22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

BİLDİRİLER KİTABI



Editörler

Mehmet H. Omurtag

Abdullah Avey

Nazmiye Yahnioğlu

Mustafa Özakça

Nihal Eratlı

Egemen Teomete

Çukurova Üniversitesi - Adana

06-08 Eylül 2021

Teorik ve Uygulamalı Mekanik
Türk Milli Komitesi
www.tumtmk.org

© 2021, İstanbul Teknik Üniversitesi

ISBN No / ISBN Number : 978-975-561-523-3

Bu kitabın her hakkı saklıdır ve tüm yayın hakları "İTÜ Rektörlüğü'ne" aittir. Bu kitabın tamamı yada herhangi bir bölümü yayınevinin izni olmaksızın yayınlanamaz, basılamaz, mikrofilme çekilemez, dolaylı dahi olsa kullanılamaz. TEKSİR, FOTOKOPİ veya başka teknikle çoğaltılamaz, bilgisayarda, dizgi makinalarında işlenebilecek bir ortama aktarılamaz. Kitapta yayınlanan tüm yazı ve görsellerin sorumluluğu yazar/yazarlara aittir."

All rights of this book are reserved and all publication rights belong to "ITU Rectorate". All or any part of this book cannot be published, printed, filmed or used indirectly without the permission of the publisher. It cannot be reproduced by DUPLICATION, PHOTOCOPY or any other technique, and cannot be transferred to an environment that can be processed on computers or typesetting machines. The responsibility of all texts and visuals published in the book belongs to the author(s).

İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları. Yayın No / ITU Publications, Publication No : 2021.2KNF/5

Yayın Tarihi /Date of Publication : 15 Ekim / October 2021

Kapak tasarımı / Cover page design : Gökay Aydoğan

Editörler / Editors : Mehmet H. Omurtag, Abdullah Avey, Nazmiye Yahnioğlu, Mustafa Özakça, Nihal Eratlı, Egemen Teomete

KONGRE DÜZENLEME KURULU

Mehmet Hakkı OMURTAG	(İMÜ)
Abdullah AVEY	(SDÜ)
Nazmiye YAHNİOĞLU	(YTÜ)
Mustafa ÖZAKÇA	(GAÜN)
Nihal ERATLI	(İTÜ)
Egemen TEOMETE	(DEÜ)

KONGRE BİLİM KURULU

Surkay AKBAROV	(YTÜ)
Yalçın AKÖZ	(MAÜ)
Orhan AKSOĞAN	(TorosÜ)
Ünal ALDEMİR	(İTÜ)
Nalan ANTAR	(İTÜ)
Atilla AŞKAR	(KÜ)
Hakan ARGEŞO	(AtılımÜ)
Şenol ATAOĞLU	(İTÜ)
Ersin AYDIN	(NÖHÜ)
İlkay BAKIRTAŞ	(İTÜ)
Ahmet BİRİNCİ	(KTÜ)
Zekai CELEP	(FSMVÜ)
A. Osman ÇAKIROĞLU	(AV.Ü)
Can Fuad DELALE	(MEF)
Babür DELİKTAŞ	(UÜ)
Hilmi DEMİRAY	(IÜ)
Hasan ENGİN	(İTÜ)
Ragıp ERDÖL	(CBÜ)
Ahmet ERGİN	(İTÜ)
Serdar GÖKTEPE	(ODTÜ)
Ülgen GÜLÇAT	(İTÜ)
Avadis HACINLAYAN	(YÜ)
Esin İNAN	(IÜ)
Erhan KIRAL	(ÇÜ)
M. Salih KIRKGÖZ	(ÇÜ)
Zahit MECİTOĞLU	(İTÜ)
Yalçın MENGİ	(ODTÜ)
Mustafa ÖZAKÇA	(GAÜN)
Erdoğan ŞUHUBİ	(İTÜ)
Mehmet Ali TAŞDEMİR	(İTÜ)
Mevlüt TEYMUR	(İTÜ)
İsmail TUNCER	(ODTÜ)
Naki TÜTÜNCÜ	(ÇÜ)
Ümit UZMAN	(KTÜ)
Mehmet ÜLKER	(TÖÜ)

YEREL KOMİTE

M. Sami AKÖZ	(ÇÜ)
H. Murat ARSLAN	(ÇÜ)
Beytullah TEMEL	(ÇÜ)
Ali Hamza TANRIKULU	(ÇÜ)
Faruk Fırat ÇALIM	(ATÜ)
M. Fatih ŞAHAN	(ADYÜ)
Ahmad Reshad NOORI	(İGÜ)
Timuçin Alp ASLAN	(ÇÜ)
Ahmet AKKAYA	(ÇÜ)
Seda SEVER	(ÇÜ)
Burkay SİVRİ	(ÇÜ)
Muzaffer KURT	(ÇÜ)

Değerli Araştırmacılar

Bu kitap **Adana Çukurova Üniversitesi** tarafından **6-8 Eylül 2021** tarihinde **çevrim içi** düzenlenen **22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ**'nde video sunumlarının yapıldığı oturumlara çevrimiçi katılıp, sunuma ait soru-cevap etkinliğinde yer almış araştırmacıların özgün bildirilerini içermektedir. 22'inci Ulusal Mekanik Kongresi'nde **91 sözlü bildiri** ve **4 adet çağrılı konuşmacı** ile toplam **95 adet bilimsel sunum** yapılmıştır.

Düzenli olarak **44 yıldır**, her **2 yılda bir** tertiplenen **ULUSAL MEKANİK KONGRESİ** sadece bir ulusal bilimsel etkinlik değil aynı zamanda sosyal kaynaşma vesilesidir. O nedenledir ki, bugüne kadar bütün kongre programlarımız **5 gün**e yayılmış ve **1 günü** de **SOSYAL GÜN** etkinliğine ayrılmıştır. Bu kongre vesilesi ile, her iki senede bir Türkiye'nin her köşesinden akademisyenler bir araya gelmekte ve birbirleri ile iletişimlerini canlı tutmaktadırlar.

İçinde bulunduğumuz COVID pandemi sürecine bağlı olarak bu defa **ÇEVRİMİÇİ** yapılmış olan 22. Ulusal Mekanik Kongresi **3 gün** içinde, **3 paralel oturum** biçiminde gerçekleştirilmiştir. Araştırmacıların büyük titizlikle hazırladıkları video sunumlar kongrenin hiç aksamadan gerçekleşmesini sağlamıştır. Bildiriler kitabı yayımlandıktan hemen sonra Adana Çukurova Üniversitesi, belli bir süre sonra, bu video sunumları isteyen araştırmacıların izlemesine ya da indirmesine izin verecektir.

Teorik ve Uygulamalı Mekanik Türk Milli Komitesi (TUMTMK) mekanik camiasının yüz akı Ulusal Mekanik Kongresi'nin bilimsel düzeyini yukarıya taşımak konusunda kararlı adımları atmaya devam ediyor. Üç dönemdir görev alan mevcut yönetim bu konuda iki önemli strateji izliyor. Bunlardan ilki, **Üniversiteler Arası Kurul**'un onayladığı ulusal (TR dizin) ve uluslararası (WOS) özelliğe sahip dergiler ile kongrede sunulan **bildirilerin özgün makalelere dönüştürülmesini desteklemek** biçimindedir. Böylece kongrede sunum yapmak, bildiriler kitabında yer almak kadar bu bildiriden bir özgün makalenin dönüştürülerek zenginleştirilmesi araştırmacılar için daha da yararlı olacaktır. Dergi çeşitliliği de araştırmacıların ihtiyaçlarına cevap verecek biçimde seçilmektedir. Bilimsel düzey anlamında diğer bir çabamız ise uluslararası bilim camiasında düzeyleri tartışmasız biçimde öne çıkmış araştırmacıları güncel konuları sunmaları için **çağrılı konuşmacı** olarak davet etmektir.

Son 2 kongrede olduğu gibi, **22. Kongre** için de sağlanan 5 adet **dergi desteği** hakkında bilgi vermek istersek:

1. **TEKNİK DERGİ** (Science Citation Index Expanded) (İngilizce ve Türkçe makale kabul ediyor)
   Teknik Dergi Yayın Kurulu Kararı gereği:
   - Kongre Düzenleme Kurulu'nca onaylanarak Teknik Dergi'ye aktarılacak tüm yazıların Teknik Dergi yazım kurallarına uygun olarak yeniden düzenlenmiş olması gerekiyor.
   - Bu yazıları Teknik Dergi hakemleri yeniden değerlendirilecek ve kabul edilenler yayımlanacaktır.
2. **SIGMA JOURNAL OF ENGINEERING AND NATURAL SCIENCES** (Emerging Sources Citation Index) (İngilizce makale kabul ediyor).
3. **JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING AND APPLIED MECHANICS** (TR dizin) (İngilizce makale kabul ediyor).
4. **EUROPEAN MECHANICAL SCIENCE** (TR dizin) (İngilizce makale kabul ediyor).
5. **ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK-MİMARLIK FAKÜLTESİ DERGİSİ** (TR dizin) (İngilizce ve Türkçe makale kabul ediyor).

Kongremizin bilimsel düzeyinin yükselmesinde önemli yeri olan çağrılı konuşmacılarımızdan 3 tanesi Amerika Birleşik Devletleri'nden idi. **Amerika Birleşik Devletleri** ile aramızdaki **saat farkı** nedeniyle yurt dışından katılan çağrılı konuşmacıların sunumları akşam üstü yapıldı. Çağrılı konuşmacılarımız:

- Prof.Dr. Ertuğrul TACİROĞLU (UCLA - ABD) 6 Eylül Pazartesi günü saat 15:50 – 16:40
- Prof.Dr. Abdullah AVEY (Isparta Süleyman Demirel Üniversitesi) 6 Eylül Pazartesi günü saat 10:30 – 11:20
- Prof.Dr. Çağlar OSKAY (Vanderbilt Üniversitesi - ABD) 7 Eylül Salı günü saat 15:50 – 16:40
- Prof.Dr. Sinan KETEN (Northwestern Üniversitesi - ABD) 8 Eylül Çarşamba günü saat 15:50 – 16:40

Bu sene **TUMTMK web** sayfasına **DEĞERLERİMİZ** sekmesi altında yeni bir eklenti yaptık ve TEORİK ve UYGULAMALI MEKANİĞE üstün hizmetleri geçmiş yaşayan ya da kaybettiğimiz çok değerli akademisyenlerimiz için bir sayfa oluşturduk. Burada elimizden geldiği kadar seçici davrandık.

Bu sayfanın amacı, **EVRENSEL BİLİM DÜNYASINA** kalıcı katkıları olan değerlerimizin bir sonraki nesle aktarılması ve kendilerinin şükran ve minnet ile anılmasını sağlamaktır. Soyadına göre alfabetik sıra ile değerlerimizin isimleri: Prof.Dr. Attila AŞKAR, Prof.Dr. Feridun DELALE, Prof.Dr. Can Fuat DELALE, Prof.Dr. Hilmi DEMİRAY, Prof.Dr. Fazıl ERDOĞAN, Prof.Dr. Erdoğan S. ŞUHUBİ. Değerlerimizin fotoğraf ve özgeçmişlerini bulabileceğiniz bu sayfa dinamik yapıda olacak ve ilerideki yıllarda **Genel Kurul Kararı** ile güncellenebilecektir.

TUMTMK olarak, 22. Ulusal Mekanik Kongresi'nin gerçekleşmesine vesile olan ve değerli maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen

- İstanbul Teknik Üniversitesi Rektörü Sayın **Prof.Dr. İSMAİL KOYUNCU**'ya
- Adana Çukurova Üniversitesi Rektörü Sayın **Prof.Dr. MERYEM TUNCEL**'e
- Adana Çukurova Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Dekanı Sayın **Prof.Dr. ULUS ÇEVİK**'e
- Adana Çukurova Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölüm Başkanı Sayın **Prof.Dr. M. SAMİ AKÖZ**'e
- Adana Çukurova Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Öğretim Üyesi Sayın **Prof.Dr. BEYTULLAH TEMEL**'e
- İTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü Başkan Yardımcısı Sayın **Prof.Dr. NİHAL ERATLI**'ya
- İTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Dr.Öğr.Üyesi AKİF KUTLU**'ya
- İstanbul Medipol Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Dr.Öğr.Üyesi ÜMİT ARIBAŞ**'a
- Kırklareli Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Dr.Öğr.Üyesi MERVE ERMİŞ**'e
- İTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Araş.Gör. YONCA BAB**'a
- İTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Araş.Gör. TUĞBA BAYTAK**'a
- Kırklareli Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Öğrencisi Sayın **GÖKAY AYDOĞAN**'a

ve Adana Çukurova Üniversitesi Bilgi İşlem Dairesi ile büyük bir koordinasyon içinde, kongrenin çevrim içi akışının aksamadan mükemmel bir biçimde yapılmasını sağlayan **moderatörler**

- İstanbul Gelişim Üniversitesi İnş.Böl.Bşk. Sayın **Dr.Öğr.Üyesi AHMAD RESHAD NOORI**'ye
- Adana Çukurova Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Araş.Gör. TİMUÇİN ALP ASLAN**'a
- Adana Çukurova Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Araş.Gör. AHMET AKKAYA**'ya
- Adana Çukurova Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Araş.Gör. SEDA SEVER**'e
- Adana Çukurova Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden Sayın **Araş.Gör. BURKAY SİVRİ**'ye

kalbi teşekkürlerimizi sunarız.

22. Ulusal Mekanik Kongresi'nin tüm akademisyenlerimize ve akademisyen adaylarımıza faydalı olduğu düşüncesi ile TUMTMK yönetim Kurulu adına saygılarımı sunarım.

Prof.Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG
Teorik ve Uygulamalı MekanikTürk Milli Komitesi
Başkan

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ PROGRAMI

06 Eylül 2021 Pazartesi

Açılış Konuşmaları

Yer : Ana Salon

Saat: 09:30 – 10:30

Çağrılı Konuşma Oturum 1

Oturum Başkanı : Prof.Dr. M. Sami AKÖZ

Konuşmacı : Prof.Dr. Abdullah AVEY

Konu : Karbon Nanotüplerle Güçlendirilmiş Kompozit Kabuklar

Yer : Ana Salon

Saat : 10:30 – 11:20

Ara : 11:20 – 11:30

1. Oturum – Salon A : Sürekli Ortamlar Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU

11:30 – 11:50	**S.D. Akbarov, E.T. Bagirov,** On the Torsional Waves Dispersion Propagating in a Bi-Layered Hollow Cylinder With Inhomogeneous Thermal Pre-Stresses
11:50 – 12:10	**M.E. Yıldızdağ,** Pantografik Metamalzemelerin İkinci Dereceden Gradyan Teorisi ile Modellenmesi ve Bünye Parametrelerinin Belirlenmesi
12:10 – 12:30	**E.D. Özdemir,** Homojen Bir Tabaka ile Kaplı Heterojen Bir Yarım Uzayda Doğrusal Olmayan Yüzey SH Dalgalarının Yayılımı

1. Oturum – Salon B : Uygulamalı Matematik

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Mehmet H. OMURTAG

11:30 – 11:50	**A. Aşkar,** Eğrisel çubukların doğrusal olmayan dinamiği
11:50 – 12:10	**E.G. Çelik, N. Antar,** Kübik-Kuintik Doğrusal Olmayan Schrödinger Denkleminin Raman Etkisi Ve Öz-Dikleşme Etkisi Altındaki Soliton Çözümleri
12:10 – 12:30	**M. Turgut, İ. Bakırtaş**, Dördüncü Mertebeden Dispersiyon İçeren Kübik Nonlineer Schrödinger Denkleminin Çift-Kuyulu Potansiyel Altında Soliton Çözümleri

1. Oturum – Salon C : Optimizasyon Problemleri

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Beytullah TEMEL

11:30 – 11:50	**H. Koç, Y. Şahiner, M. Yakar, F.K. Adam, E. Tüfekci,** Kompozit Güçlendirilmiş Plakların Optimizasyonu
11:50 – 12:10	**T. Baytak, O. Bulut**, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Plaklarda Termal Gerilme Analizi ve Malzeme Parametrelerinin Optimizasyonu
12:10 – 12:30	**M.V. Şaştım, M. Ülker,** İntegral Köprü Tasarımında Çeşitli Optimizasyon Yöntemlerinin Karşılaştırılması

Öğle Arası : 12:30 – 13:30

06 Eylül 2021 Pazartesi

2. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Faruk F. ÇALIM

13:30 – 13:50	**Y. Bab, A. Kutlu,** Tabakalı Kompozit Kirişlerin Gerilme Hesabında Yüksek Mertebe Kayma Teorisini Temel Alan Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu
13:50 – 14:10	**Y. Bab, A. Kutlu, M. Dördüncü,** Elastik Zemine Oturan Tabakalı Kompozit Kirişlerin Eğilme Davranışı için Geliştirilmiş Zikzak Teorisi Tabanlı Karışık Sonlu Eleman Formülasyonu
14:10 – 14:30	**B. Sivri, B. Temel,** Euler-Bernoulli ve Timoshenko Teorilerine Dayalı Eksenel Yönde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolonların Burkulma Analizi

2. Oturum – Salon B : Uygulamalı Matematik

Oturum Başkanı: Doç.Dr. Semra AHMETOLAN

13:30 – 13:50	**N. Özdemir, S. Ahmetolan, A. Demirci,** (3+1) Boyutlu Modified Kadomtsev-Petviashvili Denklemi İçin Whitham Modülasyon Teorisi
13:50 – 14:10	**G.Aslanova, S. Ahmetolan, A. Demirci,** Küresel Gardner Denklemi için Whitham Modülasyon Teorisi

2. Oturum – Salon C : Optimizasyon Problemleri

Oturum Başkanı: Dr.Öğr.Üyesi Merve ERMİŞ

13:30 – 13:50	**O. İnce, M. Ülker,** Kompozit Kutu Kesitli Köprülerin Yapay Arı Kolonisi Algoritması ile Optimum Tasarımı
13:50 – 14:10	**E. Eren, M. Ülker,** Eksenel Kuvvet ve Eğilme Etkisindeki Yapı Elemanlarının Optimum Tasarımı
14:10 – 14:30	**E. Doğan, B. Üstüner, İ. Aydoğdu, C. Özyürek,** Eğrisel Formdaki Çatıların Kurt Koloni Algoritması Kullanılarak Optimum Tasarımı

Ara : 14:30 – 14:40

06 Eylül 2021 Pazartesi

3. Oturum – Salon A : Sürekli Ortamlar Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. İlkay BAKIRTAŞ AKAR

14:40 – 15:00	**D. Tuna, S. Ahmetolan, E.D. Özdemir,** Heterojen İki Tabakalı Ortamda Doğrusal Olmayan Yatay Kayma Dalgalarının Yayılımı
15:00 – 15:20	**A. Özmutlu, T. Dolapdere,** Periyodik Yığılı Kütleli Kayma Kirişinde Dalga Dispersiyonu: Kütlelerin Dalga Bariyeri Etkisinin Araştırılması
15:20 – 15:40	**S. Ahmetolan, E.D. Özdemir, A.P. Dobie,** Pürüzlü Yüzeyli Bir Tabaka İle Ayrılmış Sonsuz Elastik Ortamda Kayma Dalgaları

3. Oturum – Salon B : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Doç.Dr. Serdar GÖKTEPE

14:40 – 15:00	**S.F. Dal, S. Göktepe,** Periyodik Gözenekli Yapıya Sahip Metamalzemelerde Vurgu Burkulması İçin Viskoelastik Model
15:00 – 15:20	**C. Basaran, N. Bin Jamal, L. Rao, H.W. Lee,** Birleşik Mekanik Teorisinde Dinamik Analiz Denklemi
15:20 – 15:40	**C. Basaran, H.W. Lee,** Yorulma Yaşının Birleşik Mekanik Teorisi İle Hesaplanması

3. Oturum – Salon C : Yapı ve Malzeme Mekaniği

Oturum Başkanı: Doç.Dr. Mehmet DÖRDÜNCÜ

14:40 – 15:00	**R. İnce,** Yarı-Gevrek Malzemelerin Kırılma Parametrelerini Tayin Etmek İçin Deneysel Bir Metot
15:00 – 15:20	**V. Kahya, S. Şimşek,** Armoni Arama Algoritması Kullanılarak Tabakalı Kompozit Kirişte Frekans Değişimlerine Dayalı Hasar Tespiti
15:20 – 15:40	**E. Madenci, A. Yaghoobi, A. Barut, N. Phan,** Peridynamic Modeling of Failure in Fiber Steered Composites

Ara : 15:40 – 15:50

Çağrılı Konuşma Oturum 2

Oturum Başkanı : Prof.Dr. Mehmet H. OMURTAG

Konuşmacı : Prof.Dr. Ertuğrul TACİROĞLU

Konu : Computational Mechanics in Service of Earthquake Engineering: Applications, Challenges, Opportunities

Yer : Ana Salon

Saat: 15:50 – 16:40

07 Eylül 2021 Salı

4. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Dr.Öğr.Üyesi Akif KUTLU

09:30 – 09:50	**Ü.N. Arıbas, M. Atalay, M. Aydın, M. Ermis, M.H. Omurtag,** Fonksiyonel Dereceli Dairesel Kirişlerin Dinamik Analizi
09:50 – 10:10	**Z. Aktı, M. Ermis, M.H. Omurtag,** Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş Dairesel Kirişlerin Karışık Sonlu Eleman Yöntemi İle Statik Analizi
10:10 – 10:30	**O. Kır, M. Ermis, U.N. Aribas, M.H. Omurtag,** Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş Eliptik Kirişlerin Sonlu Eleman Yöntemi İle Statik Analizi
10:30 – 10:50	**G. Aydoğan, M. Ermis, U.N. Aribas, M.H. Omurtag,** Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş Eliptik Kirişlerin Sonlu Eleman Yöntemi İle Serbest Titreşim Analizi

4. Oturum – Salon B : Akışkanlar Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Ahmet Ergin

09:30 – 09:50	**T.A. Aslan, B. Temel,** Baraj Gövde ve Temelindeki Sızma Probleminin Galerkin Yaklaşımına Dayalı Sonlu Elemanlar Analizi
09:50 – 10:10	**A. Ergüt, S. Taşkın, B.Y. Dağlı,** Farklı Kesitlere Sahip Fonksiyonel Derecelendirilmiş Timoshenko Kirişilerinin Sonlu Elemanlar Program Çözümlerinin Karşılaştırılması

4. Oturum – Salon C : Katı Cisimler Mekaniği – Uygulamalı Mekanik

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Ata MUĞAN

09:30 – 09:50	**B.K. Aras, N. Özkan, M.E. İnce, Ö. Özbek,** Tüp Formunda Tek Parça Atkılı Örme Kumaş Takviyeli Polimer Kompozit Boru Üretimi
09:50 – 10:10	**M.D. Topalca, B.H. Küplü, E. Aydoğdu, M.E. İnce,** İki Boyutlu Dokunmuş Kumaş Takviyeli Kompozitlerin Düzlem Dışı Mekanik Özelliklerinin Atkılı Örme Kumaş İlavesi İle İyileştirilme
10:10 – 10:30	**C. Torhan,** Abkant Makineler İçin Robot Yardımlı Otomatik Sac Bükümü Tasarımı ve Prototip İmalatı
10:30 – 10:50	**B. Nane, U. Karanfil,** Lazer Kesim Tablaları İçin Pnömatik Sac Kaydırma Sistemi Geliştirilmesi, Tasarımı ve Üretimi

Ara : 10:50 – 11:00

07 Eylül 2021 Salı

5. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Doç.Dr. M. Fatih ŞAHAN

11:00 – 11:20	**B. Temel, A.R. Noori, T.A. Aslan,** Fonksiyonel Derecelenmiş Sandviç Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi
11:20 – 11:40	**Y.Ç. Cuma, F F. Çalım,** Değişken Kesit ve Fonksiyonel Derecelenmiş Malzemeye Sahip Silindirik Olmayan Helisel Çubukların Titreşimi
11:40 – 12:00	**M. Turan, V. Kahya**, Ekseni Doğrultusunda Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Sonlu Elemanlar Metoduyla Burkulma Analizi

5. Oturum – Salon B : Etkileşim Problemleri

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Ahmet BİRİNCİ

11:00 – 11:20	**S. Akbarov, Z.E. Küzeci,** Piezoelektrik Levha Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimine Akışkan Özelliklerinin Etkisi
11:20 – 11:40	**B.B. Selçuk, C. Özşam, M. Özakça, M.M. Köse,** Soil Structure Interaction Analysis of Three Dimensional Reinforced Concrete Curtain Wall System Under Seismic Loads
11:40 – 12:00	**Ç. Şekerci, E. Damcı,** Bitişik İki Bina Modelinde Çarpışma Etkilerinin Deneysel Yöntemlerle İncelenmesi

5. Oturum – Salon C : Yapı Malzemesi Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Ragıp İNCE

11:00 – 11:20	**C. Mursal, E. Teomete,** Ön Üretimli Yapıların Yapısal Analizi
11:20 – 11:40	**B. Gökdemir, E. Teomete,** Kuvars Kompozitlerin Üretimi ve Özellikleri
11:40 – 12:00	**M. Şişman, E. Teomete, J. Yanık, U. Malayoğlu, G. Duman,** Kayısı Çekirdeği Kabuğu Biyokömürün Harcın Mekanik Özelliklerine Etkisi

Öğle Arası : 12:00 – 13:30

07 Eylül 2021 Salı

6. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

13:30 – 13:50	**M.H. Saraçoğlu, G. Güçlü, F.Uslu,** Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden İmal Edilmiş Eşit Mukavemetli Kirişler
13:50 – 14:10	**A. Çetinkol, H. Koç, E. Tüfekci,** Kesiti Kademeli Değişen Eğri Eksenli Düzlemsel Tabakalı Kompozit Çubukların Düzlem Dişi Serbest Titreşimlerinin Kesin Çözümü
14:10 – 14:30	**H. Rasooli, B. Temel, A.R. Noori,** Çok Açıklıklı Kompozit Kemer Sistemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Statik Analizi

6. Oturum – Salon B : Sürekli Ortamlar Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Hakan ARGEŞO

13:30 – 13:50	**B. Akçören, S. Göktepe**, Elastomerlerde Yırtılmanın Faz Alanı Yöntemi ile Hesaplamalı Modellenmesi
13:50 – 14:10	**A. Yıldırım, D. Yarımpabuç, V. Arıkan, M. Eker, K. Çelebi,** Kompozit Bir Diskin Pseudospektral Chebyshev Yöntemi ile Isıl Gerilme Analizi

6. Oturum – Salon C : Optimizasyon Problemleri

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Bahattin KANBER

13:30 – 13:50	**M. Doğan,** Streç Giydirme Makinasında Çekilen Polietilen Filmlerin En İyi Mekanik Davranışı Eldesi için Optimum Gerdirme Kuvvetlerin Belirlenmesi
13:50 – 14:10	**Y. Özkan, O. Koçak, İ. Pir, M. Tüfekçi,** 23 Metre Uzunluğunda Bir Kompozit Rüzgar Türbin Kanadının İç Yapısının Topoloji Optimizasyonuyla Tasarlanması
14:10 – 14:30	**O. Koçak, Y. Özkan, İ. Pir, M. Tüfekçi,** Köpük Çekirdek Malzemesinin Boşluk Oranının Kompozit Rüzgar Türbin Kanadının Yapısal Davranışına Etkisinin İncelenmesi

Ara : 14:30 – 14:40

07 Eylül 2021 Salı

7. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Babür DELİKTAŞ

14:40 – 15:00	**A. Tariq, B. Deliktaş,** Çelik Kafes Kulelerinde Aşamalı Göçmeye Neden Olan Kritik Elemanların Doğrusal Olmayan Davranışlarının Hesaplamalı Modellenmesi
15:00 – 15:20	**Ö.E. Genel, M. Tüfekci, E. Tüfekci,** Uzaysal Çerçeve Yapıların Serbest Titreşimlerinin Başlangıç Değerleri Yöntemiyle İncelenmesi
15:20 – 15:40	**N. Özten, Ö.E. Genel, E. Tüfekci,** Doğru ve Eğri Eksenli Çubuklardan Oluşan Çerçevelerin Titreşimleri

7. Oturum – Salon B : Optimizasyon Problemleri

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Mehmet ÜLKER

14:40 – 15:00	**S.Ö. Değertekin, G.Y. Bayar, L. Lamberti,** Büyük Ölçekli Kubbe Kafes Yapıların Adaptif Jaya Algoritmasıyla Doğal Frekans Sınırlayıcıları Altında Optimum Tasarımı
15:00 – 15:20	**S.Ö. Değertekin, L. Lamberti, İ. B. Uğur,** Kafes Yapıların Jaya Algoritması ile Enkesit ve Şekil Optimizasyonu
15:20 – 15:40	**M. Savran, M. Öncül, M. Yıldız, L. Aydın, K. Sever,** Hibrit Polimer Kompozitlerin Dinamik-Mekanik Özelliklerinin Çoklu Nonlineer Nöro-Regresyon Yöntemiyle Modellenmesi ve Optimizasyonu

7. Oturum – Salon C : Yapı Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Surkay AKBAROV

14:40 – 15:00	**Ü.B. Yeşil, F. Aylıkçı**, Eğilme Etkisindeki Dikdörtgen Kalın Plağın İçerdiği Pzt Dolguların Gerilme Yığılmasına Etkisi
15:00 – 15:20	**F. Aylıkcı, Ü.B. Yeşil,** Dikdörtgen İç Çatlak İçeren Pzt/Metal/Pzt Kalın Plağın Delaminasyon Burkulma Moduna İki Eksenli Statik Basınç Kuvvetinin Etkisi
15:20 – 15:40	**A.P. Yazıcı, F. Okay,** Değişken Kesitli Kolonların Elastik Burkulma Yüklerinin Kuvvet Serileri Yöntemiyle Belirlenmesi

Ara : 15:40 – 15:50

Çağrılı Konuşma Oturum 3

Oturum Başkanı : Prof.Dr. Abdullah AVEY

Konuşmacı : Prof.Dr. Çağlar OSKAY

Konu : Multiscale Discrete Damage Theory – A Novel Approach for Multiscale Modeling of Failure in Heterogeneous Materials

Yer : Ana Salon

Saat : 15:50 – 16:40

08 Eylül 2021 Çarşamba

8. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Volkan KAHYA

09:30 – 09:50	**İ Çömez,** Rijit Dairesel Zimba İle Manyetoelektroelastik Tabaka Arasında Termoelastik Temas Problemi
09:50 – 10:10	**A. Üstün, G. Adıyaman, T.Ş. Özşahin,** Homojen Yarı Sonsuz Tabakada Temas ve Çatlak Problemi
10:10 – 10:30	**B.Ş. Şabano, M.Yaylacı, G. Adıyaman, E. Öner, A. Birinci,** Elastik Yarım Düzleme Oturan ve Yayılı Yük ile Yüklenen Fonksiyonel Derecelendirilmiş İki Tabakanın Temas Problemi
10:30 – 10:50	**M.T. Polat,** Dairesel Rijit İki Panç ile Yüklenmiş Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakada Temas Gerilme Analizi

8. Oturum – Salon B : Yapı Analizi ve Tasarım

Oturum Başkanı: Doç.Dr. Egemen TEOMETE

09:30 – 09:50	**M.V. Şaştım, M. Ülker,** İntegral Köprülerin Statik ve Dinamik Tasarımına Etki Eden Faktörler
09:50 – 10:10	**H. Ergün, A. Hicazi,** Üçgen Çatılı Moment Aktaran Çerçevelerde Etkili Kolon Boyunun Hesabı Üzerine Bazı Notlar
10:10 – 10:30	**E.G. İnce, F.M. Özkal,** Etrafı Beton ile Çevrelenmiş Çelik Kompozit Kolonların Çok Katlı Yapılardaki Davranışlarının İncelenmesi
10:30 – 10:50	**S. Kömürcü,** Yığma Yapıların Analizi için Detaylı Mikro Modelleme Tekniğinin Uygulanması ve Modelleme Stratejileri

8. Oturum – Salon C : Bio-Mekanik

Oturum Başkanı: Dr.Öğr.Üyesi Ümit N. ARIBAŞ

09:30 – 09:50	**H. Zamanlou, F. Karabudak,** Comparison of Mechanical Fatigue for Human Cornea before and after CCL In keratoconus by using FEM
09:50 – 10:10	**F. Kaya, G. İnce,** Bir Kalça Protezinin Statik ve Dinamik Performansının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenmesi
10:10 – 10:30	**A.O. Güney, H. Lekesiz,** Giyilebilir Dış İskelet için Kullanılacak Yapay Kasların Sonlu Elemanlar Yöntemi ile İncelenmesi

Ara : 10:50 – 11:00

08 Eylül 2021 Çarşamba

9. Oturum – Salon A : Katı Cisimler Mekaniği - Nanotüpler

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Zahit MECİTOĞLU

11:00 – 11:20	**A. Avey, F. Turan,** Winkler Zemini Üzerindeki Karbon Nanotüpler İçeren İnce Sığ Silindirik Panellerin Lineer Olmayan Davranışları
11:20 – 11:40	**M. Avey, F. Tornabene,** Karbon Nanotüplerle Güçlendirilmiş Panellerin Kayma Deformasyon Teorisi Çerçevesinde Doğrusal Serbest Titreşim Analizi
11:40 – 12:00	**B. Uzun, M.Ö.Yaylı,** Fonksiyonel Derecelendirilmiş Nanoçubukların Boyut Etkisine Bağlı Titreşim Analizi
12:00 – 12:20	**U. Gül, M. Aydoğdu**, Noktasal Kütle İçeren Karbon Nanotüplerin Titreşim Analizi

9. Oturum – Salon B : Yapı Mekaniği - Deprem

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Ersin AYDIN

11:00 – 11:20	**E. Işık, F.Ü. Peker,** Çok Katlı Çelik Binalarda Türk Bina Deprem Yönetmeliği'ne Göre Düşey Deprem Hareketinin Yapısal Davranış Üzerine Etkisinin İncelenmesi
11:20 – 11:40	**F.Ü. Peker,** Uzay Kafes Sistemlerin Deprem Davranışlarının DBYBHY-2007 ve TBDY-2018 Yönetmeliklerine Göre Karşılaştırılması
11:40 – 12:00	**R. Evgi, E. Teomete,** Çelik Çaprazlı Çerçevelerin Çelik Yapıların Deprem Performansı Üzerindeki Etkisinin İncelenmesi
12:00 – 12:20	**O. Araz, V. Kahya,** Deprem Etkisindeki Yüksek Katlı Yapılardaki Titreşimlerin Ayarlı Kütle Sönümleyici Kullanılarak Azaltılması

9. Oturum – Salon C : Katı Cisimler Mekaniği – Uygulamalı Mekanik

Oturum Başkanı: Prof.Dr. Özgen Ümit ÇOLAK ÇAKIR

11:00 – 11:20	**H. Tok, A. Özel,** Yapıştırıcı İle Birleştirilmiş Bindirmeli Bağlantılarda Farklı Geometrilerin Analizi
11:20 – 11:40	**G. Yılmaz, K. Seymen, K. İleri, O. Çelenk, İ. İnan,** Akıllı Konumlama Özelliğine Sahip Hidrolik Sıkıştırmalı Kalıp Tutucu
11:40 – 12:00	**M. Uslu, M.O. Kaman,** U-Çentikli Kompozit Levhalarda İlerlemeli Hasar Analizi

Öğle Arası : 12:20 – 13:30

08 Eylül 2021 Çarşamba

10. Oturum – Salon A : Katı Cisimler ve Malzeme Mekaniği

Oturum Başkanı: Prof.Dr. İsa ÇÖMEZ

13:30 – 13:50	**F.Ç. Kayıkçı,** Yerel Eğrilikli Sarılı Tek Duvarlı Karbon Nanotüp İçeren Malzemede Geometrik Lineer Durumda Normal Gerilmeler
13:50 – 14:10	**H. Koç, E. Tüfekci,** Eşil Mekanik Yönteminde Mikro-Makro Gerilme ve Birim Şekil Değiştirme Arasındaki İlişkiler
14:10 – 14:30	**G. Peker, A. Özsunar,** Numerical Investigation of the Quenching Process for Porous Copper Cylinder Scrabs
14:30 – 14:50	**U. Çalışkan, M.K. Apalak,** Fiber Takviyeli Kompozitlerin Hasar Tespitinde Katı ve Kabuk Sonlu Eleman Kullanımı Etkisi: Katı Eleman İçin Bozunum Modeli

10. Oturum – Salon B : Katı Cisimler ve Malzeme Mekaniği

Oturum Başkanı: Dr.Öğr.Üyesi Ahmad Reshad NOORI

13:30 – 13:50	**A. N. Doğruoğlu, S. Kömürcü,** Elastik Temel Üzerinde Rijitliği Değişen Tabakali Kompozit Çubuklarin Stabilite Analizi
13:50 – 14:10	**A. Topal, N. G. Bayazit, Y. Uçan,** Beton Basınç Dayanıklılığının Baskın Kaba Küme Yaklaşımı ile İncelenmesi
14:10 – 14:30	**M.F. Şahan, F.A. Öncel, İ. Ünsal,** Polipropilen Lif Takviyeli Beton Kirişlerde Polipropilen Lif Oranının Eğilmede Darbe Davranışına Etkisi

Ara : 14:50 – 15:00

Değerlendirme

Yer : Ana Salon

Saat : 15:00 – 15:40

Ara : 15:40 – 15:50

Çağrılı Konuşma Oturum 4

Oturum Başkanı : Prof.Dr. Mustafa ÖZAKÇA

Konuşmacı : Prof.Dr. Sinan KETEN

Konu : Moleküler Topolojinin Polimerik Malzemelerde Darbe Dayanımına Etkisi

Yer : Ana Salon

Saat : 15:50 – 16:40

Yazarlar	Bildiri Başlığı	Sayfa
Cemal Basaran, Noushad Bin Jamal, Lakshmana Rao, Hsiao Wei Lee	DYNAMIC EQUATIONS OF MOTION IN UNIFIED MECHANICS THEORY	1
Cemal Basaran, Hsiao Wei Lee	PREDICTING FATIGUE LIFE WITH UNIFIED MECHANICS THEORY	6
Ragip İnce	YARI-GEVREK MALZEMELERİN KIRILMA PARAMETRELERİNİ TAYİN ETMEK İÇİN DENEYSEL BİR METOT	11
Fatma Ülker Peker, Ercan Işık	ÇOK KATLI ÇELİK BİNALARDA TÜRK DEPREM YÖNETEMLİĞİ'NE GÖRE DÜŞEY DEPREM HAREKETİNİN YAPISAL DAVRANIŞ ÜZERİNE ETKİSİNİN İNCELENMESİ	26
Ayhan Üstün, Gökhan Adıyaman, Talat Şükrü Özşahin	HOMOJEN YARI SONSUZ TABAKADA TEMAS VE ÇATLAK PROBLEMİ	36
Oğuzhan Kır, Merve Ermis, Umit N. Aribas, Mehmet H. Omurtag	EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ELİPTİK KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ	46
Gökay Aydoğan, Merve Ermis, Umit N. Aribas, Mehmet H. Omurtag	EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ELİPTİK KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ	61
Melih Savran, Mustafa Öncül, Muhammed Yıldız, Levent Aydın, Kutlay Sever	HİBRİT POLİMER KOMPOZİTLERİN DİNAMİK-MEKANİK ÖZELLİKLERİNİN ÇOKLU NONLİNEER NÖRO-REGRESYON YÖNTEMİYLE MODELLENMESİ VE OPTİMİZASYONU	75
Umut Çalışkan, M. Kemal Apalak	FİBER TAKVİYELİ KOMPOZİTLERİN HASAR TESPİTİNDE KATI VE KABUK SONLU ELEMAN KULLANIMI ETKİSİ: KATI ELEMAN İÇİN BOZUNUM MODELİ	85
Hilal Koç, Yusuf Şahiner, Mahmut Yakar, Fikri Kemal Adam, Ekrem Tüfekci	KOMPOZİT GÜÇLENDİRİLMİŞ PLAKLARIN OPTİMİZASYONU	100
Hilal Koç, Ekrem Tüfekci	EŞİL MEKANİK YÖNTEMİNDE MİKRO-MAKRO GERİLME VE BİRİM ŞEKİL DEĞİŞTİRME ARASINDAKİ İLİŞKİLER	111
Anıl Çetinkol, Hilal Koç, Ekrem Tüfekci	KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL TABAKALI KOMPOZİT ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ	119
Ekin Deliktaş Özdemir	HOMOJEN BİR TABAKA İLE KAPLI HETEROJEN BİR YARIM UZAYDA DOĞRUSAL OLMAYAN YÜZEY SH DALGALARININ YAYILIMI	133
Melih Doğan	STREÇ GİYDİRME MAKİNASINDA ÇEKİLEN POLİETİLEN FİLMLERİN EN İYİ MEKANİK DAVRANIŞI ELDESİ İÇİN OPTİMUM GERDİRME KUVVETLERİN BELİRLENMESİ	140
Cihan Torhan	ABKANT MAKİNELER İÇİN ROBOT YARDIMLI OTOMATİK SAC BÜKÜMÜ TASARIMI VE PROTOTİP İMALATI	151
Gökan Yılmaz,, Kenan Seymen, Kemal İleri, Oktay Çelenk, İbrahim İnan	AKILLI KONUMLAMA ÖZELLİĞİNE SAHİP HİDROLIK SIKIŞTIRMALI ÜST KALIP TUTUCU	156

Yazarlar	Bildiri Başlığı	Sayfa
Fatma Ülker Peker	UZAY KAFES SİSTEMLERİN DEPREM DAVRANIŞLARININ DBYBHY-2007 VE TBDY-2018 YÖNETMELİKLERİNE GÖRE KARŞILAŞTIRILMASI	168
Ümit Necmettin Arıbaş, Mert Atalay, Mete Aydın, Merve Ermiş, Mehmet Hakkı Omurtag	FONKSİYONEL DERECELİ DAİRESEL KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ	180
Bahattin Nane, Uğur Karanfil	LAZER KESİM TABLALARI İÇİN PNÖMATİK SAC KAYDIRMA SİSTEMİ GELİŞTİRİLMESİ, TASARIMI ve ÜRETİMİ	193
Mahmure Avey, Francesco Tornabene	KARBON NANOTÜPLERLE GÜÇLENDİRİLMİŞ PANELLERİN KAYMA DEFORMASYON TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE DOĞRUSAL SERBEST TİTREŞİM	198
Abdullah Avey, Ferruh Turan	WİNKLER ZEMİNİ ÜZERİNDEKİ KARBON NANOTÜPLER İÇEREN İNCE SIĞ SİLİNDİRİK PANELLERİN LİNEER OLMAYAN DAVRANIŞLARI	207
Murat Yaylacı, Bahar Şengül Şabano, Gökhan Adıyaman, Erdal Öner, Ahmet Birinci	ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN VE YAYILI YÜK İLE YÜKLENEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ	216
Merve Uslu, Mete Onur Kaman	U-ÇENTİKLİ KOMPOZİT LEVHALARDA İLERLEMELİ HASAR ANALİZİ	224
Tuğba Baytak, Osman Bulut	FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELERDE TERMAL GERİLME ANALİZİ VE MALZEME PARAMETRELERİNİN OPTİMİZASYONU	235
Hamid Zamanlou, Filiz Karabudak	COMPARISON OF MECHANICAL FATIGUE FOR HUMAN CORNEA BEFORE AND AFTER CCL IN KERATOCONUS BY USİNG FEM	250
Yonca Bab, Akif Kutlu	TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERİN GERİLME HESABINDA YÜKSEK MERTEBE KAYMA TEORİSİNİ TEMEL ALAN KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	258
Volkan Kahya, Sebahat Şimşek	TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERDE ARMONİ ARAMA ALGORİTMASIYLA FREKANS DEĞİŞİMLERİNE DAYALI HASAR TESPİTİ	271
İsa Çömez	RİJİT DAİRESEL ZIMBA İLE MANYETOELEKTROELASTİK TABAKA ARASINDA TERMOELASTİK TEMAS PROBLEMİ	286
Hale Ergün, Ahmet Hicazi	MOMENT AKTARAN BİR ÇERÇEVEDE ETKİLİ KOLON BOYUNUN HESABI ÜZERİNE BAZI NOTLAR	301
Ali Nuri Doğruoğlu, Sedat Kömürcü	ELASTİK TEMEL ÜZERİNDE RİJİTLİĞİ ANİ DEĞİŞEN TABAKALI KOMPOZİT BERNOULLI-EULER ÇUBUKLARIN STABİLİTE ANALİZİ	312
Sedat Kömürcü	YIĞMA YAPILARIN ANALİZİ İÇİN DETAYLI MİKRO MODELLEME TEKNİĞİNİN UYGULANMASI VE MODELLEME STRATEJİLERİ	327
Muhittin Turan, Volkan Kahya	EKSENİ DOĞRULTUSUNDA FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KİRİŞLERİN SONLU ELEMANLAR METODUYLA BURKULMA ANALİZİ	334

Yazarlar	Bildiri Başlığı	Sayfa
Timuçin Alp Aslan, Beytullah Temel	BARAJ GÖVDE VE TEMELİNDEKİ SIZMA PROBLEMİNİN GALERKİN YAKLAŞIMINA DAYALI SONLU ELEMANLAR ANALİZİ	342
Burkay Sivri, Beytullah Temel	EULER-BERNOULLI VE TIMOSHENKO TEORİLERİNE DAYALI EKSENEL YÖNDE FONKSİYONEL DERECELENMİŞ KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ	357
Onur Araz, Volkan Kahya	DEPREM ETKİSİNDEKİ YÜKSEK KATLI YAPILARDAKİ TİTREŞİMLERİN AYARLI KÜTLE SÖNÜMLEYİCİ KULLANILARAK AZALTILMASI	368
Muhammet Veysel Şaştım, Mehmet Ülker	İNTEGRAL KÖPRÜLERİN STATİK VE DİNAMİK TASARIMINA ETKİ EDEN FAKTÖRLER	377
Muhammet Veysel Şaştım, Mehmet Ülker	İNTEGRAL KÖPRÜ TASARIMINDA ÇEŞİTLİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI	387
Sadık Özgür Değertekin, Gülay Yalçin Bayar, Luciano Lamberti	BÜYÜK ÖLÇEKLİ KUBBE KAFES YAPILARIN ADAPTİF JAYA ALGORİTMASIYLA DOĞAL FREKANS SINIRLAYICILARI ALTINDA OPTİMUM TASARIMI	402
Ahmet Topal, Nilgün Güler Bayazıt, Yasemen Uçan	BETON BASINÇ DAYANIKLILIĞININ BASKIN KABA KÜME YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ	415
Elif Gökçe İnce, Fatih Mehmet Özkal	ETRAFI BETON İLE ÇEVRELENMİŞ ÇELİK KOMPOZİT KOLONLARIN ÇOK KATLI YAPILARDAKİ DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ	424
Ozan İnce, Mehmet Ülker	KOMPOZİT KUTU KESİTLİ KÖPRÜLERİN YAPAY ARI KOLONİSİ ALGORİTMASI İLE OPTİMUM TASARIMI	431
Ömer Ekim Genel, Mertol Tüfekci, Ekrem Tüfekci	UZAYSAL ÇERÇEVE YAPILARIN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ	436
Nihat Özten, Ömer Ekim Genel, Ekrem Tüfekci	DOĞRU VE EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARDAN OLUŞAN ÇERÇEVELERİN TİTREŞİMLERİ	447
Mustafa Halûk Saraçoğlu, Gökhan Güçlü, Fethullah Uslu	FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN İMAL EDİLMİŞ EŞİT MUKAVEMETLİ KİRİŞLER	458
Surkay Akbarov, Zeynep Ekicioğlu Küzeci	PİEZOELEKTRİK LEVHA VİSKOZ AKIŞKAN VE RİJİT DUVARDAN OLUŞAN SİSTEMİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE AKIŞKAN ÖZELLİKLERİNİN ETKİSİ	470
Erkan Doğan, Betül Üstüner, İbrahim Aydoğdu, Canip Özyürek	EĞRİSEL FORMDAKİ ÇATILARIN KURT KOLONİ ALGORİTMASI KULLANILARAK OPTİMUM TASARIMI	485
Ülkü Babuşcu Yeşil, Fatih Aylıkçı	EĞİLME ETKİSİNDEKİ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN İÇERDİĞİ PZT DOLGULARIN GERİLME YIĞILMASINA ETKİSİ	495
Ali Yıldırım, Durmuş Yarımpabuç, Volkan Arıkan, Mehmet Eker, Kerimcan Çelebi	KOMPOZİT BİR DİSKİN PSEUDOSPEKTRAL CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE ISIL GERİLME ANALİZİ	510
Abdulkerim Ergüt, Selin Taşkın, Begüm Yurdanur Dağlı	FARKLI KESİTLERE SAHİP FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN SONLU ELEMANLAR PROGRAM ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI	519

Yazarlar	Bildiri Başlığı	Sayfa
Zehra Aktı, Merve Ermis, Mehmet H. Omurtag	EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ	525
Yaren Özkan, Onur Koçak, İnci Pir, Mertol Tüfekci	23 METRE UZUNLUĞUNDA BİR KOMPOZİT RÜZGAR TÜRBİN KANADININ İÇ YAPISININ TOPOLOJİ OPTİMİZASYONUYLA TASARLANMASI	540
Neşe Özdemir, Semra Ahmetolan, Ali Demirci	3+1) BOYUTLU MODİFİYE KADOMTSEV-PETVIASHVILI DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ	551
Onur Koçak, Yaren Özkan, İnci Pir, Mertol Tüfekci	KÖPÜK ÇEKİRDEK MALZEMESİNİN BOŞLUK ORANININ KOMPOZİT RÜZGAR TÜRBİN KANADININ YAPISAL DAVRANIŞINA ETKİSİNİN İNCELENMESİ	564
Fatma Çoban Kayıkçı	YEREL EĞRİLİKLİ SARILI TEK DUVARLI KARBON NANOTÜP İÇEREN MALZEMEDE GEOMETRİK LİNEER DURUMDA NORMAL GERİLMELER	577
Fatih Kaya, Gülhan İnce	BİR KALÇA PROTEZİNİN STATİK VE DİNAMİK PERFORMANSININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ	585
M. Erden Yıldızdağ	PANTOGRAFİK METAMALZEMELERİN MEKANİK DAVRANIŞININ İKİNCİ DERECEDEN GRADYAN TEORİSİ İLE MODELLENMESİ VE BÜNYE PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ	600
Hüseyin Tok, Adnan Özel	YAPIŞTIRICI İLE BİRLEŞTİRİLMİŞ TEK TESİRLİ BİNDİRME BAĞLANTILARINDA BAĞLANTI GEOMETRİSİ DEĞİŞİKLİĞİNİN KOPMA YÜKÜ ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ	608
Günay Aslanova, Semra Ahmetolan, Ali Demirci	KÜRESEL GARDNER DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ	620
Sinan Fırat Dal, Serdar Göktepe	PERİYODİK GÖZENEKLİ YAPIYA SAHİP METAMALZEMELERDE VURGU BURKULMASI İÇİN VİSKOELASTİK	629
Fatih Aylıkcı, Ülkü Babuşçu Yeşil	DİKDÖRTGEN İÇ ÇATLAK İÇEREN PZT/METAL/PZT KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA İKİ EKSENLİ STATİK BASINÇ KUVVETİNİN ETKİSİ	641
Berkay Akçören, Serdar Göktepe	ELASTOMERLERDE YIRTILMANIN FAZ ALANI YÖNTEMİ İLE HESAPLAMALI MODELLENMESİ	650
Büşra Uzun, Mustafa Özgür Yaylı	FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR NANOÇUBUĞUN BOYUT ETKİSİNE BAĞLI TİTREŞİM ANALİZİ	663
Çağla Şekerci, Erdem Damcı	BİTİŞİK İKİ BİNA MODELİNDE ÇARPIŞMA ETKİLERİNİN DENEYSEL YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ	671
Yavuz Çetin Cuma, Faruk Fırat Çalım	FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEME VE DEĞİŞKEN KESİTLİ SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSEL ÇUBUKLARIN TİTREŞİMİ	684
Başak Kübra Aras, Nurpınar Özkan, Mehmet Erdem İnce, Özkan Özbek	TÜP FORMUNDA TEK PARÇA ATKILI ÖRME KUMAŞ TAKVİYELİ POLİMER KOMPOZİT BORU ÜRETİMİ	695

Yazarlar	Bildiri Başlığı	Sayfa
Erkin Eren, Mehmet Ülker	EKSENEL KUVVET VE EĞİLME ETKİSİNDEKİ ELEMANLARIN OPTİMUM TASARIMI	710
Merve Deniz Topalca, Bilal Harun Küplü, Elif Aydoğdu, Mehmet Erdem İnce	İKİ BOYUTLU DOKUNMUŞ KUMAŞ TAKVİYELİ KOMPOZİTLERİN DÜZLEM DIŞI MEKANİK ÖZELLİKLERİNİN ATKILI ÖRME KUMAŞ İLAVESİ İLE İYİLEŞTİRİLMESİ	722
Semra Ahmetolan, Ekin Deliktaş-Özdemir, Ayşe Peker-Dobie	PÜRÜZLÜ YÜZEYLİ BİR TABAKA İLE AYRILMIŞ SONSUZ ELASTİK ORTAMDA KAYMA DALGALARI	736
Melis Turgut, İlkay Bakırtaş	DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DİSPERSİYON İÇEREN KÜBİK NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇİFT-KUYULU BİR POTANSİYEL ALTINDA SOLİTON ÇÖZÜMLERİ	745
Ufuk Gül, Metin Aydoğdu	NOKTASAL KÜTLE İÇEREN KARBON NANOTÜPLERİN TİTREŞİM ANALİZİ	759
Dicle Tuna, Semra Ahmetolan, Ekin Deliktaş-Özdemir	HETEROJEN İKİ TABAKALI ORTAMDA DOĞRUSAL OLMAYAN YATAY KAYMA DALGALARININ YAYILIMI	774
Aydın Özmutlu, Tilbenur Dolapdere	PERİYODİK YIĞILI KÜTLELİ KAYMA KİRİŞİNDE DALGA DİSPERSİYONU: KÜTLELERİN DALGA BARİYERİ ETKİSİNİN ARAŞTIRILMASI	784
Ayşe Polat Yazıcı, Fuad Okay	DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN ELASTİK BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ	799
Aiman Tariq, Babür Deliktaş	COMPUTATIONAL MODELING THE NON-LINEAR BEHAVIOR OF CRITICAL MEMBERS CAUSING PROGRESSIVE COLLAPSE IN STEEL LATTICE TOWERS.	814
Muhammed Taha Polat	DAİRESEL RİJİT İKİ PANÇ İLE YÜKLENMİŞ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKADA TEMAS GERİLME ANALİZİ	826
Erdogan Madenci, Amin Yaghoobi, Atila Barut, Nam Phan	PERIDYNAMIC MODELING OF FAILURE IN FIBER STEERED COMPOSITES	838
Ali Osman Güney, Hüseyin Lekesiz	GİYİLEBİLİR DIŞ İSKELET İÇİN KULLANILACAK YAPAY KASLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ	848
Surkay D. Akbarov, Emin T. Bagirov	ON THE TORSIONAL WAVES DISPERSION PROPAGATING IN A BI-LAYERED HOLLOW CYLINDER WITH INHOMOGENEOUS TERMAL PRE-STRESSES	857
Sadık Özgür Değertekin, Luciano Lamberti, İbrahim Behram Uğur	KAFES YAPILARIN JAYA ALGORİTMASI İLE ENKESİT VE ŞEKİL OPTİMİZASYONU	861
Beytullah Temel, Ahmad Reshad Noorı, Timuçin Alp Aslan	FONKSİYONEL DERECELENMİŞ SANDVİÇ KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ	870
Hasibullah Rasoolı, Beytullah Temel, Ahmad Reshad Noorı	ÇOK AÇIKLIKLI KOMPOZİT KEMER SİSTEMLERİN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖTEMİ İLE STATİK ANALİZİ	879
Egemen Teomete, Barış Gökdemir	KUVARS KOMPOZİTLERİN ÜRETİMİ VE ÖZELLİKLERİ	890

Yazarlar	Bildiri Başlığı	Sayfa
Egemen Teomete, Canozan Mursal	ÖN ÜRETİMLİ YAPILARIN YAPISAL ANALİZİ	903
Egemen Teomete, Rojhat Evgi	ÇELİK ÇAPRAZLI ÇERÇEVELERİN ÇELİK YAPILARIN DEPREM PERFORMANSI ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN İNCELENMESİ	914
Mehmet Şişman, Egemen Teomete, Jale Yanık, Ugur Malayoglu, Gözde Duman	THE EFFECT OF APRICOT KERNEL SHELL NANO BIOCHAR ON MECHANICAL PROPERTIES OF MORTAR	928
Eril Güray Çelik, Nalan Antar	RAMAN ETKİSİ VE ÖZ-DİKLEŞME ETKİSİ ALTINDAKİ DOĞRUSAL OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ	937
Yonca Bab, Akif Kutlu, Mehmet Dördüncü	ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERİN EĞİLME DAVRANIŞI İÇİN GELİŞTİRİLMİŞ ZİKZAK TEORİSİ TABANLI KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU	950
Mustafa Özakça, B. Başak Selçuk, Cemile Özşam, M.Metin Köse	SOIL STRUCTURE INTERACTION ANALYSIS OF THREE DIMENSIONAL REINFORCED CONCRETE CURTAIN WALL SYSTEM UNDER SEISMIC LOADS	963
Mehmet Fatih Şahan, Fatih Ali Öncel, İsmail Ünsal	POLİPROPİLEN LİF TAKVİYELİ BETON KİRİŞLERDE POLİPROPİLEN LİF ORANININ EĞİLMEDE DARBE DAVRANIŞINA ETKİSİ	972
Gökçe Peker, Abuzer Özsunar	GÖZENEKLİ BAKIR SİLİNDİR PARÇALAR İÇİN SU VERME İŞLEMİNİN SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ	982
Attila Aşkar	EĞRİSEL ÇUBUKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN DİNAMİĞİ	991

ÇAĞRILI KONUŞMACILAR

(Konuşma başlığına tıklayarak ilgili konuşmayı izleyebilirsiniz)



Prof.Dr. Ertuğrul TACİROĞLU

Hesaplamalı Mekaniğin Deprem Mühendisliğine Katkıları: Uygulamalar, Zorluklar, Fırsatlar

UCLA Samueli School of Engineering
Department of Civil and Environmental Engineering
7400 Boelter Hall Los Angeles, CA 90095

URL: http://www.tacirogluresearch.org/



Prof.Dr. Abdullah AVEY

Karbon Nanotüplerle Güçlendirilmiş Kompozit Kabuklar

Süleyman Demirel Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü
32260, Çünür, Isparta

URL: https://w3.sdu.edu.tr/personel/03590/prof-dr-abdullah-avey



Prof.Dr. Çağlar OSKAY

Multiscale Discrete Damage Theory – A Novel Approach for Multiscale Modeling of Failure in Heterogeneous Materials

Vanderbilt University
Department of Civil and Environmental Engineering,
Department of Mechanical Engineering
VU Station B#351831 2301 Vanderbilt Place Nashville, TN 37235-1831

URL:https://my.vanderbilt.edu/mcml



Prof.Dr. Sinan KETEN

Moleküler Topolojinin Polimerik Malzemelerde Darbe Dayanımına Etkisi

Northwestern University
Interdisciplinary Biological Sciences Graduate Program
Hogan 2-100 2205 Tech Drive Evanston, IL 60208

URL: https://www.keten-group.northwestern.edu/research-highlights/

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

DYNAMIC EQUATIONS OF MOTION IN UNIFIED MECHANICS THEORY

Noushad Bin Jamal[1], Hsiao Wei Lee[2], Chebolu Lakshmana Rao[3] and Cemal Basaran[4]
[1,3] Department of Applied Mechanics, Indian Institute of Technology, Madras 600036
[2,4] Civil, Structural and Environmental Engineering, University at Buffalo, New York

ABSTRACT

Conventionally the equations of motion are derived using the Newtonian mechanics. Newtonian coordinates use x, y, z space and time coordinate system. According to the second law of thermodynamics, every process is associated with an entropy generation. This is not directly included in the Newtonian models. All the energy dissipation mechanisms are modeled using an empirical or phenomenological user-defined model. Hence the laws of thermodynamics are not applied in the dynamic equations of motion, on the basis of thermodynamics. In the Unified mechanics theory-based models, the laws of thermodynamics and laws of Newton are unified at an ab-initio level, using the Boltzmann's equation of entropy. In this study, we use the Unified Mechanics Theory to derive the dynamic equation of motion for a dissipative system. Lagrangian of a system in Unified Mechanics Theory is derived and the resulting equation of motion is ap-plied on a free vibration problem. The results obtained are validated using the test data, available in the literature. The dynamics equations of motion in Unified Mechanics Theory predicts the test data, and matches with the Newtonian empirical friction coefficient model.

INTRODUCTION

Since mid of 19th century, when Painlevé first discovered the incompatibility of frictional dissipation with Newtonian mechanics [1], many researchers have been attempting to resolve the paradox. In the recent past, Boltzmann's model for the irreversibility of dissipative processes has been unified with the laws of Newton [2], called unified mechanics theory [2]. In the unified mechanics' theory (UMT) the Thermodynamic State Index (TSI) represents the thermodynamic state of a system, as a function of entropy generation. Hence, the unified mechanics' theory (UMT) explicitly introduces a new linearly independent axis in addition to Newtonian coordinates, x, y, z, and time [2,3]. The TSI, Φ represents an index called Thermodynamic State Index (TSI), which is a linearly independent axis, spanning between zero and one. Mathematical representation of TSI is given as follows,

$$\Phi = \Phi_c \left[1 - e^{\left(-\Delta S \frac{m_s}{R}\right)}\right] \tag{1}$$

Where, ΔS represents total change in entropy calculated from the thermodynamic fundamental equation of the system, during the time, Δt . The terms, m_s , Φ_c and R represents the molar mass, critical TSI value [3], and gas constant, respectively. In this study, our

objective was to derive the dynamic equation of motion of a dissipative system and compare the results of the unified mechanics theory (UMT) with that of a Newtonian mechanics equation of motion. A free vibration analysis on a mass-spring single degree of freedom system subjected to sliding friction was done to demonstrate the results in both cases.

DERIVATION OF THE DYNAMIC OF MOTION

The action of a material point, over a period, $\Delta t = t_2 - t_1$, can be defined by the following integral,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\, dt \tag{2}$$

Where $\mathcal{L}$ represents the Lagrangian of the system. In this study, we attempt to introduce second law of thermodynamics in the Lagrangian of a system, using the unified mechanics theory. Using the unified mechanics theory [2], Lagrangian of the system is written as follows,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, u, \dot{u}, \Phi_i) \tag{3}$$

Where u and $\dot{u}$ represents displacement and velocity of a material point, respectively. The term Φ_i is used represent n number of different independent dissipation mechanisms within a given thermodynamic system at a material point. After some algebra and by applying the principle of local state, we get the following equation,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{u}}\right) = 0 \tag{4}$$

Unlike in the Newtonian mechanics-based Euler-Lagrange equation, equation (4) has an additional derivative as a function of TSI.

APPLICATION OF THE EQUATION ON THE VIBRATION OF A MASS-SPRING SYSTEM SUBJECTED TO FRICTION

In this study, a mass-spring system under frictional dissipation is used to derive the governing equation of motion using equation (4) and compare the solution of the equation of motion with that of a Newtonian mechanics equation. A schematic representation of the mass-spring system is given in Figure 1.

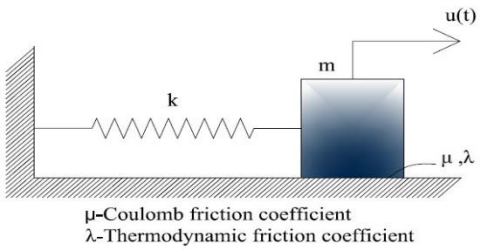


Figure 1. Block diagram of a mass-spring system subjected to friction.

After substituting the appropriate form of Lagrangian of the system in equation (4), we get the following equation,

$$\frac{1}{(1-\Phi)}m\ddot{u}+\frac{1}{(1-\Phi)}ku+\left(m\frac{m_s}{R}\frac{1}{(1-\Phi)}\frac{d\Delta S}{dt}\right)\dot{u}+\frac{m_s}{R}\frac{1}{(1-\Phi)}\left\{\frac{1}{2}ku^2-\frac{1}{2}m\dot{u}^2\right\}\frac{\partial\Delta S}{\partial u}+\mathcal{g}\left(\frac{\partial\Delta S}{\partial\dot{u}}\right)+F_{ext}=0 \quad (5)$$

The function, $\mathcal{g}$ is the summation of all the terms as a function of $\frac{\partial\Delta S}{\partial\dot{u}}$ and F_{ext} is the external excitation force. On the other hand, in the Newtonian mechanics, the governing equation of motion under sliding friction is given by the following equation,

$$m\ddot{u}+ku+\mu mg\,sgn(\dot{u})+F_{ext}=0 \quad (6)$$

Where, μ is the Coulomb friction coefficient, m is the mass, g is the gravitational constant and sgn is the signum function. The damping term 'C' in equation (6) is represented by the Coulomb friction force. The equation (6) does not include any dissipation other than mechanical work due to friction. However, there are also other dissipative processes, that are accounted in unified mechanics equation (5).

In Newton's model, the sliding friction is accounted for by frictional force and do not represent the dissipa-tion, associated with the frictional sliding. Coulomb's model for friction is dependent on the applied normal contact force and independent of the area of contact and velocity of motion. In Newton's equation of mo-tion, the Coulomb model for friction uses an experimental curve-fitted parameter called, a frictional coef-ficient to account for the non-conservative generalized force due to frictional dissipation. Variants of Cou-lomb's model for dynamic analysis are reported in the literature [4]. Even though Newton's laws of motion do not directly account for the thermodynamics of frictional dissipation, the Coulomb model for frictional dissipation is empirically incorporated in Newtonian mechanics models [5–9] by adding a frictional damp-ing term "C" in the equation of motion.

RESULTS AND DISCUSSION

Free vibration analysis is done for a single degree of freedom system under frictional damping. Equation (5) and equation (6) are solved by using Newmark's method in a MATLAB editor.

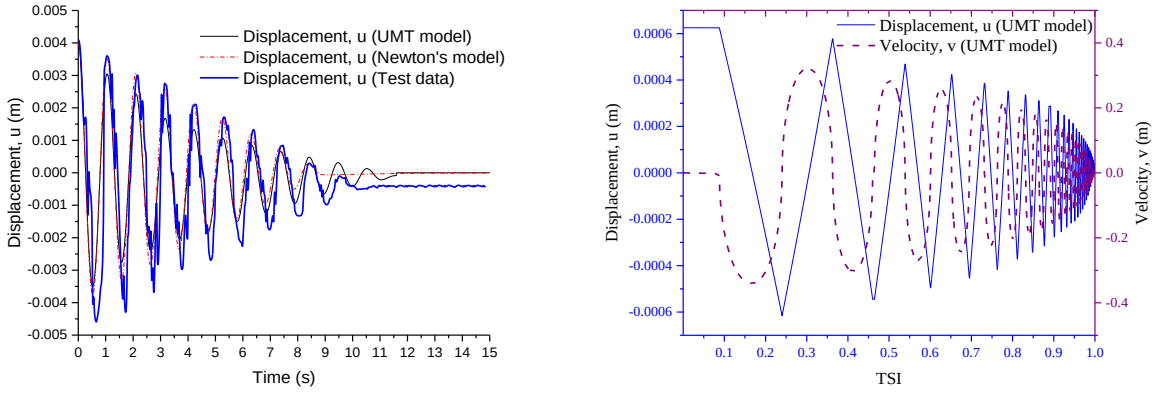


Figure 2. (a) Comparison between model predictions and test data [10] for the displacement versus time data; and, (b) The response of mass-spring oscillator along with the Thermodynamic State Index (TSI) axis.

As shown in Figure 2 (a), both the unified mechanics' theory-based model and Newton's equation of motion capture damped oscillations under Coulomb friction. However, it is to be

noted that Newton's model parameter involves an experimental curve-fit data, representing the frictional force. Nevertheless, the unified mechanics theory-based model involves TSI, which evolves with the thermodynamics of dissipative mechanisms that are associated with friction. In other words, Newton's model captures a dissipative process under friction, without considering the thermodynamics of the vibration. Figure 2 (b) shows the response of mass-spring oscillator subjected friction, along the TSI axis. As shown in Figure (b), the oscillations dampen and the strain energy and kinetic energy of the mass-spring system decays.

CONCLUSIONS

The proposed model is applied on a mass-spring single degree of freedom system subjected to friction and the results are compared with that of a Newtonian mechanics formulation. In unified mechanics theory, all dissipation mechanisms must be included in the thermodynamic fundamental equation. There is no need for an empirical C constant. Hence, the unified mechanics equation is more fundamental and physics-based than using thermodynamically consistent Newtonian mechanics formulation. The dynamic equation of motion (5) can be used in the study of the dynamics of pendulum, the friction pendulum dampers used in structural isolations [11] and other friction dampers used as an energy dissipation devices for structures against an earthquake load [12], in vibration energy harvesters [13], to study independent energy dissipa-tion mechanisms in impact-pendulum [14] and in rub-impact events [15], influence of wear-dust in the con-tacting surfaces on the dissipation characteristics etc.

REFERENCES

1. Champneys, A.R.; Várkonyi, P.L. The Painlevé paradox in contact mechanics. *IMA J. Appl. Math. (Institute Math. Its Appl.* **2016**, *81*, 538–588.
2. Basaran, C. *Introduction to Unified Mechanics Theory with Applications*; 1st ed.; Springer, 2021; ISBN 9783030577711.
3. Bin Jamal M., N.; Kumar, A.; Chebolu, L.R.; Basaran, C. Low Cycle Fatigue Life Prediction Using Unified Mechanics Theory in Ti-6Al-4V Alloys. *Entropy* **2020**, 1–31.
4. Mostaghel, N.; Davis, T. Representations of Coulomb friction for dynamic analysis. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **1997**, *26*, 541–548.
5. Stewart, D.E. Rigid-body dynamics with friction and impact*. *SIAM Rev.* **2000**, *42*, 3–39.
6. Quinn, D.D. A new regularization of Coulomb friction. *J. Vib. Acoust. Trans. ASME* **2004**, *126*, 391–397.
7. Andreaus, U.; Casini, P. Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force. *J. Sound Vib.* **2001**, *245*, 685–699.
8. Shiryaev, V.; Orlik, J. A one-dimensional computational model for hyperelastic string structures with Coulomb friction. *Math. Methods Appl. Sci.* **2017**, *40*, 741–756.
9. Shiryaev, V.; Neusius, D.; Orlik, J. Extension of one-dimensional models for hyperelastic string structures under Coulomb friction with adhesion. *Lubricants* **2018**, *6*.
10. Liang, J.W. Identifying Coulomb and viscous damping from free-vibration acceleration decrements. *J. Sound Vib.* **2005**, *282*, 1208–1220.
11. Hong, X.; Guo, W.; Wang, Z. Seismic Analysis of Coupled High-Speed Train-Bridge with the Isolation of Friction Pendulum Bearing. *Adv. Civ. Eng.* **2020**, *2020*.
12. Seong, J.Y.; Min, K.W.; Kim, J.C. Analytical investigation of an SDOF building structure equipped with a friction damper. *Nonlinear Dyn.* **2012**.
13. Nammari, A.; Caskey, L.; Negrete, J.; Bardaweel, H. Fabrication and characterization of non-resonant magneto-mechanical low-frequency vibration energy harvester. *Mech. Syst. Signal Process.* **2018**.

14. Witelski, T.; Virgin, L.N.; George, C. A driven system of impacting pendulums: Experiments and simulations. *J. Sound Vib.* **2014**.
15. Huang, Z.; Tan, J.; Liu, C.; Lu, X. Dynamic Characteristics of a Segmented Supercritical Driveline with Flexible Couplings and Dry Friction Dampers. **2021**, 1–33.

PREDICTING FATIGUE LIFE WITH UNIFIED MECHANICS THEORY

Hsiao Wei Lee[1], Cemal Basaran[2]
[1,2] Civil, Structural and Environmental Engineering, University at Buffalo, New York

ABSTRACT

Historically, there are many efforts to introduce degradation into Newtonian mechanics. However, they are all based on phenomenological curve fitting techniques because Newtonian space-time coordinate system does not include an axis for dissipation, degradation or irreversible process. For those approaches, degradation response is needed before-hand to generate a potential or a polynomial which are not universal for all load types. Unified mechanics theory (UMT), on the other hand, unifies the universal laws of Newton and the second law of thermodynamics at an ab-initial level. As a result, governing differential equation of any system automatically includes entropy generation, which is used as a damage metric to establish a physics-based thermodynamic life span prediction model, without the need of curve fitting. The thermodynamic state index (TSI) axis [a fifth linearly independent axis a la Boltzmann 1877] of the unified mechanics theory maps the entropy generation rate between zero and one, according to the analytically derived thermodynamic fundamental equation of the material. UMT based fatigue life model can be applied to both low and high cycle fatigue of metals. In this research, a series of high cycle fatigue tests operated using ultrasonic vibration machine are performed on A656 grade steel samples, at a frequency of 20kHz. The results from fatigue test data are compared with the UMT based model simulations. It is shown that the UMT based model can predict very high cycle fatigue life very well.

Keywords: Entropy; unified mechanics theory; thermodynamics; metal fatigue; ultrasonic vibration testing; dynamics

INTRODUCTION

The logarithmic connection between entropy and disorder was first stated by L. Boltzmann (1872) and put into final form by Maxwell Planck (1900)

$$S = k_B \ln W \tag{1}$$

where S is the entropy, k_B is the Boltzmann constant, and W is a disorder parameter. Basaran and Nie (2004) derived the entropy per unit mass (2), and defined the thermodynamic state index as an unitless quantity describing the difference between the original undisturbed state (or any reference state) to current state (3)

$$s = \frac{N_A}{m_s} k_B \ln W \tag{2}$$

$$\Phi = f\left[\frac{W - W_o}{W}\right] = [1 - e^{-\frac{(\Delta s)m_s}{R}} \tag{3}$$

where N_A is the Avogadro's number, m_s is the molar mass, R is the universal gas constant, Δs is the change in specific entropy. The TSI evolution requires the calculation of accumulated entropy production during the test. The thermodynamic life span of the material travels between 0 and 1 along the TSI axis.

DERIVATION OF THE THERMODYNAMIC FUNDAMENTAL EQUATION [ENTROPY GENERATION EQUATION]

In this research, we identified six entropy generation mechanism in metal ultrasonic vibration fatigue. (4) denotes the entropy generation due to atomic configuration [5-7], (5) denotes the entropy generation due to atomic vibration [5-7], (6) denotes the entropy generation due to vacancy concentration driven diffusion [8-10], (7) denotes the entropy generation due to thermal conduction [11-12], (8) denotes the entropy generation due to internal heat generation [4,11,13-16], and (9) denotes the entro-py generation due to microplasticity [1,4,11,17-21].

$$\Delta S_{conf} = k_B\left\{ln\left[\frac{N!}{(N-n_1)!\,n_1!}\right] - ln\left[\frac{N!}{(N-n_0)!\,n_0!}\right]\right\} \tag{4}$$

$$\Delta S_{vib} = (n_2 - n_1)\Delta s_v \tag{5}$$

$$\Delta S_d = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{C_v D_v}{k_B T^2}\left(\frac{Q^*\nabla \mathrm{T}}{T} + \frac{k_B T}{c}\nabla c\right)^2\right)dt \tag{6}$$

$$\Delta S_T = \int_{t_0}^{t}\left(k_h\frac{\nabla T\cdot\nabla T}{T^2}\right)dt \tag{7}$$

$$\Delta S_r = \int_{t_0}^{t}\frac{\rho r}{T}dt = \int_{t_0}^{t}\frac{(\varrho B^{drag}\, v\,\dot{v} + \frac{1}{2}\mu b^2\dot{\varrho} - \alpha_H\mu b\sqrt{\varrho}\dot{\gamma})}{T}dt \tag{8}$$

$$\Delta S_{\mu p} = \int_{t_0}^{t}\phi\Psi_f f_v\frac{\sigma^{\mu}:\dot{\varepsilon_P^{\mu}}}{T}dt \tag{9}$$

Due to the additive property of entropy, entropy generated due to each mechanism can be added together to obtain the total entropy production (10)

$$\Delta S = \Delta S_{conf} + \Delta S_{vib} + \Delta S_d + \Delta S_T + \Delta S_r + \Delta S_{\mu p} \tag{10}$$

The absolute temperature T in (6-9) is derived from the classical continuum mechanics [11] with the introduction of microplasticity term and internal friction term

$$\rho c_V\dot{T} - \Psi_f\left[\phi f_v\left(\sigma^{\mu}:\dot{\varepsilon_P^{\mu}}\right)\right] - k_h\nabla^2 T - \varrho B^{drag}\, v\,\dot{v} - \frac{1}{2}\mu b^2\dot{\varrho} + \alpha_H\mu b\sqrt{\varrho}\dot{\gamma} - T\frac{\partial\Sigma}{\partial T}:\dot{E^e} \tag{11}$$

Using (3), (10), and (11). The temperature evolution, cumulative entropy production, and TSI evolution can be calculated, for given samples under various stress amplitude.

NUMERICAL RESULTS

Figure 1-3 shows the cumulative entropy production, the temperature evolution, the TSI evolution for test samples under various stress amplitude, respectively. Using the TSI results in figure 3, we can establish a simulated SN curve, as shown in figure 4. The simulated SN data match the experimental SN data very well.

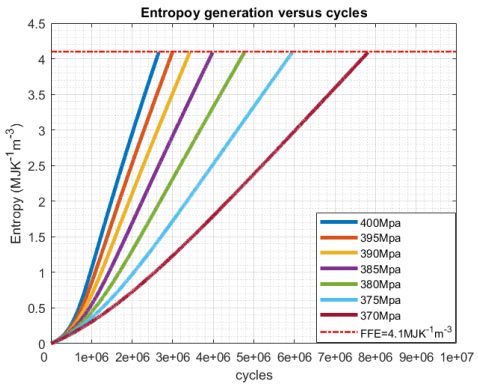


Figure 1. Accumulated entropy production versus number of cycles under various stress amplitude

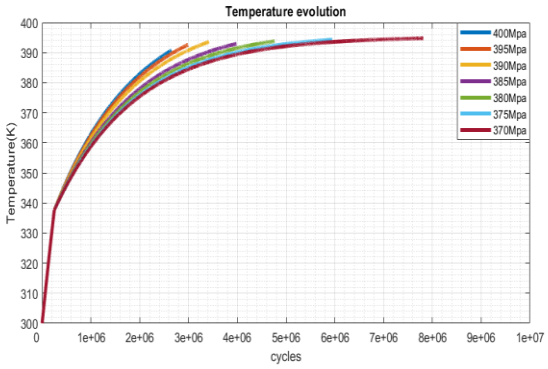


Figure 2. Temperature evolution versus number of cycles under various stress amplitude

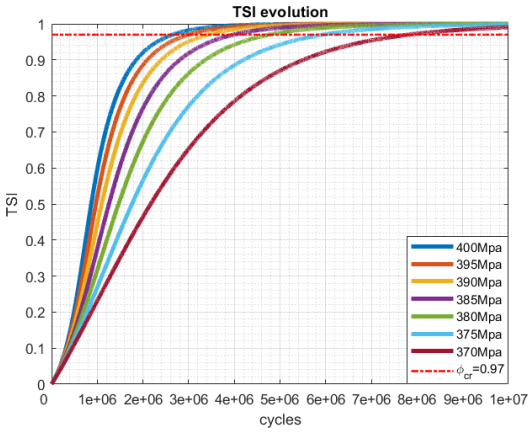


Figure 3. TSI evolution versus cycles for A656 steel under various stress amplitudes

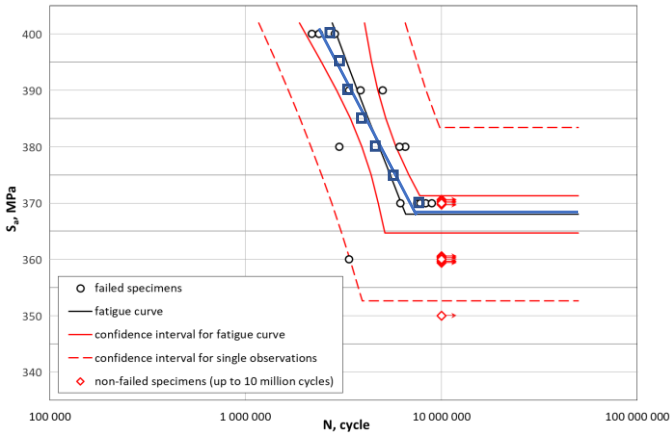


Figure 4. UMT simulated S-N data points for A656 steel compared with experimental data. The blue line and squares are simulated results from UMT

CONCLUSION

Unified mechanics theory is used for predicting ultrasonic fatigue life of EN 1.0577 (US A656 grade) steel. The degradation evolution function in unified mechanics theory is based on the second law of thermodynamics in Boltzmann entropy equa-tion form (1-2), which does not need empirical curve fitting parameters for fatigue damage evolution. The thermodynamic life span of the material travels between 0 and 1 along the TSI axis. To calculate the TSI evolution (3), the thermodynamic fundamental equations were derived analytically (4-9).

They are added together to calculate the accumulated entropy pro-duction during the ultrasonic fatigue test. The TSI evolution based on the accumulated entropy production are calculated for specimens under various stress amplitudes. The fatigue life predicted using the evolution of TSI under the framework of UMT are compared with fatigue test data. The comparison shows that the prediction and test data match very well.

REFERENCES

[1] Lee, H.W.; Basaran, C. (2021) Predicting High Cycle Fatigue Life with Unified Mechanics Theory. Mech. Mater. (Submitted April 2021).

[2] Boltzmann, L. (1877). Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze des mechanischen Wärmetheorie und der Wahr-scheinlichkeitsrechnung, respective den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. [On the relation between the second law of the mechanical theory of heat and the probability calculus with respect to theorems of thermal equilibrium]. Wiener Berichte II, vol. 76, pp. 373-435

[3] Planck, M. (1900) Section 134: Entropie und Warscheinlichkeit. In Vorlesungen uber die theorie der wurmestrahlung; J.A. Barth: Leipzig, Germany, 1900.

[4] Basaran, C., & Nie, S. (2004). An Irreversible Thermodynamics Theory for Damage Mechanics of Solids. International Jour-nal of Damage Mechanics, 13(3), 205-223. https://doi.org/10.1177/1056789504041058

[5] A. Kelly, G.W. Groves and P. Kidd. 2012; Crystallography and Crystal Defects, ISBN 9780470750148.

[6] R. Abbaschian and R. E. Reed-Hill. 2009; Physical Metallurgy Principles, ISBN 9780495438519

[7] B. Fultz. 2010; Vibrational thermodynamics of materials, Progress in Materials Science 55 (2010) 247–352

[8] C Basaran, M Lin, Electromigration induced strain field simulations for nanoelectronics lead-free solder joints, International Journal of Solids and Structures 44 (14-15), 4909-4924, 2007

[9] H Ye, C Basaran, DC Hopkins, Deformation of solder joint under current stressing and numerical simulation—I, International journal of solids and structures 41 (18-19), 4939-4958, 2004

[10] H Ye, C Basaran, DC Hopkins, Experimental damage mechanics of micro/power electronics solder joints under electric cur-rent stresses, International Journal of Damage Mechanics 15 (1), 41-67, 2006

[11] C. Basaran.; Introduction to Unified Mechanics Theory with Applications, Springer-Nature, 2021, ISBN 978-3-030-57772-8

[12] Callen, H. B. Thermodynamics and Introduction to Thermostatics, 1985, John Wiley & Sons, New York.

[13] Ragab, T. and Basaran, C.," Joule heating in single-walled carbon nanotubes," Journal of Applied Physics, 106, 063705, (2009),

[14] Chu, Y., Gautreau, P., Ragab, T. and Basaran, C., "Temperature Dependence of Joule Heating in Zigzag Graphene Nanorib-bon," Carbon, 89, (2015) 169-175

[15] Th. M. De Hosson, A. Roos, E. D. Me, J. (2001). Temperature rise due to fast-moving dislocations. Philosophical Magazine A, 81(5), 1099-1120. https://doi.org/10.1080/01418610110033975

[16] Galligan, J., McKrell, T., & Robson, M. (2000). Dislocation drag processes. Materials Science And Engineering: A, 287(2), 259-264. https://doi.org/10.1016/s0921-5093(00)00783-8

[17] Bin Jamal M, N., Kumar, A., Lakshmana Rao, C., & Basaran, C. (2019). Low Cycle Fatigue Life Prediction Using Unified Mechan-ics Theory in Ti-6Al-4V Alloys. Entropy, 22(1), 24. https://doi.org/10.3390/e22010024

[18] Lemaitre, J., Sermage, J., & Desmorat, R. (1999). A two scale damage concept applied to fatigue. International Journal Of Fracture, 97(1/4), 67-81. https://doi.org/10.1023/a:1018641414428

[19] Doudard, C., Calloch, S., Cugy, P., Galtier, A., & Hild, F. (2005). A probabilistic two-scale model for high-cycle fatigue life pre-dictions. Fatigue and Fracture Of Engineering Materials and Structures, 28(3), 279-288. https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2005.00854.x

[20] Charkaluk, E., & Constantinescu, A. (2009). Dissipative aspects in high cycle fatigue. Mechanics Of Materials, 41(5), 483-494. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.01.018

[21] Fan, J., Zhao, Y., & Guo, X. (2018). A unifying energy approach for high cycle fatigue behavior evaluation. Mechanics Of Mate-rials, 120, 15-25. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2018.02.001

YARI-GEVREK MALZEMELERİN KIRILMA PARAMETRELERİNİ TAYİN ETMEK İÇİN DENEYSEL BİR METOT

Ragıp İNCE[1]
[1]Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Elazığ

ABSTRACT

To analyze a concrete structure according to fracture mechanics, its fracture parameters are needed to be determined at first. Many non-linear fracture models have been proposed by design codes and investigators to determine fracture parameters of concrete. Although the notched beam specimens have been commonly used in concrete fracture, cubical/cylindrical specimens have some advantages such as compactness and lightness. In this study, the notched cubes were simulated for different the initial crack lengths by using the boundary collocation approach based on the generalized Westergaard formulation devised by Sanford. Subsequently, an experimental investigation on concrete cubes for different the initial crack lengths was performed. Consequently, this study proposes that the use of the cubes with edge cracks, which can be extracted from existing structures by the method of core drilling, ensures a significant benefit in the estimation of the properties of the structures according to fracture mechanics.

Keywords: Boundary Collocation Method, Concrete, Fracture Mechanics

ÖZET

Beton bir yapıyı kırılma mekaniğine göre analiz edebilmek için ilk önce kullanılan malzemenin kırılma parametrelerinin belirlenmesi gerekir. Betonun kırılma parametrelerini belirlemek için şartnameler ve araştırmacılar tarafından birçok lineer olmayan kırılma mekaniği modelleri önerilmektedir. Betonun kırılma mekaniğinde kiriş numuneler yaygın olarak kullanılmakla birlikte, küp ve silindir numuneler taşınabilirlik, hafiflik ve boyut etkisi çalışmalarında kolaylık sağlaması açısından bazı avantajlara sahiptir. Bu çalışmada, sınır çatlağa sahip küp numuneler, farklı başlangıç çentik boyları için Sanford tarafından geliştirilen genelleştirilmiş Westergaard yaklaşımını kullanan eşdizim yöntemi yardımıyla modellenmiştir. Ardından farklı çentik boylara sahip beton kübik numuneler üzerine deneysel bir çalışma yapılmıştır. Sonuç olarak, özellikle mevcut yapıların kırılma mekaniğine göre analiz edebilmek için yapıdan alınan karot numunelerine uygulanabilecek bir deneysel metot önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Sınır Eşdizim yöntemi, Beton, Kırılma Mekaniği

GİRİŞ

Beton ve betonarme yapıların göçme analizi için birçok lineer ve lineer olmayan yaklaşımları kullanılmaktadır. Ancak özellikle sismik yüklemelere maruz beton/betonarme yapılarda göçme meydana gelmeden taşıyıcı sistemlerde yerelleşen çatlak veya çatlaklar oluşabilmekte

ve malzeme yumuşama adı verilen mukavemet kaybına uğrayabilmektedir. Çatlamış bir beton/betonarme yapı, ancak kırılma mekaniği prensipleri kullanılarak gerçekçi bir şekilde analiz edilebilir.

Kırılma mekaniği temelde, malzemede var olan çentik, çatlak ve boşluk gibi gerilme yoğunluğunu arttıran kusurları ve bunlara bağlı olarak meydana gelen hasarları inceler. İlk olarak Griffith [1] tarafından temeli atılan Lineer Elastik Kırılma Mekaniği (LEKM) teorisi, 1960'lı yılların başında Kaplan [2] tarafından betona uygulanmıştır. Ancak daha sonra yapılan deneysel çalışmalar, LEKM kanunlarının beton için yetersiz olduğunu göstermiştir [3]. Bu amaçla birçok araştırmacı tarafından teknolojik ve nümerik alanlardaki gelişmelere paralel olarak, lineer olmayan kırılma mekaniği modelleri geliştirilmiştir. Betonun kırılma modelleri **1)** kohezif çatlak modelleri (fiktif çatlak modeli [3]) ve **2)** eşdeğer elastik çatlak yaklaşımları (iki parametreli model [4], efektif çatlak modeli [5], boyut etkisi modeli [6] ve çift-K modeli [7]) olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

Betonun kırılma mekaniğinde kiriş numuneler yaygın olarak kullanılmakla birlikte, son zamanlarda küp/silindir numunelerin kullanımı taşınabilirlik ve hafiflik dikkate alınarak artmıştır. Bu çalışmada, sınır çatlağa sahip küp numunelerin kırılma tokluğu, çatlak ucu açılımı ve çatlak profili gibi kırılma parametreleri yarı analitik bir yöntem olan eşdizim yöntemi [8] kullanılarak tayin edilmiştir. Ardından farklı çentik boylara sahip kübik numuneler üzerine deneysel bir çalışma yapılmıştır. Sonuç olarak, bu çalışmada özellikle mevcut yapıları kırılma mekaniği prensiplerine göre analiz edebilmek için, yapıdan alınan karot numunelere uygulanabilecek bir deneysel metot önerilmiştir.

BETONUN KIRILMA MEKANİĞİNDE KOMPAKT NUMUNELERİN KULLANIMI

Beton bir yapıyı kırılma mekaniğine göre analiz edebilmek için ilk önce kullanılan malzemenin kırılma parametrelerinin belirlenmesi gerekir. Betonun kırılma parametrelerinin tayininde yaygın olarak çentikli üç noktalı eğilme numuneleri kullanılmaktadır. Bunun en büyük sebebi belki de kirişlerin metallerde standart deney numunesi olarak yaygın kullanımıdır. Bununla birlikte son zamanlarda yarma tipi numunelerin betonun kırılma malzeme parametrelerinin tayininde kullanılması üzerine birçok çalışma yapılmıştır [9-13]. Çentikli kompakt numuneler bazı avantajlara sahiptir [14]:

- Bu tip numuneler, kompakt ve hafiftir. Bu sebeple bu numuneler boyut etkisi çalışmalarında büyük avantaj sağlar.
- Bu tip numunelerin kalıpları, mukavemet tayininde kullanılan numune kalıplarıyla aynı olduğundan şantiyede kullanımı kolaydır.
- Kirişlerin aksine kırılma parametrelerinin hesabında numune ağırlığı ihmal edilebilecek seviyededir.
- Bu numuneler ile mevcut bir yapının kırılma mekaniğine göre analiz etmek, yapıdan karot numune alımı ile mümkün olabilmektedir.

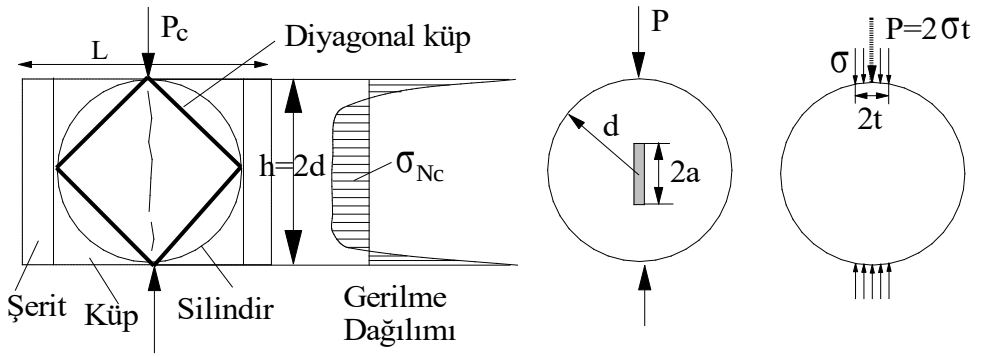
Betonun kırılma mekaniğinde, küp ve silindir üzerine yapılan deneyler: 1) Kama-Yarma ve 2) Yarmada-çekme olmak üzere iki kategoride incelenmektedir. Kama-Yarma deneyleri ilk olarak kohezif çatlak modelleri için geliştirilmiş olmakla birlikte, efektif çatlak yaklaşımları içinde kullanımı mümkün olabilmektedir. Şekil 1 de görüldüğü gibi yarmada-çekme numuneleri, genellikle beton teknolojisinde betonun çekme dayanımını endirekt olarak tayininde kullanılır. İlk olarak 1949 da Carneiro ve Barcellos [15] tarafından silindir yarma deneyi betonun çekme mukavemetinin tayini için önerilmiş ardından 1961 de Nilsson [16] tarafından küp numuneler kullanılmaya başlanmıştır. Bununla birlikte yaklaşık son 30 yılda çentikli yarmada-çekme numuneleri betonun kırılma mekaniğinde kullanılmaktadır. Silindir/küp numunelerde nominal dayanım aşağıdaki formülle hesaplanabilir [17]:

$$\sigma_{Nc} = \frac{P_c}{\pi bd} \tag{1}$$

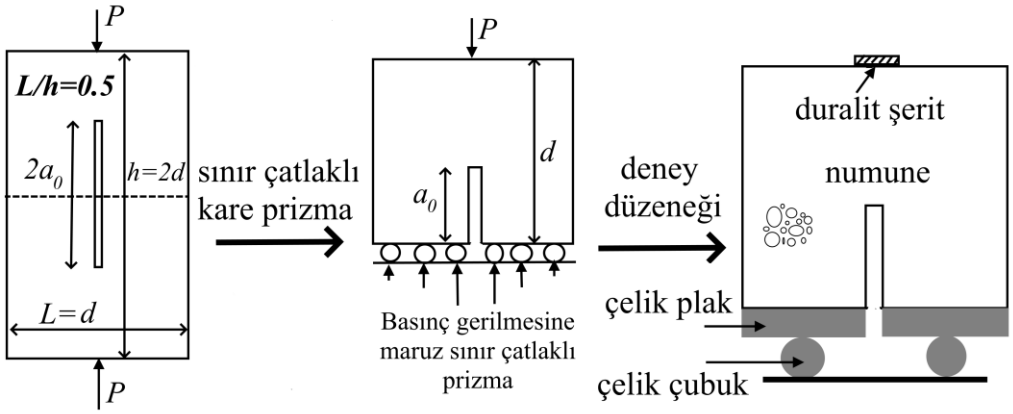
Burada P_c, numunenin göçme yükü, b numune kalınlığı ve d numunenin karakteristik boyutu. İfade (1) tekil yüklemeler için geçerlidir. Bununla birlikte Şekil 1 de görüldüğü gibi uygulamada çentikli-yarma numunelerine yük belirli genişlikte bir şerit üzerinden uygulanır ve bu yükleme durumu nominal dayanımın değerini değiştirmektedir.

Efektif çatlak modelleri için silindir numuneler ilk olarak Tang [9] tarafından incelenmiş ve silindir numuneler için temel LEKM formülleri ortaya konmuştur. İnce [10-12] ilk önce küp numuneler ve ardından diyagonal küp numuneler için LEKM formüllerini sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemini kullanarak geliştirmiştir. Bu çalışmalarda sırasıyla küp numune deneylerinin silindir numunelere göre daha stabil ve diyagonal küp numunelerinin ise boyut etkisi çalışmalarında büyük avantaj sağlayacağı vurgulanmıştır. Daha sonra İnce [13], merkezi çentiğe sahip şerit numunelerin LEKM bağıntılarını Fourier serisi ve integrallerini kullanarak elde etmiştir. Merkezi çatlağın mevcut yapıların analizinde uygulamasındaki zorlukları dikkate alan İnce [18, 19], betonun kırılma parametrelerini tayin etmek için son zamanlarda iki faklı kompakt numune tipi önermiştir. Bunlardan ilki çift sınır çatlaklı kompakt basınç numunesidir. Bu tip numuneler aslında ilk olarak Barr v.d. [20] tarafından metallerin testinde yaygın olarak kullanılan kompakt çekme numunelerine alternatif olarak üretilmiştir. Ancak bu numunelerin betonun kırılma mekaniğine uygulamaları LEKM tabanlı olup sadece kırılma tokluğu parametresi dikkate alınmıştır. İnce [18] bu tip numunelerin beton gibi yarı-gevrek malzemelerde kullanımı için, kırılma tokluğu değerine ilave olarak çatlak ucu açılımı ve çatlak profili gibi kırılma özelliklerini sonlu elemanlar yöntemi ile bulmuştur. Ardından literatürdeki deneysel çalışmaları kullanarak, bu tip numunelerin betonun lineer olmayan kırılma mekaniği modellerine uygulamıştır.

İnce [19] aynı zamanda merkezi çatlak içeren farklı boy/yükseklik (L/h=0.5, 0.75, 1.25, 1.5) oranına sahip şerit numuneler için LEKM bağıntılarını sınır eşdizim yöntemi ile türetmiştir (küp için L/h=1 ve şerit için $L/h\geq$2). Analizler sonucundan L/h=0.5 olan numunelerin merkez yatay düzlemde tamamen normal gerilmelerin basınç olduğunu tespit etmiştir ve bu durumun betonun kırılma parametrelerinin tayininde büyük avantaja sahip olduğunu görmüştür (Şekil 2). Ayrıca bu düzlemde kayma gerilmeleri de sıfır olduğundan, Şekil 2 de detayı verilen bir test çalışmasını öne sürmüştür. Bu modeli test etmek için farklı çentik boylarına sahip 100 mm'lik kübik harç numuneleri kullanarak iki parametreli modele [4] göre numuneleri analiz etmiştir. Diğer taraftan İnce ve Bildik [21], sadece kiriş numunelerinin kullanıldığı efektif çatlak modeli [5] için, kama-yarma numunelerinin de kullanımının mümkün olduğunu hem deneysel hem de istatistiksel olarak göstermiştir.



Şekil 1. Yarmada-çekme deneyi



Şekil 2. Kare prizmatik yarma-çekme deneyi [19]

ÇATLAKLI YAPILARIN EŞDİZİM YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Genelleştirilmiş Westergaard Yaklaşımı

Gövde kuvvetleri içermeyen bir düzlem elastisitede probleminde, gerilme bileşenleri aşağıda tanımlanan denklemle ifade edilir [17].

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{2}$$

Burada Φ, kartezyen düzlemin x, y koordinatlarına bağlı Airy gerilme fonksiyonudur. σ_x, σ_y ve τ_{xy} sırasıyla x-yönündeki normal gerilme, y yönündeki normal gerilme ve kayma gerilmesini ifade etmektedir. Bu fonksiyon aynı zamanda aşağıda verilen biharmonik denklemi sağlamak zorundadır.

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \tag{3}$$

Polinom tabanlı gerilme fonksiyonları, elastik yapının sınırları üzerinde sürekli yayılı yüklü durumların analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bununla beraber çatlamış yapıların analizinde Sanford [18] genelleştirilmiş Westergaard formülünü kullanmak gerekir.

$$\Phi = \mathrm{Re}\,\overline{\overline{Z}}(z) + y\left(\mathrm{Im}\,\overline{Z}(z) + \mathrm{Im}\,\overline{Y}(z)\right)$$
$$\overline{\overline{Z}} = \iint Z dz, \qquad \overline{Z} = \int Z dz, \qquad \overline{Y} = \int Y dz \tag{4}$$

Burada $z=x+iy$ ve $i^2=-1$ kompleks operatörlerdir. İfade (4) de $Z(z)=ReZ(z)+ImZ(z)$ ve $Y(z)=ReY(z)+ImY(z)$ analitik fonksiyonlar olup, aşağıda tanımlanan Cauchy-Riemann şartlarını sağlaması gerekmektedir (*Re*: reel *Im*: sanal kısımlarını ifade etmektedir).

$$\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,Z}{\partial y} = -\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,Z}{\partial x} = -\mathrm{Im}\,Z', \quad \frac{\partial\,\mathrm{Im}\,Z}{\partial y} = \frac{\partial\,\mathrm{Re}\,Z}{\partial x} = \mathrm{Re}\,Z' \tag{5}$$

Burada üst virgüller z'ye göre türevi ifade etmektedir. Sonuç olarak gerilme bileşenleri İfade (2)-(5) den aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \mathrm{Re}\,Z - y\left(\mathrm{Im}\,Z' + \mathrm{Im}\,Y'\right) + 2\,\mathrm{Re}\,Y \\ \sigma_y &= \mathrm{Re}\,Z + y\left(\mathrm{Im}\,Z' + \mathrm{Im}\,Y'\right) \\ \tau_{xy} &= -\mathrm{Im}\,Y - y\left(\mathrm{Re}\,Z' + \mathrm{Re}\,Y'\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Benzer olarak deplasman bileşenleri *u* x-yönünde ve *v* y-yönünde olmak üzere, bilinen genelleştirilmiş Hooke kanunları yardımıyla aşağıdaki gibi belirlenebilir

$$\begin{aligned}Eu &= (1-\upsilon)\,\mathrm{Re}\,\overline{Z} - (1+\upsilon)\,y\left(\mathrm{Im}\,Z + \mathrm{Im}\,Y\right) + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{Y} \\ Ev &= 2\,\mathrm{Im}\,\overline{Z} - (1+\upsilon)\,y\left(\mathrm{Re}\,Z + \mathrm{Re}\,Y\right) + (1+\upsilon)\,\mathrm{Im}\,\overline{Y}\end{aligned} \tag{7}$$

Burada *E,* elatisite modülü ve ν Poission oranıdır.

Çatlaklı yapılara yaklaşımın uygulanması

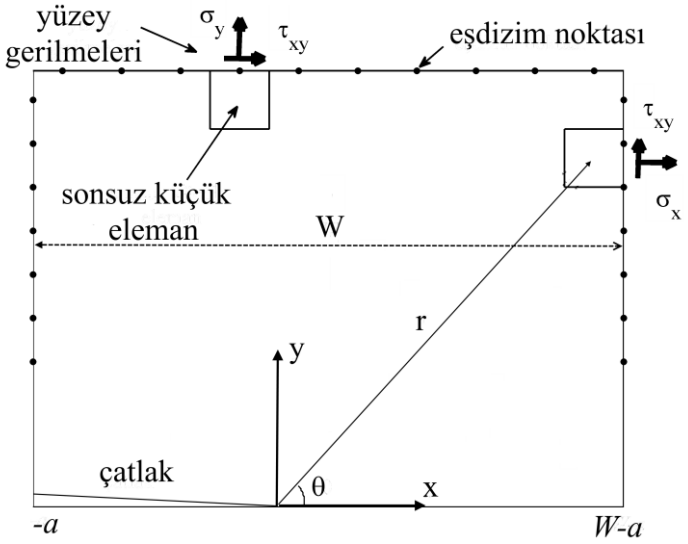
Eşdizim yöntemi bir ağırlıklı kalıntı metodudur. Bunlar problemin temel diferansiyel denklemini ve sınır şartlarını sağlayan yaklaşık bir çözüm bulma esasına dayanırlar. Çözüm yaklaşık olduğundan kalıntılar (hatalar) meydana gelecektir. Eşdizim yönteminde, Şekil 3 te görüldüğü gibi, yapı elemanının sınırı üzerinde seçilen noktalarda kalıntıların sıfır olması prensibine dayanmaktadır.

Sanford [22], Şekil 3 te görülen sınır çatlağa sahip bir geometri için, İfade (4) te verilen genelleştirilmiş Westergaard fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlanabileceğini belirtmektedir.

$$Z(z) = \sum_{j=0}^{J} A_j \left(\frac{z}{W}\right)^{j-1/2}, \qquad Y(z) = \sum_{m=0}^{M} B_m \left(\frac{z}{W}\right)^{m} \tag{8}$$

Burada A_j ve B_m kompleks serinin katsayıları, *J* ve *M* her bir seri için seçilen terim sayısı ve W çatlaklı yapının genişliğidir. İfade (8) deki fonksiyonlar, İfade (6) da yerine konularak gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sum_{j=0}^{J} A_j \left(\frac{r}{W}\right)^{j-1/2} \left\{\cos\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)\theta\right] - \left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left[\left(j-\frac{3}{2}\right)\theta\right]\right\} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{M} B_m \left(\frac{r}{W}\right)^{m} \left\{2\cos(m\theta) - m\sin\theta\sin\left[(m-1)\theta\right]\right\} \\ \sigma_y &= \sum_{j=0}^{J} A_j \left(\frac{r}{W}\right)^{j-1/2} \left\{\cos\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)\theta\right] + \left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\sin\left[\left(j-\frac{3}{2}\right)\theta\right]\right\} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{M} B_m \left(\frac{r}{W}\right)^{m} \left\{m\sin\theta\sin\left[(m-1)\theta\right]\right\} \\ \tau_{xy} &= -\sum_{j=0}^{J} A_j \left(\frac{r}{W}\right)^{j-1/2} \left\{\left(j-\frac{1}{2}\right)\sin\theta\cos\left[\left(j-\frac{3}{2}\right)\theta\right]\right\} \\ &\quad - \sum_{m=0}^{M} B_m \left(\frac{r}{W}\right)^{m} \left\{\sin(m\theta) + m\sin\theta\cos\left[(m-1)\theta\right]\right\}\end{aligned} \tag{9}$$



Şekil 3. Sınır çatlaklı bir elamanın eşdizim yöntemiyle modellenmesi

İfade (9) ve Şekil 3 ten görüldüğü gibi eşdizim noktasındaki gerilmeler çatlak ucuna göre polar koordinatlar cinsinden (r,θ) ifade edilmektedir. Eğer geometri ve yükleme çatlak seviyesinde simetrik ise sistemin yarısının modellenmesi yeterlidir. Sonuç olarak çatlaklı elemanın sınırında seçilen her bir eşdizim noktası için yukarıda tanımlanan yüzey gerilmeleri (Şekil 3 de görüldüğü gibi, her bir eşdizim noktasında iki adet yüzey gerilmesi (tractions) yazılabildiğinden) İfade (10) daki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{j=0}^{J} A_j f_j(z_1) + \sum_{m=0}^{M} B_m g_m(z_1) \\
\sigma_2 &= \sum_{j=0}^{J} A_j f_j(z_2) + \sum_{m=0}^{M} B_m g_m(z_2) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\sigma_N &= \sum_{j=0}^{J} A_j f_j(z_N) + \sum_{m=0}^{M} B_m g_m(z_N)
\end{aligned} \tag{10}$$

Burada A_j ve B_m katsayılarının belirlenmesi için oluşturulan denklem takımı aşağıdaki gibi matris formunda yazılabilir.

$$[f \quad | \quad g]\left\{\frac{A}{B}\right\} = \{\sigma\} \tag{11}$$

Sınır üzerindeki gerilme sayısı N ve bilinmeyen katsayıların sayısı J+M+2 olmak üzere, N=J+M+2 (yani $[f \mid g]$ kare matris) ise çözüm vektörü İfade (12) deki gibi tanımlanabilir. Bununla beraber uygulamada daha hassas çözümlerin elde edilmesi için N> J+M+2 (aşırı belirlenmiş lineer denklem sistemi) kullanımı çok daha yaygın bir uygulama olduğundan en küçük kareler yöntemi kullanılarak İfade (13) deki gibi bir çözüme gidilir.

$$\left\{\frac{A}{B}\right\} = [f \quad | \quad g]^{-1}\{\sigma\} \tag{12}$$

$$\left\{\frac{A}{B}\right\} = \left[\left[f \quad | \quad g\right]^T \left[f \quad | \quad g\right]\right]^{-1} \left[f \quad | \quad g\right]^T \{\sigma\} \tag{13}$$

Verilen yükleme ve geometri için çatlak ucundaki gerilme ve deplasmanları tanımlayan kırılma tokluğu (veya gerilme şiddet çarpanı) değeri serinin ilk katsayısı kullanılarak İfade (14) deki gibi hesaplanabilir

$$K_I = A_0 \sqrt{2\pi W} \tag{14}$$

Eşdizim yönteminin uygulanmasında yakınsamanın bir ölçüsü olarak sınır üzerindeki artık değerlerden oluşan hata değeri (RMS) aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$RMS = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} \frac{\left(\sigma_i - \sigma_{ic}\right)^2}{N}} \tag{15}$$

Burada σ_i başlangıçta verilen sınır üzerindeki gerilme değerleri ve σ_{ic} ise analiz sonucu elde edilen değerlerdir. Yukarıda anlatılan bu yaklaşım ilk olarak İnce [23] tarafından ilk olarak Şekil 1'de verilen yarma-çekme numunelerine başarı ile uygulanmıştır.

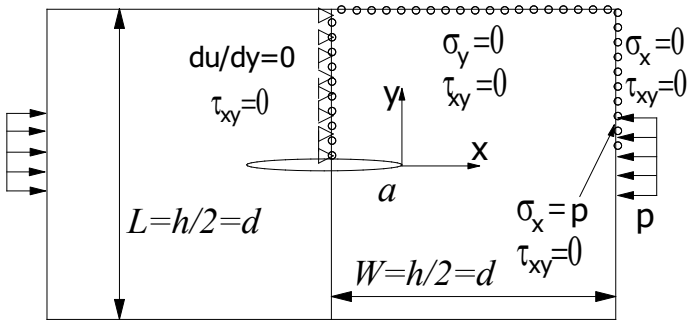
SINIR ÇATLAKLI KÜPLERİN EŞDİZİM YÖNTEMİYLE MODELLENMESİ

Şekil 1 de görülen merkezi çatlak içeren yarmada-çekme numunelerin analizi için simetriden dolayı uygulamada numunenin çeyrek kısmı analiz edilir. Buna göre merkezi çatlak içeren *L/h*=0.5 olan numune Şekil 4 te detaylandırıldığı gibi eşdizim yöntemine göre kırılma parametreleri elde edilmiştir. Analizlerde, yük *P*=100 N, numunenin yarı yüksekliği *W*=*d*=10 mm, elastisite modülü *E*=1 MPa ve Poission oranı ν=0.2 olarak alınmıştır. Çatlak uzunlukları *a*=2, 3, 4, 5, 6 ve 7 mm olarak seçilmiştir. Yarmada çekme numuneleri için β= yük uygulama şerit genişliğinin numune boyutuna oranı olmak (Şekil 1 de *β=2t/h=t/d*) üzere analizler *β*=0.10 için yapılmıştır. Buna göre numunenin çeyreği için eşdizim nokta sayısı N=400, seri terim sayısı J=M=31 ve İfade (15) e göre hesaplanan RMS değeri 2.4 dür.

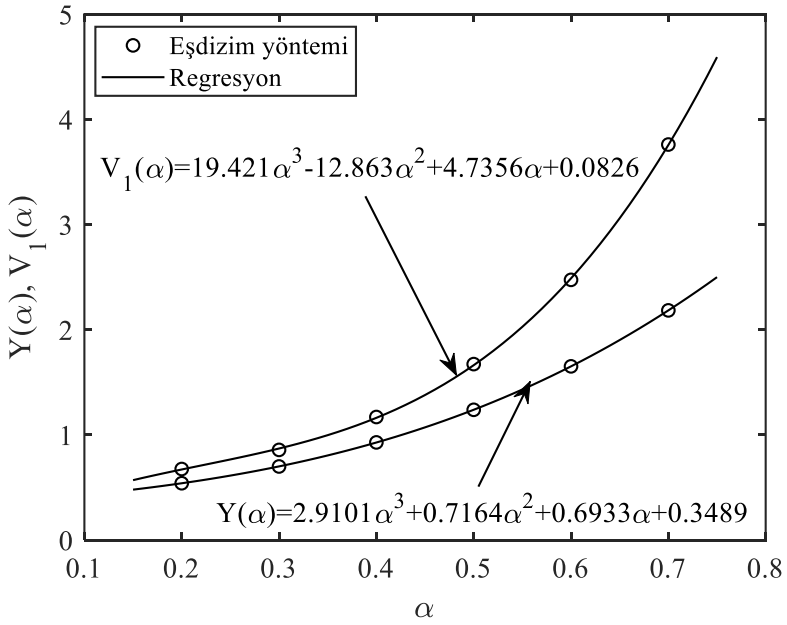
Her bir çatlak uzunluğuna karşılık gelen K_I değerleri İfade (14) yardımıyla hesaplanmıştır. Bununla beraber, kırılma mekaniğinde K_I değerinin aşağıdaki gibi kullanımı çok daha kullanışlıdır.

$$K_I = \sigma_N \sqrt{\pi a}\, Y(\alpha = a/d) \tag{16}$$

Burada σ_N nominal dayanım (İfade (1)), *a* sınır çatlağın tam boyu merkezi çatlağın yarı boyu ve *Y(α)* boyutsuz şekil faktörüdür. Herhangi bir geometriye ve yüklemeye bağlı boyutsuz *Y(α)* şekil faktörünün bulunması kırılma mekaniğinde temeldir. Şekil 5 de bireysel şekil faktör değerleri ve 3^o polinom tabanlı regresyon eğrisi verilmiştir.



Şekil 4. L/h=0.5 olan yarma-çekme numunelerin eşdizim yöntemiyle modellenmesi



Şekil 5. Sınır çatlaklı kübik numunelerin $Y(\alpha)$ ve $V_1(\alpha)$ şekil faktörleri

Bu çalışmada her bir çentik boyu ve verilen yükleme için çatlak ağzı açılımı değeri (CMOD) sınır eşdizim yöntemi için İfade (7) den aşağıdaki gibi belirlenebilir [22]:

$$CMOD = \frac{4}{E}\sum_{j=0}^{J}(-1)^j A_j \frac{a^{j+1/2}}{(j+1/2)W^{j+1/2}} \tag{17}$$

Bununla beraber, yarma-çekme numunelerinde CMOD değeri düzlem şekil değiştirme durumu için genelde aşağıdaki formda ifade edilir [9-13]:

$$CMOD = \frac{\pi\sigma_N(1-\upsilon^2)a}{E}V_1(\alpha = a/d) \tag{18}$$

Burada $V_1(\alpha)$ boyutsuz şekil faktörü olup, sınır çatlaklı kübik numuneler için Şekil 5 de 3º polinom ile ifade edilmiştir. Hem Y hem de V_1 için belirlilik katsayısı R^2>0.99 olarak belirlenmiştir. Diğer taraftan, kırılma mekaniği çalışmalarında çatlak profilinin şekli (COD(x)), çatlak ucu açılımı (CTOD) değerinin hesabı için gereklidir. Çatlak profilinin şekli yine İfade (17) yardımıyla çatlak ucundan itibaren alınan herhangi bir x değeri için a yerine x konularak hesaplanabilir. Uygulamada COD profili CMOD değeri ile normalize edilir[9-13]. Sonuç olarak sınır çatlaklı kübik numuneler için çatlak profilinin denklemi, kiriş ve merkezi çatlaklı küp numunelerinkine benzer olarak İfade (19) da verilmiştir [10].

$$\frac{COD(x)}{CMOD} = \sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + (2.405-1.566\alpha)\left[\frac{x}{a}-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]} \tag{19}$$

Yukarıda geliştirilen LEKM bağıntıları (Şekil 5 deki Y ve V_1 fonksiyonları ve İfade (19)), sadece β=0.1 olan sınır çatlaklı kübik numuneler veya L/h=0.5 şerit numuneler için geliştirilmiştir. Bununla beraber İnce [19] farklı β ve L/h değerlerine sahip merkezi çatlaklı şerit numuneler için Sanford [8, 22] tarafından önerilen genelleştirilmiş Westergaard formülasyonu kullanarak benzer LEKM bağıntıları önermiştir. Bu çalışmada belirli bir numune tipi için basit LEKM bağıntıları farklı bir yaklaşımla elde edilmiştir.

DENEYSEL ÇALIŞMA

Betonun kırılma parametrelerini belirlemek için yukarıda LEKM bağıntıları geliştirilen kenar çatlaklı küp numunelerin performansını doğrulamak için d=100 mm'lik harç küp numuneleri hazırlanmıştır. Mineralojik olarak karışımda maksimum agrega boyutu 4 mm olan silis kumu kullanılmıştır. Karışımda Portland çimentosu CEM I 42.5R kullanılmıştır. Numunelerin su/çimento oranı ve çimento dozajı sırasıyla 0.6 ve 450 kg/m^3 seçilmiştir. Harcın basınç dayanımı değerini belirlemek için, karışımdan 150 mm çapında ve 300 mm uzunluğunda üç özdeş silindir numunesi de döküldü. 1. günden sonra tüm numuneler kalıptan çıkarılmış ve ardından 28. günde bir su tankında test edilene kadar kür edilmiştir. 28. günde a_0 = 20, 35 ve 50 mm olacak şekilde küplerinin tamamına elmas testere ile çentik açılmıştır. Her bir çentik boyu için üç adet küp üretilmiştir.

Basınç ve yarma-çekme deneyleri sırasıyla 2000 kN ve 100 kN kapasiteli yük kontrollü dijital pres kullanılarak yapılmıştır. Yarma-çekme deneylerinde 3 mm kalınlığında ve 10 mm (β=0.1) genişliğinde duralit yükleme şeritleri kullanılmıştır. Şekil 2'de detaylandırıldığı gibi, numunelerin altına sınır şartları temin etmek için, çentikten itibaren iki rijit çelik levha ve onların altına iki adet silindirik çelik çubuk yerleştirilmiştir. Her farklı çentik boyuna sahip küpler için maksimum yük kapasitesine 4 (± 30 s) dakikada erişilmiştir. Sonuç olarak betonun basınç mukavemeti f_c=30.63 MPa olarak elde edilmiştir ve buna bağlı olarak ACI-318 [24]'deki formül yardımıyla ($E = 4734\sqrt{f_c}$) elastisite modülü E=26.20 GPa olarak hesaplanmıştır. Düzlem şekil değiştirme durumu için (kırılma mekaniğinde bu durum dikkate alınır) elastisite modülü E/(1-ν^2)=26.2/(1-0.2^2)=27.29 GPa şeklinde kullanılmalıdır.

Tablo 1. Numunelerin başlangıç çatlak boylarına göre kırılma yükleri [19]

a_0 (mm)	$\alpha_0=a_0/d$	P_c (N)		
		1	2	3
20	0.20	50780	69030	71350
35	0.35	41870	49420	54850
50	0.50	22300	24060	30300

DENEYSEL SONUÇLARIN ANALİZİ

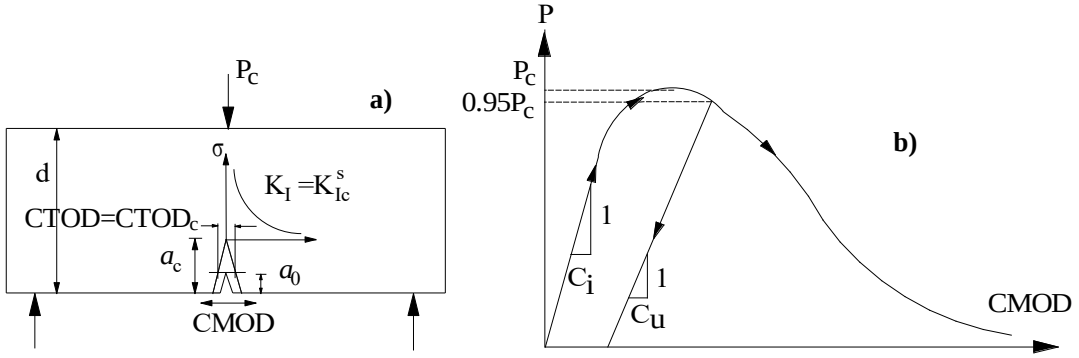
Deney sonuçları, betonun kırılma mekaniğinde iki popüler yaklaşım olan iki parametreli model [4] ve çift-K modeline [7] göre analiz edilmiştir. Bu kırılma modeli, beton bir yapıda, gerilme şiddet çarpanı K_I (burada sadece Mod I durumu dikkate alınmaktadır) ve çatlak ucu açılımı $CTOD$ değerleri, kritik gerilme şiddet çarpanı (kırılma tokluğu) K_{Ic}^s ve kritik çatlak ucu açılımı $CTOD_c$ olan kritik değerlerine eriştiğinde göçmenin meydana geldiğini kabul etmektedir.

$$K_{Ic}^s = \sigma_{Nc}\sqrt{\pi a_c}\,Y\left(\alpha_c = a_c/d\right) \tag{20}$$

$$CTOD_c = \frac{\pi\sigma_{Nc}a_c}{E}V_1\left(\alpha_c\right)\frac{COD(x = a_c/a_0)}{CMOD_c} \tag{21}$$

Burada a_c=a_0+Δa_c kritik çatlak boyudur (Δa_c çatlak gerisindeki kırılma süreci bölgesinin uzunluğudur). Yaklaşım, bu parametreleri deneysel olarak iki yolla belirlemektedir. Bunlar, komplians [4] ve pik-yük metodudur [10-12]. Birinci yöntemde kırılma parametreleri, kapalı

devre deney ekipmanı kullanılarak, Şekil 6'da görüldüğü gibi çentikli bir üç noktalı eğilme numunesinin Yük-Çatlak Ağzı Açılımı (P-CMOD) ilişkisinden faydalanarak hesaplanır. Modeldeki kritik çatlak boyu a_c, başlangıç (C_i) ve pik yük sonrası pik yükün %95 değerinde ölçülen (C_u) gibi iki komplians değerinden faydalanarak hesaplanır (Şekil 6b). Komplians yönteminde, aynı zamanda başlangıç ve pik yükteki komplians değerlerinden (C_i ve C_u) betonun elastisite modülü de hesaplanabilir. İkinci yaklaşımda, birincisine nazaran daha düşük kapasiteli bir deney ekipmanına gerek duyulmasına rağmen, ya aynı boyutta farklı çentik boylu ya da farklı boyutta aynı relatif çentik boyuna sahip en az iki numunenin pik yük değerinin belirlenmesi gereklidir. Bu yöntemde betonun lineer olmayan kırılma parametreleri, lineer olmayan bir denklem takımının çözümüyle bulunmaktadır ve kendi içerisinde bir istatistik analiz içermektedir [10-12]. Sonuç olarak $CTOD_c - K_{Ic}^s$ ilişkisi üzerinden hesaplanan standart sapmanın minimum olduğu değerden kırılma parametreleri hesaplanabilir.

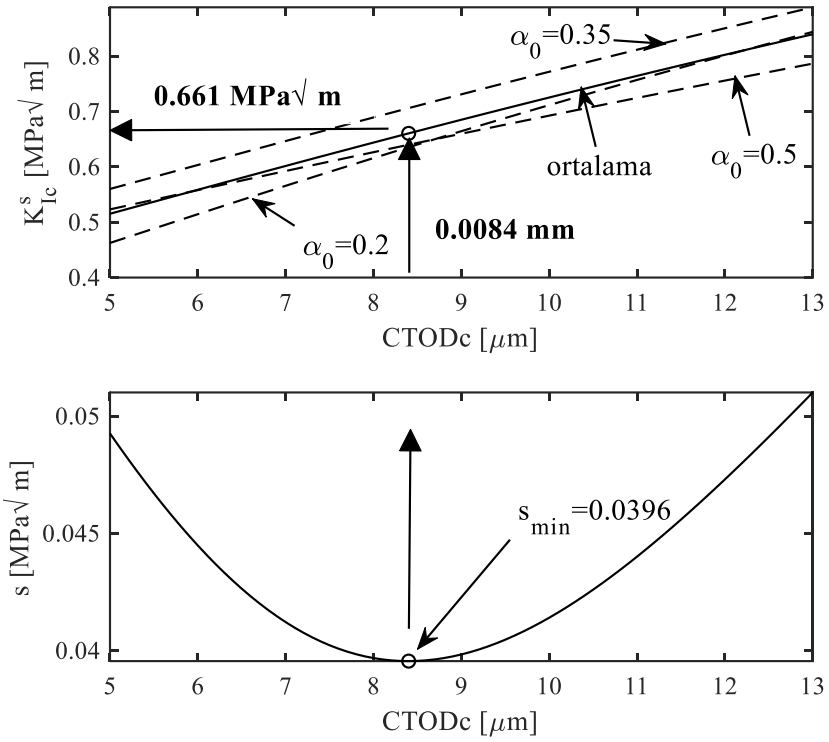


Şekil 6. İki parametreli modelde kırılma parametrelerinin tayini
a) çentikli üç noktalı eğilme numunesi **b)** tipik bir P-CMOD diyagramı.

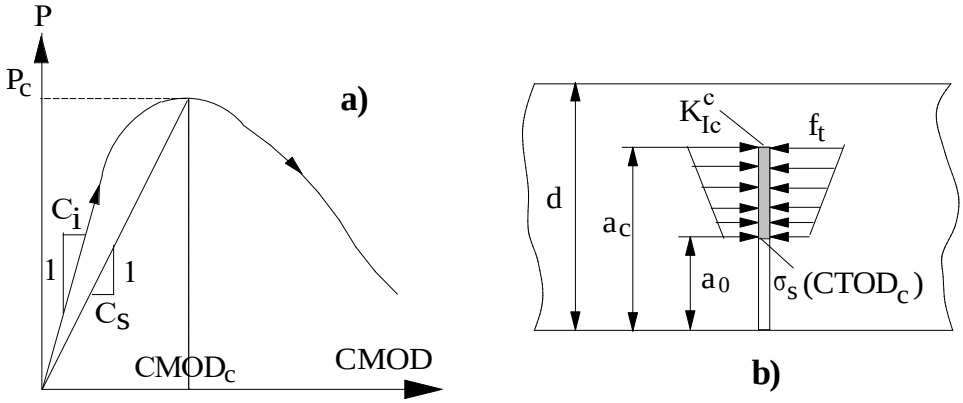
Bu çalışmada kırılma parametrelerinin tespiti için Pik-Yük metodu kullanılmıştır. Pik-yük metoduna ait analiz sonuçları Şekil 7'de Tablo 1'deki değerler için verilmiştir. Pik-yük metoduna göre elde edilen kırılma parametreleri K_{Ic}^s=0.661 MPa√m ve $CTOD_c$=0.0084 mm olarak elde edilmiştir. Aynı veriler için İnce [19], merkezi çatlaklı genelleştirilmiş Westergaard formülasyonu tabanlı (ki bu çalışmada sınır çatlaklı genelleştirilmiş Westergaard formülasyonu kullanılmıştır) yaklaşım kullanarak K_{Ic}^s=0.653 MPa√m ve $CTOD_c$=0.0090 mm olarak elde etmiştir ve her iki yaklaşımın sonuçları birbirine yakındır.

Lineer olmayan kırılma mekaniği yaklaşımları içerisinde, çift-K Modeli [6], beton bir yapıda, gerilme şiddet çarpanının değerinin K_{Ic}^{ini} değerine eriştiğinde çatlağın yayılmaya başladığını ve kritik gerilme şiddet çarpanı K_{Ic}^{un} değerine eriştiğinde ise çatlağın ani yayıldığını kabul etmektedir. K_{Ic}^{un} kırılma parametresi iki parametreli modele [4] benzer olarak komplians yönteminden hesaplanmaktadır. Ancak burada Şekil 8a'da görüldüğü gibi P-CMOD diyagramında C_u komplians değeri yerine pik yükte ölçülen sekant komplians değeri C_s kullanılır.

Çift-K modelindeki başlangıç gerilme şiddet çarpanını K_{Ic}^{ini} hesaplamak için ilk önce Şekil 8b'de detaylandırıldığı gibi, çatlak gerisinde yer alan kohezif gerilmelerin sebep olduğu kohezif gerilme şiddet çarpanının K_{Ic}^c hesaplanması gerekir. Bu işlem bir Green fonksiyonu integrali (singular integral) veya ağırlık fonksiyonları kullanılarak hesaplanabilir [12].



Şekil 7. Pik-yük Metoduna göre analiz sonuçları



Şekil 8. Çift-K modeline göre kırılma parametrelerinin tayini

Bununla beraber eğer $\Delta a_c/a_0$<0.2 olduğu durumlarda (ki bu durumda hata kabul edilebilir mertebededir) aşağıdaki LEKM yaklaşımı kullanılabilir [7, 19, 25]:

$$K_{Ic}^c = \sqrt{\frac{8\Delta a_c}{9\pi}}\left[2 f_t + \sigma_s\left(CTOD_c\right)\right] \tag{22}$$

burada f_t betonun çekme mukavemeti olup ACI-318 [24]'deki formül yardımıyla ($f_t = 0.4983\sqrt{f_c}$) hesaplanabilir. İfade (22)'deki σ_s çatlak ucunda gerilme değeri olup İfade (23) den aşağıdaki gibi hesaplanabilir [19, 26]:

$$\sigma_s\left(CTOD_c\right) = f_t\left[\left(1+6592\,CTOD_c^3\right)\exp\left(-43.75 CTOD_c\right) - 0.16 CTOD_c\right] \tag{23}$$

Sonuç olarak başlangıç gerilme şiddet çarpanı süperpozisyon kaidesi gereğince (Şekil 8b), İfade (24)'den hesaplanabilir [7]:

$$K_{Ic}^{ini} = K_{Ic}^{un} - K_{Ic}^{c} \tag{24}$$

Yapılan deneysel ve teorik çalışmalar, iki parametreli modelin [4] K_{Ic}^{s}, efektif çatlak modelinin [5] K_{Ic}^{e}, çift-K modelinin [7] K_{Ic}^{un} ve boyut etkisi modelinin [6] K_{Ic}^{b} kırılma tokluğu parametrelerinin birbirine özdeş olduğunu göstermektedir [12, 18, 21]. Bununla beraber kırılma parametrelerinin tayininde laboratuvar boyutundaki numuneler için yukarıda belirtildiği gibi İfade (22)'nin direkt kullanımında hata mertebesi kabul edilebilir sınırların çok ötesinde olmaktadır. Bu durumda yukarıda belirtilen integral veya ağırlık fonksiyonları yöntemine başvurulmalıdır. Ancak İnce [18] geometrik benzer kompakt küp basınç numune deneyi sonuçlarına boyut etkisi modeli [6] yaklaşımını uygulamış ve İfade (22)'i direk olarak kullanmıştır. Çünkü boyut etkisi modelinin diğer parametresi c_f (=Δa_c) olup sonsuz boyuttaki numunede kırılma süreci bölgesinin uzunluğudur ve modele göre bu parametre $CTOD_c$ değerinden aşağıdaki gibi hesaplanabilir [6]:

$$c_f = \Delta a_c = \frac{\pi}{32}\left(\frac{CTOD_c E}{K_{Ic}^{s}}\right)^2 \tag{25}$$

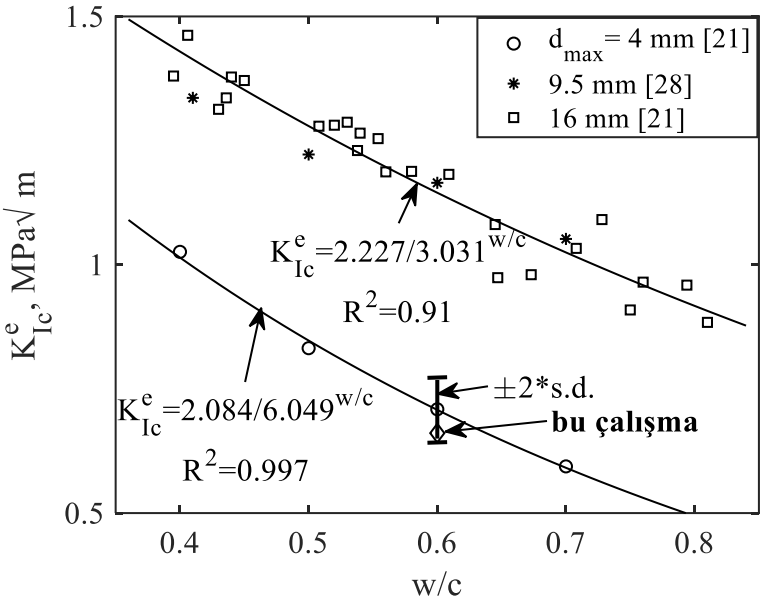
Sonuç olarak yukarıdaki verilerin ışığında, betonun çekme mukavemeti ACI-318'den f_t = 2.76 MPa, İfade (23)'ten çatlak ucunda gerilme değeri σ_s ($CTOD_c$=0.0084) = 1.91 MPa ve İfade (25)'en kırılma süreci bölgesinin uzunluğu Δa_c = 11.81 mm olarak hesaplanabilir. Buna göre İfade (22)'den kohezif gerilme şiddet çarpanının değeri K_{Ic}^{c} = 0.429 MPa√m ve İfade (24)'den başlangıç gerilme şiddet çarpanını K_{Ic}^{ini} = 0.232 MPa√m şeklinde elde edilebilir.

Yukarıdakilere ilave olarak, elde edilen sonuçlar ilk lineer olmayan kırılma modeli olan fiktif çatlak modeline [3] uygulanabilir. Fiktik çatlak modeli [3] diğer kırılma modelleri gibi betonun çekme mukavemeti f_t ve kırılma enerjisi G_F şeklinde iki parametre kullanarak beton yapıları sonlu eleman veya sınır elemanlar yöntemi yardımıyla modellemektedir. Bu yaklaşımının temel parametresi G_F değerinin, iki parametreli kırılma modelindeki kırılma tokluğu parametresi K_{Ic}^{s} ile olan ilişkisini, Planas ve Elices [27] teorik olarak İfade (26)'daki gibi olduğunu ileri sürmüşlerdir:

$$G_F = \frac{2.08}{E}\left(K_{Ic}^{s}\right)^2 \tag{26}$$

Bu bilgiler ışığında, bu çalışmadaki sınır çatlaklı kübik harç numuneleri için kırılma enerjisi parametresi G_F=33.4 N/m olarak hesaplanabilir. Son zamanlarda, İnce ve Bildik [21] farklı su/çimento (*w/c*) oranlarına sahip çentikli kiriş ve kama-yarma numunelerinden elde ettikleri deneysel verileri efektif çatlak modeline göre analiz etmişler ve kırılma tokluğu tabanlı beton karışım hesabı önermişlerdir. Çalışmada, en büyük dane çapı d_{max}=4 (harç) ve 16 mm (beton) olan numuneler hazırlanmıştır. Benzer bir çalışma daha önce d_{max}=9.5 mm olan karışımlar için, Momteiro v.d. [28] tarafından G_F enerjisi tabanlı olarak önerilmiştir. İnce ve Bildik [21], aynı zamanda kendi deneysel verileri ile Momteiro v.d. [28] verilerini efektif çatlak modeline göre analiz ederek (bu yaklaşım için $G_F = 1.46/E \times \left(K_{Ic}^{e}\right)^2$ [29]), Şekil 9'da görüldüğü gibi, bu tip yaklaşımların geçerliliğini deneysel ve istatistiksel olarak ispatlamışlardır. Şekil 9'daki her bir bireysel veri 9 adet numunenin ortalamasından türetilmiştir ve *w/c*=0.6 olan numuneler için standart sapma değeri s.d.=0.029 MPa√m olarak hesaplanmıştır [21]. Buna göre bu

standart sapma değerleri dikkate alınırsa (% 95 güvenlik veya % 5 anlamlılık düzeyi için: $x = \bar{x} \pm 2 \times s.d$), Şekil 9'dan görüldüğü gibi, bu çalışmada elde edilen kırılma tokluğu parametresi değeri (K_{Ic}^{s}), literatürdeki değerlerle uyum içerisinde olduğu söylenebilir.



Şekil 9. Kırılma tokluğu tabanlı beton karışım hesabı [21]

SONUÇLAR

Bu bildiride beton ve kayaç gibi yarı-gevrek malzemelerin kırılma parametrelerini belirlemek için sınır çatlaklı kübik numunelerin kullanıldığı bir deney düzeneği tartışılmıştır. Bu tip numunelerin LEKM bağıntılarını türetmek için sınır çatlaklı genelleştirilmiş Westergaard formülasyonu tabanlı sınır eşdizim yöntemi kullanılmıştır. Uygulamada bu yaklaşım için genel bir algoritma sunulmamakla beraber, bu yöntem ile çatlaklı bir geometri modellendiği zaman çok az nokta sayısı ve denklem takımı kullanılarak çok hassas sonuçlar elde edilebilmektedir.

Sunulan çalışmanın uygulama kısmında farklı çentik boylara sahip kübik numuneler üzerine yarma-çekme deneyi yapılmıştır. Küplerin tepe basınç değerleri betonun kırılma mekaniğinde popüler iki metot olan iki parametreli (K_{Ic}^{s}, $CTOD_c$) ve çift-K (K_{Ic}^{un}, K_{Ic}^{ini})modellerine göre analiz edilmiştir. K_{Ic}^{s} ve K_{Ic}^{un} parametreleri özdeş olup, çatlaklı bir yapıda, ani çatlak yayılımının başladığı duruma karşılık gelmektedir. K_{Ic}^{ini} kırılma parametresi ise, özellikle baraj ve nükleer santral gibi kütle betonların kullanıldığı ve sızdırmazlığın istendiği yapılarda hayati bir öneme sahiptir (Mayıs-2011 de, Japonya'da meydana gelen Fukushima nükleer felaketi gibi) [30]. Ayrıca deneysel veriler fiktif çatlak (f_t ve G_F) yaklaşımına da uygulanmıştır. Bu model, özellikle beton yapıları sonlu eleman veya sınır elemanlar gibi nümerik yöntemlerle modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Yapılan istatistiksel araştırma sonucunda, bu çalışmadaki harç karışımı için elde edilen kırılma parametreleri literatürdeki benzer çalışmalarla uyum içinde olduğu gözlenmiştir. Sonuç olarak, bu çalışmada özellikle mevcut yapıları kırılma mekaniği prensiplerine göre analiz edebilmek için, yapıdan alınan karot numunelere uygulanabilecek bir deneysel metot önerilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] A.A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221 (1920) 163-198.

[2] M.F. Kaplan, Crack propagation and the fracture of concrete, *Journal of ACI*, 58 (1961) 591-610.

[3] Hillerborg, M. Modeer and P. E. Petersson, Analysis of crack formation and growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cement & Concrete Research*, 6 (1976), 773-782.

[4] Y.S. Jenq and S.P. Shah, A two-parameter model for concrete, *Journal of Engineering Mechanics- ASCE*, 111 (1985), 1227-1241.

[5] P. Nallathambi and B.L. Karihaloo, Determination of the specimen size independent fracture toughness of plain concrete, *Magazine of Concrete Research*, 38 (1986), 67-76.

[6] Z.P. Bazant, and M.T. Kazemi, Determination of fracture energy, process zone length, and brittleness number from size effect with application to rock and concrete, *International Journal of Fracture*, 44 (1990), 111-131.

[7] S. Xu and H.W. Reinhardt, Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture, Part I: Experimental investigation of crack propagation, *International Journal of Fracture*, 98 (1999), 111-149.

[8] R.J. Sanford, *Principles of fracture mechanics*, Prentice-Hall, New Jersey, USA. 2003.

[9] T. Tang, Effect of load-distributed width on split tension of unnotched and notched cylindrical specimens. *Journal of Testing and Evaluation, ASTM*, 22 (1994), 401-409.

[10] R. Ince, Determination of concrete fracture parameters based on two-parameter and size effect models using split-tension cubes. *Engineering Fracture Mechanics*, 77 (2010), 2233-2250.

[11] R. Ince, Determination of concrete fracture parameters based on peak-load method with diagonal split-tension cubes. *Engineering Fracture Mechanics*, 82 (2012) 100-114.

[12] R. Ince, Determination of the Fracture Parameters of the Double-K Model Using Weight Functions of Split-Tension Specimens, *Engineering Fracture Mechanics*, 96 (2012), 416-432.

[13] R. Ince, The fracture mechanics formulas for split-tension strips. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 55 (2017) 607-619.

[14] E. Brühwiler, F.H. Wittmann, The wedge splitting test, a method of performing stable fracture tests. *Engineering Fracture Mechanics*, 35 (1990) 117-126.

[15] F.L. Carneiro, A. Barcellos, Tensile strength of concrete (in French). *RILEM Bulletin*, 13 (1949), 98-125.

[16] S. Nilsson, The tensile strength of concrete determined by splitting tests on cubes, *RILEM Bulletin*, 11 (1961) 63-67.

[17] S.P. Timoshenko, J. N. Godier, *Theory of Elasticity*, Mc-Graw Hill, USA, 1970.

[18] R. Ince, Usage of compact compression specimens to determine non-linear fracture parameters of concrete, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 44 (2021), 410-426.

[19] R. Ince, Utilization of Splitting-Strips in Fracture Mechanics Tests of Quasi-Brittle Materials, *Archive of Applied Mechanics* (2021) DOI 10.1007/s00419-021-01913-5.

[20] B.I.G. Barr, W.T. Evans and R.C. Dowers, Fracture toughness of polypropylene fiber concrete, *International of Journal Cement Composite Lightweight Concrete*, 3(2) (1981), 115-122.

[21] R. Ince and A.T. Bildik, A preliminary concrete mixture design based on fracture toughness, *Materials and Structures*, 54 (2021), 11.

[22] R.J. Sanford, A Critical Re-examination of the Westergaard Method for Solving Opening-Mode Crack Problems. *Mechanics Research Communications*, 6 (1979) 289-294.

[23] R. İnce, Çatlaklı kompakt beton numunelerin kırılma tokluğu parametresinin eşdizim yöntemiyle belirlenmesi, *21. Ulusal Mekanik Kongresi, Niğde*, 266-275, (2019).

[24] ACI-318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete", Detroit, 1989.

[25] S. Xu and H.W. Reinhardt, Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture, Part II: Analytical evaluating and practical measuring methods for three-point bending notched beams, *International Journal of Fracture*, 98 (1999), 151-177.

[26] H.W. Reinhardt, H.A.W. Cornelissen and D.A. Hordijk, Tensile tests and failure analysis of concrete, *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 112 (1986), 2462–2477.

[27] J. Planas and M. Elices, Fracture criteria for concrete: Mathematical approximations and experimental validation, *Engineering Fracture Mechanics*, 35 (1990) 87-94.

[28] P.J.M. Monteiro, P.R.L. Helene and S.H. Kang, Designing concrete mixtures for strength, elastic modulus and fracture energy, *Materials and Structures*, 26 (1993), 443–52.

[29] B.L. Karihaloo and P. Nallathambi, Size-effect prediction from effective crack model for plain concrete, *Materials and Structures*, 23 (1990), 178–185.

[30] R. İnce, Betonun kırılmasında başlangıç gerilme şiddet çarpanının tayini için bir metot, *17. Ulusal Mekanik Kongresi, Elazığ*, 413-422, (2011).

ÇOK KATLI ÇELİK BİNALARDA TÜRK DEPREM YÖNETEMLİĞİ'NE GÖRE DÜŞEY DEPREM HAREKETİNİN YAPISAL DAVRANIŞ ÜZERİNE ETKİSİNİN İNCELENMESİ

Ercan IŞIK[1], Fatma ÜLKER PEKER[2]

[1]Bitlis Eren Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bitlis

[2]Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Malatya

ABSTRACT

In this study, the vertical earthquake effect in the design of multi-story steel buildings was investigated according to TBEC-2018. The analyzes were carried out for a ten-story building selected as an example according to TBEC-2018 within the scope of this study. The structural model for the sample building was created taking into account the provisions of TSSDCR-2016 and TBEC-2018. The design spectra of the building have been selected for the provinces of İzmir, Bitlis, Samsun and Konya, which have different seismicity. Structural analyzes were made for each province separately for the sample building. The structural model created in SAP2000 software and analyses were carried out with the non-linear analysis method in the time history by considering the vertical earthquake effect, which is mandatory to be used in structural analysis with TBEC-2018. In this study, the effect of the vertical earthquake effect on the displacement, base shear force and moment in the multi-story steel building constructed in different provinces with different seismicity depending on the design spectra has been revealed.

Keywords: vertical earthquake effect; TBEC-2018; steel structure

ÖZET

Bu çalışmada çok katlı çelik binaların tasarımında TBDY-2018'e göre düşey deprem etkisi incelenmiştir. Çalışma kapsamında örnek olarak seçilen on katlı binanın analizleri TBDY-2018'e göre gerçekleştirilmiştir. Söz konusu bina için yapısal model ÇYTHYE-2016 ve TBDY-2018 hükümleri dikkate alınarak oluşturulmuştur. Binanın tasarım spektrumları, depremselliği birbirinden farklı olan İzmir, Bitlis, Samsun ve Konya illeri için seçilmiş olup; yapısal analizler örnek bina özelinde her il için ayrı ayrı yapılmıştır. TBDY-2018 ile yapısal analizlerde kullanılması zorunlu olan düşey deprem etkisi dikkate alınarak, SAP2000 programı ile oluşturulan yapı modelinde zaman tanım alanında doğrusal olmayan analiz yöntemi ile analizler gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada tasarım spektrumlarına bağlı olarak depremselliği birbirinden farklı illerde yapılan çok katlı çelik binalarda düşey deprem

etkisinin, yapıda yer değiştirme, taban kesme kuvveti ve momenti üzerinde etkisi ortaya koyulmuştur.

Anahtar kelimler: düşey deprem etkisi; TBDY-2018; çelik bina.

GİRİŞ

Ülkemizde deprem zararlarının azaltılmasına yönelik çalışmalar 1939 yılındaki Erzincan depremi sonrası başlatılmış ve zaman içerisindeki büyük çaplı can ve mal kayıplarına neden olan depremler ile süregelmiştir [1]. Bu bağlamda ilk resmi deprem bölgeleri haritası 1945 yılında hazırlanmıştır [2]. Değişik tarihlerde güncellenen ve 1996 yılından beri yürürlükte olan harita son olarak 2019 tarihinde güncellenmiş ve kullanılmaya başlanmıştır. Güncel harita AFAD Ulusal Deprem Araştırma Programı (UDAP) tarafından desteklenen Türkiye Sismik Tehlike Haritasının Güncellenmesi başlıklı proje kapsamında hazırlanmıştır. Türkiye Deprem Tehlike Haritaları ile birlikte artık deprem bölgeleri kavramı yerini coğrafi konuma özel depremsellik riskine bırakmıştır. Bununla birlikte bölgesel bazlı tasarım spektrumları yerine sahaya özel tasarım spektrumları kullanılmaya başlanmıştır [3-7]. Bu çalışma kapsamında, ilk değişken olarak bir önceki deprem bölgeleri haritasında farklı deprem bölgelerinde yer alan dört farklı il dikkate alınarak tasarım spektrumları ve depremsellik parametreleri elde edilmiştir.

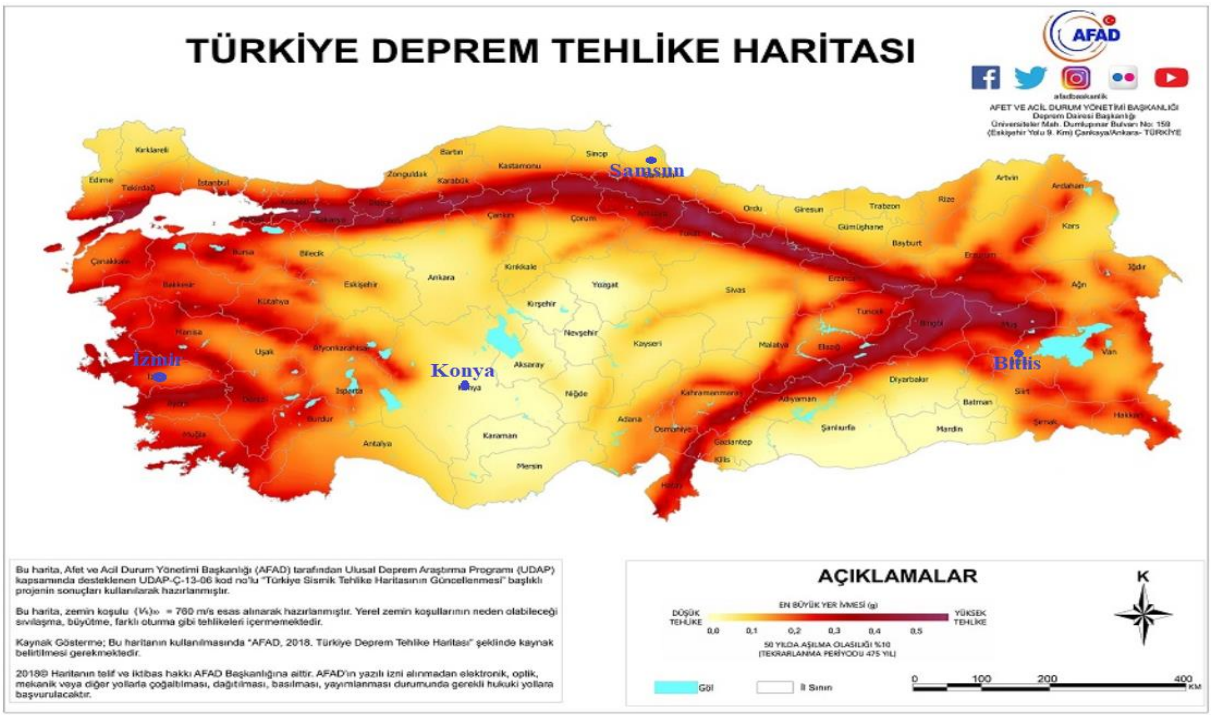
Büyük çaplı can ve mal kayıplarından sonra değişen veya güncellenen sadece deprem bölgeleri haritası olmamıştır. Gelişen teknoloji, bilimsel yenilikler ve yeni nesil matematiksel denklemler ve yazılım programları da depreme dayanıklı yapı tasarım ilkelerinde değişimleri kaçınılmaz kılmaktadır. Zaman içerisinde süregelen bu değişim son olarak 2018 yılında tamamlanmış ve 2019 tarihinde yürürlüğe girerek Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği (TBDY-2018) [8] adını almıştır. Bu güncel yönetmelik çok daha kapsamlı ve detaylı olarak hazırlanmıştır. Bu yönetmelikteki yeniliklerden biri de yapısal analizlerde ve değerlendirmelerde düşey deprem etkisinin kullanılması olmuştur.

Yapılar, deprem hareketine üç doğrultuda maruz kalmaktadır [9]. Depremin düşey bileşenin yatay bileşenden daha küçük olması ayrıca düşey yüklerin daha etkili olmasından dolayı bina türü yapıların tasarımında depremin düşey bileşen etkisi göz ardı edilmekte iken [10, 11] yeni yönetmelik ile birlikte bu etki dikkate alınmaya başlanmıştır. Bu bağlamda depremin yatay bileşen etkisinin yapı deprem davranışına etkisi üzerinden birçok çalışma yapılmış ancak düşey bileşen etkisi ile çalışmalar nispeten daha az olmuştur. Bu çalışmalarda farklı türde yapılar dikkate alınarak farklı sonuçlar elde edilmiştir [12-17].

Bu çalışma kapsamında deprem tehlikesi farklı olan İzmir, Bitlis, Samsun ve Konya illeri örnek olarak seçilmiştir. İnteraktif Web Deprem Uygulaması [18] kullanılarak bu dört il için depremsellik parametreleri elde edilmiştir. Son iki yönetmelikte belirtilen spektral ivme katsayıları ve tasarım spektrum köşe periyotları arasında karşılaştırmalar yapılmıştır. Her bir il için düşey ve yatay tasarım spektrumları elde edilerek örnek olarak seçilen çelik bir yapı için yapısal analizler ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Örnek olarak seçilen çelik bina için yapısal model ÇYTHYE-2016 [19] ve TBDY-2018 [8] hükümleri dikkate alınarak oluşturulmuştur. Doğrusal olmayan analiz yönteminde son İzmir depremi ivme kayıtları kullanılmıştır. Çalışma ile hem farklı tasarım spektrumlarının hem de düşey yönde deprem etkisi incelenmeye çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar değerlendirilerek yorumlar yapılmıştır.

Seçilen İller için Deprem Parametreleri

Bu çalışma kapsamında ilk değişken olarak bir önceki deprem bölgeleri haritasında farklı bölgelerde yer alan dört farklı il dikkate alınmıştır. 1. derece deprem bölgesi olarak İzmir (Merkez), 2. derece Bitlis (Güroymak), 3. derece Samsun (Merkez) ve 4. derece deprem bölgesi olarak Konya (Merkez) dikkate alınmıştır. Bu yerleşim birimlerinin her biri içinde yer alan rastgele bir coğrafi konum seçilmiştir. Çalışmada dikkate alınan konumlar Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. Türkiye Deprem Tehlike Haritası [20] ve dikkate alınan konumlar

Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması [18] kullanılarak her bir için kısa periyot harita spektral ivme katsayısı (S_S), 1.0 saniye periyot için harita spektral ivme katsayısı (S_1), en büyük yer ivmesi (PGA), en büyük yer hızı (PGV), yerel zemin etki katsayıları (F_S ve F_1), tasarım spektral ivme katsayıları (Kısa periyot tasarım spektral ivme katsayısı (S_{DS}) ile 1.0 saniye periyot için tasarım spektral ivme katsayısı (S_{D1})) ve yatay ile düşey elastik spektrum değerleri ayrı ayrı hesaplanmıştır. Her bir il için farklı aşılma olasılıkları için PGA ve PGV değerlerinin karşılaştırılması Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Farklı aşılma olasılıkları için PGA ve PGV değerleri

İl	En büyük yer ivmesi (g)				En büyük yer hızı (cm/s)-PGV			
	50 yılda aşılma olasılığı				50 yılda aşılma olasılığı			
	2%	10%	50%	68%	2%	10%	50%	68%
İzmir	0.844	0.454	0.174	0.124	52.739	27.621	10.237	7.422
Bitlis	0.549	0.296	0.118	0.085	32.870	17.748	7.483	5.408
Samsun	0.422	0.232	0.096	0.067	28.497	16.241	6.798	4.783

Konya	0.291	0.132	0.044	0.031	14.080	6.633	2.449	1.761

Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması kullanılarak çalışmada dikkate alınan her bir il için farklı deprem yer hareket düzeyleri için kısa periyot harita spektral ivme katsayısı (S_S), 1.0 saniye periyot için harita spektral ivme katsayısı (S_1), değerlerinin karşılaştırılması Çizelge 2' de gösterilmiştir.

Çizelge 2. Farklı aşılma olasılıkları için elde edilen harita spektral ivme katsayıları

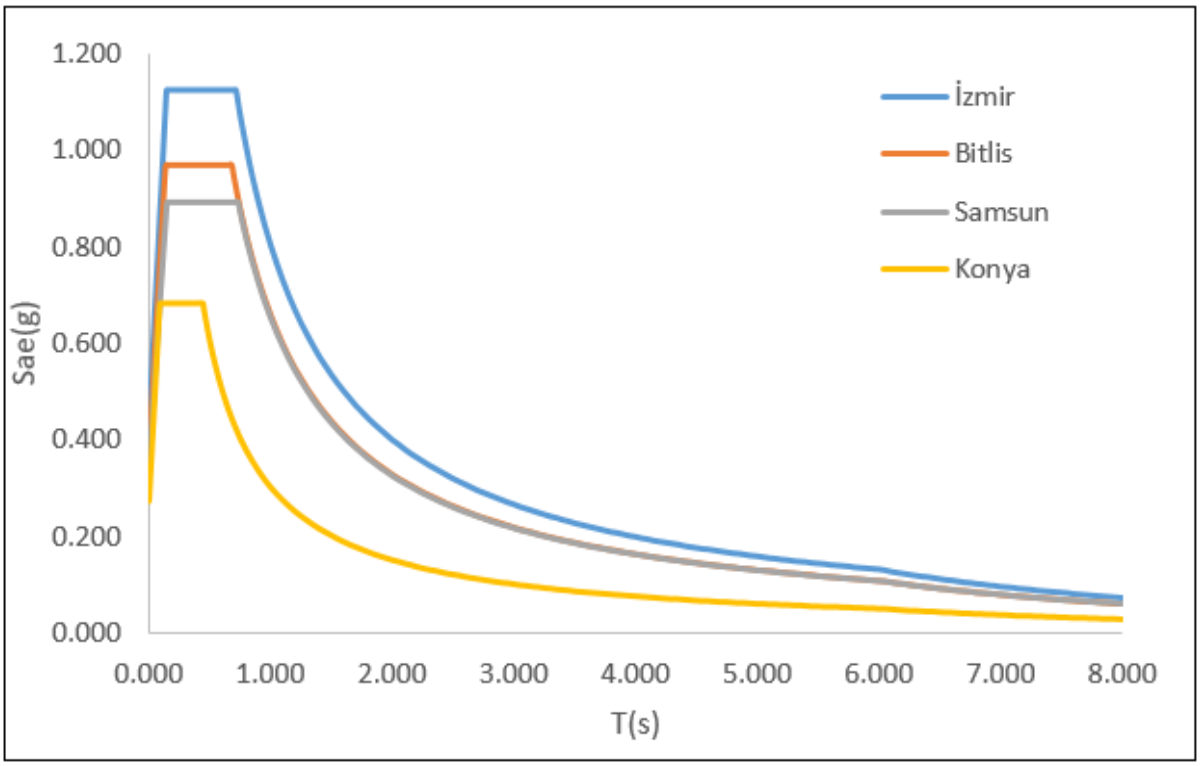
İlçe	Kısa periyot ivme katsayısı (S_s)				1.0 saniye periyot için harita spektral ivme katsayısı (S_1)			
	50 yılda aşılma olasılığı				50 yılda aşılma olasılığı			
	2%	10%	50%	68%	2%	10%	50%	68%
İzmir	2.127	1.115	0.416	0.297	0.544	0.274	0.104	0.076
Bitlis	1.355	0.705	0.277	0.199	0.360	0.198	0.083	0.059
Samsun	1.017	0.549	0.219	0.153	0.345	0.194	0.079	0.055
Konya	0.681	0.304	0.100	0.070	0.147	0.072	0.027	0.020

Son iki deprem yönetmeliğine göre 50 yılda %10 aşılma olasılığı olan tasarım depreminin (DD-2) spektral ivme katsayıları ve zemin hakim periyot değerleri Çizelge 3'te gösterilmiştir. Karşılaştırmaların yapılabilmesi adına her iki yönetmelikte de yer alan ortak deprem yer hareket düzeyi ve yerel zemin sınıfı olarak da ZE seçimi yapılmıştır.

Çizelge 3. Spektral ivme ve zemin hakim periyot değerlerinin karşılaştırılması

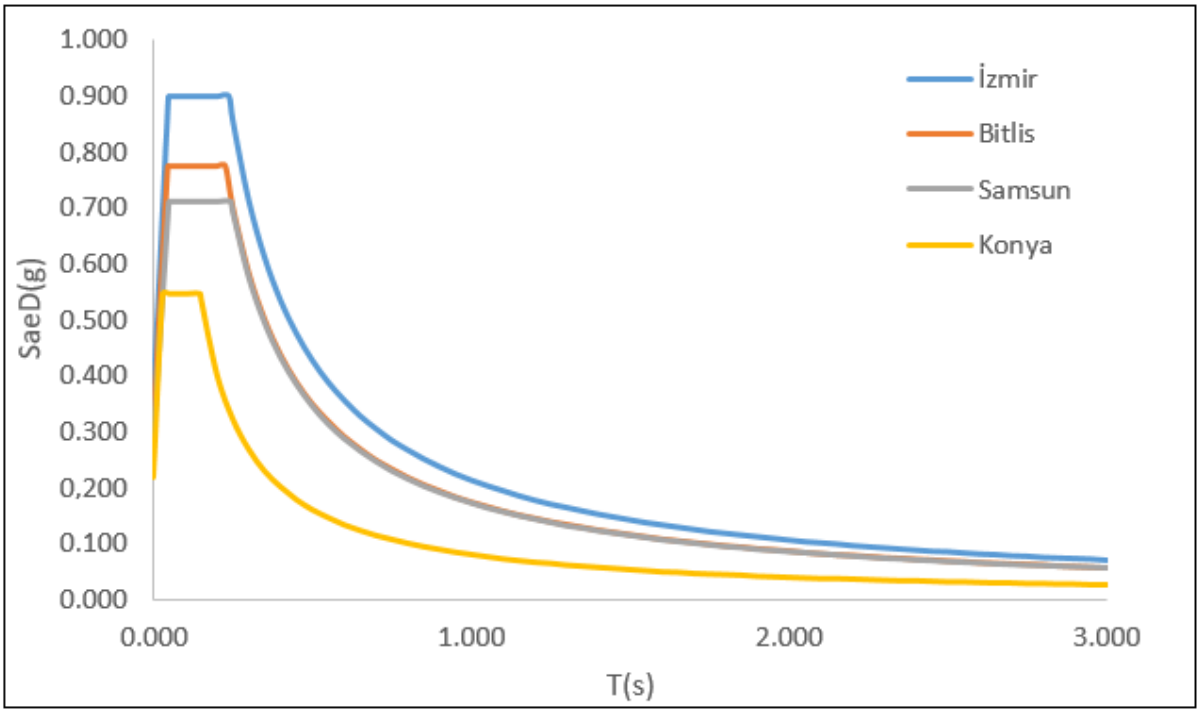
DD-2	Spektral İvme Katsayıları				Yatay				Düşey			
	Tüm zeminler		ZE		ZE		ZE		ZE		ZE	
İl (İlçe)	DBYBHY-2007		TBDY-2018		DBYBHY-2007		TBDY-2018		DBYBHY-2007		TBDY-2018	
	S_{DS}	$0.40S_{Ds}$	S_{DS}	$0.40S_{Ds}$	T_A	T_B	T_A	T_B	T_{AD} T_{BD}		T_{AD}	T_{BD}
İzmir (Merkez)	1	0.40	1.124	0.450	0.15	0.90	0.143	0.714	Herhangi bir veri yoktur.		0.048	0.238
Bitlis (Güroymak)	0.75	0.30	0.967	0.387	0.15	0.90	0.136	0.679			0.045	0.226
Samsun (Merkez)	0.50	0.20	0.890	0.356	0.15	0.90	0.146	0.731			0.049	0.244
Konya (Merkez)	0.25	0.10	0.684	0.274	0.15	0.90	0.088	0.442			0.029	0.147

Çalışmada dikkate alınan dört farklı ili için elde edilen yatay tasarım spektrumlarının karşılaştırılması Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Yatay tasarım spektrumlarının karşılaştırılması

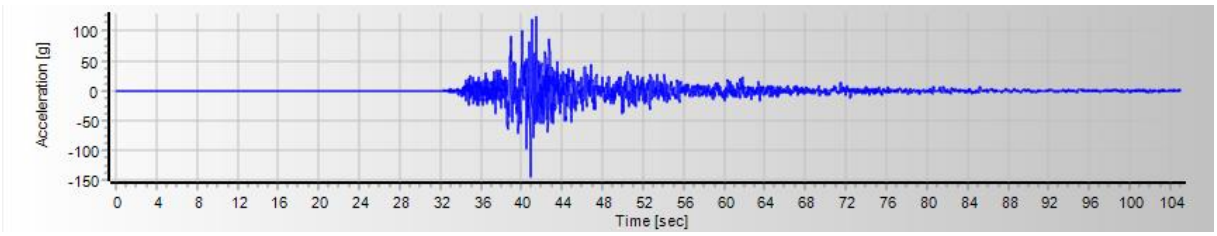
Çalışmada dikkate alınan dört farklı ili için elde edilen düşey tasarım spektrumlarının karşılaştırılması Şekil 3'te verilmiştir.



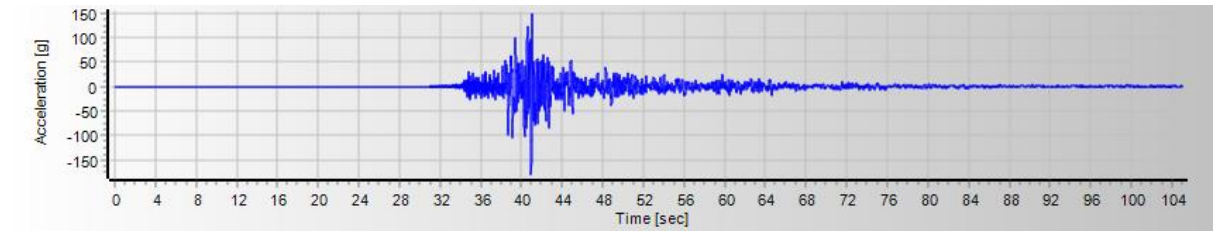
Şekil 3. Düşey tasarım spektrumlarının karşılaştırılması

Yapısal Analizler ve Elde Edilen Sonuçlar

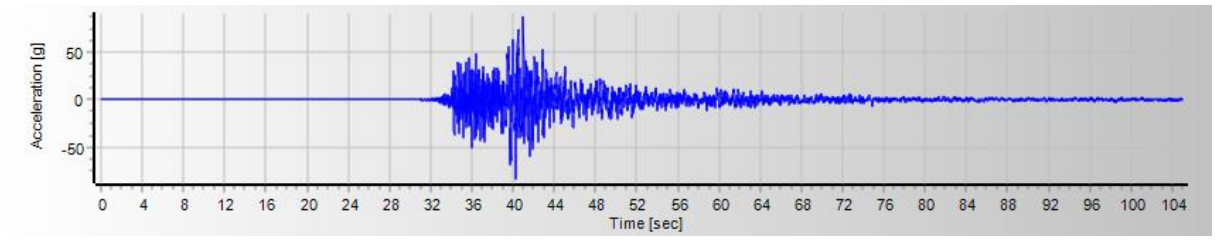
Bu çalışma kapsamında örnek olarak seçilen çelik bina için yapılan yapısal analizlerde 2020 İzmir Depremi (Mw=6.9) ivme kayıtları kullanılmıştır. Bu depreme ait farklı yönlerdeki ivme kayıtları Şekil 4'te gösterilmiştir.



(a)



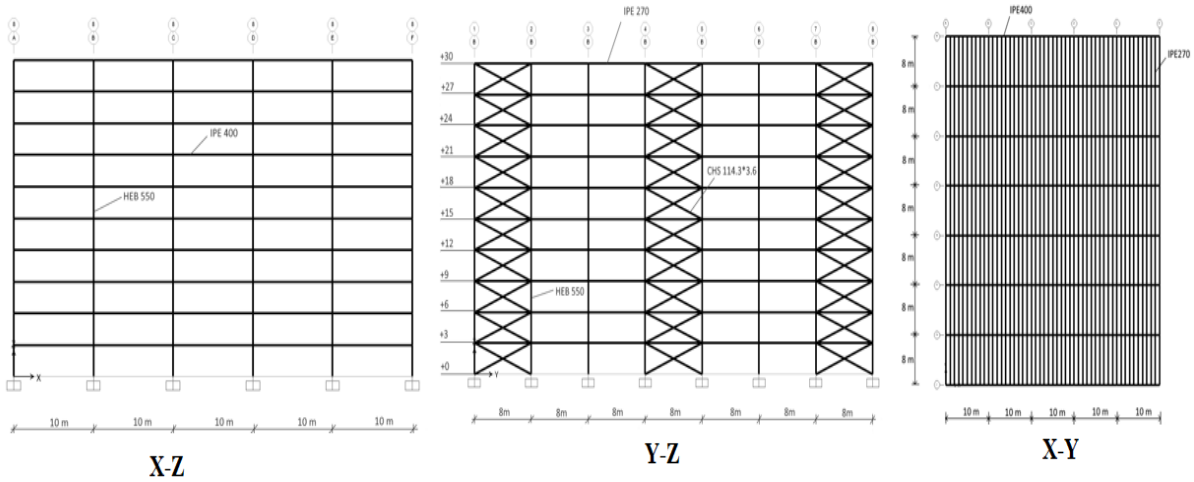
(b)



(c)

Şekil 4. 2020 İzmir deprem kayıtları, (a) doğu-batı yönü, (b) kuzey-güney yönü, (c) düşey yönü

Yapısal analizler SAP2000 yazılımı [15] kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Örnek olarak seçilen çelik bina ÇYTHYE-2016 ve TBDY-2018 hükümleri dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu çalışma kapsamında dikkate alınan dört farklı il için elde edilen tasarım spektrumları ve dikkate alınan deprem ivme kaydı kullanılarak yapısal analizler ayrı ayrı gerçekleştirilmiştir. Yapı X yönünde 5 açıklıklı ve her bir açıklığı 10m, Y yönünde ise 7 açıklıklı ve her bir açıklığı 8m olarak boyutlandırılmıştır. Yapı toplam yüksekliği 30 m olup, kat yükseklikleri birbirine eşit olup 3m'dir. Bu yapıya ait X-Z, Y-Z ve X-Z eksen kesitleri Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5. Örnek çelik yapı modeline ait kesitler

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamında dikkate alınan her bir il için deprem doğrultuları ayrı ayrı dikkate alınmıştır. Her bil il için elde edilen yatay ve düşey tasarım spektrumları ve bu çalışmada kullanılan deprem ivme kaydı kullanılarak örnek olarak çelik yapı için yapısal analizler gerçekleştirilmiştir. Her bir il için örnek olarak seçilen çelik yapı için X, Y, XY, YZ ve XYZ doğrultularındaki analiz sonuçları ayrı ayrı elde edilmiştir. Çalışmada dikkate alınan iller için farklı doğrultularda etkiyen deprem yükleri için elde edilen maksimum yer değiştirme ve dönme değerleri Çizelge 4'te gösterilmiştir.

Çizelge 4. Farklı doğrultular için elde edilen maksimum yerdeğiştirme ve dönme değerleri

Nokta	İl	u_1	u_2	u_3	r_1	r_2	r_3
		m	m	m	Radyan	Radyan	Radyan
3764	İZMİR X	0.23802	1.95E-10	6.6E-05	3.7E-11	0.004518	6.311E-13
3764	BİTLİS X	0.17307	1.71E-10	5.4E-05	5.4E-12	0.003815	1.81E-13
3764	SAMSUN X	0.13716	4.801E-11	5.3E-05	2.08E-12	0.002677	8.253E-16
3764	KONYA X	0.13418	1.306E-11	3.6E-05	5.76E-14	0.002616	3.255E-16
3764	İZMİR Y	6E-10	0.176943	0.00896	0.005176	0.000043	1.19E-10
3764	BİTLİS Y	9.7E-13	0.170053	0.00774	0.004279	0.000027	5.244E-11
3764	SAMSUN Y	3.6E-14	0.10919	0.0052	0.002839	0.000024	4.377E-11
3764	KONYA Y	2.3E-15	0.065722	0.00261	0.001862	0.000022	6.82E-13
3764	İZMİR XZ	0.23802	9.6E-11	0.01539	3.59E-13	0.005092	2.054E-11
3764	BİTLİS XZ	0.17307	8.366E-12	0.01331	1.28E-10	0.004824	7.09E-12
3764	SAMSUN XZ	0.13716	4.363E-15	0.01068	3.28E-11	0.003689	8.107E-13
3764	KONYA XZ	0.13418	1.936E-17	0.00839	3.32E-16	0.003108	2.048E-15
3764	İZMİR XY	0.23802	0.176943	0.00892	0.005176	0.004523	1.196E-10
3764	BİTLİS XY	0.17307	0.170053	0.00776	0.004279	0.003801	2.433E-11
3764	SAMSUN XY	0.13716	0.10919	0.00523	0.002839	0.002661	2.28E-11
3764	KONYA XY	0.13418	0.065722	0.0026	0.001862	0.002626	1.077E-11
3764	İZMİR YZ	8.1E-09	0.176943	0.02247	0.005176	0.002271	3.289E-13
3764	BİTLİS YZ	2.3E-09	0.170053	0.01654	0.004279	0.00164	1.139E-14

3764	SAMSUN YZ	1.2E-09	0.10919	0.01636	0.002839	0.001097	2.89E-15
3764	KONYA YZ	1.2E-10	0.065722	0.00969	0.001862	0.001029	2.613E-18
3764	İZMİR XYZ	0.23802	0.176943	0.02247	0.005176	0.005086	5.435E-11
3764	BİTLİS XYZ	0.17306	0.170053	0.01654	0.004279	0.004827	2.696E-11
3764	SAMSUNXYZ	0.13716	0.10919	0.01636	0.002839	0.003698	4.415E-18
3764	KONYA XYZ	0.13418	0.065722	0.00972	0.001862	0.003106	1.97E-18

Yapısal analizlerde ayrıca her bir il için çalışmada dikkate alınan deprem doğrultularında taban kesme kuvvetleri ve moment değerleri de ayrı ayrı elde edilmiştir. Elde edilen maksimum taban kesme kuvvetleri ve moment değerleri Çizelge 5'te gösterilmiştir.

Çizelge 5. Farklı doğrultular için elde edilen maksimum taban kesme kuvvetleri ve momentler

Nokta	İl	F_X	F_Y	F_Z	M_X	M_Y	M_Z
		kN	kN	kN	kNm	kNm	kNm
3764	İZMİR X	10179	1E-11	6E-10	1.76E-08	166582.9	278135
3764	BİTLİS X	8557.4	1E-11	3E-10	1.03E-08	129936	225745
3764	SAMSUN X	7094	7E-12	2E-10	6.95E-09	99017.21	176770
3764	KONYA X	5962.4	5E-12	2E-10	5.12E-09	87579.08	174110
3764	İZMİR Y	2E-11	24081	1E-09	346149.9	3.44E-08	602036
3764	BİTLİS Y	2E-11	21297	1E-09	345487.8	2.55E-08	532432
3764	SAMSUN Y	1E-11	13377	1E-09	205205	2.46E-08	334437
3764	KONYA Y	1E-11	10086	9E-10	138152.6	2.32E-08	252154
3764	İZMİR XZ	10179	6E-09	153273	4291656	3944923	278135
3764	BİTLİS XZ	8557.4	6E-09	116602	3264845	2914633	225745
3764	SAMSUN XZ	7094	5E-09	98305	2752548	2331024	176770
3764	KONYA XZ	5962.4	3E-09	47179	1321014	1261650	174110
3764	İZMİR XY	10179	21297	1E-09	3264845	2914633	761694
3764	BİTLİS XY	8557.4	13377	1E-09	345487.8	166582.9	477177
3764	SAMSUN XY	7094	10086	1E-09	205205	129936	333662
3764	KONYA XY	5962.4	6E-09	9E-10	138152.6	99017.21	174110
3764	İZMİR YZ	5E-09	24081	153273	4353242	3972752	602036
3764	BİTLİS YZ	4E-09	21297	116602	3445749	2896088	532432
3764	SAMSUN YZ	4E-09	13377	98305	2800802	2302348	334437
3764	KONYA YZ	2E-09	10086	47179	1349552	1153268	252154
3764	İZMİR XYZ	10179	24081	153273	4353242	3944923	761694
3764	BİTLİS XYZ	8557.4	21297	116602	3445749	2914633	699676
3764	SAMSUNXYZ	7093.8	13377	98305	2800802	2331024	477177
3764	KONYA XYZ	5962.4	10086	47179	1349552	1261646	333655

SONUÇLAR

Çalışmada, tasarım spektrumu ve farklı deprem doğrultuları olmak üzere iki farklı değişken kullanılarak örnek bir çelik yapı için doğrusal olmayan analizler İzmir deprem ivme kaydı dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir. Bölgesel bazda elde edilen tasarım spektrumları güncel deprem yönetmeliği ile birlikte yerini noktasal bazlı tasarım spektrumlarına bırakmıştır. Yine güncel deprem tehlike haritası ise yer ivmesine bağlı ifade edilmeye başlanmıştır. PGA değeri daha büyük olan illerde elde edilen yer değiştirme, dönme, taban kesme kuvveti ve moment değerleri de daha büyük çıkmıştır. Bir önceki deprem yönetmeliğinde zemin hâkim periyotları sadece zemin sınıflarına bağlı olarak değişirken, güncel yönetmelikte her bir coğrafik konuma göre değişiklik göstermektedir. Güncel yönetmelik ile birlikte ilke kez düşey yönde zemin hakim periyotları (T_{AD}, T_{BD}) kullanılmaya başlanmıştır. Bu bağlamda en büyük yer ivme değerinin elde edildiği İzmir için en büyük yer değiştirme, dönme, taban kesme kuvveti ve moment değerleri elde edilirken en düşük değerler en düşük PGA değerine sahip Konya için elde edilmiştir. Düşey deprem etkisinin yatay doğrultu için elde edilen sonuçları önemli bir ölçüde değiştirmediği belirlenmiştir. Çalışmada sadece bir deprem kaydı düzenli bir çelik yapı için kullanılmıştır. Farklı frekans içeriğine sahip depremler ve düzensizlik içeren yapılarda bu sonuçlar değişebilecektir. Ayrıca depremin yatay ve düşey bileşenlerinin baskın olma durumu da sonuçları etkileyecektir.

KAYNAKLAR

[1] B. Özmen, Türkiye deprem bölgeleri haritalarının tarihsel gelişimi, *Türkiye Jeoloji Bülteni*. 55(2012) 43-55.

[2] B.Özmen, S. Pampal, Türkiye Deprem Bölgeleri Haritalarının Evrimi. *4. Uluslararası Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı*, Eskişehir, Türkiye, (2017).

[3] U. Çeken, İ. Dalyan, N. Kılıç, T.S. Köksal, B.M. Tekin, Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması. *In Proceedings of the 4th International Earthquake Engineering and Seismology Conference*, Bucharest, Romania (2017).

[4] S. Akkar, Ö. Kale, A. Yakut, U. Çeken, Ground-motion characterization for the probabilistic seismic hazard assessment in Turkey. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 16(2018) 3439. doi:10.1007/s10518-017-0101-2.

[5] S. Akkar, T. Azak, T. Çan, U. Çeken, M.D. Tümsa, T.Y. Duman, Ö. Zülfikar, Evolution of seismic hazard maps in Turkey. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 16(2018) 3197-3228.doi: 10.1007/s10518-018-0349-1.

[6] S. Akkar, T. Azak, T. Çan, U. Çeken, M.B. Demircioğlu, T. Duman, R.F. Kartal, Türkiye Sismik Tehlike Haritasının Güncellenmesi. (UDAP-Ç-13-06). In *Ulusal Deprem Araştırma Programı*; Disaster and Emergency Management Presidency Press: Ankara, Turkey, Available online: http://www.deprem.gov.tr/belgeler2016/tsth.Pdf (2014) (Erişim tarihi: 22 Haziran 2021).

[7] İ.B. Karasin, E. Işık, A. Demirci, M.C. Aydın, Coğrafi konuma özel tasarım spektrumlarının betonarme yapı performansına etkisi. *Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi*, 11(2020) 1319-1330.

[8] TBDY-2018: *Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği*; T.C. Resmi Gazete: Ankara, Turkey, (2018).

[9] M. Yavaş, A.N. Teloğlu, Z. Celep, Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği'nde binaların taşıyıcı sisteminde tanımlanan düşey deprem etkisi üzerine. In *International Conference on Earthquake Engineering and Seismology (5ICEES)*, 8(2019), s.11.

[10] E. Doğan, M. Elmas, Binalarda düşey deprem etkisinin zaman tanım alanında hesap yöntemi ile incelenmesi. *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *8*(2004) 9-17.

[11] E. Ağcakoca, M. Elmas, Binalarda düşey deprem etkisinin zaman tanım alanında hesap yöntemi ile incelenmesi. https://hatay.imo.org.tr/resimler/ekutuphane/pdf/11080.pdf. (Erişim tarihi: Haziran 2021).

[11] M.A. Gürel, M. Kısa, Deprem hareketinin düşey bileşeninin çeşitli yapı elemanları üzerindeki etkileri ve hasar potansiyeli. *Uluslararası Yapı ve Deprem Mühendisliği Sempozyumu* (2002).

[12] S. Baş, M. Sevinç, İ. Kalkan, S. AYKAÇ, Düşey deprem etkisi altındaki çok katlı betonarme yapıların davranışının incelenmesi, *3. Türkiye Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı,* İzmir, Türkiye, (2015).

[13] G. Eren, K. Beyen, Düşey deprem etkisinde tipik bir binada gözlenen performansın tartışılması. *8UDMK, İstanbul, Türkiye*, (2015).s.199-211.

[14] G. Eren, K. Beyen, Tarihi yapı davranışına zemin, mesnet, yatay ve düşey deprem koşullarının etkisi, *Uluslararası Katılımlı 6. Tarihi Yapıların Korunması ve Güçlendirilmesi Sempozyumu*, Türkiye (2017. s.401-410.

[15] S.J. Kim, C.J. Holub, A.S. Elnashai, Analytical assessment of the effect of vertical earthquake motion on RC bridge piers. *Journal of Structural Engineering*, 137(2011) 252-260. doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000306.

[16] H. Abdollahiparsa, P. Homami, F. Khoshnoudian, F. Effect of vertical component of an earthquake on steel frames considering soil-structure interaction. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 20(2016) 2790-2801. 10.1007/s12205-016-0687-y.

[17] V. Loghman, F. Khoshnoudian, M. Banazadeh, Effect of vertical component of earthquake on seismic responses of triple concave friction pendulum base-isolated structures, *Journal of Vibration and Control*, 21(2015) 2099-2113. doi:10.1177/1077546313503359.

[18] AFAD, https://tdth.afad.gov.tr/ (2021).

[19] Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapım Esaslarına Dair Yönetmelik, (2016).

[20] https://www.afad.gov.tr/ (Erişim tarihi:1 Haziran 2021).

HOMOJEN YARI SONSUZ TABAKADA TEMAS VE ÇATLAK PROBLEMİ

Ayhan ÜSTÜN[1], Gökhan ADIYAMAN[2] ve Talat Şükrü ÖZŞAHİN[3]
[1,2,3]Karadeniz Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği, Trabzon

ABSTRACT

In this study, the contact and crack problem of an elastic homogeneous semi-endless layer is investigated according to the theory of elasticity. The effect of the mass forces is not included, the stress and displacement expressions to be used for the contact problem are obtained by using Navier equations and integral transformation techniques, and the boundary conditions determined for the problem are applied. The equations to be used for the crack problem are specified and the boundary conditions for the crack are applied to these equations. The problem is reduced to an integral equation system consisting of four singular integral equations where contact stresses and crack displacements are unknown. Numerical solution of the integral equation system has been realized by using Jacobi polynomials. Numerical data on stress intensity factors were obtained by using a computer program for different loading and geometric sizes and presented with graphics.

Keywords: Contact and crack problem; semi-infinite layer; Jacobi polynomial

ÖZET

Bu çalışmada, elastik homojen yarı sonsuz tabakanın temas ve çatlak problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Kütle kuvvetlerinin etkisi dahil edilmemiş olup Navier denklemleri ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak temas problemi için kullanılacak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiş ve problem için belirlenen sınır şartları uygulanmıştır. Çatlak problemi için kullanılacak denklemler belirtilmiş ve bu denklemlere çatlak için belirlenen sınır şartları uygulanmıştır. Problem temas gerilmelerinin ve çatlak yer değiştirmelerinin bilinmeyen olduğu dört adet tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Jacobi polinomları kullanılarak integral denklem sisteminin sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir. Gerilme şiddeti faktörleri ile ilgili sayısal veriler farklı yükleme ve geometrik büyüklükler için bilgisayar programı kullanılarak elde edilmiş ve grafiklerle sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Temas ve çatlak problemi; yarı sonsuz düzlem; Jacobi polinomları

GİRİŞ

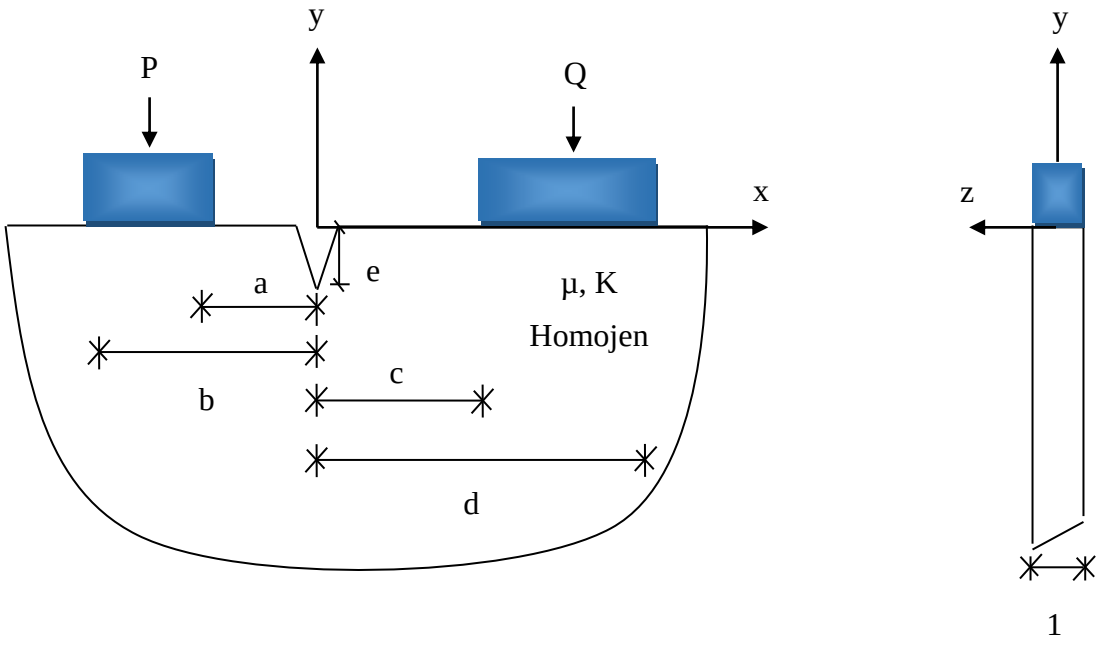
Günlük hayatta sistemleri oluşturan elemanlar birbiriyle temas halinde olduğundan temas problemleri mühendislik yapılarında birçok uygulama alanı bulmuştur. Karayolları, demiryolları, havaalanı pistleri, akaryakıt tankları bu uygulama alanlarına örnek olarak verilebilir. Temas problemi konusu ilk olarak Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında ortaya atılmış olup teoriyi elastik cisimler ve sürtünmesiz yüzeyler için ortaya koymuştur [1]. Bu teoriye göre temas yüzeyleri süreklidir, şekil değiştirmeler küçüktür ve her cisim elastik yarım

düzlem olarak kabul edilir. Erdoğan ve Gupta, eksantrik yüklü rijit bir blok ile bastırılan elastik bir kama problemini ele almış olup problemde Mellin dönüşümünden yararlanmışlardır [2]. Çakıroğlu ve Çakıroğlu, yarı sonsuz düzleme oturan elastik tabaka da sürekli ve süreksiz temas problemini ele almışlardır. Sürekli ve süreksiz temas durumu için problem tekil integral denkleme indirgenmiş ve Gauss-Chebsyshev integrasyon formülüyle sayısal olarak çözmüştür [3]. Birinci ve Erdöl (2001), basit mesnetlere oturan ve tekil yükün rijit dikdörtgen blok aracılığıyla etki ettirildiği bileşik tabakadaki sürekli ve süreksiz temas problemini incelemişlerdir [4]. Özşahin vd. rijit iki düz blok üzerine oturan farklı yüksekliklere ve elastik sabitlere sahip tabakalardan oluşan bileşik elastik tabakanın temas problemini ele almışlardır [5]. Güler vd., elastik yarım düzleme oturan ve üstünde sonlu uzunlukta şerit bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın temas problemini incelemişlerdir [6]. Karabulut, elastik yarım düzleme oturan rijit dikdörtgen blokla simetrik yüklenmiş homojen izotrop tabakada temas problemini ele almıştır [7]. El-Borgi ve Çömez homojen yarım düzleme oturan ve silindirik rijit bir blok ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Çatlak ile ilgili yapılmış çalışmalar daha çok içerisinde çatlak bulunduran yapı elemanının taşıyabileceği maksimum yükü bulmak ve çatlağın hangi yükleme şartlarında büyümeye başlayacağını belirlemek yönünde olmuştur. Bu amaçla çeşitli teoriler ortaya atılmış ve bunların tartışmaları yapılmıştır. Bu konuda en önemli adım Grifftith tarafından atılmıştır [8]. Erdoğan, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kırılma mekaniğini ele almıştır [9]. Birinci (1998), alt tabakasında düşey çatlağı bulunan ve rijit bir blok aracılığı ile yüklenen bileşik tabaka problemini ele almış olup tabaka kalınlıkları, blok yarıçapı gibi değişimlere bağlı olarak ilk ayrılma uzaklığını ve gerilme şiddeti faktörlerini bulmuştur [10]. Dağ, üzerinde rijit bir blok bulunan yarı sonsuz tabakada sürtünmeli temas durumundaki çatlak problemini ele almış olup tabakanın hem homojen hem de fonksiyonel derecelendirilmiş olduğu varsayarak ayrı ayrı çözümler yapmıştır [11]. Sarıkaya ve Dağ, rijit düz blok ile sürtünmeli temasa maruz kalan ortotropik elastik ortamdaki çatlak problemini incelemişlerdir Malzeme ortotropisinin, sürtünme katsayısının ve geometrik parametrelerin değişimine göre gerilme şiddeti faktörleri bulunmuştur [12]. Talezadehlari vd., homojen tabakaya oturan ve rijit blok ile yüklü fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakanın sürtünmeli temas halinde çatlak problemini incelemiş olup blok profilleri ve FD tabaka kalınlığı gibi parametrelerin değişiminin gerilme şiddeti faktörlerine olan etkilerini incelemişlerdir [13].

Bu çalışmada yüklemesi ve geometrisi simetrik olmayan iki rijit blok ile yüklenen elastik homojen yarı sonsuz tabakada temas ve çatlak problemi elastisite teorisiyle ele alınmıştır. Dış yükler P ve Q, tabakaya iki rijit blok vasıtasıyla iletilmiştir. Farklı yük şiddetlerinin ve çatlak boylarının yarı sonsuz düzlemde bulunan çatlakta meydana gelen gerilme şiddeti faktörlerine etkisi incelenmiştir.

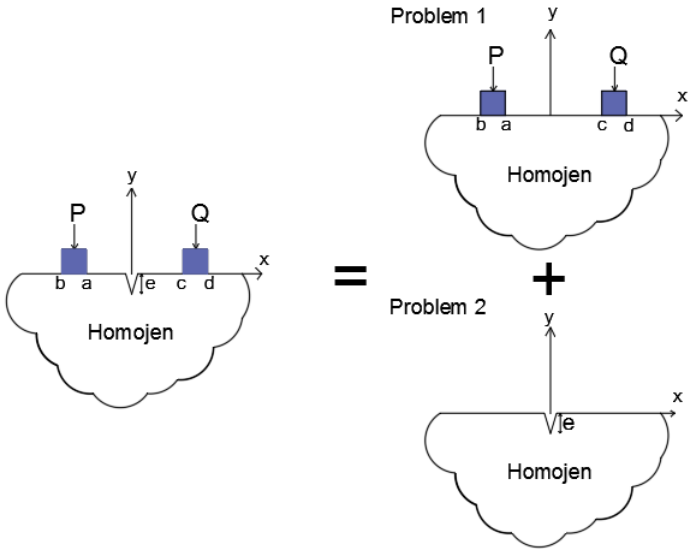
PROBLEMİN TANIMI VE ÇÖZÜMÜ

Tekil yükler P ve Q olacak şekilde bloklar vasıtasıyla homojen yarı sonsuz tabakaya aktarılmaktadır. x=0 ekseni yarı sonsuz düzlemin simetri ekseni olup bloklar (a,b) ve (c,d) aralıklarında homojen yarı sonsuz tabakaya temas etmektedir. Çatlak boyu e ile ifade edilmekte olup kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Ayrıca z ekseni doğrultusundaki kalınlığın birim olduğu kabul edilmiştir.



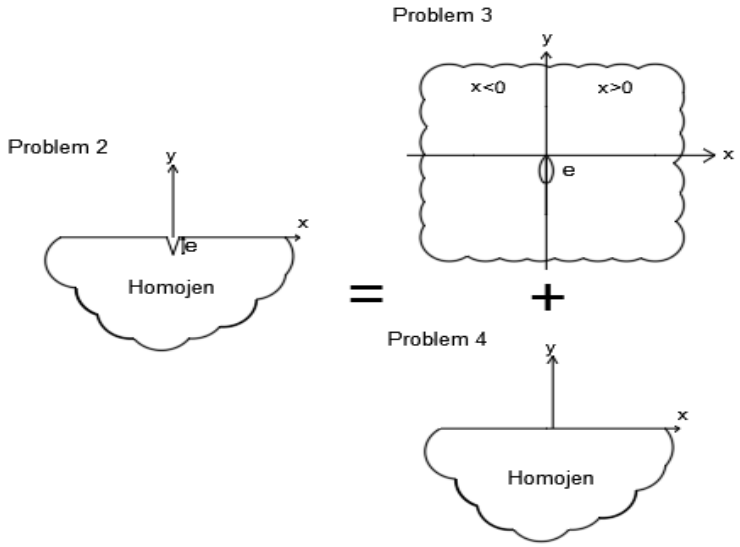
Şekil 1. Problemin Geometrisi

Problem aşağıdaki gibi iki farklı problemin süperpozisyonu olarak çözülmüştür.



Şekil 2. Temas-Çatlak Probleminin Problem 1 ve Problem 2 Olarak Süperpozisyonu

Çatlak problemi de aşağıdaki gibi Problem 3 ve Problem 4'ün süperpozisyonu olarak incelenebilir.



Şekil 3. Çatlak problemi

Problem için kullanılan yer değiştirme u_i (x,y),v_i (x,y) ve gerilme bağıntıları σ_{xi} (x,y), σ_{yi} (x,y) τ_{xyi} (x,y) elastisite teorisi ve Fourier integral dönüşüm teknikleri yardımıyla bulunmuştur.

Problem 1 için kullanılacak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri;

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} i\left[A_3\frac{|\xi|}{\xi}+A_4\left(\frac{\kappa}{\xi}+\frac{|\xi|}{\xi}y\right)\right]e^{|\xi|y+i\xi x}d\xi \tag{1}$$

$$v_1(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A_3+A_4y\right)e^{|\xi|y+i\xi x}d\xi \tag{2}$$

$$\sigma_{x_1}(x,y)=\frac{-\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2A_3|\xi|+A_4\left((\kappa+3)+2|\xi|y\right)\right]e^{|\xi|y+i\xi x}d\xi \tag{3}$$

$$\sigma_{y_1}(x,y)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2A_3|\xi|+A_4\left((\kappa-1)+2|\xi|y\right)\right]e^{|\xi|y+i\xi x}d\xi \tag{4}$$

$$\tau_{xy_1}(x,y)=\frac{\mu i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2A_3|\xi|+A_4\left[\frac{|\xi|}{\xi}(\kappa+1)+2\xi y\right]\right]e^{|\xi|y+i\xi x}d\xi \tag{5}$$

şeklindedir.

Problem 3 için kullanılacak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri;

x<0 için;

$$u_3{}^{x<0}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{i|\xi|}{\xi}B_1+\left(\frac{iK}{\xi}-\frac{i|\xi|}{\xi}x\right)B_2\right]e^{|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{6}$$

$$v_3{}^{x<0}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(B_1+B_2x\right)e^{|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{7}$$

$$\sigma_{x_3}^{x<0}(x,y)=\frac{\mu i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-2\xi B_1+\left[(K+1)\,|\,\xi\,|-2\xi^2 x\right]\frac{B_2}{\xi}\right]e^{|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{8}$$

$$\sigma_{y_3}^{x<0}(x,y)=\frac{-\mu i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-2\xi B_1+-\left[(3-K)\,|\,\xi\,|+2\xi^2 x\right]\frac{B_2}{\xi}\right]e^{|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{9}$$

$$\tau_{xy_3}^{x<0}(x,y)=\frac{\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\,|\,\xi\,|B_1+\left[-(K-1)+2\,|\,\xi\,|\,x\right]B_2\right]e^{|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{10}$$

x>0 için;

$$u_3^{x>0}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{i\,|\,\xi\,|}{\xi}B_3+(\frac{iK}{\xi}+\frac{i\,|\,\xi\,|}{\xi}x)B_4\right]e^{-|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{11}$$

$$v_3^{x>0}(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(B_3+B_4x\right)e^{-|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{12}$$

$$\sigma_{x_3}^{x>0}(x,y)=-\frac{\mu i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\xi B_3+\left[(K+1)\,|\,\xi\,|+2\xi^2 x\right]\frac{B_4}{\xi}\right]e^{-|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{13}$$

$$\sigma_{y_3}^{x>0}(x,y)=\frac{\mu i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\xi B_3+\left[-(3-K)\,|\,\xi\,|+2\xi^2 x\right]\frac{B_4}{\xi}\right]e^{-|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{14}$$

$$\tau_{xy_3}^{x>0}(x,y)=\frac{-\mu}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2\,|\,\xi\,|B_3+\left[(K-1)+2\,|\,\xi\,|\,x\right]B_4\right]e^{-|\xi|x+i\xi y}d\xi \tag{15}$$

şeklindedir. İfadelerde bulunan A_3 ve A_4 temas problemi için bilinmeyen katsayılar olup B_1,B_2,B_3 ve B_4 çatlak problemi için bilinmeyen katsayılardır. K, Kolosov sabiti olup düzlem gerilme hali için K=(3-υ)/(1+υ), düzlem şekil değiştirme hali için K=(3-4υ) olarak ifade edilir. μ, yarı sonsuz düzlemin kayma modülünü göstermektedir.

Katsayıların belirlenmesinde kullanılacak sınır şartları aşağıda verilmiştir;

Problem 1 için sınır şartları,

$$\sigma_{y_1}(x,0)=\left\{\begin{array}{cc}-p(x), & b<x<a\\ -q(x), & c<x<d\\ 0, & diğer\end{array}\right\} \tag{16}$$

$$\tau_{xy_1}(x,0)=0 \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v_1(x,0)=0 \qquad (b<x<a) \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v_1(x,0)=0 \qquad (c<x<d) \tag{19}$$

olarak belirlenmiştir. Probleme ait denge şartları ise;

$$\int_b^a p(t)dt = -P \tag{20}$$

$$\int_c^d q(t)dt = -Q \tag{21}$$

olarak belirlenmiştir. Bu bağıntılarda bulunan -p(x) ve -q(x) ifadeleri bloklar ve yarı sonsuz düzlem arasındaki bilinmeyen temas gerilmelerini ifade etmektedir.

Problem 3 ile ilgili sınır şartları;

$$\sigma_{x_3}{}^{x>0}(0,y) = \sigma_{x_3}{}^{x<0}(0,y) \qquad (-\infty<y<+\infty) \tag{22}$$

$$\tau_{xy_3}{}^{x>0}(0,y) = \tau_{xy_3}{}^{x<0}(0,y) \qquad (-\infty<y<+\infty) \tag{23}$$

$$\frac{2\mu}{\kappa+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(u_3{}^{x>0}(x,y) - u_3{}^{x<0}(x,y)\right) = \begin{Bmatrix} f_1(y), & e<y<0 \\ 0, & diğer \end{Bmatrix} \tag{24}$$

$$\frac{2\mu}{\kappa+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(v_3{}^{x>0}(x,y) - v_3{}^{x<0}(x,y)\right) = \begin{Bmatrix} f_2(y), & e<y<0 \\ 0, & diğer \end{Bmatrix} \tag{25}$$

olarak ifade edilebilir. Bu ifadelerde $f_1(y)$ ve $f_2(y)$ çatlakta oluşan yatay ve düşey yer değiştirmelerin farkının fonksiyonları olarak tanımlanabilir.

Çatlak ile ilgili problemi çözebilmek için aşağıdaki sınır şartları ayrıca sağlanmalıdır;

$$\sigma_{y_2}(x,0) = \sigma_{y_3}(x,0) + \sigma_{y_4}(x,0) = 0 \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{26}$$

$$\tau_{xy_2}(x,0) = \tau_{xy_3}(x,0) + \tau_{xy_4}(x,0) = 0 \qquad (-\infty<x<+\infty) \tag{27}$$

Bu ifadelerdeki (2), (3) ve (4) üst indisleri ifadelerin sırasıyla Problem 2, Problem 3 ve Problem 4' e ait olduğunu göstermektedir. (26) ve (27) sınır şartlarından da iki tane bilinmeyen katsayı bulunacaktır. Sınır şartları, ilgili problemlerde yer değiştirme ve gerilme ifadelerine uygulandığında bilinmeyen katsayılar A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 katsayıları elde edilir. Elde edilen katsayılar gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerine yazılıp gerekli kapalı integraller alındığında p(x), q(x), $f_1(y)$ ve $f_2(y)$'nin bilinmeyen olduğu bir integral denklem sistemi oluşmaktadır.

Çatlak-temas problemindeki bilinmeyen p(t), q(t), $f_1(y)$ ve $f_2(y)$ aşağıdaki sınır şartlarından elde edilecektir;

$$\sigma_x(0,y) = \sigma_{x_1}(0,y) + \sigma_{x_2}(0,y) = 0 \qquad (e<y<0) \tag{28}$$

$$\tau_{xy}(0,y) = \tau_{xy_1}(0,y) + \tau_{xy_2}(0,y) = 0 \qquad (e<y<0) \tag{29}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = 0 \qquad (b<x<a) \tag{30}$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial x} = 0 \qquad (c<x<d) \tag{31}$$

(28)-(31) sınır şartları Problem 1 ve Problem 2 için bulunan gerilme ve düşey yer değiştirme ifadelerinin toplamına uygulandığında;

$$\frac{1}{\pi}\int_e^0 \frac{f_1(t)dt}{t-y}+\frac{1}{\pi}\int_e^0 f_1(t)K_{11}(t,y)dt+\frac{1}{\pi}\int_b^a p(t)K_{13}(t,y)dt+\frac{1}{\pi}\int_c^d q(t)K_{14}(t,y)dt=0 \tag{32}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_e^0 \frac{f_2(t)dt}{t-y}+\frac{1}{\pi}\int_e^0 f_2(t)K_{22}(t,y)dt+\frac{1}{\pi}\int_b^a p(t)K_{13}(t,y)dt+\frac{1}{\pi}\int_c^d q(t)K_{14}(t,y)dt=0 \tag{33}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_e^0 f_1(t)K_{31}(t,x)dt+\frac{1}{\pi}\int_e^0 f_2(t)K_{32}(t,x)dt+\frac{1}{\pi}\int_b^a \frac{p(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_c^d \frac{q(t)}{t-x}dt=0 \tag{34}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_e^0 f_1(t)K_{41}(t,x)dt+\frac{1}{\pi}\int_e^0 f_2(t)K_{42}(t,x)dt+\frac{1}{\pi}\int_b^a \frac{p(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_c^d \frac{q(t)}{t-x}dt=0 \tag{35}$$

bağıntıları elde edilir. İntegral denklemler bir takım boyutsuz büyüklüklerin tanımlanması yardımıyla aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirilirse,

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g_1(r_1)}{r_1-s_1}dr_1+\int_{-1}^1 M_{11}(r_1,s_1)g_1(r_1)dr_1+\int_{-1}^1 M_{13}(r_3,s_1)g_3(r_3)dr_3+\int_{-1}^1 M_{14}(r_4,s_1)g_4(r_4)dr_4=0 \tag{36}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g_2(r_2)}{r_2-s_2}dr_2+\int_{-1}^1 M_{22}(r_2,s_2)g_2(r_2)dr_2+\int_{-1}^1 M_{23}(r_3,s_2)g_3(r_3)dr_3+\int_{-1}^1 M_{24}(r_4,s_2)g_4(r_4)dr_4=0 \tag{37}$$

$$\int_{-1}^1 g_1(r_1)M_{31}(r_1,s_3)dr_1+\int_{-1}^1 g_2(r_2)M_{32}(r_2,s_3)dr_2-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g_3(r_3)}{r_3-s_3}dr_3 + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g_4(r_4)}{\left[\frac{(d-c)}{2}r_4+\frac{d+c}{2}\right]-\left[\frac{(b-a)}{2}s_3+\frac{b+a}{2}\right]}\frac{d-c}{2}dr_4=0 \tag{38}$$

$$\int_{-1}^1 g_1(r_1)M_{41}(r_1,s_4)dr_1+\int_{-1}^1 g_2(r_2)M_{42}(r_2,s_4)dr_2 -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g_3(r_3)}{\left[\frac{a-b}{2}r_3+\frac{b+a}{2}\right]-\left[\frac{d-c}{2}s_4+\frac{d+c}{2}\right]}\frac{a-b}{2}dr_3+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{g_4(r_4)}{r_4-s_4}dr_4=0 \tag{39}$$

ifadeleri elde edilir. İntegral denklemlerin sayısal çözümü Jacobi polinomları yardımıyla yapılmıştır. İntegral denklemlerin çözümü;

$$g_1(r_1)=(1-r_1)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}A_nP_n^{(-1/2,0)}(r_1) \tag{40}$$

$$g_2(r_2)=(1-r_2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}B_nP_n^{(-1/2,0)}(r_2) \tag{41}$$

$$g_3(r_3)=(1-r_3)^{-1/2}(1-r_3)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_n^{(-1/2,-1/2)}(r_3) \tag{42}$$

$$g_4(r_4)=(1-r_4)^{-1/2}(1-r_4)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}D_nP_n^{(-1/2,-1/2)}(r_4) \tag{43}$$

olarak aranır [14]. Bu bağıntılarda P_n Jacobi polinomu, A_n, B_n, C_n ve D_n bilinmeyen sabitlerdir. (40-43) ifadeleri (36-39) bağıntılarında ve denge denklemlerinde yerlerine yazıldığında $g_1(r_1)$, $g_2(r_2)$, $g_3(r_3)$ ve $g_4(r_4)$' ün bilinmeyen olduğu 4N+2 bilinmeyenli 4N+2 denklemli bir lineer denklem elde edilmiştir.

Gerilme şiddeti faktörleri;

$$k_1=\lim_{y\to e}\sqrt{2(y-e)\sigma_x(0,y)} \tag{44}$$

$$k_2=\lim_{y\to e}\sqrt{2(y-e)\tau_{xy}(0,y)} \tag{45}$$

olarak tanımlanırsa normalize edilmiş gerilme şiddeti faktörleri;

$$\frac{k_1\sqrt{-e}}{P}=\frac{-e}{a-b}\sum_{n=0}^{N}A_nP_n^{(-1/2,0)}(1) \tag{46}$$

$$\frac{k_2\sqrt{-e}}{P}=\frac{-e}{a-b}\sum_{n=0}^{N}B_nP_n^{(-1/2,0)}(1) \tag{47}$$

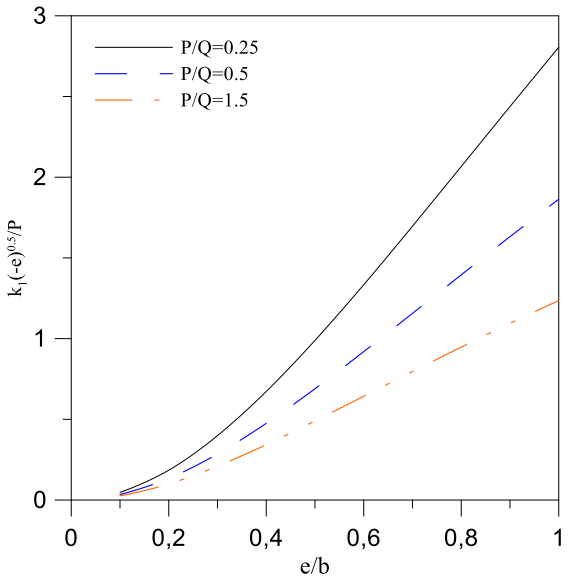
olarak elde edilir.

SONUÇLAR

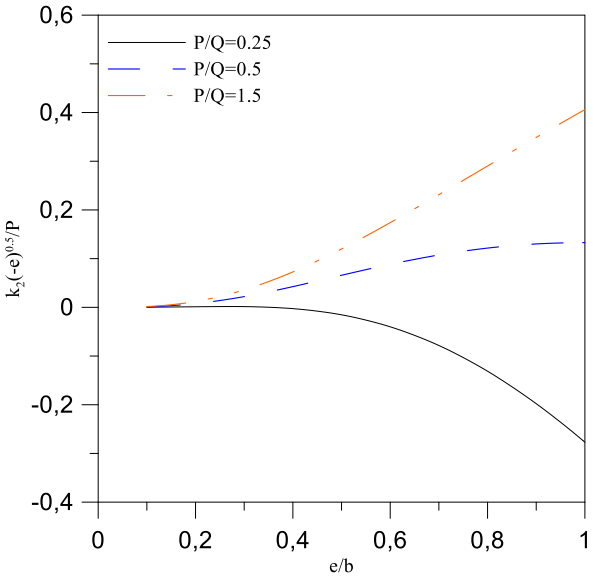
$k_1\sqrt{-e}/P$ ve $k_2\sqrt{-e}/P$ boyutsuz gerilme şiddeti faktörlerini, P/Q oranı bloklara etki eden yüklerin oranını, e/b boyutsuz çatlak derinliğini; a/b, c/b ve d/b boyutsuz blok konumlarını göstermektedir.

Tablo 1. Farklı P/Q oranları için $k_1\sqrt{-e}/P$ ve $k_2\sqrt{-e}/P$ değerlerinin değişimi (K=2, ν=0.25, a/b=0.5, c/b=-1, d/b=-1.5)

P/Q=0.25			**P/Q=0.50**		**P/Q=1.5**	
e/b	$\frac{k_1\sqrt{-e}}{P}$	$\frac{k_2\sqrt{-e}}{P}$	$\frac{k_1\sqrt{-e}}{P}$	$\frac{k_2\sqrt{-e}}{P}$	$\frac{k_1\sqrt{-e}}{P}$	$\frac{k_2\sqrt{-e}}{P}$
0.1	0.0476	0.0002	0.0347	0.0011	0.0261	0.0016
0.2	0.1852	0.0012	0.1339	0.0077	0.0997	0.0121
0.3	0.3991	0.0015	0.2854	0.0221	0.2095	0.0358
0.4	0.6725	-0.0027	0.4749	0.0425	0.3431	0.0727
0.5	0.9889	-0.0154	0.6896	0.0657	0.4900	0.1199
0.6	1.3320	-0.0400	0.9193	0.0883	0.6427	0.1738
0.7	1.6963	-0.0784	1.1563	0.1075	0.7962	0.2314
0.8	2.0663	-0.1312	1.3950	0.1217	0.9474	0.2902
0.9	2.4375	-0.1978	1.6316	0.1302	1.0943	0.3488
1.0	2.8048	-0.2769	1.8634	0.1328	1.2358	0.4060



Şekil 1. Farklı P/Q oranları için elde edilen $k_1\sqrt{-e}/P$ boyutsuz gerilme şiddeti faktörünün değişimi (K=2, υ=0.25, a/b=0.5, c/b=-1, d/b=-1.5)



Şekil 2. Farklı P/Q oranları için elde edilen $k_2\sqrt{-e}/P$ boyutsuz gerilme şiddeti faktörünün değişimi (K=2, υ=0.25, a/b=0.5, c/b=-1, d/b=-1.5)

Tablo 1, Şekil 1 ve Şekil 2' de blok konumlarının çatlağa olan mesafelerinin ve blok genişliklerinin aynı olması durumunda P/Q oranının değişimine göre $k_1\sqrt{-e}/P$ ve $k_2\sqrt{-e}/P$ boyutsuz gerilme şiddeti faktörlerine etkisi incelenmiştir. P/Q oranı arttıkça $k_1\sqrt{-e}/P$'nin azaldığı, e/b oranı arttıkça $k_1\sqrt{-e}/P$ ve $k_2\sqrt{-e}/P$ boyutsuz gerilme şiddeti faktörlerinin arttığı gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] H., Hertz, *Gessammelte Worke von Heinrich Hertz*, Leipzig, 1895.

[2] F. Erdoğan, G.D. Gupta, Contact and Crack Problems for an Elastic Wedge, *International Journal of Engineering Science,* 14 (1976), 155-164.

[3] A.O. Çakıroğlu, F.L. Çakıroğlu, Continious and Discontinious Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane, *International Journal of Engineering Science*, 29 (1991),

[4] A. Birinci, R. Erdöl, Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports, *Structural Engineering and Mechanics*, 12 (2001), 1, 17-34

[5] T.Ş. Özşahin, V. Kahya, A.O. Çakıroğlu, Contact Problem For an Elastic Layered Composite Resting on Rigid Flat Supports, *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 1 (2007), 2, 154-159.

[6] M.A Güler, Y.F. Gülver, E. Nart, Contact Analysis of Thin Films Bonded to Graded Coatings, *International Journal of Mechanical Sciences*, 55 (2012), 50-64.

[7] M. Karabulut, *Yarım Düzlem Üzerine Oturan Elastik Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi*, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2016.

[8] A. Griffith, *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids* Phil. Trans Roy. Soc., London, Series A, 221 (1920), 163-199.

[9] F. Erdoğan, *Fracture Mechanics of Graded Layer*, Lehigh University, Bethlehem, PA 18015, U.S.A.

[10] A. Birinci, *Alt Tabakasında Düşey Bir Çatlağı Bulunan Rijit Bir Blok Aracılığı ile Yüklenen Bileşik Tabaka Problemi*, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1998.

[11] S. Dağ, *Crack and Contact Problems in Graded Materials*, Department of Mechanical Engineering and Mechanics, PhD. Thesis, Lehigh University, 2001.

[12] D. Sarıkaya, S. Dağ, Surface Cracking in an Orthotropic Medium Subjected to Frictional Contact, *International Journal of Solids and Structures*, 90 (2016), 1-11.

[13] A. Talezadehlari, A. Nikbakht, M. Sadighi, A. Zucchelli, Numerical Frictional Contact in the Precence of a Surface Crack in a Functionally Graded Coating Substrate System, *International Journal of Mechanical Sciences*, 117 (2016), 286-298.

[14] S. Dağ, F. Erdoğan, A Surface Crack in a Graded Medium Loaded by a Sliding Rigid Stamp, *Engineering Fracture Mechanics*, 69 (2002), 14-16, 1729-1751.

EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ELİPTİK KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Oğuzhan Kır[1], Merve Ermis[2], Umit N. Aribas[3] ve Mehmet H. Omurtag[4]
[1,2]Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli
[3,4]İstanbul Medipol Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Functionally graded materials have wide range of applications in space/aerospace, automotive and biomedical industries due to their lightness, high strength, thermal resistance properties, resistant against corrosion and abrasion. The objective of this study is to compare the static responses obtained by one dimensional and brick finite elements of computer based finite element package programs. Functionally graded material has a continuously varying function along the axis of the beam and consist of two-phase composite material. These materials are metal-matrix and ceramic-particle. The effective material properties of the functionally graded materials are determined according to the rule of mixture (Voigt model). Within the scope of the study, finite element solutions are obtained using BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS. The planar elliptical beam with rectangular cross section geometry has two different boundary conditions, namely, either cantilever or fixed at both ends. The effects of different boundary conditions, subtended angles and material variation parameters on the static analysis of axially functionally graded elliptical beams under uniformly vertical distributed load are investigated over the vertical displacement and support reactions in detail. Also, the convergence analysis for BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS finite element program are examined in detail.

Keywords: functionally graded material; finite element; static analysis; elliptical beam

ÖZET

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler hafiflikleri, yüksek mukavemet dayanımları, sahip oldukları ısıl direnç özellikleri, korozyona ve aşınmaya karşı olan özellikleri nedeniyle uzay, havacılık, otomotiv ve biyomedikal sanayide geniş kullanım alanlarına sahiptirler. Bu çalışmanın amacı, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin statik davranışını bilgisayar tabanlı sonlu eleman paket programlarının bir boyutlu veya üç boyutlu-katı sonlu elemanı yardımıyla incelemektir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kirişin ekseni boyunca sürekli değişen bir fonksiyona sahip olup iki fazlı kompozit malzemeden oluşmaktadır. Bu malzemeler metal-matris ve seramik-parçacıktır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) göre belirlenmiştir. Çalışma kapsamında, sonlu eleman çözümleri ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 elemanları kullanılarak elde edilmiştir. Dikdörtgen kesit geometrisine sahip düzlem eliptik kiriş konsol veya iki ucundan rijit tutulu olmak üzere iki farklı sınır koşuluna sahiptir. Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel fonksiyonel

derecelendirilmiş düzlem eliptik kirişlerin statik analizi yer değiştirmeler, mesnet tepkileri üzerinden farklı sınır koşulları, merkez açıları ve malzeme değişim parametreleri için detaylı olarak araştırılmıştır. Aynı zamanda, ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 yakınsama analizleri de detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme; sonlu eleman; statik analiz; eliptik kiriş

GİRİŞ

Fonksiyonel dereceli malzemeler diş implantı, yapay deri, askeri zırh, silah ve araç tasarımı, optik lens, roket motoru parçaları, uzay aracı gövdesi yapımı ve nükleer reaktör parçaları tasarımı vb. uygulamalarda yaygın olarak kullanıldığından, son yıllarda bu malzemeler üzerinde çalışmalar oldukça artmıştır. Gelişen teknolojinin ve yürütülen araştırmalar sonucu bu malzemelerin elektronik, uzay, havacılık, biyomedikal, otomotiv, enerji ve savunma sanayiinde kullanım alanları genişlemiştir [1-6]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) istenen doğrultularda sürekli değişen bir fonksiyona sahip iki fazlı kompozit malzemelerdir. Tabakalı kompozit malzemelerde, malzeme özelliklerinin ani olarak değişmesi, çeşitli yükler (ör: termal ve mekanik yükler) uygulandığında yüksek gerilme yığılmaları oluşturarak, katmanlar arasında istenmeyen ayrılmalar ve çatlaklar oluşturabilmektedir. Malzeme özelliklerinin değişiminin sürekliliği, yapının karakteristik özelliklerindeki homojenliği arttırdığından dolayı, katmanlardaki süreksizlikten doğan sorunlara yapıyı dirençli hale getirmiştir [7-9]. Eğri eksenli kirişler yükleri aktarmada doğru eksenli kirişlere göre daha etkilidir [10]. Bu nedenle, eğri eksenli kirişler, köprüler, makine parçaları, uzay ve hava araçları gibi alanlarda yaygın kullanıma sahiptir [11-15]. Literatür incelendiğinde eksenel FD kirişlerin yapısal davranışını inceleyen çalışmaların çoğu dinamik analiz ile ilgilidir. Bu çalışmalardan bazıları; eksenel FD doğru eksenli kiriş/nano kirişler için [16-24] ve EFD eğri eksenli kirişler için [25-29] olarak sıralanabilir. EFD kirişlerin statik analiz ile ilgili çalışmaların sayısı ise daha azdır. Bu çalışmalardan bazılarını özetleyecek olursak: Shahba ve ark. [30], değişken kesite sahip eksenel FD doğru eksenli Euler-Bernoulli kirişlerinin statik davranışının yanı sıra stabilite ve serbest titreşim davranışını sonlu elemanlar yöntemi kullanarak parametrik bir çalışma üzerinden detaylı olarak incelemişlerdir. Li ve ark. [31] sonlu eleman yöntemini kullanarak, değişken kesite sahip çubuk ekseni veya kalınlığı boyunca FD doğru eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim analizini çalışmışlardır. Literatürde eğri eksenli eksenel FD kirişlerin statik davranışını inceleyen çalışma sayısı oldukça sınırlı sayıdadır. Rajesakaran [32], değişken kesitli eksenel FD eğri eksenli kirişlerin statik analizini diferansiyel dönüşüm eleman yöntemi kullanarak incelemiştir.

Bu çalışmanın amacı, eksenel FD eliptik kirişlerin statik analizini sonlu eleman yöntemini kullanarak incelemektir. Sonlu eleman çözümlerinde ANSYS'in üç boyutlu katı eleman (SOLID186) ve global yapıda bir boyutlu kiriş eleman (BEAM188) [33] kullanılmıştır. Parametrik çalışmada, düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel FD eliptik kirişin statik analiz davranışı farklı sınır koşulları, merkez açı değerleri, yarıçap oranları ve farklı malzeme dağılım oranları için mesnet tepkileri ve en büyük yer değiştirme değerleri üzerinden detaylı olarak incelenerek özgün örnekler literatüre sunulmuştur.

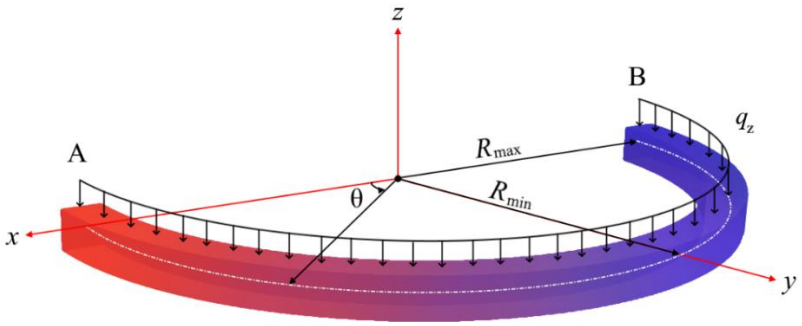
FORMÜLASYON

Bu bölümde sırasıyla eliptik kirişin geometrisi, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme modeli ve statik analizinde kullanılan ANSYS sonlu eleman programında tanımlı elemanlara ait açıklamalara yer verilmiştir.

Eliptik Kiriş Geometrisi: Kartezyen koordinat sisteminde tanımlı *x*-*y* düzleminde bulunan düzlem eğrisel kirişe ait konum vektörü ifadesini *x* ekseninden itibaren ölçülen θ açısı parametre olarak seçilerek,

$$\mathbf{r}(\theta) = \{x(\theta), y(\theta)\} \tag{1}$$

yazılır.



Şekil 1. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kiriş.

Eliptik kirişin (Şekil 1) *x*-*y* düzlemindeki bileşenleri,

$$x(\theta) = R_{\max}\cos\theta, \quad y(\theta) = R_{\min}\sin\theta \tag{2}$$

olmak üzere, burada $R_{\min} > 0$ ve $R_{\max} > 0$ sırasıyla minimum ve maksimum yarıçap değerlerini göstermektedir. Eliptik kirişin yay boyu s nin gradyenti olan $c(\theta)$ (1) deki konum vektörü üstünden tanımlanırsa,

$$c(\theta) = \left\|\mathbf{r}_{,\theta}\right\|, \; \mathrm{d}s = c(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

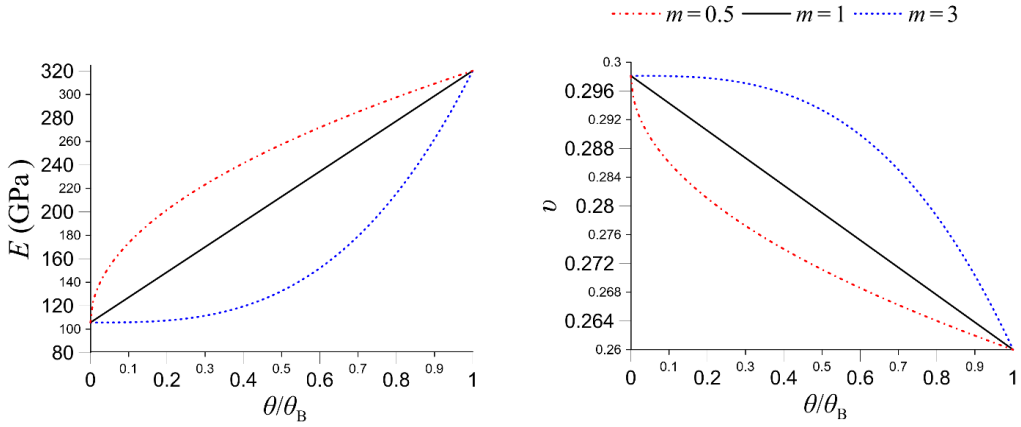
dir. Burada virgülden sonraki alt indis ifadesi θ parametresine göre türevi göstermektedir [34]. (3) de verilen yay boyu gradyenti $c(\theta)$ yardımıyla kirişin toplam uzunluğu $S = \int_0^{\theta_B} c(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ formülü ile bulunur. θ_B eliptik kirişin merkez açısını göstermektedir (Şekil 1).

Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş (EFD) Malzeme Modeli: İki fazlı malzemeden oluşan kompozit kirişte malzeme dağılımı eğrisel kirişin yatay açı θ parametresine bağlı olarak kiriş ekseni boyunca fonksiyonel olarak değişmektedir. Kompozit malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) [35]göre,

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_A + (E_B - E_A)\left(\frac{\theta}{\theta_B}\right)^m \\ \upsilon(\theta) &= \upsilon_A + (\upsilon_B - \upsilon_A)\left(\frac{\theta}{\theta_B}\right)^m \end{aligned} \tag{4}$$

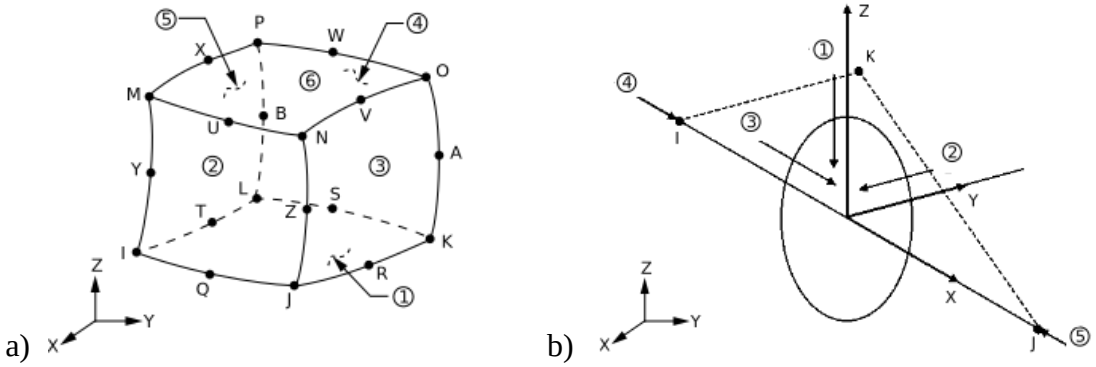
verilebilir. Burada, eğrisel kirişin θ'ya göre etkin malzeme özellikleri ise sırasıyla elastisite modülü (E) ve Poisson oranı (υ) dır. $m \geq 0$ malzeme değişim parametresini göstermektedir. Bu çalışma kapsamında iki fazlı kompozit malzeme metal (Ti-6Al-4V) ve seramik (Al_2O_3) malzeme seçilmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede eğrisel kirişin başlangıç noktasından (A noktası) %100 metal malzeme ile başlarken, en son noktasında (B noktası) ise %100 seramik malzeme ile sonlanmaktadır. Malzeme değişim parametresi $m = 0$ için tüm çubuk izotrop homojen seramik malzemeden oluşurken, $m = \infty$ değeri için ise tüm çubuk izotrop homojen metal malzemeden oluşmaktadır. Metal (Ti-6Al-4V) malzemesine ait

malzeme özellikleri $E_A = 105.7\,\text{GPa}$, $\upsilon_A = 0.2981$ 'dir. Seramik (Al_2O_3) malzemesine ait malzeme özellikleri ise $E_B = 320.24\,\text{GPa}$, $\upsilon_B = 0.26$ 'dır. Metal ve seramik malzemelerine ait mekanik malzeme özellikleri (4) numaralı denklemde yerleştirilirse çubuk ekseni boyunca etkin malzeme özellikleri elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel kirişin etkin malzeme değerlerinin normalize edilmiş yatay açı parametresine (θ / θ_B) göre değişimi

Sonlu Eleman Yöntemi: Bu çalışma, bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan ANSYS [33] kullanılarak eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişin statik davranışı incelenmiştir. Kiriş elemanın modellenmesinde kullanılan ANSYS'in sonlu eleman modelleri ise;



Şekil 3. ANSYS sonlu eleman programı a) SOLID186 üç boyutlu (3B) 20 adet düğüm noktasına sahip katı eleman (ilgili şekil [33]'den alınmıştır.) ve b) BEAM188 serbestlik derecesi üç boyutlu (3B) uzayda tanımlanmış 2 adet düğüm noktasına sahip bir boyutlu kiriş eleman (ilgili şekil [33]'den alınmıştır.)

ANSYS SOLID186: Yüksek mertebeden üç boyutlu (3B) ve 20 düğüm noktasına sahip ikinci dereceden yer değiştirme davranışı gösteren katı elemandır (Şekil 3.a). Her bir düğüm noktasında 3 adet serbestlik derecesi bulunur: x, y ve z doğrultularında ötelenmelerdir [33].

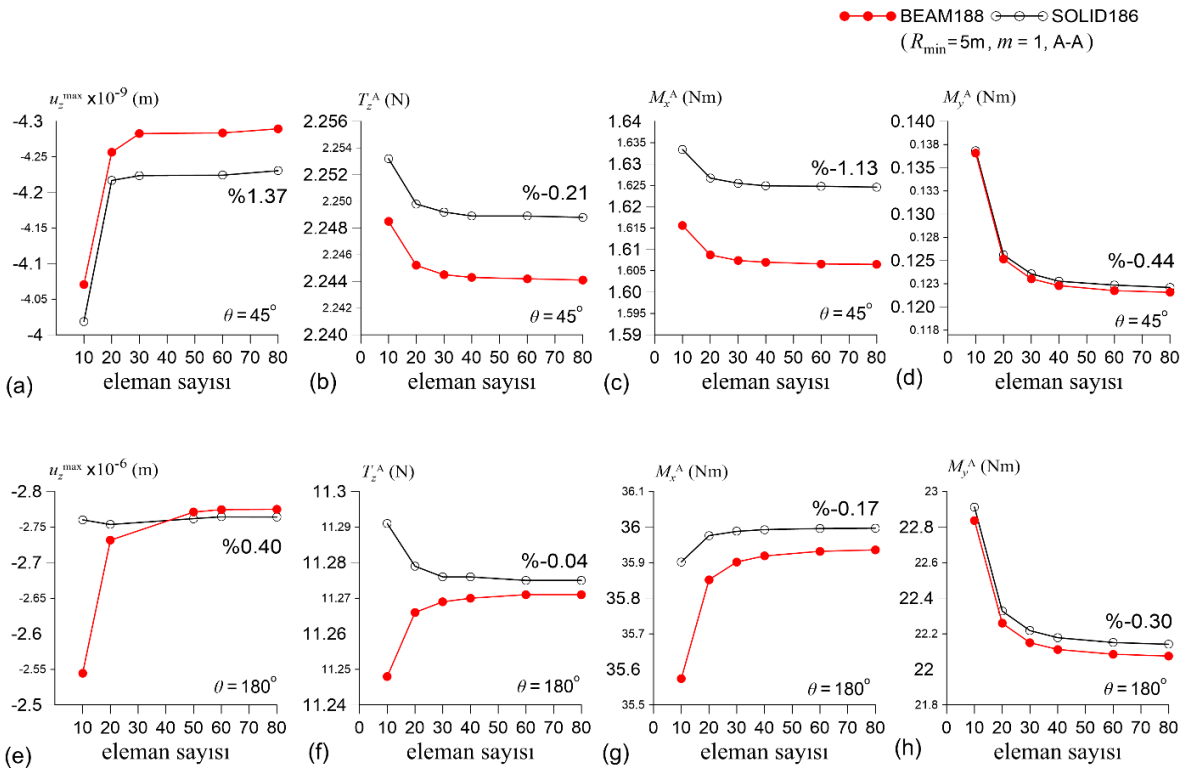
ANSYS BEAM188: İnce ve orta derecede yükseklik/uzunluk oranı bulunan kiriş yapılarını analiz etmek amacıyla kullanılır. Timoshenko kiriş teorisi üzerinden kayma deformasyonu etkilerini de hesaba katarak formüle edilmiştir. Serbestlik derecesi üç boyutlu (3B) uzayda tanımlanmış 2 adet düğüm noktasına sahip kiriş eleman (Şekil 3.b) her bir düğüm noktasında 6 adet serbestlik derecesi bulunur: Bunlardan üçü x, y ve z doğrultularında ötelenmeler olup, diğer üçü ise x, y ve z eksenleri etrafında kesit dönmeleridir [33].

SAYISAL SONUÇLAR

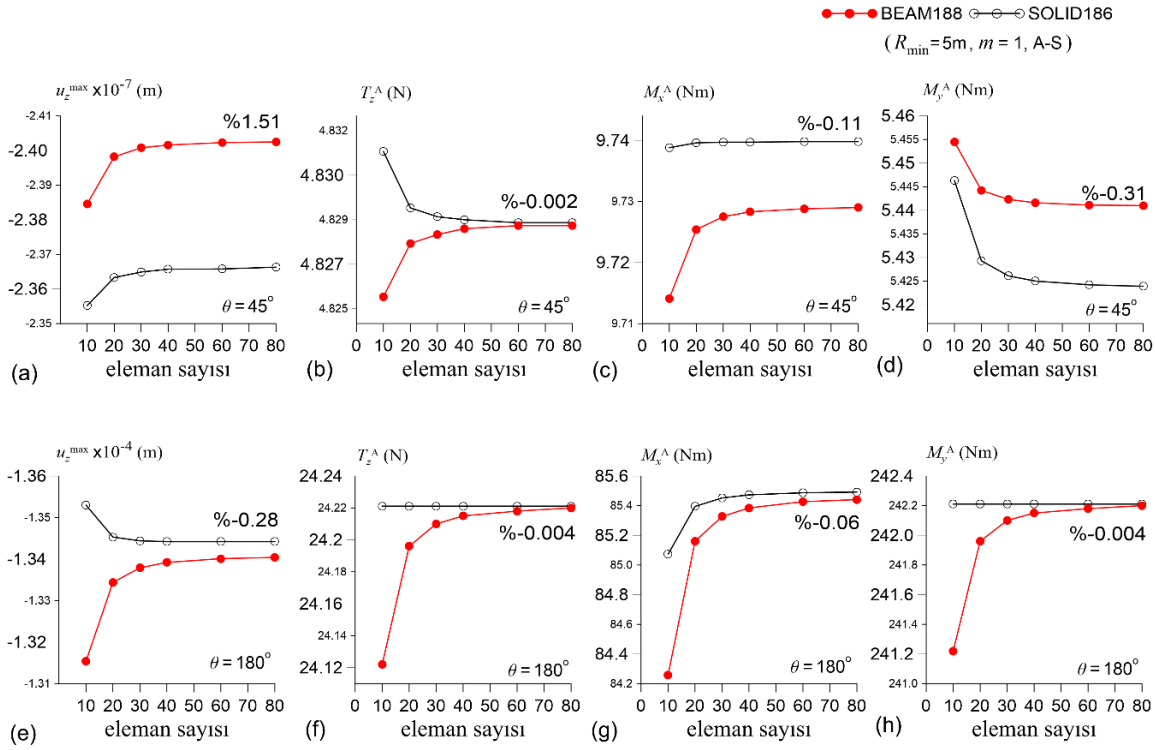
Sayısal örnekler, farklı malzeme değişim parametreleri ($m = 0, 0.5, 1, 3$ ve ∞), farklı merkez açı değerleri ($\theta_{\mathrm{B}} = 45°, 90°, 135°$ ve $180°$) ve farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min} = 10\mathrm{m}, 7.5\mathrm{m}$ ve $5\mathrm{m}$) için ankastre-ankastre ya da ankastre-serbest sınır şartına sahip, dikdörtgen kesitli eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişin düzgün yayılı yük ($q_z = 1\mathrm{N/m}$) etkisindeki statik analiz davranışı ANSYS programı ile incelenmiştir. Dikdörtgen kesitin genişliği 0.48m, yüksekliği ise 0.36m'dir. Tüm örneklerde eliptik kirişin en büyük yarıçap değeri $R_{\max} = 10\mathrm{m}$'dir. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 10\mathrm{m}$ için dairesel düzlem çubuk elde edilmektedir. Sayısal sonuçlar, yakınsama analizi ve parametrik analiz olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. ANSYS çözümlerinde elemandaki malzeme özellikleri eğrisel kirişin iki düğüm noktasındaki malzeme özelliklerinin ortalaması olarak alınmıştır.

Yakınsama Analizi:

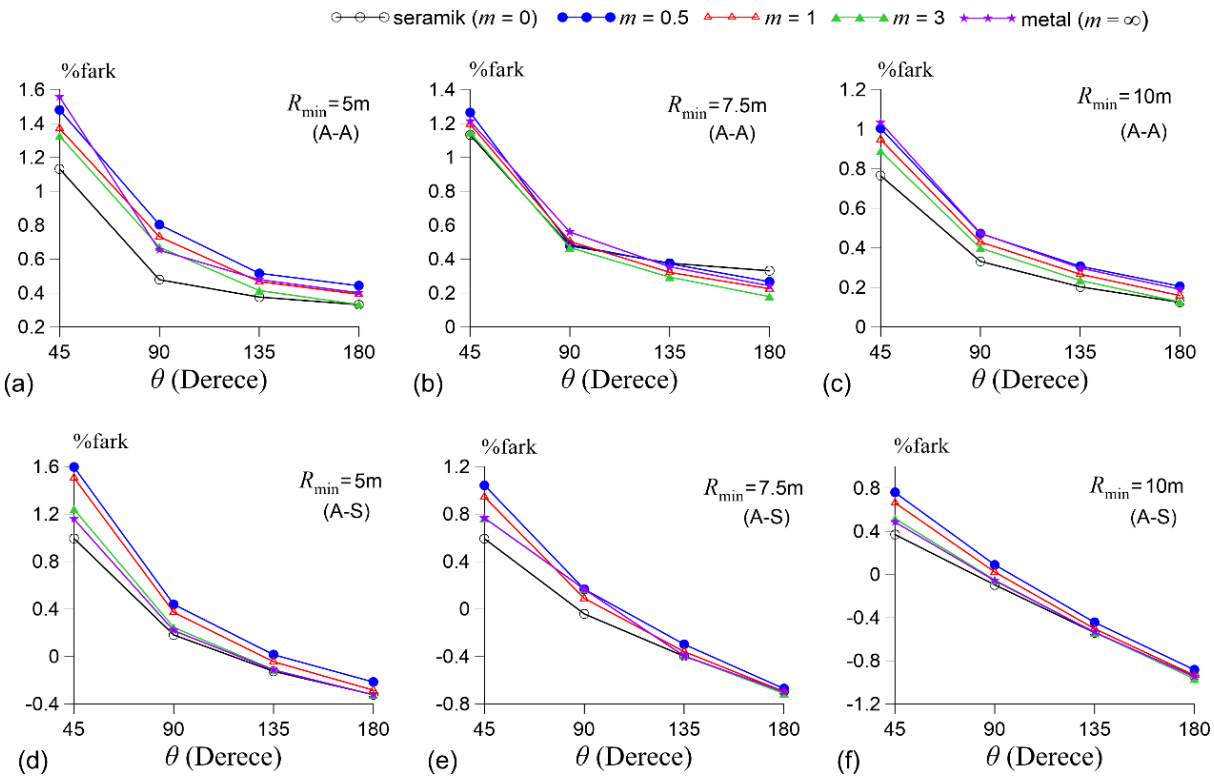
Yakınsama analizinde sonlu eleman çözümleri ANSYS'in SOLID186 ile BEAM188 elemanları üzerinden yapılmıştır. Eğrisel çubuklar sırasıyla 10 ile 80 adet arasında değişen doğru eksenli çubuk eleman üzerinden ayrıklaştırılmış olup en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve her iki sınır koşulu için A noktasındaki mesnet tepki kuvveti T_z^{A} ile mesnet momentleri M_x^{A}, $M^{\mathrm{A}} = \sqrt{\left(M_x^{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(M_y^{\mathrm{A}}\right)^2}$ ile ankastre-ankastre sınır koşulu için ise $M^{\mathrm{B}} = \sqrt{\left(M_x^{\mathrm{B}}\right)^2 + \left(M_y^{\mathrm{B}}\right)^2}$ üzerinden yakınsama analizleri yapılmıştır. Toplam serbestlik derecesi ve analiz süresi ile ilgili örnek verilecek olursa: $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$ ve $R_{\min} = 5\mathrm{m}$ için elde edilen çubuk geometrisinin 80 adet doğru eksenli çubuk eleman üzerinden tanımlanan SOLID186 ve BEAM188 elemanlarının toplam serbestlik dereceleri sırasıyla 307791 (katı eleman boyu 0.006m) ve 5766'dır. Ayrıca, $m = 1$ ve ankastre-ankastre sınır koşulu için analiz süreleri incelendiğinde SOLID186 ve BEAM188 elemanları için sırasıyla 13.547 sn ve 1.203 sn (Intel® Core™ i5-7200U CPU, 2.40 GHz, 8GB RAM) olduğu gözlemlenmiştir. Ele alınan tüm örneklerde, 60 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubuğun elde edilen sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A}, M^{A}, M^{B}) ve 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubuğun sonuçlarına ($u_z^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A}, M^{A}, M^{B}) göre ANSYS'in her bir elemanı BEAM188 ve SOLID186 için ayrı ayrı normalize edilmiştir. $u_z^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A}, M^{A} ve M^{B} değerleri göz önüne alındığında yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri SOLID186 ve BEAM188 için sırasıyla %0.09 ve %0.58 dir. $R_{\min} = 5\mathrm{m}$, merkez açısı $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$ ve malzeme gradyenti $m = 1$ olan EFD eliptik kirişin BEAM188 ve SOLID186 elemanlarının performansları statik analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A} ve M_y^{A}) üzerinden ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır koşulları için sırasıyla Şekil 4 ve 5'te sunulmuştur. Ayrıca, 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubukların BEAM188 eleman üzerinden elde edilen sonuçları SOLID186 eleman üzerinden elde edilen sonuçlarına göre normalize edilerek hesaplanan yüzde farklar Şekil 4 ve 5'te sunulmuştur. Yukarıda bahsi geçen tüm parametreler için en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ değerleri için SOLID186 ve BEAM188 sonuçları arasındaki yüzde farklar Şekil 6'da verilmiştir. Mesnet tepkisi T_z^{A}, M_x^{A}, M^{A} ve M^{B} değerleri göz önüne alındığında bu yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri SOLID186 ve BEAM188 için sırasıyla %0.25, %1.21, %1.22 ve %0.08 dir.



Şekil 4. EFD eliptik kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve A noktasındaki mesnet tepkileri M_x^A, M_y^A ve T_z^A için yakınsama analizi ankastre-ankastre (A-A) sınır koşulu



Şekil 5. EFD eliptik kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve A noktasındaki mesnet tepkileri M_x^A, M_y^A ve T_z^A için yakınsama analizi ankastre-serbest (A-S) sınır koşulu



Şekil 6. Eğrisel kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ değerinin farklı sınır şartları ve parametre ($R_{\min}$, m ve θ_B) değerleri için ANSYS'in SOLID186 ve BEAM188 eleman sonuçlarının kıyaslanması $\%\text{fark} = \left[1 - \left(u_z^{\max}\right)_{\text{BEAM188}} / \left(u_z^{\max}\right)_{\text{SOLID186}}\right] \times 100$.

Parametrik Analiz:

Malzeme gradyenti parametresinin ($m = 0, 0.5, 1, 3$ ve $m = \infty$) değişimi, farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre ve ankastre-serbest), farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min} = 10\text{m}, 7.5\text{m}$ ve 5m) ile farklı merkezi açı değerleri ($\theta_B = 45°, 90°, 135°$ ve $180°$) üzerinden statik analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A) incelenmiştir. Yukarıda bahsi geçen sınır koşulları ve parametrelere ($R_{\min}$, θ_B) göre malzeme gradyenti parametresi $m = \infty$ a göre elde edilen yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve A noktasındaki mesnet tepkileri M_x^A , M_y^A ve T_z^A sonuçlar sırasıyla Çizelge 1, 2,3 ve 4'te sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

Malzeme gradyenti parametresi (m): Malzeme değişimi parametre değerleri $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 sahip eğrisel kirişlerin statik analiz sonuçları ($u_z^{\max}$, T_z^A , M_x^A ve M_y^A) malzeme değişim parametre değeri $m = \infty$ olan eğrisel kirişin sonuçlarına göre $\beta_m^f = f_{m=i} / f_{m=\infty}$ ($i = 0, 0.5, 1$ ve 3 ; $f = u_z^{\max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A) formülü üzerinden her bir sınır koşulu, merkezi açı (θ_B) değeri ve en küçük yarıçap ($R_{\min}$) değerleri için normalize edilmiştir. $u_z^{\max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A sonuçları için hesaplanan bu oranlar sırasıyla Şekil 7-10'da verilmiştir.

Çizelge 1. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ (m) değerleri. ($m=\infty$)

	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
θ_B	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$
45°	-8.11×10^{-9}	-2.25×10^{-8}	-5.34×10^{-8}	-3.33×10^{-7}	-9.58×10^{-7}	-2.35×10^{-6}
90°	-3.09×10^{-7}	-5.56×10^{-7}	-9.48×10^{-7}	-1.33×10^{-5}	-2.16×10^{-5}	-3.51×10^{-5}
135°	-2.06×10^{-6}	-3.37×10^{-6}	-5.53×10^{-6}	-8.61×10^{-5}	-1.16×10^{-4}	-1.56×10^{-4}
180°	-5.21×10^{-6}	-1.03×10^{-5}	-2.00×10^{-5}	-1.90×10^{-4}	-2.80×10^{-4}	-4.00×10^{-4}

Çizelge 2. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin A noktasındaki kuvveti T_z^{A} (N) değerleri. ($m=\infty$)

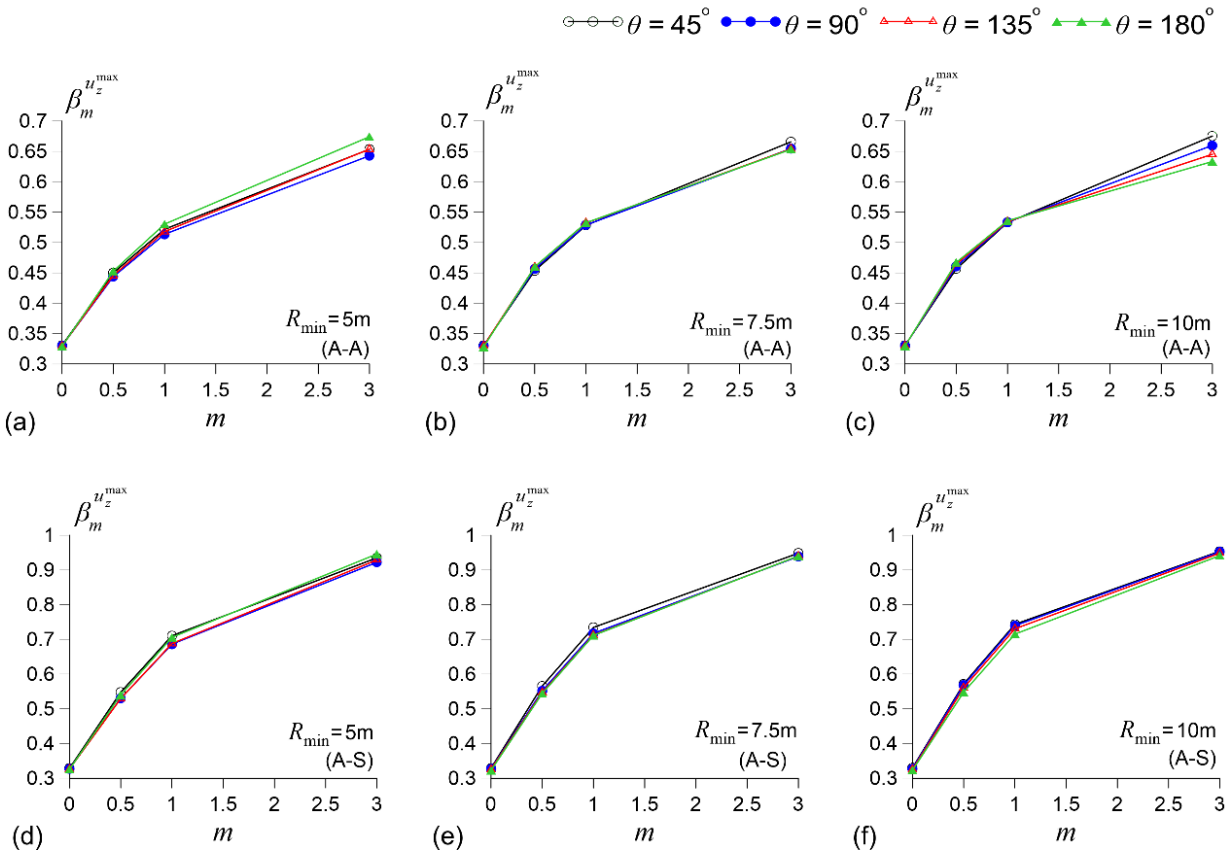
	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
θ_B	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$
45°	2.245	3.146	3.927	4.828	6.285	7.854
90°	6.101	6.943	7.854	12.111	13.815	15.708
135°	9.755	10.743	11.781	19.392	21.345	23.562
180°	12.111	13.815	15.708	24.221	27.629	31.416

Çizelge 3. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin A noktasındaki momenti M_x^{A} (Nm) değerleri. ($m=\infty$)

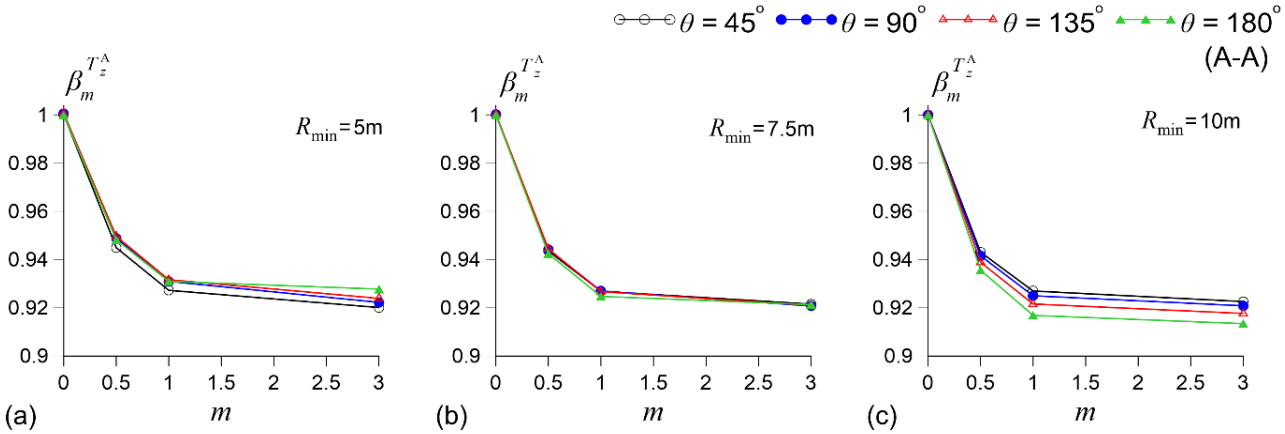
	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
θ_B	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$
45°	2.064	3.453	5.313	9.740	18.077	29.295
90°	12.151	17.436	22.775	42.748	69.118	100.020
135°	28.458	41.715	54.744	75.753	120.150	170.730
180°	42.746	69.112	100.010	85.492	138.220	200.010

Çizelge 4. Düzgün yayılı yük etkisindeki metal (Ti-6Al-4V) malzemeden oluşan eğrisel kirişin A noktasındaki momenti M_y^{A} (Nm) değerleri. ($m=\infty$)

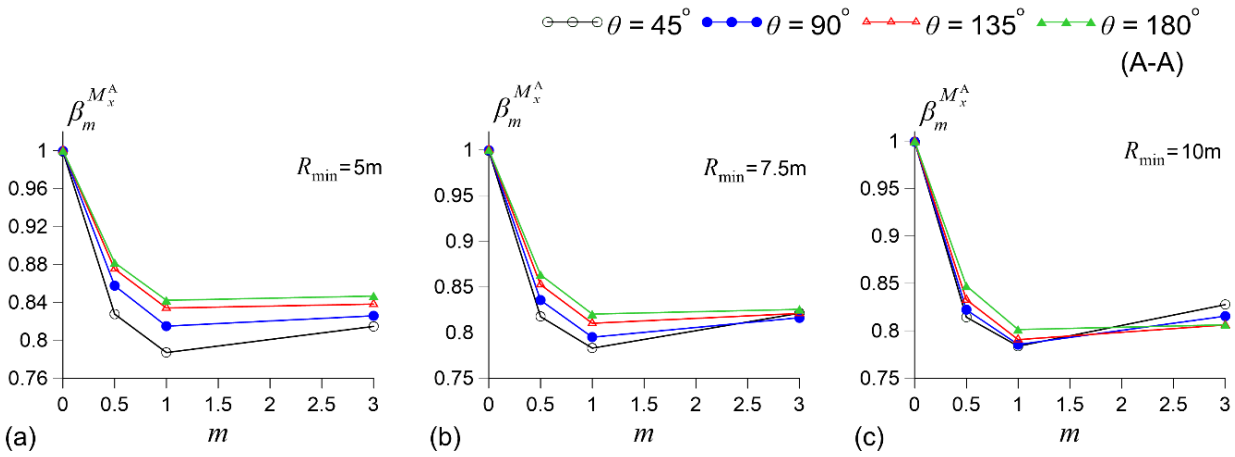
	Ankastre-Ankastre (A-A)			Ankastre-Serbest (A-S)		
θ_B	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$	$R_{\min}=5\text{m}$	$R_{\min}=7.5\text{m}$	$R_{\min}=10\text{m}$
45°	0.240	0.116	0.042	5.424	6.536	7.816
90°	4.711	2.844	1.299	52.081	54.311	57.064
135°	17.032	12.791	8.523	151.080	157.150	164.900
180°	30.333	29.697	29.812	242.210	276.290	314.160



Şekil 7. Malzeme gradyenti m parametresinin en büyük yer değiştirme u_z^{max} üzerindeki etkisi. $\beta_m^{u_z^{max}} = \left(u_z^{max}\right)_{m=i} / \left(u_z^{max}\right)_{m=\infty}$ ($i = 0, 0.5, 1$ ve 3)

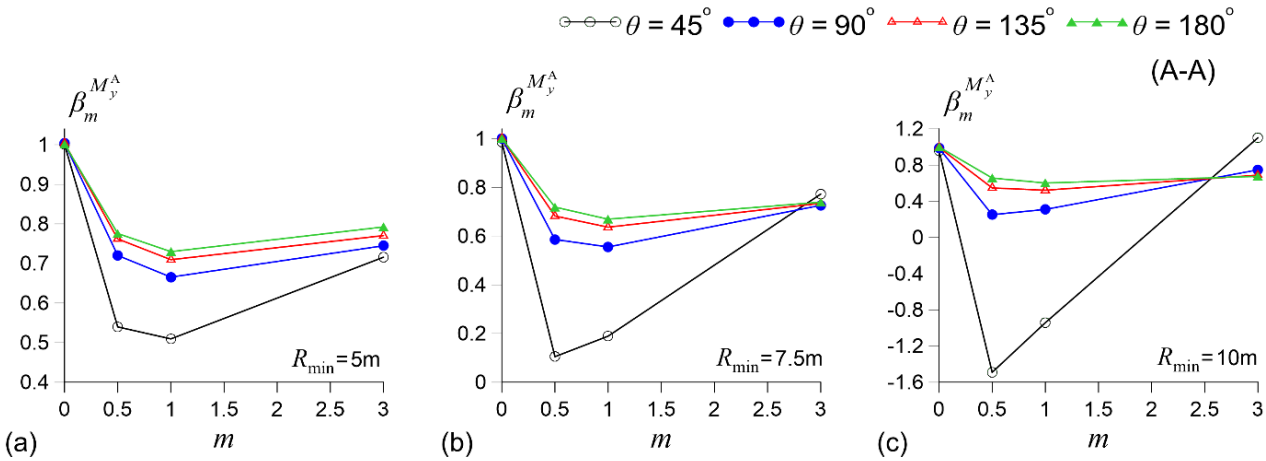


Şekil 8. Malzeme gradyenti m parametresinin A noktasındaki kuvvet T_z^A üzerindeki etkisi. $\beta_m^{T_z^A} = \left(T_z^A\right)_{m=i} / \left(T_z^A\right)_{m=\infty}$ ($i = 0, 0.5, 1$ ve 3)



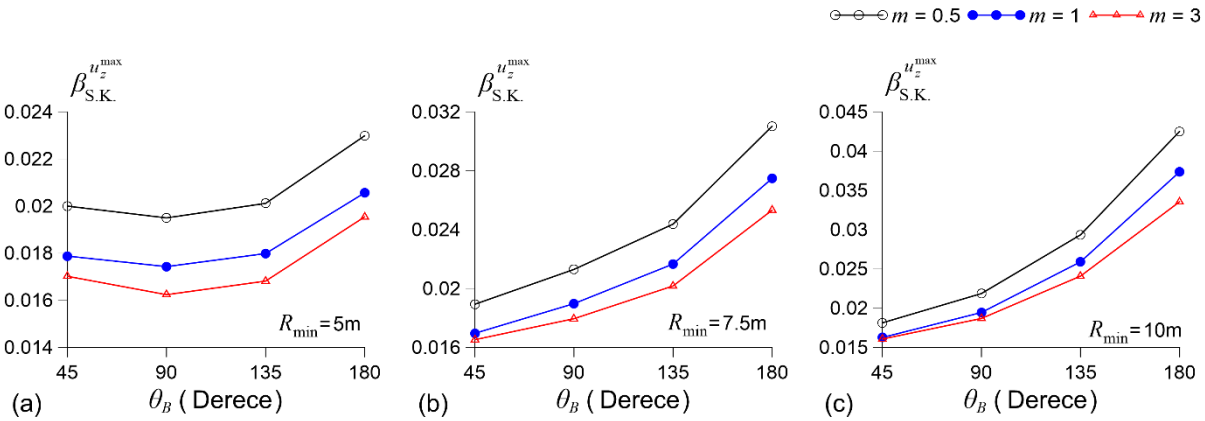
Şekil 9. Malzeme gradyenti m parametresinin A noktasındaki moment M_x^A üzerindeki etkisi.

$$\beta_m^{M_x^A} = \left(M_x^A\right)_{m=i} \Big/ \left(M_x^A\right)_{m=\infty} \quad (\ i = 0, 0.5, 1 \text{ ve } 3\ )$$

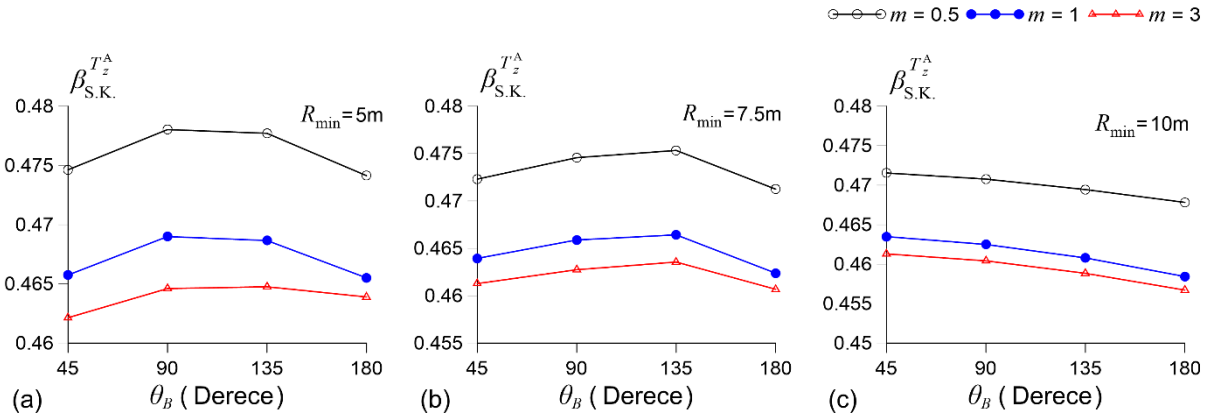


Şekil 10. Malzeme gradyenti m parametresinin A noktasındaki moment M_y^A üzerindeki etkisi. $\beta_m^{M_y^A} = \left(M_y^A\right)_{m=i} \Big/ \left(M_y^A\right)_{m=\infty}$ ($i = 0, 0.5, 1$ ve 3)

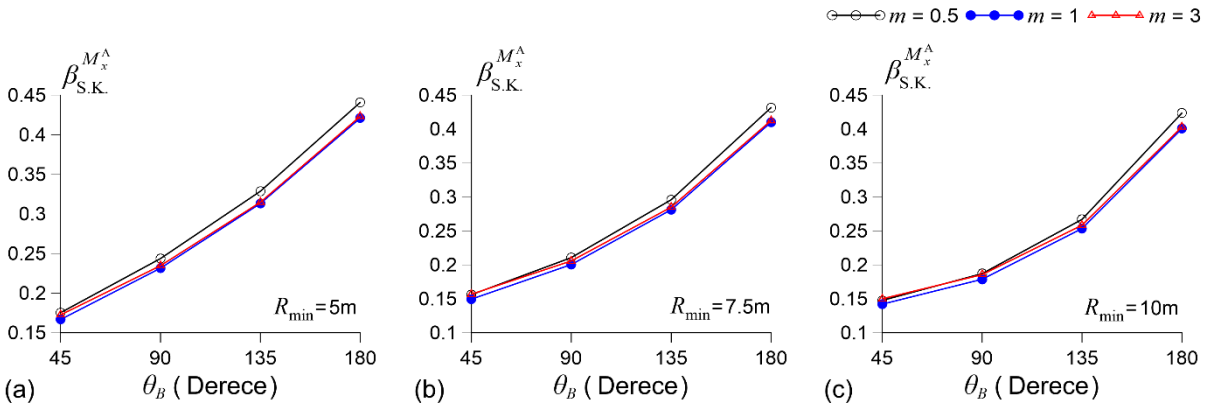
Sınır Şartı: Sınır koşulunun etkisi ankastre-ankastre (A-A) olan eliptik kirişin birinci doğal frekans değeri ankastre-serbest (A-S) olan eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir merkezi açı (θ) ve en küçük yarıçap (R_{min}) değerleri ile malzeme değişim parametreleri $m = 0.5, 1$ ve 3 için $\beta_{S.K.}^{f} = f_{A\text{-}A} / f_{A\text{-}S}$ ($f = u_z^{max}, T_z^A, M_x^A$ ve M_y^A) formülü üzerinden normalize edilerek ilgili oranlar u_z^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A sonuçları için sırasıyla Şekil 11-14'de verilmiştir.



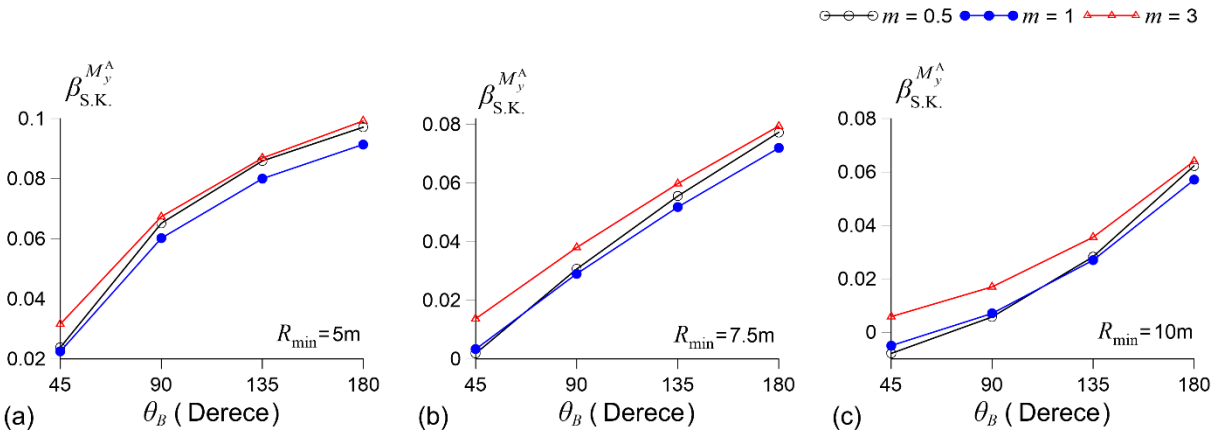
Şekil 11. Sınır koşulunun EFD kirişin $u_z^{\max}$ değerine etkisi. $\beta_{\text{S.K}}^{u_z^{\max}} = \left(u_z^{\max}\right)_{\text{A-A}} / \left(u_z^{\max}\right)_{\text{A-S}}$.



Şekil 12. Sınır koşulunun EFD kirişin T_z^{A} değerine etkisi. $\beta_{\text{S.K}}^{T_z^{\text{A}}} = \left(T_z^{\text{A}}\right)_{\text{A-A}} / \left(T_z^{\text{A}}\right)_{\text{A-S}}$.



Şekil 13. Sınır koşulunun EFD kirişin M_x^{A} değerine etkisi. $\beta_{\text{S.K}}^{M_x^{\text{A}}} = \left(M_x^{\text{A}}\right)_{\text{A-A}} / \left(M_x^{\text{A}}\right)_{\text{A-S}}$.



Şekil 14. Sınır koşulunun EFD kirişin M_y^{A} değerine etkisi. $\beta_{\mathrm{S.K}}^{M_y^{\mathrm{A}}} = \left(M_y^{\mathrm{A}}\right)_{\mathrm{A\text{-}A}} / \left(M_y^{\mathrm{A}}\right)_{\mathrm{A\text{-}S}}$.

SONUÇLAR

Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem eliptik kirişlerin statik analiz davranışı en büyük yer değiştirme değerleri ve mesnet tepkileri üzerinden parametrik bir çalışma ile sonlu eleman yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu parametrik çalışmada, farklı sınır koşulları, malzeme değişim parametreleri, minimum yarıçap oranı ve merkezi açı değerleri ele alınmıştır. Analizler, bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan ANSYS'in, üç boyutlu katı elemanı (SOLID186) ve bir boyutlu kiriş elemanı (BEAM188) kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma kapsamında seçilen parametrelere göre analiz sonuçları özetlenecek olursa:

- Malzeme gradyenti parametresi (m) etkisi: $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 parametreleri göz önüne alındığında:
  - Minimum yarıçap oranları ($R_{\min} = 10\mathrm{m}, 7.5\mathrm{m}$ ve $5\mathrm{m}$) ve her iki sınır koşulu için, en büyük yer değiştirme $u_z^{\max}$ (Şekil 7) ait β_m malzeme gradyenti parametresi (m) değeri arttıkça artmaktadır. β_m oranı farklı sınır koşulları için irdelenecek olursa:
    - Ankastre-ankastre (A-A) sınır koşuluna ait $\beta_m^{u_z^{\max}}$ oranı (Şekil 7a-c), en büyük değeri olan 0.6752'yi $m = 3$, $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$ ve $R_{\min} = 10\mathrm{m}$ durumu için alırken, en küçük değeri olan 0.3278'yi ise $m = 0$, $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$ ve $R_{\min} = 7.5\mathrm{m}$ durumunda almaktadır.
    - Ankastre-serbest (A-S) sınır koşuluna ait $\beta_m^{u_z^{\max}}$ oranı (Şekil 7d-f), en büyük değeri olan 0.9537'yi $m = 3$, $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$ ve $R_{\min} = 10\mathrm{m}$ durumu için alırken, en küçük değeri 0.3223 olup $m = 0$, $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$ ve $R_{\min} = 7.5\mathrm{m}$ durumu için almaktadır.
  - Ankastre-ankastre sınır koşulu için, A noktasındaki T_z^{A} kuvvetine ait β_m oranı (Şekil 8), seçilen her bir minimum yarıçap oranı ($R_{\min} = 10\mathrm{m}, 7.5\mathrm{m}$ ve $5\mathrm{m}$) ve merkez açı ($\theta_{\mathrm{B}} = 45°, 90°, 135°$ ve $180°$) değeri için malzeme gradyenti parametresi m arttıkça azalmaktadır.
- Sınır şartı etkisi: $m = 0.5, 1$ ve 3 parametreleri göz önüne alındığında:
  - En büyük yer değiştirmeye $u_z^{\max}$ ait $\beta_{\mathrm{S.K.}}$ oranı (Şekil 11), minimum yarıçap oranları ($R_{\min} = 10\mathrm{m}$ ve $7.5\mathrm{m}$) için merkez açı (θ_{B}) değeri arttıkça artmaktadır.

- A noktasındaki kuvvete T_z^{A} ait $\beta_{\mathrm{S.K.}}$ oranı (Şekil 12), minimum yarıçap oranı $R_{\min} = 10\mathrm{m}$ için, merkez açı değeri (θ_{B}) arttıkça azalmaktadır.
- A noktasındaki momentlere M_x^{A} (Şekil 13) ve M_y^{A} (Şekil 14) ait $\beta_{\mathrm{S.K.}}$ oranları seçilen her bir minimum yarıçap oranı ($R_{\min} = 10\mathrm{m}, 7.5\mathrm{m}$ ve $5\mathrm{m}$) için merkez açı (θ_{B}) değeri arttıkça artmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] E. S. Chin, Army focused research team on functionally graded armor composites, *Materials Science and Engineering: A.* 259(2) (1999) 155-161. doi:10.1016/S0921-5093(98)00883-1.

[2] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber & K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications, *Materials Science and Engineering: A.* 362(1-2) (2003) 40-60. doi:10.1016/S0921-5093(03)00580-X.

[3] S. Kumar, K. M. Reddy, A. Kumar, & G. R. Devi, Development and characterization of polymer–ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application, *Aerospace Science and Technology.* 26(1) (2013) 185-191. doi: 10.1016/j.ast.2012.04.002.

[4] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki & R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications* (Vol. 5). Springer Science & Business Media. 2013.

[5] C. Zhang, F. Chen, Z. Huang, M. Jia, G. Chen, Y. Ye, Y. Lin, W. Liu, B. Chen, Q. Shen L. Zhang, E. J. Lavernia, Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A.* 764 (2019) 138209. doi: 10.1016/j.msea.2019.138209.

[6] K.M. Liew, Z. Pan, LW. Zhang, The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and structures. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 63 (2020) 234601. doi:10.1007/s11433-019-1457-2.

[7] A. Kaw, *Mechanic of Composite Materials* (Second Edition). Taylor & Francis Group, LLC. 2006.

[8] E. S. Chin, Army focused research team on functionally graded armor composites, *Materials Science and Engineering: A.* 259(2) (1999) 155-161. doi:10.1016/S0921-5093(98)00883-1.

[9] C. M. R. Dias, H. Savastano Jr. & V. M. John Exploring the potential of functionally graded materials concept for the development of fiber cement. *Construction and Building Materials*. *24*(2) (2010) 140-146. doi:10.1016/j.conbuildmat.2008.01.017.

[10] G. Mathiyazhagan, N. Vasiraja, Finite element analysis on curved beams of various sections: *International Conference on Energy Efficient Technologies for Sustainability*, Nagercoil, India 2013: s.168-173. doi:10.1109/ICEETS.2013.6533377.

[11] C. H. Norris, J. B. Wilbur, Ş. Utku, *Elementary structural analysis*. McGraw-HILL. 1977.

[12] P. Chidamparam, & A. W. Leissa, Vibrations of planar curved beams, rings, and arches. *ASME. Appl. Mech. Rev.* 46(9) (1993) 467-483. doi:10.1115/1.3120374.

[13] G. Prathap, The curved beam/deep arch/finite ring element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 21(3) (1985) 389-407. doi:10.1002/nme.1620210302.

[14] B. Kang, C.H. Riedel, C.A. Tan, Free vibration analysis of planar curved beams by wawe propagation. *Journal of Sound and Vibration*. 260(1) (2003) 19-44. doi:10.1016/S0022-460X(02)00898-2.

[15] A. Cazzani, M. Malagù & E. Turco, Isogeometric analysis of plane-curved beams. *Mathematics and Mechanics of Solids.* 21(5) (2016) 562-577. doi:10.1177/1081286514531265.

[16] M. Şimşek, T. Kocatürk & Ş. D. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures.* 94(8) (2012) 2358-2364. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.020.

[17] E. Babilio, Dynamics of an axially functionally graded beam under axial load. *The European Physical Journal Special Topics*. 222(7) (2013) 1519-1539. doi:10.1140/epjst/e2013-01942-8.

[18] N. Shafiei, M. Kazemi & M. Ghadiri, Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams. *International Journal of Engineering Science*. 102 (2016) 12-26. doi:10.1016/j.ijengsci.2016.02.007.

[19] M. Azimi, S. S. Mirjavadi, N. Shafiei & A. M. S. Hamouda, Thermo-mechanical vibration of rotating axially functionally graded nonlocal Timoshenko beam. *Applied Physics A.* 123(1) (2017) 104. doi:10.1007/s00339-016-0712-5.

[20] M. H. Ghayesh, Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams. *Applied Mathematical Modelling.* 59 (2018) 583-596. doi:10.1016/j.apm.2018.02.017.

[21] S. Zheng, D. Chen & H. Wang, Size dependent nonlinear free vibration of axially functionally graded tapered microbeams using finite element method. *Thin-Walled Structures*. 139 (2019) 46-52. doi:10.1016/j.tws.2019.02.033.

[22] M. Ermis, U. N. Aribas, A. Kutlu, N. Eratlı, & M. H. Omurtag, Forced vibration analysis of axially FG straight beams by mixed FEM: *IV. Eurasian Conference on Civil and Environmental Engineering*, İstanbul, Türkiye, 2019: s. 894-899.

[23] U. N. Aribas, M. Ermis, A. Kutlu, N. Eratli & M. H. Omurtag, Elastically Damped Transient Response of Axially FG Straight Beams: *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 4, Rome, Italy 2019: s.19-25.

[24] A. Ebrahimi-Mamaghani, H. Sarparast, M. Rezaei, On the vibrations of axially graded Rayleigh beams under a moving load. *Applied Mathematical Modelling*. 84 (2020) 554-570. doi: 10.1016/j.apm.2020.04.002.

[25] S. Rajasekaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica* 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3

[26] G. C. Tsiatas, & A. E. Charalampakis, Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches. *Composite Structures.* 160 (2017) 256-266. doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.057.

[27] A. R. Noori, T. A. Aslan, & B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*. 200 (2018) 701-710. doi:10.1016/j.compstruct.2018.05.077.

[28] B. Temel, & A. R. Noori, Out-of-plane vibrations of shear-deformable AFG cycloidal beams with variable cross section. *Applied Acoustics*. 155 (2019) 84-96. doi:10.1016/j.apacoust.2019.05.010.

[29] J. K. Lee, & B. K. Lee, In-plane free vibration of uniform circular arches made of axially functionally graded materials. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 19(08) (2019) 1950084. doi:10.1142/S0219455419500846.

[30] A. Shahba, R. Attarnejad, S. Hajilar, A mechanical-based solution for axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. *20*(8) (2013) 696-707. doi:10.1080/15376494.2011.640971.

[31] S. Li, J. Hu, C. Zhai, L. Xie, A unified method for modeling of axially and/or transversally functionally graded beams with variable cross-section profile. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 41(2) (2013) 168-188. doi:10.1080/15397734.2012.709466.

[32] S. Rajesakaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica*. 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3.

[33] Ansys® Academic Research Mechanical, Mechanical APDL Release 2021 R1, Element Reference, ANSYS, Inc.

[34] M. Ermis & M. H. Omurtag, Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*. 131 (2017) 296-304. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010.

[35] B. Karami, D. Shahsavari, M. Janghorban & L. Li, Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams. *Composite Structures*. 216 (2019) 67-79. doi:10.1016/j.compstruct.2019.02.089.

EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ ELİPTİK KİRİŞLERİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Gökay Aydoğan[1], Merve Ermis[2], Umit N. Aribas[3] ve Mehmet H. Omurtag[4]
[1,2]Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli
[3,4]İstanbul Medipol Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Functionally graded materials have wide range of applications in space/aerospace, automotive and biomedical industries due to their thermal resistance properties, high strength, lightness, resistant against corrosion and abrasion. The objective of this study is to compare the natural frequencies of axially functionally graded elliptical beams via one dimensional or brick finite elements of computer based finite element package programs. Functionally graded material has a continuously varying function along the axis of the beam and consist of two-phase composite material. These materials are metal-matrix and ceramic-particle. The effective material properties of the functionally graded materials are determined according to the rule of mixture (Voigt model). Within the scope of the study, finite element solutions are obtained using BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS. The planar elliptical beam with rectangular cross section geometry has two different boundary conditions, namely, either cantilever or fixed at both ends. The effects of different boundary conditions, subtended angles and material variation parameters on the natural frequencies of axially functional graded planar elliptical beams were investigated in detail. Also, the convergence analysis for BEAM188 and SOLID186 elements of ANSYS finite element program are examined in detail.

Keywords: functionally graded material; finite element; free vibration analysis; elliptical beam

ÖZET

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler sahip oldukları ısıl direnç özellikleri, yüksek mukavemet dayanımları, hafiflikleri, korozyona ve aşınmaya karşı olan özellikleri nedeniyle uzay, havacılık, otomotiv ve biyomedikal sanayide geniş kullanım alanlarına sahiptirler. Bu çalışmanın amacı, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışını bilgisayar tabanlı sonlu eleman paket programlarının bir boyutlu veya üç boyutlu-katı sonlu elemanı yardımıyla incelemektir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kirişin ekseni boyunca sürekli değişen bir fonksiyona sahip olup iki fazlı kompozit malzemeden oluşmaktadır. Bu malzemeler metal-matris ve seramik-parçacıktır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) göre belirlenmiştir. Çalışma kapsamında, sonlu eleman çözümleri ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 elemanları kullanılarak elde edilmiştir. Dikdörtgen kesit geometrisine sahip düzlem eliptik kiriş konsol veya iki ucundan rijit tutulu olmak üzere

iki farklı sınır koşuluna sahiptir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem eliptik kirişlerin doğal frekansları üzerinde, farklı sınır koşulları, merkez açıları ve malzeme değişim parametrelerinin etkisi detaylı olarak araştırılmıştır. Aynı zamanda, ANSYS sonlu eleman programının BEAM188 ve SOLID186 yakınsama analizleri de detaylı olarak incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme; sonlu eleman; serbest titreşim analizi; eliptik kiriş

GİRİŞ

Fonksiyonel dereceli malzemeler optik, elektronik, uzay, havacılık, otomotiv, biyomedikal, enerji ve savunma sanayiinde, nükleer ve kimyasal tesislerde geniş kullanım alanına sahiptir [1-6]. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM) istenen doğrultularda sürekli değişen bir fonksiyona sahip iki fazlı kompozit malzemelerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler düşük ısı iletkenliği, yüksek sertlik ve aşınma direncine sahip ve düşük sürtünme katsayısı gibi diğer mükemmel mekanik ve kimyasal özelliklerle üretilmiştir [7]. Bu yeni nesil kompozit malzemelerin yapısal özelliklerinin derecelendirilmiş olması, çeşitli yükleme durumları altında (ör: termo-mekanik yükler) tabakalı kompozit yapılarda malzeme özelliklerinin ani olarak değişmesinden dolayı meydana gelen yüksek gerilme yığılmalarının neden olduğu çatlaklara ve ayrılmalara karşı yapıları daha dirençli hale getirmiştir [8-9]. Eğri eksenli düzlem kirişler mimarlık, inşaat mühendisliği ve makine mühendisliği uygulamalarında yaygın olarak kullanılan yapı elemanlarındandır [10-13]. Literatür incelendiğinde eksenel FD kirişlerin davranışları ile ilgili çalışmaların büyük çoğunluğunu doğru eksenli çubuklar oluşturmaktadır. Eksenel FD doğru eksenli kirişler/nano-kirişler dinamik davranışını inceleyen çalışmalardan bazıları sıralanacak olursa [14-23]. Literatürde eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğri eksenli düzlem kirişlerin analizi ilgili çalışmaların sayısı daha azdır. Bu çalışmalardan bazıları sıralanacak olursa; Rajesakaran [24], eksenel FD eğri eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim analizini kayma etkisinin gözetildiği diferansiyel dönüşüm metodu kullanarak incelemiştir. Tsiatas ve Charalampakis [25] dört parametreli üstel fonksiyon veya beş parametreli trigonometrik fonksiyon ile tariflenen malzeme dağılımına sahip eksenel FD doğru eksenli ve dairesel düzlem kirişlerin doğal frekansları üzerinden optimizasyon problemini ele almışlardır. Noori ve ark. [26], tamamlayıcı fonksiyon yöntemini kullanarak eksenel FD parabolik kirişlerin serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizini incelemişlerdir. Temel ve Noori [27] değişken kesitli eksenel FD sikloid kirişlerin serbest titreşim ve zorlanmış titreşim analizini kirişteki kayma etkilerini de göz önünde bulundurarak tamamlayıcı fonksiyon yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Lee ve Lee [28], deneme (trial) özdeğer yöntemi ile geliştirilmiş doğrudan integral yöntemini kullanarak eksenel FD dairesel kirişlerin serbest titreşim davranışını incelemişlerdir.

Bu çalışmanın amacı, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin serbest titreşim analizini sonlu eleman yöntemini kullanarak incelemektir. Sonlu eleman çözümlerinde ANSYS'in üç boyutlu katı eleman (SOLID186) ve global yapıda bir boyutlu kiriş eleman (BEAM188) [29] kullanılmıştır. Ayrıca, EFD eliptik kirişin doğal frekans değerleri için ANSYS'in üç boyutlu katı eleman ve bir boyutlu kiriş eleman sonuçları üzerinden performans analizi yapılmıştır. Parametrik çalışmada, EFD eliptik kirişin doğal frekansları üzerinden farklı yarıçap oranları, merkez açı değerleri, farklı malzeme dağılım oranları ve farklı sınır koşullarının etkisi detaylı olarak incelenerek özgün örnekler literatüre sunulmuştur.

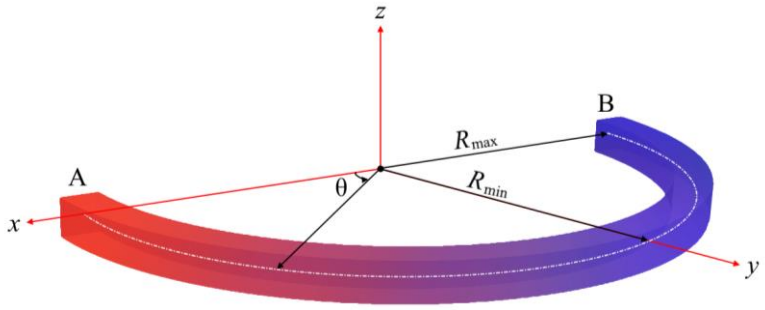
FORMÜLASYON

Bu bölümde sırasıyla eliptik kirişin geometrisi, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme modeli ve serbest titreşim analizinde kullanılan ANSYS sonlu eleman programında tanımlı elemanlara ait açıklamalara yer verilmiştir.

Eliptik Kiriş Geometrisi: Kartezyen koordinat sisteminde tanımlı *x*-*y* düzleminde bulunan düzlem eğrisel kirişe ait konum vektörü ifadesini *x* ekseninden itibaren ölçülen θ açısı parametre olarak seçilerek,

$$\mathbf{r}(\theta) = \{x(\theta), y(\theta)\} \tag{1}$$

yazılır.



Şekil 1. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kiriş.

Eliptik kirişin (Şekil 1) *x*-*y* düzlemindeki bileşenleri,

$$x(\theta) = R_{\max}\cos\theta, \quad y(\theta) = R_{\min}\sin\theta \tag{2}$$

olmak üzere, burada $R_{\min} > 0$ ve $R_{\max} > 0$ sırasıyla minimum ve maksimum yarıçap değerlerini göstermektedir. Eliptik kirişin yay boyu s'nin gradyenti olan $c(\theta)$ (1) deki konum vektörü üstünden tanımlanırsa,

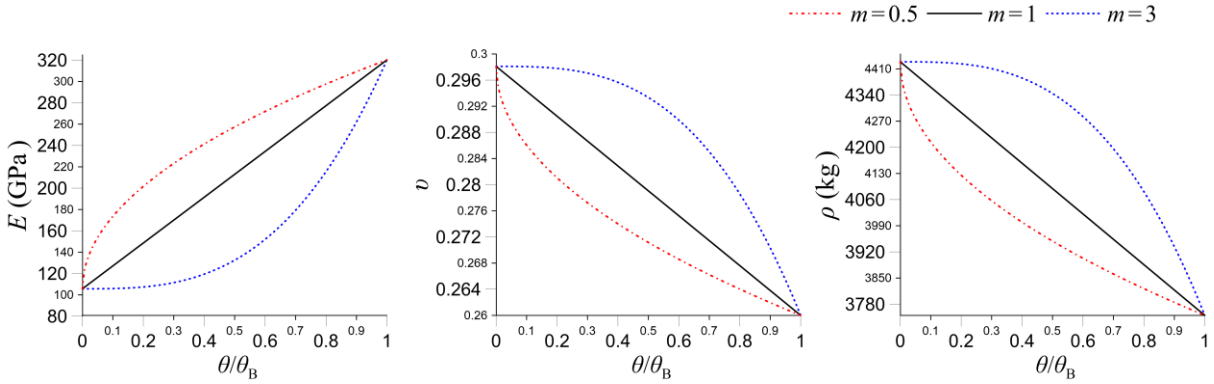
$$c(\theta) = \left\|\mathbf{r}_{,\theta}\right\|, \; \mathrm{d}s = c(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

dir. Burada virgülden sonraki alt indis ifadesi θ parametresine göre türevi göstermektedir **Error! Reference source not found.**. (3) de verilen yay boyu gradyenti $c(\theta)$ yardımıyla kirişin toplam uzunluğu $S = \int_0^{\theta_B} c(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ formülü ile bulunur. θ_B eliptik kirişin merkez açısını göstermektedir (Şekil 1).

Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş (EFD) Malzeme Modeli: İki fazlı malzemeden oluşan kompozit kirişte malzeme dağılımı eğrisel kirişin yatay açı θ parametresine bağlı olarak kiriş ekseni boyunca fonksiyonel olarak değişmektedir. Kompozit malzemenin etkin malzeme özellikleri karışım kuralına (Voigt model) **Error! Reference source not found.** göre,

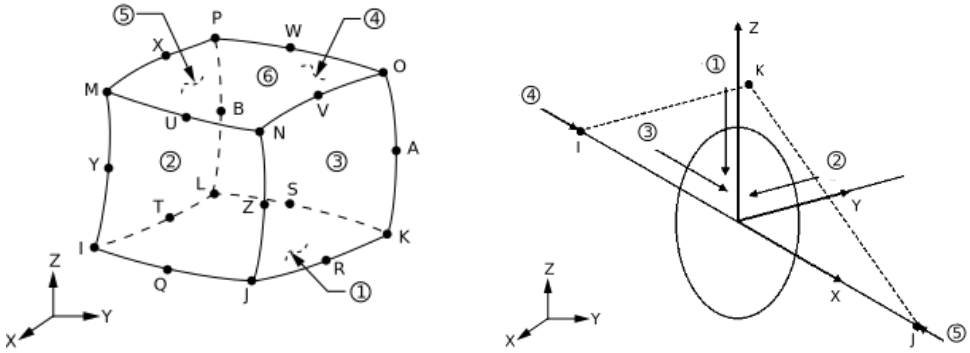
$$\begin{aligned} E(\theta) &= E_{\mathrm{A}} + (E_{\mathrm{B}} - E_{\mathrm{A}})\left(\frac{\theta}{\theta_B}\right)^m \\ \upsilon(\theta) &= \upsilon_{\mathrm{A}} + (\upsilon_{\mathrm{B}} - \upsilon_{\mathrm{A}})\left(\frac{\theta}{\theta_B}\right)^m \\ \rho(\theta) &= \rho_{\mathrm{A}} + (\rho_{\mathrm{B}} - \rho_{\mathrm{A}})\left(\frac{\theta}{\theta_B}\right)^m \end{aligned} \tag{4}$$

verilebilir. Burada, eğrisel kirişin θ'ya göre etkin malzeme özellikleri ise sırasıyla elastisite modülü (E), Poisson oranı (υ) ve yoğunluğu (ρ) dur. $m \geq 0$ malzeme değişim parametresini göstermektedir. Bu çalışma kapsamında iki fazlı kompozit malzeme metal (Ti-6Al-4V) ve seramik (Al_2O_3) malzeme seçilmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede eğrisel kirişin başlangıç noktasından (A noktası) %100 metal malzeme ile başlarken, en son noktasında (B noktası) ise %100 seramik malzeme ile sonlanmaktadır. Malzeme değişim parametresi $m = 0$ için tüm çubuk izotrop homojen seramik malzemeden oluşurken, $m = \infty$ değeri için ise tüm çubuk izotrop homojen metal malzemeden oluşmaktadır. Metal (Ti-6Al-4V) malzemesine ait malzeme özellikleri $E_A = 105.7\,\text{GPa}$, $\upsilon_A = 0.2981$ ve $\rho_A = 4429\,\text{kg/m}^3$'tür. Seramik ($Al_2O_3$) malzemesine ait malzeme özellikleri ise $E_B = 320.24\,\text{GPa}$, $\upsilon_B = 0.26$ ve $\rho_B = 3750\,\text{kg/m}^3$'tür. Metal ve seramik malzemelerine ait mekanik malzeme özellikleri (4) numaralı denklemde yerleştirilirse çubuk ekseni boyunca etkin malzeme özellikleri elde edilir (Şekil 2).



Şekil 2. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel kirişin etkin malzeme değerlerinin normalize edilmiş yatay açı parametresi θ / θ_B ye göre değişimi

Sonlu Eleman Yöntemi: Bu çalışma, bilgisayar tabanlı sonlu eleman programı olan ANSYS [27] kullanılarak eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişin serbest titreşim davranışı incelenmiştir.



a) b)

Şekil 3. ANSYS sonlu eleman programı a) SOLID186 üç boyutlu (3B) 20 adet düğüm noktasına sahip katı eleman (ilgili şekil [29]'dan alınmıştır.) ve b) BEAM188 global yapıda 2 adet düğüm noktasına sahip bir boyutlu kiriş eleman (ilgili şekil [29]'dan alınmıştır.)

Kiriş elemanın modellenmesinde kullanılan ANSYS'in sonlu eleman modelleri ise;

ANSYS SOLID186: Yüksek mertebeden üç boyutlu (3B) ve 20 düğüm noktasına sahip ikinci dereceden yer değiştirme davranışı gösteren katı elemandır (Şekil 3.a). Her bir düğüm noktasında 3 adet serbestlik derecesi bulunur: x, y ve z doğrultularında ötelenmelerdir [29].

ANSYS BEAM188: İnce ve orta derecede yükseklik/uzunluk oranı bulunan kiriş yapılarını analiz etmek amacıyla kullanılır. Timoshenko kiriş teorisi üzerinden kayma deformasyonu etkilerini de hesaba katarak formüle edilmiştir. global yapıda 2 adet düğüm noktasına sahip bir boyutlu kiriş eleman (Şekil 3.b) her bir düğüm noktasında 6 adet serbestlik derecesi bulunur: Bunlardan üçü x, y ve z doğrultularında ötelenmeler olup, diğer üçü ise x, y ve z eksenleri etrafında kesit dönmeleridir [29].

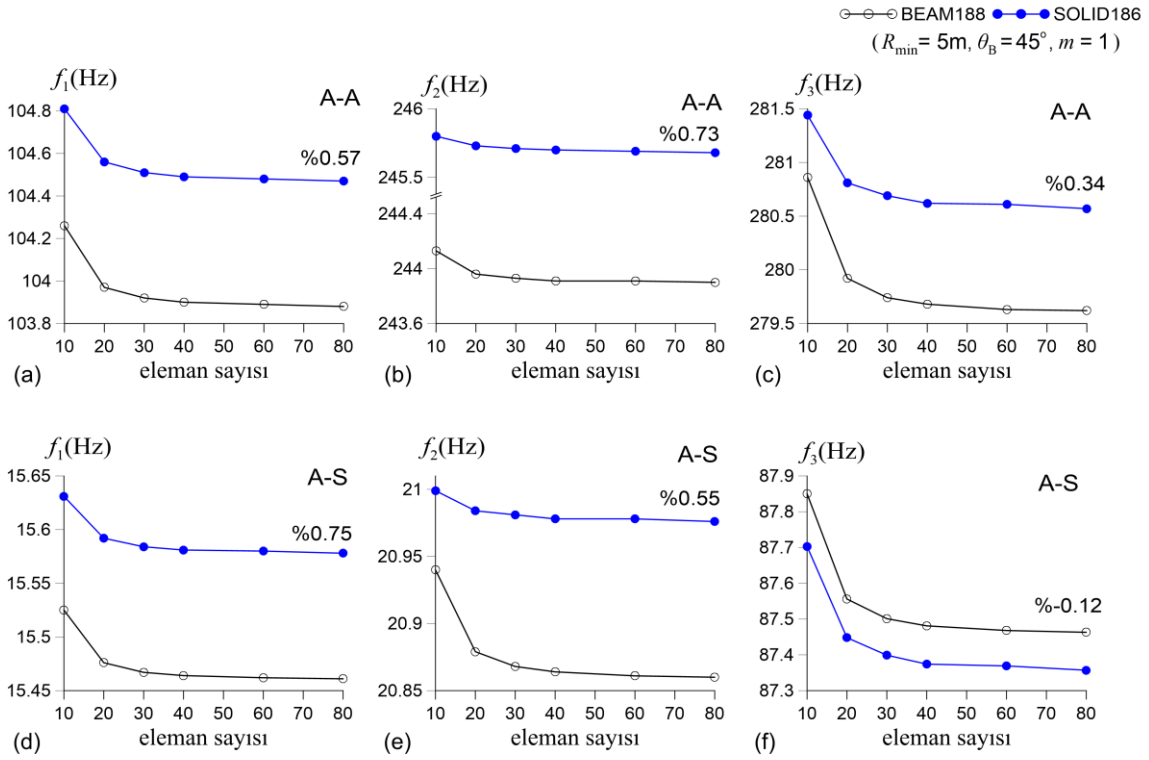
SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal örnekler kısmında, farklı malzeme değişim parametreleri (m), farklı merkez açı değerleri θ ve farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min}$) için ankastre-ankastre ya da ankastre-serbest sınır şartına sahip eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) eliptik kirişlerin serbest titreşim davranışı ANSYS programı ile incelenmiştir. Sayısal sonuçlar, yakınsama analizi ve parametrik analiz olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. ANSYS çözümlerinde elemandaki malzeme özellikleri eğrisel kirişin iki düğüm noktasındaki malzeme özelliklerinin ortalaması olarak alınmıştır.

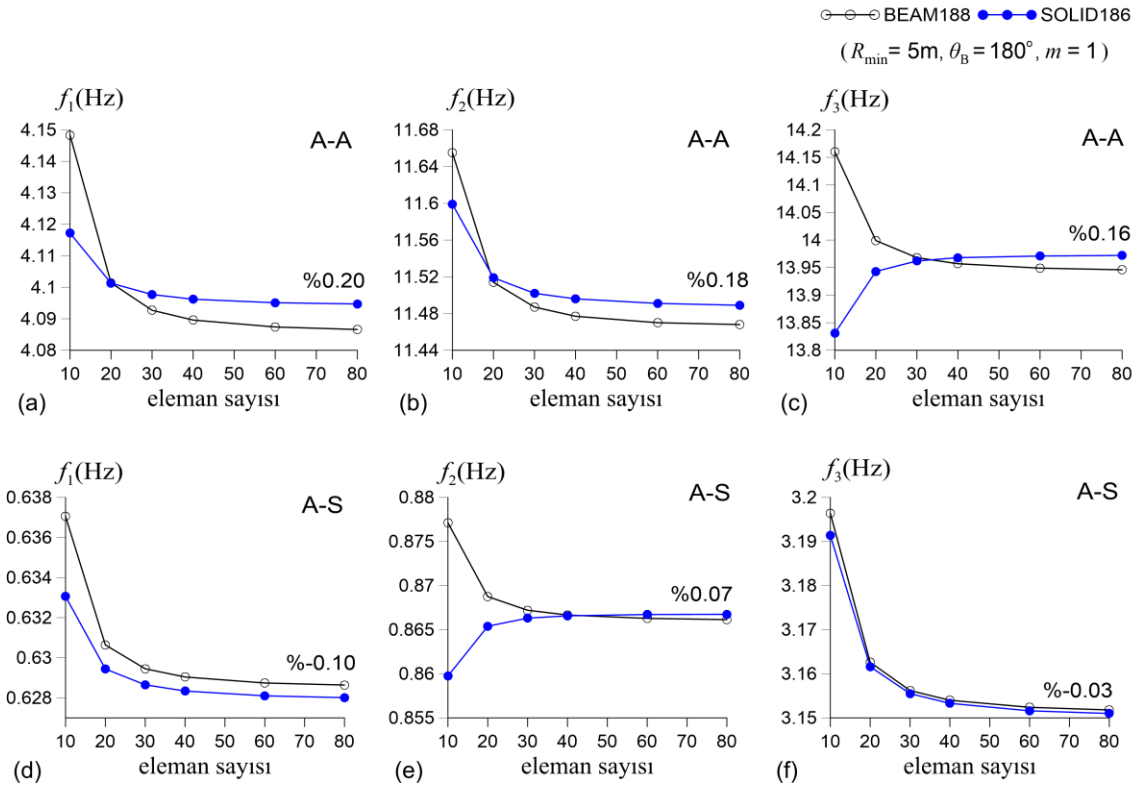
Yakınsama Analizi:

Malzeme değişim parametresi ($m = 0.5, 1$ ve 3), farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min} = 10\text{m}, 7.5\text{m}$ ve 5m), farklı merkezi açı değerleri ($\theta_B = 45°, 90°, 135°$ ve $180°$) farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre ve ankastre-serbest) üzerinden incelenmiştir. Tüm örneklerde eliptik kirişin en büyük yarıçap değeri $R_{\max} = 10\text{m}$'dir. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 10\text{m}$ için dairesel düzlem çubuk elde edilmektedir. Tüm kirişler dikdörtgen kesite sahiptir. Kesit genişliği 0.48m, yüksekliği ise 0.36m'dir. Yakınsama analizlerinde eğrisel çubuklar sırasıyla 10, 20, 30, 40, 60 ve 80 adet doğru eksenli çubuk eleman üzerinden ayrıklaştırılmış olup ANSYS programında BEAM188 ya da SOLID186 elemanları üzerinden tanımlanarak serbest titreşim analizleri yapılmıştır. Örneğin, $\theta_B = 180°$ ve $R_{\min} = 5\text{m}$ için elde edilen çubuk geometrisinin 80 adet doğru eksenli çubuk eleman üzerinden tanımlanan SOLID186 (katı elemanın bir boyutu 0.06m) ve BEAM188 elemanlarının toplam serbestlik dereceleri sırasıyla 307791 ve 5766'dır. Ayrıca, $m = 1$ ve ankastre-ankastre sınır koşulu için analiz süreleri incelendiğinde SOLID186 ve BEAM188 için sırasıyla 27.469sn ve 1.188sn (Intel® Core™ i7-6700HQ CPU, 2.60 GHz, 12GB RAM) olduğu gözlemlenmiştir. Ele alınan tüm örneklerde 60 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubuğun doğal frekans değerleri ve 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubuğun doğal frekans değerlerine göre ANSYS'nin her bir elemanı BEAM188 ve SOLID186 için ayrı ayrı normalize edilmiştir. İlk üç doğal frekans değerleri göz önüne alındığında yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri SOLID186 ve BEAM188 için %0.058 ve %0.053'dir. Yukarıda bahsi geçen parametreler için BEAM188 ve SOLID186 elemanlarının performansları bazı durumlar için Şekil 4-7 da sunulmuştur. 80 adet doğrusal eleman üzerinden ayrıklaştırılan eğri eksenli çubukların BEAM 188 eleman üzerinden elde edilen sonuçları SOLID186 eleman üzerinden elde edilen sonuçlarına göre normalize edilerek hesaplanan yüzde farklar Şekil 4-7'da sunulmuştur. Elde edilen sonuçlara göre:

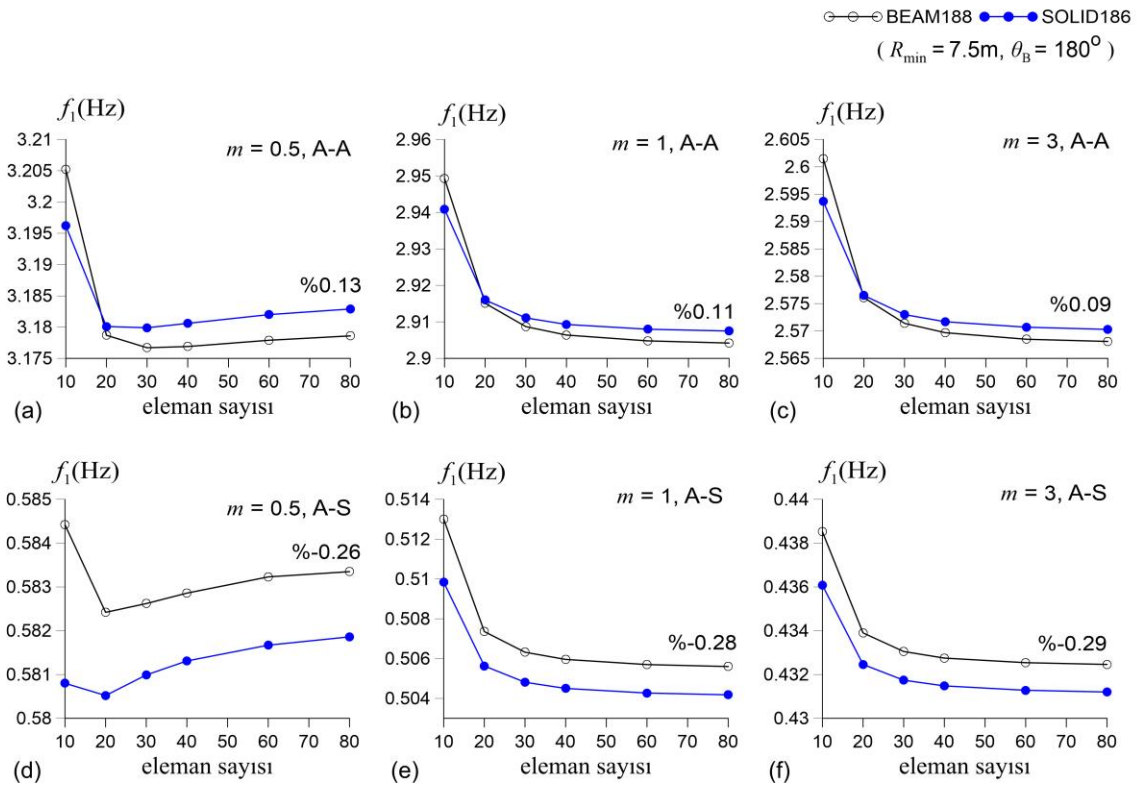
- $R_{min}=5$m ve $m=1$ sahip eksenel FD eliptik kirişin ankastre-ankastre (A-A) ve ankastre-serbest (A-S) sınır koşulları için merkez açı değerlerinin $\theta_B=45°$ ve $\theta_B=180°$ değişimine göre ilk üç doğal frekans değeri için yakınsama analizi sırasıyla Şekil 4 ve 5'te sunulmuştur. Analiz sonuçlarına göre:
  - $\theta_B=45°$'ye ait Şekil 4.c ve e deki (A-A sınır koşulu ve 3. doğal frekans değerleri ile A-S sınır koşulu ve 2. doğal frekans) için yakınsama hızları hariç diğer durumlar için iki tip elemanın yakınsama hızları hemen hemen aynıdır (Şekil 4).
  - $\theta_B=180°$'ye ait Şekil 5.a ve d'de sırasıyla A-A ve A-S sınır şartları için verilen 1. doğal frekans değerlerine ait yakınsama hızları göz önüne alındığında SOLID186 eleman BEAM188 elemana göre daha hızlı yakınsamaktadır. Şekil c ve e'deki (A-A sınır koşulu ve 3. doğal frekans değerleri ile A-S sınır koşulu ve 2. doğal frekans) için SOLID 186 ve BEAM188'in yakınsama hızları hemen hemen aynıdır. Hatta, A-S sınır koşulu için BEAM188 ve SOLID186 10 eleman hariç diğer tüm eleman sonuçlarında üst üste düşmektedir.
- $\theta_B=180°$'ye sahip eksenel FD eliptik kirişin ankastre-ankastre (A-A) ve ankastre-serbest (A-S) sınır koşulları için malzeme gradyenti parametrelerinin ($m=0.5,1$ ve 3) değişimine göre ilk doğal frekans değeri için yakınsama analizi sırasıyla $R_{min}=7.5$m ve $R_{min}=10$m Şekil 6 ve 7'de sunulmuştur. Analiz sonuçlarına göre, malzeme değişim parametresinin değişimi ($m=0.5,1$ ve 3) SOLID186 ve BEAM188'in yakınsama hızlarında hemen hemen bir farklılığa neden olmamıştır (Şekil 6-7).



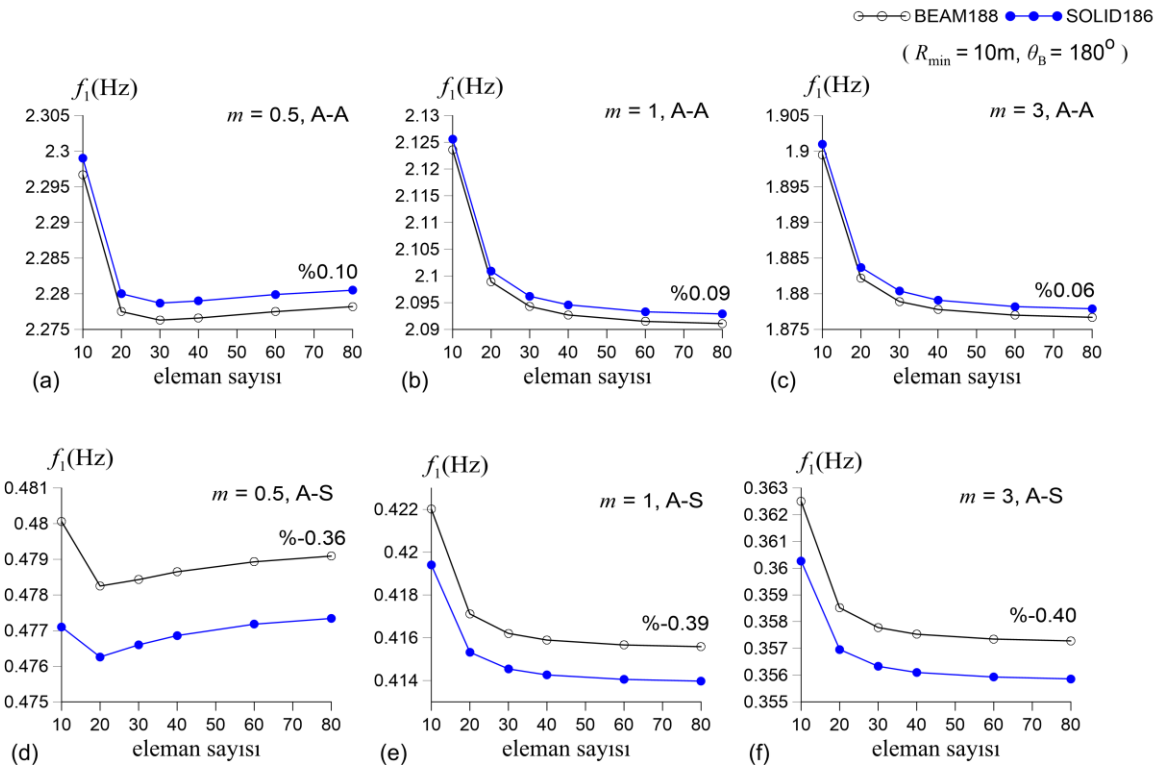
Şekil 4. Merkez açısı $\theta_B=45°$ olan EFD eliptik kirişin ilk üç doğal frekans değeri f için yakınsama analizi ($R_{min}=5$m , $m=1$)



Şekil 5. Merkez açısı $\theta_B = 180°$ EFD eliptik kirişin ilk üç doğal frekans değeri f için yakınsama analizi ($R_{min} = 5\text{m}$, $m = 1$)



Şekil 6. Minimum yarıçap değeri $R_{min} = 7.5\text{m}$ olan EFD eliptik kirişin birinci doğal frekans değeri f için yakınsama analizi ($\theta_B = 180°$, $m = 0.5,1,3$)



Şekil 7. Minimum yarıçap değeri $R_{\min}=10\text{m}$ olan EFD dairesel kirişin birinci doğal frekans değeri f için yakınsama analizi ($\theta_B=180°$, $m=0.5,1,3$)

Parametrik Analiz:

Malzeme gradyenti parametresinin (m) değişimin kirişin doğal frekansı üzerindeki etkisini görebilmek için $m=0.5,1$ ve 3 malzeme parametrelerinin yanı sıra, izotrop homojen seramik malzemesi ve metal malzemesine karşılık gelen $m=0$ ve $m=\infty$ değişim parametreleri de göz önüne alınmıştır. Malzeme değişim parametresinin etkisi yakınsama analizi kısmında verilen farklı sınır koşulları (ankastre-ankastre ve ankastre-serbest), farklı minimum yarıçap değerleri ($R_{\min}=10\text{m}, 7.5\text{m}$ ve 5m) ile farklı merkezi açı değerleri ($\theta_B=45°, 90°, 135°$ ve $180°$) üzerinden incelenmiştir. En küçük yarıçap değeri $R_{\min}=10\text{m}, 7.5\text{m}$ ve 5m için elde edilen sonuçlar sırasıyla ankastre-serbest sınır koşulu için Çizelge 1-3 ve ankastre-ankastre sınır koşulu için Çizelge 4-6 arasında sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar özetlenecek olursa:

Malzeme gradyenti parametresi (m): Malzeme değişimi parametre değerleri $m=0, 0.5, 1$ ve 3 (Çizelge 1-6) sahip eliptik kirişlerin birinci doğal frekans değerleri malzeme değişim parametre değeri $m=\infty$ olan eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir sınır koşulu, merkezi açı (θ) değeri ve en küçük yarıçap ($R_{\min}$) değerleri için $\%\text{fark}=\left(1-f_{m=\infty}/f_{m=i}\right)\times 100$ ($i=0, 0.5, 1$ ve 3) formülü üzerinden normalize edilerek yüzde farklar hesaplanmıştır. Şöyle ki;

- Ankastre-serbest sınır koşulu için,
  - $R_{\min}=10\text{m}$: malzeme değişim parametresi $m=0, 0.5, 1$ ve 3 ait artış yüzdeleri sırasıyla $\theta_B=45°$ için %89.4, %42.0, %23.5, %7.1; $\theta_B=90°$ için %89.1, %42.0, %23.5, %6.7; $\theta_B=135°$ için %90.9, %43.6, %23.6, %7.3; $\theta_B=180°$ için ise %90.9, %45.5, %24.2, %9.1'dir.

- $R_{\min} = 7.5\text{m}$: malzeme değişim parametresi $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 ait artış yüzdeleri sırasıyla $\theta_B = 45°$ için %89.5, %43.1, %24.4, %7.6; $\theta_B = 90°$ için %90.1, %44.7, %25.7, %7.9; $\theta_B = 135°$ için %93.8, %44.6, %26.2, %7.7; $\theta_B = 180°$ için ise %92.5; %45.0, %25.0, %7.5'dir.
- $R_{\min} = 5\text{m}$: malzeme değişim parametresi $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 ait artış yüzdeleri sırasıyla $\theta_B = 45°$ için %89.9, %45.5, %26.8, %8.7; $\theta_B = 90°$ için %90.3, %47.7, %28.7, %9.2; $\theta_B = 135°$ için %90.8, %48.7, %28.9, %9.2; $\theta_B = 180°$ için %90.0, % 46.0, %26.0, %6.0'dır.

▪ Ankastre-ankastre sınır koşulu için,

- $R_{\min} = 10\text{m}$: malzeme değişim parametresi $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 ait artış yüzdeleri sırasıyla $\theta_B = 45°$ için %89.3, %56.4, %42.3, %23.4; $\theta_B = 90°$ için %96.5, %61.5, %47.5, %29.5; $\theta_B = 135°$ için %89.3, %55.0, %41.8, %26.1; $\theta_B = 180°$ için %88.5, %54.1, %41.2, %27.0'dir.
- $R_{\min} = 7.5\text{m}$: malzeme değişim parametresi $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 ait artış yüzdeleri sırasıyla $\theta_B = 45°$ için %89.2, %57.0, %43.0, %24.4; $\theta_B = 90°$ için %89.2, %56.7, %43.3, %25.6; $\theta_B = 135°$ için %89.1, %55.9, %42.5, %25.4; $\theta_B = 180°$ için %90.2, %55.9, %42.6, %26.0'dır.
- $R_{\min} = 5\text{m}$: malzeme değişim parametresi $m = 0, 0.5, 1$ ve 3 ait artış yüzdeleri sırasıyla $\theta_B = 45°$ için %89.3, %58.2, %44.5, %26.0; $\theta_B = 90°$ için %89.3, %59.3, % 45.9, %27.1; $\theta_B = 135°$ için %89.5, %58.9, %45.1, %25.8; $\theta_B = 180°$ için %89.5, %57.1, %42.5, %23.3'tür.

Çizelge 1. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 10\text{m}$ olan dairesel kirişin ankastre-serbest sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik (Al_2O_3), metal (Ti-6Al-4V).

Sınır Koşulu	Merkez Açılar(θ_B)	Seramik ($m = 0$)	Seramik-Metal			Metal ($m = \infty$)
			$m = 0.5$	$m = 1$	$m = 3$	
ankastre-serbest	45°	8.79	6.59	5.73	4.97	4.64
	90°	2.25	1.69	1.47	1.27	1.19
	135°	1.05	0.79	0.68	0.59	0.55
	180°	0.63	0.48	0.41	0.36	0.33

Çizelge 2. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 7.5\text{m}$ olan eliptik kirişin ankastre-serbest sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik (Al_2O_3), metal (Ti-6Al-4V).

Sınır Koşulu	Merkez Açılar(θ_B)	Seramik ($m = 0$)	Seramik-Metal			Metal ($m = \infty$)
			$m = 0.5$	$m = 1$	$m = 3$	
ankastre-serbest	45°	13.76	10.39	9.03	7.81	7.26
	90°	2.89	2.20	1.91	1.64	1.52
	135°	1.26	0.94	0.82	0.70	0.65
	180°	0.77	0.58	0.50	0.43	0.40

Çizelge 3. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 5\text{m}$ olan dairesel kirişin ankastre-serbest sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik (Al_2O_3), metal (Ti-6Al-4V).

Sınır Koşulu	Merkez Açılar(θ_B)	Seramik ($m = 0$)	Seramik-Metal			Metal ($m = \infty$)
			$m = 0.5$	$m = 1$	$m = 3$	
ankastre-serbest	45°	23.34	17.88	15.58	13.36	12.29
	90°	3.71	2.88	2.51	2.13	1.95
	135°	1.45	1.13	0.98	0.83	0.76
	180°	0.95	0.73	0.63	0.53	0.50

Çizelge 4. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 10\text{m}$ olan dairesel kirişin ankastre-ankastre sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik (Al_2O_3), metal (Ti-6Al-4V).

Sınır Koşulu	Merkez Açılar(θ_B)	Seramik ($m = 0$)	Seramik-Metal			Metal ($m = \infty$)
			$m = 0.5$	$m = 1$	$m = 3$	
ankastre-ankastre	45°	53.64	44.32	40.32	34.98	28.34
	90°	12.77	10.50	9.59	8.42	6.5
	135°	5.30	4.34	3.97	3.53	2.80
	180°	2.79	2.28	2.09	1.88	1.48

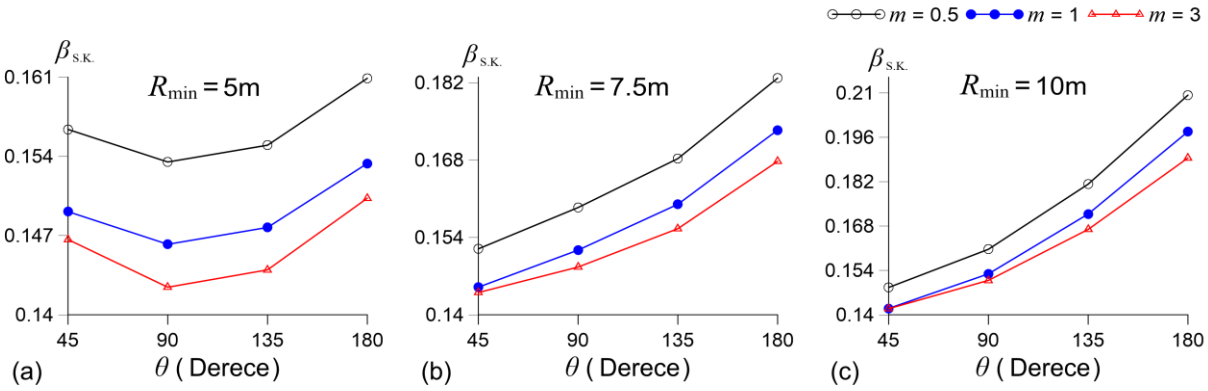
Çizelge 5. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 7.5\text{m}$ olan dairesel kirişin ankastre-ankastre sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik (Al_2O_3), metal (Ti-6Al-4V).

Sınır Koşulu	Merkez Açılar(θ_B)	Seramik ($m = 0$)	Seramik-Metal			Metal ($m = \infty$)
			$m = 0.5$	$m = 1$	$m = 3$	
ankastre-ankastre	45°	82.43	68.37	62.31	54.20	43.56
	90°	16.65	13.79	12.61	11.05	8.80
	135°	6.77	5.58	5.10	4.49	3.58
	180°	3.88	3.18	2.91	2.57	2.04

Çizelge 6. En küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 5\text{m}$ olan eliptik kirişin ankastre-ankastre sınır koşulu için birinci doğal frekans değerleri (Hz). Seramik (Al_2O_3), metal (Ti-6Al-4V).

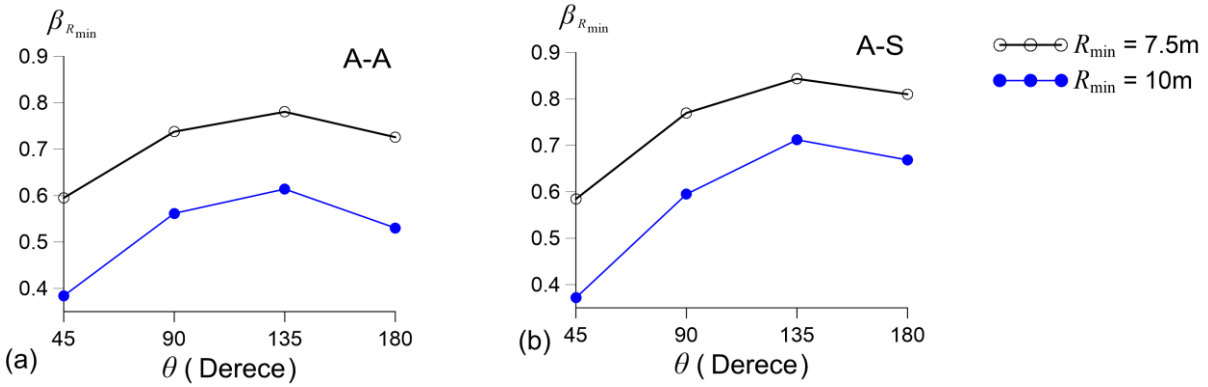
Sınır Koşulu	Merkez Açılar(θ_B)	Seramik ($m = 0$)	Seramik-Metal			Metal ($m = \infty$)
			$m = 0.5$	$m = 1$	$m = 3$	
ankastre-ankastre	45°	136.88	114.35	104.47	91.09	72.29
	90°	22.32	18.78	17.20	14.99	11.79
	135°	8.66	7.26	6.63	5.75	4.57
	180°	5.44	4.51	4.09	3.54	2.87

Sınır Şartı: Sınır koşulunun etkisi ankastre-ankastre (A-A) olan eliptik kirişin birinci doğal frekans değeri ankastre-serbest (A-S) olan eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir merkezi açı (θ) ve en küçük yarıçap ($R_{\min}$) değerleri ile malzeme değişim parametreleri $m = 0.5,1$ ve 3 için $\beta_{\text{S.K.}} = f_{\text{A-A}} / f_{\text{A-S}}$ formülü üzerinden normalize edilerek oranlar Şekil 8 de verilmiştir.



Şekil 8. Sınır koşulunun EFD kirişin birinci doğal frekans değerine etkisi ($\beta_{\text{S.K.}} = f_{\text{A-A}} / f_{\text{A-S}}$).

En Küçük Yarıçap Değeri ($R_{\min}$): En küçük yarıçap değerleri $R_{\min} = 10\text{m}, 7.5\text{m}$ sahip olan EFD düzlem eğrisel kirişin birinci doğal frekans değerleri en küçük yarıçap değeri $R_{\min} = 5\text{m}$ olan EFD eliptik kirişin sonuçlarına göre her bir merkezi açı (θ_{B}) değeri ve sınır koşulu için $\beta_{R_{\min}} = f_i / f_{R_{\min}=5\text{m}}$ $(i : R_{\min} = 10\text{m}, R_{\min} = 7.5\text{m})$ formülü üzerinden normalize edilerek elde edilen oranlar malzeme değişim parametresi $m = 3$ için Şekil 9'da verilmiştir.



Şekil 9. En küçük yarıçap $R_{\min}$ değerinin EFD kirişin birinci doğal frekans değerine etkisi

$$\beta_{R_{\min}} = f_i / f_{R_{\min}=5\text{m}} \ (i : R_{\min} = 10\text{m}, R_{\min} = 7.5\text{m})$$

SONUÇLAR

Farklı sınır koşullarının, malzeme değişim parametreleri ile eliptik kirişin farklı merkez açıları ve minimum yarıçap değerlerinin eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eliptik kirişlerin doğal frekansları üzerindeki etkisi bilgisayar tabanlı sonlu eleman paket programları (ANSYS'in üç boyutlu katı eleman (SOLID186) ve bir boyutlu kiriş eleman BEAM188) ile detaylı olarak incelenmiştir. Bu çalışma kapsamında seçilen parametreler göz önüne alındığında elde edilen analiz sonuçları özetlenecek olursa:

- Sınır şartı etkisi $\beta_{\text{S.K.}} = f_{\text{A-A}} / f_{\text{A-S}}$ oranı üzerinden farklı $R_{\min}$, θ_{B} ve m parametrelerine göre incelendiğinde (Şekil 8),
  - Her bir $R_{\min}$ ve m parametresi sabit tutulup, $\beta_{\text{S.K.}}$ oranının değişimi farklı θ_{B} değerlerine göre incelendiğinde bu oranın aldığı en büyük ve en küçük değer arasındaki farka göre sıralama yapılırsa en büyük fark $R_{\min} = 10\text{m}$ ve en küçük fark ise $R_{\min} = 5\text{m}$ için elde edilir.
  - $\beta_{\text{S.K.}}$ oranı, en büyük değerini $\beta_{\text{S.K}}^{\max} = 0.209$ olarak $R_{\min} = 10\text{m}$, $\theta_{\text{B}} = 180°$ ve $m = 0.5$ durumu için alırken; en küçük değerini ise $\beta_{\text{S.K}}^{\min} = 0.1419$ olarak $R_{\min} = 10\text{m}$, $\theta_{\text{B}} = 45°$ ve $m = 3$ durumu için almaktadır.
- En küçük yarıçap değeri etkisi $\beta_{R_{\min}}$ oranı üzerinden malzeme değişim parametresi $m = 3$ için incelendiğinde (Şekil 9),
  - Her bir $R_{\min}$ değeri ve sınır koşulu sabit tutulup, $\beta_{R_{\min}}$ oranının değişimi farklı θ_{B} değerlerine göre incelendiğinde bu oran en küçük ve en büyük değerlerini sırasıyla merkez açısı $\theta_{\text{B}} = 45°$ ve $\theta_{\text{B}} = 135°$ 'de almaktadır.
  - $\beta_{R_{\min}}$ oranı, en büyük değerini $\beta_{R_{\min}}^{\max} = 0.843$ olarak $R_{\min} = 7.5\text{m}$, $\theta_{\text{B}} = 135°$ ve ankastre-serbest sınır koşulu durumu için alırken; en küçük değerini ise $\beta_{R_{\min}}^{\min} = 0.372$ olarak $R_{\min} = 10\text{m}$, $\theta_{\text{B}} = 45°$ ve ankastre-serbest sınır koşulu durumu için almaktadır.

KAYNAKLAR

[1] E. S. Chin, Army focused research team on functionally graded armor composites. *Materials Science and Engineering: A.* 259(2) (1999) 155-161. doi:10.1016/S0921-5093(98)00883-1.

[2] W. Pompe, H. Worch, M. Epple, W. Friess, M. Gelinsky, P. Greil, U. Hempel, D. Scharnweber & K. Schulte, Functionally graded materials for biomedical applications. *Materials Science and Engineering: A.* 362(1-2) (2003) 40-60. doi:10.1016/S0921-5093(03)00580-X.

[3] Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki & R. G. Ford, *Functionally graded materials: design, processing and applications* (Vol. 5). Springer Science & Business Media. 2013.

[4] S. Kumar, K. M. Reddy, A. Kumar, & G. R. Devi, Development and characterization of polymer–ceramic continuous fiber reinforced functionally graded composites for aerospace application. *Aerospace Science and Technology.* 26(1) (2013) 185-191. doi: 10.1016/j.ast.2012.04.002.

[5] C. Zhang, F. Chen, Z. Huang, M. Jia, G. Chen, Y. Ye, Y. Lin, W. Liu, B. Chen, Q. Shen L. Zhang, E. J. Lavernia, Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A.* 764 (2019) 138209. doi: 10.1016/j.msea.2019.138209.

[6] K.M. Liew, Z. Pan, LW. Zhang, The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and structures. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 63 (2020) 234601. doi:10.1007/s11433-019-1457-2.

[7] A. Avey & M. Süzer, Karışık sınır koşulları altında fonksiyonel dereceli silindirik kabukların titreşim analizi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*. 8(3) (2019) 1-15. doi:10.28948/ngumuh.617259.

[8] M. T. Piovan, S. Domini & J. M. Ramirez, In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams. *Composite Structures.* 94(11) (2012) 3194-3206. doi:10.1016/j.compstruct.2012.04.032.

[9] K. Swaminathan, D. T. Naveenkumar, A. M. Zenkour & E. Carrera, Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates—A state-of-the-art review. *Composite Structures.* 120 (2015) 10-31. doi:10.1016/j.compstruct.2014.09.070.

[10] C. H. Norris, J. B. Wilbur, Ş. Utku, *Elementary structural analysis*. McGraw-HILL. 1977.

[11] G. Prathap, The curved beam/deep arch/finite ring element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 21(3) (1985) 389-407. doi:10.1002/nme.1620210302.

[12] P. Chidamparam, & A. W. Leissa, Vibrations of planar curved beams, rings, and arches. *ASME. Appl. Mech. Rev.* 46(9) (1993) 467-483. doi:10.1115/1.3120374.

[13] A. Cazzani, M. Malagù & E. Turco, Isogeometric analysis of plane-curved beams. *Mathematics and Mechanics of Solids.* 21(5) (2016) 562-577. doi:10.1177/1081286514531265.

[14] M. Aydogdu, Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 27(7) (2008) 683-691. doi:10.1177/0731684407081369.

[15] M. Şimşek, T. Kocatürk & Ş. D. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load. *Composite Structures.* 94(8) (2012) 2358-2364. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.020.

[16] E. Babilio, Dynamics of an axially functionally graded beam under axial load. *The European Physical Journal Special Topics*. 222(7) (2013) 1519-1539. doi:10.1140/epjst/e2013-01942-8.

[17] N. Shafiei, M. Kazemi & M. Ghadiri, Nonlinear vibration of axially functionally graded tapered microbeams. *International Journal of Engineering Science*. 102 (2016) 12-26. doi:10.1016/j.ijengsci.2016.02.007.

[18] M. Azimi, S. S. Mirjavadi, N. Shafiei & A. M. S. Hamouda, Thermo-mechanical vibration of rotating axially functionally graded nonlocal Timoshenko beam. *Applied Physics A.* 123(1) (2017) 104. doi:10.1007/s00339-016-0712-5.

[19] X. Li, L. Li, Y. Hu, Z. Ding, & W. Deng, Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures.* 165 (2017) 250-265. doi:10.1016/j.compstruct.2017.01.032.

[20] M. H. Ghayesh, Nonlinear vibration analysis of axially functionally graded shear-deformable tapered beams. *Applied Mathematical Modelling.* 59 (2018) 583-596. doi:10.1016/j.apm.2018.02.017.

[21] S. Zheng, D. Chen & H. Wang, Size dependent nonlinear free vibration of axially functionally graded tapered microbeams using finite element method. *Thin-Walled Structures*. 139 (2019) 46-52. doi:10.1016/j.tws.2019.02.033.

[22] M. Ermis, U. N. Aribas, A. Kutlu, N. Eratlı, & M. H. Omurtag, Forced vibration analysis of axially FG straight beams by mixed FEM: *IV. Eurasian Conference on Civil and Environmental Engineering*, İstanbul, Türkiye, 2019: s. 894-899.

[23] U. N. Aribas, M. Ermis, A. Kutlu, N. Eratli & M. H. Omurtag, Elastically Damped Transient Response of Axially FG Straight Beams: *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics* 4, Rome, Italy 2019: s.19-25.

[24] S. Rajasekaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica* 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3

[25] G. C. Tsiatas, & A. E. Charalampakis, Optimizing the natural frequencies of axially functionally graded beams and arches. *Composite Structures.* 160 (2017) 256-266. doi:10.1016/j.compstruct.2016.10.057.

[26] A. R. Noori, T. A. Aslan, & B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*. 200 (2018) 701-710. doi:10.1016/j.compstruct.2018.05.077.

[27] B. Temel, & A. R. Noori, Out-of-plane vibrations of shear-deformable AFG cycloidal beams with variable cross section. *Applied Acoustics.* 155 (2019) 84-96. doi:10.1016/j.apacoust.2019.05.010.

[28] J. K. Lee, & B. K. Lee, In-plane free vibration of uniform circular arches made of axially functionally graded materials. *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* 19(08) (2019) 1950084. doi:10.1142/S0219455419500846.

[29] Ansys® Academic Research Mechanical, Mechanical APDL Release 2021 R1, Element Reference, ANSYS, Inc.

[30] M. Ermis & M. H. Omurtag, Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM. *International Journal of Mechanical Sciences*. 131 (2017) 296-304. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010.

[31] B. Karami, D. Shahsavari, M. Janghorban & L. Li, Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams. *Composite Structures*. 216 (2019) 67-79. doi:10.1016/j.compstruct.2019.02.089.

HİBRİT POLİMER KOMPOZİTLERİN DİNAMİK-MEKANİK ÖZELLİKLERİNİN ÇOKLU NONLİNEER NÖRO-REGRESYON YÖNTEMİYLE MODELLENMESİ VE OPTİMİZASYONU

Melih Savran[1], Mustafa Öncül[2], Muhammed Yılmaz[3], Levent Aydın[4] ve Kutlay Sever[5]
[1,2,3,4,5] Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi, Makine Mühendisliği, İzmir Kâtip Çelebi Üniversitesi, İzmir

ABSTRACT

This study aimed to improve the dynamic mechanical properties of the material by adding artichoke stem particles and wollastonite minerals in different proportions to the polypropylene material. The effect of different ratios of artichoke stem particles and wollastonite minerals in polypropylene material was mathematically modeled using the data obtained as a result of the experimental study. In the modeling phase, multiple nonlinear neuro-regression analysis, one of the statistical data analysis methods, was used. In this context, the linear and nonlinear models proposed have been examined by performing R^2 training, R^2 adjusted, R^2 testing, and boundedness check. Models that meet these four criteria were selected as the objective function for the optimization phase. Finally, using the Differential Evolution Algorithm, one of the stochastic optimization methods, the design parameters for the storage modulus and the loss modulus to reach maximum levels were determined by the artichoke stalk particle ratio by weight and the values required by the ratio of wollastonite mineral by weight. The experimental results and the modeling optimization results showed that when the polypropylene-artichoke stem particle-wollastonite mineral hybrid polymer composite is used instead of other non-hybrid polymer composite, the storage modulus and loss modulus improved by approximately 40%.

Keywords: Multiple Nonlinear Neuro-regression, Design and Optimization, Hybrid Polymer Composites

ÖZET

Bu çalışma kapsamında, polipropilen malzeme içerisine enginar sapı partiküllerinin ve vollastonit mineralinin farklı oranlarda eklenmesi ile malzemenin dinamik-mekanik özelliklerinin iyileştirilmesi amaçlanmıştır. Deneysel çalışma sonucunda elde edilen veriler kullanılarak enginar sapı partiküllerinin ve vollastonit mineralinin polipropilen malzeme içerisinde ağırlıkça farklı oranlarda kullanılmasının depolama modülü ve kayıp modülü üzerindeki etkisi matematiksel olarak modellenmiştir. Modelleme aşamasında istatistiksel veri analizi metotlarından biri olan çoklu regresyon analizi kullanılmıştır. Bu kapsamda önerilen lineer ve nonlineer modellerin performansı R^2training, R^2adjusted, R^2testing değerlerinin 0.80'ten büyük olması ve model fonksiyonların tanımlı aralıkta sonlu olmaları (boundedness check) değerlendirmesi yapılarak incelenmiştir. Bu dört kriteri de sağlayan modeller optimizasyon aşaması için amaç fonksiyonu olarak seçilmişlerdir. Son olarak stokastik

optimizasyon metotlarından biri olan Diferansiyel Değişim Algoritması (Differential Evolution Algorithm) kullanılarak depolama modülü ve kayıp modülünün maksimum seviyelere ulaşması için dizayn parametreleri ağırlıkça enginar sapı partikülü oranı ve ağırlıkça vollastonit minerali oranının alması gereken değerler belirlenmiştir. Hem deneysel sonuçlar hem de modelleme-optimizasyon sonuçları polipropilen-enginar sapı partikülü-vollastonit minerali hibrit polimer kompozit malzemenin, hibrit olmayan diğer polimer kompozit malzemelerin yerine kullanılması durumunda depolama modülü ve kayıp modülünün yaklaşık %40 oranında iyileştirdiğini göstermiştir.

Anahtar kelimeler: Çoklu Nonlineer Nöro-Regresyon, Dizayn ve Optimizasyon, Hibrit Polimer Kompozitler

GİRİŞ

Bitkisel liflerin, yenilenebilir kaynaklar olmaları, düşük yoğunluğa sahip olmaları, toksik olmayan özellikte olmaları ve düşük fiyata elde edilebilmeleri gibi avantajlarından dolayı bu liflerin kompozit malzeme üretiminde polimerlerin içerisine katkı malzemesi olarak kullanımı her geçen gün artmaktadır. Bitkisel lifler yüksek dayanım gerektirmeyen uygulamalarda otomotiv endüstrisi, inşaat endüstrisi ve günlük kullanım malzemelerine kadar pek çok alanda sentetik liflere alternatif olarak kendisine yer bulmaktadır. Bunun yanı sıra, bitkisel lif dolgulu polimer kompozitlerin kullanımı, yetersiz termal özelliklerinden dolayı sınırlı kalmaktadır. Bu durumun üstesinden gelmek için, bitkisel lif dolgulu polimer kompozitlerde termal performansı artıran mineral dolgu malzemelerin kullanılabilirliği bu araştırmanın konusu olmuştur.

Doğada rahatça bulunabilen ve atık olarak değerlendirilen malzemelerin faydalı bir şekilde geriye dönüştürülebilmesi için yapılan çalışmalar son yıllarda artmıştır. Bu çalışmaların başlıca amaçlarından biri de bu atıkların çevreye verdiği zararların etkilerini azaltmaktır. Polimer matrisli kompozitler, üretim maliyetlerinin düşürülmesi ve çevreye olası zararlarının azaltılması için kenaf, sisal, jüt, şeker kamışı ve hindistan cevizi lifi gibi lignoselülozik malzemelerle takviyelendirilmiştir (1–5). Ayrıca, lignoselülöz bakımından zengin olan mısır buğday sapı ve pirinç kabuğu gibi tarımsal atıklar da takviye/dolgu malzemesi olarak kullanılmışlardır (6,7). Literatürde bu tür hibrit olmayan çalışmalara çok fazla rastlanırken tarımsal atık ve mineral dolgulu hibrit kompozitlerle ilgili yapılan çalışmalar kısıtlı sayıdadır. Hibrit yapıların kullanımı ile malzeme ağırlığının azaltılması, dayanımının arttırılması, üretim maliyetinin düşürülmesi ve ısıl özelliklerin iyileştirilmesi gibi mühendislik tasarımında önem arz eden birçok özellik kazandırılmasının yanı sıra malzemelerin kolay bir biçimde geri dönüşümünün de sağlanması amaçlanmaktadır.

Bu çalışmada, polipropilenin (PP) mekanik ve termal özelliklerini iyileştirmek için enginar sapı partikülleri (E) ve vollastonit (V), sırasıyla organik ve inorganik dolgu maddeleri olarak kullanılmışlardır. PP kopolimer (PP, LG Chem M 1500, Korea), 16 g/10 dakikalık (230 °C/2.16 kg) bir erime akış indeksine ve 0.9 g/cm^3 bir yoğunluğa sahiptir. Enginar sapları İzmir ili Çiğli ilçesinde bulunan bir enginar tarlasından, tarımsal atık olarak bırakılan ürünlerden, elde edilmiştir. Kompozit üretimine uygun hale gelmesi için bu saplar öncelikle öğütülmüş ve ardından partikül boyutları 100 µm-250 µm aralığında olacak şekilde elekten geçirilmiştir. Vollastonit minerali (TREMIN 939-300 iğnesel yapılı vollastonit, D50=37 µm, L/D=6, yüzey işlemsiz, yoğunluk=2.85 g/cm3 ve Mohs sertliği=4.5)) KAOLIN Endüstriyel Mineraller firmasından temin edilmiştir.

Polimer matrisli kompozit malzemelerin üretimi laboratuvar ölçekli bir yüksek hızlı termokinetik mikser (Gelimat) ve laboratuvar tipi ısıtmalı-soğutmalı hidrolik pres yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu malzemelerin depolama (storage) modülü ve kayıp (loss) modülü

"DMA Q800, TA Instruments" cihazı kullanılarak elde edilmiştir. Analizler tek noktalı tutucu kullanılarak 40-140°C sıcaklık aralığında yapılmıştır. Isıtma hızı olarak 3°C/dakika belirlenmiştir ve analizler bu hızda gerçekleştirilmiştir.

Deneysel sonuçların modellenmesi aşamasında çoklu nonlineer nöro-regresyon yönteminden faydalanılmıştır. Fiziksel süreci en doğru şekilde ifade edebilmek için polinom ve trigonometrik ifadelerden oluşan temel matematiksel fonksiyonlar, Bessel özel fonksiyonları ve bu üç matematiksel ifadeleri içeren hibrit fonksiyonlar kullanılmıştır. Fiziksel süreci en doğru şekilde ifade eden modeller optimizasyon aşaması için amaç fonksiyonu olarak seçilmiştir. Diferansiyel Değişim Algoritması (Differential Evolution) kullanılarak farklı sınır şartları altında depolama modülü ve kayıp modülünün alabileceği maksimum değerler tespit edilmeye çalışılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Modelleme aşamasında regresyon ve yapay sinir ağlarının avantajlarından yararlanılarak oluşturulan hibrit bir metot kullanılmıştır. Bu yaklaşımda, tüm veriler %80 eğitim ve %20 test için olmak üzere iki gruba ayrılır. Eğitim sürecinde amaç, regresyon modelleri ve katsayılarını ayarlayarak deneysel ve tahmin edilen değerler arasındaki hatayı en aza indirmektir. Test aşamasında ise modele daha önce hiç görmediği girdi parametresi değerleri sorularak tahmin yeteneği ölçülür. Eğitim ve test aşamasında R^2'nin aldığı değerlere göre modellerin performansı ölçülür. R^2 aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{res}}{SS_{tot}} \tag{1}$$

$$R^2_{adjusted} = 1 - \left[\left(\frac{n-1}{n-k-1}\right) x\,(1-R^2)\right] \tag{2}$$

Burada

$$SS_{tot} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \tag{3}$$

$$SS_{res} = \sum_i (y_i - f_i)^2 \tag{4}$$

Burada, y_i gerçek değerler, $\bar{y}$ gerçek değerlerin ortalaması ve f_i model tarafından tahmin edilen değerlerdir.

Bu aşamalarda başarılı olan model son olarak sınır kontrol testine (boundedness check) tabi tutularak verdiği sonuçların ne kadar gerçekçi olduğu kontrol edilir. Tüm testleri geçen model optimizasyonda amaç fonksiyonu olarak seçilir. Optimizasyon aşamasında stokastik metotlardan biri olan Diferansiyel Değişim Algoritması kullanılmıştır. Bu algoritma güçlü, popülasyon tabanlı, hızlı ve global optimumu bulma konusunda oldukça başarılı bir algoritmadır. Çalışma kapsamında kullanılan deneysel verilerin bir kısmı Sever ve Yılmaz (8) tarafından yapılan çalışmadan alınırken, bir kısmı da bu çalışma kapsamında üretilmiştir. Eğitim ve test amaçlı ayrılmış veriler Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Modelleme ve optimizasyon için kullanılan eğitim ve test verileri

	Deney No	Malzeme	Ağırlıkça Enginar oranı (%) "x_1"	Ağırlıkça Vollastonit oranı (%) "x_2"	Depolama Modülü (Mpa)	Kayıp Modülü (MPa)
Training (Eğitim)	1	PP [12]	0	0	1115.4	55.86
	2	PP-20E [12]	20	0	1320.04	66.69
	3	PP-30E [12]	30	0	1485.18	77.19
	4	PP-10V	0	10	1335.02	68.42
	5	PP-30V	0	30	1775.83	89.21
	6	PP-7V-3E [12]	3	7	1376.08	65.81
	7	PP-5V-5E [12]	5	5	1413.75	67.98
	8	PP-10V-10E	10	10	1352.56	70.8
	9	PP-14V-6E	6	14	1082.02	59.87
	10	PP-6V-14E	14	6	1354.38	68.79
	11	PP-15V-15E	15	15	1309.92	72.55
	12	PP-21V-9E	9	21	1942.09	103.05
	13	PP-9V-21E	21	9	1252.5	75.39
Testing (Test)	14	PP-10E [12]	10	0	1226.25	66.51
	15	PP-20V	0	20	1494.91	76.07
	16	PP-3V-7E [12]	7	3	1695.44	84

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, deneysel olarak elde edilen depolama modülü ve kayıp modülü değerleri çoklu regresyon analizi yöntemi ile modellenmiş ve belirlenen başarı kriterlerini geçen modeller kullanılarak depolama modülü ve kayıp modülünü maksimize etmeye yönelik optimizasyon çalışmaları yapılmıştır. Ele alınan problemlerde vollastonit minerali ve enginar sapı partikülünün ağırlıkça oranları girdi parametresi olarak seçilirken, depolama ve kayıp modülleri çıktı parametresi olarak seçilmiştir.

Depolama Modülü İçin Modelleme ve Optimizasyon Sonuçları

Bu çalışma kapsamında depolama modülü için önerilen regresyon modelleri aşağıda verilmiştir.

Doğrusal Model (DM)

$$1146.6 + 6.1241x_1 + 18.86x_2$$

3. Derece Polinom Model (ÜPM)

$$1115.4 - 93.185x_1 + 8.4623x_1^2 - 0.16433x_1^3 + 214.11x_2 + 0.31823x_1x_2 - 0.42098x_1^2x_2 - 25.971x_2^2 + 0.64713x_1x_2^2 + 0.65282x_2^3$$

4. Derece Polinom Model (DPM)

$$1115.4 + 162.71x_1 - 1.0661x_1^2 - 0.72053x_1^3 + 0.019633x_1^4 + 176.83x_2 - 83.727x_1x_2 + 4.4085x_1^2x_2 - 0.047097x_1^3x_2 - 10.15x_2^2 + 6.4478x_1x_2^2 - 0.21778x_1^2x_2^2 - 0.8836x_2^3 - 0.081355x_1x_2^3 + 0.034997x_2^4$$

2. Derece Trigonometrik Model (İTM)

$$2855.7 - 4342.3\mathrm{Cos}[x_1] + 14140.\mathrm{Cos}[x_1]^2 + 5036.\mathrm{Cos}[x_2] - 22160.\mathrm{Cos}[x_1]\mathrm{Cos}[x_2] + 5585.1\mathrm{Cos}[x_2]^2 + 4757.9\mathrm{Sin}[x_1] + 46626.\mathrm{Cos}[x_1]\mathrm{Sin}[x_1] - 16201.\mathrm{Cos}[x_2]\mathrm{Sin}[x_1] - 12743.\mathrm{Sin}[x_1]^2 - 2716.5\mathrm{Sin}[x_2] + 18814.\mathrm{Cos}[x_1]\mathrm{Sin}[x_2] - 46045.\mathrm{Cos}[x_2]\mathrm{Sin}[x_2] + 13717.\mathrm{Sin}[x_1]\mathrm{Sin}[x_2] + 530.04\mathrm{Sin}[x_2]^2$$

Poli-trigonometrik Hibrit model (PHM)

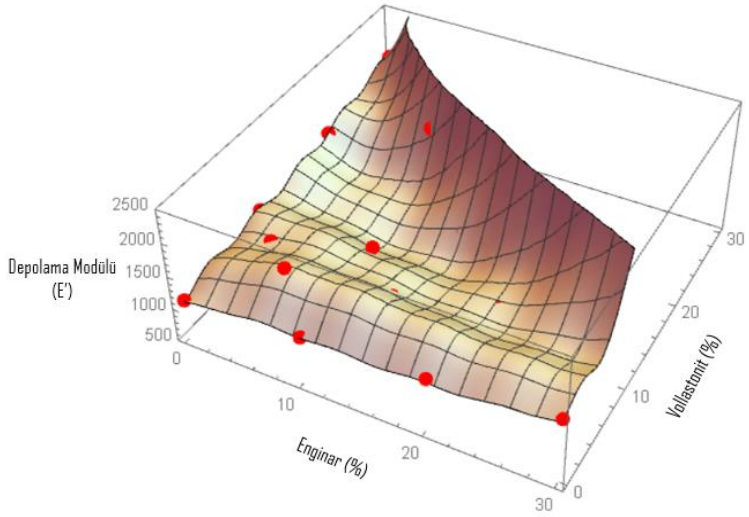
$$1126.84 + 17.89\mathrm{Cos}[x_1] - 60.74\mathrm{Cos}[x_2] + 6.923\mathrm{Sin}[x_1] - 3.40\mathrm{Sin}[x_2] + 43.94x_1 - 4.159x_1^2 + 0.1554x_1^3 - 0.0017x_1^4 + 43.46x_2 + 21.65x_1x_2 - 0.99x_1^2x_2 + 0.01026x_1^3x_2 - 4.447x_2^2 - 3.218x_1x_2^2 + 0.078x_1^2x_2^2 + 0.2339x_2^3 + 0.092x_1x_2^3 - 0.0036x_2^4$$

Çizelge 2. Depolama modülü için regresyon modellerinin sonuçları

Model	R^2training	R^2adjusted	R^2testing	Maks. değer (MPa)	Min. değer (MPa)
DM	0.41	0.29	-0.83	1712.33	1146.55
ÜPM	0.92	0.91	-16.49	1948.11	204.40
DPM	1	1	-57.02	2111.64	-1144.05
İTM	1	1	-78447	97868	-49386.5
PHM	0.94	0.93	0.95	2244.57	1000.82

Regresyon modellerinin değerlendirilmesinde kullanılan parametrelerin aldığı değerler Çizelge 2'de verilmiştir. Modelin verileri iyi ifade edebilme kriteri "R^2training" ve "R^2adjusted" parametrelerinin aldığı değerlerin olabildiğince 1'e yakın olmasıdır. Sonuçları yalnızca R^2training ve R^2adjusted bakımından değerlendirdiğimizde doğrusal model dışındaki diğer tüm modellerin 0.9-1 aralığında değerler aldığı ve deneysel datalar ile iyi derecede uyum gösterdiği görülmektedir. Ancak sadece bu iki değerlendirme kriterini göz önünde bulundurarak karar vermek yanılgıya sebebiyet verir. Çünkü bu iki parametre yalnızca modelin dataları ne kadar iyi ifade ettiği hakkında bilgi verir. "Testing" aşamasında ise modelden daha önce hiç görmediği girdilere karşılık gelen çıktıların değerlerini tahmin etmesi istenir. Bu aşamada, çizelgede verilen sonuçlar incelendiğinde sadece hibrit modelin kabul edilebilir sonuç verdiği görülmektedir. Ancak testing kriterinin sağlanmış olması da modelin kullanılabilir olduğu anlamına gelmez. Bir diğer başarı kriteri olan modelin "sınır kontrolünün" de yapılması gerekir. Bu aşamada, modelin girdi parametrelerinin değer aralığındaki maksimum ve minimum aldığı değerlerin gerçekçi olup olmadı kontrol edilir.

Yukarıda bahsedilen bu dört kriteri sağlayan tek model polinom ve trigonometrik ifadelerden oluşan Poli-trigonometrik Hibrit modeldir (PHM). Bu nedenle optimizasyon aşamasında amaç fonksiyonu olarak bu model seçilmiştir. Şekil 1'de depolama modülü için deneysel sonuçlar ve önerilen hibrit modelin (PHM) verdiği sonuçların karşılaştırmalı grafiği görülmektedir. Şekilde kırmızı noktalar deneysel sonuçları, sarı renkli yapı ise ağırlıkça yüzde enginar oranı (x_1) ve ağırlıkça yüzde vollastonit oranı (x_2) parametrelerinden oluşan fonksiyonel modeli göstermektedir. Şekil 1 incelendiğinde modelin deneysel sonuçlarla yüksek uyum içerisinde olduğu görülmektedir.



Şekil 1. Depolama modülü için deneysel sonuçlar ve önerilen hibrit modelin (PHM) verdiği sonuçların karşılaştırmalı 3 boyutlu grafiği

Çizelge 3'de Diferansiyel Değişim Algoritması kullanılarak elde edilen depolama modülü için optimizasyon sonuçları verilmiştir. Problem kapsamında iki farklı senaryo ele alınmıştır. İlk senaryoda girdi parametrelerinin yalnızca tamsayı değerler alması durumunda, ikinci senaryoda ise girdi parametrelerinin sürekli değerler alması durumunda depolama modülünün maksimum değeri araştırılmıştır. Bu iki farklı senaryonun sonuçlarda önemli bir fark oluşturmadığı görülmüştür. Maksimum depolama modülü (2245.84 MPa) için girdi parametrelerinin alması gereken değerler x_1=2.80 ve x_2=27.20 olarak bulunmuştur.

Çizelge 3. Depolama modülü için optimizasyon sonuçları

Amaç	Amaç fonksiyonu	Kısıtlar	Depolama modülü (MPa)	Önerilen dizayn
Maksimum Depolama Modülü	PHM	$0 \leq x_1 \leq 30$, $0 \leq x_2 \leq 30$, $0 \leq x_1+x_2 \leq 30$, $\{x_1, x_2\} \in$ Tamsayılar	2244.57	x_1=3, x_2=27
	PHM	$0 \leq x_1 \leq 30$, $0 \leq x_2 \leq 30$, $0 \leq x_1+x_2 \leq 30$	2245.84	x_1=2.80, x_2=27.20

Deneysel sonuçlar incelendiğinde %21 oranında vollastonit, %9 oranında enginar sapı partikülü içeren hibrit PP-21V-9E malzemenin 1942.09 MPa ile maksimum depolama modülüne sahip olduğu görülmektedir. Optimizasyon sonucunda ise %13'lük bir iyileştirme ile bu değer 2244.57 MPa olarak bulunmuştur.

Kayıp Modülü İçin Modelleme ve Optimizasyon Sonuçları

Bu çalışma kapsamında depolama modülü için önerilen regresyon modelleri aşağıda verilmiştir.

Doğrusal Model (DM)

$$54.64 + 0.6049x_1 + 1.187x_2$$

4. Derece polinom model (DPM)

$$55.86 + 10.89x_1 - 0.08606x_1^2 - 0.04784x_1^3 + 0.001313x_1^4 + 8.119x_2 - 5.471x_1x_2 + 0.2944x_1^2x_2 - 0.003008x_1^3x_2 - 0.3337x_2^2 + 0.4234x_1x_2^2 - 0.01442x_1^2x_2^2 - 0.05455x_2^3 - 0.005965x_1x_2^3 + 0.00193x_2^4$$

2. Derece Trigonometrik Model (İTM)

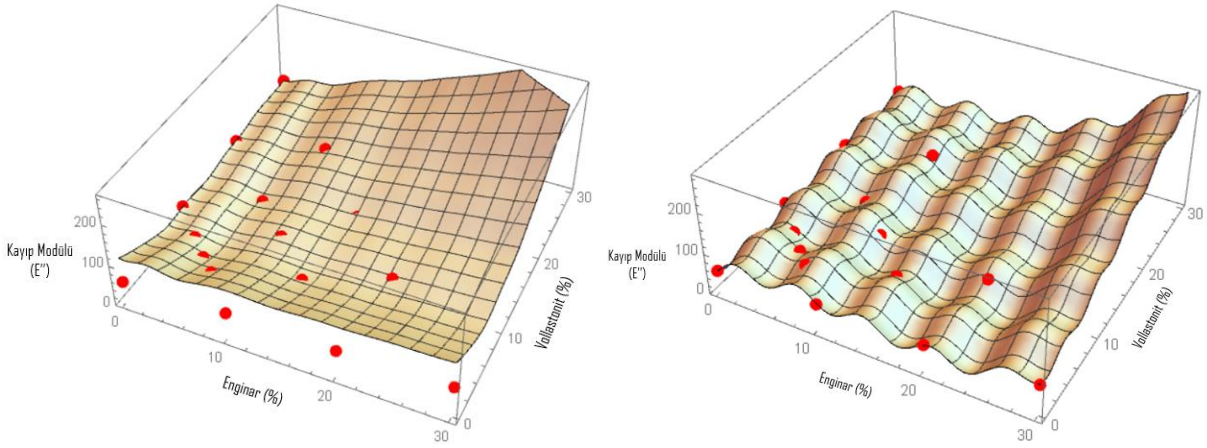
$$22.21 + 2.048\text{Cos}[x_1] + 10.32\text{Cos}[x_1]^2 - 6.684\text{Cos}[x_2] + 13.\,\text{Cos}[x_1]\text{Cos}[x_2] + 15.92\text{Cos}[x_2]^2 - 2.478\text{Sin}[x_1] + 46.78\text{Cos}[x_1]\text{Sin}[x_1] - 12.18\text{Cos}[x_2]\text{Sin}[x_1] + 35.66\text{Sin}[x_1]^2 + 17.4\text{Sin}[x_2] - 28.42\text{Cos}[x_1]\text{Sin}[x_2] + 7.86\text{Cos}[x_2]\text{Sin}[x_2] - 15.75\text{Sin}[x_1]\text{Sin}[x_2] + 47.57\text{Sin}[x_2]^2$$

Hibrit Model 1 (HM1)

$$118.5 + 16.79\text{BesselJ}[x_1, 11] - 59.72\text{BesselJ}[x_2, 0] - 17.29\text{SphericalBesselJ}[5, x_1] - 38.78\text{SphericalBesselJ}[5, x_2] - 0.5942x_1 + 0.0758x_1^2 - 0.001184x_1^3 - 10.33x_2 - 0.1815x_1x_2 + 0.002777x_1^2x_2 + 0.6357x_2^2 + 0.01119x_1x_2^2 - 0.0107x_2^3$$

Hibrit Model 2 (HM2)

$$65.07 - 4.744\text{Cos}[x_1] - 4.467\text{Cos}[x_2] + 17.33\text{Sin}[x_1] - 11.56\text{Sin}[x_2] + 6.779x_1 - 0.712x_1^2 + 0.01752x_1^3 - 3.237x_2 - 0.2883x_1x_2 + 0.01169x_1^2x_2 + 0.4263x_2^2 + 0.004704x_1x_2^2 - 0.0099x_2^3$$



a. HM1 b. HM2

Şekil 2. Kayıp modülü için deneysel sonuçlar ve önerilen hibrit modellerin (a. HM1 ve b. HM2) verdiği sonuçların karşılaştırmalı 3 boyutlu grafikleri

Regresyon modellerinin değerlendirilmesinde kullanılan parametrelerin aldığı değerler Çizelge 4'te verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde tüm başarı kriterlerini sağlayan iki modelin HM1 ve HM2 olduğu görülmektedir. Kayıp modülü için deneysel sonuçlar ve hibrit modellerin (HM1 ve HM2) verdiği sonuçların karşılaştırmalı 3 boyutlu grafiği Şekil 2'de verilmiştir. Her iki model de kırmızı nokta ile gösterilen deneysel sonuçları matematiksel olarak ifade etmede yüksek uyum göstermiştir.

Diğer modeller incelendiğinde, doğrusal modelin testing kriterini, 4. derece polinom modelin testing ve sınır kontrol kriterini, 2. derece trigonometrik modelin ise sadece sınır kontrol kriterini sağlayamadığı görülmektedir. Başarı kriterlerini sağlayan iki model (HM1, HM2) optimizasyon için amaç fonksiyonu olarak seçilmiştir.

Çizelge 4. Kayıp modülü için regresyon modellerinin sonuçları

Model	R^2training	R^2adjusted	R^2testing	Maks. Değer (MPa)	Min. Değer (MPa)
DM	0.62	0.54	-2.29	90.26	54.64
DPM	1	1	-111.15	121.48	-57.67
İTM	0.82	0.78	0.90	165.39	-1.76
HM1	0.97	0.96	0.95	123.58	51.52
HM2	0.91	0.90	0.93	129.20	20.63

Çizelge 5'te Diferansiyel Değişim Algoritması kullanılarak elde edilen kayıp modülü optimizasyon sonuçları verilmiştir. Problem kapsamında iki farklı amaç fonksiyonu ve iki farklı senaryo ele alınmıştır. İlk senaryoda girdi parametrelerinin yalnızca tamsayı değerler alması durumunda, ikinci senaryoda ise girdi parametrelerinin sürekli değerler alması durumunda kayıp modülünün maksimum değeri araştırılmıştır.

Çizelge 5. Kayıp modülü için optimizasyon sonuçları

Amaç	Amaç fonksiyonu	Kısıtlar	Kayıp modülü (MPa)	Önerilen dizayn
Maksimum Kayıp Modülü	HM1	$0 \leq x_1 \leq 30,\ 0 \leq x_2 \leq 30,$ $0 \leq x_1+x_2 \leq 30,$ $\{x_1, x_2\} \in$ Tamsayılar	123.58	$x_1=29, x_2=1$
	HM1	$0 \leq x_1 \leq 30,\ 0 \leq x_2 \leq 30,$ $0 \leq x_1+x_2 \leq 30,$	123.58	$x_1=29, x_2=1$
	HM2	$0 \leq x_1 \leq 30,\ 0 \leq x_2 \leq 30,$ $0 \leq x_1+x_2 \leq 30,$ $\{x_1, x_2\} \in$ Tamsayılar	129.20	$x_1=2, x_2=23$
	HM2	$0 \leq x_1 \leq 30,\ 0 \leq x_2 \leq 30,$ $0 \leq x_1+x_2 \leq 30,$	129.63	$x_1=1.90,$ $x_2=23.23$

Hibrit model 1'in amaç fonksiyonu olarak seçildiği durumda maksimum kayıp modül değeri 123.58 MPa ve buna karşılık gelen girdi parametreleri $x_1=29$, $x_2=1$ olarak bulunmuştur. Hibrit model 2'nin amaç fonksiyonu olduğu durumda ise maksimum kayıp modül değeri 129.63

MPa ve buna karşılık gelen girdi parametreleri x_1=1.90, x_2=23.23 olarak bulunmuştur. İki hibrit model için de girdi parametrelerinin tamsayı ya da sürekli seçilmesi sonuçlar üzerinde önemli bir etki oluşturmamıştır.

SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamında, polipropilen malzeme içerisine enginar sapı partiküllerinin ve vollastonit mineralinin farklı oranlarda eklenmesi ile malzemenin dinamik-mekanik özelliklerinin iyileştirilmesi amaçlanmıştır. Deneysel çalışma sonucunda elde edilen veriler kullanılarak enginar sapı partiküllerinin ve vollastonit mineralinin polipropilen malzeme içerisinde ağırlıkça farklı oranlarda kullanılmasının depolama modülü ve kayıp modülü üzerindeki etkisi matematiksel olarak modellenmiştir. Çalışma kapsamında kullanılan modeller incelendiğinde, Polinom, trigonometrik ve özel fonksiyonlardan (Bessel) oluşan ifadeleri içeren modellerin deneysel sonuçlar ile yüksek uyum gösterdiği, lineer veya yalnızca polinom ifadelerden oluşan nonlineer modellerin ise tüm başarı kriterlerini aynı anda sağlayamadığı görülmüştür. Burada dikkat edilmesi gereken ön önemli hususlardan birisi model değerlendirmesinde yalnızca R^2 değerinin kullanılmamış olmasıdır. Eğer sadece bu kritere göre değerlendirme yapılacak olsaydı lineer modeller dışındaki tüm modeller başarılı kabul edilebilirdi. Ancak bu durum bizi doğru değerlendirme yapamamaya götürmektedir. R^2 sadece model ile deneysel sonuçların uyumunu gösteren bir parametredir. Deneysel süreci yüksek doğrulukta tahmin eden bir model elde edebilmek için bu çalışma kapsamında belirtilmiş olan dört test kriterinin de sağlanması gerekir. Tüm kriterleri başarı ile geçen modeller ile Diferansiyel Değişim Algoritması kullanılarak yapılan optimizasyon çalışmaları sonucunda girdi parametrelerinin tamsayı değerler aldığı durum için maksimum depolama modülü 2244.57 MPa ve girdi parametresinin alması gereken değerler x_1=3 ve x_2=27 olarak bulunurken, maksimum kayıp modül değeri 129.20 MPa ve buna karşılık gelen girdi parametreleri x_1=2, x_2=23 olarak bulunmuştur. Hem deneysel sonuçlar hem de modelleme-optimizasyon sonuçları polipropilen-enginar sapı partikülü-vollastonit mineralinden oluşan hibrit yapının saf polipropilen malzeme yerine kullanılması durumunda malzemenin dinamik-mekanik özelliklerini yaklaşık %40 oranında iyileştirdiğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

1. Saba N, Paridah MT, Jawaid M. Mechanical properties of kenaf fibre reinforced polymer composite: A review. Construction and Building Materials. 2015 Feb;76:87–96.

2. Rong MZ, Zhang MQ, Liu Y, Yang GC, Zeng HM. The effect of fiber treatment on the mechanical properties of unidirectional sisal-reinforced epoxy composites. Composites Science and Technology. 2001 Aug;61(10):1437–47.

3. Sever K, Sarikanat M, Seki Y, Erkan G, Erdoğan ÜH, Erden S. Surface treatments of jute fabric: The influence of surface characteristics on jute fabrics and mechanical properties of jute/polyester composites. Industrial Crops and Products. 2012 Jan;35(1):22–30.

4. Xu Y, Wu Q, Lei Y, Yao F. Creep behavior of bagasse fiber reinforced polymer composites. Bioresource Technology. 2010 May;101(9):3280–6.

5. Verma D, Gope PC. The use of coir/coconut fibers as reinforcements in composites. In: Biofiber Reinforcements in Composite Materials [Internet]. Elsevier; 2015 [cited 2021 Jun 8]. p. 285–319. Available from: https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/B9781782421221500101

6. Mengeloglu F, Karakus K. Thermal Degradation, Mechanical Properties and Morphology of Wheat Straw Flour Filled Recycled Thermoplastic Composites. Sensors. 2008 Jan 24;8(1):500–19.

7. Yao F, Wu Q, Lei Y, Xu Y. Rice straw fiber-reinforced high-density polyethylene composite: Effect of fiber type and loading. Industrial Crops and Products. 2008 Jul;28(1):63–72.

8. Sever K, Yılmaz M. Evaluation of Mechanical and Thermal Properties of Artichoke Filled Polypropylene Composites: Influence of Wollastonite Hybridization. Emerging Materials Research. 2020 Jun 1;9(2):1–6.

FİBER TAKVİYELİ KOMPOZİTLERİN HASAR TESPİTİNDE KATI VE KABUK SONLU ELEMAN KULLANIMI ETKİSİ: KATI ELEMAN İÇİN BOZUNUM MODELİ

Umut ÇALIŞKAN[1]* ve M. Kemal APALAK[1]
1Erciyes Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 38039, Kayseri

ABSTRACT

In this study, the effect of solid and shell finite elements for damage analysis of fiber-reinforced laminated composite materials was investigated and a new degradation model for the solid element was presented. While investigating the damage formation under low-speed impact loads, the numerical model was verified experimentally by comparing the contact force and kinetic energy changes. 2D Hashin damage theory was used for shell elements and 3D Hashin damage theory was used for solid elements and transferred to finite element code. For the solid element, a user-defined material model was used by using the FORTRAN subroutine in the ABAQUS/Explicit finite element software. The proposed degradation model is parametrically transferred to the numerical model in Python programming language and works with the user-defined material model. The low-velocity impact behavior of carbon fiber reinforced epoxy resin composite materials was more successfully modeled by solid-element models. There were significant differences in the damage areas between the models containing solid and shell elements, and it is seen that more damage areas were obtained by using the shell elements.

Keywords: Damage analysis; Finite element method; degradation model;

ÖZET

Bu çalışmada, fiber takviyeli tabakalı kompozit malzemelerin hasar oluşumunun sayısal modelleri için katı ve kabuk sonlu eleman kullanımı etkisi araştırılmış ve katı eleman için yeni bir bozunum modeli sunulmuştur. Düşük hızlı darbe yükleri altında hasar oluşumu incelenirken deneysel olarak temas kuvveti ve kinetik enerji değişimleri ile karşılaştırma yapılarak sayısal model doğrulanmıştır. Kabuk elemanlar için 2 boyutlu, katı elemanlar için ise 3 boutlu Hashin hasar teorisi kullanılmıştır ve sonlu elemanlar koduna aktarılmıştır. Katı eleman için ABAQUS/Explicit sonlu elemanlar yazılımında FORTRAN alt kodu kullanılarak kullanıcı tanımlı malzeme modeli kullanılmıştır. Önerilen bozunum modeli Python programla dilinde parametrik olarak sayısal modele aktarılmıştır ve kullanıcı tanımlı malzeme modeli ile birlikte çalışmaktadır. Karbon fiber takviyeli epoksi reçineli kompozit malzemelerin düşük hızlı darbe davranışlarını katı elemanla modeller daha doğru bir şekilde modellemiştir. Katı ve kabuk eleman içeren modeller arasındaki hasar alanları ciddi farklar görülmüştür ve kabuk elemanların daha fazla hasar alanları oluşturduğu görülmektedir.

Anahtar kelimeler: Hasar analizleri; Sonlu elemanlar; Bozunum modeli;

GİRİŞ

Mühendislik uygulamalarında kompozit malzemelerin artan kullanımı, en verimli ürünlerin üretimini mümkün kılmaktadır. Bununla birlikte, kompozit malzemelerdeki hasar hassasiyeti sorunları, kritik havacılık uygulamalarında güvenilirlik endişeleri yaratmaktadır. Havacılık yapılarının düzlem dışı yüklenmesi genellikle dış bölgelerinde yabancı cisimlerin dinamik çarpması şeklinde gerçekleşir. Kompozit malzemelere dinamik çarpma sonucu oluşan yüklemelerin etkisi, hasar mekanizmasının anlaşılması, geometrinin etkileri ve yapıların hasar direncini arttırmak için etkileyen parametrelerinin anlaşılması açısından bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [1]. Chen ve diğerleri [2] kompozit tabakaların hasar analizleri için tabaka içi ve tabakalar arası hasar etkilerini içeren sonlu elemanlar modelini geliştirmişlerdir. Kompozit tabakaların mekanik davranışını ortaya koymak için hem plastisite hem de hasar etkilerini açıklayan birleşik bir elastoplastik hasar modelini kullanmışlardır ve kullanıcı tanımlı malzeme modeli UMAT kullanarak ABAQUS 'un sonlu elemanlar koduna uyarlamışlardır. Yapışkan arayüzlerde delaminasyon davranışını göstermek için ABAQUS 'da bulunan kohezif elemanlara dayanan bir yapışkan bölge modeli kullanmışlardır. Delaminasyon hasarına duyarlı kompozit tabakaların analizlerine başarıyla uygulanabileceğini göstermişlerdir. Long ve diğerleri [3] düşük hızlı darbeye maruz bırakılmış kompozit plakaların hasar analizlerini çalışmışlardır. Arayüzeylerdeki delaminasyon alanını araştırmak için Ultrasonik C-Tarama kullanılmışlardır. Sayısal modellerini, kohezif temas yönteminin uygulandığı hasar modeline dayanarak oluşturmuşlardır. Sonlu elemanlar sonuçları, deneysel sonuçlar ile iyi uyum göstermiştir. Çalışmaları sonucunda, delaminasyon bölgesinin darbe noktası etrafında simetrik olarak dağılmış olduğu bulmuşlardır. Singh ve diğerleri [4] E-cam/epoksi kompozitlerin düşük hızlı darbe altındaki hasar gelişimini çalışmışlardır. E-cam/epoksi kompozit için düşük hızlı darbe analizlerini sürekli ortam hasar mekaniğine (Continuum Damage Mechanics) dayanan malzeme modeli kullanarak gerçekleştirmişler ve deneylerle karşılaştırmışlardır. Laminada oluşan hasarı, temas kuvvetlerini ve zamana bağlı yer değistirme grafiklerini incelemişler ve modelin etkinliğini göstermek için sonlu elemanlar analiz sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Deney numunelerinin yüzeyindeki yer değiştirmeyi elde etmek için Dijital Görüntü Korelasyonu (Digital Image Correlation) tekniğini kullanmışlardır. Zhang ve Zhang [5] düşük hızlı darbeye maruz bırakılan kompozit tabakalardaki kritik darbe kuvveti ve ona karşılık gelen hasarın tahmini üzerine çalışmışlardır. Tabakanın üst, orta ve alt ara yüzeylerdeki hasarı analiz etmek ve her hasar modunun tabaka rijitliği üzerindeki etkisini araştırmak için üç boyutlu sonlu elemanlar modelini oluşturmuşlardır. Hem orta kalınlık düzlemine bitişik arayüzlerde delaminasyon hem de alt yüzeyde matris kırılması, kritik darbe kuvvetine karşılık gelen ilk yük düşüşüne neden olduğu sonucuna varmışlardır. Liu ve diğerleri [6] karbon elyaf kompozit plakaların düşük hızlı darbe altındaki dinamik hasar ilerlemesini Puck, Hashin ve Chang-Chang kriterleri dahil olmak üzere farklı hasar kriterlerini kullanarak araştırmışlardır. Arayüzey süreksizliği ile başlangıç değer probleminin varyasyonel formuna dayanan kompozitlerin tabaka içi hasar ve ara tabakalar halinde delaminasyonu üzerine birleşik bir teorik yaklaşım sunmuşlardır. Tabakaların hasar analizi için bir parametrik modelleme ara yüzü ABAQUS Python programlama dilini kullanarak oluşturmuşlardır. Üç hasar kriterini kullanan tabakalar içi hasar modellerini, ABAQUS sonlu elemanlar yazılımına bir VUMAT altprogramı yardımıyla uyarlamışlardır ve delaminasyonu ABAQUS 'daki bilinear kohezif modeli ile ele almışlardır. Çalışma sonuçları, matris kırılması ve delaminasyon hasarı için, üç kriter kullanılarak darbe cevabı ve enerji sönümlemesinin tutarlı olduğunu göstermişlerdir. Kim ve diğerleri [7] düşük hızlı darbe yükleri altında lineer olmayan mekanik davranışı tahmin etmek için cam elyaf takviyeli termoplastik kompozitleri için üç boyutlu (3B) hasar ilermesini ve malzeme modelini geliştirmişlerdir. İlerleyen hasar formülasyonu için, malzeme bozunum modelini (Material Degradation Model), üç boyutlu (3B) Hashin hasar kriterlerine dayanan bir

sürekli ortam hasar mekaniği (Continuum Damage Model) modeli kullanarak oluşturmuşlardır. Önerilen hasar formülasyonlarını, lineer olmayan sonlu elemanlar analizi yazılımı LS-DYNA 'da kullanıcı tanımlı malzeme VUMAT altyordamı ile birlikte kullanarak uygulamışlardır. Çalışmalarında, üç boyutlu ilerleyen hasar modelinin sadece hasarın ilerleme ve çarpma davranışını değil aynı zamanda tabakalar arası ayrılmayıda (delaminasyon) tahmin etmek için kullanılabileceğini göstermişlerdir. Lopes ve diğerleri [8] daha önceki yaptıkları deneysel çalışmalarını takiben kompozit plakaların düşük hızlı darbe altındaki hasar gelişimlerini sayısal olarak incelemişlerdir. Fiberler, matris ve tabakalar arasındaki arayüzeylerin fiziksel olarak ilerleyen hasar davranışını hesaba katan yapısal modelleri sonlu elemanlar metoduna, kompozit tabakalarda düşük hızlı darbe olaylarının analizlerini yapmak için uyarlamışlardır. Harper ve diğerleri [9] kompozitlerdeki tabakalar arası ayrılmalar için arayüzey elemanı analizlerinde en büyük ara yüzey gerilmesinin etkisi üzerine ayrıntılı bir çalışma sunmuşlardır. Arayüzey elemanları tarafından sönümlenen enerji, kırılma mekaniği analizlerinden çıkan çatlak ucu şekil değiştirme enerjisi hızı ile karşılaştırmışlardır. Sonuçların lineer elastik kırılma mekaniği çözümleri ile yakın bir uyuma sahip olduğunu gösterdiler. En büyük arayüzey gerilmesi, kohezif bölge uzunluğu, mod oranı ve sönümlenen enerji üzerinde önemli etkilerinin olduğu sonucuna varmışlardır. Singh ve Mahajan [10] fiber takviyeli polimer esaslı kompozitler için üç boyutlu elasto plastik hasar modelini, düşük hızlı darbe durumunda artan hasar ve hasar görmüş elastik olmayan deformasyonu tahmin etmek için kullanmışlardır. Hasar tahmini için üstel zayıflama modeli ve plastik yüzey ilerlemesi için üç boyutlu bir plastik potansiyel kullanmışlardır. Açık kaynaklı kod olan VUMAT ABAQUS/Explicit'de yazılmış ve modele uyarlanmıştır. Düşük hızlı darbe analizlerini grafit/epoksi kompozitler ile gerçekleştirmişlerdir. Delaminasyon davranışını iki tabaka arasındaki kohezif etkileşimlere dayalı yüzeyler kullanarak oluşturmuşlardır. Sonuçlar, tahmin edilen davranışın deneysel gözlemlerle iyi eşleştiğini göstermektedir. Kompozit plakanın merkezi yer değiştirmesini ve yüzeydeki kalıcı girintiyi başarıyla yakalamışlardır.

Yapılan literatür çalışması sonucunda kompozit malzemelerdeki hasar tespitinin önemi açıklanmış ve kullanılan yöntemler araştırılmıştır. Hasar tespitinde kullanılan yöntemler çeşitlilik arzetmekle birlikte sonlu elemanlar yönteminin güçlü yönleri açıktır. Bu kapsam sonlu eleman kullanımı açısından sınırlamalar getirmektedir. Bu çalışmada hali hazırda kullanılan kabuk eleman formülasyonları ile hasar tespiti ve yeni önerilen bir bozunum modelinin dahil olduğu katı eleman ile hasar tespiti yapılmıştır.

MATERYAL VE METHOD

Sonlu Elemanlar Modeli

fiber takviyeli tabakalı kompozit sandviç kirişlerin düşük hızlı darbe davranışlarının tespit edilmesinde kullanılan yöntemler, karşılaşılan zorluklar, çalışılan farklı parametreler açıklanmıştır. ASTM standartlarına göre üretilen tek yönlü karbon fiber / epoksi plakaya üç farklı darbe enerjisinde testler yapılmıştır. Şekil 1 de deney standartlarına göre oluşturulan model gösterilmektedir.

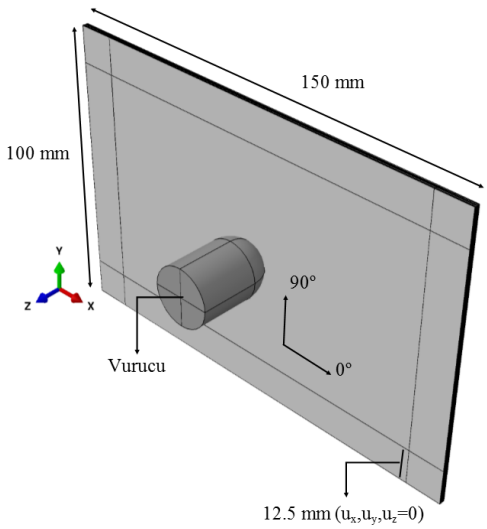
Çalışmada iki ve üç boyutlu Hashin [11] hasar kriterleri kullanılmıştır.

2 Boyutlu Hasar Kriterleri

2 boyutlu Hashin [11] hasar kriterleri genel formda şu şekilde ifade edilir:

Fiber çekme hasarı ($\widehat{\sigma_{11}} \geq 0$)

$$F_f^t = (\frac{\widehat{\sigma_{11}}}{X^T})^2 + \alpha \left(\frac{\widehat{\tau_{12}}}{S^L}\right)^2 \quad (1)$$



Şekil 1. Karbon fiber / epoksi kompozit plakanın sonlu elemanlar modeli

Fiber basma hasarı($\widehat{\sigma_{11}} < 0$)

$$F_f^c = \left(\frac{\widehat{\sigma_{11}}}{X^C}\right)^2 \tag{2}$$

Matris çekme hasarı ($\widehat{\sigma_{22}} \geq 0$)

$$F_m^t = \left(\frac{\widehat{\sigma_{22}}}{Y^T}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\widehat{\tau_{12}}}{S^L}\right)^2 \tag{3}$$

Matris basma hasarı($\widehat{\sigma_{22}} < 0$)

$$F_m^c = \left(\frac{\widehat{\sigma_{22}}}{2S^T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y^C}{2S^T}\right)^2 - 1\right]\frac{\widehat{\sigma_{22}}}{Y^C} + \left(\frac{\widehat{\tau_{12}}}{S^L}\right)^2 \tag{4}$$

$\widehat{\sigma_{11}}, \widehat{\sigma_{22}}, \widehat{\tau_{12}}$ efektif gerilme tensörleridir, $\hat{\sigma}$, hasar kriterini hesaplamada kullanılan gerilme bileşenidir ve şu ifade ile hesaplanır [12]:

$$\hat{\sigma} = M\sigma \tag{5}$$

σ gerçek gerilme bileşenidir ve hasar operatörü şu şekilde tariflenir:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1-d_f)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-d_m)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-d_s)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

d_f, d_m, d_s fiber, matris ve kayma hasarını karakterize eden ve d_f^t , d_f^c, d_m^c hasar değişkenlerinden türetilen iç hasar değişkenleridir ve daha önce bahsedilen dört hasar kriterine şu şekilde karşılık gelmektedir [12]:

$$\boldsymbol{d_f = \begin{cases} d_f^t & if\ \widehat{\sigma_{11}} \geq 0 \\ d_f^c & if\ \widehat{\sigma_{11}} < 0 \end{cases}} \quad (7)$$

$$\boldsymbol{d_m = \begin{cases} d_m^t & if\ \widehat{\sigma_{22}} \geq 0 \\ d_m^c & if\ \widehat{\sigma_{22}} < 0 \end{cases}} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{d_s = 1 - (1 - d_f^t)(1 - d_f^c)(1 - d_m^t)\,(1 - d_m^c)} \quad (9)$$

3 Boyutlu Hasar Kriterleri ve Sayısal Modele Uyarlanması

Kompozit tabakaların üç boyutlu hasar davranışı, kullanıcı tanımlı malzeme modeli kullanılarak modellenmitir. Bu model, çekme ve basma yükleri altındaki fiber ve matris hasarını içermektedir. VUMAT kullanıcı tanımlı malzeme modeli, hasarın başlamasını ve ilerlemesini öngören ortotropik bir malzeme modeli olarak kullanılmıştır. Kriterler aşağıda formüle edilmiştir [11].

Fiber çekme hasarı:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X_T}\right)^2 + \frac{1}{S_{12}^2}(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) \geq 1 \quad (10)$$

Fiber basma hasarı:

$$F_f^c = \left(\frac{\sigma_1}{X_C}\right)^2 \quad (11)$$

Matris çekme hasarı:

$$\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{Y_T^2}\right)^2 + \frac{(\tau_{23}^2-\sigma_2\sigma_3)}{S_{23}^2} + \frac{(\tau_{12}^2-\tau_{13}^2)}{S_{12}^2} \geq 1 \quad (12)$$

Matris basma hasarı:

$$\frac{\sigma_2}{Y_C}\left[\left(\frac{Y_C}{2S_{23}}\right)^2 - 1\right] + \left(\frac{\sigma_2}{2S_{23}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 \geq 1 \quad (13)$$

1, 2 ve 3 yönleri sırasıyla fiber, düşey ve kalınlık boyunca yönü tarif etmektedir. X_T fiber yönünde en büyük normal gerilme, X_C fiber boyunca basma mukavemetini, S_{12} katmanların kayma gerilmesi değeri olup deneysel olarak tespit edilen sabit değerlerdir. σ_1 , τ_{12} ve τ_{13} analizler sırasında çözüm adımlarından elde edilen gerilmeler olup sırasıyla fiber yönündeki normal gerilme değerini, 1-2 ve 1-3 düzlemlerindeki kayma gerilmelerini temsil etmektedir. Bu hasar kriterinin uygulanabilmesi için $\sigma_1 > 0$ olması gerekmektedir. Çalışmada kullanılan kompozit malzemelerin mekanik özellikleri ve hasar parametreleri Tablo 1'de verilmiştir.

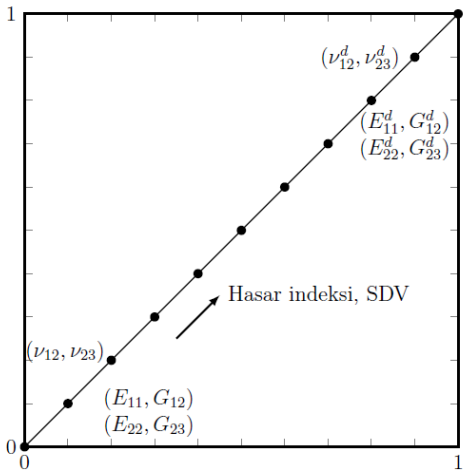
Kompozit plakalarda fiber için basma ve çekme altındaki, matris için basma ve çekme altındaki hasar kriterleri kullanılmıştır. Hasar kriterleri ABAQUS [12] yazılımına uygun kullanıcı tanımlı malzeme modeli FORTRAN dilinde, VUMAT alt kodu yazılarak uygulanmıştır. ABAQUS ilk yük iterasyonunu yapar, iterasyon sonunda hasar kriterlerinde kullanılacak parametreleri hesaplar. Malzemeye ait deneysel sabitler FORTRAN alt programında kullanılmıştır. Hasar

kriterleri her bir yük iterasyonu sonunda ABAQUS tarafından her bir integrasyon noktasında hesaplanır ve yorumlanır. Hasar kriterine göre her bir integrasyon noktasında gerekli parametreler kullanılarak hesaplamalar yapılır. ABAQUS tarafında SDV olarak tariflenen hasar kriterleri $[0-1]$ arasında indeks değişkenine göre hesaplanır. SDV'nin 1 olması demek artık o integrasyon noktası ile ilgili hasar kriterinde hasara uğradığı (fail) anlamına gelir. SDV'lere yazılan indekslere göre bir bozunum kuralı oluşturulmuş ve kompozit malzemenin mekanik özelliklerine aktarılmıştır.

Tablo 1. Kompozit malzemenin (Karbon fiber/epoksi) mekanik özellikleri [13]

Özellik	Karbon fiber/epoksi
Boyuna elastisite modülü, E_{11}	150.9 (GPa)
Enine elastisite modülü, $E_{22} = E_{33}$	11.2 (GPa)
Düzlem içi kayma modülü, $G_{12} = G_{13}$	5.3 (GPa)
Düzlem dışı kayma modülü, G_{23}	1.4 (GPa)
Hacim oranı, V_f	0.54
Poison oranı, $\mu_{12} = \mu_{13}$	0.29
Poison oranı, μ_{23}	0.33
Yoğunluk	1710 (kg/m^3)
Boyuna çekme mukavemeti, X_T	1858.3 (MPa)
Enine çekme mukavemeti, $Y_T = Z_T$	25.4 (MPa)
Boyuna basma mukavemeti, X_C	576.8 (MPa)
Enine basma mukavemeti, $Y_C = Z_C$	107.3 (MPa)
Düzlem içi kayma mukavemeti $S_{12} = S_{13}$	79.5 (MPa)
Interlaminar kayma mukavemeti, S_{23}	22.9 (MPa)

Kompozit malzemedeki yük taşıma kapasitenin oluşan hasarlar sonucu azalması, oluşturulan bir bozunum (degradation) kuralı ile sonlu elemanlar modeline aktarılmıştır. Bozunum kuralları, kompozit malzemelerin mekanik özelliklerinin seçilen kriterlere göre lineer veya lineer olmayacak şekilde azaltılması ile oluşturulmaktadır. Kompozit malzemeler için uyarlanan hasar kriterlerinin değerlendirme sonuçlarına göre malzeme mekanik özellikleri güncellenir ve bu ilgili noktada malzeme davranışını belirler. Her iterasyonda güncelleme gerçekleşir ve malzemenin davranışı sürekli değişir. Çalışmalarda bozunum kurallarının sınırları deneysel şartlara göre doğruluk kazanmıştır. Bu çalışmada bozunum kuralı, iki farklı hasar kriterinin hasar indekslerine göre bir arada uygulanmıştır. Kompozit malzemedeki fiber basma ve çekme hasar kriterine göre malzemenin mekanik özellikleri azaltılarak modele uygulanmıştır. Elastik özelliklerdeki bu azalış, deneysel sonuçlara göre düzenlenmiştir. Kural uygulanırken şu yollar izlenmiştir: Kompozit malzemenin çekme altında yükü fiberin, basma altında ise yükü matris malzemesinin taşıdığı hükmünden yola çıkılarak, fiber çekme hasarına göre malzemenin fiber yönündeki mekanik özellikleri, E_{11} , G_{12} ve ν_{12} , deneysel sonuçlara göre karar verilen indirgeme parametrelerine göre lineer olarak azaltılmıştır. Fiber basma hasarına göre, fiber eksenine dik yöndeki mekanik özellikler, E_{22} , G_{23} ve ν_{23}, lineer olarak azaltılmıştır (Şekil 2 b).



a)

Hasar Tipi	Bozunum Kuralı
Fiber çekme hasarı	$E_{11}^d = 0.05E_{11}$
	$G_{12}^d = 0.05G_{12}$
	$v_{12}^d = 0.5v_{12}$
Fiber basma hasarı	$E_{22}^d = 0.05E_{22}$
	$G_{23}^d = 0.05G_{23}$
	$v_{23}^d = 0.5v_{23}$

b)

Şekil 2. a) Bozunum kuralının sonlu elemanlar modeline uygulanması b) Hasara uğrayan malzeme özellikleri için bozunum kuralı

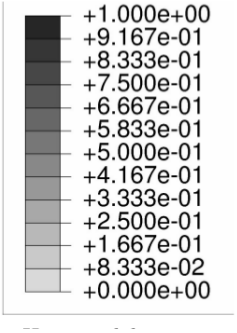
Kompozit malzeme için tariflenen hasar kriterinde belirtildiği gibi hasar indeksi (SDV) değerleri her bir integrasyon noktası için gerekli parametreler kullanılarak hesaplanır, tüm integrasyon noktalarını içerecek şekilde matris formunda kaydedilir. Her bir hasar tipine göre $[0 - 1]$ arasında hasar düzeyini göstermek üzere hesaplanan bir değer atanır. Malzemenin mekanik özelliklerinin azalışı, artan hasar indekslerine göre değişmektedir. Bunun için lineer bir doğru tariflenmiş (Şekil 2 a), bu doğru deneysel sonuçlara göre sonuç vermesi için 10 eşit parçaya bölünmüştür (Ara değerler interpolasyon ile hesaplanır). Malzemenin mekanik özelliklerinin bu doğruya göre yeni değerleri için Python programlama dilinde bir tablo oluşturulmuştur ve ortotropik elasiktik malzeme modeline aktarılmıştır.

Şekil 1'de fiber takviyeli tabakalı kompozit plakanın sayısal modelinin doğrulanması için kullanılan ve ASTM standartlarına göre üretilen, 8 tabakadan oluşan tek yönlü fiber açısına sahip model, geometrik boyutlar ve sınır şartı gösterilmektedir. Vurucu küresel uç geometrisine sahiptir, çapı 20 mm ve kütlesi 5.045 kg'dır. Deneysel testler ve analizler 5, 10 ve 20 J darbe enerjileri için gerçekleştirilmiştir. Analizler için sonlu eleman tiplerinin hesaplama başarımı önemlidir. Analizler aynı enerji seviyelerinde katı (solid) ve kabuk (shell) elemanlar için yapılmıştır. Katı elemanda bozunum modeli uygulanmış ve elastik sabitlerin bozunum katsayılarına karar verilmiştir. Deneysel ve teorik sonuçlar, temas kuvveti değişimi, kinetik enerji degişimi ve hasar tipleri bakımından irdelenmiştir. Kompozit malzeme modeli ve bozunum kuralı katı ve kabuk elemanlar için kullanılarak kompozit plakanın darbe davranışına etkisi araştırılmıstır.

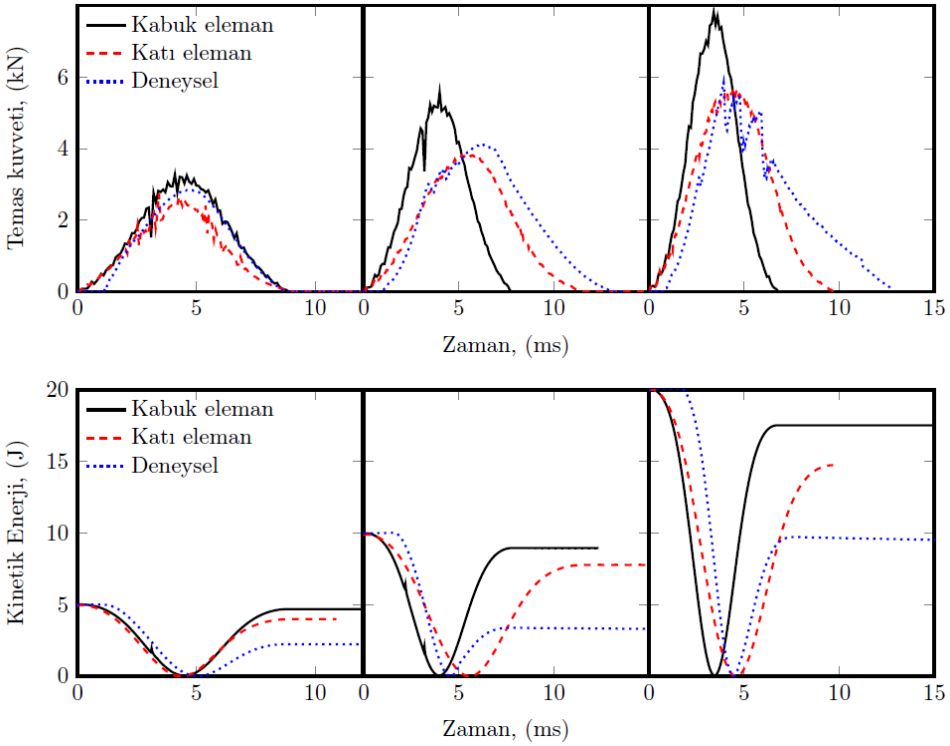
SAYISAL SONUÇLAR

Hasar analizi sonuçları en düşük ve en yüksek darbe enerjisi için basma ve çekme yükleri altındaki fiber ve matris malzemesinde oraya çıkan hasar alanları için verilmiştir. Şekil 2'de bu hasar alanlarının yoğunluğunun belirlenmesinde kullanılan indeks seviyesi çubuğu gösterilmektedir. Sekil 3'de fiber tekviyeli kompozit plakaların 5, 10 ve 20 J darbe enerjileri altında temas kuvveti ve kinetik enerji değişimlerinin hesaplanmasında katı ve kabuk elemanın başarısı gösterilmektedir. Kabuk eleman ile modellenen kompozit plakada 5, 10 ve 20 J darbe altında en büyük temas kuvvetleri sırası ile 3.2, 5.5 ve 7.8 kN olurken, temas süreleri sırası ile 8.8, 7.8 ve 6.7 ms hesaplanmaktadır. Katı eleman ile modellenen kompozit plakada aynı darbe enerji seviyelerinde en büyük temas kuvvetleri sırası ile 2.7, 3.8 ve 5.6 kN olurken, temas

süreleri ise sırası ile 9.0, 11.5 ve 9.6 ms hesaplanmaktadır. Karbon fiber takviyeli kompozit plakanın 5, 10 ve 20 J darbe enerjileri altında deneysel en büyük temas kuvvetleri sırası ile 2.8, 4.1 ve 5.8 kN, temas süreleri sırası ile 8.8, 13.4 ve 12.7 ms ölçülmektedir. Grafiklerden görülmektedir ki, darbe enerjisi arttıkça en büyük temas kuvvetleri ve temas süreleri artmaktadır. Temas süresinin artması kompozit plakalarda hasar oluştuğunu göstermektedir. Deneysel sonuçlara katı elaman kullanılarak oluşturulan modelin daha çok yaklaştığı görülmektedir. Kabuk elemanlı model daha rijit davranmıştır. Uygulanan bozunum kuralı, deneysel en büyük temas kuvveti seviyelerine hesaplanan kuvvet seviyelerinin yaklaşmasını sağlamaktadır.



Şekil 2. Hasar indeksi seviye çubuğu.



Şekil 3. Fiber takviyeli kompozit plakaların (tek yönlü, 8 tabaka, 2 mm) temas kuvveti ve kinetik enerji değişiminlerinde kabuk ve katı elemanların başarımı.

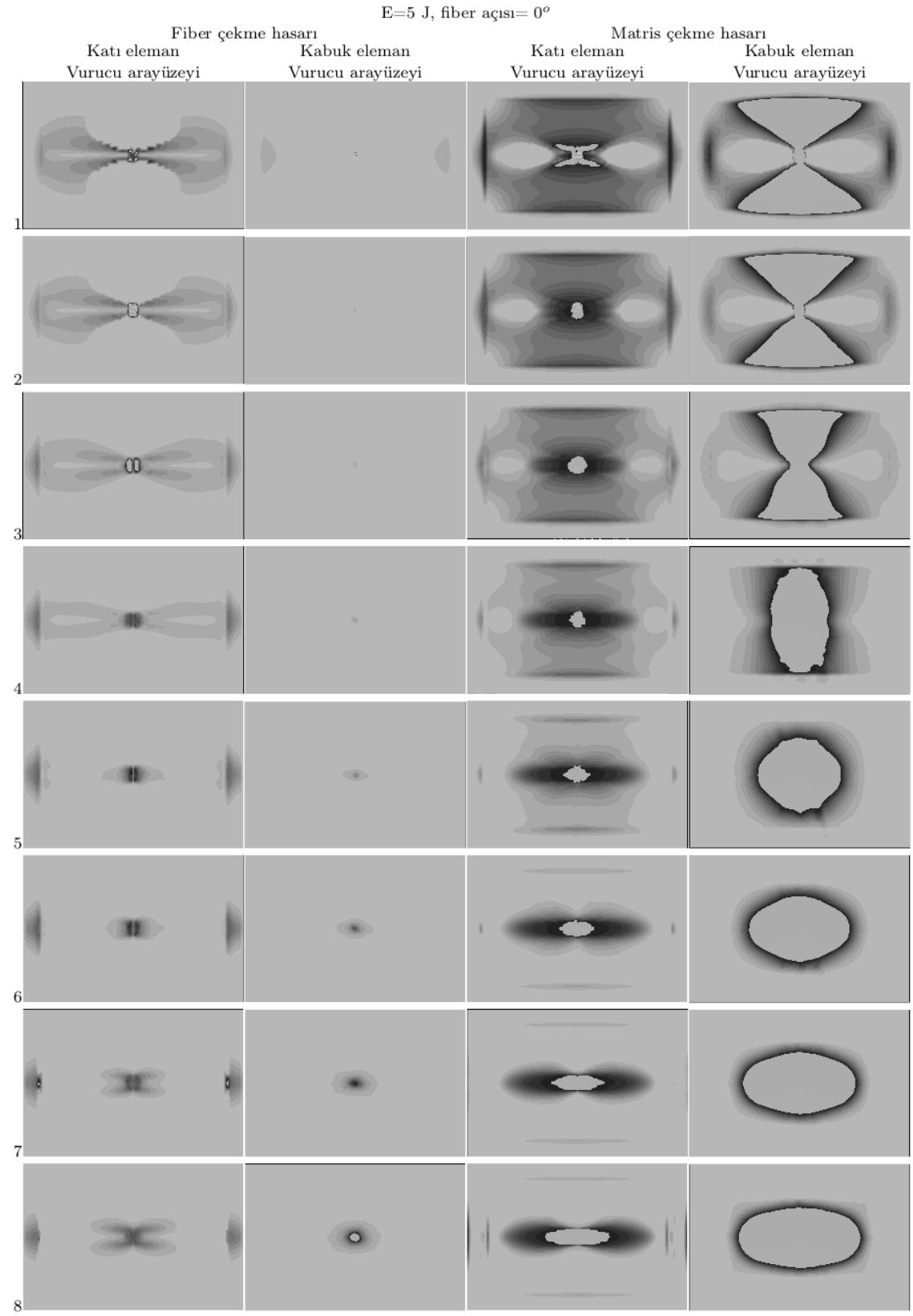
Kinetik enerji-zaman grafikleri, düsük enerji seviyelerinde elastik davranışın daha belirgin olduğunu göstermektedir. Kompozit malzemelerde enerjinin sönümlenmesi fiber ve matriste meydana gelen hasarlar ile ilgilidir. Kabuk eleman ile modellenen plakalar enerji seviyesi arttıkça elastik davranışını sürdürmüştür. Deneysel enerji sönümleme kabiliyeti sayısal modellerden tahmin edilenden daha yüksek çıkmıştır. Kullanılan katı elemanlı sayısal model

ve bozunum kuralı deneysel grafiklere daha çok yaklaşmaktadır. Katı ve kabuk eleman davranışları tüm hasar parametrelerine göre karşılaştırılmıştır.

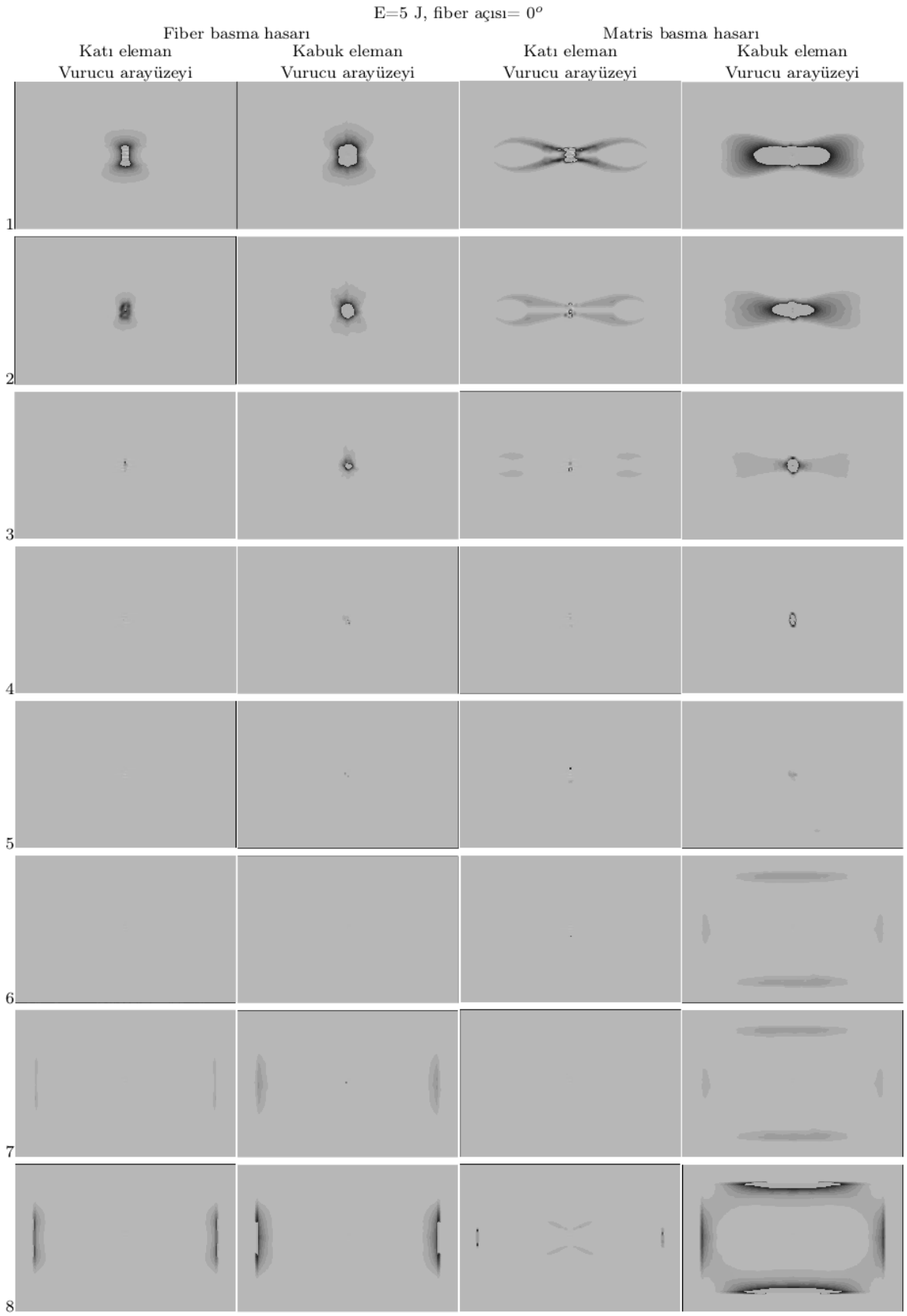
Şekil 4'de 5J'lük bir darbe enerjisi için fiber ve matris çekme hasar kriterleri uygulanarak herbir kompozit plaka tabakalarında elde edilen hasar dağılımlarında kabuk ve katı elemanların başarımı karşılaştırılmaktadır. Kompozit plakanın katmanları üstten alta 1, 2, ...,8 şeklinde sıralanmıştır. Vurucu üst plakanın 1 nolu katmanı ile temas etmektedir. Tüm hasar sonuçları Şekil 2'de gösterilen hasar çubuğuna göre düzenlenmiştir ve bu sayede hasar bölgeleri aynı aralıkta karşılaştırılmasına olanak sağlanmıştır. 5 J darbe enerjisi için kabuk eleman ile modelenen plakanın ilk üç katmanında hasar oluşmaz iken, katı eleman ile modellenen plakada hasar oluşmuştur. Fiber çekme hasarında, katı elemanlar için plakanın 8. katmanına doğru inildikçe hasarın darbe bölgesinde belirginleştiği görülmektedir. Kabuk elemanlarda ise hasarın 5., 6., 7. ve 8. katmanda oluştuğu görülmektedir. Matris çekme hasarı 8. katmana doğru gidildikçe fiber yönünde azalmaktadır. Kabuk elemanlarda hasar daha fazla oluşmaktadır. Hasarın en fazla olduğu bölgeler (hasar indeksi=1) siyah renk ile gösterilmektedir ve bu bölgeler içerisinde kalan elemanlar yük taşımamaktadır. Bu durum kabuk elemanlarda daha fazla görülmektedir. Matris çekme ve basma hasar kriterlerine göre analizler katı ve kabuk eleman için farklı sonuçlar vermiştir. Şekil 5'de 5 J darbe enerjisinde darbe sürecinde kompozit plakaların tabakalarında kabuk ve katı elemanlar ile fiber ve matris basma kriterlerine göre hesaplanan hasar bölgeleri gösterilmiştir.

Kabuk ve katı elemanlar ile modelenen plakalarda fiber basma hasarı küçük farklılıklar sergilemektedir. 3., 4., 5. ve 6. tabakalarda fiber basma hasarı oluşmamaktadır. Fiberin en fazla basma yüküne maruz kaldığı katmanın 1. katman olduğu görülmektedir ve hasar fibere dik yönde ilerlemektedir. 8. katmana doğru fiber basma hasarında sınır şartlarının belirgin olduğu görülmektedir. Matris basma hasarı ise fiber doğrultusu yönünde görülmektedir. Kabuk elemanlar ile modellenen plakada matris basma hasarı daha belirgindir. 8. katmana doğru benzer sınır şartı etkisini göstermektedir ve matris basma hasarı sınır şartı bölgesinde oluşmaktadır.

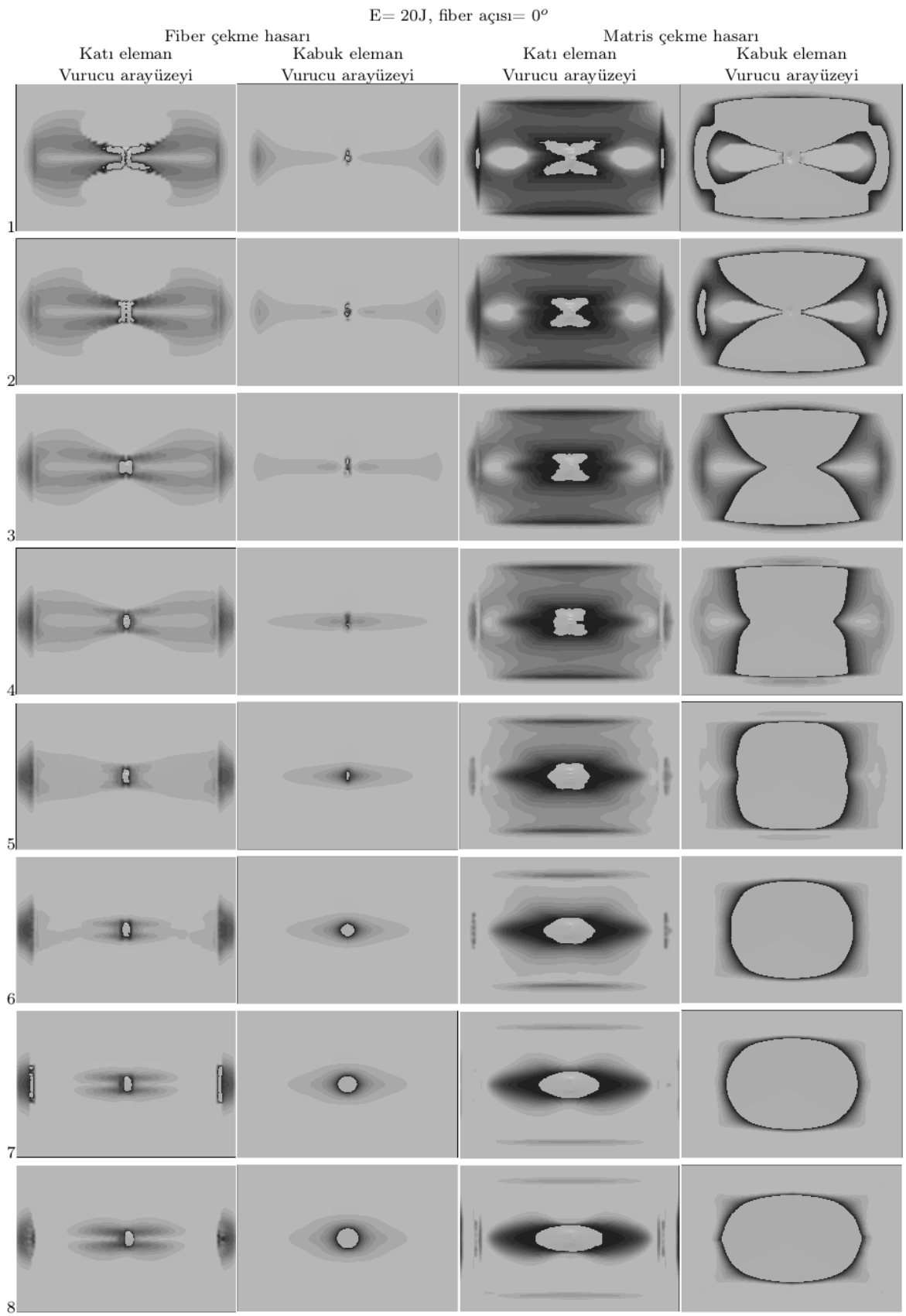
Şekil 6'da 20 J darbe enerjisinde darbe sürecinde kompozit plakaların tabakarında kabuk ve katı elemanlar ile fiber ve matris çekme kriterlerine göre hesaplanan hasar bölgeleri gösterilmiştir. Yüksek enerji seviyesinde üst ve alt plakanın tüm katmanlarında fiber ve matrisin hasara uğradığı, oluşan hasar alanlarının düşük enerji seviyesine göre oldukça fazla olduğu görülmektedir. Katı elemanlı katmanlarda kabuk elemanlı katmanlara göre daha fazla fiber çekme hasarı oluştuğu görülmektedir. Hasar en fazla 1. katmanda olurken, 8. katmana doğru düzenli olarak azalmaktadır. Alt katmanlarda sınır şartı etkisi daha açık ön plana çıkmaktadır. En büyük hasar alanı vurucu ile temas eden ilk katmanda ortaya çıkmıştır. Matrisin çekme altında uğradığı hasarın alanları fiber hasar alanlarına göre oldukça büyüktür. Kabuk elemanlı modelde daha fazla eleman hasara maruz kalmıştır. Hasar alanları 8. plakaya doğru azalmaktadır. Kabuk ve katı elemanlar matrisin çekme altında hasarını oldukça farklı tahmin etmektedir. Kabuk elemanlar tüm katmanlar boyunca geniş hasar bölgeleri tahmin eder iken katı elemanlar fiber doğrultusunda giderek azalan hasar bölgeleri belirlemiştir. Darbe sonrası kompozit plakaların tabakalarında kabuk ve katı elemanlar ile fiber ve matris basma kriterine göre tahmin edilen 20 J darbe enerjisi altındaki hasar bölgeleri Şekil 3.7'de gösterilmiştir. Düşük enerji seviyesi (E=5 J) altında oluşan hasar bölgelerinin biraz daha genişlediği görülmektedir. Genel davranış ise aynı kalmaktadır.



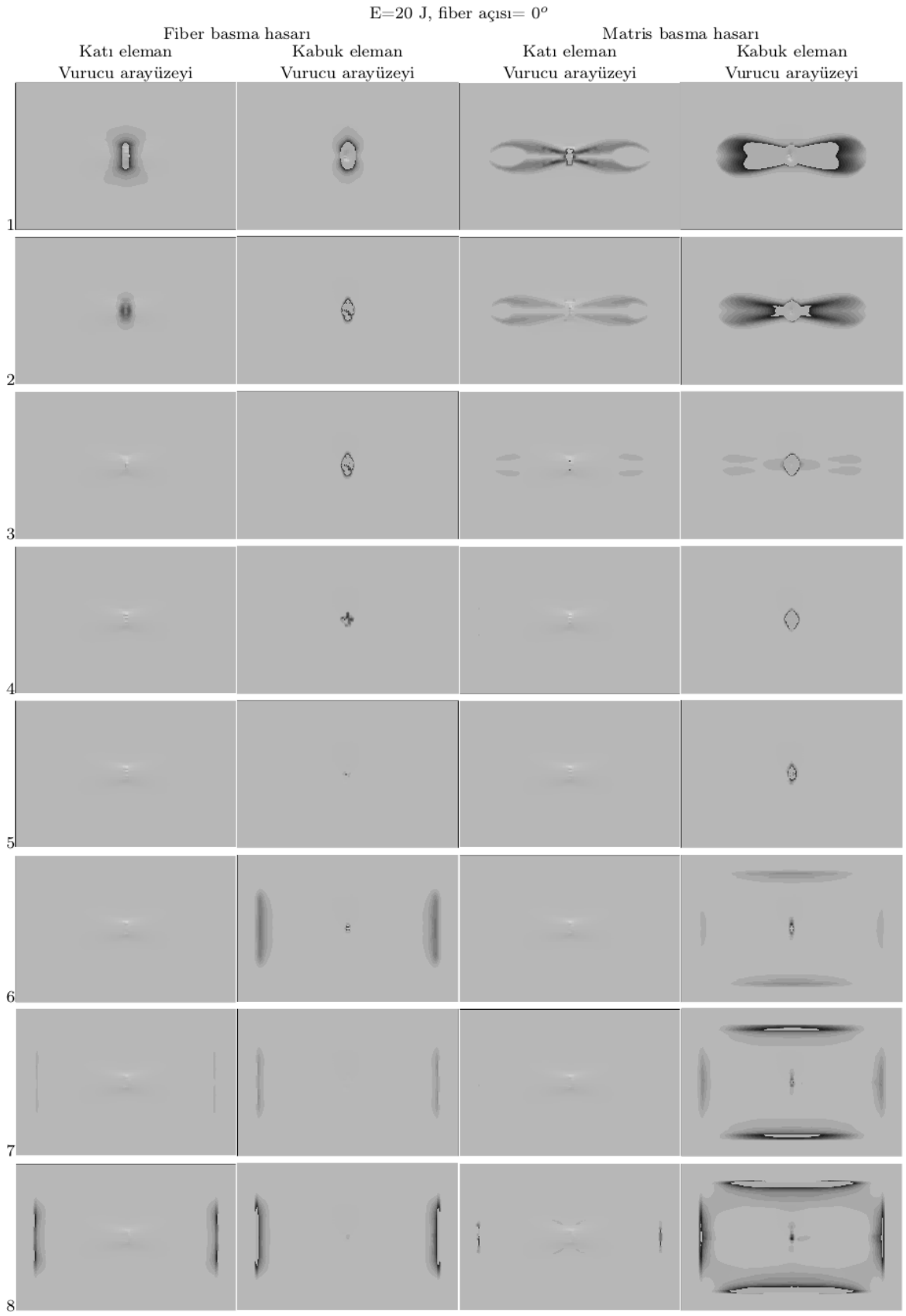
Şekil 4. Çekme kriterlerine göre hasar bölgelerinin tahmininde eleman tipinin tesiri (kabuk, katı eleman, E=5 J, θ= 0°).



Şekil 5. Basma kriterlerine göre hasar bölgelerinin tahmininde eleman tipinin tesiri (kabuk, katı eleman, E=5 J, θ= 0°)



Şekil 6. Çekme kriterlerine göre hasar bölgelerinin tahmininde eleman tipinin tesiri (kabuk, katı eleman, E=20 J, θ= 0 ◦)



Şekil 7. Basma kriterlerine göre hasar bölgelerinin tahmininde eleman tipinin tesiri (kabuk, katı eleman, E=20 J, θ= 0 ◦).

SONUÇLAR

Karbon fiber takviyeli tabakalı kompozit plakanın düşük hızlı davranışlarını modellemek için kabuk ve katı sonlu eleman kullanımının hasar oluşumunu modellemedeki yetenekleri karşılaştırılmış ve katı eleman için yeni bir bozunum modeli önerilmiştir. Darbe davranışları temas kuvveti, kinetik enerji değişimleri açısından ve çekme ve basma yükleri altındaki matris ve fiber malzemesinde oluşan hasar alanlarının tespiti açısından incelenmiştir. Kabuk eleman içeren modeller için sonlu elemanlar yazılımlarında mevcut hasar teorileri ve bozunum modelleri bulunurken katı elemanlar için mevcut değildir. Katı eleman kullanımı kompozitin kalınlık boyunca yük taşıması durumunda önem arz etmektedir ve düğüm noktaları arasındaki yük transfer mekanizmasını etkilemektedir. Katı eleman için yeni bir bozunum modeli önerilmiştir ve sonlu elemanlar modeline adapte edilmiştir. Sonuçlar katı eleman içeren sonlu elemanlar modelinin deneysel sonuçlara oldukça yaklaştığını göstermektedir. Bununla birlikte katı ve kabuk elemanda meydana gelen hasar alanları arasında oldukça farklar olduğu kabuk elemanın daha kolay hasara uğradığını ve daha büyük hasar alanları sonucu verdiği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] O. T. Topaç, B. Gözluklu, E. Gürses ve D. Çoker, Experimental and computational study of the damage process in CFRP composite beams under low-velocity impact, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 92 (2017) 167 – 182.

[2] J.F. Chen, E.V. Morozov, K. Shankar, Simulating progressive failure of composite laminates including in-ply and delamination damage effects, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 61 (2014) 185 – 200.

[3] S. Long, X. Yao, X. Zhang, Delamination prediction in composite laminates under low-velocity impact, *Composite Structures*, 132 (2015) 290 – 298.

[4] H. Singh, K. K. Namala, P. Mahajan, A damage evolution study of E-glass/epoxy composite under low velocity impact, *Composites Part B: Engineering*. 76 (2015) 235 – 248.

[5] J. Zhang, X. Zhang, An efficient approach for predicting low-velocity impact force and damage in composite laminates, *Composite Structures*. 130 (2015) 85 – 94.

[6] P. Liu, B. Liao, L. Jia, X. Peng, Finite element analysis of dynamic progressive failure of carbon fiber composite laminates under low velocity impact, *Composite Structures*, 149 (2016) 408 – 422.

[7] D. H. Kim, K. H. Jung, I. G. Lee, H. J. Kim, H. S. Kim, Three-dimensional progressive failure modeling of glass fiber reinforced thermoplastic composites for impact simulation, Composite Structures, 176 (2017) 757 – 767.

[8] C. Lopes, P. Camanho, Z. Gürdal, P. Maimí, E. González, Low-velocity impact damage on dispersed stacking sequence laminates. Part II: Numerical simulations, *Composites Science and Technology.* 69 (2009) 937 – 947.

[9] P. W. Harper, L. Sun, S. R. Hallett, A study on the influence of cohesive zone interface element strength parameters on mixed mode behaviour, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 43 (2012) 722– 734.

[10] H. Singh, P. Mahajan, Modeling damage induced plasticity for low velocity impact simulation of three dimensional fiber reinforced composite, *Composite Structures*, 131 (2015) 290 – 303.

[11] Hashin, Z., 1980. Failure criteria for unidirectional fiber composites, Journal of Applied Mechanics, 47(2):329–334.

[12] ABAQUS/Explicit (Version 6.14), User's manual, Finite Element Software. Available from http://www.simulia. com

[13] Kapti, S., Sayman, O., Ozen, M., ve Benli, S., 2010. Experimental and numerical failure analysis of carbon/epoxy laminated composite joints under different conditions, Materials & Design, 31(10):4933 – 4942.

KOMPOZİT GÜÇLENDİRİLMİŞ PLAKLARIN OPTİMİZASYONU

Hilal Koç[1], Yusuf Şahiner[2], Mahmut Yakar[3], Fikri Kemal Adam[4], Ekrem Tüfekci[5]
[1,2,3,4,5] İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

It is known that the use of stiffened composite plates in engineering applications has increased significantly in recent years, especially due to their high hardness, low weight and high strength properties. In this study, it is aimed to obtain the plate layer and stiffener layouts that give the highest buckling load that the design can meet via optimization and parametric studies by using different layer arrays and laying angles of unstiffened and stiffened composite plates with simple support boundary conditions. Layer sequences 8, 16 layers, lay angles $-45^{\circ}, 0^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}$ and stiffener profiles I and T will be considered. It is observed that the use of stiffener significantly increases the buckling load.

Keywords: Laminated Composite Material; Optimization; Finite Element Method;

ÖZET

Mühendislik uygulamalarında, takviyeli kompozit plakların kullanımının, özellikle yüksek sertlik, düşük ağırlık ve yüksek mukavemet özellikleri sayesinde son yıllarda önemli ölçüde artış gösterdiği bilinmektedir. Bu çalışmada basit mesnet sınır koşullarına sahip takviyesiz ve takviyeli kompozit plakların farklı tabaka dizilimleri ve serim açıları kullanılarak, tasarımın karşılayabileceği en yüksek burkulma yükünü veren plak tabaka ve takviye dizilimlerinin optimizasyon ve parametrik çalışma ile elde edilmesi amaçlanmaktadır. Tabaka dizilimleri 8, 16 tabaka ve serim açıları $-45^{\circ}, 0^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}$ ve takviye profili I ve T olarak ele alınacaktır. Takviye kullanmanın burkulma yükünü önemli ölçüde arttırdığı gözlemlenmektedir.

Anahtar kelimeler: Tabakalı Kompozit Malzeme; Optimizasyon; Sonlu Eleman Yöntemi;

GİRİŞ

İnce cidarlı yapılara veya plaklara genellikle gemi, uçak ve köprü yapımı gibi pek çok mühendislik uygulamalarında rastlanmaktadır. Mühendislik yapılarında, yapısal verimlilik ve mukavemet kaybı olmaksızın ağırlığın korunması önemlidir. Bu yapılar tek eksenli basma kuvveti, basınç yükü, eğilme momenti ve kesme yükü gibi çeşitli yük türlerine maruz kaldığında, plağın yapısal çökmesi nedeniyle burkulma meydana gelmektedir. Takviyesiz yapının burkulma direncini artırmanın yaygın yolu, yapının kalınlığının artırılması veya takviyelerin kullanılmasıdır. Mühendislik çalışmalarında yapının hafif olması ve verimliliğin yüksek olması istenir. Bir başka deyişle, yüksek performanslı ürünlerin hafif olması gerektiği, ancak yine de zorlu yükleme koşullarını karşılayacak kadar güçlü olması beklenmektedir [1]. İzotropik metal malzemelerde takviyeli plak üretimi yerine 1960'ların başından bu yana güçlendirilmiş kompozit plakların kullanılması, hafiflik, düşük üretim maliyeti, yüksek mukavemet, yüksek kararlılık, büyük enerji emilimi ve üstün hasar toleransı nedeniyle

avantajlı hale gelmiştir. Bu takviyeler, boyuna veya enine yönde yerleştirilebilir ve plaka üzerine düz çubuk, şapka tipi, I-kesit, T-kesit gibi çeşitli geometrilerde/kesitlerde imal edilebilir. Ancak kompozit malzemelerde fiziksel problemler, izotropik malzemeye göre daha karmaşıktır. Düzlem içi yüklemeye maruz kalan takviyeli kompozit plakların burkulma dayanımı yapısal tasarımda çok önemlidir. Sınır ve yükleme koşulları altında kompozit malzeme üzerindeki deformasyon ve gerilme dağılımını analitik olarak bulmak genellikle mümkün olmadığı için sonlu elemanlar yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır.

Literatürde, kompozit malzemelerin mekanik davranışlarının incelenmesinde analitik, sayısal ve deneysel yöntemlerin kullanıldığı gözlemlenmektedir. Kompozit panellerin statik ve dinamik yüklemeler altındaki davranışını sonlu elemanlar ve deneysel yöntemler ile inceleyerek optimizasyon çalışması yapmışlardır [2]. Burkulma yükü, çökme veya kırılma yükü kriterlerini esas alarak, kompozit panellerin optimizasyonunu sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirmişlerdir [3]. Kompozit panellerin optimizasyonunu analitik çözümle ve sonlu elemanlar yöntemiyle incelemişlerdir [4]. Enine yüklü kompozit panellerin statik ve dinamik davranışlarının incelenmesinde analitik ve deneysel yöntemleri kullanmışlardır [5]. Tabakalı kompozit plakların optimum tasarımında tabaka oryantasyon açılarını ve tabaka sayılarını değişken parametre olarak ele almışlardır [6]. Düzlem içi ve düzlem dışı yüklemeye sahip tabakalı kompozit plakların ağırlığını en aza indirmek için optimizasyon çalışması yapmışlardır [7]. Çok katmanlı kompozit yapıların optimizasyonunun incelenmesinde tabaka oryantasyon açılarını, tabaka sayılarını ve yük çarpanını değişken olarak ele almışlardır [8]. Genetik algoritma kullanarak, farklı yükleme ve tabaka oryantasyonuna sahip kompozit laminaların minimum ağırlık tasarım optimizasyonunu gerçekleştirmiştir [9]. Genetik algoritma ile düzlem içi yüklemelere sahip tabakalı kompozitlerin optimizasyon çalışmasını yapmışlardır [10]. Literatürde takviyeli kompozit plaklarla ilgili çok az sayıda çalışma olduğu görülmektedir. T profilli kompozit panellerin burkulma davranışını sayısal ve deneysel yöntemler ile incelemişlerdir [11]. Dikdörtgen plakların optimum tasarımında takviye elemanının etkisini sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir [12]. Optimum takviye elemanının konumu ve yönelimi problemini üç boyutlu plak/kabuk elemanlar ve topoloji optimizasyon yöntemiyle ele almışlardır [13].

Bu çalışmada birim ağırlık başına en yüksek burkulma yükü dayanımını veren plak tabaka ve takviye dizilimleri için optimizasyon ve parametrik çalışmanın yapılacaktır. Takviyesiz kompozit plaklarda $-45^{\circ}, 0^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}$ serim açıları kullanılarak, genetik algoritma ile birim ağırlık başına en yüksek burkulma yükü dayanımını veren tabaka dizilimleri bulunarak optimizasyon çalışması yapılacaktır. Parametrik çalışmada ise takviyeli kompozit plaklarda en yüksek burkulma yükü dayanımını veren takviye tabaka dizilimleri için ABAQUS ve PYHTON programı kullanılacaktır.

FORMÜLASYON

Doğrusal burkulma analizinde öncelikle tabakalı kompozit yapının elastik şekil değiştirme bağıntıları elde edilmelidir. Bu bağıntılar 3 (üç) adet rijitlik matrisinden oluşmakta ve bu matrisler aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\bar{Q}_{ij}\right)\right]_k (h_k - h_{k-1}), \qquad i = 1,2,6; \;\; j = 1,2,6. \tag{1}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\bar{Q}_{ij}\right)\right]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \qquad i = 1,2,6; \;\; j = 1,2,6. \tag{2}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\bar{Q}_{ij}\right)\right]_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right), \qquad i = 1,2,6;\ \ j = 1,2,6. \tag{3}$$

Burada, $[A]$ düzlem içi kuvvetleri orta düzlemdeki şekil değiştirmelerle ilişkilendiren rijitlik matrisini, $[B]$ kuvvet ve momentleri şekil değiştirmelerle ilişkilendiren rijitlik matrisini ve $[D]$ momentlerle eğrilikleri ilişkilendiren rijitlik matrisini temsil etmektedir.

Denklem (1-3)'den elde edilen [A], [B] ve [D] matrisleriyle, sıcaklık ve nem etkisi ihmal edildiğinde, tabakalı yapıda gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirme denklemlerinin matris formunda yazımı aşağıdadır:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Burada, birim uzunluk başına normal kuvvetler N_x ve N_y; birim uzunluk başına kesme kuvveti N_{xy}; birim uzunluk başına eğilme momentleri M_x ve M_y; ve birim uzunluk başına burulma momentleri M_{xy}; tabakalı yapının orta düzlemindeki birim uzamalar ε_x^0 ve ε_y^0; tabakalı yapının orta düzlemindeki kayma şekil değiştirmesi γ_{xy}^0 , tabakalı yapının orta düzlemindeki eğrilikler κ_x ve κ_y ve tabakalı yapının orta düzlemindeki burulma eğriliği κ_{xy} ile ifade edilir. Orta düzlem simetrikliğine sahip kompozit bir plakada $B_{ij} = 0$ olur. Böylece, N_x, N_y ve N_{xy} ifadeleri aşağıda belirtilmektedir:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 \tag{5}$$

$$N_y = A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + A_{26}\gamma_{xy}^0 \tag{6}$$

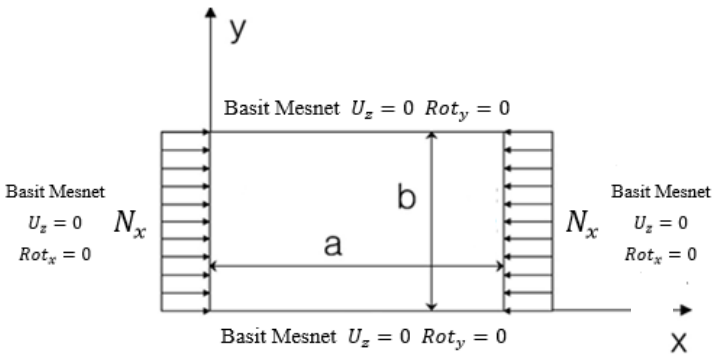
$$N_{xy} = A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 \tag{7}$$

Denklem (5-7) düzenlenirse;

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x,y) + N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + N_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{8}$$

elde edilir. Denklem (8)'de, yalnızca N_x eksenel yükü maruz kalan kompozit plağın burkulma ifadesi aşağıdadır:

$$D_1\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - N_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$



Şekil 1. Dikdörtgen Plak Gösterimi.

Kompozit bir ortotropik plakta burkulma hesabının analitik olarak yapılması, dikdörtgen plağın dört kenarının basit mesnetli olması durumunda Navier çözümü ile mümkündür. Çökme fonksiyonu aşağıdadır:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{10}$$

Denklem (10), denklem (9)'da yerine yazılırsa, birim uzunluk başına kritik burkulma yükü, $N_{x,cr,}$ elde edilir.

$$N_{x,cr} = -\frac{\pi^2 a^2}{m^2}\left[D_1\left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2D_3\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_2\left(\frac{n}{b}\right)^4\right] \tag{11}$$

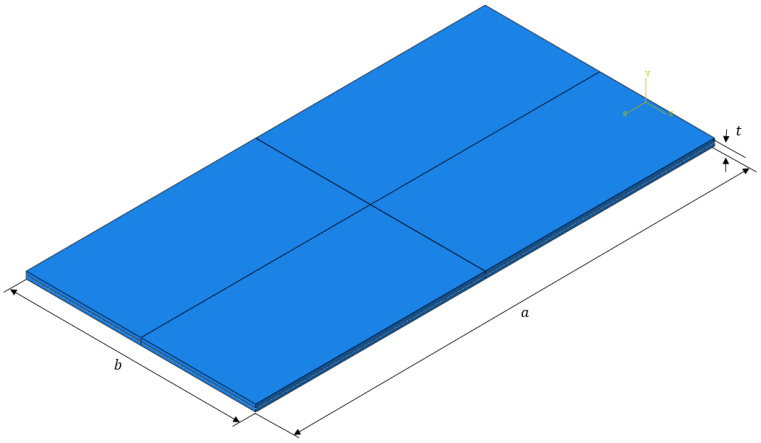
MODELLEME

Kompozit plağı analiz etmek için, bir sonlu eleman analiz yazılımında parametrik çalışma için serim açısını, kalınlığını ve katmanı değiştirme olanağına sahip bir sonlu eleman yazılımına ihtiyaç duyulmaktadır. İnce ve orta kalınlıkta plak yapılarını analiz etmek için en uygun yöntem olan SHELL 181 element kullanılmıştır. SHELL 181 element metodu sayesinde her eleman dört düğüme, her düğüm de altı serbestlik derecesine sahip olacaktır. İnce levhanın geometrik boyutları Çizelge.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 1. İnce Plağın Geometrik Ölçüleri.

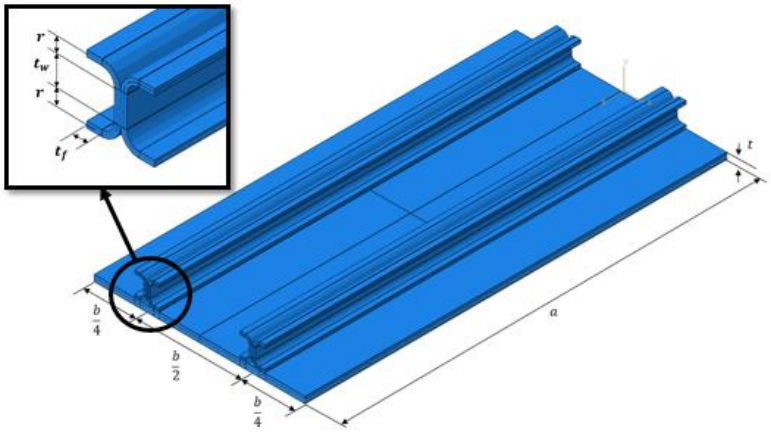
a (mm)	b (mm)	h (mm)
400	200	0.25

Burada plağın uzunluğu a, genişliği b ve tabaka kalınlığı h ile ifade edilmektedir. Takviyesiz kompozit plak Şekil 2'de gösterilmektedir.

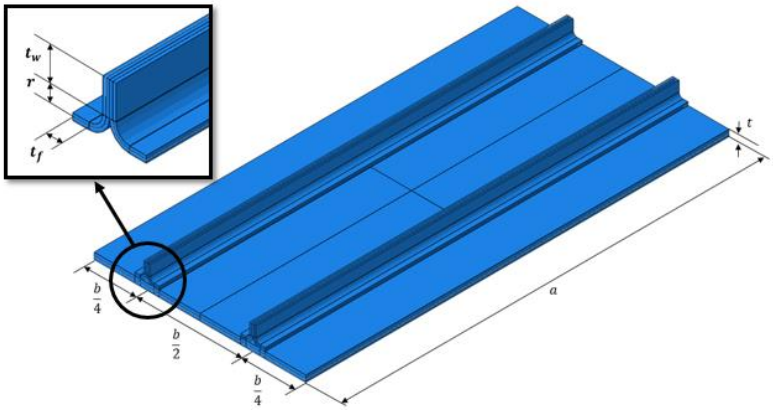


Şekil 2. Takviyesiz Kompozit Plak Gösterimi.

Şekil 2'de gösterilen t, plağın kalınlığını ifade etmektedir. I ve T profil takviyelerin plak üzerindeki konumları sırasıyla Şekil 3 ve Şekil 4'te sırasıyla gösterilmektedir.



Şekil 3. I Takviyeli Kompozit Plak Gösterimi.



Şekil 4. T Takviyeli Kompozit Plak Gösterimi.

I ve T profil takviyelerinin geometrik ölçüleri Çizelge 2'de verilmektedir.

Çizelge 2. Takviyenin Geometrik Ölçüleri.

Takviye Profili	t_w (mm)	t_f (mm)	r (mm)
T	10	10	5
I	10	10	5

Analiz için kullanılan ortotropik malzemenin (Karbon- Epoxy), malzeme özelliği Çizelge 3'te verilmektedir.

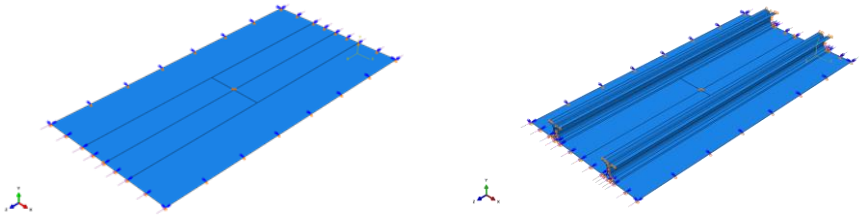
Çizelge 3. Analizde Kullanılan Karbon- Epoksinin Mekanik Özellikleri

E_1 (GPA)	E_2 (GPA)	E_3 (GPA)	G_{12} (GPA)	G_{23} (GPA)	G_{31} (GPA)	υ_{12}	υ_{23}	υ_{31}
181	10.3	10.3	7.17	8	7.17	0.28	0.0159	0.28

Sınır Koşulu

Düzlem içi yüke maruz kalan bir plağın burkulma yükü, genellikle sınır koşulundan etkilenmektedir. Plağın dört kenarı basit mesnetlendiğinde, yanal yer değiştirme olmaz ve kenarlar boyunca dönme hareketi sınırlandırıldığında daha kararlı bir sonuç verir. Bu nedenle,

mevcut çalışmada plağın dört kenarı boyunca basit mesnetli sınır koşulu seçilmiştir, yani z yönünde sınırlandırılmıştır. Bu çalışmada dörtgen ağ modeli ile plak, kabuk tipi eleman olarak modellenmiştir. Takviyeli plak, takviyesiz plak için seçilen aynı tip eleman ile modellenmiştir. Takviye ile plaka arasındaki bağlantıyı tanımlamak için ABAQUS sonlu elemanlar yazılımı üzerinden etkileşim (interaction) tanımlanmıştır. Etkileşim türü ise sıkı (tie) olarak seçilmiştir. Levha için sınır ve yükleme koşulu Şekil 5'te gösterilmektedir.



(a) (b)

Şekil 5. (a) Takviyesiz, (b) I Takviyeli Kompozit Plağa Ait Yükleme ve Sınır Koşulları.

Genetik Algoritma

Dört kenarı basit mesnetli $-45^{\circ}, 0^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}$serim açılarına sahip takviyesiz kompozit plaklar için MATLAB'de genetik algoritmada kullanılarak en iyi tabaka dizilimleri elde edilmektedir. Genetik algoritmada en yüksek burkulma yükünü veren tabaka dizilimlerinin elde edilmesi için belirlenen amaç fonksiyonu aşağıdadır:

$$Amaç\ Fonksiyonu = C * \frac{F - F_0}{F_0} \tag{12}$$

Burada, F en düşük burkulma yükünü, F_0 ise tabakalar arasındaki en düşük burkulma yükünü ve C sonuçların anlamlı olabilmesi için 0 ile 1 arasında olacak şekilde seçilmiş bir katsayıyı ifade etmektedir. Kısıt fonksiyonu, plağa en yüksek burkulma yükü uygulandığında, tabakanın Maksimum Gerilme Hipotezi'ne göre kırılmamasını sağlayacak şekilde oluşturulmuştur.

Çizelge 4'te genetik algoritma sonucu elde edilen son popülasyon bireylerine ait plak katman dizilimleri ve uygunluk değerlerinin bazıları görülmektedir.

Çizelge 4. Son Popülasyon Bireylerinin Bazıları.

Plak Katman Dizilimi	Uygunluk Değeri
$[45/-45/45/-45/45/-45/90_2/0_3/90]_s$	0.999
$[45_2/-45/45/-45_2/90_2/0_3/90]_s$	0.999
$[45_2/-45/45/-45_2/90/0_3/90_2]_s$	0.999
$[45_2/-45/45/-45_2/90_2/0/90/0_2]_s$	0.999
$[45_2/-45_3/45/90_2/0_3/90]_s$	0.999

SAYISAL SONUÇLAR

8 ve 16 tabakalı takviyesiz, I ve T profil takviyeli kompozit plakların burkulma yükü dayanımının incelenmesinde, genetik algoritma ile birim ağırlık başına en yüksek burkulma yükü dayanımını veren plak tabaka dizilimleri ve ABAQUS ve PYHTON programı kullanılarak takviye dizilimleri elde edilmektedir.

Çizelge 5'de 8 tabakalı takviyesiz kompozit plak için analitik ve sayısal yöntemlerden elde edilen burkulma yük değerleri, hata oranları ve ağırlık bilgisi verilmektedir. Hata oranı hesabı aşağıda belirtilmiştir.

$$Hata = \frac{|Analitik - Sayısal|}{Analitik} x\ 100 \tag{13}$$

Çizelge 5. 8 Tabakalı Takviyesiz Plağın Burkulma Analizi.

Tabaka Dizilimi	Burkulma Yükü (N/mm)		Hata (%)	Kütle (kg)
	Analitik	ABAQUS		
$[45/-45/0/90]_s$	59,98	57,71	3,78	0,256
$[90/-45/0/45]_s$	43,02	40,03	2,29	0,256
$[0/90/45/-45]_s$	40,52	40,22	0,74	0,256
$[90/0/45/-45]_s$	40,52	40,15	0,91	0,256

Çizelge 5'den görüldüğü üzere, farklı tabaka dizilimlerine sahip takviyesiz plaklar incelendiğinde, $[45/-45/0/90]_s$ dizilimine sahip plakta en yüksek kritik burkulma yük değerinin 59,98 N/mm ve $[90/0/45/-45]_s$ dizilimine sahip plakta en düşük kritik burkulma yük değerinin 40,15 N/mm olduğu görülmektedir. Analitik ve sayısal yöntem kullanılarak elde edilen sonuçlar arasındaki hatanın %4 civarında olduğu görülmektedir.

8 tabakalı $[-45/45/0/90]_s$ plak tabaka dizilimine sahip I ve T profil takviyeli kompozit plaklara ait en iyi takviye dizilimlerine ait örnekler, burkulma yük değerleri Çizelge 6'da verilmektedir.

Çizelge 6. 8 Tabakalı Takviyesiz, I ve T Profil Takviyeli Plağın Burkulma Analizi.

Takviye Profili	Tabaka Dizilimi	Takviye Dizilimi	Burkulma Yükü (N/mm)	Kütle (kg)
Takviyesiz	$[-45/45/0/90]_s$	-	57,71	0,256
I	$[-45/45/0/90]_s$	$[-45/45]_s$	447,09	0,347
I	$[-45/45/0/90]_s$	$[45/-45]_s$	447,04	0,347
I	$[-45/45/0/90]_s$	$[0/-45]_s$	440,57	0,347
I	$[-45/45/0/90]_s$	$[0/45]_s$	440,38	0,347
I	$[-45/45/0/90]_s$	$[0/90]_s$	435,4	0,347
T	$[-45/45/0/90]_s$	$[0/-45]_s$	427,32	0,315
T	$[-45/45/0/90]_s$	$[0/45]_s$	426,71	0,315
T	$[-45/45/0/90]_s$	$[0/90]_s$	412,58	0,315
T	$[-45/45/0/90]_s$	$[-45/0]_s$	412,5	0,315
T	$[-45/45/0/90]_s$	$[45/0]_s$	412,1	0,315

Çizelge 6 incelendiğinde, $[-45/45/0/90]_s$ plak tabaka dizilimine sahip I profil takviyeli kompozit plakta burkulma yükü dayanımının, $[-45/45]_s$ takviye diziliminde 447,09 N/mm ve $[0/90]_s$ takviye diziliminde 435,4 N/mm olduğu görülmektedir. $[45/-45/0/90]_s$ plak tabaka dizilimine sahip T profil takviyeli kompozit plakta burkulma yükü dayanımının $[0/-45]_s$ takviye diziliminde 427,32 N/mm ve $[45/0]_s$ takviye diziliminde 412,1 N/mm olduğu gözlemlenmektedir.

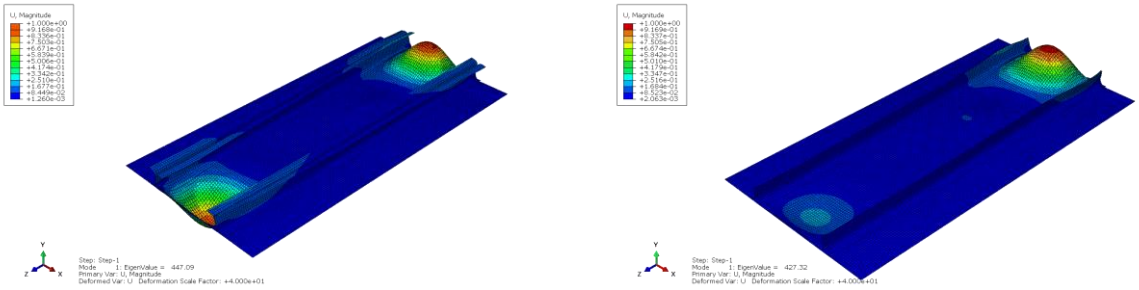
8 tabakalı $[45/90/-45/0]_s$ plak tabaka dizilimine sahip I ve T profil takviyeli kompozit plaklara ait en iyi takviye dizilimlerine ait örnekler, burkulma yük değerleri Çizelge 7'de verilmektedir.

Çizelge 7. 8 Tabakalı Takviyesiz, I ve T Profil Takviyeli Plağın Karşılaştırılması.

Takviye Profili	Tabaka Dizilimi	Takviye Dizilimi	Burkulma Yükü (N/mm)	Kütle (kg)
Takviyesiz	$[45/90/-45/0]_s$	-	47,21	0,256
I	$[45/90/-45/0]_s$	$[45/-45]_s$	439,02	0,347
I	$[45/90/-45/0]_s$	$[-45/45]_s$	438,94	0,347
I	$[45/90/-45/0]_s$	$[0/90]_s$	428,44	0,347
I	$[45/90/-45/0]_s$	$[0/45]_s$	427,3	0,347
I	$[45/90/-45/0]_s$	$[0/-45]_s$	426,52	0,347
T	$[45/90/-45/0]_s$	$[0/-45]_s$	409,14	0,315
T	$[45/90/-45/0]_s$	$[0/45]_s$	409,13	0,315
T	$[45/90/-45/0]_s$	$[45/0]_s$	395,42	0,315
T	$[45/90/-45/0]_s$	$[-45/0]_s$	395,17	0,315
T	$[45/90/-45/0]_s$	$[0/90]_s$	394,11	0,315

Çizelge 7 incelendiğinde takviyesiz plakta burkulma yükünün takviye kullanıldığı duruma göre düşük olduğu ve takviye kullanımının burkulma yükünü önemli ölçüde arttığı gözlemlenmektedir. $[45/90/-45/0]_s$ plak tabaka dizilimine sahip I profil takviyeli kompozit plakta burkulma yükü dayanımının, $[45/-45]_s$ takviye diziliminde 439,02 N/mm ve $[0/-45]_s$ takviye diziliminde 426,52 N/mm olduğu görülmektedir. Aynı plak tabaka dizilimine sahip T profil takviyeli kompozit plakta burkulma yükü dayanımının $[0/-45]_s$ takviye diziliminde 409,14 N/mm ve $[0/90]_s$ takviye diziliminde 394,11 N/mm olduğu gözlemlenmektedir. Aynı plak tabaka dizilimine sahip 8 tabakalı takviyesiz, I ve T profil takviyeli kompozit plaklar incelendiğinde, T profil takviye kullanmanın daha yüksek burkulma yük değeri verdiği gözlemlenmiştir (Çizelge 6, Çizelge 7).

8 tabakalı I ve T profil takviyeli kompozit plaklarda en yüksek burkulma yükü dayanımını veren dizilimler kullanılarak elde edilen analiz sonuçları Şekil 6'da gösterilmektedir.



(a) (b)

Şekil 6. $[-45/45/0/90]_s$ Plak ve (a) I Profil $[-45/45]_s$, (b) T Profil $[0/-45]_s$ Takviye Dizilimi.

Aynı plak tabaka dizilimine sahip 16 tabakalı takviyesiz, I ve T profil takviyeli kompozit plaklara ait en iyi plak tabaka dizilimi ve takviye dizilimlerine ait örnekler Çizelge 8'de görülmektedir.

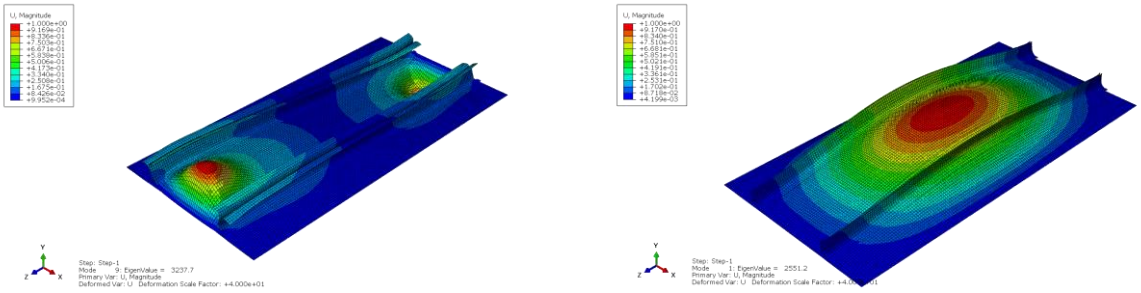
Çizelge 8. 16 Tabakalı Takviyesiz, I ve T Profil Takviyeli Plağın Karşılaştırılması.

Takviye Profili	Tabaka Dizilimi	Takviye Dizilimi	Burkulma Yükü (N/mm)	Kütle (kg)
Takviyesiz	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	-	470,65	0,512
Takviyesiz	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	-	470,70	0,512
I	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/-45/45/90]_s$	3237,7	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/45/-45/90]_s$	2945,4	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/-45/90/45]_s$	2945,3	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/45/90/-45]_s$	2942,5	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/90/-45/45]_s$	2942,4	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/-45/45/90]_s$	3220	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/45/-45/90]_s$	3220	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/-45/90/45]_s$	3214	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/45/90/-45]_s$	3214	0,695
I	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/90/-45/45]_s$	3212,9	0,695
T	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/-45/45/0]_s$	2534,2	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/45/-45/0]_s$	2534,2	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/-45/0/45]_s$	2532,7	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/45/0/-45]_s$	2532,7	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$	$[0/0/-45/45]_s$	2529,0	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/-45/45/0]_s$	2551,2	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/45/-45/0]_s$	2551,2	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/-45/0/45]_s$	2549,7	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/45/0/-45]_s$	2549,7	0,629
T	$[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$	$[0/0/-45/45]_s$	2546,0	0,629

Çizelge 8 incelendiğinde, 16 tabakalı $[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$ plak tabaka dizilimine sahip takviyesiz plakta burkulma yükü dayanımının 470,65 N/mm olduğu gözlemlenmektedir. Aynı plak tabaka dizilimine sahip I profil takviyeli kompozit plakta burkulma yükü dayanımının, $[0/-45/45/90]_s$ takviye diziliminde 3237,7 N/mm ve $[0/90/-45/45]_s$ takviye diziliminde 2942,4 N/mm olduğu görülmektedir. Aynı plak tabaka dizilimine sahip T profil takviyeli kompozit plakta ise burkulma yükü dayanımının en yüksek değerinin 2534,2 N/mm olduğu görülmektedir. Ayrıca, $[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$ plak tabaka dizilimine sahip plakta en yüksek burkulma yükü dayanımının, takviyesiz durumda 470,70 N/mm, I profil takviyeli

kompozit plakta 3220 N/mm ve T profil takviyeli kompozit plakta 2551,2 N/mm olduğu gözlemlenmektedir. 16 tabakalı takviyeli kompozit plaklarda birim ağırlık başına burkulma yükü dayanımının I profil takviye kullanıldığında daha yüksek olduğu görülmektedir.

16 tabakalı I ve T profil takviyeli kompozit plaklarda en yüksek burkulma yükü dayanımını veren dizilimler, I profil takviyeli kompozit plakta $[45/-45/45/-45/0/90_2/0]_s$ plak ve $[-45/90/-45/0]_s$ takviye dizilimi ve T profil takviyeli kompozit plakta $[45/-45/45/-45/0/90/0/90]_s$ plak ve $[0/-45/45/0]_s$ takviye dizilimi, kullanılarak elde edilen analiz sonuçları Şekil 7'de gösterilmektedir.



(a) (b)

Şekil 7. (a) I Profil, (b) T Profil Takviyeli Kompozit Plak.

SONUÇLAR

Takviyeli kompozit plakların kullanımında son yıllardaki artışın sebebi kompozit plağın sahip olduğu yüksek sertlik, düşük ağırlık ve yüksek mukavemet özellikleridir. Bu çalışmada takviyesiz ve takviyeli kompozit plaklarda optimizasyon ve parametrik çalışma yapılarak, birim ağırlık başına en yüksek burkulma yükü dayanımını veren plak tabaka ve takviye dizilimleri elde edilmiştir. Bu durum takviyesiz kompozit plaklarda genetik algoritmayla ve takviyeli kompozit plaklarda ise genetik algoritmadan elde edilen en iyi tabaka dizilimleri kullanılarak, ABAQUS ve PYHTON programı ile en iyi takviye dizilimleri parametrik çalışmayla elde edilmiştir. Plak boyutları, yükleme ve sınır koşulları sabit tutulduğunda takviyeli kompozit plağın takviyesiz kompozit plağa göre daha yüksek burkulma yüküne sahip olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, 8 tabakalı takviyeli kompozit plaklarda T profil takviye kullanmanın ve 16 tabakalı takviyeli kompozit plaklarda I profil takviye kullanmanın daha yüksek burkulma yük değeri verdiği görülmüştür. Bu çalışmanın takviyeli kompozit plaklarla ilgili ileride yapılacak çalışmalar için önemli bir altyapı oluşturacağı düşünülmektedir. Bu çalışma, farklı serim açıları, sınır koşulları, yükleme durumları, takviye sayısı gibi çeşitli parametrelerin ele alındığı durum için genişletilebilir.

Bu çalışma 1139B412000692 no'lu TÜBİTAK 2209-B Sanayiye Yönelik Lisans Araştırma Projeleri Destekleme Programı ve TAI LİFT UP projesi tarafından desteklenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] C. Nutakor, *Buckling Prevention In Lightweight Stiffened Structures*, Degree Thesis Plastics Technology, 2012.

[2] P. Jadhav, P.R. Mantena, Parametric optimization of grid-stiffened composite panels for maximizing their performance under transverse loading, *Composite Structures*, 77 (2007) 353–363.

[3] F. Irisarri, F. XLaurin, F. Leroy, J. Maire, Computational strategy for multi-objective optimization of composite stiffened panels, *Composite Structures*, 93 (2011) 1158–1167.

[4] B.C Jin, X. Li, R. Mier, A. Pun, S. Joshi, S. Nutt, Parametric Modeling, Higher Order FEA and Experimental Investigation of Hat-Stiffened Composite Panels, *Composite Structures*, (2015) doi: http:// dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.068.

[5] H. Ahmadi, G. Rahimi, Analytical and Experimental İnvestigation of Transverse Loading on Grid Stiffened Composite Panels, *Composites Part B*, 2018.

[6] C. Huang, B. Kröplin, On the Optimization of Composite Laminated Plates, *Engineering Computations*, 12 (1995) 403-414.

[7] M. Akbulut, F.O. Sonmez, Design Optimization of Laminated Composites Using A New Variant of Simulated Annealing, *Composite Structures*, 89 (2011) 1712-1724.

[8] M. Barski, P. Kedziora, M Chwal, Design of Rectangular Composite Plates with Circular Holes, *Polish Society of Composite Materials*, 16 (2016) 52-57.

[9] G.N. Naik, S. Gopalakrishnan, R. Ganguli, Design optimization of composites using genetic algorithms and failure mechanism based failure criterion, *Composite Structures*, 83 (2007) 354–367.

[10] R.H. Lopez, M.A. Luersen, E.S. Cursi, Optimization of laminated composites considering different failure criteria, *Composites: Part B*, 40 (2009) 731–740.

[11] W. Huang, L. Xie, C. Li, D. Jia, B. Chai, Y. Mu, C. Hou, W. Dai, Ananalytical and Experimental Study of T-Shaped Composite Stiffened Panels: Effect of 90° Plies in Stringers on Curing and Buckling Performance, *Applied Composite Materials*, 27 (2020) 597–618.

[12] M.M. Alinia, A study into optimization of stiffeners in plates subjected to shear loading, *Thin-Walled Structures*, 43 (2015) 845–860.

[13] J. Luo, H.C. Gea, A systematic topology optimization approach for optimal stiffener design, *Structural Optimization*, 16 (1998) 280-288.

EŞİL MEKANİK YÖNTEMİNDE MİKRO-MAKRO GERİLME VE BİRİM ŞEKİL DEĞİŞTİRME ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Hilal Koç[1], Ekrem Tüfekci[2]
[1,2]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In this study, it is purposed to find the matrices indicating the necessary transformation matrix and micro modules for the investigation of the static and dynamic behaviors of planar straight axis nano rods by using doublet mechanics method. In these matrices effects of axial extension is included. Thanks to these matrices, the relationship between macro stress with micro stress and macro strain with micro strain will be acquired for the first time for the three-dimensional case. The matrix expressing the extensional micro modulus is acquired by using Generalized Hooke's Law. This survey will make a significant contribution to the examination of the mechanical behaviors of nanorods with doublet mechanics.

Keywords: Doublet Mechanics; Nanorod, Three-Dimensional State;

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel doğru eksenli nano çubukların statik ve dinamik davranışlarının eşil mekanik yöntemi kullanılarak incelenmesi için gerekli dönüşüm matrisi ve mikro modülleri gösteren matrisin elde edilmesi amaçlanmaktadır. Bu matrislerde eksenel uzama etkisi dahil edilecektir. Bu matrisler ile makro gerilme ile mikro gerilme ve makro birim şekil değiştirme ile mikro birim şekil değiştirme arasındaki ilişki ilk kez üç boyutlu durum için elde edilecektir. Eksenel mikro modülü ifade eden matris Genelleştirilmiş Hooke Yasası kullanılarak elde edilecektir. Bu çalışma nano çubukların mekanik davranışlarının eşil mekanik yöntemi ile incelenmesine önemli bir katkı sağlayacaktır.

Anahtar kelimeler: Eşil Mekanik; Nano Çubuk; Üç Boyutlu Durum;

GİRİŞ

Atomik ölçek yaklaşımı, modellenmesi ve geliştirilmesi hakkındaki düşünceler, Richard Feynman'ın 1959'daki "There's Plenty of Room at the Bottom" adlı konuşmasından sonra yaygınlaşmaya başlamıştır. Teknolojinin ilerlemesiyle nano boyutlardaki malzemelerin yeni ve mükemmel fiziksel, kimyasal veya biyolojik özelliklerinin ortaya çıkması, bu malzemelerin davranışlarının anlaşılması ve modellenmesi için deneysel ve teorik çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürde nano çubukların mekanik davranışlarının incelenmesi için gerilme çifti (coupled stress) teorisi [1], birim şekil değiştirme gradyanı (strain gradient) teorisi [2], yerel olmayan elastisite teorisi [3-5], eşil mekanik teorisi [6] gibi farklı teoriler önerilmiştir.

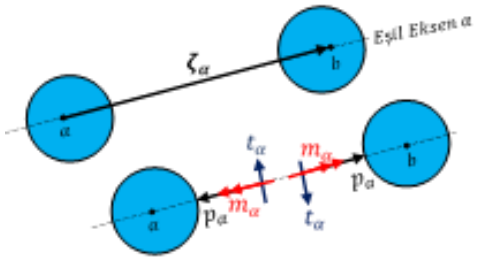
Literatürde nanokirişlerin veya nanotüpün mekanik davranışlarını yerel olmayan gerilme gradyanı teorisi [7-11] ve birim şekil değiştirme gradyan teorisi [12-16] ile inceleyen çalışmalar bulunmaktadır. Nanokirişlerin veya nanotüpün mekanik davranışlarını yerel olmayan elastisite teorisi ile inceleyen çalışmalar da bulunmaktadır [17-24]. Ayrıca, eğri eksenli nano çubukların statik ve/veya dinamik davranışlarının incelenmesinde yerel olmayan elastisite teorisini ve sonlu eleman yöntemini kullanan az sayıda çalışmada mevcuttur [25-28].

Literatürde eşil mekanik yönteminin kullanıldığı çalışmaların çok az sayıda olduğu ve sadece boyuna veya enine statik davranışların incelendiği görülmektedir. Bu çalışmalarda, eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri dahil edilmemiştir. Granik ve Ferrari [29] ve Ferrari ve diğ. [30] bu yöntemi granül malzemelere uygulamışlardır. Liu ve Ferrari [31] normal ve hasta organlardaki dalga yayınım farklarını incelemişlerdir. Kojic ve diğ. [32] bu yöntemin sonlu elemanlar formülasyonu ile incelenmesini önermişlerdir. Fatahi-Vajari ve Imam [33,34] tek duvarlı karbon nano tüplerin eksenel ve burulma titreşim davranışlarını incelemişlerdir. Fatahi-Vajari ve Imam [35,36] tek ve iki duvarlı karbon nano tüplerin radyal titreşim modlarını incelemişlerdir. Elastik ortama gömülü nano çubuğun eksenel titreşim davranışı Gul ve diğ. [37], çift duvarlı karbon nano tüplerin eğilme ve eksenel dalga yayılımını Gul ve Aydogdu [38]'de incelenmiştir. Gul ve Aydogdu [39] nano çubukların eğilme, burkulma ve titreşim davranışlarını incelemişlerdir. Ebrahimian ve diğ. [40] nano çubukların eğilme davranışlarının incelenmesinde boyut parametresinin ve kiral açısının etkilerini dahil etmişlerdir. Aydogdu ve Gul [41] elastik matris içerisindeki Euler-Bernoulli nano çubuk çiftinin burkulma davranışını incelemişlerdir. Gul ve Aydogdu [42] elastik ortam içerisindeki iki duvarlı karbon nano tüplerin serbest titreşim ve burkulma davranışlarını incelemişlerdir. Ebrahimian ve diğ. [43] kiral açısı ve boyut etkilerini dahil ederek, elastik temelli nano tüplerin burulmasını incelemişlerdir. Tek duvarlı karbon nano tüplerin eksenel titreşimi Fatahi-Vajari ve Azimzadeh [44] ve radyal bağlaşımlı (coupled axial-radial) titreşimini Azimzadeh ve Fatahi-Vajari [45] incelemişlerdir. Gul ve Aydoğdu [46] nano çubuğun eksenel serbest titreşim davranışının incelenmesinde yanal atalet etkilerini göz önünde bulundurmuşlardır. Aydogdu ve Gul [47] ankastre-ankastre ve ankastre-serbest sınır koşullarına sahip bir çift nano çubuk sisteminin serbest ve zorlanmış boylamsal titreşimlerini incelemişlerdir. Gul ve Aydoğdu [48] periyodik nanoyapılar ile simetrik ve simetrik olmayan katmanlı nano kirişlerin titreşim davranışını incelemişlerdir.

Bu çalışmada, eşil mekanik yöntemi ile doğru eksenli nano çubukların mekanik davranışlarının incelenmesinde eksenel uzama etkisi göz önünde bulundurularak, makro ve mikro gerilme ve birim şekil değiştirme arasındaki dönüşüm matrisleri üç boyutlu durum için ilk kez elde edilecektir. Uzama mikro modülünü gösteren matris ve bu matrisin bileşenleri Genelleştirilmiş Hooke Yasası ve Mathematica programı [49] kullanılarak elde edilecektir.

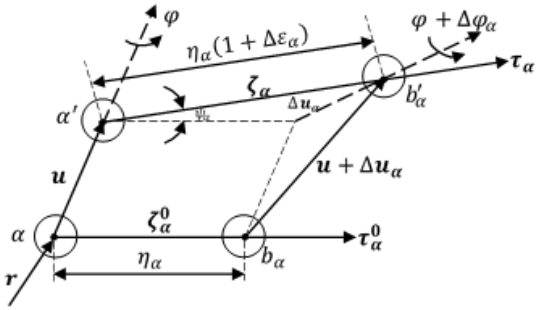
DENKLEMLER ve FORMÜLASYON

Bir mikro mekanik modeli olan eşil mekanikte katı cisimlerin aralarında sonlu mesafeler olan noktalardan oluştuğu varsayılır. Deformasyon süresince uzama mikro gerilmesi, kayma mikro gerilmesi ve burulma mikro gerilmesi olmak üzere üç adet iç gerilme olduğu kabul edilir. Vektörel büyüklükler olan bu gerilmeler Şekil 1'de görülmektedir.



Şekil 1. Eşil geometride mikro gerilme tarifleri.

Deformasyonlar Taylor serisi ile ifade edilir. Bu teoride şekil değişimini ifade etmek için kullanılan model Şekil 2'de gösterilmektedir.



Şekil 2. Eşil mekanikte düğümlerin şekil değişimi [30].

Artımsal yer değiştirme vektörü aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [30]:

$$\Delta \boldsymbol{u}_{\alpha} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\xi}_{\alpha}^{0}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t) \tag{1}$$

Bu denklemde α=1, 2, …n kadar olup, eşil sayısı n, α düğümünün konum vektörü **r** ile ifade edilir. Uzama mikro birim şekil değiştirme aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [30]:

$$\epsilon_{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{0}.\Delta \boldsymbol{u}_{\alpha}}{\eta_{\alpha}} \tag{2}$$

Burada eşil açıklık uzaklığı η_{α} ve α-yönünüdeki birim vektör $\vec{\tau}_{\alpha}^{0}$ ile gösterilmektedir. Eksenel mikro birim şekil değiştirme ifadesi Taylor serisine açılırsa,

$$\epsilon_{\alpha} = \sum_{\chi=1}^{M} \frac{(\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} \boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{0}.(\boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{0}.\boldsymbol{\nabla})^{\chi} \boldsymbol{u} \tag{3}$$

elde edilir. Burada Del operatörü ∇ ve Taylor seri açılımındaki terim sayısı *M* ile gösterilmektedir. Taylor serisinde sadece bir terimin alınması klasik elastisite teorisine karşılık gelmektedir.

Sıcaklık etkisi ihmal edildiğinde, eksenel mikro gerilme ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanır [30]:

$$p_{\alpha} = \sum_{\beta} A_{\alpha\beta}\, \epsilon_{\beta} \tag{4}$$

Bu denklemde α ikilisindeki eksenel mikro gerilme p_{α} ve β ikilisi yönünde mikro birim şekil değiştirme ϵ_{β}, α ve β düğümleri arasındaki eksenel mikro modülü $A_{\alpha\beta}$ ile ifade edilmektedir.

Makro ve mikro gerilmeler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [30]:

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{0}.\boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{0} \sum_{\chi=1}^{M} \frac{(-\eta_{\alpha})^{\chi-1}}{\chi!} (\boldsymbol{\tau}_{\alpha}^{0}.\boldsymbol{\nabla})^{\chi-1} p_{\alpha} \tag{5}$$

Makro ve mikro gerilme arasındaki ilişki, Taylor seri açılımındaki terim sayısı bir olarak ele alındığında, aşağıdadır:

$$\{\sigma\} = [H]\{p\} \tag{6}$$

Bu denklemde gerilme tensörü σ, dönüşüm matrisi $[H]$ ve eksenel mikro gerilme tensörü p ile gösterilir. Bu ifadelerin açık yazımı aşağıdadır:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}, [H] = \begin{bmatrix} (\tau_{11}^{0})^2 & (\tau_{21}^{0})^2 & (\tau_{31}^{0})^2 & (\tau_{41}^{0})^2 & (\tau_{51}^{0})^2 & (\tau_{61}^{0})^2 \\ (\tau_{12}^{0})^2 & (\tau_{22}^{0})^2 & (\tau_{32}^{0})^2 & (\tau_{42}^{0})^2 & (\tau_{52}^{0})^2 & (\tau_{62}^{0})^2 \\ (\tau_{13}^{0})^2 & (\tau_{23}^{0})^2 & (\tau_{33}^{0})^2 & (\tau_{43}^{0})^2 & (\tau_{53}^{0})^2 & (\tau_{63}^{0})^2 \\ \tau_{11}^{0}\tau_{12}^{0} & \tau_{21}^{0}\tau_{22}^{0} & \tau_{31}^{0}\tau_{32}^{0} & \tau_{41}^{0}\tau_{42}^{0} & \tau_{51}^{0}\tau_{52}^{0} & \tau_{61}^{0}\tau_{62}^{0} \\ \tau_{12}^{0}\tau_{13}^{0} & \tau_{22}^{0}\tau_{23}^{0} & \tau_{32}^{0}\tau_{33}^{0} & \tau_{42}^{0}\tau_{43}^{0} & \tau_{52}^{0}\tau_{53}^{0} & \tau_{62}^{0}\tau_{63}^{0} \\ \tau_{11}^{0}\tau_{13}^{0} & \tau_{21}^{0}\tau_{23}^{0} & \tau_{31}^{0}\tau_{33}^{0} & \tau_{41}^{0}\tau_{43}^{0} & \tau_{51}^{0}\tau_{53}^{0} & \tau_{61}^{0}\tau_{63}^{0} \end{bmatrix}, \{p\} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Burada kartezyen koordinatlarla mikro gerilmeler arasındaki doğrultman kosinüsleri $\vec{\tau}_{ij}^{0}$ ile gösterilir.

Mikro birim şekil değiştirme ve makro birim şekil değiştirme arasındaki ilişki ve mikro ve makro birim şekil değiştirme ifadeleri sırasıyla denklem (8)'de ifade edilir.

$$\{\epsilon\} = [H]^T[\varepsilon], \qquad \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix}, \qquad \{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Burada **ε** makro birim şekil değiştirmeyi ifade etmektedir. Mikro gerilme ve birim şekil değiştirmeler arasındaki ilişki denklem (9)**Error! Reference source not found.** ile ifade edilir:

$$\{p\} = [A]\{\epsilon\} \tag{9}$$

Makro seviyede Hooke Yasası aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{10}$$

Bu denklemde katılık matrisi C ile gösterilmekte olup, katılık matrisi ve katılık matrisinin bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \tag{11}$$

Denklem (6), denklem (8) ve denklem (9) göz önüne alındığında, elde edilen gerilme ifadesi denklem (10) ile karşılaştırıldığında katılık matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$[C] = [H][A][H]^T \tag{12}$$

Mikro modülü gösteren matris A matrisi bulmak için ele alınan modele ait doğrultman kosinüsleri aşağıda belirtilmektedir [50]:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Belirtilen doğrultman kosinüsleri kullanılarak, 36 bilinmeyenli 36 denklem elde edilmektedir. Mathematica programı kullanılarak elde edilen çözüm, yani **A** matrisinin bileşenleri, aşağıdadır:

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda+4\mu & \lambda+\mu & \lambda+\mu & 0 & -2\mu & -2\mu \\ \lambda+\mu & \lambda+4\mu & \lambda+\mu & -2\mu & 0 & -2\mu \\ \lambda+\mu & \lambda+\mu & \lambda+4\mu & -2\mu & -2\mu & 0 \\ 0 & -2\mu & -2\mu & 4\mu & 0 & 0 \\ -2\mu & 0 & -2\mu & 0 & 4\mu & 0 \\ -2\mu & -2\mu & 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{bmatrix} \tag{14}$$

Burada Lame' sabitleri λ, μ olup, Elastisite modülü E ve Poisson oranı ν olmak üzere, bu sabitler şu şekilde ifade edilmektedir.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{15}$$

Eksenel mikro modüller bulunduktan sonra, üç boyutlu durum için gerilme ifadeleri elde edilebilir.

SONUÇLAR

Literatürde, çubukların mekanik davranışlarının incelenmesinde genellikle yerel olmayan elastisite teorisi, gerilme çifti teorisi, gerilme gradyanı teorisi gibi boyut etkisini dahil eden teoriler kullanılmaktadır. Bu teorilerde, iç yapının karakteristik uzunluk parametresi, belli bir aralıkta seçilmekte ve probleme göre değişiklik göstermektedir. Eşil mekanik yönteminde ise bu parametre doğrudan atomlar arası uzaklığa karşılık gelmektedir. Çubukların mekanik davranışlarını eşil mekanik yöntemiyle incelemek için makro ve mikro gerilme ve birim şekil değiştirme arasındaki ilişkiye ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürde, düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme kabulü yapılarak, makro ve mikro gerilme ve birim şekil değiştirme arasındaki ilişkiyi ifade eden matrisler sadece eksen uzamasının dahil edildiği durum için belirtilmiştir. Bu çalışmada, üç boyutlu durum için makro ve mikro gerilme ve birim şekil

değiştirme arasındaki ilişki, eksen uzaması etkisi göz önünde bulundurularak, ilk kez elde edilmiş olacaktır. Genelleştirilmiş Hooke Yasası kullanılarak, eksenel mikro modülü ifade eden matrisin bileşenleri ilk kez elde edilmiştir. Geliştirilen matrisler sayesinde eşil mekanik yöntemi ile çubuğun mekanik davranışını ifade eden denklemlerin analitik ve/veya sayısal yöntemlerle elde edilmesine ve bu denklemlerin çözümüne önemli bir katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Eşil mekanik yönteminde iç yapının karakteristik uzunluk parametresi doğrudan atomlar arası uzaklık olarak ele alındığı için nano çubukların statik ve dinamik davranışları daha yüksek hesaplama doğruluğuyla incelenebilecektir.

BİLGİLENDİRME

Bu çalışma İstanbul Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri tarafından desteklenmektedir (Proje No: MDK-2021-43134).

KAYNAKLAR

[1] E. Cosserat, F. Cosserat, Sur la théorie des corps déformables. Herman, Paris, 1909.

[2] R.D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 16 (1964) 51–78.

[3] A.C. Eringen, Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *International Journal of Engineering Science.* 10 (1972) 425-435.

[4] A.C. Eringen, Nonlocal Polar Field Models, Academic Press: New York, 1976.

[5] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface-waves, *J Appl Phys.* 54 (1983) 4703-4710.

[6] V.T. Granik, *Microstructural mechanics of granular media*, Technical report: IM/MGU 78-241, Institute of Mechanics of Moscow State University, 1978.

[7] L.J. Sudak, Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics, *Journal of Applied Physics.* 94 (2003) 7281-7287.

[8] I. Ecsedi, A. Baksa, Free axial vibration of nanorods with elastic medium interaction based on nonlocal elasticity and Rayleigh model, *Mechanics Research Communications*. 86 (2017) 1-4.

[9] J. Jiang, L. Wang, Analytical solutions for thermal vibration of nanobeams with elastic boundary conditions, *Acta Mechanica Solida Sinica.* 30 (2017) 474-483.

[10] R. Barretta, M. Canadija, L. Feo, R. Luciano, F. Marotti de Sciarra, R. Penna**,** Exact solutions of inflected functionally graded nano-beams in integral elasticity, *Composites Part B.* 142 (2018) 273-286.

[11] R. Barretta, F.M. De Sciarra, M.S. Vaccaro, On nonlocal mechanics of curved elastic beams, *International Journal of Engineering Science,* 144 (2019) 103140.

[12] H. Askes, ASJ. Suiker, LJ. Sluys, A classification of higher-order strain gradient models – linear analysis, *Arch Appl Mech*. 72 (2002) 171-188.

[13] BS. Altan, EC. Aifantis, On Some Aspects in the Special Theory of Gradient Elasticity, *Journal of the Mechanical Behavior of Materials.* 8 (1997) 231-282.

[14] M. Ganapathi, O. Polit, A nonlocal higher-order model including thickness stretching effect for bending and buckling of curved nanobeams, *Applied Mathematical Modelling.* 57 (2017) 121-141.

[15] M. Şimşek, Some closed-form solutions for static, buckling, free and forced vibration of functionally graded (FG) nanobeams using nonlocal strain gradient theory, *Composite Structures.* 224 (2019) 111041.

[16] W.A. Bedia, M.S.A. Houari, A. Bessaim, A.A. Bousahla, A. Tounsi, T. Saeed, M.S. Alhodaly, A New Hyperbolic Two-Unknown Beam Model for Bending and Buckling Analysis of a Nonlocal Strain Gradient Nanobeams, *Journal Of Nano Research.* 57 (2019) 175-191.

[17] J. Peddieson, GR. Buchanan, RP. McNitt**,** Application of nonlocal continuum models to nanotechnology, *International Journal of Engineering Science.* 41 (2003) 305-312.

[18] L.F. Wang, H.Y. Hu, Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes, *Phys Rev B.* 71 (2005) 195412.

[19] Q. Wang, K.M. Liew, Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nano-structures, *Physics Letters A.* 363 (2007) 236-242.

[20] M. Aydogdu, A general nonlocal beam theory: Its application to nanobeam bending, buckling and vibration, *Physica E.* 41 (2009) 1651-1655.

[21] E. Tufekci, S.A. Aya, A nonlocal beam model for out-of-plane static analysis of circular nanobeams, *Mechanics Research Communications.* 76 (2016) 11-23.

[22] E. Tufekci, S.A. Aya, O. Oldac, A unified formulation for static behavior of nonlocal curved beams, *Structural Engineering and Mechanics*, 59 (2016a) 475-502.

[23] E. Tufekci, S.A. Aya, O. Oldac, In-plane static analysis of nonlocal curved beams with varying curvature and cross-section, *International Journal of Applied Mechanics*. 8 (2016b) 1650010.

[24] S.A. Aya, E. Tufekci, Modeling and analysis of out-of-plane behavior of curved nanobeams based on nonlocal elasticity, *Composites Part B.* 119 (2017) 184-195.

[25] M. Ganapathi, T. Merzouki, O. Polit, Vibration study of curved nanobeams based on nonlocal higher-order shear deformation theory using finite element approach, *Composite Structures.* 184 (2018) 821-838.

[26] Ö.E. Genel, *Nanoteknolojide eğri eksenli çubukların düzlem içi davranışları için bir sonlu eleman formülasyonu,* Yüksek Lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2018.

[27] H. Koç, *Nanoteknolojide eğri eksenli çubukların düzlem dışı davranışları için bir sonlu eleman formülasyonu,* Yüksek Lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2018.

[28] T. Merzouki, M. Ganapathi, O. Polit, A nonlocal higher-order curved beam finite model including thickness stretching effect for bending analysis of curved nanobeams, *Mechanics of Advanced Materials and Structures.* (2019). doi: 10.1080/15376494.2017.1410903.

[29] V.T. Granik, M. Ferrari, Microstructural mechanics of granular media, *Mechanics of Materials.* 15 (1993) 301-322.

[30] M. Ferrari, V.T. Granik, A. Imam, J. Nadeau, Advances in Doublet Mechanics, Springer, 1997.

[31] J. Liu, M. Ferrari, Mechanical spectral signatures of malignant disease? A small sample, comparative study of continuum vs. nano-biomechanical data analyses, *Disease Markers.* 18 (2002) 175–183.

[32] M. Kojic, I. Vlastelica, P. Decuzzi, VT. Granik, M. Ferrari**,** A finite element formulation for the doublet mechanics modeling of microstructural materials, *Comput. Methods Appl. Mech Engrng.* 200 (2011) 1446–1454.

[33] A. Fatahi-Vajari, A. Imam, Axial vibration of single-walled carbon nanotubes using doublet mechanics, *Indian J Phys.* 90 (2016a) 447-455.

[34] A. Fatahi-Vajari, A. Imam, Torsional vibration of single-walled carbon nanotubes using doublet mechanics, *Z Angew Math Phys*. (2016b). doi: 10.1007/s00033-016-0675-6.

[35] A. Fatahi-Vajari, A. Imam, Analysis of radial breathing mode of vibration of single-walled carbon nanotubes via doublet mechanics, *Z. Angew. Math. Mech*. (2016c). 1–13. doi: 10.1002/zamm.201500160.

[36] A. Fatahi-Vajari, A new method for evaluating the natural frequency in radial breathing like mode vibration of double-walled carbon nanotube, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, (2017) 1-15.

[37] U. Gul, M. Aydogdu ve G. Gaygusuzoglu, Axial Dynamics of a nanorod embedded in an elastic medium using doublet mechanics, *Composite Structures*, 160 (2017) 1268-1278.

[38] U. Gul, M. Aydogdu, Wave propagation in double walled carbon nanotubes by using doublet mechanics, *Physica E.* 93 (2017a) 345–357.

[39] U. Gul, M. Aydogdu, Structural modelling of nanorods and nanobeams using doublet mechanics theory, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*. 14 (2017b) 195-212.

[40] M.R. Ebrahimian, A. Imam, M. Najafi, Doublet mechanical analysis of bending of Euler-Bernoulli and Timoshenko nanobeams, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. (2018) 1-24.

[41] M. Aydogdu, U. Gul, Buckling analysis of double nanofibers embeded in an elastic medium using doublet mechanics theory, *Composite Structures.* 202 (2018) 355-363.

[42] U. Gul, M. Aydogdu, Noncoaxial vibration and buckling analysis of embedded double-walled carbon nanotubes by using doublet mechanics, *Composites Part B.* 137 (2018) 60-73. doi: 10.1016/ j.compositesb.2017.11.005.

[43] M.R. Ebrahimian, A. Imam, M. Najafi, The effect of chirality on the torsion of nanotubes embedded in an elastic medium using doublet mechanics, *Indian J Phys*, 94 (2020) 31–45.

[44] A. Fatahi-Vajari, Z. Azimzadeh, Axial vibration of single-walled carbon nanotubes with fractional damping using doublet mechanics, *Indian J Phys.* 94 (2020) 975–986.

[45] Z. Azimzadeh, A. Fatahi-Vajari, Coupled Axial-Radial Vibration of Single-Walled Carbon Nanotubes Via Doublet Mechanics, *Journal of Solid Mechanics.* 11 (2019) 323-340.

[46] U. Gul, M. Aydogdu, Vibration analysis of Love nanorods using doublet mechanics theory, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 41 (2019) 351. https://doi.org/10.1007/s40430-019-1849-x.

[47] M. Aydogdu, U. Gul, Longitudinal vibration of double nanorod systems using doublet mechanics theory, *Structural Engineering and Mechanics.* 73 (2020) 37-52

[48] U. Gul, M. Aydogdu, Vibration of layered nanobeams with periodic nanostructures, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. (2020). doi:10.1080/15397734.2020.1848592.

[49] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 11.3, Champaign, IL (2019).

[50] M. Ferrari, Nanomechanics, and Biomedical Nanomechanics: Eshelby's Inclusion and Inhomogeneity Problems at the Discrete/Continuum Interface, *Biomedical Microdevices*. 2 (4) (2000).

KESİTİ KADEMELİ DEĞİŞEN EĞRİ EKSENLİ DÜZLEMSEL TABAKALI KOMPOZİT ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI SERBEST TİTREŞİMLERİNİN KESİN ÇÖZÜMÜ

Anıl Çetinkol[1], Hilal Koç[2], Ekrem Tüfekci[3]
[1,2,3]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Layered composite materials are structural elements in which the layer has a continuous fiber structure in a certain direction. Offering unique solutions to many problems, it is used in vehicle bodies in the aerospace sector, in boat building in the maritime sector, etc. In this study, it is aimed to investigate the free vibration behavior of graded and curved planar layered composite beams by taking different boundary conditions, elasticity modulus ratios, slenderness ratios, opening angles and step location. In the calculations, the effects of shear deformation and rotational inertia are included or ignored, and the effects of these effects at dimensionless frequencies are presented comparatively in graphs. This study is a precedent in the field because of the exact analytical examination of the vibration behavior of stepped curved beams, in which the layered composite structure is used and the effects of axial extension, shear deformation and rotational inertia are taken into account.

Keywords: Curved Beam; Composite Material; Analytical Solution;

ÖZET

Tabakalı kompozit malzemeler, tabakanın belirli bir doğrultuda devamlı lif yapısına sahip yapısal elemanlardır. Bu malzemeler uçak-uzay sektöründe araç gövdelerinde, denizcilik sektöründe tekne yapısında vb. birçok problemde benzersiz çözümler sunmaktadır. Bu çalışmada, kademeli ve eğri eksenli düzlemsel tabakalı kompozit çubukların serbest titreşim davranışları farklı sınır şartları, elastisite modülü oranları, narinlik oranları, kiriş açıklıkları ve kademe konumu ele alınarak incelenecektir. Hesaplamalarda kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri dahil ya da ihmal edilerek, bu etkilerin boyutsuz frekans değerleri üzerindeki etkileri karşılaştırılmalı olarak grafikler halinde sunulmuştur. Yapılan bu çalışma, tabakalı kompozit yapının kullanıldığı ve eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin dikkate alındığı kesiti kademeli olarak değişen eğri eksenli çubukların titreşim davranışlarının kesin analitik olarak incelenmesi sebebiyle alanında emsal niteliği taşımaktadır.

Anahtar kelimeler: Eğri Eksenli Çubuk; Kompozit Malzeme; Analitik Çözüm;

GİRİŞ

Çubuk elemanlar günümüzde havacılık, denizcilik, otomotiv gibi mühendislikle ilgili birçok alanda ve endüstriyel uygulamalarda önemli bir yapısal eleman olarak kullanılmaktadır. Tabakalı kompozit malzemeler ise yüksek dayanım-ağırlık oranları ve korozyon dirençleri

özellikleri nedeniyle önemli bir yapısal elemen olarak karşımıza çıkmaktadır. Çubuk elemanlarla ilgili yapılan araştırmaların birçoğu, klasik çubuk teorisi de denen, şekil değiştirmenin öncesinde çubuğun eksenine dik olan kesitin şekil değiştirmeden sonra da çubuk eksenine dik olduğunu kabul eden Euler-Bernoulli çubuk teorisi üzerinedir. Ayrıca, gerçek çubuk davranışına daha yakın sonuçlar veren, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği gibi etkileri hesaba katan teoriler de bulunmaktadır. Literatürde tabakalı kompozit malzemelerden yapılmış çubuk problemlerinin dinamik davranışlarının incelenmesinde malzemenin anizotrop formdan gelen yüksek sayıda malzeme sabitini indirgemek ve problemi basitleştirmek için iki boyutlu çözüm yaklaşımı uygulanmaktadır. Kesiti kademeli değişen çubuk yapıda elemanlar için genellikle izotrop malzeme kabulü yapılmıştır.

Qatu [1], basit mesnetleme sınır şartlarına sahip tabakalı sığ çubuğun düzlem içi titreşim davranışının incelerken kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini ihmal etmiştir. Qatu ve Elsharkawy [2], farklı sınır şartlarına sahip antisimetrik tabakalı kompozit çubuğun düzlem dışı titreşimlerinin incelenmesinde Ritz yöntemini kullanmışlardır. Khdeir ve Reddy [3], birinci ve yüksek dereceden kayma deformasyonu teorileriyle, çapraz tabakalı eğri eksenli kompozit çubuğun düzlem dışı davranışlarını incelemişlerdir. Fard ve diğerleri [4], eğri eksenli sandviç ve kompozit ince çubukların düzlem içi serbest titreşimlerini iki boyutlu yeni bir yüksek dereceli kayma teorisiyle incelediler. Lu ve Lu [5], basit mesnetlenmiş eğri eksenli tabakalı düzlemsel çubuğun düzlem içi serbest titreşimlerini, iki boyutlu elastisite teorisine dayandırdığı durum uzayı yöntemini kullanarak analiz etmişlerdir. Marur ve Kant [6] yüksek dereceden kayma deformasyonu teorisiyle sandviç ve kompozit yapılı eğri eksenli çubukların serbest titreşimlerini, enine kayma ve normal şekil değiştirme bileşenli sonlu elemanlar metoduyla ele almışlardır. Qatu [7], Timoshenko çubuk teorisini esas alan tabakalı eğri eksenli çubuğun doğal frekanslarını kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek dinamik analiz yöntemiyle incelemiştir. Bhimaraddi ve diğerleri [8], sabit eğri eksenli tabakalı kompozit çubuğun düzlem içi ve düzlem dışı titreşim davranışlarının incelenmesinde kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dahil ederek, 24 serbestlik dereceli genelleştirilmiş bir sonlu eleman analizi önermişlerdir.

Bu çalışmada tabakalı yapılar üç boyutlu olarak ele alınacak olup, her bir tabaka malzemesi için 9 malzeme sabiti kullanılacaktır. Tabakalı kompozit çubukların dinamik davranışının incelenmesinde eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri hesaba katılacaktır. Bu çalışma kesiti kademeli değişen eğri eksenli çubukların titreşim davranışının kesin analitik olarak incelenmesinde tabakalı kompozit yapı malzemesinin kullanılması ve eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin göz önünde bulundurulması açısından emsal niteliğindedir.

FORMÜLASYON

Çubuğun eksen eğrisi boyunca tüm noktalarda birbirlerine dik olan iki birim vektör bulunmaktadır. Çubuk için başlangıçta, üzerinde herhangi bir yük ve gerilme olmadığı göz önüne alınarak, birim vektörler çubuğun uzaydaki teğetine dik olduğu ve kesitini belirlediği varsayılmaktadır. Çubuğun şekil değiştirmesinden sonra da kesit vektörleri birbirine dik olan birim vektörlerdir. Çubuğun teğet birim vektörü şekil değiştirmeden önceki durumda olduğu gibi kesit vektörlerine yine dik kalır. Çubuk kesitinin rijit olması varsayımı yapılarak, kesitin ötelenip döndüğü ancak deformasyona uğramadığı kabulü yapılmıştır. Sonuç olarak, kesit serbestçe dönebilir fakat şekil değiştirmeden sonra eksene dik kalmayabilir [9].

İzotrop bir malzeme için elde edilen denklem, tabakalı yapıya sahip eğri eksenli kompozit bir malzemeden yapılmış çubuk için uygulanmıştır [10]. Bu denklemler aşağıda verilmektedir:

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -R\Omega_n + Rk'A'_{33}F_b \tag{1}$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + RD'_{11}M_t \tag{2}$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + RD'_{22}M_n \tag{3}$$

$$\frac{dF_b}{d\phi} = -R\bar{A}\omega^2 U_b \tag{4}$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n - R\bar{I}_1\omega^2\Omega_t \tag{5}$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = RF_b - M_t - R\mu\frac{I_n}{A}\omega^2\Omega_n \tag{6}$$

Burada; U_b, binormal yer değiştirme, Ω_n, normal ve Ω_t, teğetsel eksendeki dönme açıları, ω, açısal frekans, μ, çubuğun birim boy kütlesi, A, kesit alanı, ϕ, yay açıklığı, R, şekil değiştirmeden önce çubuğun eksen eğrisinin eğriliğini tanımlayan yarıçap, F_b, tekil binormal iç kuvvet, M_n, normal ve M_t, teğetsel eksendeki iç momentler olarak tanımlanır.

Titreşim denklemlerinde $\bar{A}$ çubuğun tabaka kesit alanı, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ ve $\bar{I}_3$ çubuğun tabaka ataletleriyle ilgili olup, aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [10]:

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^{N} \rho^{(k)} A^{cs(k)} \tag{7}$$

$$\bar{I}_2 = \sum_{k=1}^{N} \rho^{(k)} I_n{}^{(k)} \tag{8}$$

$$\bar{I}_3 = \sum_{k=1}^{N} \rho^{(k)} I_b{}^{(k)} \tag{9}$$

$$\bar{I}_1 \cong \frac{1}{40}\sum_{k=1}^{N}\left[\rho^{(k)}(A^4)^{(k)} / (I_n{}^{(k)} + I_b{}^{(k)})\right] \tag{10}$$

Burada A^{cs}, şekil değiştirmemiş tabakaların kesit alanını, N, tabaka sayısını, I_n ve I_b normal ve binormal eksene göre eylemsizlik momentlerini göstermektedir. Kesit alanı ile ilgili rijitlikler

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}'_{11}{}^{(k)} A^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}'_{22}{}^{(k)} A^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}'_{33}{}^{(k)} A^{(k)} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N}\left(\bar{Q}'^{(k)}_{22} I_n^{(k)} + \bar{Q}'^{(k)}_{33} I_b^{(k)}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}'^{(k)}_{11} I_n^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=1}^{N} \bar{Q}'^{(k)}_{11} I_b^{(k)} \end{bmatrix} \tag{12}$$

ifade edilir. Burada $\bar{\mathbf{Q}}'$ ifadesi her bir tabakaya ait dönüştürülmüş indirgenmiş rijitlik matrisidir ve dönüştürülmüş rijitlik matrisi **C'** ve dönüştürülmüş esneklik matrisi **S'** e bağlı bir ifadedir.

Eğri eksenli kompozit çubuğun düzlem dışı denklemleri, eksen eğrisinin normal ve binormal doğrultularının, kesitin asal doğrultuları ile çakışık olduğu durumlar denklem (1)-denklem (6)'da verilmektedir. Bu denklemler birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem takımını oluşturmaktadırlar ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

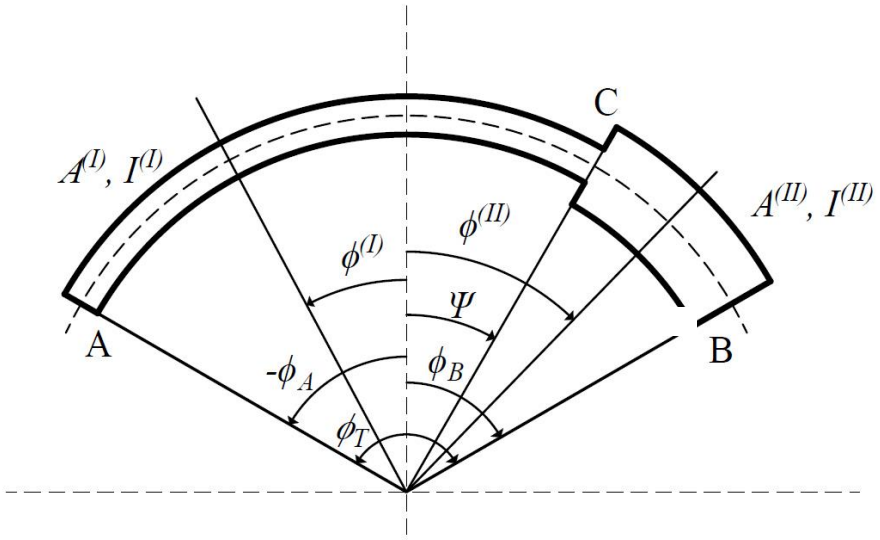
$$\frac{d\mathbf{y}}{d\phi} = \mathbf{A}(\phi)\mathbf{y}(\phi) \tag{13}$$

Burada, y(ϕ) 6 elemanlı değişkenler vektörü, A(ϕ) 6x6 elemanlı katsayılar matrisi olup, aşağıda tanımlanır:

$$\mathbf{y}(\phi)=\begin{bmatrix} U_b \\ \Omega_t \\ \Omega_n \\ F_b \\ M_t \\ M_n \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{A}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R & Rk'A'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & RD'_{11} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & RD'_{22} \\ -R\bar{A}\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R\bar{I}_1\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R\bar{I}_2\omega^2 & R & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$\mathbf{A}(\phi)$ katsayılar matrisindeki **A'**, **D'**, $\bar{A}$, $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$, R ve bağlı oldukları $A^{(k)}$, $I_b^{(k)}$, $I_n^{(k)}$ ifadeleri ϕ'ye bağlı ifadeler olup, koordinat takımının değişmesiyle farklılık göstermektedir. Kesin çözüm $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin sabit olduğu durum için söz konusudur. Bu durum çubuk kesitinin sabit ve eksenin çember olduğunu belirtir.



Şekil 1. Kesiti kademeli değişen çember eksenli kompozit çubuk

$$\text{Birinci bölge :} \quad -\phi_A \le \phi^{(I)} \le \psi$$

$$\text{İkinci bölge :} \quad \psi \le \phi^{(II)} \le \phi_B$$

Burada *(I)* ve *(II)* üst indisleri 1. ve 2. bölgeleri ifade etmektedir. Diferansiyel formda;

$$\frac{d\mathbf{y}^{(I)}}{d\phi^{(I)}} = \mathbf{A}^{(I)}(\phi^{(I)})\mathbf{y}^{(I)}(\phi^{(I)}); \qquad \frac{d\mathbf{y}^{(II)}}{d\phi^{(II)}} = \mathbf{A}^{(II)}(\phi^{(II)})\mathbf{y}^{(II)}(\phi^{(II)}) \tag{16}$$

şeklinde ifade edilir. Sistemin ψ koordinatında süreklilik gösterdiği bilinerek, süreklilik şartları;

$$\mathbf{y}^{(I)}(\psi) = \mathbf{y}^{(II)}(\psi) \qquad \text{veya} \qquad e^{\mathbf{A}^{(I)}\psi}\mathbf{y}^{(I)}(\phi_0^{(I)}) = e^{\mathbf{A}^{(II)}\psi}\mathbf{y}^{(II)}(\phi_0^{(II)})$$

olarak yazılır.

Sınır şartlarından gelen 6 eşitlik ve kademe koordinatındaki süreklilik şartlarından gelen 6 eşitlik, aşağıdaki gibi matris formda yazılabilir [11].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z1} & 0 \\ e^{\mathbf{A}^{(I)}\psi} & -e^{\mathbf{A}^{(II)}\psi} \\ 0 & \mathbf{Z2} \end{bmatrix}_{12\times 12} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0^{(I)} \\ \mathbf{y}_0^{(II)} \end{bmatrix}_{12\times 1} = [0]_{12\times 1} \tag{17}$$

Burada **Z1**, A ucundaki sınır şartlarından elde edilen 3x6 boyutunda matris, **Z2**, B ucundaki sınır şartlarından elde edilen 3x6 boyutunda matris, **0**'lar ise 3x6 boyutunda sıfır matrisleridir.

SAYISAL SONUÇLAR

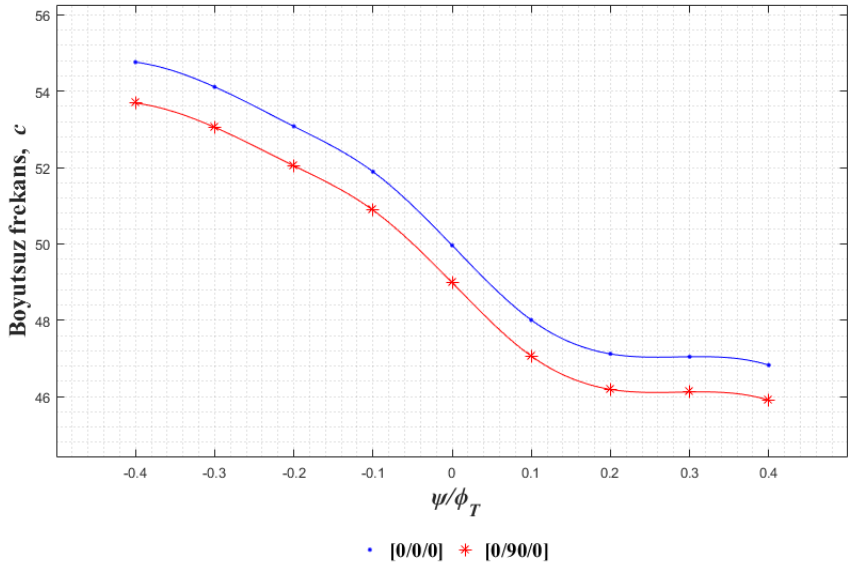
Kesiti değişen tek kademeli çember eksenli kompozit çubuğa ait özellikler olan tabaka açıları, kiriş açıklığı, narinlik oranları, elastisite modülü oranları, mesnetleme şartları ve modlarının değişiminin yanı sıra kademeli çubuk için önemli parametreler olan kademe konumu ve

kademe oranı değişimlerinin boyutsuz frekansa etkisi incelenmektedir. Verilen grafiklerde yatay eksenler değişen malzeme özelliklerini, dikey eksenler boyutsuz frekansları göstermektedir. Boyutsuz frekans değerleri, $c = \omega R^2 \phi_T^2 (\mu / I_n E_1)^{1/2}$ olarak tanımlanmaktadır.

Tek kademeli çember eksenli kompozit çubuğa ait boyutsuz frekans değerlerinin kademenin çubuk üzerinde bulunduğu konumunun, ψ/ϕ_T, değişkenlik gösterdiği durumlar ele alınmaktadır. ψ/ϕ_T, ifadesinde ψ değişkeni kademenin açısını belirtmekte olup, ψ/ϕ_T ifadesi -0.4 ile 0.4 arasında değişmektedir. Farklı malzeme özelliklerindeki değişimlerin yanı sıra, belirlenen çeşitli malzeme değerlerinde çubuğun kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin de boyutsuz frekansları nasıl etkilediği grafiklerle incelenmektedir.

Farklı Tabaka Açılarında Kademe Konumunun Boyutsuz Frekansa Etkisi

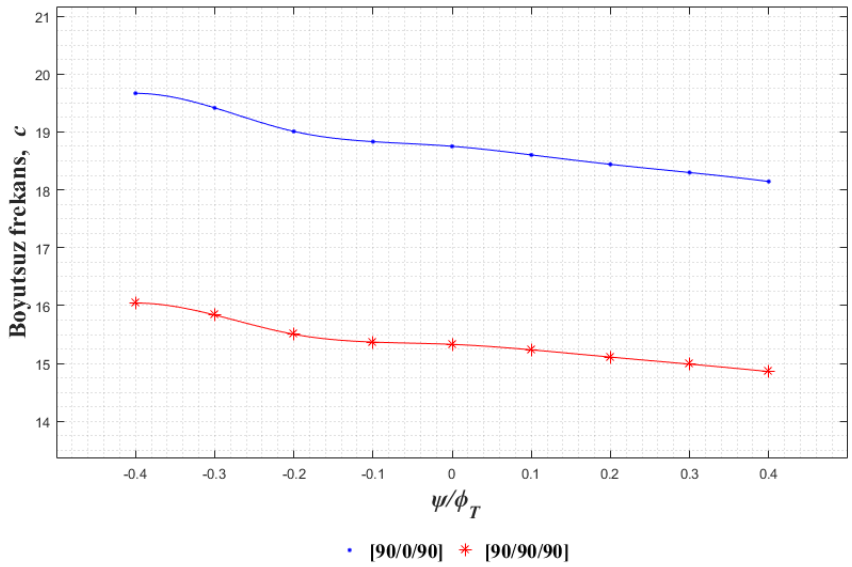
Farklı tabaka açılarının ele alındığı durumlarda, serbest-serbest mesnetlenmiş, λ=150 narinlik oranına, ϕ_T=60º kiriş açıklığına, E_1/E_2=15 elastisite modülü oranına, b/h=2 genişlik-yükseklik oranına ve η=1.5 kademe oranına sahip tek kademeli çember eksenli kompozit bir çubuk ele alınmaktadır. Şekil 2'de, [0/0/0] ve [0/90/0] tabaka düzenli kompozit çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekansların farklı kademe konumlarındaki değişimi gösterilmektedir.



Şekil 2. [0/0/0] ve [0/90/0] tabakalı çubuk.

[0/0/0] ve [0/90/0] tabakalı çubuklar için kademe oranının 1.5 olduğu durumda, daha geniş kesite sahip kısmın dar kesitli kısma göre daha uzun olması halinde boyutsuz frekansın daha yüksek değerlerde olduğu ve geniş kesitin boyunun kısalmasıyla da boyutsuz frekansta azalma olduğu görülmektedir. Geniş kesite oranla daha az olduğu durumlarda çubuk boyutsuz frekans değerlerinde önemli bir değişiklik gözlemlenmemektedir. Geniş kesitin en uzun olduğu durum ile en kısa olduğu durum arasında boyutsuz frekanslarda yaklaşık %15'lik bir fark bulunmaktadır (Şekil 2).

Şekil 3'te, [90/0/90] ve [90/90/90] tabaka düzenine sahip kompozit çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin farklı kademe konumlarındaki değişimi verilmektedir.



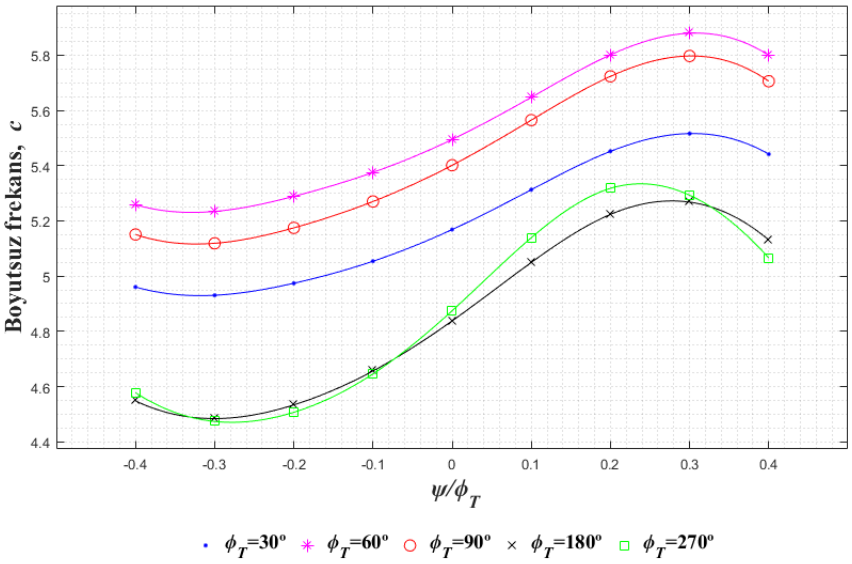
Şekil 3. [90/0/90] ve [90/90/90] tabakalı çubuk.

90º'li tabaka sayısının artması ile çubukta kademe konumunun, boyutsuz frekans üzerindeki etkisini azalttığı görülmektedir. Çubuğun geniş kesitinin en uzun olduğu durum ile en kısa olduğu durum arasında boyutsuz frekanslarda yaklaşık %7-8'lik bir fark oluştuğu görülmektedir (Şekil 3).

Farklı Kiriş Açıklıklarında Kademe Konumunun Boyutsuz Frekansa Etkisi

Farklı kiriş açıklıklarının ele alındığı durumlarda, λ=50 narinlik oranına, E_1/E_2=30 elastisite modülü oranına, b/h=2 genişlik-yükseklik oranına ve η=1.5 kademe oranına sahip tek kademeli çember eksenli kompozit bir çubuk ele alınmaktadır.

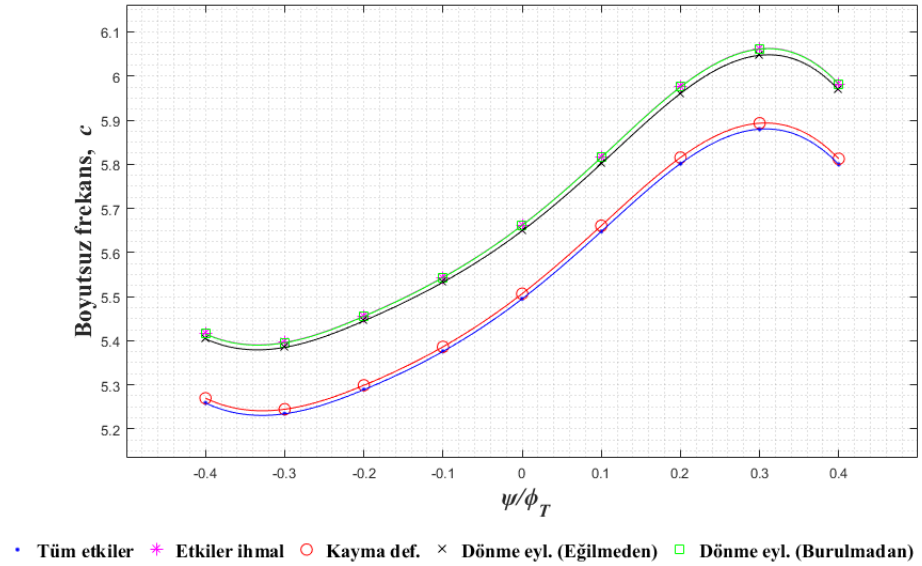
Şekil 4'de, ankastre-ankastre mesnetli, [90/0/90] tabaka düzenine sahip kompozit çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin farklı kademe konumlarındaki değişimi verilmektedir.



Şekil 4. Farklı kiriş açıklıklarında ankastre-ankastre mesnetli [90/0/90] tabakalı çubuk.

Ele alınan tüm kiriş açıklıklarında -0.3 konumunda en düşük boyutsuz frekans değerlerini alan çubuklar, en yüksek boyutsuz frekans değerlerine 270º kiriş açıklığındaki çubuk dışında +0.3 konumunda ulaşmaktadır. 270º'lik çubuk en yüksek frekans değerine +0.2 konumunda ulaşmakta olup, grafik boyunca diğer kiriş açıklıklarına göre daha yüksek bir eğim açısıyla artış-azalış düzeni göstermektedir (Şekil 4).

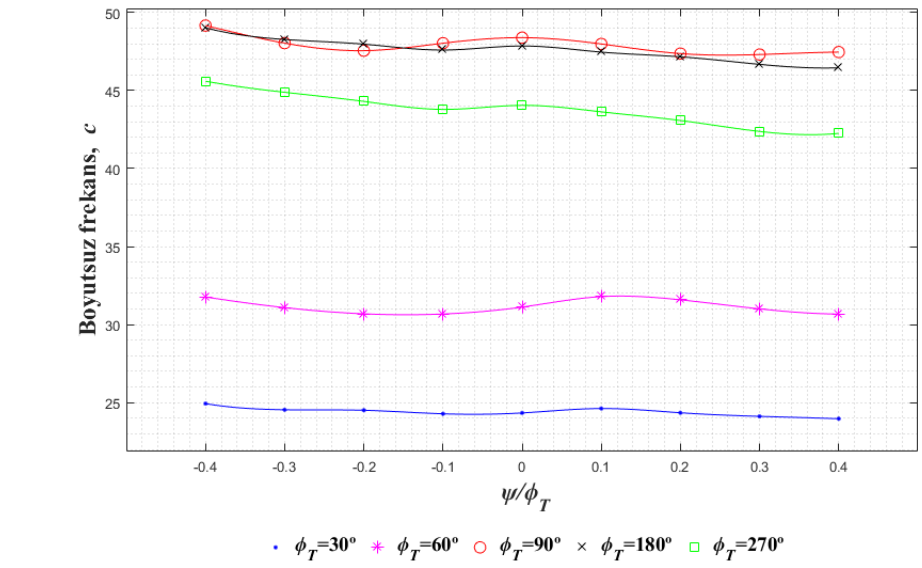
Ankastre-ankastre mesnetli, [90/0/90] tabaka düzenli kompozit çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin farklı kademe konumlarındaki değişimi Şekil 5'de görülmektedir.



Şekil 5. ϕ_T =60º kiriş açıklıklı ankastre-ankastre mesnetli [90/0/90] tabakalı çubuk.

ϕ_T =60º kiriş açıklıklı çubukta kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkisinin eğim rejimi tüm etkilerin dahil olduğu durumla benzerlik göstermektedir (Şekil 5).

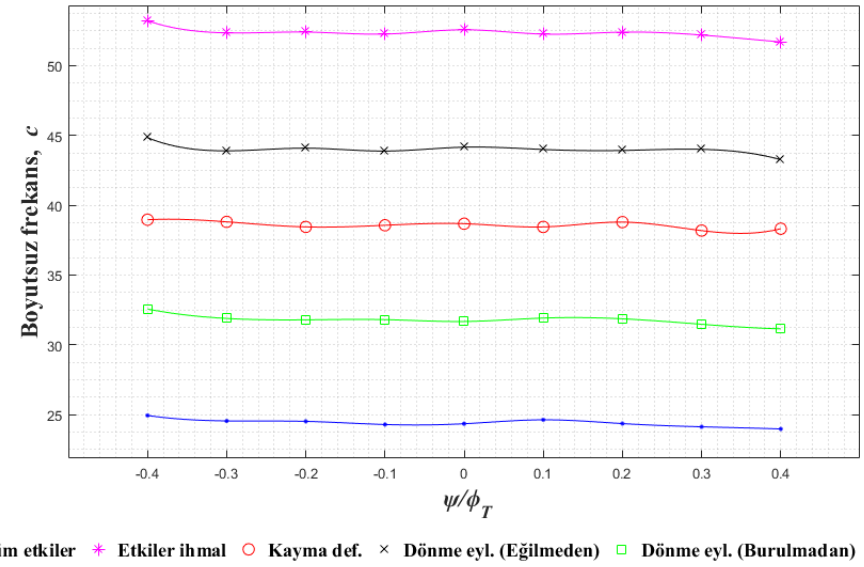
Şekil 6'da [90/0/90] tabaka düzenli serbest-serbest mesnetli kompozit çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin kademe konumuyla değişimi görülmektedir.



Şekil 6. Farklı kiriş açıklıklarında serbest-serbest mesnetli [90/0/90] tabakalı çubuk.

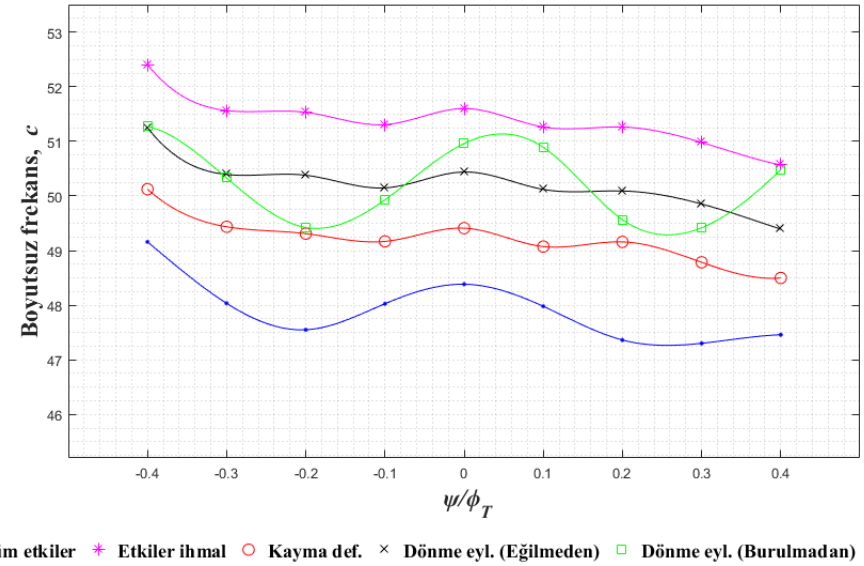
30º, 180º ve 270º için en düşük frekans değerleri +0.4 kademe konumunda, 60º ve 90º için en düşük frekans değerleri ise -0.2 kademe konumundadır. En yüksek frekans değerleri 30º, 90º, 180º ve 270º için -0.4 kademe konumunda, 60º için +0.1 kademe konumundadır (Şekil 6).

Şekil 7'de ϕ_T=30º kiriş açıklıklı [90/0/90] tabaka düzenli serbest-serbest mesnetli çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin kademe konumuyla değişimi verilmektedir.



Şekil 7. ϕ_T=30º kiriş açıklıklı serbest-serbest mesnetli [90/0/90] tabakalı çubuk.

Serbest-serbest mesnetli ve 30º kiriş açıklığına sahip çubuklarda etkiler, kademenin konumuyla birbirleriyle benzer değişim rejimi göstermektedir. Tüm etkilerin ihmal edildiği, sadece kayma deformasyonu ve sadece eğilmeden kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisinin dahil olduğu durumlar değişen kademe konumlarıyla benzer bir değişim göstermektedir. Özellikle burulmadan kaynaklı dönme eylemsizliği etkisinin düzensiz değiştiği, farklı kademe konumlarında diğer etkilerden daha gerçeğe yakın ya da gerçekten daha uzak davranışlar sergilediği görülmektedir (Şekil 7). Şekil 8'de ϕ_T=90º kiriş açıklıklı [90/0/90] tabaka düzenli serbest-serbest mesnetli tabakalı çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin kademe konumuyla değişimi verilmektedir.

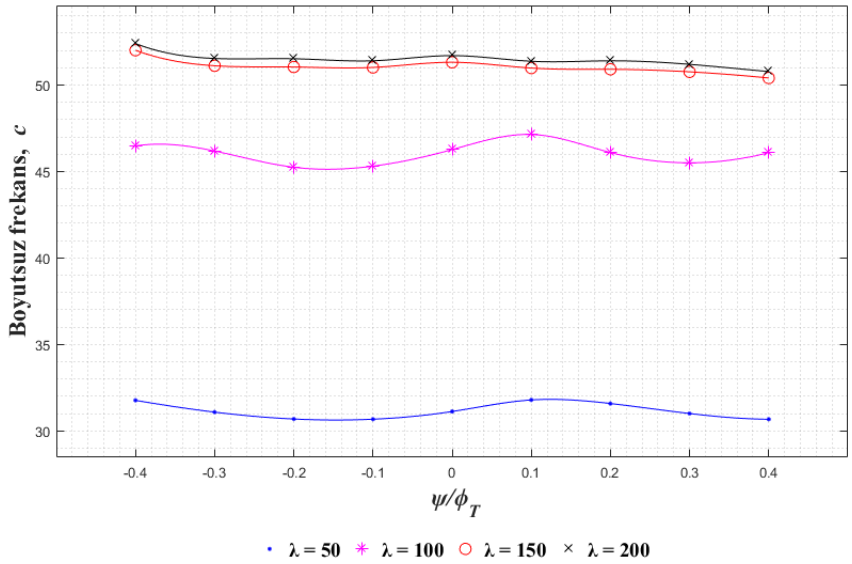


Şekil 8. ϕ_T = 90º kiriş açıklıklı, serbest-serbest mesnetli, [90/0/90] tabakalı çubuk.

Şekil 8'den görüldüğü üzere, 90̊ kiriş açıklıklı çubukta sadece burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliğinin etkidiği durumlar tüm etkilerin dahil olduğu durumla benzer değişim eğrilerine sahipken, boyutsuz frekans değeri anlamında kayma deformasyonu her bir kademe konumunda tüm etkilerin dahil olduğu duruma daha yakın değerlere sahiptir.

Farklı Narinlik Oranlarında Kademe Konumunun Boyutsuz Frekansa Etkisi

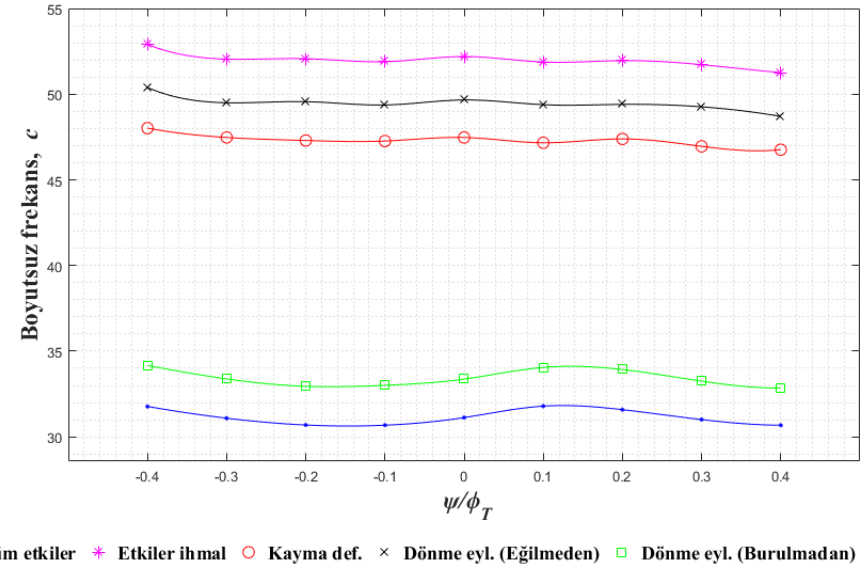
Farklı narinlik oranlarının ele alındığı durumlarda, çember eksenli çubuğun değişen kademe konumuyla birlikte çubuğun boyutsuz frekansı üzerindeki etkisi incelenmektedir. E_1/E_2=30 elastisite modülü oranına, b/h=2 genişlik-yükseklik oranına ve η=1.5 kademe oranına [90/0/90] tabaka düzenine sahip çember eksenli kompozit çubuk ele alınmaktadır. Serbest-serbest sınır koşuluna ve 60̊ kiriş açıklığına sahip çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekanslarının çeşitli narinlik oranlarında ve farklı kademe konumlarındaki değişimi incelenmektedir. Önemli bir tasarım parametresi olan narinlik oranı 50-200 arasında değişmektedir. Şekil 9'da kompozit çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin farklı narinlik oranlarında farklı kademe konumlarındaki değişimi gösterilmektedir.



Şekil 9. Farklı narinlik oranlarında, serbest-serbest mesnetli, [90/0/90] tabakalı çubuk.

λ=50 ve λ=100 gibi düşük narinlik oranlarında boyutsuz frekansın en büyük frekans değerini +0.1 kademe konumunda, λ=150 ve λ=200 gibi yüksek narinlik oranlarında ise en büyük boyutsuz frekans değerini -0.4 kademe konumunda aldığı görülmektedir. 50, 150 ve 200 narinlik oranına sahip çubuklarda en küçük frekans değeri +0.4 kademe konumunda elde edilirken, 100 narinlik oranına sahip çubuklarda bu değer -0.2 kademe konumunda ortaya çıkmaktadır. Ayrıca 50, 150 ve 200 narinlik oranına sahip çubukların +0.3 kademe konumundan +0.4 kademe konumuna geçmesiyle boyutsuz frekans değerinin azaldığı, narinlik oranı 100 olan çubukta bu konum geçişinde boyutsuz frekans değerinin arttığı gözlemlenmektedir. Çubuğun farklı narinlik oranlarında kademe konumuyla değişen boyutsuz frekans değerleri için düzenli bir değişim rejiminden bahsetmek mümkün olmamaktadır (Şekil 9).

Şekil 10'da λ=50 narinlik oranına sahip serbest-serbest mesnetli [90/0/90] tabakalı kompozit çubuğun 3. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin farklı kademe konumlarındaki değişimi gösterilmektedir.



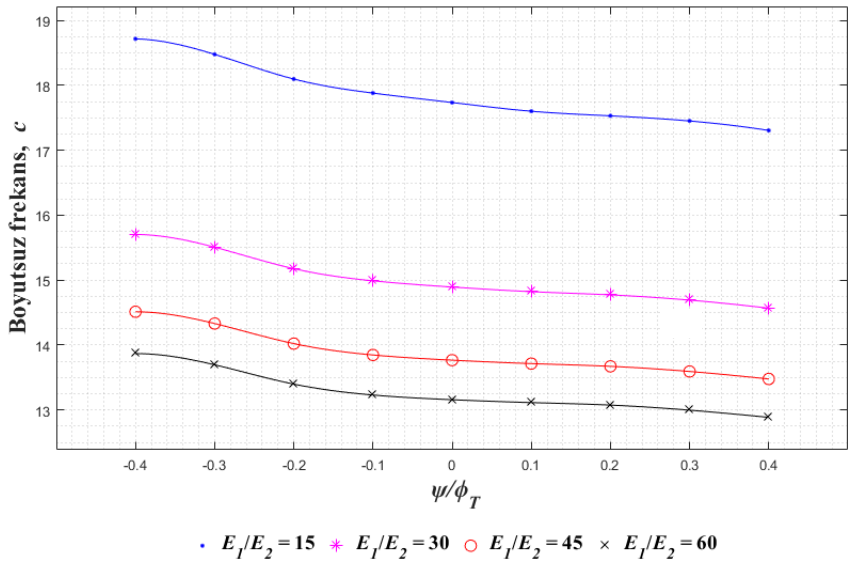
Şekil 10. λ=50 narinlik oranında serbest-serbest mesnetli [90/0/90] tabakalı çubuk.

Şekil 10'da burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliğinin kademe oranıyla değişim rejimi, çubuğun gerçek davranışı ile benzerlik göstermektedir. Kayma deformasyonu ve eğilmeden oluşan dönme eylemsizliği etkileri -0.2 ve +0.2 kademe konumları hariç benzerlik göstermektedir.

Farklı Elastisite Modülü Oranlarında Kademe Konumunun Boyutsuz Frekansa Etkisi

[90/0/90] tabaka düzenine, ϕ_T=60º kiriş açıklığına, λ=50 narinlik oranına, b/h=2 genişlik-yükseklik oranına ve η=1.5 kademe oranına sahip serbest-serbest mesnetli çember eksenli kademeli kompozit çubuğun 1. moduna ait boyutsuz frekans değerlerinin farklı elastisite modülü oranları ile değişimi ele alınmaktadır.

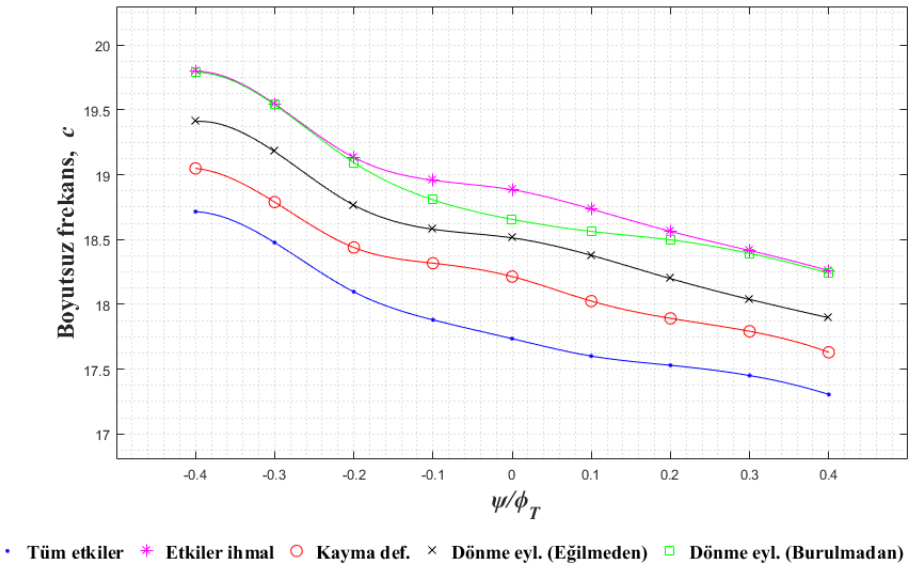
Şekil 11'de farklı elastisite modülü oranlarının boyutsuz frekans üzerindeki etkileri görülmektedir.



Şekil 11. Farklı elastisite modülü oranlarında serbest-serbest mesnetli çubuk.

Serbest-serbest sınır koşullarına sahip kademeli bir çubukta elastisite modülü oranının artması ile çubuğun boyutsuz frekans değeri azalmaktadır. Bu durum kademenin farklı konumları

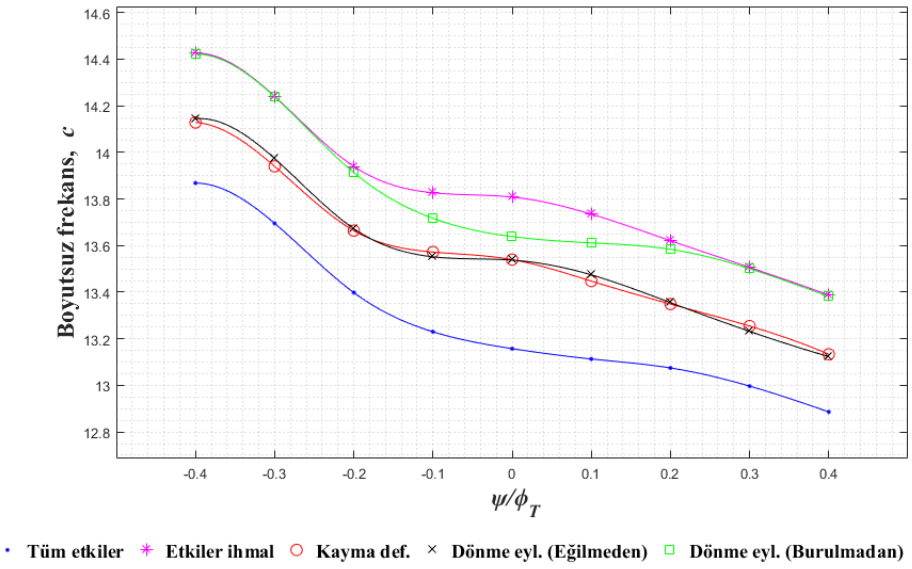
için, her konum geçişinde benzer değer değişimi göstermektedir. Kademe konumu gereği geniş kesitli bölgenin yüzdesel dağılımının azalmasıyla çubuğun boyutsuz frekans değerlerinde azalma görülmektedir (Şekil 11). Şekil 12'de kayma ve dönme eylemsizlik etkilerinin dahil edilip edilmediği durumlarda elastisite modülü oranı 15 olarak ele alınmıştır.



Şekil 12. E_1/E_2=15 elastisite modülü oranlı serbest-serbest mesnetli çubuk.

Şekil 12'de, E_1/E_2=15 elastisite modülü oranlı çubukta burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisinin değişen kademe konumlarında çubuğun gerçek davranışına yakın bir eğim grafiği çıkardığı görülmektedir. Kayma deformasyonu ve eğilmeden oluşan dönme eylemsizliği etkileri de kademe konumunun değişiminden benzer şekilde etkilenmektedir. Etkilerin ihmal edildiği durum ve burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi kademe konumunun uç noktalara yakın olduğu durumlar için benzer frekans değerleri verirken, kademe konumunun çubuğun orta noktasında olması halinde gerçek davranışa yaklaştığı gözlemlenmektedir.

Şekil 13'te elastisite modülü oranı 60 olan çubuğun kayma ve eğilmeden oluşan dönme eylemsizliği etkilerinin dahil veya ihmal edildiği durumlar görülmektedir.



Şekil 13. E_1/E_2=60 elastisite modülü oranlı serbest-serbest mesnetli çubuk.

Şekil 13'te kayma deformasyonu ve eğilmeden oluşan dönme eylemsizliği etkileri neredeyse bütün kademe konumlarında birbirine yakın boyutsuz frekans değerleri vermektedir. Elastisite modülü oranının 15 olduğu durumdaki çubuğa benzer şekilde, etkilerin ihmal edildiği durum ve burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi kademe konumunun uç noktalara yakın olduğu durumlar için benzer frekans değerleri verdiği, kademe konumunun çubuğun orta noktasında olması halinde gerçek davranışa yaklaştığı gözlemlenmektedir.

SONUÇLAR

Eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı titreşimlerinin çözümünde kullanılan, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin ihmal edilmesi ve eksen eğrisinin tam bir çember olarak ele alınması gibi durumlar, yaklaşık analitik yöntemlerin basit yapılı problemlerin analizinde kullanılmasına uygun ortam sağlamaktadır. İlgili etkilerin problemin çözümüne dahil edilmesi durumunda denklem takımının karmaşık olması nedeniyle problemin çözümü için bilgisayar hesaplamalarına ihtiyaç duyulmaktadır. Böylece, çalışma boyunca elde edilmiş tüm değer ve grafikler Matlab programı yardımıyla elde edilmiştir.

Kademe konumunun incelendiği bölümlerde, diğer çubuk parametreleri olan narinlik oranı, kiriş açıklığı, tabakaların düzeni ve mesnetleme tiplerinin etkileri de grafiklerde sunulmuş ve çubuğun düzlem dışı serbest titreşimleri incelenmiştir. Kademe konumu için, farklı kiriş açıklığı ve mesnetleme tiplerinde belirsiz düzende eğriler elde edilmiştir. Özellikle farklı kiriş açıklıkları için bu durum daha belirgindir. Ayrıca, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin, dahil edildiği ve edilmediği durumlar grafiklerde sunulmuş ve bu anlamda çalışma daha da zenginleştirilmiştir.

Kademeli kesitli eğri eksenli kompozit çubuk için çıkarılacak en önemli sonuç, tabakanın lif doğrultusunun çubuğun eksenine dik olduğu durumlarda boyutsuz frekans değerinin azalmasıdır. Üç ve üstü tabaka sayısına sahip durumlarda lif doğrultusu çubuğun tarafsız eksenine dik olan tabaka sayısının artmasıyla yapısal elemanın boyutsuz frekans değeri azalmaktadır. Her mesnetleme tipi için geçerli olan, narinlik oranının arttıkça boyutsuz frekansın arttığı ve elastisite modülü oranı arttıkça boyutsuz frekansın azaldığı gözlemlenmiştir.

Elde edilen bir diğer önemli sonuç ise tabaka düzenleri ile kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkileri arasında gözlemlenmiştir. Çubuk ekseniyle aynı yönlü lifi olan tabaka sayısı arttıkça çubuk üzerinde en önemli etki kayma deformasyonu iken, çubuk eksenine dik yönlü lif yapısına sahip tabaka sayısı arttıkça boyutsuz frekans üzerindeki en önemli etkinin burulmadan kaynaklanan dönme eylemsizliği etkisi olduğu tespit edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] M.S. Qatu, In-plane vibration of slightly curved laminated composite beams, J. Sound and Vibration, 159 (2), (1992) 327-338.

[2] M.S. Qatu, A.A. Elsharkawy, Vibraion of laminated composite arches with deep curvature and arbitrary boundaries, Computer and Structures,47 (2), (1993) 305-311.

[3] A.A. Khdeir, J.N. Reddy, Free and forced vibration of cross-ply laminated composite shallow arches, Int. J. Solid Structers,34 (10), (1997) 1217-1234.

[4] K.M. Fard, J. Estiri, A. Davar, A new two-dimensional refined higher order theory for in-plane vibrations of sandwich and composite thick curved beams with flexible cores, Journal of Sandwich Structures and Materials,14 (3), (2012) 247-280.

[5] Q. Lu, C.F. Lu, Exact two-dimensional solutions for in-plane natural frequencies of laminated circular arches, Journal of Sound and Vibration,318, (2018) 982-990.

[6] S.R. Marur, T. Kant, Free vibration of higher-order sandwich and composites arches, Part I: Formulation, Journal of Sound and Vibraion,310, (2008) 91-109.

[7] M.S. Qatu, Theories and analysis of thin and moderately thick laminated composite curved beams, Int J Solid Structures,30, (1993) 2743-2756.

[8] A. Bhimaraddi & A.J. Carr & P.J. Moss, Generalized finite element analysis of laminated curved beams with constant curvature, *Computers and Structures.* 31 (3) (1989) 309-317.

[9] V. Cinemre, Çubuk Teoriside Yer ve Şekil Değiştirme İlişkileri, *İTÜ Dergisi, Cilt 40*, (1982) 3-6.

[10] V. Yıldırım, Common effects of the rotary inertia and shear deformation on the out-of-plane natural frequencies of composite circular bars, Composites: Part B, 32, (2001) 687-695.

[11] E. Tüfekci, A. Arpacı, Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects, Journal of Sound and Vibration, 209(5), (1998) 845-856.

HOMOJEN BİR TABAKA İLE KAPLI HETEROJEN BİR YARIM UZAYDA DOĞRUSAL OLMAYAN YÜZEY SH DALGALARININ YAYILIMI

Ekin Deliktaş-Özdemir
Piri Reis Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İstanbul

ABSTRACT

The propagation of surface shear horizontal (SH) waves in a nonlinear, elastic, homogeneous layer overlying a nonlinear elastic half space with vertical inhomogeneity is examined. By employing the method of multiple scales, it is shown that nonlinear modulation of the surface SH waves is governed asymptotically by a nonlinear Schrödinger equation (NLS) whose coefficients depend on, in a complicated way, linear and non-linear material parameters of the layered half space, wave number of the waves and also heterogeneity parameters of the constituent material of the half space. This study investigates the effect of the heterogeneity of the half space as well as the nonlinearity of the media on the existence of the bright and dark solitary SH waves.

Keywords: Heterogeneous Half Space; Nonlinear surface SH waves; Nonlinear Schrödinger equation

ÖZET

Bu çalışmada düzlem sınır yüzeylere sahip, homojen, elastik bir tabaka ile kaplı, dalga yayılımına dik yönde heterojenliğe sahip elastik bir yarım uzayda lineer olmayan yüzey SH dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Çoklu ölçekler metodu kullanılarak, doğrusal olmayan yüzey SH dalga modülasyonunun asimptotik olarak doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. Bu denklemin katsayıları, doğrusal ve doğrusal olmayan malzeme parametrelerine, dalga sayısına ve ayrıca yarım uzayı oluşturan malzemeye ait heterojenlik parametrelerine bağlıdır. Doğrusal olmayan malzemelerin yanı sıra yarım uzayın heterojenliğinin zarf soliton tipi yüzey SH dalgaların varlığı üzerine etkisi araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Heterojen yarım uzay; Doğrusal olmayan yüzey SH dalgaları; Doğrusal olmayan Schrödinger deklemi

GİRİŞ

Düzgün kalınlıklı bir tabaka ile kaplı doğrusal, elastik bir yarım uzayda yatay polarize olmuş yüzey kayma dalgalarının varlığı Love tarafından keşfedilmiştir, [1]. Love dalgaları olarak adlandırılan bu dalgalar, tabakanın ara yüzeyi ve serbest yüzeyi arasında tekrar eden yansımalardan dolayı dispersiftir. Tabakalı yarım uzayda yüzey SH dalgalarının yayılması problemi, malzemelerin hasarsız muayenesi, jeofizik, elektronik sinyal işleme cihazları ve depremlerden kaynaklı hasarların tahmini alanlarındaki önemli uygulamaları sebebiyle birçok araştırmanın konusunu oluşturmuştur, [1,2]. Yeryüzünün yoğunluğunun ve rijitliğinin kalınlık

doğrultusunda değişken olduğu göz önüne alındığından, daha gerçekçi bir model için ortamı oluşturan malzemelerin heterojenlik özellikleri de çalışmalarda hesaba katılmalıdır. Lineer Love dalgaları teorisi ilk olarak Meissner tarafından homojen bir tabaka ile kaplı heterojen bir yarım uzaya genişletilmiş, yarım uzayın yoğunluğundaki lineer değişimin ve rijitliğindeki ikinci dereceden (kuadratik) değişimin dalga yayılımı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Tabakalı yarım uzayda, yarım uzayın rijitliğinin ve yoğunluğunun dalga yayılımına dik yönde çeşitli tipteki değişimlerinin doğrusal Love dalga yayılımına etkileri, birçok yazar tarafından araştırılmış ve bu araştırmalar Ewing, Jardetsky ve Press tarafından özetlenmiştir, [2].

Son yıllarda, tabakalı yarım uzayın lineer olmayan malzeme özelliklerinin Love dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerine etkileri de yukarıda bahsedilen geniş uygulama alanları sebebiyle birçok çalışmanın konusu olmuştur, [3-5]. Bu çalışmada ise, homojen, izotrop, doğrusal olmayan bir tabaka ile kaplı heterojen, izotrop, doğrusal olmayan yarım uzayda yüzey SH dalgalarının yayılımı problemi göz önüne alınarak, sadece ortamın lineer olmayan özelliklerinin değil yarım uzayın heterojenliğinin de dalga yayılımı üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Tabakalı yarım uzayı oluşturan malzemelerin birbirinden farklı mekanik özelliklere sahip genelleştirilmiş neo-Hookean malzeme olduğu kabul edilmiştir. Doğrusal olmayan yarım uzaya ait gerilme potansiyeli fonksiyonunun ve yoğunluğun dalga yayılımına dik yönde üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Doğrusal durumda, incelenen problem Gupta tarafından çalışılan probleme indirgenmektedir, [6]. Bir asimptotik pertürbasyon metodu kullanılarak, yüzey SH dalgalarının lineer olmayan modülasyonunun, katsayıları malzeme parametrelerine, dalga sayısına ve yarım uzayı oluşturan malzemenin heterojenlik parametrelerine bağlı bir doğrusal olmayan Schrödinger denklemi ile karakterize edildiği gösterilmiştir. Yarım uzaya ait heterojenlik parametreleri sıfır seçildiğinde problem, Teymur tarafından [3]'te incelenen probleme indirgenmekte ve NLS denkleminin katsayıları da homojen tabakalı yarım uzay modeli için elde edilen NLS denkleminin katsayılarına yaklaşmaktadır. Ortamın doğrusal olmayan özelliklerinin yanı sıra yarım uzayın heterojenlik özelliğinin de zarf soliton SH dalgalarının yayılma karakteristikleri üzerinde kuvvetli bir biçimde etkili olduğu grafiklerle gösterilmiştir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen takımına göre maddesel ve uzaysal koordinatları sırasıyla $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ ve $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ olmak üzere, $\boldsymbol{h}$ kalınlıklı lineer olmayan, homojen elastik bir tabaka $(\boldsymbol{P_1})$ ile kaplı lineer olmayan, dikey yönde heterojen elastik bir yarım uzayın $(\boldsymbol{P_2})$ sırasıyla $\boldsymbol{0 < Y < h}$ ve $-\infty < \boldsymbol{Y < 0}$ bölgelerini kapladığı ortam ele alınmıştır. $\boldsymbol{Y = h}$ serbest yüzeyi üzerinde gerilmelerin sıfır olduğu, $\boldsymbol{Y = 0}$ ara yüzeyi boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu ve ayrıca yarım uzaydaki yer değiştirmenin radyasyon koşulunu sağladığı kabul edilmiştir.

X ekseni boyunca yayılan SH dalgaları aşağıdaki denklemlerle tanımlanmaktadır:

$$\boldsymbol{x = X}, \quad \boldsymbol{y = Y}, \quad \boldsymbol{z = Z + u^{(r)}(X, Y, t)} \qquad \boldsymbol{r = 1, 2}. \tag{1}$$

Burada, bir alan büyüklüğü üzerindeki parantez içindeki indis, büyüklüğün hangi bölgeye ait olduğunu temsil etmektedir, $\boldsymbol{u^{(1)}, u^{(2)}}$ sırasıyla, tabaka ve yarım uzaydaki noktaların $\boldsymbol{Z}$ yönündeki yer değiştirme fonksiyonları, $\boldsymbol{t}$ ise zamandır.

Tabakalı yarım uzayın lineer olmayan, izotropik, sıkışmaz hiperelastik ve birbirinden farklı genelleştirilmiş neo_Hooken malzemelerden oluştuğu varsayılmıştır. Ayrıca tabaka homojenken, heterojen yarım uzaya ait yoğunluk ve gerilme potansiyeli fonksiyonunun kalınlık değişkeninin bir fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir. Böyle bir ortam için, $\boldsymbol{\rho_1}$ sabit, $\boldsymbol{I^{(r)}}$ Finger şekil değiştime tansörünün birinci invaryantı olmak üzere, tabakalı yarım uzayın yoğunluk ve gerilme potansiyeli fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\boldsymbol{\rho^{(1)} = \rho_1},\ \boldsymbol{\rho^{(2)} = \rho_2(Y)},\ \boldsymbol{\Sigma^{(1)} = \Sigma^{(1)}(I^{(1)})}\quad \boldsymbol{\Sigma^{(2)} = \Sigma^{(2)}(I^{(2)}, Y)} \tag{2}$$

Sınır koşulları ve [4]'te verilen referans konumundaki hareket denklemleri yukarıda bahsedilen tabakalı yarım uzay modeli için aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$P_1\,'de \quad \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - c_1^2\left(\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial Y^2}\right) = n^{(1)}\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial X}\mathrm{K}\left(u^{(1)}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y}\mathrm{K}\left(u^{(1)}\right)\right)\right\} \tag{3}$$

$$P_2\,'de \quad \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2} - c_2^2\left(\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial Y^2}\right) = n^{(2)}\left\{\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial X}\mathrm{K}\left(u^{(2)}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y}\mathrm{K}\left(u^{(2)}\right)\right)\right\}$$

$$+\frac{\mathrm{K}\left(u^{(2)}\right)}{\rho^{(2)}}\frac{d\left(\rho^{(2)}n^{(2)}\right)}{dY}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} + \frac{1}{\rho^{(2)}}\frac{d\mu^{(2)}}{dY}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} \tag{4}$$

$$Y = h\,'da \qquad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} = 0.$$

$$Y = 0\,'da \qquad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y} - \gamma\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y} = \gamma\,\beta_2\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y}\mathrm{K}\left(u^{(2)}\right) - \beta_1\frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y}\mathrm{K}\left(u^{(1)}\right) \text{ ve } u^{(1)} = u^{(2)}. \tag{5}$$

$$Y \to -\infty, \qquad u^{(2)} \to 0.$$

Burada

$$\mathrm{K}\left(u^{(r)}\right) = \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial Y}\right)^2 \qquad r = 1{,}2.$$

$c_r^2 = \mu^{(r)}/\rho^{(r)}, r = 1{,}2$ için sırasıyla tabaka ve yarım uzaya ait doğrusal kayma hızlarını, $\rho^{(r)}$ yoğunlukları, $\mu^{(1)} = \frac{d\Sigma^{(1)}}{dI^{(1)}}(3)$, $\mu^{(2)} = \frac{d\Sigma^{(2)}}{dI^{(2)}}(3, Y)$ lineer kayma modüllerini, $n^{(1)} = \frac{d^2\Sigma^{(1)}}{dI^2}(3)/\rho^{(1)}$, $n^{(2)} = \frac{d^2\Sigma^{(2)}}{dI^2}(3, Y)/\rho^{(2)}(Y)$ doğrusal olmayan malzeme parametrelerini temsil etmektedir. Eğer $n^{(r)} > 0$ ise ilgili malzeme kaymada sertleşen, aksi halde kaymada yumuşayan davranış gösterir. Ayrıca $\gamma = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}$, $\beta_r = n^{(r)}/c_r^2$ olarak tanımlanmaktadir. Dikkat edilirse tabakanınkiler sabit kalırken, heterojen yarım uzaya ait nonlinear malzeme parametresi, lineer kayma modülü ve yoğunluk dalga yayılımına dik yönde değişmektedir.

LİNEER OLMAYAN SH DALGALARININ ASİMPTOTİK ANALİZİ

Lineer olmayan küçük ama sonlu genlikli SH tipi yüzey dalgalarının self modülasyonu, çoklu ölçekler metodu kullanılarak incelenmiştir. Bunun için problemin bağımsız değişkenleri aşağıda tanımlanan çoklu ölçeklerin bir kümesine genişletilir:

$$x_i = \varepsilon^i X, \qquad t_i = \varepsilon^i t, \qquad y = Y, \qquad i = 0{,}1{,}2 \tag{6}$$

Burada ε nonlineerliğin mertebesini belirten küçük pozitif bir parametre, $\{x_1, x_2, t_1, t_2\}$ yayılma olayında yavaş değişimi karakterize eden değişkenler, $\{x_0, t_0, y\}$ yayılma olayında hızlı değişimi karakterize eden hızlı değişkenlerdir. $u^{(r)}, r = 1{,}2$ yer değiştirme fonksiyonlarının, yeni tanımlanan bağımsız değişkenlerin birer fonksiyonu olduğu kabul edilerek aşağıdaki düzgün geçerli asimptotik açılıma sahip oldukları varsayılır

$$u^{(r)} = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n^{(r)}(x_0, t_0, x_1, x_2, t_1, t_2, y) \qquad r = 1{,}2. \tag{7}$$

Bu açılım ve yeni bağımsız değişkenler yukarıda tanımlanan sınır değer probleminde kullanılarak $u_n^{(r)}(x_0, t_0, x_1, x_2, t_1, t_2, y)$ fonksiyonlarının ardışık olarak hesaplanabilecekleri bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Elde edilen mertebe problemleri lineerdir ve birinci

mertebe problem ilk defa Gupta [6] tarafından incelenen, homojen bir tabaka ile kaplı heterojen yarım uzayda lineer Love dalgalarının yayılımı problemidir. Literatürde, yarım uzaya ait yoğunluk ve rijitliğin lineer, kuadratik, harmonik ya da üstel değişimleri göz önüne alınarak birçok yazar tarafından harmonik dalga çözümleri elde edilmiştir [2,7,8]. Bu çalışmada, yarım uzayın heterojenlik özelliklerinin kalınlığa bağlı olarak üstel değişimi göz önüne alınacaktır. Dolayısıyla, yarım uzayın yoğunluğu, lineer kayma modülü ve doğrusal olmayan malzeme fonksiyonu aşağıdaki formda seçilmiştir:

$$\mu^{(2)} = \mu_2 e^{\alpha y}, \qquad \rho^{(2)} = \rho_2 e^{\alpha y}, \quad n^{(2)} = n_2 e^{\lambda y}. \tag{8}$$

Burada ρ_2, μ_2 ve n_2 yarım uzayın sınır yüzeyindeki yoğunluk ve malzeme sabitleri, α lineer heterojenlik parametresi ve λ lineer olmayan heterojenlik parametresidir. Böyle bir ortamda, yüzey SH dalga yayılımı, dalgaların faz hızı için aşağıdaki koşul sağladığında mümkün olmaktadır.

$$c_1 < c < c_2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4k^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Bu koşul altında birinci mertebe probleme ait çözümler aşağıdaki şekilde bulunur:

$$u_1^{(1)} = \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)(R_1 e^{ikpy} + R_2 e^{-ikpy}) e^{i\theta} + k.e. \tag{10}$$

$$u_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 e^{\alpha y}}} \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2) R_3 e^{kvy} e^{i\theta} + k.e. \tag{11}$$

Burada k dalga sayısı, ω açısal frekans, $c = \omega / k$ faz hızı ve $\theta = kx_0 - \omega t_0$, $p = (c^2/c_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $v = (1 + \alpha^2/4k^2 - c^2/c_2^2)^{1/2}$olarak tanımlanmıştır, k.e. sembolü kompleks eşleniği göstermektedir. $\boldsymbol{W}$ birinci mertebe sınır koşullarından elde edilen dispersiyon matrisi olmak üzere $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2, R_3)^T$, $\boldsymbol{WR} = \boldsymbol{0}$ denklem sistemini sağlayan sütun vektördür. Elde edilen çözümler birinci mertebe sınır koşullarında kullanıldığında, aşikar olmayan çözüm için, $\det \boldsymbol{W} = 0$ koşulu aşağıdaki dispersiyon bağıntısını verir:

$$\frac{(-2kv+\alpha)\mu_2}{\mu_1} + 2kp\, tan(kph) = 0. \tag{12}$$

Bu bağıntı ilk defa Gupta [6] tarafından elde edilen dispersiyon bağıntısı ile örtüşmektedir, ayrıca heterojenlik parametresi $\alpha = 0$ seçimiyle homojen tabakalı yarım uzayda yayılan Love dalgalarına ait dispersiyon bağıntısına indirgenmektedir.

Birinci mertebe çözümün tamamen belirlenebilmesi için, $\mathcal{A}_1$ yavaş değişen genlik fonksiyonunun hesaplanması gerekmektedir. Bunun için daha yüksek mertebe pertürbasyon problemleri incelenmelidir. İkinci mertebe hareket denklemleri belirsiz katsayılar metodu kullanılarak çözüldükten sonra sınır koşulları kullanılarak elde edilen uygunluk koşulundan $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$'in, $\boldsymbol{V_g}$ grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığı, yani $\boldsymbol{\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, x_2, t_2)}$ yapısında olduğu bulunur. $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$ 'in $\boldsymbol{x_2}$ ve $\boldsymbol{t_2}'$ye bağlılığı üçüncü mertebe problemin çözümüyle bulunur. Üçüncü mertebe problemin çözümleri belirsiz katsayılar metodu ile bulunabilir ve sınır koşulları kullanılarak elde edilen uygunluk koşulundan aşağıda tanımlanan boyutsuz değişkenler ile $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$ için NLS denklemini elde edilir.

$$\tau = \omega t_2 \ , \ \xi = k\epsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2) \ , \ \mathcal{A} = k\mathcal{A}_1 \ , \Gamma = \frac{k^2}{2\omega}\frac{d^2\omega}{dk^2}$$

olmak üzere

$$i\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta \mid \mathcal{A} \mid^2 \mathcal{A} = 0 \ .$$

Γ katsayısı sadece lineer malzeme parametrelerine dolayısıyla yarım uzayın lineer heterojenlik parametresine bağlı iken Δ ayrıca lineer olmayan malzeme parametrelerine dolayısıyla yarım uzaya ait lineer olmayan heterojenlik parametresine de bağlıdır.

Böylece elde edilen Schrödinger denkleminin, $\mathcal{A}(\xi,0)=\mathcal{A}_0(\xi)$ formunda verilen bir başlangıç koşulu için çözümü bulunduktan sonra $u_1^{(r)}$, $r=1,2$ birinci mertebe çözümleri inşa edilmiş olur.

SONUÇLAR

Bilindiği gibi lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümlerinin kararlılığı, lineer terim katsayısı Γ ve lineer olmayan terim katsayısı Δ 'nın çarpımının işaretine bağlıdır, [9]. $\Gamma\Delta$ <0 olduğunda düzlem dalgaları kararlı ve dark soliton tipi çözümler mevcutken, $\Gamma\Delta$ > 0 için düzlem dalgaları kararsız ve zarf soliton tipi dalga yayılımı mevcuttur. $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretinin NLS denkleminin çözümleri üzerine etkilerini gözlemleyebilmek için, bu çarpımın boyutsuz dalga sayısı $K=kh$'a göre değişimi dispersiyon bağıntısının ilk dalı için nümerik olarak hesaplanmıştır. Yarım uzayı oluşturan malzemenin heterojenliğinin, $\Gamma\Delta$ çarpımının işaretine etkilerini görebilmek için nümerik hesaplamalarda malzemelerin doğrusal özellikleri $\frac{\mu_2}{\mu_1}=1.8$, $\frac{c_2}{c_1}=1.28$ seçilerek sabit tutulmuş ve heterojenlik parametreleri değiştirilerek $\Gamma\Delta$ 'nın $K=kh$ dalga sayısına göre değişimi grafiklerle incelenmiştir.

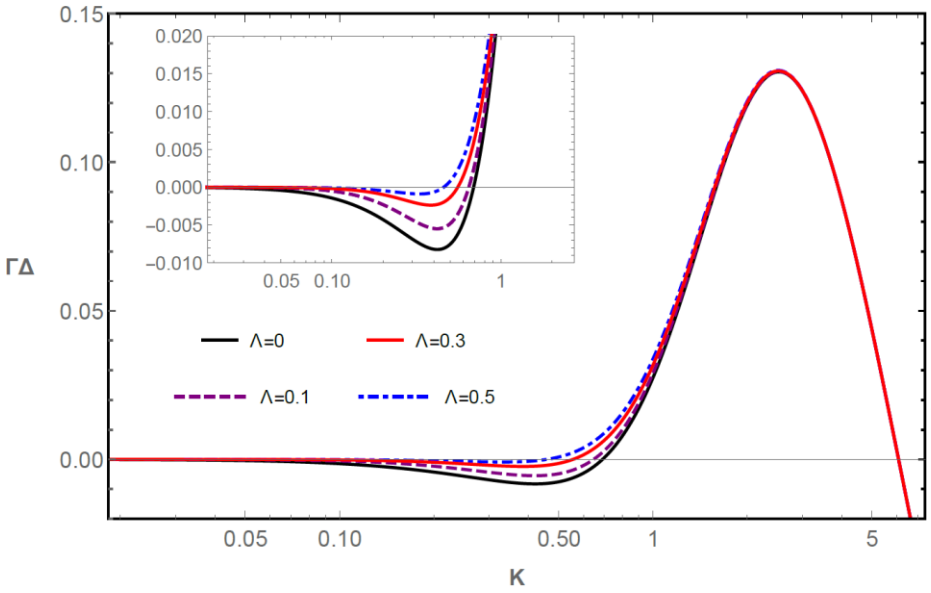
Daha önce de bahsedildiği gibi eğer $n_r>0$ ise ilgili malzeme kaymada sertleşen, aksi halde kaymada yumuşayan davranış gösterir.

Yarım uzayın lineer olmayan malzeme özellikleri ile ilişkili boyutsuz heterojenlik parametresi $\Lambda=\lambda h'$nın dalga yayılımı üzerine etkisini gözlemleyebilmek için Şekil 1'de sertleşen tabaka ve yumuşayan yarım uzay modeli için lineer olmayan malzeme sabitleri $n_1=2, n_2=-2$ ve boyutsuz lineer heterojenlik parametresi $A=\alpha/k$, $\mathrm{A}=0.5$ seçilerek sabit tutulmuş ve yarım uzayın lineer olmayan heterojenlik parametresinin $\Lambda=(0,0.1,0.3,0.5)$ seçimleri için $\Gamma\Delta$ 'nın K ile değişimi gösterilmiştir. İlki Δ' nın ikincisi ise Γ'nın olmak üzere her bir $\Gamma\Delta$ eğrisinin iki sıfırı vardır. Lineer malzeme parametreleri sabit tutulduğu için ikinci sıfırlar tüm $\Gamma\Delta$ eğrileri için aynı iken birinci sıfırlar Λ'nın değişimine bağlı olarak değişmektedir. Ayrıca Λ'daki değişimin $\Gamma\Delta$ eğrilerini yalnızca çok küçük dalga sayıları için etkilediği görülmektedir. Tabakanın lineer olmayan malzeme parametresi sabit tutulduğundan, büyük dalga sayıları için eğriler birbirine yaklaşmaktadır. Bu gözlem, [3]'te vurgulanan kısa dalgalar için tabakanın, uzun dalgalar için ise yarım uzayın lineer olmayan malzeme parametrelerinin dalga modülasyonu üzerinde baskın olduğu gözlemi ile uyuşmaktadır. Sonuç olarak böyle bir model için zarf soliton dalgaların yayıldığı aralıklar mevcuttur ve $\Gamma\Delta$'nın sıfırları dolayısıyla zarf soliton dalgaların yayıldığı aralıklar sadece uzun dalgalar için yarım uzayın lineer olmayan heterojenlik parametreleri ile değişmektedir.

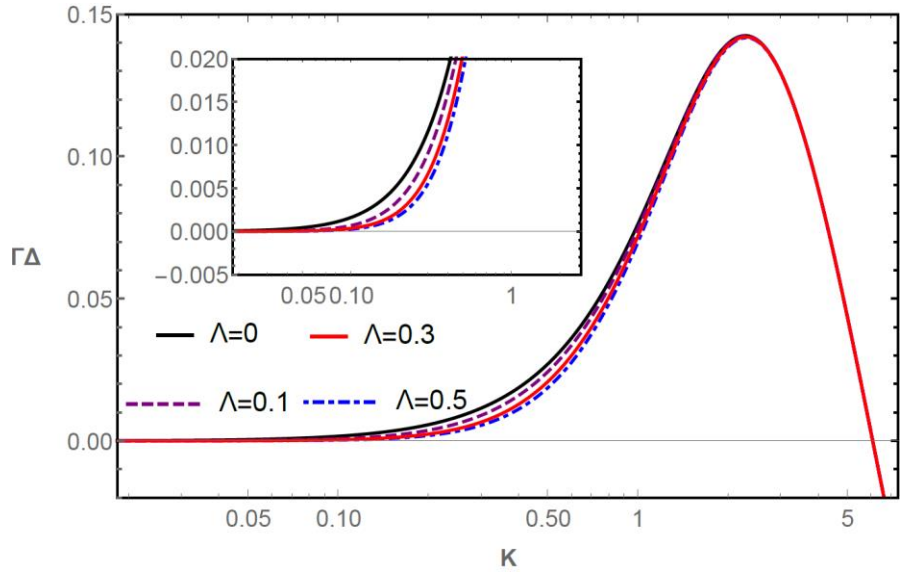
Şekil 2'de, lineer olmayan malzeme sabitleri $n_1=n_2=2$, lineer heterojenlik parametresi A=0.5 seçimleriyle sabit tutulmuş ve sertleşen bir tabaka ile kaplı sertleşen bir yarım uzay modeli için $\Gamma\Delta$ 'nın K ile değişimi, $\Lambda=(0,0.1,0.3,0.5)$ seçimleri için verilmiştir. Her bir $\Gamma\Delta$ eğrilerisinin işareti Γ'nın sıfır olduğu belirli bir K değerinde değişmektedir. Düzlem dalgaları $\Gamma\Delta$ >0 olduğu $0<K<6$ aralığında kararsızdır ve zarf soliton dalga yayılımı bu aralıkta mevcuttur. $K>6$ için $\Gamma\Delta$ <0 olduğundan düzlem dalgaları kararlıdır ve bu aralıkta sadece dark soliton tipi dalgalar yayılmaktadır.

Dikkat edilirse Şekil 1 ve Şekil 2'deki eğriler arasındaki fark, yarım uzaya ait lineer olmayan malzeme sabiti n_2'nin farklı seçimlerinden kaynaklanmaktadır. Böylece sadece lineer olmayan heterojenlik parametresinin değil yarım uzayın lineer olmayan malzeme parametresinin de zarf soliton dalga yayılımı üzerindeki etkisi gözlemlenmiştir.

Grafiklerden, yarım uzayın lineer olmayan malzeme özellikleri ile ilişkili heterojenliğinin, SH dalgalarının yayılma karakteristiklerini uzun dalgalar için etkilediği görülmüştür.



Şekil 1. $n_1 = 2, n_2 = -2,$ A =0.5 için sertleşen bir tabakayla kaplı yumuşayan bir yarım uzayın lineer olmayan heterojenlik parametresi $\Lambda = (0,0.1,0.3,0.5)$ seçimleri ile $\Gamma\Delta$ 'nın K' ya göre değişimi.



Şekil 2. $n_1 = n_2 = 2,$ A =0.5 için sertleşen bir tabakayla kaplı sertleşen bir yarım uzayın lineer olmayan heterojenlik parametresi $\Lambda = (0,0.1,0.3,0.5)$ seçimleri ile $\Gamma\Delta$ 'nın K' ya göre değişimi.

KAYNAKLAR

[1] Love A.E.H., (1911) Some problems of geodynamics, Cambridge Univ. Press, London.

[2] Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., Press, F., and Beiser, A. (1957). Elastic waves in layered media. Physics Today, 10, 27.

[3] Teymur, M., Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space. Int. J. Eng. Sci., 26, 907-927, 1988.

[4] Deliktas, E., and Teymur, M. (2018). Surface shear horizontal waves in a double-layered nonlinear elastic half space. IMA Journal of Applied Mathematics, 83(3), 471-49.

[5] Teymur , M., Demirci, A., Ahmetolan, S. (2014). Propagation of surface SH waves on a half space covered by a nonlinear thin layer. Int. J. Eng. Sci. 85, 150-162.

[6] Gupta, S. C. D. (1952). Note on Love waves in a homogeneous crust laid upon heterogeneous medium. Journal of Applied Physics, 23(11), 1276-1277.

[7] Avtar, P. (1967). Love waves in a two-layered crust overlying a vertically inhomogeneous halfspace I. pure and applied geophysics, 66(1), 48-68.

[8] Singh, B. M., Singh, S. J., Chopra, S. D., Gogna, M. L. (1976). On Love waves in laterally and vertically heterogeneous layered media. Geophysical Journal International, 45(2), 357-370.

[9] Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A., (1991). Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering (Vol. 149). Cambridge university press.

STREÇ GİYDİRME MAKİNASINDA ÇEKİLEN POLİETİLEN FİLMLERİN EN İYİ MEKANİK DAVRANIŞI ELDESİ İÇİN OPTİMUM GERDİRME KUVVETLERİN BELİRLENMESİ

Melih Doğan[1]
[1]Keramik Makine-Sakarya Üniversitesi, Kocaeli

ABSTRACT

Today, the increase in production speed demands necessitated the orientation to different technology methods after the transition to Industry 4.0. Each product produced with mass production is directed to logistics processes by packaging and palletizing before being delivered to the buyer by leaving the factories. Humidity, adverse weather conditions, dispersion of the arrayed packages, etc. of the products produced during transportation. In order to prevent problems, some machines have started to be produced. In line with the increasing demand, interest in this field is increasing in terms of related sectors. When packaging machines are examined, many machines such as stretch wrapping, stretch wrapping, shrink, strapping machines, stacking machines come to the fore today. In this study, the stretch wrapping machine and its components, which are preferred by most manufacturers, will be examined, and analysis and dynamic calculations will be made on the stretching of the polyethylene film on the product with the tensile force without plastic deformation. As a result of the analysis and dynamic calculations, the experimental studies applied to the film will be compared. As a result of the comparison, the optimum tensile strength will be determined to obtain the best mechanical behavior of the polyethylene films.

Keywords: Stretch Hood; Polyethylene Film; Packaging; Tensile Force;

ÖZET

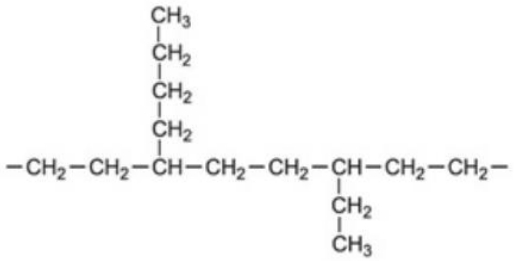
Günümüzde üretim hız taleplerinin artması, Endüstri 4.0'a geçilmesinden sonra farklı teknoloji yöntemlerine yönelimi gerektirmiştir. Seri üretimle üretilen her bir ürün fabrikalardan çıkarak alıcısına ulaştırılmadan önce paketleme ve paletleme yapılarak lojistik işlemlere yönlendirilmektedir. Taşıma esnasında üretilen ürünlerin nem, olumsuz hava koşulları, dizili paketlerin dağılması vb. sorunların önüne geçmek için birtakım makineler üretilmeye başlanmıştır. Artan talep doğrultusunda ilgili sektörler açısından bu alana ilgi artmaktadır. Paketleme makineleri incelendiğinde streç giydirme, streç sarma, shrink, çemberleme makineleri, istif düzeltme makineleri gibi pek çok makine günümüzde ön plana çıkmaktadır. Bu çalışmada ise çoğu üretici firma tarafından tercih edilen streç giydirme makinesi ve bileşenleri incelenecek olup, polietilen filmin ürün üzerinde gerdirme kuvveti ile plastik deformasyona uğramadan esnetilmesine dair analiz ve dinamik hesaplamaları yapılacaktır. Yapılan analiz ve dinamik hesaplamalar sonucunda filme uygulanan deneysel çalışmalar kıyaslanacaktır. Karşılaştırma sonucunda polietilen filmlerin en iyi mekanik davranışı elde etmesi için optimum gerdirme kuvveti belirlenecektir.

Anahtar kelimeler: Streç Giydirme; Polietilen Film, Paketleme, Gerdirme Kuvveti,

GİRİŞ

Sektörde kullanılan paketleme makinaların başında streç giydirme makinası gelmektedir. Streç giydirme konveyörden gelen ürünleri reçete sistemi ile otomatik olarak tespit ederek esnek giydirme işlemi yapan yapay zekâ tabanlı bir makinadır. Makine kapasite, hız ve ebat olarak ülkemizde hat sonu palet kullanımına ihtiyaç duyan sektörlere çözüm sunmaktadır. Ürün ve palet boyutuna en uygun streçleme işlemi yapabilen yapay zekâ yazılımı sayesinde farklı müşteri ihtiyaçlarına cevap verebilen, hattan gelen birden fazla farklı ürünü 500*500 mm'den 1200*1200 mm'ye kadar olan paletlere istifleme yapabilme kabiliyetine sahiptir. Streç giydirme makinasında istenilen hız ve ölçülerde hat sonu ürün paketlenebilir. Bu işlemlerin uygunluk kontrolü 3 boyutlu proses simülasyon programında gerçekleştirilmektedir. Streç giydirme makinası çeşitli bileşenlerden oluşmaktadır. Bu bileşenler sayesinde streç giydirme makinası sorunsuz bir streç giydirme işlemi sağlamaktadır.

Film hammaddesi olarak polietilen LDPE (düşük yoğunluklu) kullanılmaktadır. LDPE özellik 0,910-0,940 g/cm^3 yoğunluk aralığında tanımlanmaktadır. Düşük Yoğunluklu Polietilen (LDPE), yarı sert ve yarı saydam bir polimerdir. HDPE (Yüksek yoğunluklu polietilen) ile karşılaştırıldığında, daha yüksek derecede kısa ve uzun yan zincir dallanmasına sahiptir (Şekil 1). Serbest radikal polimerizasyon prosesi ile yüksek basınçta (1000-3000 bar; 80-300°C) üretilir. LDPE, birçok kısa dalı olan 4.000-40.000 karbon atomundan oluşur. Düşük yoğunluklu polietilen üretimi için kullanılan iki temel işlem vardır, bunlar karıştırmalı otoklav veya boru yoludur. Boru şeklindeki reaktör, daha yüksek etilen dönüşüm oranları nedeniyle otoklav yöntemine göre daha çok tercih edilmektedir. Düşük yoğunluklu polietilene ait fiziksel özellikler Tablo 1'de verilmiştir.

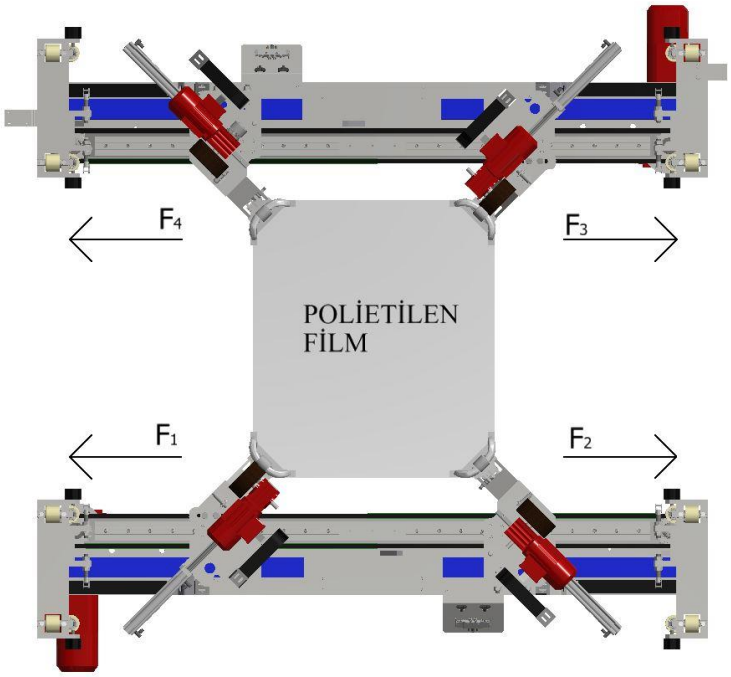


Şekil 1. Düşük Yoğunluklu Polietilen Yapısı

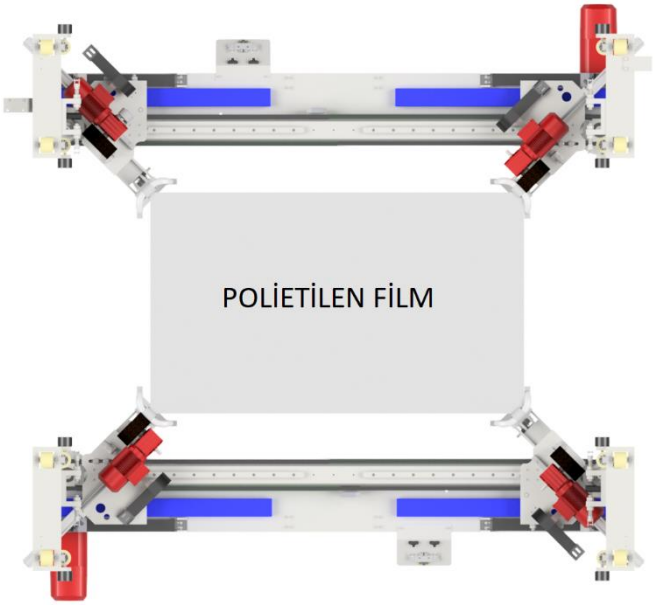
Tablo 1. Polietilen Film Fiziksel Özellikleri

Fiziksel Özellikler	**Birim**	**Standart**
Yoğunluk	g/cm^3	0,915-1
Su Soğurumu	%	0,010
Dengede Nem Emilimi	%	0,010
Su Buharı İletimi	$g/m^2/g$ün	≥20
Çevresel Stres Çatlak Direnci	Saat	3-500
Vinil Asetat İçeriği	%	2,5-6,6
Kalınlık	Mikron	12,7-300
Oksijen oranı	%	17
Çalışma Sıcaklığı	℃	140-230

Bileşenlerden birisi olan asansör sistemi ile makine gövdesinin üst kısmında film besleyen ve kat açan modüller yukarı-aşağı yönlü çalışmaktadır. Bu nedenle makinanın gövdesi hem tüm yapıyı taşıyacak kadar sağlam dizayn edilmiş hem de üzerinde çalışan diğer modüllerden kaynaklı titreşimleri sönümleyecek katılığa uygun olacak şekilde tasarlanması gerekmektedir. Tasarlanan asansör sistemi ile makinanın genel ağırlığı, taşıyabileceği kuvvet miktarı belirlenmekte ve streç filmin türü belirlenebilmektedir. Makinede bulunan diğer bileşenler ise film açma grubu, film serme ünitesi, film taşıma asansörüdür. Bu çalışmanın esas amacı olan polietilen filmin plastik deformasyona uğramadan, yeterli esneklik kapasitesine sahip olarak giydirilme işlemidir (Şekil 2). Filmin istif uzunluğuna göre açılmış 3 boyutlu görünümü Şekil 3 üzerinde görülmektedir.



Şekil 2. PE Film Gerdirme Mekanizması ve Kuvvet Yönleri



Şekil 3. PE Film Gerdirilmiş Görünüm

LİTERATÜR ANALİZİ

Klein ve diğerleri yaptıkları çalışmada polietilen filmin hafif yapılı yüklerde streç sarma makinesiyle optimum koşullarda çalışma yeteneğini ortaya koymuşlardır. Kullandıkları streç filmin mekanik karakterizasyonuna bağlı kalarak proses aşamalarındaki optimizasyon işlemlerini gerçeklemişlerdir. Çalışmalarıyla filmin palet üzerindeki mekanik davranışının büyük ölçüde işlem parametrelerinin seçimine ve streç sarma makinesinin özelliklerine bağlı olduğunu göstermektedir [1].

Wyns ve diğerleri ortaya koydukları çalışmada sıkıştırma kuvvetinin streç film üzerine etkilerini incelemişlerdir. Çalışma sonucunda pozitif yönde sekonder esnemeye sahip olan bir film uygulaması sıkıştırma kuvvetinde azalmaya yol açarken negatif sekonder esnemeye sahip olan film uygulaması ise zamanla biraz artarak optimize koşullara yaklaştığını ortaya çıkarmışlardır [2].

Ostergaard ve diğerleri yaptıkları çalışmada paketleme endüstrisinde kullanılan filmlerin sayısal simülasyonu ile değerlendirmişlerdir. 3 boyutlu çok gövdeli dinamik bir model geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri model ile ürünü streç filmle kaplarken üründe kayma meydana gelmemesi için basit bir test senaryosu ortaya koyarak paketleme alanında yenilikçi bir yöntem ortaya koymuşlardır [3].

Kristiansen ve diğerleri yapmış olduğu çalışmada paketleme endüstrisinde kullanılan makineleri tanıtmıştır. Streç giydirme, streç sarma, termal shrink sarma teknolojilerini tablo halinde sunarak birbirleriyle kıyaslamıştır. Yaptığı çalışma sonucunda streç giydirme ve termal shrink sarma yöntemlerinin daha avantajlı olduğunu ortaya koymuştur [4].

Maciukiewicz ve diğerleri yapmış olduğu çalışmada streç sarma ve giydirme cihazlarında iş yaralanmalarının minimize edebilmek için sargı yapan ruloya gerekli gerilimi dönüştüren yeni bir cihaz geliştirmişlerdir. Deneysel faktörler için tekrarlanan ölçümler ANOVA'lar gerçekleştirilmiştir: 1) kullanılan teknik (cihaz veya elle sarma) ve 2) her kas için sarma yüksekliği (düşük, orta, yüksek), açı (5), algılanan rahatsızlık derecesi (1) ve algılanan eforun derecesi (1). Yapılan deneyler ile omuz kasları, bel kaslarına göre teknik ve yüksekliğe bağlı olarak daha fazla değişiklik göstermiştir. Bu özel uygulama, ergonomik yükleri hafifletmeyi amaçlayan yeni bir araçla araştırmışlardır [5].

Molina ve diğerleri yaptıkları çalışmada paketlenmiş ürünlerin katmanları arasındaki büyüklüğü ve türünün etkisini araştırmaktadır. Beş farklı istifleme yöntemi tamamen dolu yük üzerinde test etmişlerdir. Farklı paket yöntemleri kullanılarak birbirine tamamen istiflenerek palet sapmalarının %53 oranında azaldığını belirlemişlerdir. Düzgün istiflenme ile palet üzerindeki sapmanın %11,6 oranında azaldığı görülmüştür [6].

Cernokus yaptığı çalışmada streç sarma makinesinde kullanılan yükün stabilitesini etkileyen üç ana faktör üzerinde durmuşlardır. Bu çalışma, streç sarma sisteminin bileşenlerinin her biri arasındaki etkileşimleri gözlemlemek ve anlamak için tasarlanmıştır [7].

Fadiji ve diğerleri yapmış oldukları inceleme çalışmasında, oluklu mukavva ambalajının performans testini anlatmakta ve oluklu mukavva ambalajın gücünü etkileyen üretim süreci ve soğuk zincir ortamı faktörlerini vurgulamaktadır [8].

Dunno ve diğerleri farklı derecelerdeki streç filmler arasındaki tutma kuvveti değişkenliğinin değerlendirildiği bir çalışma yapmışlardır. Çalışma için bir test paletine iki farklı üreticiden iki farklı dereceli streç film uygulanmış ve tutma kuvveti ölçülmüştür. Ek olarak, önceden belirlenmiş bir tutma kuvveti ölçümünün 25 libre olduğu gözlemlenlemişlerdir.

Elde edilen sonuçlar, taşınabilir test paletinin, streç film üreticileri ve son kullanıcılar tarafından kalite güvencesi ve kontrol için kullanılabilecek tekrarlanabilir sonuçları yeniden üretebildiğini gösterdi [9].

Kanai ve diğerleri polietilenin boru şeklinde film ekstrüzyonu sırasında meydana gelen kinematik, dinamik ve ısı transferine ilişkin temel bir çalışma yayınlamışlardır. LDPE, LLDPE ve HDPE'nin özellikleri karşılaştırılmıştır [10].

Çetinel yapmış olduğu çalışmada çekme deneyi yapılarak polipropilen (PP) ve alçak yoğunluklu polietilen (AYPE) ve yüksek yoğunluklu polietilenin (YYPE) mekanik özelliklerini belirlemiştir. Ayrıca belirlenen numuneler UV ışın testlerine tabi tutulmuştur. Elde edilen sonuçlar ise sertlik değeri olarak AYPE için 47, PP için 72 ve YYPE için 65 olarak bulunmuştur. UV testine maruz kalan numunelerde oluşan farklılık uzama miktarları olmuştur. UV ışınına maruz kalan numuneler maruz kalmayanlara göre daha fazla uzamışlardır [11].

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Streç Filmin Proses Koşullarında Mekanik Karakterizasyonu

Sürtünmesiz yatakların ve silindirlerde kayma olmaması varsayımını kullanarak, denklem 1 ve 2, streç giydirme işleminin iki deformasyon adımına karşılık gelen makine yönündeki gerilmeleri elde edilir.

$$\sigma_1 = [M_2/r_2 + M_3/r_3]/A \quad (1)$$

$$\sigma_2 = M_3/(r_3 A) \quad (2)$$

$\sigma_1 \rightarrow$ Nominal Ön Gerilim, $\sigma_2 \rightarrow$ Nominal Sargı Gerilimi, $r_2, r_3 \rightarrow$ Yarıçap,

$M_2, M_3 \rightarrow$ Tahrik torkları

Son olarak filmin makine yönündeki toplam nominal gerilimi (ε_{toplam}):

$$\varepsilon_{top} = [(\varepsilon_1 + 1) * (\varepsilon_2 + 1)] - 1 \quad (3)$$

Sargı gerilimi σ_2, ön gerilim σ_1 yerine doğrudan filmin palet üzerinde oluşturduğu tutma kuvvetine bağlıdır.

SAYISAL SONUÇLAR

Tasarım ve Yöntem

Streç giydirme makinesinde kullanılan düşük yoğunluklu polietilen (LDPE) bazlı filmlerin kalınlık ve boyutları istiflerin tür, boyutlarına göre değişkenlik göstermektedir. Çalışmada konu olan filmin boyutları 1000x650 mm^2, tek kat kalınlığı 120 mikron (μ) ve renk şeffaf olarak değerlendirilmiştir. Teknik özelliklerde boyut için $\pm$ 5 mm, kalınlık için $\pm$ % 5 tolerans bulunmaktadır.

Çalışmada tasarlanmış olan streç giydirme makinesinin film açma mekanizması içerisinde bulunan germe koluna ait Autodesk Inventor programı üzerinde 3 boyutlu görsel ve pe filmi açısı çanak sırasıyla Şekil 4 ve Şekil 5 üzerinde verilmiştir.



Şekil 4. Germe Kolu



Şekil 5. PE Film Açıcı Çanak

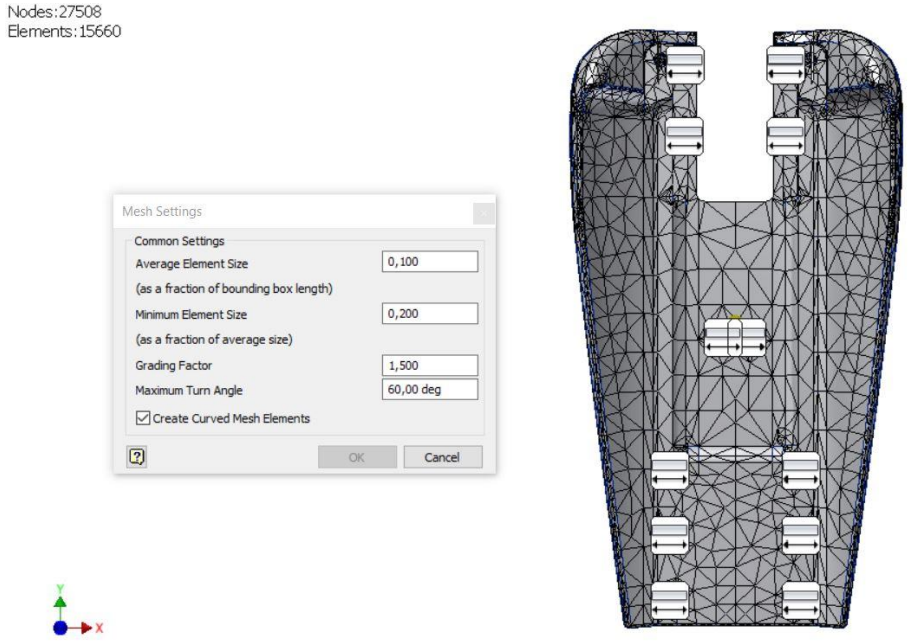
Çanak malzemesi döküm olan Alüminyum Etial 177 olarak seçilmiştir. Etial 177 malzeme alaşımlı bir külçedir ve üretimi indüksiyon fırınlarında yapılmaktadır. İlgili malzeme türünün seçilme nedenleri arasında korozyon dayanımının iyi seviyede, işlenebilirlik özelliğinin orta seviyelerde olması etkilidir. Ayrıca malzemenin tipik ve fiziksel özellikleri Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2. Etial 177 Tipik ve Fiziksel Özellikleri

Etinorm	Etial 177
Özgül Ağırlık (gr/cm^3)	2,68
Ergime Sıcaklığı (℃)	-
Isısal İletkenlik ($cal/cm.s^0C$)	0,38
Young Modülü	68,9 GPa
Akma Dayanımı	275,03 Mpa
Çekme Dayanımı	310 Mpa

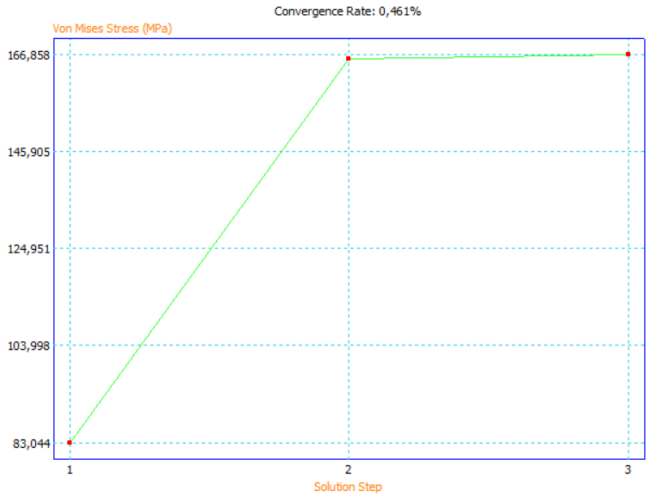
Analiz Sonuçları

Polietilen filmin açılması germe kolu üzerindeki düzenek ile redüktörlü motor yardımı ile gerçekleşmektedir. Kullanılan motor gücüne karşılık olarak bir germe kolu üzerinde 300 kg 2943 N değerine karşılık gelen bir çekme kuvveti uygulanmaktadır. Autodesk Inventor programı üzerinde yapılan statik analiz bölümünde analiz koşturulmadan önce sabit kalan bölgeler, kuvvet yönü ve mesh adımları gerçekleştirilmiştir (Şekil 6).

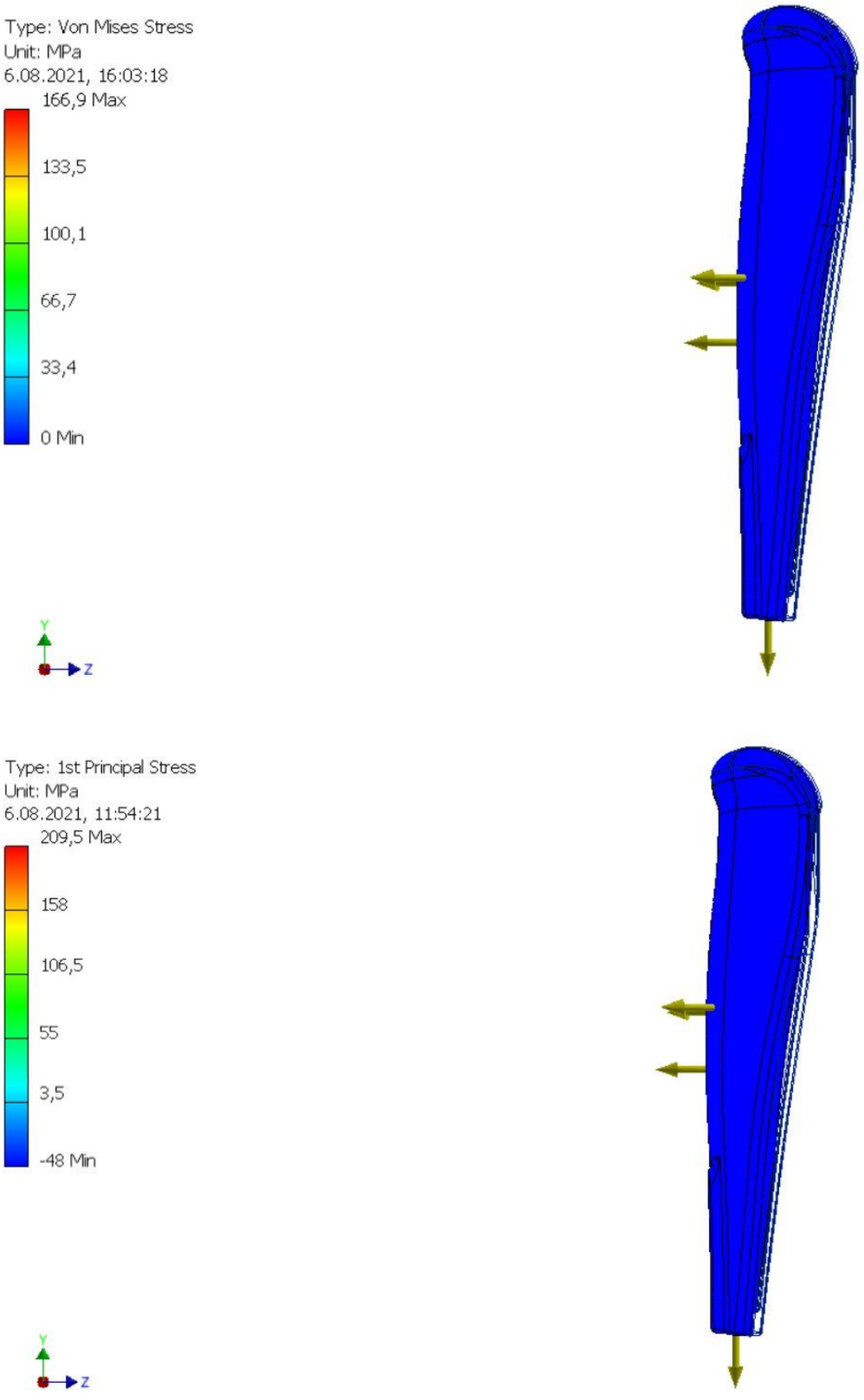


Şekil 6. Mesh ve Sabit Kalan Bölge Gösterilimler

Sabit kalan bölgelerde iyileştirme ya da analizlerde o bölgelerde yaşanacak gerilim düşümlere istinaden cıvata bağlantılarının yapıldığı kısımlar olarak seçilmiştir. Mesh yapısı incelendiği zaman model üzerinde üçgen bir ağ yapısı oluşturularak 27508 nodes ve 15660 element elde edilmiştir. Analiz simüle edildikten sonra elde edilen Von Mises Gerilmesi maksimum 196,7 MPa, birincil ana gerilme kuvvet değerleri maksimum 209,5 MPa olarak elde edilmiştir. Sonuçlara ait kontur görünümleri Şekil 7 üzerinde verilmiştir.



Grafik 1. Von Mises Gerilmesi



Şekil 7. Simülasyon Sonuçları Kontur Görünümü

Deneysel Sonuçlar

Malzeme olarak 120 mikron kalınlığındaki polietilen film tercih edilmiştir. Polietilen filmlerin mekanik davranışlarının belirlenmesi için deneyler uygulanmaktadır. Bu deneyler ise; darbe dayanım testleri, çekme cihazlarında uygulanan çekme testleri, malzemenin çeşitli bölgelerinden elde edilen numunelerin sertlik ölçümleri, malzemeye yönelik ultraviyole ışın kaynak etkisine bağlı olarak spektrofotometre testi ve numuneye bağlı olarak fırın testleri uygulanmaktadır. Yapılan deney metotları ASTM test metotları sınıfındadır. Bu bağlamda yapılan deneyler sonucunda elde edilen mekanik özellikler Tablo 3 üzerinde bir arada verilmiştir.

Tablo 3. Polietilen Film Mekanik Özellikleri

Mekanik Özellikler	**Test Metodu**	**Birim**	**Standart**
En Yüksek Sıcaklık	-	℃	80 ℃
En Düşük Sıcaklık	-	℃	-50 ℃
Erime Noktası	-	℃	120 ℃
Akışkanlık Testi	ASTM D 1238	gr/10	0,67
Yoğunluk	ASTM D 792-08	g/cm^3	0,922
Sertlik	-	Shore	42-60
Dart Drop – Darbe Testi	ASTM D 1709-09	g	Ort. 1750
Uzama Testi	ASTM D 882-10	%	717,9-830,8
Mukavemet Testi	ASTM D 882-10	N/mm^2	33,71-33,95
Maksimum Yük	ASTM D5459-95	N	Min. 19
Tutma Kuvveti	ASTM D5459-95	N	5,702
Delinme Testi Max. Yük	ASTM 1306-90	N	20,472
Delinme Testi Aldığı Yol	ASTM 1306-90	mm	29
Delinme Testi Enerji	ASTM 1306-90	J	0,352
Elastikiyet Geri Dönüşüm	ASTM D5459-95	%	Max≤75
Statik Sürtünme Katsayısı	ASTM D1894	stat.	Max≤ 700
Kinetik Sürtünme Katsayısı	ASTM D1894	dyn.	Max≤ 600
pre-streç		%	Max.70
UV Dayanımı		Min	6 ay

Mekanik Özellikler için Tanımlar

1) Maksimum yük: Filmin %100 uzatıldığında ulaştığı max yüktür.
2) Tutma Kuvveti: Filmin elastik yapısı sayesinde palete uyguladığı kuvvettir.
3) Elastikiyet geri dönüşüm: Filmin %100 uzatıldığında ürünün kendini geri toplama yüzdesidir.
4) Statik sürtünme katsayısı: Film dururken uygulanan sürtünme katsayısıdır.
5) Kinetik sürtünme katsayısı: Film hareket ederken uygulanan sürtünme katsayısıdır.

Test Metodu Tanımları

1) ASTM D 1238: Yaklaşık 7 gram malzeme, malzeme için belirtilen bir sıcaklığa ısıtılmış olan eriyik akış aparatına yüklenir. Malzeme için belirlenmiş bir ağırlık bir pistona uygulanır ve erimiş malzeme kalıba zorlanır. Zamanlanmış bir ekstrüdat toplanır ve tartılır. Eriyik akış hızı değerleri g/10 dak olarak hesaplanır [12].
2) ASTM D 792-08: Bu test yöntemi, daha büyük bir numunenin veya ürünün ortalama yoğunluğunu veya özgül ağırlığını belirlemek için, diğer numunelere kıyasla homojenlik derecesi ile ilişkili bir plastik numunedeki fiziksel değişiklikleri değerlendirmek için kullanılır [13].
3) ASTM D 1709-09: Bu test yöntemleri, serbest düşen bir dart darbesinin belirli koşulları altında plastik filmin bozulmasına neden olan enerjinin belirlenmesini kapsar. Bu enerji, test edilen numunelerde %50 başarısızlıkla sonuçlanacak belirli bir yükseklikten düşen füzenin ağırlığı (kütlesi) cinsinden ifade edilir [12].
4) ASTM D 882-10: Bu test yöntemi, ince tabakalar ve filmler (1,0 mm'den (0,04 inç) daha az kalınlıkta) şeklindeki plastiklerin çekme özelliklerinin belirlenmesini kapsar [12].
5) ASTM D5459-95: Bu test yöntemi, streç filmin uzama, kalıcı deformasyon ve stres tutma durumundan toparlanma ölçümünü kapsar [12].
6) ASTM 1306-90: Test, delik oluşana kadar malzeme üzerinde tek bir test hızında çift eksenli bir gerilim uygulanarak oda sıcaklığında gerçekleştirilir. Kuvvet, enerji ve perforasyona kadar olan uzama belirlenir [12].
7) ASTM D1894: Bu test yöntemi, belirtilen test koşullarında plastik film ve tabakanın kendi veya diğer maddeler üzerinde kayarken başlama ve kayma sürtünme katsayılarının belirlenmesini kapsar. Prosedür, hareketli bir düzlemle sabit bir kızağın veya sabit bir düzlemle hareketli bir kızağın kullanılmasına izin verir. Her iki prosedür de belirli bir numune için aynı sürtünme değerleri katsayılarını verir [12].

SONUÇLAR

Analiz sonuçları göstermiştir ki polietilen filmi gerdirmeyi sağlayan çanaklarda oluşan Von Mises ve çekme gerilim değerleri nominal seviyelerdedir. Bu değerler ile çanak maksimum 12 mm yer değiştirme miktarına sahiptir. Çekme gerilimi maksimum 209,5 MPa değerine sahiptir. Bu gerilim seviyesinde polietilen film de zarara uğramadan çalışabilmektedir. Sonuçta seçilmiş ve optimizasyon yapılmış olan 0,12 kW gücündeki bir redüktörlü motor germe koluna ve polietilen filme zarar vermeden çalışıldığı elde edilmiştir.

Her iki çalışmadan (analiz ve deneysel) elde edilen sonuçlarla polietilen filmin yırtılmadan streç giydirme makinesinde kullanılarak sistemin aksamadan maksimum isteklere bağlı olarak çalışabilmekte ve üretimden çıkan hat sonu ürünlerinin durmadan paketlenip taşınabilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] D. Klein, M. Stommel, J. Zimmer, Influence Of The Stretch Wrapping Process On The Mechanical Behavior Of A Stretch Film, *Proceedings of the 21st International ESAFORM Conference on Material Forming.* 1960, 120012-1–120012-6, 2018.

[2] J. Wyns, J. Cook, K. Dunno, Post-Wrapping Behavior of High-Performance Stretch Film, *Journal of Applied Packaging Research.* 10(3), 1-11, 2018.

[3] N. Ostergaard, S. Danjou, Application of Computational MBD for Simulation of Wrap Packaging Performance, *Journal of Applied Packaging Research.* 10(3), 25-36, 2018.

[4] U. Kristiansen, Tips For Choosing A Pallet-Wrapping Method, *Powder and Bulk Engineering*, 1-4, 2003.

[5] J. Maciukiewicz, R. Whittaker, K. Hogervorst, C. Dickerson, Wrapping Technique And Wrapping Height İnteract To Modify Physical Exposures During Manual Pallet Wrapping, *Applied Ergonomics* 93, 1-9, 2021.

[6] E. Molina, L. Horvath, M. White, Investigation Of Pallet Stacking Pattern On Unit Load Bridging, *Packaging Technology and Science* 31, 653-663, 2018.

[7] E. Cernokus, The Effect Of Stretch Wrap Pre-Stretch On Unitized Load Contaınment, *Packaging Technology and Science* 27, 944-961, 2014.

[8] Fadiji, T., T. Berry, C. Coetzee and U. L. Opara, Mechanical Design And Performance Testing Of Corrugated Paperboard Packaging For The Postharvest Handling Of Horticultural Produce, *Biosystems Engineering* 171, 220-244, 2018.

[9] K.D. Dunno, J. Wyns, J. Cook, Evaluation of Containment Force Variability between Different Grades of Stretch Film, *International Journal of Food and Fermentation Technology 5*, 267-274, 2017.

[10] T. Kanai and J. L. White, Kinematics, dynamics and stability of the tubular film extrusion of various polyethylenes, *Polymer Engineering & Science* 24(15), 1185–1201, 1984.

[11] H. Çetinel, Polietilen ve Polipropilenin Mekanik Özelliklerinin İncelenmesi, *Fen ve Mühendislik Dergisi* 2(3), 79-87, 2000.

[12] ASTM, Standard Test Methods for Density and Specific Gravity (Relative Density) of Plastics by Displacement, ASTM International, West Conshohocken, PA, 2008, www.astm.org

[13] https://www.smithers.com/services/testing/standard/astm/astm-d792

ABKANT MAKİNELER İÇİN ROBOT YARDIMLI OTOMATİK SAC BÜKÜMÜ TASARIMI VE PROTOTİP İMALATI

Cihan Torhan[1], Kenan Seymen[2]
[1,2]Durmazlar Makine Ar-Ge Merkezi, Bursa

ABSTRACT

Placing the metal sheets to be bent in the press brake machine and retrieving after bending, stacking etc. the use of manpower in jobs has now begun to give way to robot power. The robot power requirement of the sector especially for heavy metal sheets exceeding manpower has caused to the design of Robot Assisted Press Brake Machine. The use of robots is possible for bending heavy metal sheets as well as smaller metal sheets that are mass-produced and where production time is important. The robots or robots that will make the bending can be adapted to almost any press brake machine with CNC control, hydraulic or electrical. There are two different ways that the robot communicates with the machine. One of them is to program the movements of the robot through the hand terminal of the robot, but this method takes a very long time. The other method is to make the movements of the robot through a software that automatically generates the movements of the robot in a computer environment, this method generates the robot NC codes in a few minutes and all that remains is to make the last improvements on the bending precision in the field. With this project, the second method, software and robot control method, was used.

Keywords: Robot press brake; Automatic bending; DBend;

ÖZET

Büküm yapılacak metal sacların abkant makinesine yerleştirilmesi ve bükümden sonra geri alınması, istiflenmesi vb. işlerin insan gücünün kullanılması artık yerini robot gücüne bırakmaya başlamıştır. Sektörün özellikle insan gücünü aşan ağır metal saclar için robot gücü ihtiyacı Robot Yardımlı Abkant Makinesi tasarımının yapılmasına sebep vermiştir. Robot kullanımı ağır metal sacların yanı sıra seri üretimli ve üretim zamanının önemli olduğu daha küçük metal sacların bükümü için de mümkündür. Bükümü yapacak olan robot yada robotlar cnc kontrole sahip hidrolik yada elektrikli fark etmeksizin hemen hemen her abkant makinesine adapte edilebilirler. Robotun makine ile beraber haberleşerek çalışmasının iki farklı yolu vardır. Bunlardan biri robotun yapacağı hareketleri robotun el terminali üzerinden programlayarak yapmaktır fakat bu yöntem çok uzun zaman alan bir işlemdir. Diğer yöntem ise robotun hareketlerini bilgisayar ortamında otomatik oluşturan bir yazılım aracılığıyla yapmaktır, bu yöntem birkaç dakika içinde robot nc kodlarını oluşturmaktadır ve geriye sadece sahada büküm hassasiyetleri ile ilgili son iyileştirmeleri yapmak kalmaktadır. Bu proje ile de ikinci yöntem olan yazılım ile robot kontrol yöntemi kullanılmıştır.

Anahtar kelimeler: Robot abkant; Otomatik büküm; DBend

GİRİŞ

Metal sacların bükülerek form verilmesi günümüzün vazgeçilmez sac işleme yöntemlerinden biridir. Metal sac levhaların büküm işi için kullanılan makinelerden biri olan abkant makinesi endüstri gelişimlerine adapte olarak insan gücünü en aza indirecek şekilde şekillenmeye devam etmektedir.

Belli büküm sırasıyla tekrarlı yapılan abkant ile metal sac büküm işinde, işi yapan operatörün hata yapma olasılığı fazladır bu sebepledir ki son kullanıcılar büküm işinin otomatikleştirilmesi talebinde bulunmaktadırlar. Hata yapma olasılığının sıfıra indirilmesinin yanında her bükülen sacların kalitelerinin de bozulmadan aynı şekilde üretilmesi sağlanmış olmaktadır.

Yapılan çalışma ile büküm işlemi yapılacak saca göre 1,2 metreden 6 metre büküm kapasitesine sahip abkant makinelerin ve 7 kg'dan 180 kg'a taşıma kapasiteli robotların beraber otomatik olarak çalışma imkânı vardır.

İlk müşteri talebi ile beraber 2 metre 60 ton abkant makine ve 50 kg taşıma kapasiteli robot simülasyonu yapılmıştır.

İlk adımda robot, bükümü yapılacak sacın ağırlığına göre seçilir ve sacın vakum ile tutulacağı bir gripper tasarlanır. Simülasyon ortamında ilk adımda seçilen robot ve tasarlanan gripper erişim ve hareket kabiliyeti yönünden test edilir eğer yeterli değil ise ikinci adım olarak bir üst taşıma kapasiteli robot seçimi yada yeni gripper tasarımı yapılır

BULGULAR

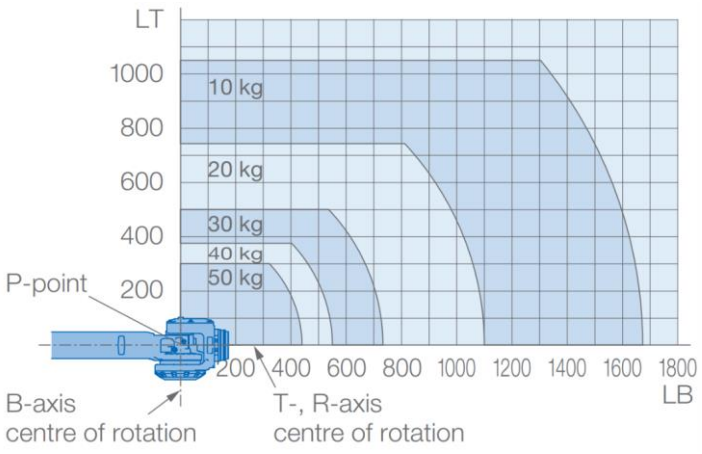
Öncelikli olarak üretimi yapılmak istenen ürünün son hali müşteriden temin edilir ve buna göre kullanılması gereken kalıplar ve abkant makinesi standart uygulamada olduğu gibi belirlenir.

Üretimi yapılacak metal sac ürünün bilgisayar ortamında hacmi hesaplatılır ve metal sac yoğunluğu ile çarpılarak ürünün ağırlığı bulunur.

$$W = \rho.V$$

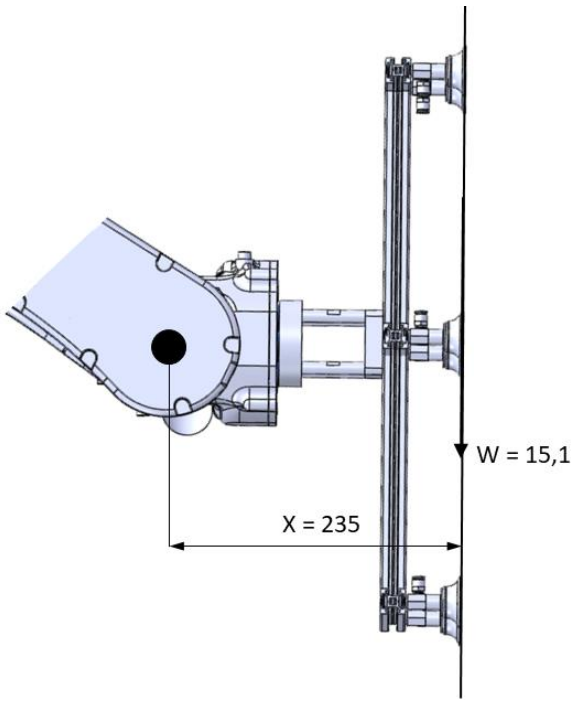
$$W = 7{,}8.1941 = 15140\ g = 15{,}1\ kg$$

Emniyetler göz önünde bulundurularak hesaplanan metal sac ağırlığının en az 2 katı taşıma kapasitesi olacak robot seçilir. Robotun taşıma kapasitesi hesabı için; [1]



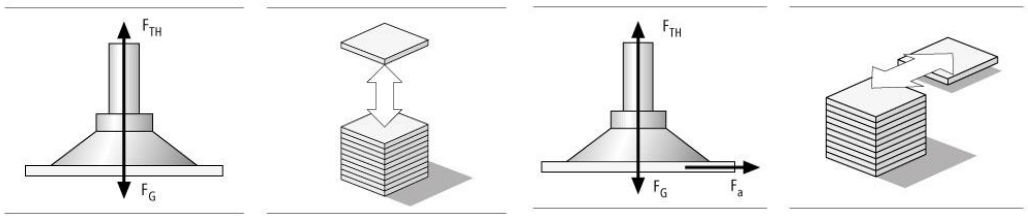
Grafik 1. Yaskawa GP50 taşıma kapasitesi

Robot ile taşınabilecek metal sac ağırlığı, o sacın robotun B ekseni dönme merkezine olan uzaklığına bağlı olarak değişmektedir. Yapılan uygulamada tasarlanan vakum gripper ile beraber sac Resim-1 de görüldüğü gibi B ekseni merkezine 235 mm uzaklıktadır. Bu durumda seçtiğimiz 50 kg taşıma kapasiteli Yaskawa robotun Grafik-1 de gösterilen taşıma kapasitesi tablosuna uygun olduğu görülmektedir.



Resim 1. Sacın B eksenine uzaklığı

Vakum pedlerinin kuvvet hesabı yapılırken hem dikey hem de yatay yöndeki hareket için iki durumda göz önünde bulundurulmalıdır. [2]



Resim 2. Dikey ve yatay yönde vakum pedleri

Dikey yöndeki ivmeli harekete karşılık kuvvet hesabı;

$$Fv = m.(g+a).S$$

$$Fv = 15,1.(9,81+5).2$$

$$Fv = 447\ N$$

Yatay yöndeki ivmeli harekete karşılık kuvvet hesabı;

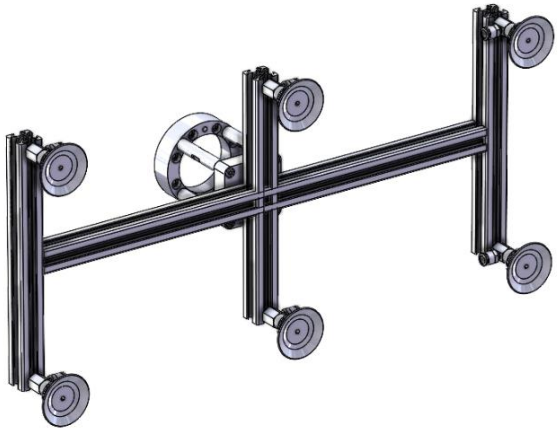
$$Fh = m.(g+a/\mu).S$$

$$Fh = 15,1.(9,81+5/0,5).2$$

$$Fh = 598\ N$$

Bu hesaplamalar yapılırken güvenlik faktörü (S) 2, vakum pedi ve sac yüzeyleri arasındaki sürtünme kat sayısı (μ) 0,5 kabul edilmiştir.

Çıkan kuvvet sonuçları tasarıma bağlı olarak kullanılacak vakum pedi sayısına bölünerek tek bir pedin 6 bar'lık hava basıncını kullanarak üretebildiği kuvvet hesaplanır.



Resim 3. Gripper görüntüsü

Tasarlanan gripper üzerinde 6 adet vakum pedi kullanılmıştır. Bu durumda;

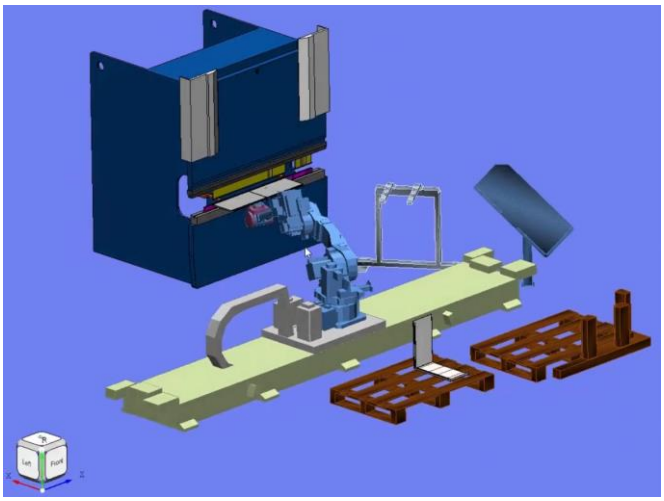
$$Fh>Fv \text{ dolayısıyla,}$$

$$Fp = Fh/6$$

$$Fp = 598/6$$

$$Fp = 99,7\ N$$

Yaklaşık 100 N kuvvet sağlayabilecek uygun vakum pedleri seçilmiştir.



Resim 4. DBend simülasyon görüntüsü

Abkant makinesi, kalıplar, robot seçimi, gripper tasarımı ve hesapları tamamlandıktan sonra bilgisayar ortamında robot hareketleri sacın büküm sırası takip edilerek simüle edilir. Simulasyon için firmamızın geliştirilmesini sağladığı DBend yazılımı kullanılır.

Bu yazılıma projenin başında belirlenen tüm fiziksel modeller ve hesaplar işlenerek gerçeğe en yakın hareketle kontrol edilir.

Robot hareketleri için nc kodları tamamen yazılım tarafından otomatik oluşturulmaktadır. Hareketlerdeki herhangi bir uygunsuzluk durumda yazılım uyarı vermekte ve gerekli çözümün sağlanmasını bizden beklemektedir. Bu çözümler robotun altına bir kayar eksen ekleme, robotun abkant makinesine göre konumunun değiştirilmesi, gripper tasarımı değişikliği yapılması vb. son çözüm olarak ise robot tipi değişikliğine kadar çözüm gidebilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Yaskawa, Allowable wrist load, www.yaskawa.co.uk/products/robots/handling-assembly/productdetail/product/gp50_701

[2] Schmalz, Suction cup’s vertical and horizontal forces, www.schmalz.com/en/vacuum-knowledge/the-vacuum-system-and-its-components/system-design-calculation-example/theoretical-holding-force-of-a-suction-cup/

AKILLI KONUMLAMA ÖZELLİĞİNE SAHİP HİDROLIK SIKIŞTIRMALI ÜST KALIP TUTUCU

Gökan Yılmaz[1], Kenan Seymen[2], Öner Yıldırım[3] Oktay Çelenk[4] ve İbrahim İnan[5]
Gökan Yılmaz[1], Durmazlar Makine A.Ş., Bursa

ABSTRACT

In the rapidly developing industrial era, reducing setup time and rapid production play important role in terms of cost efficiency. Considering the limited manpower and speed, there has been a need to make autonomous solutions that can accelerate the process on equipment for this acceleration. For this reason, this project was carried out in order to make the press brake punch clamping processes autonomous, which is one of the most time-consuming step in sheet metal bending operation and to eliminate human-induced errors in the process. Tool clamping process is normally done for “Manual tool holders”, tight the bolts on the tool holders by man-powering. This equipment works thanks to inflating the elastic tube with the help of hydraulic pressure and compressing punches. Since this process is done with human effort and speed, it causes loss of time and production problems. In addition, repetitive lifting and lowering operations can lead to occupational accidents and occupational diseases. Our newly designed upper die holder automates this clamping process. The tool holder works on the basis of inflating the elastic tube inside with the help of hydraulic pressure and compressing upper punches. Thanks to the RGB LED’s on the tool holder, it not only determines the bending order by warning the operator, but also warns the operator with LED’s that change color against possible wrong face bending process.

Keywords: Press brake upper tool holder; hydraulic; industry 4.0, productivity tools, work safety

ÖZET

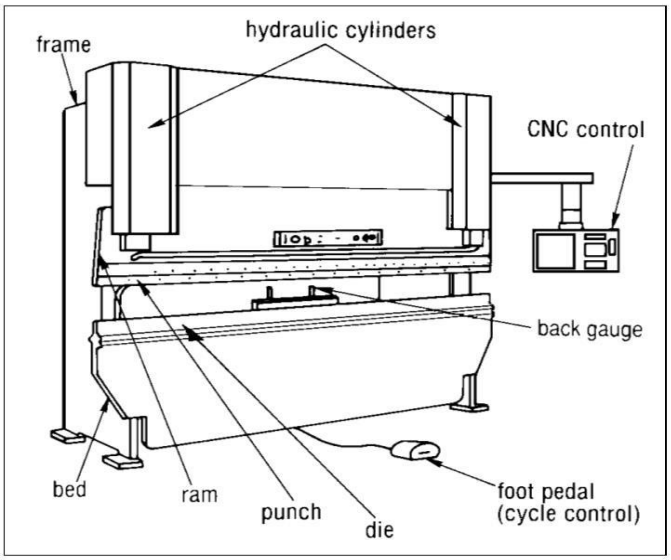
Hızla gelişen endüstri çağında, çevrim sürelerinin düşürülmesi ve hızlı üretim yapılması maliyet verimliliği açısından önemli rol oynamaktadır. İnsan gücünün ve hızının sınırlı olduğu göz önüne alındığında bu hızlanma için ekipmanlar üzerinde prosesi hızlandırabilecek otonom çözümler yapma gereksinimi hasıl olmuştur. Bu yüzden sac metal bükme operasyonunda en fazla zaman kaybedilen adımlardan biri olan abkant kalıp sıkma işlemlerini otonom hale getirmek ve proses içerisinde insan kaynaklı hataları elimine etmek amacıyla bu proje gerçekleştirilmiştir. Kalıp sıkma işlemi normalde manuel (elle çalışan) üst kalıp tutucular için, kalıp tutucuların üzerinde bulunan cıvataların insan gücüyle sıkılmasıyla yapılır. Bu işlem insan emeği ve hızıyla yapıldığı için zaman kaybına ve üretim problemlerinin çıkmasına sebep olmaktadır. Bununla birlikte tekrar eden kaldırma ve indirme işlemleri iş kazalarına ve meslek hastalıklarına yol açabilmektedir. Yeni tasarladığımız üst kalıp tutucu bu sıkma işlemini otomatik hale getirmektedir. Kalıp tutucu içerisinde bulunan elastik borunun hidrolik basınç yardımıyla, şişirilmesi ve kalıpların sıkıştırılması esasına

dayanarak çalışır. Bununla birlikle kalıp tutucu üzerinde bulunan RGB'ler sayesinde operatörü uyararak hem büküm sırasını belirler hem de olası büküm hatalarına karşı renk değiştiren ledler sayesinde operatörü uyarır.

Anahtar kelimeler: abkant kalıp tutucu; hidrolik; akıllı; endüstri 4.0; verimlilik araçları, iş güvenliği

GİRİŞ

Sac metal büküm işlemlerini gerçekleştiren abkant presler endüstride yaygın olarak kullanılmaktadır. [1] Ülkemiz abkant pres üretiminde dünya piyasalarında oldukça önemli bir konumdadır. Abkant (sac büküm) makinaları; hidrolik veya hareketli mekanizmaların "Üst Tabla" adı verilen parçayı yer çekimi yönü doğrultusunda ve yer çekiminin aksi yönünde hareket ettirilmesiyle çalışır. Alt kalıp ve üst kalıp arasına konan sac parça hareket eden üst tablanın hareketi sırasında bahsedilen kalıpların arasında sıkışarak plastik deformasyona uğrar. Üst tabla sac üzerindeki pozisyonundan yer çekimi aksine hareket ederek, sac parçadan uzaklaşır ve süreç (proses) sonlanır.

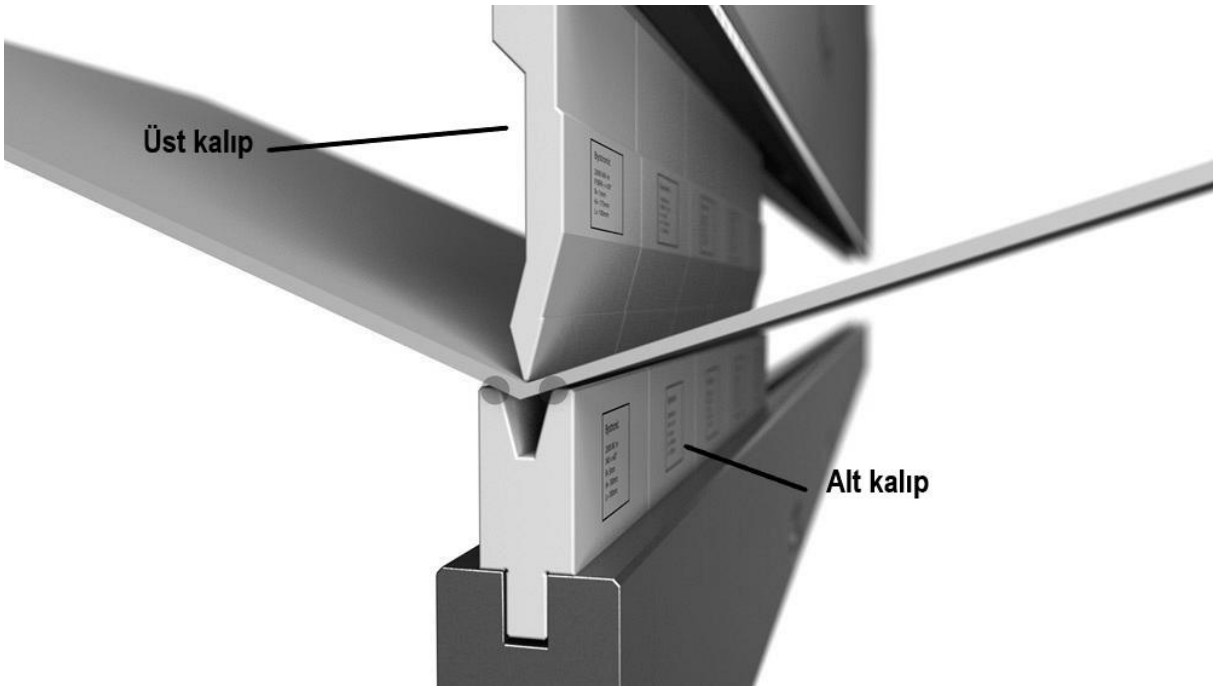


Şekil 1 Abkant Makinası

1. KALIPLAR VE KALIP TUTUCULAR

1.1 Kalıplar

Kalıplar abkant press makinalarında sac bükme işlemini gerçekleştiren ekipmanlardır. Abkant press makinalarında alt ve üst kalıp olarak 2 tipi vardır. Üst kalıp "Y" ekseninde hareket ederken alt kalıplar ise büküm ekseninin ayarlanması için "X" ekseni üzerinde (makine tipine bağlı olarak) hareket edebilirler.



Şekil 2 Alt ve Üst Kalıplar

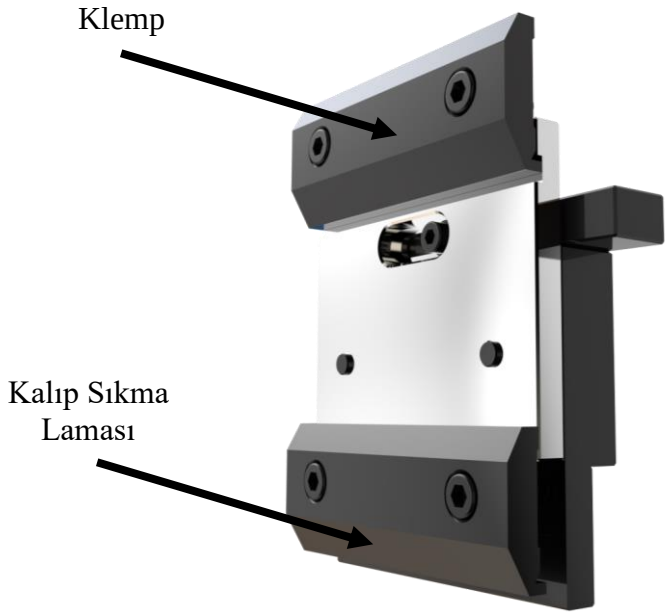
Kalıplar, bükme işlemini bükülecek olan sac parçayı alt ve üst kalıp arasına sıkıştırarak gerçekleştirir. Üst tabla nümerik kontrollü bilgisayarın belirlediği konuma kadar "Y" ekseni üzerinde hareket yaparak sac parçayı istenilen açıya getirir. Alt ve üst kalıplar sürekli bir sürtünme ve buna bağlı olarak aşınmaya maruz kaldığı için saca temas eden yüzeyler ısıl işlem ile sertleştirilir. Bununla birlikte kalıplar ağır yükler altında çalıştığında, tokluğu ve mukavemeti yüksek "42CrMO4" vb krom alaşımlı çeliklerden üretilirler. Bu yüksek mukavemet dayanımı gerekliliği sebebiyle, kalıplar içi dolu kütük malzemelerdir ve buna bağlı olarak ağırlıkları genellikle yüksektir.

1.2 Kalıp Tutucular

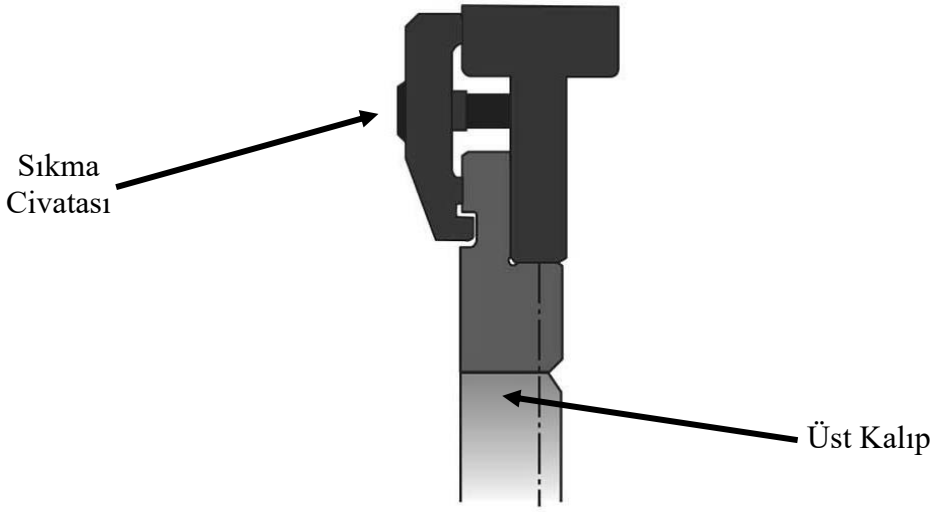
Kalıp tutucular, bükme işlemi yapan kalıpların makinaya bağlanmasını sağlayan ekipmanlardır. Makine üzerinde bağlı olabildikleri gibi, makine üzerinden tutucu üzerinde bulunan cıvatalar çıkarılarak sökülebilirler. Kalıplar, müşteri isteği, ülkede yaygın olan kalıp tipine göre veya işlevsel sebepler nedeniyle farklı tip ve bağlantı şekillerinde olabilirler.

Buna sebeple farklı kalıp tiplerine uyum sağlamak sebebiyle, farklı kalıp tutucular üretilir. Tutucuların farklı olma sebebi sadece müşterilerin (kalıp sahiplerinin) farklı tip kalıp kullanması değil, kalıp tutucuların kalıbı sıkıştırma yöntemlerinden de kaynaklanabilir. Ülkemizde yaygın olarak kullanılan üst kalıp tutucu tipi (EURO üst kalıp tutucu) olarak tabir edilen üst kalıp tutucu tipidir.

Bu kalıp tutucu, klemp üzerindeki iki cıvata vasıtasıyla üst tablaya bağlanırken, kalıp sıkma laması üzerinde bulunan civatalar vasıtasıyla da üst kalıbı sıkıştırarak tutucu görevini yerine getirir.



Şekil 3 Euro tipi üst kalıp tutucu



Şekil 4 Euro tutucu yandan görünüş

Sac metal parçanın, kalınlığına ve bükülmek istenen geometrinin yapısına göre bu kalıpların değiştirilmesi zorunludur. Karmaşık yapıya sahip parçalar üretmek konvansiyonel kalıp tutucularla mümkün değildir çünkü bu tutuculara bağlanan kalıpların değiştirilmesi gerçekten çok uzun sürer. Bu sebeple kalıp tutucuya bağlı kalıpların prosesin ekonomik sürdürülebilirliği için kalıpların çok hızlı değiştirilmesi gerekir. Bazı firmalar bu tip sistemler

geliştirmişlerdir fakat bu sistemeler yaygın olarak kullanılmamaktadır. Alternatif değiştirilebilir kalıplar ve kalıp tutucular konsept ve AR-GE makinalarında kullanılmaktadır [2].

Çeşitliliği artan sac büküm parçaları, müşteri beklentileri ve kabiliyetleri artan CNC abkant makinaları nedeniyle bir parçanın imal edilmesi için çok farklı tiplerde bükme kalıplarının kullanılması gereksinimi ihtiyacı duyulmuştur. Bu kalıpların kullanılabilmesi için büküm süreci sırasında kalıpların tutuculardan sökülerek yeniden bağlanması gereklidir. Fason imalat yapan sektörler de göz önüne alındığında, piyasaya iş yapan firmaların müşterilerin sac büküm yöntemiyle imal ettirmek istedikleri parçalar çok çeşitli ve farklı kalınlıkta olabilir. Bununla birlikte müşteri firmalarının üretim adetleri fazla olmadığı zaman, kalıp değişimi ve ayar için geçen zaman parçayı imal etmekten daha çok zaman kaybına ve maliyetlere yol açabilir.

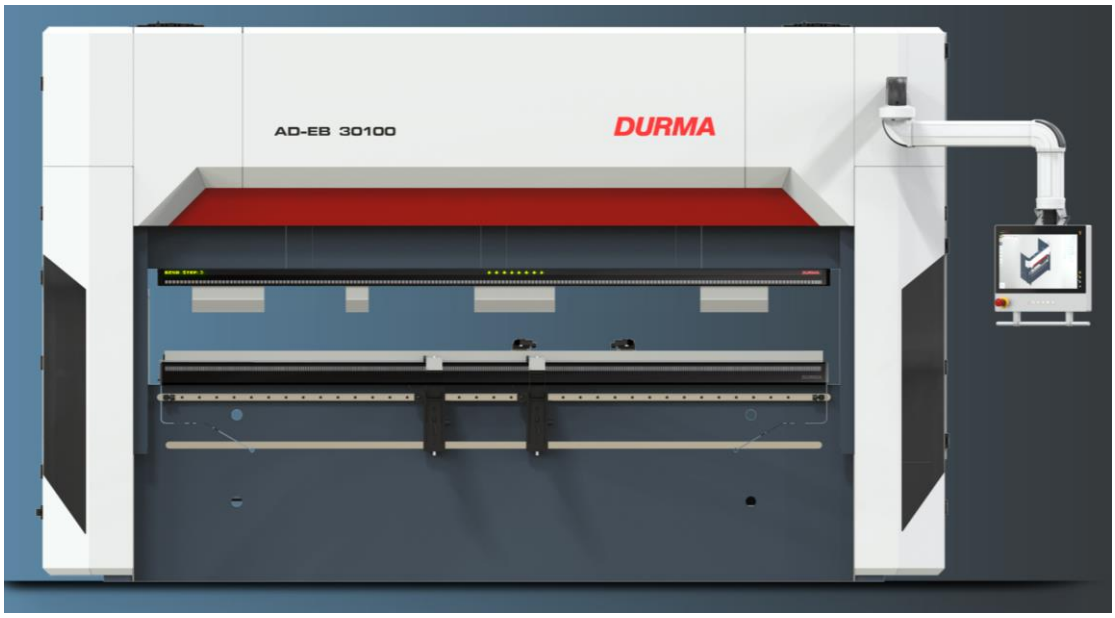
Bahsedilen kalıp değişim işlemi için tam boyda ortalama 30 adet cıvatanın gevşetilmesi ve tekrar sıkılması anlamına gelmektedir. Bu işlem rekabet şartlarının günden güne arttığı imalat sektöründe büyük zaman kayıpları anlamına gelmektedir. Bu cıvataların sürekli sıkılıp gevşetilmesi aynı zamanda makineyi kullanan operatör üzerinde mesleki hastalıklara sebebiyet verebilmektedir. Bununla birlikte önceki paragraflarda da bahsedildiği üzere kalıplar yüksek tonajlar ile çalışan ekipmanlardır, kalıp tutucu üzerinde bulunan ve iyi sıkılmayan kalıp sıkıştırma laması cıvataları nedeniyle de hatalı üretim çıktıları ve yaralanmalı iş kazaları doğabilmektedir.

Bu sebeple insan emeğine ve dikkatine dayalı kalıp sıkma işlemini elimine etme gereği hem prosesisin hızlanmasını hem de güvenliğini sağlamak amacıyla ön görülmüştür.

2. YENİ NESİL DURMA ÜST KALIP TUTUCU

2.1 Otomatik Hidrolik Sıkma Sistemi

Durma akıllı konumlama özellikli hidrolik üst kalıp tutucu da ise sıkıştırma işlemi insan emeği olmaksızın, elektrik motorundan sağlanan gücün pompa vasıtasıyla hidrolik basınç oluşturması ve depo içerisindeki hidrolik akışkanın elastik hortumun içine dolmasıyla gerçekleşir. Oluşan basınç ile şişen hortuma komşu olan kilitleme parçaları, hareket ederek üst kalıpları sıkıştırır.



Şekil 5 Abkant ile birlikte yeni tip üst kalıp tutucu

2.2 Hidrolik Üst Kalıp Tutucu Sisteminin Çalışma Prensibi

2.2.1 Hidrolik Güç Ünitesi

Hidrolik güç ünitesi mekanik enerjiyi, hidrolik enerjiye çeviren bir hidrolik devre elemanıdır. Basitçe, teorik olarak anlatacak olursak içinde hidrolik akışkan bulunan bir havuz, pompa, valfler, elektrik motoru ve elektrik sistem elemanlarından meydana gelir. Elektrik motoru dönme hareketi ile pompaya hareket verir pompa ise azalan-artan hacimler prensibiyle havuz (depo) içerisindeki akışkanı emmeye (vakumlamaya) – pompa sonrasındaki hidrolik devre içerisine basmaya zorlar bu şekilde sistem içerisinde bir hidrolik basınç oluşur.

Hidrolik güç üniteleri, depo, motor, pompa, valfler ve gerekli diğer ekipmanları montajlı şekilde üzerinde hazır olarak bulundurduğundan kompakt ve kullanışlı elemanlardır.



Şekil 6 Hidrolik güç ünitesi

2.2.2 Esnek Hidrolik Hortum

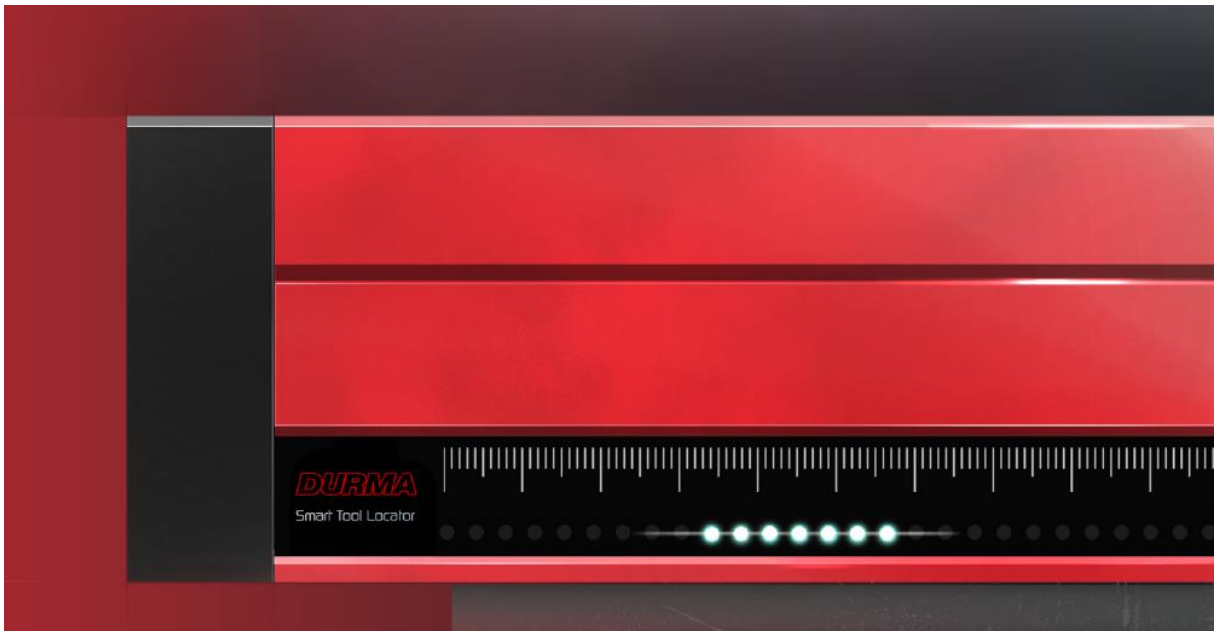
Hidrolik güç ünitesinden, basınçlandırılarak çıkan hidrolik akışkan esnek hidrolik hortum içerisine dolar. Esnek hidrolik hortumlar, hidrolik akışkan olarak kullanılan sıvıya karşı inert malzemeden üretilen hortumlardır. İçerisindeki hidrolik akışkanın basıncına göre şekilde değiştirebilir.



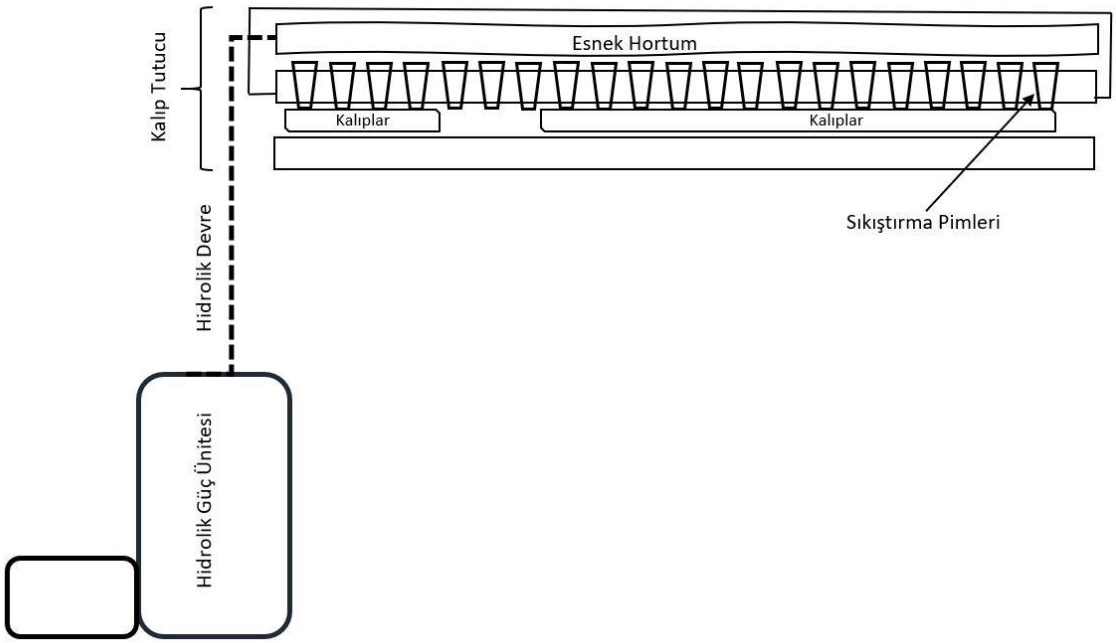
Şekil 7 Esnek hidrolik hortum

2.2.3 Hidrolik Üst Kalıp Tutucu

Hidrolik Sıkma hortumunu, sıkıştırma pimlerini ve diğer ekipmanları içinde bulunduran montaj grubudur. Kalıp tutma işlevini yerine getiren kısımdır. Bu ekipman civatalar vasıtası ile hidrolik abkant pressin üst tablasına montajlanır.



Şekil 8 Durma akıllı konumlama özellikli kalıp tutucu



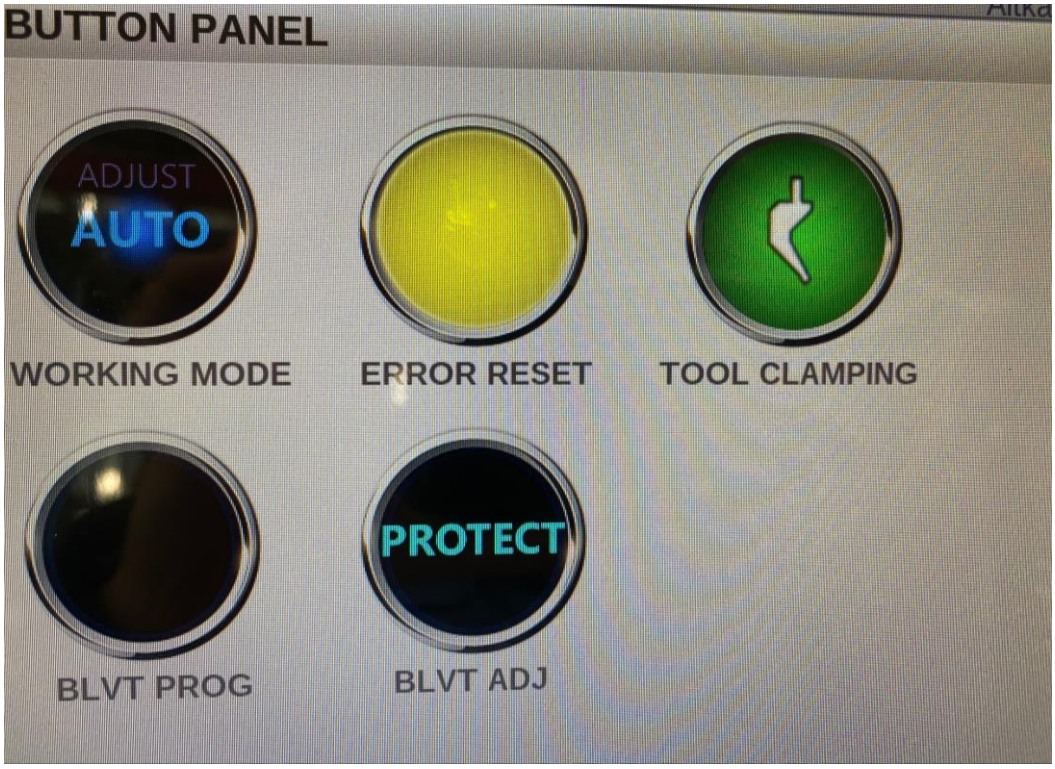
Şekil 9 Hidrolik sıkıştırma sistemi çalışma diyagramı

2.3 Hidrolik Üst Kalıp Tutucu Sisteminin Kontrolü

CNC abkant presslerin üzerinde sac büküm parametrelerini ayarlamak ve makinayı kontrol etmek için kontrol panelleri bulunur. Bu ekran üzerinde hidrolik abkant pressin birçok ayarı

yapılarak operatör tarafından makina kontrol edilir. Bu kontrol paneli üzerine sanal veya mekanik olarak kontrol edilebilecek bir buton koyulduğunda, operatörün hızlı bir şekilde hidrolik güç ünitesine sinyal göndererek, hidrolik üst kalıp sıkma sistemini çalıştırması ve kalıpları sıkıştırması mümkün olur.

Bununla birlikte CNC panel üzerinden kontrol edilen hidrolik abkant, kalıplar sıkıştırılmadan yani üst kalıp tutucu faal olmadan üst tablanın aşağıya doğru hareket etmesi ve tam olarak sıkıştırılmamış veya hiç sıkılmamış kalıpların bükme işlemine başlayarak iş kazalarına sebep olması ihtimalinin önüne geçilmiş olur.



Şekil 10 Hidrolik sıkma kontrol paneli

Yukarıdaki resimde görüleceği üzere kontrol paneli üzerinde sanal bir buton (Yeşil renkli) oluşturularak hidrolik sıkma özelliğinin panel üzerinden kontrol edilmesi sağlanmıştır.

Bu makinalaşma sayesinde uzun süreler alan, mesleki hastalıklara davetiye çıkaran ve maliyet verimsizliği yaratan kalıp sıkma işlemi saniyeler içerisinde tamamlanmış olur.

2.4 Akıllın Konumlandırma Sistemi

Yeni nesil kalıp tutucu üzerinde CNC kontrol mekanizması iletişim halinde bulunan akıllı kartlar mevcuttur. Bu kartlar hem takılan kalıpları "NFC" yardımıyla tanıyabilir ve daha önceden ayarlanmış konumlara yeniden kalıpların takılmasını sağlamak için led göstergeler ile konumlandırma yapabilir.

Durma yeni nesil tutucunun içerisinde bulunan elektronik kart, kalıp tutucu üzerinde kalıp sıkma kapasitesi boyunca devam eder.

Akıllı konumlama özellikli üst kalıp tutucularımızda var olan RGB ler sayesinde büküm için kullanılacak kalıpların nereye konumlanacağı operatöre kalıp tutucu üzerinde bulunan bildirim ışıkları ile gösterilir.

Böylece operatörün büküm uzunluğunu sürekli olarak parça üzerinden ölçü aleti ile kontrol edip, buna uygun kalıbı tayin etmesi gibi bir süreç de elenmiş olur. Makinayı kullanan operatör değişse dahi kontrol paneli içerisindeki depolama biriminde saklanan bilgiler ile aynı büküm adımları ile istenilen kaliteli üretim sonuçları elde edilmeye devam eder.



Şekil 11 Parçalı kalıpların ışıklandırma ile yerleştirilmesi

Yerlerine doğru bir şekilde takılıp, hidrolik sıkma ile güvenle sıkılan kalıplar artık çalışmaya hazırdır. Kalıpların konumlanmasına yardımcı olan LED ışıklar bu sefer büküm adımlarını operatöre bildirir. Büküm yapılacak kalıp üzerindeki led ışıklar yanıp sönerek büküm adımının sırasını gösterir.

Abkant presslerde ara veya son mamulün üretilmesi sırasında karşılaşılan en büyük hataların başında, büküm adımının ters yüzeyden yapılması nedeniyle olmaktadır. Bu üretim hatası bazen teknik resmin tam olarak anlaşılmamışından veya operatör dalgınlığı sebebiyle ortaya çıkmaktadır. Bu problem yarı mamul haline gelmiş olan parçanın tamamen ıskartaya çıkmasına sebep olmaktadır. Iskartaya çıkan bu parça hem daha önce yapılmış proseslerin kaybedilmesine hem de parçanın ham malzemesinin hurdaya çıkmasına sebep olmaktadır.

Durmazlar makine patentli bu teknoloji sayesinde büküm adımlarını takip ederken, eğer parçada yüz değişikliği var ise, kalıp üzerinde RGB ledler farklı renkteki ışıkta gözükmektedir. Bu şekilde uyarılan operatör parçanın büküm yüzünü değiştirerek prosesin olağan şekilde akmasını sağlar.

Hurdaya atılan parçalar maliyetlerinin yanı sıra firma içerisinde zaman ve motivasyon kayıplarına da yol açar. Durmazlar akıllı konumlamaya sahip üst kalıp tutucu sistemi firmaların verimliliğini arttırmak için tasarlanmıştır. Bu yeni geliştirilmiş üst kalıp tutucu kalıpların hızlı sıkılması işlemini, adımların standart olarak yürütülebilmesi için yanıp sönen LED uyarısı ile büküm adımlarının sırasını ve patentli teknolojisi endüstri 4.0 teknolojilerini kullanarak makine makine arası iletişimi destekler.

3. ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Hidrolik kalıp sıkma mekanizmasında hidrolik basınç elde etmek için elektrik motoru kullanılmaktadır.

$$P = (p \times Q) / 540$$

P=Motor gücü (kW) cinsinden
P=Pompa basıncı (bar cinsinden)
Q=Pompa debisi (litre/dk)

Motor gücününün hesaplanması için üstteki formül kullanılır. Bu formülden ihtiyaç olan güç kW cinsinden belirlenmiş olur. Çıkan güç tedarikçiden alınan motorun verimi ile çarpılarak tedarik edilecek olan motorun gücü belirlenir.

Hidrolik güç üniterlerinde, hidrolik akışkanın depo edildiği havuzun hacminin belirlenmesi için de bir hidrolik akü sarj hesabı yapılır. Burada aynı zamanda minimum ne kadar hidrolikm akışkana ihtiyaç duyulacağı da tespit edilir

$$V = \frac{V_w \times (p_2 / p_1)^{1/k}}{1 - (p_2/p_3)^{1/k}}$$

V= Havuz (Akünün hacmi)
P_1= Havuz ön dolum basıncı (Bar cinsinden)
P_2=Minimum çalışma basıncı (Kalıp tutucu sıkma işlemi yapmadığı sırada)
P_3=Maksimum çalışma basıncı (Kalıp tutucu sıkma işlemi yaptığı sırada)
k=sabit

Sistemde kullanılacak boruların çaplarını seçmek için ise

$$D = \sqrt{ ((Q \times 21,22) / v)}$$

Q : Debi (litre / dakika) cinsinden

V : Akışkan hızı (m/s)

D : Boru veya bağlantı elemanının iç çapı (mm) cinsinden

Emiş dönüş ve basınç hatlarındaki basınçların formülasyonları farklıdır.

Borudaki akışkan hızı için:

V(emiş) : 0,5 – 1,2 m/s

V(basınç) : 1,5 – 5,5 m/s

V(dönüş) : 1,5 – 4,5 m/s arasındaki değerlerden biri seçilebilir.

ÇIKTILAR

Gelişen imalat sanayi sektöründe rakiplerin önüne geçebilmek ve ihracat potansiyeli yüksek ürünler yapabilmek her zaman önemini korumaya devam edecektir. Proses zamanında yapılan iyileştirmeler direkt olarak girdi maliyetlerinin azalmasına bunun sonuncunda da satış fiyatlarının düşmesine sebep olacağından, fiyat avantajı sağlayacaktır. Bununla beraber çalışan güvenliğini ön plana koyan "DURMA" kalıp tutucular verimlilik arttırmak ve güvenli çalışmak için tasarlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] H. Ulaş AKOVA, Hakan ÇALIŞKAN, Tuna BALKAN, Bülent E. PLATİN, Suat DEMİRER, Abkant Pressler İçin Enerji Verimli Hidrolik Tahrik Sistemi ve Kontrolü, *TMMOB Makine Mühendisleri Odası Yayınları*. Uluslararası Katılımlı VII. Ulusal Hidrolik Pnömatik Kongresi 2014/İstanbul.

[2] J. R. Duflou, H. Vanhove, W. De Coninck, Adjustable Tooling System for Air Bending, Key Engineering Materials, vol. 549 (2013), pp. 270-276.

UZAY KAFES SİSTEMLERİN DEPREM DAVRANIŞLARININ DBYBHY-2007 VE TBDY-2018 YÖNETMELİKLERİNE GÖRE KARŞILAŞTIRILMASI

Fatma ÜLKER PEKER[1]
[1]Malatya Turgut Özal Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Malatya

ABSTRACT

The search for light, fast and economical solutions in construction technologies has led to the emergence of space truss systems. With space truss systems, it is ensured that large spans in structures are crossed with a column-free and light construction. Thus, the structures can be functionally more flexible and useful. At the same time, with the development of technology, changes can be made in the earthquake-resistant structure design rules. In this study, dynamic behaviors of space truss systems designed according to the principles of TBSC-2007 and TBSC-2018, the last two earthquake codes in Turkey, have been examined. Structural analyzes have been carried out using nonlinear analysis methods, which are widely used in recent years, to obtain safe and economical structures instead of linear analysis methods. Analysis results obtained from structural systems modeled using finite element method are compared for both codes.

Keywords: space truss system; nonlinear dynamic analysis; TBSC-2007; TBSC-2018.

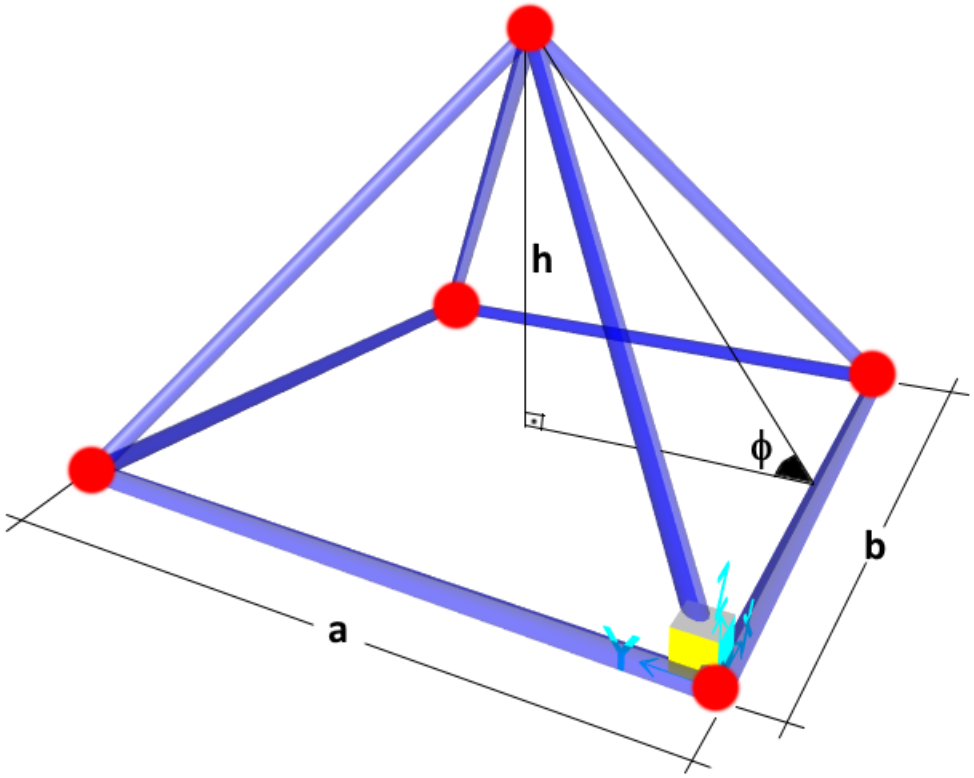
ÖZET

Yapı teknolojilerinde hafif, hızlı ve ekonomik çözümler arayışı uzay kafes sistemlerin doğmasına neden olmuştur. Uzay kafes sistemlerle, yapılarda büyük açıklıkların kolonsuz ve hafif bir konstrüksiyonla geçilmesi sağlanmakta, bu şekilde yapıların fonksiyonel olarak daha esnek ve kullanışlı olması mümkün olmaktadır. Aynı zamanda teknolojinin gelişimi ile birlikte depreme dayanıklı yapı tasarım kurallarında da değişiklikler yapılabilmektedir. Bu çalışma kapsamında Türkiye'deki son iki deprem yönetmeliği olan DBYBHY-2007 ve TBDY-2018 esaslarına göre tasarımı yapılan uzay kafes sistemlerin dinamik davranışları incelenmiştir. Yapısal analizler, son yıllarda, deprem etkisi altındaki yapıların sismik tasarımında doğrusal dinamik hesap yöntemi yerine, güvenli ve ekonomik yapılar elde etmek amacıyla yaygın olarak kullanılan doğrusal olmayan dinamik hesap yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak modellenen yapısal sistemlerden elde edilen analiz sonuçları her iki yönetmelik için karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Uzay kafes sistem, nonlineer dinamik analiz, DBYBHY-2007, TBDY-2018.

GİRİŞ

Uzay kafes sistemler eksenel basınç ve çekme kuvveti taşıyan çubukların üç boyutlu olarak düğüm noktalarında birleştirilmesiyle elde edilen hiperstatik yapı sistemlerdir (Şekil 1). Dünyada ve ülkemizde uzun yıllardan beri kullanılmakta olan bu sistemler, çok farklı fonksiyonları sağlayabilen, prefabrik özellikte modüler yapı sistemleridir. Uzay kafes sistemler son yıllarda endüstri yapıları, alışveriş merkezleri, okul binaları, hangarlar, yüzme havuzları, sergi sarayları gibi geniş açıklıkları bulunan hacimleri örtmek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Teknolojinin ilerlemesiyle birlikte bu sistemlerle çok büyük açıklıklar geçilebilmektedir. Uzay kafes sistemler yapı yüksekliği ve geçilen açıklığa bağlı olarak tek ve çift katmanlı olarak tasarlanırlar. Şekil 2'de UZAY FORM firması tarafından yapılan spor salonu gösterilmektedir. [1-5].



Şekil 1. Uzay kafes sistem



Şekil 2. Tek katmanlı uzay kafes spor salonu [5]

Ülkemizin deprem kuşağı üzerinde bulunmaktadır ve şimdiye kadar meydana gelen büyük depremler sonucunda yaşanan can kayıpları deprem yönetmeliklerini gerekli kılmıştır. 1999 yılında ülkemizde meydana gelen *17 Ağustos 1999* yıkıcı depremleri sonucunda, 2007 yılında DBYBHY-2007 yönetmeliği hazırlanmış ve yürürlüğe girmiştir. Bu yönetmelik 2019 yılına kadar yürürlükte kalmıştır. 2019 yılında TBDY-2018' in yürürlüğe girmesi ile deprem yönetmeliği güncellenmiştir. Son yönetmelikle birlikte deprem tehlike haritaları güncellenmiş ve en güncel deprem kaynak parametreleri, deprem katalogları ve yeni nesil matematiksel modeller dikkate alınarak çok daha fazla ve ayrıntılı veriyle hazırlanmıştır. Yeni haritada, bir önceki haritadan farklı olarak deprem bölgeleri yerine en büyük yer ivmesi değerleri gösterilmiş ve "deprem bölgesi" kavramı ortadan kaldırılmıştır [6-12].

Bu çalışmada tek katmanlı uzay kafes sistemlerin dinamik performansı incelenmiştir. Deprem performansının belirlenmesinde, DBYBHY-2007 ile TBDY-2018 yönetmeliklerine göre dinamik analizler ayrı ayrı yapılmıştır. Uzay kafes sistemin, SAP2000 paket programında doğrusal olmayan dinamik analiz yöntemlerinden zaman tanım alanında dinamik analiz yöntemi ile yapısal analizleri gerçekleştirilmiştir. Yapısal sistemlerden elde edilen analiz sonuçları her iki yönetmeliğe göre karşılaştırılmıştır.

DOĞRUSAL OLMAYAN DİNAMİK ANALİZ

Yapıları meydana getiren taşıyıcı sistem elemanları, kullanım ömrü boyunca yapıya etki eden düşey yükler altında genellikle doğrusal davranış göstermektedir. Deprem gibi ani ve büyük yüklemeler altında ise doğrusal davranış sınırları aşılmakta ve doğrusal olmayan davranış meydana gelmektedir. Deprem etkisinin göz önüne alınarak güvenli bir tasarım yapmak amacıyla, doğrusal olmayan davranışın da hesaplara katılması gereklidir [6, 13,14].

Yapıların deprem yükleri altında doğrusal olmayan davranışlarının belirlenmesinde birçok analiz yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Doğrusal olmayan dinamik analiz yöntemleri yapıların dinamik davranışının incelenmesinde gerçekçi yaklaşımlar sunar. Bu yöntemler başlıca, doğrusal olmayan artımsal itme analizi ve doğrusal olmayan zaman tanım alanında dinamik analiz yöntemleridir [13-15].

Doğrusal olmayan artımsal itme analiz yöntemi, yapıların dinamik yükler etkisi altında rijitlik ile dayanım değişiminin, yapı elemanlarındaki doğrusal olmayan davranış özelliklerinin dikkate alınarak hesaplandığı ve bu hesapların belirli performans değerleri için tanımlandığı sayısal inceleme yöntemidir [16]. Doğrusal olmayan zaman tanım alanında dinamik analiz yöntemi ise, önceden belirlenmiş bir yer hareketinin zaman tanım alanındaki ivme kaydı ile yapıda meydana gelen elastik ötesi davranışı elde etmek için kullanılan yöntemdir. Bu yöntemde her bir zaman artımıyla birlikte taşıyıcı sistemde meydana gelen iç kuvvetler, yer değiştirme ve şekil değiştirmeler ile bu büyüklükleri meydana getiren deprem isteminin en büyük değerleri belirlenir. Bu hesap yönteminde kullanılan ivme kayıtları, yapay yollarla üretilmiş, daha önceden kaydedilmiş veya benzeştirilmiş deprem yer hareketleri şeklinde belirlenebilir [6, 13, 16, 17].

Bu çalışmada tek katmanlı uzay kafes sistemlerin dinamik analizinde sismik davranışın belirlenmesinde en iyi yöntem olarak kabul edilen ve pratikte yaygın bir şekilde uygulanan zaman tanım alanında doğrusal olmayan hesap yöntemi tercih edilmiş olup, yapısal analizlerde 24 Ocak 2020 Elazığ deprem ivme kayıtları kullanılmıştır. Çalışmada Adıyaman Gölbaşı ilçesinde enlemi 37.791538° ve boylamı 37.64706° değerlerine göre DBYBHY-2007 ve TBDY-2018 kriterleri esas alınarak tasarlanan tek katmanlı uzay kafes sistemin analizi SAP2000 programında ayrı ayrı yapılmıştır. Her iki yönetmeliğe göre tasarlanan yapının analiz sonuçları karşılaştırılmıştır [7, 18].

YAPI TASARIM ÖZELLİKLERİ VE MODELLEME

Yönetmelik ve kombinasyonlar

Çalışma kapsamında incelenen tek katmanlı uzay kafes sistemlerin yükleme ve analizi, ÇYTHYE-2016, TS498, Deprem Bölgelerinde Yapılacak Binalar Hakkında Yönetmelik (DBYBHY-2007) ve Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği (TBDY-2018) standartlarına göre yapılmıştır. Kombinasyonlar ise ÇYTHYE-2016, DBYBHY 2007 ve TBDY 2018' de belirtilen kombinasyonlar dikkate alınarak kurulmuştur. ÇYTHYE-2016'e göre yükleme kombinasyonları alınırken, deprem etkilerini de içeren, *Yük ve Dayanım Katsayılarına göre Tasarım (YDKT)* ilkelerine uygun kombinasyonlar kullanılmıştır. Bu kombinasyonlar Denklem (1) ve (2)'de belirtilmiştir [19, 20].

$$1.2G + Q + 0.2S + E_d{}^{(H)} + 0.3E_d{}^{(Z)} \quad (1)$$

$$0.9G + H + E_d{}^{(H)} + 0.3E_d{}^{(Z)} \quad (2)$$

Burada, G sabit yük etkisini, Q hareketli yük etkisini, S kar yükü etkisini, H yatay zemin etkisini, $E_d{}^{(H)}$ doğrultu birleştirmesi uygulanmış tasarıma esas yatay deprem etkisini, $E_d{}^{(Z)}$ ise (Z) doğrultusunda deprem etkisi altında tasarıma esas deprem etkisini ifade etmektedir. DBYBHY-2007 kombinasyonları Denklem (3) ve (4)'de belirtilmiştir [8].

$$E = \pm E_x \pm 0.30E_y \quad (3)$$

$$E = \pm 0.30E_x \pm E_y \quad (4)$$

Burada, E deprem yükü, E_x x yönünde deprem yükü, E_y ise y yönünde deprem yükünü ifade etmektedir. TBDY-2018 kombinasyonları Denklem (5), (6) ve (7)'de belirtilmiştir [6].

$$E_d^{(H)} = \pm E_d^{(X)} \pm 0.3E_d^{(Y)} \quad (5)$$

$$E_d^{(H)} = \pm 0.3E_d^{(X)} \pm E_d^{(Y)} \quad (6)$$

$$E_d^{(Z)} \approx (2/3)S_{DS}G \quad (7)$$

Burada, $E_d^{(X)}$ ve $E_d^{(Y)}$ herhangi bir kesitte birbirine dik (x) ve (y) doğrultularındaki depremlerin etkisi altında ayrı ayrı hesaplanan deprem etkilerini, S_{DS} kısa periyot tasarım spektral ivme katsayısını ve G sabit yük etkisini ifade etmektedir.

Yapıya etkiyen yükler

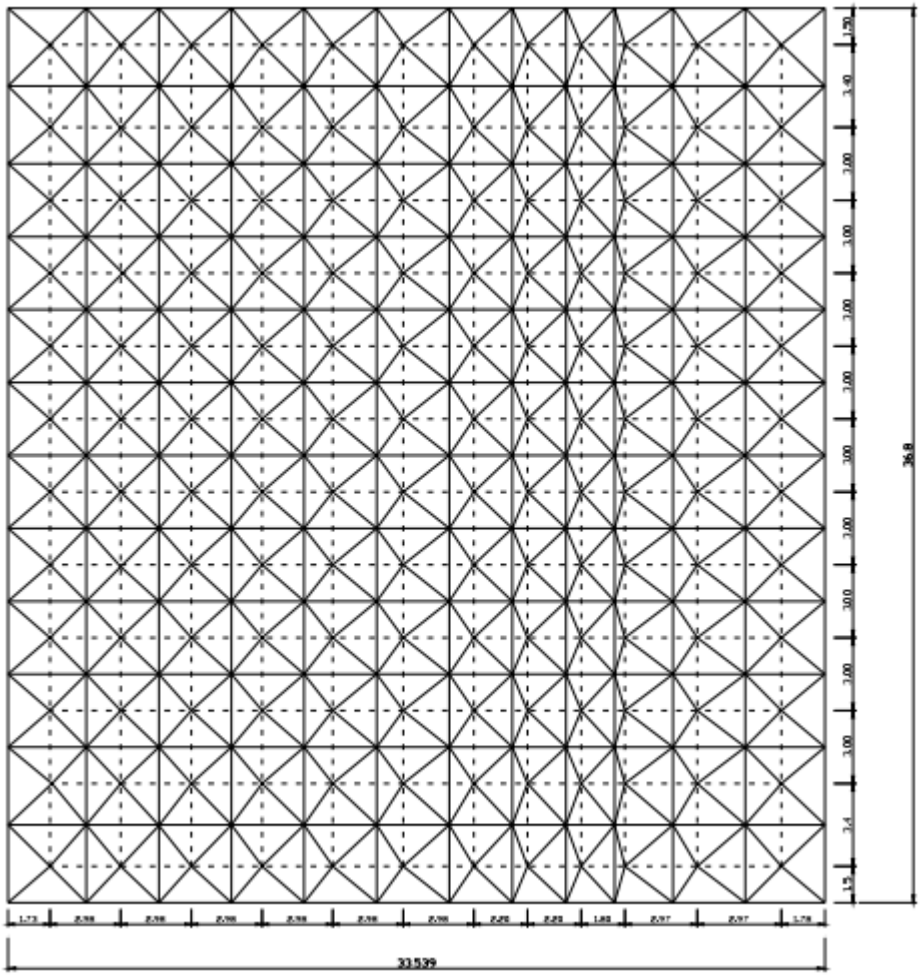
Yapıya etkiyen yükler hesapların yapıldığı SAP2000 programı tarafından üst başlık düğüm noktalarına her düğümün alan payına göre yayılı yükten tekil yüke çevrilerek etki ettirilmektedir. Yapısal sistemde hesaplanan ve aşağıda belirtilen yükler kullanılmıştır [6, 8, 15, 21,22].

- Sabit yükler, uzay kafes sistemin taşıyıcı ve yardımcı elemanlarının zati ağırlıkları olup bu yük değeri 0.177 kN/m^2 olarak alınmıştır.
- Aşık+kaplama yükü, aşık ve çatı kaplaması zati yükleri olup uzay sistemin çatı ile temas halinde olduğu düğüm noktalarından olarak etki ettirilmiştir. Bu yük değeri 0.188 kN/m^2 olarak alınmıştır.
- Tesisat yükü, uzay kafes sistem üzerinde mimari açıdan kullanıma hizmet eden aydınlatma, havalandırma kanalları ve tesisatların sistemde oluşturduğu yükler olup 0.15 kN/m^2 olarak alınmıştır.
- Kar yükü, tasarımı yapılan uzay kafes sistemin Adıyaman Gölbaşı İlçesine göre TS 498'de belirtilen yük değerleri alınmış ve yapının çatı eğimine göre her düğüm noktası için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Kar yükü değeri 1.35 kN/m^2 olarak alınmıştır.
- Rüzgâr yükü, yapının mimarisine, yüksekliğine bağlı hızına, doğrultusuna ve çatının eğimine bağlı olarak TS 498'e göre 0.8 kN/m^2 olarak alınmıştır
- Sıcaklık etkisi, yapının tasarlandığı inşa edildiği sıcaklık farkı dikkate alınarak etki ettirilmiş olup $\Delta T = \pm 20\ ^0C$ olarak alınmıştır.
- Deprem yükü, yapının deprem yükü hesaplanırken Deprem Bölgelerinde Yapılacak Binalar Hakkında Yönetmelik (DBYBHY-2007) ve Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği'nden (TBDY-2018) yararlanılarak deprem parametreleri belirlenmiş ve doğrusal olmayan zaman tanım alanında hesap yöntemi ile sistem analiz edilmiştir.

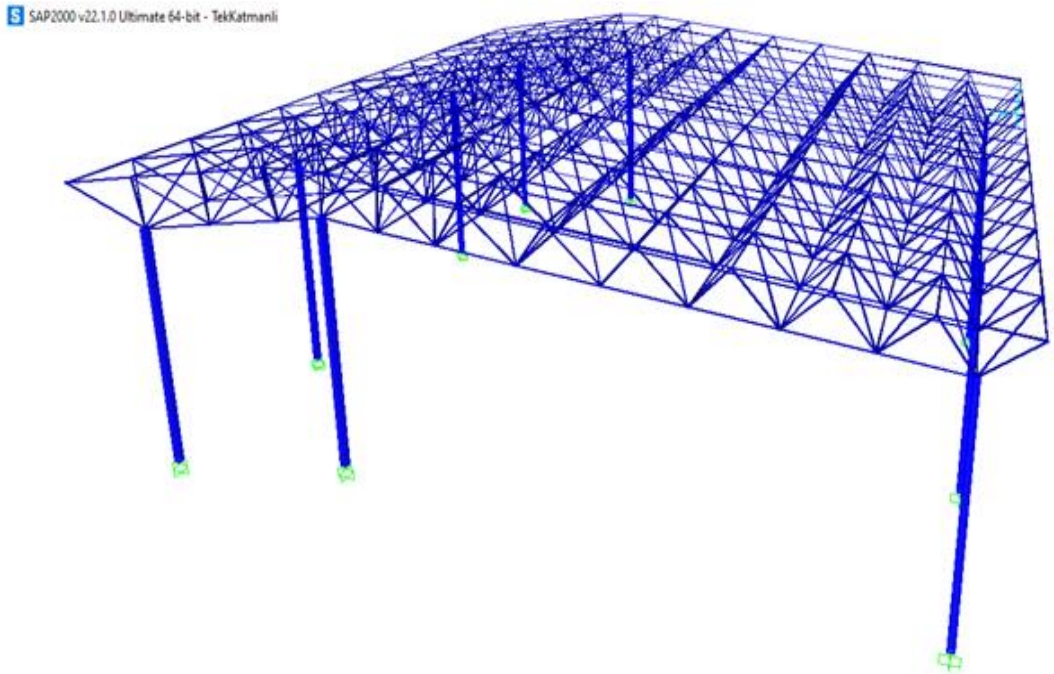
Modelleme

Şekil 3'te taşıyıcı sistemi gösterilen yapı, temele ankastre oturtulan çelik kolonlar ve bu kolonlar tarafından desteklenen uzay kafes sistemden oluşmaktadır. Yapı alanı yaklaşık olarak 33.5 x 36.8 = 1233 m^2'dir. Bu çalışmada göz önüne alınan uzay kafes sistem, paralel ve diyagonal çubuklarla birbirine bağlanan üst ve alt katmanları oluşturan iki düzlemsel çubuk ağından oluşmaktadır. Şekil 3'te gösterildiği gibi, kesikli çizgiler alt katman düzlemindeki elemanları, düz çizgiler üst katman düzlemindeki elemanları göstermektedir. Uzay kafes sistemde TUBO-D76.1X3.2 tipinde boru elemanlar kullanılmıştır. Yapıda

TUBO240X240X30 kutu tipinde 10 adet çelik kolon tasarlanmış olup, 9 m uzunluğunda teşkil edilen kolonlar zeminin etkisini göz ardı etmek amacıyla temel seviyesinde ankastre mesnetler ile modellenmiştir. Yapıda akma dayanımı $F_y = 235\ N/mm^2$, elastisite modülü $E_s = 210000\ N/mm^2$ olan S235 çeliği kullanılmıştır. Yukarıda tasarım özellikleri ayrıntılı olarak verilen uzay kafes sistemin, SAP2000 programında oluşturulan yapı modeli Şekil 4'te gösterilmektedir.

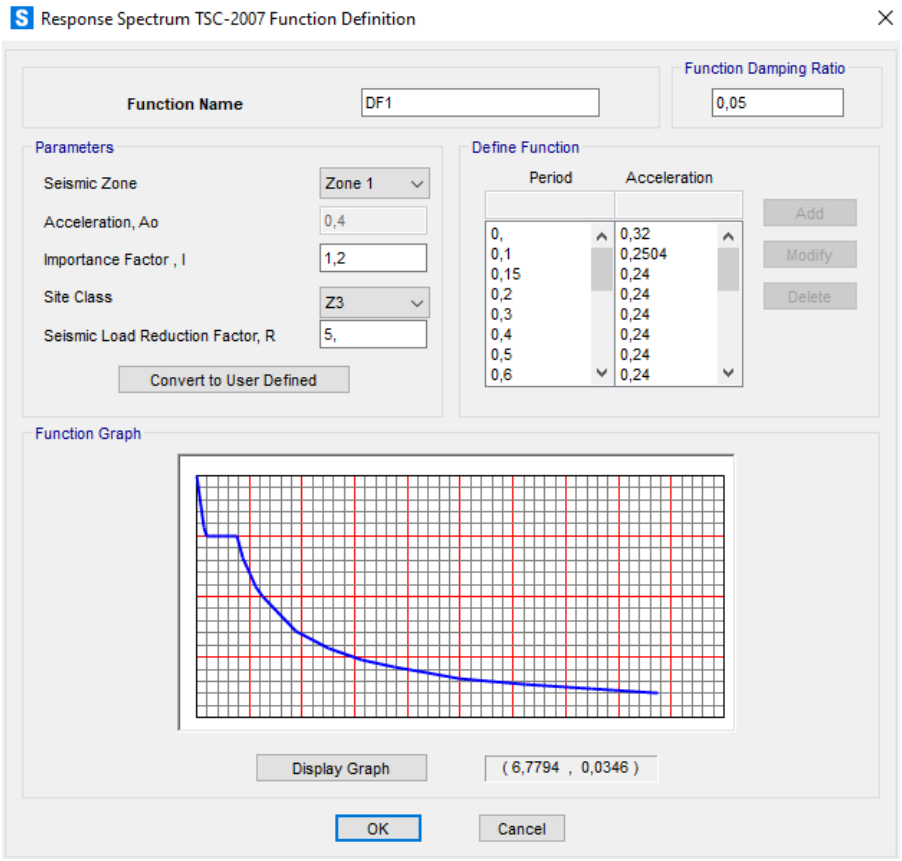


Şekil 3. Tek katmanlı uzay kafes sistem planı.



Şekil 4. Tek katmanlı uzay kafes sistemin SAP2000 modeli.

DBYBHY-2007'e göre yapı I. Derece deprem bölgesinde olup etkin yer ivme katsayısı Ao=0.40, yapı önem katsayısı I=1.2 alınmıştır ve yerel zemin sınıfı Z3 olarak kabul edilmiştir. DBYBHY-2007 Tablo 2.5'ten taşıyıcı sistem davranış katsayısı R=5 olarak alınmıştır. SAP2000 programında tanımlanan davranış spektrum fonksiyonu Şekil 5'te gösterilmektedir. Yapıda akma dayanımı $F_y = 235\ N/mm^2$, elastisite modülü $E_s = 210000\ N/mm^2$ olan S235 çeliği kullanılmıştır. Yukarıda tasarım özellikleri ayrıntılı olarak verilen uzay kafes sistemin, SAP2000 programında oluşturulan yapı modeli Şekil 4'te gösterilmektedir.



Şekil 5. DBYBHY-2007'e göre uzay kafes sistemin davranış spektrum fonksiyonu.

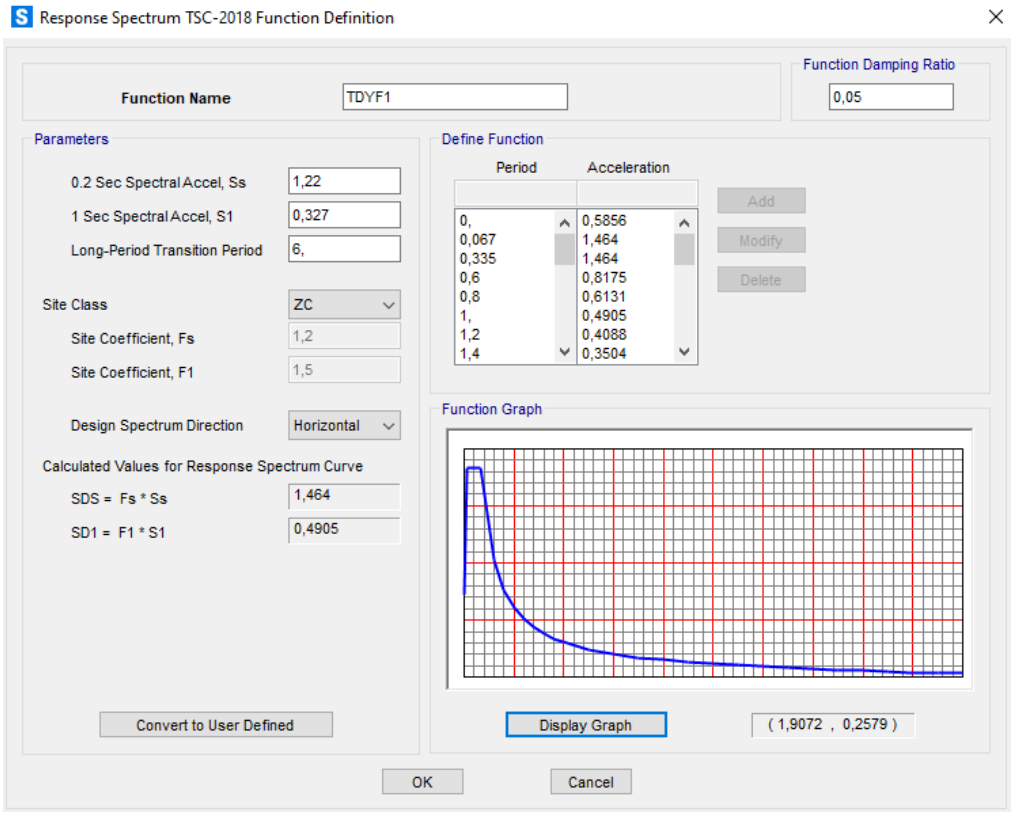
TBDY-2018'e göre yapı Adıyaman bölgesinde yer aldığı için, deprem yer hareket düzeyi DD-2, yapı kullanım sınıfı BKS=2 olduğu için yapı önem katsayısı I=1.2 alınmış ve yerel zemin sınıfı ZC olarak kabul edilmiştir. Deprem yer hareketleri spektrumu, harita spektral ivme katsayıları ve tasarım spektral ivme katsayılarına bağlıdır. *Türkiye Deprem Tehlike Haritası*'ndan yerel zemin sınıfı ZC için, $S_S = 1.220$ ve $S_1 = 0.327$ olarak alınmış olup TBDY-2018 Tablo 2.1 ve Tablo 2.2'e göre F_S ve F_1 değerleri alınarak tasarım spektral ivme katsayıları:

$$S_{DS} = S_S \times F_S = 1.220 \times 1.200 = 1.464$$

$$S_{D1} = S_1 \times F_1 = 0.327 \times 1.500 = 0.490$$

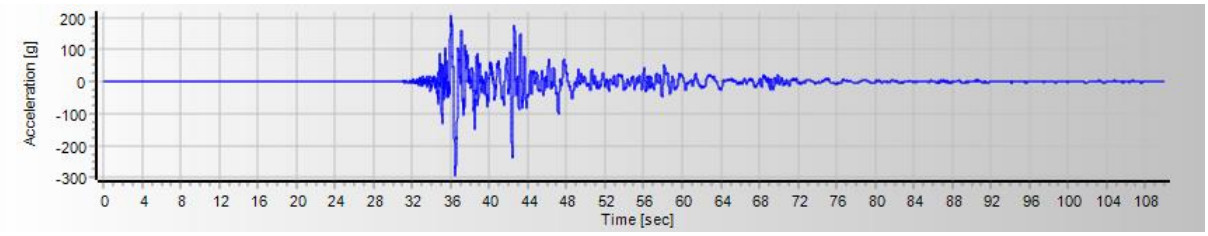
Olarak hesaplanmıştır.

Yönetmeliğe göre, bina önem katsayısı I = 1,2 ve bina kullanım sınıfı BKS = 2, deprem tasarım sınıfı DTS=1 olarak belirlenmiştir. Taşıyıcı sistem davranış katsayısı TBDY-2018 Tablo 4.1'den R=4 olarak alınmıştır. SAP2000 programında tanımlanan davranış spektrum fonksiyonu Şekil 6'da gösterilmektedir.

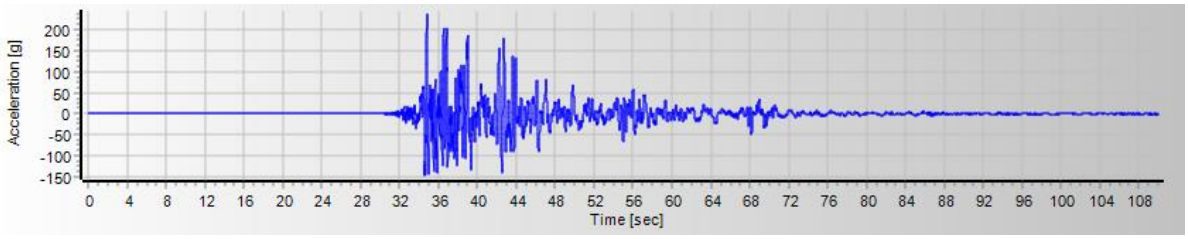


Şekil 6. TBDY-2018'e göre uzay kafes sistemin davranış spektrum fonksiyonu.

Çalışmada yatay deprem etkisi göz önüne alınmış olup, Elazığ (2020) deprem kayıtları AFAD veri tabanından temin edilmiştir. Seçilen ivme kayıtları Şekil 7'de gösterilmektedir. Dikkate alınan deprem kaydı için depremin yatay bileşenleri etkisi altında, SAP2000 programında DBYBHY-2007 VE TBDY-2018 yönetmeliklerine uygun olarak tanımlanan davranış spektrumları ve deprem kayıtları ile zaman tanım alanında fonksiyonlar oluşturularak dinamik analizler gerçekleştirilmiştir [18, 22].



(a)



(b)

Şekil 7. Elazığ 2020 depremi ivme kayıtları, (a) doğu-batı yönü, (b) kuzey-güney yönü.

ANALİZ SONUÇLARI

Uzay kafes sistemlerin dinamik davranışlarını değerlendirmek için, DBYBHY-2007 ve TBDY-2018 esaslarına göre tasarlanan yapının SAP2000 paket programında zaman tanım alanında doğrusal olmayan analizler gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada elde edilen taban kesme kuvvetleri, çubuk eksenel kuvvetleri ve düğüm noktası deplasmanları her iki yönetmeliğe göre karşılaştırılmış ve aşağıda tablolar halinde verilmiştir. Taban kesme kuvvetleri Çizelge 1' de verilmiştir.

Çizelge 1. Taban kesme kuvveti değerleri

Yapısal etki		DBYBHY-2007		TBDY-2018	
		X yönü	Y yönü	X yönü	Y yönü
Taban kesme kuvveti (kN)	Maks.	3227,74	6243,29	8699.52	13091.55
	Min.	-3242,67	-6364,738	-8657.15	-12859.60

X ve Y deprem doğrultularında hesaplanan deplasman değerleri Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 2. Uzay kafes sistemin ekstremum düğüm noktası deplasmanları

Yapısal etki		DBYBHY-2007		TBDY-2018	
		X yönü	Y yönü	X yönü	Y yönü
Yer değiştirme (mm)	Maks.	59	90	140	177
	Min.	-58	-91	-144	-189

X ve Y deprem doğrultularında elde edilen ekstremum çubuk kuvvetleri Çizelge 3'te verilmiştir.

Çizelge 3. X ve Y deprem doğrultularında ekstremum çubuk kuvvetleri

Yapısal etki		DBYBHY-2007		TBDY-2018	
		X yönü	Y yönü	X yönü	Y yönü
Çubuk kuvvetleri (kN)	Maks.	571.27	304.81	1494.30	624.60
	Min.	-586.26	-312.34	-1427.73	-659.46

SONUÇLAR

Son yıllarda spor salonları, alışveriş merkezleri, endüstri yapıları, okul binaları, hangarlar ve sergi sarayları gibi büyük açıklıkları bulunan hacimleri örtmek için yaygın olarak kullanılan uzay kafes sistemlerin deprem etkisi altında az hasar alması ya da hasar almaması kritik önem taşımaktadır. Bu yüzden bu yapıların analizlerinin gerçekçi olması önemlidir. Ülkemizde deprem yönetmeliklerinde zaman içerisinde değişimler kaçınılmaz olmaktadır. Ülkemizde hem çelik yapılar hem de deprem yönetmeliklerinin güncellenmesi ve uygulanması, yapı analiz ve tasarımında çok önemlidir. TBDY-2018 yönetmeliğine göre tasarımda, DBYBHY-2007 deprem yönetmeliğine göre daha güvenli bir tasarım gerçekleştirilmektedir. Bu çalışmada, DBYBHY-2007 ve TBDY-2018 yönetmeliklerine göre tasarlanan tek katmanlı uzay kafes sistemin dinamik analizi başarıyla yapılmış ve karşılaştırılmıştır. Elde edilen analiz

sonuçlarına göre, yapı tasarımında TBDY-2018 deprem yönetmeliğinin göz önüne alınmasıyla güvenli tasarımların gerçekleştirileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Z. S. Makowski. *Space structures of today and tomorrow, space structures*, Guildford: Elsevier, 1984.

[2] A. Orbay, K. Savaşır, Tonoz biçimli çift katlı uzay kafes sistemlerin-çeşitli kriterler açısından-etkinliğinin karşılaştırılmasına yönelik bir araştırma, *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen Ve Mühendislik Dergisi*, 6(1), (2004), 39-49.

[3] A. López, I. Puente, M. A. Serna,. Analysıs of sıngle layer lattıced domes: a new beam–element: *In International IASS Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering*, Warsaw, Poland, 2002: s. 639-644.

[4] Z. S. Makowski. *Steel Space Structures, London: Michael Joseph Ltd*, 1965.

[5] Uzay kafes sistem, https://www.uzayform.com/rfk_29_spor-salonlari.html (ulaşım Temmuz 30, 2021)

[6] Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği, Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı, Ankara, 2018.

[7] Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması. (2018). https://tdth.afad.gov.tr (ulaşım Mayıs 10, 2021).

[8] Deprem Bölgelerinde Yapılacak Binalar Hakkında Yönetmelik, Bayındırlık ve İskan Bakanlığı, Ankara, 2007.

[9] E. Isik, M. C. Aydin, A. Buyuksarac, 24 January 2020 Sivrice (Elazığ) Earthquake Damages and Determination of Earthquake Parameters in the Region, *Earthquakes and Structures*, 19(2) (2020), 145-156.

[10] U. Çeken, İ. Dalyan, N. Kılıç, T. S. Köksal, B. M. Tekin, Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması: *4. In Proceedings of the International Earthquake Engineering and Seismology Conference*, Bucharest, Romania, 2017.

[11] B. Özmen, Türkiye Deprem Bölgeleri Haritalarının Tarihsel Gelişimi, Türkiye Jeoloji Bülteni, 55(1) (2012), 43-55.

[12] S. Akkar, T. Eroğlu Azak, T. Çan, U. Çeken, M. B. Demircioğlu, T. Duman, Ö. Zülfikar, *Türkiye Sismik Tehlike Haritasının Güncellenmesi*, AFAD, Proje no: UDAP-Ç-13-06, 2014.

[13] A. Korkmaz, M. Düzgün, Doğrusal olmayan yapısal analiz yöntemlerinin değerlendirilmesi, *İTÜDERGİSİ/d*, 6(3), (2011).

[14] A. H. Kayhan, A. Demir, Tek Serbestlik Dereceli Sistemlerde Doğrusal Olmayan Statik ve Dinamik Analiz İle Elde Edilen Maksimum Deplasman Taleplerinin Karşılaştırılması, *3.Türkiye Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı, İzmir, 2015.*

[15] A. Arslan, M. H. Severcan, Cam elyaf takviyeli polyester (CTP) profillerden oluşan tek eğrilikli uzay kafes kirişlerin yapay sinir ağları ile analizi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 10(1), (2021), 312-318.

[16] A.K. Külekçi, Çelik taşıyıcı sistemlerin statik itme analizi yöntemi kullanılarak deprem performanslarının değerlendirilmesi, Yüksek lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2010.

[17] H. Krawinkler, G. Seneviratna, Pros and cons of a pushover anaylsis of sismic performance evaluation, *Engineering Structures*, (1998), 452-464.

[18] AFAD, https://tadas.afad.gov.tr/ (ulaşım Mayıs 8, 2021).

[19] K. Darılmaz, *Depreme Dayanıklı Binaların Tasarımına Giriş*, Birsen Yayınevi, 2019.

[20] Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapım Esaslarına Dair Yönetmelik, (2016).

[21] TS-498, Yapı elemanlarının boyutlandırılmasında alınacak yüklerin hesap değerleri, Türk Standartları Enstitüsü, Ankara, 1997

[22] CSI, Integrated Software for Structural Analysis and Design. SAP2000 v22.1.0; Computer & Structures, Inc., Berkeley (CA), 2020.

FONKSİYONEL DERECELİ DAİRESEL KİRİŞLERİN DİNAMİK ANALİZİ

Umit N. Aribas[1], Mert Atalay[1], Mete Aydın[1], Merve Ermis[2] ve Mehmet H. Omurtag[1]
[1]İstanbul Medipol Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul
[2]Kırklareli Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kırklareli

ABSTRACT

In this study, the influence of material gradient index on the vibrations of functionally graded circular beams is presented via the mixed finite element method. The constitutive equations which satisfy the classical beam stress-free surface conditions are enhanced via the warping functions over the displacement-type finite element formulation. The mixed finite element formulation considering the asymmetrical and symmetrical variations of functionally graded material constituents over numerical partitions is derived. The variation of Poisson's ratio through the thickness besides Young modulus is considered. The mixed finite elements have two nodes and twelve degree of freedoms at each node. The dynamic behaviors of functionally graded circular beams obtained via two-noded mixed finite elements are compared to the three-dimensional dynamic behavior of twenty-noded SOLID186 brick elements. Finally, the influence of the asymmetrical and symmetrical variations of functionally graded material constituents through the cross-section on the dynamic behavior of functionally graded circular beams is investigated.

Keywords: Vibration; warping; circular beam; functionally graded material; mixed finite element

ÖZET

Bu çalışmada, karışık sonlu elemanlar metodu kullanılarak fonksiyonel dereceli dairesel kirişlerin dinamik davranışları üzerinde malzeme gradyentinin etkisi sunulmuştur. Klasik kiriş teorisinin gerilme koşullarını sağlayan bünye bağıntılarına, yerdeğiştirme tabanlı sonlu eleman formülasyonuna dayalı çarpılma fonksiyonu entegre edilmiştir. Fonksiyonel dereceli malzeme bileşenlerinin kesitte asimetrik ve simetrik dağılımlarını sayısal katmanlar üzerinden gözeten karışık sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir. Elastisite modülünün yanı sıra Poisson oranının da kesitteki dağılımı gözetilmiştir. Karışık sonlu elemanlar iki düğüm noktasına ve her düğüm noktasında on iki adet serbestlik derecesine sahiptir. İki düğüm noktalı karışık sonlu elemanlarla elde edilen fonksiyonel dereceli dairesel kirişlerin dinamik davranışları, yirmi düğüm noktalı SOLID186 katı elemanlarla elde edilen üç boyutlu dinamik davranışlarla karşılaştırılmıştır. Son olarak, fonksiyonel dereceli malzeme bileşenlerinin kesitte asimetrik ve simetrik dağılımlarının, fonksiyonel dereceli dairesel kirişlerin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Titreşim; çarpılma; dairesel kiriş; fonksiyonel dereceli malzeme; karışık sonlu eleman

GİRİŞ

Geleneksel kompozit malzemelere göre, fonksiyonel dereceli (FD) malzemelerin gerilme yığılmalarını azaltma kabiliyetleri ve ısıl dayanımları, FD malzemelerin pek çok uygulama alanında kullanılmasını sağlamıştır. FD malzemelerin yüksek teknoloji uygulamalarında, savunma sanayiinde, uzay araçlarında, otomotiv ve enerji sektöründe, biyomalzemelerde, sağlık sektöründe giderek artan kullanımı, mekanik davranışlarının daha iyi kavranmasını gerektirmektedir. Literatürde, FD doğrusal kirişlerin dinamik davranışlarını klasik kiriş teorileri ve yüksek-mertebeden kayma deformasyon teorileri kullanarak inceleyen çokça çalışma bulunmaktadır. Xiang ve Yang [1] ön ısıl gerilmeler altında FD değişken kesitli Timoshenko kirişlerin termo-elastik ve dinamik denklemlerini elde etmiştir. Kapuria *vd.* [2] FD kirişlerin doğal frekansları için önerilen üçüncü-dereceden zig-zag teorisini deneylerle doğrulamıştır. Demir *vd.* [3] FD Timoshenko kirişlerin sonlu elemanlar yöntemi ile serbest titreşimlerini incelemiştir. Nguyen *vd.* [4] eksenel yüklü FD kirişlerin serbest titreşimleri için birinci-dereceden kayma deformasyon teorisi geliştirmiştir. Li *vd.* [5] FD Euler-Bernoulli kirişlerin serbest titreşimleri için kesin deplasman interpolasyon fonksiyonları tanımlı sonlu eleman metodu sunmuştur. Çallıoğlu *vd.* [6] değişken kesitli FD kirişlerin doğal frekanslarını incelemiştir. Su *vd.* [7] FD kirişlerin serbest titreşimleri için Hamilton prensibine ve Wittrick-Williams algoritmasına dayalı dinamik rijitlik formülasyonu geliştirmişlerdir. Vo *vd.* [8] FD kirişlerin doğal frekansları için kayma deformasyon teorisi geliştirmişlerdir. Bourada *vd.* [9] FD kirişlerin titreşiminde kalınlık esneme etkisinin dahil edildiği trigonometrik yüksek-mertebe kiriş teorisi elde etmiştir. Şimşek [10] çift-doğrultuda FD Timoshenko kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini tartışmıştır. Su ve Banerjee [11] dinamik rijitlik metoduyla FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. Su *vd.* [12] Pasternak zeminine oturan FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını sunmuşlardır. Jing *vd.* [13] FD kirişlerin serbest titreşimleri için hücre-merkezli sonlu hacim metoduyla, Timoshenko kiriş teorisinin kombinasyonunu sunmuşlardır. El-Ashmawy *vd.* [14] FD Timoshenko kirişlerin termo-dinamik analizleri için sonlu eleman modeli sunmuşlardır. Kahya ve Turan [15] FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşimleri için sonlu eleman modeli geliştirmiştir. Şimşek ve Al-shujairi [16] FD Timoshenko kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Lee ve Lee [17] FD Euler-Bernoulli kirişlerin doğal frekansları için kesin transfer matris metodu geliştirmişlerdir. Huynh *vd.* [18] çift-doğrultuda FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını tartışmıştır. Zidi *vd.* [19] FD kirişlerin serbest titreşimleri için bir yüksek-mertebe kayma deformasyon teorisi sunmuştur. Karamanlı [20] çift-doğrultuda FD kirişlerin üçüncü-mertebe bir kayma deformasyon teorisi kullanarak serbest titreşim analizlerini yapmıştır. Kahya ve Turan [21] çok-tabakalı sonlu elemanlarla FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşimlerini yapmıştır. Chen ve Chang [22] FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını çalışmışlardır. Su *vd.* [23] değişken kesitli FD Timoshenko kirişlerin serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. Esen [24] iki parametreli elastik zemine oturan FD Timoshenko kirişlerin zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Koutoati *vd.* [25] Timoshenko ve yüksek-mertebe kiriş teorilerini kullanarak FD sandviç kirişlerin serbest titreşimlerini çalışmıştır. Eltaher ve Akbaş [26] çift-doğrultuda fonksiyonel dereceli yüksek kirişlerin sonlu elemanlar metoduyla zorlanmış titreşimlerini çalışmışlardır. Erdurcan ve Cunedioğlu [27] alüminyum çekirdekli FD Timoshenko kirişlerin doğal frekanslarını sunmuştur. Le *vd.* [28] çift-doğrultuda FD sandviç kirişlerin serbest titreşimleri için üçüncü-mertebeden kayma deformasyon teorili kiriş elemanı elde etmiştir. Ma *vd.* [29] FD silindirik tüplerin üçüncü-mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı titreşimlerini tartışmışlardır. Rahmani *vd.* [30] Euler-Bernoulli, Timoshenko ve yüksek-mertebe kiriş teorilerini kullanarak FD kirişlerin serbest titreşimlerini incelemiştir. FD doğrusal kirişlerin dinamik analizleri detaylı bir şekilde incelenmiş olmasına rağmen, FD eğri kirişlerin dinamik davranışları üzerine çalışmalar oldukça azdır. Piovan *vd.* [31] ön

gerilmeli FD dairesel kirişlerin dinamik davranışını sonlu elemanlar metoduyla incelemiştir. Fariborz ve Batra [32] çift-doğrultuda FD dairesel kirişlerin doğal frekanslarını sunmuşlardır.

Bu çalışma kapsamında, malzeme gradyenti değişiminin FD dairesel kirişlerin çarpılma etkisi gözetilen serbest ve zorlamış titreşimleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Ortotrop malzeme sabitlerinin varyasyonunu dahil edebilecek bir biçimde üç boyutlu bünye bağıntıları, klasik çubuk kuramı üzerinden, FD kesitin sayısal katmanlarına uygulanmıştır. FD malzeme bileşenlerinin simetrik ve asimetrik varyasyonlarını içeren karışık sonlu eleman formülasyonuna çarpılma fonksiyonu, yerdeğiştirme tabanlı sonlu elemanlarla entegre edilmiştir. Zorlanmış titreşim analizlerinde ortalama sabit ivmelenmeli Newmark metodu kullanılmıştır. Karışık sonlu elemanlar her düğüm noktasında on iki serbestlik derecesine sahiptir. Karışık sonlu eleman doğal frekansları ve zorlanmış titreşimde serbest uç yerdeğiştirme ve mesnet reaksiyonları SOLID186 elemanlarla elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. FD dairesel kirişlerde malzeme gradyentinin serbest ve zorlanmış titreşimler üzerindeki etkisi literatüre kazandırılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Üç-boyutlu gerilme ve şekil değiştirme vektörleri sırasıyla $\boldsymbol{\sigma}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$, ve elastisite matrisi $\mathbf{E}$ olmak üzere Hooke Kanunu $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}$ ile ifade edilir [33]. Klasik çubuk kuramındaki gerilme kabulleri [34] kullanılarak Hooke Kanunu, çubuk teorisine indirgenirse, $\boldsymbol{\sigma}_L = \boldsymbol{\beta}_L \boldsymbol{\varepsilon}_L$. Burada, Frenet koordinatları t,n,b olmak üzere indirgenmiş gerilme ve şekil değiştirme vektörleri sırasıyla, $\boldsymbol{\sigma}_L = \{\sigma_t \quad \tau_{bt} \quad \tau_{tn}\}_L^{\mathrm{T}}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}_L = \{\varepsilon_t \quad \gamma_{bt} \quad \gamma_{tn}\}_L^{\mathrm{T}}$, indirgenmiş elastisite matrisi $\boldsymbol{\beta}_L$, ve fonksiyonel dereceli kesit L adet sayısal katman ile tanımlanmaktadır. Çubuk kesitindeki yer değiştirmelerin u_t^*, u_n^*, u_b^*, eksendeki yerdeğiştirmeler u_t, u_n, u_b ve dönmeler $\Omega_t, \Omega_n, \Omega_b$ üzerinden kinematik bağıntıları $u_t^* = u_t + b\,\Omega_n - n\,\Omega_b$, $u_n^* = u_n - b\,\Omega_t$ ve $u_b^* = u_b + n\,\Omega_t$ kullanılarak, indirgenmiş gerilme-şekil değiştirme bağıntıları [35],

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ \tau_{bt} \\ \tau_{tn} \end{Bmatrix}_L = \boldsymbol{\beta}_L \left\{ \begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{b,t} \\ u_{n,t} \end{Bmatrix} + b \begin{Bmatrix} \Omega_{n,t} \\ 0 \\ -\Omega_{t,t} \end{Bmatrix} + n \begin{Bmatrix} -\Omega_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ 0 \end{Bmatrix} \right\}_L \quad , \quad L = 1,\ldots,N \tag{1}$$

Burada, alt indiste bulunan virgül kısmi türevleri, N ise kullanılan toplam sayısal katmanı ifade etmektedir. Fonksiyonel dereceli malzeme bileşenlerinin kesitteki asimetrik ve simetrik varyasyonları Power-law kuralına göre kabul edilmiştir,

$$f(b) = f_{\text{alt}} + (f_{\text{üst}} - f_{\text{alt}})\left(0.5 + \frac{b}{h}\right)^m ; \quad f(b) = f_{\text{aks}} + (f_{\text{alt}} - f_{\text{aks}})\left(\frac{2|b|}{h}\right)^m \tag{2}$$

Burada, $f(b)$, elastisite modülü E, kayma modülü G veya yoğunluğun ρ varyasyonunu ifade eden fonksiyondur. Alt indisler "alt", "aks" ve "üst" sırasıyla kesitin alt, orta ve üstünü, h toplam kesit yüksekliğini, ve m malzeme gradyentini ifade etmektedir. Fonksiyonel dereceli kesit başlangıçta elli sayısal katmana ayrılmıştır. Eğer bir sayısal katmanın alt ve üst sınırlarındaki malzeme değerlerinin mutlak farkı, elli sayısal katmanlı kesitte lineer varyasyona karşı gelen malzeme değerlerinin mutlak farkını aşıyorsa, bu aralıkta katman sıklaştırılmasına gidilmiştir.

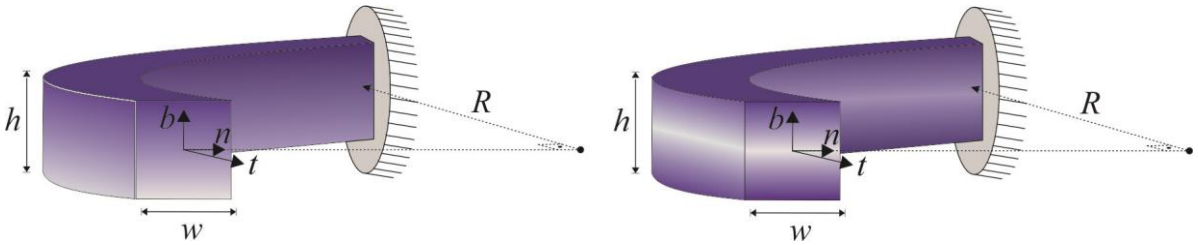
Çubuk kesitindeki kuvvetler F_t, F_n, F_b ve momentler M_t, M_n, M_b gerilmelerin analitik integrasyonu ile ifade edilmiştir [36,37]. Komplians matrisi $\mathbf{C}$ kullanılarak, bünye bağıntıları matris formda,

$$\begin{Bmatrix} u_{t,t} \\ u_{n,\mathrm{t}} \\ u_{b,t} \\ \Omega_{t,t} \\ \Omega_{n,t} \\ \Omega_{b,t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m & \mathbf{C}_{mf} \\ \mathbf{C}_{fm} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_t \\ F_n \\ F_b \\ M_t \\ M_n \\ M_b \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Burada, $\mathbf{C}_{mf}$ ve $\mathbf{C}_{fm}$ kuple etkileri ifade eden komplians alt matrisleridir. Kesit çarpılmasını içeren burulma rijitliği formülasyonu [38], bünye bağıntılarında (3) ilgili terimlere entegre edilmiştir. Timoshenko uzaysal kirişlerin alan denklemlerinin [39] kompozit kirişlere genişletilen tanımı [37]'de yapılmıştır. Alan denklemleri ve Gâteaux türevi [40] kullanılarak elde edilen fonksiyonel,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{y}) = &-\left[\mathbf{F}_{,s}, \mathbf{u}\right] - \left[\mathbf{M}_{,s}, \boldsymbol{\Omega}\right] + \left[\mathbf{t}\times\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}\right] - \tfrac{1}{2}\left\{\left[\mathbf{C}_m\mathbf{F}, \mathbf{F}\right] + \left[\mathbf{C}_{mf}\mathbf{M}, \mathbf{F}\right]\right. \\ &\left. + \left[\mathbf{C}_{fm}\mathbf{F}, \mathbf{M}\right] + \left[\mathbf{C}_f\mathbf{M}, \mathbf{M}\right]\right\} - \tfrac{1}{2}\rho A\omega^2\left[\mathbf{u}, \mathbf{u}\right] - \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left[\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}\right] \\ &+ \left[\left(\mathbf{F} - \hat{\mathbf{F}}\right), \mathbf{u}\right]_\sigma + \left[\left(\mathbf{M} - \hat{\mathbf{M}}\right), \boldsymbol{\Omega}\right]_\sigma + \left[\mathbf{F}, \hat{\mathbf{u}}\right]_\varepsilon + \left[\mathbf{M}, \hat{\boldsymbol{\Omega}}\right]_\varepsilon \end{aligned} \tag{4}$$

Burada, çubuk kesitindeki yerdeğiştirme, dönme, kuvvet ve momentler sırasıyla $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{M}$ ile, malzeme yoğunluğu ρ ve kesit alanı A ile, atalet momentleri $\mathbf{I}$ ile ifade edilmektedir. Zorlanmış titreşim analizinde fonksiyonelden $-\tfrac{1}{2}\rho A\omega^2\left[\mathbf{u}, \mathbf{u}\right]$ ve $-\tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left[\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}\right]$ çıkarılmakta, yerine $-\left[\mathbf{q}, \mathbf{u}\right]$ ve $-\left[\mathbf{m}, \boldsymbol{\Omega}\right]$ terimleri girmektedir. Zorlanmış titreşim analizi için Newmark metodunda ortalama sabit ivmelenme kullanılmıştır [41,42]. Her düğüm noktasında üç yerdeğiştirme, üç kesit dönmesi, üç kuvvet ve üç kesit dönmesi içeren iki düğüm noktalı eğrisel karışık sonlu elemanlar kullanılmıştır.



Şekil 1. Asimetrik/Simetrik fonksiyonel dereceli dairesel kiriş.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, öncelikle FD dairesel kirişlerin çarpılma etkisi gözetilen serbest ve zorlanmış titreşimleri için sunulan karışık sonlu eleman formülasyonunun eleman ağı yakınsama çalışmaları verilmiştir. İki düğüm noktalı eğrisel karışık sonlu elemanlarla elde edilen, doğal frekanslar, ve zorlanmış titreşimlerde serbest uç yerdeğiştirmeleri ve mesnet reaksiyonları, yirmi düğüm noktalı SOLID186 elemanların sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Son olarak, malzeme gradyentinin FD dairesel kirişlerin dinamik davranışı üzerindeki etkisi incelenerek literatüre kazandırılmıştır. Kullanılan FD malzeme bileşenleri alumina $(\mathrm{Al_2O_3})$ ve

alüminyum (Al) için, elastisite modülleri sırasıyla E = 380GPa ve 70GPa, kayma modülleri sırasıyla G = 146.154GPa ve 26.316GPa, Poisson oranları sırasıyla ν = 0.30 ve 0.33'tür.

Sonlu Eleman Ağı Yakınsama Analizi

Bu sayısal çalışma kapsamında elde edilen bulgular ile FD dairesel kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşim analizlerinde yeterli yakınsaklığı sağlayan karışık sonlu eleman adedi ve adım sayıları belirlenmektedir. Sonlu eleman ağı yakınsama analizi çalışmalarında, yarıçapı $R = 1.0\text{m}$ olan çeyrek daire FD konsol kiriş ele alınmıştır (Şekil 1). FD kare kesitin genişliği $w = 0.012\text{m}$ ve yüksekliği $h = 0.012\text{m}$'dir. FD malzeme bileşenleri kesit alt ve üst yüzlerinde sırasıyla Al ve Al_2O_3 olup, malzeme gradyenti $m = 1$'dir. Zorlanmış titreşim analizlerinde, FD konsol kirişin serbest ucuna $0\text{s} \le t_{\text{yük}} \le 1\text{s}$ zaman aralığında düzlem dışı, $-z$ doğrultusunda, $P = 1\text{N}$ adım tipi impulsif yükleme uygulanmaktadır. Yerdeğiştirmeler ve mesnet reaksiyonları $0\text{s} \le T \le 4\text{s}$ zaman aralığında elde edilmiştir.

Serbest Titreşim: İlk üç doğal frekans ω, sırasıyla 50, 60, 70, 80, 90 ve 100 karışık sonlu elemanlarla (MFE) elde edilmiştir. Her bir karışık sonlu eleman adedindeki düğüm noktası koordinatlarından yararlanılarak ilgili çeyrek çember FD konsol kirişler SOLID186 elemanlarla modellenmiştir. Sırasıyla 612, 732, 852, 972, 1092, 1212 serbestlik derecelerine sahip 50, 60, 70, 80, 90 ve 100 karışık SE sonuçları, toplam 863550 serbestlik derecesine (eleman boyutu 0.006m) sahip SOLID186 eleman sonuçlarıyla kıyaslanmıştır (Çizelge 1). Karışık sonlu eleman doğal frekansları SOLID186 elemanların doğal frekansları ile uyumludur.

Çizelge 1. Sonlu eleman ağı yakınsaması, doğal frekanslar ω (Hz).
$\%\,\text{Fark} = \left(\left(\text{MFE/SOLID186}\right) - 1\right) \times 100$.

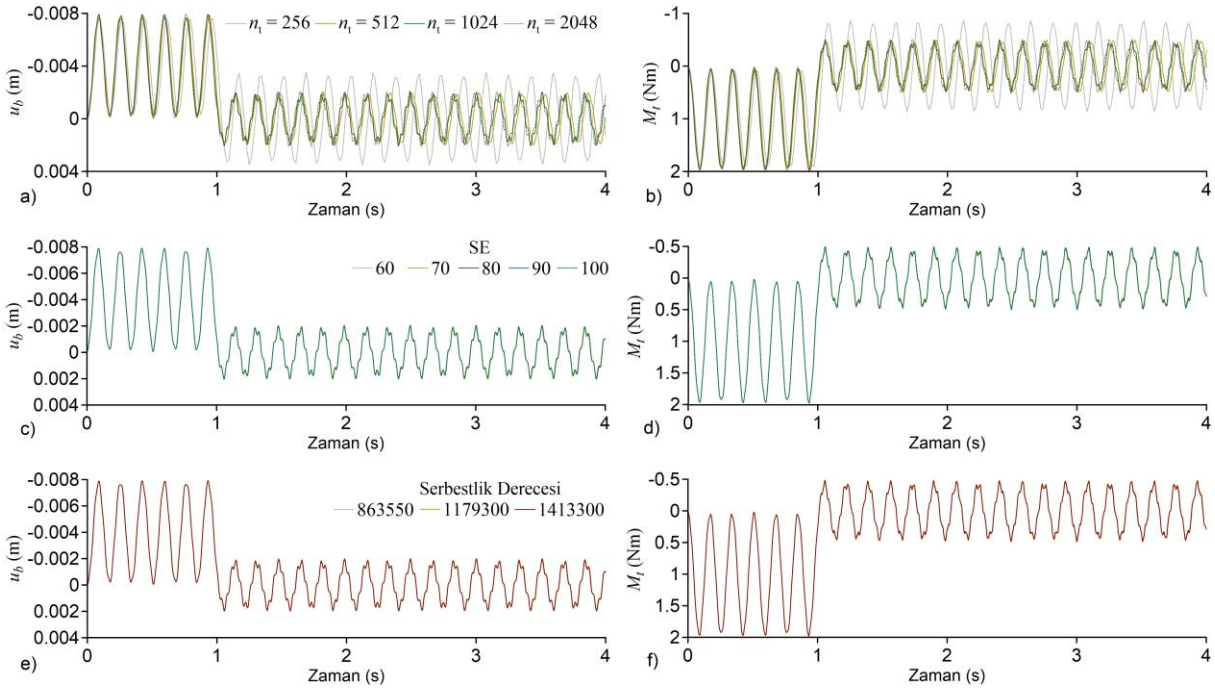
FE	MFE			SOLID186			%Fark		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
50	5.960	6.789	28.836	5.911	6.767	28.610	0.82	0.33	0.79
60	5.960	6.789	28.837	5.911	6.767	28.610	0.82	0.33	0.79
70	5.960	6.789	28.837	5.921	6.768	28.622	0.67	0.31	0.75
80	5.960	6.789	28.837	5.915	6.767	28.610	0.77	0.33	0.79
90	5.960	6.789	28.837	5.918	6.767	28.607	0.71	0.33	0.80
100	5.960	6.789	28.837	5.910	6.767	28.608	0.84	0.33	0.80

Zorlanmış Titreşim: İlk olarak, serbest titreşim analizlerinde yeteri yakınsaklığı sağlayan 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatlarından yararlanılarak çeyrek çember FD konsol kiriş, SOLID186 elemanlarla modellenmiştir. ANSYS SOLID186 elemanlar için en büyük eleman boyu 0.006m seçilerek $0\text{s} \le T \le 4\text{s}$ tanımlı zaman aralığında sırasıyla $n_t = 256$, 512, 1024 ve 2048 zaman adımı için serbest uç yerdeğiştirmesi u_b ve mesnet reaksiyonu M_t elde edilmiştir (Şekil 2a, b). $n_t = 256$, 512, 1024 ve 2048 zaman adımı için elde edilen pik serbest uç yerdeğiştirmeleri sırasıyla $u_b = -0.0077\text{m}$ (0.09375s), -0.0079m (0.42969s), -0.0079m (0.92969s) ve -0.0080m (0.08789s)'dir (Şekil 2a). Elde edilen pik u_b serbest uç yerdeğiştirmelerinin $n_t = 2048$ zaman adımına göre yüzdesel farkları $n_t = 256$, 512 ve 1024 için sırasıyla %-3.33, %-1.24 ve %-0.52 olmaktadır. $n_t = 256$, 512, 1024 ve 2048 zaman adımı için elde edilen pik mesnet reaksiyonları sırasıyla $M_t = 1.924\text{Nm}$ (0.09375s), 1.958Nm (0.42969s), 1.979Nm (0.93359s) ve 1.987Nm (0.93359s)'dir (Şekil 2b). Elde edilen pik M_t

mesnet reaksiyonlarının $n_t = 2048$ zaman adımına göre yüzdesel farkları $n_t = 256$, 512 ve 1024 için sırasıyla %-3.15, %-1.44 ve %-0.40 olmaktadır. Zaman adımı $n_t = 1024$ için yeterli yakınsaklık elde edilmektedir.

Zaman adımı $n_t = 1024$ kullanılarak, sırasıyla 60, 70, 80, 90 ve 100 MFE'nin düğüm noktası koordinatları üzerinden SOLID186 elemanlarla oluşturulan çeyrek daire FD konsol kirişler çözülmüştür (Şekil 2c, d). Her bir çözümden elde edilen pik serbest uç yerdeğiştirmesi $u_b \cong -0.00792\text{m}$ (0.92969s) ve pik mesnet reaksiyonu $M_t \cong 1.979\text{Nm}$ (0.93379s) olmaktadır. 60 MFE'in düğüm noktası koordinatları üzerinden modellenen SOLID186 elemanların 100 MFE'den modellenene göre yüzdesel farkları u_b ve M_t için sırasıyla %0.015 ve %0.004 olmaktadır. 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatlarıyla modellenen SOLID186 elemanlar yeterli yakınsaklığı sağlamaktadır.

SOLID186 elemanlarla $n_t = 1024$ zaman adımı ve 60 MFE'nin düğüm noktası koordinatları kullanılarak oluşturulan ANSYS modelinde sonlu eleman ağı yakınsaması çalışmaları yapılmıştır. Çeyrek çember FD konsol kiriş için sırasıyla en büyük sonlu eleman boyu 0.0060m, 0.0055m ve 0.0050m'ye karşı gelen toplam serbestlik dereceleri 863550, 1179300 ve 1413300 için sonuçlar elde edilmiştir (Şekil 2e, f). Her bir serbestlik derecesi için, pik serbest uç yerdeğiştirmeleri $u_b \cong -0.0079\text{m}$ (0.929690s) ve pik mesnet reaksiyonu $M_t \cong 1.979\text{Nm}$ olmaktadır. 863550 ve 1179300 toplam serbestlik dereceleri ile elde edilen sonuçlarının 1413300 toplam serbestlik derecesi sonucuna göre yüzdesel farkı, u_b için sırasıyla %0.054 ve %0.052 ve M_t için sırasıyla %0.076 ve %0.081'dir.



Şekil 2. Zorlanmış titreşim, Sonlu eleman ağı yakınsaması, SOLID186 elemanlar.

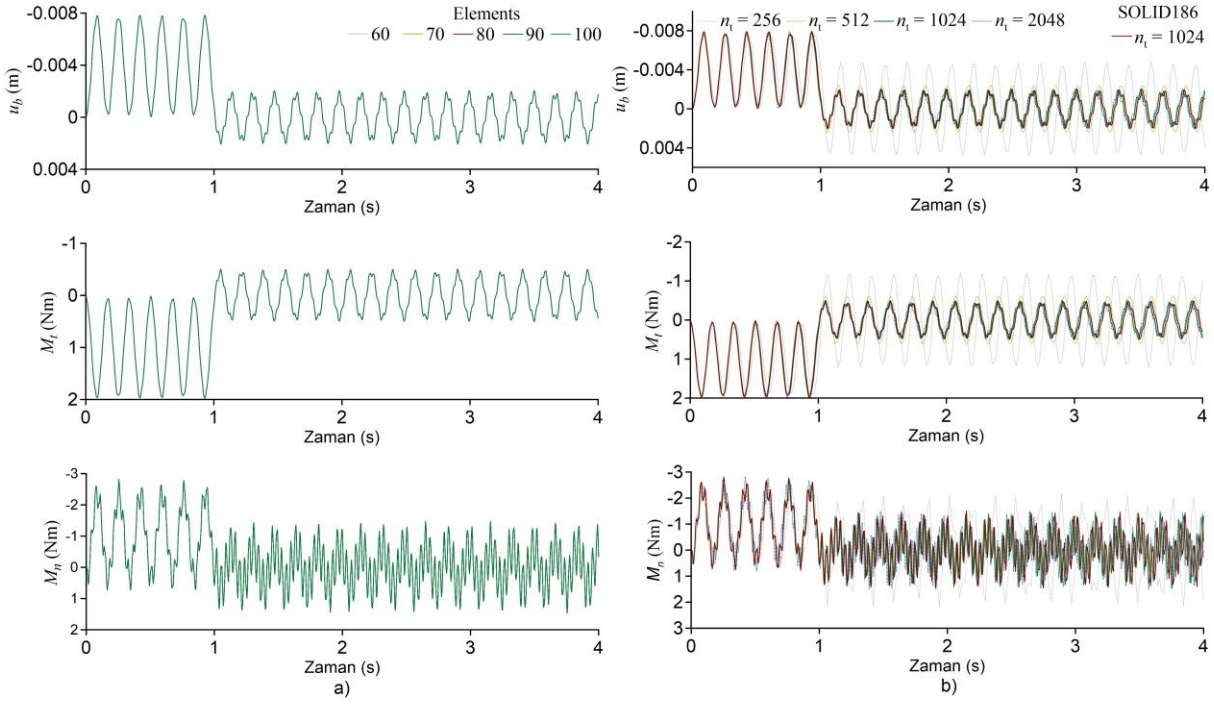
Karışık Sonlu Elemanlar: $0\text{s} \le T \le 4\text{s}$ tanımlı zaman aralığında $n_t = 1024$ zaman adımı için serbest uç yerdeğiştirmeleri u_b, ve mesnet reaksiyonları M_t ve M_n sırasıyla 60, 70, 80, 90, 100 karışık sonlu elemanlarla elde edilmiştir (Şekil 3a). Her bir karışık sonlu eleman çözümünden elde edilen pik serbest uç yerdeğiştirmeleri $u_b = -0.0078\text{m}$ (0.92969s), pik

mesnet reaksiyonu $M_t = 1.974\text{Nm}$ (0.92969s), ve pik mesnet reaksiyonu $M_n = -2.816\text{Nm}$ (0.25391s) olarak elde edilmiştir. 60, 70, 80 ve 90 karışık sonlu eleman sonuçlarının, 100 karışık sonlu eleman sonuçlarına yüzdesel farkı, u_b için sırasıyla %0.003, %0.002, %0.001 ve %0.000, M_t için sırasıyla %-0.004, %-0.003, %-0.001 ve %-0.001, ve M_n için sırasıyla %-0.013, %-0.007, %-0.004 ve %-0.002 olmaktadır. 60 karışık sonlu eleman kullanılarak elde edilen sonuçların yeterli yakınsaklıkta olduğu görülmektedir.

Zaman adımı yakınsama çalışmaları için $n_t = 256$, 512, 1024 ve 2048 zaman adımları kullanılarak 60 karışık sonlu elemanlarla sonuçlar alınmış, ve $n_t = 1024$ ve 863550 serbestlik derecesi ile elde edilen SOLID186 eleman sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır (Şekil 3b). Karışık sonlu eleman analizlerinde $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak elde edilen sonuçlar yeteri yakınsaklığı sağlamaktadır (Çizelge 2). $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak elde edilen 732 serbestlik derecesine sahip karışık sonlu eleman sonuçlarının, 863550 serbestlik derecesine sahip SOLID186 eleman sonuçlarına yüzdesel farkı, pik u_b, M_t ve M_n için sırasıyla %-1.01, %-0.27 ve %0.71 olmaktadır. Parametrik analizler, 60 karışık sonlu eleman ve $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak alınacaktır.

Çizelge 2. Zaman adımı n_t yakınsama analizi (MFEM). Birimler N-m'dir. %Fark, ilgili $n_t =$ 2048 sonuçlarına göre verilmiştir.

n_t	u_b	%Fark	M_t	%Fark	M_n	%Fark
256	-0.0076	-3.41	1.924	-3.07	-2.526	-10.83
512	-0.0077	-1.67	1.952	-1.66	-2.623	-7.42
1024	-0.0078	-0.54	1.974	-0.55	-2.816	-0.60
2048	-0.0079	-	1.985	-	-2.833	-



Şekil 3. Zorlanmış titreşim, Sonlu eleman ağı yakınsaması, MFE.

Malzeme Gradyentinin Dinamik Davranışa Etkisi

Bu sayısal çalışmada, çeyrek daire FD konsol kirişlerin malzeme gradyentinin serbest ve zorlanmış titreşimler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çeyrek daire FD konsol kirişin yarıçapı $R = 1.0\text{m}$ 'dir. FD kare kesitin genişliği ve yüksekliği 0.012m olup, asimetrik FD malzeme varyasyonunda kesit alt ve üst yüzü sırasıyla Al ve Al_2O_3, simetrik FD malzeme varyasyonunda aks düzleminde ve dış yüzlerde sırasıyla Al ve Al_2O_3 bulunmaktadır. Malzeme gradyentinin $m = 1.0$, 2.0 ve 3.0 olduğu durumlar için doğal frekanslar, ve zorlanmış titreşimde serbest uç yerdeğiştirmeleri ve mesnet reaksiyonları elde edilmiştir. Zorlanmış titreşim analizinde, $P = 1\text{N}$ adım tipi impulsif düzlem dışı yükleme (-z doğrultusunda) FD konsol kirişin serbest ucuna $0\text{s} \le t_{\text{yük}} \le 1\text{s}$ zaman aralığında uygulanmış ve dinamik davranış $0\text{s} \le T \le 4\text{s}$ aralığında elde edilmiştir. 60 karışık sonlu eleman ve $n_t = 1024$ zaman adımı kullanılarak çözümler alınmıştır.

Serbest Titreşim: Çeyrek daire FD konsol kirişte asimetrik ve simetrik malzeme varyasyonu için malzeme gradyentinin değişimine bağlı olarak ilk üç doğal frekans $\omega_i (i = 1,2,3)$ Çizelge 3'te verilmektedir. Asimetrik FD malzeme varyasyonuna sahip kesitte malzeme gradyentinin $m = 2$ ve 3 olduğu durumlarda sırasıyla lineer malzeme varyasyonuna nazaran birinci doğal frekanslarda %-9.28 ve %-12.87 azalma meydana gelmektedir. Buna karşın malzeme gradyentinin artması ikinci doğal frekanslarda daha etkili olmuştur (Çizelge 3). Simetrik FD malzeme varyasyonuna sahip kesitlerde ise malzeme gradyentinin artarak $m = 2$ ve 3 olması ilk üç doğal frekanstan birinci doğal frekansta daha etkili olmuştur. Malzeme gradyentinin $m = 2$ ve 3 olduğu durumlarda lineer malzeme varyasyonuna göre birinci doğal frekanstaki azalma sırasıyla %-9.31 ve %-14.89 olmaktadır.

Çizelge 3. Malzeme gradyentinin doğal frekanslar ω (Hz) üzerinde etkisi. %Farklar $m = 1$'e göre verilmektedir.

	Asimetrik FD Kesit					Simetrik FD Kesit				
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	%Fark		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	%Fark	
				$m = 2$	$m = 3$				$m = 2$	$m = 3$
ω_1	5.96	5.41	5.19	-9.28	-12.87	6.79	6.16	5.78	-9.31	-14.89
ω_2	6.79	6.16	5.78	-9.32	-14.91	7.00	6.50	6.19	-7.12	-11.54
ω_3	28.84	26.18	25.19	-9.21	-12.66	32.73	29.68	27.85	-9.31	-14.89

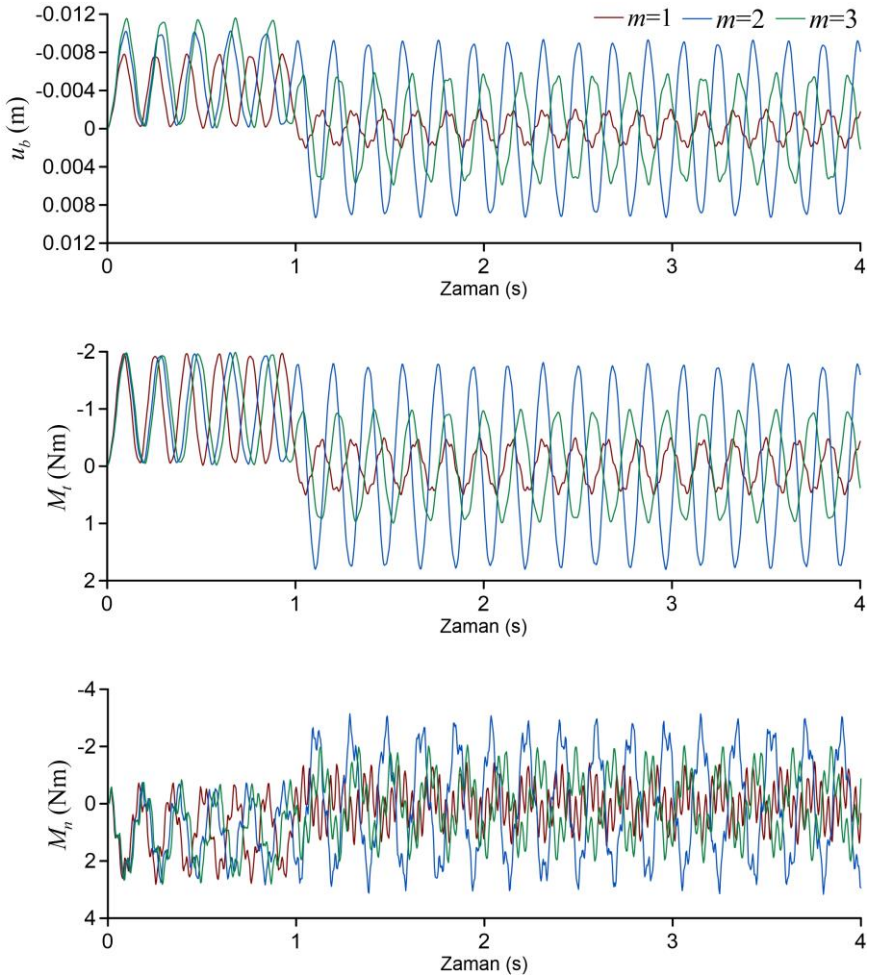
Zorlanmış Titreşim: Malzeme gradyentinin artışına bağlı olarak $(m = 1,2,3)$ çeyrek daire FD konsol kirişin serbest uç yerdeğiştirmesi u_b ve mesnet reaksiyonları M_t, M_n FD malzeme bileşenlerinin asimetrik ve simetrik varyasyonu için sırasıyla Şekil 4 ve Şekil 5'te verilmiştir.

Asimetrik FD, u_b: $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla pik değerleri u_b = - 0.0078m (0.92969s), u_b = - 0.0102m (0.65234s) ve u_b = - 0.0116m (0.67969s) olmaktadır (Şekil 4). Malzeme gradyenti $m = 2$ ve $m = 3$'e arttıkça, lineer varyasyona $(m = 1)$ göre u_b pik değerleri sırasıyla %30.57 ve %48.19 artmaktadır. Zorlanmış titreşim bölgesinde u_b için mutlak değerce en büyük pik değerler $m = 3$ olduğunda elde edilirken, serbest titreşim bölgesinde $m = 2$ olduğunda elde edilmektedir.

Asimetrik FD, M_t: $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla pik değerleri M_t = - 1.9736Nm (0.92969s), M_t = - 1.9831Nm (0.65234s) ve M_t = - 1.9891Nm (0.67969s) olmaktadır (Şekil 4).

Malzeme gradyenti artışı $m = 2$ ve $m = 3$, mesnet reaksiyonu M_t için lineer varyasyona $(m = 1)$ göre sırasıyla %0.48 ve %0.78 artış meydana getirmektedir. Serbest titreşim bölgesinde mutlak değerce en büyük M_t pik değerleri $m = 2$ için elde edilmiştir.

Asimetrik FD, M_n: $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_n = 2.8159\text{Nm}$ (0.25391s), $M_n = 3.1639\text{Nm}$ (3.80078s) ve $M_n = 2.8155\text{Nm}$ (0.28906s) olmaktadır (Şekil 4). Serbest titreşim bölgesinde en fazla pik değerleri $m = 2$ için elde edilmektedir.



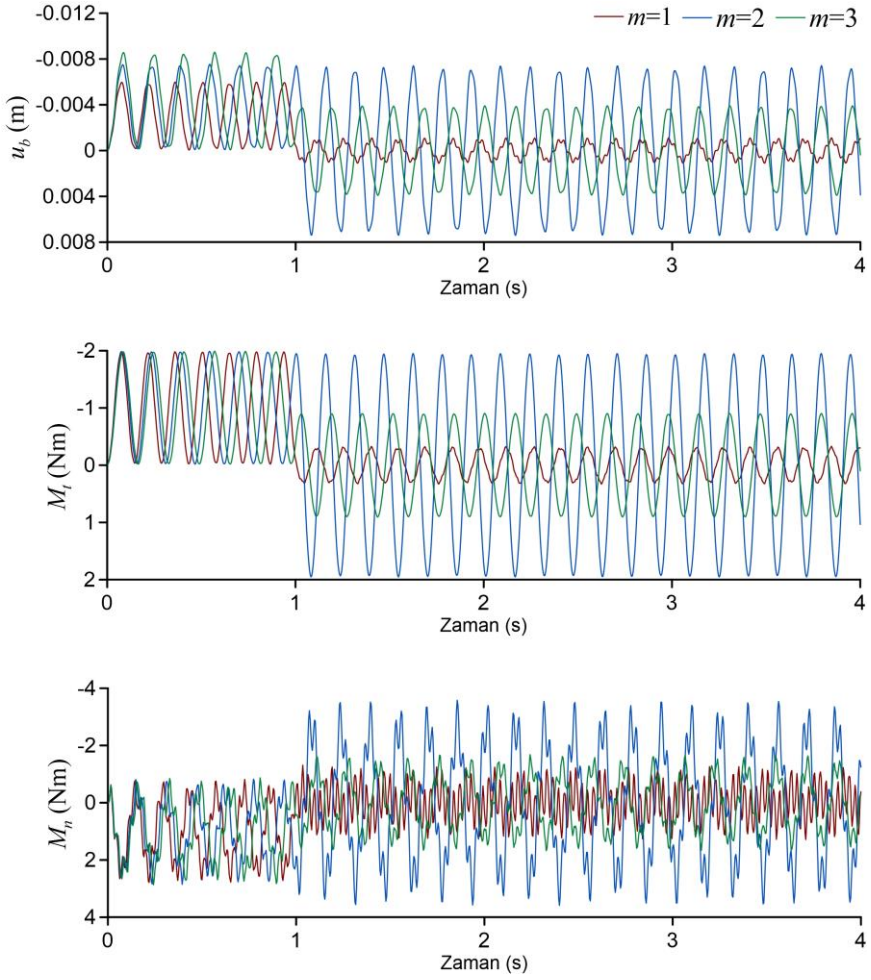
Şekil 4. Zorlanmış titreşim, çeyrek daire asimetrik FD konsol kiriş, malzeme gradyenti m.

Simetrik FD, u_b: $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla pik değerleri $u_b = -\ 0.0060\text{m}$ (0.35938s), $u_b = -\ 0.0075\text{m}$ (0.54297s) ve $u_b = -\ 0.0086\text{m}$ (0.57031s) olmaktadır (Şekil 5). Malzeme gradyenti arttıkça $m = 2$ ve 3, lineer FD malzeme varyasyonuna göre u_b pik değerleri sırasıyla %25.99 ve %43.73 artmaktadır. Zorlanmış titreşim bölgesinde en fazla pik değerleri $m = 3$ için elde edilirken, serbest titreşim bölgesinde $m = 2$ için elde edilmektedir. Asimetrik FD malzeme dağılımına göre u_b pik değerleri $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla %-23.63, %-26.31 ve %-25.93 azalmaktadır.

Simetrik FD, M_t: $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_t = -\ 1.9840\text{Nm}$ (0.07422s), $M_t = -\ 1.9907\text{Nm}$ (0.54297s) ve $M_t = -\ 1.9922\text{Nm}$ (0.57031s) olmaktadır (Şekil 5). $m = 2$ ve $m = 3$ için, lineer varyasyona $(m = 1)$ göre M_t sırasıyla %0.34 ve %0.41 daha fazla

olmaktadır. Asimetrik FD malzeme varyasyonuna göre $m = 1$, 2 ve 3 için simetrik malzeme varyasyonunda M_t sırasıyla %0.53, %0.38 ve %0.15 daha fazladır.

Simetrik FD, M_n: $m = 1$, 2 ve 3 için sırasıyla pik değerleri $M_n = 2.7882\text{Nm}$ (0.21875s), $M_n = 3.5873\text{Nm}$ (2.39844s) ve $M_n = 2.8695\text{Nm}$ (0.24219s) olmaktadır. Serbest titreşim bölgesinde en fazla pik değeri $m = 2$ için elde edilmiştir. Simetrik FD malzeme varyasyonunda $m = 2$ için elde edilen en büyük pik değeri, asimetrik FD malzeme varyasyonunkinden %13.38 fazladır.



Şekil 5. Zorlanmış titreşim, çeyrek daire simetrik FD konsol kiriş, malzeme gradyenti m.

SONUÇLAR

Fonksiyonel dereceli (FD) dairesel kirişlerde malzeme gradyentinin çarpılma etkisi dahil edilmiş dinamik davranışları üzerindeki etkisi karışık sonlu elemanlarla incelenmiştir. Karışık sonlu elemanlar iki düğüm noktasına ve her düğüm noktasında üç adet yerdeğiştirme, üç adet dönme, bir eksenel kuvvet, iki kesme kuvveti, bir burulma moment ve iki eğilme momenti olmak üzere toplam yirmi dört adet serbestliğe sahiptir. Çarpılma fonksiyonu, yerdeğiştirme tabanlı sonlu eleman formülasyonunun, karışık sonlu eleman formülasyonuna entegre edilmesiyle dahil edilmiştir. Çeyrek daire FD konsol kirişlerin doğal frekansları, ve düzlem dışı yüklemeler altında yerdeğiştirme ve mesnet reaksiyonları karışık sonlu elemanlarla elde edilerek, ANSYS SOLID186 eleman sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Sonuçların oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. FD malzeme bileşenlerinin kesitte asimetrik ve simetrik varyasyonları

için malzeme gradyentinin dinamik davranış üzerindeki etkisi incelenmiştir. Asimetrik FD malzeme varyasyonunda serbest uç yerdeğiştirmeleri malzeme gradyentinin değişiminden simetrik FD malzeme varyasyonuna göre daha fazla etkilenmektedir. Asimetrik ve simetrik FD malzeme varyasyonlarının ikisinde de serbest uç yerdeğiştirmeleri serbest titreşim bölgesinde malzeme gradyentinin $m = 2$ olduğu durumda, fakat zorlanmış titreşim bölgesinde $m = 3$ olduğunda elde edilmiştir.

Teşekkür- Bu araştırma TÜBİTAK 2209-A programı kapsamında ve Kırklareli Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü tarafından desteklenmiştir (Proje No: KLÜBAP205).

KAYNAKLAR

[1] H.J. Xiang, J. Yang, Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction, Composites Part B: Engineering. 39 (2008) 292–303. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2007.01.005.

[2] S. Kapuria, M. Bhattacharyya, A.N. Kumar, Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation, Composite Structures. 82 (2008) 390–402. https://doi.org/10/dn3mz9.

[3] E. Demir, H. Çallioğlu, M. Sayer, Free vibration of symmetric FG sandwich Timoshenko beam with simply supported edges, IJEMS Vol.20(6) [December 2013]. (2013). http://nopr.niscair.res.in/handle/123456789/25586 (accessed December 21, 2020).

[4] T.-K. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, Composites Part B: Engineering. 55 (2013) 147–157. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.011.

[5] S. Li, J. Hu, C. Zhai, L. Xie, A Unified Method for Modeling of Axially and/or Transversally Functionally Graded Beams with Variable Cross-Section Profile, Mechanics Based Design of Structures and Machines. 41 (2013) 168–188. https://doi.org/10/gf8xd5.

[6] H. Çallıoğlu, E. Demir, Y. Yılmaz, M. Sayer, Vibration Analysis of Functionally Graded Sandwich Beam with Variable Cross-Section, Mathematical and Computational Applications. 18 (2013) 351–360. https://doi.org/10.3390/mca18030351.

[7] H. Su, J.R. Banerjee, C.W. Cheung, Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams, Composite Structures. 106 (2013) 854–862. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.06.029.

[8] T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, F. Inam, Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory, Meccanica. 49 (2014) 155–168. https://doi.org/10.1007/s11012-013-9780-1.

[9] M. Bourada, A. Kaci, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams, Steel and Composite Structures. 18 (2015) 409–423. https://doi.org/10.12989/scs.2015.18.2.409.

[10] M. Şimşek, Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions, Composite Structures. 133 (2015) 968–978. https://doi.org/10/f7v596.

[11] H. Su, J.R. Banerjee, Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams, Computers & Structures. 147 (2015) 107–116. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.10.001.

[12] Z. Su, G. Jin, Y. Wang, X. Ye, A general Fourier formulation for vibration analysis of functionally graded sandwich beams with arbitrary boundary condition and resting on elastic foundations, Acta Mechanica. 227 (2016) 1493–1514.
[13] L. Jing, P. Ming, W. Zhang, L. Fu, Y. Cao, Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method, Composite Structures. 138 (2016) 192–213. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.11.027.
[14] A.M. El-Ashmawy, M.A. Kamel, M.A. Elshafei, Thermo-mechanical analysis of axially and transversally Function Graded Beam, Composites Part B: Engineering. 102 (2016) 134–149. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.07.015.
[15] V. Kahya, M. Turan, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, Composites Part B: Engineering. 109 (2017) 108–115. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039.
[16] M. Şimşek, M. Al-shujairi, Static, free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, Composites Part B: Engineering. 108 (2017) 18–34. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.098.
[17] J.W. Lee, J.Y. Lee, Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression, International Journal of Mechanical Sciences. 122 (2017) 1–17. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.01.011.
[18] T.A. Huynh, X.Q. Lieu, J. Lee, NURBS-based modeling of bidirectional functionally graded Timoshenko beams for free vibration problem, Composite Structures. 160 (2017) 1178–1190. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.076.
[19] M. Zidi, M.S.A. Houari, A. Tounsi, A. Bessaim, S.R. Mahmoud, A novel simple two-unknown hyperbolic shear deformation theory for functionally graded beams, Structural Engineering and Mechanics. 64 (2017) 145–153. https://doi.org/10.12989/sem.2017.64.2.145.
[20] A. Karamanlı, Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory, Composite Structures. 189 (2018) 127–136. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.01.060.
[21] V. Kahya, M. Turan, Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element, Composites Part B: Engineering. 146 (2018) 198–212. https://doi.org/10/gdvj9d.
[22] W.-R. Chen, H. Chang, Vibration Analysis of Functionally Graded Timoshenko Beams, Int. J. Str. Stab. Dyn. 18 (2017) 1850007. https://doi.org/10.1142/S0219455418500074.
[23] Z. Su, G. Jin, T. Ye, Vibration analysis of multiple-stepped functionally graded beams with general boundary conditions, Composite Structures. 186 (2018) 315–323. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.018.
[24] I. Esen, Dynamic response of a functionally graded Timoshenko beam on two-parameter elastic foundations due to a variable velocity moving mass, International Journal of Mechanical Sciences. 153–154 (2019) 21–35. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2019.01.033.
[25] K. Koutoati, F. Mohri, E.M. Daya, Finite element approach of axial bending coupling on static and vibration behaviors of functionally graded material sandwich beams, Mechanics of Advanced Materials and Structures. 0 (2019) 1–17. https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1685144.
[26] M. Eltaher, Ş. Akbaş, Transient response of 2D functionally graded beam structure, Structural Engineering & Mechanics. 75 (2020) 357–367. https://doi.org/10.12989/sem.2020.75.3.357.

[27] E.F. Erdurcan, Y. Cunedioğlu, Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Material Coated Aluminum Beam, AIAA Journal. 58 (2020) 949–954. https://doi.org/10.2514/1.J059002.
[28] C.I. Le, N.A.T. Le, D.K. Nguyen, Free vibration and buckling of bidirectional functionally graded sandwich beams using an enriched third-order shear deformation beam element, Composite Structures. (2020) 113309. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113309.
[29] W.-L. Ma, Z.-C. Jiang, K.-Y. Lee, X.-F. Li, A refined beam theory for bending and vibration of functionally graded tube-beams, Composite Structures. 236 (2020) 111878. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111878.
[30] F. Rahmani, R. Kamgar, R. Rahgozar, Finite Element Analysis of Functionally Graded Beams using Different Beam Theories, Civil Engineering Journal. 6 (2020) 2086–2102. https://doi.org/10.28991/cej-2020-03091604.
[31] M.T. Piovan, S. Domini, J.M. Ramirez, In-plane and out-of-plane dynamics and buckling of functionally graded circular curved beams, Composite Structures. 94 (2012) 3194–3206. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.04.032.
[32] J. Fariborz, R.C. Batra, Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing logarithmic function of radius, Composite Structures. 210 (2019) 217–230. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.11.036.
[33] R.M. Jones, Mechanics of composite materials, 2nd ed, Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 1999.
[34] V. Yıldırım, Governing equations of initially twisted elastic space rods made of laminated composite materials, International Journal of Engineering Science. 37 (1999) 1007–1035. https://doi.org/10/d384x5.
[35] A. Bhimaraddi, K. Chandrashekhara, Some observations on the modeling of laminated composite beams with general lay-ups, Composite Structures. 19 (1991) 371–380. https://doi.org/10/fjj4db.
[36] U.N. Aribas, M. Ermis, N. Eratli, M.H. Omurtag, The static and dynamic analyses of warping included composite exact conical helix by mixed FEM, Composites Part B: Engineering. 160 (2019) 285–297. https://doi.org/10/gft72h.
[37] U.N. Aribas, M. Ermis, A. Kutlu, N. Eratli, M.H. Omurtag, Forced vibration analysis of composite-geometrically exact elliptical cone helices via mixed FEM, Mechanics of Advanced Materials and Structures. 0 (2020) 1–19. https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1824048.
[38] C.S. Jog, I.S. Mokashi, A finite element method for the Saint-Venant torsion and bending problems for prismatic beams, Computers & Structures. 135 (2014) 62–72. https://doi.org/10/gc6xzc.
[39] M.H. Omurtag, A.Y. Aköz, The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, Computers & Structures. 43 (1992) 325–331. https://doi.org/10/b644p8.
[40] J.T. Oden, J.N. Reddy, Variational methods in theoretical mechanics, Springer Science & Business Media, 2012.
[41] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, Journal of Engineering Mechanics. 85 (1959) 67–94.
[42] K.-J. Bathe, Finite Element Procedures, Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

LAZER KESİM TABLALARI İÇİN PNÖMATİK SAC KAYDIRMA SİSTEMİ GELİŞTİRİLMESİ, TASARIMI ve ÜRETİMİ

Bahattin NANE[1], Uğur KARANFİL[2]
[1,2]Durmazlar Makine Ar-Ge Merkezi, Bursa

ABSTRACT

Grills on the laser cutting machine's shuttle tables are deformed and bruised during the cutting operation. Slide and move the sheet to cutting position on those grills scratch the back side of raw sheet. Where both surfaces stainless steel sheets used as kitchen equipment, elevator cabin interior façades etc. these scratches are noticeably fault. Preventing this problem on the laser cutting machines which are commonly used for sheet metal production demanded by the users. For frustrate surface scratching, design study started for a system which break out between the shuttle table grills, transfer balls contacted with sheet surface and pneumatically driven. By means of this system not only stainless steel even 25 mm thick steel can be easily moved on shuttle table. For positioning frames and pneumatic cylinder which are compose the system special parts are designed and proper joint chosen. By using analysis of mechanism more linear movement gained than cylinders stroke. Also, software studies executed for use with current machines. Formed system protected by patent application.

Keywords: Sheet sliding; Pneumatic; Analysis of mechanism;

ÖZET

Lazer sac kesim makinelerinin mekik tablalarının üzerindeki ızgaralar kesim esnasında deforme olmakta ve zedelenmektedir. Bu ızgaraların temas ettiği yüzeyde sacların kaydırılması ve kesim konumuna götürülmesi ham haldeki sacın arka yüzeyini çizmektedir. Mutfak gereçleri, asansör kabin iç kaplamaları vb. paslanmaz sac yüzeylerin iki tarafının da görsel olabileceği ürünlerde çizilmeler hata olarak gözükmektedir. Sac levha üretiminde en çok kullanılan makinelerden lazer kesim tezgahlarında bu sorunun önlenmesi kullanıcılar tarafından talep edilmektedir. Yüzey çizilmelerini engellemek için mekik tabla ızgaralarının arasından çıkan ve sac yüzeyine transfer bilyalarının temas ettiği pnömatik tahrikli bir sistem tasarlanması amacıyla çalışma başlatılmıştır. Bu sistem sayesinde sadece paslanmaz saclar değil 25 mm kalınlığa kadar tüm saclar tabla üzerinde kolaylıkla hareket ettirilmektedir. Sistemi oluşturan gövdeler ve pnömatik silindirlerin tabla altına konumlandırılması için özel parça tasarımları yapılmış ve uygun mafsallar seçilmiştir. Mekanizma tekniği kullanılarak silindir stroğundan daha fazla doğrusal hareket elde edilmiştir. Ayrıca mevcut makinelerde kullanılması için yazılımsal çalışmalar da yapılmıştır. Ortaya çıkan sistem tasarımı patent başvurusu ile koruma altına alınmıştır.

Anahtar kelimeler: Sac Kaydırma, Pnömatik, Mekanizma Tekniği

GİRİŞ

Lazer ile kesim günümüz sac şekillendirme yöntemleri içerisinde vazgeçilmez bir imalat yöntemi haline gelmiştir. Pratik, hassas ve hızlı bir yöntem olması nedeniyle birçok endüstride parça üretimi için kullanılmaktadır. [1]

Son kullanıcıların makinelerden beklentisi bir süre sonra gelişmiş ve sadece kesim operasyonu değil. Kaliteli kesim ve parça görselliğini korumak gibi konularda beklentiler oluşmaya başlamıştır.

Endüstrinin birçok alanında kullanılan paslanmaz sacların lazer tezgahlarına yüklenmesi sırasında sacı taşıyan ızgara olarak tabir edilen ve kesim esnasında sacın altında dikey olarak duran şekilli plakalar kesim ışığında maruz kalarak zamanla deforme olurlar. Kesim öncesi ızgaraların üstüne bırakılıp daha sonra kesim konumuna hareket ettirilen sac levha ızgaraların üstündeki deformasyon ile çizilebilir. Eğer paslanmaz sacın iki tarafı da görülecek ise bu çizilmeler son üründe hata oluşturabilir.

Yapılacak çalışma ile paslanmaz sacların tabla üzerinde kesim konumuna götürülürken ızgaralara temas etmemesi amaçlanmıştır. Çalışma başında bu kapsam genişletilerek kesim kapasitesinde sacın kaldırılabilmesi ve hareket ettirilmesi halini almıştır. İlk müşteri talebine istinaden 4000x2000x25 mm kalınlığında sac kapasite olarak belirlenmiştir.

Mekik tabla altında kalan dar alanda motorize bir sistemin çalışması için yeterli alan oluşamayacağı öngörülmüştür. Bu yüzden pnömatik silindiler ile tahrik edilmiş ve mekanizma tekniğinden ve genel fizik ilkelerinden faydalanılarak sistem tasarımı tamamlanmıştır.

BULGULAR

Sistemde kullanılacak silindirlerin büyüklüklerinin belirlenmesi için öncelikli olarak pazarda bulunabilen silindir çapları incelenmiş ve 125 mm stroklu silindir kullanılması öngörülmüştür.

Tabla altında kalan boşluk ve diğer silindir bağlantı ekipmanlarının boyutları hesaba katıldığında 25°lik bir başlangıç açısı öngörülmüştür. Pnömatik hava basıncı saha şartlarında 6 bar olarak düşünülmüş fakat hat ve valf kayıpları öngörülerek 5 bar hava sistemde iş yapacak gibi düşünülüp aşağıdaki hesaplama ile bir silindirin kaldıracağı yük hesaplanmıştır.

$$F_s = P \cdot A_s$$

$$A_s = (\pi . d_s^2)/4 = (\pi . 125^2)/4 = 12271{,}8 mm^2$$

$$P = 5 \text{ bar} = 0{,}5 \text{ N/mm}^2$$

$$F_s = 0{,}5 \cdot 12271{,}8 = 6135{,}92 \text{ N}$$

Kaldırılacak toplam yük 1600 kg sac levha ve yaklaşık 400 kg sistem ağırlıkları olarak, toplam 2000 kg olarak belirlenmiştir.

$$F_t = m_t \cdot a = 2000 \cdot 9{,}81 = 19620 \text{ N}$$

Silindirin zemine 25° açıyla harekete başlayacağı ön görüldüğü için 1 silindirin düşey yönde uygulayabileceği kuvvet;

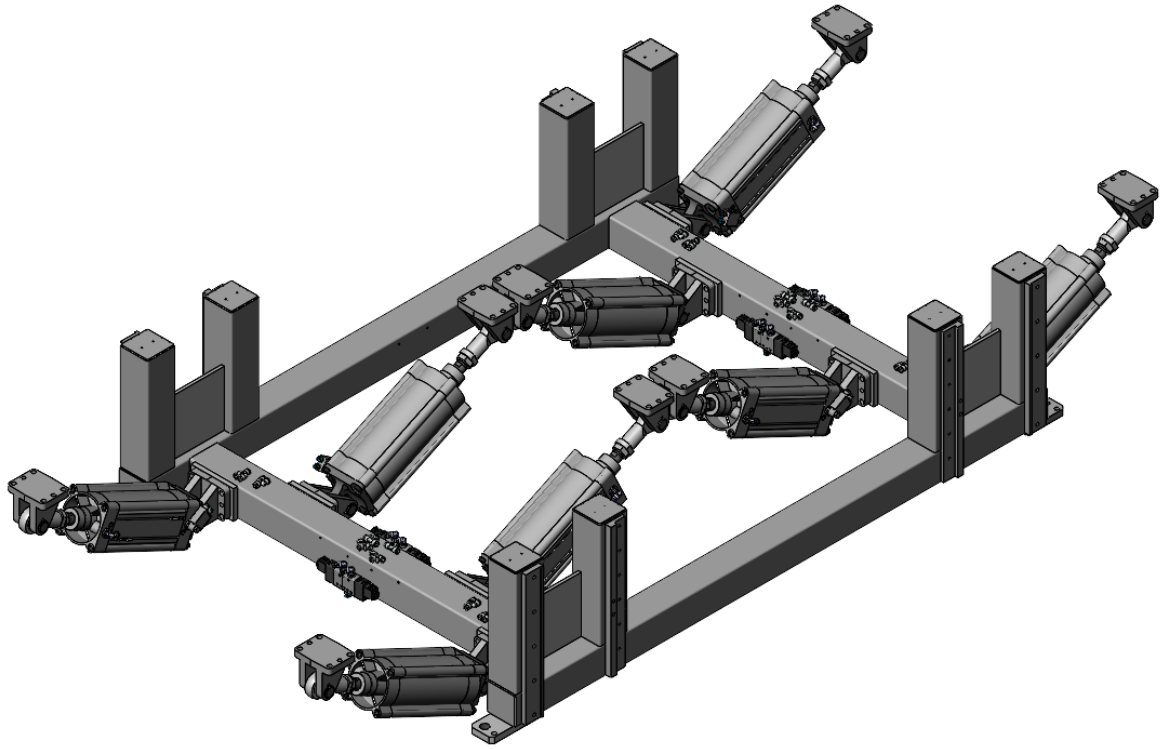
$$F_d = F_t \cdot \sin 30° = 6135{,}92 \cdot 0{,}4226 = 2593{,}16 \text{ N}$$

Toplam gerekli silindir miktarı ise;

$$n_s = F_t / F_d = 19620 / 3067,96 = 7,57$$

8 adet silindir ile sistem tasarımına devam edilmiştir.

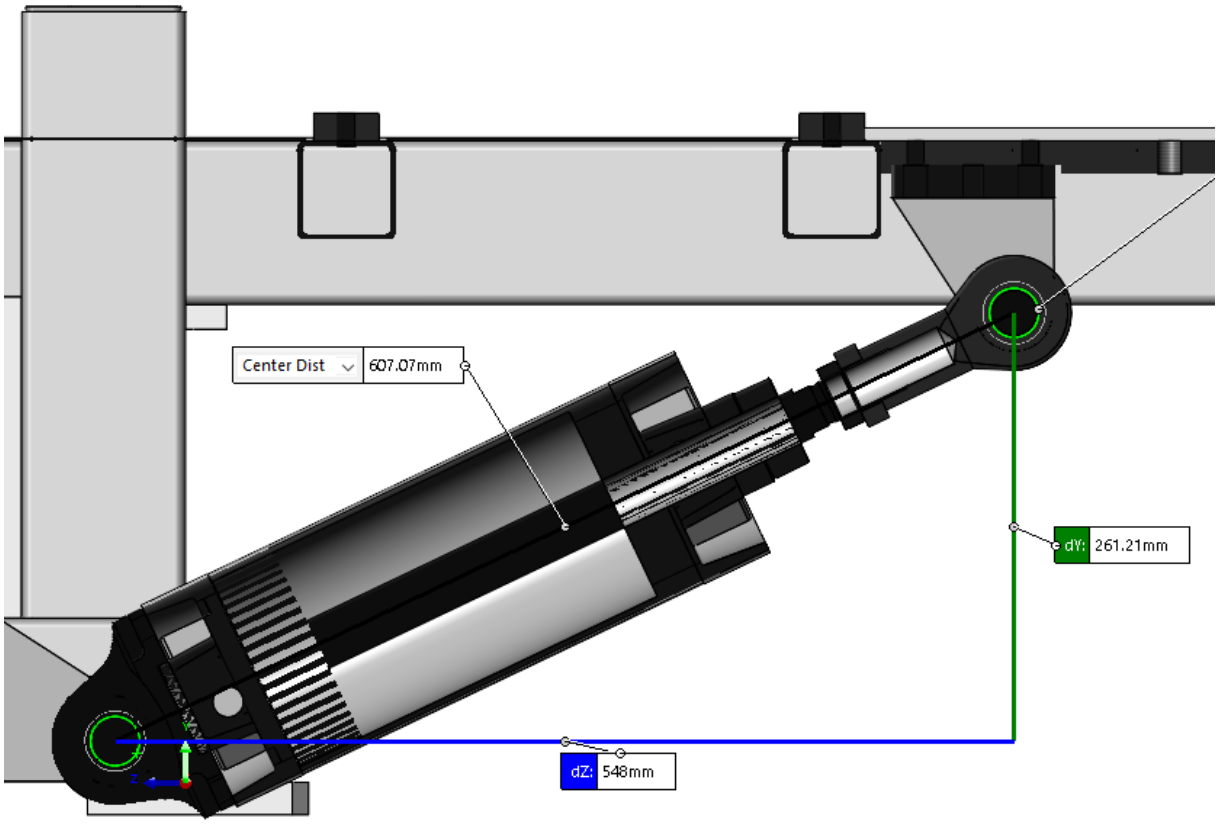
Resim-1 de görüleceği gibi silindiriler sabit bir şase üzerine mafsallanmış ve bağlandıkları şase profillerinin her iki tarafına ikişer silindir bağlanarak sistemin genel simetrisi korunmuştur. Bu tasarım aynı zamanda profil üzerinde oluşan çeki bası kuvvetlerinin dengelenmesi ve şase üzerine gelen yüklerin birbirini dengelemesini sağlayacaktır.



Resim-1

Sistemin mekanik hareketini sağlaması için silindirlerin bağlanacağı üst hareketli tabla yataklanmış olmalıdır. Sabit şase üzerine bağlanın kılavuzlar ve hareketli şase üzerine bağlanan yataklar ile bu geçekleştirilmiştir. Sistem birlikte çalışacağı mekik tablanın geometrisine uygun olarak 330 mm ölçüsünde bir düşey hareket sağlamalıdır. Bu hareketi sağlayabilmesi için seçilen silindirin stroğunun belirlenmesi gerekmektedir.

Silindirin kapalı durumunda Resim-2 de görülen durum oluşmaktadır. Burada oluşan dik üçgenin taban kenarı iki yatak arası mesafedir ve harekette değişmemektedir. Piston açılınca hipotenüs değişmekte ve bu da diğer taban kenarının uzunluğunu değiştirmektedir.



Resim-2

Piston açık durumda oluşan üçgen ile kapalı durumda oluşan üçgen arasında matematiksel bir bağlantı kurulmalıdır. Oluşacak ikinci üçgenin taban kenarlarından birisi 548 mm diğeri ise 261 mm üzerine istediğimiz strok olan 330 mm nin toplamı olan 591 mm olmalıdır. Bu bilgiler ışığında hipotenüs yani açık silindir uzunluğu;

$$L_h = (548^2 + 591^2)^{1/2} = 805{,}97 \text{ mm}$$

Silindir stroğu ise;

$$S_s = 805{,}97 - 607{,}07 = 198{,}90 \text{ mm}$$

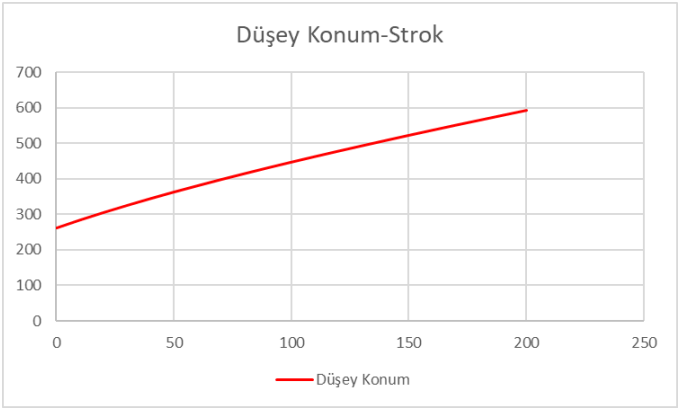
Tedarik edilebilecek silindirlerden 200 mm stroklu olan hazır olarak seçilir. Bu çözümde göz önünde bulundurulması gereken en önemli nokta 200 mm silindir ile 330 mm stroklu bir hareket yapılabileceğidir.

Grafik-1 de silindir stroğu ile düşey konum değişimi grafik ile gösterilmiştir. Grafiği oluşturmak için dik üçgen kenar uzunlakları pisagor bağıntısından faydalanılarak her strok için tablo ile hesaplanmıştır. Formüldeki s harfi silindir stroğunu belirtmektedir. Kenarlardan birisinin uzunluğu değişmediği ve silindir kapalı boyu bilindiği için bilinmeyen kenarın (düşey kenar) stroğa göre değişimi formüle edilmiştir.

$$(a^2 + b^2)^{1/2} = (c+s)^2$$

$$b = ((607{,}07 + s)^2 - 548^2)^{1/2}$$

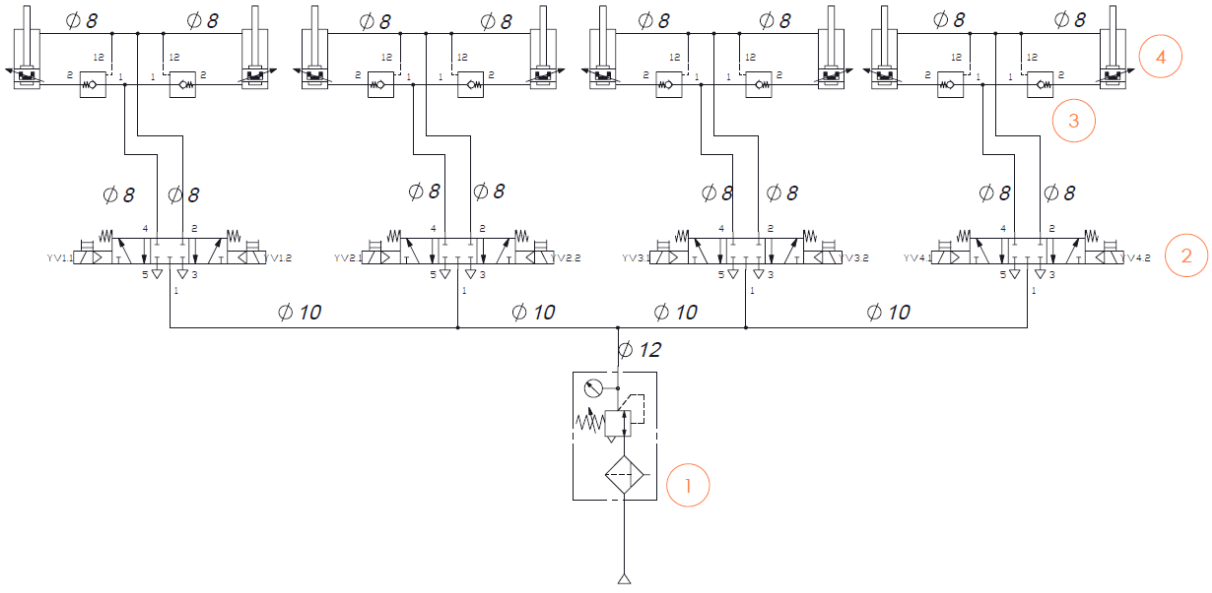
Mekaniğin en önemli dengelerinden birisi olan yoldan kazanılıp yükten kaybedildiği bir durum oluşmuştur. Sistemin çalışacağı alanın dar oluşu ve silindirlerin dikey olarak konumlandırılamaması nedeniyle bu yöntem ile hareketin gerçekleştirilmesine karar verilmiştir.



Grafik-1

Dengesiz yüklerin oluşma ihtimali bu sistemlerde bulunmaktadır. Sekiz adet silindirin çalışacağı bir sistemde pistonların senkron hareket ettirilmesi zamanla zorlaşabilir. Bunu engellemek için hava akışı dengeli bir şekilde bölünmüş ve dört adet valf yerleştirilerek her iki silindiri bir valf kontrol edecek şekilde sistemin pnömatik tasarımı gerçekleştirilmiştir.

Aynı zamanda aşağı yönde hareket emniyeti ve makine emniyet yönetmelikleri gereği aşağı yönde beklenmedik ani bir hareket olmaması için pnömatik uyarılı çekvalfler silindirin alt girişinekonuşlandırılmıştır. Şekil-1 de sistemin pnömatik devre şeması görülmektedir.



Şekil-1

KAYNAKLAR

[1] B. NANE, U. KARANFİL, R.DÖNMEZ, 6G İvmelenmeli Lazer Kesme Makinesi Tasarımı ve Prototip İmalatı, 4.ULUSLARARASI MÜHENDİSLİK VE TEKNOLOJİ YÖNETİMİ KONGRESİ, Kasım-2020, s.69

KARBON NANOTÜPLERLE GÜÇLENDİRİLMİŞ PANELLERİN KAYMA DEFORMASYON TEORİSİ ÇERÇEVESİNDE DOĞRUSAL SERBEST TİTREŞİM

Mahmure Avey[1] ve Francesco Tornabene[2]
[1]Uşak Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uşak
[2]Yenilik Mühendisliği Bölümü, Salento Üniversitesi, Lecce, İtalya

ABSTRACT

In this study, the free vibration analysis of composite spherical and hyperbolic-paraboloid panels reinforced with carbon nanotubes (CNTs) in the framework of shear deformation theory (SDT) is presented. The basic equations of composite shallow panels reinforced with carbon nanotubes based on the Donnell type shell theory are derived. Partial differential equations were transformed into the ordinary differential equation by applying Galerkin method and then obtained expression for the frequency of composite panels reinforced with carbon nanotubes based on the SDT. In numerical analysis, frequencies of composite panels reinforced with uniformly and nonuniformly patterned CNTs are discussed comparatively in the frame of SDT and classical shell theory (CST). Finally, the effects of CNT patterns in the matrix, volume fractions and shear strains on the vibration frequency are investigated.

Keywords: Carbon nanotube; nanocomposite; panel; frequency.

ÖZET

Bu çalışmada, karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit küresel ve hiperbolik-paraboloit (hipar) panellerin kayma deformasyonu çerçevesinde serbest titreşim analizi sunulmaktadır. Kayma deformasyon teorisi (KDT) kullanılarak karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin temel bağıntıları ve Donnell tipi kabuk teorisine dayalı temel denklemleri türetilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler Galerkin yöntemi uygulanarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş ve çözülerek KDT çerçevesinde karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin frekansı için ifade elde edilmiştir.Sayısal analizlerde, üniform dağılımlı ve heterojen desenli KNT'lerle güçlendirilmiş kompozit panellerin frekansları kayma deformasyon teorisi ve klasik kabuk teorisi çerçevesinde mukayeseli olarak tartışılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Karbon nanotüp; nanokompozit; panel; frekans.

GİRİŞ

Kompozit paneller yapısal uygulamalarda en çok kullanılan unsurlardan biri olup özellikle uzay araçlarında, makinelerde ve otomotiv sektöründe sıkça kullanılmaktadır. Çoğu havacılık ve uzay uygulamalarında, roket sistemlerinde paneller kaplama elemanı olarak kullanıldığı gibi basınçlı yakıt tankının bir parçası olarak da kullanılmaktadır [1-3]. Yapısal sistemler için çok sayıda gereksinim, iki alanın, yeni malzeme teknolojileri ve daha gelişmiş analitik yöntemlerin bir arada hızlı bir şekilde gelişimini sağlamıştır. Son yıllarda, çağdaş

endüstrilerin talebi üzerine, malzeme teknolojileri geleneksel materyallerden uzaklaşarak, daha verimli ve daha hafif araçların gereksinimlerini karşılamak için karbon nanotüplerle (KNT'lerle) güçlendirilmiş yeni nesil nano-kompozit malzemelerin üretimine başladı. Bu anlamda, 1991 yılında Iijima tarafından karbon nanotüplerin keşfi, nanoteknolojinin birçok pratik alanında bir dönüm noktası oldu ve kısa sürede onların çeşitli alanlarda geniş uygulamalarına yol açtır [4]. İçi boş uzun silindirik borular şeklindeki tek cidarlı karbon nanotüpler petek kafeste bir atomik karbon katmanından oluşur ve çapı 2-3 nanometre aralığında iken uzunluğu bir santimetreyi bile aşabilir. KNT özellikleri hakkında daha detaylı ayrıntı, Yakobson ve Avouris [5] çalışmasında sunulmaktadır. Ajayan vd. [6], çalışmasında hizalanmış karbon nanotüp dizileri üretmek için basit bir yöntem sunarak Karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozitlerin çeşitli mühendislik disiplinlerine uygulanmasına yol açmıştır. KNT'ler ile güçlendirilen nano-kompozitler, makine, havacılık, sivil ve biyomedikal dahil olmak üzere birçok alanda kullanılan yapı elemanları için şekillendirme malzemeleri olarak kullanılmaktadır [7]. Karbon nanotüplerle güçlendirilmiş fonksiyonel değişimli yapı elemanlarının titreşim davranışının araştırılması ile ilgili ilk girişim Shen [8] çalışmasında gerçekleştieilmiş ve bu çalışmayı takiben nanokompozit sığ panel ve kabukların titreşimleri ile ilgili bazı çalışmalar klasik kabuk teorisi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir [9,10]. Klasik kabuk teorisi (KKT), ince homojen izotropik yapı elemanları için makul sonuçlar vermesine rağmen, nispeten kalın kompozit kabukların titreşim problemlerinde yeterince gerçekçi sonuçlar vermediği ortaya çıkmıştır. Bu faktör, araştırmacıları titreşim problemlerinde nispeten kalın yapı elemanları için klasik kabuk teorisi yerine kayma deformasyon teorilerini kullanmaya sevk etmiştir. Klasik kabuk teorisindeki varsayımlara ek olarak, enine kayma deformasyonlarının etkisi dikkate alınarak çeşitli kayma deformasyon teorileri (KDT'ler) geliştirilmiştir [11-13]. KDT'ler çerçevesinde, panel tipi yapı elemanlarının temel diferansiyel denklemlerinin türetilmesi ve çözümü önemli ölçüde karmaşık hale gelmektedir. Bu nedenlerle geleneksel ve yeni nesil kompozitlerden oluşan yapı elemanlarının titreşim problemlerinin çözümüne yönelik çalışmaların sayısı daha çok KDT çerçevesindedir.

Bu çalışmada, karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin kayma deformasyonu teorisi çerçevesinde serbest titreşim probleminin çözümü sunulmaktadır. KDT kullanılarak karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin temel bağıntıları ve Donnell tipi kabuk teorisine dayalı lineer temel denklemleri türetilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler Galerkin yöntemi uygulanarak adi lineer diferansiyel denkleme dönüştürülmüş ve çözülerek KDT çerçevesinde karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin frekansı için ifade elde edilmiştir. Sayısal analizlerde, üniform dağılımlı ve heterojen desenli KNT'lerle güçlendirilmiş kompozit panellerin frekansları KDT ve klasik kabuk teorisi (KKT) çerçevesinde mukayeseli olarak tartışılmaktadır. Analizlerde, KNT'lerin polymer matris içindeki fonksiyonel dağılımının, hacim fraksiyonlarının ve kayma deformasyonun doğrusal titreşim frekansı üzerindeki etkileri araştırılmaktadır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

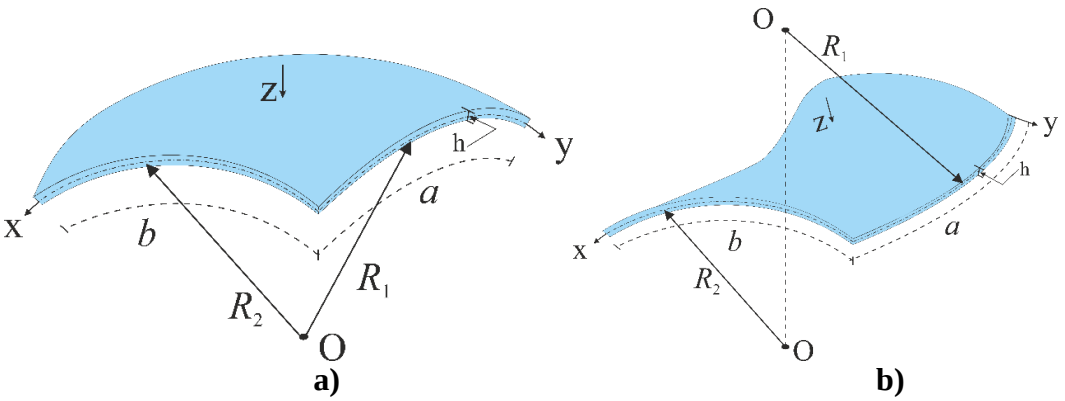
Şekil 1'de sunulan KNT takviyeli (a) küresel ve (b) hiperbolik-paraboloit panellerde xyz koordinat sisteminin orijin onların orta yüzeyinin sol köşesinde bulunmaktadır. z ekseni xy yüzeyine normal olup içe doğru yönelmektedir. x ve y eksenleri doğrultusunda panellerin boyutları a ve b, et kalınlığı ise h ile gösterilmektedir. x ve y yönlerindeki yer değiştirmeler u ve v ile z doğrultusundaki yer değiştirme ise w ile gösterilmektedir. KNT desenli panellerin x ve y doğrultularındaki eğrilik yarıçapları sırasıyla R_1 ve R_2 ile

gösterilmektedir (Bkz., Şekil 1). KNT'lerin hacim fraksiyonu panellerin kalınlık koordinatına bağlı lineer fonksiyon olarak aşağıdaki gibi modellenmektedir:

$$V_{\bar{z}}^{knt} = f_{\bar{z}}^{knt} V_{knt}^{*} \ (\bar{z} = z/h) \tag{1}$$

Burada V_{knt}^{*} KNT'nin total hacim fraksiyonu olup onun M_{cnt} kütlesi, ρ_{cnt} yoğunluğu ve matrisin ρ_m yoğunluğu ile aşağıdaki gibi ifade edilir [8]:

$$V_{knt}^{*} = \frac{M_{knt}}{M_{knt} + \dfrac{\rho_{knt}}{\rho_m}\left(1 - M_{knt}\right)} \tag{2}$$



a) **b)**

Şekil 1. KNT takviyeli (a) küresel ve (b) hiperbolik-paraboloit paneller ve koordinat sistemi

Ayrıca $f_{\bar{z}}^{knt}$ sürekli fonksiyon olup bu çalışmada iki farklı lineer fonksiyon biçiminde matematiksel olarak aşağıdaki gibi modellenmektedir [8]:

$$f_{\bar{z}}^{knt} = \begin{cases} 1 + 2\bar{z} \\ 4\left|\bar{z}\right| \end{cases} \tag{3}$$

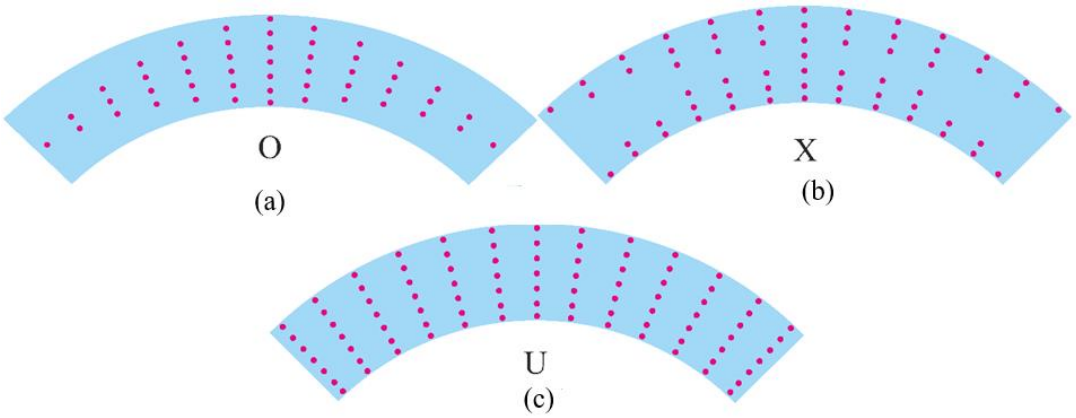
Bu fonksiyonların kalınlık boyunca dağılımı geometrik olarak gösterildiğinde $f_{\bar{z}}^{knt} = 1 + 2\bar{z}$ dağılımı O şeklinde ve $f_{\bar{z}}^{knt} = 4\left|\bar{z}\right|$ dağılımı ise X şeklinde olduğu görülmektedir. Ayrıca, $f_{\bar{z}}^{knt} = 1$ durumu KNT'lerin panelin (matrisin) kalınlık doğrultusunda üniform kısaltılmış olarak (U) dağılımını göstermektedir. U, O ve X desenli nanokompozit panellerin en kesiti Şekil 2'de gösterilmektedir. KNT desenli panellerin mekanik özellikleri, matematiksel olarak kalınlık koordinatının lineer fonksiyonları olarak aşağıdaki gibi modellenmiştir [2, 8, 11]:

$$E_{\bar{z}}^{11} = \eta_1 V_{\bar{z}}^{knt} E_{knt}^{11} + V_m E_m, \ \frac{\eta_2}{E_{\bar{z}}^{22}} = \frac{V_{\bar{z}}^{knt}}{E_{knt}^{22}} + \frac{V_m}{E_m}, \ \frac{\eta_3}{G_{\bar{z}}^{12}} = \frac{V_{\bar{z}}^{knt}}{G_{knt}^{12}} + \frac{V_m}{G_m}, \ G_{\bar{z}}^{13} = G_{\bar{z}}^{12}, \ G_{\bar{z}}^{23} = 1.2 G_{\bar{z}}^{12} \tag{4}$$

Burada $\eta_k (k = 1,2,3)$ verimlilik parametrelerini belirtir ve değerleri analizler kısmında sunulacaktır. V_m matrisin hacim fraksiyonunu, E_m, E_{knt}^{ij} ve G_{knt}^{12} sırasıyla matris ve KNT'nin

elastisite modüllerini belirtmektedir. Bileşenlerin hacim fraksiyonları $V_{\bar{z}}^{knt}+V_m=1$ eşitliğini sağlarken, nanokompozitlerin Poisson oranı ve yoğunluğu pozisyona bağlı değildir ve sabit kabul edilerek şu şekilde ifade edilir:

$$\nu^{12}=V_{knt}^{*}\nu_{knt}^{11}+V_m\nu_m,\ \ \rho=V_{knt}^{*}\rho_{knt}+V_m\rho_m \tag{5}$$



Şekil 2. Çeşitli KNT desenli panellerin en kesiti (a) O desenli, (b) X desenli ve (c) U desenli

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı, KNT'lerle takviye edilen paneller için gerilme-deformasyon ilişkilerinin matematiksel modeli aşağıdaki gibi oluşturulabilir [8, 10]:

$$\begin{bmatrix}\sigma^{11}\\ \sigma^{22}\\ \sigma^{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{\bar{z}}^{11} & Q_{\bar{z}}^{12} & 0\\ Q_{\bar{z}}^{21} & Q_{\bar{z}}^{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{\bar{z}}^{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{11}\\ e^{22}\\ e^{12}\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^{13}\\ \sigma^{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{\bar{z}}^{55} & 0\\ 0 & Q_{\bar{z}}^{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{13}\\ e^{23}\end{bmatrix} \tag{7}$$

Burada $[\sigma]$ ve $[e]$ gerilme ve deformasyon tansörleri olup $Q_{\bar{z}}^{ij}(i=1,2,j=1,2,3)$ KNT desenli panellerin mekanik özelliklerini karakterize etmektedir:

$$\begin{aligned}&Q_{\bar{z}}^{11}=\frac{E_{\bar{z}}^{11}}{1-\nu^{12}\nu^{21}},Q_{\bar{z}}^{12}=\frac{\nu^{21}E_{\bar{z}}^{11}}{1-\nu^{12}\nu^{21}}=\frac{\nu^{12}E_{\bar{z}}^{22}}{1-\nu^{12}\nu^{21}}=Q_{\bar{z}}^{21},\ Q_{\bar{z}}^{22}=\frac{E_{\bar{z}}^{22}}{1-\nu^{12}\nu^{21}}\\ &Q_{\bar{z}}^{44}=G_{\bar{z}}^{23},\ Q_{\bar{z}}^{55}=G_{\bar{z}}^{13},\ Q_{\bar{z}}^{66}=G_{\bar{z}}^{12}\end{aligned} \tag{8}$$

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisinin varsayımlarına dayanarak, enine kayma gerilmeleri, orta yüzeyin normali ile oluşan $\psi_1(x,y,t)$ ve $\psi_2(x,y,t)$ dönme açısı fonksiyonları ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir [11]:

$$\sigma^{13} = (1-4\bar{z}^2)\psi_1(x,y,t),\ \sigma^{23} = (1-4\bar{z}^2)\psi_2(x,y,t) \tag{9}$$

Burada kayma deformasyon fonksiyonları parabolik olarak, yani $\varphi_{,z} = 1-4\bar{z}^2$ şeklinde değişmekte olup t ise zamandır. Bu çalışmada, Donnell tipi doğrusal kabuk teorisi kullanılarak, KNT desenli çift eğrilikli paneller için onların kalınlığının herhangi noktasındaki deformasyonların orta yüzeydeki deformasyonlar, eğrilikler ve dönme açıları arasındaki ilişki şu şekilde oluşturulur [10, 14]:

$$\begin{aligned} e^{11} &= e_0^{11} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + J_{\bar{z}}^1\frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \quad e^{22} = e_0^{22} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + J_{\bar{z}}^2\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ e^{12} &= e_0^{12} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + J_{\bar{z}}^1\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + J_{\bar{z}}^2\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{aligned} \tag{10}$$

Burada şu tanımlar geçerlidir:

$$e_0^{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1},\ e_0^{22} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{w}{R_2},\ e_0^{12} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y},\ J_z^1 = h\int_0^{\bar{z}} \frac{1-4\bar{z}^2}{G_{\bar{z}}^{13}}\mathrm{d}\bar{z},\ J_z^2 = h\int_0^{\bar{z}} \frac{1-4\bar{z}^2}{G_{\bar{z}}^{23}}\mathrm{d}\bar{z} \tag{11}$$

KNT desenli paneller için kuvvetler ve momentler aşağıdaki integrallerden bulunur [14]:

$$\left(T_{ij},\ Q_j\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}, \sigma_{1j_1}\right)\mathrm{dz},\ \ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}\,\mathrm{z}\,\mathrm{dz} \quad (i, j = 1,2,\ j_1 = 2,3) \tag{12}$$

Burada T_{ij} düzlem içi kuvvet ve Q_j kayma kuvvet bileşenleri, M_{ij} ise moment bileşenleridir. Airy gerilme fonksiyonu Φ ile düzlem içi kuvvetler aşağıdaki gibi tanımlanır [14]:

$$T_{11} = h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, T_{22} = h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, T_{12} = -h\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{13}$$

Çift eğriliğe sahip nanokompozit panellerin dinamik stabilite ve deformasyon uygunluk denklemlerinin türetmek için, (10) bağıntısı (6)'da yerine yazılıp sonucu (12) integrallerinde dikkate alındıktan sonra elde edilen, moment, kuvvet ve orta yüzeydeki deformasyon bileşenleri temel denklemlerde [14] yerine yazıldığında ve (13) bağıntıları da göz önüne alındığında bazı matematiksel işlemlerden sonra aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} &L_{11}(\Phi) + L_{12}(w) + L_{13}(\psi_1) + L_{14}(\psi_2) = 0 \\ &L_{21}(\Phi) + L_{22}(w) + L_{23}(\psi_1) + L_{24}(\psi_2) = 0 \\ &L_{31}(\Phi) + L_{32}(w) + L_{33}(\psi_1) + L_{34}(\psi_2) = 0 \\ &L_{41}(\Phi) + L_{42}(w) + L_{43}(\psi_1) + L_{44}(\psi_2) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Burada $L_{ij}(i=1,2,...,4,\ j=1,2,..,4)$ diferansiyel operatörlerdir [10, 13]. KNT takviyeli paneller kenarlarından basit mesnetli sınır koşullarına tabi olduğu varsayıldığında, $w,\ \phi, \psi_1,\ \psi_2$ için aşağıdaki yaklaşım fonksiyonları seçilebilir:

$$\begin{aligned} w &= f(t)\sin(i_1 x)\sin(j_1 y),\ \Phi = \phi_0(t)\sin(i_1 x)\sin(j_1 y), \\ \psi_1 &= \psi_{01}(t)\cos(i_1 x)\sin(j_1 y),\ \psi_2 = \psi_{02}(t)\sin(j_1 x)\cos(j_1 y) \end{aligned} \tag{15}$$

Burada $f(t),\ \phi_0(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$ zaman bağlı fonksiyonları olup $i_1 = \dfrac{i\pi}{a}$, $j_1 = \dfrac{j\pi}{b}$ dir, *(i, j)* ise titreşim modudur. (15) fonksiyonları (14) denklemler sistemine ikame edilerek $\Lambda = \{(x,y): 0 \le x \le a,\ 0 \le x \le b\}$ integralleme bölgesinde, Galerkin Yöntemi uygulandığında, bazı işlemlerden sonra KNT takviyeli çift eğrilikli kompozit panellerin KDT çerçevesinde serbest titreşim frekansı için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\omega_{KDT} = \sqrt{\frac{\Gamma_4\Gamma_1 - \Gamma_2\Gamma_3}{\rho h \Gamma_1}} \tag{16}$$

Burada, $\Gamma_i(i=1,2,3,4)$ KNT takviyeli panellerin fiziksel değişkenleriyle ilgilidir [11]. Boyutsuz frekans parametresi için şu ifade kullanılmaktadır:

$$\omega_{1KDT} = \omega_{KDT} h\sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}} \tag{17}$$

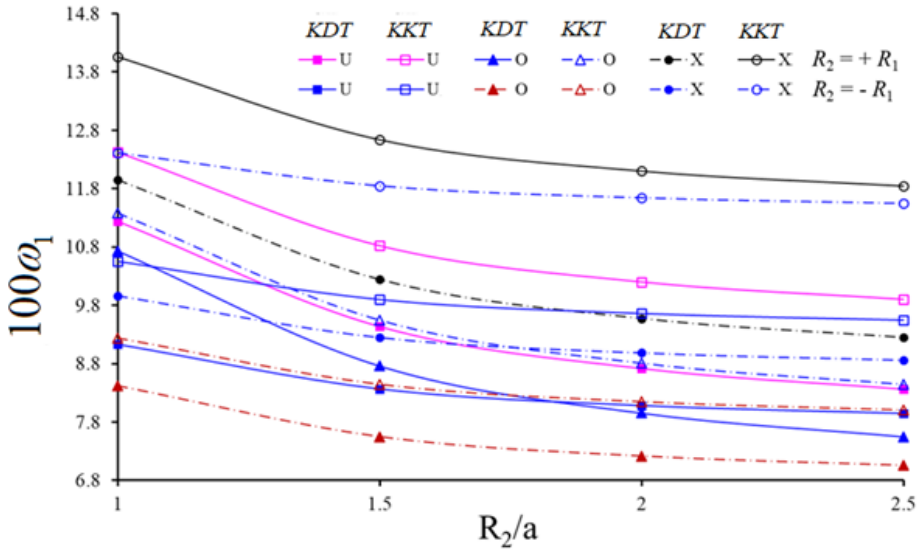
(16) ve (17) ifadelerinde $R_2 = -R_1$ yazıldığında elde edilen ifadeler, KDT çerçevesinde hiperbolik-paraboloit panelin boyutlu ve boyutsuz frekanslarını ifade etmektedir. Temel bağıntılarda enine kayma gerilmeleri σ^{13} ve σ^{23} dikkate alınmadığında, (16) ve (17) ifadeleri KKT çerçevesinde boyutlu ve boyutsuz frekanslarının ifadelerine dönüşür.

SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal analizlerde (10,10) tek duvarlı KNT'lerle güçlendirilmiş PMMA adı verilen bir poli (metil metakrilat) kullanılmaktadır. PMMA matrisinin elastik özellikleri şöyledir: $E_m = 2.5\,\text{GPa}$, $\nu_m = 0.34$ ve $\rho_m = 1150\,\text{kg/m}^3$. (10,10) tek duvarlı KNT'nin boyutları ve mekanik özellikleri şu şekilde tanımlanır: $r = 9.26\,\text{nm},\ a_1 = 0.68\,\text{nm},\ h_1 = 0.067\,\text{nm}$ ve $E_{knt}^{11} = 5.6466\,\text{TPa},\quad E_{knt}^{22} = 7.08\,\text{TPa},\ G_{knt}^{12} = 1.9445\,\text{TPa},\ \nu_{knt}^{12} = 0.175$ ve $\rho_{knt} = 1400\,\text{kg/m}^3$. KNT'lerin toplam hacim fraksiyonları ve verimlilik parametreleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır: $V_{knt}^* = 0.12$ ise $\eta_1 = 0.137,\ \eta_2 = 1.022,\ \eta_3 = 0.715$, $V_{knt}^* = 0.17$ ise $\eta_1 = 0.142,\ \eta_2 = 1.626,\ \eta_3 = 1.138$ ve $V_{knt}^* = 0.28$ ise $\eta_1 = 0.141,\ \eta_2 = 1.585,\ \eta_3 = 1.109$ [9].

Çeşitli KNT takviyeli küresel ve hiperbolik-paraboloit panellerin boyutsuz serbest titreşim frekansı değerlerinin R_2/a oranına bağlı değişimleri Şekil 3'de sunulmaktadır. KNT dağılımı olarak U, O ve X desenleri dikkate alınırken hacim değişim oranı olarak da V_{knt}^*=0.17 hesaba katılmaktadır. Kullanılan diğer panel parametreleri ise şu şekildedir: $R_2/a = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$, $a/h = 15$, $a/b = 0.5$ ve $(i,j) = (1,1)$. Şekil 3'den de görüleceği gibi, R_2/a oranının artışına bağlı olarak boyutsuz serbest titreşim frekansı değerleri her iki

panelde da azalmaktadır. Her iki panel kendi aralarında mukayese edildiğinde, KNT takviyeli küresel panelin serbest titreşim frekansı değerleri aynı orijinli hiperbolik-paraboloit panel için elde edilen frekans değerlerinden daha büyük olup her iki panel arasındaki frekans değer farkı R_2 / a oranının artışına bağlı olarak azalmaktadır. Bu azalış en hızlı O desenli panelde olurken en yavaş X desenli panelde meydana gelmektedir. Ayrıca, her iki panelde U deseni için ortaya çıkan serbest titreşim frekansı değerleri X deseninde elde edilen frekans değerlerinden küçük olurken O desenindeki frekans değerlerinden büyük olmaktadır. Boyutsuz serbest titreşim frekansına desen etkisi her iki panelde R_2 / a oranının artışına bağlı artmaktadır. Örneğin, X deseninin frekansa etkisi R_2 / a oranının 1'den 2.5'e artışı için hiperbolik-paraboloit panelde KDT ve KKT durumlarında sırasıyla (%2.51) ve (%3.41) artarken, küresel panelde söz konusu etki sırasıyla (%4.23) ve (%6.5) artış göstermektedir. Ayrıca O deseninin etkisi X deseninin etkisinden daha küçük olmaktadır. Her iki desen arasındaki bu etki farkı, $R_2 / a = 1$ için küresel panelde KDT ve KKT durumlarında sırasıyla (%1.76) ve (%4.71) olurken, hiperbolik-paraboloit panelde KDT ve KKT durumlarında sırasıyla (%1.26) ve (%5) olmaktadır. Ayrıca, her iki desen arasındaki etki farkı, R_2 / a oranının 1'den 2.5'e artışı için her iki panelde KDT durumunda (%0.9) civarı ve KKT durumunda ise daha da küçülerek (%0.2) civarında değişmektedir. KDT ve KKT durumları arasındaki desen etki farkı R_2 / a oranının artışı için artarken her iki panelde bu farkın en büyük değeri O deseni için (%5) civarı ve X deseni için (%9.3) civarı olmaktadır. Her iki panel kendi aralarında mukayese edildiğinde, KNT takviyeli küresel panelde ortaya çıkan desen etkisi hiperbolik-paraboloit panel için elde edilen desen etkisinden daha küçük olup her iki panel arasındaki desen etki farkı R_2 / a oranının 1'den 2.5'e artışına bağlı olarak O deseninde KDT ve KKT durumlarında sırasıyla (%1.83) ve (%2.68), X deseninde KDT ve KKT durumlarında sırasıyla (%1.72) ve (%3.1) azalmaktadır. Serbest titreşim frekansına kayma deformasyon etkisi her iki panelde R_2 / a oranının artışına bağlı olarak artarken bu artış KNT takviyeli küresel panelde daha hızlı olmaktadır. Örneğin, kayma deformasyon etkisi R_2 / a oranının 1'den 2.5'e artışı için küresel panelde U, O ve X desenlerinde sırasıyla (%6), (%4.9) ve (%7) artarken, hiperbolik-paraboloit panelde söz konusu desenlerde sırasıyla (%3.3), (%3) ve (%3.5) artmaktadır. Her iki panel kendi aralarında mukayese edildiğinde, kayma deformasyon etkisi hiperbolik-paraboloit panelde daha büyük olup her iki panel arasındaki kayma deformasyon etki farkı R_2 / a oranının 1'den 2.5'e artışı için U, O ve X desenlerinde sırasıyla (%2.7), (%1.8) ve (%3.4) civarı azalmaktadır.



Şekil 3. Çeşitli KNT desenli küresel ve hiperbolik-paraboloit panellerin boyutsuz serbest titreşim frekansı değerlerinin R_2 / a oranına bağlı değişimleri

SONUÇLAR

Bu çalışmada, karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin kayma deformasyonu çerçevesinde serbest titreşim probleminin çözümü sunulmaktadır. KDT kullanılarak karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin temel bağıntıları ve Donnell tipi kabuk teorisine dayalı temel denklemleri türetilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemler Galerkin yöntemi uygulanarak adi diferansiyel denkleme dönüştürülmüş ve çözülerek KDT çerçevesinde karbon nanotüplerle güçlendirilmiş kompozit panellerin frekansı için ifade elde edilmiştir. Analizlerde, KNT'lerin polymer içindeki dağılımının, hacim fraksiyonlarının ve kayma deformasyonun doğrusal titreşim frekansı üzerindeki etkileri araştırılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Chakravorty D., Bandyopadhyay J.N. 1995. On the free vibration of shallow shells. Journal Sound Vibration 185(4), 673–684.

[2] Eschenauer H, Olhoff N, Schnell W. 1997. Applied Structural Mechanics: Theory of Shallow Shells. Springer 241-300.

[3] Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Reddy J.N. 2014. Winkler-Pasternak foundation effect on the static and dynamic analyses of laminated doubly-curved and degenerate shells and panels. Composite Part B-Engineering 57, 269-96.

[4] Iijima S. 1991. Helical microtubules of graphitic carbon. Nature 354, 56–58.

[5] Yakobson B.I., Avouris P. 2001. Mechanical properties of carbon nanotubes. Topics in Applied Physics 80:287–327.

[6] Ajayan P.M., Stephan O., Colliex C., Trauth D. 1994. Aligned carbon nanotube arrays formed by cutting a polymer resin-nanotube composite. Science 265, 1212-1214.

[7] Moniruzzaman M., Winey K.I. 2006. Polymer nanocomposites containing carbon nanotubes. Macromolecules 39, 5194- 5205.

[8] Shen H.S. 2009. Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments. Composite Structures 91(1), 9–19.

[9] Lei ZX, Zhang LW, Liew KM. 2015. Vibration analysis of CNT-reinforced functionally graded rotating cylindrical panels using the element-free Kp-Ritz Method. Composites Part B Engineering 77, 291-303.

[10] Avey, M., Yusufoglu, E. 2020. On the solution of large-amplitude vibration of carbon nanotube-based doubly-curved shallow shells. Mathematics Methods in Applied Sciences 1, 1–13: https://doi.org/10.1002/mma.6820.
[11] Ambartsumian S.A. 1964. Theory of Anisotropic Shells. TT F-118; NASA: Washington, D.C., USA.
[12] Reddy J.N. 2004. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis, Boca Raton, CRC Press.
[13] Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N. 2013. General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. Composite Structures 95, 639-666.
[14] Volmir AS. Stability of Elastic Systems. Nauka: Moscow; 1967. English Translation: ForeignTech. Division, Air Force Systems Command. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AD 628508.

WİNKLER ZEMİNİ ÜZERİNDEKİ KARBON NANOTÜPLER İÇEREN İNCE SIĞ SİLİNDİRİK PANELLERİN LİNEER OLMAYAN DAVRANIŞLARI

Abdullah Avey[1] ve Ferruh Turan[2]

[1]Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Isparta

[2]Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Samsun

ABSTRACT

This study discusses the nonlinear free vibration behavior of thin shallow composite cylindrical panel containing carbon nanotubes (CNTs) with uniform and functionally graded patterns resting on the Winkler foundation. First, the material properties of the thin shallow cylindrical panels containing CNTs with uniform and functional graded patterns are modeled. Then, considering the von-Karman type non-linearity, CNT patterned thin shallow cylindrical panel on the Winkler foundation are formed, and then nonlinear differential equations of motion are derived. Using the Galerkin method and then the variational method, the basic equations are solved and the expression for the frequency- amplitude relation of shallow cylindrical panel containing CNTs on the Winkler foundation is found. After validating the methodology, the effects of CNT, Winkler foundation, nonlinearity, and patterns on frequency parameters together and separately are investigated.

Keywords: CNT; nanocomposite; shallow cylindrical panel; nonlinearity; functionally graded; vibration; nonlinear frequency

ÖZET

Bu bildiride, Winkler zemini üzerinde bulunan karbon nanotüplerle (KNT'lerle) takviye edilen, düzgün ve doğrusal fonksiyon şekilli profillere sahip ince sığ kompozit panelin doğrusal olmayan serbest titreşim davranışı tartışılmaktadır. İlk olarak, düzgün ve fonksiyonel olarak dağılımlı KNT'ler içeren silindirik panelin malzeme özellikleri modellenmiştir. Daha sonra, von-Karman tipi doğrusal olmama dikkate alınarak, Winkler zemini üzerinde bulunan KNT'ler içeren silindirik panel-zemin ilişkileri oluşturulmuş ve ardından hareketin doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri türetilmiştir. Galerkin yöntemi ve ardından varyasyonel yöntem kullanılarak temel denklemler çözülmüş ve Winkler zemini üzerindeki doğrusal olmayan serbest titreşim frekansının genliğe bağlı ifadesi bulunmuştur. Metodolojinin geçerliliği doğrulandıktan sonra, KNT'nin, Winkler zeminin, doğrusal olmamanın ve profillerin birlikte ve ayrı ayrı frekans parametreleri üzerindeki etkileri araştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: KNT; nanokompozit; sığ silindirik panel; doğrusal olmama; fonksiyonel derecelendirme; titreşim; doğrusal olmayan frekans

GİRİŞ

Son yıllarda nano-teknolojinin hızlı gelişimi, nanotüplerin üretimini kolaylaştırmış ve uygulama alanlarını büyük ölçüde genişletmiştir. Iijima tarafından üretilen karbon nanotüpler,

çeşitli endüstrilerde ve gelecekte kullanım için yüksek potansiyele sahip yeni çağ materyallerde kullanılmaktadır [1,2]. Üstün özelliklere sahip KNT'lerin en önemli uygulama alanlarından biri, geleneksel kompozitlerde takviye elemanı olarak kullanılabilmeleridir. Karbon nanotüplerle takviye edilmiş kompozitlerin mekanik, termal ve elektriksel özellikleri önemli ölçüde geliştirilir ve yapısal elemanların direnci ve mukavemeti önemli ölçüde artar [3]. Bu gereksinimler, düzgün ve heterojen profilli karbon nanotüpler içeren nanokompozit yapıların doğrusal olmayan titreşim problemlerine araştırmacıların ilgisini artırmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) KNT'lerle güçlendirilmiş (FD-KNT-G) kompozit yapı elemanlarının doğrusal olmayan titreşimi ilk olarak Shen ve Xiang [4] çalışmasında ele alınmıştır. Bu çalışmanın ardından, KNT'ler içeren bazı yapı elemanlarının doğrusal olmayan serbest titreşim problemleri çözümüne ilişkin çalışmalar gerçekleştirilmiştir [5,6].

KNT içeren kompozitler, yalnızca havacılık endüstrisinde değil, aynı zamanda metallere kıyasla daha yüksek sertlik ve hafif ağırlık, korozyon direnci, uzun yorulma ömrü gibi birçok benzersiz avantajları nedeniyle çeşitli mühendislik uygulamalarında giderek daha sık kullanılmaktadır. Düzgün ve fonksiyonel dağılımlı karbon nanotüpler içeren kompozit yapılar, inşaat ve makine mühendisliği, nükleer enerji santralleri, vb. alanlarda da kullanıldığından değişik zemin türleri ile temasta olmak zorundadır. Bu tür zemin modellerinden biri de iyi bilinen Winkler zemin modelidir [7]. Karbon nanotüpler içeren yapısal elemanların titreşimlerini modellerken, malzemeleri fonksiyonel derecelendirilmiş hale getiren takviyenin ve elastik temellerin frekans-genlik ilişkileri üzerindeki etkilerini bir arada incelemek gerekmektedir. Literatürde KNT içeren yapı elemanları-zemin etkileşimi üzerine bazı çalışmalar vardır ve bunların çoğu doğrusal titreşim problemlerinin çözümüne adanmıştır [8-12]. Literatür taraması, elastik zemin üzerindeki KNT'leri içeren sığ silindirik panellerin doğrusal olmayan titreşim tepkilerinin yeterince araştırılmadığını ortaya koymaktadır.

Bu bildiride, Winkler zemini üzerinde bulunan karbon nanotüplerle güçlendirilen, düzgün ve doğrusal fonksiyon şekilli profillere sahip ince sığ kompozit panellerin doğrusal olmayan serbest titreşim davranışı tartışılmaktadır.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Şekil 1'de sunulan, Winkler zemin üzerine oturan, uzunluğu a yarıçapı R ve kalınlığı h olan KNT ile güçlendirilmiş silindirik panelin orta yüzeyinde seçilen $Ox_1x_2x_3$ koordinat sisteminin x_3 ekseni x_1x_2 yüzeyine normal olup içe doğru yönelmektedir. x_1, x_2 ve x_3 eksenleri doğrultusundaki yerdeğiştirmeler sırasıyla u, v ve w ile gösterilmektedir. Şekil 1'de gösterildiği gibi, KNT ile güçlendirilmiş silindirik panel matematiksel olarak aşağıdaki gibi modellenen Winkler elastik zemini üzerine oturtulmuştur [7]:

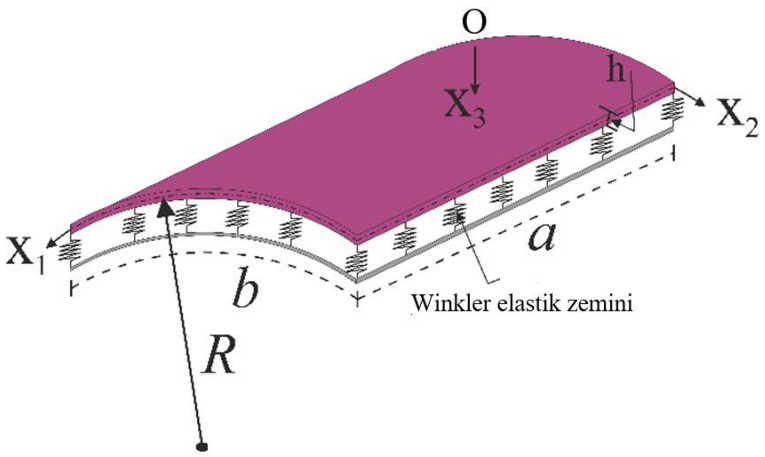
$$K(w) = kw \tag{1}$$

Burada k (birimi Pa/m) Winkler zemin katsayısıdır.

Fonksiyonel olarak derecelendirilmiş KNT ile güçlendirilmiş (FD-KNT-G) silindirik panel aşağıdaki özelliklere sahiptir [4]:

$$Y_{11}^{\bar{x}_3} = \eta_1 V_{KN}^{\bar{x}_3} Y_{11}^{KN} + V_m Y^m,\ \frac{\eta_2}{Y_{22}^{\bar{x}_3}} = \frac{V_{KN}^{\bar{x}_3}}{Y_{22}^{KN}} + \frac{V_m}{Y^m},\ \frac{\eta_3}{Y_{12}^{\bar{x}_3}} = \frac{V_{KN}^{\bar{x}_3}}{Y_{12}^{KN}} + \frac{V_m}{Y^m},$$

$$\nu_{12} = V_{KN}^{*} \nu_{12}^{KN} + V_m \nu^m,\ \rho_1^{\bar{x}_3} = V_{KN}^{*} \rho^{KN} + V_m \rho^m,\ \bar{x}_3 = x_3 / h \tag{2}$$



Şekil 1. Winkler elastik zemine oturan KNT ile güçlendirilmiş silindirik panel

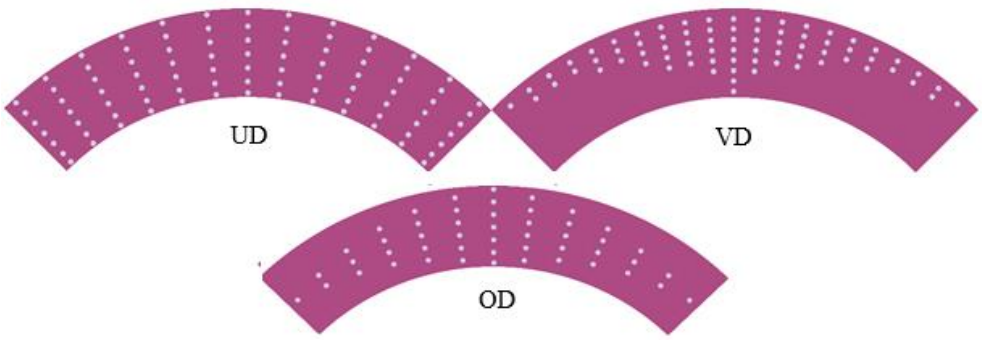
Burada KNT ve silindirik panelin elastik özellikler sırasıyla $Y_{ij}^{KN}(i,j=1,2)$ ve Y^m , G^m ile yoğunluklar ise ρ^{KN} ve ρ^m ile gösterilir; $\eta_j(\mathrm{j}=1,2,3)$ ise KNT'ler için verimlilik parametrelerini gösterir; $V_{KN}^{\bar{x}_3}$ ve V^m ise $V_{KN}^{\bar{x}_3}+V_m=1$ olacak şekilde sırasıyla KNT'lerin ve silindirik panelin hacim kesir oranı olup KNT'nin total hacim kesir oranı için şu ifade geçerlidir [4]:

$$V_{KN}^{*}=\frac{w_{KN}}{w_{KN}+(\rho^{KN}/\rho^{m})(1-w_{KN})} \tag{3}$$

Burada w_{KN} KNT'nin kütlesi ve V_{KN}^{*} KNT'nin total hacim kesir oranı olup aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Bkz., Şekil 2)

$$V_{KN}^{\bar{x}_3}=\begin{cases}V_{KN}^{*} & \text{ise } UD\\ (1-2\bar{x}_3)V_{KN}^{*} & \text{ise } VD\\ (1+2\bar{x}_3)V_{KN}^{*} & \text{ise } OD\end{cases} \tag{4}$$

UD, VD ve OD profilli nanokompozit silindirik panelin en kesiti Şekil 2'de gösterilmektedir.



Şekil 2. KNT profilli silindirik panel en kesiti (a) UD profil, (b) VD profilli ve (c) OD profilli

Referans yüzeyindeki şekil değiştirme alanı aşağıdaki kinematik ilişkiler tarafından yönetilir [13]:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)^2,\ \varepsilon_{22}=\frac{\partial v}{\partial x_2}-\frac{w}{R}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)^2,\gamma_{12}=\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}+\frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2} \tag{5}$$

ve klasik kabuk teorisi çerçevesinde, von-Karman tipi doğrusal olmamayı açıklayan bünyesel ilişkiler aşağıdaki gibi tanımlanır [6]:

$$\begin{bmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11}^{\bar{x}_3} & E_{12}^{\bar{x}_3} & 0\\ E_{21}^{\bar{x}_3} & E_{22}^{\bar{x}_3} & 0\\ 0 & 0 & E_{66}^{\bar{x}_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{11}-\bar{x}_3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\\ e_{22}-\bar{x}_3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\\ \gamma_{12}-2\bar{x}_3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\end{bmatrix} \tag{6}$$

Burada şu tanımlar geçerlidir:

$$E_{ii}^{\bar{x}_3}=\frac{Y_{ii}^{\bar{x}_3}}{1-\nu_{ij}\nu_{ji}},\ E_{ij}^{\bar{x}_3}=\frac{\nu_{ji}Y_{ii}^{\bar{x}_3}}{1-\nu_{ij}\nu_{ji}}=E_{ji}^{\bar{x}_3},\ E_{66}^{\bar{x}_3}=Y_{ij}^{\bar{x}_3}(i,j=1,2) \tag{7}$$

WİNKLER ZEMİNİN VARLIĞINDA DOĞRUSAL OLMAYAN YAPISAL MODEL

(1), (2), (5) ve (6) bağıntıları kullanılarak, KNT'lerle güçlendirilmiş ve Winkler elastik zemini üzerine oturan FD-KNT-G silindirik panel için doğrusal olmayan temel diferansiyel denklemleri aşağıdaki şekli alır:

$$L_{11}(F)+L_{12}(w)+L_{13}(F,w)+kw=0 \tag{8}$$

$$L_{21}(F)+L_{22}(w)+L_{13}(w,w)=0 \tag{9}$$

Burada F gerilme fonksiyonu ve $L_{ij}(i=1,2,\ j=1,2,3)$ lineer olmayan diferansiyel operatörlerdir:

$$\begin{aligned}
L_{11}(F)&=h\left[s_{12}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\left(s_{11}-2s_{31}+s_{22}\right)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+s_{21}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right],\\
L_{12}(w)&=-s_{13}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}-\left(s_{14}+2s_{32}+s_{23}\right)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-s_{24}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}-\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
L_{13}(F,w)&=h\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right),\\
L_{21}(F)&=h\left[r_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}+(r_{12}+r_{21}+r_{31})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+r_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}\right],\\
L_{22}(w)&=-r_{23}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}-\left(r_{24}+r_{13}-r_{32}\right)\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}-r_{14}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\\
L_{23}(w,w)&=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Bu operatörler içinde yer alan t zaman değişkeni ve $\rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_1^{\bar{x}_3} \mathrm{d}\bar{x}_3$. Ayrıca, s_{ij} KNT ile güçlendirilmiş silindirik panelin karakteristiklerine bağlı katsayılardır [6,10-12]

ÇÖZÜM PROSEDÜRÜ

Aşağıda, basit bir şekilde desteklenen silindirik panel için analitik bir çözüm sunuyoruz. Yerdeğiştirme fonksiyonu aşağıdaki gibi aranır [6,13]:

$$w = \bar{w}(t)\sin(\alpha_1 x_1)\sin(\alpha_2 x_2) \tag{11}$$

Burada $\bar{w}(t)$ zamanın fonksiyonudur, $\alpha_1 = \dfrac{m\pi}{a}$, $\alpha_2 = \dfrac{n\pi}{b}$ olup, m ve n x_1 ve x_2, doğrultularında dalga sayılarıdır. (11) ifadesi (9) denkleminde yerine yazıldığında, F gerilme fonksiyonu için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$F = c_1\bar{w}^2(t)\cos(2\alpha_1 x_1) + c_2\bar{w}^2(t)\cos(2\alpha_2 x_2) + c_3\bar{w}(t)\sin(\alpha_1 x_1)\sin(\alpha_2 x_2) \tag{12}$$

Burada $c_j\,(j = 1,2,3)$ KNT ile güçlendirilmiş silindirik panelin malzeme özelliklerine bağlı katsayılardır [6]. Denklemler (11) ve (12)'yi Denklem (8)'e koyarak, $0 \le x_1 \le a$ ve $0 \le x_2 \le b$ integralleme bölgesinde, Galerkin prosedürü uygulayarak, aşağıdaki lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$L(t) \equiv \frac{d^2\tilde{w}(t)}{dt^2} + \left(\omega_D^{wp}\right)^2 \tilde{w}(t) + \theta_1\tilde{w}^2(t) + \theta_2\tilde{w}^3(t) = 0 \tag{13}$$

Burada $\tilde{w}(t) = \bar{w}(t)/h$, olup θ_1 ve θ_2 KNT ile güçlendirilmiş silindirik panelin karakteristiklerine bağlı katsayılardır. Küçük sapmalarda Winkler zemini üzerine oturan FD-KNT-G silindirik panellerin serbest titreşim frekansı ω_D^{wp} olup şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\omega_D^{wp} = \frac{1}{\sqrt{\rho_1}}\Bigg\{&\left[\frac{\alpha_1^2}{R} - s_{12}\alpha_1^4 - (s_{11} - 2s_{31} + s_{22})\alpha_1^2\alpha_2^2 - s_{21}\alpha_2^4\right]hc_3 \\ &+ s_{13}\alpha_1^4 + (s_{14} + 2s_{32} + s_{24})\alpha_1^2\alpha_2^2 + s_{24}\alpha_2^4 + k\Bigg\}^{1/2}\end{aligned} \tag{14}$$

Denklem (14)'ün yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi aranır:

$$\tilde{w}(t) = w_0\cos\left(\Omega_{DO}^{wp}t\right) \tag{15}$$

Burada w_0 boyutsuz genlik, Ω_{DO}^{wp} ise Winkler zemini üzerindeki FD-KNT-G silindirik panelin doğrusal olmayan serbest titreşim frekansı olup başlangıç koşulları şu şekilde tanımlanır:

$$\tilde{w}(t)\Big|_{t=0} = w_0 \quad \text{ve} \quad \frac{\mathrm{d}\tilde{w}(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{16}$$

(13) ve (15) ilişkilerini birleştirerek, $L(t) = 0$ tipinde bir denklem elde ederiz. Böylece, Grigolyuk yöntemini [14] uygulayarak,

$$\int_0^{\pi/2\Omega_{DO}^{wp}} L(t)\cos\left(\Omega_{DO}^{wp}t\right)\mathrm{d}t = 0 \tag{17}$$

denklemini elde ederiz. Bu son ilişkiyi integralledikten sonra, Winkler zemine oturan FD-KNT-G silindirik paneller için aşağıdaki doğrusal olmayan genlik-frekans bağıntısını elde ederiz:

$$\Omega_{DO}^{wp}=\sqrt{\left(\omega_D^{wp}\right)^2+\frac{8}{3\pi}\theta_1 w_0+0.75\theta_2 w_0^2} \tag{18}$$

ve

$$\Omega_{1DO}^{wp}=\Omega_{DO}^{wp}h\sqrt{\rho^m/Y^m} \tag{19}$$

Winkler zemine oturan FD-KNT-G silindirik paneller için doğrusal olmayan frekansın doğrusal serbest titreşim frekansına oranı $\Omega_{DO}^{wp}/\omega_D$, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\frac{\Omega_{DO}^{wp}}{\omega_D}=\sqrt{\left(\frac{\omega_D^{wp}}{\omega_D}\right)^2+\frac{8}{3\pi}\frac{\theta_1 w_0}{\omega_D^2}+\frac{0.75\theta_2 {w_0}^2}{\omega_D^2}} \tag{20}$$

Burada ω_D zeminsiz FD-KNT-G silindirik panel için doğrusal serbest titreşim frekansı olup (14)'te $k=0$ yazıldığında özel olarak elde edilir.

NUMERİK HESAPLAR

Bu bölümde, KNT'lerin düzgün ve doğrusal dağılımı ile güçlendirilmiş sığ silindirik panellerin doğrusal olmayan titreşim frekansı (DOF) değerlerinin Winkler temeli üzerinde ve zeminsiz durumda hesaplayarak analizler yapılmaktadır. Seçilen silindirik panel, matris olarak polimetil metakrilattan (PMMA) ve takviye olarak $r_1=9.26\,\text{nm}$, $a_1=6.8\times10^{-1}\,\text{nm}$, $h_1=6.7\times10^{-2}\,\text{nm}$ geometrik özelliklerine sahip tek duvarlı KNT'lerden yapılmıştır. KNT' nin mekanik özellikleri şu şekildedir: $Y_{11}^{KN}=5646.6\,\text{GPa}$, $Y_{22}^{KN}=7080\ \text{GPa}$, $Y_{12}^{KN}=1944.5\,\text{GPa}$, $\nu_{12}^{KN}=0.175$, $\rho^{KN}=1.4\times10^3\,\text{kg/m}^3$; PMMA özellikleri ise şu şekildedir $Y^m=2.5\ \text{GPa}$, $\nu^m=0.34$, $\rho^m=1.15\times10^3\,\text{kg/m}^3$. Referans [4] doğrultusunda, Çizelge 1'de özetlendiği gibi, seçilen V_{KN}^* değerine bağlı olarak KNT/matrisin farklı verimlilik parametreleri dikkate alınmaktadır.

Çizelge 1. KNT'lerin hacim kesir oranına bağlı olarak KNT/matris verimlilik parametrelerinin tipik özellikleri

V_{KN}^*	η_1	η_2	η_3
0.12	0.137	1.022	0.715
0.17	0.142	1.626	1.138
0.28	0.141	1.585	1.109

Winkler zemini üzerinde bulunan karbon nanotüp ile güçlendirilmiş silindirik panelin (KNT-G-SP) doğrusal olmayan titreşim frekansı (DOF) değerlerinin, çeşitli zemin rijitliklerine (k), güçlendirme profillerine (UD, VD ve OD) ve hacim değişim oranlarına (V_{KN}^*=0.12, V_{KN}^*=0.17 ve V_{KN}^*=0.28) bağlı dağılımı Çizelge 2'de sunulmaktadır. KNT-G-SP için dikkate alınan diğer geometrik parametreler ise şu şekildedir: $R/a=1$, $a/b=1$, $a/h=20$, $(m,n)=(1,1)$ ve $w_0=1.5$. Çizelge 2'den de görüleceği üzere, DOF değerleri k 'nin artışına bağlı olarak artmaktadır. Winkler zeminli KNT-G-SP için hacim değişim oranları ve KNT profilleri kendi

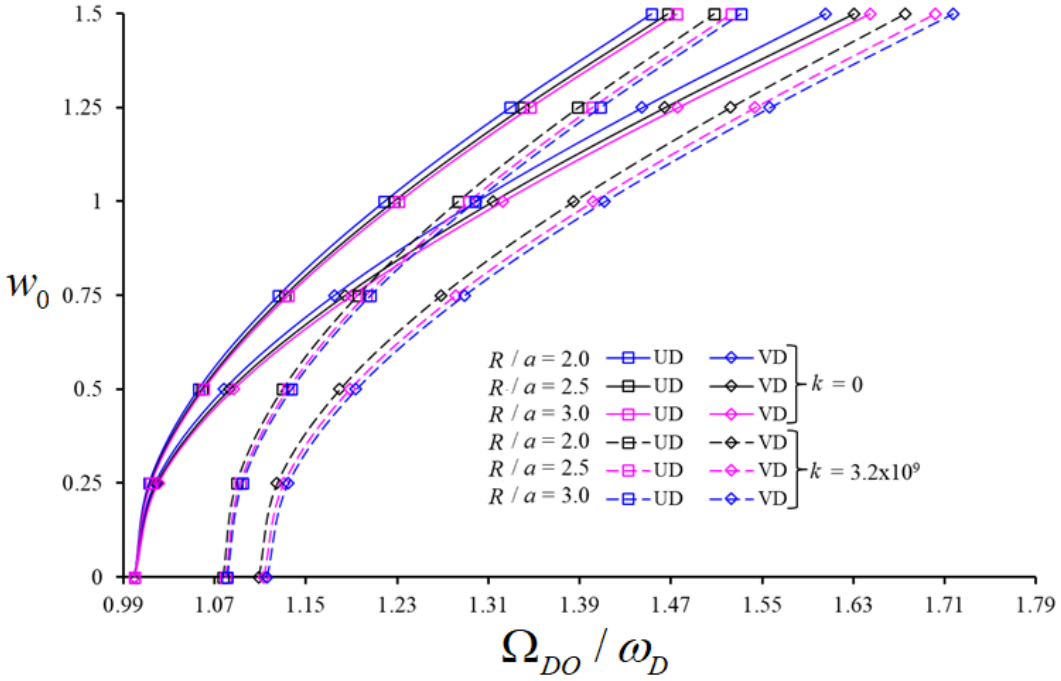
aralarında mukayese edildiğinde en büyük DOF değeri V_{KN}^{*}=0.28 olduğunda UD profilinde elde edilirken en küçük DOF değeri V_{KN}^{*}=0.12 olduğunda OD profilinde ortaya çıkmaktadır. KNT-G-SP'nin DOF değerlerine KNT profil etkisi k 'nin artışına bağlı olarak azalmaktadır. Örneğin, V_{KN}^{*}=0.12 olduğunda temelsiz durum ($k=0$) ile Winkler zeminli durumu $k=0.8\times10^{9}$ kendi aralarında kıyaslandığında, KNT profil etkisi temelsiz duruma göre VD profilinde (%1.5) civarı ve OD profilinde (%1.8) civarı daha küçük olmaktadır. Bununla birlikte, V_{KN}^{*}=0.28 olduğunda k 'nin 0.8×10^{9} 'den 1.2×10^{9} artışına bağlı olarak KNT profil etkisi VD profilinde (-%5.36)'dan (-%5.05)'e azalırken OD profilinde (-%6.06)'dan (-%5.7)'ye azalmaktadır. Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF değerlerine elastik zemin etkisi k 'nin artışına bağlı olarak tüm profillerde artmaktadır. Ayrıca, hacim değiştirme oranları kendi aralarında mukayese edildiğinde en büyük Winkler zemin etkisi V_{KN}^{*}=0.12 için elde edilirken en küçük zemin etkisi V_{KN}^{*}=0.28 de ortaya çıkmaktadır. KNT profilleri kendi aralarında kıyaslandığında ise en büyük ve en küçük Winkler zemin etkileri sırasıyla OD ve UD profillerinde elde edilmektedir. Buna bağlı olarak Winkler zeminli KNT-G-SP için V_{KN}^{*}=0.12 olduğunda k 'nin 0.8×10^{9} 'den 1.2×10^{9} 'a artışına bağlı olarak Winkler zemin etkisi UD profilinde (%14.89)'dan (%21.66)'ya, VD profilinde (%16.62)'den (%24.1)'e ve OD profilinde (%17.06)'dan (%24.72)'ye artmaktadır.

Çizelge 2. Winkler zemini üzerinde bulunan KNT-G-SP'nin DOF değerlerinin çeşitli zemin rijitliklerine (k) ve hacim kesir oranına bağlı değişimi

	$10\Omega_{DO}$								
Zemin rijitliği	V_{KN}^{*}=0.12			V_{KN}^{*}=0.17			V_{KN}^{*}=0.28		
(k)	*UD*	*VD*	*OD*	*UD*	*VD*	*OD*	*UD*	*VD*	*OD*
0	0.441	0.416	0.410	0.534	0.504	0.497	0.660	0.620	0.615
0.8×10^{9}	0.507	0.485	0.480	0.589	0.562	0.555	0.705	0.667	0.662
1.0×10^{9}	0.522	0.501	0.496	0.602	0.576	0.569	0.715	0.678	0.673
1.2×10^{9}	0.537	0.517	0.512	0.615	0.589	0.583	0.726	0.689	0.684

Winkler zemini üzerinde bulunan KNT-G-SP'nin doğrusal olmayan titreşim frekansı/doğrusal titreşim frekansı oranının (DOF/DF), UD ve VD profilleri ve V_{KN}^{*}=0.28 için w_0 'a ve R/a 'a bağlı değişimleri Şekil 3'te sunulmaktadır. Dikkate alınan diğer parametrik veriler: $R/a=2.0,2.5,3.0$, $a/b=0.5$, $a/h=15$, $(m,n)=(1,1)$ ve $k=3.2\times10^{9}$ 'dir. Zeminsiz ve Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF/DF oranları tüm R/a değeri için w_0 'ın artışına bağlı olarak artmaktadır. Ayrıca, zeminsiz ve Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF değerleri R/a 'ın artışına bağlı olarak artmaktadır. Zeminsiz ve Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF/DF oranlarına KNT profil etkisi w_0 'ın artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, R/a =3

olduğunda DOF/DF oranlarına KNT profil etkisi w_0'ın 0'dan 1.5'e artışına bağlı olarak zeminsiz KNT-G-SP için (%11.49) ve Winkler zeminli KNT-G-SP için (%8.96) artmaktadır. Zeminsiz ve Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF/DF oranlarına KNT profil etkisi R/a'ın artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, $w_0 = 1.5$ olduğunda DOF/DF oranlarına KNT profil etkisi R/a'ın 2'den 3'e artışına bağlı olarak zeminsiz KNT-G-SP için (%10.47)'den (%11.49)'a ve Winkler zeminli KNT-G-SP için (%11.1)'den (%12.15)'e artmaktadır. Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF/DF oranlarına EF etkisi tüm R/a değeri için w_0'ın artışına bağlı olarak azalmaktadır. Ayrıca, Winkler zeminli KNT-G-SP'nin DOF/DF oranlarına EF etkisi R/a'ın artışına bağlı olarak artmaktadır. Örneğin, VD profilinde ve R/a=3 olduğunda DOF/DF oranlarına EF etkisi w_0'ın 0'dan 1.5'e artışına bağlı olarak Winkler zeminli KNT-G-SP için (%7.13) azalmaktadır. Ek olarak, UD profilinde ve $w_0 = 0.25$ olduğunda DOF/DF oranlarına EF etkisi R_2/a'ın 2'den 3'e artışına bağlı olarak Winkler zeminli KNT-G-SP için (%7.58)'den (%7.89)'a artmaktadır.



Şekil 3. Winkler zemini üzerinde bulunan KNT-G-SP'nin DOF/DF oranının, w_0'a ve R/a oranına bağlı değişimleri

SONUÇ

Bu bildiride, Winkler zemini üzerinde bulunan KNT-G-SP'nin doğrusal olmayan titreşim davranışı tartışılmaktadır. İlk olarak, düzgün ve fonksiyonel profilli KNT'ler içeren panellerin malzeme özellikleri modellenmiştir. Daha sonra, von-Karman tipi doğrusal olmama dikkate alınarak, Winkler zemini üzerinde bulunan KNT'ler içeren silindirik panel-zemin ilişkileri oluşturulmuş ve ardından hareketin doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri türetilmiştir. Galerkin yöntemi ve ardından varyasyonel yöntem kullanılarak temel denklemler çözülmüş ve Winkler zemini üzerindeki silindirik panelin doğrusal olmayan serbest titreşim frekansının genliğe bağlı ifadesi bulunmuştur. Metodolojinin geçerliliği doğrulandıktan sonra, KNT'nin, Winkler zeminin, doğrusal olmamanın ve profillerin birlikte ve ayrı ayrı frekans parametreleri üzerindeki etkileri araştırılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] S. Iijima, T. Ichihashi, Single-shell carbon nanotubes of 1-mm diameter, *Nature*. 363 (1993) 603-605. doi.org/10.1038/363603a0.

[2] S. Xie, W. Li, Z. Pan, B. Chang, L. Sun, Mechanical and physical properties on carbon nanotube, *J. Phys. Chem. Solids.* 61 (2000) 1153-1158. doi.org/10.1016/S0022-3697(99)00376-5.

[3] J. Silvestre, N. Silvestre, J. De Brito, Polymer nanocomposites for structural applications: Recent trends and new perspectives, *Mech. Adv. Mater. Struct.* 23 (2016) 1263-1277. doi.org/10.1080/15376494.2015.1068406.

[4] H.S. Shen, Y. Xiang, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 213 (2012) 196-205. doi.org/10.1016/j.cma.2011.11.025.

[5] S. Zghal, A. Frikha, F. Dammak, Large deflection responses-based geometrical nonlinearity of nanocomposite structures reinforced with carbon nanotubes, *Appl. Math. Mech. (Eng. Edit.).* 41 (2020) 1227-1250. doi.org/10.1007/s10483-020-2633-9.

[6] M. Avey, E. Yusufoglu, On the solution of large-amplitude vibration of carbon nanotube-based doubly-curved shallow shells, *Math. Meth. Appl. Sci.* (2020). doi.org/10.1002/mma.6820.

[7] A.D. Kerr, Elastic and viscoelastic foundation models, *J. Appl. Mech.* 31 (1964) 491-498. doi.org/10.1115/1.3629667.

[8] F. Tornabene, N. Fantuzzi, E. Viola, J.N. Reddy, Winkler-Pasternak foundation effect on the static and dynamic analyses of laminated doubly-curved and degenerate shells and panels, *Compos. Part B-Eng.* 57 (2014) 269-296. doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.020.

[9] H.S. Shen, X.Q. He, Large amplitude free vibration of nanotube-reinforced composite doubly curved panels resting on elastic foundations in thermal environments, *J. Vib. Control*. 23 (2017) 2672-2689. doi.org/10.1177/1077546315619280.

[10] A.H. Sofiyev, Z. Mammadov, R. Dimitri, F. Tornabene, Vibration analysis of shear deformable carbon nanotubes-based functionally graded conical shells resting on elastic foundations, *Math. Meth. Appl. Sci.* (2020). doi.org/10.1002/mma.6674.

[11] A.H. Sofiyev, I.T. Pirmamedov, N. Kuruoglu, Influence of elastic foundations and carbon nanotube reinforcement on the hydrostatic buckling pressure of truncated conical shells, *Appl. Math. Mech.* 41 (2020) 1011-1026. doi.org/10.1007/s10483-020-2631-7.

[12] A.H. Sofiyev, N. Kuruoglu, Buckling analysis of shear deformable composite conical shells reinforced by CNTs subjected to combined loading on the two-parameter elastic foundation, *Defence Techn.* (2021). doi.org/10.1016/j.dt.2020.12.007.

[13] A.S. Vol'mir, *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*, Nauka, 1972.

[14] E.I. Grigolyuk, On small vibrations of thin elastic conical shells, *Communication of Academy of Science of USSR, Section of Technical Science.* 6 (1956) 35-44.

ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURAN VE YAYILI YÜK İLE YÜKLENEN FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ İKİ TABAKANIN TEMAS PROBLEMİ

Bahar Şengül Şabano[1], Murat Yaylacı[2], Gökhan Adıyaman[3], Erdal Öner[4] ve Ahmet Birinci[5]
[1,3,5]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon
[2]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize
[4]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Bayburt Üniversitesi, Bayburt

ABSTRACT

In this study, the frictionless contact problem of two functionally graded layers with different heights and properties of elastic semi-infinite plane exposed to uniform distributed load was investigated according to the Theory of Elasticity. The weights of the layers were omitted and it was thought that the Poisson ratios did not change. Shear modulus of the layer is assumed to vary exponentially through the thickness of the layer. The problem is reduced to a system of singular integral equations in which half contact length and contact pressures are unknowns using boundary conditions and integral transform techniques. Then the solution of the integral equation system was realized by using Gauss-Chebshev integration formulation and the contact lengths were obtained with unknown contact stresses. Finally, numerical application of the problem for various dimensionless quantities are made.
Keywords: contact problem; theory of elasticity; functionally graded layer;

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün yayılı yüke maruz, elastik yarım düzleme oturan malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı, fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi Elastisite Teorisine göre incelenmiştir. Tabakaların ağırlıkları ihmal edilmiş ve Poisson oranlarının değişmediği kabul edilmiştir. Fonsiyonel derecelendirilmiş tabakanın kayma modülünün tabaka yüksekliğiyle eksponansiyel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Problem integral dönüşüm teknikleri ve sınır şartları kullanılarak; yarı temas uzunlukları ve temas gerilmelerinin bilinmeyenler olduğu bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. Sonrasında integral denklem sisteminin çözümü Gauss- Chebyshev integrasyon formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiş ve bilinmeyen temas gerilmeleri ile temas uzunlukları elde edilmiştir. Son olarak, probleme ilişkin çeşitli boyutsuz büyüklükler için sayısal uygulama yapılmıştır.
Anahtar kelimeler: temas problemi; elastisite teorisi; fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka;

GİRİŞ

Temas problemleri, çeşitli mühendislik branşlarında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Özellikle temas içeren sistemler yapı ve makine elemanları üzerinde oldukça geniş bir yer teşkil etmektedir. Malzemede meydana gelen temas bölgelerindeki gerilme dağılımlarının, temasın karakter ve uzunluğunun bilinmesi; malzemenin üretimi ve tasarımı için kolaylık sağlamaktadır. Bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesi ile birlikte

temas problemleri üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda artmıştır. Üstün mekanik özellikleriyle çeşitli endüstrilerde yaygın olan kompozit malzemeler mekanik uyumsuzluklara neden olabildiğinden fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) ortaya çıkmıştır. fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler sürekli yapılarıyla malzemenin bir yüzeyinden diğer yüzeyine fonksiyonel olarak değişmektedirler. Bu varyasyon, diğer malzemelerde meydana gelen gerilme yığılmalarının FDM'de en aza indirgenmesini sağlamaktadır.

Elastik yarım düzleme, çeyrek düzleme, rijit düzleme veya başka bir tabakaya oturan tabakanın sürtünmesiz değme problemi günümüze kadar birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir [1,2,3,4,5,6,7]. Temas problemleri ile ilgili ilk çalışma Hertz tarafından yapılmıştır ve bu nedenle temas problemleri literatürde "Hertz Değme Problemi" adı ile bilinmektedir [8]. Mühendislik uygulamalarında son zamanlarda kullanılmaya başlanan FDM kaplamaların mekanik yüklemeler altında gerilme dağılımlarının ve davranışlarının belirlenmesi ile ilgili analitik ve hesaplamalı yöntemler kullanılarak son yıllarda yapılmış pek çok çalışma mevcuttur [9,10,11]. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Dağ ve Erdoğan, temas ve yüzey çatlağı problemini yarı sonsuz fonksiyonel derecelendirilmiş düzlemdeki hali ile herhangi bir profile sahip sürtünmeli rijit zımba etkisi durumunda ele almışlardır [12]. Borgi vd., temas problemini fonksiyonel derecelendirilmiş-homojen tabakalar arasında ayrılmalı hali ile incelemişlerdir. Çalışma kapsamında, yayılı yük ile yüklenen fonksiyonel derecelendirilmiş tabakaya dair temas gerilmeleri ile ayrılma uzaklıklarını elde etmişlerdir [13]. Özşahin ve Taşkıner, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme içeren yapışık olan veya olmayan temas problemleri çözümünde yarı analitik bir algoritma oluşturmuşlardır. Bu çalışma ile temas genişliğinin ve yüzey basıncının saptanmasını amaçlamışlardır [14]. Çömez vd., temas problemini rijit bir silindirik blok aracılığı ile yüklenen ve iki rijit silindirik blok ile desteklenen ve fonksiyonel derecelendirilen tabakada analitik olarak irdelemişlerdir. Çalışma kapsamında temas gerilmelerini ve uzunluklarını çeşitli blok aralıkları ve yarıçapları için farklı yüklemeler yaparak incelemişlerdir [15].

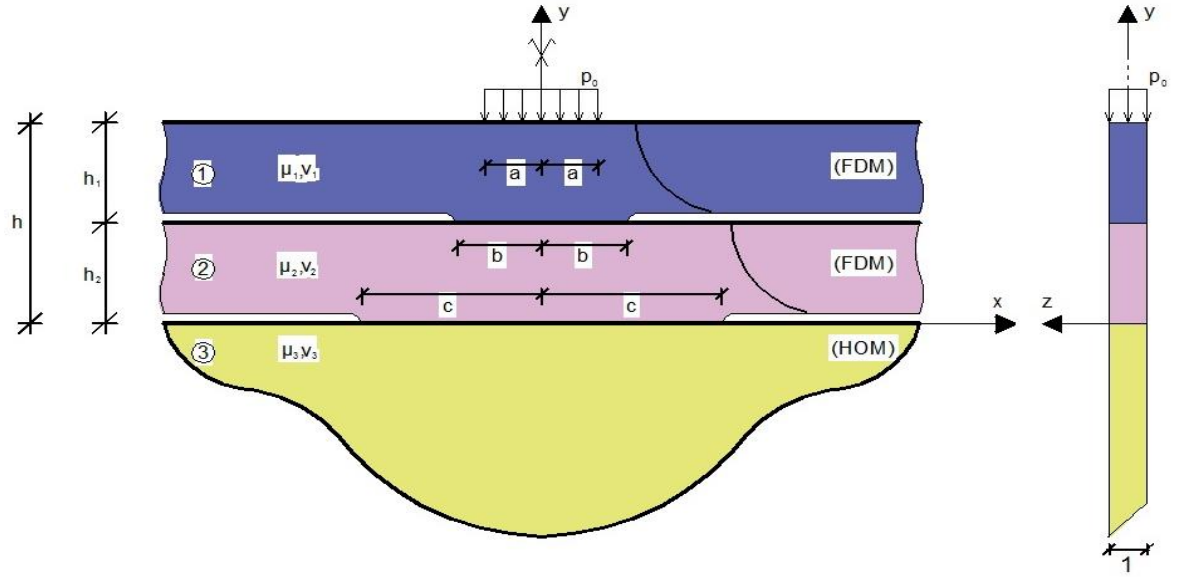
Bu çalışmada, düzgün yayılı yüke maruz, elastik yarım sonsuz düzlem üzerine oturan malzeme özellikleri ve yükseklikleri farklı, fonksiyonel derecelendirilmiş iki tabakanın sürtünmesiz teması Elastisite Teorisine göre araştırılmıştır. Temas probleminin çözümü için elastisite teorisi yardımıyla elde edilen Navier denklemlerine integral dönüşüm teknikleri uygulanmıştır. Problem iki integral denklemden meydana gelen integral denklem sistemine indirgenerek Gauss-Chebyshev integrasyon formulasyonunun da kullanılmasıyla çözülmüştür. Tabakaların ağırlıkları ihmal edilmiş ve Poisson oranlarının değişmediği kabul edilmiştir. Çalışmadaki amaç, tabakalar arasındaki temas uzunluklarının ve gerilmelerinin farklı malzeme özellikleri altında belirlenmesidir.

TEMAS PROBLEMİNİN TANIMI ve FORMÜLASYONU

Çalışmada, yarım düzlem üzerine oturan iki FD malzemeden oluşan tabakanın temas problemi ele alınmaktadır. Tabakaların ve yarım düzlemin Poisson oranlarının (υ_1, υ_2 ve υ_3) sabit kaldığı; yarım düzlemin kayma modülünün (μ_3) sabit kalırken FD tabakaların kayma modüllerinin (μ_1 ve μ_2) ise aşağıda verilen üstel fonksiyonlara göre derinlik boyunca değiştiği kabul edilmektedir.

$$\mu_1 = \mu_{10} e^{\beta_1 (y-h_2)} \quad (h_2 < y < h), \qquad \mu_2 = \mu_{20} e^{\beta_2 (y)} \quad (0 < y < h_2) \tag{1,2}$$

Burada, μ_{i0} $(i=1,2)$ *i.* tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülünün değerini ve β_i ise *i.* tabakanın kayma modülündeki değişimi gösteren parametreyi ifade etmektedir. Problemde, üstteki tabakaya p_0 düzgün yayılı yükü $[-a, a]$ aralığında etki etmektedir. Tabakalar arasında ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında yüklemeye bağlı olarak ayrılmalar oluşmakta ve sırasıyla sadece $[-b, b]$ *ve* $[-c, c]$ aralıklarında temas oluşmaktadır. Problemde sürtünme ve kütle kuvvetleri ihmal edilmekte olup, problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmaktadır. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 1 'de verilmektedir.



Şekil 1. Probleme ait geometri ve yükleme durumu

Probleme ilişkin sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{1y}(x,h) = \begin{cases} -p_0 & (0 \le x < a) \\ 0 & (a \le x < \infty) \end{cases} \tag{3}$$

$$\tau_{1xy}(x,h) = 0, \qquad (0 \le x < \infty) \tag{4}$$

$$\sigma_{2y}(x,h_2) = \begin{cases} -p_1(x) & (0 \le x < b) \\ 0 & (b \le x < \infty) \end{cases} \tag{5}$$

$$\tau_{1xy}(x,h_2) = 0, \qquad (0 \le x < \infty) \tag{6}$$

$$\tau_{2xy}(x,h_2) = 0, \qquad (0 \le x < \infty) \tag{7}$$

$$\sigma_{1y}(x,h_2) = \sigma_{2y}(x,h_2), \qquad (0 \le x < \infty) \tag{8}$$

$$\sigma_{2y}(x,0) = \begin{cases} -p_2(x) & (0 \le x < c) \\ 0 & (c \le x < \infty) \end{cases} \tag{9}$$

$$\tau_{2xy}(x,0) = 0, \qquad (0 \le x < \infty) \tag{10}$$

$$\tau_{3xy}(x,0) = 0, \qquad (0 \le x < \infty) \tag{11}$$

$$\sigma_{2y}(x,0) = \sigma_{3y}(x,0), \qquad (0 \le x < \infty) \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h_2) - v_2(x,h_2)] = 0, \qquad (0 \le x < b) \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x,0)-v_3(x,0)]=0, \qquad (0\le x<c) \tag{14}$$

Burada, $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ sırasıyla FD tabakalar arası ve alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas yüzeyleri boyunca oluşan bilinmeyen temas gerilmelerini göstermektedir. Probleme ait denge şartları aşağıda verilmektedir.

$$\int_{-b}^{b} p_1(x)dx = 2ap_0, \tag{15}$$

$$\int_{-c}^{c} p_2(x)dx = 2ap_0, \tag{16}$$

Tabakalara ait yer değiştirmeler cinsinden denge denklemleri (Navier denklemleri) düzlem halde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\kappa+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\kappa-1)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\beta(\kappa-1)\frac{\partial u}{\partial y}+\beta(\kappa-1)\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{17}$$

$$(\kappa-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(\kappa+1)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\beta(3-\kappa)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(\kappa+1)\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{18}$$

Kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan (17 ve 18) ifadeleri Fourier integral dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denklemlere dönüştürülüp çözülürse, FD tabakalar için aşağıda verilen gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilir.

$$u_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y}\sin(\xi x)d\xi \tag{19}$$

$$v_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y}\cos(\xi x)\,d\xi \tag{20}$$

$$\sigma_{1x}(x,y)=\frac{2\mu_1(y)}{\pi(K_1-1)}\int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j\left[(3-\kappa_1)m_j n_j+\xi(\kappa_1+1)\right]e^{n_j y}\cos(\xi x)d\xi \tag{21}$$

$$\sigma_{1y}(x,y)=\frac{2\mu_1(y)}{\pi(K_1-1)}\int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y}\cos(\xi x)d\xi \tag{22}$$

$$\tau_{1xy}(x,y)=\frac{2\mu_1(y)}{\pi}\int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y}\sin(\xi x)\,d\xi \tag{23}$$

$$u_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j e^{n_j y}\sin(\xi x)d\xi \tag{24}$$

$$v_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j m_j e^{n_j y}\cos(\xi x)\,d\xi \tag{25}$$

$$\sigma_{2x}(x,y)=\frac{2\mu_2(y)}{\pi(K_2-1)}\int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j\left[(3-\kappa_2)m_j n_j+\xi(\kappa_2+1)\right]e^{n_j y}\cos(\xi x)d\xi \tag{26}$$

$$\sigma_{2y}(x,y)=\frac{2\mu_2(y)}{\pi(K_2-1)}\int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j C_j e^{n_j y}\cos(\xi x)d\xi \tag{27}$$

$$\tau_{2xy}(x,y)=\frac{2\mu_2(y)}{\pi}\int_0^\infty \sum_{j=5}^8 A_j D_j e^{n_j y}\sin(\xi x)\,d\xi \tag{28}$$

Homojen yarım düzlem için ise (17 ve 18) denklemlerinde $\beta=0$ alınıp, sonsuzda yer değiştirmelerin sıfır olacağı göz önünde bulundurularak çözüm yapılırsa gerilme ve yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$u_3(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[(B_1+B_2 y)e^{\xi y}\right]\sin(\xi x)d\xi \tag{29}$$

$$v_3(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\left[-B_1 + \left(\frac{\kappa_3}{\xi} - y\right) B_2\right] e^{\xi y}\right] \cos(\xi x) d\xi \quad (30)$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\sigma_{3x}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{3-\kappa_3}{2}\right) B_2\right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (31)$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\sigma_{3y}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[-\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1+\kappa_3}{2}\right) B_2\right] e^{\xi y} \cos(\xi x) d\xi \quad (32)$$

$$\frac{1}{2\mu_3}\tau_{3xy}(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\xi(B_1 + B_2 y) + \left(\frac{1-\kappa_3}{2}\right) B_2\right] e^{\xi y} \sin(\xi x) d\xi \quad (33)$$

Gerilme ve yer değiştirme ifadelerde geçen; n_j, m_j, C_j ve D_j (j=1,...,8) bilinen fonksiyonlardır, A_j ve B_k (k=1,2) sırasıyla FD tabakalar ve homojen yarım düzlem için bilinmeyen katsayı fonksiyonlarıdır. Ayrıca, κ_i (i=1,2,3) malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde $\kappa_i = 3 - 4\nu_i$ şeklindedir.

(3-12) sınır şartları kullanılarak gerilme ve yer değiştirme ifadelerindeki bilinmeyen A_j ve B_k katsayı fonksiyonları bilinmeyen $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ temas gerilme fonksiyonlarına ve bilinmeyen b ve c temas uzunluklarına bağlı olarak bulunabilir. (13 ve14) sınır şartları kullanılmak suretiyle bilinmeyen temas gerilmelerinin ve temas uzunluklarının çözümü için *2* adet integralden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilebilir. Bu integral denklem sisteminin ve (15 ve 16) denge şartları ortak sayısal çözümü Gauss-Chebyshev integral formülasyonları kullanılarak yapılabilir. Böylece problemin çözümü bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur.

SONUÇLAR

Elde edilen formülasyonlar yardımı ile, boyutsuz büyüklüklerin çeşitli değerleri için temas uzunluklarının ve temas gerilmelerinin değişimi incelenmiştir. Bu incelemelerden elde edilen sonuçlar, tablo ve grafikler halinde verilerek bunlara ait bulgular irdelenmiştir. Tablo ve grafiklerde geçen bazı boyutsuz büyükler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

a/h_2: Yayılı yük genişliği

b/h_2: 1. FD tabaka ile 2. FD tabaka arasındaki yarı temas uzunluğu

c/h_2: 2. FD tabaka ile yarı sonsuz düzlem arasındaki yarı temas uzunluğu

h_1/h_2: Tabakaların yükseklikleri oranı

p_0: Yayılı yükün şiddeti

μ_{01}: 1. FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü

μ_{02}: 2. FD tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü

μ_3: Yarım düzlemin kayma modülü

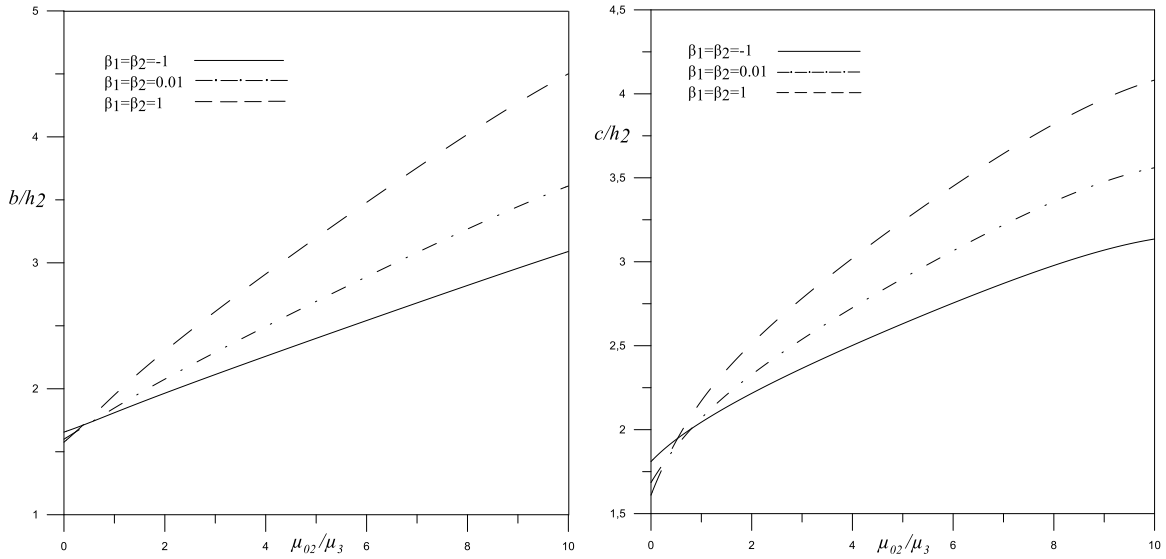
β_1, β_2: Rijitlik parametreleri

Tablo 1 ve Şekil 2' de (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları için fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalara ait rijitlik parametrelerine $(\beta_1 = \beta_2)$ bağlı olarak temas yüzeyindeki yarı temas uzunlukları verilmektedir. Tablo ve grafiklerden (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları arttıkça tabakalar arası yarı temas uzunluklarının arttığı görülmektedir. Ayrıca $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik

parametresi değerleri artarken tabakalar arası yarı temas uzunluklarının azaldığı görülmektedir.

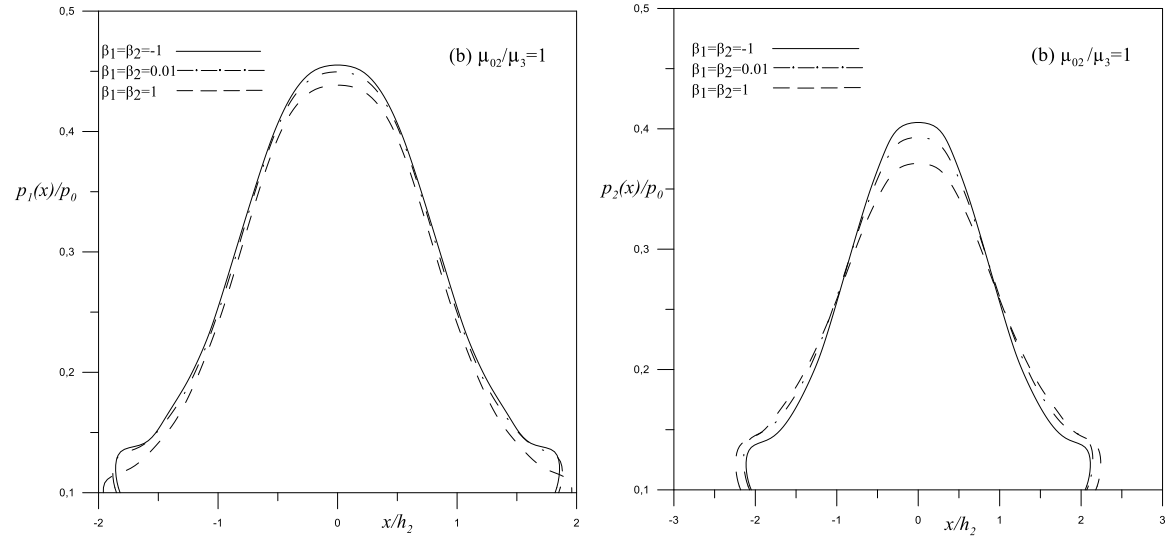
Tablo 1.Çeşitli (μ_{02}/μ_3) değerleri için temas uzunluklarının $\beta_1 = \beta_2$ ile değişimi $(\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$

	$\mu_{02}/\mu_3 = 0.0001$		$\mu_{02}/\mu_3 = 0.1$		$\mu_{02}/\mu_3 = 1$		$\mu_{02}/\mu_3 = 10$	
$\beta_1 = \beta_2$	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2	b/h_2	c/h_2
-1	1.655889	1.810150	1.670089	1.839909	1.810038	2.044500	3.090000	3.135690
0.01	1.600089	1.68499	1.624832	1.732885	1.847427	2.068427	3.610199	3.560000
1	1.575889	1.610150	1.610922	1.683999	1.950427	2.171427	4.200612	4.075000

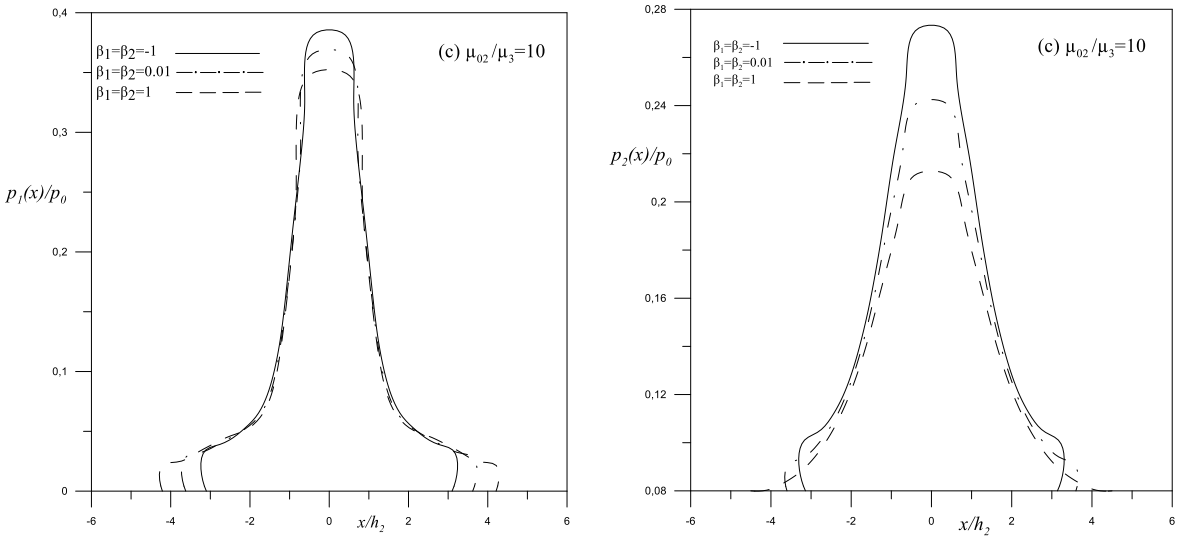


Şekil 1. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) değerleri için temas uzunluklarının $\beta_1 = \beta_2$ ile değişimi $(\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$

Şekil (3-4)' de, çeşitli (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları ve $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametreleri için temas yüzeyinde oluşan temas gerilme yayılışları verilmektedir. (μ_{02}/μ_3) kayma modülü oranları arttıkça temas uzunlukları artmakta, buna bağlı olarak yük daha geniş alana yayılacağından temas gerilmeleri azalmaktadır. $(\beta_1 = \beta_2)$ rijitlik parametlerinin artması halinde; temas yüzeyindeki en büyük temas gerilmeleri, (μ_{02}/μ_3) oranın 0' a yakın olduğu değerde artarken, (μ_{02}/μ_3) oranının daha büyük değerlerinde azaldığı görülmektedir.



Şekil 3. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) değerleri için temas gerilmelerinin $\beta_1 = \beta_2$ ile değişimi $(\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$



Şekil 4. Çeşitli (μ_{02}/μ_3) değerleri için temas gerilmelerinin $\beta_1 = \beta_2$ ile değişimi $(\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2, h_1 = h_2 = 1, a/h_2 = 1)$

Çalışmadan elde edilen sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

*Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalara ait rijitlik parametrelerinin (β_1, β_2), temas uzunlukları ve temas gerilmeleri üzerinde büyük oranda etkisi vardır.

*β_1 rijitlik parametresi arttıkça, yani 1. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitliği alt yüzeyinden üst yüzeyine doğru arttıkça; 1. ve 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arasındaki temas uzunluğu (b/h_2) artmaktadır.

*β_2 rijitlik parametresi arttıkça, yani 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın rijitliği arttıkça 1. ve 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalar arası temas uzunluğu (b/h_2) az da olsa azalırken, 2. fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas uzunluğu (c/h_2), β_2'nin negatif değerleri için azalmakta, pozitif değerleri için ise artmaktadır.

*Fonksiyonel derecelendirilmiş 2. tabakanın kayma modülünün yarım düzlemin kayma modülüne oranı (μ_{02}/μ_3) arttıkça temas uzunlukları artmakta, temas gerilmeleri ise azalmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] M. Yaylacı, A. Birinci, The receding contact problem of two elastic layers supported by two elastic quarter planes, *Structural Engineering and Mechanics*. 48(2) (2013) 241-255. Doi: 10.12989/sem.2013.48.2.241

[2] M. Yaylacı, E. Öner, A. Birinci, Comparison between analytical and ANSYS calculations for a receding contact problem, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*. 140(9) (2014) 4014070. Doi: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000781

[3] E. Öner, M. Yaylacı, A. Birinci, Solution of a receding contact problem using an analytical method and a finite element method, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 9(3) (2014) 333-345. Doi: 10.2140/jomms.2014.9.333

[4] E. Öner, M. Yaylacı, A. Birinci, Analytical solution of a contact problem and comparison with the results from FEM, *Structural Engineering And Mechanics*. 54(4) (2015) 607-622. Doi: 10.12989/sem.2015.54.4.000

[5] G. Adiyaman, M. Yaylacı, A. Birinci, Analytical and finite element solution of a receding contact problem, *Structural Engineering and Mechanics*. 54(1) (2015) 69-85. Doi: 10.12989/sem.2015.54.1.069

[6] A. Birinci G. Adiyaman, M. Yaylacı, E. Öner, Analysis of continuous and discontinuous cases of a contact problem using analytical method and FEM, *Latin American Journal of Solids and Structures*. 12(9) (2015) 1771-1789., Doi: 10.1590/1679-78251574

[7] E. Uzun Yaylacı, M. Yaylacı, H. Ölmez, A. Birinci, Artificial neural network calculations for a receding contact problem, *Computers and Concrete* 25(6) (2020). https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.6.000.

[8] H. Hertz, Gesammelte werke von Heinrich Hertz, Volume 1, Leipzig, (1985).

[9] G. Adiyaman, A. Birinci, E. Öner, M. Yaylacı, A receding contact problem between a functionally graded layer and two homogeneous quarter planes, *Acta Mechanica*. 227(3) (2016). Doi: 10.1007/s00707-016-1580-y

[10] M. Yaylacı, G. Adıyaman, E. Öner, A. Birinci, Examination of analytical and finite element solutions regarding contact of a functionally graded layer, *Structural Engineering and Mechanics*. 76(3) (2020) 325-336.

[11] M. Yaylacı, A. Eyüboğlu, G. Adıyaman, E. Uzun Yaylacı, E. Öner, A. Birinci, Assessment of different solution methods for receding contact problems in functionally graded layered medium, *Mechanics of Materials*, 2021, https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103730

[12] S. Dağ, F. Erdoğan, Crack and contact problems in functionally graded materials, *Ceramic Transactions*. 114 (2000) 739-746.

[13] S. El-Borgi, R. Abdelmoula, L. Keer, A receding contact problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate, *International Journal of Solids and Structures*. 43 (2006) 658-674. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.017.

[14] T.Ş. Özşahin, O. Taşkıner, Contact problem for an elastic layer on an elastic half plane loaded by means of three rigid flat punches, *Mathematical Problems in Engineering*. 10 (2013) 1155-2013.

[15] İ. Çömez, S. El-Borgi, Contact problem of a graded layer supported by two rigid punches, *Archive of Applied Mechanics*. 88 (2018) 1893-1903.

U-ÇENTİKLİ KOMPOZİT LEVHALARDA İLERLEMELİ HASAR ANALİZİ

Merve Uslu[1], Mete Onur Kaman[2]
[1,2]Fırat Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Elazığ

ABSTRACT

In this study; progressive failure analysis was performed on carbon fiber reinforced U-edge notched composite plates. In the experimental study, notched composite plates were tested under tensile load. At the end of the experiments, load-displacement graphs of each sample were obtained. In the study, the effect of change of notch width and depth on failure load and type was investigated. In the numerical study, progressive failure analysis was performed using *Hashin Failure Criteria*. Subprogram codes were written in ANSYS program, which uses finite element method for numerical analysis. As a result, numerical and experimental load-displacement graphs and damage types of the samples are presented comparatively. It has been observed that the increase of the notch depth in the plate damage load is a more effective parameter than the width.

Keywords: Composite plate, progressive failure analysis, U-notch, *Hashin* criteria;

ÖZET

Bu çalışmada; karbon fiber takviyeli U-kenar çentikli kompozit levhalarda ilermeli hasar analizi yapılmıştır. Deneysel çalışmada çentikli kompozit levhalar çekme yükü altında test edilmiştir. Deneyler sonunda her bir numuneye ait yük- yer değiştirme grafikleri elde edilmiştir. Çalışmada çentik genişliğinin ve derinliğinin değişiminin hasar yüküne ve tipine etkisi araştırılmıştır. Sayısal çalışmada ise *Hashin Hasar Kriteri* kullanılarak ilerlemeli hasar analizi gerçekleştirilmiştir. Sayısal analiz için sonlu elemanlar metodunu kullanan ANSYS programında alt program kodları yazılmıştır. Sonuçta numunelere ait sayısal ve deneysel yük-yer değiştirme grafikleri ve hasar tipleri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Levha hasar yükünde çentik derinliğinin artışının, genişliğe göre daha etkili bir parametre olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Kompozit levha, ilerlemeli hasar analizi, U-çentik, *Hashin* kriteri;

GİRİŞ

Günümüzde tüm mühendislik malzemeleri, mikroskobik boyutlarda bile olsa çatlak içerir. Bu çatlaklar malzemelerin kullanımına bağlı olarak gelişerek birbirleriyle birleşirler ve gözle görülebilecek boyutlara ulaşırlar. Yapıların güvenilirliğinin sağlanabilmesi için, çatlakların hangi durumda ve ne zaman büyüyeceğinin, ilerleyeceğinin ve kritik boyutlara ulaşacağının bilinmesi gerekir [1]. Makine parçalarında cıvata bağlantıları ve birleşimler için oluşturulan veya kendiliğinden oluşan delik, çentik ve çatlaklar yük altında gerilmelerin yoğunlaşmasına sebep olur. Geometrik süreksizlik bölgesindeki gerilme yoğunluğunun malzeme limit hasar

değerini aşması yapıda nihai hasarların oluşmasına sebep olur. Bu nedenle malzemelerin çentik veya çatlak bölgesinin tamir edilmesi veya ilgili bölgenin değiştirilmesi gerekir. Geleneksel metal malzemelere göre daha pahalı olan kompozitlerin hasar bölgesinin tamir edilmesi, tamamen değiştirilmesinin yerine daha ekonomik bir seçenektir. Fiber takviyeli kompozit malzemelere genellikle yamalı tamir sistemi uygulanır [2-10]. Hasar mekanizması izotropik malzemelere göre daha kompleks olan kompozitlerin yük altında davranışlarının incelenmesi, gittikçe büyüyen kullanım alanları nedeniyle bu noktada büyük önem taşır. Fiber takviyeli kompozitlerdeki hasar davranışları sayısal hasar analizleri ile matris ve fiberde ayrı ayrı olmak üzere incelenebilir [11-13]. Bu çalışmada farklı çentik geometrilerine sahip karbon fiber takviyeli kompozit levhaların çekme yükü altındaki hasar davranışı ilerlemeli hasar analizi ile incelenmiştir. Sayısal analizde levhaların hasarı *Hashin Hasar Kriteri* ile tespit edilmiş olup, ayrıca doğrulama deneyleri yapılmıştır. Literatürden farklı olarak deneysel ve sayısal yük-yerdeğiştirme grafikleri karşılaştırmalı olarak sunulmuştur.

MATERYAL VE METOD

Ortotropik Malzemelerde Hasar Kriterleri

Bir yapının başarılı tasarımı, etkili ve güvenli malzemelerin kullanımını gerektirir. Malzemedeki gerilme durumunu hasar kriterleriyle karşılaştırmak için hasar teorilerinin geliştirilmesi ve aynı zamanda geçerliliklerinin deneylerle doğrulanması gerekir. Kompozit malzemelerde açılı lamina için mukavemet hasar teorileri; *Maksimum Gerilme Hasar Kriteri, Maksimum Şekil Değiştirme Hasar Kriteri, Tsai-Hill Hasar Kriteri, Tsai-Wu Hasar Kriteri* ve *Hashin Hasar Kriteri* şeklinde sıralanabilir. *Hashin Hasar Kriteri*'ni diğer teorilerden ayıran en büyük özelliği hasarın matriste mi yoksa fiberde mi meydana geldiğini belirleyebilmesidir. Ayrıca çekme, basma veya kayma hasarı olup olmadığını da göstermektedir. $\boldsymbol{X_t}$, fiber doğrultusundaki çekme dayanımı, $\boldsymbol{Y_t}$, fibere dik doğrultudaki çekme dayanımı, S, 1 (fibere paralel doğrultu)-2 (fibere dik doğrultu) düzlemindeki kayma dayanımı, $\boldsymbol{X_c}$, fiber doğrultusundaki basma dayanımı, $\boldsymbol{Y_c}$, fibere dik doğrultudaki basma dayanımı [14] olmak üzere; fiber çekme hasarı

$$(\frac{\sigma_1}{X_t})^2 + (\frac{\tau_{12}}{S})^2 + (\frac{\tau_{13}}{S})^2 \geq 1 \tag{1}$$

durumunda şartı için, fiber basma hasarı

$$(\frac{\sigma_1}{X_C})^2 \geq 1 \tag{2}$$

için $\sigma_1 < 0$ olduğu zaman, matris çekme hasarı

$$(\frac{\sigma_2}{Y_t})^2 + (\frac{\tau_{12}}{S})^2 + (\frac{\tau_{23}}{S})^2 \geq 1 \tag{3}$$

durumunda $\sigma_2 > 0$ için, matris basma hasarı

$$(\frac{\sigma_2}{Y_c})^2 + (\frac{\tau_{12}}{S})^2 + (\frac{\tau_{23}}{S})^2 \geq 1 \tag{4}$$

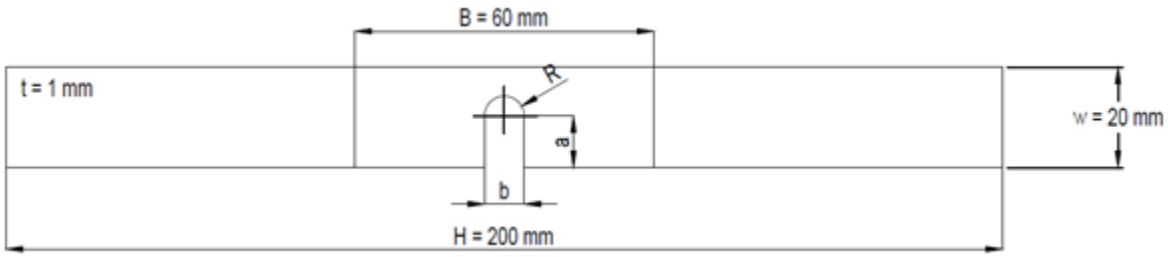
durumunda $\sigma_2 < 0$ halinde, matris kayma hasarı ise,

$$(\frac{\sigma_1}{X_c})^2 + (\frac{\tau_{12}}{S})^2 + (\frac{\tau_{13}}{S})^2 \geq 1 \tag{5}$$

eşitliği sağlandığı zaman $\sigma_1 < 0$ için ortaya çıkar. Denklemlerdeki σ_1 ve σ_2 1 ve 2 doğrultularındaki normal gerilme, τ_{12} , τ_{23} ve τ_{13} ise sırasıyla 1-2, 2-3 ve 1-3 düzlemlerindeki kayma gerilme bileşenleridir.

Deneysel Çalışma

Bu çalışma için; ortalama t = 1 mm kalınlığında, w = 20 mm genişliğinde, H = 200 mm boyunda numuneler hazırlanmıştır. Çentikli numunelerin boyutları, çentik derinliği a ve çentik genişliği b parametlerine bağlı olarak Şekil 1'de gösterilmiştir. Çentik genişliği ve derinliği değiştirilerek oluşturulan numuneler Çizelge 1'de sunulmuştur.



Şekil 1: Çentikli kompozit levha boyutları

Çizelge 1. Hazırlanan tüm deney numune tiplerinin boyutları

Numune	w (mm)	H (mm)	a (mm)	b (mm)	R (mm)
1A	20	200	4	4	2
1B	20	200	6	4	2
1C	20	200	8	4	2
2A	20	200	6	4	2
2B	20	200	5	6	3
2C	20	200	4	8	4

1A,1B ve 1C deney numunelerinin levha net kesit genişliği değişmektedir. Bu numune grubu için çentik genişliği b = 4 mm sabit olup, levha net kesit genişliği

$$w_{net} = [\mathrm{w} - (\mathrm{a} + \mathrm{R})] \tag{6}$$

10, 12 ve 14 mm'dir. 2A, 2B ve 2C numuneleri faklı çentik genişliğine sahiptir. Levha net kesit genişliği $w_{net} = 12$ mm sabit olup, çentik genişliği b = 4, 6 ve 8 mm olarak seçilmiştir. Levha malzemesi olarak twill dokuma karbon fiber takviyeli/epoksi kompozit kullanılmıştır. Karbon fiber/epoksi levhalar 4 tabakalı olup, fiber takviye açısı 0°'dir. Kompozitlerin mekanik özellikleri Çizelge 2'de verilmiştir. Kompozit malzemeler *Kompozitsan, İzmir, Türkiye* firmasından hazır kesilmiş halde temin edilmiştir. Geriye kalan U-kenar çentikler ise daha sonradan üniversal parmak freze tezgahında oluşturulmuştur. Çentikli numuneler *Instron BS8801* üniversal test makinasında 1 mm/dak çekme hızında teste tabi tutulmuştur. Test sonucunda numunelere ait kuvvet-yer değiştirme grafikleri elde edilmiştir. Numunelerin kuvvet-yer değiştirme grafiklerinde; yükleme belirli bir nihai hasar noktasına çıktıktan sonra takviyeli kompozitteki, yükü taşıyan fiberlerin hasar görmesinden dolayı artık yük taşıyamadığı için numune uzamaya devam etmesine rağmen yüklemenin ani olarak düştüğü gözlemlenmiştir.

Malzemenin maksimum dayanım yükünü görebilmek için yüklemeler nihai hasar noktalarına kadar devam ettirilmiştir [15].

Çizelge 2: Kompozit malzemeye ait mekanik özellikler [15]

Mekanik özellik	Sembol	Değer
Fiber doğrultusundaki elastisite modülü	E_1	37000 MPa
Fibere dik doğrultudaki elastisite modülü	E_2	36600 MPa
Poisson oranı	v_{12}	0.25
Kayma modülü	G_{12}	878 MPa
Fiber doğrultusundaki çekme mukavemeti	X_t	530 MPa
Fibere dik doğrultudaki çekme mukavemeti	Y_t	530 MPa
Fiber doğrultusundaki basma mukavemeti	X_c	-242 MPa
Fibere dik doğrultudaki basma mukavemeti	Y_c	-242 MPa
Kayma mukavemeti	S	68.9 MPa

Sayısal Çalışma

Sayısal model hazırlanırken laboratuvarda incelenen numunelerin boyutları kullanılmıştır. İncelenen numunelerin deneysel ve sayısal olarak sonuçlarının birbirleriyle uyumlu olmaları için $[0^0]_4$ kompozit numuneler, ayrı ayrı ölçülmüş ve modellenmiştir. Kompozit malzeme lineer elastik olarak tanımlanmıştır. Üç boyutlu modeller kullanılarak sonlu elemanlar analizi yapılmıştır. Laboratuvar ortamındaki deneysel çalışmada numuneye uygulanan yükler kademeli olarak artırılmıştır. Bilgisayar ortamında *ANSYS* programıyla yapılmış olan sayısal çalışmada da benzer yüklemenin uygulanabilmesi için *APDL* (*ANSYS Parametric Design Language*) kodları uygulanarak ilerlemeli hasar analizi yapabilen alt bir program hazırlanmıştır. Analizlerde hasar teorisi olarak ise *Hashin Hasar Kriteri* kullanılmıştır. Sayısal model oluşturulduktan sonra sınır şartları modele uygulanmıştır. Levhanın sol kenarındaki düğümlerde x, y ve z doğrultularındaki tüm yer değiştirmeler $u_x = u_y = u_z = 0$ alınarak sabit mesnet şartı sağlanmıştır. Levhanın sağ kenarında ise $u_x \neq 0$, $u_y = u_z = 0$ seçilerek ilgili düğümlere x ekseninde uzama serbestliği sağlanmıştır. Böylece deney şartlarının birebir modellemesi yapılmıştır.

Çizelge 3: Sayısal çözümde kullanılan eleman ve düğüm sayıları

Numune	Eleman Sayısı	Düğüm Sayısı
1A	3152	12964
1B	3112	14567
1C	3080	12692
2A	3112	14567
2B	3100	14496
2C	3068	14316

Yatay doğrultuda (x ekseni) uygulanan uzama miktarı kademeli olarak programda artırılmıştır. Uzamaya, maksimum hasar yükündeki azalma minimum seviyeye ulaşıncaya kadar devam edilmiştir. Levhanın sağ tarafına uygulanan uzama miktarına karşılık, aynı düğümlerden elde edilen reaksiyon kuvvetleri programa kaydedilerek deneysel grafiklerde olduğu gibi kuvvet-yer

değiştirme grafikleri elde edilmiştir. Sonlu eleman sayısını optimize etmek amacıyla yapılan çalışmalar sonucu elde edilen eleman sayıları ve düğüm sayıları Çizelge 3' de sunulmuştur.

İlerlemeli Hasar Analizi

Sonlu eleman modeli oluşturulup sınır şartları ve yükleme durumu belirlendikten hasar analizi yapılmıştır. İlerlemeli hasar analizinde *ANSYS*'te kullanılan *APDL* kodlarından faydalanılmıştır. *Hashin* formülasyonu alt programda kullanılmış ve oluşan hasar durumuna göre ilgili malzeme özellikleri indirgenip hasarın oluştuğu elemanların mekanik özellikleri hasar tipine göre zayıflatılmıştır. Eğer elemanda (1)-(5) denklemlerine göre hasar meydana gelmişse elemanın malzeme özellikleri değiştirilip, daha zayıf mekanik özelliklere sahip yeni bir malzeme numarası verilmiştir. Malzeme numarası değiştirilince, ilgili sonlu elemanın renklendirmesi de değişeceği için görsel olarak hasar çeşitleri de elde edilmiştir. (1)-(5) denklemleri ile hasar tipine göre belirtilen renklendirmeler Çizelge 4'de verilmiştir.

Çizelge 4: Modeldeki her bir sonlu elemanda hasar öncesi ve sonrası renklendirme [3]

Hasar	Şart	Denklem	Hasar öncesi	Hasar sonrası
Fiber çekme	$\sigma_1 > 0$	(1)	Turkuaz	Mor
Fiber basma	$\sigma_1 < 0$	(2)	Turkuaz	Kırmızı
Matris çekme	$\sigma_2 > 0$	(3)	Turkuaz	Açık mavi
Matris basma	$\sigma_2 < 0$	(4)	Turkuaz	Pembe
Matris kayma	$\sigma_1 < 0$	(5)	Turkuaz	Yeşil

Malzeme mekanik özelliklerinin indirgenmesi için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada indirgeme denklem (6)'da görüldüğü gibi, malzemenin başlangıçtaki hasarsız mekanik özelliğinin ($M\ddot{O}$) bir katsayı ile ($\eta << 1$) çarpılarak düşürülmesi kuralı uygulanmıştır.

$$M\ddot{O}_{hasarlı} = \eta.(M\ddot{O}_{hasarsız}) \tag{7}$$

Burada; $M\ddot{O}_{hasarlı}$ indirgenmiş malzeme mekanik özelliğini, $M\ddot{O}_{hasarsız}$ ise indirgenecek malzeme mekanik özelliğini temsil eder.

Çizelge 5: Farklı hasar tipleri için malzeme indirgeme kuralı [16]

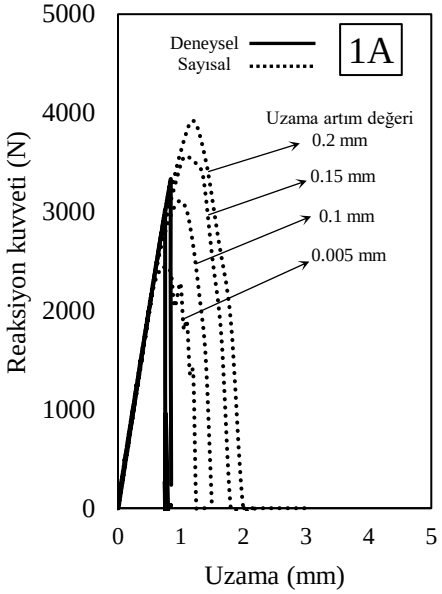
Hasar	Denklem	İndirgenecek mekanik özellik, $M\ddot{O}_{hasarsız}$
Fiber çekme	(1)	E_1, E_2, G_{12}, v_{12}
Fiber basma	(2)	E_1, E_2, G_{12}, v_{12}
Matris çekme	(3)	E_1, v_{12}
Matris basma	(4)	E_1, v_{12}
Matris kayma	(5)	G_{12}, v_{12}

Bu çalışmada kullanılan malzeme indirgeme kuralı Çizelge 5'de verilmiştir. Fiber çekme ve basma hasarı yapıda baskın ve yıkıcı hasar olduğu için malzemenin tüm mekanik özellikleri indirgenirken, matris çekme ve basma hasarında fibere dik doğrultudaki elastisite modülü ve

Poisson oranı, matris kayma hasarı durumunda ise kayma modülü ve Poisson oranı indirgenir. Çalışmada indirgeme katsayısı η =0.0000001 olarak alınmıştır.

İlerlemeli Hasar Analizinde Uzama Artım Miktarının Etkisi

İlerlemeli hasar analizinde sonlu eleman sayısının optimizasyonun yanı sıra diğer önemli parametre ise yükleme adım aralığının seçimidir. Maksimum hasar yükünün referans alındığı analizlerde farklı uzama artımları için gerçeğe en yakın hassas sonuçlar alınana kadar çentikli numunelerin her biri için çözümler tekrarlanmıştır. Sonuç olarak her adımdaki analiz için levhadaki uzama f_{art}= 0.113 mm olarak artırılmıştır. Çalışmada kullanılan tüm numune tiplerinin analizi yapıldıktan sonra kompozit levha üzerinde oluşturdukları maksimum hasar yükleri elde edilmiş ve buna bağlı grafikler oluşturulmuştur.

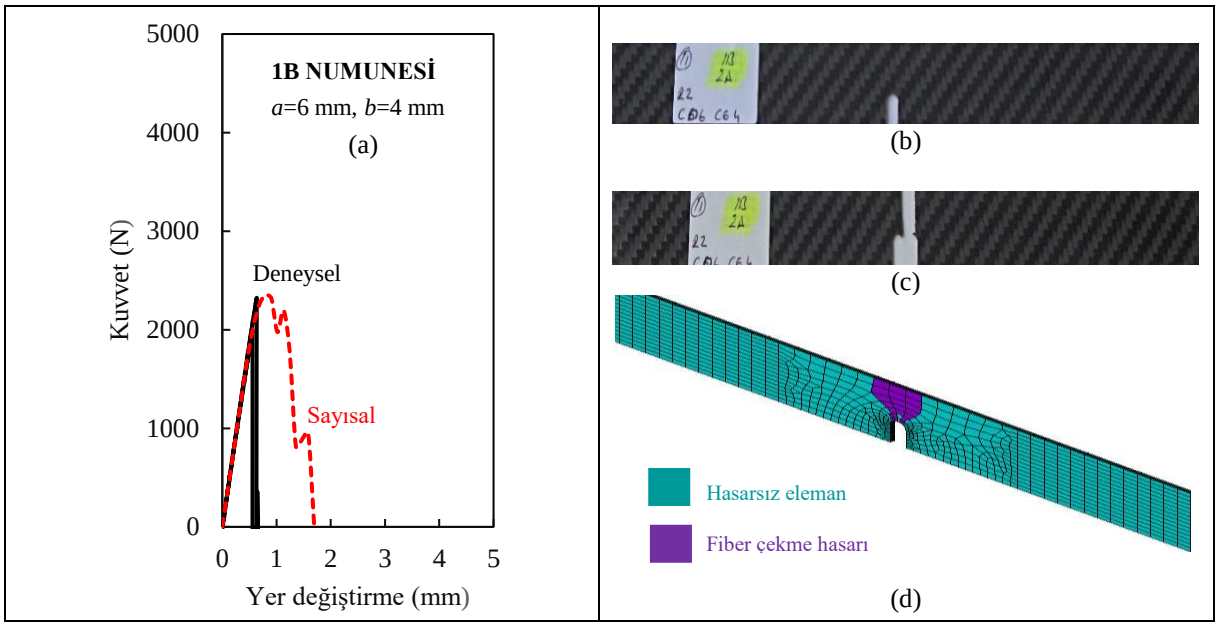


Şekil 2: 1A numunesinde farklı uzama artım değerleri için hasar yükü değişimi

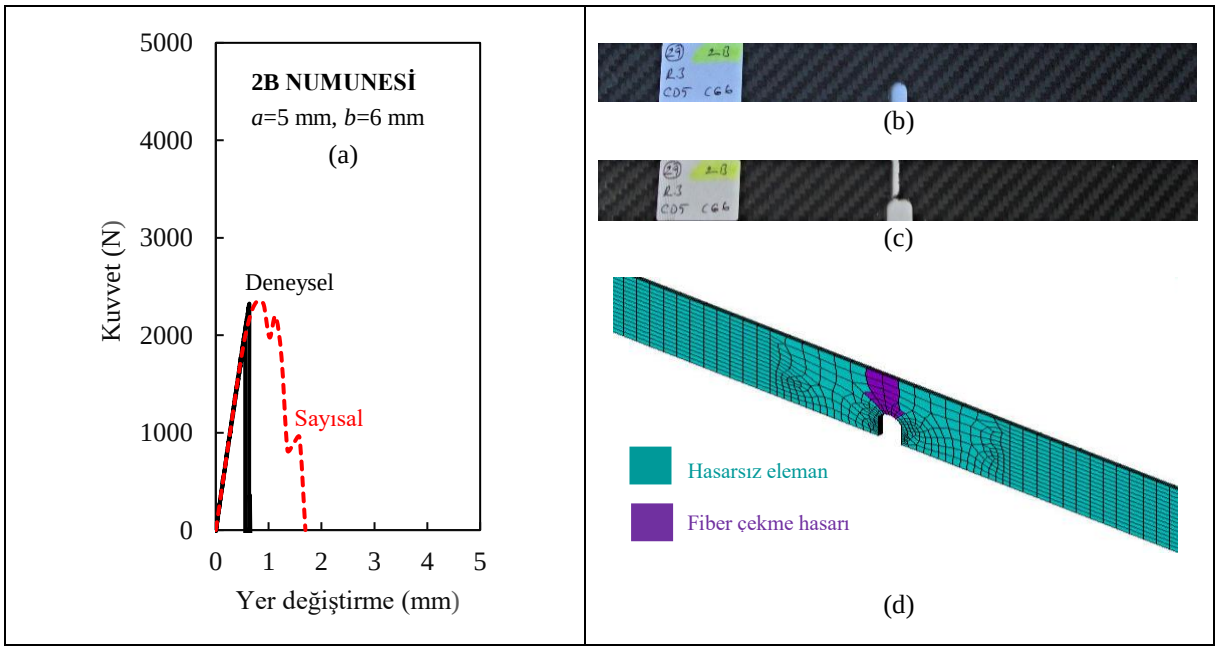
SONUÇLAR

Çekme testinde numunelere ait değişken parametreler, çentik genişliği ve derinliğidir. Deney sonuçlarını kendi aralarında karşılaştırma yapabilmek için levha net genişliği (w_{net}) ve çentik genişliği (b) sabit olan numuneler iki gruba (1A-C ve 2A-C) ayrılmıştır. Çekme testi sonucu elde edilmiş kuvvet-yer değiştirme grafikleri Şekil 4 ve 5'de 1B ve 2B numuneleri için verilmiştir. Karbon fiber kompozit levhalar oldukça gevrek oldukları için, lineer bir yük-yer değiştirme ilişkisinin sonunda ani kırılma ile sonuçlanan bir malzeme özelliği göstermiştir. Deneysel hasar resimlerinden; çentik ucunda fiber çekme hasarı ile sonuçlanan yıkıcı hasar görülmektedir. Analizde; sayısal hasarın, maksimum yük değerine kadar deneysel verilerle uyumlu olarak ilerlediği, daha sonrasında ise ani yük düşüşünün elde edildiği görülebilir. Ancak deneysel yükteki keskin düşüş sayısalda biraz daha kademelelidir. Sonlu eleman boyutu ve yükleme adımı bu sonucu etkileyen parametrelerdir. Sayısal çözümde de çentik ucundan başlamak üzere fiber çekme hasarının levha serbest kenarına kadar ulaşarak yıkıcı hasarın elde edildiği görülmüştür (Şekil 4.c-5.c). Dolayısıyla da deneysel ve sayısal hasar tiplerinin de

benzer olduğu söylenebilir. Deneysel ve sayısal sonuçlar için lineer bölgedeki uyumluluk, hasar yüklerinin ve tiplerinin benzerlikleri ilerlemeli hasar analizinde belirleyici parametrelerdir.



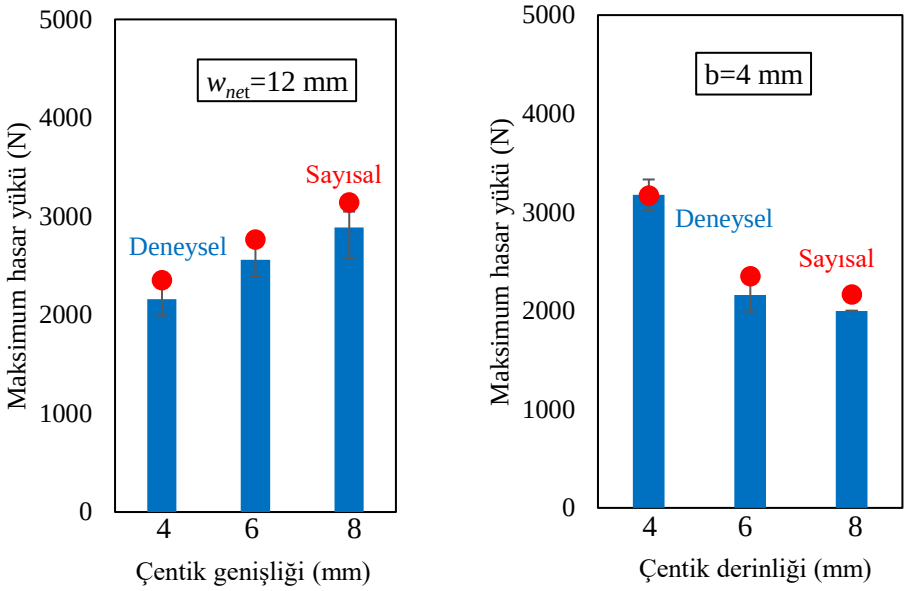
Şekil 4: 1B kompozit numunesine ait a) kuvvet yer-değiştirme grafiği, b) deney öncesi, c) deney sonrası ve d) sayısal hasar görünümü



Şekil 5: 2B kompozit numunesine ait a) kuvvet yer-değiştirme grafiği, b) deney öncesi, c) deney sonrası ve d) sayısal hasar görünümü

Şekil 6.a'da $w_{net} = 12$ mm sabit tutulup farklı çentik genişliklerine göre karşılaştırılma yapılmıştır. Çentik genişliğinin artmasıyla hasar yükünün artmıştır. Genişliğin artışına bağlı olarak başlangıçta daha keskin uçlu olan çentik geometrisi, gerilme yoğunlaşmasının azalmasına neden olmuştur [17]. En yüksek hasar yükü 2C numunesine ait olup 2890 N değerindedir. En düşük hasar yükü 2A numunesine ait olup değeri 1962 N'dur. Sayısal çalışma ile uyumlu olup gerçeğe en yakın değerlere sahip olan numune 2B numunesidir. Öte taraftan

çentik derinlğinin artışına bağlı olarak hasar yükleri ise azalmıştır. Yük taşıyan kesit alanın azalması bu sonucun doğal sebebidir. Çentik genişliğinin değişimi ile karşılaştırıldığında maksimum hasar yükünü değiştiren en etkili parametrenin derinlik olduğu görülebilir. b= 4 mm'den 8 mm'ye çıktığı zaman hasar yüküdeki artış %34 iken, a=4 mm'den 8 mm'ye çıktığı zaman yükteki azalma %63'tür. Şekil 6.b'de çentik genişliği sabit tutulup (b=4 mm) çentik derinliğine göre değişim incelenmiştir. Yapılan deneylerde en düşük hasar yükü 2001 N değeri ile 1C numunesine ait levha, en yüksek hasar yükü ise 3332 N değeri ile 1A numunesinde elde edilmiştir. Sayısal çalışma ile gerçek değerlere en uygun 1A numunesi davranmıştır. Sayısal çalışma ve deneysel çalışma arasındaki en uzak uyum 1C numunesinde tespit edilmiştir. Genel olarak, sonlu eleman analizleri, literatürdeki deneysel değerlerle karşılaştırıldığında %10'dan daha az hata ile gerilme yığılma faktörü ve çekme mukavemetini tahmin edebilmektedir [18]. Grafiklerde yüklerin en büyük değeri a=4 mm için aldıktan sonra düştüğü görülmektedir. Deney öncesi ve deney sonrası hasar tipi fotoğraflarına göre tüm numunelerde fiber çekme hasarı oluşmuştur.

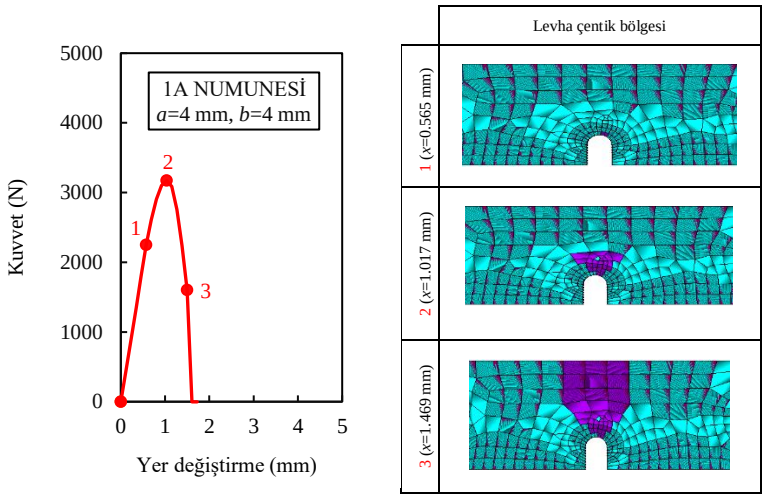


(a) (b)

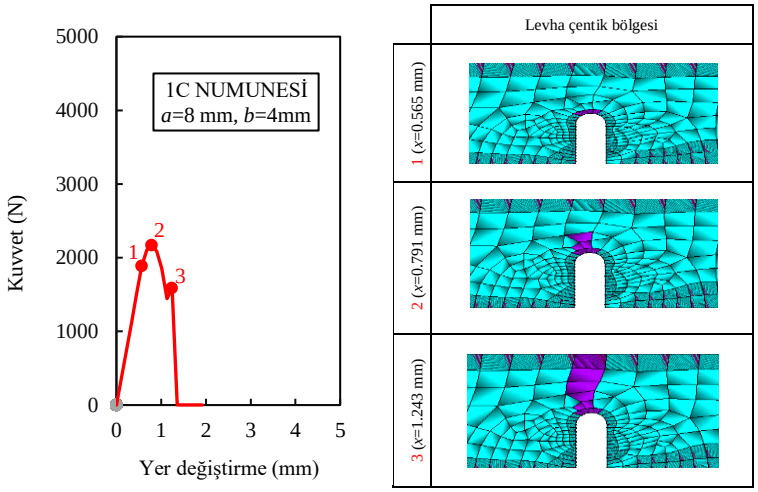
Şekil 6: Levhaların maksimum hasar yüklerinin çentik a) genişliğine, b) derinliğine göre değişimi.

Deneysel ve sayısal kuvvet-yer değiştirme grafiklerinin uyum içerisinde elde edilmesi sonrasında sayısal grafiklerde lineer bölge bitiş noktası 1, maksimum yük noktası 2 ve hasar bölgesinin artık ilerlemediği (nihai hasar yükünün elde edildiği) nokta 3, farklı numune analizleri için Şekil 7 ve 8'de gösterilmiştir. Yükleme ve model simetrik olduğu için her dört tabaka için de hasar tipi ve ilerlemesi aynıdır. Şekil 7'de 1A numunesine ait sayısal kuvvet-yer değiştirme grafiğine göre hasar resimleri verilmiştir. Çentikli kompozit levhada *Hashin* hasarına bakıldığında birinci, ikinci ve üçüncü hasar noktalarında fiber çekme hasarı görülmektedir. Kompozit levhalarda hasar yükleme yönüne dik bir doğrultuda ilerlemiştir [18]. Sayısal maksimum hasar yükü 3170 N' dur. 1C numunesi için hasar yükü ise 2167 N'dur (Şekil 8). Sayısal ve deneysel sonuçların daha karmaşık modeller için de uyumlu olabilmeleri için özellikle daha kalın kompozitler için sadece düzlemsel mekanik özelliklere değil, aynı zamanda kalınlık boyunca davranışlara bakılmalıdır. Özellikle delaminasyon hasarının da hasar kriterinde kullanılması

gerekir [19]. Bu çalışmada kullanılan kompozit levhalar 1mm kalınlığında olduğu için tabakalar arası dayanım dikkate alınmamıştır.



Şekil 7: 1A numunesine ait sayısal kuvvet-yer değiştirme grafiği ve hasar ilerlemesi



Şekil 8: 1C numunesine ait sayısal kuvvet-yer değiştirme grafiği ve hasar ilerlemesi

TARTIŞMA

Çentikli kompozit levhaların çekme yükü altındaki davranışları değerlendirildiğinde; levhanın çentik genişliği arttıkça maksimum hasar yükünün arttığı gözlemlenmiştir. Çentik genişliğinin azalmasıyla oluşan geometri çatlak şekline benzediği için gerilme yığılmaları artmıştır. Çentik genişliğinin aynı, çentik derinliğinin farklı olduğu levhalarda çentik derinliği azalmasına bağlı olarak maksimum hasar yükünün net bir biçimde arttığı gözlemlenmiştir. Numuneler çekme testinden sonra çentik açılan bölgeden kopmuş ve hasar davranışı olarak fiber çekme hasarı elde edilmiştir. Çentik boyutlarının değişimi numunlerde hasar yükünü %34-68 arasında değiştirmiştir. Boyut değişiminde çentik derinliğinin, genişliğe göre daha önemli bir parametre olduğu görülmüştür. Sayısal ve deneysel sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmüştür. Sonlu eleman ağ yapısı, yükleme adımı, malzeme indirgeme kuralı gibi parametreler ilerlemeli hasar analizi sonuçlarını etkilemektedir. Dolayısıyla problem çözümünden önce bu parametrelerin etkileri dikkatlice ortaya konulmalıdır. Tabakalar arası

hasar kriteri de fiber takviyeli kompozitlerde analizlerde dikkate alınması gereken noktalardandır. Seçilen sayısal model farklı fiber oryantasyonlara sahip tabakalı kompozitlere farklı yükleme şartları için uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] A.A.Baker, and R. Jones, Bonded Repair of Aircraft Structures, Martinus Nijhoff, Dordrecht, Boston Martinus Nijhoff, ISBN 90 (1987) 247-251.

[2] M. A. Bellali, B. Serier, M. Mokhtari, R. D. S. G .Campilho,F. Lebon, H. Fekirini,XFEM and CZM Modeling to Predict the Repair Damage by Composite Patch of Aircraft Structures: Debonding Parameters, *Composite Structures*, 266 (2021) 113805.

[3] J. L. Martinez, J. C. R. Cyrino, M. A. Vaz, I. D. Hernandez, V. A. Perrut, Composite Patch Repair of Damaged Tubular Members from Flare Boom Structures Subjected to Compressive Loads, *Composite Structures*, 257 (2021) 113168.

[4] W. Zhou, X. Ji, S. Yang, J. Liu, L. Ma, Review on The Performance Improvements and Non-Destructive Testing of Patches Repaired Composites, *Composite Structures*, 263 (2021) 11369.

[5] A. Khechai, A. Tati, B. Guerira, A. Guettala, P.M. Mohite, Strenght Degradation and Stress Analysis of Composite plates with Circular, Square and Rectangular Notches Using Digital Image Correlation, *Composite Structures*, 185 (2018) 699-715.

[6] K. P. Deepak, M.W. Anthony, Multiscale Analysis of Notched Fiber Reinforced Laminates, *Composites Part B: Engineering*, 173 (2019) 106986.

[7] S. Tino, R. Fontes, E. Aquino, Theories of Failure Average Stress Criterion and Point Stress Criterion in Notched Fiber-Reinforced Plastic, *Journal of Composite Materials,* 48 (2013) 2669-2676.

[8] V. K. Kannan, V. Murali, A. Rajadurai, B. N. Rao, Finite Element Analysis and Notched Tensile Strenght Evaluation of Center-Hole 2D Carbon/Carbon Laminates, *Advanced Composite Materials*, 20 (2011) 289-300.

[9] C. J. Liu, A. H. J. Nijhof, L.J. Ernst, A New Ultimate Strength Model of Notched Composite Laminates Including The Efects of Matrix Failure, *Journal of Composite Material*, 44 (2009) 1335-1349.

[10] S. Tino, E. Aquino, Notched GFRP: Anisotropy, Residual Strength, and Fracture Characteristics, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 31 (2012) 29-40.

[11] A. P. C. Duarte, A.D. Saez, N. Silvestre, Comparative Study between XFEM and Hashin Damage Criterion Applied to Failure of Composites, *Thin-Walled Structures*, 115 (2017) 277-288.

[12] J. Gu, P. Chen, Some Modifications of Hashin's Failure Criteria for Unidirectional Composite Materials, *Composite Structures*, 182 (2017) 143-152.

[13] D. Flore, B. Stampfer, K. Wegener , Experimental and Numerical Failure Analysis of Notched Quasi-Unidirectional Laminates at Room Temperature and Elevated Temperature, *Composite Structures*, 160 (2017) 128-141.

[14] A.K. Kaw, Kompozit Malzeme Mekaniği, Efil Yayınevi, (1997).

[15] C. Doğan, Çift Seri Pim Bağlantılı Dokuma Karbon Fiber/Epoksi Kompozit Levhalarda Hasar Analizi, Yüksek Lisans Tezi,Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Entitüs, (2018).

[16] M.O. Kaman, K. Turan, Kompozit Malzemeler için İlerlemeli Hasar Analizinde Çözümü Etkileyen Faktörler, *DÜMF Mühendislik Dergisi*, 10:2 (2019) 581-589.

[17] A. Saylık, M.O. Kaman, Nonlinear Stress Analysis of V-notched Aluminum Plates Repaired with the Wet Patch Technique, *The Journal of Adhesion*, 95:1(2019) 23-43.

[18] V. Divse, D. Marla, S. S. Joshi, Finite Element Analysis of Tensile Notched Strength of Composite Laminates, *Composite Structures*, 255 (2020) 112880.

[19] M. Ridha , C.H. Wang, B.Y. Chen, T.E. Tay, Modelling Complex Progressive Failure in Notched Composite Laminates with Varying Sizes and Stacking Sequences, *Composites: Part A*, 58 (2014) 16–23.

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELERDE TERMAL GERİLME ANALİZİ VE MALZEME PARAMETRELERİNİN OPTİMİZASYONU

Tuğba Baytak[1], Osman Bulut[2]
[1,2]Yazar1-2, İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, İstanbul

ABSTRACT

Functionally graded materials (FGMs), which are examples of heterogeneous materials in structural elements, are frequently used to provide superior mechanical, thermal or optical properties compared to homogeneous materials. In many engineering sectors such as the industries of defense, chemistry, nuclear, aeronautics and construction, heterogeneous structural elements with the improved thermal properties are needed. The quality of the designs of the elements made of different materials generally determines the operational reliability and equipment life of the structures. Therefore, the analysis of thermal stresses in FGM and the development of related methods has emerged as a current question. When heterogeneous materials are formed as FGM or layered composites, the mechanical and thermal properties are not constant, but change with a certain function. In many studies in the literature, different parameters and functions have been proposed for analytical solution with certain assumptions and limitations. In this study, verification of the solutions proposed for thermal analysis of FGM and the analytical and numerical analyses suggested in different studies were compared. In addition, the thermal stress equations are derived in the heterogeneous layer formed with different coefficients of thermal expansion in the direction of the element thickness. In the case of multi-layer plate production instead of two-layer normal composite, the stress distributions around the interfaces and the variation of the stress values at the tip of various cavities are shown.

Keywords; Functionally graded materials; finite element method; thermal stress; photoelasticity.

ÖZET

Heterojen malzeme olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler üstün mekanik, termal veya optik özellikleri sağlayacak şekilde yapı elemanı olarak sıkça kullanılmaktadır. Uçak, uzay gibi havacılık endüstrisi başta olmak üzere savunma sanayii, kimya, nükleer ve inşaat gibi bir çok mühendislik sektöründe termal özellikler bakımından üstün yapı elemanlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Farklı malzemelerden yapılmış elemanların tasarımlarının kalitesi, genel olarak ilgili yapıların operasyonel güvenilirlik ve ekipman ömrünü belirlemektedir. Bu nedenle fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde termal gerilmelerin analizi ve ilgili yöntemlerin geliştirilmesi güncel bir soru olarak ortaya çıkmıştır. Heterojen malzemeler fonksiyonel derecelendirilmiş veya tabakalı kompozit şeklinde oluşturulduklarında

derecelenme doğrultusunda malzemenin mekanik ve termal özellikleri sabit olmayıp belirli bir fonksiyonla değişmektedir. Literatürde bir çok çalışmada belli varsayım ve sınırlamalar ile analitik çözüm için farklı parametreler ve fonksiyonlar önerilmiştir. Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin termal analizi için önerilen çözümlemelerin doğrulanması ve farklı çalışmalarda önerilen analitik ve sayısal çözümlemelerin karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca eleman kalınlığı doğrultusunda ısıl genleşme katsayıları farklı olarak değişen tabakalı oluşturulmuş heterojen levhada termal gerilme denklemleri türetilmiştir. İki tabakalı normal kompozit yerine çok tabakalı levha üretilmesi durumunda malzeme geçişinde gerilme dağılımları ve oyuk ucu gerilme değerlerinin değişimi gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler; Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler; sonlu eleman yöntemi; termal gerilme; fotoelastisite.

GİRİŞ

Heterojen malzemeler mekanik özellikleri bir noktadan diğer noktaya değişkenlik gösteren ve/veya farklı doğrultularda farklı mekanik özelliklere sahip malzemelerdir. Yapı sistemlerinde homojen malzemelere göre üstün mekanik veya termal özellikler sağlaması amacıyla sıkça kullanılmaktadırlar. Kompozit malzemeler ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler bir çok mühendislik alanında güncel olarak kullanılan heterojen malzeme örnekleridir. Uçak, uzay gibi havacılık endüstrisi başta olmak üzere savunma sanayisi, kimya, nükleer ve inşaat gibi bir çok mühendislik sektöründe termal özellikler bakımından üstün heterojen malzeme ve heterojen yapı elemanlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Literatürde tam seramik ve tam metal malzemenin birleştirilmesiyle oluşturulan iki tabakalı kompozit ile tam seramikten tam metale doğru dağılımı belirli bir fonksiyonla değişen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin yapısı ve termal gerilme dağılımlarının karşılaştırması yapılmıştır. Kompozit malzemede seramik ile metal geçişinde; ısı direnci, termal iletkenlik, termal genleşme katsayısı ve termal gerilme dağılımlarında ani, belirgin bir fark gözlenmiştir. Fonsiyonel derecelendirilmiş malzemede ise bu geçiş daha yavaş ve sıçramasız olmuştur. Kompozit elemanda birleşim yüzeyinde çok yüksek gerilme sıçramalarının elemanı oluşturan malzemelerde ayrılmalara neden olabildiği belirtilmiştir. Ani gerilme sıçramalarının ve malzemelerde ayrılmaların önlenmesi için heterojen malzemelerin bir sınıfı olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanımının yeni bir yöntem ve avantaj olacağı belirtilmiştir [1]. Bambular, doğal kemik ve insan diş yapısı doğal derecelenmiş malzeme örneği olarak gösterilmektedirler. Her iki yapıda da dış kısımda daha sert bir yapı ortadan iç kısma doğru ise yapısının daha yumuşak olduğu bu sayede ise dışarıdan gelen darbelerin veya gerilmelerin iç kısımlara doğru azaltılarak iletildiği, yük transferinin daha yumuşak ve tehlikesiz olduğu belirtilmiştir. Özellikleri çok farklı iki malzeme arasında derecelendirilmiş bir yapı oluşturularak gerilmelerin azaltılması amaçlanır. Örneğin cam ve seramik malzemeler arasında kırılgan cam yüzeyde yüksek gerilmelerin çatlaklara neden olmaması için malzemeler arasına derecelendirilmiş bir yapı yerleştirilir. Özellikle üstün termal özellikler aranan elemanlarda malzemelerin sıcaklığa bağlı termoelektik özellikleri birbirinden farklı olduğu için enerji dönüşümünü geliştirmek amacıyla kullanılırlar. Tıp dalında özellikle diş implantlarında çalışılmaktadır [2]. Xua vd. [3] yaptıkları derleme çalışmada ince cidarlı tüp kesitlerde fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme kullanıldığında daha yüksek enerji absorbe edilebildiğini, malzemede kütle azaltımı ile çarpışmaya dayanıklılık arasındaki dengenin daha iyi olduğunu sonlu eleman analizleri ile göstermişlerdir. Bir çok alanda kullanılan tüp kesite sahip yapı elemanlarında titreşim analizi de araştırılan konular arasındadır [4]. İnşaat

sektöründe özellikle fonksiyonel derecelendirilmiş plak ve kiriş elemanların analitik çözümü ve titreşim analizi de güncel araştırmalar arasındadır [5, 6].

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler uçak, uzay endüstrisinde kullanılan bir çok elemanda, özellikle türbinlerinde, nükleer reaktörlerin duvarlarında, savunma sanayii zırhlı araçlarında ve otomobil endüstrisinde ve inşaat sektöründe yapı elemanlarında mekanik ve termal gerilmelerin daha güvenli aktarılmasını sağlamak, gerilme yığılmalarını azaltmak amacıyla da kullanılırlar. Anju ve Subha [7] derleme makalelerinde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde mekanik özelliklerin, elemanda bir yüzeyden diğer yüzeye doğru yavaş ve sürekli değiştiğini yüksek termal gerilmelere dayanan ve termal gerilmelerin yeterli derecede azaltılmasını sağlayan avantajlı malzemeler olduğunu belirtmişlerdir. Uzay endüstrisinde kullanılan araçların gövde yapılarında dışarıdan içeriye doğru termal gerilmeler yavaş ve sürekli bir şekilde azaltılabilmektedir. Bu sayede ani değişen termal gerilmelerin neden olacağı zararlar önlenebilmekte veya azaltılabilmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanıldığı güncel ve yeni bir teknoloji olarak Uluslararası Termonükleer Deneysel Reaktör (ITER) yeni nesil enerji üretimi için füzyon teknolojisi çalışmaları da önemli bir yer tutmaktadır. "Nükleer reaksiyon füzyon ile daha güvenli, karbon salınımı yapmayan neredeyse sınırsız enerji üretimi amaçlanmaktadır. ITER 'in amacı bugünün füzyon makineleri ile geleceğin nükleer füzyon santralleri arasında termal deneysel bir çalışma yapmaktır" [8]. Bu reaktör yapılarında Tungsten(W)/Bakır (Cu) kombinasyonu ile oluşturulan yapı elemanlarının kullanımı günümüzde artmıştır [9,10,11]. Topal ve Gulgeç [12] fonksiyonel derecelendirilmiş katı silindirin konveksiyonel ısı yayınım durumunu düzlem şekil değiştirme hali için çalışmıştır. Önceki çalışmalarda FGM 'de elastisite modülü, Poisson oranı ve ısıl genleşme katsayısı değerleri kuvvet fonksiyonu veya üstel fonksiyon ile değişirken kendi çalışmalarında daha gerçekçi bir yaklaşım önerdiklerini belirtmişlerdir. Gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri analitik olarak elde edilmiştir. Kritik değerler homojen katı silindir ve FGM için Tresca akma varsayımı ile karşılaştırılmıştır. Sayısal uygulamalar ITER uygulamalarındaki gibi W/Cu FGM kullanılarak yapılmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin işlevleri gereği yüksek termal yüklerin etkisine maruz kalırlar ve bu konuda detaylı çalışmalara ihtiyaç duyulmaktadır. Çünkü yüksek termal yüklerin etkisi altında yapı elemanının tüm sınırlarında, malzemelerde kusurlar civarında veya elemanı oluşturan farklı malzemelerin birleşim bölgelerinde, mekanik ve termal özelliklerin süreksizlik göstermesinden dolayı gerilme yığılmaları oluşur. Gerilmelerin değerleri yüksek gradyanla değişirler ve kritik seviyelere ulaşabilirler. Ortaya çıkan bu gerilme durumunun karakteri farklı malzemelerin birleşme bölgesinde çatlakların oluşumuna neden olabilir. Oluşan çatlaklar elemanın işlevi sırasında ilerleyerek yapının tamamen fonksiyonunu yitirmesine yol açabilir. Dolayısıyla farklı malzemelerden yapılmış elemanların tasarımlarının kalitesi, genel olarak ilgili yapıların operasyonel güvenilirlik ve ekipman ömrünü belirlemektedir.

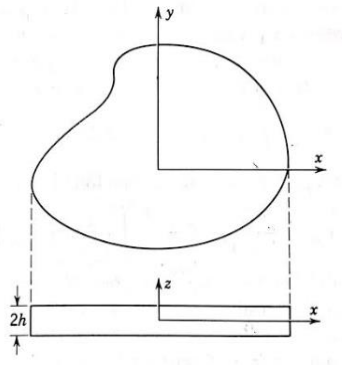
Bu nedenle fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde termal gerilmelerin analizi ile ilgili yöntemlerin geliştirilmesi güncel bir problem olarak ortaya çıkmıştır. Elemanlarda doğru tasarım, boyutlandırma yapılabilmesi ve göçmeye neden olacak emniyet sınırlarının belirlenebilmesi için malzemelerde oluşan termal gerilmelerin analizi çok önemlidir. Heterojen malzemeler fonksiyonel derecelendirilmiş veya tabakalı kompozit şeklinde oluşturulduklarında malzemede derecelendirme doğrultusunda elastisite modülü, ısıl genleşme katsayısı, Poisson oranı gibi mekanik ve termal özellikler sabit olmayıp eleman kalınlığı boyunca belirli varsayım ve sınırlamalara bağlı fonksiyonlarla değişmektedir. Bu nedenle ele alınan problemin analitik çözümü elde edilmelidir. Yukarıda bahsedildiği gibi fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin avantajları, kullanım alanları, üretim yöntemleri

ve kompozit malzeme gibi yapı elemanlarıyla mekanik ve termal gerilme dağılımlarının karşılaştırılması konusunda birçok çalışma mevcuttur [7]. Fakat termal gerilme dağılımlarının belirlenmesi, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde önerilen malzeme dağılımı ve ilgili parametrelerin belli fonksiyonlar ile önerilmesi belirli varsayım ve sınırlamalara bağlı olduğundan literatürde hala farklı açılardan değerlendirilmesi gereken bir konudur.

Literatürde bir çok çalışmada belli varsayım ve sınırlamalar ile analitik çözüm için farklı parametreler ve fonksiyonlar önerilmiştir. Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin termal analizi için önerilen çözümlemelerin doğrulanması ve farklı çalışmalarda önerilen analitik ve sayısal çözümlemelerin karşılaştırılması yapılmıştır. Bu karşılaştırmalar analitik çözümler ve sonlu eleman analizleri ile yapılmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

$2h$ kalınlıklı levhada (Şekil 1), sıcaklığın sadece kalınlık doğrultusunda değişimi ile oluşan termal gerilmeler, elastisitenin yarı-ters çözüm yöntemi ile elde edilmiştir [13]. Analitik olarak elde edilen bu ifade Denklem (1) ‘de verilmiştir.



Şekil 1. $2h$ kalınlıklı levha

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E}{(1-\upsilon)}\left[-\alpha T + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\alpha T dz + \frac{3z}{2h^3}\int_{-h}^{h}\alpha T z dz\right] \tag{1}$$

Birim kalınlıklı şerit elemanda malzeme özelliklerinin ve sıcaklığın kalınlık doğrultusunda sürekli değişmesi durumunda gerilme ifadesi düzleme dik doğrultuda birim kalınlıklı levhada E elastisite modülü ve (αT) termal şekil değiştirmesinin kalınlık boyunca bir fonksiyonla verilmesi durumunda düzenlenirse

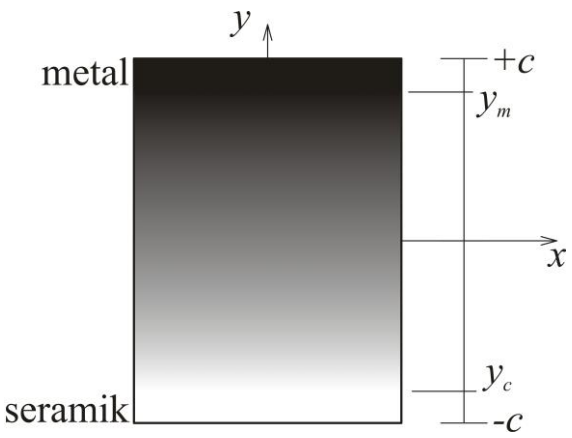
$$\sigma_x = E(-\alpha T + \eta + \beta z)$$
$$\eta = \frac{\int_{-h}^{h} E\alpha T dz}{\int_{-h}^{h} E dz}, \quad \beta = \frac{\int_{-h}^{h} E\alpha T z dz}{\int_{-h}^{h} E z^2 dz} \tag{2}$$

denklemleriyle ifade edilmiştir [14].

Literatürde analitik çözüm öneren bir çalışmada [15] yine birim kalınlıklı şerit elemanda kalınlık boyunca hem sıcaklığın hem de mekanik özelliklerin değiştiği levhada (Şekil 2) kalıcı termal gerilmelerin ifadesi için hacim oranı değişimi

$$V_p\,(y)=1 \quad for \quad -c\le y\le y_c$$
$$V_p\,(y)=\left[\frac{y_m-y}{y_m-y_c}\right]^N \quad for\ y_c\le y\le y_m \tag{3}$$
$$V_p\,(y)=0 \ for\ y_m\le y\le c$$

ifadeleri ile N 'ye bağlı üstel fonksiyonlar olarak verilmiştir.



Şekil 2. Fonksiyonel derecelendirilmiş sistem şeması

Bu çalışmada levhada elastisite modülü ve ısıl genleşme katsayılarının kalınlığa bağlı değişim fonksiyonları

$$E(y)=\frac{(E_PE_m-E_m{}^2)(1-V_p{}^{1/3}+V_p)+E_m{}^2}{E_P+(E_m-E_P)V_p{}^{1/3}} \tag{4}$$
$$\alpha(y)=\alpha_m(1-V_p)+\alpha_pV_p$$

bağıntılarıyla verilmiş olup, termal gerilmelerin ifadesi için

$$\sigma_{res}(y)=E(y)\left[\alpha(y)-\frac{A_1}{E_1}+\frac{\left\{A_2-\frac{A_1}{E_1}E_2\right\}\{yE_1-E_2\}}{\{E_1E_3-E_2{}^2\}}\right]\Delta T \tag{5}$$

denklemi elde edilmiştir. Buradaki sabitler aşağıda verilmiştir.

$$A_1 = \int_{-c}^{c} \alpha(y)E(y)dy$$
$$A_2 = \int_{-c}^{c} \alpha(y)E(y)ydy$$
$$E_1 = \int_{-c}^{c} E(y)dy \qquad (6)$$
$$E_2 = \int_{-c}^{c} E(y)ydy$$
$$E_3 = \int_{-c}^{c} E(y)y^2dy$$

Düşük termal gerilmelerin sağlanabilmesi için fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde çalışma sonucunda elde edilen verilerle katman sayısının artırılması önerilmiştir [15]. Fakat makalede verilen parametreler ve denklemler kullanıldığında aynı gerilme dağılımları elde edilememiştir.

Lanhe [16], fonksiyonel derecelendirilmiş dikdörtgen levhada termal yük etkisini analitik çalışmıştır. Birinci derece kayma deformasyon teorisi kullanılarak levhada denge denklemlerini türetmiştir. Malzeme kalınlığı boyunca uniform sıcaklık ve belli bir gradyanla değişen olmak üzere iki tür sıcaklık dikkate alınmıştır. FGM 'de malzeme parametreleri ise

$$E(z) = E_c V_c + E_m(1-V_c)$$
$$\alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m(1-V_c) \qquad (7)$$

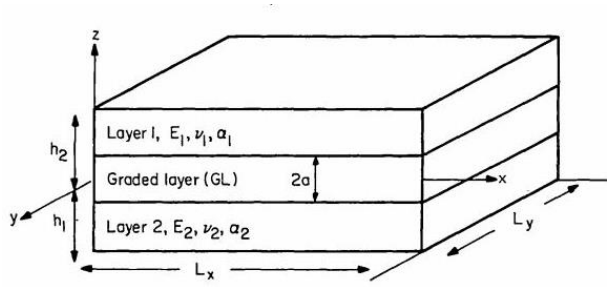
ifadeleriyle verilmiştir. E_m ve α_m sırasıyla metal elastiste modülü ve ısıl genleşme katsayısı, E_c ve α_c seramiğin elastiste modülü ve ısıl genleşme katsayısı değerleridir. Seramik hacim fonksiyonu

$$V_c = (z/h + 1/2)^k$$
$$-h/2 \le z \le h/2 \qquad (8)$$

olarak verilmiştir. Burada *z* kalınlık doğrultusu koordinat değişkeni, *k* ise fonksiyon kuvveti olarak tanımlanmıştır. Hacim fonksiyonu ifadesi ifadesi, malzeme parametreleri *E(z)* ve α(z) ifadelerinde yazılırsa Praven ve Reddy [17] ile aynı ifadelerin elde edildiği görülmüştür.

$$E(z) = E_{cm}(z/h + 1/2)^k + E_m$$
$$\alpha(z) = \alpha_{cm}(z/h + 1/2)^k + \alpha_m$$
$$\nu(z) = \nu_0 \qquad (9)$$
$$E_{cm} = E_c - E_m, \quad \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m$$

Suresh ve Montersen [18] fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde iki eksenli gerilme durumu için termal gerilme denklemlerini analitik olarak elde ettikleri çalışmada (Şekil 3).



Şekil 3. Fonksiyonel derecelendirilmiş iki boyutlu dikdörtgen levha [18].

şekil değiştirmeyi $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$ $(= \varepsilon_{yy}$ *iki eksenli gerilme durumu için*)

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 + \kappa z \tag{10}$$

şeklinde ifade etmiştir.

ε_0, $z=0$ 'daki normal şekil değiştirmedir. κ levhanın eğriliğidir. Sıcaklık değişimi etkisinde iki eksenli gerilme durumunda

$$\sigma(z) = \sigma_{xx}(z) = \sigma_{yy}(z)$$

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1-\nu(z)}[\varepsilon(z) - \alpha(z)\Delta T(z)] = \frac{E(z)}{1-\nu(z)}[\varepsilon_0 + \kappa z - \alpha(z)\Delta T(z)] \tag{11}$$

tanımlanmıştır. α termal genleşme katsayısı, ΔT serbest durumdan sıcaklık değişimidir. Sıcaklığın z koordinatından bağımsız olduğu düşünülürse, genel durumda dış mekanik yük veya termal yük etkisinde gerilme ağılımının bileşke kuvvet ve bileşke momentleri uygulanan eksenel yük bileşkesi F^{ap} ve ugulanan moment bileşkesi M^{ap} değerlerine eşit olmalıdır. Bu durumda:

$$\begin{aligned}
&\int_{-h_2+a}^{-a} \sigma(z)dz + \int_{-a}^{+a} \sigma(z)dz + \int_{+a}^{a+h_1} \sigma(z)dz = F^{ap} \\
&\int_{-h_2+a}^{-a} \sigma(z)zdz + \int_{-a}^{+a} \sigma(z)zdz + \int_{+a}^{a+h_1} \sigma(z)zdz = M^{ap}
\end{aligned} \tag{12}$$

Kuvvet ve moment denge denklemleri kullanılarak, burkulma olmaması durumunda

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \frac{-I_2(J_0 + F^{ap}) + I_1(J_1 + M^{ap})}{I_1^{\,2} - I_0 I_2} \\
\kappa &= \frac{I_1(J_0 + F^{ap}) - I_0(J_1 + M^{ap})}{I_1^{\,2} - I_0 I_2} \\
I_i &= \int_{-h_1}^{-h_2} z^i \bar{E}(z)dz, \quad i = 0,1,2 \\
J_i &= \int_{-h_1}^{-h_2} z^i \alpha(z)\Delta T(z)\bar{E}(z)dz, \quad i = 0,1,..
\end{aligned} \tag{13}$$

elde edilir. İzotermal durumda aşağıdaki fonksiyonlar kabul edilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&\bar{E} = \bar{E}_{0-} \Delta \bar{E} = \bar{E}_{1}, \quad -h_1 \le z \le -a \\
&\alpha = \alpha_0 - \Delta\alpha = \alpha_1 \quad -h_1 \le z \le -a \\
&\bar{E} = \bar{E}_{0-} \Delta \bar{E} \frac{z}{a}, \quad -a \le z \le a \\
&\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \frac{z}{a} \quad -a \le z \le a \\
&\bar{E} = \bar{E} + \Delta \bar{E} = \bar{E}_{2}, \quad a \le z \le h_2 \\
&\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \quad a \le z \le h_2
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Zou ve Dergachova [19] TiC-Ni arasında fonksiyonel derecelendirilmiş şerit elemanın termal gerilme analizi için aşağıda verilen fonksiyonları kullanmıştır.

$$
\begin{aligned}
E(y) &= E_c e^{\ln(E_m/E_c)\frac{y}{b}} \\
\nu(y) &= \nu_c e^{\ln(\nu_m/\nu_c)\frac{y}{b}} \\
\alpha(y) &= \alpha_c e^{\ln(\alpha_m/\alpha_c)\frac{y}{b}}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

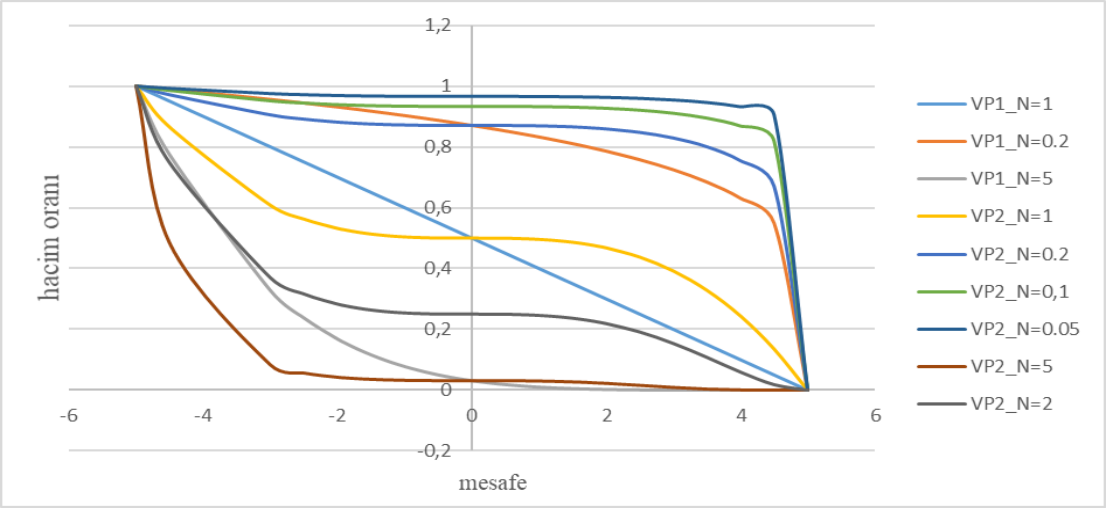
Fonksiyonel derecelendirmenin altı tabakanın birleştirilmesiyle oluşturulduğu bir başka çalışmada [20] termal gerilme dağılımları, FGM ‘de değişim fonksiyonları [16] çalışmasında verilen ifadeler kullanılarak ve [15] çalışmasında önerilen termal gerilme denklemleri ile elde edilmiştir. Burada değişim fonksiyonları

$$
\begin{aligned}
&E(z) = E_{cm}(z/h + 1/2)^k + E_m \\
&\alpha(z) = \alpha_{cm}(z/h + 1/2)^k + \alpha_m \\
&\nu(z) = \nu_0 \\
&E_{cm} = E_c - E_m, \quad \alpha_{cm} = \alpha_c - \alpha_m
\end{aligned}
\tag{16}
$$

şeklinde alınmıştır.

2017 yılında yayınlanan derleme makalede [21] farklı çalışmalarda kullanılan malzeme değişim fonksiyonu ifadelerine yer verilmiştir. Üstel fonksiyonların daha çok başvurulan yöntem olduğu belirtilmiştir. Termal kalıcı gerilmelerin tahmini için kuvvet ve eğilme momenti dengesine bağlı model oluşturulan çok katmandan oluşan bir kaplama çalışmasında [21] ise malzeme özellikleri elemanı oluşturan her bir katman için belirli bir fonksiyonla önerilmiştir.

SAYISAL SONUÇLAR



Şekil 4. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede kalınlık boyunca hacim oranının değişimi fonksiyonlarının karşılaştırılması.

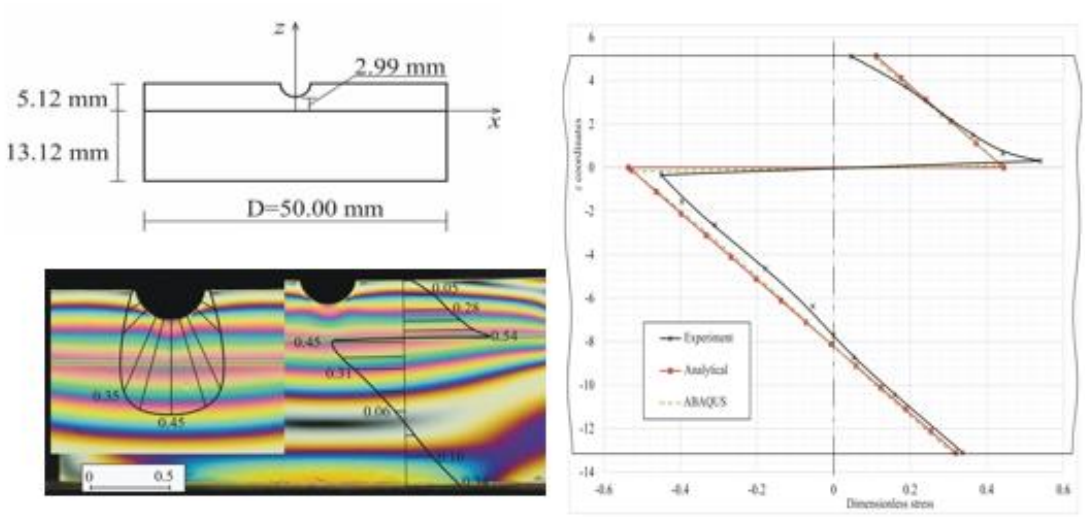
Şekil 2 'de verilen levha örneğinde $2c$ kalınlıklı levhada hacim oranının dağılımı incelendiğinde Ravichandran [15] çalışmasında ve bu çalışmaya referans vererek yazılan [18, 20-22] makalelerinde hacim oranının kalınlık doğrultusundaki mesafeye bağlı olarak değişimi 2. dereceden bir fonksiyon ile tanımlanmıştır. Bu fonksiyon bağıntı (17) ifadesi ile verilmiştir.

$$V_{p1} = V_p(y) = \left(-\frac{1}{2c^2} y^2 + \frac{1}{2} \right)^N \tag{17}$$

N fonksiyonun üstel derecesini, c levha kalınlığının yarısını, y ise kalınlık doğrultusundaki mesafeyi göstermektedir. Şekil 4' te verilen V_p2 fonksiyonu ise hacim oranı değişiminin 3. dereceden bir polinom olması durumudur. Bu ifade

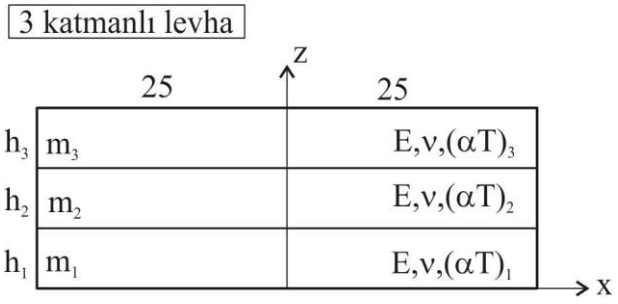
$$Vp2 = Vp(y) = \left(-\frac{1}{2c^3} y^3 + \frac{1}{2} \right)^N \tag{18}$$

bağıntısı ile verilmiştir. Üstel derecesi $N=1$ olması durumunda 3. derece polinom fonksiyonu ile malzemede ara katman geçişinde daha yavaş bir geçiş elde edilmiştir.Yalnızca ısıl genleşme katsayıları farklı malzemelerin aynı sıcaklığa maruz kalması ile aynı ısıl genleşme katsayısına sahip malzemelerin farklı sıcaklık değişimine maruz kalması durumlarının eşdeğer modellenebildiği şekil değiştirmelerin eşitliği anolojisiyle literatüre sunulmuştur [23, 24]. Literatüre sunulan bu çalışmada normal çelik ile paslanmaz çeliğin yalnızca ısıl genleşme katsayıları farklı bimetal levha olarak modellenmesi durumu incelenmiştir. Üzerinde oyuk bulunduran bimetal levhada termal gerilme dağılımları ve oyuk ucu gerilme değerleri teorik, analitik ve deneysel olarak elde edilmiş ve sonuçların uygunluğu gösterilmiştir (Şekil 5).



Şekil 5. Bimetal levhada malzeme geometrisi, deneysel analitik ve sayısal analiz boyutsuz gerilme dağılımları

Bu çalışmada bahsedilen bimetal levha [24], 3 katmanlı olarak modellenerek, analitik ve sayısal analiz çalışmalarıyla oyuk ucu gerilme değerinin ara katman kalınlığıyla değişimi analiz edilmiştir. Şekil 6 'da verilen yalnızca ısıl genleşme katsayıları birbirinden farklı 3 katmanlı, 2w genişlikli 2 boyutlu levhanın aynı sıcaklık değişimine maruz kalması durumu, ısıl genleşme katsayıları aynı olup her bir katmanın farklı sıcaklık değişimi etkisinde olması şeklinde modellenmiştir. m_1, m_2, m_3 sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü katmandaki malzeme numaralarını göstermek üzere E malzemenin elastisite modülü, ν Poisson oranı, αT sıcaklık şekil değiştirmesi fonksiyonlarını göstermektedir.



	yükleme durumu
	αT
m_3	0.018
m_2	0.09
m_1	0

Şekil 6. Üç katmanlı levha analitik modeli.

Mekanik özellikleri her bir katman içerisinde aynı, fakat levha kalınlığı boyunca değişim gösteren sıcaklık etkisindeki levhanın kenar süreksizliklerinden uzakta gerilmelerinin ifadesi

$$f(z)=\sigma_x=\sigma_y=-\alpha T\frac{E}{(1-\nu)}+C_1z+C_2$$
$$\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{xy}=\tau_{yz}=0 \qquad (19)$$

şeklinde elde edilmiştir [13]. Bu denklemde verilen integral sabitleri 3 katmanlı levha için sınır koşulları yazılarak bulunur. Denklemlerde αT_1, αT_2 ve αT_3 birbirinden farklı olup, sabit alınmıştır.

Sınır şartları:

1) Sınırlarda eşdeğer kuvvetin sıfır olması durumu

$$x=\pm w \quad 0\le z\le h_1+h_2+h_3, \qquad \int_0^{h_1+h_2+h_3}\sigma_x dz=\int f(z)dz=0 \tag{20}$$

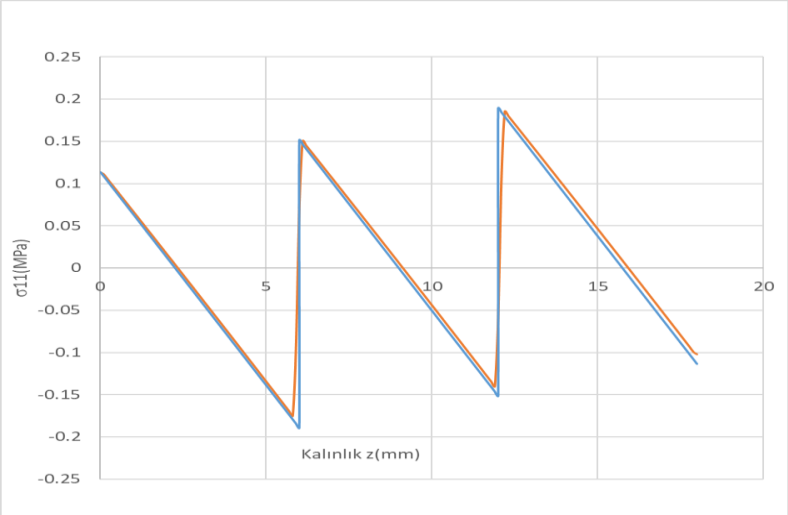
2) Sınırlarda bileşke kuvvetin momentinin sıfır olması durumu

$$x=\pm w \quad 0\le z\le h_1+h_2+h_3, \qquad \int_0^{h_1+h_2+h_3}\sigma_x z dz=\int f(z)zdz=0 \tag{21}$$

denklemleriyle yazılır. Şekil 5' deki modelde levha katmanlarında sıcaklık z koordinatının fonksiyonu olup, her bir katmanda farklı olduğu göz önüne alınarak sınır şartları düzenlendiğinde C_1 ve C_2 sabitleri elde edilir.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{6E\alpha\left[T_1h_1(h_2+h_3)+T_2h_2(h_3-h_1)-T_3h_3(h_1+h_2)\right]}{(v-1)(h_1+h_2+h_3)^3} \\ C_2 &= \frac{E\alpha\left[T_1h_1(h_1+4(h_2+h_3)-T_2h_2(2h_1-h_2-4h_3)-T_3h_3(2h_1+2h_2-h_3)\right]}{(1-v)(h_1+h_2+h_3)^2} \end{aligned} \tag{22}$$

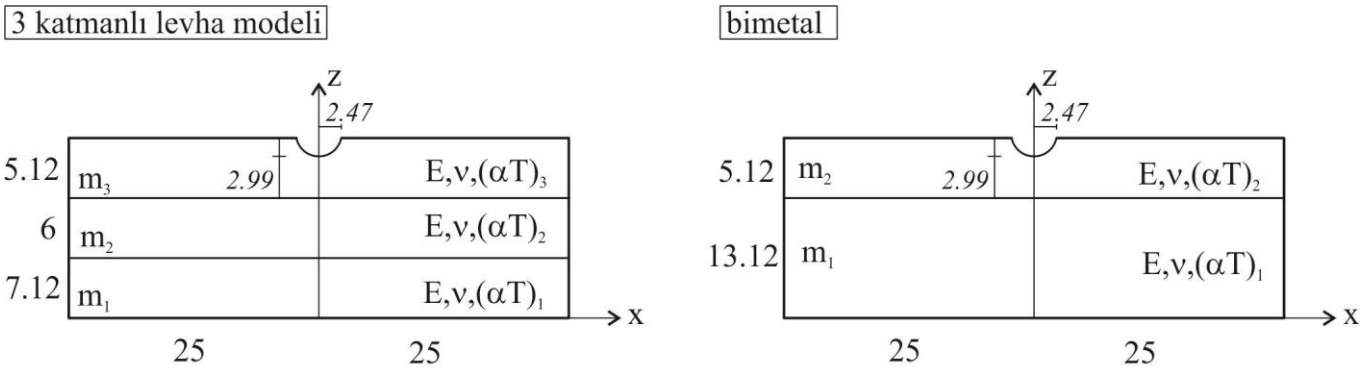
Hesaplanan C_1 ve C_2 sabitleri (19) ifadesinde yerleştirildiğinde 3 katmanlı, yalnızca ısıl genleşme katsayıları farklı düzlem levhada kalınlık doğrultusunda gerilme ifadesi elde edilmiş olur.



Şekil 7. 3 katmanlı levhada analitik çözümün sonlu eleman analizleri ile karşılaştırılması.

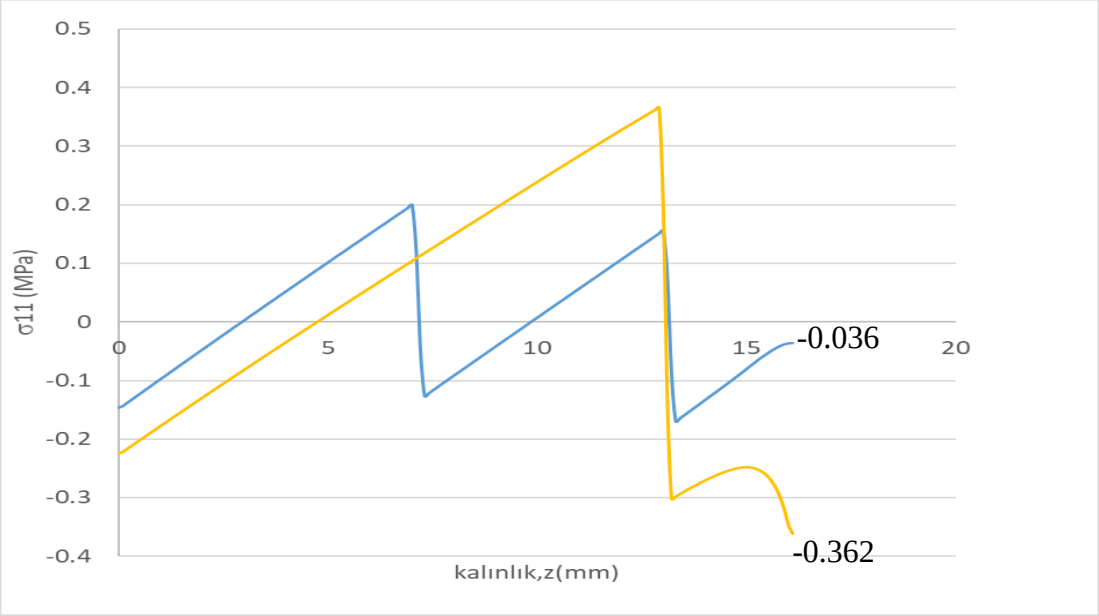
SONUÇLAR

3 katmanlı levha için türetilen gerilme denklemleri ile aynı levhanın sonlu eleman analizleri karşılaştırıldığında (Şekil 7) uyumlu sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Ardından [23] çalışmasında sonuçları elde edilen bimetal levhada aynı toplam yükseklik ve yükleme durumu korunarak ara katman kullanılması durumu (Şekil 8) sonlu eleman analizi ile elde edilerek karşılaştırıldığında (Şekil 9) aynı levhada ara katman kullanıldığında oyuk ucu gerilme değerinin yaklaşık 10 kat azaldığı ve malzeme ara katmanlarında da gerilme sıçramalarının azaltıldığı görülmüştür.



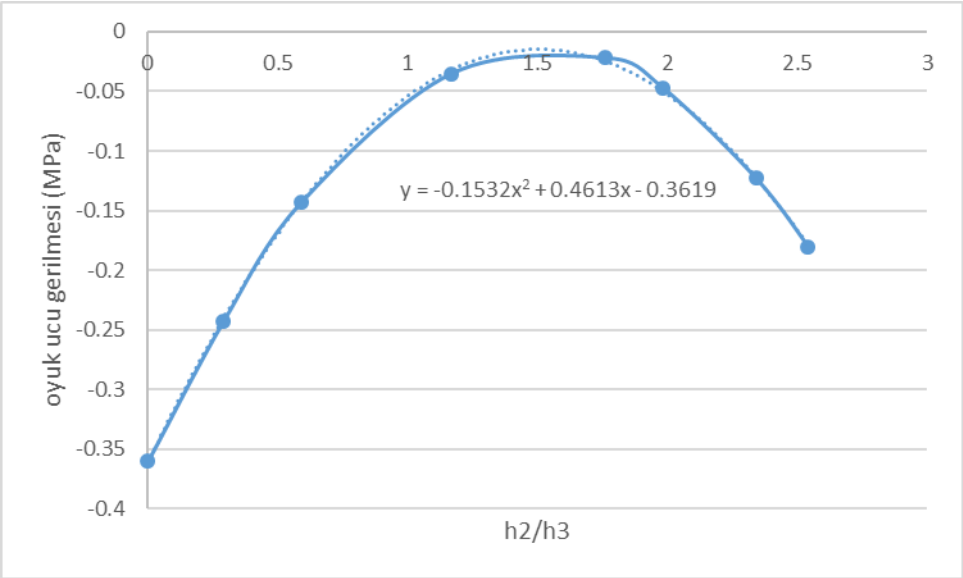
yükleme	3 katmanlı levha	bimetal
	αT	αT
m_3	0.018	-
m_2	0.09	0.018
m_1	0	0

Şekil 8. Bimetal levha ve 3 katmanlı levha sayısal analiz modellerinde levha geometrisi ve yükleme durumları



Şekil 9. Bimetal ve 3 katmanlı levha modellerinde termal gerilme dağılımları sayısal analiz sonuçları

Aynı zamanda Şekil 6 'da verilen ara katman kalınlığının termal şekil değiştirme yüklü katmana oranı h_2/h_3 değişimine bağlı olarak oyuk ucu gerilme değerinin değişimi elde edilmiştir (Şekil 9).



Şekil 10. Ara katman kalınlığı- yüklü katman oranına bağlı oyuk ucu gerilmesi değişimi

Ara katman kalınlığı, h_3 katman kalınlığının 2 katına kadar artırıldığında oyuk ucu gerilme değerinin yaklaşık 10 kat azaldığı sonucuna ulaşılmıştır. Kalınlık oyuk bulunduran 3. katman kalınlığının 2 katından daha büyük değere artırılıp sonunda 2 katmanlı hale getirildiğinde oyuk ucu gerilme değerinin tekrar aynı davranışla arttığı gözlenmiştir. Burada gerilmenin ara katman kalınlığı değişim oranıyla fonksiyonu

$$y = -0.0059x^2 + 0.0905x - 0.3637 \quad (23)$$

şeklinde önerilmiştir.

Bu çalışmanın devamında iki boyutlu tüm mekanik özellikleri kalınlık boyunca değişen levhada termal gerilme denklemlerinin elde edilmesi amaçlanmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Erasmo C., Fiorenzo A. F., Maria C, *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells*, Elsevier, 2017.

[2] F. Liu, Z. Mao, P. Zhang, J. Jiang, Z. Ma, Functionally graded porous scaffolds in multiple patterns: New design method, physical and mechanical properties, *Materials and Design*, 160 (2018) 849-860. doi: 10.1016/j.matdes.2018.09.053.

[3] F. Xua, Z. Hang, H. Zhang, A review on functionally graded structures and materials for energy absorption, *Engineering Structures*, 171(2018) 309-325. Doi: 10.1016/j.engstruct.2018.05.094.

[4] Y. Gao, W.S. Xiao, H. Zhu, Free vibration analysis of nano-tubes consisted of functionally graded bi-semi-tubes by a two-steps perturbation method, *Latin AMrican Journal of Solids and Structures*, 16(2019) 146-166.

[5] Y. Gao, W.S. Xiao, H. Zhu, Nonlinear vibration analysis of different types of functionally graded beams using nonlocal strain gradient theory and a two-step perturbation method, *Eur. Phys. J. Plus*, 134(2019) 23.

[6] i. Çömez, U.N. Aribas, A. Kutlu, M.O. Omurtag, An Exact Elasticity Solution for Monoclinic Functionally Graded Beams, *Arabian Journal for Science and Engineering*, (2021). https://doi.org/10.1007/s13369-021-05434-9.

[7] M. Anju, K. Subha, A Review on Functionally Graded Plate, *International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET)*, 2018 5(4).

[8] International Thermonuclear Experimental Reactor-ITER (2021). https://www.iter.org/. (ulaşım Mart 19, 2021).

[9] P. Tian, Y. Feng, M. Xia, L. Zhao, C.Y. Cai, K. Liu, X.C. Huang, Hot-pressed sintering of W/Cu functionally graded materials prepared from copper-coated tungsten powders, *Rare Met.* 39(2020) 1229–1236. doi: 10.1007/s12598-017-0939-0.

[10] D. Dai, D. Gu, Thermal behavior and densification mechanism during selective laser melting of copper matrix composites: simulation and experiments, *Mater Des.* 55(2014) 482-491. doi: 10.1016/j.matdes.2013.10.006.

[11] Z. Xiaoyonga, Z. Juna, C. Junling, W.Yuchenga, Structure and properties of W–Cu/AlN composites prepared via a hot press-sintering method, *Rare Met Mater Eng*. 44(2015) 2661-2664.

[12] S. Topal, M. Gulgec, Thermal Stress Analysis of an FGM Cylinder Under the Effect of Convection and Radially Varying Temperature Distribution, *Materials Science Forum Vols*. 631(2009) 23-28. doi: 10.4028/www.scientific.net/MSF.631-632.23.

[13]Boley, B.A. ve Weiner, J.H., (1997). Theory of Thermal Stress, Dover Publications, New York.

[14] S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970, pp 433-439.

[15] K. S. Ravichandran, Thermal residual stresses in a Functionally Graded Material system. *Materials Science and Engineering*, 201 (1995) 269-276. doi: 10.1016/0921-5093(95)09773-2

[16] W. Lanhe, Thermal buckling of a simply supported moderetly thick rectengular FGM plate, *Composite Structures*, 64(2003) 211-218. doi:10.1016/j.compstruct.2003.08.004

[17] G.N. Praveen, J.N. Reddy, Nonlinear transient thermal elastic analysis of functionally graded ceramic–metal plates, *Int J Solids Struct.* 35(1998) 4457–4476.

[18] S. Suresh, A. Mortensen, Functionally graded metals and metal-ceramic composites: Part 2 Thermomechanical behavior, 42(1997) 85-116. doi: 10.1179/imr.1997.42.3.85

[19] G. Zou and N. Dergachova, Stress analysis of functional gradient strip due to transient thermal heat, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 98(2018) 134-146. doi:* **10.1002/zamm.201700084**.

[20] M. Bertolete, P.A. Barbosa, W. Rossi, C. Fredericci, I.F. Machado, Mechanical characterization and machining evaluation of ceramic cutting tools functionally graded with six layers, *Ceramics International*, 46(2020), 15137-15145. doi: 10.1016/j.ceramint.2020.03.048.

[21] K. Swaminathan, D.M. Sangeetha, Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods, *Composite Structures*, 160(2017) 43-60. doi: doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047.

[20] Y. Chu, B. Hao, Z.Li, J. Zhu, X. He, An analytical model for predicting residual stresses in multiple layers by plasma cladding process, *AIP Advances*, 9 (2019) doi:10.1063/1.5115559.

[21] S. Kapuria, M. Bhattacharyya, A. N. Kumar, Theoretical Modeling and Experimental Validation of Thermal Response of Metal- Ceramic Functionally Graded Beams, *Journal of Thermal Stress*, 31 (2008) 759-787. doi: 10.1080/01495730802194292.

[22] A. Bouchafa, A. Benzair, A. Tounsi, K. Draiche, i. Mechab, E.A.A. Bedia, Analytical modelling of thermal residual stresses in exponential functionally graded material system, *Materials and Design*, 31(2010), 560-563.

[23] T. Baytak . Sıcaklık genleşmesi farklı iki malzemeden yapılmış levhalarda termal gerilmelerin analizi. *Y. Lisan Tezi*. (2018).

[24] T. Baytak., O. Bulut. Thermal stress analysis around a cavity on a bimetal. *Structural Engıneerıng and Mechanıcs*. 2019; 69(1): 69-75.

COMPARISON OF MECHANICAL FATIGUE FOR HUMAN CORNEA BEFORE AND AFTER CCL IN KERATOCONUS BY USİNG FEM

Hamid Zamanlou[1*], Filiz Karabudak[2]
[1]Ataturk University, Erzurum

ABSTRACTS

The cornea is a thin, transparent layer on the front of the eyeball that covers the auricle, iris, and pupil. The cornea, like glass, separates the inner window from the outside of the eye and has two important functions: one is to direct light rays into the eye and focus them on the retina, and the second is to protect the structures inside the eyeball.

The natural cornea is regular and spherical in shape. But when the eye has keratoconus, the shape of the cornea gradually changes as the cornea protrudes, becomes thinner, and forms a cone. This condition is called keratoconus due to deformity. Corneal deformity due to keratoconus leads to progressive visual distortion

Collagen Cross Linking (CCL or CXL) is a technique used to apply riboflavin (a type of vitamin B) to the cornea and then apply ultraviolet A radiation to strengthen the chemical bonds of the collagen in the cornea. The goal of cross-link collagen therapy is to stop the unusual deformity of the cornea known as ectasia.

İn this study fatigue analysis was done for human cornea befor and after CCL by using mechanichal properties and in the aid of finite elements methods.

Keywords: Fatigue, Stress Distribution, ANSYS, FEM, Cornea, CCL, CXL

INTRODUCTION

As previously explained, the cornea is a transparent layer that is used against the lens of the eye to protect the inside of the eye and reflect light. The transparency of the cornea brings clarity of vision, but by causing small damage or inflammation in it, it can disrupt part of the visual area, so it is especially important because light must pass through a clear environment and the direct placement of this The surface in front of the eye shows the slightest damage.

The thickness of our invisible surface is between 0.52 to 0.60 mm and is spread to an average width of 12 mm.

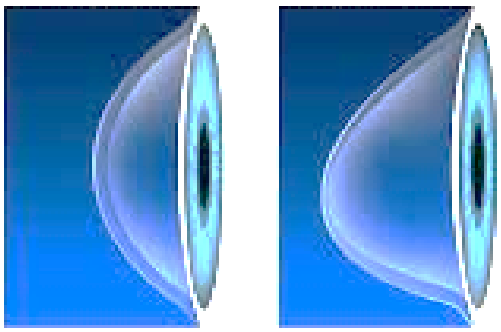
The cornea is responsible for 75% of the refraction of light and helps to increase the concentration and transmission of light to the retina.

Keratoconus is a disease and a non-inflammatory phenomenon of the cornea. The disease usually occurs in adolescence or early third decade of life. In this disease, the cornea becomes thinner and changes its shape. The cornea is naturally round or spherical in shape, but in the hump of the cornea, the cornea protrudes and forms a cone. Thinning and changing the shape of the cornea from spherical to conical leads to myopia - irregular astigmatism and as a result

reduced vision. The disease starts in one eye but usually affects another eye after a while, although the severity varies from eye to eye.

This change affects the refraction of light when it enters the eye and reduces visual acuity. Keratoconus may occur in one or both eyes, but in 90% of cases it is seen in both eyes.

Collagen Cross Linking (CCL) is a technique used to apply riboflavin (a type of B vitamin) to the cornea and then apply ultraviolet A radiation to strengthen the chemical bonds of the collagen in the cornea. The goal of cross-link collagen therapy is to stop the unusual deformity of the cornea, known as ectasia.



A) B)

Figure 1 A) normal eye B) keratoconus

In this study mechanical fatigue for human cornea before and after CCL in keratoconus calculated by using FEM.

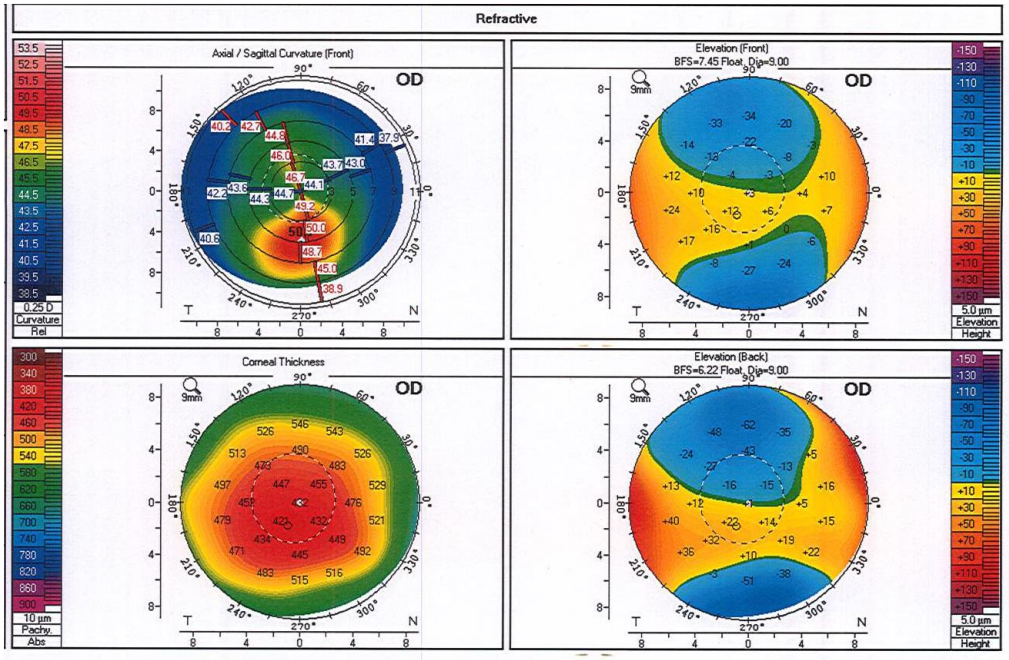


Figure 2 Cornea topography with keratoconus

METHODS

In order to simulate the cornea, ANSYS program used in this study. The central and side thickness are 0.54 mm and 0.64 mm, respectively. hexahedral shell elements used in analeyse.

A normal force of 0.122 N and a shear force of 0.08 N were applied. Materials properties of cornea written in table 1.

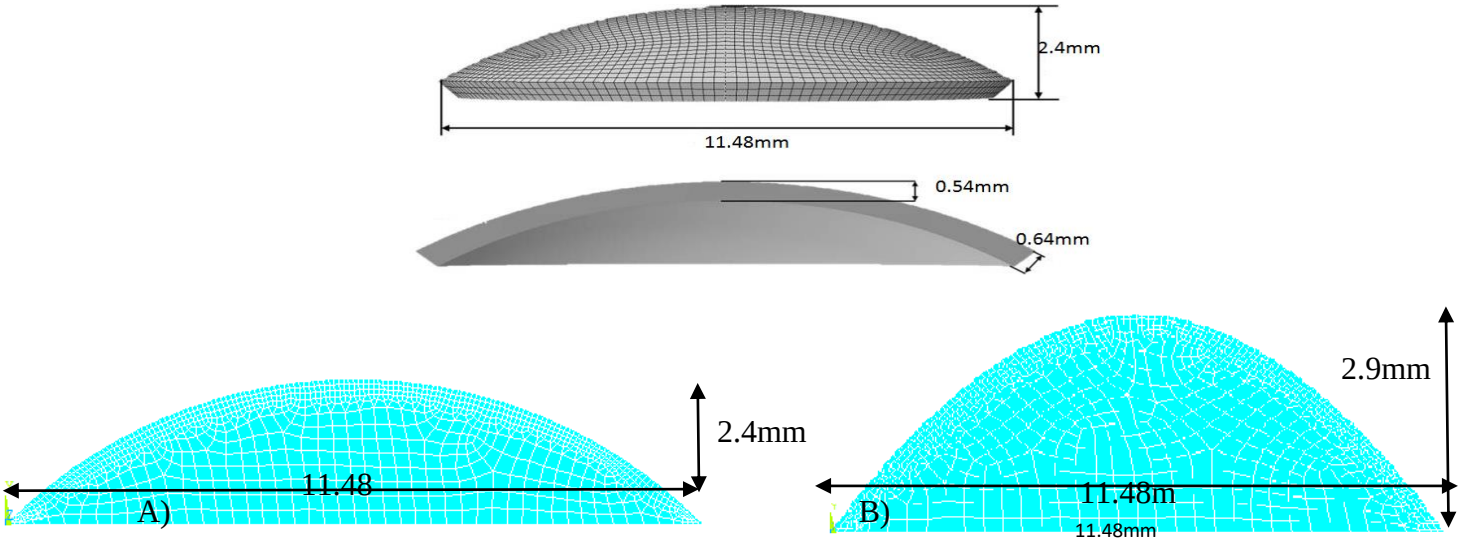


Figure 3 Finite element (FE) mesh of the A) Normal cornea and B) kerataconus cornea

Table 1 Material properties of the cornea

Young's modulus (MPa)	Poisson's ratio
20.40	0.48

According to the rubbing force fatigue analyses were calculated for Normal cornea, Keratakonus cornea and keratakonus after CCL operation. During cross-linking (CCL-CXL) surgery, the surgeon uses a liquid riboflavin (a B-complex vitamin) on the surface of the eye and then applies ultraviolet (UVA) light to eliminate corneal ecstasy.

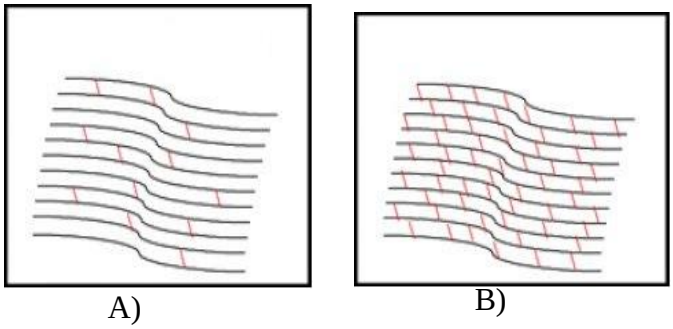


Figure 4 Crosslinking A) Weaker and B) Stronger

$$W = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu i}{\alpha i} (\lambda_1^{\alpha i} + \lambda_2^{\alpha i} + \lambda_3^{\alpha i} - 3)$$

where:

W is the strain energy;

μi and ai are material parameters;

i = 1 to equation order N;

are the stretches in the Cartesian system,

j = x, y, z.

The material parameters to be defined from an inverse modeling method contain the finite element analysis, in which the input includes the cornea's geometry and the pressure-deformation behavior, while the expected output is the material behavior represented by μi and ai. The solution includes an optimization progression that classifies the global minimum of the alteration between the experimentally and the numerically, load-deformation behavior at several points on the corneal surface.

The following equation to express the relationship between fatigue life and The total strain is expressed:

$$\frac{\Delta\varepsilon}{2} = \frac{\sigma_F}{E}(2N)^b + \varepsilon_F(2N)^c$$

Δε = the whole strain

N = fatigue life

E = Young's modulus

b and c = fatigue resistance profile and fatigue ductility, respectively

σF and F ε are the fatigue strength coefficient and the fatigue ductility coefficient, respectively.

Strain Life approach is widely used today and typically crack initiation, which characterizes the low cycle numbers of fatigue encompassing method. Stress Life, on the other hand, deals with the total life of the part. therefore, it does not include crack initiation and crack progression. Analyzes to cycle numbers If we categorize it by, we use Strain Life for low-numbered cycles, so Low Known as Cycle Fatigue (LCF), it also occurs in a high number of cycles.

RESULTS

Fatigue Analysis, which is a type of analysis to find the lifetime of biomechanical elements under dynamic load, is carried out using Ansys software. As a result of the fatigue analysis, the damage status and life value of material are given according to the load type. Figure 5-7 show the stress distribution in normal cornea, keratoconus and CCl respectively. Normal cornea has less stress than the others. 6 months after CCL operation the cornea show better performance than the keratoconus.

Figure 8-10 show the time – stress diagram of keratoconus, CCL and normal cornea respectively.

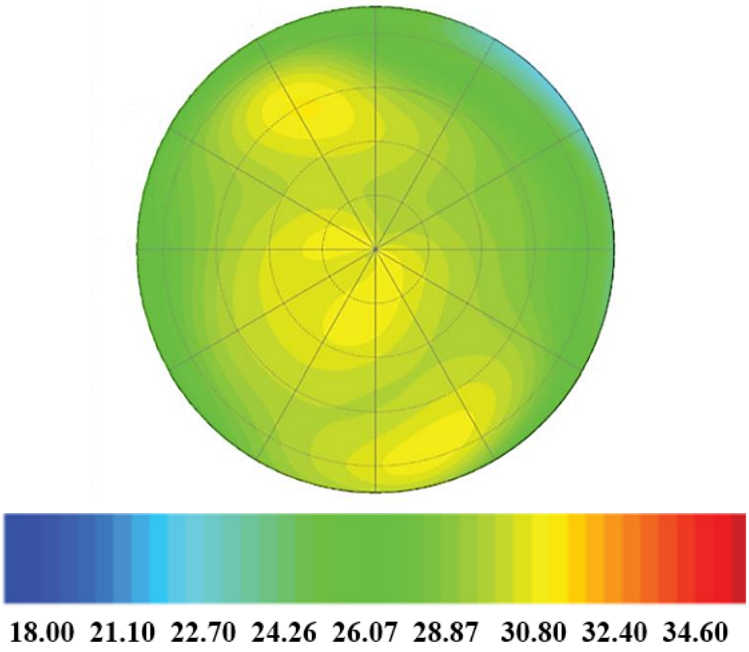


Figure 5 Stress distribution in normal cornea

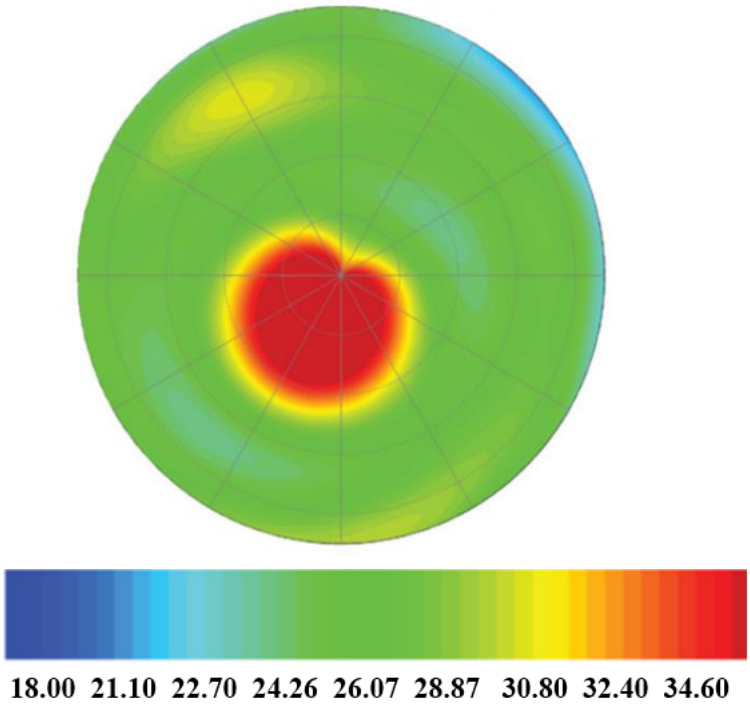


Figure 6 Stress distribution in Kerataconus

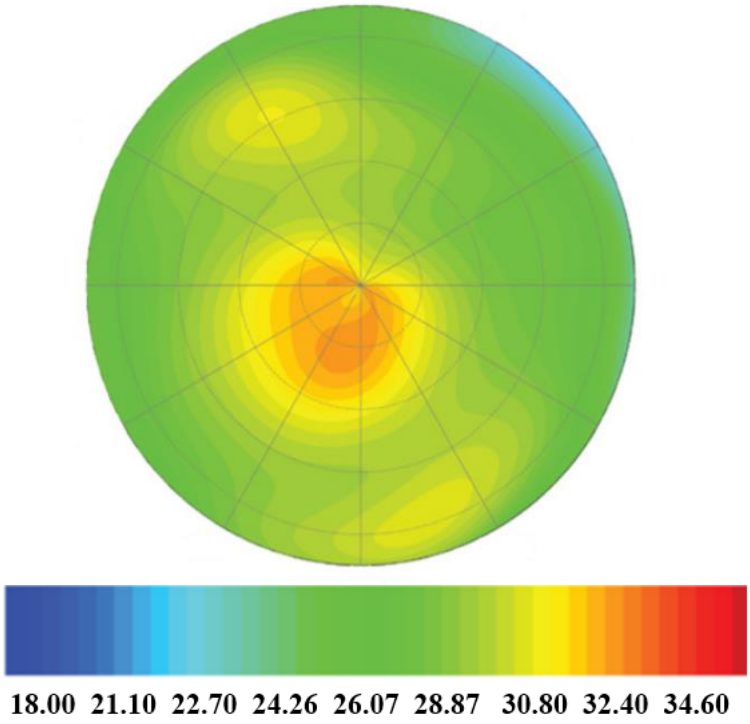


Figure 7 Stress distribution in keratakonus after CCL operation

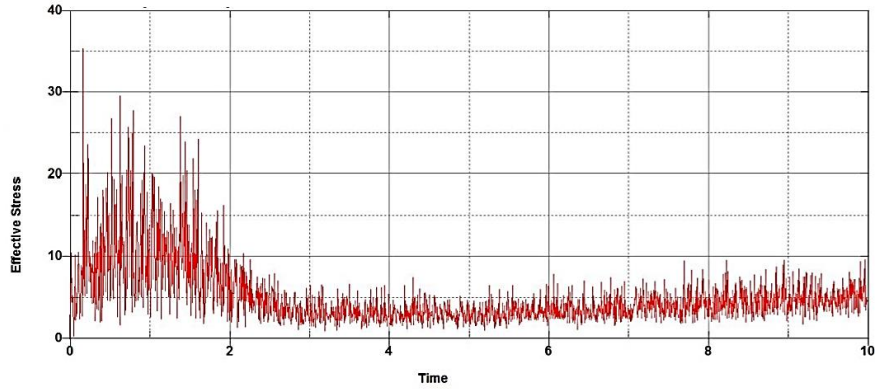


Figure 8 Stress – Time for Keratakonus

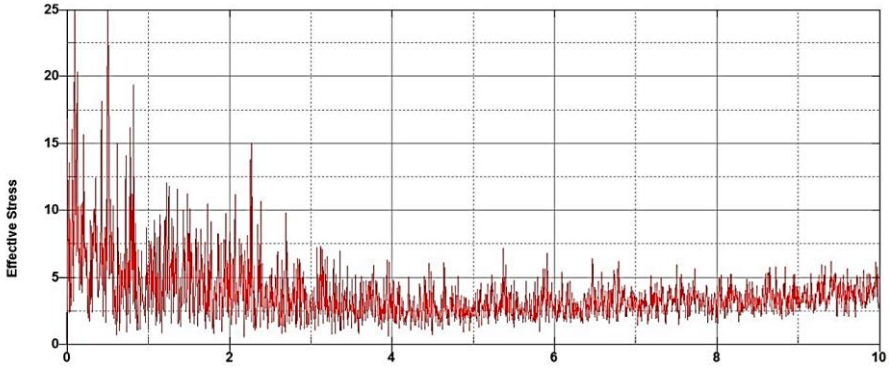


Figure 9 Stress – Time for CCL

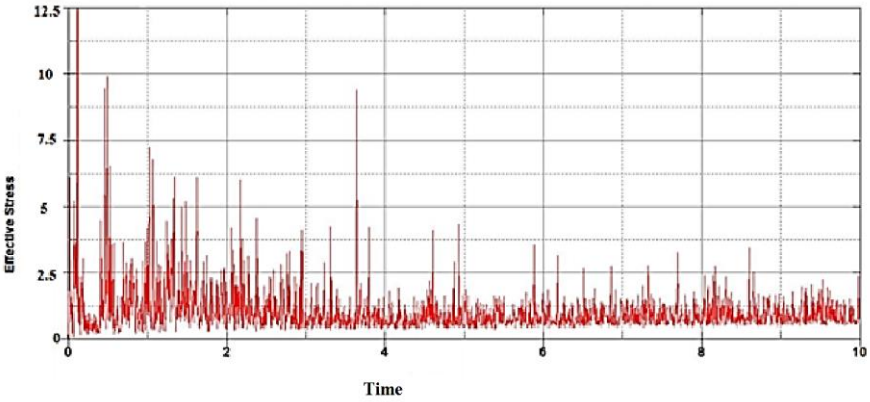


Figure 10 Stress – Time for Normal Cornea

CONCLUSIONS

Keratoconus is a disease and a non-inflammatory phenomenon of the cornea. The disease usually occurs in adolescence or early third decade of life. In this disease, the cornea becomes thinner and changes its shape. The cornea is naturally round or spherical in shape, but in the hump of the cornea, the cornea protrudes and forms a cone. Thinning and changing the shape of the cornea from spherical to conical leads to myopia - irregular astigmatism and thus reduced vision.

CCL method is the creation of cross-linking between corneal collagen fibers (Corneal collagen cross-linking or CCL) using UV-A rays and riboflavin drug. In this method, after removing the surface cell layer (epithelium) of the cornea, riboflavin drops / for 30 minutes (every 3 minutes). The percentage is poured into the eye and then for the next thirty minutes,

while the drop is instilled in the eye every 5 minutes, ultraviolet rays are shone on the cornea. This increases the cross-links between the collagen fibers of the cornea and thus increases the strength of the cornea. It has been shown that the progression of the disease has stopped in almost 100% of cases and in half of the cases the cornea has become slightly flatter and the disease has improved slightly (about 2.87 diopters) and the vision has improved by 1.4 lines.
According to this study Normal cornea, CCL cornea have better performance across the fatigue. 6 months after CCL operation stress distribution on the top layer of cornea become less than the time of keratoconus.

REFERENCES

[1] Swartz TS, Marten L, Wang M (2012) *Topography and Wavefront Combined Systems. Corneal Topography*: A Guide for Clinical Application in the Wavefront Era. 2nd ed. Ed. M. Wang and T.S. Swartz. pp.167-197.

[2] Gonzàlez-Perez J, Gonzàlez-Mèijome JM, Ares MTR, Parafita MA (2011) *Central corneal thickness measured with three optical devices and ultrasound pachimetry*. Eye Contact Lens 37(2): 66–70. pmid:21301351

[3] Elsheikh A (2011) *Understanding corneal biomechanics through experimental assessment and numerical simulation, in Biomechanics*: Principles, Trends and Applications. Nova Science Publishers, Inc. 57–110.

[4] Zhang K, Qian X, Mei X, Liu Z (2014) *An inverse method to determine the mechanical properties of the iris in vivo*. BioMedical Engineering Online 13(1). pmid:25494626

[5] Petsche SJ, Pinsky PM (2013) *The role of 3-D collagen organization in stromal elasticity: a model based on X-ray diffraction data and second harmonic-generated images. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* 12(6): 1101–1113. pmid:23288406

[6] Boschetti F, Triacca V, Spinelli L, Pandolfi A (2012) *Mechanical Characterization of Porcine Corneas*. Journal of Biomechanical Engineering-Transactions of the ASME 134(3): 031003. pmid:22482683

[7] Bourges JL, Hubschman JP, Burt B, Culjat M, Schwartz SD. *Robotic microsurgery*: *corneal transplantation*. *Br J Ophthalmol*. 2009;93(12):1672–1675. doi: 10.1136/bjo.2009.157594.

[8] Boote C, Dennis S, Newton RH, Puri H, Meek KM. *Collagen fibrils appear more closely packed in the prepupillary cornea*: optical and biomechanical implications. *Invest Ophthalmol Vis Sci.* 2003;44(7):2941–2948. doi: 10.1167/iovs.03-0131.

[9] Jue B, Maurice D. *The mechanical properties of the rabbit and human cornea*. *J Biomech.* 1986;19(10):847–853. doi: 10.1016/0021-9290(86)90135-1.

[10] Weaver AA, Kennedy EA, Duma SM, Stitzel JD. *Evaluation of different projectiles in matched experimental eye impact simulations*. J Biomech Eng. 2011;133(3):031002.

TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERİN GERİLME HESABINDA YÜKSEK MERTEBE KAYMA TEORİSİNİ TEMEL ALAN KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Yonca Bab[1] ve Akif Kutlu[2]
[1,2]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In this paper, a mixed finite element formulation is presented to calculate the stress and displacement components of thin and relatively thick laminated composite beams under linear static analysis. By using the Higher Order Beam Theory, the need for shear correction factor in First Order theory is eliminated. Applying Hellinger-Reissner principle, the stationary condition of the system's functionality is described. Two-noded linear one-dimensional elements are used for finite element discretization. Since C0 continuity is required, field variables are interpolated with linear shape functions. In the description of higher-order shear deformation, Reddy's shear function is selected. The beam displacement domain is described in terms of a deflection and a section rotation. As a result of the solution of mixed finite element equations, the displacements and stress compounds are obtained directly at the nodes. In this way, strains can be calculated directly on the compliance matrix and axial stress can be obtained without the need for derivatives. The equilibrium equations presented by the theory of elasticity were employed in the calculation of the transverse shear stress components. In order to validate the solution method presented, comparison and convergence analyzes for many lamination schemes were carried out under various boundary conditions.

Keywords: Higher Order theory, composite beam, Hellinger-Reissner, mixed finite element formulation, static analysis

ÖZET

Bu çalışmada, ince ve nispeten kalın tabakalı kompozit kirişlerin doğrusal statik analiz altında gerilme ve yer değiştirme bileşenlerini hesaplamak üzere bir karışık sonlu eleman formülasyonu sunulmaktadır. Yüksek Mertebe Kiriş Teorisi kullanılarak Birinci Mertebe teoride kayma düzeltme katsayısına duyulan ihtiyaç ortadan kaldırılmıştır. Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak sistemin fonksiyenelinin durağanlık koşulu tarif edilmiştir. Sonlu eleman ayrıklaştırması için iki düğüm noktalı doğrusal tek boyutlu elemanlar kullanılmış, üretilen fonksiyonel C0 sürekliği gerektirdiğinden bölge değişkenleri doğrusal şekil fonksiyonları ile interpole edilmiştir. Yüksek mertebe kayma şekil değiştirmesi tarifinde Reddy'nin kayma fonksiyonu seçilmiştir. Çubuk yer değiştirme alanı bir çökme ve bir kesit dönmesi üzerinden tarif edilmiştir. Karışık sonlu eleman denklemlerinin çözümü sonucunda yer değiştirmeler ve gerilme bileşkeleri doğrudan düğüm noktalarında elde edilmiştir. Bu sayede kompliyans matrisi üzerinden şekil değiştirmeler doğrudan hesaplanabilmiş ve eksenel gerilme de türeve gerek duymadan elde edilebilmiştir. Enine kayma gerilmesi bileşenlerinin hesabında elastisite

teorisinin sunduğu denge denklemleri kullanılmıştır. Sunulan çözüm yöntemini doğrulamak üzere birçok tabakalanma durumu için karşılaştırma ve yakınsama analizleri çeşitli sınır koşulları altında gerçekleştirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Yüksek Mertebe Teori, kompozit kiriş, Hellinger-Reissner, karışık sonlu eleman formülasyonu, statik analiz

GİRİŞ

Günümüzde inşaat, makine, biyomekanik, nükleer, otomotiv, uçak-uzay ve savunma sanayi gibi mühendislik alanlarında kompozit yapılar sıklıkla kullanılmaktadır [1]. Farklı malzemelerin ortak çalışma prensibine dayalı bu kompozit malzemeler entegre oldukları yapılarda ısı, ses ve su yalıtımı, yangın güvenliği, yüksek dayanım, korozyon dayanımı, düşük maliyet ve hafiflik gibi avantajlar sağlamaktadır. Kompozit malzemelerin yapısal tasarımında taşıma gücü, göçme yükü ve hasar tespiti kritik önem taşımaktadır. Bu kapsamda detaylı statik analiz yapılma ihtiyacı kaçınılmazdır. Her zaman finansal durum veya fiziksel ortam deneysel çalışmaya elverişli olmadığından problem çeşidine göre gerçeğe en yakın formülasyonu belirleyip teorik çalışmak verimli bir yöntem olacaktır. Literatürde kirişlerin statik veya dinamik analiz gerçekleştirmek üzere farklı teoriler ortaya atılmıştır. Klasik Kiriş Teorisi (KKT), Birinci Mertebe Kiriş Teorisi (BMKT) ve Yüksek Mertebe Kiriş Teorisi (YMKT) öne çıkan başlıca teorilerdendir. Bernoulli-Euler teorisi olarak da bilinen KKT, yaklaşık 280 yıl önce Euler [2] ve Bernoulli [3] tarafından ortaya atılmıştır ve en iyi yakınsamayı ince kirişler için sağlamaktadır. Boley [4] KKT'nin ilk kullanılma dönemlerine, Modaress [5] ise bu teorinin güncel kullanımına örnek gösterilebilir. Timoshenko [6] tarafından geliştirilen ve kendi adıyla da anılan BMKT ise dönme ataleti ve birinci dereceden kayma etkilerini hesaba katmaktadır. Wagner ve Gruttman [7] ile Lee ve Jang [8] BMKT ile kompozit kirişleri analiz eden araştırmacılara örnek verilebilir. YMKT ise polinom tabanlı, trigonometrik ve eksponansiyel gibi yüksek dereceli kayma terimleri üreterek kesit çarpılmasını dikkate alarak düzlem içi ve kalınlık boyunca enine şekil değiştirmeleri tarif edebilmektedir. Reddy [9], Reissner [10], Soldatos [11] gibi plak teorisi üzerine çalışmış araştırmacılar birbirinden farklı kayma terimleri türetmiştir. Ferreira v.d. [12], Murthy v.d. [13] ve Madenci [14] kompozit kirişleri YMKT ile analiz etmiştir. Chandrashekhara ve Bangera [15] tabakalı kompozit kirişlerin serbest titreşim davranışını genelde tek boyutlu incelemelerde ihmal edilen poisson oranını dâhil ederek YMKT ile incelemiştir. Zhen ve Wanji [16] yer değiştirme tabanlı YMKT kullanarak sandviç ve tabakalı kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizini gerçekleştirmiştir.

Literatür incelendiğinde kayma etkilerini ihmal eden KKT ve kayma düzeltme katsayısına ihtiyaç duyan BMKT kompozit yapıdaki nispeten kalın yapıların çözümünde yetersiz kaldığı görülebilmektedir. Bu sebeple, bu çalışmada tabakalı kompozit doğrusal kirişlerin mekanik modelinde Yüksek Mertebe Kiriş Teorisi kullanılmış; yüksek dereceli terim için Reddy'nin önerdiği kayma fonksiyonu seçilmiştir. Doğrusal elastik davranış gösteren kirişin enerji ifadesinin tarif edilmesinde Hellinger-Reissner prensibinden yararlanılmıştır. Yer değiştirme alanında birer çökme ve dönme terimi dikkate alınmıştır. Üretilen sonlu eleman fonksiyoneli karışık yapıda olup yer değiştirme ve gerilme bileşkesi türünden büyüklükler barındırmaktadır. Sistem sonlu eleman denklemlerinin oluşturulmasında iki düğüm noktalı elemanlar doğrusal şekil fonksiyonları ile tarif edilmiş ve iki noktalı Gauss şeması üzerinden integraller sayısal olarak hesaplanmıştır. Sonlu eleman denklemlerinin çözümü ile çökme ve dönme bileşenleri ile birlikte eğilme momenti ve kesme kuvveti de doğrudan düğüm noktalarında elde edilmiştir. Bu sayede kompliyans matrisleri kullanılarak şekil değiştirme ölçümleri düğüm noktalarında türev kullanılmadan hesaplanabilmiş böylece eksenel gerilme

hesabı yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlara kıyasla iyileştirilmiştir. Hesaplanan eksenel gerilmeler elastisite teorisinin sunduğu denge denklemlerinde yerleştirilerek enine kayma gerilemeleri kesit boyunca elde edilmiştir. Eleman ağı sıklaştırılarak tekrarlanan çözümler ile yakınsama analizleri yapılmış, literatürdeki elastisite çözümleri ve çeşitli sayısal çözümler dikkate alınarak karşılaştırma analizleri gerçekleştirilmiştir. Sonrasında, önerilen sonlu eleman formülasyonunun tabakalı kompozit kirişlerin yer değiştirme ve gerilme hesabındaki etkinliğini göstermek üzere çeşitli tabakalanma ve sınır koşullarının dikkate alındığı çözümler sunulmuştur.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Bir x,z düzleminde yüklenen, ağırlık merkezi x ekseni ve kesiti y,z eksenleri ile tarif edilen Şekil 1a'daki çubuğu ele alalım. Çubuk ekseni boyunca z doğrultusunda etkiyen yayılı yük $p=p(x)$ etkisindeki çubukta eksenel doğrultudaki yer değiştirme ve çökme alanı Yüksek Mertebe Kiriş Teorisine göre, sırasıyla, aşağıdaki gibi tarif edilebilir:

$$\begin{aligned} u^* &= -z\,w_{,x} + f(z)\theta_x \\ w^* &= w \end{aligned} \tag{1}$$

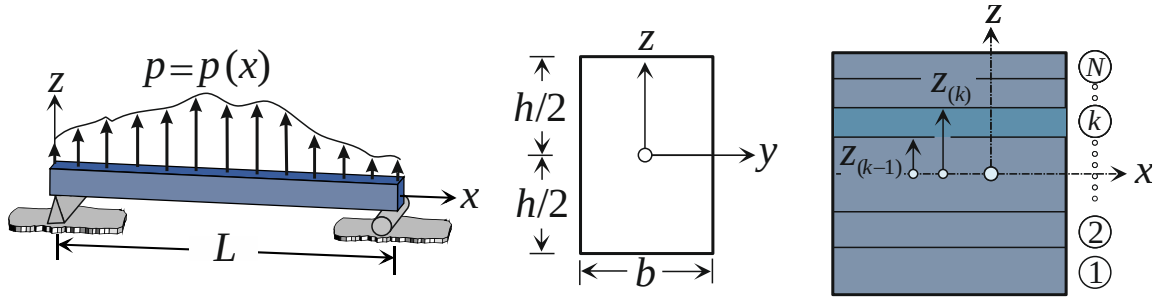
Burada $w(x)$ kiriş eksenindeki çökme terimi iken $\theta_x(x)$ kesitin y eksenine göre dönmeyi tariflemektedir. Ayrıca $f(z)$ kesitteki çarpılmayı yansıtmak üzere tariflenmiş kayma fonksiyonudur ve bu çalışmada Reddy'nin kayma fonksiyonu [17]

$$f(z) = z\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right) \tag{2}$$

olarak kullanılmıştır. Bu ifadede h kiriş yüksekliğini belirtmektedir (Bkz. Şekil 1b). Kiriş kesiti boyunca şekil değiştirme bileşenleri denklem (1)'de tarif edilen yerdeğiştirme alanı üzerinden yazılırsa:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u^*_{,x} = -z\,w_{,xx} + f\,\theta_{x,x} \\ \gamma_{xz} &= u^*_{,z} + w^*_{,x} = f'\theta_x \end{aligned} \tag{3}$$

elde edilir. İfadelerdeki alt indiste kullanılan virgül, kendisinden sonra gelen eksen terim veya terimlere göre türevlerin alındığını belirtmektedir. Denklem (3) de şekil değiştirme ölçütleri aşağıdaki gibi verilebilir:



(a) (b) (c)

Şekil 1. Tabakalı kompozit kiriş. a) Kiriş eksen takımı b) Kiriş kesit boyutları c) Kesit tabakalanması

$$\kappa_0 = -w_{,xx}$$
$$\kappa_1 = \theta_{x,x} \tag{4}$$
$$\varepsilon_s = \theta_x$$

Şekil 1c'de görülen kompozit kirişin $k.$ tabakasında gerilme şekil değiştirme ilişkileri Hooke yasası kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{5}$$

Burada, $\bar{Q}_{11}$ ve $\bar{Q}_{55}$ kesitte dönüştürülmüş malzeme rijitlik terimlerine karşılık gelmektedir [18]. $\sigma_{xx}^{(k)}$ ve $\sigma_{xz}^{(k)}$ ise $k.$ tabakadaki eksenel normal gerilme ve enine kayma gerilmesi bileşenleridir.

Elastik bir sistemin fonksiyonelinin birinci varyasyonu Hellinger-Reissner prensibine göre aşağıdaki gibi belirtilebilir [19,20].

$$\delta\Pi_{HR} = \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}}\right)^T \delta\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\sigma}} \mathrm{d}V + \int_V \left(\left(\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{\sigma}}\right)^T \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \mathbf{q}^T \delta\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V - \int_\Gamma \hat{\mathbf{t}}^T \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{6}$$

Bu denklemde, birinci integral şekil değiştirme $(\boldsymbol{\varepsilon})$ alanının uygunluk koşullarının zayıf formuna karşılık gelirken ikinci integral $\mathbf{q}$ dış yük etkisi altında V hacmi bölgesinde denge denklemlerinin zayıf formuna karşılık gelmektedir. İlk integralde şekil değiştirme alanının kinematik ilişkiler üzerinden tarifi $(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}})$ ile gerilmeler üzerinden tarifi $(\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}})$ arasındaki uygunluk durumu tariflenmektedir. Son integral ise bölge sınırlarındaki (S) gerilmelerin $\hat{\mathbf{t}}^T$ yaptığı işi göstermektedir. Burada δ varyasyon operatörüdür. Genel üç boyutlu durum için verilen (6) denklemi, kiriş problemine indirgenmek istendiğinde, kesit yüksekliği boyunca bölge terimlerinin integralleri hesaplanarak gerilme ve şekil değiştirmeler yerine gerilme bileşenleri ve şekil değiştirme ölçütleri üzerinden hareket edilir:

$$\delta\Pi_{HR} = \int_L \left(\mathbf{e}^{\mathbf{u}} - \mathbf{e}^{\mathbf{P}}\right)^T \delta\mathbf{P}\,\mathrm{d}L + \int_L \left(\mathbf{P}^T \delta\mathbf{e}^{\mathbf{u}} - \mathbf{p}^T \delta\mathbf{u}\right)\mathrm{d}L - \int_\Gamma \hat{\mathbf{t}}^T \delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{7}$$

Burada $\mathbf{e}^{\mathbf{u}T} = [\kappa_0 \quad \kappa_1 \quad \varepsilon_s]^T$ şekil değiştirme ölçütlerinin kinematik olarak tariflenmesi ile belirlenmekte iken $\mathbf{e}^{\mathbf{P}}$ şekil değiştirme ölçütlerinin gerilme bileşkeleri $\mathbf{P}^T = [M_{xx} \quad M_{xx}^f \quad Q_{xz}]$ üzerinden yazılması ile elde edilir. Tabakalı kompozit çubuğa etkiyen çizgisel yük $\mathbf{p}$ ile simgelenmiştir. Burada, eğilme momenti M_{xx}, yüksek mertebeden eğilme momenti M_{xx}^f ve kesme kuvveti Q_{xz}

$$\left(M_{xx}, M_{xx}^f, Q_{xz}\right) = b\sum_{k=1}^{N} \int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \left(z\sigma_{xx}^{(k)},\ f(z)\sigma_{xx}^{(k)},\ (\mathrm{d}f(z)/\mathrm{d}z)\sigma_{xz}^{(k)}\right)\mathrm{d}z \tag{8}$$

Burada b kiriş genişliği (bakınız Şekil 1b) ve N kesitteki toplam tabaka sayısıdır. Denklem (5)'te verilen bünye bağıntıları denklem (8)'de yerleştirildiğinde şekil değiştirme ölçütleri $\mathbf{e}^{\mathbf{u}}$ ve gerilme bileşkeleri $\mathbf{P}$ arasındaki ilişki şu şekilde bulunur:

$$\mathbf{P}=\mathbf{E}\mathbf{e}^{\mathbf{u}} \quad \text{yada} \quad \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{xx}^{f} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & F_{11} & 0 \\ F_{11} & H_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A^{s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Burada $\mathbf{E}$ kesit rijitliği matrisindeki terimler aşağıdaki gibi hesaplanırlar:

$$\left(D_{11} \quad F_{11} \quad H_{11} \right) = b \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(z^2 \quad zf(z) \quad f(z)^2 \right) \mathrm{d}z \tag{10}$$

$$A^{s} = b \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \bar{Q}_{55}^{(k)} \left(f'(z) \right)^2 \mathrm{d}z \tag{11}$$

Komplians matrisi $\mathbf{S}=\mathbf{E}^{-1}$ nin tarif edilmesi ile denklem (7)'da kullanılmak üzere (9) denklemi düzenlenirse

$$\mathbf{e}^{\mathbf{P}}=\mathbf{S}\mathbf{P} \quad \text{yada} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D'_{11} & F'_{11} & 0 \\ F'_{11} & H'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A^{s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{xx}^{f} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

Yüksek mertebeden kayma etkilerinin dikkate alındığı kiriş teorisinde denge denklemleri aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\left.\begin{aligned} p + M_{xx,xx} &= 0 \\ M_{xx,x}^{f} - Q_{xz} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

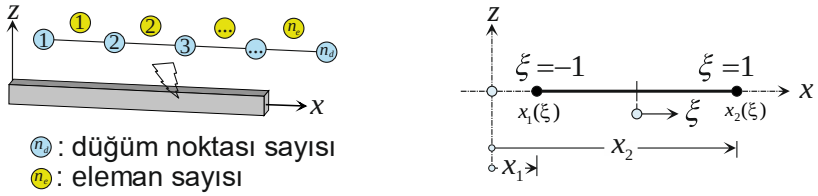
Nihayetinde, denklem (7)'da denklem (13), (12) ve (4)'ün kullanılması ile tabakalı kompozit kirişin fonksiyonelinin birinci varyasyonu açık yapıda aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} &= \int_L \left[w_{,x}\delta M_{xx,x} - \bar{D}_{11}M_{xx} + \bar{F}_{11}M_{xx}^{f} \;\; \delta M_{xx} \right] \mathrm{d}L \\ &+ \int_L \left[\theta_{x,x} - \bar{F}_{11}M_{xx} + \bar{H}_{11}M_{xx}^{f} \right] \delta M_{xx}^{f} \mathrm{d}L + \int_L \left[\theta_x - \bar{A}^{s}Q_{xz} \right] \delta Q_{xz} \mathrm{d}L - \int_L \delta w p \mathrm{d}L \\ &+ \int_L M_{xx,x}\,\delta w_{,x} + M_{xx}^{f}\delta\theta_{x,x} + V_{xz}\delta\theta_x \;\; \mathrm{d}L - \int_\Gamma \hat{\mathbf{t}}^{T}\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Yukarıdaki (14) numaralı denklemde L kiriş uzunluğunu, Γ kiriş sınırını temsil etmektedir. Bu denklem yer değiştirme ve kuvvet-moment tipinde büyüklükleri bir arada barındırır. Denklem (14) ile verilen fonksiyonelin birinci varyasyonu ifadesinde terimler üzerinde bulunan ikinci mertebe türevler kısmi integrasyon kullanılarak birinci mertebeye, karışık sonlu eleman formülasyonunun bir avantajı olarak indirgenmiştir. Bu sayede oluşturulacak sonlu elemen ayrıklaştırmasında kullanılacak şekil fonksiyonlarının C0 sürekliliğine sahip olması sağlanmıştır. Oluşturulan iki düğüm noktalı lineer şekil fonksiyonları (Şekil 2a) $-1 \le \xi \le 1$ aralığında herhangi bir ξ koordinatı (Şekil 2b) için şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi_i(\xi) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \xi\xi_i\right), \quad i = 1,2 \tag{15}$$

Denklem (14) tanıtımı yapılan iki düğüm noktalı doğrusal elemanlar ile ayrıklaştırıldığında sonlu eleman denklemleri aşağıdaki yapıda elde edilir:



(a) (b)

Şekil 2. Sonlu eleman tanımı a) Kiriş alanında doğrusal iki düğüm noktalı eleman ayrıklaştırması b) Genel bir elemanda global ve lokal koordinat sistemleri

$$\mathbf{KX} = \mathbf{F} \tag{16}$$

Denklem (16)'de $\mathbf{K}$ sistem matrisine, $\mathbf{F}$ dış kuvvet vektörüne ve Denklem (17)'de herhangi bir (i) düğüm noktası için açılımı verilen $\mathbf{X}$ ise bilinmeyenler vektörüne karşılık gelir.

$$\mathbf{X}^i = \left[w^i \quad \theta_x^i \quad M_{xx}^i \quad M_{xx}^{fi} \quad Q_{xz}^i \right]^T \tag{17}$$

Denklem (16)'nin çözülmesi ile tabakalı kompozit kiriş için hem yerdeğiştirme türünde hem de gerilme bileşkesi türündeki bölge değişkenleri doğrudan düğüm noktalarında elde edilmiş olur. Bu sayede (12) denklemi kullanılarak şekil değiştirme ölçütleri doğrudan matris işlemleri ile herhangi bir sayısal türev işlemi gerektirmeden hesaplanabilirler. Sonrasında kinematik bağıntılar ve bünye bağıntılarının kullanılması ile de gerilme bileşenlerinin kesit boyunca dağılımları yine düğüm noktalarında elde edilebilir. Fakat, bilindiği gibi enine kayma gerilmelerinin bünye bağıntıları yardımı ile hesaplanması gerçekçi olmayan sonuçlar ortaya koyabilmektedir. Bu sorunu aşmak için elastisite teorisinin denge denklemleri devreye alınırsa enine kayma gerilmesi bileşeni herhangi bir kalınlık koordinatında aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\sigma_{xz} = -\int_{-h}^{z} (\partial \sigma_{xx} / \partial x) \mathrm{d}\bar{z} \tag{18}$$

SAYISAL SONUÇLAR

Önerilen karışık sonlu eleman formülasyonunun tabakalı kompozit kirişlerde statik yükleme altında gerilme ve yerdeğiştirme hesabındaki performansının ve etkinliğinin gösterilmesi için bir dizi sayısal örnek üzerinde durulmuş ve sonuçlar yorumlanmıştır. Çözümler yazarların geliştirdiği Fortran tabanlı bir program üzerinden yapılmıştır. İlk olarak sayısal çözüm yönteminin yakınsama davranışı incelenmiş ve literatürde referans çözüm olarak kabul edilen 3B elastisite çözümü (Pagano) [21] ile karşılaştırmalar yapılarak; formülasyonun ve geliştirilen programın doğruluğu test edilmiştir. Sonrasında birçok tabakalanma, yükleme ve mesnet koşulları için çözümler sunulup Khdeir ve Reddy [22] (yüksek mertebe teori analitik çözümü), Kapuria v.d. [23] (zikzak) ve Zenkour [24] (basit yüksek mertebe teori) gibi çalışmalarla karşılaştırılarak formülasyonun etkinliği araştırılmıştır. Çözümlerde kullanılan malzemeler için mekanik özellikleri veren mühendislik sabitleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Malzeme 1: $E_1 / E_2 = 25, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = \nu_{23} = 0.25$

Malzeme 2: $\left(E_1 = 181, E_2 = 10.3, G_{12} = G_{13} = 7.17, G_{23} = 2.87\right)[\mathrm{GPa}], \ \nu_{12} = 0.25, \nu_{23} = 0.33$

Problem: Üniform Yüklü Ankastre ve Basit Mesnetli Tabakalı Kompozit Kirişler

[0/90/0] ve [0/90/90/0] malzeme tabakalanma açılarına sahip, $p(x)=p_0$ (üniform) yüklü kirişler ele alınmıştır. Basit mesnet koşulu bütün tabakalanmalar için ele alınmışken ankastre mesnet koşulunda sadece [0/90/0] tabakalanması dikkate alınmıştır.

Çizelge 1. Ankastre mesnetli simetrik tabakalı kompozit kirişte çökme değerleri.

		$\bar{w}$		
Yerleşim	Teori	$\rho=5$	$\rho=10$	$\rho=50$
[0/90/0]	MHBT ($n_e=10$)	1.5081	0.5130	0.145
	MHBT ($n_e=20$)	1.5351	0.5286	0.146
	MHBT ($n_e=30$)	1.5371	0.5310	0.146
	MHBT ($n_e=40$)	1.5376	0.5316	0.147
	Khdeir ve Reddy	1.537	0.532	0.147

Çizelge 1'de Malzeme 1 ile oluşturulmuş ankastre kirişin açıklık ortasındaki çökme değerleri farklı kalınlık oranları ve eleman sayıları için sunulmuştur ve Khdeir ve Reddy'nin yüksek mertebe kiriş teorisi için sunduğu analitik çözümle de karşılaştırılmıştır. Çizelge 1 incelendiğinde ankastre sınır koşulları altında da önerilen çözüm yönteminin tutarlı bir yakınsama davranışı gösterdiği belirtilebilir. Analitik çözümle karşılaştırıldığında, karışık sonlu eleman sonuçlarının analitik sonuçlar ile bütün kalınlık oranları için büyük bir uyum içinde olduğu söylenebilir. Çizelgeden elde edilebilecek bir diğer önemli sonuç ise kiriş açıklık-yükseklik oranının büyümesi ile çökme değerlerinin eleman sıklaştırması sonucu daha hızlı bir yakınsama sergilemesidir.

Çizelge 2. Basit mesnetli simetrik [0/90/90/0] tabaka yerleşimlerine sahip üniform yüklü kompozit kirişin analiz sonucunun gerçek çözüm ile kıyaslanması (% fark) (Malzeme 2)

	$\rho=5$				$\rho=10$			
Teori	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xx}^{*}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xx}^{*}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
MHBT ($n_e=10$)	5.25	5.84	4.87	3.55	3.31	1.78	1.48	5.64
MHBT ($n_e=20$)	4.72	5.72	4.75	1.62	2.75	1.74	1.44	1.65
MHBT ($n_e=30$)	4.63	5.73	4.76	1.83	2.65	1.74	1.44	0.90
MHBT ($n_e=40$)	4.60	5.73	4.76	2.17	2.61	1.74	1.44	0.76
Kapuria v.d.	4.6	5.7	4.8	4.3	2.6	1.7	1.4	1.8
Pagano	2.6748	1.0711	-1.0602	1.432	1.4343	0.9059	-0.9031	8.74
Teori	$\rho=20$				$\rho=100$			
MHBT ($n_e=10$)	1.65	0.47	0.39	7.51	0.84	0.02	0.02	9.39
MHBT ($n_e=20$)	1.06	0.46	0.38	2.73	0.24	0.02	0.02	4.37
MHBT ($n_e=30$)	0.95	0.46	0.38	1.35	0.13	0.02	0.02	2.71
MHBT ($n_e=40$)	0.91	0.46	0.38	0.80	0.09	0.02	0.02	1.89
Kapuria v.d.	0.9	0.5	0.4	0.7	0.0	0.0	0.0	0.0
Pagano	1.1152	0.8641	-0.8635	2.706	1.0123	0.8508	-0.8508	14.6

Çizelge 2'te, basit mesnetli simetrik [0/90/90/0] tabaka yerleşimine sahip üniform yüklü kompozit kirişin yerdeğiştirme ve gerilme sonuçlarının elastisite çözümü ve bir Üçüncü Dereceden Teori çözümü ile karşılaştırması yapılmıştır. Bu çizelgedeki boyutsuzlaştırmalar aşağıdaki denklemlere göre yapılmış,

$$\bar{w}=\frac{10^2 E_2 h^3}{p_0 L^4} w(L/2,0) \quad , \quad \bar{\sigma}_{xx}=\frac{h^2}{p_0 L^2}\sigma_{xx}(L/2,h/2) \quad ,$$
$$\bar{\sigma}^{*}_{xx}=\frac{h^2}{p_0 L^2}\sigma_{xx}(L/2,-h/2) \quad , \quad \bar{\sigma}_{xz}=\frac{h}{p_0 L}\sigma_{xz}(0,0) \tag{19}$$

elastisite çözümüne kıyasla hesaplanan yüzde (%) farklar çizelgede sunulmuştur. Çizelgeden görüldüğü üzere, sözkonusu tabakalanma ve yükleme durumu için sonlu eleman formülasyonu istikrarlı bir yakınsama davranışı sergilemektedir. Kiriş açıklık-yükseklik oranı arttıkça önerilen çözüm yöntemi ile elde edilen sonuçların elastisite çözümü ile daha uyumlu olduğu gözlemlenmiştir. Kalın kiriş örneği haricinde ($\rho=5$) enine kayma gerilmesi değerlerinin yakınsaması daha yavaş olmuştur. Bunun sebebi denge denklemi üzerinden yapılan enine kayma gerilme hesabında kiriş koordinatına göre türev alınması ve bu sayısal türevin eleman sıklığıyla doğrudan ilişkili olmasıdır. Buna rağmen $\rho=5$, $\rho=10$ ve $\rho=20$ değerleri için, bu çalışmadan elde edilen sonuçların Üçüncü Dereceden Teori'ye dayalı sonlu eleman çözümünden elde edilen sonuçlara kıyasla elastisite çözümü ile daha uyumlu olduğu gözlemlenmiştir.

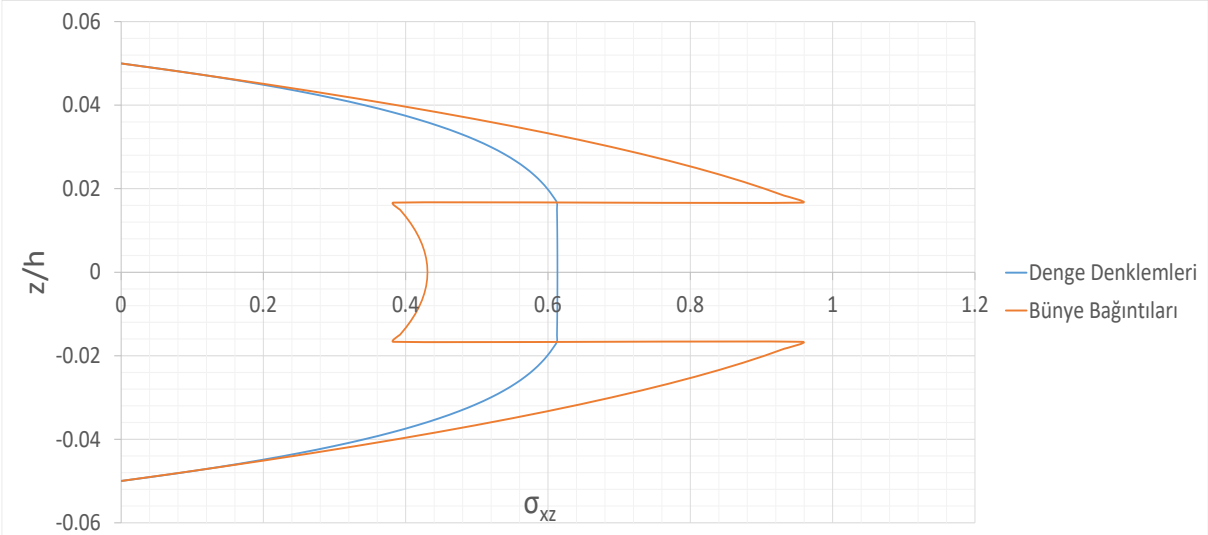
Çizelge 3'te, basit mesnetli simetrik [0/90/0] tabaka yerleşimine sahip üniform yüklü kompozit kirişte yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri denklem (21)'e göre boyutsuzlaştırılarak verilmiştir. Bu problemde Zenkour [24]'un basit yüksek mertebe teorisine göre elde ettiği analitik çözüm ile karşılaştırma yapılmıştır. Ayrıca sadece çökme değerleri Khdeir ve Reddy'nin analitik sonuçları ile karşılaştırılmış durumdadır. Bu problemde belirtmek gerekir ki Çizelge 3'te sunulan enine kayma gerilmesi (σ_{xz}) sonuçları denge denklemleri ile değil bünye bağıntıları kullanılarak yüksek mertebe teorinin kinematik büyüklükleri üzerinden hesaplanmıştır. İlgili problemin Zenkour [24] tarafından bu şekilde ele alınması bu zorunluluğa sebep olmuştur. Çizelge 3'te görüldüğü üzere önerilen karışık sonlu eleman çözümü istikrarlı bir yakınsama davranışı sergilemektedir. Sunulan bütün kiriş açıklık-yükseklik oranları için üretilen karışık sonlu eleman çözümleri ile analitik sonuçlar arasında yüksek seviyede bir uyum elde edilmiştir. Çizelge 3'ten açıkça takip edilebileceği üzere eksenel normal gerilme (σ_{xx}) değerlerinin diğer parametrelere göre çok daha yüksek bir hızda yakınsadığı tespit edilmiştir. Çok gevşek eleman ağında bile ($n_e=10$) elde edilen sonuçların analitik sonuçla büyük ölçüde örtüştüğü görülebilmektedir.

$$\bar{w}=\frac{10^2 E_2 b h^3}{p_0 L^4} w(L/2,0) \quad , \quad \bar{\sigma}_{xx}=\frac{bh^2}{p_0 L^2}\sigma_{xx}(L/2,h/2) \quad , \quad \bar{\sigma}_{xz}=\frac{bh}{p_0 L}\sigma_{xz}(0,0) \tag{20}$$

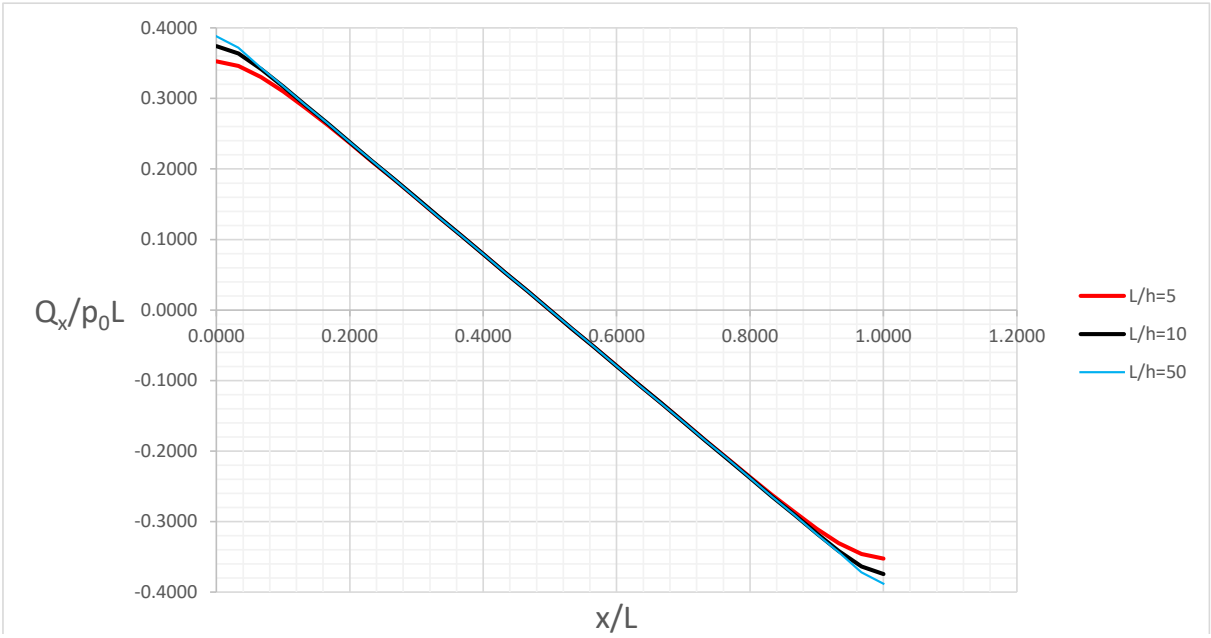
Çizelge 3. Basit mesnetli simetrik tabaka yerleşimine sahip kompozit kirişin üniform yük altındaki mekanik bileşenleri (Malzeme 1)

		$\rho=5$			$\rho=10$			$\rho=50$		
Yerleşim	Teori	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{xz}$
[0/90/0]	MHBT ($n_e=10$)	2.3968	-1.0654	0.5330	1.0897	-0.8494	0.5982	0.661	-0.7805	0.6241
	MHBT ($n_e=20$)	2.4098	-1.0670	0.5275	1.0959	-0.8500	0.6138	0.665	-0.7805	0.6577
	MHBT ($n_e=30$)	2.4122	-1.0669	0.5201	1.0970	-0.8500	0.6133	0.666	-0.7805	0.6682
	MHBT ($n_e=40$)	2.4130	-1.0669	0.5150	1.0974	-0.8500	0.6111	0.666	-0.7805	0.6729
	Zenkour	2.4141	-1.0669	0.4057	1.0980	-0.8500	0.4311	0.661	-0.7805	0.4514
	Khdeir ve Reddy	2.412			1.096			0.665		

Şekil 3'da $\rho = 10$ ([0/90/0] tabakalanması) için enine kayma gerilmesinin tabakalı kiriş kesiti boyunca dağılımı hem Hooke yasası ile hesaplanarak hem de elastisitenin denge denklemleri ile hesaplanarak sunulmuştur. Şekilden görüleceği üzere, Hooke yasası ile hesaplanan enine kayma gerilmesi dağılımı gerçekçi olmayan sonuçlar üretmektedir. Bunun sebebi yüksek mertebe kayma teorisinin varsaydığı yer değiştirme alanına göre enine şekil değiştirme dağılımının kesit boyunca sürekli olmasıdır. Bu yüzden, tabaka ara kesitlerinde aynı şekil değiştirme ve farklı malzeme sabitlerinin mevcut olması enine kayma gerilmesi dağılımının bu noktalarda süreksizlik göstermesine dolayısı ile hatalı olarak hesaplanmasına sebep olmaktadır. Şekil 3'dan, daha gerçekçi bir sonuç veren denge denklemi yöntemi ile ve Hooke yasası kullanılarak hesaplanan enine kayma gerilmelerinin arasındaki büyük fark izlenebilmektedir.

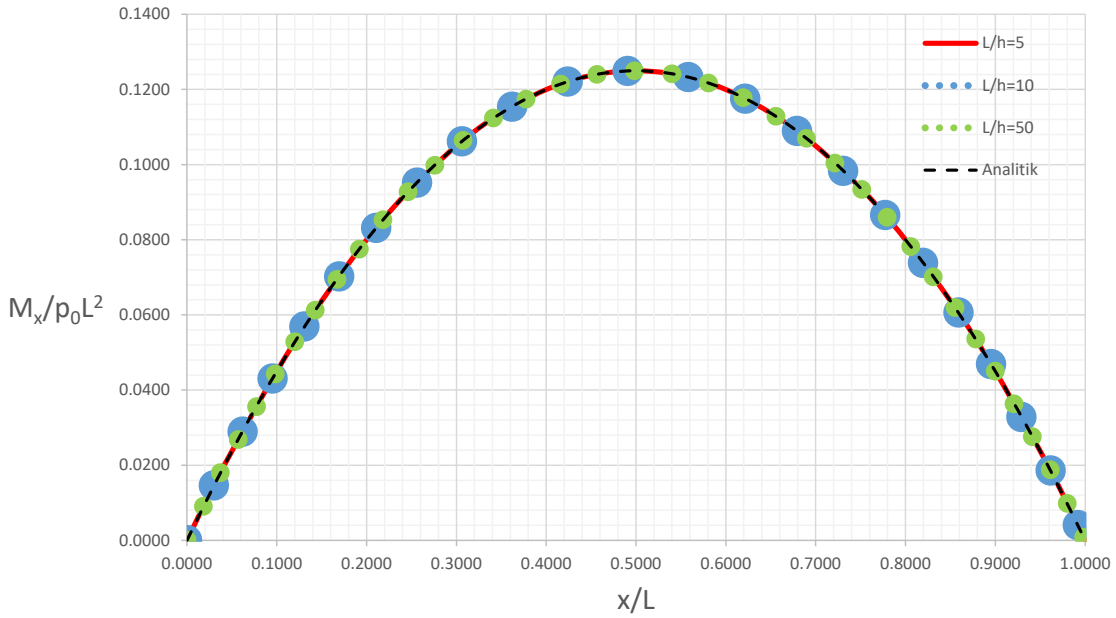


Şekil 3. Simetrik yapıdaki $\rho = 10$ oranına sahip 30 elemanlı üniform yüklü, basit mesnetli tabakalı kompozit kiriş (Malzeme 1)

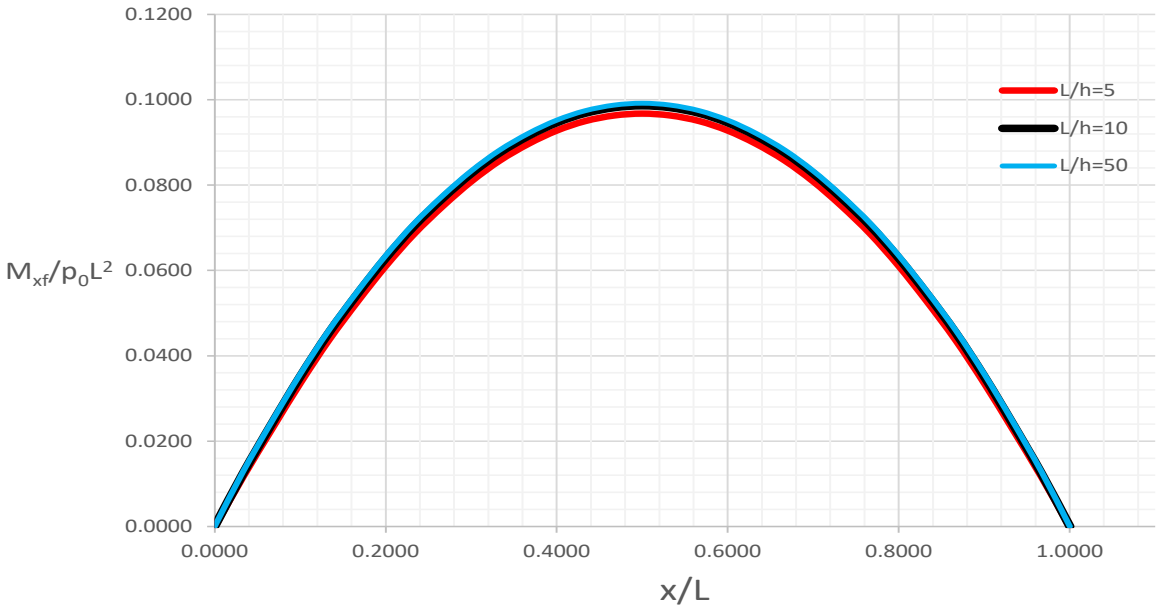


Şekil 4. Simetrik yapıdaki 30 elemanlı üniform yüklü, basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte kesme kuvveti dağılımı (Malzeme 1)

Karışık sonlu eleman formülasyonunun avantajı kullanılarak kesme kuvveti ve moment türündeki gerilme bileşkeleri doğrudan elde edilmektedir (Bkz. Şekil 4, Şekil 5 ve Şekil 6). Şekil 7'te $\rho = 5,10,50$ için 30 elemanla ayrıklaştırılmış üniform yüklü ve basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte kesme kuvveti dağılımı görülmektedir. Bu dağılım farklı kalınlık oranları için çubuk üzerindeki büyük bir kısımda üst üste düşmekte mesnetlere yakın yerlerde ise küçük farklılıklar göstermektedir. Kesme kuvveti mesnete yakın bölgelerde çubuğun diğer bölgelerine göre mutlak değerce daha büyüktür. Çubuk açıklık-kalınlık oranına göre kayma kuvvetinin etkinliğinin değişmesinden kaynaklanan kesme kuvvetindeki farklılık bu sebepten mesnet bölgelerinde daha fazla hissedilir olmaktadır.



Şekil 5. Simetrik tabakalanmış, üniform yüklü ve basit mesnetli kirişte moment dağılımı (Malzeme 1)



Şekil 6. Simetrik yapıdaki $\rho = 10$ oranlı, üniform yüklü, basit mesnetli kirişte yüksek mertebe moment dağılımı (Malzeme 1)

Aynı kiriş probleminde, Şekil 5'de farklı kalınlık oranları için moment dağılımı verilmiştir. Bu dağılımda tüm kalınlık oranları için boyutsuz moment değerleri ve analitik hesap çubuk ekseni boyunca üst üste düşmektedir. Dolayısıyla yüksek mertebe teorisinin dikkate aldığı enine kayma etkisinin moment değerlerinde görülmediği belirtilebilir.

Aynı kiriş için farklı kalınlık oranları ile yüksek mertebe moment dağılımları Şekil 6'da sunulmuştur. Kiriş boyunca yüksek mertebe moment değerleri enine kayma etkisine bağlı olduğundan farklı kalınlık oranları için küçük değişiklikler göstermektedir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada tabakalı kompozit kirişlerin farklı sınır ve yükleme koşulları altında yer değiştirme ve gerilme dağılımları incelenmiş, bu amaçla önerilen karışık sonlu eleman yöntemi kurucu denklemleri Yüksek Mertebe Kiriş Teorisi kullanılarak oluşturulmuştur. Hellinger-Reissner varyasyonel prensibi kullanılarak elde edilen sonlu eleman denklemleri C0 sürekliliğine sahip doğrusal tek boyutlu iki düğüm noktalı elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmıştır. Karışık sonlu elemanlar yapısının bir avantajı olarak yer değiştirme türü bölge değişkenlerinin yanında kuvvet ve moment bileşenleri de düğüm noktalarında doğrudan hesaplanabilmektedir. Bu sayede kesit kompliyans matrisleri kullanılarak şekil değiştirme bileşenleri matris operasyonları üzerinden elde edilebilmektedir. Eksenel normal gerilme Hooke yasaları ile hesaplanmış, enine kayma gerilme bileşenleri ise elastisite teorisinin denge denklemleri kullanılarak kesit boyunca sürekliliği sağlanacak şekilde elde edilebilmiştir. Enine kayma gerilmeleri ayrıca karşılaştırma amaçlı olarak Hooke yasaları ile de kimi problemler için sunulmuştur. Ele alınan problemlerde yakınsama ve karşılaştırma analizleri yapılmış ve sonuçların elastisite teorisinden elde edilen kesin çözüm ve analitik çözümlerle uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçların literatürde öne çıkan gelişmiş birçok sonlu eleman çözümü ile uyumlu olduğu ve yer yer özellikle gerilme hesaplarında daha iyi sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir. Önerilen formülasyonun gelecekte birçok analiz türü için geliştirilmesi ve çeşitli problemler için adapte edilebilmesi olanağı sunduğu düşünülmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, İTÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (BAP) tarafından (MYL-2020-42679) nolu proje kapsamında finansal olarak desteklenmektedir. Bu destek için yazarlar teşekkürlerini sunarlar.

KAYNAKLAR

[1] V.V. Vasiliev, E.V. Morozov, Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements, Elsevier, London, UNITED KINGDOM, 2013. http://ebookcentral.proquest.com/lib/itup/detail.action?docID=1221537 (accessed April 9, 2021).

[2] L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, apud Marcum-Michaelem Bousquet, 1744.

[3] J. Bernoulli, Curvatura laminae elasticae, Acta Eruditorum Lipsiae. 1694 (1964) 262–276.

[4] B.A. Boley, On the Accuracy of the Bernoulli-Euler Theory for Beams of Variable Section, Journal of Applied Mechanics. 30 (1963) 373–378. https://doi.org/10.1115/1.3636564.

[5] A.H. Modaress-Aval, F. Bakhtiari-Nejad, E.H. Dowell, H. Shahverdi, H. Rostami, D.A. Peters, Aeroelastic analysis of cantilever plates using Peters' aerodynamic model, and the influence of choosing beam or plate theories as the structural model, Journal of Fluids and Structures. 96 (2020) 103010. https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103010.

[6] S.P. Timoshenko, LXVI. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, (1921) 3.

[7] W. Wagner, F. Gruttmann, A displacement method for the analysis of flexural shear stresses in thin-walled isotropic composite beams, Computers & Structures. 80 (2002) 1843–1851. https://doi.org/10.1016/S0045-7949(02)00223-7.

[8] U. Lee, I. Jang, Spectral element model for axially loaded bending–shear–torsion coupled composite Timoshenko beams, Composite Structures. 92 (2010) 2860–2870. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.04.012.

[9] J.N. Reddy, A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates, Journal of Applied Mechanics. 51 (1984) 745–752. https://doi.org/10.1115/1.3167719.

[10] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, International Journal of Solids and Structures. 11 (1974) 569–573.

[11] K.P. Soldatos, A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates, Acta Mechanica. 94 (1992) 195–220. https://doi.org/10.1007/BF01176650.

[12] A.J.M. Ferreira, C.M.C. Roque, P.A.L.S. Martins, Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates, Composite Structures. 66 (2004) 287–293. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.04.050.

[13] M.V.V.S. Murthy, D. Roy Mahapatra, K. Badarinarayana, S. Gopalakrishnan, A refined higher order finite element for asymmetric composite beams, Composite Structures. 67 (2005) 27–35. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.01.005.

[14] E. Madenci, Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisine Dayali Çapraz Tabakali Kompozit Plaklarin Karisik Sonlu Eleman Yöntemi İle Analizi, Selcuk Universitesi, 2016.

[15] K. Chandrashekhara, K.M. Bangera, Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element, Computers & Structures. 43 (1992) 719–727. https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90514-Z.

[16] W. Zhen, C. Wanji, An assessment of several displacement-based theories for the vibration and stability analysis of laminated composite and sandwich beams, Composite Structures. 84 (2008) 337–349. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.10.005.

[17] P. Shi, C. Dong, F. Sun, W. Liu, Q. Hu, A new higher order shear deformation theory for static, vibration and buckling responses of laminated plates with the isogeometric analysis, Composite Structures. 204 (2018) 342–358. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.080.

[18] R.M. Jones, Mechanics of composite materials, 1999.

[19] E. Hellinger, Die Allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, in: F. Klein, Conr. Müller (Eds.), Mechanik, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1907: pp. 601–694. https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_9.

[20] E. Reissner, On a Variational Theorem in Elasticity, Journal of Mathematics and Physics. 29 (1950) 90–95. https://doi.org/10.1002/sapm195029190.

[21] N.J. Pagano, Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates, (n.d.) 15.

[22] A.A. Khdeir, J.N. Reddy, An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams, Composite Structures. 37 (1997) 195–203.

[23] S. Kapuria, P.C. Dumir, N.K. Jain, Assessment of zigzag theory for static loading, buckling, free and forced response of composite and sandwich beams, Composite Structures. 64 (2004) 317–327. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.08.013.

[24] A.M. Zenkour, Transverse Shear and Normal Deformation Theory for Bending Analysis of Laminated and Sandwich Elastic Beams, Mech. of Adv. Mat. & Structures. 6 (1999) 267–283. https://doi.org/10.1080/107594199305566.ndc

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 – 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERDE ARMONİ ARAMA ALGORİTMASIYLA FREKANS DEĞİŞİMLERİNE DAYALI HASAR TESPİTİ

Volkan Kâhya ve Sebahat Şimşek
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080 Trabzon

ABSTRACT

In this study, the damage detection problem of laminated composite beams based on modal characteristics is addressed by using an optimization algorithm. Harmony Search Algorithm is used as an optimization tool because it does not require a special initial solution for the decision variables, and it approaches the global optimum solution quickly. A finite element with 5 nodes and 13 degrees of freedom are used for numerical modelling. This model can be capable of considering shear deformations, Poisson's effect, and elastic couplings between bending, extension, and twist due to anisotropy. The damage to the beam is defined by the stiffness loss coefficient, which is a real number ranging from 0 to 1 and expresses the change in the stiffness. The aim of the optimization process is to minimize the change between the natural frequencies of target model and those calculated by the numerical model. The accuracy and efficiency of the proposed method for different damage scenarios and boundary conditions are tested on laminated composite beams.

Keywords: Vibration-based damage detection; Laminated composite; Harmony Search Optimization

ÖZET

Bu çalışmada, tabakalı kompozit kirişlerin modal karakteristiklere dayalı hasar tespiti problemi bir optimizasyon algoritması kullanılarak ele alınmıştır. Karar değişkenleri için özel bir başlangıç çözümü gerektirmemesi ve global optimum çözüme hızlı bir şekilde yakınması sebebiyle optimizasyon aracı olarak Armoni Arama Algoritması kullanılmıştır. Çalışmada sayısal modelleme için 5 düğüm noktalı ve toplam 13 serbestlik dereceli sonlu eleman kullanılmıştır. Göz önüne alınan bu modelde, tabakalı kompozitte kayma deformasyonları, Poisson etkisi ve anizotropiden kaynaklı eğilme, uzama ve burulma deformasyonları arasındaki elastik etkileşimler dikkate alınmaktadır. Kirişte hasar, rijitlikteki değişimi ifade eden ve değeri 0 ila 1 arasında değişen rijitlik kaybı katsayısı ile tanımlanmıştır. Optimizasyon işleminde amaç, hedef model ile sayısal modelin hesaplanan doğal frekansları arasındaki değişimin en küçük yapılmasıdır. Önerilen yöntemin doğruluğu ve etkinliği, farklı hasar senaryoları ve sınır şartları için tabakalı kompozit kirişler üzerinde test edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Titreşime dayalı hasar tespiti; Tabakalı kompozit; Armoni Arama Optimizasyonu

GİRİŞ

Tabakalı kompozit kiriş ve plakların yapısal taşıyıcı elemanlar olarak mühendislik pratiğindeki uygulamalarının giderek artması bu tür malzemelerin karmaşık hasar mekanizmalarını anlamayı ve muhtemel hasarların zamanında tespiti için güvenilir ve uygulanması kolay yöntemlerin geliştirilmesini gerekli kılmaktadır. Kompozitlerde hasar tespiti için görsel denetimler, akustik ve ultrasonik yöntemler, termografi, X-ray ışınları, gömülü ivmeölçer uygulamaları vb. gibi yöntemler kullanılmaktadır. Ancak, bu yöntemlerin hem maliyetli olması hem de sonuçların doğruluğunun büyük ölçüde kullanıcının tecrübe ve yeteneğine bağlı olması en büyük dezavantajları olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu sebeple, uygulaması kolay ve ucuz olan titreşim ölçümlerine dayalı hasar tespit yöntemlerinin güçlü hesaplama algoritmalarıyla birlikte kompozit malzemelerde hasar tespiti için kullanılması son derece iyi bir seçenek olarak karşımıza çıkmaktadır [1,2].

Titreşime dayalı hasar tespit yöntemlerinin temel fikri, yapısal hasarın frekanslar ve mod şekilleri gibi titreşim özelliklerinde değişikliklere sebep olabileceğidir [3]. Bu tür hasar tespit yöntemleri, titreşim parametrelerine dayalı olarak üç kategoriye ayrılabilir: zaman alanı, frekans alanı ve zaman-frekans alanı yöntemleri. Zaman alanı yöntemlerinde zaman geçmişi (*time-history*) yanıtları, frekans alanı yöntemlerinde ise modal parametreler kullanılır. Zaman-frekans alanı yöntemleri, zaman-frekans analitik araçlarına dayanmaktadır. Modal analiz teknolojisinin gelişmesiyle birlikte, titreşim tabanlı yöntemlerin çoğunluğunda frekans alanının kullanıldığı görülmektedir. Yöntemin performansı büyük ölçüde hasara duyarlı özelliklerin seçimine bağlıdır. Bu sebeple, farklı hasar indekslerini/metriklerini içeren titreşim tabanlı hasar tespit yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerde, doğal frekanslar, mod şekilleri ve bunların varyantları (modal eğim, modal eğrilik vb.) yaygın olarak kullanılan modal parametrelerdir [4–6].

Son yıllarda titreşim tabanlı hasar tespitinde optimizasyon algoritmalarının kullanılması üzerinde özellikle durulmaktadır. Matematik bilimi ve bilgisayar teknolojisindeki ilerlemeler paralelinde doğadan ilham alınarak geliştirilen optimizasyon teknikleri, çeşitli mühendislik problemlerinin çözümüne başarıyla uygulanmıştır. Yapısal hasarların tespiti de bir optimizasyon problemi olarak düşünülebilir. Burada, yapının sayısal (sonlu eleman) modelinden hesaplanan modal veriler ile gerçek yapıdan (muhtemelen hasarlı) ölçülenler arasındaki fark, probleme ait sınırlayıcı koşullar altında en aza indirilmeye çalışılmaktadır. Bu sayede, sayısal modelin gerçek yapıyı (deneysel model) en iyi şekilde temsili sağlanmakta ve böylece yapısal hasarlar oldukça iyi bir hassasiyetle tespit edilebilmektedir. Optimizasyon araçları ile hasar tespitinin diğer bir avantajı, yapının mevcut durumunu temsil edebilecek şekilde sonlu eleman modelinin güncellenmesini sağlamasıdır. Böylece bir sonraki değerlendirmede, yapının bu son durumu referans olarak kullanılabilmektedir. Konuya yönelik araştırmaların yakın zamanda hız kazandığı ve tüm dünyada endüstriyel ve bilimsel alanda ilgi çektiği görülmektedir. Bununla beraber, titreşim verilerine dayalı hasar tespitinde optimizasyon yöntemlerinin kullanımının kompozitlerdeki pratik uygulamalarının sayısı hala sınırlıdır [2,7–12].

Bu çalışmada, tabakalı kompozit kirişlerde titreşime dayalı hasar tespiti problemi bir optimizasyon algoritması kullanılarak ele alınmıştır. Karar değişkenleri için özel bir başlangıç çözümü gerektirmemesi ve global optimum çözüme hızlı bir şekilde yakınması sebebiyle optimizasyon aracı olarak Armoni Arama Algoritması kullanılmıştır. Çalışmada sayısal modelleme için 5 düğüm noktalı ve toplam 13 serbestlik dereceli sonlu eleman kullanılmıştır. Göz önüne alınan bu modelde, tabakalı kompozitte kayma deformasyonları ve dönel atalet etkileri, Poisson etkisi ve anizotropiden kaynaklı eğilme, uzama ve burulma deformasyonları arasındaki elastik etkileşimler dikkate alınmaktadır. Kirişte hasar, değeri 0 ila 1 arasında

değişen bir reel sayı olan ve rijitlikteki değişimi ifade eden rijitlik kaybı katsayısı ile tanımlanmıştır. Optimizasyon işleminde amaç, muhtemel hasarlı hedef model ile sayısal modelin hesaplanan doğal frekansları arasındaki değişimin en küçük yapılmasıdır. Önerilen yöntemin doğruluğu ve etkinliği, farklı hasar senaryoları ve sınır şartları için tabakalı kompozit kirişler üzerinde test edilmiştir.

TEORİK FORMÜLASYON

Kinematik Bağıntılar ve Hareket Denklemleri

N adet ortotropik tabakadan oluşan dikdörtgen kesitli kompozit kirişin geometrisi ve koordinat eksenlerinin yerleşimi Şekil 1'de gösterilmiştir. Tabakalar eşit yükseklikte olup, her tabaka kendi içerisinde bir lif yönlendirmesine sahiptir. Kompozit kirişte yer değiştirme alanı, birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine göre aşağıdaki gibi kabul edilmiştir [13]:

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= u_0(x,t) + z\theta(x,t), \\ v(x,z,t) &= z\psi(x,t), \\ w(x,z,t) &= w_0(x,t) \end{aligned} \tag{1}$$

Burada, *u, v* ve *w* kirişin herhangi bir noktasında sırasıyla *x*, *y* ve *z* yönlerindeki yer değiştirme bileşenleridir. u_0 ve w_0 sırasıyla $z = 0$'da ölçülen yatay ve düşey yer değiştirmeleri, θ ve ψ kiriş orta düzlemine ait normalin *y* ve *x* ekseni etrafında dönmesini ve *t* zamanı göstermektedir. (1) ifadeleri, kirişte kesmenin ve dönel ataletin eğilmeye etkisini hesaba katmasının yanı sıra malzeme anizotropisi sebebiyle ortaya çıkan eğilme, uzama ve burulma deformasyonları arasındaki etkileşimlerin de dikkate alınmasına imkân vermektedir.

Şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x, \\ \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = w_{0,x} + \theta, \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = z\kappa_{xy} \end{aligned} \tag{2}$$

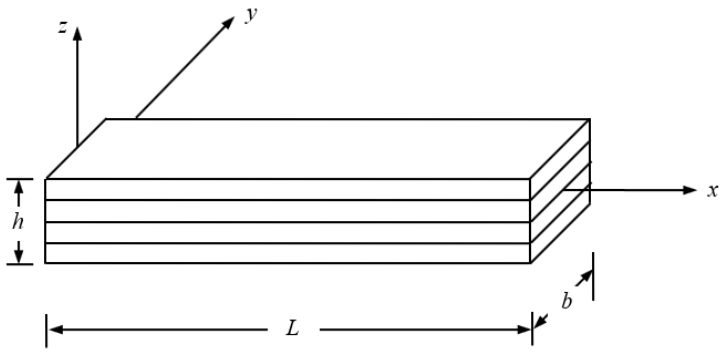
Burada $\varepsilon_x^0 = u_{0,x}$, $\kappa_x = \theta_{,x}$ ve $\kappa_{xy} = \psi_{,x}$ sırasıyla orta düzlemdeki şekil değiştirme bileşenlerini, eğilme ve burulma eğriliklerini, $(\ )_{,x}$ ise *x* değişkenine göre kısmi türevi göstermektedir.

Kompozit kiriş için bünye denklemleri aşağıdaki gibi yazılır [13]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{yz} \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Burada N_x, N_y ve N_{xy} kiriş düzlemi içinde meydana gelen iç kuvvet bileşenlerini, M_x, M_y ve M_{xy} sırasıyla *x* ve *y* eksenleri etrafındaki eğilme momenti bileşenleri ile burulma momenti bileşenini, Q_{yz} ve Q_{xz} kiriş orta düzlemine dik kesme kuvveti bileşenlerini, ε_x^0, ε_y^0, ve γ_{xy} normal ve kayma şekil değiştirme bileşenlerini, κ_x, κ_y ve κ_{xy} ise eğilme ve burulma eğriliklerini göstermektedir. Yukarıdaki ifadede, *A*, *B* ve *D* terimleri rijitlik sabitleri olup açık ifadeleri [14] nolu kaynakta verilmiştir.



Şekil 1. Sembolik bir tabakalı kompozit kirişin geometrisi ve koordinat takımının yerleşimi

Poisson etkisi sebebiyle kirişte yanal şekil değiştirme bileşenleri (ε_y^0 ve γ_{yz}) sıfır olmamakla birlikte N_y and N_{xy} kuvvetleri, M_y eğilme momenti ve Q_{yz} kesme kuvveti sıfırdır. Buna göre, (3) ifadeleri aşağıdaki hale indirgenebilir:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{B}_{11} & \overline{B}_{16} \\ \overline{B}_{11} & \overline{D}_{11} & \overline{D}_{16} \\ \overline{B}_{16} & \overline{D}_{16} & \overline{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad Q_{xz} = \overline{A}_{55}\gamma_{xz} \tag{4}$$

Bu ifadelerdeki rijitlik terimleri [5] nolu kaynakta verilmiştir.

Kirişin şekil değiştirme ve kinetik enerjileri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[N_x\varepsilon_x^0 + M_x\kappa_x + M_{xy}\kappa_{xy} + Q_{xz}\gamma_{xz} \right] b\,dx \\ T &= \frac{1}{2}\int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\ddot{u}^2 + \ddot{v}^2 + \ddot{w}^2)\,b\,dz\,dx \end{aligned} \tag{5}$$

Burada ρ yoğunluktur. Kinetik enerji ifadesindeki üzeri çift noktalı terimler ivme bileşenleridir. Hareket denklemlerinin elde edilmesi için Lagrange prensibi kullanılmıştır. Buna göre,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{6}$$

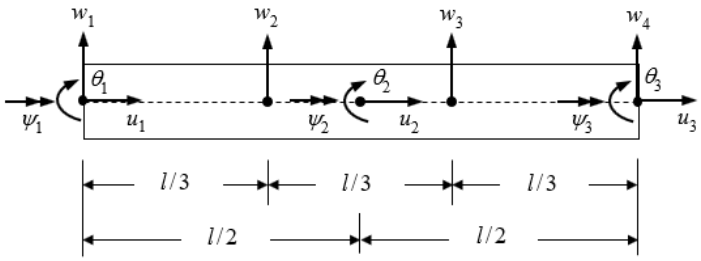
eşitliğinde (5) enerji ifadeleri, (1), (2) ve (4) ifadeleri dikkate alınarak yerine yazılır. Burada Lagrangian, $L = T - U$ şeklinde tanımlıdır. q ve $\dot{q}$ ise bilinmeyen yer değiştirme ve hız bileşenlerini temsil etmektedir.

Sonlu Eleman Modeli

Şekil 2'de, 5 düğüm noktalı ve 13 serbestlik dereceli sonlu eleman modeli gösterilmiştir. İç düğüm noktalarındaki ilave serbestlik dereceleri, genel olarak tabakalı kompozit kirişlerin karmaşık davranışını daha iyi temsil etmeyi sağlamaktadır. Bu sonlu eleman modeli için yer değiştirme bileşenleri

$$u_0 = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x)\,u_i(t),\ \ w_0 = \sum_{i=1}^{4} \Psi_i(x)\,w_i(t),\ \ \theta = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x)\,\theta_i(t),\ \ \psi = \sum_{i=1}^{3} \Phi_i(x)\,\psi_i(t) \tag{7}$$

şeklinde kabul edilmiştir. Burada $\Phi(x)$ ve $\Psi(x)$, sırasıyla ikinci ve üçüncü dereceden Lagrange polinomlarıdır. u_0 ve w_0 için çözümde kullanılacak polinomların bu şekilde seçilmesiyle kayma kilitlenmesi önlenmiştir.



Şekil 2. Sonlu eleman modeli

(7) ile verilen çözümler (5)'de yazılır ve sonuç, (6)'da yerine konulursa

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e\mathbf{u}_e = \mathbf{0} \tag{8}$$

şeklinde hareket denklemi elde edilir. Burada, $\mathbf{M}_e$ ve $\mathbf{K}_e$ sırasıyla eleman kütle ve rijitlik matrislerini, $\mathbf{u}_e$ düğüm noktaları yer değiştirme vektörünü ve $\ddot{\mathbf{u}}_e$ ivme vektörünü göstermektedir.

Hasar etkisi hesaba katılarak tabakalı kompozit kiriş için global hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{9}$$

Burada, $\mathbf{K}=\Sigma(1-\alpha_e)\mathbf{K}_e$ ve $\mathbf{M}=\Sigma\mathbf{M}_e$ sırasıyla global rijitlik ve kütle matrisleridir. α_e, e. eleman için rijitlik kaybı katsayısıdır. $\alpha_e = 0$ hasar olmaması durumunu, $\alpha_e = 1$ ise tamamen hasarlı olmayı (göçme) ifade etmektedir.

ω doğal frekanslar, $\mathbf{U}_0$ ise bunlara karşılık gelen mod şekli vektörleri olmak üzere, hareket denkleminin çözümü

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_\mathbf{0}e^{i\omega t} \tag{10}$$

olarak göz önüne alınırsa

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{U}_0 = \mathbf{0} \tag{11}$$

şeklinde bir standart öz değer problemi elde edilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ olarak tanımlıdır. (11) ile verilen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümlerinin olması, ancak $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ ile mümkündür. Buradan kirişin doğal frekansları ve bunların (11) ifadesinde yerine yazılmasıyla her bir doğal frekansa karşılık gelen mod şekli elde edilir.

Armoni Arama Algoritması

Geem ve arkadaşları [15] tarafından geliştirilen Armoni Arama Algoritması, bir orkestradaki müzisyenlerin çaldıkları notalar ile armonik açıdan en iyi melodinin elde edilmesi prensibine dayanmaktadır. Algoritmanın sözde kodu (*psedo code*) Şekil 3'teki gibidir [16]. Özetle, Armoni Arama optimizasyonuyla bir problemin çözümü beş adımda gerçekleştirilmektedir:

1. Algoritma parametrelerinin tanımlanması
2. Armoni belleğinin oluşturulması
3. Yeni armoni oluşturulması
4. Armoni belleğinin güncellenmesi
5. Durdurma koşulunun kontrolü

Karar değişkenleri için özel bir başlangıç çözümü gerektirmemesi, birden fazla çözümle optimizasyon işlemine devam ederek birçok yönde genel optimum çözümü arayabilmesi ve böylece yerel optimum çözümlerden kurtulabilmesi ve optimizasyon işlemlerinde hem sürekli hem de ayrık değişkenler kullanabilmesi bu yöntemin en önemli avantajlarıdır [17,18].

1. Algoritma parametrelerini tanımla

   Armoni belleği kapasitesi (HMS)
   Armoni belleğini dikkate alma oranı (HMCR)
   Perde ayarlama oranı (PAR)
   Bant genişliği (fw)
   X değişkenleri için alt ve üst sınırlar (X_L, X_U)

2. Armoni belleğini oluştur

   $X_i^J = x_i^L + r \times (x_i^U - x_i^L) \quad (J = 1,2,...,HMS)$

3. Yeni armoni oluştur $X^{new} = (x_1^{new}, x_2^{new}, \ldots, x_D^{new})$

   For each note $x_i^{new} \quad (i = 1,2,\ldots,D)$
   If $r_1 < HMCR$
   $x_i^{new} = X_i^R$ *// Kural 1. Yeni x değerini armoni belleğinden seç*
   If $r_2 < PAR$
   $x_i^{new} = x_i^{new} \pm r_3 \times fw(i)$ *// Kural 2. Perde ayarlaması yap*
   End If
   Else
   $x_i^{new} = x_i^L + r_4 \times (x_i^U - x_i^L)$ *// Kural 3. Rastgele x değeri üret*
   End If
   End For

4. Armoni belleğini güncelle

   If x^{new} *is better than* x^{worst}
   $x^{worst} = x^{new}$ *// Yeni x değerini eskisinin yerine ata*
   End If

5. Maksimum iterasyon sayısına ulaşıldığında işlemi sonlandır;
   aksi durumda, 3. ve 4. adımları tekrarla

r, r_1*,* r_2*,* r_3 *ve* r_4*,* 0 *ile* 1 *arasında düzgün dağılmış rastgele reel sayılardır.*
*R, {*1,2,…,*HMS} dizisinde rastgele bir tam sayıdır.*

Şekil 3. Armoni Arama Algoritmasının sözde kodu (*psedo code*)

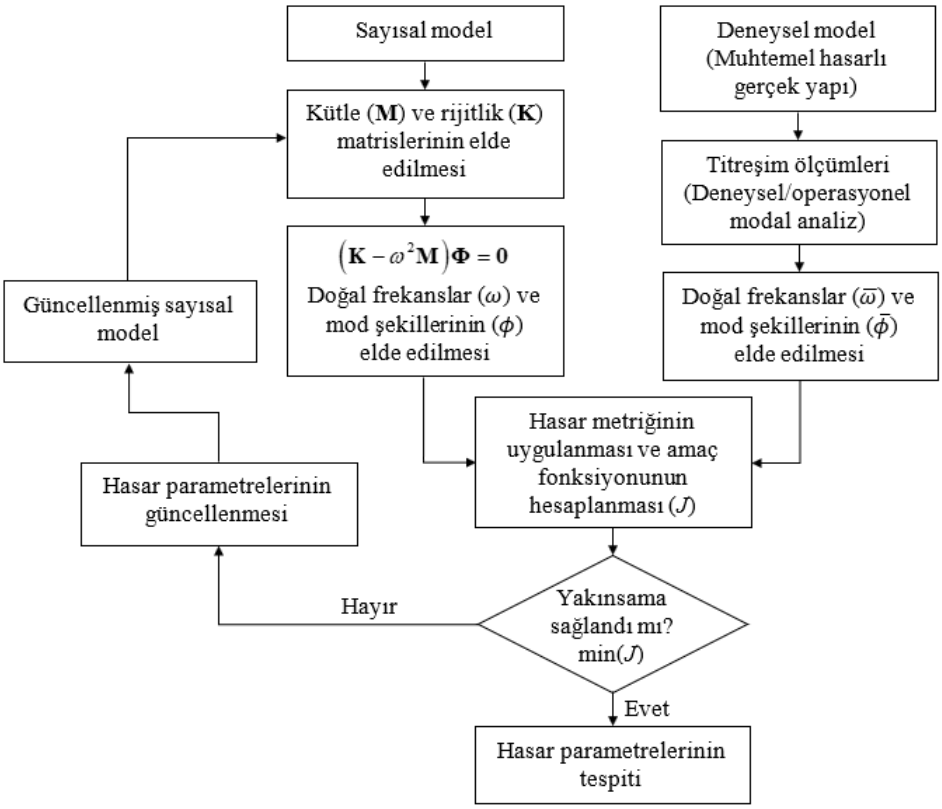
HASAR TESPİT YÖNTEMİ

Optimizasyona dayalı hasar tespit işlemi, genellikle modal karakteristikleri esas alan bir amaç fonksiyonunun en küçük yapılmasıyla gerçekleştirilir. Bu çalışmada göz önüne alınacak optimizasyon probleminin matematik modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} &\text{find} && \mathbf{X} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{nel}\} \\ &\text{minimize} && F(\mathbf{X}) \\ &\text{subject to} && 0 \le \alpha_e \le 1 \quad (e = 1,2,...,nel) \end{aligned} \tag{12}$$

Burada, $F(\mathbf{X})$, optimizasyon probleminin amaç fonksiyonunu, *nel* ise sayısal modeldeki eleman sayısını ifade etmektedir.

Amaç fonksiyonunun doğru seçimi, işlemin başarısında kritik rol oynamaktadır. Modal frekanslar ve mod şekilleri, temel dinamik karakteristikler olarak titreşime dayalı hasar tespiti uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Çalışmada, doğal frekans değişimleri dikkate alınarak aşağıdaki amaç fonksiyonunun en küçük yapılmasıyla hasarlı elemanlar ve bunlara ait rijitlik kaybı katsayıları elde edilmiştir:



Şekil 4. Hasar tespit yönteminin akış diyagramı

$$F=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\omega_i^T-\omega_i^P}{\omega_i^T}\right)^2} \tag{13}$$

Burada, ω^T ve ω^P, sırasıyla hedeflenen (muhtemelen hasarlı gerçek yapıdan ölçülen değerler) ve hesaplanan (önerilen yöntem yardımıyla tahmin edilen değerler) doğal frekansları, N göz önüne alınan mod sayısını göstermektedir. Önerilen hasar tespit yönteminin akış diyagramı Şekil 4'te görülmektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Çalışmada önerilen hasar tespit yöntemini test etmek amacıyla $[30/50]_2$ tabaka dizilimine sahip dikdörtgen kesitli kompozit kiriş göz önüne alınmıştır. Kiriş boyutları, sırasıyla, uzunluk L = 381 mm, genişlik b = 25,4 mm ve yükseklik h = 25,4 mm olarak alınmıştır. Kirişi oluşturan tabakalar eşit yüksekliktedir. Tabakalar, karbon/epoksi malzemeden yapılmış olup elastik özellikleri, E_{11} = 144,8 GPa, $E_{22}=E_{33}$ = 9,65 GPa, $G_{12}=G_{13}$ = 4,14 GPa, G_{23} = 3,45 GPa, $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}$ = 0,30 şeklinde, yoğunluğu ise ρ = 1389,23 kg/m^3 şeklindedir. Analizlerde iki ucu ankastre kiriş ve konsol kiriş olmak üzere iki farklı sınır koşulu dikkate alınmıştır. Sayısal hesaplamalar için Fortran dilinde yazılan bilgisayar programı kullanılmıştır.

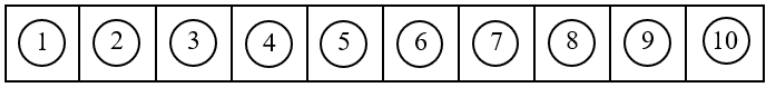
13 serbestlik dereceli sonlu eleman modeliyle elde edilecek doğal frekanslar ile hasar tespiti uygulamasının sonuçlarının doğruluğu için öncelikle yakınsama analizi yapılmıştır. Çizelge 1'de iki ucu ankastre hasarsız kirişte eleman sayısına bağlı olarak ilk beş doğal frekansın değişimi verilmiştir. Görüleceği üzere, eleman sayısının artmasıyla birlikte frekans değerleri hızla yakınsamaktadır. Tablodan, hasar tespiti için göz önüne alınacak kirişlerde 10 eleman kullanmanın yeterli olacağı sonucuna ulaşılmıştır.

Çizelge 1. İki ankastre kiriş için sonlu eleman yakınsama analizi sonuçları

Eleman sayısı	Doğal frekanslar (Hz)				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
2	647,416	2059,921	3927,237	5104,989	5385,672
4	638,749	1660,087	3052,057	3913,302	5061,198
8	638,036	1648,654	3005,153	3911,176	4605,382
10	**637,782**	**1647,704**	**2999,205**	**3910,917**	**4589,195**
12	637,771	1646,858	2998,117	3910,885	4585,305
16	637,765	1646,744	2997,414	3910,086	4582,764

Çizelge 2. Çalışmada göz önüne alınan hasar senaryoları

Senaryo	Hasarlı eleman sayısı	Hasarlı elemanlar	Rijitlik kaybı katsayısı (α)
S1	1	5	0,50
S2	2	5 6	0,50
S3	1	3	0,50
S4	2	3 4	0,50
S5	1	1	0,50
S6	2	1 2	0,50



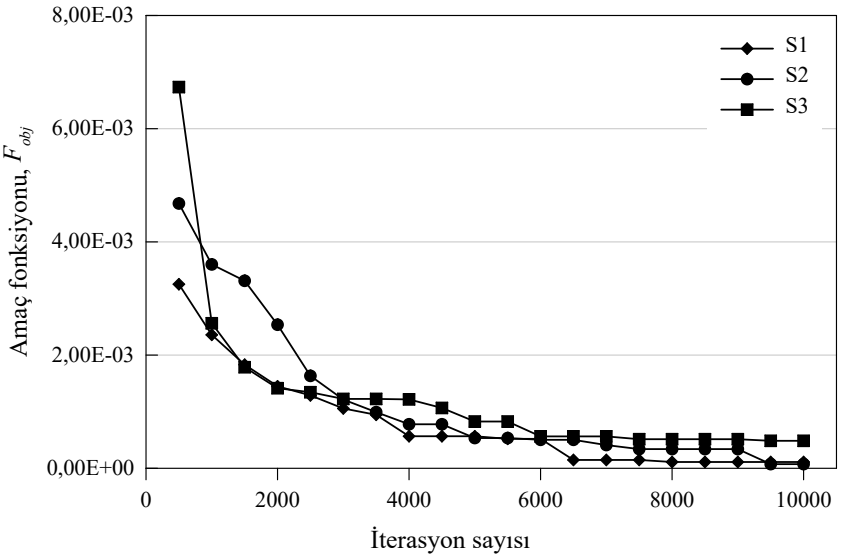
Şekil 5. Çalışmada göz önüne alınan kirişlerin sonlu eleman modeli

Şekil 5'te, hasar tespit yönteminin test edilmesinde kullanılacak kirişlerin sonlu eleman modeli görülmektedir. Yakınsama analizi dikkate alınarak kirişler 10 elemana bölünmüş, eleman numaraları ise sol uçtan sağa doğru verilmiştir. Çalışmada göz önüne alınan hasar senaryoları Çizelge 2'de verilmiştir. S1, S3 ve S5 tek hasarlı, S2, S4 ve S6 ise iki hasarlı kirişleri ifade etmektedir. İki hasarlı durumda, hasarın komşu iki elemanda meydana geldiği kabul edilmiştir. Tüm hasar senaryoları için rijitlik kaybı katsayısı $\alpha = 0{,}50$ olarak düşünülmüştür. Hasar tespiti işleminde kullanılacak hedef frekans değerleri, çalışmada verilen sonlu eleman modeli ile tüm hasar senaryoları için analizler yapılarak elde edilmiştir.

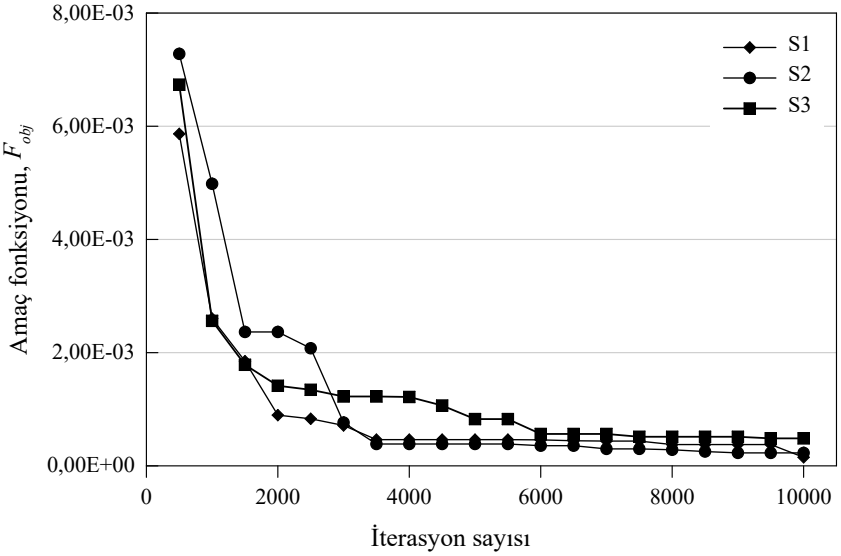
Armoni arama optimizasyonu için algoritma parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir:

- Armoni belleği kapasitesi, HMS = 10
- Armoni belleğini dikkate alma oranı, HMCR = 0,85
- Perde ayarlama oranı, PAR = 0,35
- Bant genişliği, fw=$(X_U - X_L)/20$
- $\mathbf{X} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{nel}\}$ değişkenleri için alt ve üst sınırlar, $X_L = 0$, $X_U = 1$

PAR değerinin seçiminde 0,30 ila 0,50 arasında farklı değerler denenmiş; en iyi sonuçlar 0,35 için elde edildiğinden optimizasyonda bu değer kullanılmıştır. Şekil 6 ve 7'de, sırasıyla, iki ucu ankastre ve konsol kirişlerde ilk üç hasar senaryosu için amaç fonksiyonunun iterasyon sayısı ile değişimi görülmektedir. Bu grafiklere göre, optimizasyon işleminin durdurulması için maksimum iterasyon sayısı 10.000 olarak belirlenmiştir.

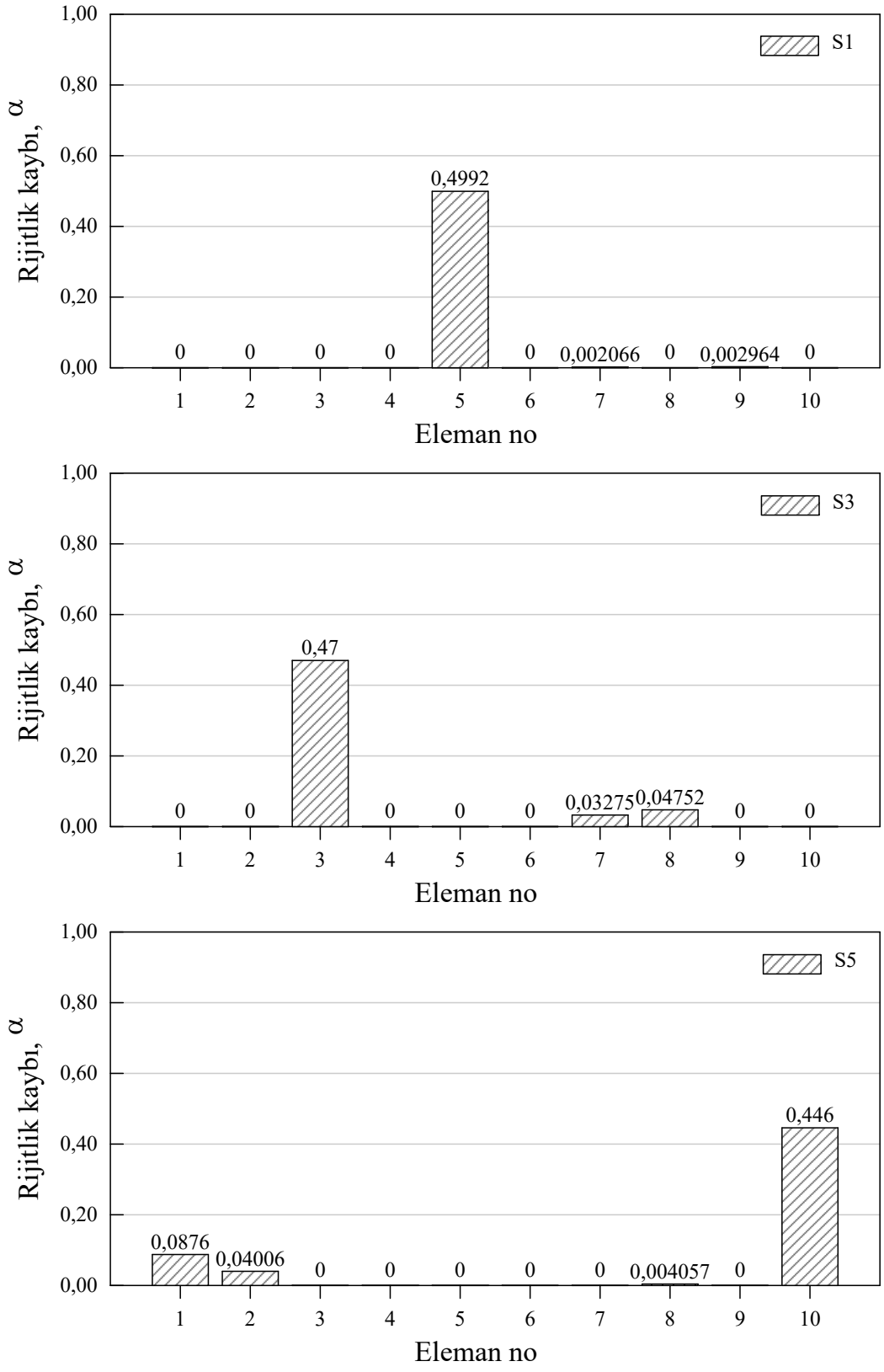


Şekil 6. İki ucu ankastre kirişte ilk üç hasar senaryosu için amaç fonksiyonunun yakınsama eğrileri

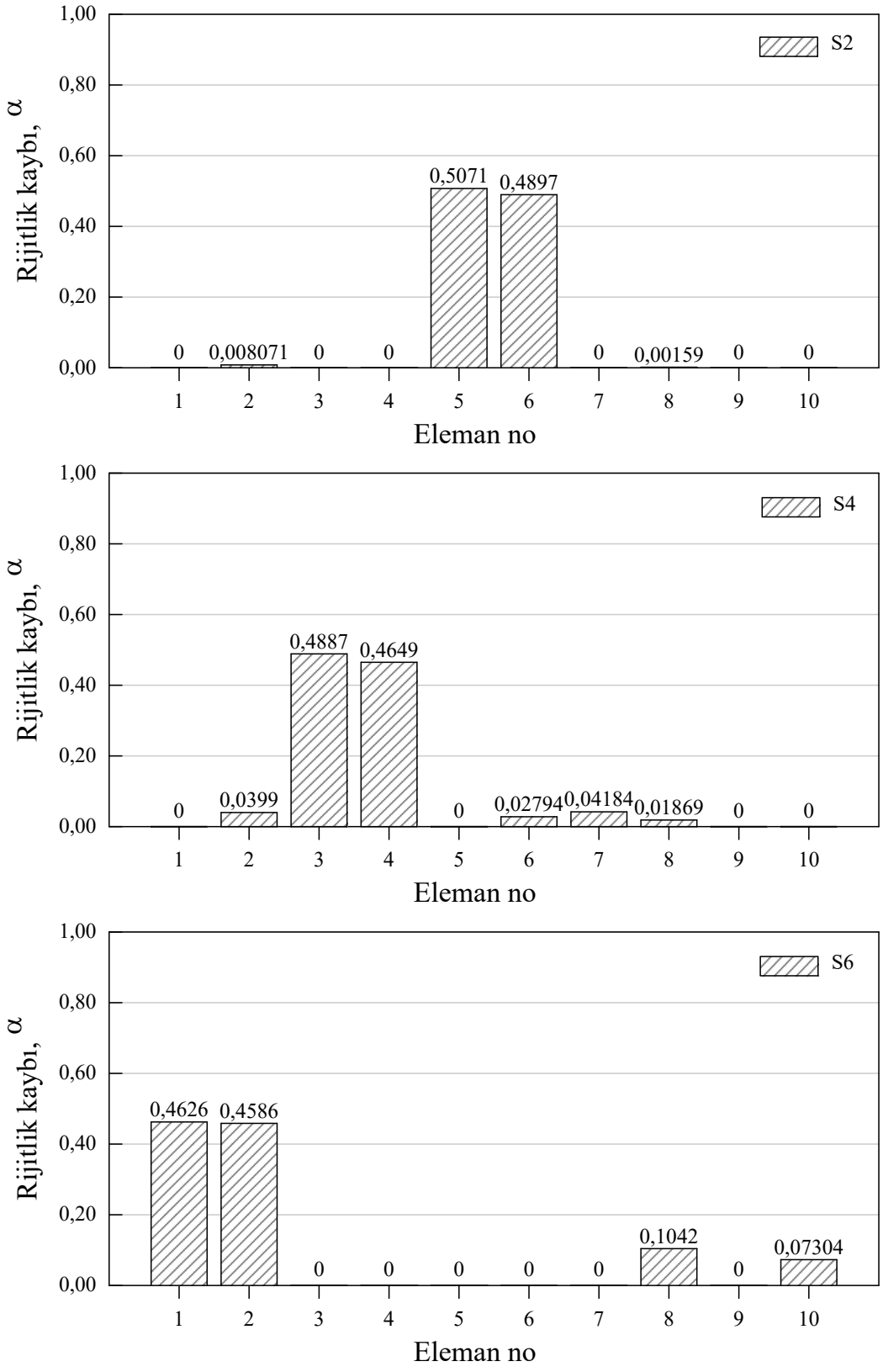


Şekil 7. Konsol kirişte ilk üç hasar senaryosu için amaç fonksiyonunun yakınsama eğrileri

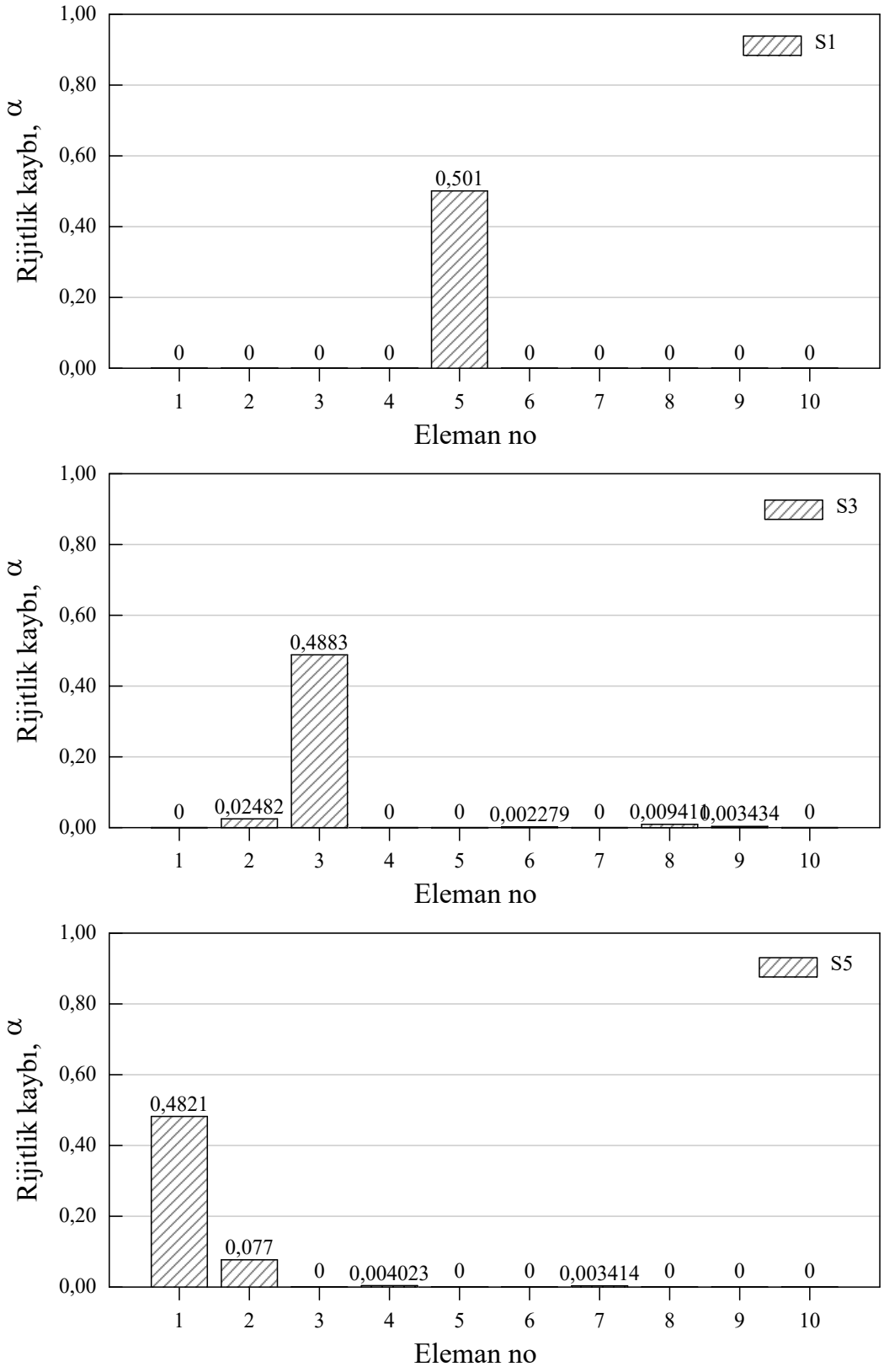
Armoni Arama Optimizasyonu ile elde edilen hasar tespiti sonuçları, iki ucu ankastre ve konsol kirişler için sırasıyla Şekil 8–11'de sunulmuştur. Burada sonuçlar, hasarlı bölgenin tek veya çift olmasına göre gruplandırılarak toplu halde verilmiştir. Şekil 8'de tek hasar durumunda iki ucu ankastre kirişe ait hasar tespit sonuçları görülmektedir. S1 senaryosu için kiriş ortasındaki hasarlı eleman (5 nolu eleman) ve rijitlik kaybı katsayısı çok iyi bir doğrulukla (<%1 hata) tespit edilebilmiştir. Hasarın kiriş ortasından mesnetlere doğru yaklaştığı S3 senaryosu için 3 nolu hasarlı eleman 0,47 rijitlik kaybı katsayısı değeri (%6 hata) ile tespit edilmiştir. Hasarın mesnete en yakın olduğu S5 senaryosu için hasarın bulunduğu 1 nolu eleman yerine bunun tam simetriğinde bulunan 10 nolu elemanda rijitlik kaybı katsayısı 0,446 olarak (%10,8 hata) bulunmuştur. Literatürde, doğal frekansların hasar metriği olarak kullanıldığı mesnetlerine göre simetrik kirişlerde bu durumla karşılaşılmaktadır. Çalışmada kullanılan yöntem ile sadece S5 senaryosunda böyle bir durumla karşılaşılmış; diğerlerinde hasarın yeri ve rijitlik kaybı katsayısı problemsiz belirlenebilmiştir.



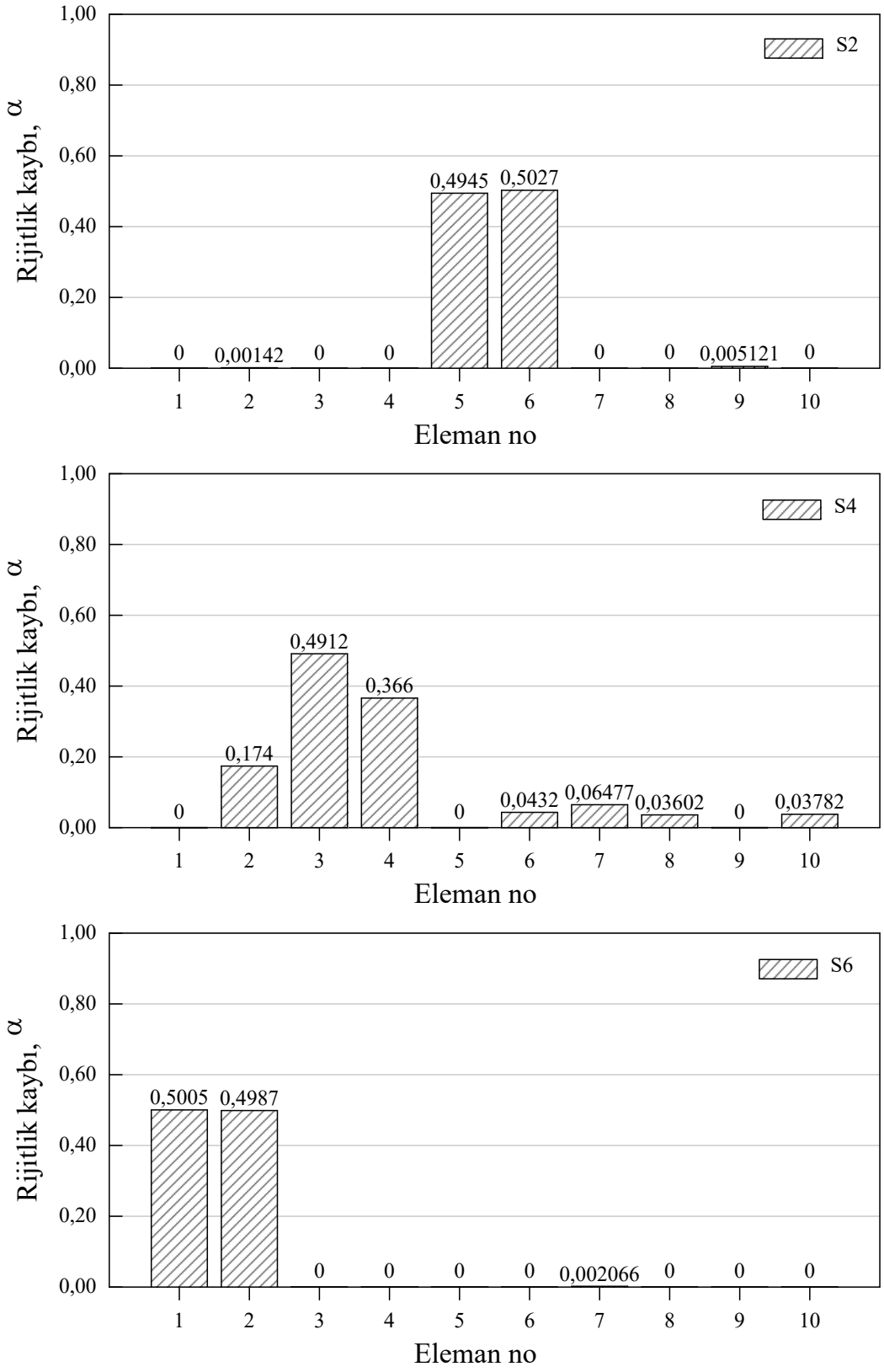
Şekil 8. Tek hasarlı bölgesi bulunan iki ucu ankastre kirişte hasar tespiti sonuçları



Şekil 9. İki hasarlı bölgesi bulunan iki ucu ankastre kirişte hasar tespiti sonuçları



Şekil 10. Tek hasarlı bölgesi bulunan konsol kirişte hasar tespiti sonuçları



Şekil 11. İki hasarlı bölgesi bulunan konsol kirişte hasar tespiti sonuçları

İki ucu ankastre kirişte iki hasar olması durumu için hasar tespit sonuçları Şekil 9'da sunulmuştur. Görüleceği üzere, önerilen yöntem ile hasarlı elemanlar ve rijitlik kaybı katsayıları iyi bir doğrulukla elde edilebilmektedir. Hata oranları, S2 için %1,4 ve %2,1, S4 için %2,26 ve %7,02 ve S6 için %7,48 ve %8,28'dir. Görüldüğü gibi, mesnete yakın olan hasar diğerine göre daha iyi bir doğrulukla elde edilmektedir. Burada dikkati çeken bir husus, S6 senaryosunda 8 nolu elemanda, olmamasına rağmen, hasar tespit edilmesidir. Ancak, elde edilen rijitlik kaybı katsayısı küçük bir değer olduğundan yöntemin bu hasar senaryosu için de başarılı olduğu söylenebilir.

Sekil 10'da tek hasarlı konsol kirişte hasar tespit sonuçları verilmiştir. Hata oranları, S1 için <%1, S3 için %2,34 ve S5 için %3,58 olarak elde edilmiştir. Şekil 11'de iki hasarlı konsol kiriş için hasar tespit sonuçlarına bakıldığında, hata oranları, S2 için %1,1 ve <%1, S4 için %1,76 ve %26,8 ve S6 için <%1 ve <%1 şeklindedir. Burada, S4 durumunda bir istisna ortaya çıkmıştır. Hem 4 nolu elemanın hasar derecesi yüksek çıkmış hem de 2 nolu elemanda hasar tespit edilmiştir.

Şekil 8–11 ile verilen sonuçların genel bir değerlendirmesi yapıldığında, çalışmada önerilen yöntemin göz önüne alınan hasar durumları için, birkaç istisna dışında, yeterli derecede başarılı olduğu söylenebilir. İstisna olarak ortaya çıkan problemlerin giderilmesi için kullanılan optimizasyon algoritmasının iyileştirilmesi, farklı hasar metriklerinin amaç fonksiyonu olarak kullanılması veya hasar tespiti işleminin iki aşamalı olarak yürütülmesi gibi alternatifler denenebilir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada tabakalı kompozit kirişlerde titreşime dayalı hasar tespiti için Armoni Arama Optimizasyonu kullanan bir yöntem önerilmiştir. Kirişin sayısal modeli için 5 düğüm noktalı, 13 serbestlik dereceli bir sonlu eleman kullanılmıştır. Bu eleman, kayma deformasyonlarını, Poisson etkisini ve eğilme, burulma ve uzama deformasyonları arasındaki anizotropi kaynaklı etkileşimleri hesaba katmaktadır. Yöntemin doğruluğunun test edilmesi amacıyla $[30/50]_2$ tabaka dizilimine sahip dikdörtgen kesitli kompozit kiriş, 6 farklı hasar senaryosu ve farklı sınır koşulları altında ele alınmıştır. Çalışmanın sonuçları, önerilen hasar tespit yönteminin kirişte hasar yeri ve rijitlik kaybı katsayısını (hasar derecesi) oldukça iyi bir doğrulukla ve hızlı bir şekilde tespit edebildiğini göstermektedir.

Bu çalışma kapsamında sadece basit bir örnek üzerinde yöntemin işlerliği gösterilmiştir. Önerilen yöntemin sınırlarının tam olarak belirlenebilmesi ve doğruluğunun artırılabilmesi için farklı sınır koşulları, tabaka dizilimleri ve hasar senaryoları altında daha fazla analiz yapılmasına gerek vardır. Bu sayede, çalışmada değinilen ve istisna olarak ortaya çıkan problemlerin giderilmesi için de bir yol haritası çıkarılmış olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] D. Montalvão, N.M.M. Maia, A.M.R. Ribeiro, A review of vibration-based structural health monitoring with special emphasis on composite materials, *Shock Vib. Dig.* 38 (2006) 295–324. https://doi.org/10.1177/0583102406065898.

[2] G.F. Gomes, Y.A.D. Mendéz, P. da Silva Lopes Alexandrino, S.S. da Cunha, A.C. Ancelotti, The use of intelligent computational tools for damage detection and identification with an emphasis on composites – A review, *Compos. Struct.* 196 (2018) 44–54. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.002.

[3] S.W. Doebling, C.R. Farrar, M.B. Prime, D.W. Shevitz, *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review*, Los Alamos, NM, 1996. https://doi.org/10.2172/249299.

[4] S.W. Doebling, C.R. Farrar, M.B. Prime, A summary review of vibration-based damage identification methods, *Shock Vib. Dig.* 30 (1998) 91–105. https://doi.org/10.1177/058310249803000201.

[5] H. Sohn, C.R. Farrar, F. Hemez, J. Czarnecki, *A Review of Structural Health Monitoring Literature* 1996 – 2001, 2003. https://doi.org/LA-13976-MS.

[6] F. Wei, P. Qiao, Vibration-based damage identification methods: A review and comparative study, *Struct. Heal. Monit.* 10 (2011) 83–111. https://doi.org/10.1177/1475921710365419.

[7] F. Kang, J. Li, Q. Xu, Damage detection based on improved particle swarm optimization using vibration data, *Appl. Soft Comput.* 12 (2012) 2329–2335. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.03.050.

[8] S.M. Seyedpoor, M. Montazer, A damage identification method for truss structures using a flexibility-based damage probability index and differential evolution algorithm, Inverse Probl. Sci. Eng. 24 (2016) 1303–1322. https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1101761.

[9] N.F. Alkayem, M. Cao, M. Ragulskis, Damage diagnosis in 3D structures using a novel hybrid multiobjective optimization and FE model updating framework, *Complexity.* 2018 (2018) 1–13. https://doi.org/10.1155/2018/3541676.

[10] T. Marwala, *Finite-Element-Model Updating Using Computional Intelligence Techniques*, Springer-Verlag, London, 2010.

[11] M. Mishra, S.K. Barman, D. Maity, D.K. Maiti, Performance studies of 10 metaheuristic techniques in determination of damages for large-scale spatial trusses from changes in vibration responses, *J. Comput. Civ. Eng.* 34 (2020) 04019052. https://doi.org/10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000872.

[12] G.F. Gomes, Y.A.D. Mendez, P. da Silva Lopes Alexandrino, S.S. da Cunha, A.C. Ancelotti, A review of vibration based ınverse methods for damage detection and ıdentification in mechanical structures using optimization algorithms and ANN, *Arch. Comput. Methods Eng.* 26 (2019). https://doi.org/10.1007/s11831-018-9273-4.

[13] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, 1997.

[14] V. Kahya, S. Karaca, T.P. Vo, Shear-deformable finite element for free vibrations of laminated composite beams with arbitrary lay-up, *Steel Compos. Struct.* 33 (2019) 473–487. https://doi.org/10.12989/scs.2019.33.4.473.

[15] Z.W. Geem, J.H. Kim, G.V. Loganathan, A new heuristic optimization algorithm: Harmony search, *Simulation*. 76 (2001) 60–68.

[16] S. Tuo, L. Yong, F. Deng, Y. Li, Y. Lin, Q. Lu, HSTLBO: A hybrid algorithm based on Harmony Search and Teaching-Learning-Based Optimization for complex high-dimensional optimization problems, *PLoS One.* 12 (2017) e0175114. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0175114.

[17] X.S. Yang, Harmony search as a metaheuristic algorithm, *Stud. Comput. Intell.* 191 (2009) 1–14. https://doi.org/10.1007/978-3-642-00185-7_1.

[18] D. Manjarres, I. Landa-Torres, S. Gil-Lopez, J. Del Ser, M.N. Bilbao, S. Salcedo-Sanz, Z.W. Geem, A survey on applications of the harmony search algorithm, *Eng. Appl. Artif. Intell.* 26 (2013) 1818–1831. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2013.05.008.

RİJİT DAİRESEL ZIMBA İLE MANYETOELEKTROELASTİK TABAKA ARASINDA TERMOELASTİK TEMAS PROBLEMİ

İsa ÇÖMEZ[1]
[1] Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

ABSTRACT

In this study, two-dimensional steady state thermoelastic frictional contact problem of a magneto-electro-elastic (MEE) layer indented a rigid cylindrical punch is considered. The punch is assumed to be a perfect insulator and slides over the MEE layer with a small constant speed and heat flux is generated due to the friction. The general expressions for the contact problem are derived using the theory of thermoelasticity and Fourier integral transform technique. Applying the boundary conditions, the contact problem is reduced to a second kind singular integral equation, in which contact stress and contact area are unknown. The integral equation is solved numerically using Gauss-Jacobi integration formula. The effect of moving velocity, friction coefficient and external load on the contact stress, in-plane stress, temperature field, in-plane electric displacement and magnetic induction are discussed in detail.

Keywords: contact problems, magneto-electro-elastic materials, thermoelasticity, Fourier transform technique, singular integral equation

ÖZET

Bu çalışmada rijit dairesel zımba (panç) ile bastırılan manyetoelektroelastik (MEE) tabakanın sürtünmeli termoelastik temas problemi incelenmiştir. Tam yalıtımlı zımba tabaka üzerinde sabit düşük hızla hareket etmekte ve sürtünme nedeniyle ısı akısı meydana gelmektedir. Thermoelastisite ve Fourier integral dönüşümü kullanılarak temas problemine ait genel ifadeler elde edilmiştir. Sınır şartları uygulandığında temas problemi, temas uzunluğunun ve temas gerilmesinin bilinmeyen olduğu ikinci tür bir tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak tekil integral denklemin sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir. Hızın, sürtünme katsayısının ve dış kuvvetin, gerilmeler, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkileri detaylı olarak tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: temas problemleri, manyeto-elektro-elastik malzemeler, termoelastisite, Fourier dönüşüm tekniği, tekil integral denklem

GİRİŞ

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleriyle temas halindedir. Bu temasın karakteri, temas bölgesindeki temas gerilmeleri yapının ya da mekanik sistemin davranışında önemli rol oynamaktadır.

Elektromanyetik malzemeler mekanik yükler ile yüklendiğinde elektrik ve manyetik alan üreten malzemelerdir. Tersine olarak, elektromanyetik etkiler altında bu malzemelerde gerilmeler oluşmaktadır. Bu özelliklerinden dolayı sensör, aktüatör, transdüsör gibi akıllı yapılarda sıklıkla kullanılmaktadır. Piezoelektrik veya piezomanyetik malzemelerin dönel simetrik temas problemi Giannakopoulos ve Suresh [1], Giannakopoulos ve Parmaklis [2], Patra vd. [3], Wang ve Han [4], Hou ve Zhang [5] ve Wu vd. [6] tarafından Hankel integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. Düzlem şekil değiştirme halinde piezolektrik, piezomanyetik veya elektromanyetik malzemelerin hareketli temas problemi Zhou ve Lee [7], Zhou ve Lee [8], Zhou ve Lee [9], Sing vd. [10], Liou ve Sung [11] ve Çömez [12] tarafından Galilean dönüşümü ve Fourier integral dönüşüm tekniği ile analitik olarak incelenmiştir.

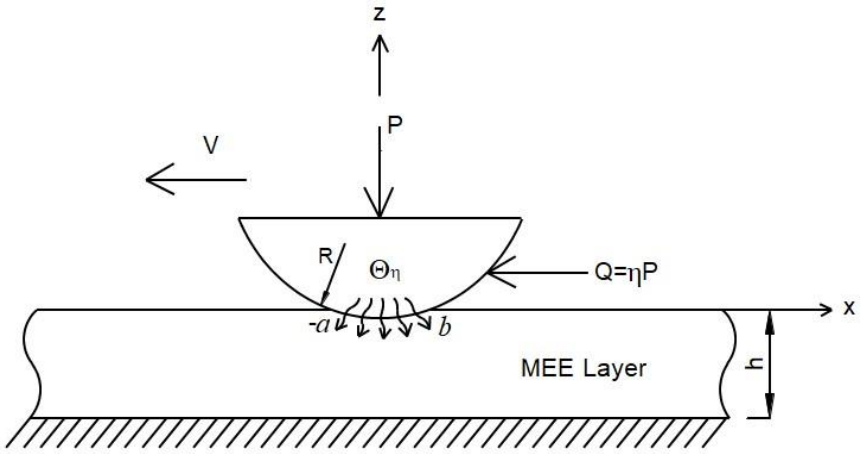
Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler malzeme özellikleri bir yönden diğerine doğru bir fonksiyona bağlı olarak değişen homojen olmayan kompozitlerdir. Bu tip malzemeler temas hasarlarını gidermekte etkili olmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş piezoelektrik veya elektromanyetik malzemelerin düzlem şekil değiştirme halinde temas problemi Ke vd. [13], Ke vd. [14], Ma vd. [15], Elloumi vd. [16] ve Su vd. [17] tarafından Fourier integral dönüşüm tekniği kullanılarak analitik olarak incelenmiştir.

Temas eden parçalardan biri diğerine göre hareket ederse sürtünmeden dolayı ısı üretimi meydana gelir. Sıcaklık ve termal gerilmeler temas gerilmesini ve temas bölgesini etkilemekte yüksek sıcaklıktan dolayı temas hasarları ve çatlaklar meydana gelebilmektedir. Silindirik bir zımba ile elastik yarım düzlem veya tabaka arasındaki termal temas problemi sırasıyla Hills ve Barber [18] ve Pauk [19] tarafından incelenmiştir. Liu vd. [20] ve Liu vd. [21] rijit dairesel veya dikdörtgen zımba ile bastırılan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile kaplı homojen yarım düzlemin termoelastik temas problemini incelemişlerdir. Rijit dairesel ve dikdörtgen zımba ile bastırılan alttan tam bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın termoelastik temas problemi sırasıyla Chen vd. [22] ve Chen ve Chen [23] tarafından Fourier integral transform tekniği ile incelenmiştir. Dikdörtgen zımba ile bastırılan homojen tabaka, fonksiyonel derecelendirilmiş ara tabaka ve homojen yarım düzlemden oluşan systemin thermoleastik temas problemi Choi ve Paulino [24] tarafından incelenmiştir. Balcı vd. [25] fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile kaplı homojen yarım düzlemin termoelastik temas problemini sonlu elemanlar yöntemi ile incelemişlerdir. Çömez [26] dairesel bir zımba ile bastırılan homojen yarım düzlem üzerine oturan homojen tabakanın ayrılmalı termoelastik temas problemini incelemiştir. İzole edilmiş dikdörtgen zımba ile alttan tam bağlı piezolektrik tabakanın termoelastik temas problemi Zhou ve Lee [27] tarafından incelenmiştir. İletken dikdörtgen zımba ile bastırılan homojen manyeto-elektro-elastik yarım düzlem ve fonksiyonel manyeto-elektro-elastik tabakanın thermoelastik temas problemi Ma vd. [28] and Ma vd. [29] tarafından incelenmiştir.

Bu çalışmada alttan tam bağlı manyetoelektroelastik (MEE) tabakanın sürtünmeli termoelastik temas problemi incelenmiştir. MEE tabaka üzerinde tam yalıtımlı dairesel zımba sabit düşük hızla hareket etmekte ve sürtünme nedeniyle ısı akısı meydana gelmektedir. Thermoelastisitenin genel denklemleri ve Fourier integral dönüşümü kullanılarak temas problemine ait genel ifadeler elde edilmiştir. Sınır şartları uygulandığında temas problemi, ikinci tür bir tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak tekil integral denklemin sayısal çözümü gerçekleştirilmiştir.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Ele alınan temas probleminin geometrisi Şekil 1.'de verilmiştir. Problemde zımba ile tabaka $(-a,b)$ aralığında temas halindedir. h yüksekliğindeki enine izotrop, MEE homojen tabaka alttan tam bağlıdır. R yarıçaplı rijit zımba tabaka üzerinde V sabit hızıyla hareket ederken tabakaya düşeyde P, yatayda $Q=\eta P$ kuvvetlerini iletmektedir. Burada η sürtünme katsayısını ifade etmektedir. Sürtünme nedeniyle tabakaya ısı akısı Θ_η oluşmaktadır.



Şekil 1. Temas probleminin geometrisi

Kütle kuvvetleri ihmal edildiğinde tabaka için denge denklemleri ve Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \tag{1b}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0 \tag{1c}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \tag{1d}$$

Burada D_x ve D_z elektrik yer değiştirme bileşenleri, B_x ve B_z ise manyetik indüksiyon bileşenleridir.

Düzlem şekil değiştirme halinde, enine izotrop, MEE malzeme için gerilme yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\sigma_x=C_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{13}\frac{\partial w}{\partial z}+e_{31}\frac{\partial \phi}{\partial z}+h_{31}\frac{\partial \psi}{\partial z}-\lambda_{11}T \tag{2a}$$

$$\sigma_z=C_{13}\frac{\partial u}{\partial x}+C_{33}\frac{\partial w}{\partial z}+e_{33}\frac{\partial \phi}{\partial z}+h_{33}\frac{\partial \psi}{\partial z}-\lambda_{33}T \tag{2b}$$

$$\tau_{xz} = C_{44}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) + e_{15}\frac{\partial \phi}{\partial x} + h_{15}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2c}$$

$$D_x = e_{15}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) - \in_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x} - d_{11}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2d}$$

$$D_z = e_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + e_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - \in_{33}\frac{\partial \phi}{\partial z} - d_{33}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \alpha_3 T \tag{2e}$$

$$B_x = h_{15}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) - d_{11}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \mu_{11}\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2f}$$

$$B_z = h_{31}\frac{\partial u}{\partial x} + h_{33}\frac{\partial w}{\partial z} - d_{33}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \mu_{33}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \beta_3 T \tag{2g}$$

Burada ϕ ve ψ sırasıyla elektrik ve manyetik potansiyeldir. C_{ij}, e_{ij} ve $\in_{ij}$ sırasıyla elastik, piezoelektrik, dielektrik sabitlerdir. h_{ij}, d_{ij} ve μ_{ij} sırasıyla piezomanyetik, manyetoelektrik ve manyetik geçirgenlik sabitleridir. λ_{11} ve λ_{33} termal genleşme katsayıları; α_3 pyroelektrik sabit ve β_3 pyromanyetik sabittir.

Hareketli koordinatta, zımbanın sürtünmeli ısı oluşturmasından dolayı MEE tabakada ısı iletimi denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k_1\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_3\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = c\rho V\frac{\partial T}{\partial x} \tag{3}$$

Burada T tabakadaki sıcaklık alanını; k_1 ve k_3, x ve z yönünde termal iletkenliği ifade etmektedir. c öz ısıyı ve ρ ise kütle yoğunluğunu simgelemektedir.

Denklem (2), Denklem (1)'de yazıldığında aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir:

$$C_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + (h_{15}+h_{31})\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \lambda_{11}\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{4a}$$

$$(C_{13}+C_{44})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + C_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + e_{33}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + e_{15}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + h_{33}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + h_{15}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \lambda_{33}\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{4b}$$

$$(e_{15}+e_{31})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + e_{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \in_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \in_{33}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - d_{11}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - d_{33}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \alpha_3\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{4c}$$

$$(h_{15}+h_{31})\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + h_{15}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - d_{11}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - d_{33}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \mu_{11}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \mu_{33}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \beta_3\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \tag{4d}$$

PROBLEMİN SINIR ŞARTLARI

Probleme ait mekanik sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir :

$$\sigma_z(x,0) = \begin{cases} -p(x) & -a < x < b \\ 0 & x \le -a, \quad x \ge b \end{cases} \tag{5a}$$

$$\tau_{xz}(x,0)=\left\{\begin{array}{ll}-q(x)=-\eta\, p(x) & -a<x<b\\ 0 & x\le -a,\quad x\ge b\end{array}\right\} \tag{5b}$$

$$u(x,-h)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{5c}$$

$$w(x,-h)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{5d}$$

Burada $p(x)$ temas bölgesindeki $(-a,b)$ temas gerilmesidir. Rijit zımba tam geçirimsiz olduğu için elektromanyetik sınır şartları aşağıdaki gibidir:

$$D_z(x,0)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{6a}$$

$$B_z(x,0)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{6b}$$

$$D_z(x,-h)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{6c}$$

$$B_z(x,-h)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{6d}$$

Temas gerilmesi aşağıdaki denge şartını sağlamalıdır.

$$\int_{-a}^{b} p(t)dt=P \tag{7}$$

Sürtünme nedeniyle oluşan ısı akısında herhangi bir kayıp olmadığı kabul edildiğinde termal sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$-k_1\frac{dT}{dz}(x,0)=\left\{\begin{array}{ll}\Theta_\eta(x) & -a<x<b\\ 0 & x\le -a,\quad x\ge b\end{array}\right\} \tag{8a}$$

$$T(x,-h)=0 \qquad (-\infty\le x<\infty) \tag{8b}$$

Isı akısı $\Theta_\eta(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\Theta_\eta(x)=-\eta V p(x) \tag{9}$$

ÇÖZÜM YÖNTEMİ

(4) no'lu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemini adi diferansiyel denklem takımına indirgemek için aşağıdaki Fourier dönüşümleri kullanılır:

$$\{u(x,z),w(x,z),\phi(x,z),\psi(x,z)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\{\tilde{u}(\xi,z),\tilde{w}(\xi,z),\tilde{\phi}(\xi,z),\psi(\xi,z)\}e^{-I\xi x}d\xi \tag{10a}$$

$$T(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{T}(\xi,z)e^{-I\xi x}d\xi \tag{10b}$$

(3) no'lu ısı iletimi denklemine Fourier dönüşümü uygulandığında sıcaklık alanı

$$T(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(B_1 e^{k_0 z}+B_2 e^{-k_0 z}\right)e^{-I\xi x}d\xi \tag{11}$$

olarak elde edilir. Burada $k_0=\sqrt{\dfrac{k_1\xi^2-I\xi c\rho V}{k_3}}$ olarak tanımlıdır. B_1 ve B_2 termal sınır şartlarından elde edilir. (4) no'lu denklemlere Fourier dönüşümü uygulandığında aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir:

$$C_{44}\frac{d^2\tilde{u}}{dz^2}-\xi^2 C_{11}\tilde{u}-I\xi\left[(C_{13}+C_{44})\frac{d\tilde{w}}{dz}+(e_{15}+e_{31})\frac{d\tilde{\phi}}{dz}+(h_{15}+h_{31})\frac{d\tilde{\psi}}{dz}+\lambda_{11}\tilde{T}\right]=0 \quad (12a)$$

$$I\xi(C_{13}+C_{44})\frac{d\tilde{u}}{dz}-\xi^2 C_{44}\tilde{w}+C_{33}\frac{d^2\tilde{w}}{dz^2}+e_{33}\frac{d^2\tilde{\phi}}{dz^2}-e_{15}\xi^2\tilde{\phi}+h_{33}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2}-h_{15}\xi^2\tilde{\psi}-\lambda_{33}\frac{d\tilde{T}}{dz}=0 \quad (12b)$$

$$-I(e_{15}+e_{31})\xi\frac{d\tilde{u}}{dz}-\xi^2 e_{15}\tilde{w}+e_{33}\frac{d^2\tilde{w}}{dz}-\in_{33}\frac{d^2\tilde{\phi}}{dz^2}+\in_{11}\xi^2\tilde{\phi}-d_{33}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2}+d_{11}\xi^2\tilde{\psi}-\alpha_3\frac{d\tilde{T}}{dz}=0 \quad (12c)$$

$$-I(h_{15}+h_{31})\xi\frac{d\tilde{u}}{dz}-\xi^2 h_{15}\tilde{w}+h_{33}\frac{d^2\tilde{w}}{dz}-d_{33}\frac{d^2\tilde{\phi}}{dz^2}+d_{11}\xi^2\tilde{\phi}-\mu_{33}\frac{d^2\tilde{\psi}}{dz^2}+\mu_{11}\xi^2\tilde{\psi}-\beta_3\frac{d\tilde{T}}{dz}=0 \quad (12d)$$

(12) no'lu adi diferansiyel denklem sistemi çözüldüğünde yer değiştirmeler, manyetik ve elektrik potansiyeller aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{8}A_j\,e^{n_j z}+B_1\varphi_{11}\,e^{k_0 z}+B_2\varphi_{12}\,e^{-k_0 z}\right)e^{-I\xi x}d\xi \quad (13a)$$

$$w(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{8}\omega_j A_j\,e^{n_j z}+B_1\varphi_{21}\,e^{k_0 z}+B_2\varphi_{22}\,e^{-k_0 z}\right)e^{-I\xi x}d\xi \quad (13b)$$

$$\phi(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{8}m_j A_j\,e^{n_j z}+B_1\varphi_{31}\,e^{k_0 z}+B_2\varphi_{32}\,e^{-k_0 z}\right)e^{-I\xi x}d\xi \quad (13c)$$

$$\psi(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{8}\theta_j A_j\,e^{n_j z}+B_1\varphi_{41}\,e^{k_0 z}+B_2\varphi_{42}\,e^{-k_0 z}\right)e^{-I\xi x}d\xi \quad (13d)$$

Burada A_j katsayıları (5) ve (6) no'lu sınır şartlarından bulunacak bilinmeyen katsayılardır. n_j, ω_j, m_j, θ_j ve φ_{ij} bilinen sabitler olup uzun ifadeler içerdikleri için burada verilmemiştir.

(13) no'lu denklemler (1) no'lu denklemlerde yazıldığında gerilme, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\sigma_x(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{8}A_j(-IC_{11}\xi+n_j(C_{13}\omega_j+e_{31}m_j+h_{31}\theta_j))e^{n_j\xi z}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}(\lambda_{11}+I\xi c_{11}\varphi_{1i}+(-1)^i k_0(c_{13}\varphi_{2i}+e_{31}\varphi_{3i}+h_{31}\varphi_{4i}))\right]e^{I\xi x}d\xi \quad (18a)$$

$$\sigma_z(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{8}A_j(-IC_{13}\xi+n_j(C_{33}\omega_j+e_{33}m_j+h_{33}\theta_j))e^{n_j\xi z}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}(\lambda_{33}+Ic_{13}\xi\varphi_{1i}+(-1)^i k_0(c_{33}\varphi_{2i}+e_{33}\varphi_{3i}+h_{33}\varphi_{4i}))\right]e^{I\xi x}d\xi \quad (18b)$$

$$\tau_{xz}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{8}A_j(C_{44}n_j-I\xi(C_{44}\omega_j+e_{15}m_j+h_{15}\theta_j))e^{n_j\xi z}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}((-1)^i c_{44}k_0\varphi_{1i}+I\xi(c_{44}\varphi_{2i}+e_{15}\varphi_{3i}+h_{15}\varphi_{4i}))\right]e^{I\xi x}d\xi \quad (18c)$$

$$D_x(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{8}A_j(e_{15}n_j-I\xi(e_{15}\omega_j-\in_{11}m_j-d_{11}\theta_j))e^{n_j\xi z}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}((-1)^{i+1}e_{15}k_0\varphi_{1i}-I\xi e_{15}\varphi_{2i}+I\alpha(\in_{11}\varphi_{3i}+d_{11}\varphi_{4i}))\Bigg]e^{I\xi x}d\xi \qquad (18d)$$

$$D_z(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{8}A_j(-I\xi e_{31}-n_j(-e_{33}\omega_j+\in_{33}m_j+d_{33}\theta_j))e^{n_j\xi z}$$

$$-\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}(\alpha_3+I\xi e_{31}\varphi_{1i}+(-1)^{i+1}k_0(-e_{33}\varphi_{2i}+\in_{33}\varphi_{3i}+d_{33}\varphi_{4i}))\Bigg]e^{I\xi x}d\xi \qquad (18e)$$

$$B_x(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{8}A_j(h_{15}n_j-I\xi(h_{15}\omega_j-d_{11}m_j-\mu_{11}\theta_j))e^{n_j\xi z}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}(h_{15}((-1)^{i+1}k_0\varphi_{1i}-I\xi\varphi_{2i})+I\xi(d_{11}\varphi_{3i}+\mu_{11}\varphi_{4i}))\Bigg]e^{I\xi x}d\xi \qquad (18f)$$

$$B_z(x,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg[\sum_{j=1}^{8}A_j(I\xi h_{31}+n_j(-h_{33}\omega_j+d_{33}m_j+\mu_{33}\theta_j))e^{n_j\xi z}$$

$$+\sum_{i=1}^{2}B_i e^{(-1)^{i+1}k_0 z}(\beta_3+I\xi h_{31}\varphi_{1i}+(-1)^{i+1}k_0(-h_{33}\varphi_{2i}+d_{33}\varphi_{3i}+\mu_{33}\varphi_{4i}))\Bigg]e^{I\xi x}d\xi \qquad (18g)$$

(5), (6) ve (8) no'lu sınır şartları yazıldığında A_j ve B_i katsayıları bilinmeyen temas gerilmesi $p(x)$'e bağlı olarak elde edilir. $p(x)$ gerilmesini bulmak için aşağıdaki sınır şartı kullanılır:

$$\frac{\partial w(x,0)}{\partial x}=F(x)=x/R \qquad (-a<x<b) \qquad (19)$$

Burada $F(x)$ dairesel zımbanın şekil fonksiyonunun türevini ifade etmektedir. A_j ve B_i katsayıları (19) no'lu şartta yazıldığında aşağıdaki tekil integral denklem elde edilir:

$$\eta\beta_{12}p(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b}p(t)dt\left[\frac{\beta_{11}}{t-x}+k_{11}(x,t)+\eta k_{12}(x,t)+\eta V\left(k_{13}(x,t)+k_{14}(x,t)\right)\right]=x/R \qquad (20)$$

Burada $k_{1i}(x,t)$ integral denklemin çekirdekleri ve β_{1i} ise tekil terimlerdir. Aşağıdaki büyüklükler tanımlandığında

$$t=\frac{a+b}{2}r+\frac{b-a}{2}, \qquad x=\frac{a+b}{2}s+\frac{b-a}{2} \qquad (21)$$

integral denklem aşağıdaki gibi normalize edilir:

$$\eta\beta_{12}p(s)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}p(t)dt\left[\frac{\beta_{11}}{t-x}+\bar{k}_{11}(s,r)+\eta\bar{k}_{12}(s,r)+\eta V\left(\bar{k}_{13}(s,r)+\bar{k}_{14}(s,r)\right)\right]=$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{a+b}{2}s+\frac{b-a}{2}\right) \qquad (22)$$

Burada

$$\bar{k}_{1i}(s,r)=\frac{a+b}{2}k_{1i}(x,t) \tag{23}$$

olarak tanımlıdır. Benzer şekilde denge şartı aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{a+b}{2}\int_{-1}^{1}p(r)dr=P \tag{24}$$

İNTEGRAL DENKLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Temas gerilmeleri temasın bittiği noktalarda sıfıra gittiğinden (22) no'lu integral denklemin indeksi -1'dir. Çözüm aşağıdaki gibi aranır:

$$p(r)=g(r)(1-r)^{\gamma 1}(1+r)^{\gamma 2} \tag{25}$$

Burada

$$\gamma_1=\frac{1}{2\pi I}\ln\left[\frac{\eta\beta_{12}/\beta_{11}-I}{\eta\beta_{12}/\beta_{11}+I}\right]+N_0 \tag{26a}$$

$$\gamma_2=-\frac{1}{2\pi I}\ln\left[\frac{\eta\beta_{12}/\beta_{11}-I}{\eta\beta_{12}/\beta_{11}+I}\right]+M_0 \tag{26b}$$

olarak tanımlıdırlar. N_0 ve M_0 , $-1<\mathrm{Re}[\gamma_1,\gamma_2]<1$ olacak şekilde +1,-1 veya 0 değerlerini alırlar. Gauss–Jacobi integrasyon formülü [30] kullanılarak (22) no'lu integral denklem aşağıdaki cebrik denklem sistemine indirgenir

$$\sum_{m=1}^{N}W_m^N g(r_m)\left[\frac{\beta_{11}}{r_m-s_k}+\bar{k}_{11}(s_k,r_m)+\eta\bar{k}_{12}(s_k,r_m)+\eta V\left(\bar{k}_{13}(s_k,r_m)+\bar{k}_{14}(s_k,r_m)\right)\right]=$$

$$\frac{1}{R}\left(\frac{a+b}{2}s_k+\frac{b-a}{2}\right)\qquad k=1,2...,N+1 \tag{27}$$

Benzer şekilde denge denklemi (24) aşağıdaki hale gelir:

$$\frac{a+b}{2}\sum_{m=1}^{N}W_m^N g(r_m)=\frac{1}{\pi}P \tag{28}$$

Burada r_m , s_k ve W_m^N aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$P_N^{(\gamma_1,\gamma_2)}(r_m)=0\qquad m=1,2,.....,N \tag{29a}$$

$$P_{N+1}^{(-\gamma_1,-\gamma_2)}(s_k)=0\qquad k=1,2,.....,N+1 \tag{29b}$$

$$W_m^N=-\frac{1}{\pi}\frac{(2N+\gamma_1+\gamma_2+2)}{(N+1)!}\frac{\Gamma(N+\gamma_1+1)\Gamma(N+\gamma_2+1)}{\Gamma(N+\gamma_1+\gamma_2+2)}\frac{2^{(\gamma_1+\gamma_2)}}{P_N^{(\gamma_1,\gamma_2)'}{}_{(r_m)}P_{N+1}^{(\gamma_1,\gamma_2)}{}_{r_m}} \tag{29c}$$

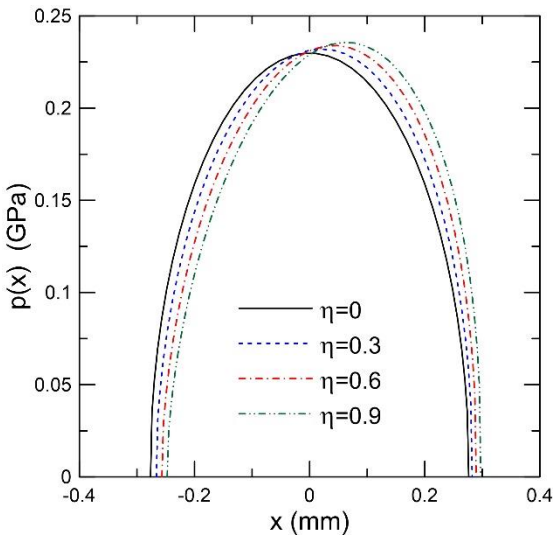
(27) ve (28) no'lu denklemler yardımıyla $N+2$ bilinmeyen olan $g(r_m)$, a ve b için toplamda $N+2$ denklem elde edilir. (27) no'lu denklem sistemi N tane bilinmeyen olan $g(r_m)$ için bir fazla denklem vermektedir. Fazlalık olan denklem dışarı alınarak (28) nolu denge şartıyla beraber temas uzunlukları a ve b 'nin bulunmasında kullanılacaktır. a ve b 'den dolayı problem doğrusal değildir. Bu nedenle iterasyonla problem çözülür.

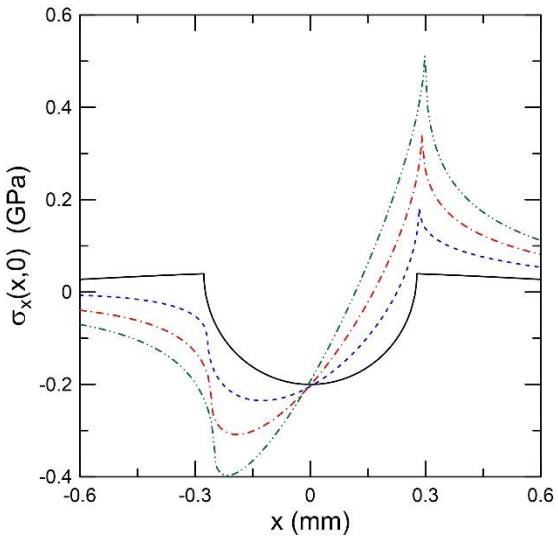
BULGULAR VE İRDELEME

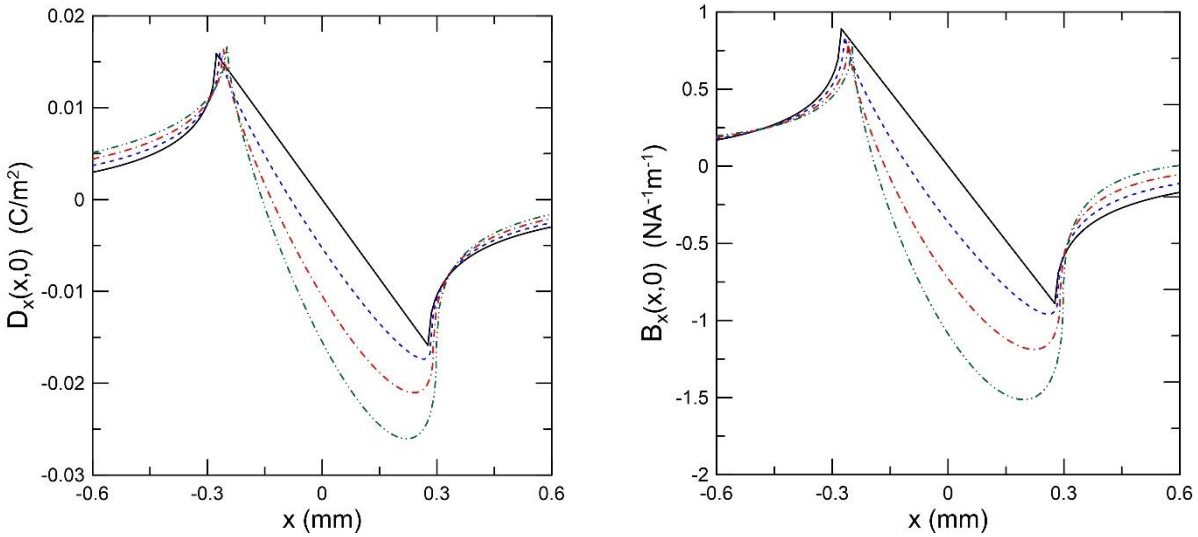
Bu bölümde sürtünme katsayısının, hızın, dış yükün ve zımba yarıçapının gerilmeler, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkileri incelenmiştir. Elektromanyetik elastik tabakanın BaTiO3–CoTiO4 malzemesinden yapıldığı kabul edilmiştir. Bu malzemeye ait sabitler Tablo 1.'de verilmiştir.

Tablo 1. BaTiO3–CoTiO4 malzemesinin termal, elektromanyetik ve elastik parametreleri

$c_{11}\ (GPa)$	$c_{13}\ (GPa)$	$c_{33}\ (GPa)$	$c_{44}\ (GPa)$
226	124	216	44
$e_{31}\ (C/m^2)$	$e_{33}\ (C/m^2)$	$e_{15}\ (C/m^2)$	$\in_{11}\ (10^{-9}C/Vm)$
-2.2	9.3	5.8	5.64
$\in_{33}\ (10^{-9}C/Vm)$	$h_{31}(N/Am)$	$h_{33}(N/Am)$	$h_{15}(N/Am)$
6.35	290.2	350	275
$d_{11}(10^{-12}Ns/VC)$	$d_{33}(10^{-12}Ns/VC)$	$\mu_{11}(10^{-4}Ns^2/C^2)$	$\mu_{33}(10^{-4}Ns^2/C^2)$
5.367	2737.5	2.97	0.835
$k_1\ (W/Km)$	$k_3\ (W/Km)$	$c\ (Wskg^{-1}K^{-1})$	$\rho\ (kg/m^3)$
50	75	420	5500
$\lambda_{11}\ (10^5 Nm^{-2}K^{-1})$	$\lambda_{33}\ (10^5 Nm^{-2}K^{-1})$	$\beta_3\ (10^{-4}C/Km^2)$	$\alpha_3\ (10^{-4}C/Km^2)$
32.3	27.9	1.1	1





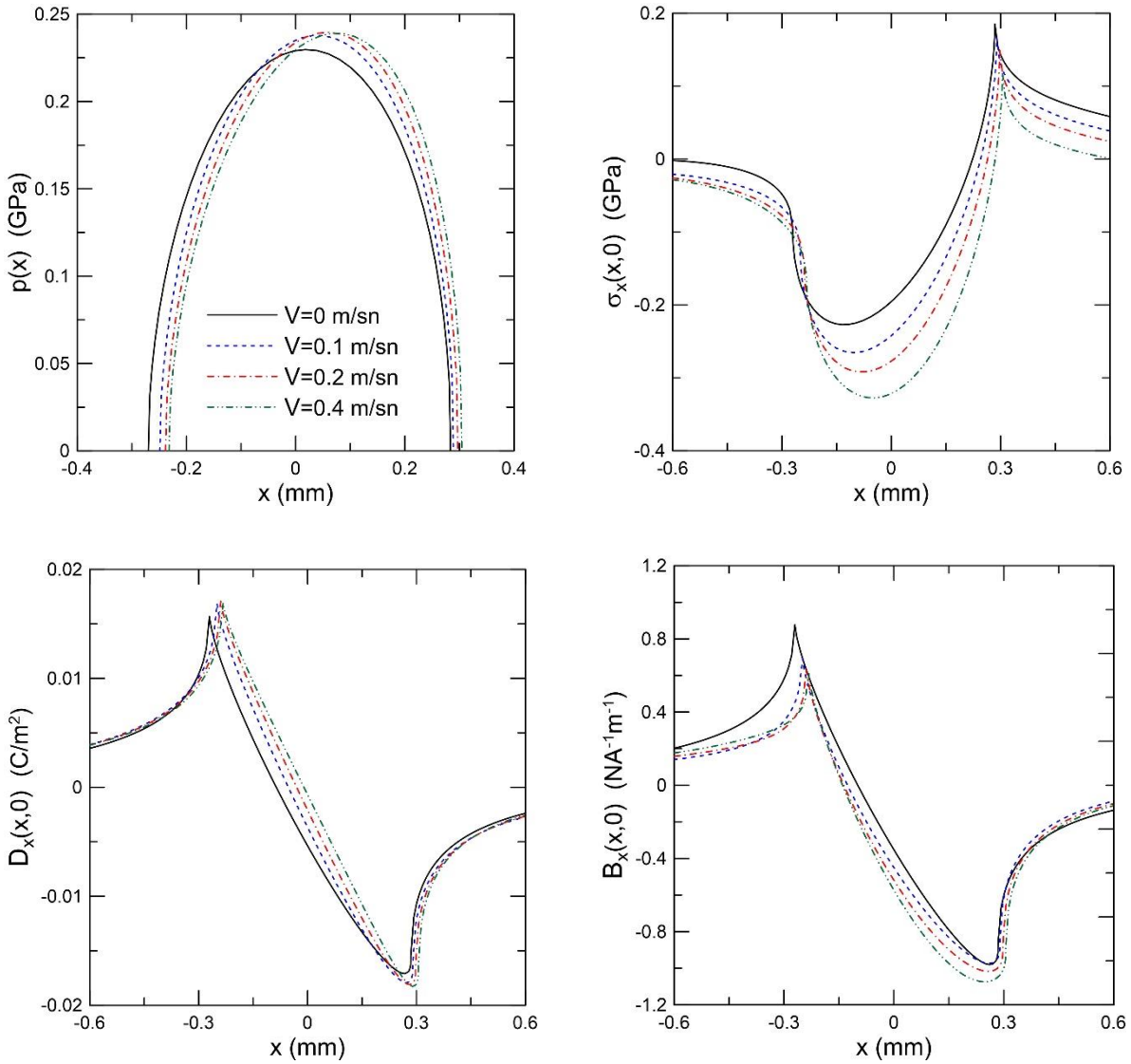


Şekil 2. Sürtünme katsayısının (η) temas gerilmesi, $\sigma_x(x,0)$ normal gerilmesi, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkisi.

$(V = 0.02m/sn, h = 0.001m, R = 0.1m, P = 100x10^3 N/m)$

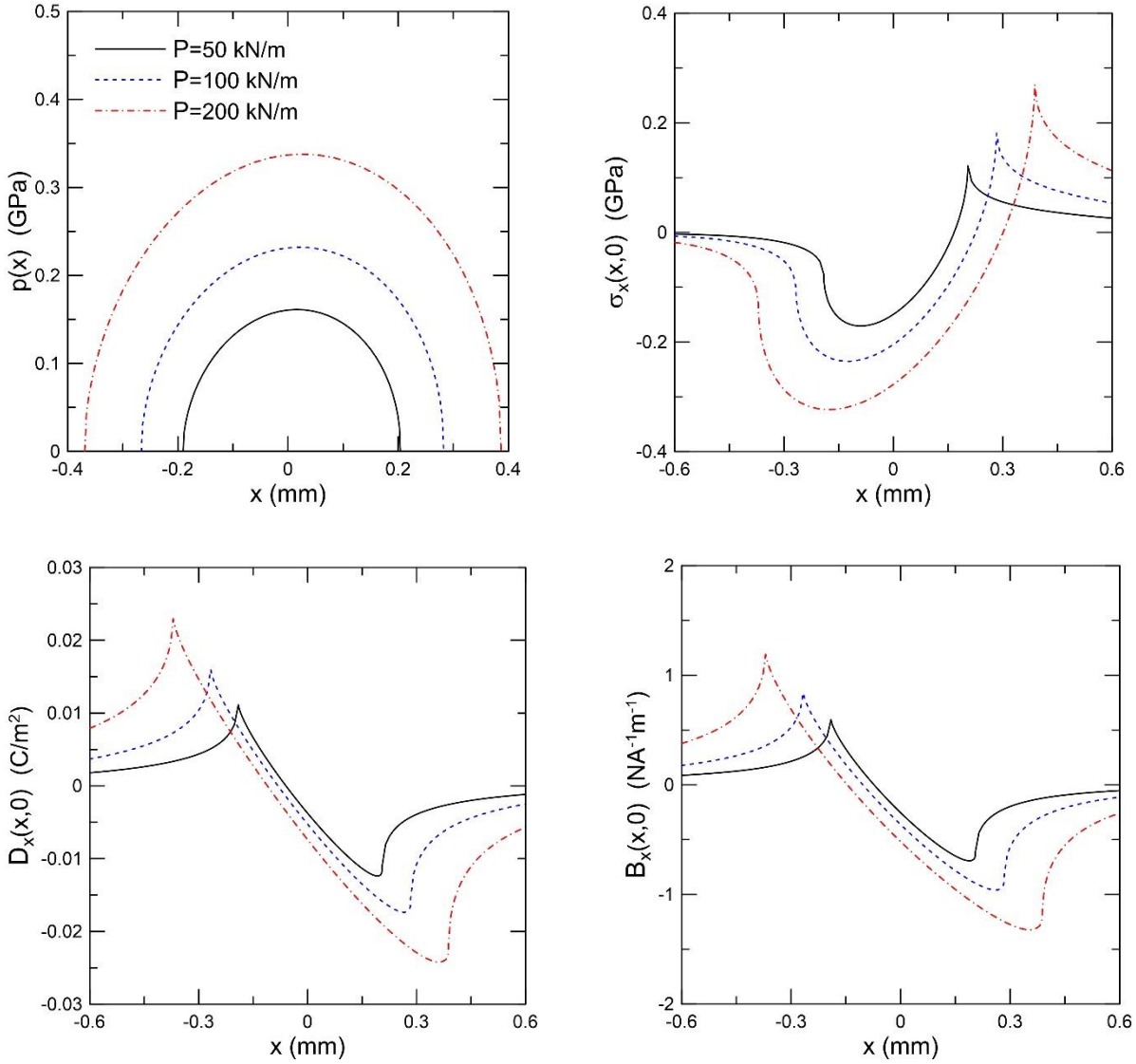
Şekil 2.'de sürtünme katsayısının gerilmeler, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkileri gözükmektedir. Sürtünmesiz durumda yüzeyde hem gerilmeler hem de elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon dağılımı simetriktir. Sürtünme ile birlikte temas gerilmesi bir miktar artmaktadır. Sürtünme özellikle $\sigma_x(x,0)$ normal gerilmesini ciddi miktarda etkimektedir. Sürtünme arttıkça $x=b$ temas ucunda çekme gerilmeleri hızla artmaktadır. Çekme gerilmeleri çatlak oluşumuna veya ilerlemesine yol açmaktadır ve büyük değerler alması önlenmelidir. Sürtünme katsayısı arttığında $x=a$ temas ucunda elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon çok değişmemekle beraber $x=b$ temas ucunda hızla artmaktadır.

Şekil 3.'de hızın gerilmeler, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkisi görülmektedir. Zımba hızı arttıkça temas gerilmesi artmakta, $\sigma_x(x,0)$ normal gerilmesindeki çekme sivriliği azalmaktadır. $x=a$ temas ucundaki elektrik yer değiştirme sivriliği zımba hızlandıkça artarken, manyetik indüksiyonda azalmaktadır.



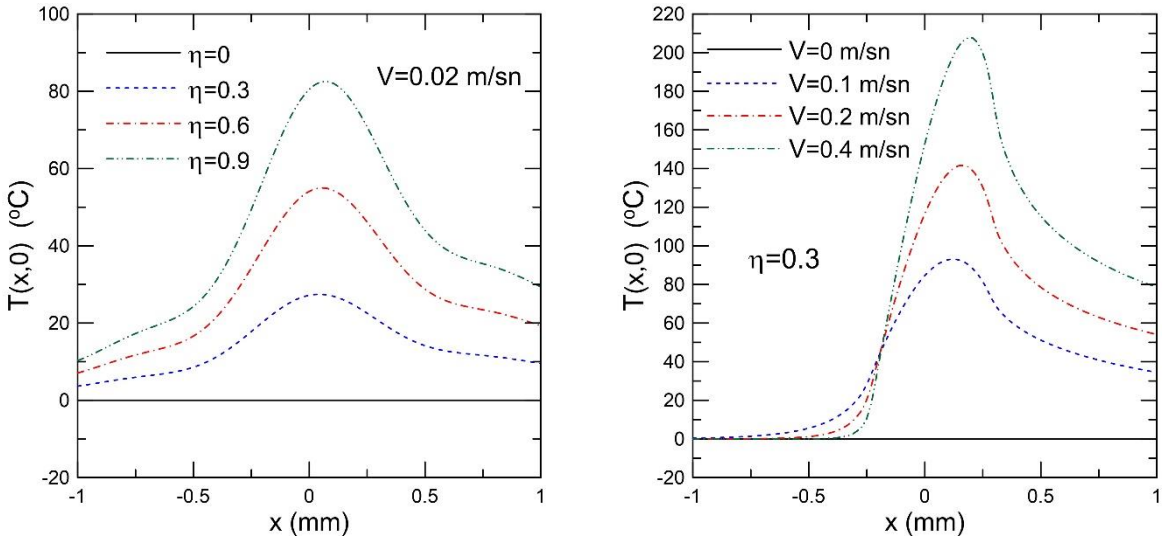
Şekil 3. Hızın (V) temas gerilmesi, $\sigma_x(x,0)$ normal gerilmesi, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkisi. ($\eta = 0.3, h = 0.001m, R = 0.1m, P = 100x10^3 N/m$)

Şekil 4.'de dış yükün gerilmeler, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkisi görülmektedir. Dış yük arttıkça hem temas uzunluğu hem de temas gerilmesi artmaktadır. Diğer taraftan $\sigma_x(x,0)$ normal gerilmesi, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon da dış yük arttıkça artmaktadır.



Şekil 4. Dış yükün (P) temas gerilmesi, $\sigma_x(x,0)$ normal gerilmesi, elektrik yer değiştirme ve manyetik indüksiyon üzerindeki etkisi. $(V = 0.02m/sn, \eta = 0.3, h = 0.001m, R = 0.1m)$

Şekil 5.'de sürtünme katsayısı ve zımba hızının sıcaklık üzerindeki etkisi görülmektedir. Beklendiği gibi sürtünme katsayısı ve zımba hızı artınca sıcaklık da artmaktadır. Zımba hareketsiz iken ve sürtünmesiz durumda sıcaklık oluşmamaktadır.



Şekil 5. Sürtünme katsayısı (η) ve hızın (V) sıcaklık üzerindeki etkisi.

($h = 0.001m, R = 0.1m, P = 100x10^3 N/m$)

SONUÇLAR

Bu çalışmada rijit dairesel bir zımba ile bastırılan alttan tam bağlı elektromanyetik tabakanın thermoelastik temas problemi termoelastisite ve integral dönüşüm teknikleri kapsamında incelenmiştir. Dairesel zımba tabaka üzerinde sabit düşük bir hızla hareket ederken sürtünmeden dolayı ısı açığa çıkmaktadır. Sürtünme katsayısı arttıkça normal çekme gerilmesi hızla artmaktadır. Çekme gerilmeleri çatlak oluşumuna ve ilerlemesine neden olmaktadır. Sürtünme katsayısını ayarlayarak bu tür hasarların önüne geçilebilir. Zımba hızı ve sürtünme hızı arttıkça temas bölgesindeki sıcaklık da artmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Giannakopoulos, A. E., Suresh, S. (1999). Theory of indentation of piezoelectric materials. Acta Materialia, 47(7), 2153-2164.

[2] Giannakopoulos, A. E., Parmaklis, A. Z. (2007). The contact problem of a circular rigid punch on piezomagnetic materials. International Journal of Solids and Structures, 44(14-15), 4593-4612.

[3] Patra, R., Barik, S. P., Chaudhuri, P. K. (2017). Frictionless contact of a rigid punch indenting an elastic layer having piezoelectric properties. Acta Mechanica, 228(2), 367-384.

[4] Wang, B. L., Han, J. C. (2006). A circular indenter on a piezoelectric layer. Archive of Applied Mechanics, 76(7), 367-379.

[5] Hou, P. F., Zhang, W. H. (2020). The electro-mechanics of a coating/substrate system under charged spherical contact. Mathematics and Mechanics of Solids, 25(1), 60-96.

[6] Wu, Y. F., Yu, H. Y., Chen, W. Q. (2012). Indentation responses of piezoelectric layered half-space. Smart Materials and Structures, 22(1), 015007.

[7] Zhou, Y. T., Lee, K. Y. (2012a). Contact problem for magneto-electro-elastic half-plane materials indented by a moving punch. Part I: closed-form solutions. International Journal of Solids and Structures, 49(26), 3853-3865.

[8] Zhou, Y. T., Lee, K. Y. (2012b). Contact problem for magneto-electro-elastic half-plane materials indented by a moving punch. Part II: numerical results. International Journal of Solids and Structures, 49(26), 3866-3882.

[9] Zhou, Y. T., Lee, K. Y. (2012c). Exact solutions of a new, 2D frictionless contact model for orthotropic piezoelectric materials indented by a rigid sliding punch. Philosophical Magazine, 92(15), 1937-1965.

[10] Singh, B., Rokne, J., Dhaliwal, R. (2007). The study of dynamic behavior of functionally graded piezoelectric materials and an application to a contact problem. Quarterly of Applied Mathematics, 65(1), 155-162.

[11] Liou, J. Y., Sung, J. C. (2016). Coupled electro-mechanical surface responses induced by electro-mechanical loading moving steadily on piezoelectric half-plane solids. Applied Mathematical Modelling, 40(13-14), 6256-6266.

[12] Çömez, İ. (2021). Frictional moving contact problem of a magneto-electro-elastic half plane. Mechanics of Materials, 154, 103704.

[13] Ke, L. L., Yang, J., Kitipornchai, S., Wang, Y. S. (2008). Electro-mechanical frictionless contact behavior of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a rigid punch. International Journal of Solids and Structures, 45(11-12), 3313-3333.

[14] Ke, L. L., Wang, Y. S., Yang, J., Kitipornchai, S. (2010). Sliding frictional contact analysis of functionally graded piezoelectric layered half-plane. Acta Mechanica, 209(3), 249-268.

[15] Ma, J., Ke, L. L., Wang, Y. S. (2014). Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. International Journal of Solids and Structures, 51(15-16), 2791-2806.

[16] Elloumi, R., El-Borgi, S., Guler, M. A., Kallel-Kamoun, I. (2016). The contact problem of a rigid stamp with friction on a functionally graded magneto-electro-elastic half-plane. Acta Mechanica, 227(4), 1123-1156.

[17] Su, J., Ke, L. L., El-Borgi, S., Xiang, Y., Wang, Y. S. (2018). An effective method for the sliding frictional contact of a conducting cylindrical punch on FGPMs. International Journal of Solids and Structures, 141, 127-136.

[18] Hills, D. A., Barber, J. R. (1986). Steady sliding of a circular cylinder over a dissimilar thermally conducting half-plane. International Journal of Mechanical Sciences, 28(9), 613-622.

[19] Pauk, V. J. (1999). Plane contact problem for a layer involving frictional heating. International Journal of Heat and Mass Transfer, 42(14), 2583-2589.

[20] Liu, J., Ke, L. L., Wang, Y. S. (2011). Two-dimensional thermoelastic contact problem of functionally graded materials involving frictional heating. International Journal of Solids and Structures, 48(18), 2536-2548.

[21] Liu, J., Ke, L. L., Wang, Y. S., Yang, J., Alam, F. (2012). Thermoelastic frictional contact of functionally graded materials with arbitrarily varying properties. International Journal of Mechanical Sciences, 63(1), 86-98.

[22] Chen, P., Chen, S., Peng, Z. (2012). Thermo-contact mechanics of a rigid cylindrical punch sliding on a finite graded layer. Acta Mechanica, 223(12), 2647-2665.

[23] Chen, P., Chen, S. (2013). Thermo-mechanical contact behavior of a finite graded layer under a sliding punch with heat generation. International Journal of Solids and Structures, 50(7-8), 1108-1119.

[24] Choi, H. J., Paulino, G. H. (2008). Thermoelastic contact mechanics for a flat punch sliding over a graded coating/substrate system with frictional heat generation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 56(4), 1673-1692.

[25] Balci, M. N., Dag, S., Yildirim, B. (2017). Subsurface stresses in graded coatings subjected to frictional contact with heat generation. Journal of Thermal Stresses, 40(4), 517-534.

[26] Çömez, İ. (2021). Thermoelastic receding contact problem of a layer resting on a half plane with frictional heat generation. Journal of Thermal Stresses, 44(5), 566-581.

[27] Zhou, Y. T., Lee, K. Y. (2011). Thermo-electro-mechanical contact behavior of a finite piezoelectric layer under a sliding punch with frictional heat generation. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 59(5), 1037-1061.

[28] Ma, J., Ke, L. L., Wang, Y. S., Aizikovich, S. M. (2015). Thermal contact of magneto-electro-elastic materials subjected to a conducting flat punch. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 50(7), 513-527.

[29] Ma, J., El-Borgi, S., Ke, L. L., Wang, Y. S. (2016). Frictional contact problem between a functionally graded magnetoelectroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation. Journal of Thermal Stresses, 39(3), 245-277.

[30] Erdogan, F. (1978) Mixed boundary value problems in mechanics. In: Nemat-Nasser, S. (ed.) Mechanics Today, vol. 4. Pergamon Press, Oxford.

MOMENT AKTARAN BİR ÇERÇEVEDE ETKİLİ KOLON BOYUNUN HESABI ÜZERİNE BAZI NOTLAR

Hale Ergün[1] ve Ahmet Hicazi[2]
[1,2]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

The effect of inclined member connection on the effective length of the column in a gabled frame is investigated. It is presented by the charts that the buckling length factor of the columns are changing intensively for the very steep member connections, but not so much different for the members which are connected with a slope at the neighborhood of horizontal slope. It is also observed that there is a very slight change when the beam is under tension. Thus, it is verified that ignoring the slope of the beam is realistic in civil engineering applications, as found in literature, but must be considered in very steep connections. The problem is solved by differential equations, matrix stiffness method and finite element software programs Ansys and Sap2000. In matrix stiffness method solutions, linear and nonlinear stiffness matrices are used and the results are discussed. The result for the frame without sway are tabulated and compared with the suggested methods given by the current code.

Keywords: stability of structures; gabled frame; column effective buckling length factor

ÖZET

Farklı eğimlere sahip kirişin, birleştiği kolonun etkili burkulma boyuna etkisi, basit bir moment aktaran çerçeveden oluşan yatay ötelenmesi engellenmiş sistem üzerinde incelenmiştir. Kirişin çok fazla eğimli olduğu durumlarda, etkisinin çok şiddetli olduğu, fakat yataya yakın eğimli durumlarda ise büyük ölçüde sabit bir değerde kaldığı grafikler ile sunulmuştur. Ayrıca, eğimli kiriş çekmeye maruz ise bu değişikliğin fazla olmadığı gözlenmiştir. Literatürde kullanıldığı şekliyle, kirişlerin eğimlerinin ihmal ediliyor olmasının inşaat mühendisliği uygulamalarında gerçekçi olduğu, fakat yüksek eğimli birleşimlerde gözönüne alınması gerektiği gözlenmiştir. Problem, diferansiyel denklem, matris deplasman yöntemi ve sonlu elemanlar programları Ansys ve Sap2000 kullanılarak çözülmüştür. Matris deplasman yöntemi çözümlerinde doğrusal ve doğrusal olmayan rijitlik matrisleri ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak tartışılmıştır. Çözümler yanal ötelenmesi engellenmiş sistem için tablo halinde sunulmuş ve güncel yönetmeliklerde önerilen yöntemler ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: yapı stabilitesi; eğik çatılı çerçeve; etkili kolon burkulma boyu katsayısı

GİRİŞ

Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapımına dair esalarında (ÇYTHYE), stabilite tasarımında genel (doğrudan) analiz, burkulma boyu (etkin uzunluk) ve yaklaşık ikinci mertebe yöntemi

olmak üzere üç tasarım yöntemi önerilmiştir [1]. Rijitliklerin azaltıldığı ve gerçek kolon boyunun kullanıldığı genel analiz yönteminde bir sınırlama yoktur. Gerçek rijitliklerin kullanıldığı burkulma boyu yöntemi, tüm katlarda, ikinci mertebe göreli kat ötelemelerinin birinci mertebe göreli kat ötelemelerine oranı 1.5 değerine eşit veya daha küçük olan yapılarda kullanılmasına izin verilmektedir. Taşıyıcı sistemin bir parçası olan kolonun burkulma boy katsayısının hesabı, esas olarak iki ucu mafsallı eşdeğerinin bulunması anlamına gelmektedir. Bu katsayının hesabı için bir çok yöntem kullanılabilir. Gerçeğe en yakın değeri elde etmek için tüm çerçevenin stabilite analizi yapılmalıdır. Tüm sisteme ait elastik rijitlik matrisine geometrik rijitlik matrisi eklenerek elde edilen tanjant rijitlik matrisinin özdeğerleri sistemin burkulma yükünü verir. Kolona düşen yük, iki ucu mafsallı burkulma yüküne eşitlenerek kolon etkili boy katsayısı hesaplanabilir. Fakat, pratikte kolaylık açısından, tüm sistemi çözmek yerine, bu katsayı, yanal yer değiştirmesi önlenmiş ve önlenmemiş çerçeveler için iki ayrı denklemden veya nomogramlardan yararlanılarak hesaplanmaktadır [1-5]. Bu denklemler kullanıldığında, kirişlerin kolona dik bağlanmaması durumunun ve kirişlerdeki eksenel kuvvetin ihmal edildiğini gözönünde bulundurmak gerekebilir. Stabilite konusu eski bir çalışma alanı olmasına rağmen, gelişen ve iyileşen malzeme çeşitleri ve mekanik özellikleri ile beraber kesitler küçülmekte ve tasarımda burkulmanın araştırılması daha da ön plana çıkmaktadır.

Etkili burkulma boyu katsayısının hesabı için yönetmeliklerde önerilen kolonun her iki ucunda (1) denklemi ile verilen G dağıtma katsayılarının kullanıldığı formüllerde, kolona bağlı olmayan sistemde bulunan diğer bir kolonun etkisinin olmadığı kabul edilmiştir. Fakat, Lui (1992), yanal yer değiştirmesi önlenmemiş tek katlı tek açıklıklı basit bir çerçevede, boyu kısa, atalet momenti büyük veya eksenel yükü daha az olan kolona güçlü kolon, diğerine zayıf kolon ismini vererek, birbirlerine bağlı olmayan zayıf kolon-güçlü kolon etkileşimini açıkça göstermiştir [4]. Bu çalışmada, kolonlardan biri diğerine göre güçlendikçe, etkili boyunun arttığı görülmektedir. Bundan dolayı, tüm sistemin birinci mertebe analizi hesabını gerektiren yeni bir etkili boy katsayısı formülü önerilmiştir. Dağıtma katsayıları ile bulunan burkulma boylarının düzenli çerçeve sistemlerde bile hatalı sonuçlar verdiği sayısal örneklerle gösterilmiştir [4-7].

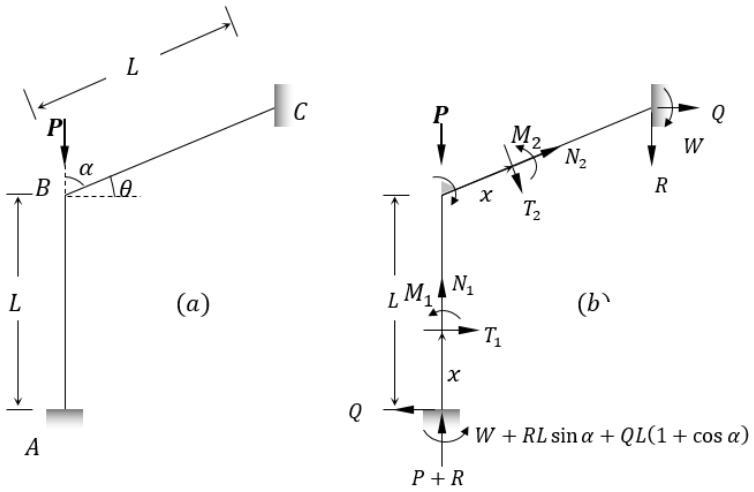
$$G = \frac{\sum(EI/L)_{kolonlar}}{\sum(EI/L)_{kirişler}} \tag{1}$$

Bu çalışmada, basit bir çerçevede, kolonun burkulma boyuna, birleştiği kirişin eğiminin etkisi incelenmiştir. Pratikte ihmal edilen kirişteki eksenel kuvvet hesaba dahil edilmiştir. Çözümler, matris deplasman yöntemi ve sonlu elemanlar programları ile bulunmuş ve diğer pratik yöntemler ile karşılaştırılmıştır.

BASİT ÇERÇEVE SİSTEM

Problemin tanımı

Bu çalışmada, Şekil 1'deki ankastre mesnetli, AB kolonu ve BC kirişinden oluşan basit çerçeve sistemi gözönüne alınmıştır. Kirişin eğimi, Şekil 1a'da görülen α açısı ile takip edilmiştir. Üçüncü dereceden statikçe belirsiz sistem, B düğüm noktasından düşeyde yüklenmiştir. Her iki elemanın da kesitleri a×a karedir, elastisite modülleri *E*, Poisson oranı ν=0.3, uzunlukları L=10a olarak kullanılmıştır. Bu durumda elemanların uzama rijitliği $EA=Ea^2$, eğilme rijitliği $EA=Ea^4/12$, kayma rijitliği $GA'= 1.2Ea^2/2/(1+\nu)$ olur.



Şekil 1. (a) Basit çerçeve, (b) Kullanılan pozitif yönler

Stabilite hesabından önce, Castigliano yöntemi ile, tüm kesit tesirlerinin etkisi dahil edilerek, kolon ve kirişteki eksenel normal kuvvetler, sırasıyla N_1 ve N_2, (2a-b) denklemleri ile elde edilmiş ve kirişin eğimi α ya göre değişimleri Şekil 2'de çizilmiştir.

$$N_1 = -(P + R) = \eta_1 P \tag{2a}$$

$$N_2 = Q \sin\alpha - R \cos\alpha = \eta_2 P \tag{2b}$$

(2a,b) denklemlerindeki Q, R, η_1, η_2 değerleri aşağıdaki gibidir.

$$Q = \frac{12(1800 \sin\alpha + 1507 \sin 2\alpha)}{3067346 + 86400 \cos\alpha - 2922098 \cos 2\alpha} P$$

$$R = -\frac{12(4545 + 3600 \cos\alpha + 1507 \cos 2\alpha)}{3067346 + 86400 \cos\alpha - 2922098 \cos 2\alpha} P$$

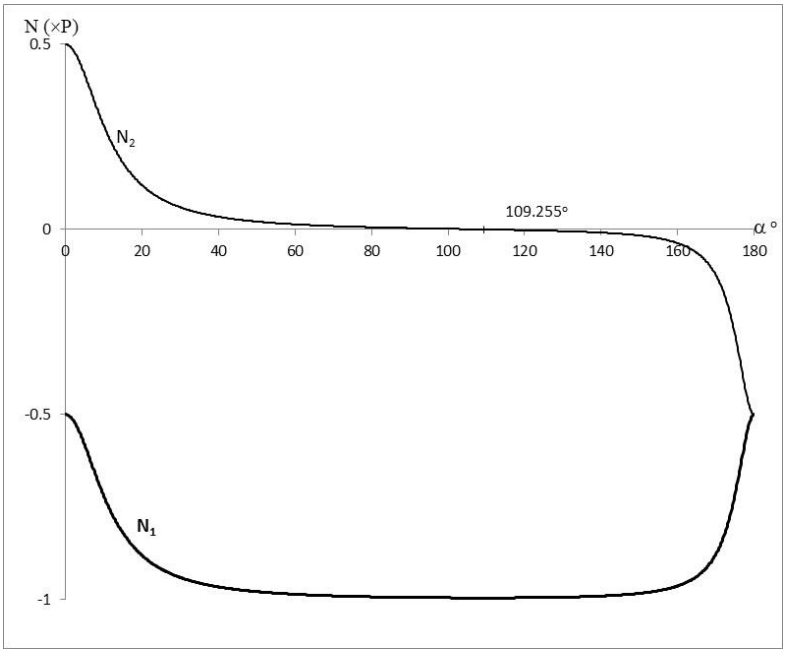
$$\eta_1 = -\frac{1506403 + 21600 \cos\alpha - 1470091 \cos 2\alpha}{1533673 + 43200 \cos\alpha - 1461049 \cos 2\alpha}$$

$$\eta_2 = \frac{24(675 + 1513 \cos\alpha + 225 \cos 2\alpha)}{1533673 + 43200 \cos\alpha - 1461049 \cos 2\alpha}$$

Şekil 2'de işaretlendiği gibi α=109.3^o değerinde, hareketli kirişteki eksenel kuvvet sıfır değerini alarak çekmeden basınca geçmekte ve kolondaki eksenel kuvvet en büyük değeri N_1=0.99P yi almaktadır.

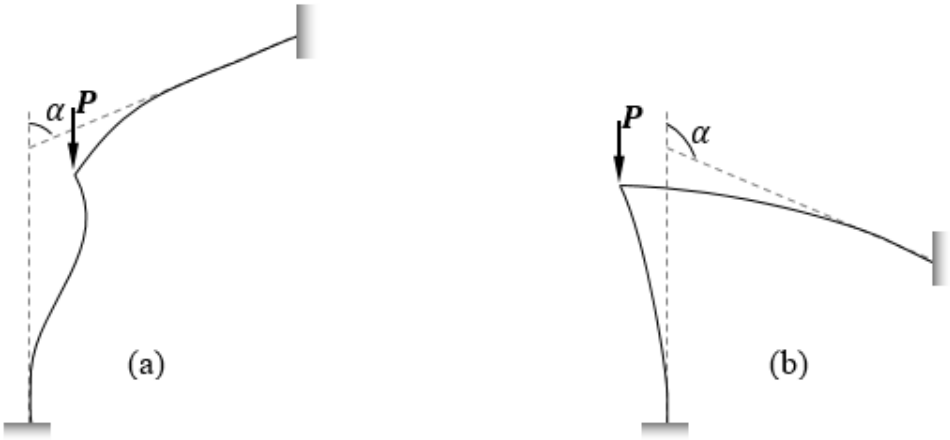
Eksenel kuvvetler $-P<N_1<-0.5P$ ve $-0.5P<N_2<0.5P$ aralığında, kesme kuvvetleri $-0.012P<T_1<0.024P$ ve $-0.025P<T_2<0$ aralığında değişmekte olup eksenel kuvvetin en fazla %5 i kadardır. Literatürdeki çerçevenin stabilite çözümlerinde genellikle kirişteki kesme

kuvvetinin kolondaki eksenel kuvvete etkisi ve kolondaki kesme kuvvetinin kirişteki eksenel kuvvete etkisi ihmal edilmektedir [2-3]. Bu grafikten görüldüğü gibi $\alpha=90^o$ civarında bu ihmalin yerinde olduğu görülmektedir.



Şekil 2. AB kolonu ve BC kirişindeki, sırasıyla N_1 ve N_2 eksenel kuvvetlerinin, BC kirişinin eğimi α ya göre değişimi

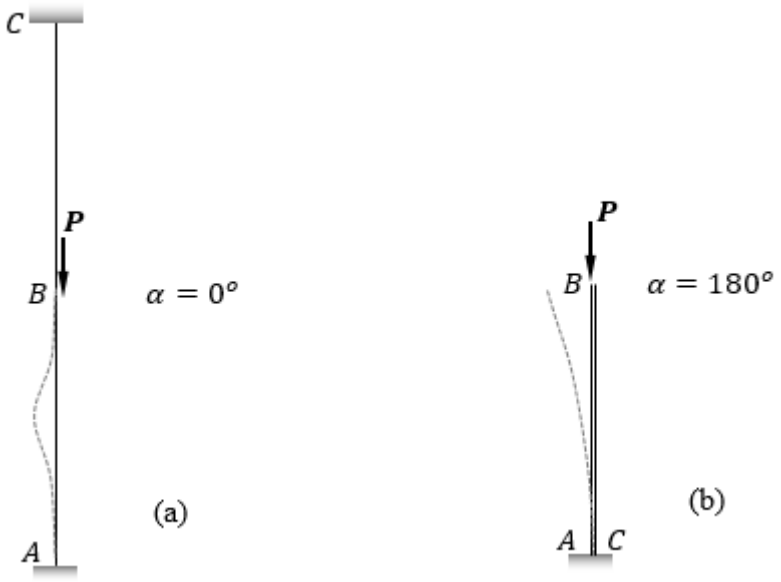
Çerçevenin B birleşim noktasının yer değiştirme ve dönme değerleri de ayrıca hesaplanmıştır. Şekil 3'te kiriş eğiminin $\alpha=89.79^o$ değerinden küçük veya büyük olmasına göre çerçevenin burkulmadan önceki şekil değiştirmiş halleri çizilmiştir.



Şekil 3. Çerçevenin elastik eğrisi (a) $\alpha<89.79^o$, (b) $\alpha>89.79^o$

Basit Bir Yaklaşım

Şekil 4'teki kiriş eğiminin $\alpha=0^o$ ve $\alpha=180^o$ olması durumları değerlendirilerek, aranan etkili uzunluk katsayısının, kabaca 0.5 ve 2 aralığında olduğu söylenebilir.



Şekil 4. (a) $\alpha=0^o$, (b) $\alpha=180^o$

Buna göre, sisteme ait kritik burkulma yükü kabaca (3a) ve (3b) denklemleri ile hesaplanarak $8P_e$ ile $0.5P_e$ aralığında olduğu tahmin edilebilir. Burada, $P_e=\pi^2EI/L^2$ olarak yazılmıştır.

$$\frac{P}{2}=\frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} \rightarrow P_{cr}=8\,P_e \tag{3a}$$

$$\frac{P}{2}=\frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \rightarrow P_{cr}=0.5\,P_e \tag{3b}$$

Nomogram ile Çözüm

Mevcut kodlarda verilen nomogramlardan kolon etkili boyunu hesaplamak için öncelikle (1) denklemi ile verilen kolonun her iki ucu için G katsayıları bulunur. Bu katsayılar ile, yanal ötelenmesi önlenmiş sistemler için verilen etkili boy katsayısı formülü aşağıdaki gibidir [1,3,8].

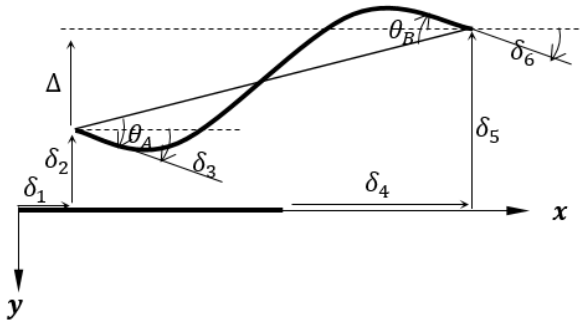
$$K=\frac{3\,G_A\,G_B+1.4\,(G_A+G_B)+0.64}{3\,G_A\,G_B+2\,(G_A+G_B)+1.28} \tag{4}$$

Bu formül çıkarılırken, tüm elemanların prizmatik olduğu ve elastik davrandığı, kirişlerdeki eksenel kuvvetin ihmal edildiği, sistemi oluşturan tüm kolonların aynı anda burkulduğu, birleşim noktasında kirişlerden gelen momentin kolonlara rijitlikleri oranında dağıldığı, burkulma esnasında elemanların eğimlerinin eşit şiddette fakat ters yönde olduğu (eğilmenin tek eğrilik ile gerçekleştiği) kabul edilmektedir. Bu kabullere uymayan bazı durumlarda, G dağıtma katsayılarında aşağıdaki gibi düzeltme yapmak mümkündür.

Bu çalışmadaki problemde, kolonun alt ucu ankastre olduğu için G_A=0 olarak alınır. (1) nolu denkleme göre kolonun ve kirişin eğilme rijitlikleri ve boyları aynı olduğu için G_B=1 olarak hesaplanır. (4) denklemi çıkarılırken yapılan kabullerde, BC kirişinin uçlarının dönmesi arasında $\theta_C=-\theta_B$ ilişkisi olması gerekirken, bu problemde θ_C=0 dır. $\theta_C=-\theta_B$ durumu için moment-eğim ifadelelerine gidilir ise, $M_{BC}=(4\theta_B+2\theta_C)EI/L=(2EI/L)\theta_B$ bulunur, θ_C=0 durumu için moment-eğim ifadelelerine gidilir ise, $M_{BC}=(4EI/L)\theta_B$ bulunur [2-4]. Buradan, mevcut formüldeki kabule göre, kirişin 2 misli daha rijit olduğu ve G_B=0.5 olarak düzeltilmesi gerektiği anlaşılır. Bu değerler ile (4) denklemine gidilir ise K=0.5877olarak hesaplanır.

Matris Deplasman Yönteminde Kullanılan Rijitlik Matrisleri

Bir sistemin burkulma yükünü elde etmek için kullanılan yöntemlerden biri de, sistemin elastik rijitlik matrisine geometrik rijitlik matrisinin eklenmesi ile elde edilen tanjant rijitlik matrisinin özdeğerlerinin elde edilmesidir. Bu çalışmada, matris deplasman yönteminde kullanılan elemanlara ait pozitif yönler Şekil 5'te gösterilmiştir.



Şekil 5. Eleman rijitlik matrisi için kullanılan pozitif yönler

Şekil 5'te basınç altında yanal ötelenmesi engellenmemiş düzlem elemanın iki ucundaki tüm ötelenme ve dönmeler δ_i ile, kuvvet ve momentler ise q_i ile isimlendirilirse, eleman rijitlik matrisi [k_e], (5) denklemindeki gibi bulunur [3]. Eşit L uzunluklu elemanlar ile ağ kurulması şartı ile kolay kullanım sağlayan bu rijitlik matrisinde, $\lambda^2=AL^2/I$ dır ve ϕ_j ifadeleri Çizelge 1'de verilmektedir. Burada, $\beta^2=P/EI$ olarak kullanılmıştır ve P elemana etkiyen eksenel basınç kuvvetidir. Bu hali ile stabilite analizinde kullanılır. Çizelge 1'deki ilk kolonda verilen ifadelerde P değeri çekme anlamına gelen negatif değeri ile kullanılır ise ikinci kolondaki ifadeler kolayca elde edilebilir. Bu şekli ile eksenel yükü çekme olan kiriş için kullanılabilir. Mathematica gibi programlar ile bu yöntem uygulandığında, çekme ve basınç çubuklarına göre ayrı ayrı rijitlik matrisleri vermeye gerek yoktur, P kuvveti negatif olduğunda bu ifadeler program içinde Çizelge 1'deki ikinci kolondaki ifadelere kendiliğinden dönüşürler.

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3/L \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12\,\phi_1 & -6\,\phi_2 & 0 & -12\,\phi_1 & -6\phi_2 \\ 0 & -6\,\phi_2 & 4\,\phi_3 & 0 & 6\,\phi_2 & 2\phi_4 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12\,\phi_1 & 6\,\phi_2 & 0 & 12\,\phi_1 & 6\,\phi_2 \\ 0 & -6\,\phi_2 & 2\,\phi_4 & 0 & 6\,\phi_2 & 4\,\phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 L \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 L \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

Eksenel yükün olmadığı durumda, bu ifadelerin hepsi 1 değerini alırlar ve geometrik rijitlik matrisi sıfırlanarak, (5) denklemindeki tanjant rijitlik matrisi, elastik (doğrusal) rijitlik

matrisine dönüşür. Çizelge 1'deki ifadelere direk β=0 yerleştirilirse 0/0 belirsizliği elde edileceğinden, bu işlem yapılırken, L'Hospital kuralı dört defa uygulanarak, sıfıra yaklaşırken limit değerleri bulunmalıdır. Veya seriye açıldıklarında, bu ifadelerin hepsinin ilk terimlerinin 1 olduğu görülür.

Çizelge 1. Eleman riijitlik matrisindeki ϕ_j ifadeleri [3]

P	Basınç	Çekme
ϕ_1	$(\beta L)^3 \sin \beta L /12 /\phi_o$	$(\beta L)^3 \sinh \beta L /12 /\phi_o$
ϕ_2	$(\beta L)^2(1-\cos \beta L)/6/\phi_o$	$-(\beta L)^2(1-\cosh \beta L)/6/\phi_o$
ϕ_3	$\beta L(\sin \beta L - \beta L \cos \beta L)/4/\phi_o$	$-\beta L(\sinh \beta L - \beta L \cosh \beta L)/4/\phi_o$
ϕ_4	$\beta L(\beta L - \sin \beta L)/2/\phi_o$	$-\beta L(\beta L - \sinh \beta L)/2/\phi_o$
ϕ_o	$2 - 2\cos \beta L - \beta L \sin \beta L$	$2 - 2\cosh \beta L + \beta L \sinh \beta L$

Doğrusal olmayan (5) denklemindeki rijitlik matrisi yerine, yukarıda anlatıldığı şekilde ϕ_j ifadeleri seriye açılıp bu defa ilk iki terimleri kullanılır ise, (6) denklemi ile verilen doğrusal rijitlik matrisi elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3/L \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\left(\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{PL^2}{EI}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 L \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 L \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Rijitlik matrislerinde birinci ve dördüncü satır ve kolonların kullanılmaması halinde ise, elemanın eksenel uzama veya kısalması ihmal edilmiş olur. Stabilite hesabı için gerekli olan sistem rijitlik matrisi, $[K]=[T]^T[k_e][T]$ dönüşümleri ile elde edilir, burada [T] dönüşüm matrisidir [2-3].

Matris Deplasman Yöntemi ile Çözümler

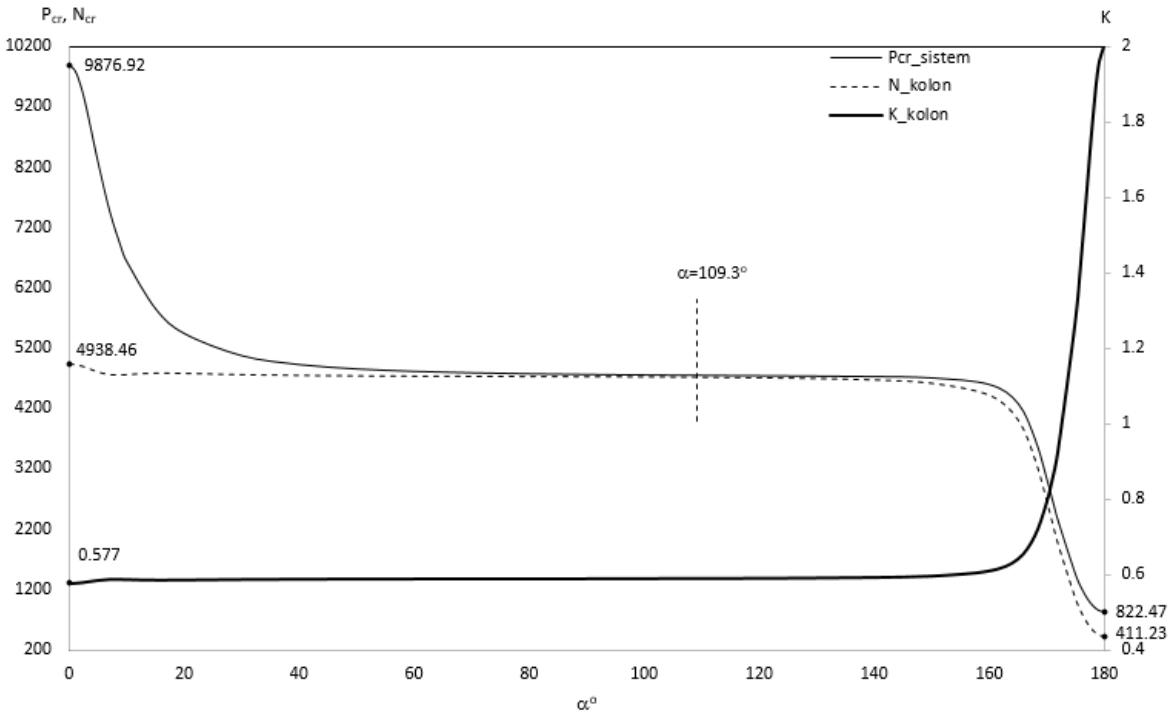
Kesin veya yaklaşık hızlı çözüm tercihine göre kullanılabilecek $[k_e]$ eleman rijitlik matrisleri farklı seçilebilir. Buna göre, Çizelge 2'deki 8 durum için çözüm yapılmıştır. Burada, üstü çizgili olan rijitlik matrisi isimleri doğrusal olmayan (5) denkleminden, üstü çizgisiz olanlar (6) denkleminden alınmıştır. İndisinde g harfi olanlar, geometrik rijitlik matrisini içeren tanjant rijitlik matrisi, olmayanlar ise sadece elastik rijitlik matrisleridir, yani (6) denklemindeki ilk matristir. İndisinde 4 rakamı olanlar birinci ve dördüncü satır ve kolonları olmayan 4×4 boyutlu olup elemanın eksenel uzama veya kısalmasının ihmal edildiği duruma karşı gelir. İndisinde 6 rakamı olanlar 6×6 boyutlu matrislerdir. Problemlerin çözümleri, Mathematica ile yazılan program sayesinde matris deplasman yönteminin uygulanması ile gerçekleştirilmiştir. Bu kısımda, daha önceki verilere uygun şekilde Elastisite modülü 2×10^5, kesit boyutu 1×1 olarak alınmıştır ve bundan sonraki diğer çözüm yöntemlerinde de karşılaştırmak amacıyla aynıları kullanılmıştır. Çizelge 2'deki yedinci kolondaki P_{cr} çerçevenin burkulma yükünü, son kolondaki K ise kolonun etkili boy katsayısını göstermektedir.

Çizelge 2'deki altıncı kolonda verilen n sayısı, çözümün yakınsaması için gerekli en az eleman ağıdır, yani bir kolon ve bir kiriş için kullanılan eleman sayısıdır. Doğrusal olmayan

matrislerin kullanıldığı 3, 4, 7, 8 durumlarında çözüme ulaşmak için birer elemanın yeterli olduğu görülmektedir.

Çizelge 2. Matris deplasman yöntemi ile yapılan çözümler

	Rijitlik matrisi						
	Boyut	1 nolu kolon	2 nolu kiriş	α^o	n	P_{cr}	K
1	4x4	k_{4g}	k_4	90	8	4733.85	0.5895
2	6x6	k_{6g}	k_6	90	8	4726.41	0.5899
3	4x4	$\bar{k}_{4g}$	k_4	90	1	4732.82	0.5895
4	6x6	$\bar{k}_{6g}$	k_6	90	1	4725.39	0.5900
5	6x6	k_{6g}	k_{6g}	0	20	9876.99	0.5771
6	6x6	k_{6g}	k_{6g}	90	9	4757.95	0.5898
7	6x6	$\bar{k}_{6g}$	k_{6g}	90	1	4757.31	0.5898
8	6x6	$\bar{k}_{6g}$	$\bar{k}_{6g}$	90	1	4757.31	0.5898



Şekil 6. Mathematica ile çözülen sistem burkulma yükü P_{cr} ve kolon etkili uzunluk katsayısı K nın, kirişin eğimi α ya göre değişimi

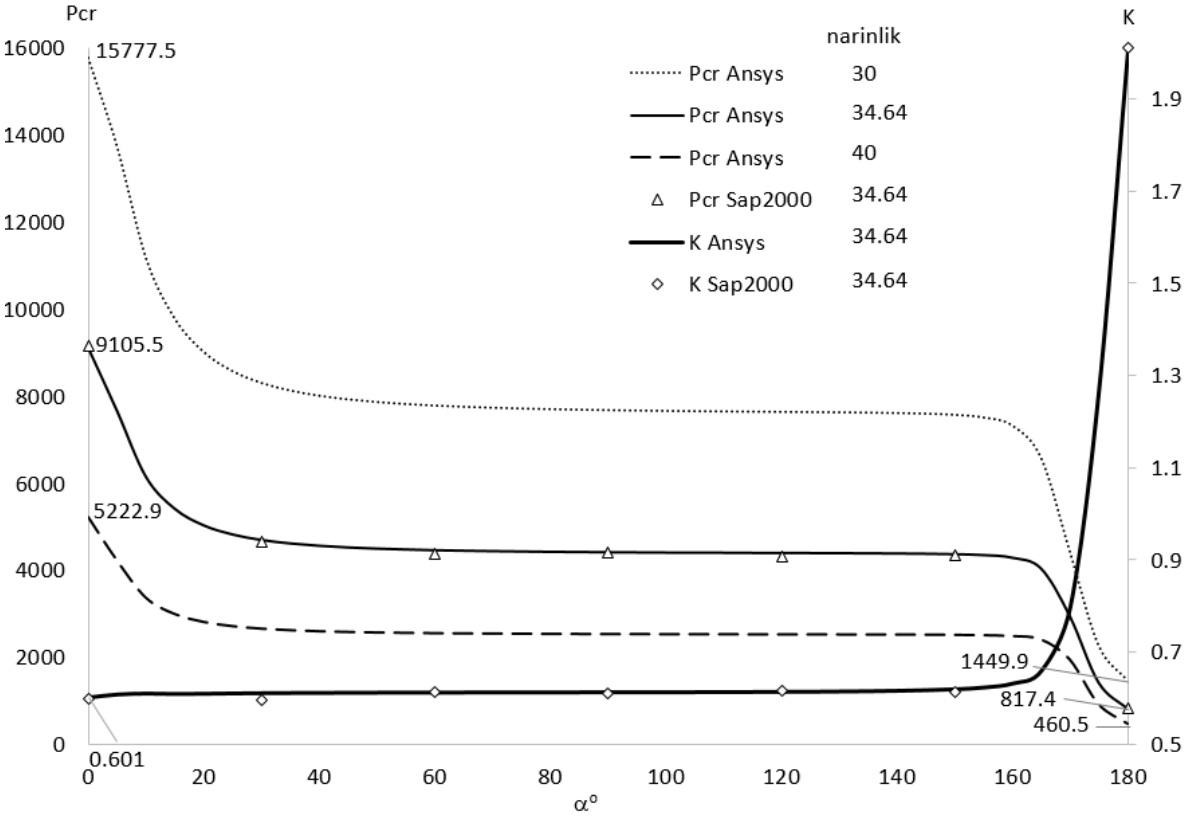
Elemanların uzama ve kısalmalarının çözüme etkisini görmek için, 1 durumu ile 2 durumunu veya 3 durumu ile 4 durumunu karşılaştırmak gerekir. Bu etki gözönüne alındığında, sistemin burkulma yükünün azaldığı görülmektedir. Kirişteki eksenel çekme kuvveti, 6,7,8 durumlarında hesaba eklenmiştir. Bu etkinin alınmadığı 1-3 durumları ile karşılaştırılır ise, kirişteki çekme kuvvetinin yardımcı olduğu ve sistemin burkulma yükünü arttırdığı, fakat bu

etkinin bu sistemde çok az olduğu görülmektedir. Bundan sonraki sunulan çözümlerde durum 7 deki rijitlik matrisleri kullanılmıştır.

Kiriş eğimi α ya göre, sistem burkulma yükü P_{cr} ve kolon etkili uzunluk katsayısı K nın değişimi, sırasıyla sol ve sağ düşey eksenlerde Şekil 6'da çizilmiştir [8]. İnce kesikli çizgi ile kolondaki eksenel basınç kuvveti de gösterilmiştir.

Sonlu Elemanlar Programları ile Çözümler

Problem, Ansys Mechanical APDL 19.2 ile yazılan bir program ile çözülmüştür [9]. Üç boyutlu BEAM 188 sonlu elemanı kullanılmıştır. Önceki bölümde kullanılan aynı geometrik ve mekanik veriler kullanılmıştır, buna göre elemanların narinliği 34.64 değerindedir. Bu programda burkulma yükü hesabı için sunulan yöntemler arasından özdeğer çözümü tercih edilmiştir. Sisteme birim yük verilerek bulunan katsayı programın verdiği sistem burkulma yüküdür. Bulunan bu değerin statik hesapta kolona denk gelen eksenel yük oranı, euler formülüne eşitlenerek kolonun etkili boyu hesaplanmıştır. Önce bir ağ çalışması yapılmış ve sonuca yakınsamak için kolon için en az 10 eleman kullanılması gerektiği anlaşılmış ve bundan sonraki sunulan çözümlerde 600'er eleman kullanılmıştır.



Şekil 7. Sistem burkulma yükü P_{cr} nin 30, 34.64, 40 narinlik değerlerinde ve etkili boy katsayısı K nın, kirişin eğimi α ya göre değişimi

Şekil 7'de 30, 34.64, 40 narinlik değerlerinde, sistem burkulma yükünün, kiriş eğimine göre değişimi gösterilmiştir. Aynı grafikte, etkili boy katsayısı K nın kiriş eğimine göre değişimi kalın düz çizgi ile sağ düşey eksende gösterilmiştir.

SAP2000 programı ile kolon ve kiriş için 1000'er adet eleman kullanılarak bulunan çözümler Şekil 7'de işaretlenmiştir [10].

KARŞILAŞTIRMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada, farklı eğimlere sahip kirişin, birleştiği kolonun etkili burkulma boyuna etkisi, basit bir moment aktaran çerçeveden oluşan sistem üzerinde incelenmiştir. Çerçevenin farklı yöntemler ile α=0^o, 90^o, 180^o kiriş eğimleri için bulunan sonuçlar Çizelge 3 te özetlenmiştir. Ayrıca, Şekil 8'de etkili boy katsayısının kiriş eğimine göre değişimi çizilmiştir. Problem, diferansiyel denklem, matris deplasman yöntemi, nomogram ve sonlu elemanlar programları kullanılarak çözülmüştür.

Çizelge 3. Farklı yöntemler ile $\alpha = 0^o, 90^o, 180^o$ için bulunan çözümler

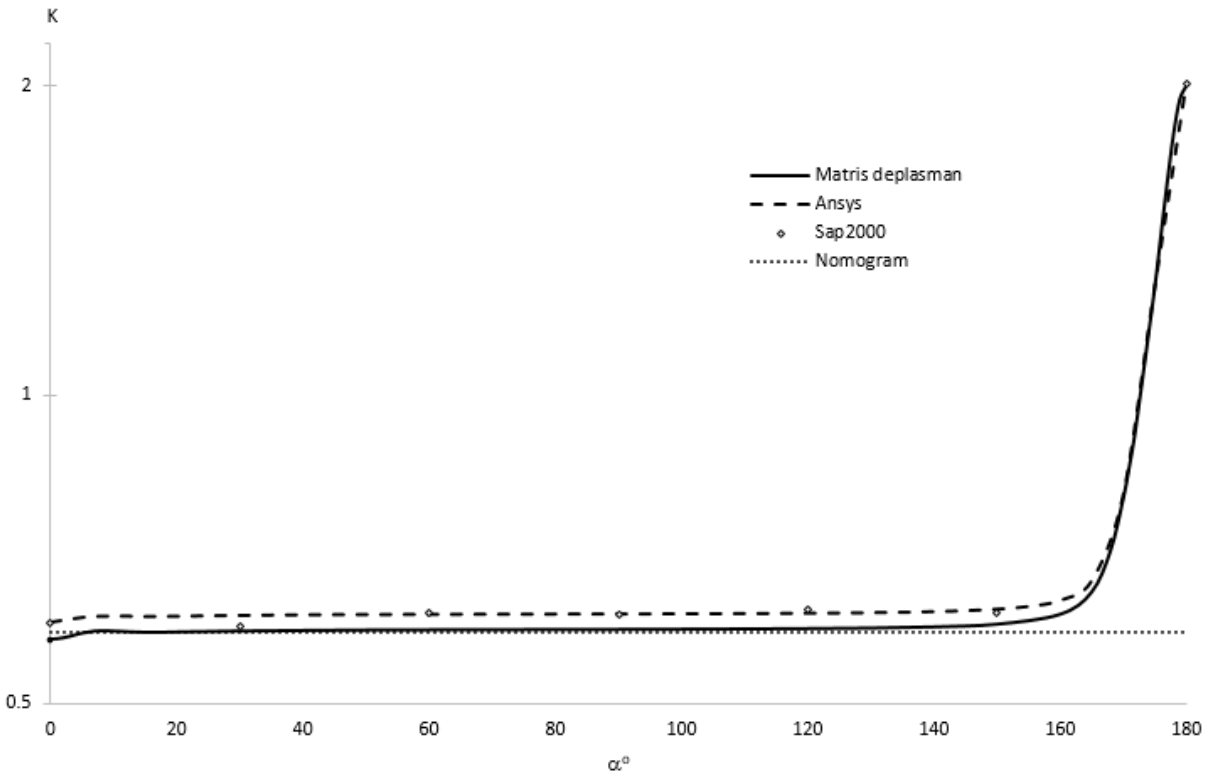
Kiriş eğimi α^o	Yöntem	P_{cr}	K
0	Basit bir yaklaşım	13159.47	0.500
	Matris deplasman	9876.92	0.577
	Ansys	9105.50	0.601
	SAP2000	9142.24	0.600
180	Basit bir yaklaşım	822.47	2.000
	Ansys	817.40	2.006
	SAP2000	816.24	2.210
90	Diferansiyel denklem	4732.83	0.589
	Nomogram	4762.21	0.588
	Matris deplasman	4757.10	0.589
	Ansys	4414.10	0.612
	SAP2000	4415.15	0.610

Mathematica programı ile uygulanan matris deplasman yöntemi çözümlerinde, doğrusal olmayan eleman rijitlik matrisi kullanıldığında çözümün yakınsaması için bir elemanın yeterli olduğu görülmüştür. Fakat, tahmin edilebileceği gibi, tek eleman ile kesin çözümü veren doğrusal olmayan karakteristik denklemin Newton Raphson yöntemi ile sayısal çözümü daha uzun sürmektedir.

Yine matris deplasman yönteminde, kiriş için eksenel çekme kuvvetinin etkisini içeren rijitlik matrisi kullanıldığında, beklendiği gibi sistemin burkulma yükünü arttırdığı, fakat bu etkinin bu çalışmada seçilen çerçeve için az olduğu görülmektedir.

Sonlu elemanlar programları Ansys ve Sap2000 ile herhangi özel bir ekleme yapılmadan standart elemanları kullanarak yapılan çözümlerde kesin çözüme en az 10 eleman ile ulaşılabileceği tecrübe edilmiştir.

Çözümler yanal ötelenmesi engellenmiş sistem için Çizelge 3'te sunulmuş ve güncel yönetmeliklerde önerilen nomogram ile karşılaştırılmıştır. Nomogram sonucunun ve yapı stabilitesi kitaplarında kullanıldığı şekliyle, kirişlerin eğimlerinin ihmal ediliyor olmasının inşaat mühendisliği uygulamalarında gerçekçi olduğu, fakat yüksek eğimli birleşimlerde gözönüne alınması gerektiği gözlenmiştir.



Şekil 8. Farklı yöntemlerle bulunan kolon etkili uzunluk katsayısı K nın, kirişin eğimi α ya göre değişimi

KAYNAKLAR

[1] ÇYTHYE, Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapımına dair Esaslar, T.C. Resmi Gazete, Sayı: 30333, 15 Şubat 2018.

[2] A. Chajes, *Principles of Structural Stability*, Prentice-Hall, 1974.

[3] W.F. Chen, E.M. Lui, *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier, 1987.

[4] E.M. Lui, A Novel Approach for K Factor Determination, *Engineering Journal*. AISC, 29 (1992) 150–159.

[5] E.M. Lui, Column Effective Length Factor for Semi-Rigid Frames, *Steel Structures, Journal of Singapore Structural Steel Society*. 6 (1995) 3–20.

[6] L.W. Lu, Effective Length of Columns in Gable Frames, *Engineering Journal, AISC*. 2-1 (1964) 6–12.

[7] K. Girgin, G. Özmen, E. Orakdöğen, Düzensiz Çerçevelerde Kolon Burkulma Boyları, *TMH-Türkiye Mühendislik Haberleri*. 436 (2005) 28–36.

[8] A. Hicazi, *Some notes on the effective length of a column in a frame and global versus member buckling of a truss system*, Yüksek Lisans tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2021.

[9] Ansys Reference Manual, Ansys Inc., 2013.

[10] Sap2000. Structural Analysis Program Computer and Structures Inc., Berkeley, California.

ELASTİK TEMEL ÜZERİNDE RİJİTLİĞİ ANİ DEĞİŞEN TABAKALI KOMPOZİT BERNOULLI-EULER ÇUBUKLARIN STABİLİTE ANALİZİ

Ali Nuri Doğruoğlu[1], Sedat Kömürcü[2]
[1,2]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Composite rods are widely used in modern engineering applications. Determining the stability behavior of composite rods is one of the most important topics in structural analysis. In this study, stability analysis of laminated composite rods with sudden changes in stiffness on elastic foundation under loading are carried out. A functional obtained with the help of mixed finite element method is used to perform stability analysis. In the functional the boundary conditions terms are used effectively. The performance and superiority of the obtained functional in the analysis of beams resting on elastic foundation is demonstrated by testing with various numerical samples. The buckling loads and mode shapes of the laminated composite beams on the elastic foundation are determined by considering the fixed-free, pinned-pinned, fixed-pinned, fixed-fixed support situations. When the obtained results are compared with various numerical examples in the literature, successful results are obtained. Analyzing the stability behavior of composite rods with the functional obtained by the mixed finite element method and obtaining high precision results offers a useful approach in the analysis of composite rods. It can be said that; The functional can be used effectively in modern applications of stability analysis of composite beams.

Keywords: buckling; Bernoulli-Euler; changing rigidity; composite rods; elastic foundation; mixed finite elements; stability

ÖZET

Kompozit malzemeler modern mühendislik uygulamalarında geniş bir kullanım alanına sahiptirler. Kompozit çubukların stabilite davranışlarının belirlenmesi yapısal analizlerin en önemli konularından biridir. Bu çalışmada, elastik temel üzerinde rijitliği ani değişen tabakalı kompozit çubukların yükleme altında stabilite analizleri yapılmaktadır. Stabilite analizlerinin yapılmasında karışık sonlu elamanlar yöntemi yardımıyla elde edilen bir fonksiyonel kullanılmaktadır. Kompozit malzeme parametreleri kullanılarak elde edilen fonksiyonelde sınır koşulları terimleri etkili bir şekilde kullanılmaktadır. Elde edilen fonksiyonelin elastik temel üzerine oturan kirişlerin analizlerinin yapılmasındaki performansı ve üstünlüğü çeşitli sayısal örneklerle test edilerek gösterilmektedir. Ankastre-serbest, sabit-sabit, ankastre-sabit, ankastre-ankastre mesnetlenme durumları göz önüne alınarak elastik temel üzerindeki tabakalı kompozit kirişlerin burkulma yükleri ve mod şekilleri belirlenmektedir. Elde edilen sonuçlar literatürdeki çeşitli sayısal örneklerle karşılaştırıldığında oldukça başarılı sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Kompozit çubukların stabilite davranışlarının karışık sonlu elemanlar yöntemiyle elde edilen fonksiyonellerle analiz edilmesi ve yüksek hassasiyette sonuçların elde

edilmesi kompozit çubukların incelenmesinde faydalı bir yaklaşım sunmaktadır. Sonuçlara dayanarak söylenilebilir ki; elde edilen fonksiyonel yapı kompozit kirişlerin stabilite analizlerine dair modern uygulamalarda etkili bir şekilde kullanılabilir.

Anahtar kelimeler: burkulma; Bernoulli-Euler; değişken rijitlik; elastik temel; karışık sonlu elemanlar; kompozit çubuk; stabilite

GİRİŞ

Tabakalı kompozit kirişler birçok mühendislik alanında uygulama alanı olan yapısal elemanlardır. Tabaka, bir dizi fiberin matris adı verilen bir malzeme tarafından sarılmasıyla oluşan yapıdır. Tabakalar birleşerek kompozit kiriş elemanları oluşturmaktadırlar. Elastik temel üzerine oturan kompozit kirişlerin stabilite davranışlarının analizi; inşaat, makine ve uçak-uzay mühendisliği başta olmak üzere birçok alanda yapıların tasarımında oldukça önem arz eden bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Burkulma kavramı Leonhard Euler'in [1] çalışmaları ile başlar. Yapıların burkulma analizi, yapıların türü ve geometrisine göre çok çeşitli şekillerde karşımıza çıkmaktadır ve bu konuda birçok çalışma yapılmaktadır [2,3]. Kirişlerin elastik temeller üzerindeki yapısal davranışlarının belirlenmesi araştırmacılar tarafından incelenen problemlerdendir [4-7]. Tabakalı kompozit kirişlerin stabilite davranışlarının incelenmesi konusunda ortaya konan çalışmalar vardır ve günümüzde de devam etmektedir [8-10].

Bu çalışmada, rijitliği düzgün ve ani değişen ve elastik temel üzerine oturan tabakalı kompozit kirişlerin kritik burkulma yükünün hesaplanması ve kompozit kirişlerin burkulma modları belirlenmektedir. Bu sayede kompozit kirişlerin stabilite davranışlarının anlaşılmasına ve yeni problemlerin çözümlerinin oluşturulmasına katkı sağlanması beklenmektedir.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Kompozit kirişlerin burkulma analizinde, karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bir fonksiyonel elde edilmektedir. Elde edilen fonksiyonel Bernoulli-Euler kiriş teorisini esas almaktadır. Kirişlerin malzemesi tabakalı kompozittir. Denklem (1)'de yer değiştirme alanı gösterilmektedir. *U, V* ve *W* sırasıyla *x, y* ve *z* koordinatları boyunca yer değiştirmelerdir.

$$\begin{aligned} U(x,z) &= u(x) - z\frac{dw}{dx} \\ V(x,z) &= 0, \\ W(x,z) &= w(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Şekil değiştirmeler denklem (2)'de gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}w'^2 - z\frac{d^2w}{dx^2} \\ \gamma_{xz} &= -\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx} \Rightarrow \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Tabakalı kompozit kirişte *k* numaralı tabakada oluşan gerilmeler;

$$\sigma_x^{(k)} = Q_{11}^{(k)}\varepsilon_x \tag{3}$$

Virtüel-İş denklemi kullanılırsa;

$$\int_L \iint_A \left[\sigma_x^{(k)} \delta\varepsilon_x\right] dA dx + \int_L \left[k\, w\right] \delta w dx = 0 \tag{4}$$

δ operatörün değişimini göstermektedir. A kesit alanını, L çubuğun boyunu göstermektedir. k terimi zemin etkisini göstermektedir. Denge denklemleri denklem (5)'te görülmektedir.

$$\begin{aligned} -\frac{dN_x}{dx} &= 0 \\ -\frac{d^2 M_x}{dx^2} + kw &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Kesit tesirleri (N, M) aşağıda tarif edilmektedir. A_{11} B_{11}, D_{11} rijitlikleri göstermektedir.

$$(N, M) = \iint_A \sigma_x (1, z) \mathrm{dA}, \tag{6}$$

$$(\mathrm{A}_{11}\ , \mathrm{B}_{11},\ \mathrm{D}_{11}\ ) = \iint_A Q_{11}^{(k)} (1, z, z^2) \mathrm{dA}, \tag{7}$$

Kullanılan bünye bağıntıları denklem (8)'de verilmektedir. Determinant değeri $A_{11}D_{11}$-B_{11}^2 olarak belirlenir.

$$\begin{aligned} \frac{D_{11}N_x - B_{11}M_x}{Deter} &= \frac{du}{dx} \\ \frac{B_{11}N_x - A_{11}M_x}{Deter} &= \frac{d^2 w}{dx^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Alan denklemleri operatör biçiminde denklem (9) ile gösterilebilir;

$$K(\mathbf{u}) = P(\mathbf{u}) - \mathbf{f} = \mathbf{0} \tag{9}$$

Eğer $P(\boldsymbol{u})$ potansiyel ise, gradyanı $P(\boldsymbol{u})$ operatörü olan bir fonksiyonel $I(\boldsymbol{u})$ vardır. Bir $P(\boldsymbol{u})$ operatörün potansiyel olup olmadığını incelemek için denklem (10)'deki koşul sağlanmalıdır.

$$\left\langle d\mathrm{P}(\mathbf{u};\boldsymbol{\eta}), \boldsymbol{\zeta} \right\rangle = \left\langle d\mathrm{P}(\mathbf{u};\boldsymbol{\zeta}), \boldsymbol{\eta} \right\rangle \tag{10}$$

Bu ifade, $P(\boldsymbol{u})$'nun potansiyel olması için gerekli ve yeterli koşuldur. Yukarıdaki ifadeler $P(\boldsymbol{u})$ operatörün η ve ζ doğrultularında Gâteaux diferansiyelleridir ve denklem (11)'deki ifadeyle tanımlanmaktadır [11].

$$d\mathrm{P}(\mathbf{u};\boldsymbol{\eta}) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left[\mathrm{P}(\mathbf{u} + \tau\boldsymbol{\eta}) - \mathrm{P}(\mathbf{u})\right] \tag{11}$$

Gerçek sınır koşulları denklem (12) 'de görülmektedir.

$$\begin{aligned} \left\langle \delta, T \right\rangle_\varepsilon &\equiv -\left\langle \delta^+, T^* \right\rangle_0^\varepsilon \equiv -\left\langle u, N_x \right\rangle_\varepsilon - \left\langle w, \frac{dM_x}{dx} \right\rangle_\varepsilon \\ \left\langle \Omega, M \right\rangle_\varepsilon &\equiv -\left\langle \Omega^+, M^* \right\rangle_0^\varepsilon \equiv +\left\langle w', M_x \right\rangle_\varepsilon \\ \left\langle T, \delta \right\rangle_\sigma &\equiv -\left\langle T^+, \delta^* \right\rangle_0^\sigma \equiv +\left\langle N_x, u \right\rangle_\sigma \equiv +\left\langle \frac{dM_x}{dx}, w \right\rangle_\sigma \\ \left\langle M, \Omega \right\rangle_\sigma &\equiv -\left\langle M^+, \Omega^* \right\rangle_0^\sigma \equiv -\left\langle M_x, w' \right\rangle_\sigma \end{aligned} \tag{12}$$

Problemin sınır koşulları;

$$
\begin{aligned}
&-u = -\hat{u} \\
&-w = -\hat{w} \\
&-w' = -\hat{w}' \\
&N_x = \hat{N}_x \\
&\frac{dM_x}{dx} = \frac{d\hat{M}_x}{dx} \\
&M_x = \hat{M}_x
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Kompozit kirişlerin burkulma analizinde kullanılacak fonksiyonel denklem (14)'de görülmektedir.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(\mathbf{u}) = &\left\langle N_x, \frac{du}{dx} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle N_x, w'^2 \right\rangle + \left\langle \frac{dM_x}{dx}, \frac{dw}{dx} \right\rangle + \frac{1}{2}\langle kw, w \rangle \\
&- \frac{D_{11}}{2Deter}\langle N_x, N_x \rangle + \frac{B_{11}}{Deter}\langle M_x, N_x \rangle - \frac{A_{11}}{2Deter}\langle M_x, M_x \rangle \\
&- \left[(u-\hat{u}), N_x\right]_\varepsilon - \left[(w-\hat{w}), (\frac{dM_x}{dx} + N_x w') \right]_\varepsilon - \left[\hat{w}', M_x\right]_\varepsilon \\
&- \left[\hat{N}_x, u\right]_\sigma - \left[(\frac{d\hat{M}_x}{dx} + \hat{N}_x w'), w \right]_\sigma - \left[(M_x - \hat{M}), w' \right]_\sigma
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Fonksiyonelde $[\ldots]_\varepsilon$ ve $[\ldots]_\sigma$ sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını ifade etmektedir. Analizlerde çözüm yöntemi olarak artımsal formülasyon kullanılmaktadır.

SAYISAL ÖRNEKLER

Tabakalı kompozit kirişlerin stabilite analizi için elde edilen fonksiyonelin performansını göstermek üzere sayısal örnekler sunulmaktadır. Analizde [8] çalışmasındaki malzeme özellikleri kullanılmıştır. $E_1/E_2=40;\ G_{12}=G_{13}=0.6E_2;\ G_{23}=0.5E_2;\ \upsilon_{12}=0.25$. Malzemede tüm tabakaların aynı kalınlığa ve ortotrop malzeme özelliklerine sahip olduğu varsayılmaktadır. Kirişin tabaka açıları $0^0/90^0/0^0$ olarak verilmektedir. Ankastre-serbest(AN-SE), sabit-sabit(SA-SA), ankastre-sabit(AN-SA) ve ankastre-ankastre(AN-AN) mesnet tipleri kritik burkulma yükü elde etmek için incelenmiştir. Çapraz tabakalı dikdörtgen kirişlerin kritik burkulma yükleri denklem (15) ile boyutsuz büyüklük olarak yazılır. L kirişin uzunluğu ve b genişliktir.

$$
P = \frac{P_{cr} L^2}{E_2 b h^3} \tag{15}
$$

Winkler zemin modelinde boyutsuz zemin parametresi K_w ile Winkler zemin parametresi k ilişkisi aşağıda tanımlanmaktadır.

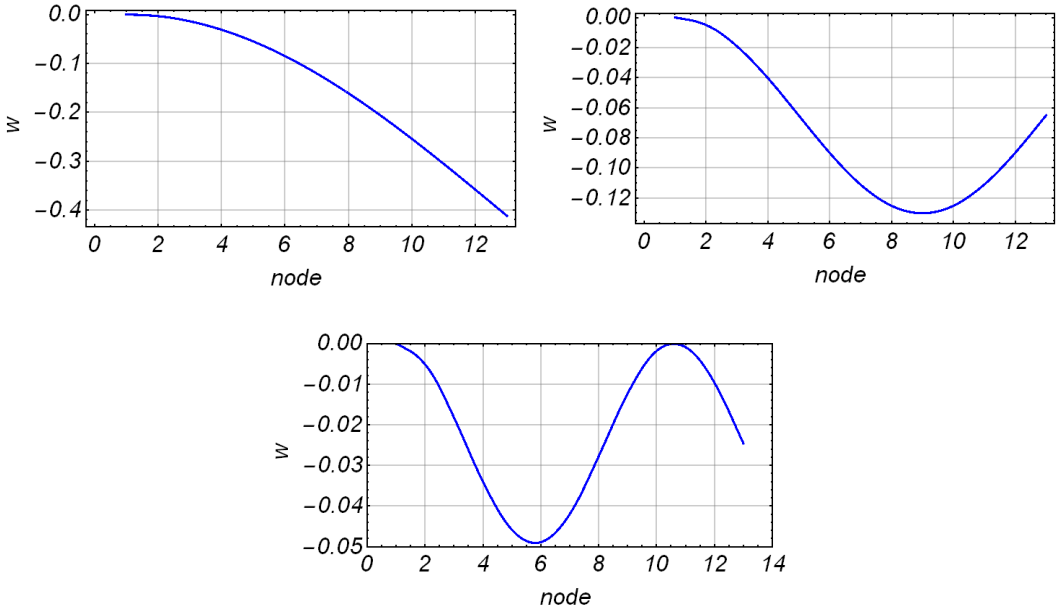
$$
k = \frac{K_w E_2 b h^3}{L^4} \tag{16}
$$

Çizelge 1'deki sonuçlar tekil P yükü için gösterilmektedir. Parantezler içindeki değerler kesin sonuçları göstermektedir. Analizlerde kübik yapıda şekil fonksiyonları kullanılmaktadır.

Çizelge 1. Boyutsuz burkulma yükleri

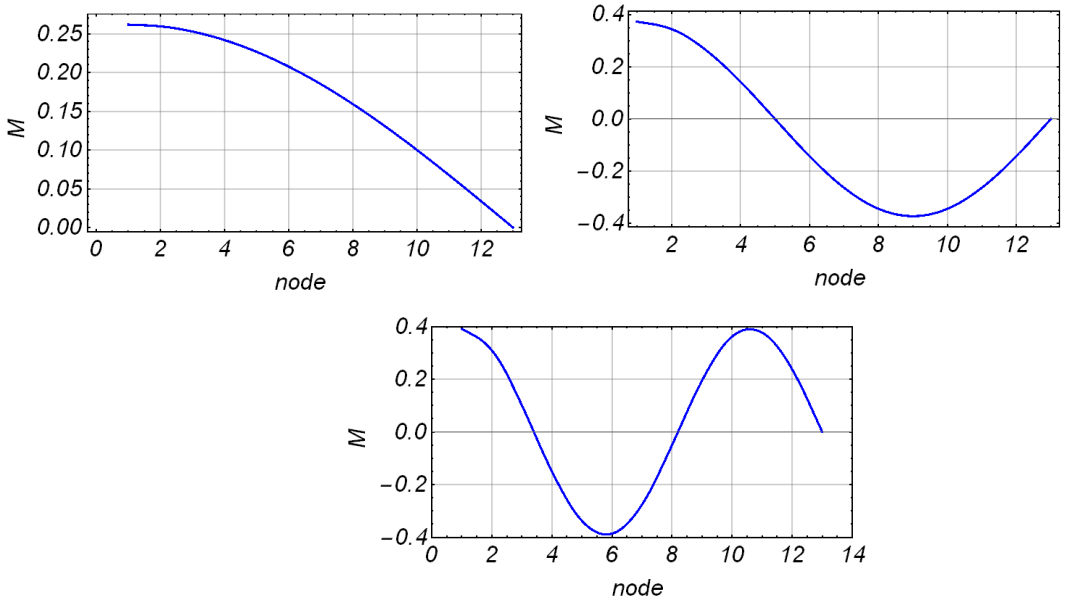
K_w	AN-SE	SA-SA	AN-SA	AN-AN
0	7,94008 (7,940)	31.7603 (31,760)	64.97363 (64,974)	127.04177 (127,041)
200	31,54317	52.02454	81.31745	142.15316

Çizelge 1'den görüldüğü üzere elde edilen fonksiyonel ile belirlenen kompozit çubuklar için kritik burkulma yükleri kesin sonuçlar ile uyuşmaktadır. Ankastre-Serbest uçlu kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 1'de görülmektedir.



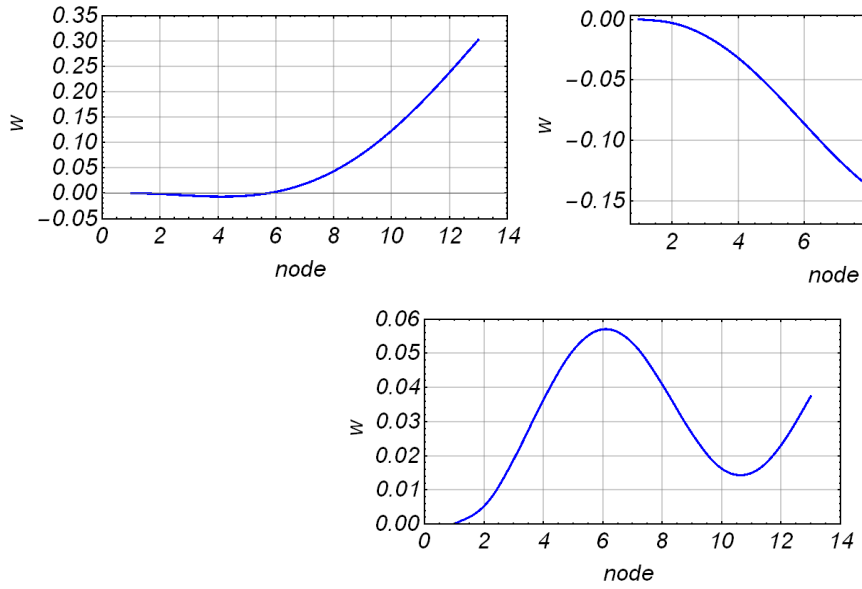
Şekil 1. Ankastre-Serbest mesnetli kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Ankastre-Serbest uçlu kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 2'dedir.



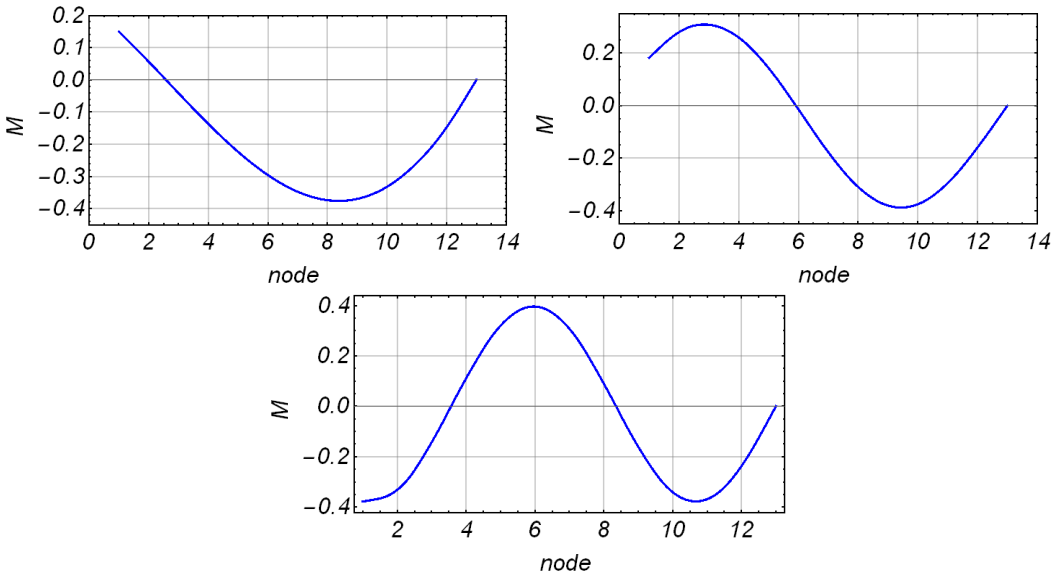
Şekil 2. Ankastre-Serbest mesnetli kirişte M için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinin bulunması durumunda ankastre-serbest uçlu kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 3'de görülmektedir.



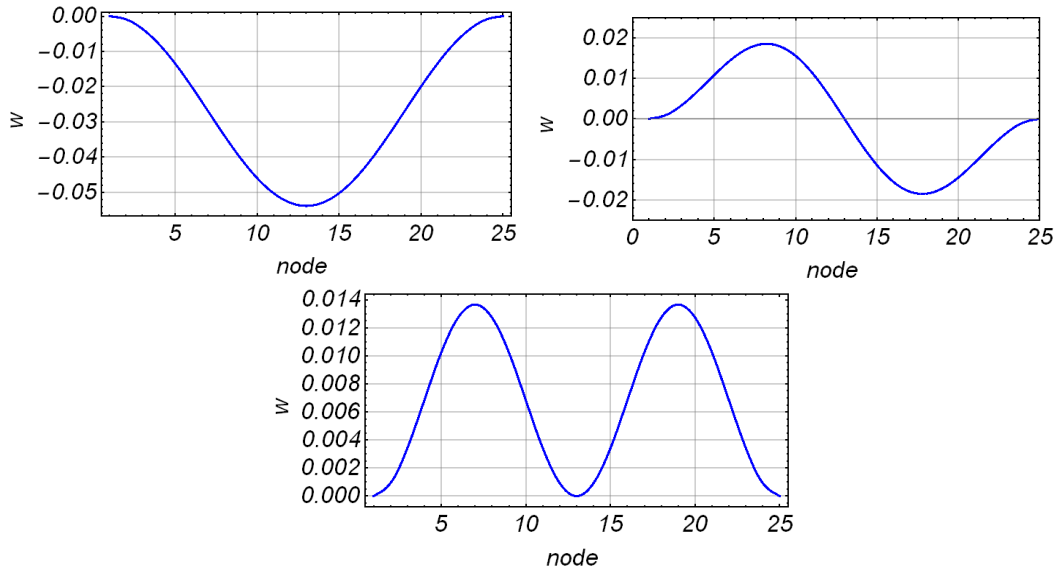
Şekil 3. Zemin etkisinde ankastre-serbest mesnetli kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinin bulunması durumunda ankastre-serbest uçlu kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 4'de görülmektedir.



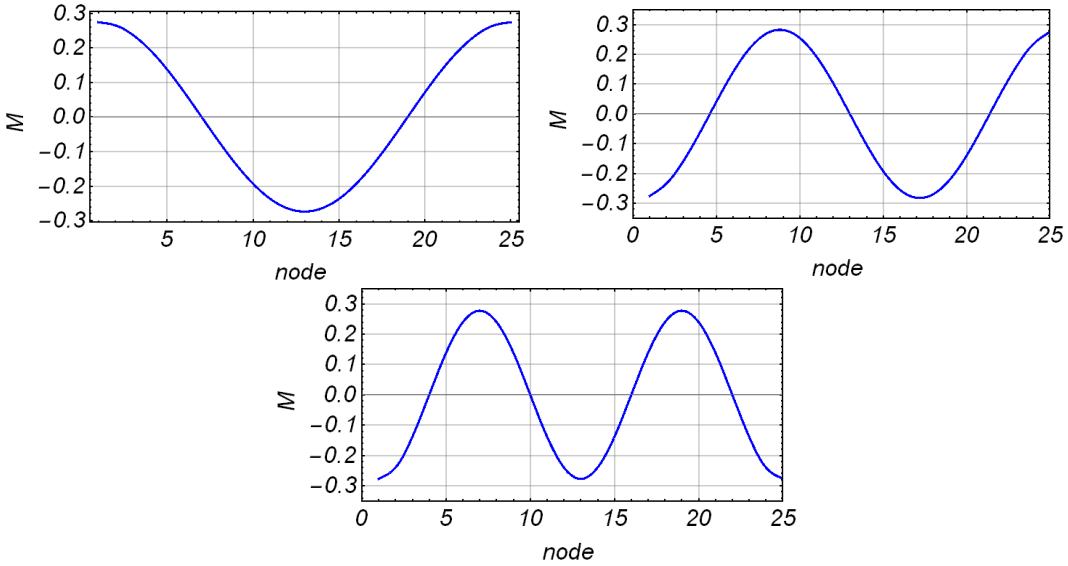
Şekil 4. Zemin etkisinde ankastre-serbest mesnetli kirişte M için 1., 2., 3. burkulma modları

Ankastre-Ankastre kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 5'te görülmektedir.



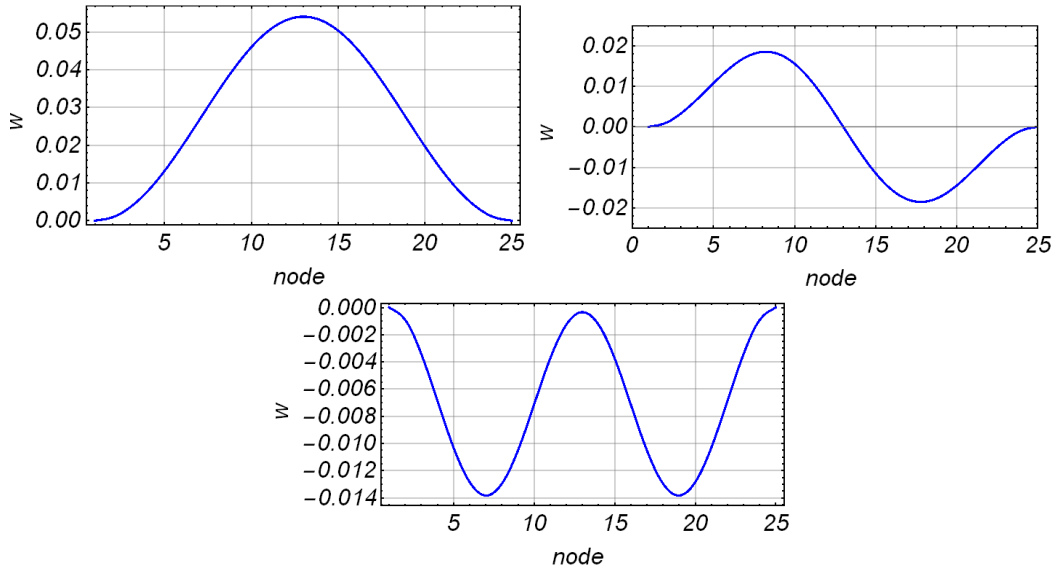
Şekil 5. Ankastre-Ankastre mesnetli kiriş w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Ankastre-Ankastre uçlu kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 6'dadır.



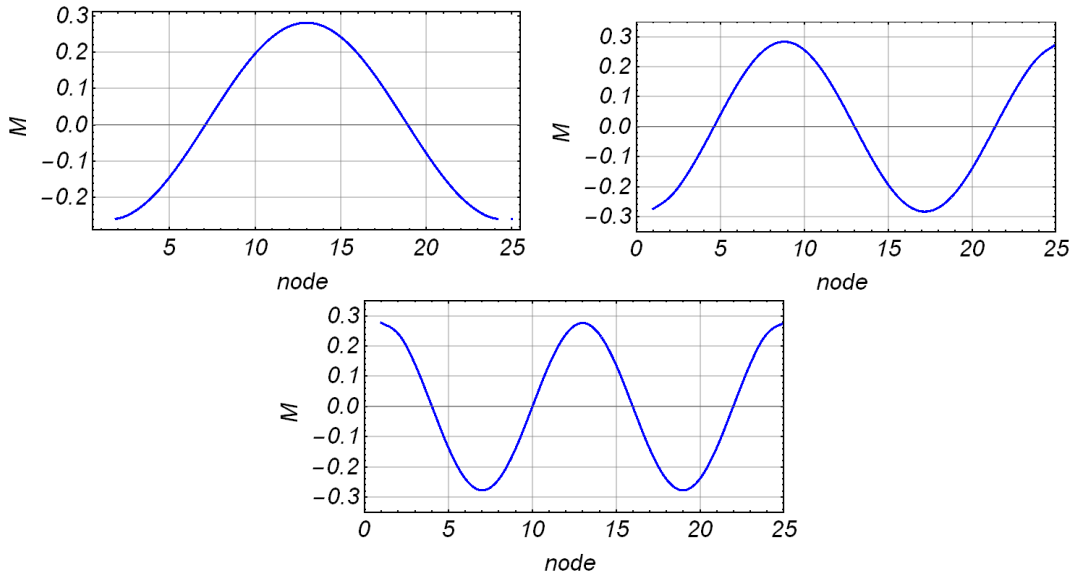
Şekil 6. Ankastre-Ankastre mesnetli kiriş M için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinin bulunması durumunda Ankastre-Ankastre kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 7'de görülmektedir.



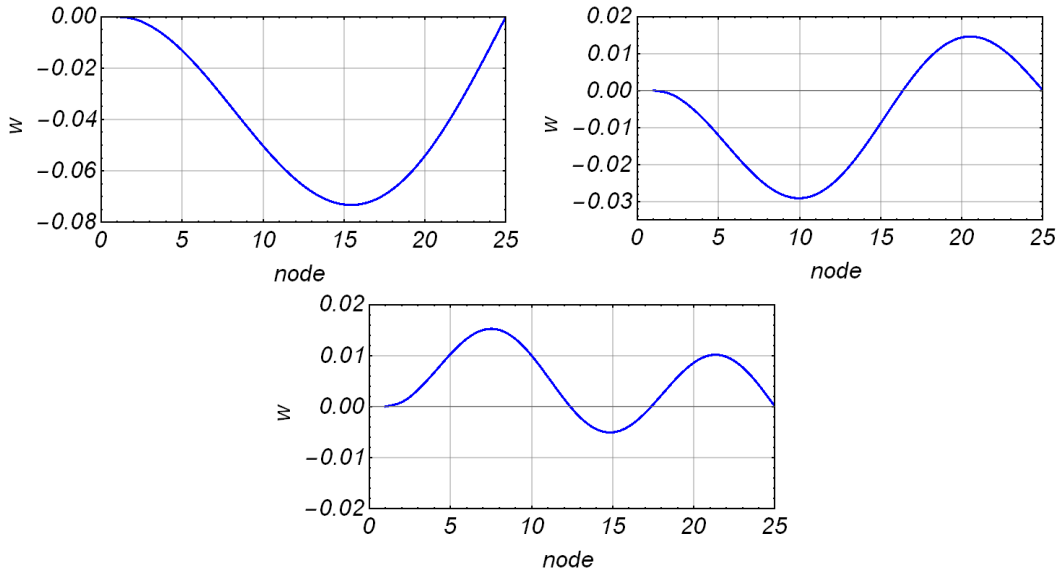
Şekil 7. Zemin etkisinde ankastre-ankastre mesnetli kirişte w için 1., 2., 3. burkulma modları

Zemin etkisinin bulunması durumunda Ankastre-Ankastre kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 8'de görülmektedir.



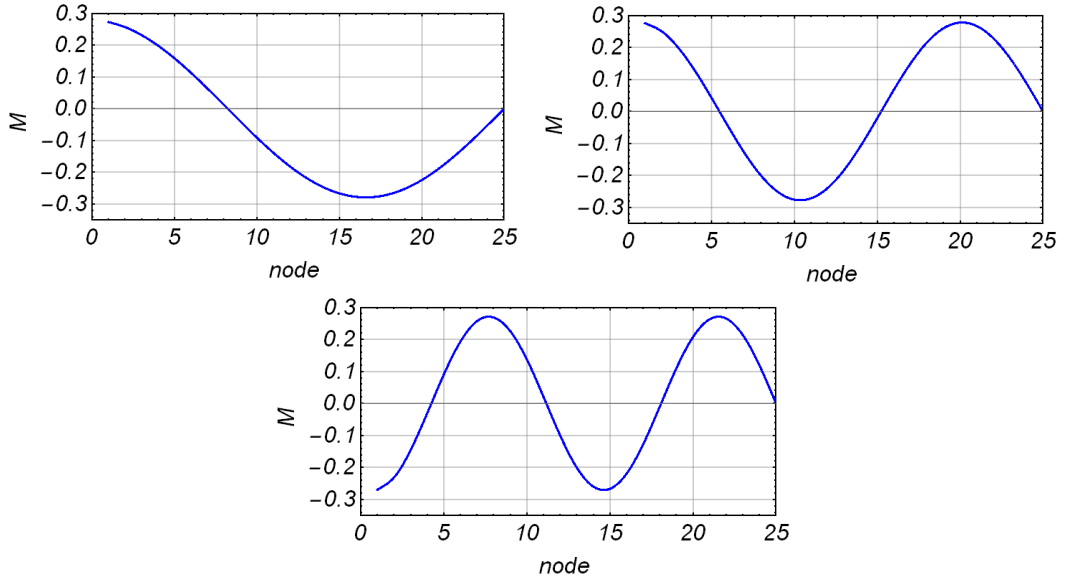
Şekil 8. Zemin etkisinde ankastre-ankastre mesnetli kirişte M için 1., 2., 3. burkulma modları

Ankastre-Sabit mesnetli kirişte 1., 2. ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 9'da görülmektedir.



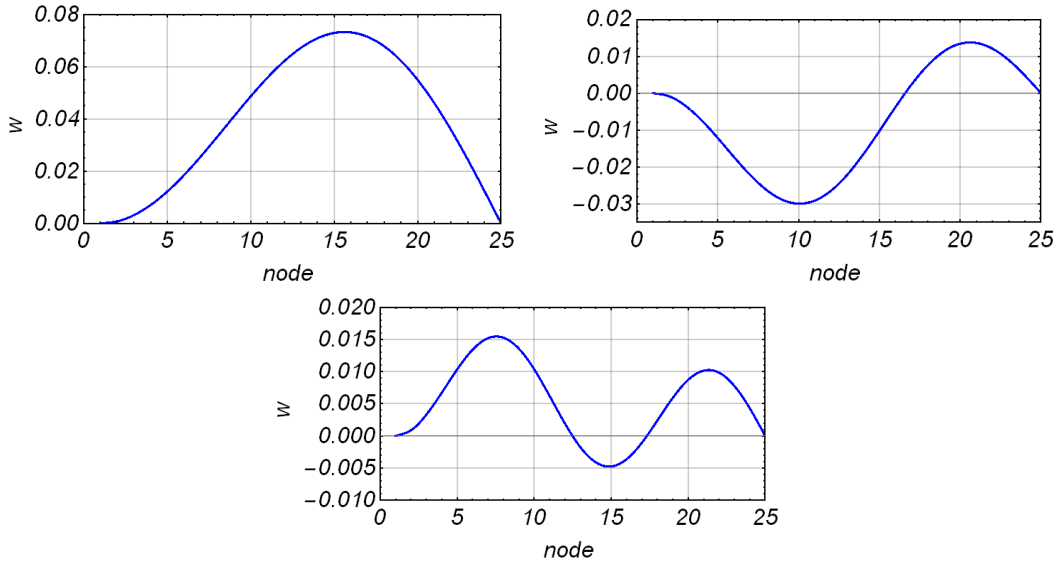
Şekil 9. Ankastre-Sabit mesnetli kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Ankastre-Sabit mesnetli kirişte için 1., 2., ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 10'da görülmektedir.



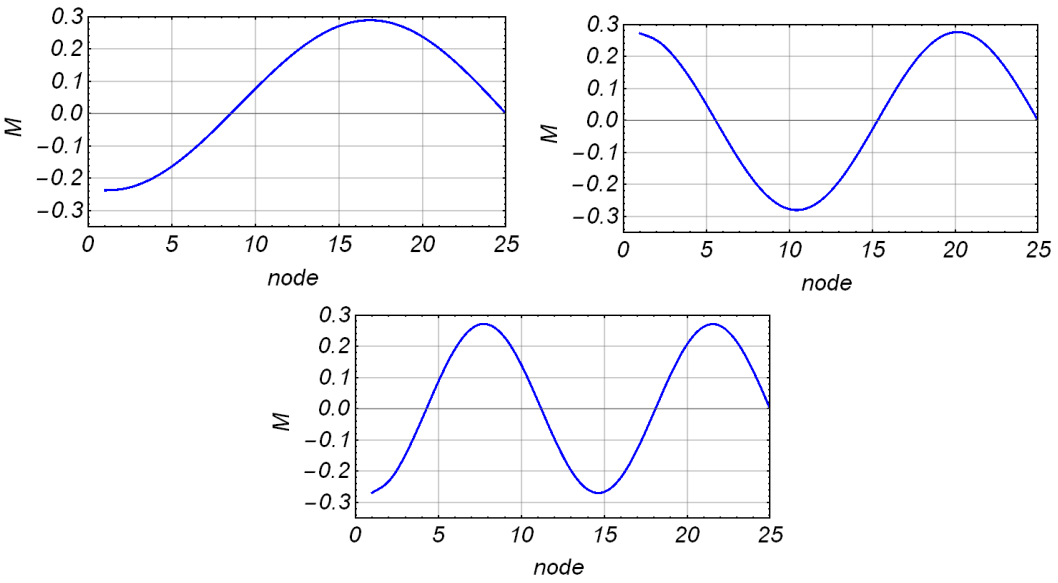
Şekil 10. Ankastre-Sabit mesnetli kiriş M için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinde Ankastre-Sabit mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 11'de görülmektedir.



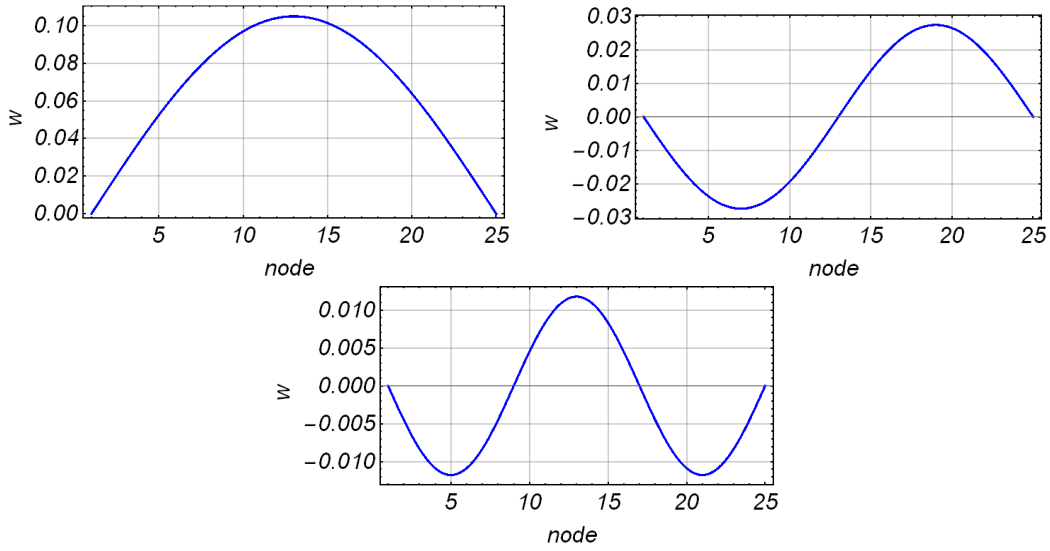
Şekil 11. Zemin etkisinde Ankastre-Sabit mesnetli kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinde Ankastre-Sabit mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 12'de görülmektedir.



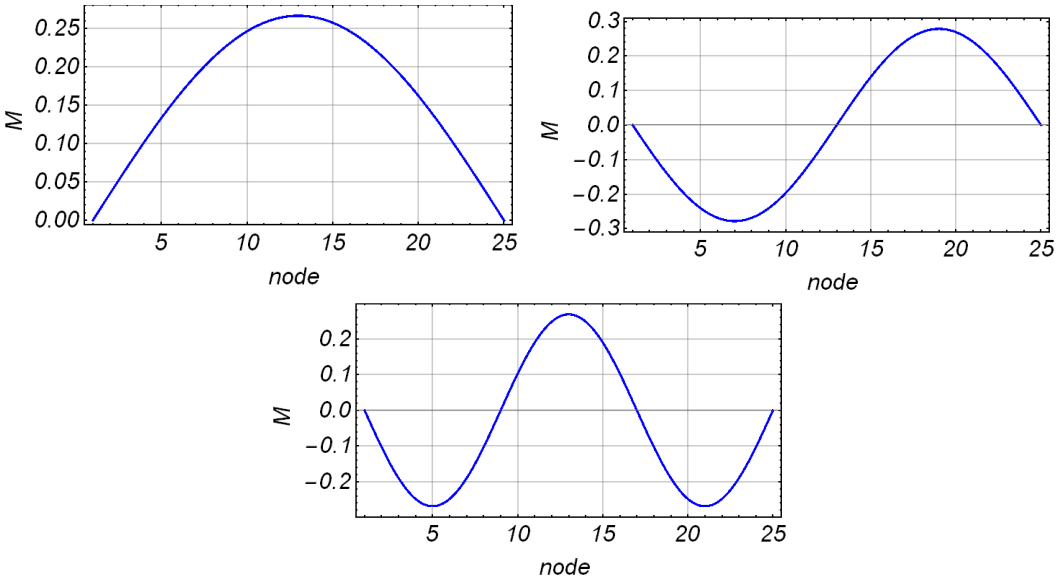
Şekil 12. Zemin etkisinde Ankastre-Sabit mesnetli kirişte M için 1., 2., 3. burkulma modları

İki ucu mafsallı mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 13'de görülmektedir.



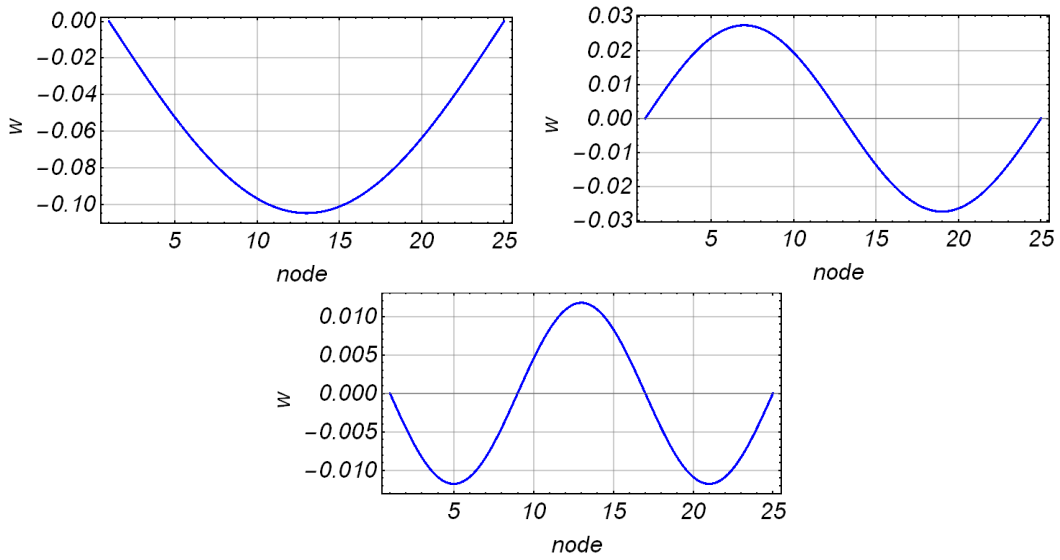
Şekil 13. İki ucu mafsallı mesnetli kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

İki ucu mafsallı mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları M değeri için Şekil 14'de görülmektedir.



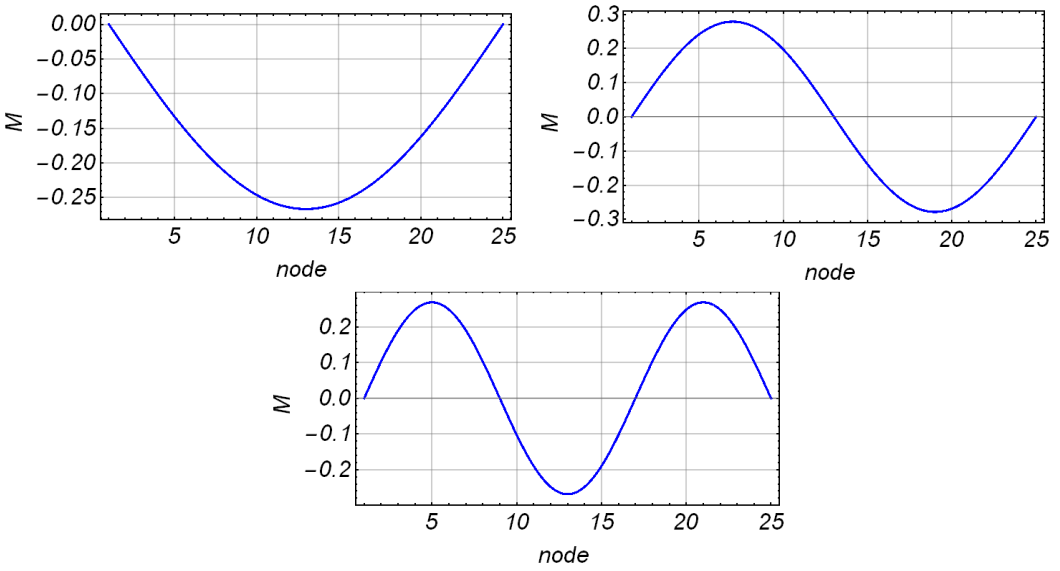
Şekil14. İki ucu mafsallı mesnetli kirişte M için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinde iki ucu mafsallı mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları w değeri için Şekil 15'de görülmektedir.



Şekil 15. Zemin etkisinde iki ucu mafsallı mesnetli kirişte w için 1., 2., 3. burkulma modları

Zemin etkisinde iki ucu mafsallı mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 16'da görülmektedir.



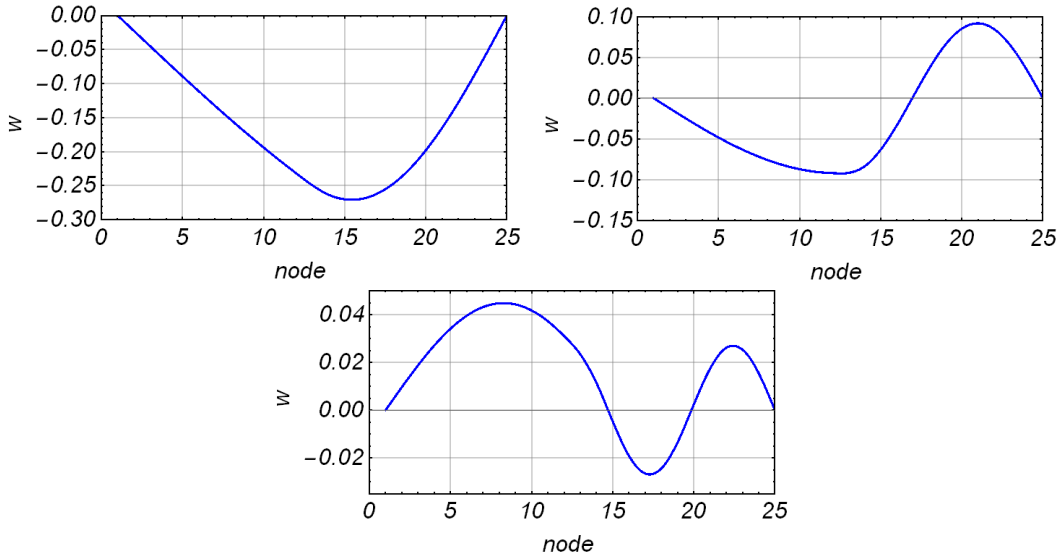
Şekil 16. Zemin etkisinde iki ucu mafsallı mesnetli kirişte M için 1., 2., 3. burkulma modları

Rijitliği kirişin uzunluğunun yarısında yarıya inen ve malzeme parametreleri mevcut örnek ile aynı olan bir tabakalı kompozit kiriş örneği incelenmiştir. Rijitliği ani değişen iki ucu mafsallı kiriş için burkulma parametreleri Çizelge 2'de verilmektedir. Rijitliği sabit olan kirişlere göre rijitliği ani değişen kirişlerin burkulma yüklerindeki değişimlerin yapısal davranışa olan etkisi oldukça kayda değerdir.

Çizelge 2. Rijitliği değişen kirişte boyutsuz burkulma yükleri

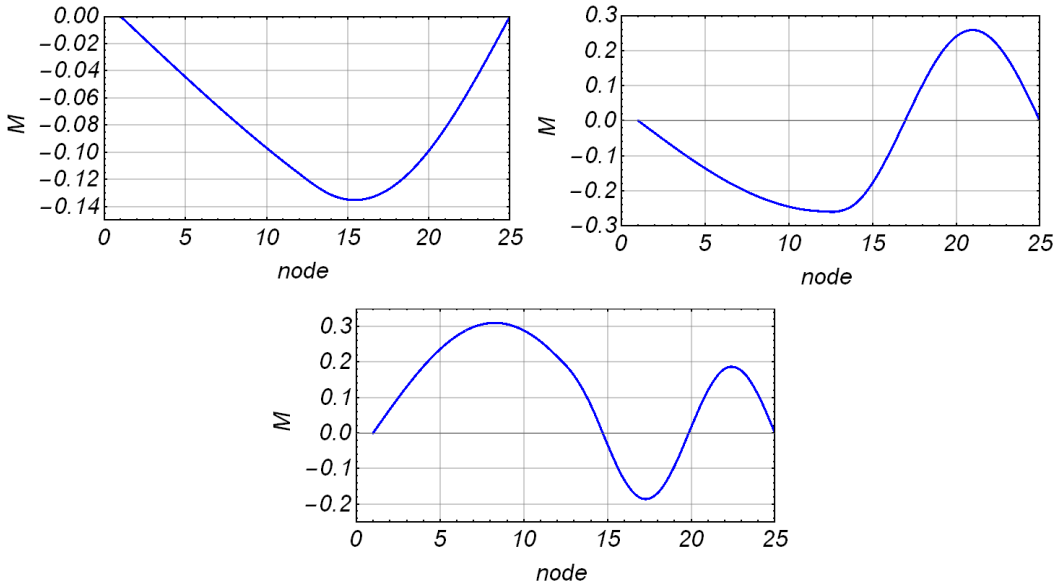
K_w	SA-SA
0	6,24817
200	11,7504

İki ucu mafsallı rijitliği ani değişen kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları w değeri için Şekil 17'de görülmektedir.



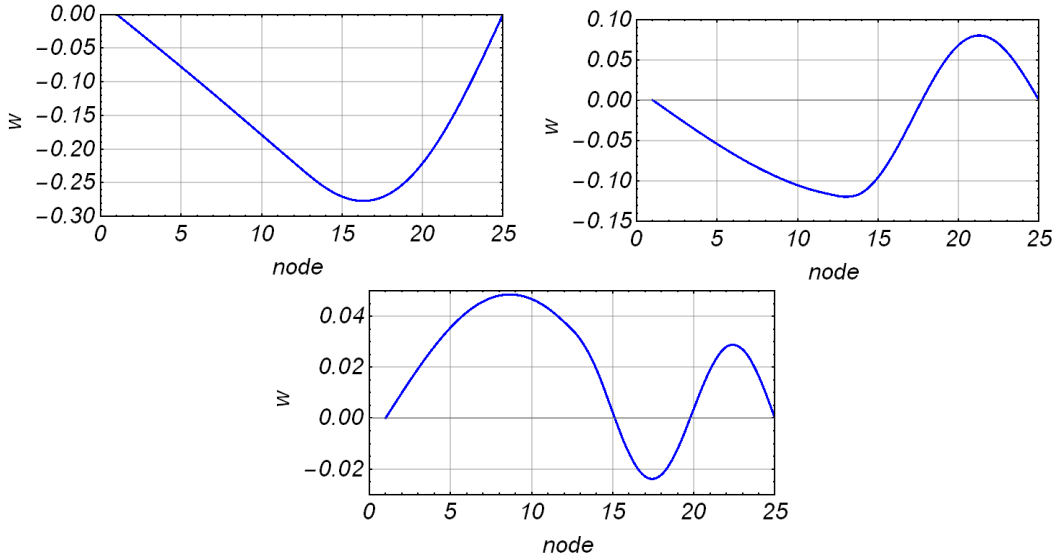
Şekil 17. İki ucu mafsallı rijitliği ani değişen kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

İki ucu mafsallı rijitliği ani değişen mesnetli kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 18'de görülmektedir.



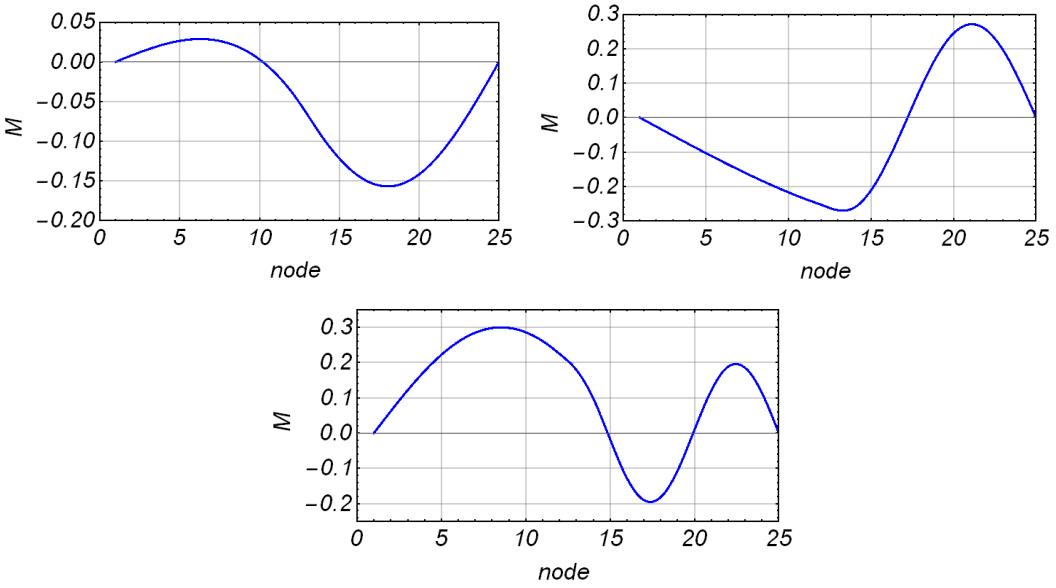
Şekil 18. İki ucu mafsallı rijitliği ani değişen mesnetli kirişte M için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinde iki ucu mafsallı rijitliği ani değişen kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *w* değeri için Şekil 19'da görülmektedir.



Şekil 19. Zemin etkisinde iki ucu mafsallı rijitliği ani değişen kirişte w için 1., 2., ve 3. burkulma modları

Zemin etkisinde iki ucu mafsallı rijitliği ani değişen kirişte 1., 2., ve 3. burkulma modları *M* değeri için Şekil 20'de görülmektedir.



Şekil 20. Zemin etkisinde iki ucu mafsallı rijitliği ani değişen kirişte M için 1., 2., ve 3. burkulma modları

SONUÇLAR

Bu çalışmada, elastik temel üzerine oturan tabakalı kompozit kirişlerin kritik burkulma yükleri ve burkulma modları belirlenmektedir. Kompozit kirişlerin stabilite davranışlarının anlaşılması açısından kritik yükün belirlenmesi oldukça önemlidir. Bununla beraber burkulma modlarının belirlenmesi sayesinde kirişlerin stabilite davranışlarına dair detaylı bir analiz sunulabilmektedir. Elde edilen fonksiyonel kompozit çubukların burkulma davranışını ortaya koyan literatürdeki çalışmalarla karşılaştırıldığında daha hassas sonuçların elde edildiği görülmektedir. Bernoulli-Euler teorisinin kompozit kirişlerde kullanılmasının burkulma yüklerini fazla tahmin ettiğini ve uzunluk-kalınlık oranının artmasıyla farkın azaldığını ancak

fazla kalınlıkta kirişler için kayma deformasyonunun etkisinin hesaba katılması gerekli olduğu görülür. Yükleme ve mesnetlenme etkisi kompozit kirişlerin stabilite karakteristiklerini belirlemede önemli ölçüde etkilidir. Nodal büyüklükler üzerinden verilen mod şekilleri görsel olarak kirişin stabilite davranışını ortaya koymakta ve mesnetlenme türlerinin etkisi üzerinde kayda değer veriler vermektedir. Rijitliği ani değişen kirişlerde burkulma modları incelendiğinde kirişlerin burkulma yükleri ve mod şekillerinde önemli ölçüde değişimler izlenmektedir. Bu nedenle rijitliği ani değişen kirişlerin yapısal tasarımlarının sabit rijitlikteki kirişlere göre daha detaylı yapılması gereklidir. Elde edilen fonksiyonel sayesinde elastik temeller üzerine oturan ve rijitliği ani değişen tabakalı kompozit kirişler, oldukça az eleman kullanılarak etkili bir şekilde analiz edilebilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] L. Euler, Additamentum I de curvis elasticis, methodus inveniendi lineas curvas maximi minimiui proprietate gaudentes, *in Opera Omnia I*., 24 (1744) 231-297.

[2] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.

[3] J. Ratzersdorier, *Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken*, Springer-Verlag, 1936.

[4] M. Eisenberger, J. Clastornik, Vibrations and buckling of a beam on variable winkler elastic foundation, *J. Sound Vib*., 115(2) (1987) 233-241.

[5] A.N. Doğruoğlu, S. Kömürcü, Stability Analysis of Beams Subjected to Distinct Loading Types on Elastic Foundation: *4th International Conference on Engineering and Natural Science*, ICENS, Kiev, Ukraine, 2018: s. 203-207.

[6] W.Q. Chen, C.F. Lu, Z.G. Bian, A mix method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation, *Appl. Math Model*, 28 (2004) 877-900.

[7] A. Mirzabeigy, M. Haghpanahi, R. Madoliat, A New Finite Element Formulation for Buckling and Free Vibration Analysis of Timoshenko Beams on Variable Elastic Foundation, *Journal of Solid Mechanic*s, 9(2) (2017) 276-290.

[8] Khdeir A, Reddy J. Buckling of cross-ply laminated beams with arbitrary boundary conditions. Compos Struct 1997;37(1):1–3.

[9] Aydogdu M. Buckling analysis of cross-ply laminated beams with general boundary conditions by ritz method. Compos Sci Technol 2006;66 (10):1248–55.

[10] Reddy JN. Mechanics of laminated composites plates: theory and analysis. CRC Press; 1997.

[11] J.T. Oden, J.N. Reddy, *Variational Method in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, 1983.

YIĞMA YAPILARIN ANALİZİ İÇİN DETAYLI MİKRO MODELLEME TEKNİĞİNİN UYGULANMASI VE MODELLEME STRATEJİLERİ

Sedat Kömürcü[1]
[1]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

Masonry structures are one of the most complex systems in terms of modeling difficulties of their anisotropic characters. Among the researchers who have been working on modeling of masonry structures, the simulation of masonry walls using detailed micro modeling technique have still a controversial topic in terms of implementation of finite element models. In the present study, nonlinear structural behaviors of masonry walls are modeled via detailed micro modeling technique using finite element method. The masonry units such as bricks, stones or etc. and mortar between the masonry units are modeled in detailed micro modeling to show the anisotropic behavior of structures. In addition, contact and target elements are used to represent the interaction between the masonry brick units and mortar. Special attention is given to represent the detailed micro models, clearly. Thus, novel modeling insights are introduced to understand the concept of detailed micro modeling strategy for the analyses of masonry structures. Besides the implementation of the detailed micro modeling technique, the analyses obtained results are validated with experimental studies in literature.

Keywords: detailed micro modeling; finite elements; masonry structures; model implementation; simulation

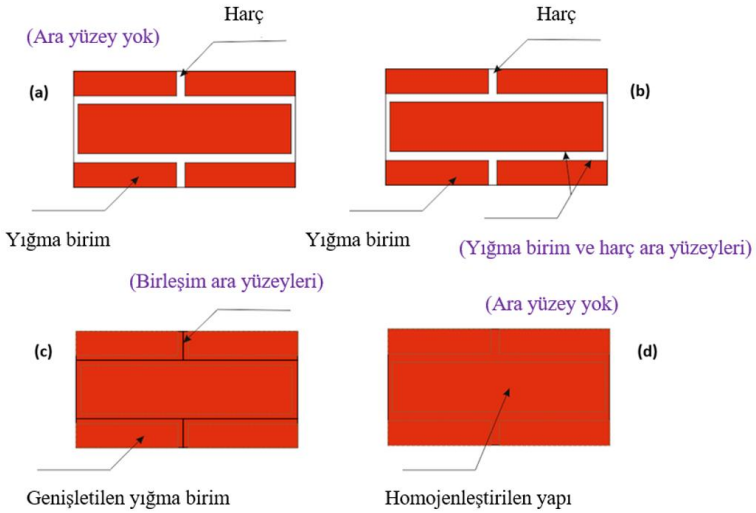
ÖZET

Yığma yapılar, anizotropik karakterlerinin modellenebilmesinin zorluğu açısından en karmaşık sistemlerden biridir. Yığma yapıların modellenmesi üzerine çalışan araştırmacılar arasında, detaylı mikro modelleme tekniği kullanılarak yığma duvarların simülasyonu, sonlu eleman modellerinin uygulanması aşamasında günümüzde tartışmalı bir konudur. Bu çalışmada, yığma duvarların doğrusal olmayan yapısal davranışları, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak detaylı mikro modelleme tekniği ile modellenmektedir. Yapıların anizotropik davranışını göstermek için tuğla, taş vb. duvar birimleri ve duvar birimleri arasındaki harç detaylı mikro modelleme ile modellenmektedir. Ek olarak, duvar tuğla birimleri ve harç arasındaki etkileşimi temsil etmek için temas ve hedef elemanlar kullanılmaktadır. Detaylı mikro modellerin net bir şekilde temsil edilmesine özel önem verilmiştir. Bu nedenle, yığma yapıların analizi için detaylı mikro modelleme kavramını anlatmak için yeni modelleme stratejileri gösterilmektedir. Detaylı mikro modelleme tekniğinin uygulanmasının yanı sıra, elde edilen analiz sonuçları literatürdeki deneysel çalışmalarla doğrulanmaktadır.

Anahtar kelimeler: detaylı mikro modelleme; model oluşturma; sonlu elemanlar; yığma yapılar; simülasyon

GİRİŞ

Yığma yapıların modellenmesi amacıyla çeşitli yöntemler ortaya konulmuştur. Bu yöntemleri; yığma birim tabanlı modeller, geometri tabanlı modeller, sürekli homojen modeller ve eşdeğer çerçeve modelleri şeklinde çeşitli açılardan sınıflandırmak mümkündür [1]. Yığma yapıların karakteristik özelliklerinden biri basınç dayanımlarının çekme ve kayma dayanımlarının yanında oldukça yüksek olmasıdır. Kullanılan tuğla, taş gibi yığma birimlerin dayanımları yüksek olmasına karşın genellikle yığma birimlerin birlerine bağlandıkları harç ve birleşim bölgelerinde dayanım düşüktür. Bu nedenle yığma yapıların modellenmesinde gerçeğe yakın bir davranışın analizi yapılmak isteniyorsa diğer yapıların modellenmesine nazaran daha detaylı bir modelleme kullanılması gerekmektedir. Sayısal modelleme tekniklerini yığma birimler, yığma birimleri birbirine bağlayan harç ve yığma birimler ile harç arasındaki ara yüzeyler dikkate alınarak dört farklı yaklaşım ortaya koymak mümkündür [2]. Bunlar, Şekil 1'de görüldüğü gibi mikro modelleme tekniği, basitleştirilmiş mikro modelleme tekniği, sürekli mikro modelleme tekniği ve makro modelleme tekniği olarak sınıflandırılabilir.



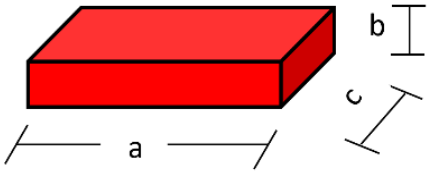
Şekil 1. Yığma yapılarda modelleme teknikleri (a) Sürekli mikro modelleme, (b) Detaylı mikro modelleme, (c) Basitleştirilmiş mikro modelleme, (d) Makro modelleme

Detaylı mikro modelleme tekniğinde tuğla, taş, birim ve harç ayrı ayrı modellenir. Yığma birimler ve harç sürekli elemanlar olarak modellenmesine rağmen, detaylı mikro modelleme tekniğinde yığma birimler ve harç arasındaki ara yüzeyler süreksiz elemanlar olarak modellenmiştir. Basitleştirilmiş mikro modelleme tekniğinde ise yığma birimler ve sadece ara yüzeyler modellenir. Böylece harç etkisi ara yüzeylere uygulanır. Yığma birimler bu teknikte genellikle genişletilir. Bu teknik, yığma birimler ve harç arasında daha az ara yüzey belirlemesi nedeniyle detaylı mikro modelleme tekniğinden daha pratiktir. Sürekli mikro modelleme tekniğinde yığma birimler ve harç ayrı ayrı modellenir ancak modelde ara yüzey yoktur. Bu nedenle, ara yüzeylerin olmaması nedeniyle, modelin karmaşıklığı önemli ölçüde azalır. Makro modelleme tekniği olarak adlandırılan homojen modelleme tekniğinde yığma birimler ve harç tek bir malzeme olarak modellenir. Yığma yapıların modellenmesi amacıyla birçok teknik geliştirilmiş olup bu konuda çalışmalar günümüzde de devam etmektedir [3-7].

Bu çalışmada, yığma yapıların modellenmesinde kullanılan detaylı mikro modelleme tekniği ele alınarak, modelin uygulanması aşamasında araştırmacıların model oluşturabilmelerine katkı sağlayabilecek modelleme stratejileri ve modelin sonlu eleman analizlerinde pratik ve etkili bir şekilde kullanılabilmesine olanak sağlayacak öneriler sunulmaktadır.

DETAYLI MİKRO MODELLEME STRATEJİLERİ

Yığma yapıların gerçeğe en yakın şekilde modellenmeye çalışıldığı teknik detaylı mikro modelleme tekniğidir. Yığma duvarlar arasındaki tuğla, taş gibi yığma birimler ve harç bu teknik kullanılarak ayrı ayrı modellenir ve bu elemanların birleşim bölgelerinde oluşan ara yüzeyler de modele dâhil edilir. Yöntem yığma yapıların yapısal davranışlarını ortaya koyabilmek adına tercih edilmek istense de yöntemin uygulanmasının zorluğu nedeniyle genellikle yığma yapıların modellenmesinde kullanılmamaktadır. Modellemenin uygulanabilmesi adına özellikle geometri oluşturma ve ara yüzey elemanların tanımlanması aşamalarında parametreler üzerinden bazı tanımlamalar, seçimler ve stratejiler uygulamak gerekmektedir. Detaylı mikro modelleme tekniğinde kullanılacak olan yığma birimin boyut parametreleri Şekil 2'de görülmektedir. Burada yığma birimin genişliği *a* yüksekliği *b* ve kalınlığı *c*'dir. Yığma birimleri birbirlerine bağlayan harç için; yatay harç kalınlığı *m* olarak düşey harç kalınlığı ise *n* olarak tanımlanmaktadır.

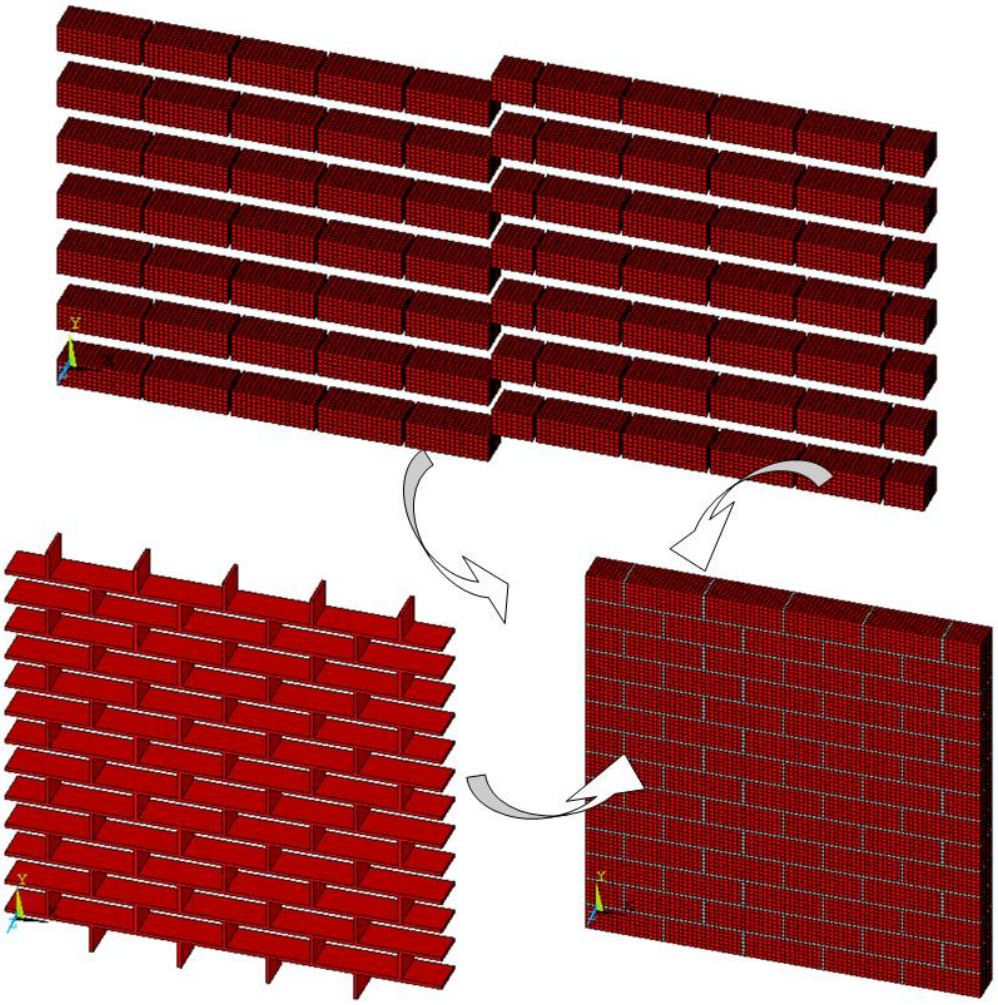


Şekil 2. Yığma birim boyut parametreleri

Önceki çalışmalarda uygulama örneğinin modellenmesi, çözümü ve çalışmanın uygulanabilirliğinin kontrolü [8] yazılımı ile yapılmaktadır. Bu çalışmada, modelin oluşturulmasında geometri oluşturma ve ara yüzey elemanların tanımlanması aşamaları açıklanacaktır.

Geometri Oluşturma

Yığma yapılar genellikle yığma birimlerin kendine has örülme teknikleriyle inşa edilmektedirler. Yapıların detaylı mikro modelleme tekniği kullanılarak modellenebilmeleri için her bir yığma birimin tek tek oluşturulması ve yığma birimler arasındaki harcın ayrı birer eleman olarak belirlenmesi gerekmektedir. Ayrıca tüm bu elemanlar arasında ortaya çıkan ara yüzeylerin de belirlenmesi gerekmektedir. Yığma yapının sonlu eleman yazılımları kullanılarak oluşturulması, model geometrisi bakımından zorluklar barındırmaktadır. Bunun nedeni yığma duvarların şaşırtmalı olarak örülmesinden kaynaklanmaktadır. Bununla beraber, geometri oluşturma işleminden bir sonraki aşama olan ara yüzey tanımlama işlemine olanak verecek şekilde tanımlanmaları da önem arz etmektedir. Detaylı mikro modelleme tekniğine örnek teşkil edecek bir model oluşturma aşaması Şekil 3'te gösterilmektedir. Burada tuğla birimlerin oluşturulması aşamasında yapının tek ve çift numaralı sıralardaki tuğlalarının farklı konumlarda modellenmesine dikkat edilmelidir. Bunun amacı ara yüzey tanımlamalarına yardımcı olmaktır. Yığma birim tuğlaların geometrileri tek tek oluşturulduktan sonra yığma birimler arasındaki harç modele dâhil edilmelidir. Bu aşamada genellikle harç birimlerin geometrisinin tek tek oluşturulması pratik ve etkili olmaz. Bu nedenle oluşturulacak yapının toplam geometrisi oluşturularak harç elemanlar aradan çıkarılır. Bu durum harç elemanların tümünün birleşik yapıda ortaya çıkmalarını sağlar. Yığma birimler ve harç üzerinde sonlu eleman ağı oluşturulduktan sonra Şekil 3'te görülen yığma duvar yapısı; yığma birim ve harç elemanların birleştirilmeleri sayesinde oluşmaktadır.



Şekil 3. Yığma birimler, harç bölgeleri ve oluşan yığma duvar

Ara Yüzey Elemanların Belirlenmesi

Detaylı mikro modelleme tekniğinin uygulanması aşamasında ara yüzey elemanların tanımlanması büyük önem arz etmektedir. Denilebilir ki; bu aşama kullanılan sonlu eleman yazılımının özelliklerine göre uygulama açısından değişiklikler barındırabilir. Ancak bu çalışmada model oluşturma aşamasında belirtilen parametreler üzerinden ara yüzey elemanların nasıl tanımlanabileceği konusunda bazı stratejiler ele alınabilir. Ara yüzey elemanlar "Kontak (Contact)" ve "Hedef (Target)" elemanlar olarak tanımlanırlar. Tanımlanan her bir ara yüzey elemanı kendi bünyesinde malzeme özellikleri ve yüzey rijitliği barındırır. Önceden tanımlanan malzemeler ile normal kuvvet ve kesme kuvvetleri durumları için ayrı ayrı belirlenen rijitlik sabitleri ara yüzey elemana katılır. Yığma yapı ara yüzey davranışının belirlenmesi için gerekli olan parametreleri barındıran malzeme türlerinden birisi "Kohezif bölge malzemesi (CZM)" dir.

Ara yüzey elemanların tanımlanması yığma yapı boyunca kendini tekrarlayan bir işlem olduğundan her bir ara yüzey oluşturma aşamasında ara yüzeylerin tanımlanması gereken bölgeler için bazı ifadelerin verilmesi yardımcı olacaktır. Ara yüzey elemanların tanımlanması; yığma birim parametreleri ve harç kalınlığı parametreleri üzerinden denklem (1-4) şeklinde verilebilir. Burada yığma birimin genişliği a yüksekliği b ve kalınlığı c'dir. Yığma birimleri birbirlerine bağlayan harç için; yatay harç kalınlığı m olarak düşey harç kalınlığı ise n olarak tanımlanmaktadır. Denklemlerdeki i değerleri tanımlanacak birim sayısı

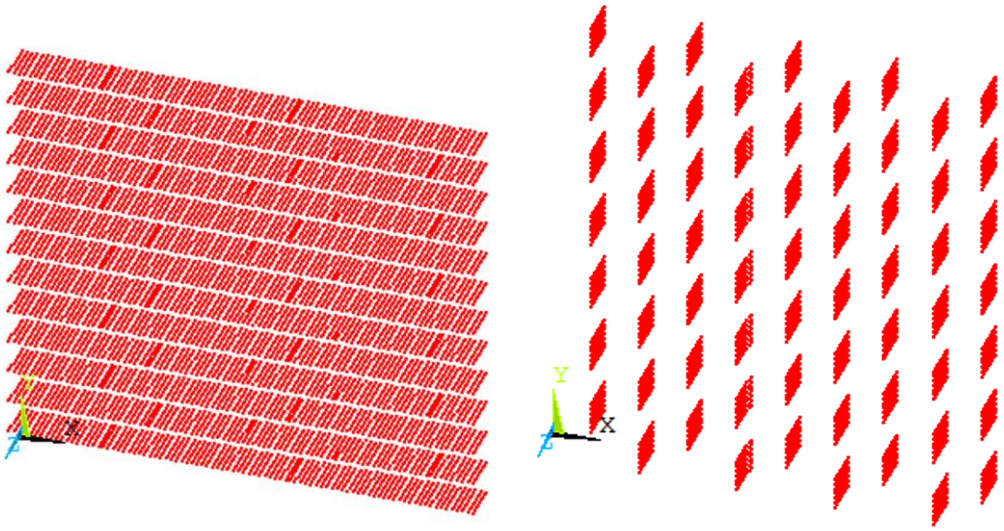
olur $i=1,2,3\ldots$ bir pozitif tam sayı olarak seçilir. Yatay kontak elemanların tanımlanması için düşey eksen Y koordinatlarında denklem (1) aşağıda görüldüğü üzere verilir.

$$\sum_{i=1} ib+(i-1)m \tag{1}$$

Düşey kontak elemanların tanımlanması için yatay eksen X koordinatlarında denklem (2) aşağıda görülmektedir.

$$\sum_{i=1} ia+(i-1)n \tag{2}$$

Bu denklemlerden faydalanarak oluşturulacak yatay ve düşey kontak elemanlar Şekil 4'te görülmektedir.



Şekil 4. Yatay ve düşey kontak elemanlar

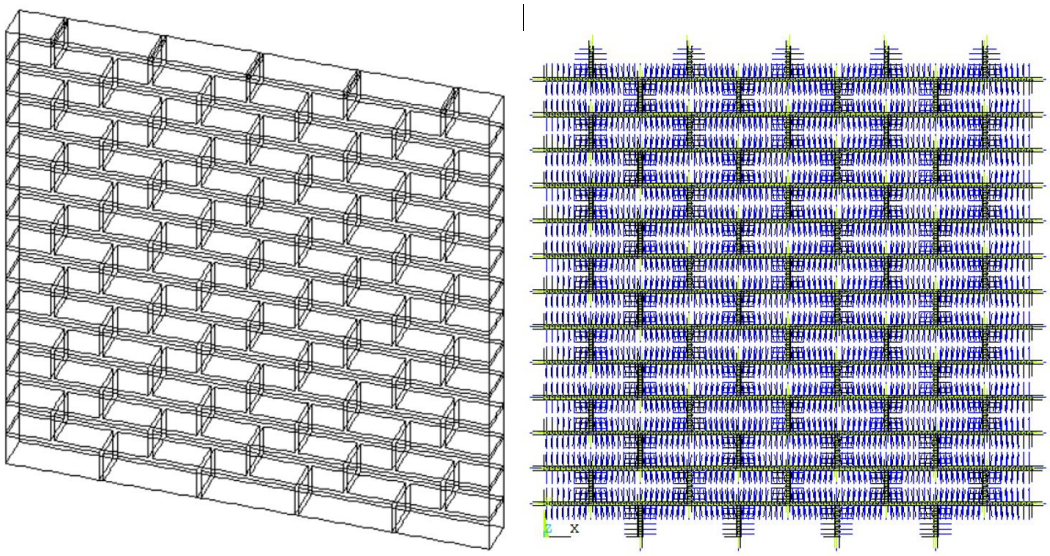
Yatay hedef (target) elemanların tanımlanması için düşey eksen Y koordinatlarında denklem (3) yazılabilir.

$$\sum_{i=1} i(b+m) \tag{3}$$

Düşey hedef (target) elemanların tanımlanması için yatay eksen X koordinatlarında denklem (4)'ten faydalanılabilir.

$$\sum_{i=1} i(a+n) \tag{4}$$

Yukarıda verilen ifadeler detaylı mikro modelleme tekniğinde ara yüzeylerin tanımlanması aşamasında kullanılabilecek bazı faydalı ifadelerdir. Yığma bir duvarda ara yüzey tanımlama işleminden sonra duvardaki ara yüzeylerin üç boyutlu ya da iki boyutlu durumda Şekil 5'te görüldüğü gibi olması beklenir. Modelin geometrisinin ve ara yüzey elemanların doğru tanımlanması durumunda sonlu eleman analizi yapılabilecektir. Modelin detaylı oluşu ve yapılacak analizin kullanılan ara yüzey elemanlar dolayısıyla yüksek derecede doğrusal olmayan bir analiz olması nedeniyle analiz süresinin uzun olması beklenir. Ancak analiz sonucunda diğer modelleme tekniklerine nazaran, yığma yapının yapısal davranışına dair daha fazla veri elde edilmesi beklenir.



Şekil 5. Ara yüzey elemanları tanımlanmış yığma duvar

SONUÇLAR

Yığma yapıların detaylı mikro modelleme tekniği kullanılarak modellenmeleri yığma yapı davranışının gerçeğe en yakın şekilde ortaya konabilmesini sağlar. Ancak yığma yapıların geometrik yapıları gereği modelin sonlu eleman yazılımlarında uygulanabilmesinin güçlükler barındırdığı aşikârdır. Bu çalışmada detaylı mikro modelleme tekniğinin sonlu eleman yazılımlarında uygulanabilmesine yardımcı olacak bazı modelleme stratejileri ve öneriler verilmektedir. Denilebilir ki; detaylı mikro modelleme tekniğinde model geometrisi ve ara yüzey oluşturma aşamalarında özen gösterilmesi gereken kısımlar vardır. Yığma birimlerin, geometri oluşturma işleminden bir sonraki aşama olan ara yüzey tanımlama işlemine olanak verecek şekilde tanımlanmaları da önem arz etmektedir. Harç elemanların tümünün birleşik yapıda oluşturulması elemanların tanımlanmasında kolaylık sağlar. Ara yüzey elemanların tanımlanması yığma yapı boyunca kendini tekrarlayan bir işlemdir ve ara yüzeylerin tanımlanması için bazı ifadelerden faydalanmak kolaylık sağlar. Detaylı mikro modelleme tekniğinin sonlu eleman yazılımlarında doğru bir şekilde kullanılabilmesi durumunda yığma yapıların yapısal davranışlarının daha iyi anlaşılması sağlanacaktır. İnsanlığın ortak mirası, tarihi ve sanatsal değeri olan yığma yapıları doğru analiz edebilmek adına yığma yapıların modellenmesi konusunda yapılacak her bir çalışma bu yapıların gelecek nesillere aktarılabilmesi adına önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

[1] A.M. D'Altri, V. Sarhosis, G. Milani, J. Rots, S. Cattari, S. Lagomarsino, E. Sacco, A. Tralli, G. Castellazzi, S. de Miranda, Modeling Strategies for the Computational Analysis of Unreinforced Masonry Structures: Review and Classification, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27 (2020) 1153–1185, doi.org/10.1007/s11831-019-09351-x

[2] P.B. Lourenço, *Computational Strategies For Masonry Structures*, Doctoral Dissertation, Universidade do Minho, Portekiz, 1996.

[3] L. Pela, M. Cervera, P. Roca, An orthotropic damage model for the analysis of masonry structures, *Construction and Building Materials*, 41 (2012) 57-967. doi:10.1016/j.conbuildmat.2012.07.014

[4] S. Oller, *Numerical Simulation of Mechanical Behavior of Composite Materials,* Springer, Barcelona Spain, 2014.

[5] S. Kömürcü, *Yığma Duvarların Düzlem İçi Davranışlarının Modellenmesi ve Analizi,* Yüksek lisans tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 2017.

[6] R. Quinteros, S. Oller, L. Nallim, Nonlinear homogenization techniques to solve masonry structures problems, *Composite Structures,* 94 (2011) 724–730. doi:10.1016/j.compstruct.2011.09.006

[7] E. Nasiri, Y. Liu, Development of a detailed 3D FE model for analysis of the in-plane behavior of masonry infilled concrete frames, *Engineering Structures,* 143 (2017) 603–616. doi:10.1016/j.engstruct.2017.04.049

[8] ANSYS 14.5. (2014) *Element Reference,* U.S.A.

EKSENİ DOĞRULTUSUNDA FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ KİRİŞLERİN SONLU ELEMANLAR METODUYLA BURKULMA ANALİZİ

Muhittin Turan[1] ve Volkan Kahya[2]

[1]Bayburt Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 69000 Bayburt

[2]Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080 Trabzon

ABSTRACT

In this study, buckling analysis of axially functionally graded beams is presented by the finite element method. The beam element here has ten degrees-of-freedom, and considers shear deformations. Beam material obeys the Hooke's law, and material properties change according to the power-law rule along the length. Equations of equilibrium are obtained by the Lagrange's equation, and solved numerically. The normalized critical buckling loads for various boundary conditions, values of the power-law indices (k_x) and the slenderness (L/h) are presented by graphs and tables. Comparisons show that the results from the present element agrees well with available ones in literature.

Keywords: Axially functionally graded beam; Finite element method; Buckling analysis.

ÖZET

Bu çalışmada, ekseni doğrultusunda fonksiyonel derecelendirilmiş elastik kirişlerin burkulma analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman, on serbestlik dereceli olup kayma deformasyonlarını dikkate almaktadır. Kiriş malzemesinin Hooke kanununa uygun olduğu, malzeme özelliklerinin ise uzunluk boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği kabul edilmektedir. Denge denklemleri, Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiş ve sayısal olarak çözülmüştür. Çeşitli mesnet koşulları, kuvvet fonksiyonu üst indis değeri (k_x) ve narinlik oranları (L/h) için boyutsuz kritik burkulma yükleri grafik ve tablolarla verilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olanlarla karşılaştırılmış ve kullanılan sonlu elemanın başarılı olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Ekseni doğrultusunda fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş; Sonlu elemanlar metodu; Burkulma analizi.

GİRİŞ

Havacılık, denizcilik, makine ve inşaat mühendisliği alanlarında farklı uygulamalarda tercih edilen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), iki veya daha fazla malzemenin birlikte kullanılmasıyla oluşturulmaktadır. Genellikle, seramik ve metallerin belirli oranlarda karışımıyla imal edilen bu malzemeler, bünyelerinde bulunan seramikten dolayı yüksek sıcaklığa ve metalden dolayı da yüksek gerilmelere dayanıklıdır. Bu malzemelerde fonksiyonel derecelendirme istenilen doğrultuda yapılabilmesine rağmen, literatürdeki çalışmalar incelendiğinde kalınlık (enine) doğrultusunda derecelendirme üzerine yapılan

sayısal ve analitik çalışmaların oldukça fazla olduğu görülmektedir. Li ve Batra [1], eksenel basınç yüküne maruz FDM Timoshenko ve homojen Euler-Bernoulli kirişlerinin kritik burkulma yüklerini analitik yöntemle incelemişlerdir. Nguyen vd. [2], birinci mertebeden kesme deformasyonlu kiriş teorisine dayalı eksenel yüklü FDM kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerini analitik yöntemle yapmışlardır. Sayyad ve Ghugal [3], hiperbolik kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı FDM kirişlerin eğilme, burkulma ve serbest titreşim tepkilerini Navier çözüm yöntemi ile analitik olarak elde etmişlerdir. Malikan ve Eremeyev [4], kusurlu FDM kirişlerin kritik burkulma yüklerini bulabilmek için yeni bir hiperbolik polinomlu yüksek mertebeden elastisite teorisi önermişlerdir. Bunlara ilave olarak enine FDM kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini sonlu elemanlar yöntemiyle inceleyen çalışmalar da literatürde mevcuttur [5-7].

Ekseni doğrultusunda FDM kirişler üzerine yapılmış çalışmaları sıralayacak olursak; Aydoğdu [8], ekseni doğrultusunda FDM basit mesnetli kirişlerin titreşimi ve burkulmasını Euler–Bernoulli kiriş teorisine göre yarı ters yöntem ile analiz etmiştir. Huang ve Li [9], üniform olmayan kesite sahip ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin serbest titreşimini incelemişlerdir. Şimşek vd. [10], hareketli harmonik yüke maruz basit mesnetli ekseni doğrultusunda FDM bir kirişin lineer dinamik analizini Euler-Bernoulli kiriş teorisi kullanarak yapmışlardır. Nguyen vd. [11], konik kesitli enine veya ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin statik analizi için analitik çözümler sunmuşlardır. Huang vd. [12], ekseni doğrultusunda FDM ve üniform olmayan Timoshenko kirişlerinin burkulma davranışlarını incelemişlerdir. Cao vd. [13], asimptotik geliştirme yöntemi ile ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin serbest titreşim analizini incelemişlerdir. Karamanlı [14], üçüncü mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi kullanarak çeşitli sınır koşullarına sahip iki doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin burkulma davranışı için Ritz tipi analitik bir çözüm sunmuştur. Akbaş [15], ekseni doğrultusunda FDM konsol kirişin harmonik bir yük altında zorlanmış titreşim tepkilerini Ritz yöntemiyle incelemiştir.

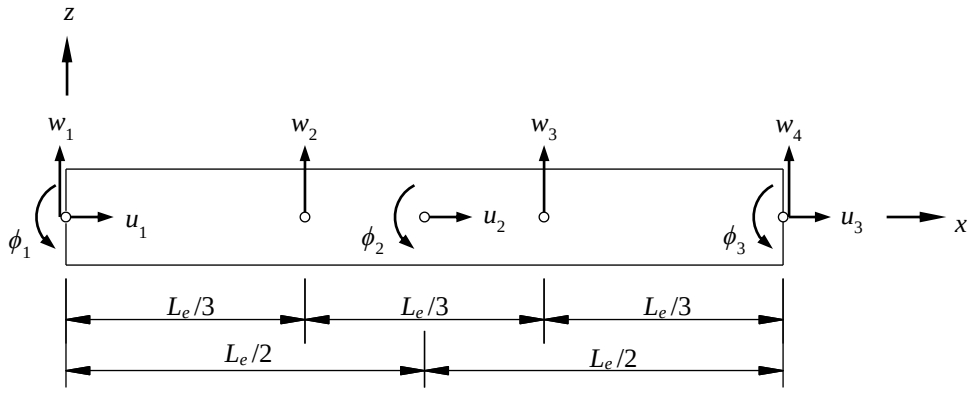
Bu çalışmada, ekseni doğrultusunda fonksiyonel derecelendirilmiş elastik kirişlerin burkulma analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman, on serbestlik dereceli olup kayma deformasyonlarını dikkate almaktadır. Kiriş malzemesinin Hooke kanununa uygun olduğu, malzeme özelliklerinin ise uzunluk boyunca kuvvet kuralına göre değiştiği kabul edilmektedir. Denge denklemleri, Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiş ve sayısal olarak çözülmüştür. Çeşitli mesnet koşulları, kuvvet fonksiyonu üst indis değeri (k_x) ve narinlik oranları (L/h) için boyutsuz kritik burkulma yükleri grafik ve tablolarla verilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olanlarla karşılaştırılmış ve kullanılan sonlu elemanın başarılı olduğu görülmüştür.

TEORİK FORMÜLASYON

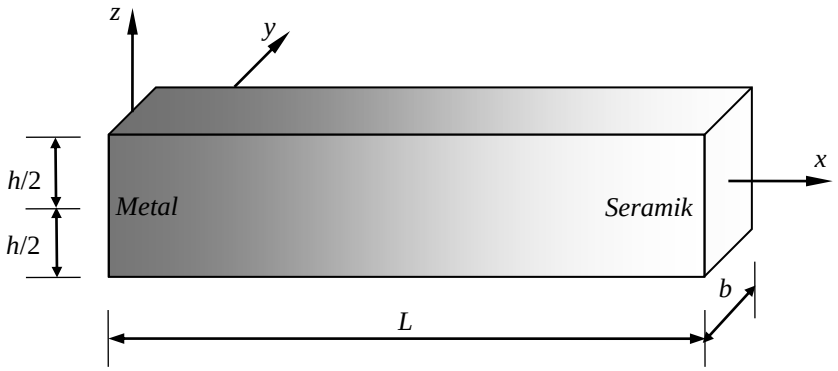
Bu çalışmada, ekseni doğrultusunda fonksiyonel derecelendirilmiş elastik kirişlerin burkulma analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Kullanılan sonlu eleman, on serbestlik dereceli olup Şekil 1'de görülmektedir. Dikdörtgen kesitli üniform FDM kirişin boyu L, kesit boyutları $b\times h$ olarak verilmektedir (Şekil 2). Kiriş malzemesinin Hooke kanununa uygun olduğu, malzeme özelliklerinin ise uzunluk boyunca

$$P(z) = (P_s - P_m)\left(\frac{x}{L}\right)^{k_x} + P_m \tag{1}$$

şeklinde değiştiği kabul edilmektedir. Burada P_s ve P_m sırasıyla seramik ve metal bileşenlerine ait malzeme özelliklerini (elastisite modülü E, Poisson oranı ν ve yoğunluk ρ) göstermektedir. k_x negatif olmayan bir sayıdır.



Şekil 1. 10 serbestlik dereceli sonlu eleman



Şekil 2. Ekseni doğrultusunda fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin koordinat takımı ve geometrisi

Şekil 1'de görülen sonlu eleman için yer değiştirme vektörü

$$\mathbf{u} = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3\}^T \tag{2}$$

şeklindedir. Burada *u*, *w* ve ϕ sırasıyla boyuna ve enine yer değiştirmeler ile dönme bileşenleri olup çubuk ekseni üzerinde ölçülmektedirler. Birinci mertebe kayma deformasyonu kiriş teorisine göre herhangi bir noktadaki yer değiştirmeler

$$U(x,z) = u(x) - z\,\phi(x), \quad W(x,z) = w(x) \tag{3}$$

şeklindedir. Ekseni doğrultusunda FDM izotropik kiriş için bünye denklemleri (4)'deki gibi yazılır.

$$\sigma_{xx} = E(x)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xz} = KG(x)\gamma_{xz} \tag{4}$$

Burada, σ_{xx} ve τ_{xz} sırasıyla normal ve kayma gerilmelerini, *K* ise kesmede düzeltme katsayısını ifade etmektedir. Sayısal çözüm için yer değiştirmeler

$$u(x) = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(x)\,u_i, \quad w(x) = \sum_{i=1}^{4} \psi_i(x)\,w_i, \quad \phi(x) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(x)\,\phi_i \tag{5}$$

şeklinde kabul edilmiştir. Burada, $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ ve $\theta_i(x)$ şekil fonksiyonlarını, u_i, w_i ve ϕ_i ise genelleştirilmiş yer değiştirmeleri göstermektedir. $\varphi_i(x)$ ve $\theta_i(x)$ şekil fonksiyonları için ikinci dereceden, $\psi_i(x)$ için ise üçüncü dereceden polinomlar seçilmiştir.

Denge denklemleri

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{6}$$

Lagrange eşitliği yardımıyla elde edilmiştir. Burada, $L=T-(U+V)$ Langragian fonksiyonu ve q_i düğüm noktalarındaki genelleştirilmiş koordinatlardır. İfadedeki T ve U sırasıyla kinetik ve şekil değiştirme enerjilerini, V ise dış yükün yapmış olduğu işi göstermektedir. (3), (4), (5) ve (6) ifadeleri yardımıyla hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+(\mathbf{K_e}-P_0\mathbf{K_g})\mathbf{X}=\mathbf{F} \tag{7}$$

şeklinde elde edilir. Burada, **M**, $\mathbf{K_e}$, $\mathbf{K_g}$ ve **F** sırasıyla sistem kütle, rijitlik ve geometrik rijitlik matrisleri ile yük vektörüdür.

Burkulma analizi için (7) denkleminde **M** = **0** ve **F** = **0** olarak alınıp çözüm $\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{P_0x}$ şeklinde düşünülürse $P_0=(P_0)_{kr}$ kritik burkulma yükü olmak üzere

$$(\mathbf{K_e}-P_0\mathbf{K_g})\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{8}$$

denklemi elde edilir. (8) denklem sistemi bir öz değer problemini vermektedir. Bu denklem sistemlerinin katsayılar matrislerini sıfır yapan P_0 değerleri kirişin kritik burkulma yükleridir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, çeşitli mesnet koşulları, kuvvet fonksiyonu üst indis değeri (k_x) ve narinlik oranları (L/h) için kritik burkulma yükleri grafik ve tablolarla verilmiştir. Elde edilen sonuçlar literatürde mevcut olanlarla karşılaştırılmış ve kullanılan sonlu elemanın bu problemin çözümünde ne kadar başarılı olduğu araştırılmıştır.

Bu problemde, L=2m, b=0.1m ve kesmede düzeltme faktörü K=5/6 olarak alınmıştır. Ayrıca, göz önüne alınan kirişlerin sınır şartları sırasıyla basit kiriş (B-B), iki ucu ankastre kiriş (A-A) ve konsol kiriş (A-S) şeklindedir. FDM kirişte kullanılan metal (alüminyum, Al) ve seramik (alüminyum oksit, Al_2O_3) için malzeme özellikleri sırasıyla:

- E_m = 70GPa, ρ_m = 2702kg/m^3, ν_m = 0.3
- E_s = 380GPa, ρ_s = 3960kg/m^3, ν_s = 0.3

şeklindedir. Burada, kiriş malzemesi için sırasıyla metal ve seramiğe ait Elastisite modülü (E), yoğunluk (ρ) ve Poisson oranı (ν) verilmiştir. Burkulma yükleri çalışmada (9) ifadesindeki gibi boyutsuz olarak verilmiştir.

$$\bar{\lambda}=\frac{12L^2}{E_m bh^3}(P_0)_{kr} \tag{9}$$

Çizelge 1'de çeşitli sınır şartlarına sahip ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri L/h = 5, k_x = 1 için sonlu eleman sayısına bağlı olarak verilmiştir. Tablo incelendiğinde kritik burkulma yüklerinin sonlu eleman sayısının artmasıyla birlikte birbirlerine yaklaştıkları görülmektedir. Sayısal sonuçlar için kirişin 250 elemana bölünmesi yeterli olmaktadır.

Çizelge 2-4'te çeşitli sınır şartlarına göre ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yükleri verilmiştir. Bu çalışmanın sonuçları, üçüncü mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisi kullanarak analitik çözüm yapan Karamanlı [14] ile kıyaslanmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik çözümle oldukça uyumludur. k_x'in artmasıyla (seramik oranının azalması) kritik burkulma yükü azalmaktadır. k_x = 0'da kiriş seramik olduğu için en büyük elastisite modülüne sahiptir. Bu yüzden bu hal için en büyük kritik burkulma yükü elde edilmektedir. k_x'in değeri 10'a gittiğinde kiriş kesiti metale yakın olduğu için küçük elastisite modülüne sahiptir. Bu nedenle kirişin taşıyabileceği maksimum burkulma kuvveti küçük olmaktadır. Sınır şartlarının değişimine göre bir değerlendirme yapacak olursak; maksimum kritik burkulma yükü iki ucu ankastre kirişte, minimum kritik burkulma yükü ise beklenildiği gibi konsol kirişte meydana gelmektedir.

Çizelge 1. Farklı sınır şartlarına sahip ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin eleman sayısıyla değişimi (L/h=5, k_x = 1)

Eleman Sayısı	Sınır Şartları		
	B-B	A-A	A-S
4	18.6816	54.0556	3.4561
10	22.5396	63.4626	4.1609
20	23.7663	67.6200	4.4454
40	24.3705	69.7027	4.5954
80	24.6704	70.7330	4.6721
100	24.7302	70.9385	4.6875
150	24.8099	71.2122	4.7082
200	24.8496	71.3489	4.7186
250	24.8735	71.4309	4.7248
300	24.8894	71.4856	4.7289
Karamanlı [14]	24.9833	72.0959	4.7498

Çizelge 2. Ekseni doğrultusunda FDM basit kirişin boyutsuz kritik burkulma yükleri

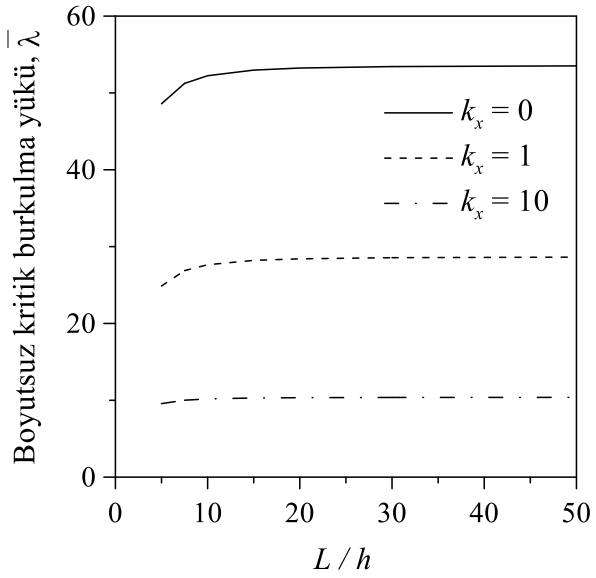
Kiriş	Teori	k_x = 0	k_x = 0.5	k_x = 1	k_x = 2	k_x = 5	k_x = 10
L / h = 5							
	Bu çalışma	48.5904	34.1017	24.8735	16.5667	10.9640	9.5711
	Karamanlı [14]	48.5959	34.2653	24.9833	16.6297	10.9883	9.5838
L / h = 20							
	Bu çalışma	53.2363	38.4668	28.4125	18.5737	11.9047	10.3383
	Karamanlı [14]	53.2664	38.5489	28.5105	18.6436	11.9306	10.3501

Çizelge 3. Ekseni doğrultusunda FDM iki ucu ankastre kirişin boyutsuz kritik burkulma yükleri

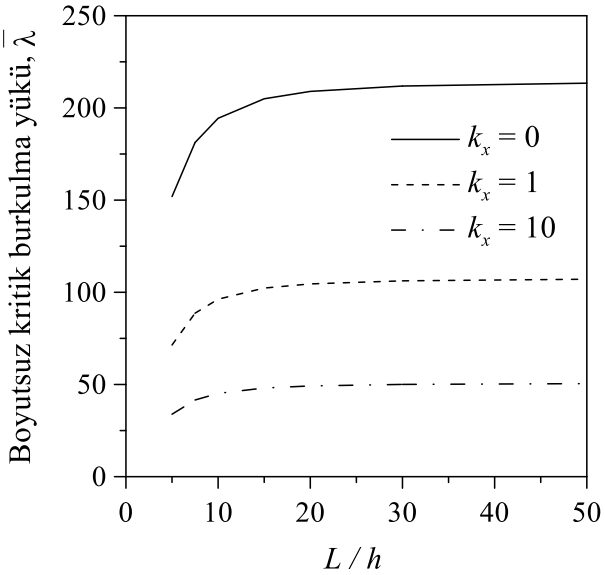
Kiriş	Teori	k_x = 0	k_x = 0.5	k_x = 1	k_x = 2	k_x = 5	k_x = 10
L / h = 5							
	Bu çalışma	151.9319	98.2284	71.4309	51.7410	38.6877	33.8844
	Karamanlı [14]	152.1470	99.2471	72.0959	52.0853	38.8730	34.0348
L / h = 20							
	Bu çalışma	208.9496	136.8995	104.5523	77.1216	56.4888	49.2076
	Karamanlı [14]	208.9510	137.9960	104.9660	77.3658	56.6534	49.3614

Çizelge 4. Ekseni doğrultusunda FDM konsol kirişin boyutsuz kritik burkulma yükleri

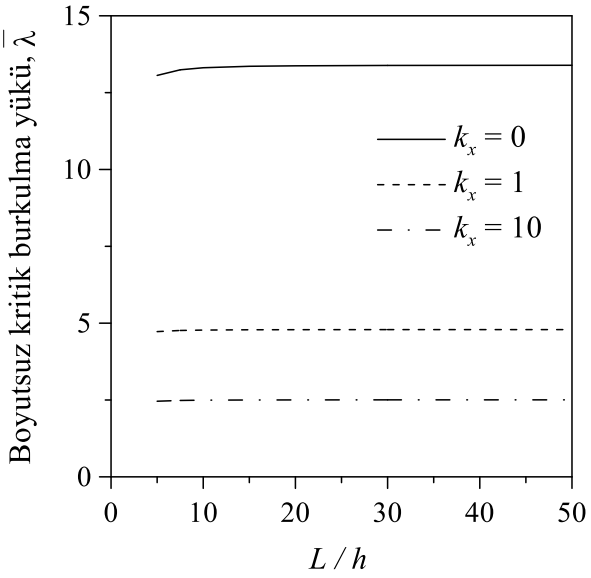
Kiriş	Teori	$k_x = 0$	$k_x = 0.5$	$k_x = 1$	$k_x = 2$	$k_x = 5$	$k_x = 10$
$L / h = 5$							
	Bu çalışma	13.0594	7.0067	4.7248	3.3175	2.6029	2.4588
	Karamanlı [14]	13.0595	7.0854	4.7498	3.3263	2.6053	2.4599
$L / h = 20$							
	Bu çalışma	13.3730	7.1172	4.7873	3.3596	2.6422	2.5031
	Karamanlı [14]	13.3730	7.1980	4.8128	3.3684	2.6445	2.5039



Şekil 3. Ekseni doğrultusunda FDM basit kirişin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin *L/h*'ye göre değişimi



Şekil 4. Ekseni doğrultusunda FDM iki ucu ankastre kirişin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin *L/h*'ye göre değişimi



Şekil 5. Ekseni doğrultusunda FDM konsol kirişin boyutsuz kritik burkulma yüklerinin *L/h*'ye göre değişimi

Şekil 3-5'te çeşitli sınır şartlarına sahip ekseni doğrultusunda FDM kirişlerin *L*/*h*'ye göre boyutsuz kritik burkulma yüklerinin değişimi incelenmiştir. Grafikler incelendiğinde *L*/*h* oranı arttıkça boyutsuz kritik burkulma yükü artmakta ve belli bir değerden sonra sabit kalmaktadır. k_x arttıkça $\bar{\lambda}$'nin azaldığı burada da görülmektedir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, ekseni doğrultusunda fonksiyonel derecelendirilmiş elastik kirişlerin burkulma analizi sonlu elemanlar metoduyla yapılmıştır. Çeşitli mesnet koşulları, kuvvet fonksiyonu üst indis değeri (k_x) ve narinlik oranları (*L/h*) için boyutsuz kritik burkulma yükleri grafik ve tablolarla verilmiştir. Kullanılan birinci mertebeden kayma deformasyonlu kiriş teorisine dayalı, beş düğüm noktalı ve on serbestlik dereceli sonlu elemanın literatürle oldukça uyumlu sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca, çalışmadan elde edilen bulgular ışığında çıkarılan sonuçlar aşağıda sıralanmıştır:

- Ekseni doğrultusunda FDM kirişlerde $k_x = 0$'da (kiriş tamamen seramik) maksimum kritik burkulma yükleri meydana gelmektedir. Kuvvet fonksiyonu üst indisinin artmasıyla (seramik oranı azalırken) boyutsuz kritik burkulma yükleri azalmaktadır.
- *L*/*h* oranı (narinlik) arttıkça boyutsuz kritik burkulma yükü artmakta ve belli bir değerden sonra sabit kalmaktadır.

Bu çalışmanın devamı niteliğinde ileride ele alınabilecek çalışmalarda, aynı sonlu eleman kullanılarak malzeme özelliği iki doğrultuda değişen FDM kirişin burkulma analizi yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] S.R. Li, R.C. Batra, Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler-Bernoulli beams, *Composite Structures*. 95 (2013) 5–9. doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.07.027.

[2] T.K. Nguyen, T.P. Vo, H.T. Thai, Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*. 55 (2013) 147–157. doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.06.011.

[3] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending, buckling and free vibration responses of hyperbolic shear deformable FGM beams, *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 5 (2018) 13–24. doi.org/10.22075/macs.2018.12214.1117.

[4] M. Malikan, V.A. Eremeyev, A new hyperbolic-polynomial higher-order elasticity theory for mechanics of thick FGM beams with imperfection in the material composition, *Composite Structures*. 249 (2020) 112486. doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112486.

[5] O.O. Oyekoya, D.U. Mba, A.M. El-Zafrany, Buckling and vibration analysis of functionally graded composite structures using the finite element method, *Composite Structures*. 89 (2009) 134–142. doi.org/10.1016/j.compstruct.2008.07.022.

[6] V. Kahya, M. Turan, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*. 109 (2017) 108–115. doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.10.039.

[7] V. Kahya, M. Turan, Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element, *Composites Part B: Engineering*. 146 (2018) 198–212. doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.04.011.

[8] M. Aydogdu, Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 27 (2008) 683–691. doi.org/10.1177/0731684407081369.

[9] Y. Huang, X.F. Li, A new approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section, *Journal of Sound and Vibration*. 329 (2010) 2291–2303. doi.org/10.1016/j.jsv.2009.12.029.

[10] M. Şimşek, T. Kocatürk, Ş.D. Akbaş, Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load, *Composite Structures*. 94 (2012) 2358–2364. doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.03.020.

[11] N.T. Nguyen, N.I. Kim, I. Cho, Q.T. Phung, J. Lee, Static analysis of transversely or axially functionally graded tapered beams, *Materials Research Innovations*. 18 (2014) S2 260–S2 264. doi.org/10.1179/1432891714Z.000000000419.

[12] Y. Huang, M. Zhang, H. Rong, Buckling Analysis of Axially Functionally Graded and Non-Uniform Beams Based on Timoshenko Theory, *Acta Mechanica Solida Sinica*. 29 (2016) 200–207. doi.org/10.1016/S0894-9166(16)30108-2.

[13] D. Cao, Y. Gao, M. Yao, W. Zhang, Free vibration of axially functionally graded beams using the asymptotic development method, *Engineering Structures*. 173 (2018) 442–448. doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.111.

[14] A. Karamanlı, Analytical solutions for buckling behavior of two directional functionally graded beams using a third order shear deformable beam theory, *Academic Platform Journal of Engineering and Science*. 6 (2018) 164–178. doi.org/10.21541/apjes.357539.

[15] Ş.D. Akbaş, Forced vibration responses of axially functionally graded beams by using ritz method, *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 7 (2021) 109–115. doi.org/10.22055/jacm.2020.34865.2491.

BARAJ GÖVDE VE TEMELİNDEKİ SIZMA PROBLEMİNİN GALERKİN YAKLAŞIMINA DAYALI SONLU ELEMANLAR ANALİZİ

Timuçin Alp ASLAN[1] ve Beytullah TEMEL[2]
[1,2,]İnşaat Mühendisliği Bölümü- Çukurova Üniversitesi, ADANA

ABSTRACT

In this study, the 2D steady-state seepage analysis of the embankment dam body and its base is investigated using the finite element method based on the Galerkin's approach. The body and foundation soil are considered as homogeneous isotropic and anisotropic materials and the effects of horizontal drainage length and cutoff wall on seepage are investigated. The differential equation governing the response of water in the soil is obtained with the help of Darcy's law and continuity equations. A program has been prepared in Fortran programming language to find the hydraulic load, pressure values and phreatic line pressure values at the points inside the dam body and the amount of seepage on the bottom of dam. It has been shown that the obtained values are in good agreement by comparing them with the results of existing studies and package programs in the literature.

Keywords: Dam; Seepage analysis; Finite element methods

ÖZET

Bu çalışmada, dolgu baraj gövdesi ve temelindeki 2D boyutlu kararlı durum sızma analizi, Galerkin yaklaşımına dayalı sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Gövde ve temel zemini homojen izotropik ve anizotropik malzemeler olarak kabul edilir ve yatay drenaj uzunluğu ve geçirimsiz perdenin sızıntı üzerindeki etkileri araştırılır. Zemindeki suyun tepkisini idare eden diferansiyel denklem, Darcy yasası ve süreklilik denklemleri yardımıyla elde edilir. Baraj gövdesi içindeki noktalarda hidrolik yük, basınç değerleri, freatik hattı ve baraj tabanındaki sızıntı miktarını bulmak için Fortran dilinde bir program hazırlanmıştır. Elde edilen değerlerin literatürdeki mevcut çalışmalar ve paket programların sonuçlarıyla karşılaştırılarak iyi bir uyum içinde olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Baraj; Sızma analizi; Sonlu elemanlar yöntemi

GİRİŞ

Birçok mühendislik probleminde olduğu gibi, su tutan barajların gövde ve temel zeminindeki suyun durumu ve hareketinin incelenmesi gerekmektedir. Sızma; barajın memba kısmında biriktirilen suyun kontrolsüz, ölçülemeyen biçimde mansap kısmına doğru devamlı hareketidir. Barajların gövdelerinde meydana gelen sızmalar, hazneden su kaybına neden olduğu gibi dolgu içerisinde de erozyonlar yaparak borulanma oluşmasına neden olmaktadır. Bu durum baraj gövdesinde tahribatlara yol açmakta, hatta barajın yıkılmasına sebep olabilmektedir. Bu sebeplerden dolayı baraj gövde ve temelinde meydana gelen sızma problemleri güncel bir konu olmaya devam etmekte ve birçok araştırmacı tarafından araştırılmaktadır.

Ardıçlıoğlu [1], toprak dolgu baraj gövdelerindeki düzenli iki boyutlu sızma akımının analizi için sonlu elemanlar yöntemini (SEY) kullanmış, akım bölgelerindeki eleman düğümlerinin boşluk suyu basınçlarını ve dolgunun birim genişliğinden geçen sızma debisini hesaplamıştır. Keskin [2], çeşitli palplanş, bağlama ve toprak dolgu barajların gövdesindeki ve altındaki sızmadan meydana gelen potansiyel ve hız dağılımlarını, sonlu elemanlar yöntemiyle iki boyutlu olarak ele almıştır. Çilingir [3], matematiksel model olarak seçilen Büyükçekmece barajının gövdesinde oluşan sızmaları, sonlu elemanlar yöntemi ve Geo-Studio bilgisayar programından yararlanmak suretiyle incelemiştir. Fakhari ve Ghanbari [4] ise çalışmalarında, kil çekirdekli bir baraj gövdesinden geçen toplam sızma miktarını bulmak için yeni bir formül geliştirmişler ve diğer tüm debi hesaplama yöntemleriyle karşılaştırmalarını yapmışlardır. Çelik [5], İkizdere Barajı gövde en kesitlerinde Seep/W programıyla iki boyutlu sızma analizini gerçekleştirmiştir. Programa girilen modelin malzeme parametrelerinin seçiminde proje paftalarında sunulan laboratuvar deney sonuçlarından ve literatürden faydalanmıştır. Sağlıca tezinde [6], sonlu farklar hesap yöntemi (SFY) ile sızma analizi yapan bir program yazmış ve analiz sonucunda bulunan değerlerin diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmalarını göstermiştir. Darbandi ve ark. [7], değişik geometrili alanlardaki sızma problemini çözebilen yeni bir hareketli kafes sonlu hacim yöntemini geliştirmişlerdir. Rafiezadeh ve Ataie-Ashtiani [8], çok alanlı genel anizotropik ortamda sızma analizi için, üç boyutlu sınır elemanı çözümünü, dönüşüm yaklaşımını temel alarak geliştirmişlerdir. Ouria ve Toufigh [9], serbest sızma problemini çözmek için Nelder-Mead basit optimizasyonuna ve değişen ağ tekniğine dayalı sonlu elemanlar yöntemini kullanmışlardır. El-Jumaily ve Al-Bakry [10], hidrolik yapıların altında ve içindeki sızıntı analizi, yapının parçalara ayrılmasına gerek kalmaksızın birlikte incelenmekte ve daha sonra her bir parça için ayrı ayrı dikdörtgen elemanlar kullanarak sonlu hacim yöntemi ile analiz etmektedirler. Mesci [11], baraj gövdelerinde meydana gelen sızmaların belirlenmesi için kullanılan metotlar yardımıyla incelemiş ve bu şekilde suyun gövde içindeki akışı belirlenerek toplam sızma miktarlarını hesap etmiştir. Çakır [12], iki boyutlu yeraltı suyu akımı için kollokasyon yöntemi ile sayısal bir model geliştirmiştir. Karşılaştırma amacıyla kapalı ve açık formda sonlu farklar yöntemi ile MATLAB programını hazırlayarak çözüm yapmıştır. Quanshu ve Jianjun [13], sızma analizi için sayısal simülasyon yöntemini benimsemiş ve sızıntı alanının farklı koşullar altında karşılaştırılması yoluyla, çekirdek ve diğer faktörlerin etkisini araştırmışlardır. Mansuri ve Salmasi [14], heterojen bir toprak barajından sızma akışını azaltmada yatay drenaj ve geçirimsiz perde kullanmanın etkinliğine odaklanmışlardır. Bu amaçla çeşitli yatay drenaj uzunluklarının, kesme duvar derinliği ve temelinin farklı yerlerinde bulunan palplanşın sızma üzerinde etkili olduğunu göstermişlerdir. Sakhmarsi ve ark. [15], homojen toprak dolgu barajlarda geçirimsizlik perdesinin, konumu ve geçirgenlik özelliklerinin sızıntı üzerindeki etkisini SEEP/W bilgisayar yazılımını kullanarak araştırmışlardır. Yuan ve Zhong[16], üç boyutlu sınırlandırılmamış sızma problemleri analizi için zayıf formlu kuadratik eleman

yöntemini kullanmışlardır. Zhang ve ark. [17] incelemelerinde, sızma analizini araştırırken serbest su yüzeyinin belirlenmesi için Monte Carlo integrasyonu ile hareketli Kriging Meshsiz yöntemini önermişlerdir. Khassaf ve Madhloom [18], çekirdek geçirgenliğini ve çekirdek kalınlığını değiştirmenin etkisiyle çekirdek bölgeli toprak barajlarda meydana gelen sızıntı miktarını, sonlu eleman yöntemi SLIDE V.5.0 yazılımıyla bulmuşlardır. Zewdu[19], Koga toprak dolgu baraj gövde ve temelinde meydana gelen sızma miktarını sonlu eleman tabanlı PLAXIS 2D yazılımını kullanarak hesaplamıştır. Taghvaei ve ark. [20], SEEP/W yazılımını kullanarak farklı kil-kum bileşimlerinde zemin toprak barajının sayısal modelini hazırlamışlar ve deneysel sonuçlarla doğrulamışlardır. Doaa ve Molla makalelerinde [21], geçirimsiz temel üzerinde oluşturulan bir toprak barajının kesiti boyunca toplam sızıntı hızları üzerinde palplanş varlığının yanı sıra, yüksekliği ve konumunun etkisini belirlemeyi amaçlamışlardır. Sanayei ve Javdanian [22], simetrik olmayan sınır koşullarına sahip barajlardan kararlı halde sızma olayı için yeni bir analitik çözüm-geliştirmişlerdir. Barajlarda, iki boyutlu durumlar için simetrik olmayan sınır koşulları, baraj düzleminin mansap kısmında farklı birim basamak fonksiyonları ile oluşturmuşlardır. Salmasi ve ark. [23], baraj temelinde meydana gelen sızma olaylarında geçirimsizlik perdesi ve mansap filtrelerinin etkisini araştırmak için sonlu eleman yöntemini ve sayısal modeli doğrulamak için deneysel verileri kullanmışlardır. Javdanian ve Shams [24], kil çekirdekli set barajlarının altındaki sızmayı sonlu eleman tabanlı SEEP/W programını kullanarak hesaplamışlar ve sonuçlarının doğruluğunu fiziksel modelleme sonuçlarıyla karşılaştırarak göstermişlerdir.

Baraj gövdelerinde sızmaların meydana gelmesinin önlenmesi oldukça zor ve ekonomik açıdan büyük maliyetler gerektirmektedir. Bu nedenlerden dolayı baraj inşası başlamadan önce projelendirme safhasında detaylı çalışmalar ve etütlerin yapılarak oluşacak sızma miktarının hesaplanması önemlidir. Bu çalışmada, baraj gövde ve temelinde meydana gelen sızma olayı sonlu elemanlar yöntemiyle incelenecektir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

İki boyutlu geçirimli, anizotropik bir zemin içerisindeki sızma olayı Darcy yasası ve süreklilik denklemleri yardımıyla aşağıdaki kısmi diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir [25].

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Bu denklem hidrolik yükün akım bölgesi içinde değişimini matematiksel olarak ifade etmektedir. Burada *h*, hidrolik yük olup, zemin içerisinde suyun hareketinin çok yavaş olması sebebiyle hız yüksekliğinin ihmal edilmesiyle

$$h = z + \frac{p}{\gamma_w} \tag{2}$$

denkleminde belirtildiği gibi geometrik yükseklik ve basınç yüksekliğinin toplamıdır. (1) nolu kısmi diferansiyel denkleme ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak

$$\int\int_{Ae} \psi \left(K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) dA = 0 \tag{3}$$

şeklinde integral formda yazılmaktadır. (3) denklemine kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\int\int_{Ae} \left(K_x \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) + K_y \frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \right) dxdy - \int_{\Gamma} \psi \left(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) d\sigma = 0 \tag{4}$$

halini almaktadır. Bu ifadelerde, ikinci kısım sınır şartlarını temsil etmekte olup, formülasyonda Γ, elemanın sınırını, n_x ve n_y sınırın birim vektör bileşenlerini, q sınır boyunca akışı, σ ise saatin tersi yönünde sınır boyunca integrasyon değişkenini göstermektedir. Galerkin yönteminde hidrolik yükün varyasyonu ağırlık fonksiyonları olarak,

$$\psi = \delta h \tag{5}$$

dikkate alınmaktadır. Ağırlık fonksiyonları yerine yazıldıktan sonra (6) denklemi elde edilmektedir.

$$\int\int_{Ae}\left(K_x\frac{\partial(\delta h)}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)+K_y\frac{\partial(\delta h)}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right)dxdy-\int_{\Gamma}(\delta h)qd\sigma=0 \tag{6}$$

Sonlu elemanlar yönteminde formülasyonda izoparametrik 8 düğümlü kuadratik eleman kullanılacaktır. Elemanın herhangi bir noktasındaki hidrolik yükler (7) denkleminde verilmektedir.

$$\{\boldsymbol{h}\}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 & \boldsymbol{N}_3 & \boldsymbol{N}_4 & \boldsymbol{N}_5 & \boldsymbol{N}_6 & \boldsymbol{N}_7 & \boldsymbol{N}_8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{h}_1\\ \boldsymbol{h}_2\\ \boldsymbol{h}_3\\ \boldsymbol{h}_4\\ \boldsymbol{h}_5\\ \boldsymbol{h}_6\\ \boldsymbol{h}_7\\ \boldsymbol{h}_8\end{Bmatrix}=[N]\{\Delta\} \tag{7}$$

Burada $[N]$ şekil fonksiyonları matrisi ve $\{\Delta\}$ eleman hidrolik yükleridir. Kuadratik dörtgen elemanda herhangi bir noktanın koordinatları şekil fonksiyonlarına bağlı olarak,

$$x=\sum_{i=1}^{8}N_i x_i \qquad\qquad y=\sum_{i=1}^{8}N_i y_i \tag{8}$$

şeklinde verilmektedir. Burada x_i ve y_i düğümünün koordinatlarıdır. İzoparametrik elemanlar için geometrik şekil fonksiyonları ile interpolasyon şekil fonksiyonları aynı olup, elemanın herhangi bir noktasındaki hidrolik yük, şekil fonksiyonlarına bağlı olarak

$$h(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)\,h_i \tag{9}$$

eleman düğüm yükleri yardımıyla hesaplanabilmektedir. (7) ifadesi (6) da yerine konulursa

$$\int\int_{Ae}\left(\frac{\partial(\delta h)}{\partial x}K_x\left(\frac{\partial[N]\{\Delta\}}{\partial x}\right)+\frac{\partial(\delta h)}{\partial y}K_y\left(\frac{\partial[N]\{\Delta\}}{\partial y}\right)\right)dxdy-\int_{\Gamma}(\delta h)\;q\;d\sigma=0 \tag{10}$$

elde edilir. (10) denklemi hidrolik yük Gradyan vektörüne dayanmaktadır. Hidrolik Gradyan vektörü, interpolasyon fonksiyonunun türevlerini içeren $[B]$ matrisi vasıtasıyla

$$\{gv\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial [N]}{\partial x} \\ \dfrac{\partial [N]}{\partial y} \end{bmatrix} \{\Delta\} = [B]\{\Delta\} \tag{11}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre hidrolik yük varyasyonları da

$$\begin{aligned} \delta h &= [N]\{\delta\Delta\} \\ \delta h^T &= \{\delta\Delta\}^T [N]^T \end{aligned} \tag{12}$$

ifadesindeki gibi olur. (11) ve (12) eşitlikleri (10) da yerine yazıldığında,

$$\int\int_{Ae} \left(\frac{\partial [N]\{\delta\Delta\}}{\partial x} K_x \left(\frac{\partial [N]\{\Delta\}}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]\{\delta\Delta\}}{\partial y} K_y \left(\frac{\partial [N]\{\Delta\}}{\partial y} \right) \right) dxdy - \int_{\Gamma} [N]\{\delta\Delta\}\, q\, d\sigma = 0 \tag{13}$$

denklemi edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$\{\delta\Delta\}^T \left(\int\int_{Ae} \left(\left([B]^T [K][B] \right) dA \{\Delta\} \right) \right) - \int_{\Gamma} [N]^T q\, d\sigma = 0 \tag{14}$$

(14) şeklini almaktadır. Burada $[K]$, iletkenlik katsayılar matrisidir.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \tag{15}$$

Buradan

$$[s_e]_{(8*8)} = \int\int_{Ae} \left([B]^T [K][B] \right) dA \quad , \quad \{f_s\}_{(8*1)} = \int_{\Gamma} \left([N]^T q \right) d\sigma \tag{16}$$

tarifleri yapıldığında eleman denklemi,

$$[s_e]\{\Delta\} = \{f_s\} \tag{17}$$

şeklinde elde edilmektedir. Burada $[s_e]$ eleman sızma matrisini, $\{\Delta\}$, eleman hidrolik yük vektörünü, $\{f_s\}$, elemanın sınır yük vektörünü ifade etmektedir. $\{f_s\}$, sınır üzerinde olmayan düğümlerde 0 (sıfır) değerini almaktadır. Herhangi bir akım bölgesinde ise elemanların katkısı alınarak sistem sızma matrisi ve sistem yük vektörü oluşturulur.

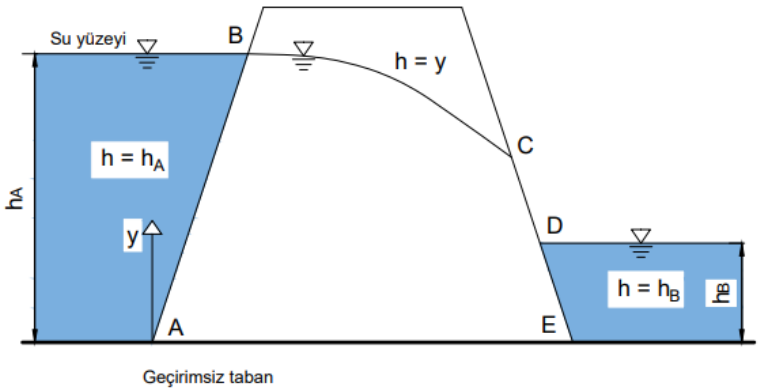
$$[S]\{\Delta\} = \{F\} \tag{18}$$

Burada $[S]$, sistem sızma matrisi, $\{\Delta\}$ tüm düğümler için hidrolik yük vektörü ve $\{F\}$ sistem yük vektörüdür. Belirlenen sınır şartları altında sayısal çözümü yapılarak düğüm noktalardaki toplam hidrolik yük bulunur. Daha sonra, hidrolik eğimler, akım hızları, akım miktarı ve sızma basınçları kolaylıkla hesaplanabilecektir.

SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde, farklı geometri ve malzeme özellikleri bulunan baraj gövdelerinde ve temelinde meydana gelen sızma analizi incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak Fortran dilinde yazılan programlarla araştırılan farklı tür sızma problemlerinde eleman sızma matrisleri ve yük vektörleri Gauss-Legendre sayısal integral yöntemiyle hesaplanmaktadır [26].

Mansap bölgesinde kuyruk suyu bulunan dolgu baraja ait sızma problemleri için sınır şartları şekil 1'de verilmektedir.



Şekil 1. Dolgu barajda sızma ve sınır şartları

$h = h_A$ AB (Memba)

$h = h_B$ ED (Mansab)

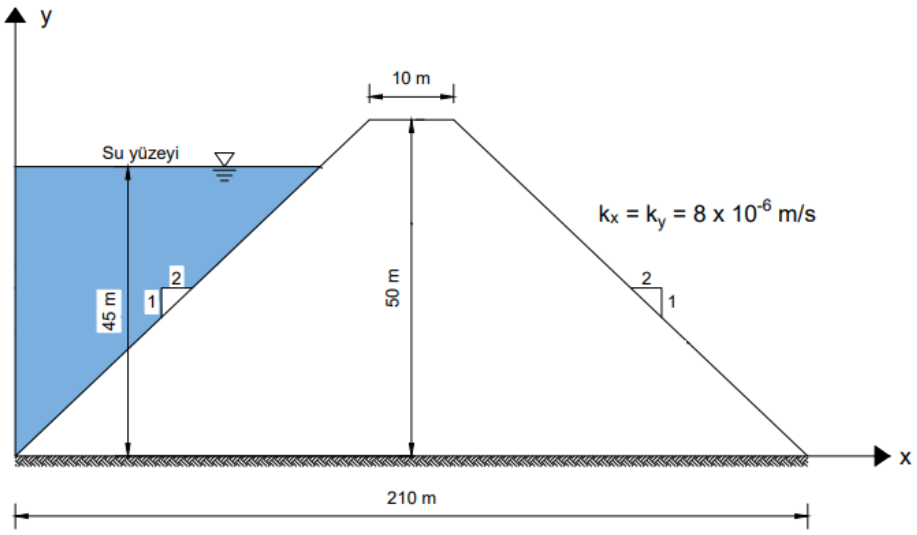
$\left\{ \begin{matrix} h = y \\ \dfrac{\partial h}{\partial n} = 0 \end{matrix} \right\}$ BC (Freatik hat)

$h = y$ CD (Sızma yüzeyi)

$\dfrac{\partial h}{\partial n} = 0$ AE (Geçirimsiz taban)

Uygulama 1

İlk olarak malzeme ve geometrik özellikleri Şekil 2'de verilen homojen izotrop dolgu baraj gövdesinde zamandan bağımsız olarak sızma olayı araştırılmıştır.



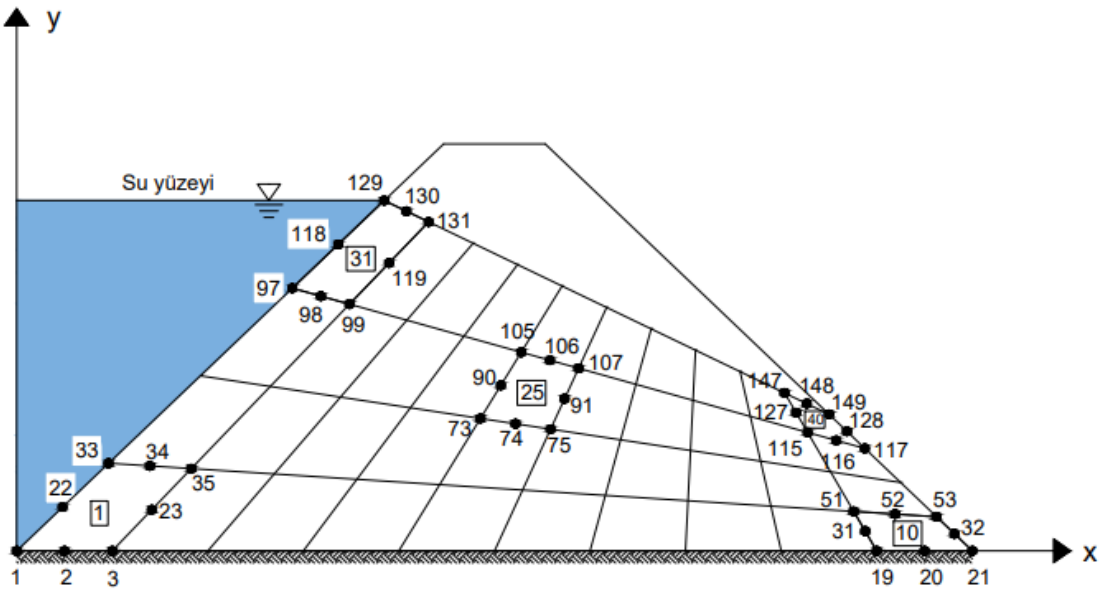
Şekil 2. Dolgu baraj gövde kesiti ve özellikleri

Galerkin yaklaşımına dayalı sonlu elemanlar yöntemiyle hesaplanan dolgu baraj gövdesinden geçen sızma değeri, literatürde bulunan sonuçlar ile Çizelge 1'de karşılaştırmalı olarak verilmiş ve sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

Çizelge 1. Dolgu baraja ait birim genişlikteki sızma debisi ($m^3/s/m$)

SEY [1]	Akım Ağı Yöntemi [1]	Bu çalışma
$6.9803x\ 10^{-6}$	$6.8572x\ 10^{-6}$	$6.8478x\ 10^{-6}$

Hesaplamalar yapılırken sızma bölgesi 40 sonlu eleman ağına (149 düğüm noktası) bölünerek işlemler yapılmıştır. Şekil 3 üzerinde belirtilen noktalardaki dolgu baraja ait hidrolik yük ve basınç değerleri hesaplanarak Çizelge 2' de sunulmuştur.



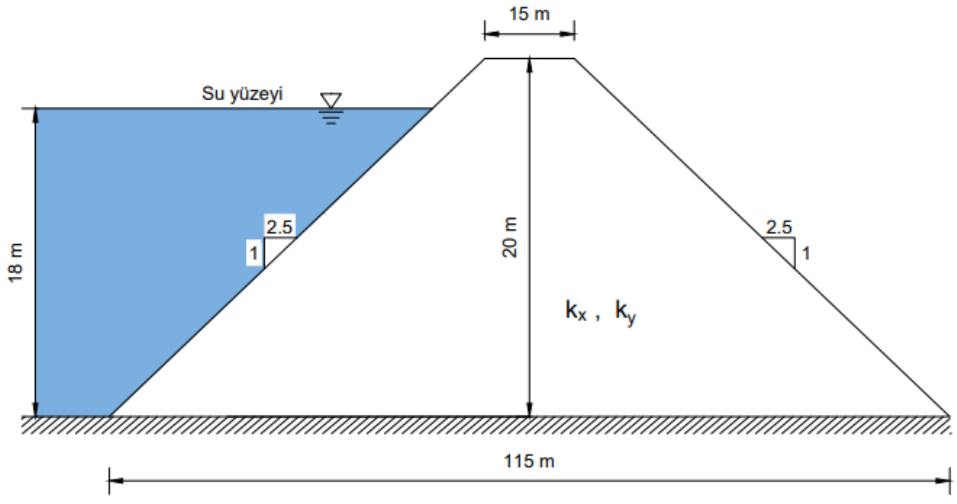
Şekil 3. Dolgu baraj sonlu eleman modeli

Çizelge 2. Dolgu baraja ait hidrolik yük ve basınç yükü değerleri

DÜĞÜM NO	X (m)	Y (m)	HİDROLİK YÜK (m)	BASINÇ YÜKÜ (m)	DÜĞÜM NO	X (m)	Y (m)	HİDROLİK YÜK (m)	BASINÇ YÜKÜ (m)
1	0.000	0.000	45.000	45.000	**91**	128.750	15.938	32.685	16.747
2	10.500	0.000	44.998	44.998	**97**	67.500	33.750	45.000	11.250
3	21.000	0.000	44.966	44.966	**98**	74.100	32.287	44.412	12.125
19	189.000	0.000	10.084	10.084	**99**	80.700	30.825	43.502	12.677
20	199.500	0.000	4.712	4.712	**105**	120.300	22.050	35.033	12.983
21	210.000	0.000	0.000	0.000	**106**	126.900	20.588	33.348	12.760
22	11.250	5.625	45.000	39.375	**107**	133.500	19.125	31.582	12.457
23	30.950	5.137	44.889	39.751	**115**	186.300	7.425	11.741	4.316
31	188.550	1.237	10.332	9.095	**116**	192.900	5.963	8.038	2.075
32	208.250	0.750	0.750	0.000	**117**	199.500	4.500	4.500	0.000
33	22.500	11.250	45.000	33.750	**118**	78.750	39.375	45.000	5.625
34	31.700	10.762	44.928	34.165	**119**	90.650	35.963	42.789	6.826
35	40.900	10.275	44.759	34.484	**127**	185.850	8.663	12.003	3.340
51	188.100	2.475	10.589	8.114	**128**	197.750	5.250	5.250	0.000
52	197.300	1.987	5.764	3.776	**129**	90.000	45.000	45.000	0.000
53	206.500	1.500	1.500	0.000	**130**	95.300	43.003	43.004	0.000
73	108.200	14.700	37.478	22.778	**131**	100.600	41.001	41.001	0.000
74	116.100	13.725	35.690	21.965	**147**	185.400	12.300	12.300	0.000
75	124.000	12.750	33.775	21.025	**148**	190.700	9.650	9.650	0.000
90	114.250	18.375	36.283	17.908	**149**	196.000	6.000	6.299	0.000

Çizelge 2 incelendiğinde en büyük hidrolik yük ve basınç yükü değerlerinin menba kısmının temele yakın bölgesinde olduğu görülmüştür.

Uygulama 2



Şekil 4. Dolgu baraj gövde kesiti ve özellikleri

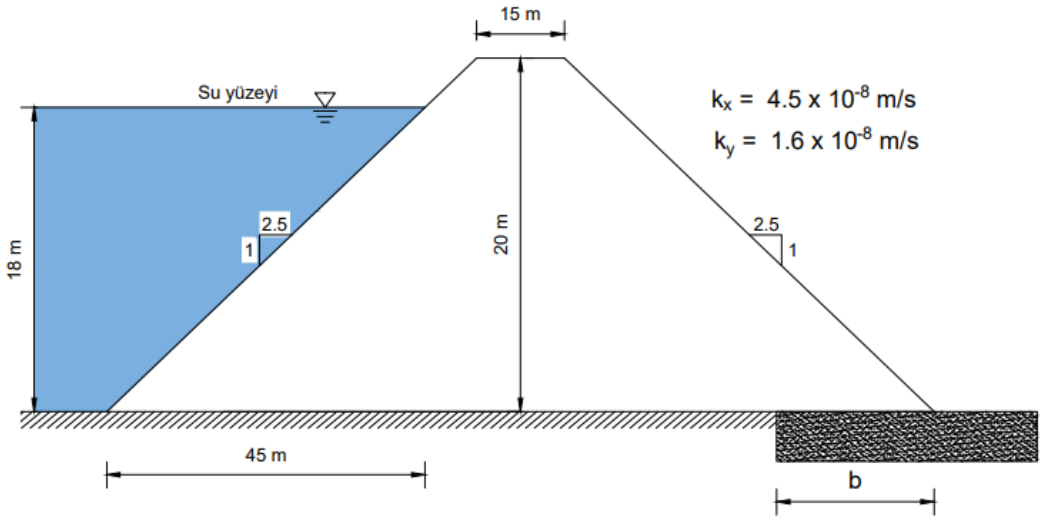
Şekil 4'de geometrisi verilen izotrop ve anizotrop dolgu malzeme özeliğine sahip farklı durumlardaki barajlara ait sızma miktarları hesaplanarak Çizelge 3'de verilmektedir.

Çizelge 3. Farklı zemin özelliklerindeki dolgu barajlara ait birim genişlikteki sızma debisi ($m^3/s/m$)

	Permeabilite Katsayısı (m/s)	**Bu çalışma**
Durum 1	$K_x = 4.5\ x\ 10^{-8}$ $K_y = 4.5\ x\ 10^{-8}$	$1.060903x\ 10^{-7}$
Durum 2	$K_x = 1.6\ x\ 10^{-8}$ $K_y = 4.5\ x\ 10^{-8}$	$0.3974995x\ 10^{-7}$
Durum 3	$K_x = 4.5\ x\ 10^{-8}$ $K_y = 1.6\ x\ 10^{-8}$	$1.001256x\ 10^{-7}$

Farklı zemin durumlarının ele alındığı bu örnekte, sonuçların bulunduğu Çizelge 3 incelendiğinde x yönündeki permeabilite katsayısının sızma üzerinde daha etkili olduğu söylenebilir.

Uygulama 3



Şekil 5. Yatay drenajlı dolgu baraj gövde kesiti ve özellikleri

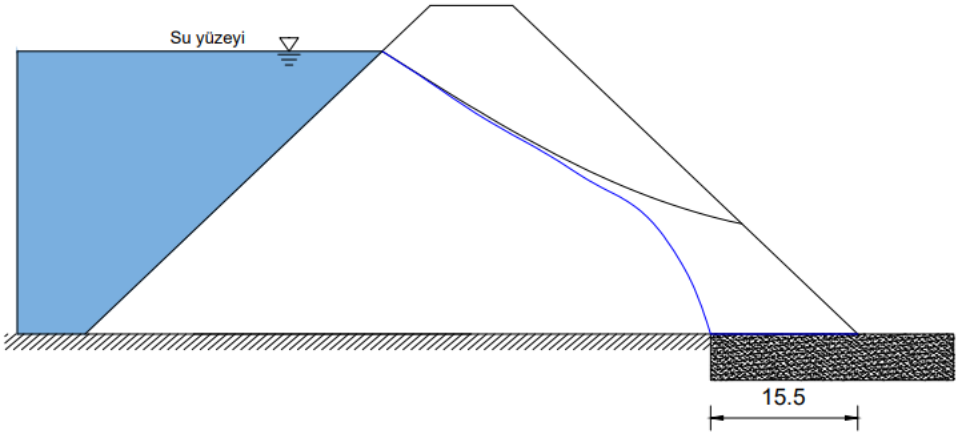
Geometrisi ve dolgu özellikleri Şekil 5'de verilen anizotrop malzemeli, gövde mansap kısmında yatay drenaj bulunan dolgu baraj için birim genişlik sızma debisi hesaplanarak drenaj uzunluğunun sızma üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar Çizelge 4'de sunulmuştur.

Çizelge 4. Farklı uzunlukta yatay drenaja sahip dolgu barajlara ait birim genişlikteki sızma debisi ($m^3/s/m$)

Yatay Drenaj Uzunluğu, b (m)	Sağlıca [6]	Bu çalışma
15.5	$1.000x\ 10^{-7}$	$1.023x\ 10^{-7}$
18.0	-	$1.041x\ 10^{-7}$
21.0	-	$1.058x\ 10^{-7}$
25.0	-	$1.106x\ 10^{-7}$

Çizelge 4 incelendiğinde yatay drenaj uzunluğu arttıkça birim genişlikteki sızma miktarının da arttığı görülmüştür.

Ayrıca, anizotropik malzeme özelliğine sahip yatay drenajsız (Durum 3) ve yatay drenajlı dolgu barajlar için freatik hattın konumu belirlenerek Şekil 6 üzerinde gösterilmiştir.

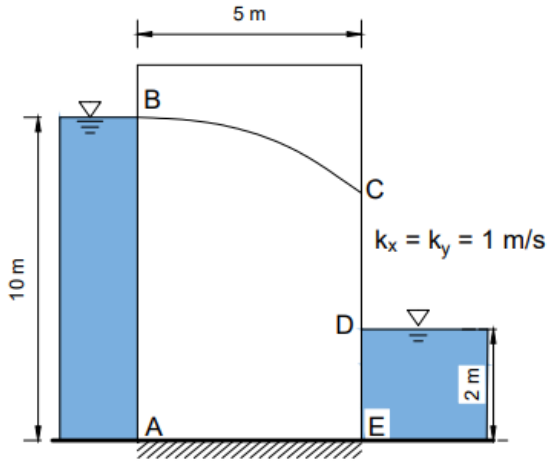


Şekil 6. Dolgu baraja ait freatik hat

Şekilden de anlaşıldığı üzere, yatay drenajlı barajlarda sızma hattının baraj gövdesi içerinde olmasından dolayı mansap bölgesine borulanmadan kaynaklı olası bir zarar veremeyeceği görülmektedir. Bu sonuç, toprak barajların stabilitesi için su hattı konumunu kontrol etmekte yatay drenajların kullanılmasının önemini kanıtlamaktadır.

Uygulama 4

Bu uygulamada geometrik ve malzeme özellikleri Şekil 7'de verilen mansap bölgesinde su bulunan dikdörtgen kesitli baraj gövdesi için sızma miktarı hesaplanmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar, çözümün başlangıcında bilinmeyen ve yinelemeli bir süreçte belirlenmesi gereken su yüzeyinin konumunu farklı teoriler ile inceleyen Parsi ve Daneshm [27] ve Parsi [28] sonuçları ile Çizelge 5'de verilmiştir.



Şekil 7. Dolgu baraj gövde kesiti ve özellikleri

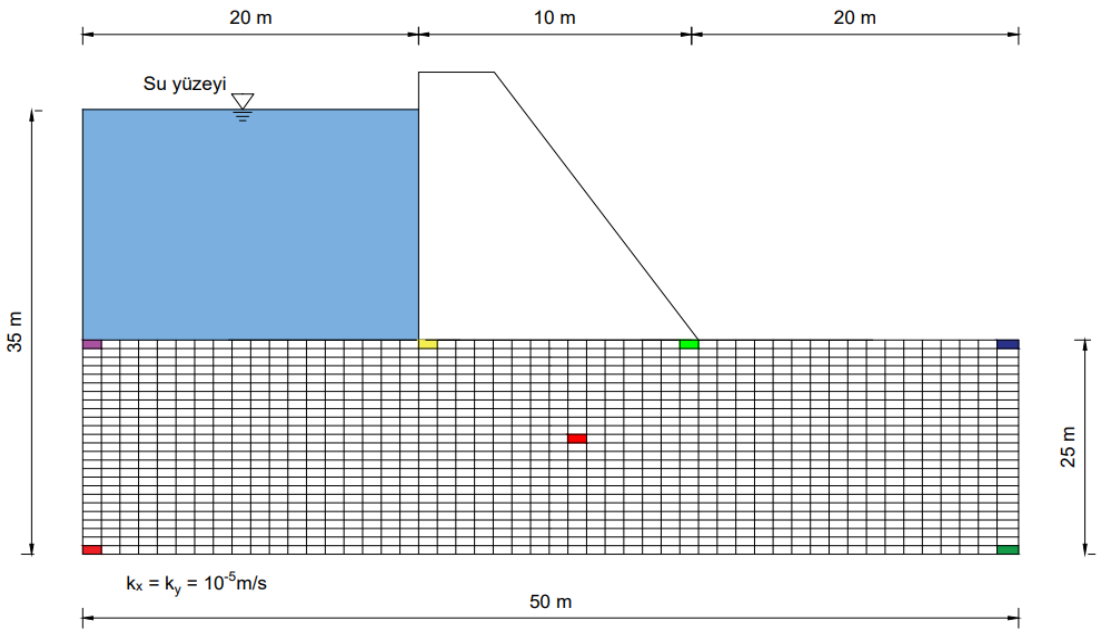
Literatür ile karşılaştırmalı olarak Çizelge 5'de verilen sızma sonuçlarının yakın olduğu görülmüştür.

Çizelge 5. Dolgu baraja ait birim genişlikteki sızma debisi ($m^3/s/m$)

Parsi [27]	**Parsi [28]**	**Bu çalışma**
9,60	9.64	9.61

Uygulama 5

Şekil 8'de özellikleri verilen barajın temelinden geçen sızma miktarı değeri hesaplanarak Çizelge 6'da verilmiş ve literatürde bulunan sonuç ile birbirine oldukça yakın olduğu görülmüştür.



Şekil 8. Dolgu baraj gövde-temel kesiti ve özellikleri

Çizelge 6. Baraj temelinden geçen birim genişlikteki sızma debisi ($m^3/s/m$)

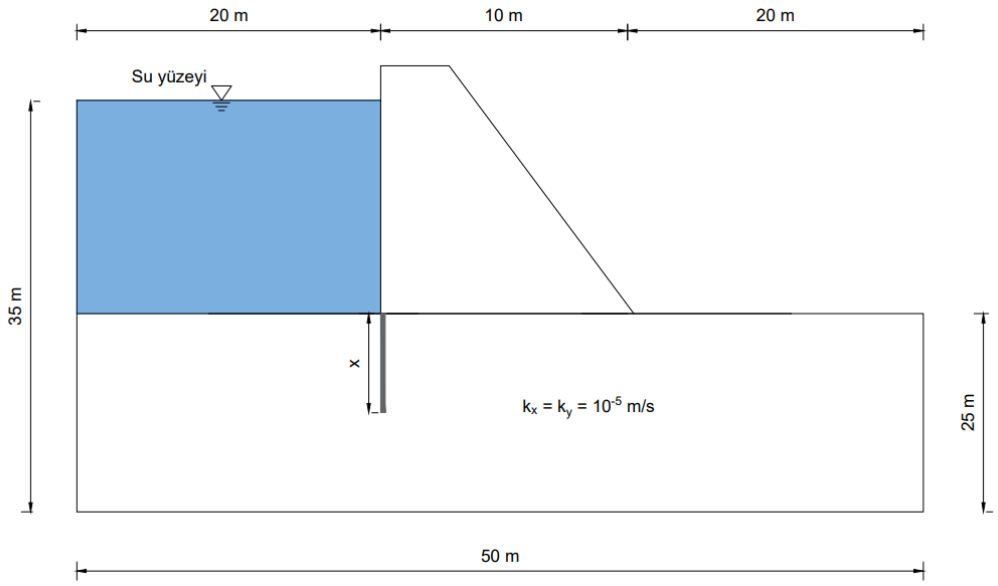
Mansuri [29]	**Bu çalışma**
$7.7015x\ 10^{-5}$	$7.6502x\ 10^{-5}$

Hesaplamalar yapılırken sızma bölgesi 1250 sonlu eleman ağına (3901 düğüm noktası) bölünerek işlemler yapılmıştır. Temel uçları ve ortası ile (1,50,1200,1250), gövde mansap ve menba bölgesi altında bulunan iki elemandaki (1221,1231) noktalarda baraja ait hidrolik yük ve basınç değerleri hesaplanarak Çizelge 7' de sunulmuştur.

Çizelge 7. Baraja ait hidrolik yük ve basınç yükü değerleri

DÜĞÜM NO	**X (m)**	**Y (m)**	**HİDROLİK YÜK (m)**	**BASINÇ YÜKÜ (m)**	**DÜĞÜM NO**	**X (m)**	**Y (m)**	**HİDROLİK YÜK (m)**	**BASINÇ YÜKÜ (m)**
1	0	0	32.412	32.412	**3690**	20.5	24	33.279	9.279
2	0.5	0	32.410	32.410	**3691**	21	24	32.793	8.793
3	1	0	32.407	32.407	**3709**	30	24	26.359	2.359
99	49	0	27.520	27.520	**3710**	30.5	24	26.026	2.026
100	49.5	0	27.517	27.517	**3711**	31	24	25.847	1.847
101	50	0	27.516	27.516	**3747**	49	24	25.169	1.169
102	0	0.5	32.413	31.913	**3748**	49.5	24	25.169	1.169
103	1	0.5	32.408	31.908	**3749**	50	24	25.169	1.169
151	49	0.5	27.519	27.019	**3750**	0	24.5	34.912	10.412
152	50	0.5	27.515	27.015	**3751**	1	24.5	34.912	10.412
153	0	1	32.416	31.416	**3770**	20	24.5	34.137	9.637
154	0.5	1	32.415	31.415	**3771**	21	24.5	32.987	8.487
155	1	1	32.412	31.412	**3780**	30	24.5	25.853	1.353
251	49	1	27.516	26.516	**3781**	31	24.5	25.430	0.930
252	49.5	1	27.513	26.513	**3799**	49	24.5	25.085	0.585
253	50	1	27.512	26.512	**3800**	50	24.5	25.084	0.584
1873	24	12	30.198	18.198	**3801**	0	25	35.000	10.000
1874	24.5	12	30.082	18.082	**3802**	0.5	25	35.000	10.000
1875	25	12	29.965	17.965	**3803**	1	25	35.000	10.000
1950	24	12.5	30.206	17.706	**3841**	20	25	35.000	10.000
1951	25	12.5	29.966	17.466	**3842**	20.5	25	33.756	8.756
2025	24	13	30.215	17.215	**3843**	21	25	32.986	7.986
2026	24.5	13	30.091	17.091	**3861**	30	25	25.000	0.000
2027	25	13	29.966	16.966	**3862**	30.5	25	25.000	0.000
3649	0	24	34.824	10.824	**3863**	31	25	25.000	0.000
3650	0.5	24	34.824	10.824	**3899**	49	25	25.000	0.000
3651	1	24	34.823	10.823	**3900**	49.5	25	25.000	0.000
3689	20	24	33.625	9.625	**3901**	50	25	25.000	0.000

Uygulama 6



Şekil 9. Geçirimsizlik perdeli dolgu baraj gövde-temel kesiti ve özellikleri

Son uygulamada ise Şekil 9'da gösterilen geçirimsizlik perdesinin baraj temelinden sızan su miktarına etkisi araştırılmıştır. Çizelge 8 incelendiğinde geçirimsizlik perdesinin sızma olayı üzerinde önemli bir etkisi olduğu ve uzunluğu arttıkça sızma miktarının azaldığı anlaşılmıştır.

Çizelge 8. Farklı uzunlukta geçirimsizlik perdesine sahip dolgu baraj temelinden birim genişlikteki sızma debisi ($m^3/s/m$)

Geçirimsizlik Perdesi Uzunluğu, X (m)	Bu çalışma
0	$7.6502x\ 10^{-5}$
7	$5.4336x\ 10^{-5}$
8	$5.1689x\ 10^{-5}$
9	$4.9176x\ 10^{-5}$
10	$4.6780x\ 10^{-5}$
11	$4.4495x\ 10^{-5}$
12	$4.2311x\ 10^{-5}$

SONUÇLAR

Bu çalışmada, dolgu baraj gövdesi ve temelindeki sızma analizi Galerkin yaklaşımına dayalı sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmiştir. Fortran dilinde bir program yazılarak baraj gövdesi ve temelindeki noktalarda hidrolik yük, basınç değerleri ve sızma miktarı bulunmuştur. Yapılan çalışmalarda sırasıyla; dolgu barajlarda sızma miktarı üzerinde x yönündeki permeabilitenin daha etkili olduğu, yatay drenaj varlığının mansap bölgesi için önemli olduğu, yatay drenaj uzunluğu arttıkça sızma debisinin arttığı, geçirimsizlik perdesinin sızma boyunu uzatarak birim genişlikteki sızma debisini azalttığı sonuçlarına varılmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma Çukurova Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenmiştir (FBA-2019-12058).

KAYNAKLAR

[1] M. Ardıçlıoğlu, *Sonlu elemanlar yöntemi ile Aslantaş baraj gövdesinde sızma analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, 1990.

[2] S. B. Keskin, *Toprak dolgu baraj gövdesindeki ve altındaki sızma olayının incelenmesi,* Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, 2005.

[3] H. Çilingir, *Toprak Dolgu barajların gövdelerindeki sızmaların sonlu elemanlar yöntemi ile incelenmesi: Büyükçekmece barajı uygulaması,* Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2007.

[4] A. Fakhari, A. Ghanbari, A Simple method for calculating the seepage from earth dams with clay core, *Journal of GeoEngineering*. 8 (2013) 27-32.

[5] B. Çelik, *Aydın İkizdere barajı sonlu elemanlar yöntemi ile sızma analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, 2014.

[6] O. Sağlıca, *Dolgu baraj gövdelerinde sızma analizi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi, 2013.

[7] M.S. Darbandi, O. Torabi, M. Saadat, Y. Daghighi, D. Jarrahbashi, A Moving-Mesh finite-volume method to solve free-surface seepage problem in arbitrary geometries, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 31 (2007) 1609–1629.

[8] K. Rafıezadeh, B., Ataıe-ashtiani,. Seepage analysis in multi-domain general anisotropic media by three-dimensional boundary elements, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 37 (2013) 527–541.

[9] A. Ourıa, M.M. Toufıgh, Application of nelder-mead simplex method for unconfined seepage problems, *Applied Mathematical Modelling*. 33 (2009) 3589–3598.

[10] K. K. El-Jumaıly, J.M.H Al-bakry, Seepage analysis through and under hydraulic structures applying finite volume method. Eng. Tech.J., 9 (2013) 1719-1731.

[11] S.B. Mesci, *Dolgu baraj gövdelerindeki sızmaların ve freatik hattın incelenmesi: seferihisar barajı uygulaması*, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2006.

[12] H.U. Çakır, *Yeraltısuyu akımlarının modellenmesinde kollokasyon metodu,* Dokuz Eylül Üniversitesi, Yüksek Lisans Tezi, 2011.

[13] L. Quanshu, L. Jianjun, Numerical analysis of the seepage field in core-dam lı quanshu, LIU Jianjun (2010) 492-499. https://www.researchgate.net/publication/267976261_Numerical_Analysis_of_the_Seepage_Field_in_Core-Dam.

[14] B. Mansuri, F. Salmasi, Effect of horizontal drain length and cutoff wall on seepage and uplift pressure in heterogeneous earth dam with numerical simulation. *Journal of Civil Engineering and Urbanism*, 3(3) (2013) 114-121.

[15] A.A. Sakhmarsi, H. Akhbari, SP. Naeimi, A. Kiapey, The effect of the cutoff wall conditions on the seepage characteristics of homogeneous earth-fill dams using SEEP/W, *WALIA journal*. 30(S2) (2014) 176-182.

[16] S. Yuan, H. Zhong, Three dimensional analysis of unconfined seepage in earth dams by the weak form quadrature element method. Journal of Hydrology, 533 (2016) 403–411.

[17] W. Zhang, B. Dai, Z., Liu, C. Zhou, Unconfined seepage analysis using moving kriging mesh-free method with Monte Carlo integration, *Transport in Porous Media*. 116(1) (2017) 163–180.

[18] S.I. Khassaf, A.M. Madhloom Efect of impervious core on seepage through zoned earth dam (case study: Khassa Chai dam), *Int J Sci Eng Res*. 8(2) (2017) 1053–1064.

[19] A. Zewdu, Seepage and slope stability analysis of earthen dam: a case study of Koga Dam, Ethiopia, *WNOFNS*. 26 (2019) 191-217.

[20] P. Taghvaei, SF Mousavi., A. Shahnazari, H. Karami, I. Shoshpash, Experimental and numerical modeling of nano-clay efect on seepage rate in earth dams, *Int J Geosynth Ground Eng.* 5(1) (2014):1.

[21] A. Doaa, T. El Molla, Seepage through homogeneous earth dams provided with a vertical sheet pile and formed on impervious foundation, *Ain Shams Eng J*.10(3) (2019) 529–539.

[22] H.R.Z. Sanayei, H. Javdanian, Assessment of steady-state seepage through dams with nonsymmetric boundary conditions: analytical approach, *Environ Monit Assess* (2020) 192: 3.

[23] F. Salmasi, M. Nouri, J. Abraham, Upstream cutoff and downstream filters to control of seepage in dams, *Water Resources Management*. 34 (2020) 4271–4288.

[24] G. Kheiri, H. Javdanian, G. Shams, A numerical modeling study on the seepage under embankment dams, *Modeling Earth Systems and Environment* 6 (2020) 1075–1087.

[25] A. E. Harr, *Groundwater and Seepage*, McGRaw-Hill Book Company, 1962.

[26] A. R. Noori, T. A. Aslan, B. Temel, Dairesel plakların sonlu elemanlar yöntemi ile laplace uzayında dinamik analizi. *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 8*(1),(2019) 193-205.

[27] M.J.K. Parsi, F. Daneshm, Unconfined seepage analysis in earth dams using smoothed fixed grid finite element method, *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech*. 36 (2012) 780–797.

[28] M.J.K. Parsi, Isogeometric analysis in solution of unconfined seepage problems. *Computers and Mathematics with Applications*. 78 (2019) 66–80.

[29] B. Mansuri, F. Salmasi, B, Oghati. Effect of Location and Angle of Cutoff Wall on Uplift Pressure in Diversion Dam, *Geotech Geol Eng.* 32 (2014) 1165–1173.

EULER-BERNOULLI VE TIMOSHENKO TEORİLERİNE DAYALI EKSENEL YÖNDE FONKSİYONEL DERECELENMİŞ KOLONLARIN BURKULMA ANALİZİ

Burkay SİVRİ[1] ve Beytullah TEMEL[2]
[1,2] Çukurova Üniversitesi, Adana

ABSTRACT

In this study, the buckling load of straight column made of functionally graded material in the axial direction is investigated by the Complementary Functions Method (CFM). The canonical equations governing the buckling behavior are obtained with the aid of equilibrium equations based on the Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. The set of ordinary differential equations is solved with a program prepared in Python language. The effects of material variation coefficients, length/thickness ratios, and different boundary conditions on the buckling load are investigated parametrically. The buckling loads obtained are compared with the existing methods in the literature and the values found in Abaqus, the finite element program, and the efficiency of the applied method is shown.

Keywords: Buckling; Functionally graded materials; Complementary functions method

ÖZET

Bu çalışmada; eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş malzemeli, doğru eksenli kolonların burkulma yükü Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile incelenmiştir. Burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden kanonik denklemler, Euler-Bernoulli (BKT) ve Timoshenko kiriş teorilerine (TKT) dayalı olarak denge denklemleri yardımıyla elde edilmiştir. Adi diferansiyel denklem takımları, Python dilinde hazırlanan programla çözülmüştür. Malzeme değişim fonksiyonunun, uzunluk/kalınlık oranının ve farklı sınır koşullarının burkulma yüküne etkisi parametrik olarak araştırılmıştır. Elde edilen burkulma yükleri, literatürde bulunan mevcut yöntemler ve Abaqus sonlu elemanlar programında bulunan değerler ile karşılaştırılmış, uygulanan yöntemin etkinliği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Burkulma; Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler; Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi

GİRİŞ

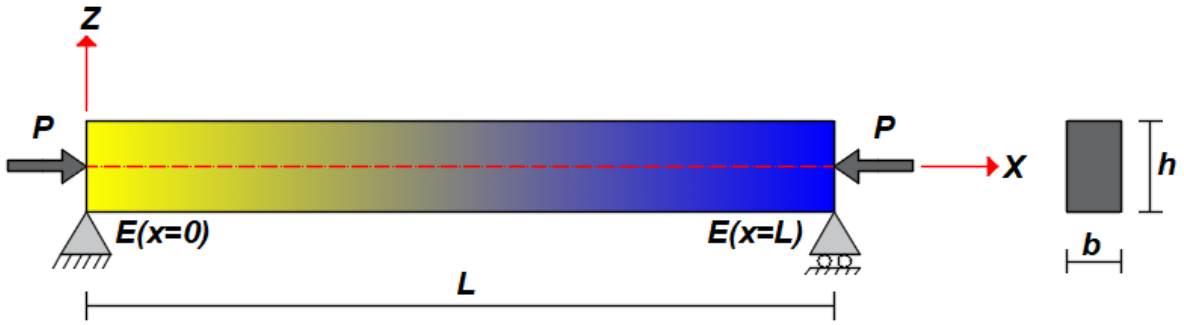
Mekanik özellikleri bir noktadan diğer bir noktaya sürekli olarak değişen fonksiyonel derecelenmiş (FD) malzemeli elemanlar, havacılık ve uzay sanayi, tıp, otomotiv ve modern mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tür yapıların; üretim teknikleri, aşınma, yorulma, titreşim, burkulma gibi özelliklerinin belirlenmesine yönelik çalışmalar günümüzde önem kazanmıştır. Bu nedenle FD malzemeli elemanların burkulmasını inceleyen birçok çalışma mevcuttur.

Gören ve Erim [1], değişen kesitli konsol Timoshenko kirişlerinin stabilitesini incelemiştir. On farklı, kademeli ve kademesiz kirişin kritik burkulma yüklerini, sonlu eleman ve sonlu eleman-transfer matris metotlarını kullanarak, Matlab 5.1 programlama diliyle hesaplamışlardır. Coşkun ve Atay [2], sabit ve değişken kesitli Euler kolonlarının burkulma yüklerini bulmak için, doğrusal olmayan adi kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan Varyasyonel İterasyon Yöntemini kullanmışlardır. Shahba ve ark.[3], homojen olmayan fonksiyonel derecelenmiş Euler-Bernoulli kirişlerinin serbest titreşim ve stabilitesini incelemişlerdir. Huang ve Li [4], uniform olmayan ve eksen boyunca eğilme rijitliği değişen Euler-Bernoulli kolonlarının burkulma davranışlarının incelenmesi için analitik yaklaşım sunmuşlardır. Mafsal uçlu, ankastre uçlu ve konsol kolonların burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklemi, Fredholm integral denklemine indirgemişlerdir. Elishakoff [5], fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma davraşını incelemiştir. Çalışmasında konsol kolonların burkulma modunu, farklı polinom varyasyonlarını dikkate alarak vermiştir. Yılmaz ve ark. [6], elastik mesnetli uniform olmayan eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma analizini Lokalize Diferansiyel Kuadratür Yöntemi ile incelemişlerdir. Filiz ve Aydoğdu [7], Ritz Metodu yardımıyla eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş Euler-Bernoulli kirişlerinin çeşitli sınır koşullarında boyutsuz frekans parametrelerini ve kritik burkulma yüklerini bulmuşlardır. Uluköy [8], malzeme özelliğinin genişlik boyunca değiştiği eksenel basınç yükü altındaki kolonun burkulma analizini sonlu eleman tabanlı Ansys programını kullanarak yapmıştır. Xiao ve Li [9], bir ucunda dönme yayı bulunan homojen olmayan konsol kolonların Euler burkulmasını incelemişlerdir. Burkulma yüklerini kesin olarak bulabilmek için problem bir Bessel denklemine dönüştürülmüştür. Bulunan kesin burkulma yüklerini, moment metodu kullanılarak bulunan yaklaşık burkulma yükü değerleriyle karşılaştırmışlardır. Lee ve Lee [10], kesit ve malzeme özelliklerinin kolon ekseni boyunca doğrusal değiştiği Euler-Bernoulli kolonlarının serbest titreşim ve burkulma analizini birleşik bir modelde sunmuşlardır. Yönetici denklemleri elde edip, bu denklemleri determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemiyle çözmüşlerdir. Buldukları sonuçları, Adına sonlu eleman yazılımından elde ettikleri sonuçlarla karşılaştırmışlardır. Akgöz [11], kesitlerinin uzunlukları boyunca sürekli değiştiği eksenel basınç altındaki narin kolonların burkulma davranışını incelemiştir. Kolonlar Euler-Bernoulli kiriş teorisiyle modellenmiş ve burkulma yükleri Ritz Metoduyla bulunmuştur. Lee ve Lee [12], burkulma kapasitesini en üst düzeye çıkarmak için eksenel derecelenmiş değişen kesitli kolonların optimizasyonunu incelemişlerdir. Diferansiyel denklemler, determinant arama algoritması ile birleştirilmiş doğrudan integrasyon yöntemi ile çözülmüştür. Rajasekaran [13], fonksiyonel derecelenmiş uniform olmayan kirişlerin serbest titreşim ve burkulma analizlerini diferansiyel transformasyon yöntemini kullanarak incelemiştir.

Bu çalışmada; kayma deformasyonlarının etkileri de dikkate alınarak, eksenel yönde FD malzemeli kolonların burkulması TFY ile incelenmiştir. Malzeme değişim fonksiyonunun, uzunluk/kalınlık oranının ve farklı sınır koşullarının burkulma yüküne etkisi araştırılmıştır.

TEMEL DENKLEMLER ve ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Şekil 1'de eksenel basınç kuvveti altındaki FD malzemeli kolonda; A dikdörtgen kesitin alanını, I atalet momentini, $E(x)$ ise elastisite modülünün x ekseni boyunca malzeme fonksiyonuyla değişimini göstermektedir.



Şekil 1. Ekseni Yönünde Fonksiyonel Derecelenmiş Kolon

Eksenel ve düşey yer değiştirmeler, U_x ve U_z ile birim şekil değiştirmeler ε_x ve γ_{xz}; TKT'ye göre denklem (1-4)'deki gibi ifade edilmektedir [14].

$$U_x = u(x) + z\theta(x) \tag{1}$$

$$U_z = w(x) \tag{2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z\theta' \tag{3}$$

$$\gamma_{xz} = \theta + w' \tag{4}$$

Şekil 1. de verilen dikdörtgen kesit özelliklerine göre iç kuvvetler ile gerilmeler arasındaki ilişkiler denklem (5-7)'de verilmektedir.

$$N_x = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = b\int_{-h/2}^{h/2} E(x)\varepsilon_x dz \tag{5}$$

$$M_x = b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = b\int_{-h/2}^{h/2} E(x)\varepsilon_x z dz \tag{6}$$

$$Q_z = k_s b\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = bk_s\int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x)}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xz} dz \tag{7}$$

Burada k_s, kesite bağlı kayma düzeltme katsayısını, υ ise poisson oranını göstermektedir.

Denklem (3-4), iç kuvvet-gerilme bağıntılarında yerine yazılarak (8-10) denklemleri elde edilir. Normal kuvvet, kesme kuvveti ve momentteki değişimler ise, (11-13) denklemlerinde verilmektedir [15]. Bu çalışmada burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden kanonik denklem takımı (8-13)'deki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{du}{dx} = \frac{N_x}{K_{11}} \tag{8}$$

$$\frac{dw}{dx} = -\left(\frac{K_{33}}{K_{33} - P}\right)\theta \tag{9}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_x}{K_{22}} \tag{10}$$

$$\frac{dN_x}{dx} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_z - P\left(\frac{K_{33}}{K_{33} - P}\right)\theta \tag{13}$$

Burada K_{11} , K_{22} ve K_{33} kesit rijitlik sabitleri olup, denklem (14-15)'de verilmiştir.

$$\{K_{11}, K_{22}\} = \{E(x)A,\ E(x)I\} \tag{14}$$

$$K_{33} = k_s G(x)A \tag{15}$$

Çalışmada özel olarak, BKT'ye dayalı burkulma yükü hesabında denklem (9) ve (13) eşitliklerindeki, $K_{33} / (K_{33} - P) = 1$ alınmaktadır.

$$S(y) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 \tag{16}$$

Denklem (16)'da genel formu verilen sınır değer problemi, n adet birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımına indirgenir. Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemiyle diferansiyel denklem takımının çözümü [14,16,17]; n adet homojen, bir adet homojen olmayan başlangıç değer problemi çözümü şeklinde denklem (17)'deki gibi yazılır. Çalışmada başlangıç değer problemlerinin çözümünde beşinci mertebe Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır [18].

$$y(x) = y_0(x) + c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \tag{17}$$

Denklem (17)'de; $y_0(x)$ homojen olmayan çözümü, $y_n(x)$ homojen çözüm fonksiyonlarını, c_n terimleri ise integrasyon sabitlerini ifade etmektedir. İntegrasyon sabitleri problemin sınır koşullarından elde edilir. Bu çalışmada ele alınan problemler çözülürken Çizelge 1'de verilen sınır koşulları dikkate alınmıştır.

Çizelge 1. Sınır Koşulları

Sınır Koşulları	Serbestlikler		
Ankastre Mesnet (A)	$u = 0$	$w = 0$	$\theta = 0$
Sabit Mesnet (S)	$u = 0$	$w = 0$	$M_x = 0$
Serbest Uç (Se)	$u = 0$	$Q_z = 0$	$M_x = 0$

Analizi yapılan problemin burkulma yükleri, sınır koşulları dikkate alınarak, diferansiyel denklem takımının homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerlerden elde edilmektedir. Burkulma yükleri, Secant metoduyla iteratif olarak bulunmaktadır.

SAYISAL UYGULAMALAR

Uygulama 1

Kullanılan çözüm yönteminin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliğini göstermek için literatürde analitik çözümü verilen homojen-izotrop malzemeye sahip bir kolon ele alınmıştır. Kolonun geometri ve malzeme özellikleri denklem (18)'de verilmiştir. Burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklem takımı TFY ile $N=\{5,10,20,50\}$ adım aralıkları ve çeşitli sınır koşulları (SK) için çözülmüştür.

$$r=\frac{I}{AL^2}=0.01,\quad k_s=5/6,\quad \upsilon=0.3 \tag{18}$$

Çizelge 2. Homojen-İzotrop Euler-Bernoulli Kolonlarının Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}}=P_{cr}L^2/EI$)

SK	Bu Çalışma				Wang
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	[20]
S-S	9.86920	9.86960	9.86960	9.86960	9.86960
A-S	20.18424	20.19060	20.19072	20.19072	20.19073
A-A	39.41029	39.47681	39.47839	39.47842	39.47842
A-Se	2.46740	2.46740	2.46740	2.46740	2.46740

Çizelge 2'de BKT'ye dayalı homojen izotrop kolonların TFY ile bulunan boyutsuz burkulma yükleri verilmiştir. Çizelge 3'de ise kayma deformasyonlarının etkisinin dikkate alındığı TKT'ye dayalı homojen izotrop kolonların boyutsuz burkulma yükleri sunulmuştur.

Çizelge 3. Homojen-İzotrop Timoshenko Kolonlarının Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}}=P_{cr}L^2/EI$)

SK	Bu Çalışma				Wang
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	[20]
S-S	7.54573	7.54596	7.54596	7.54596	7.54596
A-S	12.38488	12.38727	12.38732	12.38732	12.38732
A-A	17.67594	17.68931	17.68962	17.68963	17.68963
A-Se	2.29102	2.29102	2.29102	2.29102	2.29103

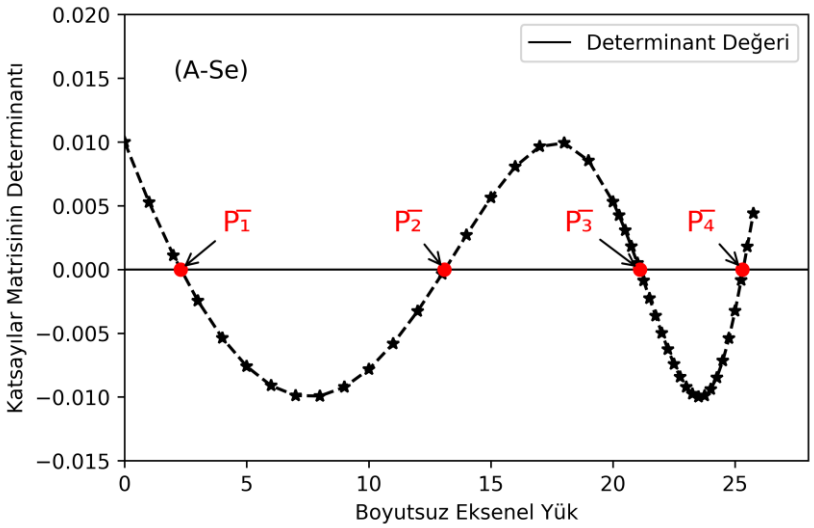
TKT'ye dayalı homojen-izotrop konsol kolunun dört burkulma moduna ait boyutsuz burkulma yükleri Çizelge 4'de verilmiştir. Bu sınır koşuluna sahip kolonun P eksenel yüküne bağlı katsayılar matrisi determinantının değişimi ise Şekil 2'de gösterilmiştir.

Çizelge (2-4) incelendiğinde, TFY ile elde edilen burkulma yüklerinin, literatürde bulunan mevcut burkulma yükleriyle çok uyumlu olduğu görülmektedir. S-S sınır koşuluna sahip; homojen-izotrop Euler-Bernoulli kolonunun $N=5$ adım aralığında literatür ile birebir uyum

sağladığı görülmektedir. Timoshenko kolonu için çözüm aralığı $N=10$ adım alındığında yeterli hassasiyet sağlanmıştır.

Çizelge 4. Homojen-İzotrop Timoshenko Konsol Kolonunun Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_i}=P_iL^2/EI$)

A-Se	Bu Çalışma				Wang
	$N=5$	$N=10$	$N=20$	$N=50$	[20]
$\overline{P_1}$	2.29102	2.29102	2.29102	2.29102	2.29103
$\overline{P_2}$	13.11484	13.11785	13.11791	13.11791	13.11791
$\overline{P_3}$	21.06022	21.09093	21.09196	21.09198	21.09198
$\overline{P_4}$	25.33910	25.33024	25.33488	25.33498	25.33498



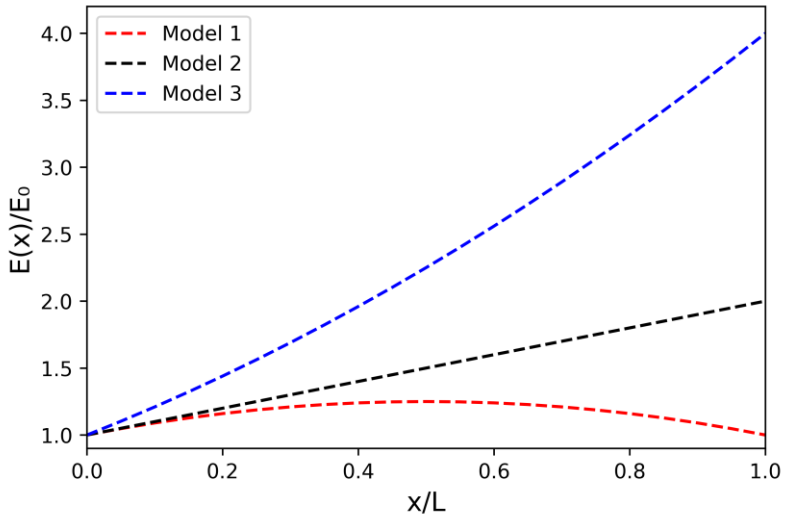
Şekil 2. A-Se Sınır Koşulu için Katsayılar Matrisi Determinantının Değişimi

Uygulama 2

Bu uygulamada, eksenel yönde FD malzemeli kolonların analizleri için malzeme modelleri Çizelge 5'de ve değişim fonksiyon grafikleri Şekil 3'de verilen üç farklı model ele alınmıştır [3,13]. FD malzemeli kolonlarda $k_s=0.85$, $\upsilon=0.3$ olarak sabit alınmıştır. Bu uygulama için TFY ile yapılan analizlerde $N=20$ adım aralığı kullanılmıştır.

Çizelge 5. Malzeme Değişimi Fonksiyonları

Model No	Değişim Fonksiyonları
Model 1	$1+x-x^2$
Model 2	$1+x$
Model 3	$1+2x+x^2$



Şekil 3. Elastisite Modülünün Kolon Boyunca Değişimi

Eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş BKT'ye göre kolonların boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge 6'da verilmiştir.

Çizelge 6. BKT'ye göre FD Malzemeli Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

SK	Model 1		Model 2		Model 3	
	Bu çalışma	Rajasekaran [13]	Bu çalışma	Rajasekaran [13]	Bu çalışma	Rajasekaran [13]
S-S	12.00000	12.00000	14.51125	14.51125	20.79229	20.79229
A-S	23.66437	23.66438	29.44896	29.44897	42.10915	42.10919
A-A	45.39557	45.39565	57.39388	57.39401	81.92314	81.92347
A-Se	2.86537	2.86375	3.11770	3.11770	3.83638	3.83638

BKT'ye dayalı FD malzemeli kolonların çeşitli sınır koşulları için TFY ile bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin literatürde verilen sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir. A-A sınır koşulunda; bu çalışmadan elde edilen sonuçlarla literatürde bulunan mevcut sonuçların, malzeme değişim modellerine göre, {Model 1, Model 2, Model 3} bağıl farkları sırasıyla, $\{\%-1.76x10^{-4}, \%-2.27x10^{-4}, \%-4.03x10^{-4}\}$ olarak bulunmuştur.

Timoshenko teorisine dayalı eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma analizi için TFY ve Abaqus sonlu elemanlar paket programı kullanılmıştır. Sonlu elemanlar programında, malzeme değişiminin hassas olarak modellenebilmesi için kolon, uzunluğu boyunca 200 adet homojen-izotrop elemana bölünmüştür. Abaqus ile analizlerde, kayma deformasyonlarının dikkate alındığı B21 elemanı kullanılmıştır. Farklı sınır koşullarına sahip, FD malzemeli Timoshenko kolonlarının çeşitli L/h oranlarında boyutsuz kritik burkulma yükleri Çizelge (7-10)'da sunulmuştur.

Çizelge 7. TKT'ye göre FD Malzemeli (S-S) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

S-S	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	10.80851	10.80795	11.67826	11.67756	11.91792	11.91715	11.98679	11.99003
Model 2	13.09563	13.09508	14.13040	14.12970	14.41419	14.41373	14.49563	14.49653
Model 3	18.44967	18.44918	20.15927	20.15850	20.63077	20.62978	20.76629	20.76825

Çizelge 8. TKT'ye göre FD Malzemeli (A-S) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-S	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	19.52678	19.15028	22.47451	22.24680	23.35530	23.18256	23.61438	23.46390
Model 2	24.45475	23.79053	28.02424	27.69678	29.07975	28.87166	29.38927	29.22015
Model 3	34.49752	33.37868	39.94574	39.45156	41.54909	41.27102	42.01864	41.80950

Çizelge 9. TKT'ye göre FD Malzemeli (A-A) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-A	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	32.55260	32.55503	41.32260	41.32656	44.30405	44.30837	45.21734	45.22418
Model 2	40.50100	40.54020	52.01028	52.03872	55.94869	55.96512	57.15777	57.17063
Model 3	55.70032	55.88985	73.53695	73.67220	79.66902	79.72704	81.55473	81.58725

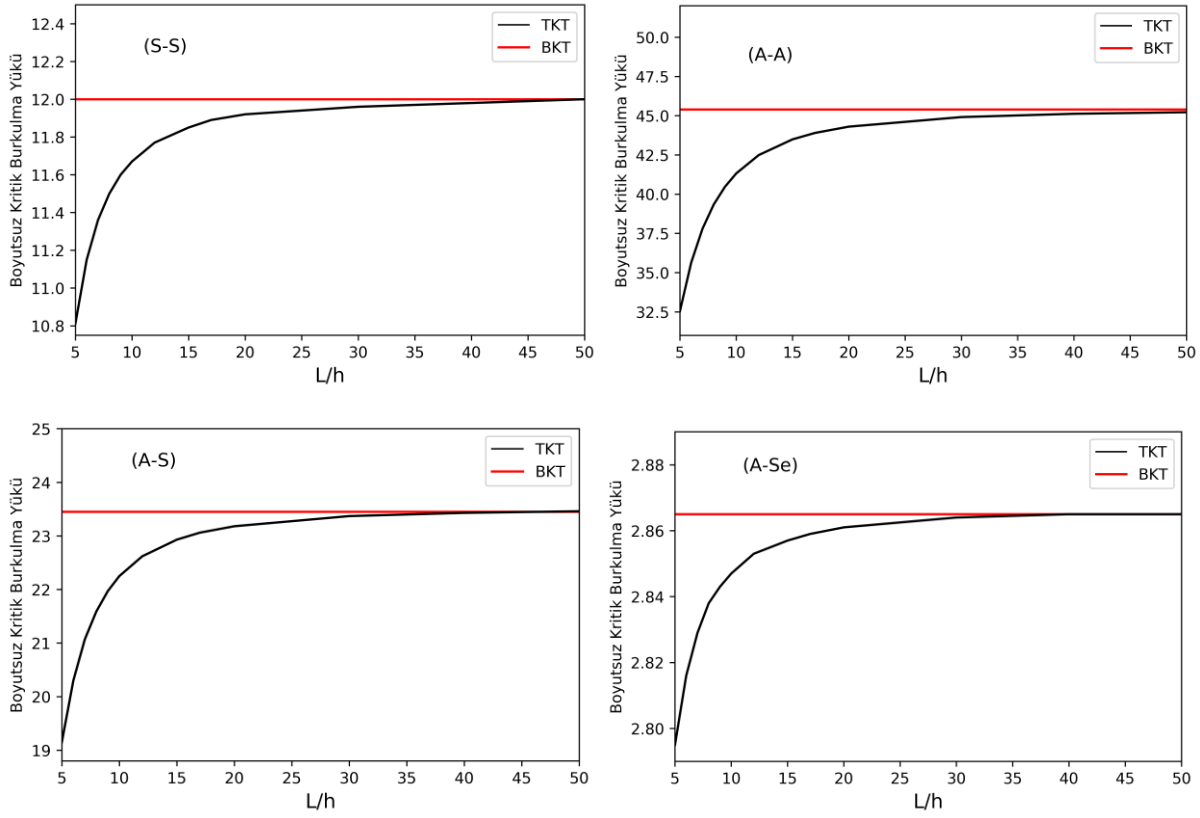
A-A sınır koşuluna sahip, $L/h = 5$ olan FD Timoshenko kolonun; TFY ve Abaqus ile bulunan burkulma yüklerinin, malzeme değişim modellerine göre, {Model 1, Model 2, Model 3} bağıl farkları sırasıyla,$\{\%-7.46x10^{-3}, \%-9.68x10^{-2}, \%-3.40x10^{-1}\}$ olarak bulunmuştur.

Çizelge 10. TKT'ye göre FD Malzemeli (A-Se) Kolonların Boyutsuz Burkulma Yükleri ($\overline{P_{cr}} = P_{cr}L^2/E_0I$)

A-Se	L/h							
	5		10		20		50	
	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus	TFY	Abaqus
Model 1	2.79511	2.79513	2.84748	2.84752	2.86088	2.86084	2.86465	2.86834
Model 2	3.05877	3.05880	3.10275	3.10279	3.11394	3.11408	3.11709	3.11900
Model 3	3.77934	3.77941	3.82197	3.82210	3.83277	3.83278	3.83580	3.83954

Bu çalışmada, FD malzemeli kolonlar için bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin, hem literatürde verilen mevcut sonuçlar hem de Abaqus sonlu elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür.

Model 1 malzeme değişim fonksiyonu için BKT ve TKT'ye dayalı olarak modellenen FD malzemeli kolonlarda L/h oranlarının farklı sınır koşullarında boyutsuz burkulma yüklerine etkisi Şekil 4'de gösterilmiştir. FD kolonlarda L/h oranı arttıkça TKT'den elde edilen sonuçların BKT sonuçlarına yaklaştığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4. Farklı Sınır Koşullarına Sahip Model 1 FD Malzemeli Kolonlarda L/h Oranının Boyutsuz Burkulma Yüklerine Etkisi

SONUÇLAR

Bu çalışmada, basınç kuvveti altında eksenel yönde fonksiyonel derecelenmiş kolonların burkulma davranışı incelenmiştir. Analizlerde, hem Euler-Bernoulli hem de Timoshenko kiriş teorileri kullanılmıştır. Homojen-izotrop kolonlar üzerinde yöntemin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliği gösterilmiştir. Bu çalışmada bulunan burkulma yüklerinin, hem literatürde verilen mevcut sonuçlar hem de Abaqus sonlu elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile uyumlu olduğu görülmüştür. FD kolonlarda en büyük boyutsuz burkulma yükleri, Model 3 malzeme değişim fonksiyonu için bulunmuştur. L/h oranı arttıkça Timoshenko teorisinden elde edilen sonuçların Euler-Bernoulli kiriş teorisi sonuçlarına yaklaştığı; bu oran azaldıkça kayma deformasyonlarının kritik burkulma yüküne etkisinin arttığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, uygulanan yöntemin farklı sınır koşullarına sahip FD kolonların burkulma analizlerinde etkin olarak kullanılabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] B. Gören, S. Erim, Değişken kesitli ankastre Timoshenko kirişin statik stabilite analizi, *DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*. 2(2) (2000) 75-86**.**

[2] S.F. Coşkun, M.T. Atay, Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method, *Computers and Mathematics with Applications.* 58 (2009) 2260 2266.

[3] A. Shahbaa, R. Attarnejada, S. Hajilara, Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams, *Shock and Vibration*. 18 (2011) 683-696.

[4] Y. Huang, X-F. Li, Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity, *J. Eng. Mech*.. 137(1) (2011) 73-81.

[5] I. Elishakoff, Buckling of a column made of functionally graded material, *Arch Appl Mech*.. 82 (2012) 1355–1360.

[6] Y. Yılmaz, Z. Girgin, S. Evran, Buckling analyses of axially functionally graded nonuniform columns with elastic restraint using a localized differential quadrature method. *Mathematical Problems in Engineering.* (2013), Article ID 793062 http://dx.doi.org/10.1155/2013/793062.

[7] S. Filiz, M. Aydoğdu, Eksenel fonksiyonel derecelenmiş kirişlerin titreşim ve burkulma analizi, *XIX. Ulusal Mekanik Kongresi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.Türkiye, 2015: s.483-491.

[8] A. Uluköy, Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin lineer burkulma analizi, *AKU J. Sci. Eng.*. 16 (2016) Özel Sayı (122-127).

[9] B.J. Xiao, X.F. Li, Exact solution of buckling load of axially exponentially graded columns and its approximation, *Mechanics Research Communications.* 101 (2019) 103414.

[10] J.K. Lee, B.K. Lee, Free vibration and buckling of tapered columns made of axially functionally graded materials, *Applied Mathematical Modelling.* 75 (2019) 73–87.

[11] B. Akgöz, Ritz yöntemi ile değişken kesitli kolonların burkulma analizi, *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*. 7(2) (2019) 452 – 458.

[12] J.K. Lee, B.K. Lee, Buckling optimization of axially functionally graded columns having constant volume**,** *Engineering Optimization*. DOI:10.1080/0305215X.2020.1862824

[13] S. Rajasekaran**,** Buckling and vibration of axially functionally graded nonuniform beams using differential transformation based dynamic stiffness approach, *Meccanica.* 48 (2013) 1053–1070.

[14] A.R. Noori, H. Rasooli, T.A. Aslan, B. Temel, Fonksiyonel derecelenmiş sandviç kirişlerin tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile statik analizi, *Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*. 35(4) (2020) 1091-1101.

[15] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill; 1961.

[16] A.R. Noori, T.A. Aslan, B. Temel, Static analysis of FG beams via complemantary functions method, *European Mechanical Science,* 4(1) (2020) 1-6.

[17] A.R. Noori, T.A. Aslan, B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section, *Composite Structures*. 200 (2018) 701-710.

[18] S.C. Chapra, R. P. Canale, *Yazılım Ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*, Literatür Yayınevi, 2003.

[19] Dassault Systèmes, ABAQUS/CAE v6.14, 2016.

[20] C.M. Wang, C.Y. Wang, J.N.Reddy, *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. Florida: CRC Press, 2005.

DEPREM ETKİSİNDEKİ YÜKSEK KATLI YAPILARDAKİ TİTREŞİMLERİN AYARLI KÜTLE SÖNÜMLEYİCİ KULLANILARAK AZALTILMASI

Onur Araz[1] ve Volkan Kahya[2]
[1]Gümüşhane Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Gümüşhane
[2]Karadeniz Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği, Trabzon

ABSTRACT

In this paper, the optimum parameters of tuned mass damper are investigated to reduce the dynamic response of a multi-story building under earthquake. Unlike the previous studies, the optimum parameters are obtained for different mass ratios instead of a single mass ratio. The dynamic response of the building under the earthquake is obtained by time history analysis Numerical results show that the increase in mass ratio has a significant effect on reducing the dynamic responses of the building.

Keywords: optimization; tuned mass damper; vibration control.

ÖZET

Bu çalışmada, çok katlı bir binanın deprem etkisindeki dinamik tepkisini azaltmak için ayarlı kütle sönümleyicinin optimum parametreleri araştırılmıştır. Önceki çalışmalardan farklı olarak tek bir kütle oranı yerine farklı kütle oranları için optimum parametreler elde edilmiştir. Deprem etkisindeki binanın dinamik tepkisi zaman tanım alanında yapılan analizlerle elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar, kütle oranındaki artışın binanın dinamik tepkilerinin azaltılmasında önemli bir etkiye sahip olduğunu göstermiştir.

Anahtar kelimeler: optimizasyon; ayarlı kütle sönümleyici; titreşim kontrolü.

GİRİŞ

Rezonans etkisindeki yapılarda meydana gelen dinamik tepkiler çoğu zaman yapılar üzerinde önemli hasarlara ve maddi kayıplara sebep olmaktadır. Bu nedenle, dinamik tepkilerin azaltılması son zamanlarda önemli araştırma konusu olmuştur. Bilindiği üzere, yapılarda istenmeyen titreşimlerin azaltılmasında yaygın olarak kullanılan sistemlerin başında ayarlı kütle sönümleyiciler (AKS) gelmektedir. AKS sistemleri pasif, aktif, yarı-aktif ve karma olmak üzere dört gruba ayrılmaktadır. Pasif AKS sistemleri harici bir enerji kaynağına gerek duymamaları açısından diğer kontrol sistemlerine göre daha yaygın kullanılmaktadır.

AKS ilk olarak Frahm [1] tarafından önerilmiştir. Önerilen sistem, sönüm elamanına sahip olmasından dolayı frekans sapmalarından önemli ölçüde etkilemekteydi. Bu nedenle, mevcut sisteme sönüm elamanı eklenerek daha geniş frekans aralığında çalışması sağlanmıştır. Den Hartog [2] harmonik yük etkisindeki tek serbestlik dereceli sönümsüz sistem üzerindeki titreşimlerin azaltılmasında AKS'nin etkisini incelemiştir. Ayrıca, AKS'ye ait optimum

frekans ve sönüm oranlarının elde edilmesi için kütle oranına bağlı bazı ampirik formüller önermiştir. Daha sonra, yapısal sönümün ve farklı dış yüklerin optimum parametreler üzerindeki etkileri farklı araştırmacılar tarafından incelenmiştir [3-10].

Xu ve Igusa [11] AKS sisteminin etkinliğini artırmak amacıyla farklı dinamik özeliklere sahip birden fazla AKS'nin ana yapıya paralel bağlanmasını önermişlerdir. Paralel bağlı AKS sisteminin etkinliği üzerinde, AKS sayısı, kütle oranı, yapısal sönüm oranı ve dış yükün etkisi farklı araştırmacılar tarafından incelenmiştir [12-20].

Li ve Zhu [21] tarafından yapısal titreşimlerin azaltılması amacıyla farklı bir kontrol sistemi önerilmiştir. Bu sistem, dinamik karakteristikleri farklı iki AKS'nin birbirine seri olarak bağlanması ile oluşmaktadır. Yapılan çalışmalarda, seri bağlı AKS sisteminin paralel bağlı AKS sistemine göre daha iyi performans gösterdiği belirtilmiştir [22-25].

Bu çalışmada, deprem etkisindeki çok katlı bir yapıdaki titreşimlerin ayarlı kütle sönümleyici kullanılarak azaltılması amaçlanmıştır. Ayarlı kütle sönümleyiciye ait optimum frekans ve sönüm oranı farklı kütle oranları için elde edilmiştir. Optimum parametrelerin elde edilmesinde örüntü arama (pattern search) algoritması kullanılmıştır.

PROBLEMİN TANIMI

Şekil 1'de yer hareketi etkisindeki çok katlı bir yapı ve yapının son katına yerleştirilmiş AKS görülmektedir. Ele alınan probleme ait hareket denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t)+\mathbf{C}\dot{x}(t)+\mathbf{K}x(t)=-\mathbf{m}\ddot{x}_g(t)$$

şeklindedir. Burada, **M**, **C** ve **K** sırasıyla kütle, sönüm ve rijilik matrislerini göstermektedir. Ayrıca, $x(t)$ ve m sırasıyla yer değiştirme ve kütle vektörleridir. m_d, c_d, ve k_d ise sırasıyla AKS sistemine ait kütle, sönüm ve rijitlik değerleridir.

$$\mathbf{M}=diag\begin{bmatrix}m_1 & m_2 & \cdots & m_N & m_d\end{bmatrix}$$

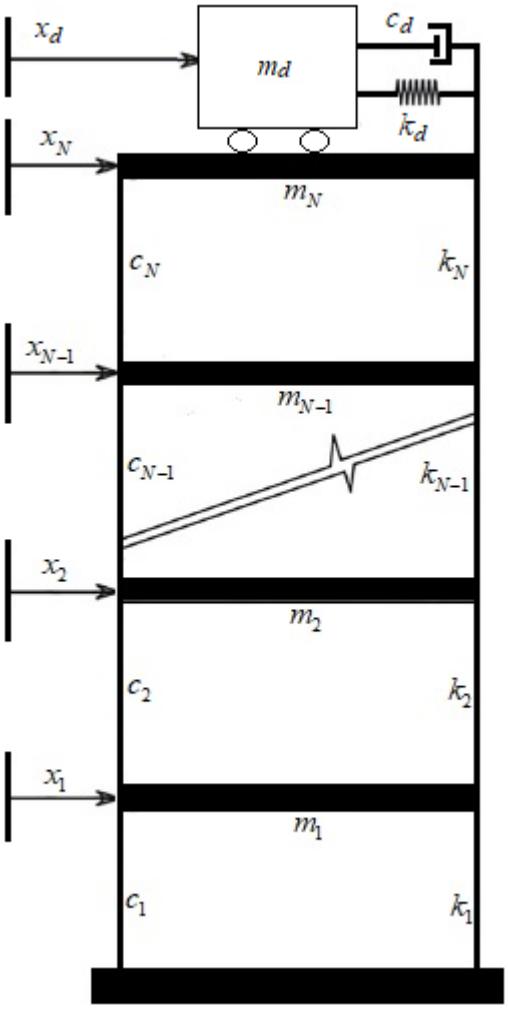
$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}
c_1+c_2 & -c_2 & & & & & \\
-c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & -c_N & -c_N+c_d & -c_d \\
 & & & & & -c_d & c_d
\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}
k_1+k_2 & -k_2 & & & & & \\
-k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & & & \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
 & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & -k_N & -k_N+k_d & -k_d \\
 & & & & & -k_d & k_d
\end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N & x_d \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_N & m_d \end{bmatrix}^T$$

Deprem etkisindeki binaya ait dinamik tepkilerinde elde edilmesinde Newmark metodu kullanılmıştır.



Şekil 1. AKS içeren çok katlı bir yapı

AKS sisteminin optimizasyonunda kullanılan boyutsuz parametreler

$$\xi_d = \frac{c_d}{2m_d\omega_d}, \quad f_d = \frac{\omega_d}{\omega_1}, \quad , \quad \mu = \frac{m_d}{\Sigma m_i}$$

şeklindedir. Burada, μ, f_d ve ξ_d sırasıyla AKS'nin kütle oranını frekans oranını ve sönüm oranını göstermektedir. Ayrıca, ω_1 ise binanın 1. titreşim moduna ait açısal frekanstır.

$$TF(\omega)=\begin{bmatrix} TF_1(\omega) \\ TF_2(\omega) \\ \vdots \\ TF_N(\omega) \\ TF_d(\omega) \end{bmatrix}=\left[-\mathbf{M}\omega^2+i\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right]^{-1}\mathbf{m}\omega^2$$

Optimum değerlerin elde edilmesinde, amaç fonksiyonu olarak en üst kata ait genlik değerinin ($mak\left|TF_N\right|$) minimize edilmesi seçilmiştir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Çalışmada kullanılan 10 katlı binaya ait fiziksel özelikler Tablo 1'de verilmiştir [17]. Tablo 1'de görüldüğü üzere, kütle, sönüm ve rijitlik değerleri bütün katlarda aynıdır. Binanın 1. titreşim moduna ait açısal frekans değeri ve toplam kütlesi sırasıyla 6.3508 rad/s ve 3600 ton dur. Optimum parametrelerin elde edilmesinde dört farklı kütle oranı dikkate alınmıştır. Bu oranlar sırasıyla, %1, %3, %5 ve %10 şeklindedir.

Tablo 1. 10 katlı binaya ait fiziksel özelikler

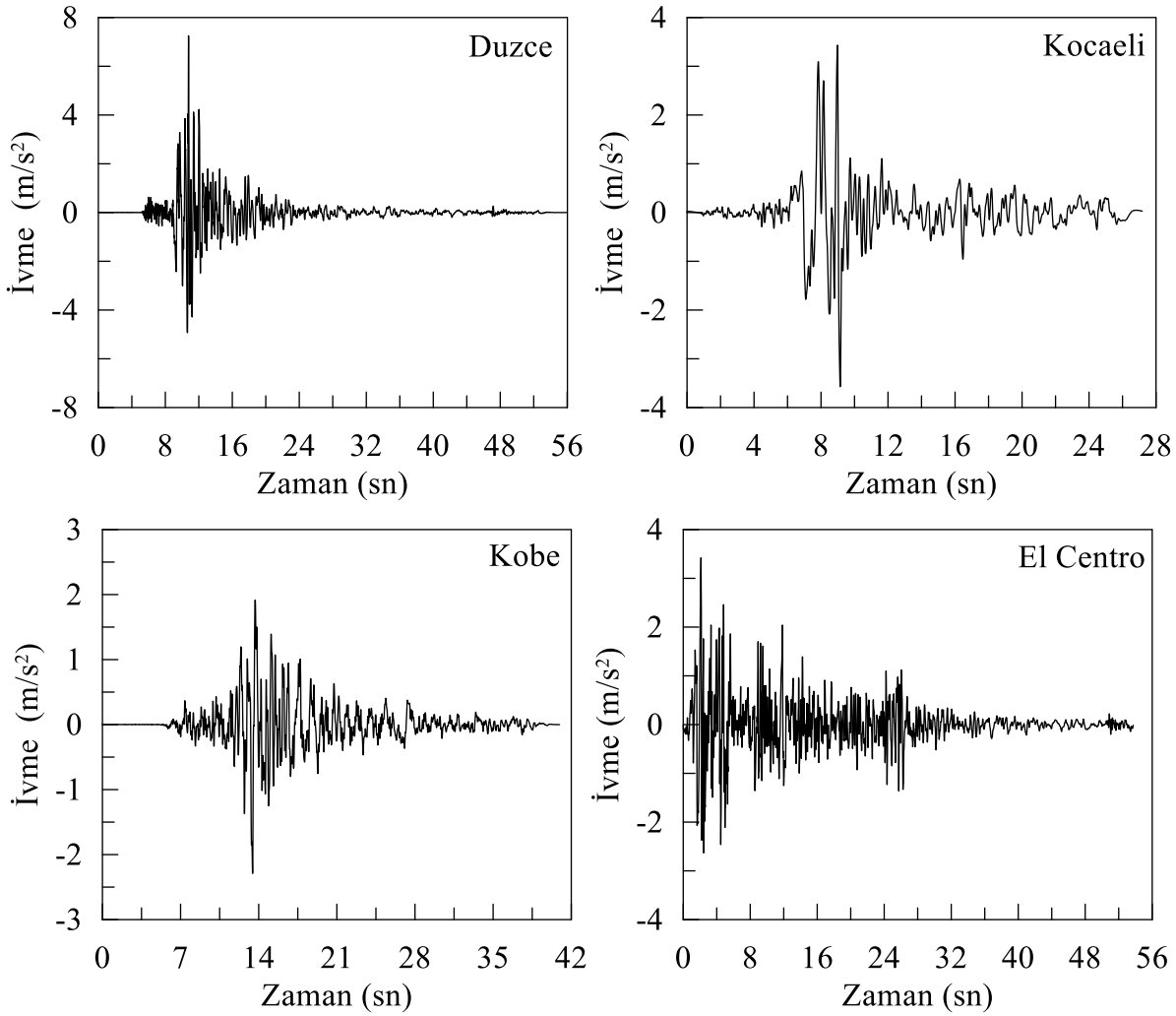
Kat No	Kütle x10^3 kg	Sönüm x10^6 N-s/m	Rijitlik x10^6 N/m
1	360	6.2	650
2	360	6.2	650
3	360	6.2	650
4	360	6.2	650
5	360	6.2	650
6	360	6.2	650
7	360	6.2	650
8	360	6.2	650
9	360	6.2	650
10	360	6.2	650

Tablo 2. Optimum parametreler

μ	f_d	ξ_d
0.01	0.9884	0.0890
0.03	0.9652	0.1500
0.05	0.9432	0.1894
0.10	0.8916	0.2641

Tablo 2'de farklı kütle oranları için elde edilen optimum frekans ve sönüm oranları verilmiştir. Görüldüğü üzere, kütle oranındaki artış frekans oranında azalma meydana getirirken sönüm oranında artış meydana getirmektedir.

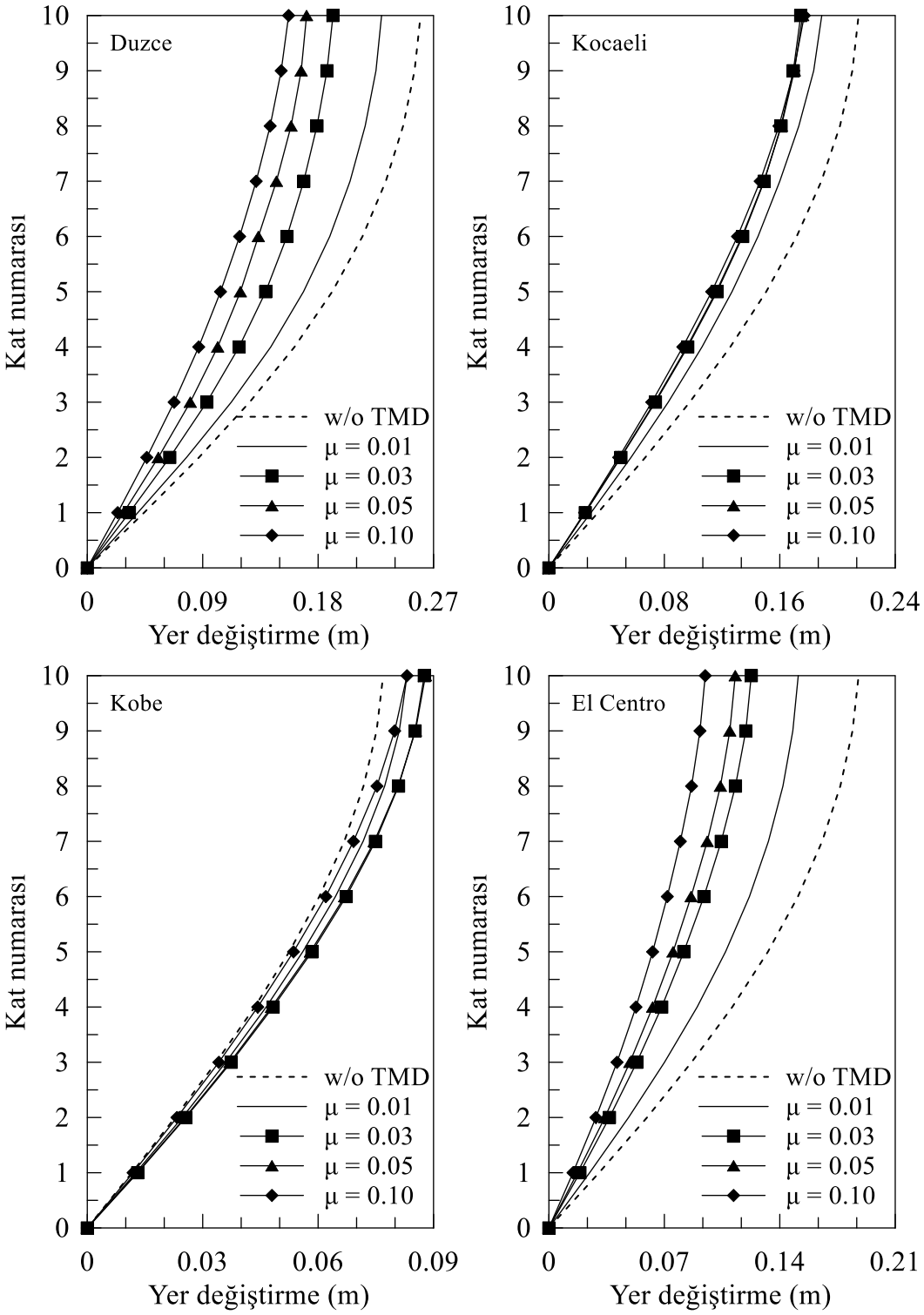
AKS'nin farklı depremlerin etkisindeki performansını araştırmak amacıyla tarihsel öneme sahip dört deprem kaydı ele alınmıştır. Bunlar, Düzce, Kocaeli, Kobe ve El Centro depremleridir. Deprem kayıtlarına ait ivme-zaman grafikleri Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. Deprem kayıtları için ivme-zaman grafikleri

Farklı depremlerin etkisinde kat seviyelerinde elde edilen en büyük yer değiştirme değerleri Şekil 3'de gösterilmiştir. Kobe deprem etkisinde elde edilen yer değiştirme değerlerinin azaltılması üzerinde AKS'nin olumlu bir etki yapmadığı görülmüştür. Diğer deprem kayıtları için ise özellikle tepe yer değiştirme değerlerinde önemli azalma meydana geldiği görülmektedir. Ayrıca, en büyük yer değiştirme değerleri en üst katta meydana gelmektedir.

AKS'nin yer değiştirme değerlerinin azaltılması üzerindeki etkisini daha açık bir şekilde izah etmek amacıyla her bir deprem altında elde edilen en büyük yer değiştirme değerleri Tablo 3'de gösterilmiştir. Görüleceği üzere, AKS bina üzerinde büyük yer değiştirme meydana getiren depremlerde etkili olurken küçük yer değiştirme meydana getiren depremlerde ise etkisiz olmaktadır. Öyle ki, Kobe depremi için kontrolsüz durumda elde edilen en büyük yer değiştirme değeri AKS'li duruma göre daha büyük elde edilmektedir. Bu durum, frekans alanında elde edilen optimum değerlerin bütün deprem kayıtları için etkili performans göstermediği gerçeğini ortaya çıkarmaktadır. Daha önceki çalışmalarda, AKS'nin kütle oranındaki artışın AKS nin performansında önemli artış meydana getirdiği belirtilmiştir. Kobe ve Kocaeli depremleri için bazı kütle oranlarında bu durumun gerçekleşmediği Tablo 3'den açıkça görülmektedir.



Şekil 3. Kat seviyelerinde elde edilen maksimum yer değiştirmeler

Tablo 4'de farklı kütle oranlarında kullanılan AKS nin maksimum yer değiştirme değerleri üzerinde meydana getirdiği azalma oranları gösterilmiştir. Tablo 4'de görüleceği, Düzce ve El Centro depremleri altında elde edilen yer değiştirme değerleri kütle oranındaki artışa bağlı olarak önemli ölçüde azalmaktadır. Elde edilen en büyük azalma değerleri sırasıyla %39.59 ve %49.52 dir. Kocaeli depremi için elde edile en büyük azalma değeri kütle oranının 0.03

olması durumunda elde edilmiştir. Bununla birlikte, kütle oranının 0.10 olması durumu için elde edilen azalma oranı kütle oranının 0.05 olması durumunda elde edilen azalma oranından daha büyük elde edilmektedir. Kobe depremi için AKS'nin yer değiştirme değeri üzerine olumsuz etkiye sahip olduğu görülmüştür. Öyle ki, kütle oranın 0.05 olması durumunda elde edilen azalma oranı %-14.3 olarak elde edilmiştir.

Tablo 3. Maksimum yer değiştirme değerleri (m)

μ	Duzce	Kocaeli	Kobe	El Centro
AKS'siz	0.260	0.215	0.077	0.188
0.01	0.230	0.189	0.083	0.151
0.03	0.192	0.175	0.088	0.123
0.05	0.171	0.176	0.088	0.113
0.10	0.157	0.177	0.083	0.095

Tablo 4. Maksimum yer değiştirme değerlerinde elde edilen azalma oranları (%)

μ	Duzce	Kocaeli	Kobe	El Centro
0.01	11.70	11.88	-8.06	19.49
0.03	26.28	18.69	-13.91	34.66
0.05	34.21	18.03	-14.30	39.83
0.10	39.59	17.52	-8.06	49.52

SONUÇLAR

Bu çalışmada, deprem etkisindeki çok katlı bir yapıdaki maksimum yer değiştirmelerin azaltılmasında ayarlı kütle sönümleyicinin etkisi incelenmiştir. Çalışmadan elde edilen başlıca sonuçlar aşağıda verilmiştir.

- Deprem frekans içeriğinin ve kütle oranının ayarlı kütle sönümleyicinin kontrol performansı üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğunu görülmektedir.
- En büyük kontrol performansı El Centro depremi altında elde edilmiştir. Elde edilen azalma oranları sırasıyla, μ= 0.01 için %19.49, μ= 0.03 için %34.66, μ= 0.05 için %39.83 ve μ= 0.10 için %49.52 şeklindedir. Buna karşın, Kobe depremi altında yapıda elde edilen maksimum yer değiştirme değerleri kontrolsüz yapıya göre daha büyük elde edilmektedir.
- Kütle oranı arttıkça optimum frekans oranı azalmaktadır.
- Kütle oranı arttıkça optimum sönüm oranı artmaktadır.
- Kütle oranındaki artışın, ayarlı kütle sönümleyicinin kontrol performansı üzerinde daima olumlu bir etkiye sahip olmadığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] H. Frahm, *Device for damping vibration of bodies*, US Patent, 989958, (1909).

[2] J.P. Den Hartog, *Mechanical vibrations*, 4th Edition, McGraw-Hill, New York, USA, (1956).

[3] B.W. Jo, G.H. Tae, D.W. Lee, Structural vibration of tuned mass damper-installed three-span steel box bridge, *Int. J. Pressure Vessels Piping*. 78 (2001) 667–675.

[4] J.D. Yau, Y.B. Yang, Vibration reduction for cable-stayed bridges traveled by high-speed trains, *J. Finite Elem. Anal. Des*. 40 (2004) 341–359.

[5] A.E. Ayman, M. Sayed, Simulation analysis of TMD controlled building subjected to far- and near-fault records considering soil-structure interaction, *J. Building Eng.* 26 (2019) 100930.

[6] G.B. Warburton, A.E. Ayorinde, Optimum absorber parameters for simple systems, *Earthq. Eng. Struct. Dyn*. 8 (1980) 197-217.

[7] Y. Fujino, M. Abe, Design formulas for tuned mass dampers based on a perturbation technique, *Earthq. Eng. Struct. Dyn*. 22 (1993) 833–854.

[8] H.C. Tsai, The effect of tuned-mass dampers on the seismic response of base-isolated structures, *Int. J. Solids Struct*. 32 (1995) 1195–1210.

[9] R.S. Jangid, Optimum multiple tuned mass dampers for base-excited undamped system. *Earthq. Eng. Struct. Dyn*. 28 (1999) 1041-1049.

[10] O. Araz, Effect of detuning conditions on the performance of non-traditional tuned mass dampers under external excitation, *Arch. Appl. Mech*. 90 (2020) 523–532.

[11] K. Xu, T. Igusa, Dynamic characteristics of multiple substructures with closely spaced frequencies, *Earthquake Eng. Struct. Dyn*. 21(1992) 1059-1070.

[12] G.C. Marano, R. Greco, Optimization criteria for tuned mass dampers for structural vibration control under stochastic excitation, *J. Vib. Control*. 17 (2011) 679-688.

[13] H.A. Yazdi, H. Saberi, F. Hatemi, Designing optimal tuned mass dampers using improved harmony search algorithm, *Adv. Struct. Eng*. 19 (2016) 1620-1636.

[14] L. Dell'Elce, E. Gourc, G. Kerschen, A robust equal-peak method for uncertain mechanical systems, *J. Sound Vib*. 414 (2018) 97-109.

[15] O. Araz, V. Kahya, Effects of manufacturing type on control performance of multiple tuned mass dampers under harmonic excitation, *Journal of Structural Engineering & Applied Mechanics*. 1(3) (2018) 117–27.

[16] F. Sadek, B. Mohraz, A.W. Taylor, R.M. Chung, A method of estimating the parameters of tuned mass dampers for seismic application, *Earthq. Eng. Struct. Dyn*. 26 (1997) 617-635.

[17] M.N.S. Hadi, Y. Arfiadi, Optimum design of absorber for MDOF structures, *J. Struct. Eng*. ASCE 124 (1998) 1272-1280.

[18] C.L. Lee, Y.T. Chen, L.L. Chung, Y.P. Wang, Optimal design theories and applications of tuned mass dampers, *Eng. Struct*. 28(1) (2006) 43–53.

[19] J. Salvi, E. Rizzi, Closed-form optimum tuning formulas for passive Tuned Mass Dampers under benchmark excitations, *Smart Struct. Syst*. 17(2) (2016) 231-56.

[20] V. Kahya, O. Araz, A simple design method for multiple tuned mass dampers in reduction of excessive vibrations of high-speed railway bridges, *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*. 35(2) (2020) 607-618.

[21] C. Li, B. Zhu, Estimating double tuned mass dampers for structures under ground acceleration using a novel optimum criterion, *J. Sound Vib*. 298 (2006) 280-297 (2006)

[22] L. Zuo, Effective and robust vibration control using series multiple tuned-mass dampers, *J. Vib. Acoust*. 131(3) (2009) 031003.

[23] V. Kahya, O. Araz, Series tuned mass dampers in train-induced vibration control of railway bridges. *Struct. Eng. Mech*. 61(4) (2017) 453-461.

[24] O. Araz, V. Kahya, Series tuned mass dampers in control of continuous railway bridges, *Struct. Eng. Mech*. 73(2) (2020) 133-141.

[25] O. Araz, V. Kahya, Design of series tuned mass dampers for seismic control of structures using simulated annealing algorithm, *Arch. Appl. Mech*. (2021).
doi: 10.1007/s00419-021-02013-0.

İNTEGRAL KÖPRÜLERİN STATİK VE DİNAMİK TASARIMINA ETKİ EDEN FAKTÖRLER

Muhammet Veysel ŞAŞTIM[1], Prof. Dr. Mehmet ÜLKER[2]
[1] DSİ 9. Bölge Müdürlüğü, Elazığ
[2] Malatya Turgut Özal Üniversitesi İnş. Müh. Bölümü, Malatya

ABSTRACT

The Integral Bridge is a new type of bridge made without expansion joint. Naturally, whether the design of these bridges is compatible with existing bridge designs constitutes a new research topic. There is no standard for these structures, which is a new type of bridge, for both the American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) and the Road Technical Specification of Republic of Turkey General Directorate of Highways. In this study, while designing Integral Bridges, static and dynamic forces that can affect bridges are investigated. Thus, it is aimed to assist a section likely to be added to the Highway Technical Specification in the coming years.

Keywords: The Integral Bridges, Static And Dynamic Forces, AASHTO, The Road Technical Specification

ÖZET

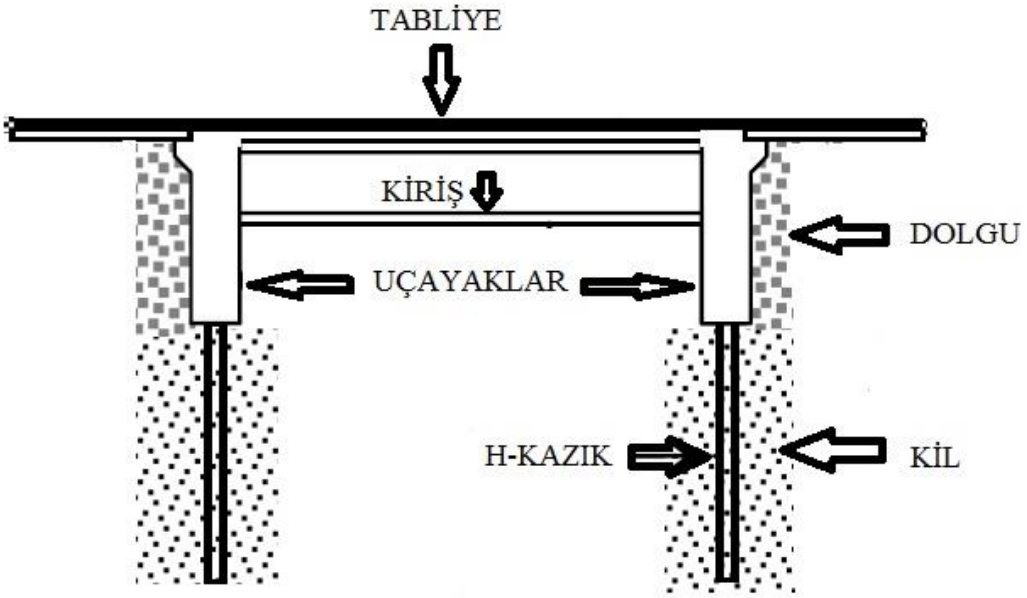
İntegral Köprü, genleşme derzi olmadan yapılan yeni bir köprü türüdür. Doğal olarak bu köprülerin tasarımı da, mevcut bulunan köprü tasarımları ile uyumlu olup olmadığı yeni bir araştırma konusunu oluşturmaktadır. Yeni bir köprü türü olan bu yapılar ile ilgili gerek Amerikan Karayolu Şartnamesi (AASHTO), gerekse ülkemizde KGM Karayolu Teknik Şartnamesinde bir standart bulunmamaktadır. Bu çalışmada, İntegral Köprülerin tasarımı yapılırken, köprülere etki edebilecek statik ve dinamik kuvvetler incelenmiştir. Böylece, gelecek yıllarda Karayolu Teknik Şartnamesine eklenmesi muhtemel bir bölüme yardımcı olunması amaçlanmaktadır.

Anahtar kelimeler: İntegral Köprüler, Statik ve Dinamik Yükler, AASHTO ve KGM Şartnameleri

GİRİŞ

İntegral Köprüler, üzerine genleşme derzi yapılmadan imal edilen yeni bir köprü türüdür. İntegral köprülerin tabliye, uçayaklarıyla kirişleri beraber yekpare olarak dökülmektedir. Bu sayede tabliye ve kirişlere burulma rijitliği sağlanır, uçayak-üstyapı sürekliliği ile de hareketli yükler altında bu yapılar beraber hareket eder [1,2]. İntegral köprülerde, konvansiyonel köprülerden farklı olarak projelendirilmelerinde sıcaklık, sünme, rötre ve deprem etkileri büyük önem taşımaktadır. Çünkü üstyapının yani tabliyenin hareket imkanı altyapının (kazıklar, kolonlar) deformasyon yapabilmesine bağlıdır. İntegral köprü tasarımıyla; basit kirişlerin montaj kolaylığı, sürekli kirişlerin ekonomik yararından

faydalanılır. Ayrıca bakım masrafları en minimal düzeye indirgenip, daha uzun ömürlü bir köprü inşa edilir [3].



Şekil 1. İntegral Köprü kesiti [1]

İntegral köprülerin tasarımımda, mevcut bulunan köprü tasarımları ile uyumluluğu yeni bir araştırma konusudur. Yeni bir köprü türü olan bu yapılar ile ilgili hem Amerikan Karayolu Şartnamesi (AASHTO), hem de KGM Karayolu Teknik Şartnamesinde bir standart bulunmamaktadır. Bu sebeple integral köprüler üzerine gelen statik ve dinamik yükleri incelemek için AASHTO LRFD'ye ait Köprü Tasarım Felsefesinde bulunan koşullar ve sınırlayıcılar kullanılmıştır. AASHTO LFRD'ye göre Köprü Tasarımı Felsefisi Şunlardır [4]:

i) Genel

ii) Sınır Durumları

iii) Süneklik

iv) Yedeklilik

v) Yapı Önem Derecesi

Köprüler; güvenlik, kullanılabilirlik ve yapılabilirlik için belirlenmiş olan kuralları sağlayacak ve bunun yanında ekonomi, estetik ve muayene edilebilirlik gibi hususların da tasarım ilkeleri olarak göz önüne alacak biçimde tespit edilen sınır durumlarına göre tasarlanacaktır.

LİTERATÜR TARAMASI

Yalçın (2017), integral köprülerin kazıklarında oluşan kuvvetlere hareketli yüklerin etkisi, çeşitli üstyapı parametrelerinin değişimleriyle araştırmıştır. Bunun için, birçok üç boyutlu

integral köprünün sonlu elemanlar modellerini kurmuş, bu modellerin analizleri AASHTO LRFD hareketli yükleri altında yapmıştır [1].

Erhan ve Dicleli (2009), yapı-zemin etkileşiminin ve tabliye-uçayak sürekliliğinin köprülerdeki hareketli yük dağılımına etkilerini incelemişlerdir. Bunun için, çeşitli yapısal, geoteknik ve geometrik özelliklere sahip çok sayıda integral ve basit mesnetli köprülerin iki ve üç boyutlu yapısal modelleri kurularak, AASHTO hareketli yükleri altında analizlerini yapmışlardır [5].

Erhan ve Dicleli (2011), sismik yüklerin, integral köprü kazıklarında, düşük devirli yorulmaya etkileri incelemişlerdir. Bu amaçla, 41 m uzunluğunda iki açıklığa sahip bir integral köprü tasarlamışlardır. Bu köprünün yapısal modeli kurmuş ve kayada kaydedilmiş yedi farklı deprem ile çeşitli etkin yer ivmelerine göre zaman tanım analizlerini yapmışlardır [6].

Arsoy vd. (2007), kazık, kazık başlığı ve köprü kirişinden meydana gelen ve killi zemine oturan derzsiz bir köprüyü iki boyutlu olarak modellemişlerdir. Köprünün sıcaklık, hareketli yük ve köprünün üzerine oturduğu zeminin drenajsız kayma mukavemeti gibi parametreleri değiştirilerek sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla analizlerini gerçekleştirmişlerdir [7].

Erhan ve Dicleli (2007), köprü zemin etkileşiminin, integral köprü elemanlarında hareketli yüklerden dolayı oluşan moment ve kesme kuvvetlerine etkilerini incelemişlerdir. Bunun için, çeşitli yapısal, geoteknik ve geometrik özelliklere sahip iki boyutlu integral köprü modelleri, dolgu ile temel zemininin etkisinin dikkate alınıp alınmadığı durumlar için köprü tasarımında standart olarak kullanılan kamyon yükleri altında analizini yapmışlardır [8].

MATERYAL VE METOD

1) AASHTO LFRD'ye göre Köprü Tasarımı Felsefisi

1.1) Köprü Tasarım Sınır Durumları:

Her eleman ve bağlantı, aksi söylenmedikçe, her sınır durumu için Denklem 1'i sağlayacaktır. Hizmet ve olağan dışı olay sınır durumları için direnim katsayısı 1.0 olacaktır. Ancak bulonlar ile Deprem Kategorisindeki betonarme kolonlar için ayrıca belirtilmiş hükümleri geçerlidir. Tüm sınır durumları eşit önem derecesi ile dikkate alınacaktır.

$$\sum \eta_i \gamma_i Q_i \leq \phi R_n = R_r \tag{1}$$

burada;

γ_i'nin maksimum değerini aldığı yükler için:

$$\eta_i = \eta_D \eta_R \eta_I \geq 0.95$$

γ_i'nin minimum değerini aldığı yükler için:

$$\eta_i = \frac{1}{\eta D \, \eta R \, \eta I} \leq 1.00$$

burada;

γ_i : yük katsayısı: zorlama etkilerine uygulanacak istatistiksel bir çarpan

ϕ : direnim katsayısı, AASHTO'nun çeşitli bölümlerinde belirtilmiş olan ve anma

direnimine uygulanacak istatistiksel bir çarpan

η_i : yük değiştirme katsayısı: süneklik, yedeklilik ve kullanım amacına bağlı önem derecesi ile ilgili bir katsayı

η_D : sünekliğe bağlı bir katsayı

η_R : yedekliliğe bağlı bir katsayı

η_I : yapı önem derecesine bağlı bir katsayı

Q_i : zorlama etkisi

R_n : anma direnimi

R_r : katsayılı direnim (ϕR_n)

Kullanım sınır durumu; normal kullanım koşulları altında gerilme, şekil değiştirme ve çatlak genişliğine getirilecek sınırlamalar.

Yorulma sınır durumu; tek bir tasarım kamyonundan gelen gerilmelerin tekerrür sayısı sonucunda oluşan gerilme aralığına getirilecek sınırlamadır.

Kırılma sınır durumu; AASHTO Malzeme Şartnamesindeki bir dizi malzeme dayanıklılık gereksinimlerini ifade eder.

Dayanım sınır durumu; Köprünün tasarım ömrü süresince karşı karşıya geleceği, istatistiksel olarak ön plana çıkan yük bileşimlerine dayanması için, elemanların hem tek başına hem bir bütün olarak dayanımının ve stabilitesinin güvenceye alınmasıdır.

Olağan dışı olay sınır durumları; Büyük bir depremde, taşkında ya da bir gemi veya araç çarpması durumunda, buz sürüklenmesinde ve muhtemel oyulma koşullarında köprünün yapısal olarak ayakta kalması için göz önüne alınması gereken sınır durumlarıdır.

Yukarıdaki sınır durumları göz önüne bulundurularak köprü tasarımında, genel olarak kullanılan sınır durumlarına bağlı yükleme kombinasyonları aşağıdaki belirtilmiştir [9,10,11]:

Dayanım I: 1.25DC+ 1.50DW + 1.75(LL+IM)

Kullanım II: 1.00DC + 1.00DW + 1.30(LL+IM)

Yorulma: 0.75(LL+IM)

1.2) Süneklik

Bir köprünün yapısal sistemi, kullanılamaz hale gelmeden önce, dayanım ve olağan dışı olay sınır durumlarında önemli ve görünebilir biçimde elastik ötesi şekil değiştirmelerin oluşmasına imkan verecek biçimde boyutlandırılacak ve detaylandırılacaktır. Dayanım sınır durumu için:

η_D ≥ 1.05 Sünek olmayan elemanlar ile bağlantılar için

= 1.00 Bu şartname koşullarını sağlayan geleneksel tasarım ile detaylar için

≥ 0.95 Bu şartnamede istenilenleri aşan düzeyde ek süneklik sağlayıcı tedbirlerin öngörüldüğü elemanlar ile bağlantılar için

Bütün diğer sınır durumları için;

η_D = 1.00

1.3) Yedeklilik

Aksini gerektiren bir sebep yoksa yedek taşıma kapasiteli ve sürekli yapılar kullanılmalıdır.

1.4) Yapı Önem Derecesi

Bir köprünün veya herhangi bir yapısal eleman ya da bağlantısının kullanım açısından önem derecesini "Mal Sahibi" belirleyecektir. Bu madde sadece dayanım ve olağan dışı olay sınır durumlarında kullanılır.

2. Şekil Değiştirmeler

2.1) Sehim Kriterleri

Başka kriterlerin bulunmadığı durumlarda alüminyum, beton ve/veya çelik taşıt köprüleri için aşağıda belirtilen sehim sınırlamaları dikkate alınanır:

Çizelge 1. Sehim Sınırlamaları

Taşıt yükü, genel	Açıklık/800
Taşıt yükü ve yaya yükleri	Açıklık/1000
Konsol elemanlarda taşıt yükü	Açıklık/300
Konsol elemanlarda taşıt yükü ve yaya yükleri	Açıklık/375

Ortotropik plak tabliyelerde aşağıdaki koşullar uygulanır:

Çizelge 2. Sehim Sınırlamaları (Ortotropik Plak Tabliyelerde)

Tabliye plağı üzerinde taşıt yükü	Açıklık/300
Ortotropik metal tabliyenin nervürleri üzerinde taşıt yükü	Açıklık/1000
Ortotropik metal tabliyenin nervürleri üzerinde taşıt yükü (Komşu nervürler arasında en büyük göreceli sehim)	0,1 inch

2.2) Kullanım Sınır Durumu

Tabliyeler ve döşemeler tamamen elastik yapılar olarak analiz edilecek ve AASHTO koşullarını sağlayacak biçimde detaylandırılacak ve tasarlanacaktır.

L = mesnet ekseninden mesnet eksenine açıklık

olmak üzere;

- ✓ Yaya trafiği olmayan döşemelerde L/800,
- ✓ Sınırlı düzeyde yaya trafiği olan döşemelerde L/1000,
- ✓ Önemli düzeyde yaya trafiği olan döşemelerde L/1200

değerlerini geçmeyecektir.

3. Sürekli Yükler

Sürekli yükler sabit ve toprak yükleri olarak iki kısımdan oluşur. Sabit yüklere **(***DC, DW ve EV)*, yapıya ait tüm elemanların, aksesuarların, bunlara eklenen hizmet hatlarının, toprak örtüsünün, aşınma tabakasının, gelecek üzerine gelmesi muhtemel tabakaların ve

planlanmış olan genişletmelerin ağırlıkları eklenecektir. Toprak basıncı, toprak sürşarjı ve negatif sürtünme yükleri gibi toprak yükleri de sürekli yükler olarak alınır.

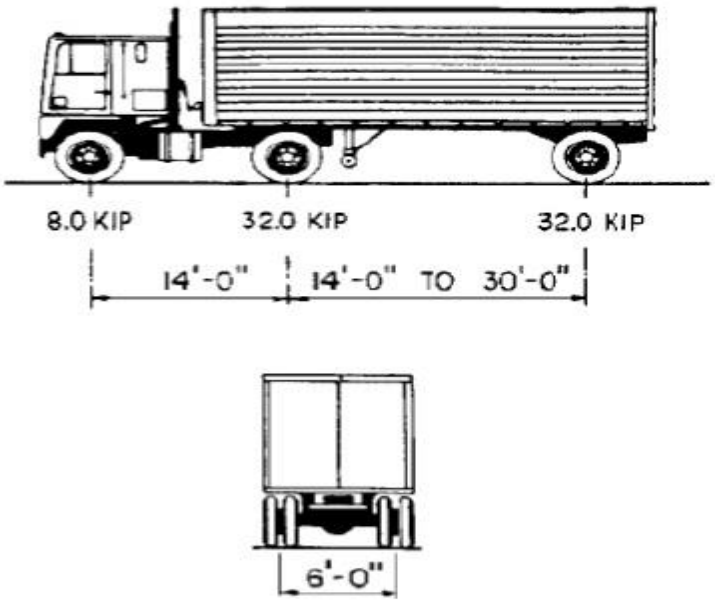
4. Hareketli Yükler

HL-93 ismi verilen, köprüler ve köprü benzeri yapıların taşıt yolu bölümünde göz önüne alınan taşıt hareketli yükü:

- Tasarım kamyonu veya tasarım çift dingili,
- Tasarım şerit yükü

bileşiminden oluşacaktır.

Tasarım kamyonunun dingil ve tekerlek aralıkları ile ağırlıkları Şekil 2'de belirtilmiştir. "Dinamik Yük Etki Katsayısı: IM"de tarif edildiği gibi bir dinamik yük katsayısı dikkate alınacaktır.



Şekil 2. Tasarım kamyonu özellikleri [4]

Çift dingilli tasarım taşıtı, 4.0 ft dingil aralıklarına sahip bir çift 25.0 kip'lik dingilden oluşacaktır. Tekerleklerin enine yöndeki aralığı 6.0 ft olarak alınacaktır. Dinamik yük katsayısı "Dinamik Yük Etki Katsayısı (IM)"na göre dikkate alınacaktır.

Dinamik Yük Etki Katsayısı (IM), tasarım kamyonunun ya da tasarım çift dingilli taşıtının dinamik etkilerini göz önüne almak için, merkezkaç kuvvet ve fren yükleri dışındaki statik etkiler Çizelge 3'de gösterilen yüzdeyle arttırılacaktır.

Statik yüklere uygulanacak katsayı $\left(1+\frac{\text{IM}}{100}\right)$ olacaktır.

Dinamik yük etki katsayısı yaya yüklerine ya da tasarım şerit yüküne uygulanmayacaktır.

Çizelge 3. Dinamik Yük Etki Katsayısı, IM

Eleman	IM
Döşeme Derzleri - Bütün Sınır Durumları	%75
Yorulma ve Kırılma Sınır Durumları (Bütün Diğer Elemanlar)	%15

Bütün Diğer Sınır Durumları (Bütün Diğer Elemanlar)	%33

Bu çalışmada yapılan analizlerde, AASHTO LRFD ile uyum sağlamak bakımından, AASHTO HL-93 hareketli yükü kullanılmıştır. HL-93 yükü, 8 kN ağırlığında ön dingilden, bu dingile 14 ft uzaklıkta olan 32 kip'lik orta dingilden ve orta dingile 14,3 ft mesafede bulunan 32 kip'lik arka dingilden oluşur. Enlemesine kamyonun yerleştirildiği durumda kamyonla özellikleri Şekil 2'de gösterilmiştir.

Tasarım şerit yükü, boyuna doğrultuda düzgün yayılı olarak 0.64 klf olarak, enine doğrultudaysa tasarım şerit yükünün 10.0 ft genişlikte düzgün yayılı olduğu kabul edilecektir.

4.1) Tasarım Taşıt Hareketli Yüklerinin Uygulanması:

Bütün açıklıklarında düzgün yayılı yüklü olan sistemin moment sıfır noktaları arasında kalan negatif moment bölgesi için ve iç mesnetlerdeki reaksiyon kuvvetleri için öndekinin arka dingiliyle arkadakinin ön dingili arasında en az 50.0 ft mesafe olacak şekilde yerleştirilen iki tasarım kamyonunun etkisinin %90'ı ile birlikte tasarım şerit yükünün etkisinin %90'ı, her bir kamyonun 32.0 kip'lik dingillerinin ara mesafesi 14.0 ft alınacaktır. İki tasarım kamyonu maksimum değerde zorlama etkileri oluşturmak amacıyla komşu açıklıklara yerleştirilecektir.

İncelenen en büyük zorlama etkisinin hesabına katkısı olmayan dingiller hesaba alınmayacaktır. Tasarım şeritleri ile her şeritteki 10.0 ft'lik yüklü genişlik ikisi birden en büyük zorlama etkilerini oluşturacak biçimde yerleştirilecektir. Tasarım kamyonu veya tasarım çift dingilli taşıtı enine doğrultuda herhangi bir tekerlek yükünün merkezi aşağıdaki maddelerden daha yakın olmayacaktır:

- Tabliye konsolunun tasarımı için korkuluk ya da bordür yüzünden 1.0 ft,
- Tüm diğer elemanların tasarımı için tasarım şeridinin kenarından 2.0 ft.

Tasarımda kullanılacak İntegral Köprü parametreleri*:

Köprü Açıklığı (L)	65,62 ft
Genişlik (ft)	31,50 ft
Kiriş Aralığı (S)	7,87 ft
AASHTO öngermeli beton kiriş tipi (GT)	IV
Kiriş Türü	Öngermeli Betonarme
Kiriş Sayısı (N_b)	5 adet
Tabliye Kalınlığı (ts)	0,49 ft
Konsol Uzunluğu** (de)	2,95 ft
Şerit Sayısı	2
Kompozit kiriş, A (ft^2)	7.115
Kompozit kiriş, I (ft^4)	62,925
Uç ayak kalınlığı (ft)	3,281
Uç ayak yüksekliği (ft)	9.843,00
Uç ayak, A (kiriş ara. başına), (ft^2)	25.833
Uç ayak, I (kiriş ara. başına), (mm^4)	23,177
Beton dayanımı (kiriş) (kip)	7,26
Beton dayanımı (tabliye) (kip)	4,35
Kazık ebadı	HP 250X85

Dolgu zemini	Dolgu etkisi yok
Temel zemini	orta

*AASHTO'daki birimler dikkate alınarak ölçüler belirlenmiştir.

**Dış kiriş merkezinden korkuluk duvarının yüzüne kadar olan mesafe konsol uzunluğu (de) olarak tanımlanmıştır.

Kazıkların **kuvvetli veya zayıf eğilme eksenlerine** göre yerleştirilme durumları göz önünde bulundurulacaktır.

Köprülerdeki kazık zemini için $\mathbf{C_u}$**=9 kip** ve $\boldsymbol{\varepsilon_{50}}$**=0,01** olarak alınmıştır.

4.2) Üstyapının Modellenmesi

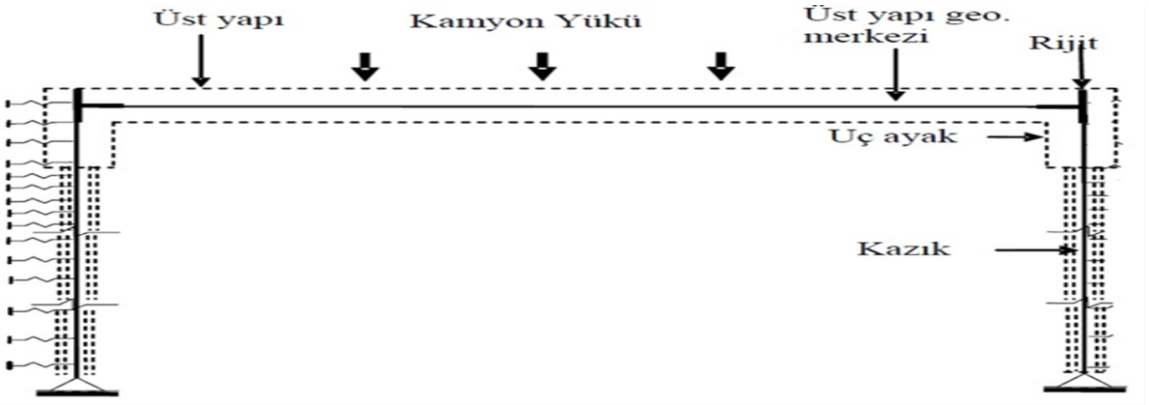
Paralelkenarların uzunlamasına doğrultuda kenar uzunlukları ve enlemesine doğrultudaki genişlikleri 1,97 ft olarak alınmıştır.

4.3) Altyapının Modellenmesi

Uçayak, tabliye ile uyumlu olması amacıyla, enine yönde kenarı 1,97 ft uzunluğunda olan dikdörtgen elemanlara bölünmüştür. Bununla birlikte, düşey yöndeki boyutları, seçilen kiriş tipine ve rijit tabliye-uçayak bağlantısında olup olmama durumuna göre 1,31– 1,89 ft arasında değişmektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Uzunluğu 65,62 ft olan tek açıklığa sahip integral köprü sisteminde, köprüdeki elemanlar, tasarım gereksinimleri dikkate alınarak değişkenli olarak gruplandırılmıştır. Yapının üst kısmındaki her bir düğüm noktasına trafik yükleri ile köprü zeminindeki ölü yüklerin birleşiminden oluşan 50 kip değerinde tekil yüklemeler yapılmıştır. Yapı elemanların stabilite ve gerilme sınırlamaları AASHTO şartnamesine göre tespit edilmiştir. Bütün noktaların deplasmanları köprü açıklığının 1/1000'ine denk gelen en büyük değer olan 0,20 ft ile sınırlandırılmıştır.



Şekil 3: Köprü Yapısal Modeli [8]

Yukarıda bilgileri verilen integral köprünün SAP2000 programı üzerinde modellemesi yapılmıştır. AASHTO HL-93 hareketli yükü kullanılarak yapılan simülasyon sonucu köprü üzerinde şu kuvvetler meydana gelmiştir:

Kesme Kuvveti	179.847,12 lb
Moment Kuvveti	553.171,81 lb-ft

Deplasman	0,98 ft

SONUÇLAR

Bu çalışmada dinamik ve statik yüklerin integral köprüler üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu yüklerin oluşturduğu etki sonucu integral köprü meydana gelen kesme ve moment kuvvetleri ile yer değiştirmeler incelendi. Örnek çalışmada, integral köprü üzerine etki eden dinamik ve statik yükler sonucunda oluşan yer değiştirmenin, AASHTO LRFD şartnamesine ait sehim şartları içinde kaldığı tespit edildi. Ayrıca örnek çalışmadaki integral köprü modelinin üzerinde oluşan kesme ve moment kuvvetlerinin, geleneksel derzli bir köprüde oluşabilecek kuvvetler kadar oluştuğu gözlemlendi. Bu da köprü tasarımında integral köprünün uygulanabilecek bir köprü türü olduğu sonucunu göstermektedir. Yapım kolaylığı ve uygun maliyeti ile integral köprüler, geleneksel derzli köprülere göre tercih edilebilecek bir köprü türüdür. Dünya üzerinde uygulanmakta olan bu köprü türünün yakın gelecekte ülkemiz içinde de uygulanmasına karar verilmesi durumunda, hem maliyet olarak hem yapım kolaylığı nedeniyle hızlı bir biçimde imal edilecek olması sonucu zamandan tasarruf sağlayacak olması sebebiyle ülke ekonomimize büyük katkısı olacağı düşünülmektedir. Böylece sınırlı kaynaklarımızı en doğru şekilde kullanma noktasında çok büyük bir fayda sağlayacağı öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Yalçın, Ö.F., İntegral Köprülerde Hareketli Yükler Altında Üstyapı Özelliklerinin Kazık Kuvvetlerine Etkisi, Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 32(2), ss. 195-206, Adana, Haziran 2017.

[2] Burke, M.P. Jr., 2009. Integral and Semi-Integral Bridges, John Wiley and Sons, West Sussex, UK 2. Franchin, P., Pinto,

[3] Güzel, Ö., Arıoğlu, E., 2012. El Mek Nimir ve Al Halfaia Köprülerinde Yenilikçi Yöntemler, İMO Türkiye Mühendislik Haberleri, TMH - 473 - 2012/3, S.47-55, Ankara.

[4] AASHTO Köprü Tasarım Şartnamesi (LRFD – 2010), 2016. Karayolları Genel Müdürlüğü, Ankara.

[5] Erhan, S., Dicleli, M., 2009. İntegral Köprülerde Hareketli Yük Dağılımına Yapı-Zemin Etkileşimi ve Uç-Ayak Tabliye Sürekliliğinin Etkileri, İMO Teknik Dergisi, 4833-4850, Yazı 317, İstanbul.

[6] Erhan, S., Dicleli, M., 2011. Sismik Yüklerin İntegral Köprü Kazıklarında Düşük Devirli Yorulmaya Etkileri, 1. Türkiye Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı,11-14 Ekim 2011 – ODTÜ – ANKARA.

[7] Arsoy, S., Engin, S., Keskin, E., 2007. Killi Zemine Oturan Derzsiz Bir Köprüdeki Sıcaklık Değişiminin Parametrik İrdelenmesi, 1. Köprü Ve Viyadükler Sempozyumu, 175-146, 29-30 Kasım 2007, Antalya.

[8] Erhan, S., Dicleli, M., 2007.Köprü-Zemin Etkileşiminin, Hareketli Yüklerden Dolayı İntegral Köprü Elemanlarında Oluşan Moment Ve Kesme Kuvvetlerine Etkileri, 1. Köprü Ve Viyadükler Sempozyumu, 145-146,29-30 Kasım 2007, Antalya.

[9]. Barker, R. M. and Puckett, J. A. (2013). Design of Highway Bridges: An LRFD Approach, John Wiley and Sons, New York.

[10]. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, 6th ed. (2012), American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington,DC.

[11] İnternet: LRFD Bridge Design-Loading and General İnformation, URL: http://www.webcitation.org/766Qfy1QE, Son Erişim Tarihi: 30/03/2021.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

İNTEGRAL KÖPRÜ TASARIMINDA ÇEŞİTLİ OPTİMİZASYON YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Muhammet Veysel ŞAŞTIM[1], Prof. Dr. Mehmet ÜLKER[2]
[1] DSİ 9. Bölge Müdürlüğü, Elazığ
[2] Malatya Turgut Özal Üniversitesi İnş. Müh. Bölümü, Malatya

ABSTRACT

The Integral Bridge is a new type of bridge made without expansion joint. Naturally, the design of these bridges constitutes a new research topic. Many parameters must be taken into consideration during the design of the bridge. This situation leads designers to make optimization. In this study, various optimization methods that can be used during the design of Integral Bridges have been investigated. There is no standard for these structures, which is a new type of bridge, for both the American Association of State Highway and Transportation Officials (AASHTO) and the Road Technical Specification of Republic of Turkey General Directorate of Highways. With this study, it is aimed to help a section that is likely to be added to the Highway Technical Specification in the future.

Keywords: The Integral Bridges, Optimization Methods, AASHTO, The Road Technical Specification

ÖZET

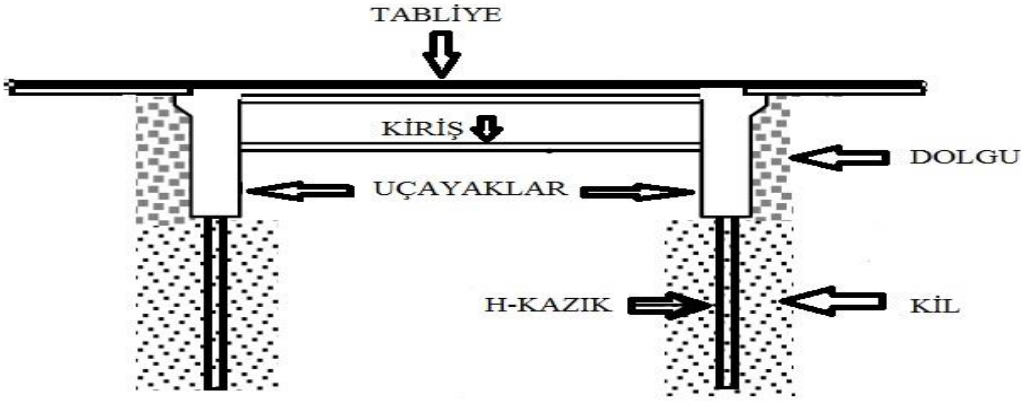
İntegral Köprü, genleşme derzi olmadan yapılan yeni bir köprü türüdür. Doğal olarak bu köprülerin tasarımı da, yeni bir araştırma konusunu oluşturmaktadır. Köprü tasarımı sırasında birçok parametre göz önünde bulundurulmalıdır. Bu durum, tasarımcıları optimizasyon yapmaya yöneltmektedir. Bu çalışmada, İntegral Köprülerin tasarımı sırasında kullanılabilecek çeşitli optimizasyon yöntemleri araştırılmıştır. Yeni bir köprü türü olan bu yapılar ile ilgili gerek Amerikan Karayolu Şartnamesi (AASHTO), gerekse ülkemizde KGM Karayolu Teknik Şartnamesinde bir standart bulunmamaktadır. Bu çalışma ile gelecek yıllarda Karayolu Teknik Şartnamesine eklenmesi muhtemel bir bölüme yardımcı olunması amaçlanmaktadır.

Anahtar kelimeler: İntegral Köprüler, Optimizasyon Yöntemleri, AASHTO ve KGM Şartnameleri

GİRİŞ

İntegral Köprüler, üzerine genleşme derzi yapılmadan imal edilen yeni bir köprü türüdür. İntegral köprülerin tabliye, uçayaklarıyla kirişleri beraber yekpare olarak dökülmektedir. Bu sayede tabliye ve kirişlere burulma rijitliği sağlanır, uçayak-üstyapı sürekliliği ile de hareketli yükler altında bu yapılar beraber hareket eder [1,2]. İntegral köprülerde, konvansiyonel köprülerden farklı olarak projelendirilmelerinde sıcaklık, sünme, rötre ve

deprem etkileri büyük önem taşımaktadır. Çünkü üstyapının yani tabliyenin hareket imkanı altyapının (kazıklar, kolonlar) deformasyon yapabilmesine bağlıdır. İntegral köprü tasarımıyla; basit kirişlerin montaj kolaylığı, sürekli kirişlerin ekonomik yararından faydalanılır. Ayrıca bakım masrafları en minimal düzeye indirgenip, daha uzun ömürlü bir köprü inşa edilir [3].



Şekil 1. İntegral Köprü kesiti [1]

İntegral köprülerin tasarımımda, mevcut bulunan köprü tasarımları ile uyumluluğu yeni bir araştırma konusudur. Yeni bir köprü türü olan bu yapılar ile ilgili hem Amerikan Karayolu Şartnamesi (AASHTO), hem de KGM Karayolu Teknik Şartnamesinde bir standart bulunmamaktadır. Bu sebeple integral köprüler üzerine gelen statik ve dinamik yükleri incelemek için AASHTO LRFD'ye ait Köprü Tasarım Felsefesinde bulunan koşullar ve sınırlayıcılar kullanılmıştır [4].

i) Genel

ii) Sınır Durumları

iii) Süneklik

iv) Yedeklilik

v) Yapı Önem Derecesi

Ülkemizde, integral köprü konusunda yapılan çalışmalarda geoteknik, geometrik şekilleri, çeşitli malzeme, üzerine gelen yükler karşısında davranışı vb. gibi çok sayıda araştırma yapılmıştır. Yapılan inceleme neticesinde, bu köprü tipi için optimizasyon konusunda bir araştırma yapılmadığı görülmüştür. Bu çalışmada, integral köprü tasarımında uygulanabilecek optimizasyon yöntemlerinin karşılaştırılması incelenmiştir. Yapılacak optimizasyon çalışmasıyla beraber bu eksikliğin giderilmesi amaçlanmaktadır. Bu doğrultuda literatür taraması yapılmış ve kullanılabilecek optimizasyon yöntemleri belirlenmiştir. Bu çalışma kapsamında Genetik Algoritma, Harmoni Arama Algoritması ve Partikül Küme Algoritması kullanılarak tasarlanan üç adet integral köprünün performans değerlendirilmesi yapılmıştır.

LİTERATÜR TARAMASI

Yalçın (2017), integral köprülerin kazıklarında oluşan kuvvetlere hareketli yüklerin etkisi, çeşitli üstyapı parametrelerinin değişimleriyle araştırmıştır. Bunun için, birçok üç boyutlu

integral köprünün sonlu elemanlar modellerini kurmuş, bu modellerin analizleri AASHTO LRFD hareketli yükleri altında yapmıştır [1].

Erhan ve Dicleli (2009), yapı-zemin etkileşiminin ve tabliye-uçayak sürekliliğinin köprülerdeki hareketli yük dağılımına etkilerini incelemişlerdir. Bunun için, çeşitli yapısal, geoteknik ve geometrik özelliklere sahip çok sayıda integral ve basit mesnetli köprülerin iki ve üç boyutlu yapısal modelleri kurularak, AASHTO hareketli yükleri altında analizlerini yapmışlardır [5].

Erhan ve Dicleli (2011), sismik yüklerin, integral köprü kazıklarında, düşük devirli yorulmaya etkileri incelemişlerdir. Bu amaçla, 41 m uzunluğunda iki açıklığa sahip bir integral köprü tasarlamışlardır. Bu köprünün yapısal modeli kurmuş ve kayada kaydedilmiş yedi farklı deprem ile çeşitli etkin yer ivmelerine göre zaman tanım analizlerini yapmışlardır [6].

Arsoy vd. (2007), kazık, kazık başlığı ve köprü kirişinden meydana gelen ve killi zemine oturan derzsiz bir köprüyü iki boyutlu olarak modellemişlerdir. Köprünün sıcaklık, hareketli yük ve köprünün üzerine oturduğu zeminin drenajsız kayma mukavemeti gibi parametreleri değiştirilerek sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla analizlerini gerçekleştirmişlerdir [7].

Erhan ve Dicleli (2007), köprü zemin etkileşiminin, integral köprü elemanlarında hareketli yüklerden dolayı oluşan moment ve kesme kuvvetlerine etkilerini incelemişlerdir. Bunun için, çeşitli yapısal, geoteknik ve geometrik özelliklere sahip iki boyutlu integral köprü modelleri, dolgu ile temel zemininin etkisinin dikkate alınıp alınmadığı durumlar için köprü tasarımında standart olarak kullanılan kamyon yükleri altında analizini yapmışlardır [8].

Doğan vd. (2013), yapı mühendisliği problemlerinin çözümünü bulmak için kullanılan optimizasyon tekniklerinden Harmoni Arama, Genetik Algoritma ve Partikül Küme olmak üzere üç meta-bulgusal metodun karşılaştırmışlardır [9].

Ortaç (2017), prefabrike öngerilmeli beton köprü kirişlerinden oluşan (I Profil) köprü üst yapılarının öngerilmeli beton ve donatısı esas alınarak “diferansiyel gelişim algoritması” ile optimum maliyet tespiti analizini yapmıştır [10].

Peker (2019), kompozit çelik I-Kiriş köprülerin tasarımını gerçekleştirmek için iki aşamadan oluşan etkin bir optimum tasarım yaklaşımını, köprü tasarımcıları tarafından benimsenen analiz yöntemleri çerçevesinde irdelemiştir. Gerilme ve sehim gibi etkin sınırlayıcılarla birlikte, AASHTO LRFD Şartnamesinin sınırlayıcıları da göz önüne alınarak, optimum tasarımı gerçekleştirmek amacıyla, sezgisel algoritmalar arasında en etkin olan armoni arama yöntemi ile optimum tasarım problemi kurulmuştur. Çelik I-Kiriş köprülerin optimum tasarım işleminde sehim sınırlayıcısının etkin belirleyici olduğu tespit edilmiştir [11].

MATERYAL VE METOD

1) AASHTO LFRD’ye göre Köprü Tasarımı Felsefisi

1.1) Köprü Tasarım Sınır Durumları:

Her eleman ve bağlantı, aksi söylenmedikçe, her sınır durumu için Denklem 1’i sağlayacaktır. Hizmet ve olağan dışı olay sınır durumları için direnim katsayısı 1.0 olacaktır. Ancak bulonlar ile Deprem Kategorisindeki betonarme kolonlar için ayrıca

belirtilmiş hükümleri geçerlidir. Tüm sınır durumları eşit önem derecesi ile dikkate alınacaktır.

$$\sum \eta_i \gamma_i Q_i \leq \phi R_n = R_r \quad (1)$$

γ_i'nin maksimum değerini aldığı yükler için:

$$\eta_i = \eta_D \eta_R \eta_I \geq 0.95 \quad (2)$$

γ_i'nin minimum değerini aldığı yükler için:

$$\eta_i = \frac{1}{\eta_D \eta_R \eta_I} \leq 1.00 \quad (3)$$

γ_i : yük katsayısı: zorlama etkilerine uygulanacak istatistiksel bir çarpan

ϕ : direnim katsayısı, AASHTO'nun çeşitli bölümlerinde belirtilmiş olan ve anma direnimine uygulanacak istatistiksel bir çarpan

η_i : yük değiştirme katsayısı: süneklik, yedeklilik ve kullanım amacına bağlı önem derecesi ile ilgili bir katsayı

η_D : sünekliğe bağlı bir katsayı

η_R : yedekliliğe bağlı bir katsayı

η_I : yapı önem derecesine bağlı bir katsayı

Q_i : zorlama etkisi

R_n : anma direnimi

R_r : katsayılı direnim (ϕR_n)

Kullanım sınır durumu; normal kullanım koşulları altında gerilme, şekil değiştirme ve çatlak genişliğine getirilecek sınırlamalar.

Yorulma sınır durumu; tek bir tasarım kamyonundan gelen gerilmelerin tekerrür sayısı sonucunda oluşan gerilme aralığına getirilecek sınırlamadır.

Kırılma sınır durumu; AASHTO Malzeme Şartnamesindeki bir dizi malzeme dayanıklılık gereksinimlerini ifade eder.

Dayanım sınır durumu; Köprünün tasarım ömrü süresince karşı karşıya geleceği, istatistiksel olarak ön plana çıkan yük bileşimlerine dayanması için, elemanların hem tek başına hem bir bütün olarak dayanımının ve stabilitesinin güvenceye alınmasıdır.

Olağan dışı olay sınır durumları; Büyük bir depremde, taşkında ya da bir gemi veya araç çarpması durumunda, buz sürüklenmesinde ve muhtemel oyulma koşullarında köprünün yapısal olarak ayakta kalması için göz önüne alınması gereken sınır durumlarıdır.

Yukarıdaki sınır durumları göz önüne bulundurularak köprü tasarımında, genel olarak kullanılan sınır durumlarına bağlı yükleme kombinasyonları aşağıdaki belirtilmiştir [12,13,14]:

Dayanım I: 1.25DC+ 1.50DW + 1.75(LL+IM) (4)

Kullanım II: 1.00DC + 1.00DW + 1.30(LL+IM) (5)

Yorulma: 0.75(LL+IM) (6)

1.2) Süneklik

Bir köprünün yapısal sistemi, kullanılamaz hale gelmeden önce, dayanım ve olağan dışı olay sınır durumlarında önemli ve görünebilir biçimde elastik ötesi şekil değiştirmelerin oluşmasına imkan verecek biçimde boyutlandırılacak ve detaylandırılacaktır. Dayanım sınır durumu için:

η_D ≥ 1.05 Sünek olmayan elemanlar ile bağlantılar için

= 1.00 Bu şartname koşullarını sağlayan geleneksel tasarım ile detaylar için

≥ 0.95 Bu şartnamede istenilenleri aşan düzeyde ek süneklik sağlayıcı tedbirlerin öngörüldüğü elemanlar ile bağlantılar için

Bütün diğer sınır durumları için;

η_D = 1.00

1.3) Yedeklilik

Aksini gerektiren sebep yoksa yedek taşıma kapasiteli ve sürekli yapılar kullanılmalıdır.

1.4) Yapı Önem Derecesi

Bir köprünün veya herhangi bir yapısal eleman ya da bağlantısının kullanım açısından önem derecesini "Mal Sahibi" belirleyecektir. Bu madde sadece dayanım ve olağan dışı olay sınır durumlarında kullanılır.

2. Şekil Değiştirmeler

2.1) Sehim Kriterleri

Başka kriterlerin bulunmadığı durumlarda alüminyum, beton ve/veya çelik taşıt köprüleri için aşağıda belirtilen sehim sınırlamaları dikkate alınanır:

Çizelge 1. Sehim Sınırlamaları

Taşıt yükü, genel	Açıklık/800
Taşıt yükü ve yaya yükleri	Açıklık/1000
Konsol elemanlarda taşıt yükü	Açıklık/300
Konsol elemanlarda taşıt yükü ve yaya yükleri	Açıklık/375

Ortotropik plak tabliyelerde aşağıdaki koşullar uygulanır:

Çizelge 2. Sehim Sınırlamaları (Ortotropik Plak Tabliyelerde)

Tabliye plağı üzerinde taşıt yükü	Açıklık/300
Ortotropik metal tabliyenin nervürleri üzerinde taşıt yükü	Açıklık/1000
Ortotropik metal tabliyenin nervürleri üzerinde taşıt yükü (Komşu nervürler arasında en büyük göreceli sehim)	0,1 inch

2.2) Kullanım Sınır Durumu

Tabliyeler ve döşemeler tamamen elastik yapılar olarak analiz edilecek ve AASHTO koşullarını sağlayacak biçimde detaylandırılacak ve tasarlanacaktır.

L = mesnet ekseninden mesnet eksenine açıklık olmak üzere;

- ✓ Yaya trafiği olmayan döşemelerde L/800,
- ✓ Sınırlı düzeyde yaya trafiği olan döşemelerde L/1000,
- ✓ Önemli düzeyde yaya trafiği olan döşemelerde L/1200

değerlerini geçmeyecektir.

3. Sürekli Yükler

Sürekli yükler sabit ve toprak yükleri olarak iki kısımdan oluşur. Sabit yüklere **(***DC, DW ve EV)*, yapıya ait tüm elemanların, aksesuarların, bunlara eklenen hizmet hatlarının, toprak örtüsünün, aşınma tabakasının, gelecek üzerine gelmesi muhtemel tabakaların ve planlanmış olan genişletmelerin ağırlıkları eklenecektir. Toprak basıncı, toprak sürşarjı ve negatif sürtünme yükleri gibi toprak yükleri de sürekli yükler olarak alınır.

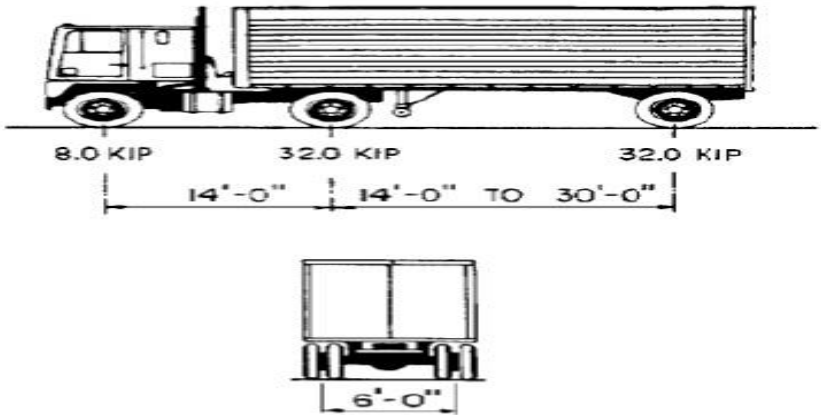
4. Hareketli Yükler

HL-93 ismi verilen, köprüler ve köprü benzeri yapıların taşıt yolu bölümünde göz önüne alınan taşıt hareketli yükü:

- Tasarım kamyonu veya tasarım çift dingili,
- Tasarım şerit yükü

bileşiminden oluşacaktır.

Tasarım kamyonunun dingil ve tekerlek aralıkları ile ağırlıkları Şekil 2'de belirtilmiştir. "Dinamik Yük Etki Katsayısı: IM"deki gibi bir dinamik yük katsayısı dikkate alınacaktır.



Şekil 2. Tasarım kamyonu özellikleri [4]

Çift dingilli tasarım taşıtı, 4.0 ft dingil aralıklarına sahip bir çift 25.0 kip'lik dingilden oluşacaktır. Tekerleklerin enine yöndeki aralığı 6.0 ft olarak alınacaktır. Dinamik yük katsayısı "Dinamik Yük Etki Katsayısı (IM)"na göre dikkate alınacaktır.

Dinamik Yük Etki Katsayısı (IM), tasarım kamyonunun ya da tasarım çift dingilli taşıtının dinamik etkilerini göz önüne almak için, merkezkaç kuvvet ve fren yükleri dışındaki statik etkiler Çizelge 3'de gösterilen yüzdeyle arttırılacaktır.

Statik yüklere uygulanacak katsayı $\left(1+\frac{\mathrm{IM}}{100}\right)$ olacaktır.

Dinamik yük etki katsayısı yaya yüklerine ya da tasarım şerit yüküne uygulanmayacaktır.

Çizelge 3. Dinamik Yük Etki Katsayısı, IM

Eleman	IM
Döşeme Derzleri - Bütün Sınır Durumları	%75
Yorulma ve Kırılma Sınır Durumları (Bütün Diğer Elemanlar)	%15
Bütün Diğer Sınır Durumları (Bütün Diğer Elemanlar)	%33

Bu çalışmada yapılan analizlerde, AASHTO LRFD ile uyum sağlamak bakımından, AASHTO HL-93 hareketli yükü kullanılmıştır. HL-93 yükü, 8 kN ağırlığında ön dingilden, bu dingile 14 ft uzaklıkta olan 32 kip'lik orta dingilden ve orta dingile 14,3 ft mesafede bulunan 32 kip'lik arka dingilden oluşur. Enlemesine kamyonun yerleştirildiği durumda kamyonla özellikleri Şekil 2'de gösterilmiştir.

Tasarım şerit yükü, boyuna doğrultuda düzgün yayılı olarak 0.64 klf olarak, enine doğrultudaysa tasarım şerit yükünün 10.0 ft genişlikte düzgün yayılı olduğu kabul edilecektir.

4.1) Tasarım Taşıt Hareketli Yüklerinin Uygulanması:

Bütün açıklıklarında düzgün yayılı yüklü olan sistemin moment sıfır noktaları arasında kalan negatif moment bölgesi için ve iç mesnetlerdeki reaksiyon kuvvetleri için öndekinin arka dingiliyle arkadakinin ön dingili arasında en az 50.0 ft mesafe olacak şekilde yerleştirilen iki tasarım kamyonunun etkisinin %90'ı ile birlikte tasarım şerit yükünün etkisinin %90'ı, her bir kamyonun 32.0 kip'lik dingillerinin ara mesafesi 14.0 ft alınacaktır. İki tasarım kamyonu maksimum değerde zorlama etkileri oluşturmak amacıyla komşu açıklıklara yerleştirilecektir.

İncelenen en büyük zorlama etkisinin hesabına katkısı olmayan dingiller hesaba alınmayacaktır. Tasarım şeritleri ile her şeritteki 10.0 ft'lik yüklü genişlik ikisi birden en büyük zorlama etkilerini oluşturacak biçimde yerleştirilecektir. Tasarım kamyonu veya tasarım çift dingilli taşıtı enine doğrultuda herhangi bir tekerlek yükünün merkezi aşağıdaki maddelerden daha yakın olmayacaktır:

- Tabliye konsolunun tasarımı için korkuluk ya da bordür yüzünden 1.0 ft,
- Tüm diğer elemanların tasarımı için tasarım şeridinin kenarından 2.0 ft.

Çizelge 4. Tasarımda kullanılacak İntegral Köprü parametreleri*:

Köprü Açıklığı (L)	65,62 ft
Genişlik (ft)	31,50 ft
Kiriş Aralığı (S)	7,87 ft
AASHTO öngermeli beton kiriş tipi (GT)	IV
Kiriş Türü	Öngermeli Betonarme
Kiriş Sayısı (N_b)	5 adet
Tabliye Kalınlığı (ts)	0,49 ft
Konsol Uzunluğu** (de)	2,95 ft
Şerit Sayısı	2
Kompozit kiriş, A (ft^2)	7.115
Kompozit kiriş, I (ft^4)	62,925
Uç ayak kalınlığı (ft)	3,281
Uç ayak yüksekliği (ft)	9.843,00
Uç ayak, A (kiriş ara. başına), (ft^2)	25.833
Uç ayak, I (kiriş ara. başına), (mm^4)	23,177

Beton dayanımı (kiriş) (kip)	7,26
Beton dayanımı (tabliye) (kip)	4,35
Kazık ebadı	HP 250X85
Dolgu zemini	Dolgu etkisi yok
Temel zemini	orta

*AASHTO'daki birimler dikkate alınarak ölçüler belirlenmiştir.

**Dış kiriş merkezinden korkuluk duvarının yüzüne kadar olan mesafe konsol uzunluğu (de) olarak tanımlanmıştır.

Kazıkların **kuvvetli veya zayıf eğilme eksenlerine** göre yerleştirilme durumları göz önünde bulundurulacaktır. Köprülerdeki kazık zemini için $\mathbf{C_u=9\ kip}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon_{50}=0,01}$ olarak alınmıştır.

4.2) Üstyapının Modellenmesi

Paralelkenarların uzunlamasına doğrultuda kenar uzunlukları ve enlemesine doğrultudaki genişlikleri 1,97 ft olarak alınmıştır.

4.3) Altyapının Modellenmesi

Uçayak, tabliye ile uyumlu olması amacıyla, enine yönde kenarı 1,97 ft uzunluğunda olan dikdörtgen elemanlara bölünmüştür. Bununla birlikte, düşey yöndeki boyutları, seçilen kiriş tipine ve rijit tabliye-uçayak bağlantısında olup olmama durumuna göre 1,31– 1,89 ft arasında değişmektedir.

OPTİMİZAYON TEKNİKLERİ

İntegral Köprüler üzerine gelen dinamik ve statik yüklerin optimizasyonunun araştırılmasına karar verildikten sonra nasıl bir optimizasyon yapılabileceği araştırılmıştır. Optimizasyon konusu kendi içerisinde oldukça geniş bir konu ağına sahiptir. Bu nedenle araştırma için öncelikle optimizasyon yöntemlerinin incelenmesine başlanmıştır.

Genellikle uygun görülen bir zaman içinde herhangi bir problemin olabilecek en faydalı çözümünü bulmaya çalışmak sürecine optimizasyon denilir. Başka bir ifadeyle optimizasyon, belli başlı şartları karşılayacak biçimde bir problemin parametre değerlerinin tespit edilmesidir. Doğada ki bir çok eşya ya da hayvan optimizasyon yapmaktadır. Örneğin karıncaların, yiyecek ile yuvaları arasındaki en kısa yolu tespit etmesi, ışık ışınlarının ulaşım zamanını kısaltacak yolu belirlemesi… vb. gibi genel olarak minimum enerji ile maksimum fayda sağlanmaya çalışılması birer optimizasyondur.

İnşaat mühendisliği uygulamaları, genellikle karmaşık ve pek çok parametrenin göz önüne alınarak hesaplanması gereken bir olasılıklar uzayıdır. Durum uzayı çok büyük olduğunda, bütün çözümleri denemeye çalışmak, uygun görülen bir vaktin ötesinde zamanlar gerektirir. Bu tip problemler genelde yapay zekanın konusu içinde değerlendirilir. Bu nedenle, son zamanlarda araştırmacılar tarafından yapılan pek çok çalışmada yapay zekadan yararlanılmıştır.

Yapay zeka problemlerinin çözümünde, sezgisel yöntemler kullanılmaktadır. Sezgisel araştırma ile belirlenen algoritmaların ortak özelliği; araştırma uzayı çok büyük olan problemlerde, çözümün aranmasını kesin biçimde sınırlayan herhangi bir kural, hile, strateji, sadeleştirme ve diğer etmenler kullanılır. Bu etmenlerden genellikle araştırmayı yönlendiren bir bulgu hedeflenir. Sezgisel stratejiler, genellikle problem üstü düzeyde kullanılır. Sezgisel terimi; akıllı tahminlere dayalı buluş yöntemi ya da yeni çözümlerin

keşfine götüren bulgulara dayalı arama yöntemi olarak tanımlanır. Yapılacak araştırma kapsamında optimizasyon yöntemleri içerisinde sezgisel yöntemler tercih edilecektir.

Optimizyon Tekniklerinin Karşılaştırılması

Bu çalışma kapsamında yapılan literatür taraması sonucunda araştırmacıların en çok kullandıkları optimizasyon tekniklerinden üçü seçilmiştir. Bunlar, Genetik Algoritma, Harmoni Arama Algoritması ve Partikül Küme Algoritması.

a) Genetik Algoritma (GA)

Genetik Algoritma (GA), rastgele arama metodunu kullanarak, parametre kodlama temeline dayalı, en uygun çözümü bulmaya çalışan optimizasyon yöntemidir. Temel ilkeleri John Holland tarafından ortaya atılmıştır. Genetik algoritmaların, çizelgeleme, hücresel üretim, mekanik öğrenme, fonksiyon optimizasyonu, tasarım gibi farklı alanlarda uygulamaları başarıyla gerçekleştirilmiştir. Geleneksel optimizasyon yöntemlerine göre farklılıkları bulunan genetik algoritmalar, parametre kümesini değil kodlanmış biçimlerini kullanırlar. Olasılık kuralları doğrultusunda çalışan genetik algoritmalar, sadece amaç fonksiyonuna ihtiyaç duyar. Çözüm uzayının hepsini değil belli bir bölümünü tararlar. Böylece etkin arama yaparak kısa bir zamanda sonuca ulaşırlar. Bir başka önemli üstünlüklerinden biri de çözümlerden meydana gelen populasyonu eş zamanlı incelemeleri ve bu sayede yerel en iyi çözümlere bakmamalarıdır [15,16].

GA, pek çok sayıda problem için uygun veriler ile çalışıldığı zaman, çözümleri optimuma yaklaşır. Darwin'in doğal seçim teorisinde, doğadaki canlıların geçirdiği evrim süreci göz önüne alınır. GA'nın çalışma prensibi bu teoriye dayanır. GA'da amaç, doğal sistemlerde bireylerin çevrelerine uyum sağlama özelliğini kullanarak yapay sistemleri tasarlamaya çalışmaktır [17]. Algoritmanın ana oluşumu şu şekildedir [15]:

Başlangıç popülâsyonu: Sıfır ile bir sayılarının rastgele atanması doğrultusunda ortaya çıkar ve önceden belirlenen bir sayıdaki bireylerden oluşur.

Kodlama: Tüm alt dizileri verilen bir profil listesindeki standart çelik kesitlerin sıra sayısını gösteren tamsayı ile eşlemek amacıyla her birey için kod çözümünü bulur. Denklem 7'de verilen çoklu-parametre eşleme planı bu amaçla kullanılır.

$$I_i = I_{min} + \left(\frac{I_{max} - I_{min}}{2^l - 1}\right)\Omega \tag{7}$$

l : Altdizinin boyu

I_{max} : Profil listesindeki ilk çelik kesite gelen sıra numarası

I_{min} : Profil listesindeki son çelik kesite gelen sıra numarası

Ω : Hesaplanan kodlama değeri

Değer verme ve uygunluk: Dış yükler altında yapının davranışını görmek için yapı analizi gerçekleştirilir ve amaç fonksiyonu bireye atanır. En büyük amaç fonksiyonunun, k bireyine ait amaç fonksiyonuna oranı ile uyumluluk skoru hesabı bulunur.

$$f_k = \frac{\emptyset_{max}}{\emptyset_k} \tag{8}$$

f_k : Uyumluluk skoru

$\emptyset_{max}$: Maksimum amaç fonksiyonu

$\emptyset_k$: k bireyine ait amaç fonksiyonu

Bu amaç için kullanılan ölçeklendirme fonksiyonu Denklem 9'te verilmiştir:

$$f_k{}' = f_k \left[\frac{(s_c-1)}{(f_{max}-f_{ave})} \quad f_{ave}\right] + \frac{(f_{max}-s_c f_{ave})}{(f_{max}-f_{ave})} f_{ave} \tag{9}$$

f_{max} : Popülasyondaki en büyük uygunluk değeri
f_{min} : Popülasyondaki en küçük uygunluk değeri
f_{ave} : Popülasyondaki ortalama uygunluk değeri
s_c : Gerçek değerli ölçeklendirme faktörüdür.
$f_k{}'$: k bireyinin ölçeklendirilmiş uygunluk değeri
Uygunluk ölçeklendirmesi vasıtasıyla en büyük uygunluğun bunun ortalama değerine oranı, s_c civarında bir değere göre belirlenir.
Seçim ve yeniden üretim: Çiftleşme havuzundaki bireylerin temsil ettiği kopya sayısı, uygunluk orantılı seçim ifadesiyle tespit edilir.

$$\eta_k = \frac{f_k'}{f_{ave}'} \tag{10}$$

f'_{ave} : Popülasyonun ölçeklendirilmiş ortalama uygunluk değeri
η_k : Bir bireye ayrılan yeniden üretim sayısı

Genetik değişim: Seçilmiş ve yeniden üretilmiş olan bireyler $\mu/2$ çiftle rastgele birleştirilir. Genetik değişim, genetik değişim olasılığı p_c olarak adlandırılan olasılık değerine göre ayrı ayrı uygulanır.

Mutasyon: Önceden belirlenen mutasyon-gen olasılığı p_m'e bağlı biçimde, 0 veya 1 genini rastgele değiştirerek, yeni bireylerin gen mutasyonu uygulanır.

Sonlandırma: Yeni popülasyon ebeveyninin yerini alır. En büyük iterasyona (N_{gen}) ulaşana kadar adımlar tekrarlanır.

b) Harmoni Arama Algoritması (HAA)

Harmoni arama algoritması, Geem, Kim ve Loganathan tarafından 2001 yılında geliştirilen bir optimizasyon algoritmasıdır. "Müzisyenlerin tekrarlanan yinelemelerle bulmaya çalıştıkları cazın müzikal doğaçlanmasına benzetme temline dayanır." biçiminde yazarları tarafından adlandırılır. Yani müzisyenlerin çaldıkları notalar ile harmonik açıdan en uygun melodiyi bulmaya çalışması esas prensibidir. Bu yinelemelere doğaçlama veya uygulama ismi verilir. Bu yöntemin müzik aletlerine benzer yanı, değişkenleridir. Bu değişkenlerin değerleriyse enstrümanların notalarıdır. Bu metotta her çözüme "harmoni" denir. Tekrarlayan rastgele arama tekniği ile harmoni belleğindeki en kötü harmoniyi değiştiren yeni bir uyum vektörü oluşturulur [18,19].

Karar değişkenleri için özel başlangıç çözümüne ihtiyaç duymaması, birden fazla çözümle optimizasyon işlemini gerçekleştirmesiyle çok sayıda farklı yönde küresel optimumu arayarak bölgesel optimum çözümlerden sıyrılması, optimizasyon işlemlerinde hem ayrık hem de sürekli değişkenler için kullanılması algoritmanın avantajlarıdır. Amaç fonksiyonu küresel çözüme yaklaştıkça, optimizasyon işleminde en uygun çözüm bulunur [20].

Harmoni Arama Algoritması ana yapısı aşağıda maddeler halinde verilmiştir [9,21]:

Harmoni hafıza matrisinin oluşturulması: Başlangıç harmoni hafıza matrisi (H) oluşturulur. Harmoni hafıza matrisinin büyüklüğü (μ) çözüm vektörlerinin sayısıdır.
Her bir çözüm vektörü (I') tasarım değişkenlerinden (N_d) oluşmakta ve her matrisin ayrı ayrı satırında yazılmaktadır. Harmoni hafıza matrisi şöyle gösterilir: H= μ x N_d
Harmoni hafıza matrisinin değerlendirilmesi: Harmoni hafıza matrisi çözümleri analiz etmesinden sonra amaç fonksiyonlarını hesaplar. Matris içerisinde değerlendirilen

çözümler, amaç fonksiyon değerlerinin artan dizisine göre sıralanır. Sıralama şekli: $\phi(\mathbf{I}^1) \leq \phi(\mathbf{I}^2) \leq \ldots \leq \phi(\mathbf{I}^{\mu})$

Yeni harmoninin geliştirilmesi: Yeni harmoni matrisi $\mathbf{I'_i} = [I'_1, I'_2, \ldots, I'_{Nd}]$ harmoni hafıza ya da tamamlanmış ayrık set tarafından her bir tasarım değişkeni için tek tek seçildikten sonra geliştirilir. Şayet seçilen bu rastgele sayı (r_i) harmoni hafıza göz önünde bulundurma oranından (*hmcr*) küçük veya eşitse, değişken H harmoni matrisinin i'inci sütunu tarafından atanan rastgele bir değer tarafından Denklem 11'e göre belirlenir. Eğer *hmcr* parametresi r_i sayısından küçük ise rastgele değer tamamlanmış ayrık set tarafından atanır.

$$I'_i = \begin{cases} I'_i \in \{I_i^1, I_i^2, \ldots, I_i^{\mu}\} \; if \; r_i \leq hcmr \\ I'_i \in \{1, \ldots, N_s\} \; if \; r_i > hcmr \end{cases} \tag{11}$$

Eğer bir tasarım değişkeni harmoni hafıza ile kendi değerine geliyorsa, bu değerin derece uyumluluğu kontrol edilir, aynı şekilde *hmcr* parametresi de derece uyumluluğu (*par*), Denklem 12, adıyla bilinen olasılık kavramıyla beraber çalıştırılır. Eğer *par* tarafından etkin hale getirilmemiş ise tasarım değişkeni farklılaşmaz.

$$I''_i = \begin{cases} I'_i \pm 1 \; if \; r_i \leq par \\ I'_i \; if \; r_i > par \end{cases} \tag{12}$$

Harmoni Hafıza Matrisinin Güncelleştirilmesi: Yeni vektörün oluşmasından sonra amaç fonksiyon değeri bulunur. Bu değer hafıza matrisindeki en kötü değerinde aşağısındaysa, yeni değer matrisinin içine yerleştirilir ve matriste olan en kötü değer matristen atılır.

Sonlandırma: 3.- 4. adımlar algoritma döngünün maksimum sayısına (N_{cyc}) ulaşana kadar yinelenir.

c) Partikül Küme Algoritması (PKA)

Partikül Küme Algoritması (PKA) yöntemi hayvanlarda gözlemlenen balıkların toplu hareketleri, böcek kümelenmesi ve kuş sürüleri gibi sosyal davranışları temel almaktadır [19,20]. Bu davranış hali, tüm sürü hareketini gösteren bilgi ile aynı zamanda her bir bireyin hafızasına dayanan sosyal gruplandırmaya dayanır. Metot, bir amaç fonksiyonu örnek uzayı içinde rastgele oluşturulan sürüyü meydana getiren belirli miktarda partikülü kapsar. Sürü içinde yer alan her bir partikül, optimum tasarım problemi için birer aday çözümdür. Örnek uzaya doğru uçma eğiliminde olan partiküller ve mevcut pozisyonları, bir zaman aralığı için her bir adımdaki pozisyonları ve hız vektörleri yardımıyla güncellenir [24].

Partikül Küme Algoritması ana yapısı aşağıda maddeler halinde verilmiştir [9,24]:

Partiküllerin oluşturulması: Bir partikül kümesi küme boyutunu (μ) gösteren, önceden belirlenen miktarda partiküllerden oluşur. Her partikülün (P) iki adet bileşeni bulunur. Bunlar bir yer (tasarım) I vektörü ile birde hız vektörü v. Yer vektörü I tasarım değişkenlerinin yerlerini içerirken hız vektörü v'de arama boyunca, yer vektörünün güncellenmesi amacıyla kullanılır. Sürü içerisindeki her bir partikül tüm ilk pozisyonlar $I_i^{(0)}$ ve hızlar $v_i^{(0)}$ Denklem 14 ve 15'e bağlı olacak şekilde rastgele başlatma prensibiyle oluşturulur.

$$\mathbf{P=(I,v)}, \mathbf{I=}[I_1, I_2, \ldots, I_{Nd}], \mathbf{v=}[v_1, v_2, \ldots, v_{Nd}] \tag{13}$$

$$I_i^{(0)} = I_{min} + r(I_{max} - I_{min}), \; i=1,\ldots,N_d \tag{14}$$

$$V_i^{(0)} = \frac{Imin + r(I_{max} - I_{min})}{\Delta t},\ i=1,\ldots,N_d \quad (15)$$

r : 0 ile 1 arasında seçilmiş rastgele bir sayı

Δt : Zaman aralığı

I_{min} *:* Kesit listesindeki ilk çelik profilin sıra sayısı

I_{max} *:* Kesit listesindeki son çelik profilin sıra sayısı

Partiküllerin değerlendirilmesi: Tüm partiküller, ana denkleme bağlı kalarak analiz edilir ve amaç fonksiyonu değerleri bulunur.

Partiküllerin en iyi değerinin ve küme içindeki en iyi partikül değerinin güncellenmesi: Bir partikülün o ana kadarki en uygun pozisyonu, partikülün en uygun değeri olarak kabul edilir ve her bir partikülün en iyi değeri B vektörüne kaydedilir. Ayrıca sürecin başından itibaren herhangi bir partikül tarafından elde edilmiş olan en uygun pozisyon ise en uygun global pozisyon olarak G vektörüne kaydedilir. Her bir k iterasyon adımı için partikül ve global en uygun pozisyon değerleri güncellenir.

$$\mathbf{B}^{(k)} = \left[B_1^{(k)},\ldots B_i^{(k)}..,B_{N_d}^{(k)}\right] \qquad \mathbf{G}^{(k)} = \left[G_1^{(k)},\ldots G_i^{(k)}..,G_{N_d}^{(k)}\right] \quad (16)$$

Partiküllerin hız vektörlerinin güncellenmesi: Her partikülün hız vektörü partiküllerin mevcut, global ve lokal en uygun pozisyonları dikkate alınarak aşağıdaki gibi güncellenir.

$$v_i^{(k+1)} = wv_i^{(k)} + c_1 r_1\left(\frac{G_i^{(k)} - I_i^{(k)}}{\Delta t}\right) + c_2 r_2\left(\frac{B_i^{(k)} - I_i^{(k)}}{\Delta t}\right) \quad (17)$$

r_1 *ve* r_2 *:* 0 ile 1 arasında seçilmiş rastgele sayılar

w : Algoritmanın keşif özelliklerini kontrol eden partikül atalet parametresi

c_1 *ve* c_2 *:* Partikülün sırasıyla kendisine ve sürüye ne kadar bağlı kalacağını gösteren güven parametreleri

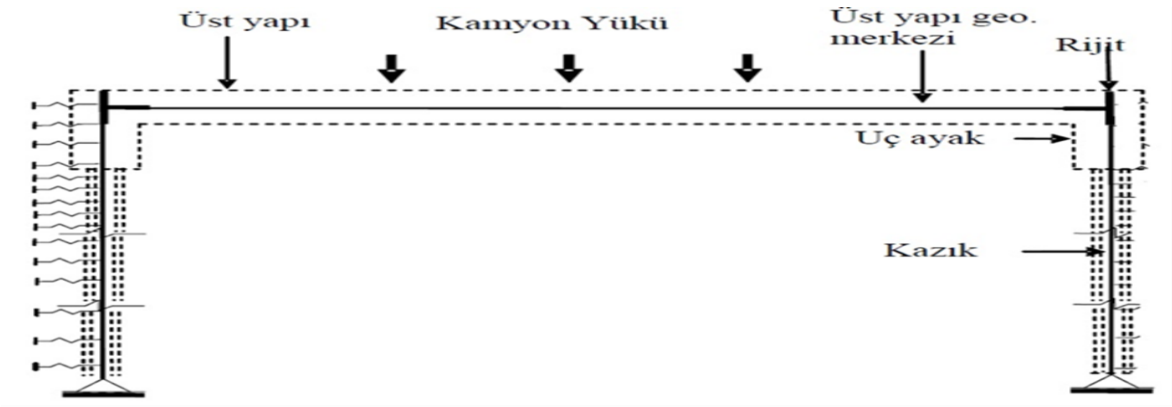
Partikül pozisyon vektörünün güncellenmesi: Daha sonra güncellenen hız vektörü kullanılarak her bir partiküle ait pozisyon vektörü güncellenir.

$$I_i^{(k+1)} = I_i^{(k)} + v_i^{(k+1)}\Delta t \quad (18)$$

Sonlandırma: Adımlar, önceden belirlenmiş olan N_{ite} kadar iterasyon için tekrar edilir.

SAYISAL UYGULAMA

Bu çalışmada bir integral köprü literatürde kullanılan üç ayrı optimizasyon yöntemi ile çözülmüş ve performansları karşılaştırılmıştır. Tasarım problemini çözmek için daha önce literatürde bulunan ve çözümü yapılmış bir düzlemsel köprünün parametreleri kullanılmıştır [9,25]. Tasarımda kullanılan köprünün yapısal modeli Şekil 3'de, genel özellikleri Çizelge 4'de, her yöntemin optimum tasarım probleminde kullanılan parametreleri Çizelge 5'de verilmiştir.



Şekil 3: Köprü Yapısal Modeli [8]

Çizelge 5. Optimizasyon Tekniklerinin Parametreleri

Yöntem	Parametreler
HAA	μ=50 , $hmcr = 0.90$, $par = 0.30$, $N_{cyc} = 50000$
GA	μ=50 , $p_c = 0.90$, $p_m = 0.005$, $s_c = 2.0$, N_{gen} =1000
PKA	μ=50 , $\Delta t = 1.0$, C_1-C_2 = 0.005 , $w = 0.5$, N_{ite} =1000

SAYISAL SONUÇLAR

Uzunluğu 65,62 ft olan tek açıklığa sahip integral köprü sisteminde, köprüdeki elemanlar, tasarım gereksinimleri dikkate alınarak değişkenli olarak gruplandırılmıştır. Yapının üst kısmındaki her bir düğüm noktasına trafik yükleri ile köprü zeminindeki ölü yüklerin birleşiminden oluşan 50 kip değerinde tekil yüklemeler yapılmıştır. Yapı elemanların stabilite ve gerilme sınırlamaları AASHTO şartnamesine göre tespit edilmiştir. Bütün noktaların deplasmanları köprü açıklığının 1/1000'ine denk gelen en büyük değer olan 0,20 ft ile sınırlandırılmıştır.

İntegral köprü sistemi, üç optimizasyon tekniği ile ayrı ayrı beş kez analiz edilmiştir. Bulunan sonuçlar en kötü, ortalama ve en iyi ağırlıklara ait Çizelge 6'da verilmiştir. Çizelge 6'da görüldüğü üzere yapılan 3 farklı analiz sonucu ile en hafif tasarımı 158.231,00 lb ile HAA yöntemini vermiştir. HAA yöntemi, söz konusu tasarım probleminin çözümü için optimum yöntem olarak kabul edilmiştir. En hafif ikinci tasarımı 159.512,00 lb ile PKA yöntemi vermiştir. En kötü tasarım ise 159.856,00 lb ile GA yöntemine aittir.

Çizelge 6. İntegral Köprünün 3 farklı optimizasyon tekniğiyle bulunan ağırlıkları

3 Analiz	**GA**	**HAA**	**PKA**
En Kötü	161.042,00	159.263,00	160.841,00
Ortalama	159.996,00	158.526,00	159.927,00
En İyi	159.856,00	158.231,00	159.512,00

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Harmoni Arama Algoritması, Genetik Algoritma ve Partikül Küme Algoritması sezgisel optimizasyon yöntemlerinin, yapısal tasarım problemlerini çözme performansları karşılaştırılmıştır. Bu araştırma kapsamında literatürden alınan integral köprü sistemi tasarımı, örnek olarak alınıp söz konusu sezgisel optimizasyon algoritmaları ile analiz edilmiştir. Bu algoritmaların performansları karşılaştırmasında Harmoni Arama Algoritması yönteminin daha etkin bir yakınsama ve sonuç gösterdiği gözlemlenmiştir. Seçilen yöntemlerin, çözülen problemdeki performansları, sadece yapısal optimizasyon alanında değil daha birçok üretim ve tasarım alanında da efektif olarak kullanılabilecek biçimde genişletilebileceğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

[1] Yalçın, Ö.F., İntegral Köprülerde Hareketli Yükler Altında Üstyapı Özelliklerinin Kazık Kuvvetlerine Etkisi, Çukurova Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 32(2), ss. 195-206, Adana, Haziran 2017.

[2] Burke, M.P. Jr., 2009. Integral and Semi-Integral Bridges, John Wiley and Sons, West Sussex, UK 2. Franchin, P., Pinto,

[3] Güzel, Ö., Arıoğlu, E., 2012. El Mek Nimir ve Al Halfaia Köprülerinde Yenilikçi Yöntemler, İMO Türkiye Mühendislik Haberleri, TMH - 473 - 2012/3, S.47-55, Ankara.

[4] AASHTO Köprü Tasarım Şartnamesi (LRFD – 2010), 2016. Karayolları Genel Müdürlüğü, Ankara.

[5] Erhan, S., Dicleli, M., 2009. İntegral Köprülerde Hareketli Yük Dağılımına Yapı-Zemin Etkileşimi ve Uç-Ayak Tabliye Sürekliliğinin Etkileri, İMO Teknik Dergisi, 4833-4850, Yazı 317, İstanbul.

[6] Erhan, S., Dicleli, M., 2011. Sismik Yüklerin İntegral Köprü Kazıklarında Düşük Devirli Yorulmaya Etkileri, 1. Türkiye Deprem Mühendisliği ve Sismoloji Konferansı,11-14 Ekim 2011 – ODTÜ – ANKARA.

[7] Arsoy, S., Engin, S., Keskin, E., 2007. Killi Zemine Oturan Derzsiz Bir Köprüdeki Sıcaklık Değişiminin Parametrik İrdelenmesi, 1. Köprü Ve Viyadükler Sempozyumu, 175-146, 29-30 Kasım 2007, Antalya.

[8] Erhan, S., Dicleli, M., 2007.Köprü-Zemin Etkileşiminin, Hareketli Yüklerden Dolayı İntegral Köprü Elemanlarında Oluşan Moment Ve Kesme Kuvvetlerine Etkileri, 1. Köprü Ve Viyadükler Sempozyumu, 145-146,29-30 Kasım 2007, Antalya.

[9] Doğan, E., Erdalı, F., Çarbaş, S., Hasançebi, O., Saka, M.P., 2013. Yapı Mühendisliği Problemlerinin Çözümünde Kullanılan Optimizasyon Tekniklerinin Karşılaştırılması, XVIII. Ulusal Mekanik Kongresi, 26 - 30 Ağustos 2013, Celal Bayar Üniversitesi, Manisa.

[10] Ortaç, E., 2017. Diferansiyel Gelişim Algoritması Tabanlı Öngerilmeli Beton Köprü Kirişlerinin Optimum Tasarımı, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.

[11] Peker, F.Ü., 2019. Kompozit Çelik I-Kiriş Köprülerin Sezgisel Algoritma Teknikleriyle Optimum Tasarımı, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ

[12]. Barker, R. M. and Puckett, J. A. (2013). Design of Highway Bridges: An LRFD Approach, John Wiley and Sons, New York.

[13]. AASHTO LRFD Bridge Design Specifications, 6th ed. (2012), American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington,DC.

[14] İnternet: LRFD Bridge Design-Loading and General İnformation, URL: http://www.webcitation.org/766Qfy1QE, Son Erişim Tarihi: 30/03/2021.

[15] Goldberg, D.E., 1989. Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning, Addion Wesley Publishing Company, USA.

[16] Emel, G.G., Taşkın, Ç., 2002. Genetik Algoritmalar ve Uygulama Alanları, Uludağ Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi Cilt XXI, Sayı 1, 2002, s. 129-152, Bursa.

[17] Deliktaş, B., Türker, H.T., Coşkun, H., Bikçe, M., Özdemir, E., 2005. Genetik Algoritma Parametrelerinin Betonarme Kiriş Tasarımı Üzerine Etkisi, Deprem Sempozyumu, 1524-1531, 23-25 Mart 2005, Kocaeli.

[18] Geem, Z.W., Kim, J.H., Loganathan , G.V., 2001. A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. Simulation. SAGE Publications, SIMULATION 76:2, 60-68 ©2001, Simulation Councils Inc. ISSN 0037-5497/01 Printed in the United States of America.

[19] Kamışlıoğlu, B., Karaboğa, N., 2012. Armoni Arama Algoritması ile Daha Düşük Dereceden Sistem Modelleme, ELECO '2012 Elektrik - Elektronik ve Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu, 576-580, 29 Kasım - 01 Aralık 2012, Bursa.

[20] Ayvaz, M.T., Karahan, H. ve Gürarslan, G., 2007. "Su Dağıtım Şebekelerinin Armoni Araştırması Optimizasyon Tekniği ile Optimum Tasarımı", 5. Kentsel Altyapı Ulusal Sempozyumu, 188-202, 1-2 Kasım 2007, Antakya-Hatay.

[21] Lee, K.S. ve Geem, Z.W., 2004. A New Structural Optimization Method Based on the Harmony Search Algorithm, Computers and Structures, c.82, 781-798.

[22] Kennedy, J. ve Eberhart, R., 1995. "Particle Swarm Optimization", IEEE International Conference on Neural Networks, IEEE Press, c.4, syf.1942-1948.

[23] Perez, R.E. ve Behdinan, K., 2007. Particle Swarm Approach for Structural Design Optimization, Computers and Structures, 85, 1579-1588.

[24] Erdal, F., 2016. Sinüsoidal Boşluklu Gövde Yüksekliği Arttırılmış Çelik Kirişlerin Optimum Boyutlandırılması, AKÜ FEMÜBİD 16 (2016), Özel Sayı (50-58), Afyonkarahisar.

[25] Erhan, S., Dicleli, M., 2007.Köprü-Zemin Etkileşiminin, Hareketli Yüklerden Dolayı İntegral Köprü Elemanlarında Oluşan Moment Ve Kesme Kuvvetlerine Etkileri, 1. Köprü Ve Viyadükler Sempozyumu, 145-146, 29-30 Kasım 2007, Antalya.

BÜYÜK ÖLÇEKLİ KUBBE KAFES YAPILARIN ADAPTİF JAYA ALGORİTMASIYLA DOĞAL FREKANS SINIRLAYICILARI ALTINDA OPTİMUM TASARIMI

Sadık Özgür Değertekin[1] ve Gülay Yalçin Bayar[1], Luciano Lamberti[2]
[1]Dicle Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır
[2]Dipartimento di Meccanica, Management e Matematica, Politecnico di Bari, Italy

ABSTRACT

In this study, an adaptive Jaya algorithm (AJA) is proposed for optimum design of large-scale dome trusses under natural frequency constraints. Jaya means “Victory” in Sanskrit. The Jaya algorithm (JA) is based on the concept that the solution obtained for a given optimization problem which should move toward the best solution and must avoid the worst solution. Two common parameters, which are population size and maximum iteration number, are used in the standard implementation of JA whereas the proposed AJA develops itself automatically without using any parameter. Sizing optimization of a large-scale dome truss with 1410-bar is used to demonstrate the validity of AJA. The results obtained by AJA are compared to JA and other optimization methods in terms of optimized weight and convergence speed. The results demonstrate that AJA could obtain better results with less computational effort than JA and other optimization methods in the literature.

Keywords: optimum design; large-scale dome truss structures; natural frequency constraints; adaptive jaya algorithm

ÖZET

Bu çalışmada büyük ölçekli kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında adaptif Jaya algoritması (AJA) kullanılarak minimum ağırlıklı tasarımı yapılmıştır. Jaya, Sanskritçe’de “Zafer” anlamına gelmektedir. Jaya algoritması (JA), optimum tasarımı bulmak için arama sürecinde en iyi çözüme yaklaşma ve en kötü çözümden uzaklaşma prensibini uygulamaktadır. JA’da popülasyon sayısı ve maksimum iterasyon sayısı olmak üzere iki genel parametre kullanılmaktadır. Buna karşın, bu çalışmada önerilen adaptif Jaya algoritması (AJA) herhangi bir parametre kullanmadan kendini otomatik geliştirebilmektedir. AJA’nın geçerliliğini göstermek için 1410 elemanlı kubbe kafes yapı kullanılmıştır. AJA’dan elde edilen sonuçlar optimum ağırlık ve optimum ağırlığın elde edilmesi için gerekli yapı analiz sayısı gibi kriterler esas alınarak, JA ve diğer optimizasyon yöntemleriyle karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar; AJA ile JA ve literatürdeki diğer optimizasyon yöntemlerine göre hafif tasarımı daha kısa sürede elde edilebildiğini göstermektedir.

Anahtar kelimeler: optimum tasarım; büyük ölçekli kubbe kafes yapılar; doğal frekans sınırlayıcıları; adaptif jaya algoritması

GİRİŞ

Klasik optimizasyon yöntemlerine alternatif olarak ortaya çıkan sezgisel optimizasyon yöntemleri farklı optimizasyon problemlerinin çözümünde otuz yılı aşkın süredir kullanılmaktadır. Genetik algoritmalar (GA) [1], karınca koloni optimizasyonu (ACO) [2], parçacık sürü optimizasyonu (PSO) [3] ve öğretme-öğrenme esaslı optimizasyon (TLBO) [4] başlıca sezgisel optimizasyon yöntemleri arasında sayılabilir. Sezgisel optimizasyon yöntemlerinin ortak özelliği doğal bir olay veya süreçle optimizasyon problemleri arasında analoji kurmalarıdır.

Optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan nispeten yeni olan bir diğer sezgisel optimizasyon yöntemi ise Jaya algoritmasıdır (JA). JA, ilk olarak Rao [5] tarafından sınırlayıcılı ve sınırlayıcısız optimizasyon problemlerinin çözümü için önerilmiştir. Farklı mühendislik uygulamaları yanında, JA'nın yapı sistemlerinin optimum tasarım problemlerinde de kullanılmıştır [6,7].

Kubbe kafes yapılar tüm dünyada en yaygın kullanılan yapı sistemleri arasındadır. Alışveriş merkezleri, kapalı spor salonları, kongre merkezleri vb. birçok inşaat projesinde kubbe kafes yapılar tercih edilmektedir. Bu yaygın kullanımla birlikte nitelikli işçiliğin gerekliliği, periyodik bakım ve malzeme fiyatlarına bağlı olarak diğer yapı sistemleri gibi kubbe kafes yapıların da ekonomik olarak tasarımı büyük önem arz etmektedir. Bu amaçla, kubbe kafes yapıların optimum tasarımı konusunda farklı optimizasyon yöntemleri kullanılarak birçok araştırma yapılmıştır. Kubbe kafes yapıların gerilme ve deplasman sınırlayıcıları göz önüne alınarak optimum tasarımı yanında, doğal titreşim sınırlayıcıları altında optimum tasarımı da araştırmacıların ilgisini çeken bir diğer konudur.

Herhangi bir dış kuvvete maruz kalmasa bile her yapının belli bir frekansta titreşim yaptığı bilinmektedir. Doğal titreşim adı verilen bu titreşim yapının kütlesine ve rijitliğine bağlı olarak hesaplanmaktadır. Herhangi bir yapıdaki doğal frekans sayısı yapının serbestlik derecesi sayısına eşittir. Yapının zorlanmış titreşim (dışarıdan bir kuvvet uygulandığı durum) frekansları ile doğal titreşim frekanslarının çakışması halinde titreşim genliğinin çok büyük değerlere ulaştığı rezonans adı verilen durum ortaya çıkmakta ve yapıda toptan göçme meydana gelebilmektedir. Dolayısıyla tasarımı yapılan yapının doğal titreşim frekanslarının bilinmesi ve zorlanmış titreşim frekanslarıyla çakışmasının önlenmesi yapı emniyeti açısından oldukça önemlidir. Yapı sistemlerinin doğal frekans değerleri hesaplanması modal analizle yapılmaktadır. Modal analiz ise, özdeğer probleminin çözülmesi ile hesaplanmaktadır. Bu çözüm sonucu elde edilen en küçük özdeğer sistemin birinci doğal frekansını ve elde edilen diğer özdeğerler sırasıyla sistemin sonraki doğal frekans değerlerini vermektedir. Kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında optimum tasarımı probleminde; doğal frekans sınırlayıcılarını sağlayan çok sayıda olası kubbe kafes yapı arasında minimum ağırlıklı olanın elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında optimum tasarımı konusunda literatürde; çarpışan cisimler optimizasyonu (ECBO) [8], parçacık sürü optimizasyonu (DPSO) [9], hibrid titreşen parçacıklar optimizasyonu (MDVC-UVPS) [10], çevrimsel üreme algoritması (CPA) [11], değişken parçacık sürü optimizasyonu (CRPSO) [12], kaotik ateşböceği algoritması (CGFA) [13] ve Jaya algoritması (JA) [14] yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalar mevcuttur.

Literatürdeki mevcut optimizasyon yöntemlerinin neredeyse tamamı probleme ve/veya yöntemin kendisine özgü parametreleri kullanarak optimizasyon işlemlerini icra etmektedirler. Buna karşın burada geliştirilen AJA algoritmasının ayırt edici özelliği, problem ve algoritmaya özgü herhangi bir parametre kullanmamasıdır. Sunulan çalışma ile literatüre

yapılan ana katkı, adaptif Jaya algoritması (AJA) olarak adlandırılan herhangi bir optimizasyon parametresi kullanmayarak tamamen otomatik bir biçimde arama işlemini gerçekleştiren bir optimizasyon yöntemin geliştirilmesi ve bunun büyük ölçekli kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında optimum tasarımı üzerinde test edilmesi olarak ifade edilebilir. Yöntemin geçerliliği daha önce farklı sezgisel optimizasyon yöntemleri kullanılarak optimum tasarımı yapılmış olan 1410 elemanlı büyük ölçekli kubbe kafes yapı üzerinde test edilmiştir. Optimum tasarım işlemi sonunda AJA ile elde edilen optimum ağırlık, optimum ağırlığı bulmak için gereken yapı analiz sayısı değerleri, JA ve literatürdeki diğer sezgisel optimizasyon yöntemlerinden elde edilen sonuçlarla kıyaslanarak yöntemin uygulanabilirliği gösterilmiştir.

AMAÇ FONKSİYONU VE TASARIM SINIRLAYICILARI

Kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında optimum tasarım problemi aşağıdaki gibi formülize edilebilir:

$$\begin{aligned} &\{A\} = \{A_1, A_2, \dots, A_{ng}\} \\ &W(A) = \sum_{i=1}^{nm} \rho_i A_i L_i \\ &\omega_k \le \omega_k^u \\ &\omega_l \ge \omega_l^l \\ &A_i^{min} \le A_i \le A_i^{maks} \quad i = 1,2, \dots, ng \end{aligned} \tag{1}$$

burada $W(A)$ kubbe kafes yapının ağırlığını, $\{A\}$ eleman gruplarına ait enkesit alanlarını içeren tasarım değişkeni vektörünü, *nm* kubbe kafeste yapıdaki toplam eleman sayısını, A_i *i*'inci elemanın enkesit alanını, ρ_i ve L_i sırasıyla *i*'inci elemanın özgül ağırlığını ve uzunluğunu, ω_k ve ω_k^u yapının *k*'inci doğal frekans değerini ve bu değerin alabileceği maksimum değeri, ω_l ve ω_l^l yapının *l*'inci doğal frekans değerini ve bu değerin alabileceği minimum değeri, A_i^{min} ve A_i^{maks} *i*'inci tasarım değişkeninin alabileceği minimum ve maksimum enkesit alanlarını ve *ng* tasarım değişkeni sayısını (eleman grup sayısını) göstermektedir.

Kubbe kafes yapılarda doğal frekans hesabı için çözülmesi gereken özdeğer problemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\left([K] - \omega_j^2[M]\right)\{\phi_j\} = \{0\} \qquad j=1,2,\dots,ndof \tag{2}$$

$$|K - \omega^2 M| = 0 \tag{3}$$

burada $[K]$ yapı (global) rijitlik matrisini, $[M]$ yapı kütle matrisini, ω_j^2 yapının *j*'nci doğal frekansının karesini (rad/s biriminde), $\{\phi_j\}$ yapının *j*'nci tireşim mod şeklini, *ndof* yapıdaki toplam serbestlik derecesi sayısını ifade eder. Optimizasyon problemlerinde ω_j^2 Hz (Hertz) biriminde ifade edildiğinden, ω_j^2'nin 2π değerine bölünmesi gerekmektedir. (2) denkleminde katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenerek (3) bağıntısıyla yapının serbestlik derecesi sayısı kadar doğal frekansı elde edilir. Titreşim analizinin hesabının detaylı olarak açıklandığı çok değerli kaynaklar mevcut olduğundan [15,16] burada tekrardan kaçınmak için daha fazla açıklama yapılmayacaktır.

Optimum tasarımda frekans sınırlayıcılarını sağlayan veya sağlamayan tasarımları ayırt edebilmek için cezalandırılmış amaç fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu fonksiyon ile sınırlayıcıları sağlamayan yapı tasarımları sınırlayıcı sağlamama derecelerine göre cezalandırılmaktadır. Cezalandırılmış amaç fonksiyonu, $\varphi(A)$, şu şekilde ifade edilebilir:

$$\varphi(A) = W(A) \times (1 + \upsilon)^{\varepsilon} \tag{4}$$

burada ε üstel ceza katsayısı olup bu çalışmada 2 alınmıştır. υ cezalandırılmış doğal frekans sınırlayıcılarının toplamı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\upsilon = \sum_{k=1}^{nk} \upsilon_{\omega}^{k} + \sum_{l=1}^{lk} \upsilon_{\omega}^{l} \tag{5}$$

burada *nk* ve *lk* sırasıyla üstten ve alttan sınırlandırılmış doğal frekans sınırlayıcı sayısını, υ_{ω}^{k} ve υ_{ω}^{l} ise *k*'inci ve *l*'inci doğal frekanslar için normalize edilmiş ceza değerleri olup şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}
\upsilon_{\omega}^{k} &= 0 && \text{eğer} \quad \omega_k \le \omega_k^u \\
\upsilon_{\omega}^{k} &= \left|\frac{\omega_k - \omega_k^u}{\omega_k^u}\right| && \text{eğer} \quad \omega_k > \omega_k^u \\
\upsilon_{\omega}^{l} &= 0 && \text{eğer} \quad \omega_l \ge \omega_l^l \\
\upsilon_{\omega}^{l} &= \left|\frac{\omega_k - \omega_l^l}{\omega_l^l}\right| && \text{eğer} \quad \omega_l < \omega_l^l
\end{aligned} \tag{6}$$

BÜYÜK ÖLÇEKLİ KUBBE KAFES YAPILARIN AJA İLE OPTİMUM TASARIMI

JA, arama sürecinde en iyi tasarıma yaklaşmayı ve en kötü tasarımdan uzaklaşmayı esas alan bir optimizasyon yöntemidir. JA'da, popülasyon büyüklüğü (*ps*) ve maksimum iterasyon sayısı ($iter_{maks}$) dışında başka herhangi bir parametre kullanılmamaktadır. JA'da ilk olarak, *ps* kadar başlangıç tasarımı rastgele üretilir. Ardından, sadece bir denklem kullanılarak mevcut tasarım modifiye edilerek yeni tasarım elde edilir. $(A)_{i,l,it}$; *it*'nci iterasyondaki *l*'inci tasarımın *i*'inci tasarım değişkeni olmak üzere, $(A)_{i,l,it}$ aşağıdaki denklemle ile modifiye edilir:

$$(A)_{i,l,it}^{yeni} = (A)_{i,l,it} + r_{1,i,it}\left((A)_{i,eniyi,it} - \left|(A)_{i,l,it}\right|\right) - r_{2,i,it}\left((A)_{i,enkötü,it} - \left|(A)_{i,l,it}\right|\right) \tag{7}$$

burada $(A)_{i,l,it}^{yeni}$; $(A)_{i,l,it}$'nin modifiye edilmesiyle elde edilen yeni tasarım değişkenini, $r_{1,i,it}$ ve $r_{2,i,it}$ *it*'nci iterasyonda *i*'inci tasarım değişkeni için [0,1] aralığında rastgele üretilen reel sayıları, $(\boldsymbol{A})_{i,eniyi,it}$ **ve** $(\boldsymbol{A})_{i,enkötü,it}$ sırasıyla *it*'nci iterasyonda popülasyondaki mevcut en iyi ve kötü tasarımların *i*'inci tasarım değişkenlerini göstermektedir. $r_{1,i,it}\left((A)_{i,eniyi,it} - \left|(A)_{i,l,it}\right|\right)$ ve $r_{2,i,it}\left((A)_{i,enkötü,it} - \left|(A)_{i,l,it}\right|\right)$ sırasıyla mevcut çözümün en iyi tasarıma yaklaşma ve en kötü tasarımdan uzaklaşma eğilimini ifade eder [5].

(7) denklemi mevcut tasarımdaki diğer tasarım değişkenlerine de uygulanarak yeni tasarım oluşturulur. Yeni tasarımın, mevcut tasarımdan daha iyi bir tasarım olmaması durumunda gereksiz yere titreşim analizi yapılmasının önüne geçmek için yeni tasarımla ilgili bir ön değerlendirme yapılır. Buna göre; yeni tasarımın ağırlığı, mevcut tasarımın ağırlığından daha büyük ve mevcut tasarım frekans sınırlayıcılarını sağlıyorsa, yeni tasarım için gereksiz yere titreşim analizi yapılmayacaktır. Aksi durumda, (1)-(6) denklemleri kullanılarak yeni tasarım

için cezalandırılmış amaç fonksiyonu değeri ($\varphi(A)^{yeni}$) hesaplanır. Yeni tasarımın cezalandırılmış amaç fonksiyonu değeri, mevcut tasarımın cezalandırılmış amaç fonksiyonu değerinden daha küçükse ($\boldsymbol{\varphi(A)^{yeni} < \varphi(A)}$), mevcut tasarımın yerini alır. Aksi takdirde, mevcut tasarım değişmez. Popülasyondaki tüm tasarımlar için aynı işlemler tekrarlanır ve böylece bir iterasyon tamamlanır. Optimizasyon işlemi, maksimum iterasyon sayısına ulaşıldığında tamamlanır.

JA'da *ps* ve $iter_{maks}$ olmak üzere iki standart parametre kullanılmasına karşın bu çalışmada önerilen AJA'da ise *ps* ve $iter_{maks}$'da dahil olmak üzere herhangi bir parametre kullanılmamaktadır. Dolayısıyla AJA ne probleme ne de algoritmaya özgü herhangi bir parametre mevcut değildir. AJA'da popülasyon büyüklüğü otomatik olarak belirlendiğinden uygun popülasyon büyüklüğünü belirlemesi için ayrıca analiz yapılmasına gerek kalmamaktadır. AJA'da $10\times ng$ adet kubbe kafes tasarımı içeren ilk popülasyon rastgele olarak aşağıdaki gibi üretilir:

$$A_{i,l}^{o} = A_i^{min} + rand_{i,l}(A_i^{min} - A_i^{maks}) \qquad i = 1, \dots, ng, \;\; l = 1, \dots, ps \tag{8}$$

burada $rand_{i,l}$ *l*'inci tasarımın *i*'inci tasarım değişkeninin elde edilmesi için [0,1] aralığında rastgele üretilen bir reel sayıdır. Popülasyon büyüklüğü her iterasyonda şu şekilde güncellenir [17]:

$$ps_{yeni} = round(ps_{mevcut} + rand \times ps_{mevcut}) \tag{9}$$

burada ps_{mevcut} ve ps_{yeni} sırasıyla mevcut ve yeni iterasyondaki popülasyon büyüklükleridir. *rand*, –0.5 ve +0.5 aralığında rastgele üretilen bir reel sayı olduğundan pozitif veya negatif olabilir dolayısıyla optimizasyon esnasında popülasyon büyüklüğü artabilir veya azalabilir. Başka bir ifadeyle, yeni popülasyonda ps_{yeni} mevcut popülasyondan %50 olasılıkla daha büyük ve %50 olasılıkla daha küçük olabilir. Bu şekilde popülasyondaki çeşitliliğin korunması amaçlanmaktadır [17].

Eğer $ps_{yeni} > ps_{mevcut}$ ise, mevcut popülasyon bir sonraki popülasyona tamamen aktarılır ve mevcut popülasyondaki en iyi çözümlerde yeni popülasyonu oluşturmak için kullanılır. Yeni popülasyonun büyüklüğü mevcut popülasyon büyüklüğünden daha az ise ($ps_{yeni} < ps_{mevcut}$), mevcut popülasyondaki en iyi tasarımlar yeni popülasyona aktarılır. Mevcut ve yeni popülasyon büyüklükleri eşit olması durumunda ($ps_{yeni} = ps_{mevcut}$) herhangi bir değişiklik yapılmaz.

JA'nın standart uygulamasında, maksimum iterasyon sayısı tamamlanana işlemler tekrar edilir. Ancak $iter_{maks}$ için en uygun değer her tasarım örneği için yapılacak farklı icralar sonucunda belirlenebilmektedir. Bu dezavantaj gözönüne alınarak AJA'da sabit bir maksimum iterasyon sayısı belirlenmemiş, bunun yerine optimizasyon işleminin otomatik olarak bitirilmesi sağlanmıştır. Bu amaçla, popülasyondaki tasarımların cezalandırılmış amaç fonksiyonlarının standart sapması ile bunların ortalamalarının oranı belli bir değerden daha küçük olmasını ifade eden aşağıdaki bağıntı, AJA'da optimizasyon işlemini bitirme kriteri olarak kullanılmaktadır [18]:

$$\frac{STD[\varphi(A)^1, \varphi(A)^2, \dots\dots, \varphi(A)^{ps}]}{\sum_{i=1}^{ps} \varphi(A)^i / ps} \leq \varepsilon_{conv} \tag{10}$$

burada $\varphi(A)^i$ popülasyonda yer alan *i*'inci tasarımın cezalandırılmış amaç fonksiyonu değerini, ε_{conv} yakınsama değeri olup 10^{-15} olarak alınmıştır.

AJA ile büyük ölçekli kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında optimum tasarımı için kaynak [7]'de verilen algoritma esas alınmış olup aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

I. ***AJA algoritmasının başlatılması:*** Popülasyon büyüklüğü (*ps*) kadar kubbe kafes yapı (8) denklemi ile rastgele üretilir. Her yapı için cezalandırılmış amaç fonksiyonu değeri ($\varphi(A)$) (1)-(6) denklemleri kullanılarak hesaplanır. İterasyon sayacı *iter=0* olarak başlatılır.

II. İterasyon sayacı arttırılır, *iter=iter+1*. Eğer *iter>1* ise (9) denklemi ile *ps* değeri güncellenir.

III. ***En iyi ve en kötü tasarımların belirlenmesi:*** Popülasyondaki en iyi $\varphi(A)^{en\ iyi}$ ve en kötü $\varphi(A)^{en\ kötü}$ tasarımlar belirlenir. Tasarım sayacı *id=0*, (*id=1,2,..., ps*) başlatılır.

IV. Tasarım sayacı arttırılır, *id=id+1*.

V. ***Yeni tasarımların üretilmesi:*** (7) denklemi ile *id*'inci tasarımın tüm tasarım değişkenleri değiştirilerek yeni tasarım elde edilir.

VI. ***Yeni tasarım için ön değerlendirilmesi:*** Eğer $W(A)^{id,yeni} > W(A)^{id}$ ve önceki tasarım frekans sınırlayıcılarını sağlıyorsa *VIII*. adıma gidilir. Aksi halde *VII*. adıma gidilir.

VII. Yeni tasarımın $(\varphi(A)^{id,yeni})$ cezalandırılmış amaç fonksiyonu (1)-(6) denklemleriyle hesaplanır. Eğer $\varphi(A)^{id,yeni} < \varphi(A)^{id}$ ise yeni tasarım, mevcut tasarımın yerini alır. Aksi halde, mevcut tasarım değiştirilmez.

VIII. Eğer *id = ps* ise, *IX*. adıma gidilir, aksi takdirde *IV*. adıma gidilir.

IX. (10) bağıntısı sağlanıyorsa, *X*. adıma gidilir, aksi halde *II*. adıma gidilir.

X. ***Optimizasyon işleminin bitirilmesi:*** Optimizasyon işlemi tamamlanır. Doğal frekans sınırlayıcılarını sağlayan tasarımlar içerisinde minimum ağırlıklı olan tasarım optimum tasarım olarak atanır.

SAYISAL SONUÇLAR

Daha önce ECBO [8], DPSO [9], MDVC-UVPS [10], CPA [11], CRPSO [12], CGFA [13] ve JA [14] yöntemleri kullanılarak optimum tasarımı yapılmış olan 1410 elemanlı kubbe kafes yapı bu çalışmada AJA yöntemi ile optimize edilerek elde edilen sonuçlar literatürdeki sonuçlarla kıyaslanmıştır.

AJA'nın farklı başlangıç tasarımları için birbirine yakın nihai tasarımlar elde edip edemeyeceğini test etmek amacıyla, yöntem 20 farklı başlangıç popülasyonu için 20 farklı kez icra edilmiştir. Bu farklı icralar sonunda bulunan 20 kafes yapı tasarımı arasında optimum kafes yapının ağırlığı, bu kafes yapıya ait tasarım değişkenleri ve optimum ağırlığın bulunması için gerekli yapı analiz sayısı tabloda verilmiştir. Ayrıca 20 farklı tasarım sonucunda elde edilen tasarımlara ait ortalama ağırlık ve standart sapma değerleri gibi istatiksel verilerde ilgili tabloda sunulmuştur.

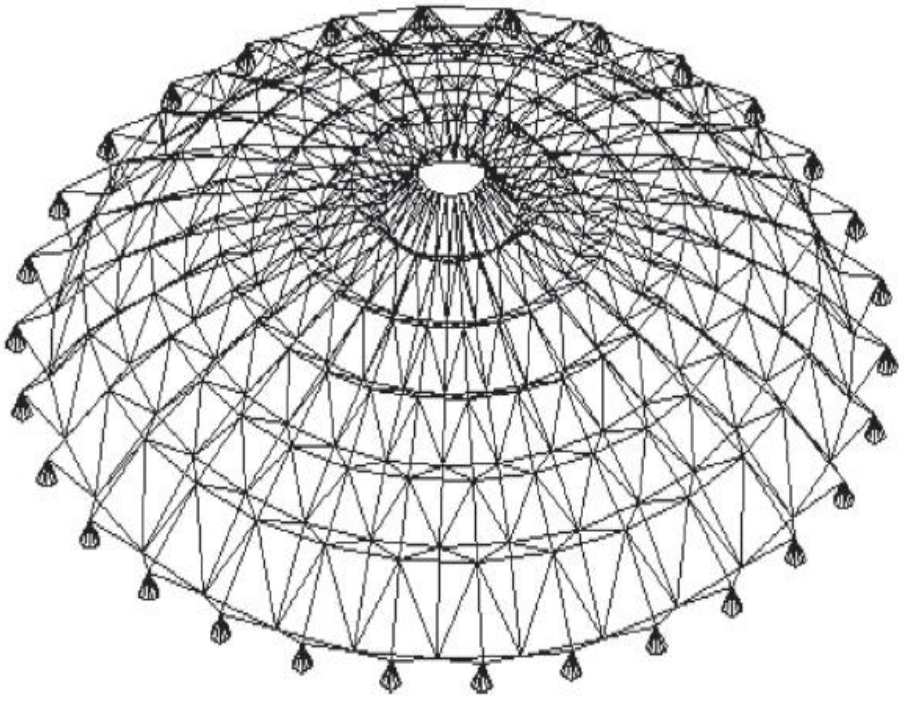
Bu çalışmada geliştirilen AJA algoritması Matlab programlama dilinde kodlanmış ve icra edilmiştir. Yapılan kodlanmadan doğruluğundan emin olmak için 1410 elemanlı kubbe kafes yapı ayrıca SAP2000 v20 [19] yapı analiz yazılımında da modellenerek, analiz edilmiş ve elde edilen doğal frekans değerleri AJA'dan elde edilen değerlerle kıyaslanmıştır. Çalışmada

kullanılan 1410 elemanlı kubbe kafes yapı için tüm veriler literatürdeki çalışmalardan aynen alınmıştır. Buna göre; malzemenin elastisite modülü 2.0×10^{11} N/m^2 ve özgül ağırlığı 7850 kg/m^3'dir. Optimum tasarımda kubbe yapıdaki elemanlara 1 m^2 $\leq A \leq$100 m^2 aralığında enkesit alanı atanabilecektir. Yapıda doğal frekans sınırlayıcıları sırasıyla birinci ve üçüncü doğal frekans değerleri için; $\omega_1 \geq 7$ Hz ve $\omega_3 \geq 9$ Hz olarak alınmıştır.

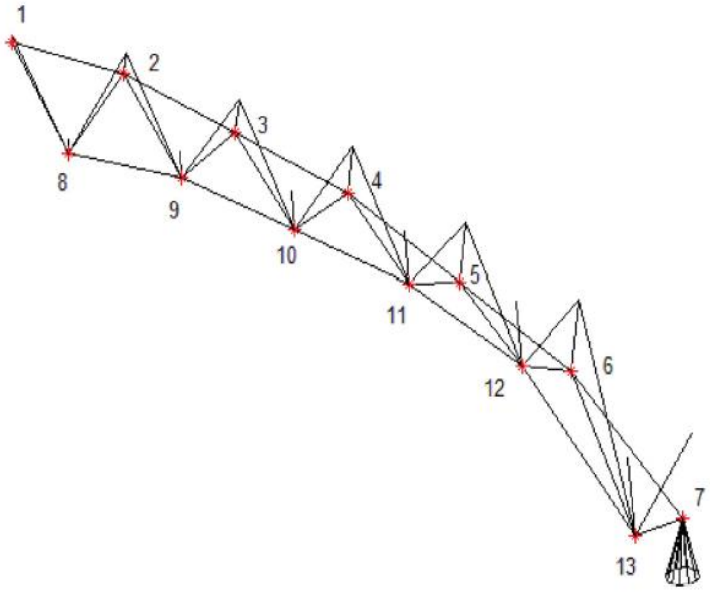
1410 Elemanlı Kubbe Kafes Yapı

Bu çalışmada ele alınan tasarım örneği, Şekil 1(a)'da gösterilen 1410 elemanlı kubbe kafes yapıdır. Yapı, 12° aralıkla eksenel simetrik olarak yerleştirilmiş ve Şekil 1(b)'de birincisi verilen 30 kafes yapının bir araya gelmesinden oluşmaktadır. Her bir kafes yapıda 13 düğüm noktası ve 47 eleman olup, her bir kafes yapıdaki aynı elemanlar aynı tasarım değişkeni ile temsil edildiğinden optimum tasarımda 47 adet tasarım değişkeni (eleman grubu) bulunmaktadır. Kubbe yapıyı oluşturan ilk kafes yapının düğüm noktalarının koordinatları Çizelge 1'de, eleman düğüm numaralandırılması Çizelge 2'de verilmiştir. Kubbe yapının mesnet noktaları dışındaki tüm düğüm noktalarına 100 kg'lık kütle eklenmiştir.

Çizelge 2'de AJA ve diğer yöntemlerden elde edilen optimum tasarım sonuçları karşılaştırılmıştır. Çizelge 3'de ise Çizelge 2'deki tasarımlar için hesaplanan ilk beş doğal frekans değeri verilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 1. 1410 elemanlı kubbe kafes yapı (a) Üç boyutlu görünüş (b) Kubbe yapıyı oluşturan ilk kafes yapının görünüşü [8]

Çizelge 1. 1410 elemanlı kubbe kafes yapıyı oluşturan ilk kafes yapının düğüm noktası koordinatları

Düğüm noktası numarası	Koordinatlar (x, y, z)	Düğüm noktası numarası	Koordinatlar (x, y, z)
1	(1.0, 0.0, 4.0)	8	(1.989, 0.209, 3.0)
2	(3.0, 0.0, 3.75)	9	(3.978, 0.418, 2.75)
3	(5.0, 0.0, 3.25)	10	(5.967, 0.627, 2.25)
4	(7.0, 0.0, 2.75)	11	(7.956, 0.836, 1.75)
5	(9.0, 0.0, 2.0)	12	(9.945, 1.0453, 1.0)
6	(11.0, 0.0, 1.25)	13	(11.934, 1.2543, −0.5)
7	(13.0, 0.0, 0.0)		

Çizelge 2. 1410 elemanlı kubbe kafes yapıda optimum tasarım sonuçlarının karşılaştırılması

Tasarım değişkenleri A_i (cm^2) (düğüm noktaları)	ECBO [8]	DPSO [9]	MDVC-UVPS [10]	CPA [11]	CRPSO [12]	CGFA [13]	MJA [14]	**AJA**
1 (1 –2)	7.9969	7.209	5.8499	7.416	2.5000	5.149	7.3465	**6.1902**
2 (1 –8)	6.1723	5.006	4.5115	4.768	6.0000	4.406	4.2998	**4.4036**
3 (1 –14)	35.5011	38.446	19.4823	38.993	18.0000	24.590	31.8485	**31.2253**
4 (2-3)	10.2510	9.438	8.8480	8.966	9.5000	9.166	8.8767	**8.4715**
5 (2-8)	5.3727	4.313	5.0084	4.511	6.0000	5.800	4.9778	**4.8590**
6 (2-9)	1.3488	1.494	1.3568	1.544	1.0000	1.883	1.7469	**1.5759**
7 (2-15)	11.4427	8.455	17.4331	8.371	29.5000	21.073	11.6099	**12.9451**
8 (3-4)	9.7157	9.488	9.1098	9.276	8.0000	8.739	9.2972	**9.3263**
9 (3-9)	1.3005	3.480	2.8712	3.583	2.0000	2.005	3.3406	**3.2716**
10 (3-10)	2.5046	3.495	3.5473	3.476	1.5000	2.398	3.2006	**3.2878**

11(3-16)	10.7849	16.037	12.3768	15.531	1.0000	7.655	12.1131	**12.6719**
12 (4-5)	10.1954	9.796	10.1099	10.285	7.5000	9.971	9.7121	**10.0979**
13 (4-10)	2.2300	2.413	2.5797	2.497	1.0000	2.350	2.5294	**2.5803**
14 (4-11)	5.1186	5.681	5.8381	5.397	6.0000	5.024	5.8102	**5.3769**
15 (4-17)	14.0053	15.806	13.6402	16.503	14.5000	18.234	16.5566	**16.0581**
16 (5-6)	8.9713	8.078	9.9096	8.193	9.0000	8.825	8.3162	**8.6789**
17 (5-11)	4.0756	3.931	3.6543	3.829	1.0000	3.763	3.2415	**3.3199**
18 (5-12)	5.9211	6.099	6.1529	6.151	8.0000	5.723	6.4539	**6.4966**
19 (5-18)	10.6915	10.771	11.2448	10.465	19.5000	10.207	10.7040	**10.8804**
20 (6-7)	10.6220	13.775	13.1071	13.925	16.5000	13.046	13.8031	**14.0056**
21 (6-12)	4.5064	4.231	5.2361	4.415	5.0000	5.118	5.0161	**5.0843**
22 (6-13)	8.4086	6.995	7.0691	6.863	9.0000	7.340	7.6509	**6.9952**
23(6-19)	5.8405	1.837	2.0015	1.769	1.0000	1.029	1.0762	**1.0270**
24 (7-13)	5.0342	4.397	4.7178	4.339	5.0000	4.479	4.3282	**4.3788**
25 (8-9)	3.8932	2.115	2.6101	2.115	6.5000	2.962	2.2062	**2.1951**
26 (8-14)	6.1647	4.923	4.5434	4.951	5.5000	4.519	4.8730	**4.2562**
27 (8-15)	6.8990	4.047	4.6174	4.147	7.0000	5.847	4.8202	**4.6605**
28 (8-21)	11.6387	5.906	9.6758	6.044	15.5000	11.750	9.0166	**8.8694**
29 (9-10)	3.8343	3.392	3.6296	3.222	4.5000	3.925	3.4591	**3.2333**
30 (9-15)	1.4772	1.902	1.4891	1.970	2.5000	1.697	1.9876	**1.7611**
31 (9-16)	1.3075	4.381	3.4020	4.290	2.5000	1.811	3.4317	**3.2831**
32 (9-22)	4.4876	8.442	6.2153	8.020	1.0000	3.698	7.7208	**7.1936**
33 (10-11)	6.0196	5.011	5.9308	4.857	6.0000	5.396	4.8261	**4.9840**
34 (10-16)	2.6729	3.577	3.2334	3.689	1.0000	2.392	2.9942	**3.6672**
35 (10-17)	1.6342	2.805	2.7173	2.831	1.0000	2.203	2.5166	**2.4062**
36 (10-23)	1.8410	2.024	1.3932	1.985	1.0000	2.718	1.8493	**2.1576**
37 (11-12)	6.8841	6.709	6.5660	6.373	10.0000	7.498	7.1007	**7.1043**
38 (11-17)	4.1393	5.054	4.8170	4.865	5.5000	4.840	5.1141	**5.2070**
39 (11-18)	3.3264	3.259	3.2626	3.412	3.5000	3.457	4.0067	**3.6853**
40 (11-24)	1.0000	1.063	1.0165	1.027	1.0000	1.005	1.0270	**1.0007**
41 (12-13)	6.9373	5.934	7.2529	6.218	7.5000	6.440	6.3676	**6.6302**
42 (12-18)	4.4568	7.057	5.9226	7.342	8.5000	5.787	6.3443	**6.6773**
43 (12-19)	4.6758	5.745	5.3115	5.458	7.5000	5.138	5.2791	**5.2167**
44 (12-25)	1.0084	1.185	1.0010	1.140	1.0000	1.000	1.0086	**1.0016**
45 (13-19)	7.5103	7.274	7.7499	7.401	7.5000	7.239	7.2667	**8.1289**
46 (13-20)	5.2449	4.798	4.7836	4.578	6.5000	4.424	4.3730	**4.5151**
47 (13-26)	1.0550	1.515	1.0035	1.561	1.0000	1.001	1.0761	**1.0010**
Optimum ağırlık (kg)	10 504.200	10 453.840	10 345.120	10 435.470	11 044.617	10 101.360	10 334.852	**10 326.296**
Ortalama ağırlık kg)	10 590.670	11 100.570	10 393.830	10 658.480	13 017.900	10 175.250	10 420.668	**10 399.828**
Standart sapma(kg)	52.510	334.200	39.150	129.900	1454.813	51.120	79.966	**75.441**
En büyük sınırlayıcı ihlal yüzdesi (%)	0.32	0.0000	0.34	0.0000	0.389	1.55	0.0000	**0.0000**
Yapı analiz sayısı	19460	50000	17750	80000	20000	10000	17500	**16900**

Çizelge 3. 1410 elemanlı kubbe kafes yapıda optimum tasarımlara ait doğal frekans değerleri

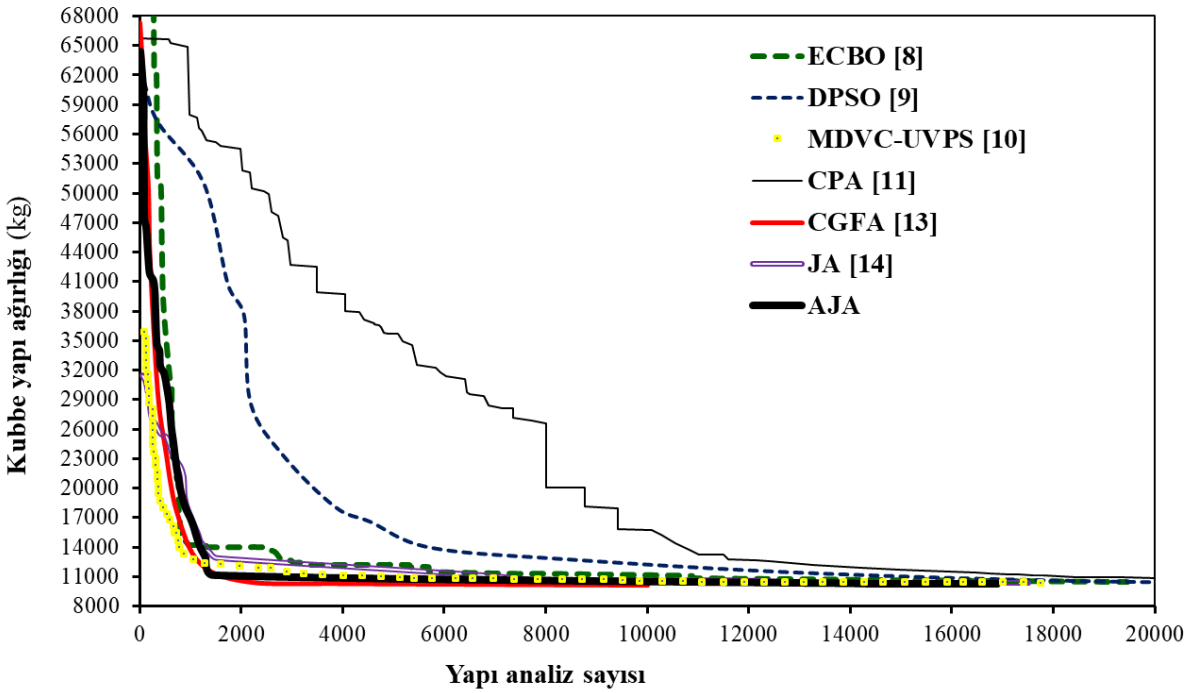
Doğal frekans no. (Hz)	ECBO [8]	DPSO [9]	MDVC-UVPS [10]	CPA [11]	CRPSO [12]	CGFA [13]	MJA [14]	**AJA**
1	7.0020	7.0010	7.0000	7.0000	7.0008	7.0020	7.0003	**7.0009**
1*	6.9930	7.0015	6.9911	7.0000	6.9880	6.9581	7.0003	**7.0009**
2	7.0030	7.0010	7.0010	7.0000	**	7.0040	7.0003	**7.0009**
3	9.0010	9.0030	9.0000	9.0000	9.0068	9.0020	9.0000	**9.0001**
3*	8.9710	9.0026	8.9690	9.0012	8.9650	8.8608	9.0000	**9.0001**
4	9.0010	9.0050	9.0000	9.0020	**	9.0080	9.0002	**9.0002**
5	9.0030	9.0050	9.0000	9.0020	**	9.0090	9.0002	**9.0002**

* SAP 2000 v20 [19] ile elde edilen ilk beş doğal frekans değeri
**Mevcut değil

Çizelge 2'deki sonuçlar incelendiğinde, en hafif tasarımın CGFA [13] yöntemiyle 10000 yapı analizi sonunda 10101.360 kg olarak elde edildiği görülmektedir. Buna karşın AJA'nın 10326.296 kg ağırlığındaki tasarımı 16400 yapı analizi sonunda bulabildiği, dolasıyla optimum ağırlık ve yapı analiz sayısı bakımından CGFA'dan [13] sonra en iyi ikinci optimizasyon yöntemi olduğu gözükmektedir. Ancak Çizelge 2'deki en büyük sınırlayıcı ihlal yüzdesi ve Çizelge 3'de hesaplanan doğal frekans değerleri incelendiğinde CGFA'nın [13] birinci ve üçüncü doğal frekans değerlerini sağlamadığı tespit edilmiştir. Burada, birinci ve üçüncü doğal frekans değerlerinin sırasıyla $\omega_1 \geq 7$ Hz $\omega_3 \geq 9$ Hz olması gerekirken, $\omega_1 = 6.9581$ Hz ve $\omega_3 = 8.8608$ Hz olduğu ve doğal frekans sınırlayıcılarını sağlamadığı belirlenmiştir. Buna göre CGFA [13] ile elde edilen tasarım için en büyük sınırlayıcı ihlal yüzdesi %1.55 olarak Çizelge 2'de verilmiştir. Sonuç olarak; tasarım sınırlayıcılarını sağlamayan bir tasarımın optimum tasarım olarak kabul edilmesi mümkün olmadığından ve sınırlayıcıları sağlayan en hafif tasarım AJA ile elde edildiğinden, Çizelge 2'de verilen yöntemler arasında en iyi optimizasyon yönteminin AJA olduğu sonucuna varılmıştır.

AJA için 20 farklı tasarımın icrası sonucunda elde edilen 20 farklı tasarım ağırlığı için hesaplanan standart sapma değeri 75.441 kg'dır. Bu değerin ortalama ağırlığın (10399.828 kg) %0.73 mertebesinde olması AJA'nın farklı başlangıç popülasyonları için yaklaşık aynı tasarımları bulabildiğini, yani yöntemin oldukça tutarlı bir davranış gösterdiğini ispatlamaktadır.

Çizelge 3 incelendiğinde AJA ile elde edilen doğal frekans değerlerinin Sap2000 v20 [19] ile bulunan değerler ile aynı olduğu görülmektedir. Bu sonuç, AJA için Matlab programlama dilinde yazılan kodlamanın hatasız olarak çalıştığını kanıtlamaktadır. AJA ve diğer yöntemler için yapı ağırlığının yapı analiz sayısı ile değişimini gösteren yakınsama eğrileri Şekil 2'deki verilmiştir. Bu eğrilerin karşılaştırılmasından AJA'nın oldukça güçlü bir yakınsama davranışı sergilediği görülmektedir.



Şekil 2. 1410 elemanlı kubbe kafes yapıda farklı optimizasyon yöntemleri için yakınsama eğrilerinin karşılaştırılması

SONUÇLAR

Bu çalışmada büyük ölçekli kubbe kafes yapıların doğal frekans sınırlayıcıları altında optimum tasarımı herhangi bir optimizasyon parametresi kullanmayan ve adaptif Jaya algoritması adı verilen bir yöntemle icra edilmiş ve elde edilen sonuçlar şu şekilde sıralanmıştır:

I. Diğer optimizasyon yöntemleriyle yapılan kıyaslamalar sonucunda doğal frekans sınırlayıcıları sağlayan en hafif tasarımın AJA ile elde edildiği tespit edilmiştir. Bu durum AJA'nın oldukça güçlü bir optimizasyon yöntemi olduğunu göstermektedir.

II. Optimum tasarımı bulmak için gereken yapı analiz sayısı bakımından da AJA'nın diğer yöntemlere kıyasla daha az yapı analiz sayısı gerektirdiği, dolayısıyla oldukça hızlı bir şekilde optimum tasarımı bulabildiği belirlenmiştir.

III. Farklı başlangıç tasarımları için elde edilen sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu, dolayısıyla AJA'nın başlangıç tasarımlarından bağımsız olarak optimum tasarımı bulabildiği tespit edilmiştir.

Tüm bu sonuçlar; çalışmada önerilen yöntemin yapıların optimum tasarımında başarıyla uygulanabilecek güçlü bir optimizasyon yöntemi olduğunu kanıtlamaktadır.

Teşekkür

İlk iki yazar finansal destek için Dicle Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne (DÜBAP) teşekkür eder (Proje numarası: Mühendislik.18.002, 2018).

KAYNAKLAR

[1] J.H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems.* Ann Arbor The University of Michigan Press, 1975.

[2] M. Dorigo, V. Maniezzo, A. Colorni, The ant system: optimization by a colony of cooperating agents, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part B (Cybernetics)*, 26 (1996) 29–41. doi: 10.1109/3477.484436.

[3] R.C. Eberhart, J. Kennedy, A new optimizer using particle swarm theory: P*roceedings of The Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*, Nagoya, Japan, 1995: s. 1942-1948.

[4] R.V. Rao, V.J. Savsani, D.P. Vakharia, Teaching-learning-based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems, *Computer-Aided Design.* 43 (2011) 303–315. Doi: 10.1016/j.cad.2010.12.015.

[5] R.V. Rao, Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems, *International Journal of Industrial Engineering Computations.* 7 (2016) 19–34. doi: 10.5267/j.ijiec.2015.8.004.

[6] S.O. Degertekin, L. Lamberti, I.B. Ugur, Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm, *Applied Soft Computing*. 70: (2018) 903-928. doi: 10.1016/j.asoc.2017.10.001.

[7] S.O. Degertekin, G. Yalcin Bayar, L. Lamberti, Parameter free Jaya algorithm for truss sizing-layout optimization under natural frequency constraints, *Computers & Structures.* 245 (2021) 106461. doi: 10.1016/j.compstruc.2020.106461

[8] A. Kaveh, M.I. Ghazaan, Optimal design of dome truss structures with dynamic frequency constraints, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 53 (2016) 605–621. doi: 10.1007/s00158-015-1357-2.

[9] A. Kaveh, A. Zolghadr, Optimal analysis and design of large-scale domes with frequency constraints, *Smart Structures and Systems.* 18 (2016) 733–754. doi: 10.12989/sss.2016.18.4.733

[10] A. Kaveh, M.I. Ghazaan, A new hybrid meta-heuristic algorithm for optimal design of large-scale dome structures, *Engineering Optimization*. 50 (2018) 235–252. doi:10.1080/0305215X.2017.1313250.

[11] A. Kaveh, A. Zolghadr, Optimal design of cyclically symmetric trusses with frequency constraints using cyclical parthenogenesis algorithm, *Advances in Structural Engineering* 21 (2018) 739–755. doi:10.1177/1369433217732492.

[12] J.P.G. Carvalho, A.C.C. Lemonge, E.C.R. Carvalho, P.H. Hallak, H.S. Bernardino, Truss optimization with multiple frequency constraints and automatic member grouping, *Structural and Multidisciplinary Optimization* 57 (2018) 547–577. doi: 10.1007/s00158-017-1761-x.

[13] A. Kaveh, S.M. Javadi, Chaos-based firefly algorithms for optimization of cyclically large-size braced steel domes with multiple frequency constraints, *Computers & Structures.* 214 (2019) 28–39. doi:10.1016/j.compstruc.2019.01.006.

[14] S.O. Degertekin, G. Yalcin Bayar, L. Lamberti, Jaya algorithm for sizing and layout optimization of truss structures with natural frequency constraints: *Proceedings of The Sixteenth International Conference on Civil, Structural & Environmental Engineering Computing*, Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, 2019.

[15] M.H. Omurtag, *Çubuk Sonlu Elemanlar*, Birsen Yayınevi, 2010.

[16] Z. Celep, *Deprem Mühendisliğine Giriş ve Depreme Dayanıklı Yapı Tasarımı,* Beta Basım Yayım, 2019.

[17] R.V. Rao, K.V. More, Design optimization and analysis of selected thermal devices using self-adaptive Jaya algorithm, *Energy Conversion and Management* 140 (2017) 24–35. doi: 10.1016/j.enconman.2017.02.068.

[18] L. Lamberti, C. Pappalettere, An improved harmony-search algorithm for truss structure optimization: *Proceedings of the Twelfth International Conference Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, Civil-Comp Press, Stirlingshire United Kingdom, 2009.

[19] SAP 2000 v20, *Integrated Software for Structural Analysis and Design*, Computers & Structures Inc. Walnut Creek (CA), USA, 2018.

BETON BASINÇ DAYANIKLILIĞININ BASKIN KABA KÜME YAKLAŞIMI İLE İNCELENMESİ

Ahmet TOPAL[1], Nilgün GÜLER BAYAZIT[2] ve Yasemen UÇAN[3]
[1,2,3]Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul
[1]İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

Dominance rough set approach has an important parts on the studies conducted with datasets containing uncertainty. In this study, a dataset consisting of 1030 samples obtained in the laboratory about concrete compressive strength has been considered. A decision-support model which extracts "if… then…" exact decision rules has been designed to be used in determining the quality or strength of the concrete samples by using dominance based rough set approach.

Keywords: Dominance rough set; decision rules; concrete strength; decision-support model

ÖZET

Belirsizlik içeren veri kümeleri ile yapılan çalışmalarda baskın kaba küme yaklaşımı önemli bir yer tutmaktadır. Bu çalışmada betonun basınç dayanıklılığına yönelik olarak laboratuvar ortamında elde edilmiş 1030 örnekten oluşan bir veri kümesi ele alınmıştır. Baskın Kaba Küme Yaklaşımı kullanılarak beton örneklerinin kalitesinin (dayanıklılığının) belirlenmesinde kullanılmak üzere "if… then…" şeklinde kesin karar kuralları çıkaran bir karar-destek modeli tasarlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Baskın kaba kümeler; karar kuralları; beton dayanıklılığı; karar-destek modeli

GİRİŞ

Beton dayanıklılığının belirlenmesi beton yapı endüstrisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bunun en önemli nedeni ise betonun doğasını ve karışımın ne yönde optimize edileceğini daha iyi anlamak ve kavramaktır. 1918 yılında Abrams tarafından Beton dayanımı ile ilgili ortaya atılan su-çimento oranı(w/c) bu alanda oldukça yararlı ve önemli bir gelişme olarak ortaya çıkmıştır. Bu kurala göre beton dayanıklılığı, w/c oranı arttıkça düşerken; bu oran azaldıkça artış göstermektedir. Öte yandan deneysel çalışmaların aynı w/c oranına sahip betonların farklı dayanıklılığa sahip olduğunu göstermesi ile beraber bunun tam anlamıyla doğru olmadığını, betonun içerisindeki diğer bileşenlerinde dayanıklılığı etkilediğini göstermiştir. Bundan ötürü betonun içerdiği farklıca bileşenlerin de göz önünde bulundurulması önem arz etmektedir. [1]

İlgili literatür incelendiğinde beton dayanıklılığına ilişkin birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların çoğu regresyon temelinde yapılan tahminleme çalışmalarıdır [1,2,3]. Bu çalışmada önceki çalışmalardan farklı olarak beton dayanıklılığının belirlenebilmesi için Baskın Kaba Küme Yaklaşımı kullanılarak bir karar-destek modeli tasarlanmıştır. Bilindiği gibi, karar-

destek modelleri, regresyon tabanlı modellere göre daha somut ve açıklanabilir sonuçlar vermesi ve teknik bilgi gerekmeksizin herkes tarafından rahatça yorumlanabilmesi açısından daha tercih edilebilir modellerdir.

Bu amaçla Chung-Hua Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümü öğretim üyesi Prof. I-Cheng Yeh tarafından oluşturulan ve UCI [4] veri tabanı üzerinde yer alan beton dayanıklılığına ilişkin veriler kullanılmıştır.

Veri kümesine baskın kaba küme yaklaşımının uygulanabilmesi için sürekli verilerden oluşan beton basınç dayanımı özniteliği kesikli/ayrık hale getirilmiştir. Bu ayrıklaştırma işlemi [5]'e göre gerçekleştirilmiştir. Bu işlem sonucunda *Düşük*, *Normal*, *Orta* ve *Yüksek* dayanıklı betonlar olmak üzere dört farklı sınıf oluşturulmuştur. Karar-destek modelinin beton örneklerini sınıflandırmasına yönelik başarısını ölçebilmek amacıyla 100 örnek, sınıfların veri kümesi içerisindeki dağılımına denk olacak şekilde test için ayrılmıştır. Lakin veri kümesi içerisinde bir sınıftan diğer sınıflara oranla daha az sayıda örnek bulunması sınıflar arasındaki dengesizliği ortaya çıkarmaktadır. Bu durumdan ötürü de öğrenme süreci zorlaşmaktadır. Bu problemi ortadan kaldırmak için Smote algoritması temelinde her bir sınıfın örnek sayısı en fazla örnek içeren sınıftaki örnek sayısına eşit olacak şekilde yapay örnek üretimi gerçekleştirilmiştir. Üretilen örnekler sonucunda tam dengeli hale getirilen eğitim kümesi üzerinde baskın kaba küme yaklaşımı temelinde kesin karar kuralları çıkarılmıştır. Bu kuralların performans analizi test kümesi üzerinden verilmiştir.

YÖNTEM

Bilindiği gibi matematikte kesin kümeler dışında bulanık kümeler, kaba kümeler, soft kümeler ve bu kümelerin hibrit durumları olan kümeler son yıllarda popüler olmuş ve birçok alanda uygulamaları yapılmıştır.

Kaba küme fikri, belirsiz kavramlarla başa çıkmak için matematiksel yeni bir araç olarak ilk kez Zdzislaw I. Pawlak tarafından tanıtılmıştır [6]. Kaba küme metotları veri madenciliği ve makine öğrenmesinde hibrit çözümlerin bileşeni olarak uygulanabilir. Özellikle veri içerisindeki gizli bilgilerin keşfedilmesi ve karar kurallarının çıkartılması, nitelik seçimi, örnek seçimi, eksik veriler içeren veri kümeleri üzerindeki performansından ötürü tercih edilmektedir. Öte yandan makine öğrenmesi, karar analizi, veri tabanlarından bilginin elde edilerek kullanılması, uzman sistemler, karar destek sistemleri ve örüntü tanıma gibi alanlarda geniş bir kullanım alanına sahip olduğu söylenilebilir. Ayrıca, veri analiz metotlarına dayalı kaba küme yaklaşımları ise ekonomi ve finansta, tıpta, sinyal ve görüntü işlemede, robotik ve mühendislikte oldukça kullanışlı bulunmaktadır [7,8,9,10].

Klasik kaba kümelerin gelişimi ve genelleştirilmesinde ilk olarak, bulanık kümelere hem benzerlikleri hem de farkı göz önünde bulundurularak başlangıç gelişmeleri yapılmış ve ayırt edilemezlik bağıntısına göre sınıflandırma yapılmıştır [6]. Ancak bu yaklaşım baskınlık prensibinden kaynaklanan tutarsızlıkla baş edemediğinden dolayı ayırt edilemezlik bağıntısı yerine baskınlık prensibine dayalı kaba küme yaklaşımı geliştirilmiştir (Dominance-based rough set approach(DRSA)). Bu yaklaşım multicriteria decision analysis (MCDA) için kaba küme teorisinin bir gelişimidir ve Greco, Matarazzo ve Slowinski tarafından tanıtılmıştır [11,12,13].

Baskın Kaba Küme Yaklaşımı

Bu kısımda çalışmamızın matematiksel temeli özetlenmiştir [14,15,16,17]. Baskın kaba küme yaklaşımında bir karar tablosu $KT = \{U, A = C \cup D, V, f\}$ 4-demet (tuple) ile tanımlanmaktadır. Burada U evrensel uzayı, C ve D sırasıyla koşul ve karar niteliklerinin

kümesini, V tüm niteliklerin aldığı değerler kümesini yani V_a, a niteliğinin aldığı değerlerin kümesi olmak üzere $V = \bigcup_{a\in A} V_a$ ve $f: U \times A \to V$ bilgi fonksiyonunu temsil etmektedir.

O_a , U üzerinde a niteliğine göre bir üstünlük (outranking) ilişkisi olsun. xO_ay, x'in a niteliğine göre en az y kadar iyi olduğunu ifade eder. Ayrıca d bir karar niteliği ve $\delta = \{1,2,\cdots,r\}$, d'nin aldığı farklı değerlerin kümesi olsun. Bu durumda karar niteliği d, U evrenselini $Cl = \{Cl_t, t \in \delta\}$; $Cl_t = \{x_i \in U: f(x_i, d) = t\}$ olmak üzere r adet sınıfa parçalar ve $\forall x_i \in U$ yalnız ve yalnız tek bir $Cl_t \in Cl$ aittir. Bu Cl_t sınıflarının azalan (downward) ve artan (upward) birleşimleri ise sırasıyla $Cl_t^{\leq} = \bigcup_{s\leq t} Cl_s$ $(t = 1,\cdots,r-1)$ ve $Cl_t^{\geq} = \bigcup_{s\geq t} Cl_s$ $(t = 2,\cdots,r)$ şeklindedir.

Klasik kaba kümelerdeki ayırt edilemezlik bağıntısının yerini hakimiyet temelli kaba kümelerde baskınlık bağıntısı almaktadır. Eğer tüm $a \in P \subseteq C$ için xO_ay oluyorsa x elemanının y elemanını ezdiği söylenir ve xD_py olarak gösterilir. D_p bağıntısı yansıyan ve geçişken bir bağıntıdır. Bir $x_i \in U$ ve $P \subseteq C$ verildiğinde x_i elemanının P-ezen ve P-ezilen kümeleri sırasıyla $D_P^-(x_i) = \{x_j \in U: x_i D_P x_j\}$ ve $D_P^+(x_i) = \{x_j \in U: x_j D_P x_i\}$ şeklindedir. Diğer bir deyişle x_i'nin P-ezen kümesi, P'deki her bir niteliğe göre en çok x_i kadar iyi olan elemanları, P-ezilen kümesi ise P'deki her bir niteliğe göre en az x_i kadar iyi olan elemanları içerir.

D_P^+ kümesi kullanılarak Cl_t sınıflarının $Cl_t^{\geq}$ birleşimleri için alt ve üst yaklaşımlar şu şekilde tanımlanır:

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq}) = \{x_i \in U: D_P^+(x_i) \subseteq Cl_t^{\geq}\}, \quad \overline{P}(Cl_t^{\geq}) = \bigcup_{x_i \in Cl_t^{\geq}} D_P^+(x_i), \qquad t = 2,\cdots,r$$

Benzer şekilde D_P^- kullanılarak Cl_t sınıflarının $Cl_t^{\leq}$ birleşimleri için alt ve üst yaklaşımlar ise şöyledir:

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq}) = \{x_i \in U: D_P^-(x_i) \subseteq Cl_t^{\leq}\}, \quad \overline{P}(Cl_t^{\leq}) = \bigcup_{x_i \in Cl_t^{\leq}} D_P^-(x_i), \qquad t = 1,\cdots,r-1$$

$Cl_t^{\geq}$ ve $Cl_t^{\leq}$ için P-şüpheli bölge veya P-sınır tanımları alt ve üst yaklaşımlar kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$BND_P(Cl_t^{\geq}) = \overline{P}(Cl_t^{\geq}) - \underline{P}(Cl_t^{\geq}), \quad t = 2,\cdots,r$$

$$BND_P(Cl_t^{\leq}) = \overline{P}(Cl_t^{\leq}) - \underline{P}(Cl_t^{\leq}), \quad t = 1,\cdots,r-1$$

Baskınlık bağıntısı ile elde edilen yaklaşımlara dayanarak karar tablosundaki tercih sıralı bilgilerin genelleştirilmiş bir açıklaması karar kuralları aracılığıyla yapılabilir. Bundan dolayı bir karar tablosu IF {koşul} THEN {sonuç} formundaki karar kurallarının bir kümesi olarak görülebilir [17]. Burada koşul bölümü bir ya da daha fazla koşul niteliği tarafından üstlenilen değerleri, sonuç bölümü ise bir veya daha fazla karar sınıfına olan atamayı belirtir. Baskın kaba küme yaklaşımında karar kuralları alt yaklaşımlardan çıkarılan kesin (certain), üst yaklaşımlardan çıkarılan olası (possible) ve sınır kümelerinden çıkarılan yaklaşık (approximate) kurallar olmak üzere üç grup halindedir. Bu çalışmada alt yaklaşımlardan çıkarılan kesin karar kuralları göz önüne alınmış ve bunlara ait söz dizimi aşağıda verilmiştir.

- Kesin $Dec_{\geq}$-kurallar: Eğer $f(x, a_1) \geq v_{a_1}$ve $f(x, a_2) \geq v_{a_2}$ ve … $f(x, a_P) \geq v_{a_P}$ ise $x \in Cl_t^{\geq}$.
- Kesin $Dec_{\leq}$-kurallar: Eğer $f(x, a_1) \leq v_{a_1}$ve $f(x, a_2) \leq v_{a_2}$ ve … $f(x, a_P) \leq v_{a_P}$ ise $x \in Cl_t^{\leq}$.

Burada $P = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\} \subseteq C, (v_{a_1}, v_{a_2}, \cdots, v_{a_P}) \in V_{a_1} \times V_{a_2} \times \cdots \times V_{a_P}$ ve $t \in \delta$.

DENEYSEL ÇALIŞMA ve SONUÇ

Beton örneklerinin dayanıklılığını baskın kaba küme yaklaşımı temelinde çıkarılan kurallar aracılığıyla incelediğimiz bu çalışmada Prof. I-Cheng Yeh tarafından çeşitli bileşenler ışığında oluşturulan beton basınç dayanımı verileri kullanılmıştır. Bu veri kümesi 1030 beton örneğinden ve her bir beton örneğinin çeşitli özelliklerini ifade eden 9 sürekli değer içeren öznitelikten (Bkz. Çizelge 1) oluşmaktadır. Çizelge 1'deki özniteliklerden ilk 8 tanesi koşul niteliği *Beton Basınç Dayanıklılığı (BBD)* ise karar niteliği olarak belirlenmiştir. Baskınlık bağıntısının tanımlanabilmesi için karar niteliğinin kesikli/ayrık değerler içermesi gerekmektedir. Bu sebeple BBD karar niteliğinin aldığı sürekli değerler Çizelge 2'e göre ayrıklaştırılarak gruplanmıştır. Bu gruplandırma sonucunda düşük, normal, orta ve yüksek dayanıklılığa sahip beton türleri veri kümesi içerisinde sırasıyla 181 (%17,57), 436 (%42,33), 374 (%36,31), 39 (%3,78) adet olarak yer aldığı gözlemlenmiştir. Baskın kaba küme temelinde çıkarılan karar kuralların performansını test edebilmek amacıyla veri kümesi, eğitim ve test kümesi olmak üzere iki parçaya bölünmüştür. Her bir sınıfın içerdiği örnek oranlarına paralel olacak şekilde test kümesi 17 düşük, 42 normal, 36 orta ve 5 yüksek olmak üzere 100 beton örneğinden oluşturulmuş, geri kalan 930 örnekten ise eğitim kümesi oluşturulmuştur.

Çizelge 1. Veri kümesindeki karar ve koşul nitelikleri

Öznitelik Adı	Nitelik Türü
Çimento Miktarı (kg/m^3)	Koşul Niteliği
Yüksek Fırın Cürufu (kg/m^3)	Koşul Niteliği
Uçucu Kül (kg/m^3)	Koşul Niteliği
Su (kg/m^3)	Koşul Niteliği
Süper Akışkanlaştırıcı (kg/m^3)	Koşul Niteliği
İri Agrega (kg/m^3)	Koşul Niteliği
İnce Agrega (kg/m^3)	Koşul Niteliği
Yaş (Gün)	Koşul Niteliği
Beton Basınç Dayanıklılığı (BBD) (MPa)	Karar Niteliği

Çizelge 2. Betonun Basınç Dayanımına Göre Grupları [5]

Beton Türü	Basınç Dayanımı (MPa)
Düşük Dayanıklı	0-19
Normal Dayanıklı	20-39
Orta Dayanıklı	40-69
Yüksek Dayanıklı	70-119
Ultra-Yüksek Dayanıklı	120-1000

Baskın kaba kümelerde öznitelikler tercih sıralıdır. Dolayısıyla özniteliğin tercih sırasının artan değerler ile arttığını veya azaldığını belirlemek gerekmektedir. Eğer bir özniteliğin tercih sırası artan değerler ile birlikte artış gösteriyorsa bu niteliğe kazanç(gain), azalış gösteriyorsa

maliyet(cost) özniteliği olarak adlandırılmaktadır. Bu işlem alan uzmanıyla yapılabileceği gibi alan uzmanı eksikliğinde [18]'de önerilen yaklaşımla belirlenebilir. Bu çalışmada özniteliklerin tercih sırasının belirlenmesinde [18] çalışması dikkate alınmış ve orijinal karar tablosunun dönüşümü için aşağıdaki adımlar izlenmiştir:

1. Karar niteliğinin aldığı farklı değerlerin sayısı kadar orijinal karar tablosu kopyalanmıştır. Yani, düşük, normal, orta ve yüksek sınıfları için birer karar tablosu oluşturulmuştur.
2. Her bir karar tablosundaki karar özniteliği değerleri, karar tablosunun oluşturulduğu sınıftan olup olmamasına göre 0 veya 1 olarak ifade edilmiştir. Örneğin düşük sınıfı için oluşturulan karar tablosunda karar özniteliği sütununda düşük olan değerler 1 ile normal, orta ve yüksek değerler 0 (düşük değil) ile temsil edilmiştir.
3. Son aşamada karar tabloları, her bir koşul niteliğinden ikişer tane (biri maliyet diğeri kazanç) olacak şekilde düzenlenmiştir.

Çizelge 3.'de 5 örnek için veri kümesi karar tablosu halinde gösterilmiş ve Çizelge 4.'de üç adım dikkate alınarak orta dayanıklılık sınıfı için örnek bir dönüşüm verilmiştir. Tablo 4.'de (↑) sembolü ilgili özniteliğin kazanç niteliği olduğunu, (↓) ise ilgili niteliğin maliyet niteliği olduğunu göstermektedir.

Çizelge 3. Karar tablosunun beş örneklik bir parçasının görünümü

	Koşul Nitelikleri			**Karar Niteliği**
Örnek No	Çimento Miktarı (kg/m^3)	Yüksek Fırın Cürufu (kg/m^3)	… …	Beton Basınç Dayanıklılığı (MPa)
1	540	0	… …	Yüksek
2	332.5	142.5	… …	Orta
3	266	114	… …	Orta
4	380	95	… …	Normal
5	139.6	209.4	… …	Düşük

Çizelge 4. Orta sınıfı için Çizelge 3.'deki orijinal karar tablosu parçasının dönüştürülüşü için örnek

	Koşul Nitelikleri					**Karar Niteliği**
Örnek No	Çimento Miktarı-1 (kg/m^3)(↑)	Çimento Miktarı-2 (kg/m^3)(↓)	Yüksek Fırın Cürufu-1 (kg/m^3) (↑)	Yüksek Fırın Cürufu-2 (kg/m^3) (↓)	… …	Beton Basınç Dayanıklılığı (MPa)
1	540	540	0	0	… …	0
2	332.5	332.5	142.5	142.5	… …	1
3	266	266	114	114	… …	1
4	380	380	95	95	… …	0
5	139.6	139.6	209.4	209.4	… …	0

Veri kümesindeki sınıfların sayısal olarak eşit sayıda örnek içermemesi yani bir sınıfta diğer sınıfa göre daha fazla örnek olması sınıf dağılımları arasındaki dengesizliği ortaya çıkarmaktadır. Çoğunluktaki sınıfın örnek sayısının azınlık sınıftaki örnek sayısına bölünmesiyle elde edilen oran dengesizlik oranı olarak isimlendirilir [19]. Dengesizlik oranının 4'den büyük olduğu veri kümeleri ise aşırı dengesiz olarak görülmekte ve azınlıkta yer alan örneklerin öğrenilmesini güçleştirmektedir [20]. Bu çalışmada en fazla örnek içeren normal dayanıklılık sınıfı çoğunluk; en az örnek içeren yüksek dayanıklılık sınıfı ise azınlık sınıfıdır. Dengesizlik oranı ise $\frac{436}{39} = 11.17$ olarak elde edilmiştir. Aşırı dengesizlik gösteren veri kümesi üzerinde sınıflar arasındaki bu problemi ortadan kaldırmak için Chawla vd. [21] tarafından önerilen Smote algoritması (Şekil 1) kullanılarak örnek üretimi gerçekleştirilmiş ve her bir sınıfın örnek sayısı eşit hale getirilmiştir.

1. *Azınlık sınıfında bulunan örneklerin k en yakın komşusu belirlenir.*
2. *Üretilecek örnek sayısı azınlıktaki her bir örneğe eşit olarak paylaştırılır. Üretilen örnek sayısının azınlık sınıfının örnek sayısından az olması durumunda hangi örneklerden sentetik üretim yapılacağı rastgele seçilir.*
3. *Her bir örneğin k-en yakın komşusu arasından üreteceği sentetik örnek sayısında rastgele seçim yapılır.*
4. *Örnek ve seçilen her bir k-en yakın komşusu arasında bir doğru boyunca örnek üretimi gerçekleştirilir.*

Şekil 1. Smote algoritmasının adımları

Önişleme adımlarından sonra her bir sınıf için oluşturulan karar tabloları üzerinde kesin karar kurallarının çıkarımı JAMM [22] yazılımı üzerindeki DomLem [14] algoritması ile kuralların test veri kümesi üzerindeki performans analizleri ise python dilinde yazılan bir programla gerçekleştirilmiştir. Her bir karar tablosundan üretilen örnek kurallar Şekil 2.'de, kuralların sayısı Çizelge 5.'de verilmiştir.

Düşük Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

1. IF Yaş-2 ≥ 7 & Su-1 ≤ 157.9 THEN BBD ≤ 0

2. IF Uçucu Kül-1 ≥ 133.6 & Uçucu Kül-2 ≤ 134 THEN BBD ≥ 1

Normal Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

3. IF Yaş-2 ≥ 91 & Yüksek Fırın Cürufu-2 ≥ 15 & Yüksek Fırın Cürufu-1 ≤ 236 THEN BBD ≤ 0

4. IF Su-1 ≥ 192.7 & Su-2 ≤ 192.94 & Yaş-2 ≤ 90 & Yaş-1 ≥ 7 THEN BBD ≥ 1

Orta Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

5. IF İnce Agrega-1 ≤ 594 & Yüksek Fırın Cürufu-2 ≥142.8 THEN BBD ≤ 0

6. IF İri Agrega-1 ≥ 446 & İri Agrega-2 ≤ 450.1 & Süper Akışkanlaştırıcı-2 ≤ 11.61 & Yaş-1 ≥ 7 THEN BBD ≥ 1

Yüksek Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

7. IF Çimento Miktarı-1 ≤ 273 THEN BBD ≤ 0

8. IF Su-2 ≤ 151 & İri Agrega-1 ≥ 1120 THEN BBD ≥ 1

Şekil 2. Her bir sınıftan oluşturulan karar tabloları için sınıfın kendisine ve değiline atanan kurallara birer örnek

Şekil 2.'de verilen kuralların atama kısımlarında $BBD \leq 0$ sınıfın değiline yapılan atamayı $BBD \geq 1$ sınıfın kendisine yapılan atamayı göstermektedir.

Çizelge 5. Karar tablolarından çıkarılan kural sayıları

Karar Tabloları	Sınıfın değiline atanan kural sayıları	Sınıfın kendisine atanan kural sayıları	Toplam Kural Sayısı
Düşük Dayanıklı	57	55	112
Normal Dayanıklı	120	117	237
Orta Dayanıklı	91	100	191
Yüksek Dayanıklı	31	24	55

Test verilerindeki başarıyı gözlemleyebilmek amacıyla karmaşıklık matrisi oluşturulmuştur. Karmaşıklık matrisi üzerinde bir örnek için birden fazla sınıfa atama yapıldıysa bu örneğin sınıfı belirsiz olacağından ötürü 2 adet örnek karmaşıklık matrisine dahil edilmemiştir. Veri kümesinin aşırı dengesiz olmasından dolayı performans metriği olarak genel doğruluk (overall accuracy) yerine azınlık sınıfındaki değişimlere daha hassas olan macro-f1 ölçümü kullanılmıştır.

Çizelge 6. Karmaşıklık matrisi

		Tahmin Edilen Sınıf			
		Düşük	Normal	Orta	Yüksek
Gerçek Sınıf	Düşük	14	3	0	0
	Normal	3	35	4	0
	Orta	0	9	25	0
	Yüksek	0	0	0	5

Karmaşıklık matrisinde satırlar test kümesindeki örneklerin gerçek sınıflarını, sütunlar ise eğitim kümesinden çıkartılan kuralların örnekler için tahmin ettiği sınıfları göstermektedir. Örneğin satır bazında bakıldığında test kümesinde orta sınıfında 34 örnek bulunduğu bu örneklerden 25'inin orta olarak etiketlendiği diğer 9 tanesinin normal olarak etiketlendiği söylenilebilir. Test kümesinde 36 orta sınıfına ait örnek olduğu düşünüldüğünde kalan 2 tanesinin ise birden fazla sınıfa atandığı söylenilebilir.

Macro-f1 skoru %85 olarak hesaplanmıştır. Bundan dolayı baskın kaba küme yaklaşımıyla çıkarılan kesin karar kurallarının test kümesi üzerindeki performansının kayda değer olduğu ifade edilebilir. Öte yandan karar kuralları hemen hemen düşük ve yüksek sınıflarını doğru bir şekilde etiketleme işlemini gerçekleştirirken; orta sınıfına ait örneklerin anlamlı bir çoğunluğunun normal olarak etiketlenmesi ise incelemeye değer bir bulgudur. Ayrıca önemli bir diğer sonuç sentetik örnek üretimi sayesinde karar kurallarının test örneklerini birden fazla sınıfa atanmasını düşürücü yönde bir etki yapmıştır.

Kural tabanlı karar algoritmasının sağladığı en önemli avantaj teknik bilgi gerekmeksizin herkes tarafından rahatça yorumlanabilir ve kolay anlaşılabilir olmasıdır. Örneğin; 7 nolu örnek kural çimento miktarı 273 kg/m^3 ve altında olan beton örneklerinin yüksek dayanıklılıkta olmayacağını belirtmektedir. Ayrıca bu kural matematiksel notasyonda $Çimento\ Miktarı \leq 273 \Rightarrow BBD \in \{Düşük, Normal, Orta\}$ olarak yazılabilir. 2 nolu örnek kural ise karışımdaki uçucu kül miktarının 133.6 ile 134 kg/m^3 aralığında olduğunda beton örneklerinin düşük dayanıklılığa sahip olacağını söylemektedir. Yine bu kural da matematiksel olarak $Uçucu\ kül \in [133.6,134] \Rightarrow BBD \in \{Düşük\}$ şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca belli bir örnek durum için sürecin doğru şekilde işleyip işlemediğini kontrol edebilmek ve tahmindeki ana etkenlerin neler olduğunu görebilmekte bu algoritmaların diğer avantajlarıdır.

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nün FYL-2020-4001 kodlu projesi ile desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] I-Cheng Yeh, Modeling of strength of high performance concrete using artificial neural networks, Cement and Concrete Research. 28 (1998) 1797-1808. doi: 10.1016/S0008-8846(98)00165-3

[2] I-Cheng Yeh, Modeling Concrete Strength with Augment-Neuron Networks, J. of Materials in Civil Engineering. 10 (1998) 263-268. doi: 10.1061/(ASCE)0899-1561(1998)10:4(263)

[3] I-Cheng Yeh, Analysis of strength of concrete using design of experiments and neural networks, Journal of Materials in Civil Engineering. 18 (2006) 597-604. doi:10.1061/(ASCE)0899-1561(2006)18:4(597)

[4] UCI Machine Learning Repository, [online], available: http://archive.ics.uci.edu/ml/dataset/concrete+compressive+strength (ulaşım Mart 30, 2021)

[5] A. O. Sojobi, O. J. Aladegboye, & T. F. Awolusi, Green interlocking paving units, Construction and Building Materials, 173 (2018) 600-614. doi:10.1016/j.conbuildmat.2018.04.061

[6] Z. Pawlak, Rough Sets, International Journal of Computer and Information Sciences. 11 (5), 341-356, 1982.doi: 10.1007/BF01001956

[7] Z. Pawlak, Rough Sets and Flow Graphs, Lecture Notes in Computer Science. 3641 (2005) 1-11. doi: 10.1007/11548669_1

[8] N. Cui, Q. Cui, A Rough-Set Based Approach to Predict Consumers' Brand Preference, International Workshop on Intelligent Systems and Applications. Wuhan, China, 2009: s. 1-4

[9] J.W. Grzymala-Busse, Rule Induction, In: Maimon O., Rokach L. (eds) Data Mining and Knowledge Discovery Handbook. Springer, Boston, 2009: s.1-19.

[10] J.J.H. Liou, G. Tzeng, A Dominance-based Rough Set Approach to Customer Behavior in the Airline Market, Information Sciences. 180 (2010) 2230-2238. doi: 10.1016/j.ins.2010.01.025

[11] S. Greco, B. Matarazo & R. Slowinski, Multicriteria classification by dominance-based rough set approach. Università degli studi, 2000

[12] S. Greco, B. Matarazo & R. Slowinski, Rough sets theory for multicriteria decision analysis. European Journal of Operational Research. 129 (2001) 1-47. doi: 10.1016/S0377-2217(00)00167-3

[13] S. Greco, B. Matarazo & R. Slowinski, Rough approximation by dominance relations. International Journals of Intelligent Systems, 17 (2002) 153-171. doi: 10.1002/int.10014

[14] S. Greco, B. Matarazzo, R.Slowinski & J. Stefanowski, An algorithm for induction of decision rules consistent with the dominance principle. In International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, Berlin, 2000: s.304-313

[15] R. Slowinski, S. Greco & B. Matarazzo, Rough set and rule based multicriteria decision aiding. Pesquisa Operacional, 32 (2012) 213-270. doi: 10.1590/S0101-74382012000200001

[16] S. Chakhar, A. Ishizaka, A. Labib, & I. Saad, Dominance-based rough set approach for group decisions. European Journal of Operational Research, 251 (2016) 206-224. doi: 10.1016/j.ejor.2015.10.060

[17] Q. Hu, S. Chakhar, S. Siraj, & A. Labib, Spare parts classification in industrial manufacturing using the dominance-based rough set approach. European Journal of Operational Research, 262 (2017) 1136-1163. doi:10.1016/j.ejor.2017.04.040

[18] J. BŁaszczyński, S. Greco, & R. SŁowiński, Inductive discovery of laws using monotonic rules, Engineering Applications of Artificial Intelligence, 25 (2012) 284-294. doi:10.1016/j.engappai.2011.09.003

[19] S. Abdellatif, M. A. B. Hassine, S. B. Yahia, & A. Bouzeghoub, ARCID: a new approach to deal with imbalanced datasets classification, In International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics. Cham, 2018: s.569-580.

[20] B. Krawczyk, "Learning from imbalanced data: open challenges and future directions, Progress in Artificial Intelligence. 5 (2016) 221-232. doi:10.1007/s13748-016-0094-0

[21] N. V. Chawla, K. W. Bowyer, L. O. Hall, & W. P. Kegelmeyer, SMOTE: synthetic minority over-sampling technique, Journal of artificial intelligence research. 16 (2002) 321-357. doi:10.1613/jair.953.

[22] JAMM Software Tool, available: http://idss.cs.put.poznan.pl/site/75.html (ulaşım Nisan 12, 2021)

ETRAFI BETON İLE ÇEVRELENMİŞ ÇELİK KOMPOZİT KOLONLARIN ÇOK KATLI YAPILARDAKİ DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Elif Gökçe İNCE[1], Fatih Mehmet ÖZKAL[2]
[1]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Erzincan
[2]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum

ABSTRACT

Composite columns have structural advantages such as high ductility, high strength, high deformation capacity, high energy absorption capacity and high stiffness. Owing to their contribution to the structural performance with their superiorities, composite columns are especially preferred in high-rise buildings. In concrete encased steel composite columns, there are advantages such as concrete protecting the steel profile against effects of fire and corrosion, and also restraining buckling effects of the steel profile. In this study, axial force-moment bearing capacities and moment-curvature relationships between concrete encased steel composite columns and reinforced concrete columns was compared. For this purpose, reinforced concrete and composite columns with the same cross-sectional area were designed and numerically analyzed with ETABS software. Column cross-sections are selected as square and rectangular, and analysis results are provided for strong and weak axes. According to the results of the analysis for columns with square cross-section, it was seen that the composite column has higher axial load carrying capacity, moment carrying capacity and section curvature than reinforced concrete column. Similarly, in rectangular cross-section columns in both directions (both strong and weak axes), it has been seen that the composite column has higher axial load carrying capacity, moment carrying capacity and section curvature than reinforced concrete column.

Keywords: Composite Column, Reinforced Concrete Column, Numerical Analysis, Structural Performance

ÖZET

Kompozit kolonlar yüksek süneklilik, yüksek dayanım, yüksek deformasyon yapabilme kapasitesi, yüksek enerji absorbe edebilme kapasitesi ve yüksek rijitlik gibi yapısal avantajlara sahiptir. Üstün özellikleriyle yapısal başarıma katkı sağlayan kompozit kolonlar, özellikle yüksek katlı yapılarda tercih edilmektedirler. Etrafı beton ile çevrili çelik kompozit kolonlarda betonun, çelik profili yangın ve paslanma etkilerine karşı koruması ve ayrıca çelik profilin burkulma etkilerini sınırlandırması gibi avantajlar da söz konusudur. Bu çalışmada etrafı beton ile çevrelenmiş çelik kompozit kolonların ve betonarme kolonların eksenel kuvvet-moment taşıma kapasiteleri ve moment-eğrilik ilişkileri karşılaştırılacaktır. Bu amaçla aynı kesit alanına sahip betonarme ve kompozit kolonlar tasarlanarak ETABS programı ile sayısal çözümlemeleri yapılmıştır. Kolon enkesitleri kare ve dikdörtgen olarak seçilerek

analiz sonuçları güçlü ve zayıf eksenler için verilmiştir. Yapılan analiz sonuçlarına göre kare enkesite sahip kolonlar için kompozit kolonun betonarme kolondan daha yüksek eksenel yük taşıma kapasitesine, moment taşıma kapasitesine ve kesit eğriliğine sahip olduğu görülmüştür. Benzer şekilde dikdörtgen enkesitli kolonlarda her iki doğrultuda da (hem güçlü hem zayıf eksen) kompozit kolonun betonarme kolondan daha fazla eksenel yük taşıma kapasitesine, moment taşıma kapasitesine ve kesit eğriliğine sahip olduğu görülmüştür.

Anahtar kelimeler: Kompozit Kolon, Betonarme Kolon, Sayısal Çözümleme, Yapısal Başarım

GİRİŞ

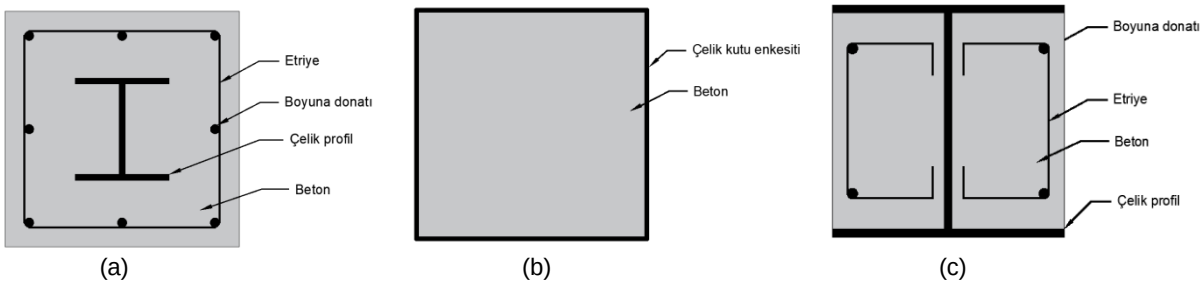
Yüksek katlı betonarme yapıların yaygınlaşmasıyla daha rijit ve dayanıklı yapı elemanlarına ihtiyaç artmıştır. Bu nedenle yüksek süneklilik, yüksek dayanım ve yüksek rijitlik gibi yapısal avantajlara sahip kompozit kolonların kullanımı önem kazanmıştır. Kompozit kolonların sağladığı bu dayanım avantajlarına ilaveten, etrafı beton ile çevrelenmiş çelik profilli kompozit kolonlarda betonun çelik profili yangın ve paslanma etkilerine karşı koruması ve ayrıca çelik profilin burkulma etkilerini sınırlandırması gibi avantajlar bulunmaktadır [1-9].

Yapılan bu çalışmada kompozit ve betonarme kolonların tasarımında yönetmelik olarak Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapım Esaslarına Dair Yönetmelik (ÇYTHYEDY-2016) ve Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği (TBDY-2018) dikkate alınarak analizler gerçekleştirilmiştir [10-11]. Kompozit ve betonarme kolonların tasarımında öncelikle 12 katlı binalar tasarlanmış ve zemin katta en çok zorlanan kolon ele alınarak sayısal çözümlemeler yapılmıştır.

Bu çalışma kapsamında aynı kesit alanına sahip etrafı beton ile çevrili kompozit kolonlar ve betonarme kolonlar tasarlanarak ETABS programında sayısal sonuçlar üzerinden karşılaştırılmıştır. Kolonlar kare ve dikdörtgen olmak üzere iki enkesitte tasarlanmıştır. Dikdörtgen kolonlarda hem güçlü eksen hem de zayıf eksen doğrultusunda sonuçlar verilmiştir. Yapılan analizler neticesinde kolonlara ait Eksenel Kuvvet–Moment ve Moment–Eğrilik grafikleri karşılaştırılmıştır.

KOMPOZİT KOLONLAR

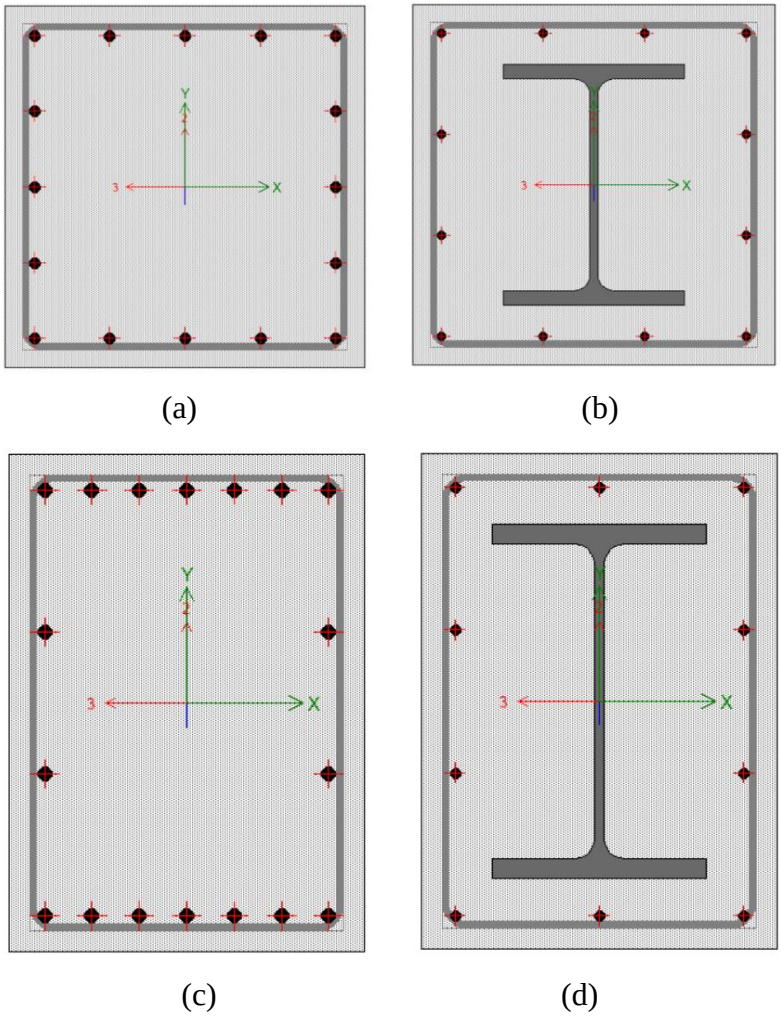
Kompozit kolonlar etrafı beton ile çevrelenmiş çelik profillerden, içi beton ile doldurulmuş çelik tüplerden veya etrafı kısmen çevrili çelik profillerden oluşan düşey taşıyıcı elemanlardır (Şekil 1). Bu çalışmada kompozit kolonların dayanım avantajlarının yanı sıra sağladığı durabilite avantajlarından dolayı etrafı beton ile çevrelenmiş çelik profiller incelenmiştir.



Şekil 1. Kompozit kolon tipleri (a) Etrafı beton ile çevrelenmiş çelik profil; (b) İçi beton ile doldurulmuş çelik kutu enkesiti; (c) Etrafı kısmen çevrelenmiş çelik profil

SAYISAL ÇÖZÜMLEME

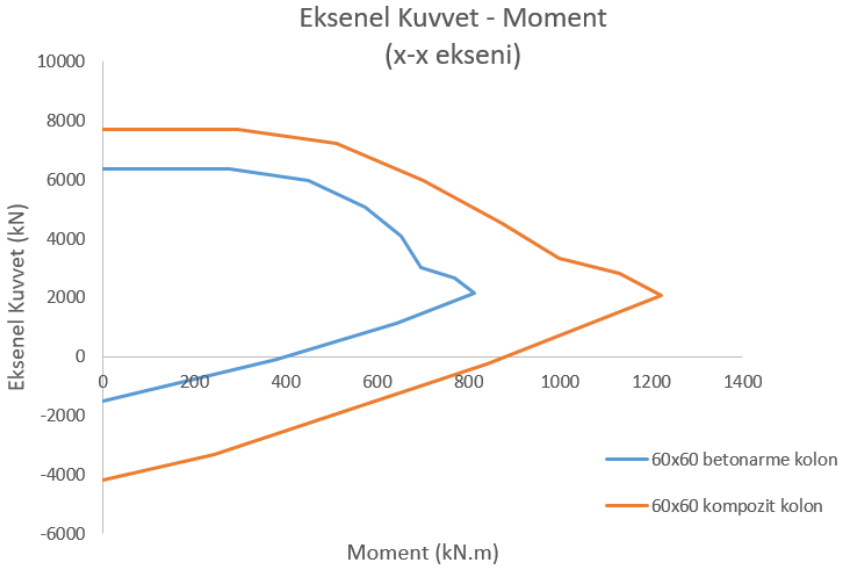
Bu çalışma kapsamında yapılan analizlerde beton malzemesinin basınç dayanımı 35 MPa olarak alınmıştır. Kompozit kolonlarda kullanılan çelik profilin akma dayanımı 235 MPa olarak alınmıştır. Ayrıca boyuna donatılar ve enine donatılar (etriyeler) akma dayanımı 420 MPa olan donatı çeliği olarak alınmıştır. Şekil 2'de sayısal çözümlemelerde kullanılan betonarme ve kompozit kolonların enkesitleri görülmektedir.



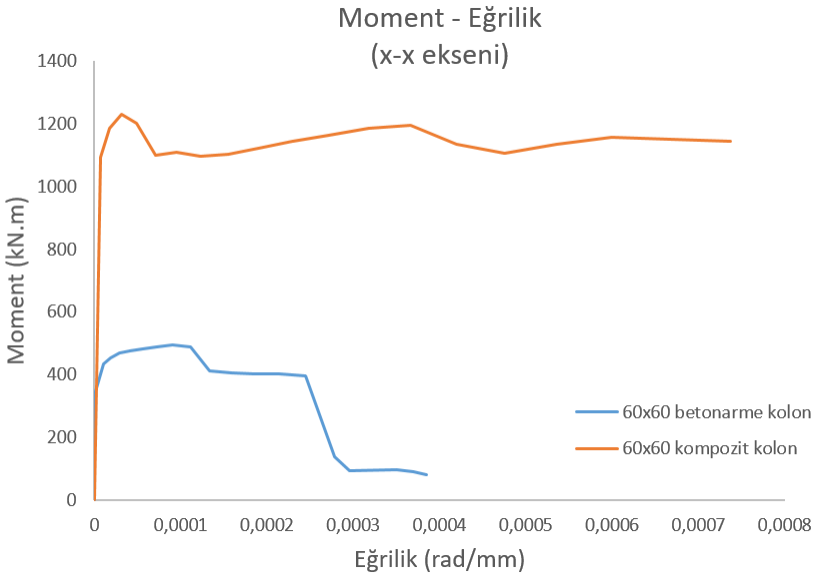
Şekil 2. Analizleri yapılan kolonlar (a) kare ve betonarme kolon (b) kare ve kompozit kolon (c) dikdörtgen ve betonarme kolon (d) dikdörtgen ve kompozit kolon

Kare enkesitli betonarme kolonda boyuna donatılar 16ϕ18, enine donatılar ϕ10/10 olarak alınmıştır. Kare enkesitli kompozit kolonda boyuna donatılar 12ϕ14 enine donatılar ϕ10/10 alınmıştır ve kompozit kolon içerisindeki çelik profil HEB400 olarak seçilmiştir. Dikdörtgen enkesitli betonarme kolonda ise boyuna donatılar 18ϕ16, enine donatılar ϕ10/10 olarak alınmıştır. Dikdörtgen enkesitli kompozit kolonda boyuna donatılar 10ϕ14, enine donatılar ϕ10/10 alınmıştır ve kompozit kolon içerisindeki çelik profil HEB500 olarak seçilmiştir.

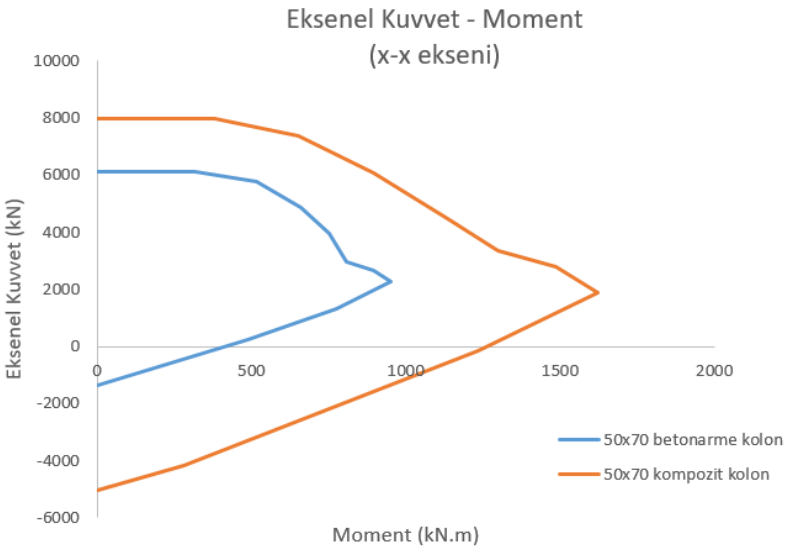
ETABS yazılımıyla yapılan çözümlemeler neticesinde kompozit ve betonarme kolonlara ait Eksenel Kuvvet–Moment ve Moment–Eğrilik grafikleri elde edilmiştir. Şekil 3 - Şekil 8'de analizler neticesinde elde edilen sonuçlar gösterilmiştir.



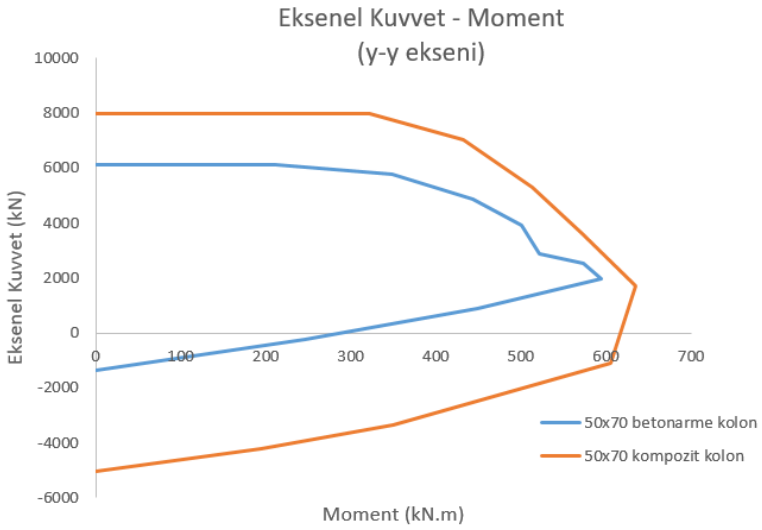
Şekil 3. Kare enkesitli kompozit ve betonarme kolonların x-x ekseninde Eksenel Kuvvet–Moment diyagramları



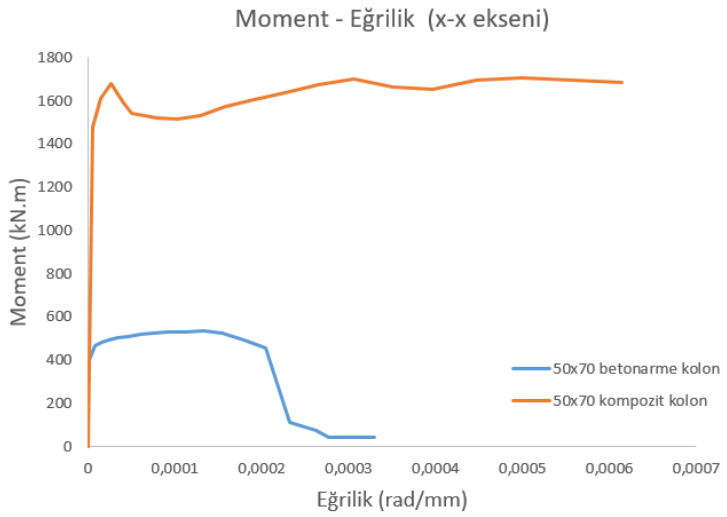
Şekil 4. Kare enkesitli kompozit ve betonarme kolonların x-x ekseninde Moment–Eğrilik diyagramları



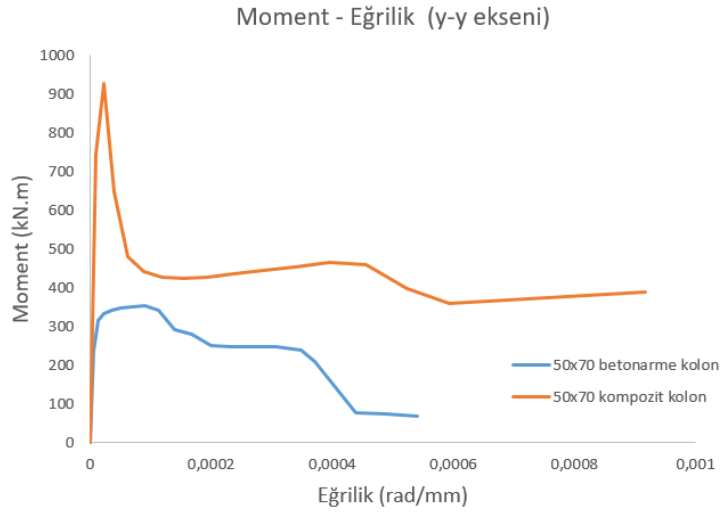
Şekil 5. Dikdörtgen enkesitli kompozit ve betonarme kolonların x-x ekseninde Eksenel Kuvvet–Moment diyagramları



Şekil 6. Dikdörtgen enkesitli kompozit ve betonarme kolonların y-y ekseninde Eksenel Kuvvet–Moment diyagramları



Şekil 7. Dikdörtgen enkesitli kompozit ve betonarme kolonların x-x ekseninde Moment–Eğrilik diyagramları



Şekil 8. Dikdörtgen enkesitli kompozit ve betonarme kolonların y-y ekseninde Moment–Eğrilik diyagramları

SONUÇLAR

Bu çalışmada etrafı beton ile çevrelenmiş çelik kompozit kolonların ve betonarme kolonların Eksenel Kuvvet–Moment taşıma kapasiteleri ve Moment–Eğrilik ilişkileri karşılaştırılmıştır. Bu amaçla kare (600x600 mm) ve dikdörtgen (500x700 mm) enkesitine sahip betonarme ve kompozit kolonlar tasarlanarak ETABS yazılımı ile sayısal çözümlemeleri gerçekleştirilmiştir.

Analiz sonuçlarına göre kare kolonlar için; kompozit kolonun betonarme kolondan yaklaşık %20 daha fazla eksenel yük taşıma kapasitesine, yaklaşık %150 daha fazla moment taşıma kapasitesine ve yaklaşık %90 daha fazla kesit eğriliğine sahip olduğu görülmüştür. Dikdörtgen kolonlarda güçlü eksende kompozit kolonun betonarme kolondan yaklaşık %30 daha fazla eksenel yük taşıma kapasitesine, yaklaşık %220 daha fazla moment taşıma

kapasitesine ve yaklaşık %85 daha fazla kesit eğriliğine sahip olduğu görülmüştür. Ayrıca dikdörtgen kolonlarda zayıf eksende kompozit kolonun betonarme kolondan yaklaşık %30 daha fazla eksenel yük taşıma kapasitesine, yaklaşık %160 daha fazla moment taşıma kapasitesine ve yaklaşık %70 daha fazla kesit eğriliğine sahip olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] E. Ellobody, B. Young, D. Lam, "Eccentrically loaded concrete encased steel composite columns." *Thin-walled structures* 49.1 (2011): 53-65.

[2] E. Ellobody, B. Young, "Numerical simulation of concrete encased steel composite columns." *Journal of Constructional Steel Research* 67.2 (2011): 211-222.

[3] C. S. Kim, H. G. Park, K. S. Chung, I. R. Choi, "Eccentric axial load testing for concrete-encased steel columns using 800 MPa steel and 100 MPa concrete." *Journal of Structural Engineering* 138.8 (2012): 1019-1031.

[4] J. Y. Richard Liew, D. X. Xiong, "Ultra-high strength concrete filled composite columns for multi-storey building construction." *Advances in Structural Engineering* 15.9 (2012): 1487-1503.

[5] S. Tokgoz, C. Dundar, "Experimental tests on biaxially loaded concrete-encased composite columns." *Steel and Composite Structures* 8.5 (2008): 423-438.

[6] C. Campian, Z. Nagy, M. Pop, "Behavior of fully encased steel-concrete composite columns subjected to monotonic and cyclic loading." *Procedia engineering* 117 (2015): 439-451.

[7] P. Lacki, A. Derlatka, P. Kasza, "Comparison of steel-concrete composite column and steel column." *Composite Structures* 202 (2018): 82-88.

[8] B. Lai, J. Y. Richard Liew, T. Wang, "Buckling behaviour of high strength concrete encased steel composite columns." *Journal of Constructional Steel Research* 154 (2019): 27-42.

[9] T. Kartheek, T. V. Das, "3D modelling and analysis of encased steel-concrete composite column using ABAQUS." *Materials Today: Proceedings* 27 (2020): 1545-1554.

[10] Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapım Esaslarına Dair Yönetmelik (2016). Çevre ve Şehircilik Bakanlığı, Ankara, Türkiye.

[11] Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği (2018). Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı, Ankara, Türkiye.

KOMPOZİT KUTU KESİTLİ KÖPRÜLERİN YAPAY ARI KOLONİSİ ALGORİTMASI İLE OPTİMUM TASARIMI

Ozan İNCE[1], Mehmet ÜLKER[2]
[1]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Fırat Üniversitesi, Elazığ
[2]İnşaat Mühendisliği Bölümü, Turgut Özal Üniversitesi, Malatya

ABSTRACT

Composite box girder bridges are bridges built as reinforced concrete slab on a rectangular or trapezoidal steel beam. Composite box girder bridges are widely used due to their advantages such as the ability to cross long openings and the high torsional rigidity of the box section. In this study, the optimum design of reinforced concrete-steel composite box girder bridges were made with Artificial Bee Colony Algorithm. For this purpose, a three-span composite box girder bridge was designed. While the thickness of the reinforced concrete floor slab was kept constant in the composite box girder bridge, the steel box girder was optimized. In the optimization problem, steel box girder cross-sectional dimensions were taken as design variables. In building optimization, it is aimed to economically design the buildings within the safety limits. There are different optimization techniques in making the optimum design, and it has been seen in the literature that successful results are obtained in the optimization of structures with metaheuristic algorithm methods. It has been observed that the Artificial Bee Colony Algorithm has been used in many fields in the literature in the optimization of structures and successful results have been obtained. Artificial Bee Colony Algorithm is a method that aims to achieve the optimum result, inspired by the behavior of bees to find food. In this study, Artificial Bee Colony Algorithm was written using the MATLAB program. Optimization problem is solved under geometric constraints and stress constraints. As a result of the analysis, it was seen that the Artificial Bee Colony Algorithm gave successful results in the optimum design of composite box girder bridges and quickly converged to the optimum result.

Keywords: Composite Bridge; Optimum Design; Metaheuristic Algorithm

ÖZET

Kompozit kutu kesitli köprüler dikdörtgen veya trapez şeklinde çelik kiriş üzerinde betonarme döşeme olarak inşa edilen köprülerdir. Kompozit kutu kesitli köprüler uzun açıklıkların geçilebilmesi ve kutu kesitin yüksek burulma rijitliğinin olması gibi avantajlarından dolayı yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada betonarme-çelik kompozit kutu kesitli köprülerin Yapay Arı Kolonisi Algoritması ile optimum tasarımı yapılmıştır. Bu amaçla üç açıklıklı bir kompozit kutu kesitli köprü tasarlanmıştır. Kompozit kutu kesitli köprüde betonarme döşeme plağının kalınlığı sabit tutulurken çelik kutu kesitin optimizasyonu yapılmıştır. Optimizasyon probleminde çelik kutu enkesit boyutları tasarım değişkenleri

olarak alınmıştır. Yapı optimizasyonunda yapıların güvenlik sınırları içerisinde ekonomik olarak tasarlanması hedeflenmektedir. Optimum tasarımın yapılmasında farklı optimizasyon teknikleri bulunmaktadır ve literatürde sezgisel algoritma yöntemleri ile yapıların optimizasyonunda başarılı sonuçların alındığı görülmüştür. Yapay Arı Kolonisi Algoritmasının yapıların optimizasyonunda literatürde birçok alanda kullanıldığı ve başarılı sonuçların alındığı görülmüştür. Yapay Arı Kolonisi Algoritması arıların yiyecek bulma davranışından esinlenerek optimum sonuca gitmeyi hedefleyen bir yöntemdir. Bu çalışmada Yapay Arı Kolonisi Algoritması MATLAB programı kullanılarak yazılmıştır. Geometrik sınırlayıcılar ve gerilme sınırlayıcıları altında optimizasyon problemi çözülmüştür. Analizler neticesinde Yapay Arı Kolonisi Algoritmasının kompozit kutu kesitli köprülerin optimum tasarımında başarılı sonuçlar verdiği ve optimum sonuca hızlı bir şekilde yakınsadığı görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kompozit Köprü; Optimum Tasarım; Sezgisel Algoritma

GİRİŞ

Yapıların tasarımında hem ekonomik hem de güvenli tasarımın yani optimum tasarımın yapılması hedeflenmektedir. Özellikle köprü gibi büyük maliyetli yapıların tasarımında optimum tasarım kavramı daha fazla ön plana çıkmaktadır. Kompozit kutu kesitli köprüler, kutu kesitli çelik kirişten ve üzerindeki betonarme döşemeden oluşmaktadır. Kompozit kutu kesitli köprülerin yüksek burulma rijitliği ve uzun açıklıkların geçilebilmesi gibi avantajları bulunmaktadır. Literatürde köprülerin optimum tasarımı incelendiğinde bir çok sezgisel algoritma yönteminin kullanıldığı görülmektedir [1-4].

Optimizasyon teknikleri incelendiğinde son zamanlarda sezgisel algoritma yöntemlerinin yaygın bir kullanım alanına sahip olduğu görülmektedir. Sezgisel algoritmaların yerel minimum noktalarına gitmektense global minimum noktalarına giderek en optimum sonucu bulmada oldukça başarılı oldukları görülmektedir. Yapısal problemlerde başarılı sonuçlar veren bu yöntemler inşaat mühendisliği alanında bir çok yapının optimum tasarımı için literatürde kullanılmışlardır [1-8].

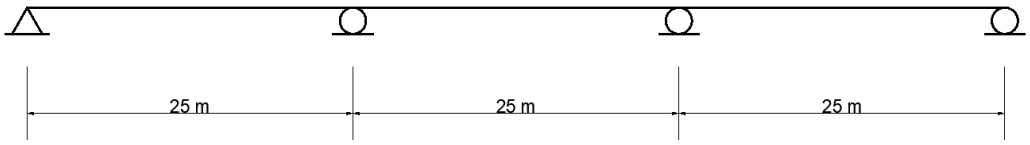
Yapay Arı Kolonisi (Artificial Bee Colony) algoritması yöntemi arıların yiyecek bulma davranışlarından esinlenerek optimal sonuca gitmeyi hedefleyen bir yöntemdir [9, 10].

Bu çalışmada yaygın bir kullanım alanına sahip olan kompozit kutu kesitli kirişlerin Yapay Arı Kolonisi (Artificial Bee Colony) algoritması ile optimum tasarımı yapılmıştır. Beton döşeme tabakasının kalınlığı optimum tasarıma katılmamıştır ve sadece çelik kutu kirişli kesitin optimum tasarımı yapılmıştır. Optimum tasarım yapılmadan önce üç açıklıklı bir köprü kesiti belirlenmiş ve bu köprü CSiBridge programında çözülerek maksimum moment değerleri elde edilmiştir [9]. Elde edilen değerler neticesinde MATLAB programı kullanılarak ABC algoritması yazılmış ve optimum sonuçlar elde edilmiştir [10].

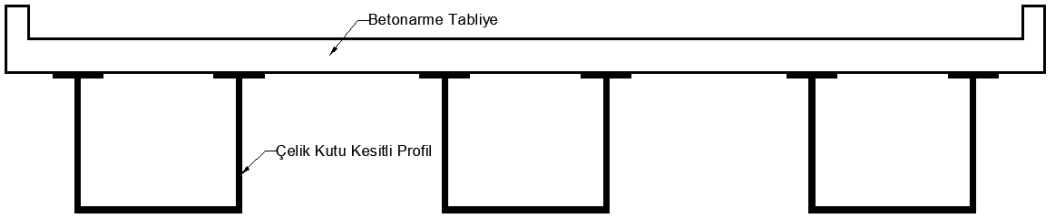
OPTİMİZASYON PROBLEMİ

Kompozit kutu kesitli köprüler, kutu kesitli çelik kirişten ve üzerinde betonarme tabliye oluşmaktadır. Bu çalışmada optimizasyonu yapılacak kompozit kutu kesitli köprü üç açıklıktan oluşmaktadır ve köprü boykesiti Şekil 1'de görülmektedir. Kompozit kutu kesitli köprünün enkesiti Şekil 2'de görülmektedir. Kompozit kutu kesitli köprüde yapılacak olan

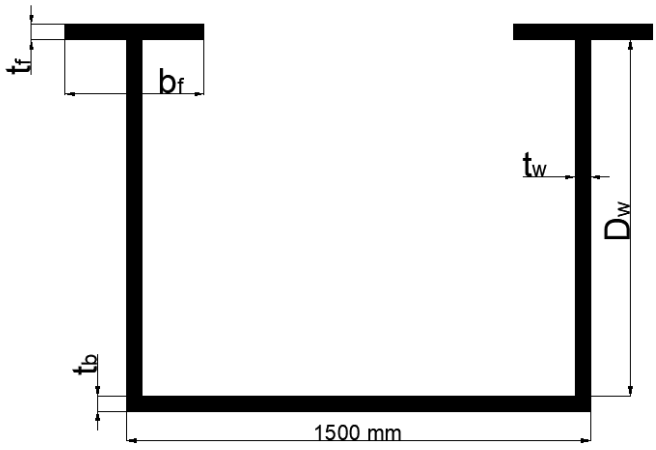
optimizasyon probleminde alınacak olan tasarım değişkenleri (t_b, t_f, b_f, D_w, b_w) Şekil 3'de görülmektedir. Burada verilen tasarım değişkenleri çelik kutu kesitin boyutlarını ifade etmektedir. Optimizasyon probleminde amaç çelik kutu kesitin ağırlığını gerilme ve geometrik sınırlayıcılar dikkate alınarak en düşük yapmaktır.



Şekil 1. Kompozit kutu kesitli köprü boykesiti



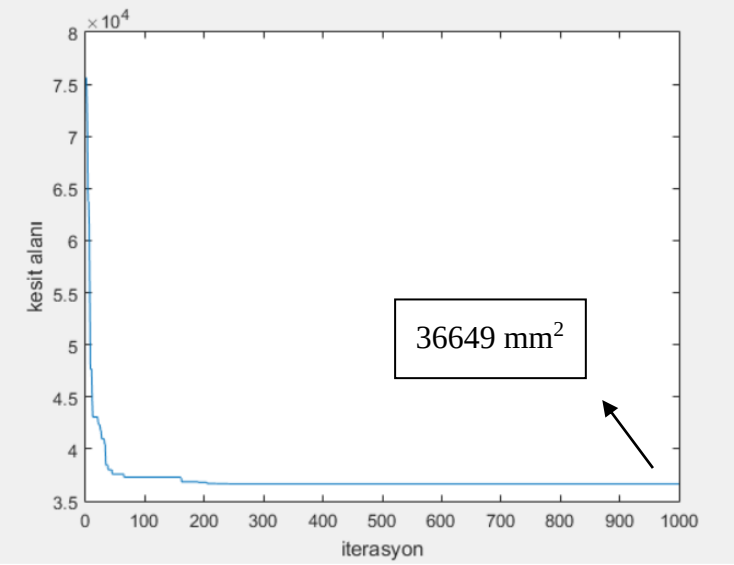
Şekil 2. Kompozit kutu kesitli köprü enkesiti



Şekil 3. Kompozit kutu kesitli köprüye ait tasarım değişkenleri

SAYISAL SONUÇLAR

Kompozit kutu kesitli köprü tasarımında tabliyede beton malzemesi olarak basınç dayanımı 30 MPa olan beton kullanılmıştır. Kutu kesiti oluşturan çelik malzemesinin akma dayanımı 345 MPa olarak alınmıştır. Analizler neticesinde çelik kutu kesitin elde edilen kesit alanı (mm^2) ve iterasyon grafiği Şekil 4'de verilmiştir.



Şekil 4. Kesit alanı (mm^2) – iterasyon sayısı grafiği

SONUÇLAR

Bu çalışmada betonarme-çelik kompozit kutu kesitli köprülerin Yapay Arı Kolonisi algoritması ile optimum tasarımı yapılmıştır. Optimum tasarımda beton döşeme kalınlığı sabit tutulurken çelik kirişin boyutları tasarım parametresi olarak dikkate alınmıştır. Analizler neticesinde Yapay Arı Kolonisi algoritmasından betonarme-çelik kompozit kutu kesitli köprülerin optimizasyonunda başarılı sonuçlar alındığı ve algoritmanın optimum sonuca hızlı bir şekilde yakınsadığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] A. Kaveh, T. Bakhshpoori, M. Barkhori, Optimum design of multi-span composite box girder bridges using Cuckoo Search algorithm. *Steel and Composite Structures* 2014;17(5):705-719.

[2] A. Kaveh, M. M. M. Zarandi, "Optimal design of steel-concrete composite I-girder bridges using three meta-heuristic algorithms." *Period Polytech Civil Eng* 63.2 (2019): 317-37.

[3] A. N. Morab, R. J. Fernandes, Optimization of Box Girder Bridge Using Genetic Algorithm Method. *IOSR J. Mech. Civil Eng*, 15.3 (2018): 24-29.

[4] R. L. Pedro, J. Demarche, L. F. F. Miguel, R. H. Lopez, An efficient approach for the optimization of simply supported steel-concrete composite I-girder bridges. *Advances in Engineering Software*, 112 (2017): 31-45.

[5] S.O. Degertekin, Improved harmony search algorithms for sizing optimization of truss structures. *Computers & Structures 92 (2012): 229-241.*

[6] F. Erdal, E. Doğan, M. P. Saka, Optimum design of cellular beams using harmony search and particle swarm optimizers. *Journal of Constructional Steel Research*, 67.2 (2011): 237-247.

[7] M. Sonmez, Artificial Bee Colony algorithm for optimization of truss structures. *Applied Soft Computing, 11.2 (2011): 2406-2418.*

[8] S.O. Degertekin, Optimum design of steel frames using harmony search algorithm. *Structural and multidisciplinary optimization*, 36.4 (2008): 393-401.

[9] D. Karaboga, *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization* (Vol. 200, pp. 1-10). Technical report-tr06, Erciyes university, engineering faculty, computer engineering department, 2005.

[10] B. Akay, D. Karaboga, Artificial bee colony algorithm for large-scale problems and engineering design optimization. *Journal of intelligent manufacturing*, 23.4 (2012): 1001-1014.

UZAYSAL ÇERÇEVE YAPILARIN SERBEST TİTREŞİMLERİNİN BAŞLANGIÇ DEĞERLERİ YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Ömer Ekim Genel[1], Mertol Tüfekci[2] ve Ekrem Tüfekci[1]

[1] İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Gümüşsuyu, 34437, İstanbul

[2] Imperial College London, Makina Mühendisliği, Exhibition Road, SW7 2AZ, Londra

ABSTRACT

In this study, free vibrations of spatial frame structures are investigated by using the initial values method. In the formulation, effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia are taken into consideration. To model the structure in three-dimensional space, an approach using the direction cosine matrices is employed. It is observed that calculated results are in good agreement with the literature and those obtained from the commercial finite element package software.

Keywords: spatial; frame; analytical solution; initial value method.

ÖZET

Bu çalışmada, üç boyutlu çerçeve tipi yapıların serbest titreşimleri başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak analitik olarak incelenmiştir. Eksenel uzama, kayma şekil değişimi ve dönme eylemsizliğinin etkilerinin dikkate alındığı doğru eksenli çubuk formülasyonu kullanılmıştır. Yapının uzaysal modellenmesi doğrultman kosinüsleri yöntemi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Hesaplanan sonuçların literatürle ve sonlu eleman paket programından elde edilen sonuçlarla iyi bir uyum içinde olduğu gözlenmiştir.

Anahtar kelimeler: uzaysal; çerçeve; analitik çözüm; başlangıç değerleri yöntemi.

GİRİŞ

Çubuk elemanlar, çeşitli geometrilere ve malzeme özelliklerine sahip olup, dönen makinalar, hava-uzay yapıları, türbin kanatları, taşıt şaşileri, konutlar ve deniz yapıları gibi mühendislik yapıtlarında sıklıkla kullanılan yük taşıyıcı elemanların başında gelmektedir [1–8]. Bu elemanlar, kesin varsayımlar yapmaya olanak tanıyan geometrik basitliklerinden dolayı genellikle öngörülebilir mekanik özelliklere sahiptir. Bu varsayımlar genellikle, çubuğun maruz kaldığı şekil değişimi, çubuğun kesit özellikleri ve çubuk ekseninin geometrisi parametrelerine bağlıdır [5,9–11]. Dolayısıyla, varsayımlar, bu parametrelerin dikkatlice irdelenmesiyle yapılmalıdır. Doğru bir şekilde yapılan bu varsayımlar, matematiksel ifadeleri büyük ölçüde basitleştirerek, hassasiyetten fazla bir ödün vermeden hesaplama yükünü azaltılmasını sağlamaktadır.

Daha rijit bir yapı elde etmek ve/veya tasarım kriterlerini sağlamak amacıyla, bu çubuk elemanlar bir araya getirilerek düzlemsel ve uzaysal çerçeve yapılar oluşturulmaktadır [12–19]. Bu yapıların makina mühendisliği alanındaki en güncel örneği, hafifliğe ve rijitliğe aynı

anda ihtiyaç duyan uzay yapılarındaki üç boyutlu taşıyıcı sistemler olarak verilebilir [4,20]. Bu yapıların mekanik cevapları, kendisini oluşturan çubuk elemanların yapısal cevaplarıyla birtakım benzerlikler içermesine rağmen, çoğu durumda daha kompleks bir şekilde ortaya çıkar. Bu kompleksliğin ana sebeplerinden en önemlisinin, çerçeve yapıyı oluşturan her bir çubukta meydana gelen uzama-eğilme-burulma şekil değişimlerinin etkileşimi olduğu söylenebilir [8,21]. Bu bağlaşıklıklara ek olarak, önyükleme de bu yapılarda ele alınan önemli bir konudur. Yine çubuk elemanların bir araya getirilmesinden kaynaklı olarak yapı, yerçekimi ya da başka bir takım dış etkiler haricinde de yüklü hale gelebilmekte ve bu durum da dinamik davranışı açıkça etkileyebilmektedir [12,22].

Literatürde çerçeve yapıların titreşimlerini inceleyen çalışmaların çoğunluğu çeşitli sayısal yöntemleri kullanmaktadır. Bu yöntemler arasında, sonlu elemanlar yöntemi (SEY) en önde gelen yöntemlerdendir. Standartlaştırılmış iş akışı ve esnekliği sayesinde, bu yöntem en karmaşık yapılara dahi uygulanabilmektedir. Ibrahim ve diğ., çerçeve rijitliğinin, kamyonlarda kullanılan çerçeve yapıların titreşimleri üzerindeki etkisini incelemiştir [3]. Chan ve Ho, çelik çerçeve yapılardaki mafsalları yarı rijit olarak modellemiş ve bu yapıların lineer ve nonlinear titreşim analizlerini gerçekleştirmiştir [23]. Minghini ve diğ., aynı bağlantı özelliğine sahip lif takviyeli polimer düzlemsel ve uzaysal çerçeve yapıların titreşimlerini incelemiştir [24]. Nikolakopoulos ve diğ., düzlemsel çerçeve yapılarda çatlak konumunun ve derinliğinin tespitine yönelik bir sonlu eleman yöntemi geliştirmiştir [25]. Chen ve Wu, çerçeve yapıların titreşimlerini daha hassas bir şekilde inceleme imkanı veren sonlu eleman temelli şerit dalgacık eleman yöntemini geliştirmiştir [26]. Pham ve diğ., fonksiyonel olarak derecelendirilmiş, yarı rijit bağlantılara sahip ve belirsizlikler içeren çerçeve yapıların titreşimlerini incelemiştir [27]. Basci ve diğ., kesin çözümden elde edilen yerdeğiştirme fonksiyonlarını kullanarak titreşimleri daha hassas incelemeye imkan veren bir sonlu eleman yöntemi geliştirmiştir [28]. Ranjbaran, rijitleştirici elemanların çerçeve yapıların titreşimleri üzerindeki etkisini incelemiştir [29].

Sonlu elemanlar yöntemi dışındaki sayısal yöntemleri kullanarak çerçeve yapıların dinamik davranışlarını inceleyen çalışmalar da literatürde çok sayıda bulunmaktadır. Transfer matrisleri bu kapsamda literatürde en sık karşılaşılan yöntemlerden biridir [18,30–33]. Ayrıca, sıklıkla karmaşık mekanik sistemlerin modellenmesinde kullanılan, toplu parametreli kütle temelli bir model kullanımı çerçeve yapıların dinamik davranışlarının incelenmesinde problemi basitleştirmek için kullanılırken [34], dağıtılmış parametreli kütle temelli bir modelin kullanılması hassasiyeti ve modelin temsiliyet yeteneklerini önemli ölçüde arttırmaktadır [13]. Kamgar ve Saadatpour, çerçeveleri de içeren karmaşık bir sistemin temel doğal frekansını hesaplayan bir yöntem sunmuştur [35]. Ayrıca, diferansiyel kuadratür yöntemi, çerçeve yapıların serbest titreşimlerinin analizi için kullanılan bir diğer yöntemdir [36].

Yukarıda sunulan çeşitli sayısal yöntem temelli yaklaşımlara kıyasla, çerçeve tipi yapıların titreşimlerini analitik yaklaşımla ele alan çalışmalar literatürde oldukça sınırlı sayıda bulunmaktadır. Analitik modelleme safhasında elde edilen ifadelerin karmaşıklığından dolayı, literatürde genellikle iki elemandan oluşan çerçeve yapılar gibi nispeten basit yapılar incelenmektedir [37]. Çerçeve tipi yapılarda yapılan bir diğer basitleştirme ise düzlem içi ve düzlem dışı davranışın ayrıştırılmasıdır [38]. Ancak, analiz kapsamının sadece düzlem dışı ve sadece düzlem dışı tutulmasının doğal olarak yapının doğal frekanslarının belirli bir kısmını elde etmeye sebep olacağı bu noktada belirtilmelidir. Literatürde analitik çözüm yöntemlerinden biri olan dalga titreşimi yaklaşımı kullanılarak çok bölmeli çerçevelerin titreşimleri Mei tarafından incelenmiştir [39]. Antes ve diğ., Timoshenko çubukların ve çerçeve yapıların dinamiğini Laplace uzayında integral denklemleri kullanarak incelemiştir

[16]. Labib ve diğ., çerçeve tipi yapılarda çatlak tayinine yönelik dinamik rijitlik matrisi temelli bir yöntem geliştirmiştir [40]. Khan ve diğ., çerçeve yapıları hasar açısından incelemek amacıyla deneysel, analitik ve sayısal yöntemleri bir araya getiren bir yaklaşım geliştirmiştir [41]. Bozyigit ve diğ., doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan bir çerçeve sisteminin serbest titreşimlerini dinamik rijitlik matrisi kullanarak incelemiştir [42]. Sadece eğri eksenli çubuklardan oluşan çerçeve yapıların serbest titreşimleri ise Calio ve diğ. tarafından kesin dinamik rijitlik matrisi yöntemi kullanılarak incelenmiştir [43].

Literatürde, eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkilerini hesaba katan, düzlem içi ve düzlem dışı davranışı birarada modelleyen bir çubuk formülasyonunu temel alarak ve başlangıç değerleri yöntemini kullanarak düzlemsel çerçeve tipi yapıların serbest titreşimlerini analitik olarak inceleyen çalışmalar bulunmaktadır. Yucel ve diğ., eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini gözönünde bulundurarak düzlemsel çerçeve yapıların titreşimlerini başlangıç değerleri yöntemi kullanarak incelemiştir [8]. Eroğlu ve Tüfekci, aynı etkileri dikkate alarak, çatlak içeren çerçeve yapıların titreşimlerine dair kesin çözümü yine başlangıç değerleri yöntemini kullanarak elde etmiştir [9]. Sunulan çalışmada ise düzlem içi ve düzlem dışı davranışı birarada inceleyen ve çözümü başlangıç değerleri yöntemiyle analitik olarak elde eden bu yöntemin uygulanabilirliğinin, uzaysal durumun kendine has özellikleri ve aynı etki kapsamı göz önünde bulundurularak, üç boyuta genişletilmesi hedeflenmiştir.

FORMÜLASYON

Atalet kuvvetlerinin, harmonik titreşim kabulü altında D'Alembert prensibi kullanılarak, yayılı yükler üzerinden ifade edildiği durumda, çubuk teorisinin temel denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir [8]:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dz} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y} = [u \quad v \quad w \quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z \quad F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \tag{2}$$

Burada, z, çubuk eksen parametresini; $\boldsymbol{y}$, 12x1 boyutundaki değişkenler vektörünü; $\boldsymbol{A}$, 12x12 boyutundaki katsayılar matrisini; u, v ve w sırasıyla x, y ve z eksenlerindeki yer değiştirmeleri; Ω_x, Ω_y ve Ω_z ise sırasıyla kesitin bu eksenler etrafındaki dönüş açılarını; F_x, F_y ve F_z iç kuvvetleri; M_x, M_y ve M_z ise iç momentleri temsil etmektedir. Burada, $\boldsymbol{A}$ matrisinin sıfırdan farklı elemanları:

$$\begin{aligned}
&A_{1,5} = A_{10,8} = 1 && A_{3,9} = 1/EA && A_{7,1} = A_{8,2} = A_{9,3} = -\mu\omega^2 \\
&A_{1,7} = k_x/GA && A_{4,10} = 1/EI_x && A_{10,4} = -\mu\frac{I_x}{A}\omega^2 \\
&A_{2,4} = A_{11,7} = -1 && A_{5,11} = 1/EI_y && A_{11,5} = -\mu\frac{I_y}{A}\omega^2 \\
&A_{2,8} = k_y/GA && A_{6,12} = 1/GI_b && A_{12,6} = -\mu\frac{I_z}{A}\omega^2
\end{aligned} \tag{3}$$

olarak ifade edilebilir. Burada, k_x ve k_y sırasıyla x ve y eksenlerindeki kayma düzeltme faktörlerini; E ve G sırasıyla elastisite ve kayma modüllerini; A, kesit alanını; I_x, I_y ve I_z sırasıyla, x, y ve z eksenlerindeki alan atalet momentlerini; I_b, burulma sabitini; μ, birim boy başına kütleyi; ω ise açısal frekansı temsil etmektedir.

Denklem (1)'deki birinci mertebeden diferansiyel denklem takımının kesin çözümü,

$$\boldsymbol{y} = e^{\boldsymbol{Az}}\boldsymbol{y_o} \tag{4}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada, $\boldsymbol{y_o}$, 12x1 boyutunda olup, başlangıç değerleri vektörünü temsil etmektedir. Bu denklemlerden yola çıkarak, kademeli kesitlerden oluşan bir çubuğun incelemesine benzer şekilde [44], çerçeve yapı için sınır şartları ve düğüm noktalarındaki geçiş şartları kullanılarak homojen lineer cebirsel denklem takımı oluşturulur [8]:

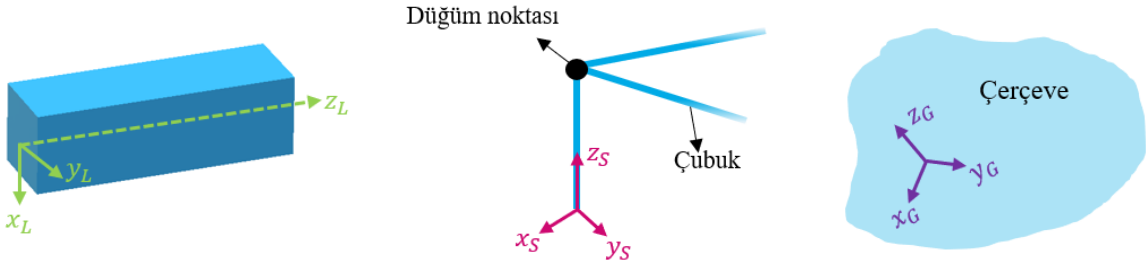
$$\boldsymbol{F}(\omega)\boldsymbol{y_o} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

Bu lineer denklem takımının katsayılar matrisi olan $\boldsymbol{F}(\omega)$'nin determinantının köklerinin karekökü ilgili uzaysal çerçevenin doğal frekanslarına karşılık gelir.

Ancak, uygulama olarak benzer yolları izlemesine rağmen, düzlemsel durumdan farklı olarak, uzaysal çerçevelerde, iki yeni durumun matematiksel modelde göz önünde bulundurulmasına ihtiyaç vardır:

- İncelenen çerçeve yapının üç boyutlu olması durumunda, doğal olarak artık bütün çubuk elemanlar aynı düzlemde bulunmamaktadır. Dolayısıyla, bu elemanların uzaydaki konumlarını modellemek için düzlemsel durumda yazılan dönüşüm matrisini uzaysal durum için oluşturmak gerekmektedir.
- Kesitin uzaydaki oryantasyonu da göz önünde bulundurulmalıdır.

Bu iki hususun uygulanması için doğrultman kosinüsü matrisi kullanılmıştır [45]. Doğrultman kosinüsü matrisini uygulamak için yapıda, yerel koordinat takımı, segment koordinat takımı ve global koordinat takımı adlarında üç farklı koordinat takımı kullanılmıştır (Şekil 1).

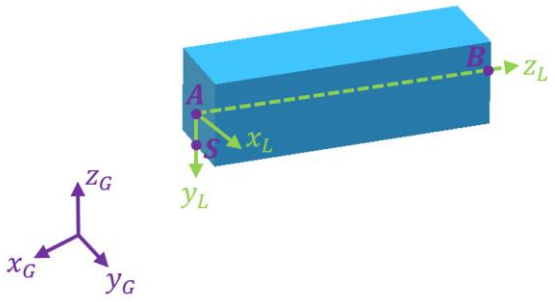


(a) Yerel koordinat takımı (b) Segment koordinat takımı (c) Global koordinat takımı

Şekil 1. Formülasyonda kullanılan koordinat sistemleri.

Yerel koordinat takımı, her çubuk üzerinde tanımlanmış olan koordinat takımıdır. Segment, sadece bir düğüm noktasını içeren alt çubuk grubu olarak; segment koordinat takımı ise her segmentte sadece bir çubuk üzerinde bulunan koordinat takımı olarak tanımlanmıştır. Global koordinat takımı ise, çerçevedeki herhangi bir noktaya yerleştirilmiş tek koordinat takımıdır.

Uzayda bir çubuğun konumunu ve oryantasyonunu kesin olarak tayin etmek için üç noktaya ihtiyaç olduğu bilgisinden hareketle, çubuğun ekseni üzerinde bulunan başlangıç (A) ve bitiş (B) noktalarının yanında, kesit oryantasyonunu kontrol etmek amacıyla başlangıç kesiti üzerinde yerel koordinat takımının orijini (A) dışında keyfi bir nokta (S) seçilmiştir (Şekil 2).



Şekil 2. Koordinat sistemleri.

Global koordinat takımına göre tanımlanan bu üç nokta kullanılarak oluşturulan doğrultman kosinüsü matrisi üzerinden, global koordinat takımı ve segment koordinat takımı arasında dönüşüm sağlanır ve çubuğun koordinatları segment koordinat sisteminde tekrardan tanımlanır. Burada dönüşüm matrisi:

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{n_X} \quad \boldsymbol{n_{S/A}} \quad \boldsymbol{n_{B/A}}]^{-1} \tag{6}$$

olarak yazılabilir. Ardından, yine aynı yaklaşım kullanılarak, segment koordinat sistemi ile yerel koordinat sistemi arasındaki ilişkiyi sağlayan dönüşüm matrisi oluşturulur ve bu matris kullanılarak kuvvet ve yer değiştirme uygunluk denklemleri yazılır [9]:

$$\boldsymbol{F_i(L_i)} - \sum_{\boldsymbol{m=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{Q_{i+m}^{-1} F_{i+m}(0)} = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q_{i+m} X_i(L_i)} - \boldsymbol{X_{i+m}(0)} = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

Burada, $\boldsymbol{i}$, segment koordinat sistemini taşıyan çubuğun indisine; $\boldsymbol{m}$ ise ilgili segmentteki diğer çubukları temsil eden indise karşılık gelmektedir ve $\boldsymbol{Q}$ matrisi,

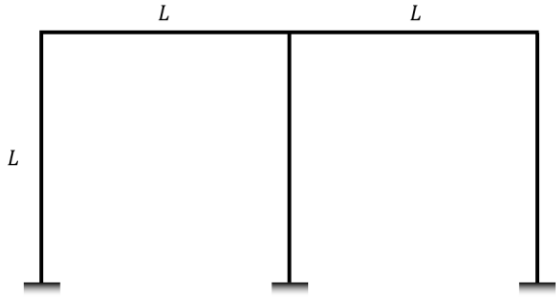
$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix} \tag{9}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Son durumda yukarıda da değinildiği üzere, sınır ve geçiş şartlarından hareketle yapının doğal frekansını verecek olan cebirsel denklem takımı oluşturulur.

SAYISAL SONUÇLAR

Yöntem, öncelikle kodun doğruluğunun sınanması amacıyla, düzlemsel, üç noktadan ankastre olarak mesnetlenmiş, iki bölümlü ve tek katlı bir düzlemsel çerçeve yapıya uygulanmıştır. Geometrik boyutlar ve malzeme özellikleri [9]'da bulunabilir.



Şekil 3. İki bölümlü ve tek katlı düzlemsel çerçeve.

GNU Octave programı kullanılarak ilk 10 mod için hesaplanan doğal frekans sonuçları, literatürdeki ve ABAQUS sonlu elemanlar paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak Çizelge 1'de sunulmuştur.

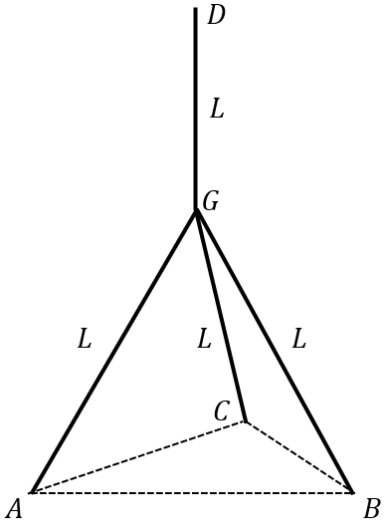
Çizelge 1. İki bölümlü ve tek katlı düzlemsel çerçeve için hesaplanan doğal frekansların karşılaştırılması (Hz).

Mod	Bu çalışma	[9]	[40]	ABAQUS
1	0.5822	-	-	0.5821
2	0.5986	0.5986	0.5987	0.5987
3	0.8676	-	-	0.8669
4	1.6832	-	-	1.6816
5	2.4655	2.4655	2.4662	2.4663
6	3.1067	3.1067	3.1080	3.1082
7	3.9830	-	-	3.9820
8	4.1861	4.1861	4.1885	4.1878
9	4.5052	4.5052	4.5085	4.5090
10	4.5077	4.5077	4.5110	4.5116

Düzlem içi modlar özelinde, hesaplanan sonuçlarla, [9] arasında tam uyum olduğu gözlenmiştir. Bunun sebebi, bu çalışmada kullanılan çubuk formülasyonunun düzlem içi bölümünün, [9]'da temel alınan formülasyon ile aynı olmasıdır. Elde edilen sonuçlarla, [40]'taki sonuçlar arasında ise maksimum %0.07 hata olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, literatürde sunulmayan fakat bu çalışmada dikkate alınan düzlem dışı doğal frekans sonuçları da sunulmuş ve bu sonuçlar da ABAQUS sonlu elemanlar paket programından elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Düzlem dışı modlar özelinde, paket programdan elde edilen sonuçlarla, hesaplanan sonuçlar arasındaki hatanın en fazla %0.1 olduğu gözlenmiştir.

İkinci örnek olarak, Şekil 4'te verilen üç boyutlu yapı analiz edilmiştir. Bu yapıda, AG, BG ve CG çubukları, ABCG düzgün dörtyüzlüsünün kenarlarını oluşturmaktadır. L=1 m; kutu profil için kesit boyutları 50x30x2 mm; yoğunluk, 7850 kg/m^3; Poisson oranı, 0.3; elastisite modülü ise 210 GPa olarak alınmıştır. A-B-C noktaları ankastre olarak mesnetlenmişken, D ucu serbest olarak tanımlanmıştır.

İlk altı mod için hesaplanan doğal frekans sonuçları, ABAQUS sonlu eleman analizi paket programından elde edilmiş olanlarla karşılaştırılmış (Çizelge 2) ve hatanın en fazla %0.13 olduğu tespit edilmiştir.

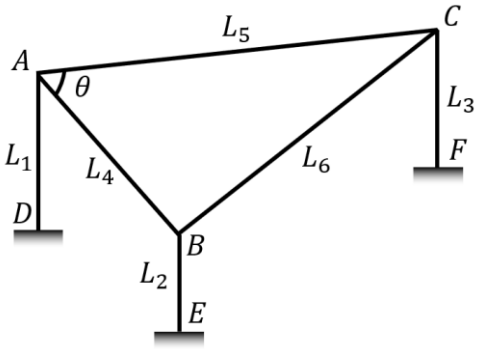


Şekil 4. İkinci örnekte incelenen uzaysal çerçeve yapı.

Çizelge 2. İkinci örnek için hesaplanan doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması (Hz).

Mod	Bu çalışma	ABAQUS
1	31.3	31.2
2	41.6	41.5
3	170.3	170.3
4	183.7	183.7
5	208.7	208.7
6	218.4	218.6

Ardından, Şekil 5'te verilen, nispeten daha karmaşık bir uzaysal çerçeve yapının analizi gerçekleştirilmiştir. Bu örnekte, θ=50°, L_1=0.2 m, L_2=0.4 m, L_3=0.55 m, L_4=0.4 m ve L_5=0.6 m olarak alınmıştır. AD, BE ve CF çubukları, ABC düzlemine dik olarak konumlandırılmıştır. Malzeme ve kesit özellikleri ise ikinci örnektekilerle aynı alınmıştır.



Şekil 5. Üçüncü örnekte incelenen uzaysal çerçeve yapı.

Sınır şartlarının yine üç noktadan (D-E-F) ankastre olarak tanımlandığı örnekte, ilk altı mod için hesaplanan doğal frekans sonuçları, ABAQUS sonlu elemanlar analizi paket programından elde edilmiş olanlarla karşılaştırılmış (Çizelge 3) ve hatanın en fazla %0.62 olduğu tespit edilmiştir.

Çizelge 3. Üçüncü örnek için hesaplanan doğal frekans değerlerinin karşılaştırılması (Hz).

Mod	Bu çalışma	ABAQUS
1	126.5	126.5
2	235.0	236.1
3	369.7	372.0
4	446.9	448.1
5	586.1	587.6
6	714.4	717.5

SONUÇLAR

Bu çalışmada, çubuk teorisinin temel denklemleri kullanılarak uzaysal çerçeve yapıların serbest titreşim davranışları analitik olarak incelenmiştir. Eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkilerinin göz önünde bulundurulduğu çalışmada, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak kesin analitik çözüm elde edilmiştir. Çerçeve yapının uzaysal olarak modellenmesinde doğrultman kosinüsü matrisleri yöntemi kullanılmıştır. Üç farklı örnek çözülmüş ve elde edilen sonuçlar, literatürle ve sonlu eleman analizi paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuçlar arasında iyi bir uyum olduğu gözlenmiştir.

İleriye yönelik olarak, sunulan çalışmanın, doğru ve eğri eksenli çubukları bir arada içeren ve kompozit malzemeden imal edilen uzaysal çerçeve tipi yapıların mekanik davranışlarını inceleyecek şekilde genişletilmesi potansiyeli değerlendirilmektedir. Bu sayede, literatürde sınırlı sayıda bulunduğu gözlenmiş olan uzaysal çerçeve tipi yapıların mekanik davranışlarının analitik yöntemlerle incelenmesi konusunun daha ilgi çekici bir hale getirilebileceğine inanılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] A.A. Chaker, A. Cherifati, Influence of masonry infill panels on the vibration and stiffness characteristics of R/C frame buildings, Earthq. Eng. Struct. Dyn. 28 (1999) 1061–1065. https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199909)28:9<1061::AID-EQE856>3.0.CO;2-3.

[2] S. Chen, H. Huang, Optimum design of a space frame and its application in satellite structure, J. Spacecr. Rockets. 47 (2010) 1063–1066. https://doi.org/10.2514/1.49203.

[3] I.M. Ibrahim, D.A. Crolla, D.C. Barton, Effect of frame flexibility on the ride vibration of trucks, Comput. Struct. 58 (1996) 709–713. https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00198-P.

[4] C. Kaiser, C. Widani, K. Härtel, P. Haberler, O. Lecrenier, D. Buvat, G. Labruyere, Development and verification of a high-performance CFRP structure for the space-borne lidar instrument ALADIN, 10567 (2017) 87. https://doi.org/10.1117/12.2308121.

[5] M. Tüfekci, Ö.E. Genel, A. Tatar, E. Tüfekci, Dynamic analysis of composite wind turbine blades as beams: An analytical and numerical study, Vibration. 4 (2021) 1–15. https://doi.org/10.3390/vibration4010001.

[6] G. Tuzzi, C.W. Schwingshackl, J.S. Green, Study of coupling between shaft bending and disc zero nodal diameter modes in a flexible shaft-disc assembly, J. Sound Vib. 479 (2020) 115362. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115362.

[7] Tze Hsin Woo, Space frame optimization subject to frequency constraints., Collect. Tech. Pap. - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. 1 (1986) 103–115. https://doi.org/10.2514/6.1986-877.

[8] A. Yucel, A. Arpaci, E. Tufekci, Coupled axial-flexural-torsional vibration of Timoshenko frames, JVC/Journal Vib. Control. 20 (2014) 2366–2377. https://doi.org/10.1177/1077546313484348.

[9] U. Eroglu, E. Tufekci, Free vibration of damaged frame structures considering the effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia: exact solution, Int. J. Struct. Stab. Dyn. 17 (2017) 1–20. https://doi.org/10.1142/S0219455417501115.

[10] J. Freund, A. Karakoç, Shear and torsion correction factors of Timoshenko beam model for generic cross sections, Res. Eng. Struct. Mater. 2 (2016) 19–27.

[11] E. Tüfekçi, A. Arpaci, Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects, J. Sound Vib. 209 (1998) 845–856. https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1290.

[12] D.J. Mead, Free vibrations of self-strained assemblies of beams, J. Sound Vib. 249 (2002) 101–127. https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3830.

[13] B.A. Ovunc, Dynamics of frameworks by continuous mass method, Comput. Struct. 4 (1974) 1061–1089. https://doi.org/10.1016/0045-7949(74)90024-8.

[14] A. Ansell, The dynamic element method for analysis of frame and cable type structures, Eng. Struct. 27 (2005) 1906–1915. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2005.06.010.

[15] D.H. Moon, M.S. Choi, Vibration analysis for frame structures using transfer of dynamic stiffness coefficient, J. Sound Vib. 234 (2000) 725–736. https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2970.

[16] H. Antes, M. Schanz, S. Alvermann, Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and Timoshenko beams, J. Sound Vib. 276 (2004) 807–836. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.08.048.

[17] H.P. Lin, J. Da Wu, Dynamic analysis of planar closed-frame structures, J. Sound Vib. 282 (2005) 249–264. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.027.

[18] H.P. Lin, J. Ro, Vibration analysis of planar serial-frame structures, J. Sound Vib. 262 (2003) 1113–1131. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01089-1.

[19] B. Rafezy, A. Zare, W.P. Howson, Coupled lateral-torsional frequencies of asymmetric, three-dimensional frame structures, Int. J. Solids Struct. 44 (2007) 128–144. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.04.019.

[20] O. Wallner, K. Ergenzinger, S. Tuttle, L. Vaillon, U. Johann, EUCLID mission design, içinde: Int. Conf. Sp. Opt., Rhodes, Greece, 2010: s. 90. https://doi.org/10.1117/12.2309226.

[21] S.C. Ng, J.S. Kuang, Triply coupled vibration of asymmetric wall-frame structures, J. Struct. Eng. 126 (2000) 982–987.

[22] W.P. Howson, F.W. Williams, Natural frequencies of frames with axially loaded Timoshenko Members, J. Sound Vib. 26 (1973) 503–515. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80216-0.

[23] S.L. Chan, G.W.M. Ho, Nonlinear vibration analysis of steel frames with semirigid connections, J. Struct. Eng. 120 (1994) 1075–1087. https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1994)120:4(1075).

[24] F. Minghini, N. Tullini, F. Laudiero, Vibration analysis of pultruded FRP frames with semi-rigid connections, Eng. Struct. 32 (2010) 3344–3354. https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.07.008.

[25] P.G. Nikolakopoulos, D.E. Katsareas, C.A. Papadopoulos, Crack identification in frame structures, Comput. Struct. 64 (1997) 389–406.

[26] W.H. Chen, C.W. Wu, A spline wavelets element method for frame structures vibration, Comput. Mech. 16 (1995) 11–21. https://doi.org/10.1007/BF00369881.

[27] H.A. Pham, V.H. Truong, T.C. Vu, Fuzzy finite element analysis for free vibration response of functionally graded semi-rigid frame structures, Appl. Math. Model. 88 (2020) 852–869. https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.07.014.

[28] M.I. Basci, T.G. Toridis, K. Khozeimeh, O.A. Fettahlioglu, Improved method of free vibration analysis of frame structures, Comput. Struct. 10 (1979) 255–265. https://doi.org/10.1016/0045-7949(79)90094-4.

[29] A. Ranjbaran, Free-Vibration Analysis of Stiffened Frames, J. Eng. Mech. 140 (2014) 04014071. https://doi.org/10.1061/(asce)em.1943-7889.0000783.

[30] Y. Yang, S. Gao, K. Chen, Y. Pan, P. Guo, Vibration analysis and development of an ultrasonic elliptical vibration tool based on a portal frame structure, Precis. Eng. 50 (2017) 421–432. https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2017.06.016.

[31] K.B. Bozdogan, D. Ozturk, Vibration analysis of asymmetic-plan frame buildings using transfer matrix method, Math. Comput. Appl. 15 (2010) 279–288.

[32] R. Uhrig, The transfer matrix method seen as one method of structural analysis among others, J. Sound Vib. 4 (1966) 136–148. https://doi.org/10.1016/0022-460X(66)90117-9.

[33] R.J. Nagem, J.H. Williams, Dynamic analysis of large space structures using transfer matrices and joint coupling matrices, Mech. Struct. Mach. 17 (1989) 349–371. https://doi.org/10.1080/089054508915646.

[34] M. Rezaiee-Pajand, R. Khajavi, Vibration analysis of plane frames by customized stiffness and diagonal mass matrices, Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci. 225 (2011) 2848–2863. https://doi.org/10.1177/0954406211405435.

[35] R. Kamgar, M.M. Saadatpour, A simple mathematical model for free vibration analysis of combined system consisting of framed tube, shear core, belt truss and outrigger system with geometrical discontinuities, Appl. Math. Model. 36 (2012) 4918–4930. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.12.029.

[36] X. Wang, Y. Wang, Y. Zhou, Application of a new differential quadrature element method to free vibrational analysis of beams and frame structures, J. Sound Vib. 269 (2004) 1133–1141. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00405-X.

[37] G.R. Heppler, D.C.D. Oguamanam, J.S. Hansen, Vibration of a two-member open frame, J. Sound Vib. 263 (2003) 299–317. https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01125-2.

[38] B. Åkesson, PFVIBAT—a computer program for plane frame vibration analysis by an

exact method, Int. J. Numer. Methods Eng. 10 (1976) 1221–1231. https://doi.org/10.1002/nme.1620100603.

[39] C. Mei, Free vibration analysis of classical single-story multi-bay planar frames, JVC/Journal Vib. Control. 19 (2013) 2022–2035. https://doi.org/10.1177/1077546312455081.

[40] A. Labib, D. Kennedy, C. Featherston, Free vibration analysis of beams and frames with multiple cracks for damage detection, J. Sound Vib. 333 (2014) 4991–5003. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.05.015.

[41] M.A. Khan, K. Akhtar, N. Ahmad, F. Shah, N. Khattak, Vibration analysis of damaged and undamaged steel structure systems: cantilever column and frame, Earthq. Eng. Eng. Vib. 19 (2020) 725–737. https://doi.org/10.1007/s11803-020-0591-9.

[42] B. Bozyigit, Y. Yesilce, S. Acikgoz, Free vibration analysis of arch-frames using the dynamic stiffness approach, Vibroengineering Procedia. 30 (2020) 72–78. https://doi.org/10.21595/vp.2020.21291.

[43] I. Caliò, A. Greco, D. D'Urso, Free vibrations of spatial Timoshenko arches, J. Sound Vib. 333 (2014) 4543–4561. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.019.

[44] E. Tufekci, O.O. Yigit, In-plane vibration of circular arches with varying cross-sections, Int. J. Struct. Stab. Dyn. 13 (2013) 1–19. https://doi.org/10.1142/S021945541350003X.

[45] P. Nikravesh, Computer-aided analysis of mechanical systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 1988.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

DOĞRU VE EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARDAN OLUŞAN ÇERÇEVELERİN TİTREŞİMLERİ

Nihat Özten[1], Ömer Ekim Genel[1] ve Ekrem Tüfekci[1]
[1]İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Gümüşsuyu, 34437, İstanbul

ABSTRACT

Free vibration behaviour of frame structures consist of straight and curved beam members is investigated analytically by using the initial value method. In the formulation, effects of axial extension, shear deformation and rotatory inertia are considered. Various examples are solved and results are compared with those from the commercial finite element software and the literature. Effects of different boundary conditions on the dynamic behaviour are also studied. In addition, effects of the opening angle, the curvature and the slenderness ratio on the natural frequencies are examined parametrically.

Keywords: frame, straight beam, curved beam, initial value method, exact analytical solution.

ÖZET

Doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan çerçeve yapıların serbest titreşimleri başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak analitik olarak incelenmiştir. Eksenel uzama, kayma şekil değişimi ve dönme eylemsizliğinin gözönünde bulundurulduğu çalışmada, çeşitli örnekler çözülmüş ve elde edilen sonuçlar sonlu elemanlar paket programından elde edilen sonuçlarla ve literatürle karşılaştırılmıştır. Ayrıca, farklı sınır şartlarının dinamik davranış üzerindeki etkileri incelenmiştir. Son olarak, açıklığın, eğriliğin ve narinlik oranının doğal frekanslar üzerindeki etkileri parametrik olarak irdelenmiştir.

Anahtar kelimeler: çerçeve, doğru eksenli çubuk, eğri eksenli çubuk, başlangıç değerleri yöntemi, kesin analitik çözüm.

GİRİŞ

Yapı elemanlarından çubuk, en temel modelleme unsurlarından birisi olarak özellikle makina ve inşaat mühendisliğinde geniş ve önemli bir uygulama alanına sahiptir. Bu elemanları temel alan çalışmalar, ele alınan elemanın eksen tipi, kesit geometrisi ve malzeme özellikleri üzerinden sınıflandırılabileceği gibi modelin temsil kabiliyetini artıran etkileri(eksen uzaması, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği vb.) matematiksel modele dahil etme kabiliyeti, yapısal davranışın uzaysal temsil kapsamı(düzlem içi, düzlem dışı ve üç boyutlu) ve incelediği mekanik davranışın kapsamı (statik, dinamik ve burkulma) üzerinden de sınıflandırılabilir. Modellemenin tek bir çubuk elemanla yapıldığı durumlara ek olarak, birden fazla çubuk elemanın bir araya getirilmesiyle oluşturulmuş, çerçeve adı verilen yapılara da günümüzde ihtiyaç duyulmaktadır. Bu çerçeve yapılar, makine mühendisliğinde, taşıtlar, hava-uzay yapıları, aydınlatma direkleri [1–4]; inşaat mühendisliğinde ise köprüler, kubbe tipi yapılar, depreme dayanıklılığın önemli olduğu güç santralleri ve boru hatları [5–7] başta

olmak üzere birçok önemli mühendislik alanında sıklıkla kullanılan sistemlerdir. Bu yapıların eksenleri, tasarım kriterleri ve/veya kısıtlarından dolayı sadece doğru [1,8,9], sadece eğri [6,10] ya da bu iki eksen tipini bir arada bulunduracak şekilde [3,5,7,11,12] tasarlanabilmektedir. İçinde bulundukları ortam ve üzerlerine etkiyen yükler nedeniyle, bu yapıların dinamik davranışlarının incelenmesi mühendislik açısından önemlidir.

Genel olarak, eğri eksenli bir çubuk, içerdiği bağlaşıklıklardan dolayı doğru eksenli çubuğa kıyasla daha karmaşık olarak kabul edilmektedir. Bu yapılar için sunulan ilk çalışmalara [13,14] örnek gösterilebilir. Bu çubukların mekanik davranışlarının incelenmesinde, göz ardı edilen unsurlar temelde, eksen uzaması, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkileri olmakla birlikte bunların biri veya birkaçının yapılan hesaba dahil edilmemesi daha hızlı sonuç alınabilmesine olanak sağlamaktadır. Öte yandan, ele alınan probleme göre etkisi az veya çok olabilecek bu durumların, elde edilecek sonuçları, olması gereken doğru değerlerden bir miktar uzaklaştıracağı da bir gerçektir [15,16]. Takahashi, eğri eksenli bir çubuğun düzlem dışı titreşimlerini Lagrange fonksiyonu temelli bir yaklaşım kullanarak incelemiştir [17]. Kikuchi, eğri eksenli bir çubuğun doğal frekanslarını, doğru eksenli çubuk elemanlar kullanarak sonlu elemanlar yöntemiyle incelemiştir [18]. Kawakami ve diğ., değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerini Green fonksiyonu kullanarak inceleyen yaklaşık bir yöntem geliştirmiştir [19]. Sabit keside sahip dairesel çubukların düzlem içi titreşimleri, Tufekci ve Arpacı tarafından başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak kesin analitik olarak incelenmiştir [16]. Çalışmada, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğinin etkileri dikkate alınmıştır. Huang ve diğ., değişken eğrilik ve keside sahip eğri eksenli çubukların düzlem dışı titreşimlerini dinamik rijitlik matrisi yöntemi kullanarak incelemiştir [20]. Liu ve Wu, sabit, değişken ve kademeli kesitlere sahip eğri eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşimlerini genelleştirilmiş diferansiyel kuadratür yöntemi kullanarak incelemiştir [21]. Lee ve Chao, değişken kesitli eğri eksenli çubukların düzlem-dışı serbest titreşimlerinin yönetici diferansiyel denklemlerini Hamilton Prensibi kullanarak elde ederek kesin çözümü elde etmiştir [22]. Rubin ve Tufekci, sabit kesitli dairesel çubukların üç boyutlu serbest titreşimlerini, Cosserat nokta teorisi kullanarak incelemiştir [23]. Tufekci ve Ozdemirci, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini dikkate alarak dairesel eksene sahip kademeli çubukların düzlem içi serbest titreşimlerine dair kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemini kullanarak elde etmiştir [15]. Aynı etkiler dikkate alınarak, değişken eğriliğe ve değişken keside sahip çubukların düzlem içi titreşimleri Yigit ve Tufekci tarafından incelenmiştir [24].

Literatürde, doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan çerçeve yapıların serbest titreşimlerini inceleyen çalışmalar sınırlı sayıda bulunmaktadır. Suzuki ve Takahashi, iki adet doğru eksenli ve bir adet eğri eksenli çubuktan oluşan bir çerçevenin düzlem dışı titreşimlerini analitik olarak incelemiştir [7]. Cortinez ve diğ., serbest ucunda noktasal bir kütle taşıyan doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan bir çerçeve yapının düzlem içi serbest titreşimlerini çeşitli yöntemlerle incelemiştir [11]. Laura ve diğ. ise [11]'de elde edilen sonuçların karşılaştırıldığı bir deney gerçekleştirmiştir [3]. Howson ve diğ., eğri eksenli çubuklardan oluşan yapıların düzlem dışı doğal frekanslarını kesin olarak hesaplayabilen, dinamik rijitlik matrisi temelli yeni bir yöntem önermiştir [10]. Wu ve Chiang, literatürden farklı şekil fonksiyonları kullanarak doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan bir çerçevenin düzlem içi titreşimlerini incelemiştir [12]. Özyiğit, serbest ucunda noktasal bir kütle taşıyan, doğru eksenli çubuklardan oluşan bir çerçevenin serbest titreşimlerini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir [8]. Calio ve diğ., eğri eksenli çubuklardan oluşturulan, üç boyutlu çerçeve yapıların serbest titreşimlerini kesin dinamik rijitlik matrisi yöntemini kullanarak incelemiştir [6]. Bozyigit ve diğ., iki adet doğru eksenli ve bir adet eğri eksenli çubuktan oluşan bir

çerçevenin serbest titreşimlerini, eksenel uzama, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğini dikkate alarak dinamik rijitlik matrisi yöntemini kullanarak incelemiştir [5].

Bu çalışmada, doğru eksenli ve eğri eksenli çubuklardan oluşan çerçevelerin düzlem içi ve düzlem dışı titreşimlerinin doğal frekansları, eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği hesaba dahil edilerek ve başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak kesin analitik olarak elde edilmiştir. Geliştirilen matematiksel modelde, çubukların kesitlerinin üniform, malzemelerinin homojen ve izotrop, ayrıca eğri eksenli çubuğun ekseninin de çember olduğu varsayılmıştır.

FORMÜLASYON

$(\ )^{\boldsymbol{d}}$ ve $(\ )^{\boldsymbol{e}}$ üst indisleri sırasıyla ilgili ifadenin doğru ve eğri eksenli çubuğa ait olduğunu göstermek üzere, bu çubukların düzlem içi ve düzlem dışı serbest titreşimlerini veren denklem takımı her iki durumda aşağıdaki yapıda ifade edilebilir:

$$\frac{d\boldsymbol{y^d}}{dz} = \boldsymbol{A^d y^d} \qquad \frac{d\boldsymbol{y^e}}{d\theta} = \boldsymbol{A^e y^e} \tag{1}$$

Burada, z ve θ çubuk eksenini belirleyen koordinatlarıdır. $\boldsymbol{y^d}$ ve $\boldsymbol{y^e}$ vektörleri ise, 12x1 boyutundaki değişkenler vektörleri olup, bunlar açık olarak:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y^d} &= [u_x \quad u_y \quad u_z \quad \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z \quad F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T \\ \boldsymbol{y^e} &= [u_n \quad u_b \quad u_t \quad \Omega_n \quad \Omega_b \quad \Omega_t \quad F_n \quad F_b \quad F_t \quad M_n \quad M_b \quad M_t]^T \end{aligned} \tag{2}$$

$\boldsymbol{y^d}$ vektöründe, u_x, u_y ve u_z sırasıyla x, y ve z eksenlerindeki yer değiştirmeleri; Ω_x, Ω_y ve Ω_z ise sırasıyla kesitin bu eksenler etrafındaki dönüş açılarını; F_x, F_y ve F_z iç kuvvetleri; M_x, M_y ve M_z ise iç momentleri temsil etmektedir. Benzer şekilde, $\boldsymbol{y^e}$ vektöründe, u_n, u_b ve u_t sırasıyla n, b ve t eksenlerindeki yer değiştirmeleri; Ω_n, Ω_b ve Ω_t ise sırasıyla kesitin bu eksenler etrafındaki dönme açılarını; F_n, F_b ve F_t iç kuvvetleri; M_n, M_b ve M_t de iç momentleri ifade etmektedir.

Denklem (1)'deki $\boldsymbol{A^d}$ ve $\boldsymbol{A^e}$ matrisleri ise 12x12 boyutunda olup, katsayılar matrisi olarak adlandırılmaktadır. Burada, $\boldsymbol{A^d}$ matrisinin sıfırdan farklı elemanları,

$$\begin{aligned} &A^d_{1,5} = A^d_{10,8} = 1 && A^d_{3,9} = 1/EA && A^d_{7,1} = A^d_{8,2} = A^d_{9,3} = -\mu\omega^2 \\ &A^d_{1,7} = k_x/GA && A^d_{4,10} = 1/EI_x && A^d_{10,4} = -\mu\frac{I_x}{A}\omega^2 \\ &A^d_{2,4} = A^d_{11,7} = -1 && A^d_{5,11} = 1/EI_y && A^d_{11,5} = -\mu\frac{I_y}{A}\omega^2 \\ &A^d_{2,8} = k_y/GA && A^d_{6,12} = 1/GJ && A^d_{12,6} = -\mu\frac{I_z}{A}\omega^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Burada, k_x ve k_y sırasıyla x ve y eksenlerindeki kayma düzeltme faktörlerini; E ve G, sırasıyla elastisite ve kayma modüllerini; A, kesit alanını; I_x, I_y ve I_z sırasıyla x, y ve z eksenlerine göre yazılan alan atalet momentlerini; J, burulma sabitini; μ, birim boy başına kütleyi ve ω ise açısal frekans değerini ifade etmektedir.

Benzer şekilde, $\boldsymbol{A^e}$ matrisinin sıfırdan farklı elemanları,

$$
\begin{aligned}
&A^e_{1,5} = A^e_{10,8} = R && A^e_{4,10} = R/EI_n && A^e_{12,6} = -R\mu\frac{I_p}{A}\omega^2 \\
&A^e_{2,4} = A^e_{11,7} = -R && A^e_{5,11} = R/EI_b && A^e_{7,1} = A^e_{8,2} = A^e_{9,3} = -R\mu\omega^2 \\
&A^e_{1,7} = k_nR/GA && A^e_{6,12} = R/GJ && A^e_{3,1} = A^e_{6,4} = A^e_{9,7} = A^e_{12,10} = 1 \\
&A^e_{2,8} = k_bR/GA && A^e_{10,4} = -R\mu\frac{I_n}{A}\omega^2 && A^e_{1,3} = A^e_{6,4} = A^e_{7,9} = A^e_{10,12} = -1 \\
&A^e_{3,9} = R/EA && A^e_{11,5} = -R\mu\frac{I_b}{A}\omega^2 &&
\end{aligned}
\tag{4}
$$

olarak yazılır. Denklem (3) için yapılan tanımlamalara ek olarak, Denklem (4)'de, R eğriliği; k_n ve k_b sırasıyla n ve b eksenlerindeki kayma düzeltme faktörlerini; I_n, I_b ve I_p ise sırasıyla n, b ve t eksenlerine göre yazılan alan atalet momentlerini temsil etmektedir.

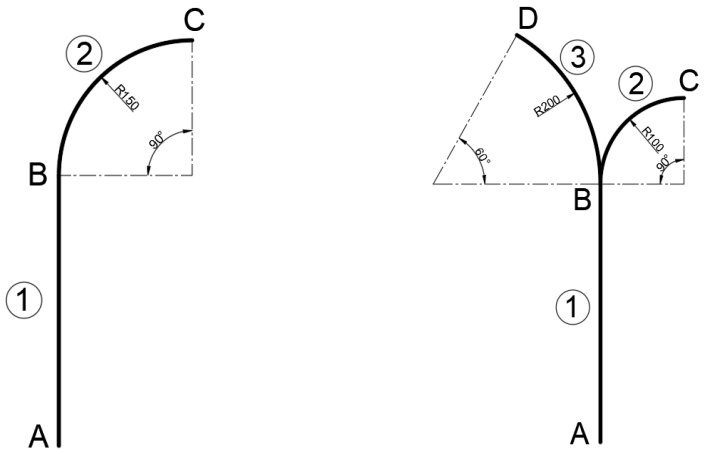
Denklem (1)'de verilen denklemlerin çözümleri, başlangıç değerleri yöntemiyle aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\boldsymbol{y^d} = e^{[\boldsymbol{A^d}]z}\boldsymbol{y^d_o} \qquad\qquad \boldsymbol{y^e} = e^{[\boldsymbol{A^e}]\theta}\boldsymbol{y^e_o} \tag{5}$$

Doğru ve eğri eksenli çubuk için ayrı ayrı oluşturulan Denklem (5)'teki çözümler kullanılarak, doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan bir çerçeve yapı için gerekli sınır ve geçiş şartları oluşturulur. Bu cebirsel denklem takımının katsayılar matrisinin determinantının kökleri, ilgili çerçeve yapının doğal frekanslarını verecektir [9,15].

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, dört adet sayısal örnek çözülmüştür. İlk üç örnekte, kesit, dairesel boru profil olup iç çapı 19 cm, dış çapı 20 cm; yoğunluğu 7850 kg/m^3 ve elastisite modülü 210 GPa olarak alınmıştır. Dördüncü örnekte kullanılan kesit ve malzeme özellikleri ise [12]'ten alınmıştır. Birinci ve ikinci örneklerde, bir adet doğru eksenli çubuğun, sırasıyla, bir ve iki adet eğri eksenli çubuk ile oluşturduğu çerçeve yapıların doğal frekansları elde edilmiştir (Şekil 1). Her iki örnekte de doğru eksenli çubuğun boyu 3 m olarak alınmıştır.



(a) (b)

Şekil 1. Bir ve iki eğri eksenli çubuktan oluşan çerçeve yapılar.

Ele alınan ilk örnekte, A ucu ankastre olarak, C ucu ise serbest olarak modellenmiştir. Bu durumda sınır şartları ve B noktası için yazılan geçiş şartları Çizelge 1'deki gibi yazılır:

Çizelge 1. Birinci örnekte kullanılan sınır ve geçiş şartları.

Ankastre mesnet ($z = 0$)	Serbest uç ($\theta = \theta_C$)	Geçiş şartları (B noktası)	
$u_1(0) = 0$	$F_{n2}(\theta_C) = 0$	$u_1(l) = u_2(0)$	$F_{x1}(l) = F_{n2}(0)$
$v_1(0) = 0$	$F_{b2}(\theta_C) = 0$	$v_1(l) = v_2(0)$	$F_{y1}(l) = F_{b2}(0)$
$w_1(0) = 0$	$F_{t2}(\theta_C) = 0$	$w_1(l) = w_2(0)$	$F_{z1}(l) = F_{t2}(0)$
$\Omega_{x1}(0) = 0$	$M_{n2}(\theta_C) = 0$	$\Omega_{x1}(l) = \Omega_{n2}(0)$	$M_{x1}(l) = M_{n2}(0)$
$\Omega_{y1}(0) = 0$	$M_{b2}(\theta_C) = 0$	$\Omega_{y1}(l) = \Omega_{b2}(0)$	$M_{y1}(l) = M_{b2}(0)$
$\Omega_{z1}(0) = 0$	$M_{t2}(\theta_C) = 0$	$\Omega_{z1}(l) = \Omega_{t2}(0)$	$M_{z1}(l) = M_{t2}(0)$

İkinci örnekte, A ucu yine ankastre olarak, C ve D uçları ise serbest olarak modellenmiştir. Bu durumda sınır şartları ve B noktası için yazılan geçiş şartları Çizelge 2 ve Çizelge 3'deki gibi yazılır:

Çizelge 2. İkinci örnekte kullanılan sınır şartları.

Ankastre mesnet ($z = 0$)	Serbest uç C ($\theta = \theta_C$)	Serbest uç D ($\theta = \theta_D$)
$u_1(0) = 0$	$F_{n2}(\theta_C) = 0$	$F_{n2}(\theta_D) = 0$
$v_1(0) = 0$	$F_{b2}(\theta_C) = 0$	$F_{b2}(\theta_D) = 0$
$w_1(0) = 0$	$F_{t2}(\theta_C) = 0$	$F_{t2}(\theta_D) = 0$
$\Omega_{x1}(0) = 0$	$M_{n2}(\theta_C) = 0$	$M_{n2}(\theta_D) = 0$
$\Omega_{y1}(0) = 0$	$M_{b2}(\theta_C) = 0$	$M_{b2}(\theta_D) = 0$
$\Omega_{z1}(0) = 0$	$M_{t2}(\theta_C) = 0$	$M_{t2}(\theta_D) = 0$

Çizelge 3. İkinci örnekte B noktası için yazılan geçiş şartları.

$u_1(l) = u_2(0)$	$F_{x1}(l) = F_{n2}(0) - F_{n3}(0)$	$u_1(l) = -u_3(0)$
$v_1(l) = v_2(0)$	$F_{y1}(l) = F_{b2}(0) - F_{b3}(0)$	$v_1(l) = -v_3(0)$
$w_1(l) = w_2(0)$	$F_{z1}(l) = F_{t2}(0) + F_{t3}(0)$	$w_1(l) = w_3(0)$
$\Omega_{x1}(l) = \Omega_{n2}(0)$	$M_{x1}(l) = M_{n2}(0) - M_{n3}(0)$	$\Omega_{x1}(l) = -\Omega_{n3}(0)$
$\Omega_{y1}(l) = \Omega_{b2}(0)$	$M_{y1}(l) = M_{b2}(0) - M_{b3}(0)$	$\Omega_{y1}(l) = -\Omega_{b3}(0)$
$\Omega_{z1}(l) = \Omega_{t2}(0)$	$M_{z1}(l) = M_{t2}(0) + M_{t3}(0)$	$\Omega_{z1}(l) = \Omega_{t3}(0)$

Hesaplanan analitik sonuçlar, ABAQUS sonlu eleman analiz paket programından elde edilen sonuçlarla karşılaştırılarak Çizelge 4 ve Çizelge 5'de sunulmuştur.

Çizelge 4. Birinci örnek için elde edilen doğal frekans değerleri (Hz).

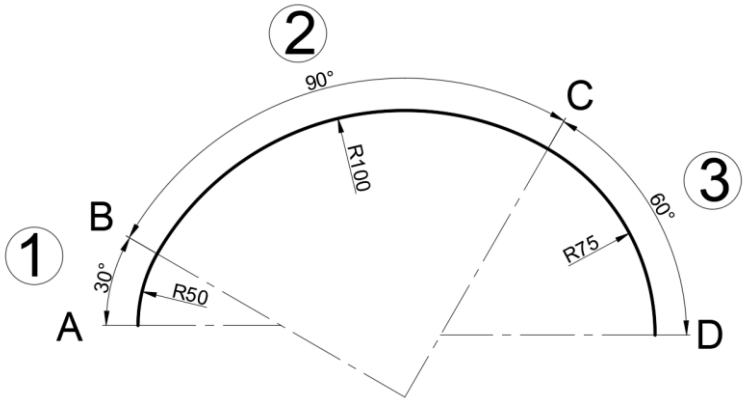
Mod	Bu çalışma	ABAQUS
1	7.313	7.310
2	7.334	7.331
3	32.981	32.971
4	38.292	38.280
5	81.540	81.517
6	103.814	103.780

Çizelge 5. İkinci örnek için elde edilen doğal frekans değerleri (Hz).

Mod	Bu çalışma	ABAQUS
1	6.406	6.403
2	6.484	6.481
3	27.641	27.611
4	42.049	42.007
5	53.944	53.917
6	67.053	67.018

Analitik sonuçlar ile ABAQUS programından elde edilen sonuçlar arasındaki en büyük hatanın sırasıyla %0.04 ve %0.11 olduğu tespit edilmiştir.

Bu karşılaştırmaların yanı sıra, Şekil 2'de verilen çerçeve yapıda farklı sınır şartlarının doğal frekans değerleri üzerindeki etkisi gösterilmiştir.



Şekil 2. Üç eğri eksenli çubuktan oluşan çerçeve yapı.

Önceki örneklerde yazılan sınır ve geçiş şartlarına ek olarak, küresel mesnet ve sabit mesnet için tanımlanan sınır şartları Çizelge 6'da verilmiştir:

Çizelge 6. Küresel mesnet ve sabit mesnet için sınır şartları (A ucu için).

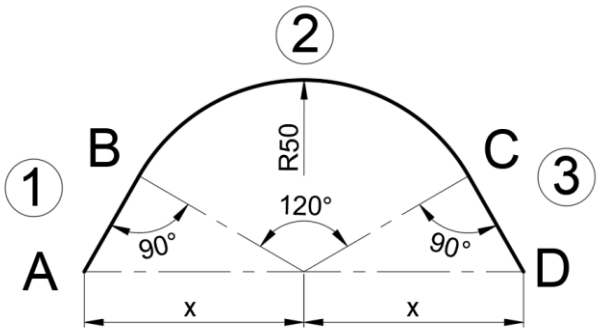
Küresel mesnet ($\theta = \theta_A$)	Sabit mesnet ($\theta = \theta_A$)
$u_1(\theta_A) = 0$	$u_1(\theta_A) = 0$
$v_1(\theta_A) = 0$	$v_1(\theta_A) = 0$
$w_1(\theta_A) = 0$	$w_1(\theta_A) = 0$
$M_{n1}(\theta_A) = 0$	$\Omega_{n1}(\theta_A) = 0$
$M_{b1}(\theta_A) = 0$	$M_{b1}(\theta_A) = 0$
$M_{t1}(\theta_A) = 0$	$\Omega_{t1}(\theta_A) = 0$

Serbest–serbest (S–S), ankastre–ankastre (A–A), ankastre–küresel mesnet (A–KM), küresel mesnet-küresel mesnet (KM–KM), ankastre–sabit mesnet (A–SM), sabit mesnet–sabit mesnet (SM–SM) mesnetleme durumlarındaki sonuçlar Çizelge 7'de karşılaştırılmıştır.

Çizelge 7. Üçüncü örnek için elde edilen doğal frekans değerleri (Hz).

Mod	KM–KM	KM–KM (ABAQUS)	S–S	A–A	A–KM	A–SM	SM–SM
1	173.904	173.860	150.594	144.561	72.870	144.561	144.561
2	183.623	183.580	316.118	312.231	246.894	246.894	246.894
3	425.839	425.760	403.351	379.719	265.743	379.719	379.719
4	455.341	455.260	457.286	516.053	495.694	495.694	495.694
5	682.661	682.600	755.497	713.901	569.094	713.901	713.901
6	753.912	753.830	765.768	852.604	736.251	852.604	852.604

Bazı mesnetlerin düzlem içi ve düzlem dışı davranışlarının farklı karakterde olmalarından dolayı, bazı modların ve hesaplanan doğal frekans değerlerinin aynı kaldığı gözlenmiştir.



Şekil 3. İki doğru ve bir eğri eksenli çubuktan oluşan çerçeve yapı.

Dördüncü örnekte, [12]'de bulunan ve Şekil 3'te verilen çerçeve yapının doğal frekansları elde edilmiştir. Çubuk kesiti dikdörtgen olup, [12]'de bu yapı için sadece düzlem içi titreşimler ele alınmaktadır. Bu sebeple [12]'de kullanılan geometrik parametrelerle problem tekrar çözülüp buradaki değerler ile karşılaştırılmıştır (Çizelge 8).

Çizelge 8. Dördüncü örnekte elde edilen doğal frekans değerleri (rad/s).

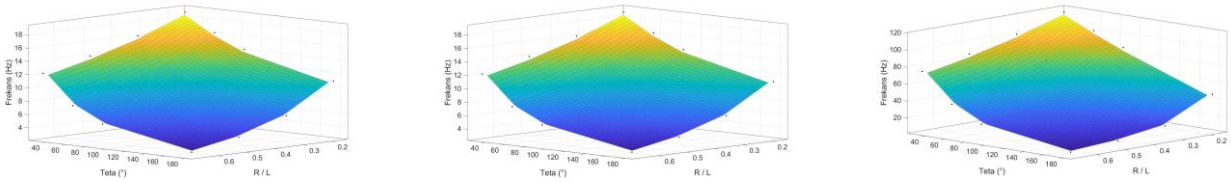
Sınır şartları	Mod	Bu çalışma	ABAQUS	[12]
A-A	1	1196.431	1196.570	1220.042
	2	2735.825	2735.825	2818.803
	3	4817.123	4817.758	5042.719
	4	6013.938	6014.139	6066.225
	5	7275.928	7276.557	7701.025
	6	8716.662	8716.663	8871.101
KM-KM	1	713.088	713.141	719.032
	2	2082.343	2082.499	2115.542
	3	3841.607	3841.979	3945.599
	4	5355.064	5355.787	5473.200
	5	6672.114	6671.486	6802.270
	6	8006.034	8007.291	8291.487

Hesaplanan sonuçlarla, literatürdeki sonuçlar arasındaki %5.84'lük farkın, kayma deformasyonunun referans çalışmada ihmal edilmiş olmasından dolayı ortaya çıktığı düşünülmektedir.

Çalışmanın bu aşamasında, iki farklı parametrik çalışma yapılmıştır. İlk parametrik çalışma için, birinci örnekteki çerçeve ele alınarak üç boyutlu grafikler çizilmiştir (Şekil 4). Eğri eksenli çubuğa ait eğriliğin doğru eksenli çubuğun boyuna oranının (R/L) ve eğri eksenli çubuğun açıklığının, doğal frekans değerleri üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Buradaki R/L oranı için, doğru eksenli çubuk uzunluğu sabit tutularak eğri eksenli çubuğun eğrilik yarıçapı değiştirilmiştir. İlk üç moda ait grafiklerde, ilk iki moddaki doğal frekans

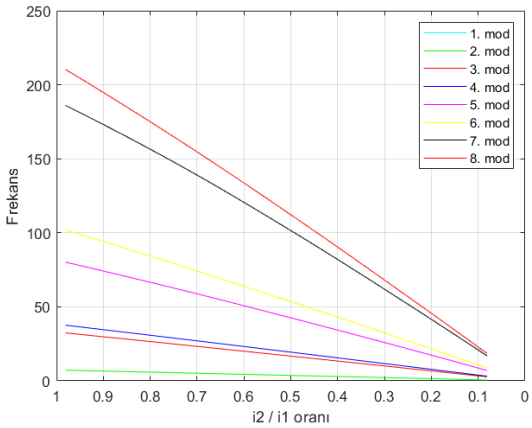
değerlerinin birbirine çok yakın olması sebebiyle ilk iki moddaki grafik oldukça benzer değerler taşımakta olup tüm grafiklerden çıkarılan sonuçlar aynıdır. *R*/*L* oranının ve eğri eksenli çubuğun eğrilik yarıçapının artmasıyla birlikte doğal frekans değerlerinin azaldığı görülmektedir.



(a) 1.mod (b) 2. mod (c) 3. mod

Şekil 4. Açıklığın ve R/L oranının frekansa etkisi.

İkinci parametrik çalışma için de birinci problemdeki çerçeve yapı temel alınmıştır. Burada eğri eksenli çubuğun kesitinin et kalınlığı değişmeyecek şekilde çap ölçüleri üzerinden narinlik oranı değiştirilmiştir. Şekil 5'te, değişen narinlik oranıyla birlikte, ilk sekiz modun doğal frekanslarındaki değişimler bir arada sunulmuştur.



Şekil 5. Narinlik oranının frekansa etkisi.

Eğri eksenli çubuğun atalet yarıçapının ($i2$), doğru eksenli çubuğun atalet yarıçapına oranının ($i1$) azalmasıyla, incelenen bütün modlarda doğal frekans değerlerinin azaldığı gözlemlenmiştir. İlk iki moda ait doğal frekansların çok yakın değerler olması burada çizilen grafikte ilk iki eğrinin üst üste gibi görünmesine sebep olmuştur. Artan mod sayısı ile birlikte, doğal frekans değerlerinin de arttığı görülmektedir. Çalışmada, düzlem içi ve düzlem dışı titreşimler bir arada incelendiği için farklı mod şekillerinin benzer frekansta olması nedeniyle, farklı mod sayılarında yakın frekans değerleri elde edildiği görülmüştür.

SONUÇLAR

Doğru ve eğri eksenli çubuklardan oluşan çerçeve yapılar, makina ve inşaat mühendisliğinde çeşitli alanlarda kullanılmaktadır. Bu çalışmada, bu yapıların düzlem içi ve düzlem dışı doğal frekansları, eksenel uzama, kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliğinin etkileri dikkate alınarak ve başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak kesin analitik olarak elde edilmiştir. Çeşitli örnekler için elde edilen sonuçların literatürdekilerle ve sonlu elemanlar paket programından elde edilenlerle iyi bir uyum içinde olduğu gözlenmiştir. Ayrıca, sınır şartlarının, eğriliğin, açıklığın ve narinlik oranının doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir. Yapılan parametrik incelemelerden *R*/*L* oranı ve eğrilik yarıçapındaki artışın,

çerçevenin doğal frekans değerlerini düşürdüğü gözlenmiştir. Narinlik oranındaki değişimin yapının ilk sekiz doğal frekansına olan etkisi incelenmiştir. Gerçekleştirilen çalışmanın aydınlatma lambaları ve bağlantı sistemleri gibi mühendislik yapılarının tasarım sürecinde değerlendirilebileceğine inanılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Tze Hsin Woo, Space frame optimization subject to frequency constraints., Collect. Tech. Pap. - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Struct. Struct. Dyn. Mater. Conf. 1 (1986) 103–115. https://doi.org/10.2514/6.1986-877.

[2] O. Wallner, K. Ergenzinger, S. Tuttle, L. Vaillon, U. Johann, EUCLID mission design, içinde: Int. Conf. Sp. Opt., Rhodes, Greece, 2010: s. 90. https://doi.org/10.1117/12.2309226.

[3] P.A.A. Laura, T.J.L. Pombo, V.H. Cortinez, Experimental and numerical values of the fundamental frequency of a lamp-pole type system, Appl. Acoust. 22 (1987) 229–233. https://doi.org/10.1016/0003-682X(87)90039-9.

[4] I.M. Ibrahim, D.A. Crolla, D.C. Barton, Effect of frame flexibility on the ride vibration of trucks, Comput. Struct. 58 (1996) 709–713. https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00198-P.

[5] B. Bozyigit, Y. Yesilce, S. Acikgoz, Free vibration analysis of arch-frames using the dynamic stiffness approach, Vibroengineering Procedia. 30 (2020) 72–78. https://doi.org/10.21595/vp.2020.21291.

[6] I. Caliò, A. Greco, D. D'Urso, Free vibrations of spatial Timoshenko arches, J. Sound Vib. 333 (2014) 4543–4561. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.019.

[7] K. Suzuki, S. Takahashi, Vibrations of a connecting system of curved bar (Out-of plane), Bull. JSME. 22 (1979) 1448–1455.

[8] H.A. Özyiğit, Linear vibrations of frames carrying a concentrated mass, Math. Comput. Appl. 14 (2009) 197–206.

[9] A. Yucel, A. Arpaci, E. Tufekci, Coupled axial-flexural-torsional vibration of Timoshenko frames, JVC/Journal Vib. Control. 20 (2014) 2366–2377. https://doi.org/10.1177/1077546313484348.

[10] W.P. Howson, A.K. Jemah, J.Q. Zhou, Exact natural frequencies for out-of-plane motion of plane structures composed of curved beam members, Comput. Struct. 55 (1995) 989–995. https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00524-7.

[11] V.H. Cortinez, P.A.A. Laura, C.P. Filipich, R. Carnicer, In-plane vibrations of a clamped column-arch system carrying a concentrated mass at the free end, J. Sound Vib. 223 (1987) 379–383.

[12] J.S. Wu, L.K. Chiang, Free vibration analysis of arches using curved beam elements, Int. J. Numer. Methods Eng. 58 (2003) 1907–1936. https://doi.org/10.1002/nme.837.

[13] A.E.H. Love, A treatise on the mathematica theory of elasticity, Dover Publication, New York, 1944.

[14] J.P. Den Hartog, Advanced strength of materials, McGraw-Hill Book Co., New York, 1952.

[15] E. Tufekci, O. Ozdemirci, Exact solution of free in-plane vibration of a stepped circular

arch, J. Sound Vib. 295 (2006) 725–738. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.048.

[16] E. Tüfekçi, A. Arpaci, Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects, J. Sound Vib. 209 (1998) 845–856. https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1290.

[17] S. Takahashi, Vibration of a circular arc bar (Perpendicular to its plane), Bulleti. 6 (1963) 674–681.

[18] F. Kikuchi, On the validity of the finite element analysis of circular arches represented by an assemblage of beam elements, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 5 (1975) 253–276. https://doi.org/10.1016/0045-7825(75)90001-8.

[19] M. Kawakami, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita, In-plane and out-of-plane free vibrations of curved beams with variable sections, J. Sound Vib. 187 (1995) 381–401. https://doi.org/10.1006/jsvi.1995.0531.

[20] C.S. Huang, Y.P. Tseng, S.H. Chang, C.L. Hung, Out-of-plane dynamic analysis of beams with arbitrarily varying curvature and cross-section by dynamic stiffness matrix method, Int. J. Solids Struct. 37 (2000) 495–513. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00017-7.

[21] G.R. Liu, T.Y. Wu, In-plane vibration analyses of circular arches by the generalized differential quadrature rule, Int. J. Mech. Sci. 43 (2001) 2597–2611. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00052-2.

[22] S.Y. Lee, J.C. Chao, Exact solutions for out-of-plane vibration of curved nonuniform beams, J. Appl. Mech. Trans. ASME. 68 (2001) 186–191. https://doi.org/10.1115/1.1346679.

[23] M.B. Rubin, E. Tufekci, Three-dimensional free vibrations of a circular arch using the theory of a Cosserat point, J. Sound Vib. 286 (2005) 799–816. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.10.019.

[24] O.O. Yigit, E. Tufekci, Sürekli değişken kesite sahip eğri eksenli çubukların titreşimlerinin incelenmesi, İTÜ Dergisi/D Mühendislik. 10 (2011) 129–138.

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN İMAL EDİLMİŞ EŞİT MUKAVEMETLİ KİRİŞLER

Mustafa Halûk Saraçoğlu[1], Gökhan Güçlü[2] ve Fethullah Uslu[3]
[1,2,3]Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kütahya

ABSTRACT

In this study, equal strength cantilever beams made of functionally graded material (FGM) whose material properties vary though the height direction were investigated. These equal strength cantilever FGM beams were loaded with a point load at the tip and have variable cross-section and straight axis. For calculating equivalent material properties of FGMs, power law distribution and Mori-Tanaka model were used. A computer program was developed for the analysis of the problem. The dimensionless deflection values at the tip of the cantilever beam was obtained for different materials by the help of developed computer program. Obtained results are presented in the form of tables and graphs which may be useful for the researchers.

Keywords: Functionally Graded Material (FGM); Mori-Tanaka model; equal strength beam; variable cross-section.

ÖZET

Bu çalışmada, kiriş yüksekliği boyunca fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) imal edilmiş eşit mukavemetli konsol kirişler incelenmiştir. Farklı seramik ve metal malzemeleri ile oluşturulan FDM den imal edilmiş doğru eksenli ve eşit mukavemetli değişken kesitli bu kirişler uç noktasından tekil yük ile yüklenmiştir. FDM lerin eşdeğer malzeme özellikleri hesaplanırken kuvvet yasası dağılımı ve Mori-Tanaka modeli kullanılmıştır. Problemin analizi için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile konsol kirişin uç noktasındaki boyutsuz sehim değeri farklı malzemeler için elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur.

Anahtar kelimeler: Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM); Mori-Tanaka modeli; eşit mukavemetli kiriş; değişken kesit.

GİRİŞ

Kirişler eksenine dik yükleri taşırlar ve bu yüklerden dolayı oluşan iç kuvvetlerden eğilme momenti ile kesme kuvveti diğer iç kuvvetlere göre daha etkilidir. Taşıdığı yükten dolayı kirişte oluşan eğilme momenti kiriş ekseni boyunca değişecektir. Kiriş kesitleri tasarlanırken, oluşacak en büyük eğilme momentine göre belirlenerek sabit bir kesit veya eğilme momentine uygun bir biçimde değiştirilerek değişken bir kesit oluşturulabilir. Eksen boyunca tüm kesitlerde en büyük gerilme sabit tutularak tasarım yapılacak olursa eğilme momentinin küçük

olduğu yerlerde kesit küçülecek, büyük olduğu yerlerde kesit büyüyecektir. Bu tür kirişler eşit mukavemetli kirişlerdir ve kesitleri değişken olduğundan malzemeden tasarruf edilmiştir.

Eşit mukavemetli kirişler, teknolojinin gelişmesiyle kullanımı artmış olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilirse bu tür bir yaklaşımda malzeme tasarrufu ile kesitler azalacak ve buna bağlı olarak ta kiriş ağırlığı azalacaktır.

Eşit mukavemetli kirişler ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar mevcuttur. İnan, temel olarak yazılmış mukavemet kitabındaki değişken kesitli kirişler bölümünde eşit mukavemetli kirişler hakkında bir çalışma yapmıştır [1]. Bakioğlu, eşit mukavemetli kirişler hakkında mukavemet kitabında bahsetmiştir [2].

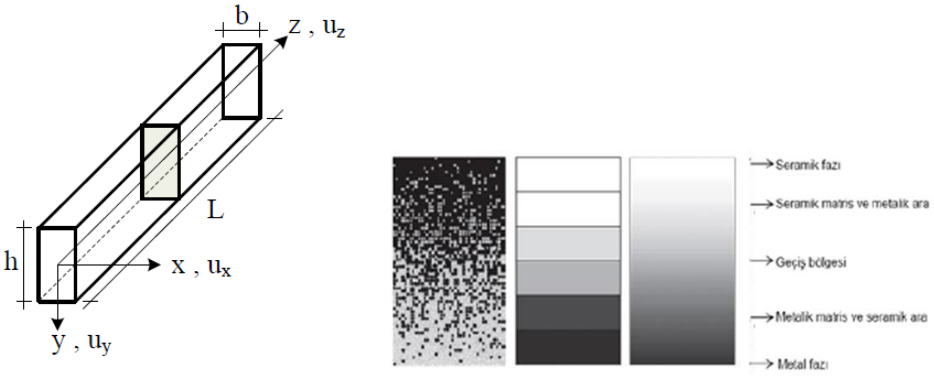
Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden (FDM) imal edilmiş yapı elemanları ile ilgili çalışmalar güncelliğini korumaktadır. Özarslan, yaptığı yüksek lisans çalışmasında Zirkon ve Alüminyum malzemelerinden oluşan Fonksiyonel Derecelenmiş bir plağın Navier çözümlerini Klasik Plak Teorisine göre yaparak hareket denklemlerini çıkartmış, değişik birleşim oranlarında ve değişik boyutlarda plakların serbest titreşim analizlerini yaparak doğal frekanslarını bulmuştur [3]. Ersan; yaptığı yüksek lisans çalışmasında fonksiyonel derecelendirilmiş disklerin termal yük altındaki davranışları analitik ve nümerik analiz yöntemiyle incelemiştir [4]. Kadoli ve diğ., yüksek mertebeden kayma deformasyonu teorisi kullanarak fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin statik analizini çalışmışlardır [5]. Chauhan ve Khan, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş kiriş tipi yapıların analizi hakkında bir derleme yazısı yayınlamışlardır [6]. Alagöz ve diğ., fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ve kullanım alanları hakkında bir çalışma yapmışlardır [7]. Aslan ve diğ., çalışmalarında çift yönlü fonksiyonel derecelenmiş malzemeden (FDM) yapılmış doğru eksenli kirişlerin serbest titreşim analizini frekans uzayında incelemişlerdir [8]. Sınır ve Çevik, çalışmalarında polinomiyal fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden non-lineer Euler-Bernoulli kirişini ele alarak kirişin lineer ve non-lineer doğal frekanslarını elde etmişlerdir [9]. Çalım, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş değişken kesitli kirişin titreşim analizini incelemiştir [10].

Bu çalışmada farklı seramik ve metal malzemeleri kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş doğru eksenli ve eşit mukavemetli değişken kesitli konsol kirişlerin tasarımı incelenmiştir.

MATERYAL VE METOD

Uzunluğu L, genişliği b ve yüksekliği h olan bxh dikdörtgen kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş kirişin geometrisi Şekil 1'de gösterilmiştir. x, y ve z eksenleri sırasıyla genişlik, yükseklik ve uzunluk yönünde alınmıştır.

Hesaplamalarda kiriş malzemesinin lineer elastik davrandığı ve küçük deformasyonlar oluştuğu kabul edilmiştir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş kirişin geometrisi ve kesitte malzeme dağılımı [11], [12].

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler

Fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş tipik olarak seramik ve metal malzemesinden imal edilmiştir. Kirişin üst yüzeyinde seramik ve alt yüzeyinde metal malzemesi mevcuttur. Malzeme özelliklerinin kirişin kalınlığı doğrultusunda olduğu varsayılmıştır.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin hacimsel oran dağılımı şu şekildedir:

$$P = P_s V_s + P_m V_m \tag{1}$$

$$V_s + V_m = 1 \tag{2}$$

$$P = P_s + V_m \left(P_m - P_s \right) \tag{3a}$$

$$P = P_m + V_s \left(P_s - P_m \right) \tag{3b}$$

Üst yüzeyde seramik malzeme, alt yüzeyde metal malzeme özelliği bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş için P_s kirişin üst yüzeyinin ve P_m kirişin alt yüzeyinin malzeme özelliğidir. V_s ve V_m ise kirişin malzeme dağılım fonksiyonudur [12].

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin malzeme özelliklerini belirlemek için geliştirilmiş çeşitli modeller bulunmaktadır. Kuvvet yasası dağılımı, sigmoid dağılımı ve üstel dağılım gibi çeşitli fonksiyonlara bağlı olarak malzeme dağılımları bunlardan bazılarıdır [13].

Kuvvet yasası dağılımı (4) ile ifade edilmektedir.

$$P(y) = P_s + \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \left(P_m - P_s \right) \tag{4}$$

Sigmoid dağılımı (5) ile ifade edilmektedir.

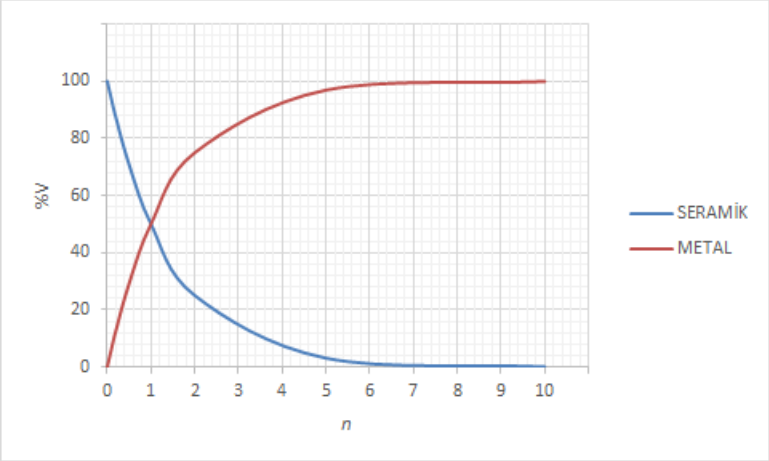
$$P(y) = (P_s - P_m)\left[0.5(1+2y/h)^n\right] + P_m \qquad -h/2 \le y \le 0$$
$$P(y) = (P_m - P_s)\left[0.5(1-2y/h)^n\right] + P_s \qquad 0 \le y \le h/2 \tag{5}$$

Üstel dağılımı (6) ile ifade edilmektedir.

$$P(y) = P_s \exp\left[(y/h)^n \log(P_m/P_s)\right] \tag{6}$$

Bu dağılım ifadelerindeki *n* malzeme dağılım indeksi olarak isimlendirilmektedir.

Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş eşit mukavemetli kirişler incelenirken malzeme özellikleri; yüksekliği doğrultusunda ve kuvvet yasası dağılımına göre olduğu varsayılmıştır. Seramik malzemesinin hacmi kuvvet yasası dağılımına göre *n* malzeme dağılım indeksinin fonksiyonu olarak $V_s = \left((y/h) + (1/2)\right)^n$ şeklinde ifade edilmektedir. Bu dağılıma göre n malzeme dağılım indeksinin değişimi ile seramik ve metal malzemesinin hacim değişimi yüzde olarak Şekil 2 ‘de verilmiştir.



Şekil 2. Seramik ve metal malzemesinin hacim değişiminin *n* indeksine bağlı dağılımı.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin eşdeğer mekanik özellikleri için bugüne kadar çeşitli modeller önerilmiştir [14]. Bu çalışmada Mori-Tanaka modeli kullanılmıştır. Bu modele göre E eşdeğer elastisite modülü (7) denklemindeki gibi hesaplanmaktadır.

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \tag{7}$$

Bu ifadedeki K hacim modülünü, G ise kayma modülünü ifade etmektedir. Mori-Tanaka modeline göre bu modüller şu şekilde ifade edilmektedir [15].

$$\begin{aligned} \frac{K-K_s}{K_m-K_s} &= \frac{V_m}{1+\left(V_s-V_m\right)\dfrac{K_m-K_s}{3K_s+4G_s}} \\ \frac{G-G_s}{G_m-G_s} &= \frac{V_m}{1+\left(V_s-V_m\right)\dfrac{G_m-G_s}{G_s+f}} \end{aligned} \tag{8}$$

$$K_s = \frac{E_s}{3\left(1-2\nu_s\right)} \qquad K_m = \frac{E_m}{3\left(1-2\nu_m\right)} \qquad G_s = \frac{E_s}{2\left(1+\nu_s\right)} \qquad V_s = \left(\frac{y}{h}+\frac{1}{2}\right)^n \qquad f = G_s\frac{9K_s+8G_s}{6\left(K_s+2G_s\right)}$$

Bu ifadedeki K_m metal fazın hacim modülünü, K_s ise seramik fazın hacim modülünü ifade etmektedir. G_s ise seramik fazın kayma modülüdür. V_s ve V_m ise sırasıyla seramik ve metal malzemesinin kalınlık koordinatına bağlı olarak (2) denklemine göre hesaplanan ve malzeme dağılımını gösteren hacim oranıdır.

Eşit Mukavemetli Kirişler

Bir kirişte iç kuvvetler; bir eksenel kuvvet, iki kesme kuvveti, bir burulma momenti ve iki eğilme momenti şeklindedir. Bu iç kuvvetlerden dolayı gerilmeler (σ, τ), birim şekil değiştirmeler (ε, γ) ve elastik eğri (düşey yer değiştirme uy) meydana gelir. Ortaya koyulan farklı kiriş teorilerine göre bu parametrelerden daha etkin olanlar varsayımlara göre değişiklik gösterebilmektedir. Klasik kiriş teorisi de denilen Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre kirişlerde, M_x eğilme momenti ve S_y kesme kuvveti baskındır. Diğer iç kuvvetler çoğu zaman çok etkili değildir. Kirişin şekil değiştirmesinde eğilmenin etkisi diğerlerine göre daha tesirlidir.

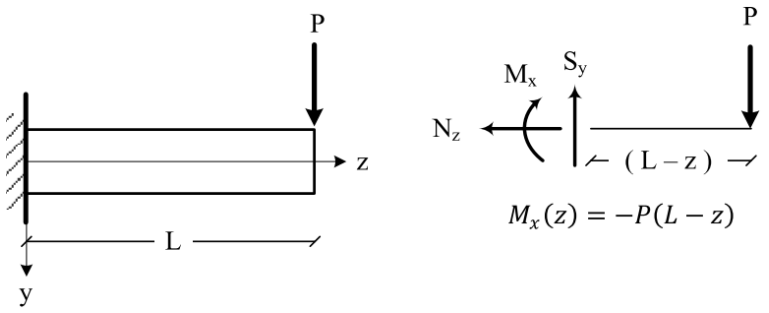
Kirişte oluşan eğilme momenti kiriş ekseni boyunca değişir. Kiriş kesitleri tasarlanırken, oluşacak en büyük eğilme momentine göre belirlenerek sabit bir kesit veya eğilme momentine uygun bir biçimde değiştirilerek değişken bir kesit oluşturulabilir. Eksen boyunca tüm kesitlerde en büyük gerilme sabit tutularak tasarım yapılacak olursa eğilme momentinin küçük olduğu yerlerde kesit küçülecek, büyük olduğu yerlerde kesit büyüyecektir. Bu tür kirişler eşit mukavemetli kirişler olarak isimlendirilirler. Eşit mukavemetli kirişlerde eğilme momentinin gerekli mukavemet momentine oranı (9) denkleminde belirtildiği gibi sabittir[1], [2].

$$\sigma_{\max} = M_x\left(z\right)/W_x\left(z\right) = \sigma_{em} = \text{sabit} \tag{9}$$

Bu ifadede $W_x(z)$ çubuk ekseni z ile değişen mukavemet momentidir. Matematiksel olarak (10) denklemi ile ifade edilebilir.

$$W_x(z) = M_x(z)/\sigma_{em} \tag{10}$$

Yük altındaki kirişin moment değişimi belirli ise, tüm kesitlerin eşit mukavemetli olması şartından mukavemet momentinin değişim fonksiyonu elde edilebilir. Elde edilen bu fonksiyon ile bu şartı sağlayan kesit değişimi ortaya konmuş olur. Kesit değişimi yükseklik boyunca, genişlik boyunca veya her ikisi boyunca da olabilir.



Şekil 3. Uç noktasından tekil yük ile yüklü konsol kiriş [11].

Örnek olarak Şekil 3'teki gibi uç noktasından tekil yük ile yüklü konsol kiriş ele alınmıştır. Dikdörtgen bir kesit için W_x mukavemet momenti (11) denklemindeki gibidir.

$$W_x(z) = \frac{I_x}{h_z/2} = \frac{b_z h_z^3/12}{h_z/2} = \frac{b_z h_z^2}{6} \tag{11}$$

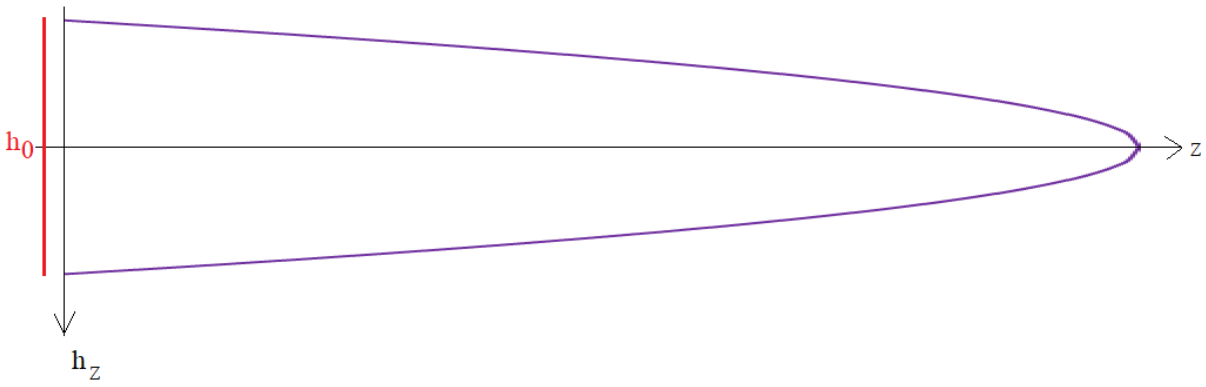
Eğilme momentinin gerekli mukavemet momentine oranı (9) denkleminde belirtildiği gibi yerine konulursa ifade şu şekilde olur:

$$sabit = \frac{M_x(z)}{W_x(z)} = \frac{-P(L-z)}{\frac{b_z h_z^2}{6}} = \frac{-6P(L-z)}{b_z h_z^2} \tag{12}$$

Eğer değişken kiriş kesitinde kesit genişliği $b_z=b_0$ sabit ve kesit yüksekliği h_z değişken olarak seçilecek olursa ve konsol kirişin $z=0$ ankastre noktasındaki kesit yüksekliği h_0 olarak tanımlanırsa bu durumda değişken kesit yüksekliği fonksiyonu (13) denklemindeki gibi olacaktır:

$$z=0 \Rightarrow \frac{-6P\left(L-z\right)}{b_0 h_z^2}=\frac{-6P\left(L-0\right)}{b_0 h_0^2}$$
$$h_z=\sqrt{\frac{L-z}{L}}\,h_0 \tag{13}$$

Kesit genişliği sabit yüksekliği (13) denklemindeki gibi değişen konsol kirişin şematik gösterimi Şekil 4'teki gibidir.



Şekil 4. Kesit yüksekliğinin şematik gösterimi.

Hesaplanan bu kesit yüksekliği fonksiyonu ile atalet momenti (14) denklemindeki gibi olacaktır:

$$I_x=\frac{b_0 h_z^3}{12}=\frac{b_0}{12}\left(\sqrt{\frac{L-z}{L}}\,h_0\right)^3=\frac{b_0 h_0^3}{12}\left(\frac{L-z}{L}\right)^{3/2}=I_0\left(\frac{L-z}{L}\right)^{3/2} \tag{14}$$

Bu ifadedeki I_0 ankastre mesnet noktasındaki kesitin atalet momentidir. Kirişin elastik eğrisi (15) denklemindeki gibidir.

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}=-\frac{M_x\left(z\right)}{E\,I_x}=-\frac{-P\left(L-z\right)}{E\,I_x} \tag{15}$$

Sınır şartları ankastre mesnette dönmenin ve sehimin sıfır olması şeklindedir. Bu şartlar uygulandığında kirişin herhangi bir z noktasındaki sehim (16) denkleminden hesaplanabilir [11], [16].

$$u_y=\frac{1}{E\,I_x}\left(-\frac{P}{6}z^3+\frac{PL}{2}z^2\right) \tag{16}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş eşit mukavemetli bir konsol kirişin elastik eğrisi (7) denkleminden elde edilen eşdeğer elastisite modülü ve (14) denklemindeki atalet momenti fonksiyonunun (16) denklemine yazılmasıyla elde edilir.

$$u_y(z) = \frac{\left(-\frac{P}{6}z^3 + \frac{PL}{2}z^2\right)}{\left[\frac{9KG}{3K+G}\right]\left\{I_0\left(\frac{L-z}{L}\right)^{3/2}\right\}} \tag{17}$$

SAYISAL ÖRNEKLER

Örnek olarak fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş uç noktasından tekil yük ile yüklü eşit mukavemetli konsol kiriş ele alınmıştır. Geometrisi Şekil 1'de gösterilmiş olan konsol kirişin genişliği b=0.1m, yüksekliği h=0.1m şeklinde ele alınmıştır. Konsol kirişin uzunluğu ise L =1m şeklindedir. Konsol kirişin uç noktasından P = 100kN tekil yük uygulanmıştır.

Hesaplanan sehim değerleri (18) denklemindeki gibi boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\hat{u}_y = u_y \times \frac{E_m \times b \times h_0^3}{P \times L^3} \times 100 \tag{18}$$

Bu ifadede E_m metal malzemesinin elastisite modülüdür. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için kullanılan seramik ve metal malzemelerine ait mekanik özellikler Çizelge 1'de gösterilmiştir [17]–[22].

Çizelge 1. Seramik ve metal malzemelerine ait mekanik özellikler

Malzeme		Elastisite modülü (GPa)	Poisson oranı
Seramik	Zirkon (ZrO_2)	244.27	0.2882
	Titanyum Karbür (TiC)	480.00	0.2000
	Alüminyum Oksit (Al_2O_3)	349.55	0.2600
	Silikon Nitrat (Si_3N_4)	348.43	0.2400
Metal	Paslanmaz Çelik (SUS304)	201.04	0.3262
	Nikel (Ni)	223.95	0.3100
	Alüminyum (Al)	70.00	0.3100

Seramik ve metal malzemelerin kullanıldığı fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş konsol kirişte malzeme özellikleri kiriş kesitinin yüksekliği boyunca değişmektedir.

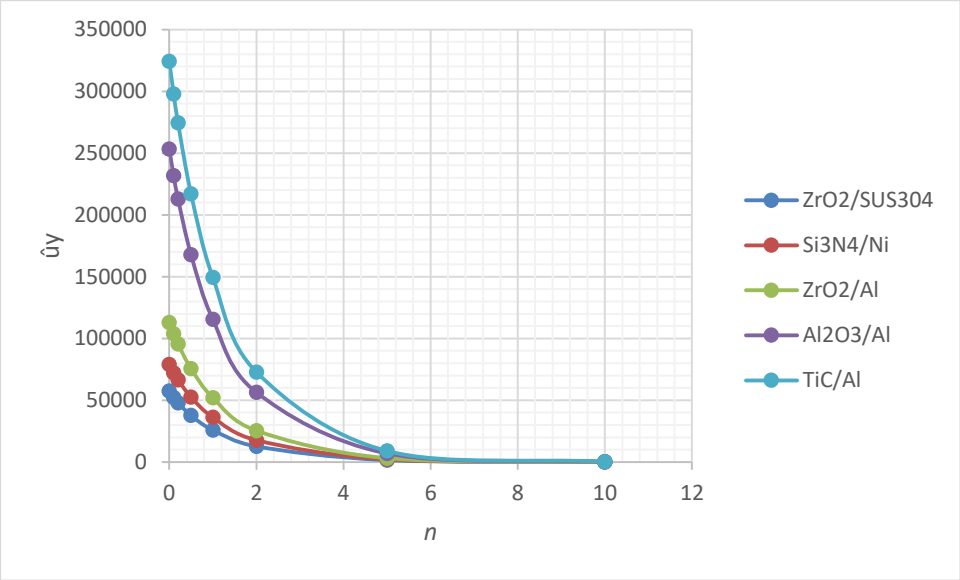
Kirişin alt kısmında metal malzemesi, üst kısmında ise seramik malzemesi kullanılmıştır. Kuvvet yasası dağılımına göre kiriş yüksekliği doğrultusunda malzeme özellikleri değişen örnekte *n* malzeme dağılım indeksi değişimine bağlı değişken kesitli konsol kiriş uç noktasındaki en büyük boyutsuz sehim değerleri Çizelge 2'de ve Şekil 5'te gösterilmiştir.

Çizelge 2. FDM den imal edilmiş değişken kesitli konsol kiriş uç noktasındaki en büyük boyutsuz sehim değerlerinin *n* indeksine bağlı dağılımı

n	TiC / Al	Al_2O_3 / Al	ZrO_2 / Al	Si_3N_4 / Ni	ZrO_2 / SUS304
0	57458.36	78901.48	112907.91	253239.80	324271.50
0.1	52344.11	72335.43	103739.84	231733.90	297940.82
0.2	47963.02	66553.67	95584.20	212953.51	274517.81
0.5	37627.53	52513.61	75564.14	167747.39	217020.20
1	25856.26	36150.15	52032.96	115426.34	149438.65
2	12640.84	17645.08	25367.13	56377.57	72854.41
5	1558.71	2169.12	3112.94	6938.24	8940.37
10	48.63	67.64	97.05	216.41	278.73

Kuvvet yasası dağılımına göre modellenen FDM de *n* malzeme dağılım indeksi sıfır olduğunda tamamı seramik malzemesinden imal edilmiş konsol kiriş modeli oluşmaktadır (Şekil 2). Hesaplamalardan görüldüğü gibi tamamı seramik olan kiriş modelinde boyutsuz sehim değeri en büyüktür. İndeks büyüdükçe hacim olarak seramik malzeme azalacak ve metal malzeme artacaktır. Bu değer 10 olduğunda konsol kirişin metal malzemesinden imal edildiği düşünülebilir. Eşit mukavemetli ve değişken kesitli konsol kirişte kiriş eksenindeki tüm kesitlerdeki gerilme değeri, sabit kesitli konsol kirişin ankastre mesnet noktasındaki gerilme değeri ile aynıdır. İndeks büyüdükçe konsol kirişin uç noktasındaki boyutsuz sehim değeri azalmaktadır. FDM lerde kullanılan seramik ve metal malzemesinin mekanik özelliklerine göre de kirişin davranışı değişmektedir.

Seramik malzeme için Alüminyum Oksit (Al_2O_3) ve metal malzeme için Alüminyum (Al) kullanılan FDM den imal edilmiş sabit kesitli ve değişken kesitli konsol kirişlerde *n* malzeme dağılım indeksi 0.2 değeri için boyutsuz sehim fonksiyonları Şekil 6'da gösterilmiştir.



Şekil 5. FDM den imal edilmiş eşit mukavemetli konsol kirişlerin uç noktasındaki boyutsuz sehim değerinin *n* malzeme dağılım indeksine göre dağılımı.

Şekil 6'dan da görüldüğü gibi FDM olan Al_2O_3 / Al den imal edilmiş h_0 sabit kesit yüksekliğine sahip konsol kirişin sehimi, bu kirişle aynı gerilmeye sahip kesiti değişken olan eşit mukavemetli kirişin sehiminden daha azdır. Bu değişim mesnet bölgesinde daha az iken tekil yükün etki ettiği konsol kiriş uç noktalarında daha fazladır. Diğer seramik ve metal malzemeleri kullanılarak imal edilen eşit mukavemetli kirişlerde de benzer durum söz konusudur.



Şekil 6. Al_2O_3/Al konsol kirişi için boyutsuz sehim fonksiyonları.

SONUÇLAR

Bu çalışmada bir bilgisayar programı geliştirilmiş ve bu program yardımıyla kiriş yüksekliği doğrultusunda malzeme özellikleri değişen FDM den imal edilmiş uç noktasından tekil yük taşıyan eşit mukavemetli konsol bir kirişin sehim fonksiyonu elde edilmiştir. Literatürde de kullanılan farklı seramik ve metal malzemeleri ile FDM den imal edilen konsol kirişler için hesaplanan sehim değerleri boyutsuz hale getirilerek tablo ve grafikler şeklinde sunulmuştur.

FDM lerin malzeme özellikleri literatürde farklı fonksiyonlar ile modellenmiştir. Bu çalışmada kuvvet yasası dağılımı dikkate alınmıştır. Malzemenin eşdeğer mekanik özellikleri için ise Mori-Tanaka modeli kullanılmıştır.

Konsol kirişe etkiyen tekil yükten dolayı oluşan iç kuvvetlerden eğilme momentinin gerekli mukavemet momentine oranı ile hesaplanan gerilme sabit tutularak eşdeğer kiriş için kesit değişimi hesaplanmıştır. Kesit değişiminde kiriş genişliği sabit tutularak kiriş yüksekliği için bir fonksiyon elde edilmiştir. Hesaplanan bu fonksiyona göre; konsol kirişin ankastre mesnet noktasındaki h_0 kesit yüksekliği, kiriş uç noktasında sıfır olacak şekilde azalmıştır. Bu değişime bağlı olarak ta kesitin atalet momenti ve böylece eğilme rijitliği değişken olmuştur. FDM den imal edilmiş eşit mukavemetli konsol kirişler için sehim fonksiyonu elde edilmiştir. Elde edilen fonksiyon için sayısal bazı değerler verilerek uç noktasından tekil yük etki eden farklı fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden imal edilmiş doğru eksenli ve eşit mukavemetli değişken kesitli konsol kirişlerin tasarımı incelenmiştir.

Sonuç olarak eşit mukavemetli kirişler kullanılarak dayanımı azaltmadan kirişin esnekliğinin de arttırılabildiği ortaya konulmuştur. Ayrıca farklı sınır şartları ve farklı yüklemeler altındaki FDM den imal edilmiş doğru eksenli ve eşit mukavemetli değişken kesitli kirişler için de analizler yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] M. İnan, Cisimlerin Mukavemeti, 8.bs. İstanbul: İTÜ Vakfı, 2001.

[2] M. Bakioğlu, Cisimlerin mukavemeti, 2.bs. Birsen Yayınevi, 2009.

[3] O. Özarslan, "Fonksiyonel derecelendirilmiş bir plağın analizi," Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2007.

[4] Ç. Ersan, "Fonksiyonel derecelendirilmiş disklerde termal gerilme analizi," Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi, 2008.

[5] A. K. Kadoli Ravikiran, "Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory," Appl. Math. Model., vol. 32, pp. 2509–2525, 2008.

[6] P. K. Chauhan and I. A. Khan, "Review on Analysis of Functionally Graded Material Beam Type Structure," Int. J. Adv. Mech. Eng., vol. 4, no. 3, pp. 299–306, 2014.

[7] A. K. Hikmet Alagöz, Müfit Güleç, "Fonksyionel derecelendirilmiş malzemeler ve kullanim alanları," Mühendis ve Makina, vol. 45, no. 5, pp. 25–32, 2004.

[8] T. A. Arslan, A. R. Noori, and B. Temel, "Çift Yönlü Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeli Timoshenko Kirişlerinin Serbest Titreşim Analizi," in 21. Ulusal Mekanik Kongresi, 2019, pp. 218–225.

[9] Sümeyye Sınır and M. Çevik, "Eksenel Olarak Polinomiyal Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeden Nonlineer Euler-Bernoulli Kirişinin Serbest Titreşim Analizi," in 20. Ulusal Mekanik Kongresi, 2017, pp. 706–721.

[10] F. F. Çalım, "Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş Değişken Kesitli Kirişlerin Serbest Titreşimi," in 20. Ulusal Mekanik Kongresi, 2017, pp. 84–91.

[11] M. H. Saraçoğlu, G. Güçlü, and F. Uslu, "Ortotrop Kirişlerin Farklı Kiriş Teorileri ile Statik Analizi," in 20. Ulusal Mekanik Kongresi, 2017, pp. 351–361.

[12] D. İpci, "Fonksiyonel Derecelendirilmiş Konik Kesitli Mikro - Kirişlerin Serbest Titreşim Analizi," Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, 2014.

[13] S. H. Chi and Y. L. Chung, "Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis," Int. J. Solids Struct., vol. 43, no. 13, pp. 3657–3674, Jun. 2006.

[14] I. Elishakoff and C. G. Demetris Pentaras, Mechanics of Functionally Graded Material Structures. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 5, 2016.

[15] T. Reiter, G. J. Dvorak, and V. Tvergaard, "Micromechanical models for graded composite materials," J. Mech. Phys. Solids, vol. 45, no. 8, pp. 1281–1302, 1997.

[16] M. H. Saraçoğlu, G. Güçlü, and F. Uslu, "Static Analysis of Orthotropic Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams With Respect to Various Parameters," Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilim. Derg., vol. 8, no. 2, pp. 628–641, 2019.

[17] J. N. Reddy and C. D. Chin, "Thermomechanical Analysis of Functionally Graded Cylinders and Plates," J. Therm. Stress., vol. 21, no. 6, pp. 593–626, 2007.

[18] H.-S. Shen, Functionally Graded Materials. Boca Raton: CRC Press, 2009.

[19] O. Kirlangiç and Ş. D. Akbaş, "Comparison study between layered and functionally graded composite beams for static deflection and stress analyses," J. Comput. Appl. Mech., vol. 51, no. 2, pp. 294–301, 2020.

[20] A. Sahu, N. Pradhan, and S. K. Sarangi, "Static and Dynamic Analysis of Smart Functionally Graded Beams," Mater. Today Proc., vol. 24, pp. 1618–1625, 2020.

[21] M. Şimşek and M. Al-shujairi, "Static , free and forced vibration of functionally graded (FG) sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads," Compos. Part B, vol. 108, pp. 18–34, 2017.

[22] L. Banks-Sills, R. Eliasi, and Y. Berlin, "Vibration Characteristics of Functionally Graded Material Skew Plate in Thermal Environment," Compos. Part B, vol. 33, pp. 7–15, 2002.

PİEZOELEKTRİK LEVHA VİSKOZ AKIŞKAN VE RİJİT DUVARDAN OLUŞAN SİSTEMİN ZORLANMIŞ TİTREŞİMİNE AKIŞKAN ÖZELLİKLERİNİN ETKİSİ

Surkay Akbarov[1], Zeynep Ekicioğlu Küzeci[2]
[1]Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul
[2]Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Kırşehir

ABSTRACT

This study investigates the mechanical forced vibration of the system which consists the piezoelectric plate, viscous fluid and rigid wall. The exact equations of motion of the linear electro-elasticity theory for piezoelectric materials are used to describe the plate motion, however, the fluid flow is described by using the linearized Navier-Stokes equations for a compressible (barotropic) viscous fluid. The plane-strain state in the plate and the plane flow of the fluid are considered in this study and the corresponding mathematical problems are solved by applying the Fourier transform with respect to the space coordinate which is on the coordinate axis directed along the plate-lying direction. The inverse Fourier transforms are determined numerically. The vibration of the examined hydro-piezoelectric system is analyzed with different fluids and the influence of fluid properties on pressure, velocity and electrical potential values at the plate and fluid interface is investigated. Numerical results are presented and discussed. In particular, it is established that an increase in the fluid viscosity causes to increase the amplitude of the interface normal stress.

Keywords: piezoelectric plate; compressible viscous fluid; forced vibration; rigid wall;

ÖZET

Bu çalışmada piezoelektrik plaka, viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan bir sisteme, harmonik bir mekanik kuvvet uygulandığında ortaya çıkan titreşime viskoz akışkan özelliklerinin etkisi incelenmiştir. Plakanın hareketi, doğrusal elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri ile ifade edilmiştir. Akışkan akımı ise doğrusallaştırılmış Navier-Stokes denklemleri ile yazılmıştır. Plakada düzlem şekil değiştirme durumunun olduğu, akışkanın ise düzlemsel akış yaptığı varsayılmıştır. Problemin matematiksel formülasyonunu ifade eden denklemlere, sınır ve uygunluk koşullarına, plakanın uzunluğu yönündeki koordinata göre Fourier dönüşümü uygulanmıştır. Ters Fourier dönüşümü ise sayısal olarak hesaplanmıştır. İncelenen hidro-piezoelektrik sistem farklı akışkanlar için ele alınmış ve akışkanın özelliklerinin, plaka ve akışkan ara yüzeyindeki basınç, hız ve elektriksel potansiyel değerleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Sonuçlar tartışılmış ve akışkanın viskozitesinin artmasının ara yüzeydeki basıncı arttırdığı gözlemlenmiştir.

Anahtar kelimeler: piezoelektrik plaka; viskoz akışkan; zorlanmış titreşim; rijit duvar;

GİRİŞ

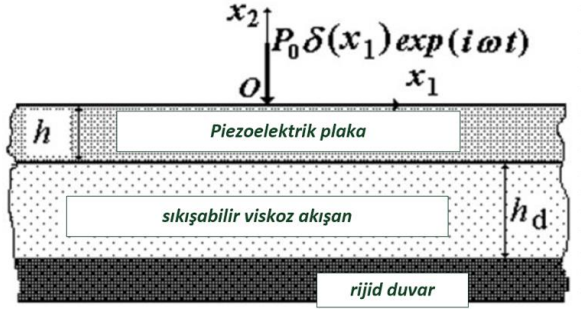
Akışkan ile etkileşime giren rijit veya esnek cisimlerin dinamiği, hareketi ve titreşimi; mekanik, fizik ve uygulamalı matematiğin temel problemlerindendir. Levha ile akışkan etkileşimlerinin dinamik açıdan incelenmesi ilk olarak, 1921 yılında Lamb'ın [1] çalışmasıyla başlamıştır. Piezoelektrik özelliği olan bir plaka ve akışkan oluşan hidro-piezoelektrik sistemin etkileşim problemi ise özellikle enerji hasadı yapılan araştırmalarda önemlidir [2,3,4,5]. Ayrıca hidro-piezoelektrik sistemler, akustik dalgaları alan (veya üreten) hidro-akustik dönüştürücü çalışmalarında da kullanılmaktadırlar [6,7,8].

Bu çalışmanın temelini oluşturan, akışkan ile elastik/visko-elastik malzemeden oluşan plakanın etkileşimini inceleyen yayınlar ve ayrıntıları Akbarov'un [9] derleme makalesinde verilmiştir. Piezoelektrik plaka, viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan sistemin zorlanmış titreşiminin çalışıldığı ikinci yazara ait doktora tezinde ise farklı piezoelektrik malzemeler ile gliserinin etkileşimi incelenmiş ve farklı PZT malzemelerinin piezoelektriklik özelliğinin incelenen parametrelere etkisi analiz edilmiştir [10].

Bu araştırmada ise, piezoelektrik plaka viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan sistemin zorlanmış titreşimine akışkan özelliklerinin etkisi öğrenilmek istenmiştir. Bu kapsamda dört farklı akışkan incelenmiş ve akışkan viskozitelerinin, ara yüz düzlemi gerilmesi, hızı ve elektrik potansiyeli üzerindeki etkileri sorgulanmıştır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Bu çalışmada piezoelektrik plaka, sıkıştırılabilir (barotropik) viskoz akışkan ve rijit duvardan oluşan hidro-piezoelektrik sistem araştırılmıştır. Sistemin şeması Şekil 1'de verilmiştir. Plakanın üst yüzeyinde $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemi tanımlanmıştır. Piezoelektrik plaka kısmı, $\{-\infty < x_1 < +\infty; -h < x_2 < 0; -\infty < x_3 < +\infty\}$ bölgesini, akışkan ise, $\{-\infty < x_1 < +\infty; -h - h_d < x_2 < -h; -\infty < x_3 < +\infty\}$ bölgesini kapsamaktadır. Ayrıca h plaka kalınlığını, h_d ise akışkanın derinliğini, yani plakanın alt yüzeyinin rijit duvara olan uzaklığını göstermektedir. Koordinat sistemine göre Ox_3 yönü, şekil düzlemine diktir ve plakadaki düzlem şekil değiştirme durumu iki boyutlu Ox_1x_2 yönlerinde ele alınacağı için, Ox_3 yönü Şekil 1'de gösterilmemiştir. Bununla birlikte, $-\infty < x_3 < +\infty$, $x_1 = 0$ koordinatında, şiddeti P_0 olan zamana göre harmonik kuvvetin plakanın üst yüzeyine uygulandığı kabul edilmiştir.



Şekil 1. Araştırılan hidro-piezoelektrik sistemin çizimi

Bu çerçevede, söz konusu hidro-piezoelektrik sistemi oluşturan mekanik ve elektriksel alanların matematiksel ifadelerinin, bunlara karşılık gelen kesin alan denklemleri ve ilişkileri ile belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla her bir sistem bileşeni için alan ve ilişki denklemleri yazılmıştır. İlk olarak plakanın hareket denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}=0$$

Piezoelektrik levhaya ait, elektro-mekanik ilişkileri ifade eden bünye denklemleri aşağıda verilmiştir. Bu ilişki denklemleri, plakanın kalınlık doğrultusundaki koordinat eksenine göre polarize edildiği durum için geçerlidir.

$$\sigma_{11}=c_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{13}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+e_{31}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2},\quad \sigma_{22}=c_{13}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+c_{33}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+e_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

$$\sigma_{12}=c_{44}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+e_{15}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

$$D_1=e_{15}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)-\varepsilon_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1},\quad D_2=e_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+e_{33}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\varepsilon_{33}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

Bu eşitliklerde; σ_{11}, σ_{12} ve σ_{22} mekanik gerilme tensörünün bileşenlerini, u_1 ve u_2 mekanik yer değiştirme vektörünün bileşenlerini, D_1 ve D_2 elektriksel yer değiştirme vektörünün bileşenlerini, φ elektriksel potansiyeli, c_{11}, c_{33}, c_{13} ve c_{44} elastik sabitleri, e_{31}, e_{33} ve e_{15} piezoelektrik sabitleri, ε_{11} ve ε_{33} dielektrik sabitleri göstermektedir.

Sistemdeki sıkıştırılabilir viskoz akışkan akımına ait doğrusallaştırılmış Navier-Stokes ve süreklilik denklemleri ise şu şekilde yazılmıştır;

$$\rho_0^{(1)}\frac{\partial V_1}{\partial t}-\mu^{(1)}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_1}-(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})\frac{\partial \theta}{\partial x_1}=0$$

$$\rho_0^{(1)}\frac{\partial V_2}{\partial t}-\mu^{(1)}\left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2}\right)+\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_2}-(\mu^{(1)}+\lambda^{(1)})\frac{\partial \theta}{\partial x_2}=0$$

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t}+\rho_0^{(1)}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)=0$$

Verilen denklemlerin aşağıdaki, akışkana ait lineer ilişki denklemlerini ve durum denklemini sağlaması gerekmektedir.

$$T_{11}=-p^{(1)}+\lambda^{(1)}\theta+2\mu^{(1)}e_{11},\quad T_{22}=-p^{(1)}+\lambda^{(1)}\theta+2\mu^{(1)}e_{22},$$

$$T_{33}=-p^{(1)}+\lambda^{(1)}\theta,\qquad T_{12}=2\mu^{(1)}e_{12},\quad p^{(1)}=a_0^2\rho^{(1)},\quad a_0^2=\frac{\partial p_0^{(1)}}{\partial \rho_0^{(1)}}.$$

burada, $e_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}$, $e_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2}$, $e_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\frac{\partial V_2}{\partial x_1}\right)$, $\theta=\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}$.

Yukarıda verilen ifadelerde; $\rho_0^{(1)}$ pertürbasyondan önceki akışkan yoğunluğunu, $p_0^{(1)}$ pertürbasyondan önceki hidrostatik basıncı, $\rho^{(1)}$ akışkan yoğunluğunun pertürbasyonunu, $p^{(1)}$

hidrostatik basıncın pertürbasyonunu, V_1 and V_2 sırasıyla Ox_1 ve Ox_2 eksenleri yönündeki akış hızı vektörünün bileşenlerini, T_{ij} ve e_{ij} $(ij=11;22;12)$ akışkanın gerilme ve şekil değiştirme hızı tensörü bileşenlerini, a_0 akışkandaki ses hızını, $\lambda^{(1)}$ ikinci viskozite sabitini ve $\mu^{(1)}$ dinamik viskoziteyi temsil etmektedir.

Aşağıdaki V_1 ve V_2 hızlarının ve $p^{(1)}$ basıncının potansiyeller cinsinden ifadeleri de akışkan alan denklemlerine eklenir.

$$V_1=\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x_2},\ V_2=\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_2}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x_1},\ p^{(1)}=\rho_0^{(1)}\left(\frac{\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}}{\rho_0^{(1)}}\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi^{(1)}$$

Potansiyeller aşağıda verilen denklemleri sağlamaktadır.

$$\left[\left(1+\frac{\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}}{a_0^2\rho_0^{(1)}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Delta-\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\varphi^{(1)}=0,\ \left(\nu^{(1)}\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi^{(1)}=0,\ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

burada $\nu^{(1)}$ kinematik viskozitedir ve $\nu^{(1)}=\mu^{(1)}/\rho_0^{(1)}$ ile hesaplanmaktadır. Eğer $p^{(1)}=-(T_{11}+T_{22}+T_{33})/3$ olarak kabul edilirse, $\lambda^{(1)}=-2\mu^{(1)}/3$ olarak bulunur.

Plakanın üst yüzüne ait sınır koşulları, plakanın alt yüzünde (plaka ve akışkan ara düzleminde) sağlanan birleşme koşulları ve rijit duvar üzerindeki sızdırmazlık koşulları sırasıyla (1),(2) ve (3) denklemlerinde ifade edilmiştir.

$$\sigma_{21}\big|_{x_2=0}=0,\ \sigma_{22}\big|_{x_2=0}=-P_0\delta(x_1)e^{i\omega t} \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|_{x_2=-h}=V_1\big|_{x_2=-h},\ \left.\frac{\partial u_2}{\partial t}\right|_{x_2=-h}=V_2\big|_{x_2=-h},\ \sigma_{21}\big|_{x_2=-h}=T_{21}\big|_{x_2=-h},\ \sigma_{22}\big|_{x_2=-h}=T_{22}\big|_{x_2=-h} \tag{2}$$

$$V_1\big|_{x_2=-h-h_d}=0,\ V_2\big|_{x_2=-h-h_d}=0. \tag{3}$$

burada $\delta(x_1)$, Dirac delta fonksiyonudur.

Bu çalışmada sistemin elektriksel alanı için kabul edilen iki sınır koşulu, (4)'de ifade edilmiştir. Bu sınır koşulu plakanın elektriksel açık devre olduğu durumda kabul edilmiştir.

$$D_2\big|_{x_2=0}=0,\ D_2\big|_{x_2=-h}=0. \tag{4}$$

ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Zamana bağlı harmonik titreşimin özelliği göz önüne alınarak, problemin tüm aranan ifadeleri, $g(x_1,x_2,t)=\bar{g}(x_1,x_2)e^{i\omega t}$ biçiminde gösterilmiştir. Böylece; $\partial(\bullet)/\partial t$ ve $\partial^2(\bullet)/\partial t^2$ türevleri yerine, sırasıyla $i\omega(\bar{\bullet})$ ve $-\omega^2(\bar{\bullet})$ yazılmıştır. Aranan ifadelerin genlikleri, sınır, birleşme ve sızdırmazlık koşullarında uygun yerlere yazılmıştır. Elde edilen bu sınır problemlerinin çözümü için, (5)'deki Fourier dönüşümü uygulanmıştır.

$$f_F(s,x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)e^{-isx_1}dx_1 \tag{5}$$

Plakaya ait ilişki denklemleri plakanın hareket denklemlerinde yerine koyulmuş, böylece piezoelektrik plakanın malzeme polarizasyon doğrultusunun Ox_2 ekseni ile çakıştığı durum için elektromekanik hareket denklemleri, mekanik yer değiştirmeler ve elektrik potansiyeli cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\left(\frac{c^2}{s^2}-\tilde{c}_{11}\right)u_{1F}+\frac{d^2u_{1F}}{d(sx_2)^2}-i\left(1+\tilde{c}_{13}\right)\frac{du_{2F}}{d(sx_2)}-i\left(1+\tilde{e}_{31}\right)\frac{d\tilde{\varphi}_F}{d(sx_2)}=0 \tag{6}$$

$$-i\left(1+\tilde{c}_{13}\right)\frac{du_{1F}}{d(sx_2)}+\left(\frac{c^2}{s^2}-1\right)u_{2F}+\tilde{c}_{33}\frac{d^2u_{2F}}{d(sx_2)^2}-\tilde{\varphi}_F+\tilde{e}_{33}\frac{d^2\tilde{\varphi}_F}{d(sx_2)^2}=0 \tag{7}$$

$$-i\left(1+\tilde{e}_{31}\right)\frac{du_{1F}}{d(sx_2)}+\tilde{e}_{33}\frac{d^2u_{2F}}{d(sx_2)^2}-u_{2F}+\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{\varphi}_F-\tilde{\varepsilon}_{33}\frac{d\tilde{\varphi}_F}{d(sx_2)}=0 \tag{8}$$

burada, $c^2=\dfrac{\omega^2h^2}{c_{44}/\rho}$, $\tilde{c}_{11}=\dfrac{c_{11}}{c_{44}}$, $\tilde{c}_{13}=\dfrac{c_{13}}{c_{44}}$, $\tilde{e}_{31}=\dfrac{e_{31}}{e_{15}}$, $\tilde{c}_{33}=\dfrac{c_{33}}{c_{44}}$, $\tilde{e}_{33}=\dfrac{e_{33}}{c_{44}}$, $\tilde{\varphi}_F=\dfrac{e_{15}}{c_{44}}\varphi_F$,

$\tilde{\varepsilon}_{11}=\dfrac{\varepsilon_{11}c_{44}}{e_{15}^2}$, $\tilde{\varepsilon}_{33}=\dfrac{\varepsilon_{33}c_{44}}{e_{15}^2}$

(6), (7) ve (8)'de verilen diferansiyel denklemlerin çözümü için, Euler metoduna göre sistemin özel çözümleri (9)'daki gibi ifade edilmiştir. Buradaki A, B, C sabitleri uygulanan çözüm yöntemi ile bulunacak olan bilinmeyen sabitlerdir.

$$u_{1F}=iAe^{bsx_2},\ u_{2F}=Be^{bsx_2},\ \tilde{\varphi}_F=Ce^{bsx_2} \tag{9}$$

(9)'da verilen özel çözüm ifadeleri, (6), (7) ve (8) denklemlerinde uygun yerlere yazılırsa ve bazı matematiksel işlemler yapılırsa bilinmeyen sabitler cinsinden (10)'da verilen homojen denklem takımı ede edilir.

$$\begin{gathered}\left(b^2+\left(\frac{c^2}{s^2}-\tilde{c}_{11}\right)\right)A-\left(1+\tilde{c}_{13}\right)bB-\left(1+\tilde{e}_{31}\right)bC=0\\ \left(1+\tilde{c}_{13}\right)bA+\left(\frac{c^2}{s^2}-1+\tilde{c}_{33}b^2\right)B+\left(\tilde{e}_{33}b^2-1\right)C=0\\ \left(1+\tilde{e}_{31}\right)bA+\left(\tilde{e}_{33}b^2-1\right)B+\left(\tilde{\varepsilon}_{11}-\tilde{\varepsilon}_{33}b^2\right)C=0\end{gathered} \tag{10}$$

(10)'da verilen denklem sisteminin determinantı sıfıra eşitlenerek, sıfırdan farklı 6 tane kökü matematiksel işlemlerin ardından bulunmuştur.

Kullanılan çözüm yöntemine göre ve (9)'da verilen özel çözüm ifadeleri göz önüne alınarak, (10)'da ki diferansiyel denklem takımının çözümü (11)'de verilmiştir.

$$u_{1F} = iA_1e^{b_1sx_2} + iA_2e^{b_2sx_2} + iA_3e^{b_3sx_2} + iA_4e^{b_4sx_2} + iA_5e^{b_5sx_2} + iA_6e^{b_6sx_2}$$

$$u_{2F} = A_1Y_1e^{b_1sx_2} + A_2Y_2e^{b_2sx_2} + A_3Y_3e^{b_3sx_2} + A_4Y_4e^{b_4sx_2} + A_5Y_5e^{b_5sx_2} + A_6Y_6e^{b_6sx_2} \quad (11)$$

$$\varphi_F = A_1Z_1e^{b_1sx_2} + A_2Z_2e^{b_2sx_2} + A_3Z_3e^{b_3sx_2} + A_4Z_4e^{b_4sx_2} + A_5Z_5e^{b_5sx_2} + A_6Z_6e^{b_6sx_2}$$

burada, $Y_k = \dfrac{-(b_k+\alpha_{11})(\tilde{\varepsilon}_{11}-\tilde{\varepsilon}_{33}b_k^2)-\alpha_{31}\alpha_{13}b_k^2}{\tilde{e}_{13}b_k(\tilde{e}_{13}b_k^2-1)-\alpha_{12}b_k(\tilde{\varepsilon}_{11}-\tilde{\varepsilon}_{13}b_k^2)}$, $Z_k = \dfrac{(b_k^2+\alpha_{11})(\tilde{e}_{13}b_k^2-1)+\alpha_{31}\alpha_{12}b_k^2}{\tilde{e}_{13}b_k(\tilde{e}_{13}b_k^2-1)-\alpha_{12}b_k(\tilde{\varepsilon}_{11}-\tilde{\varepsilon}_{13}b_k^2)}$

(11)'de verilen ifadeler, plakaya ait elektromekanik ilişkileri veren denklemlerin Fourier dönüşümü uygulanmış ifadelerinde yerine konulmuştur. Böylece elde edilen gerilme ve elektrik potansiyel ifadeleri sınır koşullarında kullanılmak üzere elde edilmiş olur.

Akışkana ait ifadelerin Fourier dönüşümünün bulunması kısmında ise, akışkana ait hızların ve basıncın Fourier dönüşümünün bulunması için, $\varphi_F^{(1)}$ ve $\psi_F^{(1)}$ ifadeleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\varphi_F^{(1)} = \omega h^2\tilde{\varphi}_F^{(1)},\ \psi_F^{(1)} = \omega h^2\tilde{\psi}_F^{(1)} \quad (12)$$

Potansiyel denklemleri ve (12) kullanılarak ve matematiksel işlemlerden sonra, (13) denklemleri elde edilmiştir.

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_F^{(1)}}{dx_2^2} + \left(\frac{\Omega_1^2}{1+i4\Omega_1^2/(3N_w^2)} - s^2\right)\tilde{\varphi}_F^{(1)} = 0\ ,\ \frac{d^2\tilde{\psi}_F^{(1)}}{dx_2^2} - \left(s^2+iN_w^2\right)\tilde{\psi}_F^{(1)} = 0 \quad (13)$$

(13)'de yer alan, sırasıyla akışkan viskozitesinin ve akışkan sıkıştırılabilirliğinin etkisini karakterize eden boyutsuz sayıların ifadesi ise $\Omega_1 = \dfrac{\omega h}{a_0}$, $N_w^2 = \dfrac{\omega h^2}{\nu^{(1)}}$ olarak verilmiştir.

(13)'de verilen diferansiyel denklemin çözümü, (14)'deki gibi elde edilmiştir.

$$\tilde{\varphi}_F^{(1)} = A_7e^{\delta_1x_2} + A_8e^{-\delta_1x_2},\ \tilde{\psi}_F^{(1)} = A_9e^{\gamma_1x_2} + A_{10}e^{-\gamma_1x_2} \quad (14)$$

A_7, A_8, A_9, A_{10} bilinmeyen sabitlerdir ve

$$\delta_1 = \sqrt{s^2 - \frac{\Omega_1^2}{1+i4\Omega_1^2/(3N_w^2)}}\ ,\ \gamma_1 = \sqrt{s^2+iN_w^2}$$

(12) ve (14)'de verilen ifadeler ile akışkana ait ilişkileri veren denklemlerde yerine yazılmıştır. Böyle akışkan akımıyla ilgili büyüklüklerin Fourier dönüşümü ifadeleri sınır koşullarında kullanılmak üzere elde edilmiş olur.

Plaka hareketine ve akışkan akımına ait büyüklerin Fourier dönüşümü ifadeleri; sınır, birleşme ve sızdırmazlık koşullarında ((1),(2),(3),(4) denklemlerinde) yerine yazılarak, sisteme ait on tane denklem elde edilmiştir (Denklemlerin ayrıntıları [10]'da verilmiştir). Çözüm yönteminde son aşama, ters Fourier dönüşümlerinin sayısal hesaplamalarının yapılmasıdır. Geliştirilen algoritmada; ters Fourier dönüşümleri Gauss integrasyon algoritması ile hesaplanmıştır. Bu yöntemde $g(x_1,x_2,t) = \bar{g}(x_1,x_2)e^{i\omega t}$ ilişkisi kullanılmış ve aranan değerler (15)'da verilen ifade ile bulunmuştur.

$$\{\sigma_{22},\sigma_{12},\sigma_{11},D_1,D_2,\varphi,u_1,u_2,T_{22},T_{12},T_{11},V_1,V_2\}= \\ \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left\{e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma_{22F},\sigma_{12F},\sigma_{11F},D_{1F},D_{2F},\varphi_F,u_{1F},u_{2F},T_{22F},T_{12F},T_{11F},V_1,V_2]e^{isx_1}ds\right\} \quad (15)$$

Ayrıca yazılan algoritma gereğince; $\int_{-\infty}^{\infty}(.)\mathrm{ds}$ integralinin yerini, $\int_{-S_1^*}^{S_1^*}(.)\mathrm{ds}$ belirli integrali almıştır. S_1^* değeri, sayısal sonuçların yakınsama gereksimine göre belirlenmiştir. Bu integral değişiminden sonra integrasyon aralığı, Gauss integrasyon metodunda kullanılan N sayıda küçük aralığa bölünmüştür. S_1^* ve N değerleri, oluşturulan MATLAB algoritması ile sayısal sonuçların yakınsama gereksinimine göre belirlenmiştir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada verilen tüm sayısal sonuçlar, plaka-akışkan ara yüzündeki gerilme ve akışkan hızı parametreleri ile elektromekanik özellikten kaynaklanan elektrik potansiyeli parametresi için elde edilmiştir. Sayısal sonuçların analizinde asıl dikkat edilmesi gereken nokta; akışkan özelliklerinin incelenen büyüklüklerin frekans cevaplarına etkisi olmuştur. Aynı zamanda, piezoelektriklik özelliğin, plakanın kalınlığının (h), ve plaka kalınlık / akışkan derinliği oranının (h_d / h) frekans cevaplarına etkisine bakılmıştır.

Sayısal sonuçlar aşağıdaki çizelgede verilen plaka malzemesi ve akışkanlara ait özellikler kullanılarak hesaplanmıştır.

Çizelge 1.Seçilen akışkanlara ve piezoelektrik malzemeye ait özellikler

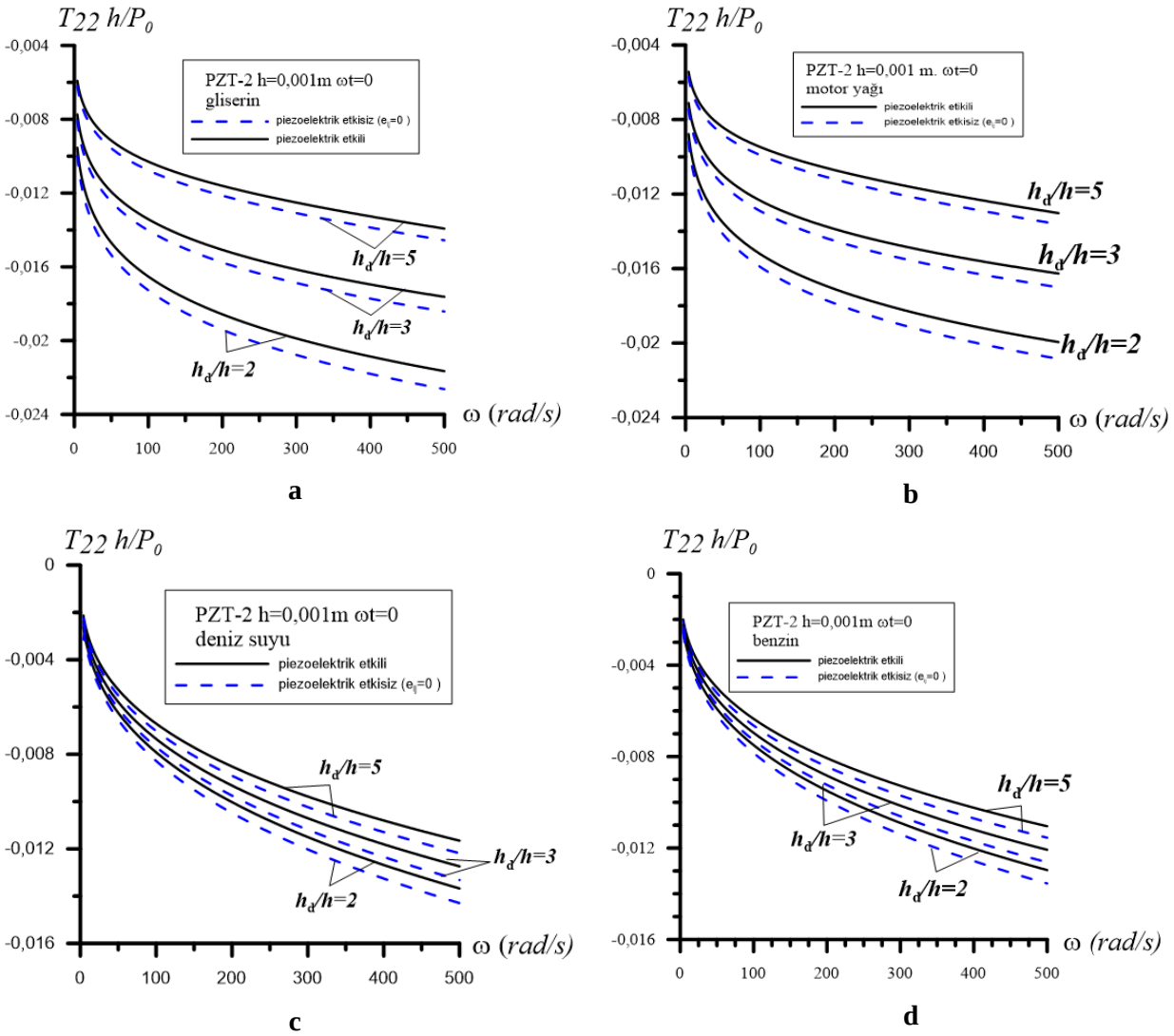
Akışkan	Yoğunluk (kg/m^3)		Dinamik viskozite kg/(m.s)		ses hızı (m/s)
Gliserin	1260		1,393		1927
Motor Yağı	911		0.86		1461
Deniz Suyu	1023.3873		0.000959		1530
Benzin	750		0.0006		1250
Plaka Malzemesi	e_{31} (C/m^2)	e_{33} (C/m^2)	e_{15} (C/m^2)	$\varepsilon_{11}\times10^{-8}$ (F/m)	$\varepsilon_{33}\times10^{-8}$ (F/m)
PZT-2	-1.9	9.0	9.8	8.7615	3.9825

Ara Yüz Gerilmesi Frekans Cevapları

Bu bölümde $x_1/h=0$ noktasında hesaplanan, plaka ve akışkan ara yüz düzlemindeki boyutsuz $T_{22}h/P_0$ normal gerilmesinin frekans cevabı grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerde akışkanın özelliklerinin gerilme değeri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Frekans cevabı önemli ölçüde titreşim fazına bağlı olduğundan, fazın ωt = 0 ve ωt = π/2 olduğu durumlar dikkate alınmıştır. Faz seçiminin ayrıntıları için [11] çalışmasına bakılabilir.

Boyutsuz $T_{22}h/P_0$ gerilmesinin, h=0.001 m olduğu ve sırasıyla h_d/h=2,3,5 kabul edildiği durum için frekans cevabı grafikleri ,Sekil 2'de gösterilmiştir. Şekilde plaka malzemesi olarak PZT-2 kullanılmıştır ve a,b,c,d grafiklerinde akışkan olarak sırasıyla; gliserin, motor yağı, deniz suyu ve benzin alınmıştır. Ayrıca grafiklerdeki kesikli çizgiler, plakanın elektromekanik birleşme etkisinin göz önüne alınmadığı durumu (yani $e_{31}=e_{33}=e_{15}=0$ ve $\varepsilon_{11}=\varepsilon_{33}=0$) göstermektedir. Sürekli çizgiler ise, plakanın elektromekanik birleşme etkisinin göz önüne alındığı durumu ifade etmektedir. Grafiklerdeki kesikli çizgiler ile sürekli çizgiler arasındaki fark plakanın elektromekanik etkisinin büyüklüğünü göstermektedir.

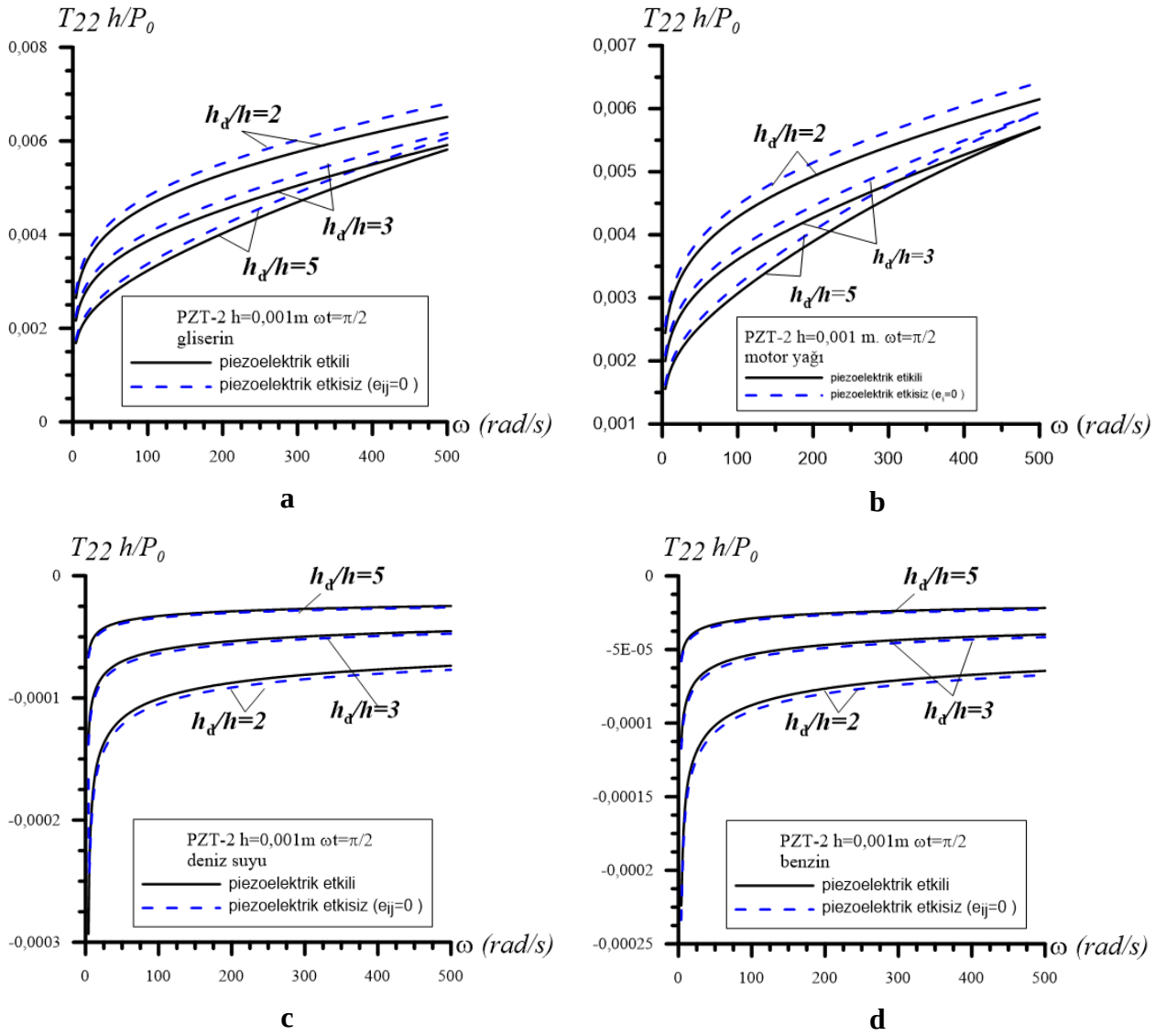
Şekil 2'de ki sayısal sonuçlar titreşim frekansının $4(1/\sec)\le\omega\le500(1/\sec)$ aralığında kabul edildiği ve titreşim fazının sıfır olduğu durumlar için elde edilmiştir. Bu frekans aralığında, ara yüz düzlemindeki gerilmenin mutlak değeri, ω ile monoton olarak artmaktadır. Akışkan viskozitesinin daha büyük olduğu sistemlerde ara yüz düzlemindeki eğrilme değeri de daha büyüktür. Elektromekanik birleşme etkisinin ise, tüm akışkan grafiklerindeki gerilme değerleri üzerinde azaltıcı bir etkiye sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 2. Plaka kalınlığının (h)=0.001m ve titreşim fazının (ωt)=0 olduğu durumda a) gliserin b) motor yağı c) deniz suyu ve d) benzin akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz gerilmesi frekans cevapları

Şekil 3'de ise titreşim fazının $\omega t=\pi/2$ ve plaka kalınlığının h=0.001m olduğu durumda, farklı akışkanlardan oluşan sistemin ara yüz düzlemi gerilmesi frekans cevabı grafikleri verilmiştir. Şekil 2 ve Şekil 3 karşılaştırıldığında içerdikleri eğrilerin birbirlerinden oldukça farklı oldukları görülmüş ve titreşim fazının ara yüz düzlemi gerilmesinin frekans cevabı üzerinde etkili olduğu anlaşılmıştır.

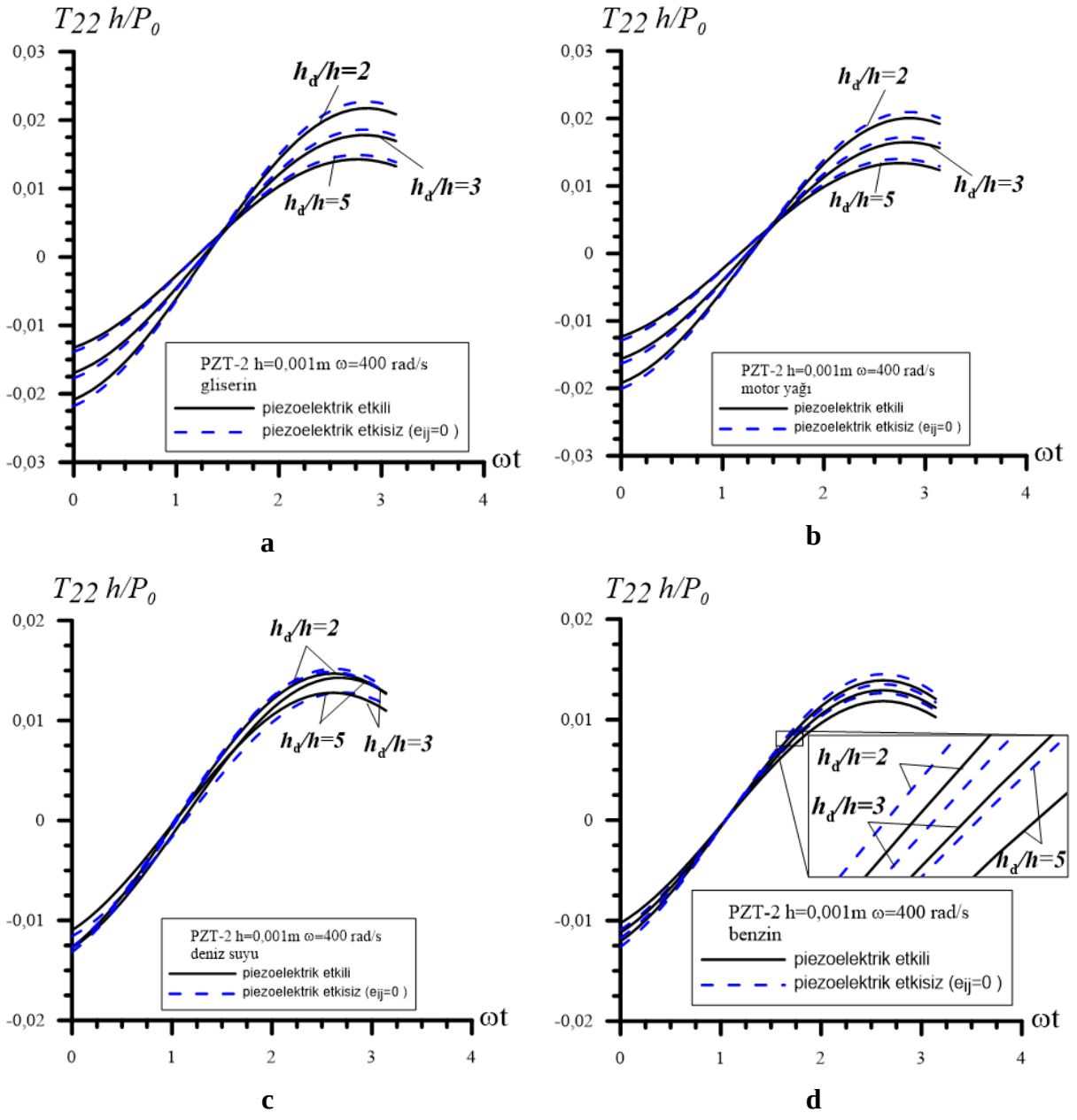
Bu sonuçlardan yola çıkılarak, titreşim fazının ara yüz düzleminin maksimum gerilme değerini değiştirdiği görülmektedir. Şekil 2'de $\omega t=0$ titreşim fazında, tüm ara yüz gerilme eğrileri negatif bölgedeyken, Şekil 3'de $\omega t=\pi/2$ titreşim fazında ara yüz gerilme eğrilerinin hepsinin yön değiştirdiği görülmektedir.



Şekil 3. Plaka kalınlığının (h)=0.001m ve titreşim fazının (ωt)= π/2 olduğu durumda a) gliserin b) motor yağı c) deniz suyu ve d) benzin akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz gerilmesi frekans cevapları

Titreşim fazının ara yüz düzlemi gerilmesine etkisinin daha iyi anlaşılması için, Şekil 4'de ara yüz gerilmesi ile titreşim fazı bağımlılığını gösteren dört farklı akışkana ait grafikler

verilmiştir. Bu şekilde ω=400 rad/s alınmış olup, a,b,c,d grafikleri sırasıyla gliserin, motor yağı, deniz suyu ve benzin akışkanlarına aittir.



Şekil 4. Plaka kalınlığının (h)=0.001m ve titreşim frekansının ω= 400 rad/s olduğu durumda, a) gliserin b) motor yağı c) deniz suyu ve d) benzin akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz gerilmesi-titreşim fazı arasındaki bağıntı eğrileri

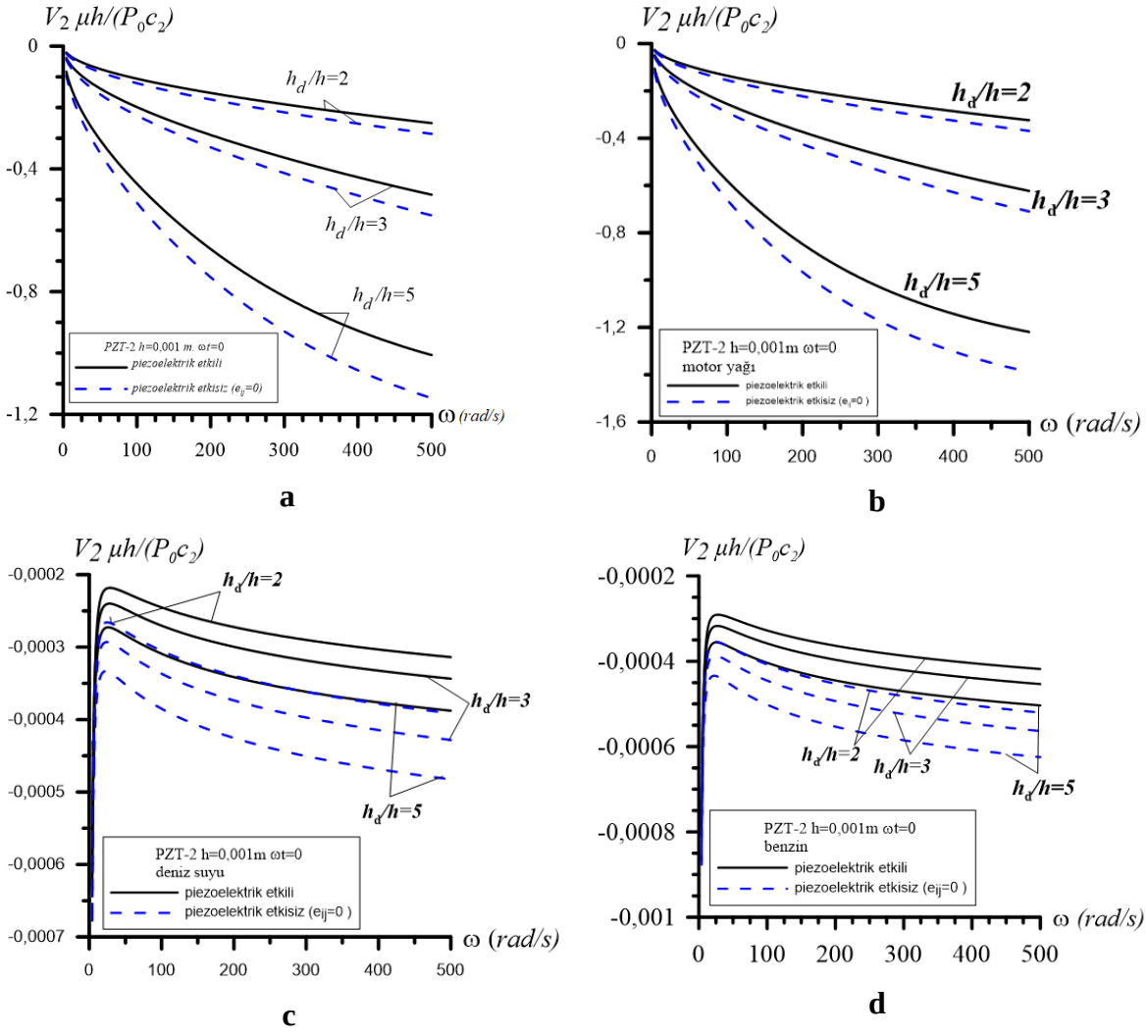
Ara Yüz Akışkan Hızı Frekans Cevapları

Bu bölümde plaka ve akışkan ara yüz düzlemindeki boyutsuz $V_2\mu h/(P_0c_2)$ akışkan hızının frekans cevabı grafikleri verilmiştir. Bu grafikler ile akışkan özelliklerinin hız değeri üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

Boyutsuz $V_2\mu h/(P_0c_2)$ akışkan hızının, h=0.001 m olduğu ve h_d/h =2,3,5 kabul edildiği durum için frekans cevabı grafikleri Şekil 5'de gösterilmiştir. Şekildeki eğriler elde edilirken, plaka malzemesi olarak PZT-2 kullanılmıştır ve a,b,c,d grafiklerinde ise akışkan olarak sırasıyla; gliserin, motor yağı, deniz suyu ve benzin alınmıştır.

Şekil 5'de verilen eğriler baz alınarak, vizkozitesi büyük olan akışkanın ara yüz düzlemindeki hız değerinin daha yüksek olduğu söylenebilmektedir.

Diğer yandan plaka malzemesinin piezoelektriklik özelliğinin tüm akışkanların hız değerleri üzerinde azalmaya neden olduğu da görülmektedir. Ayrıca bu azalmanın büyüklüğü, akışkanın türüne göre farklılık göstermektedir. Piezoelektrik etkiden dolayı akışkan hızının azalma yüzdesi; gliserin ve motor yağı için tüm h_d/h oranlarında %12 civarında çıkarken, deniz suyu ve benzin için bu oranın %7 ile %20 arasında frekans arttıkça artan bir şekilde değiştiği görülmüştür.



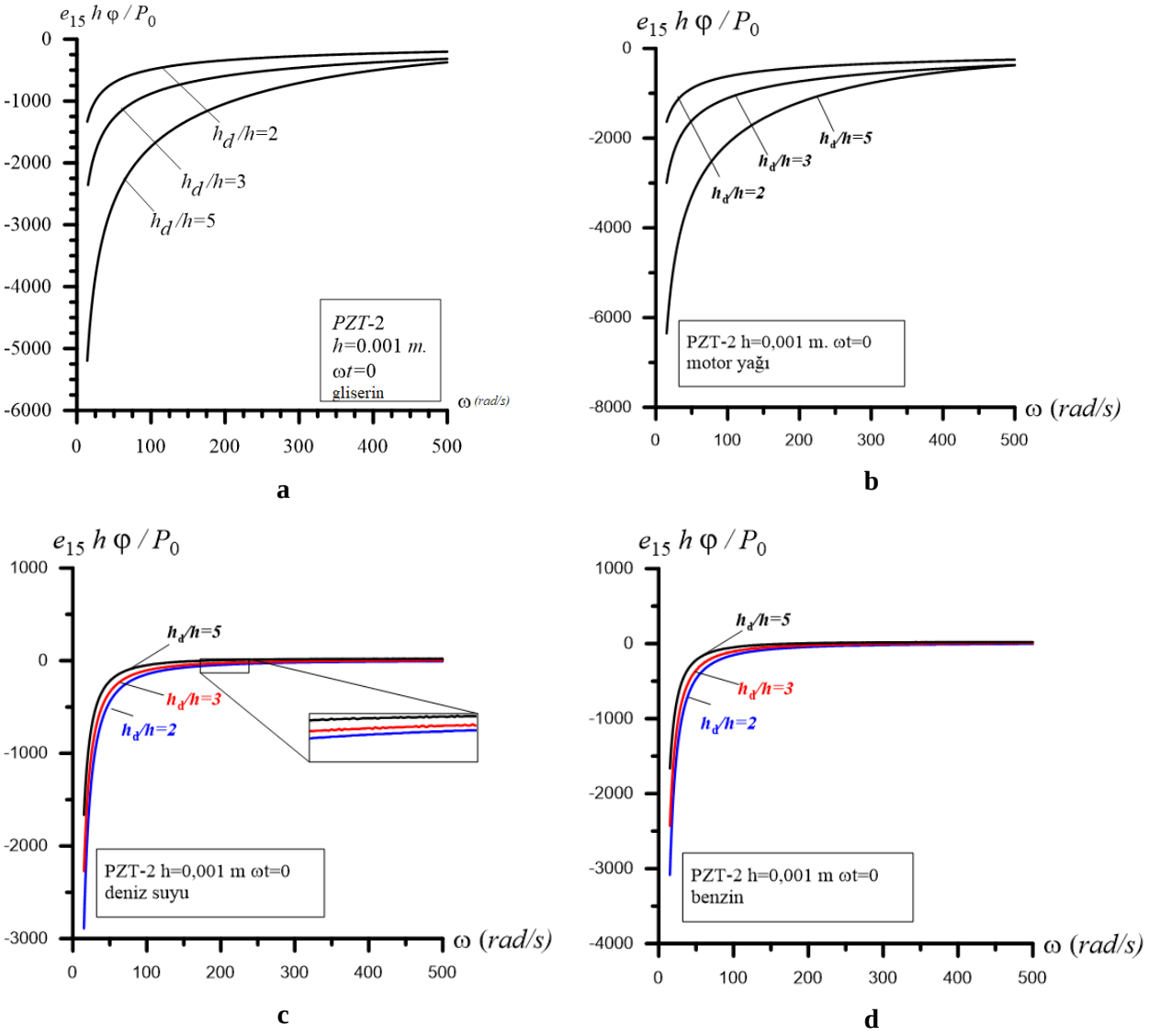
Şekil 5. Plaka kalınlığının (h)=0.001m ve titreşim fazının (ωt)=0 olduğu durumda a) gliserin b) motor yağı c) deniz suyu ve d) benzin akışkanlarını içeren sistemlere ait ara yüz akışkan hızı frekans cevapları

Elektrik Potansiyeli Frekans Cevapları

Bu kısımda, $e_{15}h\varphi / P_0$ boyutsuz elektrik potansiyelinin frekans cevapları ve incelenen parametrelerin bu cevap üzerindeki etkisi araştırılacaktır. Elektrik potansiyel değeri, piezoelektrik plakanın alt düzleminde ve $x_1/h = 0$ noktasında hesaplanmıştır. Ayrıca, piezoelektrik plakanın üst yüzey düzlemindeki elektrik potansiyeli ile alt yüzey düzlemindeki elektrik potansiyeli, nispeten ince plakalarda (h=0.001 m ve h=0.0001 m gibi) 10^{-5} hassasiyetiyle örtüştüğü elde edilmiştir. Bu nedenle bu çalışmada sadece piezoelektrik

plakanın alt yüzündeki elektrik potansiyeli incelenmiştir. Bu bölümde incelenen sistemlerde piezoelektrik malzeme olarak PZT-2 alınmış olup, akışkan olarak ise gliserin, motor yağı, deniz suyu ve benzin alınmıştır.

Sekil 6'da PZT-2 plakası için plaka kalınlığı h =0.001m ve titreşim fazı ωt = 0 kabul edildiğinde, boyutsuz $e_{15}h\varphi / P_0$ elektrik potansiyeli frekans cevapları farklı akışkanlardan oluşan sistemler için elde edilmiştir.

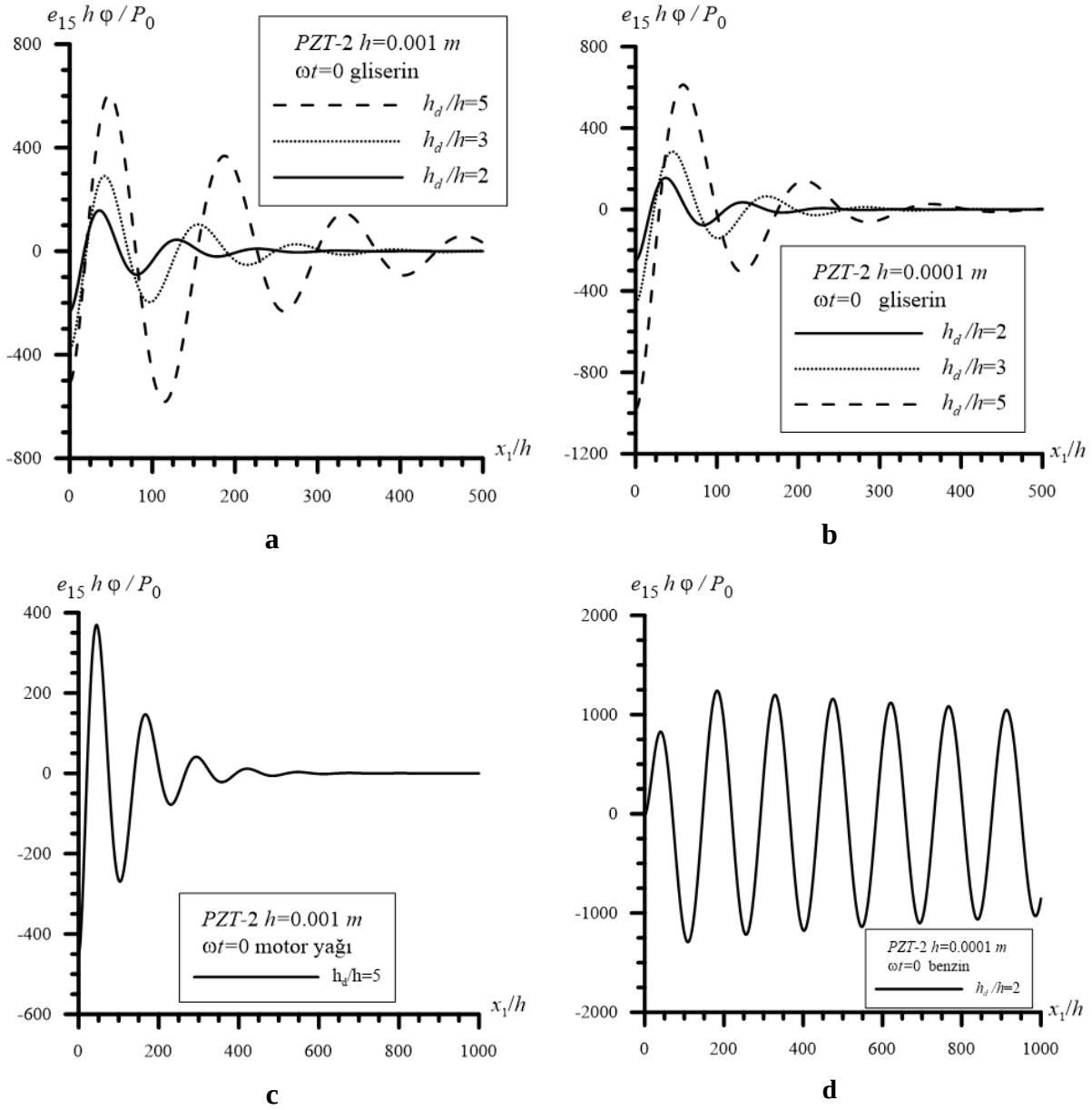


Şekil 6. PZT-2 piezoelektrik plakası ve a) gliserin b) motor yağı c) deniz suyu d) benzin akışkanı içeren sistemin, titreşim fazı ωt = 0 olduğu durumda elektrik potansiyeli frekans cevabı eğrileri

Şekil 6'ya bakılarak, elektrik potansiyelin mutlak değeri frekans arttıkça azalır ve elektrik potansiyelin işareti negatiftir. Akışkanın viskozitesi arttıkça elektrik potansiyeli değerlerinde de artış görülmektedir.

Yukarıda verilen tüm sayısal sonuçların $x_1 / h = 0$ noktasında hesaplanmıştır. $x_1 / h = 0$ noktasına olan uzaklığın, elektrik potansiyelinin mutlak değerinin üzerindeki etkisi farklı akışkanlar için araştırılmıştır. Fiziksel ve mekanik kanunlar gereği, sadece elektrik

potansiyeli değil stres ve hız değerlerinde de $x_1 / h = 0$ noktasından uzaklaştıkça azalma görülmesi normaldir. Akışkan özelliklerinin ve akışkan derinliği ile plaka kalınlığının bu azalmaya etkisi Şekil 7'de gösterilmiştir.



Şekil 7. Elektrik potansiyelinin x_1/h koordinatına göre dağılımı a) h=0.001 m ve akışkan gliserin b) h=0.0001 m ve akışkan gliserin c) h=0.001 m ve akışkan motor yağı d) h=0.001 m ve akışkan benzin olarak alınmıştır.

Şekil 7a grafiğinde; kalınlığı h=0.001 m olan PZT-2 plaka ve gliserinden oluşan sistemin $e_{15} h\varphi / P_0$ boyutsuz elektrik potansiyelinin x_1 / h'a göre dağılımı gösterilmiştir. Şekil 7b'de ise kalınlığı h=0.0001 m olan PZT-2 malzemeli plaka ve gliserinden oluşan sistemin $e_{15} h\varphi / P_0$ boyutsuz elektrik potansiyelinin x_1 / h'a göre dağılımı gösterilmiştir. Böylelikle, plakanın kalınlığının azalmasıyla $e_{15} h\varphi / P_0$ potansiyelinin sıfıra ulaşmasının daha küçük

x_1 / h değerlerinde olduğu görülmüştür. Şekil 7c ve Şekil 7d' de ise faklı akışkanlar içeren sistemin elektrik potansiyelinin x_1 / h 'a göre dağılımı gösterilmiştir. Dinamik viskozitesi daha büyük olan akışkanlarda elektriksel potansiyel değerinin daha çabuk sıfıra ulaştığı görülmüştür.

Sonuçlar

Piezoelektrik plaka ve sonlu derinlikte sıkıştırılabilir viskoz akışkandan oluşan hidro-piezoelektrik sistemin mekanik zorlanmış titreşimi incelenmiştir. Plakanın hareketi, elasto elektro dinamiğin piezoelektrik malzemeler için olan kesin denklemleri ile ifade edilmiştir. Akışkanın akım denklemleri ise, doğrusallaştırılmış Navier-Stokes denklemleri ile açıklanmıştır. Çalışmanın temel amacı; akışkan özelliklerinin, akışkan ve plaka ara düzlemindeki basınca (normal gerilme değerine), akışkan hızına ve elektrik potansiyeline nasıl etkidiğini araştırmaktır. Yapılan teorik çalışmalarda; plaka malzemesi PZT-2 olarak seçilmiş olup, sisteme uygulanan mekanik kuvvetin frekansı $4(\text{rad/s}) \leq \omega \leq 500(\text{rad/s})$ aralığında kabul edilmiştir. Akışkan olarak ise gliserin, motor yağı, deniz suyu ve benzin akışkanları incelenmiştir.

Akışkan viskozitesinin artışıyla, plaka akışkan ara yüz düzlemindeki basınç, hız ve elektrik potansiyeli değerlerinde artış olmaktadır. Elektrik potansiyelinin mutlak değeri, titreşim frekansının artması ile azalmaktadır ve hangi frekansta sıfır değerine ulaşacağı akışkanın özelliklerine göre değişmektedir. Viskozitesi yüksek akışkanlarda potansiyel değeri daha çabuk sıfır olmaktadır. Tüm akışkan eğrilerinde, piezoelektrik etki plaka akışkan ara yüz düzlemindeki basınç ve hız değerlerinin azalmasına neden olmaktadır. Bu çalışma kapsamında hidro-piezoelektrik sistemin dinamik davranışının analizi için bir algoritma geliştirilmiştir. Bu yöntem özellikle plakanın sonsuz uzunlukta modellendiği birçok araştırma için kullanılabilir. Farklı akışkanlar kullanılarak, bu sistemin farklı çalışma alanlarında kullanıldığında elde edilecek sonuçları araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Lamb H., Axisymmetric vibration of circular plates in contact with water, Proceedings of The Royal Society (London) A, vol. 98, pp. 205–216, 1921.

[2] Athanassoulis G., Mamis K., An onshore hydro/piezo/electric system and itsapplication to energy harvesting from sea waves, The 2012 World Congress on Advances in Civil, Environmental, and Materials Research (ACEM' 12), pp. 368–387, 2012.

[3] Renzi E., Hydro-electromechanical modelling of a piezoelectric wave energyconverter, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematicaland physical sciences, vol. 472, no. 2195, 2016.

[4] Cho J., Choi J., Jeong S., Design of hydro electromagnetic and piezoelectricenergy harvesters for a smart water meter system, Sensors and Actuators A:Physical, vol. 261, no. 1, pp. 261–267, 2017.

[5] Zakaria H., Loon C., The application of piezoelectric sensor as energy harvesterfrom small- scale hydropower, International Conference on Civil and Environ-mental Engineering (ICCEE 2018), vol. 65, 2018.

[6] Huang Y., Hsu H.,Solid-liquid coupled vibration characteristics of piezoelectric hydroacoustic devices, Sensors and Actuators A: Physical, vol. 238, pp. 177–195, 2016.

[7] Kuznetsova I., Zaitsev B., Borodina I., Study of the hydroacoustic emitter basedon the antisymmetric lamb wave in a piezoelectric ceramic plate, Journal ofCommunications Technology and Electronics, vol. 56, no. 11, pp. 1382–1386,2011.

[8] Sharapov V., Zhanna S., Kunickaya L., Piezo-Electric Electro-Acoustic Transducers, Springer, New York, USA, 2014.

[9] Akbarov, S.D., Forced vibration of the hydro-vıscoelastıc and - elastic systems consisting of the viscoelastic or elastic plate, compressible viscous fluid and rigid wall: a review, Appl. Comput. Math. 17(.3), 221-245, 2018.

[10] Ekicioğlu Küzeci, Z., Piezoelektrik Levha, Viskoz Akışkan ve Rijit Duvardan Oluşan Sistemin Zorlanmış Titreşimi, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 2020.

[11] Akbarov, S.D., Ismailov, M., Aliyev, A., The influence of the initial strains of the highly elastic plate on the forced vibration of the hydro-elastic system consisting of this plate, compressible viscous fluid and rigid Wall, Coupled System Mechanics, vol. 6, pp. 287-316, 2017.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

EĞRİSEL FORMDAKİ ÇATILARIN KURT KOLONİ ALGORİTMASI KULLANILARAK OPTİMUM TASARIMI

Erkan Doğan[1], Betül Üstüner[2], İbrahim Aydoğdu[3], Canip Özyürek
[1,2] Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa
[3]Akdeniz Üniversitesi, Antalya

ABSTRACT

In this study, optimum design of curvilinear steel roofs is criticized. Two robust meta-heuristic methods, namely the wolf colony algorithm and the artificial bee colony algorithm, are considered for comparison. Optimum design problem of curvilinear steel roofs tries to find the best design under constraints. ASD-ASCI (Allowable Stress Design Code of American Institute of Steel Institution) is taken into account for these design constraints, and the weight of the roof is selected as objective function to be minimized. Ready-made steel profiles given in the specification are used. The API (Application Programming Interface: Program interface application) feature of SAP2000 is integrated with the Visual Basic programming language and the optimum design algorithm based on the Wolf Colony Optimization method is created. This method simulates the intelligent predator behavior of the wolf colony to solve optimization problems. In order to observe efficiency, two different roof models are designed with this design algorithm. The designs produced by this algorithm are compared with the ones obtained by the artificial bee colony algorithm, which is one of the herd-based optimization methods. The results show that it is a robust and efficient technique to solve steel roof design problems.

Keywords: wolf colony algorithm; steel roof design; sap 2000-API

ÖZET

Bu çalışmada eğrisel formdaki çelik çatıların optimum tasarlanması ele alınmıştır. Tasarımda meta-sezgisel yöntemlerden biri olan kurt koloni algoritması ve yapay arı kolonisi algoritmasının karşılaştırılması yapılmıştır. Eğrisel formdaki çelik çatıların optimum tasarımı problemi kısıtlamalar altında en iyi tasarımı bulmaya çalışır. ASD-ASCI (Amerikan Çelik Enstitüsü İzin Verilebilir Gerilme Tasarım Kodu) bu sınırlayıcılar için dikkate alınmıştır ve çatı ağırlığı minimize edilecek amaç fonksiyonu olarak seçilmiştir. Şartnamede verilen hazır çelik profiller kullanılmıştır. Eğrisel yapıya sahip olan çatıların SAP2000'in API (Uygulama Programlama Arayüzü: Program arayüz uygulaması) özelliği Visual Basic programlama dili ile entegre edilerek Kurt Kolonisi Optimizasyon yöntemine dayalı optimum bir tasarım algoritması oluşturulmuştur. Bu yöntem, optimizasyon problemlerini çözmek için kurt kolonisinin akıllı yırtıcı davranışlarını taklit eder. Verimliliği gözlemlemek için bu tasarım algoritması ile iki farklı çatı modeli tasarlanmıştır. Bu algoritma kullanılarak üretilen tasarımlar, sürü tabanlı optimizasyon yöntemlerinden biri olan yapay arı kolonisi algoritması

ile elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Çelik çatı tasarım problemlerinin çözümünü elde etmek için sağlam ve verimli bir teknik olduğu sonuçlarda görülmüştür.

Anahtar kelimeler: kurt koloni algoritması; çelik yapı tasarımı; SAP 2000-API

GİRİŞ

Geçmiş dönemlerden beri insanlar, faydayı en üst düzeyde tutarak, ekonomiyi minimum sınıra çekmeye çalışmışlardır. Doğadaki kaynakların sınırlı oluşu insanoğlunu optimum olanı bulmaya zorunlu kılmıştır. Bu anlamda optimizasyon, belirlenmiş bazı kısıtları sağlayacak şekilde en iyi çıktıya (sonuca) ulaşmaktır [1].

Bir optimizasyon probleminde en iyi şekilde hedefe ulaşmak için öncelikle amaç belirlenmelidir. Belirlenen amaç doğrultusunda, amaç fonksiyonu fayda ya da maliyet gibi optimize edilmek istenen bir nicelik gösterir. Daha sonra sınırlayıcılar ve tasarım değişkenleri ayrı ayrı tanımlanmalıdır. Tasarım değişkenlerinin tipi problemin türüne ya da ihtiyaca göre değişiklik gösterebilir. Sınırlayıcılar genellikle değişkenlerin sağlaması gereken kurallardan veya sistem kısıtlamalarından oluşur. Genel bir optimizasyon problemi, sınırlayıcıların sağlandığı ve belirlenen amaç fonksiyonunun minimum ya da maksimum yapıldığı en iyi değerlerin (değişkenler) seçilmesi olarak ifade edilebilir. [2]

Optimizasyon işleminde problemin çözümünü belirleyen karar değişkenlerinin belirlenmesi, sonrasında ise bu karar verici parametreler ışığında minimize edilecek maliyet fonksiyonu ya da maksimize edilecek kâr fonksiyonları tanımlanmalıdır. Bunların tanımlanmasında problemi sınırlayan, karar değişkenlerinin alabileceği değer ya da değer aralıklarını ifade eden sınırlamaların belirtilmesi gerekmektedir. Probleme göre bazı kısıtlamalar eşitsizlik, bazıları ise eşitlikler şeklinde olabilmektedir [3].

Genel bir ifade ile optimizasyon problemi şu şekilde tanımlanabilir [4],

Ağırlık fonksiyonu,

$$z = F(\vec{x}) \tag{1}$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} g_k(\vec{x}) &\leq 0, \qquad k = 1,2,\dots p \\ h_j(\vec{x}) &= 0, \qquad j = 1,2,\dots,m \end{aligned} \tag{2}$$

Tasarım değişken aralıkları:

$$L_{xk} \leq x \leq U_{xk}, k = 1,2,\dots n \tag{3}$$

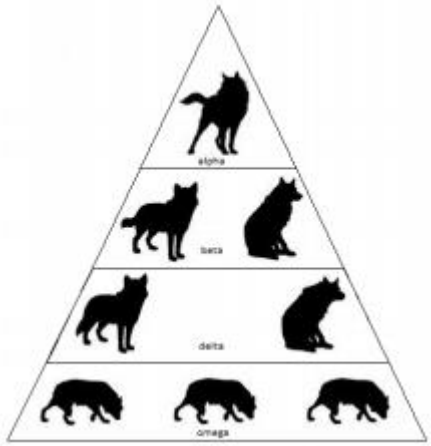
koşulları altında minimum veya maksimum yapan $\vec{x}$ değerlerini belirlenmesi bir optimizasyon problemidir. Burada $F(\vec{x})$ amaç fonksiyonu, $\vec{x}$ tasarım değişkenleri, m eşitlik kısıtlarını, p eşitsizlik kısıtlarını ifade etmektedir.

Stokastik bir şekilde optimum çözüm araştırması yapan metasezgisel algoritmalar, araştırma uzayında, mevcut çözümlere operatörler uygulayarak yeni çözümler üretirler. Bu iteratif araştırma işlemi sırasında daha iyi çözümler üretmeye meyil gösterirler. Yapılan işlem çoğu kez doğada mevcut olan zeki bir optimizasyon sürecinin taklit edilmesidir. Bu nedenle bu

algoritmalar doğal optimizasyon algoritmaları şeklinde de adlandırılabilir [5]. Rastgele sayıların üretildiği stokastik optimizasyon metotları, amaç ve kısıt fonksiyonlarının türevinden daha çok, fonksiyon değerlendirmesine ihtiyaç duyarlar. Bu algoritmaların doğrusal olmayan algoritmalara göre avantajı, kesikli değişkenlere sahip optimizasyon problemlerine uygulanabiliyor olmasıdır [6]. Stokastik optimizasyon teknikleri verdiği verimli sonuçlar sayesinde yapı mühendislerinin de araştırma kaynağı olmuştur. Bu tekniklerin kullanılması ile, yapısal optimizasyon problemlerinin çözümü matematiksel programlama yöntemleri ile elde edilen çözümlere göre çok daha etkin hale gelmiştir. Bu yöntemlerin temelindeki mantık sürü zekâsı, en iyi olanın hayatta kalması gibi prensiplerin sayısal algoritmalar içinde taklit edilmesidir.

Yapısal tasarım araçlarındaki gelişmeler, olağanüstü geometriye sahip, modern, kafes kirişli çatıların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Kubbeler ve tonozlar, icat edilen eğrisel çatı formlarının örnekleridir. Bu çalışmada, meta-sezgisel arama yöntemlerine dayalı optimum tasarım algoritmaları ile eğrisel çelik çatı yapılarının en uygun şekilde tasarlanması amaçlanmıştır. İncelemek için çeşitli çatı modellerinde kubbe çatılar ve tonoz çatılar ele alınmıştır. Kubbe çatılar kubbe şeklinde tasarlanmış çatılardır. Wigwams, iglolar ve jeodezik kubbeler, dairesel kubbeli şekil yapıların örnekleridir [7]. Tonoz ise basitçe bir kemer veya bir dizi kemer şeklinde bir çatı olarak tanımlanabilir. Namlu, oluklu, yelpaze ve nervürlü tonoz, en yaygın kullanılan tonoz biçimlerinden bazılarıdır [8]. Araştırmacılar optimizasyon çalışması üzerine yoğunlaşmış ve bu konudaki tasarım algoritmalarının sayısının artmasını sağlamıştır. Arama işlemine yön veren metotlar meta-sezgisel yöntemlerdir.

Kurt koloni algoritmasında (WCA), kurt sürüsünün atanma kuralı yiyecek önce güçlü olan kurda daha sonra ise zayıf kurtlara atanır. Burada güçlü olan kurda en fazla yiyecek atanır ve zayıf olan kurtlarda bir süre sonra açlıktan ölürler. Bir süre sonra güçlü olan kurtlarda zayıf olacağından kurt kolonisinin adaptasyonu da arttırılmış olur. WCA algoritmasında koloni içindeki zayıf kurtlar kaldırılır ve yerine yeni kurtlar ürettirilirse bu durum çeşitlilik sağlar ve lokal optimumu önlemiş olur [9]. Şekil 1'de kurtların hiyerarşisi görülmektedir. Baskınlık yukarıdan aşağıya doğru azalır.



Şekil 1. Kurtların Hiyerarşisi [9]

Kurt kolonisi algoritmasında ilk olarak yöntem parametreleri belirlenir. Bunlar MML: lidere doğru en fazla hareket, HGS: avcı sayısı, HCGR: avcı grubu önem oranı 0 ile 1 arasında değişir. MML ve HCGR parametreleri avcının pozisyonu belirleyebilmek için kullanılmaktadır.

2. Adımda avcıların ilk konumları avcı sayısına bağlı olarak belirlenir.
3. adımda avcıların pozisyonları lidere doğru hareket etmeleri ile güncellenir. (yeni çözüm vektörleri $(x' = x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$)

Yeni çözüm vektörü:

$$x_i{}' = x_{li} + rand * MML * (x_i^l - x_i) \tag{4}$$

Rand, 0 ile 1 arasında rastgele sayıdır. Her avcı için, avcının lidere doğru hareketi başarılı olursa yeni pozisyonda kalır, eski pozisyonunun yenisine göre daha iyi sonuç vermesi durumunda önceki pozisyonuna geri döner.

4. adımda avcılar tekrar organize olur ve daha etkin avlanabilmek için birbirlerine göre pozisyonları düzenlerler.

5. adımda avcılar yerel optimuma sıkışmamak ve global optimum noktasını bulabilmek için pozisyonlarını güncellerler.

Bu algoritma devam ederken çözüm optimum noktaya yakınsar. 3., 4., ve 5. Adımlar en fazla iterasyon sayısı kadar tekrar edilir ve program durdurulur [10].

Çalışmada ele alınan diğer algoritma yöntemi ise yapay arı koloni algoritmasıdır. Bu algoritma üretilirken bal arılarının yem ararken gösterdiği davranıştan esinlenilmiştir. Yapay bal arısı algoritma mantığında farklı görevleri yerine getiren üç çeşit arı bulunmaktadır. İlk arı grubu besin kaynağını bulup nektarının miktarını değerlendiren ve daha iyi kaynaklar araştırıp bunların yerini hafızasına alan 'işçi arılardır'. Bu arılar kovana geri döndüklerinde, bu bilgiyi diğer arılarla dans ederek paylaşırlar. Dansın süresi, gıda kaynağındaki nektarın miktarını temsil eder. İkinci grup, işçi arıların dansını izleyen 'gözlemci arılardır'. Gözlemci arılar, gıda kaynağının ziyaret edilmeye değerliğini gözlemleyip, gıda kaynağına uçmaya karar verebilirler. Üçüncü grup arılar ise kovan çevresinde rastgele uçarak yeni besin kaynakları araştıran 'izci arılardır'. Besin kaynağı diğer arılar tarafından terk edilen işçi arılar, izci arı olurlar. Her besin kaynağı, o optimizasyon problemi için olası bir çözüm olarak düşünülür ve besin kaynağında bulunan nektar miktarı, uygunluk değeriyle tanımlanan çözümün kalitesini temsil eder.

Yapay arı koloni algoritması, başlatma safhası, işçi arı safhası, gözlemci arı safhası ve izci arı safhası olmak üzere dört aşamadan (adımdan) oluşur.

İlk adımda besin kaynağı başlangıç popülasyonunun tüm vektörleri, (xp, p=1,…,np) aşağıdaki denklem yardımı ile oluşturulur. Np, yapay arıların toplam sayısını yani popülasyon boyutunu ifade eder. Her besin kaynağı, n kadar değişken içeren (x_{pi} , i=1,…,n) potansiyel bir çözüm vektörüdür.

$$x_{pi} = x_{li} + rand(0,1)(x_{ui} - x_{li}) \tag{5}$$

x_{li} ve x_{ui} , x_i'nin alt ve üst sınırlarını ifade eder.

2. adımda işçi arılar aşağıdaki bağıntı yardımı ile yeni besin kaynakları araştırırlar.

$$v_{pi} = x_{pi} + \emptyset_{pi}(x_{pi} - x_{ki}) \tag{6}$$

k≠i rastgele seçilen bir besin kaynağı, $\emptyset_{pi}$ ise [-1,1] aralığından rastgele bir sayıdır. Yeni besin kaynağı üretildikten sonra uygunluk (sonuç) hesaplanır. Eğer sonucu x_{pi}'den daha iyi ise yeni besin kaynağı eskisi ile değiştirilir. Besin kaynağının uygunluğu aşağıdaki bağıntıya bağlı olarak hesaplanmaktadır.

$$sonuc(x_p) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+f(x_p)}, & x_p \geq 0 \\ 1+abs\left(f(x_p)\right), & x_p < 0 \end{cases} \qquad (7)$$

3. adımda işçi arılar buldukları besin kaynaklarının yer bilgisini gözlemci arılar ile paylaşırlar. Gözlemci arılar ise besin kaynaklarını, aşağıdaki bağıntıda gösterilen popülasyondaki her besin kaynağının sonuç değeri kullanılarak hesaplanan olasılık değeri Pp'ye bağlı olarak seçerler.

$$P_p = \frac{sonuç(x_p)}{\sum_{p=1}^{n_p} sonuç(x_p)} \qquad (8)$$

Bir besin kaynağı x_{pi} gözlemci arı tarafından rastgele seçildikten sonra, komşu besin kaynağının sonucu ve olasılık değeri 7 ve 8 denklemi kullanılarak hesaplanır.
4. adımda belirli denemeden sonra çözümleri iyileştirilemeyen işçi arılar izci arı olurlar ve çözümleri terk edilir. Yeni sonuçlar (yeni besin kaynakları) aramaya başlarlar.
5. adım olarak, 2'den 4. adıma kadar olan adımlar durdurma kriteri sağlanıncaya kadar tekrarlanır [10].

EĞRİSEL FORMLU ÇATILARIN OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU

İki adet eğrisel formda çelik konstrüksiyon yapısı, kurt kolonisi optimizasyonuna göre boyutlandırılmıştır. Kubbe tasarımı boyutlandırılmasında 354 çubuk eleman farklı kombinasyonlarla gruplandırılmıştır. Kubbe modeli 40 m çapında 8.28 m yüksekliğinde tasarlanmıştır. Tonoz tasarımında ise 693 çubuk eleman farklı kombinasyonlarla tasarlanmıştır. Model 22.9 m açıklığa, 9 m genişliğe ve 5.75 m yüksekliğe sahiptir. Programlaması yapılan kurt kolonisi API yazılımı ile istenilen deplasman değerleri ve istenilen çelik yönetmeliği seçilmiştir. Ardından kurt kolonisinde gerekli parametrelerden olan; kurt sayısı, maksimum arama sayısı, adım sayısı, kuşatma sayısı ve arama yönü programa girilmiş ve gruplama işleminde oluşturulan grup sayısı sistemde değişken sayısı olarak kabul edilmiştir. Son olarak tüm çubuk elemanların sayısı ve modelleme için oluşturulan kesitlerin sayısı girilmiştir. Kullanılan modeller API (Application Programming Interface: Program arayüz uygulaması) özelliği ve Sap 2000 programı ile entegre çalışan Visual Basic programlama dili kullanılarak oluşturulan yazılım kullanılarak analiz edilmiştir. Wolf API programlaması ile analizler diğer optimizasyon programlarında da olduğu gibi seri şekilde analizleri gerçekleştirerek en uygun boyutlandırmayı yapmıştır ve Kurt kolonisi algoritması yapı elemanlarına en uygun boyutları vermek suretiyle boyutlandırmayı yapmıştır. Bu çalışmalar doğrultusunda ele alınan iki örnekte daha önce farklı optimizasyon yöntemleri ile çözülmüş yapıyı kurt kolonisi yöntemi ile boyutlandırılıp karşılaştırılması yapılmıştır.

Optimum tasarım sürecinde amaç, belirtilen problemin çözümünü belirleyen karar değişkenlerini bulmaktır. Bu problem sadece minimize edilecek maliyet fonksiyonunu veya maksimize edilecek kar fonksiyonlarını değil aynı zamanda tasarım kısıtlamalarını da içerir. Problemi sınırlayan ve karar değişkenlerinin alabileceği değer veya değer aralığını ifade eden kısıtlar belirlenmelidir. Amaç çatı yapılarının minimizasyonu olduğunda ve bu kafes biçimli yapıların tasarımı ASD-AISC'ye göre olduğunda, optimum tasarım problemi aşağıdaki şekli alır.
Hazır profil listesinin sıra numarasını temsil eden aşağıdaki tasarım değişkenleri için optimum değerleri;

$$I^T = [I_1, I_2, \dots, I_{N_d}] \tag{9}$$

$$A^T = [A_1, A_2, \dots, A_{N_m}] \tag{10}$$

Çelik yapılarda toplam maliyet, malzeme maliyeti ile doğru orantılıdır. Bu nedenle, optimum tasarım problemindeki amaç fonksiyonu, aşağıdaki gibi ifade edilen çerçevenin minimum ağırlığı olarak tanımlanır:

$$W = \sum_{m=1}^{N_m} \rho_m L_m A_m \tag{11}$$

Denklem 11'de, W, kafes yapının toplam ağırlığıdır, L_m, ρ_m sırasıyla m elemanının uzunluğu ve birim ağırlığıdır.

$$g_m = \frac{\sigma_m}{(\sigma_m)_{all}} - 1 \leq 0, \qquad m = 1, \dots, N_m \tag{12}$$

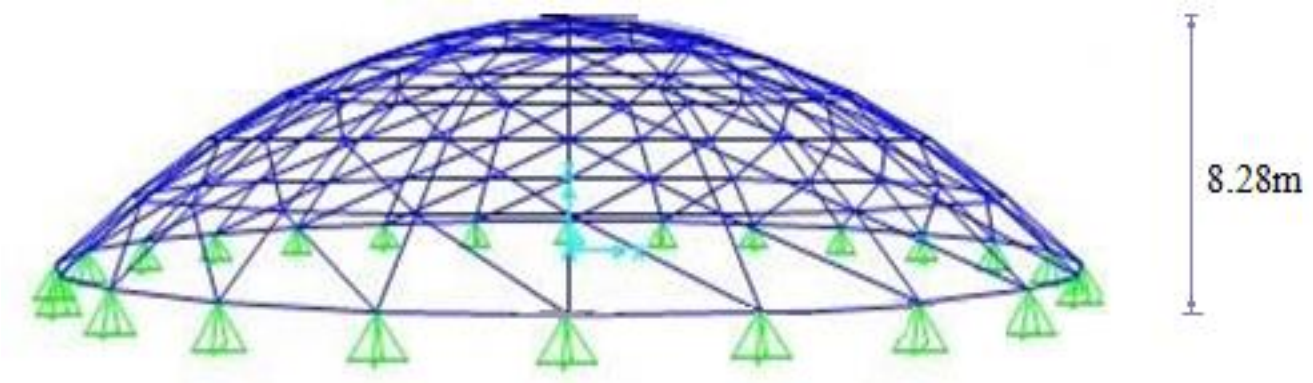
Optimizasyon probleminde çelik çerçeve tasarımı, geometrik kısıtlamalar dikkate alınmıştır. Ve aşağıdaki kısıtlamaları karşılar:

$$s_m = \frac{\lambda_m}{(\lambda_m)_{all}} - 1 \leq 0, \qquad m = 1, \dots, N_m \tag{13}$$

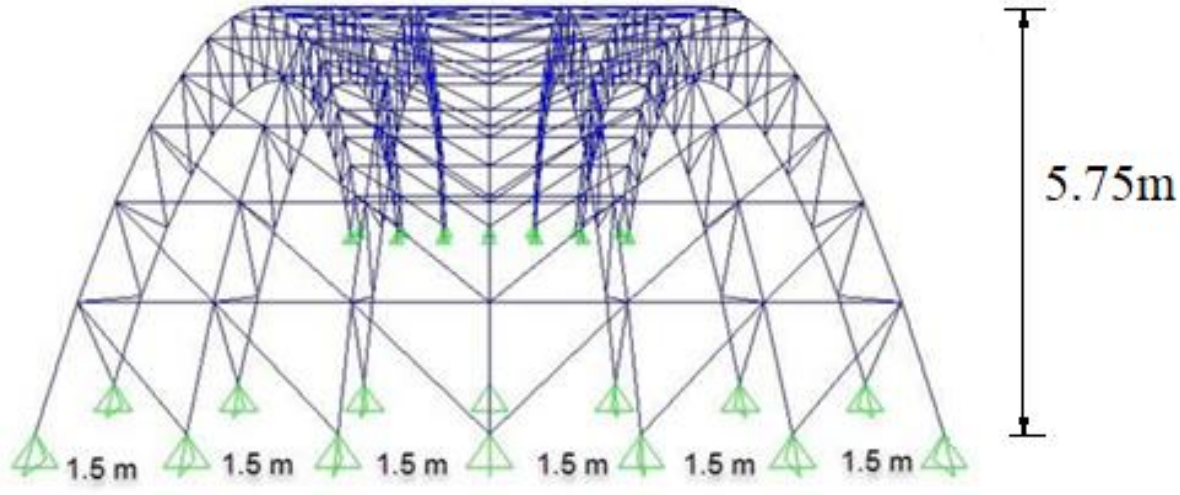
$$\delta_{j,k} = \frac{d_{j,k}}{(d_{j,k})_{all}} - 1 \leq 0, \qquad j = 1, \dots, N_j \tag{14}$$

N_j birleşim noktalarının toplam sayısıdır. g_m, s_m ve $\delta_{j,k}$ fonksiyonları, sırasıyla gerilmelere, narinlik oranlarına ve yer değiştirmeye bağlı kısıtlamalar olarak adlandırılır. σ_m ve $(\sigma_m)_{all}$ sırasıyla m-inci kiriş için hesaplanan ve izin verilen eksenel gerilmelerdir. λ_m ve $(\lambda_m)_{all}$ sırasıyla m-inci eleman için narinlik oranı ve üst sınırıdır. $d_{j,k}$ ve $(d_{j,k})_{all}$ sırasıyla j bağlantı noktasının k-inci yönünde hesaplanan yer değiştirmeler ve izin verilen değeridir [11].

Kubbe tasarımı ve tonoz yapıları Şekil 2 ve Şekil 3'de görülmektedir.



Şekil 2. Çelik kubbe çatının yandan görünüşü



Şekil 3**.** Tonoz çatının yandan görünüşü

Tablo 1. 354 Üyeli Jeodezik Kubbe için Optimum Tasarımlar

	ABC	**WCA**
Grup Numarası	**Kesit**	**Kesit**
1	P2	P2
2	P3	P3
3	P3.5	P3,5
4	P3.5	P3,5
5	P3	P3
6	P3.5	P3,5
7	P3.5	P3,5
8	P3	P3
9	P3	P3
10	P3	P3
11	P2.5	P2.5
12	P2.5	P2.5
13	P3	P3
14	P2.5	P2.5
15	P2.5	P2.5
16	P3	P3
17	P2.5	P2.5
18	P2.5	P2.5
19	P2.5	P2.5
20	P2.5	P2.5
21	P2.5	P2.5
22	P4	P3
Weight(kN)	**155,808**	**153,862**
Max. str. ratio	**0,960**	**0,962**
Max. Displ. (cm)	**0,279**	**0,308**

Çalışmada görüldüğü üzere Kurt Koloni Algoritması (WCA) ve Yapay Arı Koloni algoritması (ABC) karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda Tablo 1'de kubbe yapısı için sonuçlar görülmektedir. Maksimum ağırlık yapay arı kolonisi için daha fazla olduğu görülürken maksimum yer değiştirme oranının da bu algoritmada daha hafif olduğu görülmektedir.

Tablo 2. Çelik Tonoz İçin Optimum Tasarımlar

	ABC	**WCA**
Grup Numarası	**Kesit**	**Kesit**
1	P2.5	P2.5
2	P.1	P1
3	P.75	P1
4	P1	P1
5	P.75	P.75
6	PX1.25	P1.5
7	P1	P1
8	P1	P1
9	P1	P1
10	P.75	P.75
11	PX1	P1
12	P1	P1
13	P1	P2
14	P1	P1
15	P3.5	P2
16	PX1	P1,25
17	P1	P1
18	P1	P1.25
19	P1	P1.5
20	P.75	P1
21	P1	PX.75
22	P.75	P75
23	P2	P2
Weight(kN)	**33.150**	**33,330**
Max. str. ratio	**0.995**	**0,997**
Max. Displ. (cm)	**0.753**	**0,697**

Tablo 2'de tonoz yapısı için sonuçlar görülmektedir. Maksimum ağırlık kurt kolon algoritması için daha fazla olduğu görülürken maksimum yer değiştirme oranının da bu algoritmada daha hafif olduğu görülmektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, kurt kolonisi algoritması (WCA) ve yapay arı kolonisi (ABC) kullanılarak eğrisel formda 354 elemanlı kubbe modeli ve 693 elemanlı tonoz modelinin optimum boyutlandırılması yapılmıştır. Bu hesaplamalarda meta-sezgisel yöntemlerden olan arıların ve kurtların davranışlarından yola çıkılarak optimum tasarım elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar çalışmanın özgünlüğünün gösterebilmesi adına yapay arı kolonisi algoritması ile karşılaştırılmıştır. Kubbe modeli ve tonoz modeli hem ağ bağlantılı hem de mimari olarak simetriktir. Bu nedenle sonuçların yakın olduğu düşünülmektedir. Çalışmada problemin tanımı, sağlaması gereken kısıtlar belirtilmiştir. Sap 2000 programında kubbe ve tonoz yapılarının belirtilen boyutlarda çizimi yapılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde kubbe modelinde yapay arı kolonisi algoritmasının daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Tonoz modelinde ise kurt koloni algoritmasının daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Elde edilen bulgularda yapı modeline göre algoritmaların çalışmalarının farklı sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] E. Doğan, Optimum Design Of Rigid and Semi-Rigid Steel Sway Frames Including SoilStructure Interaction, Doktora tezi, Ph.D. Dissertation, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 2010.

[2] A. Çiftçioğlu. Ö., E. Doğan, Çelik Çerçevelerin Farklı Stokastik Yöntemler Kullanılarak Optimum Boyutlandırılması, *Konya Mühendislik Bilimleri Dergisi*, *7*(4), 847-861. doi:10.36306/konjes.654958.

[3] E. Doğan, M. P Saka,. Optimum design of unbraced steel frames to LRFD–AISC using particle swarm optimization. *Advances in Engineering Software*. 46(1) (2012) 27-34 doi.org/10.1016/j.advengsoft.2011.05.008.

[4] S. Şeker, E. Doğan, Performance Testing of Hunting Search Algorithm in Finding the Optimum Solution of Engineering Design Problems. *7th International Architecture and Engineering Symposiums.* (29-30 November, 2012) Gemikonağı, TRNC

[5] M. Yetkin, *Metasezgisel Algoritmaların Jeodezi'de Kullanımı*, Geomatik, 1.1 (2016): 8-13.

[6] M. Kurt, *Stochastic Optimization Methods*, Springer, Munich, Germany, 3-43 s., 2005.

[7] R.A. Abraham, G.K. Chandran, Study of Dome structures with specific Focus on Monolithic and Geodesic Domes for Housing, *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering.* s. 2250-2459, 2016.

[8] S. Huerta, The debate about the structural behaviour of gothic vaults: From Viollet-le-Duc to Heyman. *In Proceedings of the Third International Congress on Construction History*, Madrid, Spain, s. 837-844, 2009.

[9] https://caglartelef.com/a-wolf-colony

[10] M. P. Saka, E. Doğan, İ. Aydoğdu, Review and Analysis of Swarm-Intelligence Based Algorithms. Swarm Intelligence and Bio-Inspired Computation, Theory and Applications, Chapter: 2. Ed: X-S Yang, Z Cui, R. Xiao, A. M. Gandomi, M. Karamanoğlu, Elsevier, 26 s, 2013.

[11] O. Hasançebi, S. Çarbaş, E. Doğan, F. Erdal, M. P. Saka, Performance evaluation of metaheuristic search techniques in the optimum design of real size pin jointed structures. *Computers & Structures*, 87(5-6), 284–302, 2009. doi:10.1016/j.compstruc.2009.01.002

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

EĞİLME ETKİSİNDEKİ DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN İÇERDİĞİ PZT DOLGULARIN GERİLME YIĞILMASINA ETKİSİ

Ülkü BABUŞCU YEŞİL[1] ve Fatih AYLIKÇI [2]
[1,2]Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

In this work, influence of piezoelectric (PZT) inclusion or inclusions on stress analysis of a simply supported rectangular plate caused by bending force is examined using three dimensional finite element method. Mathematical modelling of the problem is formulated within the scope of the three dimensional exact equations of electro-elasticity theory using the piecewise-homogeneous body model. It is assumed that ideal contact conditions are provided at the interface surfaces between the PZT inclusion and the elastic matrix. All algorithms and programs required for the numerical solution are made by the authors. The effects of PZT inclusion's size, its volume fraction, its location in the matrix and the coupling effects between the mechanical and electrical fields as well as the effects of interaction between the neighboring PZT inclusions in simply-supported rectangular thick plate under bending force on the stress distributions in that are investigated and discussed. It is shown that piezoelectric inclusion within the rectangular plate under bending force have a significant influence on the stress concentration at the interface between the matrix and PZT inclusions.

Keywords: piezoelectric inclusion; stress concentration; 3D Finite Elements Method;

ÖZET

Bu çalışmada yapısında piezoelektrik (PZT) dolgu veya dolgular içeren eğilme kuvveti etkisindeki basit mesnetli bir plağın gerilme analizi, üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Problemin matematiksel modellemesi, parçalı-homojen cisim modeli kullanılarak elektro-elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kapsamında formüle edilmiştir. PZT dolgu ile elastik matris arasındaki ara yüzeylerde ideal temas koşullarının sağlandığı varsayılmaktadır. Sayısal çözüm için gerekli olan tüm algoritmalar ve programlar yazarlar tarafından yapılmıştır. Ele alınan basit mesnetli PZT dikdörtgen kalın plağın eğilme kuvveti altında, PZT dolgunun boyutu, hacim oranı, PZT dolgunun matris içindeki konumu ile mekaniksel ve elektriksel alanlar arasındaki karşılıklı etki ile birlikte PZT dolgular arasındaki karşılıklı etkinin, yapıdaki gerilme yayılımına etkisi araştırılmış ve tartışılmıştır. Eğilme kuvveti altında dikdörtgen plağın içerdiği piezoelektrik dolgunun matris ve PZT dolgu arasındaki ara yüzdeki gerilme yığılması üzerinde önemli bir etkiye sahip olduğu tespit edilmiştir.

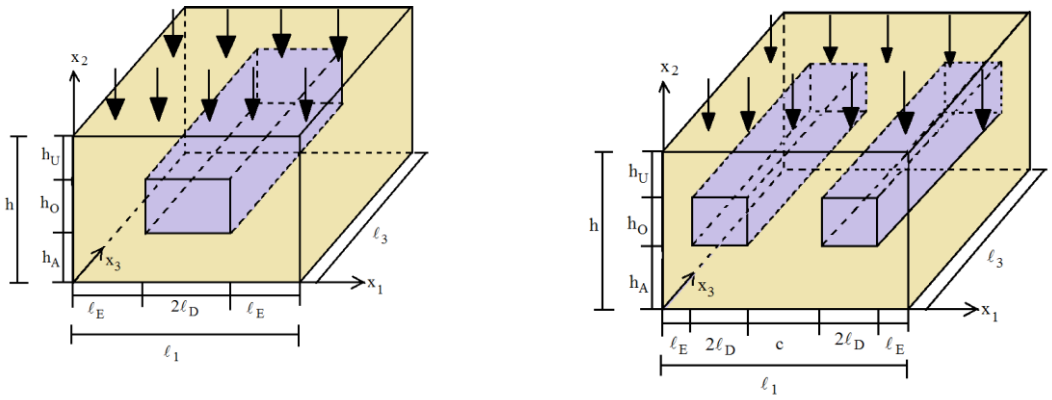
Anahtar kelimeler: Piezoelektik dolgu; gerilme yığılması; 3B Sonlu Elemanlar Yöntemi;

GİRİŞ

Bazı malzemelerdeki piezoelektrik özellik, bu malzemelerin kristal iç yapılarında merkezi simetriye sahip olmayan malzemelerde görülen bir özelliğidir. Bu malzemelere dış kuvvet uygulandığında yani, malzeme şekil değiştirdiğinde yapısında kutuplanma meydana gelmektedir. Diğer bir değişle yapıda elektrik akımı oluşturabilecek bir durum oluşmaktadır (doğrudan etki). Tersi durumda yani malzeme elektrik alan içine yerleştirildiğinde, yapısında mekanik deformasyon meydana gelmektedir (dolaylı etki). Bu etkiler, malzemenin içindeki polarizasyon yoğunluğundaki değişmeyle alakalıdır. Piezoelektrik malzemelerin mekanik etkiye yanıtı, kristal yapılarındaki atomların dizilişi ile belirlenen kristal yönlenme ve uygulanan mekanik gerilme ile oluşan uzamanın yönü arasındaki açısal değerlere bağlıdır **[1].** Piezoelektrik malzemelerin ikili özelliğinden aktüatörler, sensörler, transdüserler ve üreteçler gibi birçok ileri teknolojik uygulamada yararlanılmaktadır. Son zamanlarda oldukça geniş bir araştırma alanına sahip piezoelektrik malzemeler, genellikle piezoelektrik olmayan malzemelere birleştirilerek (entegre edilerek) kullanılmaktadır. İçerisinde çeşitli geometrik formlarda süreksizlikler içeren piezoelektrik malzemelere ait literatürde pek çok çalışma mevcuttur [2-10]. Literatürde mevcut pek çok çalışmada çeşitli formlarda piezoelektrik dolgu/sensor içeren problemler ya sonsuz ortam için ele alınmıştır [2-8], ya da düzlem problemler incelenmiştir [9-10]. [11]'de eksenel çekme kuvveti etkisinde yapısında piezoelektrik malzemeden yapılmış prizmatik dolgu içeren kalın plağın elektro statik analizi incelenmiştir. Bu çalışmada yapısında piezoelektrik malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik dolgu/ dolgular içeren eğilme etkisindeki dikdörtgen plakların 3 boyutlu gerilme analizi parçalı homojen cisim modeli ve elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri yardımıyla modellenmiş ve üç boyutlu sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla sayısal olarak incelenmiştir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Yapıdaki dikdörtgen prizmatik dolgunun/dolguların, plağın arkaya doğru kalınlığı (Ox_3 ekseni) boyunca ve Ox_3 koordinat eksenine paralel olacak şekilde yer aldığı kabul edilmektedir (Şekil 1).



(a) (b)

Şekil 1. Eğilme etkisindeki dikdörtgen prizmatik formda a) tek dolgu içeren plak (Problem 1) b) iki dolgu içeren plak (Problem 2).

Ele alınan problemlerin çözüm bölgesi;

Problem 1 için:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \Omega' \cup \Omega_I = \left\{ 0 \le x_1 \le \ell_1, 0 \le x_2 \le h\,, 0 \le x_3 \le \ell_3 \right\} \\
&\Omega_I = \left\{ \ell_E \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O\,, 0 \le x_3 \le \ell_3 \right\} \\
&\Omega' = \Omega / \Omega_I
\end{aligned} \tag{1}$$

Problem 2 için:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \Omega'' \cup \Omega_I \cup \Omega_{II} = \left\{ 0 \le x_1 \le \ell_1, 0 \le x_2 \le h\,, 0 \le x_3 \le \ell_3 \right\} \\
&\Omega_I = \left\{ \ell_E \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O\,, 0 \le x_3 \le \ell_3 \right\} \\
&\Omega_{II} = \left\{ \ell_E + 2\ell_D + c \le x_1 \le \ell_1 - \ell_E, h_A \le x_2 \le h_A + h_O\,, 0 \le x_3 \le \ell_3 \right\} \\
&\Omega'' = \Omega / \left(\Omega_I \cup \Omega_{II} \right)
\end{aligned} \tag{2}$$

dir. Burada Problem 1 (Problem 2) için Ω_I $(\Omega_I \text{ ve } \Omega_{II})$ dolgunun (dolguların) bulunduğu bölgeyi ve Ω' veya Ω'' dolgu veya dolguların dışındaki bölgeyi (matris) göstermektedir. Ele alınan plağın bütün yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve elektriksel potansiyelin sıfır olduğu, sadece üst yüzeyinden $\left(x_2 = h\right)$ düzgün yayılı basınç kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın yanal yüzeylerinden ve dolgu ile matris ara yüzeylerinden mekaniksel ve/veya elektriksel hiçbir yükün etki etmediği kabul edilmektedir. Plağın içerdiği dolgu ile matris ara yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığı ve PZT dolgunun tüm yüzeylerinden topraklanmış olduğu (yani, normal doğrultudaki elektriksel yer değiştirme değişiminin olmadığı) kabul edilmektedir. Belirtelim ki burada verilecek olan matematiksel modelleme, daha genel olması açısından, hem dolgu hem de onu saran bölgenin (matris) malzemesinin piezoelektrik malzeme olduğu kabul edilerek verilecektir. Ancak, sayısal hesaplamalarda matris malzemesinin elastik malzeme olması durumu göz önünde bulundurulacaktır. Matematiksel modellemede üst indis (1) matris malzemesi ve üst indis (2) ve (3) dolgu malzemesine ait büyüklükleri temsil etmek için kullanılacaktır.

Buna göre çözüm bölgesinde sağlanan denge denklemleri;

$$\frac{\partial T_{ji}^{(\mathrm{m})}}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial D_j^{(\mathrm{m})}}{\partial x_j} = 0, \tag{3}$$

Elektro-mekanik ilgiler;

$$\begin{aligned}
&T_{ij}^{(m)} = c_{ijkl}^{(m)} s_{kl}^{(m)} - e_{kij}^{(m)} E_k^{(m)}, \;\; D_i^{(\mathrm{m})} = e_{ikl}^{(\mathrm{m})} s_{kl}^{(\mathrm{m})} + \varepsilon_{ik}^{(m)} E_k^{(m)} \\
&s_{kl}^{(m)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(m)}}{\partial x_k} \right), \;\; E_k^{(m)} = -\frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_k} \;\; ,i;\, j;\, k;\, l = 1,2,3
\end{aligned} \tag{4}$$

(3) ve (4) 'de yapıda tek (çift) dolgu olduğunda m=1,2 (m=1,2,3) değerlerini almaktadır ve m=1 (m=2 ve 3) matris (dolgu) malzemesine ait büyüklükleri temsil etmektedir. Ayrıca bu denklemlerde, $T_{ij}^{(\mathrm{m})}$, gerilme tansörü bileşeni; $s_{kl}^{(\mathrm{m})}$, Green şekil değiştirme tansörü bileşeni; $u_i^{(\mathrm{m})}$, yerdeğiştirme vektörü bileşeni; $D_i^{(\mathrm{m})}$, elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşeni; $E_k^{(\mathrm{m})}$, elektrik alan vektörü bileşeni; $\phi^{(\mathrm{m})}$, elektrik potansiyeli; $e_{kij}^{(\mathrm{m})}$, piezoelektrik sabiti; $\varepsilon_{ik}^{(\mathrm{m})}$, dielektrik sabiti; $c_{ijkl}^{(\mathrm{m})}$, elastik malzeme sabitini temsil etmektedir. Bünye denklemlerini matris formunda yazabilmek için kompakt matris notasyonu kullanılır. Bu notasyon *ij* veya *kl* indis çiftlerini *p* veya *q* gibi tek indise indirger. Yani,

$$c_{ijkl} \to c_{pq},\ e_{ikl} \to e_{ip},\ T_{ij} \to T_p$$

$$11 \to 1,\ 22 \to 2,\ 33 \to 3,\ 23\ (32) \to 4,\ 31\ (13) \to 5,\ 12\ (21) \to 6$$

alınır. Malzemeye ait bünye denklemleri yeni indis notasyonuna göre düzenlenirse;

$$T_p^{(m)} = c_{pq}^{(m)} s_q^{(m)} - e_{kp}^{(m)} E_k^{(m)}, D_i^{(\mathrm{m})} = e_{iq}^{(\mathrm{m})} s_q^{(\mathrm{m})} + \varepsilon_{ik}^{(m)} E_k^{(m)} \tag{5}$$

veya matris formunda

$$\begin{Bmatrix} T_1^{(m)} \\ T_2^{(m)} \\ T_3^{(m)} \\ T_4^{(m)} \\ T_5^{(m)} \\ T_6^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(\mathrm{m})} & c_{12}^{(\mathrm{m})} & c_{13}^{(\mathrm{m})} & c_{14}^{(\mathrm{m})} & c_{15}^{(\mathrm{m})} & c_{16}^{(\mathrm{m})} \\ c_{21}^{(\mathrm{m})} & c_{22}^{(\mathrm{m})} & c_{23}^{(\mathrm{m})} & c_{24}^{(\mathrm{m})} & c_{25}^{(\mathrm{m})} & c_{26}^{(\mathrm{m})} \\ c_{31}^{(\mathrm{m})} & c_{32}^{(\mathrm{m})} & c_{33}^{(\mathrm{m})} & c_{34}^{(\mathrm{m})} & c_{35}^{(\mathrm{m})} & c_{36}^{(\mathrm{m})} \\ c_{41}^{(\mathrm{m})} & c_{42}^{(\mathrm{m})} & c_{43}^{(\mathrm{m})} & c_{44}^{(\mathrm{m})} & c_{45}^{(\mathrm{m})} & c_{46}^{(\mathrm{m})} \\ c_{51}^{(\mathrm{m})} & c_{52}^{(\mathrm{m})} & c_{53}^{(\mathrm{m})} & c_{54}^{(\mathrm{m})} & c_{55}^{(\mathrm{m})} & c_{56}^{(\mathrm{m})} \\ c_{61}^{(\mathrm{m})} & c_{62}^{(\mathrm{m})} & c_{63}^{(\mathrm{m})} & c_{64}^{(\mathrm{m})} & c_{65}^{(\mathrm{m})} & c_{66}^{(\mathrm{m})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^{(m)} \\ s_2^{(m)} \\ s_3^{(m)} \\ s_4^{(m)} \\ s_5^{(m)} \\ s_6^{(m)} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11}^{(\mathrm{m})} & e_{21}^{(\mathrm{m})} & e_{31}^{(\mathrm{m})} \\ e_{12}^{(\mathrm{m})} & e_{22}^{(\mathrm{m})} & e_{32}^{(\mathrm{m})} \\ e_{13}^{(\mathrm{m})} & e_{23}^{(\mathrm{m})} & e_{33}^{(\mathrm{m})} \\ e_{14}^{(\mathrm{m})} & e_{24}^{(\mathrm{m})} & e_{34}^{(\mathrm{m})} \\ e_{15}^{(\mathrm{m})} & e_{25}^{(\mathrm{m})} & e_{35}^{(\mathrm{m})} \\ e_{16}^{(\mathrm{m})} & e_{26}^{(\mathrm{m})} & e_{36}^{(\mathrm{m})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1^{(\mathrm{m})} \\ E_2^{(\mathrm{m})} \\ E_3^{(\mathrm{m})} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_1^{(\mathrm{m})} \\ D_2^{(\mathrm{m})} \\ D_3^{(\mathrm{m})} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11}^{(\mathrm{m})} & e_{12}^{(\mathrm{m})} & e_{13}^{(\mathrm{m})} & e_{14}^{(\mathrm{m})} & e_{15}^{(\mathrm{m})} & e_{16}^{(\mathrm{m})} \\ e_{21}^{(\mathrm{m})} & e_{22}^{(\mathrm{m})} & e_{23}^{(\mathrm{m})} & e_{24}^{(\mathrm{m})} & e_{25}^{(\mathrm{m})} & e_{26}^{(\mathrm{m})} \\ e_{31}^{(\mathrm{m})} & e_{32}^{(\mathrm{m})} & e_{33}^{(\mathrm{m})} & e_{34}^{(\mathrm{m})} & e_{35}^{(\mathrm{m})} & e_{36}^{(\mathrm{m})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1^{(m)} \\ s_2^{(m)} \\ s_3^{(m)} \\ s_4^{(m)} \\ s_5^{(m)} \\ s_6^{(m)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^{(\mathrm{m})} & \varepsilon_{12}^{(\mathrm{m})} & \varepsilon_{13}^{(\mathrm{m})} \\ \varepsilon_{21}^{(\mathrm{m})} & \varepsilon_{22}^{(\mathrm{m})} & \varepsilon_{23}^{(\mathrm{m})} \\ \varepsilon_{31}^{(\mathrm{m})} & \varepsilon_{32}^{(\mathrm{m})} & \varepsilon_{33}^{(\mathrm{m})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1^{(\mathrm{m})} \\ E_2^{(\mathrm{m})} \\ E_3^{(\mathrm{m})} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

olur. Sınır koşullarına ait matematiksel ifadeler;

$$\begin{gathered} u_2^{(\mathrm{m})} \mid_{x_1=0;\ell_1} = u_2^{(m)} \mid_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ \phi^{(\mathrm{m})} \mid_{x_1=0;\ell_1} = \phi^{(m)} \mid_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\ T_{11}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_1=0;\ell_1} = T_{13}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_1=0;\ell_1} = 0 \\ T_{31}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_1=0;\ell_3} = T_{33}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_1=0;\ell_3} = 0 \\ T_{22}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_2=h} = p, \\ T_{2i}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_2=0} = T_{21}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_2=h} = T_{23}^{(\mathrm{m})} \mid_{x_2=h} = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

ve ara yüzeylerde temas koşulları;

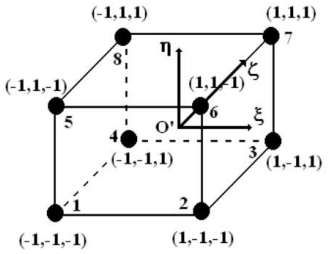
$$\begin{gathered} u_i^{(1)}\, \mathrm{n}_i^{(1)} \mid_S = u_i^{(k)}\, \mathrm{n}_i^{(k)} \mid_S, \\ T_{ij}^{(1)}\, \mathrm{n}_j^{(1)} \mid_S = T_{ij}^{(k)}\, \mathrm{n}_j^{(k)} \mid_S, \\ \phi^{(1)}\, \mathrm{n}^{(1)} \mid_S = \phi^{(k)}\, \mathrm{n}^{(k)} \mid_S, \\ D_i^{(1)}\, \mathrm{n}_i^{(1)} \mid_S = D_i^{(k)}\, \mathrm{n}_i^{(k)} \mid_S \end{gathered} \tag{8}$$

olarak verilebilir. (8)'de yapıda tek (iki) dolgu olduğunda k=2 (k=2,3) değerlerini alır ve $n_j^{(s)}$ (s=1,2,3), (s) bileşeninin yüzeyinin dış birim normal vektörü bileşeni, S ise dolgu sınırını temsil etmek üzere Problem 1 için (9), Problem 2 için (10) şeklindedir.

$$\begin{aligned} S = &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=\ell_E,\ h_A\le x_2\le h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=\ell-\ell_E,\ h_A\le x_2\le h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| \ell_E\le x_1\le \ell-\ell_E,\ x_2=h_A,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| \ell_E\le x_1\le \ell-\ell_E,\ x_2=h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} S = &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=\ell_E,\ h_A\le x_2\le h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=\ell_E+2\ell_D,\ h_A\le x_2\le h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| \ell_E\le x_1\le \ell_E+2\ell_D,\ x_2=h_A,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| \ell_E\le x_1\le \ell_E+2\ell_D,\ x_2=h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\} \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=\ell_1-(\ell_E+2\ell_D),\ h_A\le x_2\le h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| x_1=\ell_1-\ell_E,\ h_A\le x_2\le h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| \ell_1-(\ell_E+2\ell_D)\le x_1\le \ell_1-\ell_E,\ x_2=h_A,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\}\cup \\ &\left\{(x_1,x_2,x_3)\middle| \ell_1-(\ell_E+2\ell_D)\le x_1\le \ell_1-\ell_E,\ x_2=h_A+h_O,\ 0\le x_3\le \ell_3\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Verilen sınır değer probleminin çözümü üç boyutlu (3B) sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak yapılacaktır. Ele alınan problemlerin çözümü, yapı elemanı ve yüklemenin $x_1/\ell_1=1/2$'ye göre simetrik olmasından yararlanılarak yarım (1/2) bölge için yapılmıştır. Çözüm bölgesi geometriye uygun olarak matris ve dolgu malzemesi için ayrı ayrı 8 nodlu dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlara ayrıklaştırılacaktır (Şekil 2). Nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yer değiştirmeler ile elektriksel potansiyel ϕ alınmıştır.



Şekil 2. Dikdörtgen prizmatik örnek eleman, nodların konumu ve nodların koordinatları.

Ele alınan dikdörtgen prizmatik örnek elemanın (Şekil 2) nodlarında doğrusal Lagrange

enterpolasyonlarının çarpımı ile tanımlanan şekil fonksiyonları N_k, $(k=1,2,...,8)$ kullanılmıştır [12]. Sonlu elemanlar yöntemi çerçevesinde her sonlu elemanda yer değiştirme ve elektriksel potansiyel fonksiyonları,

$$\begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ \phi^{(e)} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{8} \begin{Bmatrix} u_{ik}^{(e)} \\ \phi_k^{(e)} \end{Bmatrix} N_k \tag{11}$$

şeklinde seri formda temsil edilir.

Cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden $\prod$ fonksiyoneli yardımıyla sonlu eleman modellemesi yapılacaktır [13]:

$$\prod(u_1,u_2,u_3,\phi) = \sum_{m=1}^{2} \iiint_{\Omega_m} \left[\frac{1}{2} G_{ijkl}^{(m)} \frac{\partial u_i^{(m)}}{\partial x_j} \frac{\partial u_k^{(m)}}{\partial x_l} + R_{ijk}^{(m)} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j^{(m)}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^{(m)} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_k} \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial x_l} \right] d\Omega_m - \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} \mathrm{pu}_2^{(1)} \Big|_{x_2=h} \mathrm{dx}_1 \mathrm{dx}_3 - \int_0^{\ell_3} \int_0^{\ell_1} \mathrm{D}_1^{(1)} \phi^{(1)} \Big|_{x_2=0;h} \mathrm{dx}_1 \mathrm{dx}_3 \tag{12}$$

$\prod$ fonksiyoneli, (11) ifadeleri ve bilinen Ritz tekniği yardımıyla ele alınan sınır değer probleminin çözümü,

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \tag{13}$$

lineer cebirsel denklem takımının çözümüne indirgenir. (13)'de **K** katsayılar (Stifness) matrisi, **u** bilinmeyenleri içeren vektör ve **F** sağ taraf (kuvvet) vektörüdür. (13) denklemler sistemine yerdeğiştirmeler ve elektrik potansiyele göre (7) sınır koşulları uygulanarak indirgenmiş sistem bulunur. İndirgenmiş sistemin çözümü ile nodlarda aranan büyüklükler ve (6) bünye denklemleri yardımıyla yapıda gerilme yayılımları belirlenir. Bu gerilme yayılımlarına çeşitli geometrik ve malzeme parametreleri ile elektriksel alan ve mekaniksel alanların karşılıklı etkileri belirlenmeye çalışılacaktır.

SAYISAL SONUÇLAR

Sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla çözülmesi aşamasında, ele alınan plağı oluşturan bileşenlerden dolgu malzemesinin piezoelektrik (PZT) malzemeden, dolguyu saran matris malzemesinin elastik malzemeden oluştuğu kabul edilmiştir. Bu sayısal sonuçların elde edilmesinde herhangi bir paket program kullanılmamış olup, tüm algoritmalar ve programlar tarafımızdan FORTRAN (FTN77) kodlama dili kullanılarak yapılmıştır. Çözüm bölgesi Ox_1 doğrultusunda N=20, Ox_3 doğrultusunda NZ=20 ve Ox_2 doğrultusunda M=16 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam 6400 adet dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Ele alınan durumda sonlu eleman modellemesi 7497 düğüm noktası (nod) ve 27591 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir.

Dolgu malzemesini oluşturan piezoelektrik malzeme için sayısal hesaplarda kullanılan malzeme sabitleri aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Çizelge 1. Piezoelektrik Malzeme Sabitleri $C_{ij}\left(10^{10}\,\mathrm{N/m^2}\right), e_{ij}\left(\mathrm{C/m^2}\right), \varepsilon_{ij}\left(10^{-8}\,\mathrm{C/Vm}\right)$ [13].

Malzeme	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}	c_{66}	e_{31}	e_{33}	e_{15}	ε_{11}	ε_{33}
PZT-5H	12.6	7.91	8.39	11.7	2.30	2.35	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302

Belirtelim ki, yapılan tüm sayısal hesaplarda PZT malzeme için polarizasyon yönü Ox_2 olarak alınmıştır. Bu durumda (6) da verilen ve malzeme sabitlerini gösteren matrisler aşağıdaki gibi olmaktadır [13].

$$\begin{Bmatrix} c_{11}^{(2)} & c_{13}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^{(1)} & c_{33}^{(1)} & c_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^{(1)} & c_{13}^{(1)} & c_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^{(1)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{Bmatrix}$$

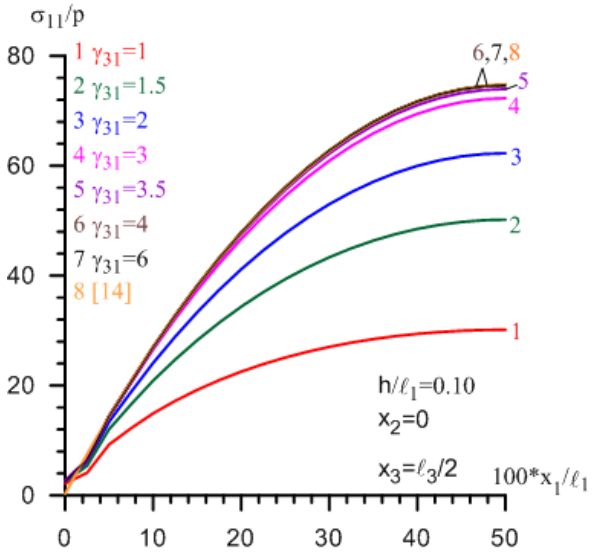
Sayısal incelemelerde ele alınan yükleme durumu için PZT dikdörtgen dolgu içeren dikdörtgen plakta elektriksel alan ile mekaniksel alanın karşılıklı etkisini belirlemek için iki durum göz önüne alınmıştır:

Durum 1: $e_{ij} = 0, \varepsilon_{ij} = 0$ (Elastik dolgu)

Durum 2: $e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0$ (PZT dolgu)

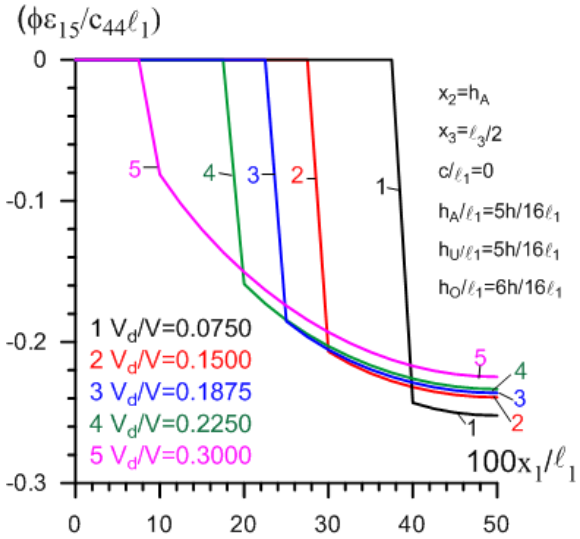
Durum 1, dikdörtgen plağın içerdiği PZT dolgu/dolguların malzemesi için piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin sıfır alınarak, bu dolgu/dolguların malzemesinin uygun elastik malzeme ile yer değiştirilmesine; Durum 2, dikdörtgen dolgu/dolguların malzemesinin PZT olmasına karşı gelmektedir. Bu iki durum için elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılmasından, dikdörtgen kalın plakta elektriksel ve mekaniksel alanların karşılıklı etkisinin verilen yükleme durumu için elektro-statik analizine etkisi belirlenecektir.

Şekil 3'de homojen izotrop $\left(E_2 / E_1 = 1\right)$ malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakta farklı $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$ parametre değerlerinde σ_{11}/p gerilme yayılımı $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = 0$ kesitinde incelenmiştir. $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$ parametresinin değeri büyüdükçe plağın belirtilen eksen doğrultusundaki uzunluğu büyümektedir. Buna göre bu parametre değişimi sonucunda $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1 > 1$ değerleri için bu problemin düzlem şekil değiştirme durumunda elde edilebilecek limit değerlere yaklaşım sağlanabilecektir. Şekilde $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$ değerinin artması σ_{11}/p gerilme değerini mutlak değerce arttırmakta ve düzlem şekil değiştirme durumunda elde edilmesi gereken değere ([14]) yakınsamaktadır. Bu durum tarafımızdan oluşturulan program ve algoritmalara güven sağlamaktadır.



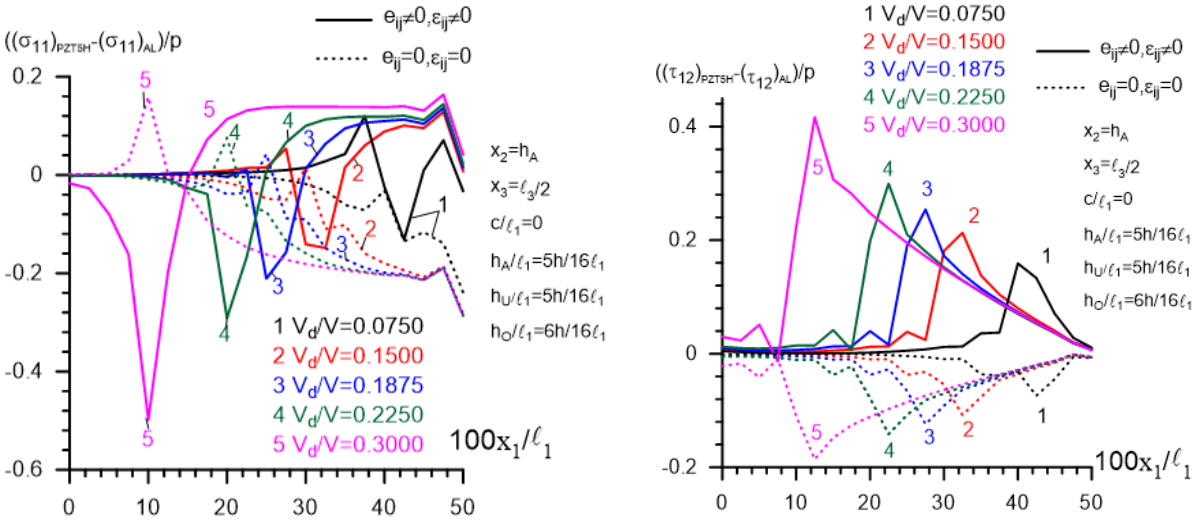
Şekil 3. Eğilme etkisindeki homojen-izotrop plakta $x_3 = \ell_3/2$, $x_2 = 0$ kesitinde σ_{11}/p gerilme yayılımına $\gamma_{31} = \ell_3/\ell_1$ değişiminin etkisi.

Şekil 4'de piezoelektrik malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik tek dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta, elektriksel potansiyelin $\left(\tilde{\phi} = \dfrac{\phi e_{15}}{c_{44}^{PZT}\ell_1}\right)$ dikdörtgen dolgunun farklı hacim oranlarında (V_d/V) $x_3 = \ell_3/2$, $x_2 = h_A$ kesitinde, Ox_1 ekseni boyunca değişimi incelenmiştir. Belirtelim ki, V toplam plak hacmini, V_d ise PZT dolgunun hacmini göstermektedir. Grafikten görüldüğü gibi, V_d/V parametresinin değeri düştükçe yani, PZT dolgunun plak içerisindeki hacim oranı azaldıkça, ele alınan kesitteki elektrik potansiyel değerleri mutlak değerce artmaktadır.



Şekil 4. Farklı V_d/V değerlerinde $x_3 = \ell_3/2$, $x_2 = h_A$ kesitinde $\tilde{\phi}\left(= \dfrac{\phi e_{15}}{c_{44}^{PZT}\ell_1}\right)$'nın x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

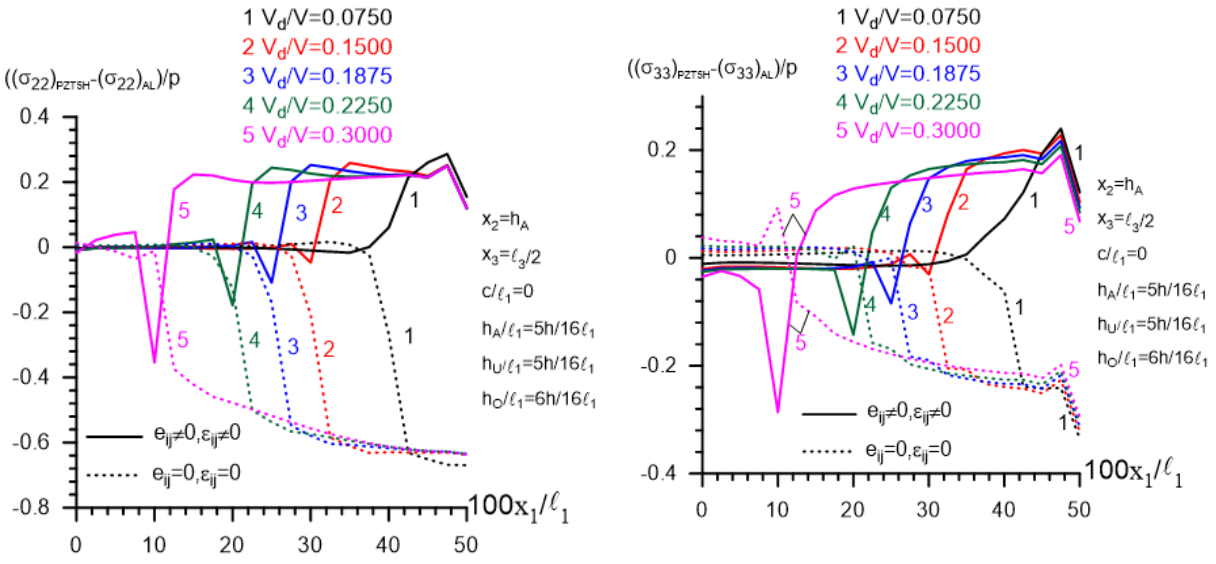
Şekil 5'de, matris malzemesi alüminyum (Al), dolgu malzemesi PZT5H ve/veya alüminyum alınması durumu için farklı V_d / V değerlerinde $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = h_A$ kesitinde (a) $\left((\sigma_{11})_{PZT5H} - (\sigma_{11})_{AL}\right)/p$; (b) $\left((\tau_{12})_{PZT5H} - (\tau_{12})_{AL}\right)/p$ gerilme yayılımları farklarının her iki durum için x_1/ℓ_1'e göre dağılımları incelenmiştir. Dolgunun hacmi arttıkça Şekil 5 (a ve b)'den görüldüğü gibi $\left((\sigma_{11})_{PZT5H} - (\sigma_{11})_{AL}\right)/p$ (a) ve $\left((\tau_{12})_{PZT5H} - (\tau_{12})_{AL}\right)/p$ (b) değerleri mutlak değerce artmaktadır. Ayrıca dolgunun hacmi arttıkça Durum 2'de elde edilen $\left((\sigma_{11})_{PZT5H} - (\sigma_{11})_{AL}\right)/p$ gerilme değerleri ile Durum 1'de elde edilen değerler arasındaki fark artmaktadır. $\left((\tau_{12})_{PZT5H} - (\tau_{12})_{AL}\right)/p$ gerilme değerleri için Durum 2'de elde edilen değerlerde $(\tau_{12})_{PZT5H} > (\tau_{12})_{AL}$ sağlanırken, Durum 1 için elde edilen değerlerde $(\tau_{12})_{PZT5H} < (\tau_{12})_{AL}$ eşitsizliği sağlanmaktadır.



(a) (b)

Şekil 5. Farklı V_d / V değerlerinde $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = h_A$ kesitinde (a) $\left((\sigma_{11})_{PZT5H} - (\sigma_{11})_{AL}\right)/p$; (b) $\left((\tau_{12})_{PZT5H} - (\tau_{12})_{AL}\right)/p$ gerilme yayılımları farklarının x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

Şekil 6'da farklı V_d / V değerlerinde $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = h_A$ kesitinde **(a)** $\left((\sigma_{22})_{PZT5H} - (\sigma_{22})_{AL}\right)/p$**; (b)** $\left((\sigma_{33})_{PZT5H} - (\sigma_{33})_{AL}\right)/p$ gerilme yayılımları farklarının her iki durum için x_1/ℓ_1'e göre dağılımları incelenmiştir. Her iki grafikte de kenar etkilerinin olmadığı kesitte Durum 1 için elde edilen gerilme farkları Durum 2 için elde edilen gerilme farklarından mutlak değerce büyük kalmaktadır. Yani dolgu malzemesinin PZT olması gerilme farkı değerlerini düşürmektedir. Dolgu hacmi azaldıkça Durum 1 ve Durum 2 için elde edilen fark değerleri artmaktadır.

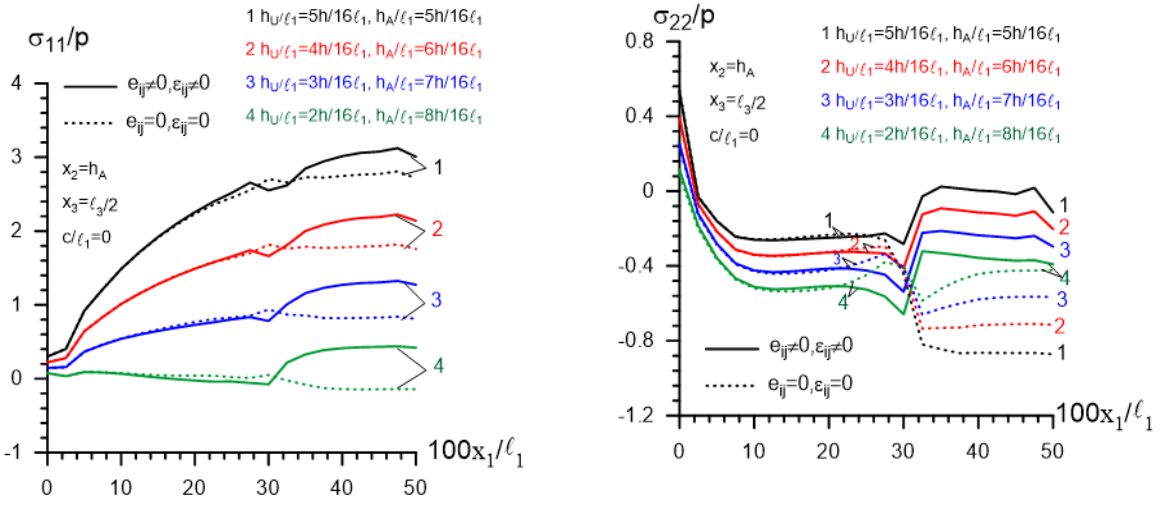


(a) (b)

Şekil 6. Farklı V_d / V değerlerinde $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = h_A$ kesitinde (a) $\left((\sigma_{22})_{PZT5H} - (\sigma_{22})_{AL}\right)/p$; (b) $\left((\sigma_{33})_{PZT5H} - (\sigma_{33})_{AL}\right)/p$ gerilme yayılımları farklarının x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

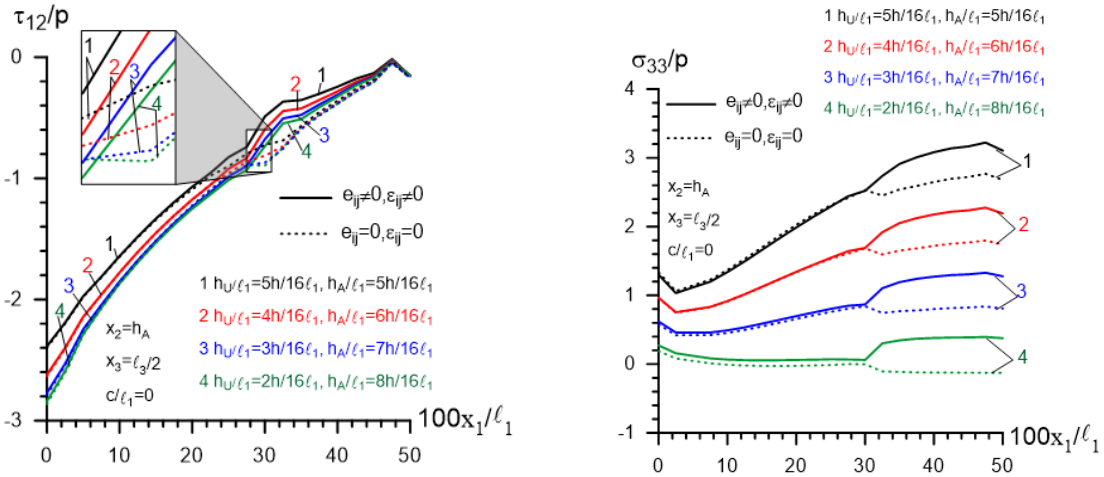
Şekil 7'de PZT dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta ele alınan malzeme parametre değerleri için yapıdaki dikdörtgen prizmatik dolgunun mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırılmasının (yani, h_U/ℓ_1 değerinin küçülmesinin), ele alınan yükleme durumunda $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = h_A$ kesitinde oluşan (a) σ_{11}/p; (b) σ_{22}/p gerilme yayılımlarına etkisi verilmiştir. h_U/ℓ_1 parametresinin değeri azaldıkça σ_{11}/p gerilme değerleri her iki durum için azalmakta ancak aralarındaki fark artmaktadır (Şekil 7a). σ_{22}/p gerilme değerleri ise h_U/ℓ_1 parametresinin değeri azaldıkça, dolgu içerisinde gerilme değerleri Durum 2 için mutlak değerce artarken, Durum 1 için mutlak değerce azalmaktadır ve dolayısıyla bu durumlar arasındaki fark azalmaktadır (Şekil7b).

Şekil 8'de PZT dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta ele alınan malzeme parametre değerleri için yapıdaki dikdörtgen prizmatik dolgunun mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırılmasının (yani, h_U/ℓ_1 değerinin küçülmesi), ele alınan yükleme durumunda $x_3 = \ell_3/2,\ x_2 = h_A$ kesitinde oluşan (a) τ_{12}/p; (b) σ_{33}/p gerilme yayılımlarına etkisi verilmiştir. τ_{12}/p kayma gerilmesi değerleri h_U/ℓ_1 parametre değeri azaldıkça dolgu sınırları içerisinde mutlak değerce artmakta, Durum 2'deki değişim, Durum 1'deki değişimden daha fazla olmaktadır (Şekil 8a). σ_{33}/p gerilme değerleri ise h_U/ℓ_1 parametresinin değeri azaldıkça, dolgu içerisinde her iki durum için azalmakta ancak bu durumlar arasındaki fark artmaktadır (Şekil 8b).



(a) (b)

Şekil 7. Farklı h_U/ℓ_1 değerlerinde $x_3=\ell_3/2$, $x_2=h_A$ kesitinde (a) σ_{11}/p; (b) σ_{22}/p gerilme yayılımlarının x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

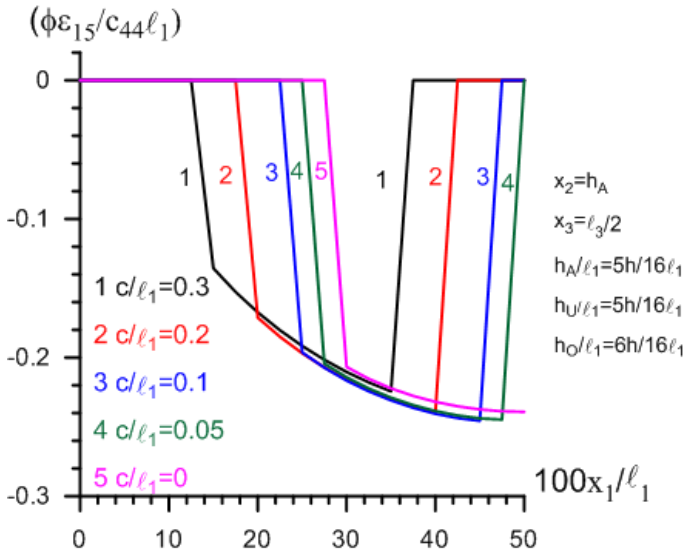


(a) (b)

Şekil 8. Farklı h_U/ℓ_1 değerlerinde $x_3=\ell_3/2$, $x_2=h_A$ kesitinde (a) τ_{12}/p; (b) σ_{33}/p gerilme yayılımlarının x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

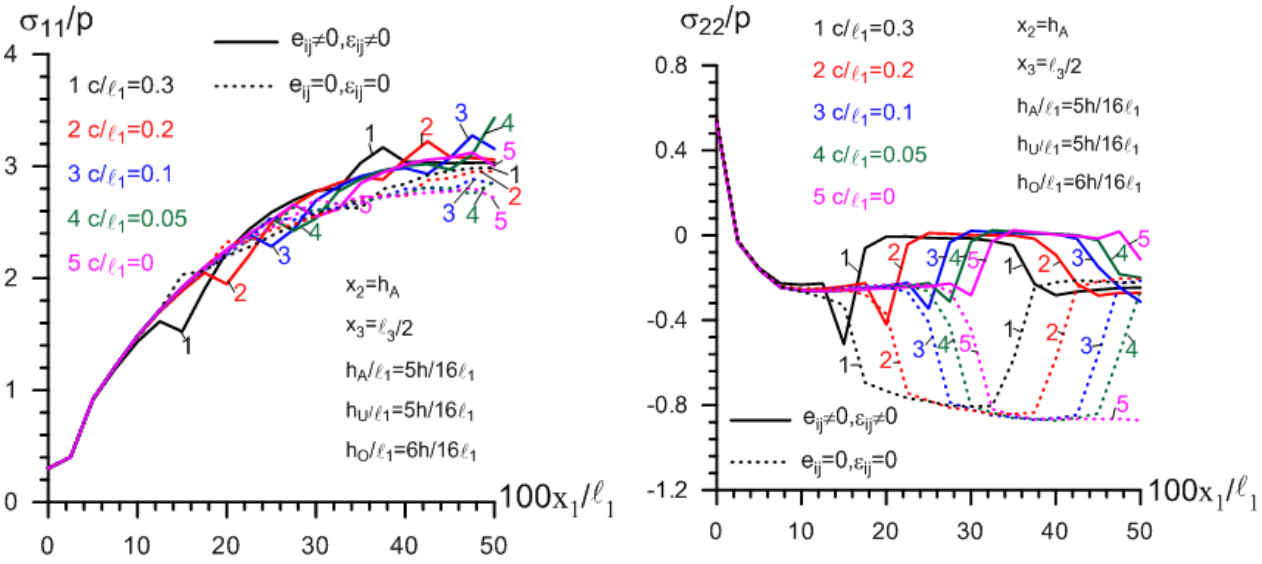
Şekil 9'da iki adet piezoelektrik malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta, elektriksel potansiyelin $\tilde{\phi}\left(=\dfrac{\phi e_{15}}{c_{44}^{PZT}\ell_1}\right)$,dolgular arasındaki yatay mesafenin (c/ℓ_1) farklı değerlerinde ve $x_3=\ell_3/2$, $x_2=h_A$ kesitinde Ox_1 ekseni boyunca değişimi incelenmiştir. Belirtelim ki c/ℓ_1 oranının değeri düştükçe PZT dolgular birbirine yaklaşmaktadır ve $c/\ell_1=0$ olması plağın tek dolgu içermesi durumunu göstermektedir. Plağın içerdiği iki dolgunun toplam hacmi tek dolgu probleminde ele alınan dolgunun

hacmine eşittir. Grafikten görüldüğü gibi, c/ℓ_1 parametresinin değeri düştükçe yani, PZT dolgular birbirine yaklaştıkça, ele alınan kesitteki elektrik potansiyel değerleri çok az etkilenmektedir.



Şekil 9. Farklı c/ℓ_1 değerlerinde $x_3=\ell_3/2$, $x_2=h_A$ kesitinde $\tilde{\phi}\left(=\dfrac{\phi e_{15}}{c_{44}\ell_1}\right)$'nin x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

Şekil 10'da iki adet piezoelektrik malzemeden yapılmış dikdörtgen prizmatik dolgu içeren dikdörtgen kalın plakta, (a) σ_{11}/p; (b) σ_{22}/p gerilme yayılımlarının farklı c/ℓ_1 değerlerinde $x_3=\ell_3/2$, $x_2=h_A$ kesitinde, Ox_1 ekseni boyunca değişimi incelenmiştir. Yapıda iki adet paralel dolgu olduğunda gerilme yayılımındaki en büyük değişim, dolgunun başlama kesiti ile bitiş kesitlerinde yer almaktadır. Şekil 10'da verilen grafiklerden görüldüğü gibi c/ℓ_1 parametresinin değeri düştükçe yani, PZT dolgular birbirine yaklaştıkça, gerilme yayılımında değişimin olduğu yerler, dolgu konumuna göre yer değiştirmekte ve dolgular birbirine yaklaştıkça, sayısal değerler her iki gerilme için çok az etkilenmektedir. Dolguların karşılıklı etkisi elastik/PZT dolgu için önemli bir fark yaratmamıştır.



Şekil 10. Farklı c/ℓ_1 değerlerinde $x_3=\ell_3/2$, $x_2=h_A$ kesitinde (a) σ_{11}/p; (b) σ_{22}/p gerilme yayılımlarının x_1/ℓ_1'e göre dağılımı.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, eğilme etkisindeki dikdörtgen prizmatik formda PZT dolgu/dolgular içeren kompozit kalın plağın elektro-statik analizi, elektro-elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri çerçevesinde, Sonlu elemanlar Yöntemi yardımıyla sayısal olarak çözülmüştür. Tek veya iki adet paralel PZT dikdörtgen dolgu içeren dikdörtgen plağın eğilmesi durumunda, yapıda oluşan gerilme yayılımlarına çeşitli malzeme ve geometrik parametrelerin etkisi araştırılmıştır. Bu araştırmada elde edilen sonuçlar ve değerlendirmeler aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

- PZT dolgunun plak içerisindeki hacim oranı azaldıkça, ele alınan kesitteki elektrik potansiyel değerleri mutlak değerce artmaktadır.
- Dolgu malzemesinin PZT olması σ_{11}/p ve τ_{12}/p gerilme farkı değerlerini artırmakta; σ_{22}/p ve σ_{33}/p gerilme farkı değerlerini düşürmektedir.
- Yapı elemanı içerisindeki dolgunun hacmi arttıkça, dolgunun piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin muhafaza edilmesi (Durum 2) ile dolgunun piezoelektrik ve dielektrik özelliklerinin ihmal edilmesi (Durum 1) arasındaki fark σ_{11}/p ve τ_{12}/p için artmakta iken; σ_{22}/p ve σ_{33}/p için azalmaktadır.
- Yapıdaki dikdörtgen prizmatik dolgunun mevcut konumuna paralel kalacak şekilde, bütünüyle plağın üst yüzeyine yaklaştırılması durumunda (yani, h_U/ℓ_1 değerinin küçülmesi; σ_{11}/p ve σ_{33}/p gerilme değerlerini her iki durum için azaltmakta ve her iki durum arasındaki fark artmaktadır (Şekil7a ve Şekil8b); σ_{22}/p gerilme değerlerini, dolgu içerisinde Durum 2 için mutlak değerce arttırırken, Durum 1 için

mutlak değerce azaltmaktadır ve her iki durum arasındaki fark azalmaktadır (Şekil7b), τ_{12}/p kayma gerilmesi değerlerini dolgu sınırları içerisinde mutlak değerce arttırmakta, Durum 2'deki değişim, Durum 1'deki değişimden daha fazla olmaktadır (Şekil 8a).

- Yapıda iki adet paralel dolgu olduğunda gerilme yayılımlarındaki en büyük değişim, dolgunun başlama kesiti ile bitiş kesitlerinde yer almaktadır. PZT dolgular birbirine yaklaştıkça, gerilme yayılımında değişimin olduğu yerler, dolgu konumuna göre yer değiştirmekte ve dolgular birbirine yaklaştıkça, sayısal değerler her iki gerilme için çok az etkilenmektedir.
- Dolguların karşılıklı etkisi elastik/PZT dolgu için önemli bir fark yaratmamıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde bizden yardımlarını esirgemeyen hocamız Sayın Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU'na teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

[1] H. Aksüt, *Piezoelektrik Kompozitlerin Elektromekanik Özelliklerinin Analizi,* Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2020.

[2] B. Wang, Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material, *International Journal of Solids and Structures*. 29 (1992) 293-308. doi:10.1016/0020-7683(92)90201-4.

[3] H. Fan, S. Qin, A piezoelectric sensor embedded in a non-piezoelectric matrix, *International Journal of Engineering Science*. 33 (1995) 379-388. doi:10.1016/0020-7225(94)00061-N.

[4] Z.M. Xiao, J. Bai, On piezoelectric inhomogeneity related problem-part I: a close-form solution for the stress field outside a circular piezoelectric inhomogeneity, *International Journal of Engineering Science*. 37 (1999) 945-959. doi: 10.1016/S0020-7225(98)00109-8.

[5] Y. Gao, M. Wang, B. Zhao, The remarkable nature of radially symmetric deformation of anisotropic piezoelectric inclusion, *Acta Mechanica Solida Sinica*. 21 (2008) 278-282. doi: 10.1007/s10338-008-0831-4.

[6] D. Mishra, C.Y. Park, S. H. Yoo, Y. E. Pak, Closed-form solution for elliptical inclusion problem in antiplane piezoelectricity with far-field loading at an arbitrary angle, *European Journal of Mechanics A/Solids*. 40 (2013) 186-197. doi:10.1016/j.euromechsol.2013.01.003.

[7] D. Mishra, S. H. Yoo, C. Y. Park, Y. E. Pak, Elliptical Inclusion Problem In Antiplane Piezoelectricity: Stress Concentrations and Enegy Release Rates, *International Journal of Fracture*. 179 (2013) 213-220. doi.org/10.1007/s10704-012-9770-7.

[8] Y.T. Lee, J.T. Chen, S.R. Kuo, Null-field integral approach for the piezoelectricty problems with multiple elliptical inhomogeneties, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 39 (2014) 111-120. doi: 10.1016/j.enganabound.2013.11.009.

[9] B.H. Yang, C.F. Gao, Anti-plane problems of a piezoelectric inclusion with an elliptical hole or a crack in an infinite piezoelectric matrix: *2015 Symposium on*

Piezoelectricity; Acoustic Waves, and Device Applications, Jinan, China, 2015: s. 353–358.

[10] B.H. Yang, C.F. Gao, Plane problems of multiple piezoelectric inclusions in a non-piezoelectric matrix, *International Journal of Engineering Science*. 48 (2010) 518-528. doi:10.1016/j.ijengsci.2010.01.00.

[11] Ü. Babuşcu Yeşil, N. Yahnioğlu, Y. Uçan, Piezoelektrik Prizmatik Dolgu İçeren Dikdörtgen Kalın Plağın FEM ile Elektro-Statik Analizi, *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendsilik Bilimleri Dergisi*. 8(3) (2019) 069-081.doi:10.28948/ngumuh.631428.

[12] O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems*, 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, 1989.

[13] J. Yang, *An Introduction to The Theory of Piezoelectricity*, Springer, 2005.

[14] N. Yahnioğlu, *Eğrisel yapıya sahip kompozit malzemeden hazırlanmış yapı elemanlarının statiğine uygun sınırdeğer problemlerinin FEM ile incelenmesi*, Doktora Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1996.

KOMPOZİT BİR DİSKİN PSEUDOSPEKTRAL CHEBYSHEV YÖNTEMİ İLE ISIL GERİLME ANALİZİ

Ali Yıldırım[1], Durmuş Yarımpabuç[2], Volkan Arıkan[3], Mehmet Eker[4] ve Kerimcan Çelebi[5]

[1]Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Meslek Yüksek Okulu, Makine Programı, Osmaniye
[2]Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Osmaniye
[3]Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Osmaniye
[4]Tarsus Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Tarsus/Mersin
[5]Çukurova Üniversitesi, Ceyhan Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Ceyhan/Adana

ABSTRACT

In this study, thermal stress analysis of a composite disc with an aluminum matrix showing linearly increasing temperature distribution was performed using the pseudospectral Chebyshev method. The accuracy of the method is demonstrated by comparison with the analytical and finite element method available in the literature. According to the results obtained, it has been observed that the pseudospectral Chebysev method gives faster and more precise results in aluminum matrix composite discs compared to the finite element method, which is frequently used in the analysis of composite materials.

Keywords: aluminum matrix composite disc; thermal stress analysis; pseudospectral Chebyshev method

ÖZET

Bu çalışmada, doğrusal artan sıcaklık dağılımını gösteren alüminyum matrisli bir kompozit diskin ısıl gerilme analizi pseudospectral Chebyshev yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Yöntemin doğruluğu, literatürde mevcut analitik ve sonlu elemanlar yöntemi (SEY) sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre pseudospectral Chebyshev yönteminin, kompozit malzemelerin analizinde sıklıkla kullanılan sonlu elemanlar yöntemine kıyasla alüminyum matrisli kompozit disklerde daha hızlı ve daha hassas sonuçlar verdiği görülmüştür.

Anahtar kelimeler: alüminyum matrisli kompozit disk; ısıl gerilme analizi; pseudospectral Chebyshev yöntemi

GİRİŞ

Günümüzde kompozit malzemeler, yüksek dayanımları ve hafiflikleri sayesinde birçok mühendislik uygulamasında kullanılmaktadırlar. Kompozit dağılımda faydalanılan malzemelerin üstün özellikleri, parça üzerine düşen kuvvetlerin azaltılmasını, istenilen yönde ihtiyaç duyulan ısıl ve mekanik özelliklerin sağlanabilmesini mümkün kılmaktadır. Bu sebeplerden ötürü kompozit malzemeler özellikle ağırlığın kritik olduğu havacılık, otomotiv ve diğer sektörlerde metal malzemelerin yerine tercih edilebilmektedir. Kompozit malzemeler genel olarak polimer, metal ve seramik ana yapılı olarak üretilirken, takviye malzemesi olarak cam, karbon, boron, organik moleküller, alüminyum oksit, silisyum karbür gibi birçok malzeme kullanılabilmektedir. Çalışma konumuzda incelediğimiz metal matrisli kompozit diskler ise hafiflikleri, üstün mekanik özellikleri ve ısıl özellikleri sayesinde volan, disk ve türbin gibi birçok uygulamada kullanılmaktadır. Kompozit, hacimce büyük oranda düşük yoğunluklu ana yapı malzemesi ile oluşturulurken, takviye olarak yapı yüksek mukavemetli fiberler ile güçlendirilmektedir. Böylelikle ağırlıkça hafif ve yüksek mukavemetli malzemeler elde edilmektedir [1]. Üretim zorlukları ve geleneksel malzemelere göre maliyetleri, tasarımında pek çok değişken içermesi gibi sebepler araştırmacıları öncelikle kuramsal ve sayısal incelemeler yaparak tasarım geliştirmeye yöneltmiştir. Özellikle fren sistemlerinde kullanılan kompozit diskler yüksek ısıl gerilmelere maruz kaldığından, bu konuda yapılan çalışmalar ısıl gerilmeler üzerine yoğunlaşmıştır.

Sayman yaptığı çalışmada alüminyum metal ana yapılı kompozit disk üzerinde ısıl gerilme analizlerini analitik olarak gerçekleştirmiş, sıcaklık dağılımını radyal kesit boyunca iç yüzeyden dış yüzeye doğru parabolik olarak uygulamıştır [2].

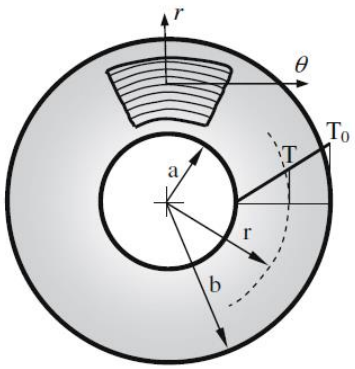
Sen ve Aldas yaptıkları çalışmada delikli termoplastik kompozit diskte elasto-plastik ısıl gerilme analizi yapmışlardır. Diski çelik liflerle tek yönlü olarak güçlendirmiş ve ısıl gerilmelerin büyüklüğünü hesaplamak için sonlu eleman yöntemi kullanmışlardır [3].

Isıl gerilme analizlerinde kullanılan bir diğer yöntem pseudospectral Chebyshev yöntemidir. Yıldırım ve ark. dikdörtgen profilli dairesel kanatçıkların durağan koşullarda sıcaklık ve ısıl gerilme dağılımlarını elde etmek için pseudospectral Chebyshev yöntemini kullanmışlardır [4]. Eker ve ark. Mori-Tanaka yöntemi ile derecelendirilmiş iç basınca maruz silindirin elastik davranışını bu yöntem ile elde etmişlerdir [5]. Eker ve ark. bir diğer çalışmalarında iç ısı üretimi ve taşınım sınır koşullarında çalışan işlevsel derecelendirilmiş içi boş ve dolu silindirlerin ısılmekanik incelenmesinde bu yöntemden faydalanmışlardır [6]. Yarımpabuç pseudospectral Chebyshev yöntemini, işlevsel derecelendirilmiş yarı-sonsuz cismin zamana bağlı lazer türü ısıl yüklemeler altında hiperbolik ısı iletimi problemi [7] ve işlevsel derecelendirilmiş silindir ve kürenin doğrusal olmayan ısıl gerilme analizi [8] için kullanmıştır.

Kompozit disklerin ısıl veya mekanik yükler altında gerilme analizleri çoğunlukla sonlu elamanlar yöntemine dayanan paket programlar yardımı ile yapılmaktadır [3,9-12]. Bu programlar yardımı ile yapılan çözümlemenin hassasiyeti, bölüntü ve eleman sayısına bağlı olarak değişmekte ve hassas sonuçlar elde etmek için bu değerler yüksek tutulmaktadır. Sonlu eleman modelinin ağ yapısında çok fazla eleman kullanılması yüksek ram ihtiyacı gerektirmekte ve çözüm sürelerini uzatmaktadır. Bu çalışmada alüminyum ana yapılı, çelik fiber takviyeli kompozit disklerdeki ısıl gerilme analizleri pseudospectral Chebysev yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Alüminyum ana yapılı ve çelik fiber takviyeli, kalınlığı çapına göre çok küçük olan disk Şekil 1'de verilmiştir [13]. Diskin ısıl olarak dengeye ulaştığı ve sıcaklık dağılımının radyal doğrultuda doğrusal değiştiği varsayılmıştır.



Şekil 1. Alüminyum ana yapılı kompozit disk ve sıcaklık değişimi [13]

Isıl dengeye ulaşmış ve sıcaklık dağılımı doğrusal değişen diskin, iç yüzey sıcaklığı 0 ^{o}C ve dış yüzey sıcaklığı T_o'a eşit alınmıştır ($T(a) = 0\ ^{o}C$ ve $T(b) = T_o$) [13]. Buna göre sıcaklık dağılımını veren denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$T(r) = T_o \frac{r-a}{b-a} \tag{1}$$

Doğrusal sıcaklık dağılımlı diskteki ısı akısı sabit olup çevre sıcaklığı, iç ve dış çapa göre aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$T'(r) = \frac{T_o}{b-a} \tag{2}$$

Radyal eksen boyunca değişen sıcaklık dağılımı disk üzerinde farklı genleşmelere, farklı genleşme miktarları ise gerilmelere neden olur. Isıl gerilme olarak ifade edilen bu gerilmeler ile gerinimler ve sıcaklık arasındaki ilişkiyi veren denklemler, gerinim-yer değiştirme ilişkisini veren denklemler, denge denklemi ve sınır koşulları anizotropik malzemeler için aşağıdaki gibi verilmiştir [13,14,15].

Anizotropik malzemeler için gerinim, gerilme ve sıcaklık arasındaki ilişkiyi veren denklemler,

$$\varepsilon_r = a_{rr}\sigma_r + a_{r\theta}\sigma_\theta + \alpha_r T \tag{3}$$

$$\varepsilon_\theta = a_{r\theta}\sigma_r + a_{\theta\theta}\sigma_\theta + \alpha_\theta T \tag{4}$$

gerinim-yer değiştirme arasındaki ilişkiyi veren denklemler,

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \tag{5}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{6}$$

denge denklemi,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{7}$$

ve sınır şartları,

$$\sigma_r(a)=0 \tag{8}$$

$$\sigma_r(b)=0 \tag{9}$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemlerde *ε, σ, α* ve *ν* gerinim, gerilme, doğrusal genleşme katsayısı ve Poisson oranını ifade ederken, *r* ve *θ* alt indisleri sırasıyla radyal ve teğetsel doğrultuyu belirtmektedir. *r* disk üzerinde herhangi bir noktadaki yarıçap değerini gösterirken, *a* iç yarı çapı *b* ise dış yarı çapı ifade etmektedir. *u* disk üzerinde herhangi bir noktadaki yer değiştirmedir. a_{rr}, $a_{r\theta}$ ve $a_{\theta\theta}$ ifadeleri ise aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$a_{rr} = \frac{1}{E_r}$$

$$a_{\theta\theta} = \frac{1}{E_\theta}$$

$$a_{r\theta} = -\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = -\frac{\nu_{\theta r}}{E_\theta}$$

(5) ve (6) numaralı eşitlikler kullanılarak radyal ve teğetsel gerinimler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \tag{10}$$

Radyal gerilme, *F* gerilme fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_r = \frac{F}{r} \tag{11}$$

Denklem (11), radyal ve teğetsel gerilme arasındaki ilişkiyi veren (7) numaralı denklemde yerine yazılırsa, teğetsel gerilme *F* gerilme fonksiyonuna göre aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_\theta = \frac{dF}{dr} \tag{12}$$

(3) ve (4) denklemleri, (5) ve (6) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{du}{dr} = a_{rr}\frac{F}{r} + a_{r\theta}\frac{dF}{dr} + \alpha_r T = 0 \tag{13}$$

$$\frac{u}{r} = a_{r\theta}\frac{F}{r} + a_{\theta\theta}\frac{dF}{dr} + \alpha_\theta T \tag{14}$$

(13) ve (14) ifadeleri, (10) denkleminde yerine yazılırsa, aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$r^2F'' + rF' - k^2F = \frac{(\alpha_r - \alpha_\theta)T}{a_{\theta\theta}}r - \frac{\alpha_\theta T'}{a_{\theta\theta}}r^2 \quad (15)$$

Denklem (15)'de ( )' r ye göre türevi ifade etmektedir. k^2 ise aşağıdaki gibi tarif edilmiştir.

$$k^2 = \frac{a_{rr}}{a_{\theta\theta}} = \frac{E_\theta}{E_r}$$

(1) ve (2)'deki sıcaklık denklemi ve ısı akısı, (15)'de yerine yazılırsa gerilme kısmını idare eden ikinci dereceden homojen olmayan adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r^2F'' + rF' - k^2F = \frac{(\alpha_r - \alpha_\theta)(r^2 - ar)}{a_{\theta\theta}(b-a)}T_o - \frac{\alpha_\theta T_o}{a_{\theta\theta}(b-a)}r^2 \quad (16)$$

Pseudospectral Chebyshev Yöntemi (PCY):

Pseudospectral Chebyshev yöntemi, bir veya birden fazla bağımsız değişkene göre elde edilmiş diferansiyel denklemi doğrusal veya doğrusal olmayan denklem sistemine dönüştüren bir yöntemdir [16, 17]. Daha az sayıda nokta kullanarak yüksek hassasiyet elde etme prensibine dayanan bu yöntemdeki örgü noktaları, sınıra yakın bölgelerde orta noktalara göre daha sık olacak şekilde seçilir. Bu tanıma uyan, yani sınır noktalarında daha fazla örgü noktalarına sahip olan Chebyshev noktaları

$$r_j = cos\left(\frac{j\,\pi}{N}\right), \quad j = 0,1,2,3 \dots N$$

kullanılarak birinci dereceden Chebyshev diferansiyel matrisi D hesaplanabilir. Elde edilen Chebyshev diferansiyel matrisi ile vektörün sonlu sayıda çarpımı ile vektörün türevleri $F'(r_j) = (DF)_j, F''(r_j) = (D^2F)_j \dots$ yüksek hassasiyetle elde edilir. Burada $F = [F_0 \dots F_n]^T$, r_j noktalarındaki vektör verileridir. Chebyshev türev matrisinin hesaplama prosedürü ve m-dosyası Trefethen [17] tarafından verilmiş, bölüntüleme noktaları r_j sağdan sola numaralanmış ve $[-1,1]$ aralığında tanımlanmıştır. Matlab m-dosyasında küçük bir değişiklikle herhangi bir aralıktaki D türev matrisi hesaplanabilir.

Gerilme Dağılımlarını PCY ile elde edilmesi:

Gerilme kısmını idare eden homojen olmayan ikici dereceden adi diferansiyel denklemdeki (16) birinci ve ikinci dereceden türevler, Chebyshev diferansiyel matrisi kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \frac{dF}{dr}(r_0) \\ \frac{dF}{dr}(r_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dF}{dr}(r_n) \end{bmatrix} \approx D \begin{bmatrix} F(r_0) \\ F(r_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ F(r_n) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{dF^2}{dr}(r_0) \\ \frac{dF^2}{dr}(r_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{dF^2}{dr}(r_n) \end{bmatrix} \approx D^2 \begin{bmatrix} F(r_0) \\ F(r_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ F(r_n) \end{bmatrix}$$

gibi ayrıklaştırılırsa, sistemi modelleyen diferansiyel denklem (15),

$$L_1 F = RHSF \tag{17}$$

Bu ifadede geçen L_1 lineer operatörü ve RHSF sağ taraf denklemi aşağıdaki gibidir.

$$L_1 = r^2 D^2 + rD - k^2$$

$$RHSF = \frac{(\alpha_r - \alpha_\theta)(r^2 - ar)}{a_{\theta\theta}(b-a)} T_o - \frac{\alpha_\theta T_o}{a_{\theta\theta}(b-a)} r^2$$

(17)'deki sistem matrisine, (8) ve (9)'da verilen sınır koşulları uygulanırsa aşikâr olmayan çözüm elde edilir.

SAYISAL SONUÇLAR

Sıcaklık dağılımının doğrusal değiştiği varsayılan alüminyum ana yapılı, çelik fiber takviyeli diskteki ısıl gerilme analizlerinde ortam sıcaklığı 0 ^oC alınmıştır. Disk iç çapı a=15 mm ve dış çapı b=75 mm olduğu kabul edilmiştir. Çizelge 1'de verilen mekanik özelliklerin sıcaklıkla değişmediği varsayılmıştır [13].

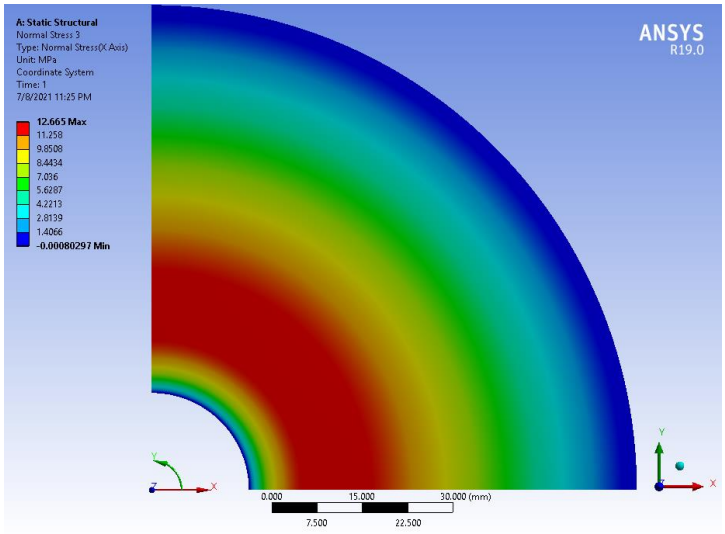
Çizelge 1. Alüminyum matrisli kompozit diskin mekanik özellikleri [13]

E_θ (MPa)	E_r (MPa)	$G_{\theta r}$ (MPa)	$\nu_{\theta r}$	X (MPa)	Y (MPa)	S (MPa)	α_θ (1/^{o}C)	α_r (1/^{o}C)
89,500	71,500	32,000	0,28	97	36	48	$18{,}6\text{x}10^{-6}$	$21{,}6\text{x}10^{-6}$

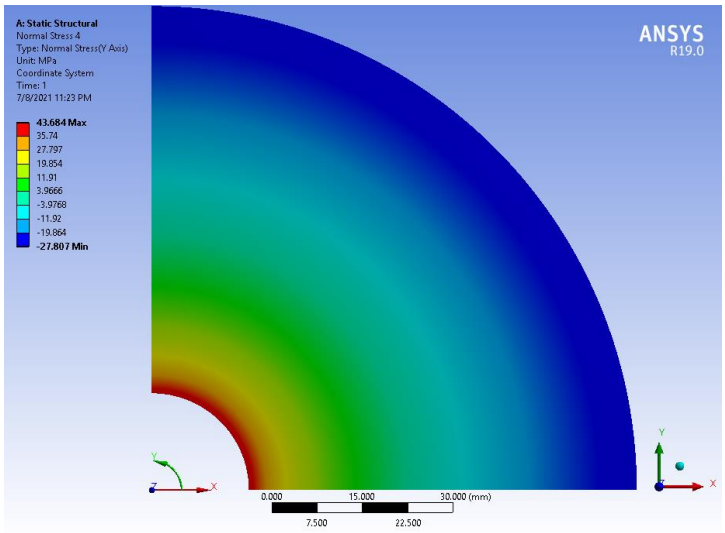
Özellikleri ve sınır koşulları yukarıda tanımlanan kompozit diskin, farklı sıcaklık farklarında iç ve dış yüzeylerindeki teğetsel gerilmelerin analitik [2], sonlu elemanlar ve PCY çözümü sonuçları Çizelge 2'de listelenmiştir. Ayrıca, sıcaklık farkının 50 ^{o}C olduğu koşul için sonlu elemanlar yöntemi radyal gerilme dağılımı sonuçları Şekil 2 ve çembersel gerilme dağılımı sonuçları Şekil 3 'de sunulmuştur. Şekil 4-5'de ise yine 50 ^{o}C 'lik sıcaklık farkında analitik, SEY ve PCY yöntemleri ile elde edilen disk üzerindeki gerilme dağılımları karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Bu grafiklerden de görüleceği üzere PCY çözümü ile daha az nokta kullanılmasına rağmen analitik çözümle cidar boyunca örtüşen sonuçlar elde edilebilmektedir.

Çizelge 2. Disk iç ve dış yüzeylerindeki teğetsel gerilme sonuçlarının karşılaştırılması

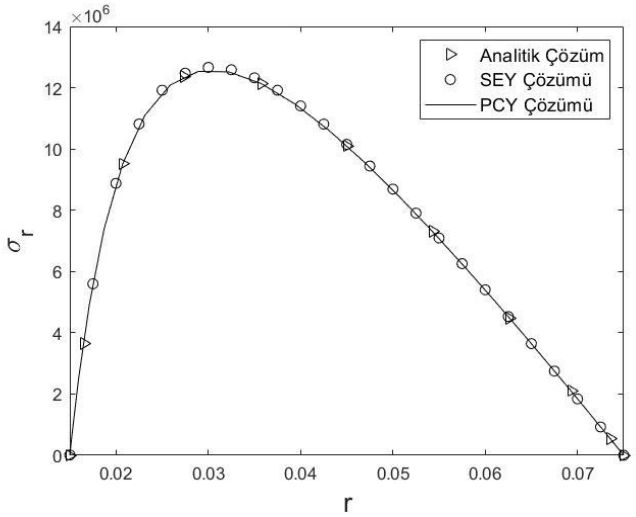
Sıcaklık ΔT (°C)	Yüzey	σ_θ (MPa) Analitik [2]	σ_θ (MPa) SEY	σ_θ (MPa) PCY
50	İç	43,88	43,68	43,86
	Dış	-27,88	-27,80	-27,88
60	İç	52,65	52,42	52,63
	Dış	-33,45	-33,37	-33,46
70	İç	61,43	61,16	61,40
	Dış	-39,03	-38,93	-39,03
80	İç	70,21	69,89	70,17
	Dış	-44,60	-44,49	-44,61



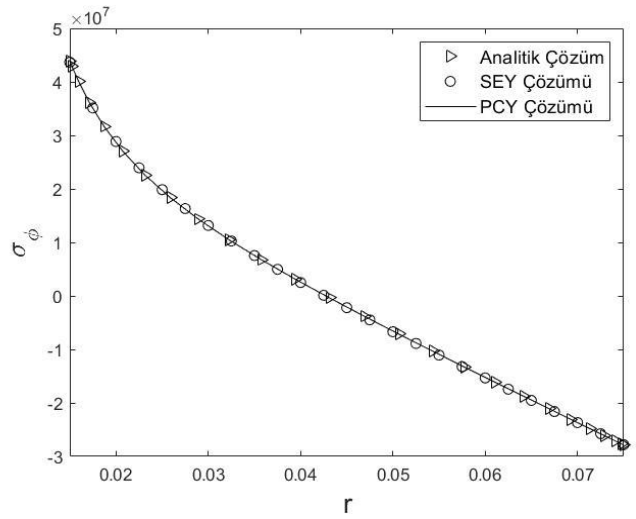
Şekil 2. Radyal gerilme dağılımı sonlu elemanlar yöntemi çözümü



Şekil 3. Çembersel gerilme dağılımı sonlu elemanlar yöntemi çözümü



Şekil 4. Cidar boyunca radyal gerilme dağılımının analitik, SEY, PCY sonuçları



Şekil 5. Cidar boyunca çembersel gerilme dağılımının analitik, SEY, PCY sonuçları

SONUÇLAR

Sıcaklığın diskin iç cidarından dış cidarına doğrusal arttığı varsayılan alüminyum ana yapılı kompozit dikteki ısıl gerilme değerleri Çizelge 2'de verilmiştir. Disk iç cidarında teğetsel gerilmelerin çekme yönünde, dış cidarında ise artan sıcaklığın etkisiyle basma yönünde gerçekleştiği gözlenmiştir. İç ve dış cidar arasındaki artan sıcaklık farkı, teğetsel gerilmelerde de artışa sebep olmuştur. Sonlu elamanlar yöntemi esaslı çözüm yapan Ansys paket programında ısıl gerilme dağılımının elde edilmesi için 10080 eleman ve 30649 düğüm noktası kullanılırken, pseudospectral Chebyshev yönteminde 10 nokta kullanılması yeterli olmuştur. Diskin iç ve dış yüzeylerindeki sıcaklık farkları neticesinde ortaya çıkan teğetsel gerilmeler incelendiğinde, pseudospectral Chebyshev yöntemi sonuçlarının sonlu elemanlar yöntemi sonuçlarına kıyasla analitik sonuçlara daha yakın çıktığı görülmektedir. Bu tür problemlerin çözümünde daha hassas ve daha hızlı sonuçlar verebildiğinden, pseudospectral Chebyshev yöntemi güçlü bir sayısal yöntem olarak literatüre katkı sunabilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] K. Kaw, *Mechanics of Composite Materials*, CRC Taylor & Francis Boca Raton, London, 2006.

[2] O. Sayman, Thermal stress analysis in an aluminium metal-matris orthotropic disc, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 23 (2004) 1473-1479.

[3] F. Sen, K. Aldas, Elastic–plastic thermal stress analysis in a thermoplastic composite disc applied linear temperature loads via FEM, *Advances in Engineering Software*. 40 (2009), 813-819.

[4] A. Yıldırım, D. Yarımpabuç, K. Çelebi, İzotropik malzemeden yapılmış dairesel kanatçıklardaki ısıl gerilmelerin sayısal modellemesi, *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*. 33 (2018) 67-80.

[5] M. Eker, D. Yarımpabuç, A. Yıldırım and K. Çelebi, Elastic solutions based on the Mori-Tanaka scheme for pressurized functionally graded cylinder, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 19 (2020) 57-68.

[6] M. Eker, D. Yarımpabuç and K. Çelebi, Thermal stress analysis of functionally graded solid and hollow thick-walled structures with heat generation, *Engineering Computations*. 38 (2020) 371-391.

[7] D. Yarımpabuç, A unified approach to hyperbolic heat conduction of the semi-infinite functionally graded body with a time-dependent laser heat source, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. 43 (2019) 729-737.

[8] D. Yarimpabuç, Nonlinear thermal stress analysis of functionally graded thick cylinders and spheres, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*. (2020) 1-9.

[9] J. Lan, J. Yan-Li, Y. Liang, S. Nan, D. You-Dong, Thermal analysis for brake disks of SiC/6061 Al alloy co-continuous composite for CRH3 during emergency braking considering airflow cooling, *Transcations of Nonferrous Metals Society of China*. 22 (2011) 2783-2791.

[10] X.D. Nong, Y.L. Jiang, M. Fang, L. Yu, C.Y. Liu, Numerical analysis of novel SiC3D/Al alloy co-continuous composites ventilated brake disc, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 108 (2017) 1374-1382.

[11] J.H. Choi, Lee, J.C., Finite element analysis of transient thermoelastic behaviors in disk brakes, *Wear*. 257 (2004) 47-58.

[12] V.S.N. Kishore, Temperature evolution in disc brakes during braking of train using finite element analysis, *Materials Today: Proceedings*. 41 (2021) 1078-1081.

[13] G. Altan, M. Topçu, Thermo-elastic stress of a metal-matrix composite disc under lineerly-incerasing temperature loading by analitical and FEM analysis, *Advances in Engineering Software*. 41(2010) 604-610.

[14] S.P. Timoshenko, J.N. Goodler, *Theory of Elasticity*, McGraw Hill, Newyork, 1970.

[15] S. H. Crandall, N. C. Dahl, T. J. Lardner, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill, NewYork, 1978.

[16] D. Gottlieb, The Stability of Pseudospectral-Chebyshev Methods, *Mathematics of Computation*. 36 (1981) 107-118.

[17] L.N. Trefethen, *Spectral Methods in Matlab*, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

FARKLI KESİTLERE SAHİP FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TİMOSHENKO KİRİŞLERİNİN SONLU ELEMANLAR PROGRAM ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Abdulkerim ERGÜT[1], Selin TAŞKIN[2] ve BegümY.DAĞLI[3]
[1,2,3]Manisa Celal Bayar Üniversitesi, Manisa

ABSTRACT

In this study, we used functionally graded beams that changed functionally through the direction of beam. We focused on the deformations of Timoshenko beams which have support conditions that we decide.

For Timoshenko beams with different cross-section, length and material layer conditions, the deformation and stress values of the models created using the ABAQUS program, which solves with the finite element method, were determined. The results were presented comparatively and the performances of the selected elements in terms of cross-sectional properties were interpreted.

Keywords: Fonctionally graded material; fonctionally graded beam; Timoshenko beam.

ÖZET

Yapılan çalışmada, her bir bileşen malzemenin hacim oranı, yapının boyutu boyunca kademeli olarak değişen fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden (FDM) oluşturulmuş kirişler kullanılmıştır. Timoshenko kiriş teorisi ile modellenen elemanlar için ankastre- serbest uç sınır koşulları dikkate alınmıştır. Farklı kesit, boy ve malzeme tabakası koşullarına sahip Timoshenko kirişleri için sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm yapan ABAQUS programı kullanılarak oluşturulan modellerin deformasyon ve gerilme değerleri belirlenmiştir. Sonuçlar karşılaştırmalı olarak sunularak kesit özellikler açısından seçilen elemanların performansları yorumlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme; fonksiyonel derecelendirilmiş kiriş; Timoshenko kirişi.

GİRİŞ

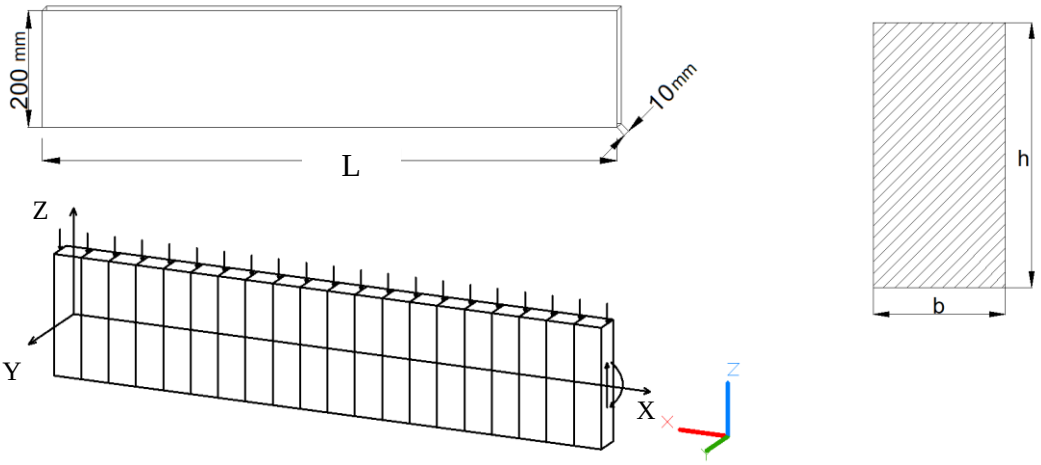
Günümüz teknolojisinde, kirişler üzerindeki artan gerilme ve gerilme yoğunluklarının azaltılması için bilim adamları tarafından birçok çalışma yapılmaktadır. Bu çalışmalardan biri de mikroskobik olarak homojen olmayan ve iki ya da daha fazla malzemenin katı halde birleştirilmesinden oluşan ileri kompozitlerin bir türü olan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerdir (FDM). Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde (FDM) her bir bileşen malzemenin hacim oranı, yapının belirlenen boyutu boyunca kademeli olarak değişir.

İleri çok katmanlı kompozit malzemeler, yüksek dayanımından dolayı inşaat, mekanik, uzay mühendisliği ve savunma sanayisi alanlarında yaygın şekilde kullanılmaktadır. Bu malzemelerde yaşanan en büyük problem; malzeme arasındaki farklılıklardan dolayı ani değişimden kaynaklanan çatlaklardır. Bu sorunun çözümünün devamlı olarak değişen fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme (FDM) kullanımından geçtiği düşünülmektedir [1]. FDM'lerde farklı malzeme katmanları yapının belirlenen boyutu boyunca konuma bağlı sürekli değişen bir fonksiyonla tanımlanmakta ve yapı üzerinde oluşacağı öngörülen gerilme yoğunluğunu azaltması sebebi ile uzay araçları, savunma sanayileri, elektronik ve mühendisliğin birçok alanında kullanılmaktadır [2-5]. Tasarımı yapılan FDM kirişin, istenen performansta mühendislik sunabilmesi için modelleme sırasında kullanılacak teorileri belirlemek önemli bir adımdır. Bu nedenle geliştirilen birçok kiriş teorisi vardır [6-18].

Bu çalışma kapsamında fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ile yapılmış Timoshenko kirişlerinin ABAQUS programı yardımıyla modellenerek deformasyon ve gerilmelerinin tespiti amaçlanmıştır. Kullanılan Timoshenko kiriş teorisi, Euler-Bernoulli kirişine kaymaya ek olarak dönme etkisinin de eklenmesi ile yüksek frekansa sahip derin (narin olmayan) yapı elemanlarında da doğru sonuç vermesinden dolayı tercih edilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEMLER

Çalışmada ele alınan fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış L uzunluğunda, b genişliğinde, h yüksekliğindeki dikdörtgen kesitli kirişe ait veriler Şekil 1 görülmektedir.



Şekil 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş (x) boyutu boyunca 20 tabakadan oluşan kirişin geometrisi ve kartezyen koordinatları.

Döner ateletin ve kayma deformasyonunun hesaba katıldığı homojen Timoshenko kiriş teorisine göre kirişin dönmesi w (x, t) ve kayma deformasyonu γ_{xz}= ɣ (x, t) tüm kesitlerde sadece x ve t ye bağlıdır.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_o}{\partial x} + z\frac{\partial Q}{\partial x} \quad [1]$$

$$\gamma_{xz} = Q + \frac{\partial w}{\partial x} \quad [2]$$

Kirişteki kayma gerilmeleri, eğilme esnasında nesnenin iç yapısındaki deformasyonlar sebebiyle titreşim sonucunda oluşur. Bu yatay titreşimler, kirişe uygulanan dış kuvvetlere ve bunun oluşturduğu torka ve kirişin malzeme özelliğine bağlıdır. Timoshenko kayma faktörü (k>1) bu kayma alanını kA olarak tanımlamıştır. [5-8]

$$M = EI\frac{d\psi}{dx} \quad [3]$$

$$M = \frac{dw}{dx} - \psi(x) = -\frac{v(x)}{k^2 GA} \quad [4]$$

$$\psi(x) = \frac{dw}{dx} \quad [5]$$

Ele alınan FDK kirişinin üzerindeki yayılı yük 0,1 N/mm² ve malzeme olarak seçilen alüminyum için alınan Poisson oranı ve akma gerilmesi değerleri sırası ile 0,3 ve 225 Mpa olarak atanmıştır. L boyu için 1000mm ve 2500mm değerleri alınarak hesaplar yapılmıştır. Değişen kiriş boyutlarının ABAQUS programında tasarımı yapılırken Çizelge 1'de elastisite modülü değerleri kullanılmıştır.

Çizelge 1. Modellenen Kirişlerin Tabakalarına ait Elastisite Modülü Değerleri

Tabaka No	L=1000mm için E (Mpa)	L=2500mm için E (Mpa)
1	70000.00	70000.00
2	70000.74	70000.74
3	70009.46	70009.46
4	70050.88	70050.88
5	70178.76	70178.76
6	70487.56	70487.56
7	71124.03	71124.03
8	72298.89	72298.89
9	74298.40	74298.40
10	77496.00	77496.00
11	82363.98	82363.98
12	89485.02	89485.02
13	99563.90	99563.90
14	113439.10	113439.10
15	132094.30	132094.30
16	156670.30	156670.30

17	188476.30	188476.30
18	229001.80	229001.80
19	279928.00	279928.00
20	343139.70	343139.70

Çalışma kapsamında çeşitli kesit ve L boyuna sahip FDK ve homojen malzemeli Timoshenko kirişleri ABAQUS programında tasarlanarak analizleri tamamlanmıştır. Bu kirişlerin deformasyon (mm) ve gerilme (MPa) değerlerinin kıyaslanması amaçlanmıştır. Sınır koşulları ankastre- serbest uç olarak tanımlanmıştır. Çizelge 2' de kirişlerin L boyunun değişimi ve Fonksiyenel derecelendirilmiş kirişlerin homojen ve tabakasız olması durumu için yapılan karşılaştırmalar başlıklar altında verilmiştir.

Çizelge 2. Farklı koşullardaki modellemelere verilen kısaltmalar ve özellikleri

Kiriş Teorisi	FDK/Homojen	Kesit(b,h)mm	L (boy) mm	Kısaltma
Timoshenko	FDK	b=10mm,h=200mm	1000mm	T_1
Timoshenko	FDK	b=50mm,h=500mm	1000mm	T_2
Timoshenko	FDK	b=10mm,h=200mm	2500mm	T_3
Timoshenko	FDK	b=50mm,h=500mm	2500mm	T_4
Timoshenko	Homojen	b=10mm,h=200mm	1000mm	T_5
Timoshenko	Homojen	b=50mm,h=500mm	1000mm	T_6
Timoshenko	Homojen	b=10mm,h=200mm	2500mm	T_7
Timoshenko	Homojen	b=50mm,h=500mm	2500mm	T_8

SAYISAL SONUÇLAR

T_1 ve T_8 arasında tanımlanan kirişler için elde edilen deplasman ve gerilme değerleri Çizelge 3'te verilmiştir.

Çizelge 3. Farklı koşullardaki modellemelere verilen kısaltmalar ve özellikleri

Model	Deplasman (U_2) mm	Gerilme (S_{11}) MPa
T_1	-0,02101	-0,7134
T_2	-0,00032	-0,02283
T_3	-0,7938	-4,459
T_4	-0,0105	-0,1427
T_5	-0,03135	-0,3750
T_6	-0,0004676	-0,012
T_7	-0,9451	-3,906
T_8	-0,01210	-0,125

Görüldüğü üzere, T_1 modeli ile aynı L boyuna ve tabaka özelliklerine sahip olan ve 12,5 kat büyüklüğünde bir kesit alanına sahip olan T_2 modeli incelendiğinde T_1 modelinin %3,2'si kadar bir gerilmeye ve %1,5'i kadar bir deplasmana sahip olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. T_3 modeli ile aynı L boyuna ve tabaka özelliklerine sahip olan ve 12,5 katı büyüklüğünde bir

kesit alanına sahip olan T_4 modellerinin karşılaştırılmasında ise T_3 modelinin %3,4'ü kadar bir gerilmeye ve %1,3'ü kadar bir deplasmana sahip olduğu görülmüştür. T_7 ve T_8 modeli için ise sonuçlar %3,2 kadar gerilmeye ve %1,3'ü kadar bir deplasman olarak değişim göstermektedir.

SONUÇLAR

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden oluşturulmuş Timoshenko kirişlerin sonlu elemanlar yöntemi ile çözüm yapan ABAQUS programı kullanılarak deformasyon ve gerilme değerleri belirlenmiştir. Farklı kesit, boy ve malzeme tabakası koşullarına sahip Timoshenko kiriş teorisi ile modellenen elemanlar için ankastre- serbest uç sınır koşulları dikkate alınmıştır. Yapılan analizler sonucunda Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden oluşturulmuş Timoshenko kirişlerin homojen ve tek parçalı kirişlere göre daha az deplasman yaptığı ve daha dayanıklı olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] B. Kieback, A. Neubrand, H. Riedel, Processing techniques for functionally graded materials, Material Science and Engineering A 362. 2003, 81–106.

[2] M. Aydogdu, V. Taskin, Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges, Materials and Design 28. 2007, 1651–1656.

[3] Z. Zhong, T. Yu, Analytical solution of a cantilever functionally grade beam, Composites Science and Technology 67. 2007, 481–488.

[4] C.-F. Lu, W.Q. Chen, Free vibration of orthotropic functionally graded beams with various end conditions, Structural Engineering and Mechanics 20. 2005, 465–476.

[5] S.P. Timoshenko, On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, Philosophical Magazine 43. 1922, 125–131. ARTICLE IN PRESS 1228 X.-F. Li / Journal of Sound and Vibration 318. 2008, 1210–1229

[6] W.P. Howson, F.W. Williams, Natural frequencies of frames with axially loaded Timoshenko members, Journal of Sound and Vibration 26. 1973, 503–515.

[7] K. Chandrashekhara, K. Krishnamurthy, Composite Structures 14; S. Roy, Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation, 1990; pp 269–279.

[8] W.Q. Chen, C.F. Lv, Z.G. Bian, Composite Structures 62; Elasticity solution for free vibration of laminated beams, 2003; pp 75–82.

[9] Z. Yangjunjian, Z. Xufan, Natural Frequency analysis of functionally graded material beams with axially varying stochastic properties, Applied Mathematical Modelling 67, 2019,85-100.

[10] J. Fariborz, R.C Bartra, Free vibration of bi-directional functionally graded material circular beams using shear deformation theory employing logarithmic function of Radius, Composite Structures 210, 2019, 217-230.

[11] K. Zhang, M. Ge, C. Zhao, Z. Deng, X. Xu, Free vibration of nonlocal Timoshenko beams made of functionally graded materials by Symplectic method, Composites Part B, 2019, 174-184

[12] U. Gul, M. Aydoğdu, F. Karaçam, Dynamics of a functionally graded Timoshenko beam considering new spectrums, Composite Structures, 2019, 273-291.

[13] Y. Tang, X. Lv, T. Yang, Bi-directional functionally graded beams assymetric and nonlinear free vibration, Composite Part B, 2019, 319-331.

[14] Ş. D. Akbaş, Forced vibration analysis of functionally graded porous deep beams, Composite Structures, 2018, 293-302.

[15] V. V. Zozulya, Exploration of the high order theory for functionally graded beams based on Legendre's polynomial expansion, Composite Part B, 2019, 373-383.

[16] Z. Liu, J. Niu, Vibrational Energy flow model for functionally graded beams, Composite Structures, 2018, 17-28.

[17] K. P. Kou, Y. Yang, A meshfree boundary-domain integral equation method for free vibration analysis of the functionally graded beams with open edged cracks, Composites Part B, 2019, 303-309.

[18] X. Xu, J. M. Meng, A model for functionally graded materials, Composites Part B, 2018, 70-80.

EKSENEL FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ DAİRE EKSENLİ KİRİŞLERİN KARIŞIK SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

Zehra Aktı[1], Merve Ermis[2] ve Mehmet H. Omurtag[3]
[1, 3]İstanbul Medipol Üniversitesi, İstanbul
[2]Kırklareli Üniversitesi, Kırklareli

ABSTRACT

The objective of this study is to investigate the behaviour of the static analysis of axially functionally graded circular planar curved beam using mixed finite element method (MFEM) based on Timoshenko beam theory. A two-noded curved finite element has 12 field variables at each node. These variables denote three displacements, there cross-sectional rotations, three forces, two bending moments and a torque, respectively. The parametric analysis of the axially functionally graded circular beam subjected to a vertical uniformly distributed load is investigated different boundary conditions, subtended angles and material variation parameters over the displacement, cross-sectional rotations, and support reactions in detail. Also, a convergence analysis is performed for both the results obtained from using mixed finite element method and the results obtained from using SAP2000 finite element program. The convergence performance of the MFEM and SAP2000 are discussed.

Keywords: functionally graded material; mixed finite element method; static analysis; circular beam

ÖZET

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler yüksek mukavemet, hafiflik, aşınmaya veya korozyona karşı dayanımlı olmaları nedeniyle enerji ve savunma sanayii, uzay ve havacılık, endüstri gibi alanlarda kullanım alanları oldukça yaygındır. Bu çalışmanın amacı, Timoshenko çubuk kuramına bağlı eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) daire eksenli düzlem kirişlerin statik analiz davranışını karışık sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemektir. İki düğüm noktasına sahip olan eğrisel sonlu eleman, her düğüm noktasında 12 adet değişken içermektedir. Bunlardan üçü yer değiştirmeleri, üçü kesit dönmelerini, üçü kuvvetleri, ikisi eğilme momentini ve biri ise burulma momentini göstermektedir. Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem dairesel kirişin parametrik analizi, farklı sınır koşulları, merkez açıları ve malzeme değişim parametreleri için kirişin yer değiştirmeleri, kesit dönmeleri ve mesnet tepkileri üzerinden detaylı olarak irdelenmiştir. Aynı zamanda, hem karışık sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlar için hem de SAP2000 sonlu elaman programında elde edilen sonuçlar için yakınsama analizi yapılarak her iki sonlu elemandan elde edilen sonuçların yakınsama performansları tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler: fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme; karışık sonlu eleman yöntemi; statik analiz; dairesel kiriş

GİRİŞ

Gelişen teknoloji ile uzay ve havacılık sektöründe, biyomedikal endüstrisinde, savunma sanayiinde veya inşaat ve makine mühendisliği uygulama alanlarında kullanılan yapıların tasarımında gelişmiş malzeme özelliklerine ihtiyaç duyulmaktadır. Kompozit veya fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler hafiflik, dayanım gibi üstün özelliklerinden dolayı tercih edilmektedir [1]-[5]. Literatür incelendiğinde eksenel FD kirişlerin yapı davranışlarının çoğu doğru eksenli çubuklar ile ilgilidir. Bu çalışmalardan bazılarını sıralanacak olursa [6]-[18]. Eksenel FD kirişlerin statik davranışını inceleyen çalışmalar ise daha azdır. Bu çalışmalardan bazılarını özetleyecek olursak: Shahba ve ark. [19], Euler-Bernoulli çubuk kuramı üzerinden değişken kesite sahip eksenel FD doğru eksenli çubukların statik/ stabilite ve serbest titreşim davranışını sonlu elemanlar yöntemi kullanarak parametrik bir çalışmayla detaylı olarak incelemişlerdir. Li ve ark. [20] değişken kesite sahip çubuk ekseni veya kalınlığı boyunca FD doğru eksenli kirişlerin statik ve serbest titreşim davranışını sonlu eleman yöntemini kullanarak incelemişlerdir. Eğri eksenli eksenel FD kirişlerin statik davranışını inceleyen çalışma sayısı ise literatürde oldukça sınırlı sayıdadır. Rajesakaran [21], diferansiyel dönüşüm eleman yöntemi kullanarak değişken kesite sahip FD eğri eksenli kirişlerin statik analizini incelemiştir.

Bu çalışmanın amacı, düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel FD dairesel kirişlerin statik analizini karışık sonlu eleman yöntemi kullanarak incelemektir. Aynı zamanda, bu çalışma kapsamında karışık sonlu eleman algoritması kullanılarak elde edilen sonuçlar ile SAP2000'den elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Daha sonra, eksenel FD düzlem dairesel kirişin parametrik analizi, farklı sınır koşulları, merkez açıları ve malzeme değişim parametreleri için kirişin yer değiştirmeleri, kesit dönmeleri ve mesnet tepkileri üzerinden detaylı olarak irdelenerek özgün örnekler literatüre sunulmuştur.

FORMÜLASYON

Dairesel Kiriş Geometrisi: Kartezyen koordinat takımında, *x* ekseninden itibaren ölçülen θ açısı parametre olarak seçilerek *x-y* düzleminde bulunan düzlem eğrisel kirişe ait konum vektörü ifadesi yazılırsa:

$$\mathbf{r}(\theta) = \{x(\theta), y(\theta)\} \tag{1}$$

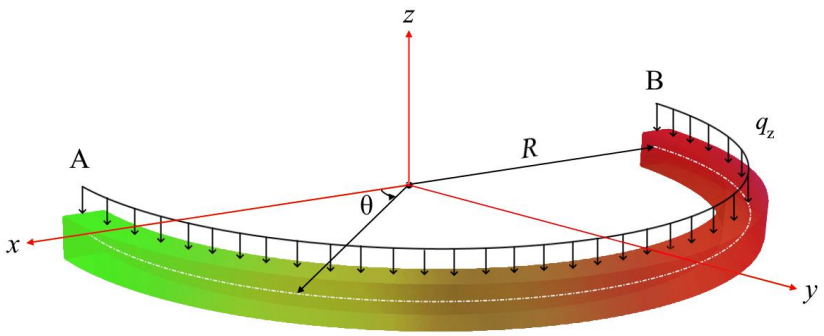
Dairesel kirişin (Şekil 1) *x-y* düzlemindeki bileşenleri,

$$x(\theta) = R\cos\theta, \quad y(\theta) = R\sin\theta \tag{2}$$

olmak üzere, burada $R > 0$ dairesel kirişin yarıçap değerini göstermektedir. Dairesel kirişin eğriliği $\chi(\theta)$ ve yay boyu s nin gradyenti olan $c(\theta)$ fonksiyonları (1) deki konum vektörü cinsinden tanımlanırsa,

$$\chi(\theta) = \left\|\mathbf{r}_{,ss}\right\|, \quad c(\theta) = \left\|\mathbf{r}_{,\theta}\right\|, \quad \mathrm{d}s = c(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

dir. Burada, virgülden sonraki alt indis ifadeleri sırasıyla s ve θ parametresine göre türevleri göstermektedir [22]. Kirişin toplam yay boyu uzunluğu S **,** (3) de verilen yay boyu gradyenti $c(\theta)$ yardımıyla $S = \int_0^{\theta_B} c(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ formülü ile bulunur. θ_B dairesel kirişin merkez açısını göstermektedir (Şekil 1).

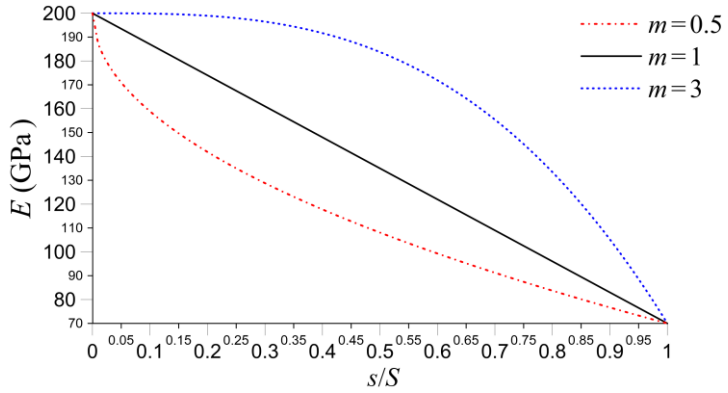


Şekil 1. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş dairesel kiriş.

Eksenel Fonksiyonel Derecelendirilmiş (EFD) Malzeme Modeli: Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme dağılımı üssel fonksiyon olarak çubuk ekseni (s) boyunca fonksiyonel olarak değiştiği kabul edilmektedir. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden oluşan kompozit çubuğun etkin malzeme özellikleri karışım kuralına göre tanımlanmıştır.

$$f(s) = f_0 + (f_1 - f_0)\left(\frac{s}{S}\right)^m, \quad 0 \le s \le S \tag{4}$$

burada, f sırasıyla, etkin malzeme özelliklerinden elastisite modülünü ve Poisson oranını (E, υ), alt indis "0" ve "1" çubuk ekseni boyunca sırasıyla başlangıç ($s = 0$, A noktası) ve bitiş ($s = S$, B noktası) noktalarındaki kesitlerdeki malzemeleri göstermektedir. $m > 0$ malzeme değişim parametresidir (Şekil 1). Malzeme sabitleri $E_0 = 200\,\text{GPa}$, $E_1 = 70\,\text{GPa}$ ve Poisson oranı $\upsilon_0 = \upsilon_1 = 0.3$ olarak seçilmiştir.



Şekil 2. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel kirişin elastisite modülünün normalize edilmiş yay boyu s / S oranına göre değişimi

Fonksiyonel ve Karışık sonlu eleman Formülasyonu: Homojen izotrop helisel çubukların serbest titreşim ve statik analizine ait fonksiyonel Omurtag ve Aköz 1992 [23], Eratlı vd. 2016'da [24] verilmiştir. Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) üç boyutlu uzay çubukların serbest titreşimine ait fonksiyonel Ermis 2021'de [25] verilmiş olup, bu çalışma kapsamında ise EFD uzay çubukların statik analizine ait fonksiyonel aşağıda sunulmuştur.

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{I}(\mathbf{y}) = &-\left[\mathbf{u},\mathbf{T}_{,s}\right]+\left[\mathbf{t}\times\boldsymbol{\Omega},\mathbf{T}\right]-\left[\mathbf{M}_{,s},\boldsymbol{\Omega}\right]-\frac{1}{2}\left[\mathbf{C}_{\kappa}\mathbf{M},\mathbf{M}\right]-\frac{1}{2}\left[\mathbf{C}_{\gamma}\mathbf{T},\mathbf{T}\right]\\ &-\left[\mathbf{q},\mathbf{u}\right]-\left[\mathbf{m},\boldsymbol{\Omega}\right]+\left[\left(\mathbf{T}-\hat{\mathbf{T}}\right),\mathbf{u}\right]_{\sigma}+\left[\left(\mathbf{M}-\hat{\mathbf{M}}\right),\boldsymbol{\Omega}\right]_{\sigma}+\left[\hat{\mathbf{u}},\mathbf{T}\right]_{\varepsilon}+\left[\boldsymbol{\Omega},\mathbf{M}\right]_{\varepsilon}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Burada, t,n ve b sırasıyla Frenet koordinat takımının teğet, normal ve binormal vektörleri olmak üzere, $\mathbf{u}(u_t,u_n,u_b)$ yer değiştirme vektörünü, $\boldsymbol{\Omega}(\Omega_t,\Omega_n,\Omega_b)$ kesit dönmesi vektörünü, $\mathbf{T}(T_t,T_n,T_b)$ kuvvetleri, $\mathbf{M}(M_t,M_n,M_b)$ moment vektörünü, $\mathbf{q}(q_t,q_n,q_b)$ yayılı yük vektörünü, $\mathbf{m}(m_t,m_n,m_b)$ yayılı moment vektörünü, A kesit alanını, $\mathbf{I}(I_t,I_n,I_b)$ eylemsizlik moment vektörünü, $\mathbf{C}_{\gamma}$ ve $\mathbf{C}_{\kappa}$ kompliyans matrislerini göstermektedir. Denklem (5)'de verilen fonksiyonelde köşeli parantezler iç çarpımları ifade etmekte olup, şapkalı terimler sınırlardaki bilinen değerleri ifade etmektedir ve alt indis ε ve σ ise sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarını göstermektedir. İki düğüm noktasına sahip eğrisel eleman her bir düğüm noktasında toplamda 12 adet değişkene sahiptir. Frenet kooridnat takımında tanımlanan bu değişkenlerden üçü yer değiştirmeleri, üçü kesit dönmelerini, üçü kuvvetleri ve ikisi eğilme momentini biri ise burulma momentini göstermektedir. *x-y* düzleminde düzleminde tanımlanan eğrisel çubuk için, Frenet koordinat takımındaki binormal doğrultu b, Kartezyen koordinat takımındaki z ekseni çakışmaktadır.

SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal örneklerde, eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş (EFD) dairesel kirişin düzgün yayılı yük etkisindeki statik analiz davranışı farklı malzeme değişim parametresi ($m=0.5;1$ ve 3), farklı merkez açı değerleri ($\theta_{\mathrm{B}}=45°, 90°,135°$ ve $180°$), farklı kare kesit boyutları ($a=0.25\mathrm{m}$ ve $0.40\mathrm{m}$) ve farklı sınır şartları (ankastre-ankastre, ankastre-serbest) için incelenmiştir. Tüm örneklerde dairesel kirişin, yarıçap değeri $R=6\mathrm{m}$ olup düzgün yayılı yükün şiddeti ise $q_z=1\mathrm{N/m}$'dir. Sayısal sonuçlar, yakınsama analizi ve parametrik analiz olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. SAP2000 çözümlerinde elemandaki malzeme özellikleri eğrisel kirişin iki düğüm noktasındaki malzeme özelliklerinin ortalaması olarak alınmıştır.

Yakınsama Analizi:

EFD dairesel kirişin yakınsama analizi, en büyük yerdeğiştirme $u_z^{\max}$ ve kesit dönmeleri $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ ile A noktasındaki mesnet tepki kuvveti T_z^{A} ve mesnet momentleri M_x^{A} ve M_y^{A} üzerinden yapılmıştır. Parametrik çalışma, seçilen merkez açı değerleri $\theta_{\mathrm{B}}=45°, 90°,135°$ ve $180°$, kare kesit boyut $0.25\mathrm{m}$, malzeme değişim parametreleri $m=0.5$ ve 3 ve ankastre-ankastre ya da ankastre-serbest sınır şartları için yapılmıştır. Sonlu eleman sayısı 10 ile 80 adet arasında seçilmiştir. 60 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen sonuçlar ($u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A}, M_y^{A}), 80 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen sonuçlar

($u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A}, M_y^{A}) göre normalize edilerek hem karışık sonlu eleman yöntemi hem de SAP2000 programından elde edilen sonuçlar için ayrı ayrı hesaplanmıştır. $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A}, M_y^{A} değerleri göz önüne alındığında yüzde farkların mutlak değerce en büyük değerleri karışık SEY ve SAP2000 için sırasıyla % 0.16 ve % 0.35'dir. Yakınsama analizinde ele alınan bazı parametreler için karışık SEY ve SAP2000'den elde edilen sonuçlara ait yakınsama analizi grafikleri Şekil 3-9 arasında sunulmuştur. Karışık SEY ve SAP2000'nin 80 adet sonlu eleman üzerinden elde edilen sonuçları karışık SEY göre normalize edilerek yüzde fark olarak grafiklerde (Şekil 3-9) yüzde fark olarak sunulmuştur. Şekil 3-9 da sunulan sonuçlara göre:

- Sınır koşulu etkisi:

A noktasındaki kuvvet (T_z^{A}) incelendiğinde (Şekil 3-7),

– Ankastre-Serbest (A-S) sınır koşulu için karışık SEY'nin SAP2000 program sonuçlarına göre daha hızlı yakınsadığı görülmektedir (bknz Şekil 3d, 4d). Ankastre-ankastre (A-A) sınır koşulu için ise SAP2000 program sonucunun karışık SEY'ne göre daha hızlı yakınsadığı gözlemlenmiştir (bknz. Şekil 5d, 6d ve 7d).

A noktasındaki moment (M_x^{A}) incelendiğinde (Şekil 3-9),

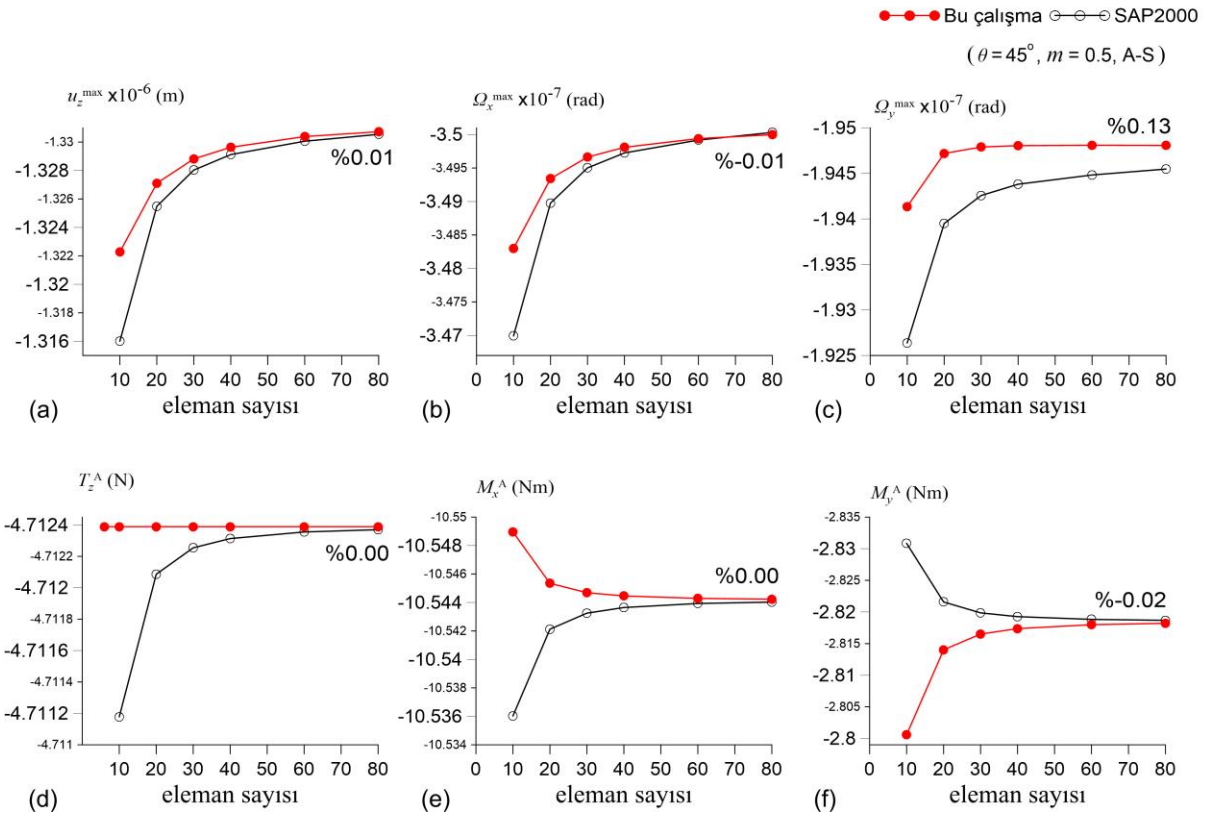
– Ankastre-serbest (A-S) sınır koşulu için M_x^{A} momenti (Şekil 3e, 4e, 8a-b ve 9a-b) karışık SEY'nin SAP2000 program sonucuna göre daha hızlı yakınsadığı gözlemlenmiştir. Ankastre-ankastre (A-A) sınır koşuluna ait M_x^{A} momenti (Şekil 5e, 6e, 7e, 8c-d ve 9c-d) için SAP2000 program sonucunun karışık SEY'ne göre daha hızlı yakınsadığı gözlemlenmiştir.

- Malzeme değişim parametresinin (m) etkisi:

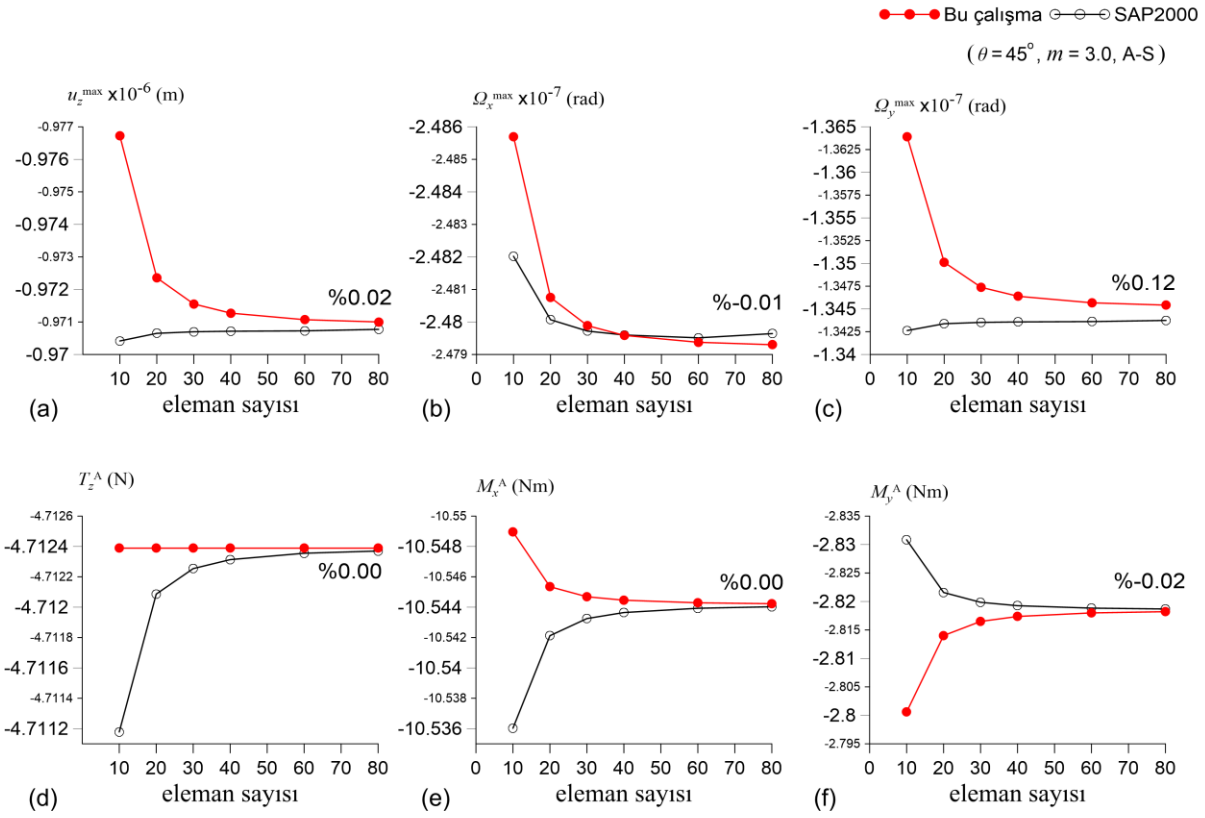
En büyük yer değiştirme ($u_z^{\max}$) ve kesit dönmeleri ($\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$) incelendiğinde,

– $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$, ankastre-serbest (A-S) sınır koşulu için $m = 0.5$ (Şekil 3a-c) ve $m = 3$ (Şekil 4a-c) durumlarına ait grafikler incelendiğinde, $m = 0.5$ için karışık SEY'nin SAP2000 program sonucuna göre daha hızlı yakınsadığı görülürken, $m = 3$ için ise SAP2000 program sonucunun karışık SEY'ne göre daha hızlı yakınsadığı gözlemlenmiştir.

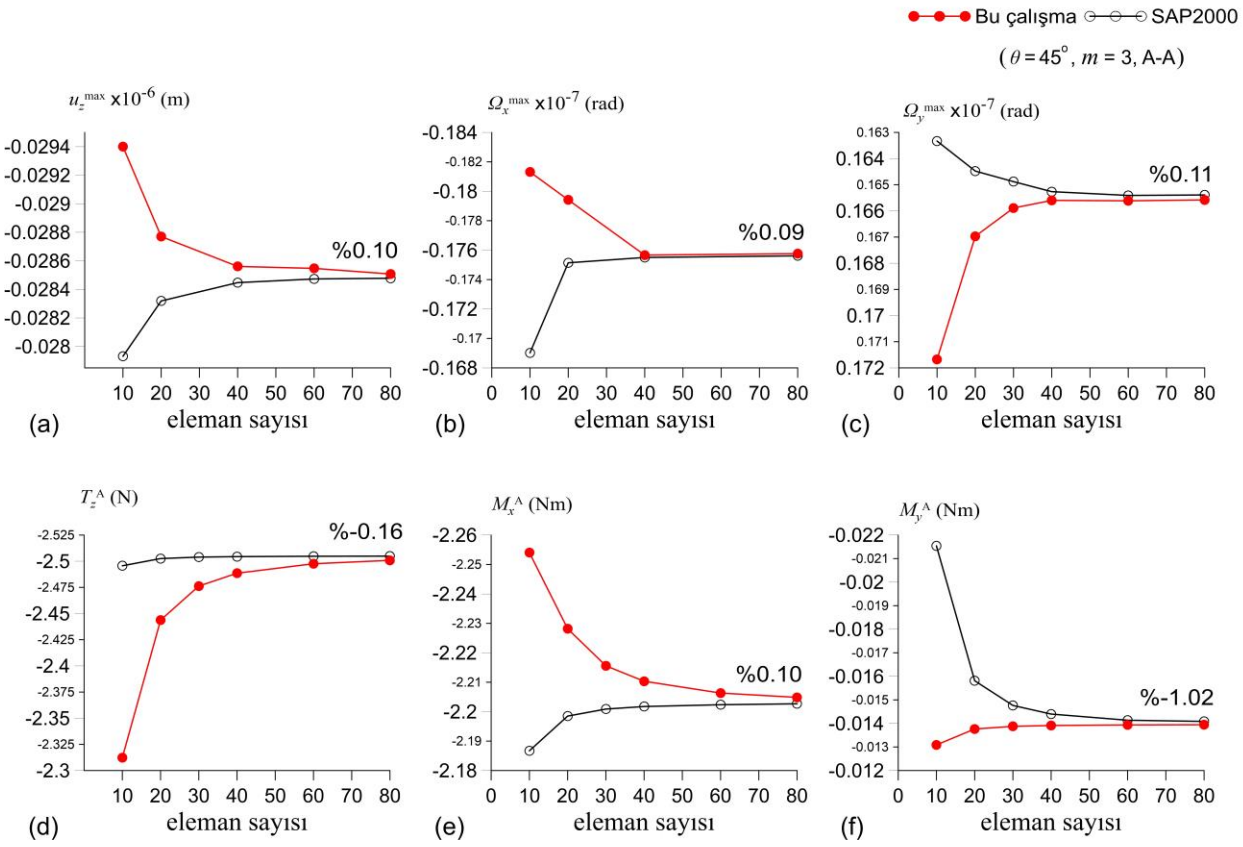
– $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$, ankastre-ankastre (A-A) sınır koşulu için $m = 0.5$ (Şekil 5a-c) ve $m = 3$ (Şekil 6a-c) durumlarına ait grafikler incelendiğinde, $u_z^{\max}$ (Şekil 6a) için karışık SEY'in SAP2000 program sonucuna göre daha hızlı yakınsadığı gözlemlenirken, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$ durumları için ise SAP2000 program sonucunun karışık SEY'ne göre daha hızlı yakınsadığı gözlemlenmiştir.



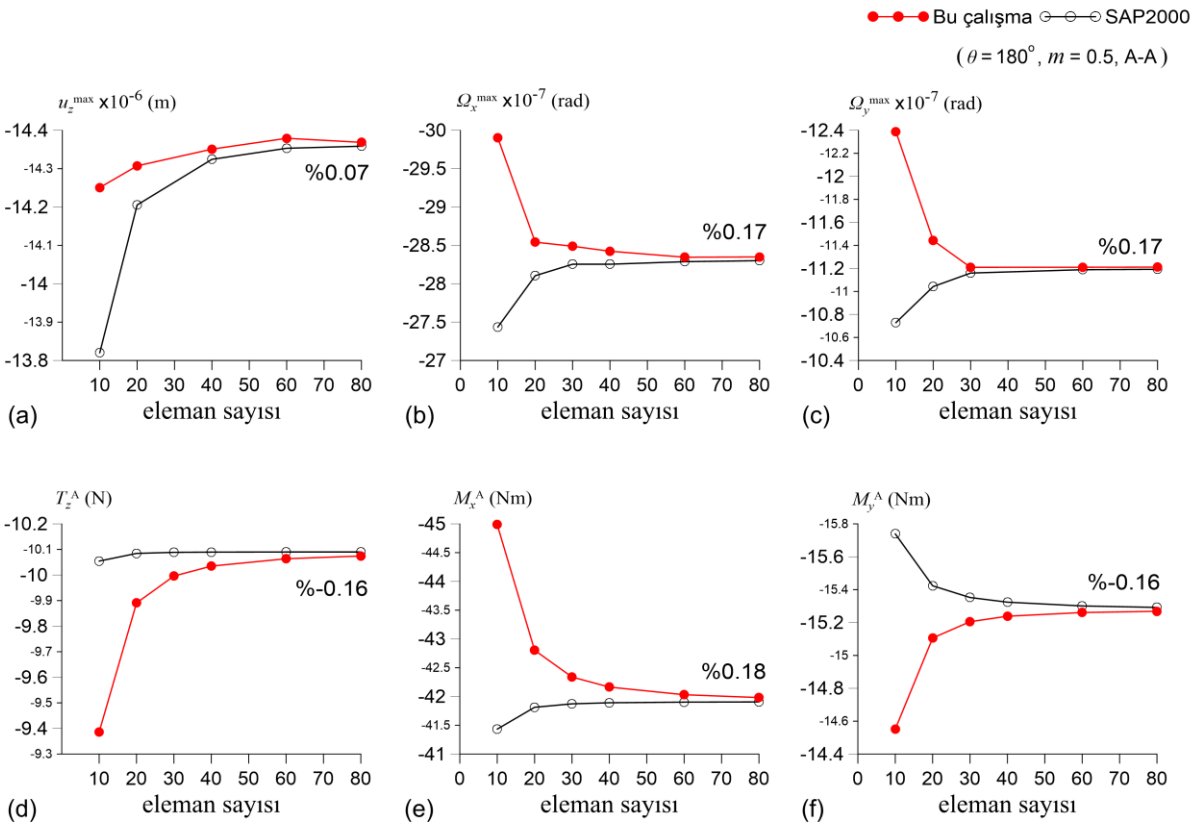
Şekil 3. EFD dairesel kiriş için yakınsama analizi ($\theta_B = 45°$, $m = 0.5$, $a = 0.25$m ve A-S)



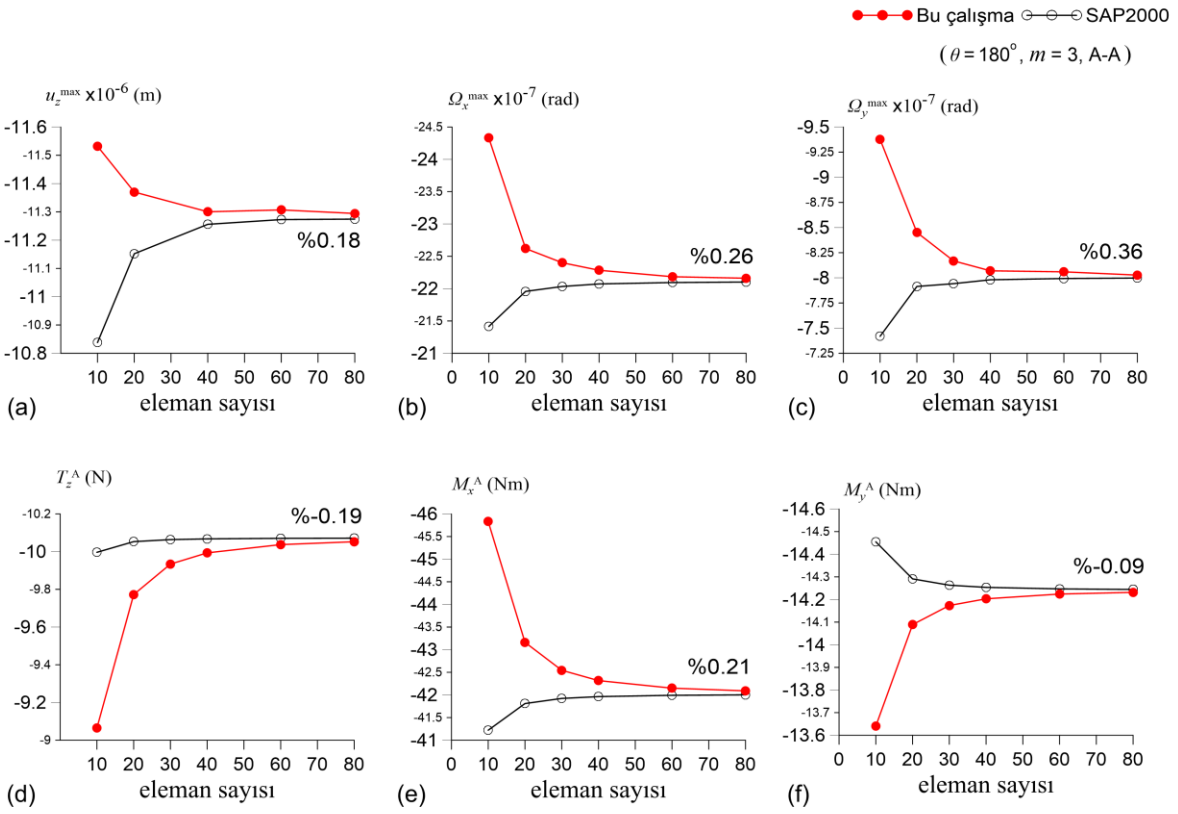
Şekil 4. EFD dairesel kiriş için yakınsama analizi ($\theta_B = 45°$, $m = 3$, $a = 0.25$m ve A-S)



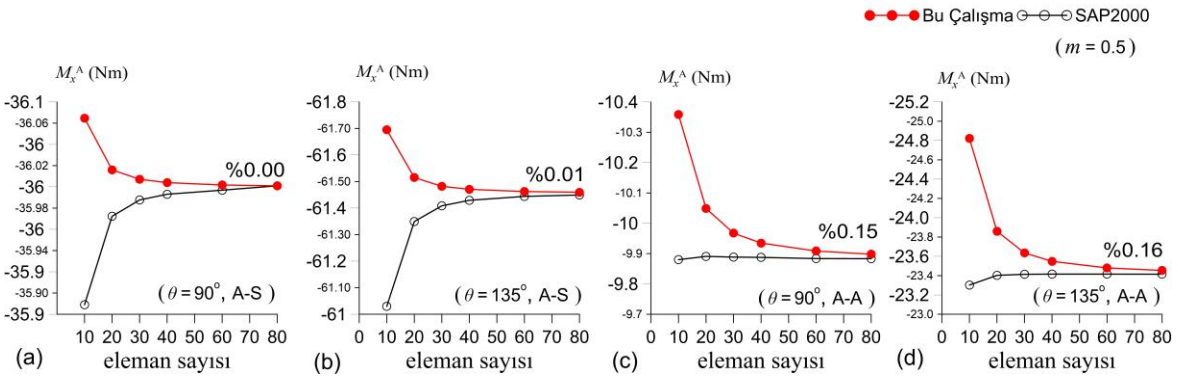
Şekil 5. EFD dairesel kiriş için yakınsama analizi ($\theta_B = 45°$, $m = 3$, $a = 0.25$m ve A-A)



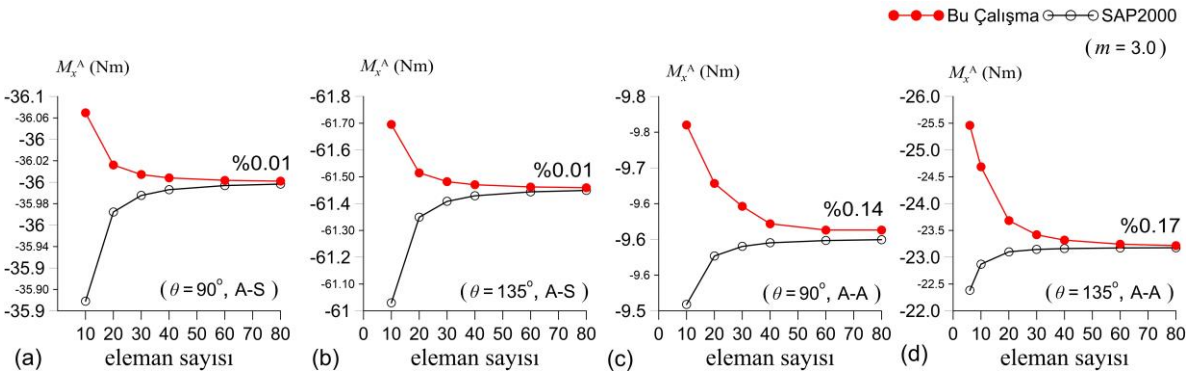
Şekil 6. EFD dairesel kiriş için yakınsama analizi ($\theta_B = 180°$, $m = 0.5$, $a = 0.25$m ve A-A)



Şekil 7. EFD dairesel kiriş için yakınsama analizi ($\theta_B = 180°$, $m = 3$, $a = 0.25$m ve A-A)



Şekil 8. EFD dairesel kiriş için yakınsama analizi ($m = 0.5$, $a = 0.25$m)



Şekil 9. EFD dairesel kiriş yakınsama analizi ($m = 3$, $a = 0.25$m)

Parametrik Analizi:

Merkez açı değerleri $\theta_B = 45°, 90°, 135°$ ve $180°$ olan EFD daire eksenli kirişin statik analizine ait sonuçlar, malzeme değişim parametreleri ($m = 0.5; 1$ ve 3), sınır koşulları (ankastre-ankastre A-A, ankastre-serbest A-S) ve kare kesit boyutu $a = 0.25\text{m}$ için sırasıyla Çizelge 1-4 arasında sunulmuştur. Çizelge 5-8'deki sonuçlar ise, Çizelge 1-4 arasında bahsi geçen parametrelerden kesit boyutunun $a = 0.40\text{m}$ olarak değiştirilmesiyle elde edilen sonuçlar ise Çizelge 5-8 arasında sunulmuştur. Çizelge 1-8 arasında verilen karışık SEY'ne göre elde edilen sonuçlar yakınsama analizi sonrası yeteri yakınsaklığın sağlandığı 80 eleman için verilmiştir.

Çizelge 1. Merkez açısı $\theta_B = 45°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.25\text{m}$)

S.K.	m	$u_z^{\text{maks}} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{\text{maks}} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{\text{maks}} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-1.33	-3.50	-1.95	-4.71	-10.54	-2.82
	1	-1.11	-2.91	-1.61	-4.71	-10.54	-2.82
	3	-0.97	-2.48	-1.35	-4.71	-10.54	-2.82
A-A	0.5	-0.04	-0.24	0.22	-2.51	-2.32	-0.06
	1	-0.03	-0.21	0.19	-2.52	-2.32	-0.05
	3	-0.03	-0.18	0.17	-2.50	-2.20	-0.01

Çizelge 2. Merkez açısı $\theta_B = 90°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.25\text{m}$)

S.K.	m	$u_z^{\text{maks}} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{\text{maks}} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{\text{maks}} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-20.97	-18.12	-27.24	-9.42	-36.0	-20.55
	1	-17.53	-15.15	-22.55	-9.42	-36.0	-20.55
	3	-15.28	-13.24	-18.90	-9.42	-36.0	-20.55
A-A	0.5	-0.68	-2.30	2.59	-5.02	-9.90	-0.94
	1	-0.60	-2.01	2.31	-5.05	-9.96	-0.87
	3	-0.51	-1.76	1.95	-5.01	-9.61	-0.63

Çizelge 3. Merkez açısı $\theta_B = 135°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.25\text{m}$)

S.K.	m	$u_z^{\text{maks}} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{\text{maks}} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{\text{maks}} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-99.85	-24.47	-109.08	-14.14	-61.46	-59.36
	1	-83.32	-21.03	-90.41	-14.14	-61.46	-59.36
	3	-72.35	-1.95	-76.47	-14.14	-61.46	-59.36
A-A	0.5	-3.97	-9.56	7.67	-7.54	-23.45	-4.91
	1	-3.52	-8.47	6.73	-7.59	-23.76	-4.83
	3	-3.06	-7.50	5.64	-7.53	-23.22	-4.19

Çizelge 4. Merkez açısı $\theta_B = 180°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.25$m)

S.K.	m	$u_z^{maks} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-274.13	61.90	-242.23	-18.85	-72.01	-113.09
	1	-227.91	48.90	-201.14	-18.85	-72.01	-113.09
	3	-196.16	33.45	-172.93	-18.85	-72.01	-113.09
A-A	0.5	-14.37	-28.35	-11.21	-10.07	-41.98	-15.27
	1	-12.81	-25.38	-9.77	-10.14	-42.67	-15.40
	3	-11.29	-22.16	-8.03	-10.05	-42.09	-14.23

Çizelge 5. Merkez açısı $\theta_B = 45°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.40$m)

S.K.	m	$u_z^{maks} \times 10^{-7}$ (m)	$\Omega_x^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-2.04	-0.53	-0.30	-4.71	-10.54	-2.82
	1	-1.71	-0.44	-0.25	-4.71	-10.54	-2.82
	3	-1.49	-0.38	-0.21	-4.71	-10.54	-2.82
A-A	0.5	-0.06	-0.04	0.03	-2.51	-2.33	-0.07
	1	-0.05	-0.03	0.03	-2.52	-2.33	-0.05
	3	-0.05	-0.03	0.03	-2.50	-2.21	-0.02

Çizelge 6. Merkez açısı $\theta_B = 90°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.40$m)

S.K.	m	$u_z^{maks} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-3.20	-2.77	-4.16	-9.42	-36.00	-20.55
	1	-2.68	-2.31	-3.44	-9.42	-36.00	-20.55
	3	-2.34	-2.02	-2.88	-9.42	-36.00	-20.55
A-A	0.5	-0.11	-0.35	0.40	-5.02	-9.90	-0.95
	1	-0.09	-0.31	0.35	-5.05	-9.97	-0.87
	3	-0.08	-0.27	0.30	-5.01	-9.62	-0.63

Çizelge 7. Merkez açısı $\theta_B = 135°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.40$m)

S.K.	m	$u_z^{maks} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-15.25	-3.73	-16.64	-14.14	-61.46	-59.36
	1	-12.72	-3.21	-13.80	-14.14	-61.46	-59.36
	3	-11.05	-2.98	-11.67	-14.14	-61.46	-59.36
A-A	0.5	-0.61	-1.46	1.17	-7.54	-23.46	-4.91
	1	-0.54	-1.29	1.03	-7.59	-23.76	-4.83
	3	-0.47	-1.14	0.86	-7.53	-23.22	-4.20

Çizelge 8. Merkez açısı $\theta_B = 180°$ olan EFD dairesel kirişin A-S ve A-A sınır koşulu için karışık SEY ait statik analiz sonuçları. ($a = 0.40\text{m}$)

S.K.	m	$u_z^{maks} \times 10^{-6}$ (m)	$\Omega_x^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	$\Omega_y^{maks} \times 10^{-7}$ (rad)	T_z^A (N)	M_x^A (Nm)	M_y^A (Nm)
A-S	0.5	-41.85	9.45	-36.96	-18.85	-72.01	-113.09
	1	-34.79	7.46	-30.69	-18.85	-72.01	-113.09
	3	-29.94	5.10	-26.39	-18.85	-72.01	-113.09
A-A	0.5	-2.20	-4.33	-1.71	-10.08	-41.98	-15.27
	1	-1.96	-3.87	-1.49	-10.14	-42.68	-15.41
	3	-1.73	-3.38	-1.23	-10.05	-42.09	-14.24

Elde edilen sonuçlara göre:

- Malzeme değişim parametresinin statik analiz sonuçları üzerindeki etkisini inceleyebilmek için, kare kesit boyutu $a = 0.25\text{m}$'ye ait $m = 1$ ve 3 durumu için elde edilen sonuçlar $m = 0.5$ durumu için elde edilen sonuçlara göre ankastre-ankastre sınır koşulu ve her bir merkez açı değeri için normalize edildiğinde aşağıdaki yüzde farklar elde edilmiştir.
  - Malzeme değişim parametresi ($m = 1$)
    - $\theta_B = 45°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 12.6, % 13.6, %10.5, %-0.5, %0.1 ve %22.9' dur.
    - $\theta_B = 90°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 12.0, % 12.6, %11.1, %-0.6, %-0.6 ve %7.9'dur.
    - $\theta_B = 135°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 11.3, % 11.5, %12.2, %-0.6, %-1.3 ve %1.7'dir.
    - $\theta_B = 180°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max} için yüzde farklar sırasıyla % 10.9, % 10.5, %12.9, %-0.6, %-1.6 ve %-0.9'dur.
  - Malzeme değişim parametresi ($m = 3$),
    - $\theta_B = 45°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 26.6, % 26.2, %23.4, %0.2, %5.0 ve %78.4' tür.
    - $\theta_B = 90°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 24.6, % 23.6, %24.6, %0.2, %2.9 ve %33.1'dir.
    - $\theta_B = 135°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 22.7, % 21.6, %26.6, %0.2, %1.0 ve %14.6'dır.
    - $\theta_B = 180°$ durumuna ait u_z^{max}, Ω_x^{max}, Ω_y^{max}, T_z^A, M_x^A ve M_y^A için yüzde farklar sırasıyla % 21.4, % 21.8, %28.4, %0.2, %-0.3 ve %6.8'dir
- Sınır şartının statik analiz sonuçları üzerindeki etkisini inceleyebilmek için, kare kesit boyutu $a = 0.25\text{m}$'ye ait ankastre-ankastre (A-A) durumu için elde edilen sonuçlar ankastre-serbest (A-S) durumu için elde edilen sonuçlara göre malzeme değişim parametresi $m = 0.5$ ve her bir merkez açı değeri için ve normalize edilerek yüzde farklar

hesaplanmıştır. Normalize edilmiş yüzde farklar analiz sonuçlarının mutlak değerleri üzerinden elde edilmiştir. Buna göre elde edilen yüzde farklar aşağıda verilmiştir.

- $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A} ve M_y^{A} için yüzde farklar sırasıyla % 97.1, %93.2, %88.9, %46.8, %78.0 ve %97.7'dir.
- $\theta_{\mathrm{B}} = 90°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A} ve M_y^{A} için yüzde farklar sırasıyla % 96.7, %87.3, %90.5, %46.8, %72.5 ve %95.4'tür.
- $\theta_{\mathrm{B}} = 135°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A} ve M_y^{A} için yüzde farklar sırasıyla % 96.0, %60.9, %93.0, %46.7, %61.8 ve %91.7'dir.
- $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$, T_z^{A}, M_x^{A} ve M_y^{A} için yüzde farklar sırasıyla % 94.8, %54.2, %95.4, %46.6, %41.7 ve %86.5'tir.

Sonuçlar incelendiğinde, $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, M_x^{A} ve M_y^{A} ait yüzde farklar en büyük değerlerini $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$'de almakta ve merkez açı değeri arttıkça bu yüzde farklar azalmaktadır. $\Omega_y^{\max}$ ait yüzde fark en büyük değerini $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$'de almakta ve merkez açı değeri azaldıkça bu yüzde farklar da azalmaktadır. T_z^{A} kuvvetine ait yüzde farklar hemen hemen aynı mertebede kalmaktadır.

- Kesit alanının değişiminin statik analiz sonuçları $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ üzerindeki etkisini inceleyebilmek için, boyutu $a = 0.25\mathrm{m}$ olan kare kesit için elde edilen sonuçlar $a = 0.40\mathrm{m}$ durumu için elde edilen sonuçlara göre her bir malzeme değişim parametresi, her bir sınır şartı ve her bir merkez açı değeri için normalize edilerek yüzde farklar elde hesaplanmıştır. Göz önüne alınan farklı sınır şartları ve merkez açı değerleri ve malzeme değişim parametresi için kesit alanın değişimine ait yüzde fark değerleri hemen hemen aynı mertebedir. Elde edilen yüzde farklar malzeme değişim parametresi $m = 0.5$ için aşağıda sunulmuştur.
  - Ankastre-ankastre (A-A) sınır koşulu,
    - $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 83.95, %84.66 ve %84.80'dir.
    - $\theta_{\mathrm{B}} = 90°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.56, %84.73 ve %84.76'dır.
    - $\theta_{\mathrm{B}} = 135°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.67, %84.74 ve %84.75'tir.
    - $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.71, %84.74 ve %84.73'tür.
  - Ankastre-serbest (A-S) sınır koşulu,
    - $\theta_{\mathrm{B}} = 45°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.66, %84.74 ve %84.74'tür.
    - $\theta_{\mathrm{B}} = 90°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.72, %84.74 ve %84.74'tür.

- $\theta_{\mathrm{B}} = 135°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$, ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.73, %84.74 ve %84.74'tür.
- $\theta_{\mathrm{B}} = 180°$ durumuna ait $u_z^{\max}$, $\Omega_x^{\max}$ ve $\Omega_y^{\max}$ için yüzde farklar sırasıyla % 84.73, %84.74 ve %84.74'tür.

SONUÇLAR

Düşeyde düzgün yayılı yük etkisindeki eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş düzlem dairesel kirişlerin statik analiz davranışı en büyük yer değiştirme $u_z^{\max}$ ve en büyük kesit dönmeleri ($\Omega_x^{\max}$, $\Omega_y^{\max}$) ve A noktasındaki mesnet tepkileri (T_z^{A}, M_x^{A}, M_y^{A}) üzerinden parametrik bir çalışma ile karışık sonlu eleman yöntemi kullanılarak detaylı olarak incelenmiştir. Timoshenko çubuk kuramına dayalı karışık sonlu eleman formülasyonuna ait analiz sonuçları SAP2000 programından elde edilen sonuçlar üzerinden kıyaslanmıştır. Parametrik çalışma farklı malzeme değişim parametreleri, sınır koşulları, farklı merkez açı değerleri ve farklı alana sahip kare kesitler üzerinden ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar detaylı olarak incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Sola A, Bellucci D and Cannillo V (2016). Functionally graded materials for orthopedic applications–an update on design and manufacturing. Biotechnology advances, 34(5), 504-531. https://doi.org/10.1016/j.biotechadv.2015.12.013

[2] Sofiyev AH (2019). Review of research on the vibration and buckling of the FGM conical shells. Composite Structures, 211, 301-317. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.12.047

[3] Ghatage PS, Kar VR and Sudhagar PE (2020). On the numerical modelling and analysis of multi-directional functionally graded composite structures: a review. Composite Structures, 236, 111837. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111837

[4] Çömez İ (2021). Frictional moving contact problem of a magneto-electro-elastic half plane. Mechanics of Materials, 154, 103704. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103704

[5] Çömez İ, Aribas UN, Kutlu A, Omurtag MH, 2021. An Exact Elasticity Solution for Monoclinic Functionally Graded Beams. Arab. J. Sci. Eng. 46, 5135–5155. https://doi.org/10.1007/s13369-021-05434-9

[6] L. Wu, Q.-s. Wang, I. Elishakoff, Semi-inverse method for axially functionally graded beams with an anti-symmetric vibration mode, J. Sound Vib. 284, 1190–1202 (2005). https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.08.038

[7] M. Aydogdu, Semi-inverse method for vibration and buckling of axially functionally graded beams, J. Reinf. Plast. Compos. 27, 683–691 (2008). https://doi.org/10.1177/0731684407081369

[8] Shahba, R. Attarnejad, M. T. Marvi, S. Hajilar, Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions, Compos. Part B Eng. 42, 801–808 (2011) https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.01.017.

[9] Y. Huang, L.-E. Yang, Q.-Z. Luo, Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section, Compos. Part B Eng. 45, 1493–1498 (2013). https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.015

[10] X.-F. Li, Y.-A. Kang, J.-X. Wu, Exact frequency equations of free vibration of exponentially functionally graded beams, Appl. Acoust. 74, 413–420 (2013). https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2012.08.003
[11] K. Sarkar, R. Ganguli, Closed-form solutions for axially functionally graded Timoshenko beams having uniform cross-section and fixed–fixed boundary condition, Compos. Part B Eng. 58, 361–370 (2014). https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2013.10.077
[12] F. F. Calim, Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section, Compos. Part B Eng. 98, 472–483 (2016). https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.05.040
[13] M. Rezaiee-Pajand, S. M. Hozhabrossadati, Analytical and numerical method for free vibration of double-axially functionally graded beams, Compos. Struct. 152, 488–498 (2016). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.003
[14] D. Cao, Y. Gao, M. Yao, W. Zhang, Free vibration of axially functionally graded beams using the asymptotic development method, Eng. Struct. 173, 442–448 (2018). https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.111
[15] X. Li, L. Li, Y. Hu, Z. Ding, W. Deng, Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory, Compos. Struct. 165, 250–265 (2017). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.01.032
[16] M. H. Ghayesh, H. Farokhi, Mechanics of tapered axially functionally graded shallow arches, Compos. Struct. 188, 233–241 (2018). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.017
[17] M. Chen, G. Jin, Y. Zhang, F. Niu, Z. Liu, Three-dimensional vibration analysis of beams with axial functionally graded materials and variable thickness, Compos. Struct. 207, 304–322 (2019). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.09.029
[18] X. Zhang, Z. Ye, Y. Zhou, A Jacobi polynomial based approximation for free vibration analysis of axially functionally graded material beams, Compos. Struct. 225, 111070 (2019). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111070
[19] A. Shahba, R. Attarnejad, S. Hajilar, A mechanical-based solution for axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. *20*(8) (2013) 696-707. doi:10.1080/15376494.2011.640971.
[20] S. Li, J. Hu, C. Zhai, L. Xie, A unified method for modeling of axially and/or transversally functionally graded beams with variable cross-section profile. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 41(2) (2013) 168-188. doi:10.1080/15397734.2012.709466.
[21] S. Rajesakaran, Analysis of curved beams using a new differential transformation based curved beam element. *Meccanica*. 49(4) (2014) 863-886. doi:10.1007/s11012-013-9835-3.
[22] M. Ermis, M.H. Omurtag, Static and Dynamic Analysis of Conical Helices Based on Exact Geometry via Mixed FEM, International Journal of Mechanical Sciences, 131-132 (2017) 296-304. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010
[23] M.H. Omurtag ve A.Y. Aköz, The mixed finite element solution of helical beams with variable cross-section under arbitrary loading, *Computers & Structures*, 43, 325–331, (1992). https://doi.org/10.1016/0045-7949 (92)90149-T.
[24] N. Eratli, M. Yilmaz, K. Darilmaz ve M.H. Omurtag, Dynamic analysis of helicoidal bars with non-circular cross-sections via mixed FEM, *Structural Engineering and Mechanics*, 57, 221–238, (2016). https://doi.org/10. 12989/sem.2016.57.2.221.

[25] M Ermiş, Eksenel fonksiyonel derecelendirilmiş helislerin karışık sonlu eleman yöntemi ile serbest titreşim analizi, *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 10(1): 319-327, (2021). doi: 10.28948/ngmuh.823385

23 METRE UZUNLUĞUNDA BİR KOMPOZİT RÜZGAR TÜRBİN KANADININ İÇ YAPISININ TOPOLOJİ OPTİMİZASYONUYLA TASARLANMASI

Yaren Özkan[1], Onur Koçak[1], İnci Pir[1] ve Mertol Tüfekci[2]
[1]Makina Fakültesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
[2]Makina Mühendisliği Bölümü, Imperial College London, Londra

ABSTRACT

In this study, the core structure of the blade of a modern composite wind turbine with 3 blades is designed with topology optimisation. It is known that the NACA 4415 aerofoil profile provides higher efficiency. Therefore, this composite wind turbine blade, which includes skin (shell) and core components, is handled with a NACA 4415 aerofoil profile. The load scenarios, that the blade can be exposed to, during its operation are defined and the behaviour of the blade under these loads is investigated by finite element analysis. The core material is considered aluminium and/or balsa. Topology optimisation is performed in the core with aluminium material to meet the required criteria while keeping the structure as light as possible. The final composite wind turbine blade core and model are selected by comparing the obtained optimisation models with the blade model with a full balsa beam.

Keywords: Composite wind turbine blade, finite element method, static analysis, modal analysis, topology optimisation

ÖZET

Bu çalışmada, 3 kanatlı modern kompozit rüzgâr türbin kanadının iç yapısının topoloji optimizasyonu ile tasarlanması gerçekleştirilmiştir. Literatür araştırmaları sonucu, kanat tasarımı için verimliliği yüksek NACA 4415 aerofoil profiline karar verilmiş; bu aerofoil profiline sahip kompozit rüzgâr türbin kanadı, kabuk ve kiriş/çekirdek bileşenlerini içerecek şekilde üç boyutlu olarak ele alınmıştır. Kanadın çalışması sırasında maruz kalabileceği yük senaryoları oluşturulmuş, bu yüklemeler altında kanadın davranışları sonlu eleman analizleri ile incelenmiştir. Kiriş/çekirdek malzemesi alüminyum ve balsa olmak üzere iki ayrı şekilde değerlendirilmiş, bu malzemelerin rijitlikleri ve yük taşıma kapasiteleri değerlendirilerek alüminyum kirişte topoloji optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Topoloji optimizasyonu, gerekli kriterler dahilinde minimum hacmi sağlayacak şekilde uygulanmıştır. Elde edilen optimizasyon modelleri dolu balsa kirişe sahip kanat modeli ile karşılaştırılarak nihai kompozit rüzgâr türbin kanadı iç malzemesine ve kanat modeline karar verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kompozit rüzgâr türbini kanadı, sonlu eleman yöntemi, gerilme analizi, modal analiz, topoloji optimizasyonu

GİRİŞ

Gelişen dünya ile artan enerji ihtiyacı, çağımız sorunlarının başında gelmektedir. Günümüzde artan enerji ihtiyacını karşılamaya yönelik kaynaklar, elde edilebilirliklerine göre "yenilenebilir" ve "yenilenemez" enerji kaynakları olmak üzere iki sınıfta incelenebilmektedir

[1]. Sürdürülebilir gelecek için yenilenebilir enerji kaynaklarına yönelim kaçınılmazdır. Rüzgar enerjisi, yenilenebilir enerji kaynakları arasında nispeten verimli, insan sağlığına olumsuz etkisi bulunmayan, ekonomik ve tükenme tehlikesi olmayan bir kaynak olma özelliği taşımaktadır [2].

Rüzgar enerjisinden elektrik enerji eldesi sağlayan ilk rüzgar türbini, Poul La Cour rüzgar türbini; ilk başarılı rüzgar türbini ise Gedser rüzgar türbinidir. Gedser rüzgar türbinindeki başarı, kanatlarda kullanılan kompozit malzeme özelliklerine dayandırılmaktadır. 1970'lerden sonraki tasarımlarda rüzgar türbin kanatları çoğunlukla kompozit malzemelerden oluşmaktadır [3]. Kompozit malzemelerin kullanımındaki amaç, geleneksel malzemeler ile mümkün olmayan yüksek mukavemet, yüksek korozyon direnci, düşük yoğunluk gibi özelliklere sahip, daha tasarlanabilir ve kullanışlı malzemeler elde etmektir. Rüzgar türbinlerinin maruz kaldığı yüklere karşı dayanımı, kompozit malzemelerin sağladığı özellikler ile mümkün olmakta ve bu nedenle sıklıkla cam elyaf, karbon elyaf takviyeli polimer gibi kompozit malzemeler tercih edilmektedir [4-9].

Elektrik ihtiyacını karşılayan rüzgar türbinleri, günümüzde farklı tasarım ve verimlilik oranlarına sahip olarak karşımıza çıkmaktadır [10]. Maruz kaldıkları karmaşık yükler ve verimlilik ile olan bağlantıları sebebiyle kanatlar, rüzgar türbinlerinin en kritik bileşenleri sayılmaktadır [11]. Kanatlar, kök, orta ve uç bölümlerinden oluşmaktadır. Kök bölgesi, zorlanmaya maruz kalan ve kanat rijitliği üzerinde etkisi yüksek olan bölüm olup, uç bölgesi aerodinamik açıdan önem arz etmektedir. Verimliliği artırmak için girdap oluşumunu engelleyen ve sürükleme oranı yüksek olan aerofoil profilleri seçilmeli, özelleştirilmiş uç geometrileri tasarlanmalıdır [12].

Bir yapının topolojisi, malzemesinin dağılımı ve yapısal elemanlarının konumu, yapının kalitesi açısından oldukça önemlidir. Yapıların topolojisi çoğunlukla sezgisel olarak seçilmekte veya mevcut tasarımlardan esinlenilerek ortaya konulmaktadır. Ancak, erken tasarım aşamalarında ürün için mümkün olabilecek en iyi topolojiye erişilmesi ürünün kalitesini önemli ölçüde iyileştirmektedir [13]. Topoloji optimizasyonu, bir yapının çalışma koşulları göz önünde bulundurularak elde edilebilecek en uygun düzenin belirlenmesini sağlayan bir tekniktir. Topoloji optimizasyonu, tasarım aşamalarının başındayken gerekli malzeme dağılımını belirlemekte ve ürün geliştirme sürecini kısaltmaya yardımcı olmaktadır. Gerçekçi tasarımlar elde etmek için optimizasyon aşamalarında üretim kısıtlamaları ve optimizasyon parametreleri kullanılabilmekte, ancak bunların kesinleşmediği ve sürece dahil edilemediği durumlarda da tasarım büyük ölçüde şekillendirilebilmektedir. Buckney ve diğerleri, topoloji optimizasyonu ile 45 m uzunluğundaki kanatta %13.8 oranında kütle kazancı sağlamışlardır [14]. Albanesi ve diğerleri 28.5 m uzunluğunda kompozit rüzgar türbin kanadında topoloji optimizasyonu ile %23 kütle kazancı sağlamıştır [15].

Rüzgar türbin kanatlarının boyutları, yüksek enerji ihtiyacını karşılamaya yönelik olarak belirlenmektedir. Yüksek enerji eldesi, büyük kanat boyutları ile sağlanabilmekte ve boyutlar ile birlikte kanat ağırlığı da artmaktadır. Ağırlığın artması ise malzeme maliyetlerinin artmasına ve mekanik zorlanmalara neden olmaktadır. Bu nedenle, ağırlık artışına neden olmadan yüksek enerji elde edilmesi istenirken yapı içerisindeki malzeme dağılımlarına ve yapının topolojisine dikkat edilmelidir [15, 16].

Bu çalışmada, kompozit rüzgar türbini kanadı 23 m uzunluğunda ve NACA 4415 aerofoil profili kullanılarak kabuk ve kiriş/çekirdek olmak üzere iki ayrı bileşen olarak ele alınmıştır. Kanat modeli, farklı kiriş/çekirdek malzemeleri ve farklı yük koşulları etkisinde sonlu eleman yöntemi ile incelenmiş ve alüminyum malzemeli kiriş/çekirdek bileşeninde gerçekleştirilecek olan topoloji optimizasyonu için gerekli koşullar sağlamıştır. Elde edilen optimizasyon

modelleri ile balsa dolu kirişe sahip kanat modeli kıyaslanmış ve kompozit rüzgar türbin kanadı yapısal açıdan uygun bir geometriye kavuşturulmuştur.

MODELLEME

Kompozit rüzgar türbin kanadının modellenmesi, geometrik tasarım ve sonlu eleman modeli olmak üzere iki ayrı başlıkta incelenmiştir. Kanadın maruz kalabileceği yük senaryoları ve sınır koşulları belirlenmiştir. Son olarak, topoloji optimizasyonu için gerekli parametreleri içeren model oluşturulmuştur.

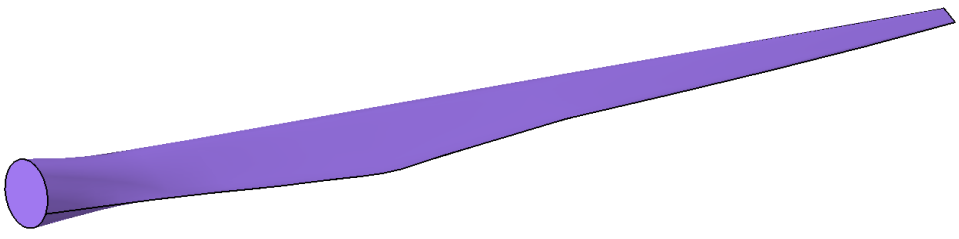
Kanat; kanat malzemesinin belirlenmesi, kanat profilinin belirlenmesi, kanat hücum açısının belirlenmesi, kanadın boyutlandırılması ve üç boyutlu kanat başlangıç geometrisinin oluşturulması adımları izlenerek oluşturulmuştur.

Kanat Geometrisinin Oluşturulması

Kanat malzemesinin belirlenmesi, literatürde incelenen ve yaygın olarak kullanılan malzemeler doğrultusunda şekillenmiştir. Kabuk malzemesi, düşük yoğunluk ve yüksek rijitlik özelliklerine sahip karbon elyaf takviyeli epoksi olarak seçilmiştir. Kompozit malzeme, homojenleştirilme yöntemi ile etkin bir elastisite modülüne sahip izotropik malzeme olarak modellerde tanımlanmıştır [11]. Kabuk kalınlığı 20 mm olarak seçilmiştir. Kiriş/çekirdek malzemesi için alüminyum ve balsa malzemeleri karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Karbon elyaf takviyeli epoksi, alüminyum ve balsa malzemelerine ait malzeme özellikleri Çizelge 1'de verilmiştir. Bu yapılarda balsa malzemenin kullanım amacı, titreşim ve darbe sönümleme özelliğinin yanı sıra yapıya tokluk kazandırılmasıdır, yük taşımak değildir. Bunun yanında hafif yapısı ve düşük dayanımı sebebiyle, balsa malzemenin hacimce azaltılmasının etkili bir sonuç sağlamayacağı öngörülmüştür. Alüminyum malzeme kullanılmasının amacı ise yapıya gelen yüklerin büyük ölçüde taşınması ve yapıya rijitlik sağlanmasıdır. Topoloji optimizasyonu ile minimum hacimde alüminyum malzeme ile optimum kiriş/çekirdek geometrisi tasarımına ulaşmak hedeflenmiş; içi dolu balsa kiriş ile optimizasyon modeli parametreleri kıyaslanarak en uygun kiriş geometrisi belirlenmiştir.

Çizelge 1. Malzeme özellikleri [11,17].

Malzeme Özellikleri	Karbon Elyaf Takviyeli Epoksi	Alüminyum	Balsa
E (MPa)	110000	70000	3000
ρ (kg/m^3)	1400	2700	130
υ	0,28	0,33	0,38
Çekme Dayanımı (MPa)	919	124	73



Şekil 1. Başlangıç üç boyutlu kanat geometrisii.

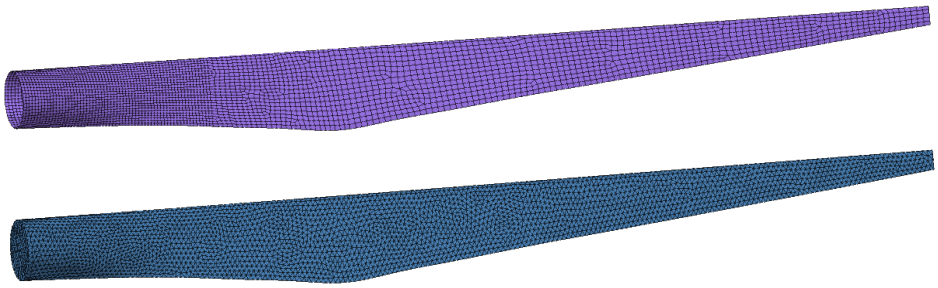
Kanat profili, rüzgar türbininin verimliliği açısından önem arz etmektedir [18]. Literatürde yaygın olarak tercih edilen, yüksek verim sağlayan NACA 4415 profili ticari yazılım Matlab'de koordinatlar yardımıyla çizdirilmiş ve kesit profilleri istasyonlar yardımıyla belirlenmiştir. NACA 4415 aerofoil profilinin maksimum kaldırma yükü sağladığı hücum

açısı 10^o olarak belirlenmiştir [19]. Kanadın üç boyutlu başlangıç geometrisi oluşturulmuştur. Kanat başlangıç geometrisi Şekil 1'de verilmiştir.

Sonlu Eleman Modelinin Oluşturulması

Kabuk ve kiriş olmak üzere iki ayrı bileşenden meydana gelen kanat geometrisi kullanılarak sonlu eleman ağ yapısı ve modeli kurulmuştur.

Kanat kabuk bileşeni, kalınlık/uzunluk oranı dolayısıyla kabuk elemanlardan, kiriş bileşeni ise üç boyutlu katı elemanlardan oluşturulmuştur. Kabuk bileşeni, 5407 adet S8R tipi ikinci mertebe dörtgen elemanlardan; kiriş bileşeni, 18786 adet C3D10M tipi ikinci mertebe tetrahedral elemanlardan oluşturulmuştur. Şekil 2'de kabuk ve kiriş bileşenlerinin sonlu eleman ağı modelleri verilmiştir.



Şekil 2. Kabuk ve kiriş bileşenlerinin sonlu eleman ağı modeli.

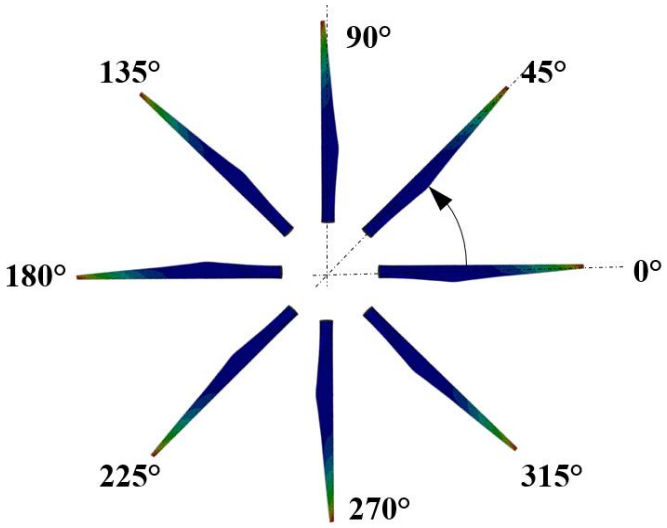
Yük Senaryolarının Belirlenmesi

Rüzgar türbin kanatları, çalışma koşullarında çeşitli yüklere maruz kalmaktadır. Bu yüklerin başında rüzgar basıncı, kanadın dönüşünden kaynaklanan merkezkaç yükü ve yerçekimi yükü gelmektedir.

Lineer olmayan statik analizler için iki ayrı yük senaryosu kullanılmıştır: birinci yük senaryosunda yerçekimi etkisi ve ikinci yük senaryosunda ise yerçekimi, merkezkaç, rüzgar basıncı etkilerinin birleştirildiği yük kombinasyonları ele alınmıştır. Yerçekimi etkisi, kanadın bir tam dönüşünü tamamlayacak şekilde 45° aralıklarla incelenmiş, yerçekimi bileşenleri konumlara göre düzenlenmiştir. Konum ve açı bilgileri Şekil 3'te verilmiştir. Bu durumda 8 ayrı konum için yalnızca yerçekimi ve 8 ayrı konum için yük kombinasyonları etkisinde; 2 ayrı malzemeli kirişe sahip modeller için toplamda 32 adet lineer olmayan statik analiz yapılmıştır. Geometrik non-lineerlik etkisinin göz önüne alınmasıyla gerçekleştirilen statik analizler, modal analiz için ön yükleme şartı olarak verilmiş; yapının mod şekilleri, doğal frekansları ve rijitliği incelenmiştir.

Kanada etkiyen rüzgar basıncı, kanadın dönüş hızı, atmosfer basıncı, havanın yoğunluğu, hücum açısı gibi parametrelere göre değişebilmektedir [20, 21]. Chen ve diğerleri (2013), 31 metrelik yatay eksenli rüzgar türbin kanadında Blade Element Momentum (BEM) teoremini kullanarak kanat üzerine etkiyen basınç dağılımını RFOIL yazılımı ile elde etmiştir [22]. Elde edilen veriler baz alınarak, kanat üzerine etkiyen basınç değerlerine 7. derece polinom uydurulmuş ve kanat ucunda maksimum bileşke basınç 1800 Pa olacak şekilde kanat enine ve boyuna iki boyutta değişken basınç eğrisi elde edilmiştir. Merkezkaç yükü, 23 metrelik kanat için 2 rad/s olarak belirlenmiştir [20,23].

Analiz senaryolarında sınır koşulu, kanadın kök bölgesinden ankastre mesnetli olacak şekilde tanımlanmış olup analizler boyunca korunmuştur.



Şekil 3. Analizler boyunca incelenen 8 ayrı konum ve açı değerleri.

Topoloji Optimizasyonu Modelinin Kurulması

Optimizasyon, tasarım kriterleri doğrultusunda belirli parametreleri maksimize veya minimize etmeyi sağlayan mühendislik aracıdır [24]. Kanat geometrisinde yapılan optimizasyonun amacı belirli kriterlerin alt ve üst limitleri sağlanırken hacmi en aza indirmek ve yapıyı hafifletmektir. Belirlenen kriterler/sınırlar ise maksimum gerilme, minimum ilk doğal frekans değeri ve maksimum yer değiştirmedir. Statik ve modal analizlerden elde edilen yer değiştirme, gerilme ve doğal frekans değerleri kullanılarak kısıt parametreleri belirlenmiştir ve amaç fonksiyonu minimum kütle olacak şekilde belirlenmiştir. Parametrelerin seçimi ve amaç fonksiyonunun minimum kütle olarak belirlenmesindeki temel sebep, kanadın dönmesi esnasında yerçekimi etkisinin ve hava akışının yaratacağı dinamik yüklemelerin zamanla oluşturacağı hasarlardan kaçınmak ve maliyeti minimize ederek optimum kiriş geometrisine ulaşmaktır. Bu parametreler doğrultusunda kanadın kiriş/çekirdek bileşeninde topoloji optimizasyonu gerçekleştirilmiştir.

SAYISAL SONUÇLAR

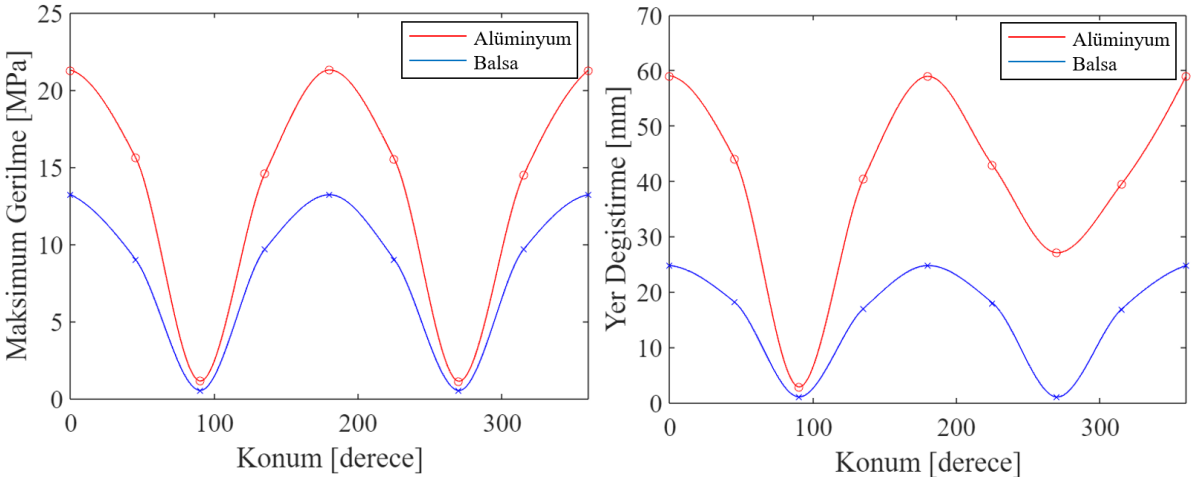
Lineer Olmayan Statik Analiz Sonuçları

Büyük yer değiştirmelerin/geometrik lineer olmama durumunun etkisinin de göz önünde bulundurulduğu statik analizler 8 ayrı konumda, alüminyum ve balsa iç malzemeler için iki ayrı yük senaryosu altında gerçekleştirilmiştir. Yalnızca yerçekimi yükü etkisinde gerçekleştirilen statik analiz sonuçları Şekil 4'te, yük kombinasyonları etkisinde gerçekleştirilen statik analiz sonuçları Şekil 5'te verilmiştir.

Şekil 4'te verilen sonuçlar incelendiğinde, yalnızca yerçekimi etkisi altında alüminyum malzemeli kiriş ile yapılan analizler sonucunda, alüminyum malzemenin balsa malzemeye kıyasla daha fazla yük taşıdığı görülmüştür. Konum bakımından değerlendirildiğinde balsa ile benzer karakteristiğe sahip sonuçlar elde edilmiş olup, maksimum gerilme ve yer değiştirme değerleri yatay 0° konumunda eğilme zorlanması altında sırasıyla 21 MPa ve 59 mm, sonrasında 45° konumunda 15,6 MPa ve 44 mm olarak elde edilmiştir.

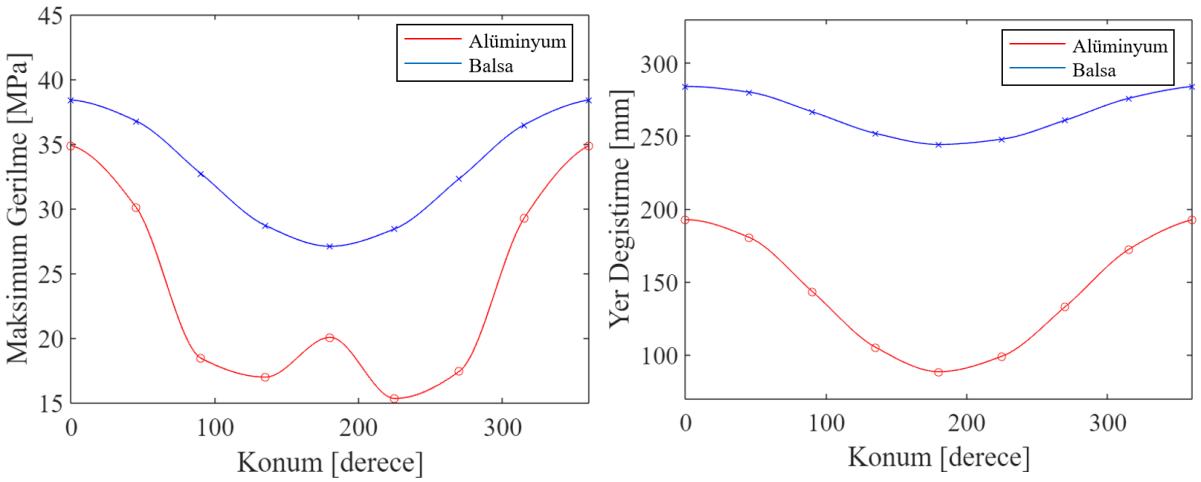
Şekil 5'te verilen alüminyum ve balsa kiriş malzemeli sonuçlar kıyaslandığında, balsa kirişin istenilen seviyede yük taşımadığı ve yükün kabuk tarafından taşındığı görülmektedir. Ayrıca, von Mises maksimum gerilmesinin yalnızca yerçekimi etkisi altındaki sonuçlara kıyasla artığı görülmüştür. Balsa ile yapılan analiz sonuçları, aynı konum için yerçekimi etkisiyle yapılan analiz sonuçları ile kıyaslandığında maksimum yer değiştirmelerin %45 oranında arttığı

gözlemlenmiştir. Alüminyum çekirdekli modelin yük kombinasyonları altında elde edilen maksimum von Mises gerilme ve yer değiştirme değerleri 0° yatay konumda sırasıyla 35 MPa ve 192,5 mm'dir. Literatürden elde edilen değerlere kıyasla 23 metrelik kanat uzunluğu için alüminyum iç malzeme ile elde edilen yer değiştirme değerleri daha fazla tercih edilebilirdir [25-27].



Şekil 4. Yerçekimi yükü etkisi altında gerçekleştirilen lineer olmayan statik analiz sonuçları.

0°'deki gerilme değerinin çok yüksek olması basitçe hem basınç hem de ağırlığın aynı yönde eğilmeye zorlamasından kaynaklanmaktadır. Kanat döndükçe ağırlık, eksenek doğrultuda etkimeye başlar. Eksenel yüklerin neden olduğu gerilmeler eğilmeye kıyasla oldukça küçüktür. Bunun nedeni ise, kanat uzunluğunun fazla olmasından dolayı ortaya çıkan eğilme momentinin çok büyük olmasıdır. Bu bağlamda, maksimum gerilme sonuçlarında dikkat çekici bir detay olan, alüminyum kiriş malzemeli kanattaki maksimum von Mises gerilmelerinin 180°'deki değerinin 135° ve 225°'deki değerlerinden büyük olmasıdır. Bunun nedeni olarak, alüminyumun rijitlik/ağırlık oranının balsya kıyasla daha düşük olması gösterilebilir. 180°'de basınç ve ağırlığın etkileri zıt yönlüdür. Buna rağmen oluşan eğilme momenti gerilmelerin 135° ve 225°'deki değerlerinin üzerine çıkmasına neden olur. 135° ve 225°'de, toplam yükün hatırı sayılır bir kısmı, eksenel yönde etki etmektedir. Bu nedenle ortaya çıkan gerilmeler, 180°'deki duruma kıyasla nispeten küçüktür.



Şekil 5. Yük kombinasyonları etkisi altında gerçekleştirilen lineer olmayan statik analiz sonuçları.

Modal Analiz Sonuçları

Modal analizler yüksüz ve yük kombinasyonları etkisinde ön yüklemeli olarak farklı konumlar için gerçekleştirilmiş olup, sonuçları Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 2. Modal analiz sonuçları.

Kiriş Malzemesi	Yüksüz Durumda 1. Doğal Frekans Değeri (Hz)	Farklı Konumlar için Ön Yükleme Durumunda 1. Doğal Frekans Değeri (Hz)							
		0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Alüminyum	1,11	1,13	1,12	1,11	1,12	1,13	1,13	1,14	1,13
Balsa	1,65	1,69	1,69	1,69	1,69	1,69	1,7	1,7	1,7

Çizelge 2'de verilen sonuçlar incelendiğinde ön yükleme durumunda doğal frekans değerinin arttığı görülmüştür. Farklı kiriş malzemeleri için konumun doğal frekanslara etkisi benzer şekilde görülmüştür. En yüksek doğal frekans değerleri iki kiriş malzemesi için de 270° düşey konumda elde edilmiştir.

Doğal frekans değerleri kaçınılması gereken tahrik frekans değerinin üzerindedir. İki ayrı malzeme ve yük durumları için sürekli rejim hali ve civarında rezonans beklenmemektedir. Sonuçlar malzemeler açısından incelendiğinde balsa iç malzemenin titreşim açısından daha rijit bir davranış sergilediği anlaşılmaktadır.

Topoloji Optimizasyonu Sonuçları

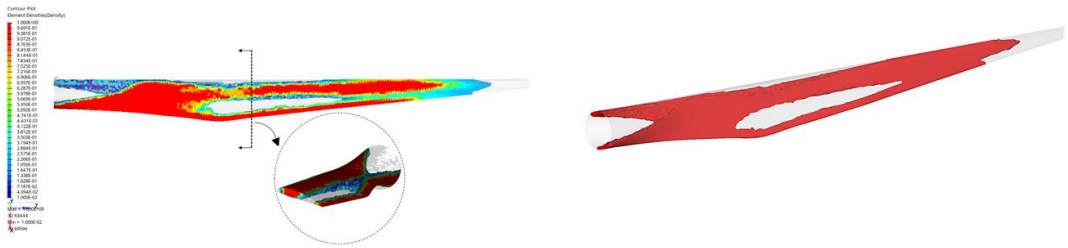
Alüminyum kiriş malzemeli modelde yük kombinasyonu etkisi altında topoloji optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Topoloji optimizasyonu farklı kısıt parametreleri dahilinde gerçekleştirilmiş olup, optimizasyon sonucu uygun yapıyı veren iki optimizasyon modeli parametreler ve amaç fonksiyonu doğrultusunda karşılaştırılmıştır. Belirlenen kısıt parametreleri sonucunda elde edilen modeller, yine yük kombinasyonu etkisinde lineer olmayan statik analize tabi tutulmuş ve sonuçların uygunluğu değerlendirilmiştir.

Çizelge 3. Optimizasyon modelleri için tasarım parametreleri ve analiz sonuçları.

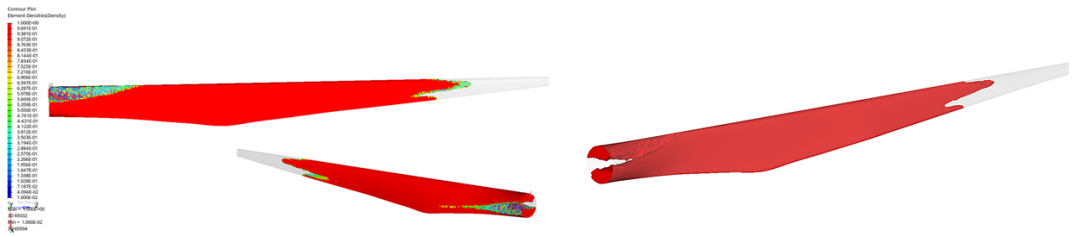
	1. Doğal Frekans Değeri (Hz)	Maksimum Gerilme (MPa)	Maksimum Yer Değiştirme (mm)
Baz Model Lineer Olmayan Analiz Sonuçları	1,13	35	196
1. Optimizasyon Modeli Kriterleri	1,2	65	280
2. Optimizasyon Modeli Kriterleri	1,3	45	250
1. Optimizasyon Modeli Lineer Olmayan Analiz Sonuçları	1,26	60,3	275,7
2. Optimizasyon Modeli Lineer Olmayan Analiz Sonuçları	1.37	41.4	234.5

Optimizasyon modelleri için birinci doğal frekans, maksimum von Mises gerilmesi ve maksimum yer değiştirme değerleri, bu sonuçlar doğrultusunda belirlenen kısıt parametreleri ve optimizasyon ile elde edilen modeller için elde edilen analiz sonuçları Çizelge 3'te verilmiştir. Kısıt parametreleri ve minimum kütle amacı doğrultusunda elde edilen

optimizasyon sonuçları ve model geometrileri Şekil 6 ve Şekil 7'de verilmiştir. Başlangıç modeli ile optimizasyon modelleri arasındaki kütle karşılaştırmaları Çizelge 4'te verilmiştir.



Şekil 6. Birinci optimizasyon modeli analiz sonuçları ve kiriş geometrisi.



Şekil 7. İkinci optimizasyon modeli analiz sonuçları ve kiriş geometrisi.

Çizelge 4. Başlangıç ve optimizasyon modelleri hacim ve kütle karşılaştırması.

	Başlangıç Modeli	1. Optimizasyon Modeli	2. Optimizasyon Modeli
Tasarım Alanı Hacmi (m^3)	7,24	4,07	6,30
Tasarım Alanı Kütlesi (ton)	19,6	9,2	17,1

Çizelge 4'teki topoloji optimizasyonu sonuçları incelendiğinde birinci optimizasyon modelinde kiriş bileşeninde minimum kütle amaç fonksiyonu ve kısıt parametreleri doğrultusuda %53'lük kütle azalımı sağlandığı görülmüştür. İkinci optimizasyon modelinde verilen başlangıç sonuçlarına yakın kısıt parametreleri sonucunda daha rijit ve dolu bir kiriş geometrisi elde edilmiş olup 2.5 tonluk kütle azalması sağlanmıştır.

Çizelge 3'te verilen analiz sonuçları incelendiğinde ikinci optimizasyon modelinde, birinci optimizasyon modeline kıyasla yaklaşık %15 daha düşük yer değiştirme değeri görülmektedir. Bunun sebebi, kirişte taşıyıcı olarak davranabilecek alüminyum malzemenin birinci optimizasyon modeline kıyasla hacimce daha fazla bulunmasıdır. Taşıyıcı hacmi büyük olup, kanadın çökmesini engellemektedir. Bu hacim fazlalığı, yer değiştirmelerin %15 oranda azalmasını sağlarken, ortalama 2 kat kütle artışına neden olmaktadır. Bu nedenle, birinci optimizasyon modelinin, ikinci optimizasyon modeline göre daha uygun bir kiriş yapısı olduğu sonucuna varılmıştır.

Optimizasyon Modelleri ile Dolu Balsa Kiriş Modelinin Karşılaştırılması

Gerçekleştirilen topoloji optimizasyonları sonucu alüminyum malzemeli kiriş; gerilme, yer değiştirme ve doğal frekans parametrelerinde verilen kısıtlamalar doğrultusunda şekillendirilmiş ve kütle azaltılmasına gidilirken yüksek rijitliğe sahip modeller elde edilmiştir. Ancak, bu modellerin yanı sıra yoğunluğu düşük, titreşim sönümleme özelliği ve tokluğu nispeten yüksek olan balsa malzeme ile kıyaslama yapılması gerekmektedir. Çünkü balsa malzeme, alüminyum malzeme kadar yük taşıma özelliğine sahip olmamasına rağmen oldukça yüksek titreşim sönümleme özelliğine sahiptir ve yapıya kazandırdığı tokluk açısından kayda değerdir. Bu nedenle optimum kiriş yapısı değerlendirilirken içi dolu balsa

modelinin de göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Bu doğrultuda, Optimizasyon Modeli 1, Optimizasyon Modeli 2 ve içi dolu balsa malzemeli kirişe sahip model arasında karşılaştırma yapılmıştır. Çizelge 5'te bu modellerin karşılaştırmalı sonuçları verilmiştir.

Çizelge 5'te verilmiş olan sonuçlar incelendiğinde, içi dolu balsa malzemeli kiriş modelinde ise 1. Optimizasyon Modeline göre 0° yatay konumdayken yalnızca %3 oranında yer değiştirme artışı görülmüştür. Ancak, bir tam turu tamamlayacak şekilde konumlandırılmış olan diğer açı değerlerinde balsa malzemeli modelin, 1. Optimizasyon Modeline kıyasla konumlara göre 2.5 kata kadar çıkabilen yer değiştirme değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Bu kadar fazla yer değiştirme, rüzgar türbin kanatlarında tercih edilmemektedir. Deforme olan yapı aerodinamik olarak tasarlanan ve daha ideal olan yapıdan uzaklaşmaktadır. Bu nedenle, alüminyum malzemenin daha rijit ve daha efektif bir tasarım sağladığı sonucuna varılmıştır.

Çizelge 5. Optimizasyon modelleri ve içi dolu balsa kirişe sahip modelin analiz sonuçları.

	1. Optimizasyon Modeli			2. Optimizasyon Modeli			İçi Dolu Balsa Modeli		
Konum	Maksimum von Mises Gerilme (MPa)	Maksimum Yer Değiştirme (mm)	1. Doğal Frekans Değeri (Hz)	Maksimum von Mises Gerilme (MPa)	Maksimum Yer Değiştirme (mm)	1. Doğal Frekans Değeri (Hz)	Maksimum von Mises Gerilme (MPa)	Maksimum Yer Değiştirme (mm)	1. Doğal Frekans Değeri (Hz)
0°	60,34	275,7	1,26	41,44	234,5	1,38	38,39	283,9	1,69
45°	51,6	249,5	1,25	35,64	213,3	1,37	36,76	280	1,69
90°	31,34	184,1	1,25	22,5	161,5	1,37	32,7	266,5	1,69
135°	13,5	119,9	1,25	13,55	111	1,37	28,68	251,7	1,69
180°	19,92	95,07	1,26	16,18	91,62	1,38	27,07	244,1	1,69
225°	13,98	120,7	1,26	139,9	112,7	1,39	28,43	247,8	1,7
270°	33,07	183,4	1,26	23,89	162,6	1,39	32,32	260,8	1,7
315°	52,59	247,7	1,26	36,44	213,1	1,39	36,47	275,8	1,7

SONUÇLAR

Sonuç olarak bu çalışmada, 23 metre uzunluğunda kompozit rüzgâr türbin kanadının kiriş bileşeninin topoloji optimizasyonu kullanılarak optimum kanat modeli belirlenmiştir. Kanadın üç boyutlu modeli NACA 4415 aerofoil profili ile kiriş ve kabuk olmak üzere iki ayrı bileşenden oluşacak şekilde tasarlanmıştır.

Kanat kabuk malzemesi literatürde tercih edilen dayanımı yüksek ve hafif bir kompozit malzeme olan karbon elyaf takviyeli epoksi olarak belirlenmiştir. Geometrisi oluşturulan kanatta lineer olmayan statik analiz ve modal analizler gerçekleştirilerek kanadın çalışma şartlarında maruz kalabileceği yükler altındaki davranışı incelenmiştir. Kiriş bileşeni malzeme açısından değerlendirilmiş, en uygun kiriş malzemesinin yük taşıma ve rijitlik parametreleri dahilinde alüminyum olduğu sonucuna varılmıştır.

Kanat yapısının iyileştirilmesi ve geliştirilmesi için kiriş bileşeninde ilgili sınır şartları ve tasarım parametreleri doğrultusunda topoloji optimizasyonu uygulanmıştır. Topoloji optimizasyonu sonucu kiriş bileşeninde %53 oranında kütle azaltılması sağlanarak optimum kompozit rüzgâr türbin kanadı kiriş yapısı oluşturulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Koç E. & Kaya K. (2015). Enerji Kaynakları–Yenilenebilir Enerji Durumu. Mühendis ve Makina, 56(668), 36-47.

[2] Şenel, M. C., & Koç, E. (2015). Dünyada ve Türkiye'de rüzgar enerjisi durumu-Genel değerlendirme. *Mühendis ve Makina, 56*(663), 46-56.

[3] Mishnaevsky, L., Branner, K., Petersen, H. N., Beauson, J., McGugan, M., & Sørensen, B. F. (2017). Materials for Wind Turbine Blades: An Overview. Materials, 10(11), 1285.

[4] Kaya, A. İ. (2016). Kompozit Malzemeler ve Özellikleri. Putech & Composite Poliüretan ve Kompozit Sanayi Dergisi, 29, 38-45.
[5] Mishnaevsky Jr, L., & Favorsky, O. (2011). Composite Materials in Wind Energy Technology. *Thermal to Mechanical Energy Conversion: Engines and Requirements, EOLSS Publishers: Oxford, UK*.
[6] Ovalı, İ., Atalay, Ö., & Ergene, B. Eklemeli İmalat Yöntemi İle Üretilmiş Rüzgar Türbin Kanatlarının Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Titreşim Analizi.
[7] Gangele, A., & Ahmed, S. (2013). Modal Analysis of S809 Wind Turbine Blade Considering Different Geometrical and Material Parameters. *Journal of the Institution of Engineers (India): Series C*, *94*(3), 225-228.
[8] Özdemir, E. T. Enerjide Kompozit: Rüzgâr Türbin Kanatları.
[9] Thomsen, O. T. (2009). Sandwich materials for wind turbine blades—present and future. Journal of Sandwich Structures & Materials, 11(1), 7-26.
[10] Crossley, R. J., & Schubel, P. J. (2012). Wind Turbine Blade Design Review. Wind engineering, 36(4), 365-88.
[11] Tüfekci, M., Genel, Ö. E., Tatar, A., & Tüfekci, E. (2021). Dynamic Analysis of Composite Wind Turbine Blades as Beams: An Analytical and Numerical Study. *Vibration*, *4*(1), 1-15.
[12] Schubel, P. J., & Crossley, R. J. (2012). Wind Turbine Blade Design. Energies, 5(9), 3425-3449.
[13] Eschenauer, H. A., & Olhoff, N. (2001). Topology optimization of continuum structures: A review. Applied Mechanics Reviews, 54(4), 331. doi:10.1115/1.1388075
[14] Buckney, N., Green, S., Pirrera, A., & Weaver, P. M. (2013). On the structural topology of wind turbine blades. *Wind Energy*, *16*(4), 545-560.
[15] Albanesi, A. E., Peralta, I., Bre, F., Storti, B. A., & Fachinotti, V. D. (2020). An optimization method based on the evolutionary and topology approaches to reduce the mass of composite wind turbine blades. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, *62*(2), 619-643.
[16] Choi, D. K., Pyeon, B. D., Lee, S. Y., Lee, H. G., & Bae, J. S. (2020). Structural Design, Analysis, and Testing of a 10 kW Fabric-Covered Wind Turbine Blade. *Energies*, *13*(12), 3276.
[17] Material Property Data. http://www.matweb.com/
[18] Kaya, K. (2014). Rüzgar Türbini Kanadının Mekanik Tasarım Esasları (Doctoral dissertation, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun).
[19] Keles, D., vd. (2013). Design and Development of a Wind Turbine. SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. 17. 207-216. 10.5505/saufbe.2013.58569.
[20] Tufekci, M., Rendu, Q., Yuan, J., Dear, J. P., Salles, L., & Cherednichenko, A. V. (2020). Stress and modal analysis of a rotating blade and the effects of nonlocality. Proceedings of the ASME Turbo Expo, 10B-2020. https://doi.org/10.1115/GT2020-14821
[21] Kaya K., & Koç E. (2015). Yatay Eksenli Rüzgâr Türbinlerinde Kanat Profil Tasarımı Ve Üretim Esasları. Mühendis ve Makina, 56(670), 38-48.
[22] Chen, J., Wang, Q., Shen, W. Z., Pang, X., Li, S., & Guo, X. (2013). Structural Optimization Study of Composite Wind Turbine Blade. Materials & Design, 46, 247-255.
[23] Tarfaoui, M., Khadimallah, H., Imad, A., & Pradillon, J. Y. (2012). Design and Finite Element Modal Analysis of 48m Composite Wind Turbine Blade. In Applied mechanics and materials (Vol. 146, pp. 170-184). Trans Tech Publications Ltd.

[24] Soğancı, T. (2016). Bir Ticari Araç Gövdesinin Yapısal Optimizasyon Yoluyla Tasarımı ve Geliştirilmesi. OTEKON16, Hexagon Studio.

[25] Albanesi, A., Roman, N., Bre, F., & Fachinotti, V. (2018). A metamodel-based optimization approach to reduce the weight of composite laminated wind turbine blades. *Composite Structures*, *194*, 345-356.

[26] Veludurthi, A., Bolleddu, V. (2020). Evaluation of Small Wind Turbine Blades with Uni-Vinyl Foam Alignments Using Static Structural Analysis. *Energy Engineering, 117(4)*, 237–248.

[27] Elsherif, D. M., Abd El-Wahab, A. A., & Abdellatif, M. H. (2019, September). Factors affecting stress distribution in wind turbine blade. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 610, No. 1, p. 012020). IOP Publishing.

(3+1) BOYUTLU MODİFİYE KADOMTSEV-PETVIASHVILI DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ

Neşe Özdemir[1], Semra Ahmetolan[2] ve Ali Demirci[3]
[1]Işık Üniversitesi, İstanbul
[2,3]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In this work, dispersive shock waves (DSWs) in the (3+1) dimensional (focusing) modified Kadomtsev-Petviashvili (mKP) equation is considered with a step like initial data. The mKP equation is reduced to (1+1) dimensional (focusing) spherical modified Korteweg-de Vries (smKdV) equation by employing a parabolic similarity variable transformation. Then using the Whitham modulation theory with the method of multiple scales, a nonlinear system of partial differential equations (Whitham modulation system of smKdV equation) is derived. This system describes the evolution of DSWs in the smKdV equation. In order to gain insight into the effect of spherical terms, first we solve the corresponding Whitham systems to mKdV and smKdV equations numerically. Then the direct numerical solutions of the mKdV equation and the smKdV equation are obtained by using an adaptation of modified exponential time-differencing fourth-order Runge Kutta (ETDRK4) method and choosing a Lax-Wendroff scheme with nonlinear filter. Finally, we discuss on the results of the asymptotic solutions of the Whitham systems and the direct numerical solutions to (1+1) dimensional mKdV and smKdV equations.

Keywords: Dispersive Shock Waves; Focusing Modified Kadomtsev Petviashvili Equation; Whitham Modulation Theory;

ÖZET

Bu çalışmada, (3+1) boyutlu (focusing) modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP) denkleminde görülen dispersif şok dalga çözümleri incelenmiştir. Burada, mKP denklemi için tek basamaklı başlangıç koşulu ele alınmış ve dispersif şok dalgalarının paraboloid bir cephe boyunca ilerlediği varsayılmıştır. Denkleme benzerlik indirgeme metodu uygulanarak orijinal mKP denklemi (1+1) boyutlu (focusing) küresel modifiye Korteweg-de Vries (smKdV) denklemine indirgenmiştir. Önerilen çözüm formu sonucu elde edilen smKdV denklemi için çoklu ölçek yöntemiyle Whitham modülasyon teorisi kullanarak, doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem sistemi (smKdV denkleminin Whitham modülasyon sistemi) türetilmiştir ve sonrasında (1+1) boyutlu smKdV denklemi için nümerik çalışma yapılmıştır. Küresel terim hakkında fikir sahibi olabilmek için, klasik mKdV ve smKdV'nin Whitham modülasyon denklemleri asimptotik olarak çözülmüştür. Daha sonra, (1+1) boyutlu mKdV ve smKdV denklemlerinin sayısal çözümü için, 'Exponential Time Differencing Runge Kutta

4’ (ETRK4) metodunun modifiye biçimi ile çalışılmış ve Lax-Wendroff şeması kullanılmıştır. Son olarak, sayısal hesaplama sonucunda elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Dispersif Şok Dalgası; Focusing Modifiye Kadomtsev Petviashvili Denklemi; Whitham Modülasyon Teorisi;

GİRİŞ

Şok dalgası, ortamda meydana gelen ani bir değişimi ifade eder ve genellikle yerel dalga hızından daha hızlı hareket eder. Eğer dispersiyon ve dissipasyon etkisi ihmal edilirse, sonlu bir zamanda kırılma meydana gelir. Fakat fiziksel olarak genellikle bu etkiler ihmal edilemediğinden, çoğu model zayıf dispersiyon ve zayıf dissipasyon etkisi içerir. Eğer dissipasyon dispersiyona göre daha baskınsa viskoz şok dalgası oluşur. Bu dalgalar genellikle akışkanlarda ve sıkışabilir gazlarda görülür. Fakat, dispersiyon etkisi daha baskınsa dispersif şok dalgası oluşur.

Disperşif şok dalgaları birçok atmosfer ve okyanus olaylarında önemli rol oynamaktadır. Bu alanların yanı sıra bu dalgalara optikte ve Bose-Einstein yoğunlaşmasında da rastlamak mümkündür. Dispersif şok dalgası, fizik ve uygulamalı matematik literatüründe farklı isimlerle adlandırılmaktadır. Örneğin, su dalgalarında undular bore, plazma fiziğinde çarpışmasız şok dalgası (collisionless shock wave) gibi isimlerle de anılır. Günlük hayatta uygulama sahasının geniş olmasından, özellikle son 50 yıldır dispersif şok dalgalarıyla ilgili çalışmalara önem verildiği görülmektedir [1,2,3,4,5]. Whitham’ın öncülüğünde teorik çalışmalar başlamıştır [6]. Dispersif şok dalgaları için evrensel bir model oluşturan KdV denklemi başta olmak üzere Whitham ortalama yöntemi farklı denklemlere de uygulanmıştır. Daha sonra sistemler için de Whitham sistemi türetilmiştir. Orijinal metodun yanı sıra Lagrangian metodu, ters saçılım (Inverse Scattering) yöntemi, asimptotik analiz gibi analitik yöntemler kullanılmıştır [1,2,7].

Dispersif şok dalgalarını modelleyen denklemlerin modülasyon denklemleri türetilmeye çalışılmış ve bu denklemler aracılığıyla dalga sayısı, genlik, yükseklik gibi kavramlar hakkında bilgi sahibi olunmuştur. Analitik çalışmalarla birlikte nümerik çalışmalar da hız kazanmıştır. Son yıllara kadar matematiksel araçların yetersizliğinden Whitham modülasyon teorisi (1+1) boyutlu nonlineer kısmi türevli denklemler için ortaya konulmuştur. Özellikle son yıllarda Ablowitz öncülüğünde Whitham teorisinin yüksek boyutlu denklemlere uygulandığı görülmektedir. 2016 yılında yapılan çalışmada, (2+1) boyutlu Kadomtsev-Petviasvili (KP) denklemi ve Benjamin-Ono denklemleri uygulanan bir dönüşümle, sırasıyla (1+1) boyutlu olan silindirik KdV (cKdV) ve silindirik Benjamin-Ono (cBO) denklemine indirgenmiştir [2]. İndirgenen bu yeni denkleme çoklu ölçekler metodu uygulanmış ve Whitham sistemleri türetilmiştir. Yapılan nümerik çalışmayla sonuçların uyumluluğu gösterilmiştir. Daha sonra, [2]’deki yöntem kullanılarak iki boyutlu NLS denkleminin indirgenmiş hali olan radyal Schrödinger denklemi için de dispersif şok dalga çözümleri inşa edilmiştir [8]. Bu çalışmalara ek olarak, [5]’de KP-Gardner denklemi ele alınmıştır.

Bizim çalışmamızda ise (3+1) boyutlu (focusing) modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP) denklemi incelenecektir. İlk olarak, (3+1) boyutlu mKP denklemi paraboloid cephe tipi başlangıç koşulu altında, (1+1) boyutlu küresel modifiye Korteweg-de Vries (smKdV) denklemine indirgenecektir. Daha sonra, smKdV denkleminin Whitham modülasyon teorisi kullanılarak dispersif şok dalga yayılımını ifade etmek için Whitham modülasyon denklemleri türetilecektir. Elde edilen modülasyon denklemleri kuazilineer denklem sistemi oluşturmaktadır ve sistemin analitik çözümünü bulmak mümkün olmamaktadır. Bu nedenle sayısal çözücü kullanılacaktır. Bu sistemin sayısal çözümleri kullanılarak smKdV denklemine

ait dispersif şok dalga çözümleri elde edilecek ve doğrudan smKdV denkleminin sayısal çözümleriyle karşılaştırılarak yöntemin uygunluğu gösterilecektir.

(3+1) BOYUTLU MODİFİYE KADOMTSEV-PETVIASHVILI DENKLEMİNİN İNDİRGENMESİ

Bu çalışmada, (3+1) boyutlu nonlineer kısmi türevli bir denklem olan Modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP) denklemi ele alınmıştır.

(3+1) boyutlu mKP denklemi,

$$\left(u_t + 6u^2 u_x + \varepsilon^2 u_{xxx}\right)_x + \lambda(u_{yy} + u_{zz}) = 0 \tag{1}$$

dir. Burada, $u = u(x,y,t)$ şeklinde bir fonksiyon, $\lambda = \pm 1$ ve $0 < \varepsilon << 1$ zayıf dispersiyon etkisini belirleyen sabittir. (1) denkleminin (2+1) boyutlu hali antiferromanyetik malzemelerdeki ses dalgalarında görülmektedir [9].

(1) denklemi için aşağıda verilen Riemann tipi başlangıç koşulu ele alınacaktır:

$$u(\eta,0) = \begin{cases} b \ , \ \eta < 0 \\ a \ , \ \eta \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Burada, $\eta = x + \frac{1}{2}P(y,z,0)$ ve özel olarak,

$$P(y,z,0) = \alpha(y^2 + z^2) \tag{3}$$

(α reel sabit) olmak üzere paraboloid tipte bir cephe seçilecektir. (1) denkleminin (3) ile verilen paraboloid tipi cephe boyunca indirgemesinin yapılabilmesi için aşağıdaki çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$u = f(x + P(y,z,t)/2, t, y) \tag{4}$$

Bu çözüm formu, (1) denkleminde yerine yazıldığında ve (4) ile verilen u fonksiyonunun sonsuzda $\eta \to -\infty$ iken $u \to bR(t)$ ve $\eta \to \infty$ iken $u \to aR(t)$ sınır koşulunu sağladığı varsayıldığında P ve f fonksiyonları için aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\frac{1}{2}\left(P_t + \frac{\lambda}{2}\left(\left(P_y\right)^2 + \left(P_z\right)^2\right)\right) = 0 \tag{5.a}$$

ve

$$f_t + 6f^2 f_\eta + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} + \frac{\lambda}{2}(P_{yy} + P_{zz}) f = 0 \quad . \tag{5.b}$$

Burada, $\eta = x + \frac{P(y,z,t)}{2}$ dir. (5.a) ile verilen denklem dalga cephesinin şeklini verir ve bu denklemin (3) başlangıç koşulu altındaki çözümü karakteristikler metodu yardımıyla

$$P(y,z,t)=\frac{\alpha(y^2+z^2)}{1+2\alpha\lambda t} \tag{6}$$

olarak bulunur. Elde edilen $P(y,z,t)$, (5.b) de yerine yazılırsa (1+1) boyutlu küresel modifiye KdV (smKdV) denklemi olarak adlandıracağımız denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$f_t+6f^2f_\eta+\frac{2\lambda\alpha}{1+2\lambda\alpha t}f+\varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta}=0\,. \tag{7}$$

Bu çalışmada sadece $\lambda=1$ durumu için inceleme yapılacaktır. Ayrıca, $\lambda=-1$ durumu için $\alpha\to-\alpha$ dönüşümü yapılarak da sonuçlar elde edilebilir. $\lambda=1$ için (7) deklemi,

$$f_t+6f^2f_\eta+\varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta}+\frac{1}{t+t_0}f=0 \tag{8}$$

olur. Burada, $t_0=\dfrac{1}{2\alpha}$ dır.

Klasik mKdV denkleminde (α=0) görülen dispersif şok dalga yayılımı [12]'de incelenmiştir. Bir sonraki bölümde is smKdV denklemi için dispersif şok dalga çözümleri inşa edilecektir.

smKdV DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ

Bu bölümde ise, (2) tipindeki başlangıç koşulu altında (8) (smKdV) denkleminin dispersif şok dalga çözümleri bulunacaktır. (1+1) boyutlu (8) ile verilen smKdV denklemine ait Whitham modülasyon denklemlerini türetmek için bir asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu [10] kullanılacaktır. Bu yöntemin tercih edilmesinin nedeni, Whitham'ın orijinal teorisinde [6] gerekli olan ilgili denklemlere ait olan korunum yasalarının smKdV denklemi için bilinmemesidir. Çoklu ölçekler metodunu uygulayabilmek amacıyla, ilk olarak $f=f(\theta,\eta,t;\varepsilon)$ olarak kabul edilecektir ve θ hızlı değişkeni temsil etmek üzere aşağıdaki tanımlamalar yapılmaktadır:

$$\theta_\eta=\frac{k(\eta,t)}{\varepsilon}\,,\qquad \theta_t=\frac{-\omega(\eta,t)}{\varepsilon}=\frac{-kV}{\varepsilon}\,. \tag{9}$$

Burada, k dalga sayısını, ω açısal hızı ve V faz hızını göstermektedir. (9) ile verilen tanımlar aracılığıyla $(\theta_\eta)_t=(\theta_t)_\eta$ uyumluluk koşulu kullanılırsa,

$$k_t+(kV)_\eta=0 \tag{10}$$

olur. Ayrıca (10) denklemi "dalgaların korunumu" (conservation of waves) olarak da adlandırılmaktadır. Böylelikle ilk korunum yasası elde edilmiş olur.

Diğer korunum yasalarını elde etmek için ise asimptotik analiz yapılacaktır. Hızlı ve yavaş değişkenler arasında aşağıdaki bağıntılar (8) denkleminde kullanılır ve f ε'nun kuvvetlerine göre açılır,

$$f(\theta,\eta,t) = f_0(\theta,\eta,t) + \varepsilon f_1(\theta,\eta,t) + \varepsilon^2 f_2(\theta,\eta,t) + \ldots \tag{11}$$

ve ε'nun aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirek ε mertebesinde problemler hiyerarjisi elde edilir. Buna göre, ilk iki pertürbasyon problem sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): \; -\omega\frac{\partial f_0}{\partial\theta} + 6 f_0{}^2 k\frac{\partial f_0}{\partial\theta} + k^3\frac{\partial^3 f_0}{\partial\theta^3} = 0\,, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} O(1): \; & -\omega\frac{\partial f_1}{\partial\theta} + 6k\frac{\partial(f_0{}^2 f_1)}{\partial\theta} + k^3\frac{\partial^3 f_1}{\partial\theta^3} \\ & = -\left(\frac{\partial f_0}{\partial t} + 6 f_0{}^2\frac{\partial f_0}{\partial\eta} + 3k^2\frac{\partial^3 f_0}{\partial\eta\theta^2} + 3kk_\eta\frac{\partial^2 f_0}{\partial\theta^2} + \frac{f_0}{t+t_0}\right) = G\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Bu çalışmada, ilk iki mertebe problemin incelenmesi yeterli olacaktır. İlk olarak (12) ile verilen ilk mertebe problemin çözümü bulunacaktır. Dikkat edilirse, ilk mertebe problem mKdV denklemi ile aynı yapıdadır. (12) denkleminin çözümü,

$$f_0(\theta,\eta,t) = -(c+d+e) + \frac{(2c+d+e)(c+2d+e)}{(c+2d+e)+(c-d)sn^2\left(\frac{\sqrt{(c-e)(c+2d+e)}}{k}(\theta-\theta_0),m\right)} \tag{14}$$

olarak verilir. (14)'te yer alan c,d ve e, (12) denkleminin çözümünü eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için gerekli cebirsel işlemlerde ortaya çıkan ve reel olan terimleri göstermektedir. Burada, $c > d > e$ eşitsizliği geçerlidir ve θ_0 integrasyon sabitidir. Ayrıca, $sn(z,m)$ Jacobi eliptik sinüs fonksiyonudur. k dalga sayısını ve m modülü göstermektedir.

Whitham sistemini daha sade hale getirmek aşağıdaki tanımlamalar yapılır:

$$r_1 \equiv r_1(\eta,t) = \frac{d+e}{2}\,, r_2 \equiv r_2(\eta,t) = \frac{c+e}{2}\,,\; r_3 \equiv r_3(\eta,t) = \frac{c+d}{2}\,. \tag{15}$$

(15) denkleminde yer alan r_1, r_2, r_3 Riemann tipi değişkenler (invaryantları) olarak adlandırılmaktadır ve $r_3 > r_2 > r_1$ dir. Birinci mertebe problemin çözümü (15) ile verilen Riemann tipi değişkenler cinsinden yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f_0(\theta,\eta,t) = (r_3 - r_2 + r_1) + \frac{2(r_2-r_1)(r_3+r_1)\{1 - sn^2[2(\theta-\theta_0)K,m]\}}{(r_3+r_1) + (r_2-r_1)sn^2[2(\theta-\theta_0)K,m]} \tag{16}$$

olur. Burada kısalık olması amacıyla çalışmanın devamında $r_1(\eta,t),\ r_2(\eta,t),\ r_3(\eta,t)$ yerine sırasıyla r_1, r_2, r_3 yazılacaktır. (16) denklemindeki $K \equiv K(m(\eta,t))$ birinci tip tam eliptik integraldir ve aşağıdaki bağıntılar geçerlidir [11]:

$$m^2 = \frac{{r_2}^2 - {r_1}^2}{{r_3}^2 - {r_1}^2}\ ,\ k^2 = \frac{{r_3}^2 - {r_1}^2}{4K^2},\ V = 2({r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_3}^2)\,. \tag{17}$$

$sn^2(z,m)$ eliptik fonksiyonu $2K(m)$ periyotludur ve f_0 fonksiyonunun periyodu 1 dir. Burada, f_0'ın açık ifadesinde ortaya çıkan r_1, r_2 ve r_3'ü tam olarak belirlemek için bir üst mertebe probleme ihtiyaç vardır. Bu sebeple f_0 bir üst mertebe problem olan (13)'te yerine yazıldığında denklemin sağ yanında θ'ya bağlı bir sekülerlik oluştuğu görülmektedir (yani terimler θ ya göre fazla büyümektedir). Oluşan bu sekülerliği önlemek için eş (adjoint) problemi tanımlanır ve buradan iki tane sekürlerlik koşulu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_0^1 G\, d\theta = 0,\ \int_0^1 f_0\, G\, d\theta = 0 \quad . \tag{18}$$

Buradan elde edilen sekülerlik koşulları ve (10) dalgaların korunumu yasasıyla birlikte r_1, r_2, r_3 Riemann tipi fonksiyonları için aşağıdaki birinci mertebeden kuazilineer denklem sistemi elde edilir:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + V_i(r_1, r_2, r_3)\frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{1}{2t+t_0} h_i = 0 \tag{19}$$

Böylece, smKdV denklemi için Whitham modülasyon denklemleri Riemann değişkenleri (invaryantları) cinsinden köşegen hale en yakın forma indirgenmiştir.

Eğer (19) denkleminde silindirik terim olmaz ise, yani *h=0* olduğunda smKdV için elde edilen Whitham sistemi mKdV için Driscoll ve Oneil tarafından bulunan Whitham sistemine indirgenir [12].

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde ise**,** (3+1) boyutlu mKP denkleminden özel bir dönüşüm yardımıyla indirgenen (1+1) boyutlu smKdV denklemi ve klasik mKdV denklemlerine ait Whitham modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri ile mKdV ve smKdV denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmaktadır. Bulunan sonuçlar karşılaştırılarak yöntemin uygunluğu da gösterilecektir.

mKdV ve smKdV Denklemlerinin Asimptotik Çözümü

Klasik mKdV denklemine ait Whitham sistemi için Riemann değişkenlerinin sağlaması gereken sınır koşulları başlangıç koşullarının sınırdaki değerleri sabitlenmiştir. Fakat, asıl problemimiz olan smKdV denkleminin sağlaması gereken sınır koşulları *R(t)* fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği için smKdV denklemine ait Whitham sistemi için sınır koşulları da zamana bağlı olarak belirlenmelidir. smKdV denkleminin Whitham sistemi için sol sınır ve sağ sınır uç için, (19) denkleminde η uzaysal değişkeni ihmal edilerek elde edilen diferansiyel denklem sistemi çözülerek belirlenecektir. Bunun için öncelikle, smKdV denkleminin (2)

basamak tipi başlangıç koşulu $\boldsymbol{r_1, r_2}$ ve $\boldsymbol{r_3}$ Riemann tipi değişkenleri cinsinden belirlenmelidir. Buradan, Whitham sistemi için başlangıç koşulu aşağıdaki gibi belirlenir:

$$r_1(\eta,0)=a,\quad r_2(\eta,0)=\begin{cases} a, & \eta \le 0 \\ b & \eta > 0 \end{cases},\quad r_3(\eta,0)=b \qquad (20)$$

(20) başlangıç koşullarıyla birlikte, sınır koşulları η tanım kümesinin sol ve sağ uçlarında sırasıyla,

$$r_1(\eta,t)=r_2(\eta,t)=\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(t+t_0)^2+b^2t_0^2}{(t+t_0)^2}},\quad r_3(\eta,t)=b\frac{t_0}{t+t_0}, \qquad (21)$$

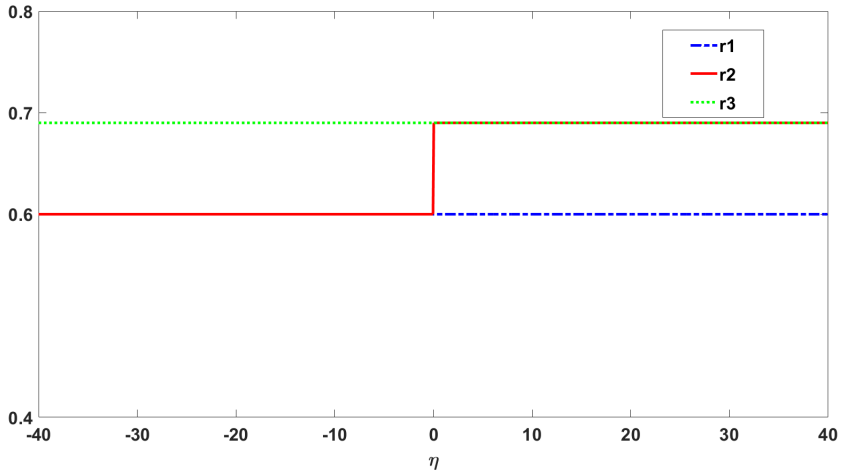
$$r_1(\eta,t)=a\frac{t_0}{t+t_0},\quad r_2(\eta,t)=r_3(\eta,t)=b\left(\frac{t_0}{t+t_0}\right)^2 \qquad (22)$$

olarak bulunur. (21) ile verilen $r_1(\eta,t)$ ve $r_2(\eta,t)$ göz önüne alındığında, reel değerli çözümler elde etmek için

$$(a^2-b^2)(t+t_0)^2+b^2t_0^2\ge 0 \qquad (23)$$

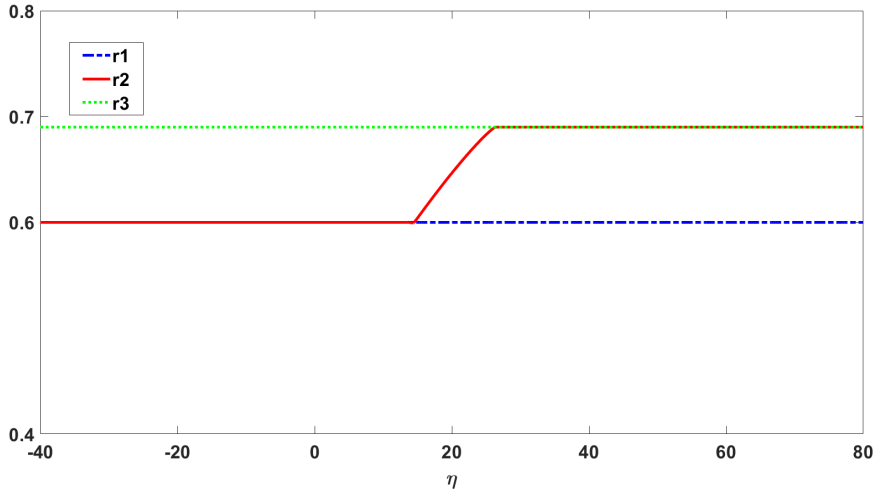
eşitsizliğinin sağlanması gerektiği görülmektedir. Buradan, $t_0=10$ alınarak, $t=10$ için (23)'ü sağlayan Whitham sistemi için aşağıdaki başlangıç koşulu ele alınmıştır :

$$r_1(\eta,0)=0.6,\quad r_2(\eta,0)=\begin{cases} 0, & \eta \le 0 \\ 0.69, & \eta > 0 \end{cases},\quad r_3(\eta,0)=0.69\ . \qquad (24)$$

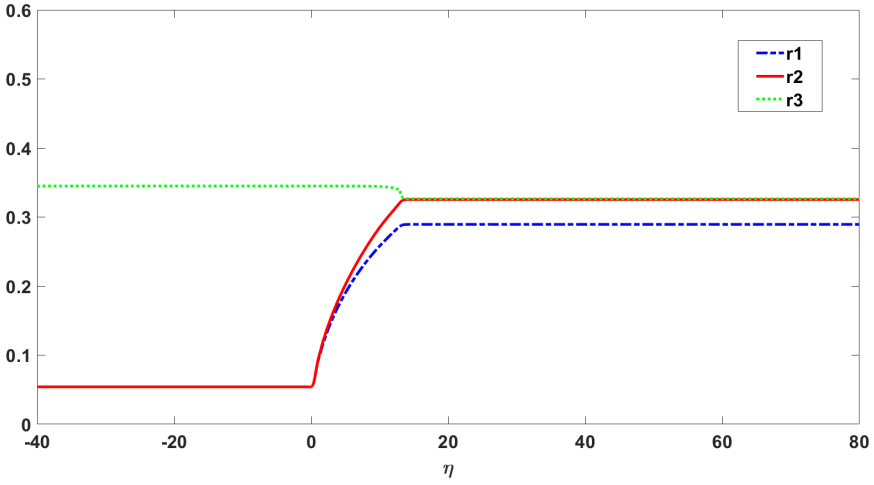


Şekil 1. Riemann tipi değişkenler için (24) başlangıç koşulları.

(19) Whitham sisteminin, (24) başlangıç koşulları ve (21)-(22) sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerinin bulunmasında, Shampine [13] tarafından birinci mertebe hiperbolik kısmi türevli denklemler için geliştirilmiş MATLAB tabanlı sayısal çözücü kullanılmıştır. Hesaplarda iki basamaklı Lax-Wendrof yönteminin farklı bir türü kullanılmıştır. Sayısal çözümde η için [-160,160] tanım kümesinde $N = 2^{12}$ nokta kullanılmıştır. Çözümlerin grafikleri t=10'da klasik mKdV ve smKdV için Şekil 2'de verilmiştir.



(a)



(b)

Şekil 2. (a) mKdV denkleminin Whitham sisteminin çözümü ve (b) smKdV denkleminin Whitham sisteminin t=10'daki çözümü .

Şekil 2'den de görüldüğü gibi $r_1(\eta,t)$ ve $r_3(\eta,t)$ zamanla birbirine yaklaşmaktadır.

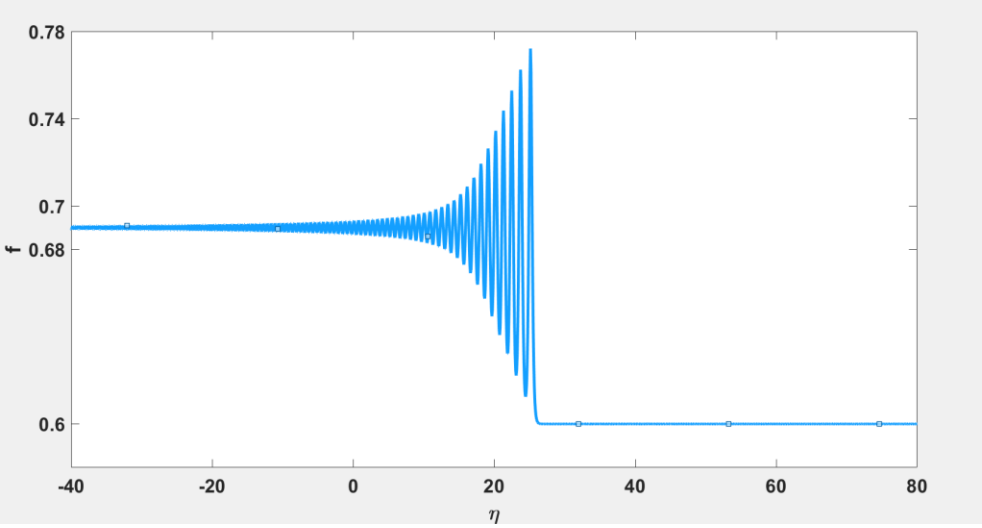
Bu aşamadan sonra, elde edilen bu sonuçların uyumluluğunu göstermek için (16) ile verilen ilk mertebe problemin çözümü ve (9) hızlı değişken olan $\boldsymbol{\theta}$ kullanılarak mKdV ve smKdV denklemlerinin dispersif şok dalga çözümleri Şekil 5 ve Şekil 6'da çizdirilmiştir.

mKdV ve smKdV Denklemlerinin Doğrudan Sayısal Çözümü

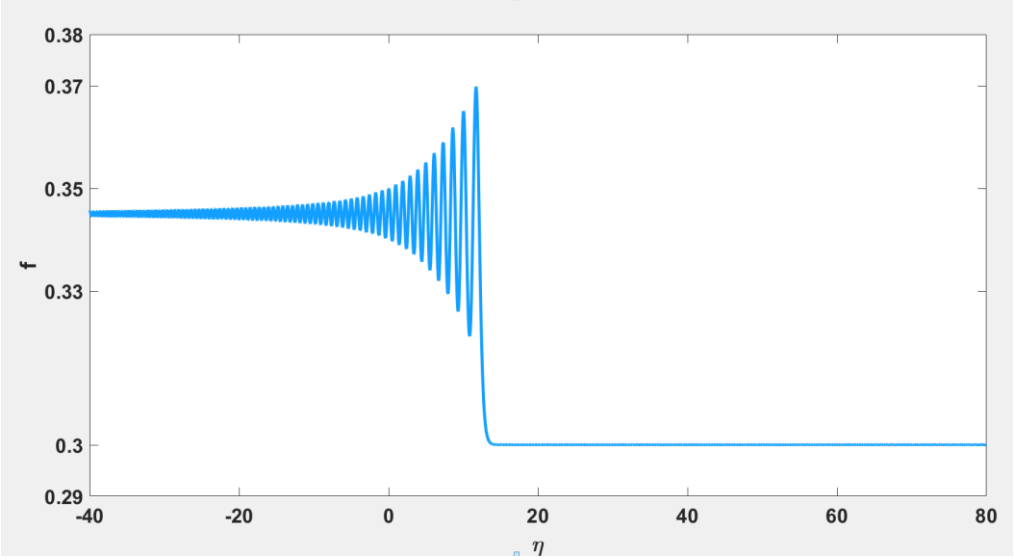
Klasik mKdV ve smKdV denklemlerinin (2) başlangıç koşulu altında ve ilgili sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerini elde etmek için ETDRK4 (Exponential Time Differencing Fourth Order Runge-Kutta) [14-15] yöntemi kullanılacaktır. İlk olarak, kullanılacak doğrudan sayısal yöntem için sınır koşulları sabit olmalıdır. Klasik problemde, yani mKdV denkleminin sınır koşulları sabittir. Ancak smKdV denkleminin sınır koşulları $\boldsymbol{t}$'nin bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, smKdV denklemi uygun bir teknikle Fourier uzayında dönüştürülür ve elde edilen adi diferansiyel denklem ETDRK4 yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Yöntemin ayrıntıları için [2]'ye bakılabilir.

ETDRK4 yöntemi için Fourier modu $\boldsymbol{N = 2^{12}}$, alan büyüklüğü (domain size) $\boldsymbol{L = 40}$, adım aralığı (time step) $\boldsymbol{10^{-4}}$ olarak alınarak gerekli sayısal hesaplar yapılmıştır. Ayrıca, $\boldsymbol{t_0 = 10, \varepsilon^2 = 10^{-3}}$ ve $\boldsymbol{\tilde{K} = 10}$ olarak seçilmiştir.

Buradan, mKdV $(\boldsymbol{\alpha = 0})$ ve smKdV denklemi için yukarıdaki veriler kullanılarak, aşağıdaki dispersif şok dalga yayılımları sırasıyla mKdV ve smKdV denklemi için elde edilir:



Şekil 3. mKdV denkleminin (2) başlangıç koşulu için t=10'daki sayısal çözümü .



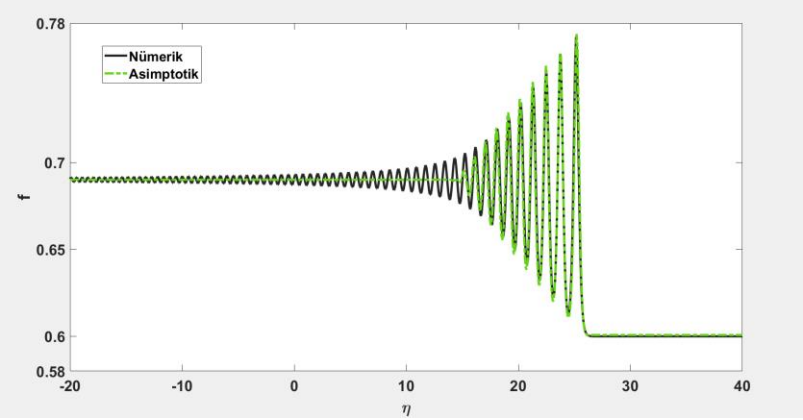
Şekil 4. smKdV denkleminin (2) başlangıç koşulu için t=10'daki sayısal çözümü .

Hızların pozitif olması, dispersif şok dalgasının sağa doğru yayıldığını göstermektedir. Bu sonuçların sayısal sonuçlarla da uyumlu olduğu görülmektedir (Şekil 3).

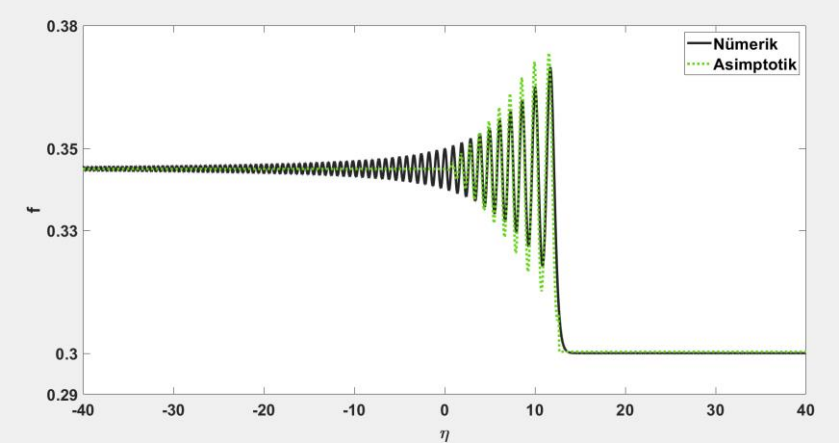
Ayrıca, Şekil 3'ten mKdV denkleminde, $m \to 0$ iken arka kenarın genliği 0.6'da sabittir, fakat $m \to 1$ iken ön kenarın genliği seviye farkının iki katıdır (2(0.69-0.6)=0.18).

Şekil 4'e göre smKdV denklemi için ise durum farklıdır. Küresel terimin katkısı Şekil 4'ten görülmektedir. Burada, arka kenarın genliği zamanla azalmaktadır. Aynı şekilde ön kenarın genliği de azalmaktadır.

Daha sonra, türetilen modülasyon denklemlerinin (19) sayısal çözümlerinden elde edilen dispersif şok dalga çözümleriyle, mKdV ve smKdV denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin uyumluluğunun gösterilmesi amaçlanmıştır. mKdV ve smKdV denklemlerinin Whitham sistemlerinin çözümünü elde etmek için Şekil 2 ile verilen sonuçlar kullanılarak (16) ile verilen birinci mertebe problemin çözümü (f_0) ve hızlı değişken olan θ kullanılarak mKdV ve smKdV denklemlerinin t=10 daki dispersif şok dalga yayılımı çizdirilmiştir. Bulunan sonuç ile daha önceden doğrudan sayısal olarak çözülen mKdV ve smKdV denklemlerine ait çizimler (Şekil 3-4) Şekil 5 ve Şekil 6'da üst üste çizdirilmiştir.



Şekil 5. mKdV denklemi için (2) başlangıç koşulu için t=10'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.



Şekil 6. smKdV denklemi için (2) başlangıç koşulu için t=10'da doğrudan sayısal ve Whitham sistemleri üzerinden elde edilen asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Buradan, mKdV ve smKdV denklemlerinde görülen dispersif şok dalgalarının yapısıyla ilgili olarak leading edge genliğinin ve salınımların dalga boyunun asimptotik yaklaşım ve sayısal çözümle uyumlu olduğu görülür. Fakat, leading edge pozisyonunda ufak bir fark mevcuttur. Bu durum, (16) birinci mertebe problemin çözümünde yer alan $\boldsymbol{\theta_0}$'dan kaynaklanmaktadır. Aslında daha yüksek mertebeden asimptotik açılım yapılarak faz farkı için daha iyi sonuçlar elde edilebilir. Fakat bu inceleme bu çalışmanın dışındadır. Özel olarak, $\boldsymbol{\theta_0}$ leading hump ile trailing edge in ortalaması alınarak belirlendiğinde sayısal çözümle asimptotik çözümün uyumlu olduğu görülmektedir. Faz farkı $\boldsymbol{\theta_0}$, başlangıç değer problemlerinin özelliğinden dolayı sabit değildir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, (3+1) boyutlu modifiye Kadomtsev-Petviashvili (mKP) denkleminde görülen dispersif şok dalgalarının yayılması problemi ele alınmıştır. Burada, mKP denklemi için tek

basamaklı başlangıç koşulu ele alınmış ve şok dalgalarının paraboloid bir cephe boyunca ilerlediği varsayılmıştır. Denkleme değişken dönüşümü (similarity reduction metodu) uygulanarak orijinal mKP denklemi (1+1) boyutlu küresel modifiye Korteweg-de Vries (smKdV) denklemine indirgenmiştir. Önerdiğimiz çözüm formu sonucu elde edilen smKdV denkleminin, Whitham modülasyon denklemleri bir asimptotik bir pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Burada, Whitham sistemini uygun formda yazabilmek için Riemann değişkenleri tanımlanmıştır. Sonrasında (1+1) boyutlu mKdV ve smKdV denklemleri için nümerik çalışma yapılmıştır. mKdV denklemi için bulunan Whitham modülasyon denklemlerinin analitik çözümleri ve bu denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri karşılaştırılmıştır.

Dispersif şok dalgalarına ait yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum-minimum genlik büyüklükleri gibi bilgiler ilgili denklemlerin sayısal çözümlerinden elde edilememektedir, ama dispersif şok dalgalarını modelleyen denklemlere ait Whitham modülasyon denklem çözümleri ile bu bilgiler indirgenmiş denklemler için bulunmuştur.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmadaki birinci yazar TÜBİTAK 2228-B programı ile desteklenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] P. D. Miller, On the generation of dispersive shock waves, *Physica D* 333 (2016) 66-83.

[2] M. J. Ablowitz, A. Demirci, Y.-P. Ma, Dispersive shock waves in the Kadomtsev-Petviashvili and two dimensonal Benjamin Ono equation, Physica D 333 (2016) 84-98.

[3] G. A. El, M.A. Hoefer, Dispersive shock waves and modulation theory, *Physica D* 333 (2016) 11-65.

[4] M. J. Ablowitz, G. Biondini, Q. Wang, Whitham modulation theory for the Kadomtsev Petviashvili equation. *Proc. Roy. Soc. A* 473 (2017).

[5] Günay Aslanova, Semra Ahmetolan, Ali Demirci, Nonlinear Modulation of Periodic Waves in the Cylindrical Gardner Equation, *Phys. Rev. E* 102 (2020) 052215.

[6] G. B. Whitham, Non-linear dispersive waves, *Proc. Roy. Soc. London A.* 283 (1965) 238-261.

[7] Y. Matsuno, V. S. Shchesnovich, A. M. Kamchatnov, R. A. Kraenkel, Whitham method for the Benjamin-Ono-Burger and dispersive shocks, *Phys. Rev. E* 75 (2007) 01637.

[8] Ablowitz, M.J., Cole, J.T., Rumanov, I., "On The Whitham System For The Radial Schrödinger Equation", Studied in Applied Mathematics, 142(3) (2019), 269-313.

[9] S. Turitsyn, G. Falkovich. Stability of magneto-elastic solitons and self-focusing of sound in antiferromagnets, *J. Exp. Theor. Phys.* 62 (1985) 146–152.

[10] J.C. Luke, A perturbation method for nonlinear dispersive shock wave problems, 292 (1966) 403.

[11] P. F. Byrd, M. D. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists* (2 ed.), Springer–Verlag, 1971.

[12] C. Driscoll, T. O'Neil, Modulational instability of cnoidal wave solutions of the modified Korteweg–de Vries equation, *Journal of Mathematical Physics* 17(7) (1976) 1196.

[13] L.F. Shampine, Solving hyperbolic PDEs in MATLAB, *Appl. Numer. Anal. Comput. 2* (3) (2005) 346-358.

[14] S.M. Cox, P.C. Matthews Exponential time differencing for stiff systems, J. *Comput. Phys*. 176, (2002) 430–455.

[15] A.K. Kassam, L.N. Trefethen, Fourth-order time-stepping for stiff PDEs, *SIAM J Sci. Comput.* 26 (4) (2005) , 1214–1233.

KÖPÜK ÇEKİRDEK MALZEMESİNİN BOŞLUK ORANININ KOMPOZİT RÜZGAR TÜRBİN KANADININ YAPISAL DAVRANIŞINA ETKİSİNİN İNCELENMESİ

Onur Koçak[1], Yaren Özkan[1], İnci Pir[1] ve Mertol Tüfekci[2]
[1]Makina Fakültesi, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
[2]Makina Mühendisliği Bölümü, Imperial College London, Londra

ABSTRACT

In this study, the effects of the porosity of the core material on the structural behaviour of composite blades are investigated. A 23-meter long blade of a 3-bladed wind turbine with the NACA 4415 aerofoil is chosen due to its high efficiency. The angle of attack is picked as 10°. The wind turbine blade consists of two parts named the shell, that is made of carbon fibre-epoxy, and the beam or the core which is made of aluminium foam. First, the mechanical properties of aluminium foams are calculated using Mori-Tanaka homogenisation method. In order to observe how the structural behaviour of the blade is affected by the porosity of the aluminium beam material, the blade is analysed considering certain scenarios. Analyses are carried out based on the loading conditions, that the blade would be exposed to, during its life time. By investigating and comparing the analysis results, the effect of the core material on the blade is explored.

Keywords: Composite wind turbine blade, foam material, finite element method, static stress analysis, modal analysis.

ÖZET

Bu çalışmada, modern rüzgar türbinlerinde kullanılan kompozit rüzgar türbin kanatlarının çekirdek malzemesinin değişimiyle etkilenen yapısal davranışı incelenmiştir. NACA 4415 aerofoil ile 3 kanatlı bir rüzgar türbininin 23 metre uzunluğundaki kanadı, yüksek verimliliği nedeniyle seçilmiştir. Hücum açısı ise 10° olarak belirlenmiştir. Rüzgar türbin kanadı, kabuk ve kiriş/çekirdek olmak üzere iki parçadan oluşmaktadır. Kabuk için karbon elyaf takviyeli epoksi tercih edilirken kiriş geometrisi için alüminyum köpük tercih edilmiştir. İlk olarak alüminyum köpüklerin mekanik özellikleri Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemiyle hesaplanmıştır. Alüminyum malzemeden oluşan kirişin köpük malzemesindeki gözeneklilik değerinin değişimi ile kanadın yapısal davranışının nasıl etkilendiğinin gözlemlenmesi için kanat belirli senaryolar dahilinde analizlere tabi tutulmuştur. Analizler kanadın görevini gerçekleştirdiği süre boyunca maruz kalacağı yükleme durumları göz önünde bulundurularak gerçekleştirilmiştir. Analiz sonuçları incelenip karşılaştırılarak, çekirdek malzemesinin kanattaki etkisi incelenmiş ve çekirdek için en uygun gözeneklilik değeri belirlenmiştir.

Anahtar kelimeler: Kompozit rüzgar türbini kanadı, köpük malzeme, sonlu eleman yöntemi, statik gerilme analizi, modal analiz.

GİRİŞ

Enerji ihtiyacının karşılanması, insanlık tarihinde önemli bir rol almaktadır [1]. İnsanlar tarih boyunca, enerji ihtiyaçlarını farklı yöntemlerle karşılamak için yenilenebilir ve yenilenemez enerji kaynaklarına başvurmuşlardır [2]. Yenilenemez enerji kaynaklarının ürettiği zehirli gazlar, ozon tabakasına zarar vererek sera etkisi yaratmaktadır ve yenilenemez enerji kaynakları tükenme tehlikesiyle karşı karşıyadır. Yenilenebilir enerji tükenme tehlikesi yaşamamakta ve sürdürülebilirlik açısından büyük bir önem taşımaktadır. Rüzgar enerjisi, yenilenebilir enerji kaynakları arasında verimlilik ve kolay uygulanabilirlik açısından önemli bir konumdadır. Rüzgar enerjisi, tükenme riski taşımayan, çevreye ve insan yaşamına olumsuz etkisi çok daha az olan sürdürülebilir bir kaynaktır [3].

Rüzgar türbinleri, sürdürülebilir bir enerji kaynağı olan rüzgârın sahip olduğu kinetik enerjiden dönüştürülmüş bir mekanik enerji elde edilmesini ve elde edilen bu mekanik enerji sayesinde de elektrik enerjisi üretimini sağlamaktadır [4]. Rüzgardan elektrik enerjisi üretimindeki ilk adım, rüzgarın türbin kanatlarına çarpmasıyla başlamaktadır. Rüzgarın kanada çarpıp kanat yüzeyinde dağılmasıyla meydana gelen basınç farkı rüzgar kanatlarına dönme merkezine göre dairesel hareket yaptırır. Kanada çarpan rüzgarın sahip olduğu kinetik enerji, kanatların dönmesiyle dönüştürülmüş bir mekanik enerjiye çevrilir. Dairesel hareket rotora bağlı olan düşük hız miliyle dişli kutusuna iletilir. Dişli kutusunda dişliler ile devir artırılarak yüksek hız mili ile jeneratöre bağlanır. Jeneratörden elde edilen elektrik enerjisi elektriksel bileşenler yardımıyla şebekeye ulaşır. Böylece rüzgardan sağlanan kinetik enerji ile elektrik enerjisi elde edilmiş olur [5].

Yüksek verimli enerji eldesinin amaçlanmasıyla süregelen tasarım geliştirmeleri neticesinde 3 kanatlı modern rüzgar türbinlerinde en yüksek verimlere ulaşılmıştır [6]. Rüzgar türbin kanatları hem yüksek verim hem de yapısında meydana gelen zorlanmalar dikkate alındığında türbin sistemindeki en kritik parçalar arasındadır [7, 8]. Bu nedenle rüzgar türbinleri üretiminde kanat geometrik özelliklerine, kanadın topolojisine ve malzeme seçimine özen gösterilmesi gerekmektedir. Rüzgar türbini henüz tasarım fazındayken kanatların dinamik davranışlarını inceleyebilmek için sonlu eleman analizleri ve test süreçleri önemli rol oynamaktadır [9, 10]. Sonlu eleman analizlerindeki farklı modelleme teknikleriyle kanadın çalışma koşullarındaki davranışları incelenebilmekte ve kanat için uygun parametrelerin seçimi tasarımın erken fazlarındayken belirlenebilmektedir.

Rüzgar türbin kanatları, çalışma şartlarında maruz kaldığı yüklere kanat ömrü boyunca dayanmalı, minimum bakım maliyeti ile enerji eldesi sağlamalıdır. Kanat ağırlığı kanadın yorulma ömrünü azaltmayacak değerlerde olmalıdır. Bu nedenle kanat ömrünü doğrudan etkileyecek olan kanat malzemesi seçilirken malzemenin dayanımı, malzemenin yoğunluğu gibi parametreler göz önünde bulundurulmalıdır. Etkili tasarıma sahip bir kanat, belirtilen parametrelerin optimum düzeyde bir araya getirilmesiyle oluşturulur. Kanatların dayanımını artırmak için karbon elyaf takviyeli plastikler, cam takviyeli plastikler, sandviç yapılı kompozit malzemeler ve hafiflik sağlayabilecek balsa, polimer köpük, alüminyum ve alüminyum köpük gibi malzemeler tercih edilmektedir [11, 12].

Bu çalışmada, 3 kanatlı rüzgar türbini kanadının yapısal davranışının incelenmesi amacıyla NACA 4415 aerofil modeli seçilmiş ve kanat profilinin maksimum verime sahip olduğu 10°'lik hücum açısı belirlenmiştir. 23 metre uzunluğuna sahip kanat kabuk ve kiriş olmak üzere iki ayrı bileşenden oluşturulmuştur. Kanadın kabuk malzemesinde yüksek dayanım ve düşük yoğunluğa sahip karbon elyaf takviyeli epoksi, kiriş malzemesinde alüminyum tercih edilmiştir. Kanadın kiriş malzemesi olarak seçilen alüminyumun farklı gözeneklilik değerleri için mekanik özellikleri belirlenmiştir. Malzeme gözenekliliğindeki değişimin malzemenin rijitliğine olan etkisi incelenmiş, bu rijitlik değişimleri sonlu eleman analizlerine yansıtılmıştır. Kanadın kiriş

köpük malzemesindeki değişken rijitlik ve yoğunluk parametrelerinin kanadın yapısal dayanımı ve dinamik davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir.

RÜZGAR TÜRBİN KANADININ İNCELENMESİ

Bir rüzgar türbini kanadının yapısını oluşturan kiriş ve kabuk malzemeleri, karbon elyaf takviyeli epoksi ve alüminyum köpük olarak belirlenmiş ve kanat profili ve verimlilik göz önünde bulundurularak hücum açısı seçilmiştir [13]. Bu kabuller ve seçilen kanat yapısı ile kanadın mekanik davranışları analiz edilecektir. Kiriş/çekirdek malzemesinin kanadın mekanik davranışına etkisinin incelenmesi amacıyla alüminyum köpüklerin gözeneklilik hacim oranına bağlı olarak mekanik özelliklerini belirleyen analizler gerçekleştirilmiştir.

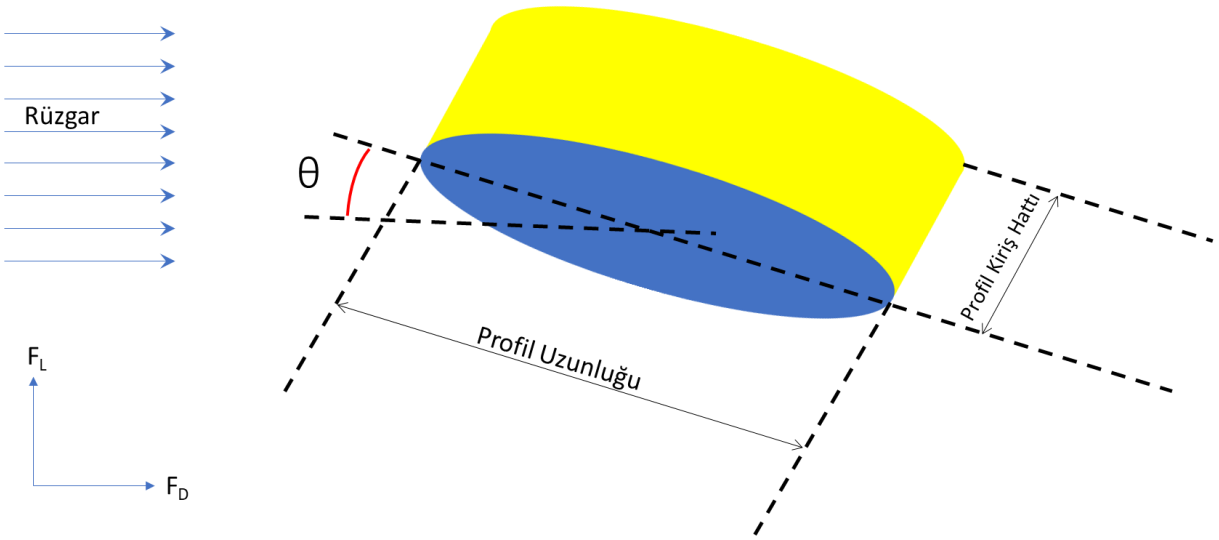
Kanat Profili

Kanat profili rüzgar akışını doğrudan etkilemektedir. Kanat profilinin geometrisi (aerofoil) değiştikçe kanadın aerodinamik özellikleri değişmektedir [14]. Profil geometrisi kanadın üst ve alt yüzeyinde basınç farkına neden olmaktadır. Kamburluk oranı yüksek değerlere sahip olan profillerde, meydana gelen basınç farkı nedeniyle kaldırma kuvveti daha yüksek olmaktadır [15]. Kaldırma kuvvetinin alacağı değer, profilin geometrisine bağlı olan kaldırma katsayısından etkilenmektedir ($\boldsymbol{C_L}$). Profilin yüksek verimde kullanılabilmesi için diğer önemli katsayı ise sürtünme katsayısıdır ($\boldsymbol{C_D}$). Sürtünme katsayısı kanat profiline bağlıdır ve verimlilik için küçük değerlerde olması istenmektedir [16].

Yüksek kaldırma kuvveti ve düşük sürüklenme kuvveti hedeflenen kanatlarda kaldırma katsayısının ($\boldsymbol{C_L}$) yüksek ve sürüklenme katsayısının ($\boldsymbol{C_D}$) düşük olduğu bir profil seçilmelidir. Bu bilgiler ışığında kanat profili olarak NACA 4415 profili öne çıkmaktadır.

Hücum Açısının Belirlenmesi

Hücum açısı profilin ucunun yatay ile yaptığı açıdır [17, 18]. Şekil 1'de görüldüğü üzere, açı profile gelen rüzgarın yayılımını ve dolayısıyla kanat yüzeyinde oluşacak basınç dağılımını etkilemektedir.



Şekil 1. Profil kesitine kuvvet gösterimi.

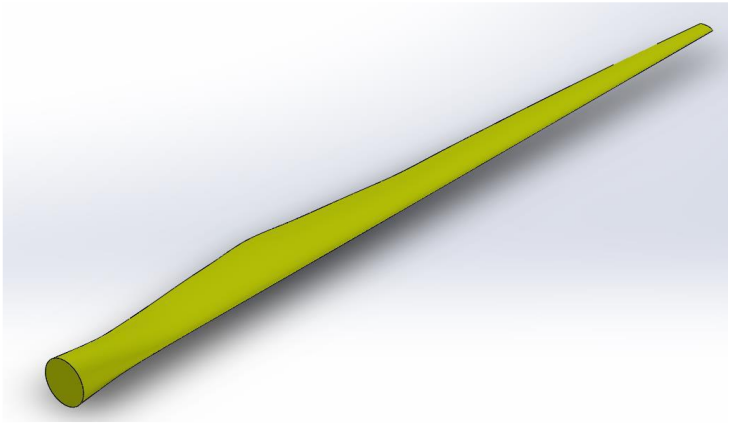
Yüksek verimli bir NACA 4415 profili için 10°'lik hücum açısı tercih edilmiştir [19]. Analizlerde, yer çekimi yükünün yönü bu açı göz önünde bulundurularak uygulanacaktır.

Kanadın Geometrisi ve Boyutları

Kanat profili NACA 4415 profil modeli olup, 10°'lik hücum açısı tercih edilmiştir. Rüzgar türbin kanadının uzunluğu 23 metredir ve Çizelge 1'de görüldüğü üzere kanat yapısı istasyonlara ayrılarak tarif edilmiştir. Kanadın açısal hızı ise 2 rad/s olarak belirlenmiştir [20]. Analizlerde dönmenin sebep olduğu yönler belirlenirken bu değerler göz önüne alınmıştır. Kanat geometrisi ticari bir çizim programı kullanılarak bilgisayar ortamında hazır hale getirilmiştir. Bu geometrinin son hali Şekil 2'de gösterilmiştir.

Çizelge 1. İstasyon ve boyut bilgileri.

İstasyon	İstasyonun Mesafesi [mm]	Profil Uzunluğu [mm]	r/R
1	0	1400	0
2	4250	1631.25	0.18
3	5500	1762.5	0.24
4	6750	1893.75	0.29
5	8000	2025	0.35
6	9250	1893.75	0.40
7	10500	1762.5	0.46
8	11750	1631.25	0.51
9	13000	1500	0.57
10	14250	1368.75	0.62
11	15500	1237.5	0.67
12	16750	1106.25	0.73
13	18000	975	0.78
14	19250	843.75	0.84
15	20500	712.5	0.89
16	21750	581.25	0.95
17	23000	450	1



Şekil 2. Rüzgar türbin kanadı

Kanat Malzemesi

Rüzgar türbinlerini daha verimli kılmak ve hafifletmek amacıyla malzeme teknikleri üzerine araştırmalar mevcuttur [21]. Bu araştırmalar malzeme seçimi esnasında öneli malzeme özelliklerinin nasıl geliştirilebileceğine ışık tutmaktadır. Tercih edilen malzeme, kanat görevini gerçekleştirirken kanadın maruz kalacağı yüklere karşı da dayanıklı olmalıdır. Hem büyük şekil değiştirmelere müsade etmeyerek aerodinamik açıdan belirlenmiş geometrilerden mümkün olduğunca sapılmasını engellemeli hem de yorulma açısından güvenli olmalıdır. Rüzgar türbin kanadı farklı çevresel koşullarla yüzleşeceği için seçilen malzemeler çevresel koşullara karşı da dayanıklı olmalıdır [22]. Kanada etki eden yüklerden birisi olan yerçekimi etkisini azaltmak ve titreşim karakteristiğini etkileyerek doğal frekansları ötelemek için ise hafif olmalıdır [23].

Hafiflik gözetilerek kanadın kabuk kısmında kullanılacak malzeme için yaygın olarak da kullanılan karbon elyaf takviyeli epoksi seçilmiştir [11]. Yine hafiflik ve yük taşıma kabiliyetleri göz önünde bulundurularak iç yapı için alüminyum ve alüminyum köpükleri kullanılması uygun görülmüştür.

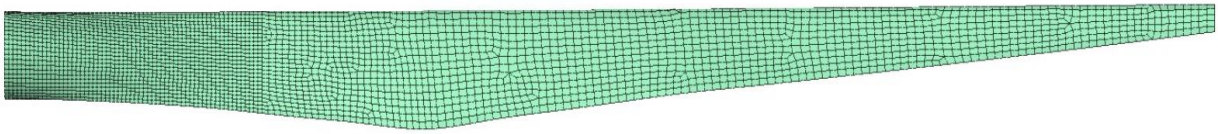
Tutarlı model oluşturulması ve analizlerde kolaylık sağlaması amacıyla homojen malzeme kabulü yapılmıştır. Homojen malzeme kabulü çerçevesinde karbon elyaf takviyeli epoksi için homojenleştirilmiş malzeme özellikleri kullanılmıştır [24]. Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemi malzemelerin elastik sabitlerinin belirlenmesinde kullanılan başlıca yöntemlerden biridir [25, 26]. Kirişte kullanılması plananlanan alüminyumun çeşitli gözeneklilik değerlerindeki elastik özellikleri ve yoğunluk değerleri Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemi kullanılarak belirlenmiştir.

KANADIN MEKANİK ANALİZİ

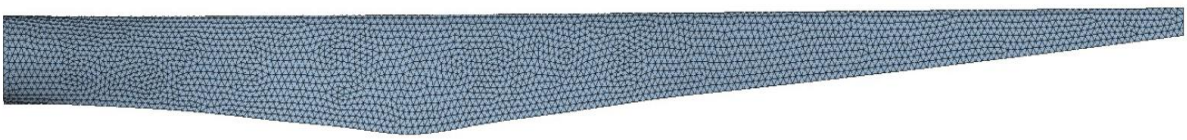
Sonlu eleman yöntemi ile çekirdek malzemesinin gözeneklilik oranının değişiminin ve kanadın konumunun kanadın mekanik davranışına etkisini inceleme amacı ile modeller kurulmuştur ve oluşan maksimum von Mises gerilmelerinin, yer değiştirmelerin ve doğal frekansların değişimi gözlemlenmiştir.

Sonlu Elemanlar Modelinin Oluşturulması

Kiriş ve kabuk olarak iki farklı parçada ele alınan rüzgar türbin kanadı sonlu elemanlar programında iki farklı geometri olarak oluşturulmuştur. Modelde kanadın uzunluğunun kanat kalınlığına oranı göz önünde bulundurulmuş ve bu doğrultuda kabuk (shell) olarak modellenmesi uygun görülmüştür. Kabuk modelinde S8R tipi, 8 düğüm noktasına sahip, ikinci mertebe dörtgen elemanlar kullanılmıştır. Kiriş bileşeni ise C3D10M tipi, ikinci mertebeden tetrahedral elemanlar kullanılarak modellenmiştir. Bu iki geometri temas yüzeyinde birbirlerine rijit temas ile bağlanmıştır.



Şekil 3. S8R tipi ikinci mertebe dörtgen (quad) elemanlardan oluşan kabuk sonlu eleman modeli.

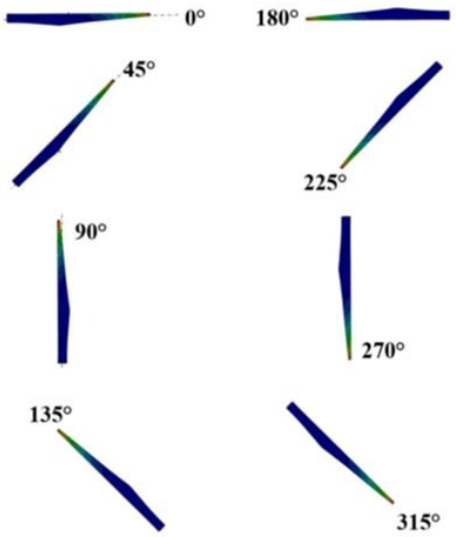


Şekil 4. C3D10M tipi ikinci mertebe tetrahedral elemanlardan oluşan kiriş sonlu eleman modeli.

Analiz Yöntemi

Rüzgar türbin kanatları kullanıldıkları süre boyunca rüzgarın, dönmenin ve yerçekiminin neden olduğu yüklere maruz kalmaktadır. Kiriş malzemesi; farklı gözeneklilik değerlerinde ve rüzgar kanadının 360°'lik turunu tamamlayacak şekilde farklı konumlarda ele alınmıştır. Kanat etrafında hava akışının neden olduğu basınç kuvvetleri, yer çekiminin ve dönmenin neden olduğu kütle kuvvetleri kanada etkitilmiştir. Bu yükler, kanadın değişen konumlarında farklı büyüklüklerde gerilmelerin, şekil değiştirmelerin ve farklı doğal frekans değerlerinin ortaya

çıkmasına neden olacaktır [27]. Rüzgar türbin kanadının analizler boyunca ele alınan konumları Şekil 5'te verilmiştir.



Şekil 5. Analizler boyunca incelenecek ve karşılaştırılacak olan 8 ayrı konum ile kanat üzerindeki basınç dağılımının gösterilmesi.

SAYISAL SONUÇLAR

Alüminyum Köpüğün Mekanik Özellikleri

Kiriş geometrisinde kullanmak için hafiflik ve dayanım özellikleri göz önünde bulundurularak seçilen alüminyum malzemesini Mori-Tanaka yöntemiyle homojenleştirilmiş ve mekanik özellikleri tespit edilmiştir. Çizelge 2'de çekirdek yapısı için homojenleştirme işlemi yapılmış olan alüminyum malzemenin gözeneklilik değerlerine bağlı mekanik özellikleri tablo olarak verilmiştir.

Çizelge 2. Homojenizasyon sonuçları.

Gözeneklilik Oranı [%]	Yoğunluk $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	Elastisite Modülü [GPa]	Kanat Kiriş Ağırlığı [kg]
10	2430	57.3	17602.2
20	2160	46.7	15646.4
30	1890	37.7	13690.6
40	1620	30.0	11734.8
50	1350	23.3	9779
60	1080	17.5	7823.2
70	810	12.4	5867.4

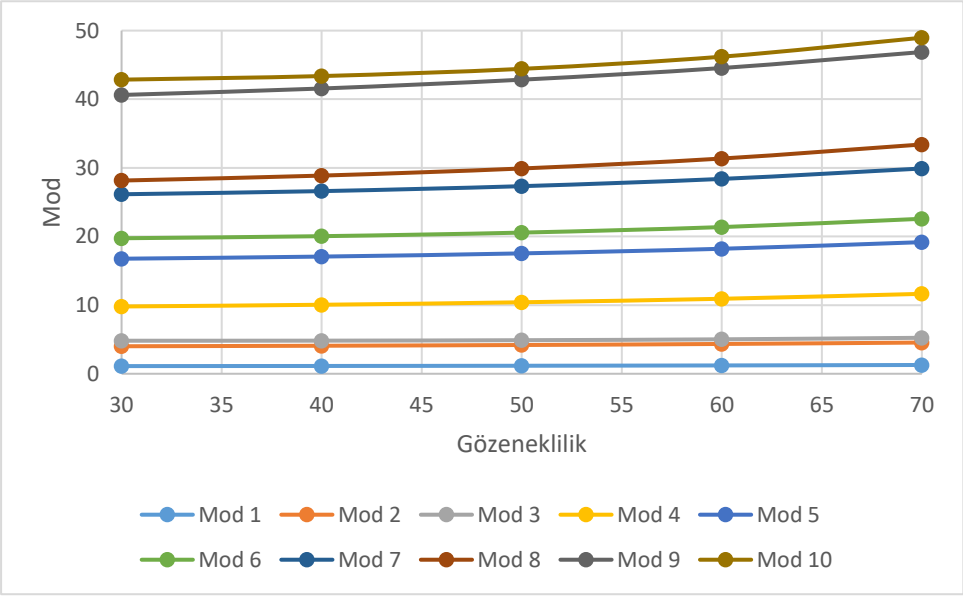
Çizelge 2'de görüldüğü üzere alüminyum malzemesinin gözeneklilik oranı artıkça yoğunluğu, elastisite modülü ve kiriş ağırlığı azalmaktadır. Ağırlığın azalması merkezkaç kuvvetinin de azalmasına neden olacaktır. Elastisiste modülünün azalması ise daha yüksek yer değiştirme değerleri görülmesine neden olacağı öngörülmektedir.

Rüzgar türbin kanadının, kabuk için karbon elyaf takviyeli epoksi ve kiriş geometrisi için tam alüminyum köpük tercih edilerek oluşturulmuştur. Bu doğrultuda oluşturulmuş, Şekil 2'teki kanadın parametreleri ise Çizelge 3'te gösterilmiştir.

Çizelge 3. Kanat parametreleri.

Kanat Parametreleri	
Aerofoil Modeli	NACA 4415
Kanat Uzunluğu[m]	23
En Uzun Kesit [mm]	1893
Kanat Açısal Hızı [rad/s]	2
Kanat Uç Hızı [m/s]	46
Kanat İç Yapısının Ağırlığı [kg] (Tam Dolu)	19558
Kanat İç Yapısının Ağırlığı [kg] (Gözenek Oranı: %30)	13690.6
Kanat İç Yapısının Ağırlığı [kg] (Gözenek Oranı: %40)	11734.8
Kanat İç Yapısının Ağırlığı [kg] (Gözenek Oranı: %50)	9779
Kanat İç Yapısının Ağırlığı [kg] (Gözenek Oranı: %60)	7823.2
Kanat İç Yapısının Ağırlığı [kg] (Gözenek Oranı: %70)	5867.4
Kanat Kabuk Ağırlı [kg] (20 mm)	1917

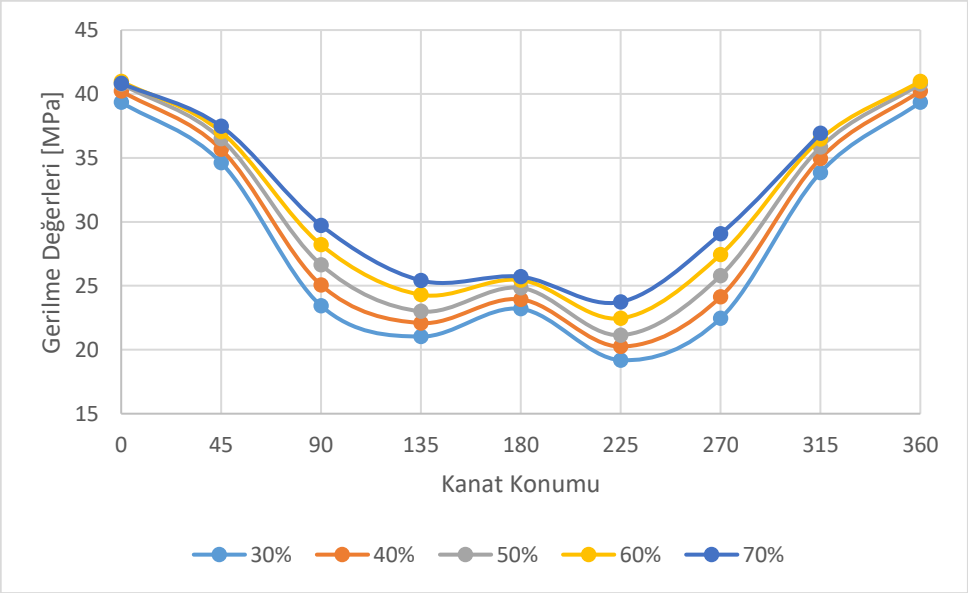
Rüzgar türbin kanadı, malzemenin farklı gözeneklilik değerleri için ve kanadın çalışması esnasında bulunacağı konumlarda oluşacak yükler doğrultusunda gerilme analizlerine tabi tutulmuştur. Rüzgar türbin kanadının yüksüz durumdada gözeneklilik oranı değiştirilmiş ve doğal frekans değerleri incelenmiştir. Şekil 6'da görüldüğü üzere ilk 10 mod şekli için gözeneklilik oranının artmasının doğal frekans değerini artırdığı görülmektedir. Bunun sebebi olarak da, kanadın kütle ataletinin azalması karşısında rijitliğinin daha düşük mertebelerde azalması görülmektedir. Kanadın kabuğunun da ciddi bir yük taşıma kapasitesi olduğu göz önünde bulundurulursa, çekirdek malzemesinin yük taşıma kapasitesinin tek başına azalmasının, kanadın doğal frekanslarını düşürmediği anlaşılmaktadır. Aksine, kanat kütlesini baskın biçimde çekirdeğin etkilediği düşünülürse, çekirdek malzemesinin hafiflemesinin kanadın doğal frekanslarının ötelenmesine katkı sağladığı anlaşılmaktadır.



Şekil 6. Gözeneklilik değerinin doğal frekansa etkisi

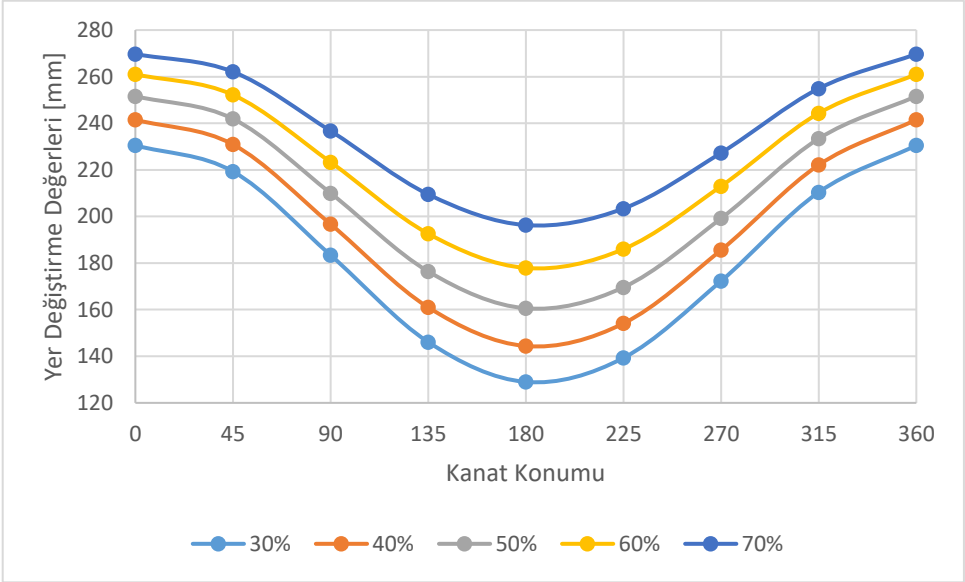
Elde edilen sonuçlar ışığında kanadın gözeneklilik değeri arttırdıkça kanatta meydana gelen gerilme değerlerinin az da olsa arttığı gözlemlenmiştir. En düşük gerilme değerlerinin kanat

225° konumdayken oluştuğu sonucuna varılmıştır. Şekil 7'de kanadın konumuna ve gözeneklilik değerine bağlı olarak elde edilen gerilme değerleri grafik üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 7. Kanadın farklı konumlarında oluşan gerilmeler

Kanadın gözenekliliğini arttırdıkça kanatta meydana gelen yer değiştirme miktarının arttığı gözlemlenmiştir. Bu doğrultuda Şekil 8'de kanadın konumuna ve gözeneklilik değerine bağlı olarak elde edilmiş yer değiştirme değerleri verilmiştir. Burada, kanat kütlesi, artan gözeneklilik değerleriyle azalsa da, kanada etkiyen basınç yükü, kütle kuvvetlerinden daha baskın çıkmış ve kanattaki yer değiştirmeleri fazlasıyla arttırarak gerilmelerin azalmasını engellemiştir.



Şekil 8. Kanadın farklı konumlarında oluşan yer değiştirmeler

Kanat konumuna bağlı olarak yer değiştirme ve gerilme değerlerinin de değiştiği gözlemlenmiştir ancak bu değişimler farklı karakteristikler göstermektedirler. Bu yer değiştirme değerleri, ilk önce 0°'den 180°'ye kadar azalmakta ardından yeniden artmaya başlamaktadır. Bunun nedeni olarak yer çekimi ve başınç yüklerinin 180°'de zıt yönlerde etkiyerek ortaya çıkan bileşke yükün, tam tur boyunca en küçük değerini almasına neden olmalarıdır. Von Mises gerilmesinde ise bu değişim daha dalgalıdır. Von Mises gerilmleleri 0°'den 135°'ye kadar azalmakta ardından 180°'ye kadar artmaktadır. Burada bir yerel

maksimuma eriştikten sonra 225°'ye kadar tekrar azalarak, tam tur boyunca erişeceği en düşük von Mises gerilme seviyesine erişerek sonrasında tekrar artmaktadır. Bunun nedeni olarak da, kanada, doğrudan eksenel yönde etkiyen yük bileşenlerinin daha düşük gerilmelere neden olması ve eğmeye zorlayan yük bileşenlerininse, kanat uzunluğunun fazla olmasından dolayı büyük momentlere neden olarak daha ciddi gerilmelere neden olması gösterilebilir. 180°'de ise basınç ve yer çekimi etkilerinin zıt yönlü bile olsalar eğilmeye neden olan momentin büyük olması gerilmeleri arttığı anlaşılmaktadır. 180°'ye yakın olan 135° ve 225°'de ise, yüklerin bir kısmı eksenel olarak etkimektedir. Bu nedenle gerilmelerin daha düşük olduğu görülmektedir.

Eğilmeye zorlayan yüklerin, basınç ve yerçekimi, aynı yönlü ve baskın olması nedeniyle de en yüksek gerilme ve yer değiştirme değerlerine 0°'de rastlanmaktadır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, hücum açısı 10° ve aerofoil modeli NACA 4415 seçilen 23 metre uzunluğundaki kompozit bir rüzgar türbin kanadı oluşturulmuştur. Bu model alüminyum kiriş ve karbon elyaf takviyeli epoksi kabuk olarak iki ayrı parçadan oluşmaktadır.

Yüksek dayanım ve düşük yoğunluğu nedeniyle malzemeler için karbon elyaf takviyeli epoksi ve alüminyum tercih edilmiştir. Alüminyum köpüklerinin değişen gözeneklilik oranları için mekanik özellikleri Mori-Tanaka homojenleştirme yöntemiyle hesaplanmıştır.

Kanadın maruz kalacağı yük senaryoları belirlenmiş ve oluşturulan modellerde analizler gerçekleştirilerek kanadın farklı gözeneklilik oranları için davranışı gözlemlenmiştir. Rüzgar türbin kanadının en yüksek gerilme ve yer değiştirme değerlerine yatay konumdayken ulaştığı gözlemlenmiştir. Alüminyum köpükte gözeneklilik oranının artması gerilme ve yer değiştirme miktarını artırdığı sonucuna ulaşılmıştır ancak kanadı hafifleterek ilk 10 mod değeri için doğal frekans değerini artırdığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Türkoğlu, S. P., & Kardoğan, P. S. Ö. (2018). The Role and Importance of Energy Efficiency for Sustainable Development of the Countries. Proceedings of 3rd International Sustainable Buildings Symposium (ISBS 2017), 53–60. doi:10.1007/978-3-319-64349-6_5.

[2] Koç E. & Kaya K. (2015). Enerji Kaynakları–Yenilenebilir Enerji Durumu. Mühendis ve Makina, 56(668), 36-47.

[3] Şenel, M. C., & Koç, E. (2015). Dünyada ve Türkiye'de rüzgar enerjisi durumu-Genel değerlendirme. Mühendis ve Makina, 56(663), 46-56.

[4] Özdil Kaçan, Y. (2014). Derecelendirilmiş Kompozit Malzemeden Rüzgar Türbin Kanadı Tasarımı ve Teknik Bilgi Paketi Hazırlanması (Master's thesis, Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[5] Gül, F. (2018). Yenilenebilir Enerji Kaynakları Kullanımında İş Sağlığı ve Güvenliği Uygulamalarının Araştırılması (Master's thesis, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[6] Crossley, R. J., & Schubel, P. J. (2012). Wind Turbine Blade Design Review. Wind engineering, 36(4), 365-88.

[7] Emniyetli, G. (2007). Evsel Elektrik İhtiyacının Karşılanması için Rüzgar Türbini Tasarımı.

[8] Evaluation of Small Wind Turbine Blades with Uni-Vinyl Foam Alignments Using Static Structural Analysis --- DOI:10.32604/EE.2020.011304.

[9] Bennett, J., Bitsche, R., Branner, K., & Kim, T. (2014). Quick Method for Aeroelastic and Finite Element Modeling of Wind Turbine Blades. Volume 3B: Oil and Gas

Applications; Organic Rankine Cycle Power Systems; Supercritical CO2 Power Cycles; Wind Energy. doi:10.1115/gt2014-26155.
[10] Full Scale Deformation Measurements of a Wind Turbine Rotor in Comparison with Aeroelastic Simulations --- DOI:10.5194/wes-2020-28.
[11] Kaya, A. İ. (2016). Kompozit Malzemeler ve Özellikleri. Putech & Composite Poliüretan ve Kompozit Sanayi Dergisi, 29, 38-45.
[12] Hayman, B., Wedel-Heinen, J., & Brøndsted, P. (2008). Materials Challenges in Present and Future Wind Energy. MRS Bulletin, 33(04), 343–353. doi:10.1557/mrs2008.70.
[13] Thumthae, C., & Chitsomboon, T. (2009). Optimal angle of attack for untwisted blade wind turbine. Renewable Energy, 34(5), 1279–1284. doi:10.1016/j.renene.2008.09.017.
[14] Aerofoil Profile Analysis and Design Optimisation --- ISSN: 2231- 038X.
[15] Kaya, K. (2014). Rüzgar Türbini Kanadının Mekanik Tasarım Esasları (Doctoral dissertation, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun).
[16] Models of Lift and Drag Coeffi cients of Stalled and Unstalled Airfoils in Wind Turbines and Wind Tunnels --- NASA/CR—2008-215434.
[17] Horizontal Axis Wind Turbine Blade Design Methodologies for Efficiency Enhancement—A Review --- DOI: 10.3390/en11030506.
[18] Avcı, B., Yılmaz, T. B., Yöneten, P., & Ataş, D. D. C. (2015). Rüzgar Türbini Kanat Tasarımı ve Analizi.
[19] Keles, D., vd. (2013). Design and Development of a Wind Turbine. SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. 17. 207-216. 10.5505/saufbe.2013.58569.
[20] Tarfaoui, M., Khadimallah, H., Imad, A., & Pradillon, J. Y. (2012). Design and Finite Element Modal Analysis of 48m Composite Wind Turbine Blade. In Applied mechanics and materials (Vol. 146, pp. 170-184). Trans Tech Publications Ltd.
[21] Keleş, D., Ayhan, V., Parlak, A., Cesur, İ., Boru, B., & Koç, T. (2013). Bir Rüzgar Türbini Tasarımı ve Geliştirilmesi. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 17(2), 207-216.
[22] Selection of Material for Wind Turbine Blade by Analytic Hierarchy Process (AHP) Method --- DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.612.145
[23] Kaya K., & Koç E. (2015). Yatay Eksenli Rüzgâr Türbinlerinde Kanat Profil Tasarımı Ve Üretim Esasları. Mühendis ve Makina, 56(670), 38-48.
[24] Tüfekci, M., Genel, Ö. E., Tatar, A., & Tüfekci, E. (2020). Dynamic Analysis of Composite Wind Turbine Blades as Beams: An Analytical and Numerical Study. Vibration, 4(1), 1–15. https://doi.org/10.3390/vibration4010001
[25] Ahmet, K. (2007). Hasarlı Malzemelerin Mikro Elastik Teorilerle Modellenmesi ve Eshelby Tansörleri (Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
[26] Sait, E. (2018). Kısa Elyaf Takviyeli Kompozit Plakalarda Titreşim Analizi (Doktora tezi, Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).
[27] Tufekci, M., Rendu, Q., Yuan, J., Dear, J. P., Salles, L., & Cherednichenko, A. V. (2020). Stress and modal analysis of a rotating blade and the effects of nonlocality. Proceedings of the ASME Turbo Expo, 10B-2020. https://doi.org/10.1115/GT2020-14821

YEREL EĞRİLİKLİ SARILI TEK DUVARLI KARBON NANOTÜP İÇEREN MALZEMEDE GEOMETRİK LİNEER DURUMDA NORMAL GERİLMELER

Fatma Çoban Kayıkçı[1]
[1]Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Metalurji Fakültesi, Davutpaşa, 34210 Esenler, İstanbul-Türkiye

ABSTRACT

After the discovery of carbon nanotubes, their high strength and notable properties mechanically, optically and electronically encouraged a large number of possible uses. In addition, these unique properties provide advantages in various engineering applications such as biotechnology, chemistry, defense industry. They enable composites to gain superior mechanical properties by being placed in matrix materials. When composite materials are being strengthened, the primitive curvature due to structural reasons or technological processes causes self-compensating stresses to arise. The magnitude of these stresses can cause the safety limits of the material to be exceeded. Therefore, it is important for engineering to examine the mechanical behavior of materials under load theoretically. In this study, in an infinite elastic material with a single-walled carbon nanotube with local curvature, the normal stresses in the geometric linear state are investigated by three dimensional geometric linear exact equations of the theory of elasticity. Here it is assumed that the carbon nanotube is coated (wrapped) with a constant thickness transition material, and the stresses are obtained separately both between the matrix and the intermediate material and between the carbon nanotube and the intermediate material. In the study, the effects of various problem parameters on stresses are investigated. It is assumed that uniformly distributed normal forces with density p at infinity in the direction of the carbon nanotube act on the mentioned composite material.

Keywords: Carbon nanotube; local curvature; stress distribution;

ÖZET

Karbon nanotüpler keşfedildikten sonra yüksek mukavemetleri ve mekanik, optik ve elektronik olarak kayda değer özellikleri nedeniyle çok sayıda olası kullanımı teşvik etmiştir. Buna ek olarak, bu benzersiz özellikler biyoteknoloji, kimya, savunma sanayi gibi çeşitli mühendislik uygulamalarında avantaj sağlamaktadır. Kompozitlerin matris malzemelerine yerleştirilerek üstün mekanik özellikler kazanmalarını sağlarlar. Kompozit malzemeler güçlendirilirken, yapısal nedenlerden veya teknolojik işlemlerden dolayı oluşan ilkel eğrilik, kendi kendini dengeleyen gerilmelerin ortaya çıkmasına neden olur. Bu gerilmelerin büyüklükleri, malzemenin güvenlik sınırlarının aşılmasına neden olabilir. Bu nedenle malzemelerin yük altında mekanik davranışlarının teorik olarak incelenmesi mühendislik

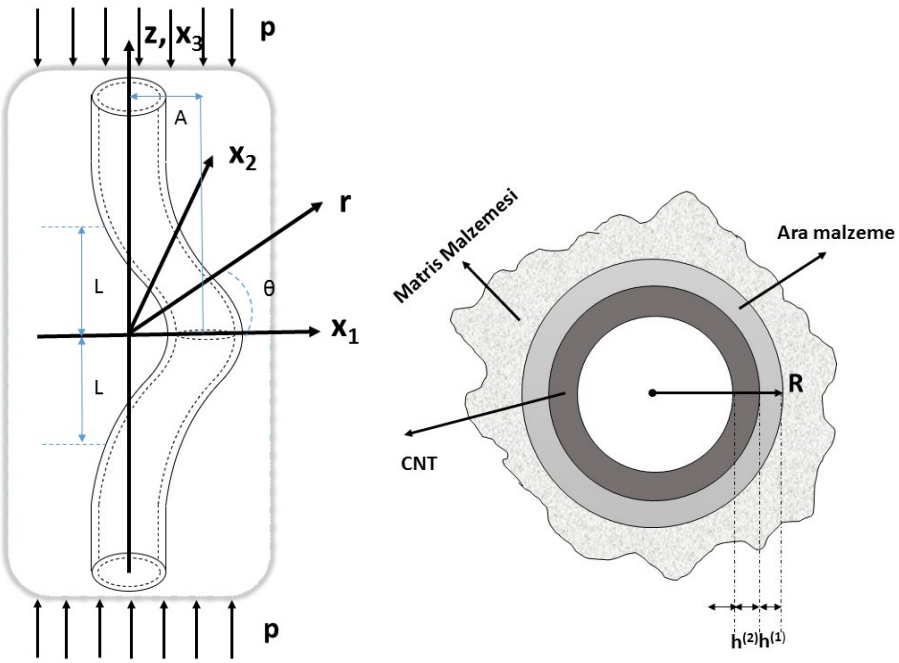
açısından önemlidir. Bu çalışmada, yerel eğrilikli tek duvarlı karbon nanotüp içeren sonsuz elastik bir malzemede, geometrik lineer durumda normal gerilmeler, elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik lineer denklemleri ile incelenmiştir. Burada karbon nanotüpün sabit kalınlıklı bir geçiş malzemesiyle kaplandığı (sarıldığı) varsayılmıştır ve gerilmeler hem matris ile ara malzeme arasında hem de karbon nanotüp ile ara malzeme arasında ayrı ayrı elde edilmiştir. Çalışmada çeşitli problem parametrelerinin gerilmeler üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Söz konusu kompozit malzemeye, karbon nanotüp yönünde sonsuzda p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etki gösterdiği varsayılmıştır.

Anahtar kelimeler: Karbon nanotüp, yerel eğrilik, gerilme dağılımı;

GİRİŞ

Karbon nanotüpler (KNT'ler) keşfedildikten sonra yüksek mukavemetleri ve mekanik, optik ve elektronik olarak kayda değer özellikleri nedeniyle çok sayıda olası kullanımı teşvik etmiştir [1]. Buna ek olarak, bu benzersiz özellikler biyoteknoloji, kimya, savunma sanayi gibi çeşitli mühendislik uygulamalarında avantaj sağlamaktadır. KNT'ler, tek duvarlı ve çok duvarlı karbon nanotüpler olarak adlandırılır. Tek duvarlı karbon nanotüpler (TDKNT'ler), yüksek en-boy oranına sahip tek boyutlu silindirik şekilli karbon allotropları olarak tanımlanır [2]. Ayrıca KNT'ler bilinen en güçlü malzemelerden biridir [3]. Nano seviyedeki performans ve kontrol deneyleri çok pahalı ve zor bir görev olduğundan, bilim adamları ve mühendisler dikkatlerini teorik modellerin geliştirilmesine yöneltmektedir [4]. KNT'lerin mekanik özelliklerinin teorik çalışmaları için moleküler dinamik yöntemi, moleküler mekanik modeli, sonlu eleman modeli ve klasik süreklilik modeli gibi çeşitli yöntemler kullanılmaktadır [5]. Nanoyapıların incelenmesinde süreklilik mekaniğinin uygulanabilirliği [6-7] 'de tartışılmıştır. Birçok deneysel gözlemden elde edilen sonuca göre, KNT'ler (çoğu nanoyapı) çoğunlukla eksenel yönleri boyunca belirli bir dalgalanma derecesiyle tanımlanır. Bu geometrik kusur, karbon nanotüplerin mekanik davranışı üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. Başlangıç kusurları olan KNT'ler düz olanlardan farklı mekanik davranışlara sahiptir [8]. Kusurlar tüpün kıvrılmasına neden olur. Eğrilikli nanotüpler, mühendislik alanlarındaki birçok uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır [2]. Yerel eğrilikli çift duvarlı karbon nanotüpün gerilme dağılımı araştırması [9] çalışmasında yapılmıştır. Burada nanotüpler arasında van der Waals kuvvetleri hesaba katılmıştır. Bir başka çalışmada elastik ortama gömülü iki ve üç duvarlı karbon nanotüplerin stabilite kaybı çalışması yapılmıştır [10]. [10]'daki çalışma geliştirilerek viskoelastik ortama gömülü yere eğrilikli karbon nanotüpün stabilite analizi yapılmıştır [11].

Bu çalışmada, yerel eğrilikli tek duvarlı karbon nanotüp içeren sonsuz elastik bir malzemede, geometrik lineer durumda normal gerilmeler, elastisite teorisinin üç boyutlu kesin geometrik lineer denklemleri ile incelenmiştir. Burada KNT'nin sabit kalınlıklı bir geçiş malzemesiyle kaplandığı (sarıldığı) varsayılmıştır ve gerilmeler hem matris ile ara malzeme arasında hem de karbon nanotüp ile ara malzeme arasında ayrı ayrı elde edilmiştir. Söz konusu kompozit malzemeye, KNT yönünde sonsuzda p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etki gösterdiği varsayılmıştır.



Şekil 1. Kompozit malzemenin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Şimdi problemin matematiksel formülasyonunu ele alalım. Ele alınan elastik cismin geometrik yapısı Şekil 1'de verilmektedir. Şekil 1'den de görülebileceği gibi, $Ox_1x_2x_3$ kartezyen, $Or\theta z$ silindirik koordinat takımlarını seçilmiş ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduğu varsayılmıştır. Karbon nanotüpün orta çizgisinin denklemini

$$x_1 = \varepsilon\delta(x_3),\ x_2 = 0,\ |x_3| \to \infty \text{ olduğunda } \delta(x_3) \to 0, \tag{1}$$

şeklinde ele alınsın. Burada ε $(0 < \varepsilon << 1)$ karbon nanotüpün yerel eğilme genliğini belirten küçük bir parametre, $\delta(x_3)$ fonksiyonu ise karbon nanotüpün başlangıçtaki yani yüklemeden önceki eğilmesinin formunu göstermektedir. (1) denkleminden görüleceği üzere karbon nanotüpün orta çizgisi başlangıçta $x_2 = 0$ düzlemi üzerindedir. Yüklemeden sonra da karbon nanotüpün orta çizgisinin bu düzlem üzerinde kaldığını varsayılmıştır.

Bu aşamadan itibaren; matris malzemesi ile ilgili büyüklükler (1), ara malzeme ile ilgili büyüklükler (2), tek duvarlı karbon nanotüpün ile ilgili büyüklükler (3) üst indisleriyle gösterilecektir. Ele alınan kompozit malzemenin tüm katmanlarında sağlanmak koşuluyla; denge denklemleri, şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri ve bünye denklemlerinin sağlandığı varsayılacaktır:

$$\nabla_i\left[\sigma^{(k)in}\left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j}\right)\right] = 0$$

$$2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n}\nabla_m u^{(k)n}$$

$$\sigma_{(ip)}^{(l)} = (\lambda^{(l)} e^{(l)})\delta_i^p + 2(\mu^{(l)}\varepsilon_{(ip)}^{(l)})$$

$$e^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)} + \varepsilon_{33}^{(k)}, k = 1,2,3 \tag{2}$$

(2) ifadesinde verilen $\sigma_{(in)}^{(k)}$'lar ve $\varepsilon_{(in)}^{(k)}$'lar sırasıyla gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenlerini ifade etmektedir. Aynı zamanda ara malzeme ve matris ara yüzeyi olan S_3 yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığı varsayılacaktır. S_3 yüzeyinin dış normal vektörü bileşenleri n_{j3} olmak üzere bu koşullar aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\sigma^{(1)in}\left(g_n^j+\nabla_n u^{(1)j}\right)\Big|_{S_3} n_{j3}=\sigma^{(2)in}\left(g_n^j+\nabla_n u^{(2)j}\right)\Big|_{S_3} n_{j3}=0\,,\,u^{(1)j}\Big|_{S_3}=u^{(2)j}\Big|_{S_3} \tag{3}$$

Ara malzeme ve karbon nanotüp ara yüzeyi olan S_2 yüzeyinde ideal temas koşullarının sağlandığı varsayılacaktır. S_2 yüzeyinin dış normal vektörü bileşenleri n_{j2} olmak üzere bu koşullar aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\sigma^{(2)in}\left(g_n^j+\nabla_n u^{(2)j}\right)\Big|_{S_2} n_{j2}=\sigma^{(3)in}\left(g_n^j+\nabla_n u^{(3)j}\right)\Big|_{S_2} n_{j2}=0\,,u^{(2)j}\Big|_{S_2}=u^{(3)j}\Big|_{S_2} \tag{4}$$

Karbon nanotüpün iç yüzeyi S_1 de sınır şartları aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sigma^{(3)in}\left(g_n^j+\nabla_n u^{(3)j}\right)\Big|_{S_1} n_j=0 \tag{5}$$

Böylece, sonsuz elastik bir ortamdaki yerel eğrilikli ara malzeme ile sarılmış tek duvarlı karbon nanotüp içeren kompozit malzemenin nanotüp boyunca etki eden dış kuvvetler altında incelemesi için gerekli matematiksel formülasyon genel hatları ile verilmiş olmaktadır.

ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Bu problemin çözümü için [12]'de geliştirilmiş olan sınır formu pertürbasyon yöntemi uygulanacaktır. Bu yönteme göre aranan büyüklükler, (1) denkleminde verilen ε parametresinin serisi halinde ifade edilmektedir. Buna göre,

$$\left\{\sigma_{(ij)}^{(m)};\varepsilon_{(ij)}^{(m)};u_{(i)}^{(m)}\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\left\{\sigma_{(ij)}^{(m),k};\varepsilon_{(ij)}^{(m),k};u_{(i)}^{(m),k}\right\},\ (ij)=rr;\theta\theta;x_3x_3;r\theta;rx_3;\theta x_3\,,\ (i)=r;\theta;x_3 \tag{6}$$

(6)'deki ifadeler (2) denklemlerinde yerlerine yazılır, ε^k'nın katsayıları ε'nun aynı derecelerine göre gruplandırılır ve (R,θ,t_3) civarında seriye açılırsa her bir yaklaşım için S_1, S_2, S_3 yüzeylerinde sağlanan temas koşulları elde edilir. Birinci ve daha sonraki yaklaşımlar için elde edilen denklemler önceki yaklaşımların büyüklüklerini de içermektedirler. Bu çalışmada sıfırıncı ve birinci yaklaşım için çözüm aranmıştır. Yapılan çalışmalarda ikinci ve daha sonraki yaklaşımların sayısal sonuçlar üzerinde önemli bir etkisi olmadığı görülmüştür [13]. Sıfırıncı yaklaşım için (2) denklemlerinin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{zz}^{(1),0}=\varepsilon_{zz}^{(2),0}=\varepsilon_{zz}^{(3),0}=\frac{p}{E^{(1)}},\ \sigma_{zz}^{(1),0}=p,\ u_z^{(1),0}=u_z^{(2),0}=u_z^{(3),0}=\frac{p}{E^{(1)}}z\ ,\ u_r^{(3),0}=-\nu^{(3)}\varepsilon_{zz}^{(3),0}r\,,\\
&u_r^{(2),0}=-\nu^{(2)}\varepsilon_{zz}^{(2),0}r\,,\ u_r^{(1),0}=-\nu^{(1)}\varepsilon_{zz}^{(1),0}r\,,\ u_\theta^{(1),0}=u_\theta^{(2),0}=u_\theta^{(3),0}=0\,,\\
&\sigma_{rr}^{(1),0}=\sigma_{rr}^{(2),0}=\sigma_{rr}^{(3),0}=0\,,\ \sigma_{\theta\theta}^{(1),0}=\sigma_{\theta\theta}^{(2),0}=\sigma_{\theta\theta}^{(3),0}=0\,,\ \sigma_{zz}^{(2),0}=p\frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}\,,\ \sigma_{zz}^{(3),0}=p\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}\,,\\
&\sigma_{\theta z}^{(1),0}=\sigma_{\theta z}^{(2),0}=\sigma_{\theta z}^{(3),0}=0\,,\sigma_{rz}^{(1),0}=\sigma_{rz}^{(2),0}=\sigma_{rz}^{(3),0}=0\,,\ \sigma_{r\theta}^{(1),0}=\sigma_{r\theta}^{(2),0}=\sigma_{r\theta}^{(3),0}=0
\end{aligned} \tag{7}$$

Birinci yaklaşım için problemin çözümünü ele alalım. Yukarıda bahsedilen tüm kabuller çerçevesinde ve (7) ifadelerinin dikkate alınmasıyla (2)'deki denge denklemlerinin silindirik koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^{(1),1}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(1),1}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{rz}^{(1),1}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(\sigma_{rr}^{(1),1}-\sigma_{\theta\theta}^{(1),1}\right)+\sigma_{zz}^{(\underline{1}),0}\frac{\partial^2 u_r^{(\underline{1}),1}}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}^{(1),1}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{(1),1}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta z}^{(1),1}}{\partial z}+\frac{2}{r}\sigma_{r\theta}^{(1),1}+\sigma_{zz}^{(\underline{1}),0}\frac{\partial^2 u_\theta^{(\underline{1}),1}}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}^{(1),1}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}^{(1),1}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(1),1}}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(1),1}+\sigma_{zz}^{(\underline{1}),0}\frac{\partial^2 u_z^{(\underline{1}),1}}{\partial z^2}=0 \qquad (8)$$

Elde edilen (8) denklemlerinin üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri oldukları görülür. (1) ile verilen karbon nanotüpün orta çizgisinin denklemi ve yukarıdaki ifadeler dikkate alınırsa, (3)-(5) sınır koşullarının açık hali ilk yaklaşım için elde edilir. Bu denklemlerin çözümü için [14]' de detayları verilen prosedür uygulanır. İlgili işlemler yapıldığında,

$$\bar{\gamma}^{(1),1}=\bar{A}_1^{(1)}(s)K_1(\xi_1^{(1)}s\frac{r}{L})\sin\theta$$

$$\bar{\beta}^{(1),1}=i\left[\bar{A}_2^{(1)}(s)K_1(\xi_2^{(1)}s\frac{r}{L})+\bar{A}_3^{(1)}(s)K_1(\xi_3^{(1)}s\frac{r}{L})\right]\cos\theta$$

$$\bar{\gamma}^{(2),1}=\left[\bar{B}_{11}^{(2)}(s)I_1(\xi_1^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{12}^{(2)}(s)K_1(\xi_1^{(2)}s\frac{r}{L})\right]\sin\theta,$$

$$\bar{\beta}^{(2),1}=i\left[\bar{B}_{21}^{(2)}(s)I_1(\xi_2^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{22}^{(2)}(s)K_1(\xi_2^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{31}^{(2)}(s)I_1(\xi_3^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{32}^{(2)}(s)K_1(\xi_3^{(2)}s\frac{r}{L})\right]\cos\theta$$

$$\bar{\gamma}^{(3),1}=\left[\bar{B}_{11}^{(3)}(s)I_1(\xi_1^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{12}^{(3)}(s)K_1(\xi_1^{(2)}s\frac{r}{L})\right]\sin\theta,$$

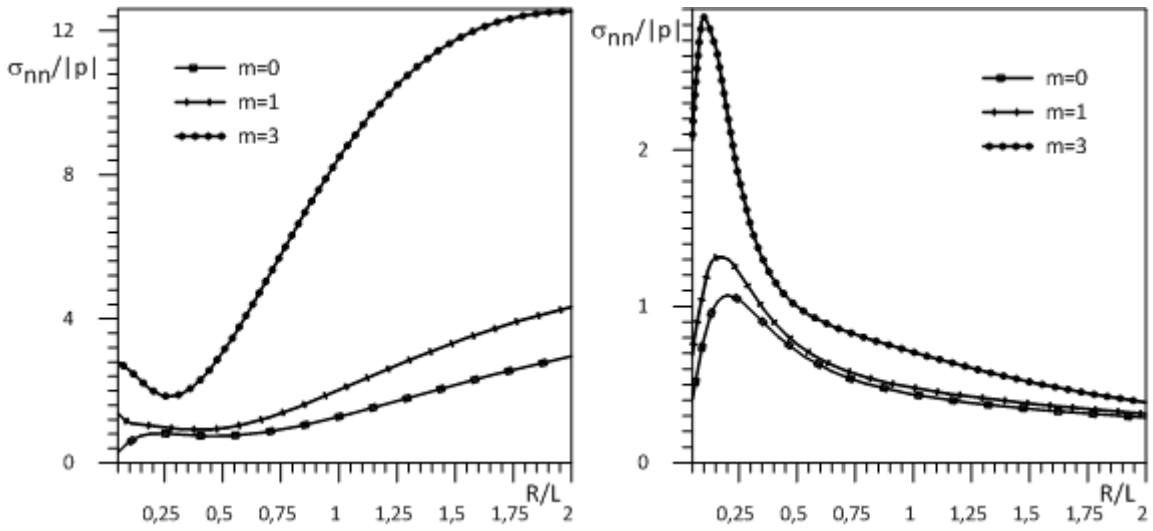
$$\bar{\beta}^{(3),1}=i\left[\bar{B}_{21}^{(3)}(s)I_1(\xi_2^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{22}^{(3)}(s)K_1(\xi_2^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{31}^{(3)}(s)I_1(\xi_3^{(2)}s\frac{r}{L})+\bar{B}_{32}^{(3)}(s)K_1(\xi_3^{(2)}s\frac{r}{L})\right]\cos\theta \qquad (9)$$

elde edilir. Burada $K_n(x)$ Macdonald ve $I_n(x)$ Bessel fonksiyonu fonksiyonudur (9) fonksiyonları birinci yaklaşımın sınır-değer probleminde kullanılır ve böylece elde edilen lineer denklemler takımı çözülürse, ulaşılmak istenen gerilmelerin birinci yaklaşımının Fourier dönüşümlü değerlerini hesaplamak için gerekli olan büyüklükler belirlenmiş olur. Bu gerilmelerin gerçek değerlerini elde etmek için ters fourier dönüşümü uygulanır.

SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

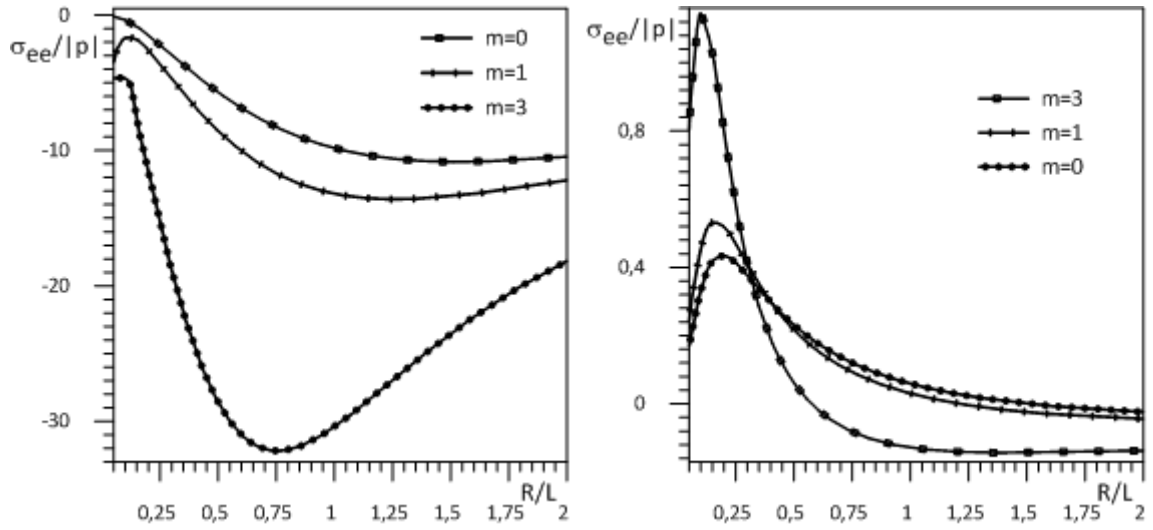
Gerilme analiziyle ile ilgili çalışmalar $\sigma_{nn}, \sigma_{ee}, \sigma_{\tau\tau}$ normal gerilmelerine çeşitli parametrelere bağlı nümerik sonuçlar elde etmek ve bu sonuçların yorumlanması kapsamında yapılmıştır. Bu gerilmeler, matris ve ara malzeme arakesit yüzeyi S_3 üzerinde ve ara malzeme ile karbon nanotüp arakesit yüzeyi S_2 , **n** birim normal vektörü ve **τ, e** teğet vektörleri doğrultusundaki gerilmelerdir. Sayısal sonuçlar için R en dış yarıçap, $h^{(1)}$ ara malzemenin kalınlığı, $h^{(2)}$ karbon nanotüpün kalınlığı olmak üzere R/L, $h^{(1)}/R$ ve $h^{(2)}/R$ boyutsuz parametreleri tanımlanmıştır.

Şekil 2'deki grafiklerde $\sigma_{nn}/|p|$ gerilmesinin sırasıyla (a) karbon nanotüp ile geçiş malzemesi ara yüzeyi olan S_2'deki değerleri ve (b) matris malzemesi ile geçiş malzemesi ara yüzeyi olan S_3'deki değerlerinin m=0,1,3 için R/L'ye göre değişimi görülmektedir. Burada $h^{(1)}/R = 0.2$ olarak alınmıştır. Gerilmeler ile salınım frekansı olan m değerleri arasında monoton olmayan bir ilişki olduğu görülmektedir. Özellikle S_2 yüzeyinde, S_3'e kıyasla gerilme değerlerinin çok daha fazla büyüdüğü görülmüştür. İlaveten, R/L değeri büyüdükçe S_3 yüzeyinde meydana gelen gerilmeler m=0, 1, 3 için belli bir değere yakınsamaktadır. Ancak S_2 yüzeyinde m=0,1,3 için ayrı ayrı değerlere yakınsamaktadır. Şekil 2'deki grafiklerde ise $\sigma_{ee}/|p|$ gerilmesinin sırasıyla (a) karbon nanotüp ile geçiş malzemesi ara yüzeyi olan S_2'deki değerleri ve (b) matris malzemesi ile geçiş malzemesi ara yüzeyi olan S_3'deki değerlerinin m=0,1,3 için R/L'ye göre değişimi görülmektedir. Gerilmeler ile salınım frekansı olan m değerleri arasında monoton olmayan bir ilişki olduğu görülmektedir.



(a) (b)

Şekil 2. m=0,1,3 için (a) S_2 ve (b) S_3 yüzeylerinde $\sigma_{nn}/|p|$'in R/L'ye göre değişimi



(a) (b)

Şekil 3. m=0,1,3 için (a) S_2 ve (b) S_3 yüzeylerinde $\sigma_{ee}/|p|$'in R/L'ye göre değişimi

Çizelge 1' de matris ile ara malzeme ara kesiti S_3 ile, KNT ve ara malzeme ara kesiti S_2'de σ_{nn}, σ_{ee} ve $\sigma_{\tau\tau}$ normal gerilmelerinin çeşitli parametrelere göre değerleri verilmektedir. Çizelgeden görüleceği üzere, $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{ee}/|p|$ ve $\sigma_{\tau\tau}/|p|$ gerilmeleri aynı parameter değerleri için S_2 yüzeyinde S_3'e göre mutlak değerce oldukça büyük olmaktadır. Özellikle $\sigma_{\tau\tau}/|p|$ gerilmesinde fark açılmaktadır. Ayrıca salınım frekansı m değerlerinin artmasıyla tüm gerilme değerleri, tüm yüzeylerde artarken yalnızca $\sigma_{ee}/|p|$ gerilmesi S_3 yüzeyinde m=3 değeri için azalma göstermektedir. İlaveten Elastisite modülünün artması ile gerilme değerlerinin arttığı gözlenmektedir. Ancak bu artış $\sigma_{\tau\tau}/|p|$ gerilmesinin S_3 yüzeyindeki değerlerinde oldukça azdır dolayısıyla önemli bir etkisi yoktur diyebiliriz.

Çizelge 1. Çeşitli $E^{(3)}/E^{(1)}$ ve m değerleri için $\sigma_{nn}/|p|$, $\sigma_{ee}/|p|$ ve $\sigma_{\tau\tau}/|p|$ gerilmeleri

m	$E^{(3)}/E^{(1)}$	$\sigma_{nn}/\|p\|_{S_3}$	$\sigma_{nn}/\|p\|_{S_2}$	$\sigma_{ee}/\|p\|_{S_3}$	$\sigma_{ee}/\|p\|_{S_2}$	$\sigma_{\tau\tau}/\|p\|_{S_3}$	$\sigma_{\tau\tau}/\|p\|_{S_2}$
0	300	0,46590	0,50722	0,14718	-4,09196	-0,10808	-20,78746
	500	0,55049	0,69594	0,18107	-4,26603	-0,11070	-23,94820
	1000	0,69008	0,95370	0,23761	-4,45649	-0.10343	-28,12567
1	300	0,64532	0,82409	0,18219	-7,40935	-0,19670	-30,73678
	500	0,74959	1,13419	0,22289	-7,75941	-0,20716	-35,31169
	1000	0,91791	1,53594	0,28964	-8,15327	-0.20704	-41,11866
3	300	0,86326	2,48152	0,08229	-22,43919	-0,53754	-48,26623
	500	0,94516	3,53217	0,10404	-23,99783	-0,58773	-56,12685
	1000	1,06646	4,77062	0,13837	-25,83001	-0.63669	-64,89406

KAYNAKLAR

[1] J. Baran at al., On the stability of single-walled carbon nanotubes and their binding strengths, *Theorical Chemistry Accounts,* (2012) 131:1270, DOI 10.1007/s00214-012-1270-3

[2] M. Malikan at al., Dynamic modeling of non-cylindrical curved viscoelastic single walled carbon nanotubes based on the second gradient theory, *Materials. Research Express* 6 (2019) 075041

[3] S.K. Jena at al., Stability analysis of single-walled carbon nanotubes embedded in winkler foundation placed in a thermal environment considering the surface effect using a new refined beam theory, *Composite Structure, 2017,* https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1698437

[4] N. Karličić, D. Kozić, P. Pavlović, R. Nešić, Dynamic stability of single-walled carbon nanotube embedded in a viscoelastic medium under the influence of the axially harmonic load, *Compos. Struct.* 162 (n.d.) 243, 2017.

[5] Buckling Instability of Carbon Nanotube Atomic Force Microscope Probe Clamped in an Elastic Medium, doi: 10.1115/1.4007215

[6] A. Guz, Continuum solid mechanics at nano-scale: how small can it go?", *J. Nanomater. Mol. Nanotechnol*., 1 (1), 2012.

[7] H.L. Duan, J. Wang, B.L. Karihaloo, B.L.,Theory of elasticity at the nanoscale", *Adv. Appl. Mech*., 42(1): 1–68, 2009.

[8] Stability analysis of an embedded single-walled carbon nanotube with small initial curvature based on nonlocal theory, *Mechanics Of Advanced Materials And Structures*, 2017, Vol. 24, No. 11, 962-970.

[9] F. Kayikci, R. Köşker, "Stress distribution in an elastic body with a locally curved double-walled carbon nanotube, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol.43, no.1, 2021

[10] F. Kayıkçı, R. Köşker, Stability analysis of double-walled and triple-walled carbon nanotubes having local curvature, *Archive Of Applied Mechanics*, 2021

[11] F. Kayıkçı, R. Köşker, The Stability Loss of a Locally Curved Double-Walled Carbon Nanotube in Visco-Elastıc Matrıx, *Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part C-Journal Of Mechanical Engineering Science* , vol.5, pp.1-13, 2021

[12] S.D. Akbarov, *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites*, Springer, 465 pp. 2012.

[13] S.D. Akbarov, A.N. Guz, *Mechanics of Curved Composites. Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht (2000)

[14] A.N. Guz, Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies, Berlin: Springer-Verlag, 1999.584

BİR KALÇA PROTEZİNİN STATİK VE DİNAMİK PERFORMANSININ SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Fatih Kaya[1], Gülhan İnce[2]
[1,2]Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Burdur

ABSTRACT

Hip prostheses are used to treat young and active patients as well as the elderly patient population. Moreover, their life expectancy increases day by day. For these reasons, hip prostheses have to withstand repeated high stresses over the years, not only regular daily activities but also the effects of sports, overreaching, abrasion and fatigue. Like all implantable medical devices, a hip prosthesis must be tested in accordance with the relevant standards before it is used in the human body. To verify the long-term strength and durability of a hip prosthesis design, it is necessary to undergo many static and dynamic test stages. Fatigue tests are critical to these tests because fatigue problems are more common than other prosthesis problems. Prosthesis breakage caused by fatigue can have devastating consequences. However, the fatigue tests of a hip prosthesis require more than five million cycles and are very demanding in terms of time and cost. Research and development has gained momentum in recent years thanks to the rapid prototyping techniques in biomedical engineering. Reverse engineering is a quick and innovative way to transform a physical model into a virtual model. Integrating finite element simulation into the product development process can provide significant benefits in terms of cost savings and transaction efficiency.

In this study, a numerical study was conducted using Reverse Engineering (RE) and Finite Elements Analysis (FEA) methods to estimate the fatigue performance of newly designed but not yet passed laboratory tests for cementless hip prosthesis. Finite elements of the Ti-6Al-4V (Grade 5) titanium alloy hip stem used to perform all static and fatigue analyzes were evaluated for stress / strain distribution and fatigue life prediction results. It has been observed that the fatigue strength is highly associated with the prosthesis's boundary conditions, geometric design and material properties.

Keywords: finite element analysis; hip implant; fatigue analysis; cyclic loading

ÖZET

Kalça protezleri yaşlı hasta popülasyonunun yanı sıra genç ve aktif hastaları tedavi etmek için de kullanılmaktadır. Üstelik beklenen yaşam süreleri gün geçtikçe artmaktadır. Bu nedenlerden dolayı kalça protezleri, yalnızca düzenli günlük aktiviteler nedeniyle değil, aynı zamanda spor, aşırı yüklenme, aşınma ve yorulma etkileri nedeniyle de yıllarca süren tekrarlı yüksek gerilmelere dayanmak zorundadır. Tüm implant edilebilir tıbbi cihazlar gibi, bir kalça protezi de insan vücudunda kullanımı öncesinde ilgili standartlara göre test edilmelidir. Bir kalça protezi tasarımının uzun vadeli dayanım ve dayanıklılığını doğrulamak için, birçok statik ve dinamik test aşamalarından geçmesi gerekmektedir. Yorulma testleri, bu testler

arasında kritik öneme sahiptir, çünkü yorulma nedeniyle ortaya çıkan problemler diğer protez problemlerinden daha yaygındır. Yorulma kaynaklı protez kırılmaları yıkıcı sonuçlar doğurabilmektedir. Bununla birlikte, bir kalça protezinin yorulma testleri 5 milyondan fazla döngü gerektirmekte olup zaman ve maliyet açısından oldukça zahmetlidir. Biyomedikal mühendisliğinde, hızlı prototipleme teknikleri sayesinde son yıllarda araştırma ve geliştirme faaliyetleri ivme kazanmıştır. Tersine mühendislik, fiziksel bir modeli sanal bir modele dönüştürmenin hızlı ve yenilikçi bir yöntemidir. Sonlu elemanlar simülasyonlarını ürün geliştirme sürecine entegre etmek, maliyet tasarrufu ve işlem verimliliği açısından önemli faydalar sağlayabilmektedir.

Bu çalışmada, yeni tasarlanmış fakat laboratuvar testlerinden henüz geçmemiş çimentosuz kalça protezinin yorulma performansını tahmin etmek amacıyla Tersine Mühendislik (RE) ve Sonlu Elemanlar Analizi (FEA) yöntemlerini kullanarak nümerik bir araştırma yapılmıştır. Tüm statik ve yorulma analizlerini gerçekleştirmek için kullanılan Ti-6Al-4V (Grade 5) titanyum alaşımlı kalça sapının sonlu elemanlar gerilme / gerinim dağılımları ve yorulma ömrü tahmin sonuçları değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: sonlu elemanlar analizi; kalça protezi; yorulma analizi; çevrimsel yükleme

GİRİŞ

Total Kalça Artroplastisi (TKA), kalça ekleminin yapay kalça protezi ile değiştirildiği cerrahi bir işlemdir. Genellikle osteoartrit ağrısını hafifletmek veya kalça kırığını takiben ciddi fiziksel eklem hasarlarını tedavi etmek için yapılır. Aseptik gevşeme primer TKA'daki çimentosuz femoral bileşenler için günümüzde halen hastaların yaşam kalitesini etkileyen önemli bir problem olmaya devam etmektedir. Osteoartrit, gelişmiş ülkelerdeki en önemli sağlık sorunlarından biridir[1]. OECD (2017) verilerine göre dünya genelinde erkeklerin%10'unun, 60 yaşın üzerindeki kadınların ise %18'inin semptomatik osteoartrit olduğu anlaşılmaktadır. Gelişen teknoloji ve tedavi olanakları ile gelecek yıllarda ortalama yaşam süresinin de artacağı öngörülürse kalça protezi ameliyatı sayısının daha da artacağı açıktır.

Günümüzde, total kalça protezi ameliyatı ortopedik cerrahinin en başarılı ameliyatları arasında olmasına rağmen protez tasarımı ve malzemeleri ile ilgili mekanik problemler halen devam etmektedir[2-4]. Şenalp vd. [5] protez gevşemesi durumunun oluşmasının altında yatan mekanik sebeplerin kemik çimentosunda oluşan gerilmeler ve protezin şekli ile ilgili olduğunu belirtmişlerdir. Kalça protezi hatalarından tamamen kaçınmak mümkün olmasa da son çalışmalar olumsuz durumları daha doğru bir şekilde tahmin etmek için tasarım araçları üzerine odaklanmıştır. Bir protez kırılmasının yıkıcı sonuçlarından kaçınmak ve bu durumu önceden tahmin edebilmek için nümerik yöntemler kullanılarak gerçekleştirilen birçok araştırmanın amacı ortopedik protezlerin genel güvenilirliğini arttırmak olmuştur.

Sonlu elemanlar metodu, ortopedik protezlerin tasarımında kullanılan en gelişmiş simülasyon tekniği yöntemidir. Bu yöntem kalça protezi tasarımında ve diğer ortopedik cihazların analizi için bir araç olarak kullanılır. Kalça protezi tasarımı, mühendis ve cerrahlar arasında yakın iş birliği gerektiren karmaşık bir süreçtir[6].

Kalça protezi tasarımında ISO 7206-4[7], ISO 7206-6[8], TS ISO 7206-10[9], ASTM F2996[10] standartlarında tanımlanmış olan gerekli statik ve dinamik dayanım şartlarını sağlayıp sağlayamadığının tespiti için rutin olarak kullanılan statik ve dinamik laboratuvar test yöntemlerinin süresi ve maliyetleri oldukça yüksektir. Günümüzde, belirli koşullar altında malzeme davranışlarını belirlemek amacıyla birçok çalışmalar yapılmaktadır ve bu çalışmalar içinde ANSYS[11] analizleri deneysel işlemlere göre daha az maliyet ve zaman

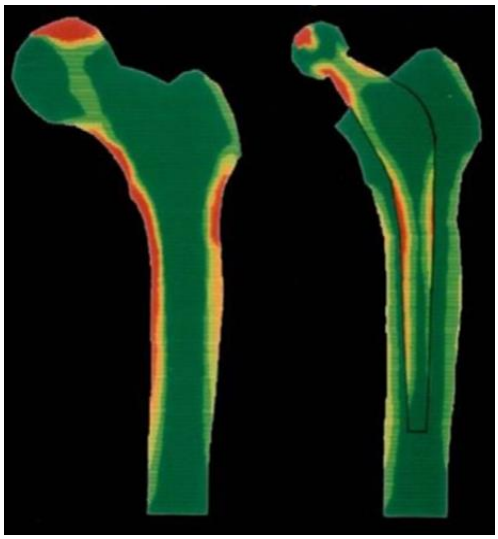
sunmaktadırlar. Özellikle biyomedikal anlamda canlılar üzerinde veya laboratuvarda deneyler yapılmak yerine gerçeğe yakın sonuçlar sunan ANSYS sonlu elemanlar analizleri daha çok tercih edilmektedirler [12-14].

Protez gevşemesinin önüne geçilmesi ve gevşeme vakalarının azaltılması hem hasta yaşam kalitesi açısından hem de maliyetler noktasında önemli faydalar sağlayacaktır. Literatürde TKA ameliyatları sonrası protez gevşemesinin tespitini ile alakalı birçok tespit yöntemi bulunmaktadır [15-18]. Ancak buna karşılık mekanik nedenlerden dolayı meydana gelmekte olan protez gevşemesinin önlemesi ve azaltılmasına yönelik çalışmalar oldukça kısıtlıdır[2, 14].

Protez yerleştirilecek olan kemiği koruyan ve biyolojik tespite olanak sağlayan çimentosuz implantlar ile özellikle aktif, genç yaştaki olgularda aseptik gevşeme oranı azaltılabilmiş ve başarılı TKA sonuçları elde edilmiştir. Fakat bu implantlar ile de gevşeme ve lokalizis meydana gelmiştir ancak sorunun çimentodan değil, kemikte oluşan ve fizyolojik olmayan mekanik yük dağılımından kaynaklandığı ortaya çıkmıştır. Daha önce "çimento hastalığı" olarak adlandırılan bu durum bugün gerilme kalkanı etkisi (stress shielding) olarak tanımlanmaktadır [19]. Kalça kemiği üzerindeki gerilme kalkanı etkisini azaltmak ile ilgili literatürde birçok geometrik, topolojik ve örgü optimizasyonu (lattice optimisation) yöntemleri tarif edilmiştir [20-23]. Bu yöntemlerden farklı olarak Heyland vd.[24] geometrik değişikliklerin (yivler, oluklar, enine kesitler, protez gövde uzunluğu, anatomik eğrilik) gerilme kalkanı üzerinde en fazla %20'lere varan bir etkiye sahip olduğunu, farklı tasarım özelliklerinin (düşük rijitlikli protezler ile daha yüksek proksimal temas alanı kombinasyonlarının) TKA sonrası gerinme değerlerini kontrol etmeye yardımcı olabileceğini göstermiştir.

Sonlu eleman çözümünün her zaman ilgili gerçek dünya sorununa yakın bir çözüm olduğu ve her zaman elde edilen çözümün iyi mi yoksa kötü bir çözüm mü olduğuna karar verilmesi gerektiği iyi bilinmektedir. Bu soruna yanıt olarak ASTM International, kalça protezi cerrahisinde kullanılan kalça saplarını incelemek için güvenilir bir FEA prosedürü sunan F2996-20 standardını yayınlamıştır. Bu standart, ISO 7206-4 ve ISO 7206-6 standartlarına göre modüler olmayan kalça protezleri için FEA aracılığıyla protez tasarımcılarına rehberlik etmek amacıyla oluşturulmuştur.

Metalik malzemeler biyomühendislik uygulamalarında çok geniş bir kullanım alanına sahiptir[25]. Total kalça protezi ameliyatlarında en yaygın kullanılan protez malzemeleri yüksek mekanik özellikleri, nispeten düşük yoğunlukları, yüksek korozyon dirençleri ve biyouyumluluk gibi istenilen özelliklere sahip olmaları nedeniyle östenitik paslanmaz çelikler, titanyum alaşımlar ve kobalt-krom-molibden alaşımlarıdır[26-28]. Femur iç kanalına protez yerleştirildiğinde gerilmeler iç kortekste oluşur. Kalça protezleri femur üzerinde normalde olmayan dairesel gerilmelere neden olmaktadır. Kullanılan protez malzemesinin elastisite modülü arttıkça, rijitlikleri artar ve esneklikleri azalır. Titanyum gibi esnek malzemeler proksimalde yüksek gerilmelere yol açarken, Co-Cr gibi sert malzemeler distalde yüksek gerilmelere yol açmaktadır. Titanyum, Co-Cr ve paslanmaz çeliğe göre elastisite modülünün kemiğin elastisite modülüne daha yakın olması nedeniyle çimentosuz protezlerde sıkça tercih edilir[19]. Femur kemiği içerisine yerleştirilen kalça protezinin oluşturacağı gerilme kalkanı etkisi protezin rijitliği ve geometrisi ile doğrudan bağlantılı olup sonlu elemanlar yöntemi ile önceden tahmin edilebilmektedir (Şekil 1).



Şekil 1. Sağlam femur kemiği(solda) ve total kalça protezi ameliyatı sonrası meydana gelen şekil değiştirme enerji yoğunluğu (SED) dağılımı(sağda), normalde dış kortekste olan yük aktarımının intramedüller kalça protezi varlığında iç korteksten aktarılması [29].

Protez tasarımlarının doğrulanması için ardışık ve benzer pek çok deney yapılması yani bir deneyin yapıldığı durumdan biraz farklı bir durum için tekrar deney yapılması gerekebilir. Bu durumda ortaya çıkacak olan zaman ve maliyet kaybını önlemenin yolu farklı pek çok durum için sonlu elemanlar analizlerinin yapılarak en iyi tasarım modelinin ortaya konulması olacaktır. Sonlu elemanlar yönteminin güvenilirliği ve pratikliği konusunda yapılan araştırmalar ve deneylerden sonra bu yöntemin gerçekle örtüşen sonuçlar verdiği gözlenmiştir[30].

Bu çalışmada yeni tasarlanmış bir kalça protez modelinin dayanım ve dayanıklılığı sonlu elemanlar analizleri ile ASTM F2996-20 standardı çerçevesinde değerlendirilmiş ve güvenilirlik kontrolü yapılmıştır. Maliyetli ve uzun süren statik ve dinamik deneysel test süreçlerinin öncesinde aday tasarımların analiz edilerek tasarımın etkinliğinin nümerik olarak kontrol edilmesi ile doğrulama sürecinin daha verimli, ekonomik ve hızlı bir şekilde sonuçlandırılmasına katkıda bulunulması amaçlanmaktadır.

MATERYAL VE METOD

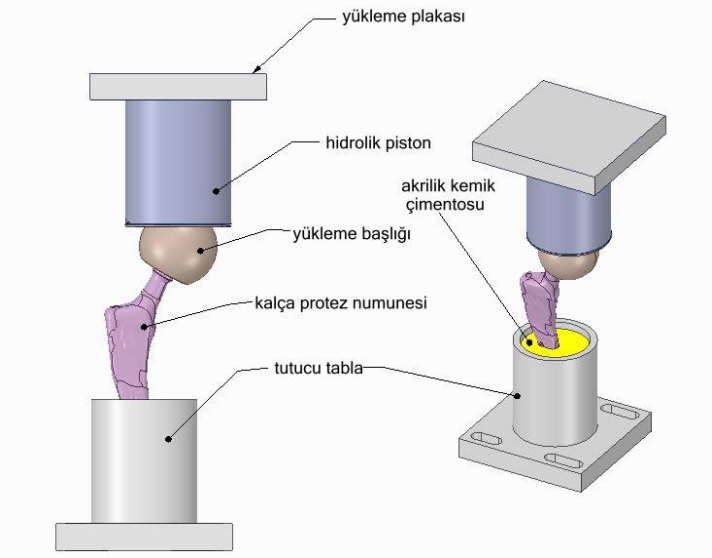
Tersine mühendislik, bilgisayar destekli tasarım ve simülasyon modellerinin en az hata ile birebir olarak oluşturulmasına imkân tanımaktadır. Geometrik olmayan kompleks yüzeylerin dahi tersine mühendislik sayesinde hızlı ve oldukça hassas bir şekilde CAD modelleri oluşturularak çeşitli statik ve dinamik analizler yapabilmek mümkün hale gelmiştir. Bu çalışmada CAD modeli mevcut olmayan kalça protezi prototipi 3 boyutlu tarama teknolojisi kullanılarak CAD ortamına aktarılmıştır.

Çalışmaya esas alınan kalça protezi prototipinin sap kısmı Ti6Al4V(Grade5) asetabular liner kısmı Ultra Yüksek Molekül Ağırlıklı Polietilen (UHMWPE) ve femur başında ise BIOLOX ® delta seramik bileşeni kullanılmıştır. Kemik ile temas eden yüzeyler biyouyumluluğu sağlamak amacıyla biyoaktif bir malzeme olan Hidroksiapatit (HA) kaplama ile kaplanmıştır. Tasarlanan kalça protez prototipi yüzeyinde protez-kemik ara yüzündeki tutunmayı arttırmak amacıyla asimetrik kanallar oluşturulmuştur (Şekil 2).



Şekil 2. Asimetrik kanallı kalça protezi prototipi

Sonlu elemanlar modelleri, hem Uluslararası ISO 7206-6 standardı hem de modüler olmayan kalça protezlerinin sonlu elmanlar modellemesi ile ilgili yöntem kuralların tanımlanmış olduğu ASTM F2996-20 standardı baz alınarak yapılandırılmıştır. ASTM F2996-20 statik yükleme düzeneği Şekil 3'te gösterilmiştir.



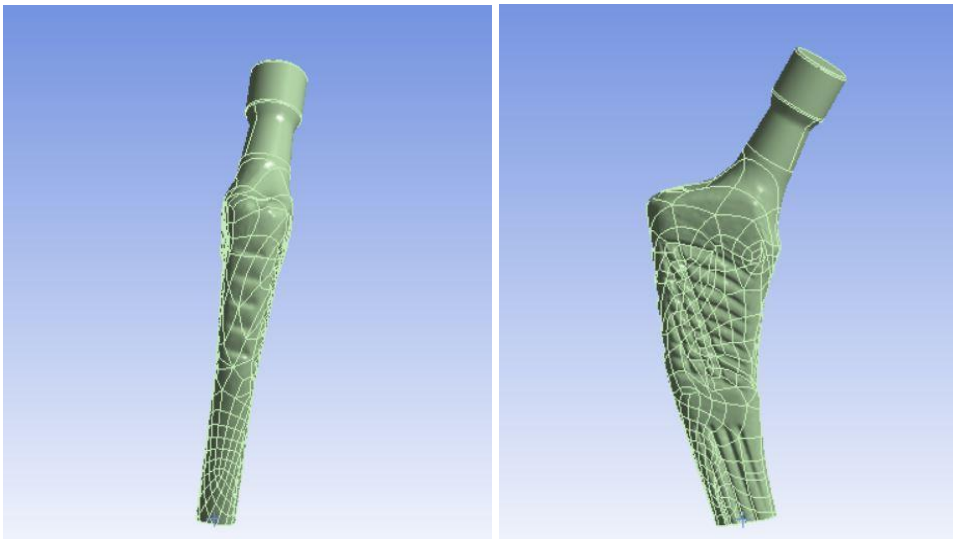
Şekil 3. ASTM F2996-20 Deney düzeneğinin şematik gösterimi

Henüz tasarımı doğrulanmamış olan kalça protezi prototipinin üretiminde kullanılan Ti6Al4V (Grade 5) titanyum alaşımının mekanik özellikleri Çizelge 1'de verilmiştir.

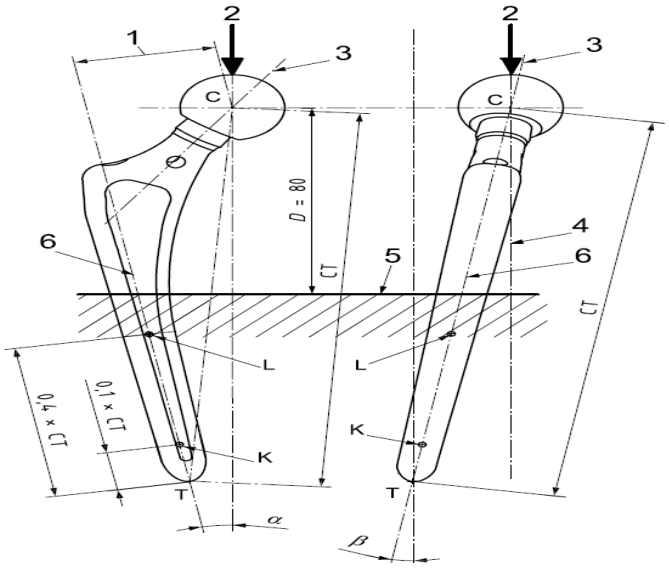
Çizelge 1. Prototip Modele Ait Malzeme Özellikleri (Ti6Al4V Grade 5)

Ti6Al4V Grade 5		
Young Modülü	114000	MPa
Poisson Oranı	0,342	
Akma Dayanımı	862	MPa
Kopma Dayanımı	895	MPa

Mevcut prototip modeline ait femur başı merkezi (C) ile sapın en uzak ucu (T) arasındaki CT uzunluğu 140mm olarak ölçülmüştür. Kalça eklemi protezlerine ait saplı femur bileşenlerinin dayanım özelliklerini doğrulamak için CT uzunluğu ≤ 250mm olan simetrik femur sapı için TS ISO 7206-6(2014)'da belirtilen açı ve pozisyonlarına göre konumlandırılmıştır (Şekil 4 ve Şekil 5).



Şekil 4. CT uzunluğu ≤ 250mm olan simetrik femur sapı modeli için TS ISO 7206-6(2014)'ya göre α (solda) ve β(sağda) konumlandırılması



1 Başın sapması	T Sapın en uzak ucu
2 Yük noktası	C Femur başının merkezi
3 Boyun ekseni	D Kalıplama seviyesi
4 Yük ekseni	K, L Sap eksenini tanımlayan T'den itibaren belirli mesafelerdeki noktalar
5 Çimento seviyesi	α Yük ekseni 4 ve sap ekseni 6 arasındaki frontal düzlem CKL'deki açı
6 KL sap ekseni	β Yük ekseni 4 ve sap ekseni 6 arasındaki CKL'ye dik olan yanal(lateral düzlemdeki açı

Şekil 5. Deneye tabi tutulan deney numunesinin CT uzunluğu 120mm<CT ≤250mm olan simetrik saplar için konumlandırılması [8]

Dayanım Performansı

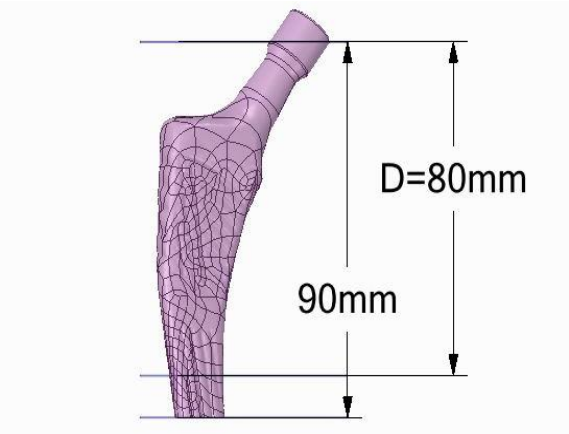
TS ISO 7206-6 standardına göre gerekli dayanım sınırı, F_D, deney numunelerinde kırılma olmadan 5.000.000 çevrime dayandığı yük seviyesidir (Çizelge 2).

Çizelge 2. TS ISO 7206-6(2014)'ya göre dayanım performans parametreleri

Sapın Çeşidi	Kısa, monoblok, modüler boyun, modüler femur		
CT (mm)	≤120	120<CT≤250	>250
F_D (N)	1200[a]	2.300[b]	1200[c]
Çevrim Sayısı	$5x10^6$		
Kırılmayan Deney Numune Sayısı	6		

Alternatif yöntemler, istatiksel yöntemler kullanılarak asgari şekil değişikliği olmuş(run-out) yük sayısı %95 güvenilirlik seviyesinde bu standartta verilen kuralları sağlıyorsa uygun olarak kabul edilmektedir. Bu yöntem esas olarak, torsiyonal bileşen içeren yükleme şartları altında tam femur bileşenlerinin dayanım özelliklerini doğrulayan, ISO 7206-4'te verilen yöntemleri esas alır. Bu standartta belirtilen deney şartları sağlam ve doğru bir şekilde sabitlenmiş protezi temsil etmek için tasarlanmışken, özellikle numunenin gömüldüğü

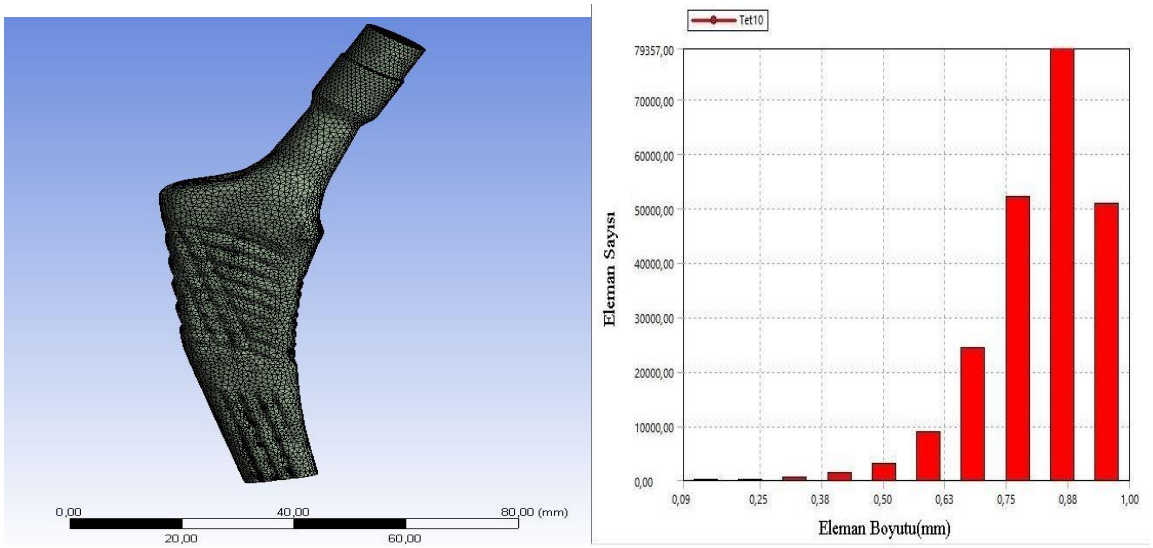
derinlik olmak üzere ISO 7206-4(2014)'teki deney şartları, protezin femurda gevşediği yerdeki klinik durumu temsil etmek için tasarlanmıştır (Şekil 6).



Şekil 6. Prototip modele ait gömülme derinliği

Sonlu Elemanlar Ağ Yapısının oluşturulması

Sonlu elemanlar analizi ile lokal gerilmelerin doğru hesaplanması için sonlu eleman ağı düzgün ve yeterli mesh yoğunluğuna sahip olmalıdır[31]. Yorulmadan kaynaklanan çatlak başlangıcı protezin yüzeyinde oluşacağı için özellikle yüzeydeki eleman ağına dikkat edilmelidir. Şekil 7'de oluşturulan kalça protezi modeline sayısal ağ atılmış görüntüsü verilmiştir. Kurulan geometrik model üzerinde sayısal çözümlemede en doğru sonuca ulaşmak için sayısal ağ modülü, üç boyutlu olarak kurulmuştur. Protez üzerindeki boyun bölgesi, sürücü bölgesi ve gömülme bağlantı bölgeleri gerilme ve şekil değiştirme değerlerinin yüksek olduğu tehlikeli bölgelerdir. Bundan dolayı gerilim bölgesinde atılan sayısal ağların yoğun olmasına karşılık diğer bölgelerdeki ağ dağılımı daha seyrek olabilir. Oluşturulan sonlu elemanlar modeli için 312.443 adet düğüm ile 219.587 adet 10 düğüm noktalı 4 yüzlü tetragonal kullanılmıştır (Şekil 7).

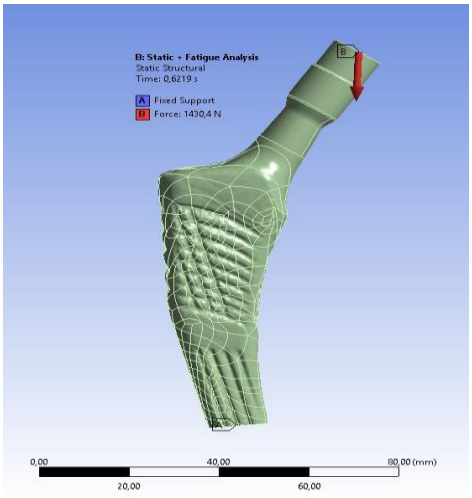


Şekil 7. Prototip modele ait sonlu elemanlar ağ yapısı ve eleman boyutu dağılımı

Yükleme ve Sınır Şartları

ASTM F2996-20[8] ve TS ISO 7206-6 standartlarına göre uygun sınır koşulları ve belirtilen yükleme şartları tespit edilmiştir.

Buna göre D mesafesi 80mm ve FD 2300 N olarak alınmıştır. Yine sap uzunluğu olan CT mesafesine bağlı olarak distal eksen $\alpha = 10° \pm 1°$ açısıyla ve proksimal eksen $\beta = 9° \pm 1°$ açıyla yönlendirilecek şekilde konumlandırılmıştır. Şekil 8'de modellenen proteze uygulanan sınır şartları gösterilmiştir. Protez baş kısmından sapın boyun bölgesindeki en yüksek gerilme seviyeleri üretmesi beklenen "en kötü durum" senaryosu dikkate alınarak 8 mm uzatılmış ve 2300N'luk sabit bir kuvvet ile düşey doğrultuda yüklenmiştir. Deplasman ve dönmeler gömülme bölgesi etrafında kısıtlanarak ankastre mesnet (fixed support) sınır şartları uygulanmıştır.

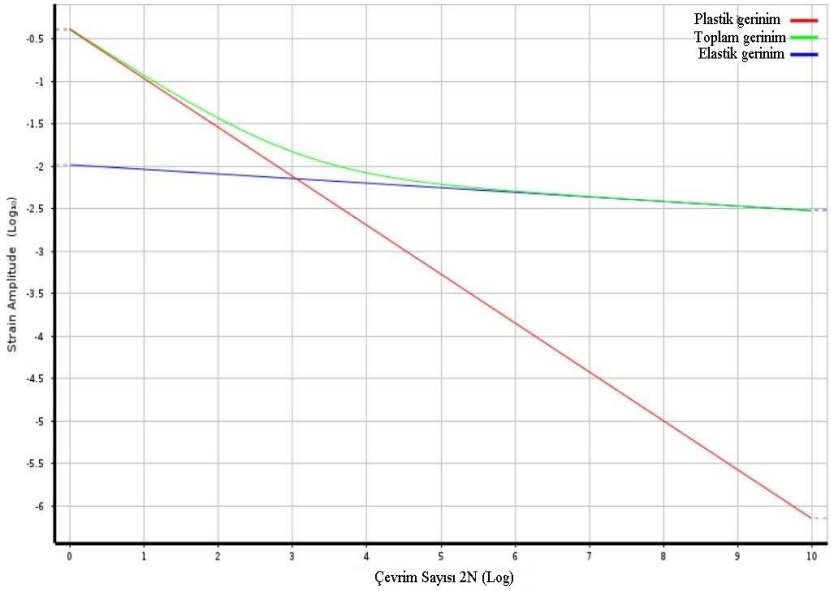


Şekil 8. Prototip modele ait yükleme durumu ve sınır şartları

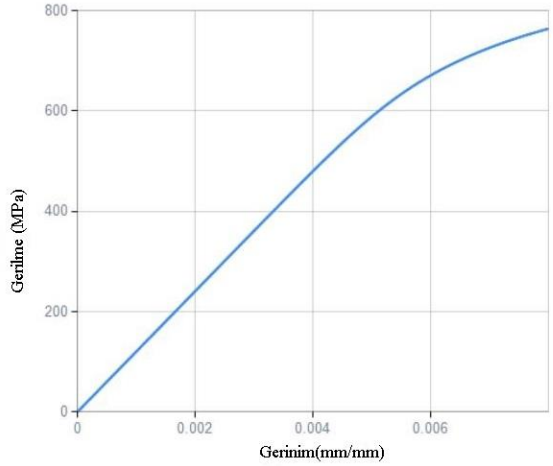
ARAŞTIRMA BULGULARI

Statik ve dinamik yükler altında çalışan kalça implantları total kalça artroplastisi ameliyatı sonrasında hastanın fiziksel faaliyetlerini sürdürebilmesi kritik öneme sahiptir. Tekrarlı gerilmeler altında çalışan protez yüzeylerinde, zamana bağlı olarak, belirli tekrarlanma sayıları sonunda çatlaklar meydana gelebilir. Çatlakların ilerlemesi sonucunda da malzemede kırılmalar oluşmaktadır. Bu çalışmada, kalça protezi prototip modeli TS EN ISO 7206-4 ve ASTM F2996-20 standartlarına uygun olarak ANSYS 19.1 sonlu elemanlar yazılımı ile yorulma dayanımı analizi yapılmıştır.

Mevcut prototip modelin sonlu elemanlar analizinde kullanılan Ti6Al4V (Grade 5) malzemesine ait deneysel gerinme genliği- çevrim ve gerilme-gerinme diyagramı Şekil 9 ve Şekil 10'da gösterilmiştir.

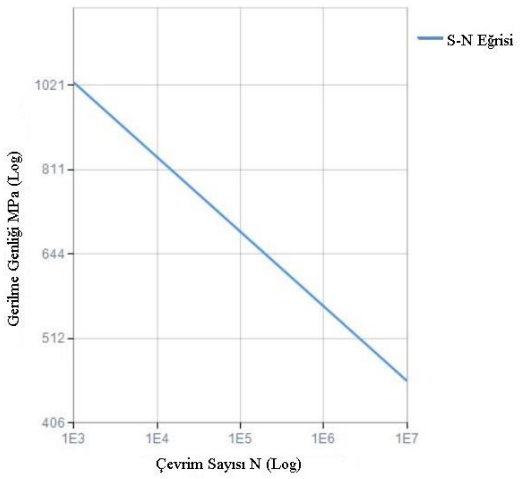


Şekil 9. Ti6Al4V grade 5 malzemesine ait gerinme genliği- çevrim diyagramı [32]

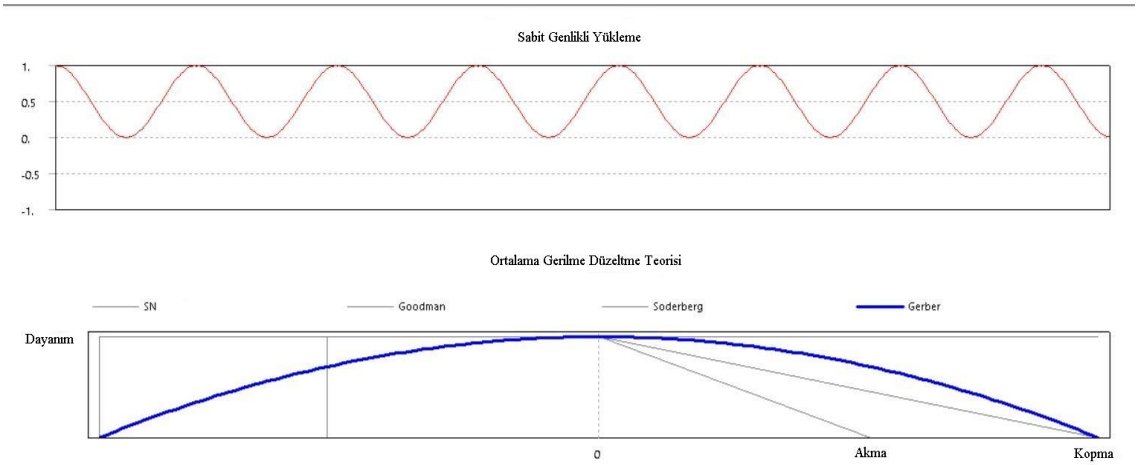


Şekil 10. Ti6Al4V grade 5 malzemesine ait gerilme-gerinme diyagramı [32]

Kullanılan Ti6Al4V (Grade 5) malzemesine ait gerilme genliğinin çevrim sayısına bağlı olarak değişimi ve deneysel tam çevrim sabit genlikli yükleme durumu Şekil 11 ve Şekil 12'de gösterilmiştir.



Şekil 11. Ti6Al4V grade 5 malzemesine ait gerilme genliğinin çevrim sayısına bağlı olarak değişimi[32]



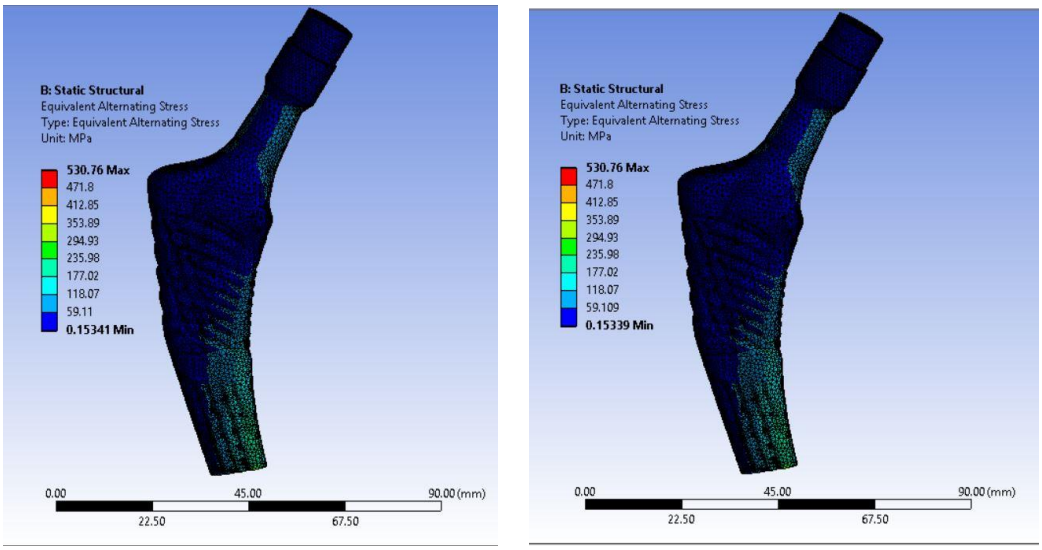
Şekil 12. tam çevrim sabit genlikli yükleme durumu ve ortalama gerilme düzeltme teorisi

Yorulma ömrü modeli belirlemek için temel yöntemler, yorulma ömrü testi ve yorulma ömrü analizleridir. Yorulma ömrü testi, yüksek bir maliyete ve çevrim süresine sahiptir. Yorulma ömrü sonlu elemanlar analizleri, yükleme geçmişine ve malzemelerin yorulma özelliklerine dayanmaktadır.

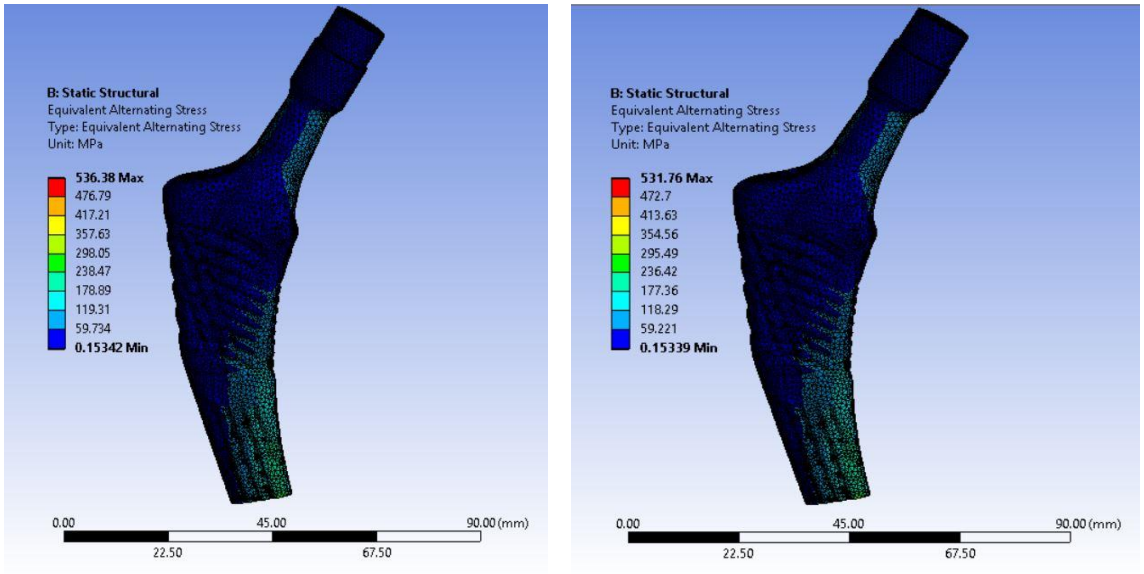
Prototip modele ait sonlu elemanlar analiz sonuçlarından elde edilen eşdeğer ortalama gerilmeleri Çizelge 3 ve Şekil 13- 14'te gösterilmiştir.

Çizelge 3. Prototip modele ait sonlu elemanlar eşdeğer ortalama gerilmeleri

Ortalama Gerilme Teorisi	**Eşdeğer Ortalama Gerilme**	
Goodman	530,76	MPa
Soderberg	536,38	MPa
Gerber	531,76	MPa
Ortalama Gerilme Eğrileri	530,76	MPa



Şekil 13. Eşdeğer ortalama gerilmeler: Goodman(solda) ve ortalama gerilme eğrileri(sağda)

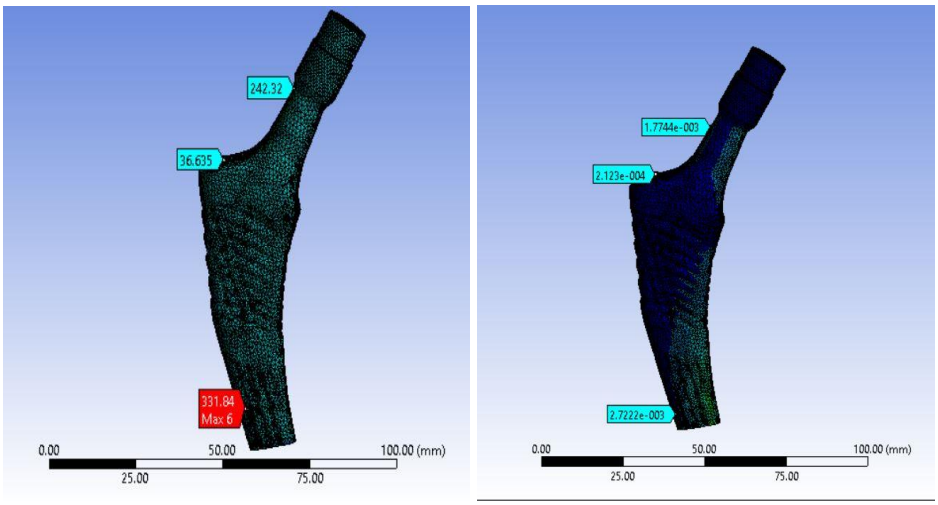


Şekil 14. Eşdeğer ortalama gerilmeler: Soderberg (solda) ve Gerber (sağda)

Oluşturulan sonlu elemanlar modeli TS ISO 7206-4[7] ve ASTM F2996-20[10] standartlarında belirtilen yükleme ve lineer statik analiz yapılarak sonuçlar Çizelge 4 ve Şekil 15'te gösterilmiştir.

Çizelge 4. Prototip modele ait gerilme ve şekil değiştirmeler

Gerilme/Gerinme Tipi	Boyun Bölgesinde	Sürücü Bölgesinde	Gömülme Bölgesi
Maksimum Eksenel Gerilme (MPa)	242,32	36,635	331,84
Von Mises Gerilmesi (MPa)	298,02	36,413	345,03
Birim Şekil değiştirme(mm/mm)	0,00203	0,0009	0,00316



Şekil 15. Prototip modele ait eksenel gerilme ve birim şekil değiştirmeler

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, yeni tasarlanmış fakat laboratuvar testlerinden henüz geçmemiş çimentosuz kalça protezinin yorulma performansını tahmin etmek amacıyla Tersine Mühendislik (RE) ve Sonlu Elemanlar Analizi (FEA) yöntemlerini kullanarak nümerik bir araştırma yapılmıştır. Tüm statik ve yorulma analizlerini gerçekleştirmek için kullanılan Ti-6Al-4V (Grade 5) titanyum alaşımlı kalça sapının sonlu elemanlar gerilme / gerinim dağılımları ve yorulma ömrü tahmin sonuçları değerlendirilmiştir.

Kalça protezi üzerine etkiyen gerilmelerin, protez malzemesinin akma gerilme sınırının altında kaldığı ve tek sefer uygulanan statik yüklemelerde protez üzerinde herhangi bir hasar görülmez. Ancak aynı yükleme durumu tekrarlı şekilde uygulandığında akma gerilmesinin oldukça altında gerilmeler oluşmasına rağmen malzeme üzerinde çatlak oluşumu veya kırılma gibi hasarlar meydana getirebilmektedir. Bu durum yorulma prensipleri ile açıklanmaktadır. Bu çalışmada, kalça protezi prototip modeli ISO 7206-4 ve ASTM F2996-20 standartlarına uygun olarak ANSYS sonlu elemanlar yazılımı ile yorulma analizleri yapılmıştır. Prototip modele ait sonlu elemanlar eşdeğer ortalama gerilmeleri sonuçları ile Ti6Al4V malzemesine ait gerilme genliği-çevrim sayısı diyagramı karşılaştırıldığında ortalama yorulma gerilmelerinin 5 milyon çevrim için güvenli aralıkta kaldığı görülmüştür.

Malzemelerin yorulma servis ömürleri yorulma testleri veya sonlu eleman analizleri sonucunda tahmin edilebilmektedir. Ancak deneysel olarak yapılan çalışmalar ve kurulan deney düzenekleri, çoğu zaman ekonomiklikten uzaktır. Deneyin yapıldığı durumdan biraz farklı bir durum için tekrar deney yapılması gerekebilir. Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan statik ve dinamik analizler, deney sayısını en aza indirmek için kullanılabilir. Lokal gerilmelerin doğru hesaplanması için modelde oluşturulan sonlu eleman ağı düzgün ve yeterli mesh yoğunluğuna sahip olmalıdır. Yorulmadan kaynaklanan çatlak başlangıcı protezin yüzeyinde oluşacağı için özellikle yüzeydeki eleman ağına dikkat edilmelidir. Yorulma dayanımının protezin sınır koşulları, geometrik tasarımı ve malzeme özellikleri ile yüksek oranda ilişkili olduğu gözlenmiştir.

Sonuç olarak oluşturulan protez tasarımının beklenen mekanik davranışına dair ilk öngörüyü elde etmek için sonlu elemanlar yöntemini kullanmak; potansiyel olarak düşük performanslı protez tasarımlarını eleyerek statik ve dinamik etkilere karşı ilgili kriterleri sağlayabilen tasarımların geliştirilmesine imkan sağlayacaktır. Bu sayede tasarım doğrulama süreci daha verimli, ekonomik ve hızlı bir şekilde sonuçlandırılmış olacaktır.

KAYNAKLAR

[1] "OECD, Hip and knee replacement, in Health at a Glance 2017: OECD Indicators, OECD Publishing, Paris. https://doi.org/10.1787/health_glance-2017-en," 2017.

[2] F. Altıntaş, Ç. Uluçay, and T. Özler, "Total kalça artroplastisinde mekanik artsorunlar," *TOTBID Derg*, vol. 12, no. 3, pp. 254-67, 2013.

[3] Ł. Łapaj *et al.*, "Breakage of metal hip arthroplasty components: Retrieval and structural analysis," *Bio-medical materials and engineering*, vol. 30, no. 3, pp. 297-308, 2019.

[4] K. K. Eachempati, C. S. Dannana, S. Apsingi, V. K. Ponnala, G. Boyapati, and A. Parameswaran, "Trunnion fracture of femoral prosthesis following a large metal-on-metal uncemented total hip arthroplasty: a case report," *Arthroplasty*, vol. 2, no. 1, pp. 1-5, 2020.

[5] A. Z. Şenalp, G. Akgün, C. Canpolat, A. S. Öktem, and Ö. Kalbaran, "Design and Optimization of Sinusoidal Formed Femur Prosthesis," *J Nat Appl Sci*, vol. 18, pp. 123-134, 2014.

[6] O. Kayabaşı, "Probabilistic approach on the analysis of a Kayabaşı_Ekici type hip prosthesis using approximate solution tecniques," 2011.

[7] *ISO 7206-4, Implants for Surgery - Partial and Total Hip Joint Prostheses - Part 4: Determination of Endurance Properties and Performance of Stemmed Femoral Components, ISO - International Organization for Standardization; Geneva, Switzerland.*, 2010.

[8] *ISO 7206-6, Implants for surgery-Partial and total hip joint prostheses - Part 6: Endurance properties testing and performance requirements of neck region of stemmed femoral components. ISO - International Organization for Standardization; Geneva, Switzerland.*, 2013.

[9] *Implants for surgery — Partial and total hip-joint prostheses*, I. O. f. Standardization, 2018.

[10] *ASTM F2996-20, Standard Practice for Finite Element Analysis (FEA) of Non-Modular Metallic Orthopedic Hip Femoral Stems, ; PA, USA.*, 2020.

[11] S. A. S. I. ANSYS (2019), Houston, PA, USA., 2019.

[12] M. Taylor and P. J. Prendergast, "Four decades of finite element analysis of orthopaedic devices: where are we now and what are the opportunities?," *Journal of biomechanics*, vol. 48, no. 5, pp. 767-778, 2015.

[13] K. Chethan, M. Zuber, and S. Shenoy, "Optimized trapezoidal-shaped hip implant for total hip arthroplasty using finite element analysis," *Cogent Engineering*, vol. 7, no. 1, p. 1719575, 2020.

[14] T. Çelik, Kişioğlu, Y., "New Hip Prosthesis Design and Evaluation with Using Finite Element Analysis," *Politeknik Dergisi*, vol. 1-1 . 2021. [Online]. Available: https://dergipark.org.tr/en/pub/politeknik/issue/33364/793728.

[15] S. Jaecques, C. Pastrav, A. Zahariuc, and G. Van der Perre, "Analysis of the fixation quality of cementless hip prostheses using a vibrational technique," in *Proceedings of ISMA*, 2004: Citeseer, pp. 443-456.

[16] J.-P. Kassi, M. O. Heller, U. Stoeckle, C. Perka, and G. N. Duda, "Stair climbing is more critical than walking in pre-clinical assessment of primary stability in cementless THA in vitro," *Journal of biomechanics*, vol. 38, no. 5, pp. 1143-1154, 2005.

[17] C. Ruther *et al.*, "Current possibilities for detection of loosening of total hip replacements and how intelligent implants could improve diagnostic accuracy," in *Recent advances in arthroplasty*: IntechOpen, 2012.

[18] S. Koob *et al.*, "Diagnosis of peri-prosthetic loosening of total hip and knee arthroplasty using 18F-Fluoride PET/CT," *Oncotarget,* vol. 10, no. 22, p. 2203, 2019.

[19] Ö. F. Bilgen, S. Bilgen, and C. Ermutlu, "Kalça protezlerinde malzeme ve tasarım özellikleri," *TOTBİD Dergisi,* vol. 10, no. 2, pp. 147-157, 2011.

[20] S. Shuib, M. Ridzwan, A. Hassan, and M. Ibrahim, "Topology optimisation of hip prosthesis to reduce stress shielding," *WIT Transactions on The Built Environment,* vol. 80, 2005.

[21] Z. R. MI, S. Shuib, A. Hassan, A. Shorki, and M. Ibrahim, "Problem of Stress Shielding and Improvement to the Hip Implat Designs: A Review," *J. Med. Sci,* vol. 7, no. 3, pp. 460-467, 2007.

[22] M. Cilla, S. Checa, and G. N. Duda, "Strain shielding inspired re-design of proximal femoral stems for total hip arthroplasty," *Journal of Orthopaedic Research,* vol. 35, no. 11, pp. 2534-2544, 2017.

[23] Y. He, D. Burkhalter, D. Durocher, and J. M. Gilbert, "Solid-lattice hip prosthesis design: applying topology and lattice optimization to reduce stress shielding from hip implants," in *2018 Design of Medical Devices Conference*, 2018: American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.

[24] M. Heyland, S. Checa, D. Kendoff, and G. N. Duda, "Anatomic grooved stem mitigates strain shielding compared to established total hip arthroplasty stem designs in finite-element models," *Scientific reports,* vol. 9, no. 1, pp. 1-11, 2019.

[25] A. Pasinli, "Biyomedikal uygulamalarda kullanılan biyomalzemeler," *Makine Teknolojileri Elektronik Dergisi,* vol. 4, no. 2, pp. 25-34, 2004.

[26] C. Pekşen and A. Doğan, "İmplant dayanımı," *Türk Ortopedi ve Travmatoloji Birliği Derneği Dergisi,* vol. 10, no. 2, pp. 122-128, 2011.

[27] R. Narayan, "Fundamentals of medical implant materials," *ASM handbook,* 2012.

[28] T. M. Grupp, T. Weik, W. Bloemer, and H.-P. Knaebel, "Modular titanium alloy neck adapter failures in hip replacement-failure mode analysis and influence of implant material," *BMC musculoskeletal disorders,* vol. 11, no. 1, pp. 1-12, 2010.

[29] D. Sumner, "Long-term implant fixation and stress-shielding in total hip replacement," *Journal of Biomechanics,* vol. 48, no. 5, pp. 797-800, 2015.

[30] A. Şık, M. Önder, and M. S. Korkmaz, "Taşıt jantlarının yapısal analiz ile yorulma dayanımının belirlenmesi," *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi Part C: Tasarım ve Teknoloji,* vol. 3, no. 3, pp. 565-574, 2015.

[31] F. Kaya, G. İnce, M. Avcar, and L. Yünlü, "Kalça Protezi Tasarımının Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Statik Analizi," *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi,* vol. 9, no. 1, pp. 199-208, 2021.

[32] Materials data for cyclic loading: supplement 1 / A. Bäumel, Jr., T. Seeger / Elsevier / 1990 [Online] Available: https://portal.totalmateria.com/tr/extended-range/fatigue-data/materials/3210970/fatigue

PANTOGRAFİK METAMALZEMELERİN MEKANİK DAVRANIŞININ İKİNCİ DERECEDEN GRADYAN TEORİSİ İLE MODELLENMESİ VE BÜNYE PARAMETRELERİNİN BELİRLENMESİ

M. Erden Yıldızdağ
[1]İstanbul Teknik Üniversitesi, Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, İstanbul

ABSTRACT

Recently, due to new advancements in manufacturing technologies, design and manufacturing of structures showing unprecedented and exotic properties has become a topical subject in both academic and industrial research activities. In this study, mechanical behavior of pantographic metamaterials is investigated by a second-gradient continuum model developed based on a micro-macro identification procedure. Importantly, an in-depth investigation is presented to determine the constitutive parameters of the proposed model accordingly. To this end, a computationally-intensive first-gradient continuum model (i.e., Cauchy continuum) is also developed and used as a reference to identify the constitutive parameters of the second-gradient model. To show the applicability of the proposed model and determine the constitutive parameters, finite element method simulations are conducted for various structural behavior of a pantographic layer. Also, a sensitivity analysis is presented to elucidate the effects of geometric properties of the pantographic layer.

Keywords: mechanical metamaterials; second-gradient model; finite element method; mathematical modeling

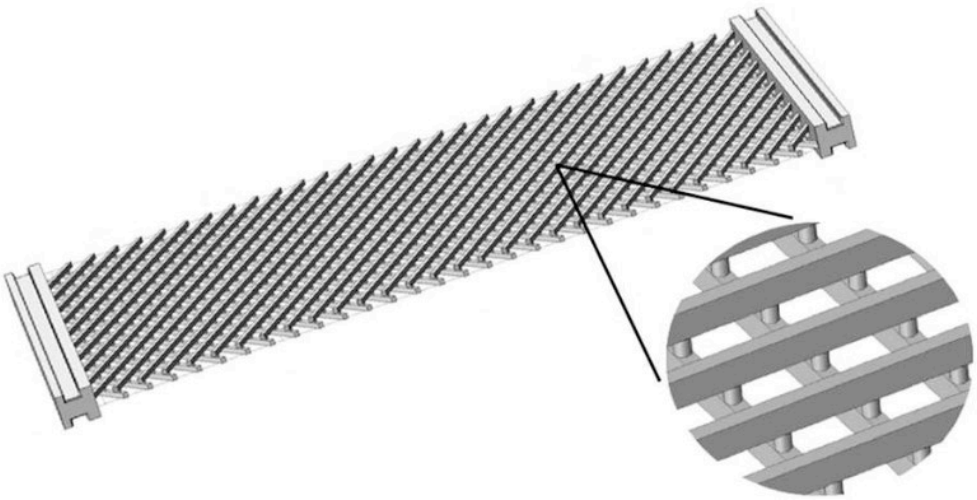
ÖZET

Son yıllardaki üretim ve malzeme teknolojilerindeki gelişmelere bağlı olarak değişik tipte metamalzemelerin dizaynı ve üretimi akademik ve endüstriyel araştırmalarda popüler bir konu haline gelmiştir. Bu çalışmada pantografik metamalzemelerin mekanik davranışı mikro-makro özdeşleştirme prosedürü ile geliştirilmiş bir ikinci dereceden gradyan modeli ile incelenmiştir. Önemli olarak, kullanılan modelin bünye parametrelerinin belirlenmesi için detaylı bir analiz gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, kullanılan ikinci dereceden gradyan modeline referans olması için incelenen yapının klasik birinci dereceden gradyan modeli (Cauchy sürekli ortamı) de oluşturulmuştur. İlgili sonlu elemanlar metodu simülasyonları bir pantografik yapının farklı tipte davranışlarını incelemek için gerçekleştirilmiş ve bünye parametreleri belirlenmiştir. Ayrıca, pantografik yapının geometrik özelliklerinin yapının genel davranışını nasıl etkilediği analiz edilmiştir. Bu çalışmada önerilen ikinci dereceden gradyan modelinin uygulanabilirliği gösterilmiş ve model için uygun bünye parametreleri belirlenmiştir.

Anahtar kelimeler: mekanik metamalzemeler; ikinci dereceden gradyan modeli; sonlu elemanlar; matematiksel modelleme

GİRİŞ

Özellikle son yıllarda hızla gelişen eklemeli imalat teknolojileri farklı dizayn ve üretim bakış açılarının oluşmasını sağlamış ve böylece metamalzemeler üzerine yapılan çalışmalar son yıllarda ivme kazanmıştır [1]. Burada metamalzeme kelimenin kökünde yer alan "meta" teriminden de anlaşılacağı üzere geleneksel yapısal davranışlara sahip olmayan yapılar için kullanılan genel bir terimdir. Bu çalışma kapsamında mekanik metamalzemelerden biri olarak olarak kabul gören pantografik yapılar incelenmektedir. Mekanik metamalzemelerde bahsi geçen geleneksel olmayan davranış yapıyı oluşturan farklı katmanlardaki farklı yapısal dizilimlerin birbiriyle olan etkileşimleri sonucu meydana gelmektedir. Pantografik bir katman iki fiber ailesinin birbirleriyle pivotlar aracılığı ile bağlanması sonucu elde edilir ve deforme olmamış bir katmanda fiber aileleri birbirine göre diktir (Şekil 1).



Şekil 1. Pantografik bir katman.

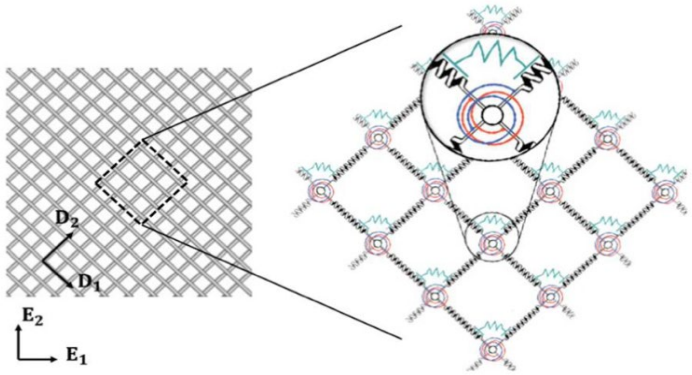
Üretim ve malzeme teknolojilerindeki gelişmeler aynı zamanda mekanikçilerin yeni teorilerin üzerine çalışılmasını kaçınılmaz kılmıştır. Bu süreçte, özellikle 1950'li ve 1960'lı yıllarda tasavvur edilen birçok teorik çalışmanın varlığı yeni teknolojilerle üretilen malzemelerde gözlemlendiği ortaya çıkmıştır. Burada en önemli nokta dizayn edilen malzemelerde geometrik bakış açısının değişmesiyle karışık yapısal dizilimlere sahip mikroyapılı malzemelerin üretiminin geçmişe göre mümkün kılınmasıdır. Bu çalışmada ele alınan pantografik metamalzemeler nozül ekstrüzyonu ve toz yataklı ergitme gibi eklemeli imalat yöntemleri ile üç boyutlu baskıları kolaylıkla gerçekleştirebildiği için son yıllarda fazlasıyla ilgi görmektedir. Bu ilginin en önemli sebeplerinden biri de yenilikçi teorik modelleme yaklaşımlarının önünü açmasıdır. Her ne kadar "klasik" veya "birinci dereceden gradyan" teorisi olarak adlandırabileceğimiz ve klasik sürekli ortamlar mekaniğinin temelini oluşturan deformasyonun yerleştirme vektörünün birinci gradyanı (deformasyon gradyanı) ile karakterize edilmesi yaklaşımı bir çok problem için etkili olsa da karmaşık mikroyapılı malzemeler için sayısal simülasyonlar açısından önemli sorunlar teşkil etmektedir. Buradaki ana nokta klasik teorinin yetersizliğinden çok yapının karmaşıklığı arttıkça klasik teorinin uygulanabilirliği için gereksinim gördüğü geometrinin ve ağ yapısının tanımlanıp analizlerin gerçekleştirilmesidir. Ele alınan yapının karmaşıklığına da bağlı olarak modelleme ve analizleri gerçekleştirme sürelerinin ciddi bir yük getirme ihtimali yüksektir. Bu sebeple değişen dizayn ve üretim anlayışı ile beraber yüksek dereceden gradyan teorileri karmaşık malzemelerin matematiksel modellerinin oluşturulması için son yıllarda fazlasıyla çalışılmıştır (örneğin, bakınız Yildizdag ve diğ. [2] ve Spagnuolo ve diğ. [3]).

Bu çalışma kapsamında pantografik katmanların yapısal analizi için kullanılabilecek bir ikinci dereceden gradyan matematiksel model tanıtılacak ve bu matematiksel model için optimum bünye parametreleri tespit edilmeye çalışılacaktır. Çalışmaya referans olması için ele alanına pantografik yapının üç boyutlu analizi klasik teori çerçevesinde gerçekleştirilecek, ve ikinci dereceden gradyan modeli için optimum bünye parametreleri bir genetik algoritma yardımıyla tespit edilecek ve elde edilen optimum bünye parametreleri literatürde yer alan diğer sonuçlar ile karşılaştırılacaktır.

MATEMATİKSEL MODEL

Bu çalışmadaki sayısal analizler için dell'Isola ve diğ. [4] tarafından pantografik yapıların analizi için önerilmiş iki boyutlu ikinci dereceden gradyan teorisine dayalı matematiksel model kullanılmıştır. Bu matematiksel model, pantografik yapıların analizi için önerilmiş ilk modeldir, ve daha sonraki yıllarda bu model Spagnuolo ve diğ. [5] ve Giorgio [6] tarafından yürütülen çalışmalarla daha da geliştirilerek yeni versiyonları önerilmiştir.

İkinci dereceden sürekli ortamın tanımlanması için uygun bir mikro-makro özdeşleştirme prosedürü takip edilmiştir. Bunun için Şekil 2'de verilen ayrık mikro model kullanılmıştır. Burada her iki kiriş ailesinin kesişim noktalarında yer alan ve birbirlerine doğrusal ve dönel yaylarla birbirine bağlanmış parçacıklardan oluşan bir sistem göz önüne alınır. Daha sonra makro modele ait deformasyon enerjisi dell'Isola ve diğ. [4] tarafından gösterildiği gibi ayrık mikro model için postüle edilen deformasyon enerjisinin homojenizasyonu ile belirlenir. Böylece makroskopik deformasyon enerjisi mikroskobik enerjinin sahip olduğu bünye parametreleri cinsinden tanımlanır.



Şekil 2. Pantografik katmanın mikro modeli.

İkinci dereceden sürekli ortam için bir parçacığın yerleştirme vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) = \left(\boldsymbol{X}^{\alpha} + \boldsymbol{u}^{\alpha}\left(\boldsymbol{X}^{\beta}\right)\right)\mathbf{D}_{\alpha}.$$

Burada $\mathbf{D}_{\alpha}$ deforme olmamış konfigürasyonda her bir kiriş ailesinin sahip olduğu birim teğet vektörleri temsil etmektedir $(\alpha, \beta = 1{,}2)$. Benzer biçimde $\boldsymbol{u}^{\alpha}$ yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri ve $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$ ise dik Kartezyen eksen takımının birim vektörlerini göstermektedir.

Deforme-olmuş konfigürasyonda kirişlerin birim teğet vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{d}_{\alpha} = \frac{\mathbf{F}\mathbf{D}_{\alpha}}{\|\mathbf{F}\mathbf{D}_{\alpha}\|}.$$

Burada $\mathbf{F}$ deformasyon gradyanı olarak adlandırılır, $\mathbf{F} = \nabla\boldsymbol{\chi}$. İkinci dereceden sürekli ortamın toplam defomasyon enerjisi kirişlerin uzama ve eğilme davranışları, ve pivot burulmasını göz önüne alarak tanımlanır:

$$W(\varepsilon_\alpha, \kappa_\alpha, \gamma) = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{1}{2} K_e \varepsilon_\alpha^2 + \frac{1}{2} K_b \kappa_\alpha^2 \right) + \frac{1}{2} K_p \gamma^2.$$

Deformasyon enerjisi içerisinde bulunan terimler sırasıyla kirişlerdeki uzama,

$$\varepsilon_\alpha = \|\mathbf{F}\mathbf{D}_{\boldsymbol{\alpha}}\| - \mathbf{1},$$

eğrilik,

$$\kappa_\alpha = \|\mathbf{c}_\alpha - (\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{d}_\alpha)\mathbf{d}_\alpha\| = \|(\mathbf{I} - \mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\alpha)\mathbf{c}_\alpha\|$$

ve kirişlerin birbirlerine göre dönmesidir,

$$\gamma = \left| \cos^{-1}(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) - \frac{1}{2} \right|.$$

Eğrilik ifadesinin içerisinde bulunan $\mathbf{c}_\alpha$ vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır

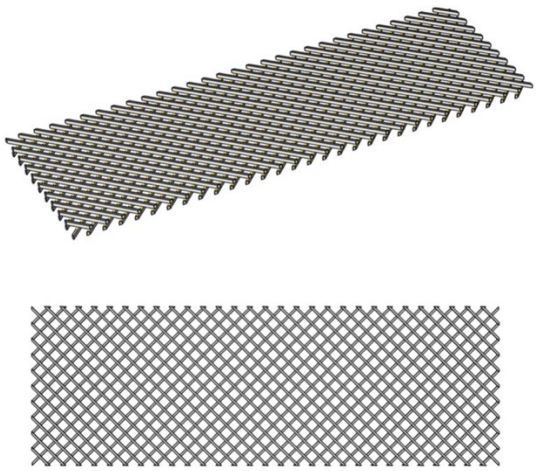
$$\mathbf{c}_\alpha = \frac{\nabla \mathbf{F}(\mathbf{D}_\alpha \otimes \mathbf{D}_\alpha)}{\|\mathbf{F}\mathbf{D}_\alpha\|}$$

ve bu tanımdaki $\nabla \mathbf{F}$ ifadesinden de görüleceği gibi yerleştirme vektörünün ikinci gradyanı modelin içerisinde yer almaktadır. Sonuç olarak, problemin yönetici denklemleri aşağıdaki varyasyonel ifade ile elde edilir:

$$\delta \int_\Omega W(\varepsilon_\alpha, \kappa_\alpha, \gamma)\, d\Omega = 0, \quad \forall\, \delta \mathbf{u}.$$

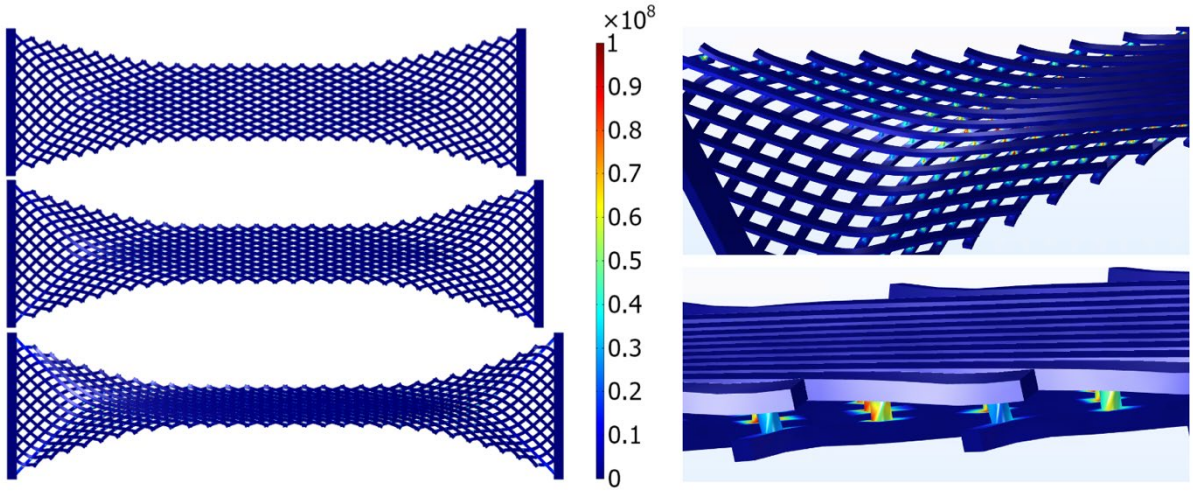
SAYISAL ANALİZ VE BULGULAR

Çalışma kapsamında Şekil 3'te gösterilen Giorgio [7] tarafından da incelenen boyu 210 mm yüksekliği ise 70 mm olan bir pantografik kafes yapının mekanik davranışı göz önüne alınacaktır. Giorgio [7] çalışmasında yapının boy ve yükseklik değerlerini sabit tutarak yapının mikro parametrelerinin (kiriş kesit geometrisi pivot yüksekliği ve pivot yarıçapı) farklı olduğu 6 farklı pantografik kafes yapı için uygun bünye parametrelerini sadece çekme testine göre belirlemeye çalışmıştır. Bu çalışmada kullanılan pantografik katmanı oluşturan kirişlerin kesitleri yüksekliği 0.9 mm genişliği ise 1.6 mm olan bir dikdörtgen şekilde olup, kiriş ailelerinin bağlantısını sağlayan pivotların yüksekliği 1 mm yarıçapı ise 0.45 mm'dir. Malzeme özellikleri ise elastisite modülü 1600 MPa ve Poisson oranı 0.3 olarak alınmıştır.



Şekil 3. Sayısal çalışmada kullanılan pantografik katman [7].

İlk olarak, pantografik yapının analizi klasik teori çerçevesinde ele alınarak genetik algoritmaya dayalı optimizasyon için referans çözüm elde edilmiştir. Bu analizler için COMSOL Multiphysics® yazılımı ve yazılımın sahip olduğu MATLAB® arayüzünü kullanarak problem parametrik olarak tanımlanmıştır. Üç boyutlu analizler için yapıyı oluşturan bütün kiriş ve pivotlar için ağ yapısı üçgen piramit hacim elemanlar yardımıyla oluşturulmuştur. Malzeme modeli olarak ise St. Venant-Kirchhoff modeli tercih edilmiştir.



Şekil 4. Üç boyutlu analiz sonuçları: Çekme testinde farklı deformasyon adımları (0.05 m, 0.06 m ve 0.07 m) ve şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu dağılımı ($\mathrm{J/m^3}$).

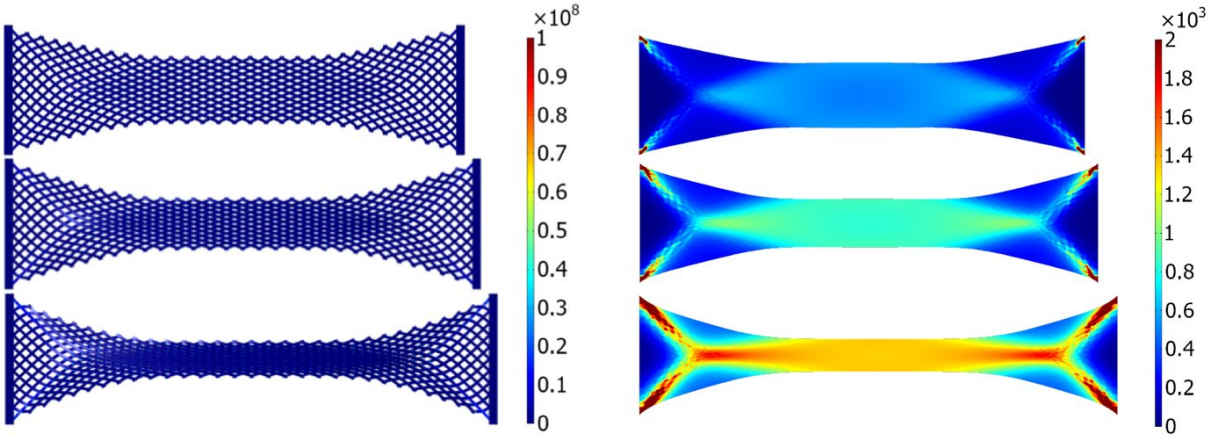
Şekil 4'te görüldüğü gibi pantografik katman kısa kenarının uzunluğu kadar nümerik çekme testine maruz bırakılmıştır. Üç boyutlu analizin sonuçlarına göre şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu pivotlarda yüksektir. Özellikle kirişlerin fazla eğilmeye uğradığı bölgelerdeki pivotlardaki şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu yüksek olduğu açıktır. Koşturulacak genetik algoritma için alınan referans data 7 farklı çekme uzunluğu (0.01 m, 0.02 m, 0.03 m, 0.04 m, 0.05 m, 0.06 m ve 0.07 m) için belirlenen 319 farklı pivotun x-y düzlemindeki yer değiştirmeleri, yapının sabit kenarında oluşan reaksiyon kuvvetleri, ve elde edilen toplam şekil değiştirme enerjisidir.

Referans data oluşturulduktan sonra ikinci dereceden modelin bünye parametreleri (K_e, K_b ve K_p değerleri) efektif bir genetik algoritma ile tespit edilmeye çalışılmıştır. Pantografik yapıları ile ilgili literatürde yer alan bir çok çalışmada bünye parametreleri için önerilen eşitliker aşağıdaki gibidir:

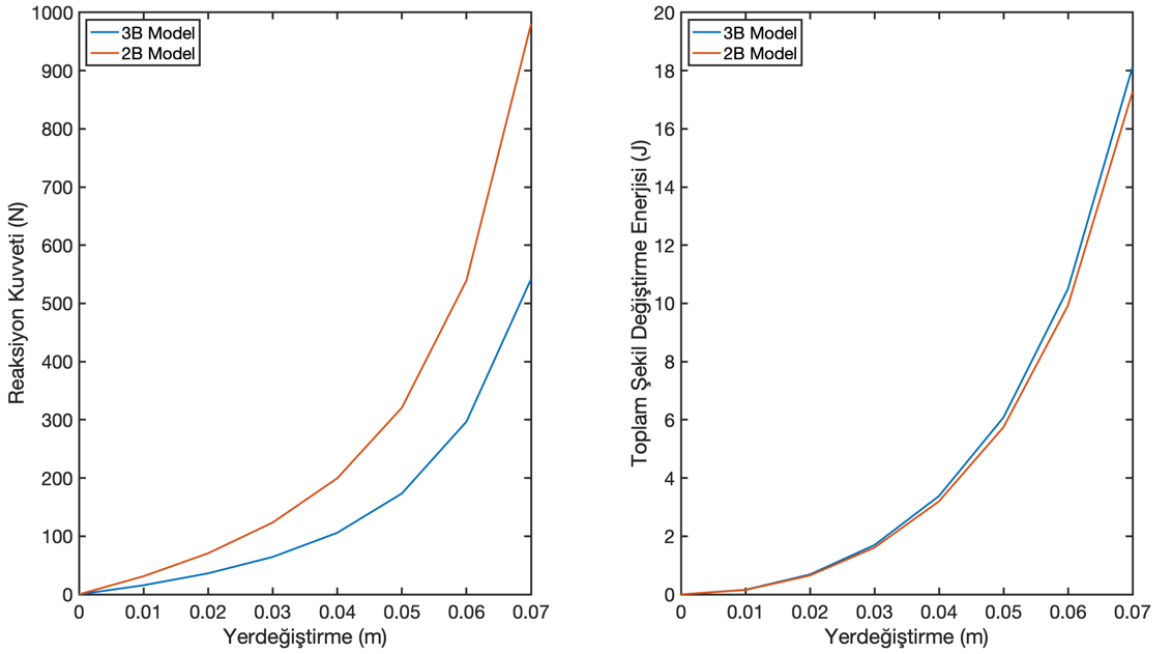
$$K_e = \frac{EA}{p}, \quad K_b = \frac{EI}{p}, \quad K_p = \frac{GJ}{h_p p^2}.$$

Burada E elastisite modülü A kiriş kesitinin alanı I kiriş kesitinin atalet momenti G kayma modülü J pivot kesitinin polar atalet momenti h_p pivot yüksekliği ve p pivotlar arasındaki mesafedir. Bu önerilen değerler her ne kadar mertebe olarak tutarlı sonuçlar verse de elde edilen yerdeğiştirme ve reaksiyon kuvvet değerleri referans değerlerden farklı çıkabilmektedir. Bu fark elde edilen değerlerin Şekil 5 ve 6'da karşılaştırılması ile açık bir şekilde görülmektedir. Şekil 5'te her ne kadar deformasyon benzer dursa da Şekil 6'da verilen karşılaştırmalarda özellikle reaksiyon kuvveti için önemli bir fark gözlemlenmektedir. Bu farklar pantografik

yapının geometrik parametreleri ve ele alınan teste göre (çekme basma kayma vb) değişecektir. Bu çalışma sadece çekme durumundaki yapısal davranışı ele almaktadır.



Şekil 5. 3 boyutlu klasik çözüm ve 2 boyutlu ikinci dereceden gradyan modeline dayalı çözüm ile elde edilen deformasyonların karşılaştırılması.

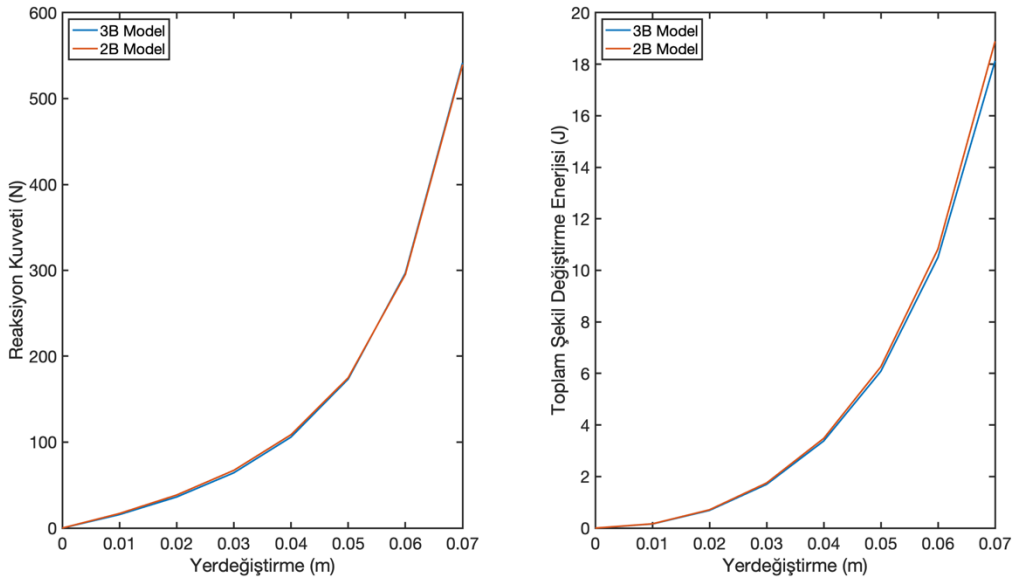


Şekil 6. Önerilen bünye parametreleri için reaksiyon kuvveti ve toplam şekil değiştirme enerjisi değerlerinin karşılaştırılması.

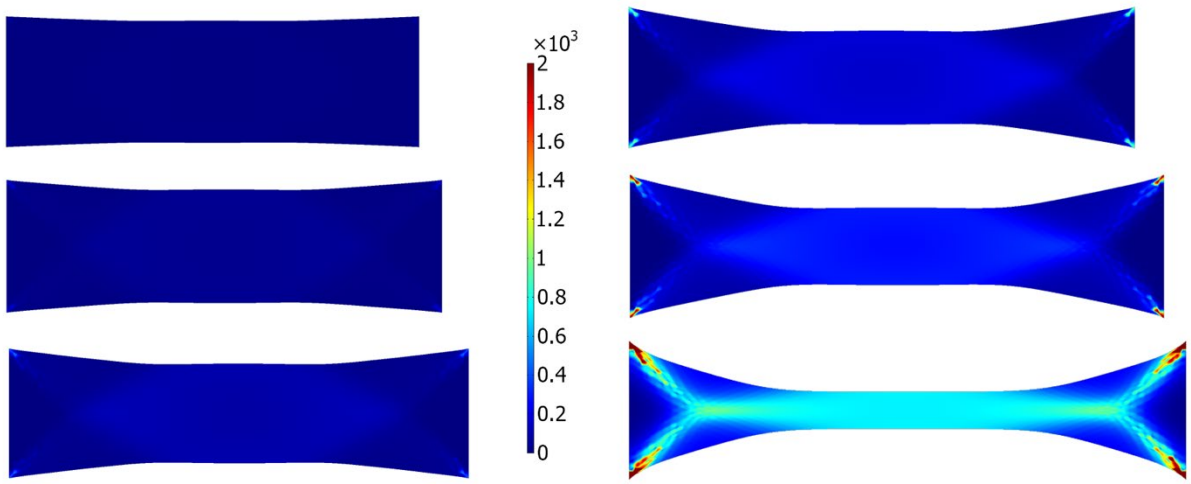
Şekil 6'da gösterilen farkları minimuma indirecek optimum bünye parametreleri önerilen değerlerin sırasıyla $\bar{a}$, $\bar{b}$ ve $\bar{c}$ katsayıları ile çarpılarak tanımlanmış ve oluşturulan genetik algoritma ile bu katsayıların belirlenmesi amaçlanmıştır:

$$K_e^{opt} = \bar{a}\frac{EA}{p}, \quad K_b^{opt} = \bar{b}\frac{EI}{p}, \quad K_p^{opt} = \bar{c}\frac{GJ}{h_p p^2}.$$

Optimizasyon sonuçları $\bar{a} = 0.5585$, $\bar{b} = 1.4259$ ve $\bar{c} = 0.5318$ olarak elde edilmiştir. Bu değerler ile elde edilen karşılaştırmalara Şekil 7'de yer verilmiştir. Şekil 7'de görüldüğü gibi elde edilen reaksiyon kuvvetleri ve toplam şekil değiştirme enerjileri iyi bir uyum içerisindedir.



Şekil 7. Optimize edilen bünye parametreleri için reaksiyon kuvveti ve toplam şekil değiştirme enerjisi değerlerinin karşılaştırılması.



Şekil 8. Optimize edilen bünye parametreleri ile gerçekleştirilen analizin sonuçları. Kontur çizimler toplam şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu verisi ile oluşturulmuştur (J/m^2)

Belirlenen yeni bünye parametreleri ile gerçekleştirilen simülasyonları 3 boyutlu sonuçlar ile karşılaştırmaları Şekil 8'de gösterilmiştir. Bu karşılaştırmalarda da deformasyon karakterlerinin uyum içerisinde olduğu açıktır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada önerilen ikinci mertebeden gradyan teorisine dayalı matematiksel modelin uygulanabilirliğinin gösterilmesi ve uygun bünye parametrelerinin belirlenmesi için çeşitli simülasyonlar ile detaylı bir analiz gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen basit bir genetik algoritma ile çekme durumundaki pantografik yapının ikinci dereceden gradyan modeli ile analiz edilebilmesi için gerekli bünye parametreleri belirlenmiştir. Özellikle önerilen modelin çözümünün hızlı sonuç vermesi genetik algoritmaya dayalı optimizasyonun hızlıca sonuç vermesine olanak vermiştir. Gelecek çalışmalarda basma ve kayma gibi farklı malzeme

testlerinin de göz önüne alındığı daha kapsamlı bir optimizasyon çerçevesi sunulmaya çalışılacaktır. Ayrıca optimum bünye parametrelerini belirleyen (boyutsuz) geometrik parametreler tespit edilmeye çalışılacaktır. Böylece uygun bünye parametreleri geometrik ve malzeme parametrelerine bağlı olarak yeniden tanımlanmaya çalışılacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Yildizdag, M. E., Tran, C. A., Barchiesi, E., Spagnuolo, M., Dell'Isola, F., & Hild, F. (2019). A multi-disciplinary approach for mechanical metamaterial synthesis: a hierarchical modular multiscale cellular structure paradigm. In *State of the art and future trends in material modeling* (pp. 485-505). Springer, Cham.

[2] Yildizdag, M. E., Barchiesi, E., & dell'Isola, F. (2020). Three-point bending test of pantographic blocks: numerical and experimental investigation. *Mathematics and Mechanics of Solids*, *25*(10), 1965-1978.

[3] Spagnuolo, M., Yildizdag, M. E., Andreaus, U., & Cazzani, A. M. (2021). Are higher-gradient models also capable of predicting mechanical behavior in the case of wide-knit pantographic structures?. *Mathematics and Mechanics of Solids*, *26*(1), 18-29.

[4] dell'Isola, F., Giorgio, I., Pawlikowski, M., & Rizzi, N. L. (2016). Large deformations of planar extensible beams and pantographic lattices: heuristic homogenization, experimental and numerical examples of equilibrium. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *472*(2185), 20150790.

[5] Giorgio, I., Rizzi, N. L., & Turco, E. (2017). Continuum modelling of pantographic sheets for out-of-plane bifurcation and vibrational analysis. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *473*(2207), 20170636.

[6] Spagnuolo, M., Barcz, K., Pfaff, A., Dell'Isola, F., & Franciosi, P. (2017). Qualitative pivot damage analysis in aluminum printed pantographic sheets: numerics and experiments. *Mechanics Research Communications*, *83*, 47-52.

[7] Giorgio, I. (2016). Numerical identification procedure between a micro-Cauchy model and a macro-second gradient model for planar pantographic structures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 67(4), 1-17.

YAPIŞTIRICI İLE BİRLEŞTİRİLMİŞ TEK TESİRLİ BİNDİRME BAĞLANTILARINDA BAĞLANTI GEOMETRİSİ DEĞİŞİKLİĞİNİN KOPMA YÜKÜ ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Hüseyin Tok[1], Adnan Özel[2]
[1,2] Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Erzincan

ABSTRACT

Lap joints aplication are made by using adhesives in many areas. Previous years lap joins are made by usin withbolts and rivets. These materials have advantages and disadvantages. The adhesive industry which has developed rapidly in the fallowing years, has enabled the use of adhesives in lap joints. The most important disavantages of lap joints is that thes moment which are generated at a connection area (joint face). In single-action lap joints, when the joined elements are subjected to tensile force from their end points, moment occurs in the lap area. The main reason for the moment formation is that the applied force acts on different points from the center of gravity of the joint. This situation negatively affects the breaking load of the adhesive in lap joints. Some changes have been envisaged in the connection geometry in order to reduce the value and effects of the resulting moment and increase the performance of the adhesive.

The purpose of the chenges in geometry is to bring the drection of pulling force closer to the center of gravity of the connection. hereat increasing the breaking load by deereasing the value of the resulting moment is the main aim of the study. The taguchi method was used to determine the most suitable geometry. After joining the aluminum and steel plates with the classical overlay method using DP460 adhesive, the breaking load values were determined using the finite element method. Then, geometric changes were made on the plates and the breaking loads were determined using the finite element method. Finally, the study was completed by comparing all the obtained results and making the necessary evaluations.

Keywords: Aluminum, Connection, Mounting, Steel, DP460, Breaking Load, Moment, Finite Elements, Taguchi, Adhesive

ÖZET

Günümüzde birçok alanda, yapıştırıcılar kullanılarak bindirmeli bağlantı uygulamaları yapılmaktadır. Önceki yıllarda bindirmeli bağlantı işlemleri daha çok cıvata ve perçinler ile yapılmaktaydı. Kullanılan bu elemanların kendilerine özgü dezavantajları bulunmaktadır. Sonraki yıllarda büyük bir hızla gelişen yapıştırıcı sektörü bindirmeli bağlantılarda

yapıştırıcıların da kullanılmasına olanak sağlamıştır. Bindirmeli bağlantıların en belirgin dezavantajı, bindirme bölgesinde oluşan momenttir. Tek tesirli bindirme bağlantılarında, birleştirilen elemanların uç noktalarından çekme kuvvetine maruz bırakılması ile bindirme bölgesinde moment oluşmaktadır. Uygulanan kuvvetin, bağlantının ağırlık merkezinden farklı noktalara etki etmesi moment oluşumunun temel nedenidir. Bu durum bindirmeli bağlantılarda yapıştırıcının kopma yükünü olumsuz yönde etkilemektedir. Oluşan momentin değerini ve etkilerini azaltıp, yapıştırıcının performansını arttırabilmek için bağlantı geometrisinde bazı değişiklikler yapılması öngörülmüştür.

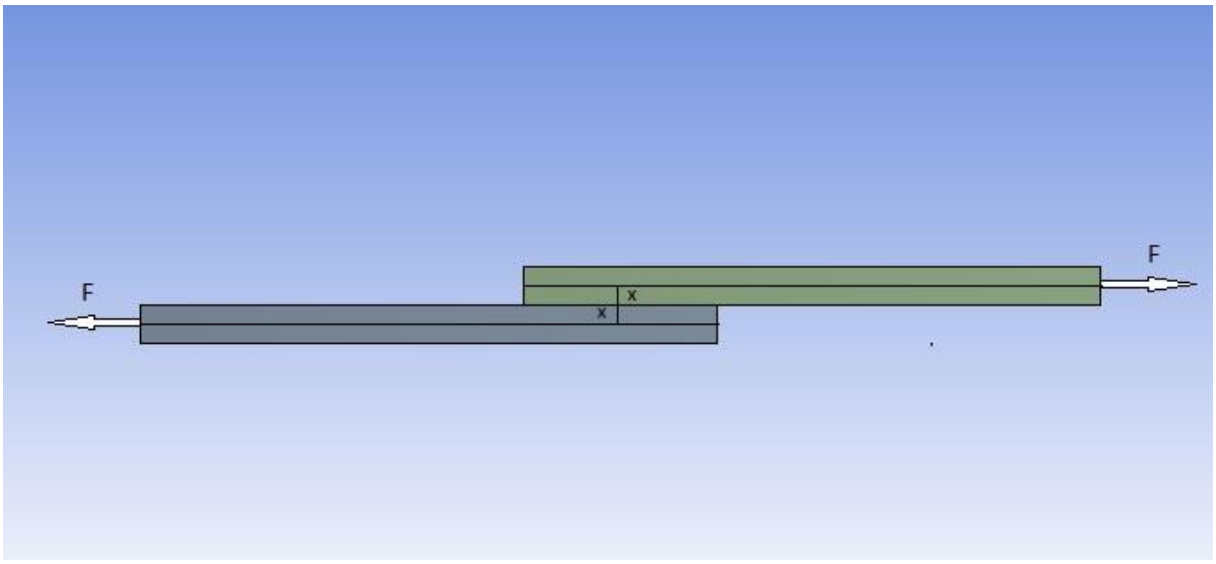
Geometride yapılan değişiklerin amacı çekme kuvveti doğrultusunun, bağlantının ağırlık merkezine yaklaştırılmasıdır. Bunun sonucunda oluşan momentin değeri azaltılarak, kopma yükünün arttırılması çalışmanın temel amacını içermektedir. En uygun geometrinin belirlenebilmesi için Taguchi yönteminden faydalanılmıştır. Alüminyum ve çelik plakaların, DP460 yapıştırıcı kullanılarak klasik bindirme yöntemi ile birleştirildikten sonra, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak kopma yükü değerleri belirlenmiştir. Daha sonra plakalar üzerinde geometrik değişiklikler yapılıp sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak kopma yükleri belirlenmiştir. Son olarak elde edilen tüm sonuçlar karşılaştırılıp, gerekli değerlendirmeler yapılarak çalışma tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Alüminyum, Bağlantı, Bindirme, Çelik, DP460, Kopma Yükü, Moment, Sonlu Elemanlar, Taguchi, Yapıştırıcı

GİRİŞ

Yapıştırma işlemi, yapıştırıcılar kullanılarak iki veya daha fazla malzemenin yüzey teması ile birbirine tutturulması olarak tanımlanabilir. Yapıştırıcılar günümüzde farklı alanlarda kendine yer bulmuş, aynı zamanda perçin, cıvata vb. birleştirme elamanlarına yardımcı olarak veya bu elemanların alternatifi olarak kullanılmaya başlanmıştır. Yapıştırıcı kullanılarak yapılan birleştirme işlemleri, son yıllarda birçok alanda ilerleme kaydetmiştir. Havacılık sanayisi başta olmak üzere otomotiv, ahşap, kompozit ve günlük yaşantımıza etki eden birçok alanda yapıştırıcıların performansı araştırılmaktadır. Bunun yanı sıra bahsi geçen sektörlerde kullanımı artmaktadır.

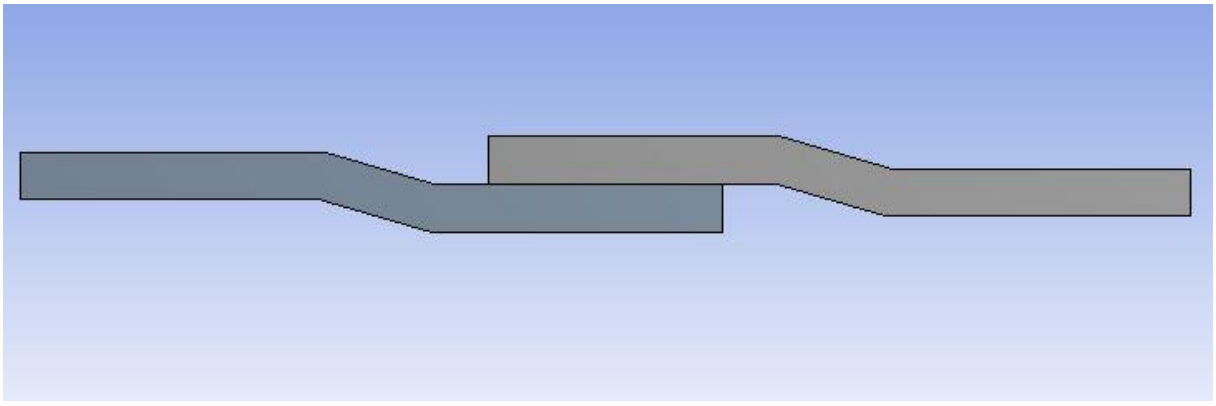
Yapıştırıcılar genel olarak bindirme bağlantılarında kullanılmaktadır. Bindirme bağlantıları iki veya daha fazla malzemenin, yüzeyinin belirli bir kısmının biribiri üzerine bindirilmesiyle oluşan bağlantı çeşididir. Tüm bağlantı çeşitlerinin kendine özgü dezavantajları bulunmaktadır.



Resim 1 Uygulanan kuvvetin merkezden uzak eksenlere etkisi

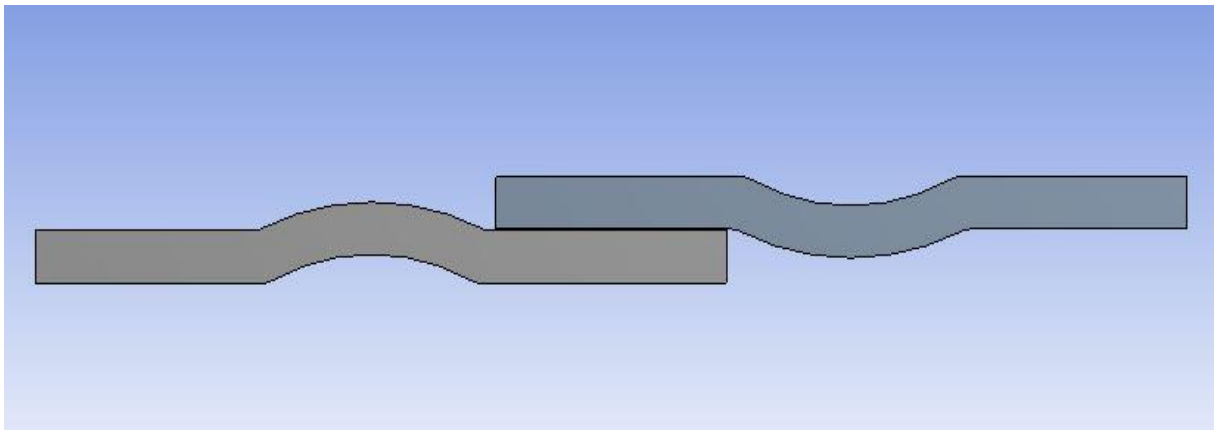
Yukarıdaki resimde görüldüğü üzere kuvvet birleşme bölgesinden uzak eksenlere etki etmektedir. Bu durum bağlantı bölgesinde moment oluşmasına neden olmaktadır. Böylece bindirmeli bağlantılarda bağlantı bölgesine, istenmeyen yönde kuvvetler etki ederek hasar başlangıç eşiğini aşağı düşürmektedir.

Hasar başlangıç eşiğini arttırmak adına, yapıştırma işleminde kullanılan plakalarda bazı geometrik değişimler yapılarak klasik bindirme bağlantısı ile karşılaştırılmıştır. Yapıştırma prosesinin tamamında yapıştırılacak olan eleman için sert çelik, yapıştırıcı olarak Dp 460 seçilmiştir.



Resim 2 Bindirmeli Bağlantı İçin Uygulanan 1. Geometrik Değişiklik

Resimde görüldüğü üzere yapışma bölgesine yakın bir mesafeden itibaren uygulanan geometrik değişiklik, etki eden kuvvetin yapışma bölgesi merkezine yakınlaştırmayı hedeflemektedir. Böylece oluşan momentin değerini aza indirgeyerek hasar başlangıç eşiğinin üst değerlere çıkarılması hedeflenmiştir. Aynı görevi üstlenmesi bakımından başka bir geometrik şekil daha kullanılmıştır.



Resim 3 Bindirmeli Bağlantı İçin Uygulanan 2. Geometrik Değişiklik

Belirlenen bu geometrik değişiklik ise diğer geometri gibi uygulanan kuvvetin merkeze etki etmesini sağlayarak hasar eşiğini aşağıya düşürmeyi amaçlamıştır. Aynı zamanda kullanılan yay şeklindeki geometriden, uygulanan kuvvetle beraber şekil değişikliğine uğrayarak yapışma bölgesinin belli bir değere kadar korunması beklenmektedir. Her iki geometriden beklenen ortak davranış, kuvvetin yapışma bölgesi merkezine etki etmesini sağlayarak momentin ve etiklerinin azaltmasıdır. Böylece yapışma bölgesinde istenmeyen etkiler en aza indirgenerek sağlıklı bir tutunma ve yüksek performans sağlanır.

Materyal Ve Metot

Yapıştırıcı ile birleştirilmiş bindirmeli bağlatılarda klasik bağlantı yerine farklı geometriler kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak analizler yapılmıştır. Yapılan çalışmada kullanılan malzemeler alüminyum alaşımı, çelik (sert) ve yapıştırıcı olarak DP460'tır.

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılacak olan analizler için Cohesive Zone Model (CZM) kullanılmıştır. Kullanılan mazlemerin CZM parametrelerinin bilinmesi araştırmanın ilerleyişi açısından önemlidir. Araştırmada kullanılan DP460 yapıştırıcı için CZM parametreliri literatürde yapılan çalışmalardan elde edilmiştir. Aşağıdaki tablolarda belirli koşullardaki CZM parametreleri verilmiştir[1].

SampleType	P (N)	δ_t^* (mm)	δ_t^c (mm)	τ_{max} (MPa)	γ	G_{IIC} (N/mm)
Type I	7131	0.468	0.518	28.5	2.757	11.71
Type I G	5918	0.206	0.550	23.7	3.235	10.52
Type I C	7809	0.182	0.382	31.2	2.252	10.32
Type I F	7606	0.292	0.418	30.4	2.463	9.36
SampleType	P (N)	δ_t^* (mm)	δ_t^c (mm)	τ_{max} (MPa)	γ	G_{IIC} (N/mm)
Type II	2471	0.409	0.430	9.8	2.398	1.88
Type II G	1907	0.918	0.945	7.4	5.560	2.65
Type II C	1324	0.353	0.414	6.9	2.435	1.30
Type II F	3750	0.551	0.574	14.6	3.290	3.62
SampleType	P (N)	δ_t^* (mm)	δ_t^c (mm)	τ_{max} (MPa)	γ	G_{IIC} (N/mm)
Type III	6453	0.086	0.203	25.8	1.184	4.34
Type III G	6969	0.298	0.320	27.8	1.884	7.12
Type III C	8037	0.204	0.220	32.2	1.222	5.22
Type III F	8044	0.309	0.321	32.1	1.884	8.64
SampleType	P (N)	δ_t^* (mm)	δ_t^c (mm)	τ_{max} (MPa)	γ	G_{IIC} (N/mm)
Type IV	1987	0.342	0.348	7.5	2.049	0.91
Type IV G	1657	0.654	0.690	6.45	4.062	1.80
Type IV C	1084	0.276	0.334	5.48	1.966	0.83
Type IV F	3559	0.487	0.496	14.1	2.922	2.84

Tablo 1. DP460 Yapıştırıcı İçin Farklı Koşullarda CZM Parametreleri

Yapılan çalşmada CZM'nin kullanılabilmesi için tüm malzemelerin bazı mekanik özelliklerinin bilinmesi gerekmektedir. Yine literatürden edinilen bilgilerden faydalanılarak, araştırmada kullanılan DP460 için mekanik özellikler aşağıdaki tabloda verilmiştir[1].

	DP 460	DP 125
E (MPa)	1984 ± 43	25.1 ± 2
ν	0.37	0.35
σ_t (MPa)	38.4 ± 1.1	12.7 ± 0.4
ε_t (%)	4.7	78.5

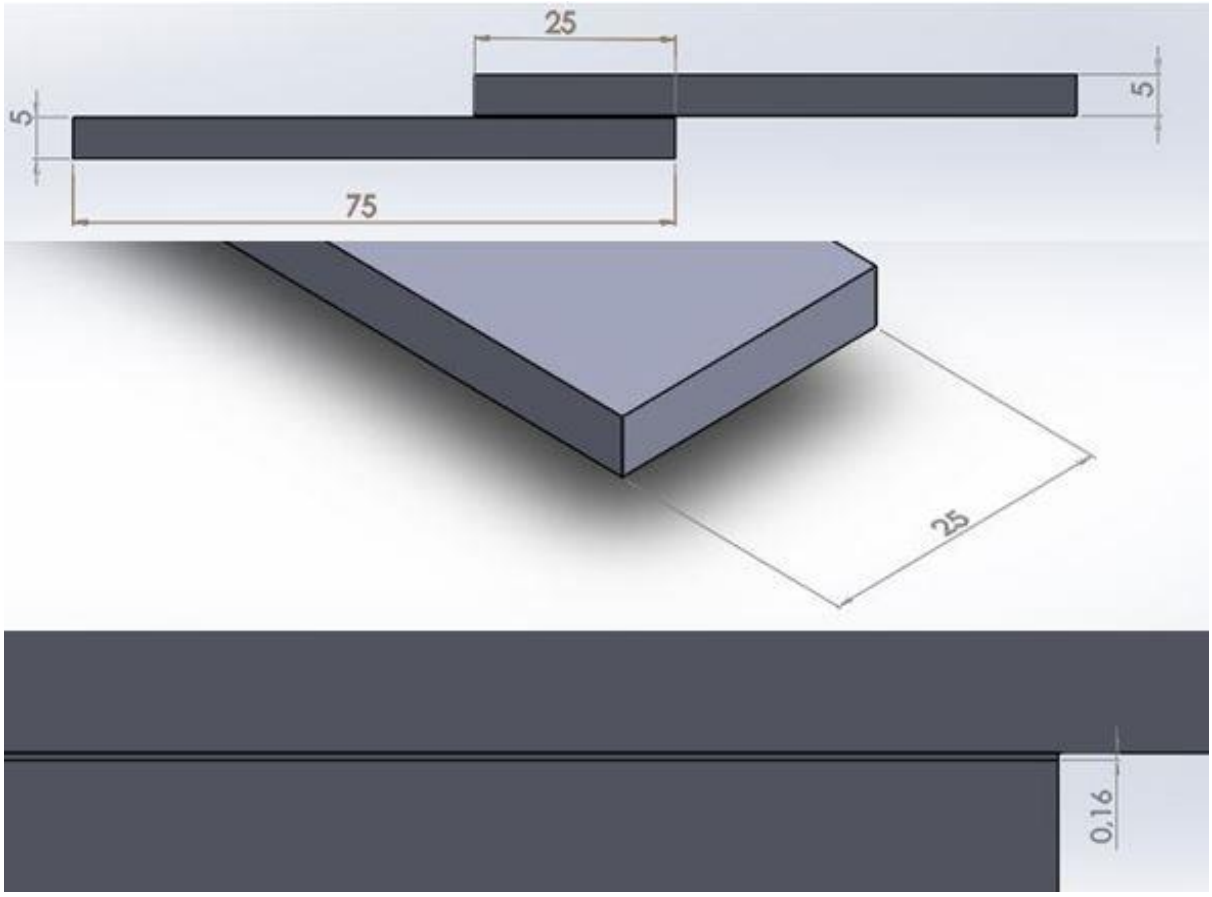
Tablo 2. DP460 Yapıştırıcı İçin Bazı Mekanik Özellikler

Malzeme özellikleri belirlendikten sonra sonlu elemanlar yöntemi ile analizlerin gerçekleştirilmesi için bu özellikler paket programa (Ansys) aktarıldı. Böylece analiz için ilk adım atılmış oldu. Daha sonra ilerleyen başlıklarda belirtilen modeller 3 boyutlu oluşturularak analiz programına akrarıldı.

Model program üzerinde bir taraftan sabit diğer taraftan ise belirli bir kuvvetle çekilerek analizi gerçekleştirilmiştir. Böylece oluşturulan yeni geometrilerin davranışları incelendi ve klasik bindirmeli bağlantılar ile kıyaslanarak çalışmanın olumlu sonuçlar verdiği belirlendi.

Modellerin Oluşturulması

Bindirmeli bağlantılarda uygulamayı düşündüğümüz geometrileri sonlu elemanlar yöntemi ile analizini gerçekleştirebilmek için öncelikle modellerinin oluşturulması gerekmektedir. Kullanılan farklı geometrilerin sonuçlarının olumlu veya olumsuz olup olmadıklarını anlamak için öncelikle klasik bindirme bağlantısını modelleyerek sonlu elemanlar yöntemi ile analiz edilmiştir. Yapıştırılacak olan çelik veya alüminyum için kullanılacak olan boyutlar belirlenerek 3 boyutlu olarak katı halde modellenmiştir. Burada kullanılacak olan plakalar 75 mm boyunda, 25 mm eninde ve 5 mm kalınlığındadır. Yapıştırma bölgesi uzunluğu ve eni 25 mm, yapıştırıcı (DP460) kalınlığı ise 0,16 mm'dir.



Resim 4 Analiz Yapılacak Klasik Bindirme Bağlantısı Model Boyutları

Kullanılacak olan model boyutları tüm geometrilerde değişiklik olan kısımlar dışında aynı kalacak ve analizler bu boyutlarda gerçekleşmiştir. Boyutlar belirlendikten sonra paket program yardımı ile katı olarak çizilip daha sonra sonlu elemanlar yöntemi ile analizi yapılmak üzere Ansys ortamına aktarılmıştır. Burada klasik bindirme bağlantılarının hangi sonuçları verdiği kaydedilerek diğer geometrilerin modelleri oluşturulmuştur.

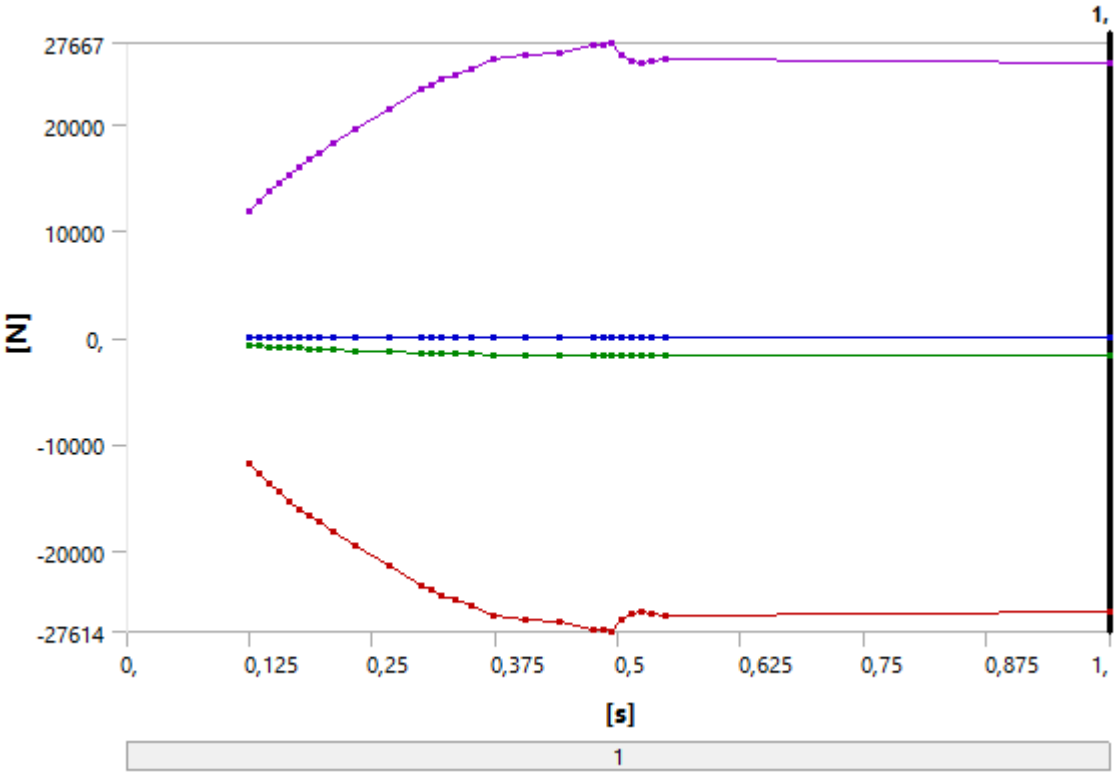
Klasik modelle karşılaştırılacak olan diğer iki geometri için kalınlıklar, genişikler, bindirme uzunluğu ve genişliği, yapıştırıcı kalınlığı klasik model ile aynıdır. Burada sadece değişikliğin yapıldığı kısımlarda farklılık vardır. Yapılan analizlerin daha sağlıklı olabilmesi adına önemli olan etkenlerden birisi de boyutların farklılık göstermemesidir. Bu nedenle boyutların tüm modellerde aynı olması önemlidir.

Oluşturulan Modellerin Analizleri

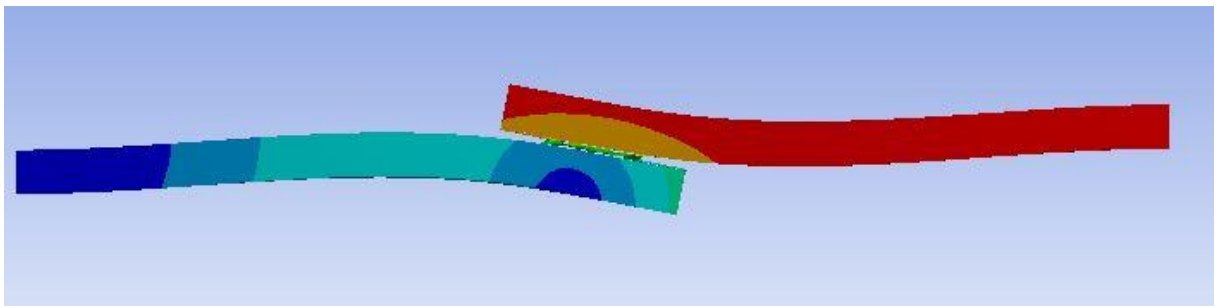
1. Klasik Bindirme Bağlantısı Analizi

Yapılan araştırmada yeni geometrilerin analizlerinin anlamlı olabilmesi için sonuçlarının, karşılaştırılması gereken model analizi klasik bağlantılardır. Klasik bağlantı için oluşturulan model belirtildiği üzere paket programa aktarılarak sınır şartları belirlenmiştir. Daha sonra model belirli değerde yer değiştirmeye maruz bırakılarak yapıştırma bölgesinde kopma sağlanmıştır. Programın topladığı datalar diğer geometrilerin davranışları ile karşılaştırılmak üzere kaydedilmiştir.

Çelik için yapılan klasik bağlantılarda kopmaya kadar olan deformasyon esnasında çölçülen en yüksek kopma yükü aşağıdaki resim ve grafikte belirtilmiştir(27667 N).



Grafik 1 Klasik Bindirmeli Bağlantının Kopmaya Kadar Gösterdiği En Yüksek Kopma Yükü

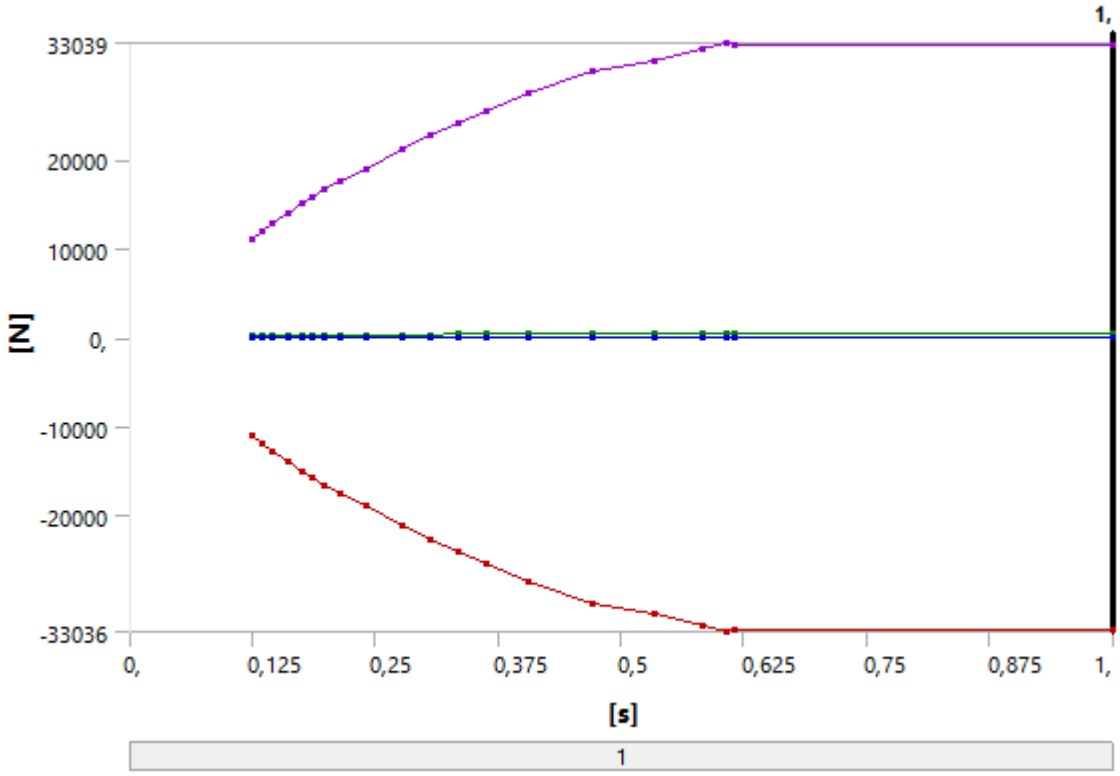


Resim 5 Klasik Bindirme Bağlantısında Kopmanın Gerçekleşmesi

Yukarıdaki resimde kuvvetin merkeze uzak etki etmesinden dolayı bağlantısı yapılan plakaların esneyerek bağlantı bölgesini deformasyona uğrattığı net bir şekilde görülmektedir.

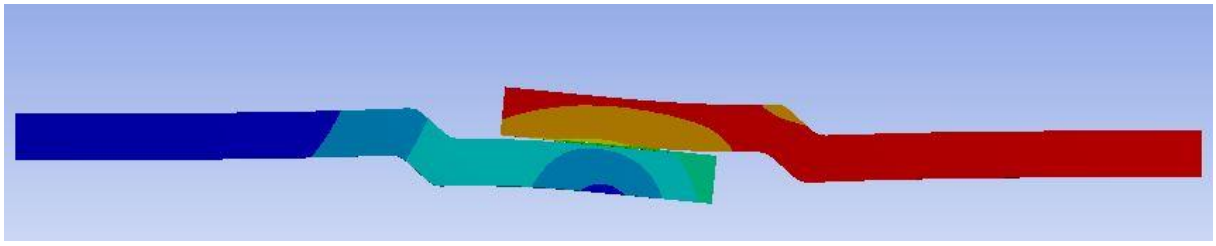
2. Birinci Geometri Değişikliğinin Bindirme Bağlantısına Etkisinin Analizi

Yukarıda oluşan momentin etkileri net bir şekilde görülmektedir. Bu nedenle uygulanan kuvveti yapışma merkezine yaklaştırmak adına yapılan geometri değişikliğinin analizi sonlu elemanlar yöntemi ile gerçekleştirilmiştir. Uygulanan geometrik değişikliğin farklı kombinasyonları denenerek en etkili sonucu veren model ölçülerine göre analiz gerçekleştirildiğinde sonuçların gözle görülür bir şekilde iyileştiği görülmektedir.



Grafik 2 1. Geometri Değişikliğinin Kopma Yükü Üzerindeki Etkisi

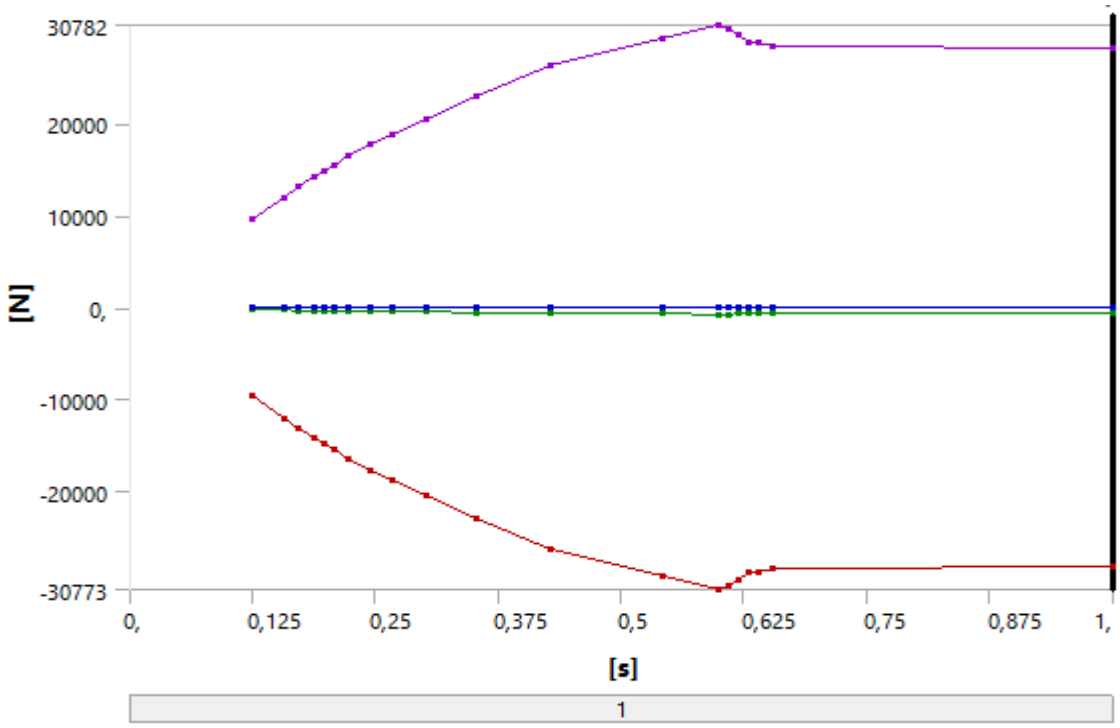
Geoetrideki değişiklik, klasik bindirme bağlantısına kıyasla kopma yükünde 5372 N daha iyi sonuç ortaya koymuştur. Bu durum çaışmanın amacına ulaşması açısından çok önemlidir. Kopma yükünün 33039 N olduğu görülmektedir.



Resim 6 1. Geometri Değişikliğinde Kopmanın Gerçekleşmesi

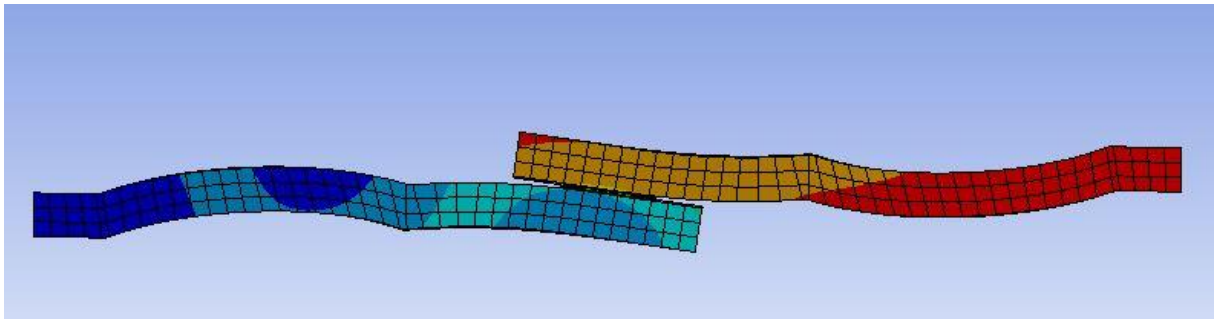
3. İkinci Geometri Değişikliğinin Bindirme Bağlantısına Etkisinin Analizi

Yay şeklinde değişiklik yapılan geometri için sonuçlar aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



Grafik 3 2. Geometri Değişikliğinin Kopma Yükü Üzerindeki Etkisi

Geoetrideki değişiklik, klasik bindirme bağlantısına kıyasla kopma yükünde 3115 N daha iyi sonuç ortaya koymuştur. Bu durum çaışmanın amacına ulaşması açısından çok önemlidir. Kopma yükünün 30782 N olduğu görülmektedir.



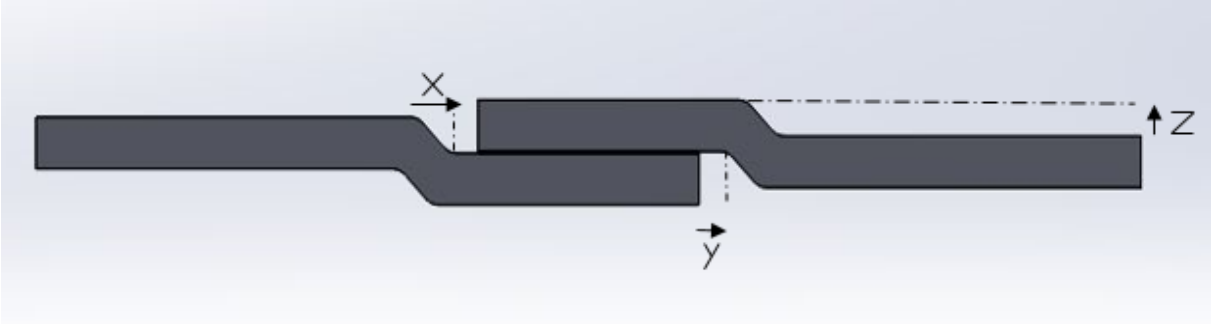
Resim 7 2. Geometri Değişikliğinde Kopmanın Gerçekleşmesi

TAGUCHİ METODU

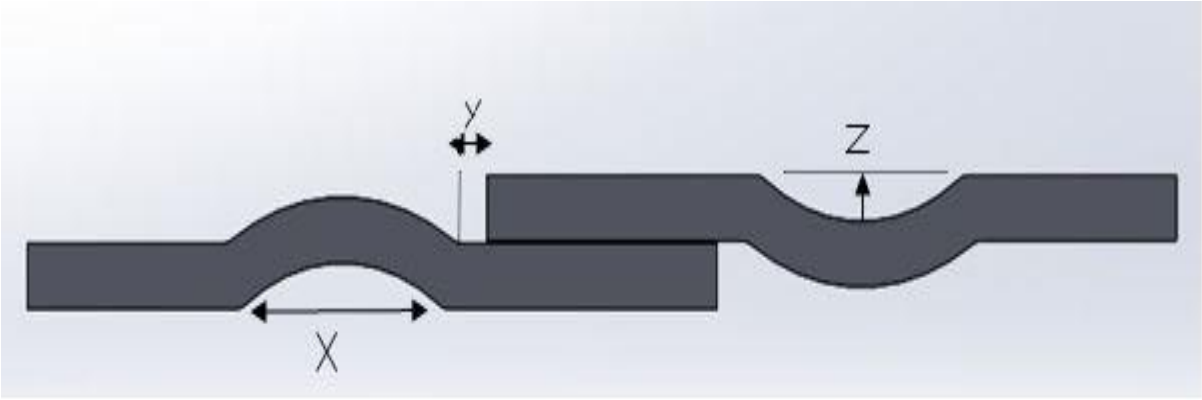
Klasik bindirmeli bağlantı modeline alternatif olarak uygulanan geometrik değişikliklerin bağlantı üzerindeki konumunu, değişikliğin boyuttlarını, yapılan geometrik değişikliğin yapışma bölgesine uzaklığını belirleyebilmek ve bunun sonucunda optimum değerleri elde ederek en iyi geometriyi tanımlamak için taguchi metodu kullanılmıştır. Oluşturulan 2 geometri için optimum değeri bulmak adına 25'er tane farklı ölçülerde model oluşturulmuştur.

Oluşturulan bu modellerin sonlu elemanlar yöntemi ile analizleri gerçekleştirilmiştir. Daha sonra elde edilen değerler taguchi metodu için kullanılarak optimum geometri ve geometrinin bulunacağı konum belirlenmiştir.

Ayrıca oluşturlan geometrik değişiklik plaka üzerindeki konumu, yapışma bölgesine uzaklığı ve yapışma bölgesine eksenel olarak uzaklığı olmak üzere 3 farklı değişkene sahiptir. Taguchi metodu kullanılarak bu değişkenlerden hangisinin analizlerde daha etkin olduğu saptanmıştır. Bahsedilen değişkenler aşağıdaki resimlerde daha net görülmektedir.



Resim 8 1. Geometri İçin Optimum Değerler ; X: Uzunluk - Y: Uzaklık – Z: Yükseklik



Resim 9 2. Geometri İçin Optimum Değerler ; X: İzdüşüm - Y: Uzaklık – Z: Yükseklik

Yukarıda resimlerde görüldüğü üzere farklı değişkenlerin bir araya gelmesiyle her iki geometri içinde optimum değerler taguchi metodu ile belirlenmiştir.

Değişkenler için verilen değerler ve bu değerler sonucunda elde edilen kopma yükleri aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

	uzaklik	yukseklik	uzunluk	kopma yükü
1	1,00	0,50	5,0	28470
2	1,00	1,25	12,5	29210
3	1,00	2,00	20,0	30793
4	1,00	2,75	27,5	31143
5	1,00	3,50	35,0	32007
6	3,25	0,50	12,5	28607
7	3,25	1,25	20,0	29105
8	3,25	2,00	27,5	29454
9	3,25	2,75	35,0	30231
10	3,25	3,50	5,0	33039
11	5,50	0,50	20,0	27664
12	5,50	1,25	27,5	29643
13	5,50	2,00	35,0	30458
14	5,50	2,75	5,0	32160
15	5,50	3,50	12,5	31783
16	7,75	0,50	27,5	28353
17	7,75	1,25	35,0	29101
18	7,75	2,00	5,0	30679
19	7,75	2,75	12,5	30600
20	7,75	3,50	20,0	31066
21	10,00	0,50	35,0	28261
22	10,00	1,25	5,0	30309
23	10,00	2,00	12,5	29537
24	10,00	2,75	20,0	31265
25	10,00	3,50	27,5	31154

	izdusum(mm)	yukseklik(mm)	uzaklik(mm)	kopma yükü(N)
1	15	0,50	1,00	27702
2	15	1,25	3,25	28530
3	15	2,00	5,50	28683
4	15	2,75	7,75	29227
5	15	3,50	10,00	28617
6	20	0,50	3,25	28053
7	20	1,25	5,50	27998
8	20	2,00	7,75	28517
9	20	2,75	10,00	29210
10	20	3,50	1,00	29968
11	25	0,50	5,50	27960
12	25	1,25	7,75	27851
13	25	2,00	10,00	28804
14	25	2,75	1,00	28336
15	25	3,50	3,25	29448
16	30	0,50	7,75	28513
17	30	1,25	10,00	28669
18	30	2,00	1,00	29277
19	30	2,75	3,25	28977
20	30	3,50	5,50	30416
21	35	0,50	10,00	28185
22	35	1,25	1,00	29193
23	35	2,00	3,25	29739
24	35	2,75	5,50	29151
25	35	3,50	7,75	30782

Resim 8 Sırasıyla 1. Ve 2. Geometri İçin Optimum Değerler ; X: İzdüşüm - Y: Uzaklık – Z: Yükseklik

Taguchi metodu kullanılarak belirlenen optimum değerler ve en iyi sonuç veren geometri değerleri yukarıdaki tablolarda görülmektedir. Yine taguchi metoduna göre en etkin değişken yükseklik olarak belirlenmiştir. Bu durum her iki geometri için de geçerlidir.

Level	izdusum(mm)	yukseklik(mm)	uzaklik(mm)
1	89,11	88,97	89,21
2	89,17	89,08	89,23
3	89,09	89,25	89,20
4	89,30	89,24	89,24
5	89,37	89,49	89,16
Delta	0,28	0,53	0,08
Rank	2	1	3

Grafik 3 2. Geometri İçin En Etkin Değişken Yükseliktir.

SONUÇ

Bindirmeli bağlantıların en belirgin dezavantajı, bindirme bölgesinde oluşan momenttir. Tek tesirli bindirme bağlantılarında, birleştirilen elemanların uç noktalarından çekme kuvvetine maruz bırakılması ile bindirme bölgesinde moment oluşmaktadır. Uygulanan kuvvetin, bağlantının ağırlık merkezinden farklı noktalara etki etmesi moment oluşumunun temel nedenidir. Bu durum bindirmeli bağlantılarda yapıştırıcının kopma yükünü olumsuz yönde etkilemektedir. Oluşan momentin değerini ve etkilerini azaltıp, yapıştırıcının performansını arttırabilmek için bağlantı geometrisinde bazı değişiklikler yapılması öngörülmüştür. Öngörülen değişiklikler modellenerek sonlu elemanlar yöntemi ile sonuçlar irdelenmiştir.

Sonuçlara bakıldığında yapılan değişikliklerin istenildiği üzere kuvvetin yapıştırma merkezine yaklaşmasını sağlayarak momentin değerini ve etkilerini azaltmıştır. Değerlerin gözle görülür bir şekilde iyileştiği görülmüştür. Bu durum yapılan çalışmanın amacına ulaştığını göstermektedir.

KAYNAKLAR

[1] Kazaz, I., Akpinar, S., & Ozel, A. (2020). The effects of thermal cycle and nanostructure reinforcement on the shear load in adhesively bonded joints. *Mechanics of advanced materials and structures*, *27*(19), 1627-1638.

[2] Alves, D. L., Campilho, R. D. S. G., Moreira, R. D. F., Silva, F. J. G., & Da Silva, L. F. M. (2018). Experimental and numerical analysis of hybrid adhesively-bonded scarf joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, *83*, 87-95.

[3] Kanar, B., Akpinar, S., Akpinar, I. A., Akbulut, H., & Ozel, A. (2018). The fracture behaviour of nanostructure added adhesives under ambient temperature and thermal cyclic conditions. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, *97*, 120-130.

[4] Akpinar, I. A., Gültekin, K., Akpinar, S., Akbulut, H., & Ozel, A. (2017). Experimental analysis on the single-lap joints bonded by a nanocomposite adhesives which obtained by adding nanostructures. *Composites Part B: Engineering*, *110*, 420-428.

[5] Leal, A. J. S., & Campilho, R. D. S. G. (2018). Numerical evaluation of the ENF and 4ENF tests for the shear toughness estimation of adhesive joints. *Composite Structures*, *202*, 333-343.

[6] GÖLOĞLU, C., & MIZRAK, C. (2010). BULANIK MANTIK VE TAGUCHİ YAKLAŞIMLI MÜŞTERİ İSTEMLİ ÜRÜN BELİRLEME. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, *25*(1).

KÜRESEL GARDNER DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON TEORİSİ

Günay Aslanova[1], Semra Ahmetolan[2] ve Ali Demirci[3]
[1,2,3]İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ABSTRACT

The propagation of dispersive shock waves (DSWs) is investigated in the spherical Gardner (sG) equation which is obtained by employing a similarity reduction to the (3+1) dimensional Gardner-Kadomtsev-Petviashvili (Gardner-KP) equation. The step-like initial condition along a paraboloid front is considered. Then, a system of quasilinear modulation equations describing slow evolution of parameters in the periodic solution of a sG equation such as amplitude, wavenumber and mean height, is obtained by applying the Whitham modulation theory. By introducing appropriate Riemann-type variables, the corresponding modulation equations are transformed into simpler form. This simpler form is important to understand the DSW phenomena in the sG equation. We solve the corresponding modulation equations numerically and compare these results with direct numerical solutions of the sG equation. The results from the modulation theory are shown to be in good agreement with the direct numerical solution of the sG equation.

Keywords: Dispersive shock waves; Whitham modulation theory; Gardner-KP equation.

ÖZET

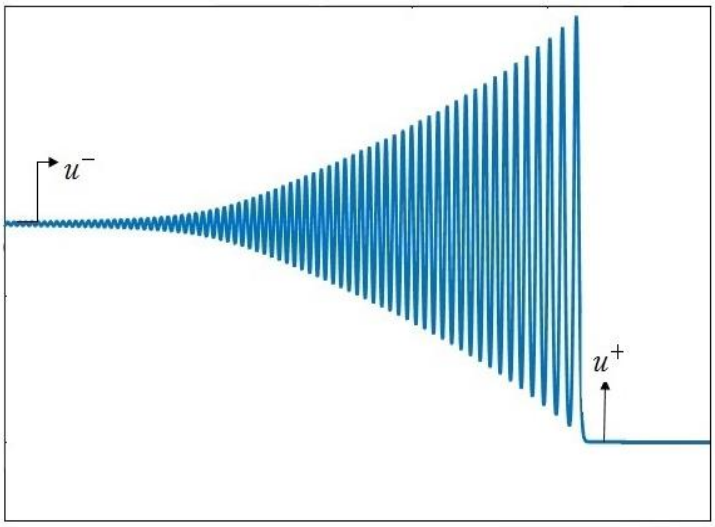
Bu çalışmada, (3+1) boyutlu Gardner-Kadomtsev-Petviashvili (Gardner-KP) denkleminden bir benzerlik dönüşümü uygulanarak elde edilen küresel Gardner (sG) denklemindeki dispersif şok dalgalarının (DSW) yayılması incelenmiştir. Paraboloid bir dalga cephesi boyunca uzanan basamak tipi başlangıç koşulu dikkate alınmıştır. Ardından, Whitham modülasyon teorisi (WMT) uygulanarak sG denkleminin periyodik çözümündeki genlik, dalga sayısı, ortalama yükseklik gibi parametrelerin yavaş ölçekte değişimini içeren kuazilineer modülasyon denklem sistemi elde edilmiştir. Uygun Riemann değişkenlerinin tanımlanmasıyla, bu modülasyon denklemleri daha basit forma indirgenmektedir. Bu basit form, sG denklemindeki DSW fenomeninin anlaşılmasında önemli bir yer tutmaktadır. Çalışmamızda modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri elde edilerek sG denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Bunun sonucunda iki çözüm arasında iyi bir uyumun olduğu görülmüştür. Böylece Whitham modülasyon teorisi, sG denklemindeki DSW yayılımı için doğru ve uygun sonuçlar elde etmemizi sağlamıştır.

Anahtar kelimeler: Dispersif şok dalgaları; Whitham modülasyon teorisi; Gardner-KP denklemi.

GİRİŞ

Nonlineer dalgalar, dispersiyon, dissipasyon ve nonlineerlik terimlerini içeren kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanır. Eğer, dispersiyon ve dissipasyon etkileri ihmal edilirse, başlangıçta iletilen dalga sinyali kritik bir zaman değerinde kırılmaya uğrar. Fakat fiziksel olarak genellikle bu terimler ihmal edilemediğinden, çoğu model zayıf dispersiyon ve zayıf dissipasyon etkilerini içerir. Bununla birlikte, birçok ortamda dissipasyon etkileri çok küçük olduğundan dispersiyon daha baskındır ve dissipasyon etkisi ihmal edilebilir. Bu durumda, dispersif şok dalgaları (DSW) oluşur (Şekil 1). DSW, zayıf dispersiyon ve zayıf nonlineerliğin etkili olduğu durumlarda ortaya çıkan önemli bir olaydır ve şimdiye kadar yapılan birçok çalışmanın konusu olmuştur [1,2,3,4,5].

Şekil 1'de görülen $\boldsymbol{u}^{-}$ ve $\boldsymbol{u}^{+}$ parametreleri, DSW oluşumu için belirlenen başlangıç adım parametreleridir. DSW'lar, salınımlarla birlikte genişleyen bir cepheye sahiptir. Bu salınımlar, uzay-zaman düzleminde karakteristik bir fan içinde yayılır ve bu fanın sınırları, DSW'nun ön kenar (leading edge) ve arka kenarını (trailing edge) temsil eder. Bu iki kenar, farklı yayılma hızlarına sahiptir. Genellikle, ön kenar büyük genlikli soliter dalgalardan oluşurken, arka kenar küçük genlikli dalga olarak yayılan lineer dalgalardan oluşur.



Şekil 1. $\boldsymbol{u}^{-}$ ve $\boldsymbol{u}^{+}$ başlangıç adım parametrelerine göre DSW genel yapısı.

1965 yılında G. B. Whitham'ın Korteweg-de Vries (KdV) denklemi üzerinde tanıtarak geliştirdiği modülasyon teorisi ile dalga trenlerinin yavaş modülasyonunun analizi yapılmıştır [6]. Whitham, yaptığı çalışmalarda, genlik, dalga sayısı ve ortalama yükseklik gibi parametrelerin uzaysal $\boldsymbol{x}$ ve zamansal $\boldsymbol{t}$ ölçeğinde yavaş değişmesi fikrini analiz etmiştir. Bu değişimlerin, dalga treninin fazının değişiminden çok daha küçük olduğunu varsaymıştır. Böylece onun varsayımına göre, faz bir "hızlı" değişkendir ve genlik, dalga sayısı, ortalama yükseklik gibi değişkenler de "yavaş" değişkenlerdir. Bu kabuller altında, çoklu ölçekler metodu [7] kullanılarak yavaş değişkenler için kısmi diferansiyel denklemler elde edilir. Whitham modülasyon denklemleri veya Whitham sistemi olarak adlandırılan bu denklemler, oldukça zengin bir matematiksel yapıya sahiptir ve aynı zamanda çeşitli fiziksel olgularda nonlineer dalgaların tanımlanması için güçlü bir analitik araçtır.

Bu çalışmada, [5]'te ortaya konan yöntem geliştirilerek (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi için yapılacak indirgeme sonucu elde edilen küresel Gardner denklemine Whitham modülasyon teorisi (WMT) uygulanarak dispersif şok dalgası yayılımı incelenecektir.

(3+1) BOYUTLU GARDNER-KP DENKLEMİNİN İNDİRGENMESİ

(3+1) boyutlu Gardner-KP denklemi,

$$(u_t + 6uu_x - 6u^2u_x + \varepsilon^2 u_{xxx})_x + \lambda(u_{yy} + u_{zz}) = 0 \quad (1)$$

olarak ifade edilir. Burada, $u = u(x,t)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ ve $\lambda = \pm 1$'dir.
Bu çalışmada (1) denkleminin, Riemann tipi başlangıç koşulunun üç boyutlu uzantısı olarak genişletilmiş aşağıdaki başlangıç koşulu altındaki çözümü incelenmektedir:

$$u(\eta, 0) = \begin{cases} u^-, \eta < 0 \\ u^+, \eta > 0. \end{cases} \quad (2)$$

(2) başlangıç koşulunda, $\eta = x + \frac{1}{2}\phi(y,z,0)$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca, u^-, u^+ sabitler ve $\phi(y,z,t)$ dalga cephesinin formunu belirleyen fonksiyondur.
Problemin tanımında, $\tilde{c}$ reel sabit olmak üzere

$$\phi(y,z,0) = \tilde{c}(y^2 + z^2) \quad (3)$$

paraboloid tipi cephe kabulü yapılmaktadır. Sadece bu koşul altında, (3+1) boyutlu Gardner-KP denkleminin (1+1) boyutlu küresel Gardner denklemine indirgendiği bilinmektedir. Bu indirgemenin yapılabilmesi için (1) denkleminin

$$u = f(x + \phi(y,z,t)/2, t) \quad (4)$$

çözüm formuna sahip olduğu kabul edilmektedir. Bu çözüm formu, (1) denkleminde kullanılırsa, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\boldsymbol{\phi_t + \frac{\lambda}{2}\left((\phi_y)^2 + (\phi_z)^2\right) = 0}$$

(5a)

$$\boldsymbol{f_t + 6ff_\eta - 6f^2 f_\eta + \frac{\lambda}{2}(\phi_{yy} + \phi_{zz})f + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0.}$$

(5b)

(5a) denklemi cephe şekli denklemidir; f ile ilgili olan (5b) denklemi ise dalga cephesinin dispersif şok dalgası yayılımını karakterize eden denklemdir. (5a) denkleminin (3) başlangıç koşulu altındaki çözümü karakteristikler metodu ile

$$\phi(y,z,t) = \frac{\tilde{c}(y^2 + z^2)}{1 + 2\tilde{c}\lambda t} \quad (6)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu çözüm (5b) denkleminde kullanılırsa, küresel Gardner (sG) denklemi olarak adlandırılan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$f_t + 6ff_\eta - 6f^2 f_\eta + \frac{2\lambda\tilde{c}}{1 + 2\tilde{c}\lambda t} f + \varepsilon^2 f_{\eta\eta\eta} = 0. \quad (7)$$

$t_0 = \frac{1}{2\lambda\tilde{c}}$ olarak tanımlanırsa $\frac{2\lambda\tilde{c}}{1+2\tilde{c}\lambda t}$ terimi, $\frac{1}{t+t_0}$ halini alır. Bu çalışmada, $\lambda = 1$ durumu dikkate alınarak (7) denkleminin dispersif şok dalgası çözümü inşa edilmektedir. Burada, f fonksiyonu, aşağıdaki sınır koşullarını sağlar:

i) Azalmayan tipli başlangıç koşulları için:

$$\eta \to -\infty \text{ iken } f \to R(t)u^+ \text{ ve } \eta \to \infty \text{ iken } f \to R(t)u^- \quad (8)$$

ii) Artmayan tipli başlangıç koşulları için:

$$\eta \to -\infty \text{ iken } f \to R(t)u^- \text{ ve } \eta \to \infty \text{ iken } f \to R(t)u^+. \quad (9)$$

Sınır koşullarındaki $R(t)$ fonksiyonunu belirlemek için, (7) denkleminde η'ya bağlı terimler ihmal edilerek elde edilen denklem $R(0) = 1$ başlangıç koşulu altında çözülür. Bu başlangıç değer probleminin çözümü ile $R(t) = t_0/(t + t_0)$ olarak elde edilir.

sG denkleminin modellediği dalgaların yapısı, u^-, u^+ başlangıç adım parametrelerinin değerlerine bağlı olarak değişmektedir. DSW oluşumu için $u^- > u^+ \geq 0$ koşulu ile birlikte $u^+ < u^- \leq 1/2$ durumu dikkate alınmaktadır.

sG DENKLEMİ İÇİN WHITHAM MODÜLASYON DENKLEMLERİ

Whitham modülasyon teorisine göre, dalgayı karakterize eden tüm parametrelerin η ve t'nin yavaş değişen fonksiyonları olduğu varsayılır. Modülasyon denklemlerini elde etmek için çoklu ölçekler yöntemi uygulanmaktadır [7]. Bu amaçla, hızlı değişen faz değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\theta_\eta = \frac{k}{\varepsilon}, \quad \theta_t = -\frac{\omega}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon}. \tag{10}$$

Burada η ve t yavaş değişen uzay-zaman koordinatlarını göstermekle birlikte $k(\eta, t)$, $\omega(\eta, t)$ ve $V(\eta, t)$ sırasıyla, dalga sayısı, açısal frekans ve faz hızını göstermektedir. Ayrıca, $0 < \varepsilon << 1$ olduğu kabul edilmektedir.

Karışık türevler için, $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ olduğundan dalgaların korunumunu ifade eden ilk uyumluluk koşulu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$k_t + (kV)_\eta = 0. \tag{11}$$

Bu denklem, gerekli olan ilk modülasyon denklemidir. Diğer iki modülasyon denklemini elde etmek için hızlı ve yavaş değişkenler arasındaki türev dönüşümleri kullanılarak (7) denklemi bu değişkenler cinsinden ifade edilir. Daha sonra, f fonksiyonunun

$$f(\theta, \eta, t) = f_0(\theta, \eta, t) + \varepsilon f_1(\theta, \eta, t) + \cdots \tag{12}$$

şeklinde ε'a göre kuvvet açılımına sahip olduğu kabul edilerek terimler ε'un kuvvetleri cinsinden gruplanırsa, birinci ve ikinci mertebe pertürbasyon problemleri sırasıyla,

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right): -\omega f_{0,\theta} + 6k f_0 f_{0,\theta} - 6k f_0^2 f_{0,\theta} + k^3 f_{0,\theta\theta\theta} = 0, \tag{13}$$

$$O(1): -\omega f_{1,\theta} + 6k(f_0 f_1)_\theta - 6k f_0^2 f_{1,\theta} - 12k f_0 f_1 f_{0,\theta} + k^3 f_{1,\theta\theta\theta} = U \tag{14}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$U = -\left(f_{0,t} + 6 f_0 f_{0,\eta} - 6 f_0^2 f_{0,\eta} + 3k^2 f_{0,\eta\theta\theta} + 3k k_\eta f_{0,\theta\theta} + \frac{f_0}{t + t_0}\right) \tag{15}$$

biçiminde tanımlanır. Modülasyon denklemlerini elde etmek için ilk iki mertebe problemin incelenmesi yeterli olmaktadır. (13) denkleminin çözümü, θ_0 sabit olmak üzere,

$$f_0 = u_2 + \frac{(u_3 - u_2)cn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)}{1 - \frac{u_3 - u_2}{u_4 - u_2} sn^2(2(\theta - \theta_0)K, m)} \tag{16}$$

şeklinde Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden elde edilir. Bu çözüm, aynı zamanda Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümü olarak bilinir. Burada, $u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ olmak üzere u_i'ler periyodik çözüm elde edilirken karşılaşılan dördüncü dereceden polinomun reel kökleridir. $K = K(m)$, birinci türden eliptik integrali, m ise cn ve sn eliptik fonksiyonlarının modülünü göstermektedir. (16) çözümü, (14) denkleminde yazılırsa, θ'ya göre keyfi olarak büyüyen terimler, yani seküler terimler oluşmaktadır. Bunun için,

$$\int_0^1 U d\theta = 0, \quad \int_0^1 f_0 U d\theta = 0 \tag{17}$$

sekülerlik koşulları kullanılarak, U fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 f_0 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta}\int_0^1 (3f_0^2 - 2f_0^3) d\theta + \frac{1}{t+t_0}\int_0^1 f_0 d\theta = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 f_0^2 d\theta + \frac{\partial}{\partial \eta}\int_0^1 \left(4f_0^3 - 3f_0^4 - 3k^2 f_{0,\theta}^2\right) d\theta + \frac{2}{t+t_0}\int_0^1 f_0^2 d\theta = 0 \tag{19}$$

elde edilir. Whitham sistemini daha sade biçimde elde etmek için Gardner denkleminin Riemann değişkenleri kökler cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_2)(u_3 + u_4), \\ r_2 &= \frac{1}{4}(u_1 + u_3)(u_2 + u_4), \\ r_3 &= \frac{1}{4}(u_2 + u_3)(u_1 + u_4). \end{aligned} \tag{20}$$

Böylece, sG denkleminin Whitham modülasyon sistemi:

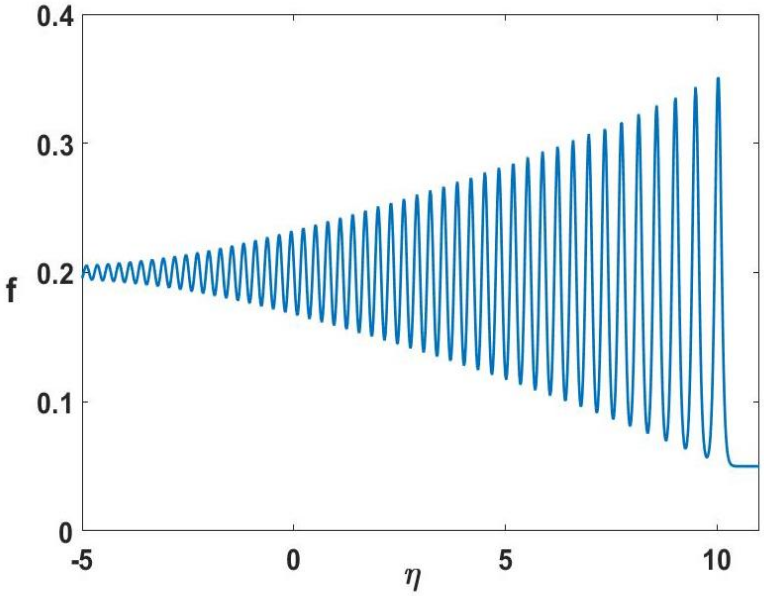
$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3)\frac{\partial r_i}{\partial \eta} + \frac{h_i(r_1, r_2, r_3)}{t+t_0} = 0, \;\; i = 1,2,3 \tag{21}$$

olarak yazılır. Burada, v_i'ler Whitham karakteristik hızlarını ve h_i'ler küresel terimleri göstermektedir. Küresel terimlerin olmaması durumunda, yani $t_0 \to \infty$ iken (21) denklemi Gardner denkleminin modülasyon sistemine indirgenmektedir. Gardner denkleminin DSW çözümü [3] çalışmasında incelenmiştir. Sonraki bölümde, (21)'de verilen Whitham sisteminin sayısal çözümleri elde edilerek sG denkleminin sayısal çözümleriyle karşılaştırma yapılacaktır.

SAYISAL ÇÖZÜMLER

sG denkleminin doğrudan sayısal çözümü için mETDRK4 (modified exponential time differencing) yöntemi kullanılarak sonuçlar elde edilmektedir. (21) denkleminde verilen h_i teriminin etkisinin gözlemlenmesi için Gardner denkleminin sayısal çözümünün sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılacaktır. Modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri için MATLAB üzerinde birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü kullanarak Lax-Wendroff yönteminin iki aşamalı biçimi seçilecektir. Bu bölümde, sG denkleminin doğrudan sayısal çözümü ile modülasyon sisteminin sayısal çözümlerinin karşılaştırılmasıyla elde edilen sonuçlar açıklanacaktır. Sayısal çözümlerin yapılması için $u^+ < u^- \leq 1/2$ koşulu alınarak DSW oluşumunu sağlayacak biçimde $u^- = 0.4$ ve $u^+ = 0.1$ kabulleri yapılmaktadır. u^- ve u^+ başlangıç adım parametrelerinin farklı seçimleri dalga yapılarının değişmesine yol açmaktadır.

Gardner ve sG denklemlerinin (2)'de verilen basamak tipi başlangıç koşulu altında ve ilgili sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerini elde etmek için, önce sG denklemi uygun bir teknikle Fourier uzayında dönüştürülüp, elde edilen adi diferansiyel denklem ETDRK4 [8, 9] yönteminin modifiye biçimi kullanılarak çözülmüştür. (7) ile verilen sG denkleminin sayısal çözümü için ETDRK4 yöntemindeki Fourier modlarının sayısı, $N = 2^{12}$, uzaysal bölge tanım aralığı, $L = 40$ ve zaman adımı, $h = 10^{-3}$ alınmaktadır. Ayrıca, $\tilde{c}^{-1} = t_0 = 10$, $\varepsilon^2 = 10^{-3}$ parametre kabulleri yapılmaktadır. Buna göre, sG denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü Şekil 2'de verilmiştir. sG denkleminin sayısal çözümü elde edildikten sonra, (21) Whitham sisteminin sayısal çözümleri elde edilerek iki çözüm arasında karşılaştırma yapılacaktır.



Şekil 2. sG denkleminin $t = 10$ için sayısal çözümü.

Whitham sisteminin sayısal çözümünün yapılabilmesi için, (21) denklemindeki Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri belirlenmelidir. Bu değerler, DSW oluşumunu sağlayan $u^- = 0.4$ ve $u^+ = 0.1$ parametre değerleri dikkate alınarak elde edilir. Buna göre, Riemann değişkenlerinin başlangıç değerleri,

$$r_1(\eta,0) = 0.09,\ r_2(\eta,0) = \begin{cases} 0.09 & \eta \le 0, \\ 0.24 & \eta > 0, \end{cases}\quad r_3(\eta,0) = 0.24 \tag{22}$$

biçiminde alınmaktadır. Gardner denklemi ve bu denklemin Whitham sistemi için sınır koşulları, zamana bağlılık içermediğinden sabittir. Ancak sG denklemi için sınır koşulları, zamana bağlı olarak değişir. Bu nedenle, denklemin sağladığı sınır koşullarının düzenlenmesi gerekir. sG denkleminin Whitham sistemi için sınır koşulları, η uzaysal değişkenine bağlı türev teriminin ihmal edilip oluşan denklemin (22) başlangıç koşullarında sol sınır ve sağ sınır uç için ayrı olarak çözülmesiyle elde edilir. Bu işlem yapılırsa sınır koşulları, problemin η tanım kümesinin sol ve sağ uçlarında sırasıyla aşağıdaki gibidir;

$m \to 0$ iken:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{180 + (20 - 3t)t}{20(10 + t^2)}, \\ r_2 &= -0.15 - \frac{16}{(10+t)^2} + \frac{4}{10+t}, \\ r_3 &= \frac{4(6+t)}{(10+t)^2}, \end{aligned} \tag{23}$$

$m \to 1$ iken:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{9+t}{(10+t^2)}, \\ r_2 &= 0.25 - \frac{100.1}{(10+t)^4}, \\ r_3 &= 0.25 - \frac{100}{(10+t)^4}. \end{aligned} \tag{24}$$

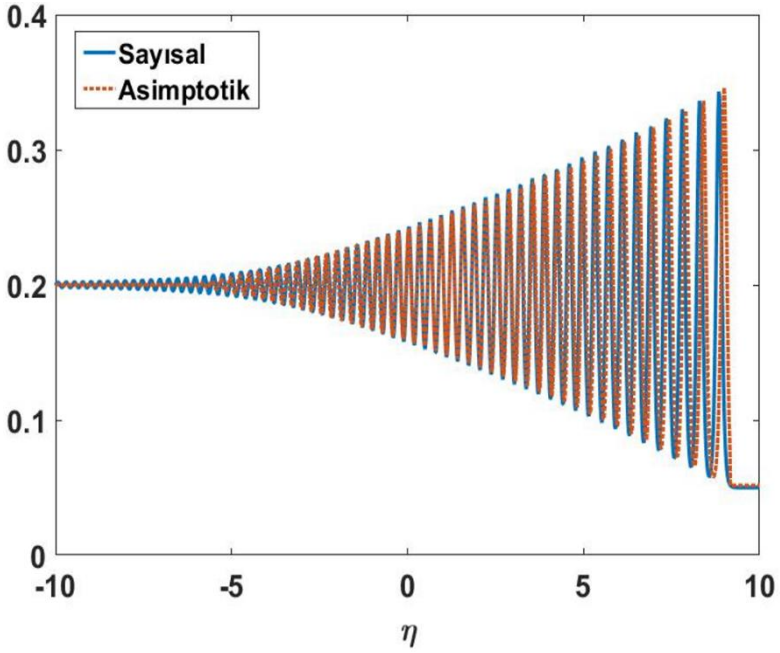
Bu sınır koşulları kullanılarak, sG denklemi için birinci mertebeden hiperbolik sistem çözücü ile Lax-Wendroff metodu uygulanır. Uygulanan yöntem sonucunda, sG denkleminin asimptotik (modülasyon teorisi) çözümünü Şekil 2'de gösterilen doğrudan sayısal çözümüyle karşılaştırabilmek amacıyla, Gardner denkleminin ilerleyen dalga çözümünün Riemann değişkenleri cinsinden aşağıdaki ifadesi incelenmektedir:

$$f_0(\theta,\eta,t) = \frac{1-\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}-\sqrt{S_3}}{2} + \frac{(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2})(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3})cn^2(2(\theta-\theta_0)K,m)}{(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3})+(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1})sn^2(2(\theta-\theta_0)K,m)}. \quad (25)$$

Burada, işlemlerde sadelik açısından $S_i = 1-4r_i$ olarak kabul edilmektedir. Modülasyon teorisinde hızlı değişimi ifade eden θ, aşağıdaki formülle gösterilmektedir:

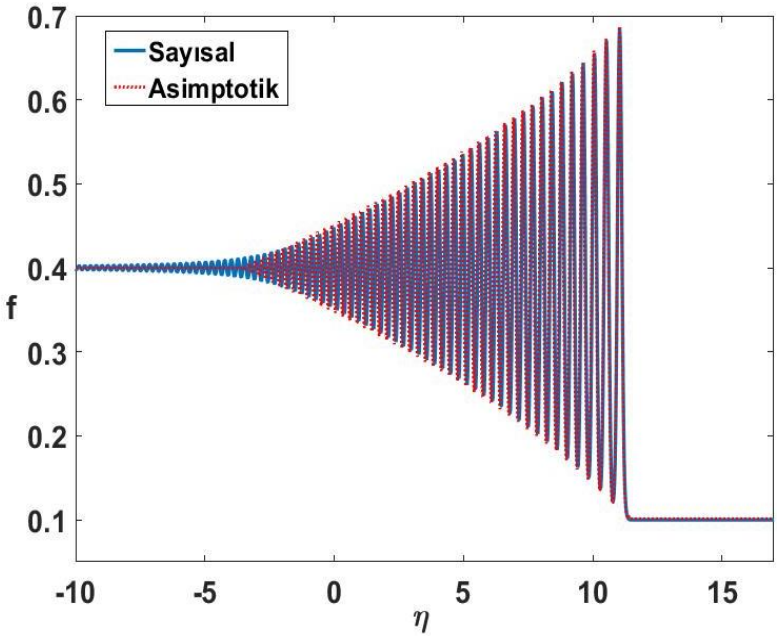
$$\theta(\eta,t) = \int_{-L}^{\eta} \frac{k(\eta',t)}{\varepsilon} d\eta' - \int_0^t \frac{k(\eta,t')V(\eta,t')}{\varepsilon} dt' . \quad (26)$$

Denklem (25) ve hızlı faz değişkeni için (26) formülü birlikte kullanılarak sG denkleminin asimptotik çözümü elde edilir. Böylece, bu denklemin DSW çözümleri herhangi bir t zaman değeri için oluşturulabilir. $t = 10$ zaman değeri için sG denkleminin doğrudan sayısal çözümüyle asimptotik çözümü çakışık olarak Şekil 3'te görüldüğü gibi elde edilir.



Şekil 3. sG denkleminin $t = 10$ için için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Elde edilen çizimlere göre, salınımların ön kenar genliği ile dalga boyunun asimptotik yaklaşımda ve sayısal çözümde uyumlu olduğu gözlemlenebilir. Böylece, Whitham modülasyon teorisi, $t = 10$'da sG denklemindeki dispersif şok dalgaları için doğru ve uygun çözümler elde etmemizi sağlamıştır. Karşılaştırma yapabilmek amacıyla $t = 10$'da Gardner denkleminin sayısal çözümü ve Whitham teorisi ile elde edilen asimptotik çözümünün çakışık olarak grafiği Şekil 4'te verilmiştir.



Şekil 4. Gardner denkleminin $t = 10$ için için elde edilen sayısal ve asimptotik çözümlerinin karşılaştırılması.

Gardner ve sG denklemleri için elde edilen çözümlere göre, başlangıç adım parametrelerinin $f^- = 0.4$ ve $f^+ = 0.1$ alınmasıyla birlikte sG denkleminin sayısal çözümü yapılırken $t = 10$ zaman değeri için Şekil 3'de arka kenar seviyesi 0.2 değerine kadar düşmüştür. Buna bağlı olarak dalga genliğinde de düşüş meydana gelmiştir. Bunun sebebi, sG denkleminin sınır koşullarının t'ye bağlılığıdır. Gardner denkleminde sınır koşulları sabit olduğundan, böyle bir değişim gözlemlenmemiştir.

Sayısal yaklaşımda, θ_0 faz değişimi doğrudan sayısal simülasyonlarla uyumlu olacak şekilde seçilmiştir. Bu seçim için dispersif şok dalgasının ortalama değeri bulunur, yani, en büyük soliton genliği ve arka kenarın ortalaması hesaplanır. Sonrasında θ_0, doğrudan sayısal simülasyonlarda karşılık gelen tümsekle özdeş olan asimptotik çözümden belirlenen en yakın dalganın merkezi olarak seçilir. Buna göre, sG denklemi için DSW ortalaması yaklaşık olarak (0.343+0.2)/2=0.2715'dir ve asimptotik çözüm, orta bölgede genlik değeri 0.2579 olan bir tümseğe sahiptir.

$t = 10$'da sG denkleminin DSW çözümü için ön kenarın $\eta_+ = 9.192$ konumu kullanılarak ortalama hız hesaplanırsa $V_{avg} = 0.919$ elde edilir. Şekil 4'te verilen Gardner denkleminin DSW çözümü için ise ön kenarın $t = 10$'da ortalama hız değeri 1.133 olarak hesaplanır. Buna göre, sG denkleminin ön kenarının daha yavaş hareket ettiği görülmektedir. Bu durum ve sG denklemi için DSW'nun genel hatları [10]'da verilen animasyon ile ayrıntılı bir şekilde görülebilir.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, (3+1) boyutlu Gardner-KP denklemine bir benzerlik dönüşümü uygulanarak bu denklem (1+1) boyutlu küresel Gardner (sG) denklemine indirgenmiştir. Bu denklemin, özel bir başlangıç koşulu altındaki DSW çözümlerinin elde edilmesi problemi ele alınmıştır. Buradaki özel başlangıç koşulu, bir paraboloid cephe boyunca tanımlı birim basamak fonksiyonudur. Dönüşüm yardımıyla elde edilen (1+1) boyutlu sG denklemine WMT

uygulanarak DSW yayılımını ifade etmek için gerekli olan Whitham modülasyon denklemleri türetilmiştir. Bu denklem sisteminin sayısal çözümleri kullanılarak sG denkleminin dispersif şok dalgası çözümleri elde edilip, basamak tipi başlangıç koşulu altında sG denkleminin doğrudan sayısal çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, aralarında iyi bir uyumun olduğu görülmüştür. Böylece kullanılan yöntemin doğruluğu kontrol edilmiş olup elde edilen sonuçlar gelecekte nonlineer dalga yayılımını modelleyen yüksek boyutlu birçok denklem için kullanılabilir.

Yüksek boyutlu dispersif nonlineer denklemlerin DSW çözümlerinin incelenmesi ancak sayısal olarak yapılabildiğinden çok kısa zaman aralığı için ortaya konan simülasyonlarda bile uzun bilgisayar hesaplama zamanları gerekmektedir. Bu süre indirgenmiş (1+1) boyutlu sistemlerin sayısal çözümleri için saat mertebesinde iken, WMT'nin sayısal çözümleri için dakikalar mertebesindedir. Bu nedenle orijinal denklemler yerine indirgenmiş denklemlere ait WMT'nin sayısal çözümlerinin elde edilmesi, (2+1) ve (3+1) boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerinin incelenmesi için önemli bir aşamadır. Yapılan analizler neticesinde, (1+1) boyutlu indirgenmiş denklemlerin doğrudan sayısal çözümleri ile WMT uygulanması sonucu elde edilen modülasyon denklemlerinin sayısal çözümleri karşılaştırılarak kullanılan yöntemin doğruluğu ve geçerliliği kontrol edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] G. El, M. Hoefer, Dispersive shock waves and modulation theory, *Physica D*. 333 (2016) 11–65.

[2] A. Demirci, Dispersive shock waves in three dimensional Benjamin-Ono equation, *Wave Motion*. 94 (2020) 1–10.

[3] A. M. Kamchatnov, et al., Undular bore theory for the Gardner equation, *Physical Review E*. 86 (2012) 036605.

[4] M. J. Ablowitz, A. Demirci, Y.-P. Ma, Dispersive shock waves in the Kadomtsev-Petviashvili and two dimensional Benjamin-Ono equations, *Physica D*. 333 (2016) 84–98.

[5] G. Aslanova, S. Ahmetolan, A. Demirci, Nonlinear modulation of periodic waves in the cylindrical Gardner equation, *Physical Review E*. 102 (2020) 052215.

[6] G. B. Whitham, Nonlinear Dispersive Waves, *Proc. R. Soc. A*. 283 (1965) 238-261.

[7] J. C. Luke, A perturbation method for Nonlinear dispersive shock wave problems, *Proc. R. Soc. A*. 292 (1966) 403.

[8] S. M. Cox, P. C. Matthews, Exponential Time Differencing For Stiff Systems, *Journal of Computational Physics*. 176 (2002) 430-455.

[9] A. K. Kassam, L. N. Trefethen, Fourth- Order Time Stepping For Stiff PDEs, *SIAM Journal On Scientific Computing*. 26 (2005) 1214-1233.

[10] Dispersive shock waves in the Gardner and spherical Gardner equations, Youtube. (2021). https://youtu.be/nD2m0135Cls (erişim: Ağustos 8, 2021).

PERİYODİK GÖZENEKLİ YAPIYA SAHİP METAMALZEMELERDE VURGU BURKULMASI İÇİN VİSKOELASTİK MODEL

Sinan Fırat Dal[1] ve Serdar Göktepe[2]
[1,2] Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 06800, Ankara

ABSTRACT

Periodic porous metamaterials belong to a class of composite solids that is often made up of rubbery polymers and designed to harness the mechanical instability during deformation. Moreover, these polymers can undergo large deformations thereby exhibiting dissipative behavior due to viscoelastic effects, which are typically encountered in rubber-like materials. Although hyperelastic constitutive models do not fully capture the observed dissipative material response, periodic porous metamaterials are modeled commonly within the framework of finite elasticity. Therefore, it is of key importance to extend the existing approach based on hyperelasticity towards a viscoelastic model within the geometrically non-linear setting. To this end, we propose a constitutive model of finite linear viscoelasticity to consider the rate-dependent dissipative response of elastomeric metamaterials with a periodic porous structure. Similar to their response obtained by finite elasticity, the loss of geometric stability under compression leading to pattern transformation is also observed in finite linear viscoelasticity models. As opposed to the elastic case, however, the viscoelastic bifurcation is further accompanied by the snap-through response, especially in the presence of lateral confinement under compression. Therefore, this study is dedicated to the finite element analyses of the snap-through response of periodic biholar viscoelastic metamaterials with circular holes under longitudinal compression and lateral confinement.

Keywords: Snap-through Response; Periodic Porous Metamaterials; Finite Linear Viscoelasticity; Finite Element Method (FEM).

ÖZET

Periyodik gözenekli metamalzemeler, lastiksi polimerlerden oluşan ve şekil değiştirme sırasında oluşan mekanik kararsızlıktan faydalanmak üzere tasarlanmış kompozit katı malzemeler sınıfına aittir. Ayrıca, bu polimerler büyük şekil değişimleri altında, kauçuk benzeri malzemelerde sıklıkla karşılaşılan viskoelastik etkilerden dolayı enerji tüketimi sergileyebilmektedirler. Hiperelastik malzeme modelleri, enerji tüketimi gözlemlenen malzeme davranışını tam olarak yakalayamasa da, periyodik gözenekli metamalzemeler yaygın olarak büyük şekil değiştirmelerde elastik olarak modellenegelmiştir. Bu nedenle, hiperelastisiteye dayalı mevcut yaklaşımı, geometrik olarak doğrusal olmayan ortamda viskoelastik etkileri de kapsayacak şekilde genişletmek çok önemlidir. Bu amaçla, bu çalışma kapsamında, periyodik gözenekli bir yapıya sahip elastomerik metamalzemelerin hıza bağlı enerji tüketen davranışını dikkate almak için büyük şekil değiştirmelerde doğrusal

viskoelastik bir malzeme modeli önerilmektedir. Büyük şekil değiştirmelerde elastisite ile elde edilen davranışa benzer şekilde, büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisite modellerinde de örüntü dönüşümüne yol açan basma yükü altında geometrik kararlılık kaybı gözlemlenmektedir. Bununla birlikte, elastik durumun aksine, yanal sarmalamanın varlığında basma yüküyle vurgu burkulması tepkisi viskoelastik çatallanmaya eşlik etmektedir. Bu nedenle, bu çalışma, uzunlamasına basma gerinimi ve yanal sarmalama altında iki tür dairesel deliğe sahip periyodik viskoelastik metamalzemelerin vurgu burkulması tepkisinin sonlu elemanlar analizlerini konu almaktadır.

Anahtar kelimeler: Vurgu Burkulması; Periyodik Gözenekli Metamalzemeler; Büyük Şekil Değiştirmelerde Doğrusal Viskoelastisite; Sonlu Eleman Yöntemi (SEY).

GİRİŞ

Elastomerik malzemeler, uygulanan yüke bağlı olarak büyük deformasyonlar gösterirler. Elastomerlerin davranışı görüngesel (fenomenolojik) yaklaşımla elde edilen bünye denklemleriyle ifade edilebilir. Görüngüsel yaklaşım, katı bir cismi sürekli bir ortam olarak ele alır ve malzemenin makroskopik yapısı ile ilgilenir. Bununla birlikte, doğadaki herhangi bir malzeme yapısında farklı ölçeklerdeki heterojenlikleri barındırır. Bu durumda cismin sürekliliği kabulu yanlış sonuçlara yol açabileceği için makro ölçekte malzeme davranışını tanımlamayı amaçlayan bünye denklemleri, malzemenin heterojenliğini dikkate almalıdır [1,2].

Bir cisimde heterojenlik her zaman rastgele değildir. Aslında, bazıları mikro ölçekte yinelenen geometrik birimlerden oluşur. Başka bir deyişle, bu cisimlerin periyodik örüntüleri vardır. Bu nedenle, bu katılar "periyodik hücresel katılar" olarak adlandırılırlar [3,4,5,6,7]. Periyodik örüntülere sahip katılara doğada sıklıkla rastlanır. Söz gelimi, kelebeklerin, sineklerin ve kuşların kanatlarında, balık yüzgeçlerinde, çeşitli kertenkele ve sürüngenlerin derilerinde ve nilüfer gibi bitkilerin yapraklarında mikro ölçekte ve mikron altı seviyede görülen periyodik örüntülü yapılar bulunmaktadır [3,4,8]. Doğada çeşidine sıklıkla rastlanan periyodik yapıların sentetik olarak üretilmesi ve endüstride kullanılabilmesi için üretilen yapının ve kullanılan malzemenin verilen koşullar için dikkatle incelenmesi gerekmektedir. Bu yönde yapılan çalışmalar sonucunda periyodik yapılı malzemeler, mekanik, akustik, optik ve termal alanlardaki mühendislik uygulamaları için kullanılabilir hale gelmişlerdir. Sonuç olarak, periyodik yapıya sahip malzemelerin günümüz teknolojisinde kullanılmaya başlanılması onların mekanik davranışlarının dikkatle incelenmesini de gerektirmektedir.

Periyodik mikro yapıya sahip olacak şekilde üretilmiş malzemeler, kendini tekrar eden mikro yapıya sahip makro cisimler olarak düşünülebilirler. Burada bahsedilen periyodik mikro yapılı cisimler, çeşitli dairesel veya dairesel olmayan gözenekler içeren periyodik yapılardır [9]. Bu tip cisimler, uygulanan mikroskopik basma yükünün mertebesine bağlı geometrik kararsızlıklar gösterir. Bir başka deyişle, uygulanan basma yükü kritik değere ulaştığında, çatallaşma meydana gelir ve bu durum yapının kararlılığını etkileyerek örüntü değişimine sebep olur. Teknik olarak açıklamak gerekirse, periyodik mikro yapıya sahip cismin rijitlik matrisinin en küçük özdeğeri çatallaşma gerçekleşene kadar pozitiftir. Bu değer, yükleme arttıkça azalmaya başlar. Çatallaşma başladığında ise cismin rijitlik matrisinin en küçük özdeğeri sıfıra eşit olur. Ayrıca yapının kararsızlığı, o yapı için hesaplanan ya da ölçülen basma yükü-şekil değiştirme eğrilerinde de gözlemlenmektedir. Bu tür malzemeler, yüksek enerji ve darbe emilimi gerektiren uygulamalarda kullanılmaktadır. Ayrıca, genellikle kaçınılan bir özellik olan kararsızlık, kullanılabilir bir özellik haline gelmektedir. Bu sebeple, bu tür malzemelere metamalzemeler de denilmektedir. Periyodik mikro yapılı polimerik cisimlerin kararlılık davranışını incelemede genellikle büyük şekil değiştirmelerde

hiperelastik modeller kullanılmaktadır [3,4,5,6,7]. Burada bahsi geçen metamalzemeler, lastiksi kauçuk davranışına sahip elastomer türü malzemelerden üretilmektedir. Fakat, kauçuk benzeri malzemelerin büyük çoğunluğunda, büyük şekil değiştirmelerdeki zamana ve hıza bağlı viskoelastik davranış nedeniyle içsel enerji tüketimi görülmektedir. Bu nedenle, tümüyle elastik malzeme modelleri, kauçuk benzeri malzemelerin mekanik davranışını çoğunlukla tam olarak yakalayamamaktadır. Bu nedenle, elastik bünye denklemleri, kauçuk benzeri malzemelerin yükleme hızıyla değişen davranışını dikkate almak için viskoelastisik etkileri de dikkate alacak şekilde genişletilmelidir [10,11,12].

Dykstra vd. [13], iki farklı tür dairesel boşluktan oluşan periyodik metamalzemeyi önce yanal yönde yerel sarmalamaya maruz bırakmış, ardından uzunlamasına yönde basma yükü uygulayarak malzemenin davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmada deneysel sonuçların yanında hesaplamalı model sonuçları da sunulmuştur. Hesaplamalı modelde iki tür dairesel boşluklu metamalzemenin davranışını Maxwell-Wiechert modeli ile ifade etmişlerdir. Maxwell-Wiechert modeli bir adet Hooke elemanı (yay) ile N adet Maxwell elemanının (yay+amortisör) paralel birleşiminden oluşmaktadır. Dykstra vd. [13] şekil değiştirmelerin küçük olduğu kabulünü yapmışlardır. Yanal yönde uygulanan yerel sarmalama sırasında, yüklemenin belirli bir aşamasında geometrik kararsızlık oluşması sonucunda örüntü değişimi gerçekleşmiştir (asal eksenleri birbirine dik elipslerden oluşan örüntü). Yerel sarmalama sonrası oluşan yeni örüntü, sonrasında uygulanan uzunlamasına yöndeki basma yükü ile tekrar değişmektedir (asal eksenlerinin yönleri 90˚ dönmüş elipsler). Bu değişimin yükleme hızına bağlı olduğu gözlemlenmiş, çok yavaş (gerinim hızı $\sim 10^{-4}$ s^{-1}) yüklemelerde vurgu burkulması olurken, daha hızlı yüklemelerde (gerinim hızı $\sim 10^{-2}$ s^{-1}) örüntü geçişi oluşmamıştır. Yükleme hızı, periyodik metamalzemenin içsel enerji tüketinimini de etkilemektedir.

Bu çalışmada, Dysktra vd. [13]'den farklı olarak aynı geometri için büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisite modeli kullanılmakta, malzemenin neredeyse sıkıştırılamaz olduğu kabul edilerek Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) kullanılarak kararlılık analizleri gerçekleştirilmektedir.

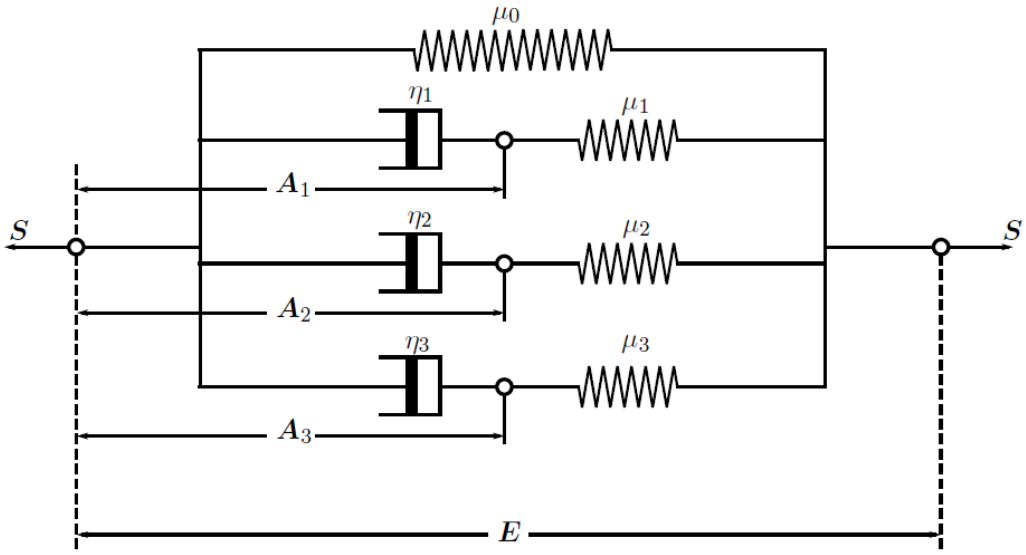
BÜYÜK ŞEKİL DEĞİŞTİRMELERDE DOĞRUSAL VİSKOELASTİSİTE

Bünye ve Alan Denklemleri:

Doğrusal viskoelastik malzeme davranışını açıklamak için birçok reolojik model kullanılmaktadır. Bu modeller, vizkoz etkileri dikkate alan amortisör elemanı ile elastik davranışı açıklayan yay elemanının çeşitli kombinasyonlarından oluşmaktadır. Bu modeller içerisinden Maxwell-Wiechert modeli gerilme gevşemesi davranışını en iyi açıklayan modellerden biridir. Bilindiği gibi, Maxwell-Wiechert modeli bir adet Hooke elemanı (yay) ile N adet Maxwell elemanının (yay+amortisör) paralel birleşiminden oluşmakta, genelleştirilmiş Maxwell modeli olarak da anılmaktadır. İleride kullanılacak olan üç-dallı Maxwell-Wiechert modelinin şematik gösterimi Şekil 1'de sunulmaktadır.

Eldeki elastik olmayan malzeme davranışına ait türevsel denklemleri sunmadan önce bu denklemlerin bağlı olduğu alan büyüklüklerini tanımlamak yerinde olacaktır. Mekanik etkiler altında meydana gelecek olan şekil değiştirmelerin büyük olacağı kabul edildiğinden kinematik büyüklük olarak deformasyon gradyanı $\mathbf{F}(\mathbf{X},t)$ kullanılacaktır. Büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisite modeli için durum, referans (Lagrange) konumu için

Green-Lagrange toplam gerinim tensörü $\mathbf{E}(\mathbf{X},t)$ ve Maxwell elemanlarındaki içsel vizkoz gerinim tensörleri $\mathbf{A}_{i=1,\cdots,N}(\mathbf{X},t)$ ile yerel olarak açıklanmaktadır.



Şekil 1: (Üç-dallı) Maxwell-Wiechert reolojik modelinin şematik gösterimi

$$\text{Durum} := \{\mathbf{E},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_N\} \tag{1}$$

Özgül Helmholtz serbest enerjisi Denklem 1'deki durum değişkenleri cinsinden ifade edilebilir.

$$\hat{\Psi} = \Psi(\mathbf{E},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_N)$$

Vizkoz etkiler eşhacimli (izokorik) şekil değiştirmeler göstermektedir. Bu sebeple, özgül Helmholtz serbest enerji ifadesi hacimsel ve eşhacimli olarak ayrıştırılabilir.

$$\hat{\Psi} = \Psi(\mathbf{E},\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_N) = U(J) + \Psi_{izo.}(\overline{\mathbf{C}},\mathbf{A}_i) \tag{2}$$

Denklem 2'de kullanılan $U(J)$ hacimsel değişimler için yazılan Helmholtz serbest enerjiyi gösterirken, $\Psi_{izo.}(\overline{\mathbf{C}},\mathbf{A}_i)$ ise elastik ve viskoelastik etkileri barındıran Helmholtz serbest enerjinin izokorik kısmını ifade etmektedir. Burada $J = \det(\mathbf{F})$ deformasyon gradyanının determinantını, $\overline{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\,\mathbf{C}$ sağ Cauchy-Green deformasyon tensörünün izokorik kısmını göstermektedir. Denklem 2'deki Helmholtz serbest enerji kullanılarak referans konumu için 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörü ve eşlenik rijitlik modülü aşağıdaki ifadeler yardımı ile hesaplanabilmektedir.

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\mathbf{C}} \qquad\qquad \underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = 2\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} = 4\frac{\partial^2\hat{\Psi}}{\partial\mathbf{C}^2} \tag{3}$$

Büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisite için belirtilen zamana bağlı değişim denklemi referans konumu için Denklem 4'deki gibi yazılır.

$$\dot{\overline{\mathbf{Q}}}_i + \frac{\overline{\mathbf{Q}}_i}{\tau_i} = \beta_i\,\frac{d}{dt}\left(\text{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}^{e}_{izo.}\right]\right) \tag{4}$$

Denklem 4'te belirtilen $\overline{\mathbf{Q}}_i$ her bir Maxwell elemanı üzerinde bulunan amortisörlerin içsel gerilme büyüklüklerini, $\tau_i = \dfrac{\eta_i}{\mu_i}$ gevşeme zamanını, $\beta_i = \dfrac{\mu_i}{\mu_0}$ her bir Maxwell elemanında bulunan yayın kayma modülünün Hooke elemanında bulunan yayın kayma modülüne oranını belirtmektedir.

$\mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1}\right]$, bünye denkleminden elde edilen 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün elastik izokorik kısmının eşhacimli izdüşümünü temsil eder. Denklem 4'deki değişim denklemi, evrişim (konvolusyon) integrali kullanılarak Denklem 5'teki gibi kesin olarak çözülür.

$$\overline{\mathbf{Q}}_i(t) = \underbrace{\exp\left\{-\frac{\mathrm{t}}{\tau_\mathrm{i}}\right\}\overline{\mathbf{Q}}_i(t=0)}_{=\mathbf{0}} + \int_0^t \exp\left\{-\frac{\mathrm{t-s}}{\tau_\mathrm{i}}\right\}\beta_i\,\frac{d}{ds}\underbrace{\left(\mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e}\right]\right)}_{=J^{2/3}\mathbf{S}_{izo.}^{e}}ds \tag{5}$$

Denklem 5'te gösterilen integral ifadesi sayısal yöntemlerle ayrıştırılarak sonraki hesaplamalarda kullanılmak üzere sadeleştirilir. Buna göre, her bir Maxwell dalında bulunan amortisörlerin içsel gerilmeleri $t = t_{n+1} \in \Re_+$ anında Denklem 6'daki gibi gösterilebilir.

$$\overline{\mathbf{Q}}_i^{n+1} = \overline{\mathbf{H}}_i^{n} + \exp\left\{-\frac{\Delta\mathrm{t}}{2\tau_\mathrm{i}}\right\}\beta_i\,J_{n+1}^{2/3}\,\mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1} \tag{6}$$

Denklem 6'daki $\overline{\mathbf{H}}_i^{n}$ geçmiş değişkenleri, $t = t_n \in \Re_+$ anındaki gerilme bilgisini barındırır. Geçmiş değişkenleri Denklem 7'deki gibi hesaplanmaktadır.

$$\overline{\mathbf{H}}_i^{n} = \exp\left\{-\frac{\Delta\mathrm{t}}{\tau_\mathrm{i}}\right\}\overline{\mathbf{Q}}_i^{n} - \exp\left\{-\frac{\Delta\mathrm{t}}{2\tau_\mathrm{i}}\right\}\beta_i\,J_{n}^{2/3}\,\mathbf{S}_{izo.}^{e,n} \tag{7}$$

Denklem 2'de belirtilen Helmholtz serbest enerjinin izokorik kısmı elastik ve viskoelastik kısım için ayrıştırılabilir.

$$\Psi_{izo.}\left(\overline{\mathbf{C}}\,,\mathbf{A}_i\right) = \Psi_{izo.}^{e}\left(\overline{\mathbf{C}}\right) + \sum_{i=1}^{N}\Psi_{izo.}^{v,i}\left(\overline{\mathbf{C}}\,,\mathbf{A}_i\right)$$

2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörü, hacimsel-eşhacimli Helmholtz serbest enerjisi için ayrı ayrı hesaplanır.

$$\mathbf{S}_{izo.} = 2\frac{\partial\hat{\Psi}_{izo.}^{e}\left(\overline{\mathbf{C}}\right)}{\partial\mathbf{C}} + \sum_{i=1}^{N}2\frac{\partial\Psi_{izo.}^{v,i}\left(\overline{\mathbf{C}}\,,\mathbf{A}_i\right)}{\partial\mathbf{C}} \qquad \mathbf{S}_{hac.} = 2\frac{\partial U(J)}{\partial\mathbf{C}} \tag{8}$$

2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün izokorik kısmı viskoelastik etkileri barındırdığından $t = t_{n+1}$ anındaki ifadeleri geçmiş değişkenleri kullanılarak gösterilebilir. Bilindiği üzere, izokorik tensörün izokorik izdüşümü izokorik tensörün kendisine eşittir ($\mathrm{DEV}\left[\mathrm{DEV}\left[\bullet\right]\right] = \mathrm{DEV}\left[\bullet\right]$). Buna göre, 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün izokorik kısmı Denklem 9'daki gibi hesaplanır.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}_{izo.}^{n+1} &= J_{n+1}^{-2/3}\ \mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1} + \sum_{i=1}^{N}\overline{\mathbf{Q}}_{i}^{n+1}\right] \\
&= J_{n+1}^{-2/3}\ \mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1}\right] + J_{n+1}^{-2/3}\ \mathrm{DEV}\left[\sum_{i=1}^{N}\overline{\mathbf{Q}}_{i}^{n+1}\right] \\
&= \mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1} + J_{n+1}^{-2/3}\ \mathrm{DEV}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{\mathbf{H}}_{i}^{n} + \exp\left\{-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right\}\beta_i\, J_{n+1}^{2/3}\,\mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1}\right)\right] \\
&= \mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1} + \sum_{i=1}^{N}\exp\left\{-\frac{\Delta t}{2\tau_i}\right\}\beta_i\ \mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1} + \sum_{i=1}^{N}J_{n+1}^{-2/3}\ \mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{H}}_{i}^{n}\right]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün hacimsel kısmı $t = t_{n+1}$ anındaki ifadeler ile yazılabilir. Sonuç olarak, ilgili tensör aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathbf{S}_{hac.} = J_{n+1}\,\partial_{J_{n+1}}U\left(J_{n+1}\right)\mathbf{C}_{n+1}^{-1}$$

Eldeki doğrusal olmayan denklemleri SEY ile çözebilmek için, ilgili gerilmelere ait modüllerin hesaplanması gerekmektedir. Bu sebeple, izokorik ve hacimsel modüller Denklem 10'daki gibi türetilir.

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_{\mathrm{hac.}} &= 2\,\partial_{\mathbf{C}}\,\mathbf{S}_{hac.} = \left[J_{n+1}^{2}\,\partial_{J_{n+1}^{2}}^{2}U\left(J_{n+1}\right) + J_{n+1}\,\partial_{J_{n+1}}U\left(J_{n+1}\right)\right]\mathbf{C}^{-1}\otimes\mathbf{C}^{-1} - 2\,J_{n+1}\ \partial_{J_{n+1}}U\left(J_{n+1}\right)\underline{\underline{\boldsymbol{I}}}_{\mathbf{C}^{-1}} \\
\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{n+1}} &= 2\,\partial_{\mathbf{C}_{n+1}}\,\mathbf{S}_{izo.}^{n+1} = \left[1+\sum_{i=1}^{N}\beta_i\,\exp\left\{-\frac{\Delta t}{\tau_i}\right\}\right]\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{e,n+1}} + \sum_{i=1}^{N}\overline{\mathbf{H}}_{i}^{n} : \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}}}^{\mathrm{n+1}}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisitenin ana ifadeleri Çizelge 1'de özetlenmiştir.

Çizelge 1: Büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisite için algoritma

1. $t = t_{n+1} \in \Re_{+}$ anında programın veri tabanından ve sonlu eleman kodundan aldığı değerler: Geçmiş değişkenleri $\overline{\mathbf{H}}_{i=1,\cdots,N}$ ve deformasyon gradyanı $\mathbf{F}_{n+1}$.
2. Alan denklemlerinde tanımlanan malzeme katsayılarının hesaplanması.

   $\tau_i = \dfrac{\eta_i}{\mu_i},\ \beta_i = \dfrac{\mu_i}{\mu_0}$
3. Verilen deformasyon gradyanı ile alan ve bünye denklemleri için gerekli büyüklüklerin hesaplanması.

   $\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{F}_{n+1},\ J_{n+1} = \det\left(\mathbf{F}_{n+1}\right),\ \overline{\mathbf{C}}_{n+1} = J_{n+1}^{-2/3}\,\mathbf{C}_{n+1}.$
4. 4. derece izdüşüm tensörlerinin hesaplanması.

   $\underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{I}}} - \dfrac{1}{3}\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1},\ \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}}}} = J^{-2/3}\left(\underline{\underline{\boldsymbol{I}}} - \dfrac{1}{3}\mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^{-1}\right).$
5. Helmholtz serbest enerjinin elastik kısmından 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün elastik izokorik kısmının elde edilmesi.

$$\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1} = 2\,\partial_{\overline{\mathbf{C}}_{n+1}} \Psi_{izo.}^{e}\left(\overline{\mathbf{C}}_{n+1}\right).$$

6. 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün elastik izokorik kısmının eşhacimli izdüşümünün hesaplanması.

$$\mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1}\right] = \overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1} : \underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}}.$$

7. 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün elastik kısmının hesaplanması.

$$\mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1} = J_{n+1}^{-2/3}\ \mathrm{DEV}\left[\overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1}\right].$$

8. Vizkoz gerilmelerinin hesaplanması.

$$\overline{\mathbf{Q}}_{i}^{n+1} = \overline{\mathbf{H}}_{i}^{n} + \exp\left\{-\frac{\Delta \mathrm{t}}{2\tau_{\mathrm{i}}}\right\} \beta_i\, J_{n+1}^{2/3}\, \mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1}.$$

9. Geçmiş değişkenlerinin güncellenmesi.

$$\overline{\mathbf{H}}_{i}^{n+1} = \exp\left\{-\frac{\Delta \mathrm{t}}{\tau_{\mathrm{i}}}\right\} \overline{\mathbf{Q}}_{i}^{n+1} - \exp\left\{-\frac{\Delta \mathrm{t}}{2\tau_{\mathrm{i}}}\right\} \beta_i\, J_{n+1}^{2/3}\, \mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1}.$$

10. 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün izokorik kısımlarının toplanması.

$$\mathbf{S}_{izo.}^{n+1} = \underbrace{\left[1 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i\, \exp\left\{-\frac{\Delta \mathrm{t}}{\tau_{\mathrm{i}}}\right\}\right]}_{:= g(\Delta t)} \mathbf{S}_{izo.}^{e,n+1} + \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{H}}_{i}^{n} : \underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}}^{\mathrm{n+1}}.$$

11. İzokorik modülün hesaplanması.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{e,n+1}} = 2\,\frac{\partial \overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1}}{\partial \overline{\mathbf{C}}_{n+1}}.$$

12. Elastik izokorik modülün hesaplanması.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{e,n+1}} = \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}}^{\mathrm{n+1}}\right)^{\mathrm{T}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{e,n+1}} : \underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}}^{\mathrm{n+1}} + \overline{\mathbf{S}}_{izo.}^{e,n+1} : \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}}}^{\mathrm{n+1}}.$$

13. İzokorik toplam modülün belirlenmesi.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{n+1}} = \left[1 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i\, \exp\left\{-\frac{\Delta \mathrm{t}}{2\,\tau_{\mathrm{i}}}\right\}\right] \underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{\mathrm{izo.}}^{\mathrm{e,n+1}} + \sum_{i=1}^{N} \overline{\mathbf{H}}_{i}^{n} : \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{M}}}}}}^{\mathrm{n+1}}$$

14. Hacimsel 2. Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün ve ilgili modülün hesaplanması.

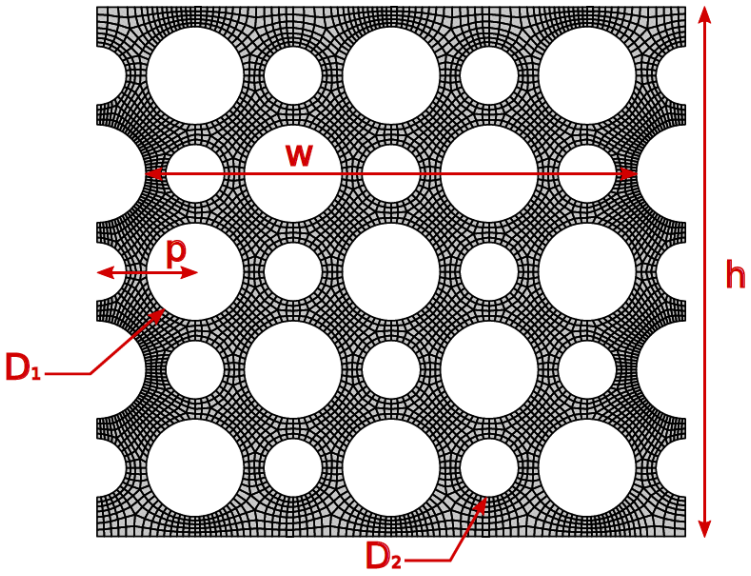
$$\mathbf{S}_{hac.} = J_{n+1}\, \partial_{J_{n+1}} U\left(J_{n+1}\right) \mathbf{C}_{n+1}^{-1}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}}_{\mathrm{hac.}} = 2\,\partial_{\mathbf{C}}\, \mathbf{S}_{hac.} = \left[J_{n+1}^{2}\, \partial_{J_{n+1}^{2}}^{2} U\left(J_{n+1}\right) + J_{n+1}\, \partial_{J_{n+1}} U\left(J_{n+1}\right)\right] \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2\, J_{n+1}\ \partial_{J_{n+1}} U\left(J_{n+1}\right) \underline{\underline{\underline{\underline{\boldsymbol{\mathcal{I}}}}}}_{\mathbf{C}^{-1}}$$

SAYISAL SONUÇLAR

Geometri:

Yanal yönde yerel sarmalama varlığında basma yüküyle vurgu burkulması tepkisinin inceleneceği cisim Şekil 2'de gösterilmektedir. Şekil 2'de gösterilen model, Dykstra vd. [13] çalışmasında sunulan cisim ile aynı geometriye sahiptir.



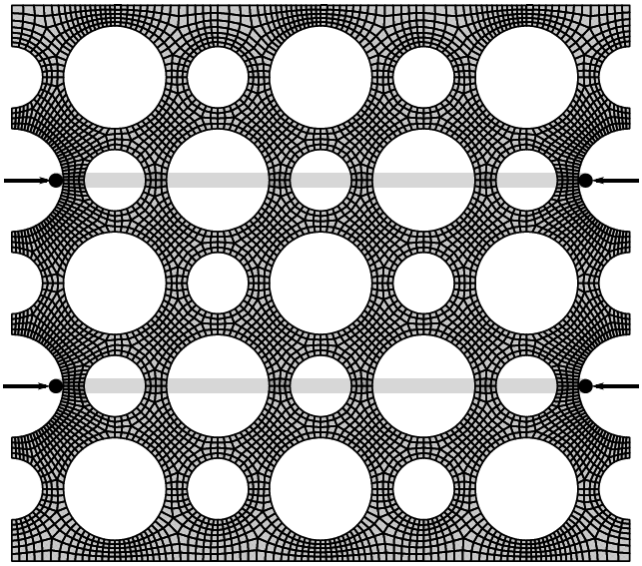
Şekil 2: Hıza bağlı vurgu burkulması tepkisinin inceleneceği iki tür dairesel boşluktan oluşan periyodik geometri

Şekil 2'de gösterilen boyutların değerleri Çizelge 2'de verilmiştir. Burada w periyodik metamalzemenin yanal sarmalama uygulanacak yüzeyleri arasındaki mesafeyi (en), h metamalzemenin boyunu, D_1 ve D_2 farklı tipteki dairesel boşlukların çapını, p ise yan yana olan dairesel boşlukların merkezleri arasındaki mesafeyi temsil etmektedir.

Çizelge 2: İki tür boşluktan oluşan periyodik metamalzemeye ait boyutlar

$w\,(\mathrm{mm})$	$h\,(\mathrm{mm})$	$D_1\,(\mathrm{mm})$	$D_2\,(\mathrm{mm})$	$p\,(\mathrm{mm})$
50	54	10	6	10

Öncesinde bahsi geçen yanal yönde yerel sarmalama, 2. ve 4. sırada bulunan D_1 çaplı dairesel boşlukların iç yüzeyinden Şekil 3'deki gibi uygulanmaktadır.



Şekil 3: Yanal sarmalamanın uygulandığı yüzeyler

Şekil 2'de gösterilen metamalzeme, önce yanal yönde sarmalama gerinimi %18 olacak şekilde sıkıştırılır. Sonrasında cisim, bu yanal gerinimde sabit tutulup, düşey yönde basma gerinimi uygulanır. Kullanılan malzeme viskoelastik olduğundan vurgu burkulması davranışı uygulanan basma geriniminin hızına bağlı olarak değişiklikler göstermektedir.

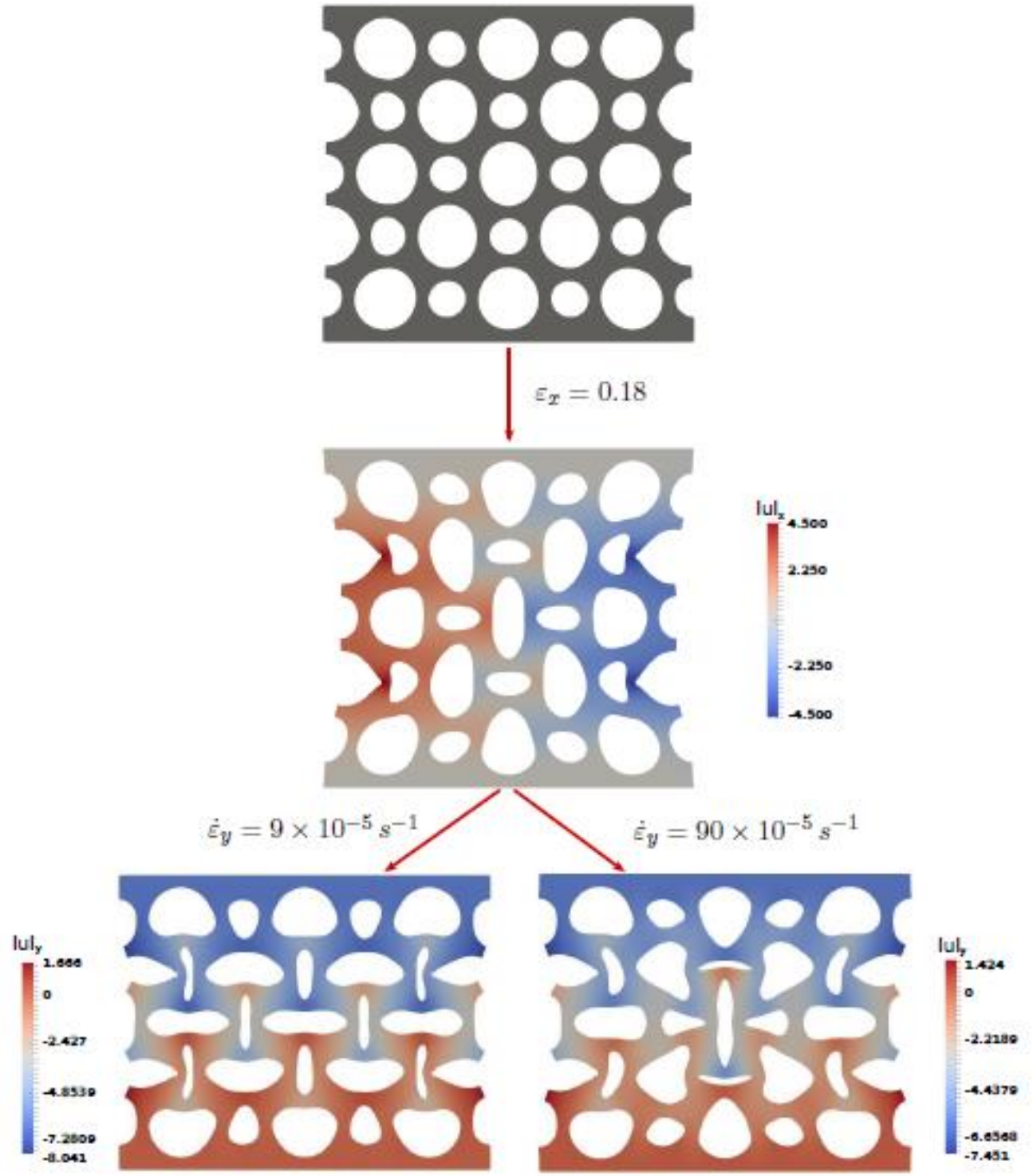
Büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastisite modeli üç-dallı Maxwell-Wiechert reolojik modeli için oluşturulmuş olup, model için gerekli malzeme katsayıları Çizelge 3'te belirtilmiştir.

Çizelge 3: Üç-dallı Maxwell-Wiechert reolojik modeli için malzeme katsayıları

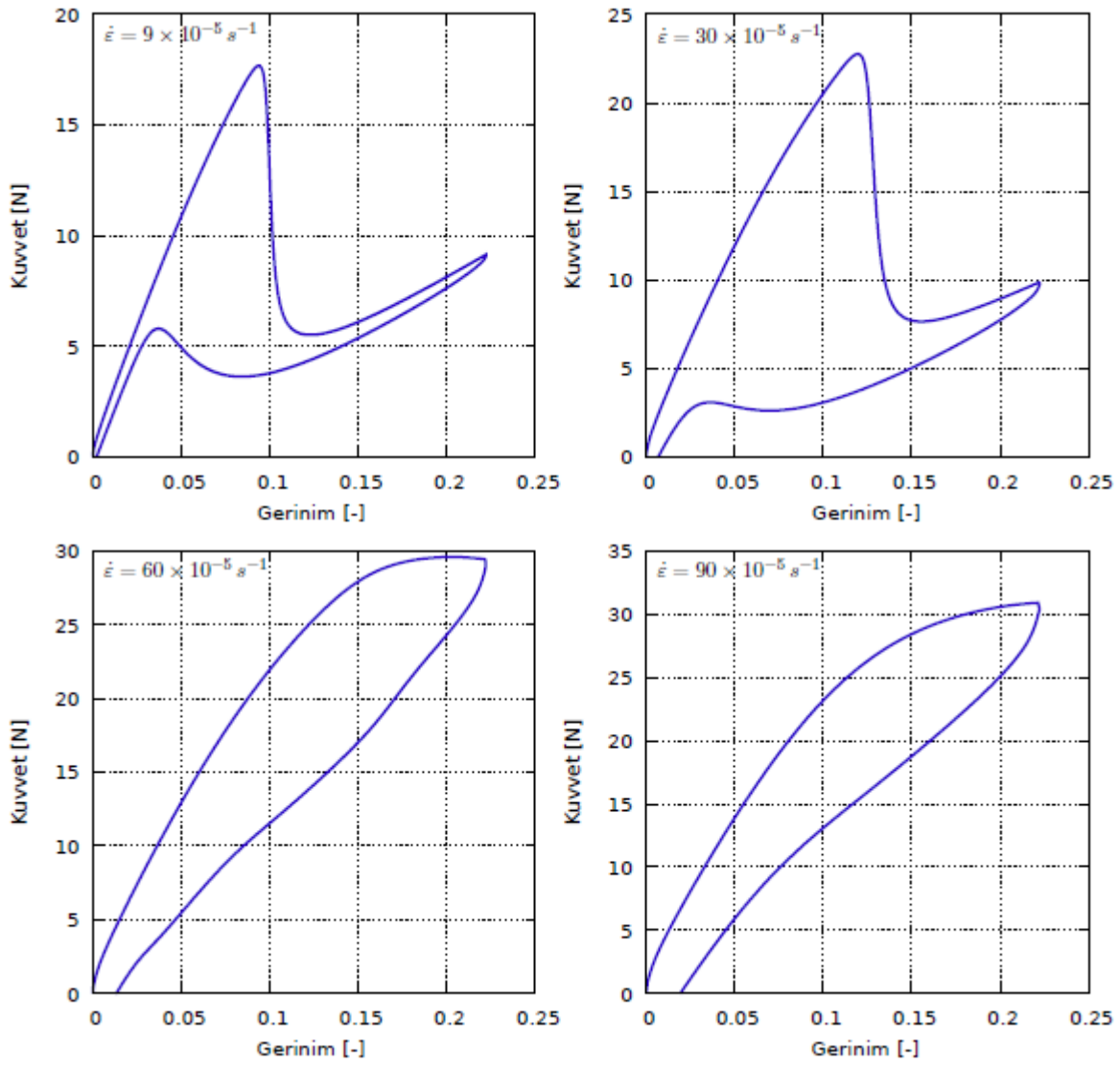
Katsayı	Değer	Birim
κ	300.000	MPa
μ_0	0.048	MPa
μ_1	0.005	MPa
η_1	1.800	MPa.s
μ_2	0.090	MPa
η_2	0.650	MPa.s
μ_3	0.010	MPa
η_3	0.600	MPa.s

Yanal sarmalama sonrasında yapının geometrik kararlılığı bozularak dairesel boşluklar birbirlerine dik eliptik boşluklara dönüşmektedir. Yanal sarmalamaya ek olarak düşey gerinime maruz kalan malzeme, düşey gerinimin hızına bağlı olarak vurgu burkulması göstermektedir. Vurgu burkulmaı gerçekleşen hızlarda, birbirine dik eliptik boşlukların asal eksenleri 90˚'lik dönüş yaparak yeni örüntüsüne ulaşır. Şekil 4'te farklı gerinim hızları için

cismin şekil değişimleri şema olarak gösterilmiştir. Düşey yöndeki basma gerinimi yaklaşık %20 'lik değere ulaştıktan sonra, aynı gerinim hızıyla çekilir. Viskoelastik malzemelerin enerji sönümleyici davranışı burada da görülmektedir. Malzemeye çekme gerinimi uygulanırken vurgu burkulması çekme gerinim hızına bağlı olarak tekrar oluşur. Şekil 2'de gösterilen metamalzemenin farklı gerinim hızlarındaki kuvvet-gerinim eğrileri Şekil 5'te gösterilmektedir.



Şekil 4: Farklı gerinim hızları için geometrik kararlılığın değişimi ve vurgu burgulması davranışı



Şekil 5: Farklı gerinim hızları için kuvvet-gerinim eğrileri

SONUÇLAR

Periyodik gözenekli metamalzemeler, şekil değiştirme sırasında oluşan mekanik kararsızlıktan faydalanmak üzere tasarlanmış kompozit yapılardır. Sıklıkla polimer kullanılarak üretilen bu yapılar, viskoelastik davranış göstermelerine rağmen periyodik gözenekli yapıların kararlılık analizleri için büyük şekil değiştirmelerde elastik olarak modellenegelmiştir. Bu amaçla, bu çalışmada, iki tür boşluklu yapıya sahip periyodik gözenekli elastomerik bir metamalzemenin hıza bağlı enerji tüketen davranışını dikkate almak için büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastik bir malzeme modeli önerilmiştir. Büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastik model kullanılarak yapılan analizlerde, büyük şekil değiştirmelerde doğrusal elastik modeldeki sonuçlara benzer olarak geometrik kararlılığın kritik gerinim değerlerinde kaybolduğu gözlemlenmiştir. Ek olarak, yanal yönde yerel sarmalama uygulanan bu yapıların, belirli gerinim hızlarında yeniden geometrik kararlılık kaybı gösterdiği ve yapıdaki eliptik

boşlukların 90˚'lik bir dönüş ile yeni örüntü oluşturduğu görülmüştür. Malzemenin yük-gerinim eğrileri incelendiğinde geometrik kararlılığın kaybolduğu gerinim değerinde yapının taşıdığı kuvvetin hızla düştüğü ve daha düşük bir rijitlikle yük taşımaya devam ettiği sayısal olarak incelenmiştir. Böylelikle büyük şekil değiştirmelerde doğrusal viskoelastik model kullanılarak periyodik gözenekli elastomerik malzemelerin uygulanan gerinim hızına bağlı vurgu burkulması davranışı sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] S. Nemat-Nasser, M. Hori, *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, Elsevier, 2013.

[2] T. I. Zohdi, *Homogenization Methods and Multiscale Modeling: Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2017: s. 1–24.

[3] K. Bertoldi, M. C. Boyce, Mechanically triggered transformations of phononic band gaps in periodic elastomeric structures, *Physical Review B*, 77 (2008) 052105.

[4] K. Bertoldi, M. C. Boyce, S. Deschanel, S. M. Prange, T. Mullin, Mechanics of deformation-triggered pattern transformations and superelastic behavior in periodic elastomeric structures, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 (2008) 2642–2668.

[5] J. Shim, P. Wang, K. Bertoldi, Harnessing instability-induced pattern transformation to design tunable phononic crystals, *International Journal of Solids and Structures*, 58 (2015) 52-61.

[6] N. Triantafyllidis, M. Nestorovic, M. Schraad, Failure surfaces for finitely strained two-phase periodic solids under general in-plane loading, *Journal of Applied Mechanics*, 77 (2005) 505-515.

[7] E. Polukhov, D. Vallicotti, M.-A. Keip, Computational stability analysis of periodic electroactive polymer composites across scales, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 337 (2018) 165-197.

[8] P. Vukusic, J. R. Sambles, Photonic structures in biology, *Nature*, 424 (2003) 852-855.

[9] J. T. B. Overvelde, S. Shan, K. Bertoldi, Compaction through buckling in 2D periodic, soft and porous structures: effect of pore shape, *Advanced Materials*, 24 (2012) 2337-2342.

[10] M. Kaliske, H. Rothert, Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains, *Computational Mechanics*, 19 (1997) 228-239.

[11] D. Liefeith, S. Kolling, An anisotropic material model for finite rubber viscoelasticity, *LS-DYNA Anwenderforum*, (2007) 25–54.

[12] J. C. Simo, T. J. R. Hughes, *Computational Inelasticity*, 1998: s. 336-373.

[13] D. M. J. Dykstra, J. Busink, B. Ennis, C. Coulais, Viscoelastic Snapping Metamaterials, *Journal of Applied Mechanics*, 86 (2019) 111012.

DİKDÖRTGEN İÇ ÇATLAK İÇEREN PZT/METAL/PZT KALIN PLAĞIN DELAMİNASYON BURKULMA MODUNA İKİ EKSENLİ STATİK BASINÇ KUVVETİNİN ETKİSİ

Fatih Aylıkcı[1], Ülkü Babuşçu Yeşil[2]
[1,2]Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Istanbul

ABSTRACT

In this work the buckling delamination mode of a cracks' surface contained in a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate is studied and this work is made within the scope of the piecewise homogeneous body model by utilizing the so-called 3D linearized theory of stability loss for piezoelectric materials. It is supposed that there is an interface rectangular crack between the face and core layers and this plate is loaded with the bi-axial uniformly distributed compressive forces acting on its vertical surfaces. It is assumed that the surfaces of the considered interface cracks have infinitesimal initial imperfections before the loading and the evolutions of these initial imperfections under bi-axial compressive forces are investigated. The values of the critical buckling forces for the local buckling delamination of the considered rectangular plate around the cracks are determined from the initial imperfection's criteria [1]. Observations regarding the buckling of the structural members under pressure show that some surface wrinkles occurred before the buckling. While the external pressure force approaches to its critical value of the considering element, these wrinkles evolve into the buckling mode shape of this structural element. The aim of this study is to investigate these wrinkles on the surfaces of interface cracks and determine the influence of various geometric and material parameters on this surface wrinkles (buckling mode) under the assumption that the values of the loading less than its the critical value.

Keywords: PZT sandwich thick plate, 3D FEM, buckling delamination, embedded crack, critical force, buckling mode, surface wrinkles

ÖZET

Bu çalışmada, tabakaları arasında birbirine paralel ve özdeş iç çatlaklar içeren PZT/Metal/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın, kenarlarından iki-eksenli statik basınç kuvveti etkisinde delaminasyon burkulma modu incelenmiş olup, ele alınan problem üç boyutlu elektro-elastisite teorisi ile parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde matematiksel olarak modellenmiştir. Bu PZT/Metal/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın içerdiği iç çatlakların yüzeylerinin yüklemeden önce çok küçük ön eğintiye sahip olduğu kabul edilmiş olup bu küçük ön eğintilerin iki-eksenli statik basınç kuvveti etkisinde gelişimi araştırılmıştır. Problem parametrelerinin bazı değerlerine ait kritik delaminasyon burkulma kuvvetinin belirlenmesinde "küçük başlangıç eğinti kriteri" [1] kullanılmıştır. İki eksenli basınç kuvveti altında ele alınan sandviç plağa ait delaminasyon burkulma modları ve bu burkulma modlarına çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin etkisi araştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: PZT sandviç kalın plak, 3B SEY, delaminasyon burkulma, iç çatlak, kritik kuvvet, burkulma modu, yüzey kırışıklıkları

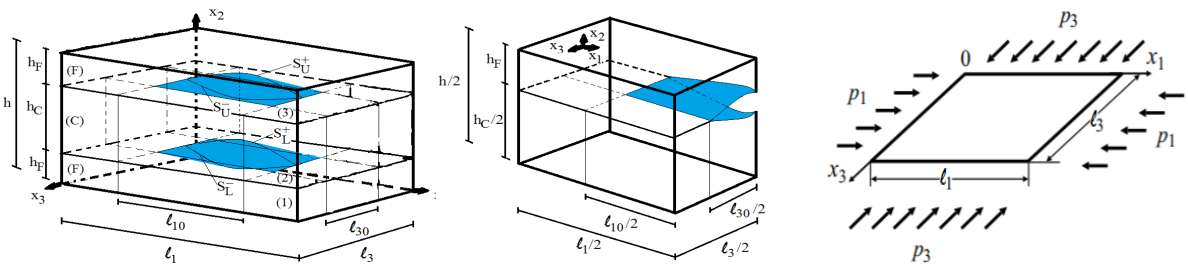
GİRİŞ

Çokkatlı (tabakalı) kompozit malzemelerde veya bunlardan imal edilen yapı elemanlarında çeşitli dış etkiler altında, bu tabakaların birbirinden ayrılmasının yani, delaminasyon ve/veya delaminasyon burkulma problemlerinin incelenmesi, bu tür malzemelerin veya yapı elemanlarının yük taşıma kapasitelerinin belirlenmesi açısından çok önemlidir. Bu problemler, pek çok bilim dalında ele alınan teorik ve deneysel araştırmaların temel konularından biridir. Piezoelektrik (PZT) malzemeden yapılmış plak, kiriş gibi yapı elemanlarının delaminasyon burkulma problemleri ile ilgili literatürde az sayıda çalışma bulunmaktadır. Çatlak içeren çeşitli PZT şerit-plak veya ince plaklar için çeşitli mekaniksel ve/veya elektriksel yükler etkisinde oluşan delaminasyon burkulma problemlerinin ele alındığı bazı çalışmalar [2-6] olarak verilebilir. Bu alanda elektro-elastisite teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde matematiksel olarak modellenen delaminasyon burkulma problemleri PZT şerit-plaklar için [7]'de ve eksenel simetrik PZT kalın plaklar için [8]'de incelenmiştir. [9]'da ise ara yüzeylerinde iki adet birbirine paralel bant çatlak içeren PZT/Metal/PZT sandviç dikdörtgen kalın plağın üç boyutlu delaminasyon burkulma problemleri incelenmiştir.

PZT malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plakların içerdiği çatlakların tek eksenli yükleme altında burkulma modlarının incelenmesi ile ilgili [10-11] çalışmaları verilebilir. Bu çalışmada katmanları arasında dikdörtgen iç çatlaklar içeren PZT sandviç dikdörtgen plağın, çatlaklar doğrultusunda iki-eksenli normal dış basınç kuvveti etkisinde, delaminasyon burkulma problemleri ele alınmış ve bazı geometrik ve malzeme parametrelerinin yapının burkulma moduna etkisi incelenecektir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Ele alınan yapı elamanı ve yükleme durumu Şekil 1'de verilmiştir. Bu dış katmanları PZT orta katmanı metal malzemeden yapılmış ve katmanlar arasında dikdörtgen çatlak içeren bu yapı elamanının çatlaklar doğrultusunda etkiyen iki eksenli dış basınç kuvveti etkisinde delaminasyon burkulma problemi incelenecektir. Bu problemlerin matematiksel modeli, üç boyutlu Elektro-Elastisite teorisinin kesin alan denklemleri kullanılarak, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde yapılmıştır. Belirtelim ki, ele alınan problemin matematiksel modellemesi genel olarak verilecek yani, tüm katmanlar PZT malzemeden yapılmış gibi alınacak, ancak sayısal hesaplamalarda orta katmanın metal malzeme olduğu göz önünde bulundurulacaktır.



(a) (b) (c)

Şekil 1. İç çatlaklar içeren kalın plakta yükleme durumu ve plak geometrisi
(a) Çözüm bölgesinin tamamı (b) Çözüm bölgesinin 1/8'lik kısmı (c) Yükleme durumu

Ele alınan sınırdeğer probleminin çözüm bölgesi,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 - S_L^{\mp} - S_U^{\mp} \tag{1}$$

burada,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{0 \le x_1 \le \ell_1; 0 \le x_2 \le h_F; 0 \le x_3 \le \ell_3\}, \\ \Omega_2 &= \{0 \le x_1 \le \ell_1; h_F \le x_2 \le h_F + h_C; 0 \le x_3 \le \ell_3\}, \\ \Omega_3 &= \{0 \le x_1 \le \ell_1; h_F + h_C \le x_2 \le h; 0 \le x_3 \le \ell_3\}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} S_L^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \le x_1 \le (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F \mp 0; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \le x_3 \le (\ell_3 + \ell_{30})/2\}, \\ S_U^{\mp} &= \{(\ell_1 - \ell_{10})/2 \le x_1 \le (\ell_1 + \ell_{10})/2; x_2 = h_F + h_C \mp 0; (\ell_3 - \ell_{30})/2 \le x_3 \le (\ell_3 + \ell_{30})/2\} \end{aligned} \tag{3}$$

dir. (1)'de Ω_1, Ω_2 ve Ω_3'ler sırasıyla alt, orta ve üst katmanları (tabakaları); $S_L^{\mp}(S_U^{\mp})$ alt ve orta (orta ve üst) tabakalar arasında yer alan çatlağın alt (üst indis "-" yani, $S_L^{-}(S_U^{-})$) ve üst (üst indis "+" yani, $S_L^{+}(S_U^{+})$) yüzeylerini temsil etmektedir (Şekil 1).

Ele alınan (1) çözüm bölgesinde sağlanan yönetici denklemler, her $r_n\,(n=1,2,3)$ katmanın PZT malzemeden yapılmış olması durumu için,

$$\frac{\partial K_{ji}^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0, \frac{\partial D_j^{(r_n)}}{\partial x_j} = 0,$$

$$K_{ji}^{(r_n)} = T_{jk}^{(r_n)}\left(\delta_i^k + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k}\right) + M_{ji}^{(r_n)}, D_i^{(r_n)} = e_{ikl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} + \varepsilon_{ik}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}$$

$$T_{ij}^{(r_n)} = c_{ijkl}^{(r_n)} s_{kl}^{(r_n)} - e_{kij}^{(r_n)} E_k^{(r_n)}, s_{kl}^{(r_n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^{(r_n)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(r_n)}}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_l}\frac{\partial u_i^{(r_n)}}{\partial x_k}\right)$$

$$M_{ji}^{(r_n)} = \varepsilon_0\left(E_i^{(r_n)} E_j^{(r_n)} - \frac{1}{2} E_k^{(r_n)} E_k^{(r_n)} \delta_i^j\right), E_k^{(r_n)} = -\frac{\partial \phi^{(r_n)}}{\partial x_k} \tag{4}$$

olarak verilebilir. (4)'de $i;j;k;l = 1,2,3$ için T_{jk}, gerilme tansörü bileşenini; M_{ji}, Maxwell gerilme tansörü bileşenini; u_i, mekanik yerdeğiştirme vektörü bileşenini; D_i, elektriksel yerdeğiştirme vektörü bileşenini; s_{kl}, Green şekildeğiştirme tansörü bileşenini; e_{ikl}, piezoelektrik sabitini; c_{ijkl}, elastik sabitini; ε_{ik}, dielektrik sabitini; E_{kl}, elektrik alan bileşenini ve ϕ, elektriksel potansiyeli temsil etmektedir. Ayrıca ε_0 boşluğun elektriksel geçirgenliğini ve δ_{ij} Kronecker sembolünü göstermektedir.

Ele alınan plağın mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları; plağın iç çatlak içermesi durumunda tüm yanal yüzeylerinden basit mesnetli ve $x_1 = 0; \ell_1$ ve $x_3 = 0; \ell_3$ yüzeylerinden statik eksenel dış basınç kuvvetine maruz olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, plağın alt/üst ve çatlak yüzeylerinden herhangi bir dış kuvvetin etki etmediği ve çatlakların içinin boş yani vakumlu olduğu kabul edilmektedir. Mekaniksel büyüklüklere göre sınır koşulları;

$$u_2^{(r_n)}\big|_{x_1=0;\ell_1}=0, u_2^{(r_n)}\big|_{x_3=0;\ell_3}=0, K_{11}^{(r_n)}\big|_{x_1=0;\ell_1}=p_1,\ K_{13}^{(r_n)}\big|_{x_1=0;\ell_1}=0$$
$$K_{31}^{(r_n)}\big|_{x_3=0;\ell_3}=0,\ K_{33}^{(r_n)}\big|_{x_3=0;\ell_3}=p_3, K_{2i}^{(r_3)}\big|_{x_2=h}=K_{2i}^{(r_1)}\big|_{x_2=0}=0, \qquad (5)$$
$$K_{ji}^{(r_3)}\big|_{S_U^+}\ n_{jU}^+=K_{ji}^{(r_2)}\big|_{S_U^-}\ n_{jU}^-=0, K_{ji}^{(r_2)}\big|_{S_L^+}\ n_{jL}^+=K_{ji}^{(r_1)}\big|_{S_L^-}\ n_{jL}^-=0$$

olarak verilebilir. Ele alınan PZT dikdörtgen plağın (PZT levhaların) tüm yanal yüzeylerinde elektrik potansiyelin sıfır olduğu yani, levhanın yanal yüzeylerinin yalıtkan olduğu kabul edilmektedir. Ancak PZT levhaların üst ve alt yüzeylerinden Ox_2 doğrultusundaki elektriksel yerdeğiştirmenin sıfır olduğu kabul edilmiştir. Bu kabullere ait elektriksel büyüklüklere göre sınır koşulları;

$$\phi^{(r_n)}\big|_{x_1=0;\ell_1}=0, \phi^{(r_n)}\big|_{x_3=0;\ell_3}=0, D_2^{(r_1)}\big|_{x_2=0}=D_2^{(r_3)}\big|_{x_2=h}=0,$$
$$D_j^{(r_3)}\big|_{S_U^+}\ n_{jU}^+=D_j^{(r_2)}\big|_{S_U^-}\ n_{jU}^-=0, D_j^{(r_2)}\big|_{S_L^+}\ n_{jL}^+=D_j^{(r_1)}\big|_{S_L^-}\ n_{jL}^-=0 \qquad (6)$$

dır. Mekaniksel ve elektriksel büyüklüklere göre sandviç kalın plağın tabakaları arasında ve çatlak yüzeyleri dışındaki kısımlarda ideal temas koşullarının sağlandığı yani,

$$K_{2i}^{(r_1)}\big|_{x_2=h_F}=K_{2i}^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F}, u_i^{(r_1)}\big|_{x_2=h_F}=u_i^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F},$$
$$K_{2i}^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F+h_C}=K_{2i}^{(r_3)}\big|_{x_2=h_F+h_C}, u_i^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F+h_C}=u_i^{(r_3)}\big|_{x_2=h_F+h_C},$$
$$\phi^{(r_1)}\big|_{x_2=h_F}=\phi^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F}, D_2^{(r_1)}\big|_{x_2=h_F}=D_2^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F}, \qquad (7)$$
$$\phi^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F+h_C}=\phi^{(r_3)}\big|_{x_2=h_F+h_C}, D_2^{(r_2)}\big|_{x_2=h_F+h_C}=D_2^{(r_3)}\big|_{x_2=h_F+h_C}$$

olduğu kabul edilmektedir.

Dolayısıyla, ele alınan sınırdeğer problemlerine ait genel matematiksel model (1)-(7) sınırdeğer problemi ile verilebilir. Bu sınırdeğer problemi katmanları arasında paralel iki adet iç çatlak ((1), (2), (3), (4), (5), (6), (7)) içeren piezoelektrik sandviç dikdörtgen kalın plağın, tüm yanal kenarlarından düzgün yayılı statik dış basınç kuvveti etkisinde delaminasyon burkulma problemlerini temsil etmektedir. Sayısal sonuçlar PZT/Metal/PZT sandviç plak için verilecek olup, hesaplamalarda orta katmanın malzemesi metal malzeme olarak alınacaktır. Ele alınan problemler nonlineer problemlerdir. Bu nonlineer problemlerin çözümü lineerleştirme işlemleri sonucunda, lineer seri-sınırdeğer problemlerinin çözümüne indirgenir [6]. [6] çalışmasına dayanarak, aranan büyüklükler boyutsuz küçük parametre olan ε'a göre seri formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left\{\sigma_{ij}^{(r_n)};\varepsilon_{ij}^{(r_n)};u_i^{(r_n)};D_i^{(r_n)};E_i^{(r_n)};\phi^{(r_n)}\right\}=\sum_{q=0}^{\infty}\varepsilon^q\left\{\sigma_{ij}^{(r_n),q};\varepsilon_{ij}^{(r_n),q};u_i^{(r_n),q};D_i^{(r_n),q};E_i^{(r_n),q};\phi^{(r_n),q}\right\},\ \varepsilon<<1. \quad (8)$$

(8) ifadeleri (4)-(7)'de yerine yazılır ve ε'un kuvvetlerine göre düzenlenerek gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre düzenlenmiş alan denklemleri, sınır ve temas koşullarından oluşan seri-sınırdeğer problemleri elde edilir. Kolaylık olsun diye ε'un kuvvetlerine göre düzenlenmiş her bir sınırdeğer problemi, ε'un kuvvetine göre isimlendirilmiştir. Örneğin sıfırıncı, birinci vb. sınırdeğer problemi veya yaklaşım olarak isimlendirilmişlerdir. Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin çözümü, (8) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinin çözümlerinin süperpozisyonu olarak elde edilecektir.

Ele alınan üç katlı piezoelektrik sandviç kalın plakta delaminasyona sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin belirlenmesinde, (8) yardımıyla elde edilen seri-sınırdeğer problemlerinden sadece sıfırıncı ve birinci yaklaşımın çözülmesi yeterlidir [6]. O nedenle bu problem için (8)

yardımıyla elde edilen seri sınırdeğer problemlerinden sadece, ilk iki yaklaşımın çözümü yapılacaktır. Bu yaklaşımlara ait denklem ve bağıntılar [6,9-11] de verilmiştir. Burada tekrar verilmeyecektir.

Belirtelim ki, (8) yardımıyla elde edilen seri sınırdeğer problemlerinin (yaklaşımlarının) her biri, kendisinden önceki tüm yaklaşımlara ait büyüklükleri içermektedir. Bu nedenle birbirlerinden bağımsız çözülemezler. Yaklaşımlar, sıfırıncı yaklaşımdan başlayarak ardışık olarak çözülmelidirler. Sıfırıncı yaklaşıma ait sınırdeğer problemi, bilinen mekaniksel ve fiziksel görüşler kullanılarak yapılan kabuller altında analitik olarak çözülebilmektedir [6, 9-11]. Bu nedenle sıfırıncı yaklaşım analitik olarak çözülmüştür.

Birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü, üç boyutlu sonlu elemanlar modellemesi yardımıyla sayısal olarak elde edilecektir. Çözüm bölgesi dikdörtgen prizma şeklinde sonlu elemanlara ayrıklaştırılarak ve nodlarda bilinmeyen olarak, üç eksen doğrultusundaki yerdeğiştirmeler ile elektriksel potansiyel ϕ alınacaktır. Sonlu eleman modellemesi için, cisimde biriken toplam elektro-mekanik enerjiyi ifade eden

$$\Pi\left(u_1^{(r_n),1},u_2^{(r_n),1},u_3^{(r_n),1},\phi^{(r_n),1}\right)=\sum_{n=1}^{3}\iiint_{\Omega_n}\left[\frac{1}{2}G_{ijkl}^{(r_n),1}\frac{\partial u_i^{(r_n),1}}{\partial x_j}\frac{\partial u_k^{(r_n),1}}{\partial x_l}+R_{ijk}^{(r_n)}\frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_i}\frac{\partial u_j^{(r_n),1}}{\partial x_k}-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^{(r_n)}\frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_k}\frac{\partial \phi^{(r_n),1}}{\partial x_l}\right]d\Omega_n-\iint_{S_L^-}T_{11}^{(1),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}u_1^{(1),1}\Big|_{x_2=h_F-0}dx_1dx_3-\iint_{S_L^-}T_{33}^{(1),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_3}u_3^{(1),1}\Big|_{x_2=h_F-0}dx_1dx_3$$

$$\iint_{S_L^+}T_{11}^{(2),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}u_1^{(2),1}\Big|_{x_2=h_F+0}dx_1dx_3-\iint_{S_L^+}T_{33}^{(2),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_3}u_3^{(2),1}\Big|_{x_2=h_F+0}dx_1dx_3-$$

$$\iint_{S_U^-}T_{11}^{(2),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}u_1^{(2),1}\Big|_{x_2=h_F+h_C-0}dx_1dx_3-\iint_{S_U^-}T_{33}^{(2),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_3}u_3^{(2),1}\Big|_{x_2=h_F+h_C-0}dx_1dx_3-$$

$$\iint_{S_U^+}T_{11}^{(3),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}u_1^{(3),1}\Big|_{x_2=h_F+h_C+0}dx_1dx_3-\iint_{S_U^+}T_{33}^{(3),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_3}u_3^{(3),1}\Big|_{x_2=h_F+h_C+0}dx_1dx_3-$$

$$-\iint_{S_L^-}D_1^{(1),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}\phi^{(1),1}\Big|_{x_2=h_F-0}dx_1dx_3-\iint_{S_L^+}D_1^{(2),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}\phi^{(2),1}\Big|_{x_2=h_F+0}dx_1dx_3-$$

$$\iint_{S_U^-}D_1^{(2),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}\phi^{(2),1}\Big|_{x_2=h_F+h_C-0}dx_1dx_3-\iint_{S_U^+}D_1^{(3),0}\frac{\partial f^-(x_1)}{\partial x_1}\phi^{(3),1}\Big|_{x_2=h_F+h_C+0}dx_1dx_3 \tag{9}$$

fonksiyoneli kullanılacaktır [7]. Sonlu elemanlar yöntemi gereği, her sonlu elemanda aranan fonksiyon seri formda temsil edilir. Bu çözümler (9)'da verilen fonksiyonelde yerine yazılır ve bilinen Ritz tekniği yardımıyla birinci yaklaşıma ait sınırdeğer probleminin çözümü, cebirsel denklemler takımının çözümüne indirgenir. Amacımız çatlaklar civarında oluşan delaminasyon burkulma modlarının belirlenmesidir ancak, öncelikle plakta delaminasyon burkulmaya neden olan kritik delaminasyon kuvveti belirlenmelidir. Ele alınan PZT dikdörtgen kalın plağın içerdiği çatlaklar civarında delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin değerleri [1]

$$p_1\to p_{cr}\ \ için\ \left|u_2^{(3),1}\Big|_{\substack{x_2=h_F+h_C+0\\ x_1=\ell_1/2}}\right|\to+\infty \tag{10}$$

biçiminde iterasyonlar yardımıyla belirlenecektir. Daha sonra verilen dış kuvvet $p < p_{cr}$ için çatlak yüzeyi burkulma mod grafikleri belirlenecektir.

[1] küçük başlangıç eğinti kriterine dayanarak, esas yükleme yapılmadan önce çatlak yüzeylerine verilen ön eğinti formunu temsil eden $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun analitik ifadesi,

$$f(x_1,x_3) = A\ell_{10}\sin^2\left(\frac{\pi}{\ell_{10}}\left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{10}}{2}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{\ell_{30}}\left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{30}}{2}\right)\right) \tag{11}$$

olarak seçilmiştir [6].

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışma kapsamındaki sayısal hesaplamalarda kullanılan piezoelektrik malzemeye ait malzeme sabitleri Çizelge 1'de verilmiştir. Ayrıca orta katman için Aluminyum (Al) malzemesi seçilmiştir. Al için malzeme sabitleri $E = 70\times10^9$ N/m^2 ve $\nu = 0.3$ alınmıştır.

Çizelge 1. Seçilen PZT malzemelerin mekanik, piezoelektrik ve dielektrik sabitleri [5]

Malzemeler [10]	$c_{11}^{(r_1)}$	$c_{12}^{(r_1)}$	$c_{13}^{(r_1)}$	$c_{33}^{(r_1)}$	$c_{44}^{(r_1)}$	$c_{66}^{(r_1)}$	$e_{31}^{(r_1)}$	$e_{33}^{(r_1)}$	$e_{15}^{(r_1)}$	$\varepsilon_{11}^{(r_1)}$	$\varepsilon_{33}^{(r_1)}$
PZT-5H	12.6	7.91	8.39	11.7	2.30	2.35	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302
	$\times10^{10}\ N/m^2$						C/m^2			$\times10^{-8}\ C/Vm$	

Lame sabitleri ($\lambda = E\nu/\big((1+\nu)(1-2\nu)\big)$ ve $\mu = E/\big(2(1+\nu)\big)$) yardımıyla orta katman Al için malzeme sabitleri $c_{11}^{r_2} = \lambda + 2\mu$, $c_{22}^{r_2} = c_{33}^{r_2} = c_{11}^{r_2}$, $c_{12}^{r_2} = c_{21}^{r_2} = \lambda$, $c_{13}^{r_2} = c_{31}^{r_2} = \lambda$, $c_{23}^{r_2} = c_{32}^{r_2} = \lambda$, $c_{66}^{r_2} = \mu$ ve $c_{44}^{r_2} = c_{55}^{r_2} = c_{66}^{r_2}$ olarak bulunur.

Ele alınan problemin çözümünden elde edilen sayısal sonuçların analizine geçmeden önce, tarafımızca yapılan ve sayısal araştırmaların gerektirdiği algoritma ve programların doğruluğu, test problemleri yardımıyla kontrol edilmiştir. Örneğin izotrop dikdörtgen kalın plak için uygun sınır koşullarında [12] da verilen uygun kritik kuvvet değerleri farklı parametre değerleri için Çizelge 2'de verilmiştir.

Çizelge 2. $p_{cr} / \mu\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right)$ kritik delaminasyon burkulma kuvvetleri

$(h/\ell_1 = 0.15, \ell_{10}/\ell_1 = 0.5, \ell_{30}/\ell_1 = 0.5)$

p_3 / p_1	h_F / ℓ_1							
	Bu çalışma				[12]			
	0.05	0.0375	0.025	0.0125	0.05	0.0375	0.025	0.0125
0	0.0684	0.0451	0.0251	0.0112	0.0684	0.0451	0.0251	0.0111
0.5	0.0488	0.0319	0.0176	0.0078	0.0488	0.0319	0.0176	0.0077
1	0.0369	0.0241	0.0133	0.0058	0.0369	0.0241	0.0133	0.0058

Çizelge 3 – Çizelge 6'da farklı malzeme çiftleri, farklı çatlak uzunlukları, farklı basınç kuvveti oranları için problemin çözümünden elde edilen kritik delaminasyon burkulma kuvveti değerleri gösterilmiştir. Bu çizelgelerde $h/\ell_1 = 0.2,\ \ h_F/\ell_1 = 0.05,\ \ \ell_{30}/\ell_1 = 0.5$ için farklı çatlak uzunlukları ve farklı basınç kuvveti oranları ile PZT-5H/Al/PZT-5H (Çizelge 3 ve Çizelge 5), PZT-5H/St/PZT-5H (Çizelge 4 ve Çizelge 6) malzeme çiftleri için elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Verilen çizelgelerde piezoelektrik ve dielektrik sabitlerin ihmal edilmesi (Çizelge 5 ve Çizelge 6) ve ihmal edilmemesi (Çizelge 3 ve Çizelge 4) durumlarına ait sayısal sonuçlar da yer almaktadır. Bu sayısal sonuçlardan, dış katmanların PZT malzeme alınması durumunda kritik burkulma kuvvet değerlerinin arttığı, iki eksenli basınç kuvveti olması durumu için p_3/p_1 yayılı yük yoğunluk oranı arttıkça, kritik burkulma kuvvet değerlerinin azaldığı tespit edilmiştir.

Çizelge 3. PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)$

p_3/p_1	ℓ_{10}/ℓ_1								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
0	0.3160	0.2901	0.2750	0.2695	0.2667	0.2606	0.2571	0.2433	0.2378
0.3	0.2235	0.2004	0.1813	0.1757	0.1705	0.1650	0.1618	0.1547	0.1503
0.5	0.1986	0.1822	0.1602	0.1521	0.1490	0.1423	0.1379	0.1319	0.1251
0.7	0.1735	0.1632	0.1471	0.1363	0.1319	0.1247	0.1197	0.1127	0.1093
1	0.1509	0.1359	0.1243	0.1173	0.1120	0.1048	0.0996	0.0912	0.0885

Çizelge 4. PZT-5H/St/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $(e_{ij} \neq 0, \varepsilon_{ij} \neq 0)$

p_3/p_1	ℓ_{10}/ℓ_1								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
0	0.6285	0.5897	0.5581	0.5512	0.5434	0.5221	0.5084	0.4772	0.4635
0.3	0.4862	0.4428	0.4222	0.4102	0.3877	0.3663	0.3491	0.3387	0.3253
0.5	0.4572	0.4203	0.4113	0.3957	0.3667	0.3453	0.3213	0.3072	0.2957
0.7	0.4332	0.4059	0.3952	0.3702	0.3475	0.3221	0.2902	0.2796	0.2662
1	0.4031	0.3883	0.3755	0.3477	0.3202	0.2955	0.2673	0.2503	0.2352

Çizelge 5. PZT-5H/Al/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $(e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0)$

p_3/p_1	ℓ_{10}/ℓ_1								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
0	0.2557	0.2372	0.2115	0.2087	0.2003	0.1993	0.1972	0.1902	0.1887

0.3	0.2076	0.1915	0.1702	0.1633	0.1579	0.1462	0.1286	0.1199	0.1162
0.5	0.1897	0.1763	0.1575	0.1487	0.1402	0.1257	0.1175	0.1003	0.0992
0.7	0.1677	0.1573	0.1422	0.1353	0.1322	0.1113	0.1012	0.0871	0.0752
1	0.1396	0.1287	0.1198	0.1122	0.1076	0.0973	0.0897	0.0697	0.0563

Çizelge 6. PZT-5H/St/PZT-5H sandviç plağın delaminasyon burkulmasına sebep olan kritik basınç kuvveti değerleri $(e_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0)$

p_3 / p_1	ℓ_{10} / ℓ_1								
	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7
0	0.5297	0.4802	0.4385	0.4275	0.4122	0.4082	0.4053	0.3973	0.3869
0.3	0.4113	0.3898	0.3673	0.3415	0.3159	0.2913	0.2798	0.2665	0.2467
0.5	0.3873	0.3565	0.3229	0.3097	0.2812	0.2657	0.2433	0.2302	0.2112
0.7	0.3621	0.3340	0.3013	0.2850	0.2410	0.2217	0.2063	0.1987	0.1895
1	0.3310	0.2976	0.2765	0.2462	0.2169	0.2058	0.1942	0.1812	0.1603

Ele alınan yapı elemanına ait delaminasyon burkulma modu ve bu burkulma moduna çeşitli problem parametrelerinin etkisini gösteren grafikler ile mühendislik yorumlarına, bu çalışmanın tam metninde yer verilecek.

KAYNAKLAR

[1] N.J. Hoff, Buckling and stability, *Journal of the Royal Aeron, Society.* 58 (1954) 3-52.

[2] A.G. Evans, J.W. Hutchinson, The thermomechanical integrity of thin films and multilayers, *Acta Metallurgica et Materialia*. 43 (7) (1995) 2507-2530.

[3] Y.T. Hu, J.S. Yang, Q. Jiang, A model for electroelastic plates under biasing fields with applications in buckling analysis, *International Journal of Solids and Structures*. 39 (2002) 2629-2642.

[4] Y. Yan, F. Shang, Cohesive zone modeling of interfacial delamination in PZT thin films, *International Journal of Solids and Structures*. 46 (13) (2009) 2739-2749.

[5] J.S. Yang, Buckling of a piezoelectric plate, *International Journal of Solids and Structures*. 44 (1998) 399-408.

[6] S.D. Akbarov, Stability Loss and Buckling Delamination: Three Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites, *Springer, Heidelberg, New York*. (2013).

[7] S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, Buckling delamination of a sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers, *Applied Mathematical Modelling*. 37 (16-17) (2013) 8029-8038.

[8] F.I. Cafarova, S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc with penny shaped interface cracks, *Smart Structures and Systems*. 19 (2) (2017) 163-179.

[9] F. Aylikci, S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, Buckling delamination of a PZT/Metal/PZT sandwich rectangular thick plate containing interface inner band cracks, *Composite Structures*. 202 (2018) 9-16.

[10] F. Aylikci, N. Yahnioglu, The effect of crack size on the buckling delamination mode (surface wrinkles) of a piezoelectric sandwich rectangular thick plate with interface edge cracks, *AIP Conference Proceedings*. 2042 (2018) 1-4.

[11] F. Aylikci, N. Yahnioglu, A. Elibol, FEM analysis of the influence of the plate geometry on the buckling delamination of a piezoelectric sandwich rectangular thick plate, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences.* 9 (2) (2018) 193-202.

[12] S.D. Akbarov, N. Yahnioglu, A. Tekin, Buckling delamination of a rectangular sandwich plate containing inner cracks under biaxial loading, *Mechanics of Composite Materials*. 49 (5) (2013) 537-550.

ELASTOMERLERDE YIRTILMANIN FAZ ALANI YÖNTEMİ İLE HESAPLAMALI MODELLENMESİ

Berkay Akçören[1] ve Serdar Göktepe[2]
[1,2] Orta Doğu Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 06800, Ankara

ABSTRACT

Rubbery polymers, also known as elastomers, owing to their superior mechanical, physical, and chemical properties are widely used in a broad range of industrial applications such as tires, seismic isolators, mechanical membranes, and seals, to mention a few. In these applications, failure prediction is cardinally essential. To this end, we model the rupture of rubbery polymers by using the Phase-Field method where the conservation equation of linear momentum and the evolution equation for the crack phase-field are coupled through constitutive equations and thus solved together using the Finite Element Method. While the former describes the mechanical equilibrium, the latter governs the rupture in rubber. The material behavior of rubbery polymers undergoing damage is modeled by approaches taken from literature where the damage-induced degradation in the material affects either the entropic and volumetric parts of the energy or the energetic and volumetric parts of the energy. Moreover, for the entropic elasticity, distinct constitutive approaches are considered. However, the elastic response of the material is modeled by micromechanically-based rubber model which is able to predict the asymptotical stress response of the material at high stretch values.

Keywords: Phase-Field Method; Rupture; Elastomers; Finite Element Method.

ÖZET

Elastomerler olarak da bilinen lastiksi polimerler üstün mekanik, fiziksel ve kimyasal özellikleri sayesinde, araç lastikleri, sismik izolatörler, mekanik membranlar ve contalar gibi çok çeşitli endüstriyel uygulamaların geniş bir yelpazesinde yaygınca kullanılmaktadırlar. Bu uygulama alanlarında elastomerlerin yırtılma kestirimlerinin yapılabilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu maksatla, lastiksi polimerlerin yırtılması doğrusal momentumun korunumu ve çatlak faz alanı değişimi denklemlerinin bağlaştırıldığı bünye denklemleri ile modellenmiş ve Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözülmüştür. Bu denklemlerin ilki malzemenin mekanik dengesini ifade ederken, ikincisi malzemenin yırtılmasını açıklamaktadır. Hasar gören bir lastiksi polimerin malzeme davranışı, literatürde, malzemedeki hasarla artan bozunmanın, enerjinin entropik ve hacimsel kısmını ya da enerjinin enerjetik ve hacimsel kısmını etkilediği yaklaşımlarla modellenmiştir. Ek olarak, entropik elastisite için farklı yaklaşımlar dikkate alınmıştır. Bununla birlikte, malzemenin elastik davranışı ise yüksek mertebelerdeki şekil değiştirmelerde malzemenin asimptotik gerilme değerleri gösterebilen mikromekanik tabanlı bir kauçuk modeli ile açıklanmıştır.

Anahtar kelimeler: Faz Alanı Yöntemi; Kopma; Elastomerler; Sonlu Elemanlar Yöntemi.

GİRİŞ

Elastomer olarak da bilinen lastiksi polimerler, büyük şekil değiştirmeler altında, genel olarak elastisitenin baskın olduğu ancak elastik olmayan davranışlar göstermektedirler. Lastiksi polimerlerin mekanik davranışlarının hesaplanması iki farklı temele dayanmaktadır. Bunlardan ilki gerinim tensörlerinin değişmezleri kullanılarak açıklanmış ve malzemenin şekil değiştirme enerjisinin bu değişmezlerin bir fonksiyonu olarak belirlendiği görüngesel yaklaşımlardır [1]. Öbürü ise, fiziksel olarak mikromekanik temellere dayanan, tek bir polimer zincirinin istatistiksel mekaniği ile açıklanan yaklaşımlardır [2,3]. Polimer zincirlerinin uç uca mesafesi mikro boyutlardaki davranışını göstermekte ve yapısal entropisindeki değişimler ile çapraz bağlı polimer ağlarının davranışını sergileyebilmektedir. Birim şekil değiştirmenin en büyük değerine ulaştığı ve polimer ağının enerjisinin sonsuza gittiği davranışı sergileyebilmek, kilitlenme etkisini gösterebilmek için Gauss türü dağılımlardan farklı (non-gaussian) modeller kullanılmalıdır [4,5,2].

Kauçuk benzeri malzemelerde çatlak oluşması ve ilerlemesinden kaynaklanan yırtılma mekanizmalarının tahmini mühendislik uygulamaları için büyük önem taşımaktadır. Bu sebeple malzeme içerisindeki çatlak oluşması ve yayılması Faz Alanı Yöntemi kullanılarak modellenmiştir. Faz Alanı Yöntemi, literatürde yayınımlı kırılmaları modellemek için kullanılmış, ilk olarak küçük gerinim değerleri için öne sürülmüş [6,7], sonrasında büyük şekil değiştirmeler için geliştirilmiştir [8]. Faz Alanı Yöntemi'nin avantajı hali hazırda bulunan Sonlu Elemanlar çözümüne, sanki çok alanlı bir problem çözer gibi doğrudan uygulanabilir olmasıdır. Malzeme yırtılmasından kaynaklanan keskin süreksizlikler Faz Alanı Yöntemi sayesinde sürekli olarak ifade edilebildiği için Sonlu Elemanlar Yöntemi çözümlerine köklü bir değişiklik yapmadan eklenebilir. Çözüm alanı yeteri kadar küçük alt elemanlara bölünerek bünye denklemleri üzerinden bağlaşık, kısmi türevli alan denklemlerinin birleşik çözümünün yapılmasıyla yırtılma yüzeyi, biçimi ve geometrisi hesaplanabilir.

Literatürde büyük şekil değiştirmelerin dikkate alındığı polimer yırtılma modelleri bulunmaktadır [9,8]. Miehe ve Schänzel [8] her ne kadar yırtılma enerjisini mikromekanik temellere dayandırsa da polimer ağının elastik davranışını Gauss türü bir dağılım ile açıklamış ve polimer ağlarının karakteristik davranışı olan asimptotik kuvvet tepkisini göz ardı etmiştir. Öte yandan, Talamini vd. [9] ise hem asimptotik enerji değerlerini hesaba katmak hem de malzemenin yırtılmasından kaynaklanan enerji kaybını dikkate almak için, yırtılmayı tetikleyen içsel bir enerji tanımlamış ve bu içsel enerjiyi dolaylı yoldan entropik elastisite denklemleriyle hesaplamıştır. Polimer ağları için geliştirilen bu modeller mikromekanik teorinin temeli olan tek bir polimer zincirinin uç uca mesafesinin artmasıyla sonsuza ulaşan enerjiyi gösterememektedir. Çünkü, sonsuza giden enerji değeri, analizler içerisinde sayısal hatalara ve hesaplama problemlerine yol açmaktadır.

Bu çalışmada, Talamini vd. [9] makalesinde elastik davranışı açıklayan 8-zincir modeli [2], daha gerçekçi bir elastik davranış elde edebilmek ve çok yönlü gerinimler altında kilitlenme etkisini gösterebilmek için Miehe vd. [3] çalışmasındaki mikro-küre modeli ile değiştirilmiş; literatürde kullanılan problemler çözülerek önerilen modelin eldeki elastomerlerin yırtılma problemine uygunluğu sınanmıştır. Bu bildiride gösterilen türetimler, formulasyonlar ve analizler, [10] çalışmasından uyarlanmıştır.

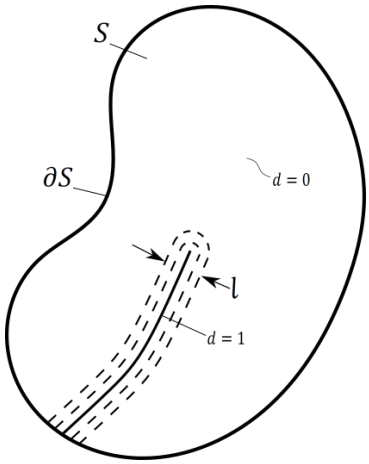
ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Uzaydaki bir cisim $\boldsymbol{B}$ referans konumunda $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{B}$ koordinatlarına sahip, $\boldsymbol{S}$ şekil değiştirmiş konumunda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$ koordinatlarına sahip olsun. Bu durumda, referans koordinatları ile şekil değiştirmiş koordinatları arasındaki ilişki doğrusal olmayan deformasyon fonksiyonu $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{x} = \varphi_t(\boldsymbol{X})$ ile gösterilir. En temel deformasyon değişkeni olan deformasyon gradyanı ise $\boldsymbol{F} = \nabla_X \varphi_t(\boldsymbol{X})$ şeklinde tanımlanır. Problem dahilindeki çatlağın topolojisini göstermek için ise *çatlak faz alanı* $d(\boldsymbol{x}, t) \in [0,1]$ tanımlanmıştır. $d = 0$ tamamen hasarsız durumu, $d = 1$ ise tamamen çatlamış malzemeyi ifade etmektedir bkz. Şekil 1. Malzemenin şekil değiştirmesini tanımlayan doğrusal momentumun korunumunu ve çatlak faz alanı değişimini açıklayan türevsel denklemler

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$J \operatorname{div} \boldsymbol{q} - \beta - f = 0 \tag{2}$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadelerdeki $\boldsymbol{\sigma}$ Cauchy gerilme tensörünü, $\boldsymbol{b}$ birim hacim için cisim kuvvetini, $J = \det(\boldsymbol{F})$ hacimsel değişimi, β, f ve $\boldsymbol{q}$ ise sırasıyla, çatlağın ilerlemesi için gereken enerjiyi, çatlak direncini ve faz alanı difüzyonunu kontrol eden çatlak akı vektörünü gösterir.



Şekil 1. Denklem (2) de verilen Faz alanı korunumu ifadesinin geometrik anlatımı. Malzeme katsayısı l nin azalması ile gerçeğe yaklaşan yayılımlı çatlak modeli, ∂S üzerinde tanımlı $J\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sınır koşuluyla birlikte tanımlanmıştır.

Kauçuk benzeri neredeyse sıkıştırılamaz malzemelerin bünye denklemlerini yazarken genel olarak serbest enerji hacimsel ve deviatorik olarak ayrıştırılır. Bu sebeple gerilme ve rijitlik tensörleri de aynı şekilde serbest enerjinin hacimsel ve deviatorik kısımlarının türevleri şeklinde ifade edilir. Deformasyon gradyanının deviatorik kısmı $\bar{F} := J^{-1/3}F$ şeklinde ayrıştırılıp serbest enerji, gerilme, ve rijitlik tensörleri aşağıdaki şekillerde ifade edilir.

$$\Psi(\boldsymbol{g}; \boldsymbol{F}) = U(J) + \bar{\Psi}(\boldsymbol{g}; \bar{\boldsymbol{F}})$$

$$\boldsymbol{\tau} = s\boldsymbol{1} + \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbb{P}$$

$$\mathbb{C} = (s+k)\boldsymbol{1} \otimes \boldsymbol{1} - 2s\mathbb{I} + \mathbb{P}^{\mathrm{T}} : \left[\bar{\mathbb{C}} + \frac{2}{3}(\bar{\boldsymbol{\tau}} : 1)\mathbb{I}\right] : \mathbb{P} - \frac{2}{3}(\mathbb{P}^{\mathrm{T}} : \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \boldsymbol{1} + \boldsymbol{1} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbb{P})$$

İfadede geçen dördüncü dereceden $\mathbb{I}_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ birim ve $\mathbb{P}_{ijkl} = \mathbb{I}_{ijkl} - 1/3\delta_{ij}\delta_{kl}$ deviatorik izdüşüm tensörlerini ifade etmektedir. Formulasyon içinde beliren gerilme ve rijitlik tensörleri için kullanılan hacimsel kısım ile alakı değişkenler olan

$$s \coloneqq JU'(J) \qquad k \coloneqq J^2U''(J)$$

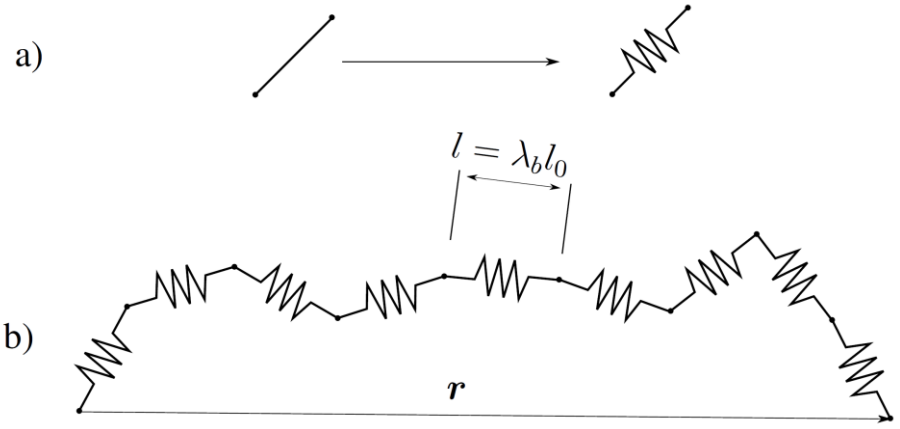
şeklinde, deviatorik gerilme ve rijitlik tensörleri ise

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} \coloneqq 2\partial_g \bar{\Psi}(\boldsymbol{g}\,;\bar{\boldsymbol{F}}) \qquad \bar{\mathbb{C}} \coloneqq 4\partial_{gg}\bar{\Psi}(\boldsymbol{g}\,;\bar{\boldsymbol{F}})$$

şeklinde türetilir. Hacimsel ve deviatorik ifadelerin detaylı türetimleri için [11] doktora tez çalışmasındaki ek kısım B incelenebilir.

Lastiksi polimerlerin mekanik davranışları tek bir polimer zincirinin fiziği ile tanımlanır ve yapısal entropinin değişmesi yapının şekil değiştirmesindeki baskın etkendir [4,5]. İstatistiksel mekaniğin temelleri kullanılarak polimer zincirinin uç uca olan mesafesinin dağılım fonksiyonu ile yapısal entropi arasındaki ilişki Boltzmann denklemi ile kurulur ve mikro boyuttaki tek bir polimer zinciri ile makro boyuttaki polimer ağı arasındaki ilişki homojenizasyon yöntemleri ile oluşturulur. Bu bağlamda, [9] çalışmasındaki elastik davranışı açıklayan 8-zincir modeli [2], daha gerçekçi bir davranış elde edebilmek ve çok yönlü gerinimler altında kilitlenme etkisini gösterebilmek için [3] çalışmasındaki mikro-küre modeli ile değiştirilmiştir. Sunulan modelin gerilme ve rijitlik tensörlerini açıklayan bünye denklemleri aşağıda detaylandırılmıştır. Deforme olan tek bir polimer zinciri için serbest enerji fonksiyonu

$$\psi(\lambda, \lambda_b, d) = g(d)\left[\frac{1}{2}NE_b(\lambda_b - 1)^2\right] + Nk\theta\left(\lambda_r\beta + \ln\frac{\beta}{\sinh\beta}\right) \tag{3}$$



Şekil 2. a) Klasik Kuhn segmenti esneyebilir şekilde kabul edilmiştir. b) l_0 ilk uzunluğundaki Kuhn segmenti bağ gerinmesi ile *l* uzunluğuna ulaşmış ve zincir uç-uca mesafesini arttırmıştır.

şeklinde ifade edilir. İlk ifadede beliren izafi gerinme, ağ gerinmesi ve Langevin fonksiyonunun tersi

$$\lambda_r \coloneqq \frac{\lambda\lambda_b^{-1}}{\sqrt{N}} \qquad \lambda = \langle\bar{\lambda}\rangle_p \qquad \beta \coloneqq \mathcal{L}^{-1}(\lambda_r) \approx \lambda_r\frac{3-\lambda_r^2}{1-\lambda_r^2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bağ gerinmesi modelinin [9] altında yatan fikre göre, polimer ağın tepkisi, içsel enerji ve yapısal entropik katkı olarak ikiye ayrılmaktadır. Burada içsel enerji katkısı esas olarak polimer ağının kopması ile, yapısal entropik katkı ise yırtılma öncesinde gerçekleşen genel mekanik tepki ile ilgilidir. Bağ gerinmesi teorisinde, klasik Langevin

zincirinden farklı olarak, Kuhn segmentlerinin esneyebilir olduğu kabul edilir, bkz. Şekil 2. Moleküller arasındaki etkileşim hem içsel enerjiye hem de yapısal entropiye katkıda bulunurken, zincirin gerinmesi sadece yapısal entropiye katkıda bulunur. Bu sebeple her bir Kuhn segmenti λ_b mertebesinde gerinebilir kabul edilip, bu gerinme polimer ağının toplam enerjisini minimize edecek şekilde gerçekleşir.

$$\lambda_b = \arg \min_{\lambda_b^* > \bar{\lambda}/\sqrt{N}} \psi(\bar{\lambda}, \lambda_b^*, d)$$

Mikro boyuttaki polimer zincirleri ile makro boyuttaki malzemenin ilişkisi mikro-küre modeli [3] ile oluşturulmuştur. Mikro-küre modeli polimer ağının maruz kaldığı deformasyonların, zincirler üzerinde afin bir şekilde dağılmadığını ve tekil zincirlerin farklı şekillerde deforme olabileceğini varsayar ve mikro gerinmeler ile makro gerinmelerin p-kökü ortalamalarının birbirine eşit olduğunu ileri sürer. Mikro gerinmeler polimer ağın ortalama enerjisini minimum boyutta tutacak şekilde oluşacaklarından dolayı makro $\bar{\lambda}$ ve mikro λ gerinmeler arasındaki ilişki p-kökü ortalamalası işlemi üzerinden

$$\lambda = \langle \bar{\lambda} \rangle_p \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle_p = \sqrt[p]{\langle x^p \rangle} = \left(\frac{1}{|S|} \int_S x^p \, dA \right)^{1/p}$$

verilmiştir. Bağ gerinmesi ise, her zincir ve her segment üzerinde eşit kabul edildiği için mikro-makro dönüşüm gerekmemektedir. Bu ifadeden yararlanarak mikro zincir ve makro polimer ağı arasındaki serbest enerji, birim hacimdeki *n* sayıda zincirin enerjilerinin toplamı şeklinde verilmiştir.

$$\Psi(\boldsymbol{g}; \boldsymbol{F}, d) = n\psi(\langle \bar{\lambda} \rangle_p, \lambda_b, d)$$

Bu türetimler ışığında, yırtılan bir polimer zincirinin serbest enerjisi

$$\Psi(\boldsymbol{g}; \boldsymbol{F}, d) = g(d)\varepsilon^0 + \mu N \left(\lambda_r \beta + \ln \frac{\beta}{\sinh \beta} \right) \tag{4}$$

$$\varepsilon^0(\lambda_b, J) = \frac{1}{2} E_b (\lambda_b - 1)^2 + \frac{1}{8} K (J - J^{-1})^2 \tag{5}$$

şeklinde verilmiştir. İlk ifadede yer alan birinci terim, hasarla artan bozunmayı; ikinci terim ise, entropik elastisiteyi ifade etmektedir. İsokorik gerilme ve rijitlik tensörleri,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \tau_f \boldsymbol{h}$$

$$\bar{\mathbb{C}} = c_f \boldsymbol{h} \otimes \boldsymbol{h} + \tau_f \mathbb{H}$$

şeklinde hesaplanmış, bu tensörlerin gösterimlerini sade ve anlaşılır kılabilmek adına yardımcı ikinci dereceden $\boldsymbol{h}$ ve dördüncü dereceden $\mathbb{H}$ tensörleri

$$\boldsymbol{h} = \langle \bar{\lambda}^{p-2} \boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t} \rangle$$

$$\mathbb{H} = \langle (p-2) \bar{\lambda}^{p-4} \boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t} \otimes \boldsymbol{t} \rangle$$

tanımlanmıştır. Bu ifadelerde beliren $\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{r}$ vektörü mikroküre üzerindeki rastgele alınmış birim vektörlerin makro deformasyonlar ile değişen gerinmiş yönlerini göstermektedir. Makro gerinme olan $\bar{\lambda} = \sqrt{\boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t}}$ ile mikro gerinmeler λ arasındaki ilişki p-kökü ortalaması ile ilişkilendirilir. Küre üzerinde alınan bir integral ile yapılan bu işlem, mikro-küre modelinin temelini oluşturmaktadır. Bu integral literatürde verilmiş olan nümerik yöntemler ile hesaplanabilir. İzokorik gerilme ve rijitlik tensörlerinde verilen sayısal τ_f ve c_f ifadeleri

$$\tau_f = \mu \sqrt{N} \frac{1}{\lambda_b} \beta \lambda^{1-p}$$

$$c_f = \mu\beta' \frac{1}{\lambda_b^2}\lambda^{2(1-p)} + \mu\beta\sqrt{N}(1-p)\frac{1}{\lambda_b}\lambda^{(1-2p)} - \left[\mu\beta' \frac{1}{\lambda_b^3}\lambda^{(3-2p)} + \mu\sqrt{N}\beta\frac{1}{\lambda_b^2}\lambda^{2(1-p)}\right]\frac{\partial\lambda_b}{\partial\lambda}$$

şeklinde türetilir. Hacimsel gerilme ve rijitlik helloiçin gerekli değişkenler ise

$$s = \frac{J^4-1}{4J^2} \qquad k = \frac{3+J^4}{4J^2}$$

ifadeleriyle gösterilmektedir. Bağlaşık problemin faz alanı artışını gösteren kısmi türevli ifadede beliren değişkenler ise, faz alanı difüzyonunu kontrol eden,

$$\widehat{\boldsymbol{q}} \coloneqq \varepsilon^f l^2 \nabla_x d\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$$

çatlak direncini sağlayan,

$$f = \varepsilon^f d + \eta\dot{d}$$

ve çatlağın termodinamik olarak tutarlı bir şekilde ilerlemesini gerçekleştiren malzemenin maruz kaldığı en yüksek deformasyon enerjisi olarak

$$\beta = -2(1-d)\mathcal{H}$$

$$\mathcal{H}(t) \coloneqq \max_{s\in[0,t]} \langle \varepsilon^0\left(\lambda_{b(s)}, J(s)\right) - \frac{\varepsilon_f}{2}\rangle \qquad \langle x\rangle = \begin{cases} 0, & x<0 \\ x, & x>0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Geleneksel faz alanı modellerinin [8,12,7] aksine çatlağın ilerlemesini sağlayan kaynak benzeri terim, belirli bir eşik değerine kadar sıfır olmaktadır. Bununla birlikte (4) denkleminde bozunma fonksiyonu bütün serbest enerjiyle çarpılmak yerine sadece hacimsel ve bağ gerilmesi enerjisi ile çarpılmıştır. Fakat, bağ gerilmesi için verilen ifadeden de (3) anlaşılacağı gibi bağ gerinmesi arttıkça yapısal entropinin artmasına ve bundan kaynaklanan enerjinin de dolaylı yoldan azalmasına sebep olmaktadır. Faz alanı artışını gösteren denklemin son hali

$$J\,\mathrm{div}\frac{1}{J}\widehat{\boldsymbol{q}} - \varepsilon^f d + 2(1-d)\mathcal{H} - \eta\dot{d} = 0$$

şeklini alır. λ_b değişkenini hesaplamak için ise aşağıdaki ifade kullanılır.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda_b} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(d)\,\overline{E_b}(\lambda_b - 1)\lambda_b - \mu\lambda_r\beta = 0$$

Model özelinde kullanılmış olan bütün malzeme katsayıları ve açıklamaları Çizelge 1'de özetlenmiştir.

Çizelge 1: Malzeme katsayıları ve açıklamaları

Parametre	Açıklama
μ	Kayma modülü
K	Hacimsel modül
N	Kuhn segment sayısı
$\overline{E_b}$	Bağ direnci
ε^f	Eşik kritik enerji
l	Boy ölçeği
η	Viskoz düzenleme parametresi

p	Affinite gerinme parametresi

ALAN DENKLEMLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE AYRIKLAŞTIRILMASI

Doğrusal momentumun korunumu (1) ve çatlak faz alanı oluşumu (2) birleşik denklemlerinin analitik çözümleri, karmaşık geometriler ve sınır koşulları altında çoğu zaman imkansızdır. Bu sebeple sonlu elemanlar yöntemi ile ayrıklaştırılarak yaklaşık nümerik çözümler geliştirilmiştir. Çözüm için konvensiyonel Galerkin Yöntemi kullanılmıştır. İlk olarak bünye denklemleri, karelerinin integrali sonlu olan ve homojen Dirichlet sınır koşullarını sağlayan ağırlık fonksiyonları ($\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} \in \mathcal{U}$), ($\overset{*}{d} \in \mathcal{V}$) ile çarpılıp cismin hacmi üzerinde integre edilir.

$$G^{\varphi}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right) = G^{\varphi}_{\text{int}}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right) - G^{\varphi}_{ext}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right)$$

$$G^{d}\left(d, \overset{*}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right) = G^{d}_{\text{int}}\left(d, \overset{*}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right) - G^{d}_{ext}\left(d, \overset{*}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right)$$

İçsel ve dışsal Galerkin fonskiyonelleri momentumun korunumu için

$$G^{\varphi}_{\text{int}}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right) = \int_{\mathcal{B}} \nabla_x \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} : \boldsymbol{\tau}\, dV$$

$$G^{\varphi}_{\text{ext}}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right) = \int_{\mathcal{B}} \rho \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \boldsymbol{B} dV + \int_{\partial \mathcal{B}_T} \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \boldsymbol{T} dA$$

çatlak faz alanı için ise

$$G^{d}_{\text{int}}\left(d, \overset{*}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right) = \int_{\mathcal{B}} \nabla_{\boldsymbol{x}} \overset{*}{d} \cdot \widehat{\boldsymbol{q}} dV + \int_{\mathcal{B}} \overset{*}{d} \beta dV + \int_{\mathcal{B}} \overset{*}{d} f dV$$

$$G^{d}_{\text{ext}}\left(d, \overset{*}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right) = \int_{\partial \mathcal{B}_d} \overset{*}{d} \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{N} dA = \boldsymbol{0}$$

şeklinde hesaplanır. Doğrusal momentumun korunumu için türetilmiş olan dışsal Galerkin fonsiyonunda beliren $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{T}$ ve ρ sırasıyla cisim kuvveti, yüzey gerilme vektörü ve cismin şekil değiştirmiş konumunda tanımlanmış olan özgül ağırlığıdır. Bünye denklemlerinin deformasyon ve çatlak faz alanının doğrusal fonksiyonu olmadığı durumlarda, alan denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi'nin örtük yapısı içerisinde Newton tipi tekrarlı çözüm yöntemlerinin uygulanması gerekir. Bu sebeple, Galerkin fonksiyonelleri bilinen bir ara değer etrafında doğrusallaştırılmıştır.

$$\text{Lin}\, G^{\varphi}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right)|_{\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{d}} := G^{\varphi}\left(\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}; \bar{d}\right) + \Delta G^{\varphi}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}, \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right)$$

$$\text{Lin}\, G^{d}\left(d, \overset{*}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right)|_{\bar{\boldsymbol{\varphi}}, \bar{d}} := G^{d}\left(\bar{d}, \overset{*}{d}; \bar{\boldsymbol{\varphi}}\right) + \Delta G^{d}\left(d, \overset{*}{d}, \overset{\Delta}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right)$$

Benzer şekilde doğrusallaştırılmış Galerkin ifadelerinde beliren arttırımlı terimler de içsel ve dışsal olarak ayrılabilir.

$$\Delta G^{\varphi} = \Delta G^{\varphi}_{\text{int}} - \Delta G^{\varphi}_{\text{ext}}$$

$$\Delta G^{d} = \Delta G^{d}_{\text{int}} - \Delta G^{d}_{\text{ext}}$$

Uygulanan yüklerin deformasyona bağlı olmadığı varsayımı üzerine arttırımlı dışsal Galerkin fonksiyonları sıfıra eşitlenir. Arttırımlı içsel Galerkin fonksiyonları ise,

$$\Delta G^{\varphi}\left(\boldsymbol{\varphi}, \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}, \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}}; d\right) = \int_{\mathcal{B}} \nabla_x \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} : \mathbb{C} : \nabla_x \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}}\, dV + \int_{\mathcal{B}} \nabla_x \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}} : \nabla_x \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}} \boldsymbol{\tau}\, dV$$

$$\Delta G^{d}\left(d, \overset{*}{d}, \overset{\Delta}{d}; \boldsymbol{\varphi}\right) = \int_{\mathcal{B}} \nabla_x \overset{*}{d} : \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{q}}}{\partial \nabla_x d} : \nabla_x \overset{\Delta}{d}\, dV + \int_{\mathcal{B}} \overset{*}{d}\left(\frac{\partial \beta}{\partial d} + \frac{\partial f}{\partial d}\right) \overset{\Delta}{d}\, dV$$

şeklinde elde edilir. Doğrusallaştırılmış Galerkin fonksiyonellerini çözebilmek adına bütün cismin hacmi, sonlu elemanlar adı verilen alt cisim hacimlerine bölünerek ifade edilir. Bağlaşık problemin temel alan büyüklükleri olan şekil değiştirme alanı $\boldsymbol{u}$ ve çatlak faz alanı η, ve bu alanlar ile ilgili olan ağırlık fonksiyonları ile bu alanların arttırımlı ifadeleri her bir sonlu eleman üzerinde sürekli enterpolasyon fonksiyonları yardımıyla ayrıklaştırılır.

$$\boldsymbol{\varphi}_e^h = \sum_{i=1}^{n} N^i \boldsymbol{u}_i^e \qquad d_e^h = \sum_{i=1}^{n} N^i \eta_i^e$$

$$\overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_e^h = \sum_{i=1}^{n} N^i \overset{*}{\boldsymbol{u}}_i^e \qquad \overset{*}{d}_e^h = \sum_{i=1}^{n} N^i \overset{*}{\eta}_i^e$$

$$\overset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}}_e^h = \sum_{i=1}^{n} N^i \overset{\Delta}{\boldsymbol{u}}_i^e \qquad \overset{\Delta}{d}_e^h = \sum_{i=1}^{n} N^i \overset{\Delta}{\eta}_i^e$$

$$\nabla_x \boldsymbol{\varphi}_e^h = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i^e \otimes \nabla_x N^i \qquad \nabla_x d_e^h = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^e \otimes \nabla_x N^i$$

$$\nabla_x \overset{*}{\boldsymbol{\varphi}}_e^h = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{\boldsymbol{u}}_i^e \otimes \nabla_x N^i \qquad \nabla_x \overset{*}{d}_e^h = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{\eta}_i^e \otimes \nabla_x N^i$$

$$\nabla_x \overset{\Delta}{\boldsymbol{\varphi}}_e^h = \sum_{i=1}^{n} \overset{\Delta}{\boldsymbol{u}}_i^e \otimes \nabla_x N^i \qquad \nabla_x \overset{\Delta}{d}_e^h = \sum_{i=1}^{n} \overset{\Delta}{\eta}_i^e \otimes \nabla_x N^i$$

Elde edilen ayrık ifadeler ile Galerkin fonksiyonellerinin artık vektörleri

$$\boldsymbol{R}_I^{\varphi} = \mathop{\mathsf{A}}_{n=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_e^h} \nabla_x N^i \cdot \boldsymbol{\tau}\, dV - \int_{\mathcal{B}_e^h} N^i \cdot \boldsymbol{B}\, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_e^t} N^i \cdot \boldsymbol{T}\, dA \right\}$$

$$R_J^d = \mathop{\mathsf{A}}_{n=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_e^h} \nabla_x N^j \cdot \widehat{\boldsymbol{q}}\, dV - \int_{\mathcal{B}_e^h} N^j \beta\, dV - \int_{\mathcal{B}_e^t} N^j f\, dV \right\}$$

mekanik ve faz alanı problemi için ayrı ayrı hesaplanır. Aynı şekilde yapısal rijitlik matrislerini elde edebilmek için türetilmiş artırımlı ifadeler ile düğüm noktalarında ayrıklaştırılmış ifadeler kullanılarak yapısal teğet matrisleri

$$\boldsymbol{K}_{IJ-mat}^{\varphi\varphi} = \mathop{\mathsf{A}}_{n=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_e^h} \nabla_x N^i \cdot \mathbb{C} \cdot \nabla_x N^j\, dV \right\}$$

$$\boldsymbol{K}_{IJ-geo}^{\varphi\varphi} = \mathop{\mathsf{A}}_{n=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_e^h} \nabla_x N^i \cdot \left(\nabla_x N^j \boldsymbol{\tau}\right) dV \right\}$$

$$K_{IJ}^{dd} = \mathop{\mathsf{A}}_{n=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_e^h} \nabla_x N^i \frac{\partial \widehat{\boldsymbol{q}}}{\partial \nabla_x d} \nabla_x N^j dV + \int_{\mathcal{B}_e^h} N^i \left(\frac{\partial \beta}{\partial d} + \frac{\partial f}{\partial d}\right) N^j dV \right\}$$

şeklinde elde edilir. Birleştirme işlemi A ifadesiyle tanımlanmıştır ve elemanların yerel düğüm noktalarını yapısal düğüm noktalarına eklenmesini ifade etmektedir. Denklemlerde beliren $i, j = 1,2,3,\dots,n_{nl}$ eleman özelindeki düğüm noktalarının $I, J = 1,2,3,\dots,n_{nd}$ise bunlara denk gelen yapısal düğüm noktalarını ve de $n = 1,2,3,\dots,n_{el}$ eleman numaralarını göstermektedir. Buradan hareketle, bu çalışmada uygulanmış olan ayrık çapraz çözüm (staggered solution) şemasından bahsetmek gerekir [12]. Ayrık çapraz çözümde, çözümün güncellenmesi için yapılan Newton türü tekrarlı çözüm algoritması, deformasyon ve çatlak faz alanı için ayrı ayrı ve art arda yapılacak ve yeteri kadar küçük hata ile yakınsamış bir çözüm bulunana kadar devam edecektir. Bu sebeple Newton türü tekrarlı çözüm algoritması özelinde deformasyon ve faz alanı güncellemeleri

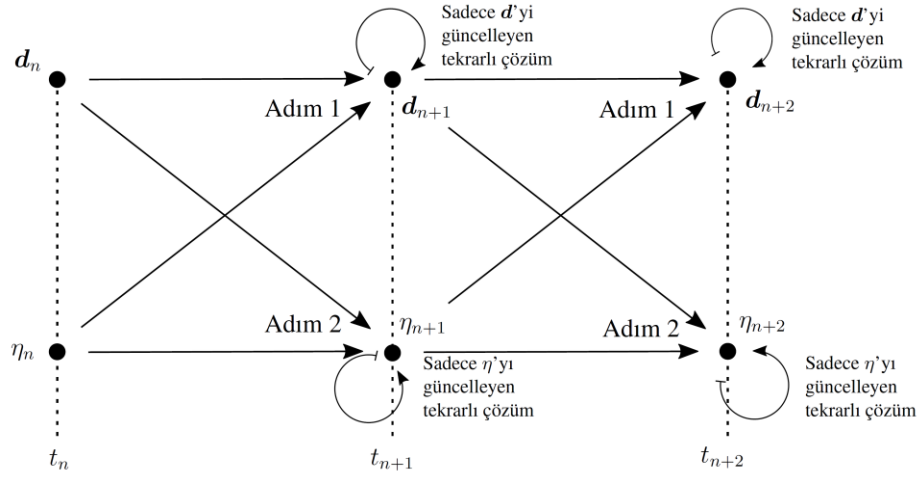
$$\boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} - \overline{\boldsymbol{K}}^{\varphi\varphi\,-1} \cdot \overline{\boldsymbol{R}}^{\varphi}$$

$$\eta = \overline{\eta} - \overline{K}^{dd\,-1}\overline{R}^{\eta}$$

şeklinde ayrı ayrı yapılmaktadır. Ayrık çapraz çözüm algoritmasından dolayı sonlu elemanlar çözümünde çapraz türevleri içeren yapısal teğet matrisleri sıfır alınmış, gerekli ifadelerin türetimi sırasında da hesaplanmamışlardır.

$$\boldsymbol{K}^{\varphi d} = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{K}^{d\varphi} = \boldsymbol{0}$$

Çözüm algoritması Şekil 3'de detaylandırılmıştır. Şekil 3'de beliren adım 1 için yapılan tekrarlı çözüm sırasında η, adım 2 için yapılan tekrarlı çözüm sırasında ise $\boldsymbol{d}$ güncellenmemektedir.

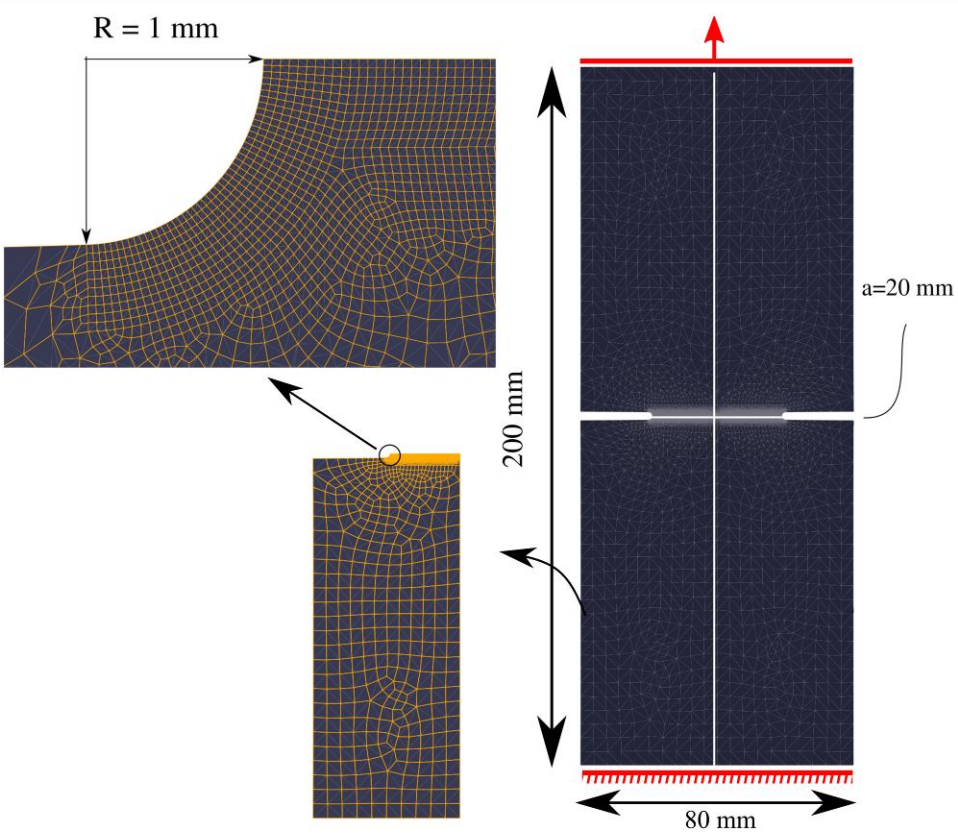


Şekil 3. Ayrık çapraz çözüm şeması

SAYISAL SONUÇLAR

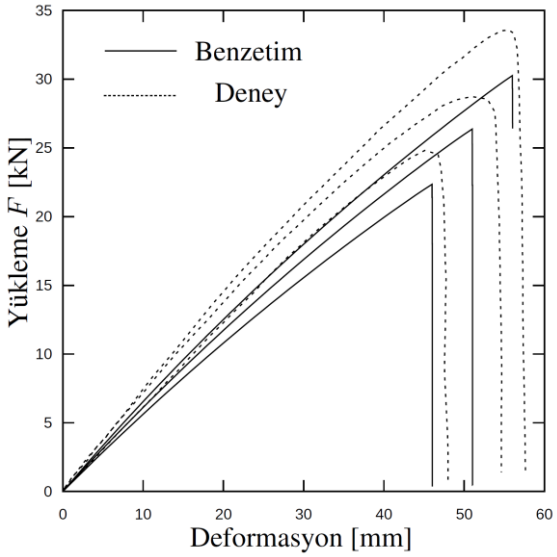
Önerilen modelin, modelleme kapasitesini ölçmek için analiz sonuçları, literatürde olan problemler ile karşılaştırılmıştır. Geliştirilen model ile [9] çalışmasındaki deneysel düzenek kullanılarak [13] çalışmasındaki sonuçlar tekrar üretilmeye çalışılmıştır. Şekil 4'te gösterilen çift yırtıklı elastomer numune düzlemsel gerilim varsayımı ile analiz edilmiştir. Numunenin simetri özelliğinden faydalanılarak sadece çeyreği analiz sırasında kullanılmıştır. Sonlu eleman ağının detayları ve numunenin boyutları Şekil 4'te verilmiştir. Yırtık komşuluğuna denk gelen bölgelerde h=0.05 mm boyutlarında elemanlar kullanılmıştır. Farklı yırtık

boyutları (a=24,20,16 mm) için analizler yapılmış ve yük-deplasman grafikleri deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır, bkz. Şekil 5.

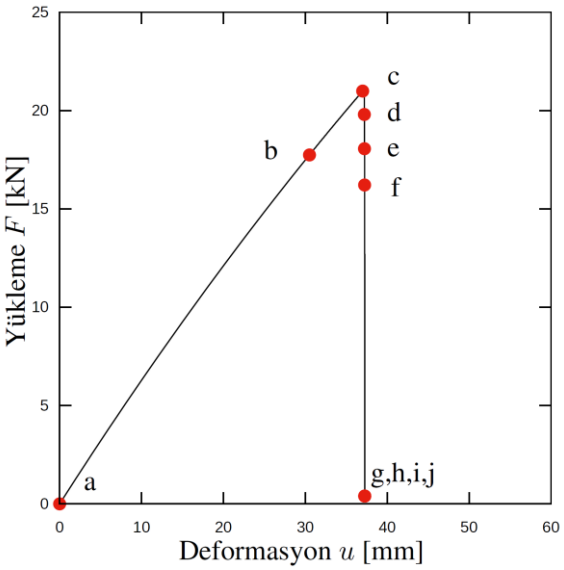


Şekil 4. Çift yırtıklı numune ve sonlu eleman ağının detayları. Numune alt kenarından sabitlenmiş ve üst kenarından deformasyon bazlı yükleme uygulanmıştır.

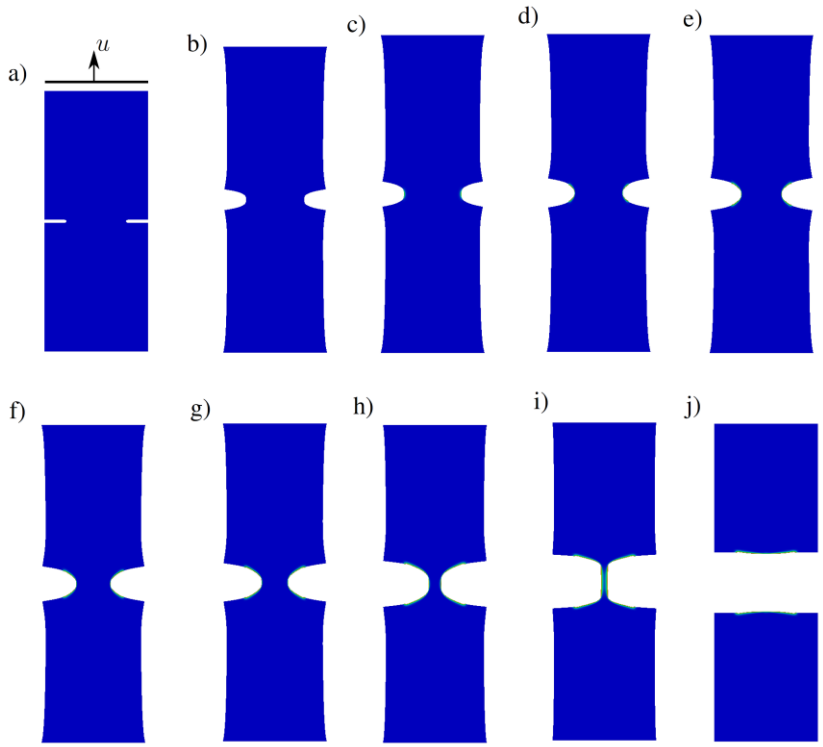
Şekil 7 ve Şekil 6'da ise, yırtık boyutu a=16 mm olan bir numunenin analiz sırasındaki şekil değiştirmiş halleri gösterilmiş ve yük-deplasman grafiğinde yerleri belirtilmiştir. Numunenin yırtılmasını daha kolay görebilmek adına hasarın d>0,95'ten büyük olduğu kısımlar şekillerden silinmiştir. Şekil 7'de, (b) noktası hasarın başladığı ilk noktadır; (c) noktasında hasar hala daha artmakta ama henüz tam olarak yırtılma başlamamıştır; (d) noktasında küçük bir yırtılma noktası gözlemlenebilir hale gelmiş ve numunenin yük taşıma kapasitesindeki azalma başlamıştır. Bu noktadan sonra problemin sayısal kararlılığı önemli ölçüde azalmıştır ve en ufak bir germe ani bir şekilde çatlağın ilerlemesine sebep olabilmektedir. (e), (f) ve (g) noktalarında yer değiştirmeler ve zaman aralıkları aynı olmasına rağmen çatlak çok hızlı bir şekilde ilerlemiş ve (g), (h) ve (i) noktalarında numune yük taşıma kapasitesini tamamen kaybetmiştir. (j) noktası ise, tamamen yırtılmış numuneyi göstermektedir.



Şekil 5. Sırasıyla a=24,20,16 mm'lik kesik boyutlarıyla yapılan analizler için yük-deplasman grafikleri. Malzeme katsayıları: $\mu = 0.268\ \mathrm{N/mm^2}$, $N = 1000$, $\overline{E_b} = 2.67\ \mathrm{N/mm^2}$, $K = 2.68\ \mathrm{N/mm^2}$, $\varepsilon^f = 0.240\ \mathrm{N/mm}$, $l = 1.0\ \mathrm{mm}$, $\eta = 1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{MPa \cdot s}$, $p = 1.47$



Şekil 6. a=16 mm kesik uzunluğunda numune için yükleme-deformasyon grafiği.b = 30.5 mm, c = 37.0 mm, d = 37.214 mm, e = 37.229 mm, f = 37.239 mm, g = 37.249 mm, h = 37.259 mm, i = 37.261 mm, j = 37.262 mm noktaları için deformasyon değerleri. Malzeme katsayıları: $\mu = 0.268\ \mathrm{N/mm^2}$, $N = 1000$, $\overline{E_b} = 2.67\ \mathrm{N/mm^2}$, $K = 2.68\ \mathrm{N/mm^2}$, $\varepsilon^f = 0.240\ \mathrm{N/mm}$, $l = 1.0\ \mathrm{mm}$, $\eta = 1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{MPa \cdot s}$, $p = 2$



Şekil 7. Şekil 6'te verilmiş olan deformasyon değerlerine karşılık gelen deforme olmuş ve yırtılmış numune geometrileri.

SONUÇ

Yüksek mertebe deformasyonlarda doğrusal olmayan malzeme davranışı gösteren lastiksi polimerlerin yırtılma analizi sayısal olarak modellenmiştir. Polimer malzemesinin yırtılması doğrusal momentumun korunumu ve çatlak faz alanı denklemlerinin çözümüyle modellenmiştir. Ancak bağlaşık problemin doğasından kaynaklanan sebeplerden dolayı sayısal kolaylıklar için ayrık çapraz çözüm şeması kullanılmıştır. Yapılan çalışmalar doğrultusunda yüksek mertebeden deformasyon içeren faz alanı yaklaşımları, yırtılma komşuluğundaki yüksek deformasyonlar ve eleman bozulmalarından dolayı, dengeli ve istikrarlı bir sonlu elemanlar çözümü için çok küçük eleman boyutlarına ihtiyaç duymaktadır. Bununla birlikte eldeki bağlaşık problem zamana bağlı olmamasına rağmen kullanılmış olan ayrık çapraz çözüm şemasından dolayı problemin çözümünde kullanılan toplam çözüm sayısı sonucu etkilemekte, bu nedenle dolaylı yoldan problemin zamana ve yükleme hızına bağlıymış gibi görünmesine sebep olmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] R. Ogden. "Large deformation isotropic elasticity: on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids". *Proc.R. Soc. London A*, 326 (1972) 565–584.

[2] E. M. Arruda and M. C. Boyce, "A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41 (1993) 389–412.

[3] C. Miehe, S. Göktepe, and F. Lulei, "A micro-macro approach to rubber-like materials—part i: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 (2004) 2617–2660.

[4] L. Treloar, *The Physics of Rubber Elasticity*, Oxford University Press, 1975.

[5] P.Flory, *Statistical mechanics of Chain Molecules*, Interscience Publishers, 1969.

[6] B. Bourdin, G. Francfort, and J.-J. Marigo, "Numerical experiments in revisited brittle fracture," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 (2000) 797–826.

[7] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker, "Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field fe implementations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83 (2010) 1273–1311.

[8] C. Miehe and L.-M. Schänzel, "Phase field modeling of fracture in rubbery polymers. part i: Finite elasticity coupled with brittle failure," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 65 (2014) 93–113.

[9] B. Talamini, Y. Mao, and L. Anand, "Progressive damage and rupture in polymers," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 111 (2018) 434–457.

[10] B. Akçören, *Computational Modeling of Rupture in Rubbery Polymers*, Yüksek Lisans tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 2020.

[11] S.Göktepe, *Micro-macro approaches to rubbery and glassy polymers: Predictive micromechanically-based models and simulations*, Doktora tezi, University of Stuttgart 2007.

[12] M. Hofacker and C. Miehe, A phase field model of dynamic fracture: Robust field updates for the analysis of complex crack patterns, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 93 (2013) 276–301.

[13] N.A. Hocine, M. Abdelaziz, A. Imad, Fracture problems of rubbers: J-integral estimation based upon η factors and investigation on the strain energy density distribution as a local criterion, *International Journal of Fracture*. 117 (2002) 1–23.

FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ BİR NANOÇUBUĞUN BOYUT ETKİSİNE BAĞLI TİTREŞİM ANALİZİ

Büşra Uzun[1] ve Mustafa Özgür Yaylı[1]
[1]Bursa Uludağ Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Görükle Kampüsü, 16059, Bursa

ABSTRACT

In this study, vibration analysis of functionally graded nanorods with hollow circular cross-section is presented using a higher order (non-classical) elasticity theory. Nano/micro structures have attracted great attention because their extraordinary properties. Recently, several higher order elasticity theories have been used to analyse nano/micro structures. Because these theories take into account the effect of small-size, they provide more accurate results. In the current study, vibration analysis of functionally graded nanorods is investigated on the basis of the nonlocal elasticity theory proposed by Eringen. The frequency values of the functionally graded nanorods fixed at both ends are calculated using a finite element method. The effects of various parameters on the vibration of the functionally graded nanorods are investigated via calculated frequency values.

Keywords: Functionally graded nanorod; Nonlocal elasticity theory; Finite element method; Axial vibration

ÖZET

Bu çalışmada, yüksek mertebeden (klasik olmayan) bir elastisite teorisi kullanılarak içi boş dairesel kesitli fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun titreşim analizi sunulmuştur. Nano/mikro yapılar olağanüstü özellikleri nedeniyle büyük ilgi görmüşlerdir. Son zamanlarda nano/mikro yapıların analizi için birçok yüksek mertebeden elastisite teorileri kullanılmaya başlanmıştır. Bu teoriler boyut etkisini dikkate aldıkları için daha doğru sonuçlar vermektedir. Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun titreşim analizi Eringen tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisi temel alınarak incelenmiştir. Her iki ucu ankastre mesnetli fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun frekans değerleri sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Hesaplanan frekans değerleri ile çeşitli parametrelerin fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun titreşimi üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuk; Yerel olmayan elastisite teorisi; Sonlu elemanlar yöntemi; Eksenel titreşim

GİRİŞ

Teknoloji sürekli olarak gelişir ve hız kazanır. Teknolojide yaşanan hızlı gelişmeler neticesinde nanoteknoloji doğmuş ve günümüzün de en öncelikli konularından biri haline gelmiştir. Nanoteknoloji çok geniş uygulama potansiyelleri olan disiplinler arası bir alandır ve

birçok bilim dalında çalışılmaktadır. Nanomalzemeler / nanoyapılar daha dayanıklı, daha hafif ve daha farklı ısı ve elektrik iletkenlik özelliklerine sahiptirler. Nanoparçacıkların / nanoyapıların gösterdikleri bu kendilerine özgü çok ilginç özellikler ve boyutların çok küçülmesi, teknolojide çok büyük bir kullanım alanı sunmasını sağlamaktadır.

Boyutları mikro / nano mertebelerine inen yapılarda klasik elastiste teorisi ile elde edilen sonuçlar bu yapıların davranışlarını tam olarak yansıtmaya yetmemektedir. Bunun sebebi klasik elastisite teorisinin boyut etkisini ihmal etmesidir. Oysaki mikro / nano boyutlara inildiği zaman boyut etkisini de göz önüne almak gerekir. Bu yüzden son zamanlarda nano / mikro yapıların analizi için birçok yüksek mertebeden elastisite teorileri kullanılmaya başlanmıştır. Bu teoriler boyut etkisini dikkate aldıkları için daha doğru sonuçlar vermektedir. Bu teorilerden biri de Eringen [1] tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisidir. Bu teoride bir noktadaki gerilmenin sadece o noktadaki şekil değişimlerine bağlı olmayıp; söz konusu noktanın komşusundaki noktalara da bağlı olduğu ifade edilmektedir. Son yıllarda yerel olmayan elastisite teorisi temel alınarak birçok akademik çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları [2-15].

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, malzeme özellikleri bir veya birden çok doğrultusu boyunca sürekli olarak değişim gösteren özel kompozitler olarak tanımlanabilir. Homojen malzemelerin tek başına karşılayamadığı özellikleri karşılayabilmek için fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin kullanıldığı birçok uygulamaya rastlanır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, yayınlanan bilimsel makalelerde tek başlarına ana eleman olarak çalışıldığı gibi çeşitli kompozit yapıları oluşturan tabakalar olarak da analizlere dahil edilmişlerdir. Literatürde fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler ile oluşturulan yapıların çeşitli analizlerine dayanan birçok çalışma [14-18] mevcuttur.

Bu çalışmada her iki ucu ankastre mesnetli fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun eksenel titreşim analizi Eringen [1] tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak incelenmiştir. İçi boş dairel kesite sahip fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun malzeme özelliklerinin çubuğun yarıçapı doğrultusu boyunca değiştiği varsayılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen frekans değerleri ile fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun titreşim davranışına etki eden bazı parametreler incelenmiştir.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Nano ölçekteki bir nanoçubuğun yerel olmayan elastisite teorisine dayanan serbest titreşim denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir [11-12].

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(e_0 a)^2\rho A\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (1)$$

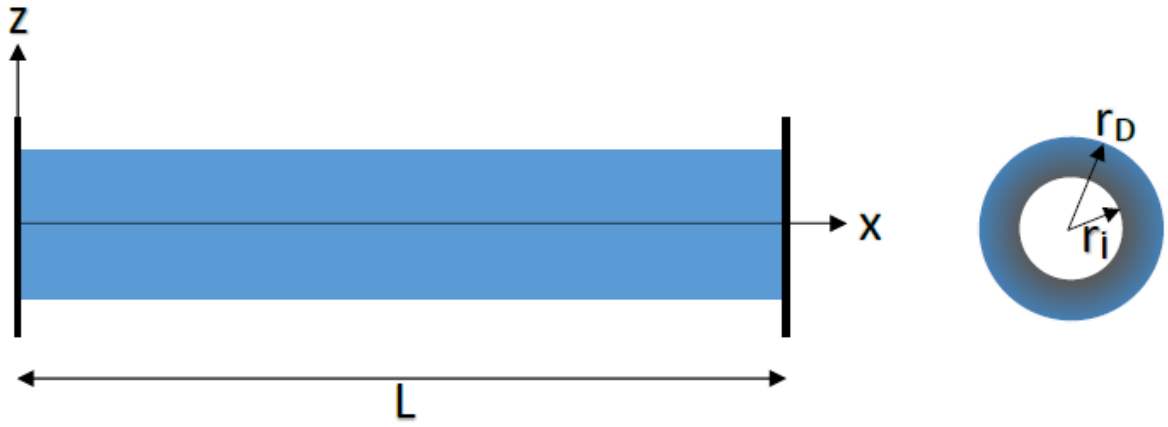
Yukarıdaki denklemde u nanoçubuğun uzunluğu doğrultusundaki (x ekseni doğrultusundaki) yerdeğiştirmesini ifade ederken t zamanı ifade eder. Denklem (1)'deki E, A ve ρ sırasıyla nanoçubuğun elastisite modülü, kesit alanı ve kütle yoğunluğudur. Son olarak $e_0 a$ ise yerel olmayan parametre olarak adlandırılır. Yerel olmayan parametre sayesinde nanoçubuğun serbest titreşim denklemine boyut etkisi dahil edilmiş olur. Anlaşılacağı üzere $e_0 a$ Denklem (1)'de ihmal edilirse, aşağıdaki gibi klasik eksenel titreşim denklemi elde edilmiş olur.

$$EA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{2}$$

Bu çalışma kapsamında fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubukların serbest titreşimi incelenecektir. Bilindiği üzere, homojen olmayan yapıların malzeme özellikleri her doğrultusunda sabit değildir. Bu yüzden malzeme özellikleri, bir bağıntı ile ifade edilir. Şekil 1'de görüldüğü ve daha önceden de ifade edildiği gibi titreşim davranışı incelenecek olan nanoçubuğun malzeme özellikleri yarıçapı doğrultusunda değişmektedir ve bu değişim aşağıdaki bağıntı ile ifade edilir.

$$f_{FD}(r)=(f_I-f_D)\left(\frac{r_D-r}{r_D-r_I}\right)^{\lambda}+f_D \tag{3}$$

Denklem (3)'te f nanoçubuğun değişim gösteren malzemesini ifade eder. Yani yapılan çalışmada hangi malzeme özellikleri değişim gösteriyor ise yukarıdaki denklem bu malzemeler cinsinden yeniden yazılır. Bu çalışmada elastisite modülü ve kütle yoğunluğu değişim göstermektedir. f_{FD} fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun etkili malzeme özelliğini belirtmektedir. f_I ve f_D sırasıyla kesitin iç ve dış malzeme özelliklerini temsil ederken, r_I ve r_D kesitin iç ve dış yarıçapıdır. Son olarak λ malzeme dağılımını temsil eden değişken bir katsayıdır.



Şekil 1. Ankastre mesnetli fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuk gösterimi

Denklem (1) fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun titreşimini temsil edecek şekilde aşağıdaki gibi yeniden yazılır.

$$A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(e_0 a)^2 I_{11}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}-I_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{4}$$

Denklem (4)'teki A_{11} ve I_{11} ifadeleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$A_{11} = 2\pi \int_{r_I}^{r_D} E_{FD}(r) r dr \tag{5}$$

$$I_{11} = 2\pi \int_{r_I}^{r_D} \rho_{FD}(r) r dr \tag{6}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun titreşim frekanslarını sonlu elemanlar çözümü ile elde etmek için nanoçubuğa ait rijitlik ve kütle matrisleri bulunmalıdır. Bu çalışmada, bir çubuk sonlu elemanı her iki ucunda birer düğüm noktası ve her bir düğüm noktasındaki tek serbestlik derecesi ile düşünülmüştür. Ve bu çubuk eleman için şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğa ait rijitlik ve kütle matrisleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{A_{11}}{L} & \dfrac{-A_{11}}{L} \\ \dfrac{-A_{11}}{L} & \dfrac{A_{11}}{L} \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$M^{kl} = \begin{bmatrix} \dfrac{I_{11}L}{3} & \dfrac{I_{11}L}{6} \\ \dfrac{I_{11}L}{6} & \dfrac{I_{11}L}{3} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$M^{yo} = \begin{bmatrix} \dfrac{(e_0 a)^2 I_{11}}{L} & \dfrac{-(e_0 a)^2 I_{11}}{L} \\ \dfrac{-(e_0 a)^2 I_{11}}{L} & \dfrac{(e_0 a)^2 I_{11}}{L} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Denklem (8) fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğa ait rijitlik matrisini belirtirken, denklemler (9) ve (10) sırasıyla klasik ve yerel olmayan kütle matrislerini belirtir. En son, bu matrisler ile aşağıdaki özdeğer problemi kurularak titreşim frekansları elde edilir.

$$\left| K - \omega_n^2 \left(M^{kl} + M^{yo} \right) \right| = 0 \tag{11}$$

Yukarıdaki denklemde ω açısal frekans ve alt indis *n* mod numarasıdır.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde denklem (11) ile elde edilen sonuçlar ile fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun eksenel titreşimi tartışılmıştır. Nanoçubuğun her iki ucu ankastre mesnetli (C-C) olarak düşünülmüştür. Sayısal sonuçlar için nanoçubuğun alüminyum (Al) ve silisyum karbürden (SiC) oluştuğu düşünülmüştür ve malzeme özellikleri Çizelge 1'de verilmiştir. Nanoçubuğun geometrik özellikleri ise şu şekildedir*:* iç yarıçap $r_I=2$ *nm,* dış yarıçap $r_D=4$ *nm,* uzunluk $L=50$ nm. Ayrıca nanoçubuğun iç yüzeyinin tamamen *Al*, dış yüzeyinin ise tamamen *SiC* olduğu varsayılmıştır.

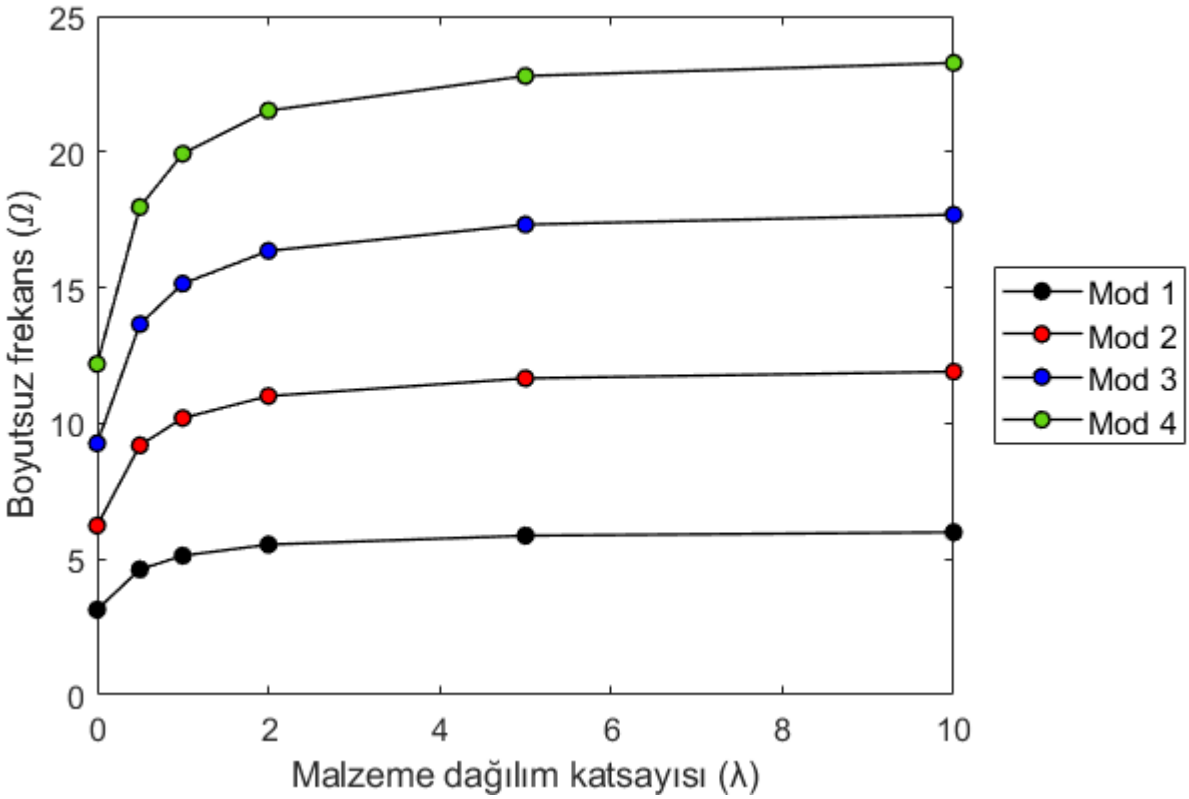
Çizelge 1. Fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğu oluşturan malzemelerin özellikleri [18]

	Elastisite modülü (GPa)	Kütle yoğunluğu (kg/m^3)
Al	67	2700
SiC	302	3200

Tartışmalarda, 200 elemanlı çözüm yapılarak bulunan frekans değerleri boyutsuz formda verilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğa ait boyutsuz frekans (Ω) değerleri aşağıdaki bağıntı ile elde edilir.

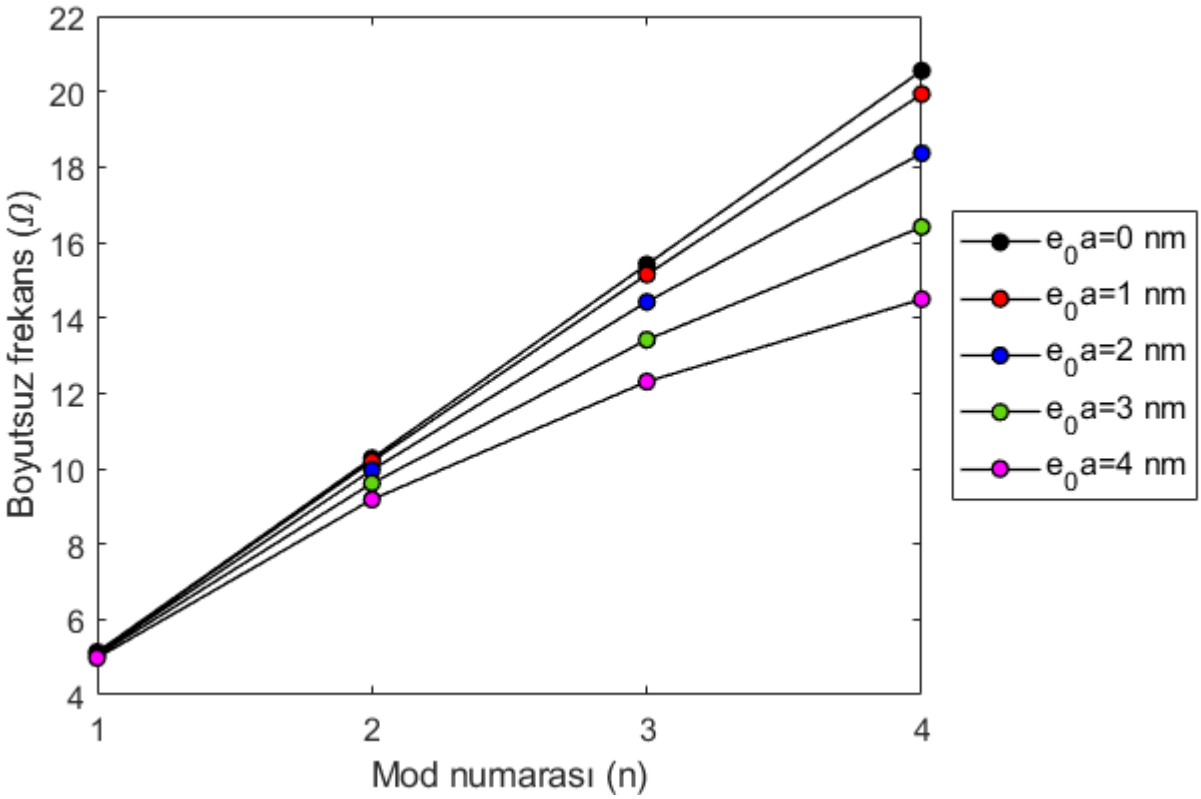
$$\Omega_n = \omega_n L\sqrt{\rho_i / E_i} \tag{12}$$

Şekil 2 malzeme dağılım katsayılarının frekanslar üzerindeki etkisinin araştırılması için çizilmiştir. Bu amaçla, değişen malzeme dağılım katsayıları (λ=0, 0.5, 1, 2, 5, 10) ile fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun ilk dört moddaki boyutsuz frekansları gösterilmiştir. Görüleceği üzere, λ katsayısı arttıkça boyutsuz frekans değerlerinde de artış meydana gelmektedir. Ayrıca düşük λ değerlerinde bu frekans artışı daha belirgindir.



Şekil 2. Boyutsuz frekans değerlerinin çeşitli λ değerleri ile değişimleri ($e_0a=1$ *nm*)

Şekil 3 yerel olmayan parametrenin frekanslar üzerindeki etkisinin araştırılması için çizilmiştir. Bu amaçla, değişen yerel olmayan parametre değerleri ($e_0a=0, 1, 2, 3, 4$ *nm*) ile fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun ilk dört moddaki boyutsuz frekansları verilmiştir. Şekilden, e_0a değeri arttıkça boyutsuz frekans değerlerinde azalma meydana geldiği anlaşılmaktadır. Burada $e_0a=0$ nm ile çizilen eğrinin klasik titreşim frekanslarını verdiğini belirtmek gerekir. Bu da yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilen sonuçların klasik elastisite sonuçlarına göre daha küçük olduğunu gösterir. Son olarak bu analizden yerel olmayan elastisite teorisinin yüksek modlarda daha etkili olduğu sonucuna varılır.



Şekil 3. Boyutsuz frekans değerlerinin çeşitli e_0a değerleri ile değişimleri (λ=1)

SONUÇLAR

Bu çalışmada fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubukların her iki ucu ankastre (C-C) sınır şartında eksenel titreşimi boyut etkisine bağlı sonlu elemanlar metodu ile sunulmuştur. Elde edilen sonuçlardan görüleceği gibi yerel olmayan elastisite teorisinin fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuklar üzerinde zayıflatıcı etki gösterdiği ortaya çıkmıştır. Yani bu teori kullanılarak elde edilen frekans değerleri daha düşüktür. Ayrıca, malzeme dağılım katsayısının artması ile fonksiyonel derecelendirilmiş nanoçubuğun frekans değerleri de artmaktadır. Özetle, hem yerel olmayan parametre hem de malzeme dağılım katsayısı frekanslar üzerinde önemli etkilere sahiptir.

KAYNAKLAR

[1] Eringen, A. C., On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*. 54 (1983), 4703-4710.

[2] Yaylı, M. Ö. Dönel yaylar ile mesnetlenmiş bir karbon nanotüpün yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisine göre serbest titreşim analizi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*. 20 (2018), 8-21.

[3] Uzun, B., Kafkas, U., Yaylı, M. Ö. Axial dynamic analysis of a Bishop nanorod with arbitrary boundary conditions, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 100 (2020), e202000039.

[4] Eltaher, M. A., Khater, M. E., and Emam, S. A. A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations, and wave propagation of nanoscale beams, *Applied Mathematical Modelling.* 40 (2016), 4109-4128.

[5] Yayli, M. Ö. Effects of rotational restraints on the thermal buckling of carbon nanotube, *Micro & Nano Letters.* 14 (2019), 158-162.

[6] Mercan, K., and Civalek, Ö. DSC method for buckling analysis of boron nitride nanotube (BNNT) surrounded by an elastic matrix, *Composite structures.* 143 (2016), 300-309.

[7] Yayli, M. Ö. Free vibration analysis of a single-walled carbon nanotube embedded in an elastic matrix under rotational restraints, *Micro & Nano Letters*. 13 (2018), pp. 202-206.

[8] Liu, J. J., Li, C., Fan, X. L., and Tong, L. H. Transverse free vibration and stability of axially moving nanoplates based on nonlocal elasticity theory, *Applied Mathematical Modelling.* 45 (2017), 65-84.

[9] Li, C., Yao, L., Chen, W., and Li, S. Comments on nonlocal effects in nano-cantilever beams, *International Journal of Engineering Science.* 87 (2015), 47-57.

[10] Jena, S. K., Chakraverty, S., Tornabene, F. Buckling behavior of nanobeams placed in electromagnetic field using shifted Chebyshev polynomials-based Rayleigh-Ritz method, *Nanomaterials*. 9 (2019), 1326.

[11] Aydogdu, M. Axial vibration of the nanorods with the nonlocal continuum rod model, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*. 41 (2009), 861-864.

[12] Danesh, M., Farajpour, A., Mohammadi, M. Axial vibration analysis of a tapered nanorod based on nonlocal elasticity theory and differential quadrature method, *Mechanics Research Communications*. 39 (2012), 23-27.

[13] Yayli, M. Ö., Kandemir, S. Y., Çerçevik, A. E. Torsional vibration of cracked carbon nanotubes with torsional restraints using Eringen's nonlocal differential model, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control.* 38 (2019), 70-87.

[14] Ebrahimi, F., and Barati, M. R. Buckling analysis of nonlocal third-order shear deformable functionally graded piezoelectric nanobeams embedded in elastic medium, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering.* 39 (2017), 937-952.

[15] Eltaher, M. A., Emam, S. A. and Mahmoud, F. F. Free vibration analysis of functionally graded size-dependent nanobeams, *Applied Mathematics and Computation*. 218 (2012), 7406-7420.

[16] Sofiyev, A. H., Kuruoglu, N. Torsional vibration and buckling of the cylindrical shell with functionally graded coatings surrounded by an elastic medium, *Composites Part B: Engineering.* 45 (2013), 1133-1142.

[17] Najafov, A. M., Sofiyev, A. H., Kuruoglu, N. Torsional vibration and stability of functionally graded orthotropic cylindrical shells on elastic foundations, *Meccanica*. 48 (2013), 829-840.

[18] Khan, A. A., Naushad Alam, M., Wajid, M. Finite element modelling for static and free vibration response of functionally graded beam, *Latin American journal of solids and structures*. 13 (2016), 690-714.

BİTİŞİK İKİ BİNA MODELİNDE ÇARPIŞMA ETKİLERİNİN DENEYSEL YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Çağla Şekerci[1] ve Erdem Damcı[2]
[1,2] İstanbul Üniversitesi – Cerrahpaşa, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul

ABSTRACT

The width of the dilation joints left between existing or newly built adjacent buildings is of great importance. Insufficient dilatation joints are an issue that should be examined in terms of structural dynamics and earthquake behavior, taking into account the pounding of structures with each other. This study investigates the pounding phenomenon by shaking table experiments on two scaled building models. Representing situations where dilatation joints are insufficient, two building models are adjacently positioned on the shaking table, and pounding has been created for harmonic and ground motion excitations. Video and accelerometer recordings were used to determine the pounding phenomenon. Video recordings were analyzed with the image-processing technique, and displacement responses of the experimental models were obtained. The effect of video recordings at different sampling frequencies on the determination of collision time was investigated. The experimental results were compared with the numerical results using the Kelvin-Voigt model. The range of the spring and damping parameters of the Kelvin - Voigt model was evaluated for the scaled building models used.

Keywords: Pounding; Kelvin–Voigt model; image-processing; shaking table experiments

ÖZET

Bitişik olarak yapılmış veya yeni yapılacak binaların aralarında bırakılan dilatasyon derzlerinin ne genişlikte olması gerektiği, büyük önem taşımaktadır. Yetersiz dilatasyon derzleri, yapıların birbiri ile çarpışma etkisi dikkate alınarak yapı dinamiği ve deprem davranışı açısından incelenmesi gereken bir konudur. Bu çalışmada, iki adet ölçekli yapı modeli üzerinde sarsma tablası deneyleri ile çarpışma etkisi incelenmiştir. Dilatasyon derzlerinin yetersiz olduğu durumları temsilen, iki yapı modeli bitişik şekilde sarsma tablası üzerinde konumlandırılmış, harmonik ve yer hareketi uyarımları altında çarpışma etkisi oluşturulmuştur. Çarpışma etkilerinin belirlenmesi için video ve ivmeölçer kayıtları kullanılmıştır. Video kayıtları görüntü işleme tekniğiyle incelenmiş ve deney modellerinin yerdeğiştirme cevapları elde edilmiştir. Video kayıtlarının farklı örnekleme frekanslarında çarpışma süresinin belirlenmesindeki etkisi incelenmiştir. Kelvin–Voigt modeli kullanılarak deneysel sonuçlar nümerik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Kelvin–Voigt modeline ait yay ve sönüm parametrelerinin, kullanılan ölçekli yapı modellerinde hangi aralıkta olması gerektiği değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Çarpışma etkisi; Kelvin–Voigt modeli; görüntü işleme, sarsma tablası deneyleri

GİRİŞ

Deprem kuşağında bulunan ülkemizde, özellikle büyük şehirlerde konutlaşma çok hızlı bir şekilde artmıştır. Geçmişte olduğu gibi günümüzde de yapılan binaların çoğu parselasyon ve şehir planlama çalışmaları kaynaklı, bitişik olarak yapılmaktadır. Bitişik olarak yapılmış veya yapılacak binaların aralarında bulunması gereken dilatasyon derzlerinin genişliği büyük önem taşımaktadır. Binaların tasarımı ve analizi yapılırken dilatasyon derzi için öngörülen genişliklerin yetersiz olması veya bulunmaması durumunda komşu binalara olan etkisi dikkate alınmamaktadır. Yetersiz dilatasyon derzlerinin neden olacağı çarpışma etkisi, yapı dinamiği ve deprem mühendisliği açısından incelenmesi gereken bir konudur. Bu amaçla, bitişik iki yapı arasındaki çarpma kuvveti, çarpma sayısı, çarpma anı ve binalar arası boşluğun boyutunun belirlenmesi ve araştırılması gibi konular üzerinde yapılmış birçok nümerik ve sınırlı sayıda deneysel çalışma literatürde yer almaktadır [1-5].

Basitleştirilmiş yapı modelleri için literatürde yer alan çalışmalarda, çarpışma modelleri sadece yay veya yay-sönüm elemanı birlikte kullanılarak oluşturulmuş nümerik modelleri kapsamaktadır. Bu modeller arasında başlıca, elastik çarpma elemanı (elastic impact element), Kelvin-Voigt (Doğrusal Viskoelastik) Modeli, Modifiye Kelvin-Voigt Modeli, Doğrusal Olmayan Viskolelastik Model, Hertzdamp Modeli ve Sears Modeli yer almaktadır. Söz konusu modeller temel olarak yerdeğiştirme veya hız farkı kontrolü yaparak nümerik analizde kütlelere etkitilecek kuvvetin belirlenmesi üzerine kurulmuştur [1,6–10]. Bu kapsamda Anagnostopoulos [1], bitişik nizam binaları tek serbestlik dereceli olarak modellemiş ve çapışma etkisini yay-sönüm elemanı kullanarak incelemiştir. Bazı depremlerde ara binalarda hasar az olurken, köşe binalarda yıkım yüzdesinin daha fazla olduğunu ortaya koymuştur. Başka bir çalışmada ise bitişik binaların yığılı kütlelerden oluşacak şekilde çok sebestlik dereceli sistemler olarak modellenmesi ve beş farklı deprem hareketi kullanarak çarpışma etkisi simüle edilmiş ve büyük ölçüde yapıların farklı yüksekliklere, periyotlara veya kütlelere sahip olması durumunda, çarpışmanın yüksek gerilmelere neden olduğu görülmüştür [6]. Athanassiadou ve diğ. [11], benzer veya farklı dinamik özelliklere sahip bitişik tek serbestlik dereceli sistemlerin faz farkı ve çarpışma etkisini parametrik olarak incelemiş ve köşe yapıların yanı sıra rijit yapıların da daha fazla etkilendiğini ortaya koymuştur. Naserkhaki ve diğ. [12], bitişik yapılar için yay-sönüm elemanları kullanarak binaların yüksekliğinin önemli ölçüde farklılık gösterdiği durumlarda, uzun olan binanın neredeyse etkilenmediği, kısa binanın ise çarpışmadan etkilendiğini göstermişlerdir.

Yay ve sönüm elemanı kullanılarak yapılan bir başka çalışmada yay kuvveti, depremler sırasında yapısal çarpışmanın daha hassas simülasyonunu yapmak için doğrusal olmayan bir viskoelastik çarpışma modeli kullanılarak hesaplanmış ve sönümleme oranıyla ilgili bir parametre olan restitüsyon katsayısı formülasyonu analitik olarak elde edilmiş ve doğrulanmıştır [7, 8].

Sismik etkiler altında dilatasyon boşluklarının belirlenmesi üzerine yapılan bir çalışmada [3], nümerik analizlerde kullanılan çarpışma modellerinin yanı sıra bitişik binalar arasındaki boşlukların, farklı parametreler dikkate alınarak etkileri üzerinde durulmuştur. Ayrıca literatürde, bitişik binalarda yumuşak kat bulunması veya planda düzensizliklerin olması durumunda dilastasyon boşluklarına olan etkisinin araştırıldığı çalışmalar da yer almaktadır [4, 5].

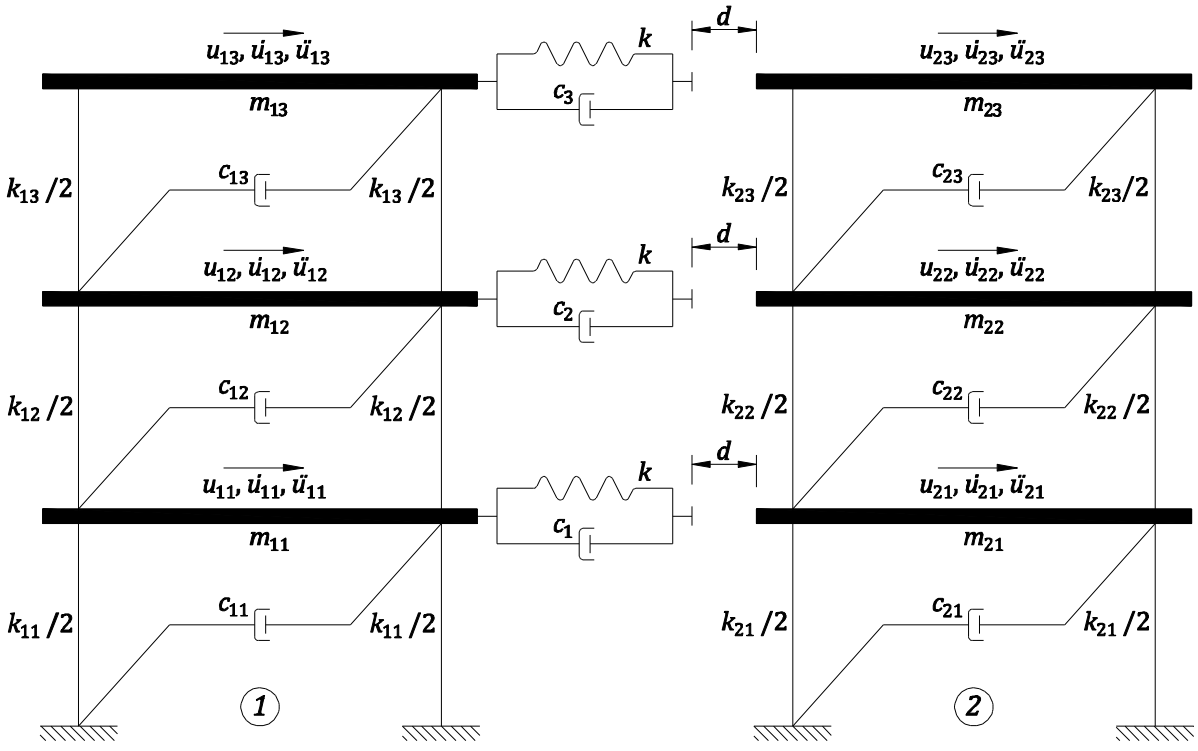
Bunların yanı sıra, iki bitişik bina arasında sönümleyicilerin bağlandığı ve sönümleyicilerin olmadığı durumların karşılaştırıldığı çalışmalar da yapılmıştır. Sarsma tablası ile yapılan deneyler sonucunda bitişik yapıların sönümleyici ile bağlanmadığında durumda, yapılar arası mesafenin orta ve kuvvetli depremlerde 30 cm ve hafif depremler altında 24 cm olabileceğini

belirtmiştir. Sönümleyicili durumda ise çeşitli performans koşulları altında derz boşluğunun 10 cm olabileceği önerilmiştir [13]. Khan ve diğ. [14] ise viskoz bir sönümleyici ile birbirine bağlanan onbeş ve on katlı iki bitişik binanın sismik tepkisini incelemiş ve farklı frekanslardaki yapıların sönümleyiciler ile birleştirilmesi sonucu, iki binada deprem kaynaklı tepkilerinin azaldığını göstermişlerdir. Bir başka çalışmada ise bitişik yapılarda patlamaya bağlı meydana gelebilecek titreşimlere karşı oluşacak tepkinin azaltması için pasif kontrollü viskoz sönümleyiciler kullanmış ve sönümleyicilerin verimli olduğu, farklı yapılarda ise pik tepkinin bağlı veya bağlı olmayan yapılar için hemen hemen eşdeğer olduğu belirtilmiştir [15].

Bu çalışmada ise, nümerik çarpışma modellerinden olan Kelvin–Voigt çarpışma modeli kullanılarak üç katlı bitişik iki kayma çerçevesinin nümerik analizleri yapılmış, harmonik ve deprem yükleri altında sarsma tablası deneyleri yapılarak nümerik ve deneysel sonuçların karşılaştırılması sunulmuştur.

ÇARPIŞMA ANALİZİ İÇİN NÜMERİK YÖNTEM

Çarpışma modellerinde genellikle yerdeğiştirme kontrolü yapılarak basınç yayında oluşan kuvvetin, reaksiyon kuvveti olarak komşu yapıya/yapılara etkitilmesi şeklinde dikkate alınır. Şekil 1'de benzer modeli kapsayan 3 katlı iki adet kayma çerçevesi ve çarpışma modelinin şematik gösterimi verilmiştir. Ele alınan her iki kayma çerçevesi için çarpışma anındaki hareket denklemleri, her iki sistem için de Denklem (1) ve (2)'de ayrı ayrı verilmiştir.



Şekil 1. 3 katlı kayma çerçeveleri ve çarpışma modeli şematik gösterimi

$$\mathbf{M}_1\ddot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{U}_1 - \mathbf{F} = -\mathbf{M}_1\ddot{\mathbf{U}}_g \tag{1}$$

$$\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{U}}_2 + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{U}}_2 + \mathbf{K}_2\mathbf{U}_2 + \mathbf{F} = -\mathbf{M}_2\ddot{\mathbf{U}}_g \tag{2}$$

Burada, ***1*** ve ***2*** numaralı kayma çerçevesi modelleri için $\mathbf{M}_1$ ve $\mathbf{M}_2$ kütle matrislerini, $\mathbf{K}_1$ ve $\mathbf{K}_2$ rijitlik matrislerini ve $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ sönüm matrislerini temsil etmektedir. Kayma çerçevesi Model-1 için kütle sönüm ve rijitlik matrisleri Denklem (3), kayma çerçevesi Model-2 için kütle sönüm ve rijitlik matrisleri Denklem (4) ile hesaplanmaktadır. *i* model numarasını temsil etmek üzere, denklem (3) ve (4)'deki sönüm matrislerinde yer alan a_{i0} ve a_{i1} terimleri Rayleigh Sönümüne göre hesaplanmıştır [16]. Denklem (1) ve (2)'de verilen ivme ($\ddot{\mathbf{U}}_1$ ve $\ddot{\mathbf{U}}_2$), hız ($\dot{\mathbf{U}}_1$ ve $\dot{\mathbf{U}}_2$) ve yerdeğiştirme ($\mathbf{U}_1$ ve $\mathbf{U}_2$) vektörleri Denklem (5) ve (6)'daki gibidir. Denklem (1) ve (2)'deki $\ddot{\mathbf{U}}_g$ ise yer ivmesini ifade etmektedir.

$$\mathbf{M}_1=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{13} \end{bmatrix};\qquad \mathbf{K}_1=\begin{bmatrix} k_{11}+k_{12} & -k_{12} & 0 \\ -k_{12} & k_{12}+k_{13} & -k_{13} \\ 0 & -k_{13} & k_{13} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_1=\begin{bmatrix} a_{10}m_{11}+a_{11}\left(k_{11}+k_{12}\right) & -a_{11}k_{12} & 0 \\ -a_{11}k_{12} & a_0 m_{12}+a_{11}\left(k_{12}+k_{13}\right) & -a_{11}k_{13} \\ 0 & -a_{11}k_{13} & a_{10}m_{13}+a_{11}k_{13} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{M}_2=\begin{bmatrix} m_{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{23} \end{bmatrix};\qquad \mathbf{K}_2=\begin{bmatrix} k_{21}+k_{22} & -k_{22} & 0 \\ -k_{22} & k_{22}+k_{23} & -k_{23} \\ 0 & -k_{23} & k_{23} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2=\begin{bmatrix} a_{20}m_{21}+a_{21}\left(k_{21}+k_{22}\right) & -a_{21}k_{22} & 0 \\ -a_{21}k_{22} & a_{20}m_{22}+a_{21}\left(k_{22}+k_{23}\right) & -a_{21}k_{23} \\ 0 & -a_{21}k_{23} & a_{20}m_{23}+a_{21}k_{23} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix} \ddot{u}_{11} \\ \ddot{u}_{12} \\ \ddot{u}_{13} \end{bmatrix};\qquad \dot{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix} \dot{u}_{11} \\ \dot{u}_{12} \\ \dot{u}_{13} \end{bmatrix};\qquad \mathbf{U}_1=\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_2=\begin{bmatrix} \ddot{u}_{21} \\ \ddot{u}_{22} \\ \ddot{u}_{23} \end{bmatrix};\qquad \dot{\mathbf{U}}_2=\begin{bmatrix} \dot{u}_{21} \\ \dot{u}_{22} \\ \dot{u}_{23} \end{bmatrix};\qquad \mathbf{U}_2=\begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix} \tag{6}$$

j her iki modelde kat numarasını temsil etmek üzere, çarpışma anında kat hizalarındaki m_{1j} kütlelerine $-\mathbf{F}$, m_{2j} kütlelerine $+\mathbf{F}$ kuvvetleri etkimektedir. Denklem (7)'de verilen **F** kuvvet vektörü kayma çerçevelerinin katlarına etkiyen yay kuvvelerini içermekte olup çarpışma kuvvelerinin hesabı ve gerekli sınır şartları Denklem (8)'de verilmiştir. Kelvin-Voigt modeline ait nümerik analizlerde kullanılacak çarpışma kuvveti Denklem (8)'de görüldüğü gibi yay rijitliği (*k*) ve sönüm (c_j) olmak üzere iki parametreye bağlıdır. Önceki çalışmalarda [1], yay rijitliğinin kat rijitliğinin 0.1 ile 10 katı arasında bir değer olarak alındığında ideal sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Sönüm c_j ise Denklem (9)'da görüldüğü üzere yay rijitliği *k*, sönüm oranı ξ ve m_{ij} kat kütlelerine bağlı olarak değişmektedir. Burada verilen sönüm oranı ise Denklem (10)'da verilen bir restitüsyon çarpanı, *r* ile ilişkilidir. *r* çarpanı 1.0 olduğunda sönüm oranı ξ= 0 olmakta ve model lineer elastik olarak çalışmakta, *r* = 0.0 olduğunda ise

sönüm oranı ξ= 1 değerini almaktadır. Khatiwada ve diğ. [10] çalışmasında, r çarpanının 0.4 ile 0.65 arasında alınabileceğini göstermiştir.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} F_{1j} &= F_{2j} = 0 && \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} u_{1j} - u_{2j} - d \le 0 \\ F_{1j} &= F_{2j} = k\left(u_{1j} - u_{2j} - d\right) + c_j\left(\dot{u}_{1j} - \dot{u}_{2j}\right) && \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} u_{1j} - u_{2j} - d > 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$$c_j = 2\xi\sqrt{\left(k\frac{m_{1j}m_{2j}}{m_{1j}+m_{2j}}\right)} \tag{9}$$

$$\xi = \frac{-\ln r}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln r\right)^2}} \tag{10}$$

Bu çalışmada, Matlab [17] programı kullanılarak Newmark Ortalama İvme Yöntemi [16] ile nümerik analizler yapılmıştır. Hem harmonik uyarım hem de kuvvetli yer hareketi altında çarpışma kuvvetlerinin hesabı için öncelikle Newmark Ortalama İvme Yöntemine göre Denklem (11) ve (12) hesaplanır. Ardından, yay sönüm oranı Denklem (10) ve sönümü ise Denklem (9)'a göre hesaplanır. n'inci zaman adımının başlangıcında F_{ij} = 0 olarak alınır ve hesaplar, Denklem (13)-(16) arasında tekrarlanarak zaman tanım alanında analiz edilir. Denklem (15) hesaplandıktan sonra her zaman adımındaki yay kuvvetinin belirlenmesi için çarpışma kontrolü yapılır. Çarpışma söz konusu ise Denklem (8)'e göre her kat için yay kuvveti hesaplanarak Denklem (13)'e geri dönülüp n+1 adımında tekrar çözüm yapılarak, bu adımdaki yerdeğiştirme, hız ve ivme hesaplanıp bir sonraki zaman adımına geçilerek aynı işlemler zaman tanım alanı süresince tekrarlanır.

$$\ddot{\mathbf{U}}_{i,0} = \mathbf{M}_i^{-1}\left(\mathbf{P}_{i,0} - \mathbf{K}_i\mathbf{U}_{i,0} - \mathbf{C}_i\dot{\mathbf{U}}_{i,0}\right) \tag{11}$$

$$\mathbf{a}_{i,1} = \frac{1}{\beta\left(\Delta t\right)^2}\mathbf{M}_i + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}_i; \quad \mathbf{a}_{i,2} = \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M}_i + \left(\frac{\gamma}{\beta}\text{-}1\right)\mathbf{C}_i; \quad \mathbf{a}_{i,3} = \left(\frac{1}{2\beta}\text{-}1\right)\mathbf{M}_i + \left(\frac{\gamma}{2\beta}\text{-}1\right)\mathbf{C}_i; \tag{12}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{i,n+1} = \mathbf{P}_{i,n+1} + \mathbf{a}_{i,1}\mathbf{U}_{i,n+1} + \mathbf{a}_{i,2}\dot{\mathbf{U}}_{i,n} + \mathbf{a}_{i,3}\ddot{\mathbf{U}}_{i,n} \mp \mathbf{F}_{n+1} \tag{13}$$

$$\mathbf{U}_{i,n+1} = \hat{\mathbf{K}}_i^{-1}\hat{\mathbf{P}}_{i,n+1} \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{i,n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\mathbf{U}_{i,n+1} - \mathbf{U}_{i,n}\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{U}}_{i,n} + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{U}}_{i,n} \tag{15}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{i,n+1} = \frac{\gamma}{\beta\left(\Delta t\right)^2}\left(\mathbf{U}_{i,n+1} - \mathbf{U}_{i,n}\right) - \left(1 - \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\right)\dot{\mathbf{U}}_{i,n} - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_{i,n} \tag{16}$$

DENEYSEL ÇALIŞMA

Şekil 1'de görülen iki adet 3 katlı yapı modeli, nümerik analizlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırma yapmak üzere üretilmiştir. Tasarımı yapılan iki adet özdeş yapı modelinin toplam yüksekliği 1000 mm'dir. Kat döşemeleri için 8 mm kalınlığında MDF malzeme, kolonlar için ise M6 gijon kullanılmıştır. Kat alanları 200x200 mm^2'dir. İdeal kayma çerçevesi davranışını elde edebilmek amacıyla kolon uçları döşemenin alt ve üst noktalarından fiberli somun ile bağlanarak döşeme ve kolon arasındaki ankastrelik sağlanmaya çalışılmıştır. Özdeş iki yapı modeli üzerinde çarpışma etkisinin oluşması için Model-1'in katlarına ilave kütle eklenerek periyodları değiştirilmiştir.

Çalışma kapsamında sadece kat hizalarının aynı olduğu durumlar incelenmiştir (Şekil 2). Dilatasyon derzlerinin yetersiz olduğu durumu temsilen, iki yapı modeli bitişik şekilde sarsma tablası [18] üzerinde konumlandırılmış ve ilk olarak harmonik uyarımlar altında deneysel çalışmalar gerçekleştirilmiştir.

Harmonik deneylerde, her yapı modellinin dinamik karakteristiklerini (periyot, mod şekli ve sönüm oranı) belirlemek amacıyla serbest titreşim ve sarsma tablası ile zorlanmış titreşim testleri yapılmıştır. Deney modelleri ile uyumlu kütle ve rijitlikler Tablo 1'de verilmiştir. Görüntü işleme tekniği ile hareket bilgisinin elde edilebilmesi için her modelin katlarına ve sarsma tablasına beyaz LED işaretçiler yerleştirilmiştir. Video kayıtları üzerinden takibi yapılan beyaz LED'lerin zaman tanım alanında piksel cinsinden yerdeğiştirmeleri kaydedilmiş, elde edilen pixel-zaman kayıtları transfer fonksiyonları kullanılarak yapı modellerinin mod şekilleri ve hakim frekanslarının belirlenmesinde kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar ile nümerik model üzerinde de model güncelleme yapılmış ve nümerik model ile deneysel sonuçların uyumlu olması sağlanmıştır.

Tablo 1. Deney Modelleri kütle ve rijitlikleri

Kat	Model-1		Model-2	
	Kütle [kg]	**Rijitlik [kN/m]**	**Kütle [kg]**	**Rijitlik [kN/m]**
1	1.7	6.83	0.56	8.46
2	1.7	6.83	0.56	8.46
3	1.6	6.83	0.45	8.46

Dinamik davranışın ve çarpışma etkisinin izlenmesi için Sony RX100M5 kamera kullanılarak 100, 500 ve 1000 fps hızlarında video kayıtları alınmış ve sırasıyla 10, 2 ve 1 milisaniye kayıt hızlarındaki görüntülerden çarpışma süreleri belirlenmiştir. Bu kayıt hızları ile elde edilen veriler kendi aralarında da karşılaştırıldığında birbirleri ile uyumlu olduğu görülmüş ve deneysel çalışmalara 100 fps kayıt hızı ile devam edilmiştir.

Bunların yanısıra, deprem hareketi altında çarpışma anında kat son katta meydana gelen ivmeleri incelemek amacıyla ARDUINO tabanlı düşük maliyetli ivmeölçerler ile kayıtlar alınmıştır. Söz konusu ivmeölçerler mems tipi MPU6050 sensör ve ARDUINO NANO kullanılarak üretilmiştir.

DENEYSEL VE NÜMERİK SONUÇLARIN KARŞILAŞTIRILMASI

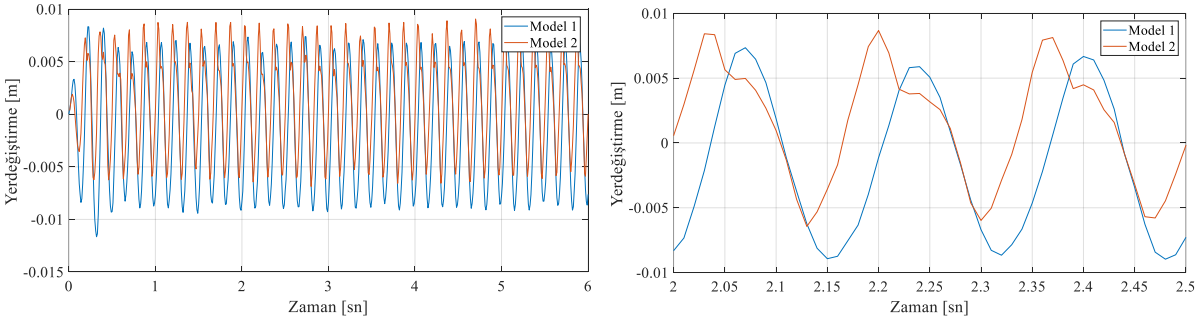
Sarsma tablası deneyleriyle elde edilen görüntü işleme sonuçları, Newmark Ortalama İvme yöntemi ile zaman tanım alanında analizi yapılan ve Kelvin-Voigt çarpışma modeli kullanılarak simüle edilen nümerik sonuçlar ile kıyaslanmıştır. Şekil 3'de sarsma tablasında ±2 mm genlikli 6 Hz frekanslı harmonik uyarım altında her iki modelin 3. katından alınan video kayıtlarının işlenmesi sonucu elde edilen yerdeğiştirme cevapları verilmiştir.

Şekil 4-8'de ise farklı yay rijitliği ve *r* katsayılarının kullanıldığı nümerik analiz sonuçları ile deneysel sonuçların karşılaştırması verilmiştir. Kıyaslama amacıyla nümerik modeldeki yay rijitliği ve sönüm oranlarının farklı olduğu durumlar ele alınmış ve her iki kayma çerçevesi için en uygun yay rijitliği ve sönüm oranı araştırılmıştır. Nümerik simülasyonlarda Model-1'in kayma rijitliği esas alınarak, çarpışma modelinde yay rijitliğinin kayma rijitliğine oranının 10, 5, 1, 0.1 katı olduğu durumlar ile bu durumlardaki *r* katsayısının 1.0, 0.8, 0.6, 0.4 ve 0.2 olduğu değerler ele alınmıştır. Analiz sonuçları incelendiğinde; Model-1 için yay rijitliğinin kayma rijitliğine eşit (k= 6.83 kN/m) ve *r* katsayısının 0.2, Model-2 için ise yine yay rijitliğinin kayma rijitliğine eşit (k= 6.83 kN/m) ve *r* katsayısının 0.4 olduğu durumlarda nümerik sonuçların deneysel sonuçlarla yakınlık gösterdiği belirlenmiştir.

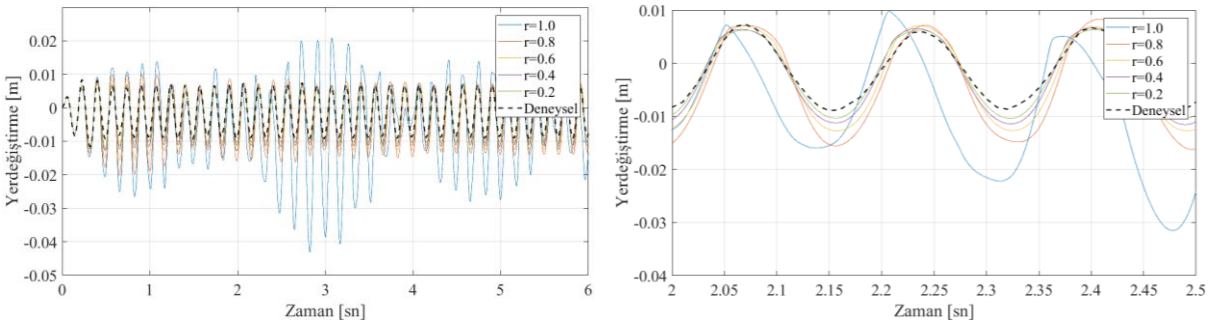


Şekil 2. Deney düzeneğinin genel görünüşü (sol) ve katlara yerleştirilen LED işaretçiler (sağ)

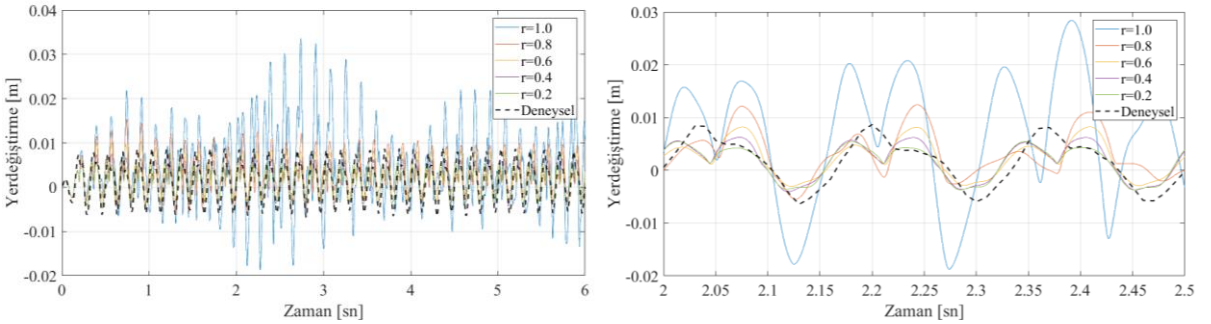
Nümerik analizlerde 3. kat kütleleri arasında çarpışma anında oluşan F_{13}= F_{23} kuvveti Şekil 9'da verilmiş olup, r= 0.4 ve yay rijitliğinin kayma rijitliğine eşit (k= 6.83 kN/m) olduğu durumda, maksimum 25 N civarında hesaplanmıştır. Çarpışma anındaki temas süresinin yaklaşık olarak 8-30 milisaniye arasında değiştiği nümerik çalışmalarda hesaplanmıştır. Deneysel çalışmalarda ise bu sürenin 50-60 milisaniye arasında olduğu görülmüştür (Şekil 3).



Şekil 3. Görüntü işleme sonucu her iki modelin 3. katından elde edilen sonuçlar (±2 mm @ 6 Hz)

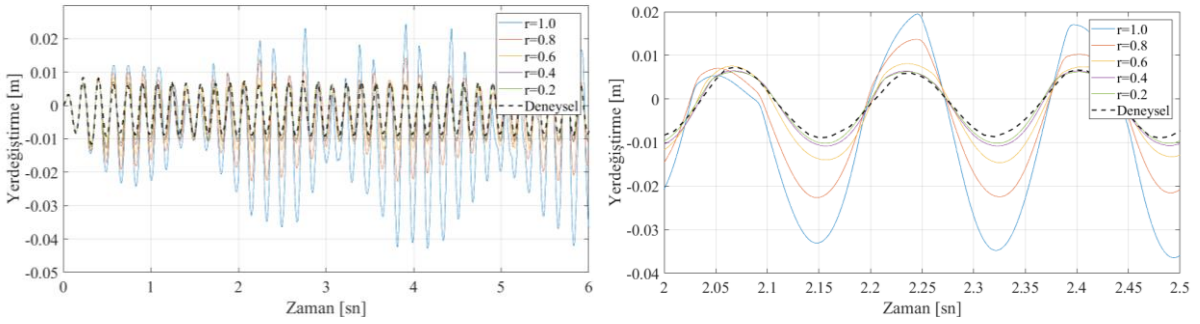


a) Model-1

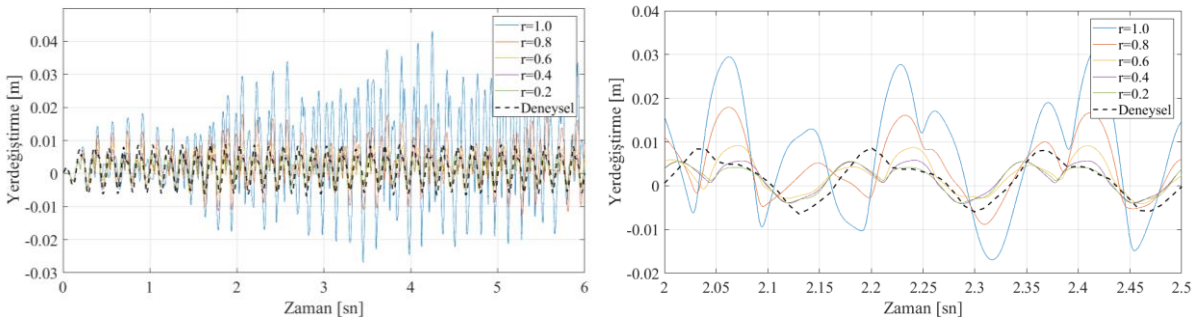


b) Model-2

Şekil 4. Yay rijitliği kayma rijitliğinin 10 katı alındığı durum (±2 mm @ 6 Hz)

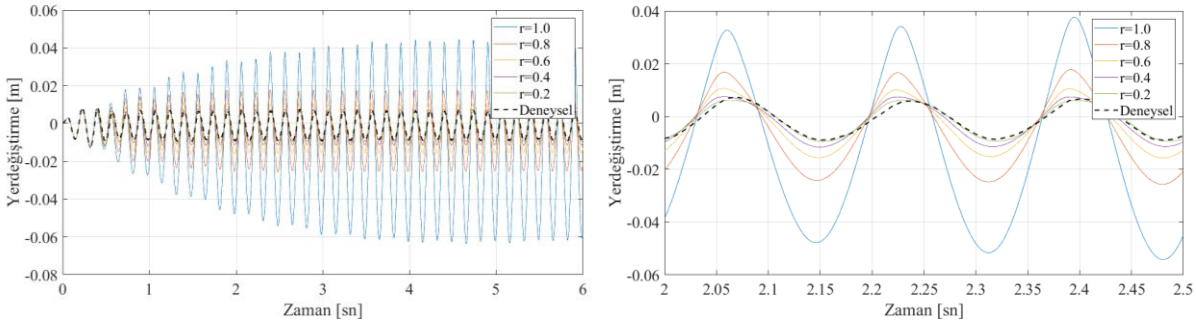


a) Model-1

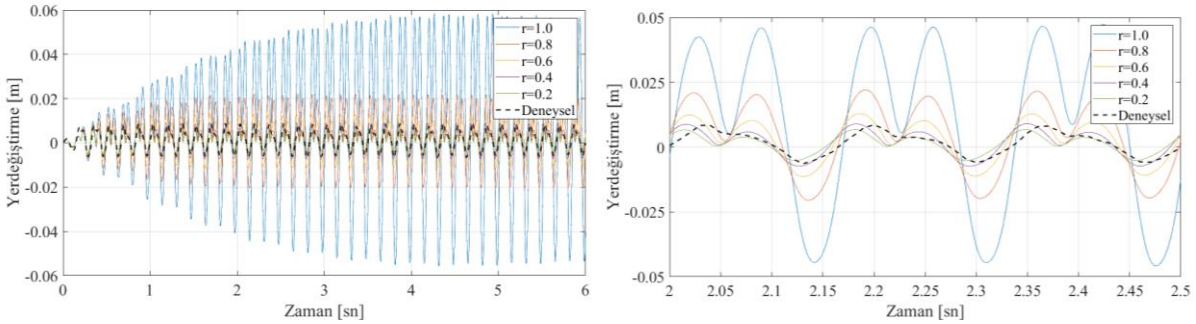


b) Model-2

Şekil 5. Yay rijitliği kayma rijitliğinin 5 katı alındığı durum (±2 mm @ 6 Hz)

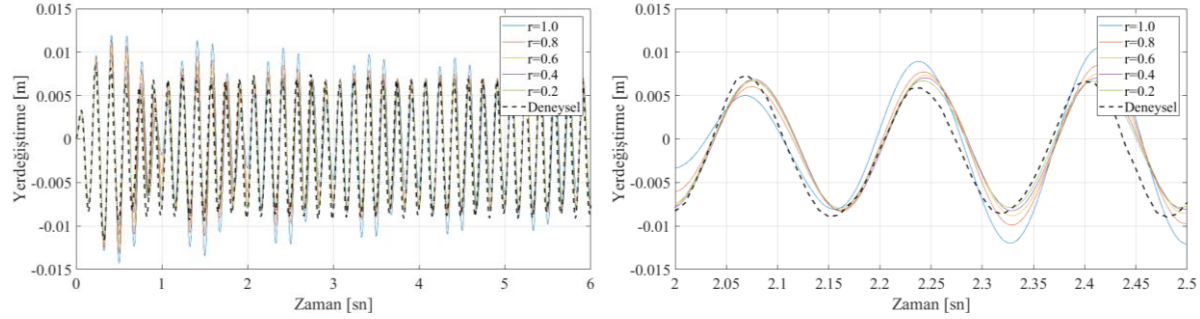


a) Model-1

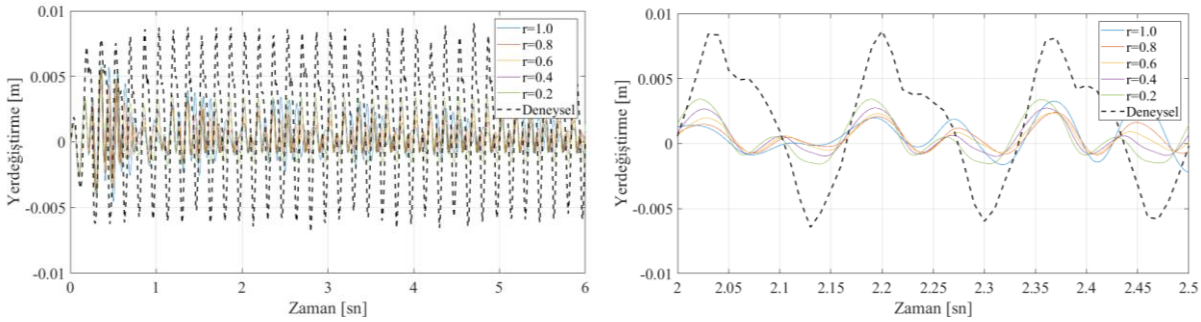


b) Model-2

Şekil 6. Yay rijitliğinin kayma rijitliğine eşit alındığı durum (±2 mm @ 6 Hz)

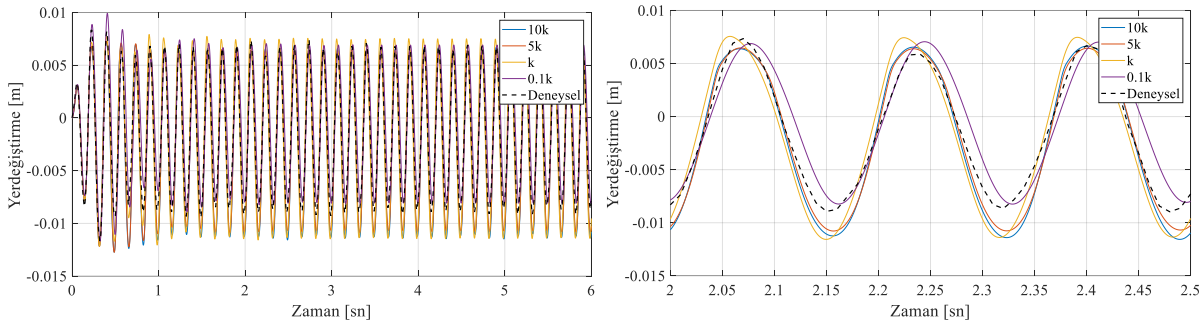


a) Model-1

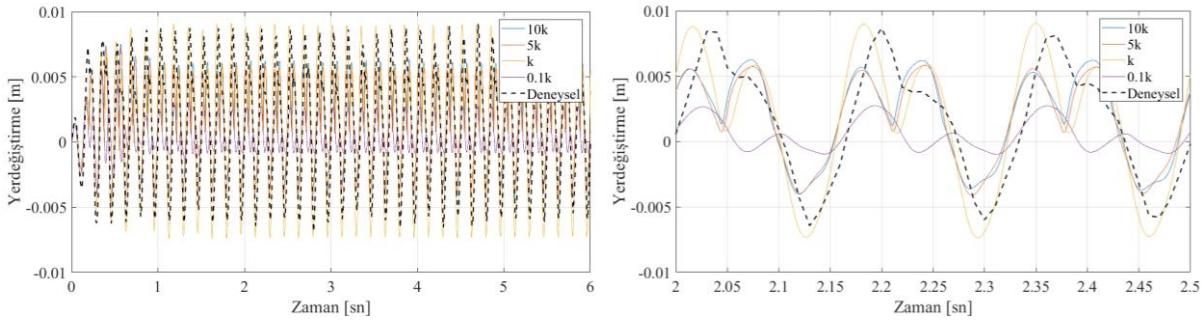


b) Model-2

Şekil 7. Yay rijitliği kayma rijitliğinin 0.1 katı alındığı durum (±2 mm @ 6 Hz).

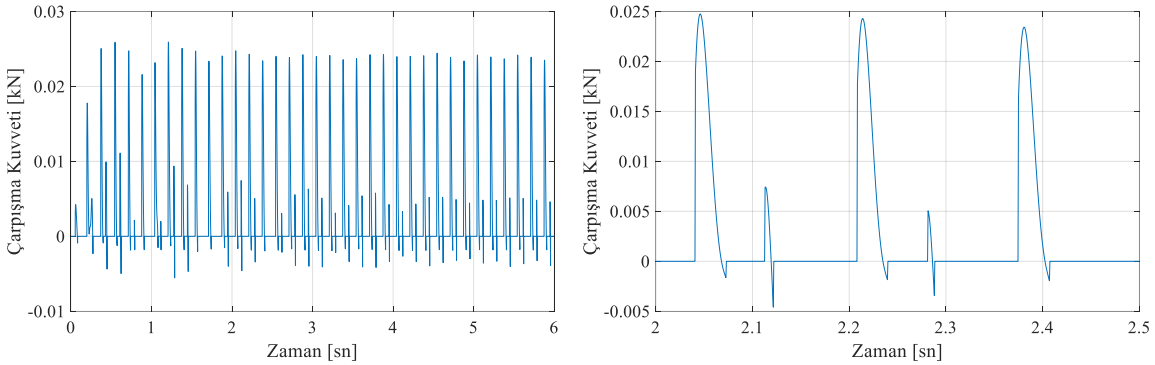


a) Model-1



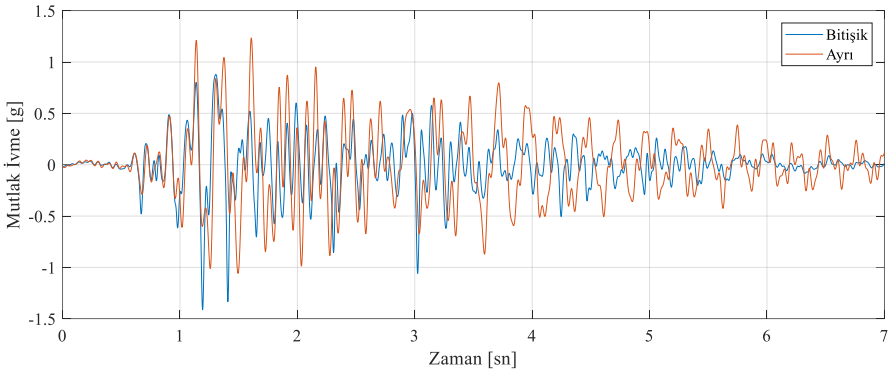
b) Model-2

Şekil 8. r = 0.4 olduğu durumda yay rijitliklerinin yerdeğiştirme cevapları üzerindeki etkisinin karşılaştırılması (±2 mm @ 6 Hz)

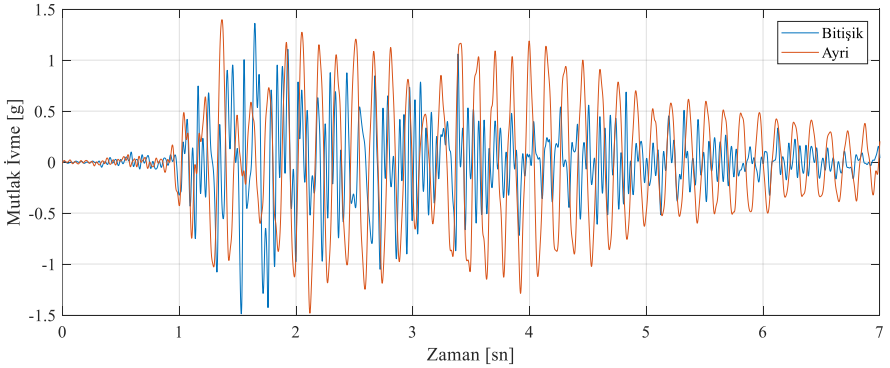


Şekil 9. r = 0.4 ve yay rijitliğinin kayma rijitliğine eşit olduğu durumda $F_{13} = F_{23}$ çarpışma kuvvetleri (±2 mm @ 6 Hz)

Çarpışma etkisinin deprem altında incelenmesi amacıyla, 1999 Düzce depremi kayıtı kullanılarak sarsma tablası deneyleri yapılmıştır. Sarsma tablasının ±75 mm yerdeğiştirme kapasitesi dikkate alınarak ivme kaydı, pik değerleri korunacak şekilde 1/15 yerdeğiştirme ölçeğinde uygulanmıştır. Deprem simülasyonunda ivme ve video kaydı alınarak modellerin bitişik ve ayrı olduğu durumlar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Şekil 10'da her iki model için 3. kata ait filtrelenmiş ivme cevapları verilmiştir. Model-1 için çarpışma etkisi ivme cevaplarını arttırırken, zaman tanım alanında Model-2 için ivme cevaplarını azaltığı görülmüştür. Model-1 için elde edilen pik ivme 1.23g'den 1.41g'ye yükselmiştir. Model-2 için ise pik ivme 1.48g olarak değişmemiştir. Şekil 11 ve 12'de ise modellerin bitişik ve ayrı olduğu durumlardaki yerdeğiştirmelerinin nümerik (r= 0.4, k= 6.83 kN/m) ve görüntü işleme sonuçlarının karşılaştırması verilmiştir. Yapıların bitişik ve ayrı olduğu durumlara ait yerdeğiştirme cevaplarının deneysel ve nümerik sonuçlarda uyumlu olduğu görülmüştür.

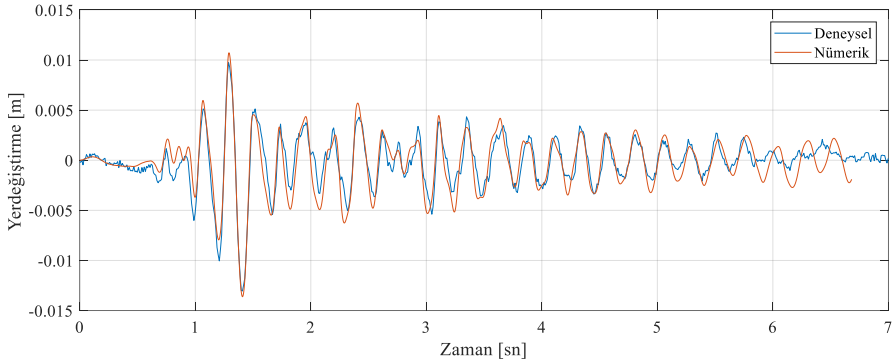


a) Model-1

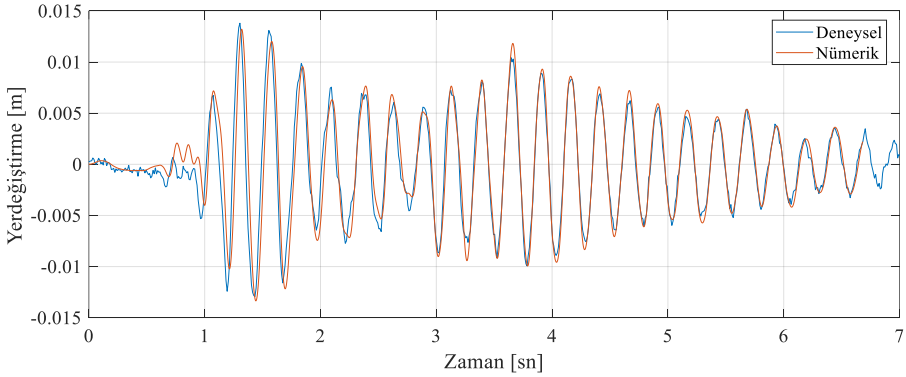


b) Model-2

Şekil 10. Bitişik ve ayrı olduğu durumlarda ivme cevaplarının karşılaştırılması

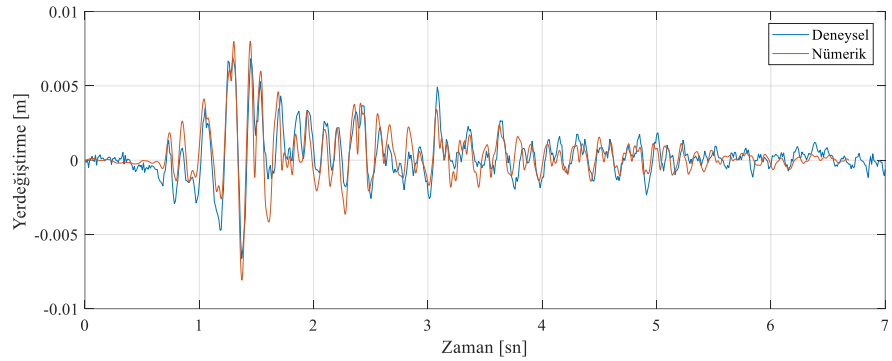


a) Bitişik

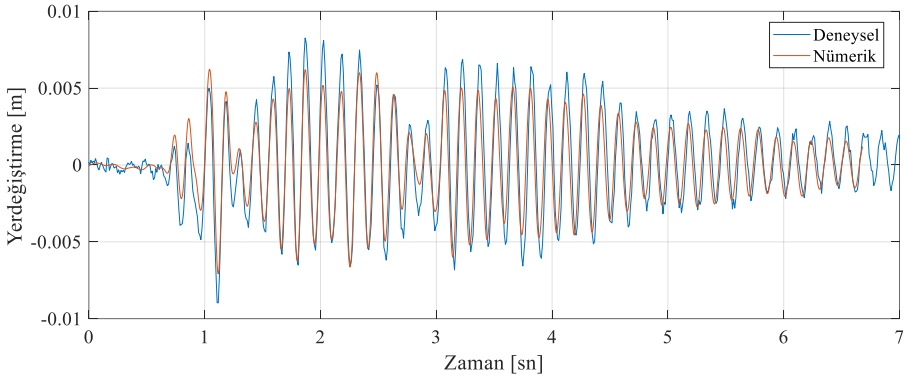


b) Ayrı

Şekil 11. Model-1'e ait görüntü işleme ve nümerik sonuçların karşılaştırması



a) Bitişik



b) Ayrı

Şekil 12. Model-2'ye ait görüntü işleme ve nümerik sonuçların karşılaştırması

SONUÇLAR

Bu çalışmada, bitişik nizam yapılarda çarpışma etkilerinin incelenmesi amacıyla Kelvin-Voigt çarpışma modeli kullanılarak yapılan nümerik analizler ve bunların görüntü işleme tekniği kullanılarak deneylerden elde edilen yerdeğiştirme cevaplarıyla karşılaştırılması sunulmuştur. Harmonik uyarım altında yapılan deneylerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, görüntü işleme tekniğinin çarpışma etkilerinin incelenebilmesi için başarılı bir yöntem olduğu görülmüştür. Özellikle, çarpışma sürelerinin ve matematiksel çarpışma modeline ait yay ve sönüm gibi parametrelerin belirlenmesi veya doğrulanması amacıyla pratik olarak kullanılabilecek bir tekniktir.

KAYNAKLAR

[1] S. A. Anagnostopoulos, Pounding of buildings in series during earthquakes, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 16(3) (1988) 443–456. doi: 10.1002/eqe.4290160311.

[2] Y. Zhang, J. Ding, H. Zhuang, Y. Chang, P. Chen, X. Zhang, W. Xie, J. Fan, Pounding between Adjacent Frame Structures under Earthquake Excitation Based on Transfer Matrix Method of Multibody Systems, *Advances in Civil Engineering*. 2019. doi: 10.1155/2019/5706015.

[3] N. Saxena, R. Ghosh, R. Debbarma, Analysis of seismic separation gap between two adjacent reinforced concrete buildings, *AIP Conference Proceedings*, 2019: 2158(September). doi: 10.1063/1.5127126.

[4] M. Khatami, M. Gerami, A. Kheyroddin, N. Siahpolo, The Effect of Irregularity of Lateral Stiffness in Estimating the Separation Gap of Adjacent Frames, *KSCE Journal of Civil Engineering*. 24(1) (2020) 166–177. doi: 10.1007/s12205-020-0173-4.

[5] M. Khatami, M. Gerami, A. Kheyroddin, N. Siahpolo, The Effect of the Mainshock-Aftershock on the Estimation of the Separation Gap of Regular and Irregular Adjacent Structures with the Soft Story, *Journal of Earthquake and Tsunami*. 14(2) (2020) 1–25. doi: 10.1142/S1793431120500086.

[6] S.A. Anagnostopoulos, K.V.Spiliopoulos, An investigation of earthquake induced pounding between adjacent buildings, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 21(4) (1992) 289–302. doi: 10.1002/eqe.4290210402.

[7] R. Jankowski, Non-linear viscoelastic modelling of earthquake-induced structural pounding, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 34(6) (2005) 595–611. doi: 10.1002/eqe.434.

[8] R. Jankowski, Analytical expression between the impact damping ratio and the coefficient of restitution in the non-linear viscoelastic model of structural pounding, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 35(4) (2006) 517–524. doi: 10.1002/eqe.537.

[9] A. Kharazian, F. López-Almansa, State-of-the-Art of Research on Seismic Pounding Between Buildings with Aligned Slabs, *Archives of Computational Methods in Engineering*. 26(2) (2019) 327–345. doi: 10.1007/s11831-017-9242-3.

[10] S. Khatiwada, N. Chouw, J.W. Butterworth, Evaluation of numerical pounding models with experimental validation, *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, 46(3) (2013) 117–130. doi: 10.5459/bnzsee.46.3.117-130.

[11] C.J. Athanassiadou, G.G. Penelis, A.J. Kappos, Seismic Response of Adjacent Buildings with Similar or Different Dynamic Characteristics, *Earthquake Spectra*. 10(2) (1994) 293–317. doi: 10.1193/1.1585775.

[12] S. Naserkhaki, F.N.A. Abdul Aziz, H. Pourmohammad, Parametric study on earthquake induced pounding between adjacent buildings, *Structural Engineering and Mechanics*. 43(4) (2012) 503–526. doi: 10.12989/sem.2012.43.4.503.

[13] H. Luo, Q. Wu, W. Pan, Research and Experiment on Optimal Separation Distance of Adjacent Buildings Based on Performance, *Mathematical Problems in Engineering* (2018). doi: 10.1155/2018/3483401.

[14] S. Khan, C.L.M. Kumar, K.G. Shwetha, Analytical study on the seismic behavior of two adjacent buildings connected by viscous dampers, *AIP Conference Proceedings*. (2020) 2204(January). doi: 10.1063/1.5141540.

[15] M.Z. Kangda, S. Bakre, Response control of adjacent structures subjected to blast-induced vibrations, *In Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*. 172(12) (2019). doi: 10.1680/jstbu.18.00071.

[16] AK. Chopra, *Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering*, Prentice Hall, 1995.

[17] Matlab. Versiyon 2017b. Natick: The MathWorks, Inc.

[18] E. Damcı, Ç. Şekerci, Development of a Low-Cost Single-Axis Shake Table Based on Arduino, *Experimental Techniques*. 43(2) (2019) 179–198. Doi: 10.1007/s40799-018-0287-5.

FONKSİYONEL DERECELENMİŞ MALZEME VE DEĞİŞKEN KESİTLİ SİLİNDİRİK OLMAYAN HELİSEL ÇUBUKLARIN TİTREŞİMİ

Faruk Firat Calim[1], Yavuz Cetin Cuma[2]

[1,2] İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana Alparslan Turkeş Bilim ve Teknoloji Üniversitesi,

Adana

Özet

Bu çalışmada fonksiyonel derecelenmiş malzemeli değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi incelenmiştir. Malzeme ve kesit değişiminin çubuk ekseni boyunca olduğu varsayımı kullanılmıştır. Eksenel ve kayma deformasyonlarını içeren çubuğun serbest titreşimini idare eden diferansiyel denklemler Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak elde edilmiştir. Ardından taşıma matrisi ve rijitlik matrisi yöntemleri bir arada kullanılarak diferansiyel denklemler sayısal olarak çözülmüştür. Malzeme değişim parametresi (β_{mat}), kesit değişim parametresi (β_{sec}) silindirin kenar ve orta kısımlarının yarıçap oranının R_2/R_1 hiperbol ve varil tipi geometriye sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimine etkisi araştırılmıştır. Literatürde bulunan örnek ve ANSYS paket programı kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmalı olarak verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Fonksiyonel derecelenmiş malzeme; serbest titreşim; silindirik olmayan helisel çubuk; değişken kesit.

1. Giriş

Helisel geometriye sahip çubuklar çeşitli mühendislik dallarında birçok farklı uygulama alanı bulmaktadır. Bunların tamamına yakını araç süspansiyonu, sübap yayları, spiral merdivenler ve silah yayları gibi dinamik yüklemeler altında çalışmaktadır. Dolayısıyla bu yapısal elemanların dinamik davranışının incelenmesi önem arz etmektedir. Dinamik davranışın incelenmesi hususunda en önemli bilgilerden birisi doğal titreşim frekanslarının belirlenmesidir. Bu frekansların elde edilmesi, tasarım aşamasında elemanın çalışması planlanan frekans aralığında doğal titreşim frekansı bulunmaması, dolayısıyla da rezonans hareketinden kaçınılması sağlanmasıdır.

Silindirik ve silindirik olmayan geometriye sahip, sabit ve değişken kesitli ve çeşitli malzeme özellikleri gösteren helisel çubukların dinamik ve statik analizleri birçok araştırmacının çalışma konusu olmuştur. Epstein [1] konik helisel çubukların uzama değerleri ve serbest titreşim frekanslarını hem teorik hem deneysel olarak incelemiştir. Massoud [2] uzaysal bir çubuğun hareket denklemlerini kayma ve eksenel deformasyonları da dahil ederek vektörel formda elde etmiştir. Mottershead [3] sonlu elemanlar yöntemi ile helisel yayların dinamik analizini gerçekleştirmiştir. Nagaya ve ark. [4] rastgele şekle sahip yayların serbest titreşim problemini taşıma matrisi yöntemini kullanarak çözmüştür. Frekans denklemini hiperbol ve varil tipi helisel çubuklar için kullanılmak üzere genelleştirmiştir. Yıldırım ve İnce [5] silindirik olmayan

helisel çubukların serbest titreşim analizini taşıma matrisi yöntemi ile çözmüştür. Birçok parametreyi kapsayan bu çalışmayı teorik ve deneysel birçok çalışmanın sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Yıldırım [6, 7] rijitlik matrisi metodu ile silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini eksenel ve kayma deformasyonlarını dahil ederek çözmüş çeşitli parametrelerin serbest titreşim frekanslarına olan etkisini yorumlamıştır. Busool ve Eisenberger [8] dinamik rijitlik matrisi metoduyla silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini yapmıştır. Mod şekillerini elde ederek literatürdeki teorik ve deneysel çalışmalar ile karşılaştırmıştır. Temel ve Çalım [9] impulsif yüke maruz silindirik helisel çubukların zorlanmış titreşim analizini yapmışlardır. Sonuçları Laplace uzayında elde etmiş ve ters Laplace dönüşümüyle zaman uzayına çevirmişlerdir. Girgin [10] değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizini karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanarak çözmüş ve sonuçları ANSYS ile kıyaslamıştır. Çalım [11, 12] izotropik ve anizotropik yayların dinamik analizini parametrik çalışmalarla incelemiştir. Yu ve Hao [13]–[15] burulma etkisini dahil ederek silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimini taşıma matrisi metoduyla incelemişlerdir. Kaçar ve Yıldırım [16] kompozit helisel çubukların burkulma ve serbest titreşim analizini çalışmışlardır. Eratlı ve ark. [17] karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanarak silindirik ve silindirik olmayan helisel yayların serbest titreşim analizini yapmışlardır. Literatürde sıklıkla kullanılan dairesel kesitin dışındaki kesitleri burulma etkilerini de ele alarak incelemişlerdir. Ermiş ve ark. [18] farklı yüklemeler altındaki viskoelastik hiperbol helisel yayların zorlanmış titreşim analizini yapmışlardır. Ermiş ve Omurtag [19] konik helisi iki farklı geometrik tanımını kullanarak modellemiş ve bu modellerin daha iyi sonuçlar verdiği durumları parametrik çalışma ile incelemişlerdir. Arıbaş ve ark. [20] kesin helis geometrisi ve çarpılmanın helisel çubukların statik ve dinamik davranışları üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Düzlemsel eğri eksenli çubuk kabulü ile uzaysal logaritmik spiral fonksiyonunun farkı açıklanmıştır. Arıbaş ve Omurtag [21] kesin helis geometrisini sandviç kesitli helisel yayı modellemek için kullanmışlar. Karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak bu çubukların statik davranışı incelenmiştir. Çalım ve Cuma [22] hiperbol ve varil tipi helisel çubukların fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip olması durumunu incelemişlerdir. Taşıma matrisi yöntemi ile bu çubukların serbest titreşim analizi üzerine parametrik çalışma gerçekleştirmişlerdir. Cuma ve Çalım [23] farklı parametrelerin fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip silindirik helisel çubukların serbest titreşimine etkisini taşıma matrisi yöntemini kullanarak incelemişlerdir.

Literatür taramasından da görüldüğü gibi fonksiyonel derecelenmiş silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi üzerine çalışmalar sınırlı sayıdadır. Bu konuda örneklerin artırılarak farklı parametre ve sınır koşullarının incelenmesi literatüre önemli bir katkı sağlanacağı anlamına gelmektedir. Bundan dolayı bu çalışmada hiperbol ve varil tipi helisel çubukların serbest titreşimi incelenecek olup farklı malzeme ve kesit değişim fonksiyonları ve sınır şartlarının serbest titreşim frekanslarına etkisi araştırılacaktır.

2. Silindirik olmayan helisel çubuk geometrisi

Silindirik ve silindirik olmayan helisel çubukların temel farkı silindir yarıçapının eksen boyunca değişkenlik göstermesidir. Hiperbol ve varil geometrideki helisel çubukların yatay yarıçapı çubuğun üzerindeki herhangi bir noktada aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$R(\phi) = R_1 + (R_2 - R_1)\left(1 - \frac{\phi}{n\pi}\right)^2 \tag{1}$$

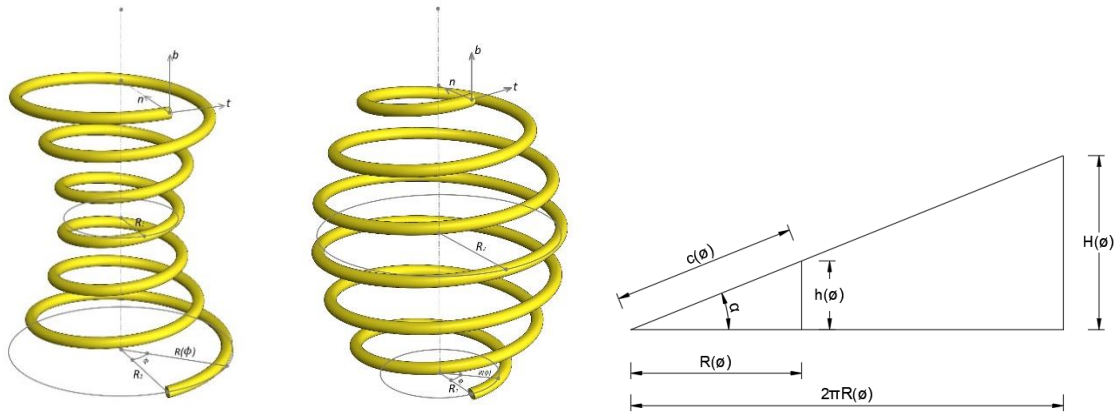
burada ϕ ve n yatay açı ve sarım sayısı, $R(\phi)$ ise bir noktadaki helis yarıçapı, R_1 ve R_2 ise orta nokta ve uçnoktalardaki helis yarıçapıdır. Birim helis uzunluğu Şekil 1c'de görüldüğü gibi elde edilebilir.

Sonlu bir helis parçasının uzunluğu (ds) helis açısına (ϕ) bağlı olarak $ds = c\,d\phi$ şeklinde hesaplanabilir. Sonsuz küçüklükteki bir helisel çubuk elemanı aşağıdaki gibi tanımlanabilir

$$ds = \sqrt{R(\phi)^2 + h(\phi)^2}d\phi = c(\phi)d\phi\ ,\ h(\phi) = H(\phi)/2\pi \tag{2}$$

burada α, $H(\phi)$ ve $h(\phi)$ sırasıyla helis yükselme açısı, bir turdaki helis yüksekliği ve birim uzunluktaki helis yüksekliğidir (Şekil 1c). $c(\phi)$ ise birim helis uzunluğudur. Eğrilik $\chi(\phi)$ ve çarpıklık $\tau(\phi)$ değerleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\chi(\phi) = R(\phi)/c^2(\phi), \qquad \tau(\phi) = h(\phi)/c^2(\phi) \tag{3}$$



(a) (b) (c)

Şekil 1. (a) Hiperbol tipi helis, (b) varil tipi helis, (c) silindirik olmayan helisin birim elemanı.

3. Silindirik olmayan helisel çubukların dinamik davranışını idare eden diferansiyel denklemler

Herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme **U**(*s*,*t*), dönme **Ω**(*s*,*t*), iç kuvvet **T**(*s*,*t*) ve iç moment **M**(*s*,*t*) vektörlerinin sembolik ifadeleridir. Sonsuz küçüklükteki deformasyonlar varsayıldığında uzaysal çubuğun durumunu idare eden diferansiyel denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = \rho A\ddot{\mathbf{U}} \qquad \frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t}\times\mathbf{T} + \mathbf{m} = \rho\mathbf{I}\ddot{\mathbf{\Omega}} \tag{4}$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t}\times\mathbf{\Omega} = \mathbf{A^{-1}}\,\mathbf{T} \qquad \frac{d\mathbf{\Omega}}{ds} = \mathbf{B^{-1}}\,\mathbf{M} \tag{5}$$

burada, ρ, A, **I, p** ve **m** sırasıyla yoğunluk, kesit alanı, eylemsizlik momenti, dış yükler ve dış momentlerdir. **A** ve **B** matrisleri çubuğun geometric ve malzeme özelliklerini barındırmaktadır ve aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA/\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & GA/\alpha_b \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} GI_t & 0 & 0 \\ 0 & EI_n & 0 \\ 0 & 0 & EI_b \end{bmatrix} \tag{6}$$

E ve G elastic sabitler, A ve **I** (I_t, I_n, I_b) kesit alanı ve eylemsizlik momentidir. α_n ve α_b ise kayma düzeltme katsayılarıdır.

Hareketli koordinat sistemi teğet (**t**), normal (**n**) ve bi-normal (**b**) birim vektörlerle tanımlanır. Birim vektörler **t, n,** ve **b** arasındaki bağıntı Frenet-Serret formülasyonları ile kurulabilir.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{ds}} = \chi(\phi)\mathbf{n} \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{ds}} = -\chi(\phi)\mathbf{t} + \tau(\phi)\mathbf{b} \qquad \mathrm{d}\mathbf{b}/\mathrm{ds} = -\tau(\phi)\mathbf{n} \tag{7}$$

Serbest titreşim analizinde dış yükler sıfır olarak tanımlanmaktadır ($\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} = 0$). Harmonik titreşim kabulü yapıldığında, **U**, **Ω**, **T** ve **M** aşağıdaki hali almaktadır.

$$\mathbf{U}(s,t) = \mathbf{U}(s)\, e^{i\omega t}, \qquad \boldsymbol{\Omega}(s,t) = \boldsymbol{\Omega}(s)\, e^{i\omega t}, \qquad \mathbf{T}(s,t) = \mathbf{T}(s)\, e^{i\omega t}, \qquad \mathbf{M}(s,t) = \mathbf{M}(s)\, e^{i\omega t} \tag{8}$$

burada, ω açısal frekanstır.

Hareketli koordinat sisteminde (**t**, **n**, **b**) tanımlanmış fonksiyonel derecelenmiş değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubuklara ait adi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)} U_n + c(\phi) \frac{T_t}{E(\phi)A(\phi)} \tag{9a}$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} U_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)} U_b + c(\phi)\Omega_b + c(\phi) \frac{\alpha_n T_n}{G(\phi)A(\phi)} \tag{9b}$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)} U_n - c(\phi)\Omega_n + c(\phi) \frac{\alpha_b T_b}{G(\phi)A(\phi)} \tag{9c}$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)} \Omega_n + c(\phi) \frac{M_t}{G(\phi)I_t(\phi)} \tag{9d}$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)} \Omega_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)}\, \Omega_b + c(\phi)\, \frac{M_n}{E(\phi)I_n(\phi)} \tag{9e}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)}\, \Omega_n + c(\phi)\, \frac{M_b}{E(\phi)I_b(\phi)} \tag{9f}$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)}\, T_n - c(\phi)\rho(\phi)A(\phi)\omega^2 U_t \tag{9g}$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)}\, T_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)}\, T_b - c(\phi)\rho(\phi)A(\phi)\omega^2 U_n \tag{9h}$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)}\, T_n - c(\phi)\rho(\phi)A(\phi)\omega^2 U_b \tag{9i}$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = \frac{R(\phi)}{c(\phi)}\, M_n - c(\phi)\rho(\phi)I_t(\phi)\omega^2 \Omega_t \tag{9j}$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -\frac{R(\phi)}{c(\phi)}\, M_t + \frac{h(\phi)}{c(\phi)}\, M_b + c(\phi)\, T_b - c(\phi)\rho(\phi)I_n(\phi)\omega^2 \Omega_n \tag{9k}$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -\frac{h(\phi)}{c(\phi)}\, M_n - c(\phi)\, T_n - c(\phi)\rho(\phi)I_b(\phi)\omega^2 \Omega_b \tag{9l}$$

Matris notasyonunda, Denk. 9a-l kapalı formda aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d\mathbf{S}(\phi)}{d\phi} = \mathbf{D}(\phi, \omega)\, \mathbf{S}(\phi) \tag{10}$$

D ve **S** sırasıyla diferansiyel geçiş matrisi ve durum vektörüdür. Durum vektörünün elemanları $\boldsymbol{S}(\phi) = \{U_t, U_n, U_b, \Omega_t, \Omega_n, \Omega_b, T_t, T_n, T_b, M_t, M_n, M_b\}^T$ Denk. 10 kullanılarak elde edilebilir.

$$\mathbf{S}(\phi) = \mathbf{F}(\phi, \omega)\, \mathbf{S}(0) \tag{11}$$

Burada, **F** dinamik taşıma matrisi olarak adlandırılıp **D** diferansiyel geçiş matrisinin Taylor serisi açılımı ile elde edilebilmektedir (Yildirim and Ince 1997; Inan 1964).

$$\mathbf{F} = e^{\phi \mathbf{D}} = \mathbf{I} + \phi\mathbf{D} + \frac{\phi^2}{2!}\mathbf{D^2} + \frac{\phi^3}{3!}\mathbf{D^3} + \cdots \tag{12}$$

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde taşıma matrisi ve rijitlik matrisi yöntemleri bir arada kullanılmaktadır. Eleman rijitlik matrisleri taşıma matrisi yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve sistem rijitlik matrisi standart kodlama tekniği ile oluşturulmuştur. Sistem rijitlik matrisinin determinantını sıfır yapan ω değerleri elde edilmiştir.

4. Sayısal örnekler

Bu çalışmada Mathematica yazılımı kullanılarak silindirik olmayan helisel çubukların fonksiyonel derecelenmiş değişken kesit durumlarını da dahil ederek serbest titreşim problemini çözen bir algoritma geliştirilmiştir. Bu çalışmada literatürde bulunan değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi analizi ile karşılaştırma yapılmış ardından fonksiyonel derecelenmiş malzeme de dahil edilerek parametrik bir çalışma yürütülmüştür. Parametrik çalışmada malzeme değişim parametresinin (β_{mat}), kesit değişim parametresinin (β_{sec}), ve helisel çubuğun uç ve orta noktalarındaki yarıçap oranlarının (R_2/R_1) çubuğun serbest titreşimi üzerindeki etkileri araştırılmıştır. İkinci örnekte elde edilen sonuçlar ANSYS paket programında BEAM188 elemanları kullanılarak elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. İki örnekte elde edilen sonuçlar tablolar kullanılarak sunulmuştur.

4.1. Değişken kesitli silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi

Karşılaştırma örneği olarak değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim analizi yapılmış ve literatürde Girgin'in (2006) yürütmüş olduğu çalışma ile karşılaştırılmıştır. Kesit değişimi eksen boyunca olup orta ve uç kısımlardaki kesit çapları arasındaki oran aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$d_1 = d_2\,\beta_{sec} \tag{16}$$

burada d_1 ve d_2 sırasıyla $R(\phi) = R_1$ ve $R(\phi) = R_2$ durumundaki kesit çaplarını ifade etmektedir. Kullanılan malzeme ve kesit özellikleri sıralanmıştır: $E = 210\,GPa,\ \rho = 7850\,kg/m^3,\ \nu = 0.3,\ \alpha = 4.8°,\ n = 6.5,\ \alpha_n = \alpha_b = 1.1$. Sonuçların karşılaştırılması için ANSYS programı kullanılarak problem 2000 elemanla çözülmüştür. Geliştirilmiş olan algoritmada ise 200 eleman kullanılarak çok daha küçük sistem matrisleri elde edilmiştir.

Tablo 1. Değişken kesitli hiperbol helisel çubuğun ilk altı doğal titreşim frekansı (Hz) ($R_1 = 13\,mm, R_2/R_1 = 2.4, d_2 = 2.6\,mm$)

β_{sec}	Mod	Girgin (2006)	ANSYS	Bu çalışma
0.25	1	91.010	89.830	90.020
	2	109.67	108.10	108.24
	3	117.04	115.52	115.69
	4	121.71	120.16	120.51
	5	130.26	128.61	129.27
	6	143.00	140.84	140.82
0.5	1	85.560	84.380	84.480
	2	108.39	106.94	107.14
	3	110.12	108.57	108.51
	4	132.02	130.24	130.78
	5	135.71	133.79	133.94
	6	149.31	147.14	147.46
0.75	1	80.810	79.680	79.690
	2	101.86	100.56	100.97
	3	107.80	106.23	105.87
	4	132.57	130.78	131.27
	5	153.07	150.92	151.04
	6	162.41	160.27	160.94

Tablo 1 deki verilerden anlaşılacağı üzere bu çalışmada elde edilen sonuçların önceki çalışma ve ANSYS sonuçları ile uyum içerisindedir. Kesit değişim parametresinin artışı doğal titreşim frekanslarında düşüşe sebep olmaktadır.

Tablo 2. Değişken kesitli varil helisel çubuğun ilk altı doğal titreşim frekansı (Hz) ($R_1 = 25\ mm,\ R_2/R_1 = 0.2, d_2 = 2\ mm$)

β_{sec}	Mod	Girgin (2006)	ANSYS	Bu çalışma
0.25	1	36.52	36.60	36.43
	2	39.53	39.57	39.18
	3	47.96	48.09	47.86
	4	50.28	50.31	50.13
	5	53.22	53.41	53.13
	6	55.66	55.83	55.53
0.5	1	54.13	54.23	54.00
	2	55.71	55.80	55.58
	3	71.57	71.66	71.41
	4	71.63	71.70	71.48
	5	86.77	87.16	86.66
	6	89.54	89.95	89.43
0.75	1	64.82	64.86	64.68
	2	69.24	69.53	69.15
	3	87.19	87.30	87.07
	4	87.22	87.32	87.11
	5	116.9	117.4	116.8
	6	118.9	119.6	118.8

Sonuçlar önceki çalışma ve ANSYS ile oldukça uyum içerisindedir. Kesit değişim parametresi arttıkça frekans değerlerinin de yükseldiği görülmektedir.

4.3. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeli değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşimi

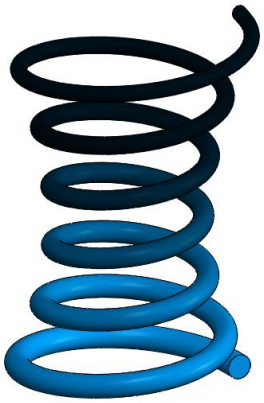
Mathematica programı kullanılarak geliştirilen algoritmaya malzeme değişim parametresi entegre edilmiştir. Bu algoritma kullanılarak iki ucu ankastre varil ve hiperbol tipi helisel çubukların serbest titreşim analizi yapılmıştır. Malzeme ve kesit değişimini idare eden fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$P(\phi) = P_0\, e^{-\beta\left(\frac{\phi}{2n\pi}\right)} \tag{17}$$

Orta noktadaki kesit çapı d_1 uç noktadaki kesit çapı d_2 ve kesit değişim parametresi β_{sec} (0.25, 0.5, 0.75, 1) kullanılarak ifade edilmiştir. Elastisite modülü $E(\phi)$ ve kütlesel yoğunluk $\rho(\phi)$ malzeme değişim parametresi β_{mat} $(0.5, 1, 1.5, 2)$ ile ifade edilmiştir. Kullanılan ortak malzeme ve geometik özellikler şöyledir. $E = 210\ GPa,\ \rho = 7850\ kg/m^3,\ \alpha = 4.8°,\ n = 6.5\ sarım,\ \nu = 0.3,\ \alpha_n = \alpha_b = 1.1.$

4.3.1. Hiperbol tipi helisel çubuk

Şekil 2 de değişken kesit ve malzeme özelliklerine sahip hiperbol helisel çubuk gösterilmiştir. Hiperbol örneğinde farklı olarak kullanılan parametreler şöyledir: $d_2 = 2\ mm$, $R_1 = 25\ mm$. Farklı parametreler kullanılarak elde edilen temel frekanslar Tablo 3'de verilmiştir.



Şekil 2. Fonksiyonel derecelenmiş malzemeli değişken kesitli hiperbol helis

Tablo 3'den görüleceği gibi bu çalışmada elde edilen sonuçlar ile ANSYS programından elde edilen sonuçlar oldukça uyum içerisindedir. Temel frekanslar silindirik helis geometrisinden uzaklaştıkça düşmektedir. Bunun nedeni helis rijitliğindeki azalmadır.

Tablo 3. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip hiperbol helisel çubuğun temel frekansları (Hz).

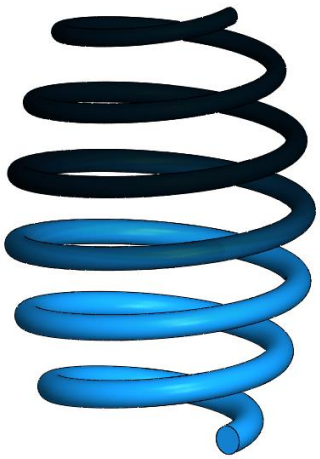
R_2/R_1		1.2		1.6		2		2.4	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	0.	9.32	9.33	6.78	6.80	5.09	5.09	3.94	3.95
	0.25	8.33	8.34	6.10	6.11	4.60	4.62	3.57	3.60
	0.50	7.61	7.61	5.67	5.68	4.32	4.34	3.37	3.41
	0.75	7.05	7.03	5.37	5.36	4.15	4.17	3.27	3.29
0.25	0.	9.33	9.34	6.79	6.81	5.10	5.11	3.95	3.96
	0.25	8.41	8.40	6.17	6.19	4.66	4.68	3.62	3.64
	0.50	7.73	7.72	5.78	5.79	4.41	4.44	3.45	3.49
	0.75	7.18	7.16	5.50	5.51	4.26	4.27	3.36	3.37
0.5	0.	9.36	9.37	6.81	6.83	5.12	5.14	3.96	3.98
	0.25	8.49	8.50	6.25	6.27	4.73	4.76	3.67	3.71
	0.50	7.85	7.85	5.89	5.90	4.51	4.54	3.53	3.57
	0.75	7.32	7.31	5.63	5.63	4.37	4.39	3.45	3.47
0.75	0.	9.40	9.42	6.85	6.88	5.15	5.17	3.99	4.01
	0.25	8.59	8.59	6.34	6.37	4.81	4.84	3.74	3.77
	0.50	7.99	7.97	6.02	6.03	4.62	4.65	3.62	3.66
	0.75	7.47	7.45	5.77	5.78	4.49	4.50	3.55	3.57

Frekans değerleri incelendiğinde en güçlü değişimin yarıçap oranlarında meydana geldiği görülmektedir. Yarıçap oranı arttıkça silindirik helis geometrisinden uzaklaşılmakta ve frekans değerleri düşüş göstermektedir.

Frekans değerleri sabit kesitli çubuğun en yüksek frekans değerlerine sahip olduğunu göstermektedir. Kesit değişim parametresi yükseldikçe kesit çapının azalması dolayısıyla frekanslar düşmektedir. Malzeme değişim parametresindeki artış frekansları artırsa da frekanslar üzerindeki etkisinin diğer parametrelere nispeten daha az olduğu görülmektedir. Ayrıca malzeme değişim parametresinin kesit değişim parametresinin etkisini azalttığı da açıktır. Bu çalışmada incelenen değerler kapsamında yarıçap oranını en büyük etkiye sahiptir.

4.3.2. Varil tipi helisel çubuk

Varil tipi helisel çubuğun farklı malzeme ve kesit özelliklerinde temel frekansları araştırılmıştır. Bu örnekte kullanılan kesit değerleri şöyledir: : $d_2 = 2\ mm, R_1 = 25\ mm$. Farklı kesit değişim parametresi, mazleme değişim parametresi ve yarıçap oranları altında temel frekanslar geliştirilen algoritma ve ANSYS programı kullanılarak belirlenmiştir. Şekil 3'de kesit ve malzeme değişimi gösterilmiştir.



Şekil 3. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesitli varil tipi helisel çubuk

Tablo 4'de görüldüğü gibi kesit değişim parametresinin ve yarıçap oranının artışı frekans değerlerini düşürmektedir. Bu iki parametrenin kullanılan değerleri için benzer etkiye sahip olduğu frekans değerlerinden anlaşılmaktadır. Malzeme değişim parametresinin frekanslar üzerindeki etkisi ise kullanılan diğer parametrelere göre oldukça düşük kalmaktadır. Ayrıca malzeme değişim parametresindeki artış frekans değerlerini de artırmaktadır.

Tablo 4. Fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesitli varil tipi helisel çubuğun temel frekansları (Hz)

R_2/R_1		0.2		0.4		0.6		0.8	
β_{mat}	β_{sec}	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma	ANSYS	Bu çalışma
0	0	72.00	71.87	65.70	65.54	59.74	59.65	52.19	52.14
	0.25	63.87	63.74	58.34	58.19	53.08	52.95	46.32	46.23
	0.50	57.22	57.09	52.40	52.25	47.69	47.56	41.53	41.43
	0.75	51.67	51.53	47.47	47.32	43.02	42.88	37.48	37.37

0.25	0	72.03	71.91	65.73	65.57	59.78	59.68	52.22	52.14
	0.25	64.13	64.00	58.61	58.46	53.35	53.22	46.56	46.47
	0.50	57.63	57.50	52.84	52.68	48.10	47.95	41.90	41.79
	0.75	52.17	52.03	47.99	47.83	43.44	43.29	37.92	37.82
0.5	0	72.13	72.00	65.84	65.68	59.89	59.78	52.31	52.23
	0.25	64.44	64.30	58.95	58.79	53.69	53.56	46.85	46.76
	0.50	58.08	57.95	53.32	53.16	48.54	48.40	42.31	42.21
	0.75	52.71	52.57	48.55	48.38	43.88	43.74	38.40	38.29
0.75	0	72.31	72.16	66.03	65.86	60.08	59.95	52.47	52.39
	0.25	64.81	64.66	59.35	59.19	54.08	53.94	47.19	47.09
	0.50	58.59	58.44	53.85	53.68	49.01	48.86	42.76	42.65
	0.75	53.28	53.14	49.13	48.97	44.34	44.20	38.90	38.79

Malzeme değişim parametresinin artışı diğer parametrelerin frekanslar üzerindeki etkilerinde gözle görülür bir etkiye sahip değildir. Kesit değişim ve yarıçap oranı parametreleri malzeme değişim parametresine göre daha büyük etkiye sahiptir.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada fonksiyonel derecelenmiş malzeme ve değişken kesite sahip silindirik olmayan helisel çubukların serbest titreşim frekansları parametrik bir çalışma ile araştırılmıştır. Malzeme ve kesit değişiminin üretim kaynaklı olabilmesinin haricinde korozyon ve bozulmaya uğramış malzeme ve kesitlerin bu yöntem kullanılarak modellenmesi mümkün görünmektedir.

Kayma ve eksenel uzama etkilerinin de göz önünde bulundurulduğu diferansiyel denklem takımları taşıma ve rijitlik matrisi yöntemleri bir arada kullanılarak çözülmüştür. Sistem dinamik rijitlik matrisi elde edilerek determinantını sıfır yapan frekans değerleri elde edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda aşağıdaki bulgular elde edilmiştir.

- Dinamik rijitlik matrisi taşıma matrisi yöntemi kullanılarak elde edilmiş ve lineer diferansiyel denklem takımının çözümünde etkili bir şekilde kullanılmıştır.
- Beklendiği gibi malzeme, kesit ve yarıçap oranı değişiminin doğal titreşim frekansları üzerinde oldukça önemli değişimler gösterdiği anlaşılmıştır.
- Malzeme değişim parametresi arttıkça doğal titreşm frekansları da artış göstermektedir.
- Kesit değişim ve yarıçap oranlarının artışı frekans değerlerinde düşüşe sebep olmaktadır.
- Malzeme değişim oranının frekanslar üzerindeki etkisi diğer iki parametreye göre daha az olduğu görülmüştür.
- Hiperbol tipi helisel çubuklarda geometri silindirik helisten uzaklaştıkça frekanslar azalmaktadır, ancak varil tipi helisel çubuklarda bu durumun tersi görülmektedir.

Referanslar

[1] I. Epstein, “The Motion of a Conical Coil Spring,” J. Appl. Phys., vol. 18, no. 4, pp. 368–374, Apr. 1947, doi: 10.1063/1.1697660.

[2] M. P. Massoud, “Vectorial Derivation of the Equations for Small Vibrations of Twisted Curved Beams,” J. Appl. Mech., vol. 32, no. 2, pp. 439–440, Jun. 1965, doi: 10.1115/1.3625823.

[3] J. E. Mottershead, “Finite elements for dynamical analysis of helical rods,” Int. J. Mech. Sci., vol. 22, no. 5, pp. 267–283, Jan. 1980, doi: 10.1016/0020-7403(80)90028-4.

[4] K. Nagaya, S. Takeda, and Y. Nakata, “Free vibration of coil springs of arbitrary shape,” Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 23, no. 6, pp. 1081–1099, Jun. 1986, doi: 10.1002/nme.1620230607.

[5] V. Yildirim and N. İnce, “Natural frequencies of helical springs of arbitrary shape,” J. Sound Vib., vol. 204, no. 2, pp. 311–329, Jul. 1997, doi: 10.1006/jsvi.1997.0940.

[6] V. Yildirim, “A parametric study on the free vibration of non-cylindrical helical springs,” J. Appl. Mech. Trans. ASME, vol. 65, no. 1, pp. 157–163, 1998, doi: 10.1115/1.2789019.

[7] V. YILDIRIM, “EXPRESSIONS FOR PREDICTING FUNDAMENTAL NATURAL FREQUENCIES OF NON-CYLINDRICAL HELICAL SPRINGS,” J. Sound Vib., vol. 252, no. 3, pp. 479–491, May 2002, doi: 10.1006/jsvi.2001.4005.

[8] W. Busool and M. Eisenberger, “Free vibration of helicoidal beams of arbitrary shape and variable cross section,” J. Vib. Acoust. Trans. ASME, vol. 124, no. 3, pp. 397–409, 2002, doi: 10.1115/1.1468870.

[9] B. Temel and F. F. C¸alim, “Forced Vibration of Cylindrical Helical Rods Subjected to Impulsive Loads,” J. Appl. Mech., vol. 70, no. 2, pp. 281–291, Mar. 2003, doi: 10.1115/1.1554413.

[10] K. Girgin, “Free vibration analysis of non-cylindrical helices with, variable cross-section by using mixed FEM,” J. Sound Vib., vol. 297, no. 3–5, pp. 931–945, Nov. 2006, doi: 10.1016/j.jsv.2006.05.001.

[11] F. F. Calim, “Dynamic analysis of composite coil springs of arbitrary shape,” Compos. Part B Eng., vol. 40, no. 8, pp. 741–757, Dec. 2009, doi: 10.1016/j.compositesb.2009.04.017.

[12] F. F. Calim, “Forced vibration of helical rods of arbitrary shape,” Mech. Res. Commun., vol. 36, no. 8, pp. 882–891, Dec. 2009, doi: 10.1016/j.mechrescom.2009.07.007.

[13] A. M. Yu and Y. Hao, “Improved Riccati Transfer Matrix Method for Free Vibration of Non-Cylindrical Helical Springs Including Warping,” Shock Vib., vol. 19, no. 6, pp. 1167–1180, 2012, doi: 10.1155/2012/713874.

[14] A. M. Yu and Y. Hao, “Warping effect in free vibration analysis of unidirectional composite non-cylindrical helical springs,” Meccanica, vol. 48, no. 10, pp. 2453–2465, Dec. 2013, doi: 10.1007/s11012-013-9760-5.

[15] A. M. Yu and Y. Hao, “Effect of warping on natural frequencies of symmetrical cross-ply laminated composite non-cylindrical helical springs,” Int. J. Mech. Sci., vol. 74, pp. 65–72, 2013, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2013.04.010.

[16] I. Kacar and V. Yildirim, “Free vibration/buckling analyses of noncylindrical initially compressed helical composite springs,” Mech. Based Des. Struct. Mach., vol. 44, no. 4, pp. 340–353, Oct. 2016, doi: 10.1080/15397734.2015.1066687.

[17] N. Eratli, M. Yilmaz, K. Darilmaz, and M. H. Omurtag, “Dynamic analysis of helicoidal bars with non-circular cross-sections via mixed FEM,” Struct. Eng. Mech., vol. 57, no. 2, pp. 221–238, Jan. 2016, doi: 10.12989/sem.2016.57.2.221.

[18] M. Ermis, N. Eratlı, H. Argeso, A. Kutlu, and M. Omurtag, “Parametric analysis of

viscoelastic hyperboloidal helical rod," Adv. Struct. Eng., vol. 19, no. 9, pp. 1420–1434, Sep. 2016, doi: 10.1177/1369433216643584.

[19] M. Ermis and M. H. Omurtag, "Static and dynamic analysis of conical helices based on exact geometry via mixed FEM," Int. J. Mech. Sci., vol. 131–132, pp. 296–304, Oct. 2017, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2017.07.010.

[20] U. N. Aribas, M. Ermis, N. Eratli, and M. H. Omurtag, "The static and dynamic analyses of warping included composite exact conical helix by mixed FEM," Compos. Part B Eng., vol. 160, pp. 285–297, Mar. 2019, doi: 10.1016/j.compositesb.2018.10.018.

[21] U. N. Aribas and M. H. Omurtag, "The static response of sandwich exact conical helices via MFEM," J. Struct. Eng. Appl. Mech., vol. 2, no. 4, pp. 153–163, Dec. 2019, doi: 10.31462/jseam.2019.04153163.

[22] F. F. Calim and Y. C. Cuma, "Vibration analysis of nonuniform hyperboloidal and barrel helices made of functionally graded material," Mech. Based Des. Struct. Mach., pp. 1–15, Sep. 2020, doi: 10.1080/15397734.2020.1822181.

[23] Y. C. Cuma and F. F. Calim, "Free vibration analysis of functionally graded cylindrical helices with variable cross-section," J. Sound Vib., vol. 494, p. 115856, Mar. 2021, doi: 10.1016/j.jsv.2020.11585

TÜP FORMUNDA TEK PARÇA ATKILI ÖRME KUMAŞ TAKVİYELİ POLİMER KOMPOZİT BORU ÜRETİMİ

Başak Kübra Aras[1], Nurpınar Özkan[1], Mehmet Erdem İnce[1] ve Özkan Özbek[2]
[1]Gaziantep Üniversitesi, Tekstil Mühendisliği Bölümü, Gaziantep
[2]Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Kilis

ABSTRACT

The usage area of composite materials, which are formed by combining the members of different material groups without losing their own identity, is expanding. In this context, fiber reinforced polymer composites are widely used. What makes these materials superior to traditional materials are their higher and tailorable specific mechanical properties, impact strength, energy absorption capability, damage tolerance, and corrosion resistance. Fibers are generally converted into textile fabric form and used as reinforcement material. Weft knitted fabrics offer the opportunity to produce easily stretchable, shapeable, three-dimensional, one-piece and seamless preforms. The aim of this study is to produce an innovative polymer composite pipe reinforced by three-dimensional, seamless, monolithic weft knitted fabric in tube form. Weft knitted fabrics produced in tube form from glass or aramid yarns will be combined with polyester resin by vacuum infusion and converted into polymer composite pipes. The axial compression strength and crushing performance of the produced pipes will be tested and it will be revealed how these performances are affected by the yarn type and the number of fabric layers.
Keywords: glass yarn; aramid yarn; weft knitted fabric; polymer composite, composite pipe.

ÖZET

Farklı malzeme grupları üyelerinin kendi öz kimliklerini kaybetmeden bir araya gelerek oluşturdukları kompozit malzemelerin kullanım alanı her geçen gün genişlemektedir. Bu bağlamda fiber takviyeli polimer kompozitler yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu malzemeleri geleneksel malzemelerden üstün kılan, daha yüksek ve tasarlanabilir spesifik mekanik özellikleri, darbe dayanımları, enerji emme kapasiteleri, hasar toleransları ve korozyon dirençleridir. Fiberler genellikle tekstil kumaşı formuna dönüştürtülerek takviye malzemesi olarak kullanılmaktadır. Atkılı örme kumaşlar kolaylıkla gerdirilebilir, şekil alabilir, üç boyutlu, tek parça ve dikişsiz öncül formlar üretebilme imkânı sunmaktadır. Bu çalışmanın amacı gerdirilebilir, üç boyutlu, dikişsiz, tek parça ve boru formunda atkılı örme kumaş takviyeli yenilikçi bir polimer kompozit boru üretmektir. Cam veya aramid ipliklerinden tüp formunda üretilen atkılı örme kumaşlar vakum infüzyon yoluyla polyester reçine ile birleştirilip polimer kompozit boruya dönüştürülecektir. Üretilen boruların eksenel sıkıştırma mukavemeti ve ezilme performansı test edilecek ve bu performansların iplik tipi ve kumaş katman sayısı tarafından nasıl etkilendiği ortaya konacaktır.
Anahtar kelimeler: cam ipliği; aramid ipliği; atkılı örme kumaş; polimer kompozit; kompozit boru.

GİRİŞ

Savunma, havacılık, taşıma ve denizcilik gibi günümüz modern endüstrileri mukavim, sünek, çarpma dayanımı yüksek, hasar toleranslı, çürümeyen ve hafif olan malzemeleri talep etmektedir. Bu talebin metal, seramik, polimer gibi geleneksel malzeme tiplerinden sadece birinin kullanılmasıyla karşılanması bir hayli zordur. Dolayısıyla bu talep, farklı malzeme tiplerinin kendi öz künyelerini kaybetmeden bir araya getirilip, kendilerinden beklenilen özelliklerini aynı çatı altında sergilediği ve ismine kompozit denilen yenilikçi bir malzeme tipini doğurmuştur. Kompozit malzemeler grubunda fiber takviyeli polimer (FTP) kompozitler büyük bir paya sahiptir. Fiber malzemesi kendinden beklenen mekanik özellikleri sergilerken, polimer malzeme ise: 1) fiberi kuşatarak onu tasarlanan formda tutar, 2) fiberi dış etkilerden korur, 3) kompozit malzemeye uygulanan yükü etkin bir şekilde fibere transfer eder ve 4) kompozit malzemenin hafifliğine (hacimsel yoğunluğunun düşmesine) katkı sağlar. Takviye malzemesi olarak bütünleşik (birbirine kenetlenmiş fiber veya ipliklerden oluşan) bir yapıya sahip olan tekstil kumaşlarının kullanılması kompozit malzeme üretimini kolaylaştırırken, nihai kompozit ürününün mekanik özelliklerini de iyileştirmektedir. Ayrıca, tekstil kumaşlarının tasarlanabilir yapısı kompozit malzemenin mekanik özelliklerini de isteğe göre ayarlanabilir kılmaktadır [1,2].

Atkı ve çözgü yönünde istenilen miktarda ve doğrudan yükü göğüsleyebilecek biçimde fiber yerleştirilebilme ve işlenme kolaylığı özelliklerine sahip olmalarından ötürü, dokuma kumaşlar kompozit endüstrisinde büyük oranda tüketilmektedir. Atkılı örme kumaşlar ise bünyelerinde doğrudan yükü taşıyabilecek doğrusal yerleşimli fiber olmaması ve birim hacimde düşük miktarda fiber barındırmalarından ötürü (dolayısıyla düşük düzlem içi mekanik özellikler sergilemelerinden ötürü) kompozit üretiminde dokuma kumaşlar kadar yaygın kullanılamamaktadır [3]. Ancak atkılı örme kumaş yapısına bütünleşik olarak dâhil edilen atkı ve/veya çözgü yatırım iplikleri bu kumaşlarla takviye edilmiş kompozit ürünlerin düzlem içi mekanik özelliklerini arttırmaktadır.

Atkılı örme kumaşları diğer tekstil kumaşlarından ayıran en belirgin özellik şekil bozunumuna rahatça izin vermeleridir. Zhong ve Hu [4] dokuma kumaşlarda temel şekil bozunum biçiminin düzlem içi kayma (shear) olduğunu, örgü kumaşlarda ise bunun gerilme olduğunu ve bu nedenle örgü kumaşların dokuma kumaşlardan daha iyi şekil alabilir olduğunu ifade etmiştir. Bu özellik geleneksel üst giyim tekstillerinde dökümlü, vücudu saran, konforlu kumaşların üretimini sağlarken; kompozit malzeme üretiminde ise kolay şekil verilebilirlik (kolay kalıplana bilirlik) avantajı olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle üç boyutlu fiber takviyeli polimer kompozit malzeme üretiminde atkılı örme kumaş kullanımı diğer tekstil kumaşlarına nazaran büyük avantajlar sağlamaktadır. İç içe geçmiş ilmeklerden oluşan atkılı örme kumaş, üç boyutlu bir kalıp üzerine oturtulmaya çalışıldığında ilmekler birbiri üzerinden kayarak herhangi bir buruşukluk, kıvrılma, katlanma veya yırtılma olmadan kolayca üç boyutlu karmaşık kalıbın şeklini almaktadır [5-7].

Üç boyutlu bir kompozit malzemenin üretiminde takviye malzemesinin tek bir parçadan oluşması (herhangi bir ek yerinin olmaması) hem kompozit üretiminin performansı hem de nihai kompozit ürününün uniform mekanik özelliklere sahip olması açısından önem arz etmektedir. Çünkü bu ek yerleri genellikle kalınlık varyasyonunun meydana geldiği, düzgün reçine akışını sekteye uğratan, fiber veya reçine yoğun bölgeler oluşturan ve nihai kompozit ürünün kullanımı esnasında ise stres yoğunlaşması yaratan bölgelerdir. Atkılı örme kumaşlar tek parça ve üç boyutlu takviye kumaşlarının üretiminde diğer tekstil kumaşları ile kıyaslandıklarında bariz bir üstünlüğe sahiptirler. Atkılı örme kumaşlardan tüp formunda ve dikişsiz farklı yapısal eleman profilleri üretmek mümkündür. İsteğe bağlı olarak yeni iğnelerin örgüye dâhil edilebilmesi veya mevcut çalışan iğnelerin örgüden çıkarılabilmesi, iki

yatağın birbirinden bağımsız çalıştırılabilmesi muhtelif üç boyutlu kumaşların elde edilmesini mümkün kılmaktadır.

Yüksek performanslı fiberler arasında cam fiberi düşük fiyatı, yüksek alev/kimyasal dayanımı ve iyi seviyede mekanik özellikleri ile göze çarpmaktadır. Cam ipliklerinden üretilmiş dokuma kumaşlar kompozit endüstrisinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Ancak sert ve kırılgan bir yapıya sahip olan cam fiberinin atkılı örme kumaşın yapıtaşı olan ilmek formunu almaya zorlanması sorunları da beraberinde getirmektedir. Cam ipliğinin örgü makinesinde aynı anda çekme, eğilme ve sürtünme kuvvetlerine maruz kalması fiber kırılmalarına neden olmakta ve ipliğin mukavemetini olması gereken değerinin altına çekmektedir [8-11]. Ancak cam ipliğinin atkılı örme kumaşa dönüştürülmesi teknik tekstil uygulama alanında birçok avantajı yakalamayı sağlamaktadır. Örneğin cam ipliğinden üretilmiş örgü kumaşlar; konforlu koruyucu elbise üretiminde, yangın battaniyelerinde, filtre kafesini saran esnek filtre kumaş üretiminde, çarpma dayanımı yüksek kumaş takviyeli üç boyutlu polimer kompozit malzeme üretiminde kullanılabilmektedir [12,13].

Kompozit endüstrisi incelendiğinde atkılı örme kumaşların takviye formu olarak diğer tekstil kumaş formlarından daha az seviyelerde kullanıldığı görülmektedir. Bu durumun başlıca nedenleri arasında atkılı örme kumaşların fiber içeriğinin ve düzlem içi yük taşıma kapasitelerinin düşük olması gösterilebilir. Ancak atkılı örme tekniği diğer kumaş üretim teknikleri ile mukayese edildiğinde bu teknikle daha çok gerdirilebilir, daha iyi şekil alabilir, daha kolay tek parça ve üç boyutlu kumaşlar üretilebildiği görülmektedir. Ayrıca literatür araştırması atkılı örme kumaş takviyeli polimer kompozitlerin diğer tekstil kumaşları ile takviye edilmiş polimer kompozitlerden daha iyi çarpma dayanımı sergilediğini göstermektedir. Bu bağlamda bu çalışmanın araştırma sorusu (hipotezi) şöyledir: atkılı örme kumaşların kompozit üretimi açısından istenilen (gerdirilebilir, kolay şekil alabilir, üç boyutlu tek parça üretilebilir ve yüksek seviyede çarpma enerjisi emebilir) özelliklerini ön plana çıkaran yenilikçi polimer kompozit boru ürün ortaya konulabilir şeklindedir.

MALZEMELER ve METOTLAR

Bu çalışmada cam ipliği olarak: tek kat iplik numarası 136 tex olan, sonsuz elyaflı, her bir fiberinin çapı 9 mikron olan E-camı iplik kullanılmıştır (Şekil 1). Aramid ipliği olarak da 1500 denye aramid ipliği kullanılmıştır (Şekil 1). Tüp formunda örme kumaşlar Brother KH-864 marka, elle çalışan, her bir iğne yatağında bir inç mesafede beş adet iğne barındıran, atkılı düz örme kumaş üretim makinesinde iğne yataklarının her ikisini de kullanmak sureti ile üretilmiştir. (Şekil 2).



Şekil 1. Kumaş üretiminde kullanılan cam (sol) ve aramid (sağ) iplikleri.



Şekil 2. Atkılı düz örme makinesinde tüp formunda cam iplik (sol) ve aramid iplik (sağ) kumaş üretilirken çekilmiş fotoğraflar.

Çalışmamız kapsamında iki adet girdi faktörünü mercek altına aldık. İlk faktör beslenen ipliğin tipi, ikinci faktör ise örme kumaş kat sayısıdır. Bu bağlamda deneysel çalışma planı Çizelge 1'de verilmektedir. Tam faktöriyel deneysel çalışma stratejisine göre toplamda 2x2 (4) adet birbirinden farklı tüp formunda kompozit üretimi yapılmış olacaktır.

Çizelge 1. Deneysel çalışma planı.

Beslenen ipliğin tipi	Örme kumaş kat sayısı
Üç kat cam ipliği	3
Tek kat aramid ipliği	5

Kalıp boru çapına göre çapı ayarlanmış olan örgü kumaşlarımızı ürettik (Şekil 3). Kalıbımız olan boruyu vakum işlemine hazırlamak için film sarıp kaplayarak mumladık. Tüp formunda örülen kumaşlarımızı kalıbımız olan 114 mm çapa sahip borumuza giydirdikten sonra düzeneği kurmak için vakum torbasına yerleştirdik (Şekil 4). Vakum infüzyon yöntemi ile numunelerimize polyester reçine ile emdirdik. Emdirme işlemine kumaş kat sayısına bağlı değişen polyester reçine miktarlarına uygun olarak %6'lık kobalt çözeltisinden %0,15 - 0,30 oranlarında karıştırarak başlayıp, soğuk kaynatma yaparak içindeki havayı tamamen aldık. Ardından % 1-2 oranında MEK-p (metil etil keton peroksit) ile belli bir süre karıştırarak sertleştirme başlangıç işlemini oda sıcaklığının biraz üzerinde yaptık. Havası alınmış düzenekte iki ucuna spiral boru dolayıp dağıtıcı ile bir reçine girişi ve çıkışını önceden yaparak, reçine aktarmaya hazırladık. Sertleşmeye başlayan reçineyi vakum infüzyon yöntemi ile tamamen düzeneğe aktararak yeknesak numuneler ürettik (Şekil 5).



Şekil.3 Tüp formunda örülen aramid (sağ) ve cam (sol) kumaşlar.



Şekil.4 Tüp formunda örülen üç katlı cam kompozit boru için kumaşların kalıba giydirilmesi ve vakum torbasına yerleştirilerek düzenek kurulması



Şekil.5 Reçine verilme aşamasında reçinenin giriş ve çıkış durumu ile üretilen aramid ve cam kompozit borular

Üretilen kompozit borulardan boruların iç çapına (114,7 mm'ye) eşit uzunlukta, 115 mm boyunda test numuneleri kesilmiştir. Kesilen test numunelerinin iç ve dış çapları, kalınlıkları ve ağırlıkları ölçülerek kayıt altına alınmıştır. Daha sonra bu test numuneleri Gaziantep Üniversitesi Makine Mühendisliği Bölümü Mekanik Laboratuvarında bulunan 30 ton yük kapasiteli Shimadzu AG-X Series test cihazında boru merkez ekseni istikametinde sıkıştırma testine tabi tutulmuştur. Test hızı 10 mm/dak seçilmiştir. Numuneler tamamen ezilinceye kadar teste devam edilmiştir. Elde edilen yük - yer değiştirme eğrileri ve numunelerin fiziksel özellikleri kullanılarak maksimum sıkıştırma stresi öncesi ve sonrası bölge olmak üzere iki bölge üzerinden mekanik analizler yapılmıştır ve numuneler mukayese edilmiştir. Maksimum sıkıştırma stresi öncesi elastik bölge kapsamında numunelerin sıkıştırma modülü hesaplanmıştır. Test sonuçlarından maksimum sıkıştırma stresi (sıkıştırma mukavemeti) ve maksimum sıkıştırma stresinde meydana gelen yüzde kısalma not edilmiştir. Beslenen ipliğinin tipi ve örme kumaş kat sayısı faktörlerinin sıkıştırma modülü, sıkıştırma mukavemeti ve sıkıştırma mukavemetinde meydana gelen yüzde kısalma değerlerini nasıl etkilediği detaylı istatistiksel analizler ile ortaya konmuştur.

SAYISAL SONUÇLAR

1. Kompozit boruların kalınlık, alansal yoğunluk ve hacimsel yoğunluk sonuçları

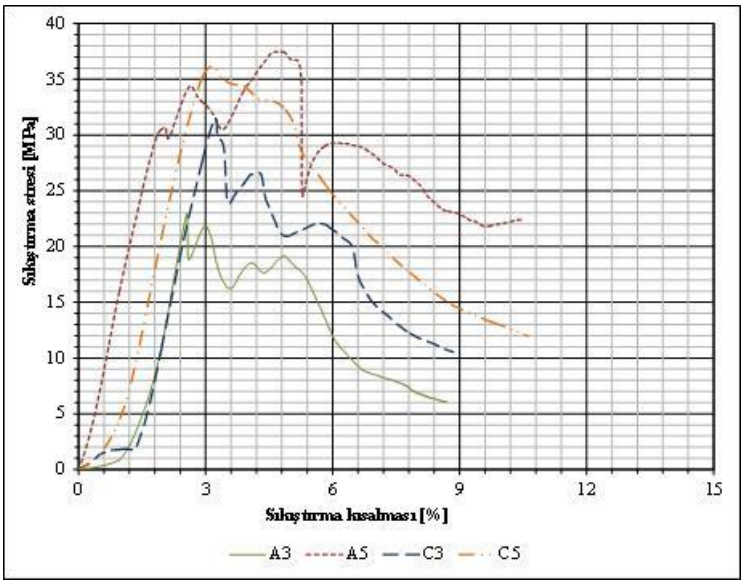
Çizelge 2'de üretilen kompozit boruların kalınlık, alansal yoğunluk ve hacimsel yoğunluk değerleri verilmektedir. Üç kat cam iplik örme kumaş takviyeli kompozit boruların kalınlığı tek kat aramid iplik örme kumaş takviyeli kompozit borularından kalınlığından 0,8 mm daha kalın çıkmıştır. Üç kat cam iplik örme kumaş tek kat aramid ipliğe nazaran daha hacimli bir yapı oluşturmuş ve bu durum kompozit boru kalınlığını arttırmıştır. Cam iplik kullanımı aramid iplik kullanımına nazaran hem alansal hem de hacimsel yoğunluğu arttırmıştır. Bu sonuç cam elyafı hacimsel yoğunluğunun (2,5 g/cm^3) aramid elyafı hacimsel yoğunluğundan (1,38 g/cm^3) yüksek olmasına bağlanmıştır. Aramid iplik kullanımı kompozit borunun hacimsel yoğunluğunu cam iplik kullanımına nazaran yaklaşık % 12,5 değerinde düşürmüştür. Kompozit boru yoğunluklarının polyester reçine yoğunluğu (1,1 g/cm^3) değerine yakın olmaları borularda fibere nazaran reçinenin daha fazla olduğunu göstermektedir. Nitekim örme kumaşın gözenekli yapısı birim hacimdeki elyaf miktarının düşük olmasına neden olmuştur.

Çizelge 2. Üretilen kompozit boru numunelerin fiziksel özellikleri

Numune tipi	Kalınlık [mm]	Alansal yoğunluk [g/m^2]	Hacimsel yoğunluk [g/cm^3]
Cam 3 kat	2,80	3498,55	1,25
Cam 5 kat	3,65	5098,98	1,40
Aramid 3 kat	2,00	2188,95	1,09
Aramid 5 kat	2,85	3493,76	1,23

2. Sıkıştırma mukavemeti özellikleri

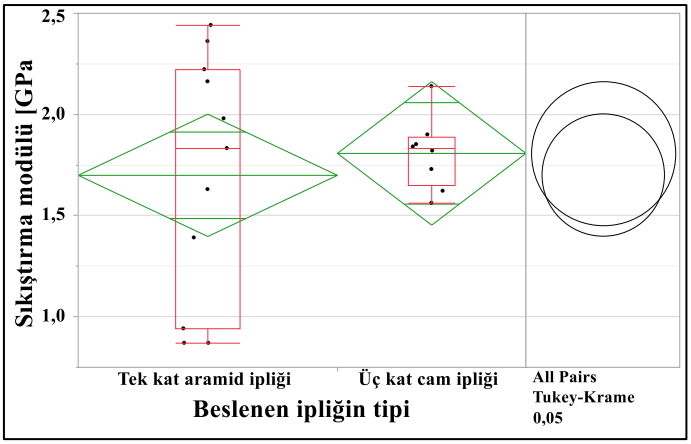
Şekil 6 da üretilen dört farklı kompozit boru tipine ait tipik eksenel sıkıştırma stresi – sıkıştırma kısalması eğrileri verilmektedir.



Şekil 6. Dört farklı numuneye ait tipik sıkıştırma stresi - sıkıştırma kısalması eğrileri

Not: A3: Aramid iplik 3 kat örme kumaş, A5: Aramid iplik 5 kat örme kumaş, C3: Cam iplik 3 kat örme kumaş, C5: Cam iplik 5 kat örme kumaş

Şekil 7 ve Çizelge 3 beslenen ipliğin tipi faktörünün sıkıştırma modülü üzerine etkisini göstermektedir. Üç kat cam iplik örme kumaş takviyeli borular tek kat aramid iplik örme kumaş takviyeli borulardan daha yüksek sıkıştırma modülü sergilemiştir, ancak bu fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşamamıştır. Ayrıca cam iplik örme kumaş takviyeli boruların sıkıştırma modülü aramid iplik örme kumaş takviyeli boruların sıkıştırma modülünden istatistiki olarak anlamlı seviyede daha düşük bir varyasyon (değişim) sergilemiştir.



Şekil 7. Beslenen ipliği tipi faktörünün sıkıştırma modülü üzerine etkisi.

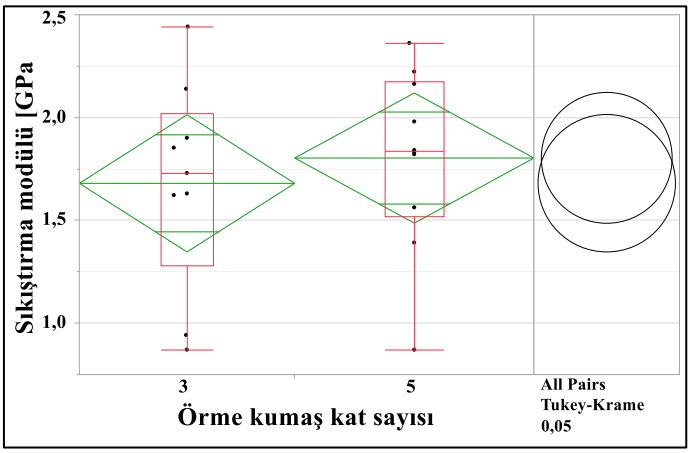
Not: Yeşil renkteki elmasların orta çizgisi ortalamayı temsil ederken alt ve üst köşeleri arasındaki mesafe ise % 95'lik güven aralığını temsil etmektedir. Sağ taraftaki sütunda her bir seviye için bir adet karşılaştırma dairesi verilmektedir. Ortalamaları farklı olan seviyeleri temsil edilen karşılaştırma daireleri ya kesişmemekte ya da hafifçe kesişmektedir. Kırmızı kutuların yüksekliği varyasyonun sayısal bir ifadesidir.

Çizelge 3. Beslenen ipliği tipi faktörünün sıkıştırma modülü [GPa] üzerine etkisi.

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Üç kat cam ipliği	A	8	1,81	0,18	1,66	1,96	0,5826
Tek kat aramid ipliği	A	11	1,70	0,60	1,30	2,10	

Not: Aynı büyük harfle birleştirilmeyen seviyeler birbirinden istatistiki olarak (α = 0,05 önem seviyesine göre) önemli seviyede farklıdır. n: toplam ölçüm sayısı, ort. : ortalama, ss.: standart sapma, AL: alt limit, ÜL: üst limit. Alt ve üst limitler % 95'lik güven seviyesine göre tesis edilmiştir. p-değeri çift taraflı hipotez kurulumuna göre hesaplanmıştır. Önem seviyesi (α) 0,05 olarak alınmıştır. 0,05'den daha küçük olan p-değerleri istatistiki olarak önemli bir farkın ifadesi olup kırmızı renge boyanmıştır.

Şekil 8 ve Çizelge 4 örme kumaş kat sayısının sıkıştırma modülü üzerine etkisini göstermektedir. Örme kumaş kat sayısının artması ile birlikte sıkıştırma modülü de artmıştır, ancak bu artış istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşamamıştır. 3 ve 5 kat örme kumaş takviyeli kompozitlerin sıkıştırma modülü varyasyonları arasında istatistiki olarak anlamlı bir fark gözlemlenmemiştir. Sıkıştırma modülünün iplik tipi ve örme kumaş kat sayısı faktörlerinden etkilenmemesi, sıkıştırma modülünün matris tarafından domine edilmesine atfedilmiştir. Nitekim sıkıştırma (basma) işleminde örme kumaşın ve dolayısıyla fiberin mekanik özelliklere bir katkısı söz konusu olmamıştır. Dolayısıyla kompozit boruların elastik bölge sıkıştırma davranışı matris (polyester reçine) tarafından belirlenmiştir.

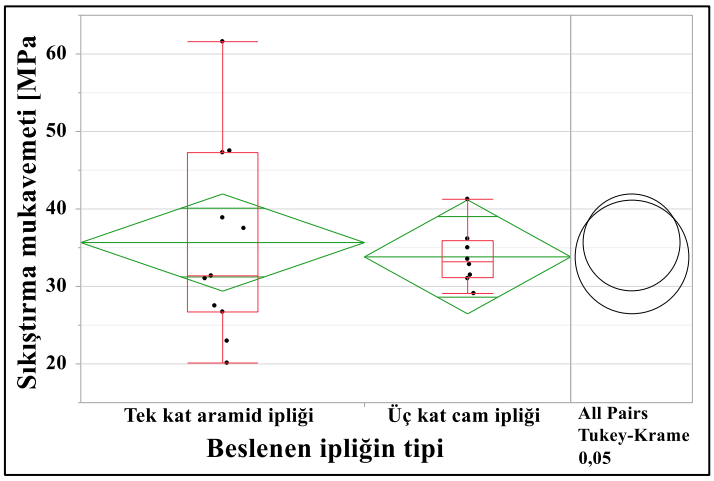


Şekil 8. Örme kumaş kat sayısı faktörünün sıkıştırma modülü [GPa] üzerine etkisi.

Çizelge 4. Örme kumaş kat sayısı faktörünün sıkıştırma modülü [GPa] üzerine etkisi.

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	10	1,80	0,44	1,49	2,12	0,5798
3	A	9	1,68	0,51	1,29	2,07	

Şekil 9 ve Çizelge 5 beslenen ipliğin tipi faktörünün sıkıştırma mukavemeti (maksimum sıkıştırma stresi [MPa]) üzerine etkisi göstermektedir. Cam ve aramid iplik örme kumaş takviyeli kompozit borular arasında sıkıştırma mukavemeti açısından istatistiki açıdan önemli bir fark gözlemlenmemiştir. Ancak sıkıştırma modülünde olduğu gibi aramid iplik takviyeli kompozit borular cam iplik takviyeli borulardan daha yüksek sıkıştırma mukavemeti varyasyonu sergilemiştir.

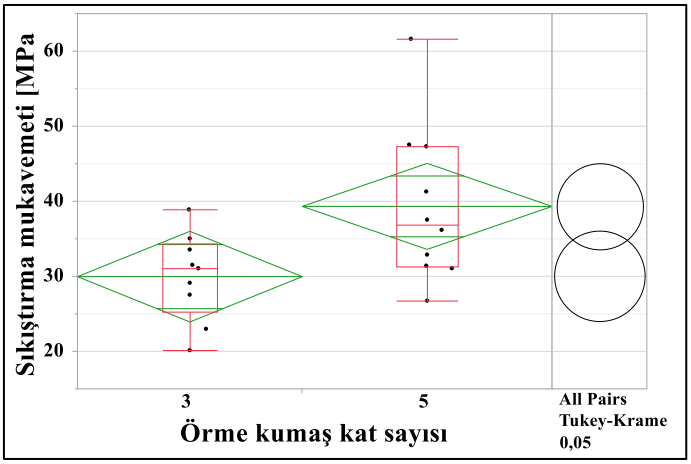


Şekil 9. Beslenen ipliğin tipi faktörünün sıkıştırma mukavemeti [MPa] üzerine etkisi.

Çizelge 5. Beslenen ipliğin tipi faktörünün sıkıştırma mukavemeti [MPa] üzerine etkisi

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Tek kat aramid ipliği	A	11	35,66	12,46	27,29	44,04	0,6514
Üç kat cam ipliği	A	8	33,82	3,77	30,67	36,96	

Şekil 10 ve Çizelge 6 örme kumaş kat sayısı faktörünün sıkıştırma mukavemeti [MPa] üzerine etkisi göstermektedir. Kumaş kat sayısının artması ile birlikte sıkıştırma mukavemeti de istatistiki olarak anlamlı seviye artmıştır. Kumaş katman sayısının artması ile birlikte komşu kumaş katmanları arasında meydana gelen birbiri içine yuvalanma da artmış ve bu durumda hem fiber içeriğini hem de sıkıştırma mukavemetini arttırmıştır. Sıkıştırma mukavemeti varyasyonu açısından 3 ve 5 örme kumaş kat sayılı kompozitler arasında anlamlı bir fark saptanmamıştır.

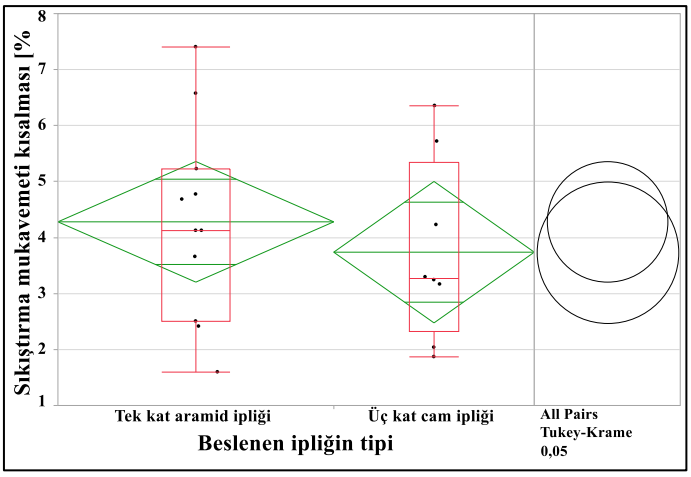


Şekil 10. Örme kumaş kat sayısı faktörünün sıkıştırma mukavemeti [MPa] üzerine etkisi.

Çizelge 6. Örme kumaş kat sayısı faktörünün sıkıştırma mukavemeti [MPa] üzerine etkisi.

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	10	39,32	10,43	31,85	46,78	0,0298
3	B	9	29,96	05,85	25,46	34,46	

Şekil 11 ve Çizelge 7 beslenen ipliğin tipi faktörünün sıkıştırma mukavemeti kısalması [%] üzerine etkisini göstermektedir. Tek kat aramid iplikli kompozitler üç kat cam iplikli kompozitlere nazaran sıkıştırma mukavemetinde daha fazla kısalma sergilemişlerdir. Ancak beslenen ipliğin ipliği sıkıştırma mukavemetindeki kısalma yüzdesi üzerinde anlamlı bir etki yaratmamıştır. Her iki iplik tipinde de sıkıştırma mukavemeti kısalması varyasyonu (standart sapması) yakın olarak gözlemlenmiştir.

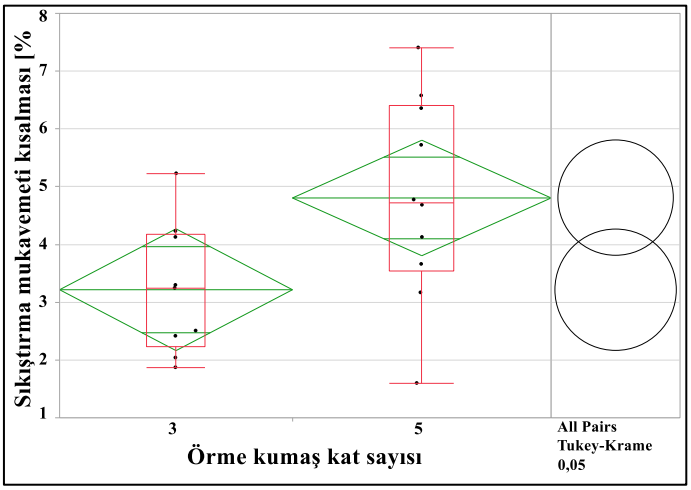


Şekil 11. Beslenen ipliğin tipinin sıkıştırma mukavemeti kısalması [%] üzerine etkisi.

Çizelge 7. Beslenen ipliğin tipinin sıkıştırma mukavemeti kısalması [%] üzerine etkisi.

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Tek kat aramid ipliği	A	11	4,28	1,75	3,10	5,46	0,5001
Üç kat cam ipliği	A	8	3,74	1,61	2,39	5,08	

Şekil 12 ve Çizelge 8 örme kumaş kat sayısının sıkıştırma mukavemeti kısalması [%] üzerindeki etkisini göstermektedir. Kumaş kat sayısının artması ile birlikte sıkıştırma mukavemetindeki kısalma yüzdesi de istatistiki olarak anlamlı seviye artmıştır. Dolayısıyla örme kumaş katman sayısının artması ile hem sıkıştırma mukavemeti hem de sıkıştırma kısalması anlamlı seviye de artmıştır. Örme kumaş katman sayısının artması ile birlikte kompozitin hacimsel yoğunluğu ve dolayısıyla birim hacimde barındırdığı fiber miktarı (fiber hacim oranı) artmış ve bu artışta sıkıştırma dayanımı özelliklerinin iyileşmesine neden olmuştur. Sıkıştırma mukavemeti varyasyonu bakımından 3 ve 5 örme kumaş kat sayılı kompozitler arasında istatistiki olarak anlamlı bir fark gözlemlenmemiştir.



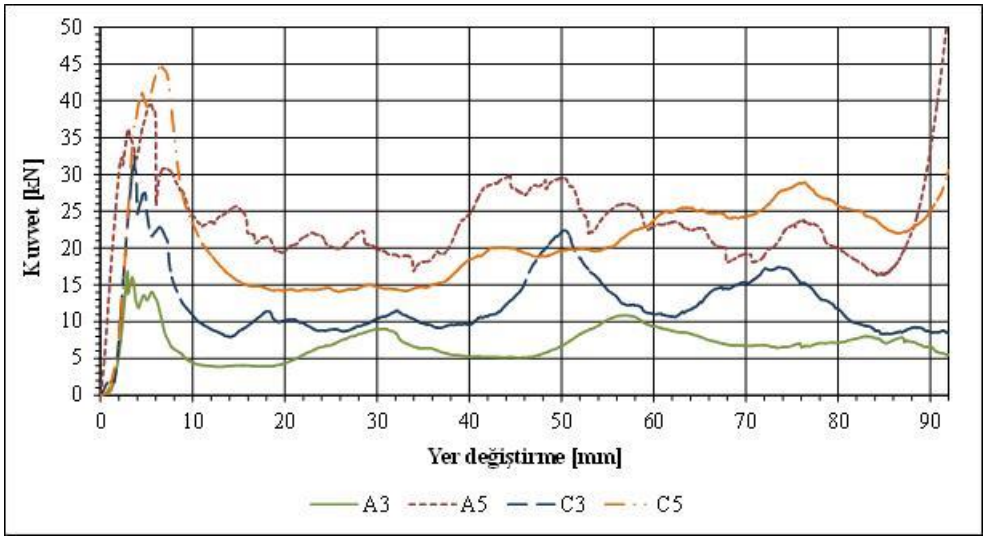
Şekil 12. Örme kumaş kat sayısının sıkıştırma mukavemeti kısalması [%] üzerindeki etkisi

Çizelge 8. Örme kumaş kat sayısının sıkıştırma mukavemeti kısalması [%] üzerindeki etkisi

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	10	4,80	1,76	3,54	6,06	0,0339
3	B	9	3,22	1,13	2,35	4,09	

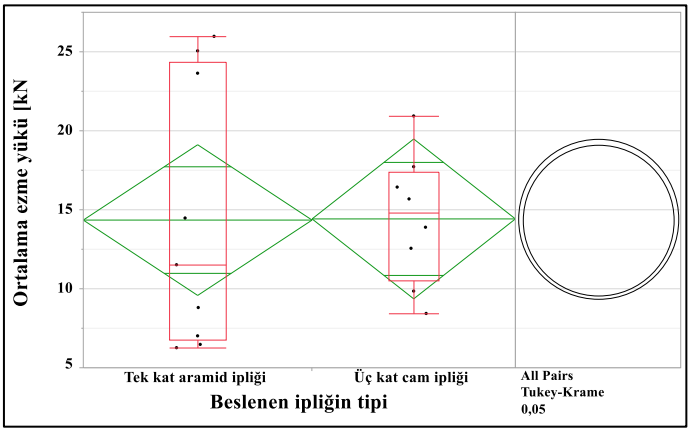
3. Kompozit boruların ezilme performansının değerlendirilmesi

Şekil 13'de dört farklı tipte üretilen kompozit borulara uygulanan eksenel sıkıştırma testinin tamamını (ezilme bölgesini de) içine alan tipik "kuvvet – yer değiştirme" eğrileri verilmektedir. Lineer elastik bölge sonrasında gerçekleşen maksimum basma yükü ezme sürecinin başlangıcı olarak kabul edilmiştir. Yükün dramatik (dik bir şekilde) artışa geçtiği ve artık borunun üst ve alt ağzının birbirine çok yaklaştığı nokta (tüm numuneler için 92 mm yer değiştirmeye karşılık gelen nokta) ise ezme sürecinin sonu olarak belirlenmiştir. Ezme sürecinde ölçülen kuvvet değerlerinin ortalaması hesaplanmış ve bu değer "ortalama ezme yükü [kN]" olarak kayıt altına alınmıştır. Ezme yükü ortalamasının maksimum basma yükünün yüzde kaçı olduğu hesaplanmış ve bu değer "ezme yükü etkinliği [%]" olarak kayıt altına alınmıştır. Ezme sürecinde eğrinin altında kalan alan hesaplanmış ve bu değer numune tarafından emilen "ezme enerjisi [kJ]" olarak kayıt altına alınmıştır. Hesaplanan ezme enerjisi değerleri ezme testi neticesinde ölçülen ezilmiş numune ağırlıkları ile normalize edilerek numune tarafından emilen "özgül ezme enerjisi" olarak kayıt altına alınmıştır [14]. Beslenen ipliğin tipi ve örme kumaş kat sayısı faktörlerinin yukarıda bahsi geçen ezme performansı karakteristiklerini nasıl etkilediği analizlerle ortaya konmuştur.



Şekil 13. Tipik eksenel sıkıştırma eğrileri.

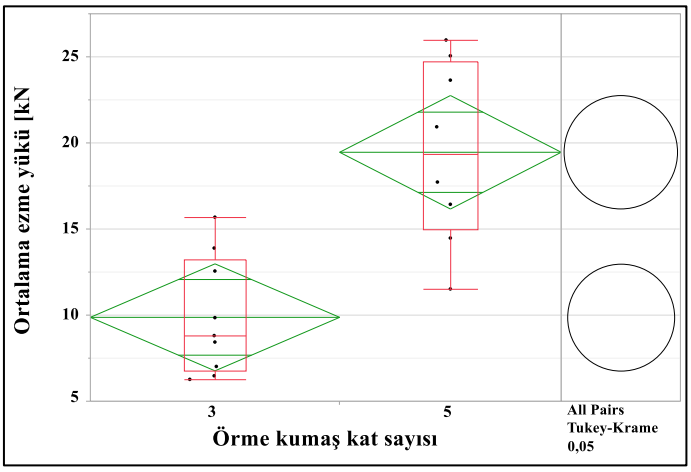
Beslenen ipliğin tipi ortalama ezme yükünü etkilememiştir (Şekil 14 ve Çizelge 9). Diğer yandan beklenildiği üzere örme kumaş kat sayısının artması ile birlikte ortalama ezme yükü de istatistiki olarak anlamlı bir seviyede artmıştır (Şekil 15 ve Çizelge 10).



Şekil 14. Beslenen ipliğin tipinin ortalama ezme yüküne [kN] etkisi.

Çizelge 9. Beslenen ipliğin tipinin ortalama ezme yüküne [kN] etkisi.

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Üç kat cam ipliği	A	8	14,42	4,13	10,97	17,88	0,9817
Tek kat aramid ipliği	A	9	14,35	8,34	7,94	20,76	

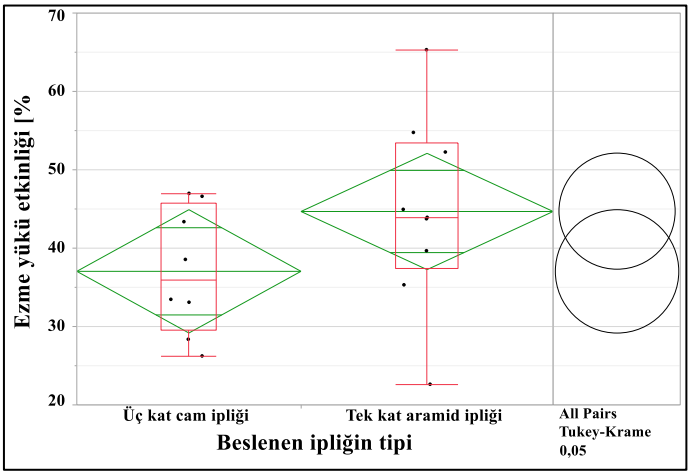


Şekil 15. Örme kumaş kat sayısının ortalama ezme yüküne [kN] etkisi.

Çizelge 10. Örme kumaş kat sayısının ortalama ezme yüküne [kN] etkisi.

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	8	19,46	5,26	15,06	25,86	0,0004
3	B	9	09,87	3,41	07,25	12,49	

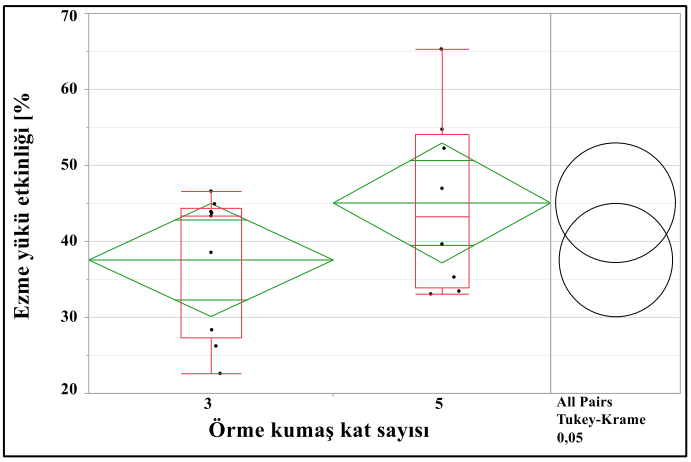
Ezme yükü etkinliği açısından aramid kompozitler cam kompozitlerden daha yüksek bir performans sergilemiştir, ancak bu fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşmamıştır (Şekil 16 ve Çizelge 11). Benzer şekilde ezme yükü etkinliği açısından 5 katlı kompozitler 3 katlı kompozitlerden daha yüksek bir performans sergilemiştir, ancak bu fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşamamıştır (Şekil 17 ve Çizelge 12).



Şekil 16. Beslenen ipliğin tipinin ezme yükü etkinliği [%] üzerine etkisi.

Çizelge 11. Beslenen ipliğin tipinin ezme yükü etkinliği [%] üzerine etkisi.

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Tek kat aramid ipliği	A	9	44,68	12,16	35,33	54,03	0,1531
Üç kat cam ipliği	A	8	37,04	08,04	30,32	43,76	

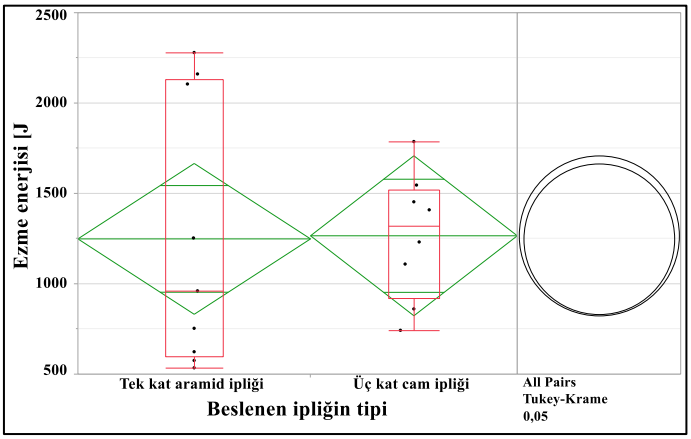


Şekil 17. Örme kumaş kat sayısının ezme yükü etkinliği [%] üzerindeki etkisi.

Çizelge 12. Örme kumaş kat sayısının ezme yükü etkinliği [%] üzerindeki etkisi.

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	8	45,06	11,71	35,26	54,85	0,1610
3	A	9	37,56	09,24	30,45	44,66	

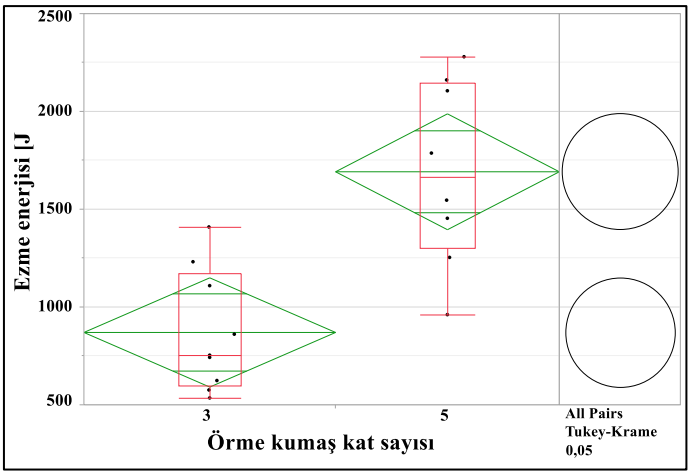
Beslenen ipliği tipi ezme enerjisini etkilememiştir (Şekil 18 ve Çizelge 13). Diğer yandan beklenildiği şekilde örme kumaş kat sayısının artması ile birlikte ezme enerjisi de istatistiki olarak anlamlı seviye artmıştır (Şekil 19 ve Çizelge 14).



Şekil 18. Beslenen iplik tipinin ezme enerjisi [J] üzerindeki etkisi

Çizelge 13. Beslenen iplik tipinin ezme enerjisi [J] üzerindeki etkisi

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Üç kat cam ipliği	A	8	1265,59	352,12	971,21	1560,0	0,9528
Tek kat aramid ipliği	A	9	1248,40	733,70	684,43	1812,4	

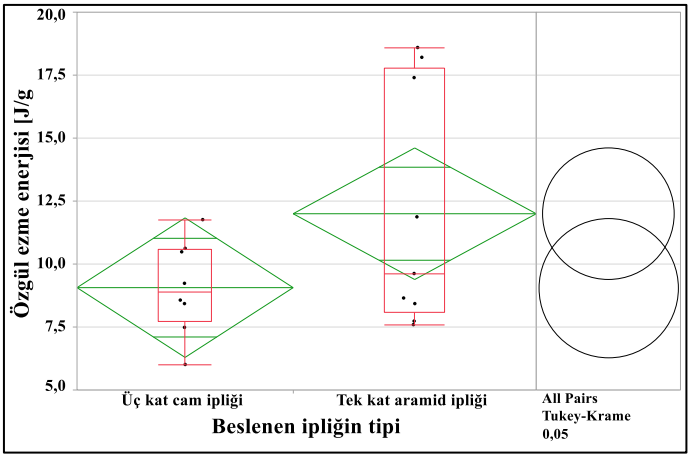


Şekil 19. Örme kumaş kat sayısının ezme enerjisi üzerindeki etkisi.

Çizelge 14. Örme kumaş kat sayısının ezme enerjisi üzerindeki etkisi.

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	8	1691,43	470,52	1298,1	2084,8	0,0006
3	B	9	0869,88	309,72	0631,8	1108,0	

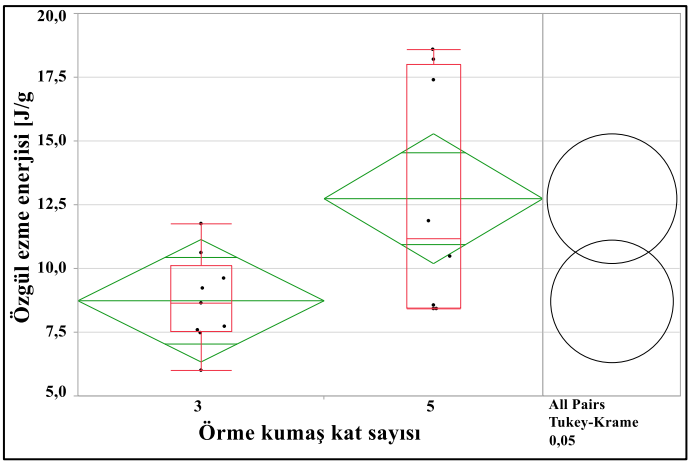
Aramid kompozitler cam kompozitlere nazaran gram ağırlık başına 2 J daha fazla ezme enerjisi emmişlerdir, ancak bu fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşmamıştır (Şekil 20 ve Çizelge 15). Diğer yandan örme kumaş kat sayısının artması ile birlikte özgül ezme enerjisi de istatistiki olarak anlamlı seviyede (gram başına yaklaşık 4 J) artmıştır (Şekil 21 ve Çizelge 16). Bu sonuç örme kumaş katman sayısının artması ile birlikte birbiri içine geçen (yuvalanan) kumaş katları birim hacimdeki fiber hacmini arttırarak kompozit numunenin gram ağırlık başına daha fazla ezme enerjisi emmesini sağlamıştır.



Şekil 20. Beslenen iplik tipinin özgül ezme enerjisi üzerindeki etkisi

Çizelge 15. Beslenen iplik tipinin özgül ezme enerjisi üzerindeki etkisi

Beslenen ipliği tipi		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
Tek kat aramid ipliği	A	9	11,20	4,72	8,37	15,63	0,1143
Üç kat cam ipliği	A	8	09,06	1,86	7,51	10,62	



Şekil 21. Örme kumaş kat sayısının özgül ezme enerjisi üzerindeki etkisi.

Çizelge 16. Örme kumaş kat sayısının özgül ezme enerjisi üzerindeki etkisi.

Örme kumaş kat sayısı		n	ort.	ss.	AL	ÜL	p-değeri
5	A	8	12,74	4,57	8,91	16,56	0,0454
3	B	9	8,73	1,77	7,38	10,09	

SONUÇ

Tek kat aramid veya üç kat cam ipliğinden tek parça boru formunda üretilen atkılı örme kumaşlar 3 ve 5 katlı formda istiflenerek boru kalıba giydirilmiş ve vakum infüzyon yoluyla polyester reçine emdirilerek fiber takviyeli polimer kompozit boruya dönüştürülmüştür. Üretilen borulara eksenel sıkıştırma testi uygulanmıştır. Üretilen boruların sıkıştırma modülünün iplik tipi ve kumaş katman sayısından etkilenmemesi elastik sıkıştırma bölgesinde özelliklerin reçine tarafından belirlenmesine bağlanmıştır. Diğer yandan iplik tipi sıkıştırma mukavemetini ve sıkıştırma mukavemetinde meydana gelen kısalmayı istatistiki olarak önemli ölçüde etkilemez iken, kumaş katman sayısının artması ile birlikte hem sıkıştırma mukavemeti hem de sıkıştırma mukavemetinde meydana gelen kısalma istatistiki olarak anlamlı ölçüde artmıştır. Bu anlamlı artışlar kumaş katman sayısının artması ile birlikte, birim hacimdeki fiber miktarını artıran, komşu kumaş katmanları arasındaki yuvalanmaya atfedilmiştir.

Boruların maksimum basma yükünü müteakip gerçekleşene ezilme performansları da mercek altına alınmıştır. Beslenen ipliğin tipi ortalama ezme yükünü [kN] etkilemez iken, beklenildiği gibi örme kumaş katman sayısının artması ile birlikte ortalama ezme yükü de istatistiki olarak anlamlı seviyede artmıştır. Tek kat aramid iplikli kompozit borular, üç kat cam iplikli kompozit borulardan; 5 kat örme kumaş kompozit borular ise 3 kat örme kumaş kompozit borulardan daha yüksek ezme yükü etkinliği [%] performansı sergilese de bu farklar istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşmamıştır. Beslenen ipliğin tipi ezme enerjisini neredeyse hiç etkilemez iken, beklenildiği üzere örme kumaş kat sayısının artması ile birlikte ezme enerjisi de istatistiki olarak anlamlı bir seviyede artış göstermiştir. Nitekim örme kumaş kat sayısının etkisini özgül ezme enerjisinde [J/g] göstermesi beklenmektedir. Aramid iplikli kompozit borular cam iplikli borulardan daha fazla özgül ezme enerjisi performansı göstermiştir, ancak bu fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşmamıştır. Diğer yandan örme kumaş kat sayısının artması ile birlikte özgül ezme enerjisi istatistiki olarak anlamlı seviyede artış göstermiştir. Bu sonuç kumaş kat sayısının artması ile birlikte komşu kumaş katmanlarının birbirinin içine daha çok geçip (yuvalanıp) birim kompozit hacmindeki fiber hacmini arttırmasına bağlanmıştır.

Teşekkür: Bu proje "TÜBİTAK 2209-A – Üniversite Öğrencileri Araştırma Projeleri Destekleme Programı" kapsamındadır.

KAYNAKLAR

[1] K.K. Chawla, *Composite materials: science and engineering*, Springer, 1998.

[2] S.K. Mazumdar, *Composites manufacturing: materials, product, and process engineering*, CRC Press, 2002.

[3] D.N. Pandey, P. Kumar, Advancement in knitted structure for industrial applications - a review, *International Journal of Advanced Engineering Research and Technology (IJAERT),* 4 (2016) 265-272.

[4] T. Zhong, H. Hu, Formability of weft-knitted fabrics on hemisphere, *AUTEX Research Journal,* 8 (2007) 245-251.

[5] S. Savci, J. I. Curiskis, M. T. Pailthorpe, Formability of weft knitted preforms: *International Committee on Composite Materials (ICCM) 12 Conference*, Paris, France, 1999: s. 1-10.

[6] S. Savci, J.I. Curiskis, M.T. Pailthorpe, A study of the deformation of weft-knit preforms for advanced composite structures Part 1: Dry preform properties, *Composites Science and Technology,* 60 (2000) 1931-1942. doi: https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00077-4

[7] S. Savci, J.I. Curiskis, M. T. Pailthorpe, A study of the deformation of weft-knit preforms for advanced composite structures Part 2: The resultant composite, *Composites Science nand Technology,* 60 (2000) 1943-1951. doi: https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00078-6

[8] S. Savci, J.I. Curiskis, M.T. Pailthorpe, Knittability of Glass Fiber Weft-Knitted Preforms for Composites, *Textile Research Journal,* 71 (2001) 15-21. doi: https://doi.org/10.1177/004051750107100103

[9] H. Hu, M. Zhu, A study of the degree of breakage of glass filament yarns during the weft knitting process, *AUTEX Research Journal,* 5 (2005) 141-148.

[10] K.W. Lau, T. Dias, Knittability of High-modulus Yarns, *The Journal of the Textile Institute,* 85 (1994) 173-190. doi: https://doi.org/10.1080/00405009408659018

[11] X.-M. Liu, N.-L. Chen, X.-W. Feng, Investigation on the knittability of glass yarn, *The Journal of The Textile Institute,* 100 (2009) 440-450 2009. doi: https://doi.org/10.1080/00405000701877657

[12] Q.M. Wang, H. Hu, Geometrical and dimensional properties of plain knitted fabrics made from glass fiber yarns for composite reinforcement, *Journal of Industrial Textiles,* 37 (2007) 139-149. doi: https://doi.org/10.1177/1528083707078131

[13] O.A. Khondker, K.H. Leong, I. Herszberg, H. Hamada, Impact and compression-after-impact performance of weft-knitted glass textile composites, *Composites Part A: applied science and manufacturing,* 36 (2005) 638-648. doi: https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2004.07.006

[14] Ö. Özbek, Ö. Y. Bozkurt, A. Erkliğ, Crashworthiness of basalt fiber reinforced composite pipes subjected to quasi-static lateral compression: *4th International Energy & Engineering Congress*, Gaziantep, Türkiye, 2019: s. 531-541.

EKSENEL KUVVET VE EĞİLME ETKİSİNDEKİ ELEMANLARIN OPTİMUM TASARIMI

Erkin EREN[1], ve Mehmet ÜLKER[2]

[1] İnşaat Mühendisliği Bölümü- Fırat Üniversitesi, Elazığ

[2] İnşaat Mühendisliği Bölümü- Turgut Özal Üniversitesi, Malatya

ÖZET

Optimizasyon yapı tasarlanırken önemli faktörlerden biridir. Yapı elemanlarının optimum boyutlandırılması yapılırken parametreler doğru bir şekilde belirlenmelidir. Tasarım için belirlenen parametreler birbirinden bağımsız veya birleşik etkiler gösterebilmektedir. Bu çalışmada, yapısal elemanların eksenel gerilme ve eğilme momentine birlikte maruz kalması durumunda optimum yapı tasarımı yapılmıştır. Yapılan tasarımda, AISC 360-10 esasları dikkate alınarak çözümleme yapılmıştır. Bahsedilen etkiler altında tasarlanmış çelik çerçeve sistemin elemanları için Genetik ve Tabu Arama Algoritmaları uygulanıp, optimum tasarım hedeflenmiştir. Yapılan işlemlerde Sap2000 OAPI (Open Application Programming Interface) ara yüzü ve Visual Basic programlama dili bağlantısı kullanıldı. Optimizasyon için kullanılan metodlar birbirinden farklı tasarım prensibleri sergilemektedir. Buna uygun olarak elde edilen optimum kesitler tablolaştırılmış ve bağımsız etkilerle yapılan tasarım sonuçlarıyla kıyaslarına da yer verilmiştir. Kullanılan yöntemlerin, sistemin optimum tasarımı açısından değerlendirilmiştir.

Anahtar kelimeler: Eksenel Kuvvet, Eğilme Momenti , Optimizasyon, Sap2000 OAPI

OPTIMUM DESIGN OF AXIAL FORCE AND BENDING ELEMENTS

ABSTRACT

Optimization is one of the important factors when designing a structure. Parameters should be determined correctly whilst making the optimum dimensioning of the building elements. The parameters determined for the design can have independent or combined effects. In this study, optimum structural design has been made when structural elements are exposed to axial stress and bending moment. AISC 360-10 principles were taken into consideration in design.. The optimum design is aimed by applying Genetic and Taboo Search Algorithms to the steel frame system elements designed under the above-mentioned effects. Sap2000 OAPI (Open Application Programming Interface) interface and Visual Basic programming language connection were used. The methods used for optimization exhibit different design principles. Accordingly, the optimum sections obtained were tabulated and compared with the design results made with independent effects. The methods used were evaluated in terms of the optimum design of the system.

Keywords: Axial Force, Bending Moment, Optimization, Sap2000 OAPI

1. GİRİŞ

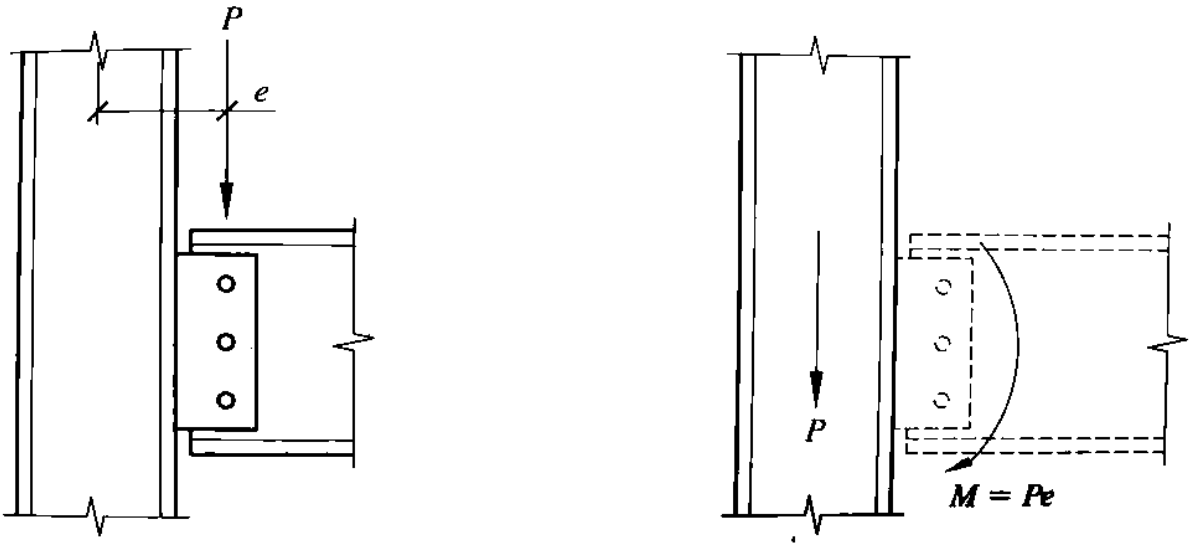
Günümüzde, mühendislik bilimlerinin gelişmesiyle medeniyetin ana unsurları olan mühendislik yapıları ön plana çıkmaya başlamıştır. Önceleri yalın, sade ve yalnızca ihtiyaç karşılama amaçlı yapılar inşa edilmişken, günümüzde daha ciddi ve sistematik taşıyıcı sistemlerortaya çıkmaktadır. Yapıların yatay ve düşey taşıyıcıları deprem, kar,rüzgar, ölü yükler, hareketli yükler gibi statik ve dinamik yükleri emniyetli olarak yapı zeminine aktararak mühendislik yapılarının duraylılığını sağlamaktadır. (1)

Çeşitli teknoloji ve prensiplerin gelişmesi sonucunda, mühendislik alanında kullanılan pek çok yazılım oluşturulmuş ve bunun neticesinde sistem taşıyıcı elemanlarının kapasiteleri daha hızlı ve çeşitli yollarla hesaplanabilir hale gelmiştir. Bu aşamada çeşitli optimizasyon yöntemlerinin kullanılması kolaylaşmıştır. Bir yapının optimizasyonunda klasik optimizasyon yöntemleri kullanılabilir. Ancak klasik optimizasyon yöntemleri uygulama esnasında çok sayıda değişkenin bulunması ve optimum noktalarının bulunması konusunda yetersiz kalmaktadır. Sezgisel Algoritmalar çözüm uzayında en iyi çözüme yakınsama özelliğini kullanarak yaklaşmakta, kesin çözümü garanti edememekte, ancak kullanımı çözümü elde etmek yolunda başarılı sonuçlar vermektedir. (2) (3) Sezgisel Algoritmaların tercih edilmesini; kesin çözümü problemin tanımlanmasındaki kolaylıklar, karar verici açısından sağladığı kolaylıklar sağlaması sebepleriyle tercih edilebilir.

Tabu, sözlük anlamı herhangi bir durumun dini veya ahlaki sebeplerle yasaklanması olarak tanımlanır. Optimizasyon problemlerinde ise, optimum çözümü elde etmek için kullanılan yasaklar ve kısıtlamaları ifade etmektedir. (4) Tabu Arama(TA); optimum çözüm elde etmek için matematiksel optimizasyon için bölgesel arama yöntemlerini kullanan bir meta-sezgisel arama yöntemidir. (5) TA'nın bugün kullanılan şekli ile esasları Glover tarafından açıklanmıştır. (6) TA çok elektronik devre tasarımı (7) yapı sistemlerinin tasarlanması (4) (8) (9) telekomünikasyon ağları (10) güç sistemlerinin tasarımı (11) çeşitli alanlarda kullanılmaktadır.

Genetik Algoritmalar(GA) evrime dayalı algoritmaların bir türüdür. Biyolojik kanunların algoritmalara uyarlanmasının bir ürünüdür. Genetik operatörler yardımıyla en ideal bireyin hayatta kalması üzerine kurgulanan bir arama tekniğidir. (12) GA ilk olarak J.H. Holland'a aittir. Holland basit dizileri kullanarak yarmaşık yapıların kodlanabileceğini göstermiştir (13). Bu algoritma düzlemsel ve uzay çelik çerçevelerin optimizasyonunda (3) (4) (14), kafes sistemli yapıların en az kütle, şekil ve boyut açısından en iyi şekilde tasarımında (15) (16)

Eksenel ve eğilme yüklerinin birlikte etki ettiği yapı elemanlarına kiriş-kolon denmektedir. Kiriş-kolonlar çaprazlı veya çaprazsız çerçevelerin (moment çerçeveleri) parçası olabilirler. Yapılardaki bu tip elemanların(genellikle kolonlar) tasarımı, çerçevenin çaprazlı veya çaprazsız olmasına göre belirlenir. Bu çalışmada tipik bir kolon veya kirişteki normal kuvvet veya eğilme birleşik etkileri çelik çerçeveli bir sistemdeki yönetmelik esaslarından faydalanılarak optimizasyonu yapılmıştır. Gerçek bir yapılardaki geometrik ön kusurlar sebebiyle çok az sayıdaki yapıda bu etkiler ayrı ayrı değerlendirilebilir. Tipik yükleme sebebiyle pek çok bina tipik kolon-kiriş örneğidir. Kiriş-kolonlar yapılarda çapraz çerçeveli binalarda, dış kolonlarda ve aşıklarda, kafes başlıklarında ve dış merkez eksenel yük etkisi bulunan kısımlarda bulunabilirler. (17)



Çapraz Çerçevelerde Kolon Tipi

Çapraz çerçeveler binalarda, yanal yükleri diyagonel çaprazlar veya perde duvarlarla taşıyan sistemlerdir. Bu çerçeve sistem yanal ötelemenin önlemiş olduğu çerçeve sistemlerdir. Çaprazlı çerçevelerde kiriş veya ana kirişler kolonlar, moment direnci hiç olmayan veya çok az olan basit kesme birleşimleriyle oturtulur. Kolonlardaki momentler M_{lt} (yer değiştirmenin olmadığı bir durumdaki moment), kiriş ve ana kirişlerdeki mesnet reaksiyonlarındaki dışmerkezlik sonucu olan yer değiştirmelerin olmadığı durum momentidir. M_{lt} bu durum söz konusu olduğunda sıfırdır. (17) (18) (19)

Bu tip elemanlara çaprazsız veya moment çerçeveleri (yanal ötelenmesi önlenmeyen çerçeveler). Yanal yüklere kolon ve kirişlerdeki eğilme ve kolon-kiriş birleşim noktaların dayanımı karşılar. Bu sistemlerdeki momentler ötelemenin olmadığı durumdur. Mnt (17) (20) (18)

2. KİRİŞ-KOLONLARIN TAŞIYICI ÖZELLİKLER BAKIMINDAN İNCELEMESİ

İşletme şartlarında, yapı elemanları birbirinden farklı yük kombinasyonlarına maruz kalır. Çerçeve sistemlerde elemanlar, taşıyıcı özellikleri açısından üç gruba ayrılır:

1. Eğilme etkisi altında çalışan elemanlar (kirişler)
2. Eksenel basınç kuvveti altında çalışan elemanlar (kolonlar)
3. Hem eksenel basınç, hem de eğilme etkisine maruz elemanlar (kiriş-kolonlar)

Teorik olarak, bütün yapı elemanları (öz ağırlığı etkisinde eğilen kafes elemanları gibi) bileşik eksenel kuvvet ve moment etkisi altındadır. Çekme, basınç ve eğilme elemanları olarak yapılan sınıflandırmalar, bazı kabuller ile basitleştirilmiş kiriş- kolon elemanlardır. Yani teorik olarak bütün yapı elemanları aslında kiriş-kolon davranışı gösterirler. (20)

Deneysel şartlarda bile, bir kolona normal kuvvet yükü tam olarak kesit simetri ekseninden etki ettirmek mümkün değildir. Dolayısıyla, yük eksantrisitesi sebebiyle, ikincil eğilme momenti etkileri oluşacaktır. (20) Bir çerçeve sistem içinde, kirişler kolonlara yan yüzeyinden veya guseli birleşimlerle monte edilerek yük aktarımı yapıldığından, yanal bir

eğilme zorlaması açığa çıkar. Kullanılacak elemanlar, üretimden veya herhangi başka bir sebepten dolayı kusurlu olabilirler. Bu tip ön deformasyonlar sebebiyle de ikincil etkiler ortaya çıkar. Sistem içinde, sadece düşey yüklere maruz kalacak şekilde tasarlanmış ve mesnetlenmiş kolonlarda bile, rüzgar yükü gibi yanal etkiler sebebiyle eğilme momenti etkileri oluşur. (17) (19)

Kiriş-kolonların tasarımı, analitik olarak kolay ve kesin bir şekilde oluşturulamamaktadır. Eğilme nedeniyle oluşan ikincil etkiler iki taraflı bir etkileşim halindedir. Yani, eğilme etkisiyle oluşacak deformasyon δ ile P eksenel kuvvetinin etkileşiminden P-δ ikincil moment etkileri oluşur. Oluşan bu ek moment sebebiyle tekrar ek eğilme deformasyonları oluşur. Bunun sonucunda yine ek momentler oluşur. Bu etkileşim davranış denge haline erişene kadar devam eder. Dolayısıyla, bu ikincil etkileri ve etkileşimlerini kesin bir şekilde hesaplamak mümkün değildir. Analizi yapılan elemanın, taşıyıcılık etkisini bazı kesitleri aktıktan sonra kaybedebilmesi de, analizi karmaşık yapan başka bir etkendir. Bu sebeplerden, çelik kiriş-kolonların tasarımı, deneysel ve teorik çalışmalar ile birtakım basitleştirici kabullere dayanır.

Çelik yapılarda, kiriş-kolonların tasarım kuralları ile ilgili üç yaklaşım bulunmaktadır.

1) Etkiyen yükler ve başlangıç eğriliği etkisinde, elemanın kullanılabilirlik kaybının ilk akma ile başlayacağı kabulüne dayanan sekant formülü. En eski yaklaşımdır. AASHTO ve AREA'nın köprü şartnamelerinde bileşik gerilme altındaki elemanların tasarımına temel teşkil eder. Ayrıca Alman burkulma şartnamesinde bir alternatif olarak kabul edilmektedir. (20) (1)

2) Ampirik olarak belirlenmiş ve deneylerle kontrol edilmiş olan etkileşim denklemleri. Basitliği ve uygunluğu sebebiyle en çok kullanılan yöntemdir. Bu denklemler, eksenel kuvvet, eğilme momenti ve eleman geometrisi arasındaki etkileşim üzerine kuruludur. AISC, Alman burkulma şartnamesi DIN 4114, İngiliz şartnamesi BS 449 ve daha birçok şartname tarafından kullanılan en popüler yöntemdir. (20)

3) En güncel yöntem ise, teorik olarak elde edilmiş, etkileşim eğrileri veya bu eğrilere yaklaşık olarak belirlenmiş denklemlerdir. AISC'nin plastik tasarım standardı bu metodu kullanmaktadır. (20)

3. TABU ARAMA ALGORİTMASI

TA çözüm uzayındaki arama işlemini komşu arama ile yapmaktadır. Komşu aramada, herhangi bir olası sonucun diğer olası sonuçlarla bağlantılı komşular olduğu kabul edilir. Optimizasyon problemi olası birçok sonuçla beraber amaç fonksiyonunu minimum yapan sonuç aranır. Bu amaçla çözüm uzayında işlem mevcut tasarımdan buna komşu görünen tasarımlara yönelinir . Komşu aramada komşuların biribirlerine iki yönde de komşu olduğu kabul edilir. Yani X tasarımı, Y'nin bir komşusu iken Y'nin de X'in bir komşusu olduğu kabul edilir.

TA'da arama boyunca en ideal tasarımın gerçekleşmesini sağlayan hareketler yapay bir hafızaya kaydedilir. Buna kısa dönemli hafıza olarak denir. Kısa dönemli hafıza kullanılarak arama öncesi yönelimler tekrar elde edilmesini sağlayacak olaylar yasaklanır. Arama esnasında yasaklanan bu yönelimlere tabu denir. Tabu yönelimler tabu listesi adı verilen tek boyutlu bir listede muhafaza edilir. Tabu listesine kaydedilen her hareket bir tasarım değişkenini temsil eder. TA'da her tasarım değişkeni için tanımlanan komşu tasarımlar içerisinde en iyi olan tasarım tabu listesi de kontrol edilerek mevcut tasarımın yerini alır. Arama işlemine her kademede en iyi komşu tasarım ile devam edilir. Aynı işlem diğer tasarım değişkenleri için de tekrarlanarak bir iterasyon tamamlanır. Kabul edilen bitirme şartı sağlanıncaya kadar her iterasyon için bu işlemler tekrarlanır. (4) (12)

Bu çalışmada kullanılan tabu arama algoritmasında maksimum iterasyon sayısının aşılması durdurma kriteri olarak kullanılmıştır.

4. GENETİK ALGOTİRMA

GA; genetik ve doğal seçilim temelli bir araştırma tekniğidir. Bir araştırma mekanizması kurmak için doğadan esinlenerek alınan operatörler en ideal olanın hayatta kalması esasını kullanır. GA'da değişik operatörler mevcuttur. Bu çalışmada; üreme, çaprazlama, mutasyon operatörleri kullanılmıştır. Bu operatörler Sap2000 OAPI bağlantısı kullanılarak bir GA yazılmıştır. GA'nın temeli problemi tanımlayan değişkenlerin kodlanmasıdır. En yaygın olarak kullanılan kodlama metodu değişkenleri belirli bir tabanda ve uzunlukta bir diziye dönüştürmektir. Bir topluluktaki bireyler rastgele üretilen karakterlerden oluşan belirli uzunluktaki dizilerdir. Bireyler yani kromozomlar, karakterler ise yapay genlerdir. Bir dizi, her biri bir tasarım değişkenini temsil eden bir takım alt dizilerden oluşabilmektedir. Tüm diziler bir araya gelerek yapı oluşturur. Uygunluk operatörü en uygun olanın hayatta kalması ilkesini uygular. Çaprazlama operatörü toplumdaki bireylerin genlerini yeniden birleştirerek probleme yeni çözümler üretir. Mutasyon operatörü ise optimizasyonda farklı çözüm bölgelerinin araştırılmasını ve çeşitliliği sağlamaktadır. Bu operatör topluluktaki her yeni bireye önceden belirlenen bir olasılıkla uygulanır. (4)

5. OPTİMUM TASARIM PROBLEMİ

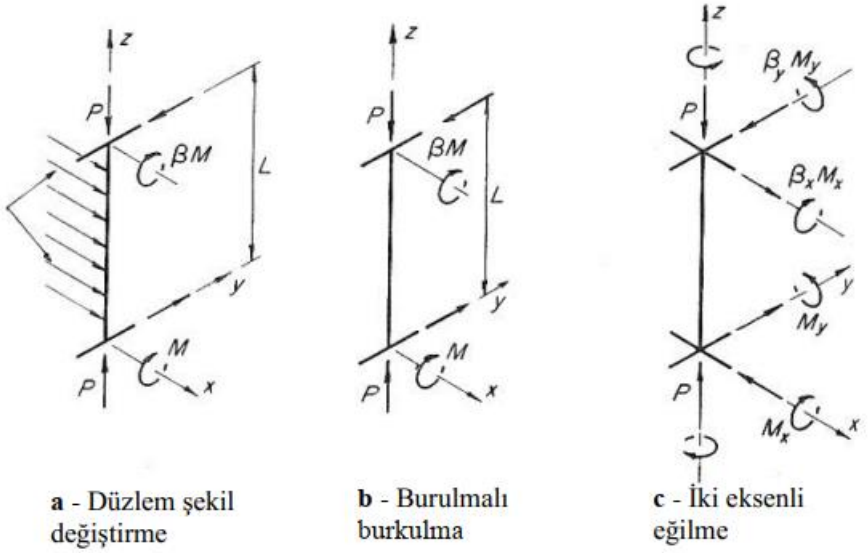
Eğilme momenti ve normal basınç kuvvetine bir anda etkilenen elemanlara kiriş-kolon adı verilir. Kiriş-kolonlar, kirişlerin yanal yük veya moment taşıma özelliği ile kolonların eksenel yük taşıma davranışlarını üzerinde birleştirir. Yapılacak olan inceleme, normal (eksenel) basınç etkisi altındaki elemanların davranışı ile sınırlandırılacaktır. Eksenel kuvvetin çekme olması durumunda, kuvvet elemanı doğrusal tutmaya yönelik bir etki oluşturacağından, nispeten daha az istenir. (21)

Kiriş-kolon davranışı üç ana başlık altında incelenir;

1) Düzlem (Tek eksenli) şekil değiştirme

2) Yanal burulmalı burkulma

3) İki eksenli eğilme



a - Düzlem şekil değiştirme

b - Burulmalı burkulma

c - İki eksenli eğilme

Şekil 1. Kiriş-kolon davranışları

Bir kiriş-kolon, zayıf ekseni etrafında eğiliyorsa ya da kuvvetli ekseni etrafında eğilirken, yanal deformasyonlar tutulu ise, bu düzlem şekil değiştirme davranışıdır. Kirişlerin eğilme ve kolonların burkulma davranışları, bu davranışa örnek olarak gösterilebilir. Kuvvetli ekseni etrafında eğilen fakat yanal deplasmanlara karşı tutulmayan elemanlar, eğilme düzlemi dışında eğilip burularak, burkulabilir. Kirişlerin yanal burulmalı burkulması bu davranış şekline örnektir. Genel olarak ise, kiriş-kolonlar, iki eksen etrafında da eğilip, burulabilirler. Bu iki eksenli eğilme şekli, üç boyutlu çerçeve sistemlerde görülür ve kiriş eğilmesi ve kiriş ve kolonların burulma davranışları arasındaki etkileşimi içerir. (17) (20)

Çerçeveler de, sistemi meydana getiren elemanların özelliklerine göre davranış gösterirler. Sadece düğüm noktalarından yüklenen bir basit çerçevede, asal eğilmeler meydana gelmez ve elemanlar basit çekme ve basınç elemanları şeklinde çalışır. Asal eğilme oluşan çerçevelerde ise davranış, düğüm noktalarının durumuna ve sistemin 2 boyutlu çalışıp çalışmadığı kabulüne göre belirlenir. Basit düğüm noktaları ile birleştirilmiş çerçevelerde, elemanlar arası moment aktarımı ihmal edilecek kadar az olduğundan, elemanlar tekil kiriş-kolon olarak ele alınabilir. Bağlantıların rijit veya yarı rijit olması durumunda ise elemanlar arasında ciddi moment aktarımları oluşacağından, elemanlar arasındaki etkileşim dikkate alınmalıdır. (22)

Bu tip bir çerçeve, düzlem yükler etkisinde ve 2 boyutlu kabul ediliyorsa, taşıyıcılık özelliğini, düzlem eğilme veya burulmalı burkulma tipi şekil değiştirmeler sonucunda kaybecektir. Bununla birlikte, çerçeve veya yükleme durumu üç boyutlu ise, ayrı ayrı elemanların burulma veya iki eksenli eğilme davranışı göstermesine bağlı bir deformasyon modunda taşıyıcılık özelliğini kaybedecektir.

Çift yönlü eğilmeye ve eksenel yüke birlikte maruz kalan çift ve tek simetri eksenli elemanla için kullanılacak olan kiriş kolon tasarımı etkileşim denklemleriden AISC şartnamesi Bölüm H'da bahsedilmiştir. (23) (24)

AISC denklem H1-1a

$$\frac{P_u}{\phi P_n} \geq 0.20 \text{ ise, } \frac{P_u}{\phi P_n} + \frac{8}{9}\left(\frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) \leq 1.0 \quad (1)$$

AISC denklem H1-1b

$$\frac{P_u}{\phi P_n} \leq 0.20 \text{ ise, } \frac{P_u}{2\phi P_n} + \frac{8}{9}\left(\frac{M_{ux}}{\phi_b M_{nx}} + \frac{M_{uy}}{\phi_b M_{ny}} \right) \leq 1.0 \quad (2)$$

Kullanılmıştır. Burada;

P_u= Yük katsayıları ile artırılmı eksenel basınç veya çekme kuvveti veya gerekli eksenel dayanım

ϕP_n =Basınç tasarım dayanımı veya çekme tasarım dayanımı

M_{ux}= Elemanın x-ekseni yönündeki (kuvvetli eksen) yönündeki yük katsayıları ile artırılmış eğilme momenti

M_{uy}= Elemanın y- ekseni(zayıf eksen) yönündeki yük katsayıları ile artırılmış eğilme momenti

$\phi_b M_{nx}$ = Elemanın kuvvetli eksen yönündeki eğilmede yük taşıma kapasitesi

ϕ_b = Elemanın kuvvetli eksen yönündeki eğilmede yük taşıma kapasitesi

YDKT için

ϕ_b : Eğilme momenti etkisi için dayanım katsayısı,(=0.90).

ϕ_c : Basınç etkisi için dayanım katsayısı,(=0.90).

GKT için

Ω_b : Eğilme momenti etkisi için güvenlik katsayısı,(=1,67).

Ω_c : Basınç etkisi için güvenlik katsayısı,(=1,67).

Her iki ucunda da desteklenen ve önkusuru bulunan kiriş-kolona eksenel bir basınç yükü uygulandığında ek momentler ortaya çıkacaktır. $P-\delta$ etkisi olarak anılmaktadır. Şekilde gösterilen serbest cisim etrafında momentler toplandığında

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M - P\delta - (W/2)(L/2) = 0 \quad (3)$$

$$M = \frac{WL}{4} + P\delta \tag{4}$$

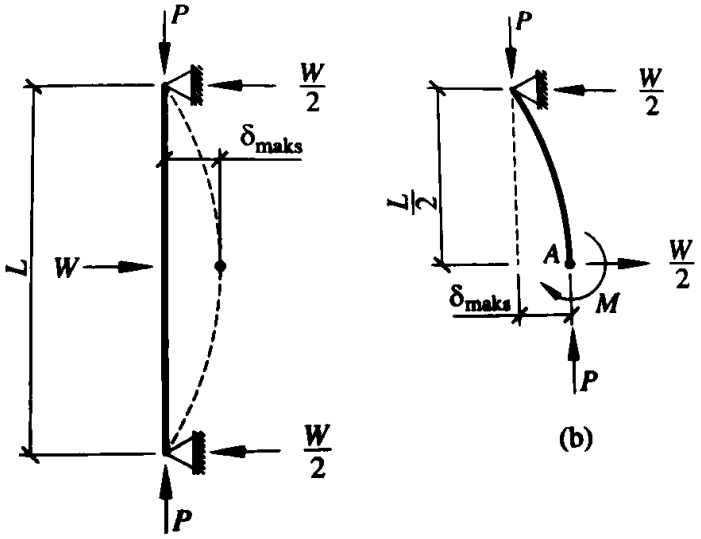
Denklemindeki WL/4 terimi birinci mertebe momentidir; İkinci terim ise P-d momenti olarak bilinmektedir. İkinci mertebe için gerekli toplam moment aşağıdaki gibi yazılır;

$$M = B_l \left[M_{unt} \right] \tag{5}$$

Buradaki;

B= kolonun yanal ötelenmiş uçları arası yer değiştirmeye bağlı moment artırımı katsayısı

M_{unt} =Birinci mertebe, öteleme önlenmiş(yanal yer değiştirmenin olmadığı) momenttir.



Şekil 2. P-S etkisindeki moment artımı

Eksenel kuvvet ve eğilmenin ortak etkisi için kullanılan etkileşim denklemi eksenel çekme ve eğilmenin ortak etkisi altında olan kiriş-kolonların analizi ve tasarımında da kullanılabilir.

Çekme ve eğilmenin rtak etkisindeki çelik elemanların tasarımı, elemanın ön boyutlanmasının tahmin edilmesiyle başlayan ve bu seçimin kotrol edilmesiyle devam eden bir deneme yanılma yöntemidir. Tasarımın yolu aşağıdaki gibi belirlenmiştir. (25) (17) (22)

1. Artırılmış eksenel çekme yükü ile birlikte her iki eksen etrafındaki artırılmış momentler, M_{ux} ve M_{uy} hesaplanır. Eğer dışmerkezlilikleri e_x ve e_y biliniyorsa etki eden artırılmış momentler ;

$$M_{ux} = P_u e_x \text{ ve } M_{uy} = P_u e_y \quad (7)$$

Olarak hesaplanır.

2. Elemanın ön boyutu için başlangıç değeri bulunur ve tasarım çekme dayanımı $\phi_t P_n$ hesaplanır.
3. Her iki eksen etrafında tasarım eğilme dayanımını, ϕM_{nx} ve ϕM_{ny} hesaplanacaktır.
4. Eğer $P_u / \phi_t P_n \geq 0.2$ ise etkileşim denklemleri kullanılmalıdır.
5. Etkileşim değeri ≤ 1.0 ise kesit yeterli bulunacaktır.

6. TASARIM ALGORİTMALARI

6.1 Tabu Arama Yöntemi ile Optimum Tasarım Algoritması

1) Rastgele bir kesit seç. Bu kesiti mevcut tasarım olarak kabul et. Buna göre Çerçeve Analizlerini Sap2000 OAPI ile yaparak, deplasman ve kesit tesirlerini elde et. (1)-(7) denklemlerini kullanarak sınırlayıcı olmayan amaç fonksiyonunu elde et.
2) Rastgele bir kesit seç. Önceki tasarım değişkenlerini sabit tutarak seçilen kesitin yerine kesit listesindeki belirli sayıda komşu kesiti atayarak komşu tasarımları elde et.
3) Her tasarım için sınırlayıcısız amaç fonksiyonunu elde et. Bu amaç fonksiyonları içerisinde minimum olanı seç ve bunun için tabu olma durumunu kontrol et. Tabu olmayan amaç fonksiyonunu mevcut tasarım olarak ata. Tabu ise aspirasyon kriterini sağlaması olasını kontrol et. Aspirasyon kriteri sağlanıyorsa mevcut tasarım yerine ata.
4) Her tasarım değişkenini kontrol etmek şartı ile bir önceki adamı hepsi için tekrarlayıp iterasyonu sonlandır. Durdurma kriteri sağlanıncaya kadar 2-3 işlemlerini tekrarla. İşlem sonlandığında optimum tasarım elde edilir.

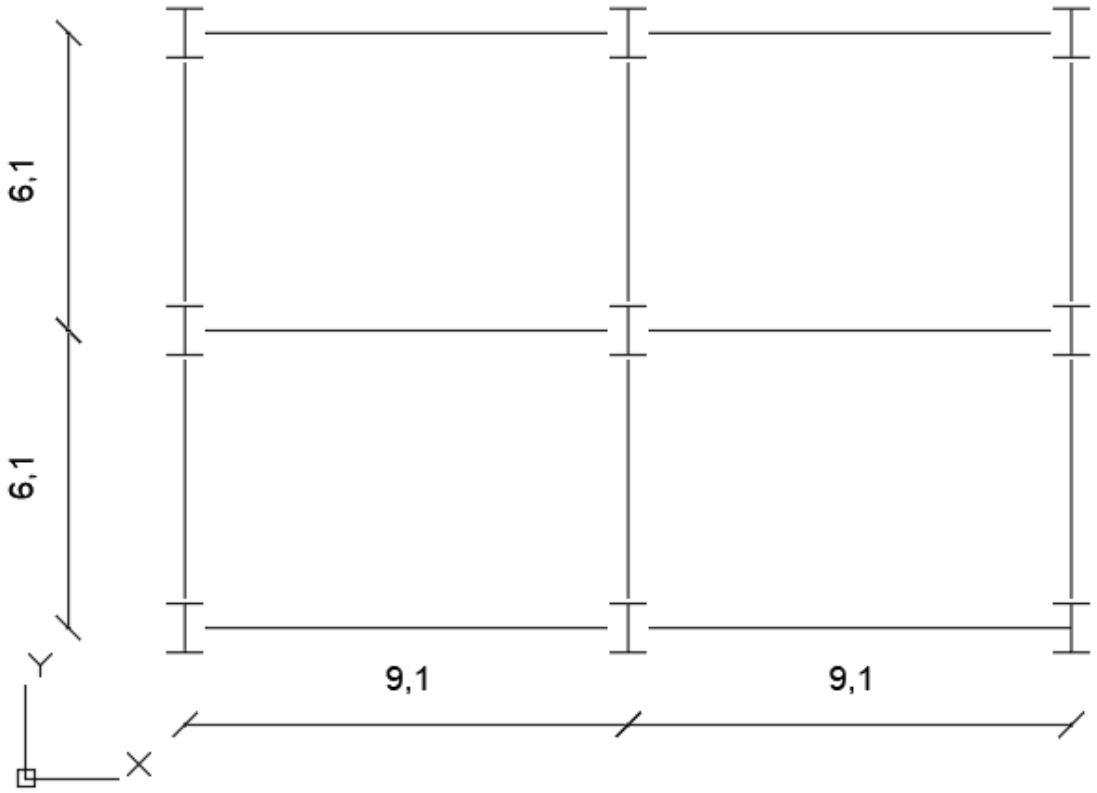
6.2 Genetik Algoritma Yöntemiyle Optimum Tasarım Algoritması

1) Tasarım değişkenlerini kodla. Dizi uzunluğunu tanımla ve topluluk oluşturmak için kesit belirle.
2) Rastgele sayılardan bir başlangıç topluluğu oluştur.
3) Her bireyin kodlanan tasarım değişkenlerini dönüştürerek kesit listesindeki sıra numarasını bul ve bu kesit ile eşleştir.
4) Belirlenen kesitler için her bireyin analizini Sap2000 OAPI bağlantısı ile yapıp kesit tesir diyagramları ve deplasmanları belirle.
5) Her birey için için amaç fonksiyonunu kullanarak topluluktaki minimum ve maksimum değerleri belirle.
6) (1)-(7) denklemleriyle her bireyin uygunluğunu hesapla.
7) Üreme operatörünü uygula. Her bireye uygunluk faktörü ile orantılı olarak kopyalayarak eşleşme havuzuna gönder. Uygun olmayan bireyleri topluluktan çıkar. Yeni üretilen kopyaları rastgele eşleştir ve her çifte üniform çaprazlama uygulayarak yeni bireyleri ve bunlardan oluşan yeni topluluğu elde et.
8) Yeni topluluğa Mutasyon operatörü uygula
9) Yeni topluluğu başlangıç toplumu olarak belirle ve 3-9 arası işlemleri maksimum uygunluk sağlanana kadar devam et. İşlem bitiminde en uygun sistemi verir.

7. SAYISAL UYGULAMA VE SONUÇ

Bu çalışmadaki uygulamada malzeme çelik olup elastisite modülü $E=2\times10^8$ kN/m^2, akma dayanımı $\sigma a=248211.28$ kN/m^2, özgül ağırlığı $\rho=76.8195$ kN/m^3 olarak alınmıştır. Tasarımda Amerikan geniş başlıklı I profiller (W kesitler) kullanılmıştır.

Uzay çerçeve sistemde sabit yükler 3.44 kN/m^2 , hareketli yükler= 2.4 kN/m^2, çatı yükleri 2.4 kN/m^2 alınmıştır. Çerçevelere etki eden rüzgarın pozitif yapı Y doğrultusunda estiği kabul edilmiştir. Kat yüksekliği 3.6 m Rüzgar yükü W=C×q bağıntısıyla hesaplanmıştır. Bu bağıntıda; W rüzgar yükü, C yapı cinsine göre verilen bir katsayı olup basınç yüzünde +0.8, emme yüzünde se -0.4 alınmıştır, q hız basıncı değeri olup çerçevenin zeminden yüksekliğine göre belirlenir. Hesaplanan rüzgar yükü yapı Y doğrultusunda mesnetler haricindeki dış kiriş-kolon üğümlerine etki ettirilmiştir. Verilen uygulamalarda kolonların eğilmede kuvvetli eksenleri yapı Y doğrultusundadır. Şekil 3'teki 21 elemanlı uzay çerçeve 5 gruba ayrılmıştır. 1'nci grup; X doğrultusundaki dış kirişler, 2'nci grup; Y doğrultusundaki dış kirişler, 3'ncü grup; X doğrultusundaki iç kirişler, 4'ncü grup; Y doğrultusundaki iç kirişler, 5'nci grup; köşe kolonlar, 6'nci grup; kenar kolonlar, 7'nci grup; iç kolonlar'dır. Bu çerçeve için optimum tasarım sonuçları Çizelge 1'de verilmiştir.



Şekil 3. 21 Elemanlı Uzay Çerçeve

Çizelge 1. 21 Elemanlı Uzay Çerçevede Optimum Tasarım Sonuçları

Gruplar	TA	GA
1	W12×35	W12×35
2	W14×38	W14×38
3	W12×50	W12×50
4	W16×40	W16×36
5	W16×40	W14×48
6	W16×40	W16×40
7	W21×62	W24×68
Ağırlık(kg)	6354.25	6521,65

8. SONUÇLAR

1) TA metodunda GA'ya göre daha hafif tasarım elde edilmiştir.
2) TA metodunda komşu tabu derinliği seçilmesinde; bu konuda yapılan bir çalışma (26) komşu derinliğinin ± 6 olmasının en ideal tasarımların elde edildiğini göstermiştir. Tabu listesi
3) TA metodunda tabu listesinin uzun seçilmesi durumunda sonuçların pek çok aynı olduğu görülmüş ve bu tasarımların en uygun seçenek olmayabileceği görülmüştür. Listenin uzun seçilmesi durumunda neredeyse tüm hareketlerin tabu oluşu tüm çözüm uzayından uzakta lokal çözümlere odaklanılmasına sebep olmuştur.
4) GA'da çaprazlama olasılığı 0.90, mutasyon olasılığı 0.01 alınmıştır. Daha küçük çaprazlama ve daha büyük mutasyon olasılığı optimum çözüme yakınsamayı geciktirmiştir.
5) Bu çalışmada geometrik bakımdan lineer olmama göz önüne alınmakla beraber malzeme lineer-elastik kabul edilmiştir. Daha sonra yapılacak çalışmalar için geometrik açıdan non-lineer olma durumuna ek olarak malzemeninde non-lineer durumu göz önüne alınabilir

KAYNAKLAR

1. Çelik, Cihan ve Yorgun, Cavidan. *Çelik Kiriş-Kolon Elemanların EUROCODE 3 VE AISC 360-05 Standartlarına GÖre İncelenmesi.* İstanbul : İstanbul Teknik Üniversitesi, 2011.
2. Ülker Peker, F. *Kompozit Çelik I-Kiriş Köprülerin Sezgisel Algoritma Teknikleriyle. Doktora Tezi*, Fırat Üniversitesi.
3. Şeker, Tacettin ve Aldemir , Ünal. Düzlemsel Çelik Çerçevelerin Genetik Algoritma İle Optimizasyonu. İstanbul : İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 208.
4. Değertekin, S. Özgür, Ülker, Mehmet ve Hayalioğlu, M. Sedat. Uzay Çelik Çerçevelerin Tabu Arama ve Genetik Algoritma Yöntemleriyle Optimum Tasarımı, İMO Teknik Dergi, 2006. 259.
5. Tabu search. *Wikipedia The Free Encyclopdeia.* [Çevrimiçi] https://en.wikipedia.org/wiki/Tabu_search.

6. Glover, Fred. Future Paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence. 1986.

7. Bland, J.A. ve Dawson, G.P. Tabu Search and Design Optimization. 1991, Cilt 23, 3.

8. Hu, N. Tabu search method with random moves for globally optimal design. 1992.

9. Dhingra, A.K. ve Bennage, W.A. Discrete and Continuous Variable Structural Optimization Using Tabu Search. 1995, 24, s. 177-196.

10. Costamagna, E., Fanni, A. ve Giacinto, G. A Tabu Search algorithm for the optimisation of telecommunication networks. 1998, Cilt 106, s. 357-372.

11. Tosun, Salih, ve diğerleri. Kuru Tip Transformatörün Tabu Arama Algoritması Yöntemi ile Ağırlık Optimizasyonu. 2012, Cilt 1, 1, s. 17-26.

12. Karaboğa, Derviş. *Yapay Zeka Optimizasyon Algoritmaları.* Ankara : Nobel Yayın, 2018.

13. Hollan, J.H. *Adaptation in Natural and Artifical Systems.* Ann Arbor : University of Michigan Press, 1975.

14. Artar, Musa ve Daloğlu, Ayşe. Çelik Sitemlerin Genetik Algoritma ile Dinamik Sınırlayıcılı Optimizasyonu. 2014, Cilt 3, 1, s. 9-24.

15. Deb, K. ve Gulati, S. Design of Truss Structures for Minimum Weight using Genetic Algorithms. 2001.

16. Doğan, V. ve Daloğlu, A. Genetik Algoritma ile Üç Boyutlu Kafes Sistemlerin Şekil ve Boyut Optimizasyonu. 2006, 251, s. 3809-3825.

17. Aghayere , Abi O. ve Vigil, Jason. *Structural Steel Design A Practice-Oriented Approach.* İstanbul : Nobel, 2018.

18. Englekirk, R. *Steel Structures, Controlling Behaviour Through Design.* Toroto : John Wiley & Sons Inc, 1994.

19. Galambos, T. V., Lin, F. J. ve Johnston, B. G. *Basic Steel Design with.* New Jersey : Prentice Hall, 1996.

20. ALBAYRAK, İnş. Müh. Erkal. *Kiriş-Kolonların Tasarım Prensipleri Ve Lrfd, Eurocode 3 Ve Ts 4561 Şartnameleri Açısından Hesap Esaslarının İncelenmesi.* İstanbul : İstanbul Teknik Üniversitesi, 2005.

21. *American Institute of Steel Construction.* AISC. 14, Chicago : Steel Construction Manual, 2011.

22. Nair, R. Shankar. *Simple and DİrectModern Steel Construction 43-44.*

23. AISC. Specification for Structural Steel Buildings/AISC 360-10. 2010.

24. *Çelik Yapıların Tasarım, Hesap Ve Yapımına Dair Esaslar.* 2016.

25. Abu-Saba, Elias G. *Design of Steel Structures.* New York : 1995.

26. Değertekin, S.O. Lineer Olmayan Uzay Çelik Çerçevelerin Tabu Arama. Doktora Tezi, Elazığ : Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.

27. Özgen , A. ve Bayramoğlu, G. *İnşaat Fakültesi Yapı Anabilim Dalı Çelik Yapılar.* İstanbul : İ.T.Ü, 2002.

28. Şeker, Tacettin ve Aldemir , Ünal. *Düzlemsel Çelik Çerçevelerin Genetik Algoritma İle Optimizasyonu.* İstanbul : İstanbul teknik Üniversitesi, 2008.

İKİ BOYUTLU DOKUNMUŞ KUMAŞ TAKVİYELİ KOMPOZİTLERİN DÜZLEM DIŞI MEKANİK ÖZELLİKLERİNİN ATKILI ÖRME KUMAŞ İLAVESİ İLE İYİLEŞTİRİLMESİ

Merve Deniz Topalca, Bilal Harun Küplü, Elif Aydoğdu ve Mehmet Erdem İnce
Gaziantep Üniversitesi, Tekstil Mühendisliği Bölümü, Gaziantep

ABSTRACT

Fiber reinforced polymer (FRP) composite materials can be designed on demand and exhibit a high level of specific mechanical properties. Due to their integrated structure and design ability, textile fabrics, especially woven fabrics are widely used in the FRPs. The design of woven fabrics offers the advantage of controllable in-plane mechanical properties. However, the composite material from multi-layer 2D woven fabrics exhibits low out-of-plane strength and creates delamination problem. Weft knitted fabric differs from other textile fabrics in terms of their low cost, high production speed and the properties of the fabric. Weft knitted fabrics exhibit a high level of out-of-plane mechanical properties when converted into layered composite products. On the other hand, the weft knitted fabrics do not have yarn extending in a certain direction that makes them disadvantageous in in-plane mechanical properties. In this study, it is planned to modify the impact strength of composite material reinforced with multi-layered woven fabric by adding weft knitted fabric.

Keywords: glass yarn; aramid yarn; weft knitted fabric; woven fabric, polymer composite, impact strength.

ÖZET

İsteğe göre tasarlanabilir olmaları ve yüksek seviyede spesifik mekanik özellik sergilemeleri lif takviyeli polimer (LTP) kompozit malzemeleri diğer malzemelerden farklı kılmaktadır. Bütünleşik yapıları ve tasarlanabilir olmalarından ötürü, liflerden oluşturulmuş tekstil kumaşları, özellikle dokuma kumaşlar LTP kompozit malzeme üretiminde çok yaygın kullanılmaktadır. Dokuma kumaşların tasarlanabilir olmaları kontrol edilebilir düzlem içi mekanik özellik avantajı sunmaktadır. Ancak çok katmanlı iki boyutlu dokuma kumaşlardan oluşan kompozit malzeme düşük düzlem dışı mukavemet sergilemekte ve delaminasyon problemi yaratmaktadır. Atkılı örme kumaş üretim tekniği düşük maliyeti, yüksek üretim hızı ve ortaya koyduğu kumaşın sergilediği özellikler itibariyle diğer tekstil kumaş üretim tekniklerinden ayrılmaktadır. Atkılı örme kumaşlar katmanlı kompozit ürüne dönüştürüldüklerinde yüksek seviyede düzlem dışı mekanik özellik sergilemektedir. Diğer taraftan atkılı örme kumaşların belli bir yönde uzanan ipliğe sahip olmamaları onları düzlem içi mekanik özelliklerde dezavantajlı kılmaktadır. Bu çalışmada çok katmanlı dokuma kumaş ile güçlendirilmiş kompozit malzemenin çarpma dayanımının atkılı örme kumaş ilavesi ile modifiye edilmesi planlanmaktadır.

Anahtar kelimeler: cam ipliği; aramid ipliği; atkılı örme kumaş; dokuma kumaş, polimer kompozit, çarpma dayanımı.

GİRİŞ

Günümüzde faaliyet gösteren savunma, havacılık, taşıma ve denizcilik gibi endüstrilerin malzeme ihtiyaçlarını karşılama noktasında geleneksel malzeme tipleri tek başına yetersiz kalmaktadır. Bu endüstriler birden fazla malzeme grubunun aynı çatı altında bir araya geldiği, isteğe göre fiziksel ve mekanik özellikleri tasarlanabilen, hafif, mukavim, çarpmaya/çürümeye/aşınmaya dayanıklı kompozit malzemeleri tercih etmektedirler [1].

Kompozit malzemeler grubunda "lif takviyeli polimer (LTP) malzemeler" önemli bir yere sahiptir. LTP'de lifler kompozit malzemeye mukavemet sağlamaktadır. Düşük hacimsel yoğunluklu polimer matris ise lifleri kuşatıp onları planlanan formda tutmaktadır. Polimer matris ayrıca lifleri çevresel etkilerden (çürümeden, aşınmadan) korumakta ve uygulanan yükü etkin bir şekilde liflere transfer etmektedir. LTP malzemelerin özgül (hacimsel yoğunluk ile normalize edilmiş) mukavemet özelliklerinin metallerden oldukça yüksek olması birçok endüstriyel uygulamada onları metal malzemenin alternatifi kılmaktadır [2-5].

LTP malzemelerde lifler kısa veya uzun formda kullanılabildiği gibi belli bir tekstil yüzeyi (kumaşı) formunda da kullanılabilmektedir. Tekstil kumaşlarının lif formundaki takviyelere karşı sağladıkları avantajlar arasında: işlenme kolaylığı, isteğe göre tasarlanabilme, birbirine kenetlenmiş ipliklerden müteşekkil olmalarından dolayı yüksek çarpma dayanımı özelliği sergilemeleri sayılabilir [6-10]. İki boyutlu (2D) dokunmuş kumaşlar bu bağlamda kompozit üretiminde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. 2D dokunmuş kumaşlar istenen nihai kompozit ürün kalınlığına ulaşmak amacıyla üst üste istiflenmekte (laminasyon) ve bu istif reçine ile birleştirilmektedir. Bu şekilde oluşturulan çok katmanlı bir kompozit malzeme kalınlığı yönünde bir kuvvete (çarpmaya) maruz kaldığında, katmanları bir arada tutan zayıf mekanik özelliklere sahip reçine olduğu için, katlar birbirinden ayrılmakta ve delaminasyon problemi meydana gelmektedir.

Atkılı örme kumaşın birbiri içinden üç boyutlu geçerek kenetlenmiş ilmeklerden oluşan gözenekli yapısı ve yumuşak tuşesi, kumaş katları birbiri üzerine istif edilip sıkıştırıldığında komşu kumaş katlarının birbiri içine geçmesini (yuvalanmasını/nesting) sağlamaktadır [11,12]. Birbiri içine yuvalanmış ve kalınlık yönünde deformasyona izin veren atkılı örme kumaş istifinin reçine ile muamele edilip kompozite dönüştürüldüğü ürün de haliyle yüksek seviyede katmanlar arası mekanik özellik (maksimum çarpma kuvveti, deformasyon ve çarpma enerjisi emilimi) sergilemektedir. Bu bağlamda yapılan literatür çalışmaları atkılı örme kumaşların diğer kompozit takviye kumaşlarından daha yüksek çarpma (darbe / düzlem dışı) dayanımına sahip olduğunu göstermektedir [13-15]. Ancak yapılarında belli bir yönde yerleşmiş iplik grubuna sahip olmayan atkılı örme kumaşlar düşük seviyede düzlem içi mekanik performans sergilemektedir. Düzlem içi mekanik özelliklerin kritik olduğu uygulamalarda ya tek yönlü lifler (unidirectional fibers / prepregs) ya da dokuma kumaşlar tasarıma göre istenilen yönlerde istiflenerek kullanılmaktadır.

İki boyutlu dokuma kumaşlar kompozit endüstrisinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Ancak bu kumaşlardan üretilen kompozitler katmanlar arasındaki düşük mekanik özellikli reçine varlığından (katmanları birbirine bağlayan bağlayıcı iplik eksikliğinden) ötürü düşük darbe dayanımı sergilemekte ve delaminasyon (katların birbirinden ayrılması) problemini üretmektedirler. Bu sorunu çözmeye yönelik olarak geliştirilen üç boyutlu dokuma kumaşlar ise düşük üretim hızları ve yüksek maliyetlerinden ötürü ticari olarak yaygınlaşamamaktadırlar. Diğer yandan atkılı örme kumaşlar ise kumaş katları arası yuvalanmaya izin vererek delaminasyon problemini engellemekte ve yüksek seviyede darbe enerjisi emebilmektedirler.

Bu çalışmanın amacı: iki boyutlu dokunmuş kumaşlardan üretilmiş polimer matrisli kompozit malzemelerin zayıf olan düzlem dışı mekanik özelliklerinin atkılı örme kumaş takviyesi ile

geliştirmektir. Bu bağlamda tamamen dokuma kumaş katlarından üretilmiş ve deneysel çalışma kavramları bağlamında kontrol numunesi olarak adlandırılan kompozit numunesinin çarpma dayanımı, belirlenmiş dokuma kumaş katlarının yerini örme kumaş katlarının aldığı dokuma & örme kumaş hibrit kompozit (muamele) numunelerinin çarpma dayanımı ile karşılaştırılacaktır. Hedef: düzlem dışı mekanik özellikleri zayıf olan 2D dokunmuş kumaş takviyeli kompozitlerin bu özelliklerini atkılı örme kumaş ilavesi ile iyileştirmektir.

MALZEMELER ve METOTLAR

Bu çalışma kapsamında kullanılacak olan cam iplik bez ayağı dokuma kumaş (Şekil 1) piyasada faaliyet gösteren Omnis Kompozit Ltd. Şti kompozit firmasından temin edilmiştir. Kumaş istifi sonucunda belli bir kalınlık ve mukavemete ulaşmak amacı ile kumaşın gramajı 300 g/m^2 olarak seçilmiştir.



Şekil 1. Bezayağı cam iplik dokuma kumaşın yakından çekilmiş fotoğrafı.

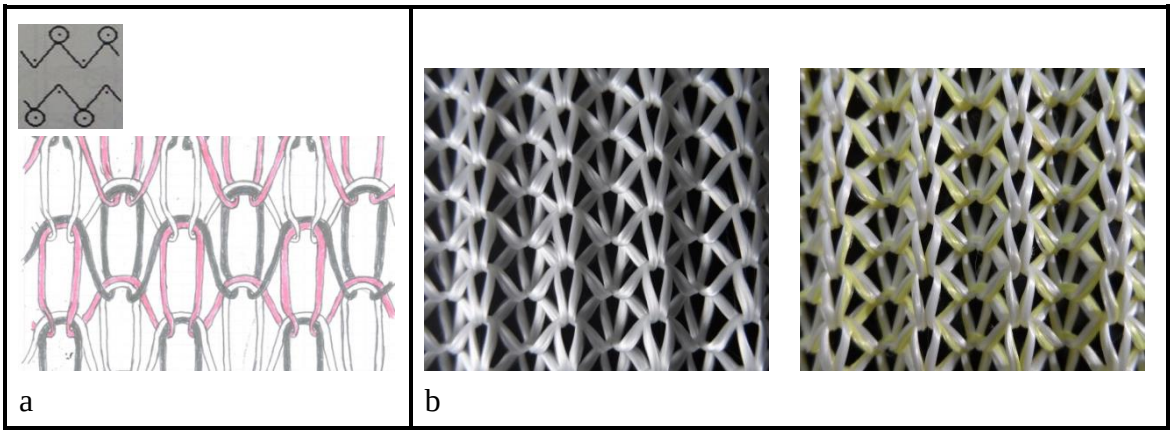
Bu çalışmada: cam ipliği olarak, tek kat iplik numarası 136 tex olan, sonsuz elyaflı, her bir lifinin çapı 9 mikron olan E-camı iplik; aramid ipliği olarak da 1500 denye aramid ipliği kullanılmıştır (Şekil 2). Örme kumaşlar, Gaziantep Üniversitesi, Tekstil Mühendisliği Bölümü, Kumaş laboratuvarında bulunan: Brother KH-864 marka, elle çalışan, her bir iğne yatağında bir inç mesafede beş adet iğne barındıran, atkılı düz örme kumaş üretim makinesinde iğne yataklarının her ikisini de kullanmak sureti ile üretilmiştir (Şekil 3). Kumaş mimarisinde askı ilmekler barındıran örgülerin daha iyi mekanik özellik sergilediğini göstermiştir. Dolayısıyla buradaki çalışma için kullanılacak örgü kumaşın mimarisi için de balıkçı ribana uygun görülmüştür (Şekil 4).



Şekil 2. Kumaş üretiminde kullanılan cam ve aramid iplikleri



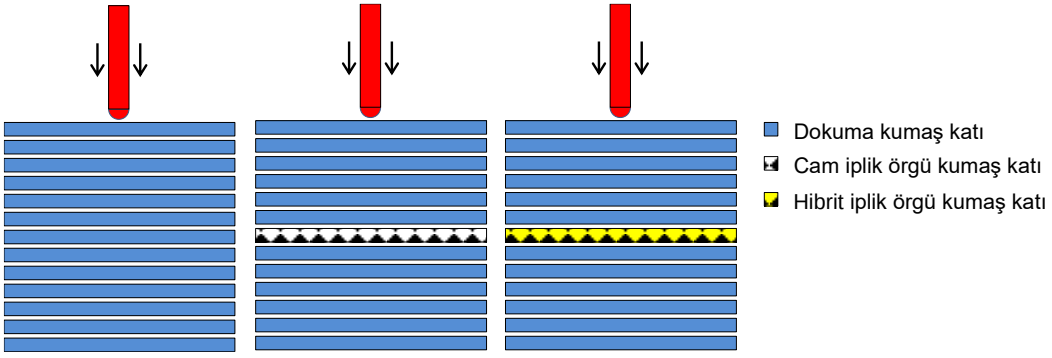
Şekil 3. Atkılı düz örme makinesinde balıkçı ribana hibrit (cam/aramid) iplik kumaş üretilirken çekilmiş fotoğraflar



a b

Şekil 4 Balıkçı ribana atkılı örme kumaş mimarisinin; teknik gösterimi ve üç boyutlu elle çizilmiş görüntüsü (a), örgü makinesi üzerinde cam ve hibrit (cam/aramid) iplikten üretilirken çekilmiş fotoğrafı (b)

Bu çalışma kapsamında incelenmek üzere ele alınan faktörler atkılı örme kumaş makinasına beslenen ipliğin kompozisyonu ve kumaş tipidir. Toplam kumaş kat sayısı olarak 13 tespit edilmiştir. Kontrol numunesi 13 kat dokuma kumaşın üst üste istiflenmesi neticesinde elde edilmiştir. Örme makinesine ya üç kat cam ipliği beraber (cam iplik) formunda, ya da iki kat cam ipliğinin yanına üçüncü kat olarak aramid ipliği (hibrit iplik) formunda beslenmiştir. Örme kumaş katı 13 katlı kumaş istifinin tam ortasında (7. kumaş katı olarak) pozisyon almıştır.



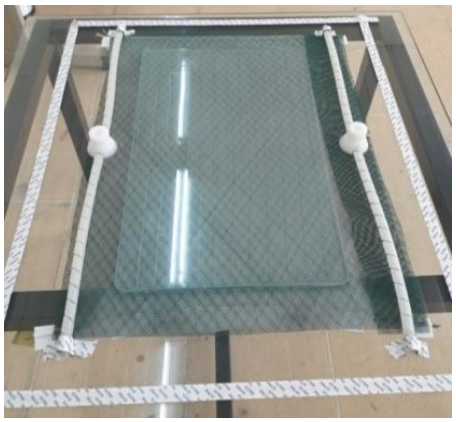
Şekil 5. Üretilen kompozit panellerinin farklı kat dizilimleri

Çalışma kapsamında polyester reçine kullanılması planlanmaktadır. Bu bağlamda yerel bir perakendeciden (Güneşler Polyester – Elyaf, Gaziantep), Poliya Polyester Sanayi ve Ticaret Ltd. Şti. firması tarafından üretilen, CE 92 ticari isimli, ortoftalik esaslı, CTP (cam takviyeli plastik) tipi polyester reçine ve sertleştirme bileşenleri (% 6'lık Kobalt çözeltisi ve Metil Etil Keton Peroksit) sarf malzemesi alınmıştır.

Kumaşlar örme makinesinden alındıktan sonra boyut değişimi (en boy yönünde daralma) geçirmişlerdir. Dolayısıyla makine üzerinde iken net bir şekilde görülen kumaş mimarisi (deseni), kumaş makineden alınıp masaya yerleştirildiğinde görünmez hale gelmektedir. Aslında bu durum örgü kumaşların doğasında olan, kolayca gerdirilebilir ve şekil alabilir olmasını sağlayan bir özelliktir. Ancak kumaşın boyut değişimi geçirmiş haliyle kompozit üretimine dâhil edilmesi hem uniform üretimi hem de kumaş mimarisi etkisini tam olarak gözlemlememizi olumsuz yönde etkileyeceğinden, kumaşlar üretilirken kumaş başına ve kumaş sonuna kumaş eni yönünde telli başlangıç tarakları yerleştirilmiştir. Kumaş başına yerleştirilen telli başlangıç tarağı yardımıyla kumaş bir ucundan reçine emdirme masasına yapıştırılmıştır. Kumaşın diğer ucunda yer alan tarağa eşit mesafelerde ağırlıklar asmak koşulu ile kumaş eşit şekilde gerdirilerek kumaş mimarisinin yeniden ortaya çıkması ve uniform (tekdüze) bir kumaş yüzeyi oluşumu sağlanmıştır. Kumaş tam olarak gerdirildikten sonra diğer kenarı da bantla masaya yapıştırılmış ve her iki kenarındaki telli taraklar kumaştan çıkarılmıştır.

Bu çalışma kapsamında kompozit üretim metodu olarak vakum yoluyla reçine emdirme işlemi kullanılmıştır. Vakum yoluyla reçine emdirme yönteminde havası tamamen boşaltılan kalıp boşluğuna atmosferin kendisi tarafından basınç uygulanır. Kuru kumaşın en son ıslatılmak istenen bölgesine bir delik açılır. Reçine akışı atmosferik basınç yoluyla (yaklaşık 101 kPa) sağlanır. Dolayısıyla bu yöntemde çift taraflı sert malzemeden imal edilmiş bir kalıba gerek yoktur. Kalıbın bir tarafının sert bir (örneğin cam) malzeme iken diğer tarafının esnek vakum naylonu olması maliyeti düşürmektedir.

Deneysel çalışma planında daha önce ifade edildiği ve Şekil 5'de gösterildiği üzere toplamda 3 farklı kumaş istifi oluşturulması planlanmaktadır. Üretilmesi planlanan kumaş istifi tipine karar verildikten sonra nihai kompozit panelinin reçine emdirme masasına yapışmasını engellemek amacı ile önceden mumlanmış (vakslanmış) cam masa üzerine kumaş katları sırasıyla serilmiştir. Atkılı örme kumaş katı bir kenarından tarak yardımıyla cam masaya yapıştırılırken diğer kenarındaki tarağa ağırlıklar asmak suretiyle gerdirilmiştir. Kumaş istifinin en üst yüzeyine önce soyma kumaşı, sonrasında ile akış filesi serilmiştir. Reçine giriş ve çıkış kenarlarına spiral borular yerleştirilmiş ve sabitlenmiştir. Reçine giriş ve çıkış spiral borularının orta noktalarına ise poliüretan konektörler yerleştirilmiştir. Oluşturulan bu yapının etrafı yapışkan zamk bant (tacky tape) ile çevrilmiştir. Yapışkan (zamk) bandın üzerine vakum naylonu serilmek suretiyle naylon altında vakum odası oluşturulmuştur. Reçine çıkış hattındaki poliüretan konektör deliği üzerindeki vakum naylonu noktasına delik açılmış ve bu delik hortum yoluyla reçine kaçış kabına oradan da vakum pompasına bağlantı yapılmıştır. Vakum pompası çalıştırılmış ve hava kaçağı olabilecek tüm noktalar elektronik sızıntı detektörü ile incelenmiştir. Tüm hava kaçakları elimine edilip tam vakum (680 - 700 mmHg) sağlanıncaya kadar sistem kontrol edilmiştir. Şekil 6'de laboratuvarımızda yapılmış olan reçine emdirme işlemi hazırlığı esnasında çekilmiş bir fotoğraf gözükmektedir.

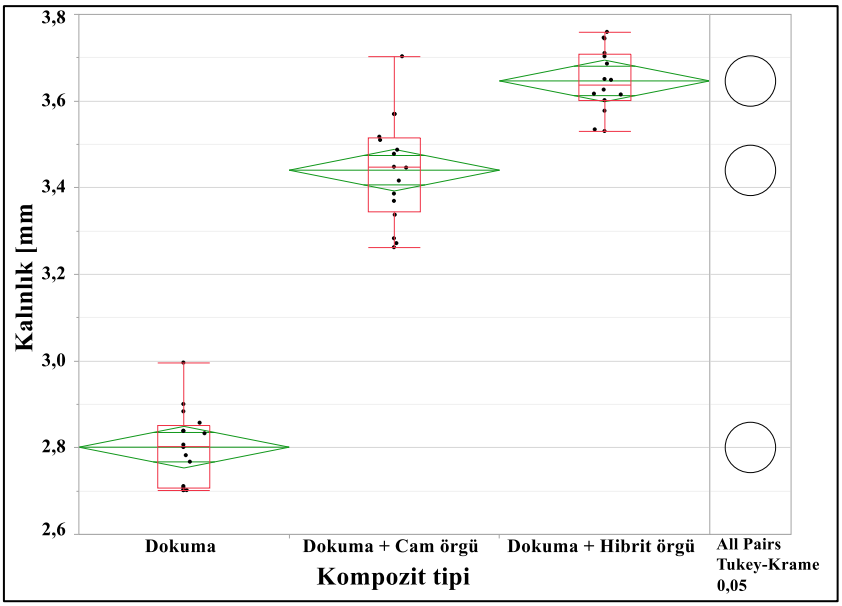


Şekil 6. Vakumla reçine emdirme işlemine hazırlık

SAYISAL SONUÇLAR

1. Kompozit çarpma numunelerinin kalınlık, alansal yoğunluk ve hacimsel yoğunluk sonuçlarının incelenmesi

Şekil 6 ve Çizelge 1 kompozit tipinin kalınlık üzerine etkisi göstermektedir. En düşük kalınlığı 13 kat dokuma kumaş kompozit sergilemiştir. Tam ortada bulunan dokuma kumaş katmanının üç kat cam iplik örme ile değiştirilmesi kalınlığı istatistiki olarak anlamlı seviyede (yaklaşık % 23 oranında) arttırmıştır. Burada en büyük etken örme kumaş katının hacimli ve üç boyutlu yapısıdır. Örme kumaşta kullanılan üç kat cam ipliğinden bir katın aramid iplik ile değiştirilmesi de kompozit kalınlığını anlamlı seviyede arttırmıştır. Nitekim her bir cam iplik katının numarası 136 (g/km) tex iken her bir aramid iplik katının numarası 1500 denye (166,67 tex) dir. Cam elyafının yoğunluğunun 2,5 g/cm^3 iken aramid elyafının yoğunluğunun da 1,4 g/cm^3 olduğu düşünüldüğünde aramid ipliği cam ipliğinden daha hacimlidir. Dolayısıyla cam ipliğine nazaran daha hacimli olan aramid ipliğinin örme kumaşa dâhil edilmesi kalınlığı yaklaşık % 6 oranında ve istatistiki olarak anlamlı bir seviyede arttırmıştır.



Şekil 6. Kompozit tipinin kalınlık üzerine etkisi

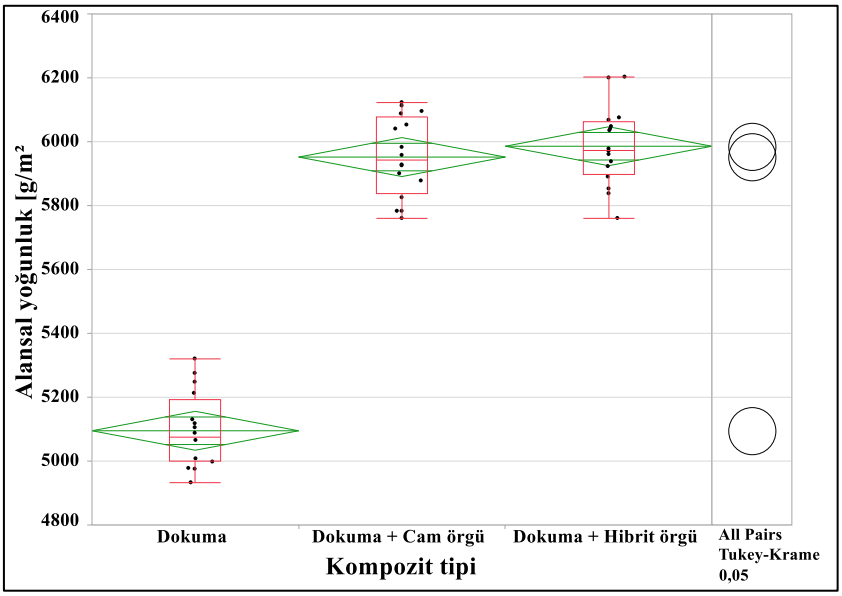
Not: Yeşil renkteki elmasların orta yatay çizgisi ortalamayı temsil ederken alt ve üst köşeleri arasındaki mesafe ise % 95'lik güven aralığını temsil etmektedir. Sağ taraftaki sütunda her bir seviye için bir adet karşılaştırma dairesi verilmektedir. Ortalamaları farklı olan seviyeleri temsil edilen karşılaştırma daireleri ya kesişmemekte ya da hafifçe kesişmektedir. Kırmızı dik kutuların yüksekliği varyasyonun sayısal bir ifadesidir.

Çizelge 1. Kompozit tipinin kalınlık üzerine etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma + Hibrit örgü	A	16	3,65	0,07	3,61	3,68	
Dokuma + Cam örgü	B	16	3,44	0,12	3,38	3,50	**<0,0001**
Dokuma	C	16	2,80	0,09	2,76	2,85	

Not: Aynı büyük harfle birleştirilmeyen seviyeler birbirinden istatistiki olarak (α = 0,05 önem seviyesine göre) önemli seviyede farklıdır. n: toplam ölçüm sayısı, ort. : ortalama, ss.: standart sapma, AL: alt limit, ÜL: üst limit. Alt ve üst limitler % 95'lik güven seviyesine göre tesis edilmiştir. p-değeri çift taraflı hipotez kurulumuna göre hesaplanmıştır. Önem seviyesi (α) 0,05 olarak alınmıştır. 0,05'den daha küçük olan p-değerleri istatistiki olarak önemli bir farkın ifadesi olup kırmızı renge boyanmıştır.

Şekil 7 ve Çizelge 2 kompozit tipinin alansal yoğunluk üzerine etkisini göstermektedir. 13 katlı dokuma kompozitin tam ortasında bulunan 7. dokuma kumaş katının çıkarılıp yerine hacimli üç kat cam iplik örme kumaşın yerleştirilmesi alansal yoğunluğu istatistiki olarak anlamlı seviyede (her bir metre kare yüzey alanı başına yaklaşık 857 gram) arttırmıştır. Her bir katı 136 tex (g/km) olan üç kat cam iplikten bir iplik katının çıkarılması ve yerine 1500 denye (166,67 tex) aramid ipliğinin yerleştirilmesi ve bu hibrit iplikle örülen kumaşın kompozit orta katmanına dâhil edilmesi kompozit alansal yoğunluğunu beklenildiği gibi arttırmıştır, ancak bu artış 3 kat cam iplik örme kumaş ilavesine kıyasla istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşamamıştır.

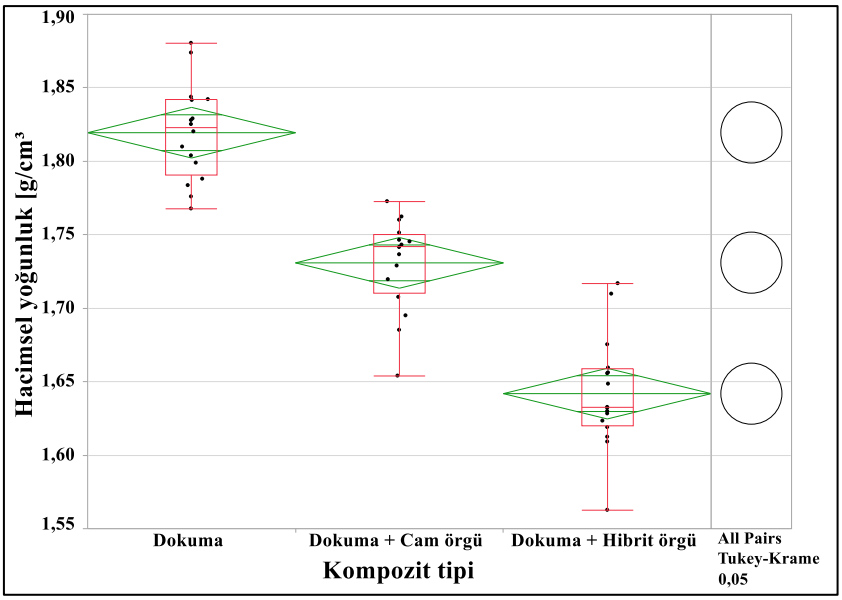


Şekil 7. Kompozit tipinin alansal yoğunluk üzerine etkisi

Çizelge 2. Kompozit tipinin alansal yoğunluk üzerine etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma + Hibrit örgü	A	16	5985,77	122,28	5920,6	6050,9	
Dokuma + Cam örgü	A	16	5951,87	124,32	5885,6	6018,1	**<0,0001**
Dokuma	B	16	5095,00	116,49	5032,9	5157,1	

Şekil 8 ve Çizelge 3 kompozit tipinin hacimsel yoğunluk üzerine etkisini göstermektedir. En yüksek hacimsel yoğunluğu (1,82 g/cm^3) 13 katlı dokuma kompozit sergilemiştir. Orta dokuma kumaş katmanın hacimli 3 kat cam iplik örme kumaş katmanı ile değiştirilmesi hacimsel yoğunluğu istatistiki olarak anlamlı seviyede düşürmüştür (1,73 g/cm^3). 3 kat cam iplikten birinin yerine aramid ipliği beslenerek örülen hibrit örme kumaş da kompozit malzemenin hacimsel yoğunluğunu istatistiki olarak anlamlı seviyede düşürmüştür (1,64 g/cm^3).



Şekil 8. Kompozit tipinin hacimsel yoğunluk üzerine etkisi

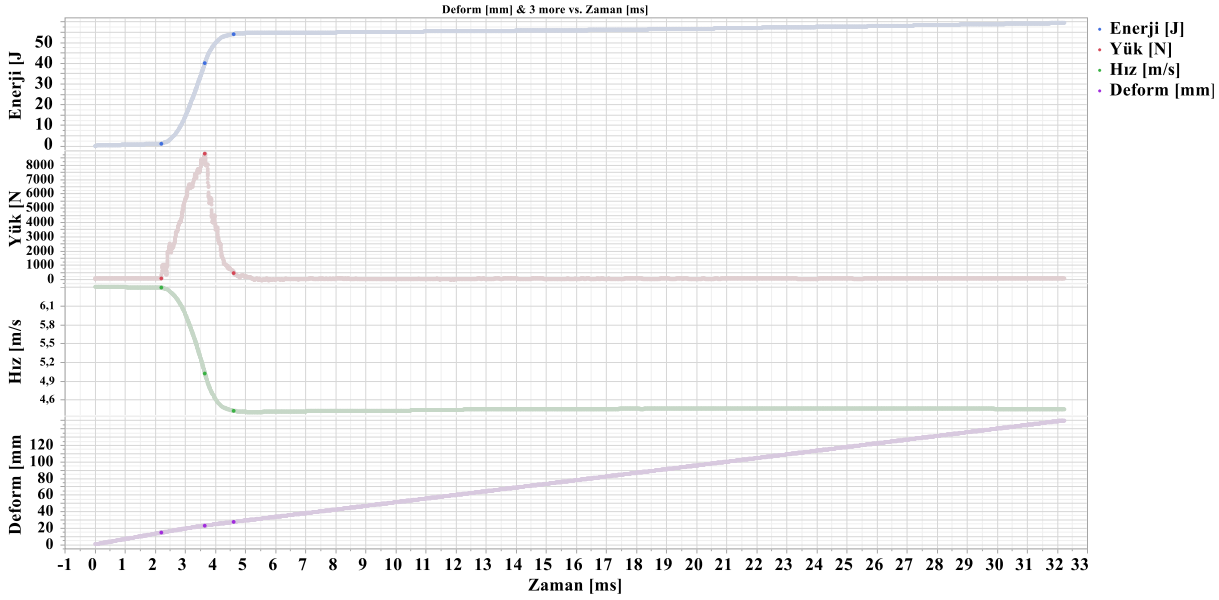
Çizelge 3. Kompozit tipinin hacimsel yoğunluk üzerine etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma	A	16	1,82	0,03	1,80	1,84	
Dokuma + Cam örgü	B	16	1,73	0,03	1,71	1,75	**<0,0001**
Dokuma + Hibrit örgü	C	16	1,64	0,04	1,62	1,66	

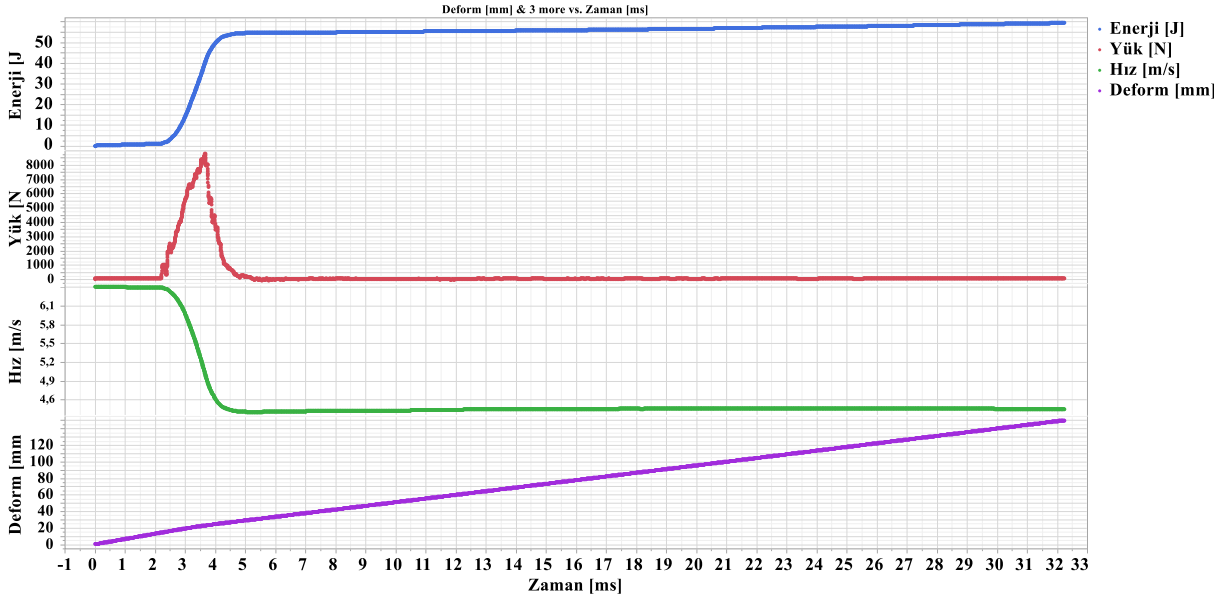
2. Kompozit çarpma numunelerinin serbest düşme kuleli çarpma testleri sonuçlarının incelenmesi

2.1. Maksimum çarpma yükü noktası özellikleri

Vurucu kafa, üzerindeki toplam 5 kg civarındaki ağırlıkla çarpma testi numune yüzeyine yaklaşık 2 metre mesafeden düşürülmüştür. Bu durumda vurucu kafanın test numunesine çarpmadan hemen önceki hızı 6,43 m/s iken enerjisi 100 J'dür. Vurucu kafanın test numunesi yüzeyine çarpmasından hemen önce veri okuma sistemi devreye girmiştir. Aynı anda zaman [ms], vurucu kafa ilerlemesi (deformasyon [mm]), vurucu kafa hızı [m/s], vurucu kafada yer alan yük sensörü tarafından ölçülen yük [N] ve yük-deformasyon eğrisi altında kalan alan (numune tarafından emilen enerji [J]) kayıt altına alınmıştır. Vurucunun kafanın test numunesine çarpmasıyla yük değeri hızlı bir şekilde artmaya başlamış ve maksimum noktaya ulaşmış ve sonrasında numune delinmesinin de gerçekleşmesi ile birlikte okunan yük değeri tekrar düşmüştür. Çarpma testinde gerçekleşen maksimum yük noktası ve o noktada gözlemlenen değerler numunenin çarpma performansı açısından önem arz etmektedir. Şekil 9' da zamana bağlı olarak bir dokuma kompozit numunesinin çarpma deneyi esnasında ölçülen parametreler ve önemli noktalar gösterilmektedir.



b

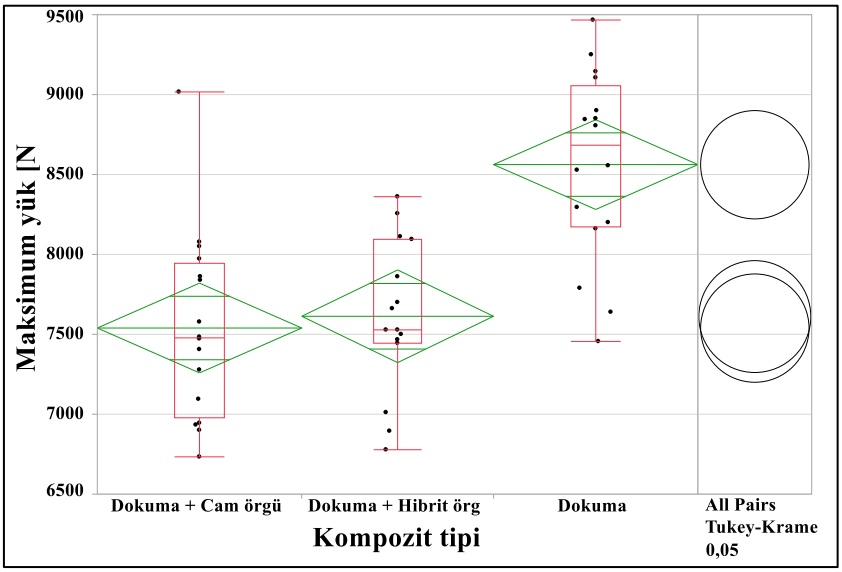


a

Şekil 9. Bir çapma testinde zaman bağlı olarak ölçülen parametreler ve testin önem arz eden noktaları

Kompozit tipi maksimum çarpma yükü performansı üzerinde istatistiki olarak anlamlı bir rol oynamıştır (Şekil 10 ve Çizelge 4). Tamamen dokuma kumaş içeren 13 katlı kompozit orta katmanı örme cam iplik veya hibrit iplik örme kumaş içeren kompozitlerden daha yüksek maksimum çarpma yükü sergilemiştir. Orta katmanı cam iplik veya hibrit iplik örme kumaş olan kompozitler arasında çarpma yükü performansı açısından istatistiki olarak anlamlı bir fark gözlemlenmemiştir. Benzer şekilde tamamen dokuma kumaştan oluşan kompozit maksimum yük noktasında gerçekleşen deformasyon açısından da diğer kompozitlere istatistiki olarak anlamlı bir üstünlük sağlamıştır (Şekil 11 ve Çizelge 5). Aynı şekilde tamamen dokuma kumaştan oluşan kompozit maksimum yük noktasına kadar emilen enerji açısından diğer kompozitlere istatistiki olarak anlamlı bir üstünlük sağlamıştır. Özet olarak orta dokuma kumaş katmanının cam iplik veya hibrit iplik örme kumaş ile değiştirilmesi

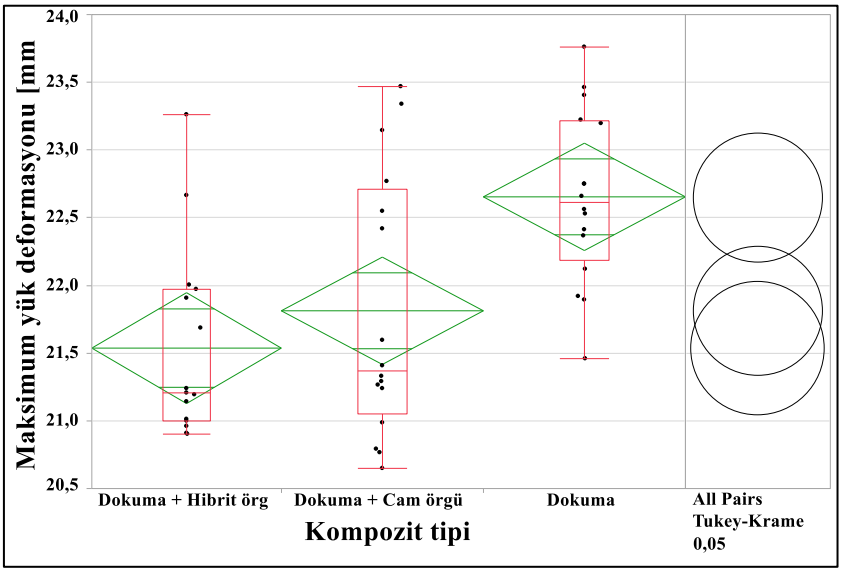
maksimum yük noktası değerlerini istatistiki olarak anlamlı seviyede düşürmüştür (Şekil 12 ve Çizelge 6).



Şekil 10. Kompozit tipinin maksimum çarpma yüküne etkisi

Çizelge 4. Kompozit tipinin maksimum çarpma yüküne etkisi

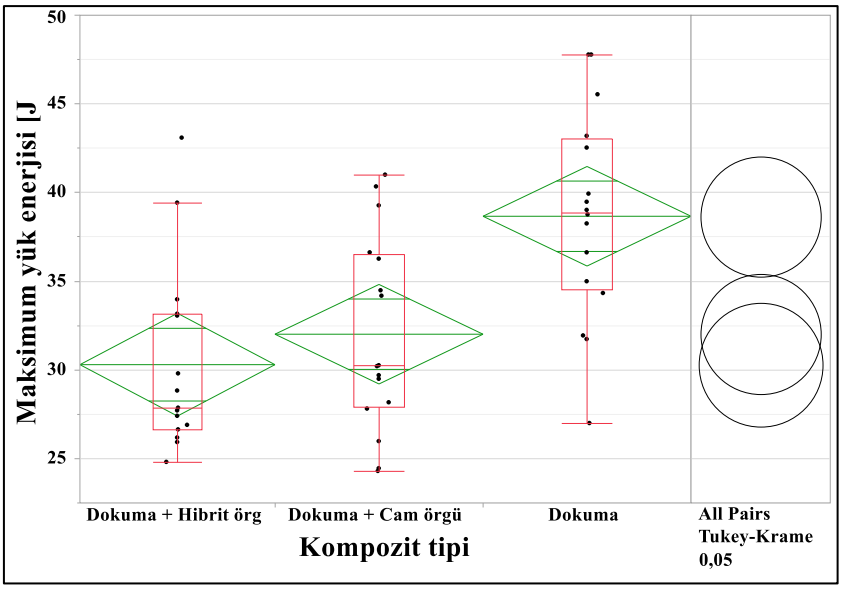
Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma	A	16	8562,02	594,97	8245,0	8879,1	
Dokuma + Hibrit örgü	B	15	7612,89	476,15	7349,2	7876,6	<0,0001
Dokuma + Cam örgü	B	16	7539,42	587,81	7226,2	7852,6	



Şekil 11. Kompozit tipinin maksimum yük deformasyonu üzerindeki etkisi

Çizelge 5. Kompozit tipinin maksimum yük deformasyonu üzerindeki etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma	A	16	22,65	0,64	22,32	22,99	
Dokuma + Cam örgü	B	16	21,81	0,97	21,30	22,33	0,0002
Dokuma + Hibrit örgü	B	15	21,54	0,71	21,15	21,93	



Şekil 12. Kompozit tipinin maksimum yük enerjisine etkisi

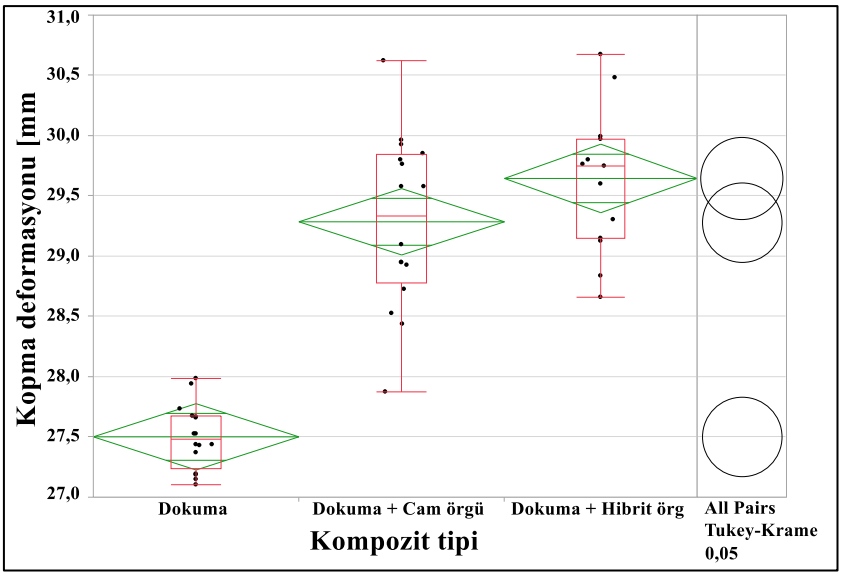
Çizelge 6. Kompozit tipinin maksimum yük enerjisine etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma	A	16	38,66	5,87	35,54	41,79	
Dokuma + Cam örgü	B	16	32,02	5,52	29,07	34,96	0,0003
Dokuma + Hibrit örgü	B	15	30,30	5,29	27,37	33,23	

2.1. Kopma noktası özellikleri

Yük hücresi tarafından okunan yük değerinin gözlemlenen maksimum yük değerinin % 5'ine düştüğü nokta kopma noktası olarak kabul edilmiş ve bu nokta testin bitiş noktası kabul edilerek. bu noktadan sonra numunenin tamamen delindiği var sayılmıştır. Kopma noktasında gözlemlenen deformasyon ve kopma noktasına kadar numune tarafından emilen çarpma enerjisi kayır altına alınmış ve bu değerler üzerinden analizler yapılmıştır.

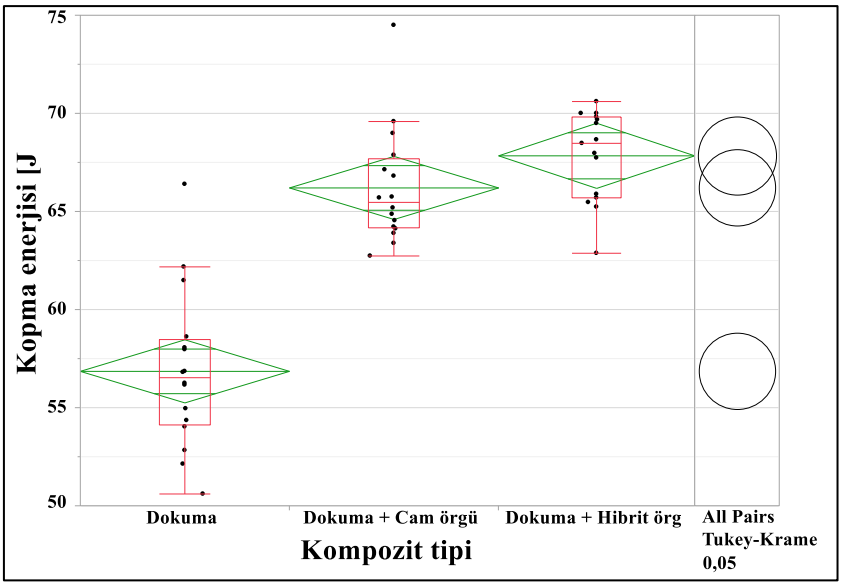
Orta katmanında örme kumaş içeren kompozitler tamamen dokuma kumaştan müteşekkil kompozitten daha fazla kopma deformasyonu sergilemiştir (Şekil 13 ve Çizelge 7). Bir başka deyişle kopma noktasında örme kumaş etkin rol oynayarak test numunesinin daha fazla deforme olmasını sağlamıştır. Hibrit iplik içeren örme kumaş katmanlı kompozit cam iplik içeren kompozitten daha fazla kopma noktası deformasyonu sergilese de aradaki fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşamamıştır. Benzer şekilde örme kumaş içeren kompozitler dokuma kompozitten daha fazla kopma enerjisi sergilemişlerdir. Hibrit iplik örme kumaş cam iplik örme kumaştan daha fazla kopma enerjisi emse de bu fark istatistiki olarak anlamlı bir seviyeye ulaşmamıştır



Şekil 13. Kompozit tipinin kopma deformasyonu üzerindeki etkisi

Çizelge 7. Kompozit tipinin kopma deformasyonu üzerindeki etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma + Hibrit örgü	A	15	29,64	0,56	29,33	29,96	
Dokuma + Cam örgü	A	16	29,28	0,71	28,90	29,67	<0,0001
Dokuma	B	16	27,50	0,27	27,36	27,64	



Şekil 14. Kompozit tipinin kopma enerjisi üzerindeki etkisi

Çizelge 8. Kompozit tipinin kopma enerjisi üzerindeki etkisi

Kompozit tipi		n	ort.	ss	AL	ÜL	p-değeri
Dokuma + Hibrit örgü	A	15	67,84	2,29	66,57	69,10	
Dokuma + Cam örgü	A	16	66,20	2,96	64,62	67,78	<0,0001
Dokuma	B	16	56,85	4,03	54,70	59,00	

SONUÇ

Bu çalışmada tamamen dokuma kumaştan üretilmiş katmanlı kompozit malzemenin orta katmanın cam iplik veya cam/aramid hibrit iplik örme kumaş ile değiştirilmesi neticesinde çarpma dayanımının bu durumdan nasıl etkileneceği mercek altına alınmıştır. Orta dokuma

kumaş katının örme kumaş ile değiştirilmesi kompozit numune kalınlığını ve alansal yoğunluğunu arttırırken hacimsel yoğunluğunu düşürmüştür. Tamamen dokuma kumaştan oluşan kompozit örme kumaş içeren kompozitlere nazaran istatistiki olarak anlamlı seviyede daha yüksek maksimum yük performansı sergilemiştir. Bir başka deyişle dokuma kompozit daha yüksek maksimum yük, daha fazla maksimum yük uzaması ve maksimum yük enerjisi sergilemiştir. Kopma noktası incelendiğinde ise durum tamamen tersine dönmüştür. Orta katında örme kumaş içeren kompozitler dokuma kompozite nazaran daha fazla kopma deformasyonu ve kopma enerjisi sergilemiştir. Örme kumaş ilavesi kompozit malzemenin maksimum yük noktası performansını düşürürken, kopma noktası performansını yükseltmiştir. Örme kumaş ilavesi ile kompozit malzeme daha sünek ve daha fazla toplam enerji emme kapasitesine sahip hale gelmiştir.

Teşekkür: Bu proje "TÜBİTAK 2209-A – Üniversite Öğrencileri Araştırma Projeleri Destekleme Programı" kapsamındadır.

KAYNAKLAR

[1] W.D. Callister, *Material Science and Engineering An Introduction*, John Wiley & Sons Inc., 2007.

[2] F.C. Campbell, *Manufacturing Processes For Advanced Composites*, Elsevier, 2004.

[3] K.K. Chawla, *Composite materials: science and engineering*, Springer, 1998.

[4] S.K. Mazumdar, *Composites manufacturing: materials, product, and process engineering*, CRC Press, 2002.

[5] A.B. Strong, *Fundamentals of Composites Manufacturing*, SME, 2008.

[6] B.N. Cox, G. Flanagan, *Handbook of Analytical Methods for Textile Composites*, NASA, 1997.

[7] M.B. Dow, H.B. Dexter, *Development of Stitched, Braided and Woven Composite Structures in the ACT Program and at Langley Research Center (1985 to 1997)*, NASA, 1997.

[8] J.S. Hearle, G.W. Du, Forming Rigid Fibre Assemblies: The Interaction of Textile Technology and Composites Engineering, *Journal of Textile Institute*, 81 (1990) 360-383.

[9] N.V. Padaki, R. Alagirusamy, L. Deopura, R. Fangueiro, Influence of Preform Interlacement on the Low Velocity Impact Behaviour of Multilayer Textile Composites, *Journal of Industrial Textiles*, 20 (2010), 171-185.

[10] A.E. Bogdanovich, M.H. Mohamed, Three-Dimensional Reinforcements for Composites, *SAMPE Journal*, 45 (2009) 8-28.

[11] O.A. Khondker, K.H. Leong, I. Herszberg, H. Hamada, Impact and compression-after-impact performance of weft-knitted glass textile composites, *Composites Part A: applied science and manufacturing*, 36 (2005) 638-648.

[12] G. Pamuk, *Düz örme makinelerinde üretilebilen örme kumaş takviyeli kompozitlerin mekaniksel özellikleri üzerine bir araştırma*, Doktora tezi, İzmir: Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitütüsü, 2009.

[13] G. Pamuk, F. Çeken, Manufacturing of Weft-Knitted Fabric Reinforced Composite Materials: A Review, *Materials and Manufacturing*, 23 (2008) 635-640.

[14] D.N. Pandey, P. Kumar, Advancement in knitted structure for industrial applications - a review, *International Journal of Advanced Engineering Research and Technology (IJAERT)*, 4 (2016) 265-272.

[15] S.D. Pandita, D. Falconet, I. Verpoest, Impact properties of weft knitted fabric reinforced composites, *Composite Science and Technology*, 62 (2002) 1113-1123.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

PÜRÜZLÜ YÜZEYLİ BİR TABAKA İLE AYRILMIŞ SONSUZ ELASTİK ORTAMDA KAYMA DALGALARI

Semra Ahmetolan[1], Ekin Deliktaş-Özdemir[2] ve Ayşe Peker-Dobie[3]
[1,3]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
[2]Piri Reis Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

The problem of propagation of shear horizontal (SH) waves in an infinite elastic medium consisting of two half spaces separated by a layer with nonuniform thickness is investigated. It is assumed that layer and semi-infinite spaces have different elastic materials. It is also assumed that the phase velocity of the waves c satisfies the inequality $c_2 < c < c_1 < c_3$ where c_1, c_3 and c_2 are the shear wave velocities of the upper and lower half spaces, and of the layer, respectively. Considering that the interfaces change slowly in the direction of the propagation of the waves, the dispersion relation of SH waves is obtained depending on the slow variation in the interfaces as well as the wave number and angular frequency. Using an asymptotic perturbation method, it is shown that the first order slow varying amplitude of waves is asymptotically governed by a linear equation with variable coefficients.

Keywords: SH waves; elastic medium; irregular boundaries; asymptotic expansion

ÖZET

Bu çalışmada pürüzlü yüzeylere sahip değişken kalınlıklı bir tabakayla ayrılmış sonsuz elastik bir ortamda yatay kayma dalgalarının yayılması problemi incelenmektedir. Tabaka ve yarı sonsuz uzayların birbirinden farklı elastik malzemelere sahip olduğu kabul edilmiştir. c, lineer dalgaların faz hızını; c_1, c_2 ve c_3 sırasıyla üst yarı uzay, tabaka ve alt yarı uzaydaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızlarını göstermek üzere, bu hızlar arasında $c_2 < c < c_1 < c_3$ eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilmektedir. Ara yüzeylerin, dalgalarının yayılma yönünde yavaş değiştiği kabul edilerek lineer dalgalara ait dispersiyon bağıntısı, dalga sayısı ve açısal frekansın yanı sıra ara yüzeylerin değişimine de bağlı olarak elde edilmiştir. Bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak, lineer dalgaların birinci mertebeden yavaş değişen genliğinin asimptotik olarak lineer, değişken katsayılı bir denklem tarafından yönetildiği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: SH dalgaları; elastik ortam; düzensiz sınır; asimptotik açılım

GİRİŞ

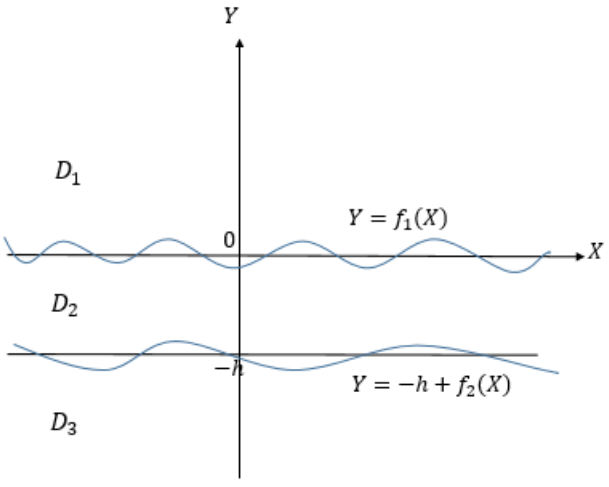
Yeryüzü kabuğunun ve çeşitli katmanlarının sınır yüzeyleri düzlemsel değildir. Ortamı oluşturan malzeme özelliklerinin yanı sıra, ara yüzeylerin pürüzlülüğü veya tabakanın oluklu sınır yüzeyleri de dalga yayılımı üzerinde etkilidir. Bu etki, birçok araştırmacı tarafından çeşitli tabakalı ortamlarda elastik dalga yayılımı problemlerinde incelenmiştir [1-6].

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı olmayan (pürüzlü yüzeylere sahip) farklı elastik özelliklere sahip bir tabaka ile ayrılmış sonsuz elastik bir ortamda lineer enine kayma (SH) dalgalarının yayılmasını modelleyen sınır değer problemi bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak incelenmektedir. Böyle bir ortamda dalgaların yayılımını karakterize eden birinci mertebe genlik fonksiyonu için değişken katsayılı bir lineer denklem elde edilmiştir. Pürüzlü yüzeylerin bazı özel seçimleri için faz hızı nümerik olarak hesaplanmış ve yüzeylerdeki pürüzleri temsil eden fonksiyonların genliğindeki değişimin faz hızı üzerindeki etkileri grafiklerle gözlemlenmiştir. Bu çalışma aynı geometriye sahip lineer olmayan SH dalgalarının yayılımı probleminin incelenmesi için bir temel oluşturmaktadır.

HAREKET DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI

Pürüzlü yüzeylere sahip bir tabaka ile ayrılmış iki yarım uzaydan oluşan sonsuz bir elastik ortamda yatay kayma (SH) dalgalarının yayılması problemini göz önüne alalım (Şekil 1.) Tabaka ve yarım uzayların birbirinden farklı genelleştirilmiş neo-Hookean malzemelerden oluştuğunu kabul edelim. Ara yüzeylerin değişiminin dalgaların yayılma doğrultusunda, yani pozitif X ekseni doğrultusunda olduğunu ve değişimi temsil eden fonksiyonların X'in sürekli fonksiyonları olduğunu kabul edelim. Maddesel koordinatlarda sırasıyla üst yarı uzay D_1, tabaka D_2 ve alt yarı uzay D_3 aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$D_1 = \{(X,Y,Z)| \quad f_1(X) < Y < \infty, \qquad -\infty < X < \infty, -\infty < Z < \infty\}$$
$$D_2 = \{(X,Y,Z)| -h + f_2(X) < Y < f_1(X), \qquad -\infty < X < \infty, -\infty < Z < \infty\}$$
$$D_3 = \{(X,Y,Z)| -\infty < Y < -h + f_2(X), \qquad -\infty < X < \infty, -\infty < Z < \infty\}$$



Şekil 1. Problemin geometrisi

$Y = f_1(X)$ ve $Y = -h + f_2(X)$ ara yüzeylerinde yer değiştirmeler ve gerilmelerin sürekli olduğunu ve $f_1(X)$ ve $f_2(X)$ fonksiyonlarının değerlerinin tabaka kalınlığına kıyasla küçük olduğunu kabul ediyoruz.

Lineer SH dalgalarının böyle bir ortamda yayılmasını modelleyen sınır değer problemi aşağıdaki gibidir;

$$D_\nu\text{'de} \qquad \frac{\partial^2 u^{(\nu)}}{\partial t^2} - c_\nu^2\left(\frac{\partial^2 u^{(\nu)}}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u^{(\nu)}}{\partial Y^2}\right)=0, \quad \nu=1,2,3 \tag{1}$$

$$Y=f_1(X)\text{'de}\ \ u^{(1)}-u^{(2)}=0 \text{ ve } -\frac{\partial f_1}{\partial X}\left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial X}-\gamma_1\frac{\partial u^{(2)}}{\partial X}\right)+\frac{\partial u^{(1)}}{\partial Y}-\gamma_1\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y}=0 \tag{2}$$

$$Y=-h+f_2(X)\text{'de}\ \ u^{(2)}-u^{(3)}=0 \text{ ve } -\frac{\partial f_2}{\partial X}\left(\frac{\partial u^{(2)}}{\partial X}-\gamma_2\frac{\partial u^{(3)}}{\partial X}\right)+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial Y}-\gamma_2\frac{\partial u^{(3)}}{\partial Y}=0 \tag{3}$$

$$Y\to\infty \text{ için} \quad u^{(1)}\to 0 \qquad \text{ve} \qquad Y\to-\infty \text{ için} \quad u^{(3)}\to 0. \tag{4}$$

Burada μ_ν ve ρ_ν sırasıyla D_ν bölgesini dolduran malzemenin lineer kayma modülünü ve yoğunluğu göstermek üzere bu bölgede lineer kayma dalgalarının hızı $c_\nu^2=\mu_\nu/\rho_\nu$ ile tanımlanmaktadır. Ayrıca $\gamma_1=\mu_2/\mu_1$ ve $\gamma_2=\mu_3/\mu_2$'dır. (4) koşulunun sağlanması için $u^{(1)}$ ve $u^{(3)}$ fonksiyonlarının Y değişkenine bağlılıklarının hiperbolik fonksiyonlar cinsinden olması gerekir. Bunun için de SH dalgalarının böyle bir ortamda yayılması, $c<c_1$ ve $c<c_3$ eşitsizliklerinin sağlanması durumunda mümkündür. Bu çalışmada $c_1\le c_3$ kabulü altında dalgaların faz hızı c'nin $c_2<c<c_1\le c_3$ eşitsizliğini sağladığı durum için analiz yürütülecektir.

LİNEER DALGALAR İÇİN ASİMPTOTİK ANALİZ

Ara tabakanın pürüzlü yüzeylere sahip olmasının lineer dalgaların yayılımı üzerindeki etkisini incelemek için bir asimptotik pertürbasyon metodu kullanılacaktır. Bu amaçla

$$\boldsymbol{x_1=\varepsilon X},\ \boldsymbol{t_1=\varepsilon t},\ \boldsymbol{y=Y},\qquad \boldsymbol{\varepsilon>0} \tag{5}$$

yeni değişkenleri tanımlıyoruz. $\{x_1,t_1\}$, dalga genliğinin yavaş değişimini belirlemek için tanımlanan yavaş değişkenlerdir. Ayrıca θ faz değişkeni $\theta_X=k$ ve $\theta_t=-\omega$ koşullarını sağlasın. Genel durumda k dalga sayısı ve ω açısal frekans, sistemlerin yavaş değişen özelliklerine bağlı olarak değişmektedir. Frekans, ortamda zamana bağlı değişim varsa değişken aksi halde sabittir. Ara yüzeylerin konuma göre değişiminin frekansta herhangi bir değişim olmaksızın k dalga sayısında değişime sebep olduğu bilinmektedir [7]. Bu nedenle sınır yüzeylerindeki yavaş değişimi temsil eden ölçeğe bağlı olarak dalga sayısı ve grup hızı $k=k(x_1)$ ve $V_g=V_g(x_1)$ olur. Yer değiştirme fonksiyonlarının $\{\theta,x_1,y,t_1\}$ değişkenlerinin fonksiyonu olduklarını ve düzgün geçerli asimptotik açılıma sahip olduklarını kabul edelim:

$$\boldsymbol{u^{(\nu)}(\theta,x_1,y,t_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n^{(\nu)}(\theta,x_1,y,t_1)}. \tag{6}$$

Bu açılım ve yeni değişkenler (1) hareket denklemleri ve (2)-(3) sınır koşullarında kullanılırsa $\boldsymbol{\varepsilon}$'un aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek $\boldsymbol{u_n^{(\nu)}}$'lerin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi elde edilir. Bu çalışmada ilk iki mertebe problemin incelenmesi yeterli olacaktır:

$$\boldsymbol{O(\varepsilon)}: \quad \boldsymbol{D_\nu}\text{'de} \qquad \boldsymbol{(\omega^2-k^2c_\nu^2)\frac{\partial^2 u_1^{(\nu)}}{\partial\theta^2}-c_\nu^2\frac{\partial^2 u_1^{(\nu)}}{\partial y^2}=0}.$$

$$y=f_1(x_1)\text{'de} \qquad u_1^{(1)}-u_1^{(2)}=0 \text{ ve } \quad \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial y}-\gamma_1\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y}=0, \tag{7}$$

$$y = -h + f_2(x_1)\text{'de} \quad u_1^{(2)} - u_1^{(3)} = 0 \text{ ve } \quad \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial y} = 0.$$

$$\boldsymbol{O(\varepsilon^2)}: \quad \boldsymbol{D_v}\text{'de} \quad \boldsymbol{(\omega^2 - k^2 c_v^2)\frac{\partial^2 u_2^{(v)}}{\partial \theta^2} - c_v^2 \frac{\partial^2 u_2^{(v)}}{\partial y^2} = 2\omega \frac{\partial^2 u_1^{(v)}}{\partial y^2} + 2kc_v^2 \frac{\partial u_1^{(v)}}{\partial \theta \partial x_1} + c_v^2 \frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{(v)}}{\partial \theta}}.$$

$$y = f_1(x_1)\text{'de} \quad u_2^{(1)} - u_2^{(2)} = 0 \text{ ve } \quad \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial y} - \gamma_1 \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial \theta \partial t_1} = k\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \theta} - k\gamma_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta}, \tag{8}$$

$$y = -h + f_2(x_1)\text{'de} \quad u_2^{(2)} - u_2^{(3)} = 0 \text{ ve } \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial y} - \gamma_2 \frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial \theta \partial t_1} = k\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \theta} - k\gamma_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial \theta}.$$

Burada dikkat edilirse (7) ile verilen birinci mertebe problemde homojen denklemler ile birlikte ara yüzeylerin değişimini temsil eden fonksiyonların olmadığı sınır koşulları yer almaktadır. (8) ile verilen ikinci mertebe problemde ise homojen olmayan denklemler ile birlikte sınır koşullarında ara yüzeylerin değişimini içeren fonksiyonlar da görülmektedir.

İlk mertebe problemin çözümleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u_1^{(1)}} &= \boldsymbol{\sum_{l=1}^{\infty} A_1^{(l)} e^{-lk\nu_1 y} e^{i\theta} + c.c.}, \\ \boldsymbol{u_1^{(2)}} &= \boldsymbol{\sum_{l=1}^{\infty} (B_1^{(l)} e^{-ilkp_2 y} + C_1^{(l)} e^{ilkp_2 y}) e^{i\theta} + c.c.}, \\ \boldsymbol{u_1^{(3)}} &= \boldsymbol{\sum_{l=1}^{\infty} D_1^{(l)} e^{lk\nu_3 y} e^{i\theta} + c.c.}, \end{aligned} \tag{9}$$

Burada $\boldsymbol{\nu_i = (1 - \frac{\omega^2}{k^2 c_i^2})^{1/2},\ i = 1,3}$ ve $\boldsymbol{p_2 = (\frac{\omega^2}{k^2 c_2^2} - 1)^{1/2}}$. $\boldsymbol{A_1^{(l)}}$, $\boldsymbol{B_1^{(l)}}$, $\boldsymbol{C_1^{(l)}}$, $\boldsymbol{D_1^{(l)}}$, birinci mertebe $\{\boldsymbol{x_1, t_1}\}$ yavaş değişkenlere bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır. (9) ile verilen $\boldsymbol{u_1^{(v)}}$ çözümleri (8)'de verilen sınır koşullarında kullanılırsa

$$\boldsymbol{W^{(l)} U_1^{(l)}} = 0, \qquad l = 1,2,3,\ldots \tag{10}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Burada $W^{(l)}$ dispersiyon matrisi ve $\boldsymbol{U_1^{(l)}} = [A_1^{(l)}\ B_1^{(l)}\ C_1^{(l)}\ D_1^{(l)}]^T$ birinci mertebe genlik vektörüdür. Bu çalışmada k dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının self modülasyonu incelenmektedir. Bu nedenle yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonans koşulunu sağlamadıkları kabul edilmektedir. Bu nedenle $l > 2$ için $\det W^{(1)} \neq 0$ ve $\boldsymbol{U_1^{(l)}} = 0$ olarak bulunur. $l = 1$ için $\det \boldsymbol{W^{(1)}} = 0$ dispersiyon bağıntısını verir:

$$\tan(kp_2(h + f_1(x_1) - f_2(x_1))) = \frac{p_2(\nu_1 + \nu_3\gamma_1\gamma_2)}{p_2^2\,\gamma_1 - \nu_1\nu_3\gamma_2}. \tag{11}$$

(10) denkleminin çözümü, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{W^{(1)}R = 0}$ denklemini sağlayan sütun vektör olmak üzere

$$l = 1 \text{ için} \qquad \boldsymbol{U_1^{(1)} \equiv \mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)R} \tag{12}$$

olarak bulunur. Burada $\mathcal{A}_1$ birinci mertebe yavaş değişimi veren genlik fonksiyonudur. Birinci mertebe pertürbasyon probleminin çözümleri ise aşağıdaki formda elde edilir:

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= \mathcal{A}_1(x_1, t_1) R_1 e^{-k\nu_1 y} e^{i\theta} + c.c. \\ u_1^{(2)} &= \mathcal{A}_1(x_1, t_1)(R_2 e^{-ik\,p_2 y} + R_3 e^{ik\,p_2 y}) e^{i\theta} + c.c. \\ u_1^{(3)} &= \mathcal{A}_1(x_1, t_1) R_4 e^{k\nu_3 y} e^{i\theta} + c.c. \end{aligned} \tag{13}$$

$\mathcal{A}_1$ fonksiyonunun açık olarak hesaplanması birinci mertebe çözümlerin tam olarak belirlenmesi için yeterli olacaktır. Bunun için ikinci mertebe problemlerin incelenmesi gerekmektedir. $\bar{u}_2^{(v)}$ özel çözümler, $\tilde{u}_2^{(v)}$ ise homojen denklemlerin homojen olmayan sınır koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere ikinci mertebe denklemlerin çözümleri $u_2^{(v)} = \tilde{u}_2^{(v)} + \bar{u}_2^{(v)}$ formunda alınır. $\bar{u}_2^{(v)}$ özel çözümleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^{(1)} &= (C_1 + C_2) y e^{-k\, v_1 y} e^{i\theta} + c.c., \\ \bar{u}_2^{(2)} &= [(C_3 + C_4) y e^{-ikp_2 y} + (C_5 + C_6) y e^{ikp_2 y}] e^{i\theta} + c.c., \\ \bar{u}_2^{(3)} &= (C_7 + C_8) y e^{-k\, v_3 y} e^{i\theta} + c.c., \end{aligned} \tag{14}$$

$\tilde{u}_2^{(v)}$ homojen çözümleri ise (9) da $\boldsymbol{U}_1^{(l)} = (A_1^{(l)}, B_1^{(l)}, C_1^{(l)}, D_1^{(l)})$ yerine $\boldsymbol{U}_2^{(l)} = (A_2^{(l)}, B_2^{(l)}, C_2^{(l)}, D_2^{(l)})$ yazılarak elde edilir. Homojen olmayan sınır koşullarından

$$\boldsymbol{W}^{(l)} \boldsymbol{U}_2^{(l)} = \boldsymbol{b}_2^{(l)}, \qquad l = 1,2,3, \ldots \tag{15}$$

denklem sistemi elde edilir. $l \geq 2$ için $\boldsymbol{b}_2^{(l)} \equiv 0$ ve $l = 1$ için

$$\boldsymbol{b}_2^{(1)} = -i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1}\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(1)}}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1}\frac{\partial \boldsymbol{W}^{(1)}}{\partial k}\right)\boldsymbol{R}$$

formundadır. $\det \boldsymbol{W}^{(1)} = 0$ ve $\boldsymbol{b}_2^{(1)} \neq 0$ olduğundan (15) denkleminin $l = 1$ için sıfırdan farklı çözümünün olması için $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{W}^{(1)} = 0$ koşulunu sağlayan bir satır vektör olmak üzere $\boldsymbol{L}.\boldsymbol{b}_2^{(1)} = 0$ uyumluluk koşulundan $\mathcal{A}_1$ için

$$\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_1} + V_g(x_1)\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_1} = \mathcal{H}(x_1)\mathcal{A}_1 \tag{16}$$

denklemi elde edilir. Burada $\mathcal{H}(x_1)$ fonksiyonunun açık yapısında lineer malzeme parametrelerinin yanı sıra, $k(x_1)$ ve $\frac{\partial k}{\partial x_1}$, f_1, f_2, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ fonksiyonları yer almaktadır. (16) denklemi birinci mertebe, değişken katsayılı lineer dalga denklemidir ve bu denklem karakteristikler yöntemi kullanılarak çözülebilir. (16) denkleminin çözümü

$$\boldsymbol{\mathcal{A}_1} = \mathbf{exp}\left(\int \frac{\boldsymbol{\mathcal{H}(x_1)}}{\mathbf{V_g(x_1)}}\right)\mathbf{dx_1})\ \mathbf{H}\left(\mathbf{t} - \int \frac{\mathbf{dx_1}}{\mathbf{V_g(x_1)}}\right) \tag{17}$$

şeklinde bir bilinmeyen fonksiyonu içerecek şekilde bulunur. Burada H, başlangıç verisinden belirlenecek olan bir fonksiyondur. Böylece, sınır yüzeyleri ε mertebesinde yavaş değişen tabaka ile ayrılmış iki yarım uzaydan oluşan ortamda yayılan lineer SH dalgaları için (13) ile verilen birinci mertebe düzgün geçerli çözümler elde edilir.

SAYISAL DEĞERLENDİRME

Bu bölümde ilk olarak ara yüzeylerdeki değişimlerin dalgaların faz hızı üzerindeki etkisi gözlemlenecektir. Bunun için ara yüzey sınır koşulları için aşağıdaki durumlar göz önüne alınmaktadır:

i) Ara yüzey düzlemsel (D): Bu durumda $f_1(x_1) = 0$ veya $f_2(x_1) = 0$ olur. Her ikisi de sıfır kabul edilirse tabaka düzgün kalınlıklı bir tabakadır.

ii) Ara yüzey periyodik (P): Bu durumda ara yüzeyler x_1'e göre periyodik değişime sahiptir yani

$$f_1(x_1) = a\sin(g_1 x_1) \text{ ve } f_2(x_1) = b\sin(g_2 x_1),\ a, b, g_1, g_2 = \text{sabit}\ . \tag{18}$$

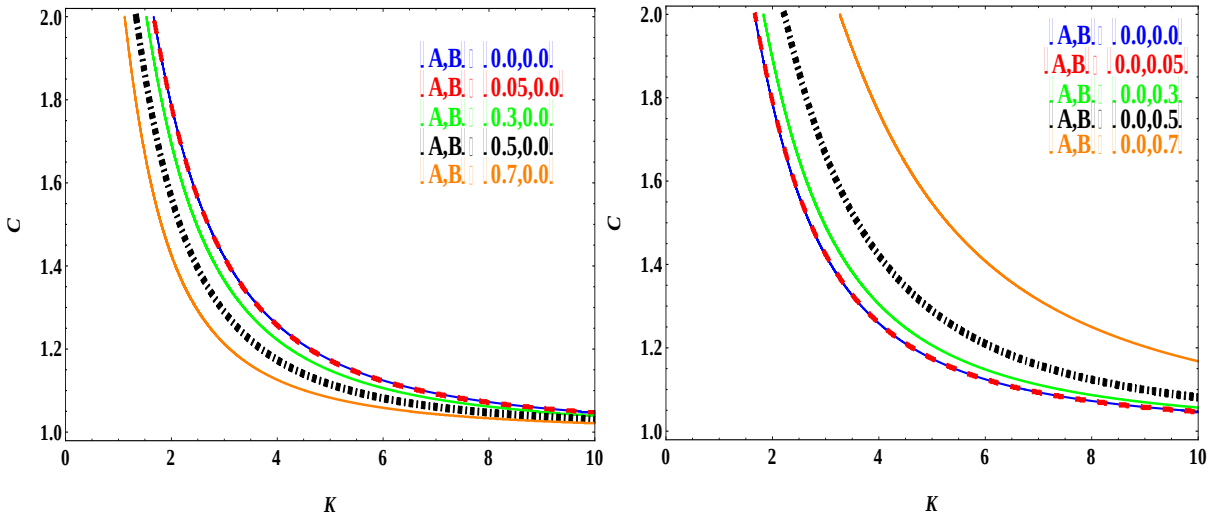
Benzer analiz ara yüzeylerin x_1'e göre değişimlerinin farklı fonksiyonlarla ifade edildiği durum için de yapılabilir. Dispersiyon bağıntısından elde edilecek olan dalga sayısı- faz hızı eğrilerini çizdirebilmek için öncelikle boyutsuz değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C = \frac{c}{c_2}, K = kh, a = Ah,\ b = Bh\quad g_1 = \frac{F_1}{h}, g_2 = \frac{F_2}{h}, x_1 = h\,X.$$

Bu değişkenler ile (11) dispersiyon bağıntısı aşağıdaki forma indirgenir:

$$\tan(Kp_2(1 + A\sin(F_1X) - B\sin(F_2X))) = \frac{p_2(\nu_1+\nu_3\gamma_1\gamma_2)}{p_2^2\,\gamma_1-\nu_1\nu_3\gamma_2}. \tag{19}$$

Bu incelemede ara yüzeylerin genliklerindeki değişimin dalga yayılımı üzerindeki etkisinin gözlemlenmesi amaçlanmıştır. Bu nedenle frekans değerleri $(F_1, F_2) = (1,1)$ alınarak sayısal inceleme yapılmıştır. Benzer inceleme seçilecek diğer parametre değerleri için de yapılabilir. İlk olarak (Periyodik üst ara yüzey- Düzlemsel alt ara yüzey) (P,D), ve (Düzlemsel üst ara yüzey -Periyodik alt ara yüzey) (D,P) durumlarında dalga yayılımını incelemek için dispersiyon bağıntısının ilk dalının değişik genlikler için grafikleri Şekil2a ve Şekil2b 'de verilmiştir.

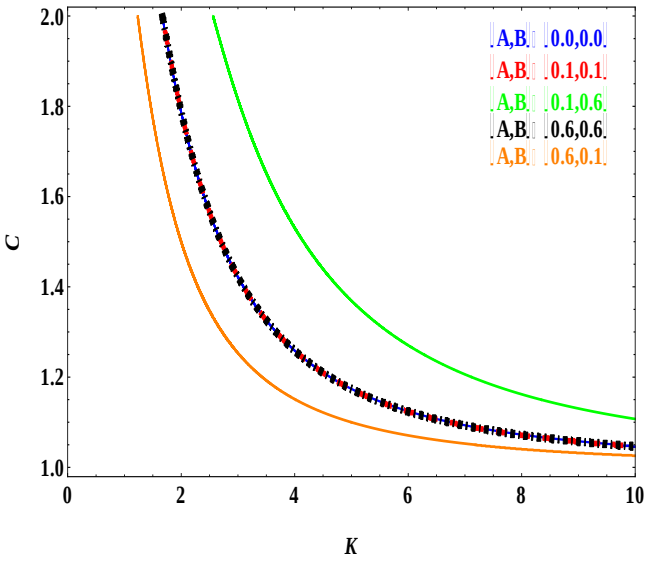


(a) (b)

Şekil2. a) (P,D) modeli ve b) (D,P)modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalının değişik genlik değerleri için grafiği

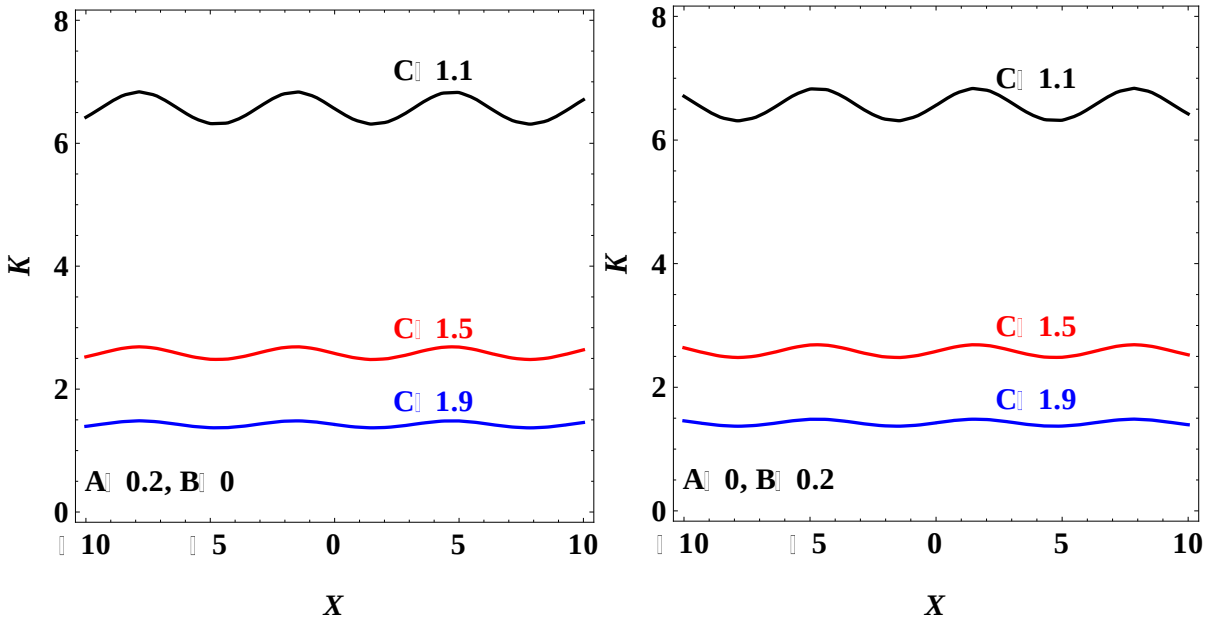
Şekil 2'de verilen her iki grafikte de genlik değerleri, A ve B, çok küçüldükçe eğrilerin davranışı ara tabakanın düzgün kalınlıklı olması, $f_1(x_1) = 0$ ve $f_2(x_1) = 0$, durumundaki davranışa benzemektedir, bu da beklenen bir sonuçtur. Ayrıca alt ara yüzey düz $(B = 0)$ iken üst ara yüzeyin genliğinin artması durumunda dalgaların yayılım hızı yavaşlamaktadır. Tersine üst ara yüzey düz $(A = 0)$ iken alt ara yüzeyin genliği arttırıldığında ise dalgaların yayılım hızı artmaktadır. Her iki ara yüzeyin de periyodik davranışa sahip olması durumu için yine dispersiyon bağıntısının birinci dalı seçilen değişik genlikler için Şekil3'de çizdirilmiştir.

Dikkat edilirse $A = B$ olması durumunda yani $f_1(x_1) = f_2(x_1)$ olması durumunda eğrilerin davranışı, ara tabakanın düzgün kalınlıklı olması durumu ile çakışmaktadır. Ayrıca üst ara yüzey genliğinin alt ara yüzey genliğine göre büyük olması durumunda dalgalar, aynı dalga sayısında daha küçük faz hızına sahip olmaktadırlar.



Şekil3. (P,P) modeli için dispersiyon bağıntısının ilk dalının değişik genlik değerleri için grafiği

X'in değişiminin K üzerindeki etkisini gözlemlemek için sırasıyla ara yüzey genlikleri için $(A, B) = (0.2,0)$ ve $(A, B) = (0,0.2)$ seçilerek sabitlenmiş değişik C değerleri için K'nın X'e göre grafiği Şekil4a,b'de verilmiştir.

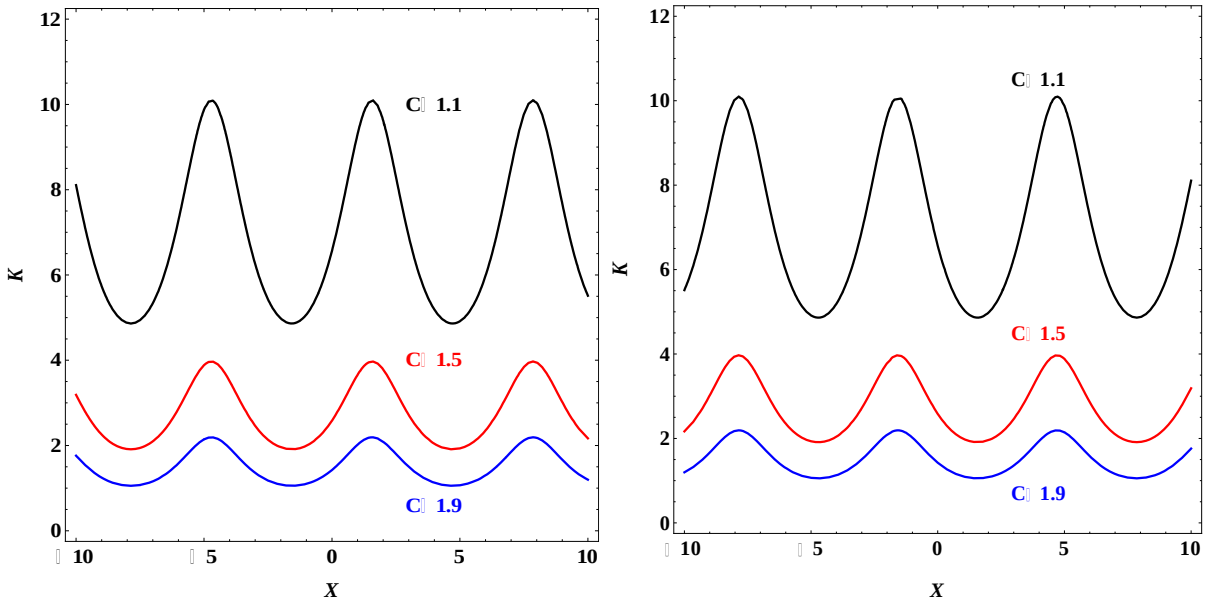


(a) (b)

Şekil4. a) (A,B)=(0.2,0) için ((P,D) modeli) ve b) (A,B)=(0,0.2) için ((D,P) modeli) için sabitlenmiş C değerlerine karşılık K'ın X'e göre değişimi.

Şekil 4'te her iki ara yüzey modeli için sabit C değerlerinde periyodik K eğrilerinin aldığı değer aralıkları değişmemektedir. Bu eğrilerin genlikleri C büyük değerler aldıkça küçülmektedir.

Benzer gözlem her iki ara yüzeyin de periyodik olması durumu için yapılmış ve grafikler Şekil5'te verilmiştir.



(a) **(b)**

Şekil5. a) (A,B)=(0.1,0.6) için ((P,P) modeli) ve b) (A,B)=(0.6,0.1) için ((P,P) modeli) için sabitlenmiş C değerlerine karşılık K'ın X'e göre değişimi.

SONUÇLAR

Pürüzlü yüzeylere sahip değişken kalınlıklı bir tabakayla ayrılmış sonsuz elastik bir ortamda lineer SH dalgalarının yayılımı problemi incelenmiştir. Ara yüzeylerin değişiminin dalgaların yayılma doğrultusunda yavaş olduğu kabul edilmiştir; . Bir asimptotik pertürbasyon yöntemi kullanılarak, dalgaların birinci mertebeden yavaş değişen genliğinin asimptotik olarak lineer, değişken katsayılı bir denklem tarafından yönetildiği gösterilmiştir. Ayrıca ara yüzeylerin periyodik değişime sahip olduğu kabul edilmiştir. Ara yüzeylerin genliklerindeki değişimin dalga yayılımı üzerindeki etkisini gözlemlemek için i) periyodik üst ara yüzey- düzlemsel alt ara yüzey (P, D), ii) düzlemsel üst ara yüzey - periyodik alt ara yüzey (D, P) ve iii) her ikisinin de periyodik değişime sahip olduğu (P,P) durumlar için boyutsuz dispersiyon bağıntısı incelenerek seçilen bazı genlik değerleri için sayısal hesaplamalar yapılmıştır. (P,D) durumunda üst ara yüzeyin genliği arttırıldığında aynı dalga sayısında dalgaların yayılım hızı azalıyor iken (D, P) durumda alt ara yüzeyin genliği arttırıldığında ise dalgaların yayılım hızının arttığı gözlemlenmiştir. Ayrıca (P,P) durumunda üst ara yüzey genliğinin alt ara yüzey genliğine göre daha büyük seçildiğinde dalgalar, aynı dalga sayısında daha küçük faz hızına sahip olmaktadırlar.

KAYNAKLAR

[1] W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, Elastic Waves in Layer Media, McGraw-Hill, 1957.

[2] A. Bostrom, Surface waves on the periodic boundary of an elastic half-space, *Applied Science Research* 39 (1982) 129–142.

[3] N.E. Glass, A.A. Maradudin Leaky surface-elastic waves on both flat and strongly corrugated surfaces for isotropic, nondissipative media, *Journal of Applied Physics* 54 (1984) 796–805.

[4] A. Bostrom, Propagating, damped and leaky surface waves on the corrugated taction—free boundary of an elastic half-space, *Journal of the Acoustic Society of America* 85 (1989) 1549–1555.

[5] S.S. Singh, S.K. Tomar, Shear waves at a corrugated interface between two dissimilar fibre-reinforced elastic halfspaces, *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 2(1) (2007) 167–188.

[6] S.K. Vishwakarma, R.Xu, Rayleigh wave dispersion in an irregular sandy Earth's crust over orthotropic mantle, *Applied Mathematical Modelling,* 40 (2016) 8647-8659.

[7] Whitham, G., Linear and Nonlinear Waves, John Wiley 1974.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN DİSPERSİYON İÇEREN KÜBİK NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN ÇİFT-KUYULU BİR POTANSİYEL ALTINDA SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Melis Turgut[1] ve İlkay Bakırtaş[2]
[1,2]İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Maslak, İstanbul

ABSTRACT

We studied the cubic nonlinear Schrödinger equation with fourth order dispersion including a double well potential. Soliton solutions of the NLS equation are obtained by Spectral Renormalization method. The nonlinear stability analysis of the numerically obtained soliton solutions is investigated by split-step Fourier method and linear stability is investigated by linear spectrum analysis.

Keywords: NLS, Soliton, Double-Hump Soliton, Numerical Methods, Fourth Order Dispersion, Double-Well Potential

ÖZET

Bu çalışmada dördüncü mertebeden dispersiyon (4OD) ve çift-kuyulu (double-well) bir potansiyel içeren kübik nonlineer Schrödinger (NLS) denkleminin çözümleri incelenmiştir. Denklemin soliton çözümleri Spektral Renormalizasyon (SR) yöntemiyle sayısal olarak elde edilmiştir. Elde edilen soliton çözümlerinin nonlineer kararlılık analizleri ayrık adımlı Fourier yöntemi ile lineer kararlılık analizleri ise lineer spektrumun incelenmesiyle yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: NLS, Soliton, Çift-Tümsekli Soliton, Sayısal Yöntemler, Dördüncü Mertebe Dispersiyon, Çift-Kuyulu Potansiyel

GİRİŞ

Doğadaki birçok olay matematiksel olarak modellendiğinde karşımıza nonlineer (doğrusal olmayan) diferansiyel denklemler çıkmaktadır. Nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ilerleyen dalga çözümleri nonlineer dalga yayılımı problemlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Sıklıkla, nonlineer dalga yayılımı problemleri, doğrusal olmayan optik, akışkanlar dinamiği, plazma fiziği, elastik ortamlar ve biyoloji gibi çeşitli alanlarda gözlemlenmektedir [1]. Bu fiziksel problemler için ortaya koyulan matematiksel modellerin yönetici denklemleri sıklıkla Korteweg-de Vries (KdV), sine-Gordon (sG), nonlineer Schrödinger (NLS) denklemleri ve varyantları ile ifade edilir. Bahsedilen bu denklemlerin soliton tipi çözümleri hakkında literatürde geniş bilgi mevcuttur.

Nonlineer optikte, kübik NLS denklemi optik solitonların yayılımlarını modellemektedir ve (1+1) boyutta

$$iu_z + u_{xx} + \alpha |u|^2 u = 0 \tag{1}$$

formunda ifade edilir. Burada u türevlenebilir kompleks değerli fonksiyonu, elektrik alanının yavaş değişen genliğini, u_{xx} difraksiyonu (kırınımı), z yayılım uzaklığını ve α kübik nonlineeritenin katsayısını temsil etmektedir.

Ultra kısa atımlar (ultrashort pulse) çalışılırken sadece ikinci mertebeden dispersiyonun değil, üçüncü ve dördüncü mertebeden dispersiyonun da modele eklenmeleri gerektiği fark edilmiştir [2]. Buna ek olarak, (1) denklemi, genişlikleri 1 pikosaniyeden (10^{-12} saniyeden) daha küçük atımların dinamiğini yönetemez. Örneğin, bir katı hal lazerinde 10 femtosaniyeden (10^{-14} saniyeden) daha kısa sürede atımlar üretilir ve NLS denkleminin bu modeli temsil etmesi artık mümkün olamaz. Sonuç olarak bu tür sistemlerdeki dinamikleri açıklayabilmek için yüksek mertebeden dispersiyon terimleri de modele eklenmelidir. Okyanusötesi (trans-oceanic) ve kıtalar arası (trans-continental) mesafelerde performans artırımı için üçüncü mertebeden dispersiyon (3OD) terimi de göz önüne alınmalıdır. Ayrıca, grup hız dağılımının sinyalin spektral bant genişliği içinde değiştiği kısa atım genişlikleri için dördüncü mertebeden dispersiyonun (4OD) hesaba katılması gerekir [3]. Ek olarak, sisteme eklenen bir dış potansiyelin de performans artırımı için yararlı olabileceği bilinmektedir. Sadece dispersiyonun değil dış potansiyellerin de soliton dinamikleri üzerinde önemli etkileri olduğu literatürde birçok çalışmada gösterilmiştir [4-7].

Bu çalışmada, dördüncü mertebeden dispersiyon ve çift-kuyulu (double-well) bir potansiyel içeren kübik NLS denkleminin soliton çözümlerinin varlığı ve kararlılık özellikleri sayısal olarak incelenecektir.

$$iu_z + u_{xx} + |u|^2 u - u_{xxxx} - V(x)u = 0 \tag{2}$$

Bu denklemde $u(z,x)$ türevlenebilir kompleks değerli fonksiyonu, elektrik alanının yavaş değişen genliğini, u_{xx} difraksiyonu (kırınımı), z yayılım uzaklığını, u_{xxxx} dördüncü mertebeden dispersiyonu ve $V(x)$ dış potansiyeli temsil etmektedir. Bu çalışmada dış potansiyel aşağıdaki çift-kuyulu potansiyel formunda alınmıştır [8]

$$V(x) = -V_0\left[e^{-(x-W_0)^2} + e^{-(x+W_0)^2}\right]. \tag{3}$$

Burada V_0 potansiyel derinliğini, W_0 ise kuyuların yerel minimumlarının konumlarının x koordinatlarını belirlemektedir.

SAYISAL YÖNTEM

Bu çalışmada (2) denkleminin soliton tipi çözümleri Spektral Renormalizasyon (SR) metodu ile bulunmuştur. Bu metot, Petviashvili tarafından önerilen temelde bir Fourier iterasyon metodudur [9]. Daha sonra, Ablowitz ve Musslimani [10], bu metodu geliştirerek, nonlineer dalga kılavuzlarındaki solitonların hesaplanması için nümerik bir şema önermişlerdir. Bu metodun ana fikri, denklemi Fourier uzayına dönüştürmek ve bir cebirsel denkleme bağlı nonlineer lokal olmayan bir integral denklem belirlemektir. Daha sonra yakınsak bir sabit nokta iterasyon şeması ile nonlineer kılavuzlu mod elde edilir.

f kompleks değerli bir fonksiyon ve $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ olmak üzere, (2) denklemine $u(z,x) = f(x)e^{i\mu z}$ çözüm önerisinde bulunalım. Burada $\mu > 0$ ve yayılım sabitini temsil etmektedir. Çözüm önerisi (2) denkleminde yerine koyulursa

$$-\mu f+\frac{d^2 f}{dx^2}+|f|^2 f-\frac{d^4 f}{dx^4}-Vf=0 \tag{4}$$

elde edilir. (4) denklemine Fourier dönüşümü (F) uygulanırsa

$$-\mu \hat{f}-k_x^2 \hat{f}+\mathsf{F}\{|f|^2 f\}-k_x^4 \hat{f}-\mathsf{F}\{Vf\}=0 \tag{5}$$

elde edilir. Burada k_x Fourier dönüşümü değişkenini, $\hat{f}$ ise f fonksiyonunun Fourier dönüşümünü ifade etmektedir. (5) denkleminden $\hat{f}$ çözülürse

$$\hat{f}=\frac{\mathsf{F}\{|f|^2 f\}-\mathsf{F}\{Vf\}}{\mu+k_x^2+k_x^4} \tag{6}$$

elde edilir. Yakınsak bir iterasyon şeması elde etmek için, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ daha sonra hesaplanacak bir sabit olmak üzere, $f(x)=\lambda w(x)$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\hat{w}=\frac{\mathsf{F}\{|\lambda|^2 |w|^2 w\}-\mathsf{F}\{Vw\}}{\mu+k_x^2+k_x^4} \tag{7}$$

bulunur. (7) denklemi indekslenerek, w'yu bulmak için bir iterasyon şeması kurulabilir. Bu amaçla $\hat{w}$

$$\hat{w}_{n+1}=\frac{\mathsf{F}\{|\lambda_n|^2 |w_n|^2 w_n\}-\mathsf{F}\{Vw_n\}}{\mu+k_x^2+k_x^4},\ n\in\mathbb{N} \tag{8}$$

iterasyon bağıntısıyla hesaplanabilir. Burada λ_n sabitini hesaplamak için, (7) denklemi, $\hat{w}$'nın kompleks eşleniği $\hat{w}^*$ ile çarpılır ve Fourier uzayında integre edilirse

$$|\lambda|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}\{|w|^2 w\}\hat{w}^* dk-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathsf{F}\{Vw\}\hat{w}^*+(\mu+k_x^2+k_x^4)|\hat{w}|^2\right]dk=0 \tag{9}$$

eşitliği bulunur. (9) denkleminden $|\lambda|^2$ çözülür ve sonuç iterasyon bağıntısı şeklinde yazılırsa

$$|\lambda_n|^2=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\mathsf{F}\{Vw_n\}\hat{w}_n^*+(\mu+k_x^2+k_x^4)|\hat{w}_n|^2\right]dk}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathsf{F}\{|w_n|^2 w_n\}\hat{w}_n^* dk},\ n\in\mathbb{N} \tag{10}$$

elde edilir. Başlangıç koşulu w_0, (10) denkleminde yerine yazılarak λ_0 elde edilir ve (8) denkleminden w_1 bulunur. Benzer şekilde iterasyon yakınsaklık sağlanana kadar devam eder ve soliton tipi çözüm $f(x)=\lambda w(x)=\lambda \mathsf{F}^{-1}(\hat{w})$ olarak elde edilir.

Bu çalışmada başlangıç koşulu olarak Gaussian tipi fonksiyon, $w_0=e^{-x^2}$ alınmıştır. Yakınsaklık koşulları olarak $\left|1-\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right|<10^{-12}$ ve elde edilen nümerik çözümün (7) denklemini 10^{-5}'ten daha küçük bir mutlak hatayla sağlaması seçilmiştir.

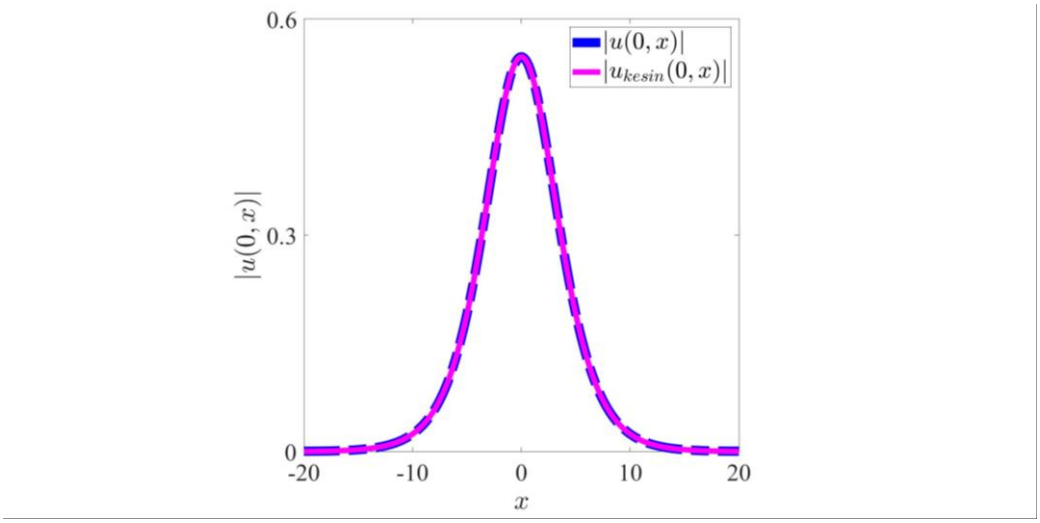
[11]'de, (1+1) boyutta dördüncü mertebeden dispersiyon terimi içeren kübik NLS

$$iu_z+\beta u_{xx}+|u|^2 u-\gamma u_{xxxx}=0 \tag{11}$$

denkleminin kesin çözümü

$$u(z,x)=\sqrt{\frac{3\beta^2}{10\gamma}}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{x}{\sqrt{20\gamma/\beta}}\right)\exp\left(i\frac{4\beta^2}{25\gamma}z\right) \tag{12}$$

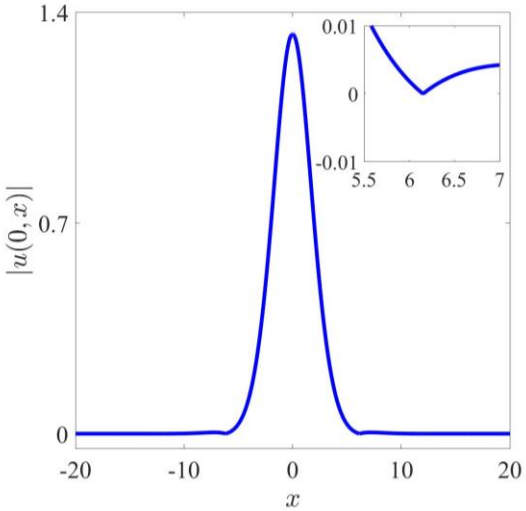
olarak verilmiştir. Kullandığımız sayısal yöntemin doğruluğunu kontrol etmek için, (11) denklemi SR yöntemi ile çözülmüş ve sayısal olarak elde edilen soliton tipi çözüm ile (12) kesin çözümünün üst üste düştüğü Şekil 1'de gösterilmiştir.



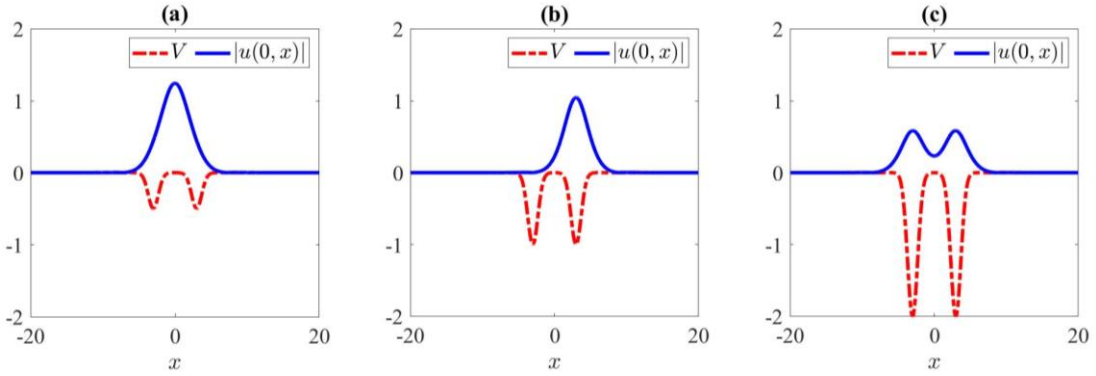
Şekil 1. $\beta=1,\ \gamma$=1, $\mu=0.16$ değerleri için SR yöntemi ile sayısal olarak elde edilen çözüm ve kesin çözüm

SR Yöntemi ile Elde Edilen Soliton Tipi Çözümler

Bu çalışmada, aksi belirtilmedikçe (2) denkleminin soliton tipi çözümleri $\mu=1$ için bulunmuştur. (3) çift-kuyulu potansiyelin soliton çözümleri üzerindeki etkisini incelemek için öncelikle $V_0=0$ alınarak (2) denkleminin potansiyelsiz olarak elde edilen çözümü Şekil 2'de gösterilmiştir. Bu soliton tipi çözüm yayılım sabitine bağlı olarak salınımlı kuyruklu (oscillating tails) olarak elde edilmiştir. Literatürde salınımlı kuyruklu solitonlar üzerine çalışmalar mevcuttur [12,13].

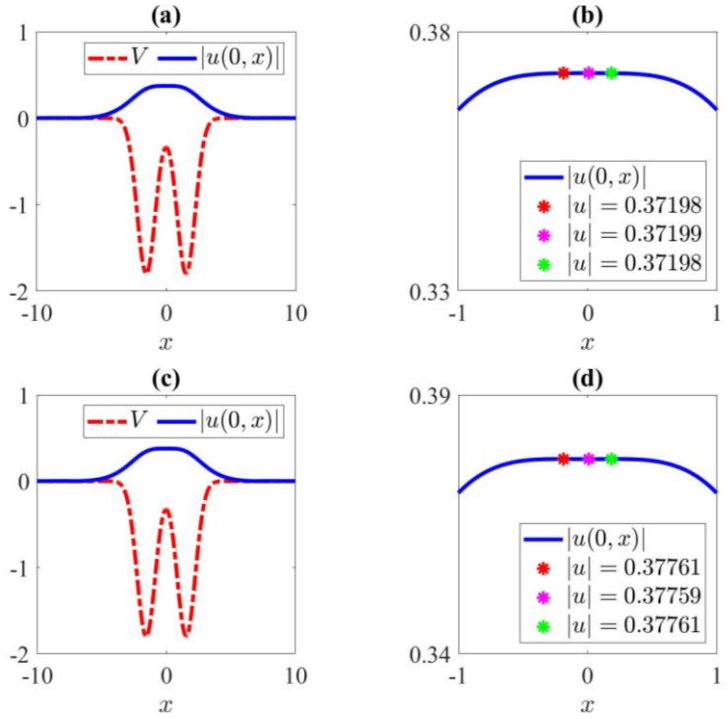


Şekil 2. $\mu=1,\ V_0=0$ değerleri için elde edilen soliton tipi çözüm

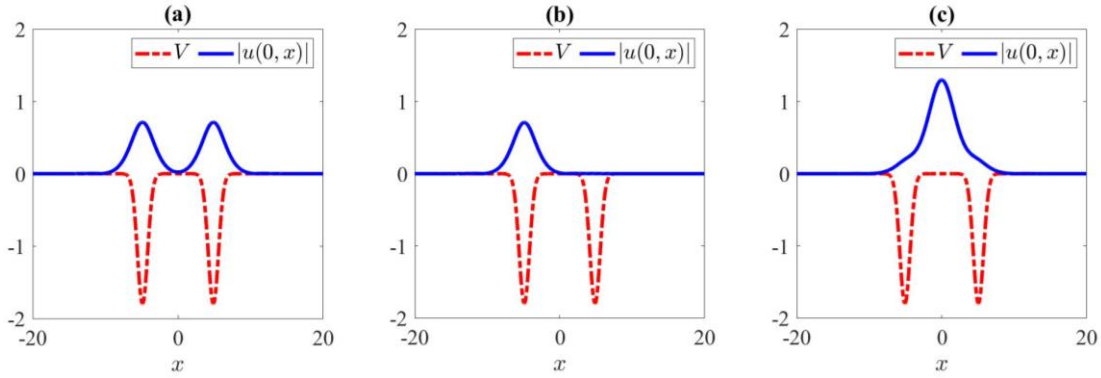


Şekil 3. $\mu = 1$ ve $W_0 = 3$ için (a) $V_0 = 0.5$, (b) $V_0 = 1$, (c) $V_0 = 2$ potansiyel derinliklerinde elde edilen salınımlı kuyruklu soliton tipi çözümler (mavi) ve potansiyeller (kırmızı)

Şekil 3'te, $W_0 = 3$ olarak sabitlenip, farklı V_0 değerleri için soliton tipi çözümler incelenmiştir. $V_0 = 0.5$ için elde edilen çözüm, potansiyelsiz durumda elde edilen çözümdeki gibi tek-tümsekli olarak elde edilmiştir. Soliton tipi çözüm, potansiyel derinliği $V_0 = 1$ olarak değiştirildiğinde, tepe noktası, potansiyelin sağ kuyusunun yerel minimum noktasında konumlanacak şekilde oluşmaktadır. $V_0 = 2$ potansiyel derinliğinde ise çift-tümsekli soliton tipi çözüm elde edilmektedir. Elde edilen üç çözümde de salınımlı kuyruklar mevcuttur. $V_0 = 0.5$ için elde edilen tek-tümsekli soliton tipi çözümün maksimum genliği $u_{\max} \approx 1.24$ iken, $V_0 = 2$ için elde edilen çift-tümsekli soliton tipi çözümün maksimum genliği $u_{\max} \approx 0.59$ bulunmuştur. Tek tümsekli soliton tipi çözümden, çift-tümsekli soliton tipi çözüme geçerken genlik neredeyse yarısı kadar azalmaktadır. Ek olarak, potansiyel derinliği arttıkça solitonun genliğinin azaldığı gözlemlenmektedir.

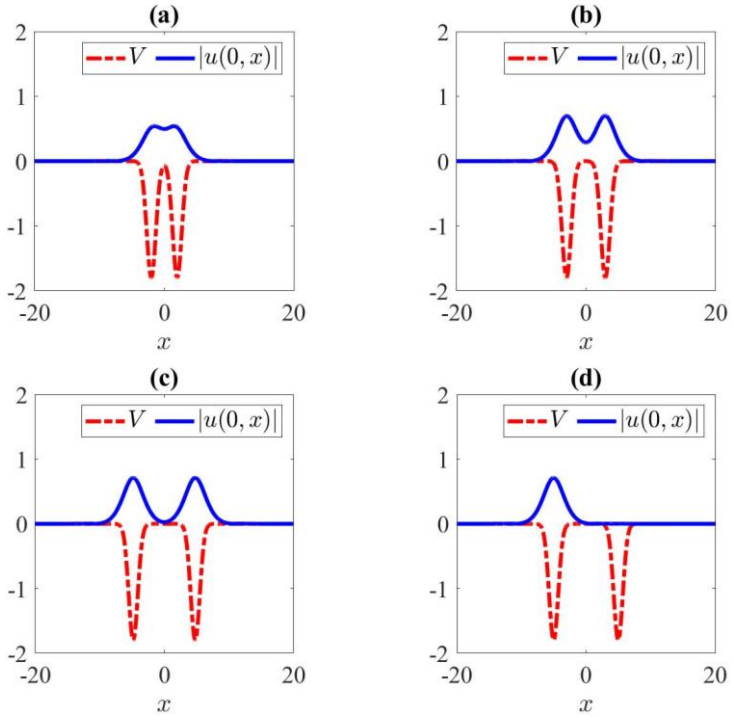


Şekil 4. $\mu = 1$ ve $V_0 = 1.8$ için (a) $W_0 = 1.54$ değerinde elde edilen düz-tepeli (flat-top) soliton tipi çözüm, (b) soliton tipi çözümün tepesi, (c) $W_0 = 1.55$ değerinde elde edilen soliton tipi çözüm, (d) soliton tipi çözümün tepesi



Şekil 5. $\mu = 1$ ve $V_0 = 1.8$ için (a) $W_0 = 4.878$ değerinde elde edilen çift-tümsekli, (b) $W_0 = 4.879$ değerinde solda elde edilen tek-tümsekli, (c) $W_0 = 5.07$ değerinde tepe noktası orijinde olan tek-tümsekli soliton tipi çözümleri

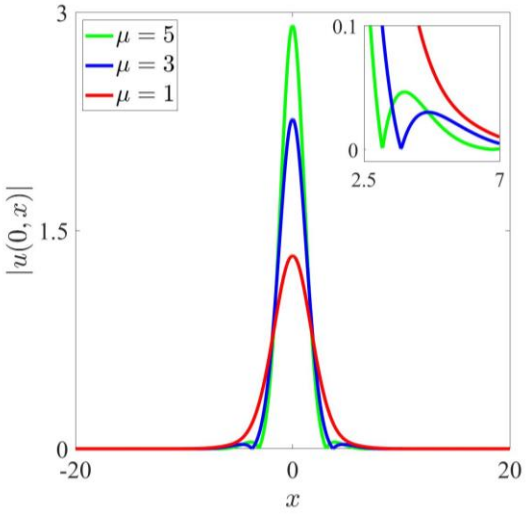
Potansiyel derinliği $V_0 = 1.8$ değerinde sabitlenerek, değişen W_0 değerleri için elde edilen soliton tipi çözümler incelenmiştir. Şekil 4'te $W_0 = 1.54$ değeri için düz-tepeli (flat-top) soliton tipi çözüm elde edilirken, $W_0 = 1.55$ değerinde soliton çözümünün tepesinin çukurlaşmaya başladığı gösterilmektedir. $1.55 \le W_0 \le 4.878$ aralığında çift-tümsekli soliton çözümü elde edilmektedir. $4.879 \le W_0 \le 5.069$ aralığında ise soliton çözümü, tepe noktası potansiyelin sol kuyusunun yerel minimum noktasında olacak şekilde tek-tümsekli elde edilmektedir. $W_0 > 5.069$ için tek-tümsekli soliton tipi çözüm tekrar orijinde konumlanmaktadır. (Bkz. Şekil 5)



Şekil 6. $\mu = 1$ ve $V_0 = 1.8$ için (a) $W_0 = 2$, (b) $W_0 = 3$, (c) $W_0 = 4.8$, (d) $W_0 = 5$ değerlerinde elde edilen salınımlı kuyruklu soliton tipi çözümler (mavi) ve potansiyeller (kırmızı)

Şekil 6'da, $V_0 = 1.8$ potansiyel derinliğinde, belirtilen W_0 değerleri için elde edilen soliton tipi çözümler gösterilmiştir. Sırasıyla $W_0 = 2$, $W_0 = 3$ ve $W_0 = 4.8$ değerleri için potansiyelin kuyuları birbirinden gittikçe uzaklaşmakta ve çift-tümsekli solitonun tümsekleri birbirinden ayrılmaya başlamaktadır. $W_0 = 5$ değerinde ise tepe noktası, potansiyelin sol kuyusunun yerel minimum noktasında konumlanan tek-tümsekli bir soliton tipi çözüm elde edilmektedir. W_0 değeri arttıkça, elde edilen soliton tipi çözümün genliği de artmaktadır.

Şekil 6'daki çözümlerden farklı olarak, $\mu = 1$, $V_0 = 1.8$ ve $W_0 = 6$ değerlerinde elde edilen soliton tipi çözüm tekrar tek-tümsekli yapıda oluşarak orijinde konumlanmıştır ve salınımlı kuyruk yapısı da oldukça azalmıştır. Bu çözüm, Şekil 7'de kırmızı düz çizgi ile gösterilmiştir. Ek olarak, potansiyel sabit tutularak, farklı yayılım sabitleri ($\mu = 3$, $\mu = 5$) için de çözüm incelenmiştir. Yayılım sabiti (μ) arttıkça, soliton genliğinin arttığı ve solitonun daha lokalize olduğu sonucuna varılmıştır. Salınımlı kuyruk yapısının da yayılım sabiti ile orantılı olarak arttığı Şekil 7'de açıkça görülmektedir.



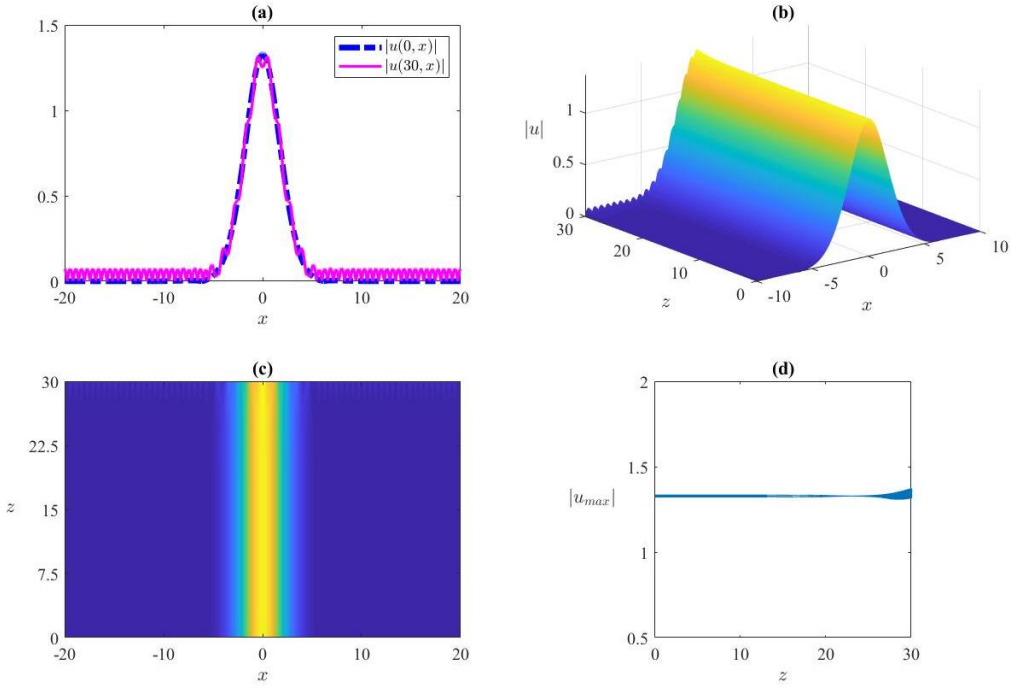
Şekil 7. $V_0 = 1.8$, $W_0 = 6$ için $\mu = 1$, $\mu = 3$ ve $\mu = 5$ değerlerinde elde edilen soliton tipi çözümler

KARARLILIK ANALİZİ

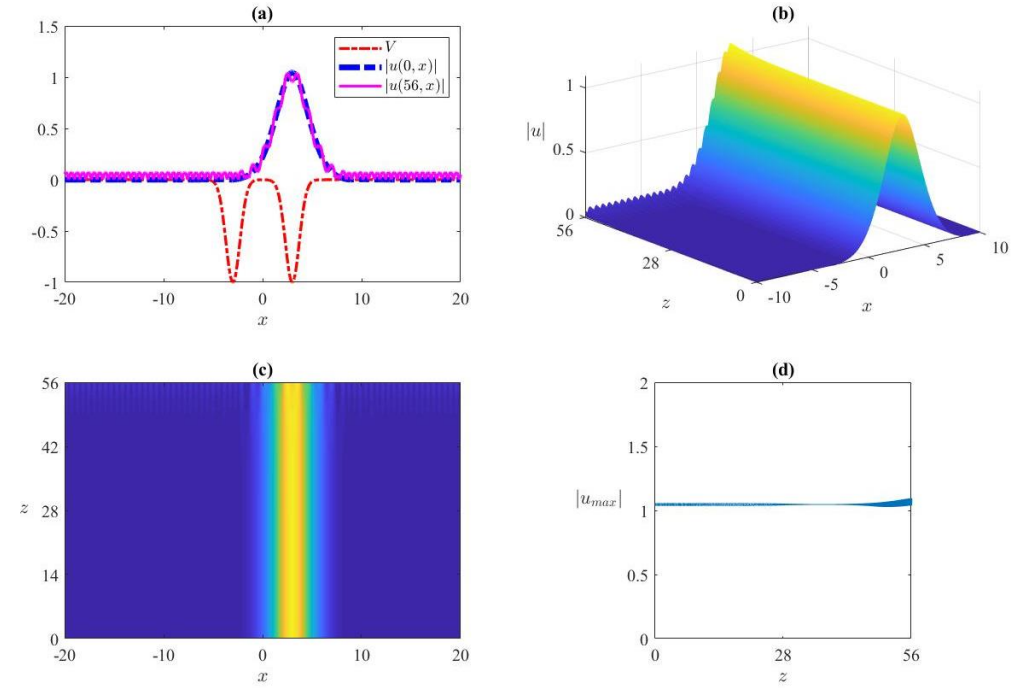
Nonlineer Kararlılık Analizi

Solitonlar ilerledikleri sürece formlarını, maksimum genliklerini ve ağırlık merkezlerini korurlarsa nonlineer kararlı (stable) olarak tanımlanırlar. Bu bölümde, sayısal olarak elde edilen soliton çözümlerinin nonlineer kararlılık analizleri, ayrık adımlı (split-step) Fourier metodu ile çözümler z'de ilerletilerek yapılmıştır.

Şekil 8'de, potansiyel olmadığı durumda elde edilen soliton çözümünün nonlineer kararlılık analizi verilmiştir. Grafiklerde görüldüğü gibi, bu soliton, maksimum genliğini ($u_{\max} \approx 1.33$), $z \approx 30$'a kadar korumaktadır. Daha sonrasında, yayılma boyunca formunu ve maksimum genliğini koruyamadığı için bu soliton çözümü nonlineer kararlı olmayan (unstable) olarak tanımlanmaktadır.



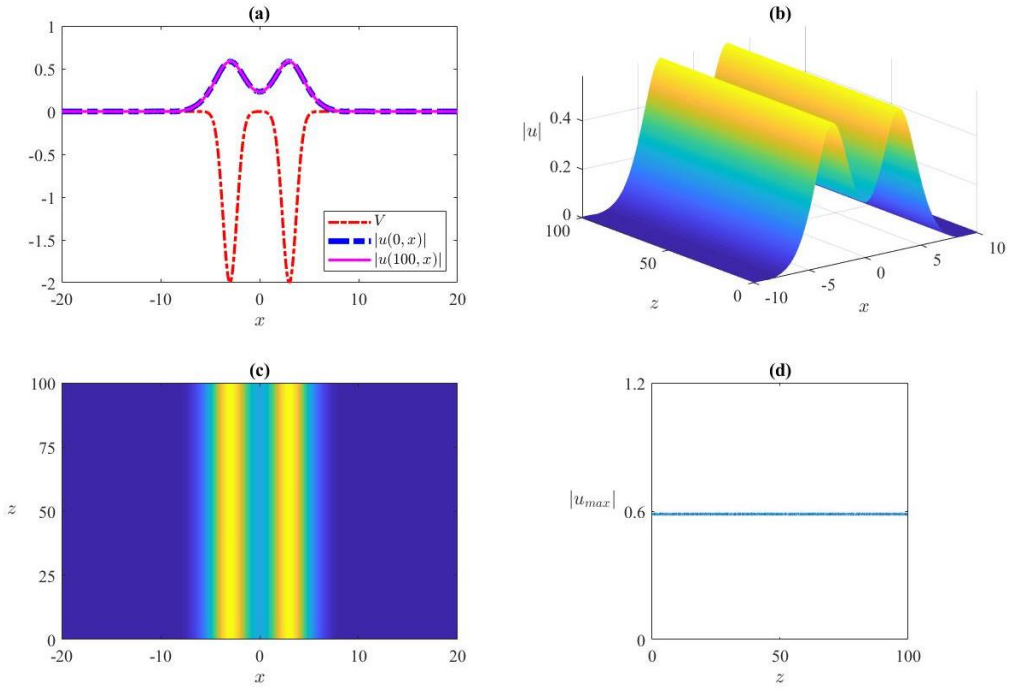
Şekil 8. $\mu = 1,\ V_0 = 0$ değerleri için, (a) SR yöntemi ile elde edilen soliton (mavi) ve nonlineer olarak kararlı olmayan solitonun $z = 30$'daki görüntüsü (mor), (b) solitonun nonlineer yayılımı, (c) yayılımın üstten görünüşü, (d) yayılım sırasında maksimum genliğin değişimi



Şekil 9. $\mu = 1,\ V_0 = 1$ ve $W_0 = 3$ değerleri için, (a) SR yöntemi ile elde edilen soliton (mavi) ve nonlineer olarak kararlı olmayan solitonun $z = 56$'daki görüntüsü (mor), (b) solitonun nonlineer yayılımı, (c) yayılımın üstten görünüşü, (d) yayılım sırasında maksimum genliğin değişimi

Çift-kuyulu potansiyelin nonlineer kararlılığa etkisini araştırmak için öncelikle potansiyelin kuyuları arasındaki mesafeyi, $W_0 = 3$ olarak sabitleyip, değişen V_0 potansiyel derinliklerinde elde edilen soliton çözümleri incelenmiştir.

Şekil 9'da, belirtilen potansiyel altında SR yöntemi ile elde edilen solitonun kararlılık analizi gösterilmektedir. Elde edilen soliton çözümü, maksimum genliğini ($u_{\max} = 1.05$), $z \approx 56$'dan sonra koruyamadığı için nonlineer kararlı olmayan olarak tanımlanmaktadır. Potansiyel olmadığı durumda elde edilen solitona göre, potansiyel eklenmesiyle elde edilen solitonun tepe noktası sağa kayarken, maksimum genliğini koruduğu mesafe de artmıştır.

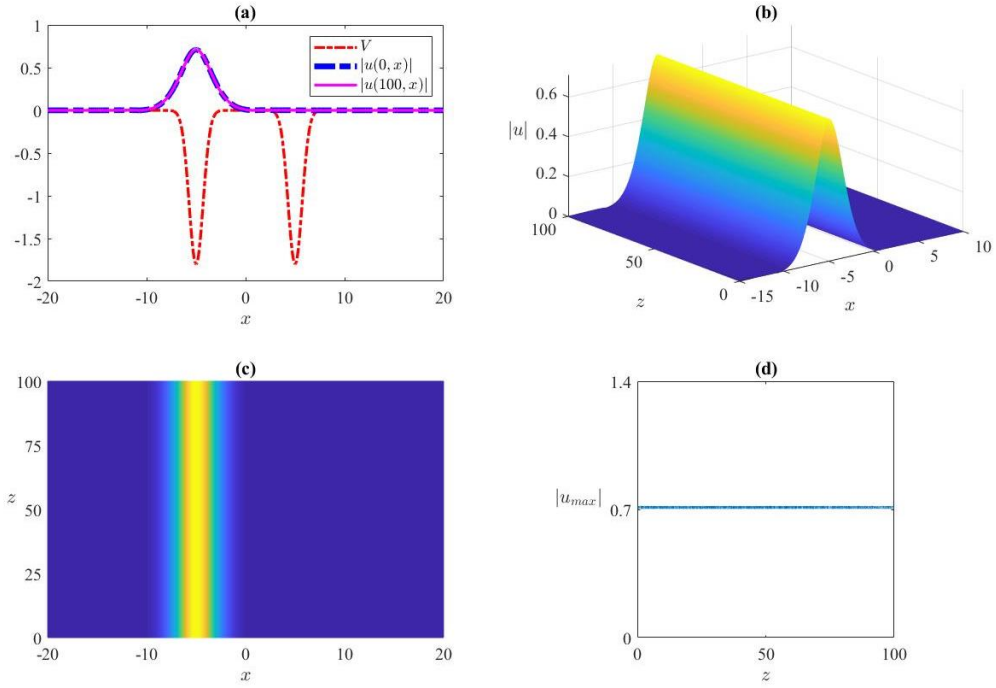


Şekil 10. $\mu = 1$, $V_0 = 2$ ve $W_0 = 3$ değerleri için, (a) SR yöntemi ile elde edilen soliton (mavi) ve nonlineer olarak kararlı olan solitonun $z = 100$'deki görüntüsü (mor), (b) solitonun nonlineer yayılımı, (c) yayılımın üstten görünüşü, (d) yayılım sırasında maksimum genliğin değişimi

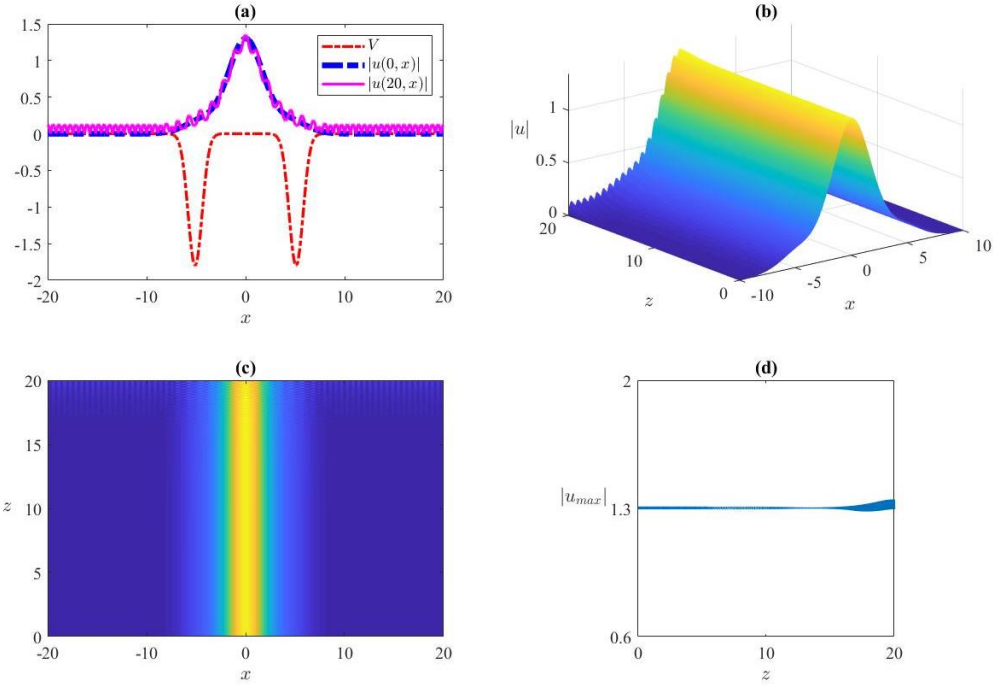
Şekil 10'da, çift-tümsekli solitonun nonlineer kararlılık analizi gösterilmektedir. Grafiklerden anlaşılacağı üzere bu soliton $z = 100$'e kadar, formunu, maksimum genliğini ($u_{\max} \approx 0.59$) ve ağırlık merkezini koruduğu için nonlineer olarak kararlıdır.

Dolayısıyla, V_0 potansiyel derinliğini arttırmanın, soliton çözümünün yapısını değiştirirken (tek-tümsekli, çift-tümsekli, sağa kaymış), nonlineer kararlılığına da olumlu etkisi olduğu gözlemlenmiştir.

Daha sonra potansiyel derinliği $V_0 = 1.8$ değerinde sabitlenerek, potansiyelin kuyularının arasındaki mesafenin nonlineer kararlılığa etkisini araştırmak için, farklı W_0 değerlerinde elde edilen soliton çözümleri incelenmiştir.



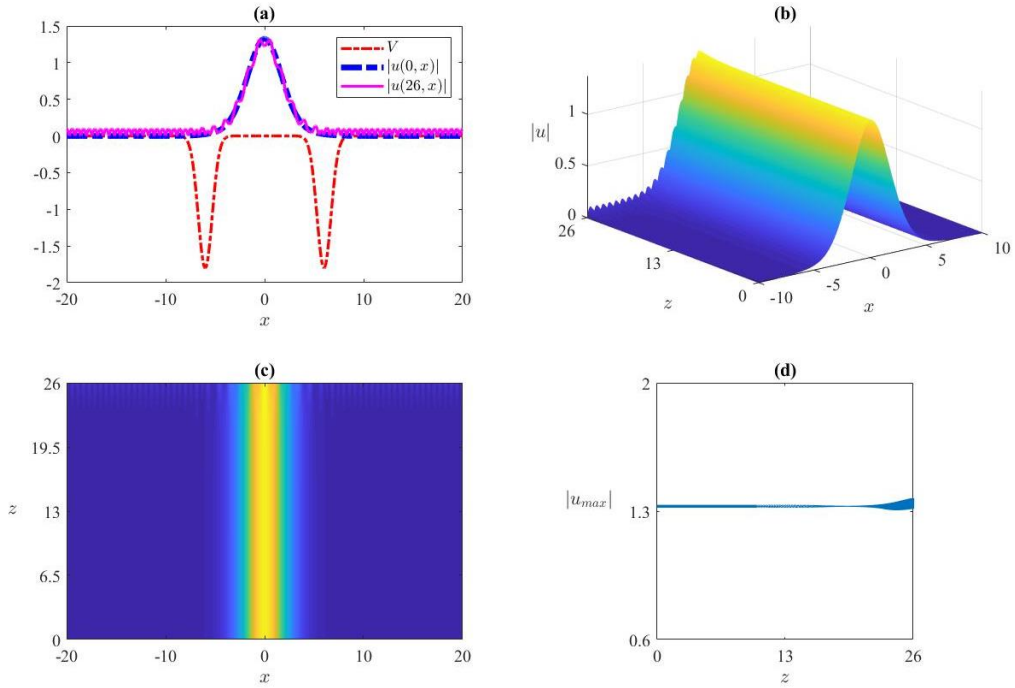
Şekil 11. $\mu = 1,\ V_0 = 1.8$ ve $W_0 = 5$ değerleri için, (a) SR yöntemi ile elde edilen soliton (mavi) ve nonlineer olarak kararlı olan solitonun $z = 100$ 'deki görüntüsü (mor), (b) solitonun nonlineer yayılımı, (c) yayılımın üstten görünüşü, (d) yayılım sırasında maksimum genliğin değişimi



Şekil 12. $\mu = 1,\ V_0 = 1.8$ ve $W_0 = 5.1$ değerleri için, (a) SR yöntemi ile elde edilen soliton (mavi) ve nonlineer olarak kararlı olmayan solitonun $z = 20$ 'deki görüntüsü (mor), (b) solitonun nonlineer yayılımı, (c) yayılımın üstten görünüşü, (d) yayılım sırasında maksimum genliğin değişimi

Şekil 11'de, belirtilen potansiyel altında SR yöntemi ile tepe noktası potansiyelin sol kuyusunun minimum noktasında elde edilmiş olan soliton çözümünün nonlineer kararlılığı incelenmiştir. Bu soliton çözümü, formunu, ağırlık merkezini ve maksimum genliğini ($u_{\max} \approx 0.71$) $z = 100$'e kadar koruduğu için nonlineer olarak kararlıdır.

Şekil 12'de, Şekil 11'deki çözüme göre kuyuların birbirinden daha uzak olduğu durumda (sırasıyla $W_0 = 5.1$ ve $W_0 = 5$) elde edilen solitonun kararlılık analizi gösterilmektedir. Tepe noktası orijinde konumlanarak elde edilen bu soliton çözümünün $z \approx 20$'den sonra maksimum genliğini ($u_{\max} \approx 1.3$) koruyamadığı ve dağılmaya başladığı açıkça görülmektedir. Dolayısıyla bu çözüm nonlineer olarak kararlı olmayan soliton olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 13. $\mu = 1$, $V_0 = 1.8$ ve $W_0 = 6$ değerleri için, (a) SR yöntemi ile elde edilen soliton (mavi) ve nonlineer olarak kararlı olmayan solitonun $z = 26$'daki görüntüsü (mor), (b) solitonun nonlineer yayılımı, (c) yayılımın üstten görünüşü, (d) yayılım sırasında maksimum genliğin değişimi

Şekil 13'teki grafiklerde, $\mu = 1$ değeri için elde edilen soliton çözümünün (Şekil 7) nonlineer olarak kararlı olmadığı açıkça görülmektedir. Potansiyel kuyuları birbirinden ayrıldıkça, potansiyelin soliton çözümü üstündeki etkisi azalmaktadır. Öyle ki, orijine gönderilen başlangıç koşulu, $W_0 \geq 13$ için potansiyelin varlığını algılamayarak potansiyelsiz bir düzenekte gibi davranmaktadır. Dolayısıyla, bu soliton çözümleri ile potansiyel olmadığı durumda elde edilen soliton çözümlerinin formları, maksimum genlikleri ve nonlineer olarak kararlı ilerledikleri mesafeler arasında uyum olduğu görülmektedir.

Lineer Kararlılık Analizi

Bu bölümde, SR yöntemi ile elde edilen soliton tipi çözümlerin lineer kararlılık analizleri, lineer spektrumun incelenmesi ile yapılmıştır. Lineer kararlılık spektrumu, solitonun lineer kararlılık operatörünün özdeğerlerinin kümesidir. Lineer kararlılık analizi yapmak için, elde edilen soliton tipi çözüme

$$u(z,x)=\left[f(x)+\varepsilon\left(g(x)e^{\lambda z}+h^{*}(x)e^{\lambda^{*} z}\right)\right]e^{i\mu z} \tag{13}$$

şeklinde pertürbasyon uygulanır. Burada $\varepsilon \ll 1$, g ve h pertürbasyon özfonksiyonlarını ve λ özdeğeri ifade etmektedir. Daha sonra lineerleştirme ile

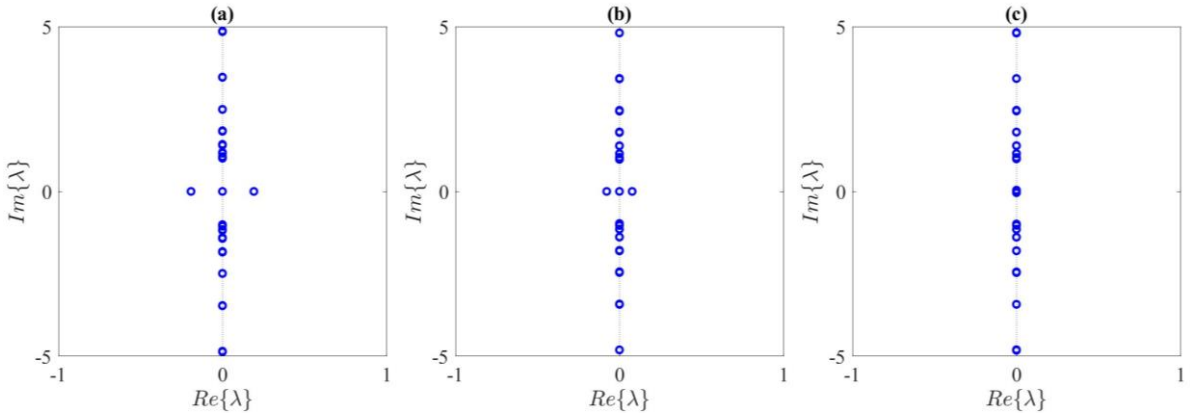
$$i\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ -L_2^{*} & -L_1^{*}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} g \\ h\end{bmatrix} \tag{14}$$

özdeğer problemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} L_1&=\frac{d^2}{dx^2}-\frac{d^4}{dx^4}-\mu+2\left| f\right|^2-V \\ L_2&=f^2 \end{aligned} \tag{15}$$

şeklinde bulunmuştur.

Aşağıdaki grafiklerde sırasıyla, Şekil 6'da gösterilen (a), (b) ve (c) çift-tümsekli soliton tipi çözümlerin lineer kararlılık analizi için lineer spektrumları verilmiştir.



Şekil 14. $\mu=1$ ve $V_0=1.8$ için (a) $W_0=2$, (b) $W_0=3$, (c) $W_0=4.8$ değerleri için elde edilen soliton tipi çözümlerin lineer spektrumları

Şekil 14'te görüldüğü üzere, (a) ve (b)'deki lineer spektrumlarda reel kısmı sıfır olmayan özdeğerler bulunduğu için elde edilen soliton tipi çözümler lineer olarak kararlı değillerdir. Ancak, (a) ve (b) karşılaştırıldığında, çift-tümsekli solitonların tümsekleri birbirinden ayrıldıkça özdeğerlerin reel kısmının mutlak değerce küçüldüğü görülmektedir. (c)'deki lineer spektrum grafiğinden ise elde edilen soliton tipi çözümün lineer olarak kararlı olduğu yorumu yapılmaktadır. Dolayısıyla, çift-tümsekli solitonlar için, tümseklerin gittikçe ayrılmasının lineer kararlılık üzerinde olumlu bir etkisi olduğu sonucuna varılmıştır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, dördüncü mertebeden dispersiyon ve çift-kuyulu bir potansiyel içeren kübik NLS denkleminin çözümleri SR yöntemiyle elde edilmiştir.

Değişen potansiyel derinlikleri ve birbirinden farklı uzaklıktaki potansiyel kuyuları için soliton tipi çözümler elde edilmiştir. Yayılım sabitine bağlı olarak bu çözümler salınımlı kuyruk içerebilmektedirler. Potansiyel derinlikleri ve potansiyelin kuyularının arasındaki mesafe değiştikçe elde edilen soliton tipi çözümün yapısının değiştiği gözlemlenmiştir. Orijinde konumlanan tek-tümsekli veya çift-tümsekli soliton tipi çözümlere ek olarak, tepe noktası potansiyelin sol veya sağ kuyusunun yerel minimum noktasında konumlanan tek-tümsekli soliton tipi çözümler de elde edilmiştir. Potansiyel parametrelerinin belli bir rejiminde ($V_0 = 1.8$, $W_0 = 6$) salınımlı kuyruk yapısının oldukça azaldığı gözlemlenmiş ve yine bu çözüm için yayılım sabitinin etkisi incelenmiştir. Yayılım sabiti arttıkça salınımlı kuyruk yapısının da arttığı gösterilmiştir.

Elde edilen soliton tipi çözümlerin nonlineer kararlılıkları incelenmiştir. Belirli değerler için tek-tümsekli soliton tipi çözüm nonlineer kararlı değilken, çift-tümsekli soliton tipi çözümün nonlineer kararlı olduğu gözlemlenmiştir. Ek olarak, tepe noktası orijinde konumlanmayan soliton tipi çözümlerin de nonlineer olarak kararlı olabilecekleri gösterilmiştir.

Çift-tümsekli soliton tipi çözümlerin lineer spektrumları incelenerek lineer kararlılık analizi yapılmıştır. Tümsekler arasındaki mesafenin artışının, çift-tümsekli solitonların lineer kararlılığına olumlu etkisi olabileceği sonucuna varılmıştır.

Dolayısıyla, çift-kuyulu potansiyelin, solitonun hem nonlineer kararlılığı hem de lineer kararlılığı üzerinde olumlu etkileri olabileceği sayısal olarak gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] M. J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge University Press, New York, 2011.

[2] F. P. Kapron, Maximum information capacity of fibre-optic waveguides, *Electron Letters*, 13, (1977), 96.

[3] R. Kohl, A. Biswas, D. Milovic & E. Zerrad, Optical soliton perturbation in a non-Kerr law media, *Optic and Laser Techology*, 40, (2008) 647.

[4] M. J. Ablowitz, N. Antar, İ. Bakırtaş, B. Ilan, Band-gap boundaries and fundamental solitons in complex two-dimensional nonlinear lattices, *Phys. Rev.* A, 81, 80:033834, 2010.

[5] M. Bağcı, İ. Bakırtaş, N. Antar, Vortex and dipole solitons in lattices possessing defects and dislocations, *Opt. Comm*, 331, 204218, 2014.

[6] İ. Göksel, N. Antar, İ. Bakırtaş, Solitons of (1+1)D cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation with PT-Symmetric Potentials, *Opt. Comm*, 354, 277-285, 2015.

[7] A. Mahalingam, M.S. Mani Rajan, Influence of generalized external potentials on nonlinear tunneling of nonautonomous solitons: Soliton management, *Optical Fiber Technology*, 25, (2015), 44-50.

[8] J. Yang, *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*, SIAM, Philadelphia, PA, USA (2010).

[9] V. I. Petviashvili, Equation of an extraordinary soliton, *Plasma Physics*, 2 (1976), 469-472.

[10] M. J. Ablowitz, Z. H. Musslimani, Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems, *Optics Letters*. 30 (2005) 2140–2142.

[11] M. Karlsson, A. Höök, Soliton-like pulses governed by fourth order dispersion in optical fibers, *Optic Communications*, 104, (1994) 303-307.

[12] A. V. Buryak, N. N. Akhmediev, Stability criterion for stationary bound states of solitons with radiationless oscillating tails, *Physical Review E*, 51, (1995), 3572-3578.

[13] A. V. Buryak, N. N. Akhmediev, Interactions of solitons with oscillating tails, *Optics Communications*, 121, (1995) 109-114.

[14] İ. Bakırtaş, İ. Göksel, Stable Solitons of Higher Order Cubic Quintic Nonlinear Schrödinger Equation with a PT-symmetric Potential, *Advances in Optics: Reviews, Vol. 1*, (2018), 451-472.

NOKTASAL KÜTLE İÇEREN KARBON NANOTÜPLERİN TİTREŞİM ANALİZİ

Ufuk Gül[1], Metin Aydoğdu[2]
[1,2] Makine Mühendisliği Bölümü-Trakya Üniversitesi, Edirne

ABSTRACT

In this study, axial vibration analysis of single-walled carbon nanotubes containing point mass was performed under different boundary conditions using Doublet Mechanics (DM) theory. DM theory, which takes into account the scale effect, is used in the static and dynamic analysis of micro/nanoscale structures. In DM theory, the bond length between the atoms that make up the material directly is included in the calculations as the internal characteristic length of the material. This property makes the DM model a more physical theory compared to other continuum models (nonlocal elasticity theory, strain-gradient theories, etc.). In the DM model, axial, shear, and torsional deformations are expressed at micro level for each atom (node) in a limited distance forming the solid. Then, these micro-level deformations defined are transformed into macro expressions. In other words, with the bottom-up approach, micro-stresses and strains are transformed into macro-stresses and strains. In this study, carbon nanotube-based mass nanosensors have been modeled as a nanorod and the equations of motion of the zigzag carbon nanotube model have been obtained using Hamilton's principle. Ritz method was used in the solution. The effects of the added mass value, the position of the mass, the nanotube length, and the internal characteristic length of the DM theory on the vibration frequency of the nanotube-based mass sensor have been investigated in detail. The results of the proposed model have been verified by comparison with the results of mass sensor studies in the literature.

Keywords: Carbon nanotube-based mass sensors; vibration; doublet mechanics; Ritz method.

ÖZET

Bu çalışmada, noktasal kütle içeren tek duvarlı karbon nanotüplerin Eşil Mekanik (EM) teorisi kullanılarak farklı sınır şartlarında eksenel titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Ölçek etkisini dikkate alan EM teorisi mikro/nano ölçekli yapıların statik ve dinamik analizlerinde kullanılmaktadır. EM teorisinde, malzemenin iç karakteristik uzunluğu olarak direk malzemeyi oluşturan atomlar arasındaki bağ uzunluğu hesaplamalara dahil edilir. Bu özellik diğer sürekli ortam modellerine (yerel olmayan elastisite teorisi, genleme gradyan teorileri vs.) kıyasla EM modelini daha fiziksel bir teori haline getirmektedir. EM modelinde, katıyı oluşturan sınırlı mesafedeki her bir atom (düğüm) için eksenel, kayma ve burulma deformasyonları mikro düzeyde ifade edilmektedir. Daha sonra tanımlanan bu mikro düzeydeki deformasyonlar makro ifadelere dönüştürülür. Yani aşağıdan yukarıya yaklaşımı ile mikro gerilmeler ve genlemeler makro gerilmeler ve genlemelere dönüştürülmektedir. Bu çalışmada, karbon nanotüp tabanlı kütle nanosensörler, nano çubuk olarak modellenmiş ve

zikzak karbon nanotüp modeline ait hareket denklemleri Hamilton ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Çözümde Ritz yöntemi kullanılmıştır. Eklenen kütle değerinin, kütlenin konumunun, nanotüp uzunluğunun ve EM teorisine ait iç karakteristik uzunluğun nanotüp tabanlı kütle sensörünün titreşim frekansı üzerindeki etkileri detaylı olarak araştırılmıştır. Önerilen modele ait sonuçlar, literatürdeki kütle sensörü çalışmalarının sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Karbon nanotüp tabanlı kütle sensörler; titreşim; Eşil Mekanik; Ritz yöntemi.

GİRİŞ

Karbon nanotüplerin keşfedilmesinden [1] bu yana, karbon nanotüpler ile ilgili literatürde kapsamlı araştırmalar yapılmaktadır. Üstün mekanik, fiziksel ve elektriksel özellikleri nedeniyle karbon nanotüpler, nano ölçekli sensörler, nano-transistörler, nano-rezonatörler, nano-kompozitler, biyo-nano-kompozitler ve nanoaktüatörler gibi birçok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, karbon nanotüplerin yüksek sertlikleri, düşük yoğunlukları, yüksek dayanımları ve ortam değişikliklerine karşı yüksek hassasiyetleri kütle sensörleri olarak da kullanılmalarına olanak sağlamaktadır. Nano harekete geçirici sensörlerin çoğunda kütle ve kuvvet sensörleri kullanılmaktadır. Algılama işlemi gerçekleştirilirken sistemin çevredeki bazı etkilere maruz kalması sonucu doğal frekans değerlerinde değişiklikler meydana gelir. Örneğin, kütle nano sensörler algılama durumunda, nano sensörlerin titreşimsel doğal frekansları, yapıya bir nanopartikül (ekli kütle) iliştirildiğinde değişir. Rezonatör üzerine bağlı kütlenin değişimi rezonans frekansının orijinal değerinden sapmasına neden olur.

Klasik elastisite teorisi, nano ölçekli kısa yapıların ölçek etkisini dikkate almadığı için nano ölçekli kütle sensörlerin statik ve dinamik analizlerinde kullanışlı değildir. Bu nedenle, nano ölçekli kütle sensörlerde, eklenen kütlenin etkisini ve kütlenin konumunun sistemin doğal frekansı üzerindeki etkisini analiz etmek için deneysel ve teorik yaklaşımlar (moleküler dinamik simülasyonu ve sürekli ortam teorileri) kullanılmaktadır. Literatüre göre, nano ölçekte deneylerin kontrol edilmesi oldukça güçtür. Teorik çalışmalarda ise, karbon nanotüp sensörlerini modellemek için sürekli ortam teorileri ve moleküler dinamik simülasyonu yaklaşımları [2] yaygın olarak kullanılmaktadır. Atomistik tabanlı moleküler dinamik (MD) simülasyonları pahalı ve çok fazla hesaplama işlemi gerektirmektedir. Sürekli ortam modellemesi ise MD simülasyonlarından ve deneysel doğrulamadan çok daha ucuz ve çok daha az hesaplama çabası gerektirir. Sürekli ortam modellemesi sonuçları atomistik tabanlı çalışmalar ve deneylerden elde edilen birçok sonuçla da uyumludur. Bu sonuç, sürekli ortam modellemesinin nano ölçekli alanda kullanılabileceğini göstermektedir. Son yıllarda, karbon nanotüplerin ve nano cihazların statik ve dinamik davranışlarını incelemek için mekanik modelleme sırasında malzemelerin iç karakteristik uzunluğunu hesaba dahil eden sürekli ortam teorileri artan bir şekilde kullanılmaktadır. Bu sürekli ortam teorilerinden en çok kullanılanlar, yerel olmayan elastisite teorisi [3], çiftli gerilme teorisi [4] ve genleme esaslı gradyan teorisi [5] olarak sıralanabilir.

Nano ölçekli kütle sensörlerinin titreşim analizi MD simülasyonu kullanılarak Li ve Chou [6] tarafından araştırılmıştır. Mateiu vd. [7] çok duvarlı karbon nanotüp tabanlı kütle sensörlerin frekanslarını deneysel olarak elde etmişlerdir. Bir diğer çalışmada [8], ekli kütleye sahip karbon nanotüp tabanlı nano-rezonatörler için basit analitik formüller geliştirilmiştir. Shen vd. [9] karbon nanotüp tabanlı bir biyo-sensörü, serbest ucunda küresel bir nano ölçekli biyo-nesne taşıyan çok duvarlı karbon nanotüpten yapılmış bir Timoshenko kirişi olarak modellemişler ve kiriş ucuna eklenen biyo-nesnenin dönme ataletinin etkisini de göz önüne alarak, kirişe ait titreşim frekanslarını yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak elde

etmişlerdir. Ucuna kütle eklenmiş ankastre-serbest çift duvarlı karbon nanotüplerde titreşim analizi Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde Elishakoff vd. [10] tarafından incelenmiştir. Aydogdu ve Filiz [11] tek duvarlı karbon nanotüp tabanlı kütle sensörlerinin eksenel titreşim davranışını, yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak incelenmişlerdir. Yerel olmayan elastisite teorisi parametresinin, nanotüp uzunluğunun ve ekli kütlenin nanotüp frekansı üzerindeki etkileri detaylı bir şekilde araştırılmıştır. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak, biyokütle sensör ekli karbon nanotüplerin frekansları Mehdipour vd. [12] tarafından elde edilmiştir. Nano boyutlu kütle sensörü olarak tek duvarlı karbon nanotüpün yerel olmayan titreşim analizi De Rosa ve Lippiello [13] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada, nanotüp, serbest ucunda bağlı bir kütle taşıyan bir Timoshenko kirişi olarak modellenmiş ve yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak, Hamilton ilkesinin yeniden formülasyonu sunulmuş ve hareket denklemleri ve bunlara karşılık gelen genel sınır koşulları türetilmiştir. Fakher vd. [14] elastik zemin üzerine oturan karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlerinin titreşim davranışını, yerel olmayan elastisite teorisinin integral formunu kullanarak bir sonlu eleman modeli aracılığıyla araştırmışlardır. Yakın zamanda, Arda ve Aydogdu [15] bir karbon nanotüp kütle sensörünün dinamik analizini yapmışlardır. Daha önceki çalışmalardan farklı olarak ekli kütle, bir kütle-yay sistemi olarak modellenerek ekli kütlenin elastisitesi hesaplara dahil edilmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak elde edilen yönetici denklem Ritz metodu kullanılarak farklı sınır şartları için çözülmüştür.

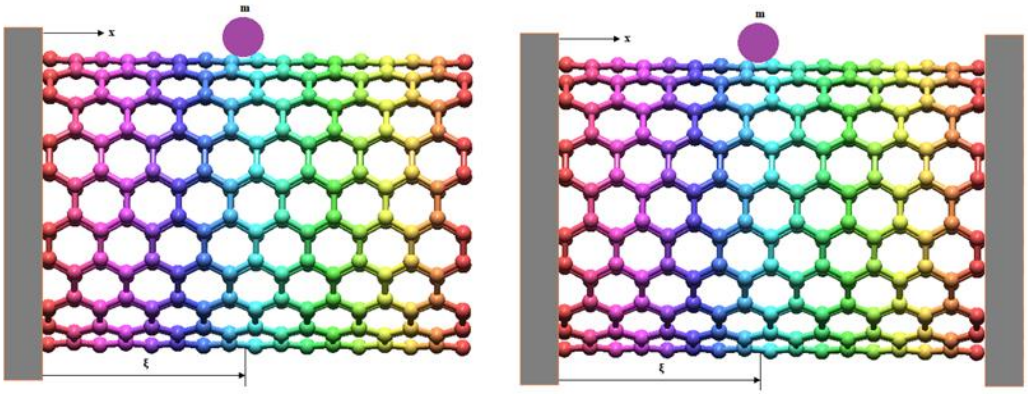
Yukarıda bahsedilen sürekli ortam teorilerine ek olarak, Granik [16] tarafından geliştirilen ölçek etkisini dikkate alan Eşil Mekanik (EM) teorisi de mikro/nano ölçekli yapıların statik ve dinamik analizlerinde kullanılmaktadır. EM teorisinin diğer sürekli ortam teorilerinden temel farkı, dikkate alınan malzemenin doğrudan mikro/nano yapısına bağlı olmasıdır. Sürekli ortam modellerinin aksine EM teorisinde malzemenin iç karakteristik uzunluğunun tanımlanması tartışmalı değildir. EM teorisinde, malzemenin iç karakteristik uzunluğu olarak direk malzemeyi oluşturan atomlar arasındaki bağ uzunluğu hesaplamalara dahil edilir. Bu özellik diğer sürekli ortam modellerine kıyasla EM modelini daha fiziksel bir teori haline getirmektedir. Ayrıca yukarıda bahsedilen sürekli ortam teorileri deneylerle tanımlanamayan çok sayıda fenomenolojik sabitler içermektedir. EM teorisi ise sürekli ortam modelleri gibi fenomenolojik değildir. Ölçek etkisini dikkate alan EM teorisinde, mikro ölçekli gerilme ve şekil değişimleri vektörel olarak Taylor serisi açılımında tanımlanabilir. Bu mikro düzeydeki gerilme ve genleme ifadeleri dikkate alınan mikro yapıyı oluşturan atomlar arasındaki bağ uzunluğunu gösteren iç karakteristik uzunluğu da içermektedir. Böylece, EM teorisinde katının ayrık mikro yapısı da dikkate alınmış olur. EM teorisi ilk olarak, Granik ve Ferrari [17] tarafından tanecikli malzemelerin mekanik analizinde kullanılmıştır. Daha sonra, EM teorisi kullanılarak tanecikli malzemelerin kinematik denklemleri geliştirilmiştir [18]. Kojic vd. [19] EM teorisi çerçevesinde mikro yapılı malzemelerin sonlu eleman formülasyonunu geliştirmişlerdir. Bir diğer çalışmada, elastik ortama gömülü nano çubukların eksenel titreşimi Gul vd. [20] tarafından EM teorisi kullanılarak araştırılmıştır. EM teorisi kullanılarak elde edilen doğal frekanslar, klasik elastisite çözümü ile karşılaştırılmıştır. Eltaher ve Mohamed [21] EM teorisi kullanarak kusurlu bir karbon nanotüp modelinde statik ve dinamik analiz gerçekleştirmişlerdir. Aydogdu ve Gul [22] çiftli nano çubuk sistemlerinin eksenel titreşimini EM teorisi kullanarak incelemişlerdir. Aynı yazarlar, Love nano çubuk modeline ait titreşim davranışını [23] ve nano çubuk ve nano kirişlere ait statik ve dinamik davranışı [24] EM teorisi kullanarak araştırmışlardır.

Bu çalışmada, noktasal kütle içeren tek duvarlı karbon nanotüplerin EM teorisi kullanılarak titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlere ait hareket denklemleri Hamilton ilkesi kullanılarak elde edilmiştir. Çözümde Ritz yöntemi kullanılmıştır. Nanotüp tabanlı kütle sensörünün titreşim frekansları ankastre-ankastre ve

ankastre-serbest nano çubuk modelleri için elde edilmiştir. Ölçek etkisini dikkate alan EM teorisinin, nanotüp tabanlı kütle sensörlerinin mekanik tasarımında ve optimizasyonunda kullanılabileceği gösterilmiştir.

EŞİL MEKANİK TEORİSİ

Üzerinde kütle ekli (m), L uzunluğunda ve d çapında bir karbon nanotüp Şekil 1'de gösterilmektedir.



Şekil 1. Ekli kütleye sahip A-S ve A-A karbon nanotüp modelleri $(0 \le \xi \le 1)$

EM teorisi çerçevesinde, zikzak karbon nanotüp modeline ait genleme enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_g = \frac{1}{2}\int_0^L AE\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{\eta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\right]dx \tag{1}$$

Burada U_g genleme enerjisini, u nanotüpün eksenel yer değiştirmesini, η karbon nanotüpün iç karakteristik uzunluğunu, A nanotüpün kesit alanını ve E nanotüpün elastisite modülünü göstermektedir. Karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörde kinetik enerji ifadesi ise

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}\right)^2 \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, T kinetik enerjiyi, ρ nanotüp yoğunluğunu, t zamanı, ξ ekli kütlenin konumunu ve m eklenen cismin kütlesini ifade etmektedir. Denklem (2)'de ilk terim nano çubuğun kinetik enerjisini, ikinci terim ise ekli kütlenin kinetik enerjisini göstermektedir. Mevcut problem için, nano çubuğun ankastre (A), ve serbest (S) kenarlarının kombinasyonu için karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlerin doğal frekansları elde edilecektir. Buna göre, kütle nano sensörlerine ait geometrik ve doğal sınır koşulları aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A}): u(x,t)=0,\\&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, x=0, L\\&(\mathrm{S}): AE\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+AE\frac{\eta^2}{12}\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3},\\&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, x=0, L\end{aligned} \tag{3}$$

Harmonik titreşim varsayımı ile $u(x,t)$ eksenel yer değiştirmesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$u(x,t)=U(x)e^{i\omega t} \tag{4}$$

Yukarıda, (i^2=-1), $U(x)$ eksenel yer değiştirme genliğini ve ω ise nano çubuğun doğal frekansını göstermektedir. Bu çalışmada, karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlerin titreşimini araştırmak için Ritz yöntemi kullanılmıştır. Mevcut problem için Ritz yönteminin temel adımları aşağıda verilmiştir. Denklem (4)'ün Denklem (1) ve (2)'de yerine yazılması sonucunda, maksimum genleme enerjisi ve maksimum kinetik enerji aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$U_{maks}=\frac{1}{2}\int_0^L AE\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-\frac{\eta^2}{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2\right]dx \tag{5}$$

$$T_{maks}=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(\omega)^2 U(x,t)dx+\frac{1}{2}m(\omega)^2 U(\xi,t) \tag{6}$$

Daha sonra, yaklaşık bir titreşim çözümü elde etmek için Ritz yöntemi uygulanmaktadır ve eksenel yer değiştirme bileşeni aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$U(x,t)=\sum_{i=2}^{I} C_i X^i, i=2,....N. \tag{7}$$

Burada C_i, belirsiz katsayılardır ve X^i, nano çubuğun kenarlarında en azından geometrik sınır koşullarını sağlayan ancak doğal sınır koşullarını sağlaması gerekli olmayan fonksiyondur. Denklem (7), Denklem (3)'teki bütün geometrik sınır koşullarını sağlamaktadır. Ayrıca, (A) kenar geometrik sınır şartının sağlanabilmesi için Denklem (7)'de i=2'den başlamalıdır. Bu durumda (S) kenar için sınır koşulları da yaklaşık olarak sağlanmaktadır. Cebirsel polinom (X^i) boyutsuz formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$X^i=\bar{x}^i(\bar{x}-1)^B, \bar{x}=\frac{x}{L}. \tag{8}$$

Denklem (8)'deki B değerleri (S) ve (A) kenarlar için sırasıyla B=0 ve B=2 alınır. Buna göre, karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlerin doğal frekanslarını elde etmek için aşağıdaki fonksiyon tanımlanmaktadır:

$$F=U_{maks}-T_{maks} \tag{9}$$

Denklem (9) belirsiz katsayılara (C_i) göre aşağıdaki gibi minimize edilmelidir:

$$\frac{\partial F}{\partial C_i} = 0 \tag{10}$$

Denklem (10), eşit sayıda bilinmeyen C_i içinde *I*x*I* lık eş zamanlı, doğrusal, homojen denklemler verir. Bu denklemler bir öz değer problemi olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\left([K]-\lambda^2[M]\right)\{\Delta\} = 0 \tag{11}$$

Burada, [*K*] rijitlik matrisini, [*M*] kütle matrisini, {Δ} C_i katsayılarının sütun vektörünü ve λ, aşağıdaki biçimde tanımlanabilen karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlerin boyutsuz titreşim frekansını göstermektedir:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 L^2}{E}} \tag{12}$$

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, karbon nanotüp tabanlı kütle nano sensörlerin EM teorisi kullanılarak elde edilen eksenel titreşim analizi sonuçları verilmiştir. Ritz yöntemi kullanılarak, kütle nano sensörlerin A-A ve A-S sınır koşulları için boyutsuz frekans parametresinin ($\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 L^2}{E}}$) nanotüp uzunluğu, ekli kütlenin değeri ve konumu, nanotüpün uzunluk ölçek parametresi ile değişimleri gösterilmektedir.

Çizelge 1'de, ilk üç titreşim frekansı modunda, A-S ve A-A sınır şartlarında, nanotüpe kütle ekli olması ve olmaması durumları için yakınsama çalışması gösterilmektedir. Nano çubukta ilk üç mod için yeterli yakınsama elde edildiği açıkça görülmektedir. A-S sınır koşulu için üçüncü titreşim modunda 35 ile 40 terimleri arasındaki maksimum fark A-S sınır koşulunda %0.10 iken A-A sınır koşulunda %0.15'tir. Böylece, bu çalışmada elde edilen sayısal sonuçların tamamında Ritz çözümünde *N*=40 terim kullanılarak tüm frekans sonuçları elde edilebilir.

Çizelge 1. Boyutsuz frekans parametrelerinin A-S ve A-A sınır koşulları için yakınsaması

η=0, $m_r = 0$						
	A-S			A-A		
N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3
5	1.615	4.840	8.006	3.230	6.510	9.692
10	1.583	4.751	7.918	3.182	6.352	9.545
20	1.574	4.723	7.871	3.154	6.306	9.462
30	1.572	4.717	7.862	3.147	6.294	9.442
35	1.572	4.716	7.860	3.145	6.292	9.437

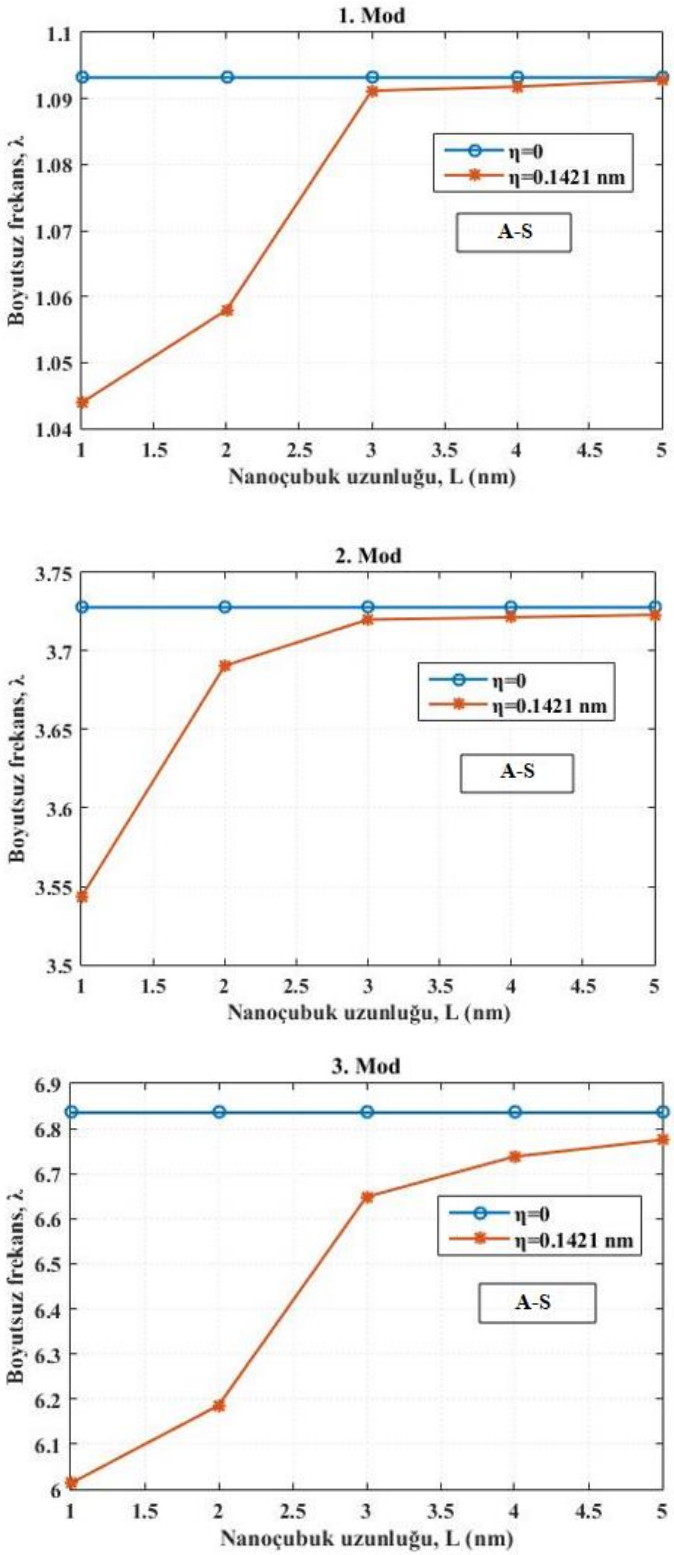
40	1.571	4.715	7.858	3.145	6.289	9.435
η=0.1421 nm, L=5 nm, $m_r = 1, \xi = 0.5$						
N	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3
5	1.125	3.806	7.093	1.778	6.024	7.668
10	1.093	3.727	6.835	1.755	5.8775	7.292
20	1.081	3.682	6.701	1.739	5.6749	7.037
30	1.079	3.670	6.649	1.731	5.5775	6.982
35	1.079	3.666	6.639	1.730	5.5765	6.955
40	1.078	3.663	6.632	1.729	5.5761	6.944

Doğrulama için, klasik elastisite teorisi kullanılarak şimdiki çalışmadan elde edilen frekans sonuçları, A-S ve A-A sınır şartları için Ref. [11]'de elde edilen klasik elastisite sonuçları ile Çizelge 2'de karşılaştırılmaktadır. İlk üç mod için her iki model arasında iyi bir uyum gözlemlenmektedir. Üçüncü titreşim modu için her iki model arasındaki en yüksek fark %0,106'dır.

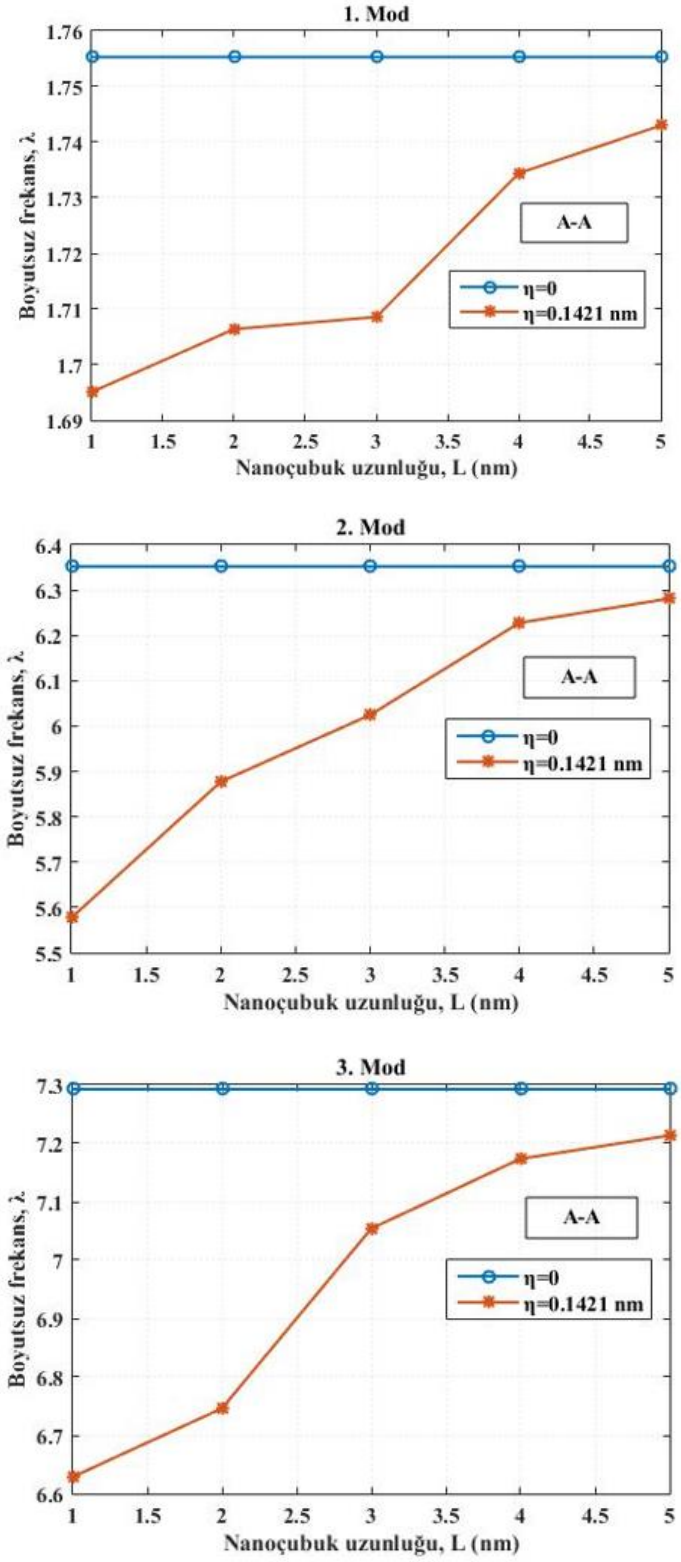
Çizelge 2. Klasik elastisite teorisi kullanılarak ilk üç boyutsuz frekans parametresinin kıyaslanması (η=0, m_r=0)

Mod sayısı	[11]		Şimdiki sonuçlar	
	A-S	A-A	A-S	A-A
1	1.571	3.1415	1.571	3.145
2	4.712	6.284	4.715	6.289
3	7.854	9.425	7.858	9.435

Şekil 2 ve 3'te, A-S ve A-A sınır şartlarında ekli kütleye sahip nano çubukta ilk üç boyutsuz frekans parametresinin çubuk uzunluğu ile değişimi klasik elastisite teorisi (η=0) ve EM teorisi için gösterilmektedir. EM çözümünde nano çubuğa ait uzunluk ölçek parametresi η=0.1421 nm alınmıştır. Bu şekillerde, ekli kütle her iki sınır şartı için de nano çubuğun ortasında olacak şekilde eklenmiş ($\xi = 0.5$) ve ekli kütlenin çubuğun kütlesine oranı, $m_r = m/\rho AL = 1$ alınmıştır. Şekil 2 ve 3'te görüldüğü gibi, EM teorisi ile klasik elastisite teorisi sonuçları arasındaki fark özellikle küçük nano çubuk uzunluklarında (L<3 nm) daha belirgindir. Her iki sınır şartı için de, klasik elastisite teorisinde frekans parametresi çubuk uzunluğu ile değişmezken, EM teorisinde çubuk uzunluğu arttıkça frekans parametreleri klasik elastisite sonuçlarına yakınsamaktadır. Uzunluk arttıkça EM etkileri kaybolmakta ve EM ile klasik elastisite sonuçları arasındaki fark gittikçe azalmaktadır.



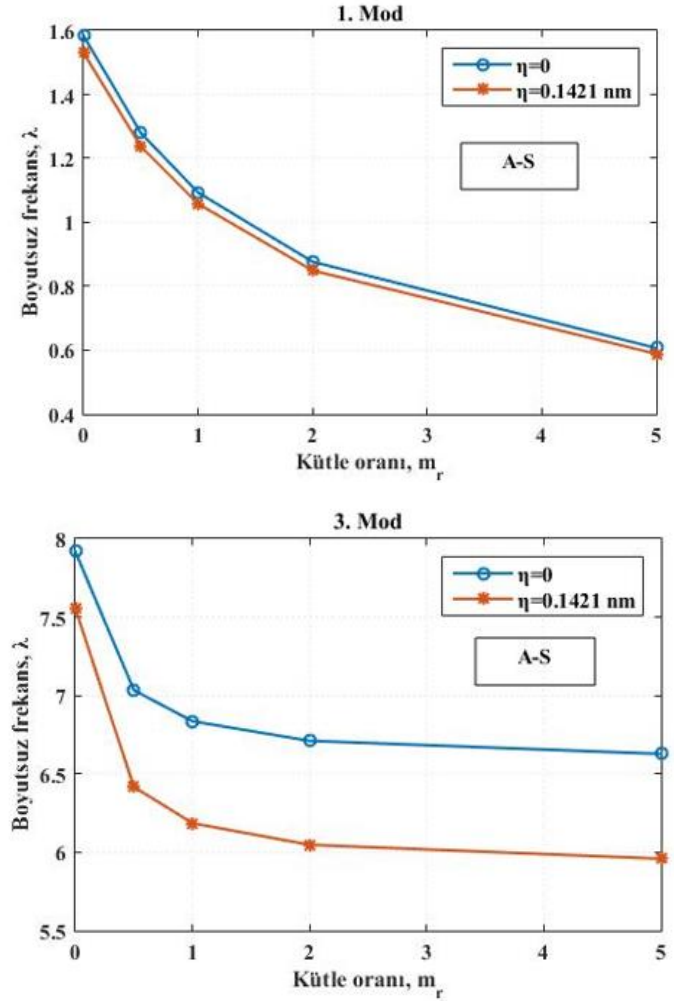
Şekil 2. A-S sınır şartı için frekans parametresinin nano çubuk uzunluğu ile değişimi ($m_r = 1, \xi = 0.5$)



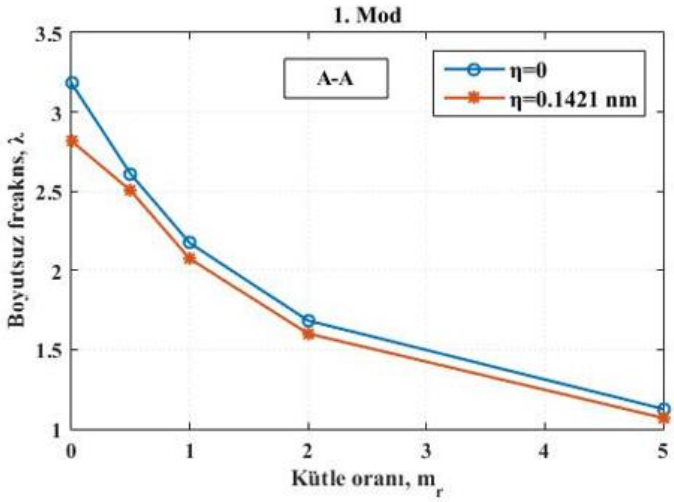
Şekil 3. A-A sınır şartı için frekans parametresinin nano çubuk uzunluğu ile değişimi ($m_r = 1, \xi = 0.5$)

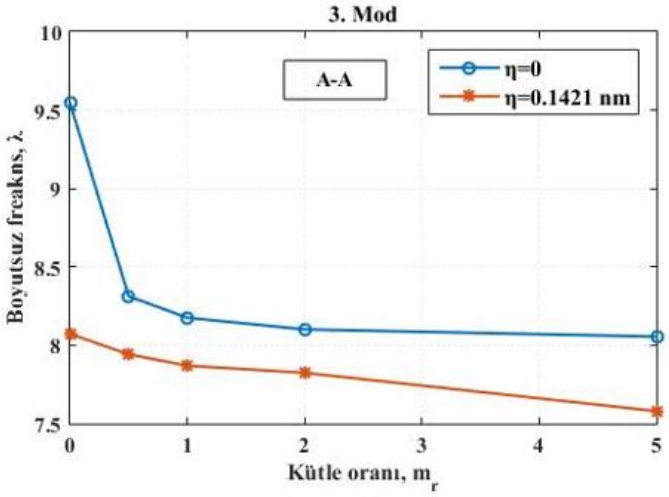
Şekil 4 ve 5'te, boyutsuz frekans parametresinin kütle oranı (m_r) ile değişimi her iki sınır şartı için de gösterilmektedir. Her iki sınır şartı için de, çubuğun frekans parametresinin artan kütle oranı ile azaldığı görülmektedir. Bunun nedeni, nano çubuğa bir parçacık eklendiğinde, sistemin toplam kütlesi artar, ancak rijitlik değişmez ve sonuç olarak da sistemin frekansı

azalır. Ayrıca, EM frekans değerlerinin klasik elastisite teorisi ile elde edilen frekans değerlerinden daha düşük olduğu görülmektedir. Bu durum EM teorisinin klasik elastisite teorisine göre yumuşatıcı malzeme özelliğine sahip olduğunu göstermektedir. İki teori arasındaki fark, özellikle yüksek titreşim modlarında (3.mod) daha belirgin olmaktadır.



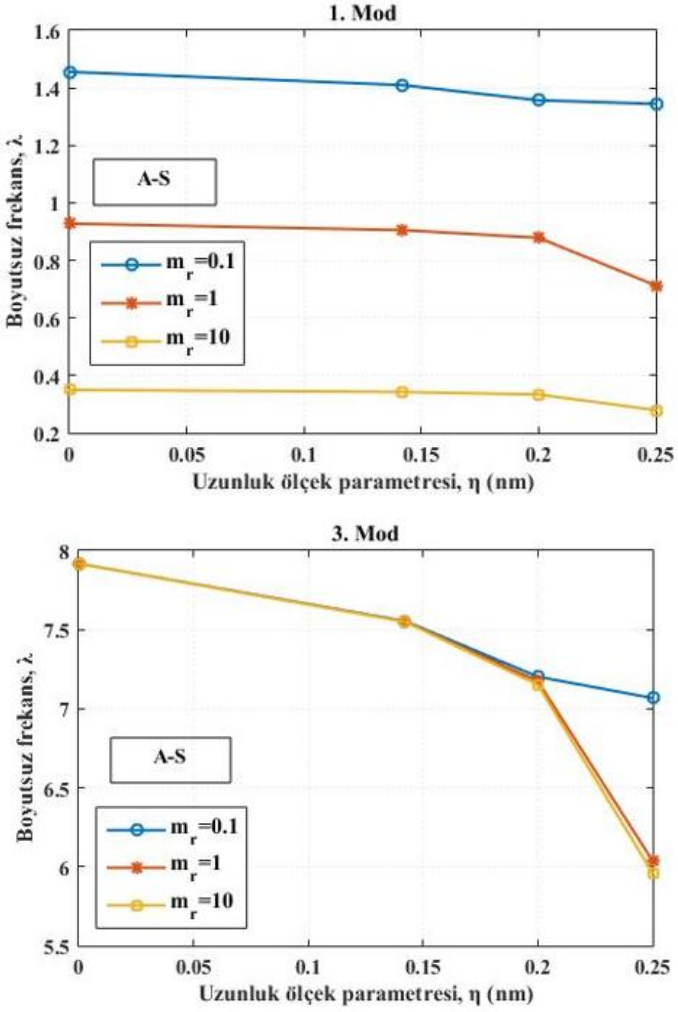
Şekil 4. A-S sınır şartı için frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi (L=2 nm, $\xi = 0.8$)



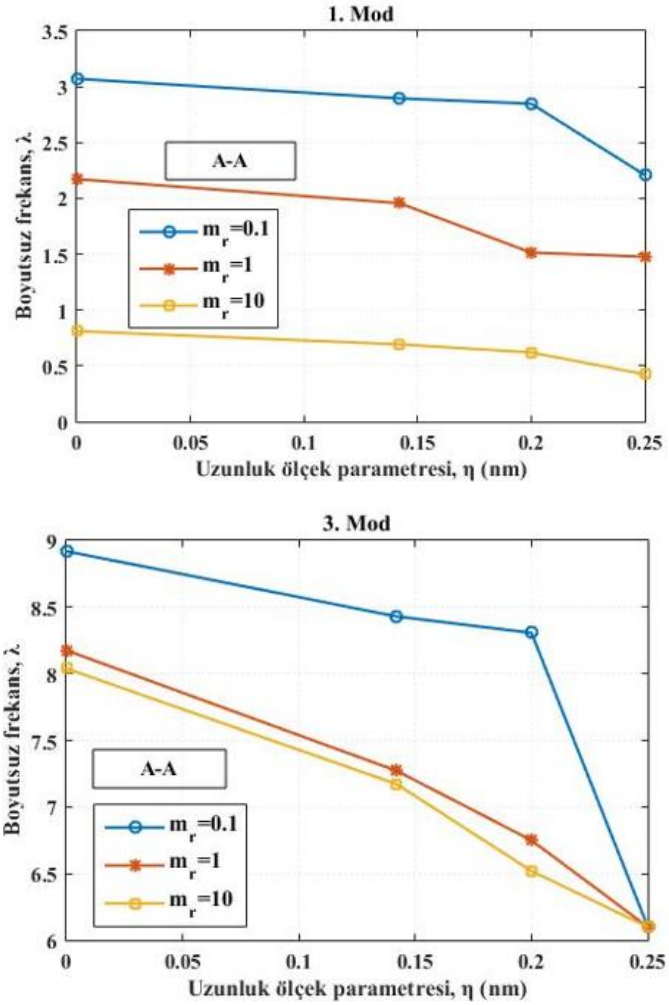


Şekil 5. A-A sınır şartı için frekans parametresinin kütle oranı ile değişimi (L=2 nm, $\xi = 0.8$)

EM teorisinde, frekans parametresinin uzunluk ölçek parametresi ile değişimi farklı kütle oranları için Şekil 6 ve 7 'de gösterilmektedir. Uzunluk ölçek parametresi arttıkça frekans parametresinin azaldığı açık bir şekilde görülmektedir. Aynı zamanda, her iki sınır şartı için de, kütle etkisi frekans tepkisini azaltmaktadır.

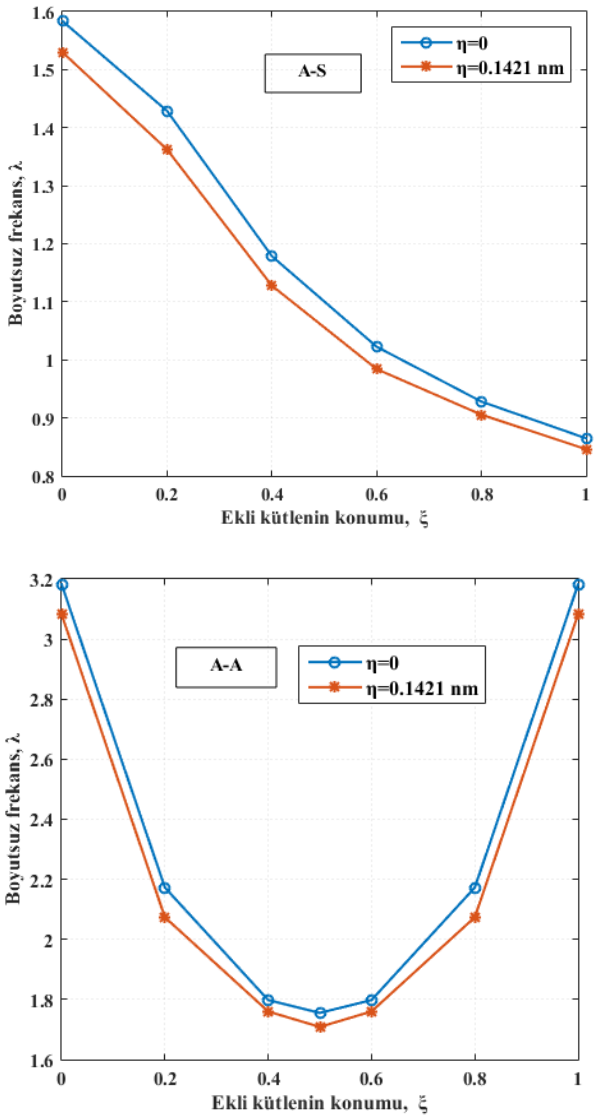


Şekil 6. A-S sınır şartı için frekans parametresinin uzunluk ölçek parametresi ile değişimi (L=2 nm, $\xi = 0.8$)



Şekil 7. A-A sınır şartı için frekans parametresinin uzunluk ölçek parametresi ile değişimi (L=2 nm, $\xi = 0.8$)

Şekil 8 ‘de ise frekans parametresinin ekli kütlenin konumu ile değişimi EM ve klasik elastisite teorileri için gösterilmektedir. Görüldüğü gibi bağlı kütlenin konumu frekans üzerinde önemli bir etkiye sahiptir. A-S sınır şartı için eklenen kütlenin başlangıç noktasına göre konumunun artmasıyla çubuğun frekansı azalmaktadır. En düşük frekans değeri A-S sınır şartı için $\xi = 1$’de elde edilirken, A-A sınır şartında en düşük frekans değeri $\xi = 0.5$’te elde edilmektedir. Şekil 8’de görüldüğü gibi, A-A durumu nano çubuğun orta noktasına göre simetriktir.



Şekil 8. Frekans parametresinin ekli kütlenin konumu ile değişimi (L=2 nm, $m_r = 1$)

SONUÇLAR

Bu çalışmada, EM ve klasik elastisite teorilerine dayalı olarak, ekli kütleye sahip bir nano çubuk modeline ait eksenel titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Nano çubuk formülasyonunda zikzak nanotüp modeli kullanılmıştır. Ritz yöntemi kullanılarak, A-S ve A-A sınır koşulları için ekli kütleye sahip nano çubukta titreşim frekansları belirlenmiştir. Eklenen kütle miktarının, kütle konumunun, çubuk uzunluğunun ve ölçek parametresinin, ekli kütleye sahip nano çubuğun frekansına olan etkileri detaylıca araştırılmıştır. Nano çubuğa eklenen kütlenin sistemde titreşim frekansını azalttığı gözlenmiştir. Ayrıca, eklenen kütlenin konumunun sistemin frekansını değiştirdiği ve kütlenin başlangıç noktasından daha uzağa eklenmesiyle sistem frekansının azaldığı gözlenmiştir. Tüm sınır şartları için, EM frekans değerlerinin klasik elastisite teorisinden elde edilen frekans değerlerinden daha düşük olduğu ve iki teori arasındaki farkın küçük uzunluklarda daha belirgin olduğu görülmüştür. Bu durum, ölçek etkisinin küçük uzunluklarda daha etkili olmasından kaynaklanmaktadır. EM teorisinde, uzunluk ölçek parametresi arttıkça sistemin frekansının azaldığı görülmüştür. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar neticesinde, EM teorisinin nano ölçekli kütle sensörlerinin tasarımında kullanılabileceği söylenebilir.

KAYNAKLAR

[1] S. Iijima, Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*. 354 (1991) 56–58. doi: 10.1038/354056a0.

[2] C. Li, T.W. Chou, Atomistic Modeling of Carbon Nanotube-based Mechanical Sensors, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 17 (2006) 247-254. doi: 10.1177/1045389X06058622.

[3] A.C. Eringen, Nonlocal Polar Field Models, Academic Press: New York, 1976.

[4] E. Cosserat, F. Cosserat, Sur la théorie des corps déformables, Herman, Paris, (in French) 1909.

[5] R.D. Mindlin, Micro-structure in linear elasticity, Archive for Rational Mechanics and Analysis. 16 (1964) 51–78. doi:10.1007/BF00248490.

[6] C. Li, T.W. Chou, Mass detection using carbon nanotube-based nanomechanical resonators, Applied Physics Letters. 84 (2004) 5246–48. doi:10.1063/1.1764933.

[7] R. Mateiu, A. Kuhle, R. Marie, A. Boisen, Building a multi-walled carbon nanotube-based mass sensor with the atomic force microscope, Ultramicroscopy. 105 (2005) 233–37. doi:10.1016/j.ultramic.2005.06.042.

[8] R. Chowdhury, S. Adhikari, J. Mitchell, Vibrating carbon nanotube based bio-sensors, Physica E: Low Dimensional Systems and Nanostructures. 42 (2009) 104–109. doi:10.1016/j.physe.2009.09.007.

[9] Z.B. Shen, L. P. Sheng, X. F. Li, G. J. Tang, Nonlocal Timoshenko beam theory for vibration of carbon nanotube-based biosensor, Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures. 44 (2012) 1169–75. doi:10. 1016/j.physe.2012.01.005.

[10] I. Elishakoff, C. Versaci, G. Muscolino, Clamped-free double-walled carbon nanotube-based mass sensor, Acta Mechanica. 219 (2011) 29–43. doi:10.1007/s00707-010-0435-1.

[11] M. Aydogdu, S. Filiz, Modeling carbon nanotube-based mass sensors using axial vibration and nonlocal elasticity, Physica E: Low Dimensional Systems and Nanostructures, 43 (2011) 1229-1234. doi:10.1016/j.physe.2011.02.006.

[12] I. Mehdipour, A. E. Moghadam, C. Mehdipour, Application of an electrostatically actuated cantilevered carbon nanotube with an attached mass as a bio-mass sensor, Current Applied Physics. 13 (2013) 1463-1469. doi:10.1016/j.cap.2013.04.031.

[13] M.A. De Rosa, M. Lippiello, Nonlocal Timoshenko frequency analysis of single-walled carbon nanotube with attached mass: An alternative hamiltonian approach, Composites Part B. 111 (2017) 409-418. doi:10.1016/j.compositesb.2016.11.026.

[14] M. Fakher, S. Rahmanian, S.H. Hashemi, On the carbon nanotube mass nanosensor by integral form of nonlocal elasticity, International Journal of Mechanical Sciences. 150 (2019) 445-457. doi:10.1016/j.ijmecsci.2018.10.051.

[15] M. Arda, M. Aydogdu, Vibration analysis of carbon nanotube mass sensors considering both inertia and stiffness of the detected mass, Mechanics Based Design of Structures and Machines. (2020) doi:10.1080/15397734.2020.1728548.

[16] V.T. Granik, Microstructural mechanics of granular media, Technique report IM/MGU, Institute of Mechanics of Moscow State University, 1978.

[17] V.T. Granik, M. Ferrari, Microstructural mechanics of granular media, Mechanics of Materials. 15 (1993) 301-322. doi:10.1016/0167-6636(93)90005-C.

[18] M. Ferrari, V.T. Granik, A. Imam, Introduction to doublet mechanics. In Advances in Doublet Mechanics, Springer, 1997.

[19] M. Kojic, I. Vlastelica, P. Decuzzi, V.T. Granik, M. Ferrari, A finite element formulation for the doublet mechanics modeling of microstructural materials, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 200 (2011) 1446-1454. doi:10.1016/j.cma.2011.01.001.

[20] U. Gul, M. Aydogdu, G. Gaygusuzoglu, Axial dynamics of a nanorod embedded in an elastic medium using doublet mechanics, Composite Structures. 160 (2017) 1268-1278. doi:10.1016/j.compstruct.2016.11.023.

[21] M.A. Eltaher, N. Mohamed, Nonlinear stability and vibration of imperfect CNTs by Doublet mechanics, Applied Mathematics and Computation. 382 (2020) 125311. doi:10.1016/j.amc.2020.125311.

[22] M. Aydogdu, U. Gul, Longitudinal vibration of double nanorod systems using doublet mechanics theory, Structural Engineering and Mechanics. 73 (2020) 37-52. doi:10.12989/sem.2020.73.1.037.

[23] U. Gul, M. Aydogdu, Vibration analysis of Love nanorods using doublet mechanics theory, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 41 (2019) 351. doi:10.1007/s40430-019-1849-x.

[24] U. Gul, M. Aydogdu, Structural modelling of nanorods and nanobeams using doublet mechanics theory, International Journal of Mechanics and Materials in Design. 14 (2018) 195-212. doi:10.1007/s10999-017-9371-8.

HETEROJEN İKİ TABAKALI ORTAMDA DOĞRUSAL OLMAYAN YATAY KAYMA DALGALARININ YAYILIMI

Dicle Tuna[1], Ekin Deliktaş-Özdemir[2] ve Semra Ahmetolan[1]
[1]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
[2]Piri Reis Üniversitesi, İstanbul

ABSTRACT

In this study, the asymptotic solution of a boundary value problem modelling the propagation of nonlinear shear horizontal (SH) waves in a medium consisting of two layers with uniform thicknessis constructed by using the method of multiple scales. The constituent materials in both layers areassumed to bevertically heterogeneous, isotropic and having different hyperelastic mechanicalproperties. It is also assumed that between the linear shear velocitiesof the top layer, c_1, the bottom layer, c_2, and the phase velocity of SH waves, c, the inequality $c_1 < c_2 < c$is valid.Inthis case, nonlinear modulation of surface SH waves is governed asymptotically by a nonlinear Schrödinger equation (NLS). This studyinvestigates the effects of theheterogeneity of the nonlinear layers on the existence of the bright solitary SH waves.

Keywords: Nonlinear SH waves, Heterogeneous layers, Nonlinear Schrödinger Equation

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün kalınlıklı,homojen olmayan (heterojen), izotrop ve farklı elastik malzeme özelliklerine sahip iki tabakadan oluşan bir ortamda doğrusal olmayan yatay kayma dalgalarının yayılmasını modelleyen bir sınır değer problemi incelenmektedir.Lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerinin derinlik değişkenine bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Böyle bir ortamda yayılma olayını karakterize eden yaklaşık çözümler çoklu ölçekler metodu kullanılarak inşa edilmiştir. Birinci mertebe yavaş değişen genlik fonksiyonu için lineer olmayan Schrödinger (NLS) denklemi elde edilmiştir.Doğrusal olmayan (nonlineer) iki tabakalı ortama ait heterojen malzeme özelliklerinin zarf soliton tipi SH dalgalarının varlığı üzerine etkisi incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Doğrusal olmayan SH dalgaları, Heterojen tabakalar, Doğrusal Olmayan Schrödinger denklemi

GİRİŞ

19. yüzyılın ortalarından günümüze kadar hem dispersif, hem de dispersif olmayan lineerelastik dalgalarla ilgili problemler sismoloji, jeofizik, petrol mühendisliği, deprem mühendisliği, sensörlerin tasarımı, malzeme yüzeylerinin hasarsız muayenesi, elektronik sinyal işlem cihazları teknolojisinde önemli uygulama alanlarının da etkisiile birçok çalışmanın konusunu oluşturmuştur [1-3].Homojen, elastik, farklı malzeme özelliklerine sahip tabakalı çeşitli ortamlarda lineer olmayan SH dalgalarının yayılımı üzerine de literatürde birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda, homojen, elastik, birbirinden farklı malzeme

özelliklerine sahip tabakalı yarım uzayda[4-5], tek tabakada [6] ve iki tabakalı ortamlarda[7-9]lineer olmayan SH dalgalarının yayılımı problemleri gözönüne alınmıştır. Asimptotik bir pertürbasyon yöntemi kullanılarak zayıf nonlineerlikle dispersiyonun etkilerinin dengelenmesi sonucunda, dalgaların lineer olmayan self modülasyonunun asimptotik olarak lineer olmayan Schrödinger(NLS) denklemi ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir.

Bunların yanısıra heterojentek tabaka ya da tabakalı yarı sonsuz uzaydan oluşan çeşitli elastik ortamlarda lineer ve lineer olmayanelastik dalga yayılımını karakterize eden sınır değer problemleri de uygulama alanlarının genişliğinden dolayı birçok araştırmanın konusunu oluşturmaktadır [10-15].

Bu çalışmada ise, düzgün kalınlıklı, heterojen, izotrop ve birbirinden farklı elastik malzeme özelliklerine sahip, malzeme parametrelerinin derinlik doğrultusunda değiştiği iki tabakalı ortamda lineer olmayan yatay kayma dalgalarının(SH) yayılması problemi ele alınmıştır.Tabakalara ait lineer ve nonlineer malzeme parametrelerinin heterojen özelliklerinin zarf soliton SH dalga yayılımına etkileri grafiklerle gözlemlenmiştir.

PROBLEMİN FORMÜLASYONU

(x,y,z) ve (X,Y,Z) sırasıyla üç boyutlu uzayda bir noktanın aynı dik kartezyen eksen sistemine göre uzaysal ve maddesel koordinatlarını göstersin. $h_1, h_2 > 0$tabakaların kalınlığı olmak üzere başlangıç konumunda,

$$P_1 = \{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) | 0 \le Y \le h_1, -\infty < (X,\mathrm{Z}) < \infty\} \quad (1)$$

$$P_2 = \{(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \mid -h_2 \le \mathrm{Y} \le 0,\ -\infty < (\mathrm{X},\mathrm{Z}) < \infty\} \quad (2)$$

bölgelerini doldurandüzgün kalınlıklı,dalga yayılımına dik yönde heterojen, birbirinden farklı elastik malzemelerden oluşan, iki tabakalı bir sürekli ortam göz önüne alınsın.$Y = 0$ ara yüzeyi boyunca yer değiştirmelerin ve gerilmelerin sürekli olduğu, $Y = h_1$ve $Y = -h_2$serbest yüzeylerinde de gerilmelerin sıfır olduğu kabul edilsin. Bu tabakalı ortam içerisindeX ekseni boyunca yayılan SH dalgaları

$$\begin{aligned} x &= X,\ y = Y,\ z = Z + u(X,Y,t) \\ x &= X,\ y = Y,\ z = Z + v(X,Y,t) \end{aligned} \quad (3)$$

ile tanımlanmaktadır. $u(X,Y,t)$ ve $v(X,Y,t)$fonksiyonları sırasıylaP_1 ve P_2 tabakalarındakinoktaların Z yönündeki yer değiştirmelerini ve$t$ zamanı göstermektedir. Bu çalışmada, sonlu fakat küçük genlikli dalgaların yayılımı problemi inceleneceği için üçüncü mertebeden daha yüksek terimler ihmal edilerek probleme ait yaklaşık hareket denklemleri ve sınır koşullarından oluşan sınır değer problemi aşağıdaki şekilde yazılır;

$$P_1\ '\ de\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) - \frac{1}{\rho_1}\left(\left(\frac{d(\rho_1 {c_1}^2)}{dY}\right)\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = n_1[(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial u}{\partial X}Q(u)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}Q(u)\right)\right] + \frac{1}{\rho_1}Q(u)(\frac{d}{dY}(\rho_1 n_1)\frac{\partial u}{\partial Y}) \quad (4)$$

$$P_2\ 'de\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_2^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\right) - \frac{1}{\rho_2}\left(\left(\frac{d(\rho_2 {c_2}^2)}{dY}\right)\frac{\partial v}{\partial Y}\right) = n_2[(\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial v}{\partial X}Q(v)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial v}{\partial Y}Q(v)\right)\right] + \frac{1}{\rho_2}Q(v)(\frac{d}{dY}(\rho_2 n_2)\frac{\partial v}{\partial Y}) \quad (5)$$

$$\mathrm{Y} = h_1\text{'de} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} + \theta_1\, \mathrm{Q}(u)\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} = 0 \tag{6}$$

$$\mathrm{Y} = 0\text{ ' da} \qquad u - v = 0 \tag{7}$$

$$\mathrm{Y} = 0\text{' da} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}} - \gamma\frac{\partial v}{\partial \mathrm{Y}} = \gamma\theta_2\frac{\partial v}{\partial \mathrm{Y}}\,\mathrm{Q}(v) - \theta_1\frac{\partial u}{\partial \mathrm{Y}}\,\mathrm{Q}(u) \tag{8}$$

$$\mathrm{Y} = -h_2\text{'de} \quad \frac{\partial v}{\partial \mathrm{Y}} + \theta_2\, \mathrm{Q}(v)\frac{\partial v}{\partial \mathrm{Y}} = 0 \tag{9}$$

Burada $Q(\psi) = (\frac{\partial\,\psi}{\partial \mathrm{Y}})^2 + (\frac{\partial\,\psi}{\partial \mathrm{X}})^2$, $c_\alpha^2 = \frac{\mu_\alpha}{\rho_\alpha}$, $\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, ve $\theta_\alpha = \frac{n_\alpha}{c_\alpha^2}$ şeklinde tanımlanmaktadır.$c_1(Y)$ üst tabakadaki, $c_2(Y)$ ise alt tabakadaki lineer kayma dalgalarının yayılma hızını, $\mu_1(Y)$ ve $\mu_2(Y)$ sırasıyla üst ve alt tabakadaki ortamın lineer kayma modülünü, $\rho_1(Y)$ ve $\rho_2(Y)$ ortamdaki malzemelerin yoğunluğunuve$n_1(Y)$,$n_2(Y)$ ise sırasıyla üst ve alt tabakaları oluşturan malzemelerin lineer olmayanmalzeme özelliklerini temsil etmektedirler**.**

Bu çalışmada,lineer ve lineer olmayan malzeme parametrelerinin derinlik değişkenine bağlılığının üstel fonksiyonlar cinsinden olduğu yani

$$\boldsymbol{\mu_1(y) = \mu_{0_1} e^{\beta_1 y}}\ ,\boldsymbol{\rho_1(y) = \rho_{0_1} e^{\beta_1 y}}\ ,\ \boldsymbol{n_1(y) = n_{0_1} e^{\lambda_1 y}},$$
$$\boldsymbol{\mu_2(y) = \mu_{0_2} e^{\beta_2 y}}, \boldsymbol{\rho_2(y) = \rho_{0_2} e^{\beta_2 y}}, \boldsymbol{n_2(y) = n_{0_2} e^{\lambda_2 y}}$$

şeklinde olduğu kabul edilmiştir. Bu kabul altında $c_{0_m} = \frac{\boldsymbol{\mu_{0_m}}}{\rho_{0_m}}$,tabakaların lineer hızları ve nonlineer malzeme özelliğini gösteren $\theta_m = \theta_{0_m} e^{\lambda_m y}$, $\theta_{0_m} = \frac{\boldsymbol{n_{0_m}}}{c_{0_m}{}^2}$ $m = 1{,}2$ olmak üzere dalgaların faz hızının

$$c_{0_1}\sqrt{1 + \frac{\beta_1^2}{4k^2}} < c_{0_2}\sqrt{1 + \frac{\beta_2^2}{4k^2} < c} \tag{10}$$

eşitsizliğini sağladığı durum gözönüne alınacaktır.

DOĞRUSAL OLMAYAN SH DALGALARININ ASİMPTOTİK ANALİZİ

Doğrusal olmayan SH dalgalarının self modülasyonunu incelemek için asimptotik bir pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler yöntemi kullanılacaktır. Bu amaçla ilk olarak $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ ve $\boldsymbol{t}$bağımsız değişkenleri yerine

$$\boldsymbol{x_i = \varepsilon^i X},\ \boldsymbol{t_i = \varepsilon^i t},\ \boldsymbol{y = Y},\ \boldsymbol{i = 0, 1, 2} \tag{11}$$

bağıntıları ile yeni bağımsız değişkenler tanımlayalım. Burada $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ parametresi nonlineerliğin mertebesini belirten küçük bir parametredir. $(\boldsymbol{x_0, y, t_0})$ yayılmada hızlı değişimleri karakterize eden değişkenler ve $(\boldsymbol{x_1, x_2, t_1, t_2})$ ise yavaş değişimleri karakterize eden değişkenlerdir. $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$'nin, $\boldsymbol{\varepsilon}$ cinsinden aşağıdaki düzgün geçerli açılımlara sahip oldukları varsayılmaktadır:

$$\boldsymbol{u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2)},\ \boldsymbol{v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2)}. \tag{12}$$

(12) asimptotik açılımları ve (11)'de tanımlanan yeni değişkenler (4-5) denklemleri ve (6-9) sınır koşullarında kullanılırsa elde edilen yapılarda $\boldsymbol{\varepsilon}$'nun aynı kuvvetleri karşılıklı olarak eşitlenerek $\boldsymbol{u_n}$ ve $\boldsymbol{v_n}$ bilinmeyenlerinin ardışık olarak hesaplanabileceği bir problemler hiyerarşisi inşa edilir. Birinci mertebe çözümün elde edilmesi için ilk üç mertebe pertürbasyon problemlerinin incelenmesi yeterli olacaktır. Birinci mertebe problemin çözümleri aşağıdaki formda bulunur:

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mu_{0_1} e^{\beta_1 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [\boldsymbol{A_1}^{(l)}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}) e^{ikp_1 y} + \boldsymbol{B_1}^{(l)}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}) e^{-ikp_1 y}]\, e^{il\varphi} + \mathbf{.c.} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mu_{0_2} e^{\beta_2 y}}} \sum_{l=1}^{\infty} [\boldsymbol{C_1}^{(l)}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}) e^{ikp_2 y} + \boldsymbol{D_1}^{(l)}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2}) e^{-ikp_2 y}]\, e^{il\varphi} + \mathbf{c.c.} \quad (14)$$

Burada,

$$\boldsymbol{p_1} = \left(\frac{c^2}{c_1^2} - \frac{\beta_1}{4k^2 l^2} - \mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \boldsymbol{p_2} = \left(\frac{c^2}{c_2^2} - \frac{\beta_2}{4k^2 l^2} - \mathbf{1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \boldsymbol{\varphi = kx_0 - \omega t_0}$$

olarak tanımlanmaktadır ve $\boldsymbol{A_1}^{(l)}$,$\boldsymbol{B_1}^{(l)}$, $\boldsymbol{C_1}^{(l)}$,$\boldsymbol{D_1}^{(l)}$ birinci mertebe$(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})$ yavaş değişkenlerine bağlı dalga genliği fonksiyonlarıdır. $\boldsymbol{k}$ dalga sayısını, $\boldsymbol{\omega}$ açısal frekansı, $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{k}}$, faz hızını $\boldsymbol{c.c.}$ kendinden önce gelen terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir. (13)-(14) çözümleri birinci mertebe problemin sınır koşullarındakullanıldığında

$$\mathbf{W}_l \mathbf{U_1}^{(l)} = \mathbf{0}, \ \mathbf{l} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \ldots \quad (15)$$

homojen cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada $\mathbf{W}_l$ dispersiyon matrisini göstermektedir. ve $\mathbf{U_1}^{(l)}$ birinci mertebe genlik vektörleri ise$\mathbf{U_1}^{(l)} = [\boldsymbol{A_1}^{(l)}, \boldsymbol{B_1}^{(l)}, \boldsymbol{C_1}^{(l)}, \boldsymbol{D_1}^{(l)}]^T$şeklinde tanımlanmaktadır. Bu çalışmada $\boldsymbol{k}$ dalga sayısı civarında merkezlenmiş bir dalga katarının self modülasyonu incelenmektedir. Yayılan dalgaların dalga sayılarının harmonik rezonanskoşulunu sağlamadıkları kabul edilmektedir. Bu nedenle $\boldsymbol{l > 2}$ için $\mathbf{det}\boldsymbol{W^{(1)}} \neq \mathbf{0}$ ve $\boldsymbol{U_1^{(l)}} = \mathbf{0}$ olarak bulunur.$\boldsymbol{l} = \mathbf{1}$ için$\mathbf{det}\boldsymbol{W^{(1)}} = \mathbf{0}$aşağıdaki dispersiyon bağıntısını verir:

$$\boldsymbol{F_1 sin(kh_1 p_1) sin(kh_2 p_2) + F_2 cos(kh_2 p_2) sin(kh_1 p_1) + F_3 \gamma cos(kh_1 p_1) sin(kh_2 p_2) = 0} \quad (16)$$

Burada

$$\boldsymbol{F_1 = (-4k^2 \gamma p_2^2 \beta_1 + \beta_2 (4k^2 p_1^2 + \beta_1 (\beta_1 - \gamma \beta_2))),}$$
$$\boldsymbol{F_2 = 2kp_2 (4k^2 p_1^2 + \beta_1^2),}$$
$$\boldsymbol{F_3 = 2kp_1 (4k^2 p_2^2 + \beta_2^2)}$$

olarak tanımlanmıştır. $\boldsymbol{l} = \mathbf{1}$ için $\mathbf{U_1}^{(1)} = \boldsymbol{\mathcal{A}_1}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})\mathbf{R}$birinci mertebe çözümlerde yerine yazılırsa bu çözümler:

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{\mathcal{A}_1(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\sqrt{\mu_{0_1} e^{\beta_1 y}}} \left(\boldsymbol{R_1 e^{ikp_1 y} + R_2 e^{-ikp_1 y}}\right) e^{i\varphi} + \boldsymbol{c.c.} \quad (17a)$$

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{\mathcal{A}_1(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\sqrt{\mu_{0_2} e^{\beta_2 y}}}\left(\boldsymbol{R_3 e^{ikp_2 y}} + \boldsymbol{R_4 e^{-ikp_2 y}}\right)\boldsymbol{e^{i\varphi}} + \boldsymbol{c.c.} \text{ (17b)}$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{\mathcal{A}_1(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})}$ dalga modülasyonunun birinci mertebe yavaş değişen kompleks genlik fonksiyonudur. $\boldsymbol{\mathcal{A}_1(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})}$ fonksiyonununbulunabilmesiiçin ikinci ve üçüncü mertebe problemlerin incelenmesi gerekir. İkinci mertebe problemin uygunluk koşulundan $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$'in, $\boldsymbol{V_g}$ grup hızı ile ilerleyen bir referans çerçevesinde sabit kaldığı, yani $\boldsymbol{\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1(x_1 - V_g t_1, t_2, t_2)}$ yapısında olduğu bulunur. Üçüncü mertebe problemin uygunluk koşulundan iseaşağıdaki denklem elde edilir:

$$\boldsymbol{i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial t_2} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_1}{\partial x_2}\right) + \tilde{\Gamma}\frac{\partial^2 \mathcal{A}_1}{\partial {x_1}^2} + \tilde{\Delta}|\mathcal{A}_1|^2\mathcal{A}_1 + i\left(\frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial t_1} + V_g \frac{\partial \mathcal{A}_2}{\partial x_1}\right) = 0}. \text{ (18)}$$

Burada $\boldsymbol{\mathcal{A}_2(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{t_1}, \mathbf{t_2})}$ ikinci mertebe dalga genliği fonksiyonudur.

$\boldsymbol{\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2\left(x_1 - V_g t_1, t_2, t_2\right)}$ kabulü ile denklemin sol tarafındaki son kompleks terim düşer ve (18) $\boldsymbol{\mathcal{A}_1}$'in hesaplaması için kullanılabilir. Böylece birinci mertebe çözümlerin inşası tamamlanır.

Boyutsuz değişkenler ve sabitler

$$\boldsymbol{\tau = \omega\, t_2},\ \boldsymbol{\xi = k\left(x_1 - V_g t_1\right) = k\varepsilon^{-1}(x_2 - V_g t_2)},\ \boldsymbol{\Gamma = \frac{k^2\tilde{\Gamma}}{\omega}},\ \boldsymbol{\tilde{\Gamma} = \frac{k^2}{2\omega}\frac{d^2\omega}{dk^2}},\ \Delta = \frac{\tilde{\Delta}}{\omega\, k^2}$$

tanımlanarak boyutsuz genlik fonksiyonu $\boldsymbol{\mathcal{A} = \mathbf{k}\mathcal{A}_1}$için aşağıdaki nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi elde edilir:

$$\boldsymbol{i\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \tau} + \Gamma\frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial \xi^2} + \Delta|\mathcal{A}|^2\mathcal{A} = 0}. \quad (19)$$

Burada Γortamı oluşturan malzemelerin lineer parametrelerine bağlı iken Δmalzemelerin hem lineer hem de lineer olmayan parametrelerine bağlı katsayıdır. NLS denklemi birçok alanda lineer olmayan dalga modülasyonunu asimptotik olarak karakterize eden bir denklemdir. NLS denkleminin çözümlerinin davranışı denklemin lineer ve lineer olmayan terimlerinin çarpımının,ΓΔ , işaretine bağlıdır. $|\xi| \to \infty$ limitinde sıfıra giden bir başlangıç uyarısı eğer $\Gamma\Delta > 0$ise bir dizi solitona, $\Gamma\Delta < 0$ ise sönen titreşimlere dönüşür. Bunedenle ortamı oluşturan homojen olmayan malzemelerin lineer ve lineer olmayan parametrelerindeki değişimin ΓΔ'nın işaretine, dolayısıyla da NLS denkleminin çözümlerine etkileri tartışılacaktır.

SAYISAL DEĞERLENDİRME VE ZARF SOLİTON DALGALARIN VARLIĞI

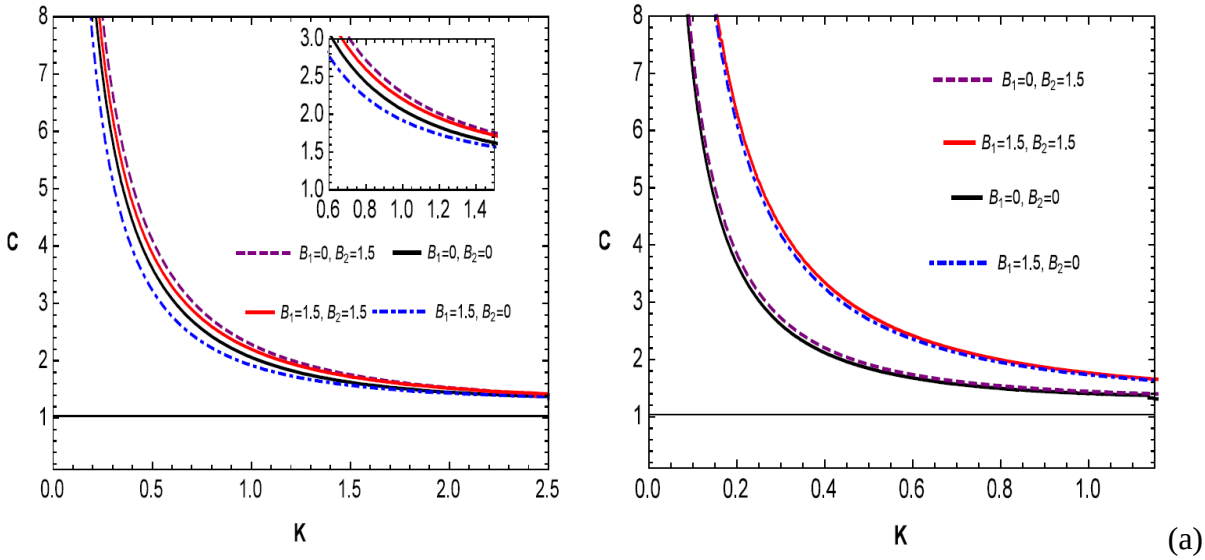
Bu bölümde lineer ve lineer olmayan heterojenlik parametrelerinin dalga yayılımı üzerindeki etkileri incelenecektir. Bu amaçla ilk olarak boyutsuz değişken ve parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$C = \frac{c}{c_{0_1}},\ M_0 = \frac{c_{0_2}}{c_{0_1}},\ H = \frac{h_2}{h_1},\ KH = kh_2,\ B_1 = \beta_1 h_1,\ B_2 = \beta_2 h_2, \Lambda_1 = \lambda_1 h_1,\ \Lambda_2 = \lambda_2 h_2.$$

K boyutsuz dalga sayısı, C boyutsuz faz hızı, B_1 ve B_2 boyutsuz lineer heterojenlik parametreleri ve Λ_1 ve Λ_2 boyutsuz lineer olmayan heterojenlik parametreleridir. İlk olarak tabakaların heterojenliğinin dispersiyon bağıntısı üzerindeki etkisini gözlemlemek için sırasıyla

i) (B_1,B_2)= (0,0) (Homojen üst tabaka- Homojen alt tabaka), ii) (B_1,B_2)= (0, B_2)(Homojen üst tabaka-Heterojen alt tabaka), iii) (B_1, B_2)= (B_1, 0) (Heterojen üst tabaka-Homojen alt tabaka), iv) (B_1, B_2)≠ (0, 0) (Heterojen üst tabaka-Heterojen alt tabaka) durumları incelemeye

dahil edilmiştir. Bu dört farklı durum için dispersiyon bağıntısının ilk dalının grafikleri H=1 için Şekil 1a'da, H=5 için ise Şekil 1b'de verilmektedir.



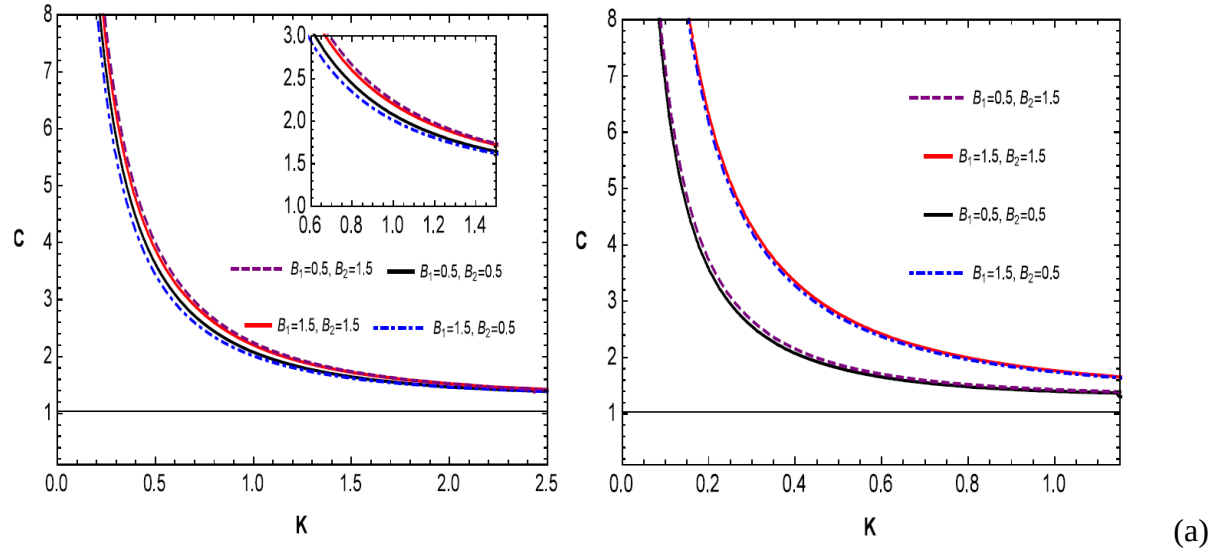
(a)

(b)

Şekil 1. Dört farklı durumda (a) $H = 1$ için (b) $H = 5$ için, boyutsuz faz hızı C'nin boyutsuz dalga sayısı K'ya göre değişimi.

Bu şekiller karşılaştırıldığında tabaka kalınlık oranının değişiminin dispersiyon bağıntısı üzerinde etkili olduğu açık olarak görülmektedir.Ayrıca $H = 5$olması durumunda üst tabakanın lineer heterojenlik parametresinin etkisinin faz hızı üzerinde daha baskın olduğu görülmektedir.

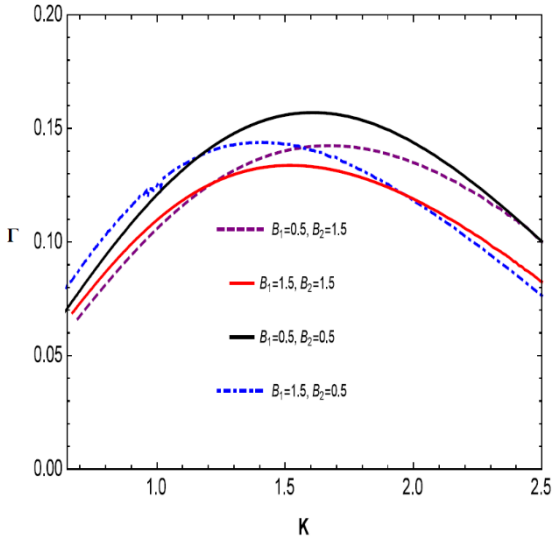
Ayrıca tabakalara ait çeşitli lineer heterojenlik parametreleri (B_1,B_2)= (0.5,1.5),(0.5,0.5),(1.5,0.5),(1.5,1.5) şeklinde seçilerek (K, C)eğrisinin değişimi, Şekil 2'de verilmiştir.$H = 1$ için çizdirilen grafikte alt tabakanın heterojenliğinindaha baskın olduğu; $H = 5$ için çizdirilen grafikte ise üst tabakanın heterojenliğinin daha baskın olduğu görülmektedir.



(a)

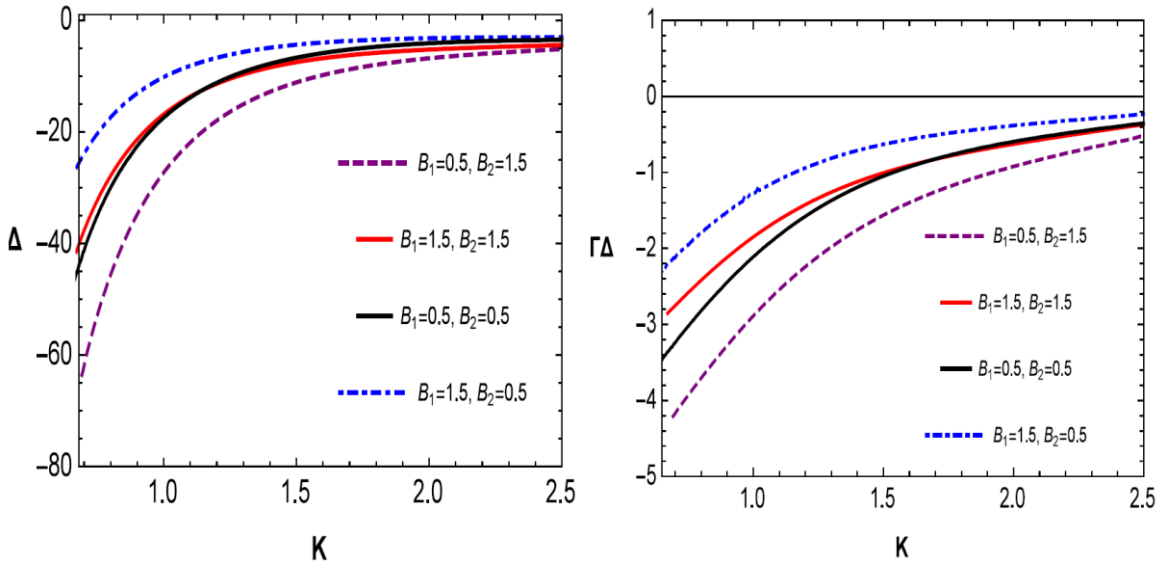
(b)

Şekil 2. (a) $H = 1$ için (b) $H = 5$ için, çeşitli lineer heterojenlik parametreleri için boyutsuz faz hızı C'nin boyutsuz dalgasayısı K'ya göre değişimi



Şekil 3. Heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için Γ'nın K'ya göre değişimi (H = 1)

NLS denkleminin çözümlerinin davranışını incelemek için, denklemin katsayılarının dispersiyon bağıntısının ilk dalı üzerindeki boyutsuz dalga sayısı-faz hızı (K,C) çiftleri için sayısal hesaplamaları yapılacaktır. İlk olarak lineer heterojenlik parametreleri B_1 ve B_2'nin değişiminin dispersiyon teriminin katsayısı Γ üzerindeki etkisi gözlemlenecektir. Bu amaçla (B_1, B_2) çifti için (0.5,1.5), (1.5,1.5), (0.5,0.5) ve (1.5,0.5) değerleri alınarak Γ ' nın grafiği H=1 için Şekil3'de çizdirilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi seçilen tüm lineer heterojenlik parametreleri için Γ eğrileri pozitif olmaktadır. Ayrıca K=kh_1 büyük değerleri için B_1 parametreleri aynı olan eğriler birbirine yaklaşmaktadadır. Bu durum üst tabakanın özelliklerinin daha baskın olduğunu gösterir.

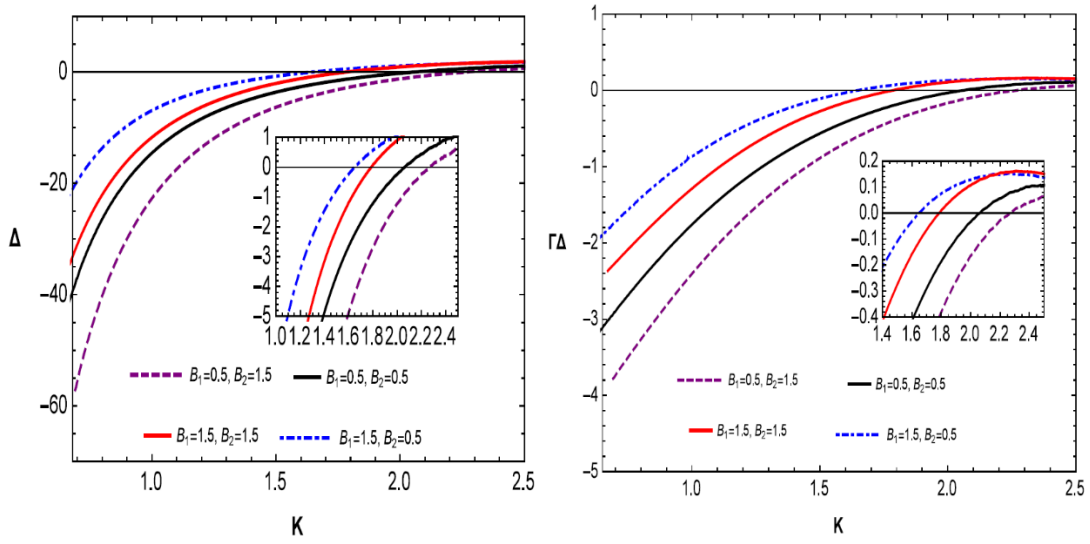


(a) (b)

Şekil 4. θ_{0_1}=θ_{0_2} =2 ve (Λ_1,Λ_2)=(0.3,0.3) için kaymada sertleşen, heterojen iki tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için a) Δ 'nın, b) ΓΔ'nın K' ya göre değişimi (H = 1).

Şimdi de lineer heterojenlik parametreleri B_1 ve B_2'nin değişiminin nonlineer terimin katsayısı Δ üzerindeki etkisi gözlemlenecektir. Bilindiği gibi nonlineer malzeme parametresi $\theta_{0_m} < 0$ ise malzeme kaymada yumuşayan (S), $\theta_{0_m}>0$ ise kaymada sertleşen (H) malzeme olarak adlandırılmaktadır. Her iki tabakanın kaymada sertleşen malzemeden oluştuğu kabul edilerek (H-H), $(\theta_{0_1},\theta_{0_2})$=(2,2) alınmıştır. Ayrıca lineer olmayan heterojenlik parametreleri de (Λ_1,Λ_2)=(0.3,0.3)olarak seçilmiştir. Yukarıda seçilen lineer heterojenlik parametreleri ve H=1 için nonlineer terimin katsayısı Δ 'nın ve $\Gamma\Delta$ çarpımının K' ya göre değişimleri sırasıyla Şekil 4 a,b' de çizdirilmiştir. Seçilen tüm bu parametre değerleri için Δ eğrilerin her biri negatif değer almaktadır, $\Delta<0$, dolayısıyla $\Gamma\Delta<0$ olmaktadır. Bu durumda NLS denkleminin zarf soliton tipi dalga çözümlerinin varlığından bahsedilemez.

Benzer inceleme, $(\theta_{0_1},\theta_{0_2})$=(2,-2) seçimiyle üst tabakanın sertleşen, alt tabakanın ise yumuşayan malzemeden oluştuğu durum için yapılmış,Δve $\Gamma\Delta$ 'nın grafikleri aynı $(B_1\ B_2)$ parametre değerleri için sırasıyla Şekil 5'te verilmiştir. Dikkat edilirse Δ 'nın pozitif değer aldığı (K,C) değerlerinde $\Gamma\Delta'$ da pozitif değerler almaktadır. Seçilen her bir lineer heterojenlik parametresi için $\Gamma\Delta>0$ olduğu aralıklar mevcuttur. Bu değerlerde NLS denkleminin zarf soliton tipi dalgaları var olmaktadır. Ayrıca lineer heterojenlik parametrelerindeki değişimin de soliton tipi dalgaların var olduğu aralıkları etkilediği gözlemlenebilir. Ek olarak dalga sayısı arttıkça üst tabakanın lineer heterojenlik parametresinin $\Gamma\Delta$' nın değişimi üzerinde etkili olduğu da söylenebilir.

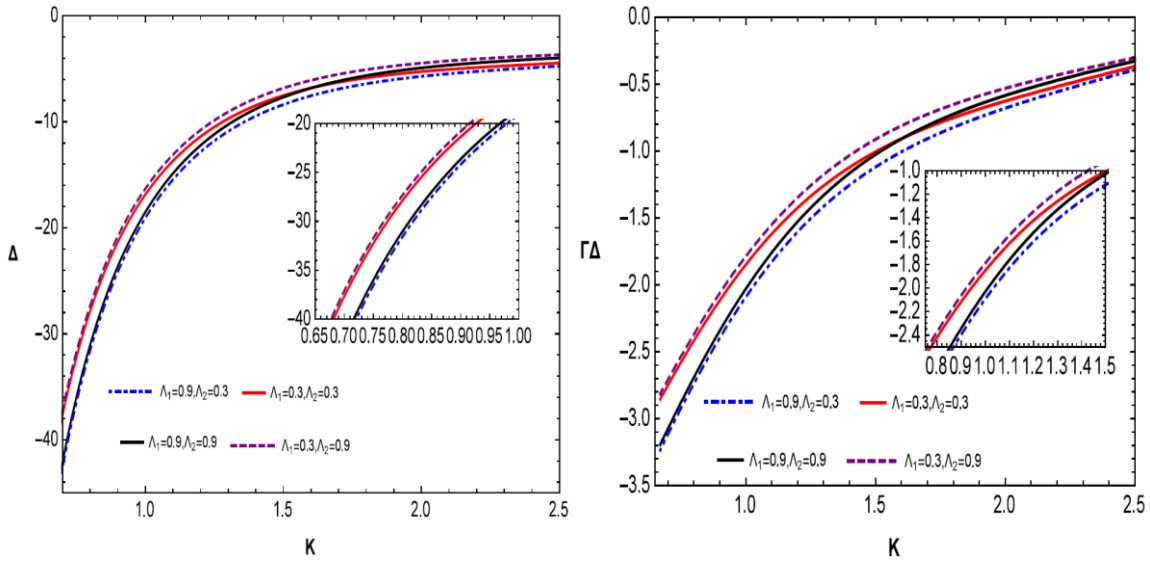


(a) (b)

Şekil 5. $(\theta_{0_1},\theta_{0_2})$=(2,-2) ve (Λ_1,Λ_2)=(0.3,0.3) için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı lineer heterojenlik parametreleri için a) Δ 'nın, b) $\Gamma\Delta$'nın K'ya göre değişimi (H =1).

Lineer olmayan heterojenlik parametrelerindeki değişimin dalga yayılımı üzerindeki etkisini gözlemlemek için ilk olarak her iki tabakanın da kaymada sertleşen malzemeden oluştuğu durum için nonlineer malzeme parametreleri $(\theta_{0_1},\theta_{0_2})$=(2,2) alınmış ve lineer heterojenlik parametreleri ise $B_1= B_2$=1.5 olarak seçilmiştir. Farklı (Λ_1,Λ_2) seçimleri için Δ ve $\Gamma\Delta$ eğrilerinin grafikleri sırasıyla Şekil 6a ve Şekil 6b'de verilmiştir. Dikkat edilirse seçilen tüm (Λ_1,Λ_2) değerleri için Δ dolayısıyla $\Gamma\Delta$ negatif olmaktadır. Yani NLS denkleminin zarf soliton

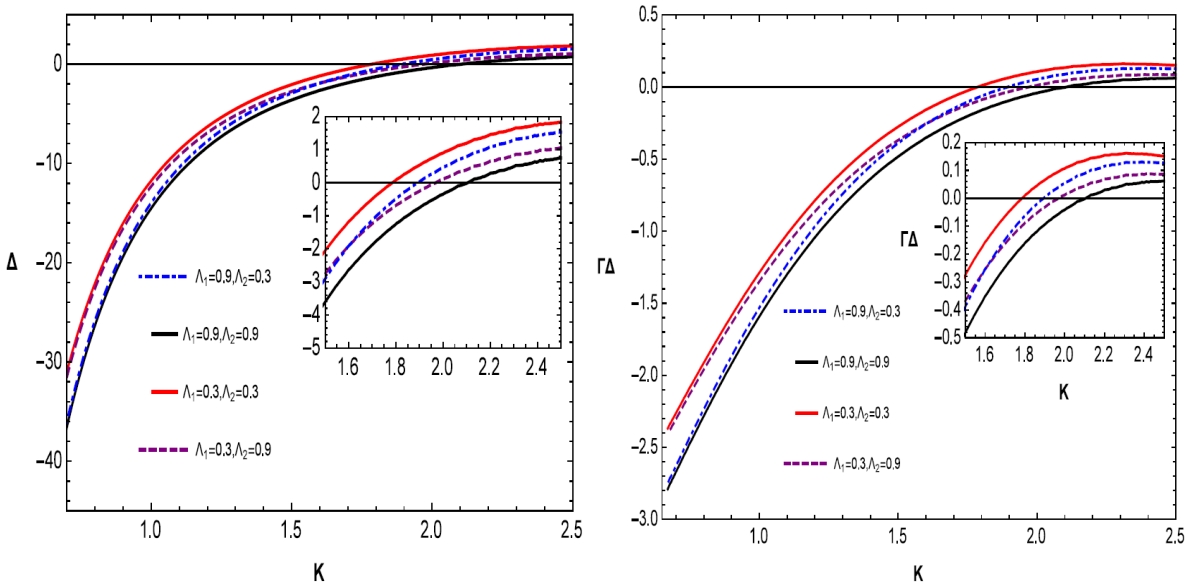
dalga çözümleri var olmamaktadır. Ayrıca küçük dalga sayılarında (uzun dalga limitinde) üst tabakanın lineer olmayan heterojenlik parametresinin etkisi baskın iken dalga sayısı büyüdükçe alt tabakaya ait parametrenin etkisinin daha baskın olduğu görülmektedir.



(a) (b)

Şekil 6. $(\theta_{0_1},\theta_{0_2}) = (2,2)$ ve $(B_1,B_2)=(1.5,1.5)$ için kaymada sertleşen iki tabakaya ait farklı nonlineer heterojenlik parametreleri için a) Δ 'nın, b) ΓΔ'nın K'ya göre değişimi (H =1).

Benzer inceleme üst tabakanın kaymada sertleşen, alt tabakanın ise yumuşayan olduğu durum için, yani $(\theta_{0_1},\theta_{0_2})=(2,-2)$ için, Şekil 7a,b'de verilmiştir. Bu durumda seçilen tüm lineer olmayan heterojenlik malzeme parametreleri için ΓΔ>0 olduğu yani solitary dalgaların var olduğu K aralıkları bulunmaktadır. Yine bu grafiklerden küçük dalga sayılarında üst tabakaya ait lineer olmayan heterojenlik parametresinin etkisinin baskın olduğu görülmektedir.



(a) (b)

Şekil 7. $(\theta_{0_1},\theta_{0_2})=(2,-2)$ ve $(B_1,B_2)=(1.5,1.5)$ için kaymada sertleşen üst tabaka ve yumuşayan alt tabakaya ait farklı nonlineer heterojenlik parametreleri için a) Δ 'nın, b) ΓΔ'nın K'ya göre değişimi (H=1).

KAYNAKLAR

[1] Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., Press, F., Beiser, A., Elastic waves in layered media,Physics Today, 10(12) (1957), 27.

[2] Achenbach, J.D., Wave Propagation in Elastic Solids, Amsterdam North Holland Publ. Co., (1973).

[3] Eringen, A.C., and Suhubi, E.S.: Elastodynamics, Vol. I, New York Academic Press, (1974).

[4] Teymur, M.,Nonlinear modulation of Love waves in a compressible hyperelastic layered half space, Int. J. Eng. Sci. 26(1988), 907-927.

[5] Deliktas, E., Teymur, M.: Surface shear horizontal waves in a double-layered nonlinear elastic half space. IMA Journal of Applied Mathematics 83(3)(2018)., 471-49.

[6] Ahmetolan, S., & Teymur, M., Nonlinear modulation of SH waves in an incompressible hyperelastic plate, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 58(3)(2007), 457-474.

[7] Ahmetolan, S., Teymur, M., Non-linear modulation of SH waves in a two-layered plate and formation of surface SH waves, Int. J. Non Linear Mech. 38(2003), 1237–1250.

[8] Ahmetolan, S., & Demirci, A., Nonlinear interaction of co-directional shear horizontal waves in a two-layered elastic medium, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 69(6) (2018), 1-19.

[9] Ahmetolan, S., Peker-Dobie, A., & Demirci, A., On the propagation of nonlinear SH waves in a two-layered compressible elastic medium, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik 70(5) (2019), 1-20.

[10] P. Avtar, Love waves in a two-layered crust overlying a vertically inhomogeneous halfspace I, P*ure and Applied Geophysics* 66.1 (1967), 48-68.

[11] Singh, Abhishek Kumar, et al., Dispersion of shear wave propagating in vertically heterogeneous double layers overlying an initially stressed isotropic half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 69 (2015) 16-27.

[12] D. Demirkuş, Antisymmetric bright solitary SH waves in a nonlinear heterogeneous plate. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*69.5 (2018) 1-17.

[13] M. Bednarik, M., et al., Analytical solutions for elastic SH-waves propagating through an isotropic inhomogeneous layer, *Composite Structures* 220 (2019), 875-887.

[14] Kumari, Nirmala, et al., Influence of heterogeneity on the propagation behavior of Love-type waves in a layered isotropic structure, *International Journal of Geomechanics* 16.2 (2016), 04015062.

[15] D. Demirkuş, Some comparisons between heterogeneous and homogeneous layers for nonlinear SH waves in terms of heterogeneous and nonlinear effects, *Mathematics and Mechanics of Solids* 26.2 (2021), 151-165.

PERİYODİK YIĞILI KÜTLELİ KAYMA KİRİŞİNDE DALGA DİSPERSİYONU: KÜTLELERİN DALGA BARİYERİ ETKİSİNİN ARAŞTIRILMASI

Aydın Özmutlu[1], Tilbenur Dolapdere[2]
[1]TNKÜ, Çorlu Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Tekirdağ
[2]TNKÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Tekirdağ

ABSTRACT

In this study, the effect of wave propagation and periodicity on dispersion was investigated in an infinite shear beam with periodically spaced lumped mass, and is to find out the dynamic characteristics of a periodic structure. The dispersion relation was derived considering an infinite beam as a one-dimensional periodic structure and analyzed the band gaps properties and the effects as function of the model. First, the dynamic stiffness matrix is derived from the solution of the equation for the shear beam. The transfer matrix that establishes the relationship between the state vectors at the ends of the beam part was directly derived from the stiffness matrix. Also point transfer matrix across the lumped mass was derived from the dynamic equilibrium and continuity conditions. Combining these, generalized transfer matrix was obtained for the beam part (unit cell), and the problem has been reduced an eigenvalue problem. Wave numbers, phase angles and phase velocities has been computed at wide frequency range. The positive effect of periodically spaced masses on the wave propagation in the shear beam in a finite region, that is, the state of being a barrier, has been shown.

Keywords: wave dispersion, periodic structure, lumped mass, band gap, wave barrier

ÖZET

Bu çalışmada periyodik aralıklarla monte edilmiş yığılı kütleli sonsuz bir kayma kirişinde dalga yayılımı ve periyodikliğin dispersiyona olan etkisi araştırılmıştır. Dispersiyon ilişkisi, sonsuz uzunluktaki kirişin bir boyutlu periyodik bir yapı olduğu düşünülerek türetilmiş ve bant boşluklarının özellikleri ve modelin buna olan etkileri analiz edilmiştir. Önce, kayma kirişi için yönetici denklemin çözümünden, dinamik katılık matrisi çıkartılmıştır. Katılık matrisinden kiriş parçası için geçerli taşıma matrisi türetilerek, kiriş taşıma matrisi ile kiriş parçasının uçlarındaki durum vektörleri arasında geçiş ilişkisi kurulmuştur. Yığılı kütle için nokta taşıma matrisi yazılmış, kiriş taşıma matrisi ile nokta taşıma matrisi çarpılarak periyodik kayma kirişi parçası (birim hücre) için genelleştirilmiş taşıma matrisi elde edilmiştir. Sonlu bir bölgede periyodik aralıklı kütlelerin kayma kirişinde dalga yayılımına olan olumlu etkisi yani bariyer olma durumu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: dalga dispersiyonu, periyodik yapı, yığılı kütle, bant boşluğu, dalga bariyeri

GİRİŞ

Günümüzde periyodik yapıların davranışı araştırmacıların daha çok ilgisini çekmektedir. Bu yapıların frekans spektrumu incelendiğinde bantlı bir yapı gözlemlenir. Gerek malzeme gerek yapı periyodikliği, bu tür yapılarda dalga dispersiyonuna neden olurken aynı zamanda belli bir frekans aralığında dalga yayılımı gerçekleşirken belli bir aralıkta da dalga yayılımı gerçekleşmez. Bu davranış şekli yapılarda çeşitli yollarla ortaya çıkan titreşimlerin kaynağının ortadan kaldırılması veya titreşimlerin oluşturduğu etkilerin azaltılması açısından önemlidir. Periyodik yapılar birden fazla özdeş bileşenden meydana gelen bir sistem olarak tanımlanabilir [1]. Birbirine bağlı yığılı kütleli özdeş yapılardan oluşmuş kirişler periyodik yapı özelliği göstermektedir.

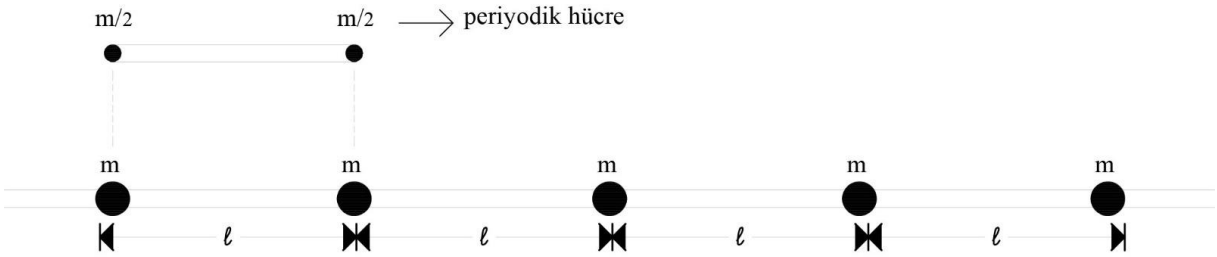
Literatüre bakıldığında 1900 ile 1960 yılları arasında, periyodik yapı problemlerinin (kristal kafes yapılar, periyodik elektrik devreleri, sürekli iletim hatları) çözümüne ilişkin matematiksel tekniklerin geliştirildiği görülür. Rayleigh ve Floquet, sürekli periyodik yapıları dikkate alan ve öncül çalışmalar yapan ilk araştırmacılardır [2, 3]. Brillouin konunun tarihi izini Newton'a kadar sürmüş, kristal kafes yapı ve periyodik elektrik devre problemlerini araştırmış, analiz etmiştir [4]. Geliştirilen bu teknikler, sürekli periyodikliğe sahip yapılarının 60 yıllardan sonraki çalışmalara ışık tutmuştur.

Bir fiziksel problemi açıklarken basit modeller üzerinden incelemek yaygın olarak tercih edilen bir yöntemdir. Bu çalışmada da elastik dalgaların periyodik kütleli kiriş boyunca yayılması, bir bütün olarak yapının sadece kesme deformasyonunu ve yığılı kütlelerden dalgaların saçılmasını açıklayan basit bir kiriş modeli üzerinden araştırılmıştır. Kurulan bu model, periyodik kütle dağılımının dalga yayılımını nasıl etkilediğine dair fikir vermeyi amaçlamaktadır. Bu model, bir boyutlu (1D) fononik kristal olarak görülebilen bir periyodik yapıya karşılık gelir [1,5-8]. Yapısal periyodiklik (süreksizlikler), empedans uyumsuzluğunun kaynaklarını temsil eder [9]. Bu nedenle, gelen dalgaların ve kütlelerden saçılan dalgaların girişimi Bragg saçılımı çerçevesinde incelenebilir [4]. Gelen ve yansıyan dalgalar arasındaki etkileşim, yapıcı / yıkıcı bir girişim üretir [9]. Son yıllarda yapılan araştırmalar, dalga yayılımının, metamalzemeler kullanılarak periyodik dalga bariyerleri ile yapay olarak kontrol edilebileceğini göstermektedir [10-14].

Bu makalede periyodik aralıklarla monte edilmiş yığılı kütleli sonsuz bir kayma kirişinde dalga yayılımı ve periyodikliğin dispersiyona olan etkisi araştırılmıştır. Kayma kirişi için yönetici denklemin çözümünden, dinamik katılık matrisi çıkartılmıştır. Katılık matrisinden kiriş parçası için geçerli taşıma matrisi türetilerek, kiriş taşıma matrisi ile kiriş parçasının uçlarındaki durum vektörleri arasında geçiş ilişkisi kurulmuştur. Yığılı kütle için nokta taşıma matrisi yazılmış, kiriş taşıma matrisi ile nokta taşıma matrisi çarpılarak periyodik kayma kirişi parçası (birim hücre) için genelleştirilmiş taşıma matrisi elde edilmiştir. Sonlu bir bölgede periyodik aralıklı kütlelerin kayma kirişinde dalga yayılımına olan olumlu etkisi yani bariyer olma durumu gösterilmiştir.

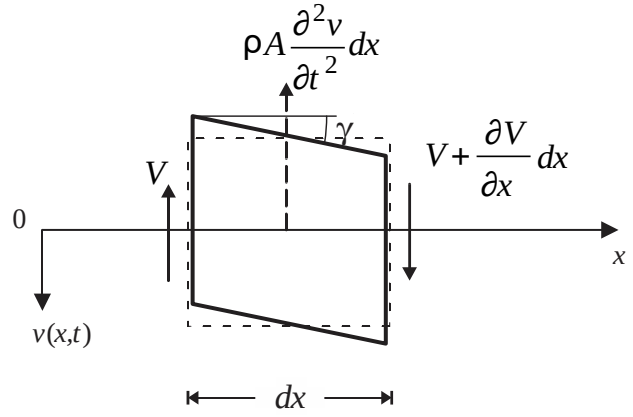
MODEL ve ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Şekil 1'de sonsuz uzunluktaki periyodik yığılı kütleli bir kayma kirişi görülmektedir. Şekildeğiştirmelerin sadece kesme kuvveti $V(x,t)$'ye bağlı olduğu bu kirişte, periyodik yığılı kütle m, kütleler arası açıklık (kiriş parçasının uzunluğu) ℓ ve kiriş malzemesinin yoğunluğu ρ'dur.



Şekil 1. Yığılı kütleli kayma kirişi modeli.

Kesme kuvveti etkisindeki meydana gelecek şekildeğişimi sırasında kiriş parçasına ait serbest cisim diyagramı Şekil 2'deki gibi olur.



Şekil 2. Şekil değiştiren elemanın serbest cisim diyagramı.

Kayma kirişine ait hareket denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{1}$$

Burada, $v(x,t)$ düşey yer değiştirme ve A kirişin en kesiti alanıdır. Bünye denklemi aşağıda gösterildiği şekilde yazılır.

$$V=\kappa GA\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

Burada, κ kesit biçimine bağlı bir büyüklük olup, kayma düzeltme çarpanı olarak isimlendirilir ve G kayma modülüdür. Eğer (2) bağıntısı (1) bağıntısında yerine yazılırsa, kayma kirişine ait dalga denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3}$$

Burada $\beta=\sqrt{\kappa G/\rho}$ ifadesi dalga yayılma hızıdır. Ortamın davranışının $e^{-i\omega t}$ yapısında harmonik olduğu kabulü yapılarak $V(x,t)=\bar{V}(x)e^{-i\omega t}$ ve $v(x,t)=\bar{v}(x)e^{-i\omega t}$ şeklinde bir ayrıklaştırma yapılabilir. Bu durumda dalga denkleminin çözümü

$$\bar{v}(x)=C_1e^{i\frac{\omega}{\beta}x}+C_2e^{-i\frac{\omega}{\beta}x} \tag{4}$$

şeklinde elde edilir. Şekil 2'deki duruma göre uç yerdeğiştirmeleri ve kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x = x_0 : \qquad v(x_0) = \overline{v}_i \text{ ve } V_i = \overline{V}(x_0) = -\kappa GA \frac{d\overline{v}}{dx}\bigg|_{x=x_0} \tag{5}$$

$$x = x_0 + dx = x_1 : \qquad v(x_1) = \overline{v}_j \text{ ve } \overline{V}_j = \overline{V}(x_1) = \kappa GA \frac{d\overline{v}}{dx}\bigg|_{x=x_1} \tag{6}$$

Dalga çözümü (5) ve (6) denklemlerinde yerine koyulup matris formunda düzenlenirse aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\begin{Bmatrix} \overline{v}_i \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\omega}{\beta}x_0} & e^{-i\frac{\omega}{\beta}x_0} \\ e^{i\frac{\omega}{\beta}x_1} & e^{-i\frac{\omega}{\beta}x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{V}_i \\ \overline{V}_j \end{Bmatrix} = i\frac{\omega}{\beta}\kappa GA \begin{bmatrix} -e^{i\frac{\omega}{\beta}x_0} & e^{-i\frac{\omega}{\beta}x_0} \\ e^{i\frac{\omega}{\beta}x_1} & -e^{-i\frac{\omega}{\beta}x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

(7) ve (8) bağıntılarından C_1 ve C_2 katsayıları yok edilerek kesme kuvvetleri ve yer değiştirmeler arasındaki ilişkiyi veren dinamik rijitlik matrisi $\mathbf{S}_t$ elde edilmiş olur [10]. Bu durumda kuvvet-yerdeğiştirme vektörü ilişkisi

$$\begin{Bmatrix} \overline{V}_i \\ \overline{V}_j \end{Bmatrix} = \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1^{-1} \begin{Bmatrix} \overline{v}_i \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Burada $\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1^{-1}$ dinamik rijitlik matrisidir, $\mathbf{S}_1$ ve $\mathbf{S}_2$ geometrik ve dinamik sınır koşullarından elde edilen spektral matrislerdir. Dinamik rijitlik matrisinin açık ifadesi aşağıda gösterildiği gibi oluşmaktadır.

$$\mathbf{S}_t = \frac{\frac{\omega}{\beta}\kappa GA}{\sin[\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0)]} \begin{bmatrix} \cos\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0) & -1 \\ -1 & \cos\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

Kiriş Parçası için Taşıma Matrisi

Dinamik rijitlik matrisinden taşıma matrisine geçiş mümkündür. Dinamik taşıma matrisi sayesinde, bir uçtaki kesit tesirleri ve yer değiştirmeleri (giriş büyüklükleri) bilinen bir kirişin diğer ucundaki kesit tesirleri ve yer değiştirmeleri (çıkış büyüklükleri) bulunabilir. Taşıma matrisi herhangi bir kiriş parçasının *i* ve *j* uçlarındaki durum vektörleri arasında aşağıda verilen ilişkiyi kurar [11-14]:

$$\mathbf{f}(x_1) = \mathbf{T}_b(x_1, x_0)\mathbf{f}(x_0) \tag{11}$$

Burada $\mathbf{f}(x_0)$ başlangıç durum vektörü olup $\{\overline{v}_0, \overline{V}_0\}^T$ giriş büyüklüklerini, $\mathbf{f}(x_1)$ son durum vektörü olup durum $\{\overline{v}_1, \overline{V}_1\}^T$ çıkış büyüklüklerini tanımlamaktadır. $\mathbf{T}_b(x_1, x_0)$ taşıma

matrisidir ve tanım uzayı ile hedef uzayı arasındaki doğrusal dönüşümü yapan bir matris işlemcidir. Bu matrisin elemanları ile dinamik rijitlik matrisi elemanları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

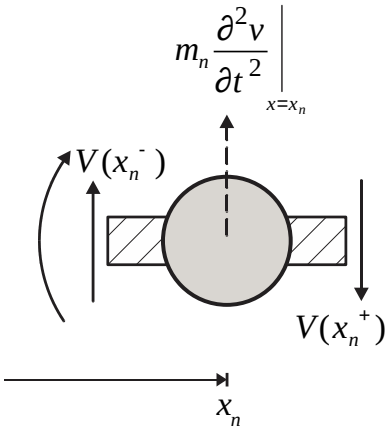
$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{b,11} &= -\mathbf{S}_{t,11}\mathbf{S}_{t,12}^{-1}\\ \mathbf{T}_{b,12} &= -\mathbf{S}_{t,12}^{-1}\\ \mathbf{T}_{b,21} &= \mathbf{S}_{t,21} - \mathbf{S}_{t,22}\mathbf{S}_{t,11}\mathbf{S}_{t,12}^{-1}\\ \mathbf{T}_{b,22} &= -\mathbf{S}_{t,22}\mathbf{S}_{t,12}^{-1}\end{aligned} \tag{12}$$

Dinamik taşıma matrisinin açık ifadesi aşağıda gösterildiği gibi oluşmaktadır.

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} \cos[\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0)] & \frac{1}{\kappa AG\omega\rho\beta}\sin[\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0)] \\ -\kappa AG\omega\rho\beta\sin[\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0)] & \cos[\frac{\omega}{\beta}(x_1 - x_0)] \end{bmatrix} \tag{13}$$

Yığılı Kütle için Taşıma Matrisi

Yığılı kütle için nokta taşıma matrisi dinamik denge denklemi ve süreklilik koşulları üzerinden yazılacaktır. Herhangi bir n ve $n+1$ kiriş parçasının sınırında $x = x_n$, noktasındaki yığılı kütle ve buna etkiyen kesit zorları ile atalet kuvvetine ilişkin serbest cisim diyagramı Şekil 3'te görülmektedir.



Şekil 3. $x = x_n$ noktasındaki yığılı kütle için serbest cisim diyagramı

Nokta taşıma matrisi için dinamik denge koşulu yazılacak olursa

$$V(x_n^+) = V(x_n^-) + m_n\ddot{v}(x_n^-) \tag{14}$$

bağıntısı elde edilir, m_n burada, n noktasındaki yığılı kütledir. Yerdeğiştirme koşulu ise aşağıdaki gibidir.

$$v(x_n^+) = v(x_n^-) = v(x_n) \tag{15}$$

Yukarıdaki (14)-(15) bağıntıları ayrıklaştırma yapılıp düzenlenirse, durum vektörleri ile nokta taşıma matrisi arasındaki aşağıdaki ilişki yazılır.

$$\mathbf{f}(x_n^+) = \mathbf{T}_p(x_n)\mathbf{f}(x_n^-) \tag{16}$$

$\mathbf{T}_p(x_n)$ burada $x = x_n$ sınırındaki nokta taşıma matrisi olup açık ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{T}_p(x_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^2 m_n & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

Periyodik Hücre için Taşıma Matrisi ve Dispersiyon Denklemi

Kiriş parçasında taşıma matrisi ve sınırda yığılı kütle için nokta taşıma matrisi elde edildi. Elde edilen bu matrisler sonlu bir kiriş için başlangıç noktasından bitiş noktasına kadar yazılacak olursa birim hücre için genel taşıma matrisi elde edilir.

$$\mathbf{f}(x_0 + \ell) = \mathbf{T}_c(\ell)\mathbf{f}(x_0) \tag{18}$$

Genel halde periyodik bir hücre (yığılı kütleler ve kiriş parçası), iki adet nokta yayılım matrisi ile bir adet alan yayılım matrisinden oluşur.

$$\mathbf{T}_c(\ell) = \mathbf{T}_p(m/2)\mathbf{T}_b(\ell)\mathbf{T}_p(m/2) \tag{19}$$

Birim hücre kendisini ℓ aralıklı olarak tekrar eden bir periyodik yapı oluşturur. Bu n hücreli periyodik yapı boyunca durum vektörü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{f}(x_0 + n\ell) = \mathbf{T}_c^n(\ell)\mathbf{f}(x_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

Ele alınan sonsuz uzun kirişin kararlı hal çözümü için geçerli, periyodik sınır koşulları

$$\mathbf{f}(x_0 + n\ell) = \mathbf{f}(x_0), \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{21}$$

şeklinde yazılır. Periyodiklik gereği zamana göre davranış harmonik ise Floquet-Bloch teoremi [4] kullanılarak

$$\mathbf{f}(x_0 + n\ell) = e^{ik_c n\ell}\mathbf{f}(x_0) \tag{22}$$

yazılabilir. k_c kiriş parçası ve oluşturduğu periyodik yapı için dalga sayısıdır. Tam periyodik yapılarda $\mathbf{T}_c^n(\ell)$ matrisi bütün hücrelerde aynıdır, dolayısı ile $n = 1$ alınır, (20) ve (22) bağıntıları kullanılarak taşıma matrisinin özdeğer problemi

$$\det\left(\mathbf{T}_c(\ell) - e^{ik_c\ell}\mathbf{I}\right) = 0 \tag{23}$$

elde edilir. (23) bağıntısından periyodik hücre için özdeğerler ve özvektörler hesaplanabilir. Burada $\Lambda_{c,12} = e^{\pm ik_c\ell}$ periyodik hücre için özdeğerlerdir. Bu denklem dalganın her frekansta farklı yayıldığını gösteren dispersiyon ilişkisini vermektedir. Taşıma matrisinin özdeğerleri hesaplandığında dalga faz hızlarını bulmak için gereken dalga sayıları elde edilir. Periyodik kiriş parçası için dalga sayısı

$$k_c = \frac{1}{\ell}\arg\left(\Lambda_{c,12}\right) \tag{24}$$

(24) bağıntısı ile bulunur. Bulunan k_c değerleri incelendiğine sürekli değer almadığı görülür. k_c'nin sürekli değerler aldığı belli frekans değerleri, izinli dalga sayısı değerleri olarak

adlandırılır. Dalga sayısı spektrumundaki bantlar, farklı kütlelerden saçılan dalgaların girişiminin sonucudur.

İzinli k_c değerleri periyodik sınır koşulları (21) uygulanarak bulunur. Floquet-Bloch teoremi kullanılarak yazılan (22) bağıntısı ile birlikte periyodik sınır koşullarından aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$k_c = \frac{2\pi}{\ell} r, \quad r = \pm 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Buna göre (25) ifadesi ile verilen izinli k_c değerleri, kendini $\frac{2\pi}{\ell}$ periyodu ile tekrarlar ve dalga sayısı uzayında bir kafes oluşturur. Ayrıca k_c izinli dalga sayısı ise $k_c \pm r\frac{2\pi}{\ell}$, $r = 1, 2, \ldots$ de izinli bir dalga sayısıdır. k_c asal değerini, $k_c = 0$ için simetrik olacak biçimde $\left(-\frac{\pi}{\ell}, \frac{\pi}{\ell}\right)$ aralığında tanımlarsak, bu tanım aralığı 1 inci Brillouin bölgesi olarak isimlendirilir. Bu sayede sonsuz uzunluktaki bir periyodik kirişin dalga yayılımı incelenebilir. Ayrıca, 1 inci Brillouin bölgesindeki dalga sayısı değiştirilerek dispersiyon eğrileri elde edilebilir.

Durum Vektörü Dalga Katsayıları İlişkisi

Homogen, izotrop ve doğrusal elastik bir kirişte $\mathbf{f}(x)$ durum vektörü ve $\boldsymbol{a}$ dalga katsayıları arasındaki ilişki kurulmak istensin. Bu durumda yerdeğiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v(x,t) = \left(A_+ e^{ikx} + A_- e^{-ikx}\right) e^{-i\omega t} \tag{26}$$

$$\tau(x,t) = iGk\left(A_+ e^{ikx} - A_- e^{-ikx}\right) e^{-i\omega t} \tag{27}$$

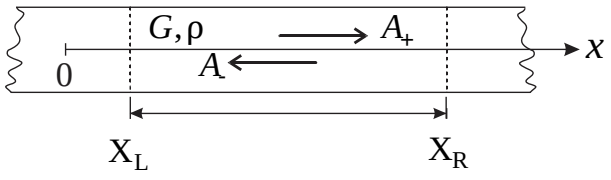
A_+ ve A_- dalga katsayıları olup, $A_+ e^{ikx-i\omega t}$ ve $A_- e^{-ikx-i\omega t}$ sırası ile pozitif ve negatif x-doğrultularında yayılan harmonik dalgalardır. Dalga katsayıları verilen iki sınır koşulundan benzersiz olarak belirlenebilir. Kararlı hal çözümleri

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{X}\boldsymbol{\Lambda}(x)\boldsymbol{a} \tag{28}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ ikG & -ikG \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Lambda}(x) = \begin{bmatrix} e^{ikx} & 0 \\ 0 & e^{-ikx} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{a} = \left\{A_+, A_-\right\}^T \tag{29}$$

Şimdi aynı ortamda tanımlı $x = \mathrm{X_L}$ ve $x = \mathrm{X_R}$ gibi iki noktada tanımlı durum vektörleri ve dalga katsayıları arasındaki ilişkiyi kuralım.



Şekil 4. Tanımlı sınırlar arasında dalga yayılımı

Burada $x = \mathrm{X_L}$ ve $x = \mathrm{X_R}$ belli bir bölge içinde veya sınırındaki noktalardır. $x = \mathrm{X_L}$ noktasındaki durum vektörü $\mathbf{f}(\mathrm{X_L})$ ve bilindiğini kabul edelim. O zaman

$$\mathbf{f}(\mathrm{X_L}) = \mathbf{X}\,\mathbf{\Lambda}(\mathrm{X_L})\,\boldsymbol{a} \tag{30}$$

şeklinde yazılabilir. $x = \mathrm{X_R}$ noktasındaki durum vektörü $\mathbf{f}(\mathrm{X_R})$ hesaplanacak olursa

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathrm{X_R}) &= \mathbf{X}\,\mathbf{\Lambda}(\mathrm{X_R})\,\boldsymbol{a} \\ &= \mathbf{X}\,\mathbf{\Lambda}(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L})\mathbf{X}^{-1}\,\mathbf{f}(\mathrm{X_L})\end{aligned} \tag{31}$$

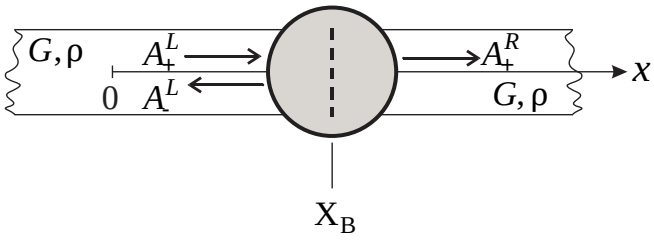
ifadesi elde edilir. Burada $\mathbf{\Lambda}(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L}) = diag\{e^{ik(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L})}, e^{-ik(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L})}\}$, olup veya

$$\mathbf{f}(\mathrm{X_R}) = \mathbf{T}_b(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L})\,\mathbf{f}(\mathrm{X_L}) \tag{32}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $\mathbf{T}_b(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L})$, aynı ortamda $x = \mathrm{X_L}$ noktasındaki durum vektörünü soldan sağa taşıyan matristir.

Sınırda Yansıma ve Geçiş

Şimdi $x = \mathrm{X_B}$ gibi bir noktanın sağındaki ve solundaki ortamın özelliklerinin aynı olduğu ve sınırda bir *m* yığılı kütlesinin olduğu durumu inceleyelim. Bu noktada soldaki ortamdan gelip sınırı geçen dalganın sağdaki ortamdan geri yansımadığını (yutan sınır) varsayalım.



Şekil 5. $x = \mathrm{X_B}$ noktasında sınırdan geçen ve yansıyan dalgalar

Sırası ile soldaki ve sağdaki ortamdaki $v^L(x)$ ve $v^R(x)$ yerdeğiştirme vektörlerini tanımlayalım.

$$v^L(x) = A_+^L e^{ikx} + A_-^L e^{-ikx} \tag{33}$$

$$v^R(x) = A_+^R e^{ikx} \tag{34}$$

Geçiş ve yansıma katsayılarını bulmak için dinamik ve geometrik sınır koşulları yazılacaktır. Sınırın sonsuz küçük solunda $x = \mathrm{X_B}^-$ için durum vektörü

$$\mathbf{f}(\mathrm{X_B}^-) = \mathbf{X}\,\mathbf{\Lambda}(\mathrm{X_B}^-)\,\boldsymbol{a}^L \tag{35}$$

ve sonsuz küçük sağında $x = \mathrm{X_B}^+$ için durum vektörü

$$\mathbf{f}(\mathrm{X_B}^+) = \mathbf{X}\,\mathbf{\Lambda}(\mathrm{X_B}^+)\,\boldsymbol{a}^R \tag{36}$$

şeklinde yazılır. Burada $\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} = \left\{ A_+^L, A_-^L \right\}^T$ ve $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}} = \left\{ A_+^L, 0 \right\}^T$ sırası ile sınırın solundaki ve ortama ait dalga katsayıları vektörleridir. Yukarıda (14)-(15) ile verilen sınır koşulu bağıntıları kullanılırsa

$$\boldsymbol{a}^R = \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_B}^+) \right]^{-1} [\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{T}_p(\mathrm{X_B}) [\mathbf{X}] \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_B}^-) \right] \boldsymbol{a}^L \tag{37}$$

şeklinde dalga katsayısı vektörleri arasında bir bağıntı elde edilir. Bu ilişki ayrıca

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} = \bar{\mathbf{T}}(\mathrm{X_B}) \boldsymbol{a}^{\mathrm{R}} \tag{38}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathrm{X_B}) = \left\{ \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_B}^+) \right]^{-1} [\mathbf{X}]^{-1} \mathbf{T}_p(\mathrm{X_B}) [\mathbf{X}] \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_B}^-) \right] \right\}^{-1} \tag{39}$$

sağdan sola doğru dalga katsayısı vektörlerinin iletim matrisidir. (38) bağıntısı, yutucu sınır koşullarından bağımsız olarak herhangi bir sınırda geçerlidir. Şimdi, yığılı kütleli bir sınırda (yutan sınır varsayımı için) (38) bağıntısını kullanarak yansıma ve geçiş katsayılarını bulalım.

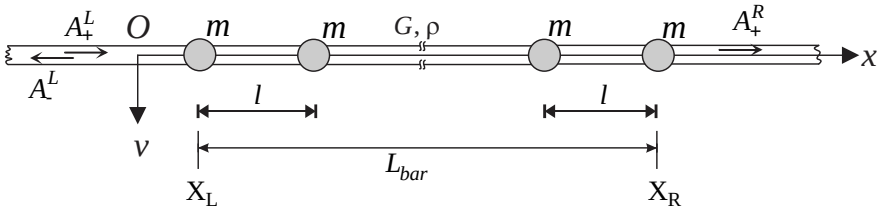
$$\alpha^{tran} = \frac{A_+^R}{A_+^L} = \frac{1}{\bar{\mathrm{T}}_{11}} \tag{40}$$

$$\alpha^{ref} = \frac{A_-^L}{A_+^L} = \frac{\bar{\mathrm{T}}_{21}}{\bar{\mathrm{T}}_{11}} \tag{41}$$

Burada α^{tran} geçiş katsayısı, α^{ref} yansıma katsayısıdır.

Periyodik Yığılı Kütlelerin Bariyer Etkisi

Bu aşamada η_{mass} adet sonlu sayıda yığılı kütlenin malzeme özellikleri değişmeyen bir kirişe, ℓ (kütle merkezleri arasındaki mesafe) aralıklı olarak periyodik biçimde monte edildiğini varsayalım (Şekil 6).



Şekil 6. Yığılı kütle bariyeri

Bariyer boyunca $H_{bar}(\omega)$ iletkenlik fonksiyonunu bulalım. Bariyerin uzunluğu L_{bar}, kütle sayısına bağlı olarak

$$L_{bar} = \mathrm{X_R}^+ - \mathrm{X_L}^- = (\eta_{mass} - 1)\ell \tag{42}$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada, $\mathrm{X_L}^-$: 1 inci kütlenin sonsuz küçük solundaki noktanın *x* koordinatı ve $\mathrm{X_R}^+$: sonuncu kütlenin sonsuz küçük sağındaki noktanın *x* koordinatıdır.

Bariyerdeki 1 inci kütlenin solunda kalan kirişte dalga katsayısı vektörü $\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} = \left\{ A_{+}^{L}, A_{-}^{L} \right\}^{T}$ ve sonuncu kütlenin sağında kalan kirişte dalga katsayısı vektörü $\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}} = \left\{ A_{+}^{L}, 0 \right\}^{T}$ olsun. $x = \mathrm{X_L}^{-}$ noktasında durum vektörü

$$\mathbf{f}(\mathrm{X_L}^{-}) = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_L}^{-})\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} \tag{43}$$

ve $x = \mathrm{X_R}^{+}$ noktasında durum vektörü

$$\mathbf{f}(\mathrm{X_R}^{+}) = \mathbf{X}\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_R}^{+})\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}} \tag{44}$$

şekline yazılır. $\mathbf{f}(\mathrm{X_L}^{-})$ and $\mathbf{f}(\mathrm{X_R}^{+})$ durum vektörleri arasındaki bağıntı taşıma matrisi ile kurulacak olursa

$$\mathbf{f}\left(\mathrm{X_R}^{+}\right) = \mathbf{f}\left(\mathrm{X_L}^{-} + (\eta_{mass} - 1)\ell\right) = \mathbf{T}_p(m/2)\left[\mathbf{T}_c(\ell)\right]^{(\eta_{mass}-1)}\mathbf{T}_p(m/2)\mathbf{f}\left(\mathrm{X_L}^{-}\right) \tag{45}$$

(45) bağıntısı daha sade bir şekilde

$$\mathbf{f}\left(\mathrm{X_R}^{+}\right) = \mathbf{T}_{bar}\,\mathbf{f}\left(\mathrm{X_L}^{+}\right) \tag{46}$$

olarak yazılabilir, burada $\mathbf{T}_{bar} = \mathbf{T}_p(m/2)\left[\mathbf{T}_c(\ell)\right]^{(\eta_{mass}-1)}\mathbf{T}_p(m/2)$ bariyer taşıma matrisi olup, bariyer boyunca durum vektörünün taşıdığı bilgiyi içerir. Bariyer öncesi ve sonrası dalga vektörleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}} &= \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_R}^{+})\right]^{-1}\left[\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{f}(\mathrm{X_R}^{+}) \\ &= \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_R}^{+})\right]^{-1}\left[\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{T}_{bar}\,\mathbf{X}\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_L}^{-})\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}}\end{aligned} \tag{47}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{R}} = \mathbf{I}_{bar}\;\boldsymbol{a}^{\mathrm{L}} \tag{48}$$

olarak yazılabilir, burada $\mathbf{I}_{bar} = \left[\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_R}^{+})\right]^{-1}\left[\mathbf{X}\right]^{-1}\mathbf{T}_{bar}\,\mathbf{X}\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{X_L}^{-})$ soldan sağa doğru dalga katsayısı vektörlerinin iletim matrisidir. Şimdi bariyerden geçen ve yansıyan dalgalar için dalga katsayılarını bulalım.

$$A_{-}^{L} = -\frac{\mathrm{I}_{bar}(2,1)}{\mathrm{I}_{bar}(2,2)}A_{+}^{L} \tag{49}$$

$$A_{+}^{R} = \mathrm{I}_{bar}(1,1) - \frac{\mathrm{I}_{bar}(1,2)\cdot\mathrm{I}_{bar}(2,1)}{\mathrm{I}_{bar}(2,2)}A_{+}^{L} \tag{50}$$

Bu katsayılar kullanılarak bariyere gelen ve geçip iletilen dalga arasında genlik ve faz ilişkisini veren iletkenlik fonksiyonu hesaplanabilir.

$$H_{bar}(\omega) = \frac{v^{out}}{v^{in}} = \frac{A_{+}^{R}}{A_{+}^{L}}e^{ik(\mathrm{X_R}-\mathrm{X_L})} \tag{51}$$

Burada v^{in} ve v^{out} sırasıyla bariyer öncesi ve sonrası kirişteki giriş ve çıkış yerdeğiştirmeleridir. (51) bağıntısı kullanılarak periyodik bir yapı ile sonlu periyodik yapının frekans bantlığının derecesi kıyaslanabilir.

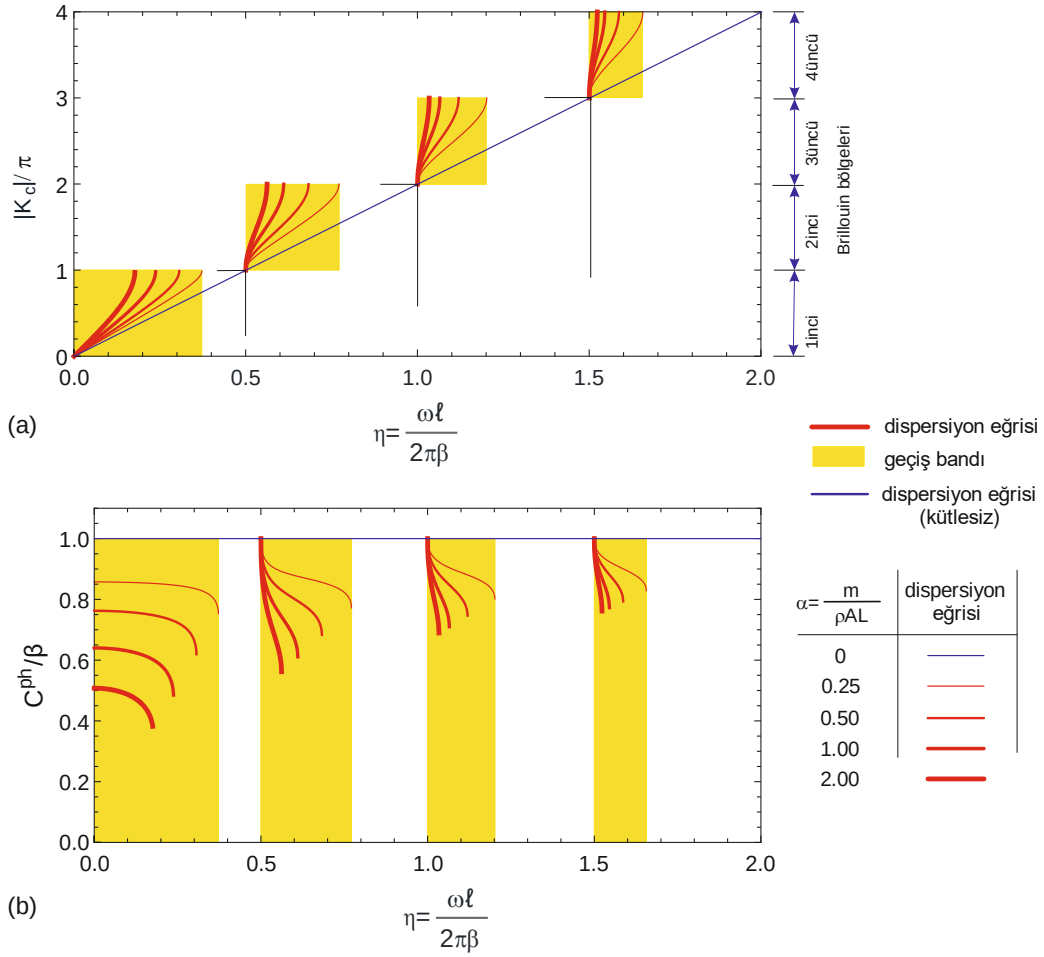
SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, örnek bir durum olarak seçilmiş bir birim hücre tasarımına sahip periyodik yığılı kütleli bir kirişin davranışı ele alınmaktadır. Birim hücre, Şekil 1a'da gösterildiği gibi iki yığılı kütle ve bir kiriş parçasından oluşmaktadır. Kiriş parçasının uzunluğu ℓ ve kayma dalga hızı β olmak üzere, boyutsuz büyüklükler frekans $\eta = \dfrac{\omega\ell}{2\pi\beta}$ ve dalga sayısı $K_c = k_c\ell$ şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca m yığılı kütle ve $m_{SB} = \rho AL$ yalın kiriş parçasının kütlesi olmak üzere, yığılı kütlenin kiriş parçasının kütlesine oranı $\alpha = \dfrac{m}{m_{SB}}$ şeklinde tanımlanmıştır. Ele alınan örnekte kiriş kesiti dikdörtgen olarak kabul edilirse $\kappa = 5/6 \approx 0.8\dot{3}$ değeri alınır [20].

Sonsuz Periyodik Kirişin Frekans Spektrumu

Sonsuz periyodik kiriş (Şekil 1(b)) boyunca yayılan kayma dalgası için frekans spektrumu, Şekil 7(a)'da görülmektedir. Boyutsuz frekans η ve boyutsuz dalga sayısı K_c sırasıyla apsisi ve ordinatı tanımlar. $K_c = \pi$ değeri, 1. Brillioun Bölgesi olarak bilinen sınırı temsil eder. Bu değerin ötesinde, $K_c = K_c(\eta)$ fonksiyonu düşey eksen boyunca periyodik olarak tekrar eder. Frekans spektrumu incelendiğinde belli frekanslar için dalga sayılarının değer aldığı görülmektedir. Örneğin, ikinci bölge $K_C \in (\pi, 2\pi)$ aralığını kapsar. Eğrilerin doğrusal olmaması ortamın dispersif olduğunu gösterir. Gerçel değerli dalga sayılarına karşılık gelen frekanslarda dalga yayılımı gerçekleşirken, bu frekans aralığına "geçme" bandı denir, buna karşılık, karmaşık veya pür sanal dalga sayılarına karşılık frekanslarda dalga yayılımı gerçekleşmez ve bu aralık dinamik cevabın "durma" bandıdır. Böyle bantlı bir frekans spektrumunun oluşumu, dalga saçılımı ve dispersiyonuyla oluşan dalga girişim mekanizmalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Periyodik yapı ile karşılaştırma yapmak amacıyla, aynı ortam özelliklerine sahip homojen malzemeli bir kiriş düşünülür ve frekans spektrumu hesaplanır ise homojen kirişin davranışının dispersif olmadığı ve bu nedenle durma bantlarına sahip olmadığı görülmektedir.

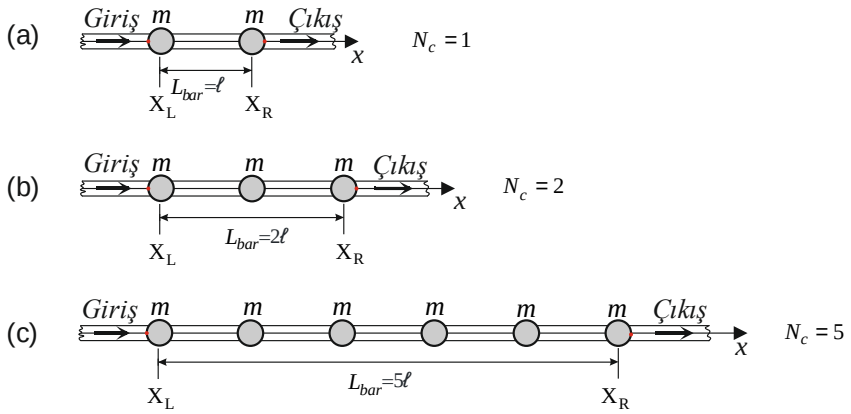
Sonsuz periyodik kiriş boyunca kayma dalgasındaki faz hızının değişimi, Şekil 7(b)'de verilmiştir. Bu dalgalar yalnızca geçme bantlarındaki frekanslar için yayılmakta olup faz hızı, frekansa ve kütle oranına bağlı olarak değişmektedir. Burada yığılı kütlelerin frekansa bağlı geçme bantlarındaki faz hızına etkisi veya nasıl dispersiyona neden olduğunu görülmektedir. Sıfırdan farklı kütle oranı ($\alpha > 0$) için dalgalar, homogen bir kirişteki kayma dalgasınınkinden daha düşük hızlarda yayılır. Kütle oranı arttıkça geçme bantlarının nispeten daraldığı, kütlelerin bir mekanik filtre işlevi gördüğü ve faz hızlarının da azaldığı anlaşılmaktadır.



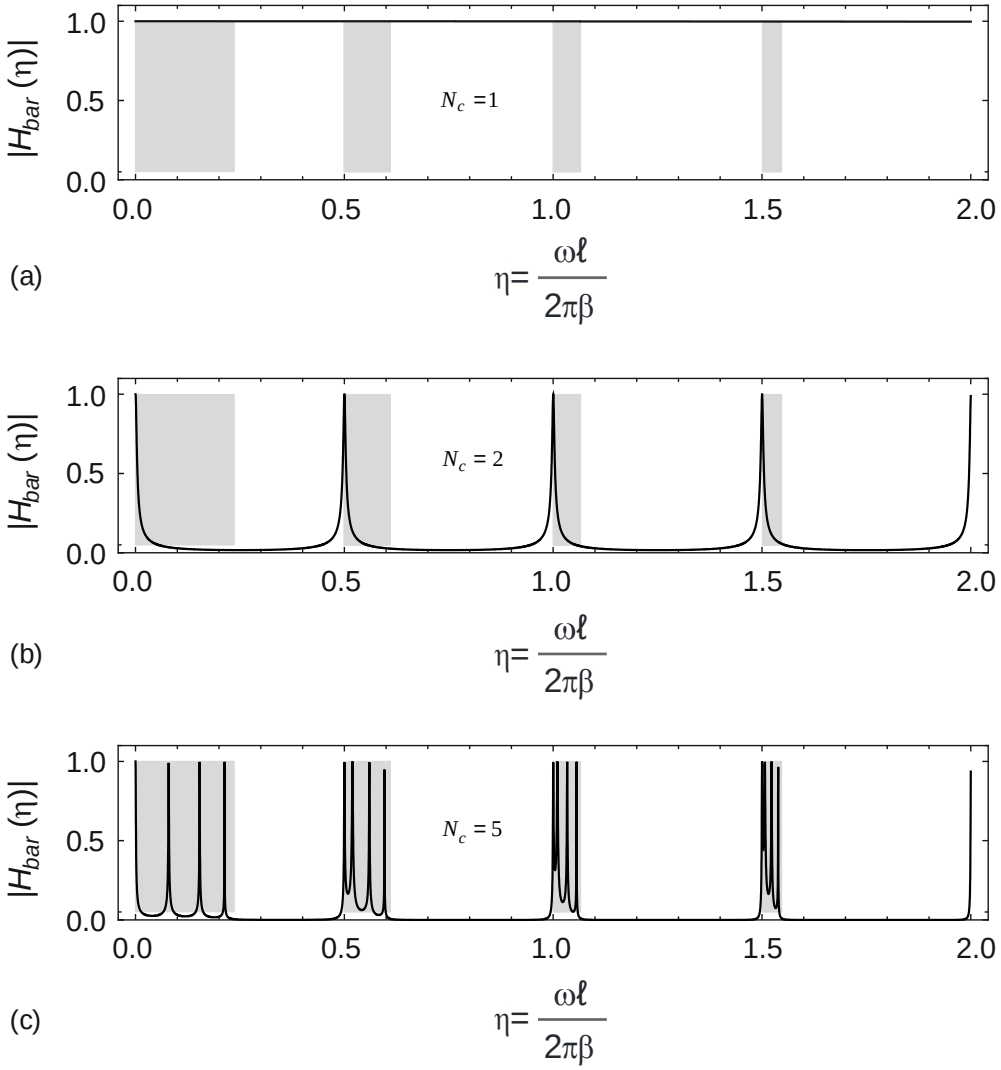
Şekil 7. Bir Boyutlu periyodik yapıda, (a) dispersiyon eğrilerinin, (b) faz hızlarının kütle oranına göre değişimi

Sonlu Periyodik Kirişin İletkenlik Cevabı

Sonsuz uzunluktaki bir kirişte sonlu bir bölgedeki periyodikliğin etkisi Şekil 8'de gösterildiği gibi, her biri sırasıyla $N_c = 1,\ 2,\ 5$ hücreden oluşan üç farklı bariyer üzerinden incelenecektir. (51) denklemi ile verilen $H_{bar}(\omega)$ iletkenlik fonksiyonu, Şekil 8'de ele alınan her yapı için birim hücre içindeki kütle oranı $\alpha = 1$ alınması kaydı ile aynı frekans aralığında $\eta \in (0,2)$ değerlendirilmiş ve sonuçları Şekil 9'da sunulmuştur. Burada 1 veya 2 hücreden oluşan bariyerler için frekans cevabının sonsuz periyodik birim hücrenin bant yapısına çok iyi uymadığı fark edilir (Şekil 9(a)-(b)). Hatta 1 veya 2 hücreden oluşan bariyer gelen dalgayı neredeyse olduğu gibi iletmiştir. Bununla birlikte, sadece 5 birim hücre ile oluşturulan bariyerin, frekans bantlı iletkenlik cevabı, sonsuz ortama karşılık gelen yanıt ile fazlasıyla uyumludur.



Şekil 8. Sonlu bölgede (a) 1, (b) 2 ve (c) 5 hücreli bariyer tasarımı



Şekil 9. Sonlu bölgede $H_{bar}(\omega)$ iletkenlik fonksiyonunun kütle oranı $\alpha = 1$ için (a) 1, (b) 2 ve (c) 5 hücreli bariyere göre değişimi

TEŞEKKÜR

Yazarlar, makalenin hazırlanması sırasında değerli görüşlerini ve yorumlarını paylaşan Prof.Dr. Hasan Engin'e teşekkür ederler.

SONUÇLAR

Bu çalışmada periyodik yığılı kütleli, sonsuz uzunluklu bir kayma kirişinde meydana gelen dispersiyon olayı ve sonlu periyodik kütlelerin dalga bariyeri olarak gösterdiği iletkenlik cevabı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

Periyodik olarak yerleştirilmiş yığılı kütleler frekans spektrumunda bantlı bir yapı ortaya çıkarmış, dalga yayılımı sadece geçme bantlarında meydana gelmiş ve faz hızları düşmüştür. Ayrıca durma bantları dalga iletimini engellemiş, periyodik kütleler mekanik filtre vazifesi görmüştür.

Sonlu periyodik yığılı kütle olması halinde dinamik iletkenliğin azaldığı kütlelerin (örneğin, alınan örnekte 5 birim hücre) bir bariyer gibi davrandığı ve durma bandı frekanslarında iletkenlik değerlerinin düştüğü gözlenmiştir.

Sonuçlar, yığılı kütleli sonsuz ve sonlu uzunluktaki periyodikliğin, elastik davranışa etkileri hakkında değerli bilgiler vermiştir. Sonlu bir periyodik tasarımla sonsuz periyodikliğe yakın cevaplar elde edilmiştir. Böylece, tasarımda periyodikliğe yer vererek sönümleyicilere gerek kalmadan da titreşim azaltımının sağlanabileceği sonucu ortaya çıkmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Hussein, M. I., Hulbert, G. M., and Scott, R. A. Dispersive elastodynamics of 1D banded materials and structures: analysis, *Journal of Sound and Vibration*, 289 (2006), 779–806.

[2] Floquet, G., Sur les équations différentielles linéaries à coefficients périodiques, *Ann. École Norm.* 12 (1883), pp. 47-88.

[3] Rayleigh, L., On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure, *Philosophical Magazine*, 24, (1887), 145-159.

[4] Brillouin, L., *Wave Propagation in Periodic Structures*, Second Edition, Dover Publication, New York, 1953.

[5] Yong, Y., and Lin, Y. K., Propagation of decaying waves in periodic and piecewise periodic structures of finite length, *Journal of Sound and Vibration*, 129(1), (1989), 99–118.

[6] Mead, D.J., Wave propagation in continuous periodic structures: Research contributions from Southampton, 1964-1995, *Journal of Sound and Vibration*, 190(3), (1996), 495-524.

[7] Liu, L., and Hussein, M.I., Wave motion in periodic flexural beams and characterization of the transition between Bragg scattering and local resonance, *Journal of Applied Mechanics* 79(1), (2011)

[8] Hussein, M. I., Leamy, M. J., and Ruzzene, M., Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook, *Applied Mechanics Reviews*, 66(4), (2014), 040802-040802-38.

[9] Baz, A., Active control of periodic structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123(4), (2001), 472-479.

[10] Brûlé, S., Javelaud, E. H., Enoch, S., and Guenneau, S., Experiments on seismic metamaterials: molding surface waves, *In Physical Review Letters* 112(13), (2014), 133901. DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.133901.

[11] Brûlé, S., Enoch, S., and Guenneau, S., Role of nanophotonics in the birth of seismic megastructures, *Nanophotonics* 8(10), (2019), 1591–1605. DOI: 10.1515/nanoph-2019-0106.

[12] Krödel, S., Thomé, N., and Daraio, C., Wide band-gap seismic metastructures, *In Extreme Mechanics Letters*, 4, (2015), 111–117. DOI: 10.1016/j.eml.2015.05.004.

[13] Cheng, Z., Shi, Z., Palermo, A., Xiang, H., Guo, W., and Marzani, A., Seismic vibrations attenuation via damped layered periodic foundations, *In Engineering Structures*, 211, (2020), 110427. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110427.

[14] Pu, X., Meng, Q., and Shi, Z., Experimental studies on surface-wave isolation by periodic wave barriers, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 130, (2020), 106000. DOI: 10.1016/j.soildyn.2019.106000.

[15] Yu, C.P., and Roesset J.M., Dynamic stiffness matrices for linear members with distributed mass. *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 4, (2001) 253–64.

[16] Leckie, F., and Pestel, E., Transfer-matrix fundamentals, *International Journal of Mechanical Sciences*, 2(3), (1960),137-167.

[17] Uhrig, R., The transfer matrix method seen as one method of structural analysis among others, *Journal of Sound and Vibrations*, 4, (1966), 136–148.

[18] Lin, Y.K. and Donaldson, B.K., A brief survey of transfer matrix techniques with special reference to the analysis of aircraft panels, *Journal of Sound and Vibrations*, 10, (1969) 103–143.

[19] Fukuwa, N., and Matsushima, S., Wave dispersion and optimal mass modeling for one-dimensional periodic structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 23(11), (1994), 1165–1180.

[20] Kaneko, T., On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 8(16), (1975), 1927-1936.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

DEĞİŞKEN KESİTLİ KOLONLARIN ELASTİK BURKULMA YÜKLERİNİN KUVVET SERİLERİ YÖNTEMİYLE BELİRLENMESİ

Ayşe Polat Yazıcı[1], Fuad Okay[2]
[1]Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa
[2]Kocaeli Üniversitesi, Kocaeli

ABSTRACT

There are several types of buckling in structural mechanics. The most simple case is the flexural buckling of columns. In general way of thinking, buckling can be defined as loosing the stability of a column under compression. The problem was first studied by the Swiss mathematician Leonhard Euler in 1757. He derived a linear differential equation with constant coefficients, from the buckled shape of pin-pin ended column and achieved the solution of the problem by using the method of undetermined coefficients. The reason for that is the mentioned method is simlply good for columns that have constant cross-section, even with different end conditions.

However, for the cases with variable cross-section, the governing differential equation comes out with variable coefficients and consequently method of undetermined coefficients becomes unsufficient for using the problem.

The authors propose the solution using the method of power series for determining the buckling load of variable cross-section columns. The method is checked for constant cross-sectional columns for two different end conditions. It is observed that the series converge rapidly and give rather satifactory accurate solutions.

Two cases of variable cross-sections are investigated in the study. These cases are pinned-pinned and fixed-free. Analysis result show that the method of power series is suitable for determining buckling loads of columns with variable cross-sections.

Keywords: Buckling; Nonuniform columns; Power Series Solution; Euler column;

ÖZET

Yapı mekaniğinde pek çok burkulma türü vardır. Bunların en basiti kolonların eğilmeli burkulmasıdır. En genel haliyle, eğilmeli burkulma bir kolonun basınç etkisinde kararlılığını kaybetmesi olarak tanımlanabilir. Problem, ilk kez 1757 yılında İsviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından incelenmiştir. Euler iki ucu mafsallı bir kolonun burkulma şeklinden sabit katsayılı doğrusal bir diferansiyel denklem çıkarıp, bu tip denklemlerin çözümünde sıkça kullanılan belirsiz katsayılar yöntemini kullanarak problemin çözümüne ulaşmıştır. Bunun nedeni, bahsedilen yöntem, farklı mesnet koşullarında bile sabit enkesite sahip kolonlar için iyidir.

Değişken kesitli kolonlarda burkulma denkleminin değişken katsayılı olması nedeniyle belirsiz katsayılar yöntemi bu tip kolonların çözümünde yetersiz kalmaktadır.

Yazarlar, değişken kesitli kolonların burkulma yükünü belirlemek için kuvvet serileri yöntemini kullanarak çözüm önermektedir. Yöntem, iki farklı mesnet koşulu için sabit enkesitli kolonlar için kontrol edilir. Serilerin hızla yakınsadığı ve oldukça tatmin edici doğru çözümler verdiği görülmektedir.

Çalışmada değişken kesitli iki durum incelenmiştir. Bu durumlar; iki ucu mafsallı ve bir ucu ankastre bir ucu serbesttir. Yöntemin değişken kesitli kolonların kritik burkulma yükünü bulmak için uygun olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar kelimeler: Burkulma; Değişken kesitli kolonlar; Kuvvet serisi yöntemi; Euler kolonu;

GİRİŞ

Burkulma, en genel haliyle bir kolonun basınç yükü altında kararlılığını kaybetmesi olarak tanımlanabilir. Yapı elemanları, basınç yükleri altında düzlemleri dışına doğru eğilme eğilimindedirler. Kritik yüke erişildiğinde kolon aniden eğilir. Bu eğilme elemanda büyük deformasyonlar oluşturarak elemanın yük taşıma kapasitesini azaltır. Bu sebeple burkulma yükü basınç elemanları için bir tasarım kriteridir [1].

Burkulma problemi ilk kez 1757 yılında İsviçreli matematikçi Leohard Euler tarafından incelenmiştir. Euler, iki ucu mafsallı bir kolon için burkulma denklemini oluşturup, belirsiz katsayılar yöntemi kullanarak denklemi çözmüş ve kolonun kritik burkulma yükünü elde etmiştir. Sözü edilen yöntem, uçlarında farklı mesnet koşullarına sahip sabit kesitli kolonlar için de iyi sonuçlar vermiştir. Değişken kesitli kolonlarda, burkulma diferansiyel denklemi değişken katsayılara sahiptir. Dolayısıyla, bu yöntem değişken kesitli kolonların çözümü için yetersizdir.

Değişken kesitli kolonların analizi için yapılan çalışmalarda birçok farklı yöntem uygulanmıştır. Bunlar; sayısal, analitik ve enerji yöntemleri olarak gruplandırılabilir.

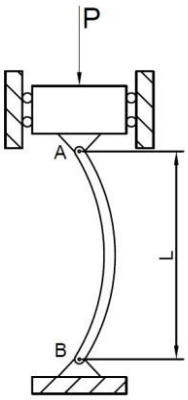
Örnek olarak; Ashok ve Biggers (1976) [8], Newmark'ın sayısal yöntemini kullanarak prizmatik olmayan kiriş-kolon elemanları için rijitlik matrisi üreten bir algoritma sunmuşlardır. Bu algoritma ile bir bilgisayar programı geliştirerek elde ettikleri sonuçların uygun olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Hamoush, Terro ve Mcginley (2002) [9], eksenel kuvvetlerin etki ettiği prizmatik olmayan elemanların elastik ve elastik ötesi davranışlarını ortaya koymuşlardır. Değişken kesitli elemanların sehimlerini göstermek için eğim-sehim ilişkilerine dayanan sonlu fark tekniği uygulamışlardır.

Bu çalışmada değişken kesitli kolonların burkulma yükünü belirlemek için analitik bir yöntem olan kuvvet serileri yöntemi kullanılacaktır.

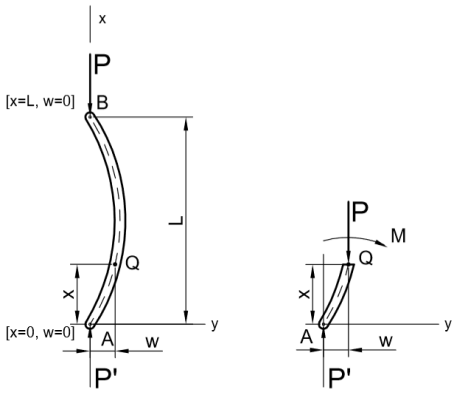
KOLON BURKULMA ANALİZİ

P basınç yükü etkisi altında iki ucu mafsallı, L uzunluğundaki bir kolonun burkulmasını ele alalım. (Şekil 1)



Şekil 1. İki ucu mafsallı bir kolonun burkulma şekli

Kolonun serbest cisim diyagramı ve eksen takımının tanımı Şekil 2'de verilmiştir. Şekil değiştirmeye uğramış kolonun yerdeğiştirmesini hesaplamak için, alt uçtan x uzaklığında bulunan keyfi Q noktası seçilmiştir. AQ parçasının serbest cisim diyagramı Şekil 2'de çizilmiştir. Burada w, Q noktasının yerdeğiştirmesidir.



Şekil 2. İki ucu mafsallı bir kolonun ve bir parçasının burkulma anındaki serbest cisim diyagramları

AQ kesitinin serbest cisim diyagramından Q noktasındaki eğilme momenti şu şekilde yazılabilir;

$$M + Pw = 0 \tag{1}$$

Eğilme momenti ve sehim arasındaki ilişkiyi hatırlarsak, eğilme momenti, EI eğilme rijitliği ile kolonun Q noktasındaki yerdeğiştirmesinin x'e göre ikinci türevinin çarpımına eşittir [2];

$$M = EI\frac{d^2w}{dx^2} \tag{2}$$

Denge denklemi şu şekilde yeniden yazılabilir;

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{P}{EI}w = 0 \tag{3}$$

Bu denklem, sabit katsayılı ikinci dereceden doğrusal diferansiyel denklemdir. ω aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$\omega^2 = \frac{P}{EI} \tag{4}$$

Denklem (3)'ün çözümü şu şekildedir;

$$w = A \sin\omega x + B \cos\omega x \tag{5}$$

Değişken Kesitli Kolonlar

Eğer kolon kesiti sabit kesitli değil de değişken kesitli ise denge denklemi daha karmaşık bir hal alır. EI(x) eğilme rijitliğinin kolon boyunca değiştiğini göstermektedir yani kolonun değişken kesitli olduğunu ifade etmektedir. Bu çalışmada EI(x) doğrusal olarak değişmektedir [3].

$$EI(x)=\alpha(1-bx) \tag{6}$$

Değişken kesitli kolonun denge denklemine ulaşabilmek için, Denklem (3) yeniden düzenlenir.

$$EI(x)w_{,xx}+Pw=0 \tag{7}$$

Denklem (7)'nin iki kez türevini alalım.

$$EI(x)_{,x}w_{,xx}+EI(x)w_{,xxx}+Pw_{,x}=0 \tag{8}$$

$$EI(x)w_{,xxxx}+2EI(x)_{,x}w_{,xxx}+EI(x)_{,xx}w_{,xx}+Pw_{,xx}=0 \tag{9}$$

Denklem (9)'i EI(x)'e bölelim, Denklem (10).

$$w_{,xxxx}+2\frac{EI(x)_{,x}}{EI(x)}w_{,xxx}+\frac{1}{EI(x)}\left[P+EI(x)_{,xx}\right]w_{,xx}=0 \tag{10}$$

Sabit kesitli kolonlarda $EI(x)=EI_0$ olduğundan, Denklem (10) Denklem (11)'e indirgenebilir.

$$w_{,xxxx}+\frac{P}{EI_0}w_{,xx}=0 \tag{11}$$

Yer değiştirme fonksiyonu için aşağıdaki gibi bir sonsuz seri önerilmiştir;

$$w = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + \ldots \tag{12}$$

Serinin ilgili türevleri;

$$\frac{dw}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + \ldots$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + \ldots$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + 120a_6x^3 + 210a_7x^4 + 336a_8x^5 + 504a_9x^6 + \ldots$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} = 24a_4 + 120a_5x + 360a_6x^2 + 840a_7x^3 + 1680a_8x^4 + 3024a_9x^5 + \ldots \tag{13}$$

Sabit Kesitli Kolonların Burkulma Yüklerinin Kuvvet Serileri Yöntemiyle Belirlenmesi

İki Ucu Mafsallı Kolon

$$w,_{xxxx} + \frac{P}{EI_0} w,_{xx} = 0 \tag{11}$$

Önerilen çözüm, diferansiyel denklemi sağlamak için kullanılır;

$$24(EI_0)a_4 + 120(EI_0)a_5 x + 360(EI_0)a_6 x^2 + 840(EI_0)a_7 x^3 + 1680(EI_0)a_8 x^4 + 3024(EI_0)a_9 x^5 ...$$

=

$$-2Pa_2 - 6Pa_3 x - 12Pa_4 x^2 - 20Pa_5 x^3 - 30Pa_6 x^4 - 42Pa_7 x^5 - 56Pa_8 x^6 - 72Pa_9 x^7 ... \tag{14}$$

$$a_4 = -\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)} a_2 \tag{15}$$

$$a_5 = -\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)} a_3 \tag{16}$$

Tüm a_i değerleri için tekrarlanıp, denklem a_2 ve a_3 cinsinden yazılır. Burada I_0 kolonun alt ucundaki kesitin atalet momentidir ve bu problem için kolon uzunluğunun her konumunda değeri aynıdır.

Sınır Koşulları;

x=0 ve x=L iken Denklem (17) ve (18) 'deki sınır koşulları uygulamıştır.

1. Yer değiştirme sıfıra eşittir.

$$w = 0 \tag{17}$$

2. Moment sıfıra eşittir. Bunun sonucu olarak da, yer değiştirmenin ikinci türevi sıfıra eşittir.

$$w'' = 0 \tag{18}$$

$$\gamma = \frac{PL^2}{(EI_0)} \tag{19}$$

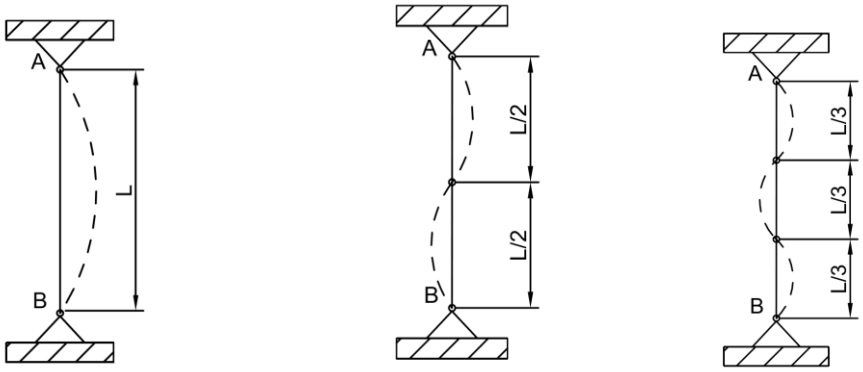
olarak tanımlanır, Denklem (20) elde edilir.

$$6 - \gamma + 0{,}05\gamma^2 - 1{,}1905 \times 10^{-3}\gamma^3 + 1{,}6534 \times 10^{-5}\gamma^4 - 1{,}5031 \times 10^{-7}\gamma^5 ... = 0 \tag{20}$$

Denklem oldukça hızlı yakınsamıştır, ilk beş terimle iki ucu mafsallı sabit kesitli bir kolonun kuvvet serileri yöntemiyle analizi sonucunda bulunan P yükü, Euler formülündeki kritik P yüküne neredeyse eşit olarak bulunmuştur;

$$P = 9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \cong P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{21}$$

Burkulma Modları



Şekil 3. İki ucu mafsallı kolonun sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü burkulma modları

Bulunan birinci burkulma modu;

$$P = 9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \tag{22}$$

Euler'in birinci burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{23}$$

Bulunan ikinci burkulma modu;

$$P = 39{,}4754\frac{EI_0}{L^2} \tag{24}$$

Euler'in ikinci burkulma modu;

$$P_{kr} = 4\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{25}$$

Bulunan üçüncü burkulma modu;

$$P = 89{,}1147\frac{EI_0}{L^2} \tag{26}$$

Euler'in üçüncü burkulma modu;

$$P_{kr} = 9\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{27}$$

İki ucu mafsallı kolon için ilk üç mod ve karşılık gelen kritik burkulma yükleri Denklem (23), Denklem (25), Denklem (27)'de verilmiştir. Bu değerler, yarım sinüs dalgalarının uzunluklarından elde edilmiştir. Kuvvet serileri yöntemindeki polinom denklemlerin çözümünden elde edilen kritik burkulma yük değerleri Denklem (22), Denklem (24), Denklem (26)'da verilmiştir. Kritik burkulma yükleri ile sözü edilen yöntemle bulunan burkulma yüklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmektedir.

Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kolon

$$w,_{xxxx} + \frac{P}{EI_0} w,_{xx} = 0 \tag{11}$$

Önerilen çözüm, diferansiyel denklemi sağlamak için kullanılır;

$$24(EI_0)a_4 + 120(EI_0)a_5 x + 360(EI_0)a_6 x^2 + 840(EI_0)a_7 x^3 + 1680(EI_0)a_8 x^4 + 3024(EI_0)a_9 x^5 ...$$

=

$$-2Pa_2 - 6Pa_3 x - 12Pa_4 x^2 - 20Pa_5 x^3 - 30Pa_6 x^4 - 42Pa_7 x^5 - 56Pa_8 x^6 - 72Pa_9 x^7 ... \tag{14}$$

$$a_4 = -\frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)} a_2 \tag{15}$$

$$a_5 = -\frac{1}{20}\frac{P}{(EI_0)} a_3 \tag{16}$$

Tüm a_i değerleri için tekrarlanıp, denklem a_2 ve a_3 cinsinden yazılır. Burada I_0 kolonun alt ucundaki kesitin atalet momentidir ve bu problem için kolon uzunluğunun her konumunda değeri aynıdır.

Sınır Koşulları;

Ankastre durum için;

x=0 iken Denklem (28) ve (29) 'daki sınır koşulları uygulamıştır.

1. Yer değiştirme sıfıra eşittir.

$$w = 0 \tag{28}$$

2. Yer değiştirmenin birinci türevi sıfıra eşittir.

$$w' = 0 \tag{29}$$

Serbest durum için;

x=L iken Denklem (30) ve (31) 'deki sınır koşulları uygulamıştır.

3. Yer değiştirmenin ikinci türevi sıfıra eşittir.

$$w'' = 0 \tag{30}$$

4. Son sınır koşulu ise;

$$(Pw'+EI_0 w''')(L) = 0 \tag{31}$$

Üçüncü sınır koşulu uygulandıktan sonra a_2 ve a_3 cinsinden yazılacak şekilde denklem düzenlenmiştir ve k değeriyle ilişkili bir bağıntı elde edilmiştir;

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}\left\{\frac{\left[2-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{12}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{360}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{20160}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}\right]}{\left[6-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}\right]}\right\} \tag{32}$$

k değeri;

$$k = \left\{\frac{\left[2-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{12}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{360}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\frac{1}{20160}\frac{(PL^2)^4}{(EI_0)^4}-\ldots\right]}{\left[6-\frac{PL^2}{(EI_0)}+\frac{1}{20}\frac{(PL^2)^2}{(EI_0)^2}-\frac{1}{840}\frac{(PL^2)^3}{(EI_0)^3}+\ldots\right]}\right\} \tag{33}$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{L}k \tag{34}$$

$$\gamma = \frac{PL^2}{(EI_0)} \tag{19}$$

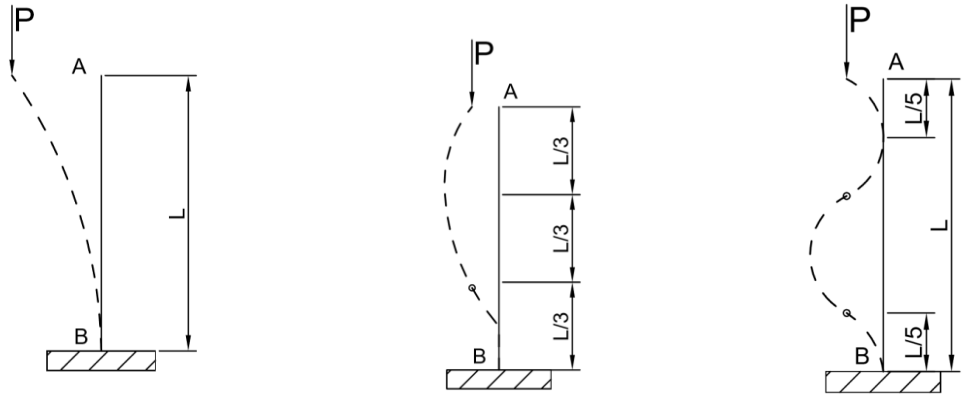
olarak tanımlanır, Denklem (35) elde edilir.

$$12 - 6\gamma + 0{,}5\gamma^2 - 0{,}0167\gamma^3 - 9{,}5238\times10^{-10}\gamma^4 + 1{,}1574\times10^{-4}\gamma^5 - 6{,}8895\times10^{-6}\gamma^6 + 1{,}3778\times10^{-7}\gamma^7 - 8{,}201\times10^{-10}\gamma^8 = 0 \tag{35}$$

Denklem oldukça hızlı yakınsamıştır, ilk beş terimle iki ucu mafsallı sabit kesitli bir kolonun kuvvet serileri yöntemiyle analizi sonucunda bulunan P yükü, Euler formülündeki kritik P yüküne neredeyse eşit olarak bulunmuştur;

$$P = 2{,}4668\frac{EI_0}{L^2} \cong P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \tag{36}$$

Burkulma Modları



Şekil 6. Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonun sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü burkulma modları

Bulunan birinci burkulma modu;

$$P = 2{,}4674\frac{EI_0}{L^2} \tag{37}$$

Euler'in birinci burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \tag{38}$$

Bulunan ikinci burkulma modu;

$$P = 22{,}2066\frac{EI_0}{L^2} \tag{39}$$

Euler'in ikinci burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{9\pi^2 EI}{4L^2} \tag{40}$$

Bulunan üçüncü burkulma modu;

$$P = 60{,}599\frac{EI_0}{L^2} \tag{41}$$

Euler'in üçüncü burkulma modu;

$$P_{kr} = \frac{25\pi^2 EI}{4L^2} \tag{42}$$

Bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için ilk üç mod ve karşılık gelen kritik burkulma yükleri Denklem (37), Denklem (39), Denklem (41)'de verilmiştir. Bu değerler, yarım sinüs

dalgalarının uzunluklarından elde edilmiştir. Kuvvet serileri yöntemindeki polinom denklemlerin çözümünden elde edilen kritik burkulma yük değerleri Denklem (38), Denklem (40), Denklem (42)'de verilmiştir. Kritik burkulma yükleri ile sözü edilen yöntemle bulunan burkulma yüklerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür.

Değişken Kesitli Kolonların Burkulma Yüklerinin Kuvvet Serileri Yöntemiyle Belirlenmesi

Sabit kesitli problemler için oldukça yakın sonuçlar elde edildikten sonra değişken kesitli problemin çözümüne geçilmiştir.

Değişken kesitli problem için denklem aşağıdadır, Denklem (10)

$$w,_{xxxx} + 2\frac{EI(x),_x}{EI(x)} w,_{xxx} + \frac{1}{EI(x)}\left[P + EI(x),_{xx}\right] w,_{xx} = 0 \tag{10}$$

Problemde eğilme rijitliği için doğrusal bir değişim varsayılmıştır. Bu durumda değişken eğilme rijitliği için ilgili türevler aşağıdaki gibidir, Denklem (43);

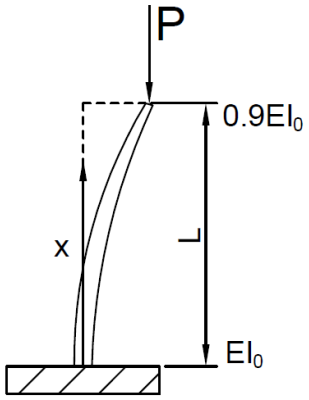
$$\begin{aligned} \alpha &= EI_0 \\ EI(x) &= \alpha(1 - bx) \\ EI(x),_x &= -\alpha b \\ EI(x),_{xx} &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Denklem (41)'deki değerler, Denklem (10)'da yazıldığında Denklem (44) elde edilmiştir.

$$(1 - bx) w,_{xxxx} - 2b w,_{xxx} + \frac{P}{\alpha} w,_{xx} = 0 \tag{44}$$

Önerilen çözüm, diferansiyel denklemi sağlamak için kullanılır;

$$\begin{aligned} &24a_4 + 120a_5 x + 360a_6 x^2 + 840a_7 x^3 + 1680a_8 x^4 + 3024a_9 x^5 \ldots \\ &- 24ba_4 x - 120ba_5 x^2 - 360ba_6 x^3 - 840ba_7 x^4 - 1680ba_8 x^5 \\ &- 12ba_3 - 48ba_4 x - 120ba_5 x^2 - 240ba_6 x^3 - 420ba_7 x^4 - 672ba_8 x^5 \\ &\frac{2P}{(EI_0)} a_2 + \frac{6P}{(EI_0)} a_3 x + \frac{12P}{(EI_0)} a_4 x^2 + \frac{20P}{(EI_0)} a_5 x^3 + \frac{30P}{(EI_0)} a_6 x^4 + \frac{42P}{(EI_0)} a_7 x^5 + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{45}$$



Şekil 9. Değişken kesitli kolon

İşlem adımlarının devamında tüm a_i değerleri açılarak, seri a_2 ve a_3 cinsinden yazılmıştır. Burada I_0 kolonun alt ucundaki kesitin atalet momentidir ve kesit boyunca doğrusal bir değişim içerisindedir.

$$a_4 = \frac{0{,}05}{L} a_3 - \frac{1}{12}\frac{P}{(EI_0)} a_2 \tag{46}$$

$$a_5 = \left(\frac{3\times10^{-3}}{L^2} - \frac{1}{20}\frac{P}{EI_0}\right) a_3 - \frac{5\times10^{-3}}{L}\frac{P}{EI_0} a_2 \tag{47}$$

İki Ucu Mafsallı Kolon

Değişken kesitli iki ucu mafsallı kolonun burkulma yükü ilk modda elde edilmiş, oldukça az sayıda terim açılarak sonuca ulaşılabilmiştir; ancak daha ileri modlar söz konusu olduğunda, daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için serinin daha ileri terimlerde açılması gerekmiştir, seride 57 terim açılmıştır.

$$a_i = \frac{i-2}{i} \times \frac{0{,}1}{L} \times a_{i-1} - \frac{1}{i\times(i-1)} \times \frac{P}{EI_0} \times a_{i-2} \tag{48}$$

Hesaplanan tüm a_i değerleri yani a_{56}'ya kadar açılan tüm değerler ile oluşturulan w serisi oluşturulmuştur. Sınır koşulları; Denklem (17) ve Denklem (18) uygulanarak Denklem (49)'a ulaşılmıştır.

$$\begin{aligned}
&1{,}1106\times10^{-72}\gamma^{26} - 5{,}0885\times10^{-69}\gamma^{25} + 1{,}4124\times10^{-65}\gamma^{24} - 3{,}4333\times10^{-62}\gamma^{23} \\
&+ 7{,}6673\times10^{-59}\gamma^{22} - 1{,}5737\times10^{-55}\gamma^{21} + 2{,}9581\times10^{-52}\gamma^{20} - 5{,}0717\times10^{-49}\gamma^{19} \\
&+ 7{,}8962\times10^{-46}\gamma^{18} - 1{,}1109\times10^{-42}\gamma^{17} + 1{,}4048\times10^{-39}\gamma^{16} - 1{,}5870\times10^{-36}\gamma^{15} \\
&+ 1{,}5910\times10^{-33}\gamma^{14} - 1{,}4047\times10^{-30}\gamma^{13} + 1{,}0828\times10^{-27}\gamma^{12} - 7{,}2164\times10^{-25}\gamma^{11} \\
&+ 4{,}1105\times10^{-22}\gamma^{10} - 1{,}9746\times10^{-19}\gamma^{9} + 7{,}8731\times10^{-17}\gamma^{8} - 2{,}5562\times10^{-14}\gamma^{7} \\
&+ 6{,}6007\times10^{-12}\gamma^{6} - 1{,}3159\times10^{-9}\gamma^{5} + 1{,}6579\times10^{-5}\gamma^{4} - 0{,}00154\gamma^{3} + 0{,}0616\gamma^{2} \\
&- 1{,}1702\gamma + 6{,}6666 = 0
\end{aligned} \tag{49}$$

Denklem (49) Microsoft Mathematics Programında çözdürülüp birinci mod için değerler bulunmuştur ve bu ilgili değerler için de uygunluk kontrolü yapılmıştır, Denklem (52), başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Birinci burkulma modu

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \tag{50}$$

Sabit kesitli bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 8{,}8826\frac{EI_0}{L^2} \tag{51}$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr} = 8{,}8826\frac{EI_0}{L^2} \langle P = 9{,}2959\frac{EI_0}{L^2} \langle P_{cr} = 9{,}8696\frac{EI_0}{L^2} \tag{52}$$

İkinci burkulma modu

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_0}{L^2} = 39{,}4784\frac{EI_0}{L^2} \tag{53}$$

Sabit kesili bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 35{,}5306\frac{EI_0}{L^2} \tag{54}$$

İkinci burkulma modu için bir hayli fazla terim dahil edimiştir. Terim sayısının oldukça artış göstermesi sebebiyle Microsoft Mathematics Programının müsaade ettiği ölçüde çözüm yapılmıştır fakat tatminkar bir sonuca varılamamıştır.

Bir Ucu Ankastre Bir Ucu Serbest Kolon

Sınır koşullarından ilk üçü sabit kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonla aynıdır, sadece son sınır koşulu farklılık gösterir. Bu sınır koşulları, ankastre mesnedin getirdiği fiziksel koşullardır ve ankastre mesnedin bulunduğu noktada, yer değiştirmenin ve eğimin olmaması durumunun matematiksel ifadesidir, Denklem (28), Denklem (29) ve Denklem (30). Son sınır koşulu sabit kesitli durumun son sınır koşuluna göre farklılık göstermiştir. Bunun nedeni x=L durumunda yer değiştirmenin üçüncü türevi ile $0{,}9EI_0$'ın çarpımının kesme kuvvetine eşit olmasıdır.

$$(Pw'+(0{,}9)EI_0 w''')(L) = 0 \tag{56}$$

Birinci burkulma modu

Seri de 10 terim açılmıştır. Denklem ilk yedi terimle çok hızlı yakınsamıştır.

$$P = 2{,}395\frac{EI_0}{L^2} \tag{57}$$

Değişken kesitli bir ucu ankastre bir ucu serbest kolon için bulunan burkulma yükünün uygunluğunun kontrol edilmesi;

Değişken kesitli kolonun EI_0 değerinin EI_0 ve $0{,}9EI_0$ değerleri arasında değiştiği belirtilmişti, bu bilgi doğrultusunda bulunan burkulma yükünün EI_0 ile başlayan ve hiç kesit değişikliğine uğramamış kolonun burkulma yükü, Denklem (59), ile $0{,}9EI_0$ ile başlayan ve hiç kesit değişikliğine uğramayan kolonun burkulma yükü, Denklem (60) arasında olmalıdır. Yani bu iki değer bulduğumuz burkulma yükü için, Denklem (57), sınır olmalıdır. Uygunluk kontrolü Denklem (61)'daki gibidir.

$$EI(x) = EI_0\left(1 - 0{,}1\frac{x}{L}\right) \tag{58}$$

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 2{,}4674\frac{EI_0}{L^2} \tag{59}$$

Sabit kesitli bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 2{,}2207\frac{EI_0}{L^2} \tag{60}$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr} = 2{,}2207\frac{EI_0}{L^2} \langle P = 2{,}395\frac{EI_0}{L^2} \langle P_{cr} = 2{,}4674\frac{EI_0}{L^2} \tag{61}$$

İkinci ve üçüncü burkulma modları

Değişken kesitli kolonun burkulma yükü ilk modda elde edilmiş, dolayısıyla 10 terim açıldığında sonuca ulaşılabilmiştir; ama daha ileri modlar söz konusu olduğunda, daha duyarlı sonuçlar elde edebilmek için serinin daha ileri terimlerde açılması gerekmiştir ve seride hata oranları göz önüne alınarak 28 terim açılmıştır.

Denklem Mathematics programında çözdürülüp ikinci mod için değerler bulunmuştur ve bu ilgili değerler için de uygunluk kontrolü yapılmıştır, Denklem (64) başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

Sabit kesitli bir kolonun EI_0 eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = \frac{9\pi^2 EI_0}{4L^2} = 22{,}2066\frac{EI_0}{L^2} \tag{62}$$

Sabit kesitli bir kolonun $0{,}9EI_0$ eğilme rijitliği için;

$$P_{cr} = 18{,}1859\frac{EI_0}{L^2} \tag{63}$$

Uygunluk kontrolü;

$$P_{cr} = 18{,}1859\frac{EI_0}{L^2} \langle P = 20{,}8694\frac{EI_0}{L^2} \langle P_{cr} = 22{,}2066\frac{EI_0}{L^2} \tag{64}$$

Üçüncü modu için bir hayli fazla terim dahil edimiştir. Terim sayısının oldukça artış göstermesi sebebiyle Microsoft Mathematics Programının müsaade ettiği ölçüde çözüm yapılmıştır fakat tatminkar bir sonuca varılamamıştır.

SONUÇLAR

Çalışmada değişken kesitli kolonların burkulma yükünü belirlemek için analitik bir yöntem olan kuvvet serileri yöntemi kullanılmıştır. Önerilen yöntemle sabit kesitli iki ucu mafsallı ve bir ucu ankastre bir ucu serbest kolonlar için çözüm elde edilmiş ve yöntem anlatılmıştır. Kuvvet serileri yöntemi özellikle birinci burkulma modlarında çok hızlı yakınsamıştır. Euler kolonuyla birebir sonuçlar elde edilmiştir ve gerekli karşılaştırmalar yapılıp yöntemin tutarlılığı gözlemlenmiştir. İleri burkulma modları için çalışmaya devam edilmiş, serilerde daha çok terim açılmıştır. İlk üç burkulma modu için elde edilen değerler Euler kolonunun değerleriyle karşılaştırıldığında oldukça yakın sonuçlara ulaşıldığı görülmüştür. Çalışmanın ikinci aşamasında, değişken kesitli kolon için kolonun alt ucunda kesitin eğilme rijitliği EI_0, üst ucunda $0{,}9EI_0$ olduğu, eğilme rijitliğinin eleman boyunca doğrusal olarak değiştiği varsayılmıştır. Daha sonra işlem adımları uygulanmış ve problemin çözümü sabit kesitli kolonun çözümü kadar kolay olmasa da olması gereken aralıkta uygun sonuçlara ulaşılmıştır. Bir ucu serbest bir ucu ankastre değişken kesitli kolon ve iki ucu mafsallı değişken kesitli kolon modlarına ulaşmak için seride daha fazla değer açılmıştır. İncelenen bu vakalarda da uygunluk kontrolü yapılıp doyurucu sonuçlara ulaşıldığı gözlemlenmiştir. Kuvvet serileri yönteminin değişken kesitli kolonun burkulma yükünü bulmak için uygulanabilir bir yöntem olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Chajes A., *Principles of Structural Stability Theory*, 1st ed., Prentice Hall, Inc.Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.

[2] Beer F. P., Johnston E. R., *Cisimlerin Mukavemeti*, 2003, 1306.

[3] Biazar J., Ghazvini H., Convergence of The Homotopy Perturbation Method for Partial Differential Equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, **10**(5), 2633-2640.

[4] Coşkun S. B., Analysis of Tilt-Buckling of Euler Columns with Varying Flexural Stifness Using Homotopy Perturbation Method, *Mathematical Modeling and Analysis*, 2010, **15**(3), 275-286.

[5] Higdon A., Ohlsen E. H., Stiles B. S., Weese J. A., Riley W. F., *Mechanics of Materials*, 4 th ed., Published by John Wiley & Sons, USA, 1985.

[6] Li Q. S., Exact Solutions for Buckling of Non-Uniform Columns Under Axial Concentrated and Distributed Loading, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **20**(3), 2001, 485-500.

[7] Kreyszig H., Kreyszig E., Norminton E. J., *Advanced Engineering Mathematics*, 10 th ed., Published by John Wiley & Sons, USA, 2010.

[8] Ashok A. K., Biggers S. B., Stiffness Matrix for a Non-Prismatic Beam-Column Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1976, **10**(5), 1125-1142.

[9] Hamoush S.A., Terro M.J., Mcginley W.M., Elastic and Inelastic Analysis of Non-Prismatic Members Using Finite Difference, *Kuwait Journal of Science*, 2002, **29**(2), 165-180.

[10] İnan M., *Cisimlerin Mukavemeti*, İTÜ, İstanbul, Türkiye, 1988, 560.

[11] Teter A., Dynamic Critical Load Based on Different Stability Criteria forCoupled Buckling of Columns with Stifness Open Cross-Sections, *Thin Walled Structures*, 2011, **49**(5), 589-595.

[12] Siginer A., Buckling of Columns of Variable Flexural Stiffness, *J. Eng. Mech. ASCE*, 1992, **118**(3), 640.

COMPUTATIONAL MODELING THE NON-LINEAR BEHAVIOR OF CRITICAL MEMBERS CAUSING PROGRESSIVE COLLAPSE IN STEEL LATTICE TOWERS.

Aiman Tariq[1] ve Babür Deliktaş[2]
[1,2]Bursa Uludağ Üniversitesi, Bursa

ABSTRACT

This study investigates the collapse mechanism of steel lattice transmission tower under dynamic loads and predicts its weak areas using finite element method. For this purpose, a systematic, accurate, and reliable numerical computational model of a 55m high steel lattice tower exposed to seismic was created within the ABAQUS / Explicit software. Nonlinear time history method was used to simulate the progressive collapse process of the tower under seismic loads. Severe damage was calculated under the seismic loads on all vertical leg members in the tower's M and N panel, leading to the tower's collapse. With the proposed numerical computational model, the lattice tower's critical elements that triggered progressive collapse were effectively predicted.

Keywords: Lattice transmission tower; Progressive collapse; Critical elements; Finite element method;

ÖZET

Bu çalışmada, sonlu elemanlar yöntemi kullanarak çelik kafes kulelerin, dinamik yükler altında göçme mekanizmasının incelenmesi ve kulenin zayıf alanlarının tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda, sismik yüklerine maruz 55m yüksekliğindeki bir çelik kafes kulenin ABAQUS/Explicit yazılımı bünyesinde, sistematik, doğru ve güvenilir bir sayısal hesaplama modeli oluşturulmuştur. Kulenin aşamalı göçme sürecini simüle etmek için zaman tanım alanında doğrusal olamayan yöntemi kullanılmıştır. Sismik yükler altında kulenin M ve N panelindeki tüm dikey bacak elemanlarında ciddi hasar hesaplanmıştır. Önerilen sayısal hesaplama modeli ile, kafes kulenin aşamalı göçmeyi tetikleyen kritik elemanlar etkili bir şekilde tahmin edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Kafes kulesi; Aşamalı göçme; Kritik elemanlar; Sonlu elemanlar yöntemi.

INTRODUCTION

Steel lattice towers are widely used as supporting structures in various civil engineering works such as radio and television broadcasting, and electric transmission from power generating stations to remote areas. Any damage to the transmission towers can lead to interruption of electricity for days or weeks, causing economic losses and inconvenience to human beings. Generally, these transmission towers are designed to resist environmental loads like wind loads and ice loads and some exceptional loads like cable breakage and ice shedding effect without taking earthquake loads into the design consideration [1]. Due to the

absence of code for transmission towers' earthquake design provisions, it is irrational to believe that these structures are safe under earthquakes without satisfactory analyses [2].

Many disastrous events have occurred in past which led to the serious damage or even collapse of transmission towers. For example, in 1995 Kobe earthquake [3] almost 38 electric transmission towers were collapsed, and many towers got damaged which led to power supply disruption. During 1992 Landers earthquake [4] nearly 100 power transmission lines and number of transmission towers failed in Los Angeles city. The 1999 Chi-Chi earthquake [5] resulted into the collapse of 15 transmission towers, destroyed 69 transmission lines and tilted 26 towers.

In the recent years, nonlinear response of transmission towers under wind load and especially earthquake loads have caught the attention of researchers. A study conducted by Zhang et al. [6] researched the progressive collapse of an electric transmission tower under strong wind and focussed on its failure mechanism and dynamic behaviour. In a study conducted by Wang et. al., [7] a progressive collapse analysis of a transmission tower under earthquake loads acting along longitudinal and lateral direction using finite element method showed that the leg member of tower at 34.9m was most critical member to lose bearing capacity first. Tian et al., [8] investigated the collapse process of power transmission tower-line system under the strong earthquake excitations by utilizing dynamic time history approach and incremental dynamic analysis.

Apparently, from the literature and previous disastrous events mentioned above, one can reach to the conclusion that it is necessary to improve the transmission tower's collapse resistant capacity for their safe functioning under earthquakes. However, only a handful of researches have been conducted in the past that focussed on the progressive collapse of transmission towers, and no work has been done before to determine the nonlinear behaviour of critical members that trigger a progressive collapse in transmission towers. Therefore, collapse mechanism of transmission towers exposed to seismic loads requires the further investigations.

Hence the objective of this work is to investigate the progressive collapse mechanism of a steel lattice transmission tower under seismic loads. A three-dimensional finite element model of a tower is made in ABAQUS program to simulate its collapse process and analyse its dynamic responses. Ductile damage material model constituting the damage index and element failure criteria has been developed. The nonlinear behaviour of the member responsible for triggering the collapse of a tower is investigated and the vulnerable areas are determined. The results acquired from the numerical analysis are believed to help designers by acting as a guide during the seismic design of a new tower, or it can be used to predict the critical members and used for overall evaluation of existing structures that need to be retrofitted.

MATERIAL CONSTITUTIVE MODEL CONSIDERING DAMAGE PARAMETERS

Usually, engineering structures are designed to operate for quite a few decades. However, due to the damages caused by winds or seismic loads, their working performance gets degraded. Therefore, it is more reasonable to include damage parameters while developing the material model for the collapse simulations. In this work, the elastic-plastic material model considering material nonlinearity and ductile damage parameters has been developed in order to capture the nonlinear behaviour of a member, including yielding, strain hardening, stiffness and progressive strength degradation due to material failure.

Hence, a steel material having uniform mass density of 7800 kg/m^3 was selected for the tower members. An isotropic type elasticity was used for defining the elastic properties of the material by specifying Young's modulus as 210 GPa and Poisson's ratio as 0.3. For defining the plasticity of this material model, engineering stress-strain curve belonging to the uniaxial tensile test was taken from Pavlović [9] and then transformed to true stress-plastic strain. The graphical representation of true stress and plastic strain curve is illustrated in Fig. 1.

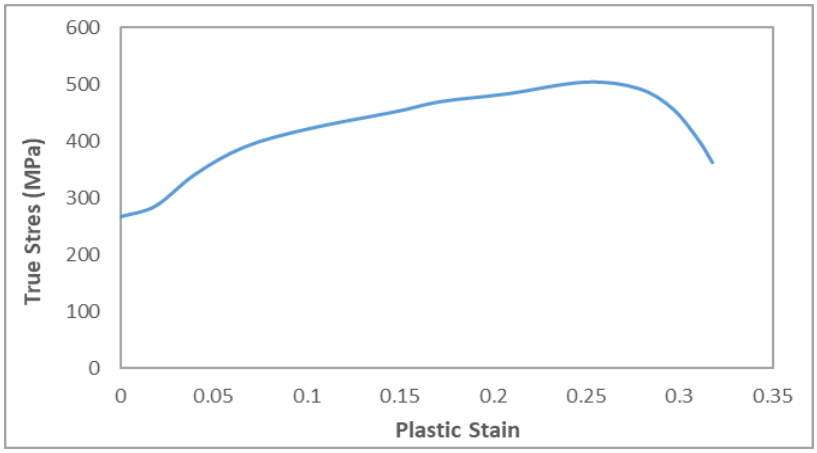


Fig. 1. True stress-plastic strain graph

Material Damage and Element Failure Criterion

One of the main reasons which triggers the integral collapse of a structure like transmission tower is the failure of element. To predict the element failure in such structures precisely it is necessary to develop the material damage model. Therefore, in this work a ductile damage model has been incorporated to capture progressive damage of an element due to material failure. A stress-strain response of a metal specimen incorporated with ductile damage and representing the progressive failure of material is shown in Fig. 2.

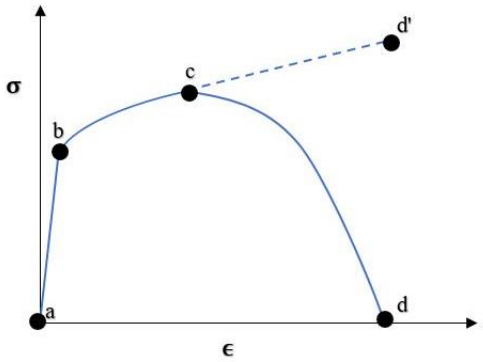


Fig. 2. Stress-strain curve of a specimen with ductile damage.

Damage Initiation Criterion

The damage initiation criterion is defined by assigning equivalent plastic strain which is a function of stress triaxiality and strain rate. In this work, the parameters for ductile damage initiation criterion ω_D that is used for checking the start of the damage process are given in Table 1.

Table 1. Damage initiation criterion parameters

Fracture Strain ($\bar{\varepsilon}_D^{pl}$)	Stress Triaxiality (η)	Strain Rate ($\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$)
0.0948	0.92	0

Damage Evolution

Damage evolution defines the rate by which the stiffness of material will degrade and decides the response of material after the initiation of damage. The damage evolution criterion of the material model in terms of displacement at failure that is used in this work is calculated as 0.08015.

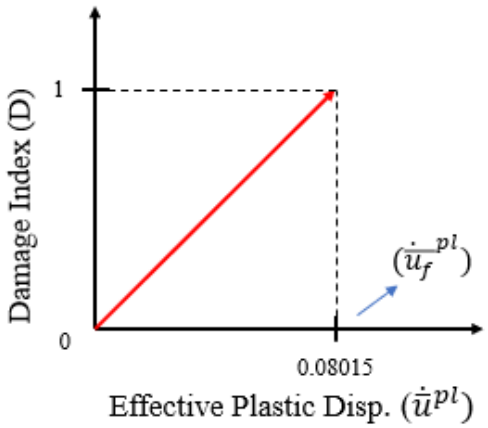


Fig. 3. Displacement based linear damage evolution criteria.

This damage index (D) indicates '0' for undamaged state and '1' for fully degraded state of an element as shown in Fig. 3. Any value between 0 and 1 indicates the partial damage

MODELLING THE TRANSMISSION TOWER

Description of the Transmission Tower

In this work, a 240-kV double circuit, self-supporting type steel lattice transmission tower has been used. The base of this tower is square, and tower has K-bracing in the bottom section and X-bracing in the top and middle section. Each member of the tower is made of L profile steel section. Total height of the tower is 54.8m and base width is 12.5 x 12.5m. as illustrated in Fig. 4. This type of structure is broadly used around the world due to its ability to carry high voltage, being economical and resist wind loads, and conductor loads efficiently.

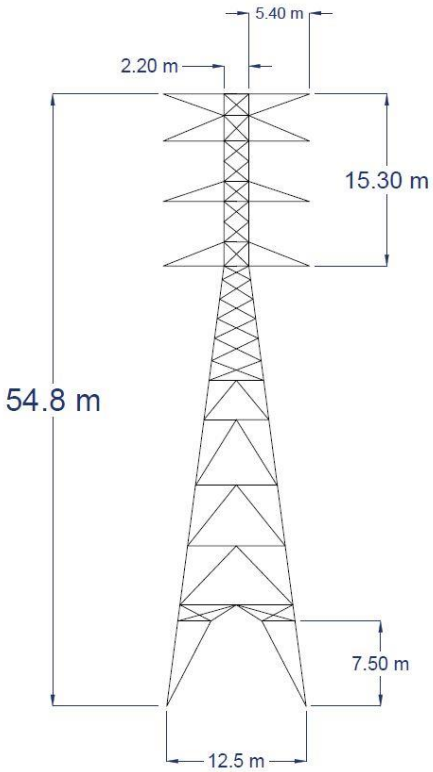


Fig. 4. Tower's geometric configuration sketched on AutoCAD

Setting up the Computational Model

Based on the data given in this work, a 3D finite element model of a transmission tower has been established in ABAQUS program. The tower members are employed with three dimensional B31 beam elements, having three translations and three rotational degree of freedom per node. It was decided to assume multiple-bolted and welded connection between different members of transmission tower used in this computational model. The rotational restraint provided by these connections are very large in magnitude, thus these connections are rigid. The structure is expected to undergo large deformations that can change its shape and stiffness matrix. Therefore, geometric nonlinearity is taken into consideration. In addition to that, material nonlinearity is also considered. The material model developed as explained in previous sections, is assigned to all the members of tower. The tower consists of 540 beam elements and 193 nodes. Base nodes of transmission tower are fixed to the ground by restraining its displacements and rotations in all directions. The 3D model of the transmission tower is shown in Fig. 5.

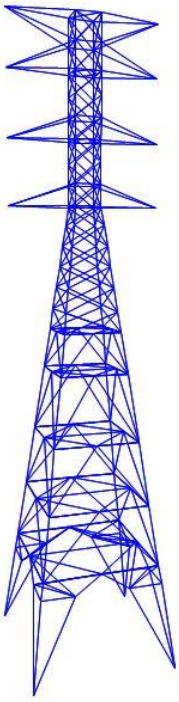


Fig. 5. 3D finite element model of the transmission tower

VERIFICATION OF FINITE ELEMENT MODEL

Natural frequencies of the transmission tower were calculated by running free vibration analysis in ABAQUS program. Later tower's natural frequencies and mode shapes obtained from Abaqus were verified by running another modal analysis in SAP2000 program. The results obtained from modal analysis in SAP2000 showed very good agreement with the Abaqus' result. The first three natural frequencies of transmission tower obtained from Abaqus and SAP2000 are compared in Table 2.

Table 2. Comparison of frequencies between the two programs

Frequency Mode	Type of Mode	Frequency (rad/s) (ABAQUS)	Frequency (rad/s) (SAP2000)	% difference
1	Bending	2.09996	2.11789	0.85%
2	Bending	2.1992	2.2173	0.81%
3	Twisting	4.0674	4.10843	1%

The difference between the results obtained from Abaqus and SAP2000 is within the acceptable range i.e. less than 1% and the mode shapes obtained from these two programs is also same, which proves the model's accuracy.

Damping in the Transmission Tower

In the nonlinear analysis of structures particularly in dynamic analysis, damping has a significant importance. The critical damping ratio of the transmission tower was taken as 2%. Hence, using the critical damping ratio and the first two natural frequencies (ω_1 and ω_2) taken

from free vibration analysis, the mass proportional damping (α) was calculated as 0.269. This calculated damping value is applied to all the elements in the model having mass.

COLLAPSE ANALYSIS AND DISCUSSION

The collapse process of the transmission tower under the seismic wave is analysed using explicit finite element function of ABAQUS program. If an element loses the load-bearing capacity during the analysis, it will be removed from the structure. Due to continuous seismic wave action, more and more elements will lose load-bearing capacity, leading to the collapse of tower. In this work, the dynamic explicit procedure is used for carrying out the investigation of transmission tower's collapse mechanism. This procedure was selected because it is very effective in solving highly nonlinear problems and shows precise representation of any structure's collapse process.

Transmission tower's nonlinear seismic response analysis stopped at 13.50 seconds because of extreme damage in the members present in the top section of the tower. The collapse mode of transmission tower is shown in Fig. 6.

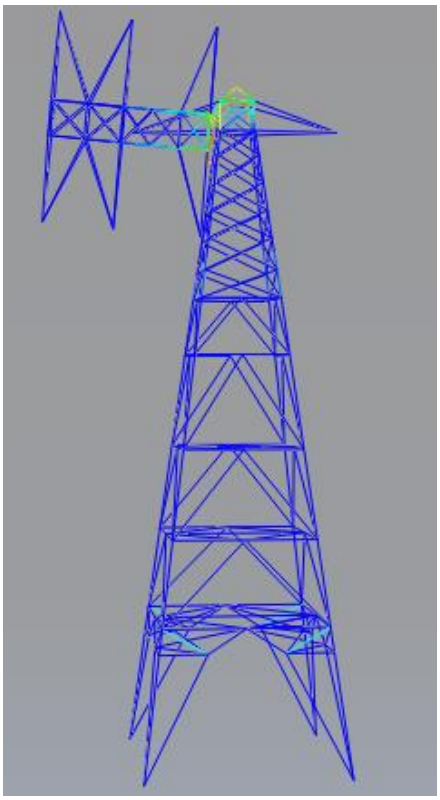


Fig. 6. Transmission tower's collapse mode.

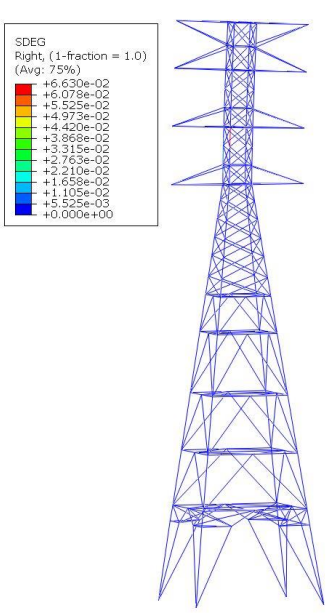
Plastic strains were recorded in various members of the tower. The top portion of the tower can be seen extremely deformed because of numerous failed elements distributed in tower's panel M and N. The huge deformation at top surpasses the normal working limits which leads to the tower collapse.

Collapse Process of Tower

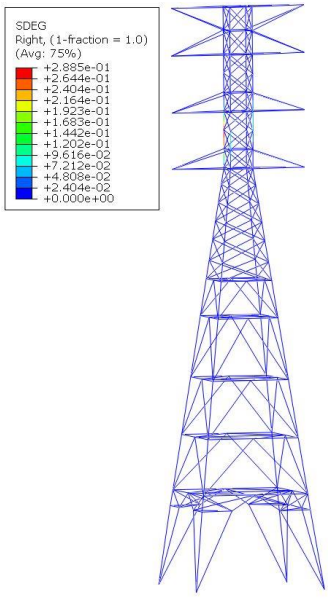
The collapse stages of the transmission tower under the El Centro earthquake excitations are given in Fig. 7.

At the initial stage, when t = 2.48s (Fig. 7. (a)), the damage index (D) of vertical leg member 223 in the panel N is 0.066, which indicates the initiation of damage on the member. When t

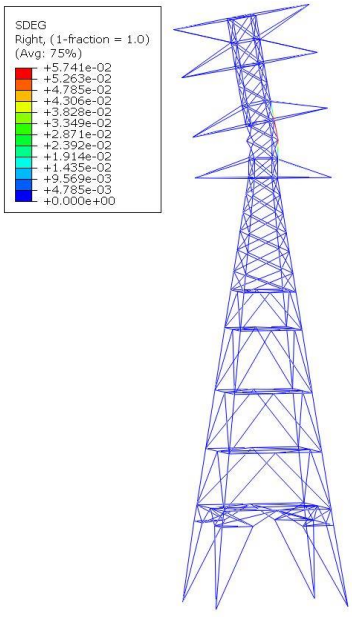
= 2.64s (Fig. 7 (b)), the damage index of member 223 becomes 1 indicating the complete damage of the element. After the element is completely damaged, it loses bearing capacity and then gets removed from the analysis, resulting in the change in the path of load transfer mechanism. Some members get extra loaded, and some members get unloaded. At t = 2.78 s (Fig 7 (c)), vertical leg members present in panel M and N on the earthquake side get fully damaged and then fail; however, the leg members on the leeward side in panel M and N don't fail but experience little damage. As a result of the failure of leg members on the tower's earthquake side, the leg members on the leeward side endure high stresses, which leads to high plasticity. Subsequently, when t = 5.56 s (Fig. 7 (d)), the stiffness degradation of all the remaining leg members in panel M and N reaches the maximum capacity and then fails. Due to this, the internal forces are redistributed to the remaining tower members. Henceforth the tower's top portion becomes very unstable and is at the risk of collapse anytime since all the lateral forces coming from seismic loads to the tower's panel M and N are resisted by the braces only. When t = 9.74 s (Fig. 7 (e)), most braces in panel M and N start getting damaged, and their stiffness degradation initiates because of the presence of high stresses and intense plasticity. As the stiffness degradation increases, these diagonal members reach their load-carrying capacity and fail successively. Consequently, the tower's top section starts tilting laterally due to the failure of diagonal members. Finally, at t = 13.50 s (Fig. 7 (f)), the tower's top section gets dislocated from its original position.



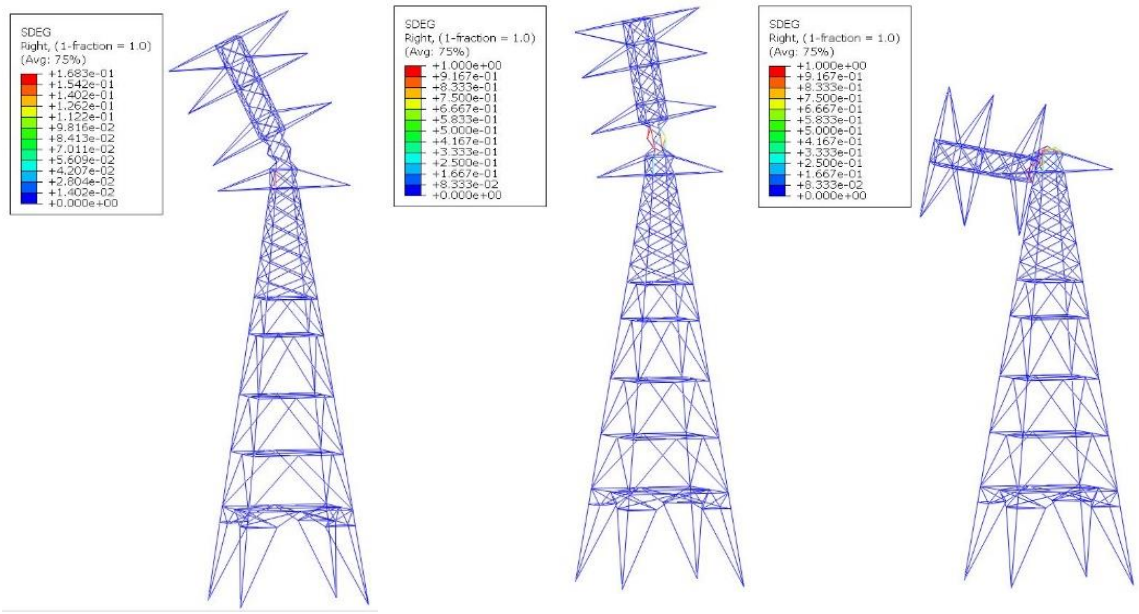
a) t = 2.48 s, damage initiation of a leg member 223 in panel N.



b) t = 2.64 s, element 223 removed after failing completely.



c) t = 2.78 s, some leg members in panel M failed completely.



d) t = 5.56 s, all the leg members in panel M and N failed

e) t = 9.74 s, bracings in panel M and N damaged.

f) t = 13.50 s, collapse of the top portion of tower.

Fig. 7. Collapse details of the transmission tower under earthquake excitations

Behaviour of Critical Element 223

Element 223 was the first member of transmission tower to fail under seismic loads therefore, it is important to understand its behaviour and history. The element 223 responsible for triggering the progressive collapse of the tower is located 43.7 m above the ground level, serving as a vertical leg member located in panel N.

The stress history curve of element 223 is given in Fig. 8. As soon as the analysis started, the element experiences small stresses. After some time, sharp increase in the stress values on the element due to large seismic loads can be noticed from the graph. The stresses continue to increase until the maximum stress of 415 MPa is reached. Just after crossing the maximum stress value, the overall stress on the element drops down to zero at 2.62 seconds. Inability of this element to take more stress indicates its failure.

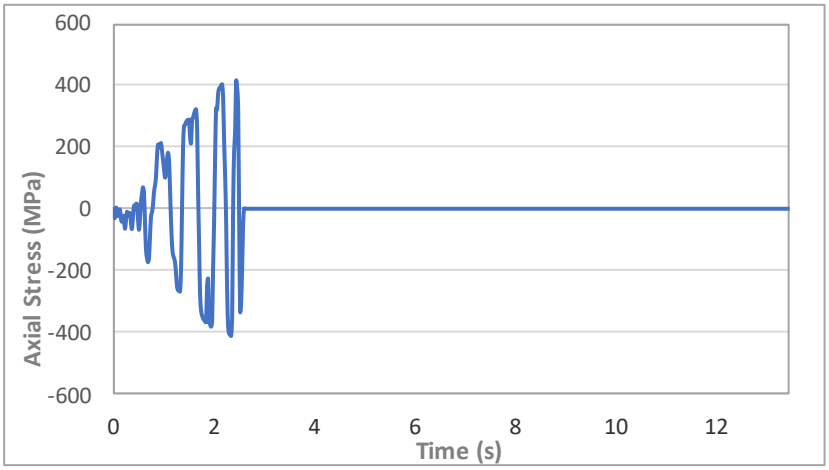


Fig. 8. Stress time history of element 223.

The plastic strain history of element 223 is shown in Fig. 9. Plastic strain didn't show any response until the stress on element crossed the yield stress value of 264 MPa at 1.3 seconds. As soon as the plastic strain on the element started, it kept on increasing sharply because of large stresses acting on it. After 2.62 seconds, the plastic strain stopped increasing with no change in its values due to absence of stresses.

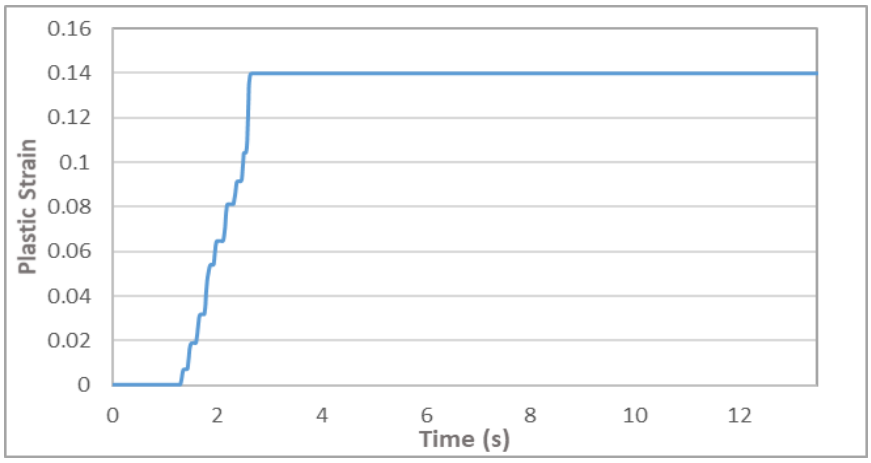


Fig. 9. Plastic strain time history of element 223.

Damage History of Element 223

Damage initiation criterion (DUCTCRT) came into existence together with the initiation of plasticity on the member. As shown in Fig. 10, damage criterion began with a very small value of 0.018. Damage (stiffness degradation) on the element starts if this criterion becomes 1. After the stresses on element crossed the yield stress value, the plastic strain kept on increasing sharply along with the increase in damage criterion. Finally, the damage criterion got satisfied by becoming 1 at 2.48 seconds, indicating the initiation of damage on member.

Damage initiation on element 223 is verified by using the equation below.

$$\Delta\omega_D = \frac{\Delta\bar{\varepsilon}^{pl}}{\bar{\varepsilon}_D^{pl}(\eta, \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl})}$$

$$\Delta\omega_D = \frac{0.0978}{0.0948} = 1.03$$

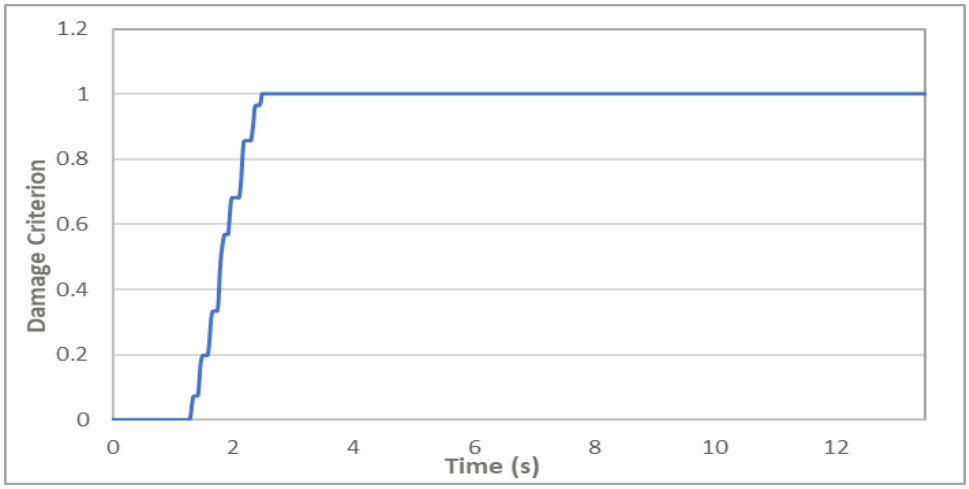
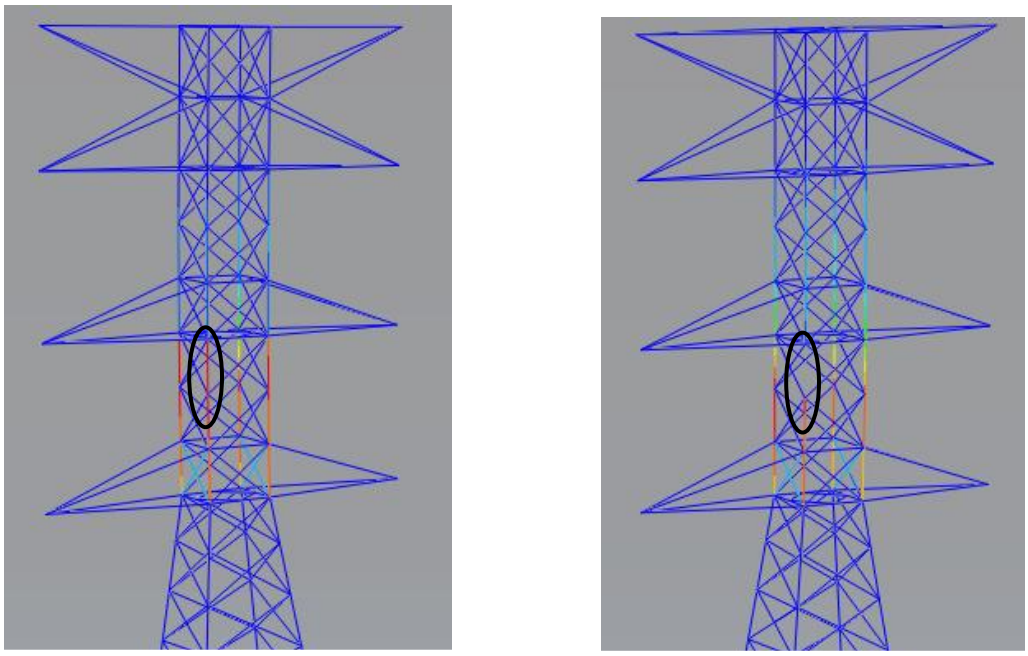


Fig. 10. Damage criterion time history of element 223.

Fig. 11 (a) shows the moment when damage started on encircled element 223 at 2.48 seconds and Fig. 11 (b) captures the moment of failure of the element. After the failure of element 223, other elements present in the tower's top portion followed the same pattern and failed one by one. Failure of elements continued until the collapse of the tower's top portion.



a.) Start of damage in element 223

b) Damaged and then deleted element 223

Fig. 11. Damage initiation (a) and failure (b) of element 223.

CONCLUSION

Collapse analysis of transmission tower under seismic load and the reason of its failure are discussed thoroughly in this work. The material model was developed and utilized to capture the elements' nonlinear behaviour by taking plasticity and damage criterion into consideration. Collapse mechanism of the structure using nonlinear time history analysis and damage mechanism of one of its critical elements are studied. Following crucial conclusions are drawn from the results obtained from this investigation.

- The steel material model developed in this work is effective in capturing the elements' nonlinear behaviour, cumulative damage on element, and simulating the realistic collapse process of transmission tower.
- The damage potential in vertical leg members located in panel M and N is huge. Redistribution of internal forces in the structure after every element failure in these panels finally result in the collapse of tower. Therefore, more attention should be paid to the seismic design of these members.
- The progressive collapse analysis is an efficient method to predict the weak position of a lattice tower. In this work, panel M and N were identified as weak areas of the transmission tower.
- Progressive collapse of the tower subjected to El Centro seismic wave was triggered by the failure of element 223. This element is critical and more susceptible to damage than other elements.

- The procedure used in this work to simulate the progressive collapse of a tower, determine the weak areas and predict the critical elements is effective. Therefore, this procedure can be used while designing a new tower, checking the capacity of an existing tower and for reinforcement of present structures.

REFERENCES

[1] Khedr, M. A. H. (1998). *Seismic analysis of lattice towers* (Doctoral dissertation, McGill University). Page 1,2

[2] Tian, L., Li, H., & Liu, G. (2010). Seismic response of power transmission tower-line system subjected to spatially varying ground motions. *Mathematical Problems in Engineering*, *2010*.

[3] Shinozuka M (1995) The Hanshin-Awaji earthquake of January 17, 1995 performance of lifelines. Technical report, US National Center for Earthquake Engineering Research, Berkley, CA.

[4] Hall JF, Holmes WT and Somers P (1996) Northridge Earthquake of January 17, 1994: Reconnaissance Report. Oakland, CA: Earthquake Engineering Research Institute.

[5] National Center for Research on Earthquake Engineering (NCREE) (1999) Investigation Report of Chi-Chi Earthquake. Taipei, China: National Center for Research on Earthquake Engineering.

[6] Zhang, Z., Li, H., Li, G., Wang, W., & Tian, L. (2013). The numerical analysis of transmission tower-line system wind-induced collapsed performance. *Mathematical Problems in Engineering*, *2013*.

[7] Wang, W. M., Li, H. N., Tian, L. 2013. Progressive collapse analysis of transmission tower-line system under earthquake. Published by Advanced Steel Construction, 9(2): 161-172.

[8] Tian L, Ma RS, Li HN, et al. (2016) Progressive collapse of power transmission tower-line system under extremely strong earthquake excitations. International Journal of Structural Stability and Dynamics 16(7): 1550030 (21 pp.).

[9] Pavlović, M., Marković, Z., Veljković, M., & Buđevac, D. 2013. Bolted shear connectors vs. headed studs' behaviour in push-out tests. *Journal of Constructional Steel Research*, 88, 134-149.

DAİRESEL RİJİT İKİ PANÇ İLE YÜKLENMİŞ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKADA TEMAS GERİLME ANALİZİ

Muhammed Taha POLAT[1]
[1] Munzur Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Tunceli

ABSTRACT

In this study, the analysis of a contact problem with the finite element method (SEM) has been performed. The problem consists of a functionally graded layer loaded with two rigid blocks of circular geometry that fit on an elastic semi-infinite plane. External loads P and Q are transmitted to the layer by two rigid blocks. It is assumed that all surfaces are frictionless. The finite element model of the functionally graded layer was created using the ANSYS program and 2-dimensional analysis of the problem was performed. Initial separation loads (λcr), initial separation distances (xcr) and contact stresses in the functionally graded layer loaded with circular geometry punches were investigated.

ÖZET

Bu çalışmada, bir temas probleminin sonlu elemanlar yöntemi (SEM) ile analizi gerçekleştirilmiştir. Problem, elastik yarı sonsuz düzleme oturan ve dairesel geometrideki rijit iki blok ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakadan oluşmaktadır. Dış yükler P ve Q, tabakaya iki rijit blok vasıtasıyla iletilmiştir. Tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sonlu elemanlar modeli ANSYS programı kullanılarak oluşturulmuş ve problemin 2 boyutlu analizi gerçekleştirilmiştir. Dairesel geometrideki pançlar ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakada ilk ayrılma yükleri (λ_{cr}), ilk ayrılma uzaklıkları (x_{cr}) ve temas gerilmeleri incelenmiştir.

GİRİŞ

Mekanik sistemlerde ve çoğu yapıda elemanlar birbirleri ile sürtünme halindedir. Elemanlarda, sürtünme ve aşınma sonucu yapının davranışı ve mekanik özelliklerindeki değişim temas problemleri adı altında incelenmektedir. Temas problemleri günümüze kadar çeşitli mühendislik dallarında geniş uygulama alanlarına sahip olmuştur. Özellikle yapı ve makine elemanları temas içeren sistemlerden oluşmaktadır. Mühendisler için bu sistemlerde meydana gelen temasın karakteri, uzunlukları ve temas bölgelerindeki gerilme dağılımlarının bilinmesi, malzemenin tasarım ve üretiminde büyük kolaylık sağlamaktadır. Temas mekaniği konusu, ilk olarak 1882 yılında Heinrich Hertz tarafından ortaya atılmıştır [1]. Hertz temas halindeki iki elastik cismin dengesini, temas bölgesinin eliptik olduğunu kabul ederek incelemiş, temas gerilmesi ve şekil değiştirmeler için formülasyon geliştirmiştir. Tabakalı malzemelerde, malzeme özelliğinin bağlanma yüzeyinde aniden değişmesi, bağlanma yüzeyinden başlayarak her iki malzemeye de zarar verir ve zamanla malzemelerin birbirlerinden ayrılmasına sebep olur. Bu nedenle mühendislik çalışmalarında Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (Functionally Graded Materials) adıyla yeni bir sınıf ortaya

çıkmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler (FDM), tanımlanmış bir fonksiyona bağlı olarak malzeme özelliğinin, malzeme üzerinde bir yüzeyden diğer yüzeye farklılık gösterdiği heterojen kompozitlerdir. Yüzey gerilmelerini azaltma özelliklerinden dolayı

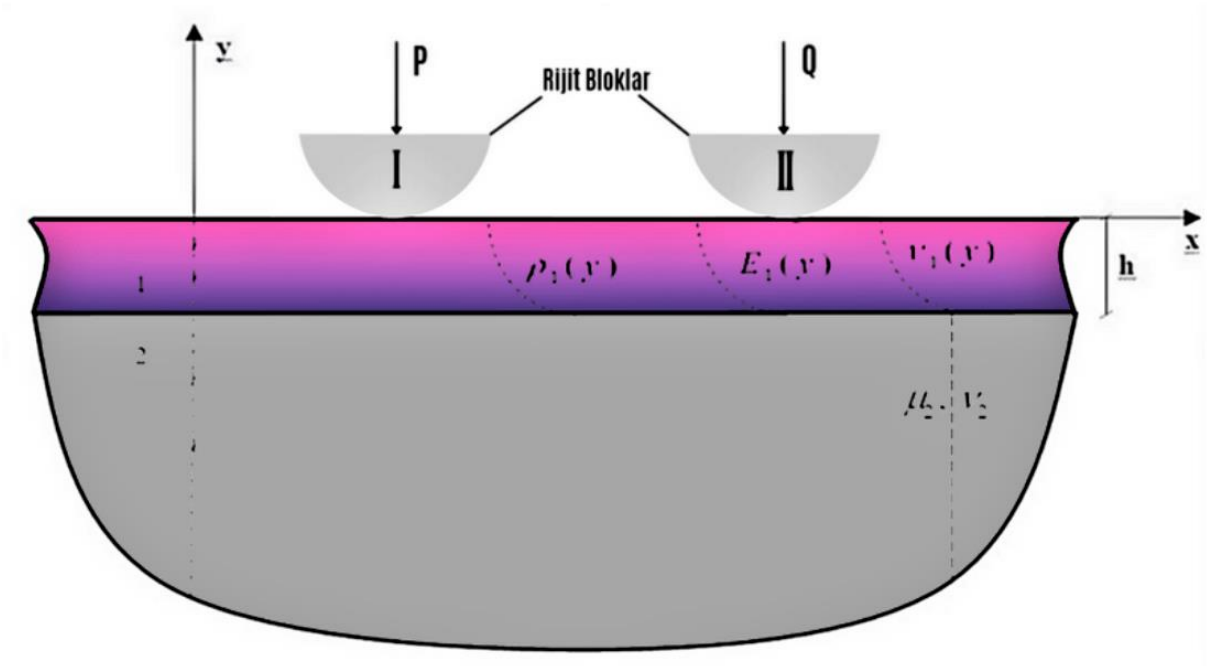
FDM'ler, ortaya çıktıklarından itibaren havacılık, elektronik, enerji, kimya mühendisliği, optik malzemeler ve biyomedikal mühendisliği olmak üzere çok geniş çerçevede uygulama alanı bulmuşlardır. Koizumi [2], bu malzemelerin özellikleri, kullanım alanları ve avantajları konusunda detaylı bir çalışma yapmıştır. Ke ve Wang [3], ince bir tabakayla kaplanmış elastik yarım düzleme, elastik pançla tekil kuvvet ve buna dik doğrultuda sürtünme kuvvetleri etki etmesi durumunda oluşan temas problemini incelemişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakalarda ve homojen tabakalarda temas problemi ile ilgili çalışmalar artarak literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Polat [4], elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan bir FG düz zımba ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş (FG) tabakadaki sürekli temas problemini, sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ile analiz etmiştir. Ayrıca bu çalışma, FG zımbasının FG tabakası üzerindeki etkisini araştıran ilk çalışmadır. Yan ve Mi [5], fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir kaplama ile güçlendirilmiş ve yarım düzleme bastırılmış elastik bir tabakada temas analizi yapmışlardır. Bu çalışmada hem analitik hem de sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sonuçlar karşılaştırılmıştır. Balci ve Dağ [6], rijit bir panç ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kaplamada hareketli temas problemini analiz etmişlerdir. Bu çalışmada zımba hızı, sürtünme katsayısı, malzeme homojenliği ve kaplama kalınlığı gibi değişen parametrelerle temas gerilimi dağılımları ve gerilim yoğunluğu üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Polat [7], sabit kalınlıkta homojen bir tabakanın, alt yüzeyindeki rijit bir desteğe mükemmel bir şekilde bağlanmış ve rijit bir damga yüklemesi ile oluşan sürekli temas problemini, sonlu elemanlar yöntemi (FEM) kullanarak incelemiştir. Ayrıca rijit blok ile homojen tabaka arasındaki temas uzunluğunu ve temas gerilmesini analiz etmiştir. Kaya vd. [8], farklı malzeme özelliklerine sahip, iki rijit düz blokla yüklenmiş ve rijit bir düzlem üzerinde oturan iki katmanın sürekli temas problemini analitik ve sonlu elemanlar yöntemleriyle çözmüşlerdir. Bu çalışmada bloklar arası mesafe ((c− b) / h1) arttıkça, blokların kenarlarında ve ortasında gerilme değerleri azaldığını ve mesafe arttıkça, ilk ayırma mesafesi ve ilk ayırma yükü arttığını analiz etmişlerdir. Polat vd. [9], elastik yarı sonsuz düzleme oturan iki rijit düz blok ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş (FG) katmandaki sürekli temas problemini sonlu elemanlar yöntemi ile analiz etmişlerdir. FG tabakası ile elastik düzlem arasındaki normal gerilmeler, ilk ayırma yükleri, ilk ayırma mesafeleri ile blokların altındaki temas gerilmelerini incelemişlerdir. Çömez vd. [10], çalışmalarında sert bir silindirik zımba ile kademeli bir tabaka arasında ilerleyen bir temas bölgesi ve kademeli tabaka ile homojen bir yarı düzleme bağlanmış homojen bir tabaka arasında gerileyen bir temas bölgesi dahil olmak üzere sürtünmeli kayma çift temas problemini incelemişlerdir. Liu vd. [11], bu çalışmalarında rijit silindirik bir blok ve rijit bir küresel blok yüklenmesi ile fonksiyonel olarak derecelendirilmiş bir takabaka eksenel simetrik çift temas problemlerini incelemişlerdir. Sayısal sonuçlarda, sertlik oranının ve gradyan indeksinin temas bölgesi ve temas basıncı üzerinde büyük etkiye sahip olduğunu analiz etmişlerdir. Yan ve Mi [12], elastik bir katman ile elastik yarı düzlemden oluşan ve dairesel ile parabolik profillere sahip iki rijit pançla yüklenmiş elastik bir yapının sürtünmesiz temas problemini ayrıntılı olarak analiz etmişlerdir.

Bu çalışmada, bir temas probleminin sonlu elemanlar yöntemi (SEM) ile analizi gerçekleştirilmiştir. Problem, elastik yarı sonsuz düzleme oturan ve dairesel rijit iki blok ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakadan oluşmaktadır. Dış yükler P ve Q, tabakaya iki rijit blok vasıtasıyla iletilmiştir. Tüm yüzeylerin sürtünmesiz olduğu kabul edilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sonlu elemanlar modeli ANSYS programı

kullanılarak oluşturulmuş ve problemin 2 boyutlu analizi gerçekleştirilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabakada malzeme özelliklerindeki değişim derinlik boyunca fonksiyonel olarak tanımlanmıştır. İlk olarak ilk ayrılma yükleri (λ_{cr}), ilk ayrılma uzaklıkları (x_{cr}) ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

PROBLEMİN TANIMI

Elastik yarım düzlem üzerine oturan ve malzeme özelliklerinin değişim fonksiyonu $E_1(y) = E_0 e^{\beta y}$ olan h yüksekliğindeki tabaka Şekil 1'de verilmiştir. Tabaka $(-\infty, +\infty)$ aralığında uzanmaktadır. Simetrik olmayan bu sistemde, blokların rijit olduğu ve temas yüzeylerinin sadece basınç gerilmeleri aktardığı kabul edilmiştir. Bu nedenle kritik yükün aşılması durumunda tabaka ile yarım düzlem arasında ayrılmalar meydana gelir. Problemde tüm yüzeylerin sürtünmesiz ve z ekseni doğrultusundaki kalınlığın birim olduğu kabul edilmiştir. Tabaka yüksekliği analizlerde *h=1* olarak alınmıştır.



Şekil 1. Dairesel iki panç ile yüklenmiş problemin geometrisi

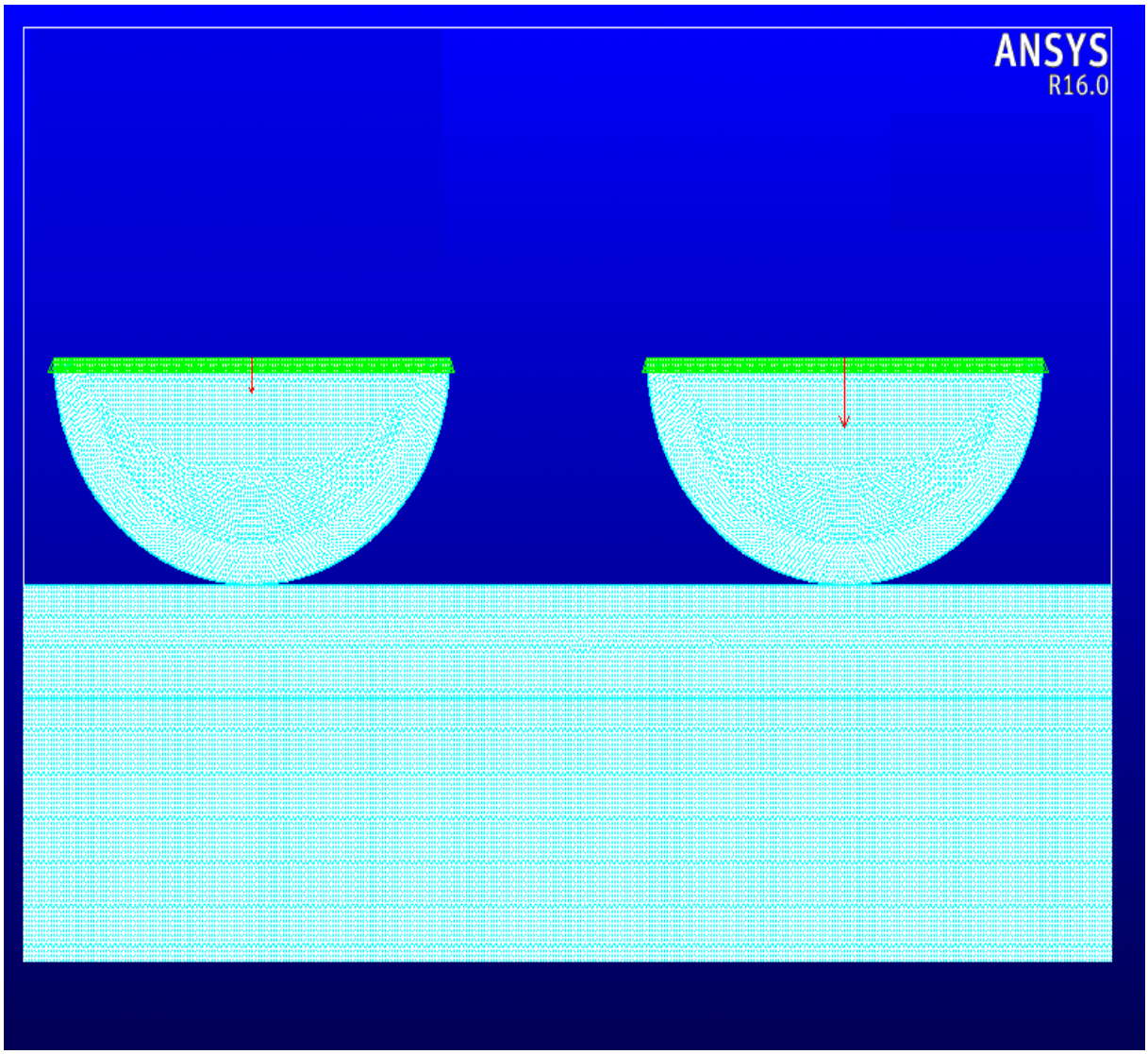
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZ

Gelişen teknoloji ile birlikte uzun ve karmaşık ifadelerden oluşan analitik çözümler yerini kısa sürede etkili sonuçların alınabildiği çözüm metotlarına bırakmıştır. Karmaşık bir mühendislik problemini basite indirgeyerek çözüm arayan SEM son yıllarda sıklıkla tercih edilen çözüm yöntemlerinden biri olmuştur. Bu yöntem, çözüm alanının çok sayıda sonlu bölgeye ayrılması prensibine dayanır. Ağlara bölme (mesh) denilen bu işlemde problemin bütünü yerine çok sayıda küçük alt parçalar üzerinde işlem yapılarak problem basite indirgenir. Çok fazla sayıda ağ oluşturma problemin kesin çözümüne yaklaşılması bakımından önemli olsa da, çözüm süresini artırdığından dolayı dezavantaj olarak görülebilir. SEM tabanlı bilgisayar programlarının kullanımı günümüzde oldukça yaygındır. Bu çalışmada problemin sonlu elemanlar modeli ve analizi ANSYS [14] paket programı kullanılarak yapılmıştır. Bloklar ve homojen düzleme ait tüm işlemler standart ANSYS

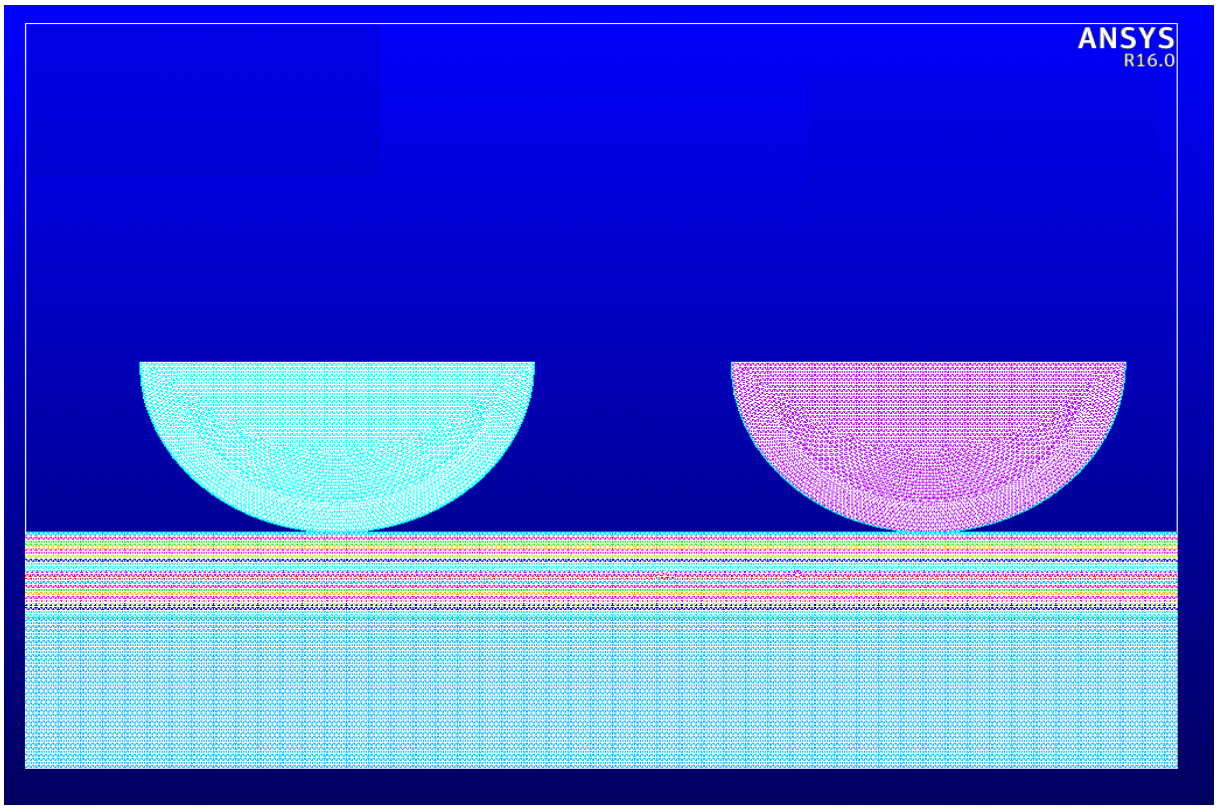
menüleri ile yapılmıştır. FD tabakaya ait malzeme özelliklerinin tanımlanması ve sonlu elemanlara bölme işlemi, programa eklenen özel bir makro ile gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen kod, *set komutu kullanılarak geometri ve malzeme özellikleri gibi problem parametrelerini tanımlayarak başlar. Problemin basit geometrisine bağlı olarak, FD tabaka ve homojen elastik düzlem için iki boyutlu (2D) düzlem geometrik model kullanılır ve BLC4 komutu tarafından oluşturulmuştur. Homojen elastik yarı-sonsuz düzlemin ve blokların malzeme özellikleri lineer, elastik-izotropik olarak seçilmiştir. Eleman tipinin belirlenmesi problemin çözümünde doğru sonuçlar alma bakımından önem arz etmektedir. Bu çalışma, statik ve 2 boyutlu düzlem problem olduğundan eleman tipi olarak 8 düğüm noktalı PLANE183 kullanılır. Bu eleman her düğüm noktasında x ve y doğrultularında serbestlik derecesine sahiptir. Bu elemanda dönme serbestliği yoktur. Bu aşamada belirlenen materyalin sadece ağ oluşturmak için kullanıldığı ve daha sonra bir doloop kullanılarak değiştirileceği ve makroda derecelendirilmiş tabaka özelliklerinin üstel olarak değiştirildiği programa tanımlanmıştır. Çalışmada serbest üçgen ağ kullanılmıştır.

Ayrıca blok-tabaka ve tabaka-elastik düzlem arasında yüzeyden yüzeye (surface to surface) temas çiftleri tanımlanmıştır. Bu çiftler temas ve hedef elemanları olarak ikiye ayrılır. Temas CONTA172, hedef ise TARGE169 elemanları olarak seçilmiştir. Hedef eleman olarak temas elemana göre yüzeyi büyük olan, daha rijit ya da düz yüzeyli elemanlar seçilmesi uygun olacaktır. Bunun yanında temas bölgesinde kullanılacak formülasyon seçilirken uygun temas koşullarını sağlayacak olan matematiksel yönteme de karar verilir.

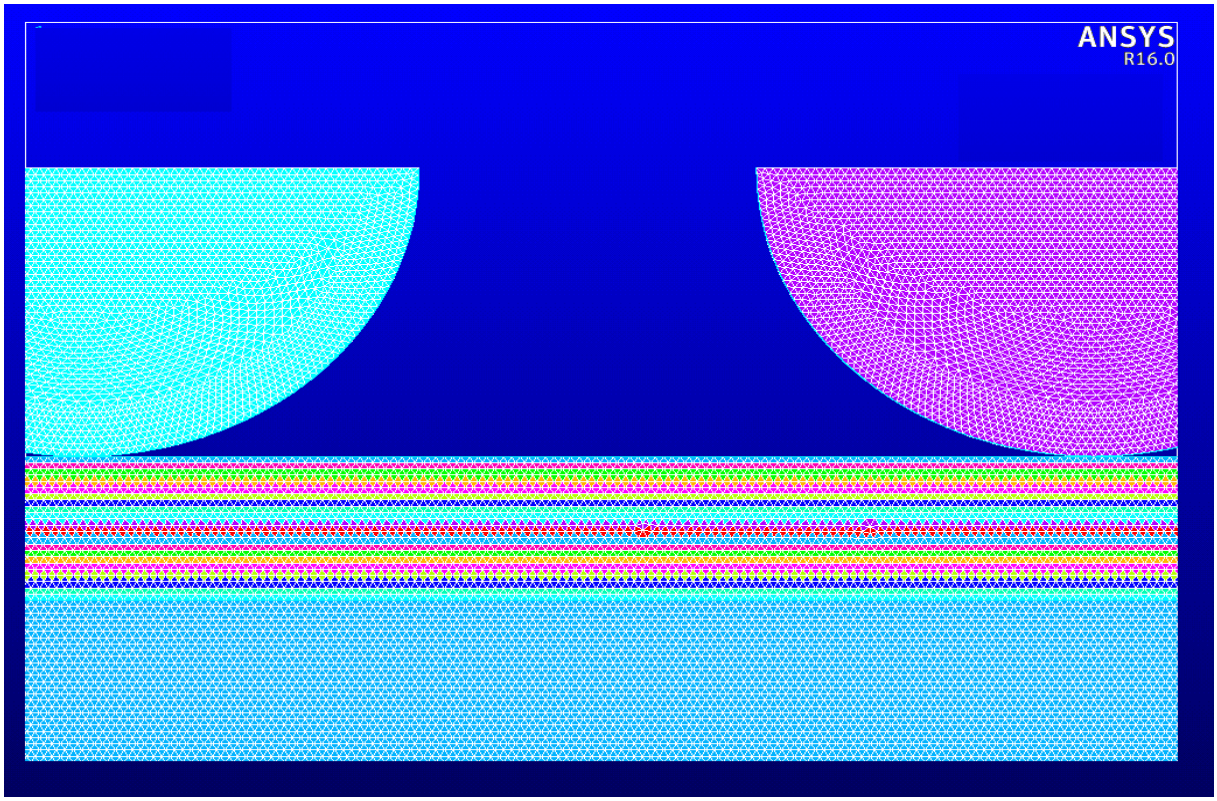
ANSYS'de problem tipine bağlı olarak çeşitli temas algoritmaları mevcuttur. Temas algoritması olarak toplam potansiyel enerji teoremini kullanan hızlı sonuçlar veren Augmented Lagrangian Method tercih edilmiştir. Problemin ANSYS modelleri Şekil 2,3 ve 4 de gösterilmiştir.



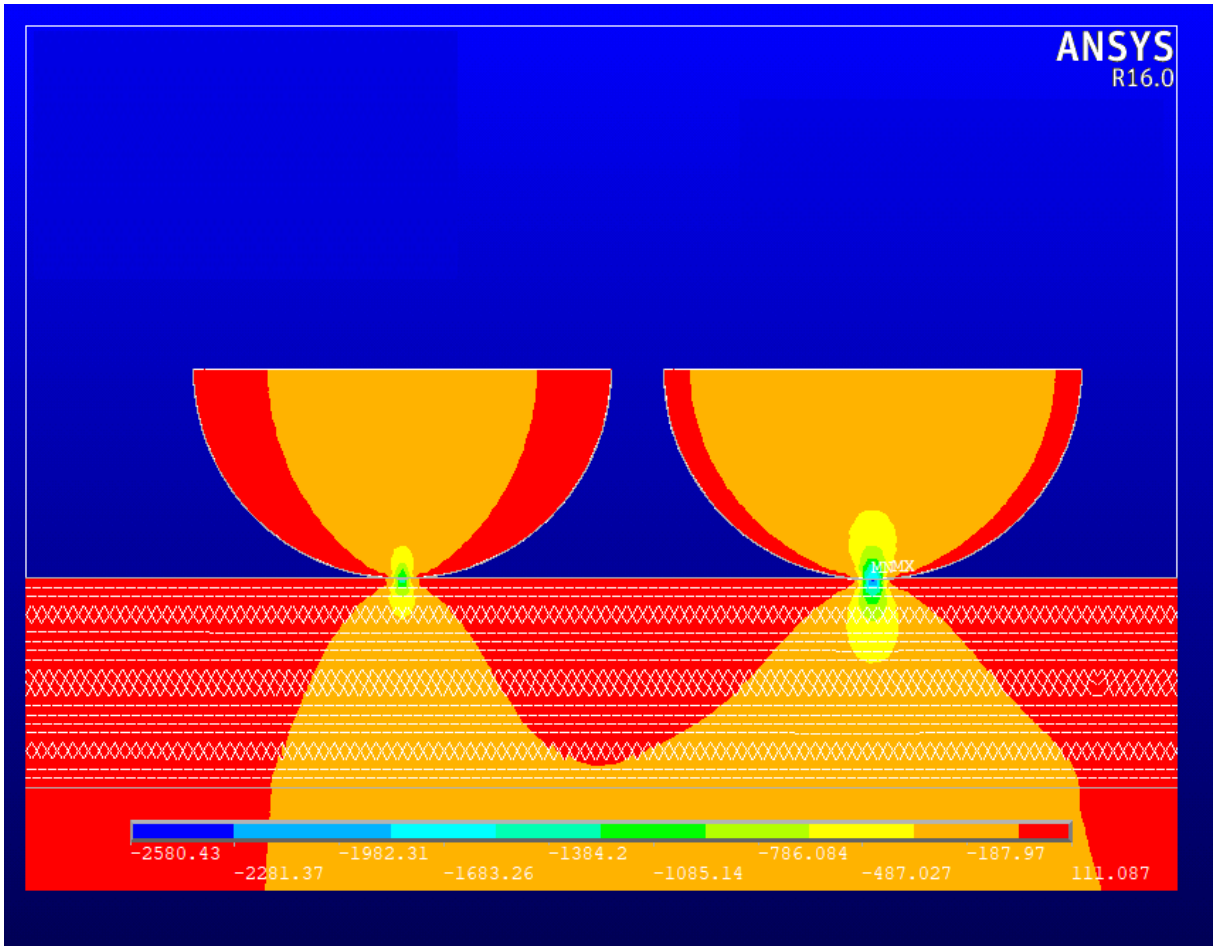
Şekil 2. Dairesel iki panç ile yüklenmiş problemin sonlu elemanlar modeli



Şekil 3. Serbest üçgen mesh

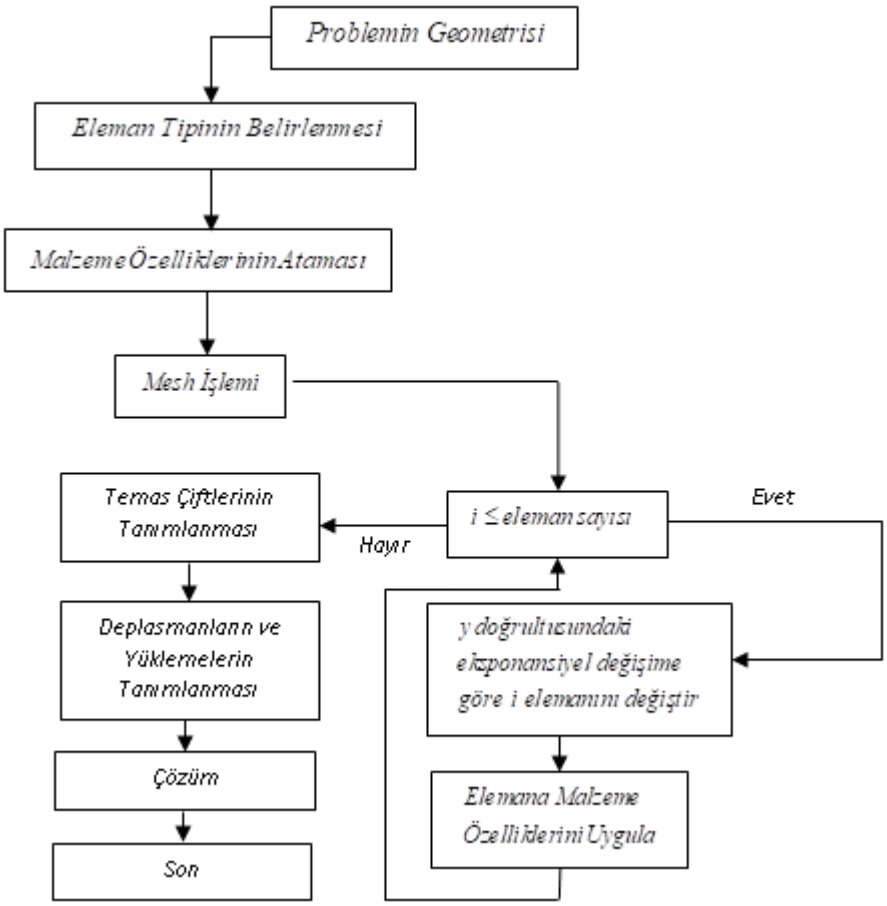


Şekil 4. Serbest üçgen mesh



Şekil 5. σ_y Gerilme Hali

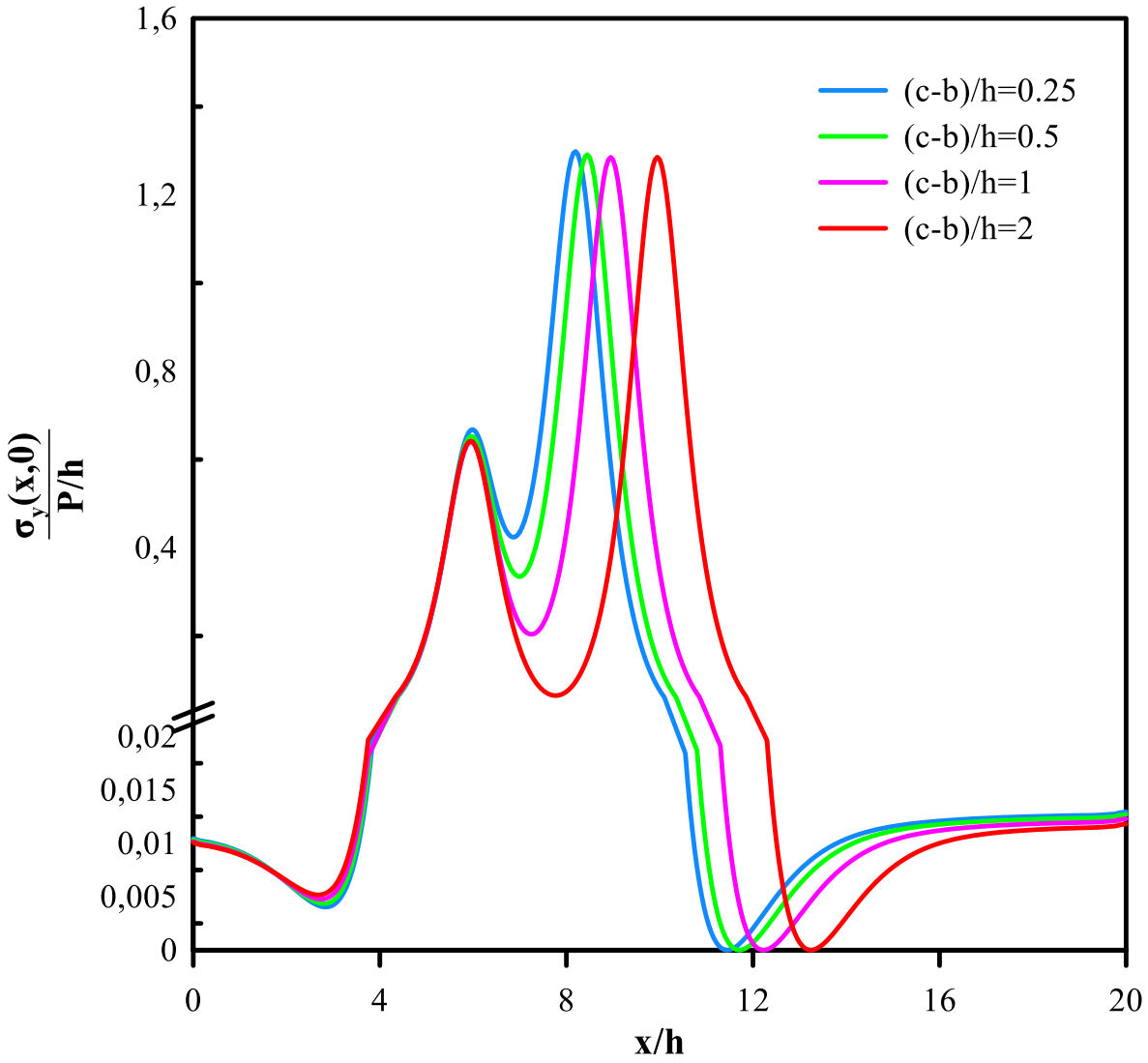
Sonlu eleman modeline ait akış şeması Şekil 6'da verilmiştir.



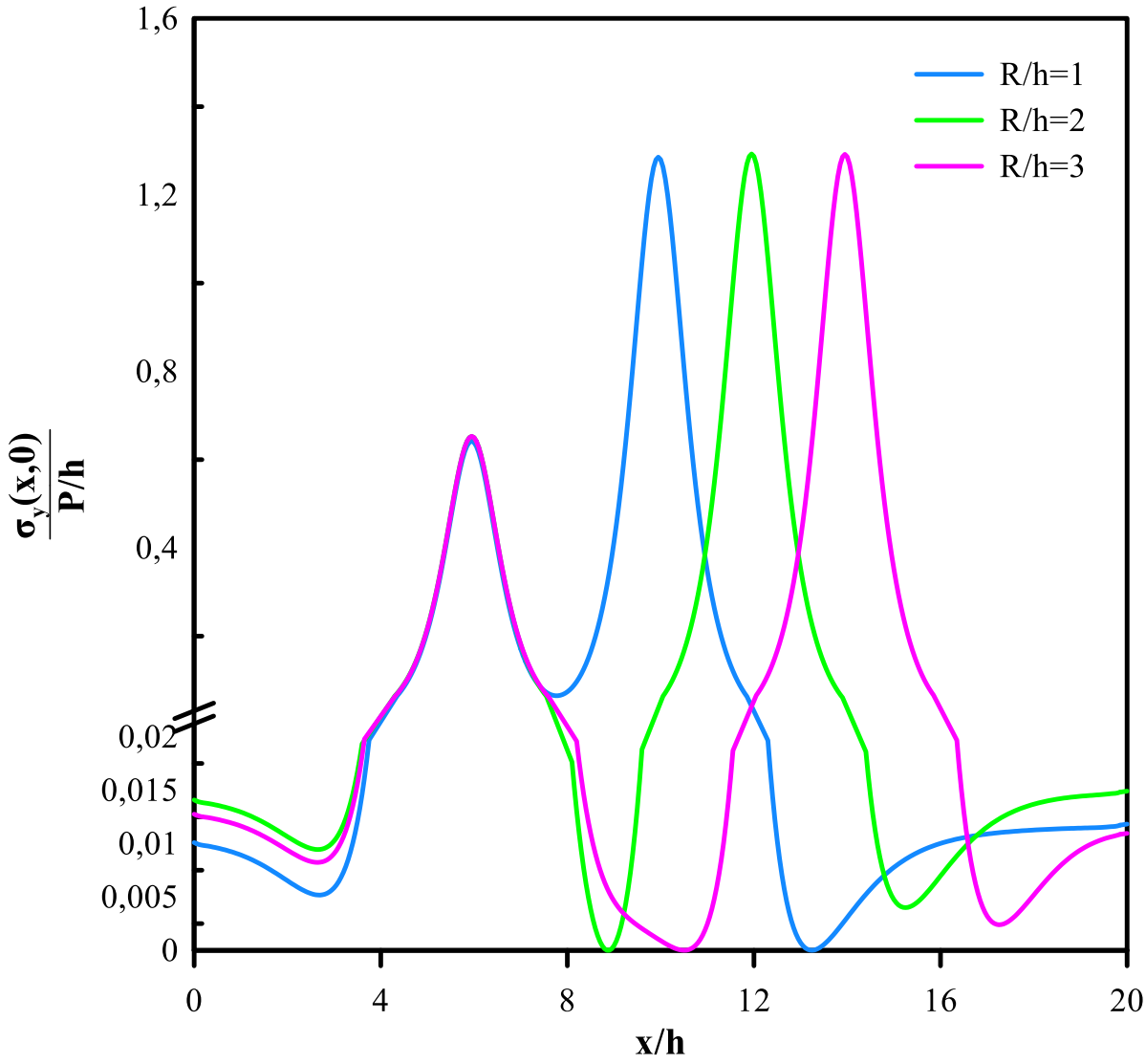
Şekil 6. Problemin algoritması

SONUÇLAR

Bu çalışmada dairesel iki rijit panç ile yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakadaki sürekli bir temas probleminin sonlu elemanlar yöntemi ile analizi gerçekleştirilmiştir. Çalışmada ilk ayrılma yükleri (λ_{cr}), ilk ayrılma uzaklıkları (x_{cr}) ve temas gerilmeleri incelenmiştir. İlk olarak rijit pançlar arasındaki mesafe ve pançların yarıçap değşimine göre derinlik boyunca gerilmeler incelenmiş ve elde edilen değerler grafik olarak sunulmuştur. İkinci olarak ise panç yarıçapı sabit tutularak rijitlik parametresi (β) değişimine ve pançlar arasındaki mesafe değişimine göre ilk ayrılma yükleri (λ_{cr}) ve ilk ayrılma uzaklıkları (x_{cr}) elde edilerek tablo olarak sunulmuştur.



Şekil 7. Pançlar arası mesafe değişimine göre σy(x,-h) gerilme dağılımı Q=2P, R1=R2=1,β=0.6931



Şekil 8. Pançların yarıçap değişimine göre σy(x,-h) gerilme dağılımı dağılımı Q=2P,β=0.6931

Şekil 7'de iki blok arasındaki uzaklığın gerilmeler üzerine etkisi araştırılmıştır. Bu grafikden de anlaşılacağı gibi iki blok yakınlaştırıldığında, temas gerilmelerinin arttığı gözlemlenmiştir. Şekil 8'de iki blok yarıçap değişiminin gerilmeler üzerine etkisi araştırılmıştır. Burada kuvvetler sabit tutulup yarıçaplar artırılmıştır. Grafikden anlaşıldığı üzere alan arttıkça gerilme azalmaktadır.

Tablo 1. Q=2P, R1=R2=1, β Değişimine göre ilk ayrılma uzaklığı ve ilk ayrılma yükü değişimi

Parametrelerin Değişimi	x_{cr}	λ_{cr}
β =0.0000001	12.40	71.72
β =0.6931	12.70	106.15
β =1.3862	13.10	134.85
β =2.0794	13.45	149.37

Tablo 1'de yükler ve panç yarıçapları sabit tutulup β değişiminin ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi araştılmıştır. Sonuç olarak bu değişimle β değerinin artması ilk ayrılma uzaklığının ve ilk ayrılma yükünün artmasına neden olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 2. Q=2P, R1=R2=1, β=1.3862 Pançlar arası mesafe değişimine göre ilk ayrılma uzaklığı ve ilk ayrılma yükü değişimi

Pançlar arası mesafe	x_{cr}	λ_{cr}
0.25	11.30	124.70
0.50	11.55	127.05
1.0	12.05	130.52
2.0	13.10	134.85

Tablo 2'de görüldüğü gibi yükler,panç yarıçapları ve β değeri sabit tutulup pançlar arası mesafe değişiminin ilk ayrılma yükü ve ilk ayrılma uzaklığına etkisi incelenmiştir. Pançlar arasındaki mesafe azalıp birbirlerine yaklaştıklarında ilk ayrılma uzaklığının azaldığı ve aynı doğrultuda ilk ayrılma yükünün azaldığı gözlemlenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] H., Hertz, *Gessammelte Worke von Heinrich Hertz*, Leipzig, 1895.

[2] M. Koizumi, FGM activities in Japan, *Composites Part B*, 28B (1997) 1-7.

[3] L.L. Ke, Y.S. Wang, Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties, International Journal of Solids and Structures, 43 (2006) 5779–5798.

[4] Polat, Alper. (2021). Examination of contact problem between functionally graded punch and functionally graded layer resting on elastic plane. Structural Engineering & Mechanics. 75.

[5] Yan, J., & Mi, C. (2019). A receding contact analysis for an elastic layer reinforced with a functionally graded coating and pressed against a half-plane. *Journal of Mechanical Science and Technology*, *33*(9), 4331–4344. https://doi.org/10.1007/s12206-019-0829-5

[6] M. N., & Dag, S. (2020). Moving contact problems involving a rigid punch and a functionally graded coating. *Applied Mathematical Modelling*, *81*, 855–886.

[7] Polat, Alper. (2019). Investigation of the Frictionless Contact Problem in A Rigidly Supported Homogeneous Layer by Using FEM. Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi. 9. 796-807. 10.17714/gumusfenbil.569047.

[8] Kaya, Yusuf & Polat, Alper & Özşahin, Talat. (2019). Analytical Solution of Continuous Contact Problem in Functionally Graded Layer Resting on Rigid Plane.

[9] Polat, Alper & Kaya, Yusuf & Bendine, Kouider & Özşahin, Talat. (2019). Frictionless Contact Problem for a Functionally Graded Layer Loaded Through Two Rigid Punches Using Finite Element Method. Journal of Mechanics. 35. 1-10. 10.1017/jmech.2018.55.

[10] Çömez, I., El-Borgi, S., & Yildirim, B. (2020). Frictional receding contact problem of a functionally graded layer resting on a homogeneous coated half-plane. Archive of Applied Mechanics, 90(9), 2113–2131.

[11] Liu, T. J., Zhang, C., Wang, Y. S., & Xing, Y. M. (2016). The axisymmetric stress analysis of double contact problem for functionally graded materials layer with arbitrary graded materials properties. *International Journal of Solids and Structures*, *96*, 229–239.

[12] Yan, J., & Mi, C. (2017). On the receding contact between an inhomogeneously coated elastic layer and a homogeneous half-plane. *Mechanics of Materials*, *112*, 18–27.

[13] Polat, Alper. (2019). Elastik Yarım Düzleme Oturan Ve İki Rijit Blok Aracılığıyla Yüklenmiş Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakanın Temas Problemi. 10.13140/Rg.2.2.10217.11364.

[14] ANSYS, Swanson Analysis Systems Inc., Houston PA, USA (2016).

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

PERIDYNAMIC MODELING OF FAILURE IN FIBER STEERED COMPOSITES

Erdogan Madenci[1], Amin Yaghoobi[2], Atila Barut[2] and Nam Phan[3]
[1]The University of Arizona, Tucson, AZ, 85721, USA
[2]Global Engineering Research and Technologies, Tucson, AZ, 85715, USA
[3]US Naval Air Systems Command, Patuxent River, MD, 20670, USA

ABSTRACT

This study presents a peridynamic (PD) approach to model progressive failure in fiber steered composites. The force density vectors in the PD equation of motion are derived explicitly for in-plane, transverse normal and transverse shear deformations in terms of the engineering material constants. The PD bonds enable the interaction of material points within each ply as well as their interaction with other material points in the adjacent plies. The PD equilibrium equation is solved by employing implicit techniques in an iterative form to account for damage progression based on the Hashin failure criteria. The capability of this approach is verified by comparing the deformation field in a laminate with a variable tow angle with that of a finite element method. Its capability for progressive failure is demonstrated through crack initiation and growth from a hole in a laminate under tension. As expected, the crack path follows the fiber variation.

Keywords: Peridynamics; Fiber-steered composites; Failure; Progressive

INTRDUCTION

Advanced composite materials have played a significant role in the development of cutting-edge lightweight space technologies for space exploration. As space exploration continues to evolve, the current and the future missions continually demand the advancement of composite materials and technologies to a yet more sophisticated horizon. Current research on space technologies focusing to advance pre-impregnated composite materials with continuous or short fibers also seeks for their high stiffness, low coefficient of thermal expansion, low moisture absorption ability, resistance to extreme temperature ranges, out-gassing ability, in addition to their being extremely light weight. Conventional straight-fiber laminated composites offer a limited tailoring option by designing the stacking sequence with constant ply-angles along the thickness direction. With the introduction of new manufacturing technologies such as advanced fiber placement (AFP), engineers now have the capability to harness the full potential of nonconventional variable stiffness laminated composites using in-plane fiber steering.

The stiffness variation can be achieved by modifying the stacking sequences at each location by steering the fibers in each ply to produce continuous curvilinear fiber paths, which are also

referred to as Variable Angle Tow (VAT) composites. The design of nonconventional variable stiffness laminated composites has gained much more interest because of its challenge and promising performance. Its design practicality requires allowables database which requires extensive testing. However, it is not tractable to build databases that cover all the different possible stacking sequences for VAT composites. In addition, fiber-steered composites might present different failure mechanisms than conventional composites. Therefore, accurate modeling and simulation tools are essential for virtual testing and reliable design of VAT composites. Virtual testing requires coupled modeling and simulations of fiber placement and structural response for progressive failure analysis.

Silling [1] and Silling et al. [2] introduced the Peridynamic (PD) theory in order to address damage initiation and propagation in an isotropic material at multiple sites with arbitrary paths. In the PD theory, the internal forces are expressed through nonlocal interactions between the material points within a continuous body, and damage is part of the constitutive model. Damage is introduced through the removal of the interactions (bonds) between the points based on a particular criteria; making the progressive failure analysis more practical. The PD equations of motion are classified as "Bond-Based (BB)", "Ordinary State-Based (OSB)" and "Non-Ordinary State-Based (NOSB)" PD. In the BB-PD formulation, the interaction of a pair of material points is independent of the influence of other points in their domain of interaction. However, the OSB- and NOSB-PD formulation is dependent on the influence of other points within their individual domains of interaction. In the past decade, PD has been widely adopted and applied to various engineering applications. An extensive literature survey on PD is given by Madenci and Oterkus [3].

This study presents a PD approach for modeling variable angle tow composites as an extension of the approach by Madenci et al. [4-6]. The derivation of the PD equation of motion accounts for the in-plane, transverse normal and transverse shear deformations. The force density vectors in the PD equation of motion are derived in terms of the engineering material constants. The accuracy of this approach is verified by comparing the deformation field in a VAT laminate with that of a finite element method. Its capability for progressive failure is demonstrated through crack initiation and growth from a hole in a VAT laminate under tension. As expected, the crack path follows the fiber path.

APPROACH

The laminate can be composed of N plies with varying ply thickness, h_n. A material point $\mathbf{x}_n$ located on the n-th ply has coordinates (x_n, y_n, z_n) with respect to the reference coordinate system, (x, y, z). The material point $\mathbf{x}_n$ experiences displacement, $\mathbf{u}^{(n)}(t)$ at time t. The subscript or superscript n denotes the ply number with $(n = 1,.., N)$. The fiber path parameterization in each **ply** of the laminate is achieved by [**7**]

$$\theta_n(x, y) = T_0^n + (T_1^n - T_0^n)\frac{2|x - L/2|}{L}$$

where T_0^k and T_1^k are the fiber orientation angles at the center and along the edges of the n-th ply, respectively. The origin of the coordinate system, (x, y) is located at the lower left corner of the laminate with dimension of L and W in the x- and y- directions, respectively.

The equilibrium equations for the n-th ply are expressed as

$$\rho_n \ddot{u}_\alpha^{(n)} = \sigma_{\alpha\beta,\beta}^{(n)} + b_\alpha^{(n)} \tag{1}$$

in which ρ_n is the mass density, and $u_\alpha^{(n)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(n)}$ and $b_\alpha^{(n)}$ with $\alpha = z, y, x$ represent the displacement, stress and body force components, respectively. For an orthotropic lamina in a state of plane stress, the stress components can be related to the strain components as

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(n)} \\ \sigma_{yy}^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \sigma_{yz}^{(n)} \\ \sigma_{xz}^{(n)} \\ \sigma_{xy}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(n)} & \bar{Q}_{12}^{(n)} & \bar{Q}_{13}^{(n)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16}^{(n)} \\ \bar{Q}_{12}^{(n)} & \bar{Q}_{22}^{(n)} & \bar{Q}_{23}^{(n)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26}^{(n)} \\ \bar{Q}_{13}^{(n)} & \bar{Q}_{23}^{(n)} & \bar{Q}_{33}^{(n)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^{(n)} & \bar{Q}_{45}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45}^{(n)} & \bar{Q}_{55}^{(n)} & 0 \\ \bar{Q}_{16}^{(n)} & \bar{Q}_{26}^{(n)} & \bar{Q}_{36}^{(n)} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(n)} \\ \varepsilon_{yy}^{(n)} \\ \varepsilon_{zz}^{(n)} \\ \gamma_{yz}^{(n)} \\ \gamma_{xz}^{(n)} \\ \gamma_{xy}^{(n)} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

The parameters $\bar{Q}_{ij}$ are expressed in terms of the fiber orientation angle from the x- axis, and the material constants $E_{11}, E_{22}, E_{33}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, G_{12}, G_{23}$ and G_{13}, [8]. Substituting for the stress components in the equilibrium equations along with the strain-displacement (kinematic) relations results in

$$\rho_n \ddot{\mathbf{u}}^{(n)} = \mathbf{L}^{(n)} + \tilde{\mathbf{L}}^{(n)} + \hat{\mathbf{L}}^{(n)} + \mathbf{b}^{(n)} \tag{3}$$

in which $\mathbf{L}^{(n)}$, $\tilde{\mathbf{L}}^{(n)}$ and $\hat{\mathbf{L}}^{(n)}$ represent the internal force vectors arising from in-plane, transverse shear and transverse normal deformations, respectively. They are defined as

$$\mathbf{L}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{(n)} \tag{4a}$$

$$\tilde{\mathbf{L}}^{(n)}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{D}}^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{(n)} \tag{4b}$$

and

$$\hat{\mathbf{L}}^{(n)}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{D}}^{(n)}(\mathbf{x})\mathbf{u}^{(n)} \tag{4c}$$

where the matrices $\mathbf{D}^{(n)}$, $\tilde{\mathbf{D}}^{(n)}$ and $\hat{\mathbf{D}}^{(n)}$ are expressed as

$$\mathbf{D}^{(n)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(n)}\partial_{xx} + 2\bar{Q}_{16}^{(n)}\partial_{xy} + \bar{Q}_{66}^{(n)}\partial_{yy} & \bar{Q}_{16}^{(n)}\partial_{xx} + \left(\bar{Q}_{12}^{(n)} + \bar{Q}_{66}^{(n)}\right)\partial_{xy} + \bar{Q}_{26}^{(n)}\partial_{yy} & 0 \\ \bar{Q}_{16}^{(n)}\partial_{xx} + \left(\bar{Q}_{12}^{(n)} + \bar{Q}_{66}^{(n)}\right)\partial_{xy} + \bar{Q}_{26}^{(n)}\partial_{yy} & \bar{Q}_{66}^{(n)}\partial_{xx} + 2\bar{Q}_{26}^{(n)}\partial_{xy} + \bar{Q}_{22}^{(n)}\partial_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5a}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(n)}=\begin{bmatrix} \bar{Q}_{55}^{(n)}\partial_{zz} & \bar{Q}_{45}^{(n)}\partial_{zz} & \bar{Q}_{55}^{(n)}\partial_{xz}+\bar{Q}_{45}^{(n)}\partial_{yz} \\ \bar{Q}_{45}^{(n)}\partial_{zz} & \bar{Q}_{44}^{(n)}\partial_{zz} & \bar{Q}_{45}^{(n)}\partial_{xz}+\bar{Q}_{44}^{(n)}\partial_{yz} \\ \left(\bar{Q}_{55}^{(n)}+\bar{Q}_{31}^{(n)}\right)\partial_{xz}+\left(\bar{Q}_{45}^{(n)}+\bar{Q}_{36}^{(n)}\right)\partial_{yz} & \left(\nu_{45}^{(n)}+\nu_{36}^{(n)}\right)\partial_{xz}+\left(\nu_{44}^{(n)}+\bar{Q}_{32}^{(n)}\right)\partial_{yz} & 0 \end{bmatrix} \tag{5b}$$

and

$$\hat{\mathbf{D}}^{(n)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{55}^{(n)}\partial_{xx}+2\bar{Q}_{45}^{(n)}\partial_{xy}+\bar{Q}_{44}^{(n)}\partial_{yy}+\bar{Q}_{33}^{(n)}\partial_{zz} \end{bmatrix} \tag{5c}$$

where $\partial_{\alpha\beta}=\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}$ with respect to $(\alpha,\beta=x,y,z)$.

As suggested by Madenci and Oterkus [9], the equilibrium equation, Eq. (3) can be recast in PD form as

$$\begin{aligned}\rho_n\ddot{\mathbf{u}}^{(n)}=&\int_{H_{\mathbf{x}_n}}\left(\mathbf{t}^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{u}'^{(n)}-\mathbf{t}'^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{u}'^{(n)})\right)dV_{\mathbf{x}'}+\\ &\int_{H_{\mathbf{x}_n}}\left(\tilde{\mathbf{t}}^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{u}'^{(m)})-\tilde{\mathbf{t}}'^{(m)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{u}'^{(m)})\right)dV_{\mathbf{x}'}+\int_{H_{\mathbf{x}_n}}\left(\hat{\mathbf{t}}^{(n)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{u}'^{(m)})-\hat{\mathbf{t}}'^{(m)}(\mathbf{u}^{(n)},\mathbf{u}'^{(m)})\right)dV_{\mathbf{x}'}+\mathbf{b}_n\end{aligned} \tag{6}$$

where $\mathbf{u}^{(n)}$ and $\mathbf{u}'^{(n)}$ are the displacement vectors at points $\mathbf{x}_n$ and, $\mathbf{x}'_n$, respectively. The force density vectors, $(\mathbf{t}^{(n)},\mathbf{t}'^{(n)})$ develop due to in-plane deformation between material points, $\mathbf{x}_n$ and $\mathbf{x}'^{(n)}$. The force density vectors, $(\tilde{\mathbf{t}}^{(n)},\tilde{\mathbf{t}}'^{(m)})$ and $(\hat{\mathbf{t}}^{(n)},\hat{\mathbf{t}}'^{(m)})$ develop due to transverse shear deformation and transverse normal deformations, respectively, between material points, $\mathbf{x}^{(n)}$ and $\mathbf{x}'^{(m)}$. The horizon of point $\mathbf{x}_n$ is specified as $H_{\mathbf{x}_n}$ representing its domain of interaction as shown in Fig. 1. The interactions of this point with the others through intra- and inter-layer bonds are also depicted in Fig. 1. The in-plane interactions occur only within each ply.

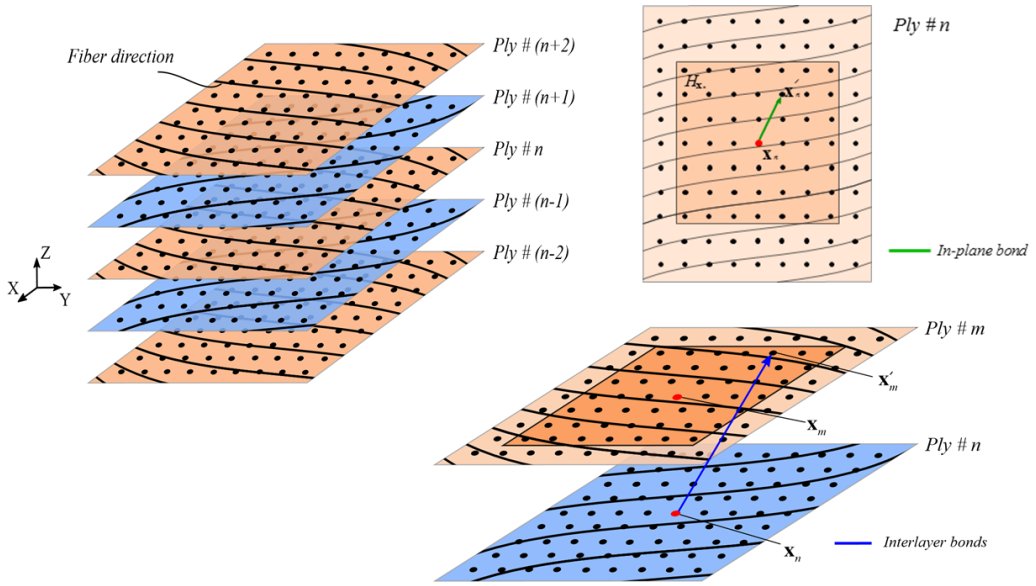


Fig. 1. Interaction of material point $\mathbf{x}_n$ with other points $\mathbf{x}'_n$ and $\mathbf{x}'_m$ located on the same ply and other plies, respectively.

As derived by Madenci et al. [6], the force density vectors can be expressed as

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{k}_n\left(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}'_n\right) \tag{7a}$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_n = \tilde{\mathbf{k}}_n\left(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}'_m\right) \tag{7b}$$

and

$$\hat{\mathbf{t}}_n = \hat{\mathbf{k}}_n\left(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}'_m\right) \tag{7c}$$

in which $\mathbf{k}_n$, $\tilde{\mathbf{k}}_n$ and $\hat{\mathbf{k}}_n$ are defined as

$$\mathbf{k}_n = \begin{bmatrix} -A_n(\mathbf{x}_n) & -B_n(\mathbf{x}_n) & 0 \\ -B_n(\mathbf{x}_n) & -C_n(\mathbf{x}_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8a}$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_n = \begin{bmatrix} -\tilde{A}_n(\mathbf{x}_n) & -\tilde{B}_n(\mathbf{x}_n) & -\dfrac{\tilde{C}_n(\mathbf{x}_n)+\tilde{F}_n(\mathbf{x}_n)}{2} \\ -\tilde{B}_n(\mathbf{x}_n) & -\tilde{D}_n(\mathbf{x}_n) & -\dfrac{\tilde{E}_n(\mathbf{x}_n)+\tilde{G}_n(\mathbf{x}_n)}{2} \\ -\dfrac{\tilde{C}_n(\mathbf{x}_n)+\tilde{F}_n(\mathbf{x}_n)}{2} & -\dfrac{\tilde{E}_n(\mathbf{x}_n)+\tilde{G}_n(\mathbf{x}_n)}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{8b}$$

and

$$\hat{\mathbf{k}}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{A}_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \tag{8c}$$

The coefficients appearing in these matrices can be expressed in terms of the PD functions, $g_2^{p_1 p_2 p_3}(\xi, w(|\,\xi\,|))$ with $p_1, p_2, p_3 = 0,1,2$ and $\xi = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n$ or $\xi = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m$ as

$$A_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n,)\left(\bar{Q}_{11}^{(n)} g_2^{200}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) + 2\bar{Q}_{16}^{(n)} g_2^{110}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) + \bar{Q}_{66}^{(n)} g_2^{020}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n)\right) \tag{9a}$$

$$B_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n)\left(\bar{Q}_{16}^{(n)} g_2^{200}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) + \left(\bar{Q}_{12}^{(n)} + \bar{Q}_{66}^{(n)}\right) g_2^{110}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) + \bar{Q}_{26}^{(n)} g_2^{020}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n)\right) \tag{9b}$$

$$C_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n)\left(\bar{Q}_{66}^{(n)} g_2^{200}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) + 2\bar{Q}_{26}^{(n)} g_2^{110}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n) + \bar{Q}_{22}^{(n)} g_2^{020}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_n)\right) \tag{9c}$$

and

$$\tilde{A}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\bar{Q}_{55}^{(n)} g_2^{002}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) \tag{10a}$$

$$\tilde{B}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\bar{Q}_{45}^{(n)} g_2^{002}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) \tag{10b}$$

$$\tilde{C}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\left(\bar{Q}_{45}^{(n)} g_2^{011}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) + \bar{Q}_{55}^{(n)} g_2^{101}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m)\right) \tag{10c}$$

$$\tilde{D}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\bar{Q}_{44}^{(n)} g_2^{002}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) \tag{10d}$$

$$\tilde{E}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\left(\bar{Q}_{44}^{(n)} g_2^{011}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) + \bar{Q}_{45}^{(n)} g_2^{101}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m)\right) \tag{10e}$$

$$\tilde{F}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\left(\left(\bar{Q}_{55}^{(n)} + \bar{Q}_{31}^{(n)}\right) g_2^{101}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) + \left(\bar{Q}_{45}^{(n)} + \bar{Q}_{36}^{(k)}\right) g_2^{011}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m)\right) \tag{10f}$$

$$\tilde{G}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\left(\left(\bar{Q}_{45}^{(n)} + \bar{Q}_{36}^{(k)}\right) g_2^{101}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) + \left(\bar{Q}_{44}^{(n)} + \bar{Q}_{32}^{(n)}\right) g_2^{011}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m)\right) \tag{10g}$$

and

$$\hat{A}_n(\mathbf{x}_n) = \mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_m)\begin{pmatrix} \bar{Q}_{55}^{(n)} g_2^{200}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) + 2\bar{Q}_{45}^{(n)} g_2^{110}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) \\ +\bar{Q}_{44}^{(n)} g_2^{020}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) + \bar{Q}_{33}^{(n)} g_2^{002}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}'_m) \end{pmatrix} \tag{11}$$

The PD functions introduced Madenci et al. [10-12] enable the nonlocal form of differentiation, $\partial_{\alpha\beta}$ with $(\alpha, \beta = x, y, z)$. The failure (status) parameter $\mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n)$ enables the inclusion of damage initiation and growth in the material response. If the failure criterion is satisfied, the status variable $\mu(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}'_n)$ is set to zero. The parameter $w(|\,\xi\,|) = \delta^2 / |\,\xi\,|^2$ is non-dimensional and specifies the degree of interaction among the material points. The

coefficients appearing in the PD force density vectors do not require any calibration; thus, surface correction is not necessary.

FAILURE PREDICTION

Peridynamics permits bond breakage when the failure criterion is satisfied; thus, the bond forces vanish. Breakage of the bonds between the material points is reflected in the PD equation of motion through the failure (status) parameter. The in-plane bonds are removed due to fiber breakage and matrix cracking, and the interlayer bonds due to delamination. Failure prediction for fiber breakage and matrix cracking can be based on critical stretch or Hashin-type stress criteria, and delamination failure can be based on the energy release rate criterion as demonstrated by Hu and Madenci [13, 14]. Hashin criteria [15] identifies matrix cracking and fiber failure by applying the following failure indices:

1. Tensile fiber failure

$$\left(e_{f(n)}^{t}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{11(n)}}{X_t}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12(n)}}{S}\right)^2=1 \text{ for } \left(\sigma_{11(n)}\right)\geq 0 \text{ and } \left(\frac{\sigma_{11(n)}}{X_t}\right)^2>\left(\frac{\sigma_{12(n)}}{S}\right)^2 \tag{12a}$$

2. Compressive fiber failure

$$\left(e_{f(n)}^{c}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{11(n)}}{X_c}\right)^2=1 \text{ for } \left(\sigma_{11(n)}\right)\leq 0 \tag{12b}$$

3. Tensile matrix failure

$$\left(e_{m(n)}^{t}\right)^2=\left(\frac{\sigma_{22(n)}}{Y_t}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12(n)}}{S}\right)^2=1 \text{ for } \left(\sigma_{22(n)}\right)\geq 0 \tag{12c}$$

4. Compressive matrix failure

$$\left(e_{m(n)}^{c}\right)^2=\left[\left(\frac{Y_c}{2S}\right)^2-1\right]\left(\frac{\sigma_{22(n)}}{Y_c}\right)+\left(\frac{\sigma_{22(n)}}{2S}\right)^2+\left(\frac{\sigma_{12(n)}}{S}\right)^2=1 \text{ for } \left(\sigma_{22(n)}\right)\leq 0 \tag{12d}$$

where, σ_{ij} denote the stress components with respect to the material coordinate system aligned with longitudinal (fiber) and transverse directions. The parameters X and Y represent the allowable strength in longitudinal and transverse directions. The subscripts t and c denote the tensile and compressive loading, respectively. The parameter, S denotes the allowable shear strength. The maximum value of the failure index identifies the failure mode

$$F_{(n)}=\max\left\{e_{f(n)}^{t},e_{f(n)}^{c},e_{m(n)}^{t},e_{m(n)}^{c}\right\} \text{ with } n=1,..,N \tag{13}$$

The failure (status) parameter $\mu_{(k)(j)}$ given as

$$\mu_{(k)(j)}=\begin{cases}1 & \text{unbroken or visible bond}\\ 0 & \text{broken or invisible bond}\end{cases} \tag{18}$$

As suggested by Silling and Askari [16], the local damage, $\varphi_{(k)}$ at point $\mathbf{x}_{(k)}$ can be measured as the ratio of the number of broken bonds to the total number of initially intact bonds as

$$\varphi_{(k)} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{N_{(k)}} \mu_{(k)(j)}}{N_{(k)}} \tag{19}$$

The local damage $\varphi_{(k)}$, ranges from zero to one and is an indicator of possible crack formation within a body.

NUMERICAL RESULTS

The capability of this approach is demonstrated by considering a VAT lamina with a circular cutout under tension. The geometry and boundary conditions are shown in Fig. 2. Tensile loading is applied in the form of displacement increments of $\Delta u_0 = 0.005$ mm until failure. Its elastic properties are specified as $E_{11} = 173$ GPa, $E_{22} = 7.2$ GPa, $G_{12} = 3.76$ GPa, and $\nu_{12} = 0.29$. It has dimensions of $L = 50.$ mm $W = 60.$ mm with thickness of $h = 1.0$ mm. The cutout radius is $a = 10.$ mm.

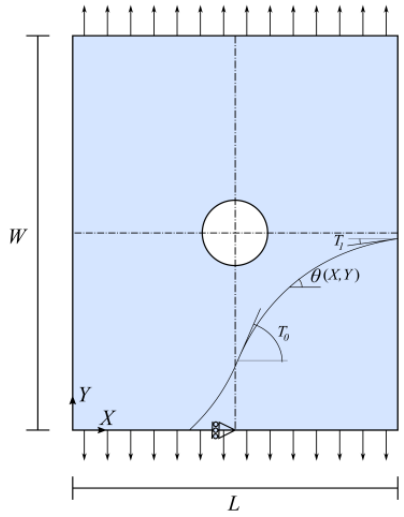


Fig. 2 The geometry and boundary conditions of a VAT laminate with a circular hole

The tow-steered fiber path in the lamina is defined as $< T_0^1 = 0^\circ | T_1^1 = 40^\circ >$. Their curvilinear fiber paths are shown in Fig. 3. The horizontal and vertical displacement components are shown in Fig. 4. These predictions are in close agreement with the high-fidelity finite element predictions. Fig. 5 shows crack initiation and it growth along the fiber path at failure. As expected, it follows the fiber path.

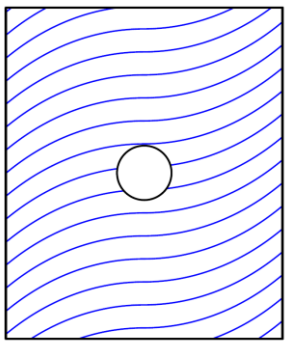


Fig. 3 Fiber paths in each layer corresponding to $<T_0 = 0^\circ | T_1 = 40^\circ>$

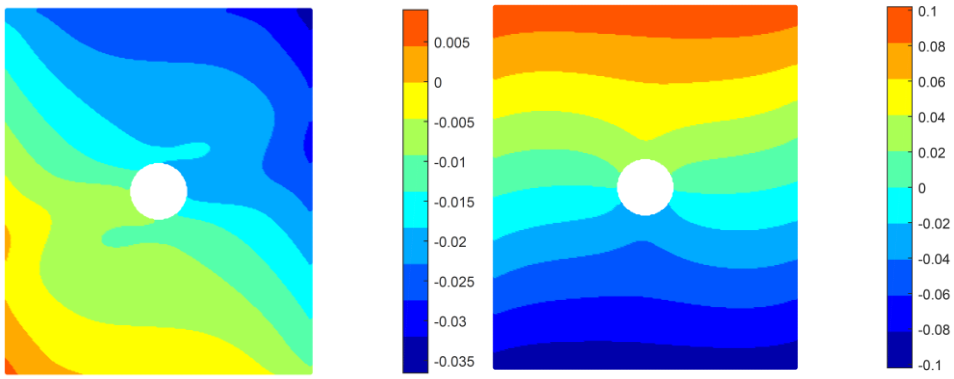


Fig. 4 PD displacement predictions in a VAT laminate with a hole under displacement constraints of $u_0 = 0.1\text{mm}$: a) horizontal, and b) vertical components

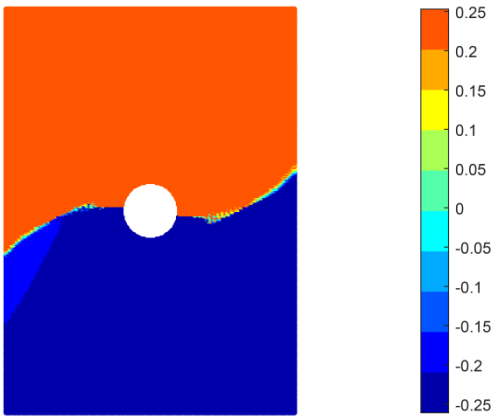


Fig. **5** PD vertical displacement and crack path predictions at failure load of $u_0 = 0.25\text{m}$

CONCLUSIONS

This study presents a peridynamics approach to model and predict progressive failure in VAT composite without any limitation to specific fiber orientation and material properties. Its capability is demonstrated by recovering the expected deformation field and crack propagation path. The deformation predictions compare well with the finite element results. Also, the progressive damage predictions capture the general characteristics of the experimentally observed damage patterns. The equilibrium equation is solved by employing implicit techniques for computational efficiency. This approach offers a reliable model for

progressive failure and strength prediction of VAT composites with arbitrary layup under complex quasi-static loading.

REFERENCES

[1] Silling, S. A., 2000, Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 48, pp. 175–209.

[2] Silling, S. A, Epton, M., Weckner, O., Xu, J., and Askari, A., 2007, Peridynamics States and Constitutive Modeling, *Journal of Elasticity*, Vol. 88, pp. 151-184.

[3] Madenci, E. and Oterkus, E., 2014, Peridynamic Theory and Its Applications, *Springer*, Boston, MA.

[4] Madenci, E., Dorduncu, M., Barut, A. and Phan, N., 2018, A state-based peridynamic analysis in a finite element framework, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 195, pp. 104-128.

[5] E. Madenci, M. Dorduncu, A. Barut, and N. Phan, 2018, Weak form of peridynamics for nonlocal essential and natural boundary conditions, *Comp. Meth. Appl Mech.*, Vol. 337, pp. 598–631.

[6] Madenci, E., Yaghoobi, A., Barut, A., Dorduncu, M., and Phan, N., 2021, A peridynamic approach for modeling composite laminates, *AIAA Scitech 2021 Forum*, 1168

[7] Gurdal, Z. , Tatting, B. , Wu, C., 2008, "Variable stiffness composite panels: effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response," *Compos. Part A*, Vol. 39, pp. 911–922 .

[8] Jones, R. M., 1998, Mechanics of Composite Materials, *Taylor & Francis*, Philadelphia, PA.

[9] Oterkus, E. and Madenci, E. 2012, Peridynamic analysis of fiber reinforced composite materials, *J. Mech Mater Struct*, Vol. 7, pp. 45-84.

[10] Madenci, E., Barut, A., and Futch, M., 2016, Peridynamic Differential Operator and its Applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 304, pp. 408–451.

[11] Madenci, E., Barut, A., Dorduncu, M., 2019, Peridynamic Differential Operator for Numerical Analysis, *Springer*, New York.

[12] Madenci E, Dorduncu M, Barut A, Futch M. 2017, Numerical solution of linear and nonlinear partial differential equations using the peridynamic differential operator, *Numer Methods Partial Differential Equations.*, Vol. 33, pp.1726-1753.

[13] Hu, Y. L. and Madenci, E., 2016, Bond-based peridynamic modeling of composite laminates with arbitrary fiber orientation and stacking sequence, *Composite Structures*, Vol. 153, pp. 139-175.

[14] Hu, Y. L. and Madenci, E., 2017, Peridynamics for fatigue life and residual strength prediction of composite laminates, *Composite Structures*, Vol. 160, pp. 169-184.

[15] Hashin, Z.,1980, Failure criteria for unidirectional fiber composites, *J. Appl Mech*, Vol. 47, pp. 329–334.

[16] Silling, S. A. and Askari, E., 2005, A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics, *Computers & Structures*, Vol. 83, pp. 1526-1535.

GİYİLEBİLİR DIŞ İSKELET İÇİN KULLANILACAK YAPAY KASLARIN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Ali Osman Güney [1], Hüseyin Lekesiz [2]
[1,2] Bursa Teknik Üniversitesi, Bursa

ABSTRACT

Artificial muscles are structures that contract in a similar way to a human muscle when it is under load, reducing its length, and can return to its former state after lifting the load. The use of artificial muscle offers significant advantages, for wearable exoskeletons especially military and rehabilitation purposes. In this study, finite element analyses of pneumatic artificial muscles are developed to drive a lower extremity wearable external skeleton for rehabilitating in accordance with the human body. Firstly, for this purpose, the designs of double-layered straight fibre reinforced pneumatic muscles with different fibre numbers are performed. Then, as the material specifications in the modelling phase, the hyperelastic material model for rubber that is matrix material is used as reinforced fibres aramid's material properties for fibres used. The finite element analyses of pneumatic muscles under the different pressure values is performed. As the results are examined, the displacement obtained and the amount of load that the muscles can carry in response to the given pressure is compared.

Keywords: pneumatic artificial muscle, fibre reinforcement, finite element analysis.

ÖZET

Yapay kaslar, yük altında iken insan kasına benzer şekilde kasılarak boyu kısalan ve yük üzerinden kalktıktan sonra ise tekrar eski haline geri dönebilen yapılardır. Özellikle askeri ve rehabilitasyon amaçlı giyilebilir dış iskeletler için yapay kas kullanımı önemli avantajlar sunmaktadır. Bu çalışmada, insan vücudu ile uyumlu çalışabilecek rehabilite amaçlı bir alt ekstremite giyilebilir dış iskeleti tahrik etmek için geliştirilecek pnömatik yapay kasların sonlu elemanlar analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla ilk olarak farklı fiber sayılarına sahip çift katmanlı düz fiber takviyeli pnömatik kasların tasarımları gerçekleştirilmiştir. Daha sonra modelleme aşamasında malzeme özellikleri olarak, matris malzeme olan kauçuk için hiperelastik malzeme modeli, takviyelendirici olarak kullanılan fiberler için aramid'in malzeme özellikleri kullanılmıştır. Ardından farklı basınç değerleri altında pnömatik kasların sonlu eleman analizleri gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar incelenirken verilen basınca karşılık elde edilen yer değiştirmeler ve kasların taşıyabileceği yük miktarları incelenmiştir.

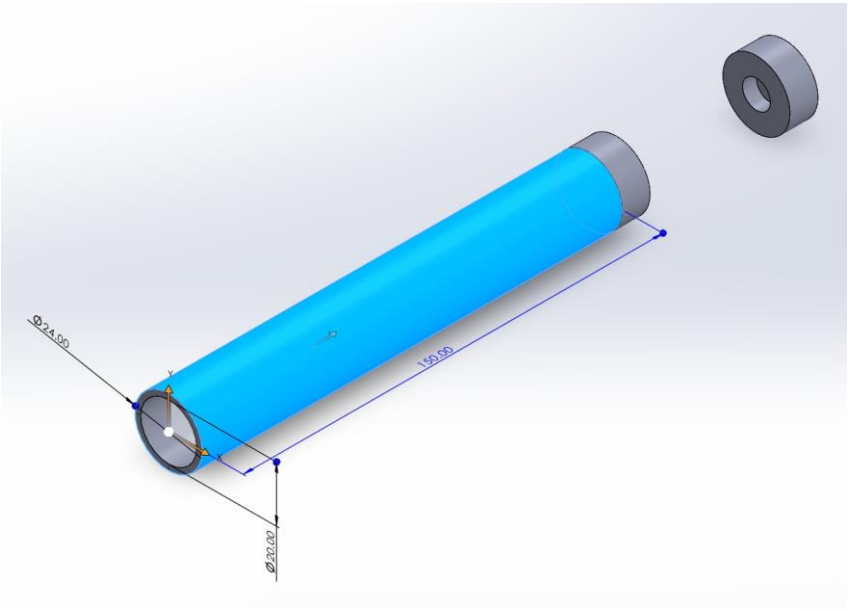
Anahtar kelimeler: pnömatik yapay kas, fiber takviye, sonlu eleman analizi

GİRİŞ

Esneklik, hafiflik gibi avantajlar sağladığı için yapay kasların robotikte aktüatör olarak kullanımı gün geçtikçe önem kazanmaktadır [1]. Yapay kaslar çalışma mantığı olarak, yük altında iken insan kasına benzer şekilde kasılarak boyu kısalan ve yük üzerinden kalktıktan sonra ise tekrar eski haline geri dönebilen kompozit yapılardır. Özellikle askeri ve rehabilitasyon amaçlı giyilebilir dış iskeletler için yapay kas kullanımı önemli avantajlar sunmaktadır. Literatüre bakıldığında, askeri alandaki çalışmalar doğrudan bir askerin ağırlık kaldırma kapasitesinin arttırılmasına, rehabilitasyon amaçlı çalışmalar ise büyük oranda gücünü yitirmiş hastalara yönelik çalışmalardır [2]–[7]. Bu nedenle yapay kasın insan kasına birebir benzer davranış göstermesi beklenmemekte, yapay kaslar daha çok güç kaynağı olarak kullanılmaktadır. Ancak dış iskeletlerin tamamen gücünü yitirmemiş, belirli oranda desteğe ihtiyacı olan hastalarda kullanımı mümkündür ve bu konu önemli bir potansiyele sahiptir. Bu tarz dış iskeletler için yapay kasın her yönden insan kasına benzer davranış göstermesi önem kazanmaktadır ancak literatürde bu çalışmalarda bir eksiklik bulunmaktadır.

MATERYAL ve METOT

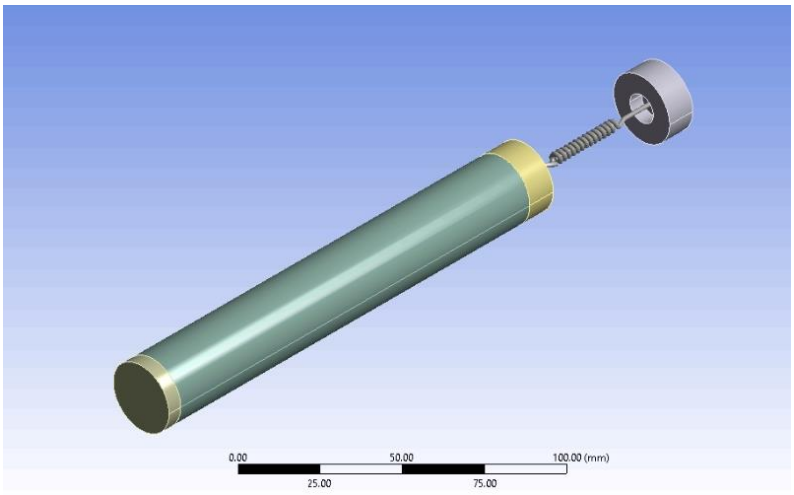
Bu çalışmada, eklemlerde belirli oranda traksiyon sağlayacak bir alt ekstremite dış iskeletinde kullanılması planlanan bir yapay kasın tasarımına odaklanılmıştır. Bu nedenle, kasın mekanik davranış olarak doğal kasa benzerliği ve daha düşük yüklerde daha hassas kontrol sağlaması hedeflenmiştir. Bu amaçla öncelikle farklı fiber sayılarına sahip (8-16-24-32) çift katmanlı düz fiber takviyeli yapay kasların tasarımları yapılmıştır. Numunelerdeki fiber takviyeler her modelde eşit aralıklarla yerleştirilmiştir. Uzva göre (dolayısıyla etkin kas grubuna göre) ve yürümenin farklı safhalarına göre değişecek yük taşıma kabiliyetlerinden dolayı hangi fiber takviyeli modelin kullanımının en uygun olabileceğinin tespit edilmesi amacıyla bu analizlere temel oluşturması için farklı sayıda fiber takviyeli modeller oluşturulmuştur ve sonlu elemanlar yöntemi ile analizleri gerçekleştirilmiştir. Analizlerde matris malzeme hiperelastik olarak, takviyelendirici fiberler ise aramid fiber olarak tanımlanmıştır. Buradaki tanımlamalar için kullanılan değerler (yoğunluk 1400 kg/m^3, elastisite modülü 62 GPa, Poisson oranı 0.44) Ramadhan'ın çalışmasından alınmıştır [8]. Analizlerin gerçekleştirildiği modellerin geometrik ölçüleri Şekil 1'de gösterilmiştir. Silindirik tıpaların hepsinin çapı 24 mm'dir. Fiber çapları 0.25 mm, fiber boyları da 150 mm'dir.



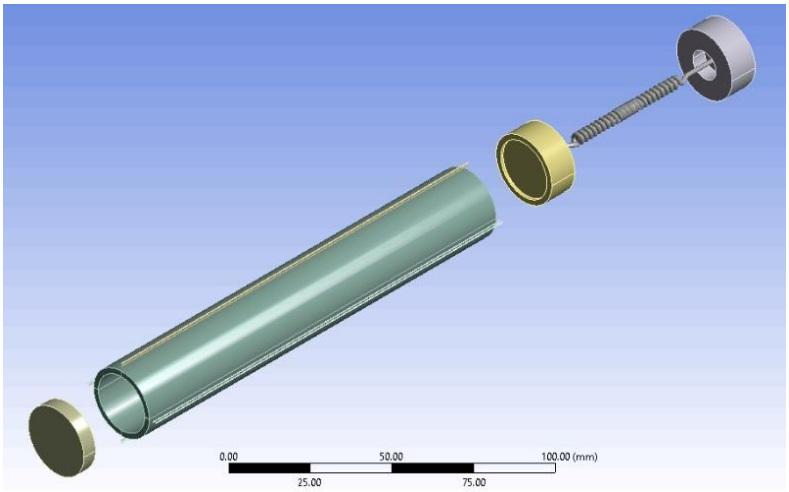
Şekil 1. Kurulan modellerin geometrik ölçüleri

Modeller oluşturulurken yapay kasın bir ucu tıpaya bağlı, diğer ucundaki çelik tıpanın ise bir yay vasıtasıyla başka bir çelik tıpaya bağlandığı durum Şekil 2'de gösterilmiştir. Buradaki sınır şartları olarak sol ve en sağdaki çelik tıpalar uçlarından sabitlenmiştir. Tasarımda bu şekilde bir yay tanımlaması yapılmasının sebebi, insan vücudundaki tendonların yay gibi düşünülebileceğinden dolayıdır. Yapılan tasarımın sağ tarafındaki yay için insan yürüyüşü sırasında etkin gruplardan olan hamstring tendonunun stiffness değeri olan 174 N/mm verilmiştir [9]. Ardından iç basınç olarak silindirik kauçuk tüpün iç yüzeyi ve verilen basıncın etki edeceği tıpaların iç yüzeyleri seçilerek sınır şartlarının tanımlanması gerçekleştirilmiştir. Basınç değerlerinin gerçeğe uygun şekilde modele aktarılabilmesi için tıpaların tasarımı Şekil 2'de gösterilmiştir. Burada, yapılan tasarım ile basıncın, tıpaların tüm iç yüzeyine değil, sadece tüpün iç yüzeyinden gelecek basınçlı havanın temas edeceği tıpaların iç yüzeyine gelmesi sağlanmıştır. Ayrıca tıpalar ile silindirik yapay kasın (fiber uçları da dahil) ve fiberler ile kauçuğun mükemmel şekilde yapıştığı durum olan "bonded contact" temas tipi ayarlanmıştır. Bu çalışma ile farklı iç basınçlara karşılık yapay kaslarda meydana gelen yer değiştirmeler ve yapay kasların yük taşıma kabiliyetleri elde edilmiştir.

KURULAN MODELLER, MESH YAKINSAMASI ve MESH YAPISI



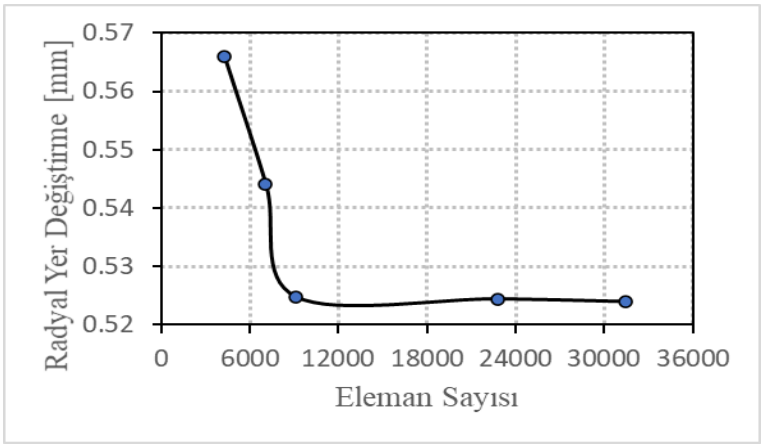
a)



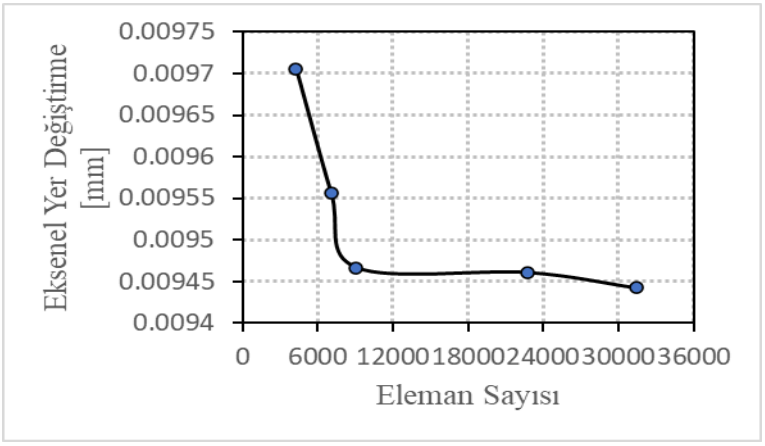
b)

Şekil 2. a) Kurulan modelin montajlı hali, b) Modeli oluşturan elemanların ayrıntılı gösterimi

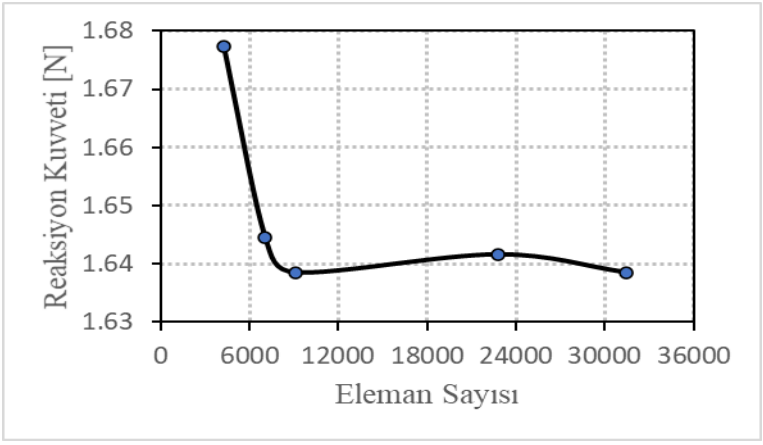
Analizlere başlamadan önce mesh yakınsama işlemi gerçekleştirilmiştir. Mesh yakınsaması ile ilgili elde edilen grafikler (8 fiber takviyeli model için) Şekil 3'te gösterilmiştir. Mesh yakınsaması sonrasında optimum mesh yapısına göre 8 fiber takviyeli model için elde edilen modeldeki eleman sayısı 22772'dir. Şekil 4'te 8 fiber takviyeli modelin mesh yapısı gösterilmiştir.



a)

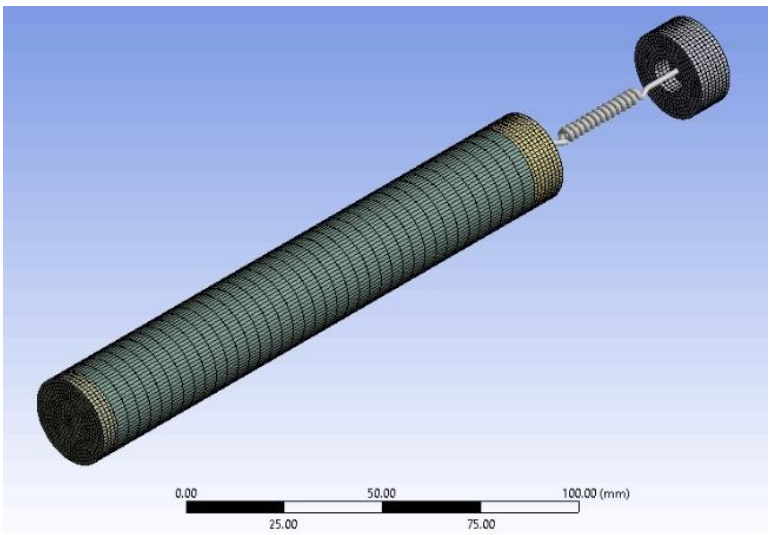


b)



c)

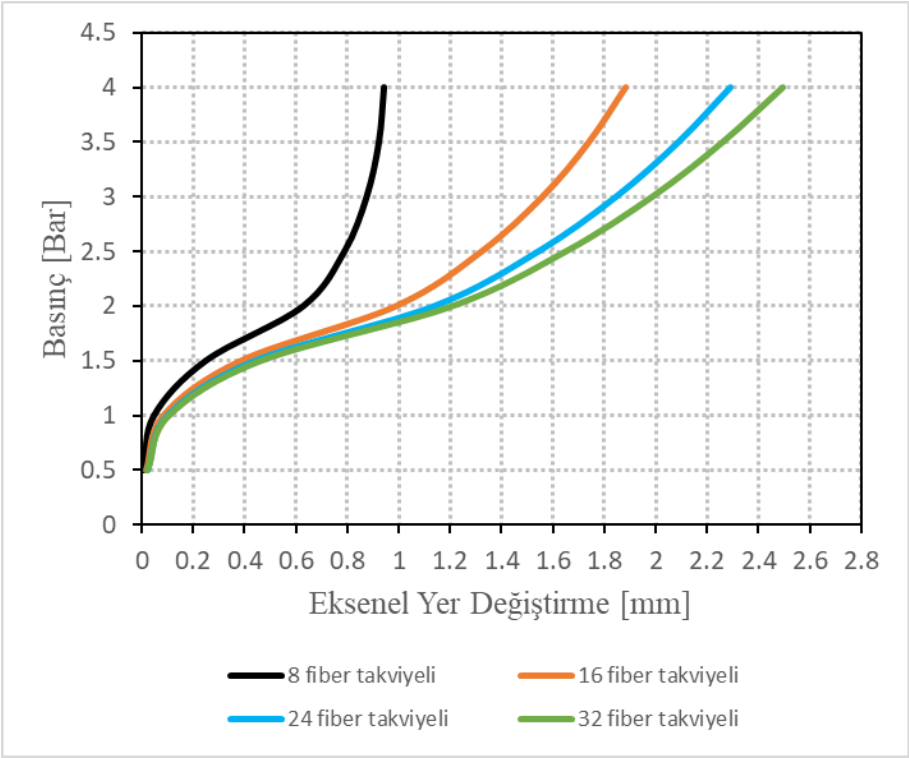
Şekil 3. 8 fiber takviyeli model için; a) Radyal yer değiştirme için mesh yakınsama grafiği,
b) Eksenel yer değiştirme için mesh yakınsama grafiği,
c) Reaksiyon kuvveti için mesh yakınsama grafiği



Şekil 4. 8 fiber takviyeli modelin mesh yapısı

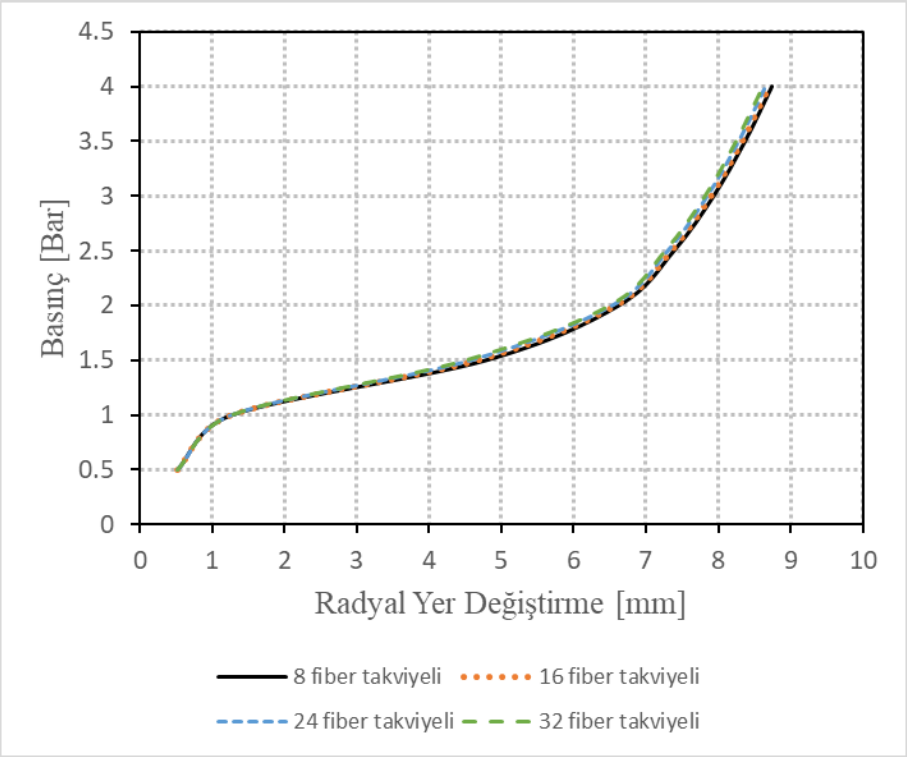
KURULAN MODELLERİN ANALİZ SONUÇLARI

Şekil 5'te çift fiber katmanlı yapay kaslar için basınç-eksenel yer değiştirme karakteristiği sunulmuştur. Bu yapay kaslar, 0.5 Bar basınçtan başlayarak 0.5 Bar'lık artışlarla 4 Bar'a kadar iç basınca maruz bırakılmıştır. Şekil 5'te görüldüğü gibi basınç değeri arttıkça yapay kasın boyu kısalmaktadır. Yapay kaslar fiber takviye sayısına göre incelenirse, takviye sayısı arttıkça daha fazla fiber, numunede çeki etkisi oluşturacağından dolayı boyda daha fazla kısalma meydana gelmektedir. Ayrıca bunun sonucu olarak insan kasına benzer şekilde daha fazla şişmektedir.



Şekil 5. Fiber takviyeli yapay kasların sonlu eleman analizleri sonuç grafiği (basınç-eksenel yer değiştirme)

Yapay kasların basınç-radyal yer değiştirme davranışı Şekil 6'da gösterilmiştir. Şekil 6'daki grafikte takviye sayısının artmasının yapay kasın radyal yer değiştirmesinde kayda değer bir etkisinin olmadığı görülmekte ve 4 Bar basınç değerinde yapay kaslarda ortalama 8.5 mm kadar şişme meydana gelmektedir.

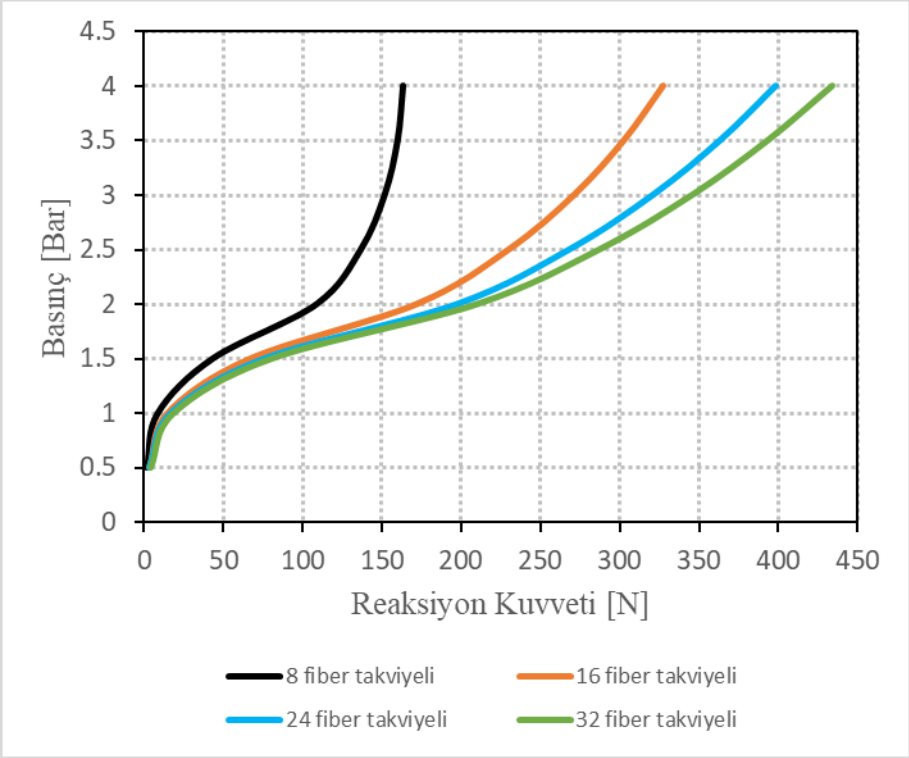


Şekil 6. Fiber takviyeli yapay kasların sonlu eleman analizleri sonuç grafiği (basınç-radyal yer değiştirme)

Şekil 5 ve Şekil 6'da verilen grafikler incelendiğinde 8 fiber takviyeli yapay kasa iç basınç verilmesi durumunda eksenel yer değiştirme ile radyal yer değiştirme arasında (4 Bar'daki durum için) 1/9.3 gibi bir oran olduğu görülmektedir. Dolayısıyla takviye sayısının en az olduğu bu durum için radyal yer değiştirme, eksenel yer değiştirmeye oranla çok daha fazladır. 16 fiber takviyeli yapay kasa iç basınç verilmesi durumunda eksenel yer değiştirme ile radyal yer değiştirme arasında (4 Bar'daki durum için) 1/4.6 gibi bir oran olduğu görülmektedir. Dolayısıyla radyal yöndeki yer değiştirme hemen hemen sabit kaldığı için fiber sayısı arttıkça yapay kasın çeki etkisinin arttığı buradan da anlaşılmaktadır. 24 fiber takviyeli yapay kasa iç basınç verilmesi durumunda eksenel yöndeki yer değiştirme ile radyal yöndeki yer değiştirme arasında (4 Bar'daki durum için) 1/3.8 gibi bir oran olduğu görülmektedir. Dolayısıyla fiber sayısı arttıkça yapay kasın çeki etkisinin fiberler ile artmaya devam ettiği anlaşılmaktadır. 32 fiber takviyeli yapay kasa iç basınç verilmesi durumunda eksenel yöndeki yer değiştirme ile radyal yer değiştirme arasında (4 Bar'daki durum için) 1/ 3.5 gibi bir oran olduğu görülmektedir. Elde edilen bu grafiklere göre, fiber sayısı ve basınç artışının eksenel yöndeki boy kısalmasını arttırdığı söylenebilir.

Yapay kasların basınç-kuvvet davranışı Şekil 7'de gösterilmiştir. Şekil 7'deki grafikte 8 fiber takviyeli 4 Bar basınç altındaki durum için yaklaşık 165 N'luk bir kuvvet taşıyabildiği

görülmektedir. 16 fiber takviyeli modelin 4 bar basınç altında yaklaşık 325 N'luk bir kuvvet taşıyabilmektedir. Dolayısıyla fiber sayısının artması ile hem eksenel yer değiştirmede artış, buna bağlı olarak da yapay kasın taşıyabileceği yükte bir artış meydana gelmiştir. Fiber takviye sayısı 16 olduğunda ise 4 Bar basınç altında yaklaşık 400 N'luk bir kuvvet taşıyabilmektedir. Fiber takviye sayısı 32 fibere çıktığında ise 4 Bar basınç altında yaklaşık 435 N'luk bir kuvvet taşıyabilmektedir. Dolayısıyla basınç-kuvvet diyagramı incelendiğinde, modellerdeki fiber sayısının artmasının yapay kasların yük taşıma kapasitesini arttırdığı söylenebilir.



Şekil 7. Fiber takviyeli yapay kasların sonlu eleman analizleri sonuç grafiği (basınç-kuvvet)

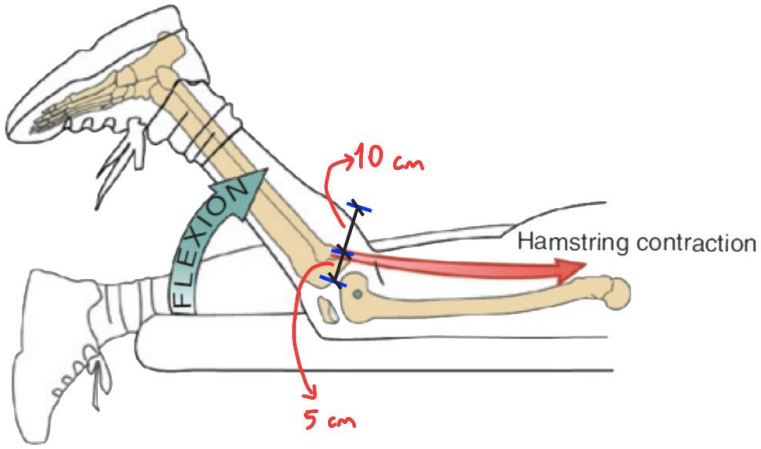
TARTIŞMA ve SONUÇ

Tasarlanacak giyilebilir dış iskeletin direkt olarak insan ile uyumlu çalışması gerektiğinden dolayı insan vücudunun alt ekstremitesindeki kaslarda ne kadar kuvvet meydana geliyorsa, buradaki yapay kaslarda da insan vücuduna destek olabilecek seviyelerde yük taşıması gerekmektedir. Bu çalışmada, ileriki çalışmalarda kurulacak matematiksel modeller ile elde edilecek kas kuvvetlerinin karşılaştırılması için bir temel oluşturması amaçlanmıştır. Bu sebeple farklı fiber sayılarına sahip (8-16-24-32) yapay kas modellerinin sonlu elemanlar analizleri gerçekleştirilmiştir.

Gerçekleştirilen analizlerde fiber sayısı arttıkça eksenel yer değiştirme ile radyal yer değiştirme arasındaki oranın (4 Bar'daki durum için) 1/9.3'ten, 1/3.5 değerine kadar yükseldiği görülmektedir. Ayrıca grafiklerde de görüldüğü gibi fiber sayısının artmasının radyal yer değiştirmeler için kayda değer bir etkisinin olmadığı anlaşılmaktadır. Eksenel yer değiştirme ile radyal yer değiştirme arasındaki oranı önemli ölçüde etkileyen parametre fiber sayısının artması ile fiberlerin daha fazla yük taşıyarak eksenel yönde çeki etkisi oluşturmasıdır. Bu sayede yapay kasta eksenel yönde boyda daha fazla kısalma meydana gelmekte ve bu durum da eksenel yer değiştirme ile radyal yer değiştirme arasındaki oranı değiştirmektedir. Ayrıca yukarıda verilen grafiklerde de görüldüğü gibi yapay kasın

taşıyabileceği yük miktarı, fiber sayısının veya verilen basıncın arttırılmasıyla birlikte arttırılabilir.

Normal bir yürüyüş çevrimi ele alınırsa, yürüyüşün her bir safhası için gerekli olacak her bir kas kuvveti değişkenlik gösterecektir. Dolayısıyla konunun daha özelinde, yürüyüş çevrimi sagital düzlemde incelenirken diz iç mafsal maksimum tork değerinin yaklaşık 0.4 Nm/kg olduğu görülebilir [10]. Dolayısıyla 80 kg'lık bir insan için 32 Nm'lik tork değeri meydana gelmektedir. Tork hesaplanırken, dizdeki kas grubu ile diz merkezi arasındaki mesafe 5 cm olarak düşünülebilir [11]. Fakat yapılan kurulan modellerdeki bu mesafe, insandaki kaslara destek olacağı için daha fazla olacaktır. Bahsedilen mesafe, ileride yapılacak tasarımlara göre değişebilecek olmakla birlikte 10 cm olarak kabul edilirse 320 N'luk bir kas kuvveti oluşmaktadır. Şekil 8'de, bahsedilen mesafeler, alt ekstremite üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 8. Alt ekstremite üzerinde kas mesafeleri

$$m = 80\ kg$$

$$T_{max} = 0.4\frac{Nm}{kg} \times 80\ kg = 32\ Nm$$

$$l = 10\ cm = 0.1\ m$$

$$32\ Nm = F \times 0.1\ m \Rightarrow F = 320\ N$$

Gerçekleştirilen analizlerde bulunan kuvvetlere bakılarak insan kasına destek olabileceği, dolayısıyla bu aşamada bu tasarımların yük taşıma noktasında amaca hizmet edeceği söylenebilir. Ayrıca, gerçek kasların kasılma hızı ile taşıyabildiği yüklerin değiştiği bilinmektedir. Dolayısıyla benzer durumun yapay kaslar için de incelenmesi gerekmekte ve bu durumlar için farklı modellerin ele alınması önem arz etmektedir.

Bu sonuçlar sayesinde, insan hareketi ile uyumlu şekilde çalışacak bir sistem için hangi özelliklerde, hangi uzuvlarda kaç adet yapay kas kullanılması gerektiği gibi giyilebilir dış iskeletin hareketinde kritik öneme sahip olan parametrelerin elde edilmesi ve/veya sonraki çalışmalarda karşılaştırma yapılabilmesi için temel oluşturması hedeflenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Y. Gong, C. Ren, X. Wang, and B. Zhang, "Development and performance analysis of the flexible pneumatic artificial muscle," *M2VIP 2016 - Proc. 23rd Int. Conf. Mechatronics Mach. Vis. Pract.*, 2017, doi: 10.1109/M2VIP.2016.7827280.

[2] B. Chen *et al.*, "Recent developments and challenges of lower extremity exoskeletons," *J. Orthop. Transl.*, vol. 5, pp. 26–37, 2016, doi: 10.1016/j.jot.2015.09.007.

[3] A. M. Dollar and H. Herr, "Lower extremity exoskeletons and active orthoses: Challenges and state-of-the-art," *IEEE Trans. Robot.*, vol. 24, no. 1, pp. 144–158, 2008, doi: 10.1109/TRO.2008.915453.

[4] Y. Keijiro, H. Kazuhito, I. Mineo, and M. Takashi, "Development of Power Assisting Suit for Assisting Nurse Labor," *JSME Int. J. Ser. C*, no. 3, pp. 703–711, 2002, doi: doi:10.1299/jsmec.45.703.

[5] M. I. Chandrapal, "Intelligent Assistive Knee Orthotic Device Utilizing Pneumatic Artificial Muscles," (Doctoral dissertation). Retrieved from https://ir.canterbury.ac.nz/handle/10092/7475, 2012.

[6] M. P. de Looze, T. Bosch, F. Krause, K. S. Stadler, and L. W. O'Sullivan, "Exoskeletons for industrial application and their potential effects on physical work load," *Ergonomics*, vol. 59, no. 5, pp. 671–681, 2016, doi: 10.1080/00140139.2015.1081988.

[7] T. Deaconescu and A. Deaconescu, "Pneumatic Muscle Actuated Isokinetic Equipment for the Rehabilitation of Patients with Disabilities of the Bearing Joints," *Lect. Notes Eng. Comput. Sci.*, vol. 2175, no. 1, pp. 1823–1827, 2009.

[8] A. A. Ramadhan, A. R. A. Talib, A. S. M. Rafie, and R. Zahari, "Experimental and Numerical Simulation of Energy Absorption on Composite Kevlar29/Polyester Under High Velocity Impact," *J. Adv. ...*, vol. 2, pp. 52–67, 2012, [Online]. Available: http://www.sign-ific-ance.co.uk/dsr/index.php/JASER/article/view/180.

[9] J. J. Elias, S. P. Rai, and W. J. Ciccone, "In vitro comparison of tension and stiffness between hamstring tendon and patella tendon grafts," *J. Orthop. Res.*, vol. 26, no. 11, pp. 1506–1511, 2008, doi: 10.1002/jor.20677.

[10] D. A. Neumann, *KINESIOLOGY of the MUSCULOSKELETAL SYSTEM Foundations for Rehabilitation*. Elsevier, 2018.

[11] M. Nordin and V. H. Frankel, *Basic Biomechanics of the Musculoskeletal System*. Wolters Kluwer Health, 2012.

ON THE TORSIONAL WAVES DISPERSION PROPAGATING IN A BI-LAYERED HOLLOW CYLINDER WITH INHOMOGENEOUS TERMAL PRE-STRESSES

Surkay D. Akbarov[1,2] and Emin T. Bagirov[2]

[1] Department of Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Yildiz Technical University, Istanbul

[2] Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy of Science of Azerbaijan, 37011, Baku, Azerbaijan

ABSTRACT

The paper makes attempt to study the influence of the inhomogeneous initial thermal stresses caused by the heating or cooling of the inner and outer surfaces of the bi-layered hollow cylinder on the dispersion of the torsional waves propagating in this cylinder. The problem is formulated within the scope of the second version of the three-dimensional linearized theory of elastic waves in initially stressed bodies, according to which, the initial inhomogeneous thermal stresses are determined within the scope of the classical uncoupled linear theory of thermo-elasticity. The discrete-analytical solution method is employed for solution to the governing field equations. Numerical results are presented for the first mode and as a result of the discussions of these results, concrete conclusions are established on the influence of the initial thermal stresses on the torsional wave propagation velocity.

Keywords: torsional waves; initial thermal stresses; wave dispersion;

INTRODUCTION

The torsional wave propagation and dispersion in the bi-material hollow and solid cylinders was studied in the papers [1 - 4] within the scope of classical linear elastodynamics. As a result of these studies it is established that the first lowest non-dispersive mode of the torsional waves propagating in the solid and hollow cylinder made of homogeneous material becomes the dispersive mode in the bi-material solid and hollow cylinders. At the same time, it is established that the wave propagation velocity c in this mode is limited with the shear wave propagation velocities of the constituents of the cylinder, i.e., $\min\{c_2^{(1)};c_2^{(2)}\} < c < \max\{c_2^{(1)};c_2^{(2)}\}$, where $c_2^{(1)}$ ($c_2^{(2)}$) is the shear wave propagation velocity in the outer (inner) layer material of the cylinder. Up to now, a considerable number of investigations have also been made on the torsional wave dispersion in pre-stressed bi-layered cylinders the review of which can be found in [5]. However in these investigations it is assumed that the pre-stresses (or initial stresses) initial stresses are homogeneous ones. Recently the paper [6] studied the influence of the

inhomogeneous initial stresses in the bi-layered hollow cylinder and it is assumed that these stresses are caused by the hydrostatic pressures acting on the interior and outer free surfaces of the cylinder. In the present work the investigations started in the paper [6] is continued for the case where the inhomogeneous initial stresses are thermal ones and are caused by the heating or cooling of the inner and outer surfaces of the bi-layered hollow cylinder.

FIELD EQUATIONS AND PROBLEM FORMULATIONS

We consider the bi-layered hollow cylinder and associate with the central axis of this cylinder the cylindrical $Or\theta z$ and Cartesian $Ox_1x_2x_3$ system of coordinates. For distinguishing of the quantities related to the inner and outer layers of the cylinder, we use the upper indices (2) and (1), respectively. We suppose that in the initial state (i.e. before the dynamic excitation of the cylinder), as a result of the heating or cooling of the inner or outer surfaces of the cylinder, the non-homogeneous temperature field in the layers of the cylinder appears which in turn causes the inhomogeneous thermal stresses to appear. This "heating or cooling" of the inner and outer surfaces of the cylinder is made through the change of the temperatures T_i and T_o of these surfaces, respectively. The stresses caused by the mentioned temperature field are determined through the analytical expressions given in [7]. Thus, after this determination the propagation of the torsional waves in the bi-layered hollow cylinder is described by the following equations of the so-called 3D linearized theory of elastic waves in initially stressed bodies.

$$\frac{\partial t_{r\theta}^{(j)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(t_{r\theta}^{(j)}+t_{\theta r}^{(j)}\right)+\frac{\partial t_{z\theta}^{(j)}}{\partial \mathrm{z}}=\rho^{(j)}\frac{\partial^2 u_{\theta}^{(j)}}{\partial t^2}. \tag{1}$$

In () the following notation is used:

$$t_{r\theta}^{(j)}=\sigma_{r\theta}^{(j)}+\sigma_{rr}^{(j)0}\frac{\partial u_{\theta}^{(j)}}{\partial r},\ t_{\theta r}^{(j)}=\sigma_{r\theta}^{(j)}-\sigma_{\theta\theta}^{(j)0}\frac{u_{\theta}^{(j)}}{r},\ t_{z\theta}^{(j)}=\sigma_{z\theta}^{(j)}+\sigma_{zz}^{(j)0}\frac{\partial u_{\theta}^{(j)}}{\partial \mathrm{z}}. \tag{2}$$

We add to the foregoing equations of motion the linearized elasticity relations

$$\sigma_{r\theta}^{(j)}=\mu^{(j)}\left(\frac{\partial u_{\theta}^{(j)}}{\partial r}-\frac{u_{\theta}^{(j)}}{r}\right),\ \sigma_{\theta \mathrm{z}}^{(j)}=\mu^{(j)}\frac{\partial u_{\theta}^{(j)}}{\partial \mathrm{z}}. \tag{3}$$

Also, we add the following boundary and contact conditions to the foregoing equations .

$$t_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=R}=0,\ t_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=R+h^{(1)}+h^{(2)}}=0,\ t_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=R+h^{(1)}}=t_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=R+h^{(1)}},\ u_{\theta}^{(2)}\Big|_{r=R+h^{(1)}}=u_{\theta}^{(1)}\Big|_{r=R+h^{(1)}}. \tag{4}$$

In (1) – (4) $h^{(1)}$ ($h^{(2)}$) is a thickness of the external (internal) layer, R is the inner radius of the inner layer, $\sigma_{rr}^{(j)0}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(j)0}$ and $\sigma_{zz}^{(j)0}$ are the initial thermal stresses which are the functions of r. The eigenvalue problem (1) – (4) is solved by employing the discrete analytical method developed in the paper [6], according to which, the regions $[R, R+h^{(1)}]$ and $[R+h^{(1)}, R+h^{(1)}+h^{)}]$ are divided into to certain number sub-regions in each of which the initial stresses are taken as homogeneous ones. At the same time it is assumed that between the sub-regions the complete contact conditions satisfy. Using these conditions the dispersion

equations are obtained and this equation is solved numerically, as a result of which, the dispersin curves are constructed.

NUMERICAL RESULTS

Assume that the materials of the layers of the cylinder are selected as Aluminum (*Al*) and Tungsten (*Tg*), for which the values of the mechanical constant, i.e. the shear modulus, the material density, Poisson's ratio and the shear wave propagation velocity, according to [6], are: $\mu_{Al} = 28\,GPa$, $\mu_{Tg} = 133.98\,GPa$, $\rho_{Al} = 2770\,kg/m^3$, $\rho_{Tg} = 19300\,kg/m^3$, $c_{2Al} = 3179\,m/s$ and $c_{2Tg} = 2630\,m/s$, respectively. We use the subscript *Al* or *Tg* to indicate the values belonging to the layer made of aluminum or tungsten.

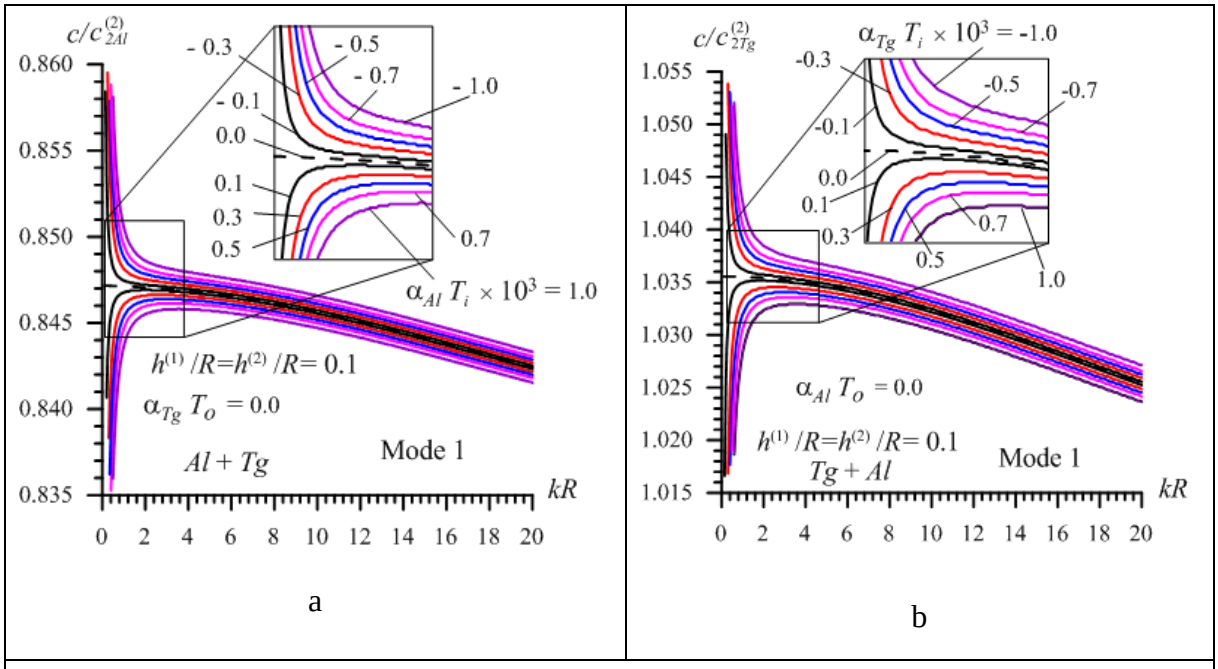


Fig. 1. The influence of the heating and cooling of the inner surface of the bi-layered cylinders *Al* + *Tg* (a) and *Tg* + *Al* (b) on the dispersion curves of the first mode of the torsional waves

Moreover, the symbol *Al* +*Tg* (*Tg* +*Al*) will mean that the inner layer material is aluminum (tungsten), however, the outer layer material is tungsten (aluminum). For estimation of the magnitudes of the non-homogeneous thermal stresses for the case *Al* + *Tg* , the values $\alpha_{Al}T_i$ and $\alpha_{Tg}T_o$ will be used, however, for the case *Tg* +*Al*, the values $\alpha_{Tg}T_i$ and $\alpha_{Al}T_o$ will be used. According to the reference [8], it will be assumed that each of $\alpha_{Al}T_i$; $\alpha_{Tg}T_o$; $\alpha_{Tg}T_i$ and $\alpha_{Al}T_o$ can be equal to 0.000; 0.0001; 0.0003; 0.0005; 0.0007; and 0.001, where α_{Al} (α_{Tg}) is the coefficients of linear thermal expansion of *Al* (of *Tg*). Moreover, according to the reference [9], the ratio of the coefficients of the thermal conductivity κ_{Al}/κ_{Tg} is taken as 162/240, i.e. it will be assumed that $\kappa_{Al}/\kappa_{Tg} = 162/240$ where κ_{Al} (κ_{Tg}) is the coefficient of thermal conductivity of *Al* (of *Tg*). We will also assume that $h^{(1)}/R = h^{(2)}/R = 0.10$. Within these framework the dispersion curves obtained for the first are presented in Fig. 1.

CONCLUSIONS

According to the obtained numerical results it can be made the following concrete conclusions:

The considered type of inhomogeneous initial thermal stresses in the cylinder causes the cut-off frequencies in the first mode to appear under the cooling of the inner surface and under the heating of the outer surface; and these initial stresses cause the cut-off wavelengths in the first mode to appear under the heating of the inner surface and under the cooling of the outer surface of the cylinder;

The considered type of inhomogeneous initial stresses not only in the quantitative sense, but also in the qualitative sense influences the dispersion curves of the first mode;

The cooling (heating) of the inner surface causes to increase (decrease) the wave propagation velocity in the first mode;

The cooling (heating) of the outer surface of the cylinder causes to decrease (increase) the wave propagation velocity in the first mode.

REFERENCES

[1] A.E. Armenakas, Torsional waves in composite rods, *J. Acoust. Soc. Am.,* 39 (1965), 439 – 446.

[2] A.E. Armenakas, Propagation of harmonic waves in composite circular cylindrical rods, *J. Acoust. Soc. Am.*, 47(1970), 822 – 837.

[3] A.E. Armenakas, Propagation of harmonic waves in composite circular cylindrical shells. Pt. II. Numerical investigation, *AIAA J* 9 (1971), 599 – 605.

[4] R.N. Thurston, Torsional acoustic modes in clad rods, *IEEE Trans Sonics Ultrason*, 23(1976) 154 – 16.

[5] S.D. Akbarov, T. Kepceler, M.M. Egilmez "Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder", J. Sound Vibr 33, No 18/19, 4519 – 4537 (2011).

[6] S.D. Akbarov, E.T. Bagirov, Torsional wave dispersion in a bi-layered hollow cylinder with inhomogeneous initial stresses caused by internal and external radial pressures. *Structural Engineering and Mechanics*, 77(2021) 571-586. https://doi.org/10.12989/sem.2021.77.5.571.

[7] S. Timoshenko and J.N. Goodier, Theory of elasticity, McGraw-Hill, 1951.

[8] Engineering ToolBox, Coefficients of Linear Thermal Expansion. [online] Available at https://www.engineeringtoolbox.com/linear-expansion-coefficients-d_95.html, 2003.

[9] Engineering ToolBox, Thermal Conductivity of selected Materials and Gases. [online]Available at: https://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html. 2003.

22. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
06 - 10 Eylül 2021, Çukurova Üniversitesi

KAFES YAPILARIN JAYA ALGORİTMASI İLE ENKESİT VE ŞEKİL OPTİMİZASYONU

Sadık Özgür Değertekin[1], Luciano Lamberti[2] ve İbrahim Behram Uğur[1]
[1]Dicle Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Diyarbakır
[2]Dipartimento di Meccanica, Management e Matematica, Politecnico di Bari, Italy

ABSTRACT

In this study, an efficient metaheuristic method called Jaya algorithm (JA) is implemented for sizing and layout optimization of truss structures. The characteristic feature of JA is that it does not require specific tuning parameters. The method is based on approaching the best solution and getting away from the worst solution and has a simple formulation. The standard JA is modified in order to reduce the number of structural analyses in the optimization process in this study. The proposed JA is tested on a 47-bar power line structure designed by different optimization methods. The results prove that JA can obtain better designs than other metaheuristic and classical optimization methods in terms of optimized weight and number of structural analyses.

Keywords: truss structures; structural optimization; sizing and shape optimization; jaya algorithm

ÖZET

Bu çalışmada, kafes yapıların enkesit ve şekil optimizasyonu için etkili bir sezgisel optimizasyon yöntemi olan Jaya algoritması (JA) kullanılmıştır. JA'nın, ana özelliği algoritmaya özgü herhangi bir parametre kullanmamasıdır. Optimizasyon sürecinde JA'nın kullandığı ana strateji; mevcut en iyi çözüme yakınsamak ve mevcut en kötü çözümden uzaklaşmaktır. Bu çalışmada, optimum tasarımın daha kısa sürede bulunması amacıyla standart JA üzerinde birtakım değişiklikler yapılmıştır. Önerilen JA, farklı optimizasyon yöntemleriyle tasarımı yapılan 47 elemanlı enerji iletim hattı yapısı üzerinde test edilmiştir. Elde edilen sonuçlar JA'nın diğer sezgisel ve klasik optimizasyon yöntemlerine göre optimum ağırlık ve gerekli yapı analiz sayısı bakımından daha iyi bir performans gösterdiğini kanıtlamaktadır.

Anahtar kelimeler: kafes yapılar; yapısal optimizasyon; enkesit ve şekil optimizasyonu; jaya algoritması

GİRİŞ

Klasik optimizasyon yöntemlerine alternatif olarak ortaya çıkan sezgisel optimizasyon yöntemleri, bir yandan arama uzayında farklı bölgeleri araştırarak optimizasyon işleminin zenginleşmesini sağlarken, diğer yandan tasarım sınırlayıcılarını sağlayan çözümler üzerinde yoğunlaşarak olası daha iyi çözümleri elde etmeyi amaçlamaktadırlar. Burada farklı bölgelerin araştırılması global aramayı, sınırlayıcıları sağlayan çözümler üzerinde yapılacak araştırmalar ise lokal aramayı güçlendirmek amacıyla yapılmaktadır. Böylece, araştırma uzayında hem optimum çözüme yakın çözümleri içeren bölgelerin hızlı bir şekilde kontrol edilmesi hem de daha önceden araştırılmamış bölgelerdeki olası optimum çözümlerin araştırılması amaçlanmaktadır [1,2]. Tavlama benzeşimi [3], armoni arama [4] ve ateşböceği algoritması [2], mühendislik problemlerinin optimum çözümünde kullanılan sezgisel optimizasyon yöntemlerine örnek olarak verilebilir.

Jaya algoritması (JA) optimizasyon işleminde kendine özgü parametre kullanmayan ve yeni çözümleri sadece bir denklemle elde eden sezgisel bir optimizasyon yöntemidir. Yöntem ilk kez matematik fonksiyonlarının optimize edilmesi amacıyla Rao tarafından geliştirmiştir [5]. Yöntemin farklı mühendislik problemlerinin optimum tasarımında yanında kafes yapıların optimum tasarımında da kullanılmıştır [6,7].

Bu çalışmanın temel amacı; kafes yapıların eş zamanlı enkesit ve şekil optimizasyonunun JA ile icra edilmesidir. Yöntemin geçerliliğini göstermek için, literatürde farklı optimizasyon yöntemleri ile optimize edilen enerji iletim hattı yapısı olan 47 elemanlı düzlem kafes kullanılmıştır. JA ile diğer yöntemler kafes yapının optimizasyonu sonucu elde edilen optimum ağırlık ve optimum ağırlığın elde edilmesi için gereken yapı analiz sayısı bakımından kıyaslanmıştır. JA'dan elde edilen sonuçlar, yöntemin diğer sezgisel ve klasik optimizasyon yöntemlerinden daha güçlü olduğunu göstermektedir.

OPTİMİZASYON PROBLEMİNİN FORMÜLASYONU

Kafes yapılarının optimizasyon problemi, gerilme ve deplasman sınırlayıcıları altında yapı ağırlığının minimize edilmesi olarak tanımlanır. Bu problem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A = [A_1, A_2, \ldots\ldots, A_{ng}] \tag{1}$$

$$W(A) = \sum_{i=1}^{nm} \gamma_i A_i L_i \tag{2}$$

$$\sigma_i^c \le \sigma_i \le \sigma_i^t \qquad i=1,2,\ldots.,nm \tag{3}$$

$$\delta_{min} < \delta_j < \delta_{maks} \qquad j=1,2,\ldots..,nd \tag{4}$$

$$A_{min} < A_k < A_{maks} \qquad k=1,2,\ldots.,ng \tag{5}$$

burada A tasarım değişkenlerini (eleman gruplarını) içeren vektörü, *ng* kafes yapıdaki tasarım değişkeni sayısını, *W(A)* kafes yapı ağırlığını, *nm* kafes yapıdaki eleman sayısını, γ_i ve L_i sırasıyla *i-nci* elemanın özgül ağırlığını ve uzunluğunu, σ_i *i-nci* eleman için hesaplanan basınç veya çekme gerilmesini, σ_i^cve σ_i^t sırasıyla *i-nci* eleman için müsaade edilen basınç ve çekme gerilmelerini, δ_j *j-nci* serbestlik derecesinin deplasman değerini, δ_{min}ve δ_{maks} *j-nci* serbestlik derecesinin alabileceği minimum ve maksimum deplasman değerlerini, *nd* kafes yapıdaki toplam serbestlik derecesi sayısı, A_k *k-ncı* enkesit tasarım değişkenine ait enkesit alanı, A_{min}ve A_{maks} *k-ncı* enkesit tasarım değişkeninin alabileceği minimum ve maksimum enkesit alan değerlerini göstermektedir.

Sunulan çalışma hem enkesit hem de şekil tasarım değişkenlerini içerdiğinden, amaç fonksiyonu bu durum dikkate alınarak aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenmiştir:

$$W(A,X) = \gamma \sum_{i=1}^{nm} A_i \sqrt{(x_{i1} - x_{i2})^2 + (y_{i1} - y_{i2})^2 + (z_{i1} - z_{i2})^2} \qquad (6)$$

burada $x_{i1,2}$, $y_{i1,2}$*ve* $z_{i1,2}$ sırasıyla *i*'inci elemanın ilk (birinci) ve son (ikinci) ucunun düğüm noktasının *x, y ve z* koordinatlarını göstermektedir. Eleman gruplarına ait enkesit alanlarını içeren enkesit tasarım değişkenleri ile koordinatları değişebilen düğüm noktalarını içeren şekil tasarım değişkenlerinin toplamı olarak tanımlanan toplam tasarım değişkeni sayısı ise *ndv* ile gösterilmektedir.

Gerilme ve deplasman sınırlayıcılarını sağlayan tasarımları, bu sınırlayıcıları sağlamayan tasarımlardan ayırt etmek için cezalandırılmış amaç fonksiyonu kullanılmaktadır. Tasarım sınırlayıcılarının ihlal edilme derecesine göre cezalandırılmış amaç fonksiyonu aşağıdaki formda ifade edilir:

$$F_p(A,X) = (1 + \phi))^{\varepsilon} \times W(A,X) \qquad (7)$$

burada $F_p(A)$ cezalandırılmış amaç fonksiyonunu göstermektedir. ε ceza sabiti olup burada 2 olarak alınmıştır. ϕ gerilme ve deplasman sınırlayıcı ihlallerinin toplamı olarak şu şekilde hesaplanır:

$$\phi = \sum_{i=1}^{nm} \phi_\sigma^i + \sum_{j=1}^{nd} \phi_\delta^j \qquad (8)$$

burada ϕ_σ^i *i-nci* eleman için gerilme sınırlayıcısının ihlal değeri ve ϕ_δ^j *j-nci* serbestlik dercesi için deplasman sınırlayıcısının ihlal değeri olup şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
&\phi_\sigma^i = 0 && \text{eğer} \quad \sigma_i^c \le \sigma_i \le \sigma_i^t \\
&\phi_\sigma^i = \frac{|\sigma_i - \sigma^{t,c}|}{\sigma^{t,c}} && \text{eğer} \quad \sigma_i < \sigma_i^c \text{ veya } \sigma_i > \sigma_i^t \\
&\phi_\delta^j = 0 && \text{eğer} \quad \delta_{min} < \delta_j < \delta_{max} \\
&\phi_\delta^j = \frac{|\delta_j - \delta^{maks,min}|}{\delta^{maks,min}} && \text{eğer} \quad \delta_j < \delta_{min} \text{ veya } \delta_j > \delta_{max}
\end{aligned} \qquad (9)$$

JAYA ALGORİTMASI (JA)

JA, ilk kez sınırlayıcılı ve sınırlayıcısız matematiksel optimizasyon problemlerinin çözümü için önerilmiştir [5]. Kelime olarak "Jaya" Sanskritçe'de "Zafer" anlamına gelir. Yöntemin ana felsefesi, optimum çözümü arama süresince mevcut en iyi çözüme yaklaşmak ve mevcut en kötü çözümden uzaklaşmaktır. Diğer bir çok sezgisel optimizasyon yönteminden farklı olarak JA algoritmaya özgü bir parametre içermemekte, popülasyon sayısı (*ps*) ve maksimum iterasyon (it_{maks}) sayısı olmak üzere iki kontrol parametresi kullanmaktadır. *ps,* optimizayon işleminde her iterasyonda üretilen toplam kafes yapı sayısıdır. Popülasyondaki en küçük değere sahip cezalandırılmış amaç fonksiyonu en iyi tasarım (F_p^{en-iyi}), en büyük değere sahip cezalandırılmış amaç fonksiyonu ise en kötü tasarım ($F_p^{en-kötü}$) olarak tanımlanır.

$(A,X)_{k,l,it}$: *it*'inci iterasyonda *l*'inci tasarımın *k*'ıncı tasarım değişkenini (*A*: enkesit tasarım değişkenini, *X*: şekil tasarım değişkeni) göstermek üzere, JA'da her tasarım değişkeni aşağıdaki bağıntıyla modifiye edilerek yeni tasarıma için tasarım değişkenleri elde edilir:

$$(A,X)_{k,l,it}^{yeni} = (A,X)_{k,l,it} + r_{1,k,it}\left((A,X)_{k,en-iyi,it} - \left|(A,X)_{k,l,it}\right|\right) - r_{2,k,it}\left((A,X)_{k,en-kötü,it} - \left|(A,X)_{k,l,it}\right|\right) \qquad (10)$$

burada $(A,X)_{k,l,it}^{yeni}$: $(A,X)_{k,l,it}$'nın modifiye edilmesi elde edilen yeni tasarım değişkenini, $r_{1,k,it}$ ve $r_{2,k,it}$ [0,1] aralığında rastgele üretilen reel sayıları, $(A,X)_{k,en-iyi,it}$ ve $(A,X)_{k,en-kötü,it}$ sırasıyla *it'inci* iterasyondaki en iyi ve en kötü tasarımların *k'ncı* tasarım değişkenlerini ifade etmektedir.

Yeni tasarım (10) bağıntısıyla elde edildikten sonra, (1)-(9) bağıntılarıyla yeni tasarım için cezalandırılmış amaç fonksiyonu (F_p^{yeni}) hesaplanır. Eğer bu değer, mevcut tasarımın cezalandırılmış amaç fonksiyonundan (F_p^{mevcut}) küçükse ($F_p^{yeni} < F_p^{mevcut}$), yeni tasarım önceki tasarımın yerini alır, aksi durumda önceki tasarım değişmez. Bu işlem, popülasyondaki bütün tasarımlar için tekrarlanarak JA'da bir iterasyon tamamlanır. Maksimum iterasyon sayısına (it_{maks}) ulaşıncaya kadar aynı işlemler tekrar edilir. Maksimum iterasyon sayısına ulaşıldığında tasarım sınırlayıcılarını sağlayan minimum ağırlıklı kafes yapı optimum tasarım olarak atanır ve optimizasyon işlemi tamamlanır.

Önerilen JA'da, optimizasyon işleminde ilerlemeye sebep olmayacak tasarımlar için gereksiz yere yapı analizi yapılmaması amacıyla bir ön değerlendirme yapılmaktadır. Bu ön değerlendirmede yeni tasarımın ağırlığı, mevcut tasarımın ağırlığından daha büyük ve mevcut tasarım gerilme ve deplasman sınırlayıcılarını sağlıyorsa, yeni tasarım için yapı analizi yapılmamaktadır. Aksi durumda, (1)-(9) denklemleri ile yeni tasarım için cezalandırılmış amaç fonksiyonu değeri (F_p^{yeni}) hesaplanacaktır.

JA ile kafes yapıların eş zamanlı enkesit ve şekil optimizasyonu için kaynak [6]'da verilen algoritma kullanılmış olup aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır:

I. *ps* ve it_{maks} değerlerini ata. Aşağıdaki bağıntı ile *ps* kadar kafes yapı tasarımını rastgele olarak üreterek, başlangıç popülasyonunu oluştur:

$$(A,X)_{k,l}^{0} = (A,X)_{min}^{k} + rand\ [0,1]\left((A,X)_{maks}^{k} - (A,X)_{min}^{k}\right)$$

k=1,2,…,ndv l=1,2,…,ps (11)

burada $rand$ [0,1] [0,1] aralığında rastgele üretilen reel sayı, $(A,X)_{maks}^{k}$ ve $(A,X)_{min}^{k}$ sırasıyla *k*'ncı tasarım değişkeninin (enkesit veya şekil) için tanımlanan minimum ve maksimum değerlerdir. İterasyon sayacını başlat, *it*=0.

II. İterasyon sayacını arttır, *it*=*it*+1. Tasarım sayacını başlat *id*=0.

III. Tasarım sayacını arttır, *id*=*id*+1

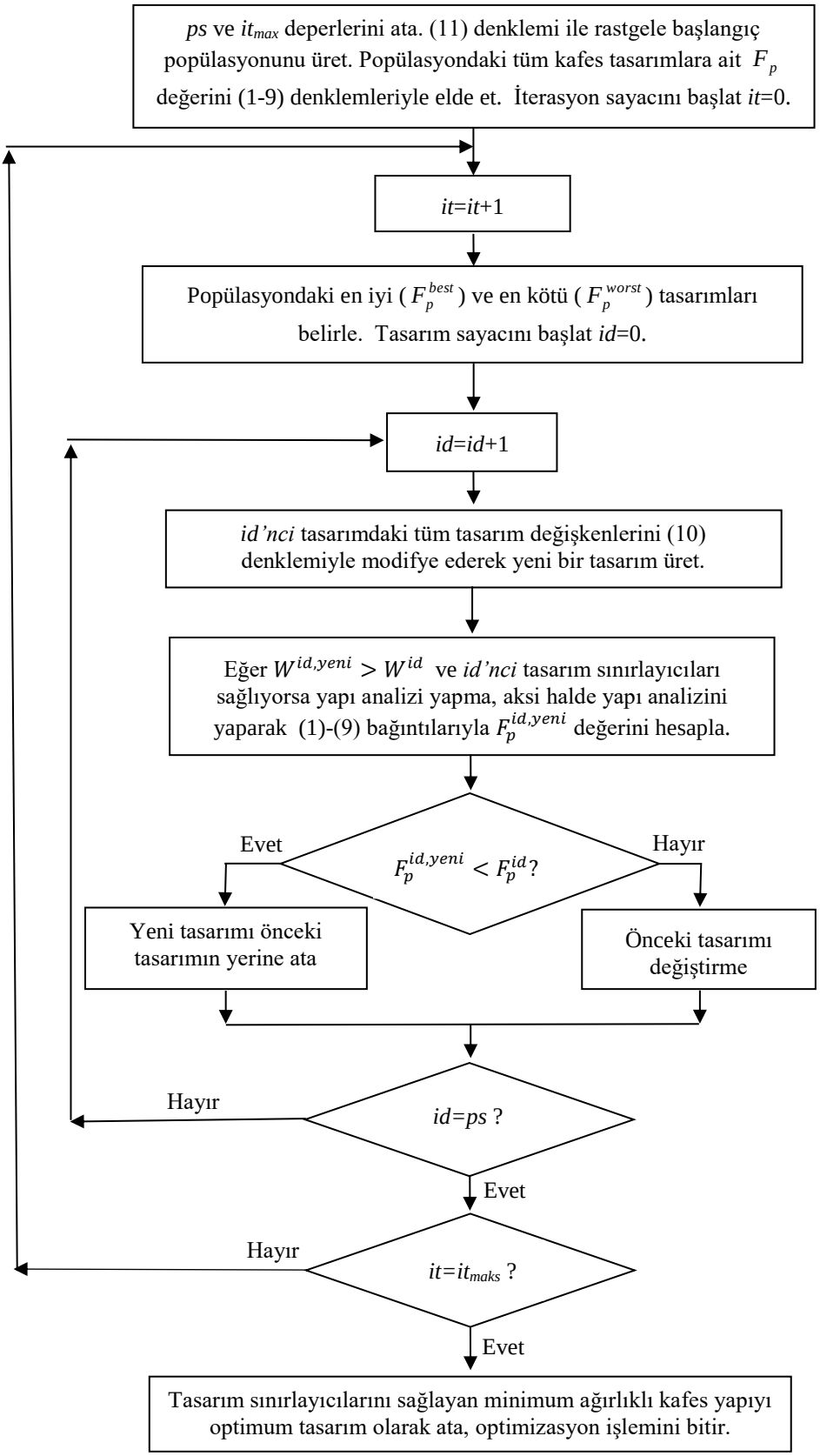
IV. *id'*nci tasarım için cezalandırılmış amaç fonksiyonunu (F_p^{id}), (1)-(9) bağıntılarıyla hesapla. Popülasyondaki en iyi (F_p^{en-iyi}) ve en kötü ($F_p^{en-kötü}$) kafes yapı tasarımlarını belirle.

V. Popülasyondaki ilk kafes yapı tasarımını (10) bağıntısıyla modifiye ederek yeni tasarımı elde et. Eğer yeni tasarımın ağırlığı, önceki tasarımın ağırlığından büyük ($W^{id,yeni} < W^{id}$) ve önceki tasarım sınırlayıcılarını ihlal etmiyorsa, yeni üretilen kafes tasarım için yapı analizi yapmadan *VI*. adıma git. Aksi halde, yeni tasarıma için cezalandırılmış amaç fonksiyonunu ($F_p^{id,yeni}$) (1)-(9) bağıntılarıyla hesapla. $F_p^{id,yeni} < F_p^{id}$ ise, yeni tasarımı önceki tasarımın yerine ata. Aksi durumda önceki tasarımı değiştirme.

VI. Eğer *id*=*ps* ise, *VII.* adıma git, aksi halde *III.* adıma git.

VII. Eğer *it*=it_{max} ise, *VIII.* adıma git, aksi halde *II*. adıma git.
Popülasyonda tasarım sınırlayıcılarını sağlayan minimum ağırlıklı kafes yapıyı optimum tasarım olarak ata, optimizasyon işlemini bitir.

Yukarıda adım adım JA için akış diyagramı Şekil 1'de verilmiştir.



Şekil 1. Kafes yapıların JA ile enkesit ve şekil optimizasyonu için akış diyagramı

OPTİMİZASYON ÖRNEĞİ

Yukarıda detaylı bir şekilde açıklanan JA ile, daha önce farklı sezgisel optimizasyon yöntemleriyle enkesit ve şekil optimizasyonu yapılmış olan 47 elemanlı enerji iletim hattı yapısının optimum tasarımı yapılmıştır. Yapı, tavlama benzeşimi (SA) [8] ve hibrid ateşböceği algoritması (HFA-LS) [9] kullanılarak sürekli tasarım değişkenli olarak optimize edilmiştir. JA'nın yanısıra yapı bu çalışmada, Matlab programlama dili bünyesindeki klasik optimizasyon algoritması olan 'Sıralı karesel programlama (Sequential Quadratic Programming)' (SQP-Matlab) optimizasyon yöntemi ile de optimize edilmiştir.

JA'da farklı popülasyon büyüklükleri için yapılan icralar sonunda en uygun popülasyon büyüklüğü (*ps*) değerinin 1000 olduğu belirlenmiştir. JA, 20 farklı başlangıç popülasyonu için 20 farklı kez icra edilmiştir. Bu şekilde farklı başlangıç tasarımları için yöntemin tutarlı sonuçlar elde edip edemeyeceğini tespit edilmesi amaçlanmaktadır. Farklı icralar sonunda bulunan 20 kafes yapı arasında optimum (minimum) ağırlıklı kafes yapı ağırlığı ve bu ağırlığın elde edilmesi için gerekli yapı analiz sayısı tabloda verilmiştir. Ayrıca, 20 farklı kafes yapı tasarımı için ortalama ağırlık ve standart sapma değerleri de hesaplanmıştır.

Daha önce yapılan çalışmalardaki kafes yapı ile ilgili malzeme özellikleri ve optimizasyon sonucu elde edilen tasarım değişkenleri "Amerikan Birim Sistemi'ne" göre verildiğinden, literatürle tam bir uyum olması ve birim dönüşümünden kaynaklanacak yuvarlatma hatalarının önüne geçilmesi için bu çalışmada da "Amerikan Birim Sistemi" kullanılmıştır.

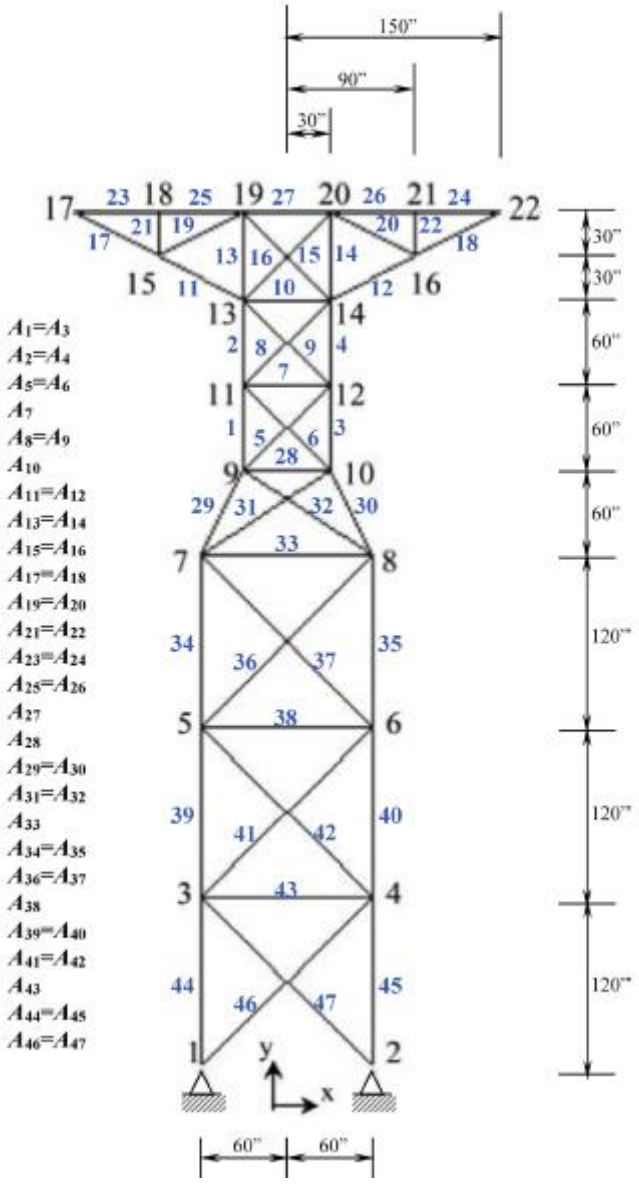
47 Elemanlı Enerji İletim Hattı Yapısının Eş Zamanlı Enkesit ve Şekil Optimizasyonu

47 elemanlı ve 22 düğüm noktasına sahip enerji iletim hattı yapısı Şekil 2'de verilmiştir. Yapı'da kullanılan malzemenin elastisite modülü E=30000 ksi (1 ksi=6.894 MPa) ve özgül ağırlığı ρ= 0.3 ln/in^3'dür(1 ln/in^3=27679.905kg/m^3). Yapı, y eksenine göre simetrik olup Şekil 2'de gösterildiği üzere 27 tane enkesit tasarım değişkeni bulunmaktadır. 27 enkesit tasarım değişkeninin yanında 17 tane de şekil tasarım değişkeni mevcuttur: Buna göre (X_2, X_4, Y_4, X_6, Y_6, X_8, Y_8, X_{10}, Y_{10}, X_{12}, Y_{12}, X_{14}, Y_{14}, X_{20}, Y_{20}, X_{21} ve Y_{21}) düğüm noktalarının koordinatlarının y eksenine göre simetrisi korunmak şartıyla optimum konfigürasyon elde edilecektir. Dolayısıyla optimum tasarımda toplam 44 tasarım değişkeni bulunmaktadır.

Kafes yapıda üç farklı yükleme durumu göz önüne alınmıştır. (*i*) 17 ve 22 no'lu düğüm noktalarına $+x$ yönünde 6 kip (1 kip=4.4482 kN) ve $-y$ yönünde 14 kip, (*ii*) 17 no'lu düğüm noktasına $+x$ yönünde 6 kip ve $-y$ yönünde 14 kip, (*iii*) 22 no'lu düğüm noktasına $+x$ yönünde 6 kip ve $-y$ yönünde 14 kip yük etki etmektedir. Çekme elemanları için müsaade edilen gerilme sınır değeri 20000 psi (1 psi=6.984 kN/m^2), basınç elemanları için ise -15000 psi'dir. Basınç elemanları için kritik burkulma gerilmesi $(-3.96EA) / (8l^2)$ ifadesine göre her eleman için ayrı ayrı hesaplanmaktadır.

JA ve diğer yöntemlerden elde edilen sonuçlar Çizelge 1'de verilmiştir. Çizelge 1 incelendiğinde JA, 833.04 kg ağırlığında bir yapı tasarımı 4680 yapı analizi sonunda elde etmiştir. Buna karşın SA [10], FFA-LS [11] ve SQP-Matlab sırasıyla 833.816 kg, 833.410 kg ve 834.201 kg ağırlığındaki tasarımları; 4819, 4946 ve 2854 yapı analizleri sonunda bulmuşlardır. Bu sonuçlara göre JA, optimum ağırlık bakımından en hafif tasarımı elde ederken, optimum tasarım için gereken yapı analiz sayısı bakımından da SQP-Matlab'dan sonraki en hızlı yöntem olmaktadır. Bununla birlikte JA'nın optimizasyon işlemi sırasında 834.16 kg ağırlığında sınırlayıcıları sağlayan bir tasarımı 3326 analiz sonunda bulduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla yapı analiz sayısı bakımından da JA'nın yaklaşık SQP-Matlab kadar güçlü olduğu tespit edilmiştir.

JA'nın 20 farklı icrası sonucunda elde edilen tasarımların ağırlıkları arasındaki fark 0.1 kg'dan azdır. 20 farklı icra sonunda bulunan en ağır tasarım 833.101 kg iken en hafif tasarım Çizelge 1'de verildiği üzere 833.006 kg olmaktadır. Bu sonuç JA'nın farklı başlangıç popülasyonları için yaklaşık aynı tasarımları elde edebildiğini, yani yöntemin tutarlı sonuçlar verdiğini göstermektedir.



Şekil 2. 47 elemanlı enerji iletim hattı yapısı (1 in.=2.54 cm)

Çizelge 1. 47 elemanlı enerji iletim hattı yapısının optimum tasarım sonuçları (1 in^2=6.4516 cm^2, 1 in.=2.54 cm)

Tasarım değişkenleri	SA [8]	FFA-LS [9]	SQP-Matlab	**JA**
A_1 (in^2)	2.6624	2.6575	2.6140	**2.6642**
A_2	2.5776	2.4832	2.4459	**2.4680**
A_5	0.6841	0.7267	0.7468	**0.7330**
A_7	0.1001	0.1003	0.1000	**0.1005**
A_8	0.7677	0.8928	0.8976	**0.9350**
A_{10}	1.1619	1.0545	1.0686	**1.0947**

A_{11}	1.7421	1.7805	1.7268	**1.7679**
A_{13}	0.7666	0.6599	0.7107	**0.6698**
A_{15}	0.9338	0.8625	0.8556	**0.8405**
A_{17}	1.3060	1.2462	1.2367	**1.3391**
A_{19}	0.3120	0.3217	0.3016	**0.3143**
A_{21}	1.0750	1.1758	1.0936	**1.0905**
A_{23}	0.9781	0.9363	0.9296	**1.0020**
A_{25}	0.9024	0.8821	0.8988	**0.8982**
A_{27}	0.7585	0.7190	0.7719	**0.8548**
A_{28}	0.1197	0.1003	0.1000	**0.1129**
A_{29}	2.6175	2.6499	2.5924	**2.6879**
A_{31}	0.9059	0.8481	0.8706	**0.8195**
A_{33}	0.1003	0.1003	0.1000	**0.1077**
A_{34}	2.9422	2.9590	2.9158	**2.9578**
A_{36}	0.8553	0.8771	0.8858	**0.8587**
A_{38}	0.1000	0.1003	0.1000	**0.1012**
A_{39}	3.1043	3.1341	3.1108	**3.0970**
A_{41}	1.0538	1.0584	1.0735	**1.0742**
A_{43}	0.1004	0.1003	0.1000	**0.1000**
A_{44}	3.2412	3.2553	3.2428	**3.2108**
A_{46}	1.0764	1.0486	1.0487	**1.0344**
X_2 (in)	103.435	103.055	103.376	**104.136**
X_4	85.269	85.458	84.455	**88.322**
Y_4	128.654	124.711	129.402	**121.752**
X_6	67.897	67.200	67.274	**67.803**
Y_6	243.645	241.701	245.693	**242.468**
X_8	58.529	57.733	58.576	**58.009**
Y_8	325.032	327.019	331.307	**322.627**
X_{10}	49.747	49.982	50.540	**50.701**
Y_{10}	409.643	404.820	410.504	**395.426**
X_{12}	44.388	44.464	44.630	**44.977**
Y_{12}	469.679	470.819	477.502	**463.933**
X_{14}	41.850	45.363	45.409	**45.385**
Y_{14}	508.000	507.943	514.215	**510.969**
X_{20}	2.000	2.251	0.100	**0.666**
Y_{20}	589.782	586.223	590.732	**587.372**
X_{21}	84.000	85.355	89.717	**80.202**
Y_{21}	630.009	634.216	632.465	**629.338**
Optimum ağırlık (kg)	833.816	833.410	834.201	**833.006**
Yapı analiz sayısı	4819	4946	2854	**4680**

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Jaya Algoritması (JA) kullanılarak kafes yapıların eş zamanlı enkesit ve şekil optimizasyonun yapılmıştır. Ayrıca JA yöntemi üzerinde düzenleme yapılarak optimum tasarımı bulmak için gereken yapı analiz sayısını azaltılması sağlanmıştır. Çalışmada sunulan optimizasyon örneğinden elde edilen sonuçlara göre JA, diğer sezgisel ve klasik optimizasyon yöntemlerine göre daha hafif bir tasarım elde etmiştir. Ayrıca optimum tasarımı bulmak için gereken yapı analiz sayısı bakımından da JA, diğer sezgisel yöntemlerden daha hızlı olurken, klasik optimizasyon yöntemi olan SQP-Matlab'a yakın bir hıza sahip olduğu tespit edilmiştir. JA'nın farklı icraları sonucu elde edilen en hafif ve en ağır tasarımlar arasındaki ağırlık farkının sadece 0.1 kg mertebesinde olması yöntemin farklı başlangıç popülasyonlarından etkilenmeden optimum tasarıma çok yakın sonuçlar verdiğini kanıtlamaktadır.

KAYNAKLAR

[1] L. Bianchi, M. Dorigo, L.M. Gambardella, W.J. Gutjahr, A survey on metaheuristics for stochastic combinatorial optimization, *Natural Computing*. 8 (2009) 239–287. doi: 10.1007/s11047-008-9098-4.

[2] X.S. Yang, *Engineering Optimization An Introduction with Metaheuristic Applications,* John Wiley & Sons, UK, 2010.

[3] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science* 220 (1983) 671–680. doi:10.1126/science.220.4598.671.

[4] Z.W. Geem, J.H. Kim, G.V. Loganathan, A new heuristic optimization algorithm: harmony search, *Simulation* 76 (2001) 60–68. doi:10.1177/003754970107600201.

[5] R.V. Rao, Jaya: A simple and new optimization algorithm for solving constrained and unconstrained optimization problems, *International Journal of Industrial Engineering Computations.* 7 (2016) 19–34. doi:10.5267/j.ijiec.2015.8.004.

[6] S.O. Degertekin, L. Lamberti, I.B. Ugur, Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm, *Applied Soft Computing*. 70 (2018) 903-928. doi:10.1016/j.asoc.2017.10.001.

[7] S.O. Degertekin, L. Lamberti, I.B. Ugur, Discrete sizing/layout/topology optimization of truss structures with an advanced Jaya algorithm, *Applied Soft Computing*. 79 (2019) 363-390. doi: 10.1016/j.asoc.2019.03.058.

[8] L. Lamberti, An efficient simulated annealing algorithm for designoptimization of truss structures, *Comput. Struct*. 86 (19–20) (2008) doi: 10.1016/j.compstruc.2008.02.004.

[9] S.O. Degertekin, L. Lamberti, Sizing optimization of truss structures using the Firefly Algorithm: *Proceedings of The Fourteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, Civil-Comp Press, Stirlingshire, UK, 2013.

FONKSİYONEL DERECELENMİŞ SANDVİÇ KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Beytullah TEMEL[1], Ahmad Reshad NOORI[2], Timuçin Alp ASLAN[3]
[1,3] İnşaat Mühendisliği Bölümü- Çukurova Üniversitesi, ADANA
[2] İnşaat Mühendisliği Bölümü- İstanbul Gelişim Üniversitesi, İSTANBUL

ABSTRACT

In this paper, the free vibration analysis of sandwich Functionally Graded (FG) beams made of symmetric and asymmetric layers is investigated. The surface layers of the sandwich beam of which mechanical properties change along the thickness of the section are functionally graded and the material of the core layer is assumed to be isotropic homogenous. Canonically equations that govern the free vibration response of sandwich FG beams are obtained based on Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories. Obtained equations are solved numerically via the Complementary Functions Method (CFM). In this research, the effects of different boundary conditions, length-height (L/h) ratios, material variation coefficients, and layer ratios on the free vibration response of the beam are investigated. The accuracy and applicability of the suggested approach are demonstrated by comparing the current results with those of the existing studies in the literature.

Keywords: Two-Point boundary value problem; Complementary functions method; Sandwich beam; Functionally graded materials; Free vibration.

ÖZET

Bu çalışmada, Fonksiyonel Derecelenmiş (FD) malzemeli simetrik ve simetrik olmayan katmanlardan oluşan sandviç kirişlerin serbest titreşim davranışı araştırılmıştır. Mekanik özellikleri kesit yüksekliği boyunca değişen sandviç kirişlerin, yüzey tabakaları FD, çekirdek veya öz tabakası ise izotropik homojen malzeme olarak kabul edilmiştir. FD Sandviç kirişlerin serbest titreşim davranışını idare eden kanonik denklemler Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş teorilerine göre elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile sayısal olarak çözülmüştür. Araştırmada, farklı sınır koşullarının, uzunluk-yükseklik (L/h) oranlarının, malzeme değişim katsayılarının ve tabakalanma oranlarının kirişlerin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Önerilen yöntemin doğruluğu ve uygulanabilirliği, elde edilen sonuçların literatürde bulunan çalışmaların sonuçları ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki noktalı sınır değer problemi; Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi; Sandviç kiriş; Fonksiyonel derecelenmiş malzemeler; Serbest titreşim.

GİRİŞ

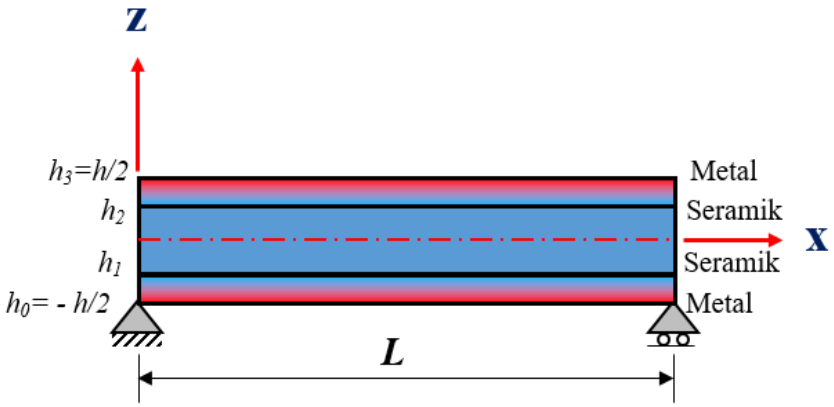
FD malzemeler, sahip olduğu birçok üstün mekanik özelliklerinden dolayı denizcilik, inşaat ve havacılık gibi çeşitli mühendislik dallarında geniş bir uygulama alanı bulmaktadır. İstenilen mekanik özelliklerin elde edilebilmesi için bu malzemeler, çoğu zaman katmanlı olarak kullanılmaktadır. Bu uygulamaya en iyi örnek olarak FD sandviç kirişler verilebilir. Bu nedenle FD sandviç kirişlerin statik ve dinamik analizi önem kazanmış olup, davranışları birçok araştırmacı tarafından farklı yöntemler ve teoriler kullanılarak incelenmiştir.

Vo ve ark. [1], FD malzemeli simetrik ve simetrik olmayan sandviç kirişlerin statik davranışını incelemek için çeşitli sonlu eleman modelleri geliştirmişlerdir. Kadoli ve ark. [2], yüksek mertebe kayma deformasyon teorisini kullanarak, FD kirişlerin statik davranışını incelemişlerdir. Şimşek ve ark. [3], Timoshenko kiriş teorisini (TKT) kullanarak FD sandviç kirişlerin, sabit ivme ile hareket eden harmonik yükler altındaki statik, serbest ve zorlanmış titreşim analizlerini incelemişlerdir. Şimşek [4], basit mesnetli FD malzemeli kirişlerin statik davranışlarını Ritz metoduyla incelemiştir. Demirhan ve Taşkın [5] ise, transfer matris metodu yöntemi ile öz ve yüzey kalınlık oranlarının FD sandviç kirişlerin doğal frekans değerleri üzerindeki etkilerini incelemişlerdir.Aslan ve ark. [6], FD malzemeli kirişlerin serbest titreşim frekanslarını TFY yardımı ile sayısal olarak elde etmişlerdir. Karamanlı [7], iki yönlü FD sandviç kirişlerin statik davranışlarını yarı-üç boyutlu teorisi ve İnterpolasyonlu Parçacık Hidrodinamiği yöntemleri yardımı ile incelemiştir. Fereidoon ve ark. [8], Euler-Bernoulli ve yüksek mertebe kayma deformasyon teorisini kullanarak, FD malzemeli sandviç kirişlerin statik davranışını incelemişlerdir. Li ve ark. [9], Timoshenko ve Euler-Bernoulli kiriş teorilerini (EBKT) kullanarak FD kirişlerin eğilme davranışlarını analitik olarak incelemişlerdir. Vo ve ark. [10], FD kirişlerinin statik ve serbest titreşim analizlerini kayma deformasyon teorisini kullanarak yapmışlardır. Noori ve ark. [11], malzeme özellikleri eksen boyunca derecelenmiş FD kirişlerin farklı eğilme tepkisini TFY yardımı ile incelemişlerdir. Sayyad ve Avhad [12], hiperbolik kayma deformasyon teorisini kullanarak yüzey malzemesi kalınlık boyunca değişen simetrik FD sandviç kirişlerin statik ve serbest titreşim analizlerini yapmışlardır. Apetre ve ark. [13], birçok mevcut sandviç kiriş teorilerinin tek boyutlu FD çekirdekli sandviç plakların üzerine uygulanabilirliğini incelemişlerdir. Erdurcan ve Cunedioğlu [14], sandviç kirişin serbest titreşim analizini Timoshenko Kiriş Teorisi (TKT)'yi kullanarak incelemişlerdir. Kahya ve Mosallam [15], orta tabakası homojen izotropik, diğer iki tabakası kompozit malzemeli sandviç kirişlerin hareketli yükler altındaki dinamik davranışlarını Newmark metoduyla sayısal olarak incelemişlerdir. Zenkour ve Sobhy [16], geliştirilmiş sinüzoidal kayma deformasyon teorisini kullanarak basit mesnetli elastik zemin üzerine oturan FD viskoelastik sandviç kirişlerin eğilme analizini yapmışlardır. Noori ve ark. [17], eksenel yönde FD kemerlerin düzlem içi yükler altındaki serbest ve zorlanmış titreşim analizi için etkin bir yöntem geliştirmişlerdir. Das ve Sarangi [18], basit mesnetli FD kirişin statik davranışını incelemek için ANSYS'te BEAM-188 elemanı kullanarak modellemiş ve neticesinde elde ettikleri sonuçları literatür sonuçları ile karşılaştırmışlardır. Frostig ve Baruch [19], tabakalı köpük çekirdekli sandviç kirişlerin tekil ve düzgün yayılı yükler altındaki statik analizini analitik olarak araştırmışlardır.

Yazarların bilgisine göre, FD malzemeli sandviç kirişlerin serbest titreşim analizini TFY ile inceleyen hiçbir çalışma ile karşılaşılmamıştır. Bu kirişlerin serbest titreşim davranışı ilk kez bu araştırmada TFY ile ele alınmıştır. Bu araştırmada, farklı sınır koşullarının, uzunluk-yükseklik (L/h) oranlarının, malzeme değişim katsayılarının ve tabakalanma oranlarının bu tür kirişlerin serbest titreşim davranışı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Ayrıca, simetrik ve simetrik olmayan katmanlardan oluşan FD malzemeli sandviç kirişlerin serbest titreşim

davranışının belirlemenin yanı sıra, bu metodun etkin ve kolayca uygulanabilirliğini göstermeyi de amaçlamaktadır.

MATERYAL VE METOT



Şekil 1. FD Sandviç kiriş ve malzeme değişimi

Şekil 1.'de görülen FD malzemeli sandviç kirişin malzeme değişim fonksiyonu Eşitlik (1)'de verilmektedir.

$$P^{(i)}(z) = (P_a - P_s)\, V_b^{(i)}(z) + P_a \tag{1}$$

Burada, P_a ve P_s sırasıyla alüminyum ve seramik bileşenlerine ait malzeme özellikleridir. $V_b^{(i)}$ ise hacim oranı olup, bu çalışmada malzeme değişim katsayısına (nz) bağlı olarak Eşitlik (2)'de verilmiştir.

$$\begin{aligned} V_b^{(1)}(z) &= \left(\frac{z-h_0}{h_1-h_0}\right)^{nz} \quad z \in [h_0, h_1] \\ V_b^{(2)}(z) &= 1 \qquad\qquad\qquad\quad z \in [h_1, h_2] \\ V_b^{(3)}(z) &= \left(\frac{z-h_3}{h_2-h_3}\right)^{nz} \quad z \in [h_2, h_3] \end{aligned} \tag{2}$$

Tabaka kalınlık değişim oranı, kiriş alt yüzeyinden (z=h_0=$-h$ /2) üst yüzeyine (z=h_3=h /2) üç farklı betimleme ile gösterilir. Örneğin, 1-1-1 oranı, üç eşit katmana sahip bir sandviç kirişi ifade etmektedir. Eksenel ve düşey yer değiştirmeler U_x ve U_z, şekil değiştirmeler ise ε_x ve γ_{xz} olup, bu büyüklükler Timoshenko kiriş teorisi için sırasıyla Eşitlik (3-4)'te verilmektedir

$$U_x = u(x,t) + z\,\theta(x,t)\;;\; U_z = w(x,t) \tag{3}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \theta}{\partial x}\;;\; \gamma_{xz} = \theta + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{4}$$

Sandviç kirişlere ait gerilme ve şekil değiştirme arasındaki ilişkiler Eşitlik (5)'te verilmektedir.

$$\sigma_x{}^{(i)} = E^{(i)}(z)\,\varepsilon_x \;;\; \tau_{xz}{}^{(i)} = G^{(i)}(z)\gamma_{xz} \tag{5}$$

Eşitlik (5)'te verilen $E^{(i)}(z)$ elastisite modülü ve $G^{(i)}(z)$ kayma modülü kiriş kalınlığı boyunca hacim oranına bağlı olarak değişmektedir. Timoshenko kiriş teorisine dayalı olarak minumum toplam potansiyel enerji ifadesi Eşitlik (6)'da verilmiştir.

$$\Pi_t = \frac{1}{2}\int_0^L \left[A_{11}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2A_{12}\,\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + A_{22}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + A_{33}\left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] dx \tag{6}$$

Bu denklemde görülen A_{11}, A_{12}, A_{22} ve A_{33}, kesit rijitlik sabitlerini simgelemekte olup, Eşitlik (7)'de verilen integrallerden hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} A_{11} &= b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)}(z)\,dz\right) \\ A_{12} &= b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)}(z)\,z\,dz\right) \\ A_{22} &= b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} E^{(i)}(z)\,z^2\,dz\right) \\ A_{33} &= k_s\,b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} G^{(i)}(z)\,dz\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Burada k_s, kayma düzeltme faktörüdür. Sandviç kirişlerin kinetik enerjisi ise

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \left[I_0\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2I_1\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial t} + I_2\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)^2 + I_0\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] dx \tag{8}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada I_0, I_1, I_2 kütlesel atalet momentleridir ve

$$\begin{aligned} I_0 &= b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)}(z)\,dz\right) \\ I_1 &= b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)}(z) z\,dz\right) \\ I_2 &= b\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{h_{i-1}}^{h_i} \rho^{(i)}(z)\,z^2\,dz\right) \end{aligned} \tag{9}$$

şeklinde elde edilmektedir.

Sistemin Langrangianı, kinetik enerjiden potansiyel enerjiyi çıkararak elde edilmektedir.

$$\boldsymbol{l} = T - \Pi_t \tag{10}$$

Hamilton Prensibi ise, Lagrangian'ın zamana göre integralinin varyasyonunu sıfır yapan varsayımdır.

$$\delta \int_{t1}^{t2} \boldsymbol{l}\, dt = 0 \tag{11}$$

Gerekli büyüklüklerin impulsif bileşenleri ve türevleri bulunarak doğru eksenli sandviç kirişlere ait kısmi diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{A_{12}M_x - A_{22}N_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Q_z}{b\ ks\ A_{55}} - \theta \tag{13}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-A_{11}M_x + A_{12}N_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{14}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = -p_x + I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{15}$$

$$\frac{\partial Q_z}{\partial x} = -p_z + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{16}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = Q_z + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{17}$$

Sistem hareket denklemlerinin (12-17) Laplace dönüşümü alınırsa, diferansiyel denklemler dönüşmüş uzayda adi diferansiyel denklem takımı haline dönüşmektedir. Böylece, Laplace uzayında FD malzemeli sandviç kirişlerin davranışını idare eden adi diferansiyel denklem takımı, kanonik formda aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{A_{12}\bar{M}_x - A_{22}\bar{N}_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{18}$$

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = \frac{\bar{Q}_z}{b\ ks\ A_{55}} - \bar{\theta} \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dx} = \frac{-A_{11}\bar{M}_x + A_{12}\bar{N}_x}{b({A_{12}}^2 - A_{11}A_{22})} \tag{20}$$

$$\frac{d\bar{N}_x}{dx} = -\bar{p}_x + I_0 s^2 \bar{u} + I_1 s^2 \bar{\theta} \tag{21}$$

$$\frac{d\bar{Q}_z}{dx} = -\bar{p}_z + I_0 s^2 \bar{w} \tag{22}$$

$$\frac{d\bar{M}_x}{dx} = \bar{Q}_z + I_1 s^2 \bar{u} + I_2 s^2 \bar{\theta} \tag{23}$$

Burada $(\bar{\cdot})$ ile gösterilen ifadeler büyüklüklerin Laplace Dönüşümünü göstermektedir. s, Laplace parametresi olup, kompleks bir sayıdır. Serbest titreşim analizleri için Laplace

parametresi ‘*s*’, serbest titreşim parametresi “*iω*” ile değiştirilmiştir. Doğal titreşim frekansları hesaplanırken dış yükler sıfır alınmaktadır. Katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerler serbest titreşim frekanslarını vermektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, FD malzemeli simetrik ve simetrik olmayan tabakalı sandviç kirişlerin serbest titreşim davranışı üzerine, farklı sınır koşullarının, uzunluk-yükseklik (L/h) oranlarının, malzeme değişim katsayılarının ve farklı tabakalanma oranlarının etkileri parametrik olarak araştırılmıştır. Bu amaçla, Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programda, TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin çözümü RK5 algoritması ile yapılmıştır.

Bu bölümde, sandviç kirişlerin farklı sınır şartları ve farklı uzunluk-yükseklik oranları için boyutsuz serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Frekans değeri aşağıdaki ifade ile boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\lambda_i = \frac{\omega_i L^2}{h}\sqrt{\frac{\rho_a}{E_a}} \tag{24}$$

Ele alınan kirişin malzeme ve geometrik özellikleri şöyledir $\boldsymbol{E_s = 380\ \text{GPa}}$; $\boldsymbol{\rho_s = 3960\ \text{kg/m}^3}$; $\boldsymbol{\nu_s = 0.3}$, $\boldsymbol{E_a = 70\ \text{GPa}}$; $\boldsymbol{\rho_a = 2702\ \text{kg/m}^3}$; $\boldsymbol{\nu_a = 0.3}$ Kirişin enkesiti kare olup (b=*h*=0.1), TKT için kayma düzeltme faktörü 5/6 olarak alınmıştır.

Araştırmada ilk olarak, farklı malzeme değişim katsayılarında (nz=0,0.5,1,5) Ankastre-Ankastre (A-A), Sabit-Sabit (S-S), Ankastre-Sabit (A-S), Ankastre-Serbest(A-Se) sınır şartlarına sahip Timoshenko sandviç kirişlerin boyutsuz titreşim frekansları hesaplanmıştır. Burada, simetrik ve simetrik olmayan tabakalanma durumu için FD sandviç kirişe ait bulunan boyutsuz frekans literatürde ([20]) verilen değerler ile Çizelge 1-2. üzerinde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 1: Simetrik FD sandviç kirişlerin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (L/h = 20).

		Tabakalanma Durumu			
		1-0-1		**1-5-1**	
Sınır Koşulları	***nz***	**Ref. [20]**	**TFY**	**Ref. [20]**	**TFY**
A-A	0	12.2201	12.2201	12.2201	12.2201
	0.5	9.6826	9.6836	11.1508	11.1508
	1	8.3469	8.3469	10.588	10.5880
	5	6.3921	6.3921	9.4583	9.4582
S-S	0	5.4603	5.4603	5.4603	5.4603
	0.5	4.3138	4.3143	4.9746	4.9746
	1	3.7136	3.7137	4.7196	4.7196
	5	2.8427	2.8427	4.2094	4.2094

Çizelge 2: Simetrik FD sandviç kirişlerin boyutsuz frekanslarının karşılaştırılması (L/h = 20).

		Tabakalanma Durumu			
		2-2-1		**3-2-1**	
Sınır Koşulları	***nz***	**Ref. [20]**	**TFY**	**Ref. [20]**	**TFY**
A-Se	0.5	1.6477	1.6476	1.6397	1.6393
	1	1.4845	1.4842	1.4707	1.4702

	5	1.1782	1.1780	1.1687	1.1681
A-S	0.5	7.1785	7.1817	7.1426	7.1499
	1	6.4717	6.4797	6.4114	6.4303
	5	5.1429	5.1678	5.1003	5.1581

Çizelgeler incelendiğinde, FDM sandviç kirişler için önerilen yöntem ile hesaplanan boyutsuz titreşim frekans değerlerinin literatür ile uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

Ayrıca, farklı sınır şartlarında farklı uzunluk-yükseklik oranları (*L/h*=5,10 ve 20) için Euler-Bernoulli ve Timoshenko sandviç kirişlerin boyutsuz frekans değerleri hesaplanmış ve Çizelge 3'de verilmiştir.

Çizelge 3: FD sandviç kirişlerin boyutsuz frekans değerleri

		Tabakalanma Durumu							
		1-0-1		**2-1-2**		**2-2-1**		**2-5-3**	
L/h	**Sınır Koşulları**	**EBKT**	**TKT**	**EBKT**	**TKT**	**EBKT**	**TKT**	**EBKT**	**TKT**
5	**A-A**	8.3032	7.2306	8.6672	7.5531	9.3004	8.0425	9.6088	8.2769
	A-Se	1.1287	1.1134	1.1781	1.1621	1.2644	1.2461	1.3063	1.2868
	A-S	5.5249	5.0897	5.7671	5.3152	6.1951	5.6820	6.3955	5.8517
	S-S	3.6611	3.5490	3.8215	3.7051	4.1311	3.9957	4.2452	4.1035
10	**A-A**	8.4562	8.1236	8.8256	8.4805	9.4722	9.0793	9.7859	9.3684
	A-Se	0.9668	0.9637	1.0090	1.0057	1.0829	1.0793	1.1188	1.1149
	A-S	5.4021	5.2792	5.6381	5.5106	6.0576	5.9119	6.2534	6.0987
	S-S	3.6742	3.6431	3.8347	3.8024	4.1455	4.1078	4.2604	4.2209
20	**A-A**	8.6460	8.5543	9.0234	8.9282	9.685	9.5764	10.005	9.8901
	A-Se	0.6944	0.6940	0.7247	0.7242	0.7778	0.7773	0.8036	0.8030
	A-S	5.0299	4.9984	5.2495	5.2168	5.6393	5.6018	5.8223	5.7825
	S-S	3.5768	3.5682	3.7329	3.7240	4.0342	4.0239	4.1470	4.1362

Çizelge 3 incelendiğinde en büyük boyutsuz doğal frekans değerinin A-A mesnetli kirişte, en küçük frekans değerinin ise A-Se mesnetli kirişte meydana geldiği görülmüştür. Diğer yandan L/h oranı arttıkça boyutsuz frekans değerlerinin arttığı görülmüştür.

Simetrik ve simetrik olmayan tabakalanma durumu için Timoshenko sandviç kirişlerin farklı malzeme değişim katsayılarında boyutsuz titreşim frekansları hesaplanmıştır. Çizelge 4' verilen sonuçlara göre tabaka kalınlık oranları arasında 1-5-1 oranlarına sahip FD sandviç kirişler, karşılaştırılan oranlar arasında boyutsuz doğal frekansları en yüksek olanıdır. Ayrıca tüm sınır şartlarında $\boldsymbol{nz}$ malzeme değişim katsayısı arttıkça frekans değerlerinin azaldığı görülmüştür.

Çizelge 4: FD sandviç kirişlerin boyutsuz frekans değerleri (L/h = 20).

		Tabakalanma Durumu							
Sınır Koşulları	**nz**	**1-0-1**	**1-1-1**	**2-1-2**	**1-5-1**	**2-2-1**	**2-1-1**	**3-2-1**	**2-5-3**
A-A	**0.5**	9.6835	10.1734	9.9404	11.1508	10.357	10.0898	10.304	10.551
	1	8.3469	9.0607	8.7118	10.5879	9.3444	8.93624	9.2528	9.6506
	5	6.3920	7.0041	6.5986	9.4582	7.4346	6.9270	7.3701	7.8912
S-S	**0.5**	4.3142	4.5334	4.4288	4.9745	4.6163	4.4961	4.5928	4.7035

	1	3.7136	4.03185	3.8757	4.7196	4.1593	3.9765	4.1198	4.2968
	5	2.8426	3.10969	2.9299	4.2093	3.3018	3.0763	3.2737	3.5057
A-Se	**0.5**	1.5397	1.6179	1.5805	1.7756	1.6476	1.6046	1.6392	1.6787
	1	1.3250	1.4386	1.3829	1.6844	1.4842	1.4189	1.4702	1.5333
	5	1.0142	1.1093	1.0451	1.5020	1.1779	1.0975	1.1681	1.2506
A-S	**0.5**	6.7099	7.0501	6.8880	7.7323	7.1816	6.9963	7.1498	7.3143
	1	5.7793	6.2741	6.0318	7.3387	6.4796	6.1981	6.4303	6.6869
	5	4.4247	4.8439	4.5637	6.5499	5.1677	4.8202	5.15805	5.4665

SONUÇLAR

Bu çalışmada, FD malzemeli simetrik ve simetrik olmayan sandviç kirişlerin serbest titreşim davranışı incelenmiştir. Problemin serbest titreşim davranışını idare eden kanonik denklemler, birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre elde edilmiştir. Elde edilen kanonik denklemler, TFY ile sayısal olarak çözülmüştür.

Çeşitli malzeme değişim katsayılarının, sınır koşullarının ve L/h oranlarının üzerindeki etkileri ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Tabaklanma oranı hem simetrik hem de simetrik olmayan FD sandviç kirişlerin serbest titreşim frekansları önemli ölçüde etkilemektedir. Dolayısıyla, istenilen mekanik özelliklerine sahip FD sandviç kirişler oluşturulurken bu oranlar göz önünde bulundurulabilir.

Son olarak bu çalışmada önerilen metodun, FD sandviç kirişlerin serbest titreşim analizi için oldukça etkin ve kolayca uygulanabilir olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] T.P., Vo, H.T., Thai, T.K., Nguyen, Inam, F., Lee, J., Static behavior of functionally graded sandwich beams using a quasi-3d theory, Composites Part B: Engineering. 68 (2015) 59-74.

[2] R., Kadoli, K., Akhtar, , N., GanesanStatic analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory, Applied Mathematical Modelling. 32(12) (2008) 2509-2525.

[3] M., Şimşek, M., Al-Shujairi, Static, free and forced vibration of functionally graded sandwich beams excited by two successive moving harmonic loads, *Composites Part B: Engineering*. 108 (2017) 18-34.

[4] M., Şimşek, Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by ritz method, *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 1(3) (2009) 1-11.

[5] P.A., Demirhan, V., Taşkın, Transfer matris metodu ile fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin titreşim analizi, *Dicle Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Mühendislik Dergisi*. 11(1) (2012) 259-269.

[6] T.A., Aslan, A.R., Noori, B., Temel, Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine dayalı fd düz eksenli kirişlerin serbest titreşim analizi, *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*. 34(4) (2019) 21-28.

[7] Karamanlı, A., Bending behavior of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory, *Composite Structures*. 174 (2017) 70-86.

[8] A., Fereidoon, M., Andalib, H., Hemmatian, Bending analysis of curved sandwich beams with functionally graded core, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 22(7) (2015) 564-577.

[9] S.R., Li, D. F., Cao, Z.Q., Wan, Bending solutions of fgm timoshenko beams from those of the homogenous Euler–Bernoulli beams, *Applied Mathematical Modelling.* 37 (2013) 7077-7085.

[10] T.P., Vo, H.T., Thai, T.K., Nguyen, F., Inam, Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory, *Meccanica*. 49(1) (2014) 155-168.

[11] A.R., Noori, T.A., Aslan, B., Temel, Static Analysis of FG beams via complementary functions method, *European Mechanical Science*. 4(1) (2020) 1-6.

[12] A.S., Sayyad, P.V., Avhad, On static bending, elastic buckling and free vibration analysis of symmetric functionally graded sandwich beams, *Journal of Solid Mechanics.* 11(1) (2019) 166-180.

[13] N.A., Apetre, B.V., Sankar, D.R., Ambur, Analytical modeling of sandwich beams with functionally graded core, *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 10(1) (2008) 53-74.

[14] E.F., Erdurcan, Y., Cunedioğlu, Porositeli FDM ile kapli alüminyum kirişin serbest titreşiminin incelenmesi. *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 9(2) (2020) 1090-1099.

[15] V., Kahya, A.S., Mosallam, Kompozit sandviç kirişlerin hareketli yük etkisi altında dinamik davranış. XVI. Ulusal Mekanik Kongresi, 22-26 Haziran 2009 .

[16] A.M., Zenkour, M.N.M., Allam, M., Sobhy, Bending Analysis of FG viscoelastic sandwich beams with elastic cores resting on Pasternak's elastic foundations, *Acta Mechanica*. 212(3) (2010) 233-252.

[17] A. R., Noori, T. A., Aslan, B., Temel, An efficient approach for ın-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*, 200 (2018) 701-710.

[18] S., Das, S.K., Sarangi, Static analysis of functionally graded composite beams, *In IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 149 (2016) 012138.

[19] Y., Frostig, M., Baruch, Bending of sandwich beams with transversely flexible core. AIAA journal, 28(3) (1990) 523-531.

[20] P., Tossapanon, N., Wattanasakulpong,Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two-parameter elastic foundation, *Composite Structures.* 142 (2016) 215-25.

ÇOK AÇIKLIKLI KOMPOZİT KEMER SİSTEMLERİN TAMAMLAYICI FONKSİYONLAR YÖTEMİ İLE STATİK ANALİZİ

, Hasibullah RASOOLI[1], Beytullah TEMEL[2], Ahmad Reshad NOORI[3]
[1,2]İnşaat Mühendisliği Bölümü- Çukurova Üniversitesi, ADANA
[3]İnşaat Mühendisliği Bölümü- İstanbul Gelişim Üniversitesi, İSTANBUL

ABSTRACT

In this study, the static analysis of laminated composite multi span arch systems subjected to in-plane static loads have been examined by the Complementary Functions Method (CFM). The governing equations of such structural elements under static loads have been summarized. The axial and shear deformations are considered in the formulations. The fifth-order Runge-Kutta (RK5) algorithm has been employed in the solution process of initial value problems by the CFM. The rigidity matrices and load vectors of these structural elements have been obtained by the CFM and for this purpose, a computer program is coded in FORTRAN. Results of the present method are compared with those of the finite element method. Comparisons demonstrate that the results of the present approach are in good agreement.

Keywords: Two-Point Boundary Value Problems; Complementary Functions Method; Laminated Composite Arch; Composite Curved Rods.

ÖZET

Bu çalışmada, tabakalı kompozit ve çok açıklıklı kemer sistemlerinin düzlem içi statik yükler etkisindeki davranışı Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile incelenmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmıştır. Bu yapı elemanlarının rijitlik matrisleri ve yük vektörleri TFY ile elde edilmiş ve bu amaçla da Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programının kontrolü, literatürde mevcut sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılarak, literatür ile uyumlu ve etkin oldukları gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İki Nokta Sınır Değer Problemleri; Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi; Tabakalı Kompozit Kemerler; Kompozit Eğri Eksenli Çubuklar.

GİRİŞ

Son yıllarda, mühendislik teknolojilerin gelişimiyle birlikte özellikle tabakalı kompozit malzemeli çok açıklıklı kemer sistemler modern mühendislik yapılarında çok yaygın olarak kullanıldığından, bu tip yapı elemanların statik ve dinamik davranışı birçok araştırmacının dikkatini çekmektedir.

Tabakalı kompozit malzemeli çubuk sistemlerin statik analizi için Özütok ve Madenci [1], yüksek dereceli kayma deformasyon teorisine dayalı karışık sonlu elemanlar modeli geliştirmiştir. Chandrashekhara ve Bangera [2], tarafından tabakalı kompozit kirişlerin serbest

titreşim davranışını incelemek için yüksek mertebe kayma deformasyonu teorisine dayalı bir sonlu eleman modeli geliştirilmiştir.
Karaca [3], düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi metodu ile statik ve dinamik analizini incelemiştir. Haktanır ve Kıral [4], TFY'nin düzlemsel çubukların statiğine doğrudan uygulamışlardır. Aslan [5], geometrik özellikleri eksen boyunca değişen, düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü eğri eksenli yapı elemanlarının statik yükler altındaki davranışlarını incelemiştir.

Bayhan [6], çalışmalarında daire eksenli düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi ile analizini yapmıştır. Bingöl [7], değişken kesitli doğru eksenli kompozit çubukların dinamik davranışını Laplace uzayında teorik olarak incelemiştir. Chen ve Yang [8], anizotropik tabakalı kirişler için sonlu elemanlar yöntemi kullanarak etkin bir çözüm yöntemi geliştirmiştir, Formülasyonda kayma deformasyonu etkisini dahil etmişlerdir. Saatcı [9], tabakalı kirişleri analitik olarak ve sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiştir. Hodges ve ark.[10], karışık sonlu elemanlar formülasyonu kullanarak kompozit kirişleri idare eden denklemleri çözmüşlerdir. Chandrashekhara ve ark. [11], birinci mertebe kayma deformasyonu teorisini kullanarak simetrik tabakalı kompozit kirişlerin kesin çözümlerini sunmuşlardır. Singh ve ark. [12], üniform olmayan kompozit kirişlerin analizi için yeni bir analitik model geliştirmişlerdir. Bernoulli kiriş teorisini kullanarak üniform olmayan kompozit kirişlerin analizini yapmışlardır. Khdeir ve Reddy [13], yapmış oldukları çalışmada kalın ve ince çapraz tabakalı kompozit kirişlerin eğilme davranışları için analitik çözümler geliştirmişlerdir. Çözümlerde simetrik ve anti simetrik çapraz tabakalı kompozit kirişlere sınır koşullarını keyfi alarak ve keyfi yüklemeler uygulayarak Euler-Bernoulli kirişi, Timoshenko kirişi ve yüksek mertebe kiriş teorileri kullanmışlardır. Kahya ve Turan [14], yüksek mertebe teorisini kullanarak tabakalı kompozit kirişlerin sehim analizini yapmışlardır. Madenci [15] yaptığı yüksek lisans çalışmasında; kompozit kirişlerin statik ve dinamik analizlerini Gâteaux diferansiyel metodu ve karışık sonlu elemanlar formülasyonu yardımı ile incelemiştir. Analizlerde, sabit geometriye sahip, üniform yayılı yük etkisi altında, üç farklı mesnet koşuluna göre simetrik, tek tabakalı ve çapraz tabakalı ortotropik kompozit Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişlerini ele alarak, enerji prensipleri yardımı ile her iki kiriş teorisine ait kompozit kirişlerin diferansiyel alan denklemlerini elde etmiştir. Özbek [16], eğri eksenli çubukların statik davranışlarını incelemiştir. Deplasman ve kesit tesirlerini, ardışık türevler ile ilk defa ifade ederek elde etmiştir. Yıldırım ve ark. [17], doğru ve daire eksenli elemanlardan oluşan bileşik düzlem çerçevelerin statik analizini rijitlik matrisi metodu ile incelemişlerdir. Dairesel elemanları düzlemi içinde ve düzlemine dik yükleme halleri için ayrı ayrı olmak üzere eleman rijitlik ve ankastrelik uç kuvvetlerini taşıma matrisi metodu ile kesin olarak elde etmiştir. Haktanır [18], elastik izotrop malzemeye sahip düzlemsel çubukların statik davranışını TFY'ne dayalı rijitlik matrisi yöntemiyle incelemiştir. Elde ettiği denklemlerin çözümünde Runge-Kutta 4 (RK4) algoritmasını kullanmıştır. Fortran dilinde programlar geliştirmiş ve literatürde bulunan çalışmalara uygulayarak sonuçları kıyaslamıştır. Çalım[19], doktora çalışmasında viskoelastik, anizotropik, eğri eksenli uzaysal çubuk sistemlerin dinamik analizini yapmıştır.

TFY daha önce çeşitli mekanik problemlerinde etkin olarak kullanılmıştır. Bu çalışmaların bazıları burada verilmiştir. Temel ve Noori [21], Noori ve Temel [22], Noori, Aslan ve Temel [23], Rasooli ve Temel [24], Temel, Çalım ve Tütüncü [25], Çalım [26], Çalım[27], Rasooli, Noori ve Temel [28].

Literatürde doğru ve daire eksenli elemanlardan oluşan çerçevelerin statik analizi mevcuttur, ancak yazarların bilgisine göre, kompozit malzemeli tabakalı çok açıklıklı kemerlerin TFY ile statik analizi üzerinde herhangi bir çalışma bulunmamaktadır.

MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada, statik yükler altında tabakalanmış kompozit çok açıklıklı kemer sistemlerinin statik davranışını idare eden denklemler, kanonik formda ve birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı halinde elde edilecektir. Bu denklem takımı kullanılarak, eğri eksenli tabakalanmış kompozit kesitli kemer sistemlerinin TFY ile formülasyonları yapılacaktır. Özellikle de analitik çözümü yapılamayan değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri üzerine durulacaktır.

Daire eksenli kompozit kemer sistemlerinin statik davranışını idare eden adi diferansiyel denklem takımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + R\ A_{11}{}'\ T_t \tag{1}$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -\ U_t + R\ \Omega_b + R\ A_{22}{}'\ T_n \tag{2}$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = R\ D_{33}{}'\ M_b \tag{3}$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n - R\ p_t \tag{4}$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t - R\ p_n \tag{5}$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -RT_n - R\ M_b \tag{6}$$

Burada Tt, eksenel normal kuvvetini, Tn, kesme kuvvetini ve Mb ise, eğilme momentini göstermektedir. Ut ve Un, t ve n eksenleri doğrultularındaki yer değiştirmeleri ve **Ω**b ise, dönmeyi simgelemektedir. R, daire eksenli çubuğun yarıçapıdır. α_n , kayma düzeltme faktörünü göstermekte olup, bu çalışmada 1.1875 olarak alınmaktadır.

A ve **D** matrisleri çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini göstermekte olup, her bir tabaka malzemesinin esneklik sabitlerinden elde edilmektedir.

Kompozit çubuklar ile ilgili bünye denklemleri ve çubuk kesitinin toplam esneklik sabitlerini gösteren **A** ve **D** malzeme matrisleri Çalım [10]'da verilmektedir.

SAYISAL SONUÇLAR

Bu çalışmada, tabakalanmış kompozit malzemeden yapılmış kemer sistemlerin statik yükler altındaki analizini yapmak amacıyla FORTRAN dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Yapı elemanlarının rijitlik matrisleri ve yük vektörleri TFY ile elde edilmekte ki bu yöntem iki noktalı sınır değer problemini başlangıç değer problemine indirgemektedir. Başlangıç değer probleminin çözümü için RK5 algoritması uygulanmaktadır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS paket programı ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışmadaki sayısal uygulamaları ANSYS programı ile karşılaştırmak için ANSYS programında üç düğümlü kuadratik BEAM-189 elemanı kullanılmıştır [20]. Tabakalı kompozit malzemeli çok açıklıklı kemer sistemlerinde kullanılan malzeme özellikleri Çizelge 1'de verilmektedir.

Çizelge 1. Malzeme özellikleri

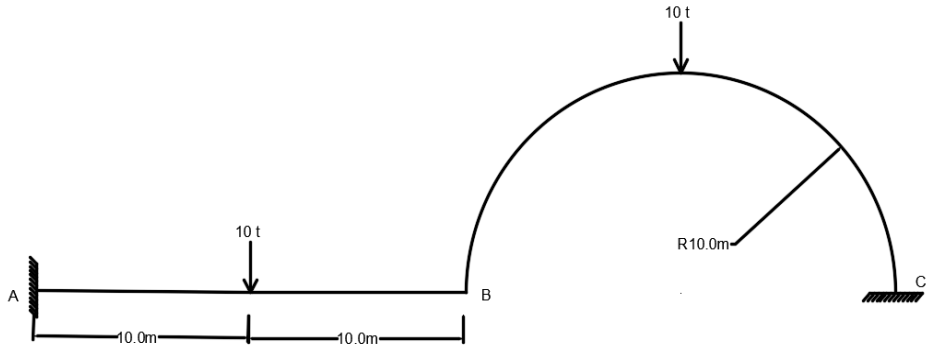
Malzeme Türü	E1 (GPa)	E2 = E3 (GPa)	G12 = G13 (GPa)	G23 (GPa)	v12 = v13	v23	ρ (kg/m3)
Kevlar 49 Epoxy	76	5.56	2.3	1.618	0.34	0.718	1460.00
Carbon Epoxy	144.8	9.54	4.14	3.45	0.30	0.399	1389.23

Örnek 1. Doğru ve Daire Eksenli İzotropik Malzemeli Çerçeve Sistemi (Bayhan 1993)

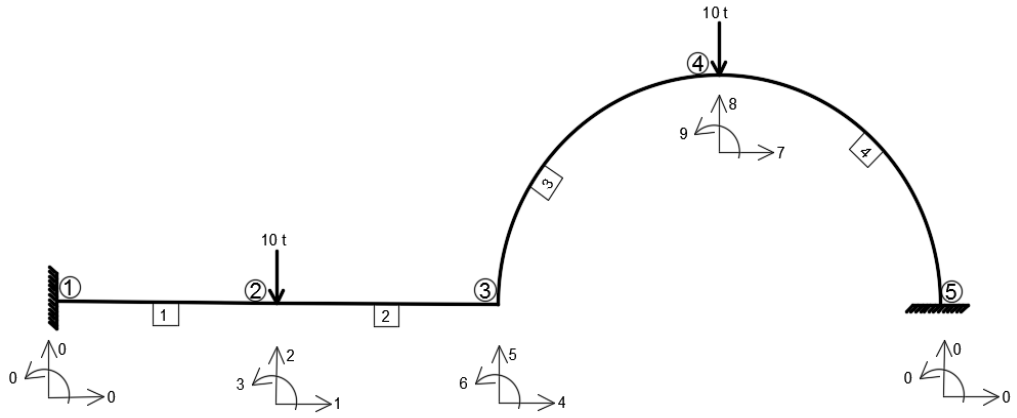
Düzlemi içinde tekil yüklerle yüklenmiş, doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan çerçeve sistemi ele alınmaktadır. Literatürde bulunan bu çerçeve sistemi önce bu çalışmada hazırlanan bilgisayar programı yardımıyla çözülmekte, daha sonra ANSYS paket programında her bir eleman 270 parçaya bölünerek analiz yapılmaktadır. Bu çerçeve sistemini oluşturan malzeme özellikleri Çizelge 2. de verilmiştir.

Çizelge 2. İzotropik Malzeme Özellikleri

E	I_b	A	υ
$1 \times 10^6\ t/m^2$	$^1/_{12}\ m^4$	$1\ m^2$	0.3



Şekil 1. Doğru ve daire eksenli çubuklardan oluşan çerçeve sistemi



Şekil 2. Sistem düğüm serbestlikleri ve kodlamaları

Bu çalışmada Şekil 1'deki sistemin TFY ile elde edilen düğüm deplasman değerleri Çizelge 3. üzerinde literatür ve ANSYS ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 3. Düğüm Deplasmanların Karşılaştırılması

Kodlar	Bu Çalışma	ANSYS	Bayhan 1993
1	-0.0004787	-0.000476	-0.00005
2	-0.0330210	-0.033347	-0.03304
3	-0.0042211	-0.004214	-0.00422
4	-0.0000957	-0.000095	-0.00010
5	-0.0567641	-0.056709	-0.05683
6	-0.0001444	-0.000142	-0.00015
7	-0.0178230	-0.017933	-0.01783
8	-0.0297863	-0.030038	-0.02988
9	0.0036303	0.003641	0.00363

Benzer şekilde, sistemdeki her bir elemana ait uç kuvvetleri sırasıyla Çizelge 4. üzerinde sunulmuştur.

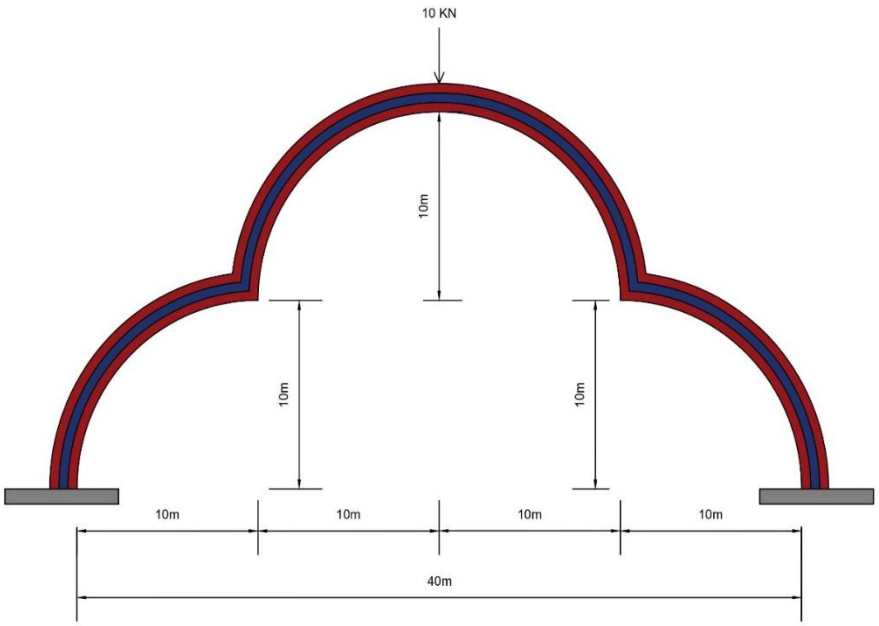
Çizelge 4. Eleman Uç Kuvvetlerinin Karşılaştırılması

Eleman No	Kuvvetler	Bu Çalışma	ANSYS	Bayhan 1993
1	T_{ti}	4.78713	4.7621	4.780
	T_{ni}	11.9146	11.906	11.915
	M_{bi}	94.7481	94.652	94.774
	T_{tj}	-4.78713	-4.7621	-4.780
	T_{nj}	-11.9146	-11.906	-11.915
	M_{bj}	24.3979	24.407	24.372
2	T_{ti}	4.78713	4.7607	4.780
	T_{ni}	1.91461	1.9177	1.915
	M_{bi}	-24.3979	-24.407	-24.372
	T_{tj}	-4.78713	-4.7621	-4.780
	T_{nj}	-1.91461	-1.9059	-1.915
	M_{bj}	43.544	43.338	43.517
3	T_{ti}	1.91461	1.9059	1.915
	T_{ni}	4.78713	4.7621	4.780
	M_{bi}	43.544	43.466	43.517
	T_{tj}	-4.78713	-4.7621	-4.780
	T_{nj}	1.91461	1.9059	1.915
	M_{bj}	-14.8188	-14.904	-14.861
4	T_{ti}	4.78713	4.7621	4.780
	T_{ni}	8.08539	8.0941	8.085
	M_{bi}	14.8188	14.904	14.861
	T_{tj}	-8.08539	-8.0941	-8.085
	T_{nj}	4.78713	4.7621	4.780
	M_{bj}	18.1638	18.416	18.191

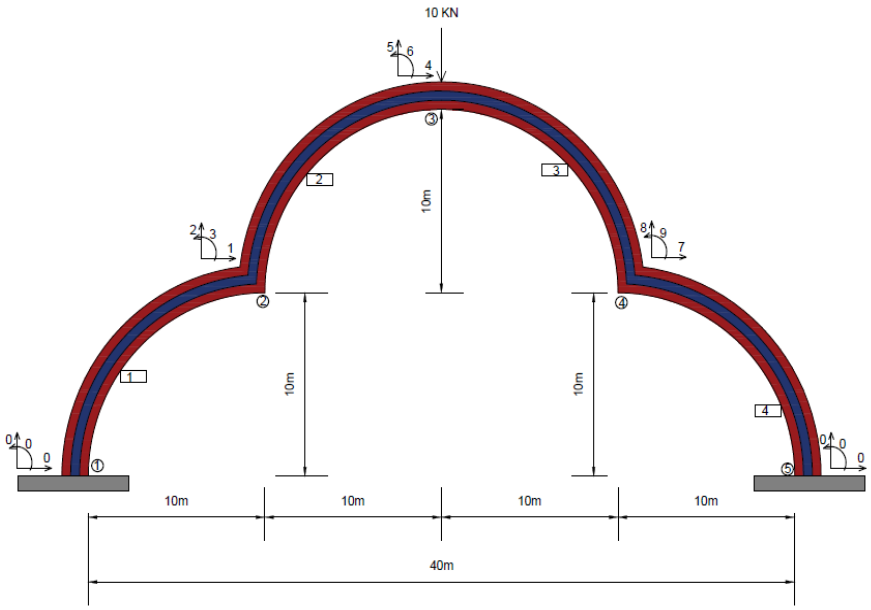
Çizelge 3. ve 4. incelendiğinde, bu çalışmada TFY ile bulunan düğüm deplasmanları ve uç kuvvetlerinin literatür ile uyumlu olduğu görülmektedir.

Örnek 2. Çok Açıklıklı ve Tabakalı Kompozit Malzemeli Kemer Sistemi

Her iki ucu ankastre mesnetli, üzerinde tekil yük taşıyan, kompozit malzemeli üç tabakalı kemer sisteminin statik analizi yapılacaktır. Şekil 3'te görülen kemer sisteminin kesit yüksekliği (h=0.90m), kesit genişliği (b=0.45m) sabit olarak seçilmiştir. Çubuk kesitleri, kesit yüksekliği boyunca farklı açılara sahip, simetrik üç eşit tabakalı olarak dikkate alınmıştır.



Şekil 3. Çok açıklıklı kompozit malzemeli kemer sistemi



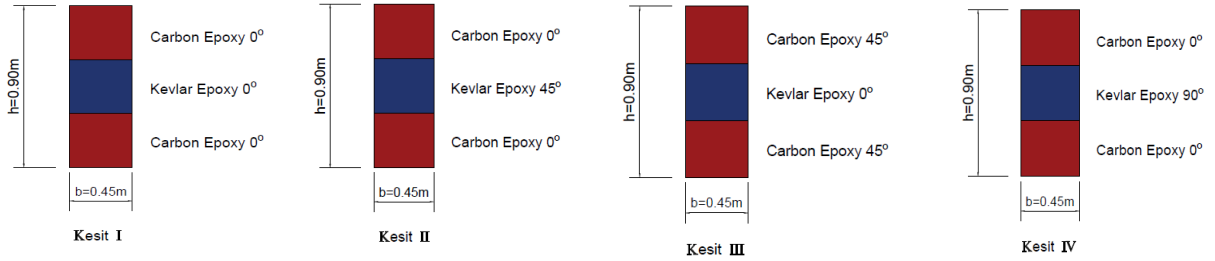
Şekil 4. Sistemin düğüm serbestlikleri ve kodlamaları

Çizelge 5. Şekil 3'teki çok açıklıklı kemer sistemi ve kesit I için elde edilen düğüm deplasman değerleri

Düğüm No	U dep. (m)	V dep. (m)	Teta (Rad.)
2	-0.427350E-08	-0.472809E-07	-0.312801E-08
3	-0.481658E-15	-0.860149E-07	-0.822953E-16
4	0.427349E-08	-0.472809E-07	0.312801E-08

Çizelge 6. Şekil 3'te verilen kemer sisteminin eleman uç kuvvetleri

Eleman No	N_i (N)	T_i (N)	M_i (N.m)	N_j (N)	T_j (N)	M_j (N.m)
1	4.86862E-01	5.00000E-01	-1.21687E+00	-4.86862E-01	-5.00000E-01	1.34825E+00
2	4.86862E-01	5.00000E-01	-1.34825E+00	-4.86862E-01	-5.00000E-01	1.47963E+00
3	4.86862E-01	-5.00000E-01	-1.47963E+00	-4.86862E-01	5.00000E-01	1.34825E+00
4	4.86862E-01	-5.00000E-01	-1.34825E+00	-4.86862E-01	5.00000E-01	1.21687E+00



Şekil 5. Çok açıklıklı kemer sisteminde kullanılan kesit özellikleri

Çizelge 7. Şekil 5'teki kesit özellikleri için elde edilen düğüm deplasman değerleri

Tabaka Açıları		Düğüm No	U dep. (m)	V dep. (m)	Teta (Rad.)
Durum I	0^o 0^o 0^o	**2**	-0.427350E-08	-0.472809E-07	-0.312801E-08
		3	-0.481658E-15	-0.860149E-07	-0.822953E-16
		4	0.427349E-08	-0.472809E-07	0.312801E-08
Tabaka Açıları		**Düğüm No**	**U dep. (m)**	**V dep. (m)**	**Teta (Rad.)**
Durum II	0^0 45^0 0^0	**2**	-0.427350E-08	-0.472809E-07	-0.312801E-08
		3	-0.481658E-15	-0.860149E-07	-0.822953E-16
		4	0.427349E-08	-0.472809E-07	0.312801E-08
Tabaka Açıları		**Düğüm No**	**U dep. (m)**	**V dep. (m)**	**Teta (Rad.)**
Durum III	45^0 0^0 45^0	**2**	-0.362895E-07	-0.398606E-06	-0.265623E-07
		3	-0.435559E-14	-0.724633E-06	-0.796061E-15
		4	0.362895E-07	-0.398606E-06	0.265623E-07
Tabaka Açıları		**Düğüm No**	**U dep. (m)**	**V dep. (m)**	**Teta (Rad.)**
Durum IV	0^0 90^0 0^0	**2**	-0.427350E-08	-0.472809E-07	-0.312801E-08
		3	-0.481658E-15	-0.860149E-07	-0.822953E-16
		4	0.427349E-08	-0.472809E-07	0.312801E-08

Çizelge 8. Şekil 5'te verilen kesit özellikleri için elde edilen eleman uç kuvvetleri

Tabaka Açıları		**El. No**	**N_i (N)**	**T_i (N)**	**M_i (N.m)**	**N_j (N)**	**T_j (N)**	**M_j (N.m)**
Durum I	0^0 0^0 0^0	1	0.486862	0.500000	-1.21687	-0.486862	-0.500000	1.34825
		2	0.486862	0.500000	-1.34825	-0.486862	-0.500000	1.47963
		3	0.486862	-0.500000	-1.47963	-0.486862	0.500000	1.34825
		4	0.486862	-0.500000	-1.34825	-0.486862	0.500000	1.21687
Tabaka Açıları		**El. No**	**N_i (N)**	**T_i (N)**	**M_i (N.m)**	**N_j (N)**	**T_j (N)**	**M_j (N.m)**
Durum II	0^0 45^0 0^0	1	0.486862	0.500000	-1.21687	-0.486862	-0.500000	1.34825
		2	0.486862	0.500000	-1.34825	-0.486862	-0.500000	1.47963
		3	0.486862	0.500000	-1.47963	-0.486862	0.500000	1.34825
		4	0.486862	-0.500000	-1.34825	-0.486862	0.500000	1.21687
Tabaka Açıları		**El. No**	**N_i (N)**	**T_i (N)**	**M_i (N.m)**	**N_j (N)**	**T_j (N)**	**M_j (N.m)**
Durum III	45^0 0^0 45^0	1	0.488430	0.500000	-1.23469	-0.488430	-0.500000	1.35039
		2	0.488430	0.500000	-1.35039	-0.488430	-0.500000	1.46609
		3	0.488430	-0.500000	-1.46609	-0.488430	0.500000	1.35039
		4	0.488430	-0.500000	-1.35039	-0.488430	0.500000	1.23469
Tabaka Açıları		**El. No**	**N_i (N)**	**T_i (N)**	**M_i (N.m)**	**N_j (N)**	**T_j (N)**	**M_j (N.m)**
Durum IV	0^0 90^0 0^0	1	0.486862	0.500000	-1.21687	-0.486862	-0.500000	1.34825
		2	0.486862	0.500000	-1.34825	-0.486862	-0.500000	1.47963
		3	0.486862	-0.500000	-1.47963	-0.486862	0.500000	1.34825
		4	0.486862	-0.500000	-1.34825	-0.486862	0.500000	1.21687

SONUÇLAR

Bu çalışmada tabakalı kompozit malzemeli çok açıklıklı kemer sistemlerinin tekil yükler altındaki statik davranışı TFY ile incelenmiştir. Burada ele alınan çok açıklıklı kemer sistemi dört farklı kesit özellikleri için ayrı ayrı çözülmüş olup elde edilen sonuçlar toplu olarak çizelgeler üzerinde sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, tabakalanma açılarının eleman uç kuvvetleri üzerinde etkisi çok az iken düğüm deplasman değerlerini önemli ölçüde etkilediği açıkça görülmektedir.

TFY'ye dayalı başlangıç değer probleminin sayısal çözümleri için 5. mertebe Runge-Kutta (RK5) algoritması kullanılmış, TFY yardımıyla her bir çubuğun rijitlik matrisleri ve yük vektörleri elde edilmiş ve bu amaçla Fortran dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Yapılan çözümlerde eksenel ve kayma deformasyonu etkileri dikkate alınmıştır.

KAYNAKLAR

[1] ÖZÜTOK, A., MADENCİ, E., "Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method", International Journal of Mechanical Sciences, 130, 234–243, 2017.

[2] CHANDRASHEKHARA, K. BANGERA, K. M., "Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element" Computer and Structures**,** 43(4), 719-727, 1992.

[3] KARACA, N., "Düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi metodu ile statik ve dinamik analizi", Yüksek lisans tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay, 2014.

[4] HAKTANIR, V., KIRAL, E., "Tamamlayıcı fonksiyonlar yönteminin düzlemsel çubukların statiğine doğrudan uygulanması", *Ç.Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi., Adana, 2,155-167,1991.*

[5] ASLAN, T. A., "Eğrisel yapı elemanlarının etkin sayısal analizi üzerine bir araştırma", Yüksek lisans tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2016.

[6] BAYHAN, S., "Daire eksenli düzlemsel çubukların taşıma ve rijitlik matrisi ile analizi", Yüksek lisans tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana, 1993.

[7] BİNGÖL, M., "Değişken kesitli kompozit kirişlerin dinamik analizi", Yüksek lisans tezi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay, 2009.

[8] CHEN, A.T., YANG, T.Y., "Static and dynamic formulation of symmetrically laminated beam finite element for microcomputer", J. Compos. Mater. 19 459-475, 1985.

[9] SAATCI, S., "Analytical and finite element investigation of layered beams" Yüksek lisans tezi, Orta Doğu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2001.

[10] HODGES, D. H. ATILGAN, A. R. FULTON, M. V., REHFIELD, L. W., "Free Vibration Analysis of Composite Beams", Journal of the American Helicopter Society, 36(3): 36-47, 1991

[11] CHANDRASHEKHARA, K., KRISNAMURTY, K., ROY, S., "Free Vibration of Composite Beams Including Rotary Inertia and Shear Deformation", Composite Structures, 14: 269-279, 1990.

[12] SINGH, M. P., ABDELNASER, A. S., "Random Response of Symmetric Cross-Ply Composite Beams with Arbitrary Boundary Conditions", AIAA Journal, 30(4): 1081-1088, 1992.

[13] KHDEIR, A. A., REDDY, J., "An exact solution for the bending of thin and thick cross-ply laminated beams", Composite Structures, 37:195–203, 1997.

[14] KAHYA, V., TURAN, M., "Bending of Laminated Composite Beams by a Multi-Layer Finite Element Based on a Higher-Order Theory", International Conference on Computational and Experimental Science and Engineering, Vol.132 No: 3, 2016.

[15] MADENCİ, E., "Kompozit kirişlerin karışık sonlu elemanlar yöntemi ile statik ve dinamik analizi", Yüksek lisans Tezi, Selçuk üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya, 2011.

[16] ÖZBEK, T., Bulletin of Technical University of İstanbul, vol. 15, 1963.

[17] YILDIRIM, V., İNCE, N., KIRAL, E., "Doğru ve Daire Eksenli Elemanlardan Oluşan Bileşik Düzlem Çerçevelerin Statik Analizi", J. of Engineering and Environmental Sciences, 137-148, 1997.

[18] HAKTANIR, V., "A New Method for the Element Stiffness Matrix of Arbitrary Planar Bars", Computers & Structures Vol. 52, No. 4. pp. 679-691, 1994

[19] ÇALIM, F. F., "Viskoelastik, anizotropik, eğri eksenli uzaysal çubuk sistemlerin dinamik analizi", Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 2003.

[20] ANSYS, Inc Release 15.0 , Canonsburg, PA, 2013.

[21] TEMEL, B., and NOORI, A.R. "Transient analysis of laminated composite parabolic arches of uniform thickness", International Journal of Mechanics Based Design of Structures and Machines, 1539-7734, 2019.

[22] NOORI, A.R., TEMEL, B., "On the vibration analysis of laminated composite parabolic arches with variable cross-section of various ply stacking sequences", Mechanics of Advanced Materials and Structures, 1537-6494, 2018.

[23] NOORI, A.R., ASLAN, T.A., TEMEL, B., "An Efficient Approach for In-Plane Free and Forced Vibrations of Axially Functionally Graded Parabolic Arches with Nonuniform Cross Section", Composite Structures, 200,701-710, 2018.

[24] RASOOLI, H., & TEMEL, B., "Değişken Kesitli ve Tabakalanmış Kompozit Malzemeli, Doğru ve Daire Eksenli Karma Sistemlerin Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi ile Statik Analizi", Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 8(3), 46-56, 2019.

[25] TEMEL, B., ÇALIM, F.F., TÜTÜNCÜ, N., "Forced vibration of composite cylindrical helical rods", International journal of mechanical sciences, 47, 998-1022, 2005.

[26] ÇALIM, F.F., "Free and forced vibrations of non-uniform composite beams", Composite Structures, 88,413-423, 2008.

[27] ÇALIM, F.F., "Transient analysis of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section", Composites PartB, 98, 472-483, 2016.

[28] RASOOLI, H., NOORI, A. R., & TEMEL, B. "On the static analysis of laminated composite frames having variable cross section", Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 43(5), 1-16, 2021.

KUVARS KOMPOZİTLERİN ÜRETİMİ VE ÖZELLİKLERİ

Barış Gökdemir [1], Egemen Teomete[2]
Barış Gökdemir-Fen Bilimleri Enstitüsü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir
Egemen Teomete[2]- İnşaat Mühendisliği Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

ABSTRACT

Quartz mineral, which is commonly found in the earth's crust, is generally evaluated in terms of aesthetics. Quartz contains high silicon dioxide (SiO_2). It is widely used in the chemical industry, building materials, electronics and telecommunications industry.

In this study, quartz and quartz powder reinforced polymer composites will be studied. The manufacturing process, mechanical, physical and thermal properties will be reviewed. The use of quartz powders composites in different engineering application will be presented. Preliminary results of a new PhD study will be discussed.

Keywords: quartz technology; quartz powders; mechanical properties;

ÖZET

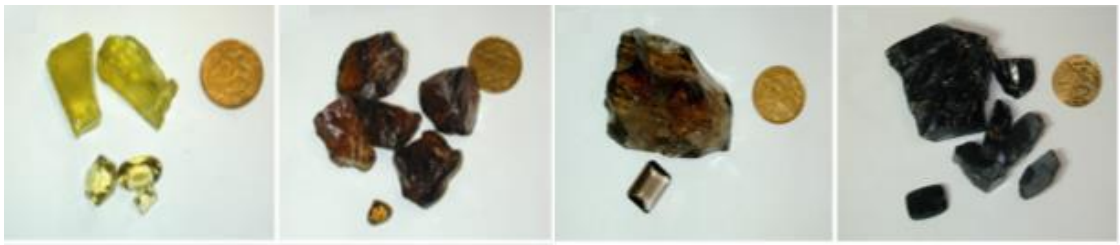
Yer kabuğunda yaygın olarak bulunan kuvars minerali genel olarak estetik açıdan değerlendirilmektedir. Kuvars, yüksek miktarda silikon dioksit (SiO_2) içermektedir. Kimya endüstrisinde, yapı malzemelerinde, elektronik ve telekomünikasyon sektöründe çokça kullanılmaktadır.

Bu çalışmada kuvars ve kuvars tozu takviyeli polimer kompozitler incelenecektir. Üretim süreci, mekanik, fiziksel ve termal özellikleri gözden geçirilecektir. Farklı mühendislik uygulamalarında kuvars tozu kompozitlerinin kullanımı sunulacaktır. Yeni bir doktora çalışmasının ön sonuçları tartışılacaktır.

Anahtar kelimeler: kuvars teknolojisi; kuvars tozları; mekanik özellikler;

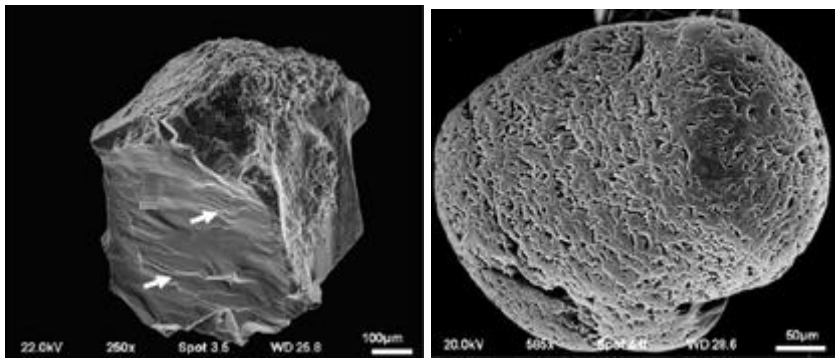
GİRİŞ

Yer kabuğunun en yaygın ikinci minerali ve yaklaşık %13' ünü SiO_2 bileşiği oluşturmaktadır. Silika veya silis saf malzeme olarak isimlendirilmektedir. 1 atm basınç ve normal şartlar altında %98 oranında SiO_2 içermesi ve en çok karşılaşılan yapı olması sebebi ile kuvars olarak da adlandırılabilmektedir. Kuvars SiO_2 bileşiğinin kristal formudur [1]. Yer kabuğunda magmatik, metamorfik, ve tortul kayaçlarda bol miktarda bulunmaktadır [2, 3, 4]. Kuvarsit, %75' ten fazla SiO_2 içeren diğer elemenler, kil ve minerallerinde içerisinde bulunabildiği doğal kompozit yapılardır [5]. Silika saf halde %46.5 silisyum ve %53.3 oksijen içermektedir. Mohs cetvelinde sertliği 7, özgül ağırlığı 2.65, ergime sıcaklığı 1785ºC'dir. Atomları arasında kovalent bağ bulunmaktadır [3, 5, 6, 7]. Genel olarak renksiz, ancak çok farklı renklerde de görülebilmektedir (Şekil 1).



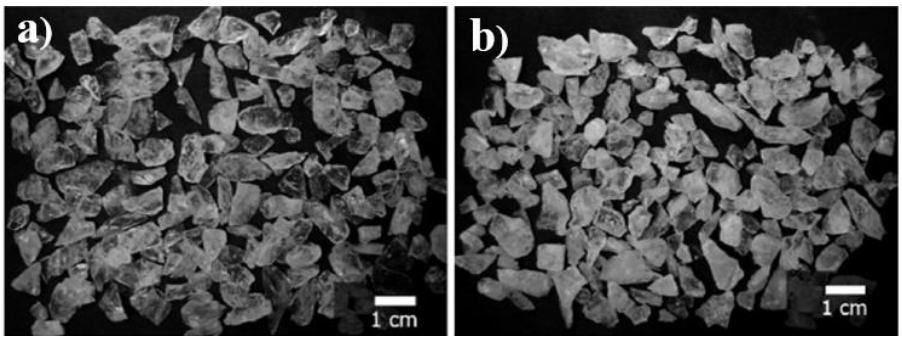
Şekil 1 Farklı renklerde kuvars taşları [8]

Renkli oluşumlar gaz, sıvı ve katı kapanımlarla oluşmuştur. Bu kapanımlar, CO_2, H_2O, hidrokarbon, NaCl, $CaCO_3$, rutil gibi bazı minerallerdir [9]. Heksagonal sistemde kristalleşen kuvars, doğada kristal ya da amorf (biçimsiz) halde bulunabilmektedir (Şekil 2).



Şekil 2 Farklı yapılardaki kuvars tanelerinin SEM görüntüleri [10]

Saydam kuvars ve süt kuvars tozları Şekil 3' de görülmektedir. İçeriğindeki elementlerin oranlarına dikkat edildiğinde, çok küçük değişimlerin dahi saydamlığa ve morfolojiye etkisi anlaşılmaktadır (Çizelge 1).



Şekil 3 a) Saydam kuvars b) Süt kuvars [2]

Çizelge 1 Saydam kuvars ve süt kuvars içerik oranları

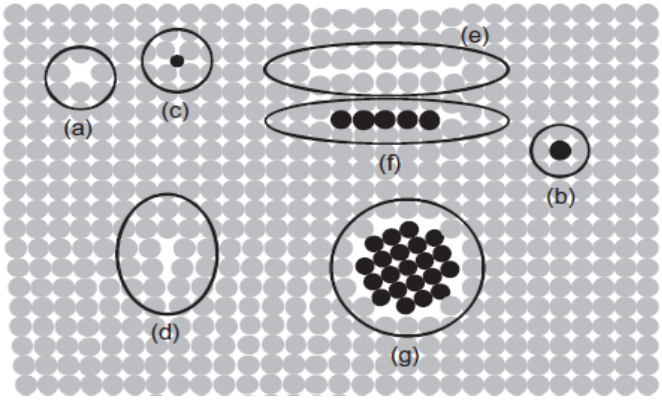
	Al(ppm)	Fe(ppm)	Na(ppm)	K(ppm)	Li(ppm)	Ti(ppm)	Zr(ppm)
Saydam Kuvars	2.3	0.3	6.2	0.6	2.1	1.3	<0.1
Süt Kuvars	2.5	0.8	10	1.6	2.4	1.4	<0.1

SiO_2 mineralinin jeolojik oluşumlarında basınç, sıcaklık gibi fiziksel koşullar mikro yapıları etkilemekte ve bu farklı yapısal oluşumlar endüstriyel uygulamalar için büyük önem arz etmektedir [11]. Dünyada en büyük kuvars yatakları Brezilya' da bulunmaktadır. Bilinen, tabii, ultra-saf kuvars rezervleri Brezilya, Meksika, A.B.D, Namibya, Angola, Madagaskar, Çin ve Hindistan'da bulunmaktadır (Şekil 4). Bu tür kuvarslar yüksek saflık oranı gerektiren elektronik sanayinde işlem görmeden kullanılacak kadar iyi vasıftadır [9].



Şekil 4 Kuvars kristali ve amorf silika oluşumu [12, 13]

Kuvarsın çeşitli özellikleri (kristal yapısı, derecesi, parlaklık vb.) nanometre boyutundan, makroskobik yapısına kadar oluştuğu jeolojik koşullara bağlıdır. Bu sebepten dolayı farklı kafes yapılarına sahip ve teknik özellikleri değişiklik gösteren, günümüzde bilinen 20 farklı çeşit kristal fazı bulunmaktadır [2, 8, 14]. Kusurların ve dislokasyonların oluşumu, kuvars ve SiO_2 malzemelerinin birçok gelişmiş teknik uygulamada kullanımı için önemli etkiler yaratmaktadır. Kusur oluşumları Şekil 5' de görülmektedir.



Şekil 5 Kuvars doku hataları a) boşluk b) atomlar arası bağlanma geçiş hatası c) farklı atom bağı d) dislokasyon e) iç yapı hatası f) dış kaynaklı yapı hatası g) farklı bileşikler [6]

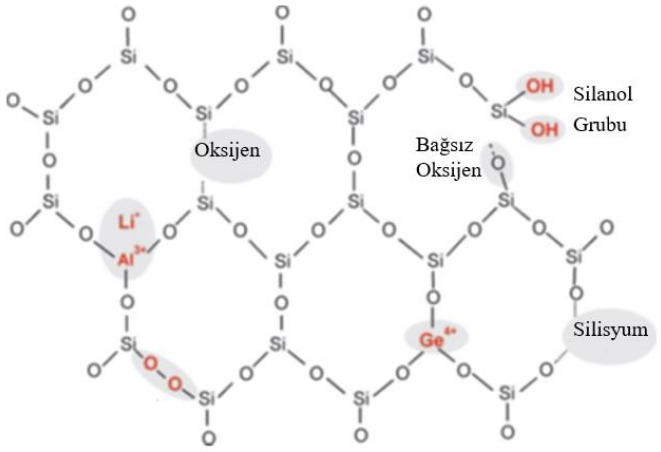
En küçük yapısal hata veya farklılıkların, elektriksel ve optik özellikleri güçlü bir şekilde değiştirebilir ve SiO_2 yalıtkan katmanlarında elektriksel kararsızlıklara, piezo kuvarsta absorpsiyon etkilerine neden olur [2]. Bu yüzden yüksek saflıkta SiO_2 tercih edilmektedir. Fiber optik kullanımı ve özel optik cam kullanımı için gereken değerler Çizelge 7' de gösterilmiştir.

Çizelge 2 Fiber optik ve optik cam sektöründe kullanılan kuvars içerik oranları [2]

	Fiber Optik	**Özel Optik Cam**
SiO_2	>99.9	>99.8
Fe_2O_3	<2.0 ppm	<2.0 ppm
TiO_2	<1.5 ppm	<25 ppm
Al_2O_3	-	<500 ppm
Cr_2O_3	<0.01 ppm	<0.1 ppm
CoO	<0.05 ppm	<0.05 ppm
CuO	<0.05 ppm	<0.1 ppm
MnO	<0.1 ppm	<1.0 ppm

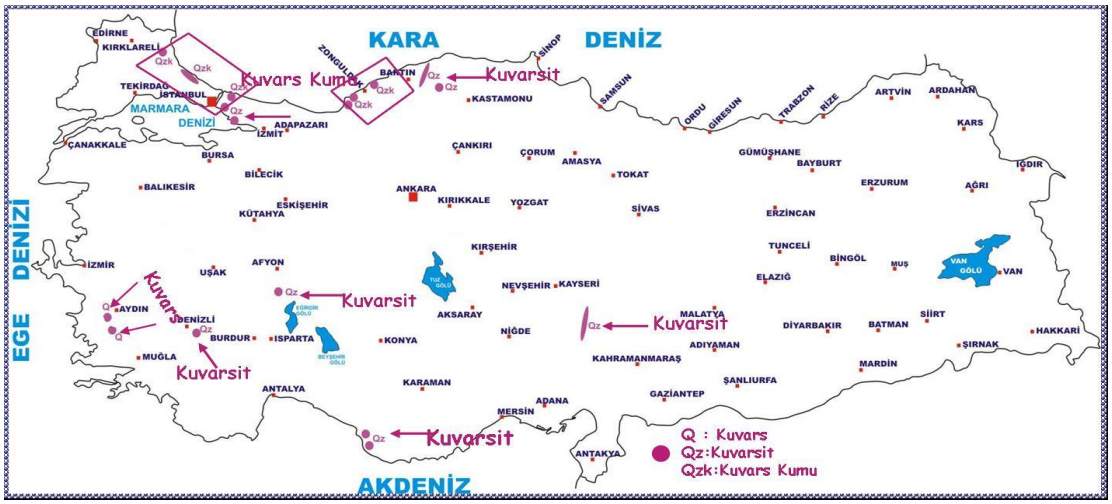
NiO	<0.1 ppm	<0.15 ppm
V_2O_5	<0.5 ppm	<15 ppm

Yüksek saflık oranına rağmen içeriğinde bulunun düşük miktardaki katı eriyik halinde bulunan elementler birçok özelliğini etkilemektedir. Bu elementler genellikle Li, Na, AI, Ti, Mg, Ge, Fe, H, Ag, Cu, P dir. [8] . Kuvars kafes yapısı içerisindeki bu elementlerin oluşumları Şekil 6' da gösterilmiştir.



Şekil 6 Kafes yapısında farklı oluşumların bağlanması [8]

Dünyada yaygın olarak bulunduğu gibi Türkiye'de de Antalya, Zonguldak, Kastamonu, İstanbul, Aydın, Muğla, Adana, Yozgat ve Denizli'de kuvars rezervleri bulunmaktadır (Şekil 7) [5]. Yüksek saflıkta bulunmaması ve saflaştırma işleminin maliyeti sebebi ile toplam rezerv miktarı belirlemeye yönelik çalışmalar yapılmamıştır.



Şekil 7 Türkiye' deki kuvars, kuvarsit ve kuvars kumu maden yatakları [15]

Kuvars minareli çoğu ticari üründe ana bileşen olarak tercih edilmektedir. Ticari yüzeylerde içeriği kütlece %90-94 arasında değişmektedir. Tercih edilmesinin en önemli sebeplerinden birisi yüksek sertlik değeridir. Yüksek kimyasal dayanıma sahiptir [16].

Kuvarsit ise endüstriyel hammadde niteliği taşıması için minimum %90 SiO_2 içermelidir. Kuvarsitin kimyasal bileşimi, kuvars, kumtaşı ve kuvars kumu gibi SiO_2 olup, az miktarda feldispat, mika, manyetit, hematit, granat ve rutil mineralleri ile kil ve/veya kireçtaşı noktacıkları bulunabilir. Kuvarsit mekanik dayanımı yüksek, sağlam ve aşındırıcı kayaçtır. Bu

nedenle istihracı ve öğütülmesi oldukça güç ve pahalıdır. Kuvarsit üretimi, aynı kimyasal bileşimde bulunan kuvars kumu ve kum taşından (kuvarslı gre), ayrıca daha saf olan kuvarstan, sonra tercih edilmektedir [7].

Silis kumu veya kuvars kumu: kuvarsça zengin magmatik, metamorfik kayaçların ayrışması sonucu oluşan, tane boyutları 2.00-0.05 mm arasında değişen kuvars (SiO_2) tanecikleridir. Kuvars kumları beyaz olup, demir oksit içeren kumların rengi pembeden kızıla veya kahverengiye kadar değişir. Silisten oluşan kuvars kumu az miktarda kil, feldspat, demir oksitler ve karbonatlar içerebilirler [17]. Karabük ve Çatalca' dan çıkartılan silis kumu ortalama kimyasal içerik oranları Çizelge 3' de gösterilmiştir.

Çizelge 3 Çatalca ve Karabük madenleri silis kumu kimyasal özellikleri [17]

Kimyasal İçerik(%)	**Çatalca/Yalıköy**	**Karabük**
SiO_2	99.55±0.25	95.5±1.00
Al_2O_3	0.25±0.15	2.00 ±1.00
Fe_2O_3	0.02 maks	0.35±0.20
TiO_2	0.1±0.1	0.30 maks
CaO	0.02±0.01	0.02 maks
MgO	0.02±0.02	0.01 maks
Na_2O	0.01±0.01	0.03 maks
K_2O	0.1±0.1	-

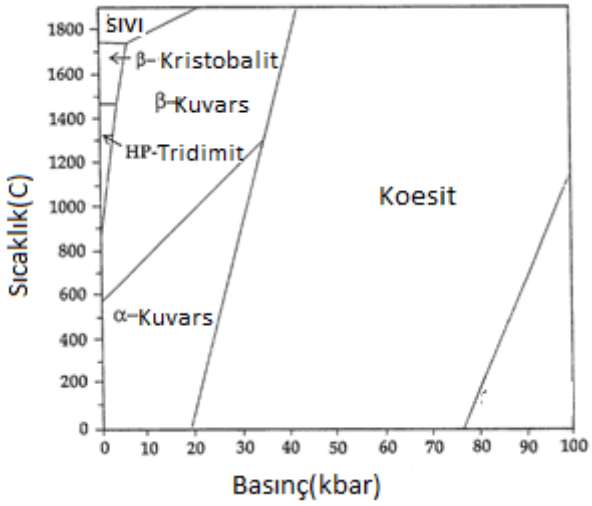
Bolca bulunması ve sahip olduğu özellikler nedeni ile silika minerali ve türevleri, farklı uygulamalarda kullanılmaktadır. El aletleri, silahlar, takı ve süs eşyaları, cam, deterjan, boya, seramik, metalürji sanayilerinde, aşındırıcı ve dolgu maddesi olarak ve elektronik sanayisinde kullanılmaktadır [1, 2, 9]. İçerik miktarına bağlı olarak kullanım alanı Çizelge 4' de gösterilmiştir.

Çizelge 4 Kullanım alanına göre kimyasal içerikleri [5]

Kullanım Alanı	**Bileşimleri**	**Kullanım alanı**	**Bileşimleri**
Cam Üretimi	SiO_2: >%99	Silika Tuğla	SiO_2: %95-99
	Al_2O_3: <%0.2		Al_2O_3: %0.1-2.8
	Fe_2O_3: %0.01-0.1		Fe_2O_3: %0.3-13
Seramik Eşya	SiO_2: %90-99.4	Gaz Beton	SiO_2: > %75.5
	Al_2O_3: %0.1-8		SiO_2: > %95 Yapı Kumu
	Fe_2O_3: %0.03-0.5		SiO_2: >% 80 Pres Tuğla
Silikon ve ferrosilikon üretimi	SiO_2 %96-98	Döküm sanayi	SiO_2: %97-99
	Al_2O_3: <%0.2		Al_2O_3 :%0.05-1.2
	Fe_2O_3 : <%0.2		Fe_2O_3: %0.18-1.4
Aşındırıcı	SiO_2: >%90	Elektronik Sanayi	SiO_2: %99.99
	Al_2O_3: <%1.5		
	Fe_2O_3: <%1.5		

Kuvars bir silisyum atomunun dört oksijen atomu ile bağ oluşturmasıyla meydana gelmektedir. Tüm O atomlarının komşu tetrahedronlar arasında paylaşıldığı bir SiO_4 tetrahedronunda, α-kuvars, oda sıcaklığında en kararlı olan SiO_2 polimorfudur. Silika sistemi için faz diyagramı Şekil 8' de gösterilmiştir. α-kuvars' dan β-kuvarsa faz dönüşümü, düşük başınçta kendiliğinden

ve tersine çevrilebilir bir reaksiyon olarak tanımlanmaktadır [14]. β-kuvarstan tridimit'e dönüşümün gerçekleşmesi için genellikle alkali elementler gibi bir katalizör gerekmektedir. Bu nedenle, β-kuvars muhtemelen doğrudan 1100 °C'ye kadar başlayabilen bir reaksiyon olan kristobalite dönmektedir [1]. Bu faz dönüşümü, β-kuvars oluşumundan daha fazla zaman gerektirmektedir. Si dönüşüm süreci, ısıtılan β-kristobalit miktarı kuvarsın işlem süresine, özellikle de yüksek sıcaklıklardaki (>1470 °C) işlem süresine bağlı olmaktadır [18].



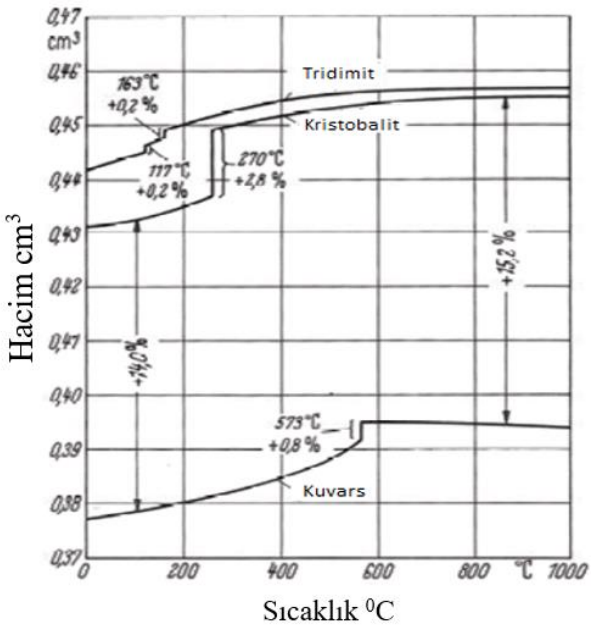
Şekil 8 Silika faz diyagramı [14, 19]

Çizelge 5' de silika faz oluşumları ve bu fazların kafes yapıları görülmektedir. Sıcaklık ve basınç değişimleri kafes yapıları üzerinde çok etkilidir. Özellikle yüksek sıcaklık sonucu Si-O bağları kopmaktadır.

Çizelge 5 Faz oluşumları ve kafes yapıları [2]

Kuvars, Tridimit, Kristobalit grup (atmasferik ve düşük başınç)	Düşük (α)- kuvars	Trigonal
	High (β)-kuvars	Hekzagonal
	Tridimit	Monoklinik
	Yüksek-tridimit	Hekzagonal
	Kristobalite	Tetragonal
	Yüksek-kristobalit	Kübik
	Melanophlogit	Kübik
	Fiber SiO_2	Orthorhombik
	Moganit	Monoklinik
Keatit-koesit-stishovit grup (yüksek ve ultra-yüksek basınç)	Keatit	Tetragonal
	Koesit	Monokinik
	Stishovit	Tetragonal
	Seifertit	Orthorhombik
Lekhatelierite-oal grup (amorf faz)	Lekhatelierit	Doğal silika cam
	Opal	H_2O-içeren, katı SiO_2 jel

Ayrıca faz dönüşümleri sırasında Si-O bağları kopmakta, yeni oluşan yapıda farklı atomlara bağlanma görülmektedir. Bunun sonucunda yüksek sıcaklıkta (1000 °C) kuvarsta yaklaşık %15 oranında hacimsel artış yaşanmaktadır (Şekil 9) [3].



Şekil 9 Si-O faz oluşumları hacim-sıcaklık grafiği [20]

Kuvars ısıtıldığı zaman SiO_2 kafes yapısında değişiklik oluşmaktadır. Örneğin 1 atm basınç altında α-kuvars 573 °C de β-kuvars yapısına dönüşmektedir. Bu dönüşüm hızlı bir şekilde gerçekleşmiştir ve tersine çevrilebilmektedir. %0.4 oranında hacim artışına sebep olmaktadır. Faz diyagramında görüldüğü üzere, 873 °C de tridimit yapısına dönüşmektedir. Bu faz değişiminin gerçekten olup olmayacağı veya β-kuvarsın alternatif olarak faz diyagramından tridimit oluşum sıcaklığı ile SiO_2'nin 1711°C 'deki erime sıcaklığı arasında bir sıcaklıkta doğrudan β -kristobalite dönüşeceği düşünülmektedir [19].

Kuvars Kompozitler

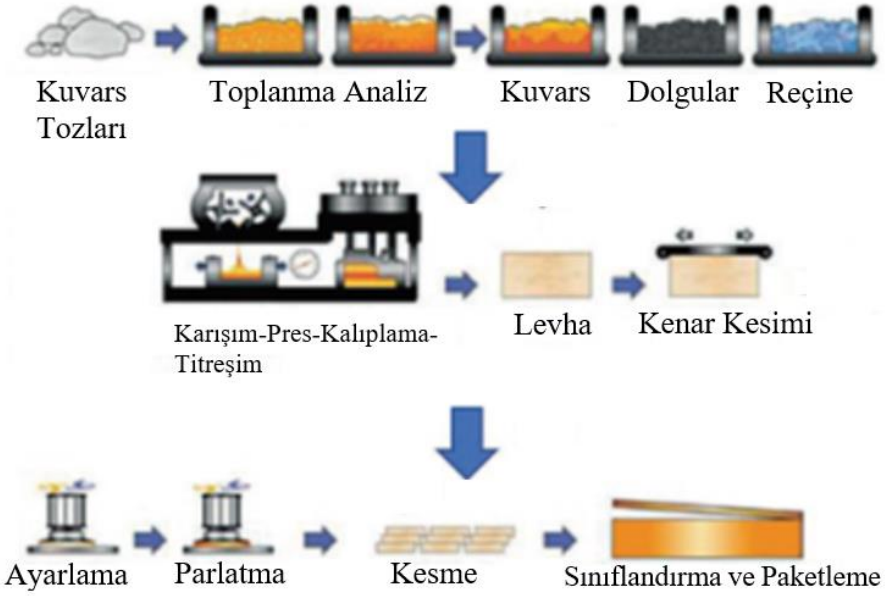
Yapay taşların üretimi kullanımı günden güne artmaktadır. Kuvars kompozitler, farklı boyutlarda, çeşitli iş kollarında kullanılmaktadır. İşlenmiş taşlar, suni mermer, mineral yüzeyler veya kuvars yüzeyler, granit ve mermer gibi doğal taşlara alternatif olarak dekorasyon ve inşaatta yaygın olarak kullanılan sentetik karonun ticari adlandırılmasıdır. Genellikle kuvars tozu, yüksek sertliği ve kimyasal dayanıklılığı, bulunabilirliği ve cazip fiyatı nedeniyle genellikle bu malzemelerdeki ana bileşendir [21].

En çok kullanılan yapay taşlar, kuvars tozları, yapışkan reçine ve diğer dolgulardan oluşmaktadır [22]. Kuvars tozu, yüksek sertliği ve kimyasal dayanıklılığı, bulunabilirliği ve cazip fiyatı nedeniyle genellikle bu malzemelerdeki ana bileşendir. Bu konuda ki çoğu ticari ürün, genellikle polimer reçinesi veya çimentodan yapılmış bir matris ile birbirine bağlanan ağırlıkça yaklaşık %90-94 kuvars (veya diğer mineral parçacıkları) içermektedir [21, 23, 24].

Yapay kuvars taşlar (yeniden oluşturulmuş taş olarak da bilinir), yüksek oranda bulunan kuvars yongaları, reçine bağlayıcı (tipik olarak doymamış bir polyester), pigmentler ve katkı maddelerinin bir karışımından üretilmektedir. Tasarlanmış taş levhalar ve tezgahlar çok çeşitli renklerde, desenlerde ve hatta dokularda mevcuttur. Dokusu, nasıl işlendiğine bağlı olarak ince veya kaba olabilir, ışıltılı bir yüzey için cam ve diğer yansıtıcı malzemelerle birleştirilebilmektedir. Granitin dayanıklılığının ve kuvarsın gözeneksiz yapısının faydalarını birleştiren üst düzey uygulamalarda giderek daha popüler hale gelmektedir. Gözeneksiz yüzey yapısı sayesinde anti bakteriyel özellik göstermektedir [25].

Levhaların üretim aşamasında içerisinde hava kalmaması için titreşim ve vakum işlemi uygulanmaktadır. Sonrasında yüksek kuvvette preslenerek sıkıştırılıp ve ısıtılmaktadır. Genel

olarak %93 kuvars ve diğer dolgular, %7 reçine uygulanır. Bu işlemde özellikle daha yüksek kalite elde etmek için hava uzaklaştırılmak için yapılmaktadır. Bu sayede levhanın materyal yoğunluğu eşit dağılmakta ve daha estetik bir görüntü elde edilmektedir (Şekil 10) [22].



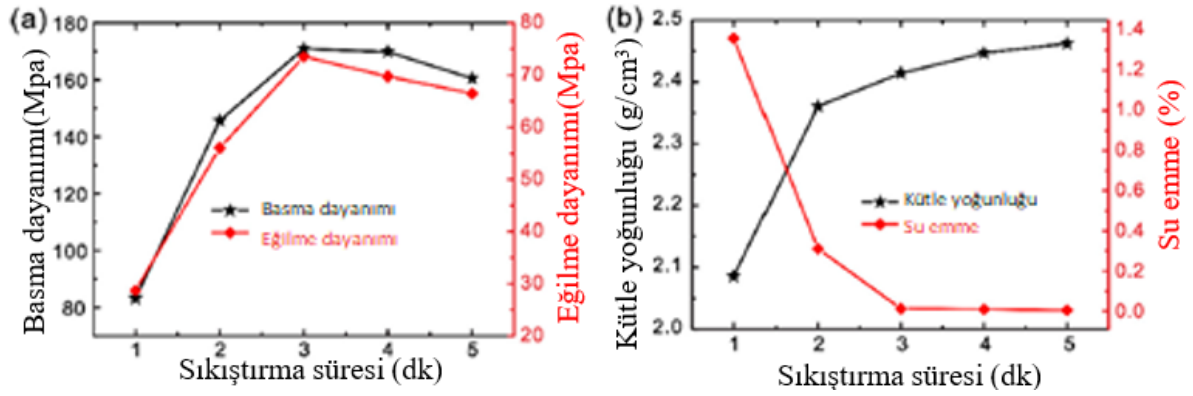
Şekil 10 Kuvars kompozit levha üretim şeması [23]

Yapay taş levhaların duvar kaplamalarında, zemin kaplamalarında ve bango uygulamalarında önemli bir yapı malzemesi haline gelmektedir. Yüksek mekanik özellikleri, ısıl dayanımı, nem ve suya karşı dayanımı, anti statik özelliği, yüksek yüzey kalitesi kullanımı için önemli sebeplerdir. Ayrıca ekonomik ve ekolojik olarak sürdürülebilir olması gerekmektedir. Bu sayede yapı malzemesi olarak atık SiO_2 değerlendirilebilmektedir. Bu nedenle, SiO_2 atıkları dayanıklı yapı malzemeleri üzerine araştırmalar değerlidir [26].

Çizelge 6' da kuvars kumu ve silisyum oksit atıkları ile yapılan testlerde, malzemelerin içerikler oranları gösterilmektedir [26]. Yapılan araştırmada bu tozlar karıştırılarak ve reçine eklenerek levhalar oluşturulmaktadır. Üretim sürecinde presleme süresi hariç tüm şartlar sabit tutulmuştur. Presleme süresinin mekanik özelliklere, birim kütle yoğunluğuna ve su emme özelliğine etkisi Şekil 11' de görülmektedir. Özellikler sıkıştırma süresi 3 dakika olan numunelerde mekanik özellikler maksimuma ulaşmaktadır. Bunun yanında su emme miktarı presleme süresi arttıkça azalmakta bunun yanında hacim kütle yoğunluğu artmaktadır. Kuvars kompozitlerin üretim süreçleri kolay görülmesine rağmen araştırma sonuçlarına göre üretim prosesi ve değerlerine göre, mekanik özellikler etkilenmektedir.

Çizelge 6 SiO_2 atıkları ve kuvars kumu içerik oranları [26]

Elementler (%)	**SiO_2**	**Si_3N_4**	**Al_2O_3**	**Fe_2O_3**	**CaO**	**MgO**	**Na_2O**	**K_2O**	**TiO_2**	**P_2O_5**
SiO_2 Atıkları	99.6	0.11	0.15	0.08	0.03	-	0.01	-	0.01	-
Kuvars Kumu	99.29	-	0.43	0.06	0.04	0.02	0.01	0.09	0.03	0.01



Şekil 11 a) Basma ve eğilme dayanımı b) kütle yoğunluğu ve su emme, özelliklerinin sıkıştırma sürelerine bağlı değişimleri [26]

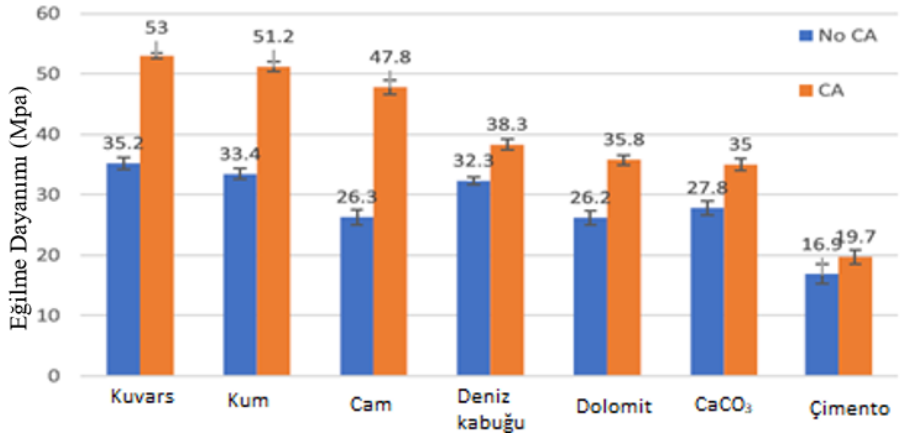
Birçok sektörde kullanılması ve özelliklerine rağmen bazı tercih edilmeme sebepleri de bulunmaktadır. Çizelge 7' de genel anlamda dış ve iç yüzey kaplamalarda tercih edilme ve edilmeme sebepleri gösterilmektedir.

Çizelge 7 Kuvars kompozitlerin olumlu ve olumsuz tercih sebepleri [25]

Neden tercih edilmektedir?	Neden Tercih edilmemektedir
Üretim sürecinde istenilen boyutta şekillendirilmesi kolaydır ve diğer doğal taşlara göre daha az enerji gerektirir.	Özellikle estetik bakımdan doğal taşlar daha çok tercih edilir
Yüksek sertlik değeri sebebi ile sürünme direnci yüksektir. Bu sayede zemin uygulamalarında kullanılmaktadır	Sertliği yüksek bir malzeme oluştuğu için özellikle zemin kaplamalarında darbe dayanımları düşüktür.
Doğal taşlara benzer kalıplar kullanılmasına rağmen, dokusu ve rengi düzenlenebilir	Bulunduğu yere göre doğal taşların maliyetleri daha düşük olabilir.
Düşük gözenekli yapısı sebebi ile parlatma harici yüzey işlemi gerektirmez. Özellikle temizlik işlerinde önemli bir etken oluşturur.	Özellikle seri üretim aşamasında toz, renk pigmentleri ve reçine oranını tüm adımlarda düzenlemek zor ve önemlidir.

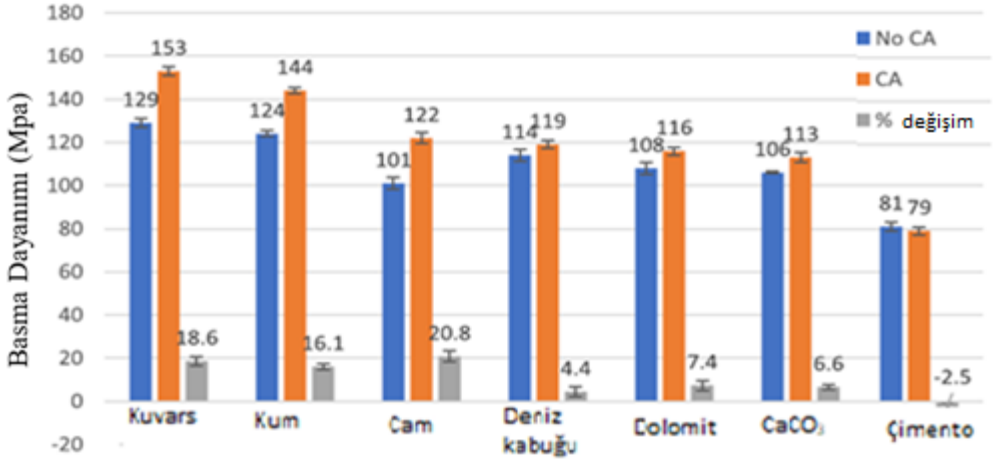
Ergun Ates, Stuart Barnes tarafından yapılan çalışmada, polyester/kuvars kompozitte bulunan polyester reçine oranları, kuvars tozu tane boyutları ve basınç dayanımın testi sırasında sıcaklık değerleri değiştirilerek polyester/kuvars kompozit numunelerin basma dayanımına etkileri araştırılmaktadır. Numuneler arasında en iyi sonuçlar 75^0C' de elde edilmiştir [27]. Sıcaklık ve sıkıştırma süresi gibi çeşitli parametrelerin değişimi ile ilgili yapılan araştırmalar üretim sürecinin ne kadar önem arz ettiğini göstermektedir.

Atık kuvars tozlarının değerlendirilmesi kuvars kompozitlerin kullanımında sürdürülebilirlik sağlamaktadır. Kullanım bakımından benzeri atıklardan olan cam, çimento, dolomit, deniz kabukları gibi malzemeler ile karşılaştırıldığında daha iyi özellikler göstermektedir. Heriyanto ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada %80 atık malzeme ve %20 epoksi reçine kullanılarak kompozitler üretilmiştir [28]. Ayrıca silan bazlı ara yüzey ajanı (coupling agent) kullanılarak malzemeler üzerindeki etkisi karşılaştırılmıştır. Bu araştırma sonuçlarından eğilme dayanımı Şekil 12' de gösterilmiştir. Eğilme dayanımı sonuçları incelendiğinde içerik olarak kuvarsa en yakın olan kum benzer mekanik özellikler göstermektedir. Bu araştırmada kuvars %99, kum %95' SiO_2 içermektedir.



Şekil 12 Farklı toz takviye maddeleri olan kompozitlerin eğilme mukavemetleri karşılaştırılması ve silan ara yüzey ajanı kullanımının etkisi [28]

Aynı çalışmada yapılan basma mukavemet testi sonuçlarını incelendiğinde benzeri grafik elde edilmektedir (Şekil 13) [28]. Ara yüzey ajanı kullanıldığında SiO_2 içeriği yüksek olan kompozitlerde daha iyi sonuçlar elde edilmektedir.



Şekil 13 Farklı toz takviye maddeleri olan kompozitlerin basma mukavemetleri karşılaştırılması ve silan ara yüzey ajanı kullanımının etkisi [28]

Çizelge 8' de kuvars ve mermerin mekanik ve fiziksel özellikleri görülmektedir. Yapay taşlar olarak da adlandırılan kuvarsın mermere göre üstün özellikleri göze çarpmaktadır. Yoğunlukları aynı olmasına rağmen özellikle basma direncinde kuvars kompozitler, mermere göre yaklaşık iki kat daha iyi özelliklere ulaşabilir. Yüksek sertlik oranı ve asit dayanımın olması ile kuvars kompozitlerin, mermere göre kullanımları konusunda öne çıkmaktadır.

Çizelge 8 Kuvars ve mermer tozu kompozitlerin mekanik özelliklerinin karşılaştırılması [23]

Özellikler	Kuvars	Mermer
Yoğunluk	2.4-2.5 g/cm^3	2.4-25 g/cm^3
Su emme	0.01-0.2%	<0.2%
Basma dayanımı	150-240Mpa	110-150Mpa
Aşınma direnci	58-63(indeks)	20-32(indeks)
Sertlik	6-7 Mohs	3-4Mohs
Asit dayanımı	Var	Yok

Ticari olarak önemli yere sahip olan kuvars kompozitler, granit ve mermere göre üstün özelliklere sahiptir (Çizelge 9). İçeriğine katılabilecek çeşitli dolgular sayesinde mevcut değerlerde artış görülebilmektedir.

Çizelge 9 Ticari olarak kullanılan kuvars kompozit-granit-mermer teknik özelliklerinin karşılaştırılması [29]

Özellikler	Birim	Kuvars	Granit	Mermer
Sertlik	Mohs	7	5	3
Basma dayanımı	N/mm^2	205.8	186.6	135.7
Eğilme dayanımı	N/mm^2	59	41	28
Darbe dayanımı	Joule	5.5	2.9	2
Su emme	%artış	0.025	0.06	0.05
Aşınma Direnci	Mm^2	160	219	355

SONUÇLAR

Hammadde bolluğu ve fiyat performans olarak mükemmel özelliklere sahip kuvars, malzeme bilimi geliştikçe, kullanım miktarı artarak devam edecektir. Özellikle nano boyutta araştırıldıkça ve içeriğindeki düşük orandaki element yapılarının düzenlenebilmesiyle oluşturulabilecek fiziksel, kimyasal özellikleri potansiyel bakımından üst düzey mühendislik malzemeleri arasında kendine yer bulacaktır. Yapay taşların temel malzemesi olan kuvarsa ek olarak dolgu malzemeleri değiştirilerek elektrik iletkenliği, termal direnci, çekme ve eğilme değerleri arttırılabilmektedir. Çok yüksek saflıkta silisyumdioksit içeren kuvarsın kullanıldığı başlıca elektronik sektörü olmak üzere tüm sektörlerde, nano-kuvars kompozitlerin kullanımı konusunda büyük potansiyel içermektedir. Bunun yanında nano katkıları ile oluşturulabilecek yapılar ile piezoelektrik özelliği geliştirilerek daha düşük saflık oranına sahip orandaki kuvars, yüksek saflık gereken yerlerde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

[1] B. Bhushan, Handbook of Nano-technology, Berlin: Springer, 2017.

[2] J. Götze ve R. Möckel, Quartz: Deposits, Mineralogy and Analytics, Berlin: Springer, 2012.

[3] K. Aasly, Properties and behavior of quartz for the silicon process, Trondheim: Thesis for the degree of philosophiae doctor, 2018.

[4] S.K.Haldar, «Chapter 6 - Sedimentary rocks,» %1 içinde Introduction to Mineralogy and Petrology, Elsevier, 2020, pp. 187-268.

[5] A. Akçıl, A. Tuncuk ve H. Deveci, «Kuvarsın saflaştırılmasıda kullanılan kimyasal yöntemlerin incelenmesi,» Madencilik, pp. 3-10, 2007.

[6] M. Tilli ve A. Haapalinna, «Properties of Silicon,» %1 içinde Handbook of Silicon Based MEMS Materials and Technologies., Okmetic Oyj, Vantaa, Finland, William Andrew, 2015, pp. 3-17.

[7] G. Yücetürk, «Yapay mermerlerde kullanılan kuvars ve kalsit minerallerinin fiziko-meknik özellikleri,» SDU International Journal of Technologic Sciences, cilt 2, no. 3, pp. 72-80, 2010.

[8] J. Götze, «Chemistry, textures and physical properties of quartz- geological interpretation and technical application,» Mineralogical Magazine, pp. 645-671, 2009.

[9] «Maden Tetkik ve Arama Genel Müdürlüğü,» Maden Tetkik ve Arama Genel Müdürlüğü, [Çevrimiçi]. Available: https://www.mta.gov.tr/v3.0/bilgi-merkezi/kuvars. [Erişildi: 30 05 2021].

[10] K. Vos, N. Vandenberghe ve J. Elsen, «Surface textural analysis of quartz grains by scanning electron microscopy (SEM): From sample preparation to environmental interpretation,» Earth-Science Reviews, pp. 93-104, 01 11 2013.

[11] M. Stipp, H. Stünitz, R. Heilbronner ve S. M. Schmid, «The eastern Tonal fault zone: 'a natural laboratory' for crystal plastic deformation of quartz over a temperature range from 250 to 700 °C,» Journal of Structural Geology, pp. 1861-1864, 26 02 2002.

[12] C. Peter, Cave of Crystal, Chihuahuan: Nat Geo Image Collection, 2020.

[13] A. S.Auler ve FrancescoSauro, «Chapter 102 - Quartzite and quartz sandstone caves of South America,» %1 içinde Encyclopedia of Caves, Elsevier, 2019, pp. 850-860.

[14] B. Mysen ve P. Richet, «Chapter 5 - Silica,» %1 içinde Silicate Glasses and Melts, Elsevier, 2019, pp. 143-183.

[15] «https://www.mta.gov.tr/v3.0/hizmetler/maden-yataklari,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 30 05 2021].

[16] E. Arı, D. Ölmez, N. Topçu, M. Ölmez, F. Çapraz, G. Deniz ve A. Altınay, «Kuvars Yüzeylerde Mekanik Dayanım ve Yüzey Özelliklerinin İyileştirilmesi,» Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, no. 19, pp. 326-332, 2019.

[17] Şişecam,«Şişecam,»[Çevrimiçi].Available:https://www.sisecam.com.tr/tr/PublishingImages/faaliyet-alanlarimiz/maden/sisecam-silis-kumu/S4-500-250.pdf. [Erişildi: 30 05 2021].

[18] K. Aasly, T. Malvik ve E. Myrhaug, «Advanced Methods To Characterıze Thermal Properties of QuartzK. Aasly, T. Malvik and E.H. Myrhaug,» %1 içinde INFACON XI, 2007.

[19] E. Ringdalen, «Changes in Quartz During Heating and the Possible Effects on Si Production,» The Journal of The Minerals, Metals & Materials Society (TMS), cilt 67, no. 2, pp. 484-492, 2015.

[20] H. Salmang ve S. H., Keramik, Berlin: Springer, 1982.

[21] G. Santos, M. Crovace ve E. Zanotto, «New engineered stones: Development and characterization of mineral-glass composites,» Composites Part B, pp. 556-565, 11 03 2019.

[22] B. Novak ve P. MArek, New developments in Quartz Research- Varieties, Crystal Chemistry and Uses Technology, New York: Nova Science Publishers, 2013.

[23] K.N.Choon,«https://www.bca.gov.sg/Publications/EnhancementSeries/AggStone.html,»2017.[Çevrimiçi].Available:https://www.bca.gov.sg/Publications/EnhancementSeries/others/AggStone_c1.pdf. [Erişildi: 02 06 2021].

[24] J. L. d. Santos, L. Rosa ve P. Amaral, «Temperature effects on mechanical behaviour of engineered stones,» Construction and Building Materials, pp. 171-174, 19 06 2010.

[25] W.L.Siew,https://www.bca.gov.sg/Publications/EnhancementSeries/others/design2foreword.pdf,»2008.[Çevrimiçi].Available:https://www.bca.gov.sg/Publications/EnhancementSeries/design2.html. [Erişildi: 03 06 2021].

[26] L. Peng ve S. Qin, «Mechanical behaviour and microstructure of an artificial stone slab prepared using a SiO2 waste crucible and quartz sand,» Construction and Building Materials, pp. 273-280, 26 06 2018.

[27] E. Ates ve S. Barnes, «The effect of elevated temperature curing treatment on the compression strength of composites with polyester resin matrix and quartz filler,» Materials and Design, pp. 435-443, 09 06 2011.

[28] Heriyanto, F. Pahlevani ve V. Sahajwalla, «Effect of different waste filler and silane coupling agent on the mechanical properties of powder-resin composite,» Journal of Cleaner Production, pp. 940-956, 25 03 2019.

[29] B. Akademi, «teknik el kitabı,» 17 09 2017. [Çevrimiçi]. Available: https://www.belenco.com/images/teknik-el-kitabi.pdf. [Erişildi: 10 06 2021].

ÖN ÜRETİMLİ YAPILARIN YAPISAL ANALİZİ

Canozan Mursal [1], Egemen Teomete[2]
Canozan Mursal[1]-Fen Bilimleri Enstitüsü, Dokuz Eylül Universitesi, İzmir
Egemen Teomete[2]- İnşaat Mühendisliği Bölümü, Dokuz Eylül Universitesi, İzmir

ÖZET

Ön üretimli yapım, doğrudan şantiyede imal edilmek yerine elemanların ayrı ayrı üretilip monte edildiği ve şantiyeye nakledildiği yapılar inşa etme sürecidir.

Türkiye'de inşa edilen ön üretimli yapıların neredeyse tamamı deprem riski altında olduğundan, deprem yükü yapıların tasarımında çok önemlidir.

Bu çalışmanın amacı, Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği'nde önerilen doğrusal ve doğrusal olmayan tasarım yöntemleri kullanılarak farklı tipteki ön üretimli endüstriyel yapıların yapısal deprem davranışını belirlemek ve değerlendirmektir. Farklı yüksekliklere ve açıklıklara sahip yapıların sismik davranışını araştırmak için, aynı yapı hem mafsallı bağlantılar hem de moment aktaran bağlantılar kullanılarak değerlendirilecektir. Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar ekonomik açıdan ve sismik davranış açısından yorumlanacaktır.

Anahtar kelimeler: ön üretimli yapılar, deprem, doğrusal analiz, doğrusal olmayan analiz, betonarme

STRUCTURAL ANALYSIS OF PREFABRICATED STRUCTURES

ABSTRACT

Prefabricated construction is a process of constructing buildings where components are manufacturated seperately and transported to the construction site where it is assembled, instead of being manufactured directly at the site.

Due to almost all prefabricated structures that were built in Turkey are under earthquake risk, earthquake load is crucial in structures' design.

The aim of this study is to determine and evaluate the structural earthquake behavior of different type of prefabricated industrial structures using linear and non-linear design method that are proposed in Turkish Earthquake Code. In order to investigate seismic behaviour of structures that have various height levels and span, the same structure will be assessed using both pinned connections and also moment resisting connections. The results of this study will be interpreted in terms of economy and seismic behaviour.

Keywords: prefabricated structures, earthquake, linear analysis, non-linear analysis, reinforced concrete

GİRİŞ

Prefabrikasyon, yapıyı oluşturan bileşenlerin doğrudan şantiyede imal edilmek yerine ayrı ayrı üretilip monte edildiği ve şantiyeye nakledildiği yapılar inşa etme sürecidir [1]. Bir yapı projesinde, prefabrike betonarme yapı elemanlarının kullanılmasının pek çok yararı vardır. Projenin toplam maliyetinin az olması, hızlı bir şekilde tamamlanması, yapı elemanlarında istenilen kalite ve dayanımın sağlanması, malzeme israfının azaltılması, modülarizasyon ve standardizasyon olanaklarının artırılması ve şantiyede meydana gelebilecek olan iş kazası sayısının önemli ölçüde azaltılabilmesi gibi avantajları ile birlikte sektörel büyümeyi de hızlandırmıştır [2]. Bu hızlı sanayileşme sürecinde prefabrike inşaat teknolojisi, özellikle sanayi yapılarının bir an önce tamamlanarak üretime katılmasını sağladığı için pek çok Avrupa ülkesinde tercih edilmiş ve yaygın biçimde kullanılmıştır [3].

Ülkemizde de yaygınlaşan betonarme prefabrik yapılar, kullanma amaçlarına göre çeşitli açıklıklarda ve yüksekliklerde yapılmaktadır. Bu farklı türde yapıların yapısal elemanlarının bağlantıları yönetmeliğimizce çeşitli kurallar doğrultusunda mafsallı ve moment aktarıcı olarak yapılabilmektedir. [4].

Mafsallı bağlantılar:

-Pimli Bağlantılar (MFB1)

-Kaynaklı Bağlantılar (MFB2)

-Yuvalı Bağlantılar (MFB3)

Moment Aktaran Bağlantılar:

-Tam Ard Germeli Bağlantılar (MAB2)

-Üstte Islak Altta Kaynaklı Bağlantılar (MAB3)

-Manşonlu Pimli Bağlantılar (MAB4)

Bu çalışma kapsamında bağlantı türünün yapı tasarımına ve sismik davranışına olan etkisinin anlaşılabilmesi için yapı yüksekliği 15 metre olarak seçilen ara katsız endüstriyel depo yapısı çatı bağlantıları moment aktarıcı ve mafsallı olarak iki farklı şekilde analiz edilmiştir. Yapılan iki farklı analizde değiştirilen tek şey çatı bağlantı türü seçimi olmuştur bunun dışındaki her koşul iki model için aynıdır. Yapı analizleri "Sap2000" programı kullanılarak üç boyutlu olarak yapılmıştır [5]. Prefabrik kiriş (makas, oluk) elemanları, ACI 318 yönetmelikleri doğrultusunda çözüm yapan "Concise Beam" programı kullanılarak tasarlanmıştır [6-7]. Kolon elemanları ise TS500 kuralları dikkate alınarak yapılan betonarme hesap sonucunda tasarlanmıştır [8-9].

MATERYAL VE METHOD

Bu çalışmanın amacı çatı bağlantısının moment aktarıcı ve mafsallı yapılması durumunda yapı davranışının incelenmesidir. Ancak bilindiği üzere TBDY kapsamında 12 metre yüksekliğin üzerindeki ön üretimli yapılarda mafsallı çatı bağlantılarına izin vermemektedir. Bu yükseklik kısıtlamasının da etkisinin araştırılması için 15 metre yüksekliğinde bir yapı sismik etkilerin yüksek olduğu bir bölgede ele alınmıştır. Aşağıda bilgileri verilen yapı, iki farklı bağlantı türüyle de analiz edilmiştir. Bu yapıların ön tasarımı dayanıma göre tasarıma

göre yapılıp ardından itme (pushover) analizi yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Yapı Özellikleri:

Makas Altı Yükseklik: 15 metre

X doğrultusunda açıklık: 22.5 metre + 26 metre

Y doğrultusunda açıklık: 8 m*7 adet=56 metre

Ara kat: Yok.

Yapıya Etkiyen Yükler:

Çatı Kaplaması:10kg/m2

Güneş Panelleri: 15kg/m2

Cephe Panelleri: 200kg/m2

Kar: 75kg/m2

Buz: 50kg/m2

Malzeme Özellikleri:

Ön gerilmesiz elemanlar (Kolon, oluk, aşık) : C30

Ön gerilmeli elemanlar (Makas) : C40

Donatı Çeliği: B420C

Sismik Bilgiler:

Yapının bulunduğu konum yüksek ivme değerlerinin olduğu bir bölgede seçilmiştir. Yüksek deprem etkisinin sonuçları belirgin kılması amaçlanmıştır. Sismik veriler "AFAD İnteraktif Web Uygulaması" kullanılarak elde edilmiştir [10].

Deprem Yer Hareket Düzeyi: DD-2

Yerel Zemin Sınıfı: ZD

Enlem: 40.761°

Boylam: 31.640°

Ss: 1.407

S1: 0.400

Sds: 1.407

Sd1: 0.760

PGA: 0.580 m/sn^2

PGV: 47.499 m/sn

Dayanıma Göre Tasarım (DGT):

Aynı yapı çatı bağlantısı moment aktarıcı ve mafsallı olarak inceleneceğinden "Model-Mafsal" ve "Model-Moment" olarak iki ayrı hesap modeli kurulmuştur. Yapılan modellemelerde kolon ve kiriş elemanlar çubuk eleman olarak modellenmiştir. Çatı panellerinin davranışa olan etkisinin göz önüne alınması için çatı diyaframı tanımlaması TBDY 8.bölümde açıklanan

şekilde yapılmıştır. Kolon temel birleşimine ankastre mesnet ataması yapılmıştır. Model-Mafsal' da makas, oluk, aşık ve çatı çaprazları mafsallı olarak bağlanırken Model-Moment' de aşık ve çatı çaprazları mafsallı olarak bağlanmış, oluk ve makas elemanlar kolonlara moment aktarıcı biçimde bağlanmıştır. İki model arasındaki tek fark bu bağlantı seçiminden kaynaklanmaktadır. Yükleme koşullarında herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. Dayanıma göre tasarım parametreleri TBDY Tablo 4.1'den alınmıştır.

Model-Mafsal için "Deprem etkilerinin tamamının çatı düzeyindeki bağlantıları mafsallı olan ve yüksekliği 12m'yi geçmeyen süneklik düzeyi yüksek kolonlar tarafından karşılandığı tek katlı binalar" tanımına karşılık gelen taşıyıcı sistem davranış katsayısı (R) ve dayanım fazlalığı katsayısı (D) alınmıştır.

Model-Moment ise "Deprem etkilerinin tamamının bağlantıları moment aktaran süneklik düzeyi yüksek ön üretimli çerçevelerle karşılandığı binalar" tanımına karşılık gelen MAB3 tipi moment aktarıcı bağlantılar kullanılan yapı parametreleri alınmıştır. Tablo-1'de alınan katsayı değerleri gösterilmektedir.

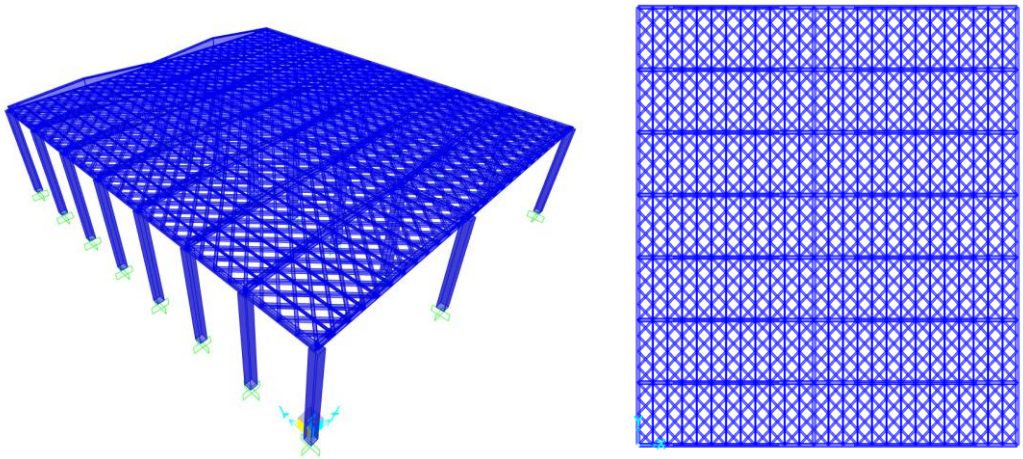
Tablo-1 Dayanıma Göre Tasarım Parametreleri

	Model-Mafsal	Model-Moment
Taşıyıcı Sistem Davranış Katsayısı (R)	3	5
Dayanım Fazlalığı Katsayısı (D)	2	2.5

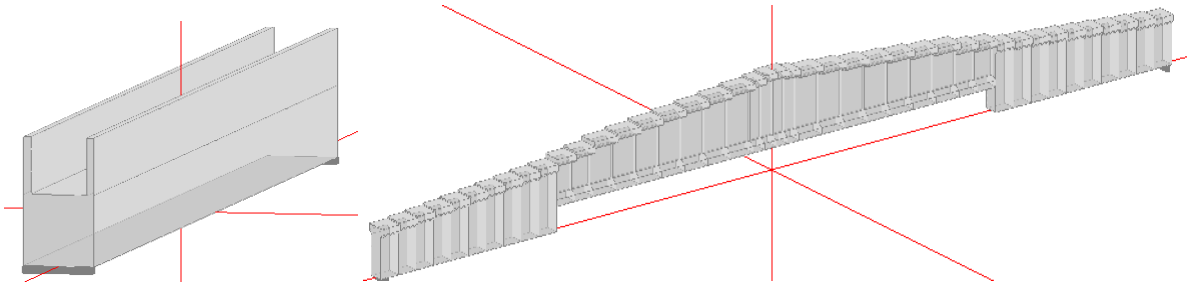
Aşık kirişleri üzerine çatı kaplaması, güneş panellerinin yükleri ve kar yükleri etkitilmiştir. Oluk kirişlerine bu üç yüklemeye ek olarak buz yükleri de dikkate alınmıştır. Makas kirişleri üstüne gelen aşıkları ve aşık yüklerini taşımaktadır. Cephe panellerinin deprem sırasında yapı hareketine katılacağı varsayılarak yüksekliğinin yarısı kadarlık kısmı dikkate alınmış kolonlara tekil yük olarak etkitilmiştir. Tablo 2'de yapı elemanlarına uygulanan yükler verilmiştir.

Tablo-2 Taşıyıcı Sisteme Uygulanan Düşey Yükler

Makas Kirişleri	G (kN /m)	Zati
	G2(kN /m)	1.962
	Q (kN /m)	0.00
	Kar (kN/m)	5.884
Aşık Kirişleri	G (kN /m)	Zati
	G2 (kN /m)	0.441
	Kar (kN/m)	1.324
Oluk Kirişleri	G (kN /m)	Zati
	G2 (kN /m)	0.441
	Kar (kN/m)	1.324
	Buz (kN/m)	0.883
Kolonlar	G (kN /m)	Zati
	G2 (kN)	31.38



Şekil-1 Moment Model'e Ait Katı Cisim Görüntüsü ve Çatı Diyaframı

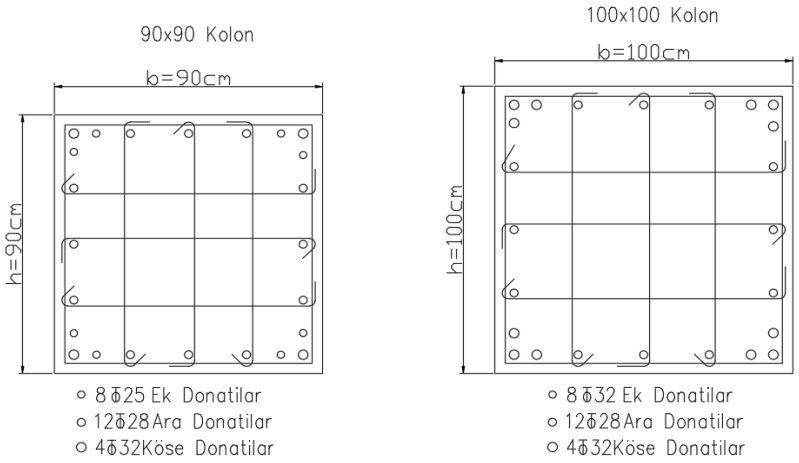


Şekil-2 Model-Moment'e Ait Moment Aktarıcı Makas ve Oluk Tasarımı

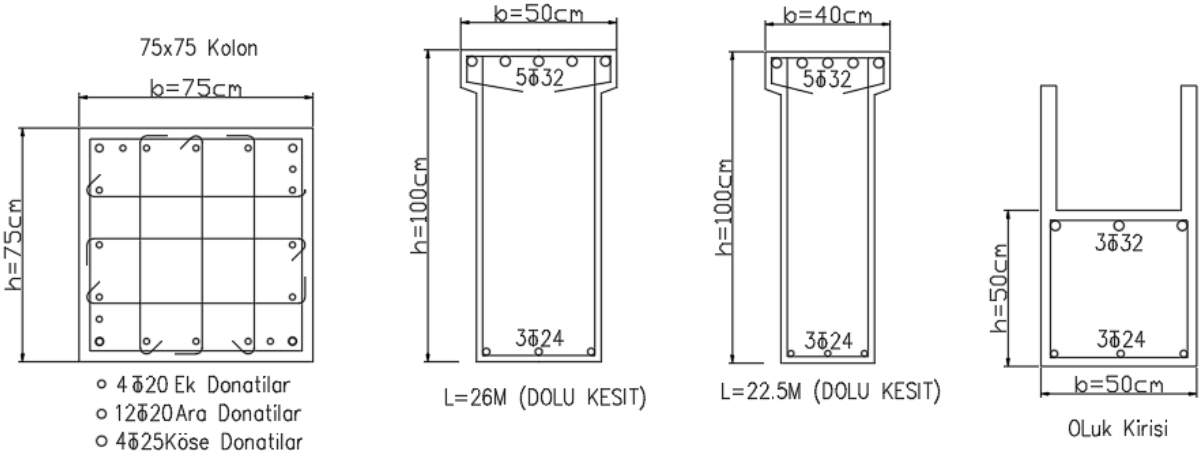
Model-Moment'te oluk ve makas elemanlarının moment aktarıcı olarak çalışması istendiğinden dolayı kolon kiriş birleşimlerinde kesit alanına ve tersinir yüklerin taşınmasında alt ve üst donatılara ihtiyaç olmaktadır. Bu nedenle makas elemanlarının kolon birleşimlerinin yapılacağı mesnet bölgelerine yakın kısımlarda kesit alanı arttırılmıştır. Ayrıca oluk kirişlerinin normal oluk kirişinden farklı olarak bir moment aktarıcı kiriş görevi görmesi istendiğinden dolayı eleman boyunca kesit alanı arttırılmıştır. Şekil-2'de moment aktarması planlanan oluk ve makas elemanları Concise Beam programı üzerinden gösterilmiştir.

TBDY (2018) Tablo 4.2 kullanılarak, kolonların etkin kesit rijitlikleri "0.7" katsayısı ile kirişlerin ise etkin kesit rijitlikleri "0.35" ile çarpılmıştır. Ardından spektrum tanımlaması yapılmıştır. Deprem kuvveti mod birleştirme yöntemi ile elde edilip eşdeğer deprem yükü yöntemine göre kontrol edilmiş ve ß'nin 1'den büyük olduğu durumlarda azaltılmış deprem kuvvetleri bu katsayı ile çarpılarak arttırılmıştır. Göreli kat öteleme kontrolleri yapılan modeller öteleme sınırlarını sağlayamadığı koşulda kolon boyutları arttırılmıştır. Öteleme kontrolleri sonucunda Model-Mafsal için kenar kolonlar 90x90 ve orta kolonlar 100x100 olarak belirlenmiştir. Model-Moment için yapılan analizler sonucunda 75x75 kolon boyutlarının göreli kat öteleme koşullarını sağlamada yeterli olduğu görülmüştür. Oluşan iç kuvvet değerleri deprem yönetmeliğince kombine edilmiş ve en olumsuz yük kombinasyonuna göre betonarme tasarımı yapılmıştır.

Şekil-3'de Model-Mafsal için yapılacak itme analizinde plastik mafsalların yerleştirileceği, bütün enerjinin sönümlendiği kolon alt ucuna ait donatı detayları verilmiştir. Bu kısımlarda ek donatılar yerleştirilmiştir. Kolon tepesinde bu ek donatılara ihtiyaç olmamaktadır.



Şekil 3- Model-Mafsala Ait Kolon Boyutlandırması ve Donatı Yerleşimi



Şekil-4 Model-Moment'e Ait Kolon, Makas ve Oluk Boyutlandırması ve Donatı Yerleşimi

Şekil 4'de gösterilen kiriş donatıları yeterli kenetlenme boyu sağlanmış ve tersinir yükler altında çalışabilen donatıları göstermektedir. Makas ve oluk elemanları içinde ön germe halatları ve montaj kısmında mafsallı durumda yükleri taşıyacak donatıları bulunsa da bu donatılar kolonla bir birleşim yapmadığından dolayı plastik mafsal tanımlaması için yapılacak hesaplarda dikkate alınmamıştır. Kolon donatı detayı da kolon alt ucu ve üst ucu için hesaplanan donatı yerleşimini göstermektedir.

Şekil Değiştirmeye Göre Tasarım (ŞDGT):

Yapının dayanıma göre tasarımdan bulunan boyutlandırmaları ve donatı yerleşimleri kullanılarak şekil değiştirmeye göre tasarım altında performans değerleri elde edilir. Bu performans değerleri elde edilirken itme analizleri yapılmıştır. Deplasman kontrollü analizi yöntemi ile yapının performans değerleri elde edilmiştir. Bu analiz yapılırken öncelikle betonarme elemanların moment-eğrilik ilişkisi belirlenmiştir. Bu moment eğrilik ilişkilerinden yararlanılarak yapılarda hasarların oluşacağını ön gördüğümüz birleşim bölgelerine plastik mafsal atamaları yapılmıştır. Plastik mafsal kabulü yapıldıktan sonra, G+0,3Q yüklemesini dikkate alan yapı, tepe kotundan iki farklı doğrultuda ayrı ayrı olmak üzere yatay deplasman yapmaya zorlanmıştır. Adım adım arttırılan bu deplasman değerlerine karşılık gelen taban kesme kuvveti değerleri grafik olarak elde edilmiştir. Elde edilen bu deplasman kesme kuvveti grafiği spektrum ile çakıştırılıp yapının performans noktası yani nihai deplasman talebi elde edilmiştir. Ardından yapı bu talep deplasmanına kadar itilmiş ve elemanlarda oluşan dönme değerleri alınarak TBDY kapsamında performans kontrolleri yapılmıştır. Bu sayede elemanların performans seviyeleri belirlenmiş ve nihai sonuçlar elde edilmiştir.

Beklenen malzeme dayanımları (TBDY Tablo 5.1):

Beton: fce = fck × 1.3 = 30 MPa × 1.3 = 39 MPa

Beton (Ön gerilmeli): fce = fck × 1.3 = 40 MPa × 1.3 = 52 MPa

Donatı: fye = fyk × 1.2 = 420 MPa × 1.2 = 504 MPa

Karakteristik malzeme dayanımlarının (fck, fyk) katsayılarla çarpılması sonucunda beklenen malzeme dayanımları (fce, fye) elde edilir.

Beton ve donatı çeliği için gerilme- birim şekil değiştirme bağlantıları TBDY EK 5A'ya uyularak yapılmıştır. Sargılı beton için "Mander Beton Modeli" benimsenmiştir [11]. Donatı çeliği için 5A.2'de tariflenen "Donatı Çeliği Modeli" benimsenmiştir.

Etkin kesit rijitlikleri TBDY (5.2) denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$(EI)_e = \frac{M_y}{\theta_y}\frac{L_s}{3}$$

Bu denklemde M_y ve θ_y çubuk eleman uçlarındaki plastik mafsalların etkin akma momentleri ile akma dönmelerinin ortalamalarını göstermektedir. L_s ise kesme açıklığıdır.

θ_y plastik mafsal akma dönmesi TDBY (5.3) denklemi ile hesaplanmıştır

$$\theta_y = \frac{\phi_y L_s}{3} + 0.0015\eta\left(1 + 1.5\frac{h}{L_s}\right) + \frac{d_b\,\phi_y f_{ye}}{8\sqrt{f_{ce}}}$$

ϕ_y plastik mafsal kesitindeki etkin akma eğriliğini göstermektedir. Kiriş ve kolonlarda $\eta = 1$ olarak alınmaktadır. h kesit yüksekliğini göstermektedir. d_b ortalama donatı çapını, fce ve fye ise sırasıyla betonun ve çeliğin beklenen malzeme dayanımı değerlerini ifade etmektedir.

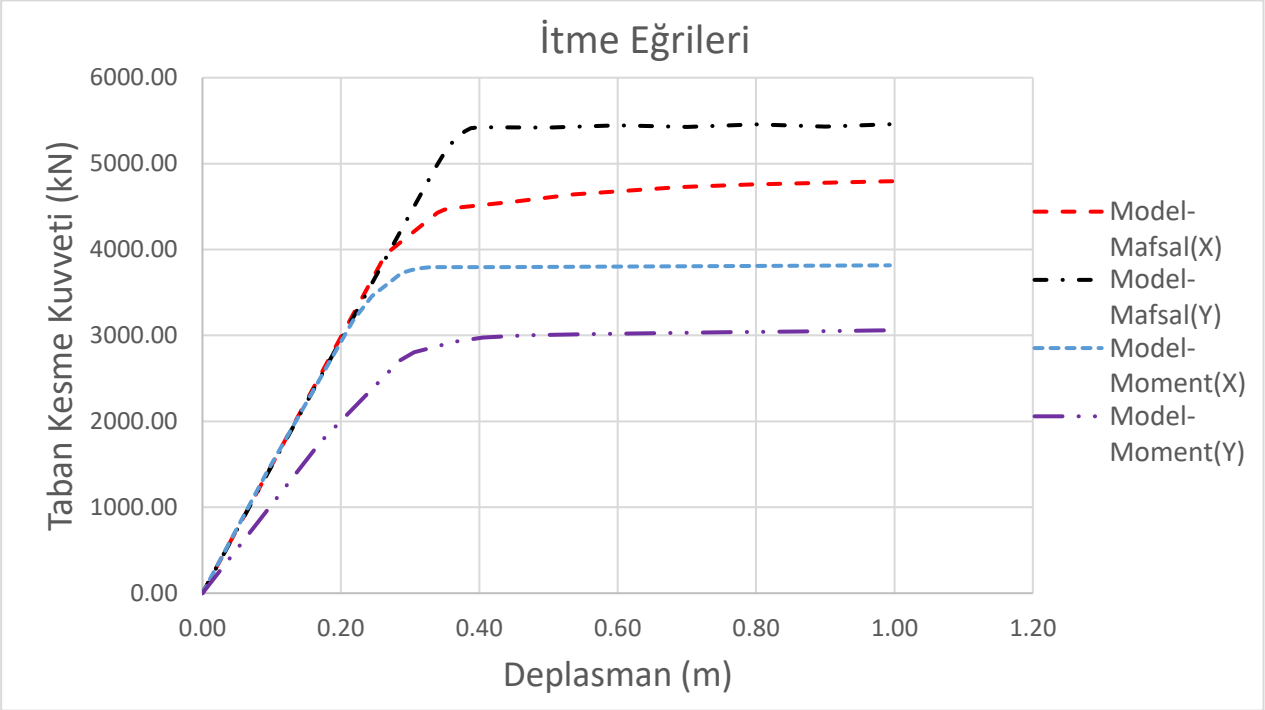
SAYISAL SONUÇLAR

Plastik mafsal kabullerinin yapılabilmesi için öncelikle daha öncesinden betonarme hesabı yapılan kesitlerin mevcut donatıları ve kesit boyutları altında moment-eğrilik ilişkisinin elde edilmesi gerekmektedir. Bu çalışma kapsamında moment eğrilik ilişkileri Sap2000 programının Section Designer eklentisi kullanılarak yapılmıştır. Moment eğrilik ilişkisi bulunduktan sonra TBDY (5.2 ve 5.3) denklemleri kullanılarak etkin kesit rijitliği değerleri hesaplanmış ve elemanların rijitlikleri bu katsayı oranında azaltılmıştır. Plastik mafsal boyunun kesit yüksekliğinin yarısı olduğu varsayılmıştır.

İdealleştirilmiş bilineer moment-eğrilik grafiğindeki moment ve dönme değerleri kullanılarak plastik mafsal tanımlamaları rijit bağlantıların bulunduğu bölgelere kesit yüksekliğinin yarısı boyutunda olacak şekilde yapılmıştır. Kirişler için (M3) doğrultusunda mafsal, kolonlar için ise (P-M2-M3) doğrultularında mafsal tanımlaması yapılmıştır.

İtme Analizi:

Yapı öncelikle belirli bir deplasman değeri girilerek tepe noktasından itilir. Bu deplasman değerine kadar adım adım itilen yapının taban kesme kuvveti-deplasman ilişkisi elde edilir. Modelden hareketle yapının sözde ivme-deplasman ilişkisine geçilir. Spektrum grafiği de benzer şekilde ivme deplasman grafiğine dönüştürüldükten sonra çakıştırılır ve yapının performans noktası elde edilir. Yapının itme talebi elde edildikten sonra yapı bu performans noktasından elde edilen deplasman değerine kadar itilir ve bırakılır. Belirlenen deplasman değerine kadar itilen yapıda oluşan dönmeler modelden okunarak yönetmelikteki sınır değerler ile karşılaştırılır.



Şekil-4 Modellere Ait İtme Eğrileri

Şekil-4'de modellerin iki doğrultuda taban kesme kuvveti deplasman eğrileri elde edilmiştir. Burada öncelikle yüksek bir deplasman değeri girilmiş ve her deplasman değerine karşılık gelen taban kesme kuvveti adım adım elde edilmiştir. Ardından bu itme eğrisi yardımıyla talep deplasmanlar elde edilmiştir. Talep deplasmanlar Model-Mafsal (X), Model-Mafsal (Y), Model-Moment (X) ve Model-Moment (Y) için sırasıyla 0.417m, 0.347m, 0.395m ve 0.485m olarak elde edilmiştir. Modeller bu talep deplasman değeri çatı seviyesinden verilmiştir. İki model karşılaştırıldığında daha yüksek tasarım ivmeleri sonucunda oluşan taban kesme kuvvetleri altında dayanıma göre tasarımı yapılan Model-Mafsal'ın itme eğrileri iki yönde de Model-Moment'in üzerinde kalmıştır. Bu tasarım ivmelerine ait farklılıkların sebepleri "Sonuçlar ve Tartışma" bölümünde tartışılmıştır.

Talep deplasmanlara kadar itilen modellerden plastik dönmeler okunmuştur. Bu plastik dönme değerleri kullanılarak elemanların plastik dönme sınırları hesaplanmıştır.

$$\theta_p{}^{(G\ddot{O})} = \frac{2}{3}[(\phi_U - \phi_y)L_p\left(1 - 0.5\frac{L_p}{L_s}\right) + 4.5\mathrm{d}_b\,\phi_U)]$$

Göçme Öncesi (GÖ) Performans Düzeyi plastik dönme $\Theta p^{(G\ddot{O})}$

Kontrollü Hasar (KH) Performans Düzeyi plastik dönme $\Theta p^{(KH)}$ =0.75x$\Theta p^{(G\ddot{O})}$

Sınırlı Hasar (SH) Performans Düzeyi plastik dönme $\Theta p^{(SH)} = 0$

ϕ_y ve ϕ_u etkin akma ve maksimum eğriliğini göstermektedir. L_p plastik mafsal boyu, L_s kesme açıklığını temsil etmektedir. d_b ortalama donatı çap değeridir.

Aşağıdaki tabloda Model-Mafsal için en büyük plastik dönme değerleri ve karşılık gelen sınır değerler verilmiştir.

Tablo-3 Model-Mafsal'a Ait En Büyük Plastik Dönme Değerleri ve Hasar Seviyesi Kontrolü

Yapı Elemanı	ϕ_y	ϕ_u	$L_p(m)$	$L_s(m)$	$\Theta_{istem}(\%)$		$\Theta p^{(G\ddot{O})}(\%)$	$\Theta p^{(KH)}(\%)$	Hasar
90x90(X)	0.003467	0.1069	0.450	15.00	0.823	-0.006	3.9659	2.9745	KH
90x90(Y)	0.003467	0.1069	0.450	15.00	1.862	-0.510	3.9659	2.9745	KH
100x100(X)	0.003093	0.0978	0.500	15.00	0.682	-0.000	3.9845	2.9884	KH
100x100(Y)	0.003093	0.0978	0.500	15.00	0.254	-0.211	3.9845	2.9884	KH

Tablo-4 Model-Moment'e Ait En Büyük Plastik Dönme Değerleri ve Hasar Seviyesi Kontrolü

Yapı Elemanı	ϕ_y	ϕ_u	$L_p(m)$	$L_s(m)$	$\Theta_{istem}(\%)$		$\Theta p^{(G\ddot{O})}(\%)$	$\Theta p^{(KH)}(\%)$	Hasar
75x75(X)	0.004191	0.1283	0.375	7.50	1.503	-0.771	3.8912	2.9184	KH
75x75(Y)	0.004191	0.1283	0.375	7.50	1.693	-0.167	3.8912	2.9184	KH
Oluk(X)	0.006204	0.2007	0.250	4.00	0.000	0.000	4.8262	3.6196	SH
Oluk(Y)	0.006204	0.2007	0.250	4.00	3.490	-2.194	4.8262	3.6196	KH
CM22.5(X)	0.002820	0.0901	0.500	11.25	0.833	-0.000	3.5475	2.6606	KH
CM22.5(Y)	0.002820	0.0901	0.500	11.25	0.000	-0.000	3.5475	2.6606	SH
CM26(X)	0.002789	0.0899	0.500	13.00	0.000	-0.000	3.6051	2.7038	SH
CM26(Y)	0.002789	0.0899	0.500	13.00	0.000	-0.000	3.6051	2.7038	SH

Görüldüğü üzere iki modelde de hasar sınırı "KH" kontrollü hasar performans düzeyini aşmamıştır. Yapının dayanıma göre tasarımı sonucunda belirlenen kesitler ve donatıları istediğimiz performansın alınması için yeterli olmuştur.

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Tablo-5 Modellere Ait Sonuçlar

	Model-Mafsal	Model-Moment
Toplam Taban Kesme Kuvveti	6006.6 kN	3266.7 kN
Tepe Deplasmanı (X)	8.89 cm	5.20 cm
Tepe Deplasmanı (Y)	9.28 cm	5.30 cm
Yapı X yönü Periyodu	1.0633 sn	1.1456 sn
Yapı Y yönü Periyodu	1.1385 sn	1.1551 sn
Bina Ağırlığı	15951 kN	14852 kN
En Büyük Kolon Kesme Kuvveti	198 kN	98 kN
En Büyük Kolon Momenti	2601 kNm	769 kNm
En Büyük Kolon Normal Kuvveti	1032 kN	966 kN

Model-Mafsal'ın göreceli olarak süneklik düzeyi daha düşük bir sistem olması sebebiyle taşıyıcı sistem davranış katsayısı (R) ve dayanım fazlalığı katsayısı (D) Model-Moment'e göre küçüktür. Deprem yükü azaltma katsayısı (R_a) bu iki katsayıya bağlı bulunan bir katsayıdır. Yatay elastik spektral ivmesinin $(S_{ae}(T))$ deprem yükü azaltma katsayısı (R_a) ile bölünmesi ile azaltılmış tasarım spektral ivmesi $(S_{aR}(T))$ elde edilir. İki model de yakın periyot değerlerine sahip olmasına rağmen, Model-Mafsal'a ait deprem yükü azaltma katsayısı (R_a) değerinin küçük olması sebebiyle periyoduna karşılık gelen azaltılmış tasarım spektral ivme değerleri daha büyük elde edilmiştir. Bu nedenle Model-Mafsal'da daha yüksek toplam taban kesme kuvveti değeri mevcuttur.

Model-Mafsal'ın daha yüksek deprem etkilerine maruz kalması ve çatı bağlantısının mafsallı olması tepe deplasman değerinde de daha yüksek değerler okunmasına sebep olmuştur.

Göreli kat ötelemelerinin sınırlandırılması için seçilen kolon boyutları Model-Mafsal'ın rijitliğini arttırması sonucunda çatı bağlantıları mafsallı olmasına rağmen periyot değerleri Model-Moment'e göre daha düşük elde edilmiştir.

Model-Moment'te moment aktarımının yapılabilmesi için makaslarda mesnet bölgelerine yakın kısımlarda, oluk elemanlarda ise eleman boyunca kesitler büyütülmüş ve sonucunda yapı ağırlığı artmıştır. Ancak Model-Mafsal'da seçilen kolon boyutları yapı kütlesini daha çok arttırmış ve iki model karşılaştırıldığında Model-Mafsal'da daha büyük bina ağırlığı ortaya çıkmıştır.

Toplam taban kesme kuvvetinin fazla olması sonucunda Model-Mafsal'da daha büyük kesme kuvveti değerleri elde edilmiştir.

Model-Mafsal'da hem yüksek kesme etkileri sebebiyle hem de kolon bağlantılarının çatı seviyesinde mafsallı olması sebebiyle kolonda yüksek kolon momentleri elde edilmiştir. Model-Moment'te kolon iki ucunda moment oluştuğundan ve sismik etkilerin göreceli olarak daha az olmasından dolayı en büyük kolon momenti daha düşük olmuştur.

Yapıların yükleme koşullarında herhangi bir değişiklik yapılmasa da yüksek kolon boyutları yapı ağırlığını arttırdığından Model-Mafsal'da daha yüksek normal kuvvet değerleri elde edilmiştir.

İki model karşılaştırıldığında çatı bağlantısının moment aktarıcı yapılması Model-Moment'te Model-Mafsal'a göre kolon donatılarını %45 oranında azaltmıştır. Ancak tersinir yükler altında çalışacak olan çatı elemanlarının mesnet bölgesinde, verilen donatı planlarından da görüleceği üzere yüksek çaplarda donatı ihtiyaçları doğmuştur. Bu yüksek donatı ihtiyaçları hem kesit içerisinde donatı yerleşiminde zorluklar çıkartmakta hem de moment aktarımını sağlayacak bağlantının yapılmasını zorlaştırmaktadır. Ayrıca kolon donatılarından elde edilen ekonomik avantajı da ortadan kaldırmaktadır.

Dayanıma göre tasarımı yapıldıktan sonra şekil değiştirmeye göre tasarımı yapılan iki model aynı koşullarda istenilen hasar düzeyi olan "KH" kontrollü hasar performans düzeyini sağlamıştır.

KAYNAKLAR

[1] E.Hikmet B," Prefabrik Yapılar, Sunum", İnşaat Mühendisleri Odası Bursa Şube.

[2] Amani A., Niyazi A. Q., (2018). Türkiye'de Prefabrik Yapı Sektörünün Hızlı Gelişimi, Journal of Engineering Sciences and Design, 6(3), 487-494.

[3] Senel, Sevket & Palanci, Mehmet & Kalkan, Ali & Yilmaz, Yasin. (2013). Mevcut Prefabrik Binaların Mafsallı Birleşimlerinin Kesme ve Devrilme Güvenliğinin Araştırılması. Teknik Dergi. 24. 6505-6528.

[4] TBDY(2018). Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği, Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı, Ankara

[5] SAP2000. Integrated Structural Analysis and Design Software, Computer and Structures Inc., Berkeley, California.

[6] Concise Beam. Analysis and Design Software, Black Mint Software, Inc. Ottawa, Canada.

[7] ACI Committee 318. Building Code Requirements for Structural Concrete : (ACI 318-95) ; and Commentary (ACI 318R-95). Farmington Hills, MI :American Concrete Institute, 1995.

[8] Ersoy, U.,"Betonarme-Taşıma Gücü ve Temel İlkeleri", Evrim Yayınevi, 1985.

[9] TS 500, 2000, Betonarme Yapıların Tasarım ve Yapım Kuralları, Türk Standartları Enstitüsü, Ankara.

[10] TDTH (2018). Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması, Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı-AFAD, https://tdth.afad.gov.tr/TDTH/

[11] By J. B. Mander,1 M. J. N. Priestley,2 and R. Park,3 Fellow, "Theoretical Stress-Strain Model For Confined Concrete", ASCE

ÇELİK ÇAPRAZLI ÇERÇEVELERİN ÇELİK YAPILARIN DEPREM PERFORMANSI ÜZERİNDEKİ ETKİSİNİN İNCELENMESİ

Rojhat Evgi[1], Egemen Teomete[2]
Rojhat Evgi - Fen Bilimleri Enstitüsü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir
Egemen Teomete - İnşaat Mühendisliği Bölümü, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

ÖZET

İnşaat mühendisliğinde kullanılan malzemeler arasında yapısal çelik, sahip olduğu yüksek süneklik ve dayanım özellikleri sayesinde sismik bölgelerde inşa edilecek yapılar için diğer malzemelere kıyasla daha fazla ön plana çıkmaktadır. Çelik yapıların, özellikle deprem gibi dinamik yükler altında sismik davranışlarının belirlenmesi amacıyla yapılan ve ileride de yapılacak çalışmalar özellikle sismik bir coğrafyada yer alan ülkemizde çelik yapıların daha etkili bir şekilde kullanımını teşvik edecektir. Bu yüksek lisans çalışmasında, planda düzensiz geometriye sahip çaprazlı çerçeve sistemlerinden oluşan çelik yapıların deprem performansı belirlenecektir. Çalışmanın amacı; sisteme çapraz elemanlar ekleyerek, TBDY-2019 kapsamında verilen analiz yöntemleri kullanılarak dayanım, performans ve maliyet açısından optimum taşıyıcı sistem konfigürasyonunu belirlemek. Çalışmada incelenen yapı öncelikle momente aktaran çerçevelere sahip, 10 katlı, planda 'L' şeklinde modellenmiş olup, planda bir kol üç açıklıklı, diğer kol ise iki açıklı olacak şekilde oluşturulmaktadır. Daha sonra ise ikinci model, birinci modele çelik çapraz elemanlar eklenerek çaprazlı çelik çerçeveler olarak teşkil edilmiştir. Çalışmanın sonuçları ile planda geometrik düzensizliğe sahip yapıların deprem performansları üzerine literatürdeki çalışmalara ek olarak faydalı bulgular elde edilecektir.

Anahtar kelimeler: çelik çapraz; düzensiz yapılar; yapısal analiz

ABSTRACT

Among the materials used in civil engineering, structural steel stands out more than other materials for structures to be built in seismic zones thanks to its high ductility and strength properties. Future studies to determine the seismic behavior of steel structures, especially under dynamic loads such as earthquakes, will encourage more effective use of steel structures, especially in our country located in a seismic geography. In this master's study, the earthquake performance of steel structures consisting of braced frames systems that have irregular geometry in the plan will be determined. Purpose of the study is: by adding steel braced members to the system, to determine the optimum bearing system configuration, in terms of strength, performance and cost using methods given in the TBDY-2019. The structure examined in the study is primarily modeled as an 'L' shape in plan, with 10 floors, with frames that transfer the moment, and it is formed in a plan with one arm with three spans and the other arm with two spans. Then, the second model was created as braced steel frames by adding steel cross members to the first model. With the results of the study, useful findings

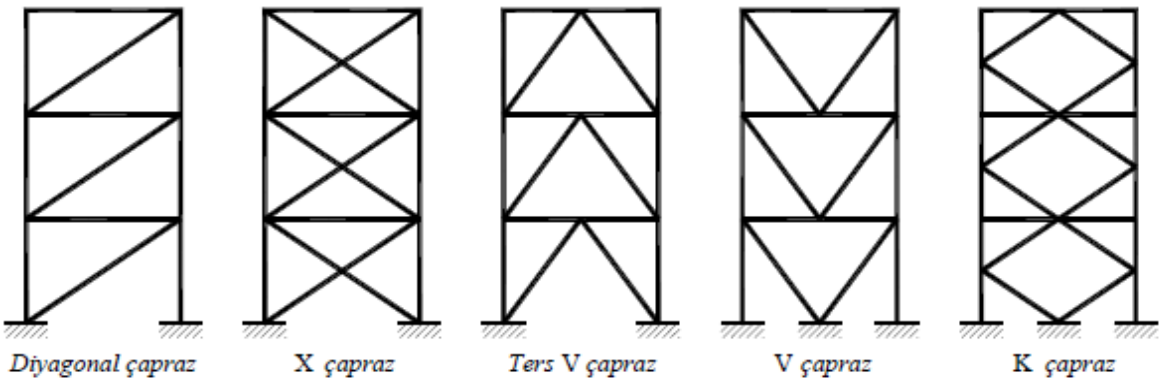
will be obtained in addition to the studies in the literature on the earthquake performance of structures with geometric irregularity in the plan.

Keywords: steel braced; irregular structures; structural analysis

GİRİŞ

Ülkemizde, daha çok endüstri yapılarında kullanılan, konut ve ticari yapılarda görece daha az kullanılan çelik yapılar sahip olduğu yüksek dayanım, elastisite modülü ve enerji sönümleme gibi önemli mühendislik özellikleri bakımından, en çok kullanılan yapısal malzeme olan betona karşı önemli bir alternatif olarak karşımıza çıkmaktadır[1]. Yapısal çelik ile teşkil edilen sistemler ile sağlanan yüksek tokluk, yüksek dayanım ve beton malzemesine göre daha düşük olan birim hacim ağırlığı nedeniyle daha hafif yapılar üretme imkanı göz önüne alındığında, özellikle yüksek derecede sismik bir bölgede yer alan ülkemizde depreme karşı sağlam ve hafif yapılar inşaa etmede çelik malzeme önemli avantajlara sahiptir.

Çelik yapılarda, deprem nedeniyle ortaya çıkan etkiler, moment aktaran birleşimler ve sisteme farklı düzende ve enkesitlerde eklenebilen çelik çapraz elemanlar ile karşılanır. Süneklik düzeyi yüksek moment aktaran çelik çerçeveler süneklik özelliklerinden dolayı yaygın olarak kullanılırlar. Çaprazlı çerçeveler yatay yüklere karşı yapıya gereken rijitlik ve dayanımı sağlamak için teşkil edilirler[2]. TBDY- Bölüm 9.5 te çelik yapılarda kullanılabilecek çelik çapraz sistemler merkezi ve dışmerkez olarak ele alınmaktadır ve çelik çapraz elemanların yapısal sistemde kullanılabileceği örgü şekilleri Şekil 1 de gösterilmektedir.



Şekil 1. TBDY' göre çelik çapraz örgü şekilleri

Deprem etkilerine karşı çelik çapraz elemanlar ile takviye edilmiş çelik yapılarda çapraz elemanlar sisteme mafsallı birleşimler ile bağlanarak moment yükü almayıp, eksenel kuvvet altında çalışmaları sağlanmakta ve kısalma, uzama şekil değiştirmeleri yapmaktadır. Çelik çaprazlı yapılarda temel amaç deprem gibi yatay yüklerin büyük oranda çapraz elemanlar ile taşınmasını sağlamaktır. Bununla birlikte yapının deprem anında ve sonrasında gevrek göçmesini engelleyerek can güvenliğini sağlamak için gerçekleştirilen performansa dayalı tasarım felsefesinde, çaprazlı yapılarda öncelikle çapraz elemanların akma ve burkulma şekil değiştirmesi yaparak göçmesi beklenir. Dolayısıyla bu türden bir göçme mekanizmasının elde etmek, yapısal sistemin bütünüyle süneklik ve dayanım koşullarını sağlayarak tasarlanmasını gerektirmektedir.

Bu çalışmada planda A3 düzensizliğine sahip (TBDY- 3.6.1) zemin ve 9 normal kattan oluşan toplam 10 katlı çelik bir yapı öncelikle moment aktaran çerçeveler ile teşkil edilmiştir ve bu model, çalışmada referans model olarak belirtilecektir. Referans model baz alınarak yapılacak karşılaştırma için oluşturulacak diğer yapısal model ise çaprazlı çelik çerçeveler ile modellenmiştir ve çaprazlı çelik model olarak isimlendirilecektir. Yapısal analizler Sap2000 yazılımı ile yapılmıştır[5]. Gerçekleştirilen analizler sonucunda iki yapısal model, etkin göreli kat ötelemesi ve taşıyıcı elemanların dayanım kontrolü olmak üzere iki parametre açısından kıyaslanmıştır. Bu karşılaştırmada özelikle moment aktaran çerçevelere çapraz elemanlar eklenmesiyle yapısal modelde taşıyıcı elemanların boyutlarında yapılan kesit optimizasyonu, yapı titreşim periyodundaki değişim ve yapısal sistemin ağılığındaki azalma incelenmiştir.

MODELLER VE YAPISAL ANALİZ

Referans Model

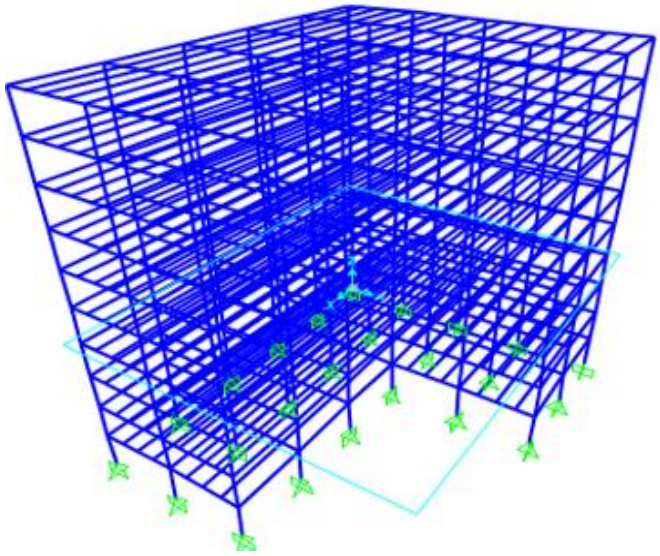
Bu çalışmada tasarımı yapılan modellerin, İzmir/Bayraklı da yer alan Folkart ikiz kulelerinin bulunduğu 38.453513º enlem ve 27.17697º boylam konumunda inşaa edileceği varsayılmaktadır. Spektrum analizinde kullanılacak tepki spektrumunun elde edilmesi için bu koordinatlar AFAD deprem tehlike haritasında girilerek spektrum grafiği elde edilmiştir [6] Spektrum grafiği elde edilirken yerel zemin sınıfı ZD, deprem yer hareketi düzeyi DD2 olarak seçilmiştir. Fakat etkin göreli kat ötelemesi kontrolü yapılırken ‘λ ‘ ve ‘κ’ katsayılarının TBDY 4.9.1.4’ e göre hesabı için DD3 deprem yer hareketi için de DD2 deprem yer hareketi düzeyi için yapılan hesaba benzer şekilde TBDY 2.3.4.1’e göre, yapının periyoduna karşılık gelen ivme değerleri AFAD uygulamasından aynı koordinatlar için elde edilmiştir.

Yapısal modeller, enine doğrultuda 4 açıklık ve açıklıklar arası 6 m , boyuna doğrultuda ise 5 açıklık ve açıklıklar arası 6 m olacak şekilde modellenmiştir. Yapının plandaki boyutları 24 x 30 m2 dir. Kat yükseklikleri zemin kat dahil 3 m ve yapı yüksekliği 30 m dir. Her bir kat alanı 720 m2 dir. Referans modele ait plan ve 3D şekiller aşağıda verilmektedir (Şekil 2 ve Şekil 3).



Şekil 2. Referans model kat planı

TBDY 3.6.1 - Şekil 3.3' e göre A3 düzensizlik kontrolü yapıldığında :
18 m > 30 x 0.2= 6 m
12 m > 24 x 0.2 =7.2 m
Yapılan bu kontrole göre yapıda A3 düzensizliği vardır.



Şekil 3. Referans modelin 3D görünümü

Referans modelde kirişler I profilinden ve S300 çelik sınıfından, kolonlar ise HEB profilinden ve S355 çelik sınıfından teşkil edilmiştir. Bu profiller, özellikle yüksek süneklik koşullarını sağlamaya yönelik gerekli kesit özelliklerine sahip olduğu için yapısal analizler için uygun profillerdir. Bu modelde tali kirişler IPE 270 profili ile oluşturulmuş olup planda 1.5 m mesafe ile yerleştirilmiştir. İç çerçeve taşıyıcı kirişler IPE 400, dış çerçeve taşıyıcı kirişler ise IPE 500 profili ile modellenmiştir. Kolonlarda ilk 6 katta HEB800 son 4 katta ise HEB450 profilleri kullanılmıştır.

Modelde dış çerçeve taşıyıcı kirişler birbirlerine moment aktaracak şekilde rijit bağlanmış olup, tali kiriş birleşimleri ve iç çerçeve taşıyıcı kirişler mafsallı birleşimler olarak modellenmiştir. Kolon elemanlar zayıf yönlerinde mafsallı olarak bağlanmıştır[4]. Yapı, temele elemanların güçlü yönlerinde rijit, zayıf yönlerinde mafsallı olarak bağlanmıştır. Modellenen yapının kullanım amacı konut olduğu için yapı ile ilgili bilgiler aşağıda verilmektedir :

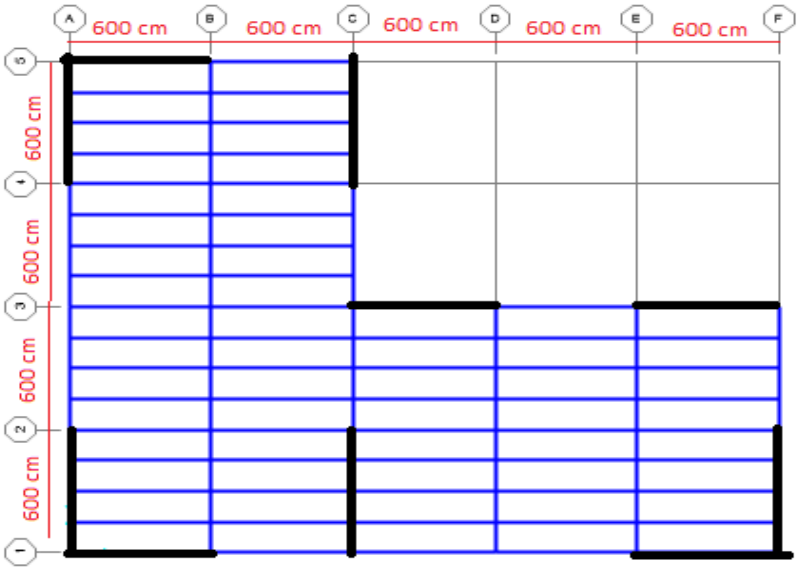
BYS : 4 (Bina Yükseklik Sınıfı, TBDY Tablo 3.3)
BKS : 3 (Bina Kullanım Sınıfı, TBDY Tablo 3.1)
Bina önem katsayısı I : 1
DTS : 1 (Deprem tasarım sınıfı, TBDY Tablo 3.2)
R : 8 (Taşıyıcı sistem davranış katsayısı – moment aktaran çerçeveler)
D : 3 (Dayanım fazlalığı katsayısı)
Zemin sınıfı : ZD

Çaprazlı Çelik Model

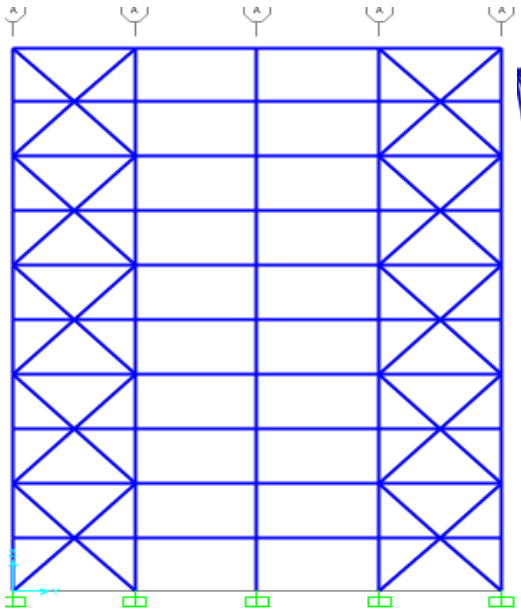
Bu yapısal model, referans modele çapraz elemanların eklenmesiyle oluşturulmuştur. Ayrıca çapraz elemanların, deprem yükleri altında yapının salınımını ve deprem yüklerini taşıyan elemanlara gelen yükü azaltacağı düşünülerek yatay yük taşıyıcı elamanların kesitleri

küçültülmüş ve bir kesit optimizasyonu yapılmıştır. Bu modelde referans modele göre farklı olarak çaprazlı çelik çerçeveler için taşıyıcı sistem davranış katsayısı ve dayanım fazlalığı katsayısı TBDY Tablo 4.1'e göre aşağıda verilmektedir.

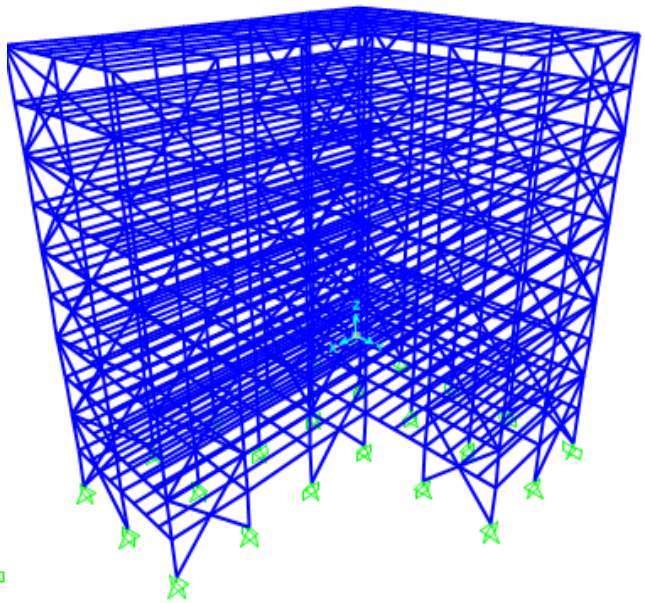
R=5 (Taşıyıcı sistem davranış katsayısı) D=2 (Dayanım fazlalığı katsayısı) Çapraz elemanların eklendiği çerçeveler planda siyah çizgi ile belirtilmiş olup (Şekil 4), düşey kesit (Şekil 5) ve 3D görünüm (Şekil 6) aşağıda verilmektedir.



Şekil 4. Çaprazlı çelik model kat planı ve çaprazlı çerçeveler



Şekil 5. Çaprazlı çelik model düşey kesit



Şekil 6. Çaprazlı çelik model 3D görünüm

Çaprazlı çelik modelde kullanılan çapraz eleman kesitleri üst katlara doğru gidildikçe azalmaktadır. Kullanılan kesitler kutu profil olup, kesit ölçüleri: 140x140x10, 140x140x8, 140x140x6.3, 120x120x6.3, 120x120x6, 120x120x5, 100x100x5 olarak belirlenmiştir. Çapraz

elemanlar çerçevelere mafsallı bağlantılar ile bağlanarak moment yükü taşımayacak şekilde oluşturulmuştur. Tali kirişler IPE270, iç çerçeve kirişler IPE360 ve dış çerçeve kirişler ise IPE 400 profili ile oluşturulmuştur. Kolonlar ise ilk 6 katta HEB450, son 4 katta HEB360 profilleri ile tasarlanmıştır.

Yükler ve Analiz Yöntemi

Sabit yük : 5 kN/m^2 Hareketli yük : 2 kN/m^2 Kar yükü (çatı katı) : 0.4 kN/m^2 İki yapısal modelde de yükler kirişlere düzgün yayılı yük olarak etkitilmiştir. Yapısal analizde deprem yükü, rüzgar yüküne göre daha elverişsiz sonuçlar verdiği için yük kombinasyonlarında rüzgar yükü dikkate alınmayıp, deprem yükünü içeren yük kombinasyonları ile gerekli dayanımlar elde edilmiştir. İki model içinde planda büyük boşluklar öngörülmediği için yapılar için rijit diyafram varsayımı yapılmıştır. Yapısal analizlerde 3 tür analiz yapılmıştır: Ölü yük analizi, modal analiz ve deprem kuvvetlerini elde etmek için spektrum analizi yapılmıştır. Yapılan spektrum analizinde kullanılan spektrum grafiği için AFAD uygulamasından alınan gerekli spektral ivme değerleri aşağıda verilmektedir.
$S_S = 1.116$ $S_1 = 0.275$ $S_{DS} = 1.176$ $S_{D1} = 0.564$

Düşey Deprem Yükü Etkisi ve Yük Kombinasyonları

Oluşturulan modeller için düşey deprem etkisi TBDY 4.4.3.2 ‘ye göre TBDY denk.(4.10) ile yaklaşık olarak hesaplanacaktır.

$E_d^z = (2/3)S_{DS}\,G$

E_d^z : Düşey deprem etkisi

S_{DS}: Kısa periyot tasarım spektral ivme katsayısı
G: Sabit yük katsayısı

Hesaplanan düşey deprem etkisi yük kombinasyonlarında sabit yük G katsayısı ile birleştirilecektir. TBDY 4.4.4.2 ye göre ve TBDY denk.(4.11) ve TBDY denk.(4.12) dikkate alındığında düşey deprem etkisi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$G(1.2+0.3x2/3S_{DS}) = G(1.2+0.3x2/3x1.176) = 1.435G$ $G(0.9-0.3x2/3S_{DS}) = G(0.9-0.3x2/3x1.176) = 0,665G$

$1.435G + 0,5Q + 0.2S \pm E_d^x \pm 0.3\,E_d^y$

$1.435G + 0,5Q + 0.2S \pm 0.3\,E_d^x \pm E_d^y$

SONUÇ VE TARTIŞMA

Yeni yapılması öngörülen bu iki yapısal model için performans hedefi; normal performans hedefi, kontrollü hasar ve değerlendirme/tasarım yaklaşımı ise dayanıma göre tasarım (DGT) olarak belirlenmiştir. Yapılan modal analiz sonucunda referans model için hakim titreşim periyodu ‘x’ yönünde 1.746 ve ‘y’ yönünde ise 1.871 sn olarak hesaplamıştır.

Fakat TBDY 4.7.3.4 ‘ e göre $C_t = 0.08$ olmak üzere

$T_p^y = 1,866 > T_{pA}^y = 1.4x0.08x30^{3/4} = 1.436$ sn ve

T_p^x = 1,741 > T_{pA}^x = 1.4x0.08x30 $^{3/4}$ = 1.436 sn olduğundan TBDY 4.7.3.2 uyarınca $T_p^y = T_p^x$ = 1.436 sn olarak alınıp, deprem yükü hesaplarında bu periyot değeri kullanılacaktır.

Çaprazlı çelik model için hakim titreşim periyodu 'x' yönünde 1.041 sn ve 'y' yönünde ise 1.089 sn olarak hesaplamıştır. Hesaplanan bu iki periyot değerleri de T_{Pa} = 1.436 sn den küçük olduğu için deprem yükü hesaplamalarında 'x' yönü için T_p^x= 1.041 sn ve 'y' yönü için T_p^y = 1.089 sn değerleri dikkate alınmıştır. TBDY 4.6.2' ye göre deprem hesap yönteminin belirlenebilmesi amacıyla burulma düzensizliği katsayısı (A1 türü düzensizliği) ve komşu katlar arası rijitlik düzensizliği katsayısı (B2 türü düzensizliği) iki model için aşağıdaki tablolarda incelenmiştir.

$(\Delta_i)_{max}$: maksimum göreli kat ötelemesi

$(\Delta_i)_{ort}$: ortalama göreli kat ötelemesi

h_i: kat yüksekliği

n_{bi} : burulma düzensizliği katsayısı

n_{ki} : rijitlik düzensizliği katsayısı

Tablo 1 – Referans model için A1 türü burulma düzensizliği kontrolü

	$(\Delta_i^x)_{max}$ (m)	$(\Delta_i^x)_{ort}$ (m)	n_{bi}	Koşul	$(\Delta_i^y)_{max}$ (m)	$(\Delta_i^y)_{ort}$ (m)	n_{bi}	Koşul
Çatı	0.0039	0.00355	1.090	2	0.0052	0.0046	1.13	2
9	0.0057	0.0052	1.096	2	0.0072	0.0061	1.18	2
8	0.0075	0.0069	1.087	2	0.0095	0.0078	1.22	2
7	0.0091	0.0084	1.083	2	0.0115	0.0098	1.17	2
6	0.0092	0.0085	1.082	2	0.0116	0.0098	1.18	2
5	0.0095	0.0088	1.080	2	0.0118	0.01	1.18	2
4	0.0095	0.0088	1.080	2	0.0117	0.01	1.23	2
3	0.0088	0.0082	1.070	2	0.0109	0..0095	1.15	2
2	0.007	0.0066	1.061	2	0.0085	0.0076	1.12	2
1	0.0033	0.0032	1.031	2	0.0039	0.0037	1.05	2

Tablo 1 kontrol edildiğinde, her kat için hesaplanan 'n_{bi}' katsayısı sınır değeri aşmadığı dolayısıyla referans modelde burulma düzensizliği olmadığı görülmektedir.

Tablo 2 –Referans model için 'X' yönü B2 türü rijitlik düzensizliği kontrolü

	$(\Delta_i^x)_{ort}/h_i$ (m)	$(\Delta_{i-1}^x)_{ort}/h_{i-1}$ (m)	n_{ki}	Koşul
Çatı	0.00118	-	-	-
10-9	0.00173	0.00173	0.752	≥2
9- 8	0.0023	0.0023	0.821	≥2
8-7	0.00280	0.00280	0.99	≥2
7-6	0.00283	0.00283	0.97	≥2
6-5	0.00293	0.00293	1	≥2
5-4	0.00293	0.00293	1.07	≥2
4-3	0.00273	0.00273	1.24	≥2
3-2	0.00270	0.00273	1.061	≥2
2-1	0.00218	0.00220	1.4	≥2
zemin		0.00108	**2.02**	≥2

X yönünde kontrol : 2.02 = 2 kabul edilerek yapıda rijitlik düzensizliği olmadığı kabul edilmiştir. Y yönü için de yapılan hesaplarda referans modelde rijitlik düzensizliği olmadığı belirlenmiştir.

Tablo 3 – Çaprazlı çelik model için A1 türü burulma düzensizliği kontrolü

	$(\Delta_i^x)_{max}$ (m)	$(\Delta_i^x)_{ort}$ (m)	n_{bi}	Koşul	$(\Delta_i^y)_{max}$ (m)	$(\Delta_i^y)_{ort}$ (m)	n_{bi}	Koşul
Çatı	0.0058	0.0054	1.070	2	0.0066	0.0055	1.20	2
9	0.007	0.00625	1.12	2	0.0078	0.00655	1.190	2
8	0.0075	0.0068	1.102	2	0.0081	0.0068	1.191	2
7	0.0077	0.0070	1.10	2	0.0084	0.007	1.20	2
6	0.0077	0.0070	1.10	2	0.0087	0.00725	1.21	2
5	0.0074	0.00675	1.097	2	0.0082	0.00685	1.197	2
4	0.0069	0.0063	1.095	2	0.0081	0.0068	1.191	2

3	0.0060	0.00585	1.025	2	0.0068	0.00565	1.203	2
2	0.0054	0.00525	1.028	2	0.0061	0.0053	1.166	2
1	0.0027	0.0024	1.125	2	0.003	0.0025	1.20	2

Tablo 3 kontrol edildiğinde, sınır değer aşılmadığından çaprazlı çelik modelde burulma düzensizliği olmadığı görülmektedir.

Tablo 4 – Çaprazlı çelik model için 'X' yönü B2 türü rijitlik düzensizliği kontrolü

	$(\Delta_i^x)_{ort}/h_i$ (m)	$(\Delta_{i-1}^x)_{ort}/h_{i-1}$ (m)	n_{ki}	Koşul
Çatı	0.0018	-	-	-
10-9	0.00208	0.00208	0.98	≥2
9- 8	0.00226	0.00226	0.920	≥2
8-7	0.00233	0.00233	0.97	≥2
7-6	0.00233	0.00233	1.0	≥2
6-5	0.00225	0.00225	1.03	≥2
5-4	0.00221	0.00221	1.02	≥2
4-3	0.00273	0.00273	0.77	≥2
3-2	0.00195	0.00195	1.40	≥2
2-1	0.00166	0.00168	1.160	≥2
zemin		0.0080	**2.08**	≥2

X yönünde kontrol: 2.08 = 2 kabul edilerek yapıda rijitlik düzensizliği olmadığı varsayılmıştır. Y yönü için de yapılan hesaplarda yapıda rijitlik düzensizliği olmadığı belirlenmiştir. İki model için yukarıdaki tablolarda yapılan düzensizlik kontrollerinde A1 ve B2 düzensizliklerinin olmadığı kabul edilmiştir. Bu durum, TBDY Tablo 4.4 'e göre incelenen iki yapısal model için deprem yükü hesaplarında eşdeğer deprem yükü yönteminin uygulanabileceğini göstermektedir. Fakat gerçekleştirilen yapısal analizlerde eşdeğer deprem yükü yöntemi yanında mod birleştirme yöntemi de kullanılmıştır.

Tablo 5 te iki model için yapı ağırlıkları, deprem kuvvetleri (eşdeğer deprem yükü) , tepe deplasmanları ve hakim periyotlar verilmektedir.

Tablo 5 – Modellerin karşılaştırılması

Modeller	Yapı Ağırlığı (kN)	Tepe Deplasman (x) cm	Tepe Deplasman (y) cm	Hakim Periyot (sn)	Deprem Kuvveti (x) (kN)	Deprem Kuvveti (y) (kN)
Referans Model	32063.09	7.39	9.2	Y yönü 1.872	1568.89	1568.89
Çaprazlı Çelik Model	31438.7	6.41	7.18	Y yönü 1.089	3433.59	3257.02

Tablo 6 da, taşıyıcı elemanların dayanım hesaplamalarında kullanılmak üzere mod birleştirme yöntemi uygulanarak elde edilen, referans model ve çaprazlı çelik model için kolon ve çapraz takviyeli çerçeve kolonlara gelen toplam taban kesme kuvveti değerleri verilmektedir.

Tablo 6 – İki model için kolonlara gelen deprem kuvvetleri

Elemanlar	Referans Model	Çaprazlı Çelik Model
Kolon	X yönü: 1388.43 kN Y yönü: 1289.67 kN	X yönü: 227.87 kN Y yönü: 134.87 kN
Çaprazlı Çerçeve Kolon	Çapraz eleman yok	X yönü : 2672.87 kN Y yönü : 2651.22 kN

Etkin Göreli Kat Ötelemesi Kontrolü

Modellerin etkin göreli kat ötelemesi kontrollleri TBDY 4.9.1' e göre yapılmıştır. Her katta kolon uçlarında hesaplanan yerdeğiştirmeler azaltılmış deprem yüklerine göre hesaplanmıştır.

$$\Delta_i = u_i - u_{i-1}$$

Bu denklemde 'u_i' belirtilen yönde yapının herhangi bir katında kolon uçlarında azaltılmış deprem yüklerine göre hesaplanan azaltılmış yer değiştirmeleri göstermektedir. 'Δ_i' ise herhangi ardışık iki kat arasındaki göreli kat ötelemesini belirtmektedir. Binanın i'inci katında kolonlar için etkin göreli kat ötelemesi tipik doğrultu için TBDY 4.33 denklemiyle hesaplanmaktadır:

$$\delta_i = R/I \ \Delta_i$$

Yapıda her iki deprem doğrultusunda TBDY 4.33 hesaplanan etkin göreli kat ötelemelerinin her kat için hesaplanan en büyük değerleri aşağıda verilen TBDY 4.34b denklemindeki sınır değeri aşamaz. Bu denklemde 'h' kat yüksekliği olmak üzere λ ve κ değerleri TBDY 4.9.1.4 e göre hesaplanmaktadır

$$\lambda \frac{\delta_{i,max}}{h} \leq 0.016\ \kappa$$

Referans Model

$T^x = T^y = 1.436$ sn olmak üzere, her iki yönde bu periyot değerlerine karşılık gelen DD2 deprem yer hareketi düzeyi ve DD3 deprem yer hareketi düzeyi için spektral ivme değerleri sırasıyla 0.38 ve 0.174 .

$$\lambda = \frac{0.174}{0.38} = 0.458$$

X ve Y doğrultusu için göreli kat ötelemeleri ve etkin göreli kat ötelemesi kontrolü sırasıyla Tablo 7 ve Tablo 8 de verilmiştir.

Tablo 7– X doğrultusu için etkin göreli kat ötelemesi kontrolü

Kat	h_i (m)	u_i (m)	Δ_i^x (m)	$\delta_i = R/I\ \Delta_i$	$\lambda \frac{\delta_{i,}}{h}$
Çatı	3	0.0735	0.0039	0.0312	0.00476
9	3	0,0696	0.0057	0.0456	0.0070
8	3	0,0639	0.0075	0.060	0.00916
7	3	0.0564	0.0091	0.0728	0.0111
6	3	0.0473	0.0092	0.0736	0.0112
5	3	0.0381	0.0095	0.0760	0.0116
4	3	0.0286	0.0095	0.0760	**0.0116**
3	3	0.0191	0.0088	0.0704	0.0107
2	3	0.0103	0.0070	0.0560	0.00855
1	3	0.0033	0.0033	0.0264	0.00403

Tablo 1.4 te en büyük $\left(\lambda \frac{\delta_{i,}}{h}\right)$ oranı TBDY 4.9.3.1 (b) ye göre kontrol edildiğinde :

$$\lambda \frac{\delta_{imax,}}{h} = 0.0116 \geq 0.008$$

koşul sağlanmamaktadır. Yapının ‘x’ doğrultusunda kat ötelemeleri açısından güvensiz olduğu görülmektedir.

Tablo 8 – Y doğrultusu için etkin göreli kat ötelemesi kontrolü

Kat	h_i (m)	u_i (m)	Δ_i^y (m)	$\delta_i = R/I\ \Delta_i$	$\lambda \frac{\delta i,}{h}$
Çatı	3	0.0918	0.0052	0.0416	0.00635
9	3	0.0866	0.0072	0.0576	0.00879
8	3	0.0794	0.0095	0.076	0.011
7	3	0.0699	0.0115	0.092	0.0140
6	3	0.0584	0.0116	0.0928	0.0142
5	3	0.0468	0.0118	0.0944	**0.0144**
4	3	0.035	0.0117	0.0936	0.0143
3	3	0.0233	0.0109	0.0872	0.0133
2	3	0.0124	0.0085	0.0680	0.0104
1	3	0.0039	0.0039	0.0313	0.0048

Y yönünde kontrol: 0.0144 ≥ 0.008. Yapının ‘y’ doğrultusunda kat ötelemeleri açısından güvensiz olduğu görülmektedir.

Çaprazlı Çelik Model

T^x=1.041 sn T^y=1.089 sn

$\lambda_x = \frac{0.239}{0.546} = 0.438$ $\lambda_y = \frac{0.229}{0.517} = 0.443$

X ve Y doğrultusu için göreli kat ötelemeleri ve etkin göreli kat ötelemesi kontrolü sırasıyla Tablo 9 ve Tablo 10 da verilmiştir.

Tablo 9– X doğrultusu için etkin göreli kat ötelemesi kontrolü

Kat	h_i (m)	u_i (m)	Δ_i^x (m)	$\delta_i = R/I\ \Delta_i$	$\lambda \frac{\delta i,}{h}$
Çatı	3	0.0641	0.0058	0.0290	0.00423
9	3	0,0583	0.007	0.0350	0.0051
8	3	0,0513	0.0075	0.0375	0.00546
7	3	0.0438	0.0077	0.0385	**0.00562**
6	3	0.0361	0.0077	0.0385	0.00562
5	3	0.0284	0.0074	0.037	0.00540
4	3	0.0210	0.0069	0.0345	0.00503

3	3	0.0141	0.0060	0.030	0.0044
2	3	0.0081	0.0054	0.0270	0.0039
1	3	0.0027	0.0027	0.0135	0.002

X yönünde kontrol: 0.00562 < 0.008. Yapının 'x' doğrultusunda kat ötelemeleri açısından şartı sağladığı ve güvenli olduğu görülmektedir.

Tablo 10– Y doğrultusu için etkin göreli kat ötelemesi kontrolü

Kat	h_i (m)	u_i (m)	Δ_i^y (m)	$\delta_i = R/I\ \Delta_i$	$\lambda \frac{\delta_i}{h}$
Çatı	3	0.0718	0.0066	0.033	0.0049
9	3	0,0652	0.0078	0.039	0.0058
8	3	0,0574	0.0081	0.041	0.0060
7	3	0.0493	0.0084	0.042	0.0062
6	3	0.0409	0.0087	0.044	**0.0065**
5	3	0.0322	0.0082	0.041	0.0061
4	3	0.0240	0.0081	0.040	0.0059
3	3	0.0159	0.0068	0.034	0.0050
2	3	0.0091	0.0061	0.027	0.0040
1	3	0.003	0.003	0.031	0.0046

Y yönünde kontrol: 0.0065 < 0.008. Yapının 'y' doğrultusunda kat ötelemeleri açısından şartı sağladığı ve güvenli olduğu görülmektedir.

SONUÇ

Bu çalışma kapsamında moment aktaran çelik çerçevelerden oluşan 10 katlı bir yapının, verilen yükler altında sap2000 programı yardımıyla yapısal analizi yapılmış olup daha sonra yapısal modelde kiriş ve kolon gibi taşıyıcı elemanların boyutlarında optimizasyona gidilerek yapıya çelik çapraz elemanlar eklenmiş ve iki modelin yapısal özellikleri arasında karşılaştırma yapılmıştır. Oluşturulan modellerin İzmir/Bayraklı gibi sismik özellikli bir bölgede inşaa edileceği varsayılarak özellikle deprem yükleri altında referans model olan moment aktaran çelik çerçevelere eklenen çapraz elemanların yapıya katkısı irdelenmeye çalışılmıştır.

Referans modelde yapılan analizler sonucunda yapıda, taşıyıcı elamanların deprem yükü içeren yük kombinasyonları altında etki/kapasite oranı '1' değerini aşmazken, Tablo 7 ve Tablo 8' göre etkin göreli kat ötelemesi oranı TBDY uyarınca koşuları sağlamamıştır ve referans modelin bu anlamda güvensiz olduğu görülmüştür. Daha sonra bu modele çapraz elemanların eklenmesiyle yeniden oluşturulan çaprazlı çelik model için yapılan analizler sonucunda taşıyıcı elemanların etki/kapasite oranlarının '1' değerinin altında olduğu ve Tablo 9 ve Tablo 10 da ifade edildiği gibi etkin göreli kapasite oranının belirlenen sınırları geçmediği dolayısıyla

çaprazlı çelik modelin güvenli olduğu görülmüştür. Tepe deplasman değerleri ve hakim periyot açısından iki model karşılaştırıldığında Tablo 5 te görüldüğü gibi çaprazlı çelik modelde çapraz elemanların referans modele göre yer değiştirme ve periyot değerlerini önemli ölçüde düşürmüştür ve bu durum çaprazların yapıya sağladığı rijitlik katkısını göstermektedir.

İki modelin yapı ağırlığı açısından kıyaslamasının yapıldığı Tablo 5' te çaprazlı çelik modelde TBDY'ye göre taşıyıcı elemanların hem dayanım hem de göreli kat ötelemesi koşullarının referans modele göre daha hafif bir yapı ağılığı ile sağlanması özellikle deprem güvenliği için hafif yapılar üretme açısından oldukça önemlidir. Tablo 6 da görüldüğü gibi çaprazlı çerçevelerin yapıya etkiyen deprem kuvvetlerinin çok büyük bir kısmını karşılaması, kolon ve kiriş elemanların kesit boyutlarının düşürülmesini sağlamış ve sonuç olarak yapı ağırlığında yaklaşık yüzde 2 lik bir azalma elde edilmiştir.

Çaprazlı çelik modelin, Tablo 5 te görüldüğü gibi referans modele göre daha büyük bir deprem yüküne maruz kalması, hakim titreşim periyodunun azalması ile TBDY de spektrum grafiğinde periyodun azalması ile birlikte spektral ivmenin artmasından dolayı meydana gelmektedir. Bu durum, referans model de '8' alınan taşıyıcı sistem davranış katsayısının çaprazlı çelik modelde '5' kabul edilmesiyle göz önüne alınmaktadır. Yapılan analizler sonucunda çelik yapılarda, elemanların dayanım kontrolünde önemli bir sorun görülmezken, tasarımı yönlendiren aşamanın genel olarak göreli kat ötelemesi kontrollerinin sağlanması olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] M.Ruhi Aydın , A.Günaydın, ''Çelik Yapılar'', Birsen Yayınevi, 2019

[2] Z.Celep "Deprem Mühendisliğine Giriş ve Depreme Dayanıklı Yapı Tasarımı'', Beta Basım, 2019

[3] TBDY(2018). Türkiye Bina Deprem Yönetmeliği, Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı, Ankara

[4] B.Akbaş ''Çelik Yapılarda Bilgisayar Destekli Stabilite Analizi'' İnşaat Mühendisleri Odası İstanbul Şubesi

[5] Sap2000 Integrated Structural Analysis and Design Software, Computer and Structures Inc. Berkley

[6] TDTH (2018). Türkiye Deprem Tehlike Haritaları İnteraktif Web Uygulaması, Afet ve Acil Durum Yönetimi Başkanlığı-AFAD, https://tdth.afad.gov.tr/TDTH

THE EFFECT OF APRICOT KERNEL SHELL NANO BIOCHAR ON MECHANICAL PROPERTIES OF MORTAR

Mehmet Sisman[1], Egemen Teomete[2], Jale Yanik[3], Ugur Malayoglu[4] , Gozde Duman[5]
[1]The Graduate School of Natural and Applied Sciences, Dokuz Eylül University, Izmir
[2]Department of Civil Engineering, Dokuz Eylül University, Izmir
[3]Faculty of Science, Department of Chemistry, Ege University, İzmir
[4]Department of Metallurgical and Materials Engineering, Dokuz Eylül University, Izmir
[5]Faculty of Science, Department of Chemistry, Ege University, İzmir

ABSTRACT

Recycling of agricultural wastes such as apricot kernel shell is important both economically and environmentally. This study aimed to investigate the utilization of biochar as a filler to enhance the mechanical properties mortar. The biochar was produced by pyrolysis process at 500 ºC from apricot kernel shell which was supplied by a local juice production factory in Malatya. Then, nano-biochar particles were obtained with dimensions less than 500 nm by high energy ball milling process. Scanning electron microscope (SEM) was used for morphological analysis of nano-biochar. The nano-biochar at different volume percentages (0-0.04-0.06-0.08-0.12-0.15%) was added to mortar. The mortar was casted into 4x4x16 cm moulds. After water curing at 20 ºC for 28 days, compression and flexural strength tests were performed. Results showed that 0.12 volume % addition of apricot kernel shell biochar particles enhanced the compressive and flexural strength of mortar composites by 11.34% and 31.57% respectively. This study suggests that biochar from apricot kernel shell has the potential to be used as carbon sequestering admixture to improve performance of mortar and thereby utilizing waste as a construction material, contributing the economy and environment.

Keywords: apricot kernel shell; nanobiochar; mortar composite; mechanical properties

ÖZET

Kayısı çekirdeği kabuğu gibi tarımsal atıkların geri dönüşümü hem ekonomik hem de çevresel açıdan önemlidir. Bu çalışma, harcın mekanik özelliklerini artırmak için biyokömürün dolgu maddesi olarak kullanımını araştırmayı amaçlamıştır. Biyokömür, Malatya'da yerel bir meyve suyu üretim fabrikasından temin edilen kayısı çekirdeği kabuğundan 500 ºC'de piroliz işlemi ile üretildi. Daha sonra yüksek enerjili bilyalı öğütme işlemi ile 500 nm'den küçük boyutlarda nano-biyokömür partikülleri elde edildi. Nano-biyokömürün morfolojik karakterizasyonu için taramalı elektron mikroskobu (SEM) kullanıldı. Farklı hacim yüzdelerinde (% 0-0,04-0,06-0,08-0,12-0,15) hazırlanan parçacıklar harca katıldı. Harç ile 4x4x16 cm örnekler hazırlandı. 20 ºC'de 28 gün su ile kürlendikten sonra basınç ve eğilme dayanım testleri yapıldı. Sonuçlar, kayısı çekirdeği kabuğu biyokömürün hacimce %0,12 eklenmesinin harç basınç ve eğilme dayanımını sırasıyla % 11,34 ve % 31,57 oranında artırdığını göstermiştir. Bu çalışma, kayısı

çekirdeği kabuğundan elde edilen biyokömürün, harcın performansını iyileştirmek için karbon tutucu katkı maddesi olarak kullanılma potansiyeline sahip olduğunu ve böylece atığı inşaat malzemesi olarak kullanarak ekonomiye ve çevreye katkı sağladığını göstermektedir.

Anahtar kelimeler: kayısı çekirdeği kabuğu; nanobiyokömür; harç kompozit; mekanik özellikler;

INTRODUCTION

Concrete is one of the most used material in the worldwide. However, construction industries are one of the major contributor to CO_2 emission, approximately 7% of global anthropogenic greenhouse gas emission, because of the energy intensive processes involved in production of cement and concrete [1]. Therefore; nowadays, strength, toughness and durability are becoming increasingly important features in the concrete technology. During the last years, with the increasing demand for high-performance building materials, many studies were done by the incorporation of several materials such as silicon dioxide SiO_2, titanium dioxide TiO_2, iron oxide Fe_2O_3, aluminium oxide Al_2O_3, clay, and carbon nanotubes (CNTs), in particularly at the nanoscale, thereby producing construction materials with improved performances such as mechanical, thermal and durability [2]. The addition of nanoparticles in cementitious materials can act as a filler agent, producing a dense matrix and reduce the growth of micro pores. The nanoparticles may also help in the secondary reactions forming cement composite and contribute to the strength development [3].

However, agglomeration phenomena and relative high price seem to limit the application of this type of nanoparticles in cement-based composite materials [4].

Therefore, a material that sequester carbon and improve performance of cement composite can be a potential solution. Recently, due to low thermal conductivity, high chemical stability, and low flammability of biochar produced by pyrolysis, there is a growing interest of using biochar as additive and cement replacement in cementitious composites to improve mechanical and durability performance [5].

During the pyrolysis, the carbonaceous materials such as wood, agriculture, human, animal and industrial waste, and aquatic biomass are thermally decomposed and converted into oil, gas, and char products at a mediate temperature (usually 400-600 ^oC) in an oxygen free system. The solid and liquid are called biochar and bio-oil, respectively, and the gases are called syngas [6,7].

Biochar mostly contains aromatic forms of carbon that cannot be readily returned to the atmosphere as CO_2 even under favorable environmental conditions [8]. Consequently, biochar is commonly considered a “carbon-negative” material, since carbon is sequestered for many years.

Ahmad et al. prepared carbonized micro particles (1-2 μm) from bamboo by pyrolysis which was then added at 0.05- 0.20 wt% of cement to cement paste [9]. 0.08 wt% addition of pyrolyzed bamboo particles resulted in increase of flexural strength and compressive strength by 20% and 30% compared to reference, respectively.

Khushnood et al. reported increase in flexural strength by about 70% by addition of 0.2 wt% biochar, derived from waste bagasse fibers [10].

Another study conducted by Restuccia and Ferro showed that 0.5 weigt % addition of pyrolyzed hazelnut shells at nanoscale (particle size distribution in the range of 300 nm to 15 μm) resulted in increase of flexural strength and compressive strength by 44.5% and 64% compared to reference mortar, respectively [11].

Gupta et al. reported that 1 wt% biochar (10.70 µm) produced from mixed saw dust at 500 ºC can increase about 16% the compressive strength and about 13% the flexural strength of cement mortar [12].

Wu et al. replaced of raw apricot shell aggregate with carbonized apricot shell aggregate in cement mortar mixture [13]. The carbonized apricot shell mixture had the highest compressive strength and flexural strength, increased by 44.2% and 54.6%, respectively, compared to the apricot kernel mixture.

In this study, apricot kernel shell obtained from a local production factory of apricot juice in Malatya was subjected to pyrolysis. The biochar was grinded to nanometer scale by ball-milling process and added to cement mortar at different volume %. The influence of nanobiochar addition on compressive and flexural strengths of mortar was determined.

2 MATERIALS AND METHODS

CEM II B-M (L-W) 42.5 R type cement supplied from Batı Anadolu Cement Industry Co. (Batıçim Co.) was used. Unit volume weight of cement was 2980 kg/m^3. Sand with 5 mm maximum size having unit volume weight of 2630 kg/m^3 was supplied by Batıçim Co. Sika Viscocrete Hi-Tech30 plasticizer was used to achieve workability during mixing.

Biochar was produced from apricot kernel shell taken from a local production factory of apricot juice in Malatya using pyrolysis as in Figure 1.

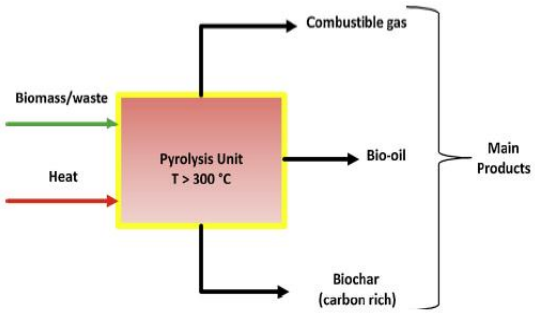


Fig. 1. Schematic of a typical pyrolysis process

Pyrolysis experiments were carried out in a fixed-bed design and stainless-steel reactor, with 6 cm in diameter and 21 cm in height [14]. In a typical run, 100 g apricot kernel shell was placed into the reactor. The system was heated to 500 ºC with a heating rate of 10 °C/min under nitrogen flow at a rate of 50 ml/min. The percentage of biochar yield calculated from the mass of the original apricot kernel shell and the weight of the produced biochar after completion of the pyrolysis is about 29%. Figure 2 shows the apricot kernel and the produced biochar.

Before mixing into mortar, the biochar was grinded into nanosize (<500nm) to give a high surface area, and increased surface active sites by using the ball-milling process, Fritsch Premium Line Pulverisette 7. The grinding takes place primarily through the high-energy impact of grinding balls and partially through friction between grinding balls and the grinding bowl wall [15].

The morphology and particle size distribution of the nanobiochar was investigated by scanning electron microscope (SEM, COXEM EM-30 Plus), operated at 20 kV accelerating potential.



(a) (b)

Fig. 2. (a) Apricot kernel shell used in the production of biochar (b) Produced biochar by pyrolysis.

In order to determine the effects of apricot kernel biochar volume % on the mechanical properties of mortar, mortar mixtures were designed based on TS 802 "Design of concrete mixes". The amount of the materials used in 1 m^3 of mortar were shown in Table 1.

Table 1. The mortar mixture ingredients used in 1 m^3 (kg).

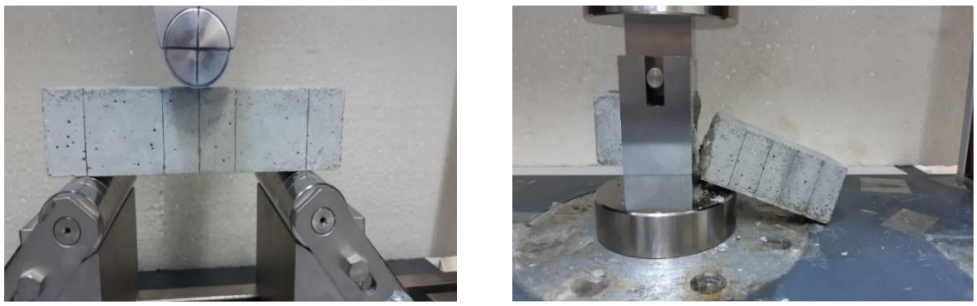
Volume %	0	0.04	0.06	0.08	0.12	0.15
Biochar	0	0.48	0.71	0.95	1.42	1.78
Cement CEM II	484.7	484.7	484.7	484.7	484.7	484.7
Sand 0-5 mm	1471.9	1470.8	1470.4	1469.9	1468.8	1468.1
Water	253.2	253.2	253.2	253.2	253.2	253.1
Plasticizer	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4	2.4

Three 4×4×16 cm prismatic samples were prepared for each mixture. The biochar was dispersed in a solution of distilled water and plasticizer. For dispersion, water and plasticizer were mixed in a glass beaker by a magnetic stirrer at 1500 rpm for 5 minutes and the required quantity of biochar in powder was added to the solution that was mixed 30 minutes more. Then, the mixture was sonicated for 30 minutes in an ultrasonic bath to allow a good homogenization of the compound and to prevent agglomeration of biochar particles. Immediately after sonication, the mixture was again mixed by a magnetic stirrer at 1500 rpm for 30 minutes.

After dispersion process, sand and cement were mixed separately dry. Biochar liquid mixture was added to the dry mixture in two times and mixed manually each time. Then the mixture was mixed at 140 rpm for 30 seconds and at 280 rpm for further 150 seconds with a mortar mixer. After mixing, the mortar paste was poured into molds which were kept for 24 hours. Finally, the prism shaped samples were demolded, cured in water for 28 days at 20 ^oC and left at laboratory environment for 7 days in order to reach steady state moisture content.

Tests for flexural strength were carried out with three samples per mixture. The tests were performed using Shimadzu AGSX mechanical testing machine with 300 kN capacity and the testing software used was TRAPEZIUM X. Three point bending test at a rate of 0.2 mm/min in accordance with ASTM C1609 standard was applied on the samples [16]. Then compression test on both sides of the failed flexural test samples at a rate of 0.5 mm/min in accordance with

ASTM C349 [17] standard was conducted as seen in Figure 3. Six compression tests per mixture were conducted.



(a) (b)

Fig. 3. Flexural and compression tests of mortar (a) flexural test (b) compression test

3 RESULTS AND DISCUSSION

As seen in Figure 4, grinded biochar obtained from apricot kernel shell shows particles having uneven shape and the minimum particle size was average 350 nm. Ridges and honeycomb pore structures on the surface of biochar particles can be observed because the organic and volatile matters escape from raw material during pyrolysis. When biochar is added to mortar, the honeycomb pore structures can play a significant role during initial hardening because part of mixing water would be retained by biochar pores [12]. The surface morphology and porous structure of the biochar depends on the pyrolysis temperature. As the temperature increases, the surface becomes rougher and more porous. The roughness can enhance the bonding between biochar and cementitous matrix [18].

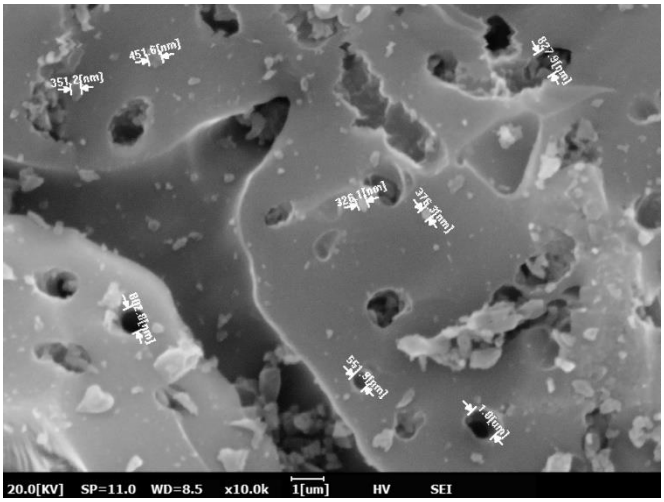


Fig. 4. SEM image of apricot kernel shell biochar particles after grinding process

Figure 5 (a) presents flexural strength of mortar containing different volume ratio of apricot kernel shell biochar at 28 days of curing. 0.12 vol.% of biochar offered highest flexural strength: 9.78 MPa, that is higher by 31.57% compared to plain mortar. In reference mortar, after the initiation of the crack, sudden failure occurs while for mortar with biochar, the biochar diverts crack propagation and involve more material in failure process [9]. However, not effective

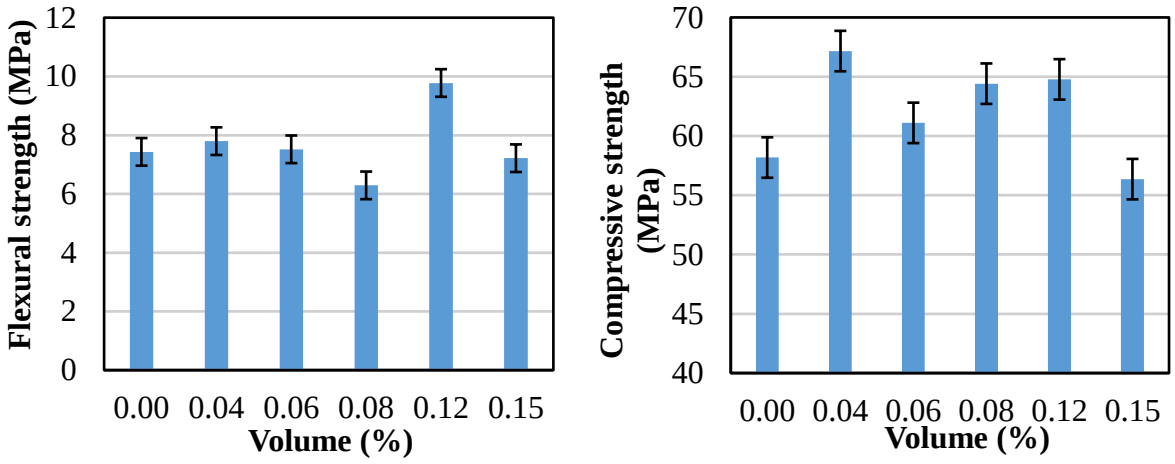
increase in flexural strength was observed when biochar was added in other ratios and also addition of 0.15 vol.% of biochar resulted in decreasing in flexural strength. Loss in flexural strenght may be due to porous nature of fine particle size, excessive dosage of biochar tend to trap air, which results in introduction of pores and act as weak sites for crack propagation [19] and high dosage of biochar tends to cause inhomogeneity in the hardened mortar [20].

Figure 5 (b) shows the variation of compressive strength of mortar containing different volume ratio of apricot kernel shell biochar. 0.04-0.06-0.08-0.12 vol.% addition of biochar produce increase of strength by 15.43% - 5.02% - 10.71% - 11.34% compared to that of plain mortar (control mix), respectively.

Increase in compressive strength due to biochar addition can be related to absorbing part of mixing water by porous biochar particles, which means lowering of local water-cement ratio in mortar. It leads to densification of hardened mortar, because of reduced amount of evaporable free water responsible for creation of capillary pores. And also the retained water in biochar is later supplied to the mortar paste during hardening, meaning an internal curing action of biochar particles [21, 22, 23]. Moreover, inert carbonized materials also induce filler effect and provide nucleation sites for generation of hydration products in the mortar matrix [24, 25].

However, 0.15 vol.% addition of apricot kernel shell nanoscale biochar results in reduction of compressive strength by 3.15%. The decrease of compressive strength may be due to agglomeration of nanostructured particles around cement grains which lead to retard cement hydration and due to the defects generated in dispersion of nano particles that causes weak zones [26].

It was clear from flexural and compressive strength results that 0.12 vol.% addition of apricot kernel shell nanoscale biochar is optimum value, offered highest improvement in mechanical properties compared to plain mortar.



(a) (b)

Fig. 5. Flexural strength (a) and compressive strength (b) of biochar containing mortar.

4 CONCLUSIONS

In this study, biochar at 500 ºC was produced by pyrolysis process from apricot kernel shell, grinded into nano size and further used in the production of high performance biochar-mortar composites. Flexural strength and compressive strength were improved by addition of 0.12 volume % of biochar by 31.57% and by 11.34 % compared to the reference mortar, respectively.

There are two strengthening mechanisms for biohar in mortar. Nanoscale biochar induces filler and internal curing effect, nucleation sites of hydration products, causing more products during the hydration, increasing the strength. The second mechanism is, the biochar diverts cracks and involves more materials in the failure process. Excessive use of biochar develops weak zones in the matrix, decreasing the strength.

Based on findings, nano biochar obtained from apricot kernel shell has the potential to be used as carbon sequestering admixture to improve mechanical performance of cement composites while being used as a construction material protecting the environment.

The evaluation of agriculture wastes as nanobiochar in mortar and concrete is important for not only improving the performance of cement composites but also enabling waste recycling and reducing global warming through sequestering high volume of carbon.

Acknowledgments

We would like to thank to Batıçim and Batıbeton Co., Sika Construction Chemicals Co. for supplying the materials in this work.

REFERENCES

[1] R. M. Andrew, Global CO2 emissions from cement production, 1928–2018, *Earth Syst. Sci. Data.* 11 (2019) 1675–1710. doi:10.5194/essd-11-1675-2019.

[2] F. Sanchez, K. Sobolev, Nanotechnology in concrete – a review, *Construction and Building Materials.* 24 (2010) 2060–2071. doi:10.1016/j.conbuildmat.2010.03.014.

[3] S. Kawashima, P. Hou, D.J. Corr, S.P. Shah, Modification of cement-based materials with nanoparticles, *Cement and Concrete Composites.* 36 (2013) 8-15. doi:10.1016/j.cemconcomp.2012.06.012.

[4] M. Cao, C. Zhang, J. Wei, Microscopic reinforcement for cement based composite materials, *Construction and Building Materials.* 40 (2013) 14–25. doi:10.1016/j.conbuildmat.2012.10.012.

[5] S. Gupta, H. W. Kua, Factors Determining the Potential of Biochar As a Carbon Capturing and Sequestering Construction Material: Critical Review, *Journal of Materials in Civil Engineering.* 29(9) (2017) 04017086. doi:10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001924.

[6] J. S. Cha, S. H. Park, S. C. Jung, C. Ryu, J. K. Jeon, M. C. Shin, Y. K. Park, Production and utilization of biochar: A review, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry.* 40 (2016) 1–15. doi:10.1016/j.jiec.2016.06.002.

[7] M. Tripathi, J. N. Sahu, P. Ganesan, Effect of process parameters on production of biochar from biomass waste through pyrolysis: A review, *Renewable and Sustainable Energy Reviews.* 55 (2016) 467–481. doi:10.1016/j.rser.2015.10.122.

[8] J. Lehmann, Bio-Energy in the Black, *Frontiers in Ecology and the Environment.* 5 (2007) 381–387. doi:10.1890/1540-9295(2007)5[381:BITB]2.0.CO;2.

[9] S. Ahmad, R. A. Khushnood, P. Jagdale, J. M. Tulliani, G. A. Ferro, High performance self-consolidating cementitious composites by using micro carbonized bamboo particles, *Materials and Design.* 76 (2015) 223–229. doi:10.1016/j.matdes.2015.03.048.

[10] R. A. Khushnood, S. Ahmad, G. A. Ferro, L. Restuccia, J. M. Tulliani, P. Jagdale, Modified fracture properties of cement composites with nano/micro carbonized bagasse fibers, *Frattura Ed Integrita Strutturale.* 9(34) (2015) 534–542. doi:10.3221/IGF-ESIS.34.59.

[11] L. Restuccia, G. A. Ferro, Promising low cost carbon-based materials to improve strength and toughness in cement composites, *Construction and Building Materials.* 126 (2016) 1034–1043. doi:10.1016/j.conbuildmat.2016.09.101.

[12] S. Gupta, H. W. Kua, S. D. Pang, Biochar-mortar composite: Manufacturing, evaluation of physical properties and economic viability, *Construction and Building Materials.* 167 (2018) 874–889. doi:10.1016/j.conbuildmat.2018.02.104.

[13] F. Wu, C. Liu, L. Zhang, Y. Lu, Y. Ma, Comparative study of carbonized peach shell and carbonized apricot shell to improve the performance of lightweight concrete,

Construction and Building Materials. 188 (2018) 758–771. doi:10.1016/j.conbuildmat.2018.08.094.

[14] I. C. Kantarli, J. Yanik, Use of waste sludge from the tannery industry, *Energy and Fuels.* 23(6) (2009) 3126–3133. doi:10.1021/ef8011068.

[15] I. Cosentino, L. Restuccia, G. A. Ferro, J. M. Tulliani, Influence of pyrolysis parameters on the efficiency of the biochar as nanoparticles into cement-based composites, *Procedia Structural Integrity.* 13 (2018) 2132–2136. doi:10.1016/j.prostr.2018.12.194.

[16] ASTM, (2012). C1609M Standard Test Method for Flexural Performance of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading). West Conshohocken.

[17] ASTM, (2014). C349-14 Standard Test Method for Compressive Strength of Hydraulic-Cement Mortars (Using Portions of Prisms Broken in Flexure). West Conshohocken.

[18] J. Jin, Y. Li, J. Zhang, S. Wu, Y. Cao, P. Liang, J. Zhang, M. H. Wong, M. Wang, S. Shan, P. Christie, Influence of pyrolysis temperature on properties and environmental safety of heavy metals in biochars derived from municipal sewage sludge, *Journal of Hazardous Materials.* 320 (2016) 417–426. doi:10.1016/j.jhazmat.2016.08.050.

[19] M. G. Beltrán, A. Barbudo, F. Agrela, J. R. Jiménez, J. De Brito, Mechanical performance of bedding mortars made with olive biomass bottom ash, *Construction and Building Materials.* 112 (2016) 699–707. doi:10.1016/j.conbuildmat.2016.02.065.

[20] R. A. Khushnood, S. Ahmad, L. Restuccia, C. Spoto, P. Jagdale, J. M. Tulliani, G. A. Ferro, Carbonized nano/microparticles for enhanced mechanical properties and electromagnetic interference shielding of cementitious materials, *Frontiers of Structural and Civil Engineering.* 10(2) (2016) 209–213. doi:10.1007/s11709-016-0330-5.

[21] W.C. Choi, H.D. Yun, J.Y. Lee, Mechanical properties ofmortar containing bio-char from pyrolysis, *J. Korea Inst. Struct. Maint. Inspection.* 16 (2012) 67–74. doi:10.11112/jksmi.2012.16.3.067.

[22] S. Gupta, H. W. Kua, Effect of water entrainment by pre-soaked biochar particles on strength and permeability of cement mortar, *Construction and Building Materials.* 159 (2018) 107–125. doi:10.1016/j.conbuildmat.2017.10.095.

[23] S. Gupta, K. Harn, P. Sze, Effect of biochar on mechanical and permeability properties of concrete exposed to elevated temperature, *Construction and Building Materials.* 234 (2020) 117338. doi:10.1016/j.conbuildmat.2019.117338.

[24] L. Restuccia, A. Reggio, G. A. Ferro, R. Kamranirad, Fractal analysis of crack paths into innovative carbon-based cementitious composites, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics.* 90 (2017) 133–141. doi:10.1016/j.tafmec.2017.03.016.

[25] L. Restuccia, G. A. Ferro, Influence of filler size on the mechanical properties of cement-based composites, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures.* 41(4) (2018) 797–805. doi:10.1111%2Fffe.12694.

[26] K.Al-Jabri, H. Shoukry, Use of nano-structured waste materials for improving mechanical, physical and structural properties of cement mortar, *Construction and Building Materials.* 73 (2014) 636–644. doi:10.1016/j.conbuildmat.2014.10.004.

RAMAN ETKİSİ VE ÖZ-DİKLEŞME ETKİSİ ALTINDAKİ DOĞRUSAL OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİ VE KARARLILIK ANALİZİ

Eril Güray Çelik[1] ve Nalan Antar[2]

[1,2] İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Maslak, İstanbul

ABSTRACT

In this study, the nonlinear Schrödinger equation under Raman effect and self-steepening effect is solved numerically by pseudospectral renormalization method. Then, stability analysis of soliton solutions of non-linear Schrödinger equation with self-steepening effect in self-focusing cubic media is investigated. The nonlinear stability of the obtained solitons was investigated by using the split-step Fourier method, and the linear stability was investigated by examining the linear spectrum of the soliton's linear stability operator.

Key words: NLS; Soliton; Cubic-Quintic; Raman Effect; Self-Steepening Effect; Stability Analysis

ÖZET

Bu çalışmada Raman etkisi ve öz-dikleşme etkisi altındaki, lineer olmayan Schrödinger denklemi nümerik olarak pseudo-spektral yeniden normalleşme yöntemi ile çözülmüştür. Daha sonra kendine odaklı kübik ortamda, öz-dikleşme etkisine sahip lineer olmayan Schrödinger denkleminin soliton çözümlerinin kararlılık analizi incelenmiştir. Elde edilen solitonların nonlineer kararlılığı, ayrık adımlı Fourier yöntemi kullanılarak, lineer kararlılığı ise solitonun doğrusal kararlılık operatörünün lineer spektrumu incelenerek analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: NLS; Soliton; Kübik-Kuintik; Raman Etkisi; Öz-Dikleşme Etkisi; Kararlılık Analizi

GİRİŞ

Tek boyutlu fiziksel sistemlerde, zayıf doğrusal olmayan ve dağınık dalga paketleri, doğrusal olmayan Schrödinger (NLS) denklemi ile modellenir [1]

$$iu_z + \frac{\beta}{2}u_{xx} + \gamma_1|u|^2u = 0 \tag{1}$$

Burada u elektrik alan ile orantılı zarfı, z optik darbenin yayılma yönünü, γ_1 doğrusal olmayan kübik terimin katsayısını (yoğunluğa bağlı), u_{xx} kırınımı ve β kırınım katsayısını temsil etmektedir. Kırınım, bir ışık demetinin havadan veya bir kristalden geçerken mesafe

boyunca genişlemesi olarak düşünülebilir. Optikte kırınım denilen bu terimin su dalgalarındaki karşılığı dağılım yani dispersiyondur.

Bir ışık darbesi optik fiberde ilerlerken, $u(x,z)$ fonksiyonu, NLS denklemini (1) düşük mertebeden yakınsaklıkla sağlar. Fakat ışık darbeleri çok kısaysa, (1) denkleminde modellenmeyen bazı lineer ve lineer olmayan etkiler çok önemli bir hale gelir. Bunlardan en önemlilerinin üçüncü mertebeden dispersiyon, öz-dikleşme (lineer olmayan dispersiyon) ve Raman etkisi olduğu söylenebilir. Bu çalışmada Raman etkisi ve öz-dikleşme etkisi dikkate alınmıştır. Raman etkisi ve öz-dikleşme etkisi ile modellenen lineer olmayan Schrödinger denklemi aşağıdaki biçimde verilebilir (bkz. [2] ve [3])

$$iu_z + \frac{\beta}{2}u_{xx} + \gamma_1|u|^2u + \gamma_2|u|^4u + V_{\mathcal{PT}}(x) + is\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2u) + u\tau\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2) = 0 \quad (2)$$

Burada γ_1 kübik lineer olmayan terimin katsayısı ve γ_2 kuintik lineer olmayan terimin katsayısını göstermektedir. Doğrusal olmayan indeks katsayısı, normal kübik modelle her zaman doğru şekilde tanımlanamaz [4]. Bu nedenle hem kübik hem de kuintik doğrusal olmayan indeks varyasyonları, bir ortamda iki fotonlu doğrusal olmayan soğurma ile birlikte kabul edilir [5]. Doğrusal olmayan optikte, elektromanyetik dalganın fotorefraktif malzemelerdeki yayılması, kübik-kuintik doğrusal olmayan Schrödinger (CQNLS) denklemi ile modellenir [6]. γ_1 ve γ_2'nin pozitif veya negatif olmasına göre çeşitli ortamlar tanımlanabilir. Pozitif işaret, doğrusal olmayan optik sürecin kendine odaklı olduğunu, negatif işaret ise doğrusal olmayan optik sürecin kendine odaklı olmadığını gösterir.

$V_{\mathcal{PT}}(x)$, $\mathcal{PT}-$ periyodik simetrik potansiyeli temsil etmektedir [7]. Bu çalışmada aşağıdaki $\mathcal{PT}-$ periyodik simetrik potansiyel ele alınmıştır.

$$V_{\mathcal{PT}}(x) = V_0\cos^2(x) + iW_0\sin(2x) \quad (3)$$

(3) ile verilen denklemde V_0 ve W_0 sırasıyla potansiyelin gerçek ve sanal kısımlarının derinlikleridir.

Ayrıca, (2) ile verilen denklemde s, öz-dikleşme terimi katsayısını, τ, Raman terimi katsayısını temsil etmektedir. τ kompleks bir sayıdır ($Re(\tau) = \tau_r$ ve $Im(\tau) = \tau_i$).

Hem s hem de τ darbe genişliği ile ters orantılıdır. Bu katsayılar ile darbe genişliği arasındaki ilişki aşağıdaki formülden açıkça görülmektedir.

$$s = \frac{1}{\omega_0 T_0},\ \tau = \frac{T_R}{T_0} \quad (4)$$

Burada, T_R Raman kazanç spektrumunun eğimi ile ilgili Raman katsayısı, T_0 darbe genişliği, $\omega_0 = \omega(k_0)$ ve k_0 dalga paketinin baskın dalga sayısı, $\omega = \omega(k)$ ise $e^{i(kx-\omega t)}$ Fourier dalgası için doğrusal dağılım ilişkisidir. Eğer darbe genişliği $1ps$ (pikosaniye)'den yeteri kadar büyükse bu katsayılar çok küçük olur. Yani Raman etkisi ve öz-dikleşme etkisi çok sönük kalır. Ama darbe genişliği femtosaniyeler ile ifade ediliyorsa, bu katsayıların değeri çok daha önemli olmaya başlar. Darbe genişliğinin yaklaşık olarak 30 fs, T_R katsayısının yaklaşık olarak 3 fs ve λ dalga boyunun yaklaşık olarak 1.55 μm civarında olduğu varsayıldığında, s ve τ katsayıları sırasıyla yaklaşık olarak 0.03 ve 0.1'e karşılık gelir [1,3]. Bu

katsayılar ihmal edilemeyecek kadar önemli değerlere sahiptir. Bu nedenle denklem (1), bahsedilen yüksek mertebeden terimlerle birlikte düşünülmelidir.

Bilindiği gibi denklem (1), ters saçılma dönüşümü yöntemi ile analitik olarak çözülebilir [8]. Bu nedenle, integrallenebilir bir denklem olarak adlandırılır. Ancak, yüksek dereceli etkilere sahip NLS denklemi (2) integrallenemez.

Bu çalışmada (2) ile verilen Raman ve öz-dikleşme etkisinin altında $\mathcal{PT}-$ periyodik simetrik potensiyele sahip doğrusal olmayan Shrödinger denklemi nümerik olarak çözülmüştür. Soliton çözümleri pseudo-spektral yeniden normalleşme metodu ile bulunmuştur [9,10]. Daha sonra öz-dikleşme etkisinin soliton kararlılığına olan tesiri incelenmiştir. Elde edilen solitonların non-lineer kararlılığı, ayrık adımlı Fourier yöntemi kullanılarak, lineer kararlılığı ise solitonun doğrusal kararlılık operatörünün lineer spektrumu incelenerek araştırılmıştır.

SAYISAL YÖNTEM

Bu bölümde, potansiyel, Raman etkisi ve öz-dikleşme etkisine sahip kübik-kuintik NLS denklemi pseudo-spektral yeniden normalleşme yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Denklem (2)' de bulunan öz-dikleşme terimi

$$(is)u\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2)+is|u|^2\frac{\partial}{\partial x}u$$

şeklinde yazılabilir. Böylece denklem (2) aşağıdaki forma getirilebilir.

$$iu_z+\frac{\beta}{2}u_{xx}+\gamma_1|u|^2u+\gamma_2|u|^4u+V_{\mathcal{PT}}(x)u+(\tau_r+is_1)u\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2)+is|u|^2\frac{\partial}{\partial x}u=0 \qquad (5)$$

Bu denklemde s_1, τ_i+s toplamına karşılık gelmektedir.

Pseudo-spektral yeniden normalleşme metodu uygulanırken, ilk olarak, (5) denkleminin soliton çözümünün $u(x,z)=f(x)e^{i\mu z}$ şeklinde olduğu varsayımı yapılır. $f(x)$ kompleks değerli bir fonksiyondur ve μ yayılım sabitidir. Çözüm önerisi denklem (5)'te yerine koyulur ve aşağıdaki denklem elde edilir.

$$-\mu f+\frac{\beta}{2}f_{xx}+\gamma_1|f|^2f+\gamma_2|f|^4f+Vf+f(\tau_r+is_1)\frac{\partial}{\partial x}(|f|^2)+is|f|^2f_x=0 \qquad (6)$$

(6) denklemindeki diferansiyel terimlerin sırasıyla Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü alınarak (7) denklemi elde edilir. Fourier dönüşümü $\mathcal{F}(f)=\hat{f}$ şeklinde, ters Fourier dönüşümü ise $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f$ şeklinde gösterilir.

$$\begin{aligned}&-\mu f-\frac{\beta}{2}\mathcal{F}^{-1}\{k^2\hat{f}\}+\gamma_1|f|^2f+\gamma_2|f|^4f+Vf\\&+f\cdot(\tau_r+is_1)\cdot\mathcal{F}^{-1}\{ik\mathcal{F}\{|f|^2\}\}+is|f|^2\mathcal{F}^{-1}\{ik\hat{f}\}=0\end{aligned} \qquad (7)$$

k Fourier katsayısıdır.

Çözüme sabit nokta iterasyonu ile yakınsanabilmesi için $f(x)=\lambda w,\lambda\in R^+$ dönüşümü

yapılmalıdır. Bu dönüşüm denklemde yerine yazıldığında

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad , \tag{8}$$

$$\begin{aligned} a &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_2 |w|^6 dx \\ b &= \int_{-\infty}^{\infty} w^* \left[\gamma_1 |w|^2 w + w(\tau_r + is_1)\mathcal{F}^{-1}\left\{ik\mathcal{F}\{|w|^2\}\right\} + is|w|^2\mathcal{F}^{-1}\{ik\hat{w}\}\right] dx \\ c &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\mu w w^* - \frac{\beta}{2} w^* \mathcal{F}^{-1}\{k^2\hat{w}\} + V(x) w w^*\right] dx \end{aligned} \tag{9}$$

denklemleri elde edilir.

Ayrıca, aşağıdaki formülde sabit nokta iterasyonu uygulanarak çözüm elde edilmeye çalışılır.

$$\hat{w}_{n+1} = \frac{(-\mu + r)\hat{w}_n + A_n}{r + \frac{\beta}{2}k^2} \tag{10}$$

Burada $r \in R^+$ ve

$$\begin{aligned} A_n = \; & \mathcal{F}\{V(x)w_n\} + |\lambda_n|^2 \mathcal{F}\left\{\gamma_1 |w_n|^2 w_n + w_n(\tau_r + is_1)\mathcal{F}^{-1}\left\{ik\mathcal{F}\{|w_n|^2\}\right\} + is|w_n|^2\mathcal{F}^{-1}\{ik\hat{w}_n\}\right\} \\ & + |\lambda_n|^4 \mathcal{F}\{\gamma_2 |w_n|^4 w_n\}. \end{aligned}$$

Bu iterasyonda başlangıç koşulu olarak $w_0 = e^{-x^2}$ seçilebilir. Daha sonra denklem (8) kullanılarak λ_0 elde edilir ve $\hat{f} = \lambda\hat{w}$ eşitliğinden $\hat{f}$ bulunur. Elde edilen f ve λ değerleri denklem (7) de yerine konularak hata miktarı hesaplanır. Hata miktarı istenilen seviyeye gelene kadar iterasyona devam edilir. Bu çalışmada elde edilen çözümlerin hata mertebesi 10^{-10} mertebesindedir.

KARARLILIK ANALİZİ

Doğrusal olmayan NLS denklemini nümerik olarak çözmek tek başına yeterli olmayabilir. Soliton dalgası z yönünde ilerlerken, dalganın davranışları ve yapısında meydana değişiklikler büyük önem arz etmektedir. Bu çalışmada solitonların non-lineer kararlılık analizi ve lineer kararlılık analizi yapılmıştır.

Bu çalışmada, non-lineer kararlılık analizi yapılırken, solitonun z yönünde ilerlediği sırada; şeklinde, konumunda ve genliğinde herhangi bir değişme olup olmadığı incelendi. Bu inceleme için ayrık adımlı Fourier yöntemi kullanıldı.

Lineer kararlılık analizi ise solitonun doğrusal kararlılık operatörünün lineer spektrumu yani özdeğerleri incelenerek yapıldı.

Lineer Spektrum

Denklem (2), genel doğrusal olmayan terimle aşağıdaki gibi yazılır.

$$iu_z + \frac{\beta}{2}u_{xx} + F(|u|^2)u + V_{\mathcal{PT}}(x)u + (\tau_r + is_1)u\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2) + is|u|^2\frac{\partial}{\partial x}u = 0 \qquad (11)$$

Burada $F(\cdot) \in \mathbb{R}$ ve $F(0) = 0$.

Lineer karalılık analizi yapabilmek için varsayılan soliton çözüm önerisi aşağıdaki şekilde pertürbe edilir.

$$u(x,z) = \left[f(x) + g(x)e^{\lambda z} + h^*(x)e^{\lambda^* z}\right]e^{i\mu z} \qquad (12)$$

g ve h pertürbasyon özfonksiyonları, λ ise özdeğerdir.

(12), (11)'de yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$i\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ -L_2^* & -L_1^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Yukarıda

$$L_1 = (fpf^* + is|f|^2)\partial_x + \frac{\beta}{2}\partial_{xx} - \mu + F(|f|^2) + F'(|f|^2)|f|^2 + V + fpf_x^* + p2|f|\cdot|f|_x + isf^*f_x$$
$$L_2 = f^2p\partial x + F'(|f|^2)|f|^2 + f_xfp + isff_x$$

ve p, $\tau_r + is_1$' e karşılık gelmektedir.

Kübik kuintik doğrusal olmama durumu için $F(x) = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2$ ve $F'(x) = \gamma_1 + \gamma_2 2x$' dir.

(13)'de λ özdeğerleri herhangi bir nümerik yöntemle bulunabilir. Eğer spektrumda herhangi bir özdeğerin reel kısmı pozitif ise, (12)' deki üstel ifadeden dolayı, soliton z yönünde ilerlerken ıraksayacaktır. Yani lineer olarak kararlı değildir. Fakat özdeğerler sadece imajiner kısma sahipse solitonun lineer olarak kararlı olduğu söylenebilir.

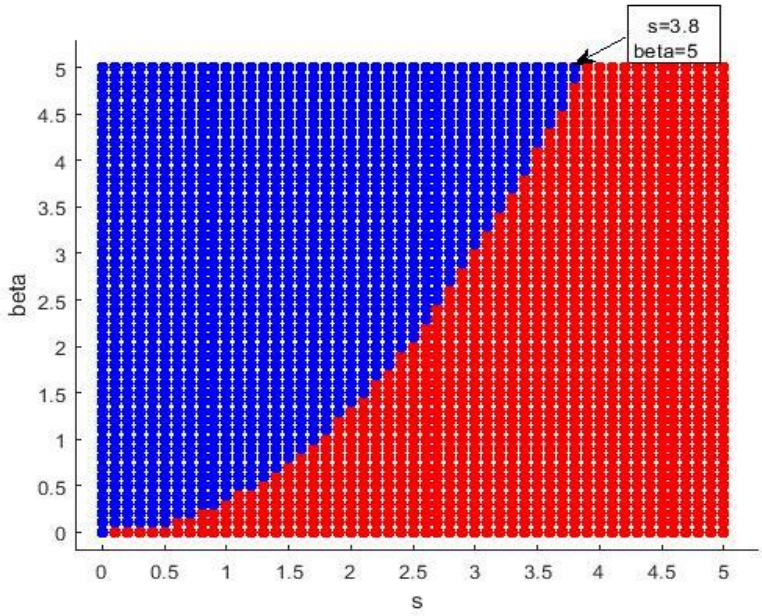
ÖZ-DİKLEŞME ETKSİ

Öz-dikleşme etkisine ve potansiyele sahip NLS denklemi aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$iu_z + \frac{\beta}{2}u_{xx} + \gamma_1|u|^2u + V(x)u + is\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2u) = 0 \qquad (14)$$

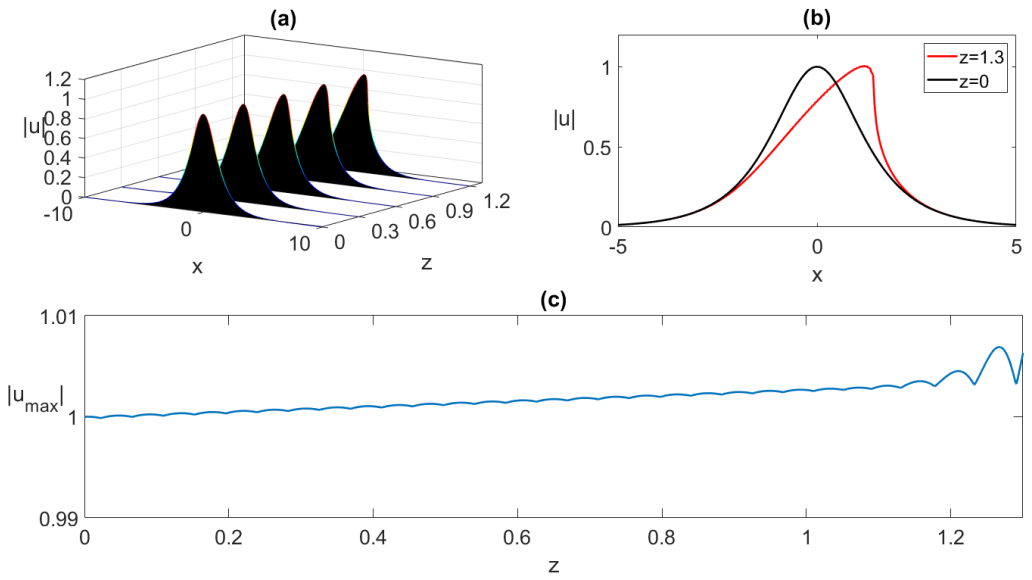
Denklem (14)' deki öz-dikleşme terimi, optik darbe z yönünde hareket ederken pozisyonunda kayma olmasına sebep olur. Bu pozisyon kayması sr^2z miktarında gerçekleşir, r burada solitonun genliğini temsil eder. Soliton z yönünde ilerlerken, pozisyon kayması lineer olarak artış gösterir. Bu öz-dikleşme etkisinin en önemli ve en bilinen sonucudur. Diğer bir önemli sonucu ise optik darbenin arka kenara doğru daha dik olmasına ve optik darbenin asimetrik olmasına sebebiyet vermesidir [11]. Başka bir deyişle, arka kenarda optik bir şoka neden olabilir. İkinci derece kırınım terimi, öz-dikleşme etkilerini dikkate değer bir miktarda azaltsa da, öz-dikleşme etkisi solitonun kararlılığını önemli ölçüde etkiler.

Denklem (14)' ün s ve β' nın değerlerine göre elde edilen çözüm bölgesi Şekil 1' de gösterilmektedir. Mavi noktaların olduğu değerlerde nümerik olarak çözüm elde edilirken kırmızı bölgelerde çözüm bulunamamıştır. Şekilden de anlaşılacağı üzere β' da artış meydana geldikçe s' nin daha yüksek değerleri için çözüm elde edilebilmektedir. Normal koşullarda s ve β' nın değerleri şekildeki kadar büyük olmayabilir, ancak kırınımın, öz-dikleşme üzerindeki etkisini nümerik olarak göstermek için uç değerler normalden biraz büyük seçildi.



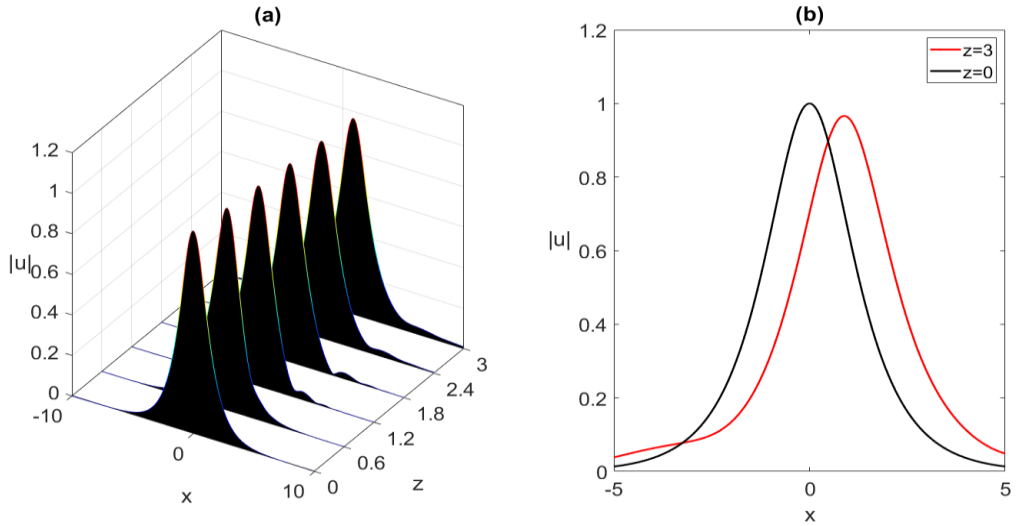
Şekil 1. s ve β' ya göre denklem (14) 'ün çözüm bölgesi ($V(x) = 0$).

Şekil 2' de β, 0 olarak alınmıştır ve optik darbenin öz-dikleşme ve öz-faz modülasyonu altındaki ilerleyişi gösterilmiştir. Başlangıç koşulu olarak $sech(x)$ fonksiyonu seçilmiştir. Şekilden de anlaşıldığı gibi, grup hızı yoğunluğa bağlı olduğundan tepe noktası kanatlardan daha yavaş hareket eder. Bu nedenle, kısa bir mesafe içinde, öz-dikleşme terimi, grup hız dağılımı (group velocity dispersion) etkilerinin yokluğunda şok etkisi meydana getirir [12].



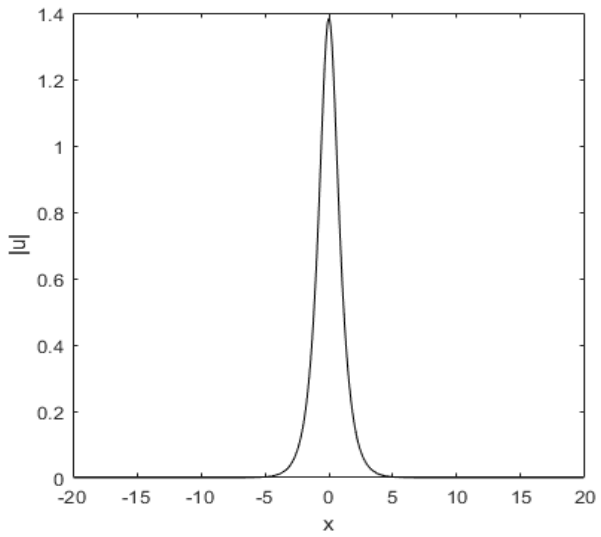
Şekil 2. Grup hız dağılımı yokluğunda, öz-dikleşme etkisinin ultra-kısa darbeler üzerindeki etkisi ($\beta = 0, s = 0.3$) , (a) Solitonun ilerlemesinin üç boyutlu görüntüsü, (b) $z = 0$ ve $z = 1.3$ anındaki optik darbeler, (c) Soliton z yönünde ilerlerken maksimum genliği.

Şekil 3' te β' nın değeri 1 olarak değiştirilmiştir. Şekil 2' de olduğu gibi başlangıç koşulu olarak $sech(x)$ fonksiyonu seçilmiştir. Şekilden açıkça görüldüğü üzere grup hız dağılımı şok etkisini absorbe etmektedir. Ancak yine de öz-dikleşme etkisi, pozisyon kaymasına, optik darbenin asimetrik olmasına ve optik darbenin alt darbelere ayrılmasına sebep olarak tesirini göstermektedir. Diğer bir deyişle öz-dikleşme etkisi solitonun non-lineer karlılığı üzerinde olumsuz sonuçlara yol açmaktadır.



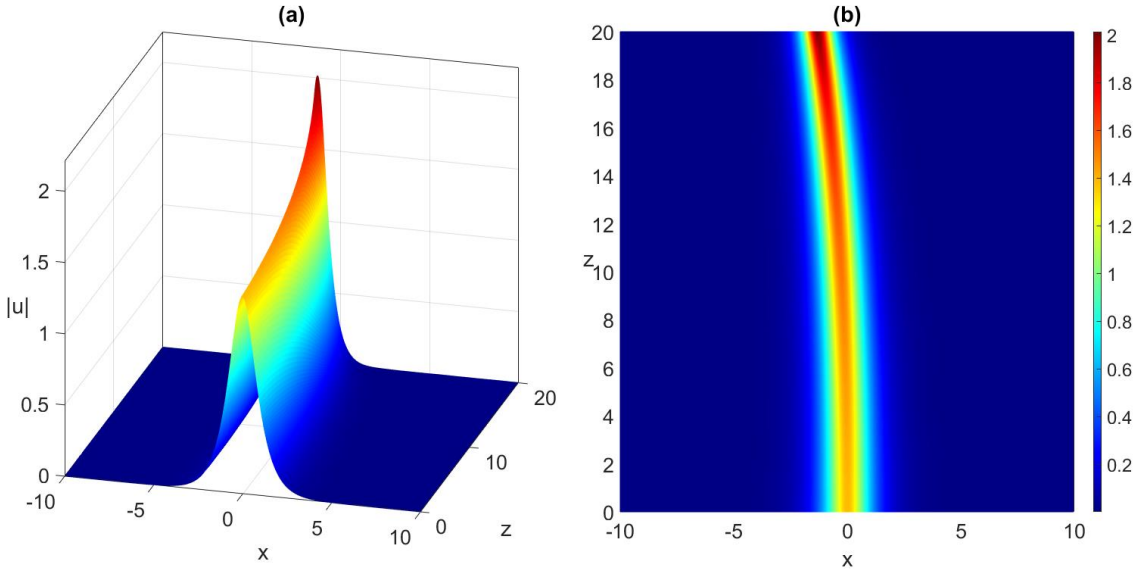
Şekil 3. Optik darbe ilerlerken grup hız dağılımının ve öz-dikleşme etkisinin tesiri ($\beta = 1, s = 0.3$), (a) Üç boyutlu görünüm, (b) $z = 0$ ve $z = 3$ anındaki optik darbeler.

Şimdi $s = 0.3$ ve $V(x) = 0$ olarak alındığında denklem (14)' ün soliton çözümünü bulalım ve elde ettiğimiz çözümün non-lineer kararlılığını inceleyelim. Şekil 4, elde edilen soliton çözümü göstermektedir.



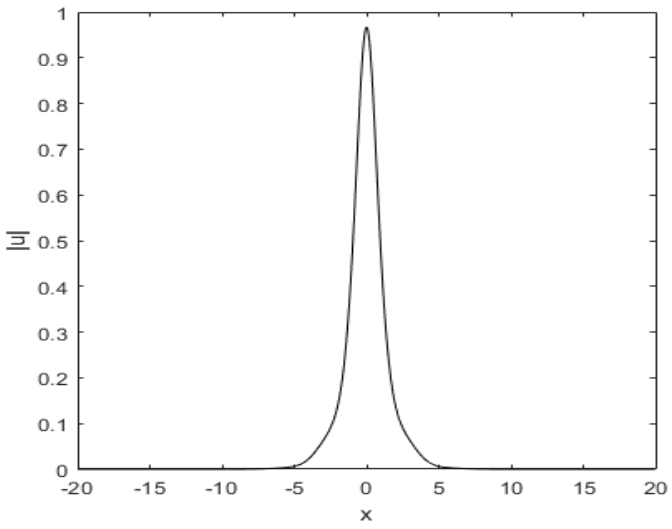
Şekil 4. $s = 0.3$ ve $V(x) = 0$ iken denklem (14)' ün soliton çözümü ($\beta = 1$)

Şekil 5' te, elde edilen soliton çözümünün non-lineer kararlılığı incelenmiştir. Soliton z yönünde ilerlerken öz-dikleşme etkisi yüzünden solitonun pozisyonunda kayma ve genliğinde artış meydana gelmektedir.



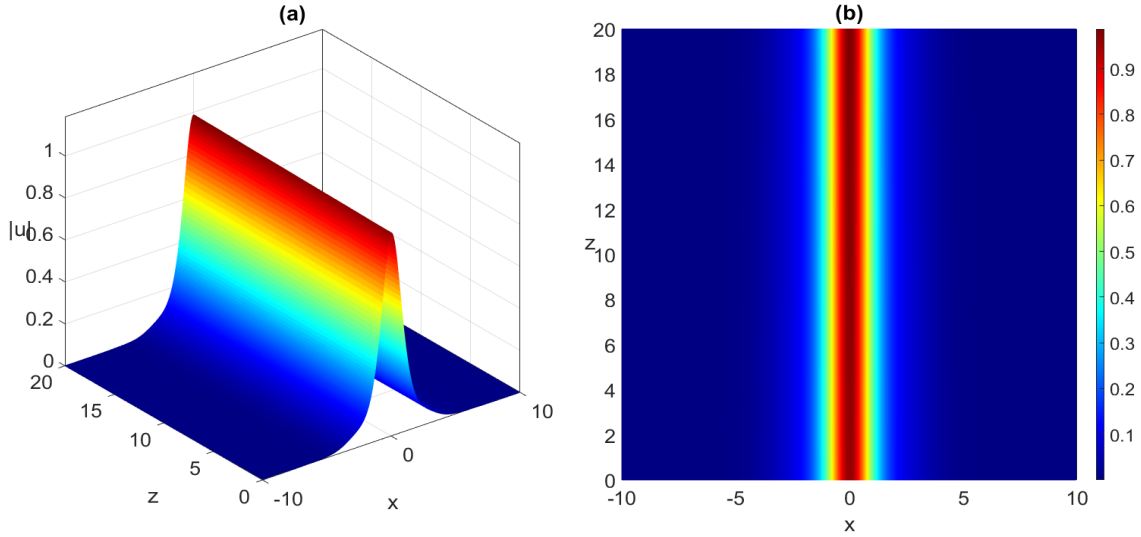
Şekil 5. s= 0.3 ve $V(x) = 0$ iken denklem (14)' ten elde edilen soliton çözümün ilerleyişi, (a) Üç boyutlu görünüm, (b) Üstten görünüm.

Yukarıdaki şekillerden anlaşıldığı gibi öz-dikleşme etkisi, soliton çözümün kararlılığını önemli ölçüde etkilemiştir. Ancak, bu olumsuz durumun, denklem (3)' te belirtilen potansiyel terimi ile düzeltilebileceği bulgusuna ulaşılmıştır. Şekil 6, **s**$= 0.3$**,** $V_0 = 0.9, W_0 = 0.2$ iken elde edilen soliton çözümü göstermektedir.



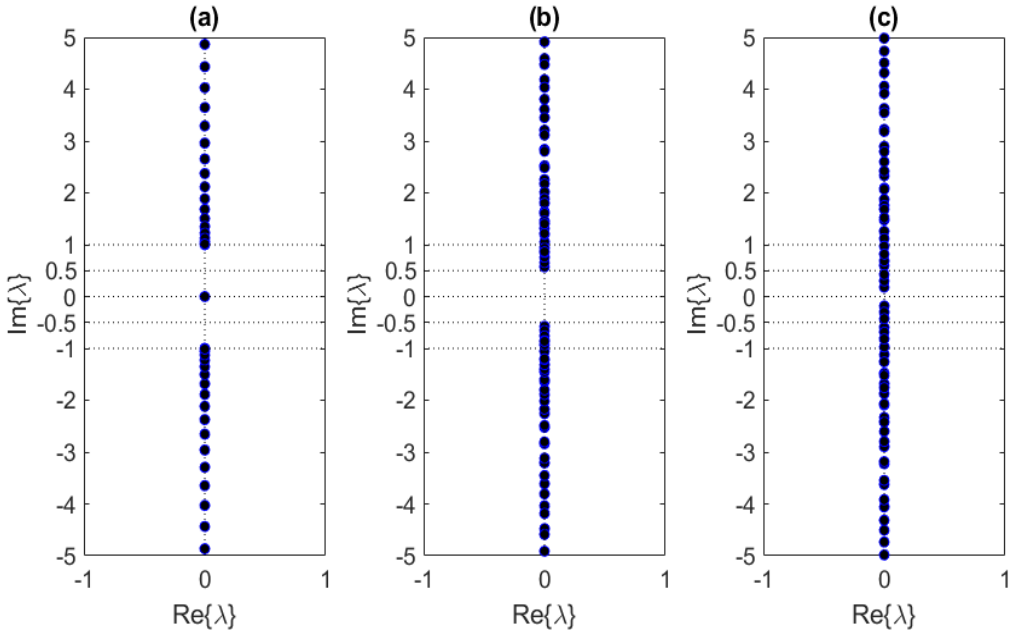
Şekil 6. s$= 0.3$, $V_0 = 0.9, W_0 = 0.2$ iken denklem (14)' ün soliton çözümü ($\beta = 1$).

Şekil 7' de; **s**$= 0.3$**,** $V_0 = 0.9, W_0 = 0.2$ iken elde edilen soliton çözümün non-lineer kararlılığı incelenmiştir. İnceleme sırasında ilk olarak potansiyelin reel kısmının 0'dan 0.9' a çıkarılması ile, soliton ilerlerken pozisyonunda kayma gerçekleşmediği, daha sonra potansiyelin imajiner kısmının 0'dan 0.2' ye çıkarılmasıyla da solitonun genliğinde önemli ölçüde denge sağlandığı gözlemlenmiştir.



Şekil 7. s$= 0.3$, $V_0 = 0.9, W_0 = 0.2$ iken denklem (14)' ten elde edilen soliton çözümün ilerleyişi, (a) Üç boyutlu görünüm, (b) Üstten görünüm

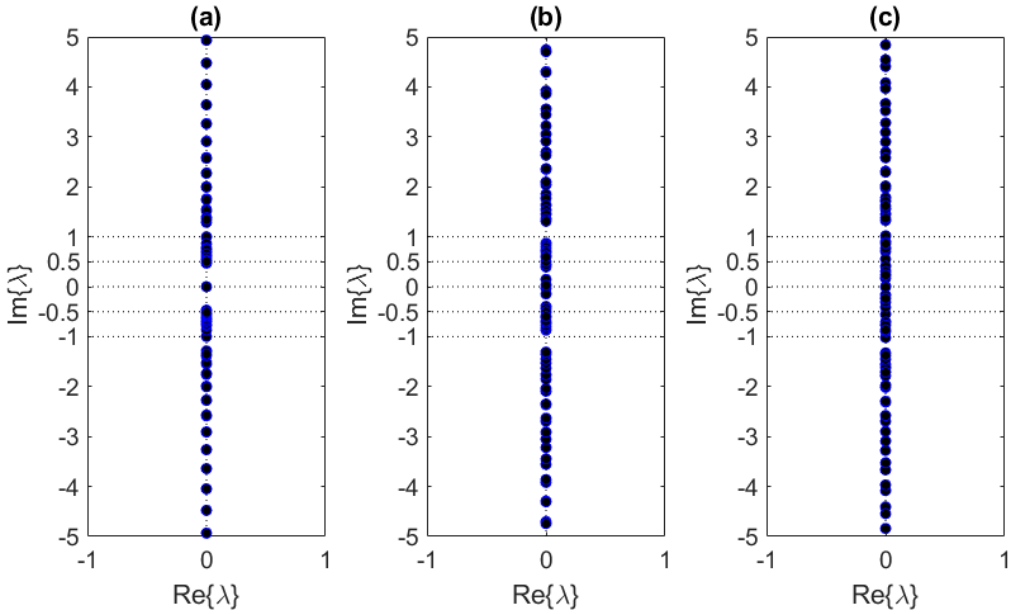
Şekil 8' de öz-dikleşme etksinin lineer spektrum üzerindeki tesiri gösterilmektedir. Öz-dikleşme altında lineer spektrumda bulunan özdeğerlerin hepsinin reel kısmı 0' a eşittir. Bununla birlikte öz-dikleşme katsayısı arttıkça özdeğerlerin 0'a yakın noktalarda yoğunlaştığı sonucuna ulaşılmıştır. Fakat özdeğerlerin reel kısmı sıfır olduğu için çözümlerin lineer olarak kararlı olduğu söylenebilir.



Şekil 8. Öz-dikleşme etkisinin lineer spektrum üzerindeki tesiri ($V(x) = 0$) , (a) $s = 0$, (b) $s = 0.1$, (c) $s = 0.3$.

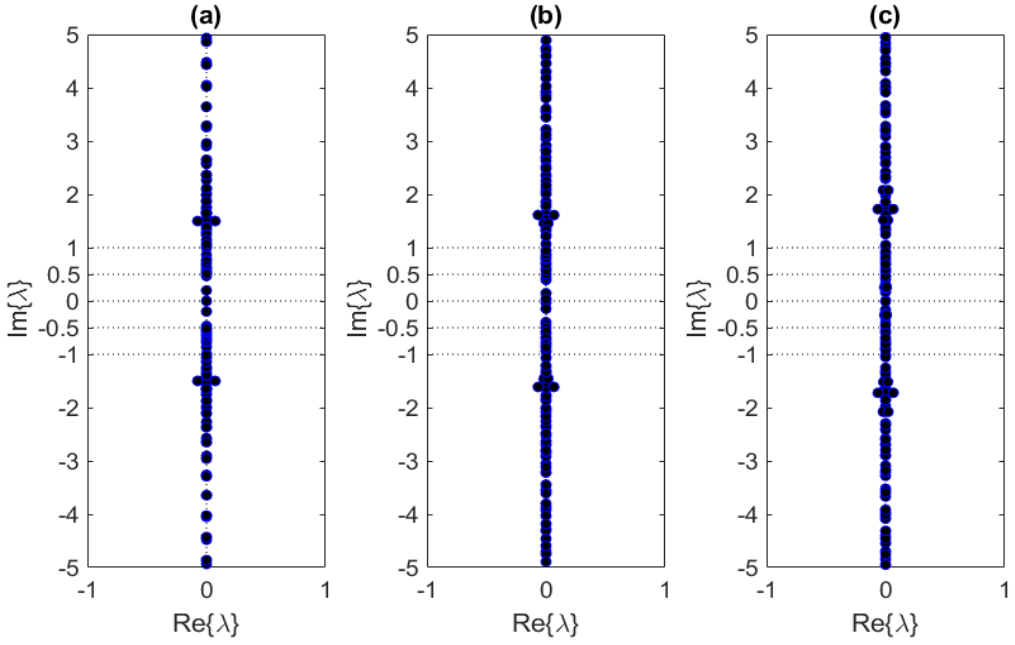
Şekil 9' da, potansiyelin reel kısmının katsayısı (V_0) 0.9 olarak alınıp, lineer spektrum yeniden incelenmiştir. (V_0) üzerinde yapılan artışın, lineer spektrum üzerinde olumsuz bir sonuç meydana getirmediği gözlemlenmiştir. Öz-değerlerin reel kısmı 0 olarak kalmaya devam etmiştir.

Şekil 10' da ise V_0 sıfırlanıp, W_0 değeri 0.2' ye getirilerek potansiyelin imajiner kısmının ve öz-dikleşme etkisinin lineer spektrum üzerindeki etkisi beraber incelenmiştir. W_0' da meydana gelen artış sonucunda lineer spektrumdaki bazı özdeğerlerin reel kısmı 0' dan farklı bir değere sahip olmuştur. Böylelikle W_0' daki artışın lineer kararlılık üzerinde olumsuz bir etki meydana getirdiği bulgusuna ulaşılmıştır.



Şekil 9. Öz-dikleşme etkisinin lineer spektrum üzerindeki tesiri ($V_0 = 0.9, W_0 = 0$),

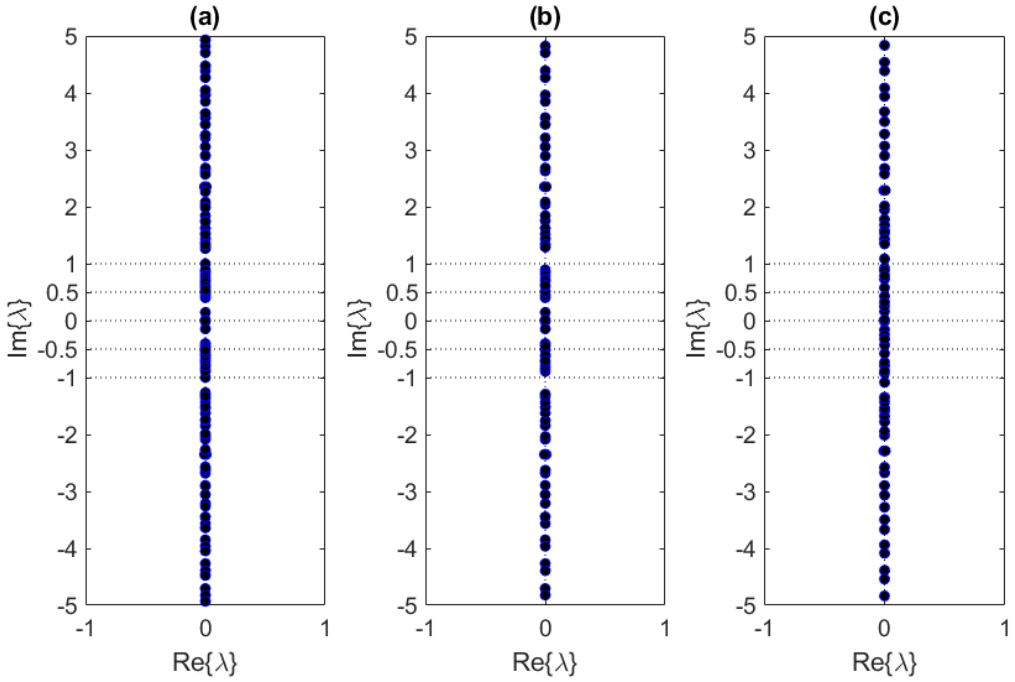
(a) $s = 0$, (b) $s = 0.1$, (c) $s = 0.3$.



Şekil 10. Öz-dikleşme etkisinin lineer spektrum üzerindeki tesiri ($V_0 = 0, W_0 = 0.2$),

(a) $s = 0$, (b) $s = 0.1$, (c) $s = 0.3$.

Şekil 11' de V_0'ın değeri tekrar 0.9 olarak, W_0' ın değeri ise değiştirilmeden yukarıdaki gibi 0.2 olarak alınmıştır. Potansiyelin reel ve imajiner kısımları ile öz-dikleşme etkisinin, lineer spektrum üzerindeki etkisi incelenmiştir. V_0' da yapılan artışın, W_0 katsayısının meydana getirdiği olumsuz etkiyi sönümlediği gözlemlenmiştir. Şekil 10' da görülen olumsuz sonuçlara burada rastlanmamış olup, özdeğerlerin reel kısmının 0 olduğu ve çözümlerin lineer olarak kararlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 11. Öz-dikleşme etkisinin lineer spektrum üzerindeki tesiri ($V_0 = 0.9, W_0 = 0.2$),

(a) $s = 0$, (b) $s = 0.1$, (c) $s = 0.3$.

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Raman ve öz-dikleşme etkileri altında olan, $\mathcal{PT}-$ periyodik simetrik potensiyele sahip kübik-kuintik lineer olmayan Schrödinger denklemi pseudo-spektral yeniden normalleşme yöntemi ile çözülmüştür. Daha sonra öz-dikleşme etkisinin lineer olmayan Schrödinger denklemi üzerindeki tesiri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Şekil 2' de grup hız dağılımı etkisinin yokluğunda öz-dikleşme etkisinin şok etkisi meydana getirdiği, Şekil 3' te ise grup hız dağılımı etkisinin meydana gelen şok etkisini absorbe ettiği gösterilmiştir.

Daha sonra, denklem (14)' ün çözümünden elde edilen solitonların karalılık analizleri yapılmıştır. Potansiyel terimi 0 olarak alındığında, elde edilen soliton z yönünde ilerlerken, öz-dikleşme etkisinin solitonun pozisyonunda kayma meydana getirdiği ve solitonun genliğinde artışa yol açtığı bulgusuna ulaşılmıştır. Ancak V_0 katsayısı 0.9 olarak alındığına solitonun pozisyonunda oluşan kaymanın yok olduğu ve daha sonra W_0 katsayısının 0.2

olarak alınmasıyla da genlikte meydana gelen artışın büyük oranda kaybolduğu gözlemlenmiştir.

Öz-dikleşme etkisinin ve V_0 katsayısının lineer kararlılık üzerinde olumsuz bir etki meydana getirmediği Şekil 8 ve 9' da gösterilmiştir. Potansiyelin W_0 katsayısının 0.2 olarak alınmasının lineer kararlılığı bozduğu, ancak, V_0 katsayısının bu olumsuz etkiyi giderdiği Şekil 10 ve Şekil 11' den anlaşılmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] J. Yang, Nonlinear Waves in Integrable and Non-Integrable Systems. USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

[2] A. Hasegawa and Y. Kodama,Solitons in Optical Communications. Oxford series in optical and imaging sciences,Clarendon Press, 1995.

[3] G. P. Agrawal, "Chapter 5 - optical solitons," in Nonlinear Fiber Optics (Sixth Edition)(G. P. Agrawal, ed.),pp. 127–187, Academic Press, sixth edition ed., 2019

[4] A. A. Nair, K. Porsezian, and M. Jayaraju, "Impact of higher order dispersion and nonlinearities on modulational instability in a dual-core optical fiber"' The European Physical Journal D, vol. 72, no. 1,2018.

[5] G. Boudebs, S. Cherukulappurath, H. Leblond, J. Troles, F. Smektala, and F. Sanchez, "Experimental and theoretical study of higher-order nonlinearities in chalcogenide glasses," Optics Communications, vol. 219, no. 1-6, p. 427-433, 2003.

[6] Göksel, N. Antar, and Bakırtaş, "Solitons of (1+1)d cubic-quintic nonlinear schrödinger equation with PT-simmetric potentials, Optics Communications, vol. 354, pp. 277-285,2015.

[7] C. M. Bender and S. Boettcher, "Real spectra in non-hermitian hamiltonians havingptsymmetry," Physical Review Letters, vol. 80, no. 24, p. 5243-5246,1998.

[8] A. Shabat and V. Zakharov, "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulationof waves in nonlinear media,"Soviet physics JETP, vol. 34, no. 1, p. 62, 1972.

[9] M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, "Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems," Optics Letters, vol. 30, no. 16, p. 2140,2005.

[10] Antar, N. (2014). Pseudospectral renormalization method for solitons in quasicrystal lattice with the cubic-quintic nonlinearity, Journal of Applied Mathematics, 2014, 848153.

[11] L. Yin, Q. Lin, and G. P. Agrawal, "Soliton fission and supercontinuum generation in silicon waveguides, "Opt.Lett., vol. 32, pp. 391–393, Feb 2007.

[12] D. T. Thuy, N. T. Vinh, B. D. Thuan, and C. L. Van, "Influence of self-steepening and higher dispersion effects onthe propagation characteristics of solitons in optical fibers,"computational methods in science and technology,vol. 22, pp. 239–243, 2016.

ELASTİK ZEMİNE OTURAN TABAKALI KOMPOZİT KİRİŞLERİN EĞİLME DAVRANIŞI İÇİN GELİŞTİRİLMİŞ ZİKZAK TEORİSİ TABANLI KARIŞIK SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Yonca Bab [1], Akif Kutlu[1] ve Mehmet Dördüncü[2]
[1]İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul
[2]Erciyes Üniversitesi, Kayseri

ABSTRACT

In this paper, bending behavior of laminated composite beams resting on elastic foundation is examined by a mixed finite element formulation. The beam assumptions are based on the refined zigzag theory and the finite element formulation relies on the Hellinger-Reissner variational principle. The refined zigzag theory can reflect the warping of the cross section due to the transverse shear stresses and it eliminated the requirement of a shear correction factor. The elastic foundation is modeled as Pasternak type. Since the kinematical expressions involve first order derivative, the formulation requires C0 continuity. Straight one-dimensional elements with two nodes are employed to discretize the physical domain of the laminated plate and the foundation. Stress resultant type field variables are assigned at the nodes alongside the kinematical variables of the refined zigzag theory. Hence the stress resultants are directly obtained from the solution of the global finite element equations. After a comparison study the bending characteristics of the laminated beams resting on elastic foundation are investigated by the presented solution procedure.

Keywords: Refined zigzag theory, laminated composite beam, Hellinger-Reissner, mixed finite elements, bending behavior

ÖZET

Bu çalışmada, elastik zemine oturan tabakalı kompozit kirişlerin eğilme davranışı karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak incelenmektedir. Kiriş formülasyonu geliştirilmiş zikzak teorisini baz alırken sonlu eleman formülasyonu Hellinger-Reissner (HR) prensibine dayanmaktadır. Geliştirilmiş zikzak teorisi enine kayma gerilmesi sebepli kesit çarpılmasını ele alırken kayma düzeltme faktörüne de ihtiyaç duymaz. Bu çalışmada elastik zemin Pasternak tipinde seçilmiştir. Geliştirilmiş zikzak teorisinde kinematik ilişkiler birinci mertebeden türevler barındırdığı için C0 türünde bir formülasyon oluşturulmuştur. Tabakalı kiriş-elastik zemin bölgesinin ayrıklaştırılması için iki düğüm noktalı doğrusal bir boyutlu elemanlar kullanılmıştır. Düğüm noktalarında bölge değişkeni olarak geliştirilmiş zikzak teorisinin kinematik parametrelerinin yanında gerilme bileşkesi türünde de değişkenler tanımlanmıştır. Böylece gerilme bileşkeleri doğrudan global çözümün sonucu olarak düğüm noktalarında elde edilebilmektedir. Bir doğrulama analizinden sonra, elastik zemine oturan tabakalı kompozit kirişlerin eğilme karakteristikleri sunulan çözüm yöntemi ile incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Geliştirilmiş zikzak teorisi, tabakalı kompozit kiriş, Hellinger-Reissner prensibi, karışık sonlu elemanlar, eğilme analizi

GİRİŞ

Farklı malzemelerin avantajlı özelliklerini bir araya getirmek suretiyle geliştirilen kompozit malzemeler sundukları gelişmiş özelliklerden ötürü birçok mühendislik uygulamasında tercih edilmektedir. Günden güne kompozit yapılara inşaat, makine, uçak-uzay ve savunma sanayi , robotik, enerji vb. uygulama alanlarında daha sık rastlanılmaktadır [1]. Kompozit malzemeler kullanım amaçlarına göre tasarlandığında; yapılarda ısı, ses ve yangın yalıtımı, yüksek dayanım, yorulmaya karşı korunma, korozyon dayanımı, düşük maliyet ve hafiflik gibi avantajlar ortaya koymaktadır. Kompozit kirişler yapılarda doğrudan taşıyı eleman olarak veya ana taşıyıcı elemanı (örneğin bir plağı) rijitleştirici eleman olarak sıklıkla kullanılmaktadır [2]. Tabakalı kompozit kirişlerin mekanik davranışlarının belirlenmesi için tarihsel süreç içerisinde farklı Eşdeğer Tek Tabakalı Teoriler (ETTT) ortaya konmuştur. Klasik Kiriş Teorisi (KKT) [3] kesitte enine kayma gerilmelerinin etkisini ihmal ederek kiriş davranışını tanımlar. Bu sebeple enine kayma etkisinin etkin olduğu kalın kiriş problemlerinde ve kesit çarpılmasını ihmal ettiği için heterojen malzeme dağılımda KKT gerçekten oldukça uzak sonuçlar elde edilmesine sebep olur. Birinci Mertebe Kiriş Teorisi (BMKT) [4] enine kayma açısını kesit boyunca sabit kabul ederek bir tanım yaparken kesit alt ve üst yüzeylerinde sıfır olması gereken kayma gerilmesi koşulunu sağlayamaz. Ayrıca enerji ifadesinde sabit kayma açısından dolayı ihtiyaç duyulan düzeltmeyi gerçekleştirmek üzere kayma düzeltme katsayısının kullanımını gerektirir. Yüksek Mertebe Kiriş Teorisi (YMKT) [5] ise kesit alt ve üst yüzeylerinde kayma gerilmesini sıfır yapacak şekilde bir fonksiyon seçimi ile kesit çarpılmasını yansıtır. Bu sayede kayma düzeltme katsayısına gereksinim duyulmaz. Bahsi geçen teorilerin ortaya koyduğu kimi sorunları ortadan kaldırmak adına düzlem içi şekil değiştirmeleri ilave kesit çarpılma fonksiyonları ile tarif eden Zikzak (ZZ) teorileri ortaya konmuştur. Her tabaka için bir çarpılma fonksiyonu sunarak ZZ teorisinde kinematik değişkenler Tabaka Bazlı Teoriden (TBT) farklı olarak yapı elemanı kesitindeki malzeme tabaka sayısından bağımsızdır. Bu sayede ZZ teorileri TBT'de olduğu gibi yüksek doğrulukta ve ETTT 'de olduğu gibi düşük hesap kaynağı isteğiyle oldukça avantajlı çözüm ortamlarının geliştirilmesini sağlamaktadır. Carrera [6] ve Gherlone [7], ZZ teorilerini kullanan çalışmalar üzerine ayrıntılı literatür incelemesi gerçekleştirmişlerdir. ZZ teorileri genel anlamda incelendiğinde kimi teorinin C1 sürekliliği gerektirdiği kimi teorinin ise ankastre mesnet koşulunu başarılı bir biçimde yansıtamadığı görülebilir [7].

Yakın zamanda, Tessler v.d. [8–10] kiriş, plak ve kabuk yapıların analizlerinde kullanılan ZZ teorilerinin yukarıda bahsedilen sorunlarını gidermek üzere Geliştirilmiş Zikzak Teorisini (GZZT) [11,12] öne sürmüştür. Bu teori, BMKT'nin düzlem içi yer değiştirme alanı içerisine, parçalı sürekli yapıya sahip yeni ZZ fonksiyonları tanımlamaktadır. Yeni ZZ fonksiyonları, önceki ZZ fonksiyonlarının aksine tabakalı yapının en alt ve en üst yüzeylerinde sıfır değerini almaktadır. Bu durum, enine kayma gerilmelerinin de beklenilen şekilde bu yüzeylerde sıfır değerini almalarını ve malzeme tabakaları ara kesitlerinde sürekli bir dağılıma sahip olmalarını sağlamaktadır. ZZ fonksiyonları kesit boyunca ortalama kayma modülü hesaplanılarak ve tabaka kalınlıkları göz önünde bulundurularak elde edilmektedir. Bu sayede, özellikle heterojen ve kalın kesit alanına sahip tabakalı yapıların TKT kullanılarak gerçekleştirilen analizlerinde sorun teşkil eden kayma düzeltme katsayılarının kullanımına gerek kalmamaktadır. Ayrıca, bu ZZ fonksiyonları sayesinde daha gerçekçi bir enine kesit çarpılmasının elde edilmesi ve nispeten kalın ve kalın tabakalı kompozit yapıların kayma düzeltme katsayıları kullanmadan modellenmesi mümkün olmaktadır.

Tabakalı kompozit kirişler farklı kullanım alanları içerisinde çeşitli ortamlarla etkileşim halinde bulunabilirler. Örneğin kirişlerin elastik zemine oturması durumunda mekanik davranışlarında büyük değişiklikler olmaktadır [13]. Tabakalı kompozit kirişlerin eğilme, serbest titreşim, burkulma vb. analizleri için bir çok çalışma araştırmacılar tarafından sunulmuştur [14,15].

Bu çalışmada elastik zemine oturan tabakalı kompozit kirişlerin eğilme analizi GZZT ve karışık sonlu eleman formülasyonu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Zemin ortamı Pasternak yaklaşımı ile ele alınmış sonlu eleman fonksiyoneli ise Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Üretilen iki düğüm noktalı doğrusal sonlu eleman, düğüm noktalarında gerilme bileşkelerini de kinematik değişkenler yanında doğrudan tanımlamaktadır. Bu kesit tesiri olarak adlandırılan büyüklükler doğrudan elde edilebilmekte ve yapının fiziksel davranışı hakkında önemli bilgilere kolaylıkla ulaşılabilmektedir. Sunulan karşılaştırma analizi sonrasında farklı zemin parametreleri için tabakalı kompozit kirişlerde yer değiştirme ve kesit tesirlerinin nasıl etkilendiği araştırılacaktır.

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Düzlem gerilme halindeki tabakalı kompozit kirişin x çubuk eksenini göstermek z ona dik ekseni göstermek üzere seçilmesi ile kesiti y,z ekseninde Şekil 1'deki gibi tanımlanabilir. Çubuk ekseni boyunca pozitif z yönünde etkiyen yayılı yük $p = p(x)$ ve zemin etkisindeki kirişte eksenel yer değiştirme ve enine yer değiştirme alanı GZZT'ye göre, sırasıyla, aşağıdaki gibi tarif edilebilir:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)}(x,z) &= u(x) + z\theta(x) + \phi^{(k)}(z)\psi(x) \\ w^{(k)} &= w \end{aligned} \tag{1}$$

Burada kiriş eksenindeki eksenel yer değiştirmeyi $u(x)$ ve $w(x)$ kiriş eksenindeki çökmeye karşılık gelirken $\theta(x)$ kesit dönmesi $\psi(x)$ ise zikzak parametresini tariflemektedir. $\phi^{(k)}$ her bir tabaka içinde kesit çarpılmasını tarif etmek üzere kullanılan bir fonksiyondur. N tabakalı kesitte k. tabakada eksenel uzama oranı $(\varepsilon_{xx}^{(k)})$ ve enine kayma gerilmesi (γ_{xz}^{k}) GZZT'ye göre aşağıdaki gibi tarif edilir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} &= u_{,x} + z\theta_{,x} + \phi^{(k)}\psi_{,x} \\ \gamma_{xz}^{(k)} &= w_{,x} + \theta + \phi_{,z}^{(k)}\psi \end{aligned} \tag{2}$$

İfadelerdeki alt indiste kullanılan virgül, kendisinden sonra gelen eksen terim veya terimlere göre türevlerin alındığını belirtmektedir. Burada ZZ fonksiyonu $\phi^{(k)}$ ve bu fonksiyonun tarif edildiği ζ koordinatı aşağıdaki gibi tarif edilir:

$$\phi^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2}(1-\zeta)u_{(k-1)} + \frac{1}{2}(1-\zeta)u_{(k)} \tag{3}$$

$$\zeta = \frac{2\xi - \xi_{(k)} - \xi_{(k-1)}}{\xi_{(k)} - \xi_{(k-1)}} \quad , \quad \xi_{k-1} \leqslant \xi \leqslant \xi_k \tag{4}$$

Denklem (3)'de görülen $u_{(k)}$ yer değiştirmesi tabaka ara kesitlerinde aşağıdaki gibi ardışık yinelemeli olarak elde edilir:

$$u_{(k)} = t^{(k)}\beta^{(k)} + u_{(k-1)} \tag{5}$$

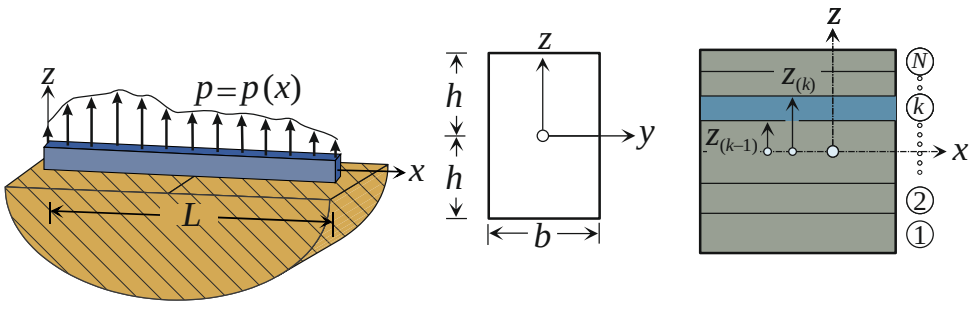
Denklem (5)' te bulunan yer değiştirme terimleri $u_{(0)} = u_{(N)} = 0$ koşullarını sağlar ve bu denklemde $t^{(k)} = 2h^{(k)}$ ilgili tabakanın kalınlığını gösterir. Burada $\beta^{(k)}$ ZZ fonksiyonunun eğimi olup her bir tabaka içinde sabit olan değeri aşağıdaki gibi hesaplanır [9]:

$$\beta^{(k)} \equiv \frac{G}{\bar{Q}_{55}^{(k)}} - 1 \tag{6}$$

Burada $\bar{Q}_{55}^{(k)}$, ilgili tabakadaki malzemenin dönüştürülmüş enine kayma modülüne [16] karşı gelmekte iken $t = 2h$ toplam kiriş yüksekliğini belirtmektedir. Tabakalı kompozit kirişin bünye denklemleri Hooke yasası kullanılarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{7}$$

Bu ifadede $\bar{Q}_{11}^{(k)}$ ilgili tabakadaki malzemenin dönüştürülmüş uzama rijitliğine karşılık gelirken $\sigma_{xx}^{(k)}$ ve $\sigma_{xz}^{(k)}$ sırası ile; eksenel normal ve enine kayma gerilme bileşenleridir.



(a) (b) (c)

Şekil 1. Elastik zemine oturan tabakalı kompozit kiriş. a) Fiziksel problem b) Kiriş kesit boyutları c) Kesit tabakalanması

Genel bir mekanik sistemde, HR prensibine göre tarif edilen enerji fonksiyonelinin birinci varyasyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\delta\Pi = \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{\sigma}}\right)^T \delta\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V + \int_V \left(\boldsymbol{\sigma}^T\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{u}} - \mathbf{q}^T\delta\mathbf{u}\right)\mathrm{d}V - \int_{C_\sigma}\int_{-h}^{h} \hat{\mathbf{t}}^T\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}S = 0 \tag{8}$$

Bu ifadede birinci integral bünye bağıntıları ve kinematik ilişkiler üzerinden şekil değiştirmelerin uygunluk koşulunu gerçeklerken ikinci integral ise denge denklemlerinin zayıf formunu tariflemektedir. Son integral ile sistem bölge sınırlarındaki etkileri enerji ifadesinde yansıtmaktadır [17]. V hacmi üzerinden genel sistemler için tanımlanan (8) denklemi yerine ZZ kiriş varsayımını devreye almak üzere kesitteki gerilme bileşkeleri hesaplanırsa aşağıdaki kuvvet-kuvvet çifti bileşenleri elde edilir:

$$\left(N_x, M_x, M_\phi, Q_x, Q_\phi\right) = b\sum_{k=1}^{N}\int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \left(\sigma_{xx}^{(k)},\, z\sigma_{xx}^{(k)},\, \phi^{(k)}\sigma_{xx}^{(k)},\, \sigma_{xz}^{(k)},\, \beta^{(k)}\sigma_{xz}^{(k)}\right)\mathrm{d}z \tag{9}$$

Burada b kiriş genişliğini (y doğrultusundaki boyut) işaret etmektedir. Denklem (9)'da N_x eksenel normal kuvvet, M_x eğilme momenti, Q_x kesme kuvveti, ve M_ϕ ve Q_ϕ sırasıyla kesitteki kayma etkisi ile oluşan çarpılmayı ZZ terimleri üzerinden yansıtan yüksek mertebeden moment ve kesme kuvvetlerine karşılık gelmektedir.

Denklem (8)'de verilen HR fonksiyonelindeki gerilme terimlerinin kesit yüksekliğince integralinin alınması ile birlikte kiriş kuramına uygun güncel hali gerilme bileşkeleri ve şekil değiştirme ölçütleri üzerinden aşağıdaki gibi verilir:

$$\delta \Pi_{HR} = \int_\Omega \left(\mathbf{D}^k \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{SP} \right)^T \delta \mathbf{P} \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \left(\mathbf{P}^T \delta \mathbf{e}^{\tilde{\mathbf{u}}} - \mathbf{p}^T \delta \tilde{\mathbf{u}} \right) \mathrm{d}\Omega - \int_{C_\sigma} \hat{\mathbf{t}}^T \delta \tilde{\mathbf{u}} \, \mathrm{d}s = 0 \tag{10}$$

Denklem (7) ile belirtilen bünye ilişkilerinde Denklem (2) ile gösterilen kinematik bağıntıların kullanılması ve Denklem(10)'un güncellenmesi ile gerilme bileşkeleri $\mathbf{P}$ ve şekil değiştirme ölçütleri $\mathbf{e}^{\mathbf{u}}$ arasındaki elastisite matrisi $\mathbf{E}$ üzerinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\mathbf{e}^{\mathbf{u}} \quad \text{veya} \quad \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_\phi \\ Q_x \\ Q_\phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ B_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ B_{13} & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & F_{12} & F_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \theta_{,x} \\ \psi_{,x} \\ w_{,x} + \theta \\ \psi \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Bu ifadedeki kesit rijitlik terimlerinin hesabı açık olarak aşağıdaki gibi yapılır:

$$\left(A_{11},\, B_{12},\, D_{11} \right) = b \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \left(1,\, z,\, z^2 \right) \mathrm{d}z \tag{12}$$

$$\left(B_{13},\, D_{12},\, D_{22} \right) = b \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \phi^{(k)} \left(1,\, z,\, \phi^{(k)} \right) \mathrm{d}z \tag{13}$$

$$\left(F_{11},\, F_{12},\, F_{22} \right) = b \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{(k-1)}}^{z_{(k)}} \bar{Q}_{55}^{(k)} \left(\left(1 + \beta^{(k)} \right)^2 + \left(\beta^{(k)} \right)^2,\, -\left(\beta^{(k)} \right)^2,\, \left(\beta^{(k)} \right)^2 \right) \mathrm{d}z \tag{14}$$

Denklem (8)'de kullanılmak üzere şekil değiştirme ölçütleri gerilme bileşkeleri üzerinden yazılmak istendiğinde kesit kompliyans matrisi $\mathbf{S} = \mathbf{E}^{-1}$ kullanılarak (11) denklemi üzerinden aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\mathbf{e}^{\mathbf{P}} = \mathbf{SP} \quad \text{veya} \quad \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ \theta_{,x} \\ \psi_{,x} \\ w_{,x} + \theta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & B'_{12} & B'_{13} & 0 & 0 \\ B'_{12} & D'_{11} & D'_{12} & 0 & 0 \\ B'_{13} & D'_{12} & D'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F'_{11} & F'_{12} \\ 0 & 0 & 0 & F'_{12} & F'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ M_\phi \\ Q_x \\ Q_\phi \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Pasternak elastik zemin modeli [18], zeminle etkileşen yapının düşey yerdeğiştirmesine bağlı olarak zemin ve yapı arasında aktarılan etkileşim kuvvet yoğunluğunu aşağıdaki ifade ile tanımlar:

$$p_f = kw - G_f w_{,xx} \tag{16}$$

Burada k Winkler zemin parametresi olup bir yay sabiti gibi noktasal çökme değeri ile etkileşim kuvvet yoğunluğu arasındaki ilişkiyi kurar. G_f ise zemin kayma parametresi olup Winkler'in tanımladığı bağımsız yaylar arasındaki bir kayma etkisi ile etkileşim oluşturur. Pasternak zemin etkileşimini de dikkate alacak şekilde kiriş denge denklemleri GZZT'ye göre aşağıdaki gibi elde edilebilir:

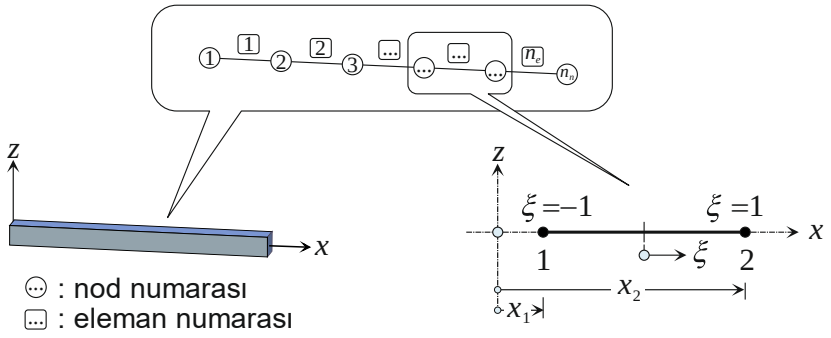
$$\begin{aligned} N_{x,x} &= 0 \\ Q_{x,x} + p - \bar{k}w + \bar{G}_f w_{,xx} &= 0 \\ M_{x,x} - Q_x &= 0 \\ M_{\phi,x} - Q_\phi &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Denklem (17)'de $\bar{k} = bk$ ve $\bar{G}_f = bG_f$ tanımlamaları ile yükleme durumunun kiriş ekseni boyunca çizgisel olarak ifade edilmesi sağlanmıştır. Ayrıca bu denklemde $p(x)$ çubuk boyunca yayılı olarak etkiyen çizgisel dış yayılı yüke karşılık gelmektedir. Nihayetinde denklem (17)'da verilen denge denklemlerinin ve denklem (15) ile verilen uygunluk koşullarının (10) ifadesine yerleştirilmesi ve ikinci mertebe türev barındıran zemin ifadesine kısmi integrasyon uygulanması ile, Pasternak zemini ile etkileşen GZZT'ne göre tarif edilmiş tabakalı kompozit kiriş için HR fonksiyonelinin durağanlık koşulu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_0^L \Big\{ & \Big[u_{,x} - \left(A'_{11} N_x + B'_{12} M_x + B'_{13} M_\phi \right) \Big] \delta N_x \\ & + \Big[\theta_{,x} - \left(B'_{12} N_x + D'_{11} M_x + D'_{12} M_\phi \right) \Big] \delta M_x \\ & + \Big[\psi_{,x} - \left(B'_{13} N_x + D'_{12} M_x + D'_{22} M_\phi \right) \Big] \delta M_\phi \\ & \Big[w_{,x} + \theta - \left(F'_{11} Q_x + F'_{12} Q_\phi \right) \Big] \delta Q_x + \Big[\psi - \left(F'_{12} Q_x + F'_{22} Q_\phi \right) \Big] \delta Q_\phi \\ & + N_x \delta u_{,x} + M_x \delta \theta_{,x} + M_\phi \delta \psi_{,x} + Q_x \delta (w_{,x} + \theta) + Q_\phi \delta \psi \\ & - p \delta w + \bar{k} w \delta w + \bar{G}_f w_{,x} \delta w_{,x} \Big\} \mathrm{d}x \\ & - \int_{C_\sigma} \int_{-h}^{h} \hat{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{u} \mathrm{d}z \mathrm{d}S = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Denklem (18) ile tarif edilen sistemin durağanlık koşulu sonlu eleman sistem matrislerinin elde edilmesinde kullanılacaktır. Bu ifade içinde en yüksek türev mertebesi birinci dereceden olduğu için C0 sürekliliğine sahip doğrusal şekil fonksiyonlarını ihtiva eden Şekil 2'de gösterilen doğrusal elemanlar ile çubuk bölgesi ayrıklaştırması gerçekleştirilecektir. C0 sürekliliğini sağlayan şekil fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\varphi_i(\xi) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \xi\xi_i\right), \quad i = 1,2 \tag{19}$$



(a) (b) (c)

Şekil 2. Sonlu eleman ayrıklaştırması. a) Çubuk bölgesinin doğrusal elemanlarla ayrıklaştırılması b) Doğrusal elemanda yerel ve global eksenler

İki ucundaki düğüm noktalarında hem yerdeğiştirme hem de gerilme bileşkesi türünde bilinmeyenleri barındıran sonlu elemanda i. düğüm noktasındaki bölge değişkenleri vektörü $\mathbf{x}^i$ aşağıdaki yapıdadır:

$$\mathbf{x}^i = \begin{bmatrix} u^i & w^i & \theta^i & \psi^i & N_x^i & M_x^i & M_\phi^i & Q_x^i & Q_\phi^i \end{bmatrix}^T \tag{20}$$

Denklem (18)'nin tariflenen doğrusal elemanlarda kiriş bölgesinde ayrıklaştırılması ve ilgili integrallerin sayısal olarak hesaplanması ile sonlu eleman sistem matrisleri zemin etkilerini de içinde gömülü olarak barındıracak şekilde elde edilir. Sonlu eleman denklemlerinin uygulanan statik yük vektörü ile oluşturduğu sistemin çözümü sonucu her düğüm noktasına yerdeğiştirme türü bölge değişkenlerinin yanında gerilme bileşkesi türündeki büyüklükler de elde edilir. Kesit tesiri olarak adlandırılan bu gerilme bileşkeleri çubuk sistemlerin analizinde mühendise önemli bilgiler sağlar. Tercih edilen karışık sonlu eleman yaklaşımı sayesinde bu kesit tesirleri herhangi bir sayısal türev işlemi gerektirmeden doğrudan elde edilebilmektedir. Ayrıca eksenel normal gerilme hesabı içinde gerekli olan şekil değiştirme ölçütleri türev operasyonları yerine gerilme bileşkeleri ve kompliyans matrisinin devreye alınması ile hesaplanabilir. Böylece doğrudan düğüm noktasında eksenel normal gerilme bileşenleri yüksek doğrulukla elde edilebilmektedir. Diğer yandan, enine kayma gerilme bileşenlerinin bünye bağıntıları ile hesaplanması kesit boyunca süreksiz ve gerçekçi olmayan değerler elde edilmesine sebep olmaktadır. Bunun yerine elastisite teorisinin denge denklemleri kullanılarak enine kayma gerilmesi bileşenleri kalınlık boyunca süreklilik şartını da sağlayacak şekilde aşağıdaki formülden elde edilebilir:

$$\sigma_{xz}(x,z) = -\int_{-h}^{z} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}(x,\overline{z})}{\partial x} \right) \mathrm{d}\overline{z} \tag{21}$$

SAYISAL SONUÇLAR

Pasternak zeminine oturan tabakalı kompozit kirişler için geliştirilen GZZT tabanlı karışık sonlu eleman formülasyonunu ve adapte edilen sayısal çözüm algoritmasını doğrulamak üzere yakınsama ve karşılaştırma analizleri gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada ele alınan problemin zemin etkileşimini barındırmayan versiyonu [19]'de ele alınmış ve zeminsiz durum için yakınsama ve karşılaştırma çözümleri gerçekleştirilmiştir. Sözkonusu çalışmada karışık sonlu eleman yöntemi ve GZZT'nin bir arada kullanılması ile tabakalı kompozit kirişlerde yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin büyük bir doğrulukla hesaplanabileceği ve oldukça zorlayıcı problemlerin dahi ele alınabileceği gösterilmiştir. Dolayısı ile bu çalışma kapsamında sadece zemin etkisinin dikkate alındığı sonuçlar üzerinden değerlendirmeler

yapılacaktır. Literatürde Pasternak zeminine oturan tabakalı kompozit kiriş problemi için elastisite çözümüne rastlanılmamıştır. Bu sebeple doğrulama/karşılaştırma örneklerinde literatürde sunulmuş çubuk analitik çözüm veya sayısal çözüm sonuçları kullanılmıştır. Zemin ve hesaplanan kiriş parametreleri aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırılarak sunulmuştur:

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{wE_{11}I}{p_0L^4} \;\; ; \;\; (M_x, M_\phi) = \frac{(M_x, M_\phi)}{p_0L^2} \;\; ; \;\; (Q_x, Q_\phi) = \frac{(Q_x, Q_\phi)}{p_0L} \\ \tilde{k} &= \frac{\bar{k}L^4}{E_{11}I} \;\; ; \;\; \tilde{G}_f = \frac{\bar{G}_fL^2}{E_{11}I} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Elastik Zemin Doğrulama Örneği: İnce İzotrop Kiriş

Elastik zeminle etkileşen tabakalı kiriş problemi için önerilen karışık sonlu eleman formülasyonunun ve algoritmanın doğrulanması için literatürde çözümü sunulan üniform yüklü $p(x) = p_0$ izotrop kiriş örneği ele alınmıştır. $L/2h = 120$ seçilerek analizi yapılan kirişte Poisson oranı $\upsilon = 0.2$ olarak seçilmiş ve basit mesnetlenme koşulu altında çözümler gerçekleştirilmiştir. Yapılan çözümlerde doğrusal çubuk boyunca eşit uzunlukta 30 sonlu eleman kullanılmıştır.

Çizelge 1. Pasternak zeminine oturan basit mesnetli ince izotrop kirişin farklı zemin parametrelerinde açıklık ortası çökme değeri

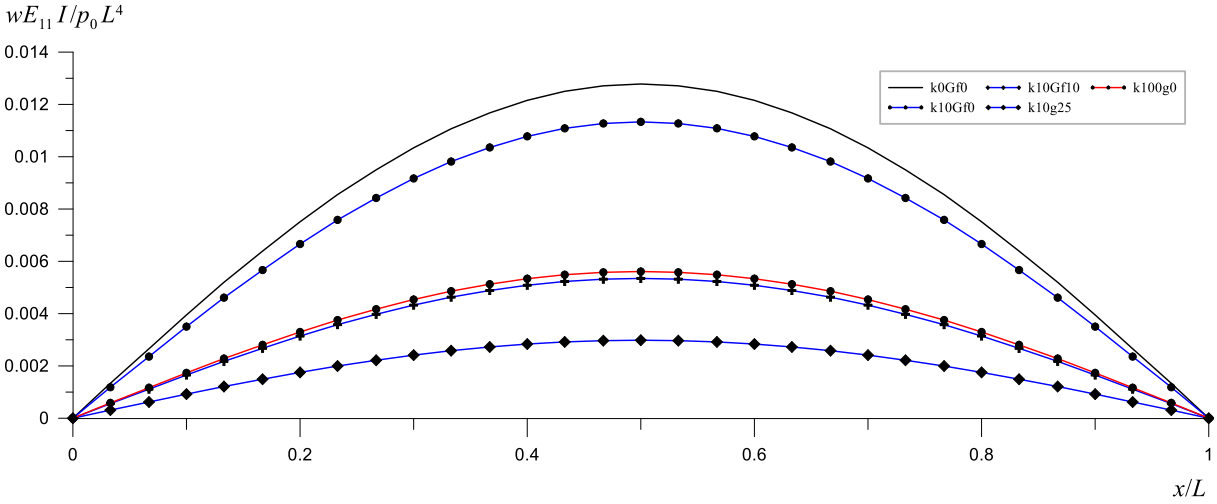
Foundation parameters		$\tilde{w}\times10^{-2}$			
$\tilde{k}$	$\tilde{G}_f$	MRZT	[20]	[21]	[22]
0	0	1.3035	1.3024	1.3023	1.3023
10	0	1.1817	1.1807	1.1814	1.1806
	10	0.6136	0.6134	0.6141	0.6133
	25	0.3557	0.3557	0.3566	0.3557
100	0	0.6407	0.6401	0.6403	0.6400
	10	0.4258	0.4256	0.4261	0.4256
	25	0.2829	0.2829	0.2836	0.2828

Çizelge 1'de görüleceği üzere geliştirilen karışık sonlu eleman çözümü sonuçları ile literatürde sunulmuş olan sonuçlar üst üste düşmektedir. Elastik zeminin kiriş yapısal davranışına etkisinin ne denli büyük olduğu bu çizelgeden takip edilebilmektedir. Bununla birlikte zemin kayma parametresindeki değişim sonucu çökme değerlerinde meydana gelen farklılaşmanın Winkler zemin parametresindeki değişim sebebiyle gözlenen etkilere nazaran daha fazla olduğu belirtilebilir.

Elastik Zemine Oturan Tabakalı Kompozit Kiriş: Zemin Parametrelerinin Yapısal Davranışa Etkileri

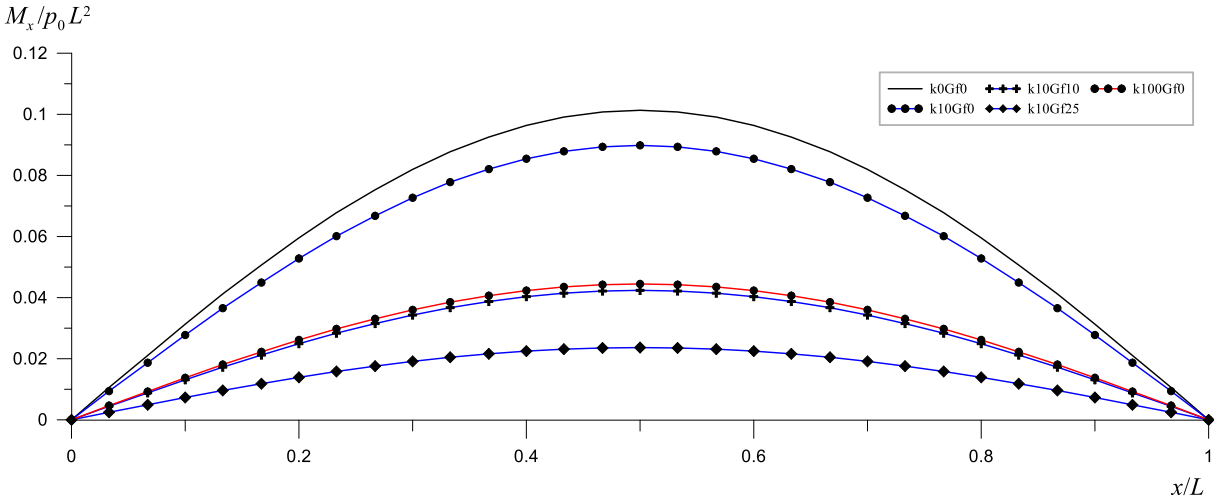
Bu örnekte Pasternak zeminine oturan basit mesnetli sinüsoidal yüklenmiş ($p(x) = p_0 \sin(\pi x/L)$) bir tabakalı kiriş ele alınmış ve farklı zemin parametreleri altında kirişin yapısal davranışının nasıl etkilendiği incelenmiştir. Plak kalınlık oranı $L/2h = 20$ olarak seçilmiş ve tabakalı kiriş kesiti $E_{11}/E_{22} = 25$ ve $G_{23} = 0.2E_{11}$ ortotrop malzemesi ile eşit kalınlıklı tabakalarla $[0/90/0]$ malzeme doğrultuları ile oluşturulmuştur. $\tilde{k} = 0,10,100$

ve $\tilde{G}_f = 0,10,25$ Zemin parametrelerinin kombinasyonları için çözümler üretilmiştir. Şekil 3'te tabakalı kompozit kiriş boyunca çökme değerleri boyutsuz olacak şekilde çizdirilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere hem Winkler zemin parametresinin hem de zemin kayma modülünün çökme değerleri üzerinde önemli etkileri olduğu görülmektedir. Zemin rijitlik parametrelerinin artması ile çökme değerleri azalmaktadır. Zemin kayma modülündeki değişimin çökme değerleri üzerindeki etkisinin Winkler zemin parametresine göre daha fazla olduğu belirtilebilir.



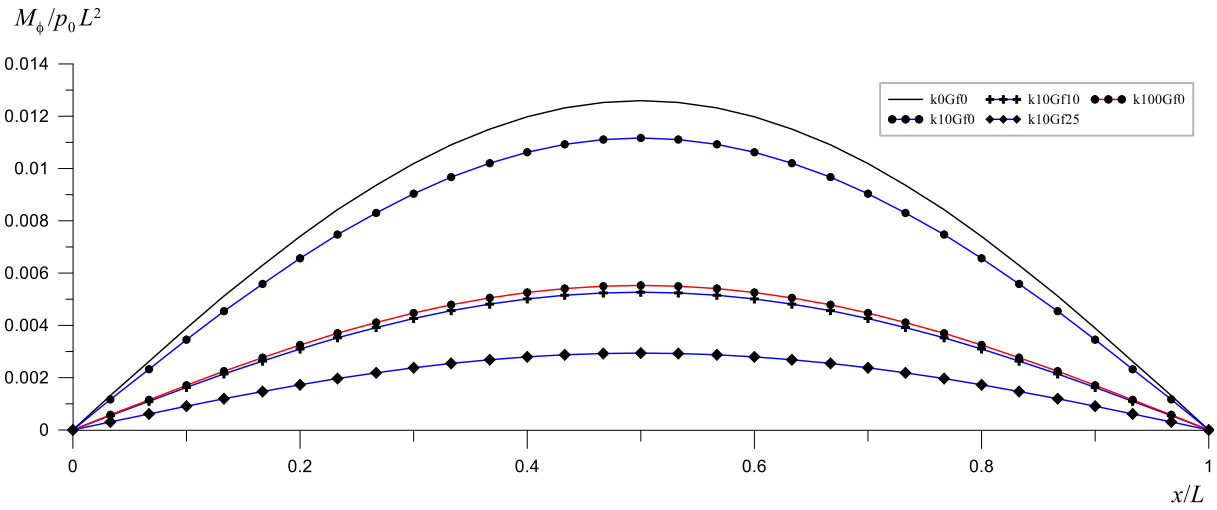
Şekil 3. Basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte eksen boyunca çökme dağılımı

Şekil 4'te aynı kiriş için eksen boyunca boyutsuz eğilme momenti dağılımı seçilen zemin parametreleri için çizdirilmiştir. Mevcut mesnetlenme ve yükleme koşulu altında, çubuk ekseni boyunca eğilme momenti ve çökme değerlerinin dağılımının birbirine benzer olduğu gözlenmiştir. Aynı şekilde eğilme momenti dağılımının zemin parametrelerindeki değişimden etkilenme durumu çökme parametresindeki durum ile benzerlik göstermektedir.



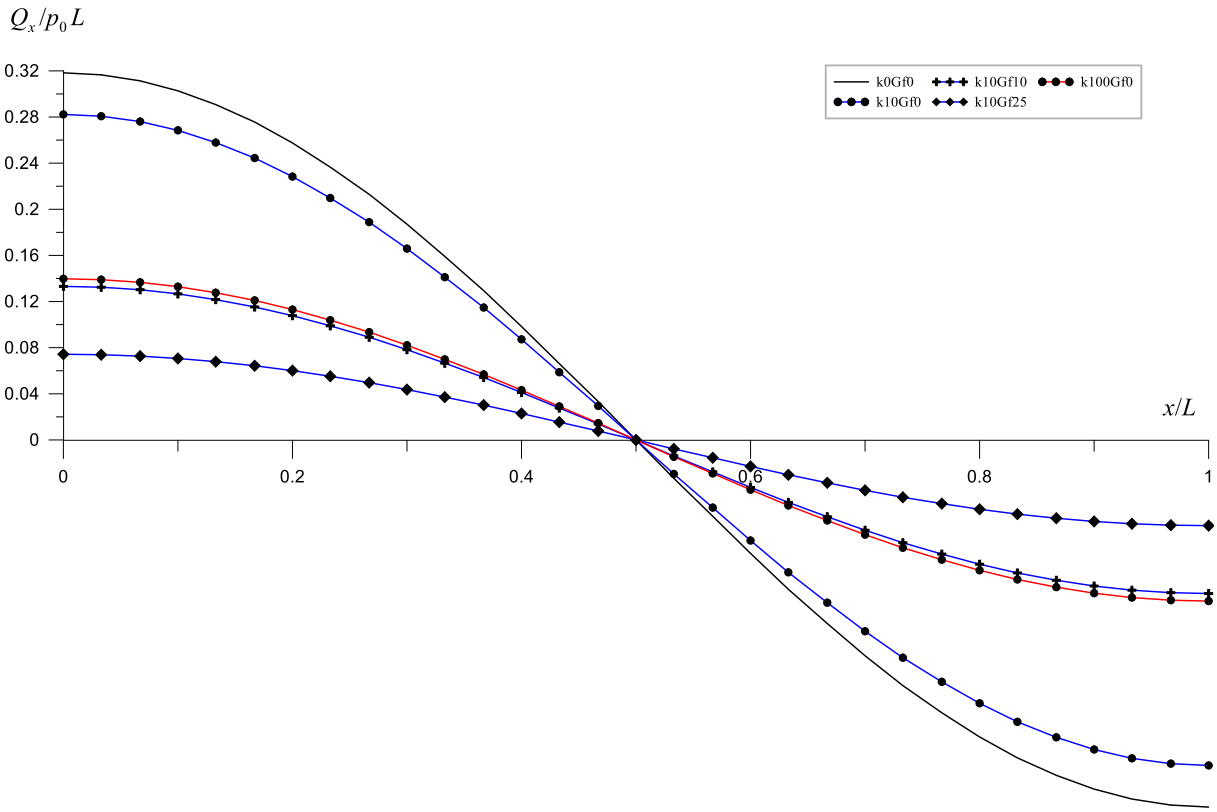
Şekil 4. Basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte eksen boyunca boyutsuz moment dağılımı

Şekil 5 Pasternak zeminine oturan tabakalı kompozit kirişte eksen boyunca boyutsuz yüksek mertebe moment dağılımını göstermektedir. Yüksek mertebe moment değerlerinin moment değerlerine benzer davranış sergilediği fakat moment değerlerine göre nispeten küçük değerler aldığı rahatça gözlemlenebilmektedir.



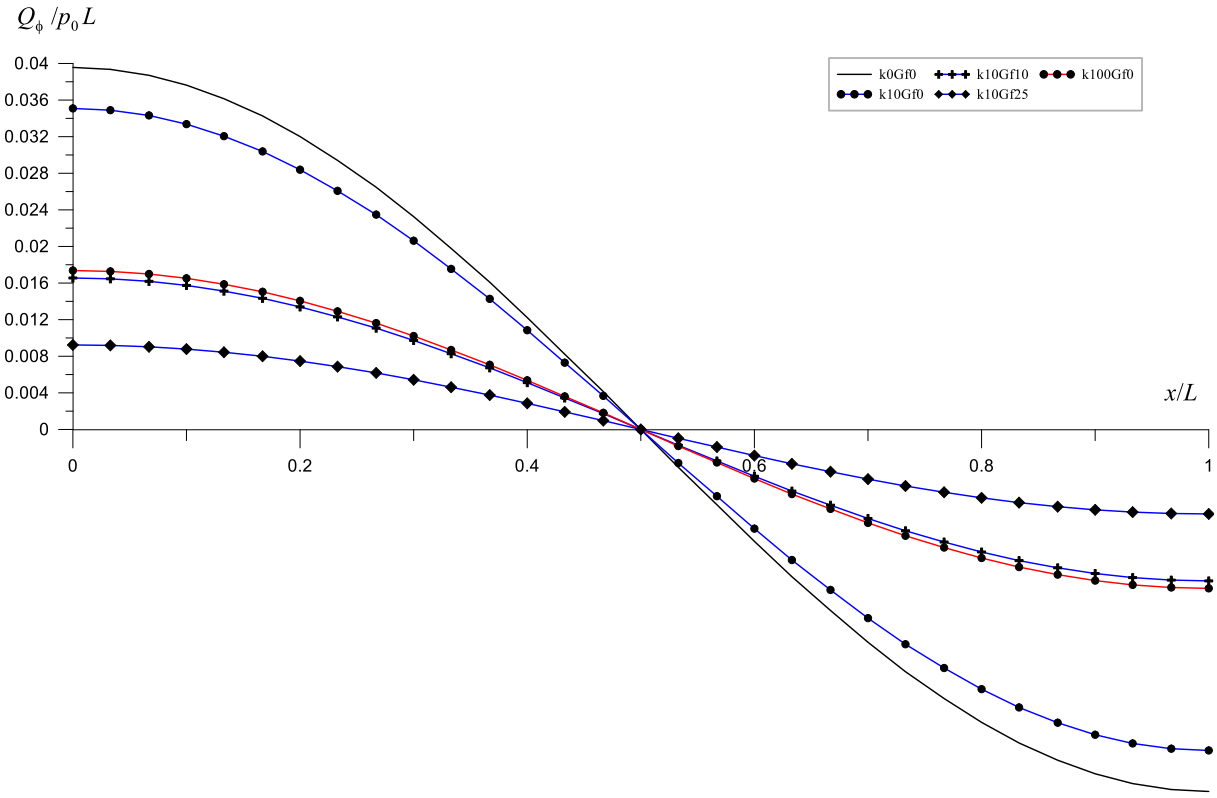
Şekil 5. Basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte eksen boyunca boyutsuz yüksek mertebe moment dağılımı

Pasternak zemine oturan basit mesnetli tabakalı kompozit çubukta eksen boyunca oluşan kesme kuvveti dağılımı farklı zemin parametreleri için bir arada Şekil 6'da sunulmuştur. Elastik zemin etkisinin olmadığı durumdaki kesme kuvveti dağılımına benzer dağılım zemin etkileşimi durumunda da bütün parametreler için elde edilmiştir. Zemin parametrelerinin büyümesi ile birlikte zeminden karşı yük olarak daha fazla destek alan kirişte kesme kuvveti değerlerinin azaldığı gözlemlenmektedir. Daha önce sunulan yapısal parametrelere benzer olarak kesme kuvveti değerlerinin de zemin kayma parametresi değişiminden etkilenmesi Winkler zemin parametresindeki değişimden etkilenmesinden fazla olmaktadır.



Şekil 6. Basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte eksen boyunca boyutsuz kesme kuvveti dağılımı

Şekil 7 bu örnekte ele alınan çubukta farklı Pasternak zemin parametreleri altında eksen boyunca oluşan yüksek mertebe kesme kuvveti dağılımını göstermektedir. Yüksek mertebe kesme kuvveti dağılımının ve zemin parametrelerinden etkilenme durumunun kesme kuvveti ile benzerlik gösterdiği görülmektedir. Çubuk enkesitindeki kayma sebebi ile oluşan çarpılmanın bir anlamda ölçüsünü yansıtan yüksek mertebe kesme kuvveti değerleri zemin parametrelerinin büyümesi ile azalmaktadır. Bu da zeminin rijitleşmesi ile birlikte zeminle etkileşen tabakalı kiriş yapısında kayma etkisinin azaldığına işaret etmektedir.



Şekil 7. Basit mesnetli tabakalı kompozit kirişte eksen boyunca boyutsuz yüksek mertebe kesme kuvveti dağılımı

SONUÇLAR

Bu çalışmada elastik zemine oturan tabakalı kompozit kirişlerin eğilme davranışı ele alınmıştır. Bu amaçla GZZT kullanılarak gerçekçi bir tabakalı kompozit çubuk modeli devreye alınmış elastik zemin ise kayma etkilerini de dikkate alan Pasternak modeli olarak seçilmiştir. Çözüm yöntemi olarak karışık sonlu elemanlar tercih edilmiş bu amaçla tanımlanan problemin fonksiyoneli Hellinger-Reissnerr prensibine dayalı olarak elde edilmiştir. Kiriş bölgesi ayrıklaştırması için iki düğüm noktalı doğrusal kiriş elemanı kullanılmıştır. Elde edilen sonlu eleman denklemleri hem yer değiştirme türünde hem de gerilme bileşkesi türünde bilinmeyenleri barındırmaktadır. Bu sebeple sadece yerdeğiştimelerin hesabında değil aynı zamanda gerilme bileşkesi ve gerilme bileşeni hesapları için de avantajlı bir yaklaşım ortaya konulabilmektedir. Geliştirilen sonlu eleman formülasyonu ve kullanıların sayısal çözüm yönteminin doğrulanması amacıyla literatürde sunulmuş zeminle etkileşim halinde olan izotrop kiriş problemi ele alınmıştır. Sonrasında literatürde bir çok probleme konu olmuş bir tabakalı kompozit kiriş modeli ele alınarak farklı zemin parametreleri için yapısal davranışın nasıl olduğu incelenmiştir. Sonraki çalışmalarda farklı tabakalanma durumları için zemin etkileşimi halinde kiriş davranışının nasıl olacağı,

yapısal parametrelerin kiriş uzunluk/kalınlık oranı değişiminden ne mertebede etkileneceği ve kesitte gerilme dağılımlarının elde edilerek Pasternak zemin parametrelerine bağlı olarak nasıl etkilendikleri konuları üzerinden durulması yazarlarca hedeflenmektedir.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma; TÜBİTAK 1002 Programı kapsamında 121M129 numaralı araştırma projesi ile desteklenmektedir. Bu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

[1] V.V. Vasiliev, E. Morozov, Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures, Elsevier, 2018.

[2] M. Dorduncu, A. Barut, E. Madenci, A. Tessler, A refined zigzag element for modeling sandwich construction with embedded stiffeners, in: 56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2015. https://arizona.pure.elsevier.com/en/publications/a-refined-zigzag-element-for-modeling-sandwich-construction-with- (accessed May 8, 2020).

[3] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature, Composite Structures. 171 (2017) 486–504. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.053.

[4] J. Li, Z. Wu, X. Kong, X. Li, W. Wu, Comparison of various shear deformation theories for free vibration of laminated composite beams with general lay-ups, Composite Structures. 108 (2014) 767–778. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.10.011.

[5] R.U. Vinayak, G. Prathap, B.P. Naganarayana, Beam elements based on a higher order theory—I. Formulation and analysis of performance, Computers & Structures. 58 (1996) 775–789. https://doi.org/10.1016/0045-7949(95)00185-J.

[6] E. Carrera, Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells, Appl. Mech. Rev. 56 (2003) 287. https://doi.org/10.1115/1.1557614.

[7] M. Gherlone, On the use of zigzag functions in equivalent single layer theories for laminated composite and sandwich beams: A comparative study and some observations on external weak layers, J. Appl. Mech. 80 (2013) 061004–061004. https://doi.org/10.1115/1.4023690.

[8] A. Tessler, M. Di Sciuva, M. Gherlone, A refined zigzag beam theory for composite and sandwich beams, Journal of Composite Materials. 43 (2009) 1051–1081. https://doi.org/10.1177/0021998308097730.

[9] A. Tessler, M. Di Sciuva, M. Gherlone, A consistent refinement of first-order shear deformation theory for laminated composite and sandwich plates using improved zigzag kinematics, JOMMS. 5 (2010) 341–367. https://doi.org/10.2140/jomms.2010.5.341.

[10] A. Tessler, Refined zigzag theory for homogeneous, laminated composite, and sandwich beams derived from Reissner's mixed variational principle, Meccanica. 50 (2015) 2621–2648. https://doi.org/10.1007/s11012-015-0222-0.

[11] M. Dorduncu, Stress analysis of laminated composite beams using refined zigzag theory and peridynamic differential operator, Composite Structures. 218 (2019). https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.03.035.

[12] M. Dorduncu, Peridynamic modeling of delaminations in laminated composite beams using refined zigzag theory, Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 112 (2021) 102832–102832. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2020.102832.

[13] V.Z. Vlasov, U.N. Leont'ev, Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.

[14] N. Naik, Composite beams on elastic foundations, Journal of Thermoplastic Composite Materials. 13 (2000) 2–11. https://doi.org/10.1177/089270570001300101.

[15] J. Ying, C.F. Lü, W.Q. Chen, Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations, Composite Structures. 84 (2008) 209–219. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.07.004.

[16] R.M. Jones, Mechanics of Composite Materials, Taylor & Francis, 1999.

[17] A. Kutlu, M. Dorduncu, T. Rabczuk, A novel mixed finite element formulation based on the refined zigzag theory for the stress analysis of laminated composite plates, Composite Structures. 267 (2021) 113886. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113886.

[18] A. Kutlu, M.H. Omurtag, Elastik zeminle etkileşen nispeten kalın plağın karışık sonlu elemanlarla burkulma analizi, in: Ulusal Mekanik Kongresi, Niğde, 2019: pp. 774–780.

[19] A. Kutlu, Mixed finite element formulation for bending of laminated beams using the refined zigzag theory, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications. 236 (2021).

[20] M. Ermis, U.N. Aribas, N. Eratli, M.H. Omurtag, Static and free vibration analysis of composite straight beams on the Pasternak foundation, in: 2017: pp. 113–122.

[21] C.M. Wang, K.Y. Lam, X.Q. He, Exact Solutions for Timoshenko Beams on Elastic Foundations Using Green's Functions∗, Mechanics of Structures and Machines. 26 (1998) 101–113. https://doi.org/10.1080/08905459808945422.

[22] W.Q. Chen, C.F. Lü, Z.G. Bian, A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation, Applied Mathematical Modelling. 28 (2004) 877–890. https://doi.org/10.1016/j.apm.2004.04.001.

SOIL STRUCTURE INTERACTION ANALYSIS OF THREE DIMENSIONAL REINFORCED CONCRETE CURTAIN WALL SYSTEM UNDER SEISMIC LOADS

B.Başak Selçuk[1,2], Cemile Özşam[1], Mustafa Özakça[1] and M.Metin Köse[2]
[1] Gaziantep Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Gaziantep
[2]Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Kahramanmaraş

ABSTRACT

In this research work, a nonlinear time history analysis for 3D multi-story concrete shear wall system on soil type C - with and without soil structure interactions have been done. Buildings have different height start from 4 stories and up to 12 stories. A substructure method is used to model soil and raft (footing) foundation system by linear springs and dashpots. The response spectrum analysis has also been done. Düzce earthquake accelerograms records are selected and scaled to specific response spectrum with PGA 0.182 and soil type C according to UBC 97 is considered. Fundamental period and base shears have been investigated with and without soil-structure interactions; the results have been presented and compared.

Keywords: Concrete building; soil structure interaction; response spectrum analysis; time history analysis; shear forces; fundamental period

ÖZET

Bu araştırmada, zemin yapısı etkileşimleri olan veya olmayan zemin C üzerinde, 3 boyutlu çok katlı betonarme perde duvar sistemi için doğrusal olmayan zaman adım analizi yapılmıştır. Binalar 4 kattan 12 kata kadar farklı yüksekliklere sahiptir. Zemin ve radye temel sistemi doğrusal yaylar ve sönümleyici ile modellemek için alt yapı analiz metodu kullanılmıştır. Ayrıca tepki-spektrum analizi yapılmıştır. Düzce deprem ivme kaydı seçilerek spesifik tepki spektrumuna ölçeklendirildi. PGA 0.182 ve UBC 97' ye göre zemin tipi C seçildi. Temel periyot ve taban kesmesi, zemin-yapı etkileşimi dahil edilerek ve edilmeyerek araştırılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar kelimeler: Betonarme yapı; zemin yapı etkileşimi; tepki spektrum analizi; zaman adım analizi; kesme yükü; temel periyot

GİRİŞ

Along with the increase of theoretical foundations and developing science and technology, serious importance was given to seismic design of buildings. In recent years, important steps have been taken in the field of seismic design with the development of science and technology. Today, in computer programs that make seismic analysis and design, the calculation method is used frequently in the time domain, and the accuracy of these analyzes depends on many factors. The most important of these factors is how the foundation should be modeled. The reason for this is that the actual behavior of the structures in the seismic region

under seismic loads can be estimated and the behavior can be understood. Normally, in the seismic analysis of the structures, the superstructure and foundation system are considered independently of each other, the floor is considered as built-in and the effect on the structure is not taken into consideration. However, in the case of seismic loading affecting the building, it is clearly seen in the recent earthquakes (1985 Mexico City, 1989 Loma Prieta, 1992 Erzincan, 1995 Dinar, 1999 Marmara and Düzce) where the ground effect caused changes not only in the foundation system but also in the entire structure. Many studies have been conducted to simulate the soil structure interaction(SSI) and to examine the effect of the soil on the structure. Wolf[1] proposed frequency-independent spring-dashpot-mass models for their foundation vibrations. Mulliken and Karabalis [2] presented discrete model for predicting the dynamic through the soil interaction between adjacent rigid, surface foundations supported by a homogeneous, isotropic and linear elastic half-space. Minasidis et al. [3] reviewed the studies on SSI in steel frames subjected to near-fault earthquakes. Lopez et al.[9] examined the seismic behavior of reinforced concrete structures using the N2 method proposed by Fajfar and Gaspersic and taking into account ground acceleration.

The most used method for soil structure interaction is the subsystem method, in this system, the ground environment and the superstructure are modeled as separate subsystems. This modeling method is suitable for practical applications and also significantly reduces the analysis time. (17) Normally, spring and dashpots are used when modeling the infrastructure. Those springs and dashpots could be linear or nonlinear, connect not connected. This system also may consider the single degree of freedom or multi-degree of freedom [4,5].

The objective of this study is to investigate 3D Reinforced Concrete Curtain Wall System planner response under seismic loads using nonlinear time history analysis, and response spectrum analysis with and without soil-structure interaction. In present study, seismic records are scaled to response spectrum with Peak Ground Acceleration (PGA)=0.182g and soil type C (hard soil) according to UBC 97 [6]. Fundamental period and base shear, will be investigate for each building model. The steps for current research are constructed an appropriate mathematical model of the building, selection of a target spectrum for analysis, selection and scaling of earthquake ground motions consistent with the target spectrum, performing analysis and discussion of the results [7].

SEISMIC ANALYSIS AND SOIL-STRUCTURE INTERACTION MODELING

Building Modelling

The structure is an existing residential building. Column, beam cross-section dimensions and the slab thicknesses are summarized in Table 1. The cross-sections of the vertical structural members are assumed constant over the entire height. Although the distance between each partition is variable, the clerestory floor is 2.4m and all other floors are 3m. Three dimensional physical and analytical models are shown in Figure 1. The yield stress of the steel is equal to 420 MPa and concrete C25. The story masses are formed using appropriate distribution of the slabs loads. The slab loads composed of self weight (G) and wall loads where, G = 1,7 kN/m2.The centre of mass of the building is calculated based on the mass distribution at each node. ETABS(2016), structural design software is utilized for three dimensional modeling and analyses of the example building. The building is located in the first seismic zone, with local soil profile C , PGA=0,182g and building importance coefficient (I) equal to 1. The design spectrum curve is constructed according to UBC97.

Table 1 Member dimensions of the example building

Columns (cm)	25x30,25x70,25x90,30x70
Beams (cm)	25x50
Wall (cm)	25x175,25x190,25x215
Slab Thickness (cm)	15

Beams and columns are connected together by pinned joints without the effect of panel zone. Superstructure viscous damping ratio is assumed to be $\xi = 5\%$ for the natural modes of the system. Beam axial forces are assumed to be zero since all floors are considered to be rigid in a plan to account the diaphragm action of slabs. Figure 1 shows the structure model we use in the study. The plastic hinges are assumed at the ends of the beams [10]. The hinge proprieties are considered flexure type and calculated automatically according to ASCE [11] and acceptance criteria by according to UBC 97 using ETABS 2016 pro.

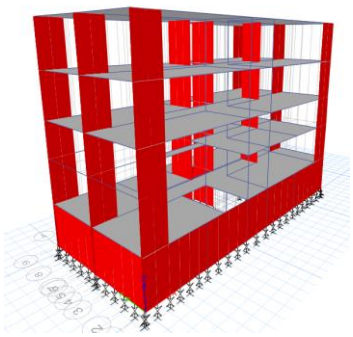


Figure 1. Building model

Soil Structure Interaction Modelling

SSI model are used for analysis in current study. Figure 2 illustrated rigid base model presented in FEMA 440 [12]. SSI is modeled by using substructure method [2]. Foundation system is considered continuous footing. Foundation and soil around are modeled by springs and dashpots as shown in Figure 3. Springs have stiffness K, and dashpots have a coefficient, C. Relationship for spring and dashpot parameter are presented in Table 2. Description of soil parameter and assumed values are presented in Table 3. The dimension of a continuous footing system used in each building is given in Table 4

Table 2 Mass, stiffness and damping coefficient for foundation structure interaction system [2]

Direction	β[1]	r_0[2]	m_v[3]	K[4]	C[5]
Vertical	$\frac{(1-\nu)}{4}\frac{m}{\rho r_0^3}$	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{0.27m}{\beta}$	$\frac{4.7Ga}{1-\mu}$	$\frac{0.8a}{V_s}K$
Horizontal	$\frac{(7-8\mu)}{32(1-\mu)}\frac{m}{\rho r_0^3}$	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{0.095m}{\beta}$	$\frac{9.2Ga}{2-\mu}$	$\frac{0.163a}{V_s}K$
Torsion	$\frac{m}{\rho r_0^5}$	$\frac{2a}{\sqrt[4]{3\pi}}$	$\frac{0.045m}{\beta}$	$8{,}31Ga^3$	$\frac{0.127a}{V_s}K$

[1] β is mass (inertia) ratio,[2] r_0 is equivalent radius, [3] m_v is mass (inertia), [4] K is static stiffness, [5] C is damping

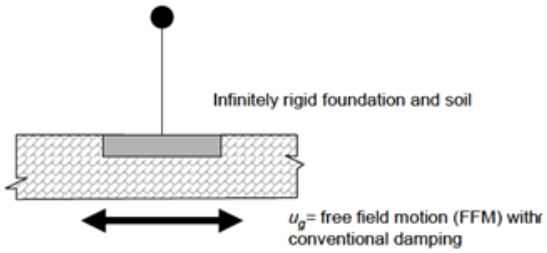


Figure 2 Rigid base model [12]

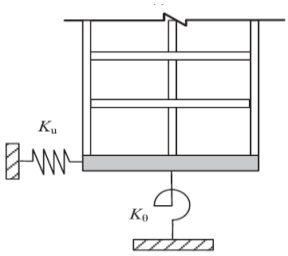


Figure 3 Schematic illustration of substructure approach of the SSI.[18]

Table 3 Parameter description of foundation structure interaction system.

Soil parameter	Description	Assumed value
G_0	Shear modulus of soil	260 MPa
G_s	Secant shear modulus	0.1G0=26 MPa
ρ	Mass density of the soil medium	2000 kg/m^3
V_s	Shear velocity in soil	$\sqrt{G/\rho}$= 380 m/s^2
μ	Passion ratio of the soil	0.25
q	Bearing capacity of the soil	200 kPa

Table 4 The dimension of a continuous footing system used in each building.

NS[1]	4	8	12
$a \times h$ [2]	0.7×0.7	1×1.2	1×1.2

[1]NS is number of story. $a \times h$ [2] are the length and width foundation respectively

The shear wave velocity is considered about 380 m/s, which corresponds to the lower limit for soil type C according to UBC 97. Other soil specification are presented in Table 3. Computed values of springs, dashpots coefficients and soil mass for each frame used in SSI models are presented in Table 5.

Table 5 Horizontal mass, stiffness and damping coefficient for SSI

Building name	4 Floor	8 Floor	12 Floor
m_v	3,726	6,44	10,226
c_v	84,74	123,467	168
K_v	81466,7	97760	114053
m_h	1,18	2,04	3,238
c_h	14,65	21,10	28,72
K_h	68342,9	82011,4	95680
m_r	2,978	7,411	16,018
c_r	29,19	50,44	80,09
K_r	17333,3	29952	47562,7
m_t	0,157	0,39	0,844
c_t	4,51	9,35	17,33
K_t	27007,5	46669	74108,6

[1] v, h and t stand for vertical, horizonal and torsion respectively

Seismic Loads Modelling

Seismic loads are calculated and analyzed according to UBC97. A response spectrum analysis is done with PGA 0.182, soil type C which could be gravel or deposit of very dense sand. The response spectrum curve based on mentioned parameters is presented in Figure 4.

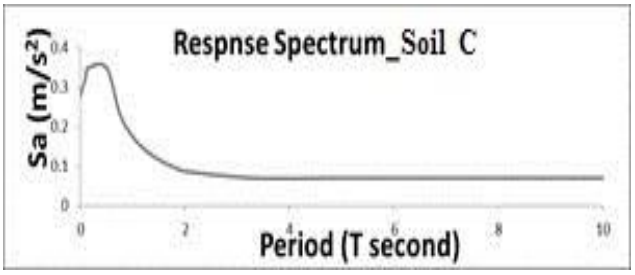


Figure 4 The response spectrums based on soil type C

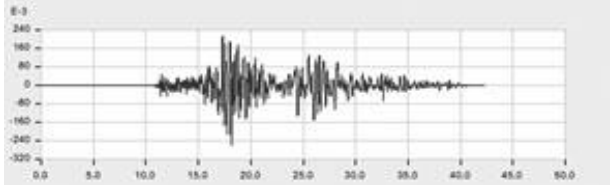
Also, nonlinear time history analyses are performed. Duzce earthquake 1999 is selected and obtained from PEER ground motion data base [13] as presented in Table 6. Each earthquake has three records, two horizontal and one vertical, but in this work, just horizontal records are applied on frame structure (see Figure 5)

Table 6 The seismic hazards used in this research.

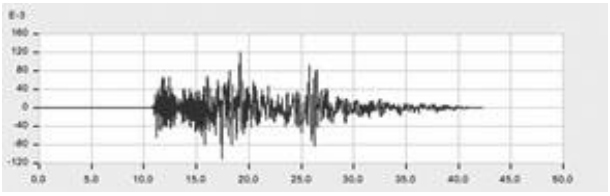
Earthquakes	RSN[1]	year	M_w [2]	V_{s30} [3] m/s	PGA
Düzce	1615	1999	7.14	338	0.20666

[1]RSN is Record Sequence Number, [2]M_w is Moment magnitude scale, [3]V_{s30} is average value of propagation velocity of S waves in the upper 30m of the soil profile at shear strain of 10-5 or less (UBC97)

(a)



(b)



(c)

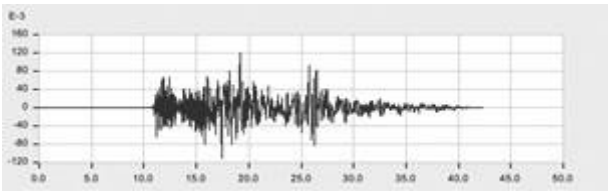


Figure 5 Duzce earthquake acceleration records vers time at RSN1615 (a) East direction (b) North direction (c) vertical direction

In developing the match of the spectrum of a set of time histories to the design spectrum, a first step is to scale each record to the level of the design spectrum. Scaling factors for selected seismic hazard also obtained from PEER ground motion database. Records are scaled to designed response spectrum using single period methods in linear time history analysis. The natural periods of frames are used as period value for scaling, so each frame has a two scaling factors one for rigid base and the other for SSI [7]. Procedure for getting scale factors are from PEER ground motion data base are Inserting target response spectrum and search limits for seismic hazard, after that Search records, Selecting scaling method and obtaining search result and scale factors. The computed scaling factors are listed in Table 7.

Table 7 Scale factor (SF) calculated by the single period method.

Building name	SF_{rigid}	SF_{SSI}	**% diff**[1]
4 Floor	2.00	2.92	46
8 Floor	1.89	1.89	0
12 Floor	3.54	3.54	0

[1] $[(SF_{SSI} - SF_{rigid})/SF_{rigid}] \times 100$

Records in nonlinear time history analysis are scaled according to mean squared error of the difference's methods. In mean squared error method a quantitative measure of the overall fit of the spectrum of a time history record to a design or target spectrum is the mean squared error of the differences (summed over a discrete set of periods) between the spectral accelerations of the record and the design spectrum, computed using logarithms of spectral acceleration and period. Thus, a scaling factor can be determined for each record that minimizes the mean squared error over a user-defined period range of significance [7]. In present study, the range of period for each frame is the natural periods of frames. Scaling factor and period range are presented in Table 8.

Table 8 Scale factor (SF) calculated by the mean squared error method.

Number of Story	**Rigid**	**SSI**	**SF**
4	0.492	0.546	2
8	1.254	1.308	1.89
12	2,105	2,205	3,548

RESULTS AND DISCUSSION

ETABS Pro is used for SSI analysis of real building will shear wall system which is modeled by 3D. Links have spring and dashpot coefficients. Fundamental period and base shear of 3D

concrete structures are evaluated according to response spectrum, linear static method and nonlinear time history analysis. In all cases of analysis, the soil type C is used. Fundamental period and base shear are calculated for rigid base and SSI.

Figures 6 shows fundamental period of 4,8 and 12 floors 3D buildings respectively. It is clearly noticed that the Fundamental period of all frames have been increased when SSI model is considered in the analysis, Table 9 present the fundamental period of studied frames and increasing ratio of natural period of frames when SSI analyses are considered.

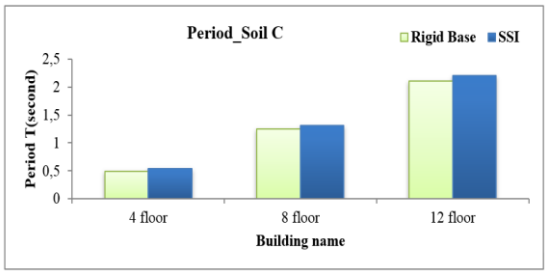


Figure 6 Fundamental period of buildings.

Table 9 Nature period of structure for the rigid base and SSI.

Frame name	**T rigid base**	**TSSI**	$\frac{T_{SSI}-T_{rigid}}{T_{rigid}}\times 100$
4 Floor	0.492	0.546	10.98%
8 Floor	1.254	1.308	4.3%
12 Floor	2.105	2.205	4.75%

Figures 7-8 present the base shear for of 4,8 and 12 floors 3D buildings. The base shear is expected to decrease when SSI is considered [14], but depending on the results of present study the effect of SSI on the base shear changes according to analysis type and buildings specification (height and size).

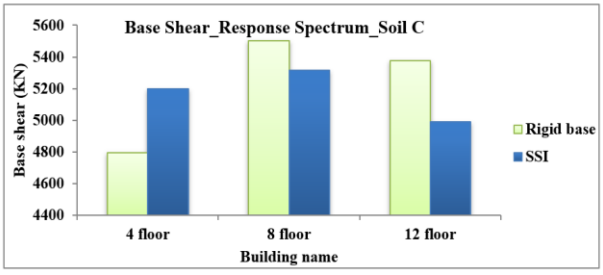


Figure 7 Base shear of buildings evaluated by response spectrum analysis

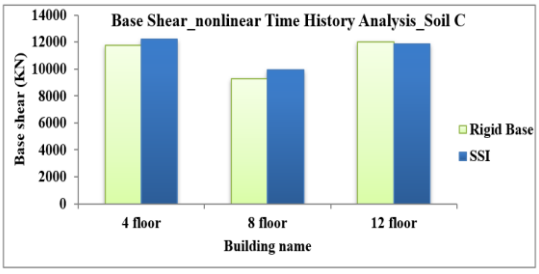


Figure 8 Base shear of buildings evaluated by nonlinear time history analysis

CONCLUSION

In general fundamental period for 3D models in SSI case is more than fundamental period for rigid base. Base shear calculated by response spectrum and time history analysis is sometimes has high values for SSI case and sometimes for rigid. İn general the difference between SSI case and rigid for fundamental period and base shear in studied cases is so small.

REFERENCE

[1] Wolf, J.P., Spring-dashpot-mass models for foundation vibrations, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol 26, No 9, 931-949, 1997.

[2] Mulliken, J.S., and Karabalis, D.L., Discrete model for dynamic through-the-soil coupling of 3-D foundations and structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol 27, No 7, 687-710, 1998

[3] Minasidis, G., Hatzigeorgiou, G.D. and Beskos, D.E., SSI in steel frames subjected to near-fault earthquakes, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol 66, 56-68, 2014.

[4] Rahmani, A., Mahdi, T., Finn, W.D.L. and Ventura, C.E., Evaluation of substructuring method for seismic soil-structure interaction analysis of bridges, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol 90, 112-127, 2016.

[5] Yesane, P.M., Ghugal, Y.M. and Wankhade, R.L., Study on soil-structure interaction: a review, *International Journal of Engineering Research*, Vol 5, No 3, 737-741, 2016..

[6] Eurocode 8, *Design of structures for earthquake resistance-part 1: general rules, seismic actions and rules for buildings*, Brussels: European Committee for Standardization, 2005

[7] NEHRP Consultants Joint Venture, *Selecting and scaling earthquake ground motions for performing response-history analyses*, NIST GCR, 11-917, National Institute of Standards and Technology, U.S, 2011..

[8] Çağlar, N., Garip, Z.Ş., & Yaman, Z.D.. Deprem etkisindeki betonarme yapilarda yapi-zemin etkileşimi. *Deprem Sempozyumu*, 2005.

[9] A.T. López, A. Tomás, G. Sánchez-Olivares, Seismic behaviour of concrete structures depending on the model of plastic hinge, *VII Congreso Internacional de Estructuras de ACHE*, A Coruña, Spain, Jun 2017

[10.] Hoang, V. L., Dang, H. N., Jaspart, J. P., and Demonceau, J. F., An overview of the plastic-hinge analysis of 3D steel frames, *Asia Pacific Journal on Computational Engineering*, Vol 2, No 4, 2015.

[11.] American Society of Civil Engineers, and Structural Engineering Institute, *Minimum Design Loads on Buildings and Other Structures Standards Committee*, American Society of Civil Engineers, U.S, 2013.

[12.] Applied Technology Council (ATC-55 Project), *Improvement of nonlinear static seismic analysis procedures*, FEMA 440, Federal Emergency Management Agency, U.S, 2005

[13.] Center, P. E. E. R, *Peer ground motion database* Pacific Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, CA, 2013. Available: https://ngawest2.berkeley.edu/

[14.] Nghiem, H., & Chang, N. Y., Soil-Structure Interaction Effects of High Rise Buildings, *Sixth International Conference on Case Histories in Geotechnical Engineering*, Arlington, Virginia, 11-16 August 2008

[15.] Marjanović, M., & Petronijević, M., Influence of Soil-Structure-Interaction on Nonlinear Time History Seismic Response of RC Frames, *Fifth International Conference Earthquake Engineering and Engineering Seismology*, Sremski Karlovci, Serbia, June 2016

[16.] Khoshnoudian, F., & Behmanesh, Evaluation of FEMA-440 for including soil-structure interaction, *Journal of Earthquake Engineering*, Vol 9, No 3, 397-408, 2010

[17.] Li, Mengke, et al. "Influence of soil–structure interaction on seismic collapse resistance of super-tall buildings." Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering 6.5 (2014): 477-485.

POLİPROPİLEN LİF TAKVİYELİ BETON KİRİŞLERDE POLİPROPİLEN LİF ORANININ EĞİLMEDE DARBE DAVRANIŞINA ETKİSİ

Mehmet Fatih ŞAHAN[1], Fatih Ali ÖNCEL[2] ve İsmail ÜNSAL[1]

[1]Adıyaman Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adıyaman
[2]Adıyaman Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Adıyaman

ABSTRACT

In this study, the effect of polypropylene fiber ratio on flexural impact behavior of concrete beams was investigated. An instrument weight reduction system was used to determine the relationship between polypropylene fiber ratio and impact behavior in flexural. In addition to the control mixture, polypropylene fiber reinforced concrete mixes with fiber ratios of 2 kg/m³, 4 kg/m³ and 6 kg/m³ were prepared for the study. Compression, flexural, and instrumented drop weight tests were performed on the beams (100x100x500 mm). In addition, as a result of the drop weight tests, the crack width in the middle of the beam was measured. In the low-velocity impact tests performed using an instrument drop weight system, it was observed that the polypropylene fiber-reinforced concretes was more resistant to sudden fracture compared to the control sample. In addition, as a result of the low-velocity impact test, it was determined that as the amount of polypropylene fiber increases, the crack widths decrease. As a result of the study, it has been observed that polypropylene fiber has positive effects on the static and dynamic properties of concrete.

Keywords: polypropylene fiber reinforced concrete; instrumented drop weight test; impact behavior

ÖZET

Bu çalışmada polipropilen lif takviyeli beton kirişlerde lif oranının eğilmede darbe davranışına etkisi araştırılmıştır. Polipropilen lif oranı ile eğilmede darbe davranışı arasındaki ilişkinin belirlenmesi amacıyla aletli ağırlık düşürme sistemi kullanılmıştır. Çalışma için kontrol karışımının yanı sıra 2 kg/m³, 4 kg/m³ ve 6 kg/m³ lif oranlarına sahip polipropilen lif takviyeli beton karışımları hazırlanmıştır. Kirişler (100x100x500 mm) üzerinde basınç, eğilme, ve aletli ağırlık düşürme deneyleri yapılmıştır. Ayrıca ağırlık düşürme deneyleri sonucunda kiriş ortasında meydana gelen çatlak genişliği ölçümü yapılmıştır. Aletli düşen ağırlık sistemi kullanılarak yapılan düşük hızlı darbe deneylerde ise polipropilen lif takviyeli betonların kontrol numunesine kıyasla ani kırılmaya karşı daha dirençli olduğu görülmüştür.

Ayrıca polipropilen lif miktarının artması ile düşük hızlı darbe deneyi sonucunda kirişlerde oluşan çatlak genişliklerinin azaldığı tespit edilmiştir. Yapılan çalışma sonucunda polipropilen lifin betonun statik ve dinamik özelliklerine olumlu etkilerinin olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Polipropilen lifli beton; aletli ağırlık düşürme deneyi; darbe davranışı;

GİRİŞ

Bir yapı malzemesi olarak beton, ekonomik, güvenli ve estetik tasarımlara imkân verdiği için inşaat mühendisliği alanında oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Beton, uygulama alanları düşünüldüğünde yapı ömrü boyunca pek çok farklı tipteki yüklere maruz kalmaktadır. Bu yüklerden olan darbe etkileri pek çok yapının bazı elemanları için kritik öneme sahiptir. Bu tür etkilere, kıyı liman yapılarının taşıyıcı elemanlarına gemi vb. deniz taşıtlarının düşük hızlarda çarpması, sanayi yapılarında gerek döşemeye ağırlık düşmesi gerekse krenler ile taşınan ağırlıkların kolonlara çarpması, otoparklarda veya sanayi yapılarında taşıtların kolonlara çarpması gibi pek çok darbe etkisi örnek olarak verilebilir. Betonun, basınç dayanımına oranla çok daha düşük olan çekme mukavemeti gibi zayıf özellikleri ile statik ve dinamik etkiler altındaki davranışı zaman içerisinde geliştirilmeye çalışılmıştır.

Rastgele yönelimli süreksiz lifler içeren betona Lif Takviyeli Beton (LTB) denilmektedir. Rastgele yönlendirilmiş lifler, çimento matrisinde çatlak yayılmasına ve genişlemeye etkili bir şekilde direnebilmekte ve gerek statik etkiler gerekse darbe yükleri altında betonun çatlama sonrası sünekliğini iyileştirebilmektedir. (Yoo ve Banthia, 2019). Betonun zayıf yönü olan çekme mukavemetini geliştirmek, aynı zamanda betonun dinamik yüklere karşı dayanımını arttırmak ve malzemenin parçalanmasını veya dağılmasını engellemek, oluşabilecek çatlakların büyümesini durdurmak gibi amaçlarla beton karışımı içerisine ilave edilen lifler çok farklı kimyasal yapılara ya da geometrik özelliklere sahip olabilmektedir. Beton karışımı içerisine ilave edilen lifler çelik, polipropilen, polietilen, polyester, karbon, cam vb. liflerdir. LTB üzerinde günümüze kadar pek çok çalışma yapılmıştır. Yoo ve Banthia [1] çalışmalarında lif takviyeli betonların darbe davranışlarına yönelik oldukça geniş bir literatür taramasına yer vermişlerdir. Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde Polipropilen Lif Takviyeli Betonların (PLTB) günümüzde de çok popüler olduğu görülmektedir.

Al-Masoodi ve ark. [2] lif takviyeli betonların statik ve dinamik etkiler altındaki basınç, çekme ve eğilme dayanımlarını belirlemek üzere yaptıkları çalışmalarında çeşitli şekil, ebat ve uzunluklarda çelik ve polipropilen lifler kullanmışlardır. Lif takviyeli beton örneklerinin darbe davranışını irdelemek üzere Split-Hopkinson basınçlı çubuk test düzeneğini kullanmışlardır. Polipropilen lif takviyeli betonlar üzerine yaptıkları incelemelerde, polipropilen lif miktarı arttıkça yalın betona kıyasla basınç dayanımının ve tokluğun arttığını, betonun dinamik etkiler altındaki davranışının iyileştiğini gözlemlemişlerdir. Elde edilen bu sonuçların, daha önce Banthia ve ark. [3] tarafından yürütülmüş olan benzer bir çalışmadan elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir. Ağırlık düşürme testlerinin yapıldığı bu çalışmada da polipropilen liflerin, statik yük etkisindeki betona kıyasla darbe etkisindeki betonun mekanik özelliklerini geliştirmede daha etkili olduğu gözlenmiştir. Ayrıca kıvrımlı polipropilen liflerin düz ve uzun liflere nazaran, uzun liflerin ise kısa liflere nazaran betonda enerji yutma kapasitesini daha da iyileştirerek çok daha üstün bir darbe davranışı sergilendiği görülmüştür.

Almusallam ve ark. [4, 5] çelik ve plastik lifleri bir arada kullanarak hibrit lif katkılı normal dayanımlı ve yüksek dayanımlı betonların darbe davranışı üzerinde çalışmışlardır. Çalışmada çelik liflerin polipropilen liflere kıyasla darbe dayanımı üzerinde daha etkili olduğu, hibrit lif katkılı betonun ise diğer ikisinden daha etkili olduğu belirtilmiş ve çelik/polipropilen lif oranı 2:1 olarak önerilmiştir.

Literatürde, beton karışımında kullanılan ikame malzemelerin polipropilen liflerle etkileşimini irdeleyen çalışmalar da mevcuttur. Alhozaimy ve ark. [6] polipropilen lif takviyeli betonda uçucu kül, silis dumanı ve cüruf gibi ikame malzemelerin bir miktar çimento yerine kullanımının darbe davranışını önemli oranda iyileştirdiğini gözlemlemişlerdir. Bu durumu, betonda gelişen puzolanik aktivitenin polipropilen lifler ile çimento hamuru arasındaki aderansı artırmış olmasına dayandırmışlardır.

Caf [7] yaptığı çalışmada, betona farklı oranlarda (hacimce %0,5, %1, %1,5, %2) çelik lif ve 1 m³ için 300 g, 600 g, 900 g, 1200 g polipropilen lif katılarak, lif takviyeli betonlar üzerinde çalışma yapmıştır. Çelik liflerin, beton karışımına hacimce %1'e kadar eklenmesi ile beton basınç dayanımına katkı sağladığını belirlemiştir. Çekme dayanımı için ise %2 oranında çelik lif ilave edilmesi ile ciddi bir artış gözlemlemiştir. Çelik lif ilavesinin beton darbe dayanımına çok önemli oranda fayda sağladığı sonucuna varmıştır. Ayrıca belirli bir orandan fazla lif ilavesinin betonun işlenebilirliğini azalttığını belirtmiştir.

Korkut ve ark. [8] çelik ve sentetik lifli betonun mekanik özelliklerini araştırmışlardır. Hazırladıkları sentetik lifli ve çelik lifli karışımları için basınç mukavemeti, çekme mukavemeti ve yarma deneylerini gerçekleştirmişlerdir. Elde ettikleri deney sonuçlarına göre en yüksek dayanım artışı 60 mm makro lifli beton karışımında olduğunu belirlemişlerdir. Özetle bu çalışmada da çelik lifin çekme ve yarma deneylerinde betona katkı sağladığı sonucuna varmışlardır. Ayrıca çelik lif katkılı betonlarda dayanım artışı daha fazla olsa da, sentetik liflerin de betona ciddi katkısının olduğunu gözlemlemişlerdir.

Yukarıda verilen çalışmalardan da anlaşılacağı üzere betona polipropilen lif ilavesi ile betonun özelliklerini geliştirmek üzere pek çok çalışma yapılmıştır. Bununla birlikte PLTB kirişler üzerinde aletli ağırlık düşürme testlerinin yapıldığı çalışmalar çok kısıtlıdır. Bu çalışmada PLTB, statik ve dinamik deneyler yardımı ile incelenmiştir. Çalışmada 350 kg çimento dozajlı ve su-çimento oranı 0.55 olacak şekilde beton karışımları hazırlanmıştır. Hazırlanan karışımlar içerisine 2 kg/m³, 4 kg/m³ ve 6 kg/m³ miktarlarda polipropilen lif eklenerek PLTB karışımları oluşturulmuştur. Bu şekilde 100x100x500 mm boyutlarında beton kiriş numuneleri üretilmiştir. Beton numuneleri 28 gün boyunca kür'e tabi tutulmuştur. Elde edilen bu beton numuneleri üzerinde basınç testi, üç nokta eğilme testi ve aletli ağırlık düşürme testi yapılmıştır.

MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada beton karışımında 350 kg/m³ çimento dozajı seçilmiştir. Çimentonun %0.4'ü kadar akışkanlaştırıcı ilave edilmiştir. Beton karışımları çimento, su, agrega, akışkanlaştırıcı oranları standart olup tüm karışımlarda aynı oranlar kullanılmıştır. 1 m^3 beton karışımında yer alan bileşenler Çizelge 1'de verilmiştir.

Bu çalışmada beton karışımına ilave edilen polipropilen lif Atlas firmasına ait 60 mm uzunluğunda polipropilen lif olup Çizelge 2'de mekanik özellikleri verilmiştir. Şekil 1'de ise polipropilen liflerin resmi görülmektedir.

Çizelge 1. Beton karışım oranları

Malzeme	**Miktar (kg)**
Çimento	350
Su	192.5
İnce agrega	747.27
Orta agrega	538.12
İri agrega	539.48
Akışkanlaştırıcı	1.4

Çizelge 2. Polipropilen lifin mekanik ve geometrik özellikleri

Özellik	**Büyüklük**
Çekme Mukavemeti (MPa)	550-750
Fiber uzunluğu (mm)	60
Özgür Ağırlığı g/cm³	0.91
Fiber sayısı, Adet/kg	200000

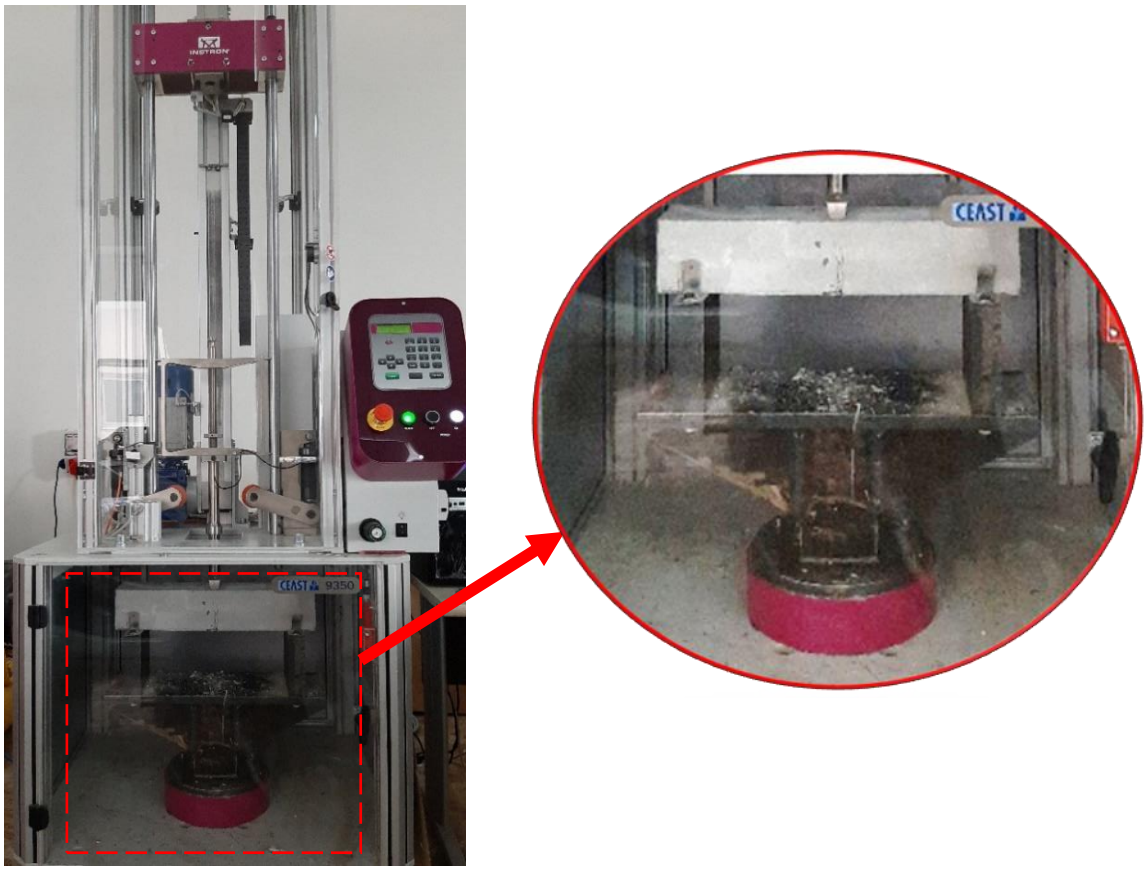


Şekil 1. Betona ilave edilen polipropilen lif

Hazırlanan beton karışımına üç farklı oranda 2 kg/m³, 4 kg/m³ ve 6 kg/m³ polipropilen lif ilave edilmiş ve polipropilen lif eklenmeyen kontrol karışımı ile birlikte toplamda 4 farklı beton karışımı hazırlanmıştır. TS EN 12390-1'e [9] göre hazırlanan 100 mm'lik küp numeneler ve 100x100x500 mm'lik kiriş numuneler 28 gün kür edilmiştir. Her bir karışımdan 3 noktalı eğilme deneyi için 3 numune ve aletli ağırlık düşürme deneyi için 3 numune üretilmiştir.

Darbe testleri kendi içerisinde düşük hızda yapılan testler ve yüksek hızlı testler olarak ikiye ayrılmaktadır. Düşük hızda yapılan testler 1-10 m/s arasında gerçekleştirilen deneylerdir. Yüksek hız olarak ifade edilen darbe testi 74.1 m/s'ye kadar gerçekleştirilen testlerdir [10].

Bu testlerden Pendulum, Izod ve Charpy, ankastre edilmiş kiriş ve ağırlık düşürme testleri düşük hızlı darbe testleri grubundadır. Split-Hopkinson basınçlı çubuk test ve basınçlı hava ile darbe testleri ise yüksek hızlı darbe testleridir. Yüksek hızlı darbe testleri hafif bir ağırlığın basınçlandırılarak numune üzerine darbe uygulanmasıyla yapılır. Ağırlık düşürme testi ise belirli bir ağırlığın belirli bir yükseklikten numune üzerine bırakılmasıyla yapılan bir deneydir. Ağırlık düşürme deneyi aletli ve aletsiz olarak iki türü vardır. Aletli ağırlık düşürme darbe test yöntemi malzemenin dinamik özelliklerini belirlemede kullanılan bir yöntemdir. Diğer yöntemlerden farklı olarak, yükseklikte farklı ağırlık ve farklı uçlar ile elde edilmek istenen enerji ve hız değiştirilebilmektedir. Ayrıca aletli ağırlık düşürme darbe testi ile numuneye saplanma, delinme ve tekrarlı darbe testleri de yapılabilmektedir. Bu çalışmada aletli ağırlık düşürme test sistemi kullanılmıştır. Aletli ağırlık düşürme testi ACI 544.2R'ye [11] göre yapılmıştır. Bu çalışmada Instron Ceast 9350 marka cihaz kullanılarak ağırlık düşürme deneyleri gerçekleştirilmiştir (Şekil 2).

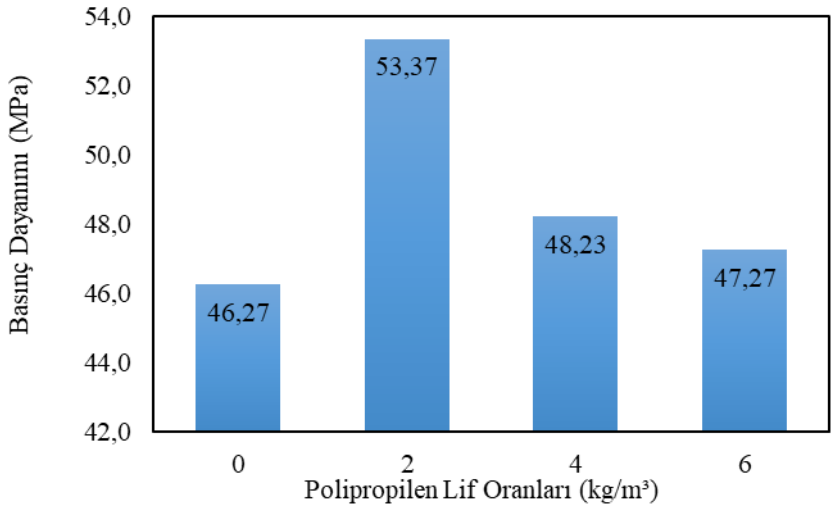


Şekil 2. Ağırlık düşürme deneyinde kullanılan aletli ağırlık düşürme test cihazı

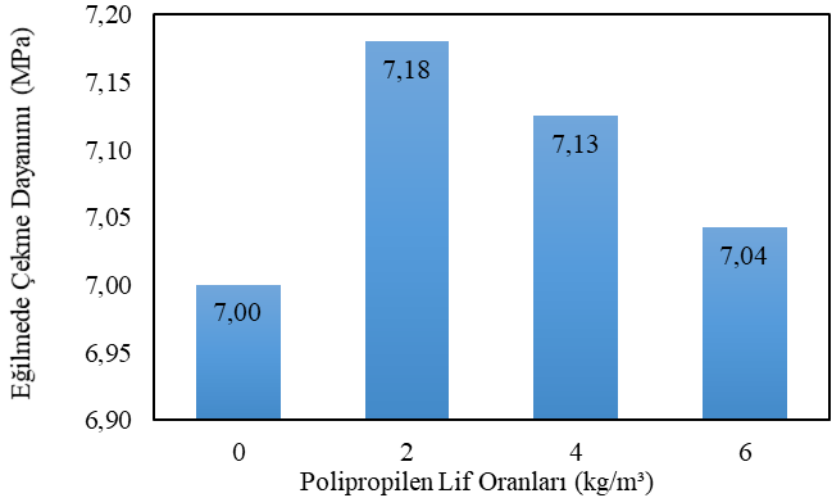
Bu çalışmada ağırlık düşürme deneylerinde kiriş numune üzerine kiriş ortasına enine çizgisel olacak şekilde 6.235 kg ağırlık 736 mm yükseklikten serbest düşürülerek 45 J enerji uygulanmıştır.

BULGULAR ve TARTIŞMA

Hazırlanan numuneler üzerinde çeşitli deneyler yapılmıştır. Küp ve kiriş numuneleri üzerinde TS EN 12390-5'e [12] göre yapılan basınç ve 3 nokta eğilme deneyleri sonuçları sırasıyla Şekil 3'te ve Şekil 4'te grafiksel olarak verilmiştir.



Şekil 3. PLTB numunelerinin basınç dayanımları değişimi

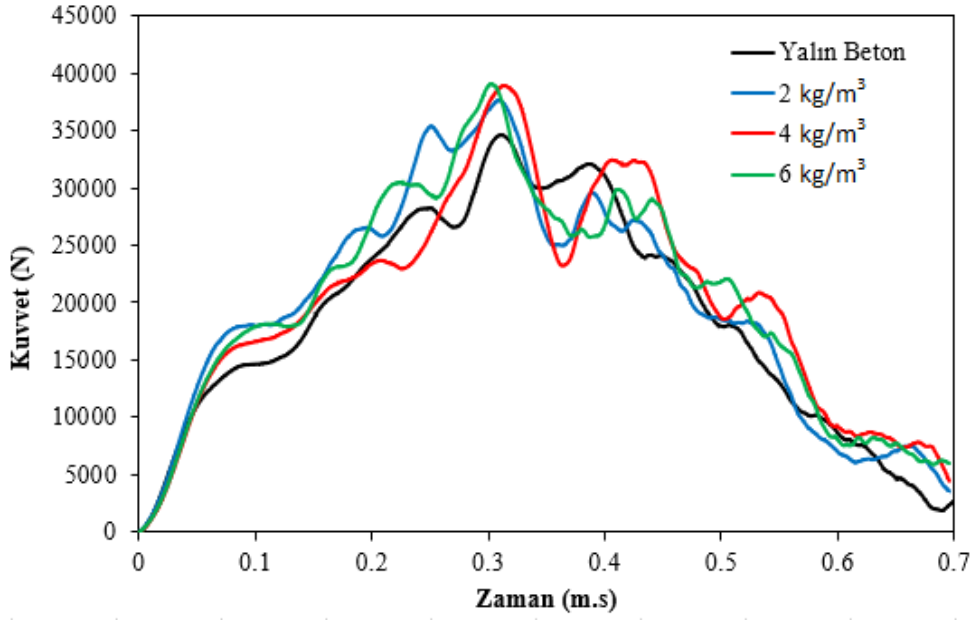


Şekil 4. PLTB numunelerinin eğilmede çekme dayanımları değişimi

Şekil 3'te, beton karışımına polipropilen lif eklenmesi ile betonun basınç dayanımlarında artış olduğu gözlenmektedir. Görüldüğü üzere polipropilen lif basınç dayanımına olumlu katkıda bulunmuştur. Polipropilen lif katkılı betonların basınç dayanımları kendi aralarında karşılaştırıldığında en büyük dayanımların ise 2 kg/m^3 polipropilen lif oranlı karışımlarda olduğu görülmektedir. Şekil 4'te, beton karışımına polipropilen lif eklenmesi ile eğilmede çekme dayanımının kontrol numunelerine göre daha büyük olduğu görülmektedir. Banthia ve Trottier [13] çalışmalarında, çelik lif katkılı betonlarda ilk çatlak sonrasında matriste bulunan gelişigüzel dağılmış olan çelik liflerin oluşturduğu köprüleme etkisi sayesinde liflerin matristen sıyrılması sırasında çatlakların ilerlemesinin geciktirilmiş olduğunu belirtmişlerdir. Burada da polipropilen liflerin benzer bir etki oluşturarak eğilmede çekme dayanımını artırmaya katkıda bulunduğu söylenebilir. Polipropilen lif katkılı betonların eğilmede çekme

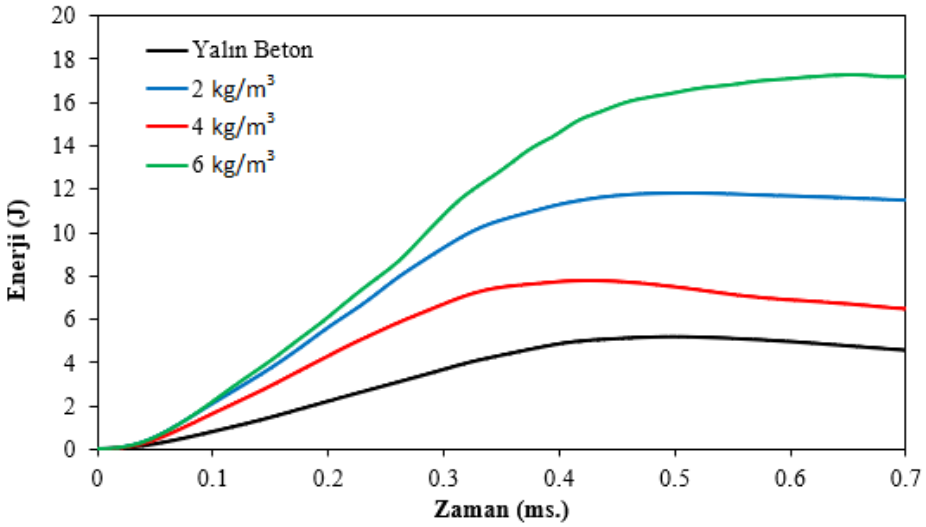
dayanımları kendi aralarında karşılaştırıldığında basınç dayanımına benzer şekilde en büyük dayanımların 2 kg/m^3 polipropilen lif oranlı karışımlarda olduğu görülmektedir.

Şekil 5'te PLTB kirişlerin eğilmeli darbe testlerinden elde edilen Kuvvet-Zaman grafikleri verilmiştir. Kirişlere 3 nokta ağırlık düşürme testleri yapılması sonucunda elde edilen grafiklerdeki tepe değerlere bakıldığında en düşük değerin kontrol numunesine ait olduğu ve polipropilen lif oranı arttıkça tepe değerin de arttığı görülmektedir. Eğrilerin göstermiş olduğu bu karakter Yoo ve ark. [14] tarafından çelik lif takviyeli betonlar üzerinde yapılan çalışmaya benzer şekilde ortaya çıkmıştır. İlk çatlaklar oluştuğunda, eğilme davranışına matris yumuşatma ve elyaf köprüleme hâkim olmaktadır. Tepe yükü FRC kirişlerindeki ilk çatlama yükünü göstermektedir. İlk çatlağın meydana gelmesinden hemen sonra darbe yükü büyük ölçüde azalmakta, matriste lif yoksa darbe yükü sıfır değerine ilerlemektedir. Bununla birlikte, matriste lifler varsa darbe yükü, fiber köprüleme etkisine bağlı olarak kademeli olarak azalmaktadır [14]. Şekil 5'te verilen eğriler incelendiğinde polipropilen lif katkı oranı arttıkça tepe sonrasındaki eğri kolunun kısmen genişlediği ve kontrol eğrisine göre sıfıra yaklaşma eğiliminin azaldığı görülmektedir.



Şekil 5. PLTB kirişlerin eğilmeli darbe testleri elde edilen kuvvet-zaman grafikleri

PLTB kirişlerin eğilmeli darbe testleri elde edilen Enerji-Zaman grafikleri Şekil 6'da verilmiştir. Polipropilen lif takviyeli betonlarda ulaşılan nihai enerji değerleri birbirlerine yakın iken kontrol numunesinde enerji değeri diğerlerine göre daha düşük olarak ortaya çıkmıştır. Polipropilen liflerin eklenmesi, darbe altında enerji emilimini arttırmada oldukça etkili olmaktadır. Suaris ve Shah [15] eğilmede darbe testleri sonucunda çelik lifler içeren kirişlerde emilen enerjinin, yalın beton kirşlerde emilen enerjiden daha yüksek olduğunu bildirmişlerdir. Şekil 6'da verilen eğrilerin genel karakteri incelendiğinde ise polipropilen lif oranı artıkça enerji değerinin zaman içerisindeki artış hızının da daha fazla olduğu görülmektedir. Bu artış hızının en fazla olduğu numuneler 6 kg/m^3 polipropilen lif oranlı numuneler olup bu hızın en düşük olduğu numuneler ise kontrol numuneleridir.



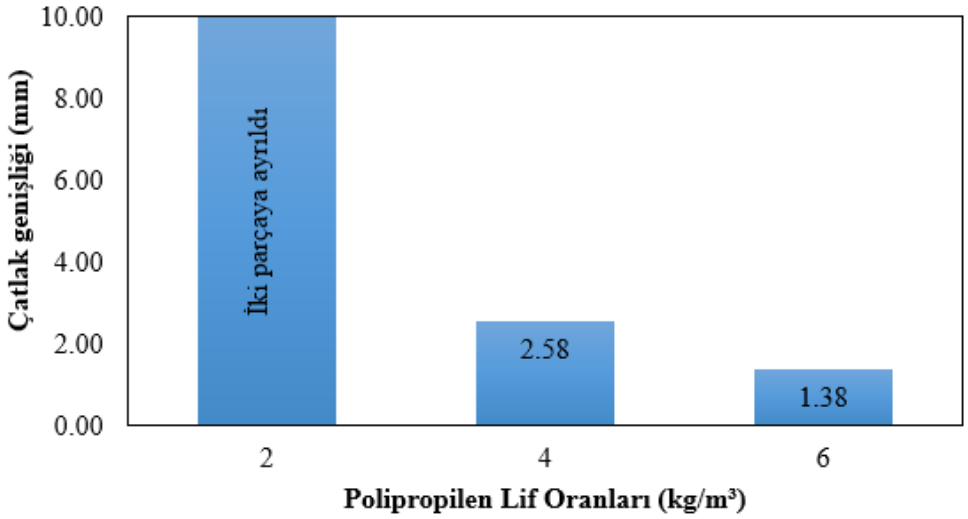
Şekil 6. PLTB kirişlerin eğilmeli darbe testleri elde edilen enerji-zaman grafikleri

Ağırlık düşürme deneyi sonucunda numunelerde oluşan hasar durumlarına ait resimler Şekil 7'de verilmiştir. Darbeye maruz kalmış numunelerin hasar durumları karşılaştırıldığında kontrol numuneleri darbe aldıkları yerden iki parçaya bölünürken polipropilen lif katkılı kirişlerde darbe alınan yerin diğer yüzünde en büyük olmak üzere darbe alınan yüze doğru küçülerek ilerleyen çatlaklar oluşmuştur.



Şekil 7. Ağırlık düşürme deneyi sonunda PLTB kirişlerde oluşan hasar durumları

Ağırlık düşürme deneyi sonucunda PLTB kirişlerde darbe sonrası oluşan çatlak genişlikleri Şekil 8'de verilmiştir. Yalın betonlu kiriler ile 2 kg/m^3 oranında polipropilen lif ilaveli kirişlerin darbe sonrası iki parçaya ayrıldığı diğer kirişlerin ise tek parça halinde kalarak sadece çatlak hasarı oluşmuştur. Polipropilen lif oranının arttırılması sonucunda kirşlerde darbe ile oluşan çatlakların küçüldüğü görülmektedir. PLTB'ler, yalın betona kıyasla önemli ölçüde gelişmiş darbe direnci sergilemektedir. Bu davranışın Yoo ve Banthia'nın [1] çalışmalarında yer verilen sonuçlarla uyum içinde olduğu görülmektedir.



Şekil 8. Ağırlık düşürme deneyi sonunda PLTB kirişlerde meydana gelen çatlak genişlikleri

SONUÇLAR

PLTB kirişlerde lif oranının eğilmede darbe davranışına etkisini araştıran bu çalışma için kontrol karışımının yanı sıra beton karışımına 2 kg/m^3, 4 kg/m^3 ve 6 kg/m^3 oranlarında polipropilen lifler ilave edilerek polipropilen takviyeli beton küpler ve kirişler üretilmiştir. Küpler üzerinde basınç, kirişler üzerinde eğilme ve aletli ağırlık düşürme deneyleri yapılmıştır. Ayrıca ağırlık düşürme deneyleri sonucunda kiriş ortasında meydana gelen çatlak genişliği ölçümü yapılmıştır.

Düşük hızlı darbe etkilerine maruz kalan yapı elemanlarında oluşabilecek davranışı ortaya koymak amacıyla yapılan bu çalışmada deneyler sonucunda aşağıdaki sonuçlara varılmıştır.

- Polipropilen lif olmaksızın hazırlanan yalın beton numunelerinin darbe etkisinde aniden kırıldığı görülmüştür. Ağırlık düşürme deneyleri sonucunda polipropilen liflerin betonda ani kırılmayı önlediği anlaşılmıştır.

- Kirişlere 3 nokta ağırlık düşürme testleri yapılması sonucunda elde edilen Kuvvet-Zaman grafiklerindeki tepe değerlere bakıldığında en düşük değerin kontrol numunesine ait olduğu görülmektedir. Yalın betonlu numunelerde oluşan hasar polipropilen lif katkılı numunelere oranla daha düşük kuvvetlerde meydana gelmiştir. Polipropilen lif oranı artıkça kuvvet-zaman eğrisindeki tepe değerler de artış göstermektedir.

- Ağırlık düşürme testleri kuvvet-zaman eğrilerinde tepe değerden sonraki bölgeler incelendiğinde kontrol numunesi eğrisinin hızla sıfıra doğru ilerlediği fakat polipropilen lif katkılı numunelerde polipropilen lif katkı oranı arttıkça tepe sonrasındaki eğri kolunun kısmen genişlediği ve kontrol eğrisine göre sıfıra yaklaşma eğiliminin azaldığı görülmektedir.

- Ağırlık düşürme testleri sonucunda numunelerin hasar durumları karşılaştırıldığında yalın betonlu numuneler ile 2 kg/m^3 oranında polipropilen lif ilaveli kirişlerin darbe aldıkları yerden aniden kırılarak iki parçaya bölündüğü görülürken 4 ve 6 kg/m^3 oranında polipropilen lif katkılı kirişlerde darbe ile sadece çatlak oluştuğu görülmüştür. Polipropilen lif oranı ile darbe sonrasında oluşan hasar ilişkisine bakıldığında polipropilen lif oranının arttırılmasının darbe etkisinde oluşacak hasarları azalttığı ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışma sonucunda elde edilen veriler ışığında; polipropilen lif katkılı betonların darbe etkisine maruz kalabilecek; askeri yapılarda, havalimanlarında, yollarda, kıyı liman yapılarında, sanayi yapılarında otopark olarak kullanılan yapıların taşıyıcı elemanlarında vb. yapılarda kullanılmasının hasar derecesi yönünden önemli bir avantaja sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

[1] D.Y. Yoo, N. Banthia, Impact resistance of fiber-reinforced concrete – A review, *Cement and Concrete Composites*. 104 (2019) 103389.

[2] A.H.H. Al-Masoodi, A. Kawan, M. Kasmuri, R. Hamid, M.N.N. Khan, Static and dynamic properties of concrete with different types and shapes of fibrous reinforcement, *Constr. Build. Mater.* 104 (2016) 247–262.

[3] N. Banthia, P. Gupta, C. Yan, Impact resistance of fiber reinforced wet-mix shotcrete - Part I: beam tests, *Mater. Struct.* 32 (8) (1999) 563–570

[4] T.H. Almusallam, N.A. Siddiqui, R.A. Iqbal, H. Abbas, Response of hybrid-fiber reinforced concrete slabs to hard projectile Impact, *Int. J. Impact Eng*. 58 (2013) 17–30.

[5] T.H. Almusallam, A.A. Abadel, Y.A. Al-Salloum, N.A. Siddiqui, H. Abbas, Effectiveness of hybrid-fibers in improving the impact resistance of RC slabs, *Int. J. Impact Eng.* 81 (2015) 61–73.

[6] A.M. Alhozaimy, P. Soroushian, F. Mirza, Mechanical properties of polypropylene fiber reinforced concrete and the effects of pozzolanic materials, *Cement Concr. Compos*. 18 (2) (1996) 85–92

[7] M. Caf, *Polipropilen ve çelik lifli betonların darbe dayanımı*, Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi, 2012.

[8] F. Korkut, Z.F. Türkmenoğlu, R.B. Taymuş, S. Güler, Çelik ve sentetik liflerin kendiliğinden yerleşen beton taze ve meknik özellikleri üzürine etkisi, *Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, Vol. 6, No. 2, 2017, 560-570.

[9] TS EN 12390-1, 2014. Beton – Sertleşmiş Beton Deneyleri – Bölüm 1: Deney Numunesi ve Kalıplarının Şekil, Boyut ve Diğer Özellikleri, Ankara.

[10] M. Sayer, *Hibrit kompozitlerin darbe davranışlarının incelenmesi*, Doktora tezi, Pamukkale Üniversitesi, 2009.

[11] ACI 544.2R, 2009. *Measurement of Properties of Fiber Reinforced Concrete*,Usa

[12] TS EN 12390-5, 2010. Beton – Sertleşmiş Beton Deneyleri – Bölüm 5: Deney Numunelerinde Eğilmede Çekme Dayanımının Tayini, Ankara.

[13] N. Banthia, J.F. Trottier, Concrete reinforced with Deformed Steel Fibres, Part II: Toughness characterization, *ACI Mater. J.*, 92(2), 1995, 146-54.

[14] D-Y. Yoo, U. Gohil, T. Gries, Y.S. Yoon, Comparative low-velocity impact response of textile-reinforced concrete and steel-fiber-reinforced concrete beams, *Journal of Composite Materials*, 50(17), 2015, 2421-2431.

[15] W. Suaris, S.P. Shah, Strain-rate effects in fibre-reinforced concrete subjected to impact and impulsive loading, *Compos* 13 (2), 1982, 153–159.

GÖZENEKLİ BAKIR SİLİNDİR PARÇALAR İÇİN SU VERME İŞLEMİNİN SAYISAL OLARAK İNCELENMESİ

Gökçe PEKER[1], Abuzer ÖZSUNAR[2]

[1]DSİ Genel Müdürlüğü, Barajlar ve HES Daire Başkanlığı, Ankara

[2]Gazi Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Ankara

ABSTRACT

Quenching is the rapid cooling of the material that has been raised to the appropriate temperature. The quenching media are usually water and oil and sometimes forced air can also be used as the quenching medium. The effectiveness of quenching depends on the cooling environment and cooling characteristics. Therefore, results vary with variation of part composition, motion, temperature, and type of quenching medium. The design of the quenching medium contributes to the success of the process. In this study, the temperature distributions of the samples during the quenching of the porous copper cylinders produced with Powder Metallurgy (P/M) were examined, and then the cooling curves of the porous copper samples were drawn. The effects of the material porosity parameter on the cooling curves were investigated. This problem was modelled in FLUENT packet program. In the problem heat transfer coefficient, heat conduction coefficient and the properties of the water are changed with temperature. User defined function (UDF) was written in C compiler for the varying heat transfer coefficient and the heat conduction coefficient then this UDF transferred to FLUENT packet program.

Keywords: Quenching, cooling curves, porosity, computational fluid dynamics, heat transfer

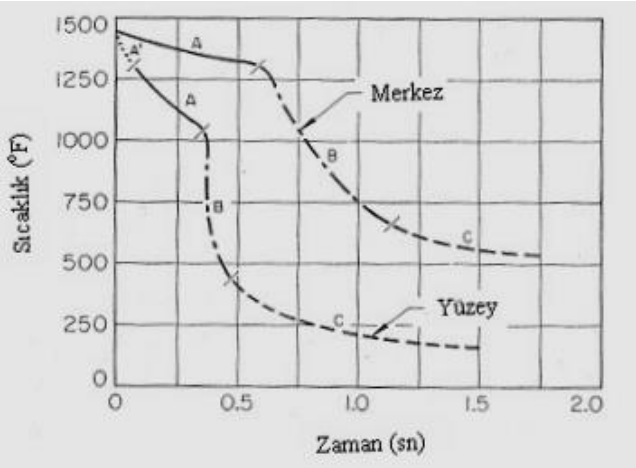
ÖZET

Su verme uygun sıcaklığa yükseltilmiş olan malzemenin hızlı bir şekilde soğutulmasıdır. Su verme ortamları genellikle su ve yağ olup bazen zorlanmış hava da su verme ortamı olarak kullanılabilir. Su vermenin etkinliği soğuma ortamına ve soğuma karakteristiklerine bağlıdır. Bu nedenle sonuçlar parça bileşiminin, hareketinin, sıcaklığının ve su verme ortamının cinsinin değişmesiyle çeşitlilik gösterir. Su verme ortamının dizaynı prosesin başarısına katkı sağlar. Bu çalışmada, Toz Metalürjisi (T/M) ile üretilmiş gözenekli bakır silindirlere su verilmesi esnasında numunelerde meydana gelen sıcaklık dağılımları incelenmiş ardından gözenekli bakır numunelerin soğuma eğrileri çizilmiştir. Malzeme gözenekliliği parametresinin soğuma eğrilerine etkileri incelenmiştir. Bu problem FLUENT paket programında modellenmiştir. Problemde ısı taşınım katsayısı, malzemenin ısı iletim katsayısı, malzemenin özgül ısısı, suyun özellikleri sıcaklıkla değişmektedir. Değişen ısı taşınım katsayısı ve iletim katsayısı için C derleyicisinde kullanıcı tanımlı fonksiyon (UDF) yazılıp FLUENT'e aktarılmıştır.

Anahtar kelimeler: Su verme, soğuma eğrileri, gözeneklilik, hesaplamalı akışkanlar dinamiği, ısı transferi

GİRİŞ

Su verme uygun sıcaklığa yükseltilmiş olan malzemenin hızlı bir şekilde soğutulmasıdır. Su verme ortamları genellikle su ve yağ olup bazen zorlanmış hava da su verme ortamı olarak kullanılabilir. Su vermenin etkinliği soğuma ortamına ve soğuma karakteristiklerine bağlıdır. Bu nedenle sonuçlar parça bileşiminin, hareketinin, sıcaklığının ve su verme ortamının cinsinin değişmesiyle çeşitlilik gösterir. Su verme ortamının tasarımı prosesin başarısına katkı sağlar. Soğuma eğrileri yükseltilmiş sıcaklıktaki parçaya su verme ile çizilir. Test parçasına ısıl çiftler gömülü olarak yerleştirilir ve ölçülen sıcaklık değişikliklerini çizmek için yüksek hızlı kaydedici kullanılır. Sonuç olarak elde edilen sıcaklık-zaman eğrileri su verme sıvısının ısı transferi özelliklerini gösterir. Tipik olarak soğutulan silindirik malzemelerin yüzeyinin ve merkezinin soğuma eğrileri Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu eğri sıcak katıdan soğuk sıvıya ısı transferinde 4 aşama tanımlar. Şekil 1'de **A'** aşaması sadece 0.1s için devam eder ve diğer aşamalara göre göre ısı transferi özelliklerinin hesaplanmasında önemsizdir. **A** aşaması buhar örtüsü soğuma aşaması **(Film Kaynama)** olarak adlandırılır ve Leiden-Frost olgusuyla nitelendirilir. Kırılmayan buhar örtüsü oluşumu test parçasını çevreler. Bu durum test parçasının yüzeyinden olan ısı transferi miktarı, parçanın birim alanında maksimum buharı oluşturmak için gerekli olan ısı miktarını geçtiği zaman oluşur. Bu aşama yavaş soğumalardan biridir. Çünkü buhar örtüsü bir yalıtıcı gibi davranır ve soğuma buhar filmi boyunca radyasyonla meydana gelir. **B** aşaması, buhar taşıma soğuma aşamasıdır **(Çekirdek Kaynama)**. Bu aşamada yüksek hızlarda ısı transferi üretilir. Bu aşama metal yüzeyin sıcaklığının azaldığı ve sürekli buhar filmi parçalandığı an, su verme akışkanının şiddetli kaynamasıyla oluşur ve ısı metalden çok hızlı bir şekilde dışarı atılır. Su verme akışkanının kaynama noktası, buhar kabarcıklarının hacmi veya şekli bu aşamanın sonucunu belirler. Buhar kabarcıklarının hacmi veya şekli bu aşamanın süresini kontrol etmenin yanı sıra soğuma hızının gelişmesinde önemlidir. **C** aşaması, sıvı soğuma aşaması **(Doğal Konveksiyon)** olarak adlandırılır. Bu aşamadaki soğuma hızı B aşamasından daha yavaştır ve **C** aşaması metal yüzeyinin sıcaklığı su verme sıvısının kaynama noktasının altına indiği zaman başlar. Bu sıcaklığın altında kaynama durur. Bundan sonra ısı iletimi ve konveksiyonla yavaş soğuma meydana gelir. Sıvının kaynama noktası ve banyo sıcaklığı arasındaki fark ısı transfer hızını etkileyen ana faktörlerden biridir. Ayrıca viskozite de C aşamasındaki soğuma hızını etkiler [1].

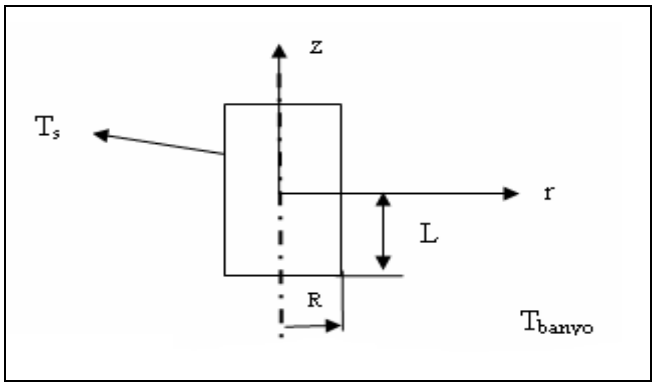


Şekil 1. Su vermede sıcak katıdan soğuk sıvıya ısı transferi aşamalarını gösteren tipik yüzey ve merkez soğuma eğrileri [1]

Literatürde su verme esnasında ısı transfer mekanizmalarını inceleyen çalışmalar bulunmaktadır. Karaaslan [2], yaptığı analitik çalışmada toz metalürjisi ile üretilen alüminyum, demir ve karbon çelik silindirlerin su ile soğutulmasını incelemiştir. Araştırmacı bu çalışmada ısı iletim denklemini analitik yöntem ile çözüp metallerin soğuma eğrilerini çizmiş ve gözenekliliğin soğuma eğrilerini nasıl etkilediğini araştırmıştır. Yılmaz [3], toz metalürjisi ile üretilen alüminyum, bakır, demir ve düşük karbonlu çelik malzemeler üzerinde çalışmış, ısı iletim denklemini sayısal olarak çözümlemiş, sayısal olarak kontrol hacmi enerji korunumu kanunu kullanarak cebirsel denklemleri elde etmiştir. Araştırmacı denklemleri çözmek için FORTRAN programını kullanmış ardından soğuma eğrilerini elde ederek gözenekliliğin bu eğrilere etkisini araştırmıştır. Yılmaz [4] hava atomizasyon yöntemi ile üretilen alüminyum, bakır, bronz, paslanmaz çelik ve demir tozları kalıpta sıkıştırıp ardından sinterleyerek test numunelerini oluşturup laboratuvar koşullarında su verme işlemini gerçekleştirmiş, ısıl çiftleri kullanarak sıcaklıkları ölçmüş ardından numunelerin soğuma eğrilerini çizmiş ve gözenekliliğin soğumaya olan etkisi araştırmıştır. Özsunar ve Peker [5], toz metalürjisi ile üretilmiş gözenekli paslanmaz çelik silindirlere su verilmesi işlemini FLUENT paket programında modellemiştir. Araştırmacılar su verme esnasında paslanmaz çelik numunelerde meydana gelen sıcaklık dağılımlarını inceleyerek, metallerin soğuma eğrilerini çizmişlerdir. Ataer vd. [6] gözenekli karbon çelik silindirlere su verme işlemini FORTRAN programını kullanarak modellemişler ve numunelerin soğuma eğrilerini çizmişlerdir.

Bu çalışmada, Toz Metalürjisi (T/M) ile üretilmiş gözenekli bakır silindirlere su verilmesi esnasında numunelerde meydana gelen sıcaklık dağılımları incelenmiş ardından gözenekli bakır numunelerin soğuma eğrileri çizilmiştir. Malzeme gözenekliliği parametresinin soğuma eğrilerine etkileri incelenmiştir. Bu problem FLUENT paket programında modellenmiştir. Problemde ısı taşınım katsayısı, malzemenin ısı iletim katsayısı, malzemenin özgül ısısı, suyun özellikleri sıcaklıkla değişmektedir. Değişen ısı taşınım katsayısı ve iletim katsayısı için C derleyicisinde kullanıcı tanımlı fonksiyon (UDF) yazılıp FLUENT'e aktarılmıştır.

Gözenekli silindirik bakır numuneler (ÇapxBoy: 2.5cmx3cm) erime sıcaklıkları altındaki yüksek sıcaklığa (700K) kadar ısıtılır ve Şekil 2'de görülen su banyosu içine daldırılır. Bu sırada numunelerde meydana gelen ısı transferi mekanizmaları sayısal olarak incelenmiş, bakır numunelerin soğuma eğrileri çizilmiştir. Malzeme gözenekliliği (%10, %20, %40) parametresinin soğuma eğrilerine etkileri incelenmiştir.



Şekil 2. Problemin şematik gösterimi

Çizelge 1'de analiz edilen numuneler için incelenen parametreler görülmektedir.

Çizelge 1. 2.5x3cm boyutundaki bakır numuneler için yapılan analizler

Bakır (2.5cmx3cm)	T_{ilk}=700K, T_{banyo}=298K			
	Porozite (%)	10	20	40

ALAN DENKLEMLERİ ve FORMÜLASYON

Problem analiz edilmeden önce yapılan kabuller şöyledir.

1. Banyo içindeki su durağandır.
2. Banyo sıcaklığı sabittir.
3. Çevre basıncı 1 atm'dir.
4. Banyo yeterince büyüktür,
5. Radyal yönde sıcaklık değişimi yoktur.
6. Bakır tozundan üretilen numunede, gözenekler küresel ve homojen olarak dağılmıştır.
7. Gözenekli malzemenin ısıl iletkenliği toz geometrisinden bağımsızdır.

Problem saf ısı iletimi problemi olarak FLUENT paket programında modellenmiştir. Silindirik koordinatlarda üç boyutlu enerji denklemi şu şekildedir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Bu denklemde görüldüğü gibi silindirik numunelerde sıcaklık dağılımı r, z ve θ'nın fonksiyonudur. Fakat radyal yöndeki sıcaklık değişimi ihmal edilmiştir. Böylece enerji denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Bu denklemin çözümünde kullanılan ilk şart ve sınır şartlar ise şöyledir.
İlk şart,

$$T(r,z,0) = T_i$$

Sınır şartlar,

$$\frac{\partial T(0,z,t)}{\partial r} = 0$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial z}(r,L,t) = h_{top}[T(r,L,t) - T_\infty]$$

$$k\frac{\partial T}{\partial z}(r,-L,t) = h_{bottom}[T(r,-L,t) - T_\infty]$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}(R,z,t) = h_{ver}[T(R,z,t) - T_\infty]$$

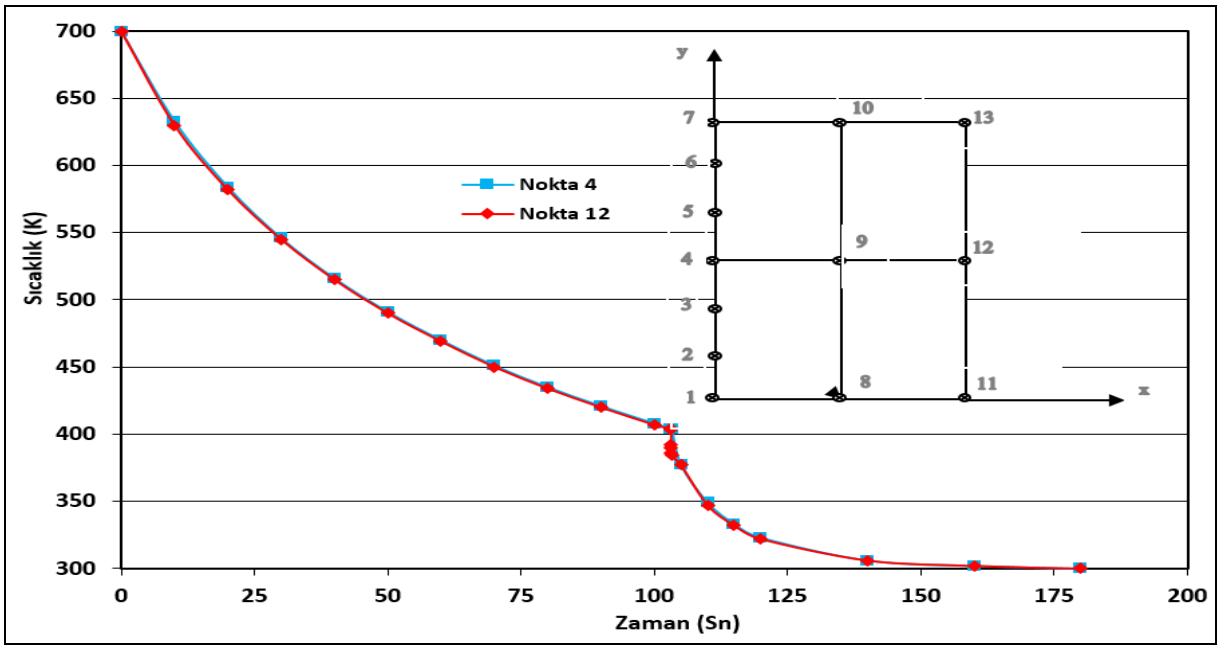
Bu sınır şartlar ve ilk şartlar FLUENT paket programında girilerek çözümleme yapılmıştır. Isı taşınım katsayısının hesaplanmasında kaynama ve doğal taşınım bağıntıları kullanılmıştır. Problemde ısı taşınım katsayısı sürekli değişmektedir. Isı transferi mekanizmaları da ΔT_e (T_s-T_{sat}) kızma farkına göre değişmektedir. Problemin çözümünde $\Delta T_e < 5\,K$ olduğu zaman doğal taşınım ısı transferi, $5K < \Delta T_e < 30\,K$ olduğu zaman çekirdek kaynama ısı transferi, $30K < \Delta T_e < 200\,K$ olduğu zaman film kaynama ısı transferi mekanizmaları olduğu ve $\Delta T_e > 200\,K$ olduğu zamansa radyasyon ve film kaynama ısı transfer mekanizmalarının birlikte meydana geldiği bilgisinden yararlanılmış [7] ve ısı taşınım katsayılarının hesaplanmasında bu ısı transferi mekanizmalarının formülleri kullanılmıştır.

SAYISAL SONUÇLAR

2.5cm çap ve 3cm boyunda ve değişik porozite oranlarındaki bakır numuneler (%10, %20 ve %40) 700K'e kadar ısıtılıp 298K'deki su banyosuna bırakılmışlardır. Bu sırada numunenin çeşitli noktaları için soğuma eğrileri çizilip ısı transferi mekanizmaları incelenmiştir.

%10 porozite oranına sahip bakır numuneler için soğuma eğrileri

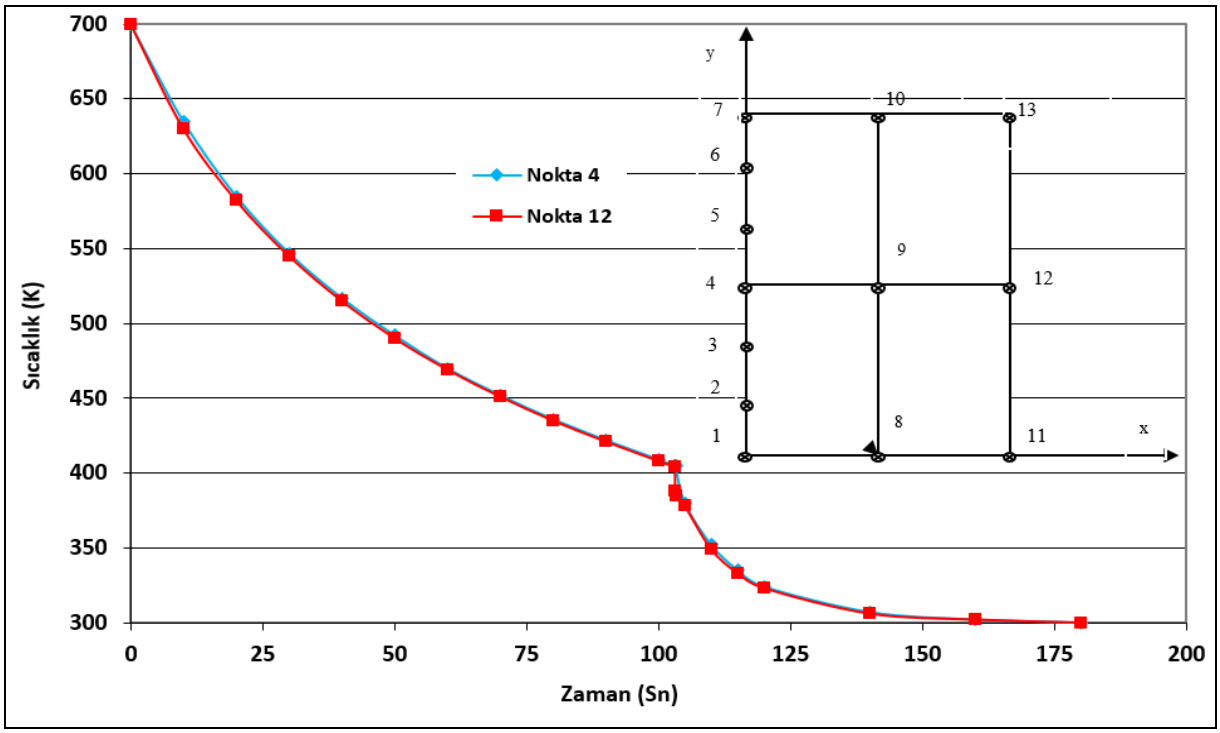
Bakırın ısı iletimi katsayısının yüksek olması sebebiyle ısı iletim direnci düşmüş ve paslanmaz çelikte [5] olduğu gibi noktalar arasında belirgin bir sıcaklık farklılığı oluşmamıştır. Şekil 3 incelendiğinde merkez noktası olan nokta 4 ve dış nokta olan nokta 12 arasındaki sıcaklık farkının bile çok küçük olup soğuma eğrilerinin çakışık olarak seyrettiği görülebilir. Nokta 12'de çekirdek kaynamayla beliren sıcaklık düşüşü kısa bir süre sonra nokta 4'te de kendini hissettirmiştir. Doğal konveksiyon aşamasındaki sıcaklıklar da film kaynama aşamasında olduğu gibi birbirine çok yakın seyretmiştir.
Nokta 4 ve 12 için soğuma eğrileri incelendiğinde sıcaklığın zamana göre değişiminden ısı transferi mekanizmaları rahatça çıkarılabilir. Sıcaklığın ani olarak düştüğü bölge çekirdek kaynama ısı transferi, sıcaklığın hızlı düşmeye başlayıp daha sonra sıcaklığın düşmesinin yavaşladığı bölge film kaynama ısı transferi, sıcaklığın düşmesinin çok yavaşladığı bölge ise doğal konveksiyon ısı transferi mekanizmalarını göstermektedir. %10 poroziteye sahip bakır numune için soğuma zamanı 175.88s bulunmuştur.



Şekil 3. 2.5x3cm boyutunda, %10 porozitede, 700K ilk sıcaklıkta olan, 298K banyo sıcaklığında bulunan bakır numunede nokta 4 ve 12 için soğuma eğrileri

%20 porozite oranına sahip bakır numuneler için soğuma eğrileri

Şekil 4'te görüldüğü gibi porozitenin %20'ye çıkmasıyla noktalar arasındaki sıcaklık farkı artmamıştır. %10 porozitedeki numuneyle hemen hemen aynı sıcaklıklar ortaya çıkmıştır. Bu bakırın ısı iletimi katsayısının yüksek olmasından kaynaklanmaktadır. Aynı boyut ve porozitedeki paslanmaz çelikte [5] iç ve dış noktalar arasında oldukça fazla sıcaklık farklılıkları oluşmuştur. Porozitenin artmasıyla soğuma zamanı da pek değişmemiştir. Aynı boyutta ve porozitedeki paslanmaz çelik numunelerde olduğu gibi hissedilebilir bir artış gözlemlenmemiştir. %20 porozitedeki bakır numune için soğuma zamanı 176.06s bulunmuştur. Paslanmaz çelik numunede [5] ise porozite %10'dan %20'ye arttırıldığında soğuma zamanı belirgin bir şekilde artmıştır. Soğuma zamanı %10 porozitedeki paslanmaz çelik numune için 241.94s, %20 porozitedeki paslanmaz çelik numune içinse 252.23s bulunmuştur. %10 poroziteden %20 poroziteye geçişte 10s'lik bir soğuma zamanı farkı ortaya çıkmıştır.

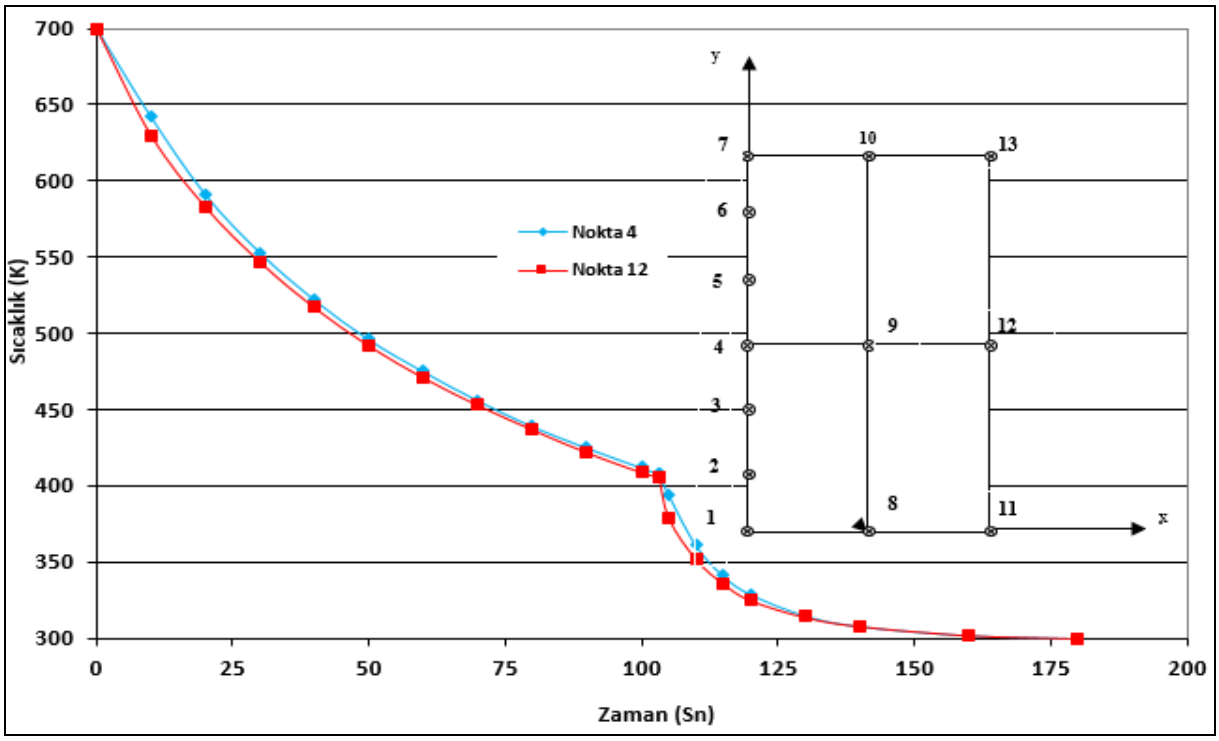


Şekil 4. 2.5x3cm boyutunda, %20 porozitede, 700K ilk sıcaklıkta olan, 298K banyo sıcaklığında bulunan bakır numunede nokta 4 ve 12 için soğuma eğrileri

%40 porozite oranına sahip bakır numuneler için soğuma eğrileri

Şekil 5'ten görüldüğü gibi sıcaklık farklılıkları %40 porozitede belirmeye başlamıştır. %10 ve %20 porozitedeki numunelerde nokta 4-12 için çizilen soğuma eğrileri çakışık gitmiştir. Porozite %40'a çıkarılınca daha düşük porozitede çakışık giden soğuma eğrilerine göre fark gözlemlenmiştir. Ancak bu fark paslanmaz çelik numunelerde [5] olduğu kadar fazla değildir. Soğuma zamanı açısından karşılaştırıldığında %10 ve %20 porozitedeki numunelere göre fazla bir fark elde edilmemiştir. Soğuma zamanı %40 porozitedeki numune için 178,46s bulunmuştur.

Soğuma süreleri arasındaki farkın çok az olmasının nedeni ısı iletimi katsayısının yüksek olmasıdır. Şekil 5'ten görüldüğü gibi iç ve dış noktaların soğuma eğrileri arasındaki fark ancak %40 porozitede kendini göstermiştir. Ve bu eğriler arasındaki fark %40 porozitedeki paslanmaz çelik numune [5] ile karşılaştırıldığından farkın çok küçük olduğu görülür. Şekil 5 incelendiğinde nokta 4 ve nokta 12'nin çekirdek kaynamaya hemen hemen aynı zamanda başladığı görülür. Oysa %40 porozitedeki paslanmaz çelik numunede [5] nokta 4 ve 12'nin çekirdek kaynamaya başlama süresinde belirgin bir zaman farkı ortaya çıkmıştır.



Şekil 5. 2.5x3cm boyutunda, %40 porozitede, 700K ilk sıcaklıkta olan, 298K banyo sıcaklığında bulunan bakır numunede nokta 4 ve 12 için soğuma eğrileri

SONUÇLAR

2.5x3cm boyutundaki bakır numune için %10, %20, %40 porozite için soğuma zamanları sırasıyla 175.88s, 176.06s, 178.46sn bulunmuştur. Bakır numunelerdeki noktalarda sıcaklık farklılıkları pek fazla ortaya çıkmamıştır. Noktaların soğuma eğrileri birbirine çok yakın seyretmiştir. Noktalar arasındaki sıcaklık farkı %40 porozitede kendini hissettirmiştir. Soğuma süreleri arasındaki farkın çok az olmasının nedeni bakırın ısı iletimi katsayısının yüksek olmasıdır. Porozitenin artmasıyla malzemelerin ısı iletimi katsayısı azalmıştır. Bu iç noktalarda sıcaklığın daha çok artmasına, dış noktalarda ise sıcaklığın azalmasına neden olmuştur. Isı iletimi katsayısı yüksek olan metallerde ise ancak çok fazla miktarda artan porozite soğuma zamanlarını ve sıcaklıkları etkilemiştir.

KAYNAKLAR

[1] ASM Committee on Quenching, *Quenching and Martempering*, American Society for Metals, 1964.

[2] İ. Karaaslan, *Değişken Sınır Şartlarında Gözenekli Metallerin Soğuma Eğrilerinin Analitik Yaklaşımla Elde Edilmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.

[3] İ. K. Yılmaz, *Gözenekli Malzemelerde Soğuma Eğrilerinin Sayısal Yöntemle Elde Edilmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2005.

[4] O. Yılmaz, *Gözenekli Malzemelerin Soğuma Eğrilerinin Deneysel Olarak İncelenmesi* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2006.

[5] A. Özsunar, G. Peker, Toz metal silindirik bir parçanın su verme işleminde gözenekliliğin soğuma eğrilerine etkisinin sayısal olarak incelenmesi, *Journal of the Faculty of Engineering & Architecture of Gazi University*. 25 (2010) 299-309.

[6] Ö. E. Ataer, C., Aygün, İ. Uslan, A Numerical Approach to the Cooling Curves of Porous P/M Materials for Quenching Process, *Powder Technology*. 137 (2003) 159-166. https://doi.org/10.1016/j.powtec.2003.08.052.

[7] D. P. Dewitt, F. P. Incropera, *Isı ve Kütle Geçişinin Temelleri*, T. Derbentli, Literatür Yayıncılık, 2006.

[8] J. C. Y. Koh, A. Fortini, Prediction of Thermal Conductivity and Electrical Resistivity of Porous Metallic Materials, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 16 (1973) 2013-2021. https://doi.org/10.1016/0017-9310(73)90104-X.

EĞRİSEL ÇUBUKLARIN DOĞRUSAL OLMAYAN DİNAMİĞİ

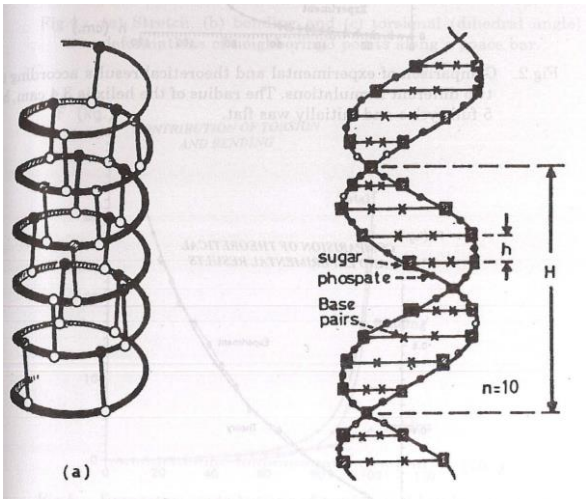
Atilla Aşkar[1]
[1]Koç Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Eğrisel çubukların ve özellikle helisin şekil değiştirmelerinde Türkiye kökenli önemli çalışmalar olmuştur. Bu çalışmalarda küçük şekil ve yer değiştirmeler için doğrusal denklemler elde edilmiş ve hesaplamalar verilmiştir. Bu çalışmada eğrisel çubukların genel doğrusal olmayan denklemleri ile Helis'te çok büyük yerdeğiştirmelerle kapalı çözüm ve deneyle kuramın denetlenmesi verilmektedir. Bunu izleyerek iki farklı yaklaşımla da dinamik davranışlar sunulmuştur.

GİRİŞ

Konuya ilginin kaynağı yapı öğesi olmaları ve biyolojik polimerlerden DNA, RNA ve proteinlerin yapılarının helisler olmasıdır. Helisler eğrilik ve burulması sabit olan tek eğridir. DNA çift helisten oluşur ve protein tek helis yapısındadır. Bunun sonucunda DNA çok stabil, helis ise çok esnektir. Aşağıda bu moleküllerin şemaları görünüyor.





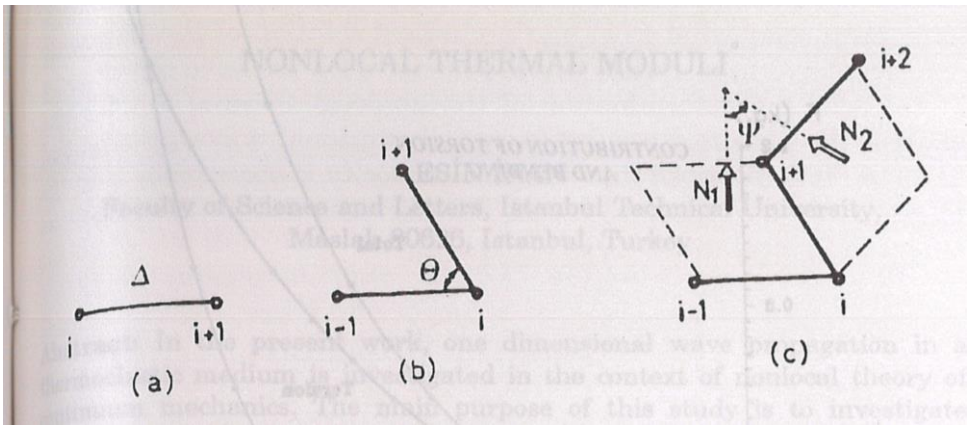
Helis eğrileri ve bunu izleyerek şekil ve yer değiştirmeleri eğriyi tanımlayan yay uzunluğu, eğrilik ve burulma cinsinden Frenest denklemleriyle elde edilir. Değişik yaklaşımlardan önceki çalışmalarda sonzuz küçük eğri çubuk parçasının denge - şekil değiştirmeleriyle elde edilmiştir. Burada ise, farklı bir yaklaşımla çubuk içinde birbirine yakın iki, üç ve dört nokta ile başlanmaktadır. Sırasıyla, iki nokta arasındaki uzaklık gerilemeyi, üç nokta arasındaki açı eğilmeyi ve dört noktadan üçer noktalarla tanımlanan iki düzlem arasındaki açı da burulmayı vermektedir. Bu noktaların başlangıçtaki değerlerden sapmaları ise şekil ve yerdeğiştirmeleri tanımlamaktadır.

Seçilen noktaların denge konumları büyük harfler $\mathbf{X}_k$ ve yer değiştirdikten sonraki konumları da küçük harflerle $\mathbf{x}_k$ vektörleriyle, şekil değiştirmelerle oluşan yer değiştirmeler de $\mathbf{u}_k$ ile gösterilsin. Dört noktayla çalışacağımız için, tanımları göstergelere (indekslere) boğmamak amacıyla, noktaları ve yerdeğiştirmeleri $k = 1,2,3,4$ göstergeleriyle adlandıralım, noktalar arasındaki uzaklıkları da eşit alalım. Bu adlandırmaları izleyerek temel büyüklükler elde edilir:

Yer değiştirmeler: $\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_k = \mathbf{u}_k$ Yay uzunluğu: $\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1} \| = \Delta s$

$$\cos\beta = \frac{(x_3 - x_2)\cdot(x_2 - x_1)}{(\Delta s)^2}$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{(\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2)\times(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)}{(\Delta s)^2} \qquad \mathbf{n}_2 = \frac{(\mathrm{x}_4 - \mathrm{x}_3)\times(\mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_2)}{(\Delta s)^2} \qquad \cos\psi = \| \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 \|$$



Denge konumundaki büyüklükler de, yukarıdakilerle aynı yapıda olup, büyük harferle gösterilir.

AYRIK NOKTALARDAN SÜREKLİ ORTAMA GEÇİŞ

Seçilen dört noktanIn bir birine yakın olması, dinamik durumda da dalga boylarının ayrık noktalar arasındaki uzaklıklardan büyük olmasıyla sürekli ortam denklemleri elde edilir. Sürekli ortama geçiş, yerdeğiştirmiş konumkardaki büyüklüklerin yay uzunluk değişkenine göre türevlerinden oluşur [3].

$$\cos\beta = \mathrm{x}'\cdot\mathrm{x}' - O(\Delta s)^2 \approx \mathrm{x}'\cdot\mathrm{x}'$$

$$\mathbf{n}_1 = \mathrm{x}'\times\mathrm{x}''' - O(\Delta s)^2 \approx \mathrm{x}'\times\mathrm{x}''' \quad \mathbf{n}_2 = \mathrm{x}'\times\mathrm{x}''' + O(\Delta s)^2 \approx \mathrm{x}'\times\mathrm{x}'''$$

Uzaydaki bir eğrinin özellikleri Frenest formülleriyle veriliyor. Bu formüller eğrinin koordinatlarının yay uzunluğuna göre türevleriyle belirlenir:

$$\text{Birim teğet vektör: } \frac{d\mathrm{x}}{ds} = \mathbf{T} \;\rightarrow\; \mathrm{x}' = \mathbf{T}$$

$$\text{Birim dik vektör N ve eğrilik} \quad \kappa : \mathbf{N} = \kappa\frac{dT}{ds} \;\rightarrow\; \mathbf{N} = \mathbf{T}' = \frac{\mathrm{x}''}{\| \mathbf{T}' \|} \quad \kappa = \mathrm{x}'\times\mathrm{x}''$$

İkinci birim dik vektör (Binormal) **B** ve burulma τ : $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \;\rightarrow\; -\tau = \| \mathrm{x}' \times \mathrm{x}''' \|$$

Buradaki sonuçları yukarıda yerleştirince, bunu izleyerek noktaların birbirine yakın olması sonucunda $\cos\beta$ ve $\cos\psi$ nin de küçük olması nedeniyle, kullanışlı sonuçlara varılır:

$$\cos\beta = 1 - \frac{1}{2}(\kappa\Delta s)^2 \quad \cos\psi = 1 - \frac{1}{2}(\tau\Delta s)^2 \quad \rightarrow \quad \beta = \kappa\Delta s \quad \psi = \tau\Delta s$$

Buradaki sonuçları kullanarak, D_b ve D_t sırasıyla eğilme ve burulma katsayıları olup, şekil değiştirmiş konumdaki iç enerji ve t zaman değişkeniyle kinetik enerji elde edilir:

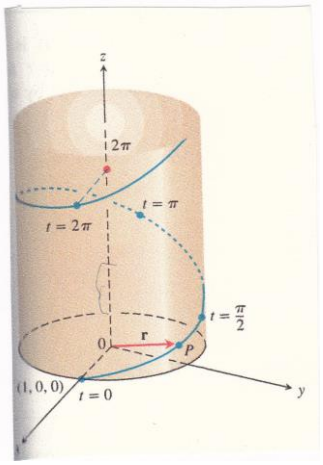
$$V_1 = \frac{1}{2}(D_b\cos\beta + D_t\cos\psi) \quad \rightarrow \quad V_2 \approx V_1 = \frac{1}{2}(D_b\kappa^2 + D_t\tau^2) \quad KE = \frac{1}{2}\rho \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\|^2$$

Yukarıda verilen iç enerjiyi iki yapıda ele alacağız ve noktaların birbirine yakınlığını kullanarak *cosinus* terimlerindeki yaklaşıklığın etkisini de inceleyeceğiz.

UYGULAMALAR

Helisin denklemi: Helisin silindir koordinatları cinsinden gösterimi:

$$x = (\alpha\cos\theta,\ \alpha\sin\theta,\ b\theta)$$



Bu gösterimi Frenet formüllerinde yerleştirerek birim vektörlerle eğrilik κ ve burulma τ kolayca elde edilir:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad ds = c\,d\theta \quad \mathbf{T} = \frac{1}{c}(\alpha\sin\theta, \alpha\cos\theta, b)$$

$$\mathbf{N} = -(\cos\theta, \sin\theta, 0) \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c}(b\sin\theta, -b\cos\theta, \alpha)$$

$$\kappa = \frac{a}{c} \quad \rightarrow \quad \rho \equiv \frac{1}{\kappa} \qquad \tau = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad T \equiv \frac{1}{\tau}$$

Denge konumunda helisi tanımlayan katsayılar da, kullanılan tanım uyarınca, yukarıdaki a, b, c ler yerine A, B, C kullanılarak aynı yapıdadır. Denge konumuda, helisi tanımlayan eğrilik ve burulma da bu katsayıları kullanarak elde edilir.

Bu tanıtımı izleyen kısımlarda helislerle ilgili üç türden uygulama sonuçları sunulacaktır.

(i) Statik davranışta helis yapısını koruyan, sadece eğrilik ve burulmaların değiştiği şekil değiştirmeler [7].

Bu durumda kapalı çözümler elde edilebilmektedir. Yukarıda verilen V_2 yi helis için elde edilen eğrilik ve burulmaları kullanarak, helisin ekseni boyunca uygulanan kuvvet altında bir dönümdeki uzunluğu $h = 2\pi b$ nin değişimleri incelenmektedir. Hesaplamalarda kullanılan helisin eğrilik yarı çapı 3,4 sm dir. Başlangıçta helisin çevrimlerinin üst üste bidiği ve dolayısıyla bir yaklaşıklık olarak burulmasının sıfır olduğu kabullenilmiştir. Gerekli kalibrasyonlarla helisin eğilme ve burulma dirençleri de $D_b = 203,09\ kg.cm^2$ ve $D_t = 13{,}61\ kg.cm^2$ olarak saptanmıştır.

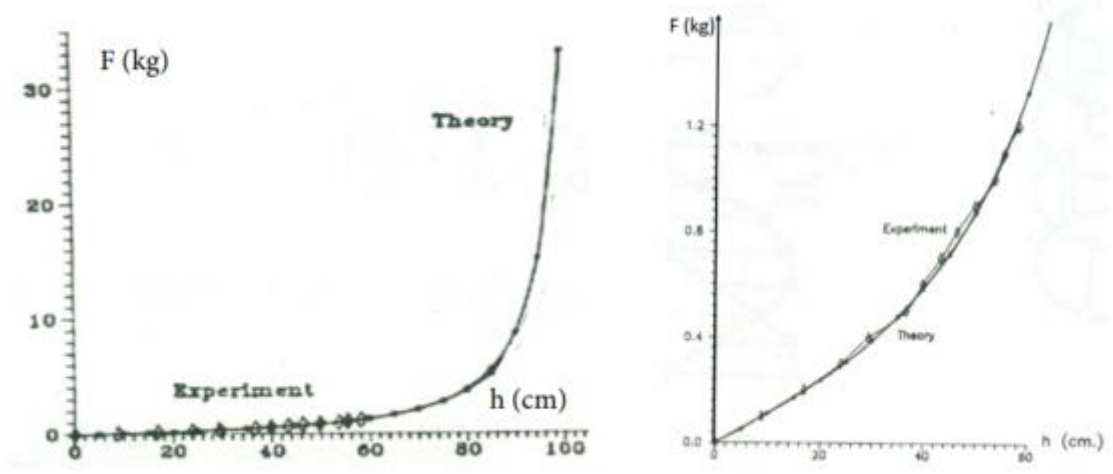
(ii) Çemberin dinamik davranışı [8].

Çember heliste $b = 0 = a$ karşıt gelen özel yapıdır. Sonuçlar simetrik olmayan ilk hız verildiğinde oluşan dinamiği sunuyor. Bu sonuçlar sayısal yöntemlerle elde edilmiştir.

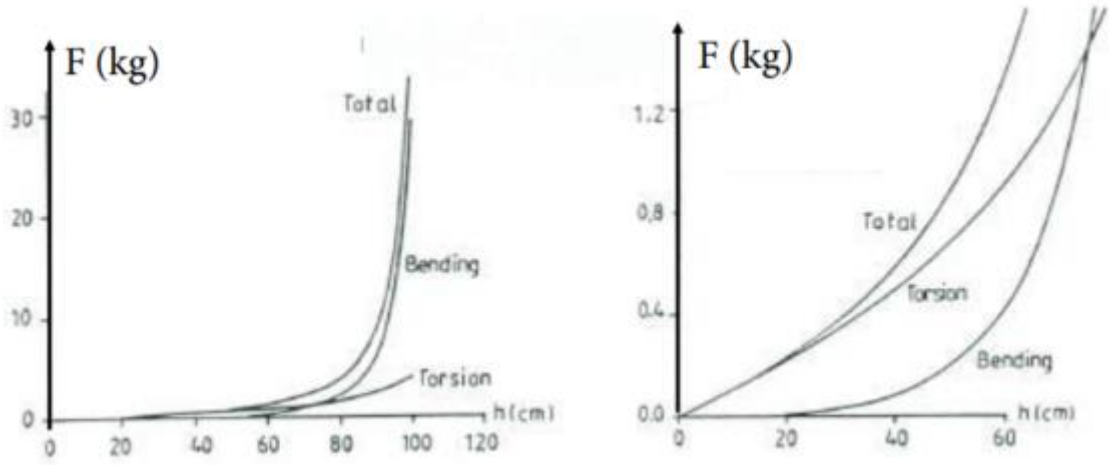
(iii) Helisin Dinamik davranışı [9].

Bu sonuçlar da dinamiğin az sayıda temel modlarını kullanarak sayısal yoldan elde edilmiştir.

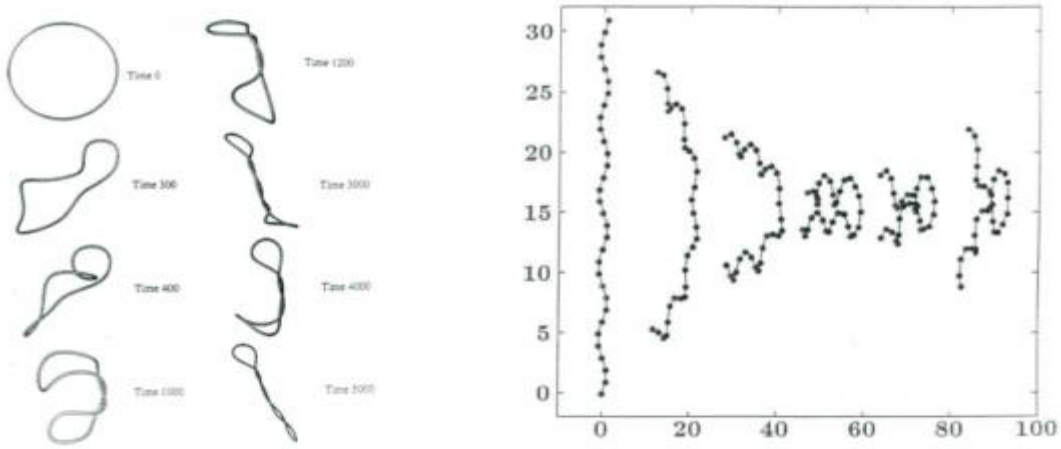
SONUÇLAR



Şekil 1. Statik durumda kapalı çözümün deneylerle karşılaştırılması. Solda genel davranış ve sağda ise genel davranışın başlangıcının ayrıntılı görünümü;



Şekil 2. Toplam enerjinin eğilme ve burulma türünde dağılımı. Solda genel davranış, sağda ise genel davranışın başlangıcının ayrıntılı görünümü [6].



Şekil 3. Verilen ilk hızla uzun dönem dinamiği: solda çemberin davranışı [8]; sağda ise helisin uzun dönem davranışı [9]. Bu çalışmalar tek helisli olup fevkalade esnek olan protein katlanmasını anlayabilme amacıyla yapılmıştır.

DOĞADAN YAPI SİSTEMİ OLARAK HELİSTEN ESİNLENEBİLİR MİYİZ?

Çift helis olarak acaba DNA nın yapısı acaba bir esin kaynağı olabilir mi? Çok narin yapılı minarelerin asırlarca dayanmasının nedeni acaba merdivenlerden oluşan helis çekirdeği mi? Süratle, parçaları birleştirerek, geniş açıklıklı, esnek, hatta plastik yapay malzemelerden kuleler yapılabilir mi? TV, telefon, Internet kuleleri, rüzgar enerji kuleleri, gökdelenler, uçak gövdeleri, …? Sorgulama türünden bu görüşler belki yapı mühendislerinin ilgisini çeker umuduyla sunulmaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Vural Cinemre *Başlangıç Değerleri Metodu ile Helisel Çubukların Statik Hesabı, Doktora Tezi, İ. T. Ü. (1960)*

[2] Ümit Çelik *Kesitlerin Kayması ve ekseninin uzaması göz önüne alınarak eğri eksenli çubukların kesme kuvvati ve moment deşerleri ile elde edilmesi, Yük. Lis. Tezi, İ. T. Ü. (1984)*

[3] Mustafa İnan *Çubukların Genel Teorisi, I. T. Ü. Basımevi*

[4] Yalçın Aköz ve Mehmet Omurtag *The mixed FE formulation for three dimensional bars, Int. J. Solids and Stuctures, 28, 2, 225 - 234, (1991)*

[5] Mehmet Omurtag ve Yalçın Aköz *The mixed FE formulation of the helical beamswith variable cross - section under arbitrary loading, Computers and Structures, 43, 2, 325 - 331 (1992)*

[6] Attila Aşkar *Lattice Dynamical Foundations of Continuum Theory of Solids: Elasticity, piezoelectricity, Viscoelasticity, Plasticity., World Scientific, Singapore (1988)*

[7] Attila Aşkar ve Yalçın Aköz *Large deformations of helices, Bull. Tech. Univ. Istanbul, 45, 275 - 298, (1992)*

[8] Tamar Schlick *(Bu yazarın yüzlerce makalesi var: izlemeye değer. Sunulan şekil kendisinin yayın öncesi verdiği bir özel iletişimden alınmadır.)*

[9] Attila Aşkar *"Subspace Method for Long Time Scale Molecular Dynamics", A. Askar, B.Space and H. Rabitz, J. Phys. Chem., 99, No. 19, 7330-7338 (1995)*



© 2021, İstanbul Teknik Üniversitesi

ISBN No / ISBN Number : 978-975-561-523-3

İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları. Yayın No / ITU Publications, Publication No : 2021.2KNF/5

Yayın Tarihi /Date of Publication : 15 Ekim / October 2021