büyüklükleri aşağıdaki gibidir.

P = 3 kW

V = 220/380 V

I = 10,5/6,1 A

n = 2870 d/d

$cos\varphi$ = 0,88

Bu çalışmada makinanın yıldız bağlı durumda ve 380V uç gerilimdeki çalışmasının simülasyonu yapılmıştır. Anma hızdan da anlaşılacağı gibi makina 2 kutupludur. Anma çıkış gücü ve devir sayısına ilişkin anma moment de yaklaşık 9.98 Nm'dir.

Makinaya uygulanan boşta ve kısa devre deneylerinden elde edilen sonuçlara göre makinanın demir kaybı 116W, bakır kaybı ise 337W'dır. Boşta deney, anma geriliminde uygulanmış olup kısa devre deneyi anma akımında yaklaşık 52 V gerilim altında gerçekleştirilmiştir. Bu kayıp ve kaynak değerlerinden hareketle bulunan devre paramaetreleri;

Kısa devre direnci ve reaktansı;

$r_k = r_1 + r_2^{'} = 3\ \Omega$ ve $x_k = x_1 + x_2^{'} = 4.052\ \Omega$

Demir direnci ve mıknatıslanma reaktansı ise,

$r_{fe} = 1062\ \Omega$ ve $x_m = 123\ \Omega$

olarak bulunmuştur.

Söz konusu simülasyonlar sabit mil hızı tanımlanıp yapılmıştır. Simülatör olarak da Geçici durum simülatörü tercih edilmiş böylece ani değerler alınmıştır. İncelenen bütün durumlar için;

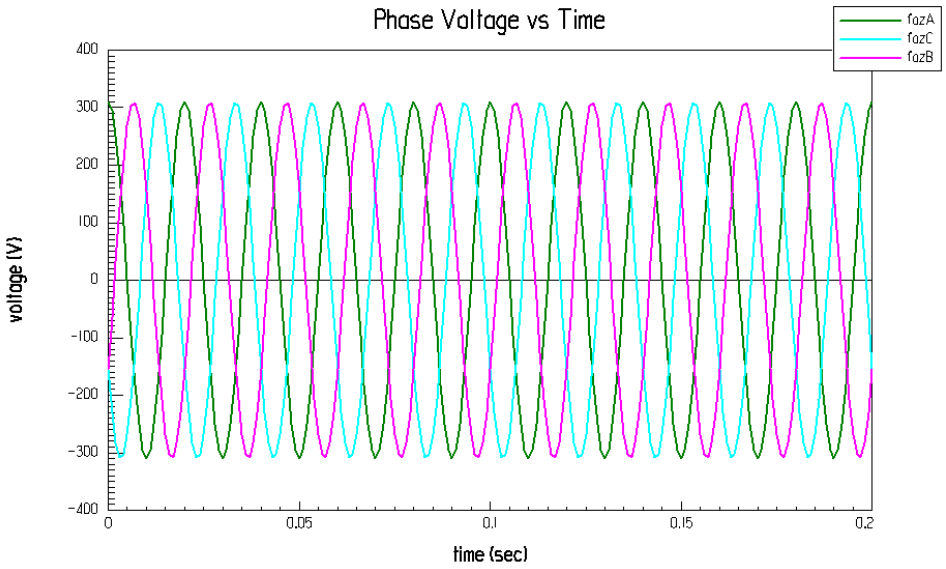
- Gerilim
- Akım
- Moment
- Halkalanma akısı ve endüklenen elektromotor kuvvet
- Kayıp güç

dalga şekilleri çıkartılmıştır. Buna ek olarak manyetik akı ve akım yoğunluğu haritaları da çalışmaya eklenmiştir.

6.1 Gerilim Dalga Şekilleri

Yukarda sözü edilen kaynaklarla yapılan simülasyonlarda görüntülenen gerilim dalga şekilleri, tek bileşenin olduğu uygulamalarda, frekansı farklı olmakla beraber, saf sinüs olacaktır. Ancak iki ya da üç bileşenin toplamıyla ifade edilen gerilimlerde sinüs biçimi bozulmuş, harmonik bileşen eklenmesiyle bozunumu artmıştır.

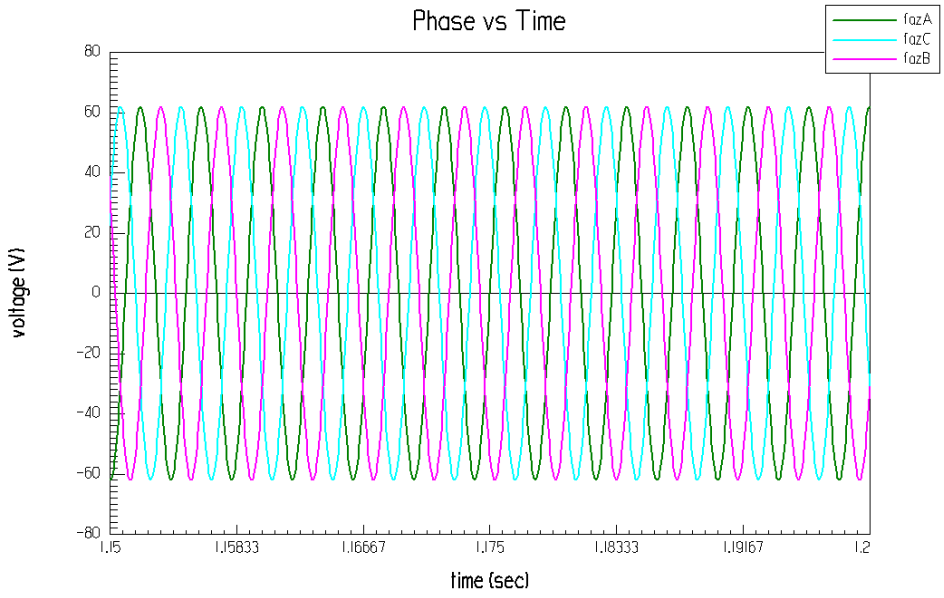
- V_1 Durumu (Temel Bileşen)



Şekil 6.1 : Temel bileşen için faz gerilimleri dalga şekilleri

Fazlar arası gerilimin etkin değeri 380 V ise yıldız bağlı sistemden ötürü faz gerilimlerinin dalga şekilleri Şekil 6.1'deki gibidir. Bu gerilimlerin tepe değeri yaklaşık olarak 311 V, etkin değeri ise 220 V bulunmuştur. Dalga şekilleri beklendikleri gibi tam sinüs biçimindedir.

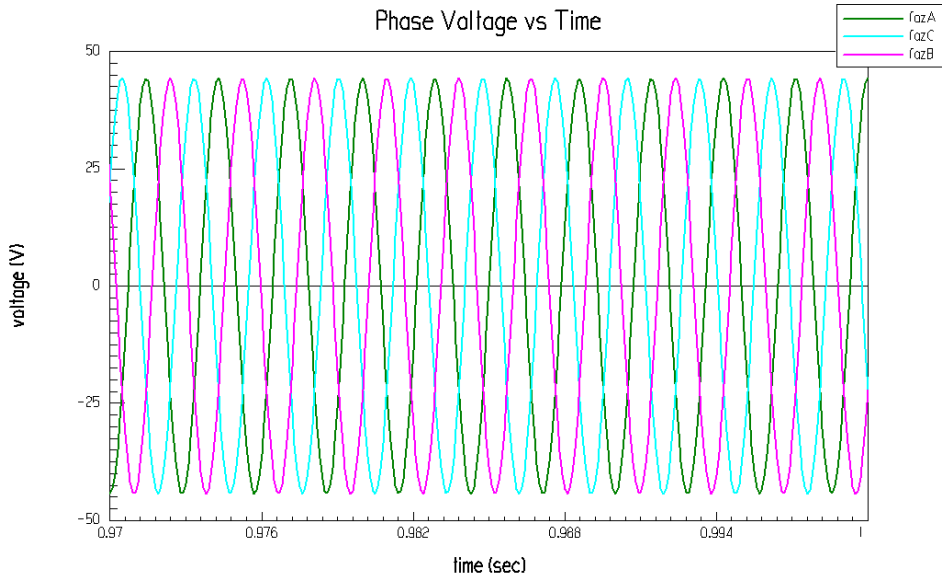
- V_5 Durumu



Şekil 6.2 : V_5 durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Beşinci bileşenin fazlar arası geriliminin etkin değeri Şekil 6.2'den görüldüğü gibi 76 V'dur. Başka bir deyişle, tek faza ilişkin gerilimin tepe değeri yaklaşık 62,05 V, etkin değeri ise 43,87 V olup, frekansı 250 Hz'dir.

- V_7 Durumu



Şekil 6.3 : V_7 durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Yedinci bileşenin fazlar arası geriliminin etkin değeri 54,28 V'dur. Faz geriliminin tepe değeri ise Şekil 6.3'te görüldüğü gibi yaklaşık 44,32 V olup etkin değeri 31,34 V'dur. Ek olarak, bileşene ilişkin frekans da 350 Hz'dir.

- V_{11} Durumu

Şekil 6.4 : V_{11} durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

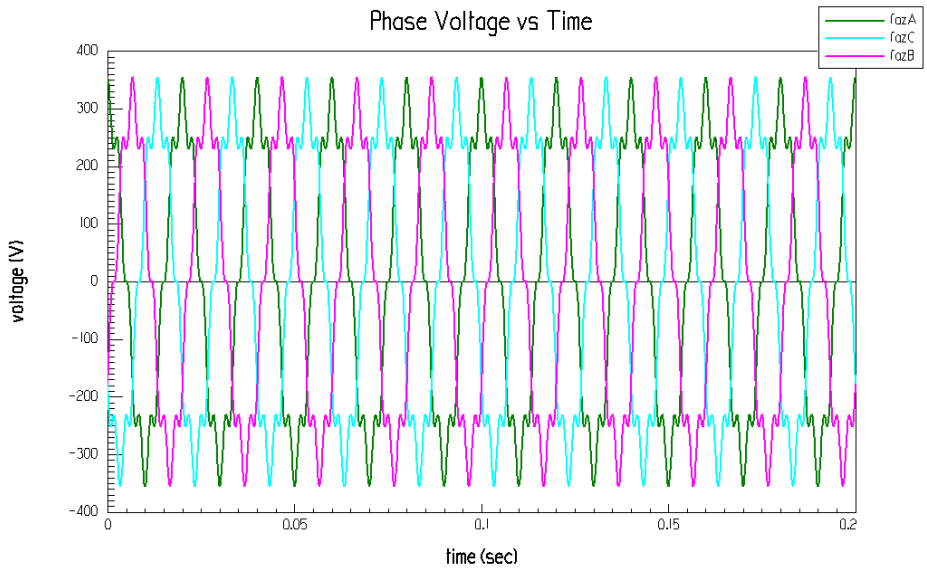
Onbirinci bileşenin fazlar arası geriliminin etkin değeri 34,54 V'dur. Faz geriliminin tepe değeri ise Şekil 6.4'te görüldüğü gibi yaklaşık 28,20 V olup etkin değeri 19,94 V'dur. Ek olarak, bileşene ilişkin frekans da 550 Hz'dir.

- $V_1 + V_5$ Durumu

Şekil 6.5 : $V_1 + V_5$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Temel bileşen ve beşinci bileşenin toplamından oluşan dalga şekli, Şekil 6.5'ten gözlemlendiği üzere saf sinüs biçiminden çıkmıştır. Bu dalga için hesaplanan faz gerilimi etkin değeri yaklaşık 224 V olup, tepe noktaları yaklaşık 325 V'a kadar ulaşabilmektedir.

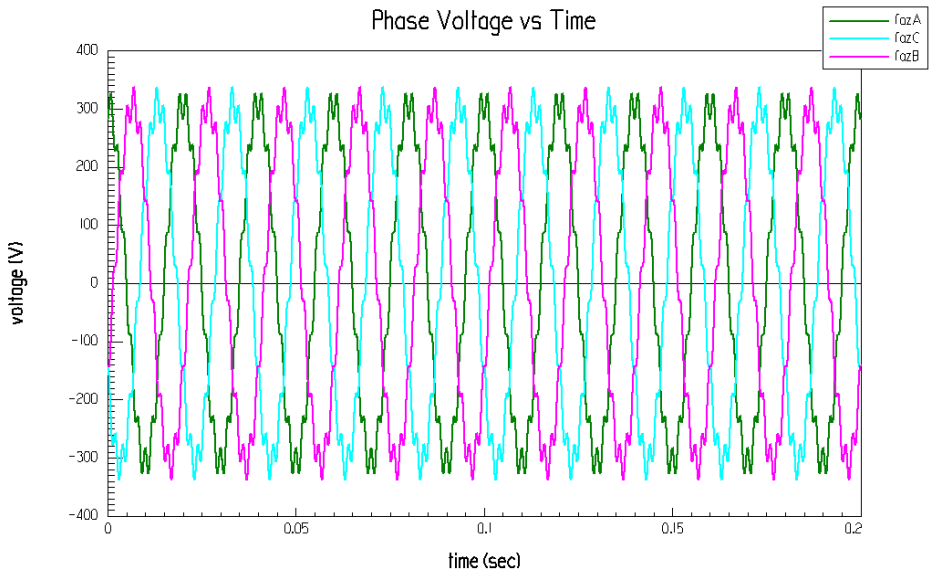
- $V_1 + V_7$ Durumu



Şekil 6.6 : $V_1 + V_7$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Temel bileşen ve yedinci bileşenin toplamından oluşan dalga şekli de Şekil 6.6'da gözlemlendiği üzere saf sinüs biçiminden uzaktır. Bu dalga için hesaplanan etkin değer yaklaşık 222 V olup, tepe noktaları 345 V'a kadar ulaşabilmektedir. Gerilimin etkin değerinin, $V_1 + V_5$ durumuna göre daha düşük olmasının sebebi, yedinci bileşenin frekansının beşinci bileşene göre yüksek olmasına rağmen geriliminin düşük olmasıdır.

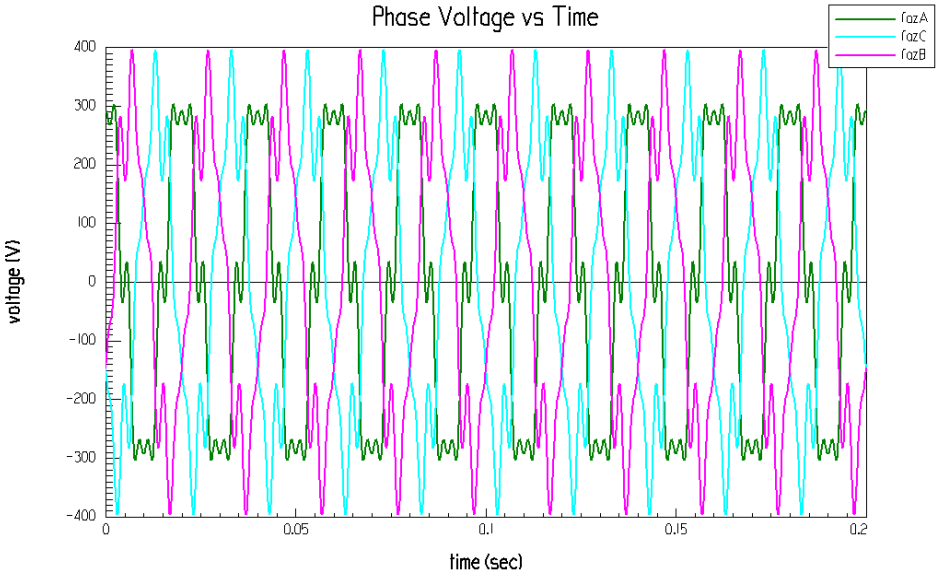
- $V_1 + V_{11}$ Durumu



Şekil 6.7 : $V_1 + V_{11}$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Temel bileşen ve onbirinci bileşenin toplamından oluşan dalga şekli de Şekil 6.7'de gözlemlendiği üzere saf sinüs biçiminden uzaktır. Bu dalga için hesaplanan etkin değer yaklaşık 221 V olup, tepe noktaları 335 V'a kadar ulaşabilmektedir. Gerilimin etkin değerinin, $V_1 + V_7$ durumuna göre daha düşük olmasının sebebi, onbirinci bileşenin frekansının yedinci bileşene göre yüksek olmasına rağmen geriliminin düşük olmasıdır.

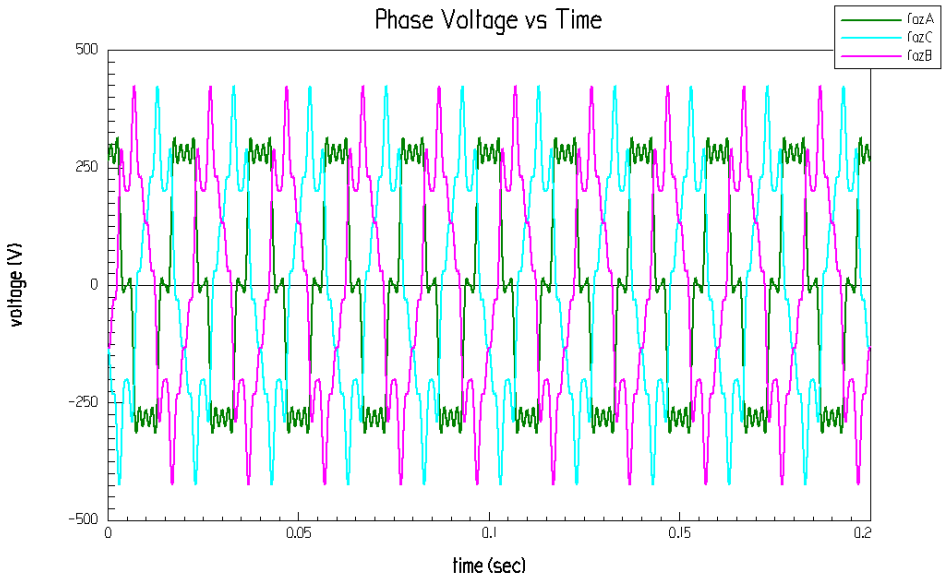
- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



Şekil 6.8 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Şekil 6.8'den görüldüğü gibi harmonik bileşen eklendikçe gerilim genliği artmakta ve sinüs biçiminden gitgide uzaklaşmaktadır. Temel bileşen, beş ve yedinci bileşenlerin de eklenmesiyle bu dalga için hesaplanan etkin değer olarak yaklaşık 226,5 V'a yükselmiştir. Bununla beraber sivrilme noktalarında 382 V gibi değerler yakalanmaktadır.

- $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ Durumu

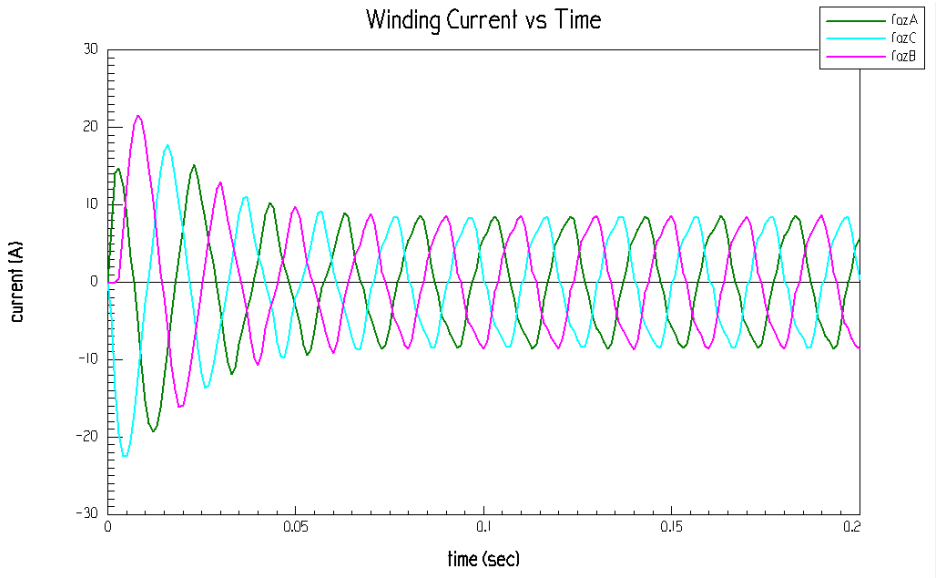


Şekil 6.9 : $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ durumunun faz gerilimleri dalga şekilleri

Şekil 6.9'da görüldüğü gibi harmonik bileşen eklendikçe gerilim genliği daha da artmakta ve sinüs biçiminden gitgide uzaklaşmaktadır. Temel bileşene diğer bileşenlerin de eklenmesiyle, bu dalga için bulunan etkin değer olarak yaklaşık 227,5 V'a yükselmiştir. Bununla beraber, sivrilme noktalarında 390 V gibi değerler yakalanmaktadır.

6.2 Stator Sargı Akımı Dalga Şekilleri

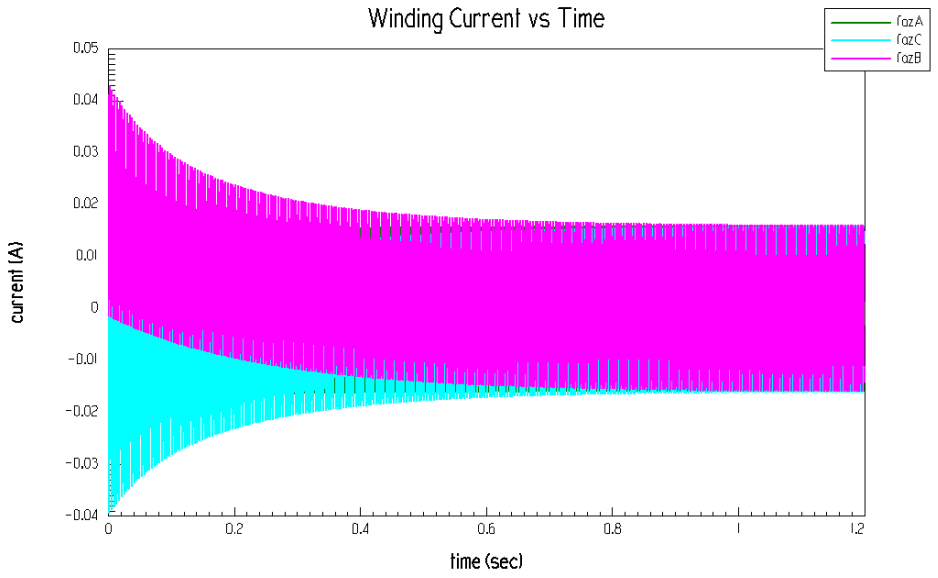
- V_1 Durumu (Temel Bileşen)



Şekil 6.10 : V_1 durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

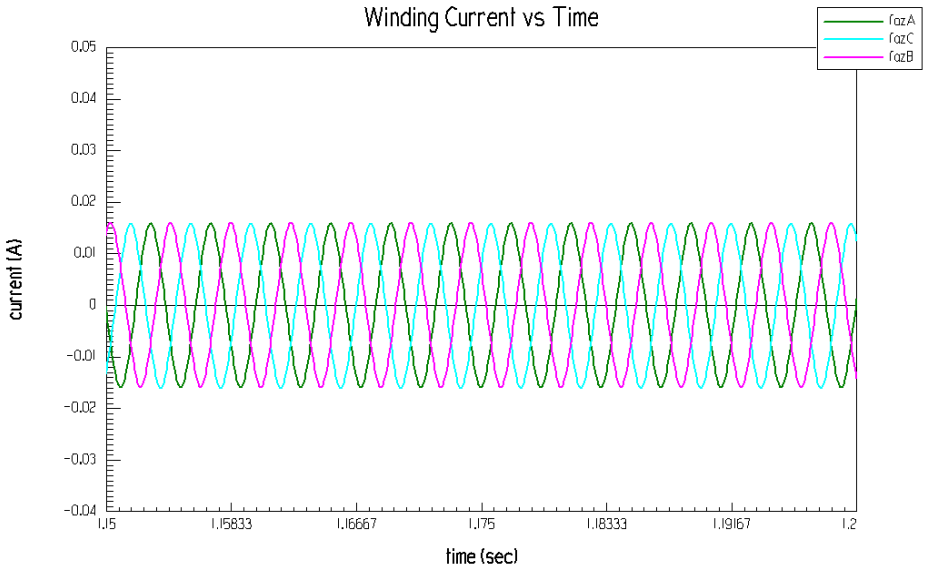
Şekil 6.10'da temel bileşenin sargı akımı görüntülenmektedir. Sargı akımı tepe değeri beklendiği gibi 8,6 A, etkin değeri 6,1 A civarındadır. Bu değer makinanın yıldız bağlanıp 380 V faz arası etkin değerli gerilimle beslendiği durumdaki sargı akımı maksimum değeridir.

- V_5 Durumu



Şekil 6.11 : V_5 durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

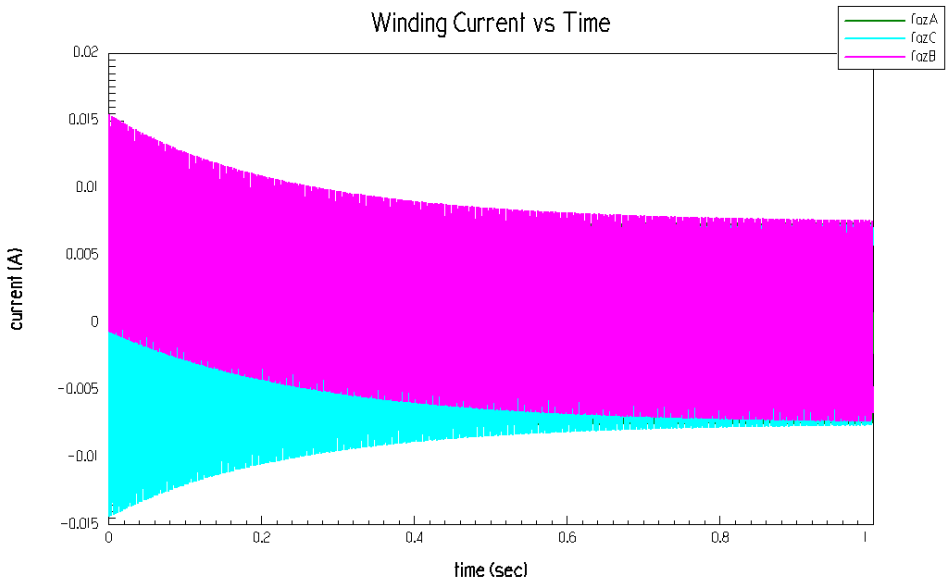
Şekil 6.11'den de görüldüğü gibi akım zamanla kararlı hale gelmektedir. Bundan dolayı simülasyon süresi uzun tutulmuştur. Çünkü frekansın artmasıyla devrenin reaktansının artması ve bu artan endüktiflik karşısında gerilimin de küçülmesi sebebi ile akım geç düzene girmiştir. Dalga şeklinin ayrıntısını görebilmek için küçük bir bölgeye yakından bakılırsa;



Şekil 6.12 : V_5 durumunun stator sargı akımları dalga şekillerinin ayrıntısı

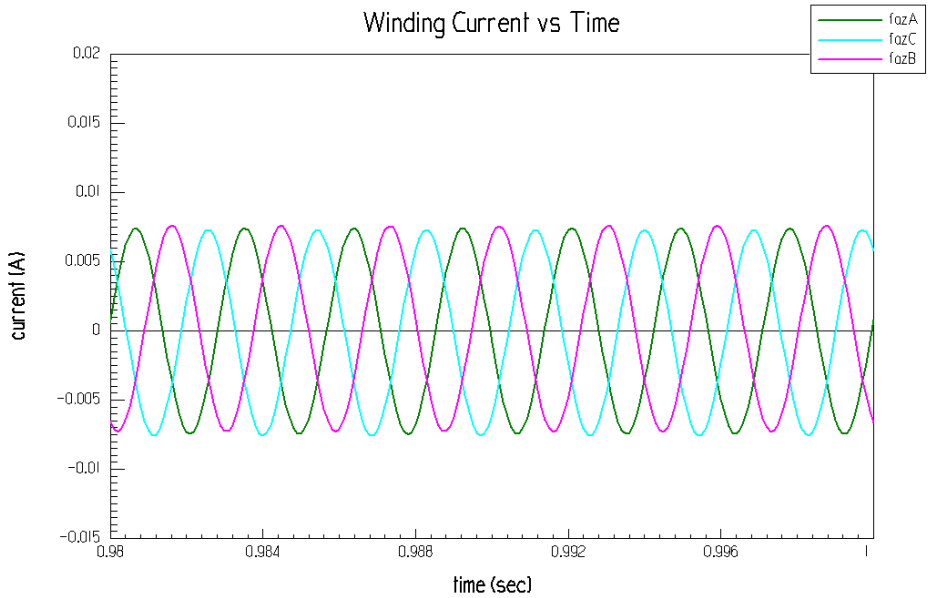
Şekil 6.12'den görüldüğü gibi akımın tepe değeri 0,016 A, etkin değeri 0,0113 A'dir. Akımın bu denli düşmesinin nedeni, analitik çözümde de anlatıldığı gibi; besleme geriliminin düşmesi, reaktansların frekansla orantılı olarak artması ve eşdeğer devre üzerindeki r_2'/s ifadesinin harmonik mertebesi yükseldikçe artması etkilerinin toplamıyla, eşdeğer empedansın yükselmesinden kaynaklanmaktadır.

- V_7 Durumu



Şekil 6.13 : V_7 durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

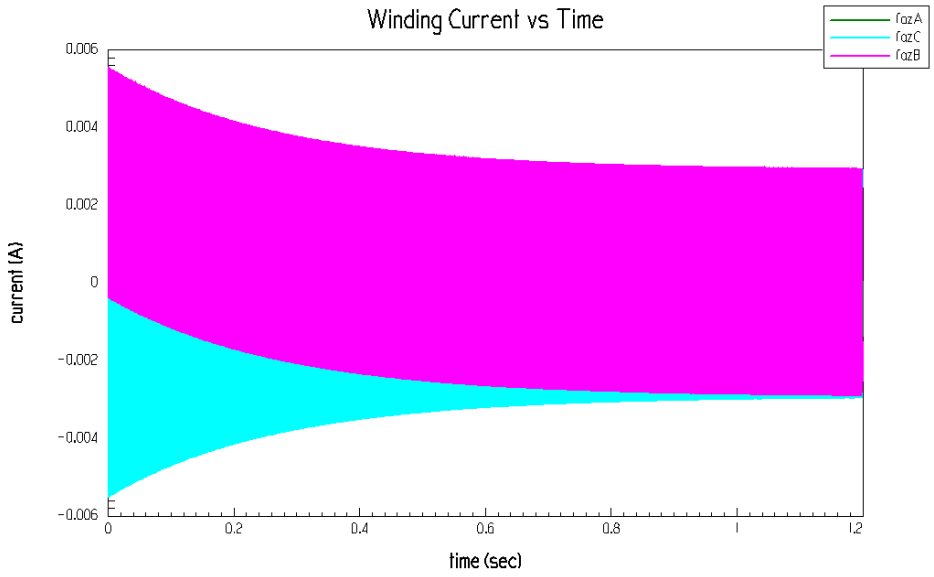
Şekil 6.13'ten görüldüğü gibi akım zamanla kararlı hale gelmektedir. Bundan dolayı simülasyon süresi uzun tutulmuştur. Bu durumun sebebi, frekansın artmasıyla devrenin endüktif karakterinin artması ve gerilimin de küçülmesidir. Dalga şeklinin ayrıntısını görebilmek için küçük bir bölgeye yakından bakılırsa;



Şekil 6.14 : V_7 durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri ayrıntısı

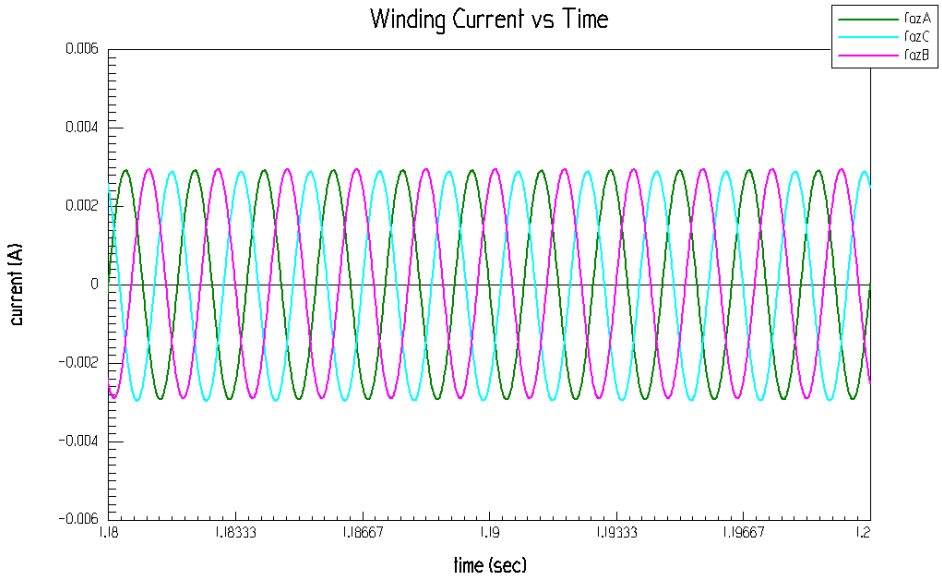
Şekil 6.14'ten görüldüğü gibi akımın tepe değeri 0,0075 A ve etkin değeri 0,0053 A'dir. Akımın bu denli düşmesinin sebebi beşinci bileşen için anlatılanlarla aynıdır. Bütün bu etkilerle toplam empedans yükselmiş ve akım bu denli düşmüştür.

- V_{11} Durumu



Şekil 6.15 : V_{11} durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

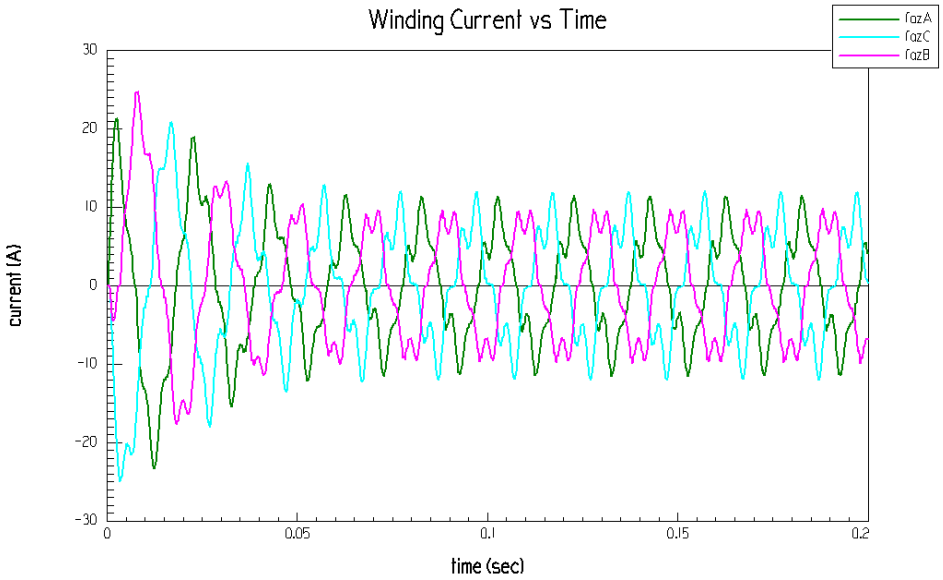
Şekil 6.15'ten görüldüğü gibi akımın kararlı hale gelmesi zaman almaktadır. Bundan dolayı simülasyon süresi uzun tutulmuştur. Bu durumun sebebi, frekansın artmasıyla devrenin endüktif karakterinin artması ve gerilimin de küçülmesidir. Dalga şeklinin ayrıntısını görebilmek için küçük bir bölgeye yakından bakılırsa;



Şekil 6.16 : V_{11} durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri ayrıntısı

Şekil 6.16'dan görüldüğü gibi akımın tepe değeri 0,0029 A ve etkin değeri 0,002 A'dir. Akımın bu denli düşmesinin sebebi yedinci bileşen için anlatılanlarla aynıdır. Bütün bu etkilerle toplam empedans yükselmiştir, bu nedenle akım düşmüştür.

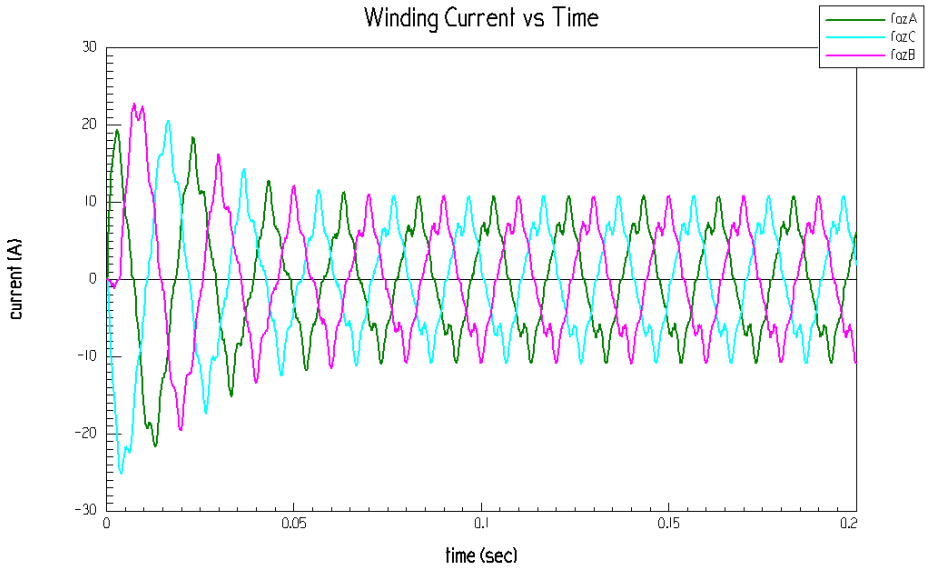
- $V_1 + V_5$ Durumu



Şekil 6.17 : $V_1 + V_5$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

Bu durumda Şekil 6.17'de görüldüğü gibi akımın dalga şekli bozulmuştur. Faz akımının tepe değeri yer yer 12 A'e kadar yükselmektedir. Öte yandan akımın etkin değeri yaklaşık 7,34 A'dir ve beklendiği gibi anma akımdan düşüktür. Bu artış gerilimin etkin değerinin yükselmesi ve gerilimde oluşan dengesizliklerden kaynaklanmaktadır.

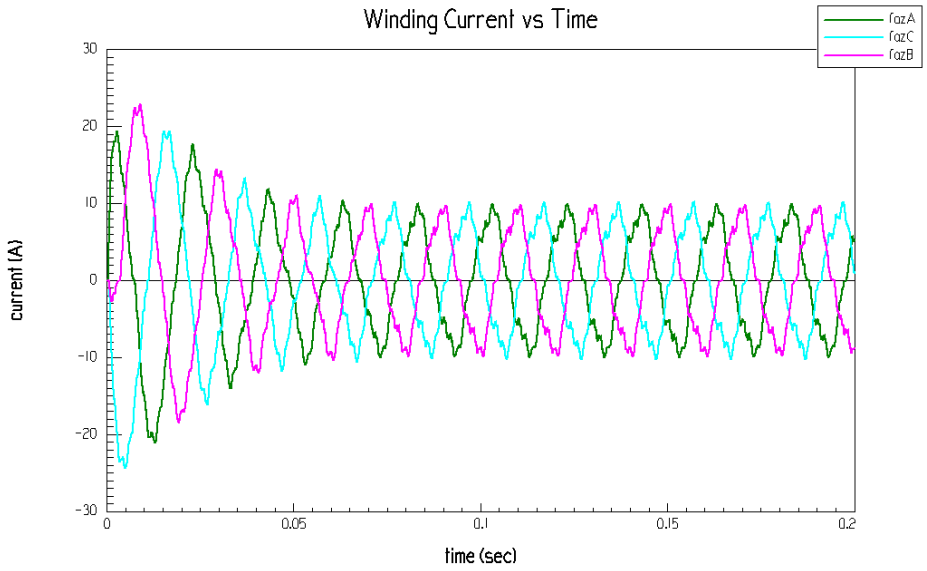
- $V_1 + V_7$ Durumu



Şekil 6.18 : $V_1 + V_7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

Şekil 6.18'den de görüldüğü gibi akımın dalga şekli son derece bozuktur. Faz akımının tepe değeri 11,5 A'e kadar yükselirken, etkin değeri yaklaşık 6,8 A kadardır. Bu artışın sebebi az önceki durumda oluşan artışla aynıdır.

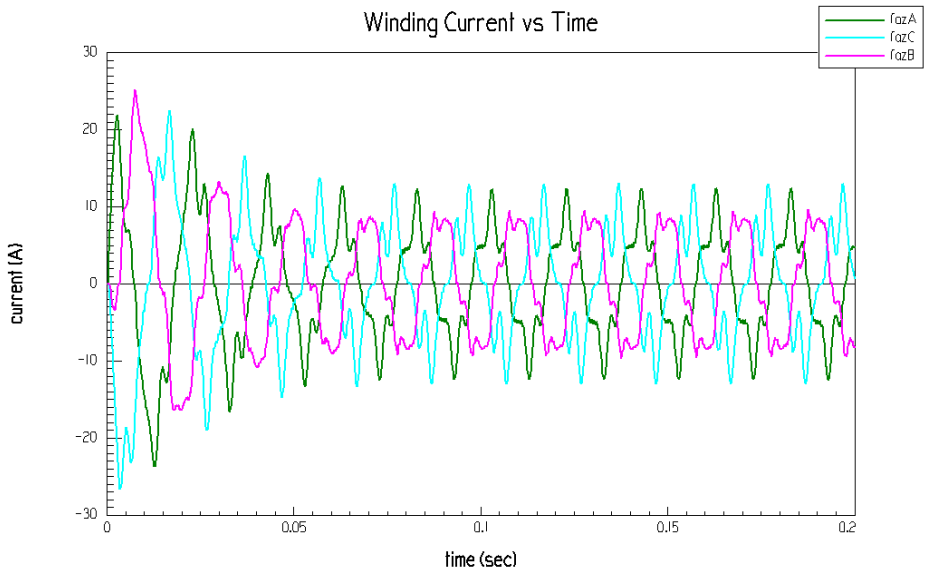
- $V_1 + V_{11}$ Durumu



Şekil 6.19 : $V_1 + V_7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

Bu durumda Şekil 6.19'da da görüldüğü gibi akımın dalga şekli bozulmuştur. Faz akımının tepe değeri yer yer 10,16 A'e kadar yükselmektedir. Öte yandan akımın etkin değeri yaklaşık 6,7 A'dir ve beklendiği gibi anma akımından yüksektir. Bu artış gerilimin yükselmesi ve gerilimde oluşan dengesizliklerden kaynaklanmaktadır.

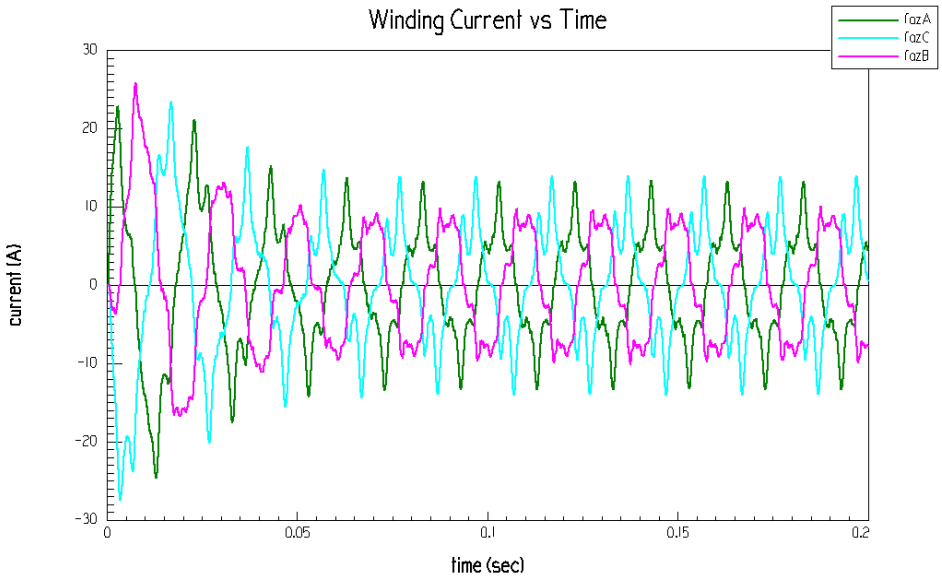
- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



Şekil 6.20 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

Şekil 6.20'den de görüldüğü gibi akım, devreye harmonik bileşen katıldıkça son derece karmaşık olmaya başlamıştır. Akım kararlı hale oturduktan sonra 12,6 A gibi yüksek değerleri görmeye devam etmektedir. Akımın etkin değeri ise yaklaşık 7,5 A'dir.

- $V_1 + V_5 + V_7 + V_{11}$ Durumu

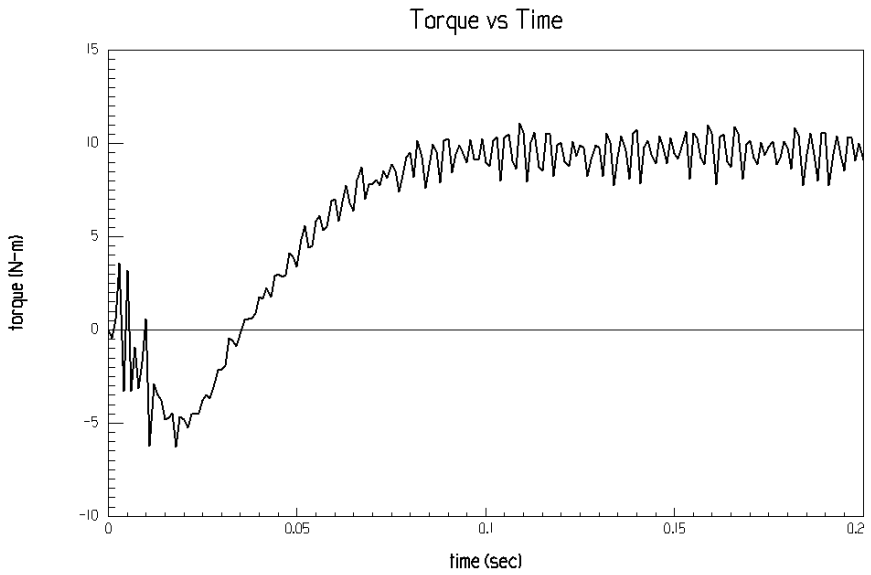


Şekil 6.21 : $V_1 + V_5 + V_7 + V_{11}$ durumunun stator sargı akımları dalga şekilleri

Şekil 6.21'den görüldüğü gibi akım, devreye harmonik bileşen katıldıkça çok karmaşık olmaktadır. Akım kararlı halde 13,2 A gibi yüksek değerleri görmeye devam etmektedir. Akımın etkin değeri ise yaklaşık 7,65 A'dir.

6.3 Moment Dalga Şekilleri

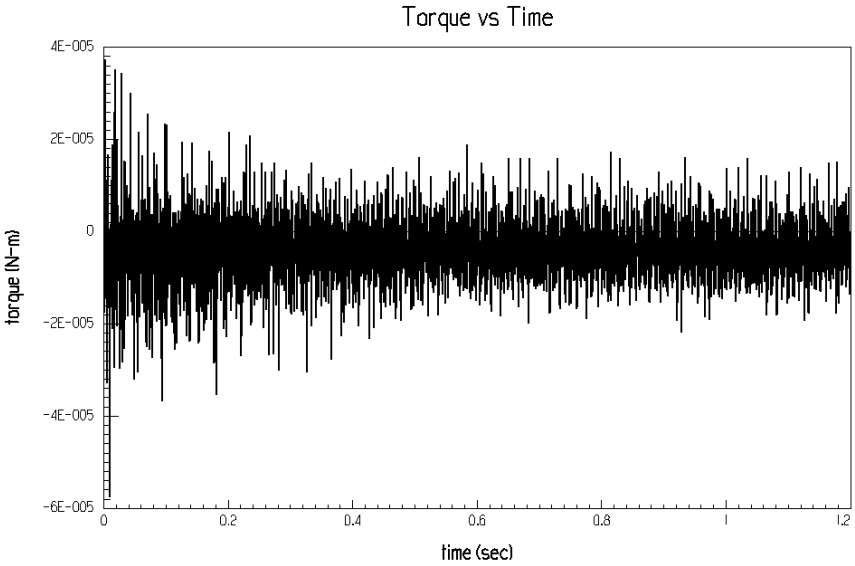
- V_1 Durumu (Temel Bileşen)



Şekil 6.22 : V_1 durumu moment – zaman grafiği

Şekil 6.22'de temel bileşenin momenti görüntülenmektedir. Moment olası salınımlardan gerçek değerine oturmuştur ve değeri ortalama olarak 9,6 Nm civarında görünmektedir. Bu veri plaka değerleri ile karşılaştırıldığında büyük bir yakınlıkla simülasyon yapılan sistemin makinaya çok yaklaşmış bir sistem olduğu doğrulanmakta ve işlemlere bu bilgi ışığında devam edilmektedir. Moment kararlı hale oturduğunda 11,5 Nm ve 7,5 Nm arasında salınmaya devam etmektedir.

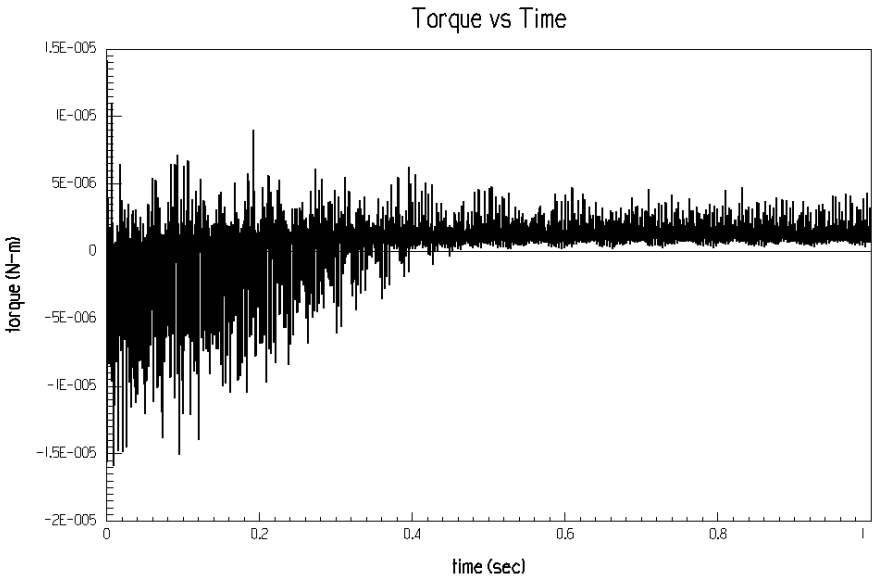
- V_5 durumu



Şekil 6.23 : V_5 durumu moment – zaman grafiği

Sadece beşinci bileşenin uygulandığı bu durumda makina 1,2 saniyelik simülasyon boyunca, moment ortalama değerini sıfırdan çok farklı hale getirememiştir (Şekil 6.23). Bu çıkarım analitik sonuçlarla da örtüşmektedir. Harmonik bileşen tek başına moment üretememektedir.

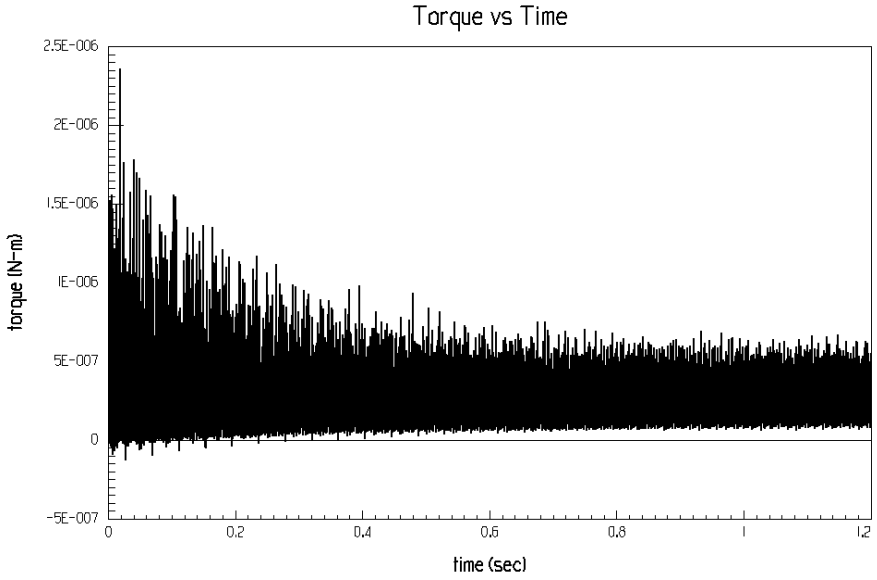
- V_7 Durumu



Şekil 6.24 : V_7 durumu moment – zaman grafiği

Sadece yedinci harmoniğe ilişkin moment grafiğinde beşinci harmoniğin verdiği performansla hemen hemen aynı durum gözlemlenmiştir (Şekil 6.24). Harmonik bileşen tek başına moment üretememektedir, çünkü gerilimi ve bu gerilimin akıttığı akımı çok düşüktür. Bu durum analitik sonuçlarla örtüşmektedir.

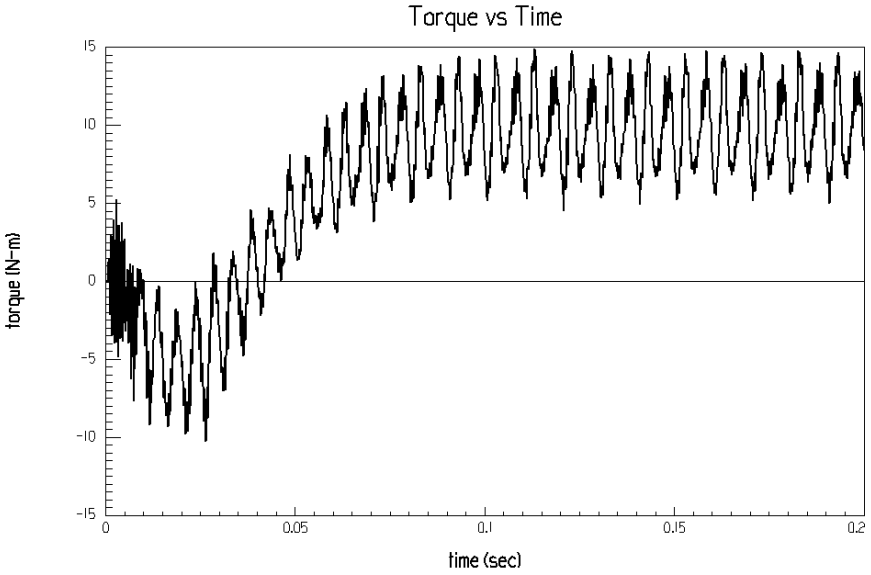
- V_{11} Durumu



Şekil 6.25 : V_{11} durumu moment – zaman grafiği

Sadece onbirinci harmoniğe ilişkin moment grafiğinde yedinci harmoniğin verdiği performansla hemen hemen aynı durum gözlemlenmiştir (Şekil 6.25). Harmonik bileşen tek başına moment üretememektedir, çünkü gerilimi ve bu gerilimin akıttığı akımı çok düşüktür. Bu durum analitik sonuçlarla örtüşmektedir.

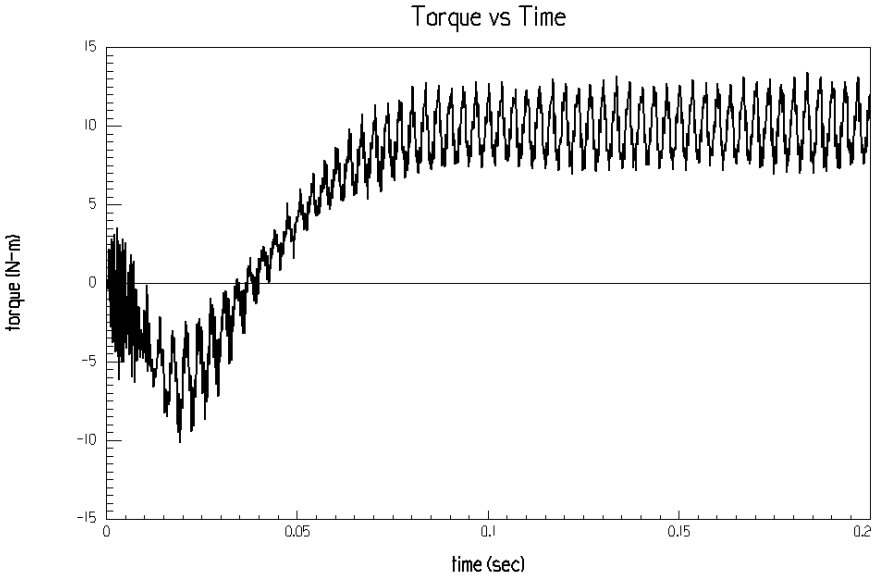
- $V_1 + V_5$ Durumu



Şekil 6.26 : $V_1 + V_5$ durumu moment – zaman grafiği

Şekil 6.26'da beşinci harmonikle kirletilmiş temel bileşen geriliminin uygulandığı makinanın momenti görüntülenmektedir. Moment ortalama değeri çok değişmese de dalgalılık artmıştır. Artık moment 5 ile 15 Nm arasında salınmaktadır. Bu durum literatürde de son derece üstünde durulan, analitik çözümde de değinildiği gibi, zaman harmoniğinin milde titreşime neden olduğu gerçeğini desteklemektedir.

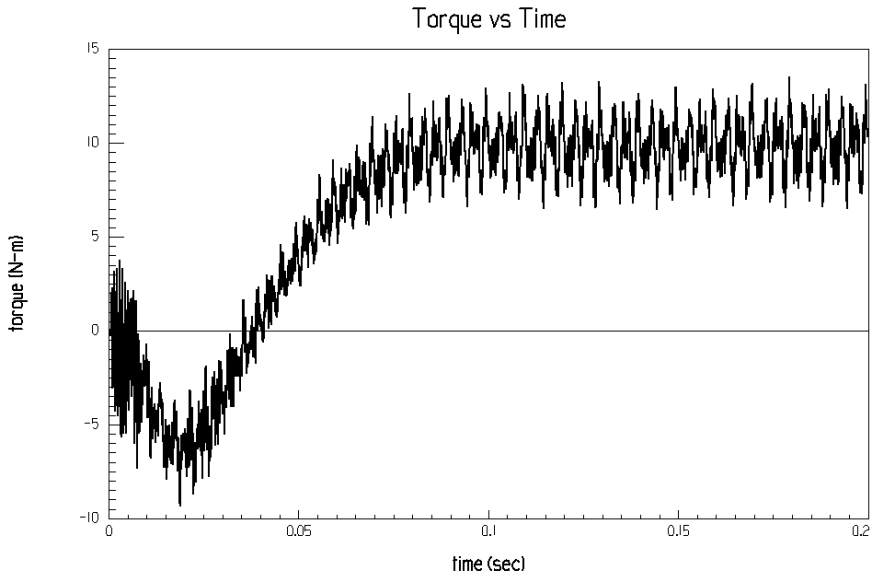
- $V_1 + V_7$ Durumu



Şekil 6.27 : $V_1 + V_7$ durumu moment – zaman grafiği

Şekil 6.27'de temel bileşen gerilimi ile kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın, moment grafiği görülmektedir. Moment kararlı hale oturduktan sonra 6,5 ile 13 Nm arasında salınmaktadır. Beşinci bileşen kadar büyük bir aralıkta oynamamasının sebebi eklenen harmoniğin küçük genliğidir. Ortalama değeri, genel bir bakışla, büyüklük olarak değişmemiş görünmekle beraber ufak salınımlar yapmaktadır. Bunun nedeni ise temel frekansın yedi katı olan frekanstaki bileşenin akıma katılmasıyla beraber, momenti oluşturan alanın dalga boyunun değişmesidir. Bu durum da harmonik bileşen artmasıyla, çıkış momentinin titreşiminin arttığını desteklemektedir.

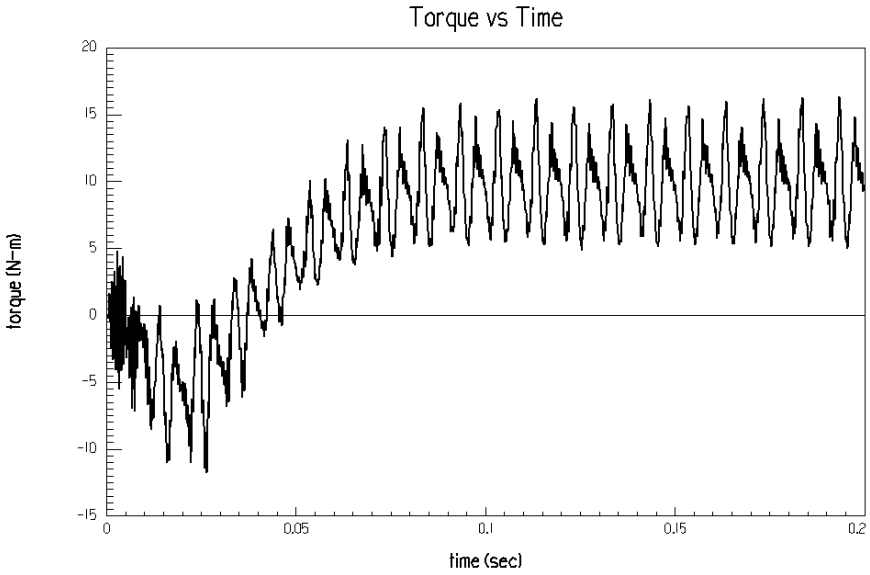
- $V_1 + V_{11}$ Durumu



Şekil 6.28 : $V_1 + V_{11}$ durumu moment – zaman grafiği

Şekil 6.28'de onbirinci harmonikle kirletilmiş temel bileşen geriliminin uygulandığı makinanın momenti görüntülenmektedir. Moment ortalama değeri çok değişmese de dalgalılığı sadece temel bileşenin olduğu hale göre artmıştır. Ancak bu durumdaki harmonik bileşenin genliği çok küçük olduğu için $V_1 + V_5$ ve $V_1 + V_7$ kaynaklarındaki dalgalılık burada daha da azalmıştır. Artık moment 6,6 ile 12,8 Nm arasında salınmaktadır. Bu durum, analitik çözümdekine benzer şekilde zaman harmoniğinin milde titreşime neden olduğu gerçeğini desteklemektedir.

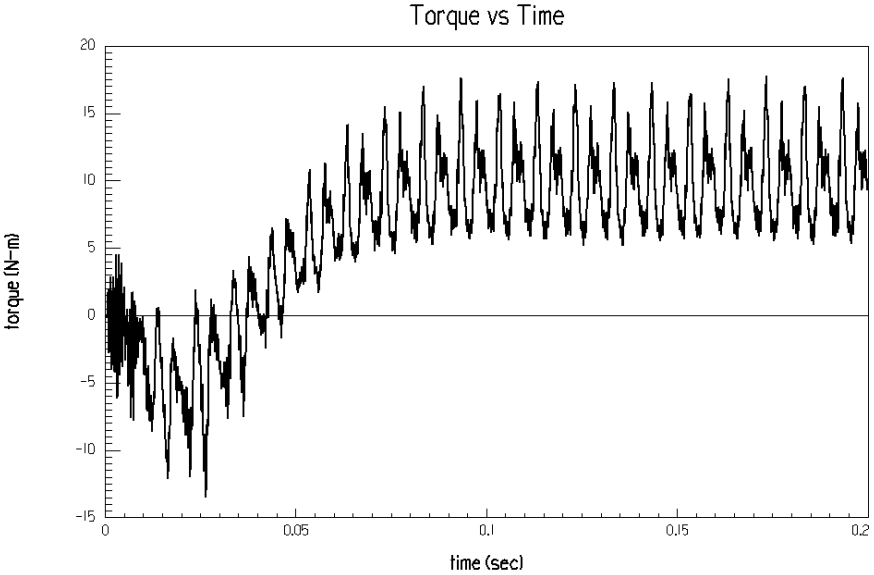
- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



Şekil 6.29 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumu moment – zaman grafiği

Şekil 6.29'da temel bileşen gerilimi, kendisinin beşte biri genliğindeki beşinci bileşen gerilimi ve kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın moment grafiği görülmektedir. Moment kararlı hale oturduktan sonra 5 ile 16,2 Nm arasında salınmaktadır. Bu kadar büyük bir aralıkta salınmasının nedeni artık besleme geriliminin harmonik bozumunun iyice artmış olmasıdır. Dalga şekli ve salınım aralığından da momentin çok titreşimli olduğu görülmektedir.

- V_1+V_5+V_7 + V_{11} Durumu

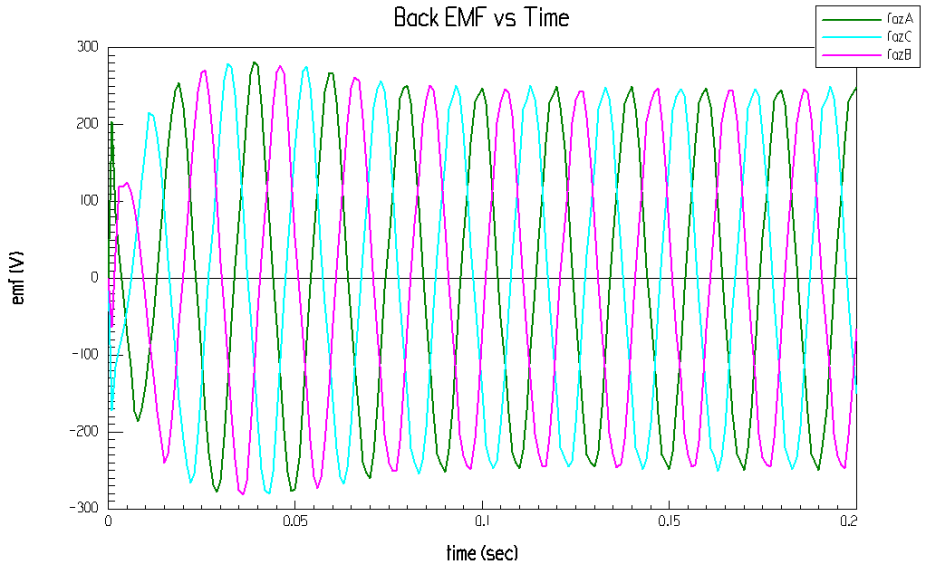


Şekil 6.30 : V_1 + V_5+V_7+V_{11} durumu moment – zaman grafiği

Şekil 6.30'da temel bileşen gerilimine ek olarak çalışmada kullanılan bütün harmonik bileşenlerin uygulandığı makinanın moment grafiği görülmektedir. Moment kararlı hale oturduktan sonra 5,5 ile 17,5 Nm arasında salınmaktadır. Bunun nedeni, besleme geriliminin harmonik bozunumunun çok artmasıdır. Dalga şekli ve salınım aralığından da momentin çok titreşimli olduğu görülmektedir.

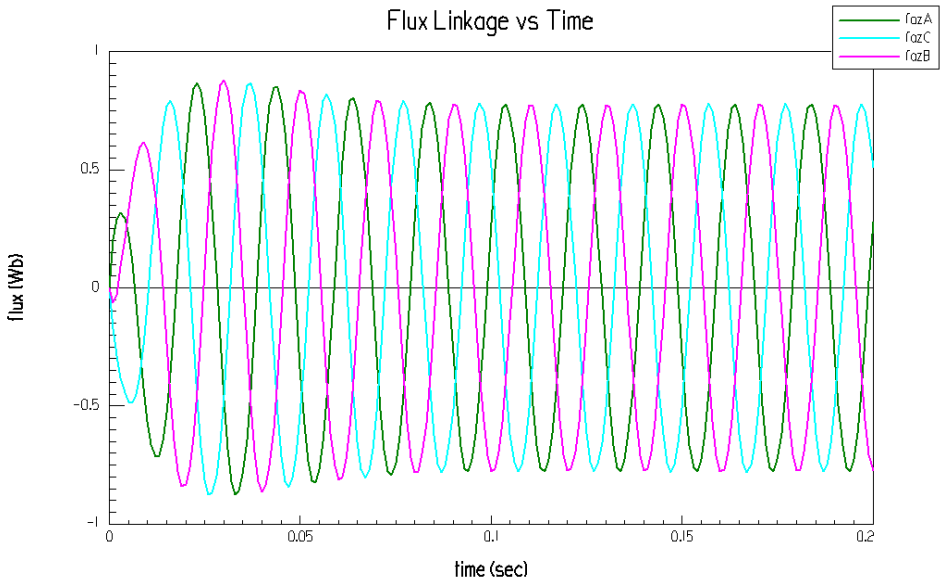
6.4 Halkalanma Akısı ve Endüklenen Elektromotorkuvvet Dalga Şekilleri

- V_1 Durumu (Temel Bileşen)



Şekil 6.31 : V_1 durumunun fazlarda endüklenen EMK dalga şekilleri

Şekil 6.31'de makinanın primer sargısında endüklenen elektromotor kuvvet grafiğidir. Görüldüğü gibi düzgün bir sinüstür. Düzene girdiği noktadan itibaren tepe noktası 245 V'u göstermektedir. Başka bir deyişle motorda endüklenen zıt elektromotor kuvvetin etkin değeri, 173,24 V'dur. Zaten bu gerilimin uç geriliminden küçük olması beklenmekte olup sonuçlarla uyuşmaktadır.



Şekil 6.32 : V_1 durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

Şekil 6.32'deki grafik ise halkalanma akısı grafiğidir ve biçimi elektromotor kuvvet grafiği ile aynıdır. Kararlı hale geldiği noktadan sonra okunan tepe değeri yaklaşık 0,778 Wb, etkin değeri ise 0,55 Wb'dir.

Elektromotor kuvvet, makinanın tasarımına ilişkin sabitlerle, frekansı ve akısının çarpımına eşittir.

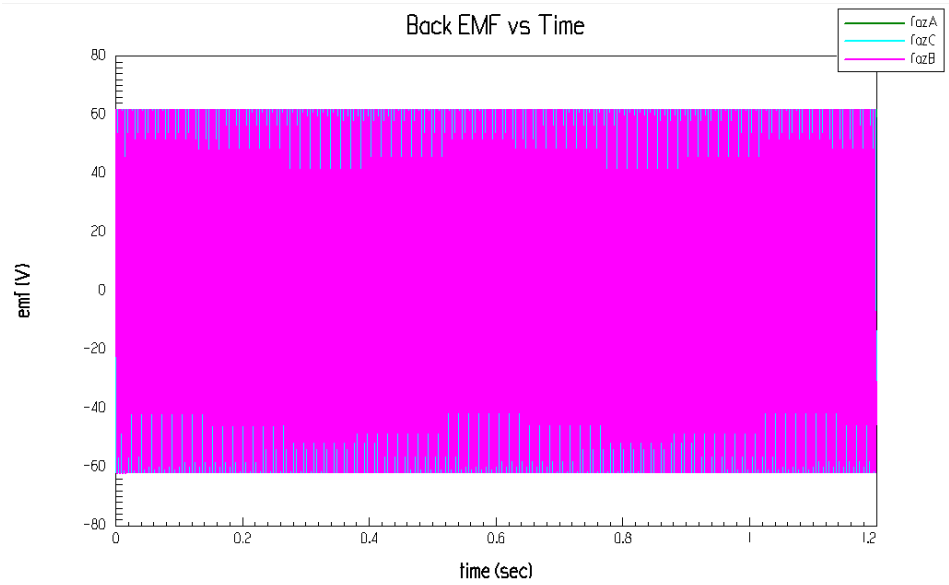
$$e = 4{,}44.N.k_{w1}.f_1.\Phi_1 \tag{6.1}$$

Bu eşitlikdeki tasarıma ilişkin büyüklükleri bir A katsayısı ile tanımlarsak;

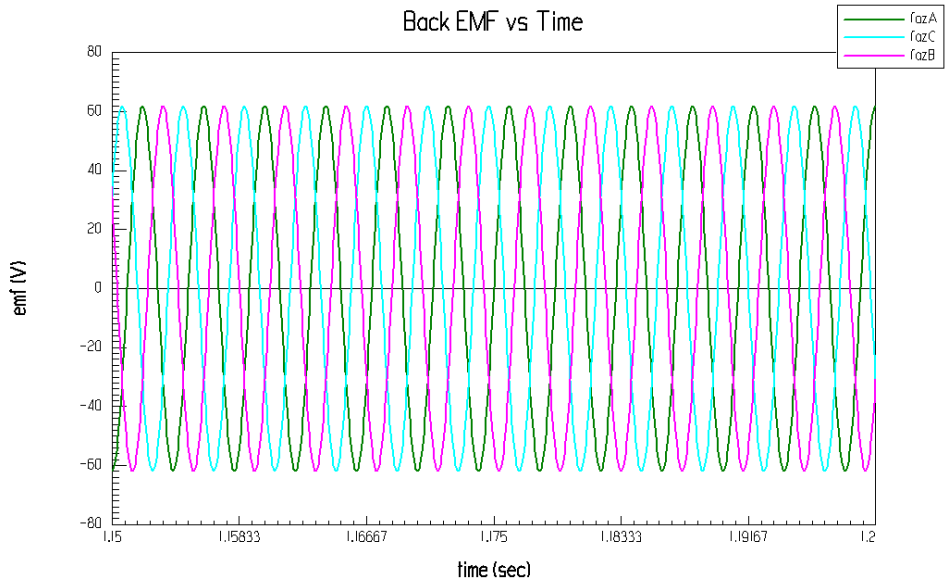
$$A = 4{,}44.N.k_{w1} \tag{6.2}$$

Sadece temel bileşenin devrede olduğu durum için A = 6,29 çıkacaktır. Bu katsayının her koşulda sabit kaldığı kabul edilecektir. Ancak harmonik bozunumu olan kaynaklarda bu formülü uygulamak çok daha karmaşık olacaktır. Bu nedenle, burada sadece saf sinüs biçiminde olan bileşenler için işlem yapmak mümkün olacaktır.

- V_5 Durumu

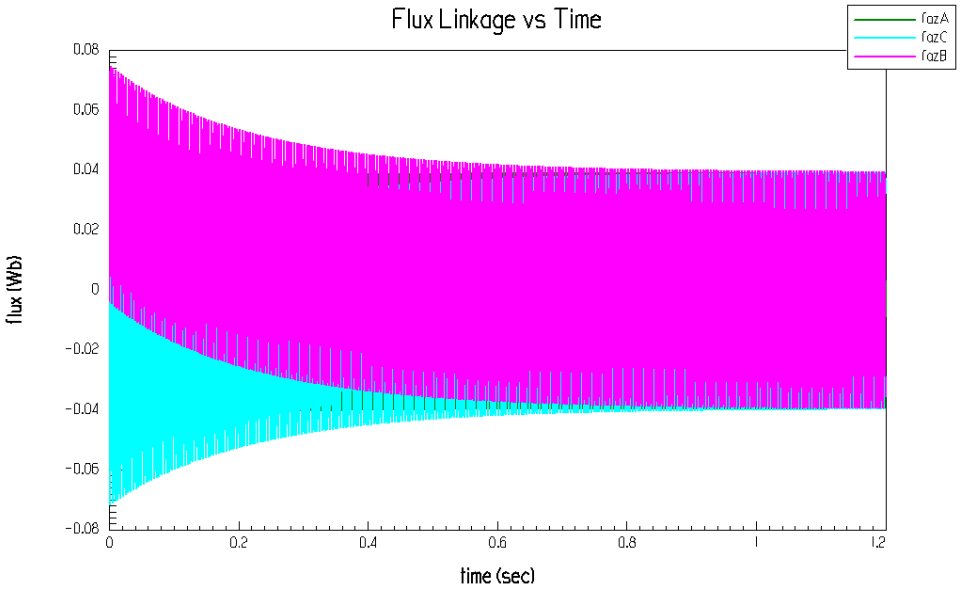


Şekil 6.33 : V_5 durumunun fazlarda endüklenen EMK dalga şekilleri

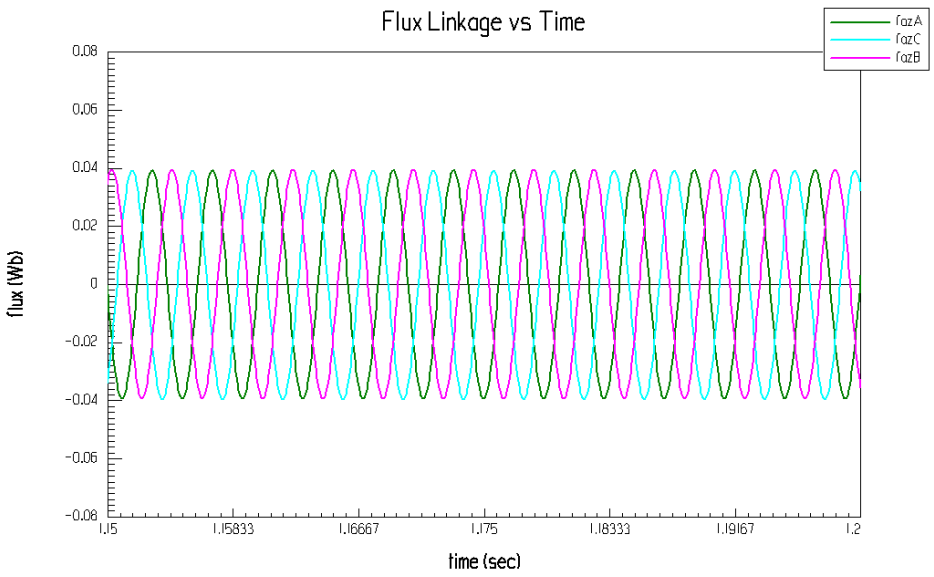


Şekil 6.34 : V_5 durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri ayrıntısı

Şekil 6.33 ve Şekil 6.34'ten de görüldüğü gibi dalga şekilleri düzgün bir sinüstür. Kararlı hale geldiği noktadan itibaren tepe noktası 62 V'u göstermektedir. Başka bir deyişle motorda endüklenen zıt elektromotor kuvvetin etkin değeri, 43,84 V'dur. Zaten bu gerilimin söz konusu çalışma durumuna ilişkin uç geriliminden küçük olması beklenmekte olup sonuçlarımızla uyuşmaktadır. Ancak aradaki fark çok küçüktür. Bu farkın temel bileşendeki gibi büyük olmamasının sebebi devreden az akım akması ve bu yüzden gerilim düşümünün çok az oluşudur.



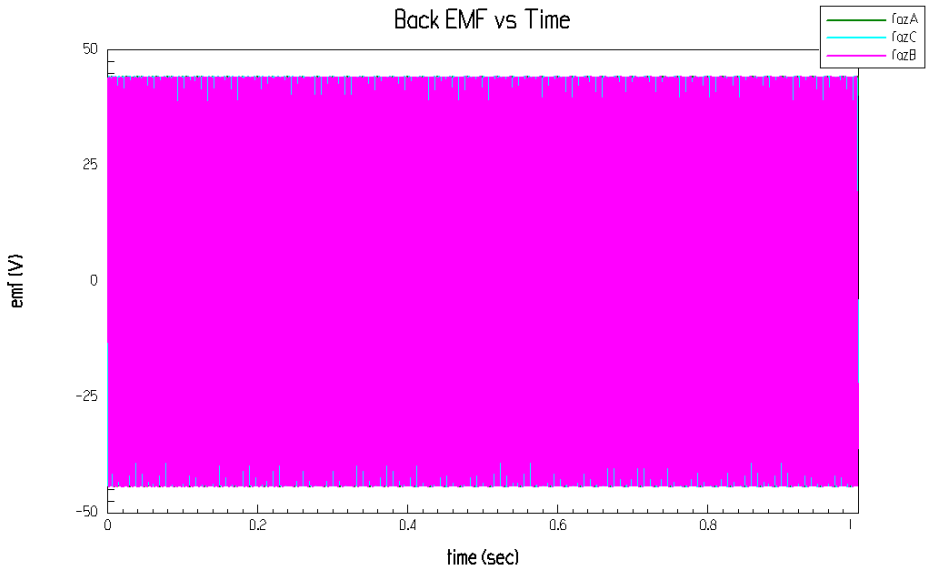
Şekil 6.35 : V_5 durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri



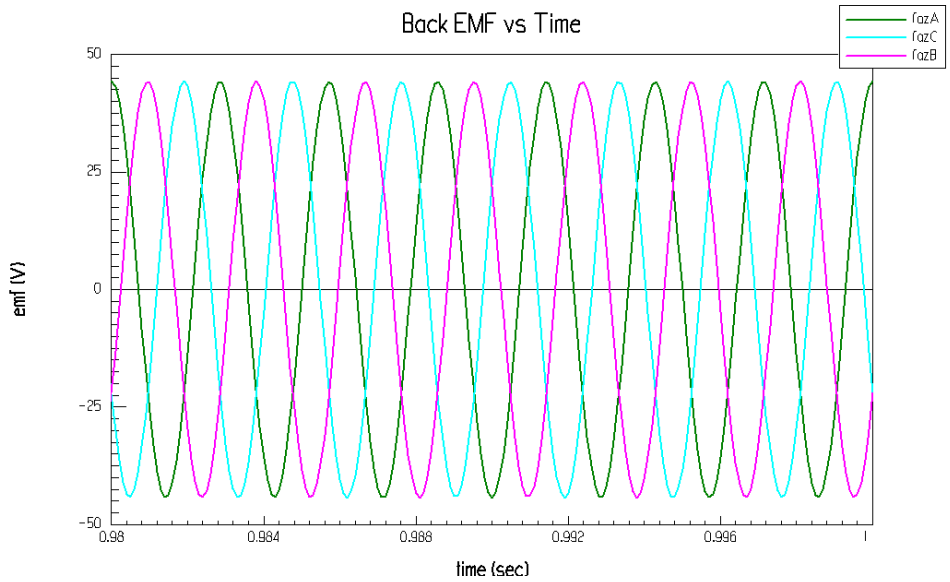
Şekil 6.36 : V_5 durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri ayrıntısı

Sadece beşinci bileşenin uygulandığı bu durumda simülasyon 1,2 saniye boyunca sürdürülmüştür, çünkü uygulanan gerilim bu koşul için makinaya küçük gelmektedir. Ancak halkalanma akısı grafiğini ilk haliyle (Şekil 6.35) incelemek zor olduğundan detay alınmıştır (Şekil 6.36). Bu denemede ise halkalanma akısı tepe değeri 0,0395 Wb iken etkin değeri de 0,0278 Wb'dir. Bu bağlamda yukarıda tanımlandığı şekliyle A = 6,29 olacaktır. Görüldüğü gibi A değeri önceki değere yakınsamıştır.

- V_7 Durumu

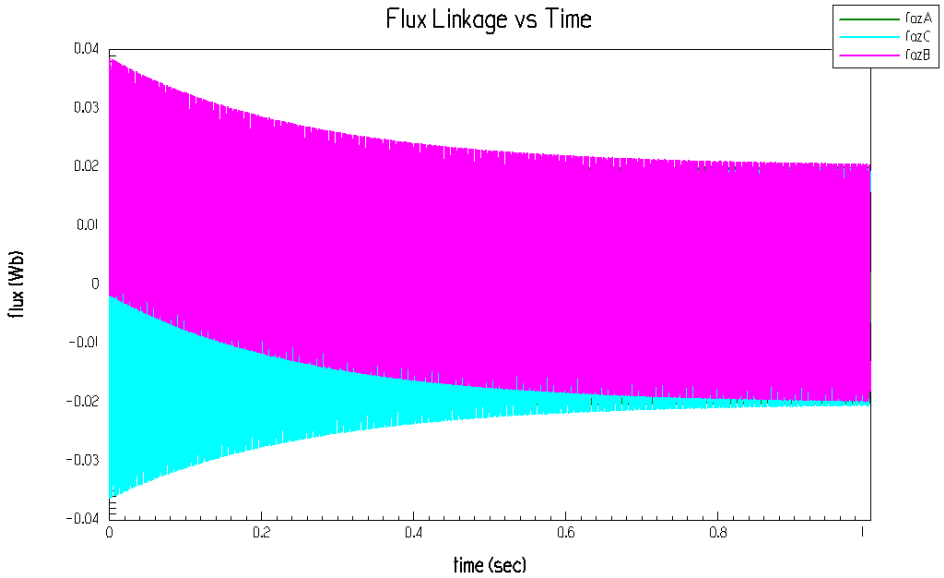


Şekil 6.37 : V_7 durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

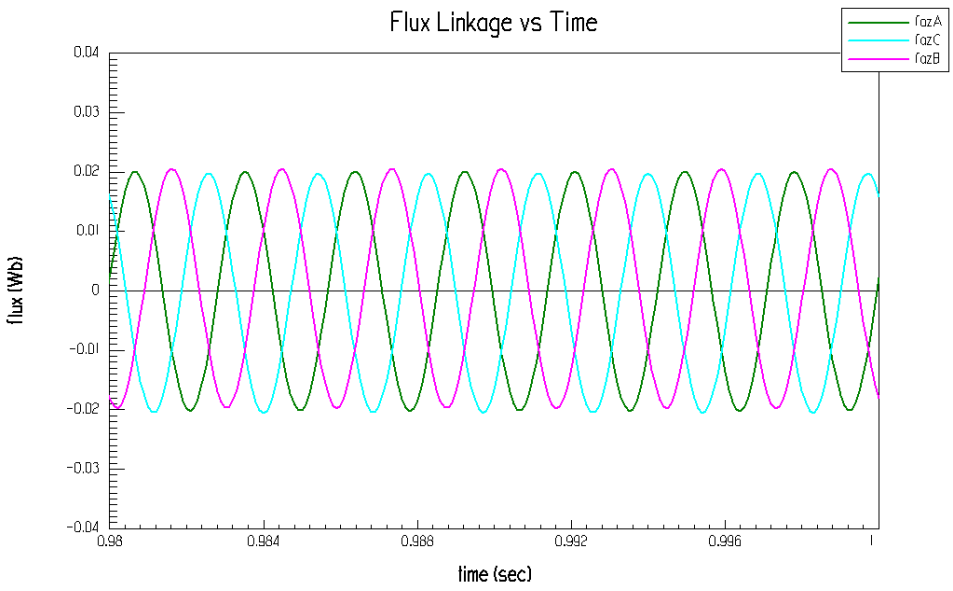


Şekil 6.38 : V_7 durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri ayrıntısı

Sadece yedinci harmoniğe ilişkin durumda makina simülasyonu, önceki durumdaki gibi yine uzun çalıştırılmış, makina rejimi ancak bu sürenin sonuna, kararlı hale gelmiştir. Şekil 6.37 ve Şekil 6.38'de de görüldüğü gibi endüklenen elektromotor kuvvet tepe değeri de 44,3 V'a yükselmiş, etkin değeri 31,32 V değerini almıştır. Bu gerilimin söz konusu çalışma durumuna ilişkin uç geriliminden küçük olması beklenmekte olup, sonuçlarla uyuşmaktadır. Ancak aradaki fark çok küçüktür. Bu farkın temel bileşendeki gibi büyük olmamasının sebebi devreden az akım akması ve bu yüzden gerilim düşümünün çok az oluşudur.



Şekil 6.39 : V_7 durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

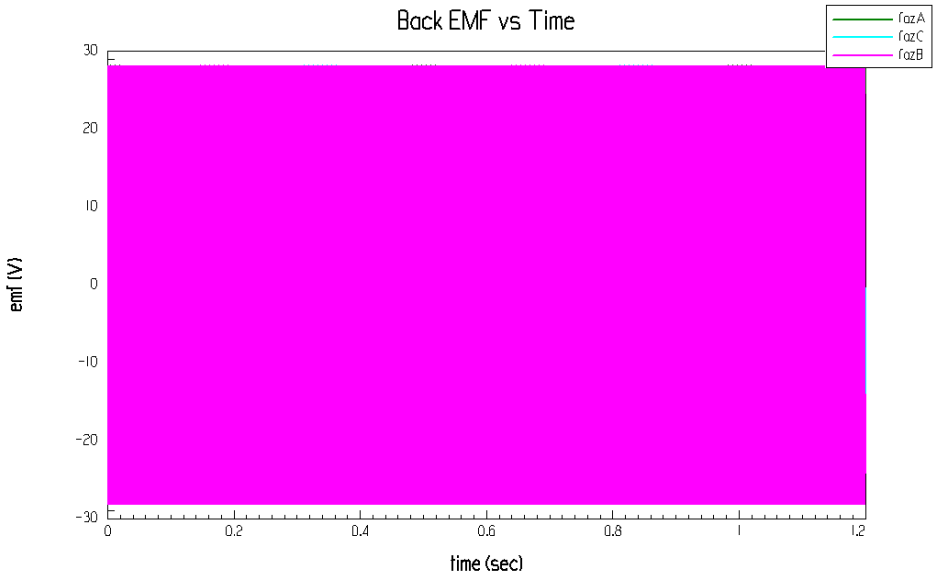


Şekil 6.40 : V_7 durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri ayrıntısı

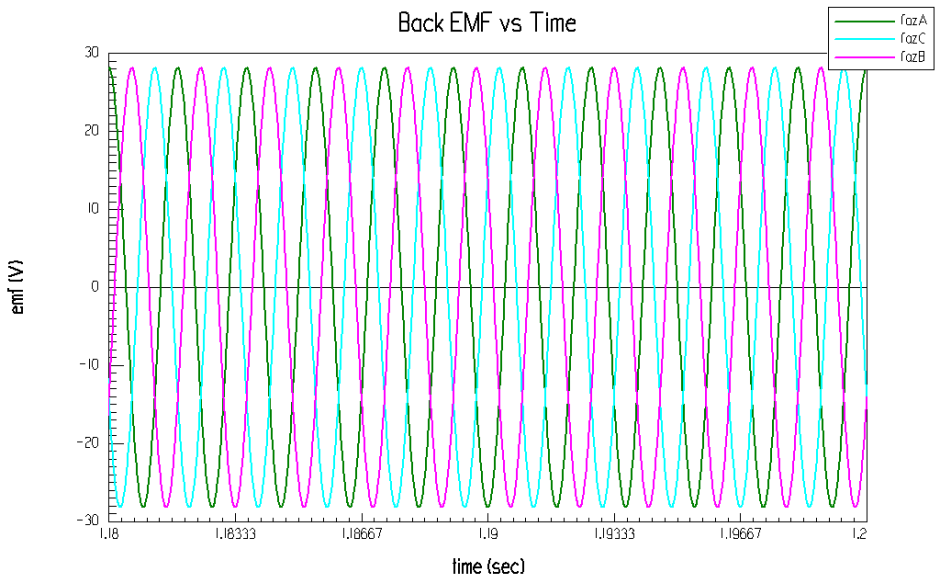
Ancak halkalanma akısı grafiğini Şekil 6.39'daki haliyle incelemek zor olduğundan dalganın detayı alınmıştır. Şekil 6.40'ta görüldüğü gibi ise halkalanma akısı tepe değeri 0,02 Wb iken, halkalanan akı etkin değeri de 0,01414 Wb olmaktadır.

Bu bağlamda yukarıda tanımlandığı şekliyle A = 6,32 olacaktır. Görüldüğü gibi, seçilen tasarım sabiti önceki değerlere yakınsamıştır.

- V_{11} Durumu

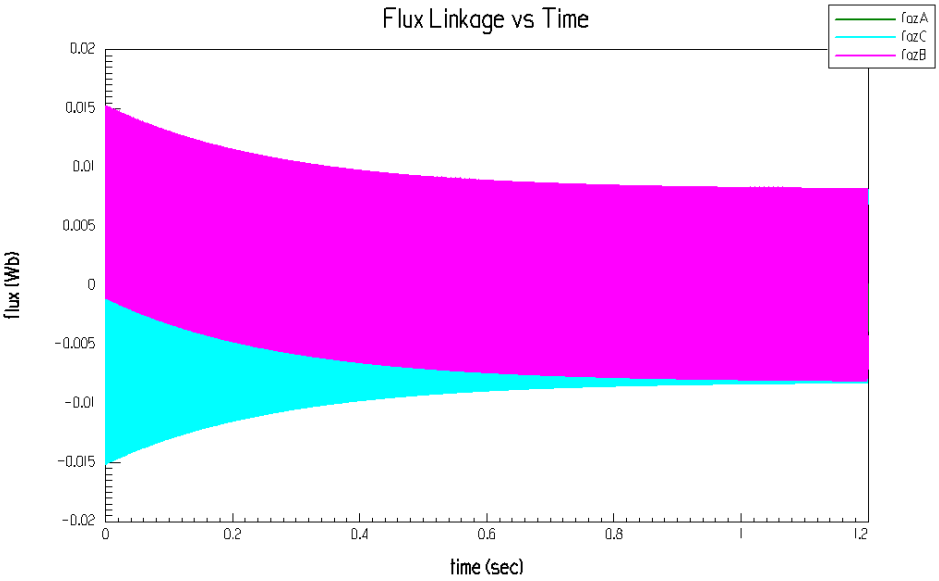


Şekil 6.41 : V_{11} durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

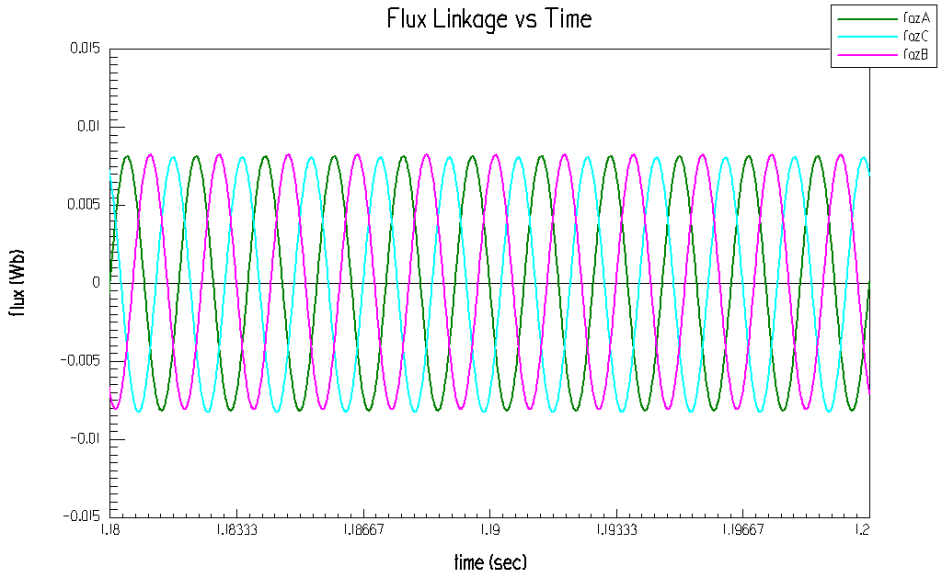


Şekil 6.42 : V_{11} durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri ayrıntısı

Sadece onbirinci harmoniğe ilişkin durumda makina simülasyonu, önceki durumdaki gibi yine uzun sürdürülmüş, makina rejimi ancak bu sürenin sonuna doğru, kararlı hale gelmiştir. Şekil 6.42'de de görüldüğü gibi endüklenen elektromotor kuvvet tepe değeri de 28,17 V'a yükselmiş, etkin değeri 19,91 V değerini almıştır. Bu gerilimin söz konusu çalışma durumuna ilişkin uç geriliminden küçük olması beklenmekte olup, sonuçlarla uyuşmaktadır. Ancak aradaki fark çok küçüktür. Bu farkın temel bileşendeki gibi büyük olmamasının sebebi devreden az akım akması ve bu yüzden gerilim düşümünün çok az olmasıdır.



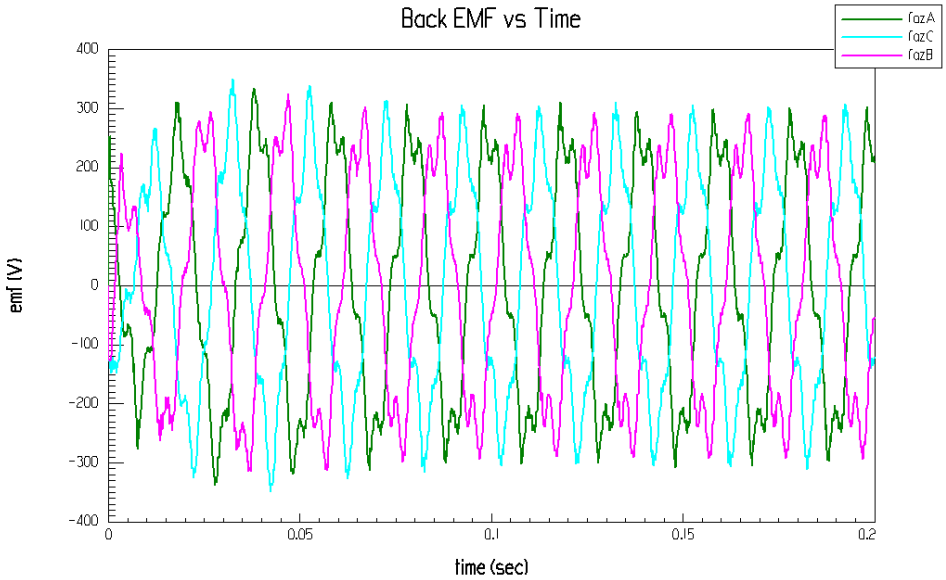
Şekil 6.43 : V_{11} durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri



Şekil 6.44 : V_{11} durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri ayrıntısı

Sadece onbirinci bileşenin uygulandığı bu durumda simülasyon 1.2 saniye boyunca sürdürülmüştür, çünkü uygulanan gerilim bu koşul için makinaya küçük gelmektedir. Ancak halkalanma akısı grafiğini Şekil 6.43'teki haliyle incelemek zor olduğundan detay alınmıştır. Şekil 6.44'te halkalanma akısı tepe değeri 0,00812 Wb iken etkin değeri de 0,00574 Wb'dir. Bu bağlamda yukarıda tanımlandığı şekliyle A = 6,30 olacaktır. Görüldüğü gibi önceki değere yakınsamıştır.

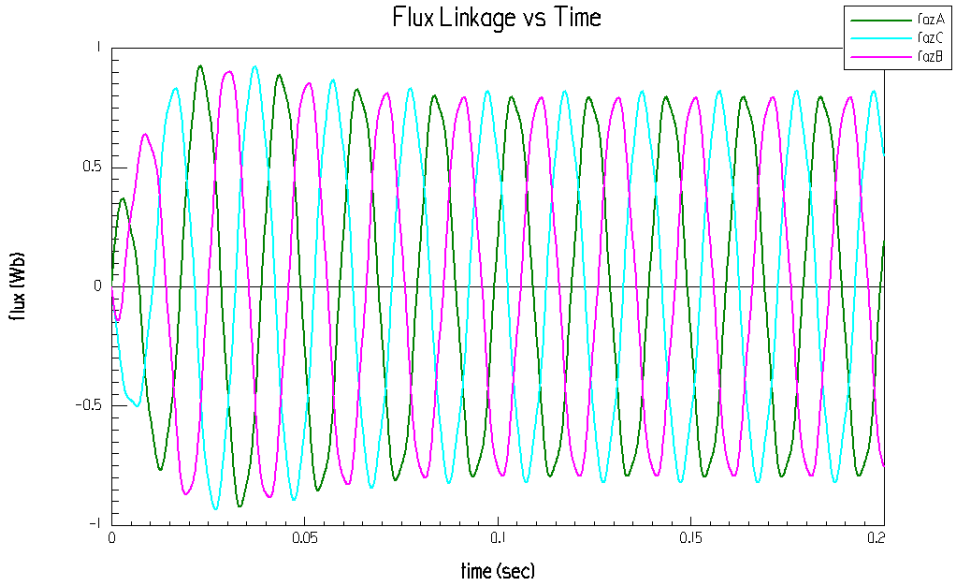
- $V_1 + V_5$ Durumu



Şekil 6.45 : $V_1 + V_5$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

Şekil 6.45'te beşinci harmonikle kirletilmiş temel bileşen geriliminin uygulandığı makinanın endüklenen elektromotor kuvvet görüntülenmektedir.

Bu bağlamda yukarıda tanımlandığı şekliyle A'yı bulmak anlamsız olacaktır çünkü artık sistem tek makina gibi değil, tıpkı beraber çalışan iki makina gibi davranacaktır. Simülasyonun $E_{1\&5}$ için verdiği etkin değer de 207 V'dur ve bu çalışma durumu için var olan giriş geriliminden düşüktür. Bu bağlamda sonuç anlamlıdır.

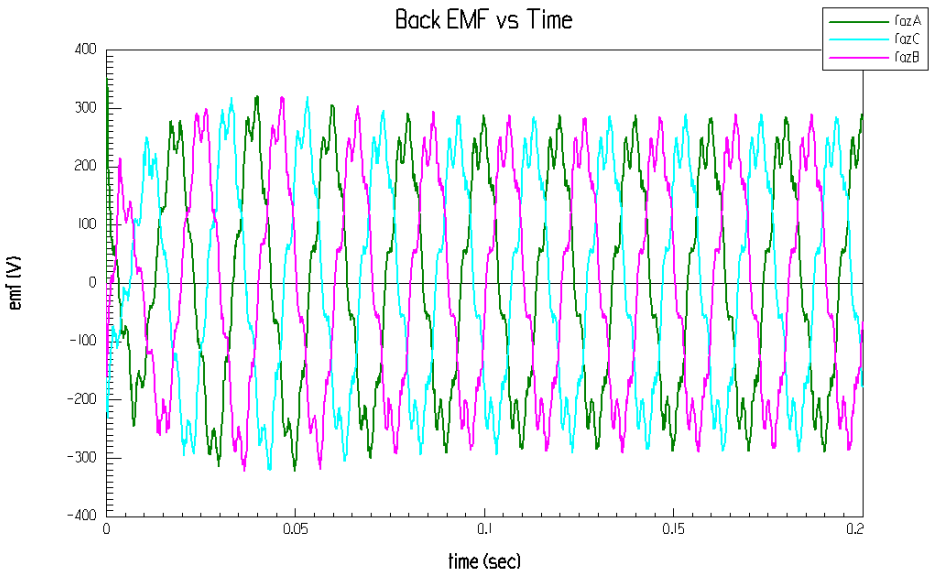


Şekil 6.46 : $V_1 + V_5$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

Şekil 6.46'da beşinci harmonikle kirletilmiş temel bileşen geriliminin uygulandığı makinanın halkalanma akısı görüntülenmektedir.

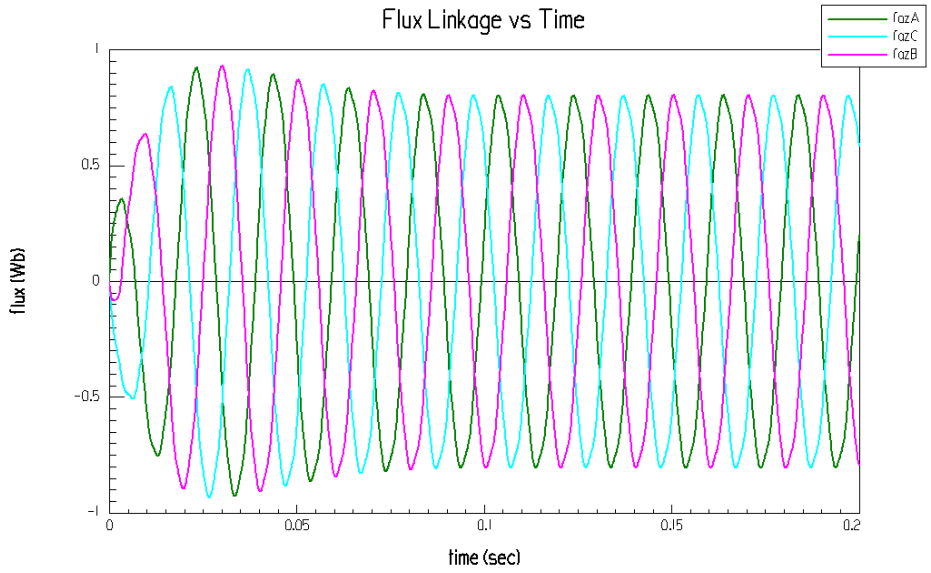
Halkalanma akısı tepe değeri 0,8 Wb ve etkin değeri yaklaşık 0,5656 Wb olup halkalanma akısının, sadece temel bileşenin yarattığı halkalanma akısına göre yüksek olduğu gözlemlenmiştir.

- $V_1 + V_7$ Durumu



Şekil 6.47 : $V_1 + V_7$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

Şekil 6.47'de temel bileşen gerilimi ile kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın endüklenen elektromotor kuvvet grafiği görüntülenmektedir. Simülasyonun $E_{1\&7}$ için verdiği etkin değer de 197 V olup bu çalışma durumu için var olan giriş geriliminden düşüktür. Bu bağlamda sonuç anlamlıdır.

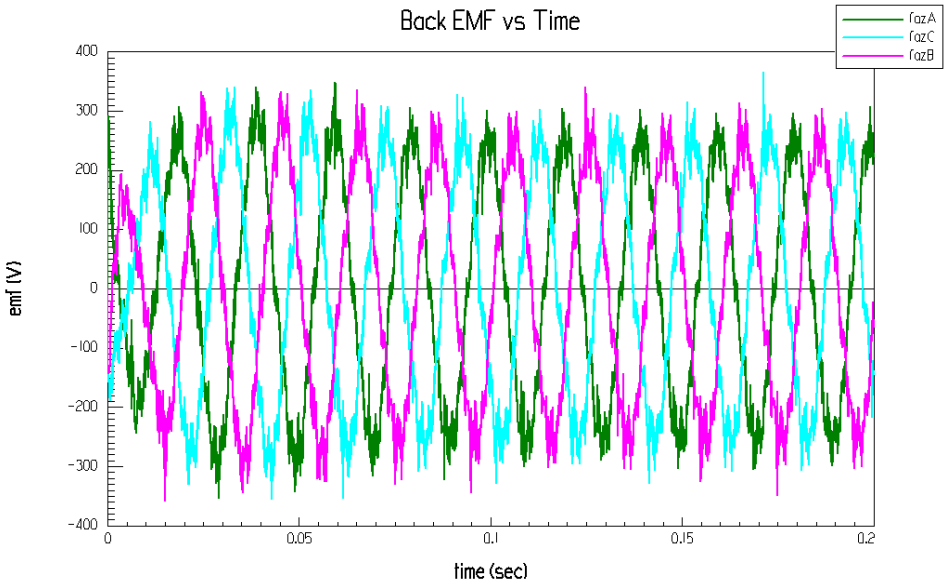


Şekil 6.48 : $V_1 + V_7$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

Şekil 6.48'de temel bileşen gerilimi ile kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın halkalanma akısı grafiği görülmektedir.

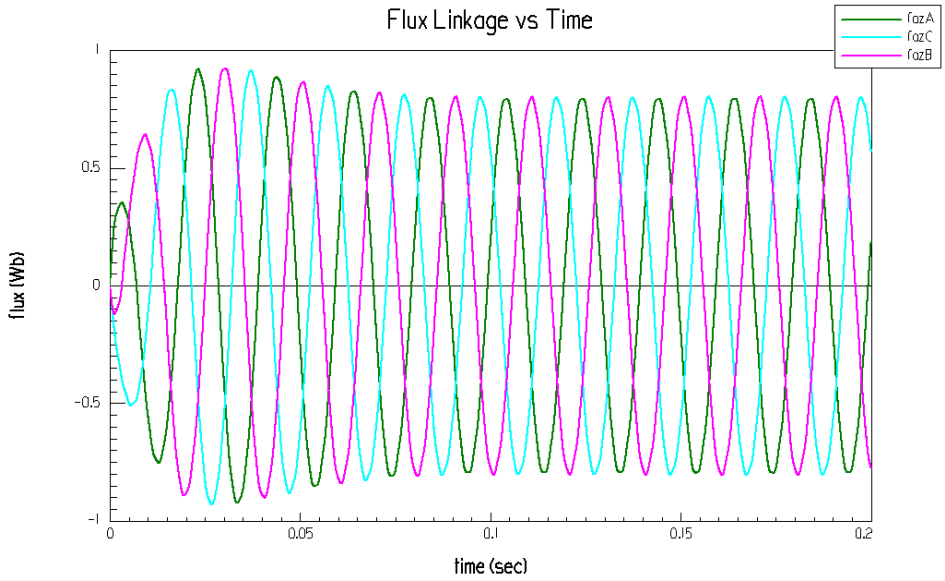
Halkalanma akısı tepe değeri 0,805 Wb iken etkin değeri, 0,5656 Wb olup, halkalanma akısının, sadece temel bileşenin yarattığı halkalanma akısına göre yüksek olduğu gözlemlenmiştir.

- $V_1 + V_{11}$ Durumu



Şekil 6.49 : $V_1 + V_{11}$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

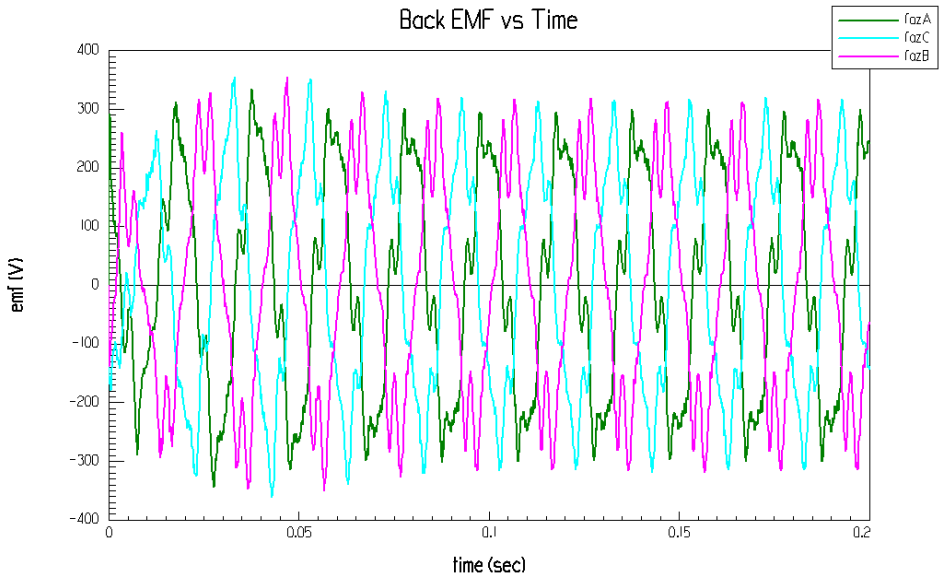
Şekil 6.49'da temel bileşen gerilimi ile kendisinin onbirde biri genliğindeki onbirinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın endüklenen elektromotor kuvvet grafiği görüntülenmektedir. Simülasyonun $E_{1\&11}$ için verdiği etkin değer de 196,5 V olup bu çalışma durumu için var olan giriş gerilimden düşüktür. Bu bağlamda sonuç anlamlıdır.



Şekil 6.50 : $V_1 + V_{11}$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

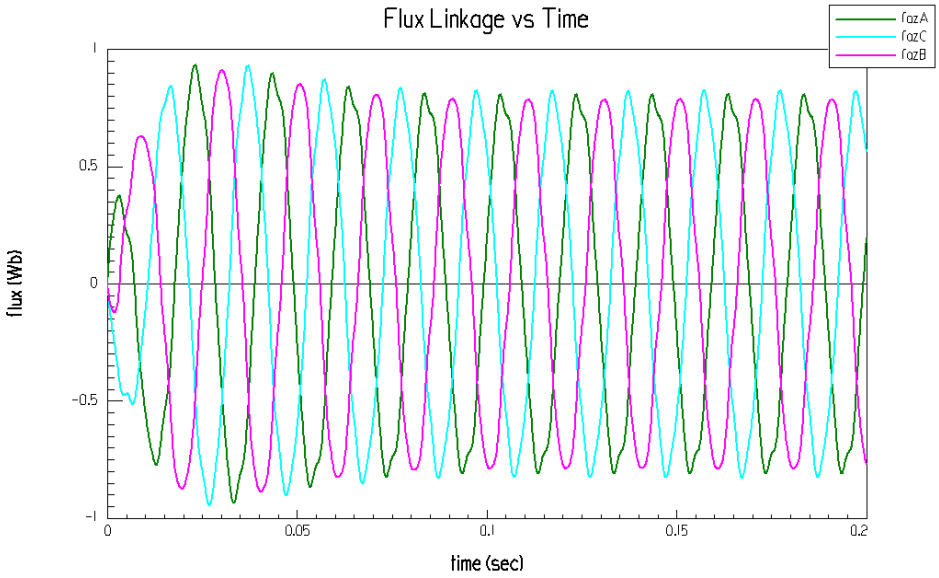
Şekil 6.50'de temel bileşen gerilimi ile kendisinin onbirde biri genliğindeki onbirinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın halkalanma akısı grafiği görülmektedir. Halkalanma akısı tepe değeri 0,8 Wb iken etkin değeri, 0,5656 Wb olup, halkalanma akısının, sadece temel bileşenin yarattığı halkalanma akısına göre yüksek olduğu gözlemlenmiştir.

- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



Şekil 6.51 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

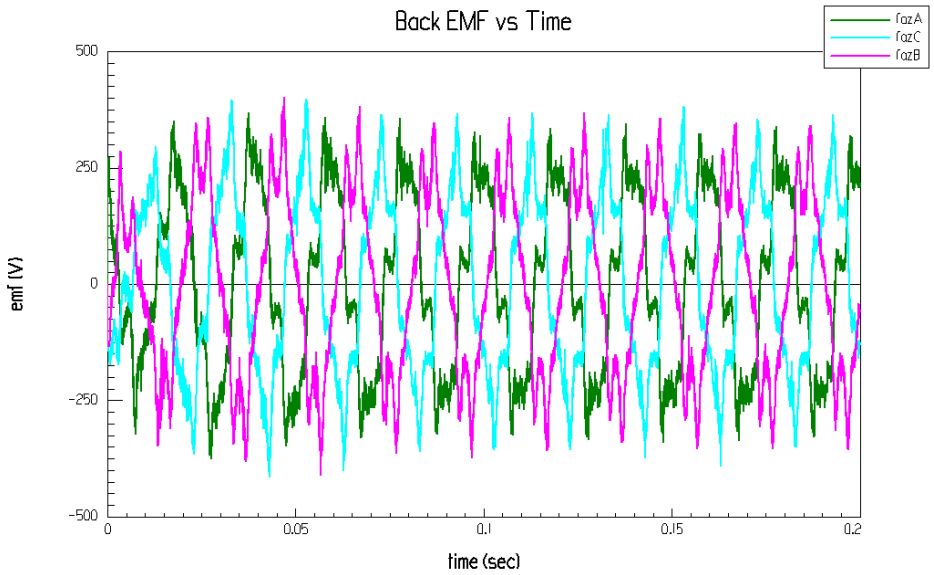
Şekil 6.51'de temel bileşen gerilimi, kendisinin beşte biri genliğindeki beşinci bileşen ve kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın endüklenen elektromotor kuvvet grafiği görülmektedir. Elektromotor kuvvetin etkin değeri yaklaşık 208 V olarak hesaplanmaktadır ve bu çalışma durumu için var olan giriş geriliminden düşüktür.



Şekil 6.52 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

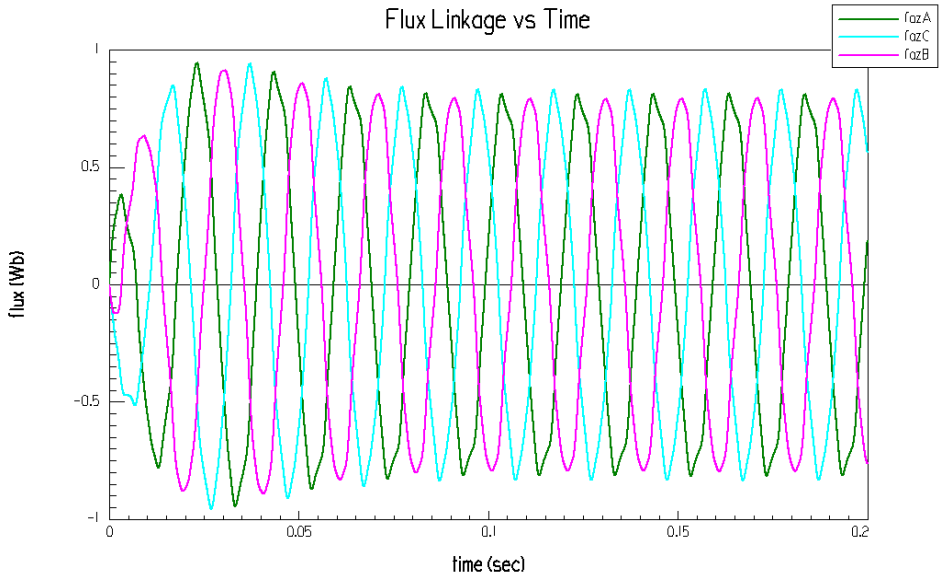
Şekil 6.52'de temel bileşen gerilimi, kendisinin beşte biri genliğindeki beşinci bileşen ve kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın halkalanma akısı grafiği görülmektedir. Halkalanma akısı tepe değeri 0,82 Wb, etkin değeri ise 0,5798 Wb civarındadır. Halkalanma akısının, daha önceki durumlara göre yüksek olduğu gözlemlenmiştir. O halde makinaya harmonik bileşen eklendikçe halkalanma akısının değeri de artmaktadır.

- $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ Durumu



Şekil 6.53 : $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ durumunun fazlarda endüklenen EMKdalga şekilleri

Şekil 6.53'te temel bileşen gerilimi ve bu çalışmada kullanılan bütün harmonik bileşenlerin beraber uygulandığı makinanın endüklenen elektromotor kuvvet grafiği görülmektedir. Elektromotor kuvvetin etkin değeri yaklaşık 209 V olarak hesaplanmaktadır ve bu çalışma durumu için var olan giriş gerilimden düşüktür.



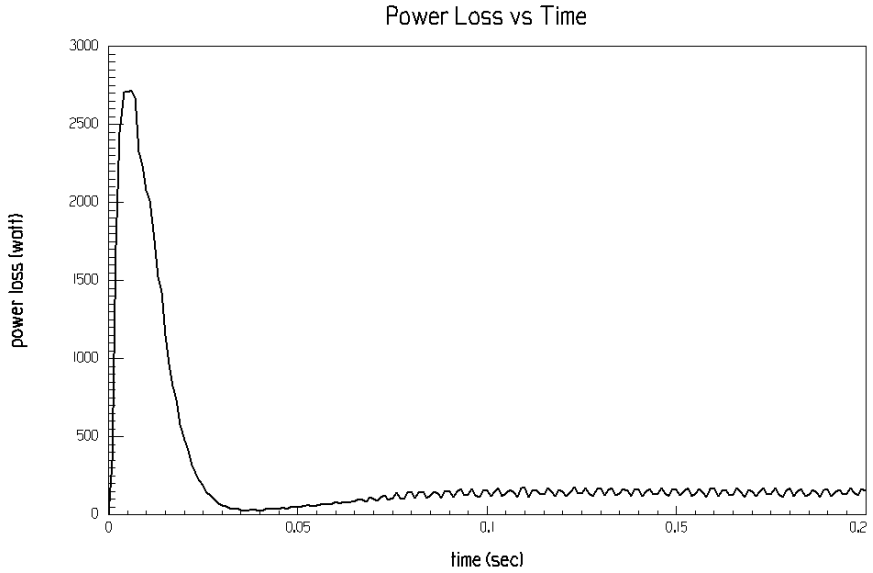
Şekil 6.54 : $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ durumunun fazların halkalanma akısı dalga şekilleri

Şekil 6.54'te temel bileşen gerilimi ve bu çalışmada kullanılan bütün harmonik bileşenlerin uygulandığı makinanın halkalanma akısı grafiği görülmektedir. Halkalanma akısı tepe değeri 0,821 Wb, etkin değeri ise 0,58 Wb civarındadır. Halkalanma akısının, daha önceki durumlara göre yüksek olduğu gözlemlenmiştir. O

halde makinaya harmonik bileşen eklendikçe halkalanma akısının değeri de artmaktadır.

6.5 Kayıp Güç Dalga Şekilleri

- V_1 durumu (Temel Bileşen)



Şekil 6.55 : V_1 durumu için güç kaybı dalga şekli

Maxwell 2D programının tanımına göre kayıp güç bakır kayıplarıyla demir kayıplarının toplamıdır. Bu gücün birinci bileşeni olan stator bakır kaybı, idealde frekansla değişmediği varsayılan stator sargı direnci ve değeri frekansa bağlı olarak değişen masif rotor sargının direncinin toplamından, bileşen akımı geçmesiyle oluşup akımın karesiyle direnç toplamının çarpımı ile hesaplanır. İkinci bileşeni ise endüklenen elektromotor kuvvetin karesinin demir direncine bölümü ile hesaplanabilir.

O halde kayıp güç analitik olarak:

$$P_k = P_{cu} + P_{fe} = I^2.(r_1 + r_2^{'}) + \frac{{E_1}^2}{r_{fe}} \qquad \text{ve} \qquad E_1 = V_1 - I_1 z_1 \tag{6.3}$$

şeklindedir. Makinaya boşta ve kısa devre deneyleri uygulanmış ve makina kısa devre direnci ve reaktansı;

$$r_k = r_1 + r_2^{'} = 3\ \Omega \qquad \text{ve} \qquad x_k = x_1 + x_2^{'} = 4{,}052\ \Omega \tag{6.4}$$

Buna ek olarak;

$r_k/2 = r_1 = r_2^{'}$ ve $x_k/2 = x_1 = x_2^{'}$ kabulü yapılmıştır.

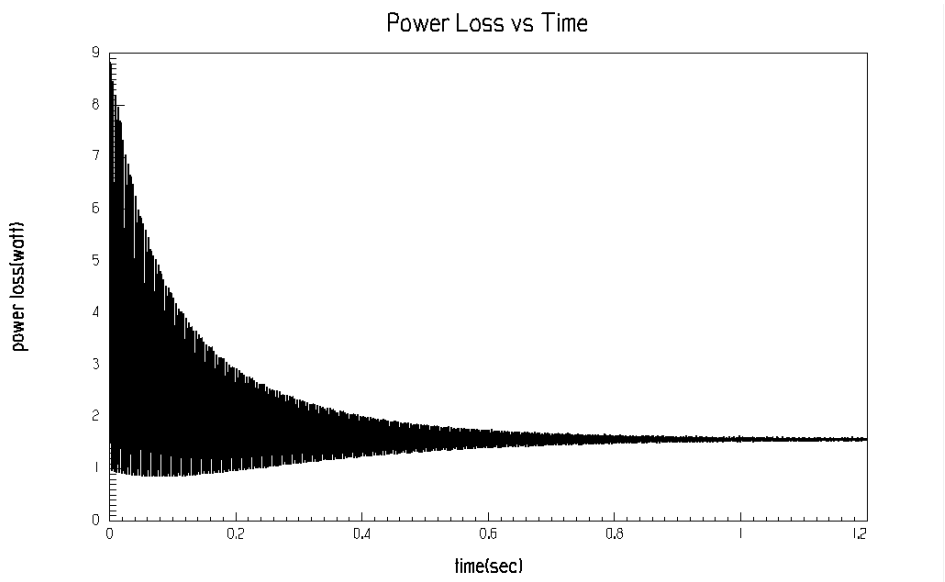
Demir direnci ise,

$r_{fe} = 1062\ \Omega$ olarak bulunmuştur.

Klasik eşdeğer devre yaklaşımı ile bulunan toplam aktif kayıp hesabı; anma akım olan 6,1 A akımı için, (tek faz eşdeğer devre için)151,05 W olacaktır.

Programın bu çalışma durumu için çizdiği Şekil 6.55'te ise, temel bileşenin aktif kayıp gücü görünmektedir. Başlangıçta, akım grafiğinden hareketle tahmin edilebileceği gibi, aktif kayıp gücü yüksek değerler almış ancak sonrasında kararlı haline oturmuş ve değeri 140 W civarında sabitlenmiştir. Analitik çözümle programın çözümü arasında %7,31 oranında bir fark vardır.

- V_5 durumu



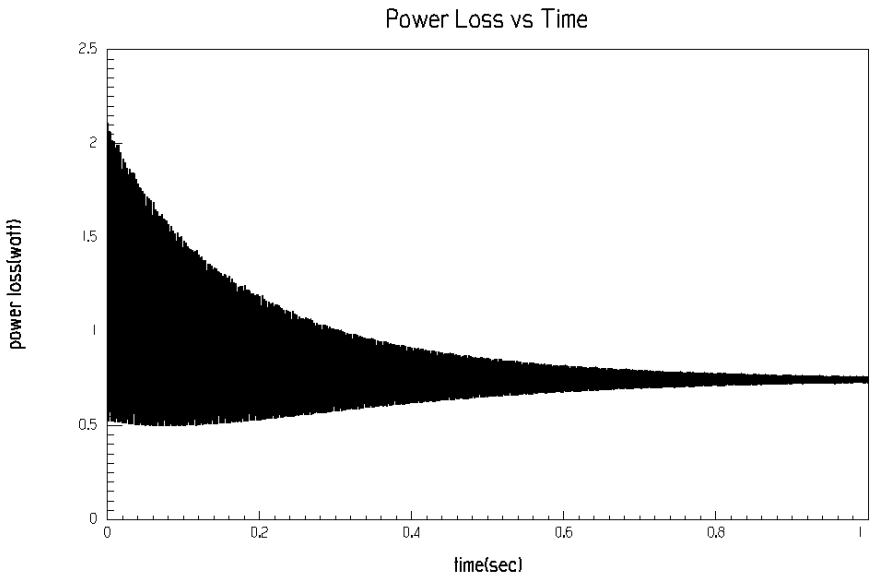
Şekil 6.56 : V_5 durumu için güç kaybı dalga şekli

Sadece beşinci bileşenin uygulandığı bu durumda simülasyon 1,2 saniye boyunca çalıştırılmıştır. Bu süre sonunda kayıp güç, Şekil 6.56'dan da görüleceği gibi 1,57 W değerine oturmuştur. Kayıp gücün bu denli küçük olmasının sebebi, devreye sadece beşinci bileşen uygulandığı zaman akan akımın çok küçük olmasıdır.

Kayıp, analitik çözüm yöntemiyle hesaplanmaya çalışıldığında eşdeğer devre üzerinde bir takım parametreler değişecektir. Bunlar harmonik mertebesi olan 5 ile

çarpılacak olan reaktanslar ve deri etkisinden ötürü k_{r_n} ile değişecek olan r_2' ifadesinin değeridir. Bu bağlamda yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa, analitik çözüm ile bulunmuş olan kayıp güç 1,803 W şeklindedir. Analitik çözümle programın çözümü arasında %12,93 oranında bir fark vardır.

- V_7 durumu

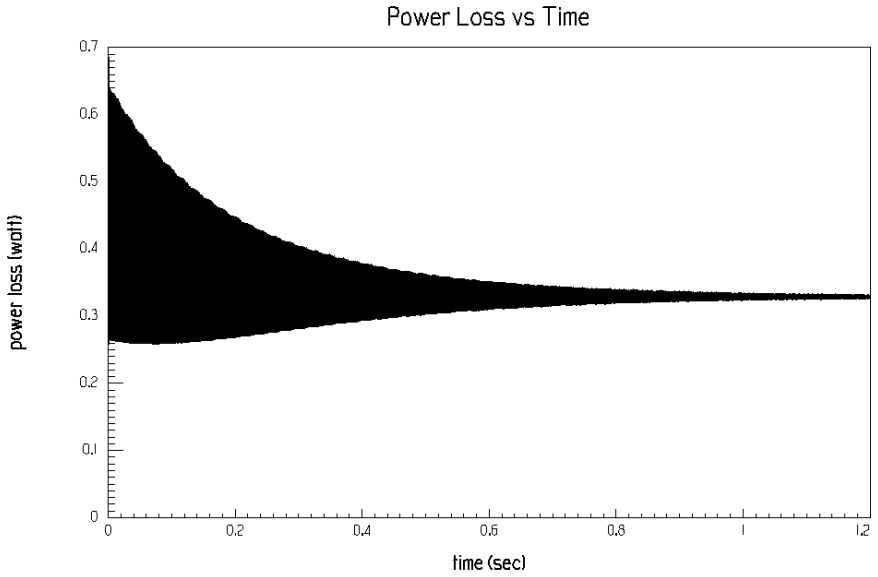


Şekil 6.57 : V_7 durumu için güç kaybı dalga şekli

Sadece yedinci harmoniğe ilişkin kayıp güç grafiğinde beşinci harmoniğin verdiği performansla hemen hemen aynı durum gözlemlenmiştir. Harmonik bileşen devrede tek başına var olduğundan kayıp güç çok küçük olacaktır. Çünkü gerilimi ve bu gerilimin akıttığı akımı düşüktür. Bu düşük akımla karesel olarak orantılı olan kayıp da küçülecektir. Bu durumda simülasyon 1 saniye boyunca çalıştırılmıştır. Bu süre sonunda kayıp güç, Şekil 6.57'den degörüleceği gibi 0,8 W değerine oturmuştur.

Kayıp, analitik çözüm yöntemiyle hesaplanmaya çalışıldığında eşdeğer devre üzerinde bir takım parametreler değişecektir. Bunlar harmonik mertebesi olan 5 ile çarpılacak olan reaktanslar ve deri etkisinden ötürü k_{r_n} ile değişecek olan r_2' ifadesinin değeridir. Bu bağlamda yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa, analitik çözüm ile bulunmuş olan kayıp güç 0,92 W şeklindedir. Analitik çözümle programın çözümü arasında %13 oranında bir fark vardır.

- V_{11} Durumu

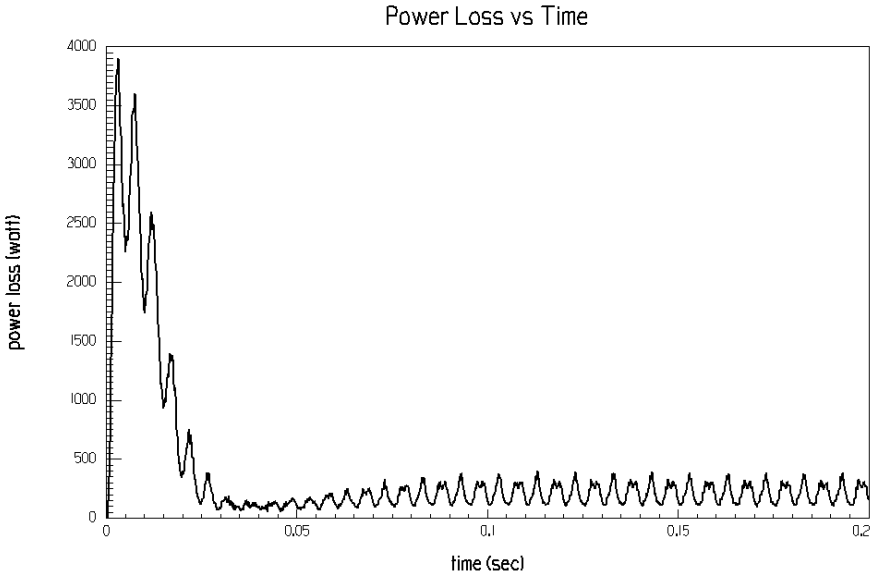


Şekil 6.58 : V_{11} durumu için güç kaybı dalga şekli

Sadece onbirinci harmoniğe ilişkin kayıp güç grafiğinde yedinci harmoniğin verdiği performansla hemen hemen aynı durum gözlemlenmiştir. Harmonik bileşen devrede tek başına var olduğundan kayıp güç çok küçük olacaktır. Çünkü gerilimi ve bu gerilimin akıttığı akımı düşüktür. Bu düşük akımla karesel olarak orantılı olan kayıp da küçülecektir. Bu durumda simülasyon 1,2 saniye boyunca çalıştırılmıştır. Bu süre sonunda kayıp güç, Şekil 6.58'den de görüleceği gibi 0,33 W değerine oturmuştur.

Kayıp, analitik çözüm yöntemiyle hesaplanmaya çalışıldığında eşdeğer devre üzerinde bir takım parametreler değişecektir. Bunlar harmonik mertebesi olan 11 ile çarpılacak olan reaktanslar ve deri etkisinden ötürü k_{r_n} ile değişecek olan $r_2^{'}$ ifadesinin değeridir. Bu bağlamda yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa, analitik çözüm ile bulunmuş olan kayıp güç 0,372 W şeklindedir. Analitik çözümle programın çözümü arasında %11,46 oranında bir fark vardır.

- $V_1 + V_5$ Durumu



Şekil 6.59 : $V_1 + V_5$ durumu için güç kaybı dalga şekli

Şekil 6.59'da beşinci harmonikle kirletilmiş temel bileşen geriliminin uygulandığı makinanın kayıp gücü görüntülenmektedir. Beşinci harmoniğe ilişkin etkinin genlik olarak en büyük harmonik etki olması ve temel frekansın varlığı üzerine binmesi kayıp gücü artırmıştır. Bu simülasyon sonucuna göre kayıp güç ortalama değeri 230 W olarak salınmaktadır. Bu demektir ki sadece temel bileşenin var olduğu saf sinüs durumuna göre kayıp artmıştır. Bu durum zaman harmoniğinin makinada fazladan ısı meydana getirdiği savıyla örtüşmektedir.

Bu durumdaki $r_2^{'}$ direnci üzerinden geçen akım Fourier Dönüşümüne açıldığında, birden fazla frekans bileşeni içerdiği görülür. Bu açıdan direncin değeri kayıp güç ifadesinden geriye giderek hesaplanacaktır.

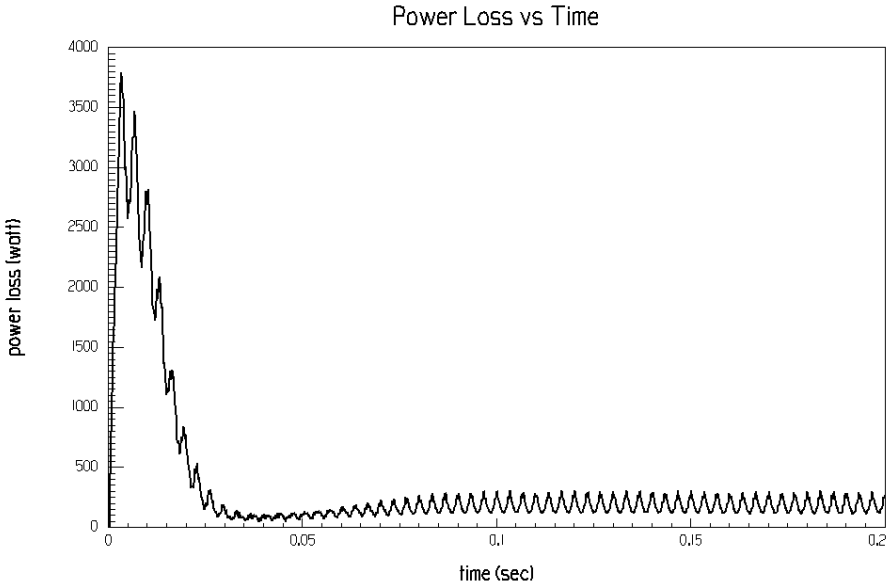
$$P_k = P_{cu} + P_{fe} = I^2.(r_1 + r_2^{'}) + \frac{{E_1}^2}{r_{fe}} \tag{6.5}$$

ifadesinde duruma ilişkin akım endüklenen gerilim ve demir direnci ifadeleri yerine konduğunda,

$r_1 + r_2^{'} = 3{,}501\ \Omega$

bulunmaktadır. Bu durum bize harmonik bileşen eklenmesiyle kısa devre direncinin arttığını gösterir. Bu toplamdaki r_1 ise primer sargı direnci olup demet iletkenden oluştuğu için frekansla artmayacağından, söz konusu artışın sebebi olarak $r_2^{'}$'nün artışı gösterilebilir.

- $V_1 + V_7$ Durumu



Şekil 6.60 : $V_1 + V_7$ durumu için güç kaybı dalga şekli

Şekil 6.60'da temel bileşen gerilimi ile kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın kayıp güç grafiği görülmektedir. Eğri bütün kayıp eğrilerindeki gibi önce yükselmiş sonrasında normal rejime girmiştir. Kararlı halde bu kaynağın yarattığı kayıp 200 W civarındadır. Kaynağın $V_1 + V_5$ olduğu zamanda oluşan kayıpdan daha düşük bir kayıptır çünkü yedinci bileşenin akım genliği, beşinci bileşenden küçüktür.

Bu durumda da $r_2^{'}$ direnci üzerinden geçen akım Fourier Dönüşümüne açıldığında, birden fazla frekans bileşeni içerdiği görülür. Bu açıdan direncin değeri kayıp güç ifadesinden geriye giderek hesaplanacaktır.

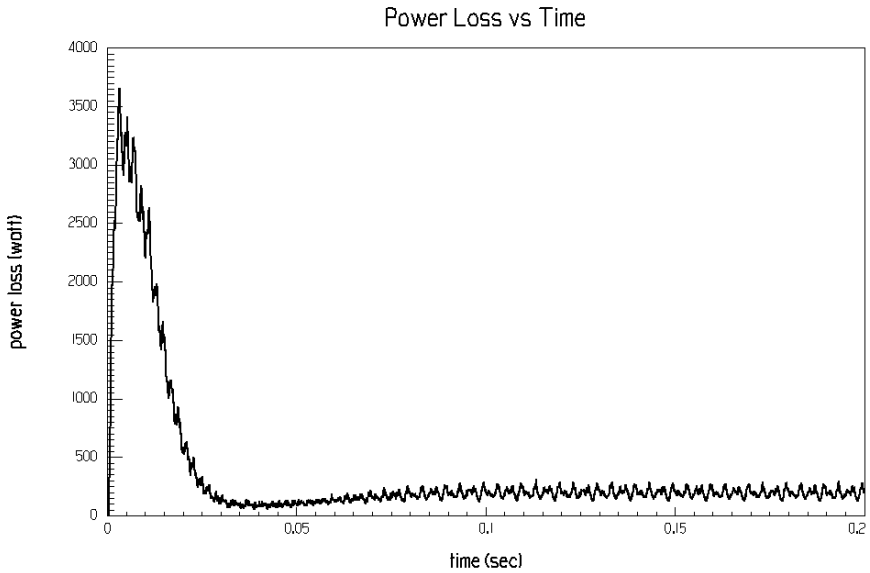
$$P_k = P_{cu} + P_{fe} = I^2.(r_1 + r_2^{'}) + \frac{{E_1}^2}{r_{fe}} \tag{6.6}$$

ifadesinde duruma ilişkin akım endüklenen gerilim ve demir direnci ifadeleri yerine konduğunda,

$r_1 + r_2^{'} = 3{,}535\ \Omega$

bulunmaktadır. Bu durum bize harmonik bileşen eklenmesiyle kısa devre direncinin arttığını gösterir. Bu toplamdaki r_1 ise primer sargı direnci olup demet iletkenden oluştuğu için frekansla artmayacağından, söz konusu artışın sebebi olarak $r_2^{'}$'nün artışı gösterilebilir.

- $V_1 + V_{11}$ Durumu



Şekil 6.61 : $V_1 + V_{11}$ durumu için güç kaybı dalga şekli

Şekil 6.61'de temel bileşen gerilimi ile kendisinin onbirde biri genliğindeki onbirinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın kayıp güç grafiği görülmektedir. Eğri bütün kayıp eğrilerindeki gibi önce yükselmiş sonrasında normal rejime girmiştir. Sürekli halde bu kaynağın yarattığı kayıp 198 W civarındadır. Kaynağın $V_1 + V_{11}$ olduğu zamanda oluşan kayıptan daha düşük bir kayıptır çünkü onbirinci bileşenin akım genliği, yedinci bileşenden küçüktür.

Bu durumda da $r_2^{'}$ direnci üzerinden geçen akım Fourier dönüşümüne açıldığında, birden fazla frekans bileşeni içerdiği görülür. Bu açıdan direncin değeri kayıp güç ifadesinden geriye giderek hesaplanacaktır.

$$P_k = P_{cu} + P_{fe} = I^2.\left(r_1 + r_2^{'}\right) + \frac{{E_1}^2}{r_{fe}} \tag{6.7}$$

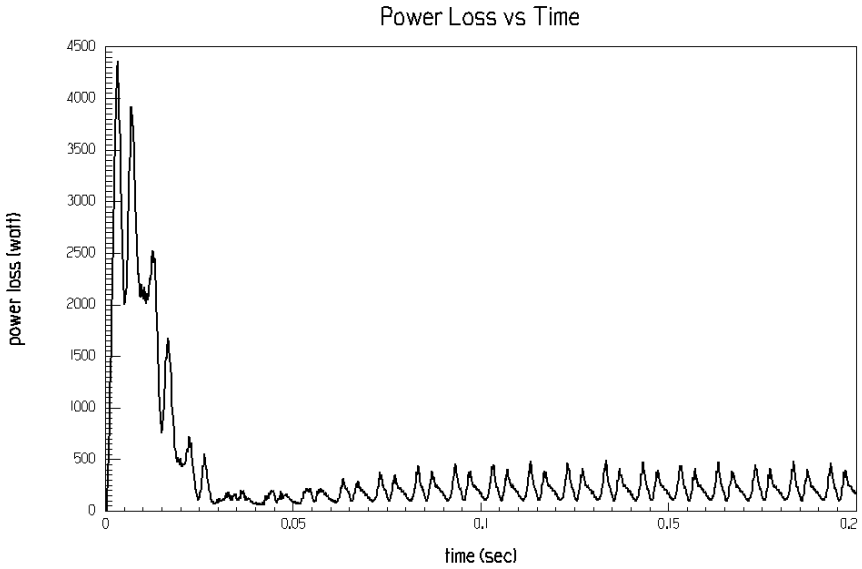
ifadesinde duruma ilişkin akım endüklenen gerilim ve demir direnci ifadeleri yerine konduğunda,

$r_1 + r_2^{'} = 3{,}61\ \Omega$

bulunmaktadır. Bu durum bize harmonik bileşen eklenmesiyle kısa devre direncinin arttığını gösterir. Bu toplamdaki r_1 ise primer sargı direnci olup demet iletkenden

oluştuğu için frekansla değişmeyeceğinden, söz konusu artışın sebebi olarak $r_2^{'}$'nün artışı gösterilebilir.

- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



Şekil 6.62 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumu için güç kaybı dalga şekli

Şekil 6.62'de temel bileşen gerilimi, kendisinin beşte biri genliğindeki beşinci bileşen gerilimi ve kendisinin yedide biri genliğindeki yedinci bileşen geriliminin uygulandığı makinanın kayıp güç grafiği görülmektedir. Genel hatlarıyla alışılmış bir kayıp grafiği olan eğride makina kayıp gücü bir süre sonra 260W değerine oturmaktadır. Görüldüğü gibi en büyük kayıp güç bütün harmoniklerin devrede olduğu durumda yakalanmıştır.

Bu durumda da $r_2^{'}$ direnci üzerinden geçen akım Fourier Dönüşümüne açıldığında, birden fazla frekans bileşeni içerdiği görülür. Bu açıdan direncin değeri kayıp güç ifadesinden geriye giderek hesaplanacaktır.

$$P_k = P_{cu} + P_{fe} = I^2.(r_1 + r_2^{'}) + \frac{{E_1}^2}{r_{fe}} \tag{6.8}$$

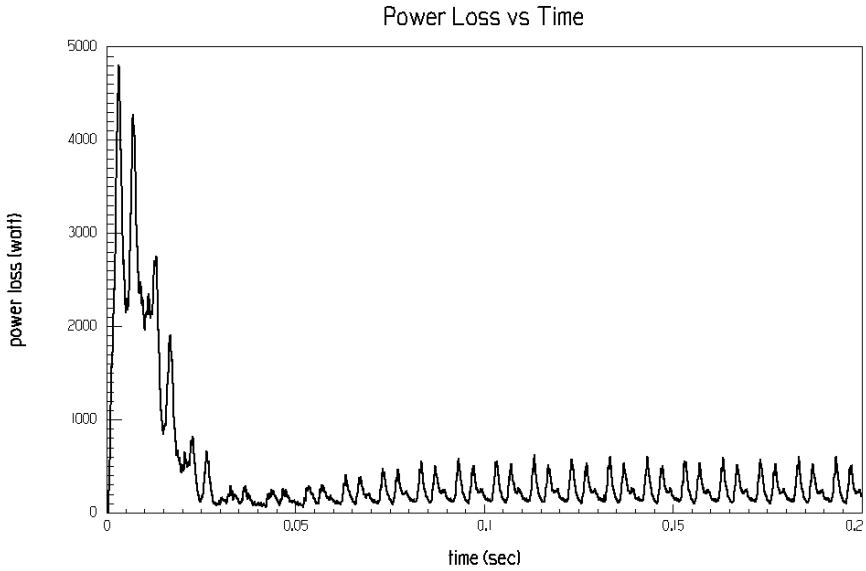
ifadesinde duruma ilişkin akım endüklenen gerilim ve demir direnci ifadeleri yerine konduğunda,

$r_1 + r_2^{'} = 3{,}8979\ \Omega$

bulunmaktadır. Bu durum bize harmonik bileşen eklenmesiyle kısa devre direncinin arttığını gösterir. Bu toplamdaki r_1 ise primer sargı direnci olup demet iletkenden oluştuğu için frekansla artmayacağından, söz konusu artışın sebebi olarak $r_2^{'}$'nün

artışı gösterilebilir. Görüldüğü gibi $r_2^{'}$ direnci, devre yüksek frekanslı bileşen arttıkça yükselmektedir.

- V_1+V_5+V_7 + V_{11} Durumu



Şekil 6.63 : $V_1 + V_5$+V_7+V_{11} durumu için güç kaybı dalga şekli

Şekil 6.63'te temel bileşen gerilimi ve bu çalışmada kullanılan bütün harmonik bileşenlerin uygulandığı makinanın kayıp güç grafiği görülmektedir. Genel hatlarıyla alışılmış bir kayıp grafiği olan eğride makina kayıp gücü bir süre sonra ortalama olarak 275 W değerine oturmaktadır. Görüldüğü gibi en büyük kayıp güç bütün harmoniklerin devrede olduğu durumda yakalanmıştır.

Bu durumda da $r_2^{'}$ direnci üzerinden geçen akım Fourier dönüşmüne açıldığında, birden fazla frekans bileşeni içerdiği görülür. Bu açıdan direncin değeri kayıp güç ifadesinden geriye giderek hesaplanacaktır.

$$P_k = P_{cu} + P_{fe} = I^2.(r_1 + r_2^{'}) + \frac{{E_1}^2}{r_{fe}} \tag{6.9}$$

ifadesinde duruma ilişkin akım endüklenen gerilim ve demir direnci ifadeleri yerine konduğunda,

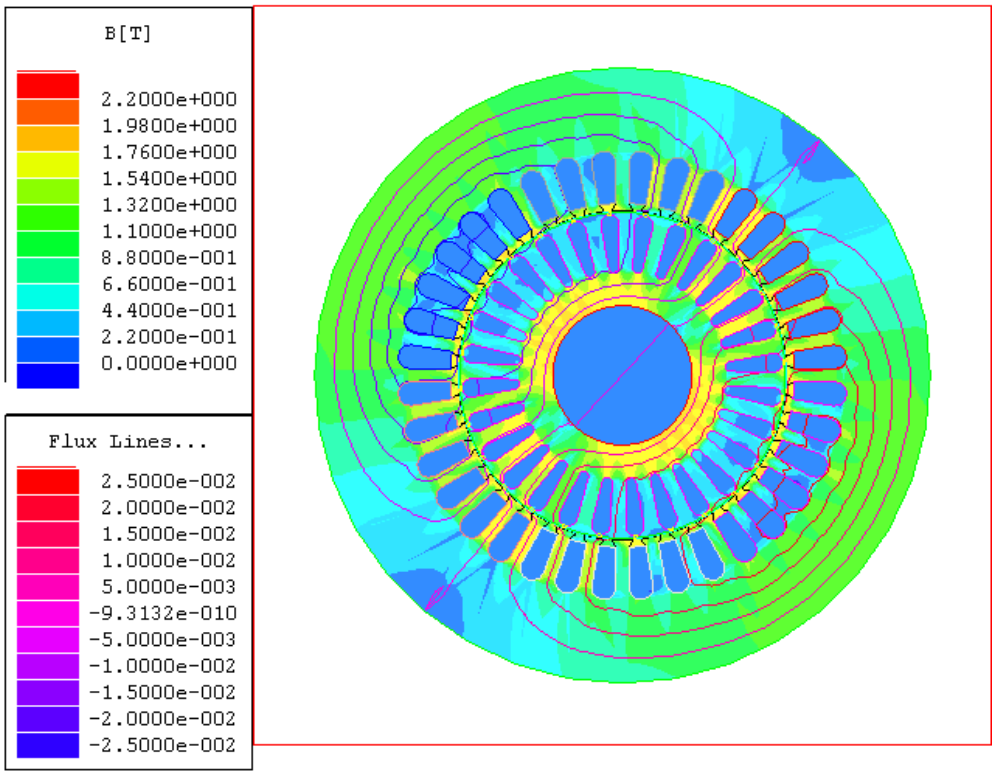
$r_1 + r_2^{'} = 3{,}999\ \Omega$

bulunmaktadır. Bu durum bize harmonik bileşen eklenmesiyle kısa devre direncinin arttığını gösterir. Bu toplamdaki r_1 ise primer sargı direnci olup demet iletkenden oluştuğu için frekansla artmayacağından, söz konusu artışın sebebi olarak $r_2^{'}$'nün

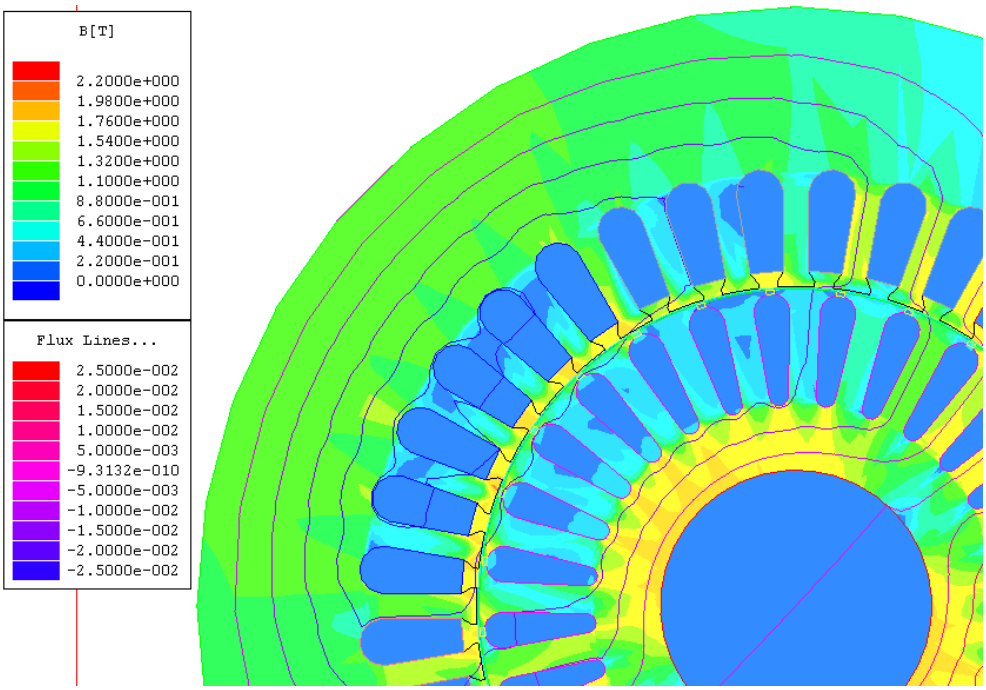
artışı gösterilebilir. Görüldüğü gibi r_2' direnci, devrede yüksek frekanslı bileşen arttıkça yükselmektedir.

6.6 Manyetik Akı Yoğunluğu Dağılımları

- V_1 Durumu (Temel Bileşen)



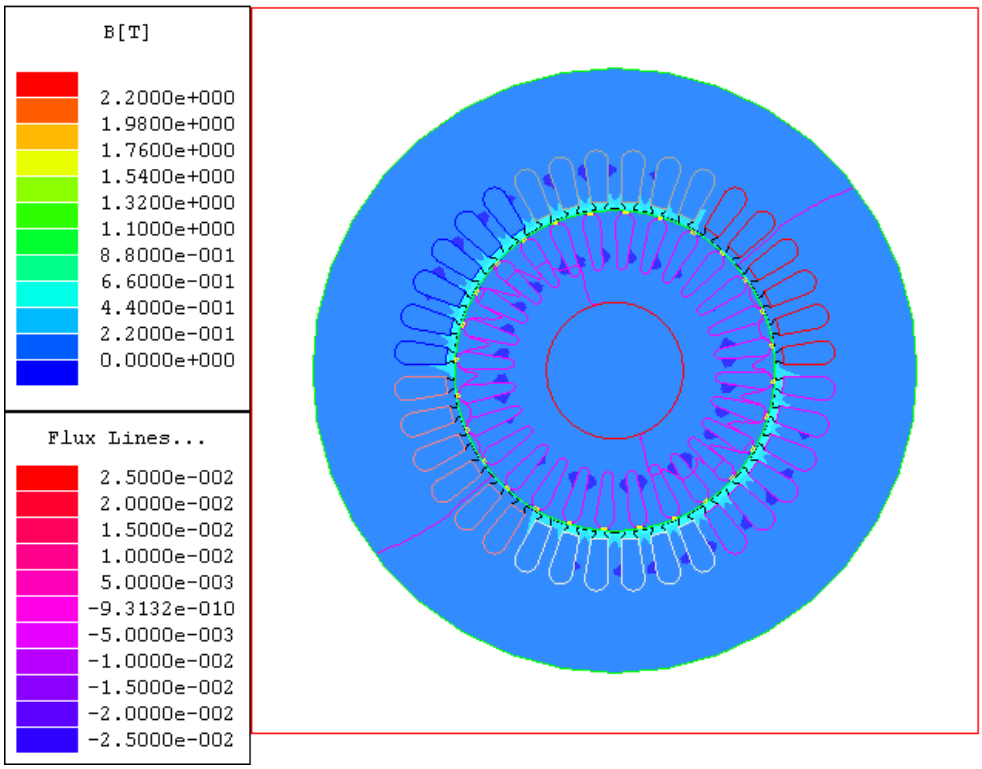
Şekil 6.64 : V_1 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı



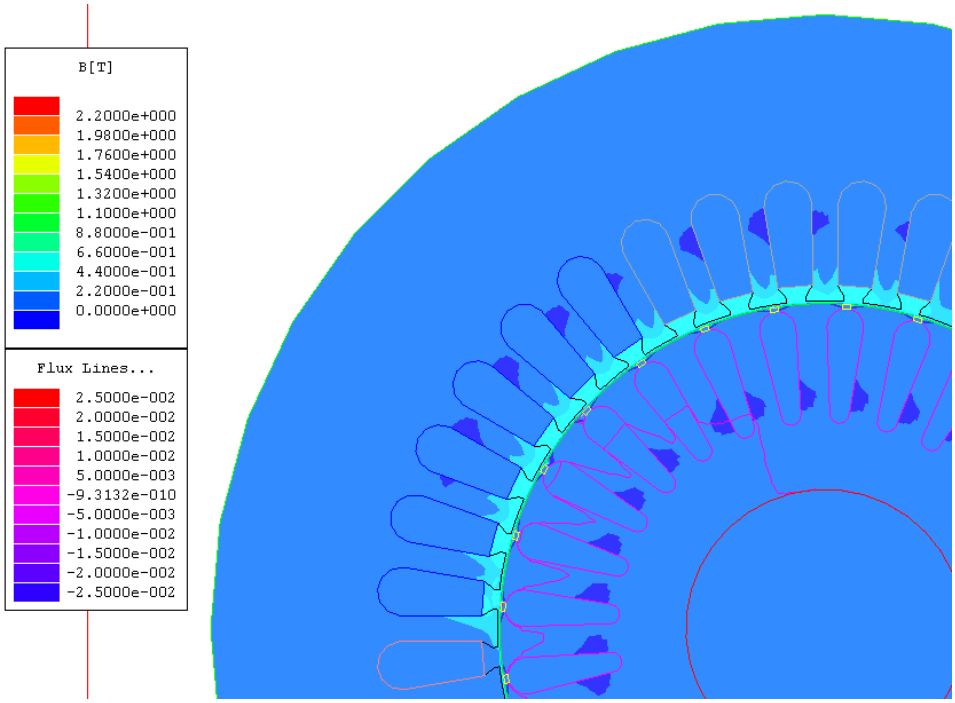
Şekil 6.65 : V_1 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.64 ve 6.65'te, B manyetik akı yoğunluğu ve üzerinde de akı çizgileri gösterilmiştir. Sonuç beklendiği gibidir. İki kutup belirgin olarak seçilebilmektedir. Stator boyunduruğunun kutup ekseni hizasına gelen bölgelerinde malzeme akı tarafından verimli kullanılmıştır. Özellikle de rotor boyunduruğunda ve akı çizgilerinin dönüş yaptığı yerlerdeki oluk aralarında manyetik akı yoğunluğu fazladır.

- V_5 Durumu

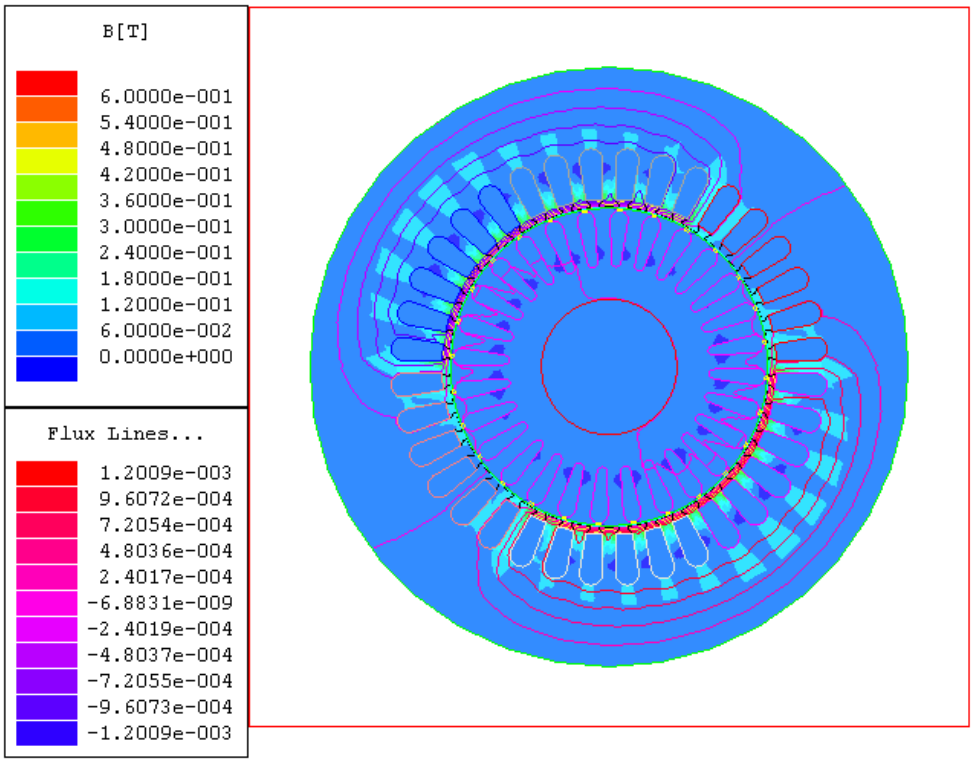


Şekil 6.66 : V_5 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı

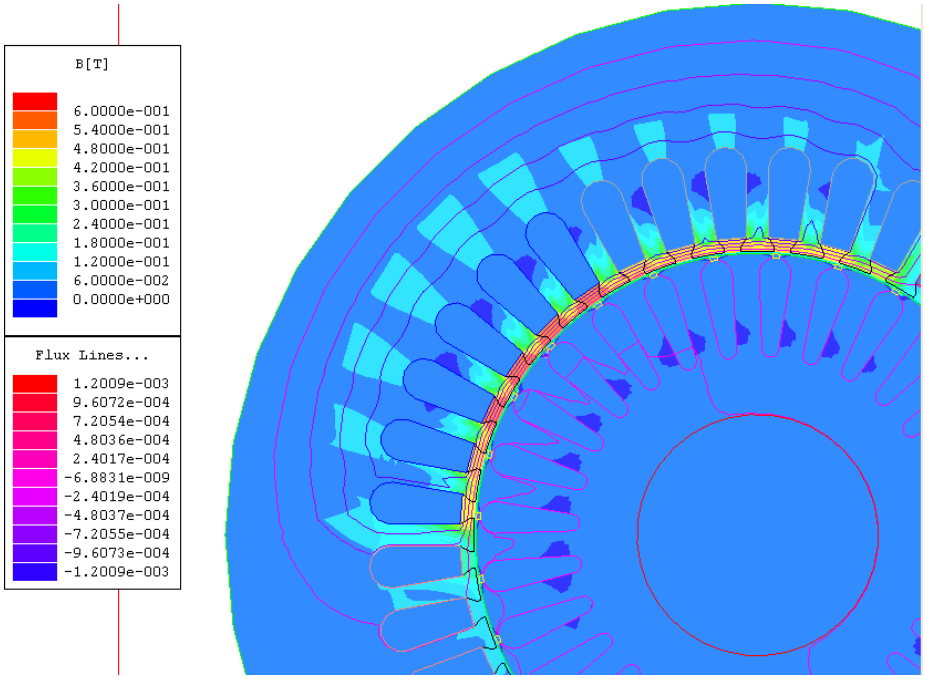


Şekil 6.67 : V_5 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.66 ve 6.67'deki gibi temel bileşene ait renk diyagramı ile çizim yaptırmaktaki amaç, iki durumun arasındaki farkı görmektir. Ancak beşinci bileşene ait dağılımı detaylı yaptırınca aşağıdaki şekiller elde edilir:



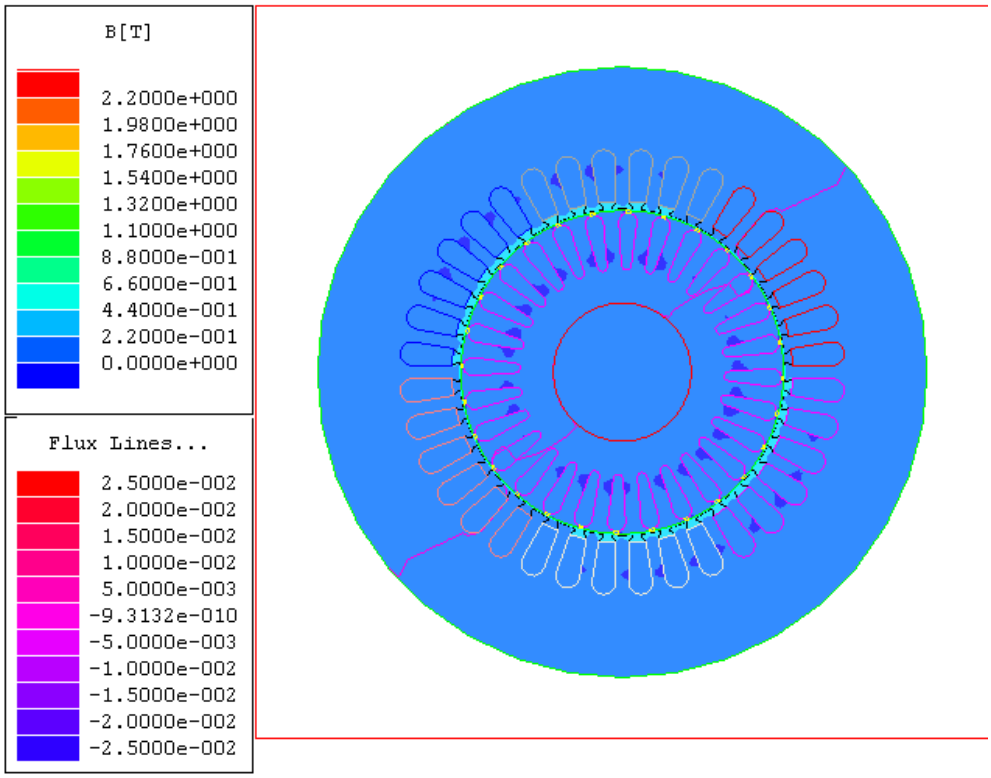
Şekil 6.68 : V_5 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı (2)



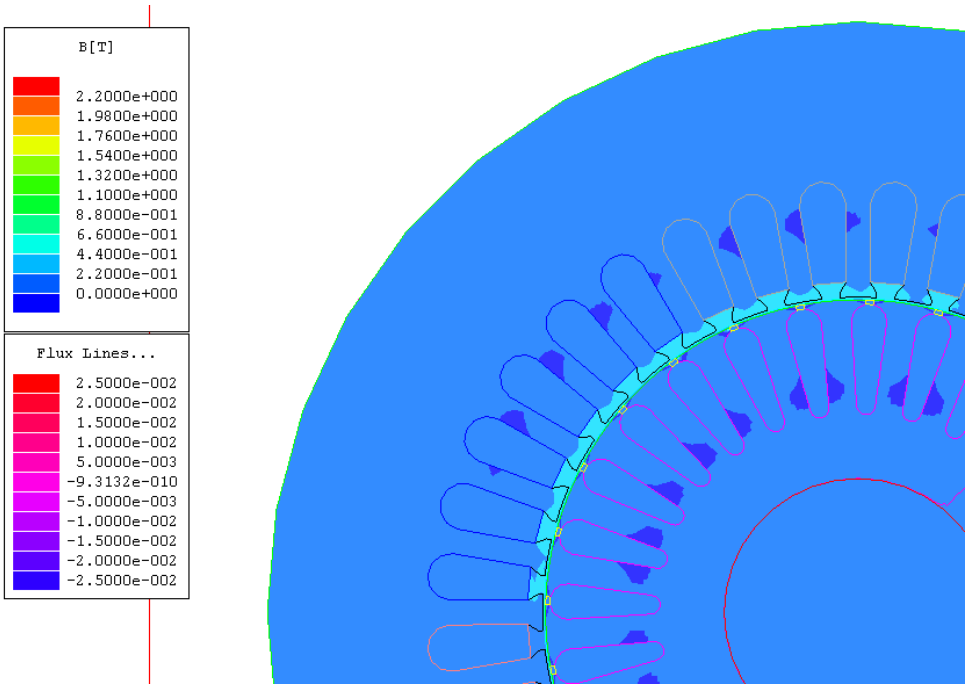
Şekil 6.69 : V_5 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı (2)

Şekil 6.68 ve 6.69'dan yararlanarak akı çizgileri sayesinde makinanın 2 kutuplu olduğu anlaşılsa da, beşinci bileşenin akısı tek başına etkin bir alan oluşturamamıştır. Akı çizgileri rotora geçmekte zorlanmışlar hatta geçen sadece bir akı çizgisi rotor boyunduruğunda yolunu zorlukla tamamlamıştır. Bu çizime göre kaynak gerilimi genliği büyük olursa, stator diş başlarında doyma olasılığı ortaya çıkabileceği yorumu yapılabilir.

- V_7 Durumu

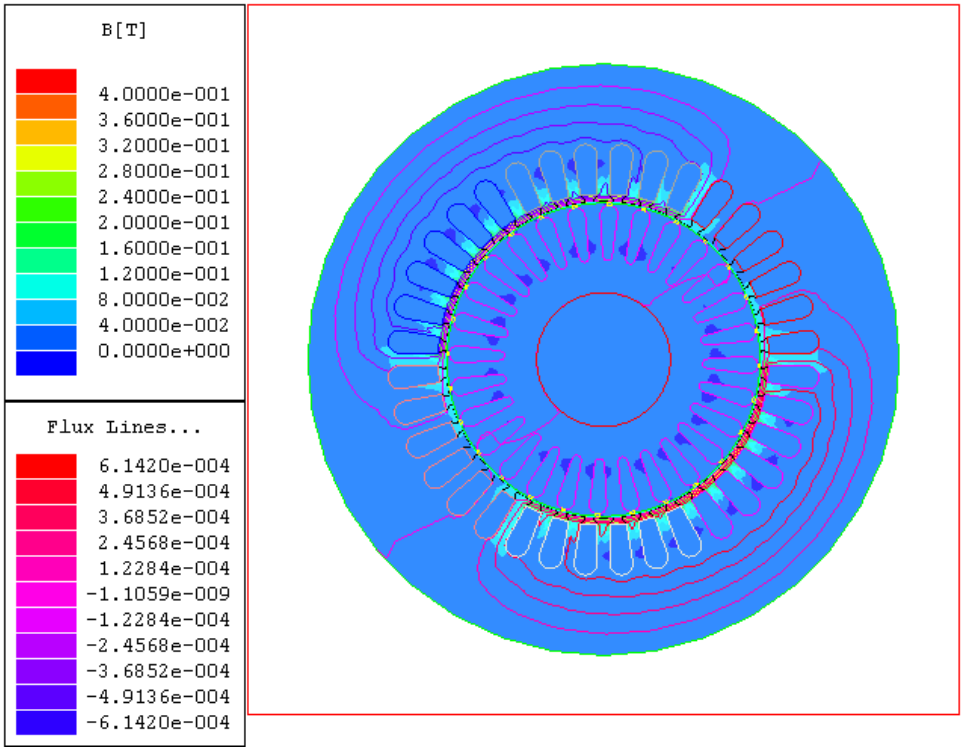


Şekil 6.70 : V_7 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı

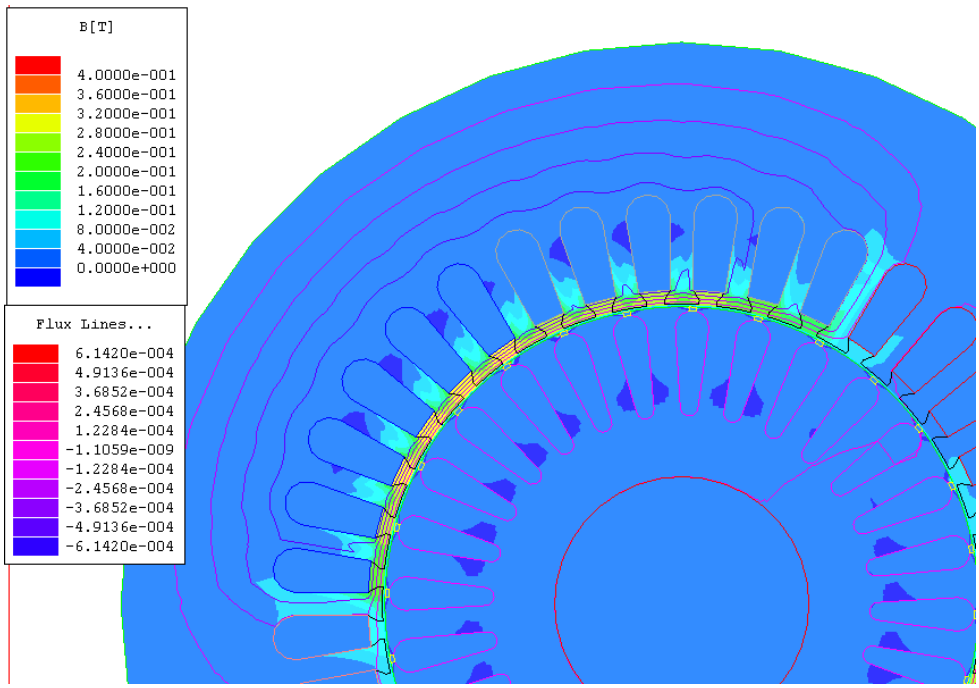


Şekil 6.71 : V_7 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.70 ve 6.71'de temel bileşene ait renk diyagramı ile çizim yaptırmaktaki amaç, iki durumun arasındaki farkı görmektir. Ancak yedinci bileşene ait dağılımı detaylı yaptırınca aşağıdaki şekiller elde edilir:



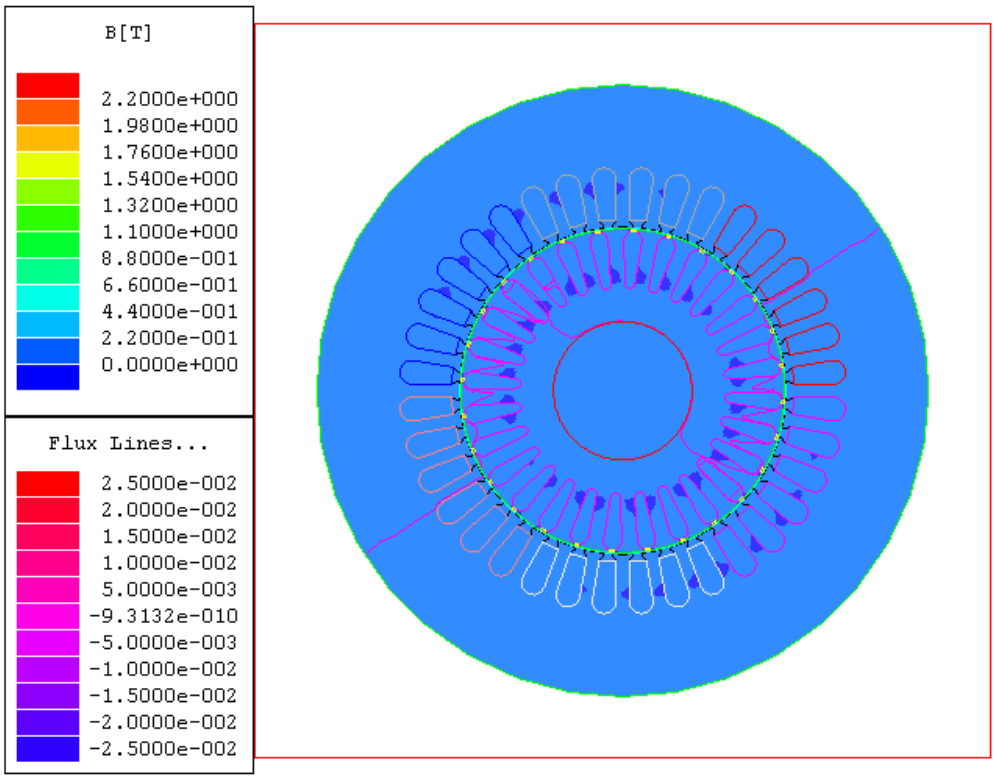
Şekil 6.72 : V_7 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı (2)



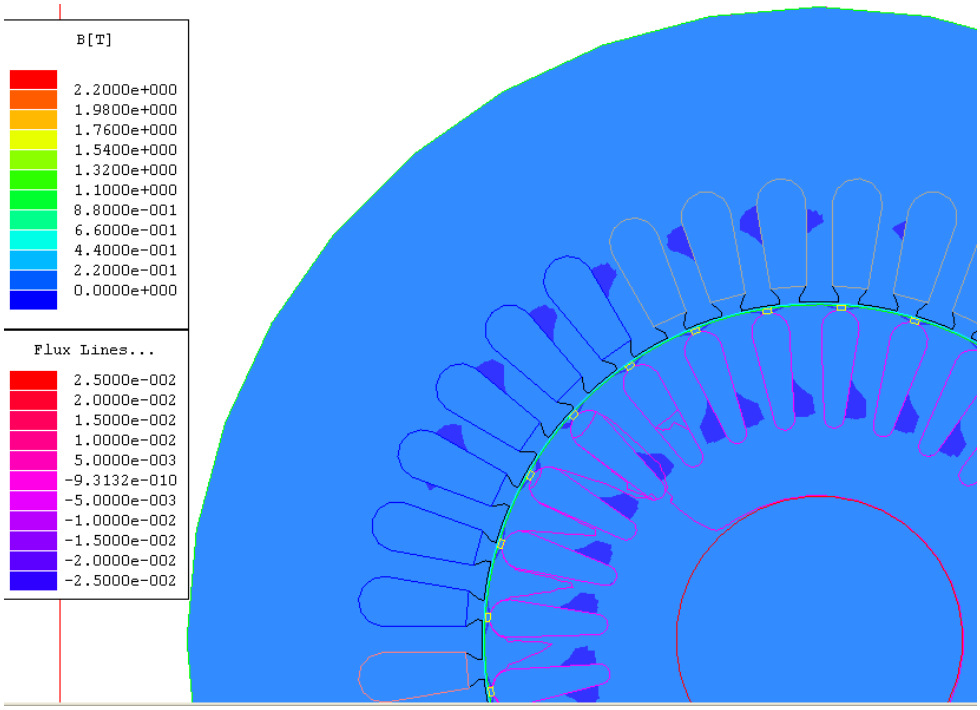
Şekil 6.73 : V_7 durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.72 ve 6.73'te akı çizgileri sayesinde makinanın 2 kutuplu olduğu anlaşılmakla beraber, yedinci bileşenin akısı da tek başına etkin bir alan oluşturamamıştır. Akı çizgileri rotora büyük ölçüde geçememişlerdir. Manyetik akı yoğunluğu yakın plan resimlerden gözlemlendiğinde, açıkça görülür ki, beşinci bileşene ait akı daha fazladır. Bu durumun sebebi beşinci bileşen geriliminin daha büyük olmasıdır.

- V_{11} Durumu

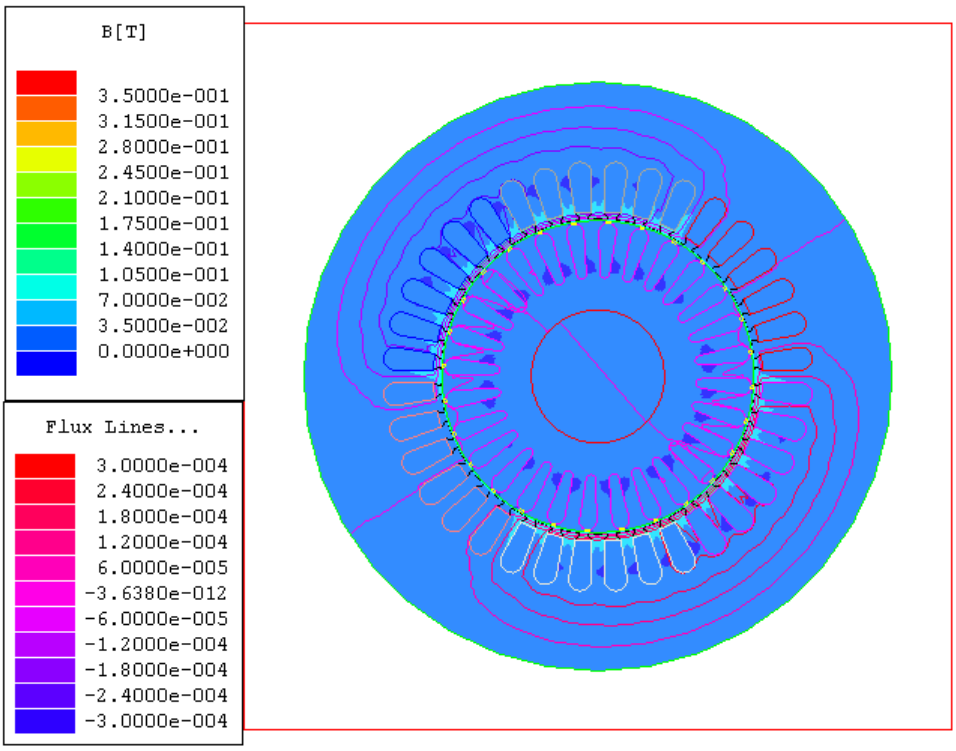


Şekil 6.74 : V_{11} durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı

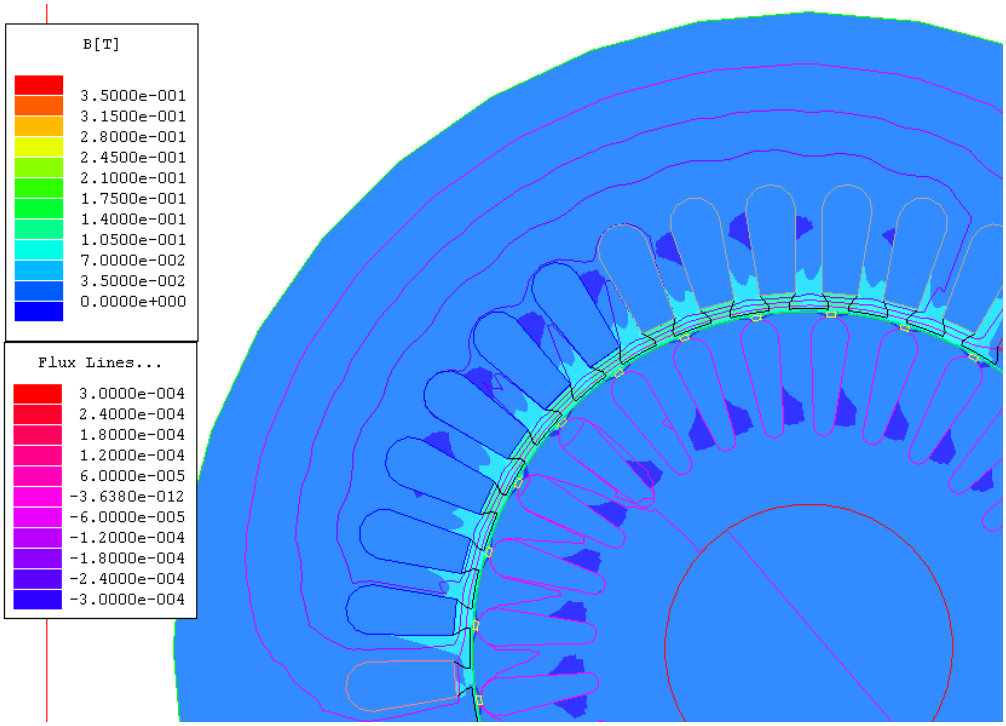


Şekil 6.75 : V_{11} durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.74 ve 6.75'te temel bileşene ait renk diyagramı ile çizim yaptırmaktaki amaç iki durumun arasındaki farkı görmektir. Ancak onbirinci bileşene ait çizimi detaylı yaptırınca aşağıdaki şekiller elde edilir:



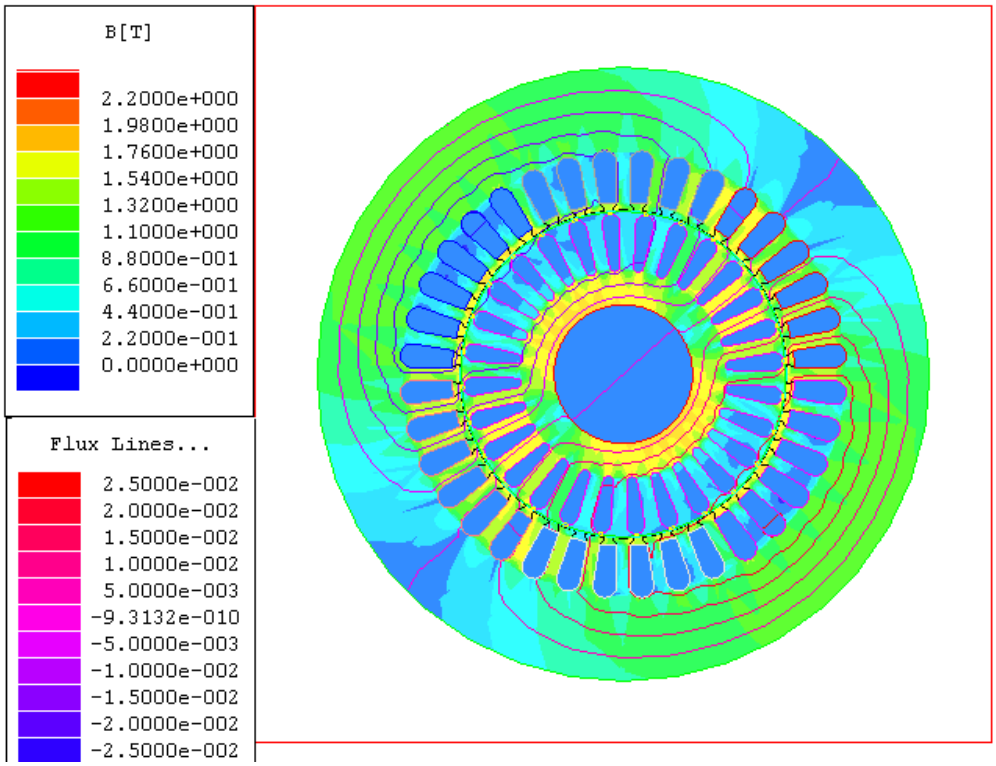
Şekil 6.76 : V_{11} durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı (2)



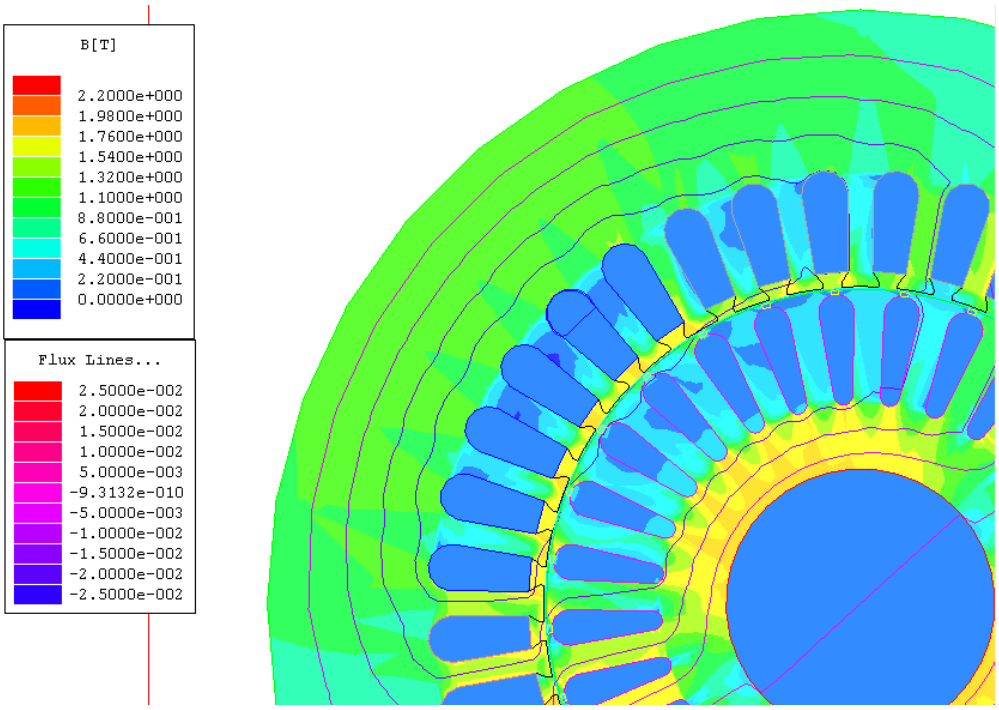
Şekil 6.77 : V_{11} durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı (2)

Şekil 6.76 ve 6.77'de görüldüğü gibi, akı çizgileri sayesinde makinanın 2 kutuplu olduğu anlaşılsa da, onbirinci bileşenin akısı da tek başına etkin bir alan oluşturamamıştır. Akı çizgileri rotora büyük ölçüde geçememişlerdir. Manyetik akı yoğunluğu yakın plan resimlerden gözlemlendiğinde, açıkça görülür ki, yedinci bileşene ait akı daha fazladır. Bu durumun sebebi yedinci bileşen geriliminin daha büyük olmasıdır.

- $V_1 + V_5$ Durumu



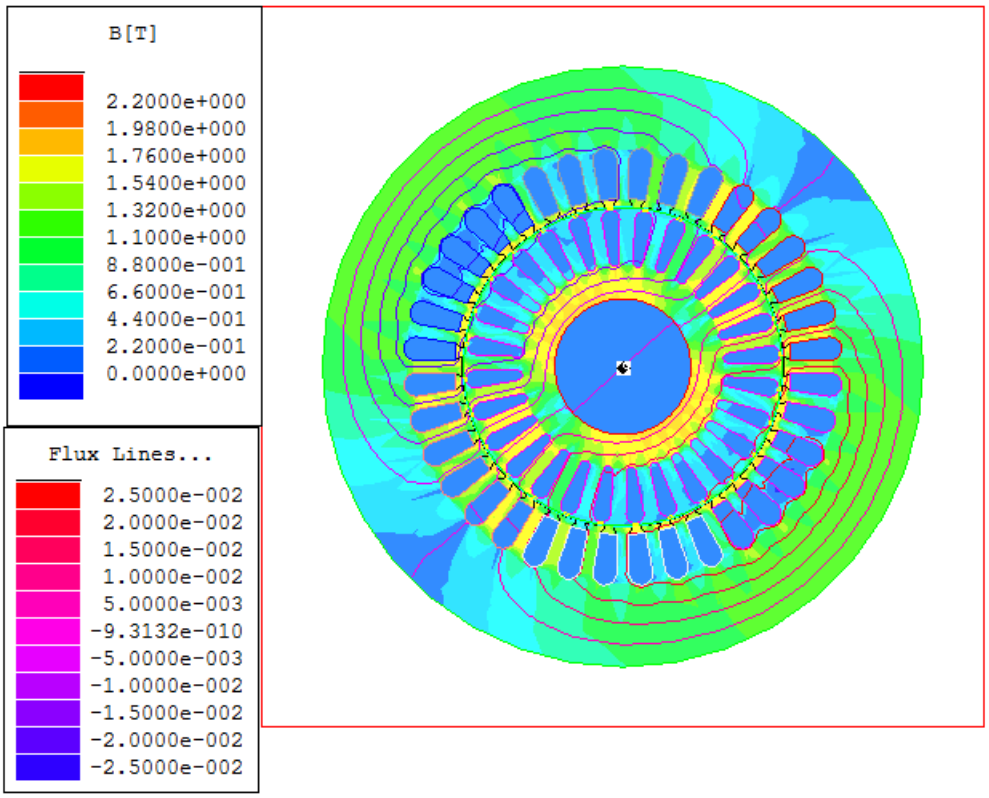
Şekil 6.78 : $V_1 + V_5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı



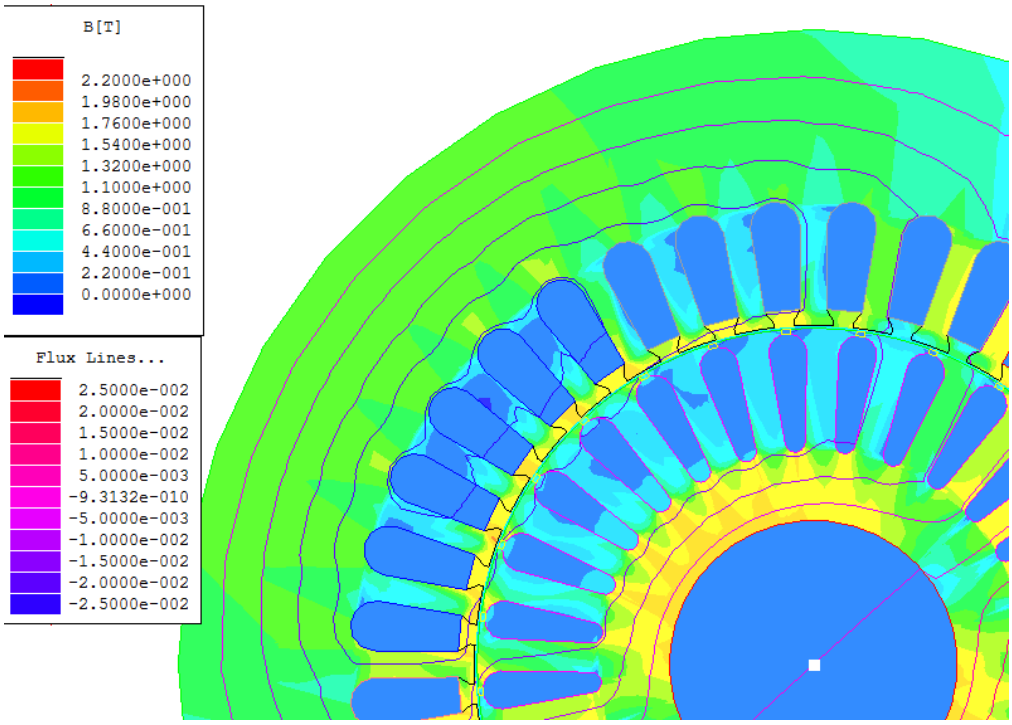
Şekil 6.79 : $V_1 + V_5$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.78 ve 6.79'da sadece temel bileşenin uygulandığı durumdan yer yer daha yüksek bir manyetik akı genliği mevcuttur. Temel bileşene ilişkin dağılımla karşılaştırıldığında akının makina kesitini daha az etkin kullandığı görülmektedir. Kutup ekseni hizalarında akı yoğunluğu daha yüksektir ancak kutup hizasının 90 derece ötesindeki bölgelerin akı yoğunluğu daha azdır. Temel bileşene ait dağılımdaki akı yoğunluğu bu duruma göre daha düzgündür.

- $V_1 + V_7$ Durumu



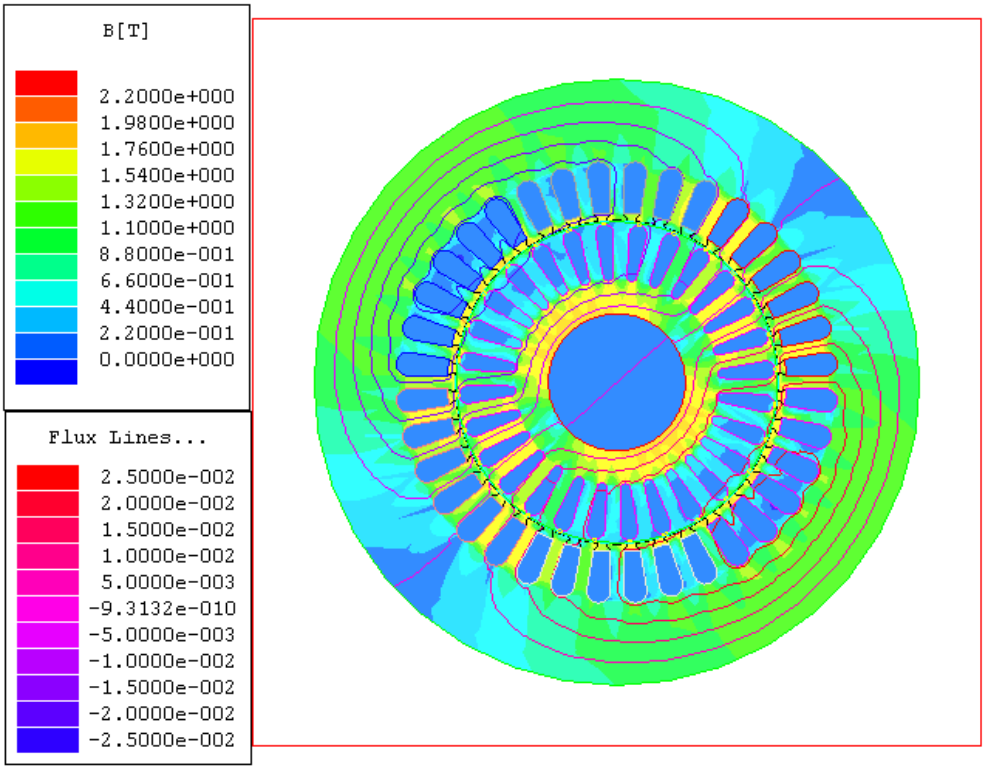
Şekil 6.80 : $V_1 + V_7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı



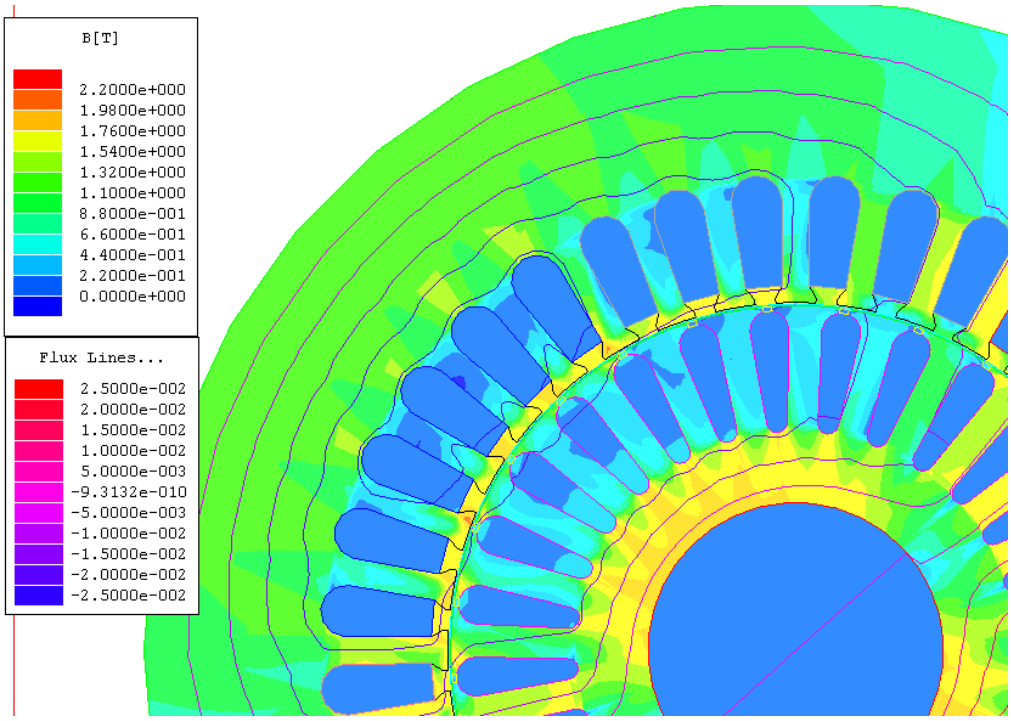
Şekil 6.81 : $V_1 + V_7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.80 ve 6.81'de makina kesiti $V_1 + V_5$ ve Temel bileşene ilişkin dağılımla karşılaştırıldığında akının makina kesitini daha az etkin kullandığı görülmektedir. Kutup ekseni hizalarında akı yoğunluğu daha yüksektir ancak kutup hizasının 90 derece ötesindeki bölgelerin akı yoğunluğu daha azdır. Temel bileşene ve $V_1 + V_5$ durumunun ait dağılımdaki akı yoğunluğu bu duruma göre daha düzgündür. Stator oluk ağızlarından doyma olasılığı $V_1 + V_5$ durumuna göre daha fazladır.

- $V_1 + V_{11}$ Durumu ,



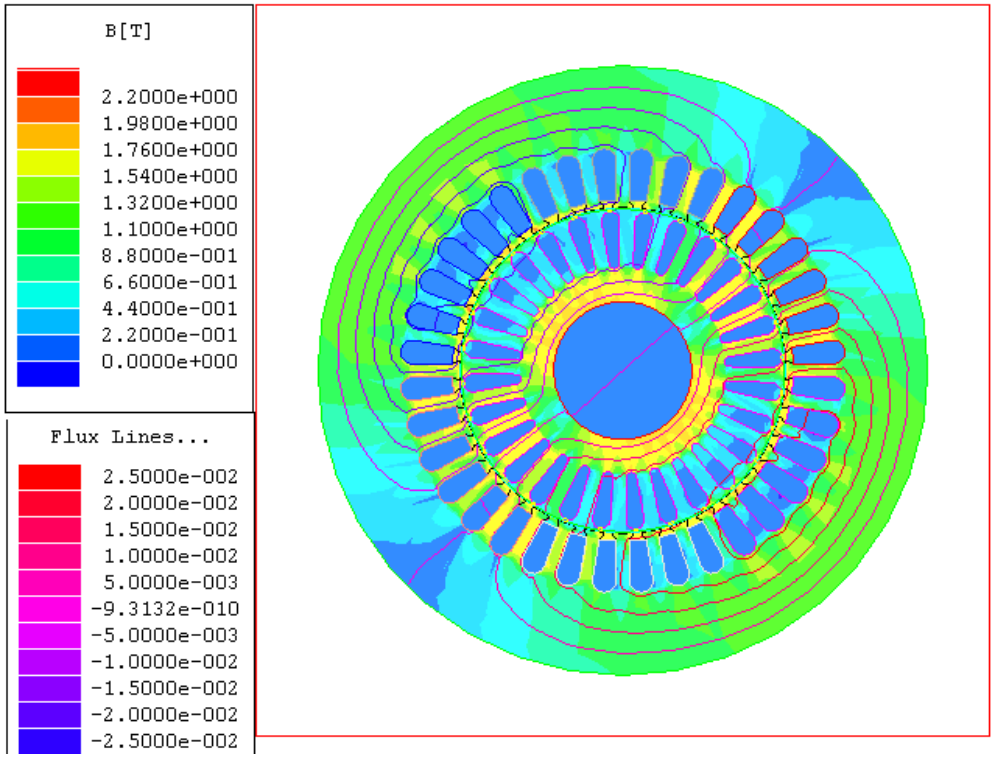
Şekil 6.82 : $V_1 + V_{11}$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı



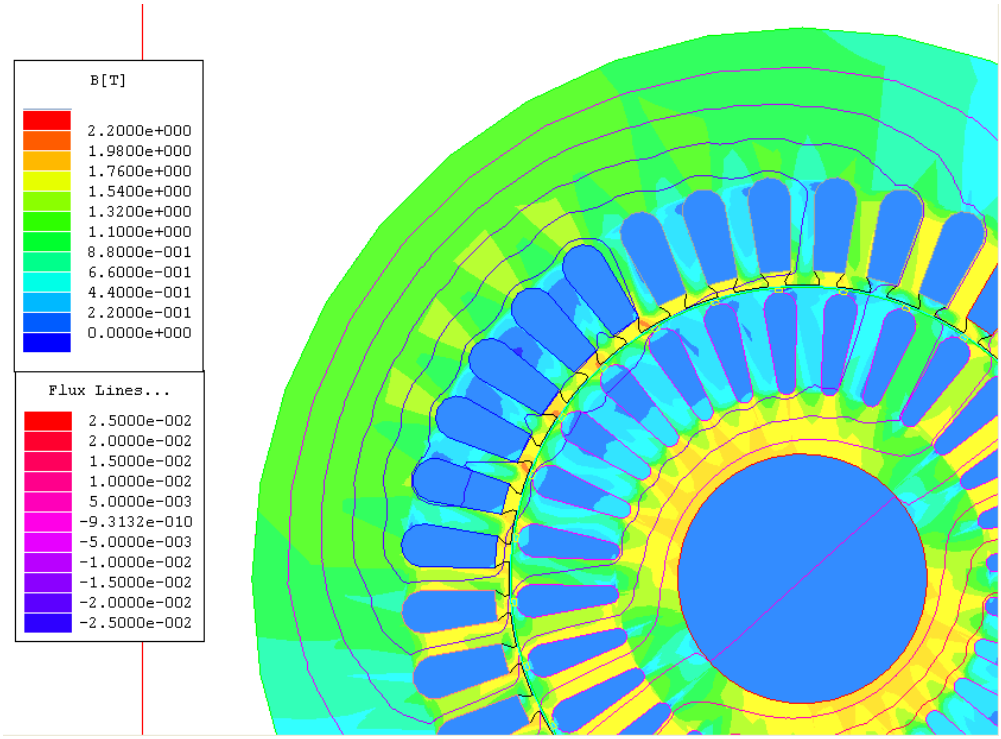
Şekil 6.83 : $V_1 + V_{11}$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.82 ve 6.83'te makina kesiti önceki çizimlerle karşılaştırıldığında akının makina kesitini daha az etkin kullandığı görülmektedir. Kutup ekseni hizalarında akı yoğunluğu daha yüksektir ancak kutup hizasının 90 derece ötesindeki bölgelerin akı yoğunluğu daha azdır. Temel bileşene ve öteki kaynaklar altında çalışma durumuna ait çizimlerdeki akı yoğunluğu bu duruma göre daha düzgündür. Stator oluk ağızlarından doyma olasılığı $V_1 + V_7$ durumuna göre daha fazladır.

- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



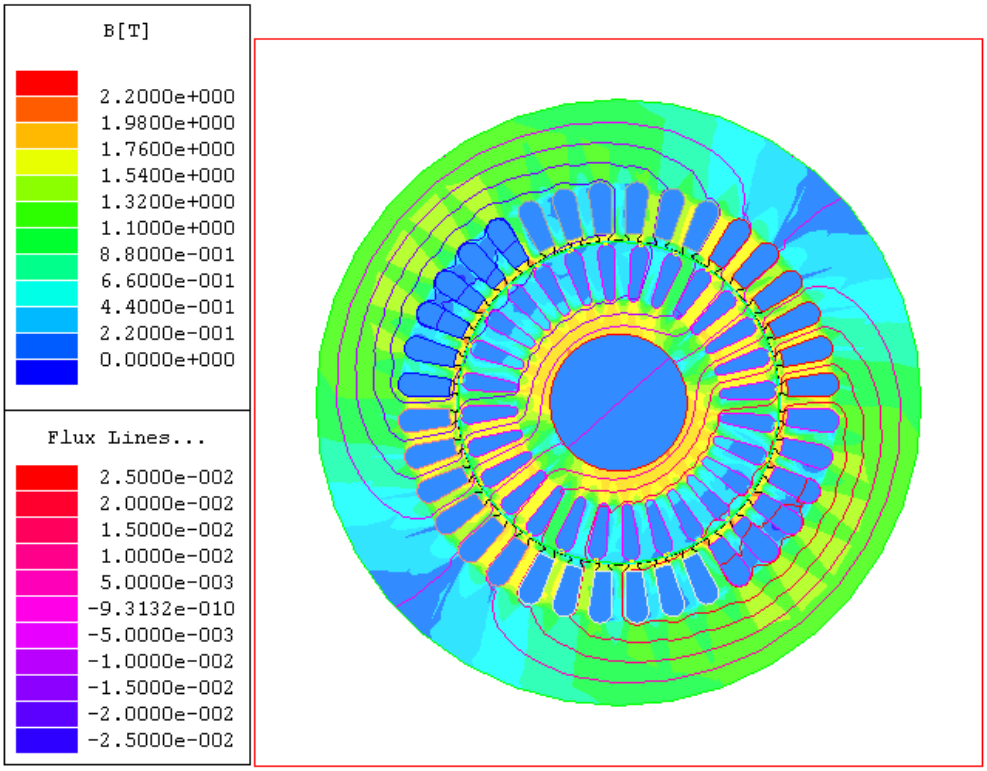
Şekil 6.84 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı



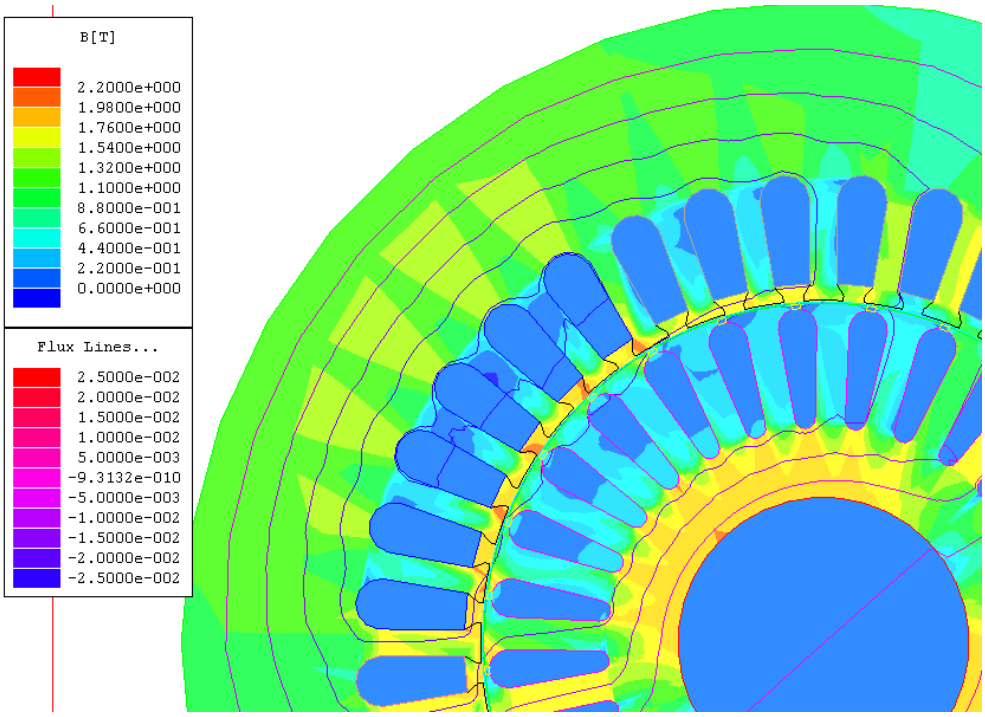
Şekil 6.85 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.84 ve 6.85'teki dağılımın temel bileşen dağılımından başlıca farkları; B manyetik akı dağılımlarının stator boyunduruğunda farklı olması, oluklar arası B manyetik akı dağılımlarının farklı olmasıdır. Bunun yanısıra rotor boyunduruk akı dağılımının daha düzensiz olmasıdır.

- $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ Durumu



Şekil 6.86 : $V_1+V_5+V_7+V_{11}$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı

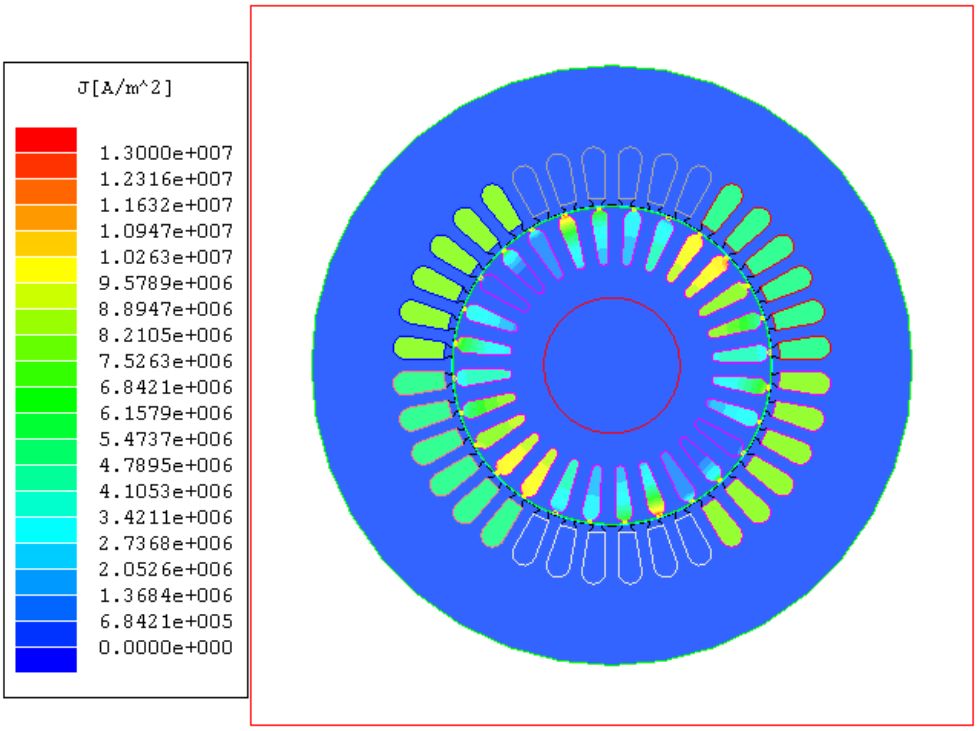


Şekil 6.87 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumu için manyetik akı yoğunluğu kesit dağılımı ayrıntısı

Şekil 6.86 ve 6.87'deki dağılımın temel bileşen dağılımından başlıca farkları; B manyetik akı dağılımlarının stator boyunduruğunda farklı olması, oluklar arası B manyetik akı dağılımlarının farklı olmasıdır, bunun yanı sıra rotor boyunduruk akı dağılımının daha düzensiz olmasıdır. Ek olarak oluk ağızlarındaki manyetik akı sıkışmalarının bu çizimde maksimum olduğu gözlemlenmektedir.

6.7 Akım Yoğunluğu Dağılımları

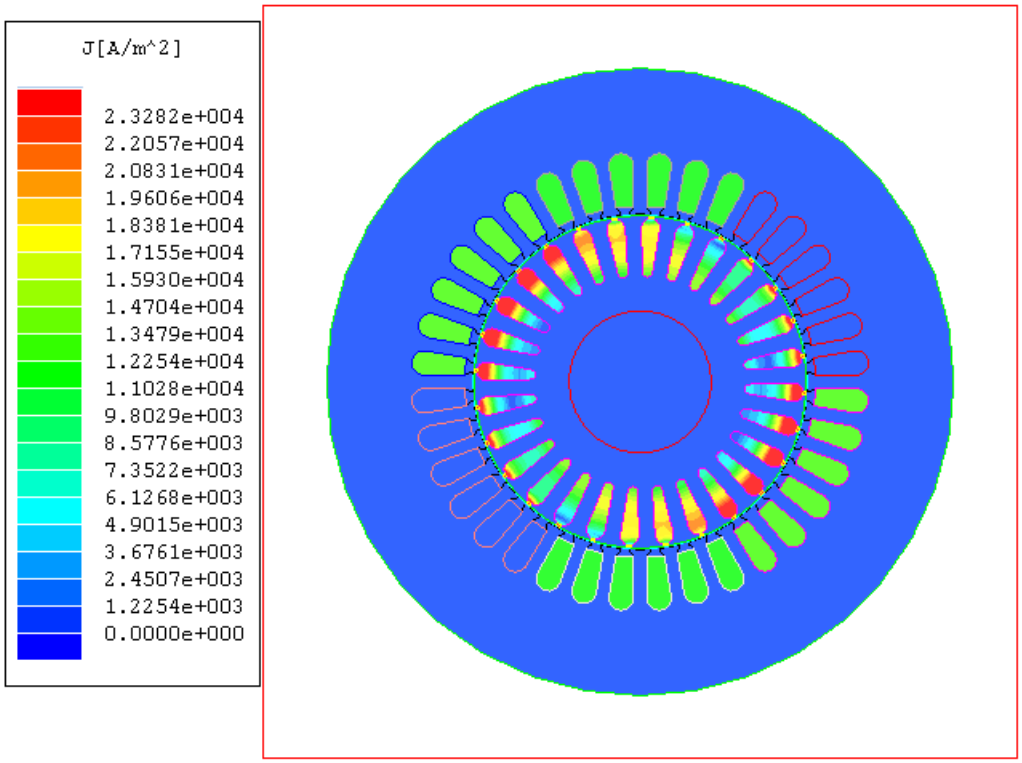
- V_1 Durumu (Temel Bileşen)



Şekil 6.88 : V_1 durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.88'den de görüldüğü gibi rotor oluklarındaki akım yoğunluğu beklendiği gibidir. Her olukta farklı olmasının sebebi ise rotor sargısının kafes yapısından kaynaklanmaktadır.

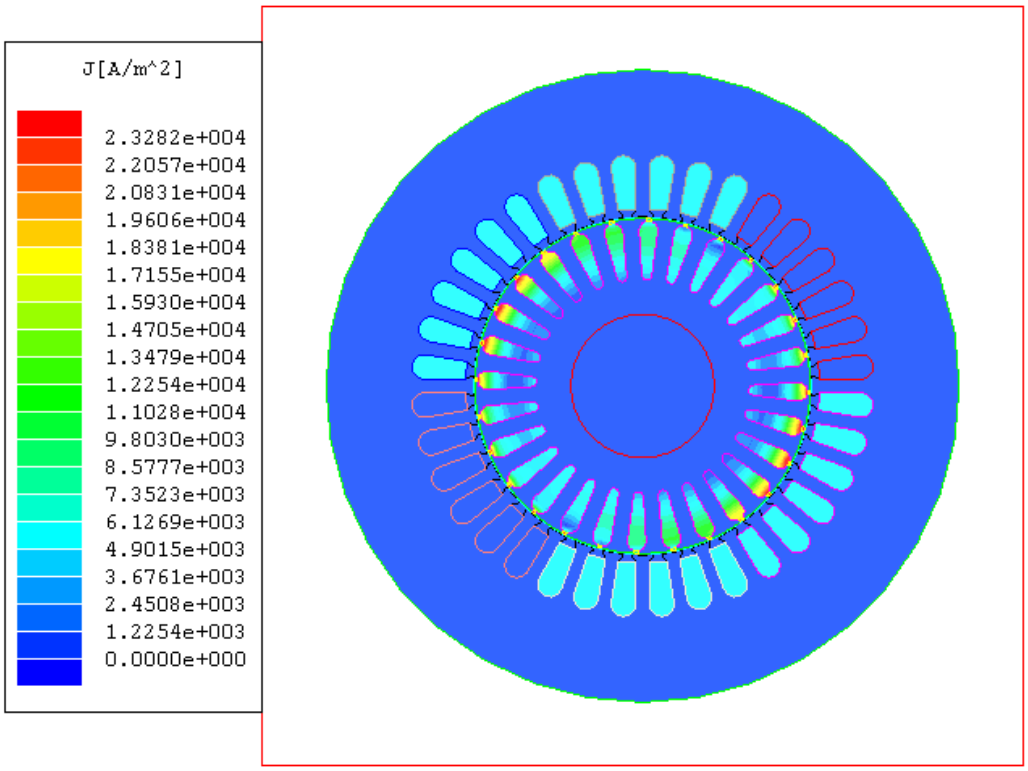
- V_5 Durumu



Şekil 6.89 : V_5 durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.89'dan da görüldüğü gibi rotor oluklarındaki akım yoğunluğu düşüktür. Bu bileşenin geriliminin düşük olması nedeniyle bu durum beklenen bir sonuçtur. Küçük kaynak geriliminde, rotorda da düşük bir akım yoğunluğu izlenmiştir.

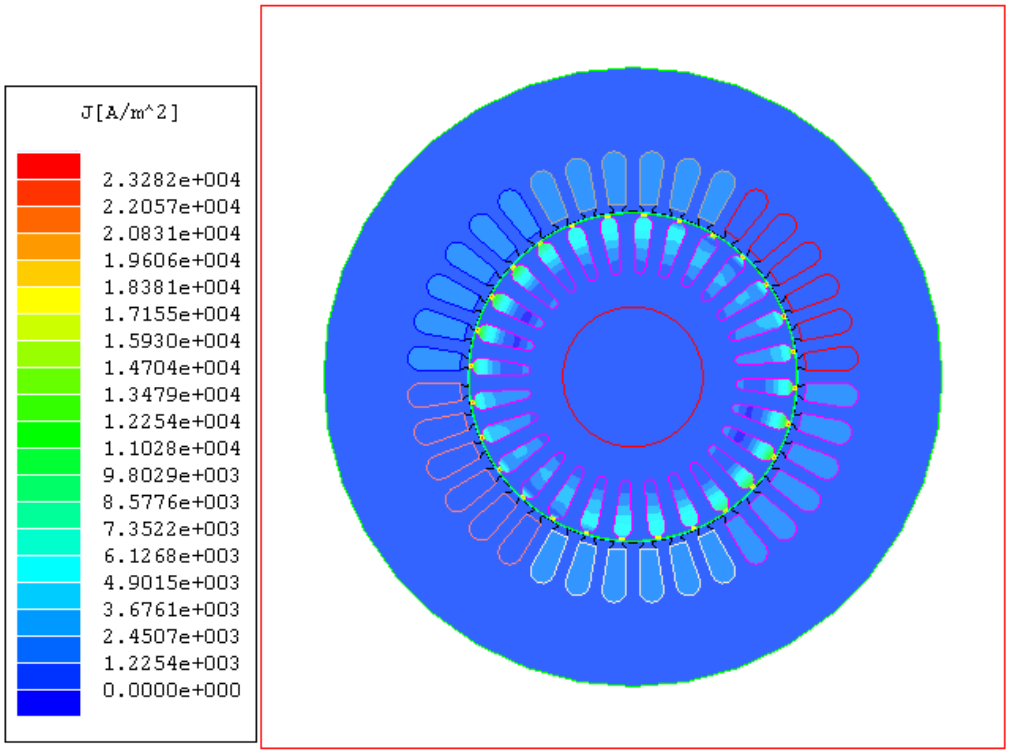
- V_7 Durumu



Şekil 6.90 : V_7 durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.90'dan da görüldüğü gibi rotor oluklarının akım yoğunlukları son derece düşmüştür. Bu durum manyetik alan dağılımlarındaki yorumlarla örtüşmektedir. Kaynak gerilimi çok düşük olduğunda rotor akımları da çok küçük olacaktır.

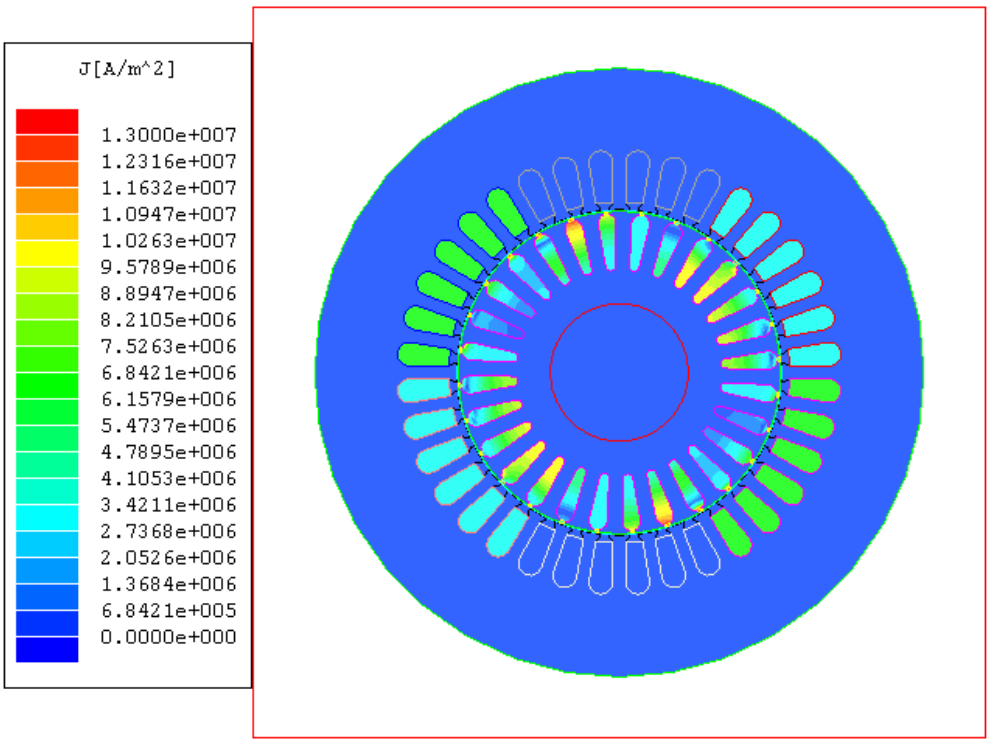
- V_{11} Durumu



Şekil 6.91 : V_{11} durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.91'den de görüldüğü gibi rotor oluklarının akım yoğunlukları iyice düşmüştür. Bu durum manyetik alan çizimlerindeki yorumlarla örtüşmektedir. Kaynak gerilimi çok düşük olduğundan rotor akımları da çok küçük olacaktır. Yüksek frekans bileşeninden ötürü genliği zaten küçük olan bu akım rotor oluğunun genelde üst kısmını kullanacaktır.

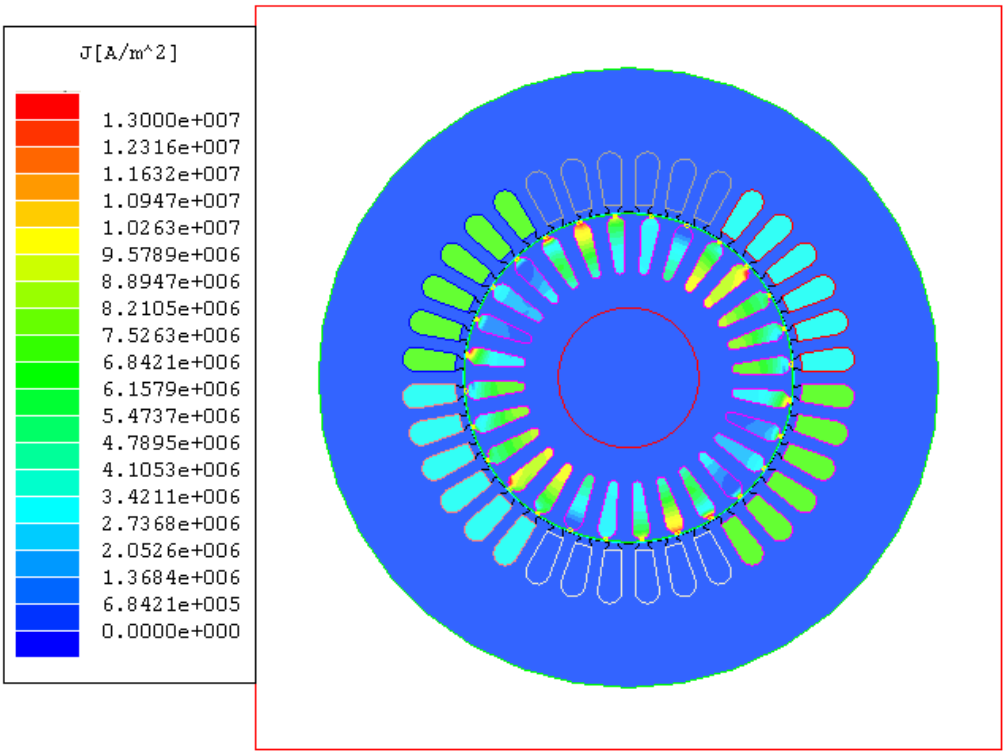
- $V_1 + V_5$ Durumu



Şekil 6.92 : $V_1 + V_5$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.92'den de görüldüğü gibi bu kaynak koşulunda akım yoğunluğu artmıştır. Olukların üst kısmındaki sıkışmalar, temel bileşene oranla fazladır. Ancak bu dağılımdaki kilit nokta oluk içindeki akımın çeşitliliğinin artmasıdır. Bu durum zaman harmonikli gerilimde titreşimli moment oluşturan karmaşık rotor akımı fikrini hatırlatmaktadır.

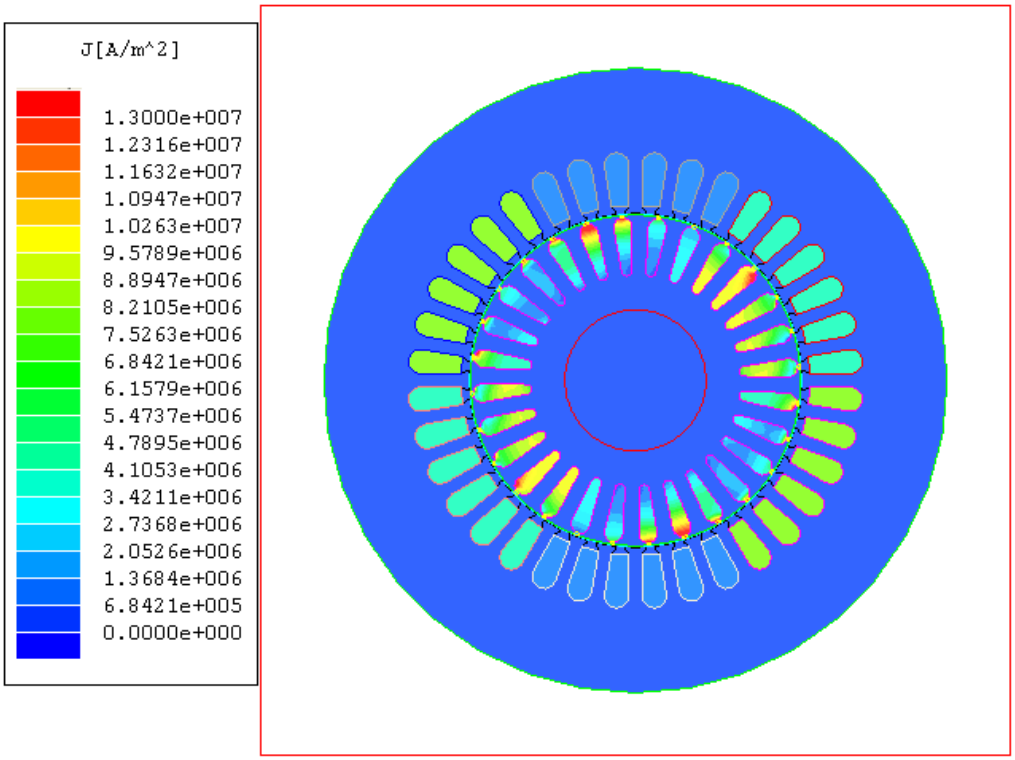
- $V_1 + V_7$ Durumu



Şekil 6.93 : $V_1 + V_7$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.93'ten de anlaşılacağı gibi akım yoğunluğunun oluk içindeki çeşitliliği önceki duruma göre daha da artmıştır. Bu yüksek frekanstaki bileşenin varlığı, rotor oluklarını anma çalışmasında görülmeyen akım zorlamalarına maruz bırakmıştır.

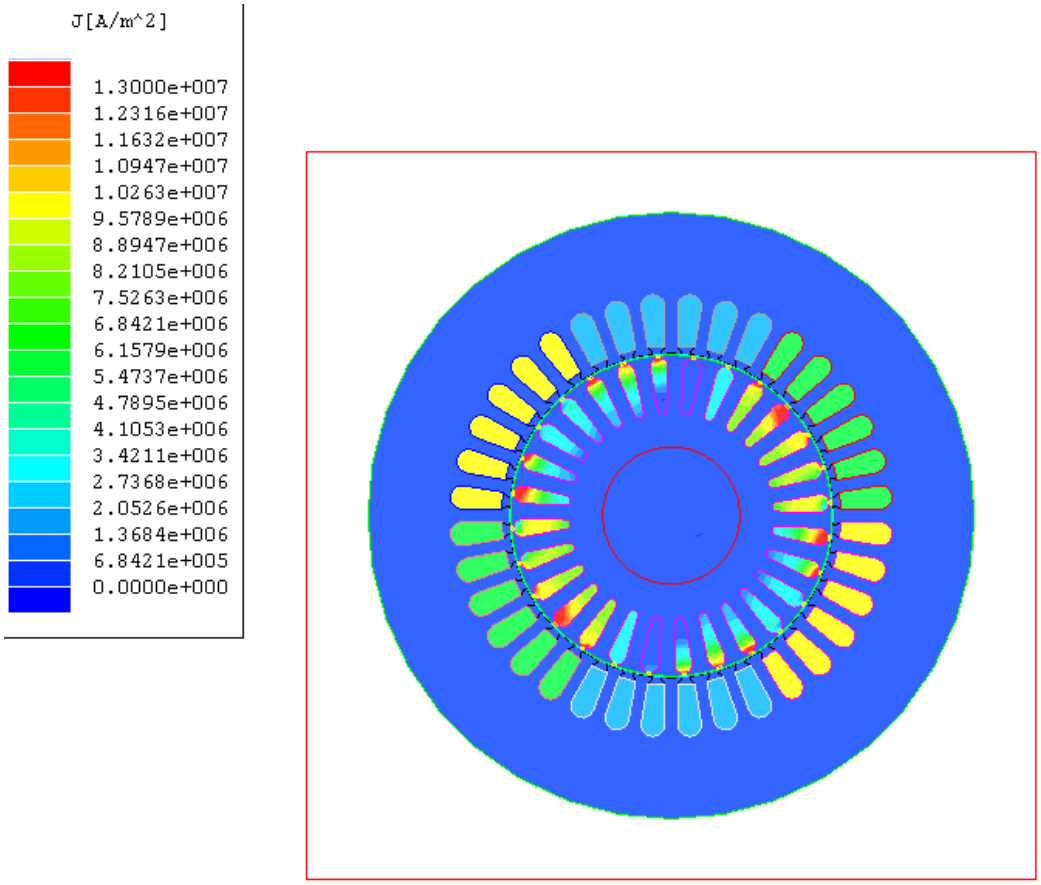
- $V_1 + V_{11}$ Durumu ,



Şekil 6.94 : $V_1 + V_{11}$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.94'ten de görüldüğü gibi akım yoğunluğunun oluk içindeki çeşitliliği önceki duruma göre daha da artmıştır. Bu yüksek frekanstaki bileşenin varlığı, bir önceki durumdaki gibi, rotor oluklarını anma çalışmasında görülmeyen akım zorlamalarına maruz bırakmıştır.

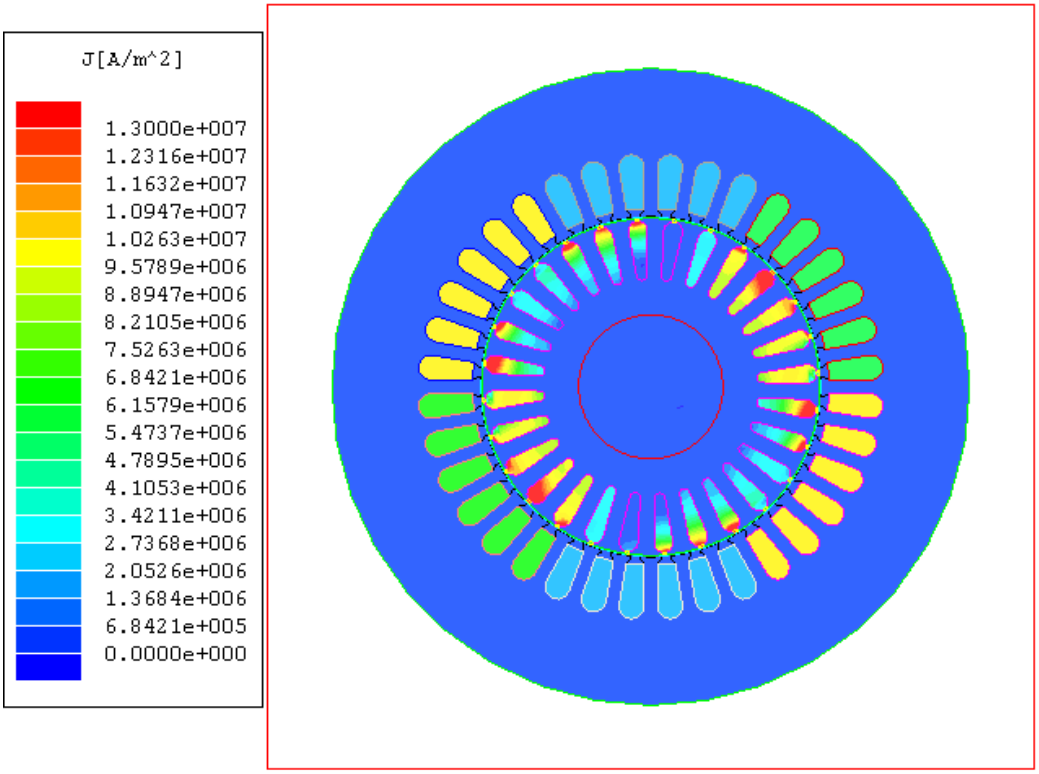
- $V_1 + V_5 + V_7$ Durumu



Şekil 6.95 : $V_1 + V_5 + V_7$ durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.95'teki bu durumda çeşitlilik çok fazladır. Bu dağılım içinde genlik olarak baskın olan $V_1 + V_5$ durumunun üstüne yedinci bileşenin yüksek frekansının yarattığı akım zorlanmalarının da eklenmiş bir halidir. Rotor oluklarında akım yoğunluğu çok dengesizdir. Bu durum, yüksek salınım aralıklı moment oluşmasına neden olmaktadır.

- V_1+V_5+V_7 + V_{11} Durumu



Şekil 6.96 : V_1 + V_5+V_7+V_{11} durumu için akım yoğunluğu kesit dağılımı

Şekil 6.96'da görüldüğü gibi bu son durumda çeşitlilik çok fazladır. Bu çizim genlik olarak baskın olan $V_1 + V_5 + V_7$ durumunun üstüne onbirinci bileşenin yüksek frekansının yarattığı akım zorlanmalarının da eklenmiş bir halidir. Rotor oluklarında akım yoğunluğu çok dengesizdir. Bu durum, yüksek salınım aralıklı moment oluşmasına neden olmaktadır. Görüldüğü gibi kimi oluklarda zorlanma aşırı derecelerdedir.

7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının amacı, zaman harmoniği içeren kaynakla beslenen kafesli asenkron makinanın sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmesidir. Önemli sayısal analiz yöntemlerinden biri olan, sonlu elemanlar yönteminin üstünlüğü, asenkron makina yapısı gibi karmaşık yapıları kolay modelleyebilmesidir. Bununla beraber, çalışmanın sonuç olarak verdiği renklendirilmiş görsel çıkışlar ve diğer türlü bilgisayar grafikleri, çok yönlülüğü ve kullanılırlılığı açısından bulunmazdır. Ancak analitik yöntemden temel bir farkı vardır; analitik çözümde matematiksel kabullerden ötürü doğan analitik hata, sonlu elemanlar çözümünde ise gerçek geometriyi taklit eden ağ yapıdan kaynaklanan geometrik hata bulunmaktadır.

Bu çalışma kapsamında, makinaya dokuz ayrı kaynaktan gerilim uygulanmış ve sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla makinanın davranışı araştırılmıştır. Bu bağlamda; gerilim, akım, moment, endüklenen elektromotor kuvvet, halkalanan akı, kayıp güç eğrileri ile manyetik akı ve akım yoğunluğu dağılımları çıkartılmıştır.

Gerilim grafiklerinde; kaynağın saf sinüs biçiminin korunduğu durumlar ile kaynağın iki veya üç ayrı bileşenin toplamı olarak verildiği durumlar arasında gerilim dalgasında gözle görülebilecek bozulmalara rastlanmaktadır. Harmonik içeriği artan dalganın şekli bozulmakla beraber maksimum değerleri de son derece artmış, dalga şeklinde sivrilmeler izlenmiştir. En çok harmonik bileşen barındıran son dalga şeklinin tepe değeri, temel bileşen tepe değerine göre %26 oranında artmıştır.

Bu gerilimlerin uygulandıkları makinaların akım eğrilerine bakıldığında ise gerilim biçimine benzeyen dalga şekilleri yakalandığı görülmüştür. Genliği düşük olan sadece beşinci, yedinci ve onbirinci bileşen içeren kaynaklarda, bu düşük gerilimin oluşturduğu akımın kararlı hale gelmesi zaman almıştır. Buna ek olarak harmonik bileşenin genliği oranınca akımı artırdığı gözlemlenmektedir. En çok harmonik bileşen barındıran son dalga şeklinin etkin değeri, temel bileşen etkin değerine göre %24,5 oranında artmıştır.

Söz konusu kaynaklar, makinanın farklı moment davranışları sergilemesine neden olmuşlardır. Genliği düşük, frekansı yüksek olan beş, yedi ve onbirinci bileşenlerin küçülen akım genlikleri ve 1'e yaklaşan kaymalarından ötürü momentin oluşumu zorlaşmıştır. Ancak bariz bir moment oluşturmasa da zaman harmoniği milde titreşim olarak kendini göstermiştir. Öte yandan temel bileşenle beraber makinaya uygulanan harmonik bileşenlerin genlikleri arttıkça moment eğrisinde meydana getirdikleri titreşim artmaktadır. Başka bir deyişle, momentin ortalama değeri sabit kalmasına rağmen salınım aralığı fazlalaşmaktadır. Söz konusu salınım aralığı için şunlar söylenebilir: Sadece temel bileşen varlığındaki salınım aralığı 3,5 Nm iken, $V_1 + V_5$ kaynağındaki 10 Nm, $V_1 + V_7$ kaynağındaki 6,5 Nm, $V_1 + V_5 + V_7$ kaynağındaki 11,2 Nm, $V_1 + V_5 + V_7 + V_{11}$ kaynağındaki ise 12 Nm'dir. Sonuçlardan anlaşılacağı gibi harmonik içerik çıkış momentinde bolca titreşim meydana getirmiştir. Bu bağlamda, zaman harmoniğinin analitik çözümünden de çıkarıldığı gibi, makinaya en büyük etkisi ısınma ve titreşimdir.

Endüklenen elektromotor kuvvet grafiklerinde ise dalga şekillerinin kaynak gerilimi dalga şekline benzediği açıkça görülmüştür. Saf sinüs olan bileşenlerin endükledikleri elektromotor kuvvetten, makina tasarımına ilişkin sabitler çıkarılmış ve bu sabitlerin birbirine yakınsadığı görülmüştür. Bu durum, kullanılan programın, anlamlı sonuçlar verdiğinin bir göstergesi olarak kabul edilebilir. Öte yandan harmonikli gerilimlerin elektromotor kuvvetlerinin etkin değerleri ise temel bileşeninkinden yüksektir. Bu ilişki gerilim dalga şekillerindeki ilişkiyi anımsatmaktadır.

Halkalanma akısı dalga şekillerinde ise endüklenen elektromotor kuvvetin biçiminden bağımsız olarak sinüzoidal biçime yakın bir durum izlenmiştir. Bunun sebebi halkalanma akısının endüklenen gerilimin integrali ile hesaplanmasından kaynaklanmaktadır. Sadece beş ve yedinci bileşenlerin oldukları simülasyonlarda akının son derece küçük olmasının sebebi, kendisini yaratan akımın küçük olmasıdır. Bundan başka, temel bileşenin yarattığı halkalanma akısı etkin olarak 0,55 Wb iken en çok harmonik bileşen içeren durumun yarattığı halkalanma akısı 0,58 Wb'dir. Bu farkı, son bileşenin akımının yüksek olması doğurmuştur.

Her çalışma durumundaki kayıp güç ise durumun akım ve gerilimi ile değişecektir. Analitik hesapla karşılaştırılan kayıp güçler arasında; temel bileşen için hata %7,31, sadece beşinci bileşenin var olduğu durum için hata %12,93, sadece yedinci bileşenin

var olduğu durum için hata %13, sadece onbirinci bileşenin var olduğu durum için hata %11,46 şeklindedir. Bu hataların olmasının sebebi, çözüme ulaşmak için kullandığımız iki ayrı programın da ayrı ayrı hata katsayıları olmasıdır.

Bu noktadan sonra sinüs biçiminden uzaklaşmış dalga şekilleri kaynak iken, gerçekleşmesi beklenen direnç artışına bakılmıştır. Temel bileşene eklenen bileşenin frekansı arttıkça deri etkisi sebebi ile direnç değeri artmaktadır. $V_1 + V_5 + V_7 + V_{11}$ durumunda ise en yüksek değerini almaktadır.

Manyetik akı yoğunluğu dağılımı şekillerinde ise sonuçlar iki sınıfa ayrılabilir. Temel bileşenin var olduğu bütün durumlarda anlamlı bir akı yayılımı ve manyetik akı yoğunluğu dağılımı izlenmesine rağmen, genliği son derece düşük olan beşinci, yedinci ve onbirinci bileşen haritalarında, düşük akının rotora geçmekte zorlandığı ve hava aralığı civarında sıkıştığı gözlemlenmektedir.

Temel bileşende demirde olabildiğince düzgün dağılan manyetik akı yoğunluğu, kaynak karmaşıklaştıkça, daha az düzgün yayılmaya başlayacaktır. Öte yandan temel bileşen barındıran bütün durumlarda ise, temel bileşene eklenen bileşen frekansı arttıkça, akı sıkışmaları ve demirin kimi noktalarında doymaya rastlanmaktadır.

Akım yoğunluğu dağılımlarında ise, her bileşenin ayrı görüntülendiği biçimde, deri etkisi birebir izlenebilmektedir. Temel bileşene ilişkin dağılımdaki akım yoğunluğu genliği ve düzgünlüğü, beşinci, yedinci ve özellikle de onbirinci bileşenlerde izlenememektedir. Buna ek olarak, temel bileşene eklenen bileşenin frekansı arttıkça, rotor akım yoğunluklarının oluk içinde çeşitlendiği ve deri etkisinden ötürü oluğun üst kısmında akı yoğunluğunun yüksek olduğu görülmektedir.

8. KAYNAKLAR

[1] **Kocabaş, D. A,** 2004. Asenkron Makinalarda Uzay Harmoniklerinin Etkilerini Azaltmak için Yapısal Çözümler, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[2] **Yacamini, R., Chang, S. C.,** 1995. Noise and Vibration from Induction Machines Fed from Harmonic Sources, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 10, No. 2, pp. 286-292.

[3] **Ruiming F.,** 2005. An Improved Iron Loss Calculation Method for High-speed Induction Machine Fed by Nonsinusoidal Voltage Sources, 'The Eighth International Conference on Electrical Machines and Systems', Nanjing, China, September 2005, Proceedings of Conference Vol. 2, pp. 886-888.

[4] **Liang, X., Luy, Y.,** 2006. Harmonic Analysis for Induction Motors, *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Ottawa, May 2006, pp. 172–177.

[5] **Neto, L. M., Camacho, J. R., Salerno, C. H., Alvarenga, B. P.,** 1999. Analysis of a Three-Phase Induction Machine Including Time and Space Harmonic Effects: the A, B, C Reference Frame, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 14, No. 1, pp. 80-85.

[6] **Papazacharopoulos, Z. K., Tatis, K. V., Kladas, A. G., Manias, S. N.,** 2004. Dynamic Model for Harmonic Induction Motor Analysis Determined by Finite Elements, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 19, No. 1, pp. 102-108.

[7] **Salon, S. J., Ovacık, L., Balley, J. F.,** 1993. Finite Element Calculation of Harmonic Losses in AC Machine Windings, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 29, pp. 1442-1445.

[8] **Salon, S. J.,** 1990. Finite element analysis of electrical machinery, *IEEE Computer Applications in Power*, pp. 29-32.

[9] **Smith, A. C., Williamson, S. and Smith, J. R.,** 1990. Transient currents and torques in wound-rotor induction motors using the finite element method, IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. B, No. 3, pp. 160-173.

[10] **Chan, C. C., Yan, L., Chen P., Wang, Z., Chau, K. T.,** 1994. Analysis of Electromagnetic and Thermal Fields for Induction Motors During Starting, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 9, No. 1, pp. 53-60.

[11] **Belmans, R., Verdyck, D., Geysen, W., Findlay, R. D., Szabados, B., Spencer, S. and Lie, S.,** 1992. Magnetic field analysis in squirrel cage induction motors, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, pp. 1367-1370.

[12] **Vassent, E., Meunier, G., Foggia, A., Reyne G.,** 1991. Simulation of Induction Machine Operation Using a Step by Step Finite Element Method Coupled with Circuits and Mechanical Equations, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 6, pp. 5232-5234.

[13] **Dolinar, D., De Weerdt, R., Belmans, R., Freeman, E. M.,** 1997. Calculation of Two-Axis Induction Motor Model Parameters Using Finite Elements, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 12, No. 2, pp. 133-142.

[14**] Bianchi, N., Bolognani, S. and Comelato, G.,** 1999. Finite Element Analysis of Three-Phase Induction Motors: Comparison of Two Different Approaches", *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 14, No. 4, pp. 1523-1528.

[15] **Canova, A. and Ragusa, C.,** 1995. Calculation of slot harmonic effects in induction motors by finite element method, 'The 7th International Conference on Electrical Machines and Drives', Durham, UK, September 1995, Conference Publication No. 412.

[16] **Serteller, N. F., Mergen, A. F.**, 2001. Oersted simulasyon programı ile derin oluk rotorlu sincap kafesli indüksiyon motorlarında zaman harmoniklerinin analizi, 'TMMOB-EMO Elektrik- Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği 9. Ulusal Kongresi', Kocaeli, 19-23 Eylül, pp.39-41.

[17] **Dreher, T., Perrin-Bit, R., Meunier G. and Coulomb, J. L.,** 1996. A three dimensional finite element modelling of rotating machines involving movement and external circuit, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, pp. 1070-1074.

[18] **Nakata, T., Takahashi, N., Fujiwara, K., Muramatsu, K., Ohashi, H. and Zhu, H. L.,** 1995. Practical analysis of 3-D dynamic nonlinear magnetic field using time-periodic finite element mothod, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 31, No. 3, pp. 1416-1419.

[19] **Fu, W. N., Ho, S. L., Li, H. L. and Wong, H. C.,** 2003. A Multislice Coupled Finite Element Method With Uneven Slice Length Division for the Simulation Study of Electric Machines, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 39, No. 3, pp. 1566-1569.

[20] **Lee, K., DeBortoli, M. J., Lee, M. J. and Salon, S. J.,** 1991. Coupling Finite Elements and Analytical Solution in the Airgap of Electrical Machines, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 27, No. 5, pp. 3955-3957.

[21] **Zhang, Y., Chau, K. T., Jinag, J. Z., Zhang, D. and Liu, C.,** 2006. A Finite element - analytical method for electromagnetic field analysis of electric machines with free rotation, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No. 10, pp. 3392-3395.

[22] **Thomson, W. T., Barbour, A.,** 1998. On-Line Current Monitoring and Application of a Finite Element Method to Predict the Level of Static Airgap Eccentricity in Three-Phase Induction Motors, *IEEE Transactions on Energy Conversion*, Vol. 13, No. 4, pp. 347-357.

[23] **Righi, L. A., Koltermann, P. I., Sadowski, N., Bastos, J. P. A., Carlson, R., Kost, A., Janicke, L. and Lederer D.,** 2000. Non-Linear Magnetic Field Analysis by FEM Using Langevin Function, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 36, No. 4, pp. 1236-1266.

[24] **Saitz, J.,** 2001. Magnetic Field Analysis of Induction Motors Combining Preisach Hysteresis Modeling and Finite Element Techniques, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 37, No. 5, pp. 3693-3697.

[25] **Enokizono, M., Yuki, K., and Kanao, S.,** 1994. Magnetic Field Analysis by Finite Element Method Taking Rotational Hysteresis into Account, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, pp. 3375-3378.

[26] **De Weerdt, R., Hameyer, K., Belmans, R.,** 1995. End Ring Inductance of a Squrriel- Cage Induction Motor Using 2D and 3D Finite Element Methods, 'Industry Application Conference', Orlando, US, October 1995, Proceedings Vol.1, pp. 515-522.

[27] **Ho, S. L. and Fu, W. N.,** 1998. Review and Future Application of Finite Element Methods in Induction Motors", Electric Power Component and Systems, 26:2, pp. 111-125.

[28] **Williamson, S., Lim L. H. and Robinson, M. J.,** 1990. Finite Element Models for Cage Induction Motor Analysis", *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 26, No. 6, pp. 1007-1017.

[29] **Salon, S. J., Burow, D. W., Ashley III, R. E., Ovacık, L., DeBortoli, M. J.,** 1993. Finite Element Analysis of Induction Machines in the Frequency Domain, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, pp. 1438-1441.

[30] **Reece, A. B. J. and Preston, T. W.,** 2000. Finite Element Methods in Electrical Power Engineering, New York.

[31] **Kalenderli, Ö.,** 1994. Elektrik Mühendisliğinde Sonlu Elemanlar Yöntemi Ders Notları, İstanbul.

[32] **Silvester, P., Chari, M. V. K.,** 1970. Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems, *IEEE Transactions on Power Applications and Systems*, Vol. PAS-89, pp. 1642-1651.

[33] **Özoğlu, Y.,** 1995. Sonlu Elemanlar Metodu ile Doğru Akım Motorunun Manyetik Alan İncelemesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[34] **Griffiths, D. J.,** 1996. Elektromanyetik Teori, çev. Bekir Karoğlu, Güven Kitabevi, İstanbul.

[35] **Carpenter, C. J.,** 1959. Surface integral methods of calculating forces on magnetised iron parts. *IEE Proceedings*, Part C, Monograph No. 342.

[36] **Carter, G. W.,** 1962. The electromagnetic field in its engineering aspects. Longmans, London.

[37] **Sadowski, N., Lefevre, Y., Lajoie-Mazenc, M., Cros, J.,** 1992. Finite Element Torque Calculation in Electrical Machines While Considering the Mouvement, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 28, pp. 1410-1413.

[38] **Url-1** < http://www.elec.uow.edu.au/iepqrc/files/technote3.pdf> alındığı tarih 12.12.2008.

[39] **Şahin**, **Ö.,** 2003. Elektrik Güç Sistemlerinde Harmonik Analizi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[40] **Dugan, R. C., McGranaghan, M. F., and Beaty, H. W.,** 1996. Electrical Power System Quality, McGraw-Hill.

[41] **Arrillaga, J., Bradley, D. A. and Bodger, P. S.,** 1985. Power System Harmonics, JohnWiley & Sons, New York.

[42] **Miller, A. J. V., and Dewe, M. B.,** 1992. Multichannel Continuous Harmonic Analysis in Real-Time, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 7, No. 4, pp. 1813-1819.

[43] **IEEE Working Group on Nonsinusoidal Situations,** 1996. Practical Definitions for Power System with Nonsinusiodal Waveforms and Unbalanced Loads: A Discussion, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 11, No. 1, pp. 79-101.

[44] **Emanuel, A. E.,** 1999. Apparent Power Definitions for Three-Phase Systems, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 14, No. 3, pp. 767-772.

[45] **Murpy, J. M. D., and Turnbull, F. G.,** 1988. Power Electronic Control of AC Motor, Pergamon Press, Oxford.

[46] **Mergen, A. F.,** 1998. Elektrik Makinalarında Harmonikler, Ders Notu, İstanbul.

[47] **Boduroğlu, T.,** 1964. Elektrik Makinaları Dersleri, Cilt 2, Kısım 3, İTÜ Matbaası, İstanbul.

[48] **Ansoft Maxwell,** Bilgisayar programı help dosyası.

VESİKALIK FOTO

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Duygu Bayram
Doğum Yeri ve Tarihi:	14.09.1983, İstanbul
Adres:	İTÜ Elektrik Mühendisliği Bölümü,Maslak/ İSTANBUL
Lisans Üniversite:	Elektrik Mühendisliği, İstanbul Teknik Üniversitesi