

66682

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ADİ VE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TEKİLLİK
ANALİZLERİ VE İNTEGRE EDİLEBİLİRLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Öğ. Abdullah Topçu

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Mayıs 1997

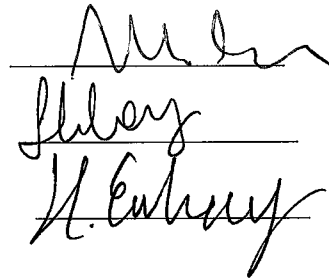
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet CAN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Saadet ERBAY

Prof. Dr. Hüsnü A. ERBAY

HAZİRAN 1997



ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında değerli yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. M. CAN'a teşekkürlerimi arz ederim.

Abdullah TOPÇU

30.05.1997



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET	vi
SUMMMARY	vii
BÖLÜM 1: İNTEGRE EDİLEBİLİRLİK KAVRAMI	1
1.1. Giriş	1
1.2. Tam İntegre Edilebilirlik	9
1.3. Cebirsel İntegre Edilebilirlik	6
1.3.1. Kowalevski Üsleri	17
1.3.1.1. Homojen Sistemler	17
1.3.2. Özel Çözümler	19
1.3.3. Bir Ölçekleme Çözümü Civarındaki Varyasyon Çözümleri	21
1.3.4. Cebirsel İlk İntegraller	24
1.3.5. Varyasyon Denklemleri Üzerine Poincaré Leması	27
1.3.6. Yoshida Teoremi	29
1.4. Kısmi ve Kısıtlı İntegre Edilebilirlik	32
 BÖLÜM 2: TEKİLLİK YAPISI VE ÖZELLİĞİ	 39
2.1. Sabit ve Hareketli Tekillik	39
2.2. Painlevé Özelliği	40
2.3. Ablowitz-Ramani-Segur Tahmini	42
2.4. Painlevé-Kowalevski Testi	49
2.4.1. ADD'lerin Tekillik Analizi	49
2.4.2. Birinci-Basamak Adi Differansiyel Denklemler	52
2.4.3. İkinci Basamak Adi Differansiyel Denklemler	57

2.4.3.1. Painlevé'nin α -Yöntemi	57
2.4.3.2. Painlevé Denklemlerinin Türetilmesi	62
2.4.3.3. Painlevé'nin α -Yöntemine Bir Uygulama	63
2.5. Painlevé Denklemlerinin Özellikleri	68
2.6. Yüksek Basamaktan Denklemler	73
2.7. Ablowitz-Ramani-Segur Algoritması	76
2.8. ADD'lerin Tam ve Kısmi İntegre Edilebilirliği	86
2.8.1. Lorenz Sistemi	88
2.8.2. Üç-Dalga Etkileşimi	91
2.8.3. Rikitake Sistemi	93
2.8.4. Rabinovich Sistemi	96
2.8.5. Lotka-Volterra Sistemi	99
2.9. Kısmi Differansiyel Denklemlerin İntegre Edilebilirliği	105
2.10. Kısmi Differansiyel Denklemlerin Painlevé Özellikleri ve Bäcklund Dönüşümleri	109
2.10.1. Giriş	109
2.10.1.2. Örnekler ve Karşı Örnekler	111
2.10.2. Tekil Manifold Yöntemi	119
2.10.2.1. Korteweg-de Vries Denklemleri	120
2.10.2.2. Boussinesq Denklemleri	129
2.10.2.3. Sine-Gordon Denklemleri	130
2.10.2.4. Henon-Heiles Sistemi	133
2.10.2.5. Harry Dym Denklemleri	134
2.10.2.6. KMKdV-I Denklemlerinin Painlevé Analizi	136
2.10.2.7. KMKdV-II Denklemlerinin Painlevé Analizi	140
2.10.2.8. Hirota-Satsuma Denklemlerinin Painlevé Analizi	143
2.10.2.9. Etkileşimli KdV Denklemlerinin Painlevé Analizi	146
2.10.3. Bazı Gözlemler	151
2.10.4. Şartlı veya Kısmi İntegre Edilebilirlik	153

BÖLÜM 3: İNTEGRE EDİLEMEZLİK SONUÇLARI: ZİGLİN TEOREMİ VE	
ÇOKLU PAINLEVÉ ANALİZİ	159
3.1. Painlevé Testinin Sınırları	159
3.2. Bir İntegre Edilebilirlik Tanımı	168
3.3. İntegre Edilemezlik İle İlgili Sonuçlar ve Ziglin Teoremi	175
3.3.1. Ziglin Teoremi	176
3.4. Monodromi Matrislerinin Açık Olarak Hesaplanması	183
3.5. Kowalevski Üsleri Kullanılarak İntegre Edilemezlik	189
3.6. Homojen Olmayan Hamiltonlara Genişletme	193
3.7. "Poly-Painlevé" Metodu	197
SONUÇ	205
KAYNAKLAR	206
ÖZGEÇMİŞ	220

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu tezde tekillik analizi ile onun tam ve kısmi integre edilebilirlikle olan ilgisi incelenmiştir.

Biz öncelikle integre edilebilirliğin üç değişik anlamını ifade ettik:

1. Sistemlerin kuadratürlerle çözülebilirliği,
2. Hareket denklemlerinin güzel özelliklerinden dolayı integre edilebilir oldukları kabul edilen lineer denklemler sistemlerine indirgenebilirliği
3. Sistemlerin integro-differansiyel denklemlere indirgenerek lineerleştirilebilirlikleri nedeniyle integre edilebilirlikleri.

1. Bölüm'de cebirsel integre edilebilirlik kavramı, Yoshida'nın "İntegre edilebilir sistemler için Kowalevski üssü kompleks veya irrasyonel olmamalıdır." tanımını altında açıklandı. Tam integre edilebilirliğin hareketin kompleks analitik integrallerinin yeterli sayıda var olması demek olduğu, tam olmayan integre edilebilirliklerin kısmi ve kısıtlı integre edilebilirlik adı altında yeterli sayıda integralin olmaması ve belli şartlar altında integre edilebilirliğin gerçekleşmesi olarak açıklandı.

2. Bölüm içerisinde; Tekillik (Painlevé) analizinden faydalanılarak ADD'ler ve KDD'lerin integre edilebilirliği araştırıldı. Bunların incelenmesinde kullanılan ARS Algoritması ve Weiss Metodu sunularak örnekler verildi.

3. Bölüm'de de Ziglin Teoremi'ne dayanılarak birkaç sistem için integrallerin var olmadığı ispatlandı. Ziglin yaklaşımının lineer olmayan açılımıyla integre edilemezlik kriteri olarak "çoklu-Painlevé" sunuldu. Bu pratik metodun açıklanması için bazı uygulamalar yapıldı.

SUMMARY

SINGULARITY ANALYSIS AND INTEGRABILITY OF THE ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

This thesis work reviews papers which illustrate the connection between integrability and the singularity structure of the solutions of nonlinear dynamical systems.

In the first section we have attempted to classify various aspects of integrability. We have distinguished three different situations.

a) The system can be solved by quadratures. For instances, the two dimensional Hamiltonian system

$$H = 1/2(p_x^2 + p_y^2) + F(\rho) + G(\varphi)/\rho^2,$$

where $\rho = (x^2 + y^2)$ and $\varphi = \arctan(y/x)$ has the second integral

$$I = (xp_y - yp_x)^2 + 2G(\varphi).$$

This allows the equations of motion to be reduced first to a quadrature for ρ :

$$\rho^2 = 2H_0 - 2F(\rho) - I_0/\rho^2,$$

where H_0 and I_0 are the conserved values of H and I respectively. Once $\rho(t)$ is obtained from above, the equation for φ can also be reduced to a quadrature:

$$\int \frac{d(\varphi)}{\sqrt{I_0 - 2G(\varphi)}} = \pm \int \frac{dt}{\rho^2(t)}.$$

b) The equations of motion can be reduced to a system of linear equations which are considered to be integrable because of their nice properties. In fact their solutions can be superimposed linearly and there exist global representations for them in terms of contour integrals. The simplest example is that of the well known Riccati equation:

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

which linearizes to

$$\ddot{y} + \left(\frac{\dot{a}}{a} - b\right)\dot{y} + acy = 0$$

through the transformation

$$x = -\frac{\dot{y}}{ay}.$$

Some PDE's are also integrable through linearization, Burger's equation being the archetype:

$$u_t + u_{xx} + 2uu_x = 0.$$

The Cole-Hopf transformation

$$u = v_x / v$$

reduces its solution to that of the heat equation:

$$v_t + v_{xx} = 0.$$

c) The system can be linearized in terms of integro-differential equations. This is, for example, the case of the Painlevé transcendental equations.

There exist several types of integrability. These are:

1. Complete integrability means that complex analytic integrals of motion exist in sufficient number. For a system of N first order autonomous ordinary differential equations (ODE), sufficient number means $N-1$ time independent invariants (whereupon the system can be reduced to a single quadrature).
2. Algebraic integrability is investigated as a restricted notion of integrability by H. Yoshida and he introduced the necessary conditions for algebraic integrability: No Kowalevski exponent be irrational or complex. The extension of those results to Hamiltonian systems is not straightforward as shown by M. Kummer, R. Churchill, and D. Rod.
3. One possible form of partial integrability is to have an insufficient number of integrals of motion. Partial integrability can also be associated with the existence of integrals of inadequate form. For a system of N first order differential equations the existence of $N-1$ time-dependent first integrals is not sufficient for complete integrability. Another type of integrability is "constrained" integrability. One well-known example is the fixed-energy integrability of Hamiltonian systems.

There are two types of singularities: the ones termed fixed, because their location is determined by the equation itself, and those called movable, the location of which depends on the initial conditions. Linear equations can only have fixed singularities.

Nonlinear equations can have both fixed and movable singularities. It was Painleve who first sought to determine all first order ODE's.

$$w' = f(z, w),$$

with f irrational in w and analytic in z , the only movable singularities of which are poles. The idea was that equations having this so called Painlevé property might be easier to integrate or solve analytically.

At the second, in a remarkable series of papers Painleve and his co-workers performed an exhaustive singularity analysis of all ODE's of the form

$$w'' = F(z, w, w'),$$

with F rational in w' , algebraic in w and analytic in z , the critical points (branch points and essential singularities) of which are fixed. In other words, they were able to identify all such equations, the only movable singularities of which are poles. Forty four of these equations were shown to be integrable in terms of elementary functions, by quadratures, or by linearization. For the remaining six equations, new transcendental functions had to be introduced.

The ARS algorithm was originally developed in order to determine whether a nonlinear ODE admits movable branch points, either algebraic or logarithmic. It is important to keep in mind that this algorithm provides a necessary condition for the absence of such movable branch points. Thus, the occurrence of movable essential singularities cannot be detected by this procedure. Ars conjecture says that a system of ODE's

$$w_i' = F_i(w_1, w_2, \dots, w_n; z), \quad i=1, \dots, n$$

satisfies the necessary conditions for the Painlevé property, if its solutions can be expanded in pure Laurent series near every one of their movable singularities at $z=z_0$. In other words, following the ARS algorithm we must come across no algebraic branch points and no logarithmic singularities.

Every ordinary differential equation obtained by an exact reduction of a nonlinear partial differential equation solvable by IST method, has the Painlevé Property. Of course, transformations of variables are allowed and a given equation may pass the test only after some transformations. This conjecture, therefore, would provide a necessary condition for the integrability of a given partial differential equation.

To apply the conjecture one needs two different ingredients: first a method to obtain all reductions of a given PDE and second a method to test a given ODE for the Painlevé property. Sometimes however, all the reductions one can find too trivial to yield an interesting information. Fortunately Weiss and collaborators made a major progress by doing away with reduction and introducing the Painlevé property for the PDE's themselves. In fact, according to Weiss, a PDE will possess the Painlevé

property if its solutions are single-valued about any singular manifold $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$ which is noncharacteristic. Weiss presents singular manifold method which tests the Painlevé property.

To verify if a PDE has the Painlevé property we expand a solution of a nonlinear PDE about a movable, singular manifold $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$. Let $u = u(z_1, z_2, \dots, z_n)$ be a solution of the PDE and assume that

$$u = \phi^p \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j$$

where ϕ and

$$u_j = u_j(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

are analytic functions of $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ in a neighborhood of manifold. Substitution of u into the PDE determines the possible values of p and defines the recursion relations for u_j , $j=0, 1, 2, \dots$. When p is a negative integer and u is valid and general expansion about the manifold $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$, then the solution has single valued representation about $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$. If this representation is valid for all allowed singularity manifolds, then the PDE has the Painlevé property.

The singular manifold method can also be applied to ordinary differential equations. For instance, Bäcklund transformation for the Henon-Heiles system

$$\begin{aligned} x_{tt} &= -Ax - 2dxy \\ y_{tt} &= -By + cy^2 - dx^2 \end{aligned}$$

with $d/c = -1/6$ has the form

$$\begin{aligned} x &= \phi^{-1}x_0 + x_1 \\ y &= \phi^{-2}y_0 + \phi^{-1}y_1 + y_2 \end{aligned}$$

where $y_0 = -\phi_t^2$, $y_1 = \phi_{tt}$, $y_2 = \frac{1}{12}(4\lambda - B - 3V - 3(\phi_{tt}/\phi_t)^2)$ and

$x_0^2 = \phi_t^2 V$, $x_1 = -\frac{1}{2}(V_t/V + \phi_{tt}/\phi_t)V^{1/2}$. The variable V is

$$V = \{\phi, t\} + \lambda$$

where

$$\frac{1}{2}V_t^2 + \frac{1}{2}V^3 + \left(\frac{1}{3}B - 2A + \frac{2}{3}\lambda\right)V^2 + \left(\frac{1}{6}B^2 - \frac{2}{3}\lambda^2\right)V = 0.$$

This defines V as a Weierstrass elliptic function and $\phi = \frac{u_1}{u_2}$, where u_1, u_2 are solutions of the linear equation

$$u'' = -\frac{1}{2}(V + \lambda)u.$$

In the third section using Ziglin theorem the nonexistence of integrals for some equations is proved. Original form of the Ziglin's theorem was that: Suppose that a given Hamiltonian H has $N-1$ analytic integrals, which are functionally independent together with H , and moreover that there exists a non-resonant matrix M' (Monodromy matrix). Then it is necessary that any other monodromy matrix M either:

a) commutes with M or b) permutes the eigenspaces of M . In particular M' is also non-resonant and it must also necessarily commute with M .

The problem which arises at this point is that of the practical applicability of Ziglin's theorem. The knowledge of the monodromy matrices is necessary.

Ziglin's method is particularly useful in constructing proofs of nonintegrability. As in the case of Ziglin, multivaluedness is incompatible with integrability unless the "interaction" between singularities satisfies some communication properties. The "poly-Painlevé" criterion, consists in checking whether the "interaction" between two of the system's singularities leads to a multivaluedness of the "dense" type. The method is asymptotic and a parameter ε will be introduced, which may be taken arbitrarily small. The main idea is the following : if one can show that the some trajectory can be characterized by two values of an integration constant, which differ by an additive quantity proportional to ε^n (for some n), this will mean that the integration constant, for this trajectory, is hopelessly (i.e. "densely") multivalued.

We must point out that the "poly-Painlevé" criterion, although intuitively appealing in its association of "dense" multivaluedness to non-integrability, does not yet constitute a powerful algorithm

BÖLÜM 1

İNTEGRE EDİLEBİLİRLİK KAVRAMI

1.1 GİRİŞ

İntegre edilebilirlik kavramı dinamik sistemlerde sürekli kullanıldığı halde, tek bir tanım üzerinde birleşmek mümkün olmuyor. İlk bakışta diferansiyel denklem sistemleri ile ilişkili olduğu kanısını veriyor. Kuşkusuz dinamik sistemler alanı çok geniştir: integral denklemler, fark denklemleri ve fonksiyonel denklemler, fiziksel fenomenleri modellemede sık sık kullanılır. Fakat biz burada differansiyel denklemlerle tanımlanmış dinamik sistemler ve onların integre edilebilirlik sorunu ile uğraşacağız. İntegre edilebilirlik kavramı, aslında sadece bir vechesi olan ve bilinen fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilen bir çözüme sahip olma anlamına gelen çözülebilirlikle karıştırılmamalıdır. Ancak “bilinen” fonksiyon olarak gözönüne alınan şeylerde muazzam bir keyfilik olduğundan bu da kesin bir tanım değildir.

Bir fonksiyonun integre edilebilir olması için integralinin (Riemann veya Lebesgue anlamında) var olması gerekir.

Örnek: $f(x) = x^2$ ise

$$\frac{x^3}{3} + C$$

bu fonksiyonun integralidir.

Diferansiyel denklemlerin integre edilebilirliğine gelince mesela ilk örnek olarak Rikitake sisteminin basit bir halini alalım:

$$\dot{x} = yz$$

$$\dot{y} = -xz$$

$$\dot{z} = -xy.$$

Sistemin çözümleri *elemanter* fonksiyonlar cinsinden yazılamaz ancak parametresi $m = A^2/p^2$ olan eliptik fonksiyonlar cinsinden

$$x = A \operatorname{sn}(p(t-t_0))$$

$$y = A \operatorname{cn}(p(t-t_0))$$

$$z = p \operatorname{dn}(p(t-t_0)).$$

şeklinde verilir:

İkinci örnek olarak

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \quad (1.1)$$

adi differansiyel denklem sistemini alalım. Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ n boyutlu vektörlerdir. Eğer $dI/dt = I_t + f \cdot \nabla I = 0$ ise $I(x,t)$ integraldir. Örneğin böyle üç tane integral $I(x,t)$, $J(x,t)$, $K(x,t)$, bağımsız olması için

$$\text{rank} \begin{pmatrix} I_{x_1} & J_{x_1} & K_{x_1} \\ I_{x_2} & J_{x_2} & K_{x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ I_{x_n} & J_{x_n} & K_{x_n} \end{pmatrix} = 3$$

olması gerekir ve yeter. Eğer $f(x,t)$ yeteri kadar düzgün ise, (1.1) denklemi tam olarak n -katlı yerel integrale edilebilir denir, çünkü bu durumda denklemin;

$$x_0 = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

başlangıç değeri olmak kaydıyla

$$x = X(x_0, t) \quad (1.2)$$

şeklinde çözümleri vardır. Böylece (1.2) çözümü yerel olarak öyle dönüştürülebilir ki,

$$x_0 = X^{-1}(x, t)$$

başlangıç değeri (1.1) denkleminin bir integrali gibi alınabilir.

Üçüncü örneğimiz de :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x-y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x-3y \end{aligned} \quad (1.3)$$

sisteminin olsun. Bu sistemin çözümü, başlangıç değerleri $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ olduğunda

$$x(t) = \{x_0 \cos t + (2x_0 - y_0) \sin t\} e^{-t} \quad (1.4a)$$

$$y(t) = \{y_0 \cos t + (5x_0 - 2y_0) \sin t\} e^{-t} \quad (1.4b)$$

olarak alınabilir ki (1.3) sisteminin bir integrali buradan şöyle yazılabilir:

$$x_0 = \{x (\cos t - 2 \sin t) + y \sin t\} e^t,$$

$$y_0 = \{-5x \sin t + y (\cos t + 2 \sin t)\} e^t.$$

Eğer bir adi diferansiyel denklem sistemi sürekli simetriye sahip ise, bu özelliği denklem sisteminin bir integralini elde etmek için kullanılabilir. Bu durumda aynı simetriye sahip, yani dönüşüm grubu altında değişmeyen I integrali arayabiliriz, veya daha genel olarak $I = \text{sabit}$ (ya da $dI/dt = 0$) denkleminin dönüşüm grubu altında değişmez kalmasını isteriz. Mesela yukarıdaki otonom, 1. basamak (1.3) sistemi, birinci basamaktan bir tek birinci basamak denklem halinde yazılabilir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 5x}{y - x} \quad (1.5)$$

Bu yüzden, (1.3)'ün zamandan bağımsız her integrali, (1.5)'in bir integrali olmak zorundadır. (1.5)'i çözersek

$$I = [y - x(2-i)]^{1+i} [y - x(2+i)]^{1-i}$$

elde ederiz. Bu, hareketin sabitlerinden biridir. Daha genel olarak,

$$\frac{dy}{dt} = f(x)$$

şeklindeki n-katlı otonom sistemin n-1 tane fonksiyonel bağımsız, zamana bağlı olmayan integrali varsa, bu sistem integre edilebilirdir.

Sistemin çözümünün açık bilgisi çok yararlı olmasına rağmen, çoğu zaman daha azı ile yetinmek zorunda kalırız. Gerçekte, integre edilebilirliğin temel faydalarından biri, sistemin uzun süreli davranışları hakkında global bilgi elde etmemizi sağlamasıdır. Bu iş, korunmuş, yani sistemin zaman içindeki evrimi sırasında değişmeyen büyüklükler sayesinde olur. Bu yüzden integre edilebilirlik, "hareket sabitlerinin", "integrallerin" ya da "değişmezlerin" varlığı ile karakterize edilir. Örnek olarak

$$H = 1/2 (p_x^2 + p_y^2) + y^4 + 3/4 x^2 y^2 + x^4 / 8 \quad (1.6)$$

Hamilton sisteminin [1] iki tane hareket sabiti vardır. Bunların biri kendisi ve diğeri de

$$I = p_x^4 + (3x^2 y^2 + x^4 / 2) p_x^2 - 2x^3 y p_x p_y + x^4 p_y^2 / 2 + (x^4 y^4 + x^6 y^2) / 4 + x^8 / 16 \quad (1.7)$$

değişmezdir. İntegraller, hareket denklemlerinin indirgenmesinde kullanılır. Bilhassa basit bir hal,

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + V(x) \quad (1.8)$$

bir boyutlu Hamilton sistemleridir. H_0 enerjisi, hareketinin ilk sabitidir ve bize

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{2(H_0 - V(x))}} \quad (1.9)$$

bu ikinci sabitini elde etme imkanı verir. Ancak t_0 , H_0 kadar kullanışlı değildir: t_0 'ı elde etmek için problemi çözmek gerekiyor. Ayrıca, enerji faz uzayında yerel bir fonksiyonu olduğu halde, t_0 sadece x 'in değerine bağlı değil, hemen her zaman integrasyon yoluna da bağlıdır.

Kaynak [2]'de, integre edilebilirliğin değişik yönleri sınıflandırılmaya çalışılmış. Burada üç farklı durum ayırt edilmiş:

a) Sistem kuadratürlerle çözülebilir ([3]'de bu durum için “açık integre edilebilir” denmiş). Örnek olarak, $\rho = (x^2 + y^2)$ ve $\varphi = \arctan(y/x)$ olmak üzere iki boyutlu Hamilton sistemleri

$$H = 1/2(p_x^2 + p_y^2) + F(\rho) + G(\varphi)/\rho^2 \quad (1.10)$$

iki boyutlu Hamilton sisteminin

$$I = (xp_y - yp_x)^2 + 2G(\varphi) \quad (1.11)$$

şeklinde bir ikinci integrale sahiptir. Bu integral, hareket denklemlerinin ρ cinsinden bir

$$\dot{\rho}^2 = 2H_0 - 2F(\rho) - I_0/\rho^2 \quad (1.12)$$

kuadratüre indirgenmesine izin verir, burada H_0 ve I_0 , sırasıyla H ve I 'nin korunmuş değerleridir. $\rho(t)$ (1.12) 'dan elde edilir. φ denklemi de bir integral işlemine indirgenebilir:

$$\int \frac{d(\varphi)}{\sqrt{I_o - 2G(\varphi)}} = \pm \int \frac{dt}{p^2(t)} \quad (1.13)$$

b) Hareket denklemleri, güzel özellikleri sebebiyle integre edilebilir oldukları düşünülen lineer denklem sistemine indirgenebilir. Aslında bunların çözümleri lineer olarak birbirine eklenebilir ve eğrisel integraller cinsinden global temsilleri vardır. Bunun en basit örneği iyi bilinen

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad (1.14)$$

Riccati denklemdir. Bu denklem,

$$x = -\frac{\dot{y}}{ay} \quad (1.15)$$

dönüşümüyle

$$\ddot{y} + \left(\frac{\dot{a}}{a} - b\right)\dot{y} + acy = 0 \quad (1.15)$$

şeklinde lineerleştirilir. Bazı KDD'ler de lineerleştirilerek integre edilebilir. Böyle denklemlerin en iyi bilineni

$$u_t + u_{xx} + 2uu_x = 0 \quad (1.17)$$

Burgers denkleminin çözümü,

$$u = v_x / v \quad (1.18)$$

Cole-Hopf dönüşümü ile

$$v_t + v_{xx} = 0 \quad (1.19)$$

1sı denkleminin çözümüne indirgenir.

c) Sistem integro-differansiyel denklemler cinsinden lineerleştirilebilir. Mesela Painlevé transadant denklemleri için durum böyledir [4]. Bunların ikinci basamaktan altı tanesi bilinmektedir. Fakat daha yüksek mertebeden olanları da tabii ki vardır. Bu altı $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ Painlevé denklemi α, β, γ ve δ keyfi sabitler olmak üzere şunlardır;

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 6x^2 + t \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2x^3 + xt + \alpha \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t} (\alpha x^2 + \beta) + \gamma x^3 + \frac{\delta}{x} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{1}{2x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{3}{2} x^3 + 4tx^2 + 2(t^2 - \alpha)x + \frac{\beta}{x} \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \left\{ \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} \right\} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{t} \frac{dx}{dt} + \frac{(x-1)^2}{t^2} \left(\alpha + \frac{\beta}{x} \right) + \frac{\gamma x}{t} + \frac{\delta x(x+1)}{x-1} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t} \right\} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{x-t} \right\} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{x(x-1)(x-t)}{t^2(t-1)^2} \\ &\quad \left\{ \alpha + \frac{\beta t}{xt} + \frac{\gamma(t-1)}{(x-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(x-1)^2} \right\} \end{aligned}$$

Daha yüksek basamaktan transandant olmaya iyi bir aday, modifiye Korteweg -de Vries ailesinden beşinci basamaktan bir denklemin benzerlik indirgemesi olarak elde edilen (bir kere integre edildikten sonra)

$$w''' = 10w^2w'' + 10ww'^2 - 5w^5 - zw$$

denklemdir. İntegro differansiyel denklemler aracılığıyla lineerleştirme KDD'lerde geliştirilmiş ters saçılım dönüşümü TSD'den esinlenilmiştir. Aslında bu, KDD'lerin integre edilebilirliğinin altında yatan temel mekanizmadır. Bu konu üzerine yapılan çalışmalar, önemli sonuçların elde edilmesine yol açmıştır [5].

1.2. Tam İntegre Edilebilirlik

Hareket integrallerinin varlığı manasına gelen integre edilebilirlik kavramı o kadar muğlak ki, nerdeyse yararsız denilebilir. Bu yüzden, özellikle hareket denklemlerinin çözümlerinin tekillik yapısı ve integre edilebilirlik arasındaki ilişki hakkında burada yapacağımız çalışmaların ışığında daha tutarlı bir tanım elde etmek için, bu kavramı biraz daha inceltmeliyiz. Tekillik analizinin kullanıcıları integre edilebilirlikten, fonksiyonel bağımsız kompleks analitik hareket integrallerinin varlığını anlıyorlar. Bu sebeple bizim burada ilgilendiğimiz integre edilebilirlik çeşidi "kompleks analitik integre edilebilirlik" olarak isimlendirilebilir.

Tam integre edilebilirlik, bu integrallerden yeterli sayıda bulunması demektir. Örneğin, N tane 1. basamak otonom adi differansiyel denklemden oluşan bir sistemi için yeterli demek N-1 tane zamandan bağımsız (bundan yararlanılarak sistem tek bir kuadrata indirgenebilir) veya N tane zamana bağlı (bu durumda çözümler, cebirsel bir problemin

çözümüyle elde edilebilir) değişmez bulunabilmesi demektir. Genel bir ifade ile, başlangıçtaki sisteminin değişmezliğine uyan integraller aramak mantıklı görünüyor. Örneğin, otonom sistemler için ya zamandan bağımsız veya zamanda öteleme altında şeklini koruyan integraller aramamız gerekecek (aşağıya, 1.32'e bakınız).

Hamilton sistemleri, M serbestlik dereceli bir Hamilton sisteminin tam integre edilebilirliği için, Hamiltonyanın kendisine ek olarak $M-1$ tane involusyon halinde (yani Poisson çerçeveleri sıfır olan) I_i tek değerli ilk integralin (etki) varlığı, Hamilton-Jacobi yöntemiyle $M-1$ tane ilave Ω_i (açı) integralinin bulunmasına imkan verdiğinden özel bir konumdadırlar. N tane 1. basamak adi diferansiyel denklemden (ADD) oluşan bir sistem bazen bir Hamilton sisteme benzer [6]. Aslında tam integre edilebilirlik, k tane I_i ($1 \leq k \leq N-1$) ilk integralin, I_i 'den elde edilmiş kapalı differansiyel formların integre edilmesiyle hesaplanmış $(N-k-1)$ tane daha Ω_i ilk integralinin bulunabilmesi şartıyla varlığı olarak yorumlanabilir. Bunun yanında, N . basamaktan bir differansiyel denklem sisteminin bir değişmez yoğunluk ölçüsü varsa, Jacobi Son Çarpan teoreminden [7] faydalanılarak son bir değişmez daha elde edilebildiğinden bu sistem, $k=N-2$ olan sınıfa düşer. Mesela

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(Cy + z + \lambda) \\ \dot{y} &= y(x + Az + \mu) \\ \dot{z} &= z(Bx + y + \nu)\end{aligned}\tag{1.21}$$

üç boyutlu Lotka-Volterra sistemi her zaman $\frac{I}{xyz}$ şeklinde bir değişmez yoğunluk ölçüsüne sahiptir [8]. Bu yüzden

$$I = (x - Cy) \left(I - \frac{z}{y} \right)\tag{1.22}$$

değişmezini veren $A=B=I$, $\lambda = \mu = \nu = 0$ özel halinde

$$\Omega = \frac{xz}{y} \left(1 - \frac{y}{z}\right)^{c+1} \quad (1.23)$$

ikinci değişmezini elde ederiz.

Kuşkusuz analitik integrale edilebilirlik karşılaşılabilecek tek olanak değildir. Yoshida [6]'da, integrale edilebilirliği Kowalevskaya üstellerinin (KÜ) rasyonelliğine bağlayabilmek amacıyla “cebirsal integrale edilebilirlik” diye bir kavram ortaya atmıştır. Bununla anlatmak istediği, hareket sabitlerinin rasyonel fonksiyonlar olması gerektiğidir. Fakat Yoshida rasyonelliği, hem etki hem de açı türü değişmezlerle uygulamıştır. Bazı iyi bilinen sistemler için sağlansa da, rasyonelliği açı tipi değişmezlerle uygulamak şık değildir. Mesela

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.24)$$

iki boyutlu Coulomb Hamiltonianının

$$\begin{aligned} I_1 &= xp_y - yp_x \\ I_2 &= p_x(xp_y - yp_x) - y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \\ I_3 &= p_y(xp_y - yp_x) - x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.25)$$

gibi üç tane ilave tek değerli integrali vardır (ancak herhangi ikisi involüsyon halinde değildir!).

Gene de açı değişmezlerinin genel olarak çok değerli olduğu ortadadır (irrasyonel C için (1.23)'e bakınız). Eğer Yoshida'nın hipotezi, açısal sabitler sözkonusu olduğunda gevşetilirse, irrasyonel (veya kompleks) Kowalevskaya üstellerine sahip karşı örnekler bulunabilir [9-10]. Bu durumda Yoshida'nın teoreminin [11] Ziglin yaklaşımına

dayanan en son versiyonunda cebirsel integre edilebilirlik, daha önce anlatılmış olan analitik integre edilebilirlik hatırına ortadan kaldırılmaktadır.

Cebirsel integre edilebilirlik, Adler ve Moerbecke [12] tarafından yapılan bir dizi ayrıntılı araştırmaya da konu olmuştur. Bunların “cebirsel tam integre edilebilirliği”, yalnız yeterli sayıda involüsyon halinde değişmezin varlığına bağlı olmakla kalmaz, aynı zamanda çözümlerin Abel integralleri şeklinde ifade edilebilmesini ister. Bu sınırlamanın getirdiği bir fayda, integre edilebilirlikle çözümlerin kompleks yapısı arasındaki ilişkiye dair bazı temel teoremleri kanıt-lamalarına ve Painlevé analizi ile kompleks cebirsel tor yüzeyleri üzerindeki dinamik arasındaki ilişkiyi açıklayabilmelerine imkan vermesi olmuştur.

Yukarıda tanımlanan Yoshida ve Adler Van Moerbecke'ye ait iki cebirsel integre edilebilirlik kavramı, sistem üzerine analitik integre edilebilirliğe nazaran daha fazla sınırlama getirmiştir, ancak buna karşılık olarak, çözümlerin çok kötü davranış göstermemelerini sağlarlar. Öteki tarafa doğru gidersek, daha az kısıtlayıcı integre edilebilirlik çeşitleri bulabiliriz.

Akla gelebilecek en kolay genelleme, her yerde analitik integrallerden ziyade, belirli bir bölgede analitik olan integralleri aramak olacaktır. Bu tip integraller, ender bulunur değildir. Mesela, (1.21) Lotka-Volterra sisteminin bu tip integralleri olan birçok alt durumu vardır. Örneğin, $ABC+1=0$ ve $\lambda = \mu = \nu$ olduğunda

$$I = x^{AB} y^{-B} x(x - Cy + ACz)^{-AB+B-1} \quad (1.26)$$

korunmuş çokluğu, $x - Cy + ACz = 0$ düzlemini ve $x = 0, y = 0$ koordinat düzlemlerini içermeyen bütün bölgelerde tanımlıdır. Aslında sistemin, tam bir gerçel - zaman gelişmesi için, böyle bazı bölgelerde analitik integraller pekala yeterli olabilir.

Başka bir “integre edilebilir” sistem tipi, parçacığın asimtotik olarak [13] serbest kalmasını sağlayacak kadar hızlı azalan potansiyel içinde hareket eden parçacığı

tanımlayan sistemlerdir. Böylece asimtotik momentumlar, hareket sabitleridir (burarada asimtotik kelimesi, zaman sonsuza doğru giderken anlamına gelmektedir). Gerçek yörüngeler için doğru olan bu olay, kompleks zamanlar söz konusu olduğunda gerçekleşmezler. Bu durumda asimtotik momentumlar başlangıç noktasının tekil değerli fonksiyonları değildirler ve asimtotik olarak serbest olan sistemler, “analitik olarak” integre edilebilir olmazlar. 3. Kısımda, Ziglin teorisinin uygulanmasıyla jenerik olarak integre edilemez oldukları kanıtlanan iki tane asimtotik olarak serbest potansiyel örneği veriyoruz.

Bir adım daha atarak, bir bakıma bütün diferansiyel denklemlerin yoz anlamda integre edilebilir olduklarını söyleyebiliriz. Aslında $x_i(t_0) = c_i$ başlangıç koşulları ile birlikte

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (1.27)$$

adi diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Bu başlangıç şartları, sistemin hareket sabitleri olarak alınabilir. Sistemin genel çözümü

$$x_i = \Phi_i(t, c_1, \dots, c_n) \quad (1.28)$$

şeklinde ve (1.28)’i, t' den t_0 ' a kadar zaman içerisinde integre etmekle aynı anlama gelen tersine çevirmeye uğratarsak, n tane sabiti

$$c_i = I_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (1.29)$$

şeklinde yazabiliriz. Ancak geri çevirme işleminin tek değerli olması garanti değildir. Aslında bu durum, integrasyon çizgilerinin kompleks düzlemde “kötü” tekillikler civarından geçmesi halinde ortaya çıkacaktır.

Sistem hakkındaki “gerçek zaman” bilgilerinin yeterli olup olmadığı tamamen felsefi bir sorundur. “Fiziksel” zamanın gerçek olduğu açıkça ortadadır, çözümün kompleks

zaman içerisindeki yapısının gerçel zaman davranışına [9] büyük oranda etki ettiği de bir o kadar aşikardır. Tekillik analizi teknikleri çoğunlukla kompleks zaman üzerine inşa edilirler ve ancak bu bedel karşılığında analitik (veya cebirsel) integre edilebilirlik hakkındaki kesin teoremler kanıtlanabilir. Gerçel ve kompleks zaman arasında, integre edilebilirlik söz konusu olduğunda ortaya çıkan büyük fark, aşağıdaki örnekten kolayca anlaşılabilir.

Kompleks düzlemde basit

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{t-a} + \frac{\beta}{t-b} + \frac{\gamma}{t-c} \quad (1.30)$$

adi diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Bunun integrasyonu (kuadratrler vasıtasıyla)

$$I = x - \alpha \log(t-a) - \beta \log(t-b) - \gamma \log(t-c) \quad (1.31)$$

şeklinde hemen elde edilebilir.

Ancak bir kompleks sayının logaritması $2i\pi$ 'nin bir tam katı farkıyla tanımlanabileceğinden, (1.31)'in sağ tarafı (yani aynı zamanda I 'nin değeri) yalnızca $2i\pi(k\alpha+m\beta+n\gamma)$ toplanan bir terim farkıyla tanımlanabilir. Burada k, m, n keyfi tam sayılardır. Eğer α, β ve γ dan bir (sırasıyla iki) tanesi sıfıra eşitse iki (bir) boyutlu bir kafes oluşturulabilir ve I , elemanter bir kafes hücresinin içinde tek türlü olarak tanımlanabilir. Ama eğer $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ise ve α, β ve γ tam sayılar üzerinde lineer bağımsız ise, (1.31)'un tanımsızlığı çok yüksektir: verilmiş x ve t değerleri için I 'nin olası değerleri düzlemi *yoğun* olarak dolduracaktır. Tersine olarak t ve I 'nin bilinmesi, x 'in kullanışlı bir şekilde tanımlanmasına yetmez. Yani (1.31) integrali sadece “ayrık” çok değerlilik halinde işe yararken, “yoğun” çok değerlilik integre edilebilirlikle uyumsuz olarak kabul edilir.

Integre edilebilirlik ve kompleks dinamik ilişkisine, son zamanlarda Flashka'nın çalışmalarında [14] daha da eğilinmiştir. Flashka bu çalışmalarında, bir Hamiltonian sistem involüsyon halinde tam bir hareket sabitleri takımına sahip olsa da, sistemin (faz uzayındaki) hareketinin bir tor yüzeyi üzerinde ve hatta "çemberler $\times$ çizgiler" şeklinde bir manifoldda dahi yer almasının şart olmadığını göstermiştir. Bu duruma

$$I = p_y^3 + 2yp_x - 3x^2 p_y \quad (1.32)$$

değişmezini kabul eden

$$H = p_x^2 + 3xp_y^2 - x^3 - y^2 \quad (1.33)$$

iki boyutlu Hamilton ifadesi iyi bir örnektir. Bu durumda H ve I 'in verilen değerleri için sistemin yörüngeleri, bir tüpü sonsuza uzanan bir tor yüzeyi üzerinde bulunur. Bu, hareket denklemlerinin çözümlerinin her zaman için varolmamasından, yani sonlu bir zamanda patlamasından kaynaklanır. Böylelikle Arnol'd-Liouville teoreminin [15] temel varsayımlarından biri yerine gelmemiş olur.

Bu beklenmedik bir gelişme yaşanan tek durum değildir. Aslında hareketin basit bir tor yüzeyinden daha karmaşık yüzeyler üzerinde olduğu "integre edilebilir" sistemlerin varlığı bir kaç yıldır bilinmektedir[16]. Yalancı-integre edilebilir denilen ve yörüngeleri ikiden daha yüksek cinsli yüzeyler yani "çok-delikli tor yüzeyleri" üzerinde bulunan böyle sistemlere örnekleri verilmiştir. Gösterilebilecek en basit örnek, yansımaların her yerde tek değerli olarak tanımlanmaması halinde, açıları π 'nin rasyonel katlarına eşit iki boyutlu, çokgensel bilardo topu hareketleridir. Bu durum, π 'den daha büyük bir açıyla olması halinde çıkar [17]. Yalancı-integre edilebilir sistemlerde (veya Flashka sistemlerinde) "kaotik davranışın" ortaya çıkıp çıkmayacağı bilinmez, ancak bu sistemlerin tam olarak integre edilebilir olmadıkları ortadadır.

1.3. Cebirsel İntegre edilebilirlik

Buraya kadar tanıttığımız o kadar çalışmaya rağmen, verilen bir dinamik sistemin tekilliklerinin kompleks zaman düzlemindeki yapısı ile bu sistemin integre edilir olup olmaması arasındaki ilişkinin belirlenmesi işi, bu konuda büyük bir ilerleme sağlanmış olduğu halde hala açık bir problemidir. Bir dinamik sistemin kompleks tekilliklerinin yapıları, en basit integre edilebilir sistemlerin düzenli ağlarından, Hénon-Heiles Hamiltonu gibi integre edilemeyen sistemlerin karmaşık fraktallerine kadar çeşitlilikler gösterir.

"İntegre edilemeyen sistemler, kompleks zaman düzleminde tekillikleri fraktaller üzerinde bulunan doğal sınırlar üretmeleriyle karakterize edilirler" tarzında basit ve kesin hüküm cümleleri söyleyebilmeyi çok isterdik. Bir kısım halikatı içeriyor olsalar da, bu tür ifadelerin doğru olup olmadığını bilmek için zaman henüz erken. İntegre edilemeyen bir sistemin tekilliklerinin kümesini Kowalevski üsleri kullanarak (bunlar yerel bilgilerdir) çok iyi bir yaklaşıklıkla yeniden oluşturma imkanının bulunması, kompleks değişken tekniklerini kullanarak çözümün tekrar inşasının mümkün olabileceğini akla getirir. [18]

Kompleks zaman düzlemindeki tekilliklerin, dinamik sistemin gerçel zaman davranışını doğrudan etkileyebileceği fikri, tarihsel olarak M. Tabor ve J. Weiss'in [19] çalışmalarında gösterildi.

Y. F. Chang, M. Tabor ve J. Weiss [20], [21] Hénon Heiles Hamiltonunu inceleyerek Painlevé özelliğine sahip yani hareketli tekillikleri sadece kutuplar olan bir integre edilebilir dinamik sistem kavramı geliştirdiler. Bu araştırmacılar sistemin integre edilebilir olmaması halini de incelediler ve böyle bir sistemin kompleks zaman düzleminde kendine benzeyen ve bu yüzden de fraktal olan bir yapı gösterdiğini farkettiler. [22]'de ise I. C. Percival ve J. M. Green , doğal bir sınırın varlığının, integre edilemeyen sistemlerin belirleyici bir özelliği olup olmadığı problemini ele aldılar.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, integre edilebilirlik kavramı araştırmacıdan araştırmacıya değişmektedir. J. Weiss, M. Tabor ve G. Carnavale [23] onu Painlevé özelliğine bağlamaktadır. A. Ramani, B. Dorizzi, B. Grammaticos ve T. Bountis, Painlevé özelliği bulunmayabilen bir integre edilebilirlik şekli üzerinde duruyorlar. T. Bountis ve H. Segur [24-25] logaritmik hareketli tekilliklere izin vererek ve onlara ilintilenmiş zayıf kaos kavramını tanımlayarak Painlevé özelliğini biraz hafifletiyorlar.

H. Yoshida [6] hassas fakat kısıtlı bir integre edilebilirlik kavramını, cebirsel integre edilebilirliği araştırdı. Cebirsel integre edilebilirlik için gerek şartları Yoshida şöyle verdi: "Hiçbir Kowalevski üssü irrasyonel veya kompleks olmayacak. " M. Kummer, R. Churchill ve D. Rod [26] tarafından da gösterildiği gibi bu sonucun Hamilton sistemlere doğrudan genişletilmesi o kadar kolay değildir. Bu yazarlar, Kowalevski üsleri rasyonel olmamasına rağmen aşağıda belirtilen manada cebirsel integre edilebilen sistemlere açık örnekler verdiler.

f serbestlik dereceli bir Hamilton sistemi eğer f cebirsel ilk integrali varsa cebirsel integre edilebilir denir, diğer f integral Liouville teoremi kullanılarak 1-formlardan integrasyonla elde edilir. Kowalevski üssünün bazı aritmetik özelliklerden verilen Hamiltonun integre edilemezliğini tanıyabilmeyi isteriz. Yoshida kinetik enerjileri standart yapıda olan Hamiltonlar için bu yönde ilerleme kaydetti [27]. Bu gelişme Ziglin'in analizine dayanıyor (İleride bilgi verilecek). Kowalevski üslerinin genelleştirilmişleri olan Painlevé rezonansları ise [28]'da bulunabilir.

1.3.1 Kowalevski' Üsleri

1.3.1.1. Homojen sistemler

$F_i(x)$ 'ler t 'ye (zamana) açık olarak bağlı olmamak, yani otonom olmak üzere

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\
\frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{dx_N}{dt} &= F_N(x_1, x_2, \dots, x_N)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

differentielsel denklemler sistemini gözönüne alalım. $F_i(x)$ 'ler

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{P_i(x_1, x_2, \dots, x_N)}{Q_i(x_1, x_2, \dots, x_N)} \tag{1.35}$$

gibi iki polinomun bölümü şeklinde rasyonel fonksiyonlardır. Burada P_i ve Q_i 'ler x_k değişkenleri cinsinden polinomlardır. Bunun yanında S sisteminin herhangi α sabitleri için

$$t \rightarrow \alpha^{-1} t; \quad x_1 \rightarrow \alpha^{G_1} x_1; \dots\dots\dots; x_N \rightarrow \alpha^{G_N} x_N$$

benzerlik dönüşümleri altında değişmez kaldığını varsayacağız. Bunun doğru olabilmesi için

$$F_i(\alpha^{G_1} x_1, \alpha^{G_2} x_2, \dots, \alpha^{G_N} x_N) = \alpha^{G_i+1} F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \tag{1.36}$$

şartı sağlanmalıdır. Eğer bunlar varsa, G_i 'ler açıkça belirlenmiş rasyonel sayılardır.

Örnek : $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \neq 0$

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_1 x_2 x_3 \\
F_2(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_2 x_3 x_1 \\
F_3(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_3 x_1 x_2
\end{aligned} \tag{1.37}$$

alalım. Şimdi G_1, G_2, G_3 'ü

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 \alpha^{G_2} x_2 \alpha^{G_3} x_3 &= \alpha^{G_1+1} \varepsilon_1 x_2 x_3 \\
\varepsilon_2 \alpha^{G_3} x_3 \alpha^{G_1} x_1 &= \alpha^{G_2+1} \varepsilon_2 x_3 x_1 \\
\varepsilon_3 \alpha^{G_1} x_1 \alpha^{G_2} x_2 &= \alpha^{G_3+1} \varepsilon_3 x_1 x_2
\end{aligned} \tag{1.38}$$

olacak şekilde bulmaya çalışalım. Buradan

$$\begin{aligned}
G_2 + G_3 &= G_1 + 1 \\
G_3 + G_1 &= G_2 + 1 \\
G_1 + G_2 &= G_3 + 1
\end{aligned} \tag{1.39}$$

elde edilir. (1.39) sisteminin tek bir çözümü vardır: $G_1 = G_2 = G_3 = 1$. Her x_i değişkeni ile eşleşen bir G_i homojenlikle derecesi vardır. P_i ve Q_i polinomları aynı evrensel homojenlik derecesindeki bir terimlerden oluşmuştur. Sonuçta G_i 'ler için, $P_i^{(k)}$ 'ler (pozitif, negatif ya da sıfır olabilen) tamsayılar olmak üzere

$$\sum_{k=1}^N P_i^{(k)} G_i = G_i + 1. \tag{1.40}$$

şeklinde denklemler elde ederiz. Homojen sistem, böyle bir $\{G_i\}_{i=1}^N$ kümesine sahip olan sistemdir. Biz sadece böyle sistemlerle ilgileneceğiz.

1.3.1.2 Özel Çözümler

(S)'nin; $c_1, c_2, \dots, c_N$ 'ler tamamen belirli sabitler olmak kaydıyla

$$(S_0)\{x_1=c_1 t^{-G_1}; x_2=c_2 t^{-G_2}; \dots; x_N=c_N t^{-G_N}\} \quad (1.41)$$

şeklinde özel çözümlerini arayacağız. (S_0) 'ı (S) 'de yerine koyarsak

$$-c_i G_i t^{-(1+G_i)} = F_i(c_1 t^{-G_1}, \dots, c_N t^{-G_N}) = t^{-(1+G_i)} F_i(c_1, c_2, \dots, c_N) \quad (1.42)$$

bulunur. Son eşitlik (1.36) 'da $\alpha = t^{-1}$ kabul edilerek elde edilmiştir. Böylece

$$F_i(c_1, \dots, c_N) = -c_i G_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.43)$$

sisteminin en az çözümü olması şartıyla (S_0) ölçekleme çözümlerini kurabiliriz.

(1.43) c_i 'ler cinsinden N tane polinom denklemden oluşan bir sistemidir. Her $\{c_i\}_{i=1}^N$ çözüm takımı bir ölçekleme çözümü tanımlar.

Örnek : Bir önceki örneğe dönelim.

$$F_i = \varepsilon_i x_j x_k \quad i, j, k \quad 1, 2, 3 \text{ 'ün döneş permutasyonudur.} \quad (1.44)$$

Burada $G_i = 1, \forall i$ olur ve (1.43) denklemi

$$\varepsilon_i x_j x_k = -c_i \quad (1.45)$$

veya

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 x_2 x_3 &= -c_1 \\ \varepsilon_2 x_3 x_1 &= -c_2 \\ \varepsilon_3 x_1 x_2 &= -c_3 \end{aligned} \quad (1.46)$$

şekline dönüşür ki

$$\begin{aligned} c_1 &= \eta_1 (\varepsilon_2)^{-1/2} (\varepsilon_3)^{-1/2} & \eta_1 &= \pm 1 \\ c_2 &= \eta_2 (\varepsilon_1)^{-1/2} (\varepsilon_2)^{-1/2} & \eta_2 &= \pm 1 \\ c_3 &= \eta_3 (\varepsilon_1)^{-1/2} (\varepsilon_3)^{-1/2} & \eta_3 &= \pm 1 \\ \eta_1 \eta_2 \eta_3 &= -1 \end{aligned} \quad (1.47)$$

çözümlerini verir. Bu demektir ki η_i çarpanları için $(+,+,-)$, $(+,-,+)$, $(-,+,+)$ ve $(-,-,-)$ seçimlerine karşılık olarak dört tane ölçekleme çözümü elde edeceğiz demektir.

1.3.1.3 Bir ölçekleme çözümü civarındaki varyasyon çözümleri

(S_0) 'ın civarında (S) nin başka çözümlerinin bulunup bulunmadığını bilmek ilginç bir sorudur. Bu sorunun cevabı Kowalevski tarafından verilmiştir.

$$x_i(t) = x_i^{(0)}(t) + \delta x_i(t) \quad (1.48)$$

yazalım. O zaman (S) , δx_i 'nin birinci kuvvetlerine kadar

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i(t)) = \sum_{k=0}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_k} (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \delta x_k = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x} F_i(c_1 t^{-G_1}, c_2 t^{-G_2}, \dots, c_N t^{-G_n}) \delta x_k \quad (1.49)$$

şekline dönüşür. Fakat

$$\alpha^{(G_i+1)} F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = F_i(x_1 \alpha^{G_1}, \dots, x_N \alpha^{G_N}) \text{ 'dan} \quad (1.50)$$

özdeşliğinin x_k 'ya göre türevini alırsak

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F_i(x_1 \alpha^{G_1}, x_2 \alpha^{G_2}, \dots, x_N \alpha^{G_N}) = \alpha^{G_i+1-G_k} \frac{\partial}{\partial x_k} F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.51)$$

elde ederiz. Bu yüzden (1.43) eşitliği

$$\frac{d}{dt}(\delta x_i) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} F_i(c) t^{|G_k - G_i - 1|} \delta x_k, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (1.52)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Şimdi (1.52)'nin $\xi_i^{(\rho)}$ N-boyutlu sabit bir vektör ve ρ belli bir sayı olmak kaydıyla

$$\delta x_i(t) = \xi_i^{(\rho)} t^{\rho - G_i} \quad (1.53)$$

şeklindeki çözümünü ararsak;

$$\xi_i^{(\rho)} (\rho - G_i) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} F_i(c) \xi_k^{(\rho)} \quad (1.54)$$

elde edilir. (1.54) açıkça gösteriyor ki, ρ ve $\xi_i^{(\rho)}$ sırasıyla elemanları

$$K_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(c) + \delta_{ij}^{G_i} \quad (1.55)$$

şeklinde olan K Kowalevski matrisinin özdeğer ve özvektörüdür. Eğer K köşegenleştirilebilirse, (1.49) varvasyon denkleminin N tane bağımsız çözümünü elde ederiz.

$$\det |K_{ij} - \rho \delta_{ij}| = 0 \quad (1.56)$$

determinant denkleminin N tane kökü $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_N$ ise bunlara Kowalevski üssü denir. Birinci basamakta

$$X_i^{(\rho)}(t) = c_i t^{-G_i} + \xi_i^{(\rho)} t^{\rho - G_i} + \dots \quad (1.57)$$

yazabiliriz.

Örnek: Şimdi

$$\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_2 x_3 + \text{bunun devirli permutasyonları} \quad (1.58)$$

sisteminin Kowalevski üslerini hesaplayalım. Burada

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1 c_3 & \varepsilon_1 c_2 \\ \varepsilon_2 c_3 & 1 & \varepsilon_2 c_1 \\ \varepsilon_3 c_2 & \varepsilon_3 c_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

olmaktadır. Özdeğerler

$$(1 - \rho)^3 - (1 - \rho) [\varepsilon_2 \varepsilon_3 c_1^2 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 c_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_3^2] + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 c_1 c_2 c_3 = 0 \quad (1.61)$$

denkleminin çözümü olup (1.46) kullanıldığında bu denklem de

$$(1 - \rho)^3 - 3(1 - \rho) - 2 = -(1 + \rho)(\rho - 2)^2 = 0 \quad (1.62)$$

şekline indirgenebilir. Bu özel durumda üslerin seçilen değişik c_i 'lere bağlı olmaksızın aynı olduğu görülmektedir ki,

$$\rho = \{-1, 2, 2\} \quad (1.63)$$

takımı elde edilir. -1'in her zaman Kowalevski üssü olduğunu göreceğiz.

$\{\rho_i\}_{i=1}^N$ takımının verilen bir (G.C)' ölçek çözümüne ilintili olduğuna ve ona bağlı olarak değişeceğine dikkat edilmeli.

1.3. 4 Cebirsel ilk integraller

İlk integral öyle bir $\phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ fonksiyonudur ki, buradaki $x_1, x_2, \dots, x_N$ yerine (S)'nin herhangi bir çözümü konduğunda

$$\phi[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)] = \psi(t) = \text{sabit (t'den bağımsız)} \quad (1.64)$$

elde edilir. $\phi(x)$, x_k cinsinden polinom ise ona polinom ilk integral denir. Şimdi

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = a \quad (1.65)$$

gibi bir ilk integral alalım ve $\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \dots, \phi_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 'ler rasyonel fonksiyonlar olmak üzere

$$a^k + \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_N)a^{k-1} + \dots + \phi_k(x_1, \dots, x_N) = 0 \quad (1.66)$$

şeklinde k. dereceden cebirsel denklemin var olduğunu varsayalım. $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ifadesine k. dereceden cebirsel ilk integral denir.

Örnek : $\frac{dx_1}{dt} = \varepsilon_1 x_2 x_3 + \text{bunun devirli permutasyonları.} \quad (1.67)$

sistemi için

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2} + \sqrt{\frac{x_2^3}{\varepsilon_2} - \frac{x_3^2}{\varepsilon_3}} = a \quad (1.68)$$

ifadesinin ikinci dereceden bir cebirsel ilk integral olduğu kolayca görülebilir. Bu aslında

$$a^2 - 2a\left(\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2}\right) + \left(\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2}\right) - \left(\frac{x_2^3}{\varepsilon_2} - \frac{x_3^2}{\varepsilon_3}\right) = 0 \quad (1.69)$$

denklemin çözümüdür. Burada

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -2\left(\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2}\right) \\ \phi_2 &= \left(\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{x_2^3}{\varepsilon_2} - \frac{x_3^2}{\varepsilon_3}\right) \end{aligned} \quad (1.70)$$

x cinsinden polinomlardır. Böylece ölçüt sağlanmış oldu. $\phi(x_1, x_2, x_3)$ 'ün bir ilk integral olduğunu göstermek için (1.67)'yi

$$\frac{x_1}{\varepsilon_1} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_2}{\varepsilon_2} \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_3}{\varepsilon_3} \frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 x_3 \quad (1.71)$$

şeklinde yeniden yazarsak

$$\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2} = c_1, \quad \frac{x_2^2}{\varepsilon_2} - \frac{x_3^2}{\varepsilon_3} = c_2, \quad \frac{x_3^3}{\varepsilon_3} - \frac{x_1^2}{\varepsilon_1} = c_3 \quad (1.72)$$

olmasını gerektirir. Sonuncu ilk integral ilk ikiden bağımsız değildir.

Cebirsel ilk integralin rasyonel ilk integrallerden kurulduğuna dikkat edelim. Aşağıdaki lema yukarıdaki ilk integrallerde $\frac{x_1^2}{\varepsilon_1} - \frac{x_2^2}{\varepsilon_2}, \dots$, türü ifadelerin gelmesinin rastlantı olmadığını gösteriyor.

Lemma 1. BURNS (1887) $F_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$ kümesinin elemanlarının hepsinin rasyonel fonksiyonlar olduğunu kabul edersek, her $\phi_p(x_1, \dots, x_N)$, $p=1, \dots, k$

katsayısı bir rasyonel ilk integral olur. Yani her k. dereceden her cebirsel ilk integral, (hepsi de bağımsız olmak zorunda olmayan) k tane rasyonel ilk integralden oluşur.

Bu yüzden cebirsel ilk integralleri araştırma çalışmasını rasyonel olanlara kısıtlayabiliriz.

Cebirsel integrale edilebilir (S) sistemini, kendisini bir kuadrature indirgemeye yetecek kadar cebirsel integrali bulunan (S) sistemi olarak tanımlayacağız. Yukarıdaki örneğin bu sınıftan olduğu açıkça görülmektedir. Bruns'un 2. Lemasını kullanarak cebirsel integrale edilebilirliği araştırma işi, rasyonel ilk integral araştırmasına indirgenebilir.

Buna, her rasyonel ϕ ilk integralini polinomların

$$\phi = \frac{\sum_m \phi_m(x_1, \dots, x_N)}{\sum_{m'} \phi_{m'}(x_1, \dots, x_N)} \quad (1.73)$$

şeklindeki oranları ile ifade ederek başlayacağız. Burada $\phi_m(x_1, \dots, x_N)$, m ağırlıklı derecesinden homojen polinomdur. Yani

$$\phi_m(\alpha^{G_1} x_1, \dots, \alpha^{G_N} x_N) = \alpha^m \phi(x_1, \dots, x_N) \quad (1.74)$$

olur (açıktır ki m bir rasyonel sayıdır). Mesela önceki örneği kullanırsak

$$3x_1^2 x_2 + x_3^3 + x_2 \quad (1.75)$$

polinomu, ağırlıklı dereceleri sırasıyla 3 ve 1 olan iki homojen polinoma ayrılabilir:

$$3x_1^2 x_2 + x_3^3 \text{ ve } x_2. \quad (1.76)$$

Lemma 2. BRUNS: Daha önceki ifadede yer alan her rasyonel $\frac{\phi_m(x_1, \dots, x_N)}{\phi_{m'}(x_1, \dots, x_N)}$ (her m ve m' seçimi için) fonksiyonu da bir ilk integraldir.

1. ve 2. lemaları birleştirirsek şu önermeyi elde ederiz;

"Her cebirsel ilk integral, (zorunlu olarak bir rasyonel sayı olan) m-m' derecesinde ağırlıklı homojen $\frac{\phi_m(x)}{\phi_{m'}(x)}$ şekilli integrallerin cebirsel bileşimidir."

1.3.5 Varyasyon Denklemleri üzerine Poincaré Leması

Kolaylık olsun diye biraz daha genel

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_N), \quad i=1, \dots, N, \quad (1.77)$$

otonom sistemini gözönüne alacağız. Buradaki F_i 'ler düzgün fonksiyonlardır. $x_i^0(t)$ (1.77)'nin özel çözümü olsun ve

$$x_i(t) = x_i^0(t) + \xi_i(t) \quad i=1, \dots, N \quad (1.78)$$

ile varyasyonlar tanımlayalım. ξ^2 derecesindeki terimleri gözardı ederek

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x_1^0(t), \dots, x_N^0(t)) \xi_k(t) \quad i=1, \dots, N \quad (1.79)$$

varyasyon denklemlerini elde ediyoruz. Buradaki

$$\xi_i = \frac{dx_i^0}{dt} \quad i=1, \dots, N \quad (1.80)$$

fonksiyonlarının her zaman (1.79)'un çözümü olduğunu hemen belirtelim. Bu uyarı ilerde (-1) 'in her zaman Kowalevski üssü olduğunu göstermede kullanılacak. (1.77)'deki ilk sistemin $\phi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \text{sabit}$ gibi bir ilk integralinin varlığı, ϕ ve ξ_i 'yi aşağıdaki şekilde birbirine bağlıyor:

Lemma 3 :(Poincaré)

Diyelim ki $\phi(x_1, \dots, x_N) = \text{sabit}$ ifadesi (1.77) sisteminin ilk integrali olsun. O zaman (1.79) varyasyon denkleminin herhangi bir çözüm için

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (x_i^0(t), \dots, x_N^0(t)) \xi_i(t) = \text{sabit} \quad (t'ye \text{ göre}) \quad (1.81)$$

elde edilir.

İspatı:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (x^0(t)) \xi_i(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} (x^0(t)) F_j^{(0)} \xi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (x^0(t)) \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (x^0(t)) \xi_j \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial x_i \partial x_j} F_j^{(0)} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial F_j^{(0)}}{\partial x_i} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial x_j} F_j \right\} \Big|_{x_i=x_i^0(t)} \\ &= \sum_{i=1}^N \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{d\phi}{dt} \right\}^{(0)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Poincaré lemasının sonucuna ulaşmadan önce (1.80) 'nin sonuçlarından birini ifade edelim: $\rho = -1$ her zaman Kowalevski üssüdür. Aslında (1.80) ifadesi bize

$\left\{ -c_i G_i t^{-(G_i+1)} \right\}_{i=1}^N$ ifadesinin değiştirilmiş denklemlerin bir çözümü olduğunu

söylüyor. Yani $\{-c_i G_i\}_{i=1}^N$ Kowalevski matrisinin -1 özdeğerine karşılık olan özvektörüdür.

Bunu sonucu anlamamanın daha temel bir yolu, (S) sisteminin otonom olduğunu hatırlamaktır. Eğer $\{-c_i t^{-G_i}\}_{i=1}^N$ bir ölçekleme çözümü ise $\{-c_i (t - t_0)^{-G_i}\}_{i=1}^N$, her t_0 için diğer bir çözümdür. Küçük t_0 için, -1 özdeğerine karşı gelen $\{-c_i G_i t^{-(G_i+1)}\}_{i=1}^N$ değişen kümesine geri döneriz. Bunun için (-1) özdeğeri her zaman vardır ve (S) sisteminin zaman değişmezliğine işaret eder.

Şimdi Yoshida teoremlerini elde etmek için Bruns ve Poincaré lemmalarını birleştireceğiz.

1.3.6. Yoshida Teoremleri

Teorem 1: $\phi(x_1, \dots, x_N) = \text{sabit}$ ifadesi m . dereceden ağırlıklı homojen bir ilk integral olsun. Varsayalım ki

$$\nabla \phi(c) = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(c_1, \dots, c_N), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_N}(c_1, \dots, c_N) \right] \quad (1.83)$$

vektörünün bileşleri sonlu ve hepsi aynı anda sıfır değildir. O zaman m , Kowalevski üssüdür.

K 'nın köşegenleştirilebilir olduğunu varsayalım. 3. Lemayı Kowalevski varyasyonel çözümlerine uygularsak

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(c_1 t^{-G_1}, \dots, c_N t^{-G_N}) \xi_i^{(\rho)} t^{\rho - G_i} = \text{sabit} \quad (t'ye göre) \quad (1.85)$$

elde ederiz. Fakat ϕ m . dereceden ağırlıklıdır;

$$\phi(c_1 t^{-G_1}, \dots, c_N t^{-G_N}) = t^{-m} \phi(c_1, \dots, c_N) \quad \forall c_1, \dots, c_N \quad (1.86)$$

ki bunu c_i 'ye göre türetirsek ;

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(c_1 t^{-G_1}, \dots, c_N t^{-G_N}) = t^{G_i-m} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(c_1, \dots, c_N) \quad \forall c_1, \dots, c_N \quad (1.88)$$

buluruz. Bu yüzden (1.85) ifadesi

$$\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(c) \xi_i^{(\rho)} \right\} t^{\rho-m} = \text{sabit} \quad (t\text{'ye göre}) \quad (1.89)$$

haline gelir ki K'nın en az bir $\xi^{(\rho)}$ özvektörünün

$$\xi^{(\rho)} \nabla \phi(c) \neq 0 \quad (1.90)$$

olacak şekilde bulunabilmesi şartıyla $m=\rho$ olur. Fakat K köşegenleştirilebilir olduğundan, N tane $\{ \xi^{(\rho_j)} \}_{j=1}^N$ özvektörünün lineer bağımsızdır. Eğer (1.90) şartının sağlayan sıfır olmayan $\nabla \phi(c)$ vektörü varsa bu, $\xi^{(\rho_i)}$ 'lerin lineer bağımsızlığı ile çelişir. Böylece ispat biter.

K köşegenleştirilemezse, (1.52)'nin N tane bağımsız çözümü, farklı özdeğerlere için (1.53) ifadesiyle ve $\xi_i^{*\rho}(u)$, u cinsinden derecesi ρ özdeğerinin katlılığından daha az bir polinom olmak üzere

$$\xi_i(t) = t^{\rho-G_i} \xi_i^{*(\rho)} \log t \quad (1.91)$$

ifadesiyle verilmiştir. Bu durumda da N tane lineer bağımsız $\{ \xi_i^{*(\rho_i)} \}_{i=1}^N$ vektörü üretebilir ve ispat daha önceki haldeki gibi bitirilir. Şimdi ispatsız olarak şu teoremi ifade edeceğiz:

Teorem II: $\phi_1(x) = \text{sabit}$ ve $\phi_2(x) = \text{sabit}$ iki tane bağımsız, aynı m . dereceden ağırlıklı homojen rasyonel ilk integraller olsun. Varsayalım ki $\nabla\phi_1(c)$ ve $\nabla\phi_2(c)$, ikiside sonlu, özdeş olarak sıfır değil ve lineer bağımsızdır. Bu takdirde $p=m$ en az iki katlı bir Kowalevski üssüdür.

Uyarı I: Bu durum ikiden fazla lineer bağımsız aynı dereceli ilk integrallere genelleştirilebilir.

Uyarı II: Eğer ϕ_1 ile ϕ_2 fonksiyonel bağımlı ise, $\nabla\phi_1(c)$ ile $\nabla\phi_2(c)$ zorunlu olarak lineer bağımlıdır. Ancak bunun tersi doğru değildir. $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ fonksiyonel bağımsız olsa bile $\nabla\phi_1(c)$ ile $\nabla\phi_2(c)$ özel bir c noktasında lineer bağımlı olabilirler.

Teorem III: Eğer herhangi bir Kowalevski üssü irrasyonel veya kompleks ise, (S) sistemi cebirsel olarak integre edilemez denir.

Yani, $N-1$ tane ağırlıklı homojen rasyonel ilk integral bulmak mümkün değildir.

Uyarı: f serbestlik dereceli Hamilton sistemler için, Kowalevski üsleri çiftler halinde görülür. Daha kesin olarak şu sonuca sahibiz [9]:

$\phi(q=p) = \text{sabit}$, benzerlik dönüşümleri altında değişmez kalan, h ağırlıklı dereceli Hamilton sistemleri için m ağırlıklı dereceli homojen bir ilk integral olsun. C_i ($i=1, 2, \dots, 2f$)'lerin verilen değerleri için, $\nabla\phi(c)$ sonlu ve özdeş olarak sıfır değilse, $\hat{m}=h-1-m$ bir Kowalevski üssüdür (buna eşlenik Kowalevski üssü denir). Örneğin $m=h$ için $\hat{m}=-1$ olur.

Liouville teoremini hesaba katarak cebirsel integre edilebilirliği Hamilton sistemlerine doğal olarak genişletmek istenebilir. Bu yüzden ağırlıklı homojen dereceli f tane rasyonel ilk integrali bulunabilirse, f serbestlik dereceli Hamilton sistemine cebirsel integre edilebilir diyeceğiz. Diğer f ilk integral, 1-formların Liouville teoremi kullanılarak integrasyonu ile verilir.

Yoshida Teorem III'ü Hamilton sistemlerine de genişletilebileceğini düşünmüştü. Bu mümkün olmayacak gibi görünüyor. Nedenin $\nabla\phi(c)\neq 0$ şartına bağlı olduğu açıkça görülüyor. Bu şart olmasaydı her rasyonel ilk integral, kendine karşılık bir rasyonel Kowalevski üssü üretecekti.

Ancak maalesef M. Kummer, R. Churchill ve D. Rod [26]'de kompleks ve irrasyonel Kowalevski üsleri olan cebirsel integrale edilebilir Hamilton sistemlerine örnekler verdiler.

1.4 Kısmi ve Kısıtlı İntegre Edilebilirlik

Geçen bölümde, tam integrale edilebilirliğin değişik şekillerini inceledik bazı durumlarda integrallerin “sistemin keyfi davranması” gibi bir sorun doğuracak kadar zayıf olmalarına rağmen, daima sistemin tam bir integral takımına sahip olduğunu varsaydık. Bu varsayımı biraz esnetmek, bizi doğal olarak kısmi integrale edilebilirlik kavramına ulaştıracaktır. Böylece kısmi integrale edilebilirliğin mümkün şekillerinden biri, yetersiz sayıda hareket integraline sahip olunması hali olacaktır. M serbestlik dereceli Hamilton sistemler ele alındığında, yetersiz demek, involüsyon halinde M-1'den daha az “etki” integrali (Hamiltonyana ilave olarak) bulunması demektir. Örnek olarak, yerçekimi altında dönen asimetrik topaç için verilen meşhur

$$H = \left(A\Omega_1^2 + B\Omega_2^2 + C\Omega_3^2 \right) / 2 + x_0\alpha + y_0\beta + z_0\gamma \quad (1.92)$$

Hamiltonyanını (M=3) ele alalım. Burada A, B, C esas eylemsizlik momentleri, Ω_i 'ler açısal hızlar, α, β, γ doğrultu kosinüsleri ve x_0, y_0, z_0 kütle merkezinin yeriyle ilişkili sayılardır. Eylemsizlik momentlerinin genel değerleri için sadece bir tek ilave değişmez vardır, bu da açısal momentumun yerçekimi doğrultusundaki bileşeni olan

$$I = A\Omega_1\alpha + B\Omega_2\beta + C\Omega_3\gamma \quad (1.93)$$

ifadesidir.

Kısmi integre edilebilirlik, pek elverişli olmayan biçimli integrallerin varlığı şeklinde de ortaya çıkabilir. N tane birinci basamak diferansiyel denklemden oluşan bir sistemde, N-1 tane *zamana-bağımlı* birinci integral, tam integre edilebilirlik için yeterli değildir: sistem, otonom olmayan birinci basamaktan $\dot{x} = f(x, t)$ diferansiyel denklemine indirgenebilir ki bu, genelde integre edilebilir değildir. Gene de, zamana-bağımlı değişmezler, sistem hakkında uzun süreli global bilgi sağlarlar.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -y + \rho x - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy ;\end{aligned}\tag{1.94}$$

Lorenz sistemi ele alınırsa, bunun $b = 2\sigma$ için

$$x^2 - 2\sigma z = Ce^{-2\sigma t}\tag{1.95}$$

şeklinde zamana bağımlı bir integral vardır. $\sigma > 0$ olduğunda, zaman (artı) sonsuza doğru giderken hareketin $x^2 - 2\sigma z = 0$ paraboloid yüzeyine doğru çekildiğini hemen görüyoruz. (1.95)'deki integral, tamamen daha önce bahsettiğimiz (zamanda öteleme altında değişmez kalan) biçimdedir. Aslında zamanın $t \rightarrow t + t'$ şeklinde değişmesi, integralin biçimini korur, sadece sabitin yeni değerini $C' = Ce^{-2\sigma t'}$ olarak almak yeter.

Hamilton sistemleri, her zamanki gibi farklıdır. Zamana-bağımlı Hamilton ifadeleri enerjiyi korumadıklarından, bir boyutlu olanları bile integre edilebilir değildir. Ancak korunmuş tek bir büyüklüğün varlığı bile, bu büyüklük zamana bağımlı da olsa, integre edilebilirlik için yeterlidir. Aslında bütün $H(x, p_x, t)$ Hamilton ifadeleri için yeni bir z değişkeni seçip, içinde geçen p_z 'nin zaman türevinin birim olduğu bir (zamandan bağımsız, iki serbestlik dereceli) $H' = H(x, p_x, p_z) - z$ Hamilton ifadesi tanımlanabilir.

Eğer H , $I(x, p_x, t)$ gibi bir korunmuş büyüklüğe sahipse, H' ifadesi $I(x, p_x, p_z)$ şeklinde ikinci bir değişmeze sahiptir, yani integre edilebilirdir.

Tam olmayan integre edilebilirliğin bir diğer şekli de, “kısıtlamalı” integre edilebilirliktir. Bunun iyi bilinen bir örneği, Hamilton sistemlerinin sabit-enerjili integre edilebilirliğidir. [28]’de Hietarinta bu konuyu ayrıntılı olarak araştırmış ve yalnızca sıfır enerjide integre edilebilen iki boyutlu Hamilton sistemlerine çeşitli örnekler vermiştir. Örneğin

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + 4[a(x^6 + y^6) + (4b - a)(x^2 - y^2)x^2y^2] \quad (1.96)$$

Hamilton ifadesi, $H=0$ olduğu zaman ikinci bir

$$I = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}(p_x^2 - p_y^2) - \frac{4xy}{x^2 + y^2}p_x p_y + 8a(x^2 - y^2)^2 32bx^2y^2 \quad (1.97)$$

değişmezine sahiptir.

Bu sınıfa ait iyi bilinen diğer bir örnek, Jimbo ve Miwa'nın [29] Kadomtsev-Petviashili hiyerarşisinde görülür. Jimbo ve Miwa denklem hiyerarşilerini açıkladıklarında, bu denklemlerin *hepsinin* de integre edilebilir olduğuna inanılıyordu. Ancak bu doğru değildir ve *koşulsuz olarak* integre edilebilir daha yüksek boyutlu denklemlerin varlığı sorusu hala açıktır. Aslında, karşımıza çıkan durum şudur: Kadomtsev-Petviashili hiyerarşisinin denklemlerinin *hepsi bir arada* ele alındığında integre edilebilirler[30], ancak denklemler teker teker incelendiklerinde, birinci denklem dışındakiler integre edilebilirlik testlerini geçemezler. Böylece şartlı integre edilebilirlik kavramı şöyle özetlenebilir: Hiyerarşi içindeki belli bir denklem, hiyerarşide daha alt düzeydeki denklemlerle birlikte ele alınmalıdır; *bütün* bu denklemlerin ortak çözümleri, bilinen integre edilebilirlik özelliklerine sahiptir.

Bu noktayı açıklayabilmek için hiyerarşide ikinci olarak yer alan

$$u_{xxx} + 3u_{xy}u_x + 3u_yu_{xx} + 2u_{yt} - 3u_{zx} = 0 \quad (1.98)$$

denklemini yine hiyerarşide ilk sırayı alan ve tam olarak Kadomtsev-Petviashili (KP) denklemi olan ve potansiyel formunda

$$u_{xxxx} + 6u_{xx}u_x + 3u_{yy} - 4u_{xt} = 0 \quad (1.99)$$

şeklinde yazılan denklemle birlikte olarak ele alacağız. Özellikle, (1.98) denkleminin soliter dalga çözümlerini ele alacağız ve bunların karşılıklı girişimlerde soliton gibi davranıp davranmadıklarına bakacağız. Aslında lineer olmayan çok sayıda KDD için soliter dalga çözümleri vardır ve Hirota'nın ikili lineer biçimine sokulabilen bütün denklemler için ikili soliter dalga çözümleri mevcuttur [31]. $N \geq 3$ için N'li soliton çözümlerin varolması, integre edilebilirliğin bir göstergesi olarak algılanılabilecek dikkate değer bir durumdur [32]. (1.98)'de elde edilen soliter dalga çözümlerinin, bunların aynı zamanda (potansiyel) KP denkleminin de çözümleri halinde üçlü soliton çözümler olarak birleştirilebileceğini kanıtlayabiliriz. Hirota'nın [31] izinden giderek "N-soliton" çözümlerini aşağıdaki şekilde arayabiliriz.

$$\eta_i = k_i x + l_i y + m_i t + n_i z \quad (i = 1, 2, \dots)$$

çokluklarını tanımlayalım, buradaki (k_i, l_i, m_i, n_i) sayı takımları (1.99)'daki KP denklemi için

$$P_{KP}(k_i, l_i, m_i) = k_i^4 + 3l_i^3 + 4l_i m_i = 0 \quad (1.100)$$

ve (1.98) Jimbo-Niwa (JM) denklemi için de

$$P_{JM}(k_i, l_i, m_i, n_i) = (k_i^3 + 2m_i)l_i - 3k_i n_i = 0 \quad (1.101)$$

dispersiyon bağıntılarını sağlarlar. η_i değişkenlerini kullanarak aşağıdaki çözümleri tanımlarız.

“tek soliton” çözümler

$$\tau = 1 + e^{\eta_1} ; u = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log \tau$$

Bu, (1.100)’ün sağlandığında (ki bu durumlarda z , solitonun fazında yutulabilecek bir parametre haline gelir), (1.99) KP denkleminin bir çözümüdür. τ fonksiyonu (1.101) sağlanırsa (1.98) denkleminin; (1.100) ve (1.101) aynı zamanda sağlanırsa, (1.98) ve (1.99) denklemlerinin ortak çözümü olur.

“iki soliton” çözümler

$$\tau = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}$$

ve

$$A_{12} = \frac{P(k_1 - k_2, l_1 - l_2, m_1 - m_2, n_1 - n_2)}{P(k_1 + k_2, l_1 + l_2, m_1 + m_2, n_1 + n_2)} . \quad (1.102)$$

Eğer (1.102) denkleminde geçen P , P_{KP} olarak alınmışsa ve (1.100) eşitliği (k_i, l_i, m_i) ; $(i = 1, 2, \dots)$ takımlarının her ikisi için sağlanıyorsa τ , KP denkleminin de çözümüdür. Aynı şekilde eğer P , P_{JM} olarak alınmışsa ve (1.101) sağlanıyorsa τ , ((1.100) sağlansın veya sağlanmasın) JM denkleminin bir çözümüdür. Eğer hem (1.100) hem denklem (1.101) sağlanmışsa A_{12} ’nin iki ifadesi çıkarılır ve τ , hem KP hemde JM denklemi için ortak bir çözüm olur. Bu durumda A_{12} ’nin aldığı ortak değer şöyledir.

$$A_{12} = \frac{k_1^2 k_2^2 (k_1 - k_2)^2 - (k_1 l_2 - k_2 l_1)^2}{k_1^2 k_2^2 (k_1 + k_2)^2 - (k_1 l_2 - k_2 l_1)^2} \quad (1.103)$$

“üçlü soliton” çözümler

Eğer Hirota biçimselliği içinde üçlü soliton varsa, bu ancak

$$\tau = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + A_{13}e^{\eta_1+\eta_3} + A_{23}e^{\eta_2+\eta_3} + A_{12}A_{13}A_{23}e^{\eta_1+\eta_2+\eta_3} \quad (1.104)$$

şeklinde olabilir.

Ayrıca (1.104) ancak

$$\begin{aligned} Q = & P(k_1 + k_2 + k_3, \dots) A_{12} A_{13} A_{23} + P(k_1 + k_2 - k_3, \dots) A_{12} \\ & + P(k_1 - k_2 + k_3, \dots) A_{13} + P(-k_1 + k_2 + k_3, \dots) A_{23} \end{aligned} \quad (1.105)$$

ifadesi özdeş olarak sıfır olursa bir çözüm olabilir.

Eğer (1.105) denklemi içindeki P , P_{KP} ise ve (1.100) ifadesi tüm üç (k_i, l_i, m_i) , $(i=1,2,3)$ takımları için sağlanıyorsa, Q aslında sıfır olur. Bilindiği gibi KP denklemi “üçlü soliton” çözümlere (ve herhangi bir N için “ N -li soliton” çözümlere) sahiptir. Ancak; eğer P , P_{JM} ise ve (1.101)’in yalnızca üç (k_i, m_i, n_i, l_i) , $(i=1,2,3)$ takımı için sağlanması istenmiş ise o zaman Q ifadesi özdeş olarak sıfır olmaz. Burada bunun ifadesini çok uzun alacağından veremeyeceğiz. Böylece genel olarak τ , JM denklemi için bir çözüm değildir.

Şimdi P ’nin P_{JM} olduğunu varsayalım ve (1.101)’e ilave olarak (1.100) denkleminin de sağlanması şartını koşalım. A_{12} için (1.103) ifadesini elde ederiz (hem de P_{JM} için). Böylece Q sıfır olur ve bu nedenle τ , JM denklemi için bir çözüm haline gelir. Bu durum zaten beklenmelidir; Jimbo ve Miwa [29] tarafından bütün KP hiyerarşisi için genel olarak elde edilmiş “ N ’li soliton” (ki burada $N=3$) çözümleri yeniden elde etmiş olduk.

Burada üzerinde durduğumuz şey, N -soliton çözümlerin η_i değişkenlerinin hem (1.40) hemde (1.101)'i sağlaması gerektiğidir. JM denkleminin soliter dalgaları, genel olarak, bir seferinde üç veya daha fazlası çarpıştığında, soliton gibi davranmazlar. Bu durumda, çoklu soliton çözümlerinin varlığı kriteri bizi, (1.98)'deki JM denkleminin şartlı integre edilebilirliği sonucuna götürüyor. Normal (şartsız) anlamında integre edilebilirlik, denklemin soliter dalga çözümlerinin gelişigüzel sayıda girişimlerde solitonlar gibi etkileşmelerini gerektirecektir.



BÖLÜM 2

TEKİLLİLİK YAPISI VE PAINLEVE ÖZELLİĞİ

2.1 SABİT VE HAREKETLİ TEKİLLİKLER

Diferansiyel denklemlerin integrallenebilirliği hakkındaki çalışmalarda tarihsel olarak ilk yaklaşımlar, basit fonksiyonlar cinsinden *global* çözümler elde etme amacına yönelik olduğu halde; ilgi çok geçmeden, Cauchy'nin çalışmalarını takiben denklemlerin *yerel olarak* karmaşık düzlemde incelenmesine kaydı[33]. Böylelikle z bağımsız değişkeninin kompleks düzleminin bir bölgesinde çözümler aranarak işe başlanabiliyor ve analitik uzatım [4] ile daha global bir sonuç elde edilmesi yoluna gidilebiliyordu. Bunların hepsinin de başarı ile sonuçlandırılabilmesi için, problemin tekilliklerinin z düzleminin neresinde olduğunun bilinmesi gereklidir.

İki çeşit tekillik vardır: Yerleri denklem tarafından belirlendiğinden *sabit* denilenler ve yerleri başlangıç koşulları tarafından belirlendiğinden *hareketli* olarak tanımlananlar. Lineer denklemlerin sadece sabit tekillikleri olabilir. Örneğin,

$$(z-c)w' = \lambda w \quad (w' = dw/dz) \quad (2.1)$$

adi diferansiyel denklemini (ADD) düşünelim. Bu denklemin çözümü; $w = (z-c)^\lambda$ şeklindedir. Eğer λ pozitif bir tam sayıysa çözüm holomorftir. λ 'nın negatif değerleri için $z=c$ çözümün sabit bir kutbudur. λ 'nın rasyonel değerleri için bu nokta, bir

cebirsel dallanma noktası, λ 'nın diğer tüm değerleri için de transandant dallanma noktasıdır. Aşağıdaki örnekte görülebileceği gibi, daha “kötü” tekillikler de ortaya çıkabilir:

$$w' = -w(z-c)^{-2} \quad (2.2)$$

denkleminin $w = Ke^{\frac{1}{z-c}}$ çözümünün $z=c$ de esaslı tekilliği vardır.

Lineer olmayan denklemlerin hem sabit hem hareketli tekillikleri vardır.

$$w' - \lambda w^{1-1/\lambda} = 0 \quad (2.3)$$

adi diferansiyel denklemini ve onun

$$w = (z - z_0)^\lambda \quad (2.4)$$

çözümünü alalım. Burada z_0 , (2.3) denkleminden çıkartılamaz ve keyfidir. λ 'nın değerine bağlı olarak $z=z_0$ analitik bir nokta, hareketli bir kutup veya (hareketli) bir dallanma noktasıdır. Daha karmaşık tekillikler (örneğin; logaritmik dallanma noktaları) veya esaslı tekillikler, lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin basit örneklerinde bile ortaya çıkabilir .

2.2. Painlevé Özelliği

f w cinsinden rasyonel, z cinsinden analitik ve hareketli tekillikleri yalnızca kutuplar olan

$$w' = f(z, w) \quad (2.5)$$

şeklindeki bütün birinci basamak adi diferansiyel denklemleri araştıran ilk kişi Painlevé

oldu. *Painlevé özelliği* denilen bu özelliğe sahip denklemleri integre etmenin ya da analitik olarak çözmenin daha kolay olabileceği düşünülmüştü. Örneğin f_n in w cinsinden polinom olduğu

$$w' = \sum_{n=0}^m P_n(z) w^n \quad (2.6)$$

denklemini gözönüne alalım. $P_n(z)$, z cinsinden analitiktir. Tekillikleri genelde, çözümün civarlarında

$$w = a_0 (z - z_0)^{\frac{-1}{m-1}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\frac{n}{m-1}} \right] \quad (2.7)$$

seri açılımı halinde yazılabildiği dallanma noktalarıdır.

Burada özellikle ilgi duyulan hal, $z=z_0$ 'daki tekillikleri basit kutuplar olan $m=2$ halidir. Bu ise iyi bilinen

$$w' = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) w^2 \quad (2.8)$$

Riccati denklemdir ($f_i(z)$, z cinsinden analitiktir). Bunun (2.5) türünde Painlevé özelliğine sahip tek birinci basamak adi diferansiyel denklem olduğu kanıtlanmıştır.

Gerçekten de $w = \frac{-y'}{[f_2(z)y]}$ yerine koyması ile (2.8) denklemi, y cinsinden ikinci

basamaktan lineer bir ADD'e dönüşür. Bu durum kesin olarak bir global integre edilebilirlik şeklidir, çünkü lineer ADD'lerde tekiliğin sabit yapıda oluşu, çözümlerinin global integral temsillerini mümkün kılar.

İkinci basamak diferansiyel denklemler için yazdıkları bir dizi ilginç makalede (daha fazla ayrıntı için [4]'e bakınız) Painlevé ve birlikte çalışanlar F , dx/dt cinsinden rasyonel, x cinsinden cebirsel, t cinsinden analitik olmak üzere, kritik noktaları (dallanma noktaları ve eşaşı tekil noktaları) sabit olan

$$\frac{d^2 x}{dt} = F\left(\frac{dx}{dt}, x, t\right) \quad (2.9)$$

şeklindeki bütün diferansiyel denklemlerin tekillik analizini tamamladılar. Başka bir deyişle, hareketli tekillikleri sadece kutuplar olan böyle denklemleri belirleme işini başardılar. Bunlardan kırkyedi tanesinin elemanter fonksiyonlar cinsinden, kuadratürlerle, ya da lineerleştirme ile integre edilebildiği gösterildi. Geri kalan altı tanesini integre etmek için Painlevé transandantları denilen yeni transandantların ithali gerekmişti.

2.3 Ablowitz-Ramani-Segur Tahmini

İlk integre edilebilir KDD'nin, Korteweg de Vries denkleminin, Kruskal ve beraber çalışanlar tarafından bulunması lineer olmayan KDD'ler için yeni teknikler geliştirilmesine, bu gelişmeler de integre edilebilir yeni denklemlerin bulunmasına yol açtı.

Ablowitz ve Segur'un çalışmaları burada önem kazandı. Bilinen integre edilebilir KDD'lerin benzerlik indirgemelerini araştırırken, bütün bu denklemlerin Painleve tipi ADD'lere vardığını gözlemlediler [34]: Bazı durumlarda bu ADD'ler doğrudan doğruya bilinen fonksiyonlar cinsinden çözülebiliyordu. Ancak daha ilginç durumlarda, bunlar (1.20)'daki listede yer alan PI-PVI arasında yer almaktaydı ki, çözüme ulaşmak için Painleve transdantlarına gerek duyuluyordu. Böylelikle onlar, TS (ters saçılım) yöntemlerini kullanarak, Gelfand-Levitan-Marchenko lineer integral denklemi yardımıyla Painlevé'nin indirgenemez denklemlerinden biri olan PII'nin *lineerleştirilişini* elde ettiler. Bu noktayı izah edebilmek için bazı örnekleri inceleyelim. İşte

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.10)$$

Korteweg-de Vries denklemiyle başlayalım ve zamandan bağımsız, yani $u = u(x)$ türü bir sadeleştirmeyle denklemi şu hale getirelim:

$$6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.11)$$

($u' = du / dx$ ifadesi göz önünde bulundurularak) bu denklem iki kere integre edildiğinde

$$u'^2 = C_1 + C_2 u - 2u^3 \quad (2.12)$$

denklemini verecektir.

Bu son denklem, tekillikleri sadece kutup noktalarında yer alan bir eliptik fonksiyon tanımlar. İkinci olarak,

$$u_t = u_{xx} + \left(u^2 / 2 \right)_{xx} + u_{xxx} \quad (2.13)$$

Boussinesq denklemini ele alalım ve $u = u(x-ct) = u(z)$ gezen dalga çözümlerine indirgemesini elde edelim. $u' = du / dz$ tanımıyla (2.13) denklemi

$$(1-c^2) u'' + (u^2 / 2)'' + u''' / 4 = 0 \quad (2.14)$$

haline gelir. Bu da iki kez integre edilerek şu denklem elde edilir :

$$u'' + 2u^2 + z = 0. \quad (2.15)$$

(2.15) denklemi altı Painlevé transadant denkleminin birincisidir. Üçüncü olarak farklı bir indirgeme yöntemi ele alalım ve

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.16)$$

modifiye edilmiş Korteweg-de Vries denkleminiyle işe başlayalım ve

$$u(x,t) = (3t)^{-1/3} u(\zeta) \text{ ve } \zeta = x / (3t)^{1/3}$$

şeklinde kendine benzeyen bir çözüm arayalım. O zaman

$$-(zu)' + 6u^2u' + u''' = 0 \quad (2.17)$$

elde ederiz . Bu da bir kere integre edildiğinde

$$u'' + 2u^3 - zu + C = 0 . \quad (2.18)$$

ikinci Painlevé transadant denklemini verir .

Dördüncü olarak

$$u_{xt} = \sin u \quad (2.19)$$

Sine-Gordon denklemini alalım. Bu denklem tam integre edilebilir denklemlerin sınıfındadır. Denklemin kendine-benzer çözümleri vardır.

$$u(x,t) = v(z) , \quad z = xt ; w = e^{iv}$$

dönüşümü yapılırca denklem

$$w'' = \frac{1}{w} (w')^2 - \frac{1}{z} w' + \frac{w^2 - 1}{z}$$

şekline dönüşür. Bu denklem üçüncü Painleve denkleminin özel halidir.

Son olarak

$$iq_t - q_{xx} = 2aq^2 \bar{q} \quad (2.20)$$

lineer olmayan Schrödinger denklemini alalım. Bu denklem de tam integre edilebilir denklemlerin sınıfındadır. Denklemin kendine-benzer çözümlerini elde etmek için bağımlı ve bağımsız değişkenleri, γ gerçel bir sabit olmak üzere

$$z = xt^{-1/2}, \quad q(x, t) = t^{-1/2-i\gamma} \Phi(z)$$

formülüne göre yeniden ölçekleyelim. O zaman (2.20) denklemi

$$\left(\Phi' + \frac{i}{2} z \Phi \right)' = -2a(\Phi)^2 \bar{\Phi} + \gamma \Phi \quad (2.21)$$

şekline dönüşür. Bu denklem, nonlinear Schrödinger denkleminin benzerlik indirgemeslerinden biridir. Şimdi Φ 'yi θ fazı ile P genliğine ayıralım:

$$\Phi = P e^{i\theta}$$

$\Psi = \theta' + \frac{z}{4}$ tanımını yaparsak $(P^2 \Psi)' = -\frac{1}{4} P^2$ eşitliğini elde ederiz. Bunlar gözönüne alındığında (2.21) denklemi

$$(P^2 \Psi)^2 = P^2 \left(PP'' + 2aP^4 + \frac{1}{16} z^2 P^2 - \gamma P^2 \right) \quad (2.22)$$

haline gelir. $P^2 \Psi = -4V$ tanımı yapılırsa $P^2 = 16V'$ elde edilir ve (2.21) denklemi

$$V^2 = P^2 \left(PP'' + 2aP^4 + \frac{1}{16} z^2 P^2 - \gamma P^2 \right) \quad (2.23)$$

olur. Bu denklem $P^2 = 16V'$ eşitliği ile birlikte gözönüne alınırsa, V cinsinden üçüncü basamaktan ve üçüncü dereceden

$$V'''V' = -\frac{1}{2}(V'')^2 + \frac{1}{8}V'^2 - \frac{1}{8}z^2(V')^2 - 64a(V')^2 + 2\gamma(V')^2 \quad (2.24)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem bir kere integre edilerek C keyfi integrasyon sabiti olmak üzere ikinci basamaktan ve ikinci dereceden

$$(V'')^2 = -\frac{1}{4}(zV' - V)^2 - 64a(V')^3 + 4\gamma(V')^2 - CV' \quad (2.25)$$

denklemine ulaşırız.

Bağımlı ve bağımsız değişkenleri $z = 2e^{i\pi/4}\tau$, $V = \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}\sigma$ eşitlikleri ile yeniden ölçeklendirirsek ve r , r_2 , θ_0 , θ_∞ parametrelerini

$$r_1 + r_2 = 4i\gamma, \quad r_1 r_2 = 64C, \quad r_1 = -4\theta_0, \quad r_2 = -2(\theta_0 + \theta_\infty)$$

eşitlikleri ile tanımlarsak (2.25) denklemini M. Jimbo ve T. Miwa tarafından [35]'de Painlevé IV denkleminin σ şekli olarak adlandırılan

$$(\sigma'')^2 = 4(\tau\sigma' - \sigma)^2 - 4\sigma'(\sigma' + 4\theta_0)(\sigma' + 2(\sigma' + 2(\theta_0 + \theta_\infty))) \quad (2.26)$$

denklemini bulunur [36]. Böylece lineer olmayan Schrödinger denkleminin (2.21)'deki benzerlik indirgemesinin her çözümü, (2.26)'ye bir çözüm sağlar, o da $\alpha = 2\theta_\infty$, $\beta = -8\theta_0^2$ olmak üzere

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}(w')^2 + 4\tau w^2 + 2(\tau^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w} \quad (2.27)$$

Painlevé IV denklemini bir çözüm üretir.

Yukarıdaki gözlem ve diğer gözlemlerden elde edilen sonuçlar bize Ablowitz-Ramani-Segur (ARS) tahmininin formülasyonunu verir : Ters saçılım yöntemiyle çözülebilen lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin indirgenmesiyle elde edilen bütün adi diferansiyel denklemler Painleve özelliğini taşır.

Tahminin kullanılabilmesi için iki farklı şey gerekmektedir. Verilmiş bir KDD'nin *bütün* indirgemelerin elde etmek için bir yöntem, ve verilmiş bir ADD'nin Painleve özelliğini araştıran ikinci bir yöntem. Ablowitz, Ramani ve Segur ve onların izleyen bir dizi araştırmacı, en azından bir gerek şart elde etmek için daha sonraki kısımlarda göreceğimiz algoritmaları önerdiler.

Bu tahmin, eğer doğru ise, verilen bir KDD denkleminin tam integre edilebilmesi için gerekli şartı sağlıyor. Ablowitz, Ramani, Segur [37], McLeod ve Olver [38], Painlevé tahmininin zayıf-halini ispatladılar. Bu ispatlar bir KDD tam integre edilebilir olduğunda çözümlerinin, bir lineer integral denklem olan Gel'fand -Levitan-Marchenko integral denklemi ile ifade edilebileceği gerçeğine dayanıyor.

Burada önemli olan soru, verilen KDD'nin Painlevé denklemlerinden birine indirgenip indirgenemeyeceğinden daha ziyade bir ADD'e indirgenip indirgenemeyeceğidir. Eğer verilen KDD Painlevé türünde bir denkleme indirgenebiliyorsa, Painlevé denklemlerinden biri olsa bile, Painlevé tahmini KDD'nin integre edilebilirliği konusunda hiçbir şey söylemiyor. Painleve tahmini her indirgemenin Painlevé türünde ADD olmasını gerektiriyor, fakat buna rağmen yeter koşulu sağlayamıyor.

Örneğin; modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony (MBBM) denkleminin

$$u_t + u_x + u^2 u_x - u_{xxt} = 0 \quad (2.28)$$

gezen-dalga çözümü,

$$u(x, t) = w(z), \quad z = x - ct \quad (2.29)$$

olmak kaydıyla

$$\frac{1}{2}(1-c)w^2 + \frac{1}{12}w^4 + \frac{1}{2}c(w')^2 = Aw + B \quad (2.30)$$

denklemini sağlar. Burada A, B, keyfi sabitlerdir.

Bu denklem, klasik Lie grup yöntemi veya doğrudan yöntemlerle elde edilmiş tek benzerlik indirgemesidir. (2.30) denkleminin Jacobian elliptic fonksiyonları cinsinden çözümü vardır ve Painlevé türündendir. Bu yüzden (2.28)'deki MBBM denklemi Painlevé tahmininin gerek şartlarını sağlıyor. Fakat, sayısal bulgular MBBM denkleminin soliter dalga etkileşmelerinin elastik olmadığını, yani solitonlar gibi davranmadığını gösteriyor. MBBM örneği Painleve tahminini çürütmüyor, yalnızca Painlevé tahminin KDD'in tam integre edilebilirliği için gerek ve yeter şart olarak genelleştirilemeyeceğini gösteriyor.

Painleve tahmininin verilen KDD'e uygulamadaki en büyük engel, KDD'i ADD'e indirgemek (birden fazla indirgeme olabilir) ve sonra her ADD'in Painleve türü olup olmadığını araştırmaktır. Benzerlik indirgemelerini bulmada sistematik yöntemlerin varlığına rağmen (KDD'in simetrilerini araştırmak, mümkün bütün benzerlik indirgemelerini bulmak için yeterli olmayabilir). Painlevé tahmini, yeterli sayıda simetrisi olmayan (2.28) MBBM denklemi gibi KDD'ler için yetersizdir. Yani eğer verilen KDD'nin yeter sayıda simetrisi yoksa, Painlevé tahmini etkisiz kalacaktır.

Doğrudan KDD'leri test eden bir yöntem olsa daha iyi olur. Weiss, Tabor ve Carnavale KDD'ler için Painlevé özelliğini test eden bir yöntem buldular [39]. "KDD'ler için Painlevé testi" ADD'lere indirgmeden, verilen KDD'e Painlevé tahminini doğrudan uygulama metodudur. KDD'nin Painleve özelliğine sahip olması demek, karakteristik olmayan hareketli tekil manifoldlar civarında tek değerli çözümlere sahip olması demektir. Weiss, Tabor ve Carnavale tarafından bulunan ve Ablowitz, Ramani ve Segur'un ADD'lerin Painlevé türü olup olmadığını araştırmada

kullandıkları yöntemle benzeyen yöntemi ilerideki kısımlarda vereceğiz ve bu yöntemi bir dizi örneğe de uygulayacağız.

Weiss, Tabor ve Carnavale, Painlevé özelliği ile tam integre edilebilirlik arasındaki ilişkiyi ispatlamaya çalışmadılar. Painleve KDD testi tam integre edilebilir KDD'lerin belirlenmesi için yararlı bir kriter olarak gözükmüyor. Verilen KDD'nin tam integre edilebilirliği için yararlı ilk test olduğuna ek olarak Painleve analizi, tam integre edilebilir denklemler, Bäcklund transformasyonları, Lax çiftleri, Hirota'nın bilinear ifadeleri, özel ve rasyonel çözümler için v.s. hakkında önemli bilgiler veriyor. Bu Painleve analizi sayesinde integre edilemeyen denklemler için özel ve rasyonel çözümler de elde ediliyor.

Painleve testinin formulasyonundan beri Painleve özelliğini kullanarak verilen bir KDD veya ADD'nin integre edilebilir olup olmadığına karar vermeye çalışılmıştır. Bunu ilk kullanmaya çalışan insanda Sophie Kowalevski'dir. O sabit bir nokta civarında dönen katı bir madde üzerinde çalışmıştır.

2.4. Painlevé-Kowalevski testi

2.4.1 ADD'lerin tekillik analizi

ADD'lerin tekillikleri iki türlü olacağını söylemiştik: sabit ve hareketli. Adi diferansiyel denklemlerin tekillik analizine başlarken lineer adi diferansiyel denklemlerle ilgili bazı bilgileri tekrar edelim. Örneğin kompleks düzlemde n . basamaktan

$$\frac{d^n x}{dt^n} + P_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + P_1(t) \frac{dx}{dt} + P_0(t)x = 0 \quad (2.31)$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Eğer n tane olan $p_0(t), \dots, p_{n-1}(t)$ katsayılarının hepsi de bir t_0 noktası civarında analitik iseler, t_0 diferansiyel denklemin bir adi(regüler) noktasıdır ve (2.31)'in, kendisi ve $n-1$ 'ye kadar türevleri $t=t_0$ 'da belirlenmiş keyfi değerleri alabilen tek bir çözüme sahiptir. Bu çözüm $t-t_0$ cinsinden, en azından merkezi t_0 'da olan ve katsayıların tekil noktaları arasında t_0 'a en yakın olanından geçen çember içinde yakınsak bir Taylor serisine açılabilir. Böylece denklemin çözümlerinin tekillikleri sadece katsayıların tekilliklerinde bulunabilir (ki bunlar ya düzgün, ya da düzgün olmayan tekilliklerdir). Daha önce belirttiğimiz gibi, yerleri seçilen özel çözümlere değil de sadece denkleme bağlı olduğundan, bunlar sabit tekilliklerdir. Örneğin :

$$t(1-t)\frac{d^2x}{dt^2} + \{c - (a+b+1)t\}\frac{dx}{dt} - abx = 0$$

hipergeometrik denklemini çözümlerinin tekillikleri sadece katsayıların tekilliklerinde, yani 0, 1 ve ∞ 'da bulunabilir. Çözümün tekilliklerinin sabit olması, lineer adi diferansiyel denklemlerinin genel özelliğidir.

Lineer olmayan adi diferansiyel denklemler bu özelliği kaybediyor.

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0 \quad (2.32)$$

gibi basit bir adi diferansiyel denklem ele alalım. Bunun genel çözümü $x(t) = (t-t_0)^{-1}$ dir. Buradaki t_0 integrasyon sabiti olup aynı zamanda tekilliğin yerini belirler. Kutup türünde olan bu tekillik, yeri integrasyon sabiti olan t_0 'a bağlı olduğundan hareketlidir. Lineer olmayan ADD'ler hem hareketli hem de sabit tekilliklere sahip olabilir. ("çoğu kez analitik") bir ADD'in çözümü çeşitli tekilliklere sahip olabilir. Hangi mertebeden olursa olsun kutup dışındaki bütün tekilliklere kritik noktalar diyoruz. Bu noktalar esaslı tekillik veya dallanma noktası olabilirler. Dallanma noktalarında (2 veya daha fazla) sonlu sayıda veya sonsuz sayıda dallanma olabilir. Örnek olarak aşağıdaki denklemleri gözönüne alalım.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} + x^3 &= 0 \\
x \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 1 &= 0 \\
\alpha x \frac{d^2 x}{dt^2} + (1 - \alpha) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= 0 \\
\left[x \frac{d^2 x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^2 + 4x \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 &= 0 \\
(1 + x^2) \frac{d^2 x}{dt^2} + (1 - 2x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.33a,b,c,d,e}$$

Bu denklemlerin genel çözümleri α ve t_0 integrasyon sabitleri olmak üzere sırasıyla

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2^{\frac{-1}{2}} (t - t_0)^{\frac{-1}{2}} \\
x(t) &= (t - t_0) \ln(t - t_0) + \alpha(t - t_0) \\
x(t) &= \alpha(t - t_0)^a \\
x(t) &= \alpha \exp\{(t - t_0)^{-1}\} \\
x(t) &= \tan\{\ln \alpha(t - t_0)\}
\end{aligned} \tag{2.34a,b,c,d,e}$$

olacaktır. Bunların tekillikleri sırasıyla; hareketli cebirsel dallanma, hareketli logaritmik dallanma, a rasyonel değilse transandantal dallanma, izole edilmiş hareketli esaslı tekillik türündedirler. (2.34e)'de t için özel bir yol almazsak $t \rightarrow t_0$ için (sonsuz da dahil) limiti yoktur. Aslında esaslı tekillik, dallanma noktası veya kutup noktalarının yığılma noktası olabilen t_0 noktasından sonsuz sayıda farklı dallanma noktası açığa çıkar.

Eğer diferansiyel denklemi normal formuna koyarsak, yani en yüksek mertebeli türeve göre çözersek

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dx}{dt}, x, t\right)$$

denklemin tekillikleri, F 'nin tekillikleri olur. F 'yi diğer değişkenlerden bağımsız olarak tekil yapan t değerleri, sabit tekilliklerdir. Diğerleri de hareketli tekillikler olur.

2.4.2 Birinci-basamak adi diferansiyel denklemler

Painlevé [40-42] G 'nin dx/dt ve x 'e göre polinom, t 'ye göre analitik olmak üzere

$$G(dx/dt, x, t) = 0 \quad (2.35)$$

şeklindeki 1. basamak denklemlerin çözümlerinin hareketli tekilliklerinin, kutuplar ve/veya cebirsel dallanma noktaları olduğunu gösterdi ([43; 246-250; 44, s. 88; 4, s. 292]'ye de bakınız). Fuchs [45], P ve Q 'nun x cinsinden polinom ve katsayıların t 'ye göre analitik olan

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) = \frac{P(x, t)}{Q(x, t)} \quad (2.36)$$

şeklinde, çözümlerinin kritik noktalarının hepsi sabit tek denklemin; $p_2(t)$, $p_1(t)$, ve $p_0(t)$ analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = p_2(t)x^2 + p_1(t)x + p_0(t) \quad (2.37)$$

genelleşmiş Riccati denklemini olduğunu kanıtladı (İspat için [44, s. 89; 4, s. 293]'e bakınız). Eğer $p_2(t) \equiv 0$ ise, (2.37) sadece lineer bir denklemdir. Aksi takdirde

$$x(t) = -\frac{1}{p_2(t)y} \frac{dy}{dt} \quad (2.38)$$

dönüşümü ile (2.37) denklemini

$$p_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\frac{dp_2}{dt} + p_1(t)p_2(t) \right) \frac{dy}{dt} + p_0(t)p_2^2(t)y = 0 \quad (2.39)$$

şeklinde ikinci basamak bir denkleme dönüşür. Bunun genel çözümü; $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ iki lineer bağımsız çözüm; α_1, α_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

yapısındadır. Bu yüzden (2.37) Riccati denkleminin genel çözümü

$$x(t) = - \frac{\alpha_1 \frac{dy_1}{dt} + \alpha_2 \frac{dy_2}{dt}}{p_2(t)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)}$$

bu şekildedir. Şimdi

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^n = p(x) \quad (2.40)$$

yapısındaki denkleme bakalım. Burada p, x cinsinden m . dereceden sabit katsayılı bir polinomdur. [Burada $p(x)$ 'in; bir polinomun m 'yi bölen k . kuvveti olmadığı varsayılıyor.] Eğer (2.40)'un çözümlerinin hiçbir hareketli kritik noktası yoksa, o zaman (zorunlu olarak) $m \leq 2n$ olmalıdır (İspat için [44, s. 418; 4, s. 312]'ye bakınız). Çözümleri $n=1$ ve $n=2$ için, hareketli kritik noktaya sahip olmayan (2.40) tipindeki bütün denklemleri belirleyeceğiz.

$n=1$ için tek mümkün durum Riccati denklemidir ve üç olası şekil vardır (t 'nin ölçeğinin değiştirilmesi ve çok basit olanının ihmal edilmesi halinde):

$$\frac{dx}{dt} = x - a$$

$$\frac{dx}{dt} = (x - a)(x - b)$$

$$\frac{dx}{dt} = (x - a)^2$$

Bunların genel çözümleri, t_0 sabit olmak kaydıyla sırasıyla;

$$x(t) = a + \exp\{(t - t_0)\}$$

$$x(t) = \frac{b \exp\{(a - b)(t - t_0)\} - a}{\exp\{(a - b)(t - t_0)\} - 1}$$

$$x(t) = a - (t - t_0)^{-1}$$

şeklindedir. Benzer olarak, $n=2$ için sekiz durum vardır. Bunlardan altı tanesi

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = x - a$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x - a)(x - b)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x - a)^3$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x - a)^2(x - b)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x - a)^3(x - b)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (x - a)^2(x - b)(x - c)$$

denklemlerini verir. Bu denklemler elemanter fonksiyonlar cinsinden sırasıyla

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{4}(t-t_0)^2 + a \\
x(t) &= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b) \cosh(t-t_0) \\
x(t) &= a + 4(t-t_0)^{-2} \\
x(t) &= a + (b-a) \sec^2 \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{b-a}(t-t_0) \right\} \\
x(t) &= a + \frac{4(b-a)}{(a-b)^2(t-t_0)^2 - 4} \\
x(t) &= a - \frac{2(b-c)(c-a)}{(b+c-2a) + (b-c) \cosh \left\{ \sqrt{(b-a)(c-a)}(t-t_0) \right\}}
\end{aligned}$$

şeklinde çözülebilirler.

Geriye kalan iki hal eliptik fonksiyonları tanımlar. Bu durumlar $p(x)$ 'in üç veya dört farklı köke sahip olduğu hallerdir. Eğer $p(x)$ üç farklı köke sahip ise, (2.40) (bir lineer dönüşümle)

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 4(x-a)(x-b)(x-c) = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad (2.41)$$

haline getirilir. Burada $a+b+c=0$, $4(ab+bc+ca)=-g_2$, $4abc=g_3$ olmaktadır. Bu denklem t_0 keyfi bir sabit olmak üzere

$$t-t_0 = \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}} \quad (2.42)$$

integraliyle çözülür. Bu eliptik integral t 'yi x cinsinden bir fonksiyon olarak tanımlar. Bu fonksiyonun tersi $\wp(t)$ Weierstrass eliptik fonksiyonu cinsinden verilir [46]. Böylece (2.41)'in genel çözümü

$$x(t) = \wp(t-t_0; g_2, g_3) \quad (2.43)$$

şeklinde. $x(t)$ tek değerli meromorfik bir fonksiyon olduğu halde $t(x)$, onsuz çok değerli bir fonksiyondur (sırasıyla $\sin$ ve $\arcsin$ fonksiyonlarının tek ve çok değerliliklerine benzer bir durum). $\wp(t)$ Weierstrass eliptik fonksiyonunun sonlu düzlemdeki tek tekillikleri iki katlı kutuplardır. Bunun yanı sıra $\wp(t)$ ikili periyodiktir. Yani; $\frac{z_1}{z_2}$ gerçel olmayacak şekilde z_1 ve z_2 gibi iki karmaşık sayı (oran gerçel ve rasyonel ise fonksiyon periyodik, eğer gerçel ve irrasyonel ise fonksiyon sabittir) her m, n tamsayısı için $\wp(t) = \wp(t + 2mz_1 + 2nz_2)$ olacak şekilde bulunabilir. $0, 2z_1, 2z_1+2z_2, 2z_2$, ile ifade edilen dört nokta da $\wp(t)$ 'nin periyod paralelkenarının köşe noktalarıdır. t -yüzeyi buna benzeyen periyod paralelkenarlarının oluşturduğu bir ağ ile örtülebilir (Weierstrass eliptik fonksiyonu hakkında daha fazla bilgi için [46]'da 20. Bölüm'e bakınız). Eğer $p(x)$ dört farklı köke sahip ise (2.40), (ikili lineer ve rasyonel) Möbius dönüşümü sayesinde

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2), \quad k \neq \pm 1$$

haline getirilebilir. Genel çözüm, t cinsinden katlı periyodik meromorfik fonksiyon olan basit kutuplu $x(t) = \text{sn}(t-t_0; k)$ Jacobi eliptik fonksiyonudur (Jacobi eliptik fonksiyonu hakkında daha fazla bilgi için [46]'da 22. Bölüm'e bakınız).

Son olarak ondokuzuncu yüzyılda eliptik fonksiyonlar ve

$$\sum_{j,k} a_{jk}(t) x^j \left(\frac{dx}{dt}\right)^k = 0$$

(sonlu toplam) şeklindeki denklemler üzerine Fransız matematikçileri Briot ve Bouquet [47] tarafından çok geniş araştırma yapıldığını belirtelim ([44]'de 11. Bölüm'e bakınız).

2.4.3 İkinci Basamak Adi Diferansiyel Denklemler

2.4.3.1 Painlevé'nin α -yöntemi:

F fonksiyonu dx/dt cinsinden rasyonel, x cinsinden cebirsel ve t 'ye göre analitik olmak üzere

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(\frac{dx}{dt}, x, t\right) \quad (2.44)$$

şeklindeki adi diferansiyel denklemleri gözönüne alalım. Picard 1887'de (2.44) biçimindeki denklemlerden hareketli kritik noktaya sahip çözümü olamayanları belirleme problemini ortaya attı. Bu problem Painlevé ve arkadaşları tarafından çözüldü (Picard [48-51], Painlevé [52-73], Fuchs [74], Gambier [75-81] bu çalışmalar üzerine geniş bir tarama [4, 14. Bölüm]'de yer aldı, [44, s. 439]'a da bakınız). Yakın zamanlarda problem Bureau tarafından da incelendi [82-98]. F fonksiyonu x cinsinden rasyonel, t 'ye göre analitik olduğunda

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t)$$

tipindeki birinci basamak diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin olası hareketli tekillikleri yalnız kutuplar ve cebirsel dallanma noktaları olmasına karşılık (Painlevé [40-42]- [44, s. 88; 4, s. 292]'ye de bakınız) Painlevé, (2.44) yapısındaki ikinci basamak denklemlerin hareketli tekilliklerinin logaritmik dallanma ve esaslı tekillik olabileceğini gösterdi. İşte bu tip tekilliklerden yoksun çözümlere sahip denklemleri bulma yöntemine α -yöntemi denir ve Painlevé tarafından bulunmuştur.

(2.44) tipindeki denklemleri inceleyebilmek için onları

$$\frac{dx}{dt} = G(x, y, t; \alpha) \quad (2.45a)$$

$$\frac{dy}{dt} = H(x, y, t; \alpha) \quad (2.45b)$$

birinci basamak sisteminin bir özel hali olarak gözönüne almak kolaylık sağlar. Burada H ve G orijini içeren bir D bölgesinde α parametresinin analitik fonksiyonudur.

Painlevé α -yöntemi ilk olarak hareketli kritik noktaların yokluğu için bir dizi gerek şart bulma işi ile -ki işin burası oldukça kolaydır- ardından doğrudan integrasyonla veya başka bir yolla bu şartların aynı zamanda yeter olduğunu kanıtlamaktan ibarettir. Yöntemin bu ikinci safhası çok zordur. Çünkü bu birbirinden farklı birçok halin ele alınmasını gerektirir ve her bir halde hareketli kritik nokta olmadığını göstermek zor hesapları gerektirir [birinci basamak denklemleri incelerken

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \rho(x)$$

şeklindeki denklemlerde $\rho(x)$, derecesi dörde eşit veya dörtten daha az bir polinom olduğunda sekiz farklı durumun ortaya çıktığını, bunlardan altı tanesinin elemanter fonksiyonlar cinsinden; iki tanesinin de Weierstrass ve Jacobi eliptik fonksiyonları cinsinden çözülebildiğini hatırlayın].

Painlevé'nin α -yöntemi, ilk defa gök mekaniğinde üç-cisim problemi (İkişer ikişer birbirini Newton kuralına göre çeken üç cismin hareketi) için çıkartılan küçük parametreler yönteminin bir tür genelleştirilmesi olarak ortaya çıktı [99,100]. Çok iyi bilindiği gibi iki cisim probleminin (birbirini Newton kuralına göre karşılıklı çeken iki cismin hareketi) çözümü çok kolaydır [101]. Üç-cisim problemi tam çözümü olmaması yüzünden biraz farklı bir yapıdadır. Fakat, güneş sistemi söz konusu olduğunda gezegenlerin kütlesi güneşe nazaran küçük olduğundan problem basitleştirilebilir. Bu yüzden hareketi temsil eden integralleri, hareketi bozan

gezegenin kütlesinin güneşin kütlesine oranını temsil eden küçük bir parametrenin kuvvetlerine göre açmayı düşünmek doğaldır. Burada açıktır ki parametrenin yerine sıfır koyarsak, iki-cisim probleminin çözümünü elde ederiz. Parametrenin küçük değerleri için de, iki cisim probleminin çözümündeki yörüngenin biraz bozulmuşunu buluruz. Küçük-parametre metodu bulunuşundan sonra gök mekaniğindeki birçok araştırmada kullanılmıştır. Tabii ki her defasında bu küçük parametre, problemdeki bir fiziksel büyüklüğü temsil etmiştir (Örneğin kütlelerin oranı, gezegen yörüngelerinin dışmerkezliği vs.). Painlevé, değişkenlerin dönüşümü yoluyla suni olarak parametre katmak suretiyle yöntemin esaslı bir uyarlamasını gerçekleştirmiştir. Bu parametrenin seçimindeki serbestlik, yöntemin esnekliğini ve uygulanabilirliğini bir hayli artırmaktadır.

(2.45) sistemi için gerek şartları bulmak için α parametresine bağlı bir değişken dönüşümü uygulanır. Öyle ki her $\alpha \neq 0$ için, her oluşan denklem diğerine denk, fakat $\alpha=0$ yalnızca tek değerli çözümleri olduğu (gözlemle veya başka bir yolla) görülen yoz limittir. $w, F \in C^m$ α 'yı içermeyen fonksiyonlar,

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_m), \quad F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$$

olmak üzere

$$\frac{dw}{dz} = F(z, w)$$

şeklindeki denklemi gözönüne alalım ve bazı p, q, r, s, k sayıları ve uygun olarak seçilmiş $(v = v_1, v_2, \dots, v_m)$ ile

$$t = \alpha^p k + \alpha^q z$$

$$u = \alpha^r v + \alpha^s w$$

dönüşümünü yapalım. O zaman

$$\frac{du}{dt} = f(t, u, \alpha) \quad (2.46)$$

yapısında bir denklem elde ederiz. Burada $u=(u_1, u_2, \dots, u_m)$ ve $f=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ şeklindedir. Şimdi Painlevé'nin iddiası şudur: Eğer (2.46) denklemini yeterince küçük her α için tek değerli çözümlere sahip ise, o zaman aslında da $\alpha=0$ da istisna olmaz.

Bu iddia şu teoreme dayanır:

Teorem 2.4.3.1: $t \in D \subset C$, bir R için $u \in B_R \subset C^m$, α orijinin bir S komşuluğunda S ve D , R , S kümeleri α 'dan bağımsız olmak üzere $f(t, u; \alpha)$ fonksiyonu t, u ve α cinsinden analitikse, verilen $t_0 \in D, \rho = (\rho_1, \dots, \rho_m) \in D$ ve yeterince küçük ε için

$$\frac{du}{dt} = f(t, u; \alpha), u_0(t) = p \quad (2.47)$$

başlangıç değer probleminin (tek) çözümünün $\forall \alpha \in B_\varepsilon$ için D 'de tek değerli olması (ve t, α cinsinden analitik olması) için gerek ve yeter koşul, (2.47)'nin α 'nın kuvvetleri cinsinden açılarak basamak basamak çözülmesiyle elde edilen

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \alpha^n \quad (2.48)$$

çözümündeki tek türlü olarak elde edilmiş $u_n(t) = (u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_m})$ katsayılarının hepsinin de tek değerli olmasıdır.

İspatın ana hatları : $u(t)$, (2.47)'nin tek değerli çözümü olsun ve

$$S_N(t, \alpha) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(t) \alpha^n$$

olmak üzere

$$u_N(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u(t) - S_N(t; \alpha)}{\alpha^N} \quad (2.49)$$

limitini gözönüne alalım. Tümevarımla $u_N(t)$ 'lerin hepsinin de tek değerli olduğu kanıtlanabilir. Bu önermenin tersi de

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_N(t; \alpha)$$

eşitliğinden elde edilir.

Burada Painlevé α -yönteminin Ince'deki [4] anlatımının açıklıktan yoksun olduğunu belirtmek için biraz duralayalım. Bu yöntemin bizzat Painlevé tarafından [68]'de yapılan tarifine baktığımızda Ince, Painlevé'nin anlatımını (muhtemelen) biraz dikkatsizce bulup onu kuvvetlendirmeye çalışmış, fakat bunu biraz kaba saba yapmış olmalı. Ince tanımlamadan (doğrudan doğruya Painlevé'nin Fransızcasından alınma) uniform kelimesini belli ki "tek değerli" anlamına kullanıyor. Golubov'daki [102, 2. Bölüm, 2. Kısım] Painlevé α -yöntemi anlatımı daha açıktır. Daha geniş bilgi için bu kitap okunabilir. 2.4.3.1 Teoremi (bilhassa D'nin basit bağlantılı bölge olduğu halde) burada ifadesini vermeye değmeyecek kadar basittir. İkili bağlantılı bölgeler, yani potansiyel dallanma noktaları etrafındaki halkalar üzerinde uygulamalar bulunmuştur. Kendi ifadelerine baktığımızda Painlevé'nin bu teoremi doğruluğunu kabul edip geçmek ya da bir teorem payesine yükseltmek konusunda huzursuzluk duyduğunu görüyoruz.

2.4.3.2. Painlevé denklemlerinin türetilmesi:

Painlevé ve onunla birlikte çalışanlar (2.44) şeklindeki mümkün bütün denklemlerden, hareketli kritik noktaya sahip olmama özelliğini taşıyan sadece 53 tane kanonik

denklem olduğunu gösterdiler. Onlar bu 53 denklemden 47 tanesinin bilinen fonksiyonlar cinsinden (eliptik fonksiyon ve lineer denklemler gibi) cinsinden integre edilebileceğini veya 6 yeni lineer olmayan diferansiyel denkleme indirgenebileceğini de gösterdiler. Bu 53 kanonik denklem, a, b, c, d, ϕ fonksiyonları t 'ye göre analitik fonksiyonlar olmak üzere

$$X(T) = \frac{a(t)x + b(t)}{c(t) + d(t)}, T = \phi(t) \quad (2.50)$$

Möbius dönüşümleri ile genelleştirilebilir. Bu yeni denklemler, genel çözümlerinde hareketli kritik nokta bulunmayan (2.44) şeklindeki bütün ikinci basamak adi diferansiyel denklemleri içerir. Bu 53 denklemden en ilginç olanları, yeni transadant fonksiyonlar tanımlayanlardır.

Bunlar Painlevé denklemleri denilen, sırasıyla $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ (1.20) denklemleridir ve çözülebilmeleri için yeni transadant fonksiyonların ithali gerekir. Bu yeni fonksiyonlara Painlevé transadantları denir (biz burada sadece çözümlerine Painlevé transadantı diyeceğiz ama, bu 6 denkleme de Painlevé transadantı deniliyor). İlk üç denklem P_1, P_2 ve P_3 Painlevé tarafından bulundu; dördüncü ve beşinciler, P_4 ve P_5 Gambier tarafından eklendi, P_6 'nın genel biçimi Fuchs tarafından verildi [74]. P_1, P_2 ve P_4 'ün çözümleri t 'nin meromorfik fonksiyonlarıdır. P_3 ve P_5 'de $t=e^s$ yerleştirilmesini yaparsak, çözümleri s 'nin meromorfik fonksiyonu olur. Fakat, P_6 için 0, 1 ve ∞ sabit kritik noktalarıdır. Bu yüzden P_6 'nın genel çözümü kompleks düzlemin her yerinde meromorfik fonksiyon olmaz. Gerçekte P_6 denklemi diğer 5 tanesini içerir, çünkü limit ve birleşmelere geçmeyle bunlar elde edilebilir (Painlevé [73]; [4,s. 345]'e bakınız). Painlevé P_1 'in çözümünün yeni transadant fonksiyonlar tanımladığını ispatladığından [66, 69-72], P_2 'den P_6 'ya kadar denklemlerin çözümleri için de, α, β, γ ve δ sabitlerinin bazı özel değerleri hariç, aynı şey doğru olur.

Painleve denklemleri ilk kez kesin matematiksel mülahazalarla keşfedildiği halde, bunlar aralarında iki boyutlu Ising modelinin spin-spin korelasyon fonksiyonu

[103-105]; quantum çekimi [106, 107]; sürekli plazmada küresel bir elektrik probu [108]; MKdV denkleminin çözümlerinin asimtotik davranışı [109, 110]; bir boyutlu Bose gazının bir-parçacık indirgenmiş yoğunluk matrisi [111-113]; viskoz sönümlü doğal konvektif akışlar [114, 115]; spini 1/2 olan bir boyutlu XY modelinin zamana bağımlı korelasyon fonksiyonları [116, 117]; sınır tabakalarında Görtler burkaçları [118-120]; çoklu elektrolit incelemeleri [121]; genel relativite [122- 129] ve lineer olmayan optik [130] konularındaki teorilerin de bulunduğu birçok fiziksel uygulamada ortaya çıktı.

2.4.3.3. Painlevé'nin α -yöntemine bir uygulama;

Painlevé'nin α -yöntemine bir örnek vermek için onu, $a(t)$ analitik bir fonksiyon olduğu zaman

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6x^2 + a(t) \quad (2.51)$$

biçimindeki hangi denklemlerin hareketli kritik noktalı çözümlere sahip olmadıklarını belirlemek için kullanalım. (Kutubu kritik nokta olarak kabul etmediğimizi hatırlatalım). Bunu yapmadan önce, incelemek zorunda olduğumuz (2.51)'in (2.44)'ün niçin bir özel hali olduğunu kısaca açıklamalıyız.

Painlevé, (2.44)'ün hareketli kritik noktaları olmayacaksa, F 'nin dx/dt 'ye göre ikinci veya daha fazla dereceden bir polinom olması gerektiğini göstermişti. Böylece denklem, L, M ve N x 'in rasyonel, t 'nin analitik bir fonksiyonları olmak üzere

$$\frac{d^2x}{dt^2} = L(t, x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + M(t, x) \frac{dx}{dt} + N(t, x)$$

şeklindedir. t_0 katsayıların tekil noktalarından biri değilse Painlevé,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = L(t_0, x) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

denkleminin çözümlerinin hareketli kritik noktalara sahip olamayacağını gösterdi. Bu söylediğimizin doğru olabilmesi için $L(t, x)$, en basiti $L=0$ olan sekiz değişik şekilde olabilir. Buna ek olarak, eğer $L=0$ olursa, M fonksiyonu da x cinsinden lineer ve N de x cinsinden derecesi en fazla 3 olan bir polinom olmalıdır. Böylece

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \{A(t)x + B(t)\} \frac{dx}{dt} + C(t)x^3 + D(t)x^2 + E(t)x + F(t) \quad (2.52)$$

olur. Painlevé bundan sonra $A(t)$ ve $C(t)$ 'nin beş çift sabitten biri olması gerektiğini gösterdi. Bunlardan en basiti $A=C=0$ olmaktadır ki bu durumda (2.52) denklemi (2.51)'e dönüştürülebilir. Bundan dolayı (2.51), (2.44)'ün incelenmesi gereken en basit yoz olmayan şeklidir.

(2.51)'in ne zaman kritik noktaya sahip olması gerektiğine karar vermek keyfi bir α parametresi için

$$x = \alpha^{-2} X, t = t_0 + \alpha T$$

dönüşümünü gözönüne alalım. Böylece

$$\frac{d^2 X}{dT^2} = 6X^2 + \alpha^4 a(t_0) + \alpha^5 \frac{da}{dt}(t_0) + \frac{1}{2} \alpha^6 \frac{d^2 a}{dt^2}(t_0) + O(\alpha^7) \quad (2.53)$$

şeklini alır ki bu denklem için α cinsinden bir

$$X(T) = X_0(T) + \alpha^4 X_4(T) + \alpha^5 X_5(T) + \alpha^6 X_6(T) + O(\alpha^7) \quad (2.54)$$

kuvvet serisi çözümü ararız. [(2.54) yapısında bir $X(T)$ çözümü aramak yerine

$$X(T) = X_0(T) + \alpha X_1(T) + \alpha^2 X_2(T) + \alpha^3 X_3(T) + \alpha^4 X_4(T) + \alpha^5 X_5(T) + \alpha^6 X_6(T) + O(\alpha^7)$$

şeklinde de çözüm aranabileceğine dikkat ediniz. Ancak bunu (2.53)'e yerleştirip α 'nın kuvvetlerini eşitlersek, $X_1(T)$, $X_2(T)$ ve $X_3(T)$ 'yi eliptik fonksiyonlar cinsinden buluruz ki bu yüzden bunlar meromorfiktir ve (2.51) biçimindeki denklemlerden hangilerinin çözümlerinin hareketli kritik noktaları olmadığını karar vermekte etkili olmazlar. Bu yüzden hesaplamaları basitleştirmek gayesiyle onları sıfıra eşitleriz]. O zaman (2.54)'ü (2.53)'de yerine koyar ve α 'nın kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek $r=0,1,2,3,\dots$ için

$$\begin{aligned} \frac{d^2 X_0}{dT^2} &= 6X_0^2 \\ \frac{d^2 X_{r+4}}{dT^2} - 12X_0 X_{r+4} &= \frac{T^r d^r a}{r! dt^r}(t_0) \end{aligned} \quad (2.55-56)$$

elde ederiz. (2.55) 'in genel çözümü, h ve k integrasyon sabitleri olmak üzere

$$X_0(T) = \wp(T - k; 0, h)$$

Weierstrass eliptik fonksiyonudur. (Bir Lamé denklemini [46, Bölüm 23] olan)

$$\frac{d^2 Y}{dT^2} - 12\wp(T - k; 0, h)Y = 0$$

homojen denkleminin genel çözümü de α , β integrasyon sabitleri olmak üzere

$$Y(T) = \alpha \left(T \frac{d\wp}{dT} + 2\wp(T) \right) + \beta \frac{d\wp}{dT}$$

fonksiyonudur. Parametrelerin değişimi yöntemiyle (2.56)'nın genel çözümü

$$\begin{aligned}\frac{dU_{r+4}}{dT} &= \frac{T^r}{24!} \frac{d^r a}{dt^r}(t_0) \frac{dX_0}{dT} \\ \frac{dV_{r+4}}{dT} &= \frac{T^r}{24r!} \frac{d^r a}{dt^r}(t_0) \left(T \frac{dX_0}{dT} + 2X_0(T) \right)\end{aligned}\quad (2.57a-b)$$

olmak üzere

$$X_{r+4}(T) = U_{r+4}(T) \left(T \frac{d\wp}{dT} + 2\wp(T) \right) + V_{r+4}(T) \frac{d\wp}{dT}$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned}X_0(T) &= \wp(T-k; 0, h) = (T-k)^{-2} + O((T-k)^2) \\ \frac{dX_0}{dT} &= \frac{d\wp}{dT}(T-k; 0, h) = -2(T-k)^{-3} + O(T-k);\end{aligned}$$

olduğundan

$$T \frac{dX_0}{dT} + X_0(T) = -2k(T-k)^{-3} + O(T-k)$$

bulunur. Bu yüzden; $r=0$ ve 1 için $U_{r+4}(T)$ ve $V_{r+4}(T)$ 'yi elde etmek için (2.57)'yi integre edersek, $X_{r+4}(T)$ eliptik fonksiyonlar cinsinden elde edilir ve bundan dolayı meromorfiktir. $r=2$ için katsayısı sıfır değilse, bir $\ln(T-k)$ terimi bulunmak zorundadır. Böylece, çözümün hareketli kritik noktalara sahip olmaması için

$$\frac{d^2 a}{dt^2}(t_0) = 0$$

olması gerekir. Fakat t_0 keyfidir ve bu yüzden

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = 0$$

olmak zorundadır. Bütün bunlardan dolayı (2.51)'in çözümlerinin hareketli kritik noktalarının olmaması için $a(t)$ 'nin; a_1 , a_0 keyfi sabitler olmak üzere

$$a(t) = a_1 t + a_0$$

lineer yapıda olması gerekir. Böylece (2.51) biçiminde, hareketli kritik noktalara sahip olmayan yegane mümkün denklemler basit değişken dönüşümleriyle şu üç standart biçimden birine dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= 6x^2 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= 6x^2 + \frac{1}{2} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= 6x^2 + t \end{aligned} \quad (2.58a-b-c)$$

(2.58a) ve (2.58b) denklemleri sırasıyla; h , k integrasyon sabitleri olmak üzere

$$x = \wp(t - k; 0, h), \quad x = \wp(t - k; 1, h)$$

meromorfik genel çözümlerine sahiptirler. (2.58c) ise Painlevé'nin birinci denklemi P_1 'dir. Böylece gerek şartların belirlenmesi işi tamamlanmış oldu. Painlevé bundan sonra P_1 'in hareketli kritik noktalara sahip çözümlerinin olmadığını göstererek bunların aynı zamanda yeter şartlar olduğunu ispatladı.

Painlevé [66, 69-71] bundan sonra genel çözümün hareketli dallanma noktalarına sahip olmadığını gösterdi. İşin son kısmı genel çözümün esaslı tekilliğe sahip olmadığını ispatlamaktadır ve bu gerçekten zor bir hesaptır [4, s. 347].

2.5. Painlevé Denklemlerinin özellikleri

Boutroux iki uzun çalışmasında [131,132] birinci Painlevé denkleminin çözümlerinin asimptotiklerini araştırdı. Birinci Painlevé denklemi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 6x^2 + t \quad (2.59)$$

için

$$x(t) = t^{\frac{1}{2}} \xi(\tau), \tau = \frac{4}{5} t^{\frac{5}{4}}$$

dönüşümünü yaparsak, $\xi(\tau)$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 6\xi^2 + 1 - \frac{1}{\tau} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{4\xi}{2\xi\tau^2}$$

denklemi sağlar. Bu denklem, $\wp(\tau; g_2, g_3)$ Weierstrass eliptik fonksiyonu ve k, g_2, g_3 sabitler olmak üzere genel çözümü

$$w(\tau) = \wp(\tau - k; -2, g_3)$$

olan

$$\frac{d^2w}{d\tau^2} = 6w^2 + 1$$

denklemi ile karşılaştırılabilir [46]. Bu karşılaştırma, yeterince büyük τ 'lar için

$$\xi(\tau) \approx \wp(\tau - k; -2, g_3) \quad (\text{uygun } k \text{ ve } g_3 \text{ için})$$

olacağını gösterir, yani birinci Painlevé transandantı için

$$x(t) \approx t^{\frac{1}{2}} \wp\left(\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}; -2, g_3\right), |t| \rightarrow \infty$$

olur. Boutroux [131, 132]'de bu ilişkiyi enine boyuna inceledi ve bağıntının geçerli olan bölgeyi tespit etti. Benzer olarak, ikinci Painlevé denklemi olan

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2x^3 + tx + \alpha \quad (2.60)$$

için eğer

$$x(t) = t^{\frac{1}{2}} \xi(\tau), \tau = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}$$

dönüşümünü yaparsak

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = 2\xi^3 + \xi - \frac{1}{\tau} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\xi}{9\tau^2} + \frac{2\alpha}{3\tau} \quad (2.61)$$

denklemini elde edriz. Bu yüzden ikinci Painlevé transandantı Jacobi eliptik fonksiyonu $\text{sn}(t)$ ile asimptotik olarak ilişkilidir [ki o, son üç terimini atıldığında (2.61)'i sağlar]. Yeni olarak Joshi ve Kruskal [133], birinci ve ikinci Painlevé denklemlerinin asimptotiklerini çoklu-ölçek analizi kullanarak incelediler.

Literatürde Painlevé denklemlerinin özellikleri hakkında birçok ilginç sonuç vardır (bunların çoğu Erugin'in içinde 127 kaynağa atıfta bulunulan [134, 135] numaralı yayınlarında derlenmiştir). Painlevé denklemleri genelde indirgenemez olmalarına rağmen, α, β, γ ve δ 'nın özel değerleri için P_2 - P_6 arasındaki denklemler belli özel çözümlere ve çözümler arasında özel ilişkilere sahiptirler:

(1). Bunlar rasyonel çözümlere sahiptirler ve klasik transandant fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilen bir parametreye bağlı çözüm aileleri kabul ederler. P_2 için Airy fonksiyonları (Gambier [81]), P_3 için Bessel fonksiyonları (Lukashevich [136]), P_4

için Weber-Hermite fonksiyonları (Lukashevich [136]), P_5 için Whittaker fonksiyonları (Lukashevich [136]) ve P_6 için hipergeometrik fonksiyonlar (Lukashevich ve Yablonskii [137]; Fokas ve Yortsos [138]).

(2). Verilen bir Painlevé denkleminin çözümlerini, farklı parametre değerleri için yine aynı denklemin çözümlerine dönüştüren dönüşümler kabul ederler (bunlara bazen Bäcklund dönüşümleri denir) (Lukashevich [136], Gromak [139, 140], Fokas ve Yortsos [138]).

(Airault [141], Clarkson [142], Fokas ve Ablowitz [143], Gromak [140], Murata [144], Okamoto [145, 146]. Örneğin; (2.60)'deki ikinci Painlevé denklemini gözönüne alalım:

(i). n tamsayı olmak üzere $\alpha = n$ ise, P_2 rasyonel özümne sahiptir. .

(ii). n tamsayı olmak üzere $\alpha = n + \frac{1}{2}$ ise P_2 , $\frac{dw}{dt} + w^2 + \frac{1}{2}t = 0$

ile karakterize edilen bir parametrelili çözüm ailesini kabul eder. $w = \frac{\dot{\phi}(t)}{\phi(t)}$ yi konulunca

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{1}{2}t\phi = 0$$

Airy denklemini elde ederiz.

(iii) Eğer $x(t; \alpha)$ P_2 'nin çözümü ise, $\tilde{\alpha} = \alpha + 1$, $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, $\dot{} = d/dt$ olmak üzere

$$\tilde{x}(t; \varepsilon \tilde{\alpha}) = -x(t; \alpha) = \frac{1 + 2\alpha}{2x^2 + 2\dot{x} + t}$$

ifadesi de P_2 'nin bir çözümüdür.

Tam integre edilebilir KDD ile Painlevé türü ADD arasındaki ilişki, KDD'lerin tam integre edilebilirliğinin test edilmesindeki faydasına (ki bu husus yukarıda incelendi) ek olarak, hem KDD hemde ADD'lerin, bilhassa Painlevé denklemlerinin özelliklerini elde etmek için kullanılabilir. Örneğin Ablowitz ve Segur [109], PII'nin özel hali olan

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = tx + 2x^3 \quad (2.62a)$$

denklemini için

$$t \rightarrow \infty, x(t) \rightarrow 0 \quad (2.62b)$$

şartını sağlayan bir parametreye bağlı çözümlerinin ailesini

$$K(t, \tau) = kAi\left(\frac{t+\tau}{2}\right) + \frac{k^2}{4} \int_1^\infty \int_1^\infty K(t, \lambda) Ai\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right) Ai\left(\frac{\mu+\tau}{2}\right) d\lambda d\mu \quad (2.63)$$

lineer integral denkleminin çözümü cinsinden karakterize ettiler Burada $Ai(t)$ Airy fonksiyonudur. (2.63) denklemi de Fredholm türünde bir Gel'fand-Levitan-Marchenko denklemdir. $x(t)=K(t,t)$ ise, $x(t)$ 'nin (2.62) denklemini sağladığı gösterilebilir [109, 147]. (2.63) integral denklemini kullanarak (2.62)'nin çözümlerinin; global varlık, teklik, $t \rightarrow -\infty$ giderkenki asimtotik davranış ile $t \rightarrow \infty$ asimtotik davranış arasındaki ilişkiyi veren bağlantı formülleri de dahil birçok özelliğini elde etmek mümkün olur [147-149, 114, 150-154]. Daha sonra, başka bazı Painlevé denklemlerin çözümleri de lineer integral denklemler cinsinden ifade edildi [147, 155, 156]. Bu ilişki (verilen Painlevé denklemlerinin çözümlerini başka parametre değerleri için aynı denklemin başka çözümlerine ilişkilendiren) Bäcklund dönüşümlerini, rasyonel çözümleri ve bir parametrelili çözümler ailesini elde etmek için kullanıldı [157,158, 143].

Klasik olarak, Fuchs [159], Garnier [160] ve Schlesinger [161] Painlevé denklemlerini, düzgün veya düzgün olmayan tekil noktalara sahip rasyonel katsayılı uygun lineer sistemleri eş monodromluluk şartları olarak gözönüne aldılar (Okamoto [145]). KDD'leri çözmek için ters saçılım yönteminin (TSY) geliştirilmesinden beri, Painlevé denklemlerini uygun lineer sistemler eş monodromlu şartları olarak ifade etmeye olan ilgi yenilendi [155, 35, 162].

Flaschka ve Newell [155] (2.61)'deki ikinci Painlevé denklemini aşağıdaki lineer denklem sisteminin uygunluk koşulu olarak ifade ettiler:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \begin{pmatrix} -iz & x \\ x & iz \end{pmatrix} w, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \begin{pmatrix} -i(4z^2 + 2x^2 + t) & 4zx + 2i\frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{z} \\ 4zx - 2i\frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{z} & i(4z^2 + 2x^2 + t) \end{pmatrix} w\end{aligned}\quad (2.64a-b)$$

yani $w_{tz}=w_{zt}$ olması için gerek ve yeter koşul, $x(t)$ 'nin (2.61)'deki ikinci Painlevé denklemini sağlamasıdır). Onlar, çözümlerin varlığı gibi oldukça zor soruların açık kalmasına rağmen monodromi teoremini kullanarak, (2.61)'deki Painlevé denkleminin çözümünün bulunmasına yarayacak bir biçimsel tekil integral denklem sistemi elde ettiler. Bundan sonra Fokas ve Ablowitz [156], ikinci Painlevé denklemi için ters problemin, karmaşık bir eğri üzerinde tanımlanmış, matris, tekil, süreksiz ve homojen bir Riemann-Hilbert sınır değer problemi olarak formüle edilebileceğini gösterdiler (eğri, orijinde kesişen altı ışıktan oluşuyordu). Onlar bu Riemann-Hilbert problemini bir dizi dönüşümle üç farklı (ardarda çözülecek) Riemann-Hilbert problemine dönüştürdüler. Bu Riemann-Hilbert problemlerinden her biri, iki Fredholm integral denkleminin oluşan bir sistem yardımıyla çözülebilir. Lebeau ve Lochak [163] bu sistemi özel halde çözerek ikinci Painlevé denklemi için bağlantı problemini elde ettiler. Fokas ve Zhou [164] ikinci (ve dördüncü) Painlevé denklemine ilişkin Riemann-Hilbert problemleri üzerinde çok ciddi çalışmalar yaptılar; bu denklemlere ait Cauchy problemlerinin genel olarak meromorfik global çözümlere sahip olduğunu

kanıtladılar. Son zamanlarda Painlevé denklemlerinin özelliklerini elde etmek için monodromi teorisini kullanma konusuna büyük bir ilgi var.

2.6. Yüksek basamaktan denklemler:

Birçok fiziksel problem, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (2.65)$$

şeklinde birinci basamaktan adi diferansiyel denklem sistemleri ile modelleniyor. Buradaki F_k 'lar t cinsinden analitik ve diğer değişkenlerine göre rasyoneldir. Örnekler arasında Galaksideki yıldızların hareketi, üç cisim problemi, lineer olmayan ağırlar, burkaç, biyolojide türlerdeki rekabet, dalgaların girişimi ve başka bir çok problem bulunur [165,166]. Bu sistemler $x_k(t)$ dinamik değişkenleri kümesinin zaman içindeki evrimini tanımlar ve son zamanlarda bu sistemin ne zaman integre edilebilir olduğu oldukça önemli bir ilgi alanıdır. Yüksek basamaktan

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, \dots, \frac{dx}{dt}, x, t\right) \quad (2.66)$$

sistemleri, kolayca (2.65) biçiminde yazılabilir. Lorenz tarafından araştırılmış bir sistem olan

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + \rho x - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{aligned} \quad (2.67a-b-c)$$

sisteminde σ, ρ, β parametrelerdir. Segur [167] Painlevé analizini kullanarak hangi σ , ρ ve β değerleri için (2.67) sisteminin Painlevé özelliğine sahip olacağını buldu ([168, 136, 169-171]).

(2.44) şeklindeki ikinci basamak denklemlerin tam bir araştırmasını mümkün kılan Painlevé α - yöntemi, üçüncü (ve daha yüksek) basamaktan denklemlere de uygulanabilir. İkinci basamak durumunda olduğu gibi işlem iki kısma ayrılır: İlk olarak bir denklemin hareketli kritik noktalara sahip olmaması için gerek şartların kararlaştırılması, ikinci olarak bu şartların yeter olduğunun ispatıdır. Birçok gerek şartın bulunması sırasında fazla zorluk çekilmez. Fakat, şartların aynı zamanda yeter olduğunun ispatı, incelenen denklemin basamağı yükseldikçe artar.

Şu anda üçüncü ve daha yüksek basamaktan denklemler için açık bir sonuç elde yoktur. Üçüncü basamaktan denklemler için kısmi bir sınıflandırma Chazy [172], Garnier [160] ve Bureau [173,174] tarafından yapılmıştır. G fonksiyonu $\frac{d^2x}{dt^2}$ cinsinden n . dereceden bir polinom, $\frac{dx}{dt}$ ve x cinsinden rasyonel, t cinsinden analitik olmak üzere

$$G\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{dx}{dt}, x, t\right) = 0$$

ile verilen ikinci basamaktan fakat n . dereceden ($n \geq 2$) denklem için de bir sonuç bulunmadığını hatırlatalım. Grammaticos, Ramani ve arkadaşlarının Painlevé analizini kullanarak Hamilton ve Hamilton olmayan sistemlerin integre edilebilirliğini üzerine çalıştıklarını belirtelim [168,175-188].

2.7. Ablowitz - Ramani - Segur Algoritması

Daha önceki bölümlerde Ablowitz-Ramani-Segur (ARS) tahminini şöyle formüle etmiştik: Ters saçılım yöntemiyle çözülebilen lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemin indirgenmesiyle elde edilen bütün adi diferansiyel denklemler Painlevé özelliği taşır.

Tahminin kullanılabilmesi için iki farklı şey gerekmektedir: Verilmiş bir KDD'nin *bütün* indirgemelerin elde etmek için bir yöntem, ve verilmiş bir ADD'nin Painleve özelliğini araştıran ikinci bir yöntem. Ablowitz, Ramani ve Segur, en azından bir gerek şart elde etmek için aşağıda anlatacağımız algoritmayı önerdiler.

ARS Algoritması, lineer olmayan bir ADD'nin (veya ADD sisteminin) cebirsel veya logaritmik hareketli dallanma noktaları olup olmadığını tesbit etmek için geliştirilmiştir [147,190]. Burada akılda tutulması gereken önemli bir husus, bu algoritmanın bu tip hareketli dallanma noktalarının yokluğu için bir gerek şart sağlamasıdır. Bu nedenle (tipik olmayan bir olay olarak) asıl hareketli tekilliklerin ortaya çıkışı bu işlemle fark edilemez.

Aşağıda ifade edilen şekilde bir ADD sistemini ele alalım :

$$w'_i = F_i(w_1, w_2, \dots, w_n; z) \quad i = 1, \dots, n \quad (2.67)$$

Burada ARS algoritmasının dayandığı temel varsayım, hareketli tekilliğin civarında çözümlerin baskın davranışlarının

$$w_i \approx \alpha_i (z - z_0)^{p_i} \quad z \rightarrow z_0 \quad (2.68)$$

şeklinde olmasıdır. Yukarıda yer alan (2.68) ifadesinde gözönüne alınmayan baskın logaritmik dallanma noktaları da mevcut olabilir, bunlar çalışmalarımız sırasında hesaba katılacaktır.

Genelde eldeki sistem, (2.67)'deki gibi birinci basamaktan bir ADD sistemi şeklinde ifade edilmez, fakat daha yüksek türevleri içerir. Bu durumda (2.68)'da $p_i > 0$ olduğundan w_i fonksiyonları $z \rightarrow z_0$ iken sonsuza gitmeyebilir, fakat yüksek basamaktan bazı türevler tekil hale gelebilir. Bu zararsız teknik nokta, sistemin tüm muhtemel tekilliklerini bulma aşamasında önem kazanır.

ARS algoritması sırasıyla üç aşamalı olup bunlar, baskın davranışlarla ilgili işlemler, rezonanslar ve rezonanslardaki uygunluk koşullarıdır.

2.7.1 Birinci Aşama : Baskın Davranışlar

(2.67) denklemine

$$w_i = \alpha_i (z - z_0)^{p_i} \quad (2.69)$$

şeklinde çözüm arayalım. Burada, çözümü basitleştirmek için herhangi bir i değeri için $Re(p_i) < 0$ kabul edelim ve aynı şekilde z_0 keyfi bir değer olsun. (2.69) eşitliğini (2.67) eşitliği içinde kullanarak p_i 'lerin hangi olası değerleri için her bir denklemden bir veya birkaç terimin denge halinde bulunacağı araştırılır, diğer terimler ise $(z - z_0)$ 'ın daha yüksek dereceden kuvvetleri halinde ortaya çıkacaklarından gözardı edilebilirler. p_i 'lerin seçilmiş bütün değerleri için bu önemli terimlerin dengeleri aynı zamanda α_i 'lerin bunlara ilişkin değerlerini de belirler.

Birinci aşama ARS algoritmasının en hassas kısmıdır. Doğru hükümlere varılabilmesi için, baskın davranışların her biri ayrı ayrı incelenmeli ve bulunmalıdır. Burada dikkatli davranılması gereken diğer bir husus da, gözönüne alınmayan değerlerden birinin bizi kolaylıkla hatalı sonuçlara yönlendirebileceğidir.

İlk olarak p_i 'ler için çeşitli seçenekler olabileceğini gözönüne alalım. Bunu bir örnekle açıklamak gerekirse :

$$\begin{aligned} x' &= x (-x + ay + \lambda) \\ y' &= y (bx - y + \mu) \end{aligned} \quad (2.70)$$

burada, $p \equiv p_1$ ve $q \equiv p_2$ kabul ederek ve

$$x = A\tau^p, \quad y = B\tau^q, \quad \tau = z - z_0. \quad (2.71)$$

ile başlayarak (2.70)'den sırasıyla $q > p = -1$, $p > q = -1$ ve $p = q = -1$ olasılıklarına ulaşırız ki bu bizi üç farklı baskın davranışa götürür:

(i) Denklemlerde baskın terimler şunlardır :

$$x' = -x^2, \quad y' = bxy \quad (2.72)$$

böylelikle B serbest kalırken $A = 1$ ve $q = b$ olur, yani

$$x = \tau^{-1}, \quad y = B\tau^{-b}$$

değerlerine ulaşırız. Painlevé özelliğinin bulunmasının bir şartı olarak b bir tamsayı olmalıdır.

(ii) Denklemlerde baskın terimler şimdi şöyle olacaktır :

$$x' = axy, \quad y' = -y^2. \quad (2.73)$$

$B = 1$, $p = a$ değerlerini buluruz, A serbest kalır; böylelikle :

$$x = A\tau^a, \quad y = \tau^{-1}$$

bulunur. Aynı şekilde, Painlevé özelliğinin varlığının bir şartı olarak a da bir tamsayı olmalıdır.

(iii) Şimdi de baskın terimler şöyledir :

$$x' = x(-x + ay), \quad y' = y(bx - y)$$

A ile B hemen hesaplanabilir :

$$A = \frac{1+a}{1-ab}, \quad B = \frac{1+b}{1-ab}.$$

$x = A\tau^{-1}$, $y = B\tau^{-1}$ şeklinde olur. a ve b 'nin ikisinin birden tamsayı olma gerekliliği, paydanın sıfır olmamasını (ayrıca incelenmesi gereken $a = b = 1$ veya $a = b = -1$ durumları dışında) sağlar. İlk durumda sistem şöyle yazılır :

$$x' = x(-x + y + \lambda)$$

$$y' = y(x - y + \mu).$$

Birinci denklemi x 'e ve ikincisini y 'ye bölüp ve taraf tarafa toplayarak xy 'nin logaritmik türevinin sabit olduğunu görürüz :

$$xy = Ce^{(\lambda+\mu)x}.$$

Burada C sabit bir sayıdır. Son ulaşılan değeri denklemde yerine koyacak olursak, sistem iki Riccati denklemine indirgenebilir ve böylece Pianlevé özelliğine sahip olduğu anlaşılır.

İkinci hal, $a=b=1$, hemen hemen yukarıdakine benzerdir. Burada,

$$x/y = C e^{(\lambda-\mu)z}$$

bulunacaktır. Bu halde de sistem Riccati denklemlerine dönüşecek ve Painleve özelliğine haiz olacaktır.

Eğer p ve q tam sayı değilse, z_0 egemen olan terimde cebrik bir dallanma noktası teşkil edecek ve daha ileri derecede algoritma uygulamasına olanak vermeyecektir. Bununla beraber değişkenlerdeki basit bir değişim, sistemi hareketli dallanma noktası olmayan bir sisteme dönüştürülebilir. Durum böyle olmayıp bahis konusu p ve q sadeleşemeyen rasyonellerse, algoritma yine de uygulanabilir ve durum “zayıf Painlevé özelliği” ile ilintili olur [1].

Eğer bütün p_i olasılıkları tam sayıysa, bunların hepsinin baskın davranış biçimi hareketli bir kutup çevresindeki Laurent açılımının ilk terimi olarak alınabilir. O zaman

$$w_i = (z - z_0)^{p_i} \sum_{m=0}^m \alpha_i^{(m)} (z - z_0)^m \quad (\alpha_i^{(0)} \equiv \alpha_i) \quad (2.74)$$

varsayımını yaparız. Burada tekiliğin bulunduğu yer z_0 'dır ve (2.67) sisteminin ilk keyfi (integrasyon) sabiti olur. N'inci basamaktan bir sistem için gene de (2.74)'nın $\alpha_i^{(m)}$ 'leri olarak görülmesi gereken $n-1$ sayıda keyfi sabit vardır. Eğer bunların hepsi burada mevcutsa, o zaman (2.74) açılımı *jenerik* olarak adlandırılır. Bu sabitlerin yükseldiği bazı m kuvvetleri (2.74) serisinin “*rezonansları*” olarak isimlendirilir, şimdi bunların tanımına eğileceğiz.

2.7.2 İkinci aşama : Rezonanslar.

Bu aşamada, yalnızca ilk denklemlerin egemen terimlerini yerinde bırakacağız ve basitleştirilmiş denklemlerde bütün w_i 'ler yerine

$$w_i = \alpha_i \tau^{p_i} (1 + \gamma_i \tau^r), \quad r > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.75)$$

koyacağız. ($\tau = z - z_0$ olduğunu hatırlayalım.). Bundan sonra (2.67)'da yalnızca γ_i cinsinden lineer terimleri muhafaza edeceğiz, ki bunarı şöyle yazalım :

$$Q(r) \cdot \gamma = 0, \quad \gamma \equiv (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (2.76)$$

Burada $Q(r)$, $n \times n$ lineer matris olup, r sadece köşegen elemanlarla lineer olarak işleme girecektir.

$$\det Q(r) = 0. \quad (2.77)$$

Burada açıkça görülecektir ki, bazı γ_i 'ler cebirsel denklemin r tane olan köklerinde keyfi olacaktır (ve buna bağlı olarak (2.74)'ya serbest sabitler girecektir) :

$r = -1$ her zaman için bir köktür ve tekilliğin z_0 yeri ile ilgilidir.

Bütün bu anlattıklarımızı, daha önceki (2.70) örneğini bir kez daha kullanmak suretiyle, $\gamma \equiv \gamma_1$, $\delta \equiv \gamma_2$ iken inceleyelim. Aşağıdaki gibi bir (i) durumundaki baskın davranışın (2.75) tarzındaki bir ifadesi olan

$$x = \tau^{-1} (1 + \gamma \tau^r), \quad y = B \tau^b (1 + \delta \tau^r), \quad (2.78)$$

bize

$$\begin{pmatrix} r+1 & 0 \\ 1 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

matrisini ((2.76) denklemi) verecektir ki (2.77) denkleminde rezonansları $r = -1$ ve $r=0$ olarak bulabiliriz., (ii) durumunda da rezonansları aynı şekilde -1 ve 0 olarak buluruz.

(iii) durumu içinse,

$$x = A\tau^{-1}(1 + \gamma\tau'), \quad y = B\tau^{-1}(1 + \delta\tau'),$$

önermesiyle

$$\det Q(r) = \begin{vmatrix} A(r+1) - aB & -aB \\ -bA & b(r+1) - bA \end{vmatrix}$$

elde edilir. Burada $r = -1$ ve $r = r' \equiv (1+a)(1+b)/(1-ab)$ rezonansları hemen kendilerini gösterecektir. Denklemin Painlevé tipinde olabilmesi için, r' nün bir tam sayı olması şartını aramamız gerekir. Bu da, a ve b için aşağıdaki değer çiftlerini verecektir ((a,b) ve (x,y) 'nin eş güdümlü permütasyonuna bağlı olarak)

(a,b)	:	$(0,n)$	r'	:	$-n-1$
		$(n,-2-n)$			1
		$(1,2)$			6
		$(1,3)$			4
		$(1,5)$			3
		$(2,2)$			3
		$(2,5)$			2
		$(3,3)$			2

verir. Burada elde edilen genel gözlemler sırasıyla şunlardır :

- a) $r = 0$ rezonansı, (2.78) ve (2.79) de keyfi halde gözüken baskın terimlerden birinin katsayısına tekabül eder.
- b) Daha önce de gördüğümüz gibi, $(z - z_0)$, $z - z_0 + \varepsilon$ şeklinde değiştirildiğinde (2.69) denklemi ε 'un kuvvetlerine göre açıldığında ilk terim $(z - z_0)^{p_i-1}$ olarak elde edildiğinden, $r=-1$ her zaman (2.77) denkleminin köküdür.
- c) $Re(r)<0$ ($r=-1$ durumu hariç) rezonans durumu dikkate alınmamalıdır. Çünkü p_i 'lerin (2.74) serisindeki egemen kuvvetler olduğu varsayımına uymamaktadır. Bunlara yukarıda belirtildiği anlamda tekabül eden tekil açılımlar aynı aileye ait değildir.
- d) $Re(r)>0$ ancak p 'nin tamsayı olmadığı hallerde $z = z_0$ 'ın hareketli dallanma noktası olduğunu gösterir. Bu aşamada algoritma sona erer. Eğer r gerçel ve rasyonel ise durum yine de kontrol edilmelidir, zira 1. aşamada da ifade edilmiş olduğu gibi bu cebirsel dallanma noktası basit bir koordinat dönüşümü ile kaldırılabilir.
- e) p_i 'nin rasyonel olduğu durumlarda r rasyonelinin p_i ile birlikte ortaya çıkması, baskın tekillik tarafından tanımlanan sonlu dallanma ifade eder ve doğrudan doğruya "zayıf painlevé" özelliğiyle ilişkilidir [1].

Bu durumda, (2.74) tekil açılımı eğer $(n-1)$ negatif olmayıp (gerçel) sabit rezonanslarıyla birleşebilir durumdaysa, aynı sınıfa dahil edilir. Eğer baskın davranış için $n-1$ 'den daha az rezonans bulunuyorsa, elde edilen bütün çözümleri aynı sınıfa koyamayız. Bu, genellikle (2.69) ifadesinde çözümün önemli bir kısmının, büyük olasılıkla logaritmik tekilliğin eksik olduğunu gösterir. 1. Aşamada bütün baskın tekil davranışlar için, bütün rezonanslar negatif olmayan gerçel sayılar içeriyorsa, aynı zamanda baskın davranışlardan *en az* birinin jenerik olması koşuluyla, (örneğin $(n-1)$ sayıda negatif olmayan rezonans içeriyorsa), üçüncü aşamaya geçebiliriz.

2.7.3 Üçüncü Aşama : Rezonanslarda uygunluk koşulları:

Bu aşamada hakim olmayan logaritmik dallanma noktalarının tekerrürünü kontrol edeceğiz. Bunu yapabilmek için (2.67) denklemini her bir egemen davranış için aşağıdaki kesik seriye indirgeyeceğiz

$$w_i = \alpha_i \tau_i + \sum_{m=0}^{r_i} \alpha_i^{(m)} \tau_i^m + m \quad (2.80)$$

($\tau = z - z_0$ eşitliğini hatırlayalım) burada r_i (2.77)'un en büyük pozitif kökü olsun. Daha sonra terimleri τ 'nın kuvvetlerinin sırasına göre düzenleyelim. Böylelikle (2.76)'dekine benzer denklem elde edeceğiz.

$$\begin{aligned} q(m) \alpha^{(m)} &= R^{(m)}(z_0; \alpha^{(j)}) \quad , \quad j = 1, \dots, m-1 \\ m &= 1, \dots, r_i, R \equiv (R_1, \dots, R_n)^T \end{aligned} \quad (2.81)$$

Fakat (2.81) ifadesinin elde edilebilmesi için bu denklemler daha düşük dereceden olacaklar. Bu durumda:

(i) $m < r_i$, (r_i 'in en küçük pozitif rezonans olduğunu kabul ederek), olması halinde (2.68) $\alpha^{(m)}$ 'yi tanımlar.

(ii) $m = r_i$ olduğu durumlarda (2.81)'in, içinde bir keyfi eleman bulan bir çözümü olması için, r_i 'in (2.77) denkleminin bir katlı kökü olduğu varsayılırsa, aşağıdaki uygunluk şartları sağlanmalıdır.

$$\det Q^{(k)}(r_i) = 0 \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.82)$$

burada $Q^{(k)}(r_i)$ k . sütunu $R^{(r_i)}$ ile değiştirilen $Q(r_i)$ matrisidir.

(iii) Eğer (2.82) sağlanıyorsa $r_1 < m < r_2$ için (2.81)'de bir sonraki en küçük pozitif rezonans bir kez daha $\alpha^{(m)}$ 'yi tanımlar.

(iv) Aynı uygulama en yükseğine ulaşana kadar daha yüksek tüm rezonansların her birine uygulanmalıdır. (Çok katlı köklerin bulunması, durum için her hangi bir zorluk teşkil etmez. $\alpha^{(r)}$ 'nin keyfi elemanlarının sayısının, r rezonansının katlılığına eşit olduğundan emin olmak gerekir.) Yine de (2.82) şartının bazı r rezonansları için sağlanmaması gibi bir durum ortaya çıkabilir. Bu durumda, (2.74) açılımlardan bir veya daha fazlasının aşağıdaki şekilde değiştirilmesi gerekecektir:

$$w_j = \sum_{m=0}^{r-1} a_j^{(m)} \tau^{p_j+m} + \left(a_j^{(r)} b_j^{(r)} \ln \tau \right) \tau^{p_j+r} + \dots \quad (2.83)$$

Burada $\ln \tau$, $(\ln \tau)^2$,büyük olasılıkla daha yüksek derecedendir. Bu logaritmalar açılımlara yeni terimler getirir: $b_i^{(r)}$ katsayılarını, $a_i^{(r)}$ serbest olduğunda τ 'nun uygun kuvvetinin katsayısının sıfır olması şartını koşarak tanımlarız.

Bunu (2.70)'deki 2 boyutlu basit örnek ile gösterelim. İlk iki davranış tarzı (i) ve (ii) için rezonansların $r=0$ ve $r=1$; integrasyon sabitlerinin z_0 ve B olduğunu hatırlatalım. Dolayısı ile buna paralel olan Laurent serileri τ 'nun yalnızca tamsayı kuvvetlerini içerir. ve uygunluk şartlarının kontrol edilmesi gerekmez. Ancak üçüncü davranış biçimi (iii) de basit olmayan bir r rezonansı vardır ve sonuç olarak logaritma koşullarına gerek duyulup duyulmadığını öğrenmek için serinin bütün katsayılarını hesaplayarak r derecesine ulaşmamız gerekir

$$x = \frac{A}{\tau} \sum_{n=0}^{r^2} \alpha_n \tau^n, \quad y = \frac{B}{\tau} \sum_{n=0}^{r^2} \beta_n \tau^n \quad (2.84)$$

$(\alpha, b) = (0, n)$ durumunun bundan daha detaylı olarak incelenmesi gerekmez. (α, b) 'den biri sıfır olduğunda, diğer denklemin birincisinden ayrılacağına ve yalnız bir Riccati

denklemleri olarak ele alınacağına dikkat çekmek yeterlidir. Bu çözüldüğünde sonuç ikinci denklemde yerine konursa bu denklem otonom olmayan bir Riccati haline gelir.

Bunu açıklamak için en basitlerinden biri olan; $a = n$, $b = -n-2$ şeklinde adlandırabileceğimiz $r = 1$ rezonansına sahip bir durumu ele alalım. x ve y 'yi birinci dereceden

$$x = \frac{1}{(n+1)\tau} + \alpha_1$$

$$y = \frac{1}{(n+1)\tau} + \beta_1$$

serilerine açalım ve bunu (2.70) denkleminde yerine koyalım. Rezonanslarda a ve b için elde edilecek iki denklemin şöyle olduğunu görürüz:

$$(2+n)\alpha_1 - n\beta_1 = \lambda$$

$$(2+n)\alpha_1 - n\beta_1 = \mu$$

rezonans şartı $m = \lambda$ olur. Böylece kalan diğer altı durum aynı şekilde incelenebilir. Bu uzun hesaplamalar cebirsel işlemleri gerçekleştirmek için yazılmış bir programlama dilinin yardımıyla bir bilgisayar aracılığıyla yapılabilir. Bütünlük hatırına burada sonuçları verelim:

$$(1.2) \quad \mu = \lambda, -3\lambda/2, -4\lambda, -8\lambda/7, -13\lambda/7$$

$$(1.3) \quad \mu = \lambda, -2\lambda, -5\lambda$$

$$(1.5) \quad \mu = \lambda - 3\lambda, -7\lambda$$

$$(2.2) \quad \mu = \lambda, -\lambda$$

$$(2.5) \quad \mu = \lambda, -2\lambda$$

$$(3.3) \quad \mu = \lambda, -\lambda$$

Özet olarak, eğer bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümleri $z = z_0$ hareketli tekil noktası civarında Laurent serisine açılabilirse bu adi diferansiyel denklem sistemi Painlevé uygunluk şartlarını sağlamaktadır (örneğin; kutuplarından başka hareketli kritik noktası yoktur). Yani yukarıda tanıtılmış olan ARS varsayımının izlenmesi durumunda her hangi bir cebirsel dallanma noktası ve logaritmik tekillikler ile karşılaşmaz. Bu gayet az rastlanan durum ile parametrelerin özel değerleri için geçerli olan (2.70)'de karşılaşmıştık.

Açık yapıdaki integraller için (2.70)'nin Painlevé özelliğine göre integre edilebilirliğini burada saptamayacağız. İlgilenen okuyucular bu konuyla ilgili bilgiyi daha genel bir sistemin incelendiği [2]'de bulabilirler.

2.8. ADD'lerin Tam Ve Kısmi İntegre Edilebilirliği

Biraz önce görmüş olduğumuz gibi, ARS tahmini başlangıçta KDD'ler için formüle edilmişti. Böyle bir tahminin benzeri ADD'ler için de önerilebilir ve Segur [190] bu ifade edilmemiş ARS tahminini ADD'lerin integrasyonuna uygulayan ilk kişidir. Bu "ilk" deyimini son zamanlardaki uygulamayı ifade eder, zira Kowalevskaya tam bir asır evvel anisotrop topacın araştırılması için tekillik yöntemini uygulamıştı.

ADD'ler için ARS tahmininin ifadesi şu şekildedir :

Tam olarak integre edilebilen her ADD sistemi (1.2) de tanımlanan analitik integre edilebilirlik anlamında) Painlevé özelliğine sahiptir. Burada bu tahminin kesin bir teorem haline getirilip getirilemeyeceğini tartışmayacağız. Bu sorun [9]'da ayrıntısıyla ele alınmıştır. Bu çalışmaların sonucu, tahminin kesin bir ispatı için, ya integre edilebilirlik tipi [12] veya kabul edilebilir tekillik davranışları bakımından tahminin yapısının önemli ölçüde değişmesi gerektiğidir.

Gerçekte, analitik olarak integre edilebilir olmasına rağmen Painlevé testinden geçmeyen sistemler mevcuttur. Ama Painlevé özelliğine sahip olup da integre edilemeyen her hangi bir sistem bilmiyoruz. [1]'de belirtilen "Zayıf Painlevé" özelliği, integre edilebilirlik ihtimali için bir gösterge olup, bunun etrafında güçlü bir tahmin şekillendirilememektedir. "Zayıf Painlevé" sistemlerinde; her iki değişkenin (bağımsız ve bağımlı) dönüştürülmesinden sonra noksansız Painlevé özelliğine sahip olduğu görülmektedir. Ercoloni ve Siggia [191], "Zayıf Painlevé" özelliği için diğer bir yaklaşım şekli önermişlerdir ki bu, yüksek boyutlu (integre edilebilir) Painlevé sisteminin daha düşük boyutlu (integre edilebilir) bir sisteme indirgenmesini içermektedir. Bununla beraber "Zayıf Painlevé" tahmininin [35]'de tartışıldığı gibi önemli bir öğretici değeri vardır. Diğer taraftan ARS tahmininin daha kısıtlı şartlar altında ifade edilmiş ispatı mümkün (ispat edilmiş) halleri vardır. 1. Kısımda Yoshida'nın ağırlıklı homojen sistemlerin tekillik yapısı ve cebirsel integre edilebilirliği arasındaki bağlantı ile bir ispatlama girişimini tartışmıştık. Analitik integre edilebilirlik ve tekillik yapısı arasında Yoshida ve Ziglin teoremlerini temel alan daha yararlı bir yaklaşım 3. Kısımda ele alınacaktır.

2.7. kısımda görmüş olduğumuz gibi bir sistemin Painlevé özelliğine sahip olabilmesi için rezonanslar tam sayı olmalı ve herhangi bir pozitif rezonans noktasında uygunluk koşullarının sağlar durumda olmalıdırlar. Herhangi N. basamak bir sistemde bu kısıtlama kısmen yerine getirilebilir: Bazı rezonanslar irrasyonel veya kompleks olabilir veya bazı uygunluk şartları genelde sağlanmayabilir. Halbuki kötü rezonanslara tekabül eden serbest parametreler sıfır alınır ve diğerleri uygunluk şartlarını sağlamak için özel değerler alırsa, çözümlerin tekil açılımları Laurent tipi olur ve hala serbest parametreler içerir, diğer bir deyimle bunlar tamamen önemsiz olmayabilir. Bu, bazı belirli çözümlerin mevcudiyetinden başka hiçbir şeyi garantilemez. Bununla beraber, bazı hallerde Painlevé şartının kısmen yerine getirilmesi, bazı hareket integrallerinin varlığı ile ilintili olabilir.

Tam integre edilebilirlik için de durum aynıdır, fakat burada daha kötü bir durum da söz konusudur; kısmi integre edilebilme hali Painlevé özelliği ile hiçbir ilişkisi olmadan ortaya çıkabilir. Bununla beraber, aşağıdaki örneklerde görebileceğimiz gibi

bu tip ilişkiler fiziksel sistemlerde mevcut olup tekillik analizine ilişkin çalışmaların değerlerini belirlerler.

2.8.1 Lorenz sistemi : ADD sistemleri üzerinde Painlevé analizi ilk uygulandığı denklemlerden biri

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - xz - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{2.85}$$

Lorenz denklemleridir. Bu denklemler hidrodinamik türbülansın basit modellerinin ifadesidir. b, ρ, σ 'nın genel değerleri için çözümler karışık bir davranış gösterirler. Bununla beraber bunlar için öyle değerler mevcuttur ki sistemin davranışı düzgün hale gelir. Bu ise x, y, z ve t tekrar düzenlendikten sonra yeniden yazılmış olan aşağıdaki denklemlerde açıkça görülebilir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \sigma \varepsilon x \\ \dot{y} &= x - xz - \varepsilon y \\ \dot{z} &= xy - \varepsilon bz\end{aligned}\tag{2.86}$$

Burada $\varepsilon = (\sigma\rho)^{-1/2}$ alınmıştır.

Reynolds sayısı ρ sonsuza giderken limit alınırsa ($\varepsilon \rightarrow 0$) eliptik fonksiyonlar cinsinden integre edilebilen bir sistem elde edilebilir. Aynı zamanda parametrelerin hangi değerleri için böyle düzgün bir davranışın ortaya çıkabileceği merak edilebilir. Segur [190], sistemi Painleve analizinin bakış açısından incelemiştir. $x \approx 1/\tau, y \approx 1/\tau^2, z \approx 1/\tau^2$ baskın tekillik davranışlarından başlanarak rezonanslar $r = -1, 2$ ve 4 olarak bulunmuş ve iki uygunluk koşuluna varılmıştır. Beklendiği gibi $\varepsilon = 0$ değerinden başka aşağıda parametre değerlerinde sistem Painlevé özelliğine sahip olmaktadır:

- i) $\sigma = 0$
- ii) $\sigma = 1/2, b = 1, \rho = 0 \quad (\varepsilon = \infty)$
- iii) $\sigma = 1/2, b = 1, \rho = 1/9$
- iv) $\sigma = 1/3, b = 0, \rho$ serbest değer

Bu değerlerin tümü integre edilebilme özelliğine sahiptir. (i) şıkkında denklemler lineerdir. (ii) şıkkında iki tane zamana bağlı integral bulunabilmektedir:

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= C_1 e^{-2t} \\ x^2 - z &= C_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Böylece sistemin çözümü integrallerin hesabına indirgenebilir ve çözümler eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. iii) şıkkında, bir tek

$$x^2 - 2z = C e^{-2t}$$

integral vardır. Sistemden bir Painlevé transadant'ı elde edilir. Son olarak (iv) şıkkında denklemler x 'e göre üçüncü adımda tek bir denklemde toplanabilir, ki bu da integre edildiğinde

$$x\ddot{x} - \dot{x}^2 + x^4 / 4 = C e^{-4t/3}$$

elde edilecektir. Basit $X \equiv x e^{t/3}$, $T \equiv e^{-t/3}$ değişken dönüşümü bu denklemin üçüncü Painlevé transadantına dönüşmesi için yeterlidir. Burada belirtmeliyiz ki son iki şıkkın tam integre edilebilirliği, 1.1. kısımda tanıtılan üçüncü tiptir ki bu da integro-diferansiyel denklem yoluyla sistemin lineerleştirilmesidir.

Lorentz sisteminin analizinde Tabor ve Weiss [192] şu hususu belirtmişlerdir: $b = 2\sigma$ olduğuunda birinci rezonans şartı gerçekleşmekte fakat ikincisi gerçekleşmemektedir. Oldukça ilginç olan, bu şıkta bir

$$x^2 - 2\sigma z = Ce^{-2\sigma t}$$

integrali mevcuttur ve bundan başka da integral yoktur. Böylece bu durumda kısmi integre edilebilirlik, Painlevé şartlarının kısmen yerine gelmesi ile ilintilidir. Bununla beraber $b = 1 - 3\sigma$ için de aynı şartlar gerçekleşmektedir, ancak bu durumda hiçbir integral bilinmemektedir.

Diğer taraftan, tekillik yapısından tamamen bağımsız olarak önceden bulunmuş olan integraller de mevcuttur.

a) $b = 1$, $\rho = 0$ ve serbest σ için $y^2 + z^2 = Ce^{-2t}$

b) $b = 4$, $\sigma = 1$ ve serbest ρ için $4(1 - \rho)z + \rho x^2 + y^2 - 2xy + x^2 z - x^4 / 4 = Ce^{-4t}$

c) $b = 1$, $\sigma = 1$ ve serbest için $\rho - \rho x^2 + y^2 + z^2 = Ce^{-2t}$

d) $b = 6\sigma - 2$, $\rho = 2\sigma - 1$ için

$$(2\sigma - 1)^2 x^2 / \sigma + y^2 - (4\sigma - 2)xy + x^2 z - x^4 / 4\sigma = Ce^{-4\sigma t}$$

Bu buluşu takiben Levine ve Tabor [193]'de bu integrallerin, çözümlerin tekil açımdan nasıl bulunabileceğini gösterdiler ve bunların Lorenz sistemi için mümkün olan yegane integraller olduklarına dair bir hipotez geliştirdiler.

Böylelikle incelenmekte olan sistem için görülmektedir ki tam integre edilebilirlik, Painlevé özelliğine bağlıyken, kısmi integre edilebilirlik ikinciyle bazı ilişkilere bağlıdır fakat buna çok bağımlı değildir. Painlevé şartlarının kısmen gerçekleşmesi hali en iyimser deyişle kısmi integrabilitenin var olabileceği bazı parametre değerleri bulmamıza yardım eder. Diğer taraftan kompleks düzlemde tekilliklerin dağılımı, sistemin davranış şekline sıkıca bağlı olur. Tüm bunlar ise, gerçek zamanda (hem düzgün hem de kaotik durumlar için) sistemin davranışını, kompleks düzlemde tekilliklerin yerleşim durumuna bağlı olarak inceleyen Tabor ve Weiss tarafından gösterilmiştir [192].

2.8.2 *Üç-dalga etkileşimi* : Bu model ikinci dereceden lineer olmayan, yarı senkronize üç plazma dalgasının etkileşimine tekabül eder [194]. Denklemleri aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y^2 + \gamma x - z - \frac{\delta^2}{2} \\ \dot{y} &= 2xy + \gamma y + \frac{\gamma\delta}{2} \\ \dot{z} &= -2zx - 2z\end{aligned}\tag{2.87}$$

Burada iki baskın davranış vardır:

$$x \approx 1/\tau, y \approx 1/\tau, z \approx \tau$$

ve

$$x \approx 1/\tau, y \approx \tau, z \approx 1/\tau^2.$$

Birinci tip tekillikler -1 , 0 ve 1 rezonanslarını haizdir ve rezonans şartlarını kendiliğinden olarak karşılamaktadır. İkinci tip tekillikler ise -1 , 1 ve 2 rezonanslarına haizdir. 1'deki Rezonans uygunluk şartı şu şekildedir:

$$\gamma\delta = 0$$

Burada iki durum söz konusudur:

a) $\gamma = 0$ olduğu zaman $r=2$ deki ikinci uygunluk şartı kendiliğinden karşılanır ve bir integral mevcut olacaktır:

$$zy = Ce^{-2t}.$$

Bu integral kullanılarak sistem aşağıdaki hale getirilebilir:

$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}}{4} - 4y^3 + 2Ce^{-2t} - 2\delta y^2$$

$Y = e^t y$, $T = e^{-t}$ dönüşümü bu denklemi üçüncü Painlevé transadantına indirgememize yardım eder.

b) $\delta = 0$ ($\gamma \neq 0$) olduğu taktirde $r=2$ 'deki rezonansın uygunluk koşulu $\gamma(\gamma + 1) = 0$ olur. $\gamma = -1$ için δ 'nın tüm değerleri için geçerli bir integral bulunabilir:

$$x^2 + (y + \delta / 2)^2 + z = De^{-2t}$$

$\delta = 0$ olduğu zaman ilave olarak

$$zy = Ce^{-3t}$$

integrali elde edilir. Bu iki integrali ve yukarıdaki (a) şıkında belirtilen değişkenlerin değişimini kullanarak sistem tek

$$\left(\frac{dY}{dT}\right)^2 = 4DY^2 - 4Y^4 - 4CY$$

kuadratürüne indirgenebilir ve çözümleri eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edebiliriz.

Eğer $\delta = 0$ fakat γ serbestse, Painlevé şartları kısmen gerçekleştirilebilmiştir ve bir

$$zy = Ce^{(\gamma-2)t}$$

integrali mevcut olur fakat bu integrasyon daha ileri götürülemez.

$\gamma = 1; \delta \neq 0$ durumunda, görüldüğü üzere gene bir integral mevcuttur. Bununla beraber, $r = 1$ ' deki uygunluk koşulunun yerine getirilmemesi, şimdiden değişkenlerin tekil açılımına logaritmik ifadeler getirmiştir.

2.8.3 Rikitake Sistemi

Rikitake iki diskli dinamo modeli, Dünya'nın manyetik alanındaki [194] zamana bağlı değişimin anlatımı için geliştirilmiştir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\mu x + \beta y + yz \\ \dot{y} &= -\mu y + \beta x + xz \\ \dot{z} &= -xy + \alpha\end{aligned}\tag{2.88}$$

(2.88) denkleminin incelenmesi, bir tip tekilliği haiz olduğu için özellikle basittir. Bu tekillik civarında diğer çözümlerin hakim davranışları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}x &\approx i / \tau \\ y &\approx -i / \tau \\ z &\approx 1 / \tau (\tau \equiv t - t_0)\end{aligned}\tag{2.89}$$

Asimtotik serileri daha yüksek derecelere çıkartarak, ikinci yüksek derecede iki tane daha serbest sabitin eş zamanlı olarak ortaya çıkması beklenir. Bu keyfî sabitlerin τ 'nın sadece tam kuvvetlerle girmesini sağlayacak uygunluk şartları

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad & a = 0 \quad \text{ve} \\ \text{b)} \quad & b = 0 \quad \text{veya} \quad m = 0\end{aligned}\tag{2.90}$$

verir. Painlevé özelliği taşıyan iki hal, kolaylıkla integre edilebilir : $a = 0$ ve $b = 0$ için bir

$$x^2 - y^2 = C^2 e^{-2\mu t} \quad (2.91)$$

integrali vardır ve

$$x + y \equiv C u e^{-\mu t}, \quad T \equiv e^{-\mu t} \quad (2.92)$$

değişken dönüşümünden sonra Rikitake sistemi ikinci mertebeden tek bir

$$\frac{d^2 u}{dT^2} = \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dT} \right)^2 - \frac{1}{T} \frac{du}{dT} - \frac{C^2}{4\mu^2} \left(u^3 - \frac{1}{u} \right) \quad (2.93)$$

ADD'ye dönüşür ki bu denklem yine üçüncü Painlevé denkleminin özel bir halidir. Diğer taraftan $\alpha = 0$ ve $\mu = 0$ olduğu durum çok daha basittir. (2.88)'de birinci ve ikinci denklemleri x ve y ile çarptıktan sonra toplama ve çıkarma işlemleri uygulanınca

$$x^2 - y^2 + 2z^2 = C \quad (2.94a)$$

$$x^2 - y^2 + 4\beta z = D \quad (2.95b)$$

integralleri elde edilir. (2.94) kullanılarak sistemin tam integrasyonu eliptik fonksiyonlar cinsinden gerçekleştirilebilir.

Bu aşamada, (2.90) şartların kısmi en yerine gelişinin kısmi integre edilebilir modelleri verip vermediğini soruşturmak ilginç olacaktır. Bunun cevabı, evettir. Örnek olarak, $\beta = 0$ ($\alpha\mu \neq 0$ olmak kaydıyla) durumunu ele alalım. (2.91) integrali hala söz konusudur ve hareket $t \rightarrow \pm\infty$ ($\mu > 0$ ve $\mu < 0$ için) iken aşağıdaki dört limit çevrimin herhangi biri tarafından çekilir:

$$x_1 = \varepsilon_1 y,$$

$$(z - \varepsilon_1 \mu)^2 + y^2 = 2\varepsilon_2 \alpha \mu \ln|y| \quad (\varepsilon_i = \pm 1)$$

Diğer taraftan eğer $\mu = 0$ olursa bütün α ve β değerleri için

$$x^2 - y^2 + 4\beta(z - \alpha t) = D \quad (2.95)$$

integrali yine var olur fakat daha ileri bir integrasyon mevcut olamaz.

Baskın terimlerdeki kutupsal karakterli ve daha yüksek dereceli terimlerde sadece $\ln \tau$ terimleri ile birleşirse, kısmi integrallenebilirlikten daha fazla olanak sağlarlar. Örneğin eğer μ ve β değerleri sıfır olursa, Rikitake modeli iki integrale sahip olur ve tamamen integre edilebilir. Birinci integral (2.95)'dür. ($\beta = 0$ iken) (2.94a) integralinin elde edilmesi için gereken işlemlerin bu durumda

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + y^2 + 2z^2) = 4z\alpha \quad (2.96)$$

vereceğine dikkat edilince ikinci bir integral elde edilebilir.

Bu aşamada, (3.14)'deki $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ denklemleri $\beta = 0$; $\mu = 0$ olmak kaydıyla $z = (\dot{x} + \dot{y}) / (x + y)$ eşitliğini verir; bu da (2.96)'de yerine konunca şu ikinci integrali verir

$$x^2 + y^2 + 2z^2 - 4\alpha \ln|x + y| = E \quad (2.97)$$

Bu münasebetle, en azından bu modeller için, yalnızca bir integralli kısmen integre edilebilir hallerin, Painlevé özelliğinin şartlarının kısmen sağlanması ile çoğu kere teşhis edilebileceğini görüyoruz. Gene de, bu her zaman olmaz. Örneğin $\alpha = 0$ ve herhangi bir β ve μ değerleri için böyle bir basit integral mevcut gibi görünmüyor.

2.8.4 *Rabinovich Sistemi* : Bu sistem üç dalganın girişimini modeller :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y - \nu_1 x - yz \\ \dot{y} &= \omega x - \nu_2 y - xz \\ \dot{z} &= -\nu_3 z - xy\end{aligned}\tag{2.98}$$

Bu denklemlerde ν_1, ν_2, ν_3 sönüm hızlarıdır ve ω , besleyici dalganın genliği ile orantılıdır. Önde gelen teklikler [195]

$$x = \varepsilon_1 / t$$

$$y = \varepsilon_2 / \tau$$

$$z = \varepsilon_3 / \tau$$

olmaktadır ki burada $\varepsilon_i = \pm 1$ alınır ve ilgili üç ε_i arasında $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1$ bağıntısı mevcuttur. Bu halde rezonanslar -1 ve $r=2$ değerinde ortaya çıkan çift rezonanstır. Birinci rezonans şartı

$$(\nu_1 + \nu_2 - \nu_3)(\nu_1 - \nu_2 + 2\varepsilon_3 \omega) = 0\tag{2.99}$$

olur. Eğer birinci çarpan sıfır değilse $\nu_1 - \nu_2$ ve ω 'nın değerleri sıfır olmalı ve (2.99) deki denklem ε_3 'ün her iki değeri için doğrulanmalıdır.

Böylece:

a) $\nu_1 + \nu_2 = \nu_3$ değeri elde edilir. Bu takdirde $r=2$ halinde ikinci şart

$$2v_1v_2 = \varepsilon_3(v_2 - v_1)\omega$$

şeklindedir ki ε_3 'ün iki seçiminden dolayı ya

$$\omega = 0 \text{ ve } v_1 v_2 = 0 \text{ ki bu}$$

$$v_1 = 0, v_2 = v_3 \text{ veya}$$

$$v_2 = 0, v_1 = v_3 .$$

verir. Yahut da

$$\omega \neq 0, v_1 = v_2 = v_3 = 0$$

olur.

$$\text{b) } v_1 = v_2, \omega = 0$$

Bu durumda ikinci şartın $v_3 = 0$ veya $v_1 + v_2 = 2v_3$ olduğu bulunur. Bu ise

$$\omega = 0, v_1 = v_2, v_3 = 0$$

veya

$$\omega = 0, v_1 = v_2 = v_3$$

değerlerini verir.

Özet olarak burada esaslı olarak farklı üç durum mevcuttur :

i) $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ için iki integrale sahip oluruz :

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = C$$

$$x^2 - y^2 + 4z = D$$

ve sistem bir kuadrature indirgenebilir ve çözümler eliptik fonksiyon cinsinden ifade edilebilir.

ii) $\omega = 0$ ve $v_1 = v_2 = v_3 = v$

Burada v' ye bağlı ifadeleri $W = we^{vt}$ ($w = x, y, z$ ve $T = e^{-vt}$) değişken dönüşümü yardımı ile yok edebiliriz. Böylece bundan önceki duruma geri döneriz.

iii) $\omega = 0$, $v_1 = v_2$, $v_3 = 0$ ve iki dairesel permütasyonu hali :

Bu durumu integre edebilmek için önce

$$x^2 - y^2 = Ce^{-2vt} \quad (2.100)$$

integralini elde etmemiz gerekir. Bu integralin (ii)'deki değişkenlerin değişimi ile birlikte kullanılması halinde $X+Y$ değişkeni için hareket denklemleri $P III$ denklemine indirgenir.

Burada kısmi integre edilebilir durumlar da mevcuttur. Örneğin;

$$v_1 = v_2 = v_3 = v \text{ fakat } \omega \neq 0$$

ise tek bir:

$$x^2 + y^2 - 2z^2 = Ce^{-2vt} \quad (2.101)$$

integrali mevcuttur. (2.101) integrali, $v_3 \neq 0$ değeri için bile mevcuttur fakat elde edilen bu otonom olmayan ikinci mertebe denklem Painlevé özelliğine sahip değildir ve daha fazla integre edilemez.

Yukarıda belirtilen iki halde de Painlevé'nin uygunluk şartları kısmen gerçekleşmiştir. Bununla beraber kısmi Painlevé özelliği bulunduğu halde hiçbir integralin elde edilemediği durumlar da mevcuttur :

$$a') v_1 + v_2 = v_3$$

Genel olarak bu durumda hiç integral bulunamaz. fakat $v_1 = v_2 = v$ şartının eklenmesi ile bir integral elde edilebilir :

$$x^2 - y^2 - 4\omega z = Ce^{-2vt}$$

$$b') v_1 = v_2, \omega \neq 0 \text{ fakat } v_3 = 0$$

$$b'') \omega = 0, v_3(2v_3 - v_1 - v_2) = (v_1 - v_2)^2.$$

2.8.5 Lotka-Volterra Sistemi : Rekabet halindeki türlerin nüfus dinamiklerinin modeli olan bu sistem, lineer olmayan dinamik sistemlerin en iyi bilinen şeklidir[196].

Bogoyavlensky bu sistemin KdV denklemi ile ilgisini ortaya çıkarırken [197], denklemin integre edilebilir çok boyutlu genelleme de biliniyordu. Biz burada kendimizi üç boyutlu halin incelemesi ile sınırlandıracağız ve M. D. Kruskal, A. Ramani ve B. Grammaticos üçlüsünün konuyu tamamen inceleyip bitirdiği [33] kaynağına dayanacağız. Üç boyutlu *Lotka-Volterra Sistemi* değişkenlerin uygun bir şekilde ölçeklenmesinden sonra aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(Cy + z + \lambda) \\ \dot{y} &= y(x + Az + \mu) \\ \dot{z} &= z(Bx + y + \nu)\end{aligned}\tag{2.102}$$

Burada $A, B, C, \lambda, \mu, \nu$ gerçel veya kompleks parametreler olabilir.

(2.102) sisteminin iki çeşit tekilliğe sahip olduğu açıktır; bunlardan birinde x, y ve z ; τ^{-1} ile birlikte birbirlerinden ayrılırken, ikincisinde x, y, z 'den ikisinin basit bir kutbu varken üçüncüsü daha az ayırım gösterir (ya da hiç göstermez). Bu son durum A, B, C üzerinde bir ilk şarta sebep olur. Aslında, bu hakim davranış tarzının Painlevé tipinde olması için, daha az ayırım gösteren değişkenin üssünün bir tam sayı olması gerekir. Bu durumun x, y, z 'den herhangi birine ait olabileceğini dikkate alarak,

$$\begin{aligned}\alpha &= -C - \frac{1}{A} \\ \beta &= -A - \frac{1}{B} \\ \gamma &= -B - \frac{1}{C}\end{aligned}\tag{2.103}$$

sayılarının negatif olmayan birer tamsayı olması gereğinin farkına varırız Burada $ABC + 1$ 'in sıfır olup olmamasına bağlı olarak iki durumu ayırt ederiz. $ABC + 1 = 0$ olduğu takdirde sadece 4 muhtemel Painlevé durumu ortaya çıkar :

$A:$	$-3/2$	$B:$	-2	$C:$	$-1/3$	$\alpha:$	1	$\beta:$	2	$\gamma:$	5
	-3		$-1/2$		$-2/3$		1		5		2
	-2		-1		$-1/2$		1		3		3
	-1		-1		-1		2		2		2

Burada rezonanslar -1 , 0 ve 1 olur. Uygunluk şartı kolaylıkla hesaplanabilir ve bu bizi $\lambda = \mu = \nu$ eşitliğine götürür.

$ABC + 1 \neq 0$ olduğu takdirde birinci tip teklikler için rezonanslar -1 ile ve aşağıdaki denklemin iki çözümü olur :

$$\frac{1}{r(r-1)} = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} - 1 .$$

Burada α , β ve γ yukarıda tanıtılmış olan tam sayılardır. Bu rezonansların tam sayı olması istenildiğinde aşağıdaki dairesel permütasyona bağlı çözümler elde ederiz :

$\alpha:$	1	$\beta:$	1	$\gamma:$	1	$r:$	$-1,2$
	1		2		2		$-2,3$
	1		2		3		$-3,4$
	1		3		2		$-3,4$
	1		2		4		$-5,6$
	1		4		2		$-5,6$

Birinci durumda A serbest ($\neq 0, I$) , $B = -\frac{I}{A+I}$ ve $C = -\frac{A+I}{A}$ olur. Diğer beş durumda (2.103) denkleminin çözümünden A , B ve C kompleks sayıları kompleks eşlenik farkıyla tek türlü elde edilir.

İkinci tip tekilliklerde rezonanslar yine $-I$, 0 ve I dir. Uygunluk şartları yine $\lambda = \mu = \nu$ dir. Bu kısıtlama belirlendikten sonra sistemin $W = we^{-\lambda t}$ ($w = x, y, z$), $T = e^{\lambda t}$ dönüşümüyle lineer terimlerin olmadığı bir sisteme dönüştüğünü görürüz ki burada bilinen sisteme $\lambda = \mu = \nu = 0$ alındığında rezonans şartının r 'nin her hangi bir değeri için kendiliğinden gerçekleşeceğine güvenebiliriz.

Painlevé testi ile belirlenen tüm sistemler integre edilebilirlik karakterine haizdir. Integraller (x, y, z) cinsinden r pozitif rezonansı tarafından belirlenen dereceden homojen polinomlardır ve Yoshida tarafından ortaya konmuş olan ve invaryantların derecesinin $K\bar{U}$ ile ilgisini açıklayan teoremlerle tamamen uyum içindedir. (burada $K\bar{U}$ pozitif rezonansla çakışır.)

$ABC + I = 0$ olduğu takdirde ortaya lineer bir integral çıkar :

$$I = ABX + Y - AZ$$

$ABC + I \neq 0$ olduğunda ise; birinci ait durumda, $r=2$ olur ve kuadratik bir integral olarak bulunur :

$$I = (AX + (A+I)Y + A(A+I)Z)^2 - 4A(A+I)^2 YZ \quad (2.104)$$

$r=3, 4$ ve 6 değerleri için beş tane durum elde edilir ki bunlar [8]'de belirtilmiştir.

Bununla beraber Painlevé özelliğine sahip haller, sadece integrallerin mevcut olduğu haller değildir. $A=I$ ve $\lambda = \mu = \nu = 0$ olduğu zaman $C=0$ olmadıkça

$$I = \frac{Z^C (CY - X)^{B C + 1}}{XY^{B C}} \quad (2.105)$$

integrali elde edilir. $C = 0$ olduğunda integral (tekil olarak) aşağıdaki ifadeye gider :

$$I = \frac{Y}{X} + B \log \frac{Y}{X} - \log Z \quad (2.106)$$

Bu halin nasıl oluştuğu tartışma konusu olabilir. [33]'de, [198]'de verilen Frobenius uygunluk yöntemi kullanılmıştı. Bu yöntemin esası şudur: (2.102)'deki ikinci derece diferansiyel sistemin lineer bir sistem ile müşterek integrale sahip olması için gereken parametrelerin değerleri araştırılır. (2.102) denkleminin sağ tarafını $Q(x,y,z)$ kuadratik vektör alanı ile temsil edip, genel lineer vektör alanını $L(x,y,z)$ gösterince Frobenius uygunluk teoremini de kullanırsak Q, L ve onların komütatörü $[Q, L]$ her noktada lineer bağımlı olacağını buluruz. Böylece

$$\det\{Q, L, [Q, L]\} = 0 \quad (2.107)$$

(2.73)'deki uygunluk şartı Q ve L 'nin katsayıları için lineer olmayan denklemlerden oluşan aşırı belirli bir sistemin doğmasına neden olur ama bu sistemin çeşitli çözümleri mevcuttur. Örneğin eğer $A=I$ ve $\lambda = \mu = \nu = 0$ ise uygun lineer sistem $L(x,y,z)=(x,y,0)$ olur.

Kuadratik Lotka-Volterra Sisteminin integralleri sadece yukarıdaki lineer sistemin $u=x/y$ ve $v=z$ integralleri cinsinden ifade edilmelidir. (2.102)'yi kullanırsak ve işi basite indirgeme açısından $C = 0$ eşitliğini kullanırsak,

$$\dot{u} = -xu, \dot{v} = (bx + y)v$$

veya eşdeğer ifade olan

$$\frac{\dot{v}}{v} + B \frac{\dot{u}}{u} + \frac{\dot{u}}{u^2} = 0$$

eşitliğini buluruz ki, bir kere integre edildiğinde (2.106) integralini verir.

Dahası, Lotka-Volterra sistemi, içinde sabit bir ölçüm yoğunluğu bulundurduğundan özel bir durumdur; yani burada bir $M(x,y,z)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial}{\partial x}(M\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(M\dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z}(M\dot{z}) = 0$$

olacak şekilde vardır. Burada $\dot{x}$, $\dot{y}$ ve $\dot{z}$, (2.102) denklemi vasıtasıyla x , y ve z cinsinden gösterilmektedir. Aslında, $M = 1/xyz$ olacağı bir bakışta bulunabilir. Yukarıdaki gibi sabit bir ölçüm yoğunluğunun mevcut olduğu durumlarda, Jacopi'nin Son Çarpan Teorisi, I başlangıç integralinden yola çıkılmak şartıyla, ikinci bir W integralinin bulunulabileceğini garantiler. $ABC + 1 = 0$ olduğu durumlarda,

$$\Omega = X^{AB}Y^{-B}Z$$

buluruz.

$B = -1 / (A+1)$; $C = -(A+1)/A$ durumunda $p = AX + (A+1)Y + A(A+1)Z$ ve $q = p - 2A(A+1)Z$ diyerek

$$\Omega = \log \frac{p + \sqrt{I}}{p - \sqrt{I}} A \log \frac{q + \sqrt{I}}{q - \sqrt{I}}$$

buluruz. Burada I, (2,104) denkleminde elde edilir. $A = 1$, $\lambda = \mu = \nu = 0$ durumunda, $C \neq 0$ için şunu elde ederken

$$\Omega = x - Cy + I^{1/C} \int \frac{x}{y} w^{-1+1/C} (C - w)^{-b-1/C} dw$$

bulurken, $C = 0$ için elde edeceğimiz şudur:

$$\Omega = x - e^{-I} \int \frac{y}{x} w^{B-1} e^w dw .$$

Her iki durumda da I, (2.104) ve (2.106) tarafından verilen ilk integraldir. Son iki integralin Beta ve Gamma fonksiyonları cinsinden ifade edilebileceğine dikkatinizi çekeriz.

2.9 Kısmi Differansiyel Denklemlerin İntegre Edilebilirlikleri

ARS (Ablowitz-Ramani-Segur) tahmininin ilk haliyle uygulanabilir olması için, verilen bir kısmi diferansiyel denklemin (KDD) *tüm* indirgemelerinin bilinmesi gerekir. Ancak bazen, bulunabilen tüm indirgenmeler ilgi çekici nitelikte bir bilgi vermeyecek kadar basit olabilir. Weiss ve çalışma arkadaşları bu konuda büyük bir ilerleme göstererek indirgemeleri tümünden göz ardı ettiler ve KDD'ler için Painlevé özelliğini sundular. Aslında Weiss'a göre bir KDD'nin Painlevé özelliğine sahip olması için karakteristik

olmayan herhangi bir tekil manifold $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ civarında (z_i 'ler bağımsız değişkenler olmak üzere) çözümlerin tek değerli olması gerekir [199].

Bu noktada iki farklı yol izlenebilir. Birincisi Painlevé özelliğini test etmek için Weiss algoritmasını kullanmaktır. Bu yolda, M. D. Kruskal büyük basitleştirme getirecek bir öneride bulundu. Tekillik manifoldunu $F=0$ ile tanımlamak yerine eşitliği değişkenlerden birine göre, örneğin z_1 'e göre (eşitlikteki en yüksek dereceden değişken olduğu için seçilmesi uygun görüldü) çözebilir ve tekillik manifoldunu $z_1 + \Psi(z_2, \dots, z_n)$ ile tanımlayabiliriz.

Bu durumda algoritmanın kullanılması, adi diferansiyel denklemlerdeki (ADD) uygulama kadar kolay olacaktır. Weiss, seçtiği diğer yolda ise Painlevé açılımının aşağıda gösterilen biçiminden başladı:

$$u = \Phi^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Phi^n. \quad (2.108)$$

Açılımı "sabit terim" düzeyinde kesti:

$$u = u_0 \Phi^{-m} + u_1 \Phi^{-m+1} + \dots + u_{m-1} \Phi^{-1} + u_m. \quad (2.109)$$

Bu ifade KDD'ye yerleştirilirse F ve $u_i (i=0, 1, \dots, m)$ için fazla belirgin bir denklemler sistemi elde edilir. u_m için olan denklem u için olanla aynıdır ve dolayısıyla kesilmiş (2.109) denklemi u ve u_m arasında gerçekleşen bir oto-Bäcklund dönüşümüdür (fazla belirgin sistemin basit çözümden başka çözümleri olması halinde). İşlemin karmaşık olmasına rağmen, otoBäcklund dönüşümünde bir keyfi sabit varsa, Lax çiftleri de elde edilebilir [5].

Burada incelenmeyecek olan diğer konu ise KDDler için kısmi integre edilebilirliktir. Bu konu "soliton benzeri" çözümlerin varlığı ışığında ve J. Hietarinta'nın yaptığı gibi incelenecektir [200]. Bundan sonra incelenecek olan konu, kısıtlamalar altında integre

edilebilirliktir. Jimbo ve Miwa'nın Kadomtsev-Petviashvili hiyerarşisi, tekillik analizi açısından tekrar incelenecektir. Painlevé testini Jimbo-Miwa hiyerarşisinin(1.98) denklemine uygulamak için $w(x,y,z,t)$ çözümünü

$$\Phi = x + \Psi(y, t, z), \quad u_k = u_k(y, t, z) \quad (2.110)$$

olmak üzere (2.108) biçiminde yazarız. (2.110)'u (1.96)'e yerleştirir ve her zamanki işlemleri [201] uygularsak şu sonuca varırız:

$$m = 1, u_0 = 2.$$

Rezonanslar, yani (1.98)'ten elde edilen tekrarlanma bağıntılarının u_k fonksiyonlarını belirlemediği değerler, $k = -1, 1, 4$ ve 6 'dır. Son adım, tekrarlanma bağıntısından u_2 , u_3 ve u_5 katsayılarının hesaplanması ve rezonans koşullarının, yani u_1 , u_4 ve u_6 'nın keyfi fonksiyonlar olarak varolmaları için gerekli uygunluk koşullarının sağlanmasıdır. Sonuç:

$$u_1(y, t, z) = \text{keyfi}$$

$$u_2 = (-2F_t F_y + 3F_z - 6u_{1,y}) / 12F_y \quad (2.111)$$

$$u_3 = (-2u_{1,yy} \Phi_y \Phi_y - 2u_{1,y} \Phi_{yy} + 2\Phi_{ty} \Phi_{yy} - \Phi_{yz} \Phi_y + \Phi_{yy} \Phi_z) / 16\Phi_y^3$$

$$u_4 = \text{keyfi}$$

olarak bulunur. Burada u_5 yazılamayacak kadar uzundur. $k = 6$ rezonansında özdeş olarak sağlanmayan bir koşul ortaya çıkmaktadır. Burada rezonans koşulu şöyledir:

$$R = -2u_{1,yz} \Phi_{yy} + 2u_{1,yy} \Phi_{yz} + 2\Phi_{ty} \Phi_{yz} - 2\Phi_{tz} \Phi_{yy} \Phi_y - 2\Phi_{tz} \Phi_{yy} \Phi_y - \Phi_{yz}^2 + \Phi_{yy} \Phi_{zz} = 0.$$

Görülmektedir ki $R = 0$ koşulu, bir özdeşlikten çok $u_1(y, t, z)$ ve $F(y, t, z)$ fonksiyonlarını birbirine bağlayan bir eşitliktir. Sonuç olarak bir başına alındığında (1.98) JM denkleminin Painlevé ölçütünü sağlamadığı ve bu yüzden de integre edilemeyeceği söylenebilir. JM denklemini hiyerarşide ondan önce yer alan diğer

denklemlerle, yani (potansiyel) (1.99) KP denklemiyle beraber değerlendirelim. KP denklemi z değişkenini içermez, bu yüzden $z = z_0$ değerini seçer ve Painlevé şartlarını karşıladığı bilinen KP denkleminin çözümleri için tekil bir açılım yazılır:

$$u(x, y, t) = \tilde{\Phi}^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n \tilde{\Phi}^n;$$

burada $\tilde{\Phi} = x + \tilde{\Psi}(y, t, z_0)$, $\tilde{u}_n = \tilde{u}_n(y, t, z_0)$ alınmaktadır. JM denklemi durumunda $m=1$, $\tilde{u}_0=2$ olur ve rezonanslar da $k = -1, 1, 4$ ve 6 'da bulunur. Burada $\tilde{u}_1 = \text{keyfi}$, $\tilde{u}_2 = \frac{1}{3}\tilde{\Phi}_t - \frac{1}{4}\tilde{\Phi}_y^2$ elde edilir.

Birinci kısımda anlatılan lineer olmayan bir KDD'nin koşullu integre edilebilirliğine göre, $u(x, y, z, t)$ 'nin hem JM denkleminin hem de z 'nin bir z_0 sabit değeri için KP denkleminin bir çözümü olması gerekmektedir. Bu demektir ki, k 'nin tüm değerleri için:

$$\tilde{\Psi}(y, t, z_0) = \Psi(y, t, z_0) \text{ ve } \tilde{u}_k(y, t, z_0) = u_k(y, t, z_0)$$

olmalıdır. Özel olarak, $\tilde{u}_2 = u_2$ şunu gerektirir:

$$\Phi_z = 2u_{1,y} + 2\Phi_t\Phi_y - \Phi_y^3. \quad (2.112)$$

(2.112) koşulunu kullanarak $\tilde{u}_3 = u_3$ olduğunu gösterebiliriz; daha sonra ikisi de keyfi olduğu için $\tilde{u}_4 = u_4$ seçeriz ve $\tilde{u}_5 = u_5$ elde ederiz. $k = 6$ mertebesinde KP denklemi için uyumluluk koşulu KP integre edilebilir olduğundan dolayı kendiliğinden sağlanır. Ayrıca, JM denklemi için de $k = 6$ 'da uyumluluk şartı sağlanır, yani $R = 0$, (2.112)'in bir sonucudur.

Sözkonusu durum için "koşullu integre edilebilirlik" JM denkleminin, çözümlerin sadece bir alt sınıfı için Painlevé özelliğini sağlamasıdır. Bu çözümler, F tekillik

manifoldunun z yönündeki gelişiminin, $z = z_0$ 'da y ve t 'nin keyfi bir fonksiyonu için önceden verilmiş bilgiye göre (2.112) ile belirlendiği çözümlerdir. Genel anlamda integre edilebilirlik için F , her üç değişken y , z ve t 'nin keyfi bir fonksiyonu olmalıdır.

2.10. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Painleve Özellikleri Ve Bäcklund Dönüşümleri

2.10.1. Giriş

Bu bölümün daha önceki kısımlarında Ablowitz ve onunla birlikte çalışanların [148] vardıkları bir sonuçtan söz etmiştik: bazı integre edilebilir KDD'ler ADD'lere indirgendiklerinde, bu KDD'ler Painlevé özelliğine sahip oluyordu. Onlar Painlevé tahmini denilen şöyle bir iddia ileri sürmüşlerdi: Bir sistem integre edilebilir ise, indirgemelerinin Painlevé özelliği vardır. Bu tahmin McLeod ve Olver'ın [202] sonuçlarıyla desteklendi. Burada integre edilebilirlik, basit olmayan Lax çiftine sahip olmak anlamına gelmektedir.

Bir kompleks değişkenli analitik fonksiyonlarla birden fazla kompleks değişkenli analitik fonksiyon arasındaki en önemli fark, genelde, çok değişkenli fonksiyonun tekilliklerinin yalnız (izole) olmayabilmeleridir. Eğer $f=f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ bir meromorfik n kompleks değişkenli ($2n$ gerçel değişken) fonksiyon ise, f 'nin tekillikleri $2n-2$ (gerçel) boyutlu analitik manifoldlar üzerinde olur. Böyle manifoldlar, ϕ manifold civarında $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ değişkenlerinin analitik bir fonksiyonu olmak üzere

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n)=0 \quad (2.113)$$

şeklindeki koşullarla belirlenir.

Yukarıdaki özelliğe atıfta bulunarak, bir kısmi diferansiyel denklemin çözümleri hareketli tekil manifoldlar civarında tek değerli iseler bu KDD'nin Painlevé özelliği vardır diyeceğiz [37]. KDD'ler için çözümün, verilerin yani keyfi fonksiyonların tek değerli fonksiyoneli olmasını isteyeceğiz. Bu biçimsel bir özellik olup veriler üzerine bir kısıtlama getirmez.

KDD'lerin Painlevé özelliğine sahip olduğunu göstermek için, lineer olmayan bir KDD'nin çözümünü, (2.113)'deki gibi bir hareketli tekil manifold civarında seriye açmaya yarayan bir yöntem sunuyoruz [37]. $u=u(z_1, z_2, \dots, z_n)$ KDD'in bir çözümü olsun ve ϕ ile

$$u_j = u_j(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

katsayı fonksiyonlarının, (2.113) manifoldu civarında $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ 'nin analitik fonksiyonları olmak üzere

$$u = \phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \quad (2.114)$$

olduğunu varsayalım. (2.114)'nin KDD'de yerleştirilmesiyle α 'nın olası değerleri ve u_j , $j=0,1,2,\dots$ ardışıklık ilişkileri tespit edilir. α bir tamsayı ve (2.114), (2.113) manifoldu civarında geçerli ve genel bir açılımı olduğu zaman, çözüm (2.113) civarında tek değerli bir temsile sahiptir. Eğer bu temsil, izin verilen tüm hareketli tekil manifoldlar için geçerli ise, KDD Painlevé özelliğine sahiptir. Özel bir KDD için, bütün mümkün α değerlerini bulmak ve sonra ortaya çıkan Psi serisinin şeklinin nasıl olduğuna bakmak gerekir. [203]

Burada vurgulamak istediğimiz nokta, lineer olmayan KDD'ler için Psi serisinin KDD'nin çözümleri hakkında birçok bilgi ihtiva ettiğidir. Painlevé özelliğine sahip denklemler için, Lax çiftlerini ve Bäcklund dönüşümlerini [201] bulmak için de bir yöntem geliştirilmiştir. Tekil manifold yönteminin ana hatları bundan sonraki 2.

kısımda verildi. Painlevé özelliğine sahip olmayan denklemler için bile, Psi serisi açılımında görülen keyfi fonksiyonları belirleyerek tek değerli açılımlar elde etmek mümkündür. Bu belirleme işi bizi, biçimsel olarak keyfi olan veriler için bir KDD sistemine götürür. Özel sistemler için ve genel olarak biz bu denklemlerin integre edilebilir olduğunun tahmin ediyoruz. Sonuç olarak ortaya çıkan indirgemenin şekli, ilk sistemin integre edilebilir indirgemelerini belirlememizi sağlar [201]. Bu ise 3. kısımda anlatıldı.

2.10.1.2. Örnekler Ve Karşı Örnekler

Painlevé özelliğinin doğasını ifade etmek için, Painlevé özelliğine sahip olan ve olmayan birkaç denklem örneği vermek gerekir.

Burgers denklemi

Painlevé özelliğine sahip denklemlerin basitlerinden biri

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (2.115)$$

Burgers denklemdir. (2.115) için geçerli olan

$$u = \phi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \quad (2.116)$$

Psi serisini bulmak zor değildir. u_j için elde edilen ardışıklık ilişkilerinin incelenmesiyle

$$(j-2)(j+1) \phi_x^2 u_j = F_j(u_{j-1}, \dots, u_0, \phi_t, \phi_x, \dots)$$

şeklinde bir sistem elde ederiz. (2.116)'nın geçerli olabilmesi için F_2 özdeş olarak sıfır olmalıdır. Ardışıklık bağıntılarının hesaplanmasıyla

$$j=0, u_0 = -2 \phi_x$$

$$j=1, -u_1 \phi_x = \phi_{xx}$$

$$j=2, \partial_x(\phi_t + u_1 \phi_x - \phi_{xx}) = 0$$

ifadelerini elde ederiz.

$j=2$ 'deki bu ilişki (uygunluk şartı) özdeş olarak sağlanır ve (2.116) açılımı, ϕ ve u_2 keyfi fonksiyonlar olmak üzere geçerlidir.

Korteweg-de Vries denklemi

$$u_t + u_{xxx} + 3uu_x = 0 \quad (2.117)$$

Korteweg-de Vries denklemi; ϕ , u_4 ve u_6 keyfi fonksiyonlar olmak üzere

$$u = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \quad (2.118)$$

şeklinde tekilliklere sahiptir. KdV denklemi, (1.118) yapısındaki tekillikler civarında Painlevé özelliğine sahiptir.

Schwarz KdV denklemi

$$\{\psi; x\} = \frac{\psi_{xxx}}{\psi_x} - \frac{3}{2} \left(\frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \right)^2$$

Schwarz türevi olmak üzere

$$\frac{\psi_t}{\psi_x} + \{\psi; x\} = \lambda \psi \quad (1.119)$$

Schwarz KdV denkleminin, $\psi_x \cong \phi_x \neq 0$ karakteristik olmama şartı sağlanıyorsa; ϕ , u_0 , u_1 keyfi olmak kaydıyla

$$\psi = \phi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \phi^j \quad (1.120)$$

şeklinde tekillikleri vardır. Eğer $\psi_x = 0$ ise açılım karakteristik manifold civarında $\phi = x - x_0(t)$ ve $\psi_j = \psi_j(t)$ olmak üzere

$$\psi = f(t) + \phi^3 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \phi^j \quad (1.121)$$

şekline sahiptir.

Schwarz KdV denklemi hem karakteistik hem de karakteristik olmayan manifoldlar civarında tek değerli açılımlara sahiptir. Painlevé özelliği, bütün hareketli tekillik manifoldlarının ister karakteristik olsun ister olmasın tek değerli olmasını gerektiriyor. Yukarıdaki bu sonuç Ward'ın [199,204], lineer sistemler için keyfi kötü tekillikler karakteristikler boyunca yayıldığından, Painlevé özelliğinin tanımında karakteristik civarındaki açılımların doğrudan ele alınmasına izin verilemeyeceği konusundaki gözlemi ile çelişki oluşturmaktadır. Genel sistemler için, eğer varsa karakteristikler civarındaki açılımlar bazı keyfi veriler ortaya çıkarır. Eğer veriler kötü ise, açılımın yine de verilerin tek değerli bir fonksiyoneli olması istenir. Bu anlamda, (2.121) açılımı, $f(t)$ ve $x_0(t)$ verilerinin tek değerli fonksiyonelidir, ancak bu veriler t'nin fonksiyonu olarak çok değerli olabilirler. Tabii ki, aynı gözlem (2.120) karakteristik olmayan açılımına da uygulanabilir. Painlevé özelliği çözümlerin, verilerin fonksiyonelleri olarak tekil manifold civarında nasıl davrandığına dair bir ifadedir,

yoksa verilerin kendisi hakkında bir ifade değildir. Aşağıdaki örnek bu noktayı vurgular.

Türevli Schwarz denklemi

$$\frac{\psi_t}{\psi_x} + \frac{\partial}{\partial x} \{\psi; x\} = 0 \quad (2.122)$$

türevli Schwarz denklemi, $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \phi$ keyfi olmak üzere

$$\psi = \phi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \phi^j \quad (2.123)$$

yapısında karakteristik olmayan tekilliklere sahiptir. Bu yüzden, (2.122) denkleminin, derecesinin izin verdiği ölçüde en fazla sayıda keyfi fonksiyona dayalı tek değerli açılımı sahiptir. Fakat $\psi_x=0$ 'dan elde edilen karakteristik manifold civarında

$$\alpha = 7/2 + i \frac{\sqrt{11}}{2} \quad \text{ve } \phi = x - x_0(t) \quad \text{olmak üzere}$$

$$\psi = f(t) + \phi^4 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{jk} \phi^j \phi^{k\alpha} \quad (2.124)$$

olur. (2.124) açılımları ϕ 'nin yüksek katlı çok değerli fonksiyonelleridir.

Genelde, bir denklemin Painlevé özelliğini göstermek için, mücadele edilen bütün tekilliklerin (verinin fonksiyoneli olarak) tek değerli olduklarını kanıtlamak gerekir. Bu gereklilik sık sık gözden kaçırılır ve bazı yanlış sonuçlara götürür. Doktorov ve Sakovich [205]

$$\Delta \Psi = P_n(\Psi) \quad (2.125)$$

denkleminin n . dereceden herhangi bir P_n polinom için Painlevé özelliğinin var olduğunu iddia ettiler. Çünkü $\Psi=u^{-1}$ denirse, u için elde edilen denklem, iki keyfi fonksiyona bağlı olarak tek değerli kutuplara sahiptir ve bu yüzden Painlevé özelliğine sahiptir. Aslında onlar, Cauchy-Kovalewsky teoremince yerel olarak geçerli olduğu bilinen bir gerçeği iddia ediyorlar ve (2.125) denkleminin, Ψ 'nin basit sıfırları civarında tek değerli açılıma sahip olduğunu söylüyorlar. Örneğin bir ADD'ye indirgenmiş ilk olarak Painlevé tarafından incelenen bir sınıfa girmektedir.

$$u_t^2 - 2uu_x^2 - (1 + u^2)u_{xx} \quad (2.126)$$

Clarkson denkleminin de yalnızca meromorfik psi-serisine ve Painlevé özelliğine [206,207] sahip olduğuda düşünülmüştü. Oysa durum öyle değildi.

$$u^2 + 1 = 0 \quad (2.127)$$

olan noktaları gözönüne alalım. Yukarıdaki denklemi tekrar yazarsak

$$u_t^2 - 2iu_x^2 = (u - i)(2u_x^2 - (u + i)u_{xx})$$

elde ederiz ve $G=u+i$ kabul edersek

$$G_t^2 - 2iG_x^2 = (G - 2i)(2G_x^2 - GG_{xx})$$

olur. Baskın dereceye kadar $\Re_\alpha \geq 0$ olmak üzere

$$G=2i+G_0\phi^\alpha + \dots$$

elde edilir.

Bunu yukarıda yerine koyarsak

$$\alpha^2 G_0^2 (\phi_t^2 - 2i\phi_x^2) \phi^{2\alpha-2} = \alpha(\alpha+1) G_0^3 \phi_x^2 \phi^{3\alpha-2} - 2i\alpha(\alpha-1) G_0^2 \phi_x^2 \phi^{2\alpha-2}$$

elde edilir. $\Re_\alpha \geq 0$ olduğu için

$$\alpha = 2i\phi_x^2 / \phi_t^2$$

elde ederiz. Bu baskın derece için denge denklemi

$$G_t^2 + 2i(GG_{xx} - G_x^2) = 0$$

olur ve

$$G = 2i + G_0 \phi^\alpha + G_1 \phi^{\alpha+r}$$

rezonanslarında

$$\alpha(\alpha+r)\phi_t^2 + i\{\alpha(\alpha-1) + (\alpha+r)(r-\alpha-1)\}\phi_x^2 = 0$$

olur. Burada önde gelen derece kullanılarak

$$r = -1, 0.$$

bulunur.

Böylece G_0 keyfidir. Yukarıdakilere göre Clarkson denkleminin hareketli bir esaslı tekilliği vardır ve Painlevé özelliğine sahip değildir.

Öncekinin bir değişliği olan modifiye edilmiş **Clarkson denklemi** [208] de meromorfik olmayan tekilliklere sahiptir. Bu denklem

$$u_t = (1+u^2)u_{xx} + (1-2u)u_x^2 \quad (2.128)$$

şeklindedir. Onu yine $1+u^2=0$ noktalarında açalım. Bunu görmek için, $G=u+i$ kabul edelim ve

$$G_t=(G-2i)(GG_{xx}-2G_x^2)+(1-2i)G_x^2$$

bulalım. $G=2i+G_0\phi^\alpha+\dots$ kabul edelim ve baskın dereceyi

$$\alpha=2i$$

ve rezonansı da $r=0$ da olarak bulalım.

$$(1+u^2)u_{xx}=(2u-1)u_x^2 \quad (2.129)$$

denklemini (2.126)'un gezen dalga ve (2.128) durağan durumudur. Bu denklemin

$$u=\tan(\log(ax+b))$$

şeklinde genel çözümü olduğu Painlevé tarafından gösterildi. Hareketli esaslı tekillikler bir önceki örneklerde gösterildi. (2.126) 'un durağan durumu

$$(1-u^2)u_{xx}=(2u-1)u_x^2 \quad (2.130)$$

şeklindedir.

İlk örnekteki inceleme, meromorfik olmayan tekillik bulamadı. Onun genel çözümü

$$u=\tan(ax+b)$$

şeklinde bulunur. Sabit olmayan rezonanslı denkleme örnek,

$$u^2u_{xxx}=3u_t^3 \quad (2.131)$$

Rand denklemdir [208]. Bu denklemin önde gelen derecesi $u = u_0 \phi^\alpha + \dots$ şeklindedir ve

$$(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 3(\phi_t^3 / \phi_x^3) \alpha^2$$

olduğu gösterilebilir.

α cinsinden ikinci derece olan bu denklem baskın dereceyi belirler. α kuşkusuz, ϕ_t ve ϕ_x 'in bir sabit olmayan fonksiyoneli.

$$u = u_0 \phi^\alpha + u_1 \phi^{\alpha+r} + \dots$$

rezonans şartı kolaylıkla

$$r = -1, 0, 4-3\alpha$$

rezonanslarını belirler.

Buradaki durum, rezonanslardan biri olan $4-3\alpha$ 'nın, ϕ tekil manifoldunun bir fonksiyoneli olması halidir.

Şimdilik son olarak,

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.132}$$

viskoz olmayan Burgers denklemini gözönüne alalım. Bu denklem $u = u_0 + u_1 \phi^\alpha + u_2 \phi^{2\alpha} + \dots$ şeklinde önde giden dereceye sahiptir. Bunun denklemde yerine konmasıyla

$$\alpha = 1/2 \quad \text{ve} \quad \phi_t + u_0 \phi_x = 0$$

elde edilir. Açılımda bundan sonraki terim

$$u_{0t} + u_0 u_{0x} + 1/2 \phi_x u_1^2 = 0$$

şeklindedir. Eğer $u_{0t} + u_0 u_{0x}$ olursa $u_1 = u_2 = \dots = 0$ bulunur ve yukarıdan

$$\phi_x^2 \phi_{xx} - 2 \phi_x \phi_t \phi_{xt} + \phi_t^2 \phi_{xx} = 0 \quad (2.133a)$$

elde edilir. Bu denklem 3. kısımda gösterileceği gibi bir Legendre dönüşümüyle lineerleştirilebilir.

Şu ana kadar anlatılan kısım, kısmi diferansiyel denklemler için Painlevé özelliğinin tanımını ve fonksiyonel Psi serisinde karşılaşılan tekillik tiplerini içerdi. Bu yaklaşım, köklü genelleştirmelere müsaittir. Bu bölümde çoğunlukla uygulamalar integre edilebilir sistemlere yapılacaktır.

2.10.2 Tekil Manifold yöntemi

Eğer bir denklem Painlevé özelliğine sahip ise, Bäcklund dönüşümlerini, Lax çiftini, modifiye denklemleri ve Miura dönüşümlerini çözümün tekil manifold civarındaki açılımından yararlanarak hesaplanmasını öneriyoruz. Tekil manifold yöntemi Laurent Psi serisinin “sabit seviye” teriminden sonra kesilmesinden meydana gelir. Böylece mümkün bir Bäcklund dönüşümü bizzat inşa edilmiş olur. Rezonansların dağılımına bağlı olarak Laurent açılımının katsayılarının ardışıklık ilişkilerinden, genelde aşırı belirlenmiş olan bir denklem sistemi tanımlanır. Bu sistemin tutarlı şekle indirilmesiyle Bäcklund-Darboux dönüşümü, modifiye denklemin Schwarz formu ve ilk sistemin ilgili Miura dönüşümü tanımlanır. Lineer değişkenler için yerine koymayı teşvik eden Möbius grubu altında Schwarz türevinin değişmezliğini kullanarak, modifiye denklem ve Miura dönüşümünün lineerleştirilmesiyle Lax çifti bulunabilir. Modifiye

denklemlerin Möbius grubu altında değişmemeleri ve ayrık simetrileri, bu sistemler için basit olmayan bir Bäcklund dönüşümü oluşturur. Bu dönüşümlerin açık çözümlerin yani rasyonel, sonlu-bölge vs. türü çözümlerin bulunması için kullanılışını inceleyeceğiz. Yöntemin kısmi verdiği iki durum sunacağız. Birinci durumda Bullough-Dodd denklemi Bäcklund dönüşümüne sahip değildir. İkincide modifiyeineer olmayan Schrödinger denklemleri için Bäcklund dönüşümleri, sistemin indirgemelerinden biridir. Yöntemin adi diferansiyel denklemler de dahil olmak üzere diğer alanlara genişletilmesine de çalışılmıştır. Bu, verilen denklemle eşleşen yapının keşfedilmesini içeren bir yöntem olduğu için, KdV denklemi üzerindeki incelemeyi ayrıntılarıyla veriyoruz.

2.10.2.1 Korteweg-de Vries denklemi

$$u_t + u_{xxx} + 3uu_x = 0 \quad (2.134)$$

Korteweg-de Vries denklemi denkleminin $\phi(x,t)=0$ tekil manifold civarında

$$u = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \quad (2.135)$$

şeklinde meromorfik tekilliklere sahiptir. Yukarıda ϕ , u_4 ve u_6 keyfi fonksiyonlar olduğu bulduk ve (2.135)'nin iyi tanımlı olması için ϕ 'nin karakteristik olmaması gerekiyor. Yani, $\phi=0$ için $\phi_x \neq 0$ olmamalı. Yerel analitik veriler için (2.135)'nin $\phi=0$ komşuluğunda yakınsadığı gösterilecek.

(2.134)'ün biraz genelleştirilmiş olan

$$(\partial / \partial x)(u_t + u_{xxx} + 3uu_x) = 0 \quad (2.136)$$

denklemini de incelemeye değer. Bu denklem, ϕ , u_4 , u_5 ve u_6 keyfi fonksiyonlar olmak üzere (2.135) şeklinde bir açılıma sahiptir.

Şimdi, sabit terimden sonra (2.135)'yi kesip

$$u = u_0 / \phi^2 + u_1 / \phi + u_2 \quad (2.137)$$

ifadesini elde ediyoruz. Bunun (2.134) veya (2.136)'e yerleştirilmesiyle, ϕ , u_0 , u_1 ve u_2 gibi dört fonksiyon cinsinden dört denklemlili bir sistem elde edilir.

Bu, (2.136) için çok kolay görülür. Çünkü keyfi fonksiyonlarda $u_4=u_5=u_6=0$ alıp, $u_3=0$ olmaya zorlarsak, (2.137) ve dört denklemini elde ederiz. Bütün bunlardan, u ve u_2 KdV'yi sağlayan fonksiyonlar olmak üzere

$$u = -4\phi_x^2 / \phi^2 + 4\phi_{xx} / \phi + u_2 \quad (2.138)$$

$$u_2 + \lambda = -(\phi_{xxx} / \phi_x) + \frac{1}{2}(\phi_{xx} / \phi_x)^2 \quad (2.139)$$

$$\phi_t / \phi_x + \{\phi, x\} = \lambda \quad (2.140)$$

ifadelerini elde ederiz. Yine,

$$\{\phi, x\} = \phi_{xxx} / \phi_x - \frac{3}{2}(\phi_{xx} / \phi_x)^2 \quad (2.141)$$

ifadesi, yani Schwarz türevi [203,201],

$$\phi = (a\Psi + b) / (c\Psi + d) \quad (2.142)$$

şeklindeki Möbius grubunun tek diferansiyel değişmezidir [209].

Möbius grubu, kompleks ϕ (Riemann) küresinin tek konform (monodromi koruyan) otomorfizm grubudur. (2.139) ve (2.140) ilişkisi u_2 'nin (2.134)'yü sağladığını gösterir. Çünkü ,

$$v = \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} \quad (2.143)$$

olmak üzere

$$u_{2,t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + V\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - V\right) \frac{\phi_t}{\phi_x}$$

olur. V 'nin bu tanımı (2.140)'den

$$V_t + V_{xxx} - 3/2 V^2 V_x = \lambda V \quad (2.144)$$

modifiye KdV denklemini verir.

(2.138)'daki Bäcklund-Darboux denklemi,

$$u_2 + \lambda = -\frac{\partial}{\partial x} (\phi_{xx} / \phi_x) - \frac{1}{2} (\phi_{xx} / \phi_x)^2 \quad (2.145)$$

olmak üzere

$$u=4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi + u_2 \quad (2.146)$$

şeklinde yazılabilir ve ϕ , (2.140)'deki Schwarz -KdV denklemini sağlar.

(2.145)'i (2.140)'dan (2.134)'e bir Miura dönüşümü olarak kabul ediyoruz. Bu aynı zamanda $W = \phi_{xx} / \phi_x$ değişkeninin cinsinden Riccati denkleminin şekline sahiptir ve $W = -2u_x/v$ değişken değiştirmesi ile lineerleştirilebilir. Bu v için

$$2v_{xx} = (u_2 + \lambda)v \quad (2.147)$$

lineer denklemini ve $\phi_x = v^{-2}$ ifadesini temin eder. (2.140)'dan ilave bir

$$v_t = (2\lambda - u_2)v_x + 1/2 u_{2x}v \quad (2.148)$$

lineer denklemi bulunur. (2.147) ve (2.148) KdV denklemini için Lax çiftidir ve u_2 fonksiyonu bir KdV çözümüdür.

ϕ için lineerleştirici yerine koyma, v_1 ve v_2 (2.147)'nin çözümleri olmak üzere

$$\phi = v_1/v_2$$

şeklindedir. (2.147) lineer denklemi cinsinden Bäcklund dönüşümü, Spektruma eleman ekleyen klasik Darboux dönüşümüdür.

Şimdi, (2.140) Schwarz KdV denklemini için Bäcklund dönüşümlerini gözönüne alalım. Schwarz türevinin (2.142) Möbius grubu altında değişmezliğinden, (2.140)'nin aynı

dönüşüm altında değişmezliğini elde ederiz. Bu değişmezlik, (2.140), (2.141)'in tekilliklerinin incelenmesiyle ve

$$\phi = \psi^{-1} \phi_0 + \phi_1 \quad (2.149)$$

kesik açılımının, ϕ_0 ile ϕ_1 'in sabit olmasını ve ψ 'nin (2.140)'i sağlamasını gerektiğinin anlaşılmasıyla da elde edilir. Bir başka deyişle Möbius değişmezliğini buluruz. (2.144) modifiye denkleminin ayrık simetrilerinden ek bir Bäcklund dönüşümü daha bulunur. Yani $V \Rightarrow -V$, (2.140) için

$$\phi_x = 1/\psi_x \quad (2.150)$$

şeklinde bir invaryant dönüşüm verir. Bunun zamana bağlı şekli (2.140) ve (2.150) 'den bulunur. Bu da

$$\phi_t/\phi_x + \psi_t/\psi_x + (\phi_{xx}/\phi_x)(\psi_{xx}/\psi_x) = 2\lambda$$

olur, (2.150)'de $\phi_{tx} = \phi_{xt}$ ve $\psi_{tx} = \psi_{xt}$ eşitlikleriyle ϕ ve ψ 'nin ikisinin de (2.140)'i sağlamasını gerektirir. Bu yüzden (2.140) için güçlü bir Bäcklund dönüşümüne sahibiz. Bu bölümün dördüncü kısmında (2.140)'ın Bäcklund dönüşümlerinin periyodik sabit noktalarının sonlu boyutlu değişmez manifoldları nasıl tanımladığını ve değişme özelliğine sahip Hamilton akışları olarak bu değişmez manifold üzerinde KdV akışını nasıl çarpanlara ayırdığını göstereceğiz.

Bäcklund dönüşümünü kullanarak,

$$\phi = \varepsilon^{-1} \phi_0 + \phi_1 + \dots$$

Laurent açılımının $\varepsilon(x,t)=0$ 'ın bir komşuluğunda yakınsak olduğunu göstermek basittir. $\psi = \phi^{-1}$ simetrisi kutubu basit sifıra tasvir eder ve veri Cauchy-Kowalevsky Teoremi'nin yerel analitik olma ve karakteristik olmama şartlarını sağlar. Bu yüzden,

her iki açılım da bir (delik) komşulukta yakınsaktır. Bunun yanısıra, (2.150) simetrisi karakteristik, konform olmayan

$$\phi = f(t) + \varepsilon^{-3} \phi_3 + \dots$$

tekilliğini

$$\psi = \varepsilon^{-1} \psi_0 + \dots$$

basit kutubuna tasvir eder ve bir önceki düşünce tarzımıza göre bu da yakınsaktır. Bu sonucu ve KdV sistemi ile modifiye sistem arası ilişkileri kullanarak KdV denklemini için kutup tekilliklerinin de yakınsak olduğu sonucuna varırız. KdV için karakteristik tekillikler basittir.

KdV denklemini için

$$u = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j$$

Laurent serisinin yakınsaklığı, ardışıklık ilişkilerinden

$$A_j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{j!k!} u_{j+2+k} \phi^k$$

olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} A_j = \frac{\partial}{\partial x} B_j$$

korunum kanunun varlığını gerektirir. Bu yüzden Painlevé özelliği doğrudan, biçimsel integrallerin varlığını gerektirir.

(2.134) KdV denklemini ve (2.144) modifiye KdV denklemini

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_{xx} + \frac{3}{2}u^2 \right) = 0 \quad (2.151)$$

$$V_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(V_{xx} - \frac{1}{2}V^3 \right) = 0 \quad (2.152)$$

Hamilton yapısına [201] sahiptir ve

$$u = \pm V_x - \frac{1}{2}V^2 \quad (2.153)$$

Miura dönüşümü ile birbirlerine bağlanabilirler.

$$u_{xx} + \frac{3}{2}u^2 = \delta_u \int \left(-u_x^2 + \frac{1}{2}u^3 \right) dx$$

$$V_{xx} - \frac{1}{2}V^3 = \delta_V \int \left(-V_x^2 - \frac{1}{8}V^4 \right) dx$$

olduğunu unutmayalım. Miura dönüşümü kullanılarak (2.152) ilk Hamilton yapısından KdV denklemi için ikinci Hamilton bulunur. Değişken değiştirme ile $\Omega = (\delta_V u) \partial_x (\delta_V u)^t$ formülü

$$\Omega = \partial_x^3 + 2u \partial_x + u_x = (\partial_x - V)(\partial_x)(\partial_x + V) \quad (2.154)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $u = V_x - 1/2V^2$ alınmıştır ve KdV denklemi $H_1 = \int \frac{1}{2}u^2$

olmak üzere

$$u_t + \Omega \delta_u H_2 = 0$$

haline gelir.

KdV denkleminin integrallerinin gradiyenti

$$\partial_x \delta_u H_{j+1} = \Omega \delta_u H_j \quad (2.155)$$

şeklindeki Lenard ardışıklık formülünü sağlar ve daha yüksek dereceli denklemler $j=1,2,\dots$ için

$$u_t + \partial_x \delta_u H_j = 0 \quad (2.156)$$

şeklindedir. Şimdi, yukarıdakileri biraraya getirirsek takibeden aşağıdaki sonuçlar [201] elde edilir.

$j=1,2,\dots$ için

$$u_2 = -\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{xx} / \phi_x) - \frac{1}{2}(\phi_{xx} / \phi_x)^2 \quad (2.157)$$

ve

$$\frac{\phi_t}{\phi_x} + \delta_u H_j(\{\phi; x\}) = 0 \quad (2.158)$$

olmak üzere

$$u = 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi + u_2 \quad (2.159)$$

şeklinde olan Bäcklund -Darboux dönüşümüne sahiptir.

$$u_t + \partial_x \delta_u H_j = 0 \quad (2.160)$$

şeklindedir. Bunun yanısıra $u_3 = \{\phi; x\}$ olur, u_2 (2.160)'ı sağlar ve (2.158) dizisi Möbius grubu ile (2.150) simetrisi altından değişmeden kalır.

Bazı ilk bir kaç gradiyentin

$$\delta_u H_1 = u$$

$$\delta_u H_2 = u_{xx} + 3/2 u^2$$

$$\delta_u H_3 = u_{xxx} + 5uu_{xx} + 5/2 u_x^2 + 5/2 u^3$$

şeklinde olduğuna dikkat ediniz.

Şimdi Laurent açılımının ağırlığını indirmek ve yükseltmek için Bäcklund dönüşümlerini ve basit baskın derece düşüncelerini kullanarak, yüksek-dereceli sistemlerin Painlevé özelliğine sahip olduğunu ve teklik manifoldunun bir delik komşuluğunda, veriler bu komşulukta [201] yerel analitik olduğu zaman biçimsel Laurent açılımının yakınsadığını göstermek zor değildir. Yani, N'inci Schwarz denklemi için en yüksek ağırlık tekliği

$$\phi = f(t) + \varepsilon^{2N+1} \phi_{2N+1} + \dots$$

şeklindedir. $k < N$ için tek dereceli kutuplar

$$\phi = \varepsilon^{-2k-1} \phi_0 + \dots$$

ve tek dereceli sıfırlar

$$\phi = \varepsilon^{2k+1} \phi_0 + \dots$$

şeklindedir. $\phi = 1/\Psi$ simetrisi kutubu sıfıra, sıfırı kutuba tasvir eder. $\phi_x = 1/\Psi_x$ simetrisi $2k+1$ 'inci derece sıfırı $2k-1$ 'inci derece kutuba ve tersini tasvir eder. Bu iki dönüşümü birleştirirsek herhangi bir teklik $\phi = \varepsilon \phi_0 + \dots$ basit sıfırına tasvir edilebilir ve

Cauchy-Kowalevsky Teoremi gereği bu seri tek değerli ve yakınsaktır. Bu formdan tekilliklerin bütün kümesine olan tasvirin çok değerli $\ln \xi$ terimleri getirmediğini ve izin verilen en fazla sayıda keyfi fonksiyona bağlı olduğu gösterilebilir.

Bu yüzden KdV dizisi, Laurent serisi yakınsayan ve Painlevé özelliğine sahip olan bir dizidir.

Özetlersek, sabit terimden sonra kesilen Painlevé açılımı, modifiye denklemin Schwarz türevi cinsinden ifade edilen bir şeklini tanımlar. Miura dönüşümünün lineerleştirilmesiyle Lax çifti bulunur. Möbius grubu ve modifiye denklemin ayrık simetrileri, Schwarz denklemleri için Bäcklund dönüşümleridir. Miura dönüşümü ikinci Hamilton yapılarını ve korunan yoğunlukların gradiyantı için bunula eşleşen recursion operatörlerinin hesaplanmasına izin verir. Bäcklund dönüşümlerinin denklem dizilerinin tekillik yapısı üzerindeki etkisi, dizinin Painlevé özelliğine sahip ve yakınsak biçimsel Laurent açılımına sahip olduğu sonuçlarına ulaşmamıza sağlar.

2.10.2.2. Boussinesq Denklemleri

$$u_{tt} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{1}{3} u_{xx} + u^2 \right) = 0 \quad (2.161)$$

Boussinesq denkleminin [201] analizi

$$u = 2 \frac{\partial}{\partial x^2} \ln \phi + u_2 \quad (2.162)$$

şeklindeki Bäcklund-Darboux dönüşümünü bulmamıza yardım eder. Burada $\phi = v_1 / v_2$ alınmıştır ve v_1, v_2

$$4v_{xxx} + 6uv_x + 3(u_x + h)v = 0$$

$$v_t = v_{xx} + (u + \lambda)v$$

$$h_x = u_t$$

denklemlerini sağlar. Modifiye Schwarz denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t / \phi_x) + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\{\phi, x\} + \frac{3}{2} (\phi_t / \phi_x)^2 \right) = 0 \quad (2.163)$$

şeklindedir. Bu sistem için ayırık simetri

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{xx}}{\phi_x} &= -\frac{1}{2} \frac{\psi_{xx}}{\psi_x} \mp \frac{\psi_t}{\psi_x} \\ \frac{\phi_t}{\phi_x} &= \pm \frac{1}{2} \frac{\psi_{xx}}{\psi_x} - \frac{1}{2} \frac{\psi_t}{\psi_x} \end{aligned} \quad (2.164)$$

şeklindedir.

2.10.2.3. Sine-Gordon Denklemi

$$u_{xt} = \sin(u) \quad (2.165)$$

sine-gordon denklemi [201],

$$VV_{xt} - V_x V_t = 1/2(V^3 - V) \quad (2.166)$$

olmak üzere $V = e^{iu}$ değişkeni için Painlevé özelliğine sahiptir.

$$V = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} V_j \phi^j$$

açılımı $j=-1,2$ rezonanslarına ve $V_0 = 4\phi_x \phi_t$ ve $V_1 = \phi_{xt}$ değerlerine sahiptir. O zaman Painlevé dönüşümü $V_2 = \phi_{xt}^2 / (\phi_x \phi_t)$ olmak üzere

$$V = -4 \frac{\partial^2}{\partial x t} \ln \phi + V_2 \quad (2.167)$$

şeklindedir. Modifiye Schwarz denklemleri

$$\Omega_1 = \{\phi; t\} + 2Z_u / Z = \alpha \quad (2.168)$$

$$\Omega_2 = \{\phi; t\} + 2W_{xx} / W = \beta \quad (2.169)$$

şeklindedir. Burada $Z^2 = \phi_x / \phi_t$, $W^2 = \phi_t / \phi_x$ ve $\alpha\beta = 1/4$ dür. $\phi_x (\partial / \partial x) \Omega_1 + \phi_t (\partial / \partial t) \Omega_2 = 0$ ifadesi yukarıdaki iki denklemin denkliğini gösterir. Ayrık simetrileri bulmak için $\Theta = -\phi_{xt} / \phi_t$ ve $\Phi = -\phi_{xt} / \phi_x$ kabul edelim ve

$$\Theta + 1/2 \Phi \Theta + \lambda/2 \Theta / \Phi = 0 \quad (2.170)$$

$$\Phi_x + 1/2 \Theta + 1/(2\lambda) \Phi / \Theta = 0 \quad (2.171)$$

sistemini alalım. Bu denklemlerin ayrık simetrileri, Schwarz denklemlerinin kuvvetli Bäcklund dönüşümlerini ortaya çıkmasını gerektirir.

$$\frac{\phi_{xt}}{\phi_t} \frac{\psi_{xt}}{\psi_t} = \frac{1}{\lambda}, \quad \phi_x \psi_x = 1 \quad (2.172)$$

$$\frac{\phi_{xt}}{\phi_x} \frac{\psi_{xt}}{\psi_x} = \frac{1}{\lambda}, \quad \phi_t \psi_t = 1 \quad (2.173)$$

$$\frac{\phi_{xt}}{\phi_t} \frac{\psi_{xt}}{\psi_t} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\phi_{xt}}{\phi_x} \frac{\psi_{xt}}{\psi_x} = -\lambda \quad (2.174)$$

Örneğin, $\psi \phi_t = -\phi^{-1}_t$ ve $\psi_x = -(1/\lambda) \phi^2_{xt} / (\phi^2 / \phi_x)$ ifadesi $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ şartı ile birlikte ϕ 'nın (2.168) Schwarz denklemini sağlamasını gerektirir.

Möbius grubu bir nokta simetrisidir ve yukarıdaki BT denklemi ile bileşimi

$$\begin{aligned}\phi_0 &= e^{\sigma t + x/\sigma} \\ \phi_1 &= \tanh(\sigma t / 2 + x / (2\sigma)) \\ \phi_3 &= \sinh(\sigma t + x / \sigma) + \sigma t - x / \sigma\end{aligned}$$

çözümlerini üretir.

Sine-gordon denklemi KdV denklem silsilesinin eksi bir numaralı üyesidir. (2.166) 'da $v = \phi_x$ kabul edersek

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\phi, x\} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{\phi_x} \right\} \quad (2.175)$$

buluruz.

KdV denklemini rekürsiyon operatörü $\Omega = (\partial_x - W)(\partial_x)(\partial_x + W)$ ve $W = \phi_{xx} / \phi_x$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta_u H_{j+1} = \Omega \delta_u H_j \quad (2.176)$$

şeklindedir. Bu eksi bir numaralı fonksiyonel, $\delta_u H_0 = 1$,

$$\partial_x \delta_u H_0 = \Omega \delta_u H_{-1} = 0$$

şartını sağlar ve genel çözüm $u = \{\phi; x\}$ olmak üzere

$$\delta_u H_1 = (a\phi^2 + b\phi + c) / \phi_x \quad (2.177)$$

şeklindedir. Bu yüzden sine-Gordon denklemi $u = \{\phi; x\}$ ve $\delta_u H_1 = -1/\phi_x$ olmak üzere

$$u_t = \partial_x \delta_u H_1 \quad (2.178)$$

yapısındadır.

2.10.2.4. Henon-Heiles Sistemi

Bu bölümün baş tarafında gördüğümüz gibi, tekil manifold yöntemi adi diferansiyel denklemlere de [210,211] uygulanabilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} x_{tt} &= -Ax - 2dxy \\ y_{tt} &= -By + cy^2 - dx^2 \end{aligned} \quad (2.179)$$

Henon-Heiles sistemi için Backlund dönüşümü $d/c=-1/6$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= \phi^{-1}x_0 + x_1 \\ y &= \phi^{-2}y_0 + \phi^{-1}y_1 + y_2 \end{aligned} \quad (2.180)$$

şeklindedir. Burada

$$y_0 = -\phi_t^2, \quad y_1 = \phi_{tt}, \quad y_2 = \frac{1}{12}(4\lambda - B - 3V - 3(\phi_{tt} / \phi_t)^2)$$

ve

$$x_0^2 = \phi_t^2 V, \quad x_1 = -\frac{1}{2}(V_t / V + \phi_{tt} / \phi_t)V^{1/2}$$

olmaktadır. V değişkeni de,

$$\frac{1}{2}V_t^2 + \frac{1}{2}V^3 + \left(\frac{1}{3}B - 2A + \frac{2}{3}\lambda\right)V^2 + \left(\frac{1}{6}B^2 - \frac{2}{3}\lambda^2\right)V = 0 \quad (2.181)$$

olmak üzere

$$V = \{\phi, t\} + \lambda$$

biçimindedir.

Bu, V 'yi Weierstrass elliptik fonksiyonu cinsinden tanımlar ve u_1, u_2

$$u_{tt} = -\frac{1}{2}(V + \lambda)u$$

lineer denkleminin çözümleri olmak üzere $\phi = \frac{u_1}{u_2}$ olur.

2.10.2.5. Harry Dym Denklemini

Schwarz KdV denklemi [201]

$$\frac{\phi_t}{\phi_x} + \{\phi, x\} = \lambda \quad (2.182)$$

denklemdir.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \phi & t &\rightarrow t & \phi &\rightarrow x \\ \phi_x &= 1 / \phi_x & x_t &= -\phi_t / \phi_x \\ \{\phi, x\} &= -\phi_x^2 \{x, \phi\} \end{aligned}$$

değişken değiştirmelerini kullanarak

$$x_t + \lambda + x_\phi^{-2} \{x, \phi\} = 0 \quad (2.183)$$

buluruz.

Harry Dym denklemi $\lambda=0$ kullanılarak, $W = x_\phi^2$ yerine konularak

$$W_t = 2 \frac{\partial^3}{\partial \phi^3} W^{-1/2}$$

şeklinde elde edilir. Schwarz KdV denklemler silsilesinin

$$M_x = \Omega_1 J_1$$

ve

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \phi_x \partial_x^{-1} \phi_x \\ J_1 &= \partial_x \phi_x^{-1} \partial_x \phi_x^{-1} \partial \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\phi_t + M_x^n \circ \phi_x = 0 \quad (2.184)$$

şeklindedir. Değişken dönüşümü, $\partial_\phi = \phi_x^{-1} \partial_x$ ile birlikte Harry Dym denklem silsilesi [201] için,

$$L_\phi = \Omega_2 J_2$$

ve

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \partial_\phi^{-1} \\ J_2 &= x_\phi^{-1} \partial_\phi^3 x_\phi^{-1} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$x_t + L_\phi^n \circ 1 = 0 \quad (2.185)$$

şeklinde bir Hamilton yapısı üretir. KdV denkleminin için rasyonel çözümler,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= x \\ \phi_1 &= x^3 + 12t \\ \phi_2 &= (x^6 + 60tx^3 - 720t^2) / x \end{aligned}$$

vs.. olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi_{j+1,x} &= \phi_j^2 / \phi_{j,x} \\ \phi_{j+1,t} / \phi_{j+1,x} + \phi_{j,t} / \phi_{j,x} &= (\phi_{j,xx} / \phi_{j,x})^2 - 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi_j \end{aligned} \quad (2.186)$$

BT vasıtasıyla bulunabilir. Bunlar Harry Dym denkleminin $x^3 = \phi - 12t$ gibi cebirsel çözümlerini de kapalı olarak tanımlıyor. KdV 'nin N soliton çözümleri, Harry Dym denkleminin N-kasp çözümlerine karşı gelir.

2.10.2.6. KMKdV-I Denkleminin Painlevé Analizi

Bu kısımda, Weiss'in tanımlanan Painlevé analizi yöntemi KMKdV-I [212] denklemini dedikimiz

$$w_t + \alpha(|w|^2 w)_x + \beta w_{xxx} = 0 \quad (2.187)$$

lineer olmayan kısmî diferansiyel denklemine uygulayacağız.

Gerçel fonksiyonlarla çalışmak için $w=u+iv$ diyelim ve (2.187) denkleminde yerine koyup gerçel ve sanal kısımlarını ayırarak

$$\begin{aligned} u_t + \alpha \left[(u^2 + v^2) u \right]_x + \beta u_{xxx} &= 0 \\ v_t + \alpha \left[(u^2 + v^2) v \right]_x + \beta v_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.188)$$

sistemini elde ederiz. Denklemlerdeki terimlerin dengelerine bakarak bu denklemlerin seri çözümleri varsa onların

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t, x) \phi^{j-1}(t, x) \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(t, x) \phi^{j-1}(t, x) \end{aligned} \quad (2.189)$$

yapısında olması gerektiğini anlıyoruz. Amacımız önce sadece bu denklemin Painlevé testini geçip geçmediğini araştırmak olduğundan, Kruskal'ın [33] sağladığı kolaylıktan yararlanarak $u_j = u_j(t)$, $v_j = v_j(t)$ ve $\phi = x + \psi(t)$ alacağız.

Şimdi gerekli olan türevleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-1)\psi'\phi^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} u'_j\phi^{j-1} = \sum_{j=2}^{\infty} u_{j-2}(j-3)\psi'\phi^{j-4} + \sum_{j=3}^{\infty} u'_{j-3}\phi^{j-4}, \\ u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-1)\phi^{j-2}, \\ u_{xxx} &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-1)(j-2)(j-3)\phi^{j-4}. \end{aligned} \quad (2.190)$$

v için de tamamen benzer ifadeler elde ederiz. Şimdi bu türevleri de kullanarak

$$\begin{aligned}
u^2 \cdot u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k u_i u_{k-i} \right) (j-k-1) u_{j-k} \right) \phi^{j-4} \\
v^2 \cdot u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k v_i v_{k-i} \right) (j-k-1) u_{j-k} \right) \phi^{j-4} \\
u \cdot v \cdot v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} \right) (j-k-1) v_{j-k} \right) \phi^{j-4}
\end{aligned} \tag{2.191}$$

elde ederiz. Şimdi (2.190) ve (2.191)'dekileri (2.189)'deki birinci denklemde yerlerine koyarsak;

$$\begin{aligned}
(j-3)\phi u_{j-2} + u'_{j-3} + \alpha \sum_{k=0}^j (j-k-1) \left[\sum_{i=0}^k (3u_i u_{k-i} + v_i v_{k-i}) u_{j-k} + 2u_i v_{k-i} v_{j-k} \right] + \\
\beta (j-1)(j-2)(j-3) = 0
\end{aligned} \tag{2.192}$$

ve biraz düzenleme yaptıktan sonra da su sonucu elde ederiz.

$$\left[\alpha (j-3)(3u_0^2 + v_0^2) + \beta (j-1)(j-2)(j-3) \right] u_j + 2\alpha u_0 v_0 v_j = Q_1 \tag{2.193}$$

$$2\alpha u_0 v_0 u_j + \left[\alpha (j-3)(3u_0^2 + v_0^2) + \beta (j-1)(j-2)(j-3) \right] v_j = Q_2$$

u_j ve v_j 'lerin hesaplanmasında kullanılacak bu sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = \beta^2 (j+1) j (j-3)^3 (j-4)$$

olur ki, -1'deki rezonans ϕ 'nin keyfiliğini göstermek üzere, rezonansların -1, 0, 3 ve 4'te olduğunu görüyoruz. $j=3$ 'deki rezonansın üç katlı olduğuna bakılınca altı rezonansın sayı olarak yeterli olabileceği düşünülürse de, (2.89)'daki denklemlerin kutup türü hareketli tekilliğe sahip genel çözümünü yazmak için gerekli olan altı keyfi

fonksiyonu sağlayıp sağlayamayacakları, bu rezonans noktalarındaki incelemeden sonra anlaşılabilir. Şimdi rezonanslardaki uygunluk koşullarını inceleyelim

$$j=0 \text{ için: } u_0^2 + v_0^2 = -\frac{2\beta}{\alpha} \quad (2.194)$$

bulunur ki, $j=-1$ 'deki rezonansa karşılık olan keyfi φ 'den sonra, burada da $u_0(t)$ ile $v_0(t)$ 'den birisinin keyfi kaldığını görüyoruz.

$$j=1 \text{ için: } u_1(t) \equiv 0, \quad v_1(t) \equiv 0 \quad (2.195)$$

olur.

$$j=2 \text{ için: } u_2(t) = \frac{u_0 \psi'}{6\beta}, \quad v_2(t) = \frac{v_0 \psi'}{6\beta} \quad (2.196)$$

buluruz. $j=3$ 'e gelince (2.192)'daki rekürans bağıntılarından elde edilen ve u_3 ile v_3 'ü verecek olan denklemlerde, bu bilinmeyenlerin katsayıları hep sıfır olur ve iki denklem

$$\begin{aligned} 0 &= u_0(t)', \\ 0 &= v_0(t)' \end{aligned} \quad (2.197)$$

haline gelir. Bu uygunluk koşullarının, $C_1 = u_0(t)$, $C_2 = v_0(t)$, $C_1^2 + C_2^2 = -\frac{2\beta}{\alpha}$ alınması halinde sağlanabileceği anlaşıyor. Bu, $j=0$ rezonansındaki keyfi fonksiyonun

$$u_0(t) = C_1 \varphi \text{ veya } v_0(t) = C_2 \varphi \quad (2.198)$$

şeklinde olacağı anlaşılır. Bunun dışında $u_3(t)$ ve $v_3(t)$ serbest kalmaktadır.

$j=4$ 'deki rezonansa gelince, buradaki uygunluk koşulu sağlanmaz. Dolayısı ile bu rezonanstan keyfi fonksiyon çıkmaz.

Sonuç olarak rezonanslardan, gerekli olan altı keyfi fonksiyon elde edilemediğinden, (2.189)'daki sistem ve dolayısı ile (2.187)'deki kompleks modifiye Korteweg-de Vries denklemi Weiss'ın Painlevé testini geçmez.

2.10.2.7. KMKdV-II Denkleminin Painlevé Analizi

Şimdi Weiss'ın Painlevé analizi yöntemini

$$w_t - 6|w|^2 w_x + w_{xxx} = 0 \quad (2.199)$$

KMKdV-II [213]denkleminde uygulayacağız.

Burada da gerçel fonksiyonlarla çalışmak için $w=u+iv$ diyelim ve (2.199) denkleminde yerine koyup gerçel ve sanal kısımlarını ayırarak

$$\begin{aligned} u_t - 6(u^2 + v^2)u_x + u_{xxx} &= 0 \\ v_t - 6(u^2 + v^2)v_x + v_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.200)$$

sistemini elde ederiz. Denklemlerdeki terimlerin dengelerine bakarak bu denklemlerin seri çözümleri varsa onların

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t, x) \phi^{j-1}(t, x) \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(t, x) \phi^{j-1}(t, x) \end{aligned} \quad (2.201)$$

yapısında olması gerektiğini anlıyoruz. Amacımız önce sadece bu denklemin Painlevé testini geçip geçmediğini araştırmak olduğundan, Kruskal'ın [33] sağladığı kolaylıktan yararlanarak $u_j = u_j(t)$, $v_j = v_j(t)$ ve $\phi = x + \psi(t)$ alacağız.

Şimdi gerekli olan türevleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 u_t &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j (j-1) \psi' \phi^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} u'_j \phi^{j-1} = \sum_{j=2}^{\infty} u_{j-2} (j-3) \psi' \phi^{j-4} + \sum_{j=3}^{\infty} u'_{j-3} \phi^{j-4}, \\
 u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j (j-1) \phi^{j-2}, \\
 u_{xxx} &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j (j-1)(j-2)(j-3) \phi^{j-4}.
 \end{aligned} \tag{2.202}$$

viçin de, u'lar ile v'lerin değıştirilmesi ile elde edilebilen tamamen benzer ifadeler buluruz. Şimdi bu türevleri de kullanarak

$$\begin{aligned}
 u^2 . u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k u_i u_{k-i} \right) (j-k-1) u_{j-k} \right) \phi^{j-4} \\
 v^2 . u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k v_i v_{k-i} \right) (j-k-1) u_{j-k} \right) \phi^{j-4} \\
 u^2 . v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k u_i u_{k-i} \right) (j-k-1) v_{j-k} \right) \phi^{j-4} \\
 v^2 . v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j \left(\sum_{i=0}^k v_i v_{k-i} \right) (j-k-1) v_{j-k} \right) \phi^{j-4}
 \end{aligned} \tag{2.203}$$

elde ederiz. Şimdi (2.202) ve (2.203)'dekileri (2.200)'deki birinci denklemde yerlerine koyarsak;

$$\begin{aligned}
(j-3)\varphi u_{j-2} + u'_{j-3} - 6 \sum_{k=0}^j (j-k-1) u_{j-k} \left[\sum_{i=0}^k (u_i u_{k-i} + v_i v_{k-i}) \right] + (j-1)(j-2)(j-3)u_j &= 0 \\
(j-3)\varphi v_{j-2} + v'_{j-3} - 6 \sum_{k=0}^j (j-k-1) v_{j-k} \left[\sum_{i=0}^k (u_i u_{k-i} + v_i v_{k-i}) \right] + (j-1)(j-2)(j-3)v_j &= 0
\end{aligned}
\tag{2.204}$$

ve biraz düzenleme yaptıktan sonra da

$$\begin{aligned}
[-6(j-1)(u_0^2 + v_0^2) + 12u_0^2 + (j-1)(j-2)(j-3)]u_j + 12u_0 v_0 v_j &= Q_1 \\
12u_0 v_0 u_j + [-6(j-1)(u_0^2 + v_0^2) + 12v_0^2 + (j-1)(j-2)(j-3)]v_j &= Q_2
\end{aligned}
\tag{2.205}$$

buluruz u_j ve v_j 'lerin hesaplanmasında kullanılacak bu sistemin katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = (j+1)j(j-1)(j-3)(j-4)(j-5) \tag{2.206}$$

olur ki, -1'deki rezonans φ 'nin keyfiliğini göstermek üzere, rezonansların -1, 0, 1, 3, 4 ve 5'te olduğunu görüyoruz. Rezonanslar sayı olarak yeterlidir. Ancak (2.203)'deki rekürans bağıntılarının (2.200)'deki denklemlerin kutup türü hareketli tekilliğe sahip genel çözümünü yazmak için gerekli olan altı keyfi fonksiyonu sağlayabilip sağlayamayacakları, bu rezonans noktalarındaki uygunluk koşullarının incelenmesinden sonra anlaşılabilir. Şimdi rezonanslardaki uygunluk koşullarını inceleyelim

$$j=0 \text{ için: } u_0^2 + v_0^2 = 1 \tag{2.207}$$

bulunur ki, $j=-1$ 'deki rezonansa karşılık olan keyfi φ 'den sonra, burada da $u_0(t)$ ile $v_0(t)$ 'den birisinin keyfi kaldığını görüyoruz.

$$j=1 \text{ için: } u_0(t)u_1(t) + v_0(t)v_1(t) = 0 \tag{2.208}$$

olur. İki fonksiyon arasında bir tek kısıtlayan ilişki bulunduğundan, $u_1(t)$ ile $v_1(t)$ 'den birisinin keyfi kaldığını görüyoruz. $j=2$ için:

$$u_2(t) = \frac{u_0 \psi'}{6} - u_0(u_1^2 - v_1^2)(u_0^2 - 3v_0^2), \quad v_2(t) = \frac{v_0 \psi'}{6} - v_0(u_1^2 - v_1^2)(3u_0^2 - v_0^2) \quad (2.209)$$

buluruz. $j=3, 4$ ve 5 'te (2.205)'deki iki denklemde u_j ile v_j için elde edilen güçlendirilmiş matrisin rankı 1 olur. Böylece bu denklemlerden mesela $v_3(t)$, $v_4(t)$ ve $v_5(t)$ keyfi fonksiyonlar olarak çıkar. ϕ , v_0 ve v_1 'in de daha önce keyfi kaldığı hatırlanırsa, altı rezonanstan, gerekli olan altı keyfi fonksiyon elde edilmiş olur ki, (2.200)'deki sistem ve dolayısı ile (2.199)'daki kompleks modifiye Korteweg-de Vries-II denklemi Weiss'in Painlevé testini geçer.

2.10.2.8. Hirota-Satsuma Denkleminin Painlevé Analizi

Şimdi de Weiss'in Painlevé analizi yöntemini

$$\begin{aligned} u_t - 3uu_x + 3vv_x - u_{xxx} / 2 &= 0 \\ v_t + 3uv_x + v_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.210)$$

Hirota- Satsuma sistemine uygulayacağız[214]. Bu denklem B. Fuchsteiner [215] tarafından bir soliton denklemi olarak sınıflandırılmış, denklem sisteminin biHamilton formülasyona sahip olduğu ileri sürülüp, sayılabilir çoklukta birçok korunmuş büyüklüğü ve simetri üreticileri elde edilmiş ve bu denklemin tam integre edilebilir olduğunu iddia etmişlerdir.

Denklemlerdeki terimlerin dengelerine bakarak bu denklemlerin seri çözümleri varsa onların

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t, x) \phi^{j-2}(t, x) \\
v &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(t, x) \phi^{j-2}(t, x)
\end{aligned} \tag{2.211}$$

yapısında olması gerektiğini anlıyoruz. Amacımız önce sadece bu denklemin Painlevé testini geçip geçmediğini araştırmak olduğundan, Kruskal'ın [33] sağladığı kolaylıktan yararlanarak $u_j = u_j(t)$, $v_j = v_j(t)$ ve $\phi = x + \psi(t)$ alacağız.

Şimdi gerekli olan türevleri hesaplayalım:

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-2)\psi'\phi^{j-3} + \sum_{j=0}^{\infty} u'_j\phi^{j-2} = \sum_{j=2}^{\infty} u_{j-2}(j-4)\psi'\phi^{j-5} + \sum_{j=3}^{\infty} u'_{j-3}\phi^{j-5},$$

$$u_x = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-2)\phi^{j-3}, \tag{2.212}$$

$$u_{xxx} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-2)(j-3)(j-4)\phi^{j-5}.$$

v için de, u 'lar ile v 'lerin değiştirilmesi ile elde edilebilen tamamen benzer ifadeler buluruz. Şimdi bu türevleri de kullanarak

$$\begin{aligned}
u.u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j (j-k-2)u_k u_{j-k} \right) \phi^{j-5} \\
u.v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j (j-k-2)u_k v_{j-k} \right) \phi^{j-5} \\
v.v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^j (j-k-2)v_k v_{j-k} \right) \phi^{j-5}
\end{aligned} \tag{2.213}$$

elde ederiz. Diğer taraftan (2.212)ve (2.213)'dekileri (2.210)'daki denklemlerde yerlerine koyarsak

$$(j-4)\varphi u_{j-2} + u'_{j-3} - 3 \sum_{i=0}^j (j-i-2)(u_i u_{j-i} - v_i v_{j-i}) - (j-2)(j-3)(j-4)u_j / 2 = 0 \quad (2.214)$$

$$(j-4)\varphi v_{j-2} + v'_{j-3} + 3 \sum_{i=0}^j (j-i-2)u_i v_{j-i} + (j-2)(j-3)(j-4)v_j = 0$$

ve biraz düzenleme yaptıktan sonra da

$$\begin{aligned} [6(j-4)u_0 + (j-2)(j-3)(j-4)]u_j - 6v_0 v_j &= Q_1 \\ 6v_0 u_j + (j-2)[3u_0 + (j-3)(j-4)]v_j &= Q_2 \end{aligned} \quad (2.215)$$

buluruz u_j ve v_j 'lerin hesaplanmasında kullanılacak bu sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\Delta = (j+1)j(j-1)(j-2)(j-4)(j-6)^2 \quad (2.216)$$

olur ki, -1'deki rezonans φ 'nin keyfiliğini göstermek üzere, rezonansların -1, 0, 1, 2, 4 ve 6'da olduğunu görüyoruz. Rezonanslar sayı olarak yeterlidir. Ancak (2.214)'daki rezonans bağıntılarının (2.210)'daki denklemlerin kutup türü hareketli tekilliğe sahip genel çözümünü yazmak için gerekli olan altı keyfi fonksiyonu sağlayabilip sağlayamayacakları, bu rezonans noktalarındaki uygunluk koşullarının incelenmesinden sonra anlaşılabilir. Şimdi rezonanslarda ki uygunluk koşullarını inceleyelim

$$j=0 \text{ için: } u_0 = -2, \quad v_0 = 0 \quad (2.217)$$

bulunur.

$j=1$ için $u_1(t)=2$ olur ve $v_1(t)$ keyfi kalır. $j=2$ ve 4'te (2.215)'deki iki denklemde u_j ile v_j için elde edilen güçlendirilmiş matrisin rankı 1'dir.

$j=2$ için:

$$u_2(t) = \frac{-3v_1^2 + 4\psi'}{12}, \quad v_2(t) \text{ keyfi} \quad (2.218)$$

buluruz. $j=4$ 'te $v_4(t)$ keyfi fonksiyon olarak çıkar. $j=6$ 'da (2.215)'deki iki denklemde u_6 ile v_6 için elde edilen güçlendirilmiş matrisin rankı 0'dır. Böylece u_6 ile v_6 keyfi fonksiyonlar olur.

Böylece ϕ , v_1 , v_2 , v_4 , u_6 ve v_6 keyfi kalır ki, altı rezonanstan gerekli olan altı keyfi fonksiyon elde edilmiş olur. (2.210)'daki Hirota-Satsuma denklemi, Weiss'ın Painlevé testini geçer.

2.10.2.9. Etkileşimli KdV Denkleminin Painlevé Analizi

Şimdi son bir örnek olarak

$$\begin{aligned} u_t &= 4uv_x + 2vu_x + v_{xxx} \\ v_t &= 6vv_x + u_x \end{aligned} \quad (2.219)$$

etkileşimli KdV denklem sisteminin integre edilebilirliğini araştıralım[216]. Denklemlerdeki terimlerin dengelerine bakarak bu denklemlerin seri çözümleri varsa onların

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t, x) \phi^{j-2} \\ v &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(t, x) \phi^{j-1} \end{aligned} \quad (2.220)$$

yapısında olması gerektiğini anlıyoruz. Amacımız önce sadece bu denklemin Painlevé testini geçip geçmediğini araştırmak olduğundan, Kruskal'ın [33] sağladığı kolaylıktan yararlanarak $u_j = u_j(t)$, $v_j = v_j(t)$ ve $\phi = x + \psi(t)$ alacağız.

Şimdi gerekli olan türevleri hesaplayalım:

$$\begin{aligned} u_t &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j(j-2)\phi^{j-3} + \sum_{j=0}^{\infty} u'_j\phi^{j-2} \\ u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(j-1)\phi^{j-3} \\ v_{xxx} &= \sum_{j=0}^{\infty} v_j(j-1)(j-2)(j-3)\phi^{j-4} \end{aligned} \quad (2.221)$$

$$v_t = \sum_{j=0}^{\infty} v'_j\phi^{j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} v_j(j-1)\psi'\phi^{j-2} = \sum_{j=2}^{\infty} v'_{j-2}\phi^{j-3} + \sum_{j=1}^{\infty} v_{j-1}(j-2)\psi'\phi^{j-3}$$

Elde ettiğimiz bu türevleri kullanarak

$$\begin{aligned} u.v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j v_i(i-1)u_{j-1} \right) \phi^{j-4} \\ v.u_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j u_i(i-2)v_{j-1} \right) \phi^{j-4} \\ v.v_x &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j v_i(-1)u_{j-i} \right) \phi^{j-3} \end{aligned} \quad (2.222)$$

Şimdi bunları (3.219)'daki sistemde yerine koyarsak,

$$(j-3)\psi' u_{j-1} + u'_{j-2} = \sum_{i=0}^j 4(i-1)v_i u_{j-i} + \sum_{i=0}^j 2u_i(i-2)v_{j-i} + v_j(j-1)(j-2)(j-3) \quad (2.223)$$

$$v'_{j-2} + v_{j-1}(j-2)\psi' = 6 \sum_{i=0}^j v_i(i-1)v_{j-i} + u_j(j-2)$$

elde ederiz. Biraz düzenleme yaptıktan sonra buradan şu sonucu elde ederiz:

$$4(-v_0 u_j + u_0(j-1)v_j) + (2(-2u_0 v_j + v_0(j-2)u_j) + v_j(j-1)(j-2)(j-3)) = p_j \quad (2.224)$$

$$6(-v_0 v_j + (j-1)v_0 v_j) + (j-2)u_j = q_j.$$

Bu iki denklemi kullanarak u_j ve v_j 'yi çözmek için katsayılar matrisinin

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2v_0(j-4) & (j-2)[4u_0 + (j-1)(j-3)] \\ j-2 & 6v_0(j-2) \end{vmatrix} \quad (2.225)$$

determinantının ve ilgili ek matrisin rankı önemli olmaktadır. $j=0$ için (2.223)'den

$$u_0 = -\frac{3}{4}, \quad v_0^2 = \frac{1}{4} \quad (2.226)$$

olduğundan

$$\Delta = -(j+1)(j-2)(j-3)(j-4) \quad (2.227)$$

bulunur ki buradan -1, 2, 3 ve 4 rezonansları elde edilir. Buradan $j=1$ için;

$$\begin{aligned} -2\psi' u_0 &= -4v_0 u_0 - 4u_0 v_1 - 2u_1 v_0 \\ -4v_0 + 2\psi' &= 4v_1 + 2 \frac{u_0}{v_0} u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\psi' u_0 &= 4(-u_1 v_0) + 2u_0(-2)v_1 + 2u_1(-1)v_0 = -6u_1 v_0 - 4u_0 v_1 \\
\frac{3}{2}\psi' &= -3u_1 + 3v_1 \\
-v_0\psi' &= -6v_0 v_1 - u_1
\end{aligned} \tag{2.228}$$

bulunur. u_1 ve v_1 için şu denklemleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
-u_1 + v_1 &= \frac{1}{2}\psi' \\
u_1 + 3v_1 &= \frac{1}{2}\psi'
\end{aligned} \tag{2.229}$$

Bu denklemleri çözersek:

$$u_1 = \frac{-\psi'}{4} \quad \text{ve} \quad v_1 = \frac{\psi'}{4} \tag{2.230}$$

elde edilir. $j=2$ için (2.223)'den;

$$-\psi' u_1 + u_0' = \sum_{i=0}^2 4(i-1)v_i u_{2-i} + \sum_{i=0}^2 2(i-2)u_i v_{2-i} \tag{2.231}$$

$$0 = v_0' = 6 \sum_{i=0}^2 v_i (i-2)v_{2-i} = 6[v_0(-1)v_2 + v_2 \cdot 1 \cdot v_0] = 0$$

Böylece denklemlerden ikincisi hiçbir ek şart getirmeden sağlanırken, birinci denklemde v_2 yok oluyor. v_2 keyfi kalırken

$$\begin{aligned}
-\psi' u_1 &= 4[-v_0 u_2 + v_2 u_0] + 2[-2u_0 v_2 - 4u_1 v_1] \\
\frac{1}{4}\psi'^2 &= -2u_2 + 2 \cdot \frac{1}{16}\psi'^2 \\
u_2 &= \frac{-1}{16}\psi'^2 = -v_1^2
\end{aligned} \tag{2.232}$$

olarak hesaplanabiliyor. $j=3$ için (2.223)'den

$$u'_1 = \sum_{i=0}^3 4(i-1)v_i u_{3-i} + \sum_{i=0}^3 2u_i(i-2)v_{3-i} \quad (2.233)$$

$$v' + v_2 \psi' = 6 \sum_{i=0}^3 v_i(i-1)v_{3-i} + u_3$$

olur ki, bunlardan ilkinii kullanarak

$$\begin{aligned} -4v_0 u_3 + 8v_3 u_0 + 2u_3 v_0 - 4u_0 v_3 &= u'_1 - 4v_2 u_1 + 2u_1 v_2 \\ -2v_0 u_3 + 4u_0 v_3 &= u'_1 - 2u_1 v_2 \\ u_3 + 3v_3 &= \frac{1}{4} \psi'' - \frac{\psi'}{2} v_2 \end{aligned} \quad (2.234)$$

ve ikincisini kullanarak;

$$\begin{aligned} u_3 - 6v_0 v_3 + 12v_3 v_0 &= v'_1 + v_2 \psi' - 6v_2 v_1 \\ u_3 + 3v_3 &= \frac{1}{4} \psi'' + v_2 \psi' - 6 \frac{\psi'}{4} v_2 \\ u_3 + 3v_3 &= \frac{1}{4} \psi'' - \frac{1}{2} \psi' v_2 \end{aligned} \quad (2.235)$$

elde ederiz. Demek ki iki denklem aslında aynıdır ve burada v_3 keyfi kalırken u_3 buradan

$$u_3 = -3v_3 + \frac{1}{4} \psi'' - \frac{1}{2} \psi' v_2 \quad (2.236)$$

elde edilir. Son olarak $j=4$ için (2.223)'den

$$\begin{aligned} \psi' u_3 + u'_2 &= 4 \sum_{i=0}^4 (i-1)v_i u_{4-i} + 2 \sum_{i=0}^4 u_i(i-2)v_{4-i} + 6v_4 \\ v'_2 + 2v_3 \psi' &= 6 \sum_{i=0}^4 v_i(i-1)v_{4-i} + 2u_4 \end{aligned} \quad (2.237)$$

bulunur. Bu iki denklemden birincisi

$$\varphi' u_3 + u_2' = -4v_0 u_4 + 12u_0 v_4 - 4u_0 v_4 + 4u_4 v_0 + 6v_4 + 4(v_2 u_2 + 2v_3 u_1) + 2(-u_1 v_3 + u_3 v_1) \quad (2.238)$$

olur ve $u_3 = -3v_3 + \frac{1}{4}\psi'' - \frac{1}{2}\psi'v_2$ olduğuna göre

$$-\frac{3}{2}\psi'v_3 + \frac{1}{8}\psi'\psi'' - \frac{1}{4}\psi'^2 v_2 - \frac{1}{8}\psi'\psi'' = 4v_2 \frac{-1}{16}\psi'^2 + 6v_3 \frac{-1}{4}\psi' + 2 \cdot \frac{1}{4}\psi' \quad (2.239)$$

bulunur ve $0=0$ olarak gerçekleşir. İkinci denklem ise

$$v_2' + 2v_3\psi' - 6(u_2 v_2 + 2v_3 v_1) = 12u_4 + 12v_0 v_4 \quad (2.240)$$

bulunur. elde ederiz. Burada mesela v_4 keyfi kalırken u_4 buradan v_4 cinsinden hesaplanabilir.

Böylece φ , v_2 , v_3 ve v_4 keyfi kalır ki, dört rezonanstan gerekli olan dört keyfi fonksiyon elde edilmiş olur. Böylece (2.223)'deki etkileşimli KdV denklemi, Weiss'in Painlevé testini geçer.

2.10.3. Bazı Gözlemler

Genel olarak ve yukarıdaki örneklerde gösterildiği gibi tekil manifold yöntemi denklemler, modifiye denklemler, denklem silsileleri ile ilgili kasp soliton denklemler arasında ilişkiler bulur. Yöntemin ilk uygulaması, integre edilebilir sistemleri sınıflamak ve bunlar arasındaki ilişkileri bulmaktır.

Yöntem anlatıldığı şekliyle birçok sisteme uygulanmıştır. Bunlar arasında Boussinesq ailesi, Caudrey-Dodd-Gibbon ailesi ve Hirota-Satsuma ailesi de bulunuyor. Yukarıda

da görüldüğü gibi yöntem, Bäcklund dönüşümleri olmayan sistemlere doğrudan uygulanamamaktadır. Bu türden bir sistem

$$U_{xt} = e^U - e^{-2U}$$

Bullough-Dodd denklemidir. Şaşırtıcı olan şudur ki, Bullough-Dodd denklemi, Caudrey-Dodd-Gibbon ailesi içindeki bir denklemin özelleştirilmişidir. Bu ailenin Bäcklund dönüşümü özelleştirmenin yapısını korumamaktadır. Bu yüzden bu denklem için bilinen türden bir Bäcklund dönüşümü yoktur [201, 217].

Lineer olmayan Schrödinger denklemi için başka türlü bir problem ortaya çıkar [201]. Burada yöntem, Lax çiftinin ve modifiye Schwarz denklemlerinin bulunması söz konusu olduğu sürece çalışır. Bununla birlikte modifiye denklemlerin kendilerinin, sistem üzerinde bir çift Burgers denklemine indirgeme gibi çalışan bir Bäcklund dönüşümü vardır.

Tekil manifold yöntemi adi diferansiyel denklemlere de uygulanır [211]. Henon-Heiles sistemi için bir Bäcklund dönüşümü ve ona ilişkin üç parametreye bağlı bir çözüm ailesi bulduk. Dört parametreye bağlı genel çözüm, tekil manifold yöntemiyle doğrudan bulunamaz. Ancak Schwarz türevi cinsinden doğrudan formülasyon yaparak, Henon-Heiles sisteminin KdV ve Caudrey-Dodd-Gibbon denklemleri ile indirgenebilir olduğu halleri teşhis ettik. Bu, Henon-Heiles sistemi için Lax çiftlerinin hemen bulunabilmesini mümkün kılar.

Tekil manifold yöntemi bir parametrelili bir Lax çifti bulmazsa, kesik serideki terimleri, tekil manifoldun kendisine açık bir bağlılık getirecek şekilde yeniden toplamak mümkündür. Bu işlem Weiss tarafından [201]'de tanıtılmış ve Caudrey-Dodd-Gibbon denklemlerine uygulanmıştır. Daha sonra B. Gaffet [218, 219]'da Bullough-Dodd denklemi için tekil manifold civarında bir açılım şeklinde bir Bäcklund dönüşümü buldu. Bu dönüşüm bir involüsyon olsun veya olmasın, dönüşümün yapısı, tekil manifoldun kendisine açık bir bağlılık getirecek şekilde yeniden toplanmasını içerir. Newell ve birlikte çalışanlar [220] ile Gibbon ve arkadaşları [221], Henon-Heiles

sisteminin Lax çiftinin bir spektral parametre içermesini sağlamak için aynı yöntemi kullandılar. Böylece bazı problemlerde, tekil manifold kesik serisinde bulunan terimlerin yeniden toplanması gerekli olmaktadır. Bu bakımdan, tamamen algoritmik olabilmesi için yöntemin biraz daha geliştirilmesi gerekmektedir.

Son zamanlarda çıkan bir makalesinde R. Conte [222], tekil manifold yönteminin uygulanması sırasında ortaya çıkan Painlevé- Bäcklund denklemlerinin neden Möbius grubu altında değişmez kaldığı sorusunu tartışıyor. Daha önce açıklandığı gibi Schwarz türevi, Möbius grubu altında değişmez kalan yegane diferansiyel değişmez olduğundan bu, Schwarz türevinin integre edilebilir sistemlerin formülasyonunda neden doğal olarak ortaya çıktığını açıklayacaktır. Bu soru [201]'de de incelenmiştir. Orada Schwarz türevinin ortaya çıkışının, zannedildiği gibi probleme ilişkin ikinci basamaktan Lax çifti operatörünün bulunmasından değil de, kompleks Riemann küresinin konformal geometrisi olduğu iddia edildi. Soru Wilson [223] tarafından da incelendi.

2.10.4. Şartlı veya Kısmi integre edilebilirlik

Tek değerli açılıma sahip (Painlevé özelliği) olmayan sistemler için, açılımdaki keyfi fonksiyonları kısıtlayarak tek değerli davranışı kurtarmak mümkündür. Kısıtlamaların sayısına göre açılım, indirgenmiş boyutlarda bir çözümü temsil eder.

Kısıtlamalar sistemi, açılımda daha önce keyfi olan fonksiyonlar (veri) cinsinden bir kısmi diferansiyel denklem sistemi olarak ifade edilir. Bu kısmi diferansiyel denklem sistemi için şu tahmini yapıyoruz.

Tahmin: *Kısıtlama denklemleri, tam integre edilebilirdir.*

Bunu göstermek için [201]'den birkaç örnek sunacağız. İlk örnek

$$u_{xt} = 4a \sin(u/2) + 4 \sin u \quad (2.241)$$

Katlı sine-Gordon denklemdir. Painlevé analizini buraya uygulamak için

$$V = e^{iu}$$

kullanıyoruz ve

$$VV_{xt} - V_x V_t = a(V^3 - V) + V^4 - 1 \quad (2.242)$$

buluyoruz. Tekil manifold civarındaki açılım

$$V = \phi^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} V_{jk} \phi^j (\phi^2 \ln \phi)^k \quad (2.243)$$

şeklini alıyor. Ardışıklık ilişkilerinden

$$\begin{aligned} V_{00}^2 &= \phi_x \phi_t \\ V_{10} &= -\frac{1}{2} \frac{\phi_{xt}}{\phi_x \phi_t} V_0 - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Keyfi fonksiyonlar ϕ ve V_{20} olmaktadır. $j=2$ ve $k=0$ rezonanslarında ϕ 'nin

$$\phi_x^2 \phi_{tt} - 2\phi_x \phi_t \phi_{xt} + \phi_t^2 \phi_{xx} = 0 \quad (2.244)$$

kısıtlama denklemini sağlaması şartıyla, $\phi^2 \ln \phi$ terimlerini yok edebiliriz.

Bu denklem (2.133) ile denktir ve

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \phi_x, \eta = \phi_t \\ x &= W_\varepsilon, t = W_\eta \\ \phi(x, y) + W(\varepsilon, \eta) &= x\varepsilon + y\eta \end{aligned}$$

Legendre dönüşümüyle [201] integre edilebilirdir.

$$\varepsilon^2 W_{\varepsilon\varepsilon} + 2\varepsilon\eta W_{\varepsilon\eta} + \eta^2 W_{\eta\eta} = 0 \quad (2.245)$$

ifadesini sonuç olarak elde edilir..

$$\frac{d}{ds} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.246)$$

olsun. O zaman (2.244)

$$\frac{d^2}{ds^2} W = \frac{d}{ds} W \quad (2.247)$$

şekline dönüşür.

(2.247)'nin tam çözümü, W_0 fonksiyonu (ε, η) cinsinden sıfır dereceden ve W_1 fonksiyonu da birinci dereceden homojen olmak üzere

$$W = W_0 + W_1$$

şeklindedir. Legendre dönüşümünün tanımını kullanarak buradan

$$\phi(x, t) = -W_0(\varepsilon, \eta) \text{ ve}$$

$$\varepsilon x + \eta t = W_1(\varepsilon, \eta)$$

elde edilir. $w = \phi_{xx}\phi_{tt} - \phi_{xt}^2 \neq 0$ olduğu zaman, Legendre dönüşümü tersine çevirilebilir. $w=0$ olunca $\phi=f(x,t)$ olur ve (2.241) için bir gezen dalga formu, yani integre edilebilir bir form elde edilir. $w \neq 0$ için keyfi f için $\phi=f(x/t)$ şeklinde bazı basit kapalı çözümler vardır.

ϕ 'nin kısıt denklemini sağladığı durumda (2.243) açılımı, V_2 keyfi olmak üzere

$$V = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} V_j \phi^j \quad (2.248)$$

şeklinde tek değerli hale gelir.

Şimdi de $\Delta = \sum \partial_{x_j}^2 = \nabla' \nabla$ olmak üzere

$$-\Delta u = \sin u \quad (2.249)$$

N boyutlu eliptik Sine-Gordon denklemini [201] gözönüne alalım. $V=e^{iu}$ kullanarak

$$-V\Delta V + \nabla V \cdot \nabla V = \frac{1}{2}(V^3 - V) \quad (2.250)$$

elde edilir.

$$V = \phi^{-2} \sum_{j=0}^{\infty} V_j \phi^j \quad (2.251)$$

Painlevé açılımı keyfi V_2 'ler için ancak ve ancak

$$\begin{aligned} D_{ii} &= \frac{1}{2} \sum_{l=1, l \neq i}^N \sum_{m=1, m \neq i}^N (\phi_{lm}^2 - \phi_{li} \phi_{mm}) \\ D_{ij} &= \sum_{m=1}^N (\phi_{ij} \phi_{mm} - \phi_{im} \phi_{jm}) \end{aligned} \quad (2.252)$$

şeklinde olmak üzere

$$\nabla \phi \cdot D \nabla \phi = 0 \quad (2.253)$$

sağlandığı zaman geçerlidir.

D matrisi simetriktir ve (2.253) ifadesi bağımsız değişkenlerdeki keyfi ölçeklendirme ve ötelemeler altında, ve ayrıca bağımsız değişkenlerin

$$B' = B^{-1}$$

olmak üzere

$$\nabla = BV'$$

ortogonal dönüşümleri altında değişmeden kalır.

Bu özellikleri kullanarak,

$$M = \{\hat{x}; \phi(\hat{x}) = \phi_0\}$$

düzey kümeleriyle tanımlanmış M hiperyüzeyinin şöyle bir özelliği vardır: $\mathcal{R}^N$ içinde bir manifold olan M'nin temel eğriliği K_j ; $j=1, \dots, N-1$

$$K_1 K_2 + K_1 K_3 + \dots + K_{N-2} K_{N-1} = 0 \quad (2.254)$$

şartını sağlar. $N=2$ olduğu zaman, şart basittir ve (2.249) integre edilebilir. $N=3$ için (2.253) denklemi

$$\begin{aligned} & \phi_t^2 (\phi_{xx} \phi_{yy} - \phi_{xy}^2) + \phi_x^2 (\phi_{tt} \phi_{yy} - \phi_{yt}^2) + \phi_y^2 (\phi_{tt} \phi_{xx} - \phi_{xt}^2) \\ & + 2\phi_x \phi_t (\phi_{ty} \phi_{yz} - \phi_{xt} \phi_{yz}) + 2\phi_y \phi_t (\phi_{tx} \phi_{xy} - \phi_{yt} \phi_{xx}) \\ & + 2\phi_x \phi_y (\phi_{xt} \phi_{yt} - \phi_{xy} \phi_{tt}) = 0 \end{aligned} \quad (2.255)$$

şeklindedir. (2.255) denklemi; W_0 ve W_1 sırasıyla sıfırıncı ve birinci dereceden homojen

$$\phi(t, x, y) + W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = t\varepsilon_1 + x\varepsilon_2 + y\varepsilon_3$$

ve

$$W = W_0 + W_1$$

olmak üzere $\varepsilon_1 = \phi_t, \varepsilon_2 = \phi_x, \varepsilon_3 = \phi_y$ ve $t = W_\varepsilon, x = W_x, y = W_y$ Legendre dönüşümünü ile integre edilebilir. Yine ϕ 'nin yapısı, integre edilebilir indirgemelerin bulunmasında kullanılabilir.

$N \geq 4$ için (2.253)'ün integre edilip edilemeyeceği belli değildir. Bizim tahminimiz bunun bütün N 'ler için integre edilebilir olduğunu söyler.

BÖLÜM 3

İNTEGRE EDİLEMEZLİK SONUÇLARI: ZİGLİN TEOREMİ VE ÇOKLU- PAINLEVÉ YAKLAŞIMI

3.1. PAINLEVÉ TESTİNİN SINIRLARI

İkinci kısımda verilen bir adi diferansiyel denklemin (veya adi diferansiyel denklem sistemlerinin) bir anlamda integre edilebilirliğine karar vermek için Painlevé testinin nasıl kullanıldığını açıkladık. Painlevé testi iyi fakat birkaç yönden yetersizdir.

(1). Dönüşümlere izin vermek gerektiğinden, test harfi harfine uygulanamaz. Örneğin α bir sabit olmak üzere

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{-1}{y} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y^5 + ty + \frac{\alpha}{y} \quad (3.1)$$

denklemini, y_n , $n=0,1,2,\dots$ katsayıları sabitler olmak üzere

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (t - t_0)^{n-\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

şeklinde çözümlere sahip olduğundan, hareketli dallanma noktalarına sahiptir. Fakat $x=y^2$ dönüşümü yaptığımızda x bağlı değişkeni PII denklemini sağladığından (3.1)

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \sin y = 0 \quad (3.3)$$

denklemini de logaritmik dallanma noktalarına sahip olduğu halde, $x=e^{iy}$ dönüşümü yaptıktan sonra x bağlı değişkeni PIII denklemini sağlar. [Bu dönüşüm, denklemin Painlevé türü olup olmadığına karar vermek için testi uygulamadan önce onu rasyonel hale sokmak isteğimizden akla geliyor.] Bu iki örnekte lazım olan dönüşümün kolayca bulunmasına rağmen, genel anlamda şu soru daima vardır: Ne tür dönüşümlere müsaade edilecek ve verilen bir adi diferansiyel denklemin böyle bir dönüşüme sahip olup olmadığı nasıl anlaşılacak? Aslında Painlevé özelliği genelde bağımlı ve bağımsız değişkenin karşılık değiştirilmesi gibi çeşitli dönüşümler altında korunmaz [224].

(2). Niçin sadece hareketli kritik noktaları dışlıyoruz? Bütün sabit tekilliklere müsaade edilebilir mi? Lineer adi diferansiyel denklemlerin sabit tekilliklere sahip oldukları bilinir ve PVI denkleminin genel çözümü $0, 1$ ve ∞ 'da sabit esaslı tekilliklere sahiptir. Örneğin

$$t(1-t) \frac{d^2 x}{dt^2} + [c - (a+b+1)t] \frac{dx}{dt} - abx = 0$$

hipergeometrik denkleminin genel çözümü, $t=0, 1$ ve ∞ 'da jenerik olarak dallanma noktaları olan sabit tekilliklere sahiptir. Ranada, Ramani, Dorizzi ve Grammaticos [185] a bir sabit olmak üzere

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{-x}{\left[x^2 + (1 + a \cos t)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4)$$

adi diferansiyel denklemini gözönüne aldılar. (3.4)'ün t_0 'da tekilliği olan genel çözümü

$$x_0 = i(1 + a \cos t_0), \quad x_4 = \left(\frac{625}{128x_0} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad x_5 = \pm i \sin t_0$$

ve -1 ile 6'daki rezonanslarına karşılık olarak t_0 ile x_6 keyfi olmak üzere

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=4}^{\infty} x_k (t - t_0)^{\frac{k}{5}}$$

açılımına sahiptir. Bu yüzden (3.4) zayıf Painlevé özelliğine sahiptir, çünkü t_0 'daki tekilliğin komşuluğunda çözüm, p ve q ilk terim analizinden [194, 198] elde edilen tamsayılar olmak üzere

$$\dot{x}(t) = (t - t_0)^{\frac{p}{q}} \sum_{n=0}^{\infty} x_n (t - t_0)^{\frac{n}{q}}$$

şeklindeki bir açılımla ifade edilebilir. Şimdi $1 + a \cos t_0 = 0$ 'da ortaya çıkan sabit tekillikleri gözönüne alalım. Herhangi bir t_0 'ın komşuluğunda

$$x_0^6 = \frac{81}{4}, \quad x_2 \text{ keyfi}, \quad y_2 = \frac{1}{5}(a^2 - 1)$$

olmak üzere (rezonanslar -1 ve $\frac{2}{3}$ ' dedir)

$$(1 + a \cos t)^2 = (a^2 - 1)(t - t_0)^2 + O((t - t_0)^2),$$

$$x(t) = x_0(t - t_0)^{\frac{2}{3}} + [x_2 + y_2 \ln(t - t_0)](t - t_0)^{\frac{4}{3}} + O((t - t_0)^{\frac{4}{3}})$$

olur.

Bu yüzden $a^2 = 1$ olmadıkça açılımında logaritmik terimler ortaya çıkar. Ramani [225], sabit tekilliklerin civarındaki bu davranışın integre edilebilirlikle birlikte düşünüle-

yeceğini söylüyor, aslında (3.4)'ün çözümleri sayısal olarak kaotik davranışlar gösterir. (Fakat, Hietarinta'nın [226] sabit tekilliklerde kuşkusuz bulunabilen logaritmalardan kuvvetlerinin, çözümün hareketli tekilliklerdeki açılımında da varlığına dair verdiği örneğe dikkat edelim)

(3) Niçin hareketli dallanma noktası ve esas tekilliklere izin verilmiyor da, hareketli kutuplara izin veriliyor? Örneğin [44, 172]

$$\left[x \frac{d^2 x}{dt^2} - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^2 + 4x \left(\frac{dx}{dt} \right)^3 = 0$$

$$\left[y \frac{d^3 y}{dt^3} + 3 \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} \right]^2 - 16y \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 = 0$$

adi diferansiyel denklemleri sırasıyla α , β , δ ve γ keyfi sabitler olmak üzere

$$x(t) = \alpha \exp\left(\frac{1}{t + \beta}\right)$$

$$x(t) = \alpha(t + \beta) \exp\left(\frac{\gamma t + \delta}{t + \beta}\right)$$
(3.5a-b)

genel çözümlerine sahiptirler. Bu çözümler $t = -\beta$ 'da hareketli esaslı tekilliklere sahiptir-ler. Kötülük bunun neresinde? $x(t)$ ve $y(t)$ çözümleri kompleks düzlemin $t = -\beta$ dışında her noktasında analitiktir ve bu noktada

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^0 x_n (t + \beta)^n$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^0 y_n (t + \beta)^n$$

tek bir Laurent serilerine sahiptirler ve t 'nin tek değerli fonksiyonlarıdır. Painlevé'nin [68] bir dip notta "bir $y(x)$ fonksiyonunun kritik noktası terimini, nokta (yalnız olsun veya olmasın) etrafında $y(x)$ 'in dallarından en az iki tanesinin birleştiği tekil noktaya

tahsis ediyoruz. Sabit kritik noktaları olan bir denklemin genel çözümü hareketli esaslı tekillikçe sahip olabilir." dediğini hatırlatalım. Başka deyişle Painlevé'ye göre, eğer çözüm 3.5'te olduğu gibi hareketli esaslı tekillikçe sahip olursa, bu takdirde yukarıdaki anlamda ilgimiz dışıdır. Kritik noktayla, Painleve tek değerlilik için sakınca oluşturan, yani etrafında çok değerlilik görülen noktayı kastediyor.

(4). Chazy [227-228] tarafından (ve son zamanlarda Bureau tarafından [173,174] incelenen üçüncü basamaktan

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = 2x \frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (3.6)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümü, Shwarz'ın üçgen fonksiyonu (aşağıya bakınız) kullanılarak elde edildi ve çözümün hareketli bir doğal sınırı (yani çözümün üzerinden öteye analitik olarak devam ettirilemediği, tekilliklerden oluşmuş bir çizgi) bulunuyordu [44,229]). Genel çözüm,

$$s(1-s) \frac{d^2 z}{ds^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7s}{6} \right) \frac{dz}{ds} - \frac{1}{144} z = 0$$

hipergeometrik denkleminin iki çözümün oranı cinsinden ifade edilebilir; bunun $z(s)$ ve $y(s)$ 'nin gibi bağımsız iki çözümü verildiğinde $t(s)$ fonksiyonunu

$$t(s) = \frac{y(s)}{z(s)}$$

şeklinde tanımlarız. O zaman $t(s)$, s -düzleminin üst yarısını, açılarını

$$0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$$

olan küresel üçgenin içine tasvir eder [229, s. 206]. Bunun tersi olan $s(t)$ fonksiyonu Schwarz'ın $s(t; 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ üçgen fonksiyonudur ki bu fonksiyon doğru veya çemberi doğal sınır olarak kabul eder ve temel üçgenin açıları da $0, \frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\pi$ 'dir. O zaman (3.6) 'nın genel çözümü

$$x(t) = \frac{6}{z} \frac{dz}{dt} = \frac{6}{z} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt}$$

şeklinde verilebilir ve $s(t)$ ile aynı doğal sınıra sahiptir. Böylece (3.6)'nın genel çözümü tanımlı olduğu bölgede tek değerlidir (aslında her çözüm, ya bir delik düzlemde, ya da yeri integrasyon sabitine bağlı bir doğru veya çember ile sınırlı bir bölgede analitiktir). Şimdi (3.6) denklemini integre edilebilir olarak kabul edilebilir mi? Biz burada Chakravarty, Ablowitz ve Clarkson'ın [230] son olarak (3.6) denkleminin, self-dual Yang-Mills (SDYM) denklemlerinden bir indirgeme sonucu elde edilebildiğini gösterdiklerini de hatırlatmalıyız (Hitchin[231]). Her zamanki $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ koordinatları cinsinden SDYM denklemini

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]$$

olmak üzere

$$F_{01} = F_{23}, \quad F_{02} = -F_{13}, \quad F_{03} = F_{12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ olur ve A_μ değerlerini $[,]$ Lie bracket ile

eşleşen Lie cebirinde alır. SDYM denklemleri, belli bazı holomorfik vektörler demetlerinin denklemlerinin çözümleri ile ilintilendirilen "twistor" yapımının bir sonucu olarak integre edilebilir kabul edilirler. Bu arada SDYM denklemlerinin Korteweg-deVries, lineer olmayan Schrödinger ve sine-Gordon denklemlerini de içeren birçok iyi bilinen soliton denklemlerine indirgemelere sahip olduğunu da belirtmeliyiz

(5). Painlevé testi ya açık bir integralinin varlığından, yada yörüngesinin kapanışının boyutu hakkındaki sayısal delilden dolayı integre edilebilir olarak kabul edilebilecek bütün adi diferansiyel denklem sistemleri belirleyemiyor gibi görünüyor. Örneğin a, b, c, d sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + cxy \\ \frac{dy}{dt} &= by + dxy\end{aligned}\tag{3.7}$$

Lotka-Volterra denklem çiftini [232] gözönüne alalım. Bu sistem zamandan bağımsız

$$I = b \ln x - a \ln y + dx - cy$$

integraline sahiptir. Bu yüzden ilke olarak buradan y, x cinsinden bulunabilir ve sonra (3.7) kuadratrlerle çözülür. Fakat tekillik analizi $t \rightarrow t_0$ 'a giderken $\tau = t - t_0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}x(t) &= -d^{-1} \left\{ \tau^{-1} - dx_0 - \frac{1}{2}(b-a) \ln \tau + \frac{1}{12}(b-a)^2 \tau (\ln \tau)^2 \right\} + O(t) \\ y(t) &= -c^{-1} \left\{ \tau^{-1} + (dx_0 + a + b) + \frac{1}{2}(b-a) \ln \tau + \frac{1}{12}(b-a)^2 \tau (\ln \tau)^2 \right\} + O(t)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden, (3.7) denklemini $a=b$ olmadıkça Painlevé türü olmaz. Kaw, Sen ve Valeo [233] β sabit olmak üzere

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \beta \sqrt{\beta^2 - 1 + x^2 + y^2} - y\tag{3.8}$$

Hamiltonu ve bunla eşleşen

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \beta x \sqrt{\beta^2 - 1 + x^2 + y^2} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \beta y \sqrt{\beta^2 - 1 + x^2 + y^2} + 1 &= 0\end{aligned}\tag{3.9a-b}$$

denklemler sistemi için numerik çalışmalar yaptılar. Bu çalışmalar sistemin integre edilebilir olduğu izlenimini uyandırdığı halde sistem Painlevé türü değildir. Fakat A. Bizard ve C. Oberman tarafından yeni yapılan numerik çalışmalar sistemin integre edilemez olduğunu gösteriyor. Bunun yanında Grammaticos, Ramani, ve Yoshida [234] Ziglin teoremlerini kullanarak [235], (3.8) Hamiltonunun integre edilemez olduğunu ispatladılar.

(6). Ortaya çıkabilecek bir diğer problem de, bir adi diferansiyel denklem hareketli kritik noktaya sahip bir tekil çözümü varken genel çözümünün sabit kritik noktalara sahip olabilmesidir. Örneğin [4]

$$\left[\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 \frac{dx}{dt} \right]^3 = x^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \left(4 \frac{dx}{dt} + x^4 \right)$$

denkleminin genel çözümü α, β, γ keyfi sabitler olmak üzere

$$x(t) = \alpha \tan(\alpha^3 t + \beta)$$

ve tekil çözümü de

$$x(t) = \left(\frac{4}{3(t - \gamma)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

olmaktadır.

(7) Negatif rezonansların önemi nedir? Açılımın keyfi bir t_0 noktası civarında yapılmış olması ile eşleşen -1 gibi bir negatif rezonans çoğu zaman vardır. (Clarkson ve Cosgrove [236] -1'in bir rezonans olarak ortaya çıkmadığı bazı istisnai hallere örnekler verdiler.) Biçimsel olarak -1 rezonansı t_0 değiştirildiğinde ortaya çıkar; $a_0(t-t_0)^\alpha$ 'nın bir perturbasyon açılımı

$$a_0(t-t_0-\hat{t}_0)^\alpha = a_0(t-t_0)^\alpha \left\{ 1 - \frac{\alpha \hat{t}_0}{t-t_0} + \dots \right\}$$

ürününü verir. Bu açılım $\left| \frac{\hat{t}_0}{t-t_0} \right| < 1$ iken yakınsaktır. Fakat varsayalım ki birden fazla

negatif rezonans var. Örneğin (3.6) denkleminin -1, -2, ve -3 'de negatif rezonanslara sahip olduğu kolaylıkla kontrol edilebilir. Bu durumda açılımın bizi yalnızca denklemin özel çözümlerinden birine götürebildiği akla gelir ve etkin olarak negatif rezonanslar gözardı edilir. Biz negatif rezonansların çok önemli olduğuna inanıyoruz. Onların integre edilebilirlikle ilişkisi vardır ve bu yüzden ciddi olarak ele alınmalıdırlar. Eğer negatif ve tamsayı olmayan bir rezonans varsa, bu denklemin çok değerli çözümlere sahip olduğu anlamına gelir. Buna karşılık negatif tamsayı rezonans, bizi rezonans şartlarına götürür (sırasıyla pozitif tamsayı olmayan ve tamsayı rezonansların durumuna benzer şekilde). Negatif tamsayı rezonans şartlarını türetmenin bir yolu

$$x(t) = (t-t_0)^\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$$

şeklinde çözüm aramaktan yani, $a_0(t-t_0)^\alpha$ 'nın lbaskın davranışı civarında $t-t_0$ 'ın negatif ve pozitif kuvvetlerinde açılım yapmaktan geçer. Bu tür açılım t_0 civarındaki bir halkada geçerlidir (t_0 'ın bir komşuluğunda değil). Fordy ve Pickering'in [237] son zamanlardaki çalışmalarında anlatılmaktadır.

(8). Verilen bir denklemin çözümünün esaslı tekillik içerip içermediğine nasıl karar verilir? Esaslı tekil noktalara sahip çözümlerinin varlığı hemen görülemeyen denklemlere

dair örnekler Clarkson [238,239], Weiss [5] ve Lakshmanan tarafından verildi. Son zamanlarda Kruskal [240] esaslı tekillik noktalara sahip çözümleri araştırmak için $t-t_0$ kuvvetlerine ek olarak) büyük (küçük) üstler cinsinden açılım içeren bir yöntem geliştirdi.

(9). Niçin yalnız sonlu düzlemdeki tekillikleri gözönüne alıyoruz da sonsuzdaki nokta civarındakileri almıyoruz?

(10). Çoğu kere gerçel çözümlerle ilgilendiğimiz halde, niçin kompleks t kullanıyoruz? Çözümlerin gerçel zamandaki davranışları ile tekilliklerin kompleks düzlemdeki yapıları arasındaki ilişki nedir?

Birçok yazar Painlevé testinin uygulamasına yönelik başka uyarılar da yapmışlardır (örneğin [184,225,236,241,242]).

3.2. Bir integrale edilebilirlik tanımı:

Adi diferansiyel denklemlerin integrale edilebilirliğinin ne anlama geldiğini kavramamıza yardımcı olsun diye aşağıdaki örneği ele alacağız

Örnek 3.2.1. (Birinci derece polinom hali): Kompleks düzlemde birinci basamaktan

$$\frac{dx}{dt} = p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \quad (3.55)$$

adi diferansiyel denklemini gözönüne alalım. Burada $a_j(t)$, $j=0,1,2,\dots,m$ katsayıları analitik fonksiyonlar ve $a_m \neq 0$ olmaktadır. İlk önce bunların hepsinin de sabitler olduğu en basit durumu gözönüne alalım (aksi takdirde (3.55) lineer olacağından, $m \geq 2$ olduğunu varsayalım).

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{p(x)}$$

yazalım. Bu kuadratürlerle çözülebilir ve

$$I = \int \frac{ds}{p(s)} - t \quad (3.56)$$

elde edilir. Bu integral iyi-tanımlı mıdır? Buna karar vermek için diyelim ki $p(x)$ polinomunun $x_1, x_2, \dots, x_m$ gibi m tane farklı (kompleks) kökü bulunun. Böylece

$$p(x) = a_m(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)$$

elde edilir. O zaman belli $c_1, c_2, \dots, c_m$ sabitleri için

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{x - x_2} + \dots + \frac{c_m}{x - x_m}$$

olur. $|x| \rightarrow \infty$ limiti alınınca bu sabitlerin

$$c_1 + c_2 + \dots + c_m = 0 \quad (3.57)$$

şartını sağlamak zorunda olduğu görülür. Bu kısıtlama x_j 'den bağımsız tek kısıtlama-dır. Bu yüzden (3.57) kullanılarak integral

$$I = \sum_{j=1}^m c_j \ln(x - x_j) - t = \sum_{j=1}^{m-1} c_j \ln\left(\frac{x - x_j}{x - x_m}\right) - t \quad (3.58)$$

ile verilir. Logaritma fonksiyonu sadece $2\pi i$ 'nin katları farkı ile tanımlanabildiğinden, (x, t) noktasında I integralindeki belirsizlik k_j 'ler tamsayı olmak üzere

$$2\pi i(c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_{m-1} k_{m-1}) \quad (3.59)$$

olur.

$m=2$ için belirsizlik $2\pi i c_1 k_1$ 'dir olur ki bunlar kompleks düzlemde doğru üzerinde bir noktalar kümesini oluşturur. [$m=2$ için (3.55) Riccati denklemidir ve bu yüzden bilinen lineerleştirme dönüşümü ile integre edilebilirdir].

$m=3$ için belirsizlik $2\pi i(c_1 k_1 + c_2 k_2)$ olur ki bunlar (c_1/c_2 gerçel olmadıkça) bir belirsizlik kafesi oluşturur (c_1/c_2 gerçel olursa belirsizlikler doğru üzerinde bir noktalar kümesidir). Bu "paralelkenar kafesi" kavramına elliptik fonksiyonlar ve abel integrali teorisinden alıştığımız [46, s. 430]. Biz, kompleks düzlemde yoğun olmadığından bu çok değerliliğin müsaade edilebilir olduğunu iddia ediyoruz; bu yüzden de (3.55) denklemi $m=3$ için (sabit katsayılar için) kompleks düzlemde integre edilebilir olarak kabul edilecektir. Önemli nokta, hedeflenen integralin aldığı değerin hakkındaki bilginin, sonsuz hassasiyet gerektirmeksizin x ve t 'nin mümkün değerlerini kısıtlamasıdır.

$m=4$ için, belirsizlik $2\pi i(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3)$ olur ve (3.55)'in hangi şartlar altında integre edilebilir olduğunu kararlaştırılması için şu lemayı kullanırız.

Lemma3.2.2 c_1, c_2, c_3 (gerçel) tamsayılar üzerinde lineer bağımsız ve gerçel sayılar üzerinde ikişer ikişer bağımsız herhangi kompleks sayılar olsunlar. Bu takdirde herhangi bir kompleks sayı, onların (gerçel) tamsayı bileşimleri ile istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Yani

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ ve } \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_1, n_2, n_3 \text{ s.t. } |c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3 - z| < \varepsilon$$

olur.

Bu yüzden $m=4$ için jenerik durumda, (3.59)'daki belirsizlik kompleks düzlemde yoğundur. Böylece, "isole edilmiş bir integral", yani (anlaşılır şekilde söyleyecek olursak) yararlı bir integral yoktur [233]. Bu yüzden (3.55)'in integre edilemez olarak gözönüne alınmasını tavsiye ederiz.

$m > 4$ için denklem jenerik halde aynı anlamda integre edilemez olarak gözönüne alınmalıdır. Şimdi belirsizliğin yoğun olmasının etkisini göstermek için ikinci bir örnek ele alacağız.

Örnek 3.2.3: $a_j, t_j, j=1,2,\dots,m$ sayıları (muhtemelen kompleks) sabitler olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{t - t_j} \quad (3.60)$$

denklemini gözönüne alalım. Sonra (3.60)'ı kompleks düzlemde t_0 'dan t 'ye kadar bir Λ yolu üzere integre edelim:

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{j=1}^m a_j \int_{\Lambda} \frac{dj}{j - t_j} = x(t_0) + \sum_{j=1}^m a_j \{2\pi i m_j + \ln_p(t - t_j)\} \quad (3.61)$$

Burada logaritma esas değerini almaktadır ve m_j ise t_j etrafında Λ 'nın dönme sayısıdır. Bu integral ne zaman iyi-tanımlıdır? Eğer $m=2$ ise, $2\pi i(c_1 k_1 + c_2 k_2)$ belirsizliği bir paralelkenar kafestir. Eğer $m \geq 3$ ise özel durumlar hariç (3.2.2) lemmasından açıkça görülür ki $c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_{n-1} m_{n-1}$ bileşimi, uygun olarak seçilen $m_1, \dots, m_n$ tamsayıları için her kompleks sayıya istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Böylece integrasyon yolunu $x(t)$ 'nin herhangi bir değere istendiği kadar yakın olacak şekilde seçmek mümkün olur.

Daha önce konuşulan belirsizlik, integral x_0 'dan x 'e kadar keyfi bir yol boyunca alındığı zaman, dönme sayılarındaki belirsizlikten başka birşey değildir.

(3.2.1) ve (3.2.3) örnekleri gösterdi ki belirsizlik yoğun olursa, diferansiyel denklemin çözümünün çok az anlamı vardır. Painlevé ve arkadaşları çözümlerin çok değerli olup olmadığıyla ilgileniyorlardı ama biz inanıyoruz ki önemli olan fark tek değerlilik veya çokdeğerlilik değil, yoğun veya yoğun olmayan (çok) değerlilik durumudur.

Tanım 3.2.4. Kompleks-analitik denklem sistemlerinin integrali, her yörünge (çözüm) üzerinde sabit, dallanmış olsa da yoğun olarak dallanmış olmayan sürekli bir fonksiyondur.

Şimdi (3.55)'i katsayıların t 'nin fonksiyonu olması halinde gözönüne alalım. $m=2$ için, Riccati denklemini elde ederiz ki (3.2.4 tanımına göre integre edilebilir olmayabileceği halde) 2.4.2 kısmında belirtildiği gibi lineerleştirilebilir ve böylece integre edilebilirdir. Bu yüzden özellikle lineer olmayan örnekler için, biz ilk Riccati sonrası durumu, $m=3$ halini ele alalım.

Soru:3.2.5

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^3 + t \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 + tx\end{aligned}\tag{3.56,57}$$

adi diferansiyel denklemlerinden herhangi biri integre edilebilir midir?

1985'te İtalya'da Lecce'deki "Lineer olmayan evolusyon denklemleri ve Dinamik sistemler" konulu konferansta Pavel Winternitz'in bu soruya Lie grup teorisini kullanarak cevap verebildiğini hatırlatmak için konudan biraz dışarı çıkalım.

Lie tarafından verilen bir teorem (ayrıntı için [244])

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)f_1(t) + a_2(t)f_2(t) + \dots + a_m(t)f_m(t),\tag{3.58}$$

adi diferansiyel denkleminin lineer olmayan bir üstüste bindirme ilkesi (genel çözümünün sonlu sayıda özel çözüm cinsinden ifade edilebilirliği) sahip olması için gerek ve yeter şartın,

$$X_j = f_j(x) \frac{d}{dx}, \quad j=1,2,\dots,m$$

ile tanımlı vektör alanın sonlu-boyutlu bir Lie cebri üretebilmesi yani

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = \sum_{k=1}^m c_{ijk} X_k, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

eşitliklerini sağlaması olduğunu söyler. (lineer olmayan bindirme ilkesinin lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere uygulaması için [245-248]'ye de bakınız). (3.56) denklemini için vektör alanının üreticileri

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x^3 \frac{d}{dx};$$

şeklindedir. Böylece

$$[X_1, X_2] = 3x^2 \frac{d}{dx} = 3X_3, \quad [X_2, X_3] = -x^4 \frac{d}{dx} = -X_4,$$

olur. Bu şekilde devam ederek sonsuz-boyutlu bir Lie-cebri üretebiliriz. Fakat, (3.57) denklemini için vektör alanının üreticileri

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x^3 \frac{d}{dx};$$

şeklindedir. Böylece

$$[X_1, X_2] = 2x^3 \frac{d}{dx} = 2X_2,$$

olur ki elde edilen yeni bir şey değildir. Ve böylece vektör alanı sonlu-boyutlu bir Lie cebri üretir. Bu yüzden (3.57) denklemini lineer olmayan bindirme ile çözülebilir ve doğal olarak integre edilebilirdir, buna karşılık (3.56) denklemini integre edilebilir değildir. (3.58) denklemini için gerçekleştirilebilen yegane sonlu-boyutlu Lie cebri

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x \frac{d}{dx}, \quad X_3 = x^2 \frac{d}{dx};$$

üreticileri ile, $x=\phi(y)$ değişken dönüşümü farkıyla tek türlü verilir. Bu vektör alanı ile (3.58) denklemi

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t) + a_2(t)x + a_3(t)x^2,$$

haline gelir ki bu bilinen Riccati denklemdir.

(3.56) ve (3.57) denklemlerinden hiçbiri Painlevé türü değildir, çünkü onların hakim davranışı

$$t \rightarrow t_0 \quad \text{giderken} \quad x \approx \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}(t-t_0)^{-\frac{1}{2}}$$

şeklindedir. Bu denklemlerin

$$x(t) = (t-t_0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-t_0)^{\frac{n}{2}}$$

şeklinde açılımları vardır. Böylece bunlar zayıf-Painlevé özelliğine sahiptirler. Dallanma ne kadar problemlidir? "İntegral" yoğun çokdeğerli midir? (3.57) için $c_{2m+1} = 2, m = 0, 1, 2, \dots$ buluruz ki böylece $y = x^2$ dönüşümü ile integre edilebilir bir Riccati denklemi olan

$$\frac{dy}{dt} = 2y^3 + ty$$

denklemini elde ederiz.

İkinci kısımda içinde integre edilebilirliğin basamak basamak test edildiği tipik tekil perturbasyon açılımını kullanan Painleve's α -yöntemini gördük. Bir tane isole edilmiş dallanma noktası genelde problem olmaz, buradan esinlenerek birkaç dallanma noktasını aynı anda test etmeyi öneriyor ve bu yöntemle poly-Painlevé testi adını veriyoruz. Bu bölümün son kısmında bu testi ayrıntılı olarak ele alacağız. Şimdi integre edilemezlik üzerine bazı sonuçları ve Ziglin teoremini ele alalım.

3.3 İntegre Edilemezlikle İlgili Sonuçlar Ve Ziglin Teoremi

Daha önceki kısımlarda (tam ve kısmi) integre edilebilirliği ve bunun tekillik yapısıyla ilişkisini araştırmıştık. Açıkça görülmektedir ki integre edilebilen sistemler çok azdır: çoğu sistem integre edilemez. Ancak bu kesin bir önerme değildir; aslında çoğu sistemin integre edilemediği *kabul edilir*. Bazıları için gözlenen kaotik davranış, integre edilememenin kesin göstergesi olarak yorumlanmıştır. Son zamanlara kadar eksik olan şeyler, kesin ispatlardı. Bunlar son zamanlarda Ziglin'in öncülüğünde yapılmıştır [235] (Ayraçların özkesişimlerinin temel alındığı bir diğer integre edilememe teoremi de Melnikov yöntemi olarak bilinir [249]). Ziglin'in teoremi analitik Hamilton sistemlerinin tek değerli ilk integrallere sahip olabilmeleri için gerek şartları sağlamıştır. Ziglin'in esas fikri, Hamiltonian'ın tümü için analitik hareket sabitlerinin varlığını, verilmiş bir yörünge etrafında varyasyonla elde edilen indirgenmiş bir sistemin analitik hareket sabitlerinin varlığına ve daha önemlisi bu indirgenmiş sistemin monodromy grubuna ilişkilendirmektir.

Aşağıda Ziglin teoreminin ispatının ana hatları ile birlikte integre edilememe ile ilgili sonuçları gözden geçirilmektedir [250]. Son günlerde elde edilen ilginç sonuçlardan biri, Yoshida teoreminin Ziglin yaklaşımıyla yeni bir ispatıdır. Aslında birinci kısımda anlatıldığı gibi, kompleks analitik integre edilebilirliğin kullanımı integre edilebilirliği, homojen Hamiltonian sistemleri için Kowalevski üslerinin rasyonel niteliklerine bağlamayı mümkün kılmıştır.

3.3.1 Ziglin teoremi

İlk ifadesinde Ziglin teoremi; verilen N boyutlu bir H Hamilton sistemi için ilave bir analitik ilk integralin varlığı ve özel olarak da N tane integralin (H dahil) varlığı yani Liouville integre edilebilirliği için gereken şartları sağlar.

Ancak, eğer $N = 2$ boyutuyla sınırlı kalırsak, ki bu boyutta sadece bir tek ek integralin varlığı araştırılır, durum basitleşir.

$$H = (p_x^2 + p_y^2) / 2 + Cx^2y + y^3 / 3 . \quad (3.10)$$

Hénon-Heiles kübik Hamiltonianını kullanarak bu algoritmanın çeşitli aşamalarını göstereceğiz. İşe

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2Cxy \\ \ddot{y} &= -y^2 - Cx^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

hareket denklemlerinden başlar, özel çözümler ve daha da belirgin olarak doğru şeklinde çözümler ararız. Bu tipte çözümler homojen potansiyeller için her zaman vardır. Bunları aramanın yararı daha sonra anlaşılabilecek. Bu durumda iki çeşit doğru şeklinde çözüm elde ederiz:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & x = 0 \text{ (ve } p_x = 0) \\ \text{ii)} \quad & y + mx = 0 \text{ ve } m^2 = C / (2C - 1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

($C = 1/2$ için sadece bir doğru çözümü vardır.)

Birinci tip doğru çözümü üzerinde y için hareket denklemi $\ddot{y} = -y_0^2$ halinde indirgenir, bu da integre edildiğinde

$$\frac{1}{2}\dot{y}_0^2 + \frac{1}{3}y_0^3 + K = 0 \quad (3.13)$$

bulunur. İkinci denklem, iki kompleks periyodlu ve birim periyod paralelkenar başına bir iki katlı kutubu olan $y_0(t; K, t_0)$ Jacobi eliptik fonksiyonunu tanımlar. Bu durum homojen potansiyellerde indirgenmiş hareket denklemleri için tipiktir: genellikle karmaşık Riemann yüzeyleri üzerinde tanımlı, çoklu periyodlu fonksiyonlar elde edilir. ii)'de ise (3.13)'e benzer bir denkleme dönüşen

$$\ddot{y} = -2C/\mu y_0^2$$

elde edilir. Bundan sonra, i) için (ve benzer olarak ii) için $x = 0$, $y = y_0$ çözümü civarında lineerleştirme yaparız. y yerine $y_0 + \eta$ ve x yerine de $0 + \xi$ koyarak

$$\ddot{\eta} = -2y_0\eta \quad (3.14a)$$

$$\ddot{\xi} = -2Cy_0\xi \quad (3.14b)$$

elde edilir. Burada η ve ξ denklemleri ayrılmıştır. Doğru şeklindeki çözümlerinin yararı budur. Hareketin varyasyon denklemleri her zaman sabit (zamandan bağımsız) bir dönme dönüşümü ile teğetsel (burada (3.14a)) ve normal (burada (3.14b)) parçalara ayrılır. Teğetsel varyasyon denkleminin çözümleri:

$$\eta_1 = \partial y_0 / \partial K \text{ ve } \eta_2 = \partial y_0 / \partial t_0 = -\partial y_0 / \partial t$$

olur.

Ziglin'in teoreminin ispatındaki asıl nokta; ilk Hamiltonian'ın (H 'nin kendisi dışında) bir integrali, doğru şeklindeki çözüm civarında açıldığı zaman, hareketin normal varyasyon denklemlerinin (NVD) bir integraline dönüşmesidir. Dolayısıyla ilk Hamiltonian'ın integre edilebilirlik koşulu, NVD'nin integre edilebilir olmasıdır.

Bizim durumumuzda ikinci bir integral daha vardır ve örneğin $C = I$ için şöyle gösterilir:

$$I = p_x p_y + (1/3)x^3 + xy^2. \quad (3.15)$$

i) tipi çözümler etrafında lineerleştirdiğimizde bu sabitin

$$J = \dot{y}_0 \xi + y_0^2 \xi$$

şekline, ii) tipi için ise (burada $m = I$ olur) .

$$J = \dot{y}_0 \xi + 2y_0^2 \xi$$

şekline dönüştüğü görülür. Burada y_0 her seferinde uygun bir eşitlikle verilir. Örnekte J integrali x ve ξ 'da lineerdir ancak hep böyle olmak zorunda değildir. Fakat, eğer I analitik ve Hamiltoniandan bağımsız ise, açılımında kaybolmayan ve NVD'nin bir integrali olan yüksek ve sonlu bir terimi vardır.

(3.14b) eşitliğine baktığımızda bunun, y_0 periyodik katsayılı bir Hill denklemi olduğu görülür. Bu denklemin, t -düzleminde t_0 noktasını y_0 ve $\dot{y}_0$ 'ın aynı değeri aldığı bir diğer noktaya (belki de yine t_0 'a) bağlayan G yolu üzerindeki gelişimi

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}_{ilk} = M_T \begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}_{son} \quad (3.16)$$

gibi alan koruyan bir dönüşüm tanımlar. Yukarıda tanımlanan dönüşümler, y_0 tarafından tanımlanan Riemann yüzeyinin temel grubunun etkilemesi ile NVD'nin monodromi grubu olarak adlandırılan bir grup oluşturur. Bu dönüşümler, determinantları 1 olan ve monodromi matrisleri olarak adlandırılan M matrisleriyle simgelenirler. Dikkat edilmelidir ki y_0 ile tanımlanan Riemann yüzeyi basit irtibatlı olmadığından, t düzlemindeki kapalı bir eğri, birim matris ile simgelenebilir.

Burada bir tanıma gereksinim duyulur. M 'nin r ve r_l özdeğerlerine sahip olduğunu ve köşegenleştirilebildiğini varsayalım (köşegenleştirilemeyen durum daha sonra ele alınacaktır). Eğer ρ_l sayısı 1'in köklerinden biri değilse, M rezonant değildir. (rezonant olmayışın N boyutlu için genelleştirilmiş basittir: tüm tamsayı k 'ler sıfır olmadıkça $r_l, r_l^{-1}, r_2, r_2^{-1}, \dots, r_{N-1}, r_{N-1}^{-1}$ öz değerleri $\rho_1^{k_1} \rho_2^{k_2} \dots \rho_{N-1}^{k_{N-1}} = 1$ bağıntısını sağlamalıdır). Ziglin'in teoremi şimdi ilk şekliyle formüle edilebilir.

Teorem 1: İki boyutlu bir Hamilton sisteminin analitik olan bir ek integrali olduğunu (en azından hareket denklemlerinin verilen bir doğru çözümü civarında) varsayalım. Ayrıca, rezonant olmayan bir M_1 monodromi matrisi olduğunu da varsayalım. O zaman, herhangi bir diğer monodromi matrisi M_2

- ya M_1 ile değişme özelliği göstermeli yani $M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} = 1$ olmalı
- ya da $M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} = M_1^2$ şeklinde olmalıdır (yani M_2 'nin M_1 'in öz vektörleriyle permütasyonu söz konusudur; $\text{Tr } M_2 = 0$ olur).

Bu teoremin [44]'de verilen bir genellemesi, köşegenleştirilemeyen matrislere genişletme ilgilidir. Genişletilmiş teorem şöyle formüle edilebilir:

Teorem2: Teorem 1 ile aynı varsayımları yaparak, M_1 gibi bir köşegenleştirilemeyen monodromi matrisi olduğunu varsayalım. Herhangi bir diğer M_2 monodromi matrisi hem rezonant olmalı, hem de M_1 'in üst (alt) üçgen olduğu bir durumda o da üst (alt) üçgen olmalıdır.

Aşağıda Ziglin teoreminin ispatının anahatları gösterilmiştir. Daha önce gördüğümüz gibi ilk Hamiltonian'ın analitik bir I integrali, NVD'nin bir integralini üretir; öyle ki:

Lemma 1: Eğer sözü geçen Hamiltonian sistemin bir ek analitik integrali varsa, NVD'nin bir integrali olan bir basit olmayan homojen

$$J(\xi, \dot{\xi}, t) = \sum_{j=0}^n \Psi_j(t) \xi^j \dot{\xi}^{n-j} \quad (3.17)$$

polinomu vardır. Burada $Y_j(t)$ 'ler sadece y_0 ve $\dot{y}_0$ yoluyla t 'ye bağımlıdır ve dolayısıyla G üzerinde tek değerlidirler.

Bu $J(\xi, \dot{\xi}, t)$ polinomu monodromi grubunun etkisi altında değişmezdir. G üzerinde sabit bir $(y_0, \dot{y}_0)$ noktası aldığımızı ve hareket denklemlerini G içinde bir kapalı eğri üzerinde integre ettiğimizi varsayalım. ξ ve $\dot{\xi}$ değerleri monodromi grubunun etkisiyle değişecek, Y_k 'ler ilk değerlerine dönecekler ve J değerini sabit tutacaktır. Dolayısıyla:

Lemma 2: Yukarıdaki varsayımlar geçerli olduğu halde, öyle bir

$$\Phi(\xi, \dot{\xi}) = \sum_{j=0}^n \varphi_j \xi^j \dot{\xi}^{n-j} \quad (3.18)$$

homojen polinomu vardır ki, NVD monodromi grubunun etkisi altında değişmez kalır. F büyüklüğünü kullanarak Ziglin'in teoremini ispatlayabiliriz.

Köşegenleşebilen ve rezonant olmayan bir M_1 matrisi olduğunu varsayalım. M_1 'in özvektörlerini baz alırsak yeni z ve h koordinatları ile

$$\Phi = \sum_{j=0}^n \omega_j \zeta^j \eta^{n-j} \quad (3.19)$$

buluruz.,

Φ , M_1 'in etkisiyle değişerek şu şekli alır:

$$\Phi = \sum_{j=0}^n \omega_j \rho^{2j-n} \zeta^j \eta^{n-j} . \quad (3.20)$$

Ancak $n=2j$ değilse $\rho^{2j-n} = 1$ olamaz çünkü M_1 rezonant değildir. Dolayısıyla M_1

etkisi altında değişken olmak için Φ şöyle olmalıdır:

$$\Phi = (\tau\eta)^j . \quad (3.21)$$

Şimdi Φ 'yi, monodromi grubunun bir başka üyesi olan M_2 ile etkileriz. M_2 , M_1 'i köşegenleştirecek baz cinsinden şöyle gösterilebilir:

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

($\det(M_2) = ad - bc = 1$ olduğu unutulmamalıdır). M_2 'de Φ 'yi değişmez bıraktığından

$$[(a\zeta + b\eta)(c\zeta + d\eta)]^j = (\zeta\eta)^j \quad (3.23)$$

buluruz ve bu $ac = bd = 0$ ve $(ad + bc)^j = 1$ olmasına yol açar. Bu sistemin yegane çözümleri şunlardır:

i) $b = c = 0$ ve $ad = 1$ (yani M_2 , M_1 ile değişme özelliği gösterir), dolayısıyla $M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} = 1$ olur.

ii) $a = d = 0$ ve $bc = 1$ (yani M_2 , M_1 'in özvektörlerinin sırasını değiştirir. Dolayısıyla komütator $M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1} = M_1^2$ olur. İkinci durumda $\text{Tr} M_2 = 0$ olduğunda M_2 'nin özdeğerleri i ve $-i$ olur ki M_2 rezonanttır. Dolayısıyla, eğer iki rezonant olmayan matris varsa, ek bir integralin var olması için bunlar değişme özelliğine sahip olmalıdır.

Şimdi köşegenleştirilemeyen matrislere bakalım. Uygun bir bazda M_1 , $\alpha \neq 0$ olduğu durumda

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

olur. Sonuç olarak bu çerçevede, Φ ancak $\Phi = z^n$ şeklini alabilir. M_2 matrisinin z^n 'yi değişmez bırakabilmesi için $a^n = 1$, $b = 0$ ve $ad = 1$ olmalıdır. Eğer a , 1 ya da -1 değilse a ve d 'nin özdeğerleri farklıdır ve böylece M_2 köşegenleştirilebilir ve ayrıca rezonanttır. Ancak eğer $a = d = \pm 1$ ise M_2 köşegenleştirilemez ($c = 0$ olduğu durum

dışında ki bu durumda da sadece $\pm I$ 'dir) ve M_1 ile aynı bazda alt üçgensel hale gelir. $M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1}$ komütatörü eğer $a = d = \pm I$ ise bir birim matristir, fakat izi hep 2 'dir.

Ziglin'in teoremi ilk haliyle N boyutlu halde de ifade edilmiştir [147].

Teorem 3: Verilen bir H Hamiltonianının H ile beraber fonksiyonel olarak bağımsız $N-1$ tane analitik integrali olduğunu varsayalım. Ayrıca rezonant olmayan bir M matrisi olduğunu da varsayalım. Bu durumda herhangi bir diğer M' monodromi matrisi

a) M ile değişme özelliğine sahiptir ya da b) M 'nin özuzayları ile permutasyon yapar. Özel olarak M' de rezonant değilse M ile değişme özelliğine muhakkak sahip olmalıdır.

Bu noktada ortaya çıkan sorun Ziglin teoreminin pratik uygulanabilirliğidir. Monodromi matrisleri hakkında bilgi edinilmesi gerekmektedir. Kuşkusuz sayısal olarak bunlar belli bir doğrulukta hesaplanabilir. Ancak sayısal olarak bulunan özdeğerler, rezonans hali incelenecekse $n > 2$ için fazla yararlı değildir. Yine de bazı imkanlar vardır. Bunların en basitlerinden biri, doğru şeklindeki çözümler için indirgenmiş hareket denklemleri, birim periyod paralelogram başına bir tekilliğe sahip olan çift periyodlu yörüngeye dönüştükleri zaman kullanılabilir. Bu durumda $M_1 M_2 M_1^{-1} M_2^{-1}$ komitatörü, tekillik etrafında kapalı bir eğriye homotopiktir. [147] ve [84]'de açıklandığı gibi M_s 'in özdeğerleri tekillik analizlerinden açık olarak bulunabilirler. (Bu ifade [251]'de belirtilen teorem incelenirken daha iyi anlaşılacaktır). Komütatör hakkındaki açık bilgiler çok yardımcı olacaktır. Elbette eğer $M_s = I$ ise, M_1 ve M_2 matrisleri hiç bir şekilde sınırlanmazlar. Ancak $M_s \neq I$ ise (genellikle polinom potansiyellerde rastlandığı gibi $M_s = -I$ olsa bile) M_1 ve M_2 'nin izlerini sayısal olarak hesaplayarak integre edilemezliği ispatlayabiliriz. Eğer herhangi biri enerjiye dayanan bir ize sahipse süreklilikten dolayı M_s hep rezonant olamaz ve (enerjiden bağımsız olan) komitatör de hep M_s 'in karesi olamaz [84]. Benzer şekilde, eğer iki matristen en az biri, mutlak değeri 2'den büyük olan bir ize sahipse, M_s kesinlikle rezonant

değildir ve karesinin değişme operatörüne eşit olup olmadığı sayısal olarak kontrol edilebilir .

3.4 Monodromi Matrislerinin Açık Olarak Hesaplanması

Bir önceki kısımda gördüğümüz gibi, rezonans durumunun saptanması için monodromi matrislerinin hesaplanması gerekir. İdeal durum monodromi matrislerinin açık olarak elde edilmeleridir. Görülmektedir ki özellikle homojen potansiyeller içeren Hamiltonianlar olmak üzere geniş bir Hamiltonianlar sınıfı için monodromi matrisleri açık olarak elde edilebilir [85]. NVD'yi, monodromi özellikleri tam olarak bilinen Gauss hipergeometrik denklemine dönüştürerek bu sonuca erişebiliriz. Özel bir örnekle bu hesaplamayı gösterelim [86].

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ olmak üzere:}$$

$$H = (p_x^2 + p_y^2)/2 + r + ky \quad (3.25)$$

Hamiltonianı ile başlayalım. Hareket denklemleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x/\rho \\ \ddot{y} &= -y/\rho - \kappa \end{aligned} \quad (3.26)$$

Bunların doğru şeklindeki çözümleri $x = 0$, $\ddot{y} = -(\kappa \pm I)$ olur, $\pm$ işareti r 'nun tanımındaki karekökten gelmektedir. Zaman ölçeğini tekrar düzenlersek $\ddot{y} + I = 0$ elde ederiz, integre ettiğimizde de (uygun başlangıç koşulları ve $h \neq 0$ ile) $y = h - t^2/2$ bulunur. Bu durumda NVD şöyle yazılır:

$$\ddot{\xi} + \lambda \xi / y = 0 \quad (3.27)$$

Burada $l = (1 \pm k)^{-1}$ dir.

$$z = \left(1 + t/\sqrt{2h}\right)/2 \quad (3.28)$$

eşitliği ile yeni bir bağımsız değişken tanımlarsak NVD için şunu buluruz:

$$z(1-z)d^2\xi/dz^2 + 2\lambda\xi = 0 \quad (3.29)$$

Bu denklem

$$z(1-z)d^2\xi/dz^2 + [c - (a+b+1)z]d\xi/dz - ab\xi = 0 \quad (3.30)$$

Gauss hipergeometrik denkleminin bir özel halidir. Gauss hipergeometrik denkleminin monodromi özelliklerinden, integre edilebilirlik için l 'nin $n(n-1)/2$ şeklinde olması gerektiğini söyleyebiliriz. Ayrıca l 'nin bir durumda $l/(1+k)$ ve bir durumda da

$l/(1-k)$ olarak verilmesini de kullanabiliriz. Dolayısıyla tek olası durum, n ve m tamsayılar olmak üzere, $l/(1+k) = n(n-1)/2$ ve $l/(1-k) = m(m-1)/2$ olması halidir. $k=0$ (ya da sonsuz) olması dışında bu mümkün değildir. Dolayısıyla sistem bu basit durumlar dışında integre edilemez.

Aslında k 'inci derecede herhangi bir $V(x_1, x_2)$ homojen potansiyeli için (3.30) tipinde bir denkleme dönüşüm uygulanabilir. $x_1 = c_1 F(t)$, $x_2 = c_2 F(t)$ yapısında doğru şekilde çözümler aranırsa c_1 , c_2 ve $F(t)$

$$(c_1, c_2) = \text{grad } V(c_1, c_2) \quad (3.31a)$$

ve

$$\ddot{\Phi} + \Phi^{k-1} = 0 \quad (3.31b)$$

eşitliklerini sağlamak üzere böyle çözümler bulunur; bunlar integrasyon sabitini, yani enerjiyi, $1/k$ 'ye yeniden ölçülendirmekle

$$t = \sqrt{\frac{k}{2}} \int \frac{d\Phi}{\sqrt{1 - \Phi^k}} \quad (3.32)$$

halinde integre edilebilirler. Bu integralin paydası, dallanma noktaları $w_n = e^{2ipn/k}$

($n = 0, \dots, k - 1$) olan bir Riemann yüzeyi tanımlar. Bu durumda NVD şu biçimi alır:

$$\ddot{\xi} + \lambda \Phi^{k-2} \xi = 0 \quad (3.33)$$

burada λ :

$$\lambda = \nabla^2 V(c_1, c_2) - (k - 1) \quad (3.34)$$

olarak tanımlanır. $z = \Phi^k$ bağımsız değişken değişimi yaparak (3.33)'ü (3.30) Gauss hipergeometrik denklemine dönüştürürüz. Burada:

$$a + b = 1/2 - 1/k, ab = -1/2k, c = 1 - 1/k \quad (3.35)$$

olur. Gauss hipergeometrik denkleminin temel monodromi matrisleri, $z = 0$ ve $z = 1$ noktaları çevresinde saat yönünün aksine yönlü kapalı eğrilere karşılık gelirler. Bunlar şöyle ifade edilirler [87] :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2i\pi b} - e^{-2i\pi c} \\ 0 & e^{-2i\pi c} \end{pmatrix} \text{ ve } M_1 = \begin{pmatrix} e^{2i\pi(c-a-b)} & 0 \\ 1 - e^{2i\pi(c-a)} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Şimdi, Riemann yüzeyi üzerinde sırasıyla (saat yönünün aksine) l ile $e^{2ip/k}$, ve $e^{-2ip/k}$ ile l 'i içeren, , gerçekte eksen üzerinde ortak bir w , $0 < w < 1$ temel noktaları olan C_1 ve C_2 kapalı eğrilerini düşünelim. Bu kapalı eğriler $z = F^k$ dönüşümüyle kompleks z düzleminde dönüştürülürler ve onlara karşılık gelen şu monodromi matrislerini elde ederiz:

$$M(C_1) = M_1 M_0 M_1 M_0^{-1}$$

$$M(C_2) = M_0^{-1} M_1 M_0 M_1 .$$

Yukarıdaki ifadelerle Ziglin teoremini kullanmak kolaylaşır. Elimizde

$$E(l) = T_G M(C_1) = T_G M(C_2) = 2 \cos\left(\frac{2p}{k}\right) + 4 \cos^2\left(\frac{p}{2k} \sqrt{(k-2)^2 + 8kl}\right) \quad (3.37)$$

vardır; ayrıca $M(C_1)$ sadece $k = \pm 2$, ya da $E(l) = 2$ veya $2 \cos(2p/k)$ olduğunda $M(C_2)$ ile değişme özelliği gösterir. Dolayısıyla eğer l hem $M(C_1)$ hem de $M(C_2)$ ' nin rezonant olmadığı bir değerdeyse H 'nin integre edilemezliği hakkında bir karara

ulaşılabilir. Bu özel olarak $|E(l)| > 2$ durumunda ortaya çıkar. Bu eşitsizliği kullanarak l için hiç bir ek analitik integralin var olmadığı bölgeler tanımlayabiliriz [86] . Dolayısıyla şu bölgelerde integre edilemezliği elde ederiz:

$$k \geq 3 \text{ için } l < 0, 1 < l < k - 1, k + 2 < l < 3k - 2, \dots$$

$$k = 1 \text{ için } \mathcal{R} - (0, 1, 3, 6, 10, \dots)$$

$$k = -1 \text{ için } \mathcal{R} - (1, 0, -2, -5, -9, \dots)$$

$$k \leq -3 \text{ için } l > 1, 0 > l > k + 2, k - 1 > l > 3k + 3, \dots$$

($k = -2$ durumu l 'nin tüm değerleri için integre edilebilir).

$|k| > 3$ için integre edilemezliğin kanıtlanamadığı tüm bölgelerin elde edildiğine dikkat edelim. Ancak (3.25) Hamiltonian'da görüldüğü gibi çeşitli doğru şeklinde çözümden elde edilen bilgiyi kullanarak olası integre edilebilirlik bölgelerini daha da sınırlandırabiliriz. Bazı hallerde de problemi tam çözüme ulaşılacak noktaya kısıtlayabiliriz.

$$V = x^4 + y^4 + 2\epsilon x^2 y^2 \quad (3.38)$$

potansiyeli için integre edilememe bölgesi

$$l < 0, 1 < l < 3, 6 < l < 10, \dots$$

olur. Burada l iki farklı doğru şeklinde çözüm için şöyle tanımlanmıştır:

$$l = \varepsilon \text{ ve } \lambda = \frac{3 - \varepsilon}{\varepsilon + 1}.$$

Sadece $\varepsilon = 0, 1, 3$ integre edilebilirlik durumlarının geçerli oldukları açıkça görülmektedir. ε 'un tüm diğer değerleri için (özellikle de ε 'un sonsuz olduğu iyi bilinen ergodik potansiyel durumunda, bkz. 3.47) yukarıdaki kuartik (dörtlü) potansiyel integre edilebilir değildir.

Monodromi matrislerinin açık olarak hesaplanabildiği bir diğer durum,

$$H = \left(p_x^2 + p_y^2 \right) / 2 + e^{\alpha x - y} + e^{-\alpha x - y} \quad (3.39)$$

genelleştirilmiş Toda kafesidir [84].

Bu tip Hamiltonianlar için doğru şekilde çözümler mevcuttur. Özel olarak $x = p_x = 0$ alırsak şu NVD'yi buluruz:

$$\ddot{\xi} + 2\alpha^2 e^{-y} \xi = 0 \quad (3.40)$$

Burada y şu denklemlerle verilmiştir:

$$\ddot{y} + 2e^{-y} y = 0 \quad (3.41)$$

Yeni bir $z = 2e^{-y}/h$ (h enerjidir) bağımsız değişkeni ile NVD bir Gauss hipergeometrik denkleme dönüştürülebilir. Bu sırada şunlar kullanılır:

$$a + b = 1/2, \quad ab = -\alpha^2/2 \quad \text{ve} \quad c = 1.$$

n bir tamsayı olmak üzere $\alpha^2 = n(n-1)/2$ ise, belirli bir yol için elde edilen monodromi matrisleri, birlikte bir üst üçgen biçime dönüştürülebilir. İntegre edilebilir haller α 'nın sadece bu değerleri için söz konusudur, bunların içinde bildiğimiz $\alpha^2 = 0, 1, 3$ değerleri de vardır.

Bu çalışmanın başında sunulan Hénon-Heiles denklemi için ise kesin bir sonuca ulaşamaz. İki doğru şeklinde çözümüne de integre edilememe koşulunu uyguladığımızda

$$C^1 < 1, 1 < C^1 < 2, 2 < C^1 < 3, 6 < C^1 < 8, 13 < C^1 < 16, \dots$$

bulunur. Dolayısıyla $C = 1$ ve $C = 1/2$ ayrık değerleri dışında, integre edilememenin kesin olmadığı tüm bölgeleri elde etmiş oluyoruz. Bu bölgedeki olası integre edilebilir durumlar sıfır ölçüdedirler. Ziglin yaklaşımında bu durum tipiktir.

3.5 Kowalevski Üsleri Kullanılarak İntegre Edilemezlik

Ziglin teoremindeki asıl güçlük, rezonans koşulunun pratik olarak kullanılamamasıdır: Bazı ifadelerin rasyonel olarak bağlantılı açılarının kosinüsleri olup olmadıklarını araştırmak gerekir. Bu ifadelerin açıkça bilindikleri durumlarda bile problem transandanttır.

Bu zorluk Yoshida teoreminin [6]in bir şekli ile [11] aşılmıştır. İlk adım, integre edilememe bölgeleri için monodromi matrislerinin izlerinin daha basit ifadelerini ortaya çıkarmak üzere, Riemann yüzeyi üzerinde farklı C_1 ve C_2 yollarının seçimidir. Buradan şu monodromi matrisleri elde edilir:

$$M(C_1) = (M_0 M_1)^{4k}$$

$$M(C_2) = (M_1 M_0)^{4k}.$$

Bu seçimin avantajı, bu matrislerin izlerinin ortak değerinin

$$2 \cos \left(2\pi \sqrt{(k-2)^2 + 8k\lambda} \right) \quad (3.42)$$

olmasıdır ve $M(C_1)$ ile $M(C_2)$ 'nin sadece izleri ± 2 ya da $k = \pm 2$ olduğu zaman değişme özelliği göstermesidir. Rezonant olmama koşulunu kontrol etmek şimdi daha kolaydır. Bu teorem KÜ kullanılarak çok kolay bir yöntemle ifade edilebilir ve dolayısıyla ilk olarak [6]'da önerilen Yoshida teoreminin (burada daha az genel bir içerikle de olsa) ek bir ispatı olarak da düşünülebilir.

Özel olarak, $V(x)$, k . dereceden homojen, cebirsel bir potansiyel olmak üzere

$$H = \sum p_i^2 / 2 + V(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.43)$$

şeklinde bir Hamiltonian alalım.

Hareket denklemleri

$$x_j = c_j \Phi(t) \quad (3.44)$$

şeklinde tekil çözümler kabul eder. Burada c_j 'leri

$$(c_1, c_2, \dots, c_N) = \text{grad } V(c_1, c_2, \dots, c_N) \quad (3.45)$$

denkleminin bir çözümü olarak seçilebiliriz. $\Phi(t)$ ise $g = 2/(k - 2)$ ve $a = (kg^2/2)^{g/2}$ olmak üzere Φ için verilmiş (3.31a) denkleminin at^{-g} için tekil çözümüdür. KÜler, (3.44) civarında

$$x_j = (c_j + c_j)at^g$$

boyunca varyasyonel bir çözüm arandığında kullanılırlar. Bu denklem lineerleştirildiğinde c için, r_i 'ler KÜ olmak üzere t^i biçiminde çözümler elde edilir. Hareket denklemlerinin Hamiltonian niteliklerinden dolayı KÜ'ler r_i ve r_{i+N} gibi çiftler halindedirler. Bunları elde etmek için $x_j = c_j$ değerlerini vererek $\partial^2 V(x_1, x_2, \dots, x_N) / \partial x_j \partial x_m$ Hess matrisinin l_i özdeğerlerini hesaplamak gerekir. r_i ve r_{i+N} KÜ takımı şu denklemin kökleri ile verilir:

$$r^2 - (2g + 1)r + g(g + 1)(1 - l_i) = 0 .$$

İki kökün farkını $Dr_i = \sqrt{1 + 8k\lambda_i / (k - 2)^2}$ ile gösteririz. (3.42) denkleminde bu ifadenin sadece

$$2 \cos(2\pi(k - 2)\Delta\rho) \quad (3.46)$$

olduğuna dikkat ediniz. Bu bir rastlantı değildir. Aksine, C_1 ve C_2 yollarının t düzleminde tekillik çevresinde $2(k - 2)$ kez dolaşmasına karşılık gelir. Bu yollardan herhangi birinin üzerinde (bir r_i KÜ için) özçözüm $e^{2ip(k - 2)Dri}$ ifadesine eşit olan bir $e^{4ip(k - 2)Dri}$ faz çarpanı alır. (3.46) denklemi sadece bu gerçeği ifade etmektedir.

Her $m_i = 0$ olmadıkça, tüm tamsayı m_i 'ler için $\sum m_i \Delta \rho_i = 0$ şeklinde hiç bir bağıntı yoksa, Dr_i 'lerin rasyonel olarak bağımsız olduklarını söyleriz.

Teorem 4: Eğer Dr_i 'ler rasyonel olarak bağımsızsa, N boyutlu Hamiltonian sistem, Hamiltonianın kendisi dışında hiç bir ek analitik integrale sahip olamaz. İki boyutlu durumda biri daima rasyonel olan sadece iki Dr_i vardır. Dolayısıyla rasyonel bağımsızlık sadece diğer Dr_i 'nin bir rasyonel sayı olmaması anlamına gelir. Ayrıca,

$$r_i + r_{i+N} = 2g + 1$$

toplamı da her zaman rasyoneldir. Bu durum yukarıdaki teoremin şu sonucunu vermeye olanak sağlar:

Eğer rasyonel olmayan ya da kompleks bir $K\ddot{U}$ varsa, iki boyutlu Hamiltonian herhangi bir ek analitik integrale sahip olamaz.

Bu teoremin asıl avantajı tekillik analizinin doğrudan sonucu vermesidir. Transandant bir rezonant olmama şartı kanıtlamaya gerek yoktur. Örnek olarak

$$H = (p_x^2 + p_y^2)/2 + x^2 y^2 / 2 \quad (3.47)$$

Hamiltonian'ını göz önüne alalım. (3.45)'nin çözümü $c_1^2 = c_2^2 = 1$ dir. Hess matrisinin özdeğerleri hemen hesaplanabilir ve $l_1 = 3$, $l_2 = -1$ bulunur. Dolayısıyla $Dr_1 = 5$, $Dr_2 = \sqrt{-7}$ olur. İkinci değerden dolayı açıkça görülmektedir ki (3.47) Hamiltonianının hiç bir ek analitik integrali yoktur.

Ancak, (3.43) biçiminde olmayan Hamiltonianlar bu teoremin kapsamında değildirler. Özel olarak Rod vça. [10] , $I \pm 2iw$ ve $w^2 = e^2 m_2/m_1$ gibi rasyonel olmayan iki KÜ'sü olan fakat buna rağmen integre edilebilir olan şu örneği vermişlerdir:

$$H = p_1(p_1^2 + m_1 x_1^2) + ex_1(p_2^2 + m_2 x_2^2) \quad (3.48)$$

Ancak monodromi grubu değişme özelliğine sahip olduğu için [11] bir çelişki gözlenmemektedir. İntegre edilebilen Hamiltonianlar için rasyonel olmayan ya da sanal KÜ'ler ortaya çıktığında durum daima böyle olacaktır. Ancak Roekaerts ve Yoshida tarafından incelenen [252] şu Hamiltonian:

$$H = (p_x^2 + p_y^2)/2 + p_x xy + p_y(ax^2 + by^2) \quad (3.49)$$

değişme özelliği olmayan bir gruba sahiptir. Ancak sözü edilen monodromi grubunun monodromi matrisleri için açık bir analitik ifade yoktur. Yine de, bilinen integre edilebilen durumlar, a ve b parametrelerinin, KÜ'lerin rasyonel olduğu değerlerine karşılık gelmektedir.

3.6 Homojen Olmayan Hamiltonlara Genişletme

Homojen Hamiltonianlar durumunda, monodromi matrislerinin analitik ifadeleri Ziglin teoreminin uygulanmasını sağlayacak şekilde elde edilebilir. Homojen olmayan durumda ise kapalı sonuçlar var olmadığı için sorun karmaşılaşmaktadır. Yine de homojen potansiyellerin sonuçları çok kolaylık sağlayabilir. Uygun ölçülendirme ile, hareket denklemlerinin (sıfır ya da) sonsuz-enerji limiti alınarak, sistemimiz, sadece en yüksek

dereceden homojen parçasının işlev gördüğü bir sisteme indirgenebilir. (Benzer şekilde, sıfır enerji limitinde de en düşük dereceli parçasını elde ederiz). Dolayısıyla iki limit tam olarak incelenebilir ve eğer herhangi biri integre edilemiyorsa bu durum potansiyelin tümü için de geçerlidir. Ayrıca, bir monodromi matrisinin izinin enerjiye bağımlı olması, enerjinin yoğun bir değer kümesi için rezonant olmadığını gösterdiğinden, sayısal hesaplamalar yardımcı olabilirler. Polinom potansiyeller için tipik olan bir durum, en düşük mertebeli terimin ikinci dereceden yani $V_2 = ax^2 + by^2$ biçiminde olmasıdır. Bu limitte monodromi matrislerinden birinin izi

$$Tr M = 2 \cos 2p \sqrt{a/b}$$

olur. Eğer yüksek enerji limiti de hesaplanırsa ve eğer 'aynı' yol için (ortaya çıkarmak her zaman o kadar kolay değildir) monodromi matrisinin izi aynı limitte sıfır enerjide hesaplanandan farklı ise bu, izin enerjiye bağımlı olduğunu ve matrisin yoğun bir h enerji değerleri kümesi üzerinde rezonant olmadığını gösterir.

Sayısal olanlar dışında da bir denge noktası etrafında NVD'nin çözümlerinin denge noktası civarında açılımı yoluyla ya da genel incelemelerle bu enerji bağımlılıklarının kanıtlanabildiği durumlar da vardır. Böylece Ito [253] ve Rod [254]

$$V = (x^2 + y^2)/2 + Cx^2y + y^3/3 \quad (3.50)$$

şeklinde ikinci derece izotropik kısma sahip Hénon-Heiles potansiyelini incelemişler ve bu potansiyelin, C 'nin 0 , $1/6$, $1/2$ ve 1 değerleri dışındaki tüm değerleri için integre edilemediğini göstermişlerdir. Gerçekten de V 'nin integre edilebilirliği, fazladan bir değişmez bulunduğundan $C = 0$, $1/6$, ve 1 için kanıtlanabilmiştir. $C = 1/2$ durumu büyük bir ihtimalle integre edilemez fakat Ziglin analizi burada uygulanamaz. Aslında

NVD, integre edilebilen şu potansiyelden sonuç olarak alınanla aynıdır ve herhangi bir lineer analiz farkı ortaya koyamaz:

$$V' = (x^2 + y^2)/2 + (x^2 + y^2)^{3/2}/3 \quad (3.51)$$

Yukarıdaki yöntemlerin bileşimlerini kullanarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Tipik bir örnek kesilmiş üç parçacıklı Toda sistemidir. Ağırlık merkezi çerçevesine indirgediğimizde (3.52) elde edilir.

$$H = \left(p_x^2 + p_y^2 \right) / 2 + e^{\sqrt{3x-y}} + e^{\sqrt{-3x-y}} + e^{\sqrt{2y}}. \quad (3.52)$$

Üstel potansiyeli Taylor serisine açtığımızı ve belirli bir mertebede keserek polinom bir potansiyel elde ettiğimizi düşünelim. Bu kesilmiş sistemin Ziglin açısından integre edilebilirliği araştırılmıştır ve ispatlanmıştır ki yüksek mertebeli terim incelenerek ikinci derece dışında herhangi bir kesme mertebesinde integre edilemezliği kanıtlamak mümkündür. Sadece dördüncü mertebe kesimi özel bir çalışma gerektirmektedir. Bunun nederi dördüncü mertebeden olan terimin kendi başına integre edilebilir olması ve sadece daha düşük mertebeden terimlerle bileşimlerinin integre edilemeyen bir potansiyel vermesidir. Dolayısıyla Toda Hamiltonian'ının ikinci dereceden olanı dışında integre edilebilen hiç bir kesmesi yoktur.

Başka bir örnek olarak ($k > 0$) şu potansiyeli düşünebiliriz:

$$V = 1/(x^2 + ly^2 + m)^{k/2} \quad (3.53)$$

Düşük enerji limitini alarak m 'yü sıfır yapabilir ve böylece $-k$. dereceden homojen bir potansiyel elde etmiş oluruz. Olası integre edilebilirlik bölgesini kısıtlayan doğru şeklinde iki çözüm vardır. $l > 1$ ve $l < 1$ için potansiyelin integre edilemediğini kanıtlayabiliriz. Bu da bize integre edilebilen tek değeri $l = 1$ olarak verir.

Ziglin teoremi çerçevesi içinde incelenen homojen olmayan potansiyellere bir diğer şöyledir. Söz konusu potansiyel

$$V = W(x, y) + \frac{1}{y^2} \quad (3.54)$$

olmaktadır. Burada W , n 'inci dereceden $W = -y^n - lx^2 y^{n-2} \dots$ şeklinde homojen bir polinom potansiyeldir. (3.54) yapısındaki integre edilebilir potansiyellerin önemi, integre edilebilirliklerini kaybetmeden (radyal bir $y^2 \rightarrow Sy_i^2$ açılımıyla) daha yüksek boyutlara genişletilebilmele-ridir. Bunlar için NVD

$$\ddot{\xi} = 2\lambda y^{n-2} \xi$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki y

$$\dot{y}^2 = 2 \left(y^n - \frac{I}{y^2} + E \right)$$

ile verilir.

Sıfır enerjide NVD'yi bir hipergeometrik bir denkleme dönüştürerek monodromi matrislerini analitik olarak elde etmek mümkündür. Sonuçta (3.45) biçimindeki integre edilebilir potansiyeller sadece şu tiplerde olabilir:

a) her zaman integre edilebilen potansiyel: $V = \{(y + r)^{n+1} + (y - r)^{n+1}\}/r + m/x^2$

- b) $n = \pm 2, \pm 4$ için integre edilebilen potansiyel: $V = \{(y + r)^{n+1} + (y - r)^{n+1}\}/r + v/y^2$
 c) Sadece $n = \pm 2$ ve 4 için integre edilebilen potansiyel:

$$V = (x + y)^n + (x - y)^n + m/x^2 + v/y^2 .$$

3.7. "Poly-Painleve" Metodu

Daha önceki bölümlerde görüldüğü gibi, Ziglin teoremi integre edilememe ispatlarında son derece yararlıdır. Ancak, en önemli üstünlüklerinden biri bir diğer avantajı sayılan birinci mertebe açılımlara uygulanması bir kısıtlama haline de gelebilir. NVD lineer olduğu için yüksek mertebelerde görülen integre edilebilirlikten uzaklaşmalar araştırılamaz. $C = 1/2$ için (3.41) Hénon-Heiles Hamiltonian'ı böyle bir durumun tipik örneğidir. Hiçbir Ziglin-temelli yöntem gerçekten integre edilebilen bir Hamiltonian ile arasındaki farkı ortaya çıkaramaz. Dolayısıyla Ziglin'in lineer olmayan bir açılımına gerek duyulur.

Aslında bu tarzda bir non-lineer yaklaşıma doğru bir teşebbüs zaten vardır. M. D. Kruskal, tekillik analizi (Painlevé) üzerine kurulmuş olan fakat tekillikler arasındaki etkileşimlere önem verdiği için yerel olmayan özellikler taşıyan çoklu-Painlevé yöntemini bulmuştur. Ziglin durumunda olduğu gibi, tekillikler arasındaki etkileşimler bazı değişme özelliklerini karşılamadığı sürece, çok değerlilik integre edilebilirlikle uyum göstermez.

Bu yöntemle bağıntılı herhangi bir kesin teorem bugüne dek formüle edilememiştir, hatta bu tür uygulamalar için genel bir algoritma da yoktur. Yine de elimizde bulunan bazı sonuçlar integre edilememe yaklaşımlarını tam non-lineer bölgeye yaymak için olası bir yol olarak kabul edilebilir.

Çoklu-Painlevé kriterleri sistemin tekilliklerinden ikisi arasındaki etkileşimlerin 'yoğun' tipte bir çokdeğerliliğe yol açıp açmadığını kontrol eder. Yöntem asimptotiktir ve

keyfi olarak küçük seçilecek bir ε parametresine gerek duyulur. Temel düşünce şudur: aynı yörünge, integrasyon sabitinin birbirinden (herhangi bir n için) ε^n ile orantılı olan bir toplanan sabit kadar farklı olan iki değişik değeri için karakterize edilebiliyorsa, bu durumu, bu yörünge için integrasyon sabitinin ümitsiz yani yoğun bir şekilde çokdeğerli olduğu anlamına gelir.

Çoklu Painlevé ölçütünü Abel denkleminin bir örneği üzerinde gösterelim:

$$\frac{dy}{dx} = y^3 + x \quad (3.59)$$

Bu denklemin belirleyici tekillik mertebesi $x \rightarrow x_0$ iken $y \sim (x - x_0)^{-1/2}$ dır. Burada x_0 keyfi ve hareketli bir dallanma noktasıdır. Rezonans sadece $r = -1/2$ 'de olduğundan (yani sadece x_0 keyfidir) ve sadece $(x - x_0)^{-1/2}$ 'nin kuvvetleri görüldüğünden burada Painlevé değil de zayıf-Painlevé hali olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla "zayıf-Painlevé" yöntemi (3.59)'un (ya da birinci mertebeden aynı tipte herhangi bir ADD'nin) integre edilemez olduğunu ispatlayamaz.

Buna rağmen, çoklu-Painlevé ölçütüne göre (3.59) denklemini integre edilemez olarak sınıflandırılacaktır. Bunun nedenini görmek için denkleme öyle bir parametre yerleştirilim ki x 'in x_0 'dan farkı y 'nin kendi tekilliği civarındaki değişiminden küçük olsun. Bu değişimi sağlayacak bir koordinat dönüşümü yapılmalıdır:

$$x = \varepsilon^{-3/5} (1 + \varepsilon X), y = \varepsilon^{-1/5} Y$$

bu durumda (3.59) şu hali alır:

$$\frac{dY}{dX} = Y^3 + 1 + \varepsilon X \quad (3.60)$$

Şimdi Y 'nin sonlu $X = X_0$ 'da bir tekliği olduğunu varsayalım ve X 'in çokdeğerliliğini inceleyelim.

Eğer $\varepsilon = 0$ ise (3.60) denklemi şöyle integre edilebilir:

$$X - \bar{X} = \int_{x_0}^x \frac{dY'}{Y'^3 + I} \quad (3.61)$$

$\bar{X}$ burada integrasyon sabitidir. (3.61)'deki integralin içini açarak:

$$\frac{1}{Y'^3 + 1} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{Y' + 1} + \frac{j}{Y' + j} + \frac{j^2}{Y' + j^2} \right], j = e^{2i\pi/3}$$

elde edilir. Görülüyor ki bir yörünge tanımlayan bir başlangıç noktası mevcutsa bu yörüngeye karşılık gelen integrasyon sabiti $\bar{X}$ 'in alabileceği değerlerin farkları; k, m, n tamsayılar olmak üzere

$$2ip(k + mj + nj^2)/3 \quad (3.62)$$

kadardır. Ancak, $1 + j + j^2 = 0$ olduğu için (3.62) kompleks sayılar kümesinde sonsuz fakat ayrık iki boyutlu bir kafes tanımlar. Bu yüzden çoklu-Painlevé kriterlerine göre (3.62) denklemi $\varepsilon = 0$ için integre edilebilir.

Bu programda bir sonraki adım X 'in çokdeğerliliğinin ε 'daki her merteye için incelenmesidir. İntegre edilebilirlik yalnız ve yalnız eğer yüksek mertebelerde fazladan çokdeğerlilikler ortaya çıkmıyorsa devam eder. Eğer ε keyfi olarak çok küçük seçilmişse, eklenen ε^n ile orantılı herhangi bir terim "yoğun" çokdeğerliliklere yol

açacaktır. Elbette ki açık bir tekrarlı bağıntı yokluğunda bu programı keyfi derecede yüksek mertebelerde uygulamak mümkün değildir. Ancak çoğu durumda düşük mertebelerde bu tarzda eklenen terimlere rastlanabilir ve integre edilemezlik ispatlanabilir.

(3.60) denkleminde de bu gerçekleşmektedir. $X = X_0 + \varepsilon X_1 + \varepsilon^2 X_2 + \dots$ açılımı yapılır ve (3.60) denklemi

$$X_0 - \bar{X} = \int_{Y_0}^Y \frac{dY'}{Y'^3 + I} \quad (3.63)$$

ifadesinden başlanarak ve daha yüksek mertebeler için

$$dX = \frac{dY}{Y^3 + I + \varepsilon X} = \frac{dY}{Y^3 + I} \left[1 - \frac{\varepsilon X}{Y^3 + I} + \frac{\varepsilon^2 X^2}{(Y^3 + I)^2} + \dots \right]$$

yazarak ε 'nun her mertebesinde integre edilirse ortaya çıkan bağıntılar şunlardır:

$$\begin{aligned} dX_1 &= -\frac{X_0 dY}{(Y^3 + I)^2} \\ dX_2 &= -\frac{X_1 dY}{(Y^3 + I)^2} + \frac{X_0^2 dY}{(Y^3 + I)^3} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Daha önce de belirttiğimiz gibi X_0 iki boyutlu bir kafeste çokdeğerlidir. Şimdi kontrol edilmesi gereken, Y uzayında bizi tekrar X_0 değerine getiren karmaşık bir yol boyunca integre ettiğimizde $i \geq 1$ olmak üzere tüm X_i 'lerin sıfır olmasıdır. İntegralin içi (3.63) ile karşılaştırıldığında sonsuzda küçük olduğu için, ((3.63)'ye bakınız) Y uzayında kutuplarından biri etrafında dolanmak, diğer herhangi ikisi etrafında dönmesine denktir. Dolayısıyla sadece $Y = -I$ ve $Y = -j$ 'deki kutupların göz önüne alınması yeterlidir.

Öyle bir yol düşünelim ki önce $Y = -I$ çevresinde, saat yönünün aksine bir kez dönsün (altyol G_1); sonra $Y = -j$ çevresinde saat yönünün aksine (altyol G_2) bir kere, daha sonra $Y = -I$ çevresinde saat yönünde bir kez (altyol G_3) ve en son $Y = -j$ çevresinde saat yönünde bir kez (altyol G_4) dönsün. Açıkça görülüyor ki tüm bu integrasyon yolu boyunca X_0 gerçekten de başlangıç değerine geri dönmektedir. X_I 'in değişimi dört yolun her birinin de katkısı ile oluşmuştur. Fakat X_0 belli bir toplanan sabit farkıyla G_1 ve G_3 (sırasıyla G_2 ve G_4) yolları boyunca aynı değeri aldığı için şu

$$\Delta X_I = \oint_{G_1} \frac{X_0(I) - X_0(3)}{(Y^3 + I)^2} dY + \oint_{G_2} \frac{X_0(2) - X_0(4)}{(Y^3 + I)^2} dY \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} X_0(I) - X_0(3) &= \oint_{G_2} \frac{dY}{(Y^3 + I)^2} \\ X_0(2) - X_0(4) &= \oint_{G_1} \frac{dY}{(Y^3 + I)^2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

yazılabilir, burada $X_0(i)$, G_i altyolu boyunca X_0 'ın değeridir.

(3.66)'teki integraller rezidüler kullanılarak kolayca hesaplanabilirler. (3.65)'ye yerleştirildikten sonra sonuç

$$\Delta X_I = -\frac{2i\pi}{3} j \oint_{G_1} \frac{dY}{(Y^3 + I)^2} + \frac{2i\pi}{3} \oint_{G_2} \frac{dY}{(Y^3 + I)^2} \quad (3.67)$$

olur. (3.67)'teki iki yeni integralde rezidüler kolayca hesaplanabilir ve yukarıdaki yol izlendiğinde e mertebesinde $X = X^*$ 'da çokdeğerliliğe rastlanmadığını gösteren şu sonuç alınır:

$$\Delta X_1 = -\frac{2i\pi}{3} j \left(\frac{1}{9} \right) + \frac{2i\pi}{3} \left(\frac{j}{9} \right) = 0$$

Elbette ki bu DX_1 'in herhangi bir yol boyunca sıfır olduğunu kanıtlamaz. Daha karmaşık bir yol izlemek yerine işlemi ε^2 mertebesinde yürütme yoluna gidilirse, benzer şekilde şu sonuçlar elde edilir, ((3.64)'e bakınız);

$$\begin{aligned} \Delta X_2 = & \oint_{\Gamma_1} \frac{X_1(3) - X_1(1)}{(Y^3 + 1)^2} dY + \oint_{\Gamma_2} \frac{X_1(4) - X_1(2)}{(Y^3 + 1)^2} dY \\ & + \oint_{\Gamma_1} \frac{X_0^2(1) - X_0^2(3)}{(Y^3 + 1)^3} dY + \oint_{\Gamma_2} \frac{X_0^2(2) - X_0^2(4)}{(Y^3 + 1)^3} dY \end{aligned} \quad (3.68)$$

$X_0(3) = X_0(1) + 2ipj/3$ ve $X_0(4) = X_0(2) - 2ip/3$ kullanılarak (3.55) şöyle değiştirilir:

$$\begin{aligned} \Delta X_2 = & \frac{4i\pi}{9} [X_1(3) - X_1(1)] + \frac{4i\pi j}{9} [X_1(4) - X_1(2)] \\ & + \oint_{\Gamma_1} \frac{dY}{(Y^3 + 1)^3} \left[-\frac{4i\pi j}{3} X_0(1) + \frac{4\pi^2 j^2}{9} \right] + \\ & + \oint_{\Gamma_2} \frac{dY}{(Y^3 + 1)^3} \left[-\frac{4i\pi}{3} X_0(2) + \frac{4\pi^2}{9} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Burada $X_0(1)$ ve $X_0(2)$ kendileri Y 'nin fonksiyonları olduğundan ve verilen bir yol boyunca sabitler veren bileşimler halinde bulunmadıklarından dolayı, $X_0(1)$ ve $X_0(2)$ 'yi içeren terimlerin hesaplanmalarının zor olduğu gözlenmelidir.

Bu terimlerin ikincisi (G_2 boyunca) birinci (G_1 boyunca) cinsinden şöyle düşünerek hesaplanabilir: G_1 ve G_2 yolları için ortak bir nokta olarak orijini seçelim; G_2 , G_1 'den $2\pi/3$ 'lük bir döndürme kolaylıkla elde edilebilir. Bu göstermektedir ki ($2\pi/3$ 'e kadarlık bir toplanan sabit farkıyla), X_0 'ın değeri bir G_2 noktasında ona karşılık gelen G_1 noktasındaki değerinin j katıdır çünkü bu rotasyon sırasında $dY \rightarrow j dY$ iken $1/(Y^3 + 1)$ değişmeden kalır. Benzer şekilde (uygun bir sabitle integralin içinin geri kalan kısmının çarpımının integrali farkıyla) (3.69)'da G_2 üzerinde hesaplanan X_0 'ı içeren integral, G_1 'deki değerinin j^2 katıdır çünkü hem X_0 hem de dY , j ile çarpılmıştır.

Son aşama (3.69)'da içinde X_0 bulunan ilk integrali G_1 boyunca hesaplamaktır. Bu problem için analitik bir çözüm mümkünse de iki nedenden dolayı bu integrasyonu sayısal olarak yaparız. İlk neden analitik ifadelerin çok uzun ve kullanımlarının zor olmaları, ikinci neden de bu kriterlerin daha karmaşık sistemlerde nasıl kullanılabileceğini göstermektir.

En basit yaklaşım X_0 , X_1 ve X_2 tanımlarına geri dönerek bunları tekillikleri civarında sayısal olarak integre etmektir. $Y = 0$ 'dan başlayarak önce $Y = -1$ etrafında saat yönünün aksine birim yarıçaplı bir çember üzerinde, daha sonra da benzer şekilde $Y = -j$ etrafında, sonra birincinin etrafında saat yönünde ve son olarak da ikincinin etrafında saat yönünde ilerleriz. Bu şekilde integrasyon yolu tüm tekilliklerden uzakta kalmış ve sayısal hatalar mümkün olduğunca azaltılmış olur. X_0 ve X_1 'in gerçekten de sıfıra gittikleri görülürken X_2 'nin gerçek kısmının sıfırla uyumlu olduğu ortaya çıkar. Ancak X_2 'nin sanal kısmı sıfır olmaz ve

$$\Delta X_2 = 20i\pi/81\sqrt{3} \neq 0$$

verir. Dolayısıyla verilen bir integrasyon sabiti $\bar{X}$ ve verilen bir Y için, X_i değerlerini $\mathcal{C}$ 'de yoğun olan bir küme üzerinde alır. Bu yüzden çoklu-Painlevé kriterlerine göre $\bar{X}$ işe yaramayan bir integrasyon sabitidir ve bu durumda da (3.60) ve (3.59) denklemleri integre edilemezler.

Bu kısmı iki uyarıyla kapatmak istiyoruz: Herşeyden önce baştaki problemdeki $x = x_0$ hareketli tekilliğin yukarıdaki incelemede ortaya çıkmadığı görülmüş olmalıdır. Önemli olan $Y^3 + I$ 'in sıfırlarının etrafındaki davranıştır. Ayrıca inceleme süresince X yerine Y bağımsız değişkeni irdelenmiştir. Bu da bize çoklu-Painlevé yaklaşımının bağımsız ve bağımlı değişkenler, sabit ve hareketli tekillikler ya da sonlu ya da sonsuzda bulunan tekillikler arasındaki çoklukla yapay olan ayrımları anlamsız kıldığını gösterir. Önemli olan Ziglin yaklaşımında da olduğu gibi, değişme özelliklerine göre çokdeğerliliğin integre edilebilirlik için bir engel oluşturmamasıdır.

Son bir uyarı olarak da "çoklu-Painlevé" kriterlerinin yoğun çokdeğerlilikle integre edilemezlik arasındaki ilişkilerden dolayı tercih edilmelerine rağmen güçlü bir algoritma oluşturmadıkları belirtilmelidir. Kuadratürlere ve eğri integrallerine olan bağımlılığı daha yüksek boyutlu sistemlerde analitik olarak kullanılmasını ($e = 0$ durumundaki integrallerin, sistemi kuadratürlere indirgemesi uygulanmazsa) zorlaştırır. Yine de bu bölümde önerildiği gibi analitik ve sayısal yöntemlerin bir bileşimi "çoklu-Painlevé" kriterlerini daha uygulanabilir kılmaktadır. Birinci mertebeden ADDleri yüz yıl önce Painlevé'nin yaptığı gibi çoklu-Painlevé yöntemini kullanarak analitik olarak incelerken modern tekillik analizi yaklaşımını ortaya çıkaran yöntemler geliştirmek ilginç olmalıdır.

SONUÇ

Bu çalışmada integre edilebilirlik kavramlarını geniş bir açıyla sunmuş olduk. Integre edilebilirlik tanımları matematiksel kesinlikle olanlardan sezgisel mantıklara kadar değişim göstermektedir. Ancak açıktır ki integre edilebilirliği bulmak için tekillik analizi yöntemleri uygulanacaksa en kullanışlı tanım "kompleks analitik integre edilebilirlik"tir. Günümüzde varolan Ziglin ve Yoshida tarafından kanıtlanmış teoremler bu tipte integre edilebilirlikle ilgilidir. Aslında onlar bu özellikle, hareket denklemlerinin çözümlerinin tekilliklerin yapısı arasındaki kesin bağıntıyı da belirlemektedirler. Dolayısıyla, başlangıçta integre edilebilirlik saptayıcısı olarak sunulan tekillik analizi yaklaşımının artık gitgide genişleyen kullanım alanları bulunan keskin bir matematiksel araç olarak kabul edildiği sonucuna varabiliriz.

KAYNAKLAR

- [1] RAMANI, A., DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., Phys. Rev. Lett., Vol. 49, pp 1539, (1982).
- [2] RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B., BOUNTIS, T., J. Math. Phys. Vol 25, pp 878, (1984).
- [3] DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., J. Math. Phys. Vol 25, pp 481, (1984).
- [4] INCE, E. L., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, Wiley, New York, (1976).
- [5] WEISS, J., Kitaptaki konuşma notları
- [6] YOSHIDA, H., Celest. Mech. Vol. pp 363-381 (1983).
- [7] WHITTAKER, E. T., Analytical Dynamics of Particles, (Cambridge U. P., Cambridge, 1969).
- [8] GRAMMATICOS, B., MOULIN-OLLAGNIER, J., RAMANI, A., STRELCYN, J. M., WOJCIECHOWSKI, 'Integrals of Quadratic Ordinary Differential Equations in R^2 : the Lotka-Volterra system'
- [9] YOSHIDA, H., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., Acta Appl. Math. Vol 8, pp 75 (1987).
- [10] KUMMER, M., CHURCHILL, R. C., ROD, D. L., 'On Kowalevski exponents'
- [11] YOSHIDA, H., 'Non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with an N-dimensional hamageneous (1988).
- [12] ADLER, M., VAN MOERBECKE, P., Algebraic completely integrable systems: a systematic approach, (Perspective in Mathematics, Academic Press, New York, (1988).
- [13] GUTKIN, E., Physica Vol 16D, pp 235 (1985).
- [14] FLASHKA, H., Phys. Lett. Vol A 131 pp 505 (1988).
- [15] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E., Foundations of Mechanics, Benjamin-Cumming, Reading (1978),
- [16] RICHENS, J., BERRY, M.V., Physica Vol 2D pp 495 (1981).

- [17] RAMANI, A., KALLITERAKIS, A., GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B.,
Phys. Lett. A Vol 115, pp 25 (1986).
- [18] BESSIS, D., An Introduction to Kowalevski's Exponents, Partially Integrable
Equations, pp 299-318, March(1989).
- [19] TABOR, M., WEISS, J., Phys. Rev. A Vol 24, pp 4,(1981).
- [20] CHANG, Y.F., TABOR, M., WEISS, J., J. Math. Phys. Vol 23, pp 6, (1982).
- [21] WEISS, J., Analytic Structure of Henon-Heiles System, in Mathematical
Methods in Hydrodynamics and Integrability in Related Dynamical
systems, ed. by M. Tabor and Y. Treve, AIP Conference Proc., 88,
AIP (1982).
- [22] PERCIVAL, I. C., GREEN, J. M., Hamiltonians Maps in the Complex plane,
Princeton Plasma Phys. Lab. Preprint PPL 1 744 Jan (1981).
- [23] WEISS, J., TABOR, M., CARNAVALE, G., J. Math. Phys. Vol 24, pp 3,
(1983).
- [24] BOUNTIS, T., SEGUR, H., Logarithmic Singularities and chaotic behaviour, in
Hamiltonian systems in Mathematical Methods in Hydrodynamics and
Integrability in Related Dynamical Systems, ed. by M. Tabor and Y. T
Treve AIP Conference. 88 AIP (1982).
- [25] BOUNTIS, T., A singularity analysis of integrability and chaos in dynamical
systems in singularities and dynamical systems, ed. by S. Pneumatikos
North Holland (1984).
- [26] KUMMER, M., CHURCHILL, R., ROD, D., On Kowalevski exponents -
Preprint Department of Mathematics and Statistics, University of C
Calgary, Calgary Alberta T2N1N4 Canada, (1988).
- [27] YOSHIDA, H., Nonexistence of an Additional Analytic Integral in Hamiltonian
Systems with a N-dimensional Homogeneous Potential, May (1988)
- [28] HIETARINTA, J., Phys. Rep. Vol 147, pp 87 (1987).
- [29] JIMBO, M., MIWA, T., Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. Vol 19, pp 943
(1983)
- [30] DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A. and WINTERNITZ, P., J.
Math. Phys. Vol 27, pp 2848 (1986).

- [31] HIROTA, R., Direct Methods in Soliton Theory in "Solitons", R. K. Bullough ve P. J. Caudrey, eds Topics in Modern Physics, Springer Verlag , New York (1980),
- [32] ITO, M., J. Phys. Soc. Japan Vol 49 pp 771 (1980).
- [33] KRUSKAL, M. D., RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., in Partially Integrable Evolution Equations in Physics, NATO Adv. Sci.Inst. Ser. 310 (R. Conte ve N. Boccara, Eds.), Kluwer, Dodrechr, pp 321-372 (1990)
- [34] ABLOWITZ, M. J., SEGUR, H., Phys. Rev. Lett. Vol 38 pp 1103 (1977).
- [35] JIMBO, M., MIWA, T., Physica D, Vol 2, pp 3 06 (1981).
- [36] CAN, M., On the Relation between Nonlinear Schrödinger Equation and Painleve IV Equation, Nuovo Cimento, Vol 106 B, pp 205-207, (1991).
- [37] ABLOWITZ, M. J., RAMANI, A., SEGUR, H., J. Math. Phys. Vol 21, pp 1006-1015 (1980).
- [38] McLEOD, J. B., OLVER, P. J., SIAM J. Math. Anal. Vol 14, pp 488-506 (1983).
- [39] WEISS, J., TABOR, M., CARNAVALE, G., J. Math. Phys. Vol 24, pp 522-526, (1983).
- [40] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 107, pp 221-224, (1888).
- [41] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 107 pp 320-323, (1888).
- [42] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 107 pp 724-726, (1888).
- [43] PAINLEVE, P., Leçons sur la Theorie Analitique des Equarions Differetielles, Profesees a Stockholrn, (1895), Hermann, Paris, (1897).
- [44] HILLE, E., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, Wiley, New York, (1976).
- [45] FUCHS, L., Sitzungsber. Akad, Wiss. Berlin Vol 32, pp 669-720 (1884).
- [46] WHITTAKER, E. T., WATSON, G. N., A course of Modern Arialysis, 4th ed., Cambridge U.P., Cambridge, (1927).
- [47] BRIOT, C., BOUQUET, J. C., Theorie des Functions Elliptiques, 2nd ed., Paris, (1975).

- [48] PICARD, E., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 104, pp 41-43 (1887).
- [49] PICARD, E., J. de Math. Vol 5, pp 135-318 (1889).
- [50] PICARD, E., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 110, pp 877-880 (1890).
- [51] PICARD, E., Acta Math. Vol 17, pp 297-300 (1893).
- [52] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris 116: pp 88-91 (1893).
- [53] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 116, pp 173-176 (1893).
- [54] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 116, pp 362-365 (1893).
- [55] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 116, pp 566-569 (1893).
- [56] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 117, pp 211-214 (1893).
- [57] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 117, pp 611-614 (1893).
- [58] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 117, pp 686-688 (1893).
- [59] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 126, pp 1329-1332 (1898).
- [60] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 126, pp 1185-1188 (1898).
- [61] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 126, pp 1699-1700 (1898).
- [62] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 126, pp 541-544 (1898).
- [63] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci, Paris Vol 127, pp 945-948 (1898).
- [64] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci, Paris Vol 129, pp 750-753 (1898).
- [65] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci, Paris Vol 129, pp 949-952 (1898).
- [66] PAINLEVE, P., Bull. Soc. Math. France Vol 28, pp 201-261 (1900).
- [67] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 133, pp 910-913 (1901).
- [68] PAINLEVE, P., Acta Math. Vol 25, pp 1-85 (1902).
- [69] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 135, pp 411-415 (1902).
- [70] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 135, pp 641-647 (1902).
- [71] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci, Paris Vol 135, pp 1020-1025 (1902).

- [72] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci, Paris Vol 135, pp 757-761 (1902).
- [73] PAINLEVE, P., C. R. Acad. Sci, Paris Vol 135, pp 1111-1117 (1902).
- [74] FUCHS, R., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 141, pp 555-558 (1905).
- [75] GAMBIER, B., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 143, pp 741-743 (1906).
- [76] GAMBIER, B., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 142, pp 266-269 (1906).
- [77] GAMBIER, B., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 142, pp 1403-1406 (1906).
- [78] GAMBIER, B., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 142, pp 1497-1500 (1906).
- [79] GAMBIER, B., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 144, pp 827-830 (1907).
- [80] GAMBIER, B., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 144, pp 962-964 (1907).
- [81] GAMBIER, B., Acta Math. Vol 33, pp 1-55 (1910).
- [82] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.66, pp 672-683 (1980).
- [83] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.66, pp:762-775 (1980).
- [84] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 63-79 (1981).
- [85] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 241-247 (1981).
- [86] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 299-318 (1981).
- [87] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 447-454 (1981).
- [88] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 512-528 (1981).
- [89] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 637-665 (1981).
- [90] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 755-781 (1981).
- [91] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.67, pp 942-957 (1981).
- [92] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.68, pp 56-80 (1981).
- [93] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.68, pp 220-248 (1982).
- [94] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.68, pp 398-423 (1982).
- [95] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.69, pp 80-104 (1983).

- [96] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.69, pp 397-433 (1983).
- [97] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.69, pp 614-640 (1983).
- [97] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.69, pp 614-640 (1983).
- [98] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 5, No.70, pp 290-310 (1983).
- [99] POINCARÉ, H., Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste, Vol 1, Gauthier-Villars, Paris, (1892).
- [100] POINCARÉ, H., Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste, Vol 3, Gauthier-Villars, Paris, (1898).
- [101] GOLDSTEIN, H., Classical Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1950).
- [102] GOLUBOV, V. V., Lectures on the Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point, State Publishing House, Moscow, (1953).
- [103] BAROUCH, E., McCOY, B. M., WU, T. T., J. Math. Vol 81, pp 1025-1042 (1969).
- [104] WU, T., McCOY, B. M., TRACY, C., BAROUCH, E., Phys. Rev. B Vol 13, pp 316-374 (1987).
- [105] McCOY, B. M., TRACY, C., WU, T. T., J. Math. Phys. Vol 18, pp 1058-1092 (1977).
- [106] GROSS, D. J., MIGDAL, A. A., Phys. Rev. Lett. Vol 64, pp 127-1430 (1990).
- [107] GROSS, D. J., MIGDAL, A. A., Phys. Rev. Lett. Vol 64, pp 717-720 (1990).
- [108] DE BOER, P. C., LUDFORD, S. S., Plasma Phys. Vol 17, pp 29-43 (1986).
- [109] ABLOWITZ, M. J., SEGUR, H., Stud. Appl. Math. Vol 57, pp 13-44 (1977).
- [110] SEGUR, H., ABLOWITZ, M. J., Physica D Vol 3, pp 165-184 (1981).
- [111] JIMBO, M., MIWA, T., MORI, Y., SATO, M., Physica D Vol 1, pp 80-139 (1980).
- [112] CREAMER, D. B., THACKER, H. B., WILKINSON, Phys. Rev. D Vol 20, pp 155-186 (1986).
- [113] CREAMER, D. B., THACKER, H. B., WILKINSON, D., Phys. Rev. D Vol 23, pp 3081-3084 (1981).

- [114] TURCOTTE, D. L., SPENCE, D. A., BAU, H. H., *Internat. J. Heat Mass Trans.* Vol 25, pp 699-706 (1982).
- [115] HOLMES, P. J., SPENCE, D., *Quart. J. Mech. Appl. Math.* Vol 37, pp 525-538 (1984).
- [116] McCOY, B. M., PERK, J. H. H. ve SHROCK, R. E., *Nuclear Phys. B* 220 (FS8):3 5-47 (1983).
- [117] McCOY, B. M., PERK, J. H. H., SHROCK, R. E., *Nuclear Phys. B* 220 (FSS), pp 269-282 (1983).
- [118] HALL P., *J. Inst. Math. Appl.* Vol 29, pp 173-196 (1982).
- [119] HALL, P., LAKIN, W. D., *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 415:421-444 (1988).
- [120] BASSOM, A. P., HALL, P., *Stud. Appl. NZath. Mech.* Vol 18, pp 1025-1042 (1969).
- [121] McCASKILL, J. S., FACKERELL, E. D., *J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2* Vol 84, pp 161-179 (1988).
- [122] CHANDRASEKHAR, S., *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 408, pp 209-232 (1986)
- [123] LEAUTE, B., MARCILHACY, G., *Ann. Inst. H. Poincare* Vol 31, pp 363-375 (1979).
- [124] LEAUTE, B., MARCILHACY, G., *Phys. Lett. A* Vol 187, pp 159-161 (1982).
- [125] LEAUTE, B., MARCILHACY, G., *Lett. Nuovo Cimento* Vol 40, pp 102-106 (1984).
- [126] MACCALLUM, M. A. H., *J. Phys. A* Vol 16, pp 3853-3866 (1983).
- [127] PERSIDES, S., XANTHOPOULOS, B. C., *J. Math. Phys.* Vol 29, pp 674-680 (1988).
- [128] WILS, P., *Phys. Lett. A* Vol 135, pp 425-427 (1989).
- [129] WILS, P., *Classical Quantum Gravity* Vol 6, pp 1231-1241 (1989).
- [130] GIANNINI J. A., JOSEPH R. I., *Phys. Lett. A* Vol 141, pp 417-419 (1989).
- [131] BOUTROUX, P., *Ann. Ecole Norm. Super.* Vol 30, pp 255-375 (1913).

- [132] BOUTROUX, P., Ann. Ecole Norm. Super. Vol 31, pp 99-159 (1913).
- [133] JOSHI, N., KRUSKAL, M. D., Phys. Lett. A Vol 130, pp 129-137 (1988).
- [134] ERUGIN, N. P., Differential Equations Vol 12, pp 267-289 (1976).
- [135] ERUGIN, N. P., Differential Equations Vol 12, pp 405-420 (1976).
- [136] LUKASHEVICH, N. A., Differential Equations Vol 1, pp 561-564 (1965).
Vol 3, pp 395-399(1967); Vol 3, pp 994-999 (1967); Vol 4, pp 732-735(1968); Vol 7, pp 853-854 (1971).
- [137] LUKASHEVICH, N. A., YABLONSKI, A. I., Differential Equations, Vol 3, pp 264-266 (1967).
- [138] FOKAS, A. S., YORTSOS, Y. C., Lett. Nuovo Cimento Vol 30, pp 539-544 (1981)
- [139] GROMAK, V. I., Differential Equations Vol 11, pp 285-287 (1975).
- [140] GROMAK, V. I., Differential Equations Vol 14, pp 1510-1513 (1977).
- [141] AIRAULT, H., Stud. Appl. Math. Vol 6l, pp 31-53 (1979).
- [142] CLARKSON, P. A., European J. Appl. Math. Vol 1, pp 279-300 (1990).
- [143] FOKAS, A. S., ABLOWITZ, M. J., J. Math. Phys. Vol 23, pp 2033-2042 (1982).
- [144] MURATA, Y., Funkcial. Ekvac. Vol28, ppl-32 (1985).
- [145] OKAMOTO, K., J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Vol 33, pp 575-618 (1986).
- [146] OKAMOTO, K., Japan J. Math. Vol 13, pp 47-76 (1987).
- [147] ABLOWITZ, M. J., RAMANI, A., SEGUR, H. Lett. Nuovo Cimento Vol 23, pp 333-338 (1978).
- [148] ABLOWITZ, M. J., RAMANI, A., SEGUR, H., J. Math. Phys. Vol 21, pp 715-721 (1980).
- [149] HASTINGS, S. P., MCLEOD, J. B., Arch. Rational Mech. Anal. Vol 73, pp 31-51 (1980).
- [150] CLARKSON, P. A., MCLEOD, J. B., Arch. Rational Mech. Anal. Vol 103, pp 97-138 (1988).
- [151] HABERMAN, R., Stud. Appl. Math. Vol 57, pp 247-270 (1977).

- [152] ROSALES, R. R., Phys. Rev. Lett. A Vol 36l, pp 265-275 (1978).
- [153] MILES, J. W., Proc. Roy. Soc. London Ser. A Vol 361, pp 277-291 (1978).
- [154] MILES, J. W., Mech. Today Vol 5, pp 297-313 (1980).
- [155] FLASCHKA, H., NEWELL, A. C., Comm. Math. Phys. Vol 76, pp 65-116 (1980).
- [156] FOKAS, A. S., ABLOWITZ, M. J., J. Math. Phys. Vol 91, pp 381-403 (1983).
- [157] FOKAS, A. S., ABLOWITZ, M. J., Stud. Appl. Math. Vol 68, pp 1-10 (1983).
- [158] BOITI, M., PEMPINELLI, F., Nuovo Cimento Vol 51 B, pp 70-78 (1979).
Vol 56B, pp 148-156 (1980); Vol 59B, pp 40-58 (1980).
- [159] FUCHS, R., Math. Ann. Vol 63, pp 301-321 (1907).
- [160] GARNIER, R., Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Vol 29, pp 1-126 (1912).
- [161] SCHLESINGER, L., J. Für Math. Vol 141, pp 96-145 (1912).
- [162] JIMBO, M., MIWA, T., Physica D Vol 2, pp 306-352 (1981); Vol 2,
pp 407-448 (1981).
- [163] LEBEAU, G., LOCHAK, P., J. Differential Equations Vol 68, pp 344-372 (1987).
- [164] FOKAS, A. S., ZHOU, X., Clarkson Univ., Postdam, N. Y., (1990).
- [165] SULEIMANOV, B. I., Differential Equations Vol 23, pp 569-576 (1987).
- [166] GUCKENHEIMER, J., HOLMES, P., Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [167] SEGUR, H., Lectures at the International School of Physics "Enrico Fermi" , Varenna, Italy, (1980).
- [168] BOUNTIS, T. C., RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B., Phys. A Vol 128, pp 268-288 (1984).
- [169] SEN, T., TABOR, M., Phys. D Vol 44, pp 313-339 (1990).
- [170] TABOR, M., Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics, Wiley, New York, (1989).
- [171] TABOR, M., WEISS, J., Phys. Rev. A Vol 24, pp 2157-2167 (1981).

- [172] CHAZY, J., C. R. Acad. Sci. Paris Vol 149, pp 563-565 (1909).
- [173] BUREAU, F., Ann. Mat. Pura Appl. Vol 64, pp 229-364 (1964); Vol 66, pp 1-116 (1964); Vol 94, pp 344-360 (1972).
- [174] BUREAU, F., Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Vol 73, pp 335-353 (1987); Vol 91, pp 163-281 (1972).
- [175] DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., HIETARINTA, J., RAMANI, A., SCHWARZ, F., Phys. Lett. A Vol 116, pp 432-436 (1986).
- [176] DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., J. Math. Phys. Vol 24, pp 2282-2288 (1983); Vol 24, pp 2289-2295 (1983); Vol 25, pp 3470-3473 (1984).
- [177] DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., WINTERNITZ, P., J. Math. Phys. Vol 26, pp 3070-3079 (1985).
- [178] GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B., PADJEN, R., Phys. Rev. Lett. Vol 89, pp 111-113 (1982).
- [179] GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B., RAMANI, A., Phys. Rev. Lett. Vol 53, pp 1-4 (1984); Vol 49, pp 1539-1541 (1982).
- [180] GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B., RAMANI, A., HIETARINTA, J., Phys. Lett. A Vol 109, pp 81-84 (1985); Vol 53, pp 1707-1710 (1984).
- [181] GRAMMATICOS, B., MOULIN-QLLANGNIER, J., RAMANI, A., STRELCYN, J.-M., WOJCIECHOWSK, S., Phys. A vol 163, pp 683-722 (1990).
- [182] GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., Phys. Lett. A Vol 139, pp 299-303 (1989).
- [183] RAMANI, A., DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., Physica D Vol 18, pp 171-179 (1986).
- [184] RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., BOUNTIS, T. C., Phys. Rep. Vol 180, pp 159-245 (1989).
- [185] RANADA, A. F., RAMANI, A., DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., J. Math. Phys. Vol 26, pp 708-710 (1985).
- [186] YOSHIDA, H., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., Acta Appl. Math. Vol 8, pp 75-103 (1987).

- [187] YOSHIDA, H., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., *Physica D* Vol 130 pp 151-163 (1988)
- [188] YOSHIDA, H., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., HIETARINTA J., *Phys. A* Vol 144, pp 310-321 (1987).
- [189] ABLOWITZ, M. J., RAMANI, A., SEGUR, H., *J. Math. Phys.* Vol 21 pp 715 (1980).
- [190] SEGUR H., "Enrico Fermi" uluslararası okulunda verdiği ders notları Varenna , Italya (1980).
- [191] ERCOLANI, N., SIGGIA, E. D., *Physica* Vol 34D, pp 303 (1989).
- [192] TABOR, M., WEISS, J., *Phys. Rev. A* Vol 24, pp 2157 (1981).
- [193] LEVINE, G., TABOR, M., *Physica* Vol 33D, pp 189 (1988).
- [194] BOUNTIS, T., RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B., *Physica* Vol 128A pp 268 (1984).
- [195] Bu durumun [176]'da sunulan analizleri eksiktir ve burada düzeltilmiştir.
- [196] MANAKOV, S. V., *Sov. ZETPh.* Vol 67, pp 543 (1974) ; KAC, M., VAN MOERBECKE, P., *Adv. Math.* Vol 16, pp 160 (1975).
- [197] BOGOYAVLENSKY, O. I., *Phys. Lett. A* Vol 134, pp 34 { 1989).
- [198] STRELECYN, J. M., WOJCIECHOWSKI, S., *Phys. Lett. A* Vol 133, pp 207 (1988).
- [199] WARD, R. S., *Phys. Lett.* Vol. 102A, pp 279 (1984).
- [200] HIETARINTA, J., güncelleşmiş ders notları.
- [201] WEISS, J., *J. Math. Phys.* Vol 24, pp 1405 (1983); Vol 24, pp 13 {1984}; Vol 25, pp 2226 (1984); Vol 26, pp 258 (1985); Vol 26, pp 2174 (1985); Vol 27, pp 1293 (1986); Vol 2~, pp 2467 (1986); Vol 28, pp 2025 (1987); Vol 25, pp 2226-2235 (1984).
- [202] McLEOD, J. B., OLVER, P. J., *SIAM J. Math. Anal.* Vol 13, pp 212-223 (1983).
- [203] WEISS, J., Backlund transformation and the Painleve property, *Partially Integrable Differential Equations in Physics*, pp 375-411, (1990).
- [204] WARD, R. S., *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* Vol 315, pp 451-457 (1985).

- [205] DOKTOROV, E. V., YU SAKOVICH, S., J. Phys. A Vol 18, pp 3327-3334 (1985).
- [206] CLARKSON, P. A., Phys. Lett. Vol 109 A, pp 205-208 (1985).
- [207] CLARKSON, P. A., Physica Vol 18 D, pp 209-210 (1986).
- [208] HEREMAN, Willy., WEISS, J. ile özel görüşmeler.
- [209] LAVIE, M., Canadian J. Math. Vol 21, pp 235 (1969).
- [210] WEISS, J., Phys. Lett. Vol 102 A, pp 329-331 (1984).
- [211] WEISS, J., Phys. Lett. Vol 105 A, pp 387-389 (1984).
- [212] ERBAY, S., ŞUHUBİ, E. S., Int. Eng. Sci. Vol 27, pp 895-914 (1989).
- [213] MOHAMMAD, A. A., CAN, M., Exact Solutions Hirota Form Lax Pair and Similarity Reductions of the CMKdV-II Equation, Turkish J. Math. Yayına kabul edildi.
- [214] MOHAMMAD, A. A., CAN, M., Painleve Analysis and Symmetries of the Hirota-Satsuma Equation, Nonlinear J. Math. Phys. Vol 3, pp 152-156 (1996)
- [215] FUCHSSTEINER, B., The Lie Algebra of Degenerate Hamiltonian and Bi-Hamiltonian Systems, Progress of Theoretical Phys., Vol 68, pp 1082-1105 (1982).
- [216] MOHAMMAD, A. A., CAN, M., J. Phys. A: Math. Gen. Vol 28, pp 3223-3233 (1995).
- [217] ABLOWITZ, M. J., SEGUR, H., " Solitons and the Inverse Scattering Transformations", SIAM, Philadelphia (1981).
- [218] GAFFET, B., Physica Vol 26 D, pp 123-129 (1987).
- [219] GAFFET, B., J. Phys. A. Vol 21, pp 2491-2531 (1988).
- [220] NEWELL, A. C., TABOR, M., ZENG, Y. B., Pshysica Vol 29D, pp 1-68 (1987).
- [221] GIBBON, J. D., NEWELL, A. C., TABOR, M., ZENG, Y. B., Nonlinearity Vol 1 pp 481-490 (1988).
- [222] CONTE, R., Phys. Lett. Vol 134A, pp 100-104 (1988); Phys. Lett. Vol 140A, pp 383-390 (1989).
- [223] WILSON, G., Phys. Lett. Vol 132A, pp 445-450 (1988).

- [224] CLARKSON, P. A., FOKAS, A. S., ABLOWITZ, M. J., SIAM J. Appl. Math. Vol 49, pp 1188-1209 (1989).
- [225] RAMANI, A., in Systemes Dynamique Non Lineaires: Integrabilite et Comportement Qualitatif (P. Winternitz, Ed.), S.M.S. 102, Univ. Of Montreal, pp 232-239 (1986).
- [226] HIETARINTA, J., Phys. Rev. Lett. Vol 52, pp 1057-1060
- [227] CHAZY, J., Acad. Sci. Paris Vol 150, pp456-458 (1910).
- [228] CHAZY, J., Acta Math. Vol 34, pp317-385 (1911).
- [229] NEHARI, Z., Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York, (1952).
- [230] CHAKRAVARTY, S., ABLOWITZ, M. J., CLARKSON, P. A., Phys. Rev. Lett. Vol 65, pp 1085-1087 (1990).
- [231] HITCHEN, N. J., Monopoles, Minimal Surfaces and Algebraic Curves, S.M. S. 105, Univ. Of Montreal, (1987).
- [232] DAVIS, H. T., Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover, New York, (1984).
- [233] KAW, P. K., SEN, A., VALEO, E. J., Physica D Vol 9, pp 96-102 (1983).
- [234] GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., YOSHIDA, H., Phys. Lett. Vol 124A pp 65 (1987).
- [235] ZIGLIN S. L., Functional Anal. Appl. Vol 16, pp 181-189 (1983); Vol 17, pp 6-17 (1983).
- [236] CLARKSON, P., COSGROVE, C. M., J. Phys. A Vol 20, pp 2003-2024 (1987).
- [237] FORDY, A. P., PICKERING, A., Analysing negative rezonanses in the Painleve test, (1991).
- [238] CLARKSON, P. A. , Phys. Lett. A Vol 109, pp 205-208 (1985).
- [239] CLARKSON, P. A. , Physica D Vol 19, pp 447-450 (1986).
- [240] KRUSKAL, M. D., in Painleve Transcendents, their Asymptotics and Physical Applications (P. Winternitz and D. Levi, Eds.), Plenum, New York (1991).
- [241] CLARKSON, P. A., J. Phys. A Vol 22, pp 3821-3848 (1989).

- [242] POGREBKOV A. K Inverse Problems Vol 5:L7-L10 (1989).
- [243] WINTNER, A., Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton U.P., Princeton, (1941).
- [244] WINTERNITZ, P., in Nonlinear Phenomena (K. B. Wolf, Ed.), Lecture Notes in Phys. 189, Springer- Verlag, Berlin, pp 263-331 (1983).
- [245] BOUNTIS, T., C PAPAGEORGIOU, V., WINTERNITZ, P., J. Math. Phys. Vol 27, pp 1215-1224 (1986).
- [246] DEL OLMO, M. A., RODRIGUEZ, M. A., WINTERNITZ, P., J. Math. Phys. Vol 27, pp 14-23 (1986).
- [247] HARNARD, J., WINTERNITZ, P., ANDERSON, R. L. , J. Math. Phys. Vol 24, pp 1062-1072 (1983).
- [248] SHNIDER, S., WINTERNITZ, P., J. Math. Phys. Vol 25, pp 3155-3165 (1984).
- [249] ZIGLIN, L., Trans. Moscow Math. Soc. Vol 1, pp 283 (1982); MEL'NIKOV, Trans. Moscow Math. Soc. Vol 12, pp1 (1963).
- [250] RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., YOSHIDA, H., 'Rigorous non-integrability related to singularity analysis', Proceedings of the International Workshop on Nonlinear Evolution Equations, Como, July (1988).
- [251] ABLOWITZ, M. J., LADIK, J. F., J. Math. Phys. Vol 16, pp 598-603 (1975).
- [252] ROEKAERTS, D., YOSHIDA, H., J. Phys. A. Vol 21, pp 3547 (1988).
- [253] ITO, H., Kodai Math. J. Vol 8, pp 120 (1985).
- [254] ROD, D. L., 'On a theorem of Ziglin in Hamiltonian dynamics'.

ÖZGEÇMİŞ

1969 Yılında Ankara’da doğan Abdullah TOPÇU 1987 yılında Işıklar Askeri Lisesinden mezun oldu. 1992 yılında Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Aynı yıl içerisinde Kuleli Askeri Lisesine Matematik Öğretmeni olarak atandı. Bu görevini halen sürdürmektedir.

