

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ÇUBUKLARIN TİTREŞİM FREKANSLARININ VE BURKULMA
YÜKLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİYLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Makina Müh. Uygur YENİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 12 Ocak 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 1996

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Vedat KARADAĞ

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Teoman KURTAY

Yard.Doç.Dr. Vahit MERMERTAŞ

ŞUBAT 1996

ÖNSÖZ:

Mühendislik eğitimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım İTÜ Makina Fakültesi öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Danışmanım sayın Prof.Dr. Vedat KARADAĞ'a değerli katkı ve yardımlarından ötürü teşekkür ederim.

Uygur YENİ

Ocak 1996



İÇİNDEKİLER:

SEMBOLLER	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	VII
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
BÖLÜM 1:GİRİŞ	1
BÖLÜM 2:TEMEL DENKLEMLER	4
2.1.Enerji Denklemleri:	4
2.1.1.Potansiyel Enerji Denklemleri:	4
2.1.2. Kinetik Enerji Denklemleri	6
2.2.Sonlu Elemanlar Yöntemi	7
2.3.Eleman Matrislerinin Elde Edilmesi	8
2.3.1.İnterpolasyon Fonksiyonlarının Elde Edilmesi	9
2.4.Burkulma Problemi	14
2.5.Bilgisayar Kodları	16
BÖLÜM 3 :KÜTLE MATRİSİ	18
3.1.Eğilme Etkisi	18
3.2.Boyuna Yerdeğişimi Etkisi:	19
3.3.Eleman Kütle Matrisi	20
3.4.Nokta Yükün Kütle Matrislerine Etkisi	20
BÖLÜM 4 :RİJİTLİK MATRİSİ	22
4.1.Eğilme Rijitlik Matrisi	22
4.2.Geometrik Rijitlik Matrisi	23
4.3.Boyuna Yer Değişimi Rijitlik Matrisi	24
4.4.Eleman Rijitlik Matrisi	25
BÖLÜM 5:DENEY VE SAYISALSONUÇLAR	27
5.1.Eğilme Deneyi	27
5.2.Titreşim Analizi	30
5.3.Burkulma Analizi	34

5.4.Sonuçlar	37
5.5.Yapılabilecek Çalışmalar ve Öneriler	38
KAYNAKLAR.....	39
EKLER.....	40
EK-1:Deney Şeması.....	41
EK-2:Bilgisayar Programları ve Akış Diyagramları.....	42
ÖZGEÇMİŞ	53



SEMBOLLER:

A:Çubuğun Kesit Alanı [m^2]
b:Çubuğun Genişliği [m]
 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$:İnterpolasyon Fonksiyonları
d:Türev Operatörü
h:Çubuğun Kalınlığı[m]
 $[N]_u$: (2.21) eşitliği.
 $[N]_w$: (2.27) eşitliği.
 $[K_G]$:Geometrik Rijitlik Matrisi.
E:Elastiklik Modülü [N/m^2]
f:Frekans[Hz]
P:Burkulma Yüğü [N]
I:Kesit Atalet Momenti [m^4]
[K]: Rijitlik Matrisi
 l :Sonlu Çubuk Eleman Boyu [m]
L:Çubuk Uzunluğu [m]
[M]:Kütle Matrisi
 U_i :Çubuğun Elemanının Potansiyel Enerjisi[J/sn]
u:Boyuna Yer Değıştirme[m]
 V_i : Potansiyel Enerji [J/sn]
V:Çubuğun Hacmi [m^3]
W:Virtüel İş
 v :Çubuk Elemanı Hacmi [m^3]
i:İterasyon Sayısı
n:Eleman Numarası
w:Eğılme Yer Değıştirmesi[m]
 w_1, ϕ_1, w_2, ϕ_2 :Bir Elemanın 1.ve 2. Nodundaki Eğılme Ve Dönmeler.
x,y,z:Kordinat Sistemi
 $[]^T$:Matris Transpozese
(),():x'e ve zamana göre türev
()_w:Eğılme
()_u:Boyuna Yer Değıştirme
 ϵ :x/l
 ∂ :Kısmı Türev Operatörü
 δ :Virtüel İşlem Operatörü
{ δ }:Genelleştirilmiş Kordinat Vektörü
 λ :Frekans Parametresi
 ρ :Yoğunluk [kg/m^3]

σ_x :Normal Gerilme [N/m²]
 τ_{xy} :Kayma Gerilmesi [N/m²]
 n_d :Motorun Devir Sayısı [dev/dak]
 ω :Frekans [rad/sn]
 f_ϕ :Sehim Miktarı [m]
 Ω :Frekans [rad/sn]
 m_{ek} :Serbest Uca Eklenen Kütle [kg]



ŞEKİLLER LİSTESİ:

Şekil 1.1.Sonlu Elemanlar Akış Çizelgesi.....	2
Şekil 2.1. L Uzunluğunda Dikdörtgen Kesitli Çubuk.....	4
Şekil 2-2 Ankastre-Serbest Çubuğun İki Değişik Modeli.....	9
Şekil 2.3 Tek Elamanlı Çubuğun Eğilme Kordinatları.....	10
Şekil 2.4.Çeşitli Mesnet Şartlarında Kirişler	15
Şekil 2.5 Dört Elemana Ayrılmış Çubuk Ve Bilgisayar Kodları	17
Şekil 5.1.Numunelerin Yüklenme Şekli	27
Şekil 5.2.Plastik Çubuğun Yük-Sehim Grafiği	29
Şekil 5.3. Plastik Çubuğun Yük-Sehim Grafiği	29
Şekil 5.4. C67 Çubuğunun Yük-Sehim Grafiği.	30
Şekil 5.5.Plastik çubuğun Serbest Titreşim Frekansları.....	33
Şekil 5.6.Plastik Çubuğun Titreşim Frekansları (Serbest Ucunda 0.085 kg)...	33



TABLÖLER LİSTESİ.

Tablo 2.1.Birinci Elenan İçin Kordinatlar	16
Tablo 2.2.İkinci Elenan İçin Kordinatlar	17
Tablo 5.1.Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Titreşim Frekansları.....	31
Tablo 5.2.Dikdörtgen Kesitli C67 Çubuğun Titreşim Frekansları.....	31
Tablo 5.3.Ankastre-Serbest Halde C67 Çubuğun Serbest Ucundaki Kütlenin Frekansa Etkisi.....	32
Tablo 5.4.Ankastre-Serbest Halde Plastik Çubuğun Serbest Ucundaki Kütlenin Frekansa Etkisi.....	32
Tablo 5.5.Dikdörtgen Kesitli C67 Çubuğunun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri.....	34
Tablo 5.6.Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri.....	35
Tablo 5.7.Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun SerbestUcundaki Kütlenin Burkulma Yüküne Etkisi	35
Tablo 5.8. Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Metal Çubuğun Serbest Ucundaki Kütlenin Burkulma Yüküne Etkisi	36
Tablo 5.9.Ankastre-serbest plastik çubuğun bazı dinamik yükleri	36
Tablo 5.10.Eksenel Kuvvetin Çubuk Özfrekans Değerlerine Etkisi.....	37

ÖZET:

Bu çalışmada , Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak elastik çubukların değişik sınır şartlarında titreşim karakteristikleri , statik ve dinamik burkulma yükleri incelenmiştir.

Çubukların titreşim karakteristiklerinin incelenmesi ankastre-serbest , ankastre-ankastre ve basit-basit sınır şartlarında yapılmıştır. Ankastre-serbest halde çubuğun serbest ucunda nokta kütle etkisinde hesaplamalara dahil edilmiştir. Yine çubukların burkulma yükleri ankastre-serbest , ankastre-basit , basit-basit sınır şartlarında statik ve dinamik olarak incelenmiştir.

Teorik ve deneysel çalışmaları yapabilmek için birisi metal diğeri plastik olmak üzere iki çubuk kullanılmıştır. Bu çubukların elastiklik modülleri yapılan eğilme deneyi ile elde edilmiştir. Deney sonucunda elastiklik modülleri beklenen aralıklarda hesaplanmıştır.

Çubukların ankastre-serbest halde serbest frekansları ve serbest uçta kütle bulunması durumunda bunun frekansa etkisi deneysel olarak incelenmiştir. Ayrıca plastik çubuğun burkulma yükleri ankastre-serbest sınır şartlarında statik ve dinamik olarak ölçülmüştür. Değişik sınır şartları için teorik olarak elde edilen serbest frekanslar ve burkulma yükleri ile deneysel olarak elde edilen değerler birbirlerine yakınlık göstermektedir.

SUMMARY:

THE FINITE ELEMENT ANALYSIS OF VIBRATION FREQUENCIES AND BUCKLING LOADS OF ELASTIC BEAMS.

In this study , vibrational characteristics and buckling loads of rectangular cross section beams are calculated by the finite element method.

The Finite Element Method approximates a structure in two distinct ways. The first approximation made in finite element modelling is to divide the structure into number of small simple parts. These small parts are called finite elements and the procedure of dividing the structure is called discretization. Each element has an equation of motion that can easily be solved or approximated. Each element has endpoints called nodes , which connect it to the next elements. The equation of vibration for each individual finite element is then determined and solved .This forms the second level of approximation in the finite element method.

In the analysis of free vibration , effect of longitudinal displacement of the beam is considered. In addition , it is taken into account that fixed-free beam which has a lumped mass effect on the beam's free end node. In the buckling analysis , both static and dynamic calculations are presented. For this purpose , beam is considered as a rectangular beam. The beam is of rectangular cross section area A with width b , thickness h and length L. Also associated with the beam is a flexural bending stiffness EI , where E is Young's Modulus for the beam , I is cross-sectional area moment of inertia about the z axis.

In the middle of xz plane , the deflection of the beam in the y direction is noted as $w(x,t)$ and in the x direction the deflection of the beam is noted as $u(x,t)$. These deflections are defined by 2nd and 3rd degree polynomials. $C_1, \dots, C_6$ are real constants of integration with respect to x.

$$w(x,t) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x^1 + c_4 \quad (1)$$

$$u(x, t) = c_5 x + c_6 \quad (2)$$

In order to analyze, the equation of motion of the system, using Hamilton's principle can be written as follows:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_v = 0 \quad (3)$$

where T is kinetic energy, U is potential energy and δW_v is virtual work done by active forces which affect the system.

After required mathematical steps the equation of motion of the system becomes as follows:

$$[K] - [M]\omega_i^2 \{\delta\}_i = 0 \quad (4)$$

The mass and stiffness matrices are found through the expressions of potential and kinetic energy and by writing the virtual work expression in equation of Hamilton Principle.

For a non-rotating beam undergoing transverse vibration, the potential energy is given by the expression.

$$V_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (5)$$

In the finite element formulation, the beam is divided into elements and the above expression becomes

$$V_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (6)$$

where

$$w = [N]_w \{\delta\}_w \quad (7)$$

The equation (6) yields the following.

$$V_1 = \frac{1}{2} \{\delta\}_w^T [K_e]_w \{\delta\}_w \quad (8)$$

If the beam stiffened due to additional stresses created by axial force, as it happens in the buckling problem, this axial force creates stress in the neutral surface and the additional strain energy stored in the element can be written as follows:

$$V_2 = \frac{1}{2} A \int_l \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (9)$$

This equation (9) yields the following.

$$V_2 = \frac{1}{2} \{\delta\}_w^T [K_G] \{\delta\}_w \quad (10)$$

where $[K_G]$ is called the geometrik stiffness matrix.

Because of longitudinal displacement, the stored potential energy in the element is,

$$V_{boy} = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (11)$$

where

$$u = [N]_u \{\delta\}_u \quad (12)$$

and the equation (11) yields the following:

$$V_{boy} = \frac{1}{2} \{\delta\}_u^T [K_e]_u \{\delta\}_u \quad (13)$$

The total stiffness matrices for bending vibration is as follows;

$$[K_e] = [K_e]_u + [K_e]_w \quad (14)$$

In order to obtain the mass matrix , the kinetic energy which is equal to work done by inertia forces of the beam mass is written as equation (15) for transverse vibrations in xz plane using Euler theory.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_L \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] dx \quad (15)$$

In this equation , the first term is the kinetic energy due to longitudinal displacement and the second term is bending energy respectively.

In the case of a lumped mass on the beam's free end node, the kinetic energy due to this mass is calculated as follows:

$$T_{ek} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx(L)}{dt} \right)^2 \quad (16)$$

The element matrices given above are combined to form the global stiffness and mass matrices according to FEM formulation. Using these matrices the system equations are formed as follows:

$$[[K] - [M]\omega_i^2] \{ \delta \}_i = 0 \quad (17)$$

and solved numerically.

In the buckling problem , determining the critical buckling load of an elastic structure is investigate. This corresponds to the calculations of eigenvalues of the generalized eigenvalue problem;

The buckling loads of the beams , can be calculated by using equation (18),

$$P = \lambda \frac{EI}{L^2} \quad (18)$$

The critical buckling P_{cr} , also called the stability limit , is the minimum of the equation (18). When P is equal to P_{cr} , the first eigenfrequency becomes zero. In that case , the beam takes a non-zero but static deflected shape; it corresponds to global buckling of the beam , also called Euler buckling.

In the case of a structure subjected to an initial stress field σ_x , the equation (9) must be added to the strain energy of the system. The equation (9) yields equation (10) with the geometric stiffness matrix component $[K_G]$.

Since the geometric stiffness expression possesses the same form as the linear stiffness one, it is immediately obvious that the linear equations of motion are replaced in the prestressed case by

$$[\lambda[K_G] + [K]]\{\delta\}_i + [M]\{\ddot{\delta}\}_i = 0 \quad (19)$$

and the associated eigenvalue problem takes the form.

$$[\lambda[K_G] + [K]]\{\delta\}_i - \Omega^2[M]\{\delta\}_i = 0 \quad (20)$$

When $\Omega=0$, we get an eigenproblem with eigenvalues λ_i corresponding to the critical loads.

$$[[K] + \lambda[K_G]]\{\delta\}_i = 0 \quad (21)$$

The equation (21) consists an eigenvalue problem in which we seek to determine the eigenvalues λ_i ($i=1,2,\dots$). The eigenvalue $\lambda_{\min}$ yields the prestress state in which the system buckles.

For theoretical calculations, two kinds of beams which one is a plastic beam and the other is a metal beam, are used. Young's Modulus of these materials are calculated by carrying out the bending experiments.

In the bending experiments, the beam rests on two supports and is loaded by means of a loading nose midway between supports. The load is applied to the specimen at the specified crosshead rate, and simultaneous load-deflection data is taken. The load-deflection curve is plotted, after required mathematical steps, Young's modulus of these materials are obtained.

In conclusion, the free vibration frequencies and the buckling loads of the elastic beams are investigated by the finite element method. Both buckling and vibration analyses are implemented for different boundary conditions

In vibration analysis , the free vibrations of fixed-free beam are obtained by theoretical calculations and carrying out experiments. The free eigenfrequencies of the beams are on the decrease , as the quantity of the mass on the free end node of fixed-free beam increases. At the definite quantity of mass , first eigenfrequency is equal to zero

In the case of a beam subjected to an axial force , the geometric stiffness matrix must be added to the equation of the motion of the beam. When the compression force is equal to the critical buckling load of the beam , the first eigenfrequency vanishes. The eigenfrequencies are systematically lowered by a compression load and increased by a traction force.

In buckling analysis , the critical buckling loads of the beams are obtained by calculations and by experiments for the fixed-free beam. In dynamic analysis, the first buckling load is equal to zero , when the beam is excited at the first eigenfrequency.



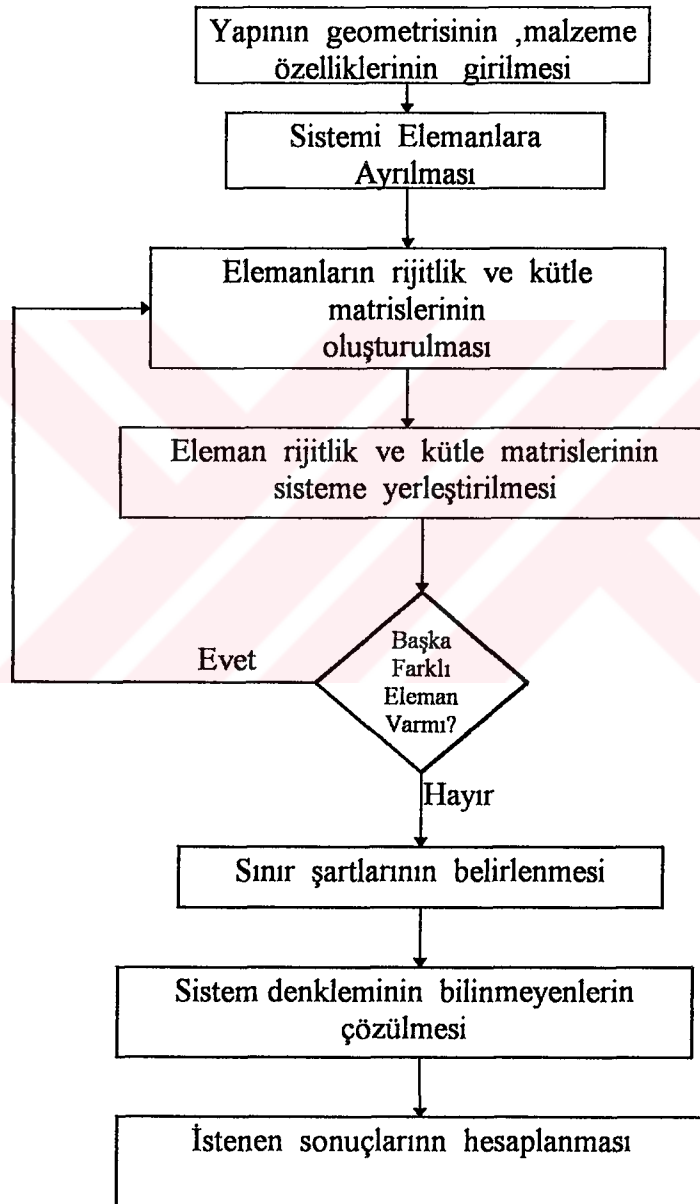
BÖLÜM 1:GİRİŞ:

Mekanikte sonlu ve karmaşık cisimlerin her türlü mukavemet problemlerini sayısal matematik yardımıyla çözmeye yarayan metodların başında Sonlu Elemanlar Yöntemi gelmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin bugün mühendislikte yaygın olarak kullanılmasındaki en büyük etken bilgisayar teknolojisinde meydana gelen hızlı gelişmedir. Sonlu elemanlar yöntemi temel olarak sürekli ortamların çok küçük bölgelere ayrılarak temsil edilmesi düşüncesine dayanır. Böyle küçük bölgelere sonlu eleman denir.

Sonlu elemanlar yöntemi çubuk , kiriş , plaka ve bunun gibi elemanların titreşim problemlerinin çözülmesinde ve eksenel bir yük ile zorlanan kirişlerin burkulma yüklerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

Yapılacak ilk iş çubuğu elemanlarına ayırmaktır. Bu işlem aynı zamanda sonsuz serbestlik dereceli asıl sistemi , sonlu serbestlik dereceli sisteme dönüştürmek demektir. Seçilen elemanların boyutları ve sayıları hem sistemi en iyi şekilde temsil edecek hem de hesaplamaları en aza indirecek şekilde olmalıdır. Dolayısıyla sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturan denklem sistemleri zorunlu olarak matris hesapları yardımıyla kurulur. Sistemin sonuçlarında kesinlik seçilen eleman sayısına bağlıdır. Eleman sayısı arttıkça sonuçtaki kesinlikte o derece artar. Bununla birlikte elemanların boyutları ve sistemin serbestlik derecesi de sonucu etkiler. Çünkü eleman sayısı arttıkça serbestlik dereceside artacağından elde edilecek matris boyutları da artacaktır. Sonlu elemanlar yönteminin temelini oluşturan denklem sistemleri zorunlu olarak matris hesaplamaları yardımıyla kurulur. Sonlu elemanlar yönteminin akış diyagramı Şekil 1.1'de görülmektedir.

Bu çalışmada elastik kirişlerin titreşim problemlerinin çözümü ankastre-serbest, ankastre-ankastre , basit-basit mesnet şartlarında ve ankastre-serbest halde nokta kütle etkisini de gözönüne alacak şekilde yapılmıştır. Aynı şekilde elastik kirişlerin burkulma yüklerinin hesaplanması ise ankastre-basit , ankastre-serbest ve basit-basit sınır şartlarında statik ve dinamik halde nokta kütle etkisinde düşünülerek yapılmıştır.



Şekil 1.1.Sonlu Elemanlar Akış Diyagramı

Hesaplamalar için birisi metal diğeri plastik iki dikdörtgen kesitli çubuk kullanılmıştır.Bu malzemelerin elastiklik modülleri yapılan eğilme deneyleri ile elde edilmiştir.Ayrıca yine bu çubukların ankastre-serbest halde birinci ve ikinci titreşim frekanslarıyla kritik burkulma yükleri teorik sonuçlarla mukayese edebilmek amacıyla deneysel olarak elde edilmiştir.

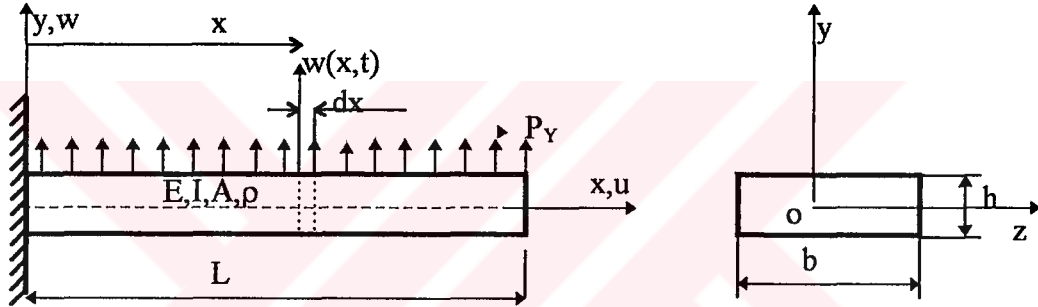
Teorik hesaplamaları yapabilmek amacıyla Fortran IV dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır.Bu program değişik mesnet şartlarında elastik çubukların özfrekans değerlerini , burkulma yüklerini nokta kütle ve dinamik haldeki etkiyle beraber hesaplayabilmektedir.Özdeğer problemi [6]'dan alınan bir bilgisayar programla çözülmüştür



BÖLÜM 2: TEMEL DENKLEMLER:

2.1. Enerji Denklemleri:

Dikdörtgen kesitli L uzunluğunda , kesit alanı A ve yoğunluğu ρ olan ince bir elastik çubuk için , Şekil 1.1'de görüldüğü gibi kordinat sistemi ; çubuğun asal eksenini x eksenini , genişliğini z eksenini ve kalınlığını da y eksenini gösterecek şekilde $oxyz$ eksen takımı seçilmiştir..



Şekil 2.1. L Uzunluğunda Dikdörtgen Kesitli Çubuk .

2.1.1. Potansiyel Enerji Denklemleri:

Enerji denklemlerinin elde edilmesinde titreşimin çubuğun bir düzleminde olacağı varsayılmıştır. Şekil 2.1'de xy düzlemi çubuğun titreştiği düzlemdir. Herhangi bir dönme hareketi yapmayan y doğrultusunda w yer değiştirmesi yapan elastik bir çubukta iç kuvvetlerden dolayı meydana gelen potansiyel enerji; τ_{yz} , σ_y , σ_z ve τ_{xz} gerilme bileşenlerinin sıfır olduğu kabulüyle aşağıdaki gibi elde edilir.

Herhangi bir noktadaki boyuna yer değiştirme u ,

$$u(x,y) = -y \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1)$$

ve ϵ_x birim uzaması ise;

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

olmaktadır. Dolayısıyla çubukta depolanmış olan potansiyel enerji ise aşağıdaki gibidir.

$$V_1 = \int_V \sigma_x \epsilon_x dV \quad (2.3)$$

$\sigma_x = E \epsilon_x$ ve $dV = dA dx$ eşitlikleri ve (2.2) denklemlerinin (2.3) denkleminde yerlerine yazılmasıyla,

$$V_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (2.4)$$

denklemini elde edilir. Bu ifade eğilmeden dolayı çubukta depolanan potansiyel enerjiyi ifade etmektedir.

Bu ifade de kesit atalet momenti I olup aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$I = \int_A y^2 dA \quad (2.5)$$

Bir çubukta dış kuvvetlerden dolayı, burkulma probleminde olduğu gibi gerilmelerin bulunması durumunda ise potansiyel enerji, (2.6) ifadesiyle hesaplanır.

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dV \quad (2.6)$$

Çubukta meydana gelen boyuna yöndeki u yer değiştirmelerinden dolayı çubukta depolanan potansiyel enerji ise,

$$dV_{\text{boy}} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dA \quad (2.7)$$

denklemlerle elde edilir. Çubuğun toplam boyuna yer değiştirme potansiyel enerjisi ise aşağıdaki denklemle elde edilir.

$$V_{\text{boy}} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.8)$$

2.1.2. Kinetik Enerji Denklemleri:

Çubuk kütesinin atalet kuvvetlerinin yaptıkları işe eşit olan kinetik enerji ise, düzlemsel titreşimler için ,

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_L \left[\left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] dx \quad (2.9)$$

denklemlerle ifade edilir. (2.10) kinetik enerji denklemindeki ilk terim boyuna uzama halindeki kinetik enerjiyi , ikinci terimse eğilme titreşimi halindeki kinetik enerjiyi ifade etmektedir.

Bunun yanısıra çubuk ucuna bir nokta kütle eklendiği zaman bu kütleden dolayı meydana gelecek kinetik enerjisinin düşünülmesi

gerekir.Çubuk serbest ucuna eklenecek kütlenin miktarı m_{ek} olmak üzere kinetik enerji,

$$T_{ek} = \frac{1}{2} m_{ek} \left(\frac{dx(L)}{dt} \right)^2 \quad (2.10)$$

ifadesiyle elde edilir.

2.2.Sonlu Elemanlar Yöntemi:

Önceki bölümde elde ettiğimiz enerji ve iş denklemlerinin sisteme etkisini incelemek için Hamilton prensibinin kullanılması gerekmektedir.Hamilton prensibi ise;

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_v = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde ifade edilmektedir.Bu denklemde T kinetik enerjiyi , U potansiyel enerjiyi ve δW_v ise virtüel işe karşılık gelmektedir. Hamilton prensibinden gerekli işlemlerin yapılmasıyla Lagrange bağıntısı elde edilir[3].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.12)$$

Bu ifadede L değeri ise,

$$L = T - U \quad (2.13)$$

Lagrange bağıntısında kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinin yazılmasıyla, serbest titreşimler için ;

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (2.14)$$

bağıntısı elde edilir. Harmonik hareket kabulüyle (2.14) denklemi,

$$[[K] - [M]\omega_i^2]\{\delta\}_i = 0 \quad (2.15)$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemde $i=1,2,3,\dots,n$ adet lineer homojen bilinmeyen vardır. $\{\delta\}_i$ ifadesinin sıfır olmamasından dolayı,

$$\det[[K] - [M]\omega_i^2] = |[K] - \omega_i^2[M]| = 0 \quad (2.16)$$

olması gerekir. (2.16) denkleminin n adet kökü vardır ve bunlar özdeğerler olarak adlandırılmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi (2.16) denkleminin çözülebilmesi amacıyla $[K]$ ve $[M]$ matrislerini elde etmek için yeterli yaklaşımı sağlamaktadır.

2.3. Eleman Matrislerinin Elde Edilmesi:

Şekil 2.2'de gösterilen çubuk asal eksen x doğrultusunda eşit uzunlukta yeterli sayıda elemana bölünmektedir. Uzunluğu l olan sonlu elemanın x -ekseni doğrultusundaki yerdeğişimi u , y -ekseni doğrultusundaki yerdeğişimi w ve eleman uçlarındaki dönme miktarı ϕ polinom olarak ifade edilirler.

Boyuna yerdeğiştirmesi u , iki düğüm ve x -ekseni doğrultusunda tek değişken olduğundan bu polinomun derecesi ikidir. Aynı şekilde w polinomunun düğüm sayısı iki ve her düğümdeki değişken sayısı eğilme ve dönme olarak belirlendiğinden dolayı derecesi üçtür.

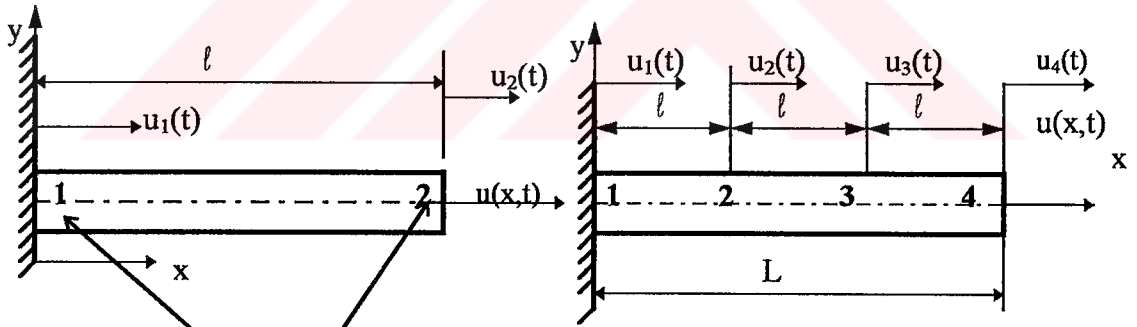
Bu şekilde sonsuz sayıdaki değişken sonlu sayıda değişkenle tanımlanmış olur. u ve w polinomlarının katsayılarının elde edilmesi ise bir sonraki bölümde anlatılacaktır.

2.3.1. İnterpolasyon Fonksiyonlarının Elde Edilmesi:

Ankastre-serbest bir çubuğun iki değişik modeli Şekil 2.2'de gösterilmektedir. Şekil 2.2-a'daki tek elemanlı model düşünülecek olursa, bu çubuk elemanının statik uzaması,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.17)$$

denklemini $[0, l]$ aralığında x 'in her değeri için sağlamalıdır.



Düğüm Noktaları.

(a)

Şekil 2.2 Ankastre-Serbest Çubuğun İki Değişik Modeli.

a-Tek elemanlı ,iki düğüm noktası. b-Üç elemanlı dört düğüm noktalı.

Denklem (2.17) integre edildiği zaman c_5 ve c_6 reel integral sabitleri olmak üzere

$$u(x,t) = c_5 x + c_6 \quad (2.18)$$

denklemini elde edilir. Elemanın sınır şartlarından C_5 ve C_6 katsayıları elde edilerek (2.18) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)u_1(t) + \frac{x}{\ell}u_2(t) \quad (2.19)$$

şekil fonksiyonları olarak adlandırılan $\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$, $\frac{x}{\ell}$ fonksiyonları ile (2.19)

denklemini elde edilir. $x=\ell$ olması şartıyla ,

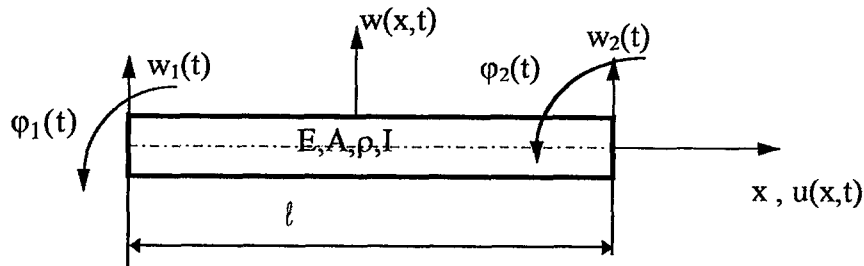
$$u = [N]_u \{\delta\}_u \quad (2.20)$$

$$[N]_u = [(1 - \epsilon); \epsilon] \quad (2.21)$$

$$\{\delta\}_u = \{u_1(t); u_2(t)\}^T \quad (2.22)$$

bağıntıları elde edilir.

Birçok sonlu ve karmaşık şekilli cisim sadece boyuna titreşimlerin incelenmesiyle modellenemez. Dolayısıyla eğilme titreşimlerinde gözönüne alınması gerekir. Çubukların eğilme titreşimlerini incelerken , eğilme esnasında meydana gelen dönmeden dolayı ortaya çıkan atalet kuvvetleri ve kayma şekil değiştirmesi ihmal edilmiştir. Bu şekilde yapılan çubuk teorisine Basit Çubuk Teorisi denmektedir. Şekil 2.3'te tek elemanlı çubuğun düğüm noktalarının eğilme ve dönme kordinatları verilmiştir.



Şekil 2.3 Tek elemanlı çubuk modelinin eğilme kordinatları.

Harmonik hareket halinde , sürekli sistem denkleminin

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (2.23)$$

çubuk boyunca her x için sağlanması gerekmektedir. EI değeri sabit

olduğundan $\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = 0$ olmalıdır. Bu da

$$w(x,t) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x^1 + c_4 \quad (2.24)$$

denklemini verir. Yine Şekil 2.3'te gösterilen modelin sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} x=0 \quad \text{ için } \quad w(0,t) &= w_1(t) \quad \text{ ve } \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \varphi_1(t) \\ x=l \quad \quad w(l,t) &= w_2(t) \quad \text{ ve } \quad \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \varphi_2(t) \end{aligned}$$

Yukarıdaki sınır şartları yardımıyla (2.24) ifadesinin integrasyon sabitleri elde edilir. Bu durumda (2.24) ifadesi aşağıdaki formunu alır.

$$\begin{aligned} w(x,t) = & \left[1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right] u_1(t) + l \left[\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3} \right] u_2(t) \\ & + \left[3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \right] u_3(t) + l \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] u_4(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$x=l$ eşitliğinin (2.25) denkleminde konulmasıyla ;

$$w = [N]_w \{\delta\}_w \quad (2.26)$$

$$[N]_w = \{(1 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3); (1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3); (3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^3); (-\varepsilon^2 + \varepsilon^3)\} \quad (2.27)$$

$$\{\delta\}_w = \{w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2\}^T \quad (2.28)$$

denklemleri elde edilir. $\{\delta\}_{w,u}$ çubuğun düğüm noktalarındaki değişkenlerinin vektörleridir. Eğilme yer değiştirmesinin x 'e göre türevi ise,

$$\varphi = \omega' = [N]'_w \{\delta\}_w \quad (2.29)$$

şeklindedir ve bu ifade düğüm noktasındaki dönme olarak tanımlanır.

Her eleman için bu fonksiyonlarla iş ve enerji denklemleri yazılır. Matris formundaki bu değerler daha önceki bölümlerde tanımlanan iş ve enerji denklemlerinde yerlerine yazılırsa kinetik enerji;

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}\}^T [M]_i \{\dot{\delta}\} \quad (2.30)$$

ve potansiyel enerji ise;

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]_i \{\delta\} \quad (2.31)$$

şeklini alır. Lineer olmayan terimler varsa bunlarında lineer kabüllerle ifade edilmesi gerekir.

Kütle ve rijitlik matrisleri $[M]_i$, $[K]_i$ ayrı ayrı süperpoze edilirler. Eğilme için w , boyuna uzama için u alt indisleri kullanılarak bir çubuk eleman için kütle ve rijitlik matrisleri

$$\begin{aligned}
[K_e]_u &= \sum_{i=1}^n [K_e]_{ui} \\
[K_e]_w &= \sum_{i=1}^n [K_e]_{wi} \\
[M_e]_u &= \sum_{i=1}^n [M_e]_{ui} \\
[M_e]_w &= \sum_{i=1}^n [M_e]_{wi}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

şeklinde elde edilir. Eğilme ve boyuna uzama için rijitlik ve kütle matrislerinin elde edilmesinden sonra her eleman için yapılan tanımlar ve kabülleri gereği bu matrisler 6×6 şeklinde elde edilirler.

$$\begin{aligned}
[K_e] &= \begin{bmatrix} [K_e]_w^{4*4} & [0] \\ [0] & [K_e]_u^{2*2} \end{bmatrix} \\
[M_e] &= \begin{bmatrix} [M_e]_w^{4*4} & [0] \\ [0] & [M_e]_u^{2*2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Bir elemanın genelleştirilmiş koordinatlarını gösteren vektör ise

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_w\}^{4*4} \\ \{\delta_u\}^{2*1} \end{Bmatrix} \tag{2.34}$$

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

formunda elde edilir.

2.4.Burkulma Problemi:

Burkulma problemi , bir sistemin elastik dengesizliğine sebep olan yüklerin hesaplanmasıyla ilgilidir.Elastiklik sınırı içinde aksenal artan kuvvete maruz bir çubuk ,aksenal kuvvetin kritik bir değerinde burkulmaktadır.Burkulmaya sebep olan bu kuvvet kritik burkulma yükü olarak adlandırılmaktadır.

Dikdörtgen kesitli L uzunluğunda bir çubuğun burkulma yükleri aşağıdaki ifadeden faydalanılarak hesaplanır.

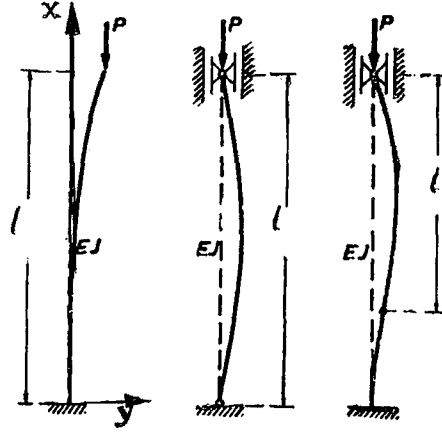
$$P = \lambda \frac{EI}{L^2} \quad (2.36)$$

Denklem (2.36)'nın aldığı en küçük değer kritik burkulma yükü olarak adlandırılmaktadır.Çubuğun asal ekseni doğrultusunda uygulanan kuvvet , kritik burkulma yüküne eşit olduğu an birinci özfrekans değeri sıfır olmaktadır.Bu durumda çubuk sıfır olmayan fakat statik olarak şekil değiştirmiş olmaktadır.

Kritik yükün değeri , elemanın boyutlarına ve malzemenin elastiklik modülüne bağlıdır.Birisi yüksek kalite çelikten diğeri adi çelikten yapılmış iki ince çubuğun malzemelerinin mukavemeti çok farklı olduğu halde aynı kritik burkulma yükünde burkulurlar.

Şekil 2.4'te değişik mesnet şartlarında kirişler görülmektedir.Burkulma problemindeki amaç , bu kirişlerin burkulma yüklerinin tayin edilmesidir.

Aksenal kuvvetin burkulma yüküne eşit olması durumunda çubuğun ilk özfrekans değeri sıfır olmaktadır.Ayrıca özfrekans değerleri aksenal kuvvetin artmasıyla azalmakta , çekme kuvveti ile artmaktadır.



Şekil 2.4.Çeşitli Mesnet Şartlarında Kirişler.

Çubuk asal eksenini boyunca uygulanan kuvvet iç gerilmelere sebebiyet vermektedir. Bu durum (2.6) ifadesinin , sistemin potansiyel enerjisine eklenmesini gerektirir. Bu enerji denkleminden faydalanılarak , $[K_G]$ geometrik rijitlik matrisi aşağıdaki ifadede elde edilir.

$$U_2 = \frac{1}{2} \{\delta\}_w^T [K_G] \{\delta\}_w \quad (2.37)$$

Bu durumda elde edilen potansiyel enerji ifadesinin Lagrange denkleminde yerine yazılmasıyla sistemin hareket denklemini aşağıdaki şekli alır.

$$[\lambda [K_G] + [K]] \{\delta\}_i + [M] \{\ddot{\delta}\}_i = 0 \quad (2.38)$$

Harmonik hareket kabulüyle (2.38) ifadesi

$$[\lambda [K_G] + [K]] \{\delta\}_i - \Omega^2 [M] \{\delta\}_i = 0 \quad (2.39)$$

halini alır Burada $[K]$ rijitlik matrisi , λ özdeğer ve $[K_G]$ ise geometrik rijitlik matrisidir. Bu denklem aynı zamanda minimum λ değerini elde etmek için aradığımız özdeğer problemini içermektedir.

Statik burkulma probleminin teorik analizi de aşağıdaki denklemde ifade edilen özdeğer probleminin çözölmesi gerekir. Ω değerinin sıfır olması durumunda (2.39) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$[[K] + \lambda[K_G]]\{\delta\}_i = 0 \quad (2.40)$$

Bu ifadedeki minimum λ değeri çubuğun burkulmasına sebebiyet veren kritik burkulma yükünü vermektedir.

2.5.Bilgisayar Kodları

Eğilme ve burkulma problemlerinin ikisinde de herbir eleman için bulunması gereken altı değişken vardır. Bu değerlerin bazıları elemanın bulunduğu şartlardan dolayı engellenir. Bu değerlerin kodları sıfır olarak kodlanır. Ankastre-ankastre bir çubuğun iki elemanlı modeli için bilgisayar kodları aşağıda verilmiştir. İlk düğüm noktası ankastre olduğundan kodlamaya ikinci düğüm noktasından başlanmıştır.

Tablo 2.1. Birinci Eleman İçin Kordinatlar.

Değişken Sayısı:	Değişken Adı:	Değişken Kodu:
1	w_1	0
2	ϕ_1	0
3	w_2	1
4	ϕ_2	2
5	u_1	0
6	u_2	3

İkinci elemanın birinci düğüm noktası yapılan kaböller gereği birinci elemanın ikinci düğüm noktasıyla çakışıkır. Dolayısıyla birinci elemanın ikinci düğüm noktasının kodlarıyla ikinci elemanın birinci düğüm noktası kodları aynıdır. İkinci elemanın ikinci düğüm noktası kodları çubuk ankastre-ankastre

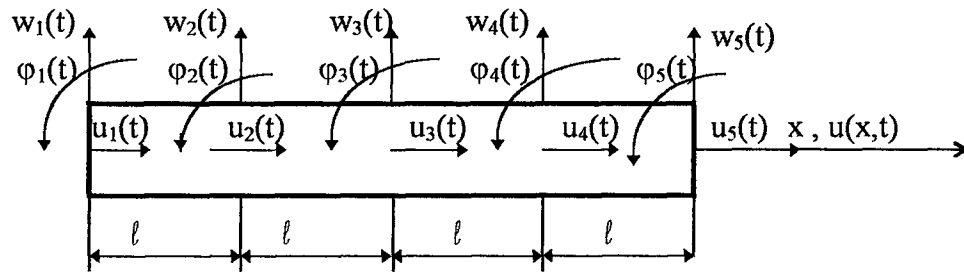
olduğundan sıfırdır. Şekil 2.5'te dört elemana bölünmüş bir çubuğun eğilme ve burkulma halindeki kodları gösterilmektedir.

Tablo 2.2 İkinci eleman için kordinatlar.

Değişken Sayısı:	Değişken Adı:	Değişken Kodu:
1	w_1	1
2	ϕ_1	2
3	w_2	0
4	ϕ_2	0
5	u_1	3
6	u_2	0

Sistemin genelleştirilmiş kordinatları bu şekilde kodlandıktan sonra eleman rijitlik ve kütle matrisleri uygun bir şekilde yerleştirilir ve (2.15), (2.39), (2.40) denklemleri çözülerek titreşim frekansları, frekanslardaki titreşim biçimini ve burkulma yükleri hesaplanır. Bu çözümün yapılmasında Fortran IV dilinde yazılmış bir program kullanılmaktadır.

Ankastre-Serbest:										
Eleman No:	1	2	3	4	Burkulmada son eleman:					
w	0	1	1	4	4	7	7	10	7	10
ϕ	0	2	2	5	5	8	8	11	8	11
u	0	3	3	6	6	9	9	12	9	12
Basit-Basit:										
w	0	2	2	5	5	8	8	0	8	0
ϕ	1	3	3	6	6	9	9	11	9	11
u	0	4	4	7	7	10	10	0	10	12
Ankastre-Ankastre:										
w	0	1	1	4	4	7	7	0	7	0
ϕ	0	2	2	5	5	8	8	0	8	0
u	0	3	3	6	6	9	9	0	9	10



Şekil 2.5 Dört Elemana Ayrılmış L Uzunluğunda Çubuk Ve Bilgisayar Kodları.

BÖLÜM 3:KÜTLE MATRİSİ:

3.1.Eğilme Etkisi:

Kütle matrisinin bulunabilmesi amacıyla , Bölüm 2’de tanımlanmış olan (2.9) kinetik enerji denklemini (2.30)’deki gibi kuadratik formda yazmak gerekir.

Bir eleman için çubuğun eğilme enerjisi aşağıdaki gibi olmaktadır;

$$T_w = \frac{1}{2} \rho A \int_l \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 dx \quad (3.1)$$

(2.26) ifadesinin zamana göre türevi alınıp (3.1)’de yerine yazılırsa ,

$$T_w = \frac{1}{2} \{ \dot{\delta}_w \}^T \rho A \int_l [N]_w^T [N]_w \{ \dot{\delta}_w \} dx \quad (3.2)$$

denklemini elde edilir.Bu ifadede kütle matrisi (2.30) denklemine göre

$$[M]_{ew} = \rho A \int_l [N]_w^T [N]_w dx \quad (3.3)$$

olmakta ve aşağıdaki formda elde edilmektedir.

$$[M]_{ew} = \frac{\rho A \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Bu bağıntı lineer eğilme titreşimi için kütle matrisi olarak ifade edilmektedir.

3.2.Boyuna Yerdeğişimi Etkisi:

Eğer sistemin boyuna titreşim yaptığı varsayılırsa kinetik enerji bağıntısı ,

$$T_u = \frac{1}{2} \rho A \int_{\ell} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir.(2.20) ifadesinin zamana göre türevi alınarak (3.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$T_u = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_u\}^T \rho A \int_{\ell} [N]_u^T [N]_u \{\dot{\delta}_u\} dx \quad (3.6)$$

denklemini elde edilir.Buradan (2.30) ifadesindeki tanım yardımıyla ,

$$[M]_{eu} = \rho A \int_{\ell} [N]_u^T [N]_u dx \quad (3.7)$$

boyuna yer değiştirme kütle matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[M]_{eu} = \frac{\rho A \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

3.3.Eleman Kütle Matrisi:

Çubuğun kütle matrisinin elde edilebilmesi için , (2.35) ifadesinde belirtilen değişkenlere göre (3.8) ve (3.4) matrislerinin aşağıdaki matris formunda süperpoze edilmesi gerekir.

$$[M_e] = \begin{bmatrix} [M]_{ew} & [0] \\ [0] & [M]_{eu} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Bu şekilde oluşan matrise eleman kütle matrisi denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$[M_e] = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.4.Nokta Kütlenin Kütle Matrislerine Etkisi:

Çubuk üzerinde herhangi bir nokta kütlenin bulunması durumunda bu kütle değerinde yukarıda elde edilen eğilme ve boyuna uzama matrislerine uygun bir şekilde eklenmesi gerekir.Nokta kütle bulunduğu konuma göre kütle matrisinin uygun satır ve sütununa eklenmelidir. Ankastre-serbest çubuğun serbest ucunda m_{ek} kütlesinin eleman eğilme ve boyuna uzama kütle matrislerine eklenmesi aşağıdaki şekilde olmaktadır.Bu nokta kütle değeri çubuğun son elemanına eklenmektedir.

$$[M_e] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\rho A \ell}{420} \left[\begin{array}{cccc} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ 22\ell & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ 54 & 13\ell & 156 + m_{ek} \frac{420}{\rho A \ell} & -22\ell \\ -13\ell & -3\ell^2 & -22\ell & 4\ell^2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \frac{\rho A \ell}{6} \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 + m_{ek} \frac{6}{\rho A \ell} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (3.11)$$

BÖLÜM 4: RİJİTLİK MATRİSLERİ:

4.1. Eğilme Rijitlik Matrisi:

Çubuğun z ekseni etrafındaki lineer eğilme titreşimleri incelendiği zaman (2.9) denkleminde verilen potansiyel enerji ifadesinin kullanılması gerekmektedir. Bir eleman için çubuk içindeki asal eksene x -ekseni denirse potansiyel enerji ,

$$U_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.1)$$

olur. Bu denklemdeki $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ifadesi (2.29)'un x'e göre bir defa türetilmesi ile ,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = [N'']_w \{\delta\}_w \quad (4.2)$$

şeklini alır. Bu ifadedeki l , bir elemanın boyunu göstermek kaydıyla , $x=l$ e olacak şekilde tanımlanmıştır. (4.2) ifadesi , (4.1)'de yerine yazılıp gerekli düzenleme yapılırsa ,

$$U_1 = \frac{1}{2} EI \int_0^l \{\delta\}_w^T [N'']_w^T [N'']_w \{\delta\}_w dx \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. Bunun yanısıra (2.31) denkleminin

$$U_1 = \frac{1}{2} \{\delta\}_w^T [K_e]_w \{\delta\}_w \quad (4.4)$$

tarzında yazılmasıyla eğilme rijitlik matrisi ; aşağıdaki ifadeden elde edilir,

$$[K_e]_w = EI \int_l [N'']^T [N'']_w dx \quad (4.5)$$

$$[K_e]_w = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6 & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

şeklinde elde edilir.

4.2.Geometrik Rijitlik Matrisi:

Burkulma probleminde , çubuk asal eksenini boyunca bir burkulma yükünün etkimesinden dolayı çubukta gerilme meydana gelir .Gerilmeden dolayı oluşan rijitliğe gerilme rijitliği veya geometrik rijitlik denir.

Eğer gerilmeden dolayı oluşan potansiyel enerji ifadesini yeniden yazarsak,

$$U_2 = \frac{1}{2} A \int_l \sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.7)$$

(4.7)denklemini elde ederiz.(2.29)'deki $\phi = (\partial w / \partial x)$ ifadesi (4.7) denkleminde yerine yazılırsa ,

$$U_2 = \frac{1}{2} \sigma_x A \int_l \{\delta\}_w^T [N']_w^T [N']_w \{\delta\}_w dx \quad (4.8)$$

bağıntısı elde edilir. Kuadratik formdaki bu ifadeden,

$$[K_G] = \sigma_x A \int_l [N']_w^T [N']_w dx \quad (4.9)$$

geometrik rijitlik matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K_G] = \frac{\sigma_x A}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{l}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{l}{10} \\ \frac{l}{10} & \frac{l^2}{15} & -\frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{l}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{l}{10} \\ \frac{l}{10} & -\frac{l^2}{30} & -\frac{l}{10} & \frac{l^2}{15} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.3. Boyuna Yer Değişimi Rijitlik Matrisi:

Elastik çubuğun boyuna yer değiştirmesinin rijitlik matrisine etkisini bulmak için (2.8) denklemi; bir çubuk elemanı için ,

$$U_{\text{boy}} = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (4.11)$$

şeklinde elde edilir. (2.20) ifadesinin x'e göre türevi alınır,

$$u' = [N']_u \{\delta\}_u \quad (4.12)$$

bağıntısı elde edilir.(4.12) ifadesi (4.11)'de yerine yazılacak olursa

$$U_{\text{boy}} = \frac{1}{2} EA \int_l \{\delta\}_u^T [N']_u^T [N']_u \{\delta\}_u dx \quad (4.13)$$

kuadratik potansiyel enerji bağıntısı elde edilmiş olur.Buradan,

$$[K_e]_u = EA \int_l [N']_u^T [N']_u dx \quad (4.14)$$

(4.14) denkleminde çubuğun boyuna titreşim yapması durumundaki eleman rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[K_e]_u = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.4.Eleman Rijitlik Matrisi:

Denklem (2.32)'de gösterildiği gibi eğilme ve boyuna yer değiştirme matrisleri aşağıdaki formda birleştirilerler.

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K_e]_w^{4*4} & [0] \\ [0] & [K_e]_u^{2*2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

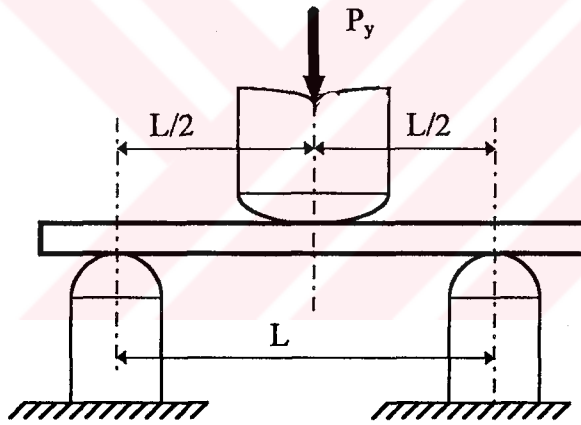
Bu şekilde (4.16) denkleminde (4. 6) ve (4.15) ifadeleri yerlerine konulursa rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$[K_e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12 & -6l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I} & -\frac{Al^2}{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{Al^2}{I} & \frac{Al^2}{I} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

BÖLÜM 5:DENEY VE SAYISAL SONUÇLAR:

5.1.Eğilme Deneyi :

Çubukların eğilme titreşimleri ve burkulma yüklerinin hesaplanabilmesi için gerekli verilerden biriside malzemelerin elastiklik modülüdür.Birisi metal diğeri ise plastik olarak seçilen çubukların elastiklik modülleri yapılan eğilme deneyi ile tespit edilmiştir.Eğilme deneyinde hazırlanan numuneler Şekil 5.1’de görüldüğü gibi orta noktalarından yüklenmiş ve yükleme noktasının bu yük altında gösterdiği sehimler ölçülmüştür.



Şekil 5.1.Numunelerin Yükleme Şekli.

Eğilme iki desteğe serbest olarak oturtulan , dikdörtgen kesitli düz bir deney parçasının , yön değiştirmeksizin , ortasına bir eğme kuvveti uygulandığında oluşan biçim değiştirmesidir.Eğilme miktarı (sehim) deney parçasının deney sırasında , kuvvetin uygulandığı noktanın başlangıç durumuna göre eksendeki değişimidir.Elastiklik modülü , eğme deneyinde gerilmenin deformasyonla doğru orantılı olduğu bölgede aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$E = \frac{P_y L^3}{48 I f_{\phi}} \quad (5.1)$$

Bu ifadede ; P_y deney parçasına uygulanan eğme kuvveti , f_{ϕ} sehimi , L destek açıklığını ve I ise çubuğun atalet momentini ifade etmektedir.

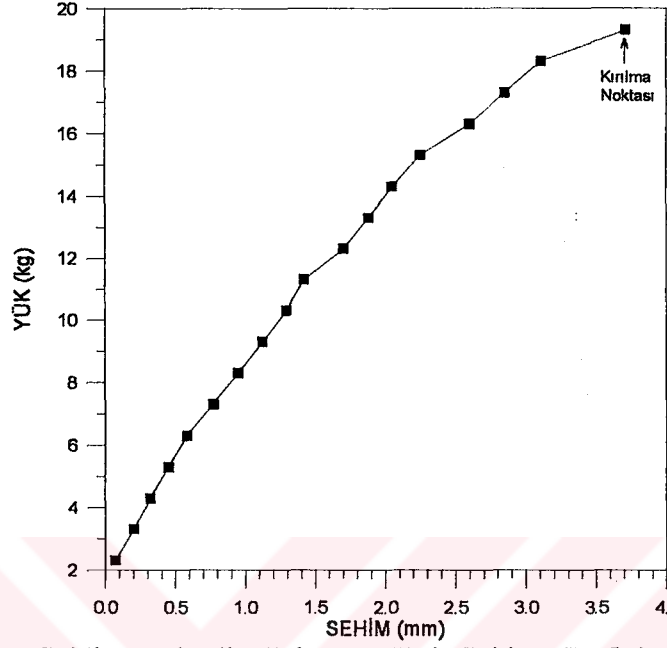
Deney aygıtı , genel olarak deney parçasının üzerine oturtulduğu iki destek ile deney parçasının ortasına kuvvet uygulayan sistemden oluşmaktadır.Eğilme deneyinde deney parçası , birbirine paralel iki destek üzerine konulur ve kuvvet uygulama sistemi ile ortasından eğilir.Deney parçasının biçim değiştirmesini sağlayan kuvvet sıfırdan en yüksek değere kadar darbesiz , sürekli ve malzemenin deformasyonunu sağlayacak şekilde olmalıdır.Uygulanan kuvvete karşılık malzemenin gösterdiği şekil değişimi ölçülür.

Eğilme deneyinde birisi sac diğeri ise plastik olan iki dikdörtgen kesitli deney numunesi kullanılmıştır.Sac için bir , plastik içinse iki numune hazırlanmıştır.

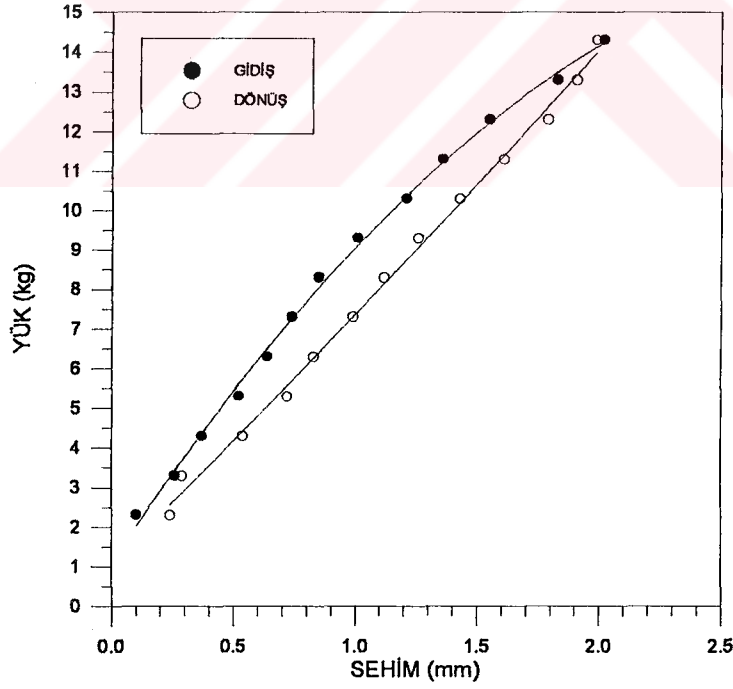
Deney parçaları , C67 sacı için TS 205'e göre $0.6 \times 20 \times 50$ mm boyutlarında ve plastik içinse ASTM D790 M'e göre $3.11 \times 25 \times 60$ mm boyutlarında hazırlanmıştır.Deney sonucunda elde edilen yük-sehim eğrileri çizilmiştir.Plastik çubuk için elde edilen sonuçlar Şekil 5.2 ve Şekil 5.3'te

görülmektedir. Saç çubuk için elde edilen yük-sehim grafiği Şekil 5.4'tedir.

Elde edilen eğriler en küçük

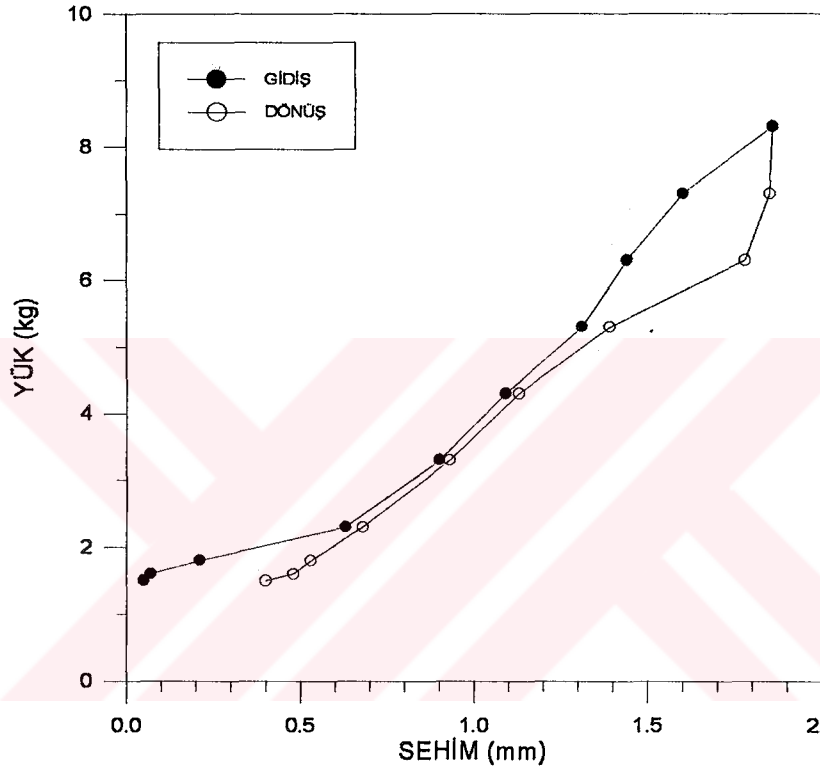


Şekil 5.2. Plastik Çubuğun Yük-Sehim Grafiği.



Şekil 5.3. Plastik Çubuğun Yük-Sehim Grafiği.

kareler yöntemi kullanılarak yük ve sehim noktalarını ifade eden uygun bir eğri haline dönüştürülmüştür. Bu işlem yapılırken sadece gidiş eğrisi kullanılmıştır. Yapılan hesaplamalardan sonra elastiklik modülü plastik için $3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ve C67 çubuğu içinse $2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ olarak elde edilmiştir



Şekil 5.4. C67 Çubuğunun Yük-Sehim Grafiği

5.2. Titreşim Analizi:

Çubukların serbest titreşim frekansları, değişik mesnet şartlarında ve ankastre-serbest halde nokta kütle etkisiyle beraber boyuna uzama etkisini de gözönüne alacak şekilde Fortran IV dilinde yazılan programla elde edilmiştir. Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'de dikdörtgen kesitli plastik ve metal çubukların değişik sınır şartlarında boyutsuz λ katsayıları ve serbest frekansları

gösterilmektedir. Hesaplamalar ankastre-ankastre , ankastre-serbest , basit-basit sınır şartlarında yapılmıştır.

Tablo 5.1. Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Titreşim Frekansları.

$$E=3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \rho=1180 \text{ kg/m}^3 \quad L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0656 \text{ m}$$

$$h=0.00311 \text{ m}$$

$$n=10 \text{ eleman}$$

$$\lambda = (2\pi f)^2 \frac{mL^4}{EI}$$

Ankastre-Ankastre:		Ankastre-Serbest:		Basit-Basit:	
λ	f [Hz]	λ	f [Hz]	λ	f [Hz]
500.5985	133.6566	12.3623	21.0037	97.4104	58.9587
3805.5205	368.5130	485.5509	131.6325	1558.8791	235.8588
14646.4988	722.9575	3808.4848	368.6565	7898.5709	530.9090
40154.9786	1197.0590	14645.1458	722.9241	25019.4227	944.8970
90158.2905	1793.6954	40145.4636	1196.9172	61362.2098	1479.7773

Tablo 5.2. Dikdörtgen Kesitli C67 Çubuğun Titreşim Frekansları.

$$E=2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \rho=6790 \text{ kg/m}^3 \quad L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0151 \text{ m}$$

$$h=0.0006 \text{ m}$$

$$n=10 \text{ Eleman}$$

$$\lambda = (2\pi f)^2 \frac{mL^4}{EI}$$

Ankastre-Ankastre:		Ankastre-Serbest:		Basit-Basit:	
λ	f [Hz]	λ	f [Hz]	λ	f [Hz]
500.5985	83.6846	12.3623	13.1507	97.4104	36.915
3805.5205	230.7320	485.5509	82.4172	1558.8791	147.6750
14646.4988	452.6554	3808.4848	230.8218	7898.5709	332.4108
40154.9786	749.4981	14645.1458	452.6345	25019.4227	591.6154
90158.2905	1123.0619	40145.4636	749.4093	61362.2098	926.5126

Ankastre-serbest sınır şartında çubuğun serbest ucunda kütle bulunması durumunda , bu kütle frekans değerlerine etkisi de ayrıca incelenmiştir. Tablo 5.3'te metal ve Tablo 5.4'te ise plastik çubuklar için değişik kütle değerleri için programdan elde edilen serbest titreşim frekansları bulunmaktadır. Bu tablolarda görüleceği gibi serbest uca eklenen kütle

miktarının artmasıyla frekans değerleri azalmaktadır. Belirli bir kütle değerinde çubuğun birinci frekansı sıfır olmaktadır.

Tablo 5.3. Ankastre-Serbest Halde C67 Çubuğun Serbest Ucundaki Kütlenin Frekansa Etkisi. $E=2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ $\rho=6790 \text{ kg/m}^3$ $L=0.2 \text{ m}$

$$b=0.0151 \text{ m } h=0.0006 \text{ m} \quad \lambda = (2\pi f)^2 \frac{mL^4}{EI}$$

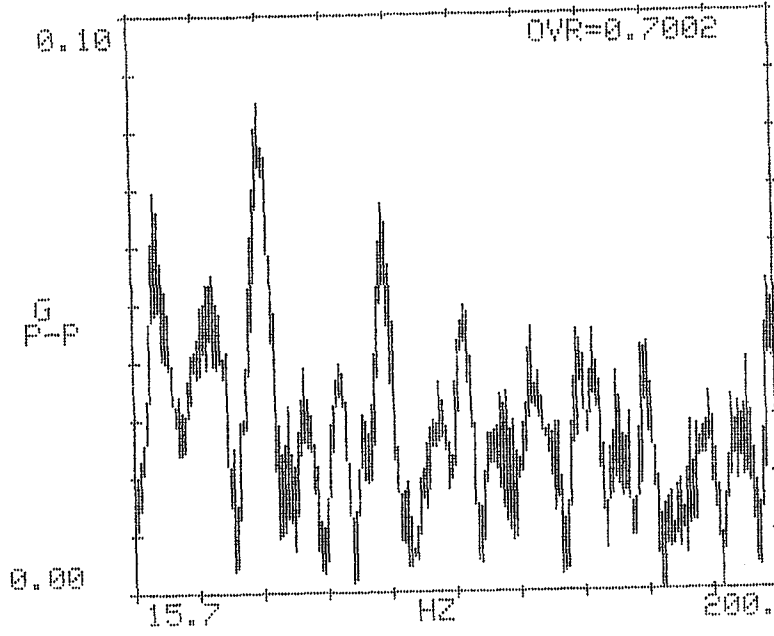
m_{ek}	0.02 kg		0.05 kg		0.1 kg		0.2 kg	
	λ	$f \text{ [Hz]}$	λ	$f \text{ [Hz]}$	λ	$f \text{ [Hz]}$	λ	$f \text{ [Hz]}$
1.	1.611	4.747	.69767	3.1241	.35869	2.2401	.18191	1.5952
2.	254.56	59.676	244.72	58.511	241.27	58.096	239.51	57.884
3.	2556.5	189.11	2521.6	187.81	2509.5	187.37	2503.4	187.14
4.	11008.	392.43	10934.	391.11	10909.	390.65	10896.	390.42

Tablo 5.4. Ankastre-Serbest Halde Plastik Çubuğun Serbest Ucuna Konmuş Kütlenin Frekansa Etkisi. $E=3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ $\rho=1180 \text{ kg/m}^3$ $L=0.2 \text{ m}$

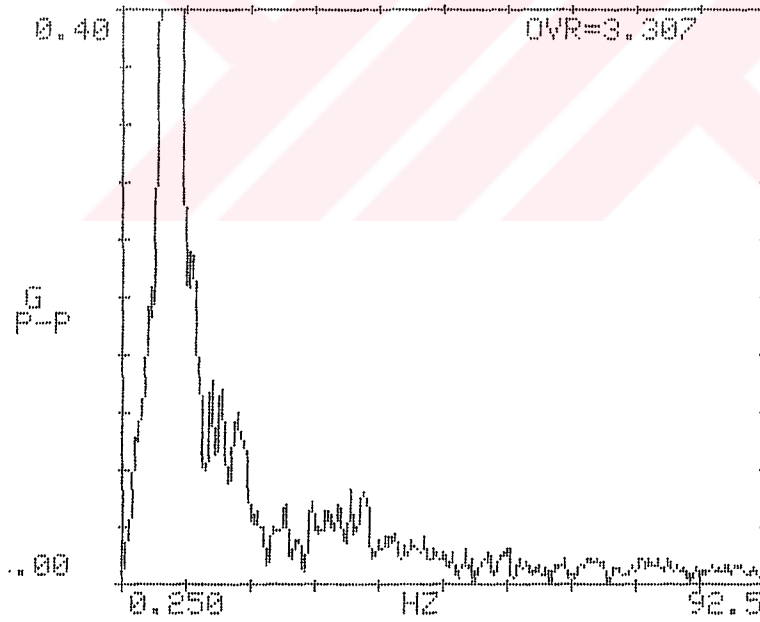
$$b=0.0656 \text{ m } h=0.00311 \text{ m} \quad \lambda = (2\pi f)^2 \frac{mL^4}{EI}$$

m_{ek}	0.085 kg		0.4 kg		2 kg		6 kg	
	λ	$f \text{ [Hz]}$	λ	$f \text{ [Hz]}$	λ	$f \text{ [Hz]}$	λ	$f \text{ [Hz]}$
1.	1.4997	7.3157	.35144	3.5414	.07187	1.6015	.02405	.92641
2.	253.32	95.078	241.19	92.775	238.42	92.241	237.96	92.151
3.	2552.1	301.78	2509.3	299.24	1186.2	205.74	397.58	119.10
4.	10998.	626.49	5746.5	452.84	2499.7	298.67	2498.1	298.57

Programla elde edilen sonuçlar ile mukayese edebilmek amacıyla bazı deneysel ölçümler yapılmıştır. Bunun sonucunda ; plastik çubuğun ankastre-serbest sınır şartların da ankastre ucundan alınan frekans değerleri Şekil 5.5'te ve yine plastik çubuğun serbest ucunda 0.085 kg kütle bulunması durumundaki ölçüm değerleri ise Şekil 5.6'da gösterilmektedir. Bu ölçümlerde sadece birinci frekans değerleri elde edilebilmiştir. Şekil 5.5'te plastik çubuğun birinci frekansı 21.89 Hz olarak ölçülmüştür. Şekil 5.6'da ise çubuğun birinci frekans değeri 7.631 Hz olarak ölçülmüştür.



Şekil 5.5. Plastik Çubuğun Serbest Titreşim Frekansları.



Şekil 5.6. Plastik Çubuğun Titreşim Frekansları
(Serbest Ucunda 0.085 kg).

5. 3.Burkulma Analizi:

Hesaplamalar için seçilen çubukların burkulma yükleri değişik sınır şartlarında statik ve dinamik hallerde ve ankastre-serbest halde ise nokta kütle etkisini de gözönüne alacak şekilde dinamik halde incelenmiştir. Ankastre-serbest halde çubuğun dinamik burkulma yükleri deneysel olarak incelenmiştir. Deney teçhizatının şeması Ek-1’de gösterilmiştir. Teorik hesaplamalar ankastre-serbest , ankastre-basit ve basit-basit sınır şartlarında yapılmıştır. Tablo 5.5 ve 5.6’da sırasıyla metal ve plastik çubukların değişik sınır şartlarında statik ve dinamik burkulma yükleri görülmektedir. Hesaplamalar ankastre-serbest , ankastre-basit ve basit-basit sınır şartlarında statik ve dinamik olarak yapılmıştır

Tablo 5.5.Dikdörtgen Kesitli C67 Çubuğunun Statik ve Dinamik
HaldeBurkulma Yükleri.E=2.0 10¹¹ N/m² ρ=6790 kg/m² L=0.2 m

$$b=0.0151 \text{ m } h=0.0006 \text{ m } \quad P = \lambda \frac{EI}{L^2}$$

Ankastre-Serbest								
n _d	0 dev/dak		250 dev/dak		500 dev/dak		750 dev/dak	
	λ	P[N]	λ	P[N]	λ	P[N]	λ	P[N]
1.	2.467	3.353	2.237	3.040	1.523	2.070	.2550	.3465
2.	22.20	30.18	21.99	29.89	21.37	29.04	20.40	27.73
3.	61.71	83.87	61.66	83.80	61.51	83.60	61.27	83.27
4.	121.1	164.6	121.0	164.5	120.9	164.4	120.8	164.2
Ankastre- Basit:								
n _d	0 dev/dak		1000 d/dak		2000 d/dak		3250 d/dak	
1.	20.19	27.44	18.54	25.20	13.56	18.43	2.426	3.297
2.	59.70	81.14	59.15	80.39	57.53	78.18	54.11	73.54
3.	119.1	161.8	118.8	161.5	118.0	160.3	116.2	158.1
4.	198.8	270.2	198.6	296.9	198.1	269.3	197.1	267.8
Basit- Basit:								
n _d	0 dev/dak		1000 d/dak		2000 d/dak		2200 d/dak	
1.	9.869	13.41	7.857	10.67	1.822	2.476	0.132	0.179
2.	39.48	53.66	38.89	52.79	37.47	50.92	37.05	50.35
3.	88.91	120.8	88.69	120.5	88.02	119.6	87.83	119.3
4.	158.4	215.2	158.2	215.1	157.9	214.6	157.8	214.4

Tablo 5.6. Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Statik ve Dinamik Halde Burkulma Yükleri. $E=3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ $\rho=1180 \text{ kg/m}^3$

$$L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0656 \text{ m} \quad h=0.00311 \text{ m} \quad P = \lambda \frac{EI}{L^2}$$

Ankastre-Serbest								
n_d	0 dev/dak		500 d/dak		1000 d/dak		1260 d/dak	
	λ	P[N]	λ	P[N]	λ	P[N]	λ	P[N]
1.	2.467	33.47	2.104	28.55	.9589	13.00	.0009	.0129
2.	22.20	301.2	21.87	296.7	20.92	283.8	20.23	274.4
3.	61.71	837.2	61.63	836.1	61.40	833.0	61.23	830.6
4.	121.1	1643.	121.0	1642.	120.9	1640.	120.7	163.8
Ankastre- Basit:								
n_d	0 dev/dak		1000 d/dak		2000 d/dak		3000 d/dak	
1.	20.19	273.9	19.54	265.1	17.60	238.8	14.35	194.6
2.	59.70	810.0	59.49	807.0	58.84	798.3	57.78	783.9
3.	119.1	1615.	119.0	1614.	118.6	1610.	118.1	1602
4.	198.8	2697.	198.7	2696.	198.5	2696	198.2	2689
Basit- Basit:								
n_d	0 dev/dak		1000 d/dak		2000 d/dak		3000 d/dak	
1.	9.869	133.8	9.081	123.1	6.714	91.09	2.771	37.59
2.	39.48	535.6	39.28	533.0	38.69	524.9	37.71	511.6
3.	88.91	1206.	88.83	1205.	88.56	1201.	88.13	1195.
4.	158.4	2149.	158.3	2148.	158.2	2146.	157.9	2143.

Tablo 5.7. Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Plastik Çubuğun Serbet Ucundaki Kütlenin Burkulma Yüküne Etkisi.

$$E=3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \rho=1180 \text{ kg/m}^3 \quad L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0656 \text{ m}$$

$$h=0.00311 \text{ m} \quad P = \lambda \frac{EI}{L^2}$$

Ankastre-Serbest :Serbest Uçta 0.1 kg Kütle. P[N]						
n_d	0 dev/dak	100 d/dak	200 d/dak	300 d/dak	350 d/dak	400 d/dak
1.	33.473	31.498	25.547	15.537	8.974	1.347
2.	301.279	300.900	299.789	298.012	296.905	295.671
3.	837.259	837.145	836.807	836.253	835.900	835.497

Ankastre-serbest halde çubuğun serbest ucunda nokta kütle bulunması durumunda , bunun dinamik burkulma yüküne etkisi ayrıca incelenmiştir.Tablo 5.7 ve 5.8’de çubukların ankastre-serbest sınır şartlarında serbest uclarında kütle bulunması durumunda dinamik burkulma değerleri gösterilmektedir.

Tablo 5.8. Ankastre-Serbest Halde Dikdörtgen Kesitli Metal Çubuğun Serbet Ucundaki Kütlenin Burkulma Yüküne Etkisi.

$$E=2.0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \quad \rho=6790 \text{ kg/m}^3 \quad L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0151 \text{ m}$$

$$h=0.0006 \text{ m} \quad P = \lambda \frac{EI}{L^2}$$

Ankastre-Serbest :Serbest Uçta 0.01 kg Kütle. P[N]						
n_d	0 d/dak	100 d/dak	200 d/dak	300 d/dak	350 d/dak	400 d/dak
1.	3.3531	3.1254	2.4369	1.2740	.5080	-.3848
2.	30.1808	30.1146	29.9203	29.6099	29.4165	29.2011
3.	83.8728	83.8549	83.8013	83.7137	83.6576	83.5938

Ankastre-serbest sınır şartlarında plastik çubuğun dinamik burkulma yükleri deneysel olarak elde edilmiştir.Ek-1’de gösterildiği gibi yerleştirilen çubuk elektrik motoruyla tahrik edilmiş ve serbest ucundan dinamometre ile dinamik burkulma yükleri ölçülmüştür.Sonuçlar Tablo 5.9’da gösterilmektedir.Sonuçlar bilgisayar programıyla elde edilen sonuçları doğrulamaktadır.

Tablo 5.9.Ankastre-serbest plastik çubuğun bazı dinamik yükleri.

$$E=3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \rho=1180 \text{ kg/m}^3 \quad L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0656 \text{ m} \quad h=0.00311 \text{ m}$$

n_d (dev/dak)	500 dev/dak	1000 dev/dak	1260 dev/dak
P(N)	30	13	0

5.4. Sonuçlar:

Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanılarak elastik ince çubukların titreşim frekansları ve statik ve dinamik burkulma yükleri incelenmiştir. İncelemeler değişik sınır şartlarında yapılmıştır. Burkulma analizi, genel olarak statik ve dinamik hallerde ve ek olarak ankastre-serbest sınır şartında ise serbest uçta nokta kütle de düşünülerek dinamik halde yapılmıştır.

Çubukların serbest titreşimleri hem teorik olarak hem de ankastre-serbest halde deneysel olarak elde edilmiştir. Deneysel çalışmalarda çubukların sadece birinci frekansları ölçülmüştür. Serbest uçta nokta kütle bulunması durumunda titreşim frekanslarının azaldığı ve nokta kütleinin belirli bir değeri için birinci öz frekansın sıfır olduğu görülmüştür.

Çubuk asal eksen boyunca aksel bir kuvvetin etkimesi durumunda ise; öz frekans değerleri aksel kuvvetin artmasıyla azalmakta, çekme kuvveti ile artmaktadır. Çubuğa aksel kuvvetin etkimesi, sonlu elemanlar yöntemi uygulanmasında hareket denkleminde geometrik rijitlik matrisinin eklenmesini gerektirir. Aksel kuvvetin, kritik burkulma yüküne eşit olması durumunda ise birinci öz frekans değeri sıfır olmaktadır. Tablo 5.10'da ankastre-serbest sınır şartlarında aksel bir kuvvetin çubuğun serbest titreşim frekanslarına etkisi hesaplanmıştır.

Tablo 5.10. Aksel Kuvvetin Çubuk Özfrekans Değerlerine Etkisi.

$$E=3.3 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad \rho=1180 \text{ kg/m}^3 \quad L=0.2 \text{ m} \quad b=0.0656 \text{ m}$$

$$h=0.00311 \text{ m} \quad \lambda = (2\pi f)^2 \frac{mL^4}{EI}$$

Eksenel Kuvvet:	10 N		20 N		33.47 N	
λ ve f	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$	λ	$f[\text{Hz}]$
1.Frekans:	8.8658	17.787	5.2134	13.639	.00009	0.0593
2.Frekans:	461.61	128.34	437.62	124.96	405.22	120.25

Yine bu çubukların burkulma yükleri statik ve dinamik hallerde incelenmiştir. Bu incelemeler sonucunda , değişik mesnet şartlarında aynı çubuğun farklı kritik yüklerde burkulduğu hesaplanmıştır. Dinamik olarak burkulmaya zorlanan çubukların , birinci öz frekanslarına karşılık gelen burkulma yükleri sıfır olarak hesaplanmıştır.

5.5.Yapılabilecek Çalışmalar ve Öneriler:

Bu çalışmanın devamı olabilecek çalışmaları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- 1-Kalın çubuk teorisini kullanarak burkulma yüklerinin hesaplanması.
- 2-Sıcaklık etkisi altında burkulma analizi.
- 3-Plakların titreşim ve burkulma analizi.
- 4-İki veya üç boyutlu elemanların sonlu elemanlar yönteminde kullanılması.
- 5-Sıcaklık etkisi altında zorlanmış titreşimler.
- 6-Kafes sistemlerinin burkulması.
- 7-Elastik-plastik şekil değişimi halinde konunun incelenmesi.
- 8-Malzeme ve geometrik nonlinearlik halleri.

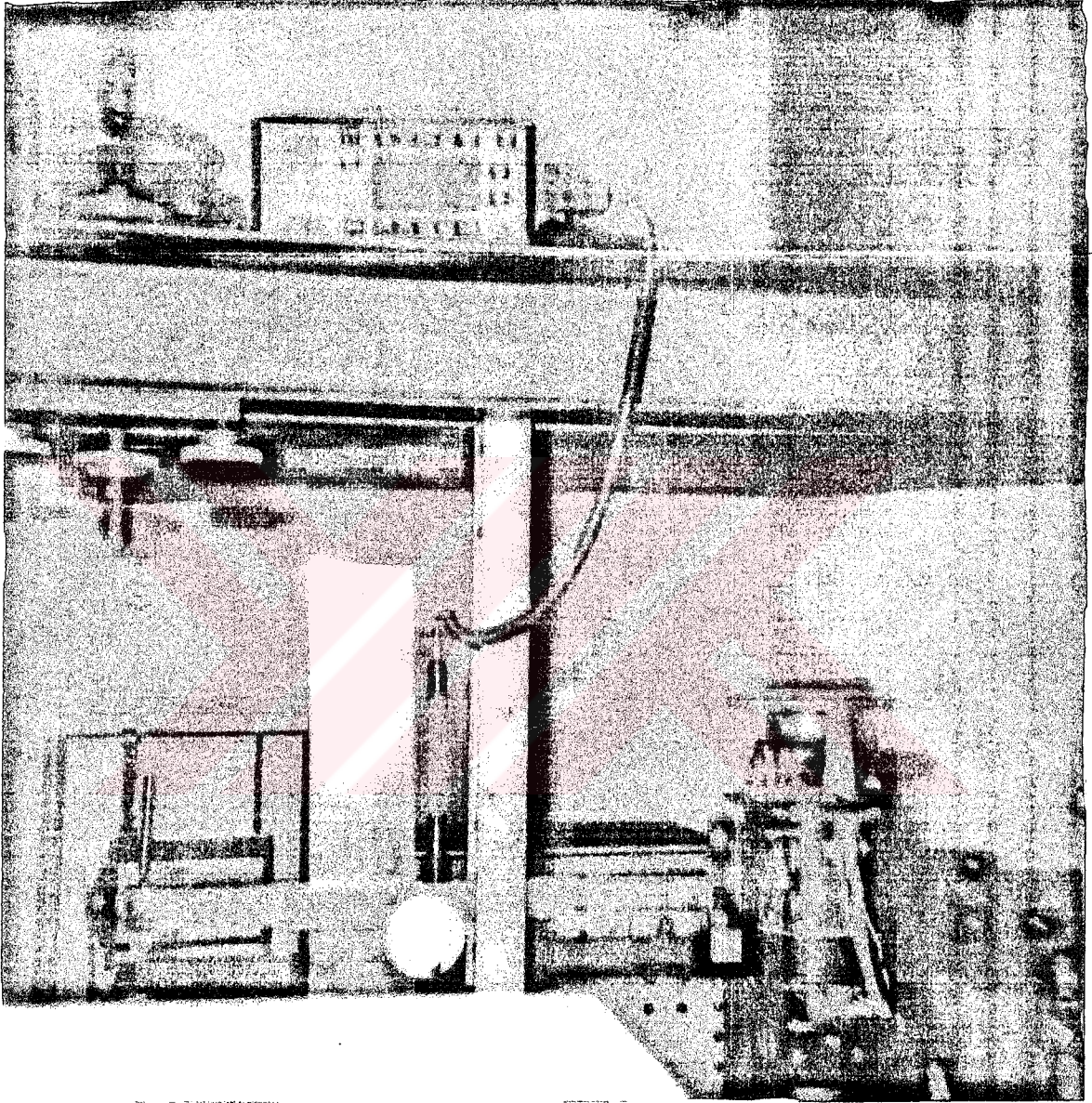
KAYNAKLAR:

- [1] PETYT, M., "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [2] CAREY, G.F., ve, ODEN, J.T., "Finite Elements Computational Aspects" Vol I, II, III, IV, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1983.
- [3] PASİN, F., "Mekanik Sistemler Dinamiği", İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi Sayı: 1540, İstanbul, 1994.
- [4] FAGAN, M.J., "The Finite Element Analysis: Theory And Practice", Longman Scientific Technical, New York, 1992.
- [5] İNAN, M., "Cisimlerin Mukavemeti", İTÜ Vakfı, İstanbul, 1988
- [6] MORGÜL, Ö.K., "Ani Sıcaklık Değişimi Etkisindeki Türbin Kanadı Nonlineer Titreşimlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi", Döner Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, 1993.
- [7] INMAN, D.J., "Engineering Vibration" Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1994.
- [8] CEYHAN, A.G., "Sonlu Elemanlar Yöntemi", TÜBİTAK Elektronik Bilgi İşlem Merkezi, Aralık 1989
- [9] RIXEN, D., ve, GERADIN, M., "Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics", John Wiley & Sons Ltd., Paris, 1994
- [10] MOHR, G.A., "The Finite Elements", Oxford Science Publications, Oxford, 1992
- [11] KNIGHT, C.E., "The Finite Element Method in Mechanical Design" PWS-KENT Publishing, Boston, 1993.
- [12] MERMERTAŞ, V., "Değişken Kalınlıklı Halka Plakların Statik ve Dinamik Stabilitesi", Doktora Tezi, İTÜ, 1990.



EKLER:

EK-1
DENEY ŞEMASI:

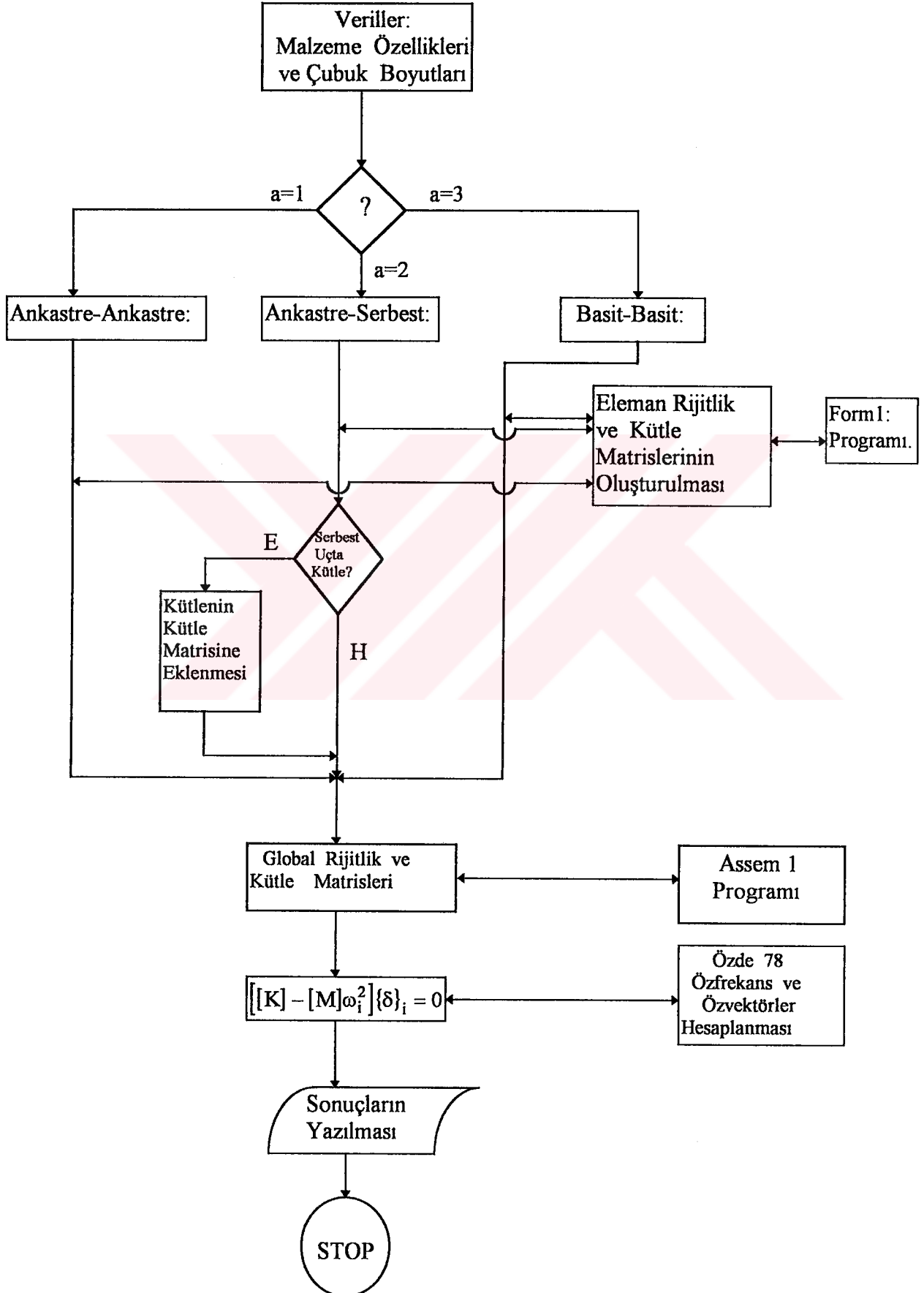


EK-2

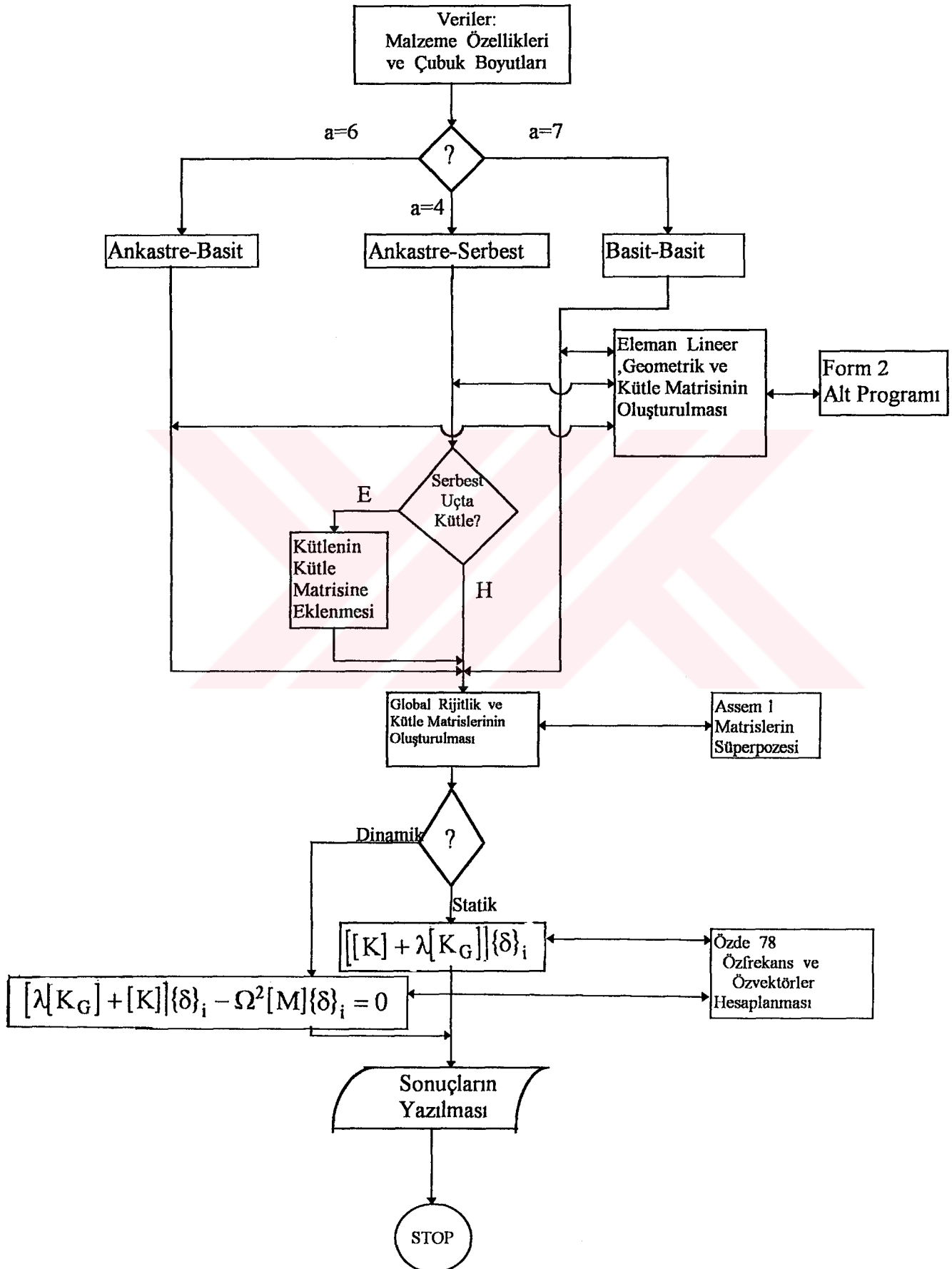
BİLGİSAYAR PROGRAMLARI VE AKIŞ DİYAGRAMLARI:**Ek-1.1.Programda Kullanılan Notasyonlar:**

- n :Eleman Sayısı.
- eb :Çubuğun Genişliği [m].
- et :Çubuğun Kalınlığı [m].
- e :Elastiklik Modülü [N/m^2].
- ro :Malzemenin Yoğunluğu [kg/m^3].
- ai :Çubuk Kesitinin z-eksenine atalet momenti [m^4].
- ndf :Çubuğun Serbestlik Derecesi.
- nr :Yazdırılması İstenen Özdeğer Sayısı.
- ndin:Dinamik Halde Devir Sayısı [dev/dak].
- P :Eksenel Kuvvet [N].
- a :1 Basit- Basit Kiriş
- a :2 Ankastre-Serbest Kiriş
- a :3 Ankastre-Ankastre Kiriş
- a :4 Ankastre-Serbest Çubuk Burkulma
- a :6 Ankastre-Mafsalli Çubuk Burkulma
- a :7 Basit- Basit Mafsalli Çubuk Burkulma
- ekut:Çubuk Serbest Ucuna Eklenen Kütle [kg].
- al :Çubuk Uzunluğu [m].
- el :Çubuk Elemanı Uzunluğu [m].
- emk :Çubuğun Birim Ağırlığı [kg/m].
- ncode(i):n. elemanın i.bilgisayar kodu.

TİTREŞİM ANALİZİ:



BURKULMA ANALİZİ:



```

C  a=1  Basit- Basit   Kiriş
c  a=2  Ankastre-Serbest Kiriş
c  a=3  Ankastre-Ankastre Kiriş
C  a=4  Ankastre-Serbest Cubuk Burkulma
c  a=6  Ankastre-Mafsalli Cubuk Burkulma
c  a=7  Basit- Basit Mafsalli Cubuk Burkulma
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension ak(42,42),am(42,42),eval(42),wks1(42),wks2(42),ncode(6)
      dimension evec(42,42),ek(6,6),em(6,6)
      open(5,file='cubuk.dat',status='old')
      open(6,file='cubuk.son',status='new')
      read(5,*)a,nmax,ro,al,e,eb,et,ndin,ekut,p
      n=nmax
      el=al/float(n)
      api=8.0*datan(0.1d+01)
      emk=ro*(eb*et)
      ai=eb*et**3/12.0
      if(a.gt.3)go to 11
      if(a.eq.1.)then
        write(6,25)'Basit-Basit Cubuk'
        ndf=3*n-1
      else
        if(a.eq.2) then
          write(6,25)'Ankastre serbest cubuk'
          ndf=3*n
        else
          write(6,25)'Ankastre-Ankastre Cubuk'
          ndf=3*n-3
        endif
      endif
      26  write(6,290)nmax,ro,al,e,eb,et
      290  format(5x,'nmax=',i2,'ro=',d9.3,'al=',d9.3,'e=',d9.3,'eb=',
      *d9.3,'et=',d9.3/)
      25  format(5x,a26/)
          write(6,280)n
          write(6,616)ekut
      616  format(5x,'ekut=',d8.3,'kg',/)
          do 99 i=1,42
            do 99 j=1,42
              ak(i,j)=0.0
              am(i,j)=0.0
          99  continue
          b=(et**2)/12
c      iii=0.0
          ep=p*(el**2)/(ai*e)
          call form1(B,ek,em,el,emk,ekut,iii,ep)
          do 13 iii=1,n

```

```

    if(a.gt.1)go to 14
    if(iii.eq.10)goto 16
    if(iii.gt.1)goto 17
    ncode(1)=0
    ncode(2)=1
    ncode(3)=2
    ncode(4)=3
    ncode(5)=0
    ncode(6)=4
    go to 19
16  ncode(1)=26
    ncode(2)=27
    ncode(3)=0
    ncode(4)=29
    ncode(5)=28
    ncode(6)=0
    goto 19
14  if(iii.eq.10.and.a.eq.3) goto 18
    if(iii.gt.1) goto 17
    ncode(1)=0
    ncode(2)=0
    ncode(3)=1
    ncode(4)=2
    ncode(5)=0
    ncode(6)=3
    goto 19
17  ncode(1)=ncode(3)
    ncode(2)=ncode(4)
    ncode(3)=ncode(3)+3
    ncode(4)=ncode(4)+3
    ncode(5)=ncode(6)
    ncode(6)=ncode(6)+3
    goto 19
18  ncode(1)=25
    ncode(2)=26
    ncode(3)=0
    ncode(4)=0
    ncode(5)=27
    ncode(6)=0
c   19  if(iii.eq.n.and.a.eq.2)goto 189
c       goto 199
c 189  if(ekut.eq.0)goto 199
c       call form1(B,ek,em,el,emk,ekut,iii,ep)
    19  call assem1(ek,em,ncode,ak,am)
    13  continue
        i=1
        call ozde78(ak,42,am,42,ndf,eval,evec,42,wks1,wks2,i)

```

```

        if(i.eq.0)go to 100
        write(6,200)i
200    format(1h0,'failure,ifail=',i5)
        stop
100    aml=e*ai/(emk*(al**4))
        nr=ndf/2
        do 30 i=1,nr
            eval(i)=eval(i)*420.0*(float(n)**4)
            omega=eval(i)*aml
            omega=dsqrt(omega)/api
            write(6,210) i,eval(i),i,omega,i,(evec(j,i),j=1,ndf)
30    continue
210    format(1h0,5x,'lamda',i2,'=',d16.9,5x,'omega',i2,'=',d16.9,2x,
        *      'hz',/,5x,'eigenvector',i3,/, (5x,6d16.9)/)
280    format(5x,'ELEMAN SAYISI=',i2,/)
        stop
11    if(a.eq.4)then
        ndf=3*n
        write(6,65) 'Ankastre-Serbest Cubuk Burkulma '
        else
        if(a.eq.5)then
        write(6,65) 'Ankastre-Ankastre Cubuk Burkulma '
        ndf=3*n-2
        else
        if(a.eq.6)then
        ndf=3*n-1
        write(6,65) 'Ankastre-Mafsalli Cubuk Burkulma '
        else
        ndf=3*n
        write(6,65) 'Basit-Basit mafsalli Burkulma '
        endif
        endif
        endif
65    format(5x,a35/)
51    write(6,2901)nmax,ro,al,e,eb,et
2901    format(5x,'nmax=',i2,'ro=',d9.3,'al=',d9.3,'e=',d9.3,'eb=',
        *      d9.3,'et=',d9.3,/)
        write(6,294) ndin,ekut
294    format(5x,'ndin=',i4,'dev/dak',5x,'ekut=',d8.3,'kg',/)
        p=1
        write(6,281)n
        do 991 i=1,42
        do 991 j=1,42
        ak(i,j)=0.0
        am(i,j)=0.0
991    continue
        fi=12.0*el**2/et**2

```

```

iii=0.0
call form2(ek,em,ndin,el,emk,fi,e,eb,ai,api,ekut,iii)
do 131 iii=1,n
if(iii.gt.1)goto 191
if(a.lt.7)then
ncode(1)=0
ncode(2)=0
ncode(3)=1
ncode(4)=2
ncode(5)=0
ncode(6)=3
go to 411
endif
ncode(1)=0
ncode(2)=1
ncode(3)=2
ncode(4)=3
ncode(5)=0
ncode(6)=4
go to 411
191 ncode(1)=ncode(3)
ncode(2)=ncode(4)
ncode(3)=ncode(3)+3
ncode(4)=ncode(4)+3
ncode(5)=ncode(6)
ncode(6)=ncode(6)+3
if(iii.eq.n) go to 181
goto 411
181 if(a.eq.4)goto 411
if(a.eq.5)then
ncode(4)=0
ncode(3)=0
ncode(6)=ncode(6)-2
goto 411
endif
ncode(3)=0
ncode(6)=ncode(6)-1
ncode(4)=ncode(4)-1
c 411 write(6,*)ncode(1),ncode(2),ncode(3),ncode(4),ncode(5),ncode(6)
c 67 format(1h0,5x,/, (5x,6d16.9)/)
411 if(iii.eq.n.and.a.eq.4)goto 412
goto 413
412 call form2(ek,em,ndin,el,emk,fi,e,eb,ai,api,ekut,iii)
413 call assem1(ek,em,ncode,ak,am)
131 continue
i=1
call ozde78(ak,42,am,42,ndf,eval,vec,42,wks1,wks2,i)

```

```

      if(i.eq.0)go to 1001
      write(6,2000)i
2000  format(1h0,'Hata,ifail=',i5)
      stop
1001  aml=e*ai/al**2.0
      nr=ndf/2
      do 301 i=1,nr
      eval(i)=eval(i)*(float(n)**2)
      omega=eval(i)*aml
c
      write(6,211) i,eval(i),i,omega,i,(evec(j,i),j=1,ndf)
301  continue
211  format(1h0,5x,'lamda ',i2,'=',d16.9,5x,'Pkr',i2,'=',d16.9,2x,
*'      N',/,5x,'eigenvector',i3,/, (5x,6d16.9)/)
281  format(5x,'ELEMAN SAYISI=',i2,/)
      stop
      end
c
c
c
      subroutine form2(ek,em,ndin,el,emk,fi,e,eb,ai,api,ekut,iii)
      implicit double precision(a-h,o-z)
      dimension ek(6,6),em(6,6)
      do 50 i=1,6
      do 50 j=1,6
      ek(i,j)=0.0
      em(i,j)=0.0
50  continue
      ek(1,1)=12.0
      ek(1,2)=6.0*el
      ek(1,3)=-12.0
      ek(1,4)=6.0*el
      ek(2,2)=4.0*el*el
      ek(2,3)=-6.0*el
      ek(2,4)=2.0*el*el
      ek(3,3)=12.0
      ek(3,4)=-6.0*el
      ek(4,4)=4.0*el*el
      ek(5,5)=fi
      ek(5,6)=-fi
      ek(6,6)=fi
      em(1,1)=6.0/5.0
      em(1,2)=el/10.0
      em(1,3)=-6.0/5.0
      em(1,4)=el/10.0
      em(2,2)=2.0*el**2/15.0
      em(2,3)=-el/10.0

```



```

em(2,4)=-el*el/30.0
em(3,3)=6.0/5.0
em(3,4)=-1.0*el/10.0
em(4,4)=2.0*el*el/15.0
em(5,5)=emk*el*el/3.0
em(5,6)=-emk*el*el/6.0
em(6,6)=emk*el*el/3.0
ewk=(ndin*api/60.0)**2
ew=ewk*emk*el/420.0
aib=el**3/(ai*e)
ek(1,1)=ek(1,1)-156.0*ew*aib
ek(1,2)=ek(1,2)-22.0*ew*el*aib
ek(1,3)=ek(1,3)-54.0*ew*aib
ek(1,4)=ek(1,4)+13.0*ew*el*aib
ek(2,2)=ek(2,2)-4.0*ew*el*el*aib
ek(2,3)=ek(2,3)-13.0*ew*el*aib
ek(2,4)=ek(2,4)+3.0*ew*(el**2)*aib
ek(3,3)=ek(3,3)-156.0*ew*aib
ek(3,4)=ek(3,4)+22.0*ew*el*aib
ek(4,4)=ek(4,4)-4.0*ew*el*el*aib
ek(5,5)=ek(5,5)-140.0*ew*aib
ek(5,6)=ek(5,6)-70.0*ew*aib
ek(6,6)=ek(5,5)
if(iii.gt.0)then
ek(3,3)=ek(3,3)-ekut*ewk*aib
ek(6,6)=ek(6,6)-ekut*ewk*aib
endif
do 6 i=1,6
do 6 j=1,6
ek(j,i)=ek(i,j)
em(j,i)=em(i,j)
c      write(6,*)i,j,em(i,j),ek(i,j)
6 continue
return
end

c
subroutine form1(B,ek,em,el,emk,ekut,iii,ep)
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension ek(6,6),em(6,6)
do 50 i=1,6
do 50 j=1,6
ek(i,j)=0.0
em(i,j)=0.0
50 continue
ek(1,1)=12-(6.0*ep/5.0)
ek(1,2)=6*el-(ep*el/10.0)
ek(1,3)=-12+(6.0*ep/5.0)

```

```

ek(1,4)=6.0*el-(ep*el/10.0)
ek(2,2)=4*el*el-(2.0*ep*el*el/15.0)
ek(2,3)=-6*el+(ep*el/10.0)
ek(2,4)=2.0*el*el+(ep*el*el/30.0)
ek(3,3)=12-(ep*6.0/5.0)
ek(3,4)=-6*el+(ep*el/10.0)
ek(4,4)=4*el*el-(2.0*ep*el*el/15.0)
ek(5,5)=(el*el/B)-ep
ek(5,6)=-(el*el/B)+ep
ek(6,6)=(el*el/B)-ep
em(1,1)=156
em(1,2)=22*el
em(1,3)=54
em(1,4)=-13*el
em(2,2)=4*el*el
em(2,3)=13*el
em(2,4)=-3*el*el
em(3,3)=156
em(3,4)=-22*el
em(4,4)=4*el*el
em(5,5)=140
em(5,6)=70
em(6,6)=140
c  if(iii.gt.0)then
c  em(3,3)=em(3,3)+420.0*ekut/(emk*el)
c  em(6,6)=em(6,6)+420.0*ekut/(emk*el)
c  endif
do 6 i=1,6
do 6 j=1,6
ek(j,i)=ek(i,j)
em(j,i)=em(i,j)
6 continue
return
end

c
subroutine assem1(ek,em,ncode,ak,am)
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension ncode(6),ak(42,42),am(42,42),ek(6,6),em(6,6)
do 30 i=1,6
ii=ncode(i)
if(ii.eq.0) go to 30
do 20 j=1,6
jj=ncode(j)
if(jj.eq.0) go to 20
ak(ii,jj)=ak(ii,jj)+ek(i,j)
am(ii,jj)=am(ii,jj)+em(i,j)
c  write(6,*)ii,jj,ak(ii,jj),am(ii,jj)

```

```
    if(ii.eq.jj.and.ak(ii,jj).lt.0.0) go to 22
    go to 26
22  write(6,23) ak(ii,jj),ii,jj
23  format(/,5x,'ak(ii,jj)=' ,d15.6,3x,'ii=',i3,3x,'jj=',i3)
26  continue
    if(ii.eq.jj.and.am(ii,jj).lt.0.0) go to 24
    go to 20
24  write(6,25) am(ii,jj),ii,jj
25  format(/,5x,'am(ii,jj)=' ,d15.6,3x,'ii=',i3,3x,'jj=',i3)
20  continue
30  continue
    return
    end
```

c

c



ÖZGEÇMİŞ:

Uygur Yeni 1972 yılında Artvin'in Şavşat ilçesinde dünya'ya geldi. İlk öğrenimini Şavşat'ta orta öğrenimini ise Bursa'da tamamladı. 1989 yılında girmiş olduğu İ.T.Ü. Makina Mühendisliği Bölümünden 1993 yılında mezun oldu. Mezuniyetini takiben İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Konstrüksiyon programında yüksek lisans eğitimine başladı.

