XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

TABAKALI ELASTİK ORTAMLARIN DÖNEL SİMETRİK YÜKLEME ALTINDA STATİK ANALİZİ

Muhittin Turan, Volkan Kahya, Gökhan Adıyaman, Ahmet Birinci
Karadeniz Teknik Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61080, Trabzon

ABSTRACT

In this study, static analysis for elastic layered media under axisymmetric loading are investigated by the stiffness matrix method. Displacements and stresses occurring in the layer are obtained and compared with elasticity and finite element solutions

Keywords: Multilayered elastic media, Axisymmetric loading, Stiffness matrix method, Finite element method

ÖZET

Bu çalışmada, dönel simetrik yükleme altında tabakalı elastik ortamın statik analizi rijitlik matrisi metodu ile incelenmiştir. Tabakalarda meydana gelen yer değiştirme ve gerilmeler elde edilerek elastisite ve sonlu eleman çözümleriyle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tabakalı elastik ortam, Dönel simetrik yükleme, Rijitlik matrisi metodu, Sonlu elemanlar metodu

1. GİRİŞ

Tabakalı ortamlar jeofizik, sismoloji, makine ve inşaat mühendisliği gibi birçok alanlardaki çeşitli uygulamalarından dolayı ilgi çeken bir araştırma konusudur. İnşaat mühendisliğinde tabakalı ortam problemleriyle karayolu, demiryolu ve havaalanı yapılarında karşılaşılmaktadır.Literatürü incelediğimizde birçok çalışma karşımıza çıkmaktadır.

Burmister (1945), iki tabakalı sistemlerin yayılı yük altında yer değiştirme ve gerilmelerini elde eden bir teori geliştirmiştir. Bu çalışmasında, temel gerilme denklemlerini tabakaların elastisite modüllerine ve Poisson oranlarına bağlı olarak türetmiştir. Acum ve Fox (1951), Burmister'in çalışmasına ilave olarak üç tabakalı ortamın gerilmelerini elde etmişlerdir. Gerrard (1967), iki tabakalı sistemin çizgisel yük altında statik analizini tabakaların izotrop olmaması durumu için yapmıştır.

Small ve Booker (1984), tabakalı elastik malzemelerin şerit yüklemeler altında sonlu tabaka analizini incelemişlerdir. Sonlu tabaka yaklaşımında Fourier ve Hankel dönüşümlerinin kullanılabileceğinden bahsetmişler ve sıkıştırılamayan malzemelere uygulandığında geleneksel sonlu tabaka analizinin geçerli olmadığını vurgulamışlardır. Bu çalışmada sonlu tabaka esneklik matrisini tanımlayarak sıkıştırılamayan malzemeler için de çözümler elde etmişlerdir. Small ve Booker (1986), bir başka çalışmalarında, önceki çalışmalarının devamı olacak nitelikte, dairesel ve dikdörtgen yüklemeler altında izotrop olmayan tabakalı malzemelerin çözümünü yapmışlardır. Dairesel yüklemelerde Hankel dönüşümünü, dikdörtgen yüklemelerde ise çift katlı Fourier dönüşümünü kullanmışlardır. Choi ve Thangjitham (1991), izotrop olmayan tabakalı elastik ortamların gerilme analizini rijitlik matrisi metodu ile yapmışlardır. Problemin çözümünde Fourier dönüşüm tekniklerini kullanmışlardır. Pindera ve Lane (1993), elastik yarı düzleme oturan sürtünmesiz tabakalı sistemin analizini rijitlik matrisi yöntemini kullanarak yapmışlardır. Yer değiştirme ve gerilmeleri, tabakaların ve yarı düzlemin monoklinik, ortotropik ve izotropik olması durumu için elde etmişlerdir. Wang ve Ishikawa (2001), dönel statik yüke maruz tabakalı ortamın lineer elasto-statik analizi için bir metot önermişlerdir. Dönel denge denklemleri, Hankel dönüşümleri, matris analizi uygun sıra ile kullanılmış ve gerilme, yer değiştirmeler elde edilmiştir.

Bu çalışmada, rijitlik matrisi metodu kullanılarak tabakalı elastik ortamların dönel statik yükleme altında analizi yapılmıştır. Sonuçlar, problemin sonlu eleman ve elastisite çözümünden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonlu eleman modellemesi ANSYS paket programında yapılmıştır.

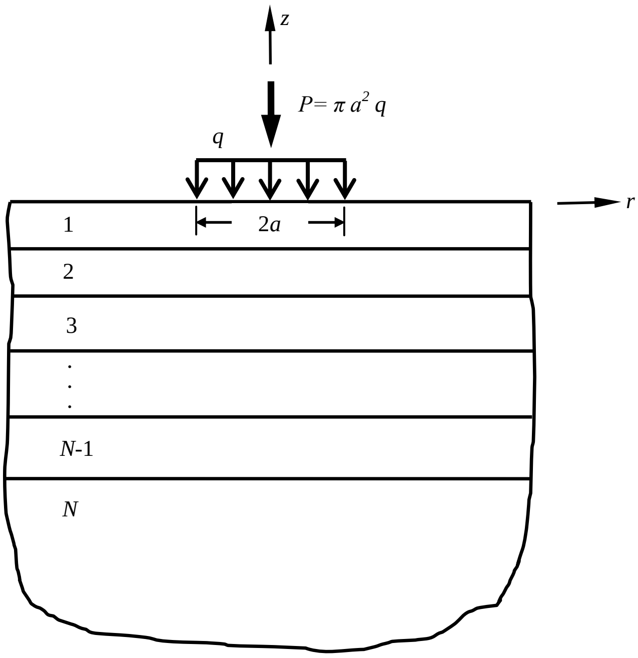
2. GENEL DENKLEMLER

Şekil 1' de görüldüğü gibi model, dairesel q yayılı yükü altında yatayda sonsuza uzanan homojen izotrop *N-1* tane tabakadan ve elastik yarı düzlemden meydana gelmektedir. Problem, silindirik koordinatlar da (r, θ, z) incelenecektir. Silindirik koordinatlarda σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz} gerilme bileşenlerini (bkz. Şekil 2) göstermek üzere, elastik bir ortam için denge denklemleri

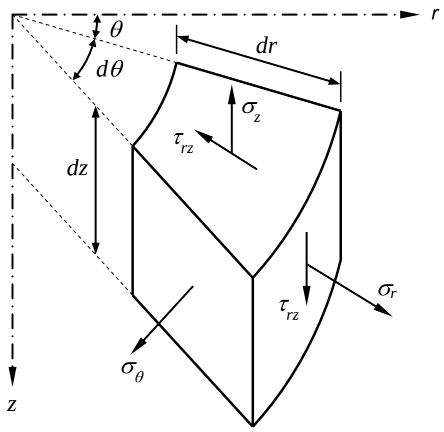
$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \tag{1b}$$

şeklindedir. Yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları,



Şekil 1. Üniform dairesel yüke maruz tabakalı elastik ortam



Şekil 2. Silindirik koordinatlarda gerilme bileşenleri

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0 \tag{2}$$

şeklinde olup $u_r = u_r(r,z)$ ve $u_z = u_z(r,z)$ sırasıyla r, z eksenleri doğrultusundaki yer değiştirme bileşenlerini göstermektedir. Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları ise matris formda,

$$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} \tag{3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede, $\{\sigma\} = \{\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{rz} \quad \tau_{r\theta}\}^T$ gerilme vektörünü, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{rz} \quad \gamma_{r\theta}\}^T$ ise şekil değiştirme vektörünü göstermektedir.

(3) ifadesi açık şekilde yazılacak olursa,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\lambda = E\nu/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ ve $\mu = E/[2(1+\nu)]$ Lamé elastik sabitlerini, E ve ν sırasıyla Elastisite modülünü ve Poisson oranını ifade etmektedir.

(4) ifadesinde, (2) ifadesindeki yer değiştirme- şekil değiştirme bağıntıları yerine yazılırsa,

$$\sigma_r = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \lambda\Delta + 2\mu\frac{u_r}{r}, \quad \sigma_z = \lambda\Delta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0 \tag{5}$$

elde edilir. Burada, $\Delta = (\partial u_r/\partial r) + (u_r/r) + (\partial u_z/\partial z)$ şeklindedir.

(5) ifadesi (1) denge denklemlerinde yerine yazılırsa

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right) = 0 \tag{6a}$$

$$(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = 0 \tag{6b}$$

yer değiştirme cinsinden Navier eşitlikleri (6)' daki gibi elde edilir. Bu eşitlikler dönel simetrik yükleme altında tabakalı elastik ortamın statik problemini ifade etmektedir. (6) eşitliklerinin çözümü için integral dönüşüm teknikleri kullanılacaktır.

2.1. Çözüm Metodu

(6) denklemlerinin çözümü için kullanılacak ν. dereceden Hankel dönüşüm çifti

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(sr) r\,dr \tag{7a}$$

$$f(r) = \int_0^\infty \overline{f}(s) J_\nu(sr) s\,ds \tag{7b}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada, r yatay koordinat, J_ν ν. dereceden Bessel fonksiyonudur. (6a)' ya birinci, (6b)' ye sıfırıncı dereceden Hankel dönüşümü uygulanırsa

$$(\lambda+2\mu)\left(-s^2\bar{u}_r - s\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2\bar{u}_r}{\partial z^2}+s\frac{\partial\bar{u}_z}{\partial z}\right)=0 \tag{11a}$$

$$(\lambda+2\mu)\left(s\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial z}+\frac{\partial^2\bar{u}_z}{\partial z^2}\right)+\mu\left(-s^2\bar{u}_z - s\frac{\partial\bar{u}_r}{\partial z}\right)=0 \tag{11b}$$

elde edilir ve bu eşitlikler matris formda yazılacak olursa

$$\begin{bmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda+2\mu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial^2\bar{u}_r/\partial z^2\\ \partial^2\bar{u}_z/\partial z^2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -s(\lambda+\mu)\\ s(\lambda+\mu) & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\partial\bar{u}_r/\partial z\\ \partial\bar{u}_z/\partial z\end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}-s^2(\lambda+2\mu) & 0\\ 0 & -s^2\mu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_r\\ \bar{u}_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{12}$$

ifadesi elde edilir. (11) veya (12) denklemleri 2. dereceden adi diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemlerin çözümü için $\bar{u}_r(s,z)$ ve $\bar{u}_z(s,z)$

$$\bar{u}_r(s,z)=u_{r0}e^{\kappa sz}, \quad \bar{u}_z(s,z)=u_{z0}e^{\kappa sz} \tag{13}$$

şeklinde alınır. (13) ifadeleri (12)' de yerine yazılarak

$$\begin{bmatrix}\lambda+\mu(2-\kappa^2) & (\lambda+\mu)\kappa\\ (\lambda+\mu)\kappa & -\mu+(\lambda+2\mu)\kappa^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_{r0}\\ \bar{u}_{z0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{14}$$

elde edilir. (14) lineer cebrik denklem sisteminin çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre

$$\kappa^4-2\kappa^2+1=0 \tag{16}$$

karakteristik denklemi elde edilir. (16) denkleminin 4 kökü vardır ve bunlar sırasıyla, $\kappa_1=\kappa_2=1$, $\kappa_3=\kappa_4=-1$ şeklindedir. Bundan dolayı, $\bar{u}_r(s,z)$ ve $\bar{u}_z(s,z)$' nin denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\bar{u}_r(s,z)=(A_1+A_2z)e^{sz}+(B_1+B_2z)e^{-sz} \tag{17}$$

$$\bar{u}_z(s,z)=(C_1+C_2z)e^{sz}+(D_1+D_2z)e^{-sz} \tag{18}$$

Burada, A_i, B_i, C_i ve D_i (i = 1,2) problemin sınır şartlarından elde edilebilen bilinmeyen katsayılardır. (17) ve (18) ifadeleri hiperbolik sinüs ve cosinüs fonksiyonları $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$, $\sinh x=(e^x-e^{-x})/2$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{u}_r(s,z) = (A_1 + A_2 z)\cosh sz + (B_1 + B_2 z)\sinh sz \tag{19}$$
$$\bar{u}_z(s,z) = (C_1 + C_2 z)\cosh sz + (D_1 + D_2 z)\sinh sz \tag{20}$$

(19) ve (20) denklemleri (11a)' da yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa yer değiştirmeler dönüşüm alanında

$$\bar{u}_r(s,z) = (A_1 + A_2 z)\cosh sz + (B_1 + B_2 z)\sinh sz \tag{23}$$
$$\bar{u}_z(s,z) = (-B_1 + \frac{R}{s}A_2 - B_2 z)\cosh sz + (-A_1 + \frac{R}{s}B_2 - A_2 z)\sinh sz \tag{24}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $R = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$ şeklinde tanımlıdır. (5a-c) gerilme bileşenlerine 0. dereceden Hankel dönüşümü, (5d-f)' ye ise 1. dereceden Hankel dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{gathered}
\bar{\sigma}_r(s,z) = (\lambda + 2\mu)s\bar{u}_r + \lambda\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}, \quad \bar{\sigma}_\theta(s,z) = \lambda\left(s\bar{u}_r + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}\right) \\
\bar{\sigma}_z(s,z) = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} + \lambda s\bar{u}_r, \quad \bar{\tau}_{rz}(s,z) = \mu\left(\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial z} - s\bar{u}_z\right) \\
\bar{\tau}_{r\theta}(s,z) = \bar{\tau}_{\theta z}(s,z) = 0
\end{gathered} \tag{25}$$

elde edilir. (23) ve (24) ifadesi (25c) ve (25d) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_z(s,z) &= \left[-2\mu s(A_1 + A_2 z) + (\lambda + 2\mu)(R-1)B_2\right]\cosh sz \\
&\quad + \left[-2\mu s(B_1 + B_2 z) + (\lambda + 2\mu)(R-1)A_2\right]\sinh sz
\end{aligned} \tag{26}$$
$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{rz}(s,z) &= \mu\left[2s(B_1 + B_2 z) - (R-1)A_2\right]\cosh sz \\
&\quad + \mu\left[2s(A_1 + A_2 z) - (R-1)B_2\right]\sinh sz
\end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde *k*. tabakanın gerilme bileşenleri elde edilir. Burada yalnızca $\bar{\sigma}_z(s,z)$ ve $\bar{\tau}_{rz}(s,z)$ ifadeleri elde edilmiştir. Çünkü, rijitlik matrisi metodunda bunlar kullanılmaktadır (Şekil 3).

Problemde, tabakaların en alt kısmına elastik yarım düzlem tanımlanmıştır. Elastik yarım düzlemde sınır şartları

$$\bar{u}_r(s,+\infty) \to 0, \quad \bar{u}_z(s,+\infty) \to 0 \tag{28}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu şartlar göz önüne alındığında (17) ve (18) ifadesindeki e^{sz} teriminin katsayısı sıfır olmalıdır. Buna göre elastik yarı düzlem için yer değiştirmeler

$$\bar{u}_r(s,z) = (A_1 + A_2 z)e^{-|s|z} \tag{29}$$
$$\bar{u}_z(s,z) = (C_1 + C_2 z)e^{-|s|z} \tag{30}$$

şeklinde yazılabilir. (29) ve (30) ifadeleri (11a)' da yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa elastik yarım düzlem için yer değiştirmeler

$$\bar{u}_r(s,z) = (A_1 + A_2 z)e^{-|s|z} \tag{33}$$

$$\bar{u}_z(s,z) = \mathrm{sgn}(s)\left(-A_1 + \frac{R}{|s|}A_2 - A_2 z\right)e^{-|s|z} \tag{34}$$

şeklinde elde edilir. (33) ve (34) ifadeleri (25)' de verilen gerilme ifadelerinde yerine yazılırsa elastik yarım düzlemde gerilmeler

$$\bar{\sigma}_z(s,z) = s\left[-2\mu(A_1 + A_2 z) + (\lambda + 2\mu)\frac{(R-1)}{|s|}A_2\right]e^{-|s|z} \tag{35}$$

$$\bar{\tau}_{rz}(s,z) = \mu|s|\left[2A_1 - \left(\frac{R-1}{|s|} + 2z\right)A_2\right]e^{-|s|z} \tag{36}$$

şeklinde elde edilir. (23), (24), (26), (27) ve (33-36) ifadelerinde dönüşüm alanında elastik tabaka ve yarım düzlemin yer değiştirme ve gerilmeleri verilmiştir.

2.2. Rijitlik Matrisi Metodu

Tabakanın alt ve üst yüzeyindeki gerilme ve yer değiştirme bileşenleri Şekil 3' de verildiği gibidir. Yerel koordinat sistemi *k*. tabakanın ortasına yerleştirilmiştir. (+) işaretli ifadeler $z_k = +h_k/2$, (–) işaretli ifadeler ise $z_k = -h_k/2$ için geçerlidir. Tabakalı ortamın *k*. tabakasının yer değiştirme, gerilme ve bilinmeyen katsayılar için

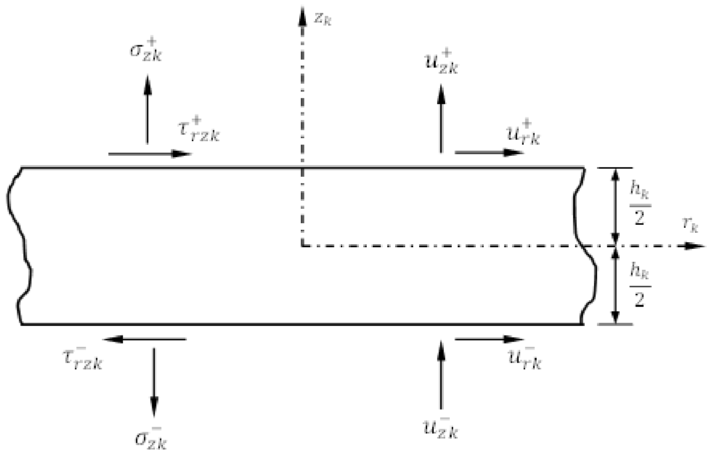
$$\bar{\mathbf{d}}_k = \left\{\bar{u}_r^k \quad \bar{u}_z^k\right\}^T, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k = \left\{\bar{\sigma}_r^k \quad \bar{\sigma}_z^k\right\}^T, \quad \mathbf{a}_k = \left\{A_1^k \quad A_2^k\right\}^T, \quad \mathbf{b}_k = \left\{B_1^k \quad B_2^k\right\}^T \tag{37}$$

şeklindedir. Burada $\bar{\mathbf{d}}_k(s,z)$ ve $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k(s,z)$ sırasıyla dönüşüm halinde yer değiştirme ve gerilme vektörünü ifade etmektedir. $\mathbf{a}_k(s)$ ve $\mathbf{b}_k(s)$ ise bilinmeyen katsayıları içeren vektörlerdir.

k. tabaka için dönüşüm halindeki yer değiştirmeler ve gerilmeler $\mathbf{a}_k$ ve $\mathbf{b}_k$ matrisleri cinsinden

$$\left\{\begin{array}{c}\bar{\mathbf{d}}_k^+ \\ \hline \bar{\mathbf{d}}_k^-\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{F}_{11}^k & \mathbf{F}_{12}^k \\ \hline \mathbf{F}_{21}^k & \mathbf{F}_{22}^k\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{a}_k \\ \hline \mathbf{b}_k\end{array}\right\} \tag{38}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^+ \\ \hline -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^-\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{G}_{11}^k & \mathbf{G}_{12}^k \\ \hline \mathbf{G}_{21}^k & \mathbf{G}_{22}^k\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{a}_k \\ \hline \mathbf{b}_k\end{array}\right\} \tag{39}$$



Şekil 3. Tabakanın alt ve üst yüzeyinde gerilme bileşenleri

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\mathbf{F}_{ij}^k(s)$ ve $\mathbf{G}_{ij}^k(s)$, $i = j = 1,2$ olmak üzere 2 × 2' lik alt matristir.

(38) ve (39) eşitliklerindeki $\mathbf{a}_k$ ve $\mathbf{b}_k$ vektörleri yok edilirse, *k*. tabakanın yüzeylerindeki yer değiştirme ve gerilmeler

$$\begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^+ \\ -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^k & \mathbf{K}_{12}^k \\ \mathbf{K}_{21}^k & \mathbf{K}_{22}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_k^+ \\ \bar{\mathbf{d}}_k^- \end{Bmatrix} \tag{40}$$

şeklinde elde edilir. Burada, $\mathbf{K}_{ij}^k(s)$, $i = j = 1,2$ olmak üzere 2 × 2' lik alt matristir ve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^k & \mathbf{K}_{12}^k \\ \mathbf{K}_{21}^k & \mathbf{K}_{22}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^k & \mathbf{G}_{12}^k \\ \mathbf{G}_{21}^k & \mathbf{G}_{22}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}^k & \mathbf{F}_{12}^k \\ \mathbf{F}_{21}^k & \mathbf{F}_{22}^k \end{bmatrix}^{-1} \tag{41}$$

şeklindedir. Burada, sol taraftaki ifade *k*. tabakanın 4 × 4' lük simetrik yerel rijitlik matrisidir. *N* tabakalı sonsuz şeritten meydana gelen elastik ortamda tabakalar arasındaki süreklilik şartları ve sınır şartları

$$\begin{gathered} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1^+ = \bar{\mathbf{p}}^+ \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_k^- = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{k+1}^+, \; \bar{\mathbf{d}}_k^- = \bar{\mathbf{d}}_{k+1}^+, \quad k = 1,2,\ldots,N-1 \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_N^- = \bar{\mathbf{p}}^- \end{gathered} \tag{42}$$

şeklindedir. Burada, $\mathbf{p}^{\pm}(s)$, (+) üst yüzey, (–) alt yüzey olmak üzere uygulanan gerilmenin Hankel dönüşümünü ifade etmektedir. (42) eşitliklerinde verilen $\bar{\boldsymbol{\delta}}_1 = \bar{\mathbf{d}}_1^+$ ve $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{N+1} = \bar{\mathbf{d}}_N^-$ sırasıyla ortamın üst ve alt yüzeyindeki yer değiştirmelerdir. $\bar{\boldsymbol{\delta}}_{k+1} = \bar{\mathbf{d}}_k^- = \bar{\mathbf{d}}_{k+1}^+$,

$k = 1, 2, 3, \ldots, N-1$, ise ara yüzeydeki *k*. ve (*k* + 1). tabakaların yer değiştirmelerini ifade etmektedir. (42) yardımıyla *N* tabakalı sistem için

$$
\begin{gathered}
\mathbf{K}_{11}^{1}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{1} + \mathbf{K}_{12}^{1}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{2} = \overline{\mathbf{p}}^{+} \\
\mathbf{K}_{21}^{k}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{k} + (\mathbf{K}_{22}^{k} + \mathbf{K}_{11}^{k+1})\overline{\boldsymbol{\delta}}_{k+1} + \mathbf{K}_{12}^{k+1}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{k+2} = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1 \\
\mathbf{K}_{21}^{N}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{N} + \mathbf{K}_{22}^{N}\overline{\boldsymbol{\delta}}_{N+1} = \overline{\mathbf{p}}^{-}
\end{gathered}
\tag{43}
$$

yazılır. Bu eşitlikler matris formda

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{K}_{11}^{1} & \mathbf{K}_{12}^{1} & 0 & \cdot & \cdot \\
\mathbf{K}_{21}^{1} & \mathbf{K}_{22}^{1} + \mathbf{K}_{11}^{2} & \mathbf{K}_{12}^{2} & \cdot & \cdot \\
0 & \mathbf{K}_{21}^{2} & \mathbf{K}_{22}^{2} + \mathbf{K}_{11}^{3} & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \mathbf{K}_{21}^{3} & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \mathbf{K}_{22}^{N}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\overline{\boldsymbol{\delta}}_{1} \\ \overline{\boldsymbol{\delta}}_{2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\boldsymbol{\delta}}_{N+1}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\overline{\mathbf{p}}_{1}^{+} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \overline{\mathbf{p}}_{N}^{-}
\end{Bmatrix}
\tag{44}
$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadeyi kısaca yazacak olursak

$$
\mathbf{K}\,\overline{\boldsymbol{\delta}} = \overline{\mathbf{f}}
\tag{45}
$$

şeklindedir. Genel rijitlik matrisi $\mathbf{K}(s)$ yerel rijitlik matrislerinden meydana gelir ve boyutu $2(N+1) \times 2(N+1)$ şeklinde, genel yer değiştirme $\overline{\boldsymbol{\delta}}(s)$ ve kuvvet vektörünün $\overline{\mathbf{f}}(s)$ boyutu ise $2(N+1) \times 1$ şeklindedir.

Elastik yarım düzlemin alt kısmında ise $z \to -\infty$ olduğundan $\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{N}^{-} \to 0$ ve $\overline{\mathbf{d}}_{N}^{-} \to 0$ olmaktadır. Elastik yarı düzlemin üst yüzeyinde

$$
\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{N}^{+} = \mathbf{K}_{11}^{*N}\overline{\mathbf{d}}_{N}^{+}
\tag{46}
$$

şeklinde olacaktır. (46) eşitliğindeki $\mathbf{K}_{11}^{*N}$ elastik yarım düzlem için yerel rijitlik matrisi 2 × 2' lik olduğundan genel rijitlik matrisimiz 2*N* × 2*N* olmaktadır. (44) ifadesinde $\overline{\boldsymbol{\delta}}_{N}$ ve $\overline{\mathbf{p}}_{N}^{-}$ sıfırdır.

3. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, elastik yarım düzlem üzerine oturan homojen elastik tabakanın dönel simetrik yükleme altında statik analizi ile ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. Öncelikle problemi incelerken tabaka içerisindeki gerilme ve yer değiştirme dağılışlarını görebilmek için homojen tabakayı elastik alt tabakalara bölmemiz gerekmektedir. İşlemler yapılırken yer değiştirme ve gerilme dağılımının daha iyi görülebilmesi için alt tabaka sayısı *N* = 20 olarak alınmıştır.

Tablo 1 ve 2' de farklı yüklemeler altında rijitlik matrisi metodu, elastisite ve sonlu elemanlar metodu için düşey gerilme ve yer değiştirme değerleri verilmiştir. Tablolar incelendiğinde sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Şekil 4ve 5' de yayılı yükün yarıçapının değişimi ile boyutsuz düşey gerilme ve yer değiştirmenin değişimi verilmiştir. Şekil 4 incelendiğinde, yayılı yükün yarıçapı arttığında tabakanın alt kısmında gerilmelerin daha yavaş azaldığı görülmektedir. Tekil yük *a/h*=0,01 olduğunda gerilmeler hızla sıfıra gitmektedir. Yani yükün yarıçapı arttıkça tabaka üzerinde gerilmenin etkilediği alan artmaktadır. Şekil 5 incelendiğinde tekil yük ve tekil yüke yakın yüklemelerde tabakanın yüzeyine yakın yerde büyük yer değiştirmeler oluşmaktadır. Tabakanın alt kısmına doğru inildikçe yer değiştirme azalmakta ve sıfıra doğru gitmektedir. *a/h*=0,50, *a/h*=1,00 ve *a/h*=2,00 yüklemeleri için yer değiştirme değerleri oldukça küçük olduğu için grafik üzerinde üst üste düşüyormuş gibi görünmektedir. Ancak dikkatli incelenecek olursa yayılı yükün yarıçapının artmasıyla yer değiştirmelerin azaldığı görülmektedir.

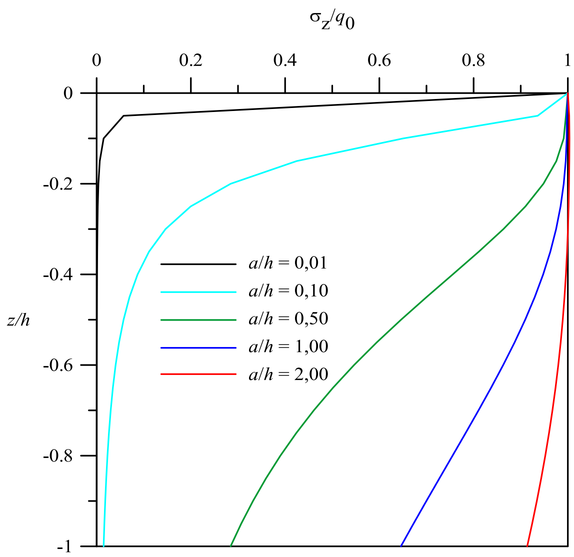
Şekil 6' da *a/h*=0,50 yüklemesi için yatay koordinata bağlı olarak σ_z / q_0 ve τ_{rz} / q_0 dağılımları verilmiştir. Burada da her iki metodun sonuçlarının üst üste düştüğü görülmektedir.

Tablo 1. Düşey gerilme σ_z / q_0 değerlerinin üç metod için karşılaştırması

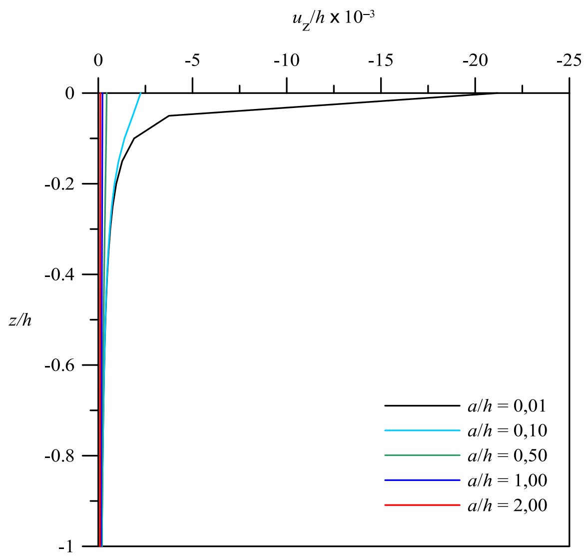
z/h	a/h = 0,01			a/h = 1.00			a/h = 2.00		
	Rijitlik Matrisi Metodu	Elastisite	SEM	Rijitlik Matrisi Metodu	Elastisite	SEM	Rijitlik Matrisi Metodu	Elastisite	SEM
0,0	1,000000	1,00000002	1,000269	1,000016	1,0000168	1,000000	1,000037	1,0009048	1,000000
-0,2	0.003738	0,00373839	0,004006	0,991263	0,9912658	0,992868	1,002526	1,0025353	0,999082
-0,4	0,000936	0,00093684	0,000945	0,947638	0,9476780	0,949453	0,995943	0,9959643	0,992586
-0,6	0,000416	0,00041657	0,000419	0,862775	0,8628380	0,864507	0,979703	0,9797308	0,976476
-0,8	0,000234	0,00023436	0,000235	0,755310	0,7553826	0,756817	0,952106	0,9521416	0,949032
-1,0	0,000150	0,00015000	0,000145	0,645671	0,6457408	0,647021	0,913754	0,9137981	0,910919

Tablo 2. Düşey yer değiştirme $(u_z / h)\times10^{-3}$ değerlerinin üç metod için karşılaştırması

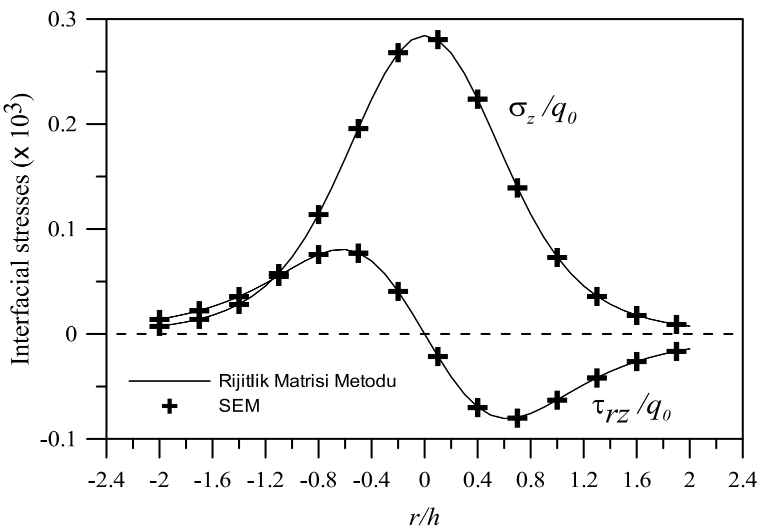
z/h	a/h = 0.01			a/h = 1.00			a/h = 2.00		
	Rijitlik Matrisi Metodu	Elastisite	SEM	Rijitlik Matrisi Metodu	Elastisite	SEM	Rijitlik Matrisi Metodu	Elastisite	SEM
0,0	-21,1933	-22,2832	-21,4000	-0,2223	-0,2255	-0,2254	-0,1109	-0,1087	-0,1041
-0,2	-0,9533	-0,9542	-0,9818	-0,2077	-0,2081	-0,2068	-0,1074	-0,1078	-0,0996
-0,4	-0,4768	-0,4773	-0,4710	-0,1903	-0,1907	-0,1906	-0,1036	-0,1040	-0,0967
-0,6	-0,3177	-0,3182	-0,3107	-0,1720	-0,1724	-0,1749	-0,0994	-0,0998	-0,0924
-0,8	-0,2382	-0,2386	-0,2310	-0,1543	-0,1547	-0,1572	-0,0949	-0,0953	-0,0914
-1,0	-0,1904	-0,1908	-0,1933	-0,1384	-0,1388	-0,1312	-0,0903	-0,0907	-0,0893



Şekil 4. Farklı yayılı yüklemeler için σ_z / q_0 dağılımı



Şekil 5. Farklı yayılı yüklemeler için u_z / h dağılımı



Şekil 6. $a/h = 0,50$ yüklemesi için r/h' a bağlı olarak σ_z / q_0 ve τ_{rz} / q_0 dağılımı

Özetle, tabakalı elastik ortamların dönel simetrik yükleme altında statik analizi rijitlik matrisi metodu, elastisite çözümü ve sonlu elemanlar metodu ile yapılmıştır. Sonuçlar incelendiğinde rijitlik matrisi metodu sonuçlarının oldukça etkili ve doğru olduğu görülmüştür. Ayrıca bu metodun klasik elastisite çözümüne göre işlem hacmi oldukça azdır. Bundan dolayı bu tür problemlerin çözümünde öncelikli olarak tercih edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Acum, W.E.A. ve Fox, L., 1951. Computation of Load Stresses in a Three-Layer Elastic System, Geotechnique, 2, 293-300.

[2] Burmister, D.M., 1945. The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems, Journal of Applied Physics, 16, 89.

[3] Choi, H.J. ve Thangjitham, S., 1991. Stress Analysis of Multilayered Anisotropic Elastic Media, Journal of Applied Mechanics, 58, 382-387.

[4] Gerrard, C.M., Stresses and Displacements in Layered Cross-Anisotropic Elastic Systems, Proc. 5th Aust.-NZ Conf. Soil Mech. Found., Eng. 1967, 205.

[5] Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 9 th Edition, Wiley International Edition, Singapore, 2006.

[6] Sneddon, I. N., The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

[7] Small, J.C. ve Booker, J.R., 1984. Finite Layer Analysis of Layered Elastic Materials Using a Flexibility Approach. Part 1-Strip Loadings, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20, 1025-1037.

[8] Small, J.C. ve Booker, J.R., 1986. Finite Layer Analysis of Layered Elastic Materials Using a Flexibility Approach. Part 2-Circular and Rectangular Loadings, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, 959-978.

[9] Timoshenko, S. ve Goodier, J. N., Theory of Elasticity, Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.

[10] Pindera, M.-J. ve Lane, M.S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part I: Analysis, Journal of Applied Mechanics, 60, 633-639.

[11] Pindera, M.-J. ve Lane, M.S., 1993. Frictionless Contact of Layered Half-Planes, Part II: Numerical Results, Journal of Applied Mechanics, 60, 640-645.

[12] Wang, W. ve Ishikawa, H., 2001. A Method for Linear Elasto-Static Analysis of Multi-Layered Axisymmetrical Bodies Using Hankel's Transform, Computational Mechanics, 27, 474-483.

[13] MATLAB, Version 6, The Math Works, Inc., Natick, 2000.

[14] ANSYS, Swanson Analysis System, USA. 2013.