55988

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ALTINCI MERTEBE CASIMIR İNVARYANTLARININ AÇIK KURULUŞU VE EŞDEĞERLİK SINIFLARININ VARLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fiz. Müh. Sevim KURTAY

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Ocak 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 2 Şubat 1996

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan R. KARADAYI

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

Doç. Dr. Selami SALİHOĞLU

ŞUBAT 1996

ÖNSÖZ

Bu çalışmada altıncı mertebe Casimir invaryantlarının açık kuruluşu, eşdeğerlik sınıfları olarak adlandırılan özel gruplandırmalardan yola çıkarak geliştirilen bir yöntemle ele alındı. Bu yöntem kullanılarak altıncı mertebe Casimir invaryantlarının açık kuruluşu A_5 ve A_6 cebirleri için elde edildi.

Bu tezin gerçekleşmesinde büyük yardım ve ilgisini gördüğüm Sayın Hocam Prof. Dr. Hasan R. KARADAYI'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada altıncı mertebe Casimir invayyantlarının açık kuruluşu A_5 ve A_6 cebirleri için ele alındı. Altıncı mertebe için Casimir katsayılarının değerleri en genel olarak hesaplandığında aynı değere sahip olan katsayıların varlığı gözlendi. Aynı değere sahip olan bu katsayıların oluşturduğu cümleler eşdeğerlik sınıfları olarak adlandırıldı. Bu özel gruplandırmalardan yola çıkarak altıncı mertebe Casimir invaryantlarını kurmak için bir yöntem geliştirildi.

Eşdeğerlik sınıflarının varlığı bizi, bu sınıfların hangi ölçütlere göre ayırtedilmesi gerektiği problemi ile karşı karşıya getirdi. Bu sınıfları birbirinden ayırtetmek için katsayılar üzerinde etkili dört gösterge tanımlandı. Sözkonusu göstergeler eşdeğerlik sınıflarını tamamen belirlememizi sağladı. Casimir katsayıları arasında var olan eşdeğerlik sınıflarını belirledikten sonra aynı sınıfa ait olan katsayılara aynı sayısal değer verildi. Bunun sonucunda altıncı mertebe Casimir invayyantlarının katsayıları sayısal olarak büyük ölçüde azaldı. A_5 cebiri için 12300 katsayı 661, A_6 cebiri için ise 37184 katsayı 1301 katsayı ile ifade edildi. İndirgenmiş katsayılarının dört parametreye bağlı olarak çözülmesi ile altıncı mertebe casimir invayyantlarının açık kuruluşu elde edildi.

Bu çalışmada geliştirdiğimiz yöntem sayesinde teknik ve zaman açısından neredeyse imkansız gibi gözüken A_N cebirlerinin altıncı mertebe Casimir invaryantlarını kurma imkanına erişildi.

EXPLICIT CONSTRUCTION OF SIXTH ORDER CASIMIRS AND THE EXISTENCE OF EQUIVALENCE CLASSES

SUMMARY

The Casimir operators are elements which are commutative with all their generators of an algebra.With this definition a Casimir operator is determined as the multiple products of an algebra.For this reason all Casimir operators of an algebra form a basis Universal Enveloping Algebra which is connected with this algebra.

At this work sixth order general construction for A_5 and A_6 Lie algebras are formed with a special method below

Let T_A, $A = 1, 2, \ldots N(N+1)/2$ be the generators of a Lie algebras of dimension N defined by

$$[T_A, T_B] = F_{AB}{}^{C}\ T_C$$

where the $F_{AB}{}^{C}$ are structure constants. The structure constants are completely antisymmetric as in below,

$$F_{AB}{}^{C} = -F_{BA}{}^{C}$$

The determining structure constants help us to match with metric tensor g_{AB}

$$g_{AB} \equiv F_{AC}{}^{D} F_{BD}{}^{C}$$

T_A generators will be assumed:

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha_i} &\equiv T_i \\
f_{\alpha_i} &\equiv T_{i+N(N+1)/2} \\
h_i &\equiv [e_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}] = T_{i+N(N+1)}
\end{aligned}
$$

and we choice a convenient basis as in below,

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha_i} &= e_{i,i+1} \\
f_{\alpha_i} &= e_{i+1,i} \\
h_i &= e_{i,i} - e_{i+1,i+1}
\end{aligned}
$$

A sixth order Casimir invariant can be defined as

$$
I[6] \equiv g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} \ \{T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6}\}
$$

$g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ coefficients of Casimir invariants are completely symmetric. And here by using

$[I[6], T_A] = 0$ relation we will have the equation

$$
F_{AB}{}^{\{C_1} \ g^{C_2C_3C_4C_5C_6\}B} = 0
$$

For to determine the coefficient of sixth order Casimir invariant, the solved equations above have formed the starting point.

This gives a general solution of the Casimir operators which are solved in terms of a number of free parameters.

In the solution of p.order Casimir invariants for A_N Lie algebras, all partitions number formed by p's positive integers except 1, will give us the number of linearly independent elements.

When we examine the general solutions of sixth order Casimir invariants it was seen that some of the coefficients have the same value.It is called as equivalence classes. We developed a method of solving for sixth order.

We defined a covenient criteria for the coefficients which have same values for equivalence classes.

For this reason we defined four indicators IND1,IND11,IND2,IND3 act on coefficients $g^{A_1A_2\ldots A_p}$.

IND1, IND2, IND3 are in order as

$$IND1[g^{A_1A_2\dots A_qA_{q+1}\dots A_p}] \equiv \Gamma[\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_2}],$$
$$\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_3}],$$
$$\dots$$
$$\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_q}],$$
$$\kappa_1[e_{A_2}, e_{A_3}],$$
$$\dots$$
$$\kappa_1[e_{A_{q-1}}, e_{A_q}]]$$

$$IND2[i, g^{A_1A_2\dots A_qA_{q+1}\dots A_p}] \equiv \Gamma[\kappa_2[h_i, e_{A_1}],$$
$$\kappa_2[h_i, e_{A_2}],$$
$$\dots$$
$$\kappa_2[h_i, e_{A_q}]]$$

$$IND3[g^{A_1A_2\dots A_qA_{q+1}\dots A_p}] \equiv$$
$$[(\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots, h_{A_p}, e_{A_1}], \kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots, h_{A_p}, e_{A_2}]),$$
$$(\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots, h_{A_p}, e_{A_2}], \kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots, h_{A_p}, e_{A_3}]),$$
$$\dots$$
$$(\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots, h_{A_p}, e_{A_{q-1}}], \kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots, h_{A_p}, e_{A_q}])]$$

At here κ_1, κ_2, κ_3 are in order as

$$\kappa_1[e_{\alpha_A}, e_{\alpha_B}] \equiv (\alpha_A, \alpha_B)$$

and

$$\kappa_1[h_i, e_{\alpha_A}] \equiv (\lambda_i, \alpha_A)$$

$$\kappa_2[h_i, \mu_k - \mu_l] = -1 \ , \ i < k$$
$$\kappa_2[h_i, \mu_k - \mu_l] = 2 \ , \ k-1 < i. \ \ i < l$$
$$\kappa_2[h_i, \mu_k - \mu_l] = 1 \ , \ l-1 < i.$$

$$\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \dots h_{A_p}, e_{\alpha_A}] \equiv$$
$$(\lambda_{A_{q+1}}, \alpha_A)\alpha_A + (\lambda_{A_{q+2}}, \alpha_A)\alpha_A + \dots (\lambda_{A_p}, \alpha_A)\alpha_A$$

IND11 is defined as in the following

$$IND11[g^{A_1 A_2 \dots A_q}] \equiv \Phi[P[g^{A_1 A_2 \dots A_q}]]$$

and also

$$P[g^{A_1 A_2 \dots A_q}] \equiv g^{P[A_1]P[A_2]\dots P[A_q]}$$

The P operator is defined via relations

$$P[A_i] = i \quad , \quad i < N(N+1)/2 + 1$$
$$P[A_i] = i - N(N+1)/2 \quad , \quad i > N(N+1)/2$$

Λ is given by

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i1}} + \alpha_{A_{i2}} = \alpha_{A_{i3}}$$
$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i1}} + \alpha_{A_{i3}} = \alpha_{A_{i2}}$$
$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i2}} + \alpha_{A_{i3}} = \alpha_{A_{i1}}$$

and IND11 defined as in the following:

$$\begin{gathered}\Phi[P[g^{A_1 A_2 \dots A_q}]] \equiv \\ \Lambda[A_1, A_2, A_3]+ \\ \Lambda[A_1, A_2, A_4]+ \\ \Lambda[A_1, A_2, A_5]+ \\ \Lambda[A_1, A_2, A_6]+ \\ \dots \\ \Lambda[A_{q-2}, A_{q-1}, A_q]\end{gathered}$$

The Casimir invariants of sixth order have six types coefficients as

$$(i) \quad g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}$$
$$(ii) \quad g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 I_1}$$
$$(iii) \quad g^{A_1 A_2 A_3 A_4 I_1 I_2}$$
$$(iv) \quad g^{A_1 A_2 A_3 I_1 I_2 I_3}$$
$$(v) \quad g^{A_1 A_2 I_1 I_2 I_3 I_4}$$

$$(vi) \quad g^{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6}$$

The equivalence classes for types of coefficients identified with different indicators as in below,

$$(i)IND1, IND11, (ii)IND1, IND2, IND3$$
$$(iii)IND1, IND21, IND22, IND3$$
$$(iv)IND21, IND22, IND23, (v)IND21, IND22, IND23, IND24$$

Some values was given to coefficients which are in the same equivalence classes. By this all coefficients are reduced as a result sixth order Casimir invariants that seems to be technical impossible became possible to solve.

BÖLÜM 1. CASIMIR İNVARYANTLARININ GENEL KURULUŞU

A_N Lie cebirleri

$$[T_A, T_B] = F_{AB}{}^{C}\ T_C \quad , \quad A, B, C = 1, 2, \ldots (N^2 + 2N) \qquad (1.1)$$

komütasyon bağıntısı yardımıyla ifade edilir.

Burada T_A'lar , A_N cebirinin doğurayları , $F_{AB}{}^{C}$'ler yapısabitleridir. $F_{AB}{}^{C}$ yapısabitleri bütünüyle antisimetriktir.

A_N Lie cebiri, boyutu dim(A_N)=$N(N+2)$ olmak üzere $N(N+2)$ tane T_A doğurayından oluşur.

A_N Lie cebirine ait elemanlar Jordan ayırışımına göre $L = H + N$ şeklinde yazılabilir.Cebirin nilpotent kısmına tekabül eden N cümlesi $N = N_+ \oplus N_-$ olmak üzere

$$N_+ = \sum_{+\alpha} L_\alpha ,$$

ve

$$N_- = \sum_{-\alpha} L_\alpha \qquad (1.2)$$

şeklinde pozitif ve negatif iki kısıma ayırılır.

Burada cebirin birlikte köşegenleştirilebilen elemanları h_i olarak adlandırılır. Bu elemanlar cebirin Cartan alt cebirini oluşturur. Cartan alt cebirinin boyutuna rank denir.

Cebirin nilpotent elemanlarının pozitifleri e_α negatifleri ise f_α olarak adlandırılır.Bu elemanların cümlesi kök uzayını oluşturur. Bu uzayın herbir elemanına tekabül eden α ögeleri kök diye adlandırılır.

A_N Lie cebirine ait kök sistemi içinde cebirin rangı sayısında α_i basit kökü , diğer tüm kökler onun cinsinden yazılacak şekilde

$$\alpha = \sum_{i=1}^{Rank=N} n_i \alpha_i \ , \qquad n_i \in Z^+ \tag{1.3}$$

olmak üzere tanımlanır.

Burada α_A kökleri pozitif, negatif ve sıfır kökleri olarak üçe ayrılır. Pozitif kökler için

$$A = 1, \cdots, N(N+1)/2,$$

negatif kökler için

$$A = N(N+1)/2 + 1, \cdots, N(N+1)$$

ve sıfır kökleri için

$$A = N(N+1) + 1, \cdots, N(N+2)$$

şeklindedir.

T_A doğurayları aşağıdaki sıralamaya göre

$$\begin{aligned} e_{\alpha_i} &\equiv T_i \\ f_{\alpha_i} &\equiv T_{i+N(N+1)/2} \\ h_i &\equiv [e_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}] = T_{i+N(N+1)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanır.

T_A doğurayları Chevalley bazına [1,2,3] göre kurulursa,

$$e_{\alpha_i} = e_{i,i+1}$$

$$f_{\alpha_i} = e_{i+1,i} \tag{1.5}$$

$$h_i = e_{i,i} - e_{i+1,i+1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada matris elemanları e notasyonunda yazılmıştır.

Bu tanımlar altında

$$\begin{aligned} [e_{\alpha_i}, f_{\alpha_i}] &= \delta_{ij} \\ [h_i, e_{\alpha_i}] &= \quad C_{ij} e_{\alpha_j} \\ [h_i, f_{\alpha_i}] &= -C_{ij} f_{\alpha_j} \end{aligned} \tag{1.6}$$

olmak üzere komütasyon bağıntıları sağlanmalıdır.

Burada

$$[e_{ij}. e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{il} e_{kj} \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanır. C_{ij} ise Cartan matrisidir.

T_A doğuraylarını Chevalley bazına göre $\{e_{\alpha_i} \;, f_{\alpha_i}, \;\; h_i\}$ formunda kurulduktan sonra $F_{AB}{}^{C}$ yapı sabitleri bu baz seçimi altında hesaplanır. Bu baz seçimi, hesaplanan yapı sabitleri $F_{AB}{}^{C}$ 'lerin g_{AB} metrik tansörü ile mukayese edilmesine müsaade eder.

$g_{AB} \;\equiv\; F_{AC}{}^{D} F_{BD}{}^{C}$ olmak üzere g_{AB} metrik tansörü blok diagonal matris formunda olur.

$$g = diag[X, (2N+1)C] \tag{1.8}$$

Burada X , $N(N+1) \times N(N+1)$ boyutlu alt matristir.

Sıfırdan farklı elemanlar $X_{A,A+N(N+1)/2} = 1$ $A = 1, 2, \ldots N(N+1)/2$ değerini alır. C ise A_N Lie cebrinin Cartan matrisidir.

Casimir operatörleri bir cebirin tüm doğurayları ile komütatif olan elemanlarıdır [4].Bu tanım altında bir Casimir operatörü cebirin çoklu çarpımları ile ifade edilir.Bu nedenle bir cebirin tüm Casimir operatörleri bu cebirle ilgili olan evrensel örtme cebirinin bir bazını oluştururlar.

Bir p. mertebe casimir invaryantı

$$I[p] \equiv g^{A_1 A_2 \cdots A_p} \ \{T_{A_1} T_{A_2} .. T_{A_p}\} \tag{1.9}$$

şeklinde ifade edilebilir.Burada tekrarlanan indisler üzerinden toplam vardır. Casimir invaryantınının $g^{A_1 A_2 \cdots A_p}$ katsayıları tamamıyla simetriktir.

$I[p]$ operatörü , $[I[p], T_A] = 0$ bağıntısında yerine koyulursa

$$F_{AB}{}^{\{C_1} \ g^{C_2 \cdots C_{p-1}\}B} = 0 \tag{1.10}$$

deklemleri elde edilir.

Burada p=6 için (1.10) deklemleri açık olarak hesap edilmek istenirse ilk önce

$$I[6] \equiv g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6} \ \{T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6}\}$$

tanımlanır.

$[I[6], T_A] = 0$ bağıntısına göre

$$[\ g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6} \ \{T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6}\}, T_B] = 0$$

şeklinde yazılır.

Yukarıdaki ifadede $[T_A, T_B] = F_{AB}{}^C \ T_C$ bağıntısı kullanılırsa,

$$g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6} \{$$

$$F_{A_1 B}{}^C T_C T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} \ +$$

$$F_{A_2 B}{}^{C} T_{A_1} T_C T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} \; +$$

$$F_{A_3 B}{}^{C} T_{A_1} T_{A_2} T_C T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} \; +$$

$$F_{A_4 B}{}^{C} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_C T_{A_5} T_{A_6} \; +$$

$$F_{A_5 B}{}^{C} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_C T_{A_6} \; +$$

$$F_{A_6 B}{}^{C} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_C \; \} = 0$$

denklemleri elde edilir.

Yukarıdaki ifadede indisler uygun şekilde değiştirilirse

$$g^{A_6 A_2 A_3 A_4 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_1} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} +$$

$$g^{A_1 A_6 A_3 A_4 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_2} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_6 A_4 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_3} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_3 A_6 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_4} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_3} T_{A_5} T_{A_6} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_6 C} F_{A_6 B}{}^{A_5} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6} F_{A_6 B}{}^{C} T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6} \; = 0$$

denklemleri elde edilir.

Buradan

$$g^{A_6 A_2 A_3 A_4 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_1} +$$

$$g^{A_1 A_6 A_3 A_4 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_2} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_6 A_4 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_3} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_3 A_6 A_5 C} F_{A_6 B}{}^{A_4} +$$

$$g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_6 C} F_{A_6 B}{}^{A_5} +$$

$$g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} F_{A_6B}^{\ \ \ C} = 0$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade

$$F_{AB}^{\ \ \ \{C_1} \; g^{C_2C_3C_4C_5C_6\}B} = 0$$

şeklinde yazılır.Bu denklemlerde tekrarlanan indisler üzerinden toplam vardır.

A_N cebirleri için (1.10) denklemlerini çözüp $g^{A_1A_2\cdots A_p}$ katsayılarını belirlemek bu aşamada başlıca problemimizi oluşturur . Bu katsayıların kaç lineer bağımsız parametre ile ifade edileceği hakkında öngörümüz Casimir invaryantının mertebesi p olmak üzere. p'nin 1 hariç tüm pozitif partisyonları kadar lineer bağımsız parametre cinsinden tüm katsayılar çözülebileceği şeklindedir.

Altıncı mertebe Casimir operatörü için örneklersek $6 = 4 + 2 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$ şeklinde dört farklı partisyon elde edilir . Buna göre altıncı mertebe Casimir operatörünün $g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ katsayıları 4 serbest parametre cinsinden çözülür.

BÖLÜM 2. EŞDEĞERLİK SINIFLARININ VARLIĞI VE ÖLÇÜTLER

Bir p.mertebe Casimir invaryantının $g^{A_1 A_2 \cdots A_p}$ katsayılarının değeri

$$F_{AB}{}^{\{C_1} \; g^{C_2 \cdots C_{p-1}\}B} = 0 \qquad (2.1)$$

denklemlerinin çözümü ile elde edilir. Altıncı mertebe için Casimir katsayılarının değerleri hesaplandığında aynı değere sahip olan katsayıların varlığı gözlenir. Bu katsayılar arasında aynı değere sahip olanların oluşturduğu cümleler eşdeğerlik sınıfları diye adlandırılır. Burada eşdeğerlik sınıflarının hangi ölçütlere göre birbirinden ayırtedileceği başlıca problemimizi oluşturur. Altıncı mertebe için aşağıda tanımlanacak göstergeler sayesinde bu sınıflama yapılır.

$g^{A_1 A_2 \ldots A_p}$ katsayıları üzerinde tanımlı üç gösterge IND1,IND2,IND3 olarak tanımlanır.Aynı zamanda T_A doğurayları üzerinde tanımlı κ_1, κ_2 and κ_3 olmak üzere üç tip çarpım fonksiyonu tanımlanır.

$$\kappa_1[e_{\alpha_A}, e_{\alpha_B}] \equiv (\alpha_A, \alpha_B) \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.Bu tanım cebırın tüm ağırlık örgüsünde tanımlıdır. Skalar çarpım α_i , (i=1,2, . . . N) olmak üzere basit kökler arasında olur.Bu çarpım ise $(\alpha_i, \alpha_j) \equiv C_{ij}$ şeklinde Cartan matrisine göre tanımlanır.Burada e_α sıfırdan farklı kök indislerine tekabül eden doğuraylardır. Bu çarpımla ilgili gösterge

$$
\begin{aligned}
IND1[g^{A_1A_2\ldots A_qA_{q+1}\ldots A_p}] \equiv \Gamma[&\kappa_1[e_{A_1},e_{A_2}],\\
&\kappa_1[e_{A_1},e_{A_3}],\\
&\ldots\\
&\kappa_1[e_{A_1},e_{A_q}],\\
&\kappa_1[e_{A_2},e_{A_3}],\\
&\ldots\\
&\kappa_1[e_{A_{q-1}},e_{A_q}]]
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

şeklinde tanımlanır.

Burada ilk q indisi sıfırdan farklı köklere son (p-q) kadar indis ise sıfır köklerine tekabül eder. κ_1 skalar çarpım fonksiyonu sıfır köklerine karşılık gelen e_α doğurayları içinde tanımlanır.Bu doğuraylar h_i olarak adlandırılırsa

$$\kappa_1[h_i,e_{\alpha_A}] \equiv (\lambda_i,\alpha_A) \tag{2.4}$$

şeklinde $(\lambda_i.\alpha_j) \equiv \delta_{ij}$, for i . j=1,2, ...N bağıntısına göre tanımlanır. λ_i'ler cebirin temel baskın ağırlık fonksiyonelleridir.

İkinci skalar çarpım ise

$$
\begin{aligned}
&\kappa_2[h_i,\mu_k-\mu_l] = -1 \;,\; i<k\\
&\kappa_2[h_i,\mu_k-\mu_l] = 2 \;,\; k-1<i, \;\; i<l\\
&\kappa_2[h_i,\mu_k-\mu_l] = 1 \;,\; l-1<i.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

şeklinde tanımlanır.

Burada μ'lar temel ağırlık fonksiyonelleri olmak üzere e_α doğuraylarına tekabül eden kökler bunlar cinsinden yazılır.

Bu çarpımla ilgili gösterge

$$IND2[i, g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}] \equiv \Gamma[\kappa_2[h_i, e_{A_1}],$$
$$\kappa_2[h_i, e_{A_2}],$$
$$\ldots \tag{2.6}$$
$$\kappa_2[h_i, e_{A_q}]]$$

şeklinde tanımlanır. Burada i indisi sırasıyla $A_{q+1}, \ldots A_p$ değerlerini alır.

Üçüncü skalar çarpım

$$\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots h_{A_p}. e_{\alpha_A}] \equiv$$

$$(\lambda_{A_{q+1}}, \alpha_A)\alpha_A + (\lambda_{A_{q+2}}, \alpha_A)\alpha_A + \ldots (\lambda_{A_p}, \alpha_A)\alpha_A \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Bununla ilgili gösterge ise

$$IND3[g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}] \equiv$$

$$[(\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots, h_{A_p}, e_{A_1}], \kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots, h_{A_p}, e_{A_2}]),$$

$$(\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots, h_{A_p}, e_{A_2}], \kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots, h_{A_p}, e_{A_3}]),$$

$$\ldots$$

$$(\kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots, h_{A_p}, e_{A_{q-1}}], \kappa_3[h_{A_{q+1}}, h_{A_{q+2}}, \ldots, h_{A_p}, e_{A_q}])] \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır.

$g^{A_1 A_2 \ldots A_q}$ katsayıları üzerinde tanımlınan diğer gösterge ise IND11 olarak tanımlanır.

$$IND11[g^{A_1 A_2 \ldots A_q}] \equiv \Phi[P[g^{A_1 A_2 \ldots A_q}]]$$

şeklinde tanımlıdır.

Burada P operatörü

$$P[A_i] = i \quad , \quad i < N(N+1)/2 + 1$$

$$P[A_i] = i - N(N+1)/2 \quad , \quad i > N(N+1)/2$$

olmak üzere

$$P[g^{A_1 A_2 \ldots A_q}] \equiv g^{P[A_1]P[A_2]\ldots P[A_q]}$$

şeklinde ifade edilir.

Sıfırdan farklı kök indisleri içeren katsayılar üzerinde tanımlı olan P operatörü negatif köklere karşılık gelen indisleri pozitife çevirir.

Λ operatorü ise

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i1}} + \alpha_{A_{i2}} = \alpha_{A_{i3}}$$

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i1}} + \alpha_{A_{i3}} = \alpha_{A_{i2}}$$

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i2}} + \alpha_{A_{i3}} = \alpha_{A_{i1}}$$

olmak üzere

$$\Phi[P[g^{A_1 A_2 \ldots A_q}]] \equiv$$

$$\Lambda[A_1, A_2, A_3] + \Lambda[A_1, A_2, A_4] +$$

$$\Lambda[A_1, A_2, A_5] + \Lambda[A_1, A_2, A_6] +$$

$$\cdots + \Lambda[A_{q-2}, A_{q-1}, A_q]$$

şeklinde tanımlanır.

A_{i1}, A_{i2}. A_{i3} 'ler A_1 den A_q'ya kadar bütün değerleri alır.

Burada tanımlanan IND1,IND11,IND2, IND3 göstergeleri yardımıyla altıncı mertebe için eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek mümkündür.

Casimir İnvaryantının $g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ katsayıları aşağıda belirtilen bazı önemli özelliklere de sahiptir. Bunlar;

(1) $g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ katsayıları $\alpha_{A_1} + \alpha_{A_2} + \ldots \alpha_{A_q} = 0$ şartı dışında kalan tüm durumlarda sıfırdır.

(2) $g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ katsayıları parite dönüşümü altında invaryanttır. Parite dönüşümü $\alpha_A = -\alpha_A$ olmak üzere

$g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p} = g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ şeklindedir.

(3) $g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ katsayıları arasında bir dualite ilişkisi vardır. A_N cebirlerinin diagram otomorfizmi altında α_A 'nın duali α_A ise

$g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p} = (-1)^{(p-q)}\ g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ şeklindedir.

A_N cebirlerinin basit kökleri Dynkin Diagramı yardımı ile elde edilir.

A_N cebirine karşı gelen Dynkin Diagramı

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
o & -- & o & -- & o & -- & o & \cdots & o & -- & o & -- & o \\
 & & & & & & & & & & & & \\
1 & & 2 & & 3 & & & \cdots & & & N-1 & & N
\end{array}
\qquad (2.9)
$$

şeklinde tanımlanır. Bu diagramın otomorfizmine göre bir α_A kökünün duali α_{N+1-A} şeklinde olur.

BÖLÜM 3. ALTINCI MERTEBE CASIMIR İNVARYANTLARININ KURULUŞU

Altıncı mertebeden bir Casimir invaryantı

$$I[6] \equiv g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6} \ \{T_{A_1} T_{A_2} T_{A_3} T_{A_4} T_{A_5} T_{A_6}\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada altıncı mertebeden casimir invaryantları A_5 ve A_6 cebiri için kurulacaktır. $g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ katsayıları

$$\alpha_{A1} + \alpha_{A2} + \alpha_{A3} + \alpha_{A4} + \alpha_{A5} + \alpha_{A6} = 0$$

şartı dışında kalan tüm durumlarda sıfırdır. A_5 cebiri için sıfırdan farklı $g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ katsayıları indislerine göre altı tipe ayrılır. Bunlar sırasıyla

(T0) $g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$, (T1) $g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$, (T2) $g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}$, (T3) $g^{A_1A_2A_3I_1I_2I_3}$, (T4) $g^{A_1A_2I_1I_2I_3I_4}$, (T5) $g^{I_1I_2I_3I_4I_5I_6}$ şeklindedir.

Burada $A_i = 1, 2, \ldots N(N+1)$ ve $I_k = N(N+1) + i_k$ olmak üzere ikinci ifadede $i_k = 1, 2, \ldots N$ ve $k = 1, 2, \ldots 6$ şeklindedir. N=5 için $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 = 1, \ldots 30$ ve $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 = 31, \ldots 35$ dir.

$g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ katsayılarının herbirini $g(i)$ şeklinde numaralandırırsak $i = 1, \ldots 12300$ şeklinde olur. Katsayılarının numaralandırılması tiplerine göre yapılırsa, sırasıyla

$$(T0) \quad i = 1, \ldots 2770$$

$$(T1) \quad i = 2771, \ldots 6490$$

$$(T2) \quad i = 6491, \ldots 9640$$

$$(T3) \quad i = 9641, \ldots 11040$$

$$(T4) \quad i = 11041, \ldots 12090$$

$$(T5) \quad i = 12091, \ldots 12300$$

şeklinde olur.

Katsayılar arasında varolduğu bilinen eşdeğerlik sınıfları yukarıda tanımlanan her tip için farklı göstergeler kullanılarak ayırtedilir.

(T0) tipine dahil olan katsayılar sıfırdan farklı kök indisleri içerir. Bu katsayılar arasındaki eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek için İND1 göstergesi $g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ katsayıları üzerinde uygulanırsa

$$\begin{aligned} IND1[g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}] \equiv \Gamma[&\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_2}], \kappa_1[e_{A_1}, e_{A_3}], \\ &\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_4}], \kappa_1[e_{A_1}, e_{A_5}], \\ &\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_6}], \kappa_1[e_{A_2}, e_{A_3}], \\ &\kappa_1[e_{A_2}, e_{A_4}], \kappa_1[e_{A_2}, e_{A_5}], \\ &\kappa_1[e_{A_2}, e_{A_6}], \kappa_1[e_{A_3}, e_{A_4}], \\ &\kappa_1[e_{A_3}, e_{A_5}], \kappa_1[e_{A_3}, e_{A_6}], \\ &\kappa_1[e_{A_4}, e_{A_5}], \kappa_1[e_{A_4}, e_{A_6}], \\ &\kappa_1[e_{A_5}, e_{A_6}]] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\kappa_1[e_{\alpha_A}, e_{\alpha_B}] \equiv (\alpha_A, \alpha_B)$ ve $(\alpha_i, \alpha_j) \equiv C_{ij}$ dir.

IND1 göstergesiyle

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,-2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2\,] \equiv A(1)$$

$$\Gamma[\,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2\,] \equiv A(2)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2\,] \equiv A(3)$$

$$\Gamma[\,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2\,] \equiv A(4)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,-2,-2,-1,-1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 2\,] \equiv A(5)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,-2,-2,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 2,\ \ 2\,] \equiv A(6)$$

$$\Gamma[\,-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1\,] \equiv A(7)$$

$$\Gamma[\,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1\,] \equiv A(8)$$

$$\Gamma[\,-2,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\,] \equiv A(9)$$

$$\Gamma[\,-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1\,] \equiv A(10)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1\,] \equiv A(11)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 1\,] \equiv A(12)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\,] \equiv A(13)$$

$$\Gamma[\,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\,] \equiv A(14)$$

$$\Gamma[\,-2,-2,-2,-1,-1,-1,-1,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1\,] \equiv A(15)$$

olmak üzere 15 farklı durum oluşur.

Burada sözkonusu her duruma karşılık gelen katsayıların aynı eşdeğerlik sınıfına ait olması beklenir. Fakat bu gösterge ile elde edilen 15 farklı durum eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmekte yeterli olmaz. Bu sınıfları tam olarak ayırtetmek için IND11 göstergesi burada kullanılır.

$$IND11[g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}] \equiv \Phi[P[g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}]]$$

burada P operatorü $g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}$ katsayıları üzerinde

$$P[A_i] = i, \quad i < 16$$

$$P[A_i] = i - 15, \quad i > 15$$

olmak üzere

$$P[g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}] \equiv g^{P[A_1]P[A_2]P[A_3]P[A_4]P[A_5]P[A_6]}$$

şeklinde tanımlıdır.

Λ operatorü ise

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i1}} + \alpha_{A_{i2}} = \alpha_{A_{i3}}$$

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i1}} + \alpha_{A_{i3}} = \alpha_{A_{i2}}$$

$$\Lambda[A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}] \equiv 1, \quad \alpha_{A_{i2}} + \alpha_{A_{i3}} = \alpha_{A_{i1}}$$

olmak üzere

$$\Phi[g^{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}] \equiv$$

$$\Lambda[A_1, A_2, A_3] + \Lambda[A_1, A_2, A_4] +$$

$$\Lambda[A_1, A_2, A_5] + \Lambda[A_1, A_2, A_6] +$$

$$\Lambda[A_1, A_3, A_4] + \Lambda[A_1, A_3, A_5] +$$

$$\Lambda[A_1, A_3, A_6] + \Lambda[A_1, A_4, A_5] +$$

$$\Lambda[A_1, A_4, A_6] + \Lambda[A_1, A_5, A_6] +$$

$$\Lambda[A_2, A_3, A_4] + \Lambda[A_2, A_3, A_5] +$$

$$\Lambda[A_2, A_3, A_6] + \Lambda[A_2, A_4, A_5] +$$

$$\Lambda[A_2, A_4, A_6] + \Lambda[A_2, A_5, A_6] +$$

$$\Lambda[A_3, A_4, A_5] + \Lambda[A_3, A_4, A_6] +$$

$$\Lambda[A_3, A_5, A_6] + \Lambda[A_4, A_5, A_6]$$

şeklinde tanımlanır.

Burada A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} indisleri 1,. . . 6'ya kadar tüm değerleri alır.

IND11 göstergesini de kullanarak katsayılar arasında varolan tüm eşdeğerlik sınıfları ayırtedilebilmektedir.Böylece (T0) tipine ait olan 2770 katsayı arasında 17 eşdeğerlik sınıfının varlığı gözlenir.

Sıfırdan farklı kök indisleri içeren $g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ katsayıları için asıl vurgulanması gereken onların Weyl simetrilerine sahip olmasıdır.

W Weyl grubu olmak üzere

$$W : \alpha_j \rightarrow \alpha_j - (\alpha_i, \alpha_j)\alpha_i$$

şeklinde Weyl yansımaları tanımlanır. Bu tanım bize, Weyl yansımalarını katsayılar üzerinede de uygulayabilme şansını verir.

Weyl yansımaları

$$\Psi(i.\alpha_j) = \alpha_j - (\alpha_i . \alpha_j)\alpha_i$$

şeklinde ifade edilerek katsayılar üzerinde uygulanırsa

$$\Psi(i, g^{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}) = g^{\Psi(i.\alpha_{A_1})\Psi(i,\alpha_{A2})\Psi(i,\alpha_{A_3})\Psi(i,\alpha_{A_4})\Psi(i,\alpha_{A_5})\Psi(i,\alpha_{A_6})}$$

şeklinde olur.

Burada i , sıfırdan farklı köklere karşılık gelen indislerin değerlerinden herhangi birini alabilir.

Weyl yansımaları katsayılar üzerinde yukarıda izah edildiği şekilde uygulanırsa bu yansımalar altında invaryant kalan sınıflar gözlenir. Burada asıl dikkate değer bulunan invaryant kalan sınıfların eşdeğerlik sınıfları olmasıdır.Eşdeğerlik sınıfları Weyl yansımaları altında tamamem ayırtedilir. Burada IND1 veIND11 göstergelerinin kullanılmasının sebebi hesaplamalar açısından daha pratik ve uygulanabilir olmasıdır. Weyl yansımalarıyla eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek hesaplamalar açısından oldukça zordur. A_5 cebiri için örneklenirse, Weyl yansımaları 2770 katsayının herbirine uygulandığında teknik ve zaman açısından çok kullanışlı olmayacağı aşikardır. Keza 9051 tane sıfırdan farklı kök indisine sahip A_6 cebirinin katsayıları için de bu geçerlidir.Bu yüzden (T0) tipine dahil olan katsayılar arasındaki eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek için IND1,IND11 göstergelerinin kullanılması tercih edilir.

(T1) tipine dahil olan $g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$ katsayıları 3720 tanedir. Bu katsayılar arasındaki eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek için IND1.IND2.IND3 göstergeleri kulanılır.

IND1 göstergesi $g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$ katsayıları üzerinde uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
IND1[g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}] \equiv \Gamma[&\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_2}], \kappa_1[e_{A_1}, e_{A_3}],\\
&\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_4}], \kappa_1[e_{A_1}, e_{A_5}],\\
&\kappa_1[e_{A_2}, e_{A_3}], \kappa_1[e_{A_2}, e_{A_4}],\\
&\kappa_1[e_{A_2}, e_{A_5}], \kappa_1[e_{A_3}, e_{A_4}],\\
&\kappa_1[e_{A_3}, e_{A_5}], \kappa_1[e_{A_4}, e_{A_5}]]
\end{aligned}
$$

şeklinde olur.

IND1 göstergesi ile

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[-2,-2,-1,-1,-1,-1,-1,\ 1,\ 1,\ 2] \equiv A(1)\\
&\Gamma[-2,-1,-1,-1,-1,-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1] \equiv A(2)\\
&\Gamma[-1,-1,-1,-1,-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \equiv A(3)\\
&\Gamma[-2,-1,-1,-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \equiv A(4)
\end{aligned}
$$

olmak üzere dört farklı durum oluşur.A(1),A(2),A(3),A(4) durumlarını oluşturan katsayılarının duallerine IND1 göstergesi uygulanırsa yine yukarıda hesaplanan 4 farklı durum elde edilir.Dualite şartı altında sözkonusu durumlar aynı kalır.Dolayısıyla bu durumlar reeldir.

IND2 göstergesi katsayılar üzerinde uygulanırsa

$$\begin{aligned} IND2[I_1, g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}] \equiv \Gamma[&\kappa_2[h_1, e_{A_1}],\\ &\kappa_2[h_1, e_{A_2}],\\ &\kappa_2[h_1, e_{A_3}],\\ &\kappa_2[h_1, e_{A_4}],\\ &\kappa_2[h_1, e_{A_5}]], \end{aligned}$$

şeklinde olur. Burada $I_1 = 31 \ldots 35$ olmak üzere $h_1 = I_1 - 30$'dır.

IND2 göstergesi ile elde edilen durumlar

$$\begin{aligned} \Gamma[\,-1,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 2] &\equiv B(1)\\ \Gamma[\ \ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 2] &\equiv B(2)\\ \Gamma[\ \ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1] &\equiv B(3)\\ \Gamma[\,-1,-1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 2] &\equiv B(4)\\ \Gamma[\,-1,-1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1] &\equiv B(5) \end{aligned}$$

ve bunların duallerinden ibarettir.

IND2 göstergesi ile elde edilen durumlar arasındaki dualite koşulu η sayılar üzerinde etkili bir operatör olmak üzere

$\eta(2) = 2, \quad \eta(1) = -1, \quad \eta(-1) = 1$ şeklinde tanımlanır. Buna göre $\Gamma[\cdots]$'lar arasındaki dualite koşulu

$$DUAL[\Gamma[i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6]] = \Gamma[\eta(i_1), \eta(i_2), \eta(i_3), \eta(i_4), \eta(i_5), \eta(i_6)]$$

şeklinde ifade edilir.IND2 göstergesiyle elde edilen tüm durumlar kompleksdir. Burada duallere karşılık gelen durumlar $B(-i)$ şeklinde numaralandırılır.

IND3 göstergesi katsayılar üzerinde uygulanırsa

$$IND3[g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}] \equiv$$

$$\begin{aligned}
\Gamma[&(\kappa_3[h_1, e_{A_1}], \kappa_3[h_1, e_{A_2}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_1}], \kappa_3[h_1, e_{A_3}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_1}], \kappa_3[h_1, e_{A_4}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_1}], \kappa_3[h_1, e_{A_5}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_2}], \kappa_3[h_1, e_{A_3}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_2}], \kappa_3[h_1, e_{A_4}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_2}], \kappa_3[h_1, e_{A_5}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_3}], \kappa_3[h_1, e_{A_4}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_3}], \kappa_3[h_1, e_{A_5}]),\\
&(\kappa_3[h_1, e_{A_4}], \kappa_3[h_1, e_{A_5}])]
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

IND3 göstergesi ile

$$\Gamma[\,0,0,0,0,1,1,1,2,2,2] \equiv C(1)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,1,1,1,1,1,2] \equiv C(2)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1] \equiv C(3)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2] \equiv C(4)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0] \equiv C(5)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,0,0,1,1,1,2] \equiv C(6)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,0,0,0,0,1,2] \equiv C(7)$$
$$\Gamma[\,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1] \equiv C(8)$$

8 farklı reel durum oluşur.

$g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$ katsayıları üzerinde sözkonusu üç gösterge birden uygulanırsa

$$S[IND1[g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}], IND2[g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}],$$
$$IND3[g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}]] \equiv S[A(i), B(j), C(k)]$$

olmak üzere üç indisli durumlar oluşur.

Bu durumlar $S[A(i), B(j), C(k)] \equiv S[i, j, k]$ şeklinde ifade edilir.

Burada $g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$ katsayılarına üç gösterge uygulanırsa tüm durumlar

$$S[\ 1,\ \ 1,\ \ 1] \equiv S[1]$$
$$S[\ 2, -1,\ \ 2] \equiv S[2]$$
$$S[\ 1,\ \ 2,\ \ 3] \equiv S[3]$$
$$S[\ 3,\ \ 2,\ \ 3] \equiv S[4]$$
$$S[\ 2,\ \ 2,\ \ 3] \equiv S[5]$$
$$S[\ 2,\ \ 2,\ \ 4] \equiv S[6]$$
$$S[\ 4,\ \ 2,\ \ 3] \equiv S[7]$$
$$S[\ 4,\ \ 2,\ \ 4] \equiv S[8]$$
$$S[\ 1,\ \ 3,\ \ 5] \equiv S[9]$$
$$S[\ 2,\ \ 3,\ \ 5] \equiv S[10]$$
$$S[\ 3,\ \ 3,\ \ 5] \equiv S[11]$$
$$S[\ 4,\ \ 3,\ \ 5] \equiv S[12]$$
$$S[\ 3, -4,\ \ 5] \equiv S[13]$$
$$S[\ 2,\ \ 4,\ \ 3] \equiv S[14]$$
$$S[\ 4, -4,\ \ 3] \equiv S[15]$$

$$S[\ 2,\ \ 1,\ \ 6] \equiv S[16]$$

$$S[\ 4,\ \ 5,\ \ 5] \equiv S[17]$$

$$S[\ 4,-1,\ \ 7] \equiv S[18]$$

$$S[\ 3,-1,\ \ 8] \equiv S[19]$$

ve bunların duallerinden ibarettir.

Bu üç indisli durumlar arasındaki dualiteyi ifade etmek için σ şeklinde bir operatör tanımlanır. $\sigma(i) = -i$ olmak üzere

$$DUAL[S[i,j,k]] \equiv S[i,\sigma(j),k]$$

şeklinde ifade edilir. Dualite şartı altında 19 farklı durum daha oluşur. Tüm S durumları kompleksdir.

Duallerine karşılık gelen durumlar $S[-i]$ şeklinde numaralandırılır.

Burada $g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$ katsayıları I_1 indisleri $I_1 = 31,\ldots 35$ ve $h_1 = I_1 - 30$ olmak üzere 5 farklı değer alır. I_1 indisinin her bir değer aralığında $S(i)$'ler farklı eşdeğerlik sınıfına karşılık gelirler.Böylelikle eşdeğerlik sınıflarını ayırteden durumlar

$K[h_1.S(i)] = K[h_1,i]$ olmak üzere tanımlanır. Bu tanım $S[-i]$ 'ler için

$K[h_1.S(-i)] = -K[DUAL[h_1],i]$ şeklinde tanımlanır.

Sıfır köklerine tekabül eden h_1 indisleri arasındaki dualite A_N cebirinin diagram otomorfizmine göre tanımlanır. Bu şekilde elde edilen durumlar

$$K[1,1] \equiv K[1]$$

$$K[2,1] \equiv K[2]$$

$$K[2,3] \equiv K[3]$$

$$K[2,14] \equiv K[4]$$

$$K[2,16] \equiv K[5]$$

$$K[3,1] \equiv K[6]$$

$$K[3,2] \equiv K[7]$$

$$K[3,3] \equiv K[8]$$

$$K[3,5] \equiv K[9]$$

$$K[3,6] \equiv K[10]$$

$$K[3,9] \equiv K[11]$$

$$K[3,13] \equiv K[12]$$

$$K[3,14] \equiv K[13]$$

$$K[3,15] \equiv K[14]$$

$$K[3,16] \equiv K[15]$$

$$K[3,17] \equiv K[16]$$

$$K[3,18] \equiv K[17]$$

$$K[3,19] \equiv K[18]$$

$$K[4,1] \equiv K[19]$$

$$K[4,2] \equiv K[20]$$

$$K[4,3] \equiv K[21]$$

$$K[4,4] \equiv K[22]$$

$$K[4,5] \equiv K[23]$$

$$K[4,6] \equiv K[24]$$

$$K[4,7] \equiv K[25]$$

$$K[4,8] \equiv K[26]$$

$$K[4,9] \equiv K[27]$$

$$K[4,10] \equiv K[28]$$

$$K[4,13] \equiv K[29]$$

$$K[4,14] \equiv K[30]$$

$$K[4,15] \equiv K[31]$$

$$K[4,16] \equiv K[32]$$

$$K[4,17] \equiv K[33]$$

$$K[4,18] \equiv K[34]$$

$$K[4,19] \equiv K[35]$$

$$K[5,2] \equiv K[36]$$

$$K[5,3] \equiv K[37]$$

$$K[5,4] \equiv K[38]$$

$$K[5,5] \equiv K[39]$$

$$K[5,6] \equiv K[40]$$

$$K[5,7] \equiv K[41]$$

$$K[5,8] \equiv K[42]$$

$$K[5,9] \equiv K[43]$$

$$K[5,10] \equiv K[44]$$

$$K[5,11] \equiv K[45]$$

$$K[5,12] \equiv K[46]$$

olmak üzere 46 tanedir.

Burada elde edilen her duruma karşılık gelen $g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}$ katsayıları aynı eşdeğerlik sınıfına aittir.(T1) tipine ait 3720 katsayı arasında 46 eşdeğerlik sınıfı elde edilir.Her eşdeğerlik sınıfına aynı numaralar verilerek 3720 katsayı, 46 katsayı ile ifade edilir.

(T2) tipine dahil olan $g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}$ katsayıları 3150 tanedir. Bu katsayılar arasındaki eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek için IND1,IND21, IND22 ve IND3 göstergeleri kulanılır.

IND1 göstergesi $g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}$ katsayıları üzerinde uygulanırsa

$$\begin{aligned} IND1[g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}] \equiv \Gamma[&\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_2}], \kappa_1[e_{A_1}, e_{A_3}], \\ &\kappa_1[e_{A_1}, e_{A_4}], \kappa_1[e_{A_2}, e_{A_3}], \\ &\kappa_1[e_{A_2}, e_{A_4}], \kappa_1[e_{A_3}, e_{A_4}]] \end{aligned}$$

şeklinde olur.

IND1 göstergesi ile

$$\begin{aligned} \Gamma[\,-2, -2, -2, -2, \;\; 2, \;\; 2] &\equiv A(1) \\ \Gamma[\,-1, -1, -1, -1, \;\; 0, \;\; 0] &\equiv A(2) \\ \Gamma[\,-2, -2, -1, -1, \;\; 1, \;\; 1] &\equiv A(3) \\ \Gamma[\,-2, -2, \;\; 0, \;\; 0, \;\; 0, \;\; 0] &\equiv A(4) \end{aligned}$$

dört farklı durum elde edilir.Burada $\Gamma[\cdots]$'lar reeldir. IND2 göstergesi I_1 ve I_2 için IND21,IND22 şeklinde tanımlanır.

Burada $I_1, I_2 = 31, \ldots 35$ ve $h_1 = I_1 - 30, h_2 = I_2 - 30$ olarak tanımlanır.

IND21 göstergesi katsayılar üzerinde uygulanırsa

$$\begin{aligned} IND21[I_1, g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}] \equiv \Gamma[&\kappa_2[h_1, e_{A_1}], \\ &\kappa_2[h_1, e_{A_2}], \\ &\kappa_2[h_1, e_{A_3}], \\ &\kappa_2[h_1, e_{A_4}]] \end{aligned}$$

şeklinde olur.

IND22 göstergesi katsayılar üzerinde uygulanırsa

$$IND21[I_2, g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}] \equiv \Gamma[\kappa_2[h_2, e_{A_1}], \kappa_2[h_2, e_{A_2}], \kappa_2[h_2, e_{A_3}], \kappa_2[h_2, e_{A_4}]]$$

şeklinde olur.

IND21.IND22 göstergeleri ile

$$\Gamma[\ 2,\ 2,\ 2,\ 2] \equiv B(1)$$
$$\Gamma[-1,\ 1,\ 2,\ 2] \equiv B(2)$$
$$\Gamma[-1,-1,\ 1,\ 1] \equiv B(3)$$
$$\Gamma[-1,-1,\ 2,\ 2] \equiv B(4)$$
$$\Gamma[-1,-1,-1,-1] \equiv B(5)$$

olmak üzere beş farklı durum ve bunların dualleri elde edilir.

IND21,IND22 göstergeleri ile elde edilen durumlar arasındaki dualite koşulu η sayılar üzerinde etkili bir operatör olmak üzere

$\eta(2) = 2, \eta(1) = -1, \eta(-1) = 1$ şeklinde tanımlanır.

Buna göre $\Gamma[\cdots]$'lar arasındaki dualite koşulu

$$DUAL[\Gamma[i_1, i_2, i_3, i_4]] = \Gamma[\eta(i_1), \eta(i_2), \eta(i_3), \eta(i_4)]$$

şeklinde ifade edilir.Burada elde edilen $B(1), B(2), B(3)$ durumları reel $B(4), B(5)$ durumları kompleksdir.

IND3 göstergesi katsayılar üzerinde uygulanırsa

$$IND3[g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}] \equiv$$

$$\Gamma[(\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_1}],\kappa_3[h_1.h_2,e_{A_2}])$$
$$(\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_1}],\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_3}]),$$
$$(\kappa_3[h_1,h_2.e_{A_1}],\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_4}]),$$
$$(\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_2}],\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_3}]),$$
$$(\kappa_3[h_1,h_2.e_{A_2}],\kappa_3[h_1,h_2,e_{A_4}]),$$
$$(\kappa_3[h_1,h_2.e_{A_3}],\kappa_3[h_1.h_2,e_{A_4}])]$$

şeklinde olur.

IND3 göstergesi ile

$$\Gamma[\ 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8] \equiv C(1)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4] \equiv C(2)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8] \equiv C(3)$$
$$\Gamma[\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 8,\ 8] \equiv C(4)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \equiv C(5)$$
$$\Gamma[\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2] \equiv C(6)$$
$$\Gamma[-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2] \equiv C(7)$$
$$\Gamma[-1,-1,-1,-1,\ 2,\ 2] \equiv C(8)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2] \equiv C(9)$$
$$\Gamma[\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 8] \equiv C(10)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1] \equiv C(11)$$
$$\Gamma[\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2] \equiv C(12)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 8] \equiv C(13)$$
$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4] \equiv C(14)$$

$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2,\ 2] \equiv C(15)$$

$$\Gamma[\ -1,-1,0,\ 0,\ 1,\ 1] \equiv C(16)$$

$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1] \equiv C(17)$$

$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 8,\ 8] \equiv C(18)$$

$$\Gamma[\ 0,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4] \equiv C(19)$$

olmak üzere 19 farklı reel durum elde edilir. Bu durumlar dualite koşulu altında aynı kalır.

$g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}$ katsayıları üzerinde IND1,IND21,IND22,IND3 göstergelerinin hepsi birden uygulanırsa

$$\begin{aligned} & S[IND1[g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}], IND21[g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}], \\ & IND22[g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}], IND3[g^{A_1A_2A_3A_4I_1I_2}]] \\ & \equiv S[A(i), B(j), B(k), C(l)] \end{aligned}$$

olmak üzere 4 indisli durumlar oluşur.

Bu durumlar $S[A(i), B(j), B(k), C(l)] \equiv S[i, j, k, l]$ şeklinde ifade edilir. Bu suretle elde edilen tüm durumlar

$$S[\ 1,\ 1,\ 1,\ 1] \equiv S(1)$$

$$S[\ 2,\ 4,\ 4,\ 2] \equiv S(2)$$

$$S[\ 3,\ 1,\ 1,\ 4] \equiv S(3)$$

$$S[\ 3,\ 4,\ 4,\ 3] \equiv S(4)$$

$$S[\ 2,\ 5,\ 5,\ 5] \equiv S(5)$$

$$S[\ 4,\ 4,\ 4,\ 3] \equiv S(6)$$

$$S[\ 1,\ 5,\ 5,\ 5] \equiv S(7)$$

$$S[\ 3,\ 5,\ 5,\ 5] \equiv S(8)$$

$$S[\ 4,\ \ 5,\ \ 5,\ \ 5] \equiv S(9)$$

$$S[\ 1,\ \ 1,-5,\ \ 6] \equiv S(10)$$

$$S[\ 2,\ \ 4,\ \ 2,\ \ 7] \equiv S(11)$$

$$S[\ 3,\ \ 4,-4,\ \ 8] \equiv S(12)$$

$$S[\ 4,\ \ 4,\ \ 3,\ \ 9] \equiv S(13)$$

$$S[\ 3,\ \ 1,-4,\ \ 10] \equiv S(14)$$

$$S[\ 1,\ \ 5,\ \ 1,\ \ 6] \equiv S(15)$$

$$S[\ 2,\ \ 5,\ \ 4.\ \ 11] \equiv S(16)$$

$$S[\ 3.\ \ 5,\ \ 4,\ \ 9] \equiv S(17)$$

$$S[\ 4.\ \ 4,\ \ 1,\ \ 13] \equiv S(18)$$

$$S[\ 2.\ \ 4,\ \ 1,\ \ 14] \equiv S(19)$$

$$S[\ 3,\ \ 5,\ \ 1.\ \ 12] \equiv S(20)$$

$$S[\ 4,\ \ 5,\ \ 4,\ \ 9] \equiv S(21)$$

$$S[\ 3,\ \ 4,\ \ 1,\ \ 10] \equiv S(22)$$

$$S[\ 2,\ \ 4,-4,\ \ 15] \equiv S(23)$$

$$S[\ 4,\ \ 4,-4,\ \ 15] \equiv S(24)$$

$$S[\ 3,\ \ 4,-5,\ \ 9] \equiv S(25)$$

$$S[\ 3,\ \ 1,-5,\ \ 12] \equiv S(26)$$

$$S[\ 2,\ \ 4,-4,\ \ 16] \equiv S(27)$$

$$S[\ 1,\ \ 5,-5,\ \ 5] \equiv S(28)$$

$$S[\ 2,\ \ 5,\ \ 2,\ \ 5] \equiv S(29)$$

$$S[\ 3,\ \ 4,-5,\ \ 9] \equiv S(30)$$

$$S[\ 4,\ \ 5,\ \ 3,\ \ 5] \equiv S(31)$$

$$S[\ 4,\ \ 4,-4,\ \ 3] \equiv S(32)$$

$$S[\ 4,\ \ 5,\ \ 1,\ \ 15] \equiv S(33)$$

$$S[\ 2,\ \ 5,\ \ 1,\ \ 17] \equiv S(34)$$

$$S[\ 2,\ \ 4,-5,\ \ 11] \equiv S(35)$$

$$S[\ 4,\ \ 4,-5,\ \ 9] \equiv S(36)$$

$$S[\ 3.\ \ 5,-5,\ \ 5] \equiv S(37)$$

$$S[\ 2.\ \ 5,-5,\ \ 5] \equiv S(38)$$

$$S[\ 4.\ \ 5,-5,\ \ 5] \equiv S(39)$$

$$S[\ 2,\ \ 2,\ \ 2,\ \ 5] \equiv S(40)$$

$$S[\ 4.\ \ 3,\ \ 3.\ \ 5] \equiv S(41)$$

$$S[\ 4.\ \ 1.\ \ 1,\ \ 18] \equiv S(42)$$

$$S[\ 2,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 19] \equiv S(43)$$

ve bunların duallerinden ibarettir.

Dört indisli durumlar arasındaki dualiteyi ifade etmek için için σ şeklinde bir operatör tanımlanır. $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 3,\ \sigma(4) = -4, \sigma(5) = -5, \sigma(-4) = 4, \sigma(-5) = 5$ olmak üzere dualite

$$DUAL[S[i_1, i_2, i_3, i_4]] = S[i_1, \sigma(i_2), \sigma(i_3), i_4]$$

şeklinde ifade edilir.

Duallerine karşılık gelen durumlar $S(-i)$ şeklinde numaralandırılır. Eşdeğerlik sınıflarını ayırteden durumlar

$K[h_1, h_2, S(i)] = K[h_1, h_2, i]$ şeklinde tanımlanır. Bu tanım $S(-i)$ 'ler için

$K[h_1, h_2, S(-i)] = K[DUAL(h_1), DUAL(h_2), i]$ şeklinde ifade edilir. Burada $h_1.h_2 = 1, \cdots 5$ ve $h_1 > h_2$ olmak üzere 15 farklı $h_1.h_2$ çifti oluşur. $h_1.h_2$ 'ler arasındaki dualite koşulu A_N cebirinin diagram otomorfizmine göre tanımlanır. Bunun sonunda 190 tane durum elde edilir.Bu durumlar EK[1]'de verilmiştir.

(T2) tipine dahil olan 3150 katsayı arasında 190 tane eşdeğerlik sınıfı oluşur. Her bir duruma karşılık gelen katsayılara aynı numara verilerek 3150 tane katsayı 190 tane katsayı ile ifade edilir.

(T3) tipine ait $g^{A_1A_2A_3I_1I_2I_3}$ katsayıları 1400 tanedir. Bu katsayılar arasındaki eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek için $IND21.IND22.IND23$ göstergeleri kulanılır.

IND2 göstergesi I_1, I_2, I_3 için IND21.IND22.IND23 şeklinde tanımlanır. $I_1.I_2.I_3 = 31.\cdots 35$ olmak üzere $h_1 = I_1 - 30. h_2 = I_2 - 30. h_3 = I_3 - 30$'dir.

IND21.IND22.IND23 göstergeleri katsayılar üzerinde sırasıyla uygulanırsa,

$$IND21[I_1, g^{A_1A_2A_3I_1I_2I_3}] \equiv \Gamma[\kappa_2[h_1, e_{A_1}], \kappa_2[h_1, e_{A_2}], \kappa_2[h_1, e_{A_3}]]$$

$$IND22[I_2, g^{A_1A_2A_3I_1I_2I_3}] \equiv \Gamma[\kappa_2[h_2, e_{A_1}], \kappa_2[h_2, e_{A_2}], \kappa_2[h_2, e_{A_3}]]$$

$$IND23[I_3, g^{A_1A_2A_3I_1I_2I_3}] \equiv \Gamma[\kappa_2[h_3, e_{A_1}], \kappa_2[h_3, e_{A_2}], \kappa_2[h_3, e_{A_3}]]$$

şeklinde olur.

Bu göstergelerden elde edilen durumlar $\Gamma[1,1,1] \equiv A(1)$, $\Gamma[1,2,2] \equiv A(2)$ ve bunların duallerinden ibarettir.

Bu durumlar arasındaki dualite koşulu η sayılar üzerinde etkili bir operatör olmak üzere $\eta(2) = 2, \eta(1) = -1, \eta(-1) = 1$ şeklinde tanımlanır. Buna göre $\Gamma[\cdots]$'lar arasındaki dualite koşulu

$DUAL[\Gamma[i_1, i_2, i_3]] = \Gamma[\eta(i_1), \eta(i_2), \eta(i_3)]$ şeklindedir. Burada A(1) ve A(2) durumu kompleksdir.

Bu göstergelerden hepsi birden katsayılara uygulanırsa

$$S[IND21[I_1, g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}], IND22[I_2, g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}], IND23[I_3, g^{A_1A_2A_3A_4A_5I_1}]] \equiv S[A(i), B(j), C(k)]$$

olmak üzere üç indisli durumlar oluşur. Bu durumlar

$$S[A(i), B(j), C(k)] \equiv S[i, j, k]$$

şeklinde ifade edilir. Bunun sonucunda elde edilen durumlar

$$S[-2,-2,-2] \equiv S(1)$$
$$S[-1,-1,-1] \equiv S(2)$$
$$S[-2,-2,\ \ 2] \equiv S(3)$$
$$S[-1,-1,-2] \equiv S(4)$$
$$S[-2,-2,\ \ 1] \equiv S(5)$$
$$S[-1,-1,\ \ 2] \equiv S(6)$$
$$S[-1,-1,\ \ 1] \equiv S(7)$$
$$S[-1,-2,-2] \equiv S(8)$$
$$S[-2,\ \ 2,\ \ 1] \equiv S(9)$$
$$S[-1,-2,\ \ 1] \equiv S(10)$$

ve bunların duallerinden ibarettir.

Üç indisli durumlar arasındaki dualiteyi ifade etmek için için σ şeklinde bir operatör tanımlanır. $\sigma(i) = -i$ olmak üzere dualite

$$DUAL[S[i_1, i_2, i_3]] = S[\sigma(i_3), \sigma(i_2), \sigma(i_1)]$$

Duallerine karşılık gelen durumlar $S(-i)$ şeklinde numaralandırılır. Burada elde edilen tüm durumlar kompleksdir.

Eşdeğerlik sınıflarını ayırteden durumlar

$K[h_1, h_2, h_3, S(i)] = K[h_1, h_2, h_3, i]$

olmak üzere tanımlanır.

Bu tanım $S(-i)$ 'ler için

$K[h_1, h_2, h_3, S(-i)] = -K[DUAL(h_1), DUAL(h_2), DUAL(h_3), i]$

şeklinde ifade edilir.

Burada $h_1, h_2, h_3 = 1, \cdots 5$ ve $h_1 > h_2 > h_3$

olmak üzere 35 farklı h_1, h_2, h_3 üçlüsü oluşur.

h_1, h_2, h_3 'ler arasındaki dualite koşulu A_N cebirinin diagram otomorfizmine göre tanımlanır. Bunun sonucunda 108 farklı durum elde edilir.Bu durumlar EK[2]'de verilmiştir. Herbir eşdeğerlik sınıfına aynı numara verilerek 1400 katsayı 108 katsayı ile ifade edilir.

(T4) tipine ait $g^{A_1A_2I_1I_2I_3I_4}$ katsayıları 1050 tanedir. Bu katsayılar arasındaki eşdeğerlik sınıflarını ayırtetmek için $IND21$,$IND22$,$IND23$,

$IND24$ göstergeleri kulanılır.

IND2 göstergesi I_1, I_2, I_3, I_4 için IND21,IND22,IND23,IND24 şeklinde tanımlanır.Bu göstergeler katsayılar arasında sırası ile uygulanırsa

$$\begin{aligned} IND21[I_1, g^{A_1A_2I_1I_2I_3I_4}] \equiv \Gamma[&\kappa_2[h_1, e_{A_1}],\\ &\kappa_2[h_1, e_{A_2}],\\ &\kappa_2[h_1, e_{A_3}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IND22[I_2, g^{A_1A_2I_1I_2I_3I_4}] \equiv \Gamma[&\kappa_2[h_2, e_{A_1}],\\ &\kappa_2[h_2, e_{A_2}],\\ &\kappa_2[h_2, e_{A_3}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IND23[I_3, g^{A_1A_2I_1I_2I_3I_4}] \equiv \Gamma[&\kappa_2[h_3, e_{A_1}],\\ &\kappa_2[h_3, e_{A_2}],\\ &\kappa_2[h_3, e_{A_3}]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} IND24[I_4, g^{A_1A_2I_1I_2I_3I_4}] \equiv \Gamma[&\kappa_2[h_4, e_{A_1}],\\ &\kappa_2[h_4, e_{A_2}],\\ &\kappa_2[h_4, e_{A_3}]] \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Bu göstergelerden elde edilen durumlar

$$\Gamma[1,1] \equiv A(1)$$
$$\Gamma[2,2] \equiv A(2)$$

ve bunların duallerinden ibarettir.

Bu durumlar arasındaki dualite koşulu η sayılar üzerinde etkili bir operatör olmak üzere $\eta(2) = 2, \eta(1) = -1, \eta(-1) = 1$ şeklinde tanımlanır.

Buna göre $\Gamma[\cdots]$'lar arasındaki dualite koşulu

$$DUAL[\Gamma[i_1, i_2]] = \Gamma[\eta(i_1), \eta(i_2)]$$

şeklindedir. Burada A(1) durumu kompleks A(2) durumu reeldir.

$g^{A_1 A_2 I_1 I_2 I_3 I_4}$ katsayıları üzerinde IND21,IND22,IND23,IND24 göstergelerinin hepsi birden uygulanırsa

$$\begin{aligned} &S[IND21[g^{A_1 A_2 A_3 A_4 I_1 I_2}], IND22[g^{A_1 A_2 A_3 A_4 I_1 I_2}],\\ &IND23[g^{A_1 A_2 A_3 A_4 I_1 I_2}], IND24[g^{A_1 A_2 A_3 A_4 I_1 I_2}]]\\ &\equiv S[A(i), B(j), B(k), C(l)] \end{aligned}$$

olmak üzere dört indisli durumlar oluşur.

Bu durumlar $S[A(i), B(j), B(k), C(l)] \equiv S[i, j, k, l]$ şeklinde ifade edilir.

Bu şekilde elde edilen tüm durumlar

$$\begin{aligned} S[\ 1,\ 1,\ 1,\ 1] &\equiv S(1)\\ S[-1,\ 2,\ 2,\ 2] &\equiv S(2)\\ S[\ 2,\ 1,\ 1,\ 1] &\equiv S(3)\\ S[-1,\ 1,\ 1,\ 1] &\equiv S(4)\\ S[\ 2,\ 2,\ 1,\ 1] &\equiv S(5)\\ S[-1,\ 2,\ 1,\ 1] &\equiv S(6)\\ S[\ 2,\ 2,\ 2,\ 2] &\equiv S(7)\\ S[-1,-1,\ 1,\ 1] &\equiv S(8)\\ S[-1,\ 2,\ 2,\ 1] &\equiv S(9) \end{aligned}$$

ve bunların duallerinden ibarettir.

Dört indisli durumlar arasındaki dualiteyi ifade etmek için için σ şeklinde bir operatör tanımlanır. $\sigma(i) = -i$ olmak üzere dualite

$$DUAL[S[i_1, i_2, i_3, i_4]] = S[\sigma(i_4), \sigma(i_3), \sigma(i_2), \sigma(i_1)]$$

şeklinde ifade edilir.

Duallerine karşılık gelen durumlar $S(-i)$ şeklinde numaralandırılır. Eşdeğerlik sınıflarını ayırteden durumlar

$K[h_1, h_2, h_3, h_4, S(i)] = K[h_1, h_2, h_3, . h_4, i]$ olmak üzere tanımlanır.

Bu tanım $S(-i)$ 'ler için

$$K[h_1, h_2, h_3, h_4, S(-i)] =$$

$$-K[DUAL(h_1), DUAL(h_2), DUAL(h_3), DUAL(h_4), i]$$

şeklinde ifade edilir.

Burada $h_1, h_2, h_3, h_4 = 1, \cdots 5$ ve $h_1 > h_2 > h_3 > h_4$ olmak üzere 70 farklı h_1, h_2, h_3, h_4 dörtlüsü oluşur.

h_1, h_2, h_3, h_4 'ler arasındaki dualite koşulu A_N cebirinin diagram otomorfizmine göre tanımlanır. Bunun sonucunda 190 farklı durum elde edilir.Bu durumlar EK[3]'de verilmiştir.

(T4) tipine ait 1050 katsayı arasında 190 tane eşdeğerlik sınıfı bulunur. Herbir eşdeğerlik sınıfına giren katsayılara aynı numara verilirse 1050 katsayı 190 katsayı ile ifade edilir.

(T5) tipine giren $g^{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6}$ katsayıları sıfır kök indisleri içerir.Bu katsayıların herbiri bir eşdeğerlik sınıfıdır.Bunları daha az sayıya indirgemek için sadece dualite koşulu kullanılır.

Katsayılar arasındaki dualite koşulu

$g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p} = (-1)^{(p-q)} \; g^{A_1 A_2 \ldots A_q A_{q+1} \ldots A_p}$ şeklindedir.

Buna göre $DUAL[g^{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6}] = g^{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6}$ şeklinde tanımlanır.

Burada sıfırdan farklı kök indislerine karşılık gelen I_i'ler arasındaki dualite A_N cebirinin dıagram otomorfizmine göre tanımlanır. Bu koşul vasıtasıyla 210 katsayı 110 'a indirgenir.

Casimir invaryantını oluşturan katsayılar yukarıda izah edilen işlemler sonucu 12300'den 661'e iner.Katsayıların bu ölçüde azalması (1.10)denklemlerini çözmeyi oldukça kolaylaştırır.Bu katsayıların çözümü daha önce öngördüğümüz üzere dört serbest parametre cinsinden elde edilir.Bu katsayıarın değeri EK[4]'de verilmiştir.

Benzer şekilde A_6 cebiri içinde aynı göstergeler kullanılırsa katsayıların indirgenmesi

(T0) için 9051 katsayı 17 , (T1) için 11844 katsayı 65 , (T2) için 9261 katsayı 318 , (T3) için 3920 katsayı 210 , (T4) için 2646 katsayı 455 , (T5) için 462 katsayı 236

şeklinde olur.

Bunun sonucunda 37184 tane katsayı 1301 katsayı ile ifade edilir. A_5 ve A_6 cebirleri için (1.10)denklemleri $MATHEMATICA^{TM}$ paket programı [5] yardımı ile çözülür. A_6 cebirleri için de tüm katsayılar dört bağımsız parametre cinsinden ifade edilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde altıncı mertebe Casimir invaryantlarının açık kuruluşu, geliştirdiğimiz özel bir yöntemle A_5 ve A_6 cebirler için elde edilmiştir. Bu yöntemin temelini eşdeğerlik sınıflarının varlığı oluşturmuştur.

Eşdegerlik sınıfları Casimir katsayıları arasında aynı değere sahip olan elemanların oluşturduğu cümlelerdir. Katsayılar arasında var olan eşdeğerlik sınıflarını belirlemek bu tezin başlıca amaçlarından birini oluşturmuştur. Bu sınıfları belirlemek için dört tane gösterge tanımlanmıştır. IND1,IND11.IND2,IND3 olarak adlandırılan sözkonusu göstergeler altıncı mertebe Casimir katsayıları arasındaki eşdeğerlik sınıflarını belirlemekte tamamen başarıya ulaşmıştır. Aynı eşdeğerlik sınıfına dahil olan katsayılara aynı numara verilerek katsayılar büyük ölçüde indirgenmiştir. İndirgenmiş katsayılar daha önce öngördüğümüz şekilde dört serbest parametreye bağlı olarak çözülmüştür.

Geliştirdiğimiz bu özel yöntem sayesinde altıncı mertebe Casimir invaryantını kurma imkanına kavuşulmuştur. Bu yöntem olmaksızın Casimir invaryantı kurmak teknik olarak neredeyse imkansızdır. Elimizde bulunan komputer imkanları bu problem açısından oldukça sınırlıdır. Hatta komputer problemi aşılsa bile daha yüksek mertebelerde kolaylaştırıcı ve pratik bir yöntem bulma zorunluluğu bizim için kaçınılmazdır.

Bundan sonraki amacımız altıncı mertebe için bulduğumuz göstergelerin daha yüksek mertebelerde eşdeğerlik sınıflarını belirlemekte yeterli olup olmayacağını incelemektir.

KAYNAKLAR

[1] BOREL, A. and CHEVALLEY.C., Mem. Am. Math. Soc. 14; 1-9 (1955)

[2] HUMPHREYS, J. E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin (1972)

[3] KARADAYI. H. R., Anatomy of Grand Unifying Groups (unpublished). ICTP Trieste preprints,IC/81/213,224

[4] OKUBO. S. and PATERA. J., General Indices of Representations and Casimir Invariants. Jour.Math.Phy. 25; 219-227 (1984)

[5] WOLFRAM. S., *Mathematicae*^{TM} , Addison-Wesley (1990)

EKLER

EK-1

```
K[0,  1]=K[  1]
K[0,  2]=K[  2]
K[0,  3]=K[  3]
K[0,  4]=K[  4]
K[0,  5]=K[  5]
K[0,  6]=K[  6]
K[0,  7]=K[  7]
K[0,  8]=K[  8]
K[0,  9]=K[  9]
K[1,  1]=K[ 10]
K[1,  2]=K[ 11]
K[1,  3]=K[ 12]
K[1,  4]=K[ 13]
K[1,  5]=K[ 14]
K[1,  6]=K[ 15]
K[1,  7]=K[ 16]
K[1,  8]=K[ 17]
K[1,  9]=K[ 18]
K[1, 10]=K[ 19]
K[1, 11]=K[ 20]
K[1, 12]=K[ 21]
K[1, 13]=K[ 22]
K[1, 14]=K[ 23]
K[1, 15]=K[ 24]
K[1, 16]=K[ 25]
K[1, 17]=K[ 26]
K[1, 18]=K[ 27]
K[1, 19]=K[ 28]
K[1, 20]=K[ 29]
K[1, 21]=K[ 30]
K[1, 22]=K[ 31]
K[1, 26]=K[ 32]
K[2,  1]=K[ 33]
K[2,  2]=K[ 34]
K[2,  3]=K[ 35]
K[2,  4]=K[ 36]
K[2,  6]=K[ 37]
K[2,  7]=K[ 38]
K[2,  8]=K[ 39]
K[2, 10]=K[ 40]
K[2, 11]=K[ 41]
K[2, 12]=K[ 42]
K[2, 13]=K[ 43]
K[2, 14]=K[ 44]
K[2, 15]=K[ 45]
K[2, 16]=K[ 46]
K[2, 17]=K[ 47]
```

```
K[2, 18]=K[ 48]
K[2, 19]=K[ 49]
K[2, 20]=K[ 50]
K[2, 21]=K[ 51]
K[2, 22]=K[ 52]
K[2, 23]=K[ 53]
K[2, 24]=K[ 54]
K[2, 26]=K[ 55]
K[2, 27]=K[ 56]
K[2, 28]=K[ 57]
K[2, 29]=K[ 58]
K[2, 30]=K[ 59]
K[2, 31]=K[ 60]
K[2, 32]=K[ 61]
K[2, 33]=K[ 62]
K[2, 34]=K[ 63]
K[3,  1]=K[ 64]
K[3,  3]=K[ 65]
K[3,  4]=K[ 66]
K[3,  7]=K[ 67]
K[3, 10]=K[ 68]
K[3, 11]=K[ 69]
K[3, 12]=K[ 70]
K[3, 13]=K[ 71]
K[3, 14]=K[ 72]
K[3, 15]=K[ 73]
K[3, 17]=K[ 74]
K[3, 18]=K[ 75]
K[3, 19]=K[ 76]
K[3, 20]=K[ 77]
K[3, 22]=K[ 78]
K[3, 23]=K[ 79]
K[3, 24]=K[ 80]
K[3, 26]=K[ 81]
K[3, 27]=K[ 82]
K[3, 28]=K[ 83]
K[3, 29]=K[ 84]
K[3, 30]=K[ 85]
K[3, 31]=K[ 86]
K[3, 32]=K[ 87]
K[3, 33]=K[ 88]
K[3, 34]=K[ 89]
K[3, 35]=K[ 90]
K[3, 36]=K[ 91]
K[3, 37]=K[ 92]
K[4,  1]=K[ 93]
K[4, 10]=K[ 94]
K[4, 12]=K[ 95]
K[4, 14]=K[ 96]
K[4, 15]=K[ 97]
K[4, 20]=K[ 98]
K[4, 22]=K[ 99]
K[4, 23]=K[100]
K[4, 24]=K[101]
K[4, 26]=K[102]
K[4, 27]=K[103]
K[4, 28]=K[104]
```

```
K[4, 30]=K[105]
K[4, 32]=K[106]
K[4, 35]=K[107]
K[4, 36]=K[108]
K[4, 37]=K[109]
K[4, 38]=K[110]
K[4, 39]=K[111]
K[5,  1]=K[112]
K[5,  2]=K[113]
K[5,  3]=K[114]
K[5,  4]=K[115]
K[5,  5]=K[116]
K[5,  6]=K[117]
K[5,  7]=K[118]
K[5,  8]=K[119]
K[5,  9]=K[120]
K[5, 40]=K[121]
K[5, 41]=K[122]
K[5, 42]=K[123]
K[5, 43]=K[124]
K[6,  1]=K[125]
K[6,  2]=K[126]
K[6,  3]=K[127]
K[6,  4]=K[128]
K[6,  6]=K[129]
K[6,  7]=K[130]
K[6,  8]=K[131]
K[6, 10]=K[132]
K[6, 11]=K[133]
K[6, 12]=K[134]
K[6, 13]=K[135]
K[6, 14]=K[136]
K[6, 15]=K[137]
K[6, 16]=K[138]
K[6, 17]=K[139]
K[6, 18]=K[140]
K[6, 19]=K[141]
K[6, 20]=K[142]
K[6, 21]=K[143]
K[6, 22]=K[144]
K[6, 26]=K[145]
K[6, 40]=K[146]
K[6, 41]=K[147]
K[6, 42]=K[148]
K[6, 43]=K[149]
K[7,  1]=K[150]
K[7,  3]=K[151]
K[7,  4]=K[152]
K[7,  7]=K[153]
K[7, 10]=K[154]
K[7, 11]=K[155]
K[7, 12]=K[156]
K[7, 13]=K[157]
K[7, 14]=K[158]
K[7, 15]=K[159]
K[7, 17]=K[160]
K[7, 18]=K[161]
```

```
K[7,  19]=K[162]
K[7,  20]=K[163]
K[7,  22]=K[164]
K[7,  23]=K[165]
K[7,  24]=K[166]
K[7,  26]=K[167]
K[7,  27]=K[168]
K[7,  28]=K[169]
K[7,  29]=K[170]
K[7,  30]=K[171]
K[7,  31]=K[172]
K[7,  32]=K[173]
K[7,  33]=K[174]
K[7,  34]=K[175]
K[7,  40]=K[176]
K[7,  41]=K[177]
K[7,  42]=K[178]
K[7,  43]=K[179]
K[9,   1]=K[180]
K[9,   2]=K[181]
K[9,   3]=K[182]
K[9,   4]=K[183]
K[9,   6]=K[184]
K[9,   7]=K[185]
K[9,   8]=K[186]
K[9,  40]=K[187]
K[9,  41]=K[188]
K[9,  42]=K[189]
K[9,  43]=K[190]
```

EK-2

```
K[0, 1]=K[1]
K[0, 2]=K[2]
K[1, 1]=K[3]
K[1, 2]=K[4]
K[1, 3]=K[5]
K[1, 4]=K[6]
K[2, 1]=K[7]
K[2, 2]=K[8]
K[2, 3]=K[9]
K[2, 4]=K[10]
K[2, 5]=K[11]
K[2, 6]=K[12]
K[3, 1]=K[13]
K[3, 3]=K[14]
K[3, 4]=K[15]
K[3, 5]=K[16]
K[3, 6]=K[17]
K[3, 7]=K[18]
K[4, 3]=K[19]
K[4, 5]=K[20]
K[4, 6]=K[21]
K[4, 7]=K[22]
K[5, 1]=K[23]
K[5, 2]=K[24]
K[5, 8]=K[25]
K[6, 1]=K[26]
K[6, 2]=K[27]
K[6, 3]=K[28]
K[6, 4]=K[29]
K[6, 8]=K[30]
K[6, 9]=K[31]
K[7, 1]=K[32]
K[7, 3]=K[33]
K[7, 4]=K[34]
K[7, 5]=K[35]
K[7, 6]=K[36]
K[7, 8]=K[37]
K[7, 9]=K[38]
K[7,10]=K[39]
K[8, 3]=K[40]
K[8, 5]=K[41]
K[8, 6]=K[42]
K[8, 7]=K[43]
K[8, 9]=K[44]
K[8,10]=K[45]
K[9, 1]=K[46]
K[9, 2]=K[47]
K[9, 8]=K[48]
K[10,1]=K[49]
K[10,3]=K[50]
K[10,4]=K[51]
K[10,8]=K[52]
K[10,9]=K[53]
K[11,3]=K[54]
K[11,5]=K[55]
```

```
K[11,6]=K[56]
K[11,9]=K[57]
K[11,10]=K[58]
K[12,1]=K[59]
K[12,8]=K[60]
K[13,3]=K[61]
K[13,9]=K[62]
K[15,1]=K[63]
K[15,2]=K[64]
K[16,1]=K[65]
K[16,2]=K[66]
K[16,3]=K[67]
K[16,4]=K[68]
K[17,1]=K[69]
K[17,3]=K[70]
K[17,4]=K[71]
K[17,5]=K[72]
K[17,6]=K[73]
K[18,3]=K[74]
K[18,5]=K[75]
K[18,6]=K[76]
K[18,7]=K[77]
K[19,1]=K[78]
K[19,2]=K[79]
K[19,8]=K[80]
K[20,1]=K[81]
K[20,3]=K[82]
K[20,4]=K[83]
K[20,8]=K[84]
K[20,9]=K[85]
K[21,3]=K[86]
K[21,5]=K[87]
K[21,6]=K[88]
K[21,9]=K[89]
K[21,10]=K[90]
K[22,1]=K[91]
K[22,8]=K[92]
K[23,3]=K[93]
K[23,9]=K[94]
K[25,1]=K[95]
K[25,2]=K[96]
K[26,1]=K[97]
K[26,3]=K[98]
K[26,4]=K[99]
K[27,3]=K[100]
K[27,5]=K[101]
K[27,6]=K[102]
K[28,1]=K[103]
K[28,8]=K[104]
K[29,3]=K[105]
K[29,9]=K[106]
K[31,1]=K[107]
K[32,3]=K[108]
```

EK-3

```
K[0, 1]=K[1]
K[0, 7]=K[2]
K[1, 1]=K[3]
K[1, 2]=K[4]
K[1, 3]=K[5]
K[1, 7]=K[6]
K[2, 1]=K[7]
K[2, 2]=K[8]
K[2, 3]=K[9]
K[2, 4]=K[10]
K[2, 7]=K[11]
K[3, 1]=K[12]
K[3, 2]=K[13]
K[3, 3]=K[14]
K[3, 4]=K[15]
K[3, 7]=K[16]
K[4, 2]=K[17]
K[4, 3]=K[18]
K[4, 4]=K[19]
K[4, 7]=K[20]
K[5, 1]=K[21]
K[5, 5]=K[22]
K[5, 7]=K[23]
K[6, 1]=K[24]
K[6, 2]=K[25]
K[6, 3]=K[26]
K[6, 5]=K[27]
K[6, 6]=K[28]
K[6, 7]=K[29]
K[7, 1]=K[30]
K[7, 2]=K[31]
K[7, 3]=K[32]
K[7, 4]=K[33]
K[7, 5]=K[34]
K[7, 6]=K[35]
K[7, 7]=K[36]
K[8, 2]=K[37]
K[8, 3]=K[38]
K[8, 4]=K[39]
K[8, 5]=K[40]
K[8, 6]=K[41]
K[8, 7]=K[42]
K[9, 1]=K[43]
K[9, 5]=K[44]
K[9, 7]=K[45]
K[9, 8]=K[46]
K[10, 1]=K[47]
K[10, 2]=K[48]
K[10, 3]=K[49]
K[10, 5]=K[50]
K[10, 6]=K[51]
K[10, 7]=K[52]
K[10, 8]=K[53]
K[11, 2]=K[54]
K[11, 3]=K[55]
K[11, 4]=K[56]
```

```
K[11, 5]=K[57]
K[11, 6]=K[58]
K[11, 7]=K[59]
K[11, 8]=K[60]
K[12, 1]=K[61]
K[12, 5]=K[62]
K[12, 7]=K[63]
K[12, 8]=K[64]
K[13, 2]=K[65]
K[13, 3]=K[66]
K[13, 5]=K[67]
K[13, 6]=K[68]
K[13, 7]=K[69]
K[13, 8]=K[70]
K[14, 5]=K[71]
K[14, 7]=K[72]
K[14, 8]=K[73]
K[15, 1]=K[74]
K[15, 2]=K[75]
K[15, 3]=K[76]
K[15, 7]=K[77]
K[16, 1]=K[78]
K[16, 2]=K[79]
K[16, 3]=K[80]
K[16, 7]=K[81]
K[16, 9]=K[82]
K[17, 1]=K[83]
K[17, 2]=K[84]
K[17, 3]=K[85]
K[17, 4]=K[86]
K[17, 7]=K[87]
K[17, 9]=K[88]
K[18, 2]=K[89]
K[18, 3]=K[90]
K[18, 4]=K[91]
K[18, 7]=K[92]
K[18, 9]=K[93]
K[19, 1]=K[94]
K[19, 2]=K[95]
K[19, 3]=K[96]
K[19, 5]=K[97]
K[19, 6]=K[98]
K[19, 7]=K[99]
K[20, 1]=K[100]
K[20, 2]=K[101]
K[20, 3]=K[102]
K[20, 5]=K[103]
K[20, 6]=K[104]
K[20, 7]=K[105]
K[20, 9]=K[106]
K[21, 2]=K[107]
K[21, 3]=K[108]
K[21, 4]=K[109]
K[21, 5]=K[110]
K[21, 6]=K[111]
K[21, 7]=K[112]
K[21, 9]=K[113]
K[22, 1]=K[114]
```

```
K[22, 2]=K[115]
K[22, 3]=K[116]
K[22, 5]=K[117]
K[22, 6]=K[118]
K[22, 7]=K[119]
K[22, 8]=K[120]
K[23, 2]=K[121]
K[23, 3]=K[122]
K[23, 5]=K[123]
K[23, 6]=K[124]
K[23, 7]=K[125]
K[23, 8]=K[126]
K[23, 9]=K[127]
K[25, 1]=K[128]
K[25, 2]=K[129]
K[25, 3]=K[130]
K[25, 4]=K[131]
K[25, 7]=K[132]
K[26, 1]=K[133]
K[26, 2]=K[134]
K[26, 3]=K[135]
K[26, 4]=K[136]
K[26, 7]=K[137]
K[26, 9]=K[138]
K[27, 2]=K[139]
K[27, 3]=K[140]
K[27, 4]=K[141]
K[27, 7]=K[142]
K[27, 9]=K[143]
K[28, 1]=K[144]
K[28, 2]=K[145]
K[28, 3]=K[146]
K[28, 4]=K[147]
K[28, 5]=K[148]
K[28, 6]=K[149]
K[28, 7]=K[150]
K[31, 1]=K[151]
K[31, 2]=K[152]
K[31, 3]=K[153]
K[31, 4]=K[154]
K[31, 7]=K[155]
K[35, 1]=K[156]
K[35, 7]=K[157]
K[36, 1]=K[158]
K[36, 2]=K[159]
K[36, 3]=K[160]
K[36, 7]=K[161]
K[37, 1]=K[162]
K[37, 2]=K[163]
K[37, 3]=K[164]
K[37, 4]=K[165]
K[37, 7]=K[166]
K[39, 1]=K[167]
K[39, 5]=K[168]
K[39, 7]=K[169]
K[40, 1]=K[170]
K[40, 2]=K[171]
```

```
K[40, 3]=K[172]
K[40, 5]=K[173]
K[40, 6]=K[174]
K[40, 7]=K[175]
K[42, 1]=K[176]
K[42, 5]=K[177]
K[42, 7]=K[178]
K[42, 8]=K[179]
K[45, 1]=K[180]
K[45, 2]=K[181]
K[45, 3]=K[182]
K[45, 7]=K[183]
K[46, 1]=K[184]
K[46, 2]=K[185]
K[46, 3]=K[186]
K[46, 7]=K[187]
K[46, 9]=K[188]
K[55, 1]=K[189]
K[55, 7]=K[190]
```

EK-4

```
g[1]=g[1]
g[2]=g[2]
g[3]=g[3]
g[4]=g[4]
g[5]=g[1]/3
g[6]=g[1]/3-2*g[3]
g[7]=g[4]/2
g[8]=g[3]/2
g[9]=g[2]/4
g[10]=g[3]/2-g[4]
g[11]=g[2]/4+g[3]/2
g[12]=g[1]/6-g[3]/2
g[13]=g[1]/6-g[3]
g[14]=g[1]/6+g[2]/4
g[15]=g[1]/6-(3*g[3])/2+g[4]
g[16]=g[2]/4-g[4]
g[17]=g[1]/6
g[18]=g[2]/3+g[3]/2
g[19]=-g[2]/6+g[3]/2
g[20]=g[2]/6-g[3]/4
g[21]=-g[2]/12+g[3]/4
g[22]=g[2]/6+g[3]/4
g[23]=-g[2]/6-g[3]/2
g[24]=g[3]/12-g[4]/6
g[25]=-g[2]/12+g[3]/6+g[4]/6
g[26]=g[2]/6-g[3]/3+g[4]/6
g[27]=(-5*g[3])/12+(5*g[4])/6
g[28]=-g[2]/12-g[3]/4
g[29]=-g[2]/12+g[3]/6-(5*g[4])/6
g[30]=-g[2]/6+g[3]/3+g[4]/3
g[31]=g[2]/3-(2*g[3])/3+g[4]/3
g[32]=g[2]/12-g[3]/6+g[4]/3
g[33]=g[3]/6-g[4]/3
g[34]=g[2]/6+g[3]
g[35]=(2*g[2])/3+g[3]
g[36]=g[2]/12+g[3]/2
g[37]=-g[2]/6+g[3]/2
g[38]=-g[3]/3+(2*g[4])/3
g[39]=-g[2]/6+g[3]/3-(2*g[4])/3
g[40]=g[2]/12-g[3]/6-(2*g[4])/3
g[41]=-g[2]/6-g[3]/2
g[42]=-g[3]/2
g[43]=-g[3]/4
g[44]=-g[3]/4+g[4]/2
g[45]=g[2]/4-g[3]/4
g[46]=-g[2]/4+g[3]/2-g[4]/2
g[47]=g[2]/4-g[3]/2-g[4]/2
g[48]=-g[4]/2
g[49]=-g[3]/4+g[4]/2
g[50]=g[3]/2
g[51]=g[2]/2+g[3]/2
g[52]=(3*g[3])/4
g[53]=g[2]/4+g[3]/4
g[54]=g[3]/4
```

```
g[55]=g[2]/2+(3*g[3])/2
g[56]=g[3]/4-g[4]/2
g[57]=-g[2]/4+g[3]/4
g[58]=g[2]/4-g[3]/2+g[4]/2
g[59]=-g[2]/4+g[3]/2+g[4]/2
g[60]=g[4]/2
g[61]=g[3]/4-g[4]/2
g[62]=(4*g[3])/9-g[4]/18
g[63]=(5*g[1])/36-g[2]/9-g[3]/6
g[64]=(5*g[1])/36-g[2]/9-(11*g[3])/18+g[4]/18
g[65]=(5*g[1])/18+g[2]/9-(4*g[3])/3
g[66]=(5*g[1])/36+g[2]/18-(2*g[3])/3
g[67]=(5*g[3])/18+(5*g[4])/18
g[68]=(5*g[1])/36+g[2]/18-(17*g[3])/18-(5*g[4])/18
g[69]=(5*g[1])/18+(4*g[2])/9+(2*g[3])/3
g[70]=(5*g[1])/36+(2*g[2])/9+g[3]/3
g[71]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/9-(2*g[3])/3
g[72]=g[1]/9+g[2]/9-g[3]/3
g[73]=(2*g[1])/9+(8*g[2])/9+(4*g[3])/3
g[74]=(7*g[3])/18-g[4]/9
g[75]=g[1]/9-(5*g[2])/36-g[3]/12
g[76]=(2*g[1])/9-g[2]/9-(5*g[3])/3
g[77]=g[1]/9+g[2]/36-g[3]/3
g[78]=(5*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[79]=g[1]/9+g[2]/9-(8*g[3])/9+(4*g[4])/9
g[80]=(5*g[3])/36+(7*g[4])/18
g[81]=g[1]/9+g[2]/36-(13*g[3])/18-(7*g[4])/18
g[82]=(11*g[3])/36+g[4]/18
g[83]=g[1]/9-(5*g[2])/36-(7*g[3])/18-g[4]/18
g[84]=g[1]/9-g[2]/18-g[3]/12
g[85]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/9+g[3]/3
g[86]=g[1]/9+g[2]/9+g[3]/6
g[87]=g[1]/6+g[2]/3
g[88]=g[1]/12+g[2]/6
g[89]=g[1]/6+(2*g[2])/3+g[3]
g[90]=g[3]/4
g[91]=g[1]/12-g[2]/4
g[92]=g[1]/12+g[2]/6+g[3]/4
g[93]=g[1]/12+g[2]/12-g[3]/4
g[94]=g[1]/12-g[3]/2
g[95]=g[1]/12-g[3]/2
g[96]=g[3]/4
g[97]=g[1]/12-g[2]/6
g[98]=g[1]/12+g[2]/12-g[3]/4
g[99]=g[4]/2
g[100]=g[1]/12-g[3]/2-g[4]/2
g[101]=g[1]/12-g[3]/2-g[4]/2
g[102]=g[4]/2
g[103]=g[1]/6-g[3]
g[104]=g[1]/12-g[3]/4
g[105]=g[1]/12+g[2]/3+g[3]/2
g[106]=g[1]/12-g[2]/12-(3*g[3])/4
g[107]=(5*g[3])/12-g[4]/3
g[108]=g[1]/12+g[2]/12-(2*g[3])/3+g[4]/3
g[109]=g[3]/6+g[4]/6
g[110]=g[1]/12-g[2]/6-g[3]/6-g[4]/6
g[111]=g[1]/12-g[2]/12
```

```
g[112]=g[1]/6
g[113]=g[1]/12
g[114]=g[3]/3-g[4]/6
g[115]=g[1]/12-g[2]/12-g[3]/3+g[4]/6
g[116]=g[1]/6-g[2]/3-2*g[3]
g[117]=g[1]/12+g[2]/6-(5*g[3])/6+g[4]/6
g[118]=g[1]/9+(4*g[2])/9+(2*g[3])/3
g[119]=g[1]/9+(4*g[2])/9+(2*g[3])/3
g[120]=g[3]/9+g[4]/9
g[121]=g[1]/18-(5*g[2])/18+(2*g[3])/9-g[4]/9
g[122]=g[1]/18+g[2]/18+g[3]/12
g[123]=g[1]/18+(5*g[2])/36+g[3]/12
g[124]=g[1]/18+g[2]/18-g[3]/6
g[125]=g[1]/18-g[2]/36-(5*g[3])/18-g[4]/9
g[126]=g[3]/9+g[4]/9
g[127]=g[1]/18-(7*g[2])/36+g[3]/12
g[128]=g[1]/18+g[2]/18-g[3]/6
g[129]=(5*g[3])/18-(2*g[4])/9
g[130]=g[1]/18+g[2]/18-(4*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[131]=g[1]/18+g[2]/18-(4*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[132]=(5*g[3])/18-(2*g[4])/9
g[133]=(5*g[3])/18-(2*g[4])/9
g[134]=g[1]/18+(2*g[2])/9+g[3]/3
g[135]=g[1]/18-g[2]/36-(5*g[3])/12
g[136]=(-5*g[3])/36+(11*g[4])/18
g[137]=g[1]/18-g[2]/36-(5*g[3])/18-(11*g[4])/18
g[138]=g[1]/18-g[2]/9+g[3]/12
g[139]=g[1]/9-(2*g[2])/9-g[3]/3
g[140]=g[1]/18-g[2]/9-g[3]/6
g[141]=(7*g[3])/36-g[4]/18
g[142]=g[1]/18-g[2]/9-g[3]/9+g[4]/18
g[143]=g[1]/9-(2*g[2])/9-(4*g[3])/3
g[144]=g[1]/18+(5*g[2])/36-(11*g[3])/18+g[4]/18
g[145]=g[1]/18-g[2]/9-(2*g[3])/3
g[146]=(4*g[3])/9+(4*g[4])/9
g[147]=(2*g[1])/9-g[2]/9-(2*g[3])/3
g[148]=(2*g[1])/9-g[2]/9-(10*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[149]=(4*g[1])/9+(4*g[2])/9-(4*g[3])/3
g[150]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/9-(2*g[3])/3
g[151]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/9+g[3]/3
g[152]=(4*g[1])/9+(16*g[2])/9+(8*g[3])/3
g[153]=(10*g[3])/9-(8*g[4])/9
g[154]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/9-(16*g[3])/9+(8*g[4])/9
g[155]=(4*g[1])/9+g[2]/9-(4*g[3])/3
g[156]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(2*g[3])/3
g[157]=(7*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[158]=(2*g[1])/9-(4*g[2])/9-(4*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[159]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(13*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[160]=(7*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[161]=g[1]/3+(2*g[2])/3
g[162]=g[1]/6+g[2]/3
g[163]=g[1]/3+g[2]/3-g[3]
g[164]=g[3]/4+g[4]/2
g[165]=g[1]/6-g[2]/4-g[3]/2-g[4]/2
g[166]=g[1]/6+g[2]/12-g[3]/2
g[167]=g[1]/6+g[2]/6-g[3]/2
g[168]=g[1]/6-g[3]
g[169]=g[1]/6-g[3]-g[4]/2
```

```
g[170]=g[3]/4+g[4]/2
g[171]=g[1]/6-g[2]/12-g[3]/4
g[172]=g[1]/3+(4*g[2])/3+2*g[3]
g[173]=g[1]/3-2*g[3]
g[174]=(2*g[3])/3-g[4]/3
g[175]=g[1]/6-g[2]/6-(2*g[3])/3+g[4]/3
g[176]=g[1]/6-(3*g[3])/4
g[177]=g[1]/6+(5*g[2])/12+g[3]/4
g[178]=g[1]/6+g[2]/6-g[3]/2
g[179]=g[1]/6+g[2]/12-(7*g[3])/6+g[4]/3
g[180]=(2*g[3])/3-g[4]/3
g[181]=g[1]/6+g[2]/12+g[3]/4
g[182]=(5*g[3])/6-(2*g[4])/3
g[183]=g[1]/6+g[2]/6-(4*g[3])/3+(2*g[4])/3
g[184]=(7*g[3])/12-g[4]/6
g[185]=g[1]/6-g[2]/12-(5*g[3])/6+g[4]/6
g[186]=g[1]/6-g[2]/6-(3*g[3])/4
g[187]=g[1]/3-g[3]
g[188]=g[1]/6-g[3]/2
g[189]=g[1]/6-g[2]/2
g[190]=g[3]/2
g[191]=g[1]/6-g[3]
g[192]=g[3]/2
g[193]=g[1]/18+(2*g[2])/9+g[3]/3
g[194]=g[1]/36-g[2]/18-g[3]/12
g[195]=g[1]/36+g[2]/36-g[3]/12
g[196]=(5*g[3])/36-g[4]/9
g[197]=g[1]/36+g[2]/36-(2*g[3])/9+g[4]/9
g[198]=g[1]/36+g[2]/9+g[3]/6
g[199]=g[1]/36+g[2]/36-g[3]/12
g[200]=(5*g[3])/36-g[4]/9
g[201]=g[1]/36+g[2]/36-(2*g[3])/9+g[4]/9
g[202]=g[1]/36-(5*g[2])/36+g[3]/6
g[203]=g[1]/18-(4*g[2])/9-(2*g[3])/3
g[204]=g[3]/18+g[4]/18
g[205]=g[1]/36-(5*g[2])/36+g[3]/9-g[4]/18
g[206]=g[1]/18-g[2]/9-(2*g[3])/3
g[207]=g[1]/36+g[2]/9-(7*g[3])/18-g[4]/18
g[208]=g[1]/36-g[2]/18-g[3]/3
g[209]=(-5*g[3])/18+(13*g[4])/18
g[210]=g[1]/36-g[2]/18-g[3]/18-(13*g[4])/18
g[211]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/9-(2*g[3])/3
g[212]=(7*g[3])/18-g[4]/9
g[213]=g[1]/9+g[2]/36-g[3]/3
g[214]=g[1]/9-g[2]/18-(5*g[3])/6
g[215]=(2*g[1])/9+(8*g[2])/9+(4*g[3])/3
g[216]=(7*g[3])/18-g[4]/9
g[217]=g[1]/9-(2*g[2])/9-(2*g[3])/9+g[4]/9
g[218]=g[1]/9+(5*g[2])/18+g[3]/6
g[219]=g[1]/9+g[2]/9-g[3]/3
g[220]=g[1]/9+g[2]/36-(13*g[3])/18+g[4]/9
g[221]=(7*g[3])/18-g[4]/9
g[222]=g[1]/9-g[2]/18+g[3]/6
g[223]=(5*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[224]=g[1]/9+g[2]/9-(8*g[3])/9+(4*g[4])/9
g[225]=g[1]/9+g[2]/9-(8*g[3])/9+(4*g[4])/9
g[226]=(5*g[3])/9-(4*g[4])/9
```

```
g[227]=g[1]/9-(5*g[2])/36-g[3]/3
g[228]=(2*g[1])/9-g[2]/9-(2*g[3])/3
g[229]=g[1]/9-g[2]/18-g[3]/3
g[230]=g[3]/18+(5*g[4])/9
g[231]=g[1]/9-(5*g[2])/36-(7*g[3])/18-(5*g[4])/9
g[232]=(2*g[1])/9-(4*g[2])/9-(8*g[3])/3
g[233]=g[1]/9+g[2]/9-(8*g[3])/9-(5*g[4])/9
g[234]=g[1]/9-(5*g[2])/9+(4*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[235]=(2*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[236]=g[1]/9-g[2]/18-(5*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[237]=(2*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[238]=g[3]-g[4]/2
g[239]=g[1]/4-g[3]/2
g[240]=g[1]/4-(3*g[3])/2+g[4]/2
g[241]=g[1]/2+g[2]
g[242]=g[1]/4+g[2]/2
g[243]=g[1]/2-2*g[3]
g[244]=g[1]/4-g[3]
g[245]=g[3]/2+g[4]/2
g[246]=g[1]/4-g[2]/2-g[3]/2-g[4]/2
g[247]=g[1]/4-(3*g[3])/2-g[4]/2
g[248]=g[3]/2+g[4]/2
g[249]=(5*g[2])/18+(23*g[3])/36-g[4]/36
g[250]=(5*g[2])/18-(25*g[3])/36+(5*g[4])/36
g[251]=(2*g[2])/9+g[3]/3
g[252]=(2*g[2])/9-(13*g[3])/18-g[4]/18
g[253]=(2*g[2])/9+(7*g[3])/9-g[4]/18
g[254]=(2*g[2])/9-(4*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[255]=g[2]/6+g[3]/36+g[4]/36
g[256]=g[2]/6-(3*g[3])/4-g[4]/4
g[257]=g[2]/6+(17*g[3])/36-g[4]/36
g[258]=g[2]/6-(17*g[3])/36+g[4]/36
g[259]=g[2]/6+(11*g[3])/12-g[4]/12
g[260]=g[2]/6-(7*g[3])/36+(11*g[4])/36
g[261]=g[2]/9-(5*g[3])/18+g[4]/18
g[262]=g[2]/9+g[3]/6
g[263]=g[2]/9-g[3]/2-g[4]/6
g[264]=g[2]/9+(11*g[3])/18-g[4]/18
g[265]=g[2]/9-(2*g[3])/9+g[4]/9
g[266]=g[2]/9+g[3]/18+(7*g[4])/18
g[267]=g[2]/18-(5*g[3])/36+g[4]/36
g[268]=g[2]/18+(11*g[3])/36-g[4]/36
g[269]=g[2]/18-g[3]/4-g[4]/12
g[270]=g[2]/18+g[3]/36+(7*g[4])/36
g[271]=g[2]/9+(5*g[3])/18+g[4]/9
g[272]=g[2]/9-(7*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[273]=g[2]/9-g[3]/2+g[4]/3
g[274]=g[2]/9+(19*g[3])/18-g[4]/9
g[275]=g[2]/12+g[3]/18+g[4]/18
g[276]=g[2]/12-g[3]
g[277]=g[2]/12+(13*g[3])/36+g[4]/9
g[278]=g[2]/12-(4*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[279]=g[2]/12-(4*g[3])/9+g[4]/18
g[280]=g[2]/12+(13*g[3])/12-g[4]/6
g[281]=g[2]/12+(25*g[3])/36-g[4]/18
g[282]=g[2]/12-(11*g[3])/36+(4*g[4])/9
g[283]=g[2]/18-g[3]/6
```

```
g[284]=g[2]/18+(5*g[3])/36+g[4]/18
g[285]=g[2]/18-(2*g[3])/3
g[286]=g[2]/18+(4*g[3])/9+g[4]/9
g[287]=g[2]/18-g[3]/9-(4*g[4])/9
g[288]=g[2]/18-(7*g[3])/18-(2*g[4])/9
g[289]=g[2]/18+(13*g[3])/18-g[4]/9
g[290]=g[2]/18-g[3]/9+(5*g[4])/9
g[291]=g[2]/18+g[3]/3
g[292]=g[2]/18-g[3]/4+g[4]/6
g[293]=g[2]/36-g[3]/12
g[294]=g[2]/36+(2*g[3])/9+g[4]/18
g[295]=g[2]/36-g[3]/3
g[296]=g[2]/36+(2*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[297]=g[2]/36+(13*g[3])/36-g[4]/18
g[298]=g[2]/36-g[3]/18+(5*g[4])/18
g[299]=g[2]/36-g[3]/36+g[4]/18
g[300]=g[2]/36-(7*g[3])/36-g[4]/9
g[301]=g[3]/12+g[4]/12
g[302]=(-5*g[3])/4+g[4]/4
g[303]=(-5*g[3])/12-(5*g[4])/12
g[304]=(7*g[3])/12+g[4]/12
g[305]=(-5*g[3])/12+(7*g[4])/12
g[306]=(5*g[3])/4-g[4]/4
g[307]=-g[3]/18-g[4]/18
g[308]=g[3]/9+g[4]/9
g[309]=(-5*g[3])/6+g[4]/6
g[310]=(-5*g[3])/9-g[4]/18
g[311]=(5*g[3])/9+g[4]/18
g[312]=(11*g[3])/36+g[4]/18
g[313]=(-5*g[3])/18+(2*g[4])/9
g[314]=(5*g[3])/6-g[4]/6
g[315]=(-5*g[3])/36-(7*g[4])/18
g[316]=(-5*g[3])/18+(13*g[4])/18
g[317]=-g[2]/18+g[3]/18-g[4]/9
g[318]=-g[2]/18-(13*g[3])/18+g[4]/9
g[319]=-g[2]/18+(5*g[3])/18+g[4]/9
g[320]=-g[2]/18-g[3]/6-g[4]/3
g[321]=-g[2]/18+(2*g[3])/3
g[322]=-g[2]/18-(4*g[3])/9+(8*g[4])/9
g[323]=(2*g[2])/9-(2*g[3])/9+(4*g[4])/9
g[324]=(2*g[2])/9-(14*g[3])/9-(8*g[4])/9
g[325]=(2*g[2])/9+(19*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[326]=g[2]/6-(7*g[3])/18+g[4]/9
g[327]=g[2]/6-2*g[3]
g[328]=g[2]/6+g[3]/18+(5*g[4])/9
g[329]=g[2]/6-(8*g[3])/9-(8*g[4])/9
g[330]=g[2]/6+(25*g[3])/18-g[4]/9
g[331]=g[2]/6+(13*g[3])/6-g[4]/3
g[332]=g[2]/9-(5*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[333]=g[2]/9-g[3]/9+(2*g[4])/9
g[334]=g[2]/9-(4*g[3])/3
g[335]=g[2]/9+g[3]/3+(2*g[4])/3
g[336]=g[2]/9-(2*g[3])/9-(8*g[4])/9
g[337]=g[2]/9+(2*g[3])/3
g[338]=g[2]/9+(13*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[339]=-g[3]/3-g[4]/3
g[340]=(-5*g[3])/2+g[4]/2
```

```
g[341]=(-5*g[3])/6-(5*g[4])/6
g[342]=(7*g[3])/6+g[4]/6
g[343]=g[3]/6+(2*g[4])/3
g[344]=(5*g[3])/2-g[4]/2
g[345]=(5*g[3])/36+(5*g[4])/36
g[346]=(5*g[3])/18+g[4]/36
g[347]=g[3]/36+g[4]/36
g[348]=(-5*g[3])/36-(5*g[4])/36
g[349]=(5*g[3])/12-g[4]/12
g[350]=(-5*g[3])/36+(13*g[4])/36
g[351]=-g[3]/36-(5*g[4])/18
g[352]=(5*g[3])/18+(7*g[4])/9
g[353]=(11*g[3])/18+g[4]/9
g[354]=g[3]/36+(5*g[4])/18
g[355]=(5*g[3])/3-g[4]/3
g[356]=(10*g[3])/9+g[4]/9
g[357]=(-3*g[3])/4-(3*g[4])/4
g[358]=(3*g[3])/4+(3*g[4])/4
g[359]=(15*g[3])/4-(3*g[4])/4
g[360]=(25*g[1])/72-(10*g[2])/27-(35*g[3])/27+(5*g[4])/54
g[361]=(25*g[1])/72+(20*g[2])/27+(34*g[3])/27-g[4]/54
g[362]=(5*g[1])/18-(11*g[2])/27-(41*g[3])/54+g[4]/54
g[363]=(5*g[1])/18+(22*g[2])/27+(41*g[3])/27-g[4]/27
g[364]=(5*g[1])/18-(7*g[2])/54-(157*g[3])/108+(17*g[4])/108
g[365]=(5*g[1])/18+(29*g[2])/54+(95*g[3])/108-g[4]/108
g[366]=(5*g[1])/24-(4*g[2])/9-(2*g[3])/9-g[4]/18
g[367]=g[1]/6+g[2]/27-(5*g[3])/54+g[4]/54
g[368]=g[1]/12+(7*g[2])/54+(13*g[3])/108+g[4]/108
g[369]=g[1]/12-(11*g[2])/54+(5*g[3])/54-g[4]/54
g[370]=g[1]/12+g[2]/54-(17*g[3])/27-(2*g[4])/27
g[371]=g[1]/12+(5*g[2])/27+(23*g[3])/54-g[4]/54
g[372]=g[1]/12+(2*g[2])/27-(65*g[3])/108+(13*g[4])/108
g[373]=g[1]/12-(4*g[2])/27-(17*g[3])/108-(11*g[4])/108
g[374]=g[1]/12-(5*g[2])/54-(23*g[3])/108+g[4]/108
g[375]=(7*g[1])/24-g[2]/3-(2*g[3])/3-g[4]/6
g[376]=(7*g[1])/24+g[2]/3+g[3]/2
g[377]=(7*g[1])/24-(29*g[3])/18-g[4]/9
g[378]=(7*g[1])/24-(4*g[3])/9+g[4]/18
g[379]=(7*g[1])/24+g[2]/3-2*g[3]+g[4]/2
g[380]=(7*g[1])/36-g[2]/3+g[3]/18+g[4]/18
g[381]=(7*g[1])/36+g[2]/9-(5*g[3])/18+g[4]/18
g[382]=(7*g[1])/36-g[2]/6-(25*g[3])/36-(7*g[4])/36
g[383]=(7*g[1])/36+(2*g[2])/9+g[3]/3
g[384]=(7*g[1])/36+g[2]/9-(25*g[3])/18-g[4]/18
g[385]=(7*g[1])/36-g[2]/18-(11*g[3])/12-g[4]/12
g[386]=(7*g[1])/36-g[2]/18-(11*g[3])/36+g[4]/36
g[387]=(7*g[1])/36+(2*g[2])/9-(4*g[3])/3+g[4]/3
g[388]=(7*g[1])/72+g[2]/18-(5*g[3])/36+g[4]/36
g[389]=(7*g[1])/72-g[2]/6+g[3]/36+g[4]/36
g[390]=(7*g[1])/72-g[2]/9-(2*g[3])/9-g[4]/18
g[391]=(7*g[1])/72-g[2]/9-g[3]/6
g[392]=(7*g[1])/72+g[2]/9-(2*g[3])/3+g[4]/6
g[393]=(2*g[1])/9-(7*g[2])/27-(2*g[3])/27+(4*g[4])/27
g[394]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/27-(5*g[3])/27+g[4]/27
g[395]=(2*g[1])/9-g[2]/27-(29*g[3])/27-(5*g[4])/27
g[396]=(2*g[1])/9-(4*g[2])/27-(14*g[3])/27+g[4]/27
```

```
g[397]=(2*g[1])/9+(5*g[2])/27-(41*g[3])/27+g[4]/27
g[398]=g[1]/9-g[2]/54-(43*g[3])/108+(5*g[4])/108
g[399]=g[1]/9-(7*g[2])/54-g[3]/27+(2*g[4])/27
g[400]=g[1]/9+g[2]/27-(5*g[3])/54+g[4]/54
g[401]=g[1]/9+g[2]/27-(85*g[3])/108-(19*g[4])/108
g[402]=g[1]/9-(2*g[2])/27-(31*g[3])/108-g[4]/108
g[403]=g[1]/9-(7*g[2])/54-(13*g[3])/108-g[4]/108
g[404]=g[1]/9+(5*g[2])/54-(41*g[3])/54+g[4]/54
g[405]=(4*g[1])/9-(8*g[2])/27-(46*g[3])/27-(16*g[4])/27
g[406]=(4*g[1])/9+g[2]/27-(173*g[3])/54+(11*g[4])/27
g[407]=(4*g[1])/9+(16*g[2])/27+(56*g[3])/27-(4*g[4])/27
g[408]=(4*g[1])/9+(7*g[2])/27-(59*g[3])/54+(5*g[4])/27
g[409]=g[1]/3-(5*g[2])/18-(8*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[410]=g[1]/3+(5*g[2])/18-(11*g[3])/18+(2*g[4])/9
g[411]=g[1]/3-g[2]/6-(5*g[3])/3-(2*g[4])/3
g[412]=g[1]/3-(41*g[3])/18+(2*g[4])/9
g[413]=g[1]/3+(4*g[2])/9+(14*g[3])/9-g[4]/9
g[414]=g[1]/3+g[2]/6-(8*g[3])/9+g[4]/9
g[415]=g[1]/3+g[2]/9-(25*g[3])/9+(5*g[4])/9
g[416]=(2*g[1])/9-(7*g[2])/27-(2*g[3])/27+(4*g[4])/27
g[417]=(2*g[1])/9+(5*g[2])/27-(11*g[3])/27+(4*g[4])/27
g[418]=(2*g[1])/9-(4*g[2])/27-(23*g[3])/27-(8*g[4])/27
g[419]=(2*g[1])/9-g[2]/27-(44*g[3])/27-(20*g[4])/27
g[420]=(2*g[1])/9-g[2]/27-(73*g[3])/54+g[4]/27
g[421]=(2*g[1])/9+(8*g[2])/27+(28*g[3])/27-(2*g[4])/27
g[422]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/27-(37*g[3])/54+g[4]/27
g[423]=(2*g[1])/9+(2*g[2])/27-(50*g[3])/27+(10*g[4])/27
g[424]=g[1]/9+(5*g[2])/54-(11*g[3])/54+(2*g[4])/27
g[425]=g[1]/9-(7*g[2])/54-g[3]/27+(2*g[4])/27
g[426]=g[1]/9-g[2]/54-(22*g[3])/27-(10*g[4])/27
g[427]=g[1]/9-(2*g[2])/27-(23*g[3])/54-(4*g[4])/27
g[428]=g[1]/9+(4*g[2])/27+(14*g[3])/27-g[4]/27
g[429]=g[1]/9-g[2]/54-(13*g[3])/27-g[4]/27
g[430]=g[1]/9+g[2]/27-(25*g[3])/27+(5*g[4])/27
g[431]=g[1]/3-g[2]/6-(5*g[3])/6+g[4]/6
g[432]=g[1]/3+g[2]/6-g[3]/4+g[4]/4
g[433]=g[1]/3-(77*g[3])/36-(5*g[4])/36
g[434]=g[1]/3+g[2]/6+g[3]
g[435]=g[1]/3-(31*g[3])/18-(13*g[4])/18
g[436]=g[1]/3+g[2]/6-(11*g[3])/4+(3*g[4])/4
g[437]=g[1]/3-(35*g[3])/36+g[4]/36
g[438]=(2*g[1])/9-g[2]/6+g[3]/9+g[4]/9
g[439]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(11*g[3])/18+g[4]/18
g[440]=(2*g[1])/9-g[2]/12-(8*g[3])/9+g[4]/9
g[441]=(2*g[1])/9+g[2]/9-g[3]/6+g[4]/6
g[442]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(13*g[3])/9-(7*g[4])/9
g[443]=(2*g[1])/9-g[2]/36-(23*g[3])/18-g[4]/9
g[444]=(2*g[1])/9+g[2]/9+(2*g[3])/3
g[445]=(2*g[1])/9-g[2]/36-g[3]-g[4]/3
g[446]=(2*g[1])/9+g[2]/9-(11*g[3])/6+g[4]/2
g[447]=(2*g[1])/9-g[2]/36-(2*g[3])/3
g[448]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(31*g[3])/18-g[4]/18
g[449]=g[1]/9+g[2]/36-(11*g[3])/36+g[4]/36
g[450]=g[1]/9-g[2]/12+g[3]/18+g[4]/18
g[451]=g[1]/9-(17*g[3])/18+g[4]/18
g[452]=g[1]/9+g[2]/18-g[3]/12+g[4]/12
g[453]=g[1]/9+g[2]/36-(13*g[3])/18-(7*g[4])/18
```

```
g[454]=g[1]/9-g[2]/18-(5*g[3])/12-g[4]/12
g[455]=g[1]/9+g[2]/18+g[3]/3
g[456]=g[1]/9-g[2]/18-(5*g[3])/18+g[4]/18
g[457]=g[1]/9+g[2]/18-(11*g[3])/12+g[4]/4
g[458]=g[1]/9-g[2]/18-(13*g[3])/36-g[4]/36
g[459]=g[1]/9+g[2]/36-(31*g[3])/36-g[4]/36
g[460]=(2*g[1])/9-(2*g[2])/27+(8*g[3])/27+(2*g[4])/27
g[461]=(2*g[1])/9-g[2]/54-(10*g[3])/27+(2*g[4])/27
g[462]=(2*g[1])/9-g[2]/54-(65*g[3])/54-(7*g[4])/27
g[463]=(2*g[1])/9-(2*g[2])/27+(8*g[3])/27+(2*g[4])/27
g[464]=(2*g[1])/9+g[2]/27-(28*g[3])/27+(2*g[4])/27
g[465]=(2*g[1])/9+(5*g[2])/54-(46*g[3])/27+(2*g[4])/27
g[466]=(2*g[1])/9-(7*g[2])/54-(35*g[3])/54-g[4]/27
g[467]=(2*g[1])/9+(4*g[2])/27-(34*g[3])/27-(22*g[4])/27
g[468]=(3*g[1])/8-g[3]+g[4]/2
g[469]=(3*g[1])/8-(9*g[3])/4-(3*g[4])/4
g[470]=(3*g[1])/8+g[3]/4+g[4]/4
g[471]=(3*g[1])/8-(7*g[3])/2+g[4]
g[472]=(3*g[1])/8-(3*g[3])/2
g[473]=g[1]/4+g[3]/6+g[4]/6
g[474]=g[1]/4-(17*g[3])/18+g[4]/18
g[475]=g[1]/4-(13*g[3])/12+(5*g[4])/12
g[476]=g[1]/4-(49*g[3])/36-(13*g[4])/36
g[477]=g[1]/4+g[3]/6+g[4]/6
g[478]=g[1]/4-(7*g[3])/3+(2*g[4])/3
g[479]=g[1]/4-(37*g[3])/36-g[4]/36
g[480]=g[1]/4-(16*g[3])/9-(7*g[4])/9
g[481]=(2*g[1])/9+g[2]/9+(2*g[3])/3
g[482]=(2*g[1])/9-g[2]/9-(5*g[3])/9+g[4]/9
g[483]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(7*g[3])/6
g[484]=(2*g[1])/9-g[2]/6+g[3]/9+g[4]/9
g[485]=(2*g[1])/9-(17*g[3])/9+g[4]/9
g[486]=(2*g[1])/9+g[2]/9-g[3]+g[4]/3
g[487]=(2*g[1])/9+g[2]/18-(13*g[3])/9-(7*g[4])/9
g[488]=(2*g[1])/9-g[2]/9-(7*g[3])/9-g[4]/9
g[489]=(2*g[1])/9+(8*g[2])/27+(28*g[3])/27-(2*g[4])/27
g[490]=(2*g[1])/9+(7*g[2])/54-(61*g[3])/54+(7*g[4])/27
g[491]=(2*g[1])/9-(7*g[2])/27-(2*g[3])/27+(4*g[4])/27
g[492]=(2*g[1])/9-g[2]/27-(44*g[3])/27-(20*g[4])/27
g[493]=(2*g[1])/9-(5*g[2])/54-(49*g[3])/54-(5*g[4])/27
g[494]=(8*g[1])/9-(16*g[2])/27-(92*g[3])/27-(32*g[4])/27
g[495]=(8*g[1])/9+(32*g[2])/27+(112*g[3])/27-(8*g[4])/27
g[496]=(8*g[1])/9+(8*g[2])/27-(116*g[3])/27+(16*g[4])/27
g[497]=(2*g[1])/3-(5*g[2])/9-(16*g[3])/9-(4*g[4])/9
g[498]=(2*g[1])/3+(7*g[2])/18-(61*g[3])/18+(7*g[4])/9
g[499]=(2*g[1])/3-g[2]/3-(10*g[3])/3-(4*g[4])/3
g[500]=(2*g[1])/3+(8*g[2])/9+(28*g[3])/9-(2*g[4])/9
g[501]=(2*g[1])/3+g[2]/6-(19*g[3])/6+g[4]/3
g[502]=(4*g[1])/9-(14*g[2])/27-(4*g[3])/27+(8*g[4])/27
g[503]=(4*g[1])/9+(7*g[2])/27-(61*g[3])/27+(14*g[4])/27
g[504]=(4*g[1])/9-(8*g[2])/27-(46*g[3])/27-(16*g[4])/27
g[505]=(4*g[1])/9-(2*g[2])/27-(88*g[3])/27-(40*g[4])/27
g[506]=(4*g[1])/9+(16*g[2])/27+(56*g[3])/27-(4*g[4])/27
g[507]=(4*g[1])/9+g[2]/27-(55*g[3])/27+(2*g[4])/27
g[508]=(2*g[1])/3-g[2]/3-(5*g[3])/3+g[4]/3
g[509]=(2*g[1])/3+g[2]/3-3*g[3]+g[4]
g[510]=(2*g[1])/3+g[2]/3+2*g[3]
```

```
g[511]=(2*g[1])/3-(31*g[3])/9-(13*g[4])/9
g[512]=(2*g[1])/3-(28*g[3])/9-g[4]/9
g[513]=(4*g[1])/9-g[2]/3+(2*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[514]=(4*g[1])/9+g[2]/9-(7*g[3])/3
g[515]=(4*g[1])/9-g[2]/6-(16*g[3])/9+(2*g[4])/9
g[516]=(4*g[1])/9+(2*g[2])/9-2*g[3]+(2*g[4])/3
g[517]=(4*g[1])/9+g[2]/9-(26*g[3])/9-(14*g[4])/9
g[518]=(4*g[1])/9+(2*g[2])/9+(4*g[3])/3
g[519]=(4*g[1])/9-g[2]/18-2*g[3]-(2*g[4])/3
g[520]=(4*g[1])/9-g[2]/18-(35*g[3])/18-g[4]/9
g[521]=(3*g[1])/4-2*g[3]+g[4]
g[522]=(3*g[1])/4+g[3]/2+g[4]/2
g[523]=(3*g[1])/4-(9*g[3])/2-(3*g[4])/2
g[524]=(3*g[1])/4-(13*g[3])/4+(5*g[4])/4
g[525]=(3*g[1])/4-(15*g[3])/4-(3*g[4])/4
g[526]=g[1]/8-g[2]/27-(19*g[3])/54+g[4]/27
g[527]=g[1]/8-(4*g[2])/27-(2*g[3])/27-g[4]/54
g[528]=g[1]/8+(2*g[2])/27-(23*g[3])/27-(7*g[4])/54
g[529]=g[1]/9-g[2]/27-(11*g[3])/27-g[4]/54
g[530]=g[1]/9-g[2]/108-(5*g[3])/27+g[4]/27
g[531]=g[1]/9-g[2]/27+(4*g[3])/27+g[4]/27
g[532]=g[1]/9+(5*g[2])/108-(23*g[3])/27+g[4]/27
g[533]=g[1]/9-(5*g[2])/54-(13*g[3])/54-g[4]/54
g[534]=g[1]/9+(2*g[2])/27-(17*g[3])/27-(11*g[4])/27
g[535]=g[1]/9+g[2]/54-(43*g[3])/54-(13*g[4])/54
g[536]=g[1]/8-(17*g[3])/36+g[4]/36
g[537]=g[1]/8+g[3]/12+g[4]/12
g[538]=g[1]/8-(7*g[3])/6+g[4]/3
g[539]=g[1]/8-(5*g[3])/9-g[4]/18
g[540]=g[1]/8-(8*g[3])/9-(7*g[4])/18
g[541]=(4*g[1])/9+(2*g[2])/27-(56*g[3])/27+(4*g[4])/27
g[542]=(4*g[1])/9-(4*g[2])/27+(16*g[3])/27+(4*g[4])/27
g[543]=(4*g[1])/9-(4*g[2])/27-(50*g[3])/27-(8*g[4])/27
g[544]=(4*g[1])/9+(8*g[2])/27-(68*g[3])/27-(44*g[4])/27
g[545]=g[1]/2-(49*g[3])/18-(13*g[4])/18
g[546]=g[1]/2+g[3]/3+g[4]/3
g[547]=g[1]/2-(13*g[3])/6+(5*g[4])/6
g[548]=g[1]/2-(43*g[3])/18-(7*g[4])/18
g[549]=g[1]/2-(32*g[3])/9-(14*g[4])/9
g[550]=(9*g[1])/8-3*g[3]+(3*g[4])/2
g[551]=(9*g[1])/8-6*g[3]-(3*g[4])/2
g[552]=(625*g[1])/432+(250*g[2])/81+(125*g[3])/24+(25*g[4])/32
g[553]=(125*g[1])/108+(200*g[2])/81+(25*g[3])/6+(5*g[4])/81
g[554]=(125*g[1])/144+(50*g[2])/27+(25*g[3])/8+(5*g[4])/108
g[555]=(125*g[1])/216+(100*g[2])/81+(25*g[3])/12+(5*g[4])/162
g[556]=(125*g[1])/432+(50*g[2])/81+(25*g[3])/24+(5*g[4])/324
g[557]=(65*g[1])/54+(136*g[2])/81+(7*g[3])/3-(2*g[4])/81
g[558]=(65*g[1])/72+(34*g[2])/27+(7*g[3])/4-g[4]/54
g[559]=(65*g[1])/108+(68*g[2])/81+(7*g[3])/6-g[4]/81
g[560]=(65*g[1])/216+(34*g[2])/81+(7*g[3])/12-g[4]/162
g[561]=(15*g[1])/16+(2*g[2])/3+(3*g[3])/8-g[4]/12
g[562]=(5*g[1])/8+(4*g[2])/9+g[3]/4-g[4]/18
g[563]=(5*g[1])/16+(2*g[2])/9+g[3]/8-g[4]/36
g[564]=(35*g[1])/54+(4*g[2])/81-(2*g[3])/3-(8*g[4])/81
g[565]=(35*g[1])/108+(2*g[2])/81-g[3]/3-(4*g[4])/81
g[566]=(145*g[1])/432-(14*g[2])/81-(19*g[3])/24-(23*g[4])/324
g[567]=(38*g[1])/27+(92*g[2])/81-g[3]/3-(22*g[4])/81
```

```
g[568]=(19*g[1])/18+(23*g[2])/27-g[3]/4-(11*g[4])/54
g[569]=(19*g[1])/27+(46*g[2])/81-g[3]/6-(11*g[4])/81
g[570]=(19*g[1])/54+(23*g[2])/81-g[3]/12-(11*g[4])/162
g[571]=g[1]+g[2]/3-(3*g[3])/4-g[4]/6
g[572]=(2*g[1])/3+(2*g[2])/9-g[3]/2-g[4]/9
g[573]=g[1]/3+g[2]/9-g[3]/4-g[4]/18
g[574]=(17*g[1])/27-(10*g[2])/81-(5*g[3])/6-(7*g[4])/81
g[575]=(17*g[1])/54-(5*g[2])/81-(5*g[3])/12-(7*g[4])/162
g[576]=(8*g[1])/27-(19*g[2])/81-(7*g[3])/12-(5*g[4])/162
g[577]=(17*g[1])/16-(15*g[3])/8-g[4]/4
g[578]=(17*g[1])/24-(5*g[3])/4-g[4]/6
g[579]=(17*g[1])/48-(5*g[3])/8-g[4]/12
g[580]=(11*g[1])/18-(8*g[2])/27-g[3]-(2*g[4])/27
g[581]=(11*g[1])/36-(4*g[2])/27-g[3]/2-g[4]/27
g[582]=(37*g[1])/144-(8*g[2])/27-(3*g[3])/8+g[4]/108
g[583]=(16*g[1])/27-(38*g[2])/81-(7*g[3])/6-(5*g[4])/81
g[584]=(8*g[1])/27-(19*g[2])/81-(7*g[3])/12-(5*g[4])/162
g[585]=(47*g[1])/216-(29*g[2])/81-g[3]/6+(4*g[4])/81
g[586]=(77*g[1])/432-(34*g[2])/81+g[3]/24+(29*g[4])/324
g[587]=(52*g[1])/27+(88*g[2])/81-(14*g[3])/3-(68*g[4])/81
g[588]=(13*g[1])/9+(22*g[2])/27-(7*g[3])/2-(17*g[4])/27
g[589]=(26*g[1])/27+(44*g[2])/81-(7*g[3])/3-(34*g[4])/81
g[590]=(13*g[1])/27+(22*g[2])/81-(7*g[3])/6-(17*g[4])/81
g[591]=(4*g[1])/3+g[2]/3-(7*g[3])/2-g[4]/3
g[592]=(8*g[1])/9+(2*g[2])/9-(7*g[3])/3-(2*g[4])/9
g[593]=(4*g[1])/9+g[2]/9-(7*g[3])/6-g[4]/9
g[594]=(22*g[1])/27-(8*g[2])/81-(7*g[3])/3-(2*g[4])/81
g[595]=(11*g[1])/27-(4*g[2])/81-(7*g[3])/6-g[4]/81
g[596]=(10*g[1])/27-(17*g[2])/81-(7*g[3])/6+(7*g[4])/81
g[597]=(11*g[1])/8-(9*g[3])/2
g[598]=(11*g[1])/12-3*g[3]
g[599]=(11*g[1])/24-(3*g[3])/2
g[600]=(7*g[1])/9-(7*g[2])/27-(7*g[3])/3+(2*g[4])/27
g[601]=(7*g[1])/18-(7*g[2])/54-(7*g[3])/6+g[4]/27
g[602]=(23*g[1])/72-(7*g[2])/27-(5*g[3])/6+(2*g[4])/27
g[603]=(20*g[1])/27-(34*g[2])/81-(7*g[3])/3+(14*g[4])/81
g[604]=(10*g[1])/27-(17*g[2])/81-(7*g[3])/6+(7*g[4])/81
g[605]=(29*g[1])/108-(25*g[2])/81-g[3]/2+(5*g[4])/81
g[606]=(47*g[1])/216-(29*g[2])/81-g[3]/6+(4*g[4])/81
g[607]=(27*g[1])/16-(57*g[3])/8+g[4]/4
g[608]=(9*g[1])/8-(19*g[3])/4+g[4]/6
g[609]=(9*g[1])/16-(19*g[3])/8+g[4]/12
g[610]=(17*g[1])/18-(2*g[2])/9-(11*g[3])/3+(2*g[4])/9
g[611]=(17*g[1])/36-g[2]/9-(11*g[3])/6+g[4]/9
g[612]=(55*g[1])/144-(2*g[2])/9-(31*g[3])/24+(5*g[4])/36
g[613]=(8*g[1])/9-(10*g[2])/27-(7*g[3])/2+(11*g[4])/27
g[614]=(4*g[1])/9-(5*g[2])/27-(7*g[3])/4+(11*g[4])/54
g[615]=(23*g[1])/72-(7*g[2])/27-(5*g[3])/6+(2*g[4])/27
g[616]=(37*g[1])/144-(8*g[2])/27-(3*g[3])/8+g[4]/108
g[617]=(28*g[1])/27-(26*g[2])/81-(14*g[3])/3+(52*g[4])/81
g[618]=(14*g[1])/27-(13*g[2])/81-(7*g[3])/3+(26*g[4])/81
g[619]=(10*g[1])/27-(17*g[2])/81-(7*g[3])/6+(7*g[4])/81
g[620]=(8*g[1])/27-(19*g[2])/81-(7*g[3])/12-(5*g[4])/162
g[621]=(145*g[1])/432-(14*g[2])/81-(19*g[3])/24-(23*g[4])/324
g[622]=(80*g[1])/27+(80*g[2])/81-(40*g[3])/3-(160*g[4])/81
g[623]=(20*g[1])/9+(20*g[2])/27-10*g[3]-(40*g[4])/27
g[624]=(40*g[1])/27+(40*g[2])/81-(20*g[3])/3-(80*g[4])/81
```

```
g[625]=(20*g[1])/27+(20*g[2])/81-(10*g[3])/3-(40*g[4])/81
g[626]=2*g[1]+g[2]/3-9*g[3]-(2*g[4])/3
g[627]=(4*g[1])/3+(2*g[2])/9-6*g[3]-(4*g[4])/9
g[628]=(2*g[1])/3+g[2]/9-3*g[3]-(2*g[4])/9
g[629]=(32*g[1])/27-(4*g[2])/81-(16*g[3])/3+(8*g[4])/81
g[630]=(16*g[1])/27-(2*g[2])/81-(8*g[3])/3+(4*g[4])/81
g[631]=(14*g[1])/27-(13*g[2])/81-(7*g[3])/3+(26*g[4])/81
g[632]=2*g[1]-(39*g[3])/4+g[4]/2
g[633]=(4*g[1])/3-(13*g[3])/2+g[4]/3
g[634]=(2*g[1])/3-(13*g[3])/4+g[4]/6
g[635]=(10*g[1])/9-(5*g[2])/27-5*g[3]+(10*g[4])/27
g[636]=(5*g[1])/9-(5*g[2])/54-(5*g[3])/2+(5*g[4])/27
g[637]=(4*g[1])/9-(5*g[2])/27-(7*g[3])/4+(11*g[4])/54
g[638]=(28*g[1])/27-(26*g[2])/81-(14*g[3])/3+(52*g[4])/81
g[639]=(14*g[1])/27-(13*g[2])/81-(7*g[3])/3+(26*g[4])/81
g[640]=(10*g[1])/27-(17*g[2])/81-(7*g[3])/6+(7*g[4])/81
g[641]=(8*g[1])/27-(19*g[2])/81-(7*g[3])/12-(5*g[4])/162
g[642]=(9*g[1])/4-12*g[3]+2*g[4]
g[643]=(3*g[1])/2-8*g[3]+(4*g[4])/3
g[644]=(3*g[1])/4-4*g[3]+(2*g[4])/3
g[645]=(11*g[1])/9-g[2]/9-(35*g[3])/6+(7*g[4])/9
g[646]=(11*g[1])/18-g[2]/18-(35*g[3])/12+(7*g[4])/18
g[647]=(17*g[1])/36-g[2]/9-(11*g[3])/6+g[4]/9
g[648]=(10*g[1])/9-(5*g[2])/27-5*g[3]+(10*g[4])/27
g[649]=(5*g[1])/9-(5*g[2])/54-(5*g[3])/2+(5*g[4])/27
g[650]=(7*g[1])/18-(7*g[2])/54-(7*g[3])/6+g[4]/27
g[651]=(11*g[1])/36-(4*g[2])/27-g[3]/2-g[4]/27
g[652]=(32*g[1])/27-(4*g[2])/81-(16*g[3])/3+(8*g[4])/81
g[653]=(16*g[1])/27-(2*g[2])/81-(8*g[3])/3+(4*g[4])/81
g[654]=(11*g[1])/27-(4*g[2])/81-(7*g[3])/6-g[4]/81
g[655]=(17*g[1])/54-(5*g[2])/81-(5*g[3])/12-(7*g[4])/162
g[656]=(35*g[1])/108+(2*g[2])/81-g[3]/3-(4*g[4])/81
g[657]=(45*g[1])/16-(135*g[3])/8+(15*g[4])/4
g[658]=(15*g[1])/8-(45*g[3])/4+(5*g[4])/2
g[659]=(15*g[1])/16-(45*g[3])/8+(5*g[4])/4
g[660]=(3*g[1])/2-8*g[3]+(4*g[4])/3
g[661]=(3*g[1])/4-4*g[3]+(2*g[4])/3
```

ÖZGEÇMİŞ

8 Temmuz 1969 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini 1986 yılında Beşiktaş Kız Lisesinde tamamladı. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümüne girdi. 1992 yılında Lisansüstü eğitimine başladı.