

SİLİNDİRİK BOŞLUK İÇEREN ANİZOTROP KALIN PLAĞIN DOĞAL TİTREŞİMİNE ÖNGERİLMENİN ETKİSİ

Nazmiye YAHNIOĞLU ve Ülkü BABUŞCU YEŞİL

YTÜ, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü,
Davutpaşa Yerleşim Birimi, 34210 Esenler, İSTANBUL

ABSTRACT

In this work the influence of an initial stretching or compressing of a composite thick plate containing a cylindrical hole on natural frequency has been examined using the Finite Element Method. The mathematical formulation of the corresponding boundary-value problem is presented in the framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Elasticity (TDLTE). The material of the plate is selected as transversally isotropic. The numerical results have been shown in tables. From the numerical results, it was observed that the natural frequency of the plate with cylindrical hole was changed significantly with initial stretching force.

Keywords: initial stretching force, natural frequency, cylindrical hole, finite elements method

ÖZET

Bu çalışmada yapısında silindirik boşluk bulunan kompozit kalın plağın doğal titreşim frekansına öngerilmenin etkisi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Uygun sınırdeğer probleminin matematiksel formülasyonu Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi çerçevesinde yapılmıştır. Plağın malzemesi transversal izotrop olarak alınmıştır. Sayısal sonuçlar tablolar halinde verilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçlardan, öngerilmenin silindirik boşluk içeren plağın doğal frekans değerlerini önemli ölçüde etkilediği görülmüştür. **Anahtar Sözcükler:** Öngerilme, doğal frekans, silindirik boşluk, sonlu elemanlar yöntemi

1.GİRİŞ

Çeşitli nedenlerle yapı elemanlarının içerdiği süreksizliklerin, bu yapı elemanının statik veya dinamik davranışına etkileri elastisite teorisinin temel problemleri arasında yer almaktadır. Süreksizliklerin boyutları yapı elemanı boyutları mertebesinde olduğu (makro ölçekli) durumlara ait bazı çalışmalar [1-8] ve diğerleri olarak verilebilir. Bu çalışmalarda yapı elemanının çeşitli geometrik formda (dairese, eliptik vb.) delik içermesi durumlarında, bu süreksizliğin yapı elemanının statik veya dinamik davranışlarına etkisi düzlem elastisite teorisii çerçevesinde analitik veya sayısal çözüm yöntemleri kullanılarak ele alınmıştır.

Bu çalışmada, yukarıda verilen çalışmalar geliştirilerek, silindirik boşluk içeren kalın plağın doğal titreşim frekanslarına öngerilmenin etkisi incelenmiştir. Öngerilmenin matematik modellemede göz önüne alınabilmesi, Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (LEÜBET) yardımıyla yapılmıştır.

2.PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Ele alınan çalışmada, köşeleri yuvarlatılmış dikdörtgen kesit alanlı silindirik boşluk içeren öngerilmeli kalın plağın ilk üç doğal frekans değerlerine, öngerilmenin etkisi incelenecektir. Bu incelemeler, ele alınan kalın plağın üst yüzeyinde normal doğrultuda zamana göre periyodik değişen dış kuvvet etkisindeki zorlanmış titreşim problemi yardımıyla yapılacaktır. Kalın plağın üst yüzeyine etki eden dinamik yüklemenden doğan yer değiştirme yayılışına yapıdaki öngerilme etki gösterdiğinden, bu etki her iki dış yüklemenin ayrı ayrı etkilerinin superpozisyonu ile belirlenememektedir. Bu nedenle, ele alınan problemin matematik modeli LEÜBET çerçevesinde yapılacaktır. Buna göre çözüm iki aşamada belirlenecektir. Birinci aşamada karşılıklı iki kenarından düzgün yayılı normal dış kuvvet etkisinde yapıda oluşan gerilme (öngerilme) yayılışı, ikinci aşamada; ele alınan kalın plağın üst yüzeyine normal doğrultuda etki eden ve zamana göre periyodik değişen ilave dinamik yük etkisinde yapıda oluşan yer değiştirme yayılımına, birinci aşamada bulunan yapıdaki öngerilmelerin etkisi incelenecektir. Belirtelim ki, ele alınan sınır değer problemine ait aşağıda verilen matematiksel modellemeye; birinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (0), ikinci aşamaya ait büyüklükler üst indis (1) ile gösterilecektir.

Ele alınan problemin Ω çözüm bölgesi; x_1 yönünde ℓ_1 , x_3 yönünde ℓ_3 uzunluğuna ve x_2 yönünde h kalınlığına sahip, yapısında köşeleri yuvarlatılmış dikdörtgen en kesitli silindirik boşluk bulunan, dikdörtgen kalın plağı temsil etmektedir (Şekil 1). Problemin çözümünde ilk aşamaya yani, yapıdaki öngerilme yayılımının belirlenmesine ait matematiksel model aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} &= 0 \\ \sigma_{11}^{(0)} &= A_{11}\varepsilon_{11}^{(0)} + A_{12}\varepsilon_{22}^{(0)} + A_{13}\varepsilon_{33}^{(0)}, \quad \sigma_{22}^{(0)} = A_{12}\varepsilon_{11}^{(0)} + A_{22}\varepsilon_{22}^{(0)} + A_{23}\varepsilon_{33}^{(0)}, \\ \sigma_{33}^{(0)} &= A_{13}\varepsilon_{11}^{(0)} + A_{23}\varepsilon_{22}^{(0)} + A_{33}\varepsilon_{33}^{(0)}, \quad \sigma_{23}^{(0)} = 2A_{44}\varepsilon_{23}^{(0)}, \quad \sigma_{13}^{(0)} = 2A_{55}\varepsilon_{13}^{(0)}, \quad \sigma_{12}^{(0)} = 2A_{66}\varepsilon_{12}^{(0)} \\ \varepsilon_{ij}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ve birinci aşamaya ait sınır koşulları;

$$\begin{aligned} u_2^{(0)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= u_2^{(0)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} = 0, \quad \sigma_{1i}^{(0)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} = q\delta_i^1, \quad \sigma_{2i}^{(0)} \Big|_{x_2=0; h} = 0, \\ \sigma_{3i}^{(0)} \Big|_{x_3=0; \ell_3} &= 0, \quad \sigma_{ij}^{(0)} n_j \Big|_S = 0, \quad i,j=1,2,3 \end{aligned} \quad (2)$$

dır. (2)'de S yapı elemanının içerdği silindirik boşluğun yüzeyini, n_j silindirik boşluk yüzeyine ait dış birim normalin bileşenlerini göstermektedir.

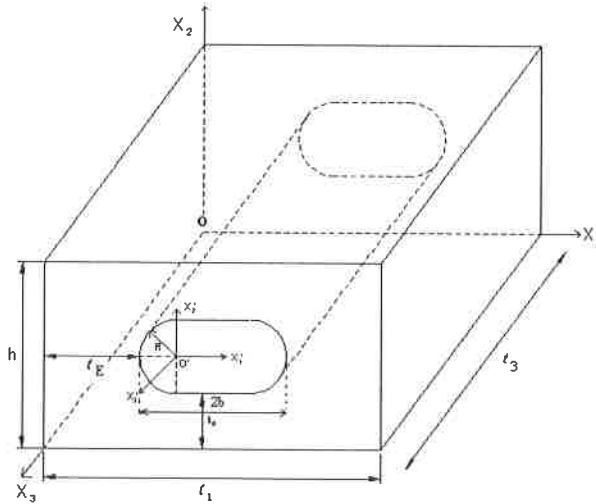
İkinci aşamaya ait matematiksel model aşağıda verilmiştir:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

bünye denklemleri, geometrik ilgiler sırasıyla (1) de verildiği gibi ancak, üst indisleri (1) olarak alınacaktır. İkinci aşamaya ait sınır koşulları;

$$\begin{aligned}
u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0;\ell_1} &= u_2^{(1)} \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
\left(\sigma_{jl}^{(1)} + \sigma_{ln}^{(0)} \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_1=0;\ell_1} &= \left(\sigma_{j3}^{(1)} + \sigma_{3n}^{(0)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_1=0;\ell_1} = 0, \\
\left(\sigma_{jk}^{(1)} + \sigma_{kn}^{(0)} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_2=h} &= p e^{i\omega t} \delta_2^k, \quad \left(\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_2=0} = 0, \\
\left(\sigma_{jl}^{(1)} + \sigma_{ln}^{(0)} \frac{\partial u_l^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_3=0;\ell_3} &= \left(\sigma_{j3}^{(1)} + \sigma_{3n}^{(0)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{x_3=0;\ell_3} = 0, \\
\left(\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{in}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_S &= 0, \quad i,j=1,2,3
\end{aligned} \tag{4}$$

olarak verilebilir.



Şekil 1: Ele alınan kalın plak ve bazı geometrik verileri

Yukarıda verilen (1)-(4) denklem ve bağıntılarında $m=0,1$ için $\sigma_{ij}^{(m)}$, gerilme tensörü bileşenlerini; $\epsilon_{ij}^{(m)}$, şekil değiştirme tensörü bileşenlerini; $u_i^{(m)}$ 'ler, $(i,j=1,2,3)$ yer değiştirme vektörü bileşenlerini ve t zamanı göstermektedir. Buna göre ele alınan problemin birinci aşamasına ait matematiksel model (1) ve (2) sınır değer problemi yardımıyla, ikinci aşamaya ait matematiksel model (3) ve (4) sınır değer problemi yardımıyla verilebilir. Belirtelim ki, ikinci aşamaya ait sınır değer problemi ele alınan kalın plağın zorlanmış titreşimini temsil eder. Eğer (4) sınır koşulları için $x_2 = h$ 'da verilen sınır koşulunda $p=0$

seçilirse, bu durumda problem ele alınan plağın doğal titreşiminin matematik modelini temsil eder.

2. aşamaya ait problemin çözümü için, (3),(4)'deki denklem ve ifadelerde yer alan aranan büyüklükler

$$\{\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i\} = \{\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\varepsilon}_{ij}, \bar{u}_i\} \exp(i\omega t) \quad (5)$$

olarak temsil edilir. (5)'de $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ ve $\bar{u}_i$ 'ler uygun büyüklüklerin genliğini göstermektedir. (5) ifadeleri (3),(4)'de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, (3)'den genlikler için aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \rho \omega^2 \bar{u}_i = 0 \quad (6)$$

(1) de verilen ve ikinci aşama içinde geçerli olan bünye denklemleri ve geometrik ilgiler genlikler için de aynen sağlanmaktadır. Ayrıca, (4) sınır koşullarından $x_2 = h$ 'da verilen koşul hariç, genlikler için aynen sağlanır. Bu koşul ise,

$$\left(\bar{\sigma}_{jk}^{(1)} + \sigma_{kn}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_k^{(1)}}{\partial x_n} \right) n_j \bigg|_{x_2=h} = p \delta_2^k \quad (7)$$

olarak elde edilir. Böylece ele alınan problemin 2. aşamasına ait incelemeler, uygun büyüklüğün genlikleriyle yazılmış (6),(4) denklemleri ile (7) sınır koşulları çerçevesinde incelenmesine dönüştürülmüş olur. Belirlelim ki, her iki aşamaya ait verilen matematiksel modelin çözümü sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak [1,9], tarafımızca yapılan algoritma ve programlar yardımıyla yapılmıştır.

3. SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU

Ele alınan problemin birinci aşamasına ait sonlu eleman formülasyonu

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(0)} d\Omega - \iint_{S_q} \sigma_{ij}^{(0)} n_j u_i^{(0)} dS_q \quad (8)$$

fonksiyoneli ve ikinci aşamaya ait sonlu eleman formülasyonu için,

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left(T_{ij} \frac{\partial \bar{u}_j^{(1)}}{\partial x_i} + \rho_0 \omega^2 \bar{u}_i^{(1)} \bar{u}_j^{(1)} \right) d\Omega - \iint_{S_p} T_{ij} n_j \bar{u}_i^{(1)} dS_p \quad (9)$$

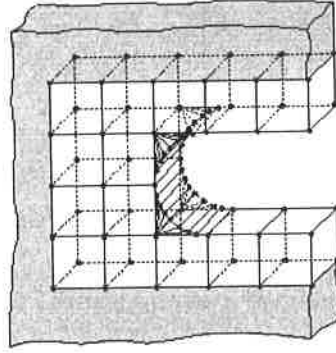
(9)'da

$$T_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)} \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial x_n} \quad (10)$$

fonksiyoneli ve Ritz tekniği yardımıyla yapılmıştır. (8)'de, S_q yapıdaki ön gerilmeyi oluşturan dış kuvvetin etki ettiği yüzeyi, (9)' da S_p plağın üst yüzeyini yani, ilave dinamik dış kuvvetin etki ettiği yüzeyi göstermektedir.

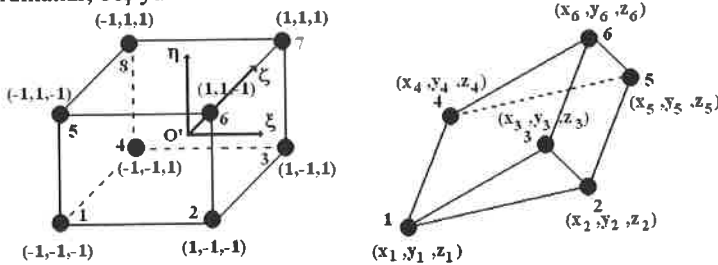
Sonlu eleman çözümü için, çözüm bölgesi sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana ($\Omega_{(k)}$, $k=1,2,\dots,M$) ayrıştırılır. Yani,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad \text{dir.} \quad (11)$$



Şekil 2: Silindirik boşluk civarındaki sonlu eleman ağı

Sonlu eleman ayrıklaştırmasında, silindirik boşluk civarında eğrisel kenara sahip üçgen prizmatik sonlu elemanlar (beş yüzlü), geri kalan kısımda dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır (Şekil.2). Dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar için köşelerde olmak koşuluyla 8 adet düğüm noktası (nod), beş yüzlü sonlu elemanlar için köşelerde 6 nod alınmıştır (Şekil.3). Dikdörtgen sonlu elemanlar üzerindeki sayısal işlemlerde normalize edilmiş koordinatlar, beş yüzlü sonlu elemanlarda alan koordinatları kullanılmıştır [9].



Şekil.3 Örnek sonlu eleman ve nodların konumu

Her iki aşamaya ait sonlu eleman çözümünde aynı sonlu eleman ayrıklaştırması kullanılmıştır. Çözüm yöntemi gereği, her bir sonlu elemenda aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom şeklinde kabul edilir. Bu fonksiyonun, nodlarda bilinmeyen değerler ile seçilen elemanın nodlarında tanımlanan şekil fonksiyonları ile ifadesi;

$$\mathbf{u}^{(k)} \approx \mathbf{N}^{(k)} \mathbf{a}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (12)$$

olarak seçilir. Burada $\mathbf{a}^{(k)}$, $\mathbf{N}^{(k)}$ ve $\mathbf{u}^{(k)}$ matrisleri;

$$\left(\mathbf{a}^{(k)} \right)^T = \left\{ u_{11}^k, u_{21}^k, u_{31}^k, u_{12}^k, u_{22}^k, u_{32}^k, \dots, u_{1p}^k, u_{2p}^k, u_{3p}^k \right\}$$

$$\left(N^{(k)}\right)^T = \begin{Bmatrix} N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & 0 & \dots & N_p^k & 0 & 0 \\ 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & \dots & 0 & N_p^k & 0 \\ 0 & 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & \dots & 0 & 0 & N_p^k \end{Bmatrix}$$

$$\left(u^{(k)}\right)^T = \left\{u_1^k(x_1, x_2, x_3), u_2^k(x_1, x_2, x_3), u_3^k(x_1, x_2, x_3)\right\} \quad (13)$$

dir ([1], [9]). (13)' de k indisi uygun büyüklüklerin Ω_k elemanına ait olduğunu, $a^{(k)}$ vektörünün bileşenleri ise Ω_k elemanın nodlarındaki aranan yer değiştirmeleri göstermektedir. Ayrıca p alt indisi üçgen prizmatik (dikdörtgen prizmatik) sonlu elemanlar için 6 (8) değerini almaktadır.

(12) ifadesi, birinci aşama için (8) fonksiyoneline, ikinci aşama için (9) fonksiyoneline yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa; 1. aşamaya ait problemin çözümü $Ka = r$ (14)

denklem sisteminin çözümüne, 2. aşamaya ait problemin çözümü

$$(K - \omega^2 M)a = r \quad (15)$$

denklem sistemlerinin çözümüne indirgenir. (14) ve (15) eşitliklerinde **K** Rijidlik matrisi, **M** kütle matrisi, **a** nodlarda bilinmeyenleri içeren matris ve **r** sağ taraf matrisini göstermektedir [1,9].

(14) ve (15) cebrik denklem sistemlerinin çözümünden sırasıyla birinci ve ikinci aşamaya ait yerdeğiştirme fonksiyonları belirlenir. Ancak birinci aşamaya ait gerilme dağılımı ikinci aşamada problemin formülasyonuna dahil olduğundan, birinci aşamada yapıda oluşan gerilme yayılımının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun için (1) bağıntıları yardımıyla birinci aşamaya ait çözüm bölgesindeki gerilme (öngerilme) yayılımı belirlenir [1].

Belirtelim ki, (15) denkleminde bulunan ω dış kuvvetin frekans değeri, plağın doğal titreşim frekansına (ω_{cr}) yaklaştıkça, yerdeğiştirmeler sonsuza gider. Bu özellikten yararlanılarak, ele alınan problemin doğal titreşim frekans değerleri elde edilecektir.

5. SAYISAL ÇÖZÜM

Plak malzemesinin birbirini tekrarlayan iki izotrop, homojen levhadan oluşmuş çok katlı kompozit malzeme olduğu kabul edilmektedir. Bu malzemelerin sırayla Lamé sabitleri λ_1, λ_2 ; Kayma modülleri μ_1, μ_2 ; Young Modülleri E_1, E_2 , Poisson oranları ν_1, ν_2 ile gösterilmiştir. Problemin $x_1 = \ell/2$ 'ye göre simetri özelliğinden yararlanılarak, çözüm bölgesi x_1 yönünde 20, x_2 yönünde 12, x_3 yönünde 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman ve silindirik boşluk etrafında bir katmanda 16 beş yüzlü prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam, 4760 dikdörtgen prizmatik, 320 beş yüzlü prizmatik sonlu elemana ayrıştırılmıştır (Şekil 2 ve Şekil 3). Ele alınan durumda sonlu eleman modellemesi 5880 düğüm noktası (nod) ve 16.568 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir. Belirtelim ki, çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıştırması, pek çok sonlu eleman ağı için bulunan değerlerin literatürdeki uygun değerlere en iyi yaklaşımı sağlayan sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir. Ayrıca, tablolarda boyutsuz büyüklükler verilmiştir. Buna göre boyutsuz doğal frekans $\bar{\omega}^2 = (\omega^2 \rho \ell_1) / A_{22}$ dir. Diğer problem parametrelerinin değerleri tablolar üzerinde verilmiştir.

Ele alınan problem için yapı elemanının malzemesi, simetri eksen Ox_2 olan transversal izotrop malzeme olarak modellenmiştir. Bu durumda, kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri, aşağıdaki bilinen formüller yardımı ile elde edilir [1].

$$A_{23} = A_{12} = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1} \right), A_{11} = A_{33}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} + A_{12}) = (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1}$$

$$\frac{1}{2}(A_{11} - A_{13}) = \eta_1 \mu_1 + \eta_2 \mu_2, A_{66} = A_{44} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1}, A_{55} = \eta_1 \mu_1 + \eta_2 \mu_2$$

$$(A_{22}) = (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{((\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2))^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1} \quad (16)$$

Tablo 1 de, bazı E_2/E_1 ve ℓ_3/ℓ_1 değerleri için birinci doğal frekan ($\bar{\omega}_{cr,1}^2$) değerleri $h/\ell_1 = 0.1$ durumunda verilmiştir. Tablodaki verilerden her bir E_2/E_1 değeri için, ℓ_3/ℓ_1 oranı arttıkça elde edilen kritik doğal frekans değerinin, düzlem şekil değiştirme durumunda elde edilen Akbarov vd. (2000) kaynağındaki uygun değerlere yakınsadığı görülmektedir. Bu sonuçlara dayanarak, tarafımızdan yapılan algoritma ve programlar yardımıyla bulunan sonuçlara güven sağlanmaktadır.

Tablo 1 : Boşluk içermeyen kalın plakta $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ parametresinin farklı E_2/E_1 ve ℓ_3/ℓ_1 için değerleri

E_2/E_1	ℓ_3/ℓ_1				Akbarov vd. (2000) (Düzlem şekil değiştirme durumu)
	1	2	3	4	
1	0.23	0.09	0.08	0.07	0.06
10	0.56	0.24	0.21	0.19	-
20	0.93	0.41	0.35	0.33	0.31
50	1.92	0.8	0.7	0.67	0.62

Tablo 2 de yapı elemanının içerdiği silindirik boşluğun hacminin büyümesinin ele alınan kalın plağın doğal frekanslarına etkisi, plağın izotrop ($E_2/E_1=1$) ve anizotrop ($E_2/E_1=10$) olması durumu, $h/\ell_1 = 0.1, \ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R, R/\ell_1 = 8.333 \cdot 10^{-3}$ ve farklı öngerilme değerleri için verilmiştir. Tablodaki verilerden boşluk hacminin (V_B) büyümesi birinci doğal frekas değerini düşürmekte; anizotropinin (E_2/E_1) artması, artırmakta ve öngerilmenin artması birinci doğal frekas değerini artırmaktadır.

Tablo 3’de plağın izotrop ($E_2/E_1=1$) ve anizotrop ($E_2/E_1=10$) olması durumlarında farklı öngerilme değerleri ve $h/\ell_1 = 0.1, \ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R, R/\ell_1 = 8.333 \cdot 10^{-3}$, $V_B/V (*10^{-2}) = 6.6707$ için plağın ilk üç doğal frekand mod değerleri verilmiştir. Yapıda çekme öngerilmesi ($q/E_1 > 0$) (basınç öngerilmesi ($q/E_1 < 0$)) olması, plağın doğal mod

değerlerini, $q/E_1 = 0$ yani yapıda öngerilme olmaması durumuna göre önemli ölçüde artırmaktadır (düşürmektedir).

Tablo 4'de $h/\ell_1 = 0.1, \ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R, R/\ell_1 = 8.333 \cdot 10^{-3}$, $V_B/V (*10^{-2}) = 6.6707$ ve farklı öngerilme değerlerinde ele alınan kalın plakın silindirik boşluk içermesi ve içermemesi durumlarında ilk üç doğal titreşim frekans (mod) değerleri verilmiştir. Tablodaki verilerden silindirik boşluğun olmasının, olmaması durumuna göre yapının doğal titreşim frekanslarını çok etkilediği karşılaştırmalı olarak görülmektedir.

Tablo 2: $V_B/V \left(\frac{\text{bosluk hacmi}}{\text{bosluksuz plak hacmi}} \right)$, E_2/E_1 ve q/E_1 değerleri değişiminin $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ değerlerine etkisi

$V_B/V (*10^{-2})$	b/R	E_2/E_1	q/E_1			
			0	0.001	0.005	0.010
2.5727	8.7058	1	0.243	0.254	0.290	0.337
		10	0.571	0.576	0.596	0.620
4.6217	15.4117	1	0.235	0.245	0.287	0.339
		10	0.538	0.543	0.564	0.591
6.6707	22.1176	1	0.213	0.225	0.271	0.328
		10	0.479	0.485	0.508	0.536
8.7198	28.8235	1	0.183	0.196	0.245	0.307
		10	0.411	0.417	0.441	0.471
10.7688	35.5294	1	0.151	0.164	0.217	0.281
		10	0.345	0.351	0.376	0.407
12.8178	42.2352	1	0.122	0.136	0.190	0.257
		10	0.288	0.294	0.319	0.349

Tablo 3: q/E_1 parametre değişiminin $\bar{\omega}_{cr}^2$ değerlerine etkisi

q/E_1	E_2/E_1	1.mod	2.mod	3.mod
-0.010	1	0.096	0.316	2.423
	10	0.421	1.304	4.190
-0.005	1	0.155	0.503	2.674
	10	0.450	1.402	4.346
-0.001	1	0.202	0.648	2.854
	10	0.473	1.479	4.471
0	1	0.213	0.684	3.326
	10	0.479	1.499	4.502
0.001	1	0.225	0.720	3.413
	10	0.485	1.518	4.533
0.005	1	0.271	0.861	3.761
	10	0.508	1.595	4.657
0.010	1	0.328	1.033	4.189
	10	0.536	1.691	4.812

Tablo 5’de $\ell_3/\ell_1 = 1$, $h_A = h_U = 5R$, $R/\ell_1 = 8.333 \cdot 10^{-3}$ $V_B/V (*10^{-2}) = 9.7443$ için silindirik boşluk içeren ve içermeyen kalın plak için kalın plağın Ox_2 doğrultusundaki kalınlığı artırılması durumunda 1. mod ($\bar{\omega}_{cr,1}^2$) değerleri verilmiştir. Buna göre h/ℓ_1 oranı arttıkça doğal titreşim frekansları artmaktadır.

Tablo 4: q/E_1 ve E_2/E_1 parametre değişimlerinin $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ (silindirik boşluk içeren plak için / boşluk içermeyen plak için) değerlerine etkisi

q/E_1	E_2/E_1	1.mod	2.mod	3.mod
0	1	0.213	0.684	3.326
		0.238	1.389	5.014
	10	0.479	1.499	4.502
		0.566	3.099	10.335
0.001	1	0.225	0.720	3.413
		0.245	1.418	5.080
	10	0.485	1.518	4.533
		0.570	3.153	10.372
0.005	1	0.271	0.861	3.761
		0.274	1.535	5.344
	10	0.508	1.595	4.657
		0.586	3.217	10.518
0.010	1	0.328	1.033	4.189
		0.311	1.682	5.676
	10	0.536	1.691	4.812
		0.606	3.298	10.700

Tablo 5: Bazı q/E_1 ve E_2/E_1 değerleri için h/ℓ_1 parametresi değişiminin $\bar{\omega}_{cr,1}^2$ (silindirik boşluk içeren plak için / boşluk içermeyen plak için) değerine etkisi

q/E_1	E_2/E_1	h/ℓ_1			
		0.10	0.12	0.15	0.20
0	1	0.161	0.219	0.317	0.501
		0.232	0.321	0.469	0.742
	10	0.363	0.495	0.716	1.117
		0.552	0.760	1.107	1.731
0.005	1	0.223	0.279	0.373	0.552
		0.269	0.357	0.505	0.778
	10	0.396	0.527	0.746	1.145
		0.572	0.780	1.127	1.751

Tablo 6’da $(\ell_3/\ell_1 = 1, h_A = h_U = 5R, R/\ell_1 = 8.333 \cdot 10^{-3}, V_B/V (*10^{-2}) = 9.7443)$ ve farklı öngerilme ile E_2/E_1 için silindirik boşluğun konumunun, önceki konumuna paralel olacak şekilde plağın üst yüzeye yaklaştırılması durumunda, $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerleri verilmiştir. Tablodaki verilerden boşluk üst yüzeye yaklaştıkça yani h_u/R oranı küçüldükçe, $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerleri düşmektedir.

Tablo 6: Bazı q/E_1 ve E_2/E_1 değerleri için h_u/R parametresi değişiminin $\bar{\omega}_{cr,I}^2$ değerine etkisi

q/E_1	E_2/E_1	h_u/R			
		5	4	3	2
0	1	0.161	0.161	0.158	0.145
	10	0.363	0.362	0.353	0.308
0.005	1	0.223	0.220	0.217	0.211
	10	0.396	0.393	0.385	0.354

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde bizden yardımlarını esirgemeyen hocamız Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV’a ve finansal desteği nedeniyle TÜBİTAK’a teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

- [1] Akbarov S.D. and Guz A.N., “Mechanics of Curved Composites” Dordrecht, The Netherlands, Kluwer-2000.
- [2] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N. and Yesil, U. “Interaction Between Two Neighbouring Circular Holes in a Pre-Stretched Simply Supported Orthotropic Strip in Bending”, XV International Conference on Mechanics of Composite Materials, May 26 – 30, Pp.14, 2008, Riga, Latvia.
- [3] Babuşcu Yeşil Ü., “Tek veya Çift Dairesel Delik İçeren Şerit-Levhada Gerilme Yığılmalarının Sonlu Elemanlar Yöntemiyle İncelenmesi”, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, YTÜ, 2005.
- [4] Chaudhuri, R. A., “Weakening Effects of Internal Part-Through Elliptic Holes in Homogeneous and Laminated Composite Plates” Composites Structures, 81, 362-373, 2007.
- [5] Savin, G.N., “Stress Concentration Around Holes” E. Gros Translator, Pergamon-1961.
- [6] Temiz, S., Özel, A., Aydın, M.D., “Fem Stress Analysis of Thick Composite Laminates with a Hole in Bending” Applied Composite Materials, 10, 103–117, 2003.
- [7] Toubal, L., T., Karama, M., Lorrai B., “Stress Concentration in a Circular Hole in Composite Plate” Composite Structures, 68(1), 31-36, 2005.
- [8] Zheng Yang, Chang-Boo Kim, Chongdu Cho and Hyeon Gyu Beom, “The Concentration of Stress and Strain in Finite Thickness Elastic Plate Containing a Circular Hole” International Journal of Solids and Structures, 45(3-4), 713-731, 2008.
- [9] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., “The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems, Vol. 1, 4th Ed.”, Mc Graw-Hill Book Company, Oxford-1989.