

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EKSENEL SİMETRİK YÜKLER ALTINDA
SİLİNDİRİK KABUK PROBLEMLERİNİN SONLU
FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. H. Volkan AÇAR**

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2002

**EKSENEL SİMETRİK YÜKLER ALTINDA SİLİNDİRİK
KABUK PROBLEMLERİNİN SONLU FARKLAR
YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. H. Volkan AÇAR
(501991280)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2002**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Metin AYDOĞAN (İ.T.Ü)
Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü)**

MAYIS 2002

ÖNSÖZ

Bu çalışmada silindirik kabuklar ve sonlu farklar yöntemi hakkında teorik bilgiler verilerek bu bilgiler ışığında pratikte karşılaşılmaması muhtemel silindirik kabuk problemleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Başta yüksek lisans tez çalışmam sırasında samimiyetini ve yakın ilgisini esirgemeyen, değerli bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BAKİOĞLU 'na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim sırasında her konuda yardımlarını gördüğüm sevgili arkadaşım Kıvanç KOCACIK 'a teşekkür ederim.

Öğrenimimin bu aşamaya gelmesi için büyük fedakarlıklarda bulunan babam İlköğretim Müfettişi Ramazan AÇAR 'a teşekkür ederim.

Hayatımdaki tüm önemli kararları alırken fikirlerinden ve hayat tecrübesinden yararlandığım ağabeyim Ziraat Mühendisi Hakan AÇAR 'a sevgi ve saygılarımı sunarım.

Tüm hayatım boyunca bana en yakın olan insanlar, herşeyimi paylaştığım, tez çalışmam sırasında da üzerimdeki sorumlulukları alıp bana vakit kazandıran sevgili kardeşlerim Dr. Kamil Gökhan AÇAR ve Ekonomist Sonkan AÇAR 'a sevgilerimi sunarım.

Son olarak bu tez çalışmasını, beni dünyaya getiren ve tüm eğitim hayatım boyunca her konuda beni destekleyen, hakkını ödeyemeyeceğim sevgili annem Emekli Öğretmen Ülkü AÇAR 'a ithaf ederim.

MAYIS 2002

H. Volkan AÇAR

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Tanımlar ve Notasyon	1
1.2. Sonlu Farklar Yöntemi	10
1.2.1. İnterpolasyon Polinomu ve Newton Formu	11
1.2.2. İleriye Doğru Fark Formülleri	14
1.2.3. Geriye Doğru Fark Formülleri	18
1.2.4. Merkezi Fark Formülleri	21
1.2.5. Yaklaşık Kısmi Türev	25
2. SİLİNDİRİK KABUKLARIN GENEL TEORİSİ	34
2.1. Eksenine Göre Simetrik Olarak Yüklenmiş Silindirik Kabuklar	34
2.2. Dairesel Silindirik Kabukların Simetrik Deformasyonunun Özel Halleri	40
2.2.1. Düzgün Dağılmış Çizgisel Yük Altındaki Silindirik Kabuk	40
2.2.2. Sabit Cidar Kalınlıklı Silindirik Tanklar	44
2.2.3. Değişken Cidar Kalınlıklı Silindirik Tanklar	46
3. SAYISAL ÖRNEKLER	52
3.1. Eksenine ve orta kesitine göre çizgisel simetrik yüklü silindirik kabuk	52
3.2. Ortasından belli bir bölgede eksenine göre simetrik yüklü silindirik kabuk	57
3.3. Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk	64
3.4. İç sıvı basıncı altındaki sabit cidar kalınlıklı silindirik tank	71
3.5. İç sıvı basıncı altındaki düzgün değişen cidar kalınlıklı silindirik tank	77
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	87
KAYNAKLAR	89
EKLER	90
ÖZGEÇMİŞ	110

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1.2.1.1 Bölünmüş farkların elde edilişi	14
Tablo 2.2.3.1 ψ_i fonksiyonlarının tablosu	50
Tablo 3.1.1 Kesin çözümle elde edilen değerler	53
Tablo 3.1.2 Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler	56
Tablo 3.2.1 Kesin çözümle elde edilen değerler	60
Tablo 3.2.2 Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler	63
Tablo 3.3.1 Kesin çözümle elde edilen değerler	68
Tablo 3.3.2 Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler	70
Tablo 3.4.1 Kesin çözümle elde edilen değerler	72
Tablo 3.4.2 Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler	75
Tablo 3.5.1 Kesin çözümle elde edilen değerler	82
Tablo 3.5.2 Eşitliklerde kullanılacak katsayılar	84
Tablo 3.5.3 Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler	86
Tablo A1.1 Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları	90
Tablo A1.2 Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları	91
Tablo A1.3 Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları	92
Tablo A2.1 Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları	93
Tablo A2.2 Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları	95
Tablo A2.3 Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları	97
Tablo A3.1 Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları	99
Tablo A3.2 Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları	100
Tablo A3.3 Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları	101
Tablo A4.1 Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları	102
Tablo A4.2 Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları	103
Tablo A4.3 Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları	105
Tablo A5.1 Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları	106
Tablo A5.2 Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları	107
Tablo A5.3 Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları	108

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1.1 : Kabuk üzerinde alınan sonsuz küçük eleman	2
Şekil 1.2.2 : Birim uzunluk için oluşacak bileşke kuvvet ve momentler ..	3
Şekil 1.1.3 : Sadece dönme durumu	4
Şekil 1.1.4 : Dönme ve ötelenmenin beraber olduğu durum	6
Şekil 1.1.5 : Silindirik kabukta koordinat eksenleri	8
Şekil 1.1.6 : Pozitif gerilme yönleri	9
Şekil 1.1.7 : Pozitif kuvvet ve moment yönleri	9
Şekil 1.2.2.1 : İleriye doğru fark formülleri	17
Şekil 1.2.3.1 : Geriye doğru fark formülleri	21
Şekil 1.2.4.1 : Merkezi fark formülleri	25
Şekil 1.2.5.1 : İki değişkenli fonksiyon için sonlu fark ağı	26
Şekil 1.2.5.2 : D_x kısmi türevi	26
Şekil 1.2.5.3 : D_y kısmi türevi	27
Şekil 1.2.5.4 : D_{xy}^2 kısmi türevi	28
Şekil 1.2.5.5 : D_{xx}^2 ve D_{yy}^2 kısmi türevleri	28
Şekil 1.2.5.6 : D_{xxy}^3 ve D_{xyy}^3 kısmi türevleri	30
Şekil 1.2.5.7 : D_{xxyy}^4 kısmi türevi	30
Şekil 1.2.5.8 : D_{xxx}^3 ve D_{yyy}^3 kısmi türevleri	31
Şekil 1.2.5.9 : D_{xxxy}^4 ve D_{xyyy}^4 kısmi türevleri	32
Şekil 1.2.5.10 : D_{xxxx}^4 ve D_{yyyy}^4 kısmi türevleri	33
Şekil 2.1.1 : Silindirik kabuk üzerinde alınan diferansiyel eleman	34
Şekil 2.1.2 : Sonsuz uzun dairesel boru	38
Şekil 2.1.3 : ϕ ve ψ fonksiyonları	40
Şekil 2.2.1.1 : Çizgisel yüklü uzun silindirik kabuk	40
Şekil 2.2.1.2 : Deformasyon eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramları	42
Şekil 2.2.1.3 : Düzgün dağılmış simetrik yük	43
Şekil 2.2.2.1 : Sabit duvar kalınlıklı silindirik tank	44
Şekil 2.2.3.1 : Değişken duvar kalınlıklı silindirik tank	47
Şekil 3.1.1 : Halka yükle yüklü silindirik kabuk	52
Şekil 3.1.2 : Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	54
Şekil 3.2.1 : Ortasından belli bir bölgede simetrik yüklü silindirik kabuk	57
Şekil 3.2.2 : Yükün uygulandığı bölgede integrasyon sınırları	58
Şekil 3.2.3 : Yükün uygulandığı bölge dışında integrasyon sınırları	59
Şekil 3.2.4 : Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	61
Şekil 3.3.1 : Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk	64
Şekil 3.3.2 : Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	68
Şekil 3.4.1 : Sabit kalınlıklı silindirik tank	71
Şekil 3.4.2 : Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	74
Şekil 3.5.1 : Değişken kalınlıklı silindirik tank	77

Şekil 3.5.2	: Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı	84
Şekil A1.1	: Çökme değerlerinin karşılaştırması	90
Şekil A1.2	: Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması	91
Şekil A1.3	: Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması	92
Şekil A2.1	: Çökme değerlerinin karşılaştırması	93
Şekil A2.2	: Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması	95
Şekil A2.3	: Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması	97
Şekil A3.1	: Çökme değerlerinin karşılaştırması	99
Şekil A3.2	: Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması	100
Şekil A3.3	: Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması	101
Şekil A4.1	: Çökme değerlerinin karşılaştırması	102
Şekil A4.2	: Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması	103
Şekil A4.3	: Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması	104
Şekil A5.1	: Çökme değerlerinin karşılaştırması	106
Şekil A5.2	: Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması	107
Şekil A5.3	: Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması	108

SEMBOL LİSTESİ

a	: Kabuk silindir yarıçapı
C₁, C₂,...	: İntegrasyon sabitleri
d	: Tank yüksekliği
D	: Kabuk eğilme rijitliği
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
h	: kabuk kalınlığı, x eksenindeki pivot noktası aralığı
k	: y eksenindeki pivot noktası aralığı
ℓ	: Kabuk uzunluğu
M_x	: x eksenine dik kesitteki eğilme momenti
M_φ	: y eksenine dik kesitteki eğilme momenti
M_{xφ}, M_{φx}	: Burulma momentleri
N_x	: x eksenine dik kesitteki normal kuvvet
N_φ	: y eksenine dik kesitteki normal kuvvet
N_{xφ}, N_{φx}	: Membran kesme kuvvetleri
P	: Çizgisel yük
Q_x	: x eksenine dik kesitteki kesme kuvveti
Q_φ	: y eksenine dik kesitteki kesme kuvveti
r_x, r_y	: Orta yüzeyin sırasıyla xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik yarıçapları
u	: Deformasyonun x eksenindeki bileşeni
Z	: Yayılı yük
v	: Deformasyonun y eksenindeki bileşeni
ω	: Deformasyonun z eksenindeki bileşeni
ε_x, ε_y	: Sırasıyla x ve y eksenlerindeki birim deformasyon sabitleri
ε₁, ε₂	: Kabuk orta yüzeyinin sırasıyla x ve y eksenlerindeki birim deformasyon sabitleri
ν	: Poisson oranı
χ_x, χ_y	: Kabuk orta yüzeyinin sırasıyla xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik değişimleri
χ_{xy}	: Kabuk orta yüzeyinin burulması
α	: Sıvı seviyesini gösteren açı
γ	: Kayma birim deformasyonu, sıvı birim hacim ağırlığı
φ	: Deformasyonun hesaplanacağı noktayı gösteren açı
Δ	: İleriye doğru fark operatörü
J	: Geriye doğru fark operatörü
δ	: Merkezi fark operatörü
μ	: Ortalama operatörü

EKSENEL SİMETRİK YÜKLER ALTINDA SİLİNDİRİK KABUK PROBLEMLERİNİN SONLU FARKLAR YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada pratikte karşılaşılabilecek olası eksenel simetrik yüklü silindirik kabuk problemleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak çözülmüş elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler yardımıyla değerlendirilmiştir.

Birinci bölümün ilk kısmında, öncelikle tüm kabuk türleri için kullanılan temel tanımlar ve formüller verilmiştir. Daha sonra bu tanım ve formüllerin silindirik kabuklara uyarlanması yapılarak sonuçların değerlendirilmesi sırasında kullanılacak pozitif gerilme, kuvvet ve moment yönleri tanımlanmıştır.

Birinci bölümün ikinci kısmında ise sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Bu yöntemin kullanımı sırasında yapılan kabuller anlatılarak sonuçların nasıl hassaslaştırılabileceği gösterilmiştir. Aynı nokta sayısına sahip merkezi fark formüllerinin ileriye ve geriye doğru fark formüllerinden özellikle sınır değer problemlerinde daha hassas sonuçlar vereceği gösterilerek bu çalışmada merkezi fark formüllerinin kullanılmasına karar verilmiştir. Son olarak kısmi diferansiyel denklemlerin sonlu farklar şeklinde yazılmasında kullanılacak yaklaşık kısmi türev formülleri merkezi fark formülleri kullanılarak elde edilmiştir.

İkinci bölüm silindirik kabukların genel teorisine ayrılmıştır. Bu bölümde silindirik kabuk problemleri içerisinde karşılaşılabilecek olası daha yüksek olan eksenine göre simetrik yüklü silindirik kabuklar incelenmiştir. Kabuktaki eğilmenin lokal karakterinin hangi parametrelere bağlı olduğu gösterilerek kısa ve uzun kabuk tanımları yapılmıştır. Daha sonra yükleme şekline göre değişen bazı türler için kullanılabilecek pratik formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde genel teorisi verilen simetrik yükler altındaki silindirik kabuk problemlerine ait sayısal örnekler yer almaktadır. Bu sayısal örnekler hem kesin çözümleri hem de sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen yaklaşık çözümleri içermektedir.

Sonuçlar ve tartışma bölümünde eklerde verilen tablo ve şekiller kullanılarak her bir problem için yapılan değerlendirmeler yer almaktadır.

SOLUTION OF SYMMETRICALLY LOADED CYLINDRICAL SHELL PROBLEMS BY USING FINITE DIFFERENCE METHOD

SUMMARY

In this study, the symmetrically loaded cylindrical shell problems that are encountered during practical study are solved by analytic and finite difference methods. The results are evaluated by using tables and graphics.

In the beginning part of the first chapter, the basic definitions and formulas for all kinds of shell problems are given. Then adapting these definitions and formulas to cylindrical shells; positive stress, force and moment acceptances which are used while the results are being evaluated are defined.

In the second part of the first chapter, information about finite difference method is given. Giving the acceptances that are made while using this method, the way how the results are made accurate is shown. The error orders which are made when using forward, backward and central difference formulas are obtained and showing that the central differences are more accurate than forward and backward differences especially for boundary value problems, use of central differences are decided for this study. Finally, using central differences, approximate partial differential formulas which are used when the partial differential equations are written as finite differences are obtained.

The second chapter is used for general theory of cylindrical shells. In this chapter, symmetrically loaded cylindrical shells which have more probability to be encountered are studied. Showing that the local character of the bending of cylindrical shell depends on which parameters, the definitions of long and short shell are made. Then practical formulations are given for some kinds of problems which changes with load style.

In the third chapter, numerical examples of cylindrical shells whose theory is given in the second chapter are located. These numerical examples contain both analytic solutions and approximate solutions which are obtained by using finite difference method.

In the last chapter, the evaluations which are obtained by using tables and graphics given in the appendixes are located.

1. GİRİŞ

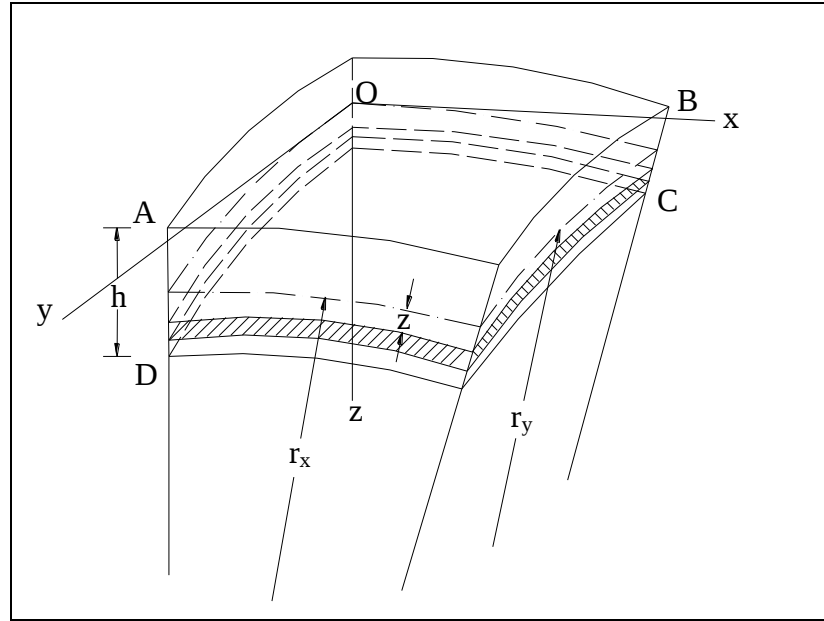
Dairesel kesitli yüzeysel taşıyıcı elemanların boyutlandırılması sırasında karşılaşılan eksenel simetrik yüklü silindirik kabuk problemlerine pratikte çok sık rastlanır. Buhar ve su basıncı altındaki silindirik kazanlar, iç sıvı basıncı altındaki düşey eksenli silindirik kaplar bu tür problemlere örnek olarak verilebilir. Bu problemlerin analitik olarak çözümü çoğu zaman karmaşık ve zaman alıcı işlemleri gerektirmektedir. Üstelik pratikteki pek çok silindirik kabuk probleminin analitik çözümü ya yoktur yada bir takım basitleştirmelerle mümkündür. Bu nedenle silindirik kabuk problemlerin çözümü için sayısal yöntemlerin kullanılması çoğu zaman daha elverişli olmaktadır. Bununla beraber sayısal yöntemlerin en büyük gereksinimi olan bilgisayarların, son yıllarda bilgisayar teknolojilerinde gerçekleşen büyük ilerlemeler sayesinde, sadece gelişmiş araştırma laboratuvarlarında bulunan bir araç olmaktan çıkıp, standart ev kullanıcılarının bile ulaşabileceği bir hale gelmesi sayısal yöntemlerin önemini artırmıştır.

Sayısal yöntemler içerisinde en çok bilinen ve kullanılan yöntemlerden biri sonlu farklar yöntemidir. Bunun en büyük nedeni sonlu farklar yönteminin analitik çözümler için kullanılan diferansiyel denklemler üzerine kolaylıkla uygulanabilmesidir. Bu yüzden silindirik kabuk problemleri üzerine sonlu farklar yönteminin uygulanabilmesi için analitik çözümde kullanılan temel tanım ve teorilerin bilinmesi gerekir. Bu amaçla bundan sonraki bölümde silindirik kabuklarla ilgili temel tanımlar ve kullanılacak notasyon anlatılacaktır. Daha sonraki bölümde ise sonlu farklar yöntemi hakkında bilgi verilecektir.

1.1 Tanımlar ve Notasyon

Kabuklar için kullanılan notasyon sistemi plaklar için kullanılan klasik notasyona oldukça benzer. Plaklarda olduğu gibi kabuklar için de kalınlık h ile gösterilir ve kalınlık boyutunun kabuğun diğer boyutlarına ve eğrilik yarıçapına göre oldukça küçük olduğu kabul edilir. Kabuk kalınlığını ortadan ikiye ayıran yüzey, orta yüzey

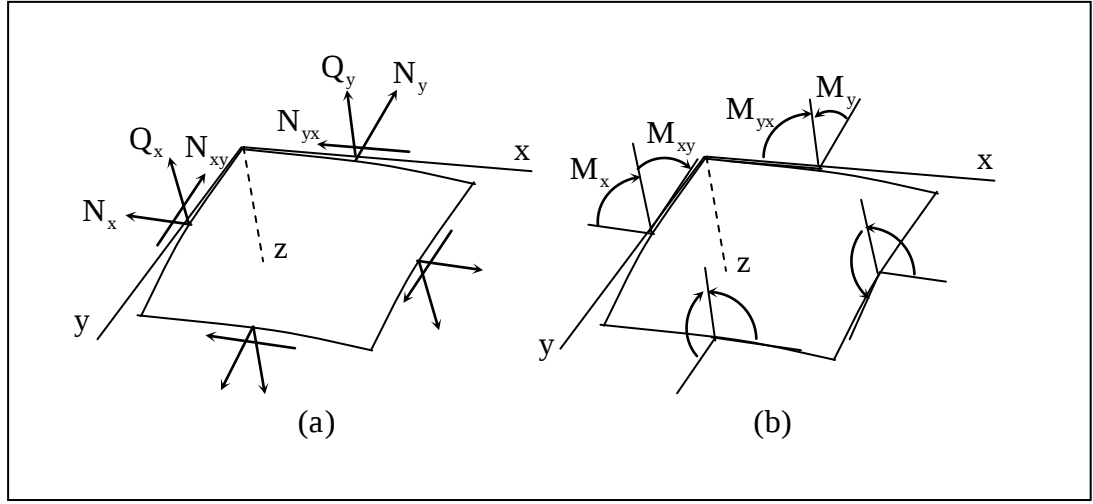
olarak adlandırılır. Herbir noktasındaki orta yüzeyinin formu ve kalınlığı belli olan kabuk tamamen tanımlanmış olur.



Şekil 1.1.1 (Kabuk üzerinde alınan sonsuz küçük eleman)

İç kuvvetleri analiz etmek için kabuk üzerinde Şekil 1.1.1 de görüldüğü gibi sonsuz küçük bir diferansiyel eleman seçelim. Bu eleman kabuğun orta yüzeyine dik olan iki çift komşu düzlemlerle tanımlıdır. Bu düzlemler aynı zamanda asal eğrilikleri bulundururlar. x ve y eksenlerini O noktasında eleman yüzeyleri ile orta yüzeyin ara kesitine teğet olacak şekilde, z eksenini de orta yüzeye dik olacak şekilde seçelim. xz ve yz düzlemlerindeki eğrilik yarıçaplarını sırasıyla r_x ve r_y olarak isimlendirelim. Elemanın düzlem yüzlerinde oluşacak gerilmeleri x , y ve z eksenlerindeki bileşenlerine ayıralım. Bu gerilme bileşenleri için mukavemette klasik olarak kullanılan σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, τ_{xz} sembolleri kullanılacaktır. Bu notasyon kullanılarak normal kesitlerde birim uzunluk için oluşacak bileşke kuvvetler Şekil 1.1.2a da gösterilmiştir.

Büyüklikleri gösteren sembollerin altında tek indis bulunduğunda indis büyüklüğün doğrultusunu göstermektedir. İki indis bulunduğunda birinci indis büyüklüğün bulunduğu yüzeyin normalini ikinci indis ise büyüklüğün doğrultusunu göstermektedir.



Şekil 1.1.2 (Birim uzunluk için oluşacak bileşke kuvvet ve momentler)

Tüm bileşke kuvvetler, kesitlerinde oluşan normal ve kayma gerilmelerinin kesit alanı boyunca integrasyonu sonucunda bulunabilir. Buna göre sırasıyla normal kuvvetler ve kesme kuvvetleri için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.1.1a)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.1.1b)$$

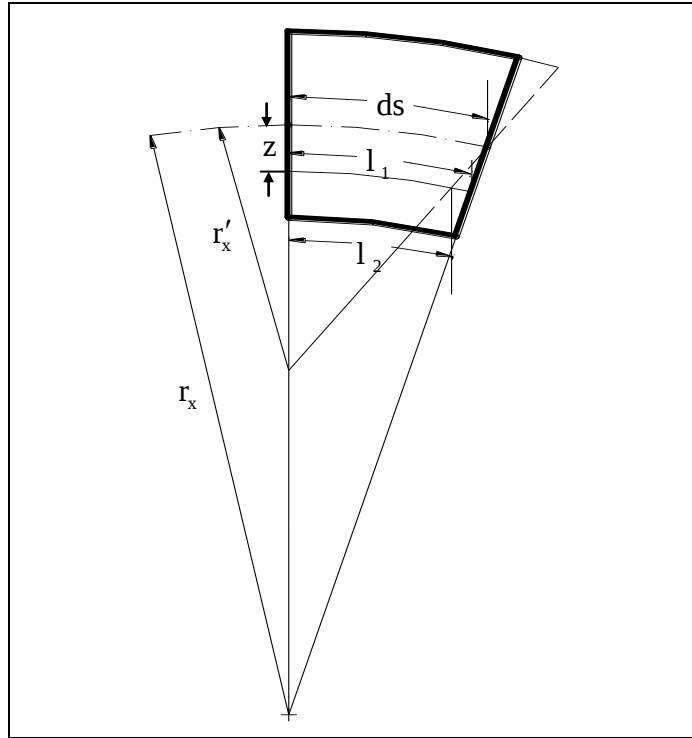
$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.1.1c)$$

Formüllerdeki z/r_x ve z/r_y terimleri Şekil 1.1.1 deki elemanın orta yüzeye dik kesitlerinin trapez formundan dolayı hesaba katılmıştır. Bu nedenle kesme kuvvetleri N_{xy} ve N_{yx} genelde eşit değildir. Bununla beraber $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ eşitliği geçerliliğini korumaktadır. Daha önceden h kalınlığının esas eğrilik yarıçapları r_x ve r_y ye göre çok küçük kabul edildiği hatırlanırsa formüllerdeki z/r_x ve z/r_y terimlerinin ihmal edilebileceği söylenebilir. Bu durumda N_{xy} ve N_{yx} kesme kuvvetleri için, plaklarda olduğu gibi $N_{xy} = N_{yx}$ eşitliği geçerliliğini koruyacaktır. Orta yüzeye dik kesitlerde birim uzunluk için oluşacak burulma ve eğilme momentleri için ise aşağıdaki formüller yazılabilir. (Şekil 1.1.2b)

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.1.2a)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (1.1.2b)$$

Burada da z/r_x ve z/r_y terimleri ihmal edilirse, burulma momentleri için $M_{xy} = -M_{yx}$ eşitliği yazılabilir. Kabuğun eğilmesi hesaplanırken, doğrusal elemanların, örneğin Şekil 1.1.1 deki AD ve BC kenarlarının, kabuğun orta yüzeyine dik olduğu, eğilme sırasında doğrusal formlarını koruyacağı ve eğilme sonrasında da deforme olmuş orta yüzeye dik kalacakları kabul edilecektir.



Şekil 1.1.3 (Sadece dönme durumu)

Kolay anlaşılması açısından en basit durum olan Şekil 1.1.1 deki elemanın orta yüzeye dik yüzlerinin sadece orta yüzeye yaptıkları arakesit çizgileri etrafında döndüğü durumu düşünelim. r'_x ve r'_y eğilmeden sonraki eğrilik yarıçapları olmak üzere, Şekil 1.1.1 de taralı çizgilerle gösterilen ve orta yüzeyden z uzaklığında olan bir elemanda oluşacak ϵ_x ve ϵ_y birim deformasyonlarını elde etmeye çalışalım. Şekil 1.1.3 deki üçgenlerin benzerliği kullanılarak l_1 ve l_2 uzunlukları için

aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$l_1 = ds\left(\frac{r_x - z}{r_x}\right) \quad l_2 = ds\left(\frac{r'_x - z}{r'_x}\right)$$

Bu eşitlikler birim deformasyon tanımı düşünülerek yazılabilecek $\varepsilon = (l_{\text{son}} - l_{\text{ilk}}) / l_{\text{ilk}}$ bağıntısında yerlerine konursa, orta yüzeyden z uzaklığında olan bir elemanda oluşacak ε_x ve ε_y birim deformasyonları için aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\varepsilon_x = -\frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) \quad \varepsilon_y = -\frac{z}{1 - \frac{z}{r_y}} \left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y} \right) \quad (1.1.3)$$

Dönmenin yanında elemanın orta yüzeye dik kenarları kendilerine paralel olacak şekilde orta yüzeydeki uzama nedeniyle ötelendiği durumda ise ε_1 ve ε_2 sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusunda orta yüzeydeki birim deformasyon sabitleri olmak üzere, l_1 ve l_2 uzunlukları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir. (Şekil 1.1.4)

$$l_1 = ds\left(1 - \frac{z}{r_x}\right) \quad l_2 = ds(1 + \varepsilon_1)\left(1 - \frac{z}{r'_x}\right)$$

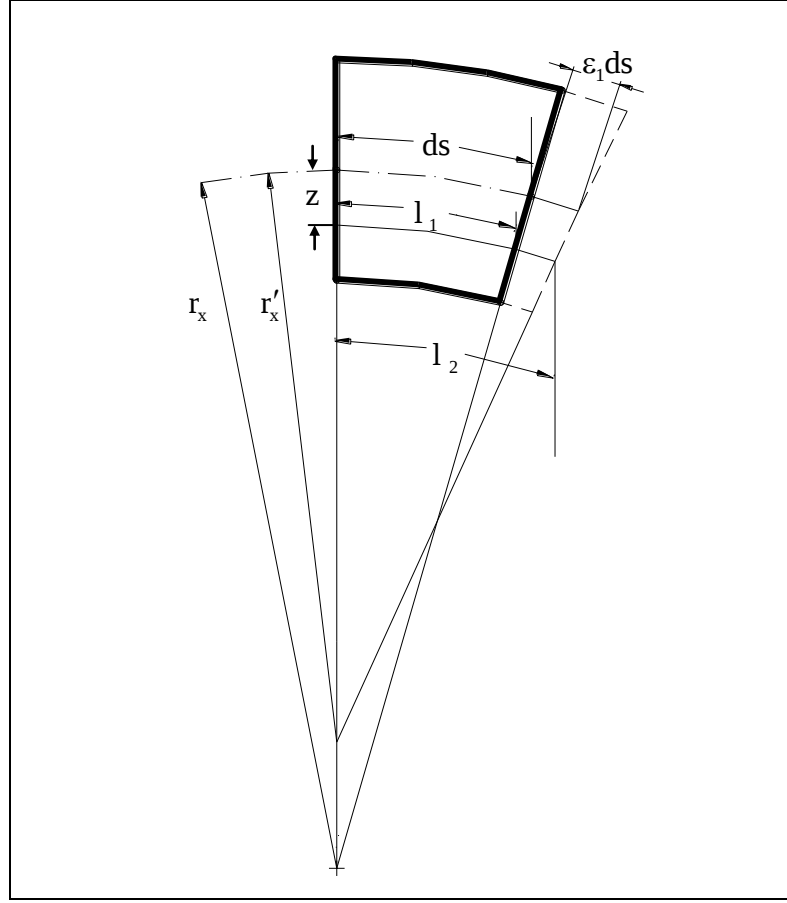
Bu eşitlikler yukarıda olduğu gibi birim deformasyon bağıntısında yerlerine konursa

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1}{1 - \frac{z}{r_x}} - \frac{z}{1 - \frac{z}{r_x}} \left[(1 + \varepsilon_1) \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right] \quad (1.1.4)$$

bağıntısı elde edilir. Benzer bağıntı ε_y için de yazılabilir.

Daha önce olduğu gibi z/r_x ve z/r_y terimleri ve ε_1 'in eğrilik değişimi üzerindeki etkisi ihmal edilirse ε_x ve ε_y için kullanılacak bağıntılar aşağıda verilen şekle dönüşecektir.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 - z\left(\frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x}\right) = \varepsilon_1 - \chi_x z \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 - z\left(\frac{1}{r'_y} - \frac{1}{r_y}\right) = \varepsilon_2 - \chi_y z \quad (1.1.5)$$



Şekil 1.1.4 (Dönme ve ötelenmenin beraber olduğu durum)

(1.1.5) bağıntılarındaki χ_x ve χ_y terimleri eğriliğin sırasıyla x ve y eksenleri doğrultusundaki değişimini göstermektedir. Elemana dik normal gerilmelerin oluşmadığı varsayılırsa ($\sigma_z = 0$) (1.1.5) eşitliklerinin gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında yerlerine konması sonucunda, elemanın gerilme bileşenleri için kullanılacak aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_1 + \nu\epsilon_2 - z(\chi_x + \nu\chi_y)] \quad (1.1.6a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\epsilon_2 + \nu\epsilon_1 - z(\chi_y + \nu\chi_x)] \quad (1.1.6b)$$

(1.1.6a) ve (1.1.6b) eşitlikleri (1.1.1a) ve (1.1.2a) denklemlerinde yerlerine konup z/r_x ve z/r_y terimleri ihmal edilirse

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \quad N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (1.1.7a)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_y) \quad M_y = -D(\chi_y + \nu\chi_x) \quad (1.1.7b)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada D plaklarda olduğu gibi kabuğun eğilme rijitliğidir.

Şimdi daha genel bir durum olarak elemanın orta yüzeye dik yüzlerinde normal gerilmelere ek olarak kayma gerilmelerinin de oluştuğunu düşünelim. γ kabuğun orta yüzeyindeki kayma birim deformasyonu ve $\chi_{xy}dx$ BC kenarının Oz ye göre x eksenini etrafındaki dönmesi olmak üzere

$$\tau_{xy} = (\gamma - 2z\chi_{xy})G \quad (1.1.8)$$

eşitliği yazılabilir. Burada G kabuğun yapıldığı malzemenin kayma modülüdür ve aşağıdaki bağıntıyla tanımlıdır.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

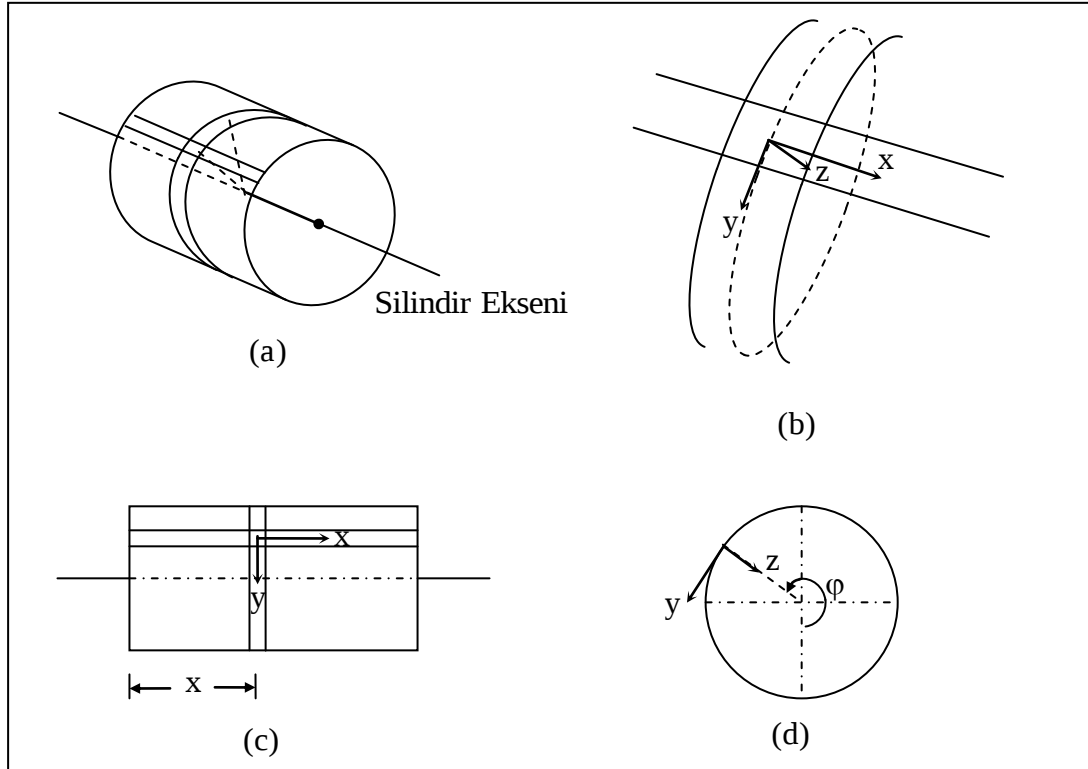
(1.1.8) eşitliği daha önceki basitleştirmelerde dikkate alınarak (1.1.1b) ve (1.1.2b) eşitliklerinde yerlerine konursa

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{\gamma h E}{2(1+\nu)} \quad (1.1.9)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\chi_{xy} \quad (1.1.10)$$

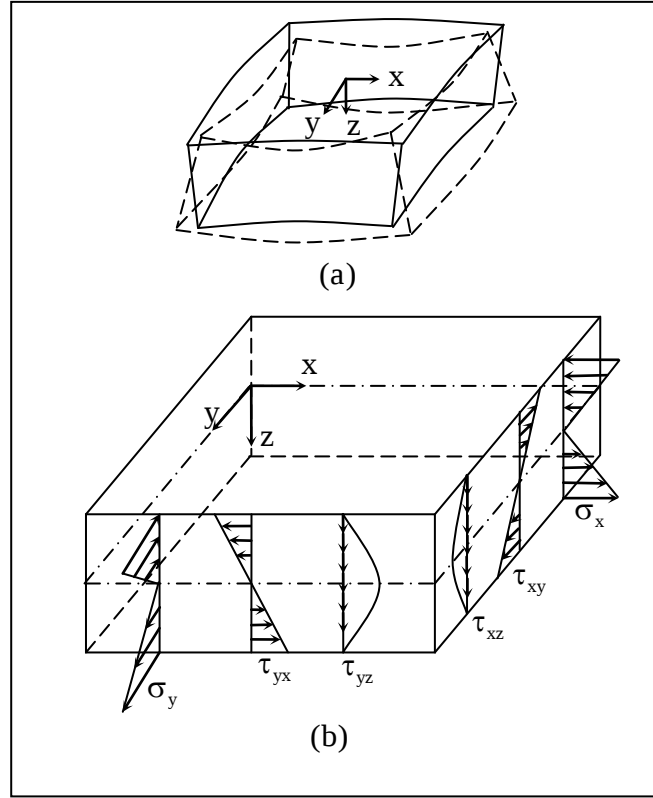
eşitlikleri elde edilir. Böylelikle kabuğun eğilmesi sırasında orta yüzeye dik doğrultuda olan doğrusal kenarların doğru formunu koruyacağı ve deforme olmuş orta yüzeye deformasyondan sonra yine dik kalacağı varsayılarak, birim uzunluk için N_x, N_y, N_{xy} bileşke kuvvetleriyle M_x, M_y, M_{xy} bileşke momentleri altı büyüklük cinsinden elde edilmiş olur. Bu büyüklüklerden ilk üçü orta yüzeyin birim deformasyon bileşenleri olan $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ ile ilgili, kalan üçü ise orta yüzeyin eğrilik değişimleriyle burulmasını tanımlayan $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ ile ilgili büyüklükleridir.

Buraya kadar anlatılan tanım ve formüller tüm kabuk türleri için genel olarak verilmiştir. Silindirik kabuk durumunda kartezyen koordinat takımı plaklardan farklı olarak sabit değildir. Kabuk üzerindeki herhangi bir nokta, belli bir referans noktasından (genelde bakış yönüne göre silindirin sol ucu) ölçülen yatay x mesafesiyle, silindir eksenine dik düzlemde genelde silindirin en alt noktasından ölçülen ϕ açısıyla gösterilir. Kartezyen koordinat takımının silindirik kabuk üzerindeki herhangi bir noktaya göre değişimi Şekil 1.1.5 de gösterilmiştir.



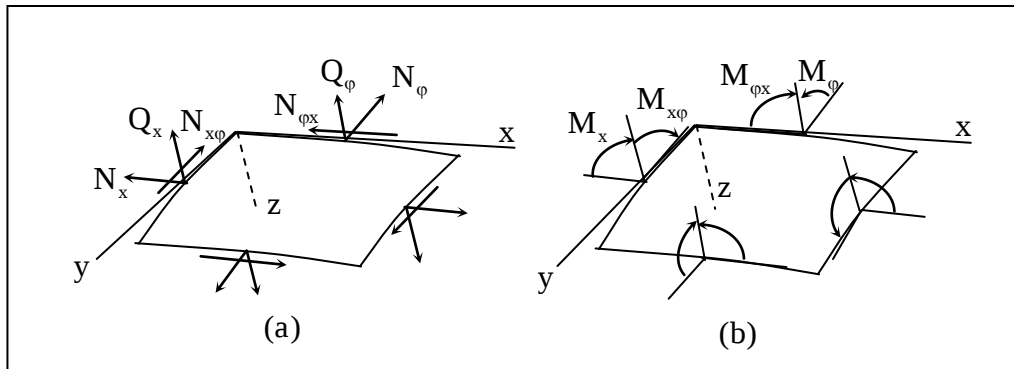
Şekil 1.1.5 (Silindirik kabukta koordinat eksenleri)

Silindirik kabukların boyutlandırma problemlerinde kullanılacak formülleri çıkarmadan önce formüllerdeki değişkenler (dış yük, gerilme, bileşke kuvvet ve momentler) için kabul edilecek pozitif yönleri açıklayalım. Burada dış yük için pozitif yön Şekil 1.1.5 teki kartezyen koordinat takımının pozitif eksen yönleri olarak kabul edilecektir. Buna göre silindir eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş kabukta pozitif değerli dış yük $+z$ yönünde, yani silindir dışından eksenine doğru olacaktır. Şekil 1.1.6 da pozitif dış yük altında silindir üzerinde alınacak bir diferansiyel elemanın yapacağı deformasyon sonucunda pozitif koordinatlara sahip herhangi bir noktada oluşacak gerilmelerin yönleri görülmektedir.



Şekil 1.1.6 (Pozitif gerilme yönleri)

Pozitif gerilmelerin (1.1.1) ve (1.1.2) bağıntılarında yerlerine konması sonucu elde edilecek pozitif bileşke kuvvet ve momentler Şekil 1.1.7 de gösterilmiştir. Plaklardan farklı olarak y ekseninin konumu ϕ açısıyla değiştiği için silindirik kabuklarda y indisi yerine ϕ kullanılır. Dikkati çeken bir diğer nokta da Şekil 1.1.7 deki $M_{x\phi}$ momentinin Şekil 1.1.6 daki τ_{xy} kayma gerilmelerinin yaratacağı momentle ters yönde olduğudur. Bunun nedeni (1.1.2b) bağıntılarında M_{xy} için yazılan integrasyonun önündeki eksi işaretidir.



Şekil 1.1.7 (Pozitif kuvvet ve moment yönleri)

$$f'_k = \frac{1}{h}$$

Şekil 1.1.7 den yararlanarak bileşke kuvvet ve momentlerin pozitif yönleri için çeşitli pratik kurallar üretilebilir. Buna göre normal kuvvetler için kesitin dış normalinin yönü pozitif yöndür. N_{xy} ve N_{yx} kesme kuvvetleri için kullanılacak pozitif yönler ise sağ el kuralı kullanılarak bulunabilir. N_{xy} için pozitif yön sağ elin baş parmağı $+z$ yönünü gösterirken kalan dört parmağın göstereceği yöndür. N_{yx} için pozitif yön ise sağ elin baş parmağı $-z$ yönünü gösterirken kalan dört parmağın göstereceği yöndür. Kesme kuvvetlerinin pozitif yönlerini elde etmek için öncelikle bakış yönlerinin belirlenmesi gerekmektedir. Q_x in pozitif yönünü elde etmek için kullanılacak bakış yönü sağ elin dört parmağı x ekseninin pozitif ucundan z ekseninin pozitif ucuna doğru giderken baş parmağın göstereceği yöndür. Q_y nin pozitif yönünü elde etmek için kullanılacak bakış yönü ise sağ elin dört parmağı y ekseninin pozitif ucundan z ekseninin pozitif ucuna doğru giderken baş parmağın göstereceği yöndür. Kesme kuvvetleri için pozitif yönler, bu şekilde belirlenen bakış yönlerinden bakıldığında kesitleri saat ibreleri yönünde döndürecek yönlerdir. Burulma momentleri için pozitif yön, sağ elin baş parmağı kesitin dış normalini gösterirken dört parmağın göstereceği yöndür. Eğilme momentleri için pozitif yön ise daima silindirin iç yüzeyinde uzama yapacak yöndür.

1.2 Sonlu Farklar Yöntemi

Kapalı bir formda integre edilemeyen bir diferansiyel denklemin temsil ettiği bir teknik problemle karşılaşıldığında yaklaşık çözüm metotları kullanılarak çözüme devam edilir.

Diferansiyel denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü, bilinmeyen fonksiyonun bazı noktalardaki değerlerinin elde edilmesine dayanır. Bilinmeyen fonksiyonun noktalardaki değerlerini elde etmek için fonksiyonun türevleri, bilinmeyen fonksiyon değerlerine bağlı olarak yazılır. Bu ifadeler diferansiyel denklemde yerine konulduğunda diferansiyel denklem bir lineer denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda bilinmeyen fonksiyonun noktalardaki değerleri elde edilir.

1.2.1 İnterpolasyon polinomu ve Newton Formu

Bir fonksiyonun $x_0, x_1, \dots, x_n$ noktalarındaki değerleri $f_0, f_1, \dots, f_n$ olarak verilsin. Bu fonksiyonun yaklaşım fonksiyonu olarak polinom seçelim. Polinomun verilen noktalardan geçme şartı konulduğunda bu polinoma interpolasyon polinomu adı verilir.

Verilen $n+1$ noktadan geçen polinomun derecesi n olup interpolasyon polinomu

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

şeklinde yazılır. Verilen bu polinomda bulunan $a_0, a_1, \dots, a_n$ parametreleri

$$P_n(x_i) = f_i \quad i=0, \dots, n$$

şartı yazılarak bulunan $n+1$ denklemden bulunur. Bu şekilde interpolasyon polinomunun parametrelerini elde etmek için lineer denklem takımını çözmek gerekmektedir.

İnterpolasyon polinomunu elde etmenin başka yolları da vardır. Bunlar arasında en kullanışlı olan aşağıda verilen formdur.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (1.2.1.1)$$

Herhangi bir n . derece polinom bu form kullanılarak yazılabilir. Yukarıda verilen formda bilinmeyenler a_i parametreleridir. İnterpolasyon noktalarında fonksiyon değerleri bu noktalardan geçen interpolasyon polinomunun değerlerine eşit olacak şekilde a_i katsayıları bulunur. Buna göre (1.2.1.1) formundaki a_n katsayısı aşağıda verilen eşitlikler yardımıyla elde edilebilir.

$$P_n(x_n) = f(x_n) = f_n$$

$$P_n(x) - P_{n-1}(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$a_n = \frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})} = \frac{P_n(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

$$a_n = \frac{f_n - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \quad (1.2.1.2)$$

(1.2.1.2) bağıntısı kullanılarak (1.2.1.1) denklemindeki tüm a_i katsayıları verilen noktalardaki bilinmeyen fonksiyon değerleri f_i cinsinden elde edilebilir. İlk katsayı a_0 , (1.2.1.1) denkleminde x yerine x_0 konulursa

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0) = f_0 \quad (1.2.1.3)$$

olarak elde edilir. a_1 katsayısı için ise (1.2.1.2) bağıntısı kullanılabilir.

$$a_1 = \frac{f_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f_1 - f_0}{(x_1 - x_0)} = f[x_0, x_1] \quad (1.2.1.4)$$

Burada $f[x_0, x_1]$ bilinmeyen fonksiyon $f(x)$ ' in x_0 ve x_1 noktalarındaki birinci bölünmüş farkıdır. Benzer şekilde a_2 katsayısı da (1.2.1.2) bağıntısı kullanılarak elde edilebilir.

$$a_2 = \frac{f_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - \{a_0 + a_1(x_2 - x_0)\}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f_2 - \{f_0 + f[x_0, x_1](x_2 - x_0)\}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f_2 - f_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)}$$

(1.2.1.4) bağıntısından f_0 çekilip işlemlerin devamında kullanılırsa

$$a_2 = \frac{f_2 - [f_1 - a_1(x_1 - x_0)]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)}$$

$$= \frac{f_2 - f_1 + f[x_0, x_1](x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_1)}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{f_2 - f_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + f[x_0, x_1] \left\{ \frac{(x_1 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{1}{(x_2 - x_1)} \right\} \\
&= \frac{f[x_1, x_2]}{(x_2 - x_0)} + f[x_0, x_1] \left\{ \frac{x_1 - x_0 - x_2 + x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right\} \\
&= \frac{f[x_1, x_2]}{(x_2 - x_0)} - \frac{f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} \\
a_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{(x_2 - x_0)} = f[x_0, x_1, x_2] \tag{1.2.1.5}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $f[x_0, x_1, x_2]$ bilinmeyen fonksiyon $f(x)$ 'in x_0 , x_1 ve x_2 noktalarındaki ikinci bölünmüş farkıdır. Daha sonraki katsayıların benzer işlemler yapıp elde edilmesi sonucunda, (1.2.1.1) interpolasyon polinomundaki katsayıların aşağıda verilen şekilde değiştiği görülür.

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} \tag{1.2.1.6}$$

(1.2.1.6) bağıntısı (1.2.1.1) interpolasyon polinomu katsayıları için kullanılırsa, interpolasyon polinomunun Newton formu olarak bilinen

$$\begin{aligned}
f(x) \approx P_n(x) &= f_0 + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \tag{1.2.1.7}
\end{aligned}$$

veya daha kapalı bir formda

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \tag{1.2.1.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Bölünmüş farklar aşağıda verilen şekilde bir tablo oluşturularak elde edilebilir.

Tablo 1.2.1.1 (Bölünmüş farkların elde edilişi)

x_k	f_k	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4}]$
x_0	f_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3		$f[x_2, x_3, x_4]$		
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	f_4				

1.2.2 İleriye Doğru Fark Formülleri

Verilen noktaların h aralığıyla eşit olarak dağıldığı durumda bölünmüş farklar yerine Δ operatörüyle gösterilen ileriye doğru farkların kullanılması daha pratik olacaktır. $f(x)$ 'in birinci ileriye doğru farkı aşağıdaki eşitliklerle tanımlıdır.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (1.2.2.1)$$

$$\Delta f(x_k) = \Delta f_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k \quad (1.2.2.2)$$

Daha sonraki ileriye doğru fark operatörleri için (1.2.1.6) bağıntısı ve Tablo 1.2.1.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_k &= \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k \\ \Delta^3 f_k &= \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k \\ \Delta^4 f_k &= \Delta^3 f_{k+1} - \Delta^3 f_k = f_{k+4} - 4f_{k+3} + 6f_{k+2} - 4f_{k+1} + f_k \end{aligned} \quad (1.2.2.3)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Daha önce birinci bölünmüş fark için verilen (1.2.1.4) denklemi kullanılarak birinci ileriye doğru fark birinci bölünmüş fark cinsinden elde edilebilir.

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f_{k+1} - f_k}{(x_{k+1} - x_k)} = \frac{\Delta f(x_k)}{h}$$

$$\Delta f(x_k) = h \cdot f[x_k, x_{k+1}] \quad (1.2.2.4)$$

Benzer işlemler daha sonraki ileriye doğru farklar için yapılırsa ileriye doğru farklar ile bölünmüş farkların birbirleri cinsinden ifadesinde kullanılan aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\Delta^r f(x_k) = r! h^r f[x_k, \dots, x_{k+r}] \quad (1.2.2.5)$$

$$f[x_k, \dots, x_{k+r}] = \frac{\Delta^r f(x_k)}{r! h^r} \quad (1.2.2.6)$$

(1.2.2.6) bağıntısı (1.2.1.7) denkleminde yerlerine konursa interpolasyon polinomunun Newton formu ileriye doğru farklar cinsinden elde edilir.

$$\begin{aligned} f(x) \approx P_n(x) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ \dots + \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.2.2.7)$$

$s = (x - x_0)/h$ dönüşümü yapılarak (1.2.2.7) denklemi için

$$f(s) \approx P_n(s) = f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \quad (1.2.2.8)$$

veya daha kapalı bir formda

$$f_s \approx \sum_{k=0}^n \binom{s}{k} \Delta^k f_0 \quad \binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!} \quad (1.2.2.9)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Daha önce de belirtildiği gibi sonlu farklar yönteminde bilinmeyen fonksiyonun diferansiyel denklemdeki türevleri için (1.2.2.8) interpolasyon polinomun türevleri kullanılır. Bu amaçla (1.2.2.8) denkleminin türevleri alınır

$$f'_s \approx \frac{df_s}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \left[\Delta f_0 + \frac{2s-1}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3s^2-6s+2}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.2.10)$$

$$f''_s \approx \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 f_0 + \frac{6s-6}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{12s^2-36s+22}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.2.11)$$

$$f'''_s \approx \frac{1}{h^3} \left[\Delta^3 f_0 + \frac{24s-36}{4!} \Delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.2.12)$$

$$f^{(IV)}_s \approx \frac{1}{h^4} \left[\Delta^4 f_0 + \frac{120s-240}{5!} \Delta^5 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.2.13)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ilk terimleri alınıp kalan terimler h 'ın bir fonksiyonu olan $\epsilon_1 = O(h)$ hata fonksiyonu şeklinde yazılırsa

$$f'_s \approx \frac{1}{h} \Delta f_0 + \epsilon_1 \quad (1.2.2.14)$$

$$f''_s \approx \frac{1}{h^2} \Delta^2 f_0 + \epsilon_2 \quad (1.2.2.15)$$

$$f'''_s \approx \frac{1}{h^3} \Delta^3 f_0 + \epsilon_3 \quad (1.2.2.16)$$

$$f^{(IV)}_s \approx \frac{1}{h^4} \Delta^4 f_0 + \epsilon_4 \quad (1.2.2.17)$$

eşitlikleri elde edilir. (1.2.2.3) ifadesindeki eşitliklerin bu formüllerde yerlerine konması sonucu bilinmeyen fonksiyonun k noktasındaki yaklaşık türevleri pivot noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden elde edilir.

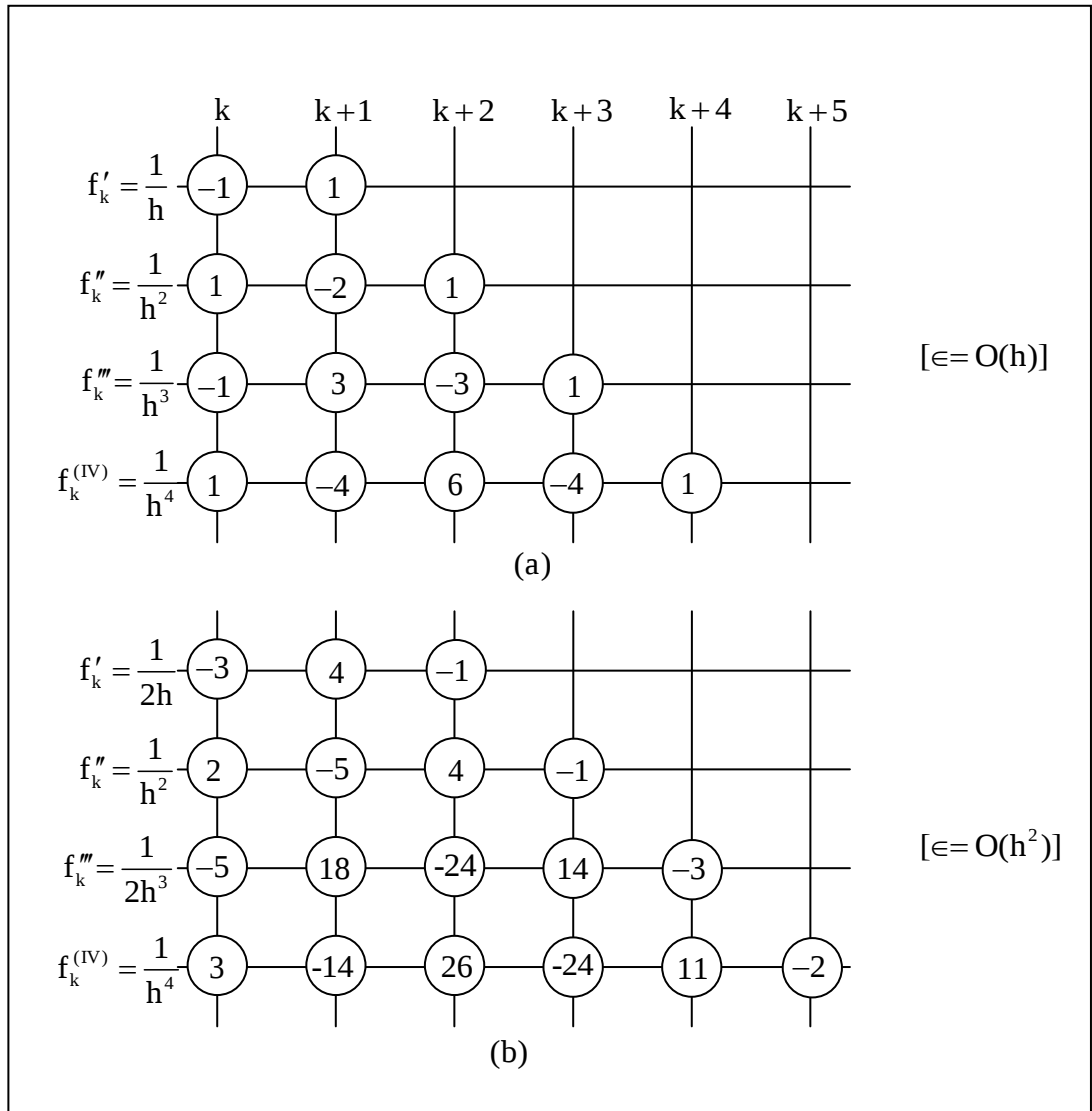
$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h} (f_{k+1} - f_k) + \epsilon_1 \quad (1.2.2.14)$$

$$f''(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k) + \epsilon_2 \quad (1.2.2.15)$$

$$f'''(x_k) \approx \frac{1}{h^3} (f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k) + \epsilon_3 \quad (1.2.2.16)$$

$$f^{(IV)}(x_k) \approx \frac{1}{h^4} (f_{k+4} - 4f_{k+3} + 6f_{k+2} - 4f_{k+1} + f_k) + \epsilon_4 \quad (1.2.2.17)$$

(1.2.2.10)-(1.2.2.13) formüllerinde iki veya daha fazla terim alınarak daha hassas sonuçlar verecek başka formüller de elde edilebilir. En çok kullanılan geriye doğru fark formülleri matematiksel moleküller şeklinde Şekil 1.2.2.1 de gösterilmiştir.



Şekil 1.2.2.1 (İleriye doğru fark formülleri)

1.2.3 Geriye Doğru Fark Formülleri

İleriye doğru farklardan farklı olarak geriye doğru farklar ∇ operatörüyle gösterilir. $f(x)$ 'in birinci geriye doğru farkı aşağıdaki eşitliklerle tanımlıdır.

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-h) \quad (1.2.3.1)$$

$$\nabla f(x_k) = \nabla f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f_k - f_{k-1} \quad (1.2.3.2)$$

Daha sonraki ileriye doğru fark operatörleri için ise aşağıda verilen eşitlikler kullanılabilir.

$$\begin{aligned} \nabla^2 f_k &= f_{k-2} - 2f_{k-1} + f_k \\ \nabla^3 f_k &= -f_{k-3} + 3f_{k-2} - 3f_{k-1} + f_k \\ \nabla^4 f_k &= f_{k-4} - 4f_{k-3} + 6f_{k-2} - 4f_{k-1} + f_k \end{aligned} \quad (1.2.3.3)$$

Daha önce birinci bölünmüş fark için verilen (1.2.1.4) denklemi indis değiştirilip kullanılarak birinci geriye doğru fark birinci bölünmüş fark cinsinden elde edilebilir.

$$\begin{aligned} f[x_{k-1}, x_k] &= \frac{f_k - f_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})} = \frac{\nabla f(x_k)}{h} \\ \nabla f(x_k) &= h \cdot f[x_{k-1}, x_k] \end{aligned} \quad (1.2.3.4)$$

Benzer işlemler daha sonraki geriye doğru farklar için yapılırsa geriye doğru farklar ile bölünmüş farkların birbirleri cinsinden ifadesinde kullanılan aşağıdaki bağıntılara ulaşılır.

$$\nabla^r f(x_k) = r! h^r f[x_{k-r}, \dots, x_k] \quad (1.2.3.5)$$

$$f[x_{k-r}, \dots, x_k] = \frac{\nabla^r f(x_k)}{r! h^r} \quad (1.2.3.6)$$

(1.2.3.6) bağıntısı (1.2.1.7) denkleminde yerlerine konursa interpolasyon polinomunun Newton formu geriye doğru farklar cinsinden elde edilir.

$$f(x) \approx P_n(x) = f_n + \frac{\nabla f_n}{1!h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 f_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n f_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_0) \quad (1.2.3.7)$$

$s = (x - x_n)/h$ dönüşümü yapılarak (1.2.3.7) denklemi için

$$f(s) \approx P_n(s) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \quad (1.2.3.8)$$

veya daha kapalı bir formda

$$f_s \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-s}{k} \Delta^k f_n \quad (1.2.3.9)$$

eşitlikleri yazılabilir.

(1.2.3.8) denkleminin türevleri alınırsa

$$f'_s \approx \frac{df_s}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \left[\nabla f_n + \frac{2s+1}{2!}\nabla^2 f_n + \frac{3s^2+6s+2}{3!}\nabla^3 f_n + \dots \right] \quad (1.2.3.10)$$

$$f''_s \approx \frac{1}{h^2} \left[\nabla^2 f_n + \frac{6s+6}{3!}\nabla^3 f_n + \frac{12s^2+36s+22}{4!}\nabla^4 f_n + \dots \right] \quad (1.2.3.11)$$

$$f'''_s \approx \frac{1}{h^3} \left[\nabla^3 f_n + \frac{24s+36}{4!}\nabla^4 f_n + \dots \right] \quad (1.2.3.12)$$

$$f^{(iv)}_s \approx \frac{1}{h^4} \left[\nabla^4 f_n + \frac{120s+240}{5!}\nabla^5 f_n + \dots \right] \quad (1.2.3.13)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin ilk terimleri alınıp kalan terimler h 'ın bir fonksiyonu olan $\epsilon_1 = O(h)$ hata fonksiyonu şeklinde yazılırsa

$$f'_s \approx \frac{1}{h} \nabla f_n + \epsilon_1 \quad (1.2.3.14)$$

$$f_s'' \approx \frac{1}{h^2} \nabla^2 f_n + \epsilon_2 \quad (1.2.3.15)$$

$$f_s''' \approx \frac{1}{h^3} \nabla^3 f_n + \epsilon_3 \quad (1.2.3.16)$$

$$f_s^{(IV)} \approx \frac{1}{h^4} \nabla^4 f_n + \epsilon_4 \quad (1.2.3.17)$$

eşitlikleri elde edilir. (1.2.3.3) ifadesindeki eşitliklerin bu formüllerde yerlerine konması sonucu bilinmeyen fonksiyonun k noktasındaki yaklaşık türevleri pivot noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden elde edilir.

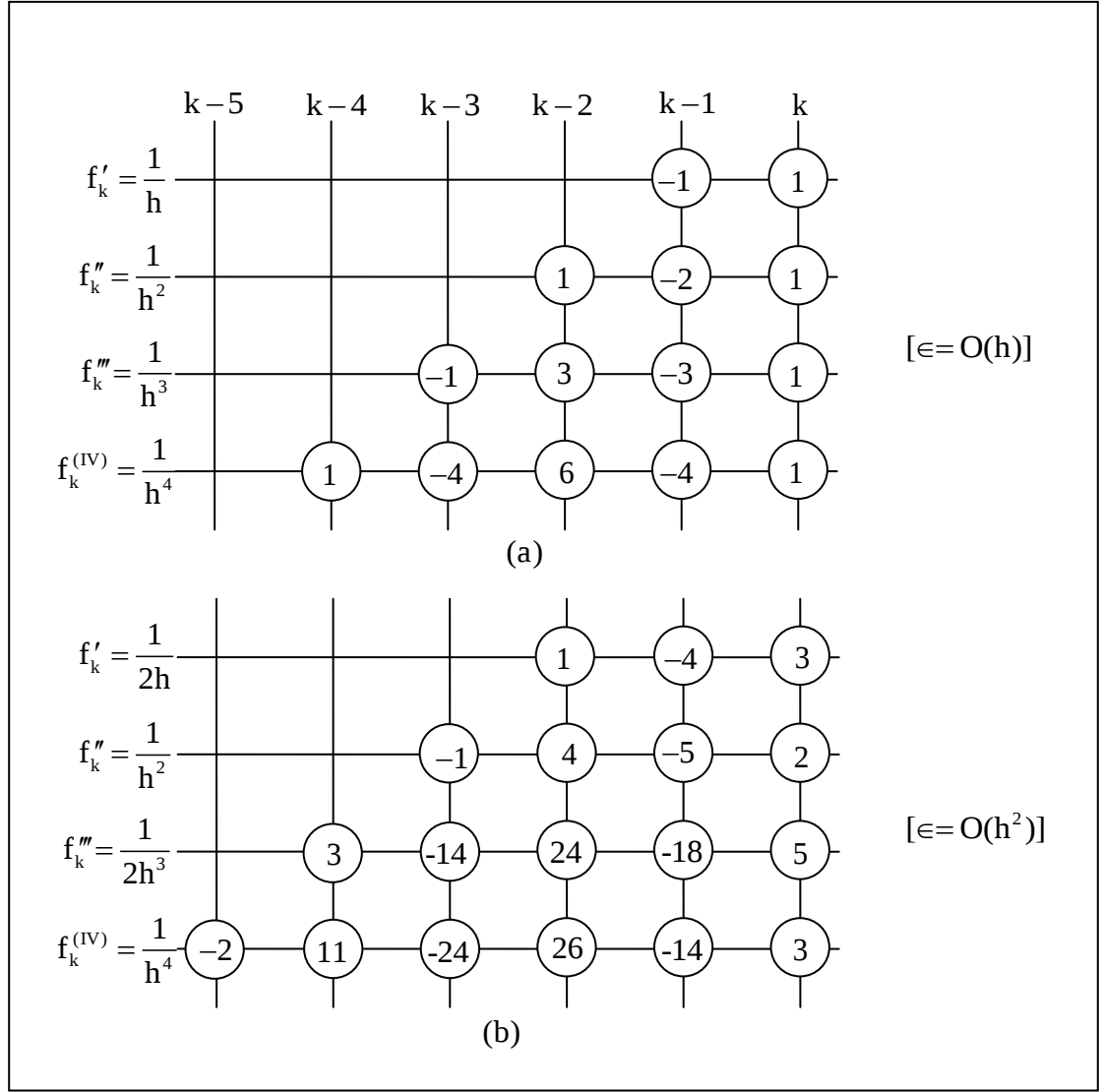
$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h} (f_k - f_{k-1}) + \epsilon_1 \quad (1.2.3.14)$$

$$f''(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (f_{k-2} - 2f_{k-1} + f_k) + \epsilon_2 \quad (1.2.3.15)$$

$$f'''(x_k) \approx \frac{1}{h^3} (-f_{k-3} + 3f_{k-2} - 3f_{k-1} + f_k) + \epsilon_3 \quad (1.2.3.16)$$

$$f^{(IV)}(x_k) \approx \frac{1}{h^4} (f_{k-4} - 4f_{k-3} + 6f_{k-2} - 4f_{k-1} + f_k) + \epsilon_4 \quad (1.2.3.17)$$

En çok kullanılan geriye doğru fark formülleri matematiksel moleküller şeklinde Şekil 1.2.3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 1.2.3.1 (Geriye doğru fark formülleri)

1.2.4 Merkezi Fark Formülleri

Bir k noktasına göre simetrik noktadaki fonksiyon değerleri kullanılarak elde edilen merkezi farklar, ileriye veya geriye doğru farklara göre bazı durumlarda özellikle sınır değer problemlerinde daha kullanışlıdır. Bu nedenle üçüncü bölümde silindirik kabuk problemlerine ait sayısal örnekler kısmında yaklaşık çözümler için merkezi fark formülleri kullanılacaktır.

Bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonunun k noktası etrafında h aralığıyla eşit sıralanmış noktalarda alacağı değerleri elde etmek için kullanılacak δ merkezi fark operatörü aşağıda verilen şekilde tanımlıdır.

$$\delta f_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}\right) - f\left(x_k - \frac{h}{2}\right) = f_{k+1/2} - f_{k-1/2} \quad (1.2.4.1)$$

$f(x)$ in ikinci merkezi farkı ise birinci merkezi farkların farkı olacaktır.

$$\begin{aligned} \delta^2 f_k &\equiv \delta(\delta f_k) = [f_{(k+1/2)+1/2} - f_{(k-1/2)+1/2}] - [f_{(k+1/2)-1/2} - f_{(k-1/2)-1/2}] \\ &= f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1} \end{aligned} \quad (1.2.4.2)$$

Daha sonraki merkezi farklar ise yukarıdaki yöntem kullanılarak aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\delta^3 f_k = f_{k+3/2} - 3f_{k+1/2} + 3f_{k-1/2} - f_{k-3/2} \quad (1.2.4.3)$$

$$\delta^4 f_k = f_{k+2} - 4f_{k+1} + 6f_k - 4f_{k-1} + f_{k-2} \quad (1.2.4.4)$$

n . derece merkezi fark formülündeki katsayılar $(a-b)^n$ in binom açılımındaki katsayılarla eşit olacaktır.

Tek dereceli merkezi fark formüllerindeki orta nokta değerlerini yok etmek için ortalama tek dereceli farkların tanımlanması gerekir. Buna göre f 'nin k noktasındaki birinci ortalama farkı

$$\frac{1}{2}(\delta f_{k+1/2} + \delta f_{k-1/2}) = \frac{1}{2}[(f_{k+1} - f_k) + (f_k - f_{k-1})] = \frac{1}{2}(f_{k+1} - f_{k-1})$$

şeklinde tanımlanır.

Ortalama alma işlemi ortalayıcı olarak adlandırılan μ operatörü kullanılarak sembolize edilir ve aşağıda verilen şekilde tanımlıdır.

$$\mu f_k = \frac{1}{2}(f_{k+1/2} + f_{k-1/2}) \quad (1.2.4.5)$$

Bu durumda birinci merkezi fark, ortalayıcı kullanılarak

$$\mu \delta f_k = \frac{1}{2}[\delta f_{k+1/2} + \delta f_{k-1/2}] = \frac{1}{2}(f_{k+1} - f_{k-1}) \quad (1.2.4.6)$$

şeklinde tanımlanır. İleriye ve geriye doğru farklarda olduğu gibi bölünmüş farklar

merkezi farklar ve ortalama operatörleri cinsinden elde edilip (1.2.1.7) denkleminde yerlerine konur ve $s = (x - x_0)/h$ dönüşümü yapılırsa

$$f_s \approx f_0 + s\mu\delta f_0 + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{s^2(s^2-1^2)\dots(s^2-m-1^2)}{2m!}\delta^{2m} f_0 \quad (1.2.4.7)$$

eşitliği veya serinin tek dereceli bir merkezi farkla bitmesi durumunda kullanılacak

$$f_s \approx f_0 + s\mu\delta f_0 + \frac{s^2}{2!}\delta^2 f_0 + \frac{s(s^2-1^2)}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{s^2(s^2-1^2)}{4!}\delta^4 f_0 + \dots$$

$$\dots + \frac{s(s^2-1^2)\dots(s^2-m^2)}{(2m+1)!}\mu\delta^{2m+1} f_0 \quad (1.2.4.8)$$

eşitliği elde edilir. (1.2.4.7) ve (1.2.4.8) denklemleri kullanılarak bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin merkezi farklar ve ortalama operatörleri cinsinden elde edilen ifadeleri aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$f'_s = \frac{df_s}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{h} \left[\mu\delta f_0 + s\delta^2 f_0 + \frac{3s^2-1}{3!}\mu\delta^3 f_0 + \frac{4s^3-2s}{4!}\delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.4.9)$$

$$f''_s = \frac{1}{h^2} \left[\delta^2 f_0 + s\mu\delta^3 f_0 + \frac{12s^2-2}{4!}\delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.4.10)$$

$$f'''_s = \frac{1}{h^3} \left[\mu\delta^3 f_0 + s\delta^4 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.4.11)$$

$$f^{(IV)}_s = \frac{1}{h^4} \left[\delta^4 f_0 + s\mu\delta^5 f_0 + \dots \right] \quad (1.2.4.12)$$

İleriye ve geriye doğru farklarda olduğu gibi yukarıdaki formüllerde ilk terimler alınırsa kalan terimlerin h^2 nin bir fonksiyonu olduğu görülür. İlk terimler alınıp kalan terimler hata fonksiyonu şeklinde yazılırsa

$$f'_s \approx \frac{1}{h} \mu\delta f_0 + \epsilon_1 \quad (1.2.4.13)$$

$$f_s'' \approx \frac{1}{h^2} \delta^2 f_0 + \epsilon_2 \quad (1.2.4.14)$$

$$f_s''' \approx \frac{1}{h^3} \mu \delta^3 f_0 + \epsilon_3 \quad (1.2.4.15)$$

$$f_s^{(IV)} \approx \frac{1}{h^4} \delta^4 f_0 + \epsilon_4 \quad (1.2.4.16)$$

eşitlikleri elde edilir. Ortalanmış merkezi fark ve merkezi fark eşitliklerinin bu formüllerde yerlerine konması sonucu bilinmeyen fonksiyonun k noktasındaki yaklaşık türevleri pivot noktalarındaki bilinmeyen fonksiyon değerleri cinsinden elde edilir.

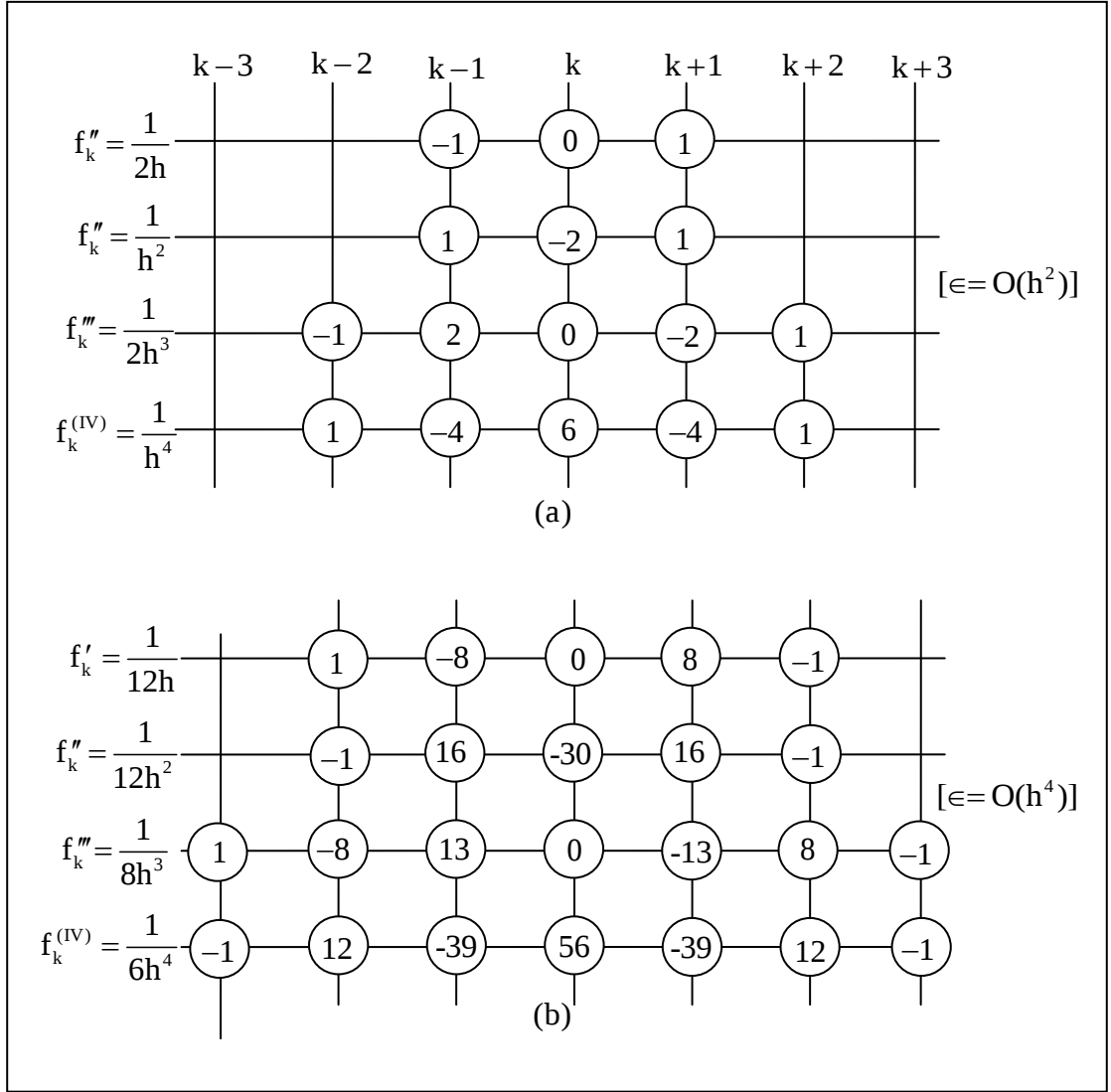
$$f'(x_k) \approx \frac{1}{2h} (f_{k+1} - f_{k-1}) + \epsilon_1 \quad (1.2.4.17)$$

$$f''(x_k) \approx \frac{1}{h^2} (f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) + \epsilon_2 \quad (1.2.4.18)$$

$$f'''(x_k) \approx \frac{1}{2h^3} (-f_{k-2} + 2f_{k-1} - 2f_{k+1} + f_{k+2}) + \epsilon_3 \quad (1.2.4.19)$$

$$f^{(IV)}(x_k) \approx \frac{1}{h^4} (f_{k-2} - 4f_{k-1} + 6f_k - 4f_{k+1} + f_{k+2}) + \epsilon_4 \quad (1.2.4.20)$$

En çok kullanılan merkezi fark formülleri matematiksel moleküller şeklinde Şekil 1.2.4.1 de gösterilmiştir.

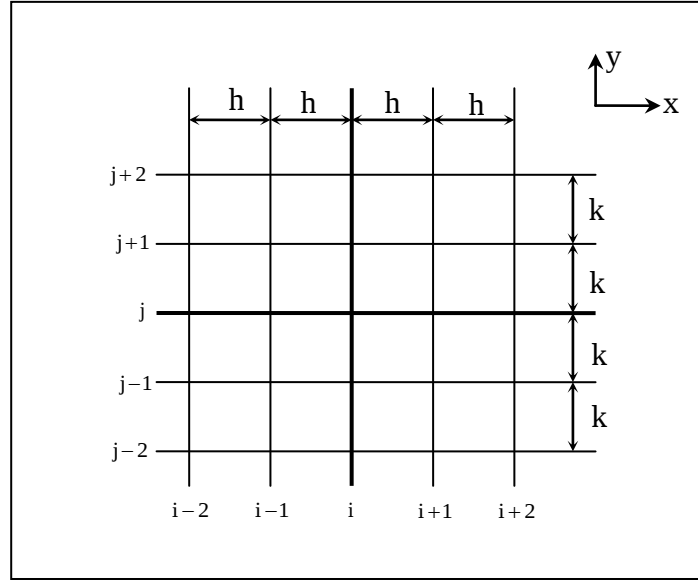


Şekil 1.2.4.1 (Merkezi fark formülleri)

1.2.5 Yaklaşık Kısmi Türev

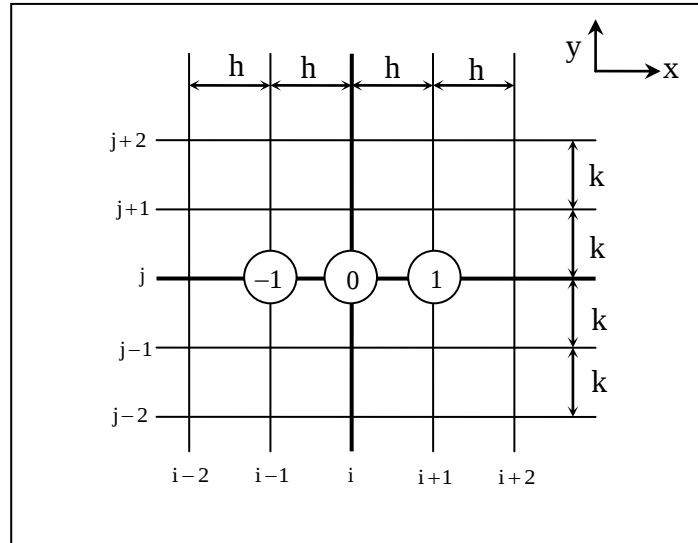
Bilinmeyen fonksiyonun iki değişkene bağlı bir fonksiyon olması durumunda kısmi türevleri merkezi farklar cinsinden elde etmek için (1.2.4.17)-(1.2.4.20) formüllerinin xy düzlemi üzerinde alınacak noktalar için uygulanması gerekir.

İki değişkenli bir $\omega(x,y)$ fonksiyonunun Şekil 1.2.5.1 deki gibi oluşturulacak bir sonlu fark ağı için (i,j) noktasındaki yaklaşık kısmi türevleri merkezi farklar cinsinden aşağıda elde edilmiştir.



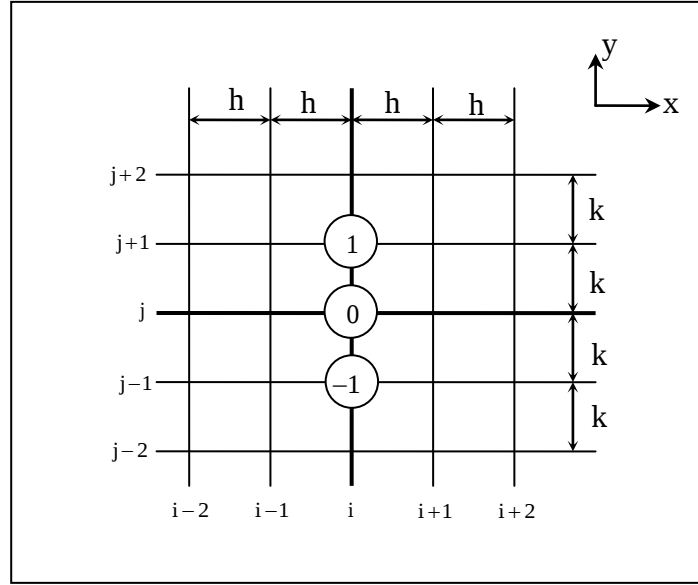
Şekil 1.2.5.1 (İki değişkenli fonksiyon için sonlu fark ağı)

$$D_x \omega_{i,j} = \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2h} (-\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{1}{2h} \epsilon_{1,x} \quad (1.2.5.1)$$



Şekil 1.2.5.2 (D_x kısmi türevi)

$$D_y \omega_{i,j} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{1}{2k} (-\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{2k} \epsilon_{1,y} \quad (1.2.5.2)$$



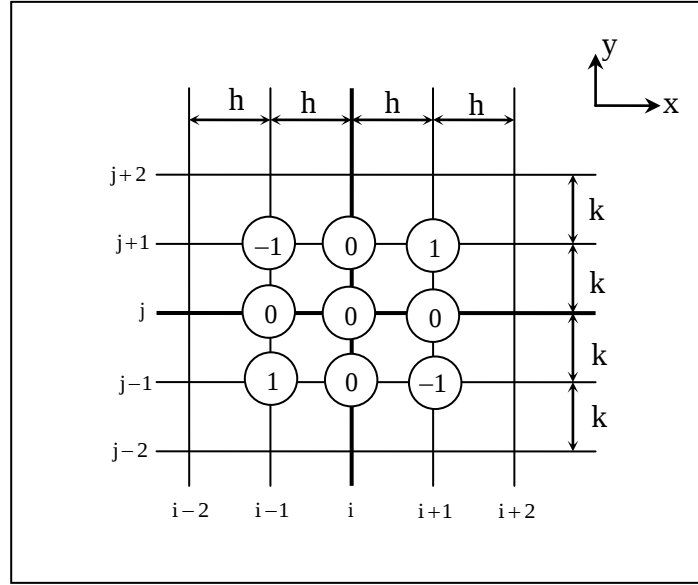
Şekil 1.2.5.3 (D_y kısmi türevi)

$$\begin{aligned}
 D_{xy}^2 \omega_{i,j} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \bigg|_{i,j} = \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] \bigg|_{i,j} \\
 &= \frac{\partial \omega}{\partial x} \left[\frac{1}{2k} (-\omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{2k} \epsilon_{1,y} \right] \bigg|_{i,j} \\
 &= \frac{1}{2h} \left\{ -\left[\frac{1}{2k} (-\omega_{i-1,j-1} + \omega_{i-1,j+1}) + \frac{1}{2k} (\epsilon_{1,y})_{i-1} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\frac{1}{2k} (-\omega_{i+1,j-1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2k} (\epsilon_{1,y})_{i+1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

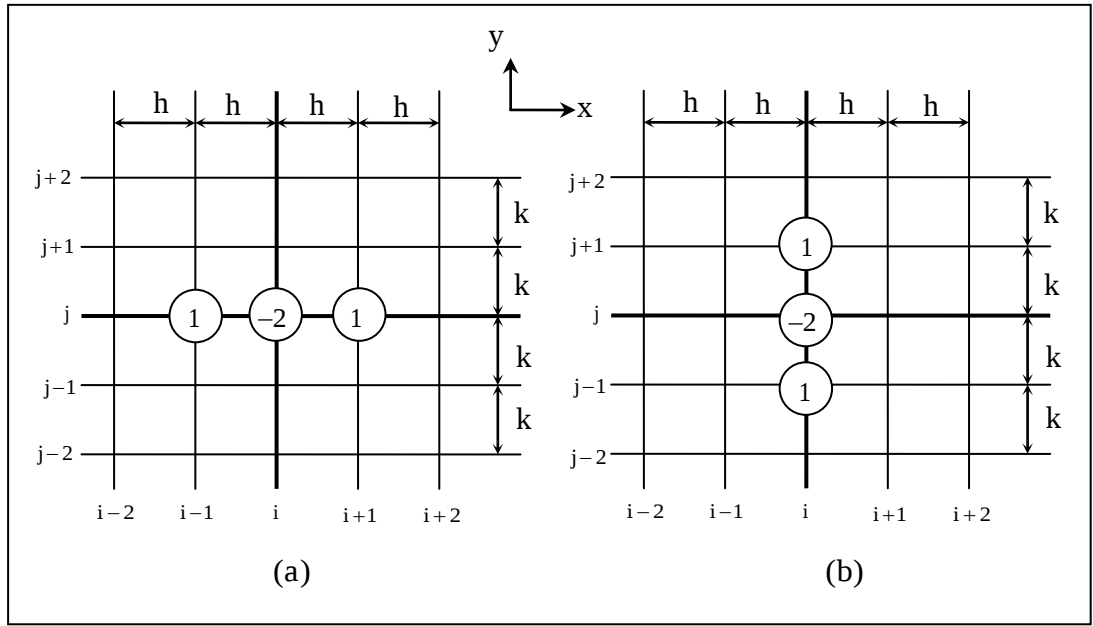
$$\begin{aligned}
 D_{xy}^2 \omega_{i,j} &= \frac{1}{4hk} (\omega_{i-1,j-1} - \omega_{i-1,j+1} - \omega_{i+1,j-1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{4hk} \epsilon_{1,xy} \\
 [\epsilon_{1,xy} &= (\epsilon_{1,y})_{i+1} - (\epsilon_{1,y})_{i-1}]
 \end{aligned} \tag{1.2.5.3}$$

$$D_{xx}^2 = \frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{1}{h^2} \epsilon_{2,x} \tag{1.2.5.4}$$

$$D_{yy}^2 = \frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} \epsilon_{2,y} \tag{1.2.5.5}$$



Şekil 1.2.5.4 (D_{xy}^2 kısmi türevi)



Şekil 1.2.5.5 (D_{xx}^2 ve D_{yy}^2 kısmi türevleri)

$$\begin{aligned}
 D_{xxy}^3 \omega_{i,j} &= \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \Big|_{i,j} \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{1}{h^2} \epsilon_{2,x} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2k} \left\{ -\left[\frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i,j-1} + \omega_{i+1,j-1}) + \frac{1}{h^2} (\epsilon_{2,x})_{j-1} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{h^2} (\omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{h^2} (\epsilon_{2,x})_{j+1} \right] \right\}$$

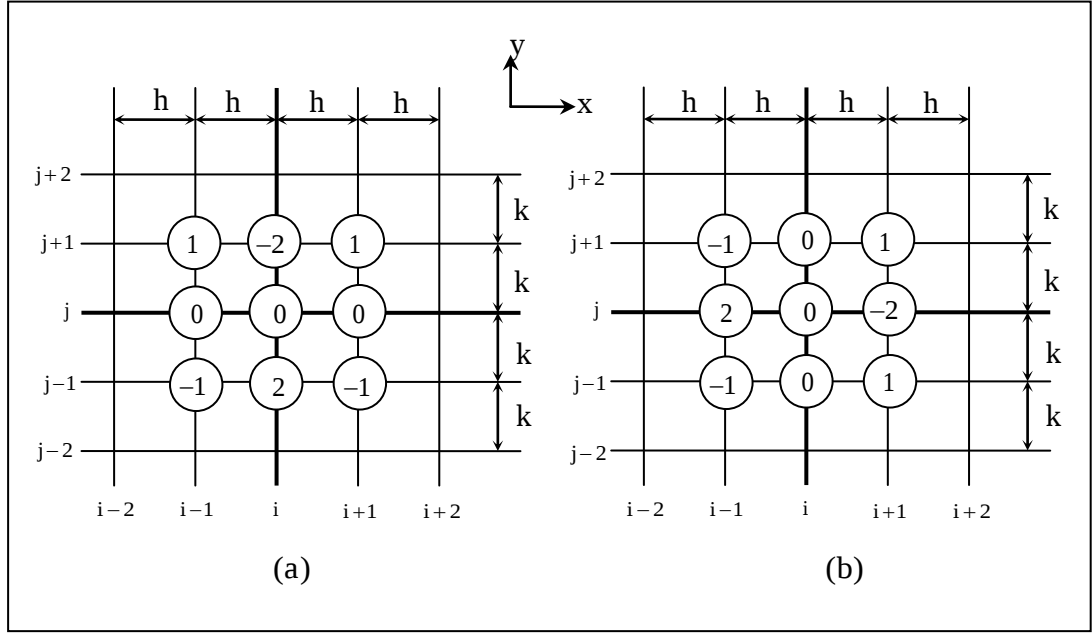
$$D_{\text{xyy}}^3 \omega_{i,j} = \frac{1}{2kh^2} (-\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i,j-1} - \omega_{i+1,j-1} \\ + \omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2kh^2} \epsilon_{3,x^2y} \\ [\epsilon_{3,x^2y} = (\epsilon_{2,x})_{j+1} - (\epsilon_{2,x})_{j-1}] \quad (1.2.5.6)$$

$$D_{\text{xyy}}^3 \omega_{i,j} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} \epsilon_{2,y} \right] \\ = \frac{1}{2h} \left\{ -\left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i-1} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i+1} \right] \right\}$$

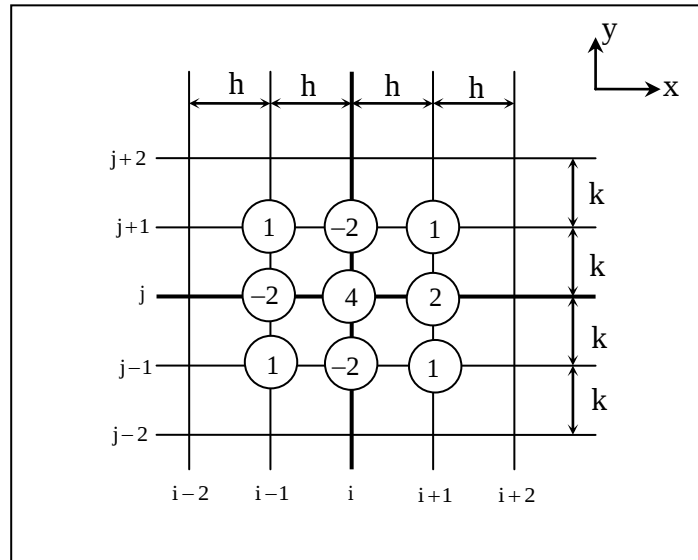
$$D_{\text{xyy}}^3 \omega_{i,j} = \frac{1}{2hk^2} (-\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i-1,j} - \omega_{i-1,j+1} \\ + \omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{2hk^2} \epsilon_{3,xy^2} \\ [\epsilon_{3,xy^2} = (\epsilon_{2,y})_{i+1} - (\epsilon_{2,y})_{i-1}] \quad (1.2.5.7)$$

$$D_{\text{xyyy}}^4 \omega_{i,j} = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \Big|_{i,j} \\ = \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} \epsilon_{2,y} \right] \\ = \frac{1}{h^2} \left\{ \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i-1} \right] \right. \\ - 2 \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_i \right] \\ \left. + \left[\frac{1}{k^2} (\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{k^2} (\epsilon_{2,y})_{i+1} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
D_{xyy}^4 \omega_{i,j} = & \frac{1}{h^2 k^2} (\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j} + \omega_{i-1,j+1} \\
& - 2\omega_{i,j-1} + 4\omega_{i,j} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i+1,j-1} \\
& - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+1,j+1}) + \frac{1}{h^2 k^2} \epsilon_{4,x^2 y^2} \\
[\epsilon_{4,x^2 y^2} = & (\epsilon_{2,y})_{i-1} - 2(\epsilon_{2,y})_i + (\epsilon_{2,y})_{i+1}]
\end{aligned} \tag{1.2.5.8}$$



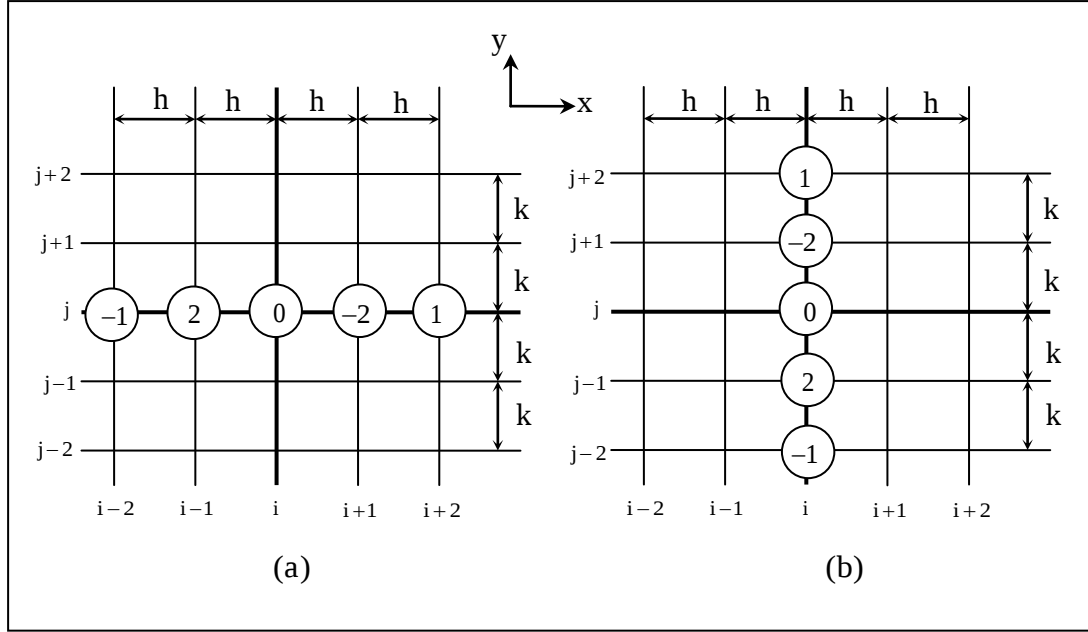
Şekil 1.2.5.6 (D_{xxy}^3 ve D_{xyy}^3 kısmi türevleri)



Şekil 1.2.5.7 (D_{xxyy}^4 kısmi türevi)

$$D_{xxx}^3 = \frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j} + 2\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}) + \frac{1}{2h^3} \epsilon_{3,x} \quad (1.2.5.9)$$

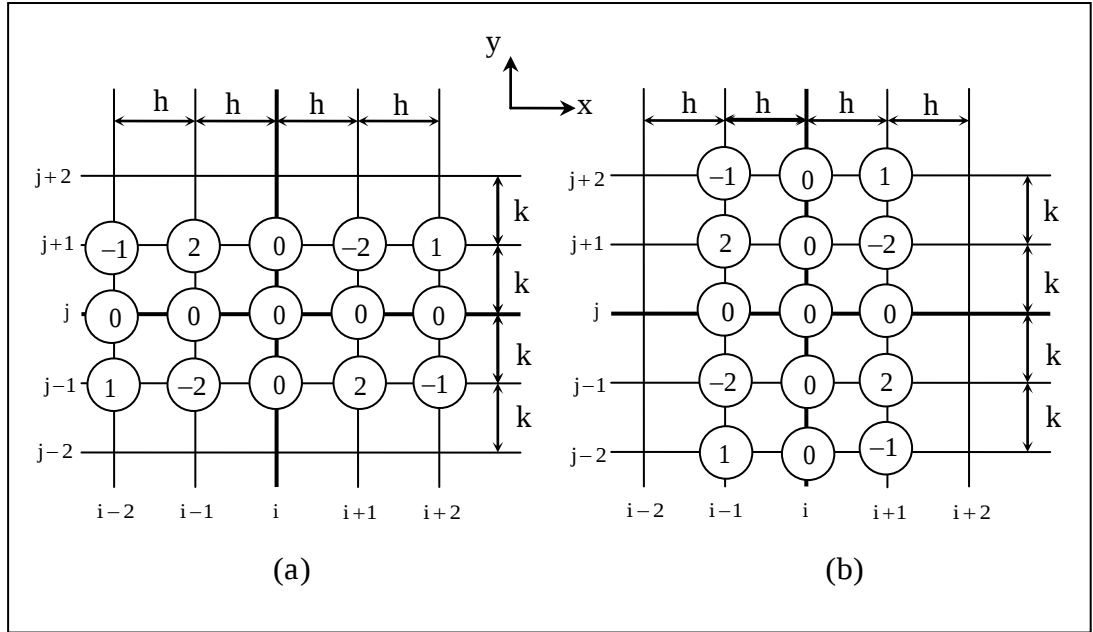
$$D_{yyy}^3 = \frac{1}{2k^3} (-\omega_{i,j-2} + 2\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+2}) + \frac{1}{2k^3} \epsilon_{3,y} \quad (1.2.5.10)$$



Şekil 1.2.5.8 (D_{xxx}^3 ve D_{yyy}^3 kısmi türevleri)

$$\begin{aligned} D_{xxxy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} \right) \Big|_{i,j} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j} + 2\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}) + \frac{1}{2h^3} \epsilon_{3,x} \right] \\ &= \frac{1}{2k} \left\{ - \left[\frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j-1} + 2\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i+1,j-1} + \omega_{i+2,j-1}) + \frac{1}{2h^3} (\epsilon_{3,x})_{j-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{2h^3} (-\omega_{i-2,j+1} + 2\omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+2,j+1}) + \frac{1}{2h^3} (\epsilon_{3,x})_{j+1} \right] \right\} \\ D_{xxxy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{1}{4kh^3} (\omega_{i-2,j-1} - 2\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i+1,j-1} - \omega_{i+2,j-1} \\ &\quad - \omega_{i-2,j+1} + 2\omega_{i-1,j+1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+2,j+1}) + \frac{1}{4kh^3} \epsilon_{4,x^3y} \quad (1.2.5.11) \\ &\quad [\epsilon_{4,x^3y} = (\epsilon_{3,x})_{j+1} - (\epsilon_{3,x})_{j-1}] \end{aligned}$$

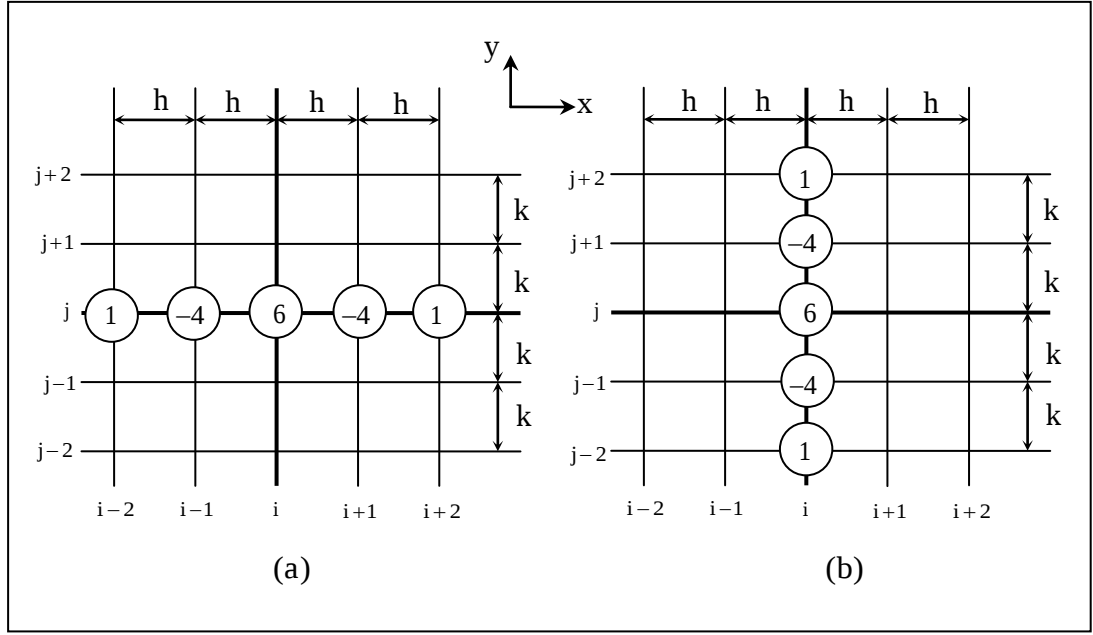
$$\begin{aligned}
D_{xyyy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} \bigg|_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} \right) \bigg|_{i,j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2k^3} (-\omega_{i,j-2} + 2\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+2}) + \frac{1}{2k^3} \epsilon_{3,y} \right] \\
&= \frac{1}{2h} \left\{ -\left[\frac{1}{2k^3} (-\omega_{i-1,j-2} + 2\omega_{i-1,j-1} - 2\omega_{i-1,j+1} + \omega_{i-1,j+2}) + \frac{1}{2k^3} (\epsilon_{3,y})_{i-1} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{2k^3} (-\omega_{i+1,j-1} + 2\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j+2}) + \frac{1}{2k^3} (\epsilon_{3,y})_{i+1} \right] \right\} \\
D_{xyyy}^4 \omega_{i,j} &= \frac{1}{4kh^3} (\omega_{i-1,j-2} - 2\omega_{i-1,j-1} + 2\omega_{i-1,j+1} - \omega_{i-1,j+2} \\
&\quad - \omega_{i+1,j-2} + 2\omega_{i+1,j-1} - 2\omega_{i+1,j+1} + \omega_{i+1,j+2}) + \frac{1}{4kh^3} \epsilon_{4,xy^3} \quad (1.2.5.12) \\
&\quad [\epsilon_{4,xy^3} = (\epsilon_{3,y})_{i+1} - (\epsilon_{3,y})_{i-1}]
\end{aligned}$$



Şekil 1.2.5.9 (D_{xxxx}^4 ve D_{xyyy}^4 kısmi türevleri)

$$D_{xxxx}^4 = \frac{1}{h^4} (\omega_{i-2,j} - 4\omega_{i-1,j} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i+1,j} + \omega_{i+2,j}) + \frac{1}{h^4} \epsilon_{4,x} \quad (1.2.5.13)$$

$$D_{yyyy}^4 = \frac{1}{k^4} (\omega_{i,j-2} - 4\omega_{i,j-1} + 6\omega_{i,j} - 4\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j+2}) + \frac{1}{k^4} \epsilon_{4,y} \quad (1.2.5.14)$$

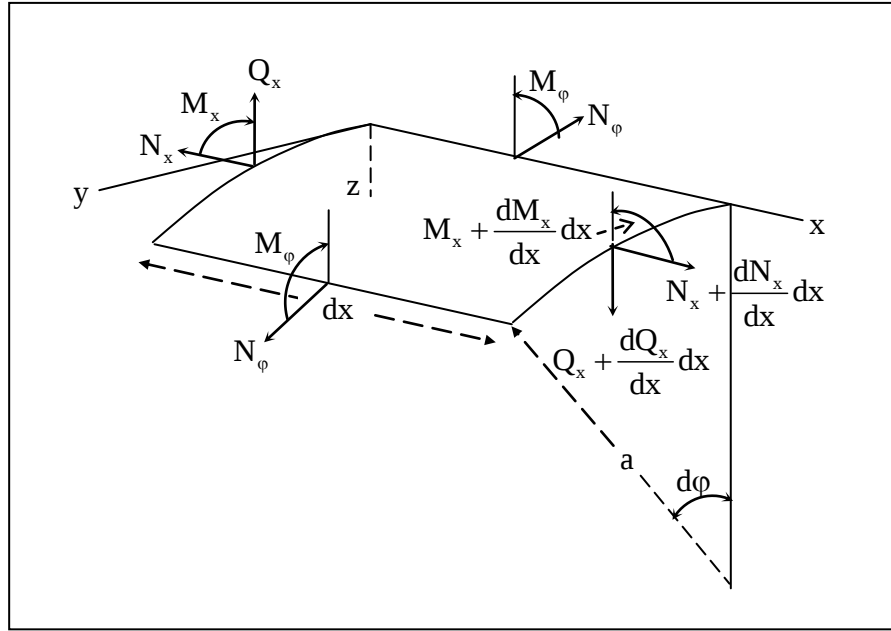


Şekil 1.2.5.10 (D^4_{xxxx} ve D^4_{yyyy} kısmi türevleri)

2. SİLİNDİRİK KABUKLARIN GENEL TEORİSİ

2.1 Eksenine Göre Simetrik Olarak Yüklenmiş Silindirik Kabuklar

Silindirik kabuk problemleri içerisinde pratikte en sık karşılaşılan problem türü, eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş silindirik kabuk problemleridir. Buhar basıncı altındaki silindirik kazanlar, iç sıvı basıncı altındaki düşey eksenli silindirik kaplar ve düzgün değişen iç basınç altındaki dairesel borular bu problemlere örnek olarak verilebilir.



Şekil 2.1.1 (Silindirik kabuk üzerinde alınan diferansiyel eleman)

Bu tür problemlerin çözümünü sağlayan denklemlere ulaşmak için öncelikle simetrik yükleme altında silindirik kabuğun nasıl deforme olacağını göz önüne alıp hangi kuvvet ve momentlerin ihmal edilebileceğini belirleyelim. Burada dikkat edilecek nokta yükleme ve geometrinin sadece silindir eksenine göre simetrik olduğudur. Bu nedenle x eksenine dik herhangi bir dairesel kesitte, dairesel formun korunduğu, yüklemenin yönüne bağlı olarak çap daralmasının veya genişlemesinin olacağı söylenebilir. Böylelikle deformasyonun sadece x eksenı boyunca bir değişime sahip olduğu dikkate alınırsa silindirik kabuktan alınan bir diferansiyel eleman

ve üzerindeki kuvvetler Şekil.1.2.1 de verildiği gibi olur. Bu diferansiyel elemanın moment ve izdüşüm denge denklemlerinin 3'ü simetri nedeniyle özdeş olarak sağlanacağından ancak kalan 3'ü kullanılabilir. Bu denklemler x ve z eksenlerindeki izdüşüm denklemleri ile y eksenine göre moment dengesidir. Sadece z doğrultusunda dış kuvvetlerin bulunduğu kabul edilerek bu 3 denklem aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dx} dx \cdot a d\phi &= 0 \\ \frac{dQ_x}{dx} dx \cdot a d\phi + N_\phi dx d\phi + Z dx \cdot a d\phi &= 0 \\ \frac{dM_x}{dx} dx \cdot a d\phi - Q_x dx \cdot a d\phi &= 0\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

İlk denklem N_x 'in sabit olduğunu göstermektedir ve burada ihmal edilecektir. Bu kuvvetlerin ihmal edilemeyecek kadar büyük olduğu durumlarda, bu kuvvetlerin etkisiyle oluşacak deformasyon ve gerilmeler hesaplanıp, silindir yüzeyine dik doğrultudaki kuvvetlerin etkisiyle oluşacak deformasyon ve gerilmelerin üzerine süperpoze edilebilir. Kalan 2 denklem aşağıdaki basitleştirilmiş formda yazılabilir.

$$\begin{aligned}\frac{dQ_x}{dx} + \frac{1}{a} N_\phi &= -Z \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Problemi çözmek için kabuğun orta yüzeyindeki deformasyonunu dikkate almamız gerekmektedir. Simetri kullanılarak deformasyonun sadece sırasıyla x ve z eksenlerindeki bileşenleri olan u ve ω deplasmanları dikkate alınıp, y eksenindeki bileşeni olan v deplasmanı ihmal edilebilir. Böylelikle orta yüzeydeki birim deformasyon bileşenleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \qquad \epsilon_\phi = -\frac{\omega}{a}\tag{2.1.3}$$

Bu bağıntılar Hook yasalarında kullanıldığında aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{Eh}{1-v^2} (\varepsilon_x + v\varepsilon_\varphi) = \frac{Eh}{1-v^2} \left(\frac{du}{dx} - v \frac{\omega}{a} \right) = 0 \\
N_\varphi &= \frac{Eh}{1-v^2} (\varepsilon_\varphi + v\varepsilon_x) = \frac{Eh}{1-v^2} \left(-\frac{\omega}{a} + v \frac{du}{dx} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Bu denklemlerden birincisinden

$$\frac{du}{dx} = v \frac{\omega}{a}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ikinci denklemde yerine konursa

$$N_\varphi = -\frac{Eh\omega}{a} \tag{2.1.5}$$

bağıntısına ulaşılır. Bölümün başında yapılan kabuller dikkate alınarak eğilme momentlerinin hesaplanmasında kullanılacak eğrilik değişimleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\chi_x = \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad \chi_y = 0 \tag{2.1.6}$$

Bu eşitlikler (1.1.7b) bağıntılarında yerlerine konursa

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \left(\frac{d^2\omega}{dx^2} \right) \\
M_\varphi &= vM_x
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada D kabuğun eğilme rijitliğidir ve aşağıdaki bağıntıyla tanımlıdır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \tag{2.1.8}$$

Şimdi tekrar (2.1.2) denklem takımına dönülüp Q_x bilinmeyeni bu denklemlerden yok edilirse

$$\frac{d^2M_x}{dx^2} + \frac{1}{a} N_\varphi = -Z \tag{2.1.9}$$

eşitliği elde edilir. (2.1.5) ve (2.1.7) bağıntıları (2.1.9) denkleminde yerlerine konursa aşağıda verilen diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{a^2} \omega = Z \quad (2.1.10)$$

Böylece dairesel silindirik kabukların simetrik deformasyonuna ait problemler (2.1.10) denkleminin integrasyonuna indirgenmiş olur.

Bu denklemin en basit uygulaması kabuk kalınlığı sabit tutularak elde edilir. Bu durumda (2.1.10) denklemini aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$D \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} \omega = Z \quad (2.1.11)$$

Aşağıda verilen notasyon kullanılarak denklem daha basit ve kullanışlı bir formda yazılabilir.

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = \frac{3(1-\nu^2)}{a^2 h^2} \quad (2.1.12)$$

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z}{D} \quad (2.1.13)$$

(2.1.13) denklemini incelendiğinde, elastik zemine oturan D eğilme rijitliğindeki prizmatik çubuğun Z şiddetindeki yayılı yük altındaki çözümü için kullanılan diferansiyel denklemin aynısı olduğu görülmektedir.

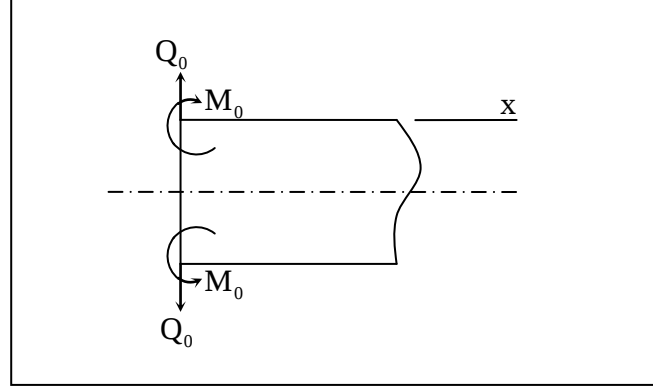
Bu denklemin genel çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (2.1.14)$$

Burada $f(x)$ (2.1.13) denkleminin özel çözümüdür. $C_1, \dots, C_4$ ise her bir özel durum için kabuğun uçlarındaki sınır koşullarından belirlenmesi gereken integrasyon sabitleridir.

Şekil 2.1.2 deki gibi $x=0$ kenarında, kenar boyunca düzgün dağılmış M_0 eğilme

momentleriyle, Q_0 kesme kuvvetlerinin uygulandığı sonsuz uzun dairesel bir boruyu örnek olarak alalım.



Şekil 2.1.2 (Sonsuz uzun dairesel boru)

Kabuk yüzeyi boyunca düzgün dağılmış Z basıncı yoktur. Bu nedenle (2.1.14) denklemi içindeki özel çözüm $f(x)=0$ olacaktır. Kenar boyunca uygulanan kuvvetlerin etkisiyle oluşacak bölgesel eğilme, yüklenen uçtan itibaren ölçülen x mesafesinin artışıyla beraber hızla azalacaktır. Bu varsayım kullanılarak (2.1.14) denkleminin ilk teriminin ihmal edilebileceği sonucuna varılır.

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (2.1.15)$$

(2.1.15) denklemdeki C_3 ve C_4 sabitleri yüklenen uçtaki sınır koşullarından belirlenecektir. Bu amaçla aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} (M_x)_{x=0} &= -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0 \\ (Q_x)_{x=0} &= \left(\frac{dM_x}{dx} \right)_{x=0} = -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right)_{x=0} = Q_0 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

(2.1.15) denklemi (2.1.16) sınır koşulları içinde yerine konursa

$$C_3 = -\frac{1}{2\beta^3 D} (Q_0 + \beta M_0) \quad (2.1.17)$$

$$C_4 = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \quad (2.1.18)$$

integrasyon sabitleri elde edilir. Böylece Şekil 2.1.2 deki gibi yüklenmiş sonsuz

uzun dairesel silindirik bir boruda oluşacak yerdeğiştirme miktarı (2.1.17) ve (2.1.18) bağıntılarının (2.1.15) denkleminde yerlerine konmasıyla elde edilir.

$$\omega = -\frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x] \quad (2.1.19)$$

En büyük yerdeğiştirme yüklenen uçta oluşacaktır. Bu nedenle (2.1.19) denklemi $x = 0$ için hesaplanırsa en büyük deformasyon değeri

$$\omega_{\max} = (\omega)_{x=0} = -\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 + Q_0) \quad (2.1.20)$$

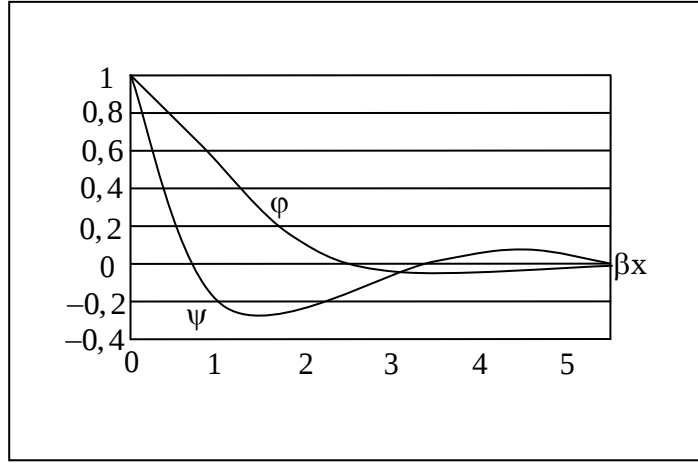
olarak elde edilir. Buradaki $-$ işareti, yerdeğiştirme pozitif yönünün dışarıdan silindir eksenine doğru seçilmiş olmasının sonucudur. Yüklenen uçtaki eğim (2.1.19) bağıntısının türevi alınarak bulunabilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \cos \beta x + Q_0 (\cos \beta x + \sin \beta x)]_{x=0} \\ &= \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0) \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Aşağıdaki notasyon kullanılarak yerdeğiştirme ve ardışık türevleri daha basit bir formda yazılabilir.

$$\begin{aligned} \varphi(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ \psi(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) \\ \theta(\beta x) &= e^{-\beta x} \cos \beta x \\ \zeta(\beta x) &= e^{-\beta x} \sin \beta x \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) - Q_0 \cos \beta x] \\ \frac{d\omega}{dx} &= \frac{1}{2\beta^2 D} [2\beta M_0 \theta(\beta x) + Q_0 \varphi(\beta x)] \\ \frac{d^2 \omega}{dx^2} &= -\frac{1}{2\beta D} [2\beta M_0 \varphi(\beta x) + 2Q_0 \zeta(\beta x)] \\ \frac{d^3 \omega}{dx^3} &= \frac{1}{D} [2\beta M_0 \zeta(\beta x) - Q_0 \psi(\beta x)] \end{aligned} \quad (2.1.23)$$



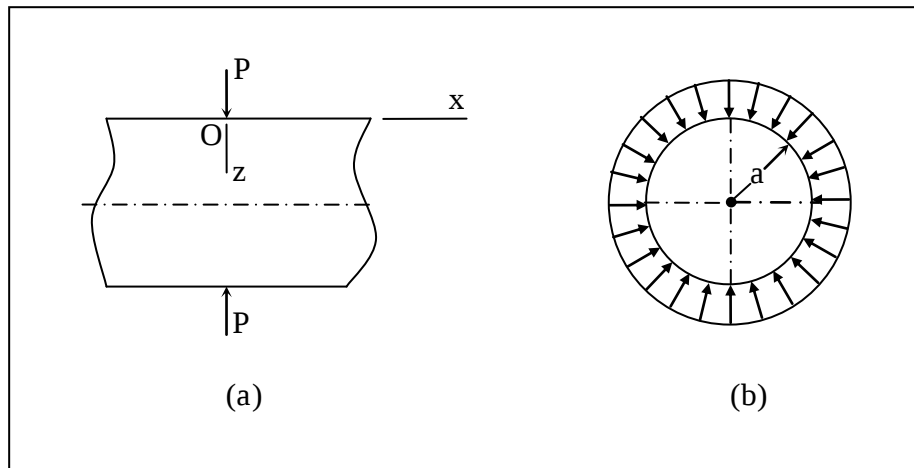
Şekil 2.1.3 (φ ve ψ fonksiyonları)

$\varphi(\beta x)$ ve $\psi(\beta x)$ fonksiyonları grafik olarak Şekil 2.1.3 de gösterilmiştir. Bu eğrilerden kabuğun eğilmesini karakterize eden fonksiyonların βx 'in büyük değerleri için 0 a yakınsadığı görülebilir.

M_x momenti ve ω deformasyonu (2.1.23) denklemlerinden bulunursa, M_φ eğilme momenti (2.1.7) denklemlerinin ikincisinden, N_φ kuvveti de (2.1.5) denkleminde elde edilebilir.

2.2 Dairesel Silindirik Kabukların Simetrik Deformasyonunun Özel Halleri

2.2.1 Düzgün Dağılmış Çizgisel Yük Altındaki Uzun Silindirik Kabuk



Şekil 2.2.1.1 (Çizgisel yüklü uzun silindirik kabuk)

Şekil 2.2.1.1a da görülen P şiddetindeki çizgisel yükün silindirin uçlarından yeteri kadar uzak olması durumunda (2.1.19) çözümü kabuğun iki yarısı için de

kullanılabilir. Simetri nedeniyle $Q_0 = -P/2$ olacaktır. Bu durumda kabuğun sağ parçası için aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$\omega = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 (\sin \beta x - \cos \beta x) + \frac{P}{2} \cos \beta x] \quad (2.2.1.1)$$

Burada x yükün uygulandığı kesitten itibaren ölçülen uzaklıktır. (2.2.1.1) denklemindeki M_0 momentini hesaplamak için simetri nedeniyle orta kesitteki eğimin 0 olmasından yararlanılabilir. (2.1.21) denklemi kullanılarak

$$2\beta M_0 - \frac{P}{2} = 0$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$M_0 = \frac{P}{4\beta} \quad (2.2.1.2)$$

olarak elde edilir. Bu değer (2.2.1.1) denkleminde yerine konursa

$$\omega = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x) = \frac{P}{8\beta^3 D} \varphi(\beta x) \quad (2.2.1.3)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu denklemden yararlanarak deformasyonun x 'e göre çeşitli dereceden türevleri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} &= -2\beta \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} \sin \beta x = -\frac{P}{4\beta^2 D} \zeta(\beta x) \\ \frac{d^2\omega}{dx^2} &= 2\beta^2 \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} (\sin \beta x - \cos \beta x) = -\frac{P}{4\beta D} \psi(\beta x) \\ \frac{d^3\omega}{dx^3} &= 4\beta^3 \frac{P}{8\beta^3 D} e^{-\beta x} \cos \beta x = \frac{P}{2D} \theta(\beta x) \end{aligned} \quad (2.2.1.4)$$

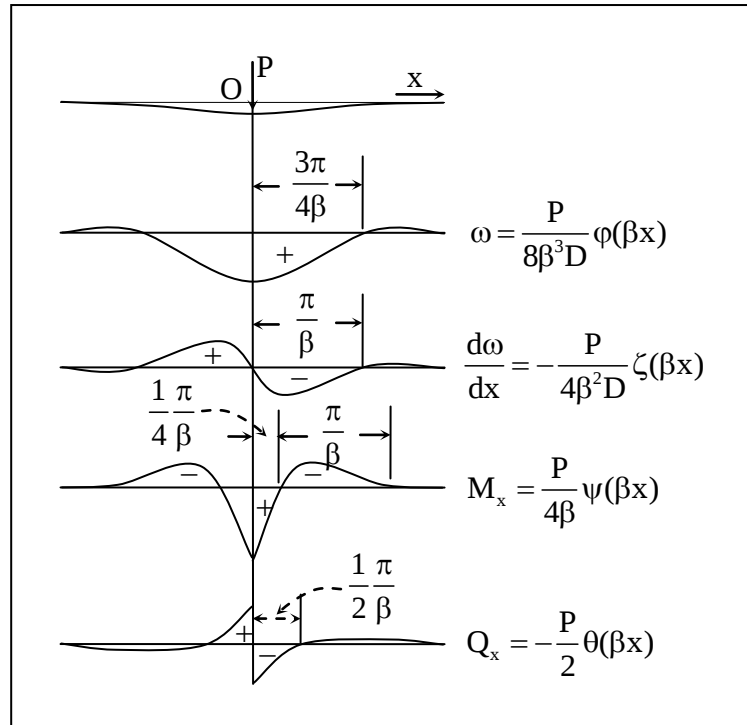
(2.1.2) ve (2.1.7) eşitlikleri kullanılarak M_x eğilme momenti ve Q_x kesme kuvveti için aşağıda verilen eşitlikler yazılabilir.

$$M_x = -D \frac{d^2\omega}{dx^2} \quad Q_x = -D \frac{d^3\omega}{dx^3}$$

(2.2.1.4) denklemleri bu eşitliklerde yerlerine konursa

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) \\ Q_x &= -\frac{P}{2} \theta(\beta x) \end{aligned} \quad (2.2.1.5)$$

olarak elde edilir. Elde edilen sonuçların tümü grafik olarak Şekil 2.2.1.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2.1.2 (Çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramları)

En büyük çökme P'nin altında oluşacaktır ve (2.2.1.3) denkleminde hesaplanan değeri

$$\omega_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{Pa^2\beta}{2Eh} \quad (2.2.1.6)$$

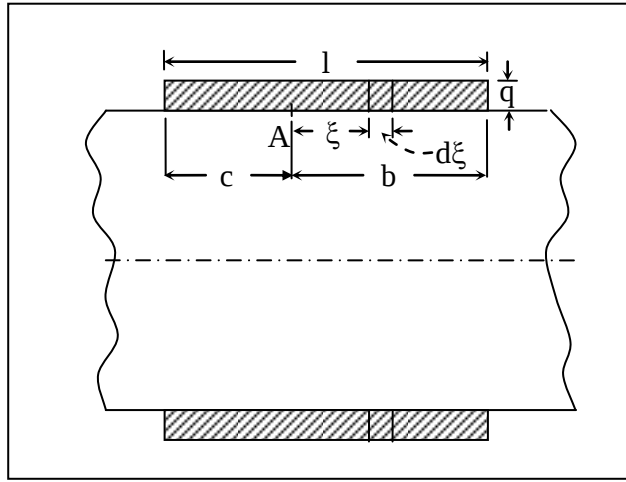
olacaktır. En büyük eğilme momenti ise aynı şekilde P'nin altında oluşacak ve (2.2.1.5) denkleminde hesaplanan değeri

$$M_{\max} = \frac{P}{4\beta} \quad (2.2.1.7)$$

olacaktır. Kesme kuvvetinin en büyük değerinin hesaba gerek kalmadan simetri nedeniyle $P/2$ olduğu görülebilir.

Şekil 2.2.1.2 incelendiğinde kabuğun eğilmesini karakterize eden bütün büyüklüklerin $x > \pi/\beta$ için oldukça küçük değerlere sahip olduğu görülmektedir. Bu, eğilmenin lokal karakterde olduğunun bir göstergesidir. Bu nedenle pratikte uzunluğu $l = 2\pi/\beta$ olan bir kabuk için elde edilmiş en büyük çökme ve en büyük gerilme değerleri çok daha uzun bir kabuk için rahatlıkla kullanılabilir.

Çizgisel yük çözümü, süperpozisyon ilkesi kullanılarak silindirin belli bir uzunluğu boyunca yayılmış simetrik yük durumu için kullanılabilir.



Şekil 2.2.1.3 (Düzgün dağılmış simetrik yük)

Şekil 2.2.1.3 de görüldüğü gibi silindirin l uzunluğu boyunca q şiddetinde yayılı yükün uygulandığı durumda, yükün silindirin uçlarından yeteri kadar uzak olması halinde (2.2.1.3) çözümü kullanılabilir. A'dan ξ uzaklığındaki $q d\xi$ şiddetindeki elemanter yük nedeniyle A'da oluşacak çökme, (2.2.1.3) denkleminde P yerine $q d\xi$ ve x yerine ξ konulursa

$$\frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

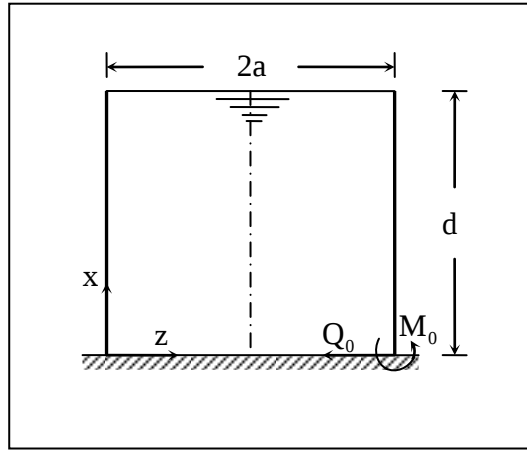
olarak elde edilir. l uzunluğu boyunca yayılmış toplam yükün A'da yapacağı çökme ise bu denklemin ayrı ayrı b ve c bölgelerinde integre edilmesiyle bulunacaktır.

$$\begin{aligned}
\omega &= \int_0^b \frac{qd\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos\beta\xi + \sin\beta\xi) + \int_0^c \frac{qd\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos\beta\xi + \sin\beta\xi) \\
&= \frac{qa^2}{2Eh} (2 - e^{-\beta b} \cos\beta b - e^{-\beta c} \cos\beta c)
\end{aligned}
\tag{2.2.1.8}$$

A noktasında oluşacak eğilme momentleri ise benzer şekilde süperpozisyon metodu kullanılarak bulunabilir.

2.2.2 Sabit Cidar Kalınlıklı Silindirik Tanklar

Şekil 2.2.2.1 de görülen iç sıvı basıncı altındaki silindirik tankın cidarında oluşacak gerilmeler (2.1.11) denklemi kullanılarak analiz edilebilir.



Şekil 2.2.2.1 (Sabit duvar kalınlıklı silindirik tank)

(2.1.11) denkleminde Z yerine

$$Z = -\gamma(d - x) \tag{2.2.2.1}$$

eşitliği konursa

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = -\frac{\gamma(d - x)}{D} \tag{2.2.2.2}$$

denklemi elde edilir. Burada γ sıvının birim hacim ağırlığıdır. Bu denklemin özel çözümü aşağıda verilmiştir.

$$\omega_1 = -\frac{\gamma(d - x)}{4\beta^4 D} = -\frac{\gamma(d - x)a^2}{Eh} \tag{2.2.2.3}$$

(2.2.2.3) denklemi (2.1.14) genel çözümündeki $f(x)$ yerine konularak (2.2.2.2) diferansiyel denkleminin tam çözümü aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma(d-x)a^2}{Eh}$$

Pratikte pek çok durumda duvar kalınlığı h , silindir yarıçapı a ve duvar yüksekliği d 'ye göre oldukça küçük olduğundan, kabuk sonsuz uzun kabul edilebilir. Bu durumda $C_1 = C_2 = 0$ alınarak

$$\omega = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{\gamma(d-x)a^2}{Eh} \quad (2.2.2.4)$$

çözümü kullanılabilir. C_3 ve C_4 sabitleri tankın altındaki sınır koşullarından elde edilecektir. Tankın alt ucunun rijit bir temele oturduğu varsayılırsa buradaki sınır koşulları aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$(\omega)_{x=0} = C_3 - \frac{\gamma a^2 D}{Eh} = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dx}\right)_{x=0} &= [-\beta C_3 e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) + \beta^4 C_4 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x) + \frac{\gamma a^2}{Eh}]_{x=0} \\ &= \beta(C_4 - C_3) + \frac{\gamma a^2}{Eh} = 0 \end{aligned}$$

Bu denklemlerden C_3 ve C_4 çözülürse

$$C_3 = \frac{\gamma a^2 d}{Eh} \quad C_4 = \frac{\gamma a^2}{Eh} \left(d - \frac{1}{\beta}\right)$$

olarak elde edilir. Bu durumda (2.2.2.5) denklemi

$$\omega = -\frac{\gamma a^2}{Eh} \left\{ d - x - e^{-\beta x} \left[d \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta}\right) \sin \beta x \right] \right\} \quad (2.2.2.5a)$$

şeklini alır. Bu denklem (2.1.22) notasyonu kullanılarak daha basit bir formda

yazılabilir.

$$\omega = -\frac{\gamma a^2 d}{Eh} \left[1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \zeta(\beta x) \right] \quad (2.2.2.5b)$$

Çembersel doğrultudaki N_φ kuvveti için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$N_\varphi = -\frac{Eh\omega}{a} = \gamma ad \left[1 - \frac{x}{d} - \theta(\beta x) - \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \zeta(\beta x) \right] \quad (2.2.2.6)$$

(2.2.2.5) denkleminin ikinci türevi kullanılarak, eğilme momenti M_x

$$M_x = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} = \frac{2\beta^2 \gamma a^2 D d}{Eh} \left[-\zeta(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \theta(\beta x) \right] \quad (2.2.2.7)$$

$$M_x = \frac{\gamma adh}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[-\zeta(\beta x) + \left(1 - \frac{1}{\beta d} \right) \theta(\beta x) \right]$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin x 'e göre birinci türevi alınırsa kesme kuvveti için

$$Q_x = \frac{\gamma ah}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \left[\zeta(\beta x) + (1 - 2d\beta) \theta(\beta x) \right] \quad (2.2.2.8)$$

eşitliği elde edilir.

2.2.3 Değişken Cidar Kalınlıklı Silindirik Tanklar

Değişken duvar kalınlıklı silindirik tank problemleri (2.1.10) denkleminin, eğilme rijitliği D ve kalınlık h 'ın, x 'in bir fonksiyonu olduğu dikkate alınarak integre edilmesiyle çözülebilir. (2.1.10) denklemi değişken katsayılı dördüncü dereceden lineer bir diferansiyel denklemdir. Duvar kalınlığı h 'ın x 'in lineer bir fonksiyonu olması halinde koordinat takımı Şekil 2.2.3.1 deki gibi alınarak h ve D için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$h = \alpha x \quad D = \frac{E\alpha^3}{12(1-\nu^2)} x^3 \quad (2.2.3.1)$$

(2.2.3.1) bağıntıları kullanılarak (2.1.10) diferansiyel denklemi aşağıdaki formda

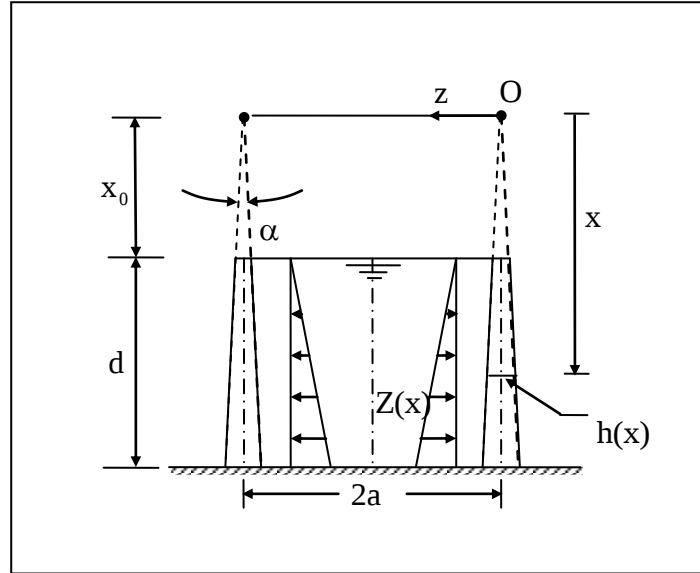
yazılabilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 a^2} x \omega = -\frac{12(1-\nu^2) \gamma (x-x_0)}{E \alpha^3} \quad (2.2.3.2)$$

Bu denklemin özel çözümü

$$\omega_1 = -\frac{\gamma a^2}{E \alpha} \frac{x-x_0}{x} \quad (2.2.3.3)$$

şeklindedir. Bu çözüm serbest uçlu kabuğun $\gamma(x-x_0)$ basıncı altında radyal genişlemesini temsil etmektedir.



Şekil 2.2.3.1 (Değişken duvar kalınlıklı silindirik tank)

ω_1 deformasyonu etkisiyle silindirde oluşacak eğilme momenti

$$M_x = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2} = -\frac{\gamma \alpha^2 a^2 x_0}{6(1-\nu^2)} \quad (2.2.3.4)$$

şeklinde olacaktır. Bu moment x 'den bağımsızdır ve pratikte pek çok durumda ihmal edilebilecek kadar küçük şiddettedir.

(2.2.3.2) denkleminin tam çözümünü elde etmek için homojen denklemin çözümüne (2.2.3.3) özel çözümünü eklemek yeterli olacaktır.

(2.2.3.2) ile verilen diferansiyel denklemin homojen kısmı aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} (x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2}) + \frac{12(1-v^2)}{\alpha^2 a^2} \omega = 0$$

Yukarıda verilen eşitlik

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} (x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2}) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \{x^2 \frac{d}{dx} [\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^2 \frac{d\omega}{dx})]\}$$

bağıntısı ve

$$L(\omega) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x^2 \frac{d\omega}{dx})$$

$$\rho^4 = \frac{12(1-v^2)}{\alpha^2 a^2}$$

tanımları göz önüne alınarak aşağıda verilen şekilde yazılır.

$$L[L(\omega)] + \rho^4 \omega = 0$$

Bulunan bu denklemin çözümü

$$L(\omega) + i\rho^2 \omega = 0$$

$$L(\omega) - i\rho^2 \omega = 0 \quad i = \sqrt{-1}$$

denklemlerinin çözümlerinin toplamına eşittir. Yukarıda verilen birinci denklemin çözümü

$$\omega_1 = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad \omega_2 = \varphi_3 + i\varphi_4$$

ise ikinci denklemin çözümü

$$\omega_3 = \varphi_1 - i\varphi_2 \quad \omega_4 = \varphi_3 - i\varphi_4$$

dir. Bu durumda C_1, C_2, C_3, C_4 sabit olmak üzere homojen çözüm

$$\omega = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + C_3 \varphi_3 + C_4 \varphi_4$$

olarak bulunur. Bazı dönüşümler yapıp seriye açma işlemlerinden sonra Bessel fonksiyonlarından yararlanılarak elde edilen homojen çözüm aşağıda verilmiştir.*

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x}} [C_1 \psi'_1(2\rho\sqrt{x}) + C_2 \psi'_2(2\rho\sqrt{x}) + C_3 \psi'_3(2\rho\sqrt{x}) + C_4 \psi'_4(2\rho\sqrt{x})] \quad (2.2.3.5)$$

$\xi = 2\rho\sqrt{x}$ dönüşümü yapılarak (2.2.3.5) çözümünden aşağıda verilen normal kuvvet, eğilme momenti ve kesme kuvveti bağıntıları elde edilebilir.

$$N_\phi = -\frac{Eh}{a} \omega = -\frac{E\alpha}{a} \sqrt{x} [C_1 \psi'_1(\xi) + C_2 \psi'_2(\xi) + C_3 \psi'_3(\xi) + C_4 \psi'_4(\xi)] \quad (2.2.3.6)$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \{C_1 [\xi \psi_2(\xi) - 2\psi'_1(\xi)] - C_2 [\xi \psi_1(\xi) + 2\psi'_2(\xi)] + C_3 [\xi \psi_4(\xi) - 2\psi'_3(\xi)] - C_4 [\xi \psi_3(\xi) + 2\psi'_4(\xi)]\} \quad (2.2.3.7)$$

$$M_x = -D \frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{E\alpha^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{C_1 [\xi^2 \psi'_2(\xi) - 4\xi \psi_2(\xi) + 8\psi'_1(\xi)] - C_2 [\xi^2 \psi'_1(\xi) - 4\xi \psi_1(\xi) - 8\psi'_2(\xi)] + C_3 [\xi^2 \psi'_4(\xi) - 4\xi \psi_4(\xi) + 8\psi'_3(\xi)] - C_4 [\xi^2 \psi'_3(\xi) - 4\xi \psi_3(\xi) - 8\psi'_4(\xi)]\} \quad (2.2.3.8)$$

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{E\alpha^3 \rho^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{C_1 [\xi \psi_1(\xi) + 2\psi'_2(\xi)] + C_2 [\xi \psi_2(\xi) - 2\psi'_1(\xi) + C_3 [\xi \psi_3(\xi) + 2\psi'_4(\xi)] + C_4 [\xi \psi_4(\xi) - 2\psi'_3(\xi)]\} \quad (2.2.3.9)$$

Formüllerde geçen $\psi_1, \dots, \psi_4$ fonksiyonları ile bu fonksiyonların birinci türevleri olan $\psi'_1, \dots, \psi'_4$ fonksiyonlarının $\xi = 2\rho\sqrt{x} \leq 6$ için sayısal değerleri Tablo 2.2.3.1 den alınabilir.

Tablo 2.2.3.1 (ψ_i fonksiyonlarının tablosu)

* Daha detaylı bilgi S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells (Second Edition) sayfa 488-494 de bulunmaktadır..

x	$\psi_1(x)$	$\psi_2(x)$	$\psi'_1(x)$	$\psi'_2(x)$
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,20	1,0000	-0,0100	-0,0005	-0,1000
0,40	0,9996	-0,0399	-0,0040	-0,2000
0,60	0,9980	-0,0900	-0,0135	-0,3000
0,80	0,9936	-0,1599	-0,0320	-0,3991
1,00	0,9844	-0,2500	-0,0624	-0,4974
1,20	0,9676	-0,3587	-0,1078	-0,5935
1,40	0,9401	-0,4867	-0,1709	-0,6860
1,60	0,8979	-0,6327	-0,2545	-0,7727
1,80	0,8367	-0,7953	-0,3612	-0,8509
2,00	0,7517	-0,9723	-0,4931	-0,9170
2,20	0,6377	-1,1610	-0,6520	-0,9661
2,40	0,4890	-1,3575	-0,8392	-0,9944
2,60	0,3001	-1,5569	-1,0552	-0,9943
2,80	0,0651	-1,7529	-1,2993	-0,9589
3,00	-0,2214	-2,0228	-1,7141	-0,8223
3,20	-0,5644	-2,1016	-1,8636	-0,7499
3,40	-0,9680	-2,2334	-2,1755	-0,5577
3,60	-1,4353	-2,3199	-2,4983	-0,2936
3,80	-1,9674	-2,3454	-2,8221	0,0526
4,00	-2,5634	-2,2927	-3,1346	0,4912
4,20	-3,2195	-2,1422	-3,4199	1,0318
4,40	-3,9283	-1,8726	-3,6587	1,6833
4,60	-4,6784	-1,4610	-3,8280	2,4520
4,80	-5,4531	-0,8837	-3,9006	3,3422
5,00	-6,2301	-0,1160	-3,8454	4,3542
5,20	-6,9803	0,8658	-3,6270	6,4835
5,40	-7,6674	2,0845	-3,2063	6,7198
5,60	-8,2466	3,5597	-2,5409	8,0453
5,80	-8,7937	5,3068	-1,5856	9,4332
6,00	-8,8583	7,3347	-0,2931	10,3462
x	$\psi_3(x)$	$\psi_4(x)$	$\psi'_3(x)$	$\psi'_4(x)$
0,00	0,5000		0,0000	
0,20	0,4826	-1,1034	-0,1419	3,1340
0,40	0,4480	-0,6765	-0,1970	1,4974
0,60	0,4058	-0,4412	-0,2216	0,9273
0,80	0,3606	-0,2883	-0,2286	0,6286
1,00	0,3151	-0,1825	-0,2243	0,4422
1,20	0,2713	-0,1076	-0,2129	0,3149
1,40	0,2302	-0,0542	-0,1971	0,2235
1,60	0,1926	-0,0166	-0,1788	0,1560
1,80	0,1588	0,0094	-0,1594	0,1056
2,00	0,1289	0,0265	-0,1399	0,0679
2,20	0,1026	0,0371	-0,1210	0,0397
2,40	0,0804	0,0429	-0,1032	0,0189
2,60	0,0614	0,0446	-0,0868	0,0039
2,80	0,0455	0,0447	-0,0719	0,0066
3,00	0,0326	0,0427	-0,0586	-0,0137
3,20	0,0220	0,0394	-0,0469	-0,0180
3,40	0,0137	0,0356	-0,0369	-0,0204
3,60	0,0072	0,0314	-0,0284	-0,0213
3,80	0,0022	0,0260	-0,0212	-0,0210
4,00	-0,0014	0,0230	-0,0152	-0,0200
4,20	-0,0039	0,0192	-0,0104	-0,0185
4,40	-0,0056	0,0156	-0,0065	-0,0168
4,60	-0,0066	0,0125	-0,0035	-0,0148
4,80	-0,0071	0,0097	-0,0012	-0,0129
5,00	-0,0071	0,0073	0,0005	-0,0109
5,20	-0,0069	0,0053	0,0017	-0,0091
5,40	-0,0065	0,0037	0,0025	-0,0075
5,60	-0,0059	0,0023	0,0030	-0,0060
5,80	-0,0053	0,0012	0,0033	-0,0047
6,00	-0,0046	0,0004	0,0033	-0,0036

$\xi = 2\rho\sqrt{x} > 6$ için ise aşağıda verilen asimptotik bağıntılar kullanılabilir.

$$\psi_1(\xi) ; \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.10)$$

$$\psi_2(\xi) ; -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.11)$$

$$\psi_3(\xi) ; \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.12)$$

$$\psi_4(\xi) ; -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.13)$$

$$\psi'_1(\xi) ; \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.14)$$

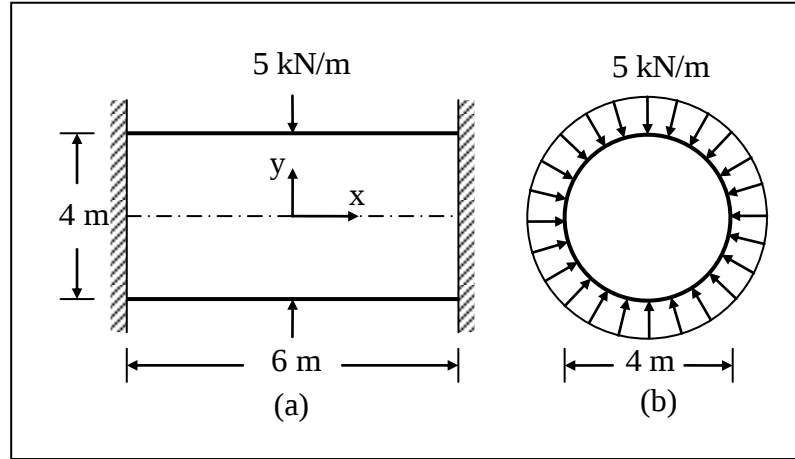
$$\psi'_2(\xi) ; -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.15)$$

$$\psi'_3(\xi) ; -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.16)$$

$$\psi'_4(\xi) ; \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (2.2.3.17)$$

3. SAYISAL ÖRNEKLER

3.1 Eksenine ve orta kesitine göre çizgisel simetrik yüklü silindirik kabuk



Şekil 3.1.1 (Halka yükle yüklü silindirik kabuk)

Silindirik kabuk Şekil 3.1.1a ve Şekil 3.1.1b de görüldüğü şekilde 5 kN/m şiddetinde silindir eksenine göre simetrik halka yükle yüklenmiştir. Kabuk boyu $l = 6$ m, kabuk kalınlığı $h = 0,4$ m, silindir yarıçapı $a = 2$ m dir. Kabuk malzemesi BS20 kalitesinde beton kabul edilerek elastisite modülü $E = 28,5$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,2$ olarak alınacaktır. Bu değerler kullanılarak kabukta oluşacak çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri, kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

Kesin çözüm için öncelikle kabuğun eğilme davranışının belirlenmesi gerekir. Bölüm 2.2 de anlatıldığı şekilde kabuğun uzun veya kısa kabuk oluşuna göre, kabuğun mesnetlenme şeklinin eğilme davranışındaki etkisi değişmektedir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 1,583 \cdot 10^5 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2D} = 4,494 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,456 \text{ m}^{-1}$$

$2\pi/\beta = 4,31 \text{ m} < l = 6 \text{ m}$ olduğundan kabuk uzun kabuktur ve mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisi ihmal edilebilir. Bu durumda çökme eğrisi için (2.2.1.3) denklemi, eğilme momenti ve kesme kuvveti için ise (2.1.5) denklemleri kullanılabilir.

$$\omega = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x)$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

$$Q_x = -\frac{P}{2} \theta(\beta x) = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x$$

Bu denklemlerde x değeri yükün uygulandığı kesitle çökmenin olduğu kesit arasındaki uzaklıktır. β , D ve P değerleri formüllerde yerlerine konursa 0,2 m aralıklarla elde edilecek değerler Tablo 3.1.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot \text{m}$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
0,0	1,2791	0,8585	-2,5000
0,2	1,1902	0,4304	-1,7898
0,4	0,9897	0,1367	-1,1662
0,6	0,7522	-0,0446	-0,6701
0,8	0,5242	-0,1403	-0,3080
1,0	0,3305	-0,1759	-0,0668
1,2	0,1803	-0,1735	0,0765
1,4	0,0736	-0,1502	0,1468
1,6	0,0047	-0,1181	0,1674
1,8	-0,0344	-0,0852	0,1578
2,0	-0,0519	-0,0561	0,1324
2,2	-0,0551	-0,0327	0,1014
2,4	-0,0499	-0,0155	0,0712
2,6	-0,0406	-0,0039	0,0454
2,8	-0,0303	0,0031	0,0252
3,0	-0,0207	0,0066	0,0107

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm

Problem sabit kalınlıklı silindirik kabuğun simetrik deformasyonunu tanımlayan (2.1.13) diferansiyel denklemi kullanılarak çözülebilir.

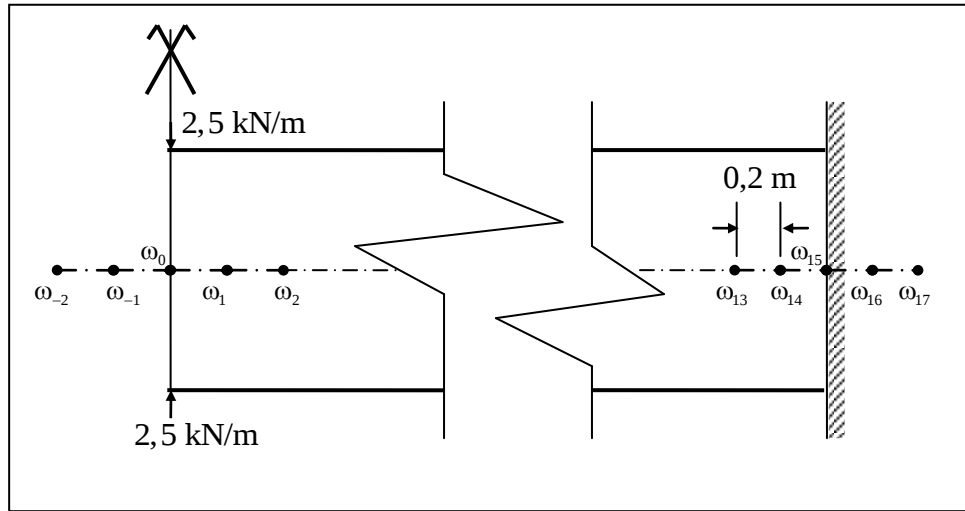
$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z}{D}$$

Diferansiyel denklem 4. türev için (1.2.4.20) formülü kullanılarak aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} (\omega_{i-2} - 4\omega_{i-1} + 6\omega_i - 4\omega_{i+1} + \omega_{i+2}) + 4\beta^4 \omega_i = \frac{Z_i}{D}$$

Sistemde yayılı yük olmadığından $Z_i = 0$ dır. Bu durumda $\Delta x = 0,2 \text{ m}$ ve $\beta^4 = 4,494 \text{ m}^{-4}$ için yazılacak denklemlerin formu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$625\omega_{i-2} - 2500\omega_{i-1} + 3767,976\omega_i - 2500\omega_{i+1} + 625\omega_{i+2} = 0 \quad (3.1.1)$$



Şekil 3.1.2 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Yüklem ve geometri orta kesite göre simetrik olduğundan kabuk çökme eğrisi de orta kesite göre simetrik olacaktır. Bu durumda sistem Şekil 3.1.2 de görüldüğü gibi ikiye bölünüp çözüm yapılabilir. $\Delta x = 0,2 \text{ m}$ olduğuna göre orta kesitten ankastre uca kadar yazılacak 16 eşitlik sonucunda denklemlere girecek bilinmeyenler $\omega_{-2}, \dots, \omega_{17}$ olmak üzere toplam 20 tanedir. Geriye kalan 4 denklem ise orta kesit ve ankastre uçta yazılacak olan ikişer sınır koşuludur. Çökme eğrisi orta kesite göre

simetrik olduğundan ve orta kesitteki kesme kuvveti $-2,5 \text{ kN/m}$ olduğundan bu kesitte yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\left. -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right) \right|_{x=0} = -D \left(\frac{-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\Delta x)^3} \right) = -2,5$$

$$-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 = 2,52685 \cdot 10^{-7} \quad (3.1.3)$$

Ankastre uçta ise çökme ve dönme olmayacağından sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\omega|_{x=3} = 0 \Rightarrow \omega_{15} = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=3} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{16} - \omega_{14}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_{16} - \omega_{14} = 0 \quad (3.1.5)$$

Önce orta kesitteki sınır koşullarından elde edilen (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri, sonra diferansiyel denklemin sonlu farklar şeklinde yazılmasıyla elde edilen ω_0 noktasından ω_{15} noktasına kadar yazılacak (3.1.1) denklemi, son olarak ankastre uçtaki sınır koşullarından elde edilen (3.1.4) ve (3.1.5) denklemleri sonucunda aşağıdaki 20 bilinmeyenli 20 denklemlili lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_{14} \\ \omega_{15} \\ \omega_{16} \\ \omega_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,52685 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Çökme değerleri bilinen ve sadece x değişkenine bağlı olan bir sistemdeki eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir.

$$M_x = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \quad (3.1.6)$$

$$Q_x = -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) \quad (3.1.7)$$

(3.1.6) ve (3.1.7) formülleri ω_i noktasında sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$M_{x_i} = -D\left(\frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{(\Delta x)^2}\right) \quad (3.1.8)$$

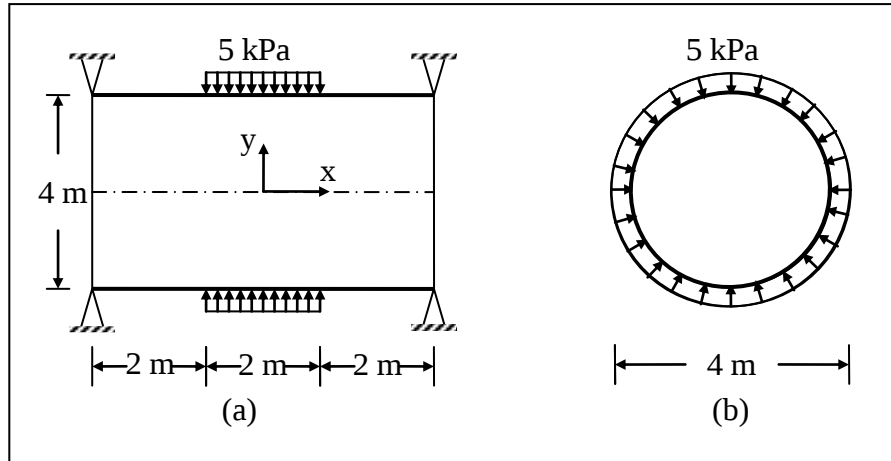
$$Q_{x_i} = -D\left(\frac{-\omega_{i-2} + 2\omega_{i-1} - 2\omega_{i+1} + \omega_{i+2}}{2(\Delta x)^3}\right) \quad (3.1.9)$$

Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu değerlerin sırasıyla (3.1.8) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.1.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
	0,7346		
	1,1980		
0,0	1,3041	0,8398	-2,5000
0,2	1,1980	0,4140	-1,7880
0,4	0,9873	0,1246	-1,1662
0,6	0,7451	-0,0525	-0,6732
0,8	0,5162	-0,1447	-0,3143
1,0	0,3238	-0,1782	-0,0753
1,2	0,1764	-0,1748	0,0671
1,4	0,0732	-0,1513	0,1381
1,6	0,0083	-0,1196	0,1613
1,8	-0,0264	-0,0868	0,1561
2,0	-0,0392	-0,0571	0,1375
2,2	-0,0376	-0,0318	0,1156
2,4	-0,0279	-0,0109	0,0969
2,6	-0,0155	0,0069	0,0846
2,8	-0,0049	0,0230	0,0788
3,0	0,0000	0,0385	0,0774
	-0,0049		
	-0,0233		

3.2 Ortasından belli bir bölgede eksenine göre simetrik yüklü silindirik kabuk



Şekil 3.2.1 (Ortasından belli bir bölgede simetrik yüklü silindirik kabuk)

Şekil 3.2.1 deki sistemin $q = 5 \text{ kPa}$, $h = 0,3 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $E = 28,5 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$ değerleri için çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri $0,05 \text{ m}$ aralıklarla kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

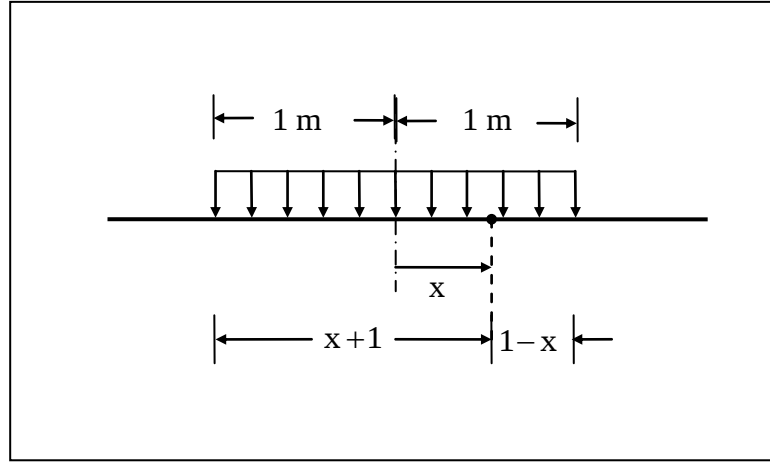
Kesin çözüm için öncelikle bir önceki problemde olduğu gibi kabuğun eğilme davranışını belirleyecek olan uzun veya kısa kabuk olma durumu incelenmelidir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 66796,875 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2D} = 8 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,682 \text{ m}^{-1}$$

Uzun kabuk durumu için π/β değerinin yük ile mesnet arasındaki en kısa mesafeden küçük olması gerekir. $\pi/\beta = 1,868 < 2$ olduğundan kabuk uzun kabuktur. Bu durumda çözüm için (2.2.1.8) denklemi kullanılabilir.

Şekil 3.2.2 den de görülebileceği gibi orta kesit x ekseninin başlangıç noktası seçilirse halka yük çözümü ve süperpozisyon ilkesi kullanılarak yükün uygulandığı bölge içindeki herhangi bir kesitteki çökme miktarı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.



Şekil 3.2.2 (Yükün uygulandığı bölgede integrasyon sınırları)

$$\omega = \int_0^{x+1} \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + \int_0^{1-x} \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

$$\omega = -\frac{5}{8\beta^4 D} [e^{-(x+1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta) - 2]$$

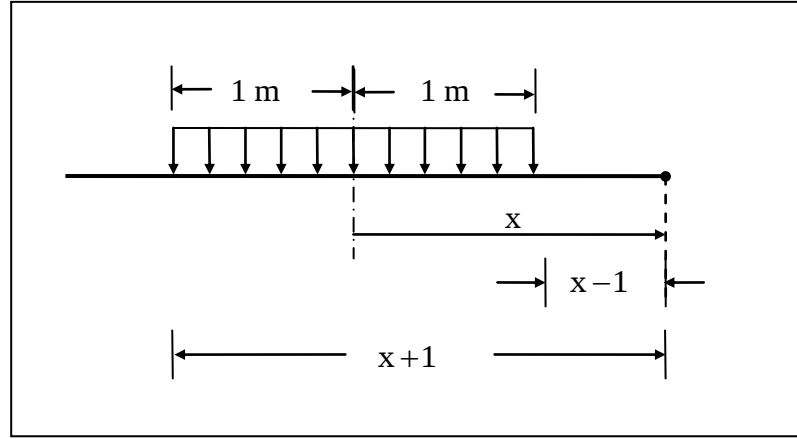
Benzer şekilde halka yük durumu için çıkarılmış eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadeleri yükün uygulandığı bölgede süperpozisyonu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$M_x = \int_0^{x+1} \frac{q d\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi) + \int_0^{1-x} \frac{q d\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi)$$

$$M_x = \frac{5}{4\beta^2} [e^{-(x+1)\beta} (\sin \beta x \cos \beta + \cos \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (\cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)]$$

$$Q_x = -\int_0^{x+1} \frac{q d\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi + \int_0^{1-x} \frac{q d\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi$$

$$Q_x = \frac{5}{4\beta} [e^{-(x+1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta - \cos \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta + \cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)]$$



Şekil 3.2.3 (Yükün uygulandığı bölge dışında integrasyon sınırları)

Yükün uygulandığı bölge dışında ise çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki integrallerle bulunabilir. (Şekil 3.2.3)

$$\omega = \int_{x-1}^{x+1} \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

$$\omega = \frac{5}{8\beta^4 D} [e^{-(x+1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta) + e^{-(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta)]$$

$$M_x = \int_{x-1}^{x+1} \frac{q d\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi)$$

$$M_x = -\frac{5}{4\beta^2} [e^{-(x+1)\beta} (\sin \beta x \cos \beta - \cos \beta x \sin \beta) + e^{-(x-1)\beta} (-\cos \beta x \sin \beta + \sin \beta x \cos \beta)]$$

$$Q_x = -\int_{x-1}^{x+1} \frac{q d\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi$$

$$Q_x = -\frac{5}{4\beta} [e^{-(x+1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta + \sin \beta x \cos \beta + \cos \beta x \sin \beta) + e^{-(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta + \cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)]$$

Bu formüller kullanılarak 0,05 m aralıklarla elde edilen çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.2.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.2.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

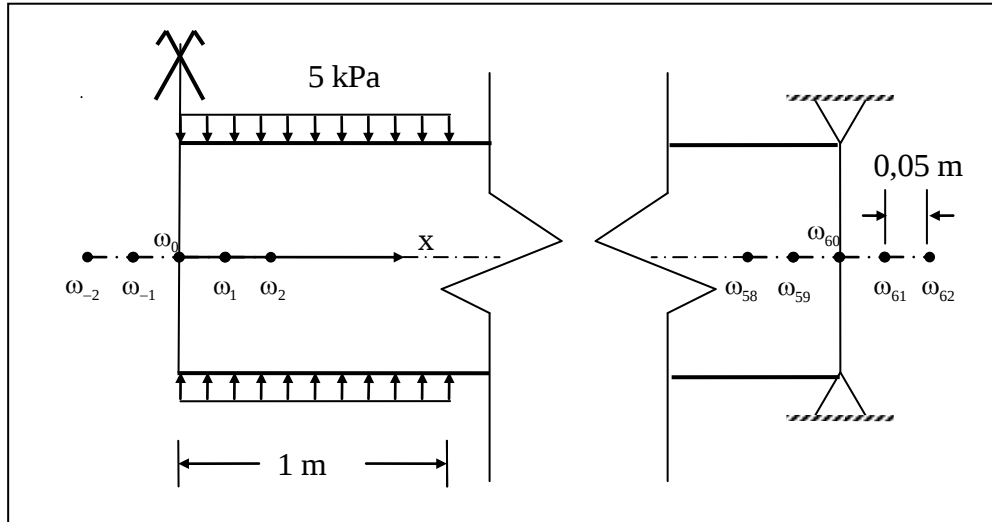
x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
0,00	2,3863	0,1633	0,0000
0,05	2,3832	0,1635	0,0051
0,10	2,3741	0,1638	0,0094
0,15	2,3587	0,1644	0,0125
0,20	2,3373	0,1651	0,0137
0,25	2,3096	0,1657	0,0122
0,30	2,2758	0,1662	0,0074
0,35	2,2357	0,1664	-0,0014
0,40	2,1895	0,1660	-0,0147
0,45	2,1370	0,1648	-0,0334
0,50	2,0783	0,1626	-0,0579
0,55	2,0135	0,1589	-0,0891
0,60	1,9429	0,1535	-0,1276
0,65	1,8664	0,1460	-0,1738
0,70	1,7845	0,1360	-0,2286
0,75	1,6976	0,1230	-0,2924
0,80	1,6060	0,1066	-0,3657
0,85	1,5105	0,0863	-0,4491
0,90	1,4117	0,0615	-0,5428
0,95	1,3107	0,0318	-0,6473
1,00	1,2085	-0,0034	-0,7626
1,05	1,1064	-0,0353	-0,6388
1,10	1,0057	-0,0647	-0,5259
1,15	0,9075	-0,0887	-0,4237
1,20	0,8128	-0,1078	-0,3317
1,25	0,7221	-0,1225	-0,2497
1,30	0,6361	-0,1334	-0,1771
1,35	0,5551	-0,1409	-0,1135
1,40	0,4794	-0,1454	-0,0582
1,45	0,4093	-0,1473	-0,0108
1,50	0,3446	-0,1469	0,0295
1,55	0,2855	-0,1448	0,0631
1,60	0,2318	-0,1410	0,0907
1,65	0,1834	-0,1361	0,1129
1,70	0,1402	-0,1301	0,1302
1,75	0,1018	-0,1233	0,1431
1,80	0,0680	-0,1160	0,1521
1,85	0,0386	-0,1083	0,1577
1,90	0,0132	-0,1004	0,1605
1,95	-0,0084	-0,0925	0,1607
2,00	-0,0266	-0,0845	0,1588
2,05	-0,0416	-0,0767	0,1551
2,10	-0,0537	-0,0691	0,1500
2,15	-0,0633	-0,0617	0,1437
2,20	-0,0706	-0,0548	0,1366

2,25	-0,0758	-0,0481	0,1287
2,30	-0,0792	-0,0419	0,1204
2,35	-0,0811	-0,0361	0,1118
2,40	-0,0816	-0,0307	0,1031
2,45	-0,0810	-0,0258	0,0944
2,50	-0,0794	-0,0213	0,0858
2,55	-0,0770	-0,0172	0,0775
2,60	-0,0740	-0,0135	0,0694
2,65	-0,0705	-0,0102	0,0617
2,70	-0,0667	-0,0073	0,0543
2,75	-0,0625	-0,0047	0,0474
2,80	-0,0582	-0,0025	0,0410
2,85	-0,0538	-0,0006	0,0350
2,90	-0,0494	0,0010	0,0295
2,95	-0,0450	0,0024	0,0244
3,00	-0,0407	0,0035	0,0198

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm

Problem 1 de anlatıldığı şekilde (2.1.13) diferansiyel denklemi sonlu farklar şeklinde yazılıp $\Delta x = 0,05 \text{ m}$, $\beta^4 = 8 \text{ m}^{-4}$ ve $D = 66796 \text{ kN.m}$ değerleri yerlerine konursa elde edilecek denklemlerin formu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$160000\omega_{i-2} - 640000\omega_{i-1} + 960032\omega_i - 640000\omega_{i+1} + 160000\omega_{i+2} = \frac{Z_i}{66796,875} \quad (3.2.1)$$



Şekil 3.2.4 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Yükleme ve geometri simetrik olduğundan sistem Şekil 3.2.2 de görüldüğü gibi ikiye bölünerek çözülebilir. Orta kesitte eğim ve kesme kuvveti sıfır olacaktır. Bu durumda sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$\left. -D \left(\frac{d^3\omega}{dx^3} \right) \right|_{x=0} = -D \left(\frac{-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\Delta x)^3} \right) = 0$$

$$-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 = 0 \quad (3.2.3)$$

Mafsallı uçta ise çökme ve eğilme momenti olmayacağından sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{x=3} = 0 \Rightarrow \omega_{60} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\left. \frac{d^2\omega}{dx^2} \right|_{x=3} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{59} - 2\omega_{60} + \omega_{61}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{59} - 2\omega_{60} + \omega_{61} = 0 \quad (3.2.5)$$

Önce orta kesitteki sınır koşullarından elde edilen (3.2.2) ve (3.2.2) denklemleri, sonra diferansiyel denklemin sonlu farklar şeklinde yazılmasıyla elde edilen ω_0 noktasından ω_{60} noktasına kadar yazılacak (3.2.1) denklemi, son olarak mafsallı uçtaki sınır koşullarından elde edilen (3.2.4) ve (3.2.5) denklemleri sonucunda aşağıdaki 65 bilinmeyenli 65 denklemlili lineer denklem sistemi elde edilir. (3.2.1) yazılırken $\omega_0, \dots, \omega_{20}$ noktalarında $Z_i / D = 5 / 66796,875 = 7,48538 \cdot 10^{-5}$ diğer noktalarda $Z_i / D = 0$ olacaktır.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ \omega_{58} \\ \omega_{59} \\ \omega_{60} \\ \omega_{61} \\ \omega_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,48538 \cdot 10^{-5} \\ 7,48538 \cdot 10^{-5} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

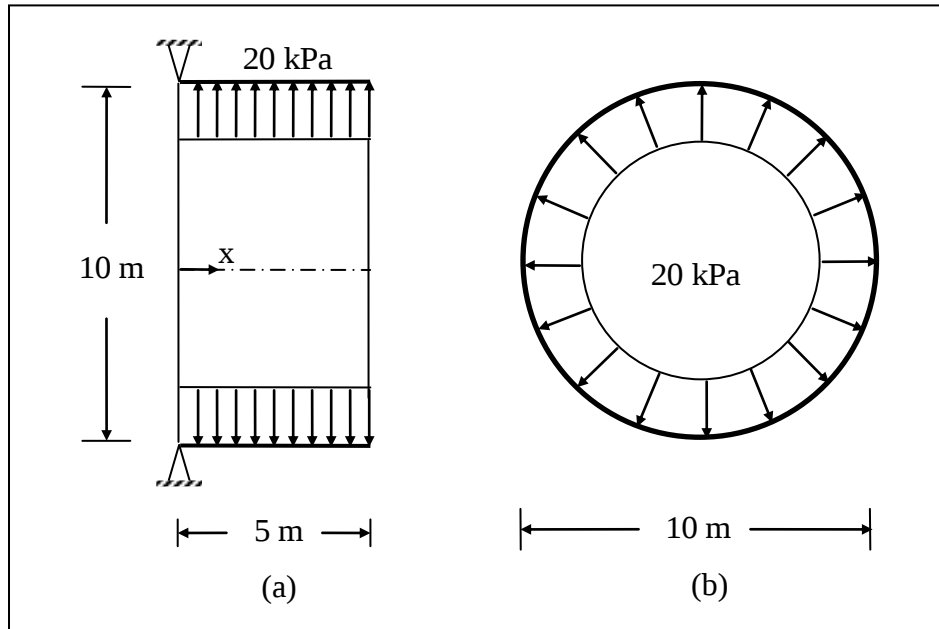
Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu çökme değerlerinin (3.1.6) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.2.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.2.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
0,00	2,4033	0,1558	0,0000
0,05	2,4004	0,1560	0,0067
0,10	2,3916	0,1565	0,0128
0,15	2,3770	0,1573	0,0176
0,20	2,3565	0,1583	0,0205
0,25	2,3301	0,1593	0,0210
0,30	2,2977	0,1604	0,0183
0,35	2,2593	0,1612	0,0118
0,40	2,2149	0,1615	0,0009
0,45	2,1645	0,1613	-0,0151
0,50	2,1080	0,1600	-0,0368
0,55	2,0455	0,1576	-0,0648
0,60	1,9771	0,1536	-0,0999
0,65	1,9029	0,1476	-0,1425
0,70	1,8233	0,1393	-0,1934
0,75	1,7384	0,1282	-0,2531
0,80	1,6487	0,1140	-0,3221
0,85	1,5548	0,0960	-0,4009
0,90	1,4573	0,0739	-0,4899
0,95	1,3570	0,0470	-0,5895
1,00	1,2549	0,0149	-0,7000
1,05	1,1523	-0,0229	-0,6963
1,10	1,0505	-0,0547	-0,5786
1,15	0,9508	-0,0808	-0,4717
1,20	0,8541	-0,1019	-0,3752
1,25	0,7613	-0,1183	-0,2889
1,30	0,6728	-0,1307	-0,2123
1,35	0,5893	-0,1396	-0,1448
1,40	0,5109	-0,1452	-0,0860
1,45	0,4380	-0,1482	-0,0353
1,50	0,3707	-0,1488	0,0079
1,55	0,3089	-0,1474	0,0442
1,60	0,2526	-0,1443	0,0742
1,65	0,2018	-0,1400	0,0985
1,70	0,1562	-0,1345	0,1176
1,75	0,1156	-0,1282	0,1321
1,80	0,0798	-0,1213	0,1426
1,85	0,0485	-0,1139	0,1494

1,90	0,0215	-0,1063	0,1532
1,95	-0,0015	-0,0986	0,1542
2,00	-0,0208	-0,0909	0,1531
2,05	-0,0367	-0,0833	0,1500
2,10	-0,0495	-0,0759	0,1454
2,15	-0,0595	-0,0688	0,1395
2,20	-0,0669	-0,0620	0,1328
2,25	-0,0719	-0,0555	0,1254
2,30	-0,0749	-0,0494	0,1175
2,35	-0,0761	-0,0437	0,1095
2,40	-0,0756	-0,0385	0,1014
2,45	-0,0736	-0,0336	0,0934
2,50	-0,0704	-0,0291	0,0857
2,55	-0,0662	-0,0250	0,0784
2,60	-0,0609	-0,0213	0,0716
2,65	-0,0549	-0,0179	0,0654
2,70	-0,0482	-0,0148	0,0599
2,75	-0,0410	-0,0119	0,0551
2,80	-0,0333	-0,0092	0,0512
2,85	-0,0253	-0,0068	0,0480
2,90	-0,0170	-0,0044	0,0458
2,95	-0,0085	-0,0022	0,0444
3,00	0,0000	0,0000	0,0439

3.3 Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk



Şekil 3.3.1 (Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk)

Şekil 3.3.1 deki sistemin $Z = 20 \text{ kPa}$, $h = 0,25 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m}$, $E = 2 \times 10^2 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$ değerleri için çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri

0,2 m aralıkla kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

Şekil 3.5 deki sistem için yükleme simetrik olsa da geometri simetrik olmadığından ve kabuk yayılı yükler tam olarak dolu olduğundan Problem 1 ve Problem 2 deki gibi mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisinin ihmal edildiği uzun kabuk durumundan bahsedilemez. Bu durumda kesin çözüm için eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş sabit kalınlıklı silindirik kabuğun deformasyonunu tanımlayan diferansiyel denklemin genel çözümü olan (2.1.14) denkleminin kullanılması gerekir.

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (3.3.1)$$

Burada $f(x)$ (2.1.13) diferansiyel denkleminin özel çözümüdür ve yükün sabit olması durumunda $f(x)$ için aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$f(x) = \frac{Z}{4\beta^4 D} \quad (3.3.2)$$

Bu problem için D eğilme rijitliği ve β büyüklüğü aşağıda hesaplanmıştır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 286172 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = 1,74720 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,14971 \text{ m}^{-1}$$

Bu değerler (3.3.2) denkleminde yerlerine konursa

$$f(x) = -1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.3.1) genel çözümündeki integrasyon sabitleri hariç tüm büyüklükler elde edilmiştir.

$$\omega = e^{1,14971x} (C_1 \cos 1,14971x + C_2 \sin 1,14971x) + e^{-1,14971x} (C_3 \cos 1,14971x + C_4 \sin 1,14971x) - 1 \times 10^{-5} \quad (3.3.3)$$

$C_1, \dots, C_4$ integrasyon sabitleri ise kabuğun iki ucunda yazılacak sınır koşullarından elde edilecektir. Kabuğun sol ucu sabit mafsallı olduğundan buradaki çökme ve moment sıfırdır. Bu durumda sol uç için yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{x=0} = 0 \quad (3.3.4a)$$

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.3.4b)$$

(3.3.3) genel çözümü (3.3.4a) ve (3.3.4b) sınır koşullarında yerlerine konursa sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$C_1 + C_3 - 1 \times 10^{-5} = 0 \quad (3.3.5a)$$

$$2,64367C_2 - 2,64367C_4 = 0 \quad (3.3.5b)$$

Sağ uç ise boş uç olduğundan eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacağından burada yazılacak sınır koşulları için ise aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=5} = 0 \quad (3.3.6a)$$

$$-D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\bigg|_{x=5} = 0 \quad (3.3.6b)$$

(3.3.3) genel çözümü (3.3.6a) ve (3.3.6b) sınır koşullarında yerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$422,60788C_1 + 713,67103C_2 - 4,29349 \cdot 10^{-3}C_3 - 7,25055 \cdot 10^{-3}C_4 = 0 \quad (3.3.7a)$$

$$-334,63822C_1 + 1306,39123C_2 + 1,32723 \cdot 10^{-2}C_3 + 3,39976 \cdot 10^{-3}C_4 = 0 \quad (3.3.7b)$$

(3.3.5a), (3.3.5b), (3.3.7a) ve (3.3.7b) denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümü sonucunda C_1, C_2, C_3, C_4 integrasyon sabitleri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$C_1 = 1,90674 \times 10^{-10}, C_2 = -5,27509 \times 10^{-11}, C_3 = 9,99981 \times 10^{-6}, C_4 = -5,27509 \times 10^{-11}$$

İntegrasyon sabitlerinin sayısal değerleri de (3.3.3) denkleminde yerlerine konursa çökme eğrisinin denklemi

$$\begin{aligned} \omega = & e^{1,14971x} (1,90674407592051 \cdot 10^{-10} \cos 1,14971x \\ & - 5,27509199747257 \cdot 10^{-11} \sin 1,14971x) \\ & + e^{-1,14971x} (9,99980932559241 \cdot 10^{-6} \cos 1,14971x \\ & - 5,27509199747257 \cdot 10^{-11} \sin 1,14971x) - 1 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

olarak elde edilir. Kabuğun herhangi bir kesitindeki eğilme momenti ve kesme kuvveti aşağıdaki bağıntılar kullanılarak bulunabilir.

$$M_x = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \quad (3.3.9)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right) \quad (3.3.10)$$

(3.3.8) denklemi (3.3.9) ve (3.3.10) bağıntılarında yerlerine konursa eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} M_x = & e^{1,14971x} (3,99083741067445 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971x \\ & + 1,44253514335131 \cdot 10^{-4} \sin 1,14971x) \\ & + e^{-1,14971x} (-3,99083741067443 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971x \\ & - 7,56529235420086 \sin 1,14971x) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

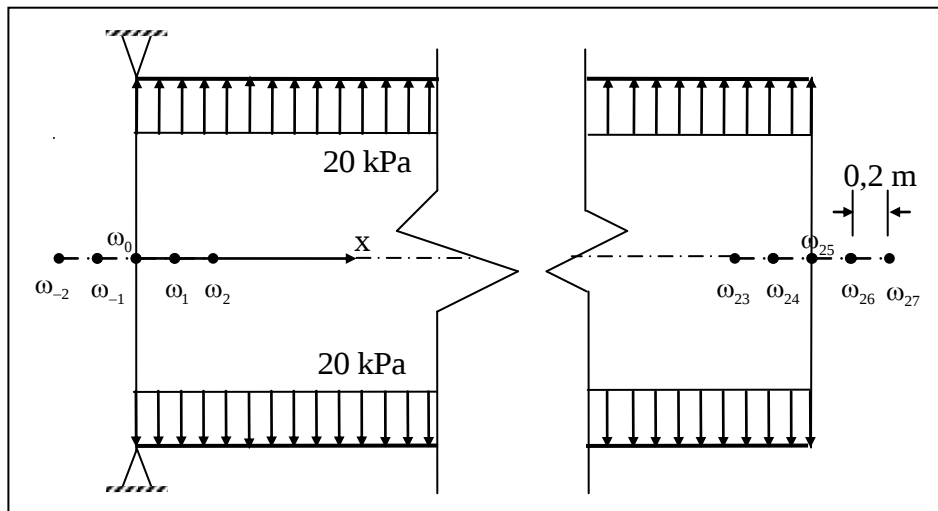
$$\begin{aligned} Q_x = & e^{1,14971x} (2,11732764760509 \cdot 10^{-4} \cos 1,14971x \\ & + 1,19966651171979 \cdot 10^{-4} \sin 1,14971x) \\ & + e^{-1,14971x} (-8,69784638949148 \cos 1,14971x \\ & + 8,69793815560507 \sin 1,14971x) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

(3.3.8), (3.3.11) ve (3.3.12) denklemleri kullanılarak 0,2 m aralıkla elde edilen değerler Tablo 3.3.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.3.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
0,0	0,0000	0,0000	-8,6976
0,2	-2,2633	-1,3700	-5,1537
0,4	-4,3423	-2,1198	-2,4832
0,6	-6,1303	-2,4151	-0,5883
0,8	-7,5843	-2,3985	0,6574
1,0	-8,7053	-2,1864	1,3888
1,2	-9,5220	-1,8687	1,7339
1,4	-10,0779	-1,5110	1,8060
1,6	-10,4225	-1,1581	1,6997
1,8	-10,6049	-0,8380	1,4896
2,0	-10,6696	-0,5654	1,2315
2,2	-10,6546	-0,3459	0,9645
2,4	-10,5907	-0,1785	0,7142
2,6	-10,5013	-0,0581	0,4953
2,8	-10,4033	0,0222	0,3143
3,0	-10,3080	0,0702	0,1722
3,2	-10,2223	0,0935	0,0666
3,4	-10,1494	0,0989	-0,0073
3,6	-10,0902	0,0923	-0,0548
3,8	-10,0438	0,0784	-0,0812
4,0	-10,0083	0,0610	-0,0913
4,2	-9,9814	0,0427	-0,0890
4,4	-9,9604	0,0260	-0,0772
4,6	-9,9431	0,0124	-0,0578
4,8	-9,9276	0,0033	-0,0319
5,0	-9,9127	0,0000	0,0000

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm



Şekil 3.3.2 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Daha önceki problemlerde olduğu gibi (2.1.13) diferansiyel denklemi sonlu farklar şeklinde yazılıp $\Delta x = 0,2 \text{ m}$, $\beta^4 = 1,74720 \text{ m}^{-4}$, $Z_i = -20 \text{ kPa}$ ve $D = 286172 \text{ kN.m}$ değerleri yerlerine konursa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$625\omega_{i-2} - 2500\omega_{i-1} + 3757\omega_i - 2500\omega_{i+1} + 625\omega_{i+2} = -6,98880 \cdot 10^{-5} \quad (3.3.13)$$

$\Delta x = 0,2 \text{ m}$ için sistemdeki bilinmeyenler Şekil 3.3.2 de görüldüğü şekilde olacaktır. Sabit mesnetli uç için (3.3.4a) ve (3.3.4b) sınır koşulları sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\omega|_{x=0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.3.14a)$$

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} = 0 \Rightarrow -D\left(\frac{\omega_{-1} - 2\omega_0 + \omega_1}{(\Delta x)^2}\right) = 0 \Rightarrow \omega_{-1} - 2\omega_0 + \omega_1 = 0 \quad (3.3.14b)$$

Boş uç için ise (3.3.6a) ve (3.3.6b) sınır koşulları sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=5} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{24} - 2\omega_{25} + \omega_{26}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{24} - 2\omega_{25} + \omega_{26} = 0 \quad (3.3.15a)$$

$$\begin{aligned} -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\bigg|_{x=5} &= 0 \Rightarrow \frac{-\omega_{23} + 2\omega_{24} - 2\omega_{26} + \omega_{27}}{2(\Delta x)^3} = 0 \\ &\Rightarrow -\omega_{23} + 2\omega_{24} - 2\omega_{26} + \omega_{27} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.15b)$$

Önce (3.3.14a) ve (3.3.14b) denklemleri sonra ω_0 noktasından ω_{25} noktasına kadar yazılacak olan (3.3.13) denklemi son olarak (3.3.15a) ve (3.3.15b) denklemleri sırasıyla yazılırsa aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_{24} \\ \omega_{25} \\ \omega_{26} \\ \omega_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6,98880 \cdot 10^{-5} \\ -6,98880 \cdot 10^{-5} \\ . \\ . \\ . \\ -6,98880 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

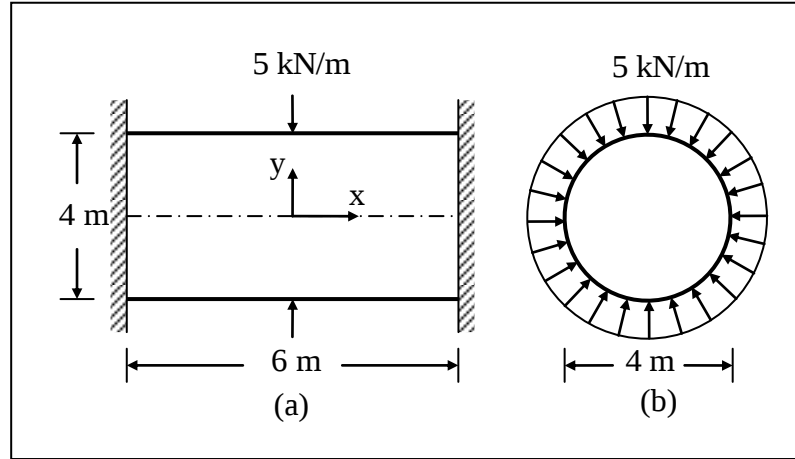
Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu değerlerin sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.3.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.3.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçlar)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
	4,2307		
	2,2664		
0,0	0,0000	0,0000	-8,8099
0,2	-2,2664	-1,3620	-5,2638
0,4	-4,3425	-2,1055	-2,5877
0,6	-6,1243	-2,3971	-0,6844
0,8	-7,5710	-2,3793	0,5722
1,0	-8,6851	-2,1682	1,3159
1,2	-9,4962	-1,8529	1,6738
1,4	-10,0483	-1,4986	1,7587
1,6	-10,3909	-1,1495	1,6643
1,8	-10,5729	-0,8329	1,4649
2,0	-10,6384	-0,5635	1,2159
2,2	-10,6252	-0,3465	0,9564
2,4	-10,5635	-0,1809	0,7119
2,6	-10,4765	-0,0618	0,4972
2,8	-10,3809	0,0180	0,3191
3,0	-10,2879	0,0659	0,1788
3,2	-10,2040	0,0895	0,0739
3,4	-10,1326	0,0954	0,0001
3,6	-10,0746	0,0895	-0,0478
3,8	-10,0291	0,0763	-0,0749
4,0	-9,9942	0,0595	-0,0860
4,2	-9,9677	0,0419	-0,0847
4,4	-9,9470	0,0256	-0,0740
4,6	-9,9299	0,0123	-0,0557
4,8	-9,9145	0,0034	-0,0309
5,0	-9,8996	0,0000	0,0000
	-9,8847		
	-9,8703		

3. SAYISAL ÖRNEKLER

3.1 Eksenine ve orta kesitine göre çizgisel simetrik yüklü silindirik kabuk



Şekil 3.1.1 (Halka yükle yüklü silindirik kabuk)

Silindirik kabuk Şekil 3.1.1a ve Şekil 3.1.1b de görüldüğü şekilde 5 kN/m şiddetinde silindir eksenine göre simetrik halka yükle yüklenmiştir. Kabuk boyu $l = 6$ m, kabuk kalınlığı $h = 0,4$ m, silindir yarıçapı $a = 2$ m dir. Kabuk malzemesi BS20 kalitesinde beton kabul edilerek elastisite modülü $E = 28,5$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,2$ olarak alınacaktır. Bu değerler kullanılarak kabukta oluşacak çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri, kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

Kesin çözüm için öncelikle kabuğun eğilme davranışının belirlenmesi gerekir. Bölüm 2.2 de anlatıldığı şekilde kabuğun uzun veya kısa kabuk oluşuna göre, kabuğun mesnetlenme şeklinin eğilme davranışındaki etkisi değişmektedir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 1,583 \cdot 10^5 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2D} = 4,494 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,456 \text{ m}^{-1}$$

$2\pi/\beta = 4,31 \text{ m} < l = 6 \text{ m}$ olduğundan kabuk uzun kabuktur ve mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisi ihmal edilebilir. Bu durumda çökme eğrisi için (2.2.1.3) denklemi, eğilme momenti ve kesme kuvveti için ise (2.1.5) denklemleri kullanılabilir.

$$\omega = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\sin \beta x + \cos \beta x)$$

$$M_x = \frac{P}{4\beta} \psi(\beta x) = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)$$

$$Q_x = -\frac{P}{2} \theta(\beta x) = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x$$

Bu denklemlerde x değeri yükün uygulandığı kesitle çökmenin olduğu kesit arasındaki uzaklıktır. β , D ve P değerleri formüllerde yerlerine konursa 0,2 m aralıklarla elde edilecek değerler Tablo 3.1.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot \text{m}$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
0,0	1,2791	0,8585	-2,5000
0,2	1,1902	0,4304	-1,7898
0,4	0,9897	0,1367	-1,1662
0,6	0,7522	-0,0446	-0,6701
0,8	0,5242	-0,1403	-0,3080
1,0	0,3305	-0,1759	-0,0668
1,2	0,1803	-0,1735	0,0765
1,4	0,0736	-0,1502	0,1468
1,6	0,0047	-0,1181	0,1674
1,8	-0,0344	-0,0852	0,1578
2,0	-0,0519	-0,0561	0,1324
2,2	-0,0551	-0,0327	0,1014
2,4	-0,0499	-0,0155	0,0712
2,6	-0,0406	-0,0039	0,0454
2,8	-0,0303	0,0031	0,0252
3,0	-0,0207	0,0066	0,0107

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm

Problem sabit kalınlıklı silindirik kabuğun simetrik deformasyonunu tanımlayan (2.1.13) diferansiyel denklemi kullanılarak çözülebilir.

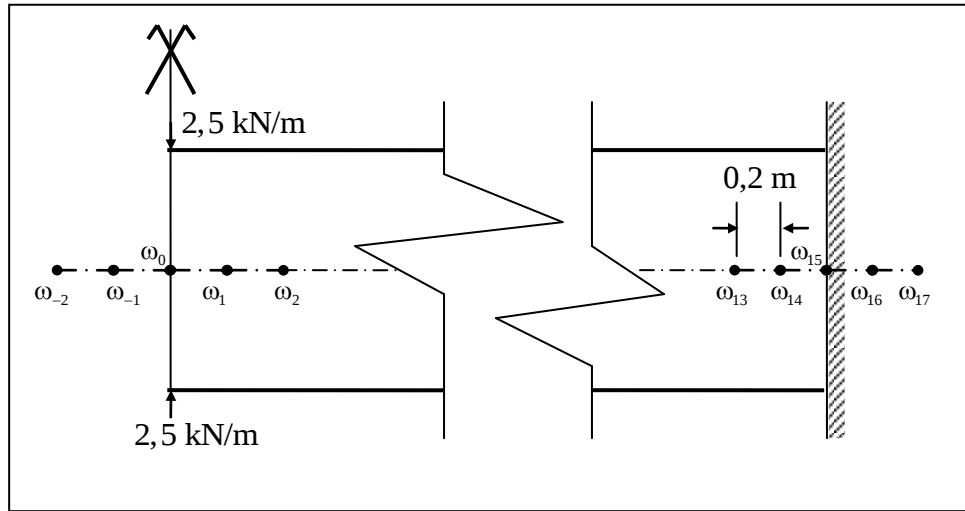
$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z}{D}$$

Diferansiyel denklem 4. türev için (1.2.4.20) formülü kullanılarak aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} (\omega_{i-2} - 4\omega_{i-1} + 6\omega_i - 4\omega_{i+1} + \omega_{i+2}) + 4\beta^4 \omega_i = \frac{Z_i}{D}$$

Sistemde yayılı yük olmadığından $Z_i = 0$ dır. Bu durumda $\Delta x = 0,2 \text{ m}$ ve $\beta^4 = 4,494 \text{ m}^{-4}$ için yazılacak denklemlerin formu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$625\omega_{i-2} - 2500\omega_{i-1} + 3767,976\omega_i - 2500\omega_{i+1} + 625\omega_{i+2} = 0 \quad (3.1.1)$$



Şekil 3.1.2 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Yüklemeye ve geometri orta kesite göre simetrik olduğundan kabuk çökme eğrisi de orta kesite göre simetrik olacaktır. Bu durumda sistem Şekil 3.1.2 de görüldüğü gibi ikiye bölünüp çözüm yapılabilir. $\Delta x = 0,2 \text{ m}$ olduğuna göre orta kesitten ankastre uca kadar yazılacak 16 eşitlik sonucunda denklemlere girecek bilinmeyenler $\omega_{-2}, \dots, \omega_{17}$ olmak üzere toplam 20 tanedir. Geriye kalan 4 denklem ise orta kesit ve ankastre uçta yazılacak olan ikişer sınır koşuludur. Çökme eğrisi orta kesite göre

simetrik olduğundan ve orta kesitteki kesme kuvveti $-2,5 \text{ kN/m}$ olduğundan bu kesitte yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\left. -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right) \right|_{x=0} = -D \left(\frac{-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\Delta x)^3} \right) = -2,5$$

$$-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 = 2,52685 \cdot 10^{-7} \quad (3.1.3)$$

Ankastre uçta ise çökme ve dönme olmayacağından sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\omega|_{x=3} = 0 \Rightarrow \omega_{15} = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=3} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{16} - \omega_{14}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_{16} - \omega_{14} = 0 \quad (3.1.5)$$

Önce orta kesitteki sınır koşullarından elde edilen (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri, sonra diferansiyel denklemin sonlu farklar şeklinde yazılmasıyla elde edilen ω_0 noktasından ω_{15} noktasına kadar yazılacak (3.1.1) denklemi, son olarak ankastre uçtaki sınır koşullarından elde edilen (3.1.4) ve (3.1.5) denklemleri sonucunda aşağıdaki 20 bilinmeyenli 20 denklemlili lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3767,976 & -2500 & 625 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_{14} \\ \omega_{15} \\ \omega_{16} \\ \omega_{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,52685 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

Çökme değerleri bilinen ve sadece x değişkenine bağlı olan bir sistemdeki eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir.

$$M_x = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \quad (3.1.6)$$

$$Q_x = -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) \quad (3.1.7)$$

(3.1.6) ve (3.1.7) formülleri ω_i noktasında sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$M_{x_i} = -D\left(\frac{\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}}{(\Delta x)^2}\right) \quad (3.1.8)$$

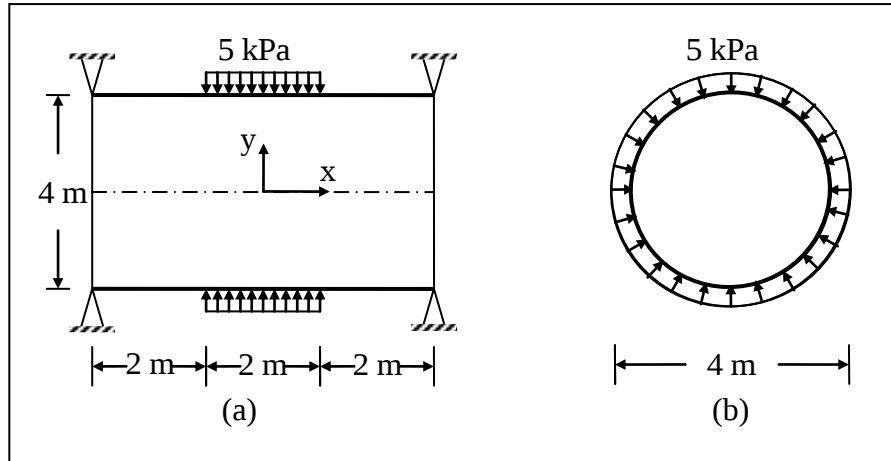
$$Q_{x_i} = -D\left(\frac{-\omega_{i-2} + 2\omega_{i-1} - 2\omega_{i+1} + \omega_{i+2}}{2(\Delta x)^3}\right) \quad (3.1.9)$$

Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu değerlerin sırasıyla (3.1.8) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.1.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.1.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
	0,7346		
	1,1980		
0,0	1,3041	0,8398	-2,5000
0,2	1,1980	0,4140	-1,7880
0,4	0,9873	0,1246	-1,1662
0,6	0,7451	-0,0525	-0,6732
0,8	0,5162	-0,1447	-0,3143
1,0	0,3238	-0,1782	-0,0753
1,2	0,1764	-0,1748	0,0671
1,4	0,0732	-0,1513	0,1381
1,6	0,0083	-0,1196	0,1613
1,8	-0,0264	-0,0868	0,1561
2,0	-0,0392	-0,0571	0,1375
2,2	-0,0376	-0,0318	0,1156
2,4	-0,0279	-0,0109	0,0969
2,6	-0,0155	0,0069	0,0846
2,8	-0,0049	0,0230	0,0788
3,0	0,0000	0,0385	0,0774
	-0,0049		
	-0,0233		

3.2 Ortasından belli bir bölgede eksenine göre simetrik yüklü silindirik kabuk



Şekil 3.2.1 (Ortasından belli bir bölgede simetrik yüklü silindirik kabuk)

Şekil 3.2.1 deki sistemin $q = 5 \text{ kPa}$, $h = 0,3 \text{ m}$, $a = 2 \text{ m}$, $E = 28,5 \text{ GPa}$, $\nu = 0,2$ değerleri için çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri 0,05 m aralıklarla kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

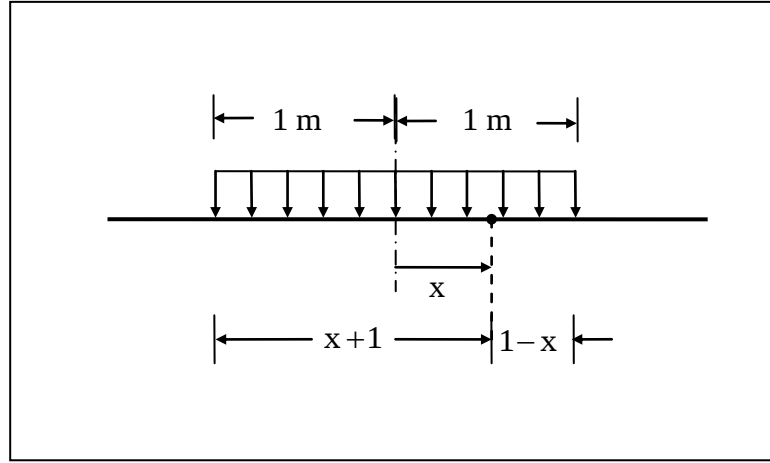
Kesin çözüm için öncelikle bir önceki problemde olduğu gibi kabuğun eğilme davranışını belirleyecek olan uzun veya kısa kabuk olma durumu incelenmelidir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 66796,875 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2D} = 8 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,682 \text{ m}^{-1}$$

Uzun kabuk durumu için π/β değerinin yük ile mesnet arasındaki en kısa mesafeden küçük olması gerekir. $\pi/\beta = 1,868 < 2$ olduğundan kabuk uzun kabuktur. Bu durumda çözüm için (2.2.1.8) denklemi kullanılabilir.

Şekil 3.2.2 den de görülebileceği gibi orta kesit x ekseninin başlangıç noktası seçilirse halka yük çözümü ve süperpozisyon ilkesi kullanılarak yükün uygulandığı bölge içindeki herhangi bir kesitteki çökme miktarı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.



Şekil 3.2.2 (Yükün uygulandığı bölgede integrasyon sınırları)

$$\omega = \int_0^{x+1} \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi) + \int_0^{1-x} \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

$$\omega = -\frac{5}{8\beta^4 D} [e^{-(x+1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta) - 2]$$

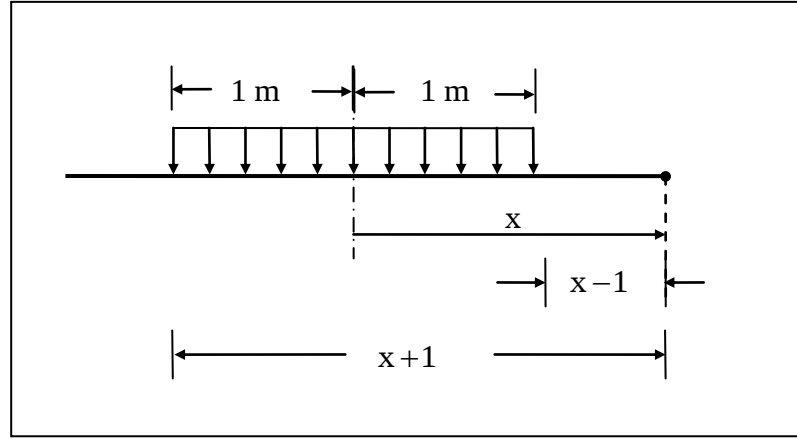
Benzer şekilde halka yük durumu için çıkarılmış eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadeleri yükün uygulandığı bölgede süperpozisyonu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$M_x = \int_0^{x+1} \frac{q d\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi) + \int_0^{1-x} \frac{q d\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi)$$

$$M_x = \frac{5}{4\beta^2} [e^{-(x+1)\beta} (\sin \beta x \cos \beta + \cos \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (\cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)]$$

$$Q_x = -\int_0^{x+1} \frac{q d\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi + \int_0^{1-x} \frac{q d\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi$$

$$Q_x = \frac{5}{4\beta} [e^{-(x+1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta - \cos \beta x \sin \beta) + e^{(x-1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta - \sin \beta x \sin \beta + \cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)]$$



Şekil 3.2.3 (Yükün uygulandığı bölge dışında integrasyon sınırları)

Yükün uygulandığı bölge dışında ise çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri aşağıdaki integrallerle bulunabilir. (Şekil 3.2.3)

$$\omega = \int_{x-1}^{x+1} \frac{q d\xi}{8\beta^3 D} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi + \sin \beta\xi)$$

$$\omega = \frac{5}{8\beta^4 D} [e^{-(x+1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta) + e^{-(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta)]$$

$$M_x = \int_{x-1}^{x+1} \frac{q d\xi}{4\beta} e^{-\beta\xi} (\cos \beta\xi - \sin \beta\xi)$$

$$M_x = -\frac{5}{4\beta^2} [e^{-(x+1)\beta} (\sin \beta x \cos \beta - \cos \beta x \sin \beta) + e^{-(x-1)\beta} (-\cos \beta x \sin \beta + \sin \beta x \cos \beta)]$$

$$Q_x = -\int_{x-1}^{x+1} \frac{q d\xi}{2} e^{-\beta\xi} \cos \beta\xi$$

$$Q_x = -\frac{5}{4\beta} [e^{-(x+1)\beta} (-\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta + \sin \beta x \cos \beta + \cos \beta x \sin \beta) + e^{-(x-1)\beta} (\cos \beta x \cos \beta + \sin \beta x \sin \beta + \cos \beta x \sin \beta - \sin \beta x \cos \beta)]$$

Bu formüller kullanılarak 0,05 m aralıklarla elde edilen çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.2.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.2.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

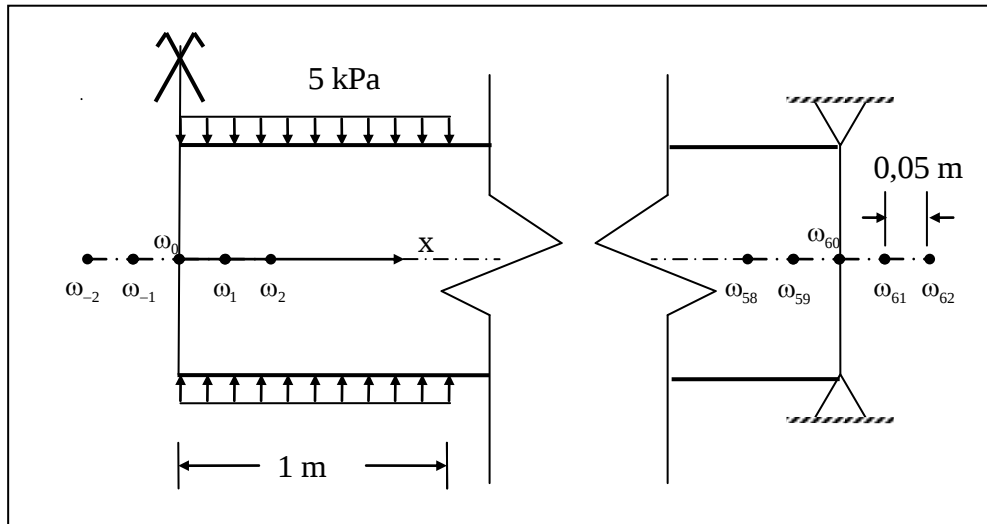
x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
0,00	2,3863	0,1633	0,0000
0,05	2,3832	0,1635	0,0051
0,10	2,3741	0,1638	0,0094
0,15	2,3587	0,1644	0,0125
0,20	2,3373	0,1651	0,0137
0,25	2,3096	0,1657	0,0122
0,30	2,2758	0,1662	0,0074
0,35	2,2357	0,1664	-0,0014
0,40	2,1895	0,1660	-0,0147
0,45	2,1370	0,1648	-0,0334
0,50	2,0783	0,1626	-0,0579
0,55	2,0135	0,1589	-0,0891
0,60	1,9429	0,1535	-0,1276
0,65	1,8664	0,1460	-0,1738
0,70	1,7845	0,1360	-0,2286
0,75	1,6976	0,1230	-0,2924
0,80	1,6060	0,1066	-0,3657
0,85	1,5105	0,0863	-0,4491
0,90	1,4117	0,0615	-0,5428
0,95	1,3107	0,0318	-0,6473
1,00	1,2085	-0,0034	-0,7626
1,05	1,1064	-0,0353	-0,6388
1,10	1,0057	-0,0647	-0,5259
1,15	0,9075	-0,0887	-0,4237
1,20	0,8128	-0,1078	-0,3317
1,25	0,7221	-0,1225	-0,2497
1,30	0,6361	-0,1334	-0,1771
1,35	0,5551	-0,1409	-0,1135
1,40	0,4794	-0,1454	-0,0582
1,45	0,4093	-0,1473	-0,0108
1,50	0,3446	-0,1469	0,0295
1,55	0,2855	-0,1448	0,0631
1,60	0,2318	-0,1410	0,0907
1,65	0,1834	-0,1361	0,1129
1,70	0,1402	-0,1301	0,1302
1,75	0,1018	-0,1233	0,1431
1,80	0,0680	-0,1160	0,1521
1,85	0,0386	-0,1083	0,1577
1,90	0,0132	-0,1004	0,1605
1,95	-0,0084	-0,0925	0,1607
2,00	-0,0266	-0,0845	0,1588
2,05	-0,0416	-0,0767	0,1551
2,10	-0,0537	-0,0691	0,1500
2,15	-0,0633	-0,0617	0,1437
2,20	-0,0706	-0,0548	0,1366

2,25	-0,0758	-0,0481	0,1287
2,30	-0,0792	-0,0419	0,1204
2,35	-0,0811	-0,0361	0,1118
2,40	-0,0816	-0,0307	0,1031
2,45	-0,0810	-0,0258	0,0944
2,50	-0,0794	-0,0213	0,0858
2,55	-0,0770	-0,0172	0,0775
2,60	-0,0740	-0,0135	0,0694
2,65	-0,0705	-0,0102	0,0617
2,70	-0,0667	-0,0073	0,0543
2,75	-0,0625	-0,0047	0,0474
2,80	-0,0582	-0,0025	0,0410
2,85	-0,0538	-0,0006	0,0350
2,90	-0,0494	0,0010	0,0295
2,95	-0,0450	0,0024	0,0244
3,00	-0,0407	0,0035	0,0198

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm

Problem 1 de anlatıldığı şekilde (2.1.13) diferansiyel denklemi sonlu farklar şeklinde yazılıp $\Delta x = 0,05 \text{ m}$, $\beta^4 = 8 \text{ m}^{-4}$ ve $D = 66796 \text{ kN.m}$ değerleri yerlerine konursa elde edilecek denklemlerin formu aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$160000\omega_{i-2} - 640000\omega_{i-1} + 960032\omega_i - 640000\omega_{i+1} + 160000\omega_{i+2} = \frac{Z_i}{66796,875} \quad (3.2.1)$$



Şekil 3.2.4 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Yükleme ve geometri simetrik olduğundan sistem Şekil 3.2.2 de görüldüğü gibi ikiye bölünerek çözülebilir. Orta kesitte eğim ve kesme kuvveti sıfır olacaktır. Bu durumda sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.2.2)$$

$$-D \left(\frac{d^3\omega}{dx^3} \right) \Big|_{x=0} = -D \left(\frac{-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2}{2(\Delta x)^3} \right) = 0$$

$$-\omega_{-2} + 2\omega_{-1} - 2\omega_1 + \omega_2 = 0 \quad (3.2.3)$$

Mafsallı uçta ise çökme ve eğilme momenti olmayacağından sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega \Big|_{x=3} = 0 \Rightarrow \omega_{60} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\left. \frac{d^2\omega}{dx^2} \right|_{x=3} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{59} - 2\omega_{60} + \omega_{61}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{59} - 2\omega_{60} + \omega_{61} = 0 \quad (3.2.5)$$

Önce orta kesitteki sınır koşullarından elde edilen (3.2.2) ve (3.2.2) denklemleri, sonra diferansiyel denklemin sonlu farklar şeklinde yazılmasıyla elde edilen ω_0 noktasından ω_{60} noktasına kadar yazılacak (3.2.1) denklemi, son olarak mafsallı uçtaki sınır koşullarından elde edilen (3.2.4) ve (3.2.5) denklemleri sonucunda aşağıdaki 65 bilinmeyenli 65 denklemlili lineer denklem sistemi elde edilir. (3.2.1) yazılırken $\omega_0, \dots, \omega_{20}$ noktalarında $Z_i / D = 5 / 66796,875 = 7,48538 \cdot 10^{-5}$ diğer noktalarda $Z_i / D = 0$ olacaktır.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 160000 & -640000 & 960032 & -640000 & 160000 \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ \omega_{58} \\ \omega_{59} \\ \omega_{60} \\ \omega_{61} \\ \omega_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,48538 \cdot 10^{-5} \\ 7,48538 \cdot 10^{-5} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

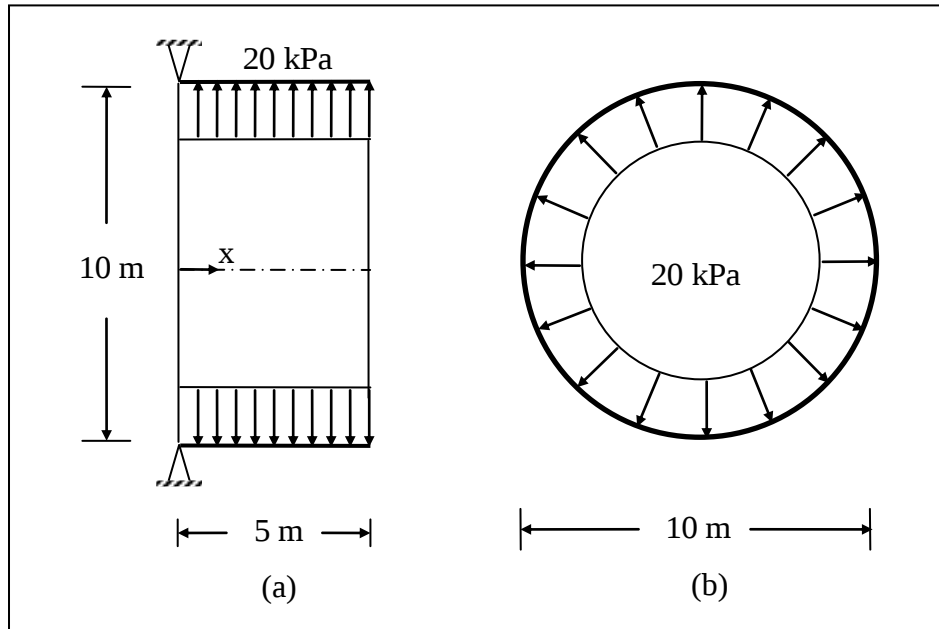
Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu çökme değerlerinin (3.1.6) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.2.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.2.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
0,00	2,4033	0,1558	0,0000
0,05	2,4004	0,1560	0,0067
0,10	2,3916	0,1565	0,0128
0,15	2,3770	0,1573	0,0176
0,20	2,3565	0,1583	0,0205
0,25	2,3301	0,1593	0,0210
0,30	2,2977	0,1604	0,0183
0,35	2,2593	0,1612	0,0118
0,40	2,2149	0,1615	0,0009
0,45	2,1645	0,1613	-0,0151
0,50	2,1080	0,1600	-0,0368
0,55	2,0455	0,1576	-0,0648
0,60	1,9771	0,1536	-0,0999
0,65	1,9029	0,1476	-0,1425
0,70	1,8233	0,1393	-0,1934
0,75	1,7384	0,1282	-0,2531
0,80	1,6487	0,1140	-0,3221
0,85	1,5548	0,0960	-0,4009
0,90	1,4573	0,0739	-0,4899
0,95	1,3570	0,0470	-0,5895
1,00	1,2549	0,0149	-0,7000
1,05	1,1523	-0,0229	-0,6963
1,10	1,0505	-0,0547	-0,5786
1,15	0,9508	-0,0808	-0,4717
1,20	0,8541	-0,1019	-0,3752
1,25	0,7613	-0,1183	-0,2889
1,30	0,6728	-0,1307	-0,2123
1,35	0,5893	-0,1396	-0,1448
1,40	0,5109	-0,1452	-0,0860
1,45	0,4380	-0,1482	-0,0353
1,50	0,3707	-0,1488	0,0079
1,55	0,3089	-0,1474	0,0442
1,60	0,2526	-0,1443	0,0742
1,65	0,2018	-0,1400	0,0985
1,70	0,1562	-0,1345	0,1176
1,75	0,1156	-0,1282	0,1321
1,80	0,0798	-0,1213	0,1426
1,85	0,0485	-0,1139	0,1494

1,90	0,0215	-0,1063	0,1532
1,95	-0,0015	-0,0986	0,1542
2,00	-0,0208	-0,0909	0,1531
2,05	-0,0367	-0,0833	0,1500
2,10	-0,0495	-0,0759	0,1454
2,15	-0,0595	-0,0688	0,1395
2,20	-0,0669	-0,0620	0,1328
2,25	-0,0719	-0,0555	0,1254
2,30	-0,0749	-0,0494	0,1175
2,35	-0,0761	-0,0437	0,1095
2,40	-0,0756	-0,0385	0,1014
2,45	-0,0736	-0,0336	0,0934
2,50	-0,0704	-0,0291	0,0857
2,55	-0,0662	-0,0250	0,0784
2,60	-0,0609	-0,0213	0,0716
2,65	-0,0549	-0,0179	0,0654
2,70	-0,0482	-0,0148	0,0599
2,75	-0,0410	-0,0119	0,0551
2,80	-0,0333	-0,0092	0,0512
2,85	-0,0253	-0,0068	0,0480
2,90	-0,0170	-0,0044	0,0458
2,95	-0,0085	-0,0022	0,0444
3,00	0,0000	0,0000	0,0439

3.3 Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk



Şekil 3.3.1 (Eksenine göre simetrik sabit iç basınç altındaki silindirik kabuk)

Şekil 3.3.1 deki sistemin $Z = 20 \text{ kPa}$, $h = 0,25 \text{ m}$, $a = 5 \text{ m}$, $E = 2 \times 10^2 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$ değerleri için çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri

0,2 m aralıkla kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak aşağıda elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

Şekil 3.5 deki sistem için yükleme simetrik olsa da geometri simetrik olmadığından ve kabuk yayılı yükler tam olarak dolu olduğundan Problem 1 ve Problem 2 deki gibi mesnetlenme şeklinin eğilme davranışına etkisinin ihmal edildiği uzun kabuk durumundan bahsedilemez. Bu durumda kesin çözüm için eksenine göre simetrik olarak yüklenmiş sabit kalınlıklı silindirik kabuğun deformasyonunu tanımlayan diferansiyel denklemin genel çözümü olan (2.1.14) denkleminin kullanılması gerekir.

$$\omega = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x) \quad (3.3.1)$$

Burada $f(x)$ (2.1.13) diferansiyel denkleminin özel çözümüdür ve yükün sabit olması durumunda $f(x)$ için aşağıda verilen eşitlik yazılabilir.

$$f(x) = \frac{Z}{4\beta^4 D} \quad (3.3.2)$$

Bu problem için D eğilme rijitliği ve β büyüklüğü aşağıda hesaplanmıştır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 286172 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2 D} = 1,74720 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,14971 \text{ m}^{-1}$$

Bu değerler (3.3.2) denkleminde yerlerine konursa

$$f(x) = -1 \times 10^{-5} \text{ m}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.3.1) genel çözümündeki integrasyon sabitleri hariç tüm büyüklükler elde edilmiştir.

$$\omega = e^{1,14971x} (C_1 \cos 1,14971x + C_2 \sin 1,14971x) + e^{-1,14971x} (C_3 \cos 1,14971x + C_4 \sin 1,14971x) - 1 \times 10^{-5} \quad (3.3.3)$$

$C_1, \dots, C_4$ integrasyon sabitleri ise kabuğun iki ucunda yazılacak sınır koşullarından elde edilecektir. Kabuğun sol ucu sabit mafsallı olduğundan buradaki çökme ve moment sıfırdır. Bu durumda sol uç için yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{x=0} = 0 \quad (3.3.4a)$$

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} = 0 \quad (3.3.4b)$$

(3.3.3) genel çözümü (3.3.4a) ve (3.3.4b) sınır koşullarında yerlerine konursa sırasıyla aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$C_1 + C_3 - 1 \times 10^{-5} = 0 \quad (3.3.5a)$$

$$2,64367C_2 - 2,64367C_4 = 0 \quad (3.3.5b)$$

Sağ uç ise boş uç olduğundan eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacağından burada yazılacak sınır koşulları için ise aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=5} = 0 \quad (3.3.6a)$$

$$-D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\bigg|_{x=5} = 0 \quad (3.3.6b)$$

(3.3.3) genel çözümü (3.3.6a) ve (3.3.6b) sınır koşullarında yerine konursa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$422,60788C_1 + 713,67103C_2 - 4,29349 \cdot 10^{-3}C_3 - 7,25055 \cdot 10^{-3}C_4 = 0 \quad (3.3.7a)$$

$$-334,63822C_1 + 1306,39123C_2 + 1,32723 \cdot 10^{-2}C_3 + 3,39976 \cdot 10^{-3}C_4 = 0 \quad (3.3.7b)$$

(3.3.5a), (3.3.5b), (3.3.7a) ve (3.3.7b) denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümü sonucunda C_1, C_2, C_3, C_4 integrasyon sabitleri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$C_1 = 1,90674 \times 10^{-10}, C_2 = -5,27509 \times 10^{-11}, C_3 = 9,99981 \times 10^{-6}, C_4 = -5,27509 \times 10^{-11}$$

İntegrasyon sabitlerinin sayısal değerleri de (3.3.3) denkleminde yerlerine konursa çökme eğrisinin denklemi

$$\begin{aligned} \omega = e^{1,14971x} & (1,90674407592051 \cdot 10^{-10} \cos 1,14971x \\ & - 5,27509199747257 \cdot 10^{-11} \sin 1,14971x) \\ & + e^{-1,14971x} (9,99980932559241 \cdot 10^{-6} \cos 1,14971x \\ & - 5,27509199747257 \cdot 10^{-11} \sin 1,14971x) - 1 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

olarak elde edilir. Kabuğun herhangi bir kesitindeki eğilme momenti ve kesme kuvveti aşağıdaki bağıntılar kullanılarak bulunabilir.

$$M_x = -D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \quad (3.3.9)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right) \quad (3.3.10)$$

(3.3.8) denklemi (3.3.9) ve (3.3.10) bağıntılarında yerlerine konursa eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} M_x = e^{1,14971x} & (3,99083741067445 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971x \\ & + 1,44253514335131 \cdot 10^{-4} \sin 1,14971x) \\ & + e^{-1,14971x} (-3,99083741067443 \cdot 10^{-5} \cos 1,14971x \\ & - 7,56529235420086 \sin 1,14971x) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

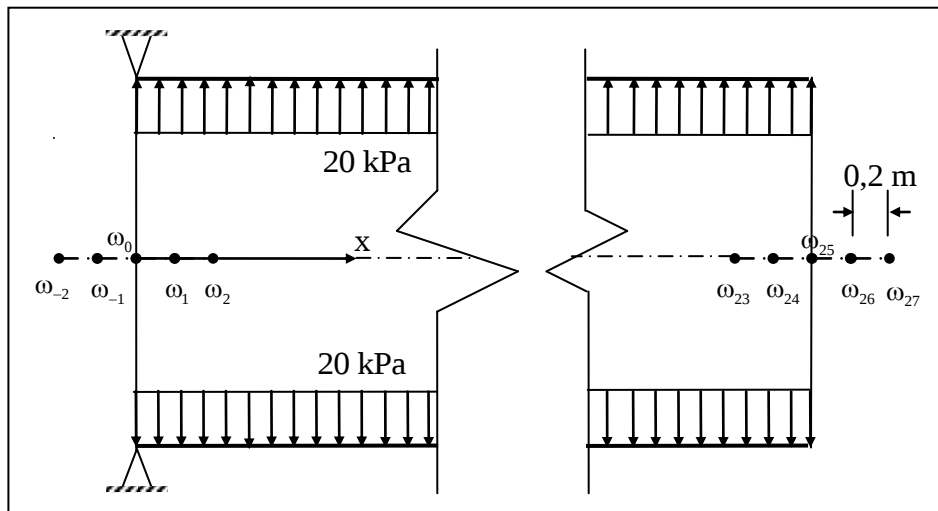
$$\begin{aligned} Q_x = e^{1,14971x} & (2,11732764760509 \cdot 10^{-4} \cos 1,14971x \\ & + 1,19966651171979 \cdot 10^{-4} \sin 1,14971x) \\ & + e^{-1,14971x} (-8,69784638949148 \cos 1,14971x \\ & + 8,69793815560507 \sin 1,14971x) \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

(3.3.8), (3.3.11) ve (3.3.12) denklemleri kullanılarak 0,2 m aralıkla elde edilen değerler Tablo 3.3.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.3.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
0,0	0,0000	0,0000	-8,6976
0,2	-2,2633	-1,3700	-5,1537
0,4	-4,3423	-2,1198	-2,4832
0,6	-6,1303	-2,4151	-0,5883
0,8	-7,5843	-2,3985	0,6574
1,0	-8,7053	-2,1864	1,3888
1,2	-9,5220	-1,8687	1,7339
1,4	-10,0779	-1,5110	1,8060
1,6	-10,4225	-1,1581	1,6997
1,8	-10,6049	-0,8380	1,4896
2,0	-10,6696	-0,5654	1,2315
2,2	-10,6546	-0,3459	0,9645
2,4	-10,5907	-0,1785	0,7142
2,6	-10,5013	-0,0581	0,4953
2,8	-10,4033	0,0222	0,3143
3,0	-10,3080	0,0702	0,1722
3,2	-10,2223	0,0935	0,0666
3,4	-10,1494	0,0989	-0,0073
3,6	-10,0902	0,0923	-0,0548
3,8	-10,0438	0,0784	-0,0812
4,0	-10,0083	0,0610	-0,0913
4,2	-9,9814	0,0427	-0,0890
4,4	-9,9604	0,0260	-0,0772
4,6	-9,9431	0,0124	-0,0578
4,8	-9,9276	0,0033	-0,0319
5,0	-9,9127	0,0000	0,0000

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm



Şekil 3.3.2 (Kabuk üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Daha önceki problemlerde olduğu gibi (2.1.13) diferansiyel denklemi sonlu farklar şeklinde yazılıp $\Delta x = 0,2 \text{ m}$, $\beta^4 = 1,74720 \text{ m}^{-4}$, $Z_i = -20 \text{ kPa}$ ve $D = 286172 \text{ kN.m}$ değerleri yerlerine konursa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$625\omega_{i-2} - 2500\omega_{i-1} + 3757\omega_i - 2500\omega_{i+1} + 625\omega_{i+2} = -6,98880 \cdot 10^{-5} \quad (3.3.13)$$

$\Delta x = 0,2 \text{ m}$ için sistemdeki bilinmeyenler Şekil 3.3.2 de görüldüğü şekilde olacaktır. Sabit mesnetli uç için (3.3.4a) ve (3.3.4b) sınır koşulları sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\omega|_{x=0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.3.14a)$$

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=0} = 0 \Rightarrow -D\left(\frac{\omega_{-1} - 2\omega_0 + \omega_1}{(\Delta x)^2}\right) = 0 \Rightarrow \omega_{-1} - 2\omega_0 + \omega_1 = 0 \quad (3.3.14b)$$

Boş uç için ise (3.3.6a) ve (3.3.6b) sınır koşulları sonlu farklar şeklinde yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\bigg|_{x=5} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{24} - 2\omega_{25} + \omega_{26}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{24} - 2\omega_{25} + \omega_{26} = 0 \quad (3.3.15a)$$

$$\begin{aligned} -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\bigg|_{x=5} &= 0 \Rightarrow \frac{-\omega_{23} + 2\omega_{24} - 2\omega_{26} + \omega_{27}}{2(\Delta x)^3} = 0 \\ &\Rightarrow -\omega_{23} + 2\omega_{24} - 2\omega_{26} + \omega_{27} = 0 \end{aligned} \quad (3.3.15b)$$

Önce (3.3.14a) ve (3.3.14b) denklemleri sonra ω_0 noktasından ω_{25} noktasına kadar yazılacak olan (3.3.13) denklemi son olarak (3.3.15a) ve (3.3.15b) denklemleri sırasıyla yazılırsa aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

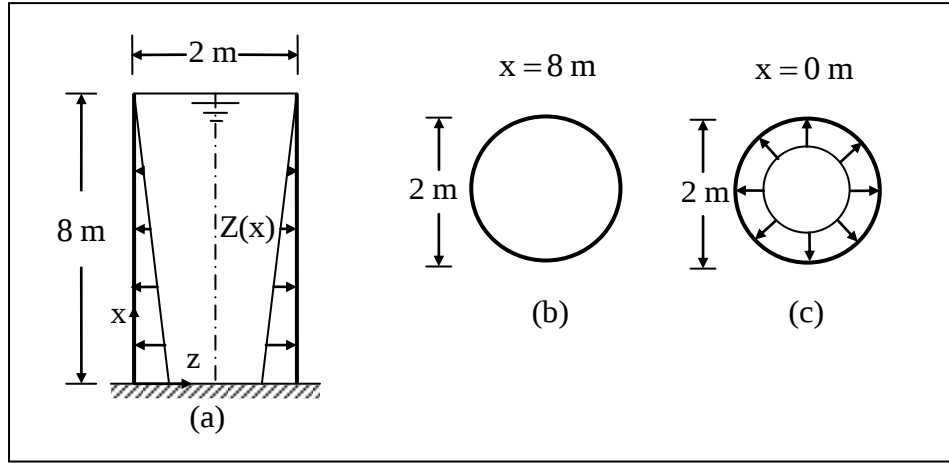
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3757 & -2500 & 625 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_{24} \\ \omega_{25} \\ \omega_{26} \\ \omega_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6,98880 \cdot 10^{-5} \\ -6,98880 \cdot 10^{-5} \\ . \\ . \\ . \\ -6,98880 \cdot 10^{-5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu değerlerin sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.3.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.3.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen sonuçlar)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
	4,2307		
	2,2664		
0,0	0,0000	0,0000	-8,8099
0,2	-2,2664	-1,3620	-5,2638
0,4	-4,3425	-2,1055	-2,5877
0,6	-6,1243	-2,3971	-0,6844
0,8	-7,5710	-2,3793	0,5722
1,0	-8,6851	-2,1682	1,3159
1,2	-9,4962	-1,8529	1,6738
1,4	-10,0483	-1,4986	1,7587
1,6	-10,3909	-1,1495	1,6643
1,8	-10,5729	-0,8329	1,4649
2,0	-10,6384	-0,5635	1,2159
2,2	-10,6252	-0,3465	0,9564
2,4	-10,5635	-0,1809	0,7119
2,6	-10,4765	-0,0618	0,4972
2,8	-10,3809	0,0180	0,3191
3,0	-10,2879	0,0659	0,1788
3,2	-10,2040	0,0895	0,0739
3,4	-10,1326	0,0954	0,0001
3,6	-10,0746	0,0895	-0,0478
3,8	-10,0291	0,0763	-0,0749
4,0	-9,9942	0,0595	-0,0860
4,2	-9,9677	0,0419	-0,0847
4,4	-9,9470	0,0256	-0,0740
4,6	-9,9299	0,0123	-0,0557
4,8	-9,9145	0,0034	-0,0309
5,0	-9,8996	0,0000	0,0000
	-9,8847		
	-9,8703		

3.4 İç sıvı basıncı altındaki sabit cidar kalınlıklı silindirik tank



Şekil 3.4.1 (Sabit kalınlıklı silindirik tank)

Silindirik tankın Şekil 3.4.1a da görüldüğü gibi içi su ile doludur. Şekil 3.4.1b ve Şekil 3.4.1c den görülebileceği gibi su basıncı tank tabanından yukarı doğru çıktıkça azalmaktadır. . Tank yüksekliği $d = 8 \text{ m}$, cidar kalınlığı $h = 0,5 \text{ m}$, silindir yarıçapı $a = 1 \text{ m}$, tank malzemesinin elastisite modülü $E = 28,5 \text{ GPa}$ ve poisson oranı $\nu = 0,2$ dir. Aşağıda bu değerler kullanılarak tank cidarında meydana gelecek çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

Problemin kesin çözümü için Bölüm 2.2.2 de çıkarılmış olan (2.2.2.5a) formülü kullanılabilir.

$$\omega = -\frac{\gamma a^2}{Eh} \left\{ d - x - e^{-\beta x} \left[d \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right] \right\} \quad (3.4.1)$$

Burada γ tank içindeki sıvının birim hacim ağırlığıdır ve bu problemde sıvı su olduğundan $\gamma = 9,81 \text{ kN/m}^3$ tür. Formüllerde kullanılacak D eğilme rijitliği ve β değeri aşağıda hesaplanmıştır.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 309244,792 \text{ kN.m}$$

$$\beta^4 = \frac{Eh}{4a^2D} = 11,52 \text{ m}^{-4} \quad \beta = 1,842 \text{ m}^{-1}$$

(3.4.1) denklemi (3.1.6) ve (3.1.7) formüllerinde yerlerine konursa (2.2.2.7) ve (2.2.2.8) formüllerine eşdeğer olan aşağıdaki eğilme momenti ve kesme kuvveti fonksiyonları elde edilir.

$$M_x = -D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) = \frac{\gamma Da^2}{Eh} e^{-\beta x} [(2d\beta^2 - 2\beta) \cos \beta x - 2d\beta^2 \sin \beta x] \quad (3.4.2)$$

$$Q_x = -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right) = \frac{\gamma Da^2}{Eh} e^{-\beta x} [(2\beta^2 - 4d\beta^3) \cos \beta x + 2\beta^2 \sin \beta x] \quad (3.4.3)$$

Büyükliklerin sayısal değerleri formüllerde yerlerine konursa bu problem için çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilir.

$$\omega = -6,88421 \cdot 10^{-7} [8 - x - e^{-1,842x} (8 \cos 1,842x + 7,45711 \sin 1,842x)] \quad (3.4.4)$$

$$M_x = 0,21289e^{-1,842x} [50,60342 \cos 1,842x - 54,28742 \sin 1,842x] \quad (3.4.5)$$

$$Q_x = 0,21289e^{-1,842x} [-193,20894 \cos 1,842x + 6,78593 \sin 1,842x] \quad (3.4.6)$$

(3.4.4), (3.4.5) ve (3.4.6) formülleri kullanılarak 0,2 m aralıkla elde edilen çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.4.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
0,0	0,0000	10,773000	-41,132400
0,2	-0,5361	4,073650	-26,187800
0,4	-1,6286	0,102016	-14,116600
0,6	-2,7565	-1,818140	-5,687650
0,8	-3,6636	-2,395760	-0,585069
1,0	-4,2689	-2,222310	1,967120
1,2	-4,5901	-1,721930	2,819290
1,4	-4,6892	-1,159050	2,697700
1,6	-4,6375	-0,671964	2,132880

1,8	-4,4975	-0,312626	1,461970
2,0	-4,3156	-0,081921	0,866288
2,2	-4,1220	0,043890	0,418478
2,4	-3,9333	0,095866	0,125547
2,6	-3,7565	0,102740	-0,038241
2,8	-3,5928	0,086736	-0,109455
3,0	-3,4402	0,062786	-0,122985
3,2	-3,2957	0,039532	-0,106365
3,4	-3,1564	0,020977	-0,078434
3,6	-3,0199	0,008156	-0,050335
3,8	-2,8845	0,000488	-0,027433
4,0	-2,7492	-0,003274	-0,011319
4,2	-2,6135	-0,004460	-0,001480
4,4	-2,4772	-0,004190	0,003507
4,6	-2,3404	-0,003274	0,005235
4,8	-2,2032	-0,002220	0,005079
5,0	-2,0657	-0,001299	0,004051
5,2	-1,9280	-0,000614	0,002798
5,4	-1,7903	-0,000171	0,001673
5,6	-1,6525	0,000073	0,000820
5,8	-1,5147	0,000176	0,000258
6,0	-1,3769	0,000193	-0,000060
6,2	-1,2392	0,000164	-0,000200
6,4	-1,1015	0,000120	-0,000230
6,6	-0,9638	0,000076	-0,000201
6,8	-0,8261	0,000041	-0,000150
7,0	-0,6884	0,000016	-0,000097
7,2	-0,5507	0,000001	-0,000053
7,4	-0,4130	-0,000006	-0,000022
7,6	-0,2754	-0,000008	-0,000004
7,8	-0,1377	-0,000008	0,000006
8,0	0,0000	-0,000006	0,000010

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm

Tank içindeki sıvı basıncı tabandan olan mesafe x 'in bir fonksiyonu olarak aşağıda verilen şekilde yazılabilir.

$$Z(x) = -\gamma(d - x) \quad (3.4.7)$$

Buradaki eksi işareti yayılı yük için pozitif yönün tank dışından silindir eksenine doğru olan yön olmasından dolayıdır. Bu durumda (2.1.13) diferansiyel denklemi aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4\beta^4 \omega = \frac{Z(x)}{D}$$

Bu denklem sonlu farklar şeklinde yazılırsa

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} (\omega_{i-2} - 4\omega_{i-1} + 6\omega_i - 4\omega_{i+1} + \omega_{i+2}) + 4\beta^4 \omega_i = \frac{Z(x_i)}{D}$$

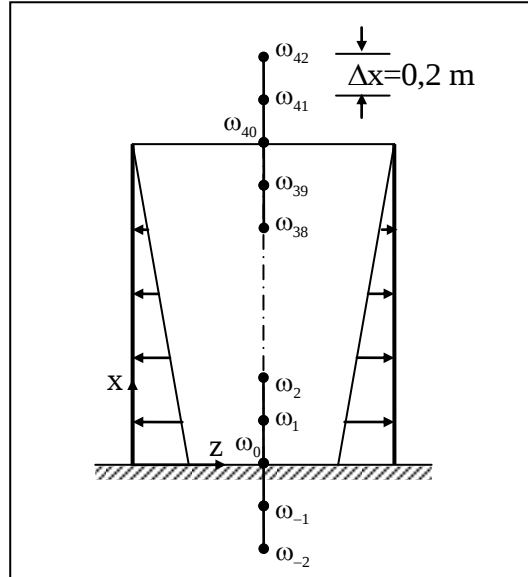
formunu alır. $\Delta x = 0,2 \text{ m}$, $\beta^4 = 11,52 \text{ m}^{-4}$ ve $D = 309244,792 \text{ kN.m}$ değerleri için katsayılar toplanıp $Z(x_i)$ nin (3.4.7) deki eşiti yerine konursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$625\omega_{i-2} - 2500\omega_{i-1} + 3796,08\omega_i - 2500\omega_{i+1} + 625\omega_{i+2} = -\frac{9,81(8-x_i)}{309244,792} \quad (3.4.8)$$

$\Delta x = 0,2 \text{ m}$ için bilinmeyenlerin tank üzerindeki dağılımı Şekil 3.4.2 de görülmektedir. Tank tabanı ankastre bağlı olduğundan buradaki eğim ve çökme sıfır olacağından sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{x=0} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.4.9a)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.4.9b)$$



Şekil 3.4.2 (Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

Tankın üst ucu boş uç olması sebebiyle buradaki eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacağından sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler kullanılacaktır.

$$-D\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)\Big|_{x=8} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{39} - 2\omega_{40} + \omega_{41}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{39} - 2\omega_{40} + \omega_{41} = 0 \quad (3.4.10a)$$

$$\begin{aligned} -D\left(\frac{d^3\omega}{dx^3}\right)\Big|_{x=5} &= 0 \Rightarrow \frac{-\omega_{38} + 2\omega_{39} - 2\omega_{41} + \omega_{42}}{2(\Delta x)^3} = 0 \\ &\Rightarrow -\omega_{38} + 2\omega_{39} - 2\omega_{41} + \omega_{42} = 0 \end{aligned} \quad (3.4.10b)$$

Önce (3.4.9a) ve (3.4.9b) denklemleri sonra ω_0 noktasından ω_{40} noktasına kadar yazılacak olan (3.4.8) denklemi son olarak (3.4.10a) ve (3.4.10b) denklemleri sırasıyla yazılırsa aşağıdaki lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 625 & -2500 & 3796,02 & -2500 & 625 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 625 & -2500 & 3796,02 & -2500 & 625 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3796,02 & -2500 & 625 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & 625 & -2500 & 3796,02 & -2500 & 625 \\ . & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{-2} \\ \omega_{-1} \\ \omega_0 \\ \omega_1 \\ . \\ . \\ \omega_{39} \\ \omega_{40} \\ \omega_{41} \\ \omega_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,000253779 \\ -0,000247435 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

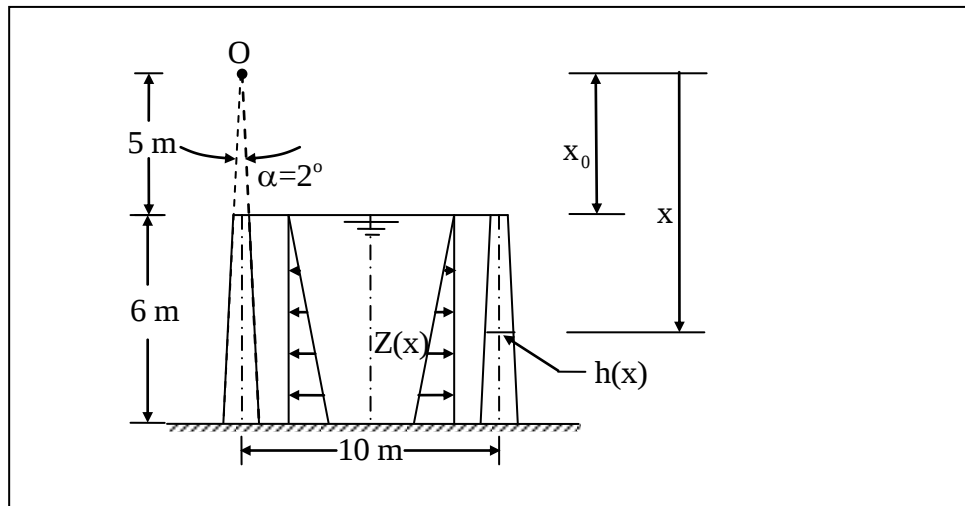
Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda elde edilen çökme değerleri ve bu değerlerin sırasıyla (3.1.6) ve (3.1.7) formüllerinde kullanılması sonucu elde edilen eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.4.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.4.2 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler)

x (m)	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
	-3,8343		
	-0,6496		
0,0	0,0000	10,04473229	-39,92250711
0,2	-0,6496	3,62982995	-25,34843866
0,4	-1,7688	-0,09464318	-13,68726529
0,6	-2,8757	-1,84507617	-5,59059263
0,8	-3,7439	-2,33088023	-0,70089161
1,0	-4,3107	-2,12543281	1,75155005
1,2	-4,6025	-1,63026021	2,58811998
1,4	-4,6834	-1,09018482	2,50106751
1,6	-4,6234	-0,62983321	1,99182507
1,8	-4,4819	-0,29345479	1,37742639
2,0	-4,3024	-0,07886265	0,82805190
2,2	-4,1127	0,03776597	0,41232716

2,4	-3,9279	0,08606821	0,13782712
2,6	-3,7543	0,09289681	-0,01827336
2,8	-3,5926	0,07875887	-0,08896109
3,0	-3,4412	0,05731238	-0,10587566
3,2	-3,2971	0,03640861	-0,09409771
3,4	-3,1578	0,01967329	-0,07090191
3,6	-3,0210	0,00804784	-0,04662526
3,8	-2,8852	0,00102319	-0,02637732
4,0	-2,7496	-0,00250309	-0,01183007
4,2	-2,6137	-0,00370884	-0,00271073
4,4	-2,4772	-0,00358738	0,00212568
4,6	-2,3404	-0,00285857	0,00402400
4,8	-2,2031	-0,00197778	0,00417234
5,0	-2,0656	-0,00118963	0,00346214
5,2	-1,9279	-0,00059292	0,00247722
5,4	-1,7902	-0,00019874	0,00154613
5,6	-1,6524	0,00002553	0,00081480
5,8	-1,5147	0,00012718	0,00031515
6,0	-1,3769	0,00015159	0,00001903
6,2	-1,2392	0,00013479	-0,00012493
6,4	-1,1015	0,00010162	-0,00016953
6,6	-0,9638	0,00006698	-0,00015834
6,8	-0,8261	0,00003828	-0,00012243
7,0	-0,6884	0,00001801	-0,00008120
7,2	-0,5507	0,00000580	-0,00004504
7,4	-0,4130	-0,00000001	-0,00001833
7,6	-0,2754	-0,00000153	-0,00000213
7,8	-0,1377	-0,00000086	0,00000383
8,0	0,0000	0,00000000	0,00000000
	0,1377		
	0,2754		

3.5 İç sıvı basıncı altındaki düzgün değişen cidar kalınlıklı silindirik tank



Şekil 3.5.1 (Değişken kalınlıklı silindirik tank)

Değişken kalınlıklı silindirik tankın Şekil 3.5.1 da görüldüğü gibi içi su ile doludur. Tank yüksekliği $d = 6$ m , kabuk yüzeyi eğim açısı $\alpha = 2^\circ$, orijinle kabuğun üst ucu arasındaki uzaklık $x_0 = 5$ m, silindir yarıçapı $a = 5$ m, tank malzemesinin elastisite modülü $E = 28,5$ GPa ve poisson oranı $\nu = 0,2$ dir. Bu değerler kullanılarak tank cidarında meydana gelecek çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kesin çözüm ve sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

a) Kesin çözüm

Değişken duvar kalınlıklı silindirik kabuk problemlerinin çözümü için (2.1.10) diferansiyel denklemi kullanılabilir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{a^2} \omega = Z$$

Bölüm (2.2.3) de anlatıldığı ve Şekil 3.5.1 den de görülebileceği gibi düzgün değişen duvar kalınlıklı silindirik tankın kalınlığı ve eğilme rijitliği için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.

$$h = \alpha \cdot x, \quad D = \frac{E\alpha^3}{12(1-\nu^2)} x^3$$

Bu bağıntılar (2.1.10) diferansiyel denkleminde yerlerine konursa düzgün değişen duvar kalınlıklı silindirik tank problemlerinin çözümünde kullanılan (2.2.3.2) diferansiyel denkleminde ulaşılır.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(x^3 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 a^2} x \omega = - \frac{12(1-\nu^2) \gamma (x - x_0)}{E\alpha^3}$$

Bu diferansiyel denklemin genel çözümü (2.2.3.3) özel çözümüyle (2.2.3.5) homojen çözümü kullanılırsa aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} [C_1 \psi'_1(2\rho\sqrt{x}) + C_2 \psi'_2(2\rho\sqrt{x}) + C_3 \psi'_3(2\rho\sqrt{x}) + C_4 \psi'_4(2\rho\sqrt{x})] + \omega_1(x) \quad (3.5.1)$$

$$\omega_1(x) = -\frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{x - x_0}{x} \quad (3.5.2)$$

(3.5.1) ifadesindeki ρ , α eğim açısının radyan cinsinden değeri olmak üzere aşağıdaki formülle tanımlı bir sabittir.

$$\rho^4 = \frac{12(1-\nu^2)}{\alpha^2 a^2} = 378,18057 \text{ m}^{-2} \Rightarrow \rho = 4,40986 \text{ m}^{-\frac{1}{2}}$$

$2\rho\sqrt{x} > 6$ olduğundan (3.5.1) denklemi içindeki $\psi'_i(2\rho\sqrt{x})$ fonksiyonları için (2.2.3.14)-(2.2.3.17) denklemlerindeki asimptotik fonksiyonlar kullanılabilir. $\xi = 2\rho\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa bu ifadeler aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\psi'_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.3)$$

$$\psi'_2(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.4)$$

$$\psi'_3(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.5)$$

$$\psi'_4(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.6)$$

$\xi = 2\rho\sqrt{x}$ ve $x = \left(\frac{\xi}{2\rho}\right)^2$ eşitlikleri ile (3.5.2) özel çözümü kullanılarak (3.5.1) genel çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\omega(\xi) = \frac{2\rho}{\xi} [C_1\psi'_1(\xi) + C_2\psi'_2(\xi) + C_3\psi'_3(\xi) + C_4\psi'_4(\xi)] - \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{\left(\frac{\xi}{2\rho}\right)^2 - x_0}{\left(\frac{\xi}{2\rho}\right)^2} \quad (3.5.9)$$

Tankın alt ucunda $x = 11\text{m}$ için $\xi = 29,252$, tankın üst ucunda ise $x = 5\text{m}$ için $\xi = 19,721$ olacaktır. Tankın alt ucu ankastre olduğundan burada yazılacak sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{\xi=29,252} = 0 \quad (3.5.10a)$$

$$\frac{d\omega}{d\xi}|_{\xi=29,252} = 0 \quad (3.5.10b)$$

Tankın üst ucu ise boş uç olduğundan buradaki sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$M_x|_{x=5} = 0 \quad (3.5.11a)$$

$$Q_x|_{x=5} = 0 \quad (3.5.11b)$$

Özel çözümden dolayı oluşacak eğilme momenti (2.2.3.4) ifadesinde de elde edildiği gibi aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$M_{x_1} = -D\left(\frac{d^2\omega_1}{dx^2}\right) = -\frac{\gamma\alpha^2 a^2 x_0}{6(1-v^2)} \quad (3.5.12)$$

Homojen çözümden dolayı oluşacak eğilme momenti için ise daha önce (2.2.3.8) denkleminde verilen aşağıdaki eşitlik kullanılabilir.

$$\begin{aligned} M_{x_0} = -D\left(\frac{d^2\omega_0}{dx^2}\right) = & -\frac{E\alpha^3}{48(1-v^2)} \sqrt{x} \{C_1[\xi^2\psi'_2(\xi) - 4\xi\psi_2(\xi) + 8\psi'_1(\xi)] \\ & - C_2[\xi^2\psi'_1(\xi) - 4\xi\psi_1(\xi) - 8\psi'_2(\xi)] \\ & + C_3[\xi^2\psi'_4(\xi) - 4\xi\psi_4(\xi) + 8\psi'_3(\xi)] \\ & - C_4[\xi^2\psi'_3(\xi) - 4\xi\psi_3(\xi) - 8\psi'_4(\xi)]\} \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

(3.5.12) ve (3.5.13) denklemleri birleştirilirse kabukta herhangi bir noktada oluşacak eğilme momentinin hesaplanması için kullanılacak aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned} M_x = & -\frac{E\alpha^3}{48(1-v^2)} \sqrt{x} \{C_1[\xi^2\psi'_2(\xi) - 4\xi\psi_2(\xi) + 8\psi'_1(\xi)] \\ & - C_2[\xi^2\psi'_1(\xi) - 4\xi\psi_1(\xi) - 8\psi'_2(\xi)] \\ & + C_3[\xi^2\psi'_4(\xi) - 4\xi\psi_4(\xi) + 8\psi'_3(\xi)] \\ & - C_4[\xi^2\psi'_3(\xi) - 4\xi\psi_3(\xi) - 8\psi'_4(\xi)]\} \\ & - \frac{\gamma\alpha^2 a^2 x_0}{6(1-v^2)} \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

(3.5.14) denklemindeki ψ_i fonksiyonları için $2\rho\sqrt{x} > 6$ olduğundan (2.2.3.10)-(2.2.3.13) denklemlerinde de verildiği gibi aşağıda verilen asimptotik ifadeler kullanılabilir.

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.15)$$

$$\psi_2(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} e^{\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.16)$$

$$\psi_3(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.17)$$

$$\psi_4(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \quad (3.5.18)$$

(3.5.12) denkleminde de görülebileceği gibi özel çözümün kesme kuvvetine katkısı olmayacaktır. Bu durumda toplam kesme kuvveti için (2.2.3.9) denklemi kullanılabilir.

$$\begin{aligned} Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{E\alpha^3\rho^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{ & C_1[\xi\psi_1(\xi) + 2\psi_2'(\xi)] \\ & + C_2[\xi\psi_2(\xi) - 2\psi_1'(\xi) + C_3[\xi\psi_3(\xi) + 2\psi_4'(\xi)] \\ & + C_4[\xi\psi_4(\xi) - 2\psi_3'(\xi)] \} \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

(3.5.9), (3.5.14) ve (3.5.19) ifadeleri sınır koşullarında yerlerine konursa aşağıdaki dört denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} -13050764,80055C_1 - 16941070,14295C_2 \\ -4,58746 \cdot 10^{-11}C_3 + 5,95049 \cdot 10^{-12}C_4 = 1,34467 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -20538198,25594C_1 - 1882138,27737C_2 \\ + 3,05830 \cdot 10^{-11}C_3 - 3,69510 \cdot 10^{-11}C_4 = 7,66149 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1906675949,93172C_1 - 681268457,30982C_2 \\ -1,78482 \cdot 10^{-3}C_3 - 3,76937 \cdot 10^{-3}C_4 = 0,259401 \end{aligned}$$

$$2088270137,77927C_1 - 3754623491,23777C_2 \\ + 7,37607 \cdot 10^{-3}C_3 + 2,02181 \cdot 10^{-3}C_4 = 0$$

Bu dört lineer denklemin oluşturduğu denklem takımının çözümü sonucunda aşağıdaki C_i değerleri elde edilir.

$$C_1 = 3,81441380271377E-13, C_2 = -8,23124976934769E-12, \\ C_3 = 1,62084777875441E+1, C_4 = -7,48122892110909E+1$$

Bu katsayılar (3.5.1), (3.5.14) ve (3.5.19) denkleminde yerlerine konursa kabuktaki çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti ifadeleri aşağıda verilen şekilde elde edilir.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{x}} [3,81441 \cdot 10^{-13} \psi'_1(\xi) - 8,23125 \cdot 10^{-12} \psi'_2(\xi) \\ + 16,20848 \psi'_3(\xi) - 74,81229 \psi'_4(\xi)] - \frac{\gamma a^2}{E\alpha} \frac{x - x_0}{x} \quad (3.5.20)$$

$$M_x = -\frac{E\alpha^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{3,81441 \cdot 10^{-13} [\xi^2 \psi'_2(\xi) - 4\xi \psi_2(\xi) + 8\psi'_1(\xi)] \\ + 8,23125 \cdot 10^{-12} [\xi^2 \psi'_1(\xi) - 4\xi \psi_1(\xi) - 8\psi'_2(\xi)] \\ + 16,20848 [\xi^2 \psi'_4(\xi) - 4\xi \psi_4(\xi) + 8\psi'_3(\xi)] \\ + 74,81229 [\xi^2 \psi'_3(\xi) - 4\xi \psi_3(\xi) - 8\psi'_4(\xi)]\} \\ - \frac{\gamma \alpha^2 a^2 x_0}{6(1-\nu^2)} \quad (3.5.21)$$

$$Q_x = \frac{E\alpha^3 \rho^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{x} \{3,81441 \cdot 10^{-13} [\xi \psi_1(\xi) + 2\psi'_2(\xi)] \\ - 8,23125 \cdot 10^{-12} [\xi \psi_2(\xi) - 2\psi'_1(\xi)] \\ + 16,20848 [\xi \psi_3(\xi) + 2\psi'_4(\xi)] \\ - 74,81229 [\xi \psi_4(\xi) - 2\psi'_3(\xi)]\} \quad (3.5.22)$$

(3.5.20), (3.5.21) ve (3.5.22) kullanılarak 0,2 maralıkla elde edilen çökme, eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.5.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3.5.1 (Kesin çözümle elde edilen değerler)

x (m)	ξ	ω ($10^{-6} \cdot m$)	M_x (kN.m / m)	Q_x (kN / m)
11,0	29,25168	0,0000	28,1211	55,2500
10,8	28,98453	-3,5875	18,1065	44,0269
10,6	28,7149	-12,7019	10,3005	33,6974
10,4	28,44272	-25,1661	4,4744	24,6138
10,2	28,1679	-39,2009	0,3494	16,9470
10,0	27,89038	-53,4138	-2,3712	10,7293
9,8	27,61007	-66,7713	-3,9787	5,8935
9,6	27,32688	-78,5602	-4,7424	2,3067
9,4	27,04073	-88,3422	-4,8992	-0,2018
9,2	26,75151	-95,9051	-4,6489	-1,8190
9,0	26,45914	-101,2150	-4,1526	-2,7310
8,8	26,1635	-104,3700	-3,5348	-3,1118
8,6	25,86447	-105,5580	-2,8859	-3,1153
8,4	25,56196	-105,0220	-2,2679	-2,8717
8,2	25,25581	-103,0300	-1,7189	-2,4860
8,0	24,94591	-99,8481	-1,2580	-2,0386
7,8	24,63212	-95,7267	-0,8908	-1,5880
7,6	24,31427	-90,8853	-0,6130	-1,1733
7,4	23,99221	-85,5065	-0,4142	-0,8178
7,2	23,66577	-79,7331	-0,2808	-0,5326
7,0	23,33477	-73,6683	-0,1979	-0,3195
6,8	22,999	-67,3799	-0,1511	-0,1741
6,6	22,65825	-60,9057	-0,1274	-0,0882
6,4	22,3123	-54,2612	-0,1158	-0,0508
6,2	21,96091	-47,4481	-0,1078	-0,0499
6,0	21,6038	-40,4635	-0,0974	-0,0725
5,8	21,24068	-33,3091	-0,0812	-0,1049
5,6	20,87125	-25,9986	-0,0587	-0,1321
5,4	20,49516	-18,5628	-0,0328	-0,1370
5,2	20,11204	-11,0478	-0,0098	-0,1004
5,0	19,72148	-3,5027	0,0000	0,0000

b) Sonlu farklar yöntemiyle çözüm

Kesin çözümde de anlatıldığı gibi değişken duvar kalınlıklı silindirik tank problemlerinin çözümü için (2.1.10) diferansiyel denkleminin kullanılması gerekir.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{a^2} \omega = Z$$

Bu diferansiyel denklemin, oluşturulacak bir sonlu fark ağında herhangi bir i noktasında sonlu farklar şeklinde yazımı aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
& \frac{D_{i-1} \frac{d^2 \omega}{dx^2} \Big|_{i-1} - 2D_i \frac{d^2 \omega}{dx^2} \Big|_i + D_{i+1} \frac{d^2 \omega}{dx^2} \Big|_{i+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{Eh_i}{a^2} \omega_i = Z_i \\
& \frac{D_{i-1} \frac{(\omega_{i-2} - 2\omega_{i-1} + \omega_i)}{(\Delta x)^2} - 2D_i \frac{(\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1})}{(\Delta x)^2} + D_{i+1} \frac{(\omega_i - 2\omega_{i+1} + \omega_{i+2})}{(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2} + \frac{Eh_i}{a^2} \omega_i = Z_i \\
& \left(\frac{D_{i-1}}{(\Delta x)^4} \right) \omega_{i-2} - 2 \left(\frac{D_{i-1} + D_i}{(\Delta x)^4} \right) \omega_{i-1} + \left(\frac{D_{i-1} + 4D_i + D_{i+1}}{(\Delta x)^4} + \frac{Eh_i}{a^2} \right) \omega_i \\
& - 2 \left(\frac{D_i + D_{i+1}}{(\Delta x)^4} \right) \omega_{i+1} + \left(\frac{D_{i+1}}{(\Delta x)^4} \right) \omega_{i+2} = Z_i
\end{aligned} \tag{3.5.23}$$

Kabuk kalınlığı x in ve radyan cinsinden açı değeri olan α nın bir fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

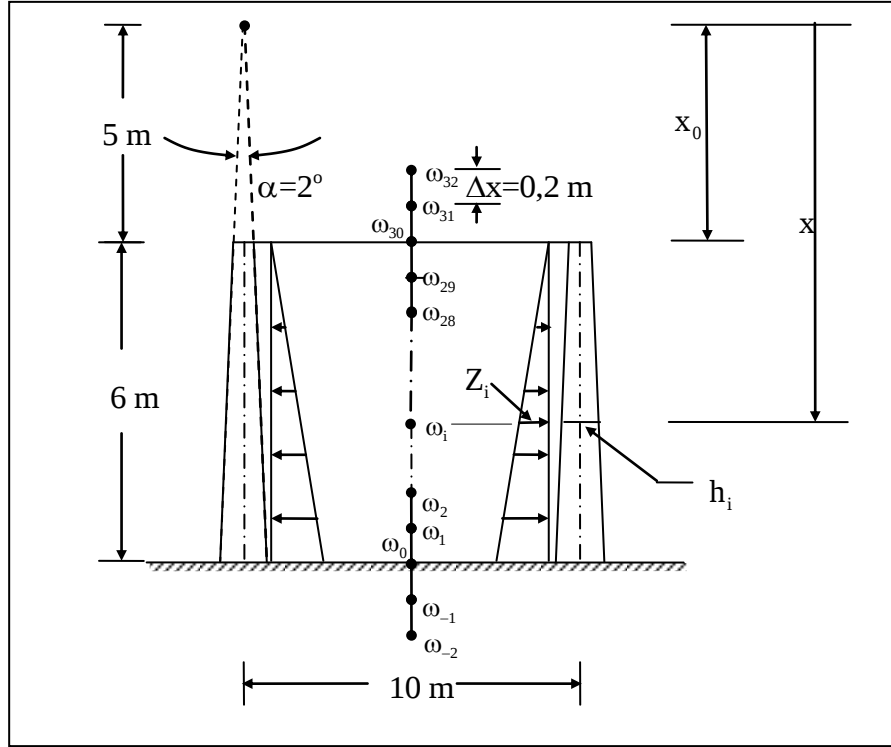
$$h(x) = \alpha x \tag{3.5.24}$$

Bu durumda kabuk üzerindeki herhangi bir noktadaki eğilme rijitliği aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$D(x) = \frac{Eh(x)^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E\alpha^3 x^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.5.25}$$

Tank içindeki herhangi bir noktada oluşacak su basıncı ise aşağıdaki formülle ifade edilebilir.

$$Z(x) = -\gamma(x - x_0) \tag{3.5.26}$$



Şekil 3.5.2 (Tank üzerinde oluşturulan sonlu fark ağı)

$\Delta x = 0,2 \text{ m}$ için oluşturulacak sonlu fark ağındaki bilinmeyenlerin kabuk üzerindeki dağılımı Şekil 3.5.2 de görülmektedir. (3.5.24), (3.5.25) ve (3.5.26) formülleri kullanılarak ω_0 noktasından ω_{30} noktasına kadar yazılacak (3.5.23) denklemindeki katsayıların değerleri Tablo 3.5.2 de gösterilmiştir.

Tablo 3.5.2 (Eşitliklerde kullanılacak katsayılar)

x_i (m)	h_i (m)	$D(x)$ (kN.m)	ω_{i-2} (Katsayı)	ω_{i-1} (Katsayı)	ω_i (Katsayı)	ω_{i+1} (Katsayı)	ω_{i+2} (Katsayı)	Z_i (kN/m ²)
11,2	0,391	147832,0						
11,0	0,384	140053,0	92395018,3	-359856331,1	525810231,2	-340756085,4	82844895,5	-58,86
10,8	0,377	132551,8	87533147,2	-340756085,4	497669605,7	-322344004,1	78327106,6	-56,90
10,6	0,370	125323,4	82844895,5	-322344004,1	470551756,6	-304607460,4	73976623,7	-54,94
10,4	0,363	118362,6	78327106,6	-304607460,4	444437743,7	-287533827,4	69790290,1	-52,97
10,2	0,356	111664,5	73976623,7	-287533827,4	419308626,7	-271110478,2	65764949,1	-51,01
10,0	0,349	105223,9	69790290,1	-271110478,2	395145465,3	-255324786,0	61897443,9	-49,05
9,8	0,342	99035,9	65764949,1	-255324786,0	371929319,1	-240164123,8	58184618,0	-47,09
9,6	0,335	93095,4	61897443,9	-240164123,8	349641247,9	-225615864,8	54623314,4	-45,13
9,4	0,328	87397,3	58184618,0	-225615864,8	328262311,4	-211667382,2	51210376,7	-43,16
9,2	0,321	81936,6	54623314,4	-211667382,2	307773569,2	-198306049,0	47942647,9	-41,20
9,0	0,314	76708,2	51210376,7	-198306049,0	288156081,0	-185519238,4	44816971,4	-39,24
8,8	0,307	71707,2	47942647,9	-185519238,4	269390906,6	-173294323,6	41830190,4	-37,28
8,6	0,300	66928,3	44816971,4	-173294323,6	251459105,6	-161618677,6	38979148,4	-35,32
8,4	0,293	62366,6	41830190,4	-161618677,6	234341737,8	-150479673,6	36260688,4	-33,35
8,2	0,286	58017,1	38979148,4	-150479673,6	218019862,8	-139864684,7	33671653,9	-31,39

8,0	0,279	53874,6	36260688,4	-139864684,7	202474540,3	-129761084,0	31208888,1	-29,43
7,8	0,272	49934,2	33671653,9	-129761084,0	187686830,0	-120156244,8	28869234,3	-27,47
7,6	0,265	46190,8	31208888,1	-120156244,8	173637791,6	-111037540,0	26649535,7	-25,51
7,4	0,258	42639,3	28869234,3	-111037540,0	160308484,8	-102392342,8	24546635,7	-23,54
7,2	0,251	39274,6	26649535,7	-102392342,8	147679969,3	-94208026,5	22557377,5	-21,58
7,0	0,244	36091,8	24546635,7	-94208026,5	135733304,8	-86471964,0	20678604,5	-19,62
6,8	0,237	33085,8	22557377,5	-86471964,0	124449551,0	-79171528,5	18907159,8	-17,66
6,6	0,230	30251,5	20678604,5	-79171528,5	113809767,6	-72294093,2	17239886,8	-15,70
6,4	0,223	27583,8	18907159,8	-72294093,2	103795014,2	-65827031,2	15673628,8	-13,73
6,2	0,216	25077,8	17239886,8	-65827031,2	94386350,7	-59757715,5	14205229,0	-11,77
6,0	0,209	22728,4	15673628,8	-59757715,5	85564836,5	-54073519,5	12831530,7	-9,81
5,8	0,202	20530,4	14205229,0	-54073519,5	77311531,6	-48761816,1	11549377,3	-7,85
5,6	0,195	18479,0	12831530,7	-48761816,1	69607495,5	-43809978,5	10355611,9	-5,89
5,4	0,188	16569,0	11549377,3	-43809978,5	62433787,9	-39205379,8	9247078,0	-3,92
5,2	0,182	14795,3	10355611,9	-39205379,8	55771468,6	-34935393,2	8220618,6	-1,96
5,0	0,175	13153,0	9247078,0	-34935393,2	49601597,3	-30987391,8	7273077,2	0,00
4,8	0,168	11636,9						

Tank tabanı ankastre bağlıdır. Buradaki eğim ve çökme sıfır olacağından sınır koşulları aşağıda verilen şekilde olacaktır.

$$\omega|_{x=11} = 0 \Rightarrow \omega_0 = 0 \quad (3.5.27a)$$

$$\left. \frac{d\omega}{dx} \right|_{x=11} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_1 - \omega_{-1}}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \quad (3.5.27b)$$

Tankın üst ucu boş uç olduğu için eğilme momenti ve kesme kuvveti sıfır olacağından buradaki sınır koşulları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$-D \left(\frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) \Big|_{x=5} = 0 \Rightarrow \frac{\omega_{29} - 2\omega_{30} + \omega_{31}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow \omega_{29} - 2\omega_{30} + \omega_{31} = 0 \quad (3.5.28a)$$

$$\begin{aligned} -D \left(\frac{d^3 \omega}{dx^3} \right) \Big|_{x=5} = 0 &\Rightarrow \frac{-\omega_{28} + 2\omega_{29} - 2\omega_{31} + \omega_{32}}{2(\Delta x)^3} = 0 \\ &\Rightarrow -\omega_{28} + 2\omega_{29} - 2\omega_{31} + \omega_{32} = 0 \end{aligned} \quad (3.5.28b)$$

Önce tankın alt ucu için çıkarılmış olan (3.5.27a), (3.5.27b) denklemleri sonra Tablo 3.5.2 de katsayıları belirlenmiş olan (3.5.23) formülünün ω_0 noktasından ω_{30} noktasına kadar yazılması sonucu elde edilen denklemler ve en son olarak da üst uç için çıkarılmış olan (3.5.28a) ve (3.5.28b) denklemlerinin ardışık yazılması sonucunda elde edilen lineer denklem takımı çözülerek bulunan çökme eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri Tablo 3.5.3 de gösterilmiştir.

Tablo 3.5.3 (Sonlu farklar yöntemiyle elde edilen değerler)

x (m)	ω (10^{-6} .m)	M_x (kN.m/m)	Q_x (kN/m)
11,4	-18,7813		
11,2	-3,9683		
11,0	0,0000	27,7883	47,7750
10,8	-3,9683	17,8509	38,9876
10,6	-13,3234	10,1212	30,6417
10,4	-25,9089	4,3641	23,1103
10,2	-39,9692	0,2971	16,6027
10,0	-54,1360	-2,3784	11,2013
9,8	-67,3986	-3,9535	6,8943
9,6	-79,0645	-4,6966	3,6050
9,4	-88,7124	-4,8427	1,2159
9,2	-96,1438	-4,5896	-0,4114
9,0	-101,3348	-4,0964	-1,4211
8,8	-104,3896	-3,4852	-1,9525
8,6	-105,5004	-2,8452	-2,1317
8,4	-104,9107	-2,2367	-2,0683
8,2	-102,8865	-1,6967	-1,8525
8,0	-99,6925	-1,2440	-1,5557
7,8	-95,5748	-0,8836	-1,2312
7,6	-90,7494	-0,6110	-0,9166
7,4	-85,3949	-0,4160	-0,6361
7,2	-79,6501	-0,2852	-0,4035
7,0	-73,6149	-0,2038	-0,2244
6,8	-67,3538	-0,1580	-0,0987
6,6	-60,9017	-0,1348	-0,0223
6,4	-54,2714	-0,1235	0,0113
6,2	-47,4619	-0,1158	0,0106
6,0	-40,4677	-0,1056	-0,0147
5,8	-33,2876	-0,0895	-0,0530
5,6	-25,9331	-0,0668	-0,0905
5,4	-18,4340	-0,0398	-0,1097
5,2	-10,8389	-0,0143	-0,0888
5,0	-3,2052	0,0000	0,0000
4,8	4,4286		
4,6	12,1009		

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Problem 1 için Ek A1’de verilen şekiller ve tablolar incelendiğinde orta kesit bölgesinde yeterli yaklaşıklığın sağlandığı, mesnet bölgelerinde ise bağıl hata oranlarının oldukça büyük değerlerde olduğu görülmektedir. Bunun nedeni kesin çözümde kabuğun mesnetlenme şeklinin ihmal edilmiş olması ve x ’in büyük değerlerinde hesaplarda anlamlı dijital kaybının olmasıdır.

Problem 2 için Ek A2’de verilen tablolar ve grafikler incelendiğinde bağıl hata değerleri bazı noktalarda çok büyük değerlere ulaşmasına rağmen iki çözümün de aynı karakteri gösterdiği görülmektedir. $x=1$ m civarındaki büyük bağıl hata değerlerinin nedeni yayılı yükteki süreksizliktir. Mesnet bölgesindeki büyük bağıl hata değerlerinin nedeni ise bir önceki problemde olduğu gibi kesin çözümde kabuğun mesnetlenme şeklinin ihmal edilmiş olması ve x ’in büyük değerlerinde hesaplarda anlamlı dijital kaybının olmasıdır. Bölüm 2 de anlatıldığı gibi kesin çözüm için kullanılan formül kabuğun sonsuz uzun olduğu varsayılarak çıkarılmıştır. Bu nedenle yük ile mesnet arasındaki mesafe π/β değerinden ne kadar büyük olursa kesin çözüm o kadar doğru sonuçlar verecektir. Dolayısıyla yük ile mesnet arasındaki mesafenin daha büyük olduğu problemler için bu bölgedeki bağıl hata değerleri daha küçük olacaktır. Yük süreksizliğinden kaynaklanan $x=1$ m civarındaki büyük bağıl hata değerleri ise nokta sayısı artırılarak giderilebilir. Bu ise ek bir hesaplama zamanı ve daha büyük matrislerle çalışmayı gerektirir. Bu nedenle sonlu farklar yönteminde kullanılacak nokta sayısının yeterli yaklaşıklıkla, hesaplama süresi arasındaki dengeyi sağlayacak optimum bir değerde seçilmesi uygun olacaktır.

Problem 3 de önceki iki problemten farklı olarak kabul edilen sınır koşulları iki yöntem için de aynı olduğundan oldukça yaklaşık değerler elde edilmiştir. Ek A3’de verilen tablolar ve grafikler incelendiğinde eğriliğin hızla değiştiği bölgelerde daha büyük bağıl hata değerlerin oluştuğu görülmektedir. Dikkati çeken bir diğer nokta da eğilme momenti ve kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranlarının çökme değerlerindekiyle göre daha büyük olmasıdır. Bunun nedeni sonlu fark yaklaşımın

birincil olarak çökme değerleri için yapılmış olmasıdır. Eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri ise yaklaşık çökme değerleri üzerinden yine yaklaşık bir şekilde türev işlemleri yapılarak elde edildiğinden bağıl hata oranları daha büyük çıkmıştır.

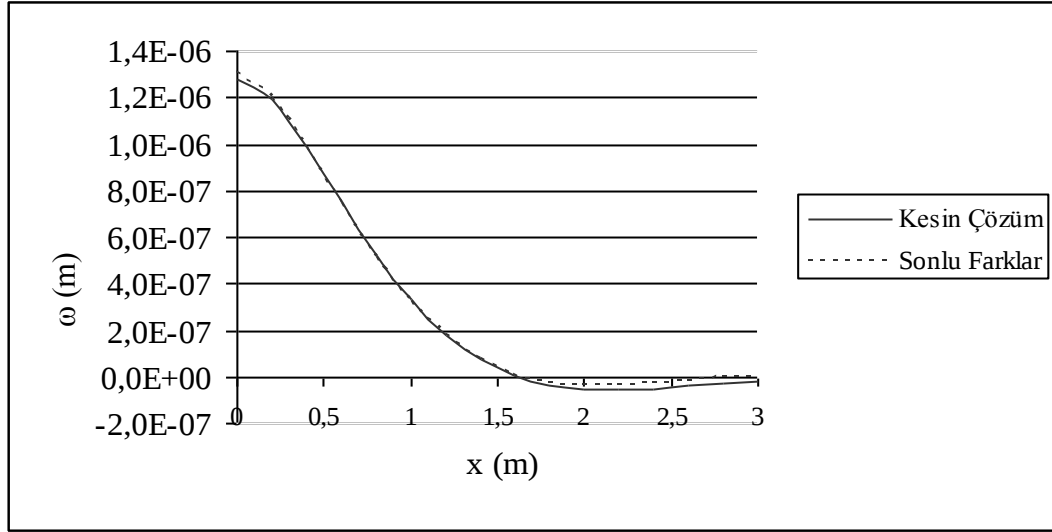
Problem 4 de kesin çözümünde kullanılan (2.2.4.5a) formülü, kabuk uzunluğunun kalınlığına göre sonsuz uzun olduğu kabulüne dayanılarak çıkarılmıştır. Bu problem için Ek A4’de verilen tablolar incelendiğinde kesin çözüm sonucunda elde edilen değerlerin, silindir tabanındaki sınır koşullarını sağlamasına rağmen serbest uçtaki eğilme momentinin ve kesme kuvvetinin sıfır olması koşullarını sağlamadığı görülmektedir. Bu nedenle serbest uç bölgesindeki bağıl hata oranları yüksek çıkmıştır. Bunun dışında eğriliğin hızla değiştiği taban bölgesindeki birkaç nokta haricinde yeterli yaklaşıklık sağlandığı görülmektedir.

Problem 5 de kesin çözüm için kullanılan formül Problem 4 de olduğu gibi kabuk uzunluğunun kalınlığına göre sonsuz uzun olduğu kabulüne dayanılarak çıkarılmıştır. Buna rağmen Ek A5’de verilen tablolar ve grafikler incelendiğinde özellikle çökme ve eğilme momenti değerlerinde iyi bir yaklaşıklık sağlandığı görülmektedir. Kesme kuvveti değerlerinde ise yaklaşık çökme değerleri üzerinden yaklaşık türev alma işleminin sonucu olarak daha büyük bağıl hata değerleri ile karşılaşmıştır. Bu durum daha önce anlatıldığı gibi ek hesaplama süresi ve daha büyük matrislerle çalışılması göze alınarak nokta aralıklarının küçültülmesi ile giderilebilir.

KAYNAKLAR

- Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.,** 1959. Theory of Plates and Shells (Second Edition), McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London
- Tameroğlu S. Sacit,** 1991. Elastisite Teorisi: Çözüm Yöntemleri ve Bazı Matematiksel Teknikler, İTÜ, İstanbul
- Salvadori Mario G. and Baron Melvin L.,** 1966. Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall, New Delhi
- Girkmann K.,** 1991. Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler, Cilt I-II çevirisi Tameroğlu S. Sacit, İTÜ Kütüphanesi sayı 1463, İstanbul
- Ugural A. C.,** 1999. Stresses in Plates and Shells, WCB/McGraw-Hill, Boston
- Dahlquist G. and Björck Ake,** 1974. Numerical Methods, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Conte S. D. and De Boor Carl,** 1981. Elementary Numerical Analysis, McGraw-Hill, Auckland
- Carnahan B., Luther H. A., Wilkes O. J.,** 1990. Applied Numerical Methods, R. E. Krieger Pub. Co., Malabar

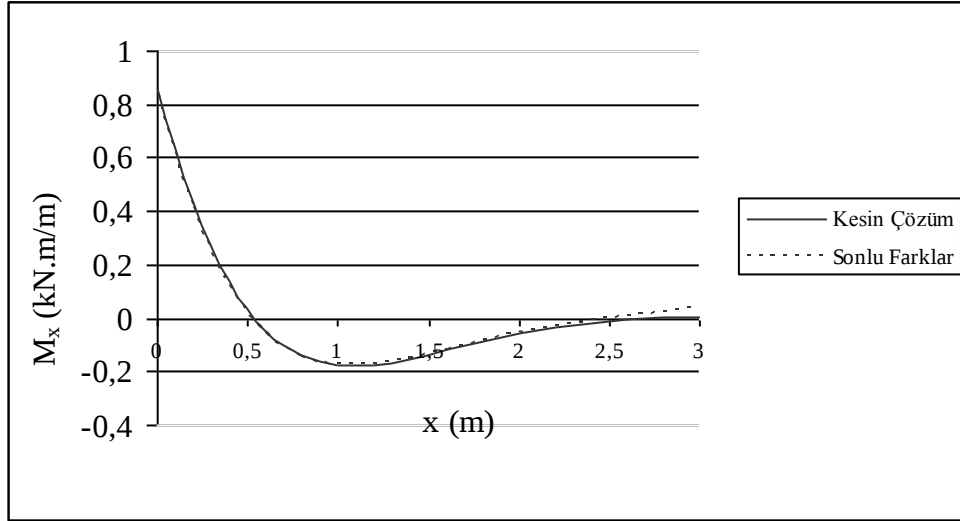
EK A1



Şekil A1.1 (Çökme değerlerinin karşılaştırılması)

Tablo A1.1 (Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları)

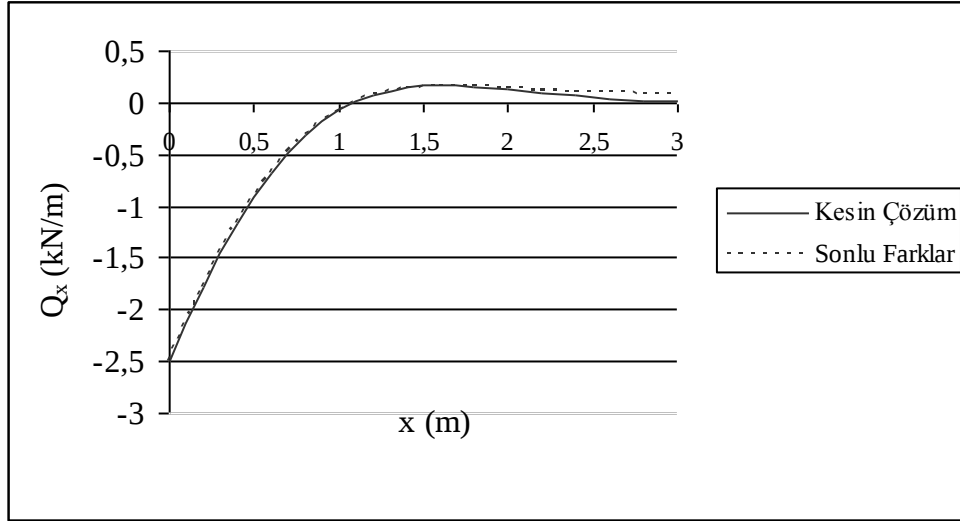
	$\omega (10^{-6} \cdot m)$		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	1,2791	1,3041	1,95
0,2	1,1902	1,1980	0,66
0,4	0,9897	0,9873	-0,24
0,6	0,7522	0,7451	-0,95
0,8	0,5242	0,5162	-1,54
1,0	0,3305	0,3238	-2,02
1,2	0,1803	0,1764	-2,16
1,4	0,0736	0,0732	-0,51
1,6	0,0047	0,0083	77,14
1,8	-0,0344	-0,0264	-23,17
2,0	-0,0519	-0,0392	-24,38
2,2	-0,0551	-0,0376	-31,71
2,4	-0,0499	-0,0279	-43,98
2,6	-0,0406	-0,0155	-61,81
2,8	-0,0303	-0,0049	-83,99
3,0	-0,0207	0,0000	-100,00



Şekil A1.2 (Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırılması)

Tablo A1.2 (Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	0,8585	0,8398	-2,18
0,2	0,4304	0,4140	-3,81
0,4	0,1367	0,1246	-8,88
0,6	-0,0446	-0,0525	17,50
0,8	-0,1403	-0,1447	3,14
1,0	-0,1759	-0,1782	1,27
1,2	-0,1735	-0,1748	0,73
1,4	-0,1502	-0,1513	0,76
1,6	-0,1181	-0,1196	1,20
1,8	-0,0852	-0,0868	1,84
2,0	-0,0561	-0,0571	1,82
2,2	-0,0327	-0,0318	-2,55
2,4	-0,0155	-0,0109	-29,76
2,6	-0,0039	0,0069	-278,75
2,8	0,0031	0,0230	647,41
3,0	0,0066	0,0385	485,27

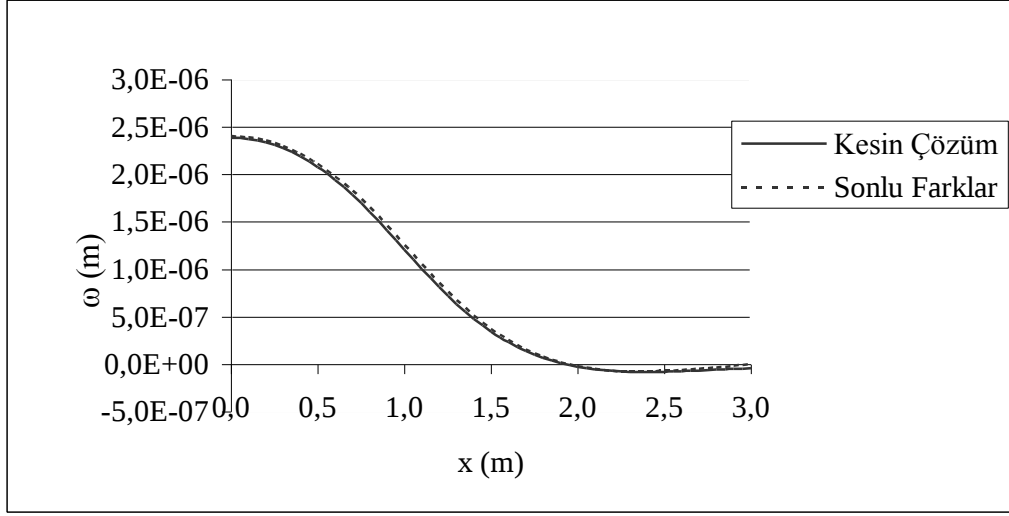


Şekil A1.3 (Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırılması)

Tablo A1.3 (Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	Q_x (kN/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	-2,5000	-2,5000	0,00
0,2	-1,7898	-1,7880	-0,10
0,4	-1,1662	-1,1662	0,00
0,6	-0,6701	-0,6732	0,46
0,8	-0,3080	-0,3143	2,03
1,0	-0,0668	-0,0753	12,73
1,2	0,0765	0,0671	-12,27
1,4	0,1468	0,1381	-5,89
1,6	0,1674	0,1613	-3,65
1,8	0,1578	0,1561	-1,02
2,0	0,1324	0,1375	3,86
2,2	0,1014	0,1156	14,01
2,4	0,0712	0,0969	36,07
2,6	0,0454	0,0846	86,39
2,8	0,0252	0,0788	212,93
3,0	0,0107	0,0774	623,30

EK A2

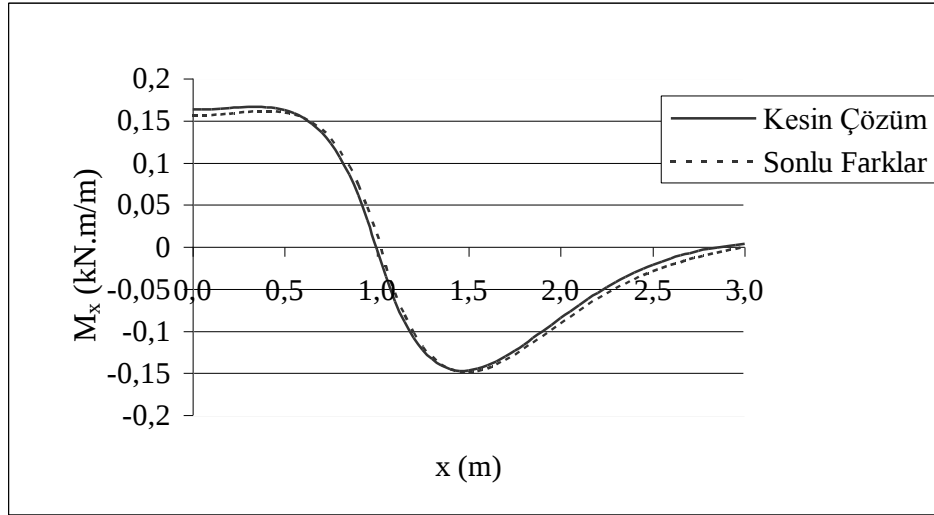


Şekil A2.1 (Çökme değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A2.1 (Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları)

	$\omega (10^{-6} \cdot \text{m})$		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,00	2,3863	2,4033	0,71
0,05	2,3832	2,4004	0,72
0,10	2,3741	2,3916	0,74
0,15	2,3587	2,3770	0,78
0,20	2,3373	2,3565	0,82
0,25	2,3096	2,3301	0,89
0,30	2,2758	2,2977	0,96
0,35	2,2357	2,2593	1,06
0,40	2,1895	2,2149	1,16
0,45	2,1370	2,1645	1,29
0,50	2,0783	2,1080	1,43
0,55	2,0135	2,0455	1,59
0,60	1,9429	1,9771	1,76
0,65	1,8664	1,9029	1,96
0,70	1,7845	1,8233	2,17
0,75	1,6976	1,7384	2,41
0,80	1,6060	1,6487	2,66
0,85	1,5105	1,5548	2,93
0,90	1,4117	1,4573	3,23
0,95	1,3107	1,3570	3,53
1,00	1,2085	1,2549	3,84
1,05	1,1064	1,1523	4,15
1,10	1,0057	1,0505	4,46
1,15	0,9075	0,9508	4,77
1,20	0,8128	0,8541	5,09

1,25	0,7221	0,7613	5,42
1,30	0,6361	0,6728	5,78
1,35	0,5551	0,5893	6,16
1,40	0,4794	0,5109	6,57
1,45	0,4093	0,4380	7,03
1,50	0,3446	0,3707	7,57
1,55	0,2855	0,3089	8,20
1,60	0,2318	0,2526	8,98
1,65	0,1834	0,2018	9,99
1,70	0,1402	0,1562	11,40
1,75	0,1018	0,1156	13,54
1,80	0,0680	0,0798	17,30
1,85	0,0386	0,0485	25,78
1,90	0,0132	0,0215	63,14
1,95	-0,0084	-0,0015	-82,29
2,00	-0,0266	-0,0208	-21,74
2,05	-0,0416	-0,0367	-11,70
2,10	-0,0537	-0,0495	-7,83
2,15	-0,0633	-0,0595	-6,02
2,20	-0,0706	-0,0669	-5,23
2,25	-0,0758	-0,0719	-5,07
2,30	-0,0792	-0,0749	-5,40
2,35	-0,0811	-0,0761	-6,17
2,40	-0,0816	-0,0756	-7,37
2,45	-0,0810	-0,0736	-9,06
2,50	-0,0794	-0,0704	-11,27
2,55	-0,0770	-0,0662	-14,11
2,60	-0,0740	-0,0609	-17,69
2,65	-0,0705	-0,0549	-22,14
2,70	-0,0667	-0,0482	-27,64
2,75	-0,0625	-0,0410	-34,43
2,80	-0,0582	-0,0333	-42,78
2,85	-0,0538	-0,0253	-53,03
2,90	-0,0494	-0,0170	-65,60
2,95	-0,0450	-0,0085	-81,04
3,00	-0,0407	0,0000	-100,00

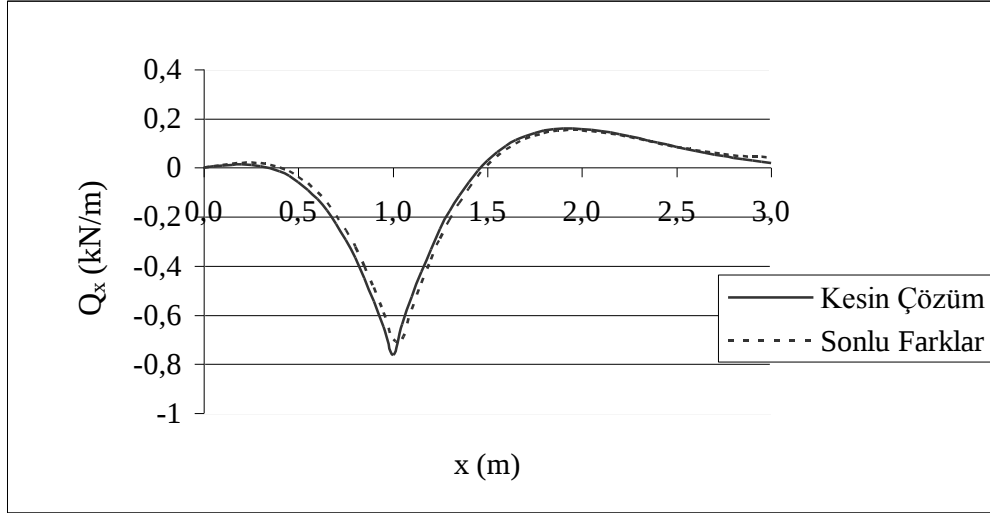


Şekil A2.2 (Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A2.2 (Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,00	0,1633	0,1558	-4,60
0,05	0,1635	0,1560	-4,57
0,10	0,1638	0,1565	-4,48
0,15	0,1644	0,1573	-4,33
0,20	0,1651	0,1583	-4,12
0,25	0,1657	0,1593	-3,85
0,30	0,1662	0,1604	-3,53
0,35	0,1664	0,1612	-3,14
0,40	0,1660	0,1615	-2,69
0,45	0,1648	0,1613	-2,17
0,50	0,1626	0,1600	-1,56
0,55	0,1589	0,1576	-0,85
0,60	0,1535	0,1536	0,01
0,65	0,1460	0,1476	1,06
0,70	0,1360	0,1393	2,41
0,75	0,1230	0,1282	4,24
0,80	0,1066	0,1140	6,92
0,85	0,0863	0,0960	11,30
0,90	0,0615	0,0739	20,09
0,95	0,0318	0,0470	47,82
1,00	-0,0034	0,0149	-543,27
1,05	-0,0353	-0,0229	-34,99
1,10	-0,0647	-0,0547	-15,45
1,15	-0,0887	-0,0808	-8,86
1,20	-0,1078	-0,1019	-5,50
1,25	-0,1225	-0,1183	-3,44
1,30	-0,1334	-0,1307	-2,01

1,35	-0,1409	-0,1396	-0,94
1,40	-0,1454	-0,1452	-0,09
1,45	-0,1473	-0,1482	0,62
1,50	-0,1469	-0,1488	1,24
1,55	-0,1448	-0,1474	1,81
1,60	-0,1410	-0,1443	2,35
1,65	-0,1361	-0,1400	2,87
1,70	-0,1301	-0,1345	3,40
1,75	-0,1233	-0,1282	3,95
1,80	-0,1160	-0,1213	4,53
1,85	-0,1083	-0,1139	5,16
1,90	-0,1004	-0,1063	5,87
1,95	-0,0925	-0,0986	6,67
2,00	-0,0845	-0,0909	7,58
2,05	-0,0767	-0,0833	8,65
2,10	-0,0691	-0,0759	9,89
2,15	-0,0617	-0,0688	11,38
2,20	-0,0548	-0,0620	13,15
2,25	-0,0481	-0,0555	15,30
2,30	-0,0419	-0,0494	17,93
2,35	-0,0361	-0,0437	21,17
2,40	-0,0307	-0,0385	25,22
2,45	-0,0258	-0,0336	30,36
2,50	-0,0213	-0,0291	37,00
2,55	-0,0172	-0,0250	45,79
2,60	-0,0135	-0,0213	57,84
2,65	-0,0102	-0,0179	75,19
2,70	-0,0073	-0,0148	102,28
2,75	-0,0047	-0,0119	150,86
2,80	-0,0025	-0,0092	267,01
2,85	-0,0006	-0,0068	1013,49
2,90	0,0010	-0,0044	-537,96
2,95	0,0024	-0,0022	-192,65
3,00	0,0035	0,0000	-100,00



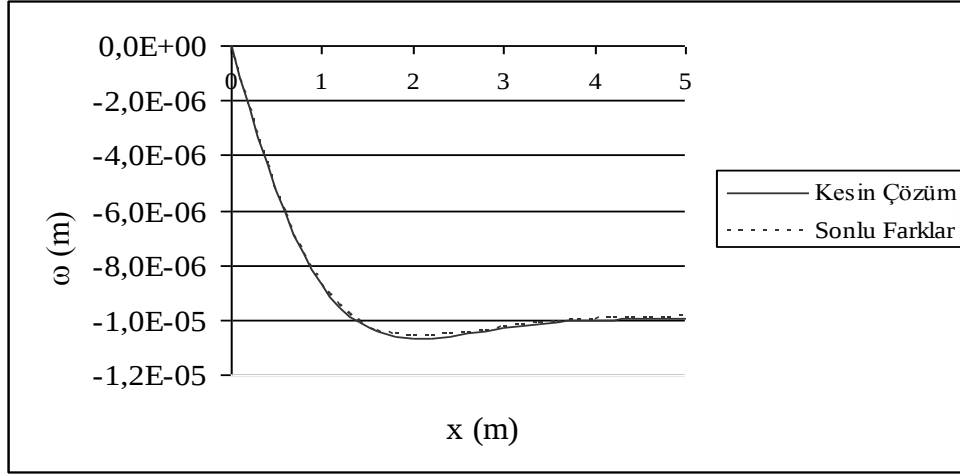
Şekil A2.3 (Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A2.3 (Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları)

x (m)	Q _x (kN/m)		Bağıl Hata (%)
	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	
0,00	0,0000	0,0000	0,00
0,05	0,0051	0,0067	32,60
0,10	0,0094	0,0128	35,18
0,15	0,0125	0,0176	40,37
0,20	0,0137	0,0205	50,42
0,25	0,0122	0,0210	72,65
0,30	0,0074	0,0183	148,21
0,35	-0,0014	0,0118	-961,04
0,40	-0,0147	0,0009	-106,12
0,45	-0,0334	-0,0151	-54,81
0,50	-0,0579	-0,0368	-36,55
0,55	-0,0891	-0,0648	-27,27
0,60	-0,1276	-0,0999	-21,71
0,65	-0,1738	-0,1425	-18,01
0,70	-0,2286	-0,1934	-15,40
0,75	-0,2924	-0,2531	-13,44
0,80	-0,3657	-0,3221	-11,94
0,85	-0,4491	-0,4009	-10,73
0,90	-0,5428	-0,4899	-9,74
0,95	-0,6473	-0,5895	-8,92
1,00	-0,7626	-0,7000	-8,21
1,05	-0,6388	-0,6963	9,00
1,10	-0,5259	-0,5786	10,02
1,15	-0,4237	-0,4717	11,34
1,20	-0,3317	-0,3752	13,12
1,25	-0,2497	-0,2889	15,70
1,30	-0,1771	-0,2123	19,84

1,35	-0,1135	-0,1448	27,61
1,40	-0,0582	-0,0860	47,76
1,45	-0,0108	-0,0353	228,23
1,50	0,0295	0,0079	-73,24
1,55	0,0631	0,0442	-29,98
1,60	0,0907	0,0742	-18,21
1,65	0,1129	0,0985	-12,76
1,70	0,1302	0,1176	-9,63
1,75	0,1431	0,1321	-7,62
1,80	0,1521	0,1426	-6,25
1,85	0,1577	0,1494	-5,27
1,90	0,1605	0,1532	-4,55
1,95	0,1607	0,1542	-4,02
2,00	0,1588	0,1531	-3,62
2,05	0,1551	0,1500	-3,32
2,10	0,1500	0,1454	-3,09
2,15	0,1437	0,1395	-2,91
2,20	0,1366	0,1328	-2,75
2,25	0,1287	0,1254	-2,59
2,30	0,1204	0,1175	-2,39
2,35	0,1118	0,1095	-2,12
2,40	0,1031	0,1014	-1,71
2,45	0,0944	0,0934	-1,10
2,50	0,0858	0,0857	-0,18
2,55	0,0775	0,0784	1,18
2,60	0,0694	0,0716	3,18
2,65	0,0617	0,0654	6,07
2,70	0,0543	0,0599	10,26
2,75	0,0474	0,0551	16,26
2,80	0,0410	0,0512	24,89
2,85	0,0350	0,0480	37,33
2,90	0,0295	0,0458	55,38
2,95	0,0244	0,0444	81,91
3,00	0,0198	0,0439	121,64

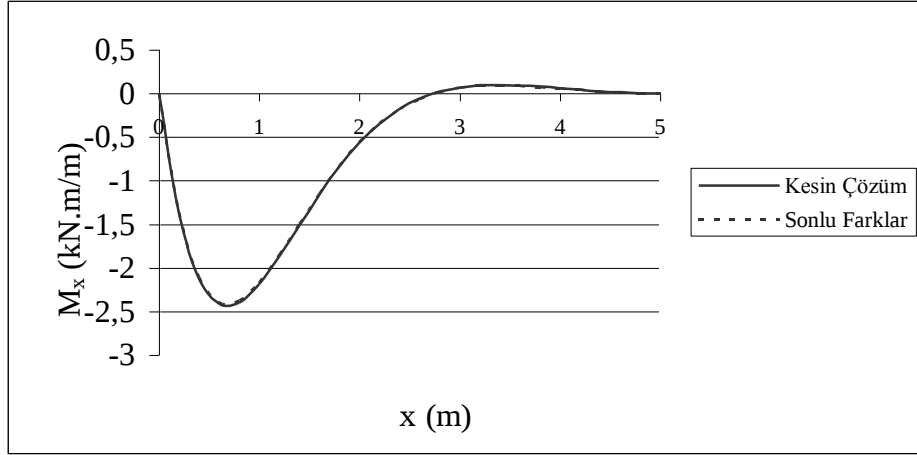
EK A3



Şekil A3.1 (Çökme değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A3.1 (Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları)

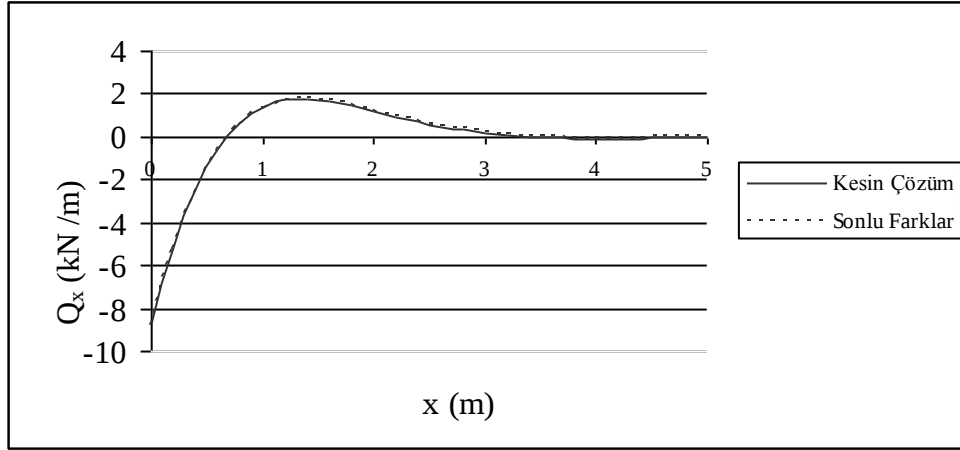
	$\omega (10^{-6} \cdot m)$		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	0,0000	0,0000	0,00
0,2	-2,2633	-2,2664	0,14
0,4	-4,3423	-4,3425	0,01
0,6	-6,1303	-6,1243	-0,10
0,8	-7,5843	-7,5710	-0,18
1,0	-8,7053	-8,6851	-0,23
1,2	-9,5220	-9,4962	-0,27
1,4	-10,0779	-10,0483	-0,29
1,6	-10,4225	-10,3909	-0,30
1,8	-10,6049	-10,5729	-0,30
2,0	-10,6696	-10,6384	-0,29
2,2	-10,6546	-10,6252	-0,28
2,4	-10,5907	-10,5635	-0,26
2,6	-10,5013	-10,4765	-0,24
2,8	-10,4033	-10,3809	-0,22
3,0	-10,3080	-10,2879	-0,20
3,2	-10,2223	-10,2040	-0,18
3,4	-10,1494	-10,1326	-0,17
3,6	-10,0902	-10,0746	-0,15
3,8	-10,0438	-10,0291	-0,15
4,0	-10,0083	-9,9942	-0,14
4,2	-9,9814	-9,9677	-0,14
4,4	-9,9604	-9,9470	-0,13
4,6	-9,9431	-9,9299	-0,13
4,8	-9,9276	-9,9145	-0,13
5,0	-9,9127	-9,8996	-0,13



Şekil A3.2 (Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A3.2 (Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	0,0000	0,0000	0,00
0,2	-1,3700	-1,3620	-0,59
0,4	-2,1198	-2,1055	-0,67
0,6	-2,4151	-2,3971	-0,75
0,8	-2,3985	-2,3793	-0,80
1,0	-2,1864	-2,1682	-0,83
1,2	-1,8687	-1,8529	-0,84
1,4	-1,5110	-1,4986	-0,82
1,6	-1,1581	-1,1495	-0,75
1,8	-0,8380	-0,8329	-0,60
2,0	-0,5654	-0,5635	-0,34
2,2	-0,3459	-0,3465	0,18
2,4	-0,1785	-0,1809	1,38
2,6	-0,0581	-0,0618	6,25
2,8	0,0222	0,0180	-19,02
3,0	0,0702	0,0659	-6,15
3,2	0,0935	0,0895	-4,32
3,4	0,0989	0,0954	-3,55
3,6	0,0923	0,0895	-3,08
3,8	0,0784	0,0763	-2,71
4,0	0,0610	0,0595	-2,35
4,2	0,0427	0,0419	-1,92
4,4	0,0260	0,0256	-1,32
4,6	0,0124	0,0123	-0,24
4,8	0,0033	0,0034	2,74
5,0	0,0000	0,0000	0,00

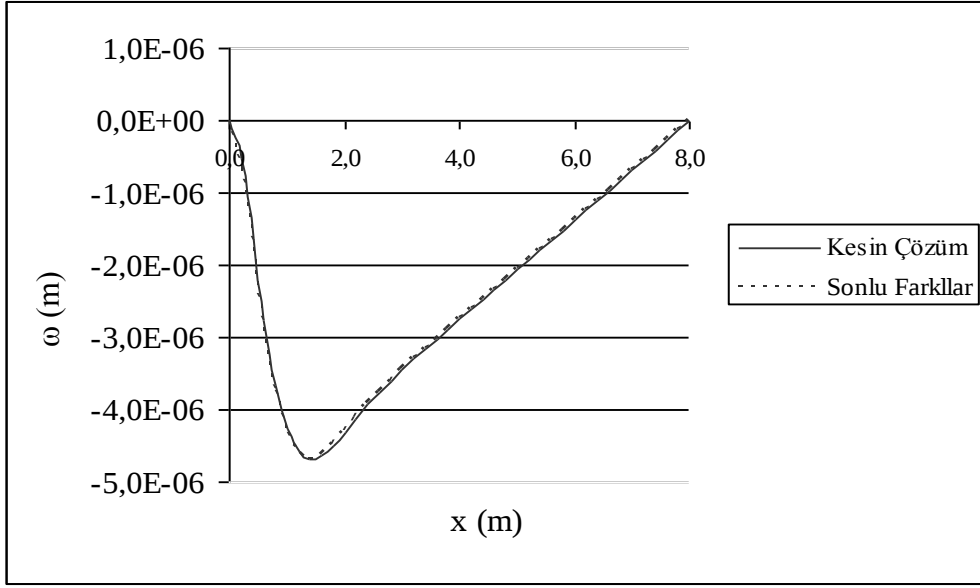


Şekil A3.3 (Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A3.3 (Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	Q_x (kN/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	-8,6976	-8,8099	1,29
0,2	-5,1537	-5,2638	2,14
0,4	-2,4832	-2,5877	4,21
0,6	-0,5883	-0,6844	16,32
0,8	0,6574	0,5722	-12,96
1,0	1,3888	1,3159	-5,25
1,2	1,7339	1,6738	-3,46
1,4	1,8060	1,7587	-2,62
1,6	1,6997	1,6643	-2,08
1,8	1,4896	1,4649	-1,66
2,0	1,2315	1,2159	-1,26
2,2	0,9645	0,9564	-0,84
2,4	0,7142	0,7119	-0,32
2,6	0,4953	0,4972	0,39
2,8	0,3143	0,3191	1,53
3,0	0,1722	0,1788	3,78
3,2	0,0666	0,0739	10,97
3,4	-0,0073	0,0001	-100,99
3,6	-0,0548	-0,0478	-12,74
3,8	-0,0812	-0,0749	-7,70
4,0	-0,0913	-0,0860	-5,83
4,2	-0,0890	-0,0847	-4,83
4,4	-0,0772	-0,0740	-4,19
4,6	-0,0578	-0,0557	-3,74
4,8	-0,0319	-0,0309	-3,39
5,0	0,0000	0,0000	0,00

EK A4

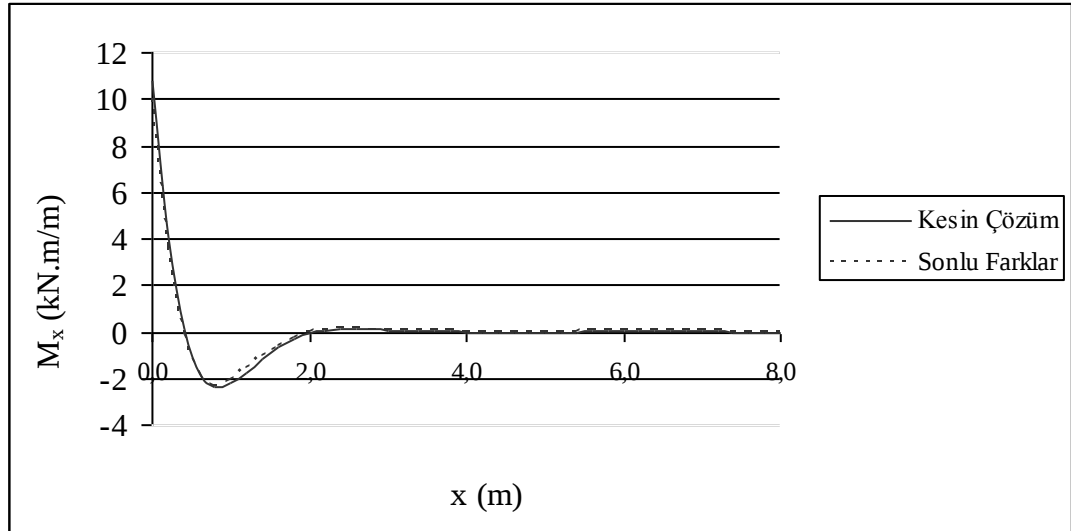


Şekil A4.1 (Çökme değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A4.1 (Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları)

	$\omega (10^{-6} \cdot \text{m})$		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	0,0000	0,0000	-
0,2	-0,5361	-0,6496	21,18
0,4	-1,6286	-1,7688	8,60
0,6	-2,7565	-2,8757	4,32
0,8	-3,6636	-3,7439	2,19
1,0	-4,2689	-4,3107	0,98
1,2	-4,5901	-4,6025	0,27
1,4	-4,6892	-4,6834	-0,12
1,6	-4,6375	-4,6234	-0,30
1,8	-4,4975	-4,4819	-0,35
2,0	-4,3156	-4,3024	-0,31
2,2	-4,1220	-4,1127	-0,23
2,4	-3,9333	-3,9279	-0,14
2,6	-3,7565	-3,7543	-0,06
2,8	-3,5928	-3,5926	-0,01
3,0	-3,4402	-3,4412	0,03
3,2	-3,2957	-3,2971	0,04
3,4	-3,1564	-3,1578	0,04
3,6	-3,0199	-3,0210	0,04
3,8	-2,8845	-2,8852	0,03
4,0	-2,7492	-2,7496	0,01
4,2	-2,6135	-2,6137	0,01
4,4	-2,4772	-2,4772	0,00

4,6	-2,3404	-2,3404	0,00
4,8	-2,2032	-2,2031	0,00
5,0	-2,0657	-2,0656	0,00
5,2	-1,9280	-1,9279	0,00
5,4	-1,7903	-1,7902	0,00
5,6	-1,6525	-1,6524	0,00
5,8	-1,5147	-1,5147	0,00
6,0	-1,3769	-1,3769	0,00
6,2	-1,2392	-1,2392	0,00
6,4	-1,1015	-1,1015	0,00
6,6	-0,9638	-0,9638	0,00
6,8	-0,8261	-0,8261	0,00
7,0	-0,6884	-0,6884	0,00
7,2	-0,5507	-0,5507	0,00
7,4	-0,4130	-0,4130	0,00
7,6	-0,2754	-0,2754	0,00
7,8	-0,1377	-0,1377	0,00
8,0	0,0000	0,0000	0,00

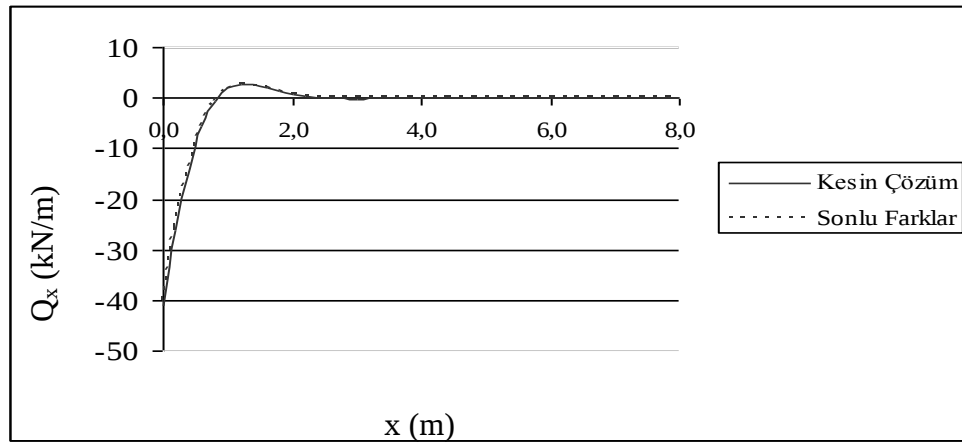


Şekil A4.2 (Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A4.2 (Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
0,0	10,773000	10,044732	0,00
0,2	4,073650	3,629830	-10,89
0,4	0,102016	-0,094643	-192,77
0,6	-1,818140	-1,845076	1,48
0,8	-2,395760	-2,330880	-2,71
1,0	-2,222310	-2,125433	-4,36
1,2	-1,721930	-1,630260	-5,32
1,4	-1,159050	-1,090185	-5,94

1,6	-0,671964	-0,629833	-6,27
1,8	-0,312626	-0,293455	-6,13
2,0	-0,081921	-0,078863	-3,73
2,2	0,043890	0,037766	-13,95
2,4	0,095866	0,086068	-10,22
2,6	0,102740	0,092897	-9,58
2,8	0,086736	0,078759	-9,20
3,0	0,062786	0,057312	-8,72
3,2	0,039532	0,036409	-7,90
3,4	0,020977	0,019673	-6,21
3,6	0,008156	0,008048	-1,33
3,8	0,000488	0,001023	109,60
4,0	-0,003274	-0,002503	-23,54
4,2	-0,004460	-0,003709	-16,84
4,4	-0,004190	-0,003587	-14,38
4,6	-0,003274	-0,002859	-12,68
4,8	-0,002220	-0,001978	-10,93
5,0	-0,001299	-0,001190	-8,44
5,2	-0,000614	-0,000593	-3,50
5,4	-0,000171	-0,000199	16,10
5,6	0,000073	0,000026	-65,07
5,8	0,000176	0,000127	-27,86
6,0	0,000193	0,000152	-21,29
6,2	0,000164	0,000135	-17,92
6,4	0,000120	0,000102	-15,17
6,6	0,000076	0,000067	-11,91
6,8	0,000041	0,000038	-6,19
7,0	0,000016	0,000018	10,56
7,2	0,000001	0,000006	289,38
7,4	-0,000006	0,000000	-99,82
7,6	-0,000008	-0,000002	-81,54
7,8	-0,000008	-0,000001	-89,05
8,0	-0,000006	0,000000	-100,00

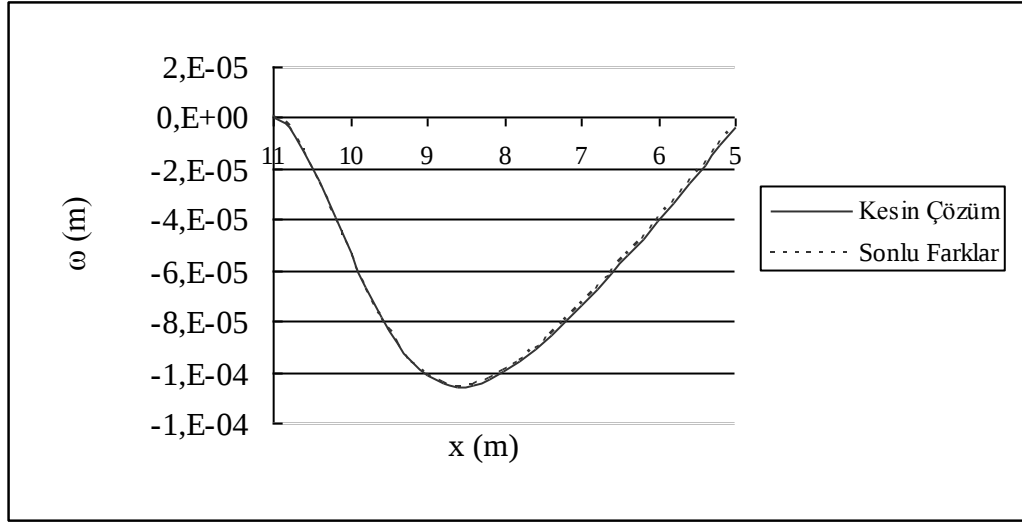


Şekil A4.3 (Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A4.3 (Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları)

x (m)	Q _x (kN.m/m)		Bağıl Hata (%)
	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	
0,0	-41,132400	-39,922507	-2,94
0,2	-26,187800	-25,348439	-3,21
0,4	-14,116600	-13,687265	-3,04
0,6	-5,687650	-5,590593	-1,71
0,8	-0,585069	-0,700892	19,80
1,0	1,967120	1,751550	-10,96
1,2	2,819290	2,588120	-8,20
1,4	2,697700	2,501068	-7,29
1,6	2,132880	1,991825	-6,61
1,8	1,461970	1,377426	-5,78
2,0	0,866288	0,828052	-4,41
2,2	0,418478	0,412327	-1,47
2,4	0,125547	0,137827	9,78
2,6	-0,038241	-0,018273	-52,21
2,8	-0,109455	-0,088961	-18,72
3,0	-0,122985	-0,105876	-13,91
3,2	-0,106365	-0,094098	-11,53
3,4	-0,078434	-0,070902	-9,60
3,6	-0,050335	-0,046625	-7,37
3,8	-0,027433	-0,026377	-3,85
4,0	-0,011319	-0,011830	4,52
4,2	-0,001480	-0,002711	83,10
4,4	0,003507	0,002126	-39,38
4,6	0,005235	0,004024	-23,14
4,8	0,005079	0,004172	-17,86
5,0	0,004051	0,003462	-14,53
5,2	0,002798	0,002477	-11,46
5,4	0,001673	0,001546	-7,56
5,6	0,000820	0,000815	-0,63
5,8	0,000258	0,000315	22,23
6,0	-0,000060	0,000019	-131,91
6,2	-0,000200	-0,000125	-37,66
6,4	-0,000230	-0,000170	-26,34
6,6	-0,000201	-0,000158	-21,29
6,8	-0,000150	-0,000122	-18,11
7,0	-0,000097	-0,000081	-16,03
7,2	-0,000053	-0,000045	-15,44
7,4	-0,000022	-0,000018	-18,45
7,6	-0,000004	-0,000002	-39,29
7,8	0,000006	0,000004	-38,44
8,0	0,000010	0,000000	-100,00

EK A5

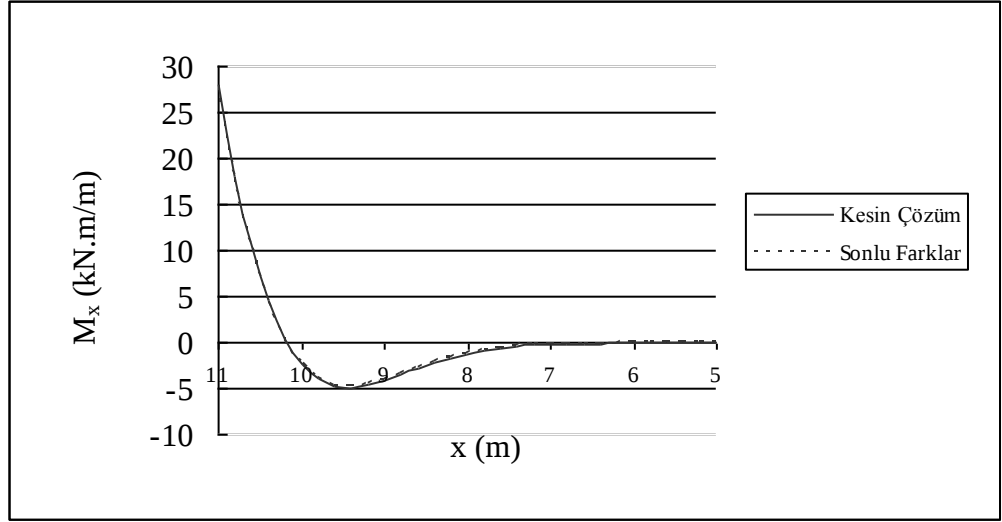


Şekil A5.1 (Çökme değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A5.1 (Çökme değerlerindeki bağıl hata oranları)

	$\omega (10^{-6} \cdot \text{m})$		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
11,0	0,0000	0,0000	0,00
10,8	-3,5875	-3,9683	10,62
10,6	-12,7019	-13,3234	4,89
10,4	-25,1661	-25,9089	2,95
10,2	-39,2009	-39,9692	1,96
10,0	-53,4138	-54,1360	1,35
9,8	-66,7713	-67,3986	0,94
9,6	-78,5602	-79,0645	0,64
9,4	-88,3422	-88,7124	0,42
9,2	-95,9051	-96,1438	0,25
9,0	-101,2150	-101,3348	0,12
8,8	-104,3700	-104,3896	0,02
8,6	-105,5580	-105,5004	-0,05
8,4	-105,0220	-104,9107	-0,11
8,2	-103,0300	-102,8865	-0,14
8,0	-99,8481	-99,6925	-0,16
7,8	-95,7267	-95,5748	-0,16
7,6	-90,8853	-90,7494	-0,15
7,4	-85,5065	-85,3949	-0,13
7,2	-79,7331	-79,6501	-0,10
7,0	-73,6683	-73,6149	-0,07
6,8	-67,3799	-67,3538	-0,04
6,6	-60,9057	-60,9017	-0,01
6,4	-54,2612	-54,2714	0,02
6,2	-47,4481	-47,4619	0,03

6,0	-40,4635	-40,4677	0,01
5,8	-33,3091	-33,2876	-0,06
5,6	-25,9986	-25,9331	-0,25
5,4	-18,5628	-18,4340	-0,69
5,2	-11,0478	-10,8389	-1,89
5,0	-3,5027	-3,2052	-8,49

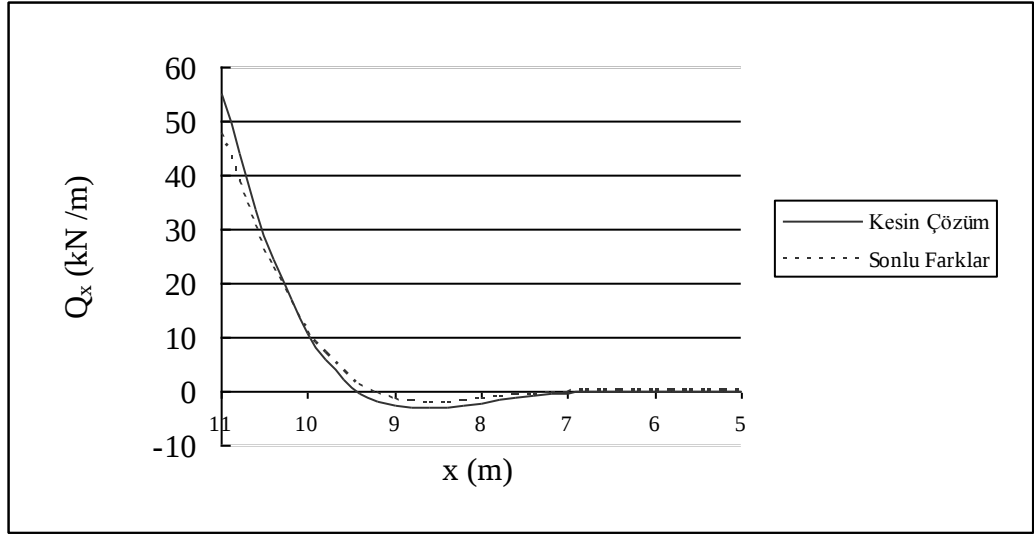


Şekil A5.2 (Eğilme momenti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A5.2 (Eğilme momenti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	M_x (kN.m/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
11,0	28,1211	27,7883	-1,18
10,8	18,1065	17,8509	-1,41
10,6	10,3005	10,1212	-1,74
10,4	4,4744	4,3641	-2,46
10,2	0,3494	0,2971	-14,98
10,0	-2,3712	-2,3784	0,30
9,8	-3,9787	-3,9535	-0,63
9,6	-4,7424	-4,6966	-0,97
9,4	-4,8992	-4,8427	-1,15
9,2	-4,6489	-4,5896	-1,27
9,0	-4,1526	-4,0964	-1,36
8,8	-3,5348	-3,4852	-1,40
8,6	-2,8859	-2,8452	-1,41
8,4	-2,2679	-2,2367	-1,38
8,2	-1,7189	-1,6967	-1,29
8,0	-1,2580	-1,2440	-1,11
7,8	-0,8908	-0,8836	-0,82
7,6	-0,6130	-0,6110	-0,33

7,4	-0,4142	-0,4160	0,43
7,2	-0,2808	-0,2852	1,55
7,0	-0,1979	-0,2038	3,01
6,8	-0,1511	-0,1580	4,55
6,6	-0,1274	-0,1348	5,80
6,4	-0,1158	-0,1235	6,66
6,2	-0,1078	-0,1158	7,41
6,0	-0,0974	-0,1056	8,46
5,8	-0,0812	-0,0895	10,29
5,6	-0,0587	-0,0668	13,73
5,4	-0,0328	-0,0398	21,21
5,2	-0,0098	-0,0143	45,96
5,0	0,0000	0,0000	0,00



Şekil A5.3 (Kesme kuvveti değerlerinin karşılaştırması)

Tablo A5.3 (Kesme kuvveti değerlerindeki bağıl hata oranları)

	Q_x (kN/m)		
x (m)	Kesin Çözüm	Sonlu Farklar	Bağıl Hata (%)
11,0	55,2500	47,7750	-13,53
10,8	44,0269	38,9876	-11,45
10,6	33,6974	30,6417	-9,07
10,4	24,6138	23,1103	-6,11
10,2	16,9470	16,6027	-2,03
10,0	10,7293	11,2013	4,40
9,8	5,8935	6,8943	16,98
9,6	2,3067	3,6050	56,28
9,4	-0,2018	1,2159	-702,56
9,2	-1,8190	-0,4114	-77,38
9,0	-2,7310	-1,4211	-47,96

8,8	-3,1118	-1,9525	-37,26
8,6	-3,1153	-2,1317	-31,57
8,4	-2,8717	-2,0683	-27,98
8,2	-2,4860	-1,8525	-25,48
8,0	-2,0386	-1,5557	-23,69
7,8	-1,5880	-1,2312	-22,47
7,6	-1,1733	-0,9166	-21,88
7,4	-0,8178	-0,6361	-22,22
7,2	-0,5326	-0,4035	-24,24
7,0	-0,3195	-0,2244	-29,76
6,8	-0,1741	-0,0987	-43,33
6,6	-0,0882	-0,0223	-74,68
6,4	-0,0508	0,0113	-122,28
6,2	-0,0499	0,0106	-121,21
6,0	-0,0725	-0,0147	-79,71
5,8	-0,1049	-0,0530	-49,46
5,6	-0,1321	-0,0905	13,73
5,4	-0,1370	-0,1097	21,21
5,2	-0,1004	-0,0888	45,96
5,0	0,0000	0,0000	0,00

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Burdur’da doğan H. Volkan AÇAR, ilköğrenimini Uşak Atatürk İlkokulu, ortaöğrenimini Aydın Gazipaşa Ortaokulu, lise öğrenimini Aydın Lisesi’nde tamamlamıştır. 1999 yılında İTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümünden mezun olmuştur. Aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Mühendisliği Bölümünde yüksek lisans eğitimine başlamıştır.