

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**AKIŞ PROBLEMLERİNİN SONLU HACİMLER METODU
İLE YAPISAL OLMAYAN HESAP AĞLARINDA ÇÖZÜMÜ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hüseyin Gökmen Aksoy
(503981007)**

101382

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 18 Temmuz 2001
Tezin Savunulduğu Tarih : 7 Ağustos 2001**

Tez Danışmanı :

Yrd. Doç. Dr. Levent KAVURMACIOĞLU

Diğer Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Erkan AYDER

Prof.Dr. Cem SORUŞBAY

AĞUSTOS 2001

ÖNSÖZ

Yardımlarından dolayı Hakan Tanrıöver'e, Dr. Aşkın Karakaş'a, Dr. Murat Sabanca'ya, Prof. Dr. Kadir Kırköprü'ye, tez danışmanım Yrd. Doç Dr. Levent Kavurmacıoğlu'na ve manevi desteğini hiç bırakmayan annem Fatma Aksoy'a teşekkür ederim.

Ağustos 2001

Hüseyin Gökmen AKSOY



İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Taraması	1
1.2 Amaç	5
2 TAŞINIM-YAYINIM DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	6
2.1 Giriş	6
2.2 Taşınım-Yayınım Denklemi	6
2.3 Taşınım-Yayınım Denkleminin Ayrıklaştırılması	6
2.3.1 Taşınım Terimlerinin Ayrıklaştırılması	7
2.3.2 Yayınım Terimlerinin Ayrıklaştırılması	12
2.3.3 Köşelerde Bağımlı Değişkenlerin Hesaplanması	14
2.3.4 Kontrol Hacimlerin Merkezlerinde Gradyanların Hesaplanması	15
2.3.5 Kaynak Terimin Ayrıklaştırılması	15
2.4 Taşınım-Yayınım Denkleminin Örnek Problem İçin Çözümü	15
2.4.1 Test Fonksiyonu	15
2.4.2 Çözüm Yöntemi	16
2.4.3 Hesaplamalar	16
2.4.4 Sonuç	23
3 AKIŞ DENKLEMLERİ VE BOYUTSUZLAŞTIRILMASI	25
4 AKIŞ DENKLEMLERİNİN AYRIKLAŞTIRILMASI VE SIMPLE ALGORİTMASI	27
4.1 SIMPLE Algoritması	27
4.2 Momentum Denklemlerinin Ayrıklaştırılması	29
4.3 Basınç Ağırlıklı İnterpolasyon Yöntemi	30
4.4 Basınç Düzeltme Denklemi	32
4.5 Sınır Koşulları	33
4.5.1 Giriş Sınır Koşulu	34
4.5.2 Basınç Sınır Koşulu	34
4.5.3 Çıkış Sınır Koşulu	34

4.5.4	Simetri Sınır Koşulu	35
4.5.5	Duvar Sınır Koşulu	36
5	AĞIZ TARAFINDAN SÜRÜLEN BOŞLUKTA AKIŞ	37
6	ANİ GENİŞLEYEN KANALDA AKIŞ	45
7	SONUÇ	61
	KAYNAKLAR	63
A	LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ	71
	ÖZGEÇMİŞ	73



KISALTMALAR

SAM : Sayısal Akışkanlar Mekaniği
SHY : Sonlu Hacimler Yöntemi
SEM : Sonlu Elemanlar Yöntemi
BPD : Basınç Poisson Denklemi
KH : Kontrol Hacmi



TABLO LİSTESİ

2.1	Yapılan hesaplamalardaki mutlak hata ϵ 'un L_1 normu.	22
2.2	Yapılan hesaplamalardaki mutlak hata ϵ 'un L_2 normu.	23
2.3	Yapılan hesaplamalardaki bağıl hata ϵ 'un L_∞ normu.	24
6.1	1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda alt duvardaki birleşme noktası.	50
6.2	2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda alt duvardaki birleşme noktası.	57
6.3	$Re = 600$ iken mevcut çalışmada bulunan birleşme noktası değerinin diğer çalışmalar ile karşılaştırılması.	60



ŞEKİL LİSTESİ

2.1	Örnek çözüm alanı.	7
2.2	İki kontrol hacminin ara yüzeyi.	8
2.3	Taşınım terimlerinin çözümü için kullanılan hesap alanı. . . .	11
2.4	Taşınım problemlerinin yakınsama eğrilerinin karşılaştırılması; —: 1. derece yukarı farklar, - - -: 2. derece yukarı farklar, ----: Sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar.	12
2.5	Taşınım problemlerinin çözümlerinin karşılaştırılması; —: kesin çözüm, - - -: Sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar, ----: 2. derece yukarı farklar, : 1. derece yukarı farklar.	13
2.6	İki kontrol hacminin ara yüzeyindeki birim vektörler.	13
2.7	ϕ 'nin çözüm alanı içerisindeki değişimi.	17
2.8	Merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar.	18
2.9	Merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda meydana gelen bağıl hata.	19
2.10	Birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar.	20
2.11	Birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda meydana gelen bağıl hata.	21
2.12	İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar. .	22
2.13	İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda meydana gelen bağıl hata.	23
4.1	Ara yüzeyde oluşturulan sanal kontrol hacmi.	30
4.2	Simetri yüzeyine komşu olan kontrol hacmi.	35
5.1	Ağız tarafından sürülen boşlukta akış problemi.	37
5.2	Ağız tarafından sürülen boşlukta akış probleminin çözümünde kullanılan yapısal hesap ağları	38
5.3	Ağız tarafından sürülen boşlukta akış probleminin çözümünde kullanılan yapısal olmayan hesap ağları	39
5.4	Re=100 iken $x = 0.5$ doğrusu boyunca u hız profilinin değişimi.	41
5.5	Re=100 iken $y = 0.5$ doğrusu boyunca v hız profilinin değişimi.	42
5.6	Re=1000 iken $x = 0.5$ doğrusu boyunca u hız profilinin değişimi.	43
5.7	Re=1000 iken $y = 0.5$ doğrusu boyunca v hız profilinin değişimi.	43
5.8	Re=100 iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda ki basınç konturları;—: yapısal olmayan hesap ağı, - - -: yapısal hesap ağı.	44
6.1	Ani genişleyen kanalda akış problemi.	45
6.2	Ani genişleyen kanalda akış problemini çözmek için kullanılan hesap ağları.	46

6.3	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=200$ iken 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	48
6.4	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	49
6.5	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=600$ iken 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	51
6.6	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=200$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	52
6.7	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	54
6.8	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=600$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	55
6.9	Ani genişleyen kanalda akış probleminde 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda alt duvarda yüzey sürtünme katsayısının değişimi.	56
6.10	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=200$ iken sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	58
6.11	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.	59
6.12	Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi sonucu elde edilen süreklilik denkleminin kalanı; - - -: 2. derece yukarı farklar yöntemi, —; Sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi.	60
A.1	BI-CGSTAB algoritması([29]).	71
A.2	ILU ön şartlandırıcı algoritması([32]).	72

SEMBOL LİSTESİ

p	: Basınç
u	: Kartezyen Kordinat sisteminde x Doğrultusundaki Hız
v	: Kartezyen Kordinat sisteminde y Doğrultusundaki Hız
ϕ	: Skaler bağımlı değişken
$\mathbf{u}$	: Hız Vektörü
$\mathbf{r}$	: Konum Vektörü
$\mathbf{n}$	: Kontrol Hacminin Yüzeye Normal Dış Birim Vektörü
$\mathbf{t}$	: Kontrol Hacminin Yüzeye Teğet Birim Vektörü
ϕ	: Skaler Bağımsız Değişken
ψ	: Akım Fonksiyonu
Ω	: Kontrol Hacminin Hacmi(İki boyutta alanı)
S	: Kontrol Hacminin Yüzey Alanı(İki boyutta uzunluğu)
λ	: İnterpolasyon Katsayısı
ρ	: Akışkanın Yoğunluğu
μ	: Akışkanın Viskozitesi
Γ	: Yayınım Katsayısı
ψ_m	: Eğim Sınırlayıcı
L	: Karakteristik Uzunluk
u_∞	: Karakteristik Hız
p_∞	: Referans Basınç
τ_w	: Duvardaki Sürtünme Gerilmesi
C_f	: Yüzey Sürtünme katsayısı ($\tau_w/0,5\rho u_\infty$)
Re	: Reynolds Sayısı: $\rho u_\infty L/\mu$
S_ϕ	: Bağımlı Değişkeni ϕ Olan Kısmi Diferansiyel Denklemin Kaynak Terimi
$Flux$	: İki Kontrol Hacminin Ara Yüzeyindeki Kütle Debisi

ÖZET

Bu çalışmada sıkıştırılamaz daimi akış problemlerinin temel değişkenler kullanılarak yapısal olmayan hesap ağlarında, sonlu hacimler yöntemi kullanılarak çözümü incelenmiştir. Basıncın ve hızların hesaplanması için SIMPLE algoritması kullanılmıştır. Çalışmada öncelikli olarak akış problemlerini tanımlayan denklemlere temel oluşturan Taşınım-Yayınım denklemi çözülmüştür. Yapılan hesaplamalar sonucu hesap ağındaki kontrol hacmi sayısı arttıkça yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarında elde edilen sonuçların birbirlerine yaklaştığı tespit edilmiştir. Ağız tarafından sürülen akış ve ani genişleyen kanalda akış problemleri çözülmüştür. Yapılan hesaplamalar sonucu yapısal olmayan hesap ağları ile yapılan çözümlemelerin hesap ağındaki kontrol hacmi sayısı arttıkça yapısal hesap ağlarında elde edilen sonuçlara yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca ikinci düzeltme adımının çözümün yakınsamasını özellikle yüksek Reynolds sayılarında iyileştirdiği tespit edilmiştir. SIMPLE algoritmasının mühendislik uygulamaları için yeterli olduğu ancak yüksek teknoloji uygulamaları için daha gelişmiş bir yöntem kullanılması gerektiği sonucuna varılmıştır.

SUMMARY

In this study solution of incompressible, steady state fluid flow problems by using primitive variables and finite volume method on unstructured grids is investigated. SIMPLE algorithm is used for the computation of pressure and velocities. Convection-Diffusion problem is solved as a beginning in order to determine the differences between unstructured and structured grids. It is seen that the results of the computations are getting closer for the structured and unstructured grids as the number of the control volumes increases. Lid-Driven Cavity and Backward Facing Step problems are solved for the test of the discretization on fluid flow problems. It is seen that results of the computations that are done with the unstructured grids are getting closer to the results of computations with structured grids. On the other hand, correction step enhances the convergency at high Reynolds numbers. It is determined that SIMPLE algorithm can be used for engineering computations but the accuracy for the scientific computations is not sufficient.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Sayısal akışkanlar mekaniği 1960'lı yılların ortalarından itibaren bilgisayar teknolojilerinin gelişmesi ile birlikte araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Özellikle 1970'li yıllarda süper bilgisayarların gelişmesi, deneysel çalışmaların maliyetlerinin yüksek olması Sayısal Akışkanlar Mekaniğine (SAM) olan ilgiyi arttırmıştır. 1980'den sonra ise bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeye paralel olarak Sayısal Akışkanlar Mekaniğinde kullanılan teknikler büyük bir gelişme göstermiştir. Geliştirilen ticari Sayısal Akışkanlar Mekaniği Yazılımları yeni ürün tasarımı sırasında ürün tasarım süresini en aza indirmek ve üründen optimum verimi elde etmek amacı ile sadece havacılık sanayiine değil, cam sanayiinden, gıda sektörüne kadar endüstrinin değişik kollarının kullanımına sunulmuştur. Kullanılan yöntemler çok gelişmiş olmalarına rağmen endüstrinin ihtiyaçlarını tam olarak karşılayabilecek düzeyde değildir. Bu nedenle Sayısal Akışkanlar Mekaniği üzerine yapılan çalışmalar devam etmektedir. Özellikle değişik durumlarada çalışabilen, kullanıcı dostu yöntemler giderek önem kazanmaktadır.

1.1 Literatür Taraması

Sayısal akışkanlar mekaniğinde akışı tanımlayan denklemler iki farklı şekilde ifade edilmektedir. Bunlardan birincisi temel değişkenlerden (hız,basınç) oluşan denklem sistemi, ikincisi ise akım fonksiyonu-girdap değişkenleri ile tanımlanan denklem sistemidir [1]. Akım fonksiyonu-girdap yaklaşımı akış problemlerinin çözümünde uzun yıllar kullanılmıştır. Bu yaklaşım özellikle sıkıştırılamaz laminar akış problemlerinde iyi sonuçlar vermektedir. Ancak bu yaklaşımın üç boyutlu, türbülanslı, çok fazlı akışlar gibi akış problemlerine uygulanmasının zor olması araştırmacıları temel değişkenler ile tanımlanan akış denklemlerini kullanmaya itmiştir.

Özellikle sıkıştırılamaz akışlarda basınç ile hızlar arasında bağı sağlayan belirgin bir denklem olmaması sıkıştırılamaz akış problemlerinin çözümünde önemli bir zorluk olarak karşımıza çıkmaktadır. Sıkıştırılamaz akışlarda temel denklemlerin ayrıklaştırılarak çözülmesinde değişik metodlar kullanılmaktadır. En temel yöntem bütün denklemlerin aynı anda birleşik olarak çözülmesidir. Bu yöntemde Navier-Stokes denklemleri ve süreklilik denklemini ayrıklaştırılır. Basınç, hızlar ve diğer değişkenler sanki bir değişkenmiş gibi ele alınarak katsayılar matrisi oluşturulur ve oluşturulan lineer denklem sistemi çözülür[2]. Ancak bu yöntem çok büyük ayrık matrisin çözümünü gerektirmektedir. Bu ise uzun hesaplama zamanı gerektirmektedir. Birleşik çözümün dışında kalan diğer yöntemler ayrık çözüm olarak adlandırılır. Bu tür yöntemlerde akışı tanımlayan denklemler ayrı ayrı çözülür. Basınç hesaplamak için ise süreklilik denklemini kullanılır ve ayrık yöntemler bu noktada birbirinden ayrılır. Bu metodlardan biri Basınç Poisson Denkleminin çözümüdür[3]. Momentum denkleminin diverjansı alınır ve sürekliliği sağlayacak şekilde sadeleştirilir. Bunun sonucu olarak ana değişkeni basınç olan Poisson denklemini elde edilir. Basınç elde edilen Poisson denklemini çözülerek hesaplanır. Diğer bir yöntem ise izdüşüm yöntemidir[2]. Bu yöntemde ise Navier-Stokes denklemleri 1 boyutlu halde yazılır ve bir boyutta sürekliliği sağlayacak şekilde sadeleştirilir. Elde edilen denklem iki veya üç boyutlu süreklilik denklemine konularak basınç denklemini elde edilir. Bu denklemin ayrıklaştırılarak çözümü sonucu basınç hesaplanır. Bu yöntem özellikle son yıllarda türbülanslı ve zamanla değişen akışların çözümünde sıkça kullanılmaktadır[7, 5, 4, 6]. Sıkıştırılamaz akış problemlerinde kullanılan diğer bir yöntem ise yapay sıkıştırılabilirlik yöntemidir[8]. Bu yöntemde süreklilik denklemine yoğunluğun zamana göre türevi eklenir ve basıncın, yoğunlukla doğru orantılı olarak değiştiği kabul edilir. Süreklilik denklemini kullanılarak yoğunluk hesaplanır. Hesaplanan yoğunluk değeri yapay sıkıştırılabilirlik katsayısı ile çarpılarak basınç hesaplanır. Çözüm kararlı hale yakınsayınca süreklilik denklemindeki zamana göre türevi sıfır olur. Ancak bu metod sadece zamana bağlı olmayan akış problemlerine uygulanabilir. Basıncın hesaplanması için kullanılan yöntemlerden bir tanesi

ise SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) ve SIMPLE tipi yöntemlerdir[9]. Bu yöntemlerde basınç ile hızlar arasındaki bağı sağlamak amacı için süreklilik denklemi kullanılır. Ancak SIMPLE'da Basınç Poisson Denklemi ve iz düşünüm metodundan farklı olarak süreklilik denkleminde basınç değil basınç düzeltme değerleri hesaplanır. SIMPLE algoritması daha sonra geliştirilerek SIMPLER, SIMPLEC ve PISO gibi türevleri geliştirilmiştir[9, 10, 11]. SIMPLE algoritması kolay uygulanması ve hem sıkıştırılabilir [12] hemde sıkıştırılamaz akışlara uygulanabilir olması nedeni ile bir çok araştırmacı ve ticari analiz programı tarafından kullanılmıştır.

Akış problemlerinin çözümünde yapısal ve yapısal olmayan olmak üzere iki tip hesap ağı kullanılmaktadır. Yapısal hesap ağları yapısal olmayan hesap ağlarına göre daha az hafıza kullanmaktadır[13]. Ancak karmaşık geometrilere uygulanmasının zor olması ve gelişen bilgisayar teknolojisi yapısal hesap ağlarının yerini yapısal olmayan hesap ağlarının almasına sebep olmuştur. Hem yapısal, hemde yapısal olmayan hesap ağlarında bağımlı değişkenlerin saklanacağı noktaların yeri önemlidir. Sayısal akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde kullanılan üç tip bilgi saklama şekli vardır. Bunlar hücre merkezli, köşe merkezli ve hücre-köşe olarak adlandırılır. Basınç denklemi ile momentum denklemlerinin aynı kontrol hacminde hücre merkezli sistem kullanılarak merkezi farklar yöntemi ile ayrıklaştırılması basınç ile hızların farklı komşu kontrol hacimleri kullanılarak hesaplanmasına yol açmaktadır[13]. Dama tahtası problemi olarak adlandırılan bu problem çözümde dalgalanmalara yol açabilmekte, bu dalgalanmalar ise programın yakınsamasını engelleyebilmektedir[13]. Bu problemin çözümü için Rhie ve Chow[14] basınç ağırlıklı interpolasyon yöntemini geliştirmişlerdir. Bu yöntemde iki kontrol hacminin ara yüzeyinde sanal bir kontrol hacmi kullanılarak ara yüzeyde yüzeye normal yöndeki hız hesaplanır. Bu hız ise momentum denklemlerinin lineerleştirilmesinde ve basınç denkleminin çözümünde kullanılır. Bu yöntem özellikle SIMPLE ve benzeri algoritmalar kullanan araştırmacılar tarafından çözüm alanı içerisindeki basınç dalgalanmalarını engellemek amacı ile kullanılmıştır.

Dama tahtası problemi hızların ve basınçın farklı kontrol hacimler kullanılarak hesaplanması durumunda görülmemektedir[13, 4]. Ancak bu sistemin yapısal olmayan çözüm ağlarına uygulanması hem zor hemde daha fazla hafıza gerekmektedir. Ancak basınç ağırlıklı interpolasyonu gerektirmemesi nedeni ile bazı araştırmacılar tarafından yapısal olmayan çözüm ağlarında da kullanılmıştır[40].

Sayısal akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde diğer bir önemli konu ise taşınım terimlerinin interpolasyonunda kullanılacak olan yöntemlerdir. Özellikle taşınım terimlerinin etkin olduğu akışlarda kullanılacak olan interpolasyon yöntemi daha da önem kazanmaktadır. Uzun yıllar Taylor serileri kullanılarak birinci derece yukarı farklar yöntemi ve ikinci derece merkezi farklar yöntemi kullanılmıştır. Birinci derece yukarı farklar yöntemi kararlı olması nedeni ile taşınım terimlerinin ayrıklaştırılmasında birçok araştırmacı tarafından uzun yıllar kullanılmıştır. Ancak kısaltılmış ikinci derece terimler nedeni ile sayısal yayılım oluşmakta ve elde edilen çözümdeki hata artmaktadır[15]. Diğer taraftan ikinci derece yukarı farklar yönteminde ise ani değişim gösteren akış bölgelerinde sayısal dağılma hatası görülmekte, yani ani değişim gösteren bölgeler çevresinde çözümde dalgalanmalar oluşmakta [16, 15], bu ise bazen programın yakınsamamasına yol açmaktadır. Diğer taraftan sıkça kullanılan 2. derece yukarı farklar yöntemi ise ikinci derece hassasite sahiptir. İkinci derece yukarı farklar yönteminde ani değişim gösteren bölgelerde dalgalanmalara sebep olmakta ancak bu dalgalanmalar programın ıraksamasına sebep olacak kadar yüksek genliğe sahip olmamaktadır. Ayrıca Gaskell ve Lau [17]'da belirtildiği gibi birinci derece yukarı farklar ve ikinci derece yukarı farklar metodu kararlıdır, merkezi farklar yöntemi ise nőtürdür. Diğer taraftan sıkça kullanılan QUICK ise kararlı olması ve daha az dalgalanmaya sebep olması nedeni ile bir çok araştırmacı tarafından benimsenmektedir[18, 17]. Ancak yapısal olmayan hesap ağlarında uygulama yapılmamıştır. İkinci derece yukarı farklar yönteminde oluşan dalgalanmaları engellemek amacı ile araştırmacılar yapay yayılım[19] veya değişik sınırlayıcılar kullanılmaktadır[23, 20, 25]. Özellikle yapısal olmayan hesap ağlarında kullanılan ve Venkatakrishnan

[21] tarafından sıkıştırılabilir akışlar için geliştirilen sınırlayıcı, akışın özelliklerinin ani değişim göstermediği bölgelerde etkisiz olması, ancak özellikle hesaplamının ilk döngülerinde meydana gelen dalgalanmalardan dolayı programının ıraksamasını önlemesi amacı ile kullanılmıştır[23]. Jasak ve arkadaşları [20] tarafından yapısal olmayan çözüm ağları için geliştirilen sınırlayıcı ise probleme bağlı olarak parametreye bağlı olması nedeni ile fazla uygulama alanı bulmamıştır. Ayrıca bazı araştırmacılar sınırlayıcıları dama tahtası problemini önlemek amacı ile kullanmışlardır[25].

1.2 Amaç

Bu çalışmanın amacı sıkıştırılamaz akış problemlerini sonlu hacimler yöntemi kullanarak yapısal olmayan hesap ağlarında çözmektir. Bu amaçla ağız tarafından sürülen boşlukta akış ve ani genişleyen kanalda akış problemi test problemleri olarak seçilmiştir. Problemler SIMPLE algoritması kullanılarak çözülmüş, taşınım terimlerinin ayrıklaştırılması için birinci derece yukarı farklar, ikinci derece yukarı farklar ve merkezi farklar yöntemleri kullanılmıştır.

Öncelikli olarak Navier-Stokes ve birçok akış denklemine temel olan taşınım-yayınım denkleminin ayrıklaştırılması Bölüm 2'de anlatılmış ve Shih[26] tarafından geliştirilen yöntem ile ayrıklaştırmanın doğruluğu ve yapısal ile yapısal olmayan hesap ağları arasındaki farklar ortaya konulmuştur. 3. Bölümde eş sıcaklıklı, sabit ağıdalıklı sıkıştırılamaz bir akışı tanımlayan denklemler ve bunların boyutsuzlaştırılması anlatılmıştır. 4. Bölümde SIMPLE algoritması ve sınır koşullarının uygulanması anlatılmıştır. 5. Bölümde ise ağız tarafından sürülen boşlukta akış probleminin çözümü sonucu elde edilen sonuçlar irdelenmiştir. 6. Bölümde ise ani genişleyen kanalda akış probleminin çözümü sonucu elde edilen sonuçlar incelenmiştir. 7. ve son bölümde ise elde edilen sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır.

BÖLÜM 2

TAŞINIM-YAYINIM DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

2.1 Giriş

Bilindiği üzere taşınım-yayınım problemi, akışkanlar mekaniğinde kullanılan diferansiyel denklemlerin hemen hepsi ile benzer olması sebebiyle Sayısal Akışkanlar Mekaniği(SAM) üzerine araştırmalar yapan araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Akış denklemlerinin çözümüne ön hazırlık olması amacı ile bu bölümde zamana bağlı olmayan taşınım-yayınım probleminin Sonlu Hacimler Yöntemi(SHY) ile çözümü anlatılacaktır.

2.2 Taşınım-Yayınım Denklemi

Genel taşınım-yayınım denklemi en çok kullanılan hali ile;

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Gamma \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + S_\phi \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır.

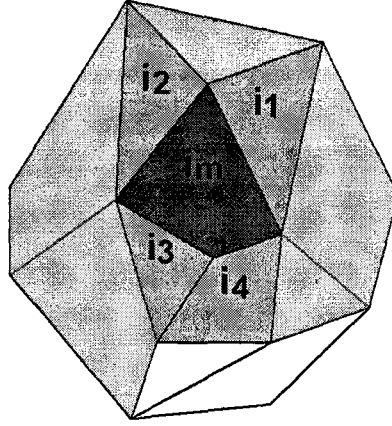
Bundan sonra yapılacak işlemleri kolaylaştırmak amacı ile taşınım-yayınım denklemini integral formda ise;

$$\oint_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \phi dS = \oint_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS + \int_\Omega S_\phi d\Omega \quad (2.2)$$

şeklinde yazabiliriz.

2.3 Taşınım-Yayınım Denkleminin Ayrıklaştırılması

Taşınım-yayınım probleminin ayrıklaştırılması sırasında 2.2 no'lu denklemin her bir terimini ayrı ayrı inceleyeceğiz.



Şekil 2.1: Örnek çözüm alanı.

2.3.1 Taşınım Terimlerinin Ayrıklaştırılması

Öncelikli olarak taşınım terimlerini ele alalım. Bunun için Şekil 2.1’de koyu renkle gösterilem i_m indisli kontrol hacmini ele alalım. 2.2 nolu denklemden bilindiği üzere taşınım terimlerini

$$C = \oint_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \phi dS \quad (2.3)$$

şeklinde yazabiliriz. 2.3 no’lu denklem sayısal olarak

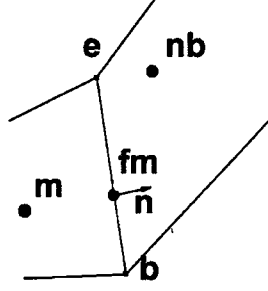
$$C_{i_m} = \sum_i (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i) \phi_i \Delta S_i \quad (2.4)$$

şeklinde hesaplanabilir. Eğer herbir yüzeyi tek tek ele alırsak,

$$C_i = (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i) \phi_i \Delta S_i, \quad (2.5)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada hız vektörü $\mathbf{u}_i$ ve normal vektör $\mathbf{n}_i$ bilinmektedir. Yüzeyde ϕ ’nin değerini hesaplamak için en çok kullanılan iki yöntem yukarı farklar yöntemi ve merkezi farklar yöntemidir. Bu yöntemleri açıklamak amacı ile dik hesap ağında problemi inceleyelim.

Öncelikli olarak merkezi farklar yöntemini inceleyelim. İki kontrol hacminin ara yüzeyinde ϕ değeri ϕ_f aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.



Şekil 2.2: İki kontrol hacminin ara yüzeyi.

$$\phi_f = \frac{\phi_{im} + \phi_{inb}}{2} \quad (2.6)$$

Merkezi farklar yöntemi ikinci derece hassasiyete sahiptir. Bu yöntemi düzgün hesap ağları için genelleştirmek amacı ile 2.7 no'lu denklemdeki gibi yazabiliriz.

$$\phi_f = (1 - \lambda)\phi_{im} + \lambda\phi_{inb} \quad (2.7)$$

2.7 no'lu denklemde λ interpolasyon katsayısıdır ve

$$\lambda = \frac{(\mathbf{r}_{fm} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{r}_{nb} - \mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{n}} \quad (2.8)$$

denklemleri ile hesaplanır. 2.8 no'lu denklemde $\mathbf{n}$ normal dış vektör, $\mathbf{r}_{fm}$, $\mathbf{r}_m$ ve $\mathbf{r}_{nb}$ ise sırasıyla kontrol hacmi yüzeyinin orta noktasının ve yüzeyin solunda ve sağında kalan kontrol hacimlerinin merkezlerinin konum vektörleridir.

Şekil 2.2'den de görülebileceği gibi yapısal olmayan çözüm ağlarında iki komşu kontrol hacmi arasındaki doğru kontrol hacmi yüzeyinin orta noktasından geçmeyebilir. Bu durum yapılan interpolasyonun yapısal olmayan hesap ağlarında birinci derece hassasiyete sahip olmasına neden olur. Bu durumu düzeltmek için ϕ 'nin fi noktasındaki değerinin fm noktasına ötelenmesi gerekir. Bu ötelemeyi yapabilmek için b ve e köşe noktalarında ϕ 'nin değerini bildiğimizi varsayalım. Öncelikle fm noktası etrafında fi noktası için Taylor serisini yazalım.

$$\phi_{fi} = \phi_{fm} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}|_{fi}(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_{fm}) \cdot \mathbf{t} \quad (2.9)$$

2.9 no'lu denklemde eşitliğin sağındaki ikinci terimi eşitliğin soluna alırsak kontrol hacminin orta noktasında ϕ 'nin değerini hesaplamış oluruz.

$$\phi_{fm} = \phi_{fi} - \frac{\phi_e - \phi_b}{\Delta S}|_{fm}(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_{fm}) \cdot \mathbf{t} \quad (2.10)$$

Köşelerde bağımlı değişkenleri hesaplamak amacı ile literatürde değişik yöntemler kullanılmıştır. [12] no'lu referansda köşeye bağlı kontrol hacimlerindeki bağımlı değişkenlerin aritmetik ortalamasını almıştır. [7] no'lu referansda ise alan ağırlıklı ortalama yöntemi kullanılmıştır. Her iki yöntemde yapısal veya belirli bir düzene sahip hesap ağlarında ikinci derece hassasiyete sahiptir. Ancak karmaşık yapısal olmayan hesap ağlarında birinci derece hassasiyete sahiptirler. Yukarıda anlatılan metod bütün hesap ağlarında ikinci derece hassasiyete sahiptir ve kolayca uygulanabilir.

Yukarı farklar yönteminde ise ara yüzeydeki akışın yönüne bakılır.

$$\begin{aligned} \phi_{fm} &= \phi_m & \text{Eğer } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ \phi_{fm} &= \phi_{nb} & \text{Eğer } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.11 no'lu denklemden de anlaşılacağı gibi yukarı farklar yöntemi bütün hesap ağlarında birinci derece hassasiyete sahiptir. İkinci derece hassasiyete sahip yukarı farklar yönteminde kontrol hacimlerinin merkezlerinde bağımlı değişkenin gradyanı kullanılır.

$$\begin{aligned} \phi_{fm} &= \phi_m + \nabla \phi|_m \cdot (\mathbf{r}_{fm} - \mathbf{r}_m) & \text{Eğer } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ \phi_{fm} &= \phi_{nb} + \nabla \phi|_{nb} \cdot (\mathbf{r}_{fm} - \mathbf{r}_{nb}) & \text{Eğer } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sınırlayıcı Kullanılması

Sınırlayıcılar özellikler sıkıştırılabilir akış problemlerini çözen araştırmacılar tarafından akış alanı içerisinde ani değişim gösteren bölgeler etrafında oluşan dalgalanmaları en aza indirmek ve kullanılan algoritmanın daha hızlı yakınsamasını sağlamak amacı ile kullanılmaktadır. Son yıllarda ise sıkıştırılamaz akış problemleri ile uğraşan araştırmacılar tarafından özellikle ilk döngülerde meydana gelen dalgaları sönmölemek amacı

ile kullanılmaktadır. Uygulanmasının daha kolay olması nedeni ile eğim sınırlayıcıları daha çok kullanılmaktadır[25, 35]. Sınırlayıcıların karşılaştırmaları [15, 20, 25, 21] no'lu kaynaklarda yapılmıştır. Bu bölümde ise Venkatakrisnhan [21] tarafından yapısal olmayan hesap ağları için geliştirilmiş olan sınırlayıcının uygulanması ve akış problemlerinde görülen değişik profillerde verdiği sonuçların karşılaştırılması yapılacaktır.

Eğim sınırlayıcıları özellikle ikinci ve daha yüksek derecelerde ayrıklaştırılmış yukarı farklar yöntemi ile taşınım terimlerinin ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan dalgalanmaları yok etmek amacı ile 2.12 denklemindeki gradyan teriminin bir katsayı ile çarpılmasını sağlayarak gradyanın etkin olup olmamasını sağlar. Bundan sonraki kısımlarda ikinci derece yukarı farklar yönteminde $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda sınırlayıcı uygulanmış 2 derece yukarı farklar yöntemi 2.13 denklemindeki gibi olur.

$$\phi_{fm} = \phi_m + \psi_m \cdot \nabla \phi|_m \cdot (\mathbf{r}_{fm} - \mathbf{r}_m) \quad \text{Eğer } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0 \quad (2.13)$$

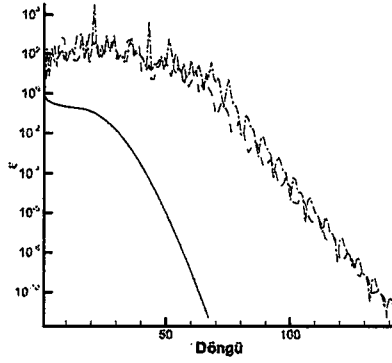
$$\psi_m = \min(\psi_{mj}) \quad j = 1, nb \quad (2.14)$$

ψ_m eğim sınırlayıcı ise 2.14 denkleminde olduğu gibi tanımlıdır. ψ sınırlayıcı fonksiyonu Venkatarishnan [21] tarafından 2.15 denkleminde olduğu gibi tanımlanır.

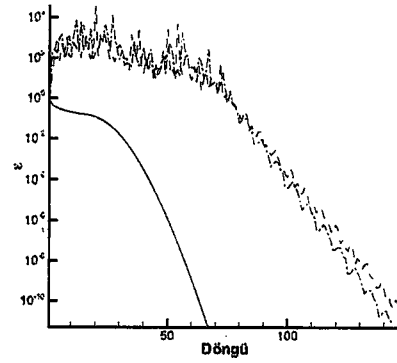
$$\psi\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right) = \frac{1}{\Delta_2} \left[\frac{\Delta_1^2 \Delta_2 + 2\Delta_2^2 \Delta_1}{\Delta_1^2 + 2\Delta_2^2 + \Delta_2 \Delta_1} \right] \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \phi_{fm} - \phi_m \\ \Delta_1 &= \phi_m^{max} - \phi_m \quad \text{Eğer } \phi_{fm} > 0 \\ \Delta_1 &= \phi_m^{min} - \phi_m \quad \text{Eğer } \phi_{fm} < 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.16 denkleminde ϕ_{fm} 2.13 denkleminde $\psi_m = 1$ alınarak hesaplanır. ϕ_m^{max} o kontrol hacmindeki ϕ değerini hesaplamak için kullanılan kontrol hacimlerinin maksimumudur. ϕ_m^{min} 'de ϕ_m^{max} benzer şekilde hesaplanır.



(a) Basamak Fonksiyon



(b) Yarı Elips

Şekil 2.4: Taşınım problemlerinin yakınsama eğrilerinin karşılaştırılması; — -: 1. derece yukarı farklar, - - -: 2. derece yukarı farklar, ----: Sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar.

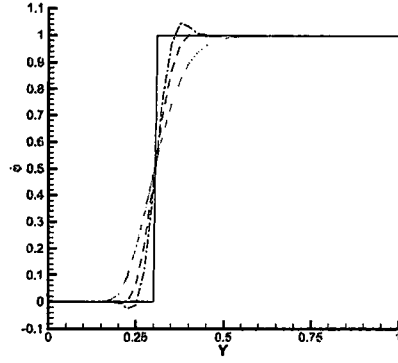
yapılan testde hemde yarı elips kullanılarak yapılan testte asıl fonksiyona en yakın sonucu vermiştir. Diğer taraftan her iki fonksiyonda da ani değişim bölgesine yakın yerde dalgalanma meydana geldiği görülmektedir. Sınırlayıcı kullanıldığı zaman bu dalgalanmanın yok olduğu, ancak hatanın arttığı görülmektedir. Birinci derece yukarı farklar yöntemi kullanıldığı zaman ise dalgalanma görülmemekte, fakat kesilmiş olan terimlerden kaynaklanan yayılım hatayı arttırmaktadır.

2.3.2 Yayılım Terimlerinin Ayırıklaştırılması

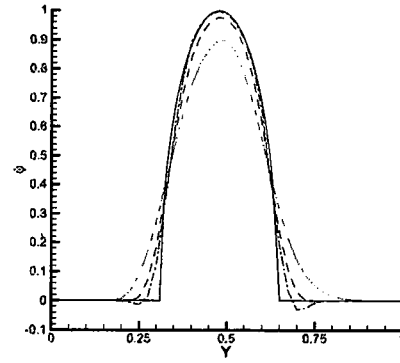
Yayılım terimlerinin ayırıklaştırılmasını, taşınım terimlerinin ayırıklaştırılmasına benzer bir şekilde, Şekil 2.1'de koyu renkle gösterilen i_m indisli kontrol hacmini ele alarak yapalım. 2.2 nolu denklemden bilindiği üzere yayılım terimleri 2.19 no'lu denklemdaki şekli ile yazılabilir.

$$D_{i_m} = \int_S \Gamma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.19)$$

2.19 no'lu denklemden görülebileceği üzere bir kontrol hacminde yayılım terimlerinin integrali yüzeylerdeki yayılım akılarının toplamı şeklinde yazılabilir. Bu nedenle yayılım terimlerinin ayırıklaştırılmasını tek bir yüzey



(a) Basamak Fonksiyon

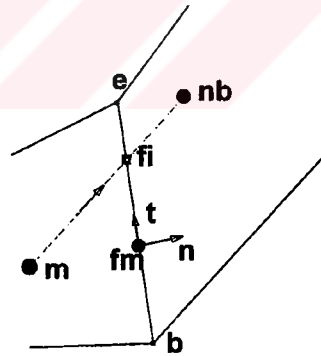


(b) Yarı Elips

Şekil 2.5: Taşıma problemlerinin çözümlerinin karşılaştırılması; —: kesin çözüm, - - -: Sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar, -.-.-: 2. derece yukarı farklar, : 1. derece yukarı farklar.

için incelememiz yeterli olacaktır.

$$D_{im} = \sum_i \Gamma \nabla \phi_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i \quad (2.20)$$



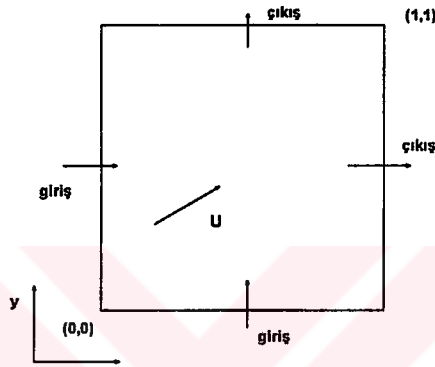
Şekil 2.6: İki kontrol hacminin ara yüzeyindeki birim vektörler.

İki kontrol hacminin ara yüzeyinde ϕ 'nin gradyanının normalaş doğrultu üzerine iz düşümü Mathur ve Murty [35] 'de belirtildiği gibi en genel halde 2.21 denklemindeki gibi yazılabilir.

Örnek Profillerin Sınırlayıcı Kullanılarak Çözümü

Test problemlerini çözmek amacı ile Şekil 2.3 'de görülen çözüm alanı 50x50 düzgün kontrol hacmine ayrılmıştır.

Sınırlayıcı kullanılarak elde edilen sonuçların birinci ve ikinci derece yukarı farklar yöntemleri ile karşılaştırmak amacı ile 2 farklı fonksiyon kullanılmıştır.



Şekil 2.3: Taşınım terimlerinin çözümü için kullanılan hesap alanı.

Kullanılan fonksiyonlar 2.17 no'lu denklemde belirtilen basamak fonksiyon ve 2.18 no'lu denklemde gösterilen yarı elipsdir. Ayrıca akış alanı sabit ve x eksenine ile 30 derece açı yapacak şekilde seçilmiştir.

$$\phi_b = 1.0 \quad \text{Eğer } y \geq 1/6 \text{ ve } x = 0 \quad (2.17)$$

$$\phi_b = \sqrt{1 - \left(\frac{y - \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}}\right)^2} \quad \text{Eğer } 1/6 \leq y \leq 1/2 \text{ ve } x = 0 \quad (2.18)$$

Şekil 2.4 'de görüldüğü gibi birinci derece yukarı farklar yöntemi düzgün bir şekilde yakınsamaktadır. Diğer taraftan gerek sınırlayıcı uygulanmış ikinci derece yukarı farklar yöntemi gerekse ikinci derece yukarı farklar yöntemi hemen aynı yakınsama eğrisini izlemiştir. Şekil 2.5'de de görüldüğü gibi ikinci derece yukarı farklar yöntemi hem basamak fonksiyon kullanılarak

$$\nabla \phi_f m \cdot \mathbf{n} = \frac{\phi_{nb} - \phi_m}{dr} + \frac{\phi_e - \phi_b}{dr \Delta S} (-(y_{nb} - y_m)n_x + (x_{nb} - x_m)n_y) \quad (2.21)$$

2.21 no'lu denklemdende görüldüğü üzere yayınım terimlerinin ayrıklaştırılması sırasında kontrol hacminin köşelerinde ϕ 'nin hesaplanması gerekmektedir. Hesap ağının dik olması durumunda 2.21 no'lu denklemin ikinci terimi sıfır olmaktadır. Bu ikinci terim genellikle açık olarak ayrıklaştırılarak kaynak terime eklenmektedir. 2.21 no'lu denklemde dr iki kontrol hacminin birbirlerine ara yüzeye dik uzaklıklarıdır.

2.3.3 Köşelerde Bağımlı Değişkenlerin Hesaplanması

Biraz önce belirtildiği gibi yapısal olmayan hesap ağlarında hem taşınım, hemde yayınım terimlerinin ayrıklaştırılması için kontrol hacimlerinin köşelerinde ϕ değerine gereksinim duyulmaktadır. Burada görüleceği üzere köşelerde ϕ 'nin değerini hesaplamak için kullanılabilecek yol, o köşeye bağlı kontrol hacimlerinin orta noktaları etrafında yazılmış olan Taylor serilerini kullanmaktır.

Şimdi seçilen köşeye bağlı kontrol hacimlerinden herhangi bir tanesinin orta noktası etrafında seçilen köşe için Taylor serisini yazalım.

$$\phi_a = \phi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x}|_i (x_a - x_i) + \frac{\partial \phi}{\partial y}|_i (y_a - y_i) + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \quad (2.22)$$

Benzer şekilde seçilen köşe için, o köşeye bağlı diğer kontrol hacimlerinin etrafında da benzer şekilde Taylor serisi yazıp, bunların aritmetik ortalamasını alırsak ϕ 'nin değerini ikinci derece hassasiyet ile hesaplamış oluruz.

$$\phi_a^k = \frac{1}{s_k} \sum_i (\phi_i^k + \frac{\partial \phi}{\partial x}|_i^k (x_a - x_i) + \frac{\partial \phi}{\partial y}|_i^k (y_a - y_i)) \quad (2.23)$$

2.23 no'lu denklemde s o köşeye bağlı olan kontrol hacimlerinin sayısını, k hangi iterasyon olduğunu göstermektedir.

2.3.4 Kontrol Hacimlerin Merkezlerinde Gradyanların Hesaplanması

Kontrol hacimlerinin merkezlerinde gradyanları hesaplamak için Green-Gauss teoremi kullanılır ve 2.24 no'lu denklemdeki gibi hesaplanır.

$$\nabla\phi|_m = \frac{\sum_i \phi_{fm} \cdot \mathbf{n}_i \Delta S}{A_m} \quad (2.24)$$

2.3.5 Kaynak Terimin Ayırıklaştırılması

Kaynak terimi S_ϕ 'nin integrali birinci derece bir yaklaşım ile 2.25 no'lu denklemdeki gibi hesaplanabilir.

$$S_i = S_\phi A_i \quad (2.25)$$

Sonuç olarak yukarıda anlatılmış olan yöntemleri kullanarak yapılan ayırıklaştırma ile elde edilen lineer denklem sisteminin çözümü bize 2.1 ve 2.2 no'lu denklemlerde iki değişik şekilde yazılmış olan denklemin çözümünü verecektir.

2.4 Taşınım-Yayınım Denkleminin Örnek Problem İçin Çözümü

Taşınım-Yayınım probleminin sonlu hacimler metodu ile test etmek için Shih [26] tarafından geliştirilen yöntem kullanılmıştır.

2.4.1 Test Fonksiyonu

Test fonksiyonu olarak 2.26 no'lu denklemdeki trigonometrik fonksiyonu seçilmiştir. Akım fonksiyonu ise 2.27 denlemindeki gibi seçilmiştir.

$$\phi = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (2.26)$$

$$\psi = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (2.27)$$

x e y yönlerindeki hızlar akım fonksiyonundan 2.28 gibi türetilmiştir.

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Eğer 2.26 ve 2.28 no'lu denklemlerdeki ϕ e hızların fonksiyonları 2.1 no'lu denkleme yerleştirilip gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa 2.29 no'lu denklemdeki kaynak terimi elde edilir.

$$S_\phi = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (2.29)$$

2.4.2 Çözüm Yöntemi

Hesaplamalar Merkezi Farklar, Yukarı Farklar ve İkinci Derece Yukarı Farklar yöntemleri kullanılarak kare şeklinde $[0, 1] \times [0, 1]$ büyüklüğünde bir çözüm alanında Dirichlet sınır koşulu ile yapılmıştır. Çözümlerde düzgün dik ve yapısal olmayan hesap ağları kullanılmıştır. Elde edilen lineer denklem sistemi Bi-CGSTAB metodu ile çözülmüştür. Bu metodun detayları eklerde verilmiştir.

2.4.3 Hesaplamalar

Bütün çözümlemelerde daha sağlıklı karşılaştırma yapmak amacı ile kontrol hacmi sayısının yaklaşık olarak eşit olmasına dikkat edilmiştir. Çözümlemelerde hesap ağlarını ve interpolasyon yöntemlerini karşılaştırmak amacı ile bağıl hata ve mutlak hata ayrı olarak incelenmiştir. Mutlak hata 2.30 no'lu denkleme, bağıl hata ise 2.31 no'lu denkleme göre hesaplanmıştır.

$$\varepsilon = |\phi_{exact} - \phi_{computed}| \quad (2.30)$$

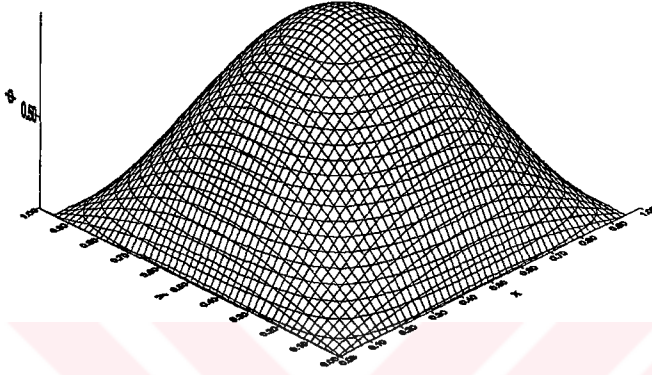
$$\epsilon = \left| \frac{\phi_{exact} - \phi_{computed}}{\phi_{exact}} \right| \quad (2.31)$$

Oluşan mutlak ve bağıl hatanın karşılaştırmak amacı ile hataların L_1 , L_2 ve L_∞ normları kıyaslanmıştır. Bu normlar sırası ile 2.32, 2.33 ve 2.34 no'lu denklemlerde herhangi bir vektör için tanımlanmıştır.

$$\| \mathbf{x} \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (2.32)$$

$$\| \mathbf{x} \|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{(1/2)} \quad (2.33)$$

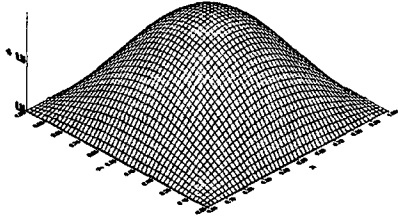
$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (2.34)$$



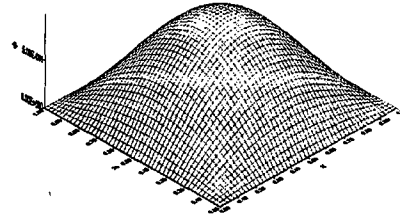
Şekil 2.7: ϕ 'nin çözüm alanı içerisindeki değişimi.

Şekil 2.7'den de görüldüğü gibi ϕ çözüm alanı içerisinde ani değişimler göstermemektedir. Bu nedenle Şekil 2.8'de de görüldüğü üzere merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda hem yapısal olmayan hesap ağında, hem de dik hesap ağında çözüm alanı içerisinde ani ve gerçekçi olmayan yükseltiler veya dalgalanmalar tespit edilmemiştir.

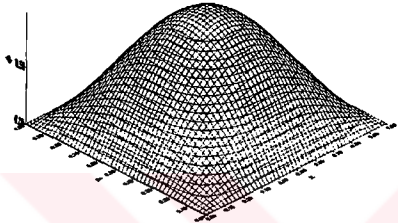
Merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda Şekil 2.9'de bağıl hata ϵ incelenmiş ve dik hesap ağlarında elde edilen çözümün çözüm alanı içerisinde sabit olduğu ve bağıl hatanın 2500 KH için 0,0003291, 625 KH için 0,001317 olduğu tespit edilmiştir. Yapısal olmayan hesap ağlarında ise bağıl hatanın çözüm alanı içerisinde değişken olduğu, özellikle çözüm alanı köşelerinde bağıl hatanın daha yüksek olduğu, bu bölgelerde 661 KH ile yapılan hesaplamalarda hatanın 10^{-2} mertebelerine, 2462 KH ile yapılan hesaplamalarda ise 10^{-3} mertebelerine çıktığı görülmüştür. 661KH ile yapılan hesaplamalarda bağıl hatanın çözüm alanı içerisinde çok az değiştiği görülmüş, 2462 KH ile yapılan hesaplamalarda ise bağıl hatanın çözüm alanı içerisinde de değişken olduğu ancak genel olarak 10^{-4} mertebelerinde olduğu



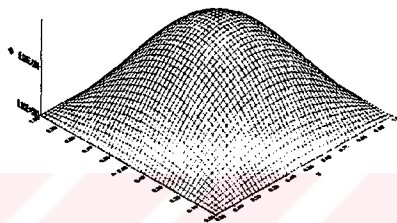
(a) Dik hesap ağı 625 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



(c) Dik hesap ağı 2500 KH



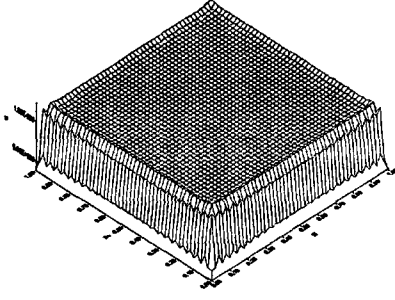
(d) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

Şekil 2.8: Merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar.

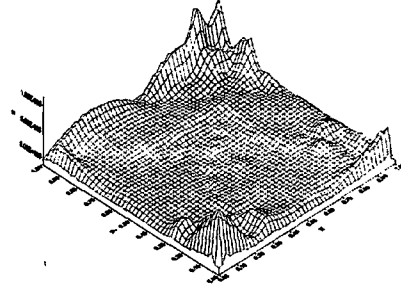
Şekil 2.9'de görülmektedir. Tablo 2.1 incelendiği zaman dik 2500 KH ile yapılan hesaplamada mutlak hata ϵ 'nın L_1 normunun 2462 KH ile yapılan hesaplamadakine göre daha yüksek olduğu tespit edilmiştir. Benzer durum 661 KH ile yapılan hesaplamalar ve 625 KH ile yapılan hesaplamalar içinde geçerlidir.

Şekil 2.10'de birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar görülmektedir. Burada görüldüğü üzere birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda elde edilen çözümlerde gerçekçi olmayan dalgalanmalar veya ani değişimler tespit edilmemiştir.

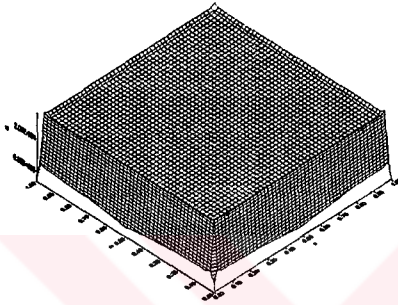
Birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen bağıl hata grafikleri Şekil 2.11'de gösterilmiştir. Bu grafikleri incelediğimiz zaman düzgün dik hesap ağlarında bağıl hatanın çözüm alanı içerisinde sabit olmadığını sinüsoidal olarak değiştiği görülmektedir.



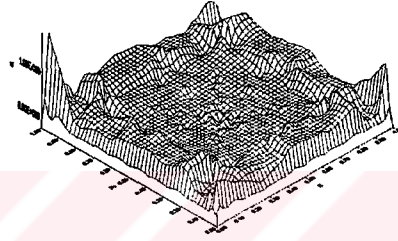
(a) Dik hesap ağı 625 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



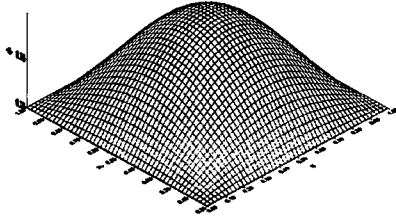
(c) Dik hesap ağı 2500 KH



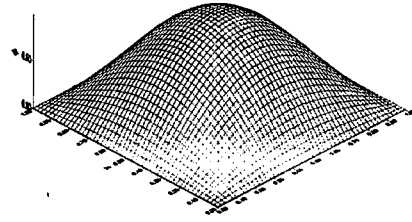
(d) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

Şekil 2.9: Merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda meydana gelen bağıl hata.

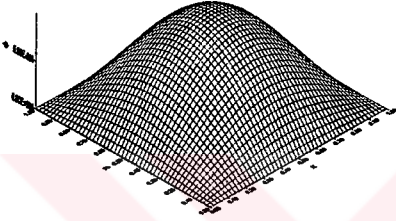
Yapısal olmayan hesap ağlarında ise hatanın benzer bir şekilde çözüm alanı içerisinde sinusoidal olarak değiştiği ancak çözüm alanının orta kısmında yer alan ve üçgen kontrol hacimlerinden oluşan bölgede hemen hemen sabit olduğu görülmektedir. Hem yapısal dik hesap ağlarında elde edilen sonuçlarda, hem de yapısal olmayan hesap ağları ile elde edilen sonuçlarda bağıl hatanın çözüm alanının köşelerine doğru arttığını görmekteyiz. Köşelerdeki bağıl hatanın bütün hesap ağlarında 10^{-2} mertebelerine çıktığı tespit edilmiştir. Yapısal olmayan çözüm ağında 2462 KH ile yapılan hesaplamalarda mutlak hatanın L_1 normunun 2500 KH ile yapısal çözüm ağında yapılan hesaplamalardakinin yaklaşık 2 katı olduğu Tablo 2.1'de görülmektedir. Benzer durum aynı hesap ağında elde edilen L_2 normu içinde geçerlidir. 661 KH ve 625 KH'li çözüm ağlarında ise bu oran biraz daha



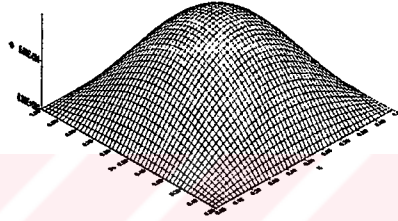
(a) Dik hesap ağı 625 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



(c) Dik hesap ağı 2500 KH



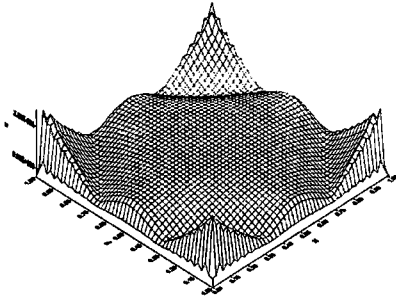
(d) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

Şekil 2.10: Birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar.

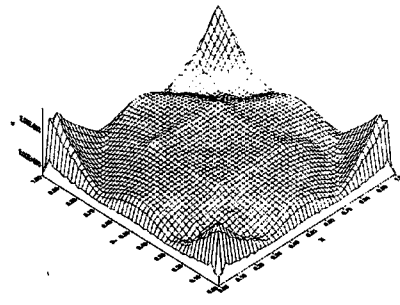
düşüktür. Diğer taraftan L_∞ normunu incelediğimiz zaman bütün hesap ağlarında bu normun 10^{-2} mertebelerinde olduğunu ve yapısal dik çözüm ağları ile yaklaşık aynı kontrol hacmi sayısına sahip yapısal olmayan hesap ağları arasında önemli farklar bulunmadığı görülmüştür.

İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda da, Şekil 2.12’de görüldüğü üzere, birinci derece yukarı farklar ve merkezi farklar yöntemlerinde olduğu gibi gerçekçi olmayan dalgalanmalar görülmemiştir.

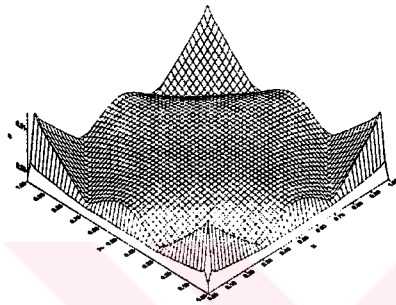
İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda Şekil 2.13 merkezi farklar yöntemi ile elde edilen sonuçlarda olduğu gibi yapısal dik hesap ağları ile elde edilen sonuçlarda bağıl hatanın sabit olduğu, bağıl hatanın değerinin 2500 KH’li çözüm ağı için 0,000342, 625 KH’li hesap ağı için 0,006972 olarak tespit edilmiştir. Yapısal olmayan hesap ağlarında ise bağıl hatanın çözüm alanı içerisinde değişkenlik gösterdiği görülmüştür.



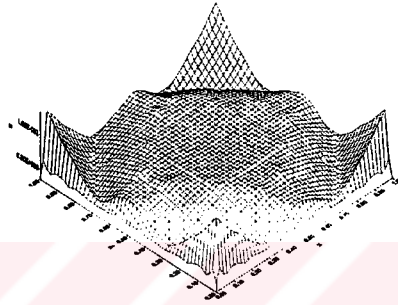
(a) Dik hesap ağı 625 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



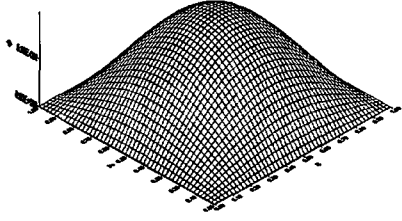
(c) Dik hesap ağı 2500 KH



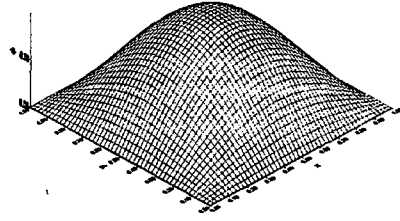
(d) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

Şekil 2.11: Birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda meydana gelen bağıl hata.

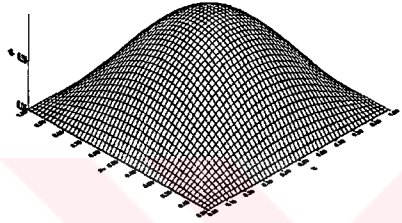
Ancak bu değişkenliğin hem 661 KH ile elde edilen sonuçlarda hem de 2462 KH ile elde edilen sonuçlarda çok fazla olmadığı tespit edilmiş, genel olarak bağıl hatanın 2462 KH ile yapılan hesaplamalarda 10^{-4} , 661 KH ile yapılan hesaplamalarda 10^{-3} mertebelerinde olduğu görülmüştür. Ayrıca yapısal olmayan hesap ağları ile yapılan hesaplamalarda . merkezi farklar ve 1 derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda görülen bağıl hatanın köşelere doğru artışı görülmemiştir. Tablo 2.1'de mutlak hatanın L_1 normunun yapısal olmayan hesap ağlarında, yapısal hesap ağlarında hesaplananlara göre daha düşük olduğu saptanmıştır. İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile elde edilen sonuçların L_2 normları incelendiğinde 2500 KH'li yapısal hesap ağında hesaplanan değer, 2462 KH'li yapısal olmayan hesap ağında hesaplanan değerden yüksek olduğu görülmektedir. Diğer



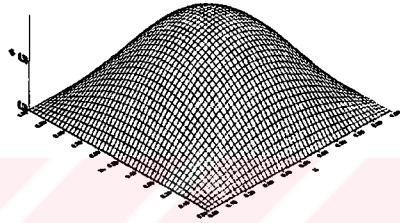
(a) Dik hesap ağı 625 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



(c) Dik hesap ağı 2500 KH



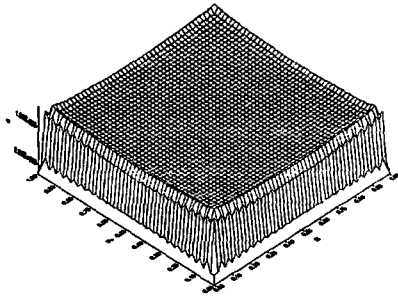
(d) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

Şekil 2.12: İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar.

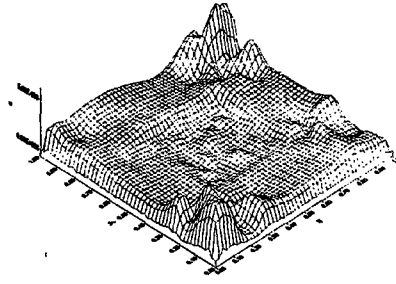
taraftan 625 KH'li yapısal dik hesap ağı ile hesaplanan L_2 normunun, 661 KH'li yapısal olmayan hesap ağında hesaplanan değer ile hemen hemen aynı olduğu görülmüştür. L_∞ normunun ise yapısal olmayan hesap ağlarında yapısal hesap ağlarında hesaplanaların 3-4 katı olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 2.1: Yapılan hesaplamalardaki mutlak hata ϵ 'un L_1 normu.

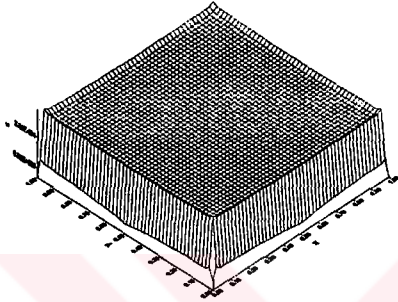
	Merkezi Farklar Yöntemi	1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi	2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi
2462 KH Yapısal Olmayan Hesap Ağı	0,24433323	8,82002376	0,24468428
2500 KH Yapısal Hesap Ağı	0,33343976	4,94802730	0,32848898
661 KH Yapısal Olmayan Hesap Ağı	0,25108490	3,83711007	0,24768987
625 KH Yapısal Hesap Ağı	0,39403609	2,29352945	0,32410228



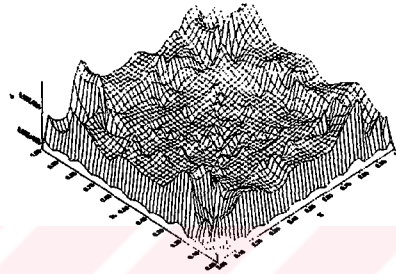
(a) Dik hesap ağı 625 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



(c) Dik hesap ağı 2500 KH



(d) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

Şekil 2.13: İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda meydana gelen bağıl hata.

Tablo 2.2: Yapılan hesaplamalardaki mutlak hata ε 'ın L_2 normu.

	Merkezi Farklar Yöntemi	1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi	2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi
2462 KH Yapısal Olmayan Hesap Ağı	0,002359	0,21480523	0,00546535
2500 KH Yapısal Hesap Ağı	0,008226	0,13550486	0,00808647
661 KH Yapısal Olmayan Hesap Ağı	0,011556	0,18772618	0,01158965
625 KH Yapısal Hesap Ağı	0,016462	0,12557714	0,01590883

2.4.4 Sonuç

Yapılan hesaplamalar sonucunda genel olarak yapısal olayan hesap ağları ile yapılan hesaplamalarda L_∞ normunun yapısal dik hesap ağlarında yapılan hesaplamalara göre yüksek olduğu tespit edilmiştir. Ancak yapısal olmayan hesap ağlarının karmaşık gemoetrilere kolayca uyarlanabilmesi ve hesap

Tablo 2.3: Yapılan hesaplamalardaki bağıl hata ϵ 'un L_∞ normu.

	Merkezi Farklar Yöntemi	1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi	2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi
2462 KH Yapısal Olmayan Hesap Ağı	0,002359	0,017469	0,001039
2500 KH Yapısal Hesap Ağı	0,000329	0,013923	0,000342
661 KH Yapısal Olmayan Hesap Ağı	0,014113	0,036499	0,006972
625 KH Yapısal Hesap Ağı	0,001317	0,028105	0,001432

ağı oluşturma süresinin kısa olması gibi avantajları ve bağıl hatanın L_∞ normunun mühendislik uygulamaları için kabul edilebilir seviye olan %3'den düşük olduğu görülmüştür. Ayrıca hesap ağını sıklaştırdıkça bağıl hatanın %0,1 seviyelerine kadar düştüğü tespit edilmiştir. Yapısal olmayan hesap ağı ile elde edilen sonuçlarda görülen bağıl hatanın köşelere doğru yükselmesinin ikinci derece yukarı farklar yöntemi ile aynı hesap ağı kullanılarak yapılan hesaplamalarda görülmemesi, diğer taraftan yapısal dik hesap ağı ve merkezi farklar metodu kullanılarak yapılan hesaplamalarda da hatanın çözüm alanı içerisinde sabit olması bunun merkezi farklar yönteminin yapısal olmayan hesap ağlarındaki ayrıklaştırılmasından kaynaklandığını göstermektedir. Diğer taraftan mutlak hatanın L_1 normunun hemen hemen eşit olması, yani toplam hatanın merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda ve ikinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda da hemen hemen aynı olması her iki metodunda ikinci derece hassasiyete sahip olmasından kaynaklanmaktadır. Birinci derece yukarı farklar yöntemi kullanılarak yapılan hesaplamalarda köşelerde hatanın yüksek olması ise, hesap ağından bağımsız, ayrıklaştırma yönteminden kaynaklanmaktadır.

BÖLÜM 3

AKIŞ DENKLEMLERİ VE BOYUTSUZLAŞTIRILMASI

Bu çalışma kapsamında sadece iki boyutlu sabit sıcaklıklı ve sabit ağırlıklı akışlar incelenecektir. Sıcaklığın ve ağırlığın sabit olduğu sıkıştırılamaz bir akış problemini çözmek için Navier-Stokes ve süreklilik denklemi yeterlidir.

Bu denklemler tensör notasyonunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.2)$$

Bu denklemler integral formda ise 3.3 e 3.4 denklemlerinde olduğu gibi yazılabilir.

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u_i d\Omega + \oint_S u_i u_j n_j dS \right) = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega + \mu \oint_S \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_j dS \quad (3.3)$$

$$\oint u_i n_i dS = 0 \quad (3.4)$$

Bağımlı ve bağımsız değişkenleri 3.5 deki ifadelerde olduğu gibi yeniden tanımlayalım.

$$U_i = \frac{u_i}{u_{\infty}} \quad X_i = \frac{x_i}{L} \quad P = \frac{p - p_{\infty}}{\rho u_{\infty}^2} \quad (3.5)$$

Bu durumda Navier-Stokes denklemleri ve süreklilik denklemleri diferansiyel formda 3.6 ve 3.7 denklemlerindeki hali alır.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} = - \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_j^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0 \quad (3.7)$$

Benzer şekilde integral formda ise denklemler 3.8 ve 3.9 denklemlerindeki hali alırlar.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U_i d\Omega + \oint_S U_i U_j n_j dS = - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial X_i} d\Omega + \frac{1}{Re} \oint_S \frac{\partial U_i}{\partial X_j} n_j dS \quad (3.8)$$

$$\oint_S U_i n_i dS = 0 \quad (3.9)$$

Kartezyen kordinatlarda ise iki boyutlu sabit sıcaklıklı ve sabit ağırlıklı, sıkıştırılamaz bir akışı tanımlayan denklemler diferansiyel ve integral formda 3.10,3.11,3.12,3.13,3.14 ve 3.15 denklemlerindeki hali alırlar.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega + \oint_S \rho u (u n_x + v n_y) dS = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \mu \oint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \oint_S \rho v (u n_x + v n_y) dS = - \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega + \mu \oint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) dS \quad (3.14)$$

$$\oint_S (u n_x + v n_y) dS = 0 \quad (3.15)$$

BÖLÜM 4

AKIŞ DENKLEMLERİNİN AYRIKLAŞTIRILMASI VE SIMPLE ALGORİTMASI

4.1 SIMPLE Algoritması

Ayrıklaştırılmış momentum denklemleri yarı ayrıklaştırılmış halde 4.1 ve 4.2 denklemlerindeki gibi yazılabilir.

$$Amu_m = \sum_{nb} A_{nb}u_{nb} - \frac{\partial p}{\partial x}\Delta\Omega + S_u \quad (4.1)$$

$$Amv_m = \sum_{nb} A_{nb}v_{nb} - \frac{\partial p}{\partial y}\Delta\Omega + S_v \quad (4.2)$$

Momentum denklemlerinin çözümünden elde edilen hız ve basınç değerleri süreklilik denklemini sağlamazlar. Bu nedenle bu denklemlerin çözümünden elde edilen hız ve basınç değerlerini sırası ile u^* ve v^* ile gösterirsek ve momentum denklemlerini tekrar yazarsak 4.3 ve 4.4 denklemleri elde edilir.

$$Amu_m^* = \sum_{nb} A_{nb}u_{nb}^* - \frac{\partial p^*}{\partial x}\Delta\Omega + S_u \quad (4.3)$$

$$Amv_m^* = \sum_{nb} A_{nb}v_{nb}^* - \frac{\partial p^*}{\partial y}\Delta\Omega + S_v \quad (4.4)$$

Bu denklemlerin çözümü sırasında kullanılan basınç bir önceki iterasyonda hesaplanmış olan basınç değeridir. SIMPLE algoritmasında momentum denklemlerinin çözümü sırasında hesaplanmaz. Eğer 4.3 ve 4.4 denklemlerini, 4.1 ve 4.2 denklemlerinden çıkartırsak 4.5 ve 4.6 denklemleri elde edilir.

$$Amu_m' = \sum_{nb} A_{nb}u_{nb}' - \frac{\partial p'}{\partial x}\Delta\Omega \quad (4.5)$$

$$Amv_m' = \sum_{nb} A_{nb}v_{nb}' - \frac{\partial p'}{\partial y}\Delta\Omega \quad (4.6)$$

4.5 ve 4.6 denklemlerindeki u' , v' ve p' sırasıyla hız düzeltme ve basınç düzeltme değerleridir. Bu denklemlere dayanarak herhangi bir noktadaki hız ve basınç değerleri 4.7 deki gibi yazılabilir.

$$u = u^* + u' \quad (4.7)$$

$$v = v^* + v' \quad (4.8)$$

$$p = p^* + p' \quad (4.9)$$

4.5 ve 4.6 denklemlerinde görüldüğü üzere herhangi bir kontrol hacmindeki hız düzeltme değeri o kontrol hacmindeki basınç düzeltme değerine ve komşu kontrol hacimlerdeki hız düzeltme değerlerine bağlıdır. SIMPLE algoritmasında komşu kontrol hacimlerdeki hız düzeltme değerlerinin etkisi ihmal edilir. Bu durumda herhangi bir noktadaki hız düzeltme değeri 4.10 ve 4.11 denklemlerindeki gibi yazılabilir.

$$u' = -\frac{1}{Am} \frac{\partial p'}{\partial x} \Delta\Omega \quad (4.10)$$

$$v' = -\frac{1}{Am} \frac{\partial p'}{\partial y} \Delta\Omega \quad (4.11)$$

SIMPLE algoritmasında basınç düzeltme değerlerini hesaplamak amacı ile süreklilik denklemini kullanılmaktadır. Bu nedenle süreklilik denklemini integral formda tekrar yazalım.

$$\oint \rho(u n_x + v n_y) dS = 0 \quad (4.12)$$

4.7 denklemindeki hız ile ilgili ifadeleri 4.12 denkleminde yerine koyarsak 4.13 denklemini elde ederiz.

$$\oint \rho(u^* n_x + v^* n_y) dS + \oint \rho(u' n_x + v' n_y) dS = 0 \quad (4.13)$$

Düzeltilme denklemini elde etmek için 4.10 ve 4.11 denklemlerini 4.13 denkleminde yerleştirip gerekli düzenlemeler yapılırsa 4.14 denklemi elde edilir.

$$\oint \rho(u^*n_x + v^*n_y)dS = \oint \rho\left(-\frac{1}{Am}\frac{\partial p'}{\partial x}\Delta\Omega n_x + \frac{1}{Am}\frac{\partial p'}{\partial y}\Delta\Omega n_y\right)dS \quad (4.14)$$

4.14 denklemi en genel halde ise 4.15 denkleminde olduğu gibi yazılır.

$$\oint \rho(u^*n_x + v^*n_y)dS = \oint \frac{\rho\Delta\Omega}{Am}\frac{\partial p'}{\partial n}dS \quad (4.15)$$

Eğer kısaca SIMPLE metodunu özetlersek

1. 4.3 ve 4.4 denklemlerini kullanarak u^* ve v^* değerlerini hesapla.
2. 4.15 denklemini kullanarak basınç düzeltme değerlerini hesapla.
3. 4.10 ve 4.11 denklemlerini kullanarak hız düzeltme denklemlerini hesapla.
4. 4.7-4.9 denklemlerini kullanarak yeni hız ve basınç değerlerini hesapla.
5. Eğer yakınsamış ise dur.
6. Hesaplanan hız değerlerini bir sonraki iterasyon için başlangıç değeri olarak alıp 1. adımdan itibaren işlemleri tekrarla.

4.2 Momentum Denklemlerinin Ayrıklaştırılması

Taşınım-Yayınım denkleminin ayrıklaştırılması sırasında taşınım ve yayınım terimlerinin ayrıklaştırılması detaylı olarak anlatılmıştır. Bu nedenle x ve y momentum denklemlerinin ayrıklaştırılması sırasında Taşınım-Yayınım denkleminde x momentum denklemi için ϕ yerine u , y momentum denkleminde ise ϕ yerine v konulması yeterli olacaktır. En genel halde ayrıklaştırılmış momentum denklemleri aşağıdaki hali alır.

$$Amu_m^* = \sum_{nb} A_{nb}u_{nb}^* + S_{up} + S_u \quad (4.16)$$

$$Amv_m^* = \sum_{nb} A_{nb}v_{nb}^* + S_{vp} + S_v \quad (4.17)$$

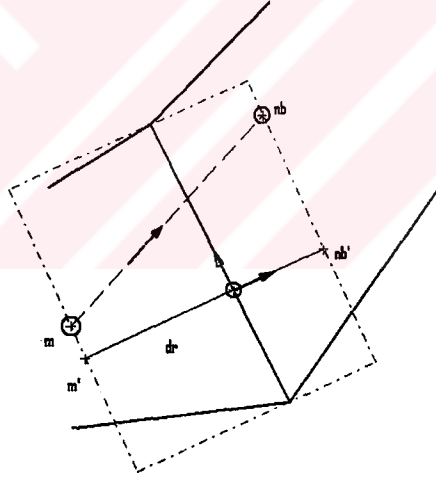
4.16 ve 4.17 denklemlerinde S_{up} ve S_{vp} terimleri akış elemanı üzerinde basınç yayılımının oluşturduğu kuvvettir. Bu terimler 4.18 ve 4.19 denklemlerinde olduğu gibi hesaplanır.

$$S_{up} = - \int \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = - \oint \vec{p} \cdot \vec{n}_x dS = \sum_i^{n_{face}} p_i \vec{j} \cdot \vec{n}_{x_i} \Delta S_i \quad (4.18)$$

$$S_{vp} = - \int \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega = - \oint \vec{p} \cdot \vec{n}_y dS = \sum_i^{n_{face}} p_i \vec{j} \cdot \vec{n}_{y_i} \Delta S_i \quad (4.19)$$

4.3 Basınç Ağırlıklı İnterpolasyon Yöntemi

Bilindiği üzere hücre merkezli hesap ağı kullanıldığı zaman momentum ve süreklilik denklemi arasındaki bağ kopmaktadır. Bu bağlantıyı sağlamak amacı ile Basınç Ağırlıklı İnterpolasyon Metodu ilk defa Rhie ve Chow [14] tarafından kullanılmıştır.



Şekil 4.1: Ara yüzeyde oluşturulan sanal kontrol hacmi.

Bu yöntemde iki kontrol hacminin ara yüzeyinde Şekil 4.1'de görüldüğü gibi , yüzeyin normali doğrultusunda sanal bir kontrol hacmi alınır ve bu kontrol hacmi için Navier-Stokes denklemi 4.20 yazılır.

$$u_{n_f} = \overline{H_f} - \frac{1}{Am_f} \int \frac{\partial p}{\partial n} d\Omega \quad (4.20)$$

4.20 denkleminde üzeri çizgili olan terimler interpolasyon yolu ile elde edilmiş terimlerdir. Bu terimleri elde edebilmek için öncelikle ara yüzeyin sağındaki ve solundaki kontrol hacimler için $\mathbf{n}$ doğrultusundaki momentum denklemlerini tekrar yazalım.

$$u_{nm} = H_m + \frac{1}{Am_m} (S_{u_{np}}|_m + S_{u_n}|_m) \quad (4.21)$$

$$u_{nmb} = H_{nb} + \frac{1}{Am_{nb}} (S_{u_{np}}|_{nb} + S_{u_n}|_{nb}) \quad (4.22)$$

4.21, 4.22 ve 4.20 denklemlerinden anlaşılacağı gibi H_i terimi herhangi bir kontrol hacmi için 4.23 denklemindekigibi tanımlanır.

$$H_i = \frac{\sum_{nb} A_{nb} u_{nb}}{Am_i} \quad (4.23)$$

Bu durumda H_i terimini herhangi bir kontrol hacmindeki $\mathbf{n}$ momentum denkleminden çekersek 4.24 denklemindeki ifade elde edilir.

$$H_i = u_{n_i} + \frac{1}{Am_i} \int \frac{\partial p}{\partial n} d\Omega \quad (4.24)$$

Ara yüzeydeki kontrol hacmi için ise H terimi 4.25 denklemindeki gibi yazılabilir.

$$\overline{H_f} = H_m(1 - \lambda) + H_{nb}\lambda \quad (4.25)$$

Bu durumda ara yüzeydeki ayrıklaştırılmış momentum denklemi 4.26 daki hali alır.

$$u_{n_f} = \overline{H_f} - \frac{1}{Am_f} \sum_i^{n_{face}} \frac{p_{nb} - p_m}{dr} \Delta\Omega_{f_i} \quad (4.26)$$

4.26 denklemindeki Am_f katsayısı iki komşu kontrol hacminin katsayıları kullanılarak lineer interpolasyon ile 4.27 denklemindeki gibi hesaplanır.

$$Am_f = Am_m(1 - \lambda) + Am_{nb}\lambda \quad (4.27)$$

4.4 Basınç Düzeltme Denklemleri

SIMPLE metodu anlatılırken basınç düzeltme denlemi 4.15'un nasıl elde edildiğini göstermiştik. Bu denklemin ayrıştırılması sırasında yüzeydeki türevlerin hesaplanması momentum denklemindekinden (veya Taşınım-Yayınım denleminden) farklıdır. 4.15 denkleminde de görüleceği üzere basınç

düzeltilme denkleminin sağ tarafı lineerleştirilmiş momentum denklemlerinin çözümü sonucu elde edilen ve süreklilik denklemini sağlamayan hız değerleri kullanılarak hesaplanır. Doğrudan lineer interpolasyon kullanarak bu değerlerin hesaplanması [13]'de de belirtildiği gibi çözüm alanı içerisinde dalgalanmalara ve bazende hesaplamaların ırsamasına yol açmaktadır. Ancak bu değerler hem basınç ile hız arasındaki bağlantıyı sağlamak hem de bu dalgalanmalar önlemek amacı ile momentum denklemleri çözüldükten sonra açık olarak Basınç Ağırlıklı İnterpolsayon Yöntemi kullanılarak hesaplanır. Denklemin sağ tarafı ise görüldüğü gibi basınç düzeltme değerlerinin gradyanın kontrol hacmi yüzeyi boyunca integralinden oluşmaktadır. İki dış döngüdeki basınç düzeltme değerleri arasında büyük fark olacağı için, buradaki türevlerin hesaplanması sırasında Taşınım-Yayınım denklemindeki yayılım terimlerinin ayrıştırılmasındaki gibi basınç düzeltme değerleri köşelere interpolate edilmez. Basınç düzeltme denklemleri iki defa çözülür.

Eğer 4.15 denklemindeki basınç düzeltme değerinin yüzeye normal doğrultudaki türevini yazarsak 4.28 denklemini elde ederiz.

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = \frac{p'_{nb} - p'_m}{dr} + \frac{grad p'_{nb} \cdot (\mathbf{r}_{nb'} - \mathbf{r}_{nb}) - grad p'_m \cdot (\mathbf{r}_{m'} - \mathbf{r}_m)}{dr} \quad (4.28)$$

4.28 denkleminde de görüldüğü üzere denklemin ikinci teriminin hesaplanabilmesi için basınç düzeltme değerlerinin kontrol hacmi merkezlerindeki gradyanlarının hesaplanması gerekmektedir ve bu terimin kapalı olarak hesaplanması oldukça zordur. Bu nedenle ilk basınç düzeltme denkleminin çözümü sırasında ikinci terim ihmal edilir. Bu durumda basınç düzeltme denklemleri 4.29 halini alır.

$$\sum_i^{n_{face}} Flux^* = \sum_i^{n_{face}} \frac{\rho \Delta \Omega_i}{Am_i} \Delta S_i \frac{p'_{nb_i} - p'_m}{dr} \quad (4.29)$$

Hızlar, basınç ve yüzeylerdeki akı hesaplandıktan sonra ikinci basınç düzeltme denklemi için 4.28 denklemindeki ikinci terim açık olarak birinci basınç düzeltme katsayısı kullanılarak hesaplanır. Bu durumda ikinci basınç düzeltme denklemi 4.30 halini alır.

$$\sum_i^{n_{face}} Flux^{**} + \sum_i^{n_{face}} \frac{\rho \Delta \Omega_i}{Am_i} \Delta S_i \left(\frac{grad p'_m \cdot (r_m' - r_m) - grad p'_{nb} \cdot (r_{nb}' - r_{nb})}{dr} \right) = \sum_i^{n_{face}} \frac{\rho \Delta \Omega_i}{Am_i} \Delta S_i \frac{p''_{nb_i} - p''_m}{dr} \quad (4.30)$$

Basınç düzeltme kademeleri [28] 'de olduğu gibi arttırılabilir.

4.5 Sınır Koşulları

Çözüm alanının sınırlarında bulunan kontrol hacimleri için 4.3 ve 4.4 denklemlerini çözerken, momentum değişiminden dolayı yüzeye etkiyen kuvvet 4.31 ve 4.32 denklemleri kullanılarak açık olarak hesaplanır ve kaynak terime eklenir.

$$C_{u_i} = Flux_i u_i \quad (4.31)$$

$$C_{v_i} = Flux_i v_i \quad (4.32)$$

Yayınım terimleri ise taşınım terimlerinden farklı olarak 1. derece yaklaşım ile 2.21 denkleminde komşu kontrol hacminin etkisi bağımlı değişkenin sınır üzerindeki değeri yazılarak hesaplanır. Bu durumda herhangi bir değişkenin sınırdaki yüzeye normal doğrultudaki türevi 4.33 'deki gibi olur.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_b = \frac{\phi_b - \phi_m}{dr} + \frac{\phi_e - \phi_b}{dr \Delta S} ((y_m - y_{nb})n_x + (x_{nb} - x_m)n_y) \quad (4.33)$$

Yapısal çözüm ağlarında bağımsız değişkenlerin çözüm alanı sınırlarındaki değerleri değişik şekillerde hesaplanabilir. Ancak yapısal olayın hesap ağlarında sınırdaki değerleri hesaplamak zordur. Bağımsız değişkenlerin

çözüm alanı sınırlarındaki değerlerini hesaplamak için değişik yöntemler kullanılmaktadır([23], [5]). Bu çalışmada temel olarak giriş, basınç, çıkış, simetri, ve duvar koşulu ele alınmıştır.

4.5.1 Giriş Sınır Koşulu

Giriş sınır koşulunda hızlar tanımlanmıştır Giriş sınırında [5] no'lu referansdaki gibi basınç gradyanının sıfır olduğu değil, basınç gradyanının sabit olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda basınç sınıra komşu olan kontrol hacminin merkezinden extrapolasyon yolu ile 4.34 denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$p_b = p_m + grad(p)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.34)$$

4.5.2 Basınç Sınır Koşulu

Basınç sınır koşulunda giriş sınır koşulundakinin tersine basınç tanımlanmıştır. Hızlar ise 4.35 ve 4.36 denklemleri yardımı ile hesaplanır.

$$u_b = u_m + grad(u)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.35)$$

$$v_b = v_m + grad(v)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.36)$$

4.5.3 Çıkış Sınır Koşulu

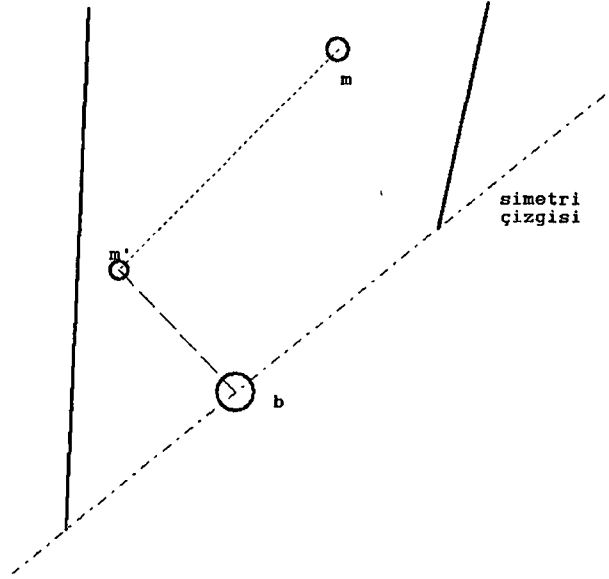
Çıkış sınır koşulunda ise sınırlardaki bağımlı değişkenler komşu kontrol hacimlerinden extrapolasyon yolu ile 4.37, 4.36 ve 4.39 denklemleri kullanılarak hesaplanır.

$$u_b = u_m + grad(u)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.37)$$

$$v_b = v_m + grad(v)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.38)$$

$$p_b = p_m + grad(p)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.39)$$

4.5.4 Simetri Sınır Koşulu



Şekil 4.2: Simetri yüzeyine komşu olan kontrol hacmi.

Simetri sınır koşulunda diğer sınır koşullarından farklı olarak simetri eksenine teğet olan hız bileşenin simetri eksenine göre değişimi ve simetri eksenine normal doğrultuda olan hız bileşeni sıfırdır. Bu durumda birinci derece yaklaşımla simetri eksenin üzerindeki hız bileşenleri 4.40 ve 4.41 denklemleri kullanılarak hesaplanır.

$$u_b = \frac{n_y(t_x u_{m'} + t_y v_{m'})}{n_y t_x - n_x t_y} \quad (4.40)$$

$$v_b = \frac{n_x(t_x u_{m'} + t_y v_{m'})}{n_x t_y - n_y t_x} \quad (4.41)$$

Basıncın simetri eksenine normal doğrultudaki değişimi de sıfırdır. simetri ekseninde basıncın değeri 4.42 denklemi ile hesaplanır.

$$p_b = p_{m'} \quad (4.42)$$

4.5.5 Duvar Sınır Koşulu

Duvar sınır koşulu bir farkla giriş sınır koşulu ile aynı özellikleri göstermektedir. Bilindiği üzere duvar üzerinde hızlar sıfırdır. Yani

$$u_b = 0.0 \quad (4.43)$$

$$v_b = 0.0 \quad (4.44)$$

olur. Basınç ise duvar sınır koşuluna komşu kontrol hacminden 4.45 denklemini yardımı ile extrapole edilir.

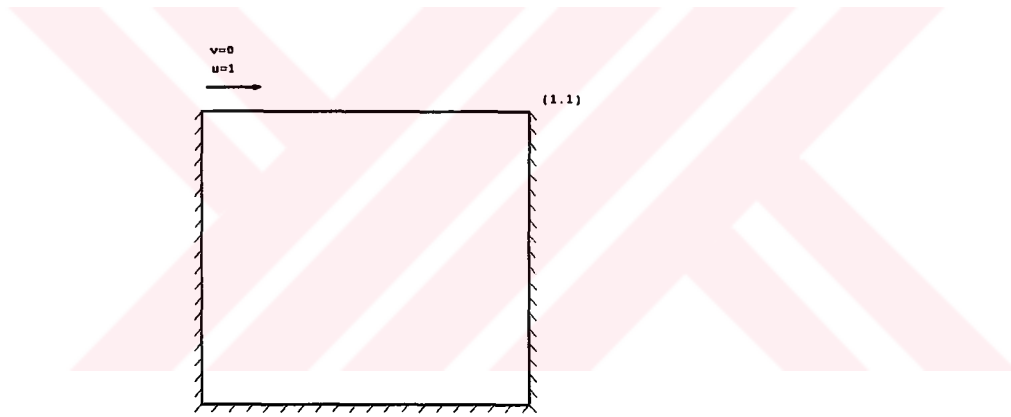
$$p_b = p_m + grad(p)_m \cdot (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_m) \quad (4.45)$$



BÖLÜM 5

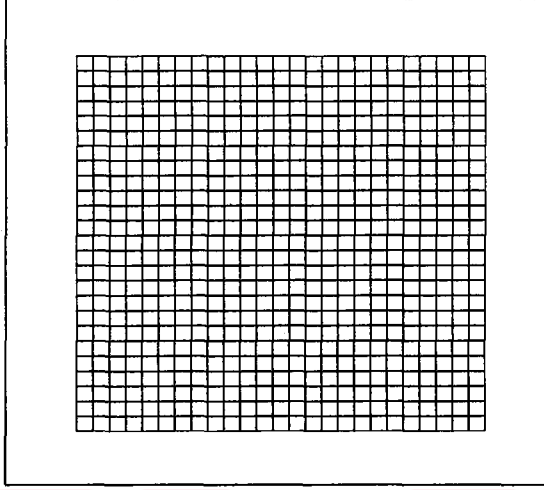
AĞIZ TARAFINDAN SÜRÜLEN BOŞLUKTA AKIŞ

Ağız tarafından sürülen boşlukta akış problemi akış problemlerinin bir çok özelliğini bir arada bulundurması ve bu problemin araştırmacılar tarafından iyi bilinmesi nedeni ile bir çok araştırmacı tarafından test problemi olarak kullanılmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada birinci test problemi olarak ağız tarafından sürülen boşlukta akış problemi incelenecektir. Elde edilen sonuçlar Ghia ve arkadaşları [24] tarafından Sonlu Elemanlar Yöntemi ve akım fonksiyonu-girdap denklemleri kullanılarak (129x129) kenarlara doğru sıklaştırılmış hesap ağı ile elde edilmiş sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

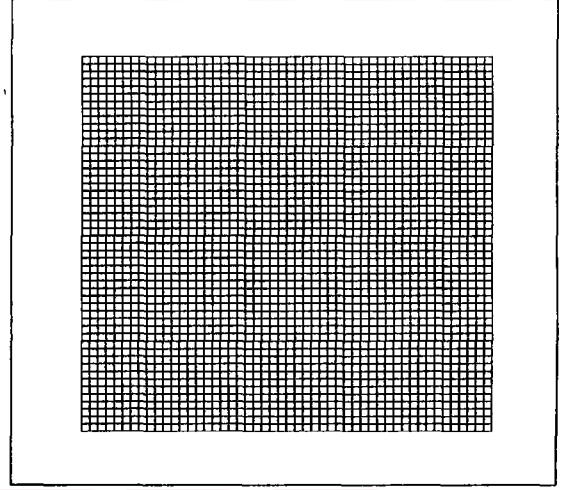


Şekil 5.1: Ağız tarafından sürülen boşlukta akış problemi.

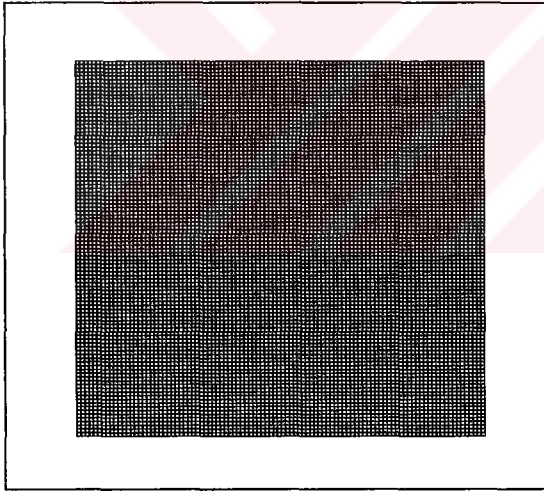
Problem $Re = 100$ ve $Re = 1000$ de birinci derece yukarı farklar, ikinci derece yukarı farklar ve merkezi farklar yöntemleri kullanılarak çözülmüştür. Problemin çözümü sırasında üç tane yapısal üç tane yapısal olmayan hesap ağı kullanılmış, bu hesap ağlarındaki kontrol hacimlerinin yaklaşık olarak aynı olmasına dikkate edilmiştir. Problemin çözümü sırasında kullanılan yapısal hesap ağları 5.2 de, yapısal olmayan hesap ağları ise 5.3 de gösterilmiştir.



(a) Yapısal hesap ağı 400 KH

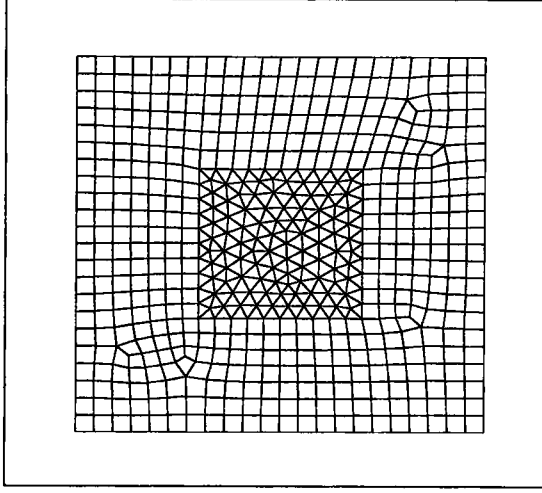


(b) Yapısal hesap ağı 2500 KH

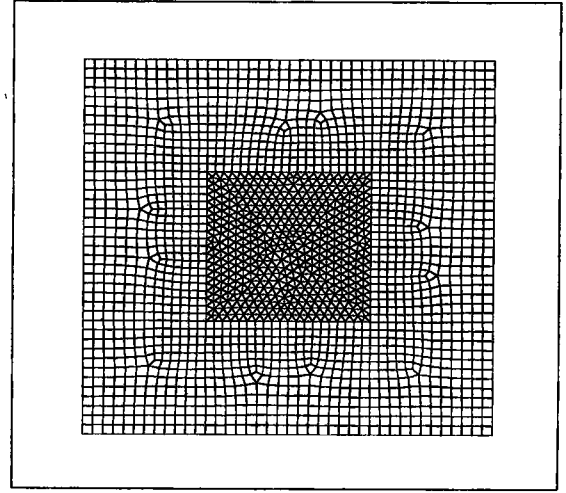


(c) Yapısal hesap ağı 10000 KH

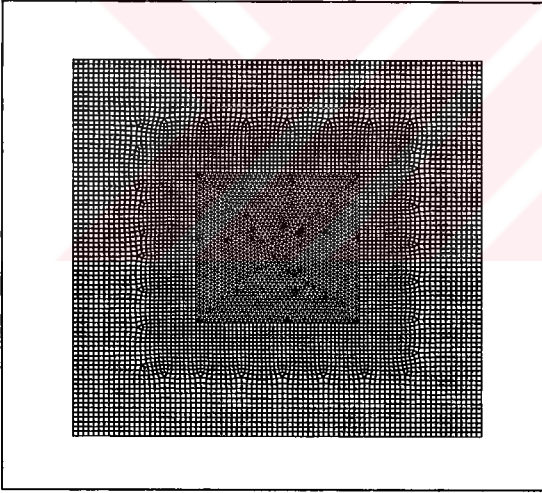
Şekil 5.2: Ağız tarafından sürülen boşlukta akış probleminin çözümünde kullanılan yapısal hesap ağları .



(a) Yapısal olmayan hesap ağı 661 KH



(b) Yapısal olmayan hesap ağı 2462 KH

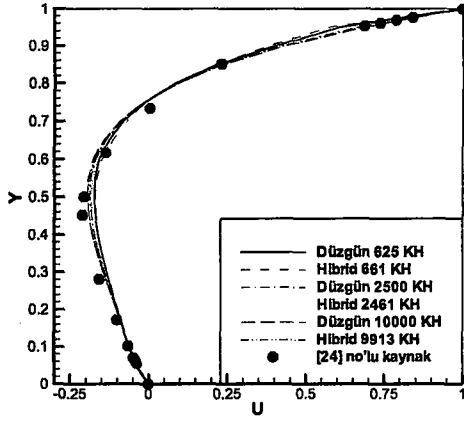


(c) Yapısal hesap ağı 9913 KH

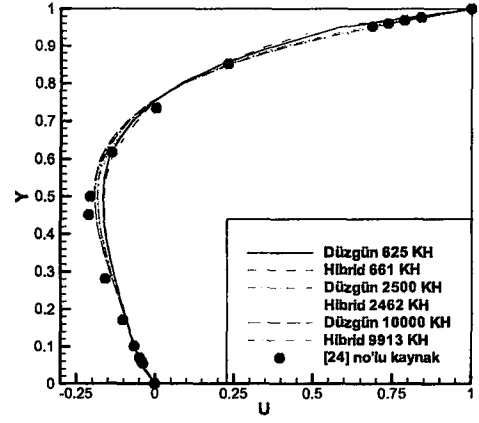
Şekil 5.3: Ağız tarafından sürülen boşlukta akış probleminin çözümünde kullanılan yapısal olmayan hesap ağıları .

Yapılan hesaplamalarda $Re = 100$ iken $x = 0.5$ doğrusu boyunca u hızının değişimi için Şekil 5.4 'de de görüldüğü üzere bütün yöntemlerde ve bütün hesap ağlarında [24] no'lu kaynağın bulduğu sonuçlara çok yakın sonuçlar elde edilmiştir. Merkezi farklar yöntemi kullanılarak yapılan hesaplamalarda yapısal olmayan ve yapısal hesap ağları kullanılarak elde edilen sonuçlar arasındaki fark çok azdır. Birinci derece yukarı farklar ve ikinci derece yukarı farklar yöntemi ile elde edilen sonuçlarda yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarındaki fark merkezi farklar yöntemine göre fazla olmakla birlikte kabul edilebilir seviyededir. Özellikle çözüm alanı içerisindeki kontrol hacmi sayısı arttıkça yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları arasındaki farkın azaldığı tespit edilmiştir.

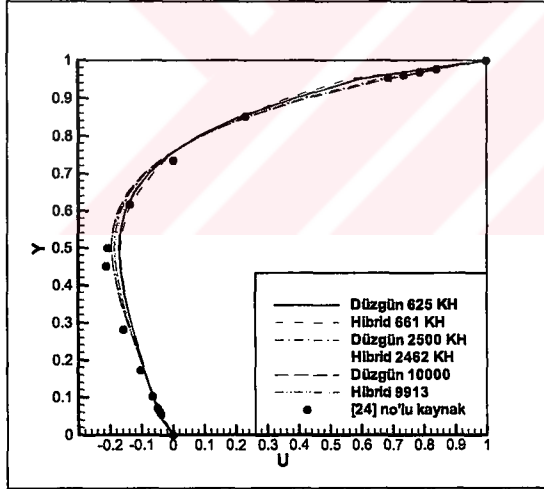
Benzer şekilde $Re = 100$ iken $y = 0.5$ boyunca v hızının değişimi merkezi farklar, birinci derece yukarı farklar ve ikinci derece yukarı farklar metodu için incelenmiştir. Şekil 5.5 'de de görülebileceği gibi 3 çözüm yöntemi arasında belirgin bir fark görülmemektedir. Diğer taraftan hiç bir çözüm yönteminde [24] no'lu kaynak tarafından belirtilen $x = 0.8$ noktasındaki ekstremum noktasına ulaşamamıştır. $x = 0.75$ ile $x = 1.0$ arasında bulunan bölgede yapısal 625 KH ve yapısal olmayan 661 KH ile yapılan hesaplamaların arasındaki farkın belirgin olduğu ve yapısal hesap ağı ile elde edilen sonuçların [24] no'lu kaynakta belirtilen sonuçlara daha yakın olduğu tespit edilmiş, ancak kontrol hacmi sayısı arttıkça bu farkın azaldığı görülmüştür.



(a) Merkezi Farklar Yöntemi

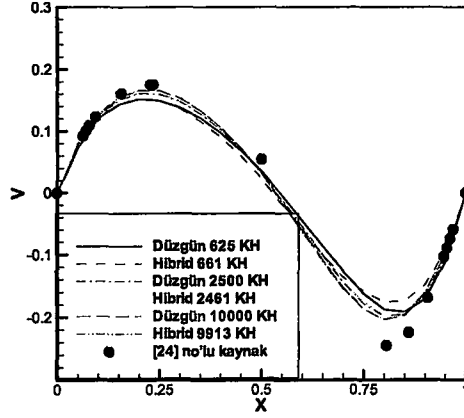


(b) 1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi

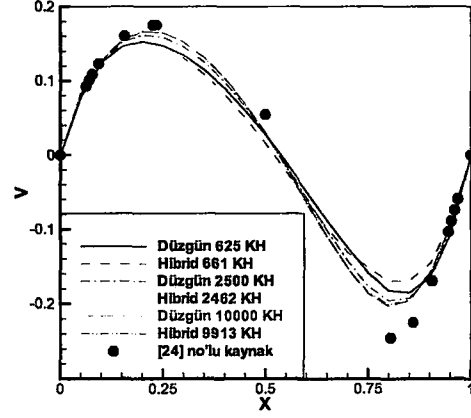


(c) 2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi

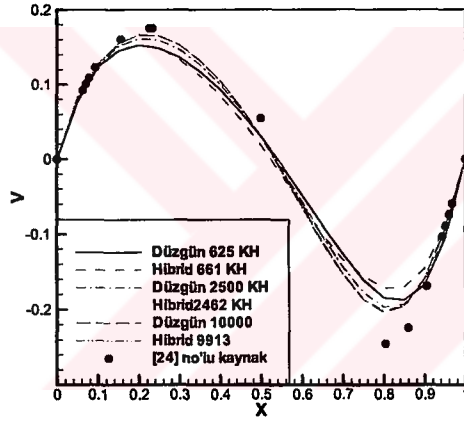
Şekil 5.4: $Re=100$ iken $x = 0.5$ doğrusu boyunca u hız profilinin değişimi.



(a) Merkezi Farlar Yöntemi



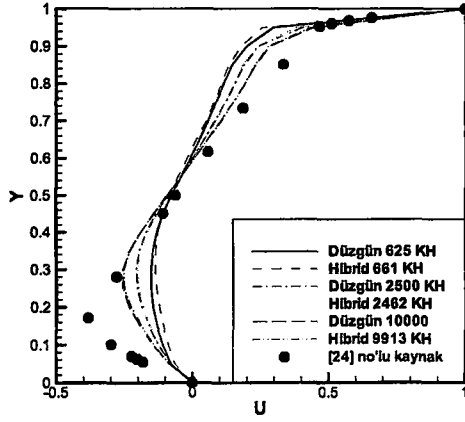
(b) 1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi



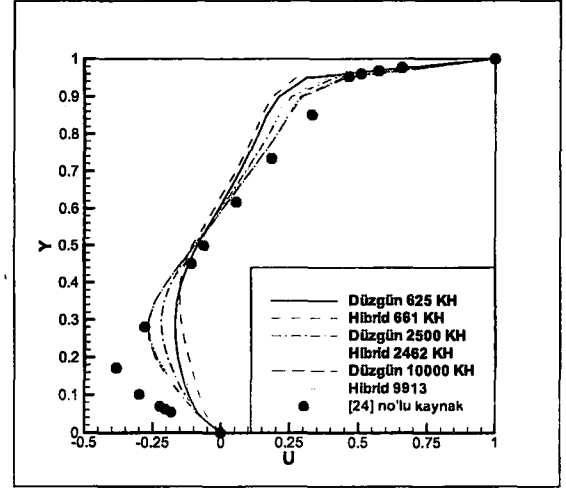
(c) 2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi

Şekil 5.5: $Re=100$ iken $y = 0.5$ doğrusu boyunca v hız profilinin değişimi.

$Re = 1000$ iken yapılan hesaplamalarda merkezi farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalar yakınsamamıştır. Şekil 5.6 de de görüldüğü gibi birinci derece yukarı farklar ve ikinci derece farklar yöntemleri kullanılarak yapılan hesaplamalarda $y = 0.1$ ile $y = 0.2$ arasında [24] no'lu kaynağın hesaplamış olduğu ekstremum noktası tespit edilememiştir. Hesaplamalar sonucu o bölgede hız profilindeki değişimin [24] no'lu kaynağın bulgularına göre daha düşük olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca hesap ağlarındaki kontrol hacmi sayısı



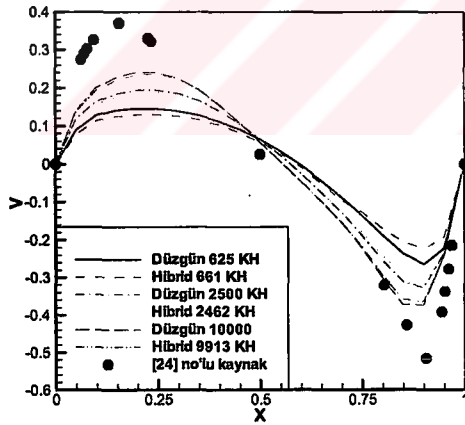
(a) 1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi



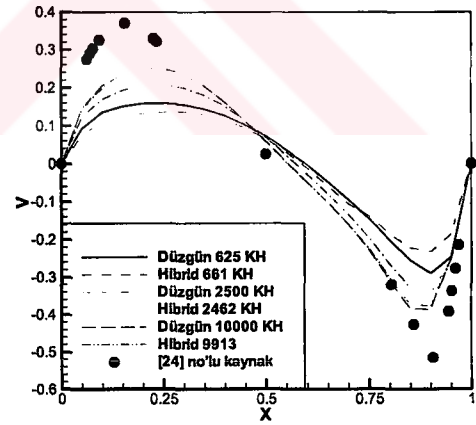
(b) 2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi

Şekil 5.6: $Re=1000$ iken $x = 0.5$ doğrusu boyunca u hız profilinin değişimi.

arttıkça yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları ile elde edilen sonuçların giderek birbirine yaklaştığı görülmüştür.



(a) 1. Derece Yukarı Farklar Yöntemi

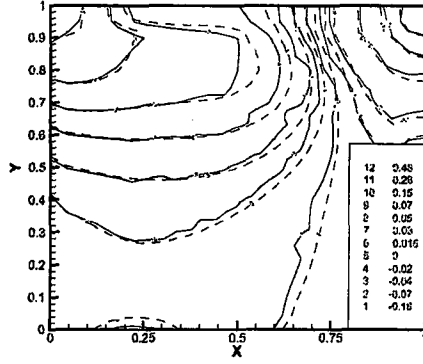


(b) 2. Derece Yukarı Farklar Yöntemi

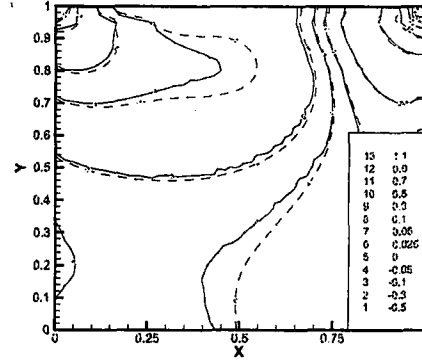
Şekil 5.7: $Re=1000$ iken $y = 0.5$ doğrusu boyunca v hız profilinin değişimi.

$Re = 1000$ de $y = 0.5$ doğrusu boyunca v hızındaki değişim incelendiğinde yine [24] no'lu kaynakta belirtilen ve $x = 0.15$ ve $x = 0.9$ noktalarındaki

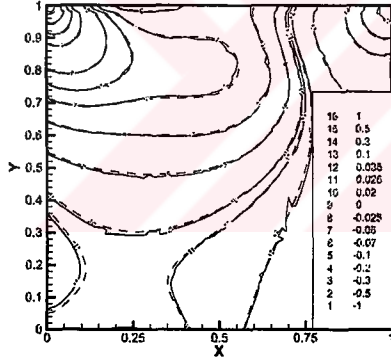
ekstreminum noktalarının yapılan hesaplamalar sonucu tepe noktaları kesik olarak tespit edilmiştir. Diğer taraftan yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarında elde edilen sonuçların kontrol hacmi sayısı arttıkça birbirine yaklaştığı görülmüştür.



(a) 661 KH ve 625 KH hesap ağları



(b) 2462 KH ve 2500 KH hesap ağları

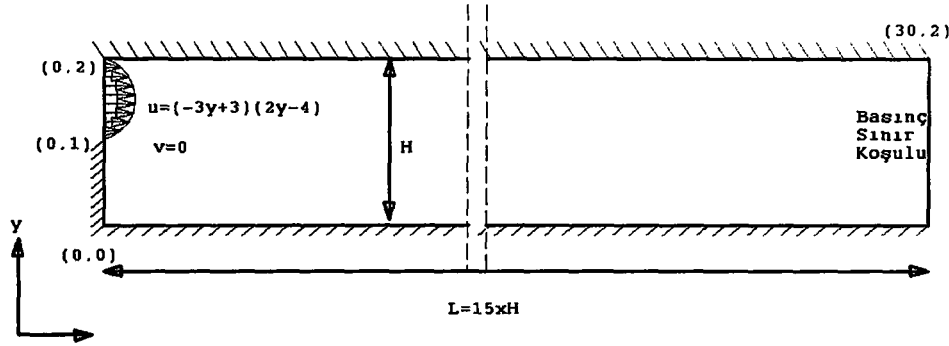


(c) 9913 ve 10000 KH hesap ağları

Şekil 5.8: $Re=100$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda ki basınç konturları;—: yapısal olmayan hesap ağı, - - -: yapısal hesap ağı.

BÖLÜM 6

ANI GENİŞLEYEN KANALDA AKIŞ



Şekil 6.1: Ani genişleyen kanalda akış problemi.

Ani genişleyen kanalda akış problemi akış özelliklerinin iyi bilinmesi ve momentum taşınımının etkin rol oynaması nedeniyle sayısal akışkanlar mekaniği araştırmacıları tarafından sıkça kullanılan bir test problemidir. Bu nedenle bu çalışmada diğer araştırmacılar gibi ani genişleyen akış problemi test problemi olarak kullanılmıştır. Problemin çözümünde Şekil 6.2’de görülen yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları kullanılmıştır. Karşılaştırma yapabilmek amacı ile yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarının kontrol hacim sayılarının yaklaşık aynı olacak şekilde oluşturulmuştur. Taşınım terimlerinin ayrıklaştırılmasında ise birinci derece yukarı farklar, ikinci derece yukarı farklar ve ikinci derece yukarı farklar yöntemleri kullanılmıştır. Bütün değişkenler için bağıl hatanın aritmetik ortalamasının 10^{-5} ’den küçük olması durumunda çözümün yakınsadığı kabul edilmiştir. Problemden sınır şartları Şekil 6.1’de gösterildiği gibi uygulanmıştır.



(a) 1540 KH hesap ağı



(b) 1500 KH hesap ağı



(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı



(e) 23304 KH hesap ağı

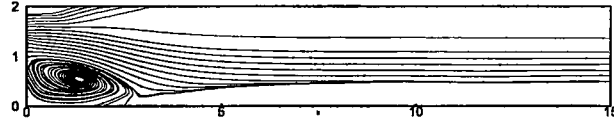


(f) 24000 KH hesap ağı

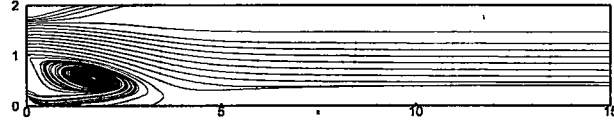
Şekil 6.2: Ani genişleyen kanalda akış problemini çözmek için kullanılan hesap ağları.

Ani genişleyen kanalda akış probleminde akışta basamağı hemen yanında oluşan vorteks ve bunu karşılaştırmak amacı ile vorteksin birleşme noktası temel özellik olarak karşımıza çıkmaktadır. $Re = 200$ iken birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda Tablo 6.1' de görüldüğü gibi [27] no'lu kaynakta $Re = 200$ 'de ölçülmüş olan birleşme noktası değeri $X = 5.29411$ yaklaşmakla birlikte en çok kontrol hacimine sahip olan 23304 KH'li yapısal hesap ağı ve 24000 KH yapısal hesap ağı ile yapılan hesaplamalarda deneysel yöntemlerle tespit edilmiş olan birleşme noktasından %3 oranında daha girişe yakın olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca 1540 KH ile yapısal olmayan çözüm ağında hesaplanmış olan değer ile 1500 KH ile yapısal hesap ağında hesaplanmış olan birleşme noktası değeri arasında %28 oranında fark var iken bu fark 23304 KH ile yapısal olmayan hesap ağı ile 24000 KH kullanılarak yapısal hesap ağı ile yapılan çözümlemelerde %6'ya düşmektedir. Ayrıca Şekil 6.3'de görüldüğü gibi 1540 KH yapısal olmayan ve 1500 KH yapısal hesap ağları ile yapılan hesaplamalarda giriş bölgesinde akım çizgilerinde düzensizlik tespit edilmiştir. Ancak bu düzensizlikler hesap ağındaki kontrol hacmi sayısı arttıkça kaybolmaktadır.

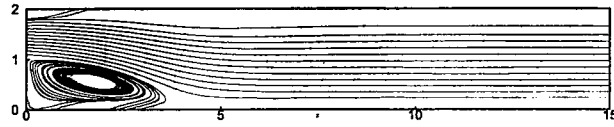
$Re = 400$ iken birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda birleşme noktasının yapısal olmayan hesap ağı ile yapısal hesap ağı arasındaki farkının %27 ile %16 arasında değiştiği tespit edilmiş ve hesap ağındaki kontrol hacmi sayısı arttıkça bu farkın azaldığı tespit edilmiştir.[27] no'lu kaynak tarafından tespit edilmiş olan birleşme noktası değeri $X = 8.2353$ değerinden sapma ise 23304 KH ile yapısal olmayan hesap ağında yapılan hesaplamada %23, 24000 KH yapısal hesap ağı ile yapılan hesaplamada ise %6 olduğu tespit edilmiştir.Şekil6.4 $Re = 400$ iken yapılan hesaplamalarda elde edilmiş olan akım çizgileri görülmektedir. $Re = 200$ iken yapılan hesaplamalarda görülmüş olan duvara yakın bölgelerde akış yönündeki düzensizlikler burada da görülmektedir.



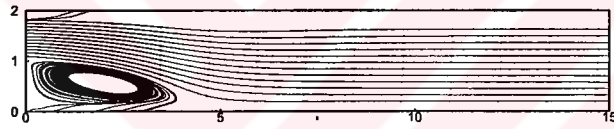
(a) 1540 KH hesap ağı



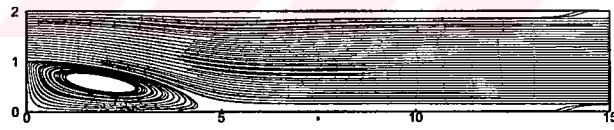
(b) 1500 KH hesap ağı



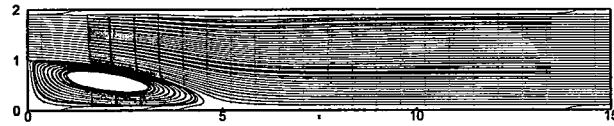
(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı

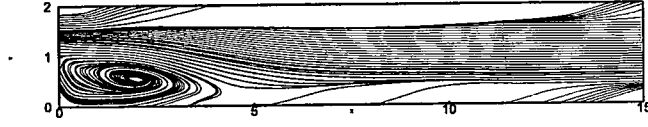


(e) 23304 KH hesap ağı

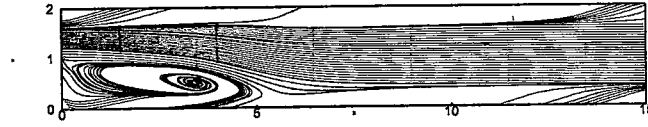


(f) 24000 KH hesap ağı

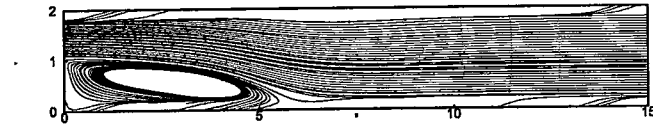
Şekil 6.3: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=200$ iken 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.



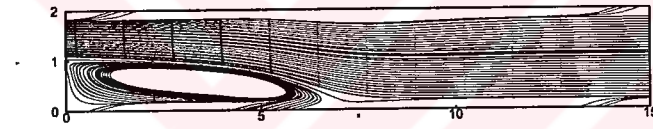
(a) 1540 KH hesap ağı



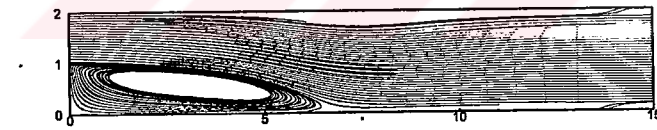
(b) 1500 KH hesap ağı



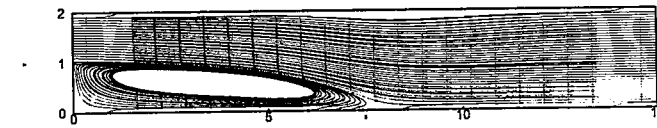
(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı



(e) 23304 KH hesap ağı



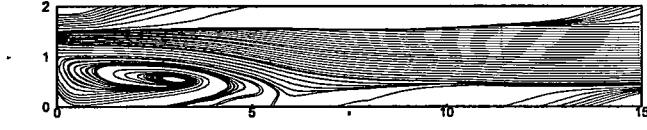
(f) 24000 KH hesap ağı

Şekil 6.4: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.

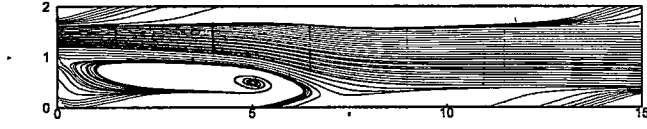
$Re = 600$ iken, birinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan düşük Reynolds sayılarında yapılan hesaplamalarda olduğu gibi en düşük kontrol hacmine sahip hesap ağlarından en yüksek kontrol hacmine sahip hesap ağlarına gidildikçe, yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları arasındaki farkın azaldığı ancak bu azalmanın düşük Reynolds sayılarında yapılan hesap ağlarındaki kadar çok olmadığı görülmüştür. En düşük kontrol hacmine sahip yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarında birleşme noktası değerleri arasındaki fark %24 iken bu fark en çok kontrol hacmine sahip hesap ağları için %25 olarak tespit edilmiştir. [27] no'lu kaynakta tespit edilmiş olan birleşme noktası değeri $X = 12,3530$ 'den sapma ise en çok kontrol hacmine sahip olan yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarında sıra ile %27 ve %55 olarak tespit edilmiştir. Diğer taraftan Barton [28], Armaly ve arkadaşları[27] tarafından $Re = 600$ iken yapılan deney sonucu elde edilen birleşme noktası değerinin akışın bu Reynolds sayısında üç boyutlu olması nedeni ile birleşme noktası değerinin yüksek olduğunu belirtmiştir. Barton [28] $Re = 600$ için birleşme noktası değerini $X = 10.67$ olarak tespit etmiştir. En çok kontrol hacmine sahip hesap ağlarında bu değerden sapma ise yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları için sırası ile %10 ve %34 olarak tespit edilmiştir.

Tablo 6.1: 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda alt duvardaki birleşme noktası.

	Hibrid 1540 KH	Yapısal 1500 KH	Hibrid 6224 KH	Yapısal 6000 KH	Hibrid 23304 KH	Yapısal 24000 KH	Armaly ve arkadaşları[27]
$Re = 200$	2,79612	3,59098	3,82071	4,40555	4,5636	4,84558	5,29411
$Re = 400$	4,39488	5,56376	5,68203	7,08486	6,68268	7,74849	8,2353
$Re = 600$	5,78198	7,1659	7,21085	8,9549	7,96232	9,71366	12,353



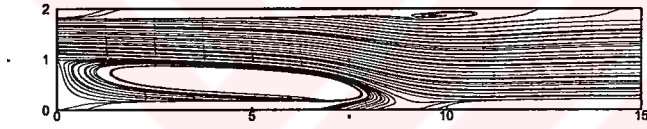
(a) 1540 KH hesap ağı



(b) 1500 KH hesap ağı



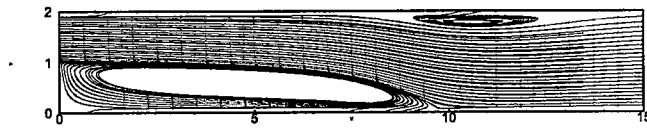
(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı

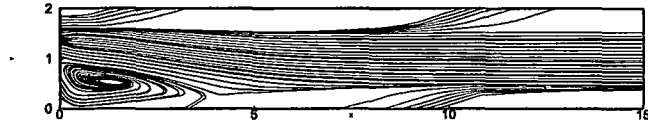


(e) 23304 KH hesap ağı

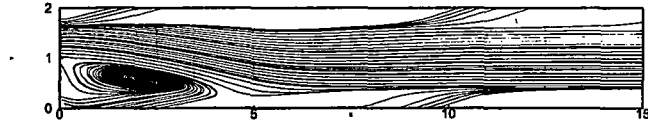


(f) 24000 KH hesap ağı

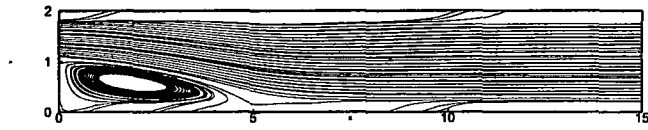
Şekil 6.5: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=600$ iken 1. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.



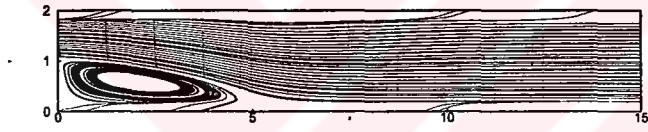
(a) 1540 KH hesap ağı



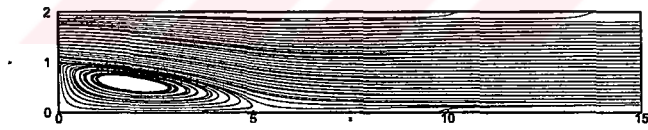
(b) 1500 KH hesap ağı



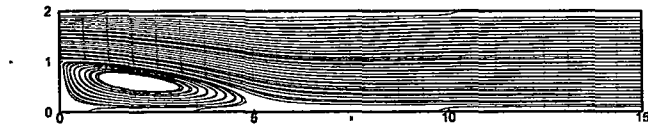
(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı



(e) 23304 KH hesap ağı

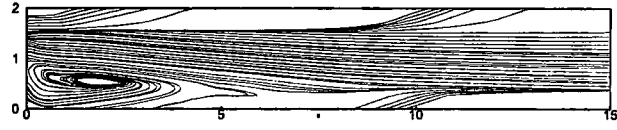


(f) 24000 KH hesap ağı

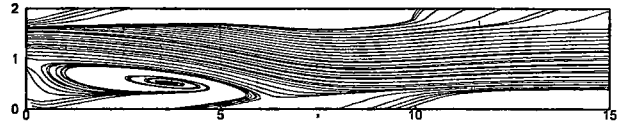
Şekil 6.6: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=200$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.

$Re = 200$ iken ikinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları arasındaki farkın düşük olduğu tespit edilmiştir. 1500 ve 1540 kontrol hacmine sahip yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları arasındaki fark %18 iken en kontrol hacim sayısına sahip 23304 kontrol hacimli yapısal olmayan ve 24000 kontrol hacimli yapısal hesap ağları ile yapılan hesaplamalarda ise fark %1 olarak tespit edilmiştir. Benzer şekilde Armaly ve arkadaşları[27] tarafından tespit edilen değerden sapma miktarı en düşük kontrol hacim sayısına sahip yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarında sırası ile %31 ve %12 olarak tespit edilmiş, bu sapma değeri ise 23304 KH'li yapısal olmayan hesap ağında $6 \cdot 10^{-3}$ ve 24000 KH'li yapısal hesap ağında ise %1.5 olarak tespit edilmiştir.

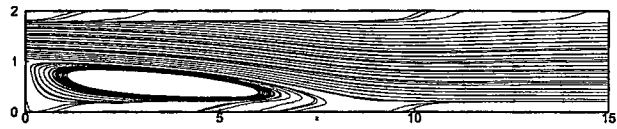
İkinci derece yukarı farklar yöntemi ile $Re = 400$ iken yapılan hesaplamalarda yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları kullanılarak yapılan hesaplamalardan elde edilen sonuçlar arasındaki farkın düşük olduğu Tablo 6.2'den görülmektedir. 1540 KH'li yapısal olmayan hesap ağı ile 1500 KH'li yapısal hesap ağı arasındaki fark %11 iken, 23304 KH'li yapısal olmayan hesap ağı ile 24000 KH'li yapısal hesap ağı arasındaki fark %8 olduğu tespit edilmiştir. Diğer taraftan Armaly ve arkadaşları [27] tarafından elde edilen sonuç ile karşılaştırıldığı zaman sapma oranı en yüksek kontrol hacmi sayısına sahip 23304 KH'li yapısal olmayan ve 24000 KH'li yapısal hesap ağında sırası ile %10 ve %2 olarak tespit edilmiştir.



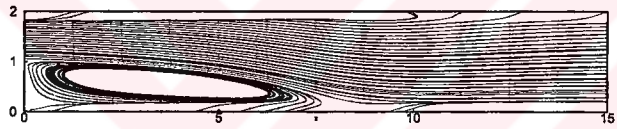
(a) 1540 KH hesap ağı



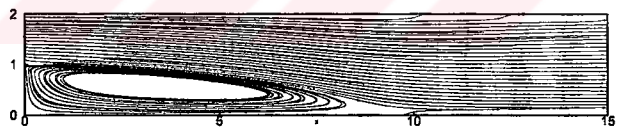
(b) 1500 KH hesap ağı



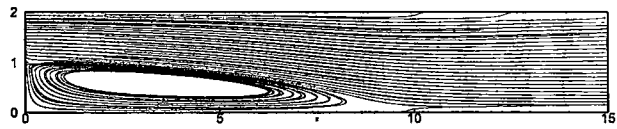
(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı

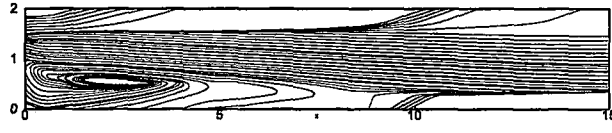


(e) 23304 KH hesap ağı

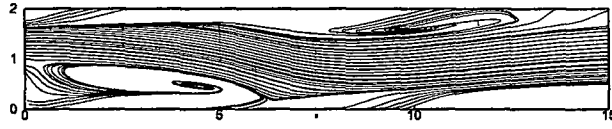


(f) 24000 KH hesap ağı

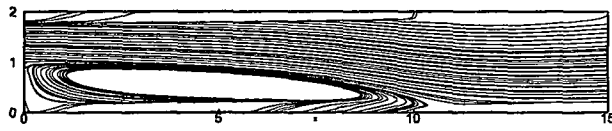
Şekil 6.7: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.



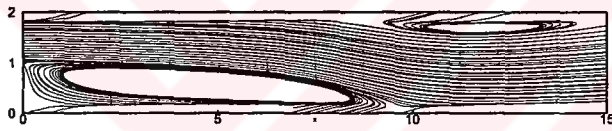
(a) 1540 KH hesap ağı



(b) 1500 KH hesap ağı



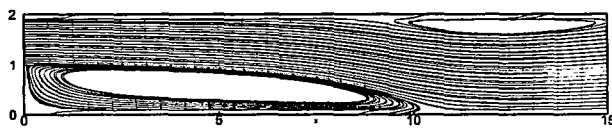
(c) 6224 KH hesap ağı



(d) 6000 KH hesap ağı

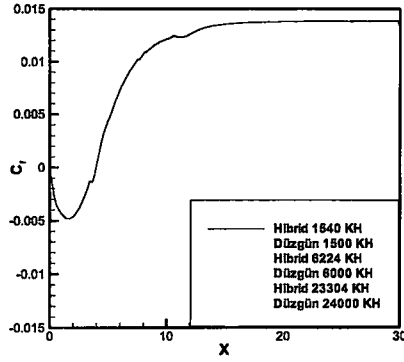


(e) 23304 KH hesap ağı

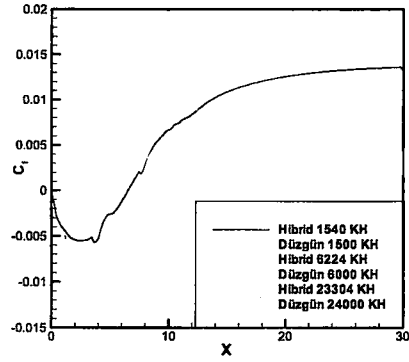


(f) 24000 KH hesap ağı

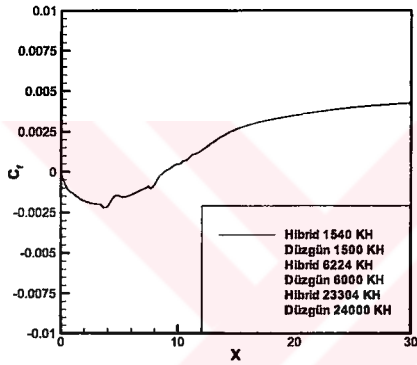
Şekil 6.8: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=600$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akım çizgileri.



(a) $Re = 200$



(b) $Re = 400$



(c) $Re = 600$

Şekil 6.9: Ani genişleyen kanalda akış probleminde 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda alt duvarda yüzey sürtünme katsayısının değişimi.

$Re = 600$ iken ikinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda 1500 ve 1540 KH'li yapısal ve yapısal olmayan hesap ağları ile elde edilen sonuçlar arasındaki farkın %27 olduğu görülmüştür. Bu fark 24000 ve 23304 KH'li yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarında elde edilen birleşme noktası mesafesinde %15 olduğu tespit edilmiştir. Diğer taraftan en çok kontrol hacimine sahip hesap ağlarındaki sonuçlar Barton [28] ve Armaly ve arkadaşları[27] tarafından elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığı zaman yapısal olmayan hesap ağlarında elde edilen sonuçların Armaly ve

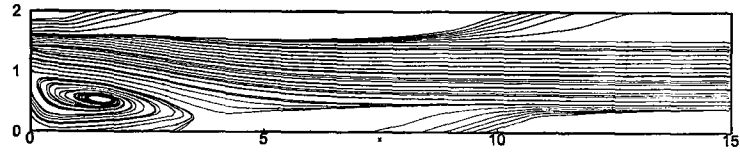
arkadaşları[27] tarafından elde edilen sonuçlara, Barton [28] tarafından elde edilen sonuçlara daha yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 6.2: 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda alt duvardaki birleşme noktası.

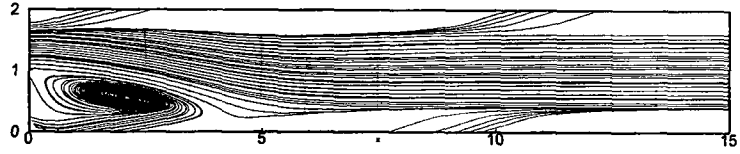
	Hibrid 1540 KH	Yapısal 1500 KH	Hibrid 6224 KH	Yapısal 6000 KH	Hibrid 23304 KH	Yapısal 24000 KH	Armaly ve arkadaşları[27]
$Re = 200$	4,01586	4,7199	4,89911	5,16115	5,29442	5,22261	5,29411
$Re = 400$	5,7464	6,35761	8,29235	8,0893	9,10832	8,41126	8,2353
$Re = 600$	8,79714	6,39644	10,5145	9,69424	12,2997	10,4558	12,353

Şekil 6.9'da ikinci derece yukarı farklar yöntemi kullanılarak, değişik hesap ağları ile yapılan çözümlemelerde kanalın alt duvarındaki yüzey sürtünme sayısı görülmektedir. Buradanda görüleceği gibi düşük Reynolds sayılarında yapısal ve yapısal olmayan hesap ağlarının birbirlerine yakın sonuçlar verdiği Reynolds sayısı arttıkça sonuçların giderek farklılaştığı görülmektedir.

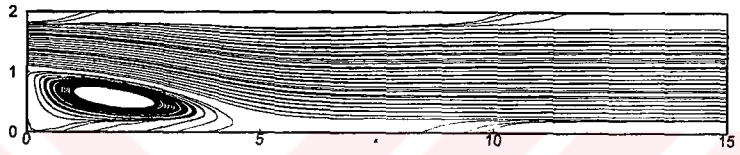
Sınırlayıcı uygulanmış ikinci derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamalarda ise (Şekil 6.10, Şekil 6.11) 2. derece yukarı farklar yöntemi ile elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldıklarında belirgin bir fark görülmemektedir. Ancak Şekil 6.12 incelendiğinde sınırlayıcı kullanıldığı zaman süreklilik denkleminin kalanının belirli bir değerin altına düşmediği, hatta yapısal olmayan hesap ağlarında bu değerin çok yüksek olduğu görülmektedir.



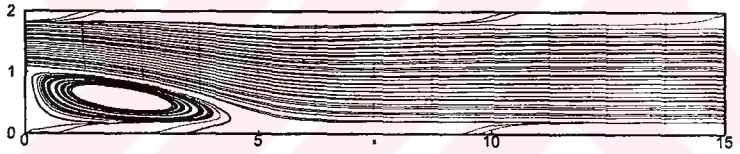
(a) 1545 KH hesap ağı



(b) 1500 KH hesap ağı

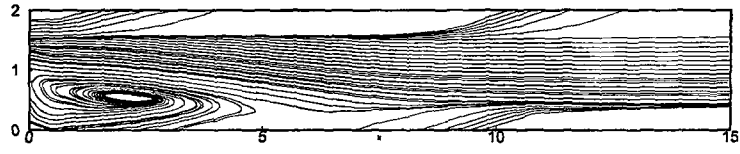


(c) 1022 KH hesap ağı

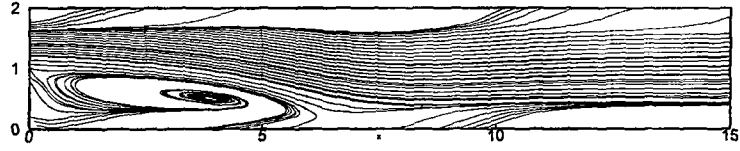


(d) 600 KH hesap ağı

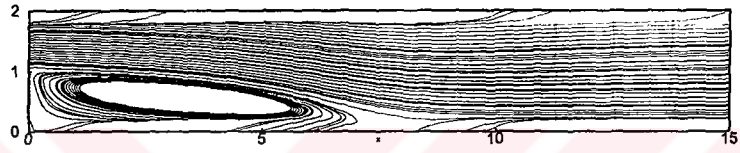
Şekil 6.10: Ani genişleyen kanalda akış problemiinde $Re=200$ için sonuçları hesaplanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akın çizimleri.



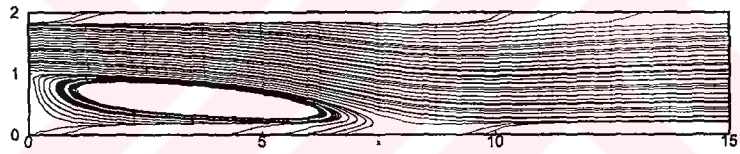
(a) 1546 KH hesap ağı



(b) 1508 KH hesap ağı

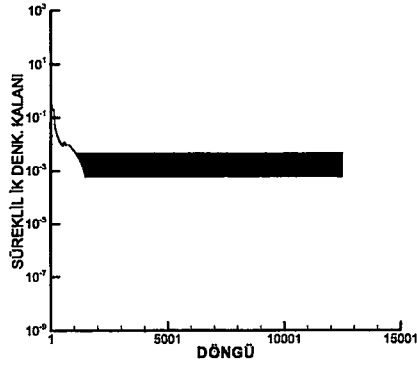


(c) 1272 KH hesap ağı

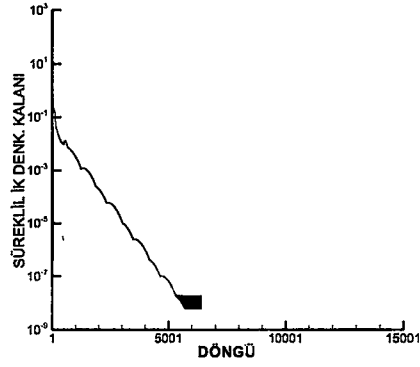


(d) 608 KH hesap ağı

Şekil 6.11. Ani genişleyen kanalda akış problemiinde $Re=400$ için farklı hesap ağları kullanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi ile yapılan hesaplamada akın çizimleri.



(a) 6224 KH hesap ağı



(b) 6000 KH hesap ağı

Şekil 6.12: Ani genişleyen kanalda akış probleminde $Re=400$ iken 2. derece yukarı farklar yöntemi ile sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi sonucu elde edilen süreklilik denkleminin kalanı; - - -: 2. derece yukarı farklar yöntemi, —; Sınırlayıcı uygulanmış 2. derece yukarı farklar yöntemi.

Tablo 6.3: $Re = 600$ iken mevcut çalışmada bulunan birleşme noktası değerinin diğer çalışmalar ile karşılaştırılması.

	Birleşme Noktası Değeri
Mevcut Çalışma ^a	12,2997
Mevcut Çalışma ^b	10,4558
Armaly ve arkadaşları[27]	12,353
Barton[28]	10,67

^a2. derece yukarı farklar yöntemi ile 23304 KH sahip olan yapısal olmayan hesap ağı ile elde edilmiştir.

^b2. derece yukarı farklar yöntemi ile 24000 KH sahip olan yapısal hesap ağı ile elde edilmiştir.

BÖLÜM 7

SONUÇ

Bu çalışma kapsamında incelenen yapısal olmayan hesap ağları ile yapılan testler sonucu gerek taşınım-yayınım probleminin çözümü, gerekse ağız tarafından sürülen boşlukta akış problemi ve ani genişleyen akış probleminde olsun sınırlarda hatanın hesap alanı içerisine göre yüksek olduğu görülmektedir. Sınır koşullarının uygulanması çözümü önemli ölçüde etkilemektedir. Bu nedenle daha uygun sınır koşullarının uygulanması gerekmektedir. Ayrıca ayrıklaştırmanın temel olarak sonlu farklar yöntemi ile yapılmış olması ve bir çok yerde ikinci derece Taylor serisi açılımı kullanılması, basınç eş eğrilerinde görülebileceği gibi sayısal dağılım hatasını arttırmaktadır. Ayrıca temel olarak ayrıklaştırmada sonlu farklar yönteminin kullanılması özellikle dik olmayan hesap ağlarında özelliklede yayınım terimlerinin birinci derece hassasiyete sahip olmasına neden olmaktadır. Bu nedenle polinom interpolasyonu kullanmak gerek yayınım terimlerinin kontrol hacmi sınırlarında daha yüksek dereceden hesaplanmasını sağlaması gerekse sınırlarda ayrıklaştırmayı kolaylaştırması nedeni ile önemli avantajlar sağlayabilir.

Yapılan çalışmalarda sonucun hesap ağının yapısına çok bağımlı olduğu ortaya çıkmıştır. Yapısal olmayan hesap ağlarında, yapısal hesap ağlarında olduğu gibi belirli bir düzene sahip hesap ağı oluşturmak mümkün olmaması nedeni ile yapısal olmayan hesap ağının etkinliğini arttırmak amacı ile kendini uyarlayan hesap ağı kullanılmasının daha uygun olacağı düşünülmektedir.

Taşınım terimlerinin ayrıklaştırılması sırasında test edilen ayrıklaştırma yöntemleri arasında en uygun olanın ikinci derece yukarı farklar yöntemi olduğu sonucuna varılmış, sınırlayıcının ise gerek çözümü hızlandırması açısından, gerekse yakınsamayı kolaylaştırması açısından beklenen faydayı sağlamadığı tespit edilmiştir.

Basıncı ve hızları hesaplamak amacı ile kullanılmış olan SIMPLE ile

yapılan hesaplamalarda literatürde daha önce yapılmış benzer çalışmalar ile mevcut çalışma arasındaki fark %40 ile %1 arasında değiştiği görülmektedir. Bu ise SIMPLE yönteminin yüksek hassasiyet gerektirmeyen endüstriyel ve bilimsel çalışmalar için yeterli olduğu, ancak yüksek teknoloji uygulamaları veya bilimsel çalışmalar için istenilen hassasiyeti sağlayamayacağı sonucunu doğurmaktadır. Sıkıştırılamaz akıslarda basıncın hesaplanması için kullanılan yöntemlerden en uygun olanların Basıncı Poisson Denklemi ve yapay sıkıştırılabilirlik olduğu yapılan literatür taraması sonucu görülmektedir.

Genel olarak yapılan çalışmanın sonuçlarının özetlenirse, birçok araştırmacı tarafından kullanılan SIMPLE yönteminin bilimsel çalışmalar için uygun olmadığı görülmüştür. Ayrıca yapısal olmayan hesap ağları ile yapısal hesap ağları arasındaki farkı azaltmak amacı ile polinom interpolasyonu kullanılması uygun olacaktır. Kendini uyarlayan hesap ağı ve çoklu hesap ağı kullanılması sonuçların hesap ağına bağımlılığını azaltacak ve yakınsama zamanını düşürerek hesaplamada meydana gelen düşük frekanslı hataları önemli ölçüde azaltacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Kırkköprü K.**, 1998. 'Viscous Flows Course Notes' *İstanbul Teknik Üniversitesi*.
- [2] **Comini G., Minkowycz W. J. ve Shyy W.**, 1997. 'General Algorithms for The Finite Element Solution of Incompressible Flow Problems Using Primitive Variables', *Advances in Numerical Heat Transfer c. 1*, Editörler: *Minkowycz W. J., Sparrow E. M., Taylor & Francis*, 137-169 .
- [3] **Harlow F. H. ve Welch J. E.**, 1965. 'Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface' *The Physics of Fluids*, **C. 5**, No. 12, 2182-2189.
- [4] **Kim J. ve Moin P.**, 1985. 'Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations' *Journal of Computational Physics*, No. 59, 308-323.
- [5] **Choi H. ve Moin P.**, 1994. 'Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow' *Journal of Computational Physics*, No. 113, 1-4.
- [6] **Zang Y., Street R. L. ve Koseff J. R.**, 1994. 'A Non-Staggered Grid, Fractional Step Method for Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations in Curvilinear Coordinates' *Journal of Computational Physics*, No. 114, 18-33.
- [7] **Kim D. ve Choi H.**, 2000. 'A Second-Order Time-Accurate Finite Volume Method for Unsteady Incompressible Flow on Hybrid Unstructured Grids' *Journal of Computational Physics*, No. 162, 411-428.

- [8] **Chorin A. J.**, 1997. 'A Numerical Method For Solving Incompressible Viscous Flow Problems' *Journal of Computational Physics*. No. 135,118-125.
- [9] **Patankar S. V.**, 1980. 'Numerical Heat Transfer and Fluid Flow', *McGraw-Hill Book Company*.
- [10] **Van Doormal J. P. ve Raithby G. D.**, 1984. 'Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows' *Numerical Heat Transfer*, C. 7,147-163.
- [11] **Issa R. I.**, 1986. 'Solution of Implicitly Discretized Fluid Flow Equations by Operator Splitting' *Journal of Computational Physics*, No. 62,40-65.
- [12] **Lien F. S.**, 2000. 'A Pressure-Based Unstructured Grid Method For All-Speed Flows' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. 33,355-374.
- [13] **Ferziger J. H. ve Peric M.**, 1996. 'Computational Methods for Fluid Dynamics', *Springer-Verlag*.
- [14] **Rhie C. M. ve Chow W. L.**, 1983. 'Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation' *AIAA Journal*, C. 21, No. 11,1525-1532.
- [15] **Zoppou C., Roberts S. ve Renka R. J.**, 2000. 'Exponential Spline Interpolation in Characteristic Based Scheme For Solving Advective-Diffusion Equation' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. 33,429-452.
- [16] **Leonard B. P.**, 1997. 'Bounded Higher-Order Upwind Multidimensional Finite-Volume Convection-Diffusion Algorithms', *Advances in Numerical Heat Transfer c. 1*, Editörler: Minkowycz W. J., Sparrow E. M., Taylor & Francis,1-57.
- [17] **Gaskell P. H. ve Lau A. K. C.**, 1988. 'Curvature-Compensated Convective Transport:SMART, a New Boundedness Preserving

Transport Algorithm' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. 8,617-641.

- [18] **Leonard B. P. ve Niknafs H. S.**, 1991. 'Sharp Monotonic Resolution of Discontinuities Without Clipping of Narrow Extrema' *Computers & Fluids*, C. 19, No. 1,141-154.
- [19] **Davidson L.**, 1996. 'A Pressure Correction Method For Unstructured Meshes With Arbitrary Volumes' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. 22,265-281.
- [20] **Jasak H., Weller H. G. ve Gosman A. D.**, 2000. 'High Resolution NVD Differencing Scheme For Arbitrarily Unstructured Meshes' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. 31,431-449.
- [21] **Venkatakrishnan V.**, 1995. 'Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters' *Journal of Computational Physics*, No. 118,120-130.
- [22] **Kobayashi M., Pereira J. M. C. ve Pereira J. C. F.**, 1998. 'A Second-Order Upwind Least-Squares Scheme For Incompressible Flows on Unstructured Hybrid Grids' *Numerical Heat Transfer, Part B*, No. 34,39-60.
- [23] **Mathur S. R. ve Murthy J. Y.**, 1997. 'Pressure Boundary Conditions For Incompressible Flow Using Unstructured Meshes' *Numerical Heat Transfer Part B*, No. 32,283-298.
- [24] **Ghia U., Ghia K. N. ve Shin C. T.**, 1982. 'High-Re Solutions For Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method' *Journal of Computational Physics*, No. 48,387-411.
- [25] **Kobayashi M. H. ve Pereira J. C. F.**, 1996. 'A Comparison of Second Order Convection Discretization Schemes For Incompressible Flow' *Communications in Numerical Methods in Engineering*, C. 12,365-411.

- [26] **Shih T. M.**, 1985. 'A Procedure to Debug Computer Programs' *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, C. **21**,1027-1037.
- [27] **Armaly B. F., Durst F., Pereira J. C. F. ve Schöning B.**, 1983. 'Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow' *Journal Fluid Mechanics*, C. **127**,473-496.
- [28] **Barton I. E.**, 1998. 'Comparison of SIMPLE and PISO Type Algorithms For Transient Flows' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. **26**,459-483.
- [29] **Barrett R., Berry M., Chan T. F., Demmel J., Donato M., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C. ve der Vorst H. V.**, 1994. 'Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods' *SIAM Philadelphia*.
- [30] **Zhang J.**, 2000. 'Preconditioned Krylov Subspace Methods for Solving Nonsymmetric Matrices From CFD Applications' *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. **189**,825-840.
- [31] **Van Der Vorst H. A.**, 1992. 'BI-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG the Solution of Nonsymmetric Linear Systems' *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, C. **13**, No. **2**,631-644.
- [32] **Hackbusch W.**, 1994. 'Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations', *Springer Verlag*.
- [33] **Schlichting H.**, 1979. 'Boundary-Layer Theory', *McGraw-Hill Book Company*, 2. baskı.
- [34] **Kobayashi M. H. ve Pereira J. C. F.**, 1991. 'Numerical Comparison of Momentum Interpolation Methods and Pressure-Velocity Algorithms Using Non-Staggered Grids' *Communications in Applied Numerical Methods*, C. **7**,173-186.

- [35] **Mathur S. R. ve Murthy J. Y.**, 1997. 'Pressure Based Method For Unstructured Meshes' *Numerical Heat Transfer, Part B*, **No. 31**,195-215.
- [36] **Gresho P. M. ve Sani R. L.**, 1987. 'On Pressure Boundary Conditions For the Incompressible Navier-Stokes Equations' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 7**,1111-1145.
- [37] **Majumdar S.**, 1988. 'Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation For Calculation of Flow With Nonstaggered Grids' *Numerical Heat Transfer*, **C. 13**,125-132.
- [38] **Miller T. F. ve Schmidt**, 1988. 'Use of a Pressure-Weighted Interpolation Method For the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System ' *Numerical Heat Transfer*, **C. 14**,213-233.
- [39] **Shyy W.**, 1988. 'Computation of Complex Fluid Flows Using an Adaptive Grid Method' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 8**,475-489.
- [40] **Thomadakis M. ve Leschziner M.**, 1996. 'A Pressure-Correction Method For the Solution of Incompressible viscous Flows on Unstructured Grids' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 22**,581-601.
- [41] **Leonard B. P.**, 1988. 'Simple High-Accuracy Resolution Program For Convective Modelling of Discontinuities' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 8**,1291-1318.
- [42] **Gartling D. K.**, 1990. 'A Test Problem For Outflow Boundary Conditions-Flow Over a Backward-Facing Step' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 11**,953-957.

- [43] **Gresho P. M.**, 1991. 'Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues' *Annually Review of Fluid Mechanics*, C. **23**,413-453-1318.
- [44] **Leonard B. P.**, 1991. 'The ULTIMATE Conserative Difference Scheme Applied to Unsteady One-Diensional Advection' *Computer Methods in Applied Mechnics and Engineering*, No. **88**,17-74.
- [45] **Taniguchi N. ve Kobayashi T.**, 1991. 'Finite Volume Method on the Unstructured Grid System' *Computers & Fluids*, C. **19**, No. **3/4**,287-295.
- [46] **Dick E. ve Linden J.**, 1992. 'A Multigrid Method For Steady Incompressible Navier-Stokes Equations Based on Flux Difference Splitting' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. **14**,1311-1323.
- [47] **Tafti D.**, 1995. 'Alternate Formulations for the Pressure Equation Laplacian on a Collocated Grid For Solving the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations' *Journal of Computational Physics*, No. **116**,143-153.
- [48] **Lilek Z. ve Peric M.**, 1995. 'A Fourth-Order Finite Volume Method With Colocated Varibale Arrangement' *Computers & Fluids*, C. **24**, No. **3**,239-252.
- [49] **Barton I. E.**, 1995. 'A Numerical Study Over a Confined Backward Step' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, C. **14**,653-665.
- [50] **Delanaye M.**, 1996. 'Polynomial Reconstruction Finite Volume Schemes for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations on Unstructured Adaptive Grids', *Doktora Tezi, University of Liege* .
- [51] **Oosterlee C. W. ve Ritzdorff H.**, 1996. 'Flux Differece Splitting For Three-Dimensional Steady Incompressible Navier-Stokes Equations

In Curvilinear Co-ordinates' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 23**,347-366.

- [52] **Rahman M. M, Miettinen A. ve Siikonen T.**, 1996. 'Modified SIMPLE Formulation on a Collocated Grid With an Assessment of the Simplified Quick Scheme' *Numerical Heat Transfer,Part B*, **No. 30**,291-314.
- [53] **Lai Y. G.**, 1997. 'An Unstructured Grid Method For A Pressure-Based Flow and Heat Transfer Solver' *Numerical Heat Transfer,Part B*, **No. 32**,267-281.
- [54] **Kim N., Anand N. K. ve Rhode D. L.**, 1998. 'A Study on Convergence Criteria For a Simple-Based Finite-Volume Algorithm' *Numerical Heat Transfer,Part B*, **No. 34**,401-417.
- [55] **Tony W. H. S.,Morten M. T. W. ve Tsai S. F.**, 1998.'Pressure Boundary Conditions For a Segregated Approach To Solving Incompressible Navier-Stokes Equations' *Numerical Heat Transfer,Part B*, **No. 34**,457-467.
- [56] **Barton I. E.**, 1998.'Improved Laminar Predictions Using a Stabilised Time-Dependent SIMPLE Scheme' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 28**,841-857.
- [57] **Minev P. D. ve Gresho P. M.**, 1998.'A Remark on Pressure Correction Schemes For Transient Viscous Incompressible Flow' *Communications in Applied Numerical Methods*, **C. 14**,335-346.
- [58] **Wang Y. ve Komori S.**, 1999.'Comparison of Using Cartesian and Covariant Velocity Components on Non-Orthogonal Grids' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 31**,1265-1280.
- [59] **Moulinec C. ve Wesseling P.**, 2000. 'Collocated Schemes For the Incompressible Navier-Stokes Equations on Non-Smooth Grids

For Two-Dimensional Problems' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, **C. 32**,349-364.

- [60] **Foy B. ve Dawes W.**, 2000. 'Unstructured Pressure-Correction Solver Based on a Consistent Discretization of the Poisson Equation' *International Journal For Numerical Methods in Fluids*. **C. 34**. 163- 178.
- [61] **Moukalled F. ve Darwish M.**, 2000. 'A Unified Formulation of the Segregated Class of Algorithms for Fluid Flow at All Speeds' *Numerical Heat Transfer, Part B*, **No. 37**,103-139.



EK A

LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Gerek momentum denklemlerinin, gerekse basınç düzeltme denklemlerinin ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan lineer denklem sisteminin çözümü için değişik metodlar kullanılmaktadır. Bu metodların karşılaştırmaları [13, 29, 30] no'lu kaynaklarda verilmiştir. En genel halde bir denklem sistemini A.1 deki gibi tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (\text{A.1})$$

Bu çalışmada yapısal olmayan çözüm ağlarının kullanılması nedeniyle momentum denklemlerinin ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan katsayılar matrisi seyrek ve simetrik değildir. Diğer yöntemlere göre daha hızlı yakınsaması[30] ve programlanmasının daha kolay olması nedeniyle ([29]) [31] no'lu kaynakta belirtilen BI-CGSTAB yöntemi kullanılmıştır. Yöntemin algoritması Şekil A.1 de gösterilmiştir.

```

Compute  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$  for some initial guess  $x^{(0)}$ 
Choose  $\tilde{r}$  (for example,  $\tilde{r} = r^{(0)}$ )
for  $i = 1, 2, \dots$ 
     $\rho_{i-1} = \tilde{r}^T r^{(i-1)}$ 
    if  $\rho_{i-1} = 0$  method fails
    if  $i = 1$ 
         $p^{(i)} = r^{(i-1)}$ 
    else
         $\beta_{i-1} = (\rho_{i-1} / \rho_{i-2})(\alpha_{i-1} / \omega_{i-1})$ 
         $p^{(i)} = r^{(i-1)} + \beta_{i-1}(p^{(i-1)} - \omega_{i-1}v^{(i-1)})$ 
    endif
    solve  $M\tilde{p} = p^{(i)}$ 
     $v^{(i)} = A\tilde{p}$ 
     $\alpha_i = \rho_{i-1} / \tilde{r}^T v^{(i)}$ 
     $s = r^{(i-1)} - \alpha_i v^{(i)}$ 
    check norm of  $s$ ; if small enough: set  $x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_i \tilde{p}$  and stop
    solve  $M\tilde{s} = s$ 
     $t = A\tilde{s}$ 
     $\omega_i = t^T s / t^T t$ 
     $x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_i \tilde{p} + \omega_i \tilde{s}$ 
     $r^{(i)} = s - \omega_i t$ 
    check convergence; continue if necessary
    for continuation it is necessary that  $\omega_i \neq 0$ 
end

```

Şekil A.1: BI-CGSTAB algoritması([29]).

Şekil A.1 de gösterilen algoritmada M önşartlandırıcı matrisdir. Bu çalışmada ILU önşartlandırıcı BI-CGSTAB metodunun daha hızlı yakınsamasını sağlamak amacı ile kullanılmıştır. Ön şartlandırıcı matrisin oluşturulması ile ilgili algoritma Şekil A.2 de verilmiştir.

```

for  $i = 1, N$ 
   $L_{ii} = 1.0$ 
  for  $k = 1, i - 1$ 
    If  $A_{ik} \neq 0.0$  then
       $L_{ik} = 0.0$ 
    else
       $L_{ik} = (A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij}U_{jk})/U_{kk}$ 
    end if
  end
  for  $k = 1, i$ 
    If  $A_{ki} = 0.0$  then
       $U_{ki} = 0.0$ 
    else
       $U_{ki} = A_{ki} - \sum_{j=1}^{k-1} (L_{k,j}U_{j,i})$ 
    end if
  end
end
end

```

Şekil A.2: ILU ön şartlandırıcı algoritması([32]).

ILU önşartlandırıcının uygulanması ile ilgili bilgiler [32] da bulunmaktadır. [29] no'lu kaynakta programlara nasıl uygulanacağı ile ilgili bilgiler bulunmaktadır. ILU önşartlandırıcının çözüm metodu üzerindeki etkisi ise [30] no'lu kaynakta incelenmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Gökmen Aksoy 1976 yılında Aksaray'da doğdu. 1994 yılında Ankara Gazi Anadolu Lisesinden mezun oldu. 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi Makina Mühendisliği bölümünden mezun oldu.

