

**175864**

**YAPISAL SİSTEMLERİN TASARIM DUYARLILIĞI ANALİZLERİNİN  
TEKİL DEĞERLERE AYRIŞTIRMA (TDA) METODUNA DAYALI  
OLARAK YAPILMASI**

**DOKTORA TEZİ  
Y. Müh. Hakan ERSOY  
(503992007)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2003  
Tezin Savunulduğu Tarih : 4 Ağustos 2003**

**Tez Danışmanı : Doç.Dr. Ata MUĞAN**

**Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Tuncer TOPRAK**

**Prof.Dr. Erhan ALTAN (Y.T.Ü.)**

**Prof.Dr. Yılmaz ÖZTÜRK**

**Prof.Dr. Abdülkerim KAR (M.Ü.)**

*A. Muğan*  
*Tuncer Toprak*  
*Erhan Altan*  
*Y. Öztürk*  
*Abdülkerim Kar*

**AĞUSTOS 2003**

## ÖNSÖZ

Tezde, lineer cebirin araçlarından olan Tekil Değerlere Ayırıştırma (TDA) işlemi, şimdiye kadarki uygulama alanlarından farklı olarak yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı analizine uygulanmış ve bunun neticesinde tekil değerlerin ayrıştırılmasına dayalı duyarlılık yöntemi geliştirilmiştir. Bu nedenle tezin ele alınmasında TDA ve tasarım duyarlılığı konuları başlangıçta kendi alanları içerisinde ayrı bölümler halinde tanıtılmış, daha sonra her iki kavram birleştirilerek geliştirilen yöntemin esasları ortaya konmuştur. Ayrıca farklı duyarlılık tiplerini içeren sayısal örneklerle ulaşılan sonuçlar desteklenmiştir. Çalışma bilinen bir yöntemin yeni bir alana uygulanması şeklindedir. TDA burada bilinen yöntemi, yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı da yeni uygulanan alanı temsil etmektedir.

Doktora tezi gibi uzun süreli sayılabilecek çalışmaların neticesinde ortaya çıkan sonuçların sadece akademik anlamda ve teoriye değil, aynı zamanda uygulama ve endüstriyede katkılarının olması, kaynakların efektif kullanımı açısından önemlidir. Tez elde edilen sonuçlar gerek şimdi gerekse gelecekteki bilimsel yayınlara temel teşkil edecek bilgileri bünyesinde barındırmaktadır. Ayrıca endüstriye olan katkısı bakımından da önde gelen mühendislik tasarım ve analiz programlarının algoritmalarında yer alabilecek özelliklere sahiptir.

Tezde uygulanan bakış açısı, yani bir sisteme ait transfer fonksiyon matrisinin giriş ve çıkış vektörleri ile olan ilişkisinin TDA aracılığıyla şekillendirilmesi, sadece yapısal sistemler ile sınırlı değildir. Buradan hareketle söz gelimi iktisadi veya biomedikal bir sistemin giriş-çıkış ilişkilerinin belirlenmesi ve şekillendirilmesi gibi farklı alanlarda ileride yapılabilecek çalışmalarda yol gösterici niteliğe sahiptir.

Tezin hazırlanmasında büyük yardımları olan danışmanım Doç. Dr. Ata Muğan ile tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Tuncer Toprak ve Prof. Dr. Erhan Altan'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca çalışma arkadaşlarım Dilek Bayrak, Ali Aydeniz, Deniz Birkan, Yusuf Cünedioğlu'na ve bana her konuda destek olan aileme sevgilerimi sunarım.

Mayıs, 2003

Hakan Ersoy

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                   |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------|
| KISALTMALAR                                                                       | v    |
| TABLO LİSTESİ                                                                     | vi   |
| ŞEKİL LİSTESİ                                                                     | vii  |
| SEMBOL LİSTESİ                                                                    | viii |
| ÖZET                                                                              | x    |
| SUMMARY                                                                           | xiii |
| <br>                                                                              |      |
| 1. GİRİŞ                                                                          | 1    |
| 1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı                                                    | 1    |
| <br>                                                                              |      |
| 2. TASARIM DUYARLILIĞI ANALİZİ                                                    | 3    |
| 2.1. Mevcut Duyarlılık Metodları                                                  | 3    |
| 2.1.1. Statik Cevap Tasarım Duyarlılığı                                           | 4    |
| 2.1.1.1. Doğrudan Türevleme Metodu                                                | 4    |
| 2.1.1.2. Adjoint (Bitişik) Değişkeni Metodu                                       | 5    |
| 2.1.1.3. Genelleştirilmiş Global Katılık Matrisi                                  | 6    |
| 2.1.2. Özdeğer Tasarım Duyarlılığı                                                | 7    |
| 2.1.3. Dinamik Cevap Tasarım Duyarlılığı                                          | 8    |
| <br>                                                                              |      |
| 3. TEKİL DEĞERLERE AYRIŞTIRMA İŞLEMİ -TDA ( Singular Value<br>Decomposition-SVD ) | 10   |
| 3.1. TDA'nın Cebirsel Açıklaması                                                  | 10   |
| 3.2. TDA'nın Mevcut Uygulama Alanları                                             | 13   |
| 3.3. TDA'nın Görüntü İşleme Alanında Kullanılmasına Dair Bir Örnek                | 13   |
| <br>                                                                              |      |
| 4. SONLU ELEMANLAR İFADELERİ                                                      | 17   |
| 4.1. Kiriş Eleman Katılık Matrisi                                                 | 17   |
| 4.2. Kafes Eleman Katılık Matrisi                                                 | 19   |
| 4.3. Kiriş ve Kafes Eleman Katılık Matrislerinin Özellikleri                      | 19   |
| 4.4. Kiriş ve Kafes Eleman Kütle Matrisleri                                       | 20   |
| 4.5. Kiriş Elemanların Geometrik Katılık Matrisi                                  | 21   |
| <br>                                                                              |      |
| 5. TDA'NIN SONLU ELEMANLAR DENKLEMLERİNE UYGULANMASI                              | 22   |

|                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>6. TDA VE DUYARLILIK ANALİZİ</b>                                        | <b>25</b> |
| 6.1. Enerji Yayınımı ve Tekil Değerler                                     | 26        |
| 6.2. Tekil Değerler ve Vektörlerin Tasarım Duyarlılığı                     | 27        |
| <b>7. YAPISAL SİSTEMLERE AİT DUYARLILIK ANALİZLERİ VE SAYISAL ÖRNEKLER</b> | <b>30</b> |
| 7.1. Statik Cevap Tasarım Duyarlılığı Analizi                              | 32        |
| 7.2. Özdeğer Tasarım Duyarlılığı Analizi                                   | 35        |
| 7.3. En Kötü Yükleme Durumu                                                | 43        |
| 7.4. Çoklu Yükleme Hali                                                    | 45        |
| 7.4.1. Yapısal Sistem Gürbüzlüğü                                           | 45        |
| 7.4.2. Duyarlılık Sınırları                                                | 48        |
| <b>8. TDA'NIN LAMELLİ KARMA MALZEMELERİN TASARIMINA UYGULANMASI</b>        | <b>50</b> |
| 8.1. Karma Malzemeler (Kompozitler) Hakkında Genel Bilgi                   | 50        |
| 8.2. Ortotropik Lamelli Karma Malzemeler                                   | 51        |
| 8.2.1. Lamel Tanımlaması                                                   | 52        |
| 8.3. Lamellerin Dayanımı ve Katılık Tasarımı                               | 53        |
| 8.3.1. Klasik Lamel Teorisi                                                | 53        |
| 8.3.2. Düzlemsel İzotropik Tabakalar                                       | 55        |
| 8.3.3. Ortotropik Halde Klasik Lamel Teorisi                               | 56        |
| 8.3.4. Gerilme ve Şekil Değişimlerin Minimize Edilmesi                     | 60        |
| 8.4. TDA'nın Lamelli Karma Malzemeler Üzerine Uygulanması                  | 62        |
| 8.5. Karma Malzemeler Üzerine Sayısal Örnek                                | 63        |
| <b>9. SONUÇLAR VE TARTIŞMA</b>                                             | <b>70</b> |
| <b>KAYNAKLAR</b>                                                           | <b>72</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                                                            | <b>74</b> |

## KISALTMALAR

|                                    |                                         |
|------------------------------------|-----------------------------------------|
| <b>SVD</b>                         | : Singular Value Decomposition          |
| <b>TDA</b>                         | : Tekil Değerlere Ayırıştırma           |
| <b>CPU</b>                         | : Central Processing Unit               |
| <b>KE</b>                          | : Kinetik Enerji                        |
| <b>SE</b>                          | : Strain Enerji                         |
| <b>SMSVO(<math>j\omega</math>)</b> | : Sum of the Mean-Squared Values Output |
| <b>SMSVI(<math>j\omega</math>)</b> | : Sum of the Mean-Squared Values Input  |
| <b>166MMX</b>                      | : 166MHz Pentium İşlemci                |



## TABLO LİSTESİ

|                                                                                                                                                                                                           | <u>Sayfa No</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| <b>Tablo 7.1.</b> $f_1 = f_2 = 1$ ve $\Delta b_i = 0.05b_i$ için birinci çıkış, $\delta z_1(b_i; \Delta b_i)$ ve tekil değerler $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$ ait Gateaux türevleri.....             | 34              |
| <b>Tablo 7.2.</b> $n=20$ kütleli titreşim sisteminde en kötü yükleme koşullarının işlemci hesaplama süreleri .(CPU, sn).....                                                                              | 44              |
| <b>Tablo 7.3.</b> Köprü sisteminin tekil değer ve tekil vektörleri .....                                                                                                                                  | 46              |
| <b>Tablo 7.4.</b> Köprü sisteminde $\Delta h_i = 0.5h$ tasarım parametre değişimi için $\delta \sigma_1(h_i; \Delta h_i)$ ve $\delta \sigma_4(h_i; \Delta h_i)$ tekil değerlerinin Gateaux türevleri..... | 48              |
| <b>Tablo 8.1.</b> $[0]_8$ lamel sistemine ait şekil değiştirme transfer matrisi $G^{e_1}$ 'nin maksimum tekil değerleri ve tekil vektörleri .....                                                         | 66              |
| <b>Tablo 8.2.</b> $[\pm 45]_4$ Lamel sistemine ait şekil değiştirme transfer matrisi $G^{e_1}$ 'nin maksimum tekil değerleri ve tekil vektörleri .....                                                    | 67              |
| <b>Tablo 8.3.</b> $[\pm 45/90/0]_2$ Lamel sistemine ait şekil değiştirme transfer matrisi $G^{e_1}$ 'nin maksimum tekil değerleri ve tekil vektörleri .....                                               | 68              |
| <b>Tablo 8.4.</b> En kötü yükleme koşulları altındaki lamelli sistemlerin $G^e$ 'na ait maksimum tekil değerleri ve gerilme şiddetlerinin karşılaştırılması .....                                         | 69              |

## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                                                            | <u>Sayfa No</u> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Şekil 1.1 : Sistemlerin genel gösterimi .....                                                                              | 1               |
| Şekil 3.1 : A matrisinin sayısal değerleri. ....                                                                           | 13              |
| Şekil 3.2 : A matrisinin grafiksel görüntüsü.....                                                                          | 14              |
| Şekil 3.3 : Tekil değerleri köşegeninde bulunduran $\Sigma$ matrisi.....                                                   | 14              |
| Şekil 3.4 : Tekil değerlerin vektör formundaki gösterimi.....                                                              | 15              |
| Şekil 3.5 : Sol tekil vektörleri içeren U matrisi.....                                                                     | 15              |
| Şekil 3.6 : Sağ tekil vektörleri içeren V matrisi.....                                                                     | 15              |
| Şekil 3.7 : Orjinal A matrisi ile TDA aracılığıyla üretilmiş B matrisinin grafiksel görüntülerinin karşılaştırılması.....  | 16              |
| Şekil 4.1 : Doğrusal giriş eleman.....                                                                                     | 17              |
| Şekil 7.1 : Üç çubuk kafes sistemi.....                                                                                    | 30              |
| Şekil 7.2 : Yapısal sistemin tekil değerlerinin $\omega$ frekans alanındaki değişimi.....                                  | 37              |
| Şekil 7.3 : $\sigma_1$ 'in $b_1, b_2$ ve $b_3$ ' e göre Gateaux türevlerinin $\omega$ frekans alanındaki değişimi.....     | 38              |
| Şekil 7.4 : $\sigma_2$ 'in $b_1, b_2$ ve $b_3$ ' e göre Gateaux türevlerinin $\omega$ frekans alanındaki değişimi.....     | 38              |
| Şekil 7.5 : $z_1$ 'in $b_1, b_2$ ve $b_3$ ' e göre Gateaux türevlerinin $\omega$ frekans alanındaki değişimi .....         | 39              |
| Şekil 7.6 : $z_2$ 'nin $b_1, b_2$ ve $b_3$ ' e göre Gateaux türevlerinin $\omega$ frekans alanındaki değişimi.....         | 40              |
| Şekil 7.7 : $z_5$ 'in $b_1, b_2$ ve $b_3$ ' e göre Gateaux türevlerinin $\omega$ frekans alanındaki değişimi.....          | 40              |
| Şekil 7.8 : Transfer fonksiyon matris elemanlarına ait şiddetlerinin $\omega$ frekansının fonksiyonu olarak değişimi.....  | 41              |
| Şekil 7.9 : Transfer fonksiyon matris elemanlarına ait şiddetlerinin $\omega$ frekansının fonksiyonu olarak değişimi.....  | 41              |
| Şekil 7.10 : Transfer fonksiyon matris elemanlarına ait şiddetlerinin $\omega$ frekansının fonksiyonu olarak değişimi..... | 42              |
| Şekil 7.11 : n kütleli bir titreşim sistemi.....                                                                           | 43              |
| Şekil 7.12 : Köprü kafes sistemi.....                                                                                      | 45              |
| Şekil 8.1 : Karma malzeme (kompozit) tipleri.....                                                                          | 51              |
| Şekil 8.2 : Fiber takviyeli ortotropik kompozit tabakaların elastik özellikleri.....                                       | 52              |
| Şekil 8.3 : Lamel tabakalarının birleştirme sırasına göre tanımlanması.....                                                | 53              |
| Şekil 8.4 : Üç boyutlu genel ve iki boyutlu düzlemsel gerilme durumundaki gerilme elemanları.....                          | 55              |
| Şekil 8.5 : Ortotropik bir tabaka için yön doğrultuları.....                                                               | 58              |
| Şekil 8.6 : Bir lamel tabakasına etkiyen kuvvet ve moment bileşenleri.....                                                 | 58              |

## SEMBOL LİSTESİ

|                            |                                             |
|----------------------------|---------------------------------------------|
| <b>A, B</b>                | : Matrisler                                 |
| <b>b</b>                   | : Tasarım değişkeni                         |
| $a_i$                      | : Katsayı                                   |
| <b>C,</b>                  | : Sönüm matrisi                             |
| $C_{ij}$                   | : Malzeme matris elemanı                    |
| $D(s)$                     | : Çıkışın laplace dönüşümü                  |
| <b>d</b>                   | : Şekil değiştirme vektörü                  |
| $\delta$                   | : Gateaux türevi                            |
| <b>E</b>                   | : Elastisite modülü                         |
| <b>G</b>                   | : Transfer fonksiyon matrisi                |
| $F(s)$                     | : Girişin laplace dönüşümü                  |
| $G_{12}$                   | : Kayma modülü                              |
| $h$                        | : Kesit alanı                               |
| <b>I</b>                   | : Birim matris                              |
| $j$                        | : Kompleks değişkeni                        |
| $k_B, k_T$                 | : Kiriş, kafes eleman katılık matrisi       |
| <b>K, K<sub>g</sub></b>    | : Katılık ve global katılık matrisi         |
| $\ell$                     | : Eleman boyu                               |
| $\kappa$                   | : Orta düzlem kavisi                        |
| <b>M</b>                   | : Kütle matrisi, moment bileşenleri vektörü |
| <b>N</b>                   | : Kuvvet bileşenleri vektörü                |
| $\lambda$                  | : Adjoint değişkeni                         |
| $\varepsilon$              | : Birim uzama                               |
| $\mu$                      | : Kompozit kısım için tekil değerler        |
| $\psi$                     | : Performans fonksiyonu                     |
| $\zeta$                    | : Özdeğer                                   |
| <b>y</b>                   | : Özvektör                                  |
| $\sigma$                   | : Tekil değerler ve gerilmeler (kompozit)   |
| $\tau$                     | : Kayma gerilmeleri                         |
| $\nu$                      | : Poisson oranı                             |
| $\gamma$                   | : Kayma şekil değiştirmesi                  |
| $u_i$                      | : Sol tekil vektörler                       |
| $v_i$                      | : sağ tekil vektörler                       |
| $\rho$                     | : Yoğunluk                                  |
| <b>Q</b>                   | : Ortotropik tabaka katılık matrisi         |
| $\omega$                   | : Tahrik frekansı                           |
| $\  \cdot \ _2$            | : Vektör şiddeti                            |
| <b>W</b>                   | : Ağırlık matrisi                           |
| <b><math>\Sigma</math></b> | : Tekil değerleri içeren köşegen matris     |

|          |                                      |
|----------|--------------------------------------|
| $s(x)$   | : Boylamasına birim yer değişimi     |
| $w(x)$   | : Yanlamasına birim yer değişimi     |
| $q_i$    | : Eleman ucu yer değişimleri         |
| $U$      | : Sol tekil vektörleri içeren matris |
| $V$      | : Sağ tekil vektörleri içeren matris |
| $z, z_g$ | : Şekil değiştirme vektörü           |
| $\wedge$ | : Fourier dönüşümü yapılmış değişken |
| $\sim$   | : Kısmi türevde sabit kısım          |
| $-$      | : Üst çizgi, eşlenik                 |



# **YAPISAL SİSTEMLERİN TASARIM DUYARLILIĞI ANALİZLERİNİN TEKİL DEĞERLERE AYRIŞTIRMA (TDA) METODUNA DAYALI OLARAK YAPILMASI**

## **ÖZET**

Bu tezde, Tekil Değerlere Ayrıştırma, TDA (Singular Value Decomposition, SVD) işlemi yapısal sistemlerin (structure), tasarım duyarlılığı (design sensitivity) alanına uygulanmış ve tekil değerlere dayalı duyarlılık analizi yöntemi geliştirilmiştir.

Yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı analizi, tasarım parametrelerindeki değişime karşılık sistemin buna verdiği cevabın mekanik kuralları çerçevesinde incelenmesine dayanır. Yapısal sistemlerin tasarım değişkenleri olarak kesit atalet momenti, plaka kalınlığı, çubuk elemanların kesit alanı, elastisite modülü gibi değerleri alırsak, sistemin cevabı olarak şekil değişimi, gerilme büyüklüğü, doğal frekans, burkulma yükü gibi kavramları örnek olarak gösterebiliriz. Bir sistemin oluşturulması esnasında tasarımcı konu ile ilgili bilgi, tecrübe ve sezgisel kavramların yanı sıra, tasarım parametrelerindeki değişimlerin etkisini gösteren duyarlılık analizi sonuçları ile desteklenirse, daha az deneme yanılma, düşük hata oranı ve daha kısa tasarım süresinde sonuca ulaşabilecektir. Duyarlılık analizlerinden elde edilebilecek sonuçlar doğrudan bir ürünün tasarımında kullanılabileceği gibi optimizasyon alanında da iterasyonları azaltıcı değerleri vermesi açısından önemlidir.

Matris cebirinin işlemlerinden olan TDA son zamanlarda artan bir önem kazanmış ve geniş uygulama alanları bulmaya başlamıştır. Kontrol teorisi, sinyal ve görüntü işleme, numune tanımlama, ses analizi, zaman serisi analizleri, elektriksel şebeke teorisi ve biomedikal mühendisliği gibi konular mevcut uygulama alanlarına örnek olarak verilebilir.

Herhangi bir  $A$  matrisinin,  $A=U\Sigma V^*$  şeklinde üç ayrı matrisin çarpımı şeklinde ayrıştırılması mümkündür. Burada  $U$  ve  $V$  unitary,  $\Sigma$  ise diagonal matris özelliğine sahiptir. (Eğer  $A$  reel ise  $*\equiv T$ , transpoz, eğer  $A$  kompleks ise  $*\equiv H$ , eşlenik transpozdur.)  $U$ 'nun ve  $V$ 'nin kolonları sırasıyla sol ve sağ tekil vektörleri bünyesinde barındırırken  $\Sigma$ 'nın köşegeni ise tekil değerleri içerir. Bu ayrıştırma işlemi tekil değerlere ayrıştırma veya  $A$ 'nın TDA'sı adını almaktadır.

TDA çok değişkenli kontrol sistemlerinin giriş-çıkış ilişkilerinin incelenmesinde kullanılan güçlü bir araçtır. Buradan hareketle, yapısal sistemlerin  $G=U\Sigma V^*$  şeklinde transfer fonksiyon matrislerine TDA'nın uygulanması halinde duyarlılık analizi açısından değerli bilgilere ulaşılabilmektedir.

Tezde, konular ele alınırken ilk olarak duyarlılık kavramı tanıtılmış ve mevcut duyarlılık analizlerinden örnekler verilmiştir. Daha sonra TDA'nın cebirsel açıklaması yapılmış ve uygulama alanları tanıtılmıştır. Kullanılan sonlu elemanlar ifadelerinin açıklanmasından sonra, TDA'nın zamana bağlı ve zamandan bağımsız denklemler üzerine uygulanmasına geçilmiştir. Takip eden bölümlerde TDA'ya dayalı duyarlılık analizi ile mevcut duyarlılık analizi teknikleri olan statik cevap duyarlılığı, özdeğer ve dinamik cevap duyarlılığının karşılaştırmaları yapılmıştır.

Tekil değerlerin kareleri bir sistemin giriş-çıkış vektörleri arasındaki güç, enerji ve güç spektrumu oranlarının sınırlarını teşkil etmektedir. En büyük ve en küçük tekil değerler sırasıyla  $\sigma_1^2(j\omega)$  ve  $\sigma_n^2(j\omega)$  olarak enerji oranlarının üst ve alt sınırlarıdır. Tekil değerler sistem kazancını verirken karşılık gelen sağ tekil vektörler giriş, sol tekil vektörlerde çıkış doğrultularını temsil etmektedir. Yüklemenin birinci sağ vektör doğrultusunda olması üst sınırı, son sağ tekil vektör doğrultusunda olması da alt sınırı vermektedir. Böylelikle, tasarım parametrelerinde yapılan değişimler aracılığıyla tekil değerlerin şekillendirilmesi ile aslında sistem cevabı şekillendirilmiş olmaktadır.

Tekil değerler ve vektörlerin  $\sigma_i$ ,  $u_i$  ve  $v_i$  fonksiyonları tasarım parametrelerindeki değişim  $\Delta b_i$ 'lere göre süreksizlikleri sebebiyle genellikle türevlenebilir ifadeler değildirler. Bu nedenle, sayısal olarak sonuç üreten Gateaux türevleri kullanılmıştır. Analizler esnasında eğer yapısal sistemin sınırları ile ilgileniyorsak sadece en büyük ve en küçük tekil değerlerin ve onlara karşılık gelen tekil vektörlerin bulunması yeterli olmaktadır. Arada kalan diğerlerinin bulunmasına gerek kalmamakta, bu da işlemci hesaplama süresini ve hafıza kullanımını önemli ölçüde düşürmektedir. Sistemin en kötü yükleme halinin bulunmasında bu fark daha artmaktadır. Yöntemin performansı statik, dinamik cevap duyarlılığı, özdeğer duyarlılığı, en kötü yükleme koşulu, çoklu yükleme hali, yapısal gürbüzlük gibi konuları içeren sayısal örnekler üzerinde denenmiştir.

Geliştirilen yöntem farklı bir yapısal sistem olan karma malzeme (kompozit) lamel katmanlarının tasarlanmasına da uygulanmıştır. Mevcut halde lamel sistemlerinin tasarım işlemlerinde parametrelerin optimizasyon işlemi, belli bir yükleme hali, ortalama gerilme değerleri ve bunlardan doğan moment ve gerilme sonuçları esas alınarak yapılmaktadır. Bunun sonucunda elde edilen optimal yapı sadece

hesaplamaların yapıldığı belli bir yükleme hali için geçerli olmaktadır. Halbuki uygulamada yapısal sistem, değişen servis yükleri, farklı sınır koşulları ile çeşitli gerilme ve uzama şartlarına maruz kalmaktadır. Bu yüzden en genel hal için optimum yapının aranmasında sadece bir yükleme koşuluna bağlı kalınmaması gerekir. Tezde ayrı bir bölüm olarak TDA'ya dayalı yöntem lamellerin tasarımına uygulanmış, en kötü yükleme haline karşılık gelen optimum lamel tasarımı, bir minimaks problemi olarak ele alınıp tekil değerlerin minimize edilmesiyle sonuca ulaşılmıştır. Değişik ve en kötü yükleme şartlarında lamel sistemlerinin davranışlarının nasıl olacağı sayısal bir örnek üzerinde izah edilmiştir.

Bu alanda da TDA kullanımının bazı özellikleri göze çarpmaktadır. İlk olarak, en büyük tekil değere karşılık gelen sağ ve sol tekil vektörler sırasıyla en kötü yükleme koşulunun elemanlarını ve bu koşul altında lamel sisteminde gerçekleşen birim uzama veya gerilme bileşenlerini vermektedir. Buradan hareketle en büyük tekil değer minimize edilmesiyle, sistemin enerji sönümleme oranı artırılarak sistem cevabı yani birim uzama veya gerilme değeri düşürülebilmektedir.

Sonuç olarak TDA'ya dayalı duyarlılık analizi klasik yöntemlerle mukayese edildiğinde daha fazla bilgi vermesinin yanı sıra, özellikle çoklu yükleme koşulu ve en kötü yükleme halinin bulunması başta olmak üzere hesaplamalı alanda işlemci (CPU) süresi ve hafıza kullanımında büyük avantajları da beraberinde getirmektedir. Geliştirilen yöntemin uygulanabilirlik açısından bir diğer avantajıda sürekli ortamların modellenmesinde etkin ve yaygın olarak kullanılan sayısal metodların başında gelen sonlu elemanların denklemleri ile gösterdiği uyum ve birlikte kullanılabilir olmasıdır. Bu nedenle yöntem sanayide yaygın olarak kullanılan ticari analiz programlarının (Ansys, Nastran, vs.) duyarlılık ve optimizasyon algoritmalarına dahil edilebilme şansına sahiptir.

## **DESIGN SENSITIVITY ANALYSIS OF STRUCTURES BASED UPON THE SINGULAR VALUE DECOMPOSITION**

### **SUMMARY**

In this study, the singular value decomposition (SVD) is employed for design sensitivity analysis of structures and design sensitivity analysis based upon the SVD is developed as a new method.

Structural design sensitivity analysis concerns the relationship between design variables available to the engineer and structural response or state variables that are determined by the laws of mechanics. The dependence of structural response measures such as displacement, stress, natural frequency and buckling load on design variables such as truss member cross sectional area, plate thickness and component shape is implicitly defined through the state equations of structural mechanics.

One of the most common methods of structural design involves decisions made by the designer based on experience and intuition. This conventional approach to the structural design can be substantially enhanced if the designer is provided with design sensitivity information that explains what the influence of design changes will be without requiring trial and error.

The SVD has become an effective tool in handling various important problems arising in a wide variety of application areas such as control theory, signal and image processing, identifications and estimation, speech synthesis, pattern recognition, time series analysis, electrical network theory and biomedical engineering.

Every matrix  $\mathbf{A}$  can be decomposed into  $\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$  where  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{V}$  are unitary or orthogonal and  $\mathbf{\Sigma}$  is a diagonal matrix (if  $\mathbf{A}$  is real  $^*\equiv T$ , transpose, if  $\mathbf{A}$  is complex  $^*\equiv H$ , conjugate transpose). This decomposition is called the singular value decomposition or the SVD of  $\mathbf{A}$ .

The SVD is a very powerful tool that is utilized for studying input-output properties in multi-variable control systems. Applying the SVD to the transfer function matrix  $\mathbf{G}=\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^*$  of a structure gives us some valuable information about sensitivity analysis of the structure.

In the text comparisons are made of the proposed sensitivity analysis based upon the SVD with the conventional techniques. Firstly, basic ideas of the finite element structural analyses methods are presented, then conventional techniques such as design sensitivity analysis of static response, eigenvalues, and dynamic response are introduced. Following, the SVD is utilized in finite element analysis is presented for time-independent and time-dependent problems. It is shown how singular values can be used to give a frequency domain characterization for the limits to some appropriately defined gains. As the squares of the singular values are the bounds of power, energy and power spectral density ratios between the input and output vectors, biggest and smallest singular values respectively  $\sigma_1^2(j\omega)$  and  $\sigma_n^2(j\omega)$  as the limits to the average power ratio for periodic input signals and the energy ratio for a periodic input signals. The upper bound is achieved if the input is placed in the direction of first right singular vector, and the lower bound is achieved if the input is placed in the direction of the last right singular vector. Hence, shaping the singular values of a structure is equivalent to shaping the structural response.

The singular values are not in general differentiable. Therefore Gateaux differentials of the variables  $\sigma_i$ ,  $\mathbf{u}_i$  and  $\mathbf{v}_i$  for the design variable  $\Delta b_i$  are used which is numerically more stable and computationally cheaper than computation of the SVD of  $\mathbf{G}$  for each design variation  $\Delta b_i$ . There is no need to take the matrix inversion operation to find  $\mathbf{u}_i$  and  $\mathbf{v}_i$  of  $\mathbf{G}$ . On the other hand, since we are interested in the bounds of the structure response, it is sufficient to compute only the largest and smallest singular values and corresponding singular vectors rather than computing all of them, which is significantly reduces the computational cost. Several numerical examples are presented in different sensitivity analysis areas such as static response, dynamic harmonic response, worst case loading, multiple load cases and structural robustness.

As a structure analysis technique, the SVD is also applied to optimum laminate design problem of composites. So far, it is common that parameters of laminates are optimized for certain load cases and investigations on designing composite materials employ some average stress values, constant stress resultants, moment resultants and/or shear resultants in designing the laminates, hence such designs are only optimal for the load case for which they are optimized. In practice, a structure to be designed is subjected to a variety loads and boundary conditions. Hence optimal constitution of a laminate in a structure cannot be sought by considering the laminate subjected to a priori stress and moment resultants, and multitude of stress states may exist in a structure. Therefore, another design criteria, called minimization of stiffness or stress for the worst possible load case emerges to account for all possible load cases motivated by this fact. Optimum laminate design problem for the worst

possible load case is formulated as a minimax problem, whose solution is shown to be equivalent to a singular value minimization problem; subsequently, singular values are employed for designing laminates.

Using the SVD has the following some advantages also in this area. Firstly the largest singular value and associated left and right singular vectors give the worst possible load case to which the laminate can be subjected and associated strains of the laminate respectively. Second, minimization of the largest singular value guarantees the minimization of strains in response to the worst possible load case

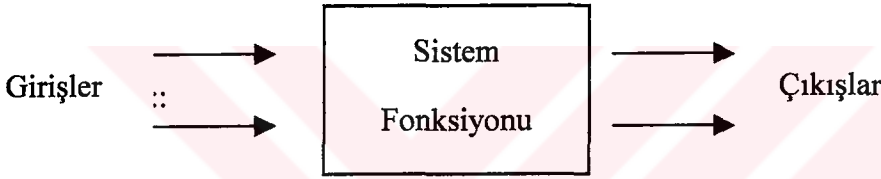
Also the SVD based analysis is well suited to study input-output directional relationships; associated singular vectors tell us how the outputs (strains or stress) are related to the inputs (loads). A numerical example is also presented to illustrate the proposed approach.

As a result, the SVD based analysis compared with the classical techniques yield more information and computationally advantageous particularly in case of multiple load cases and finding worst case loading and sensitivity bounds of a structure. Another advantage of this method is that it is well suited for finite element method equations which is the most popular method among numerical methods especially in modeling continuous structures. That's why the proposed method can be applied to sensitivity and optimization algorithms of well-known commercial analysis softwares (Ansys, Nastran etc.).

# 1. GİRİŞ

## 1.1 Giriş ve Çalışmanın Amacı

En genel anlamda sistem, tanımlanmış bir grup görevi yerine getiren varlıkların birlikteliği olarak tanımlanmaktadır. Örneğin, otomobil yolcuların bir yerden başka bir yere taşınma görevini yerine getiren bir sistemdir. Bu anlamda söz konusu olan sistem girdilere bağlı olarak sonuçları çıktılar olan bir fonksiyon veya prosesin yürütmesini sağlamaktadır.



Şekil 1.1 Sistemlerin genel gösterimi

Bir yapısal sistemin tasarlanmasındaki temel noktalardan birisi tasarım parametrelerindeki değişime karşı sistemin verdiği cevaptır. Tasarım duyarlılığı analizi, sistem parametreleri ile sistemin belirli alanlardaki performansları aracılığıyla tanımlanan sistem cevabı arasındaki ilişkileri açığa çıkarır. Yapısal sistemin tasarım değişkenleri olarak kesit atalet momenti, plaka kalınlığı, çubuk elemanların kesit alanı, elastisite modülü gibi değerleri, sistem cevabı olarak şekil değişimi, gerilme büyüklüğü, doğal frekans, burkulma yükü gibi kavramları örnek olarak gösterebiliriz. Duyarlılık analizlerinde, tasarım parametrelerindeki değişime karşı sistem cevabının bulunması, bazı performans değerlerinin belirli parametre değişimlerine karşı gösterdiği değişimin belirlenmesi ile olmaktadır. Bu işlemler cebirsel denklemlerin çözümü, özdeğer problemleri, matris cebri, veya diferansiyel denklem çözümleriyle gerçekleşmektedir. Yapısal duyarlılık analizlerinde kullanılmakta olan çeşitli klasik yöntemler mevcut olmakla birlikte yapısal sistemlerin tasarım duyarlılık analizlerinin yapılmasında şimdiye kadar sistemin tekil değer ve tekil vektörlerinin davranışlarına bakılmamıştır.

Halbuki Tekil Değerlere Ayırıştırma, TDA (veya Singular Value Decomposition, SVD) işlemi çok çeşitli alanlarda kullanılıyor olmasının yanı sıra sistemlerin giriş-çıkış ilişkilerinin incelenmesinde de oldukça başarılıdır. Özellikle bir yapısal sistemin tekil değerleri özel bir anlama sahiptir. Çünkü tekil değerlerin kareleri ile giriş-çıkış vektörlerinin güç, enerji ve güç spektrumu arasında oransal bir bağ vardır. Buradan hareketle sisteme ait tekil değerlerin biçimlendirilmesi ile sistem cevabı şekillendirilebilmektedir. Ayrıca, tekil vektörler, giriş ile çıkış değerleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu bize söyleyebilmektedir.

Bu çalışmada, çok değişkenli kontrol sistemlerinin giriş-çıkış özelliklerinin incelenmesinde kullanılmakta olan TDA metodu, hesaplamalı mekanik ve sistem teorisi disiplinlerinin karşılıklı etkileşimi altında, yapısal sistemlerin tasarım duyarlılığı analizine uygulanmıştır.

Çalışmada, sonlu elemanlar denklem sistemleri kullanılarak yapısal sistemlerin statik ve dinamik duyarlılık analizleri TDA'ya dayalı olarak çıkarılmıştır. Tezde geliştirilen TDA temeline dayanan duyarlılık analizi ile diğer mevcut olan klasik duyarlılık tekniklerinin karşılaştırması yapılmıştır. Ayrıca metodun performansı farklı duyarlılık analiz tiplerini içerecek şekilde sayısal örnekler üzerinde gösterilmiştir.

Tezde, konunun sıralaması şu şekildedir; tasarım duyarlılığı kavramının ifade edilmesi, mevcut duyarlılık analizlerinin tanıtılması, TDA'nın cebirsel açıklaması, TDA'nın mevcut uygulama alanları, tasarım duyarlılığı ile tekil değerlerin ilişkileri, TDA'nın sonlu elemanlar ifadelerine uygulanması, tekil değerler ve vektörlerin duyarlılığıdır. Son kısımda metod statik, özdeğer, dinamik harmonik, en kötü yükleme durumu, çoklu yükleme koşulları, yapısal gürbüzlük gibi analiz alanlarında farklı sayısal örnekler üzerinde denenmiştir. Ayrıca değişik bir alan olarak ortotropik lamelli karma malzemelerin tasarımı üzerine de metod uygulanmış ve bununla ilgili sayısal bir örneğe de yer verilmiştir. Sonuç kısmında, geliştirilen yöntemin mevcut yöntemlere kıyasla olan üstünlükleri ve getirdiği avantajlar yanı sıra, gelecekteki muhtemel uygulama alanlarında anlatılmıştır.

## 2. TASARIM DUYARLILIĞI ANALİZİ

Bir yapısal sistemin tasarım aşamasında iken giriş ve çıkış parameterlerinin arasındaki ilişkinin baştan bilinebilmesi halinde ürünün nihai performansının yükseltilmesi, tasarım süresinin kısaltılması ve prototip adetinin düşük tutulması konularında önemli ilerlemeler sağlanabileceği açıktır.

Duyarlılık kavramı, sistem cevabındaki değişim miktarının, bu değişime sebep olan tasarım parametrelerindeki değişime oranı olarak tarif edilmektedir. Bunu, en genel anlamda,

$$\text{Duyarlılık} = \frac{\Delta \text{Sistem cevabı}}{\Delta \text{Giriş parametresi}}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu tanımlama, aynı zamanda duyarlılık ifadelerinin türevsel denklemlerle gelişeceğinin de göstergesidir.

Diğer taraftan, tasarım duyarlılığı ve optimizasyonu birbirlerinden ayrı konular olmakla birlikte, yakın ilişki içerisindedirler. Optimizasyon işlemi belirlenen kısıtlar dahilinde en iyi tasarımı elde etmeye çalışırken kendi algoritmalarının içerisinde duyarlılık katsayıları ve sonuçlarını da kullanabilmektedir.

### 2.1 Mevcut Duyarlılık Metodları

Duyarlılık metodları statik, dinamik veya özdeğer duyarlılığı gibi analizin türüne göre bazı farklılıklar göstermekle birlikte, matematiksel olarak matris ve vektör türevleri olarak gelişmektedir. Problemin tipine bağlı olarak elde edilen differansiyel ifadesinin çözümünde doğrudan türevleme veya adjoint değişkeni metodları kullanılmaktadır [1].

### 2.1.1 Statik Cevap Tasarım Duyarlılığı

Parça boyutlarının tasarım değişkenleri olarak alınması durumunda genelleştirilmiş global katılık matrisi ve şekil değiştirme vektörü tasarım değişkenlerinin fonksiyonu olmaktadır.

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{K}_g(b) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{z}_g = \mathbf{z}_g(b) \quad (2.2)$$

Burada  $\mathbf{b}=[b_1, b_2, \dots, b_k]^T$  şeklinde tasarım değişkenleri bir vektörün elemanlarını oluşturacak tarzda yazılabilir.

Yapısal sistemlerin optimum tasarımlarının yapılmasında izlenen yol; belirli sınır koşulları altındaki sistemin tasarım değişkenlerine bağlı olarak tanımlanan maliyet veya temel fonksiyonunun minimize yada maksimize edilmesidir. Buradan hareketle yapısal sistemlerde,

$$\psi = \psi(b, \mathbf{z}_g(b)), \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanan genel bir performans ölçüm fonksiyonunu ele alırsak, tasarım duyarlılığı bu fonksiyonun giriş parametrelerindeki değişime karşı verdiği cevaptır. Bu durum, en genel halde  $d\psi/db$  türevinin bulunması olarak tanımlanabilir. Bu türevi hesaplamak için iki metod mevcuttur.

#### 2.1.1.1 Doğrudan Türevleme Metodu

Sistem denklemlerine sınır koşullarının tanıtılmasıyla ifade,

$$\mathbf{K}(b) \mathbf{z} = \mathbf{F}(b) \quad (2.4)$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $\mathbf{K}(b)$  indirgenmiş global katılık matrisi,  $\mathbf{F}(b)$  ise indirgenmiş yük vektörüdür.  $\mathbf{K}(b)$  matrisi pozitif belirlidir ve dolayısıyla tekil değildir.  $\mathbf{K}(b)$  ve  $\mathbf{F}(b)$ 'nin elemanlarının tasarım parametrelerine göre “s” kere türevlendiğini varsayarsak, (2.4) ifadesindeki  $\mathbf{z} = \mathbf{z}(b)$  çözümü de “s” kere türevlenebilecek demektir. Buna bağlı olarak  $\psi = \psi(b, \mathbf{z}_g(b))$  fonksiyonunun da tasarım parametrelerine göre olan türevleri alınabilir.

Türevdeki zincir kuralını uygularsak  $\psi$  fonksiyonunun  $\mathbf{b}$  tasarımına göre olan türevi

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{z}} \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} \quad (2.5)$$

olur. (2.4) ifadesinin her iki tarafının  $\mathbf{b}$ 'ye göre türevlenmesinde

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{b}}(\mathbf{K}(\mathbf{b})\tilde{\mathbf{z}}) + \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}} \quad (2.6)$$

elde edilir. Buradaki tilda “ $\sim$ ” kısmi türevdeki sabit olarak alınacak parametreyi göstermektedir. Sınır koşullarının uygulanması neticesinde  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$ 'nin tekil olmaması sayesinde, (2.6) ifadesinden  $d\mathbf{z}/d\mathbf{b}$  çözülebilmektedir.

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\mathbf{b}} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b}) \left[ \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{b})}{\partial\mathbf{b}} - \frac{\partial}{\partial\mathbf{b}}(\mathbf{K}(\mathbf{b})\tilde{\mathbf{z}}) \right] \quad (2.7)$$

olarak bulunan bu sonuç (2.5) denkleminde yerine konursa,

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{b}} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{z}} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b}) \frac{\partial}{\partial\mathbf{b}} [\mathbf{F}(\mathbf{b}) - (\mathbf{K}(\mathbf{b})\tilde{\mathbf{z}})] \quad (2.8)$$

sonucuna ulaşılır. Katılık matrisinin  $\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b})$  şeklinde tersinin gerçek sistemlerde hesaplanması matris boyutunun büyüklüğünden dolayı pratik değildir. Bu yüzden (2.8) denklemi kullanışlı bir ifade olarak kabul edilemez. Bunun üstesinden gelmek için iki yol vardır. Bir tanesi (2.6) denklemi  $d\mathbf{z}/d\mathbf{b}$  için sayısal olarak çözdürülüp (2.5)'de yerine konur, buna doğrudan türevleme işlemi denilmektedir. Diğer bir yol ise adjoint değişkeni kullanılmasıdır.

#### 2.1.1.2 Adjoint (Bitişik) Değişkeni Metodu

Bu yöntem matematiksel işlemleri kolaylaştırmak için adjoint (bitişik) değişkeni  $\lambda$  tanımlamaya dayanmaktadır.

$$\lambda \equiv \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{K}^{-1}(b) \right]^T = \mathbf{K}^{-1}(b) \frac{\partial \psi^T}{\partial \mathbf{z}} \quad (2.9)$$

Bu yöntemde  $\mathbf{K}$  matrisinin simetrik olma özelliğinden yararlanılmaktadır.  $\lambda$ 'nın (2.9) denkleminde  $\mathbf{K}^{-1}(b)$  hesaplanarak bulunmasından ziyade (2.9) denkleminin her iki yanı  $\mathbf{K}(b)$  ile çarpılırsa içinde  $\lambda$  bulunan adjoint ifadesi

$$\mathbf{K}(b)\lambda = \partial \psi^T / \partial \mathbf{z} \quad (2.10)$$

elde edilir. (2.10) ifadesi  $\lambda$ 'ya göre çözüldükten sonra (2.9) denklemini kullanarak (2.8) ifadesinde yerine konursa,

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} + \lambda^T \left[ \frac{\partial \mathbf{F}(b)}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\mathbf{K}(b)\tilde{\mathbf{z}}) \right] \quad (2.11)$$

bulunur. Hesaplamaları kolaylaştıracak tarzda diğer bir yazım şekli,

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left[ \tilde{\lambda}^T \mathbf{F}(b) - \tilde{\lambda}^T \mathbf{K}(b)\tilde{\mathbf{z}} \right] \quad (2.12)$$

biçiminde verilebilir. Bu yol, tasarım duyarlılık analizinin adjoint değişkeni metodu ile hesaplanması olarak adlandırılmaktadır.

### 2.1.1.3 Genelleştirilmiş Global Katılık Matrisi

Sınır koşullarını belirleyen kinematik ilişkilerin özellikle çok noktadan mesnetleme durumlarında, indirgenmiş  $\mathbf{K}(b)$  matris ve  $\mathbf{F}(b)$  vektörlerini açık bir şekilde elde etmek mümkün olmayabilir. Bu durumda (2.6) ve (2.12) ifadelerinin sağ taraflarındaki kısmi türevleri hesaplamak güçleşir. Bunun yerine doğrudan tekil haldeki genelleştirilmiş global katılık matrisini içeren bir formülasyon kullanılması zorunlu hale gelir. [1]'deki ifadeler neticesinde global matris ve vektörleri içeren

$$\bar{\mathbf{z}}_g^T \mathbf{K}_g(b) \frac{\partial \mathbf{z}_g}{\partial b_i} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\bar{\mathbf{z}}_g^T \mathbf{K}_g(b) \tilde{\mathbf{z}}_g) + \frac{\partial}{\partial b_i} (\bar{\mathbf{z}}_g^T \mathbf{F}(b)) , \quad i = 1, \dots, k \quad (2.13)$$

denkleminde doğrudan türevleme yöntemi ile ulaşılmaktadır. İfadede  $\partial \mathbf{z}_g / \partial b_i$  sayısal olarak çözdürülebilmekte, işlemin her bir  $i=1,2,\dots,k$  için tekrarlanması halinde  $\mathbf{z}_g$  nin  $b$  tasarımına göre olan kısmi türevlerine ulaşılmaktadır. Burada  $\bar{\mathbf{z}}_g$  keyfi virtüel yer değiştirmeyi temsil etmektedir. Adjoint değişkeni kullanılması halinde ifade,

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_g^T \mathbf{K}_g(b) \tilde{\mathbf{z}}_g - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_g^T \mathbf{F}_g(b) \right], \quad (2.14)$$

şeklinde olmaktadır.

### 2.1.2 Özdeğer Tasarım Duyarlılığı

Bir yapının doğal frekansı ve burkulma yükü hesabı tasarım parameterlerine bağlı genelleştirilmiş bir özdeğer problemi olarak karşımıza çıkar. İndirgenmiş global katılık ve kütle matrisi kullanımıyla genel özdeğer ifadesi,

$$\mathbf{K}(b)\mathbf{y} = \zeta \mathbf{M}(b)\mathbf{y} \quad (2.15)$$

şeklinde verilebilir. Burada  $\mathbf{M}(b)$  kütle,  $\mathbf{K}(b)$  katılık matrisi,  $\zeta$  özdeğer,  $\mathbf{y}$  özvektördür. Buradaki  $\mathbf{y}$  özvektörü aşağıdaki şekilde normalize edilebilmektedir.

$$\mathbf{y}^T \mathbf{M}(b) \mathbf{y} = 1 \quad (2.16)$$

İfadelerdeki global katılık ve kütle matrisleri pozitif belirli ve tasarıma göre türevlenebilmektedir.

Bu noktada konu ile ilgili teoremin ifadesi şu şekildedir;  $\mathbf{K}(b)$  ve  $\mathbf{M}(b)$  matrisleri pozitif belirli, simetrik, sürekli ve tasarıma göre türevlenebiliyorsa, ayrıca özdeğer  $\zeta$  basitse (yani tekrarlanmayan ise), (2.15) ve (2.16) ifadelerindeki özvektör tasarıma göre sürekli ve türevlenebilirdir. Temel alınan (2.15) ifadesinde bu teorem çerçevesinde yapılan ara işlemlerden sonra [1]

$$\frac{d\zeta}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left[ \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}(b) \tilde{\mathbf{y}} \right] - \zeta \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left[ \tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}(b) \tilde{\mathbf{y}} \right] \quad (2.17)$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Burada önemli olan nokta, özdeğerin tasarım vektörüne göre olan türevinin adjoint değişkenine ihtiyaç göstermeden hesaplanabiliyor

olmasıdır. Böylece tekrarlanmayan yani katlı olmayan özdeğerlerin bulunması için türevleme işlemi (2.17) denklemi aracılığıyla doğrudan yapılabilmekte ve performans ölçüm fonksiyonunun türevine göre daha basit şekilde bulunabilmektedir. Kütle ve katılık matrislerinin indirgenmiş hale getirilememesi ve global halde kullanılması durumunda ifade, [1]

$$\frac{d\zeta}{db} = \frac{\partial}{\partial b} [\tilde{y}_g^T K(b) \tilde{y}_g] - \zeta \frac{\partial}{\partial b} [\tilde{y}_g^T M_g(b) \tilde{y}_g] \quad (2.18)$$

şeklinde olmaktadır.

### 2.1.3 Dinamik Cevap Tasarım Duyarlılığı

Yüklerin zamana bağlı değişimi ve başlangıç koşullarının sıfırdan farklı olması durumunda genel hareket denkleminde,

$$M(b)\ddot{z} + C(b)\dot{z} + K(b)z = F(t, b) \quad (2.19)$$

yola çıkarak ve başlangıç koşullarını

$$z(0) = z^0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}^0 \quad (2.20)$$

alırsak, yapısal sistem cevap fonksiyonunu en genel halde

$$\psi = g(z(T), b) + \int_0^T G(z, b) dt \quad (2.21)$$

formunda yazabiliriz. Burada T süre sonudur ve

$$\Omega(z(T), \dot{z}(T), b) = 0 \quad (2.22)$$

şeklinde ifade edilen bir fonksiyon ifadesi içerisinde yazılmaktadır. Verilen bir  $b$  tasarımı için (2.19) ifadesi (2.20) şartları altında entegre edilebilir. T değeri ise (2.22) denklemi aracılığıyla bulunabilmektedir. (2.22) ifadesi için ise,

$$\dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \dot{z}(T) + \frac{\partial \Omega}{\partial \dot{z}} \ddot{z}(T) \neq 0 \quad (2.23)$$

yazılabilir. Burada konu ile ilgili teorem, eğer  $\mathbf{M}(b)$  matrisi tekil değilse,  $\mathbf{M}(b)$ ,  $\mathbf{C}(b)$ ,  $\mathbf{K}(b)$  matrisleri ve  $\mathbf{F}(t, b)$  vektörü  $b$  tasarımına göre “s” kere sürekli ve türevlenebiliyorsa,  $z = z(t, b)$  çözümü de  $b$ ’ ye göre “s” kere sürekli ve türevlenebilir şeklindedir [1]. Bu teorem neticesinde ulaşılan dinamik duyarlılık ifadesi

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{db} = & \frac{\partial g}{\partial b}(z(T), b) + \int_0^T \left[ \frac{\partial G}{\partial b}(z, b) + \frac{\partial R}{\partial b}(\lambda(t), z(t), \dot{z}(t), \ddot{z}(t), b) \right] dt \\ & - \left[ \frac{\partial g}{\partial z} \dot{z}(T) + G(z(T), b) \right] \left( \frac{\partial \Omega}{\partial b} / \dot{\Omega} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

formunu alır. Burada  $\lambda = \lambda(t)$  olarak adjoint değişkenidir. Denklemdaki  $\mathbf{R}$ ,

$$\mathbf{R} \equiv \tilde{\lambda}^T \mathbf{F}(t, b) - \tilde{\lambda}^T \mathbf{M}(b) \ddot{z} - \tilde{\lambda}^T \mathbf{C}(b) \dot{z} - \tilde{\lambda}^T \mathbf{K}(b) z \quad (2.25)$$

ifadesi ile tanımlanmaktadır. “~” kısmi türevler sırasında sabit olarak alınacak değişkeni göstermektedir.

### 3. TEKİL DEĞERLERE AYRIŞTIRMA İŞLEMİ “TDA” ( Singular Value Decomposition-SVD )

#### 3.1 TDA'nın Cebirsel Açıklaması

Reel veya kompleks en genel haldeki her matris

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times m} \mathbf{\Sigma}_{m \times n} \mathbf{V}_{n \times n}^* \quad (3.1)$$

$$[\text{Matris}] = [\text{Ortogonal/unitary}] \cdot [\text{Diagonal}] \cdot [\text{Ortogonal/unitary}]$$

şeklinde üç ayrı matrisin çarpımı olacak tarzda ayrıştırılabilir. Eğer A matrisi reel ise  $*$   $\equiv$  T (tranpoz), eğer A matrisi kompleks ise  $*$   $\equiv$  H (eşlenik transpoz) olacaktır. Ayrıca A matrisinin reel olması durumunda ortogonallık, kompleks olması durumunda unitary matris söz konusudur.

(3.1) ifadesinde  $\mathbf{U}$ 'nun kolonları sol tekil vektörler,  $\mathbf{V}$ 'nin kolonları sağ tekil vektörler,  $\mathbf{\Sigma}$ 'nin diagonal elemanları ise tekil değerleri içerir.

Adı geçen tekil değer ve vektörlerinin bulunması: Matrisin reel ve boyutunun  $m > n$  olduğunu varsayarsak  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  matrisi ( $n > m$  halinde  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$  alınacaktır.)  $n \times n$  boyutunda kare, simetrik ve pozitif belirlidir (definit).  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 'nın özdeğerleri için  $\lambda_1 = \sigma_1^2$ ,  $\lambda_2 = \sigma_2^2$ , .....,  $\lambda_n = \sigma_n^2$  olarak yazılabilir. Aralarındaki ilişki pozitif belirlilikten dolayı  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  ve  $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$  şeklindedir. Burada  $r = \text{Rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ , bulunan özdeğerler  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  'nın özdeğerleridir ve bunlara karşılık gelen özvektörler  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  olarak bulunabilir. Bunlar  $\mathbf{V}$  matrisinin kolonlarını sağ tekil vektörler olarak oluştururlar. Ortonormal olmaları sebebiyle,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i^2 \mathbf{v}_i \quad i=1, \dots, n \quad (3.2)$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i^2 \neq 0, \quad i=1, \dots, r \quad (3.3)$$

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = 0, \quad i=1, \dots, r; \quad j \neq i \quad (3.4)$$

ifadelerini sağlamaktadır [2].

$\mathbf{V}_1=(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$ ,  $\mathbf{V}_2=(\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ , olarak yazabiliriz. Buradaki  $\mathbf{v}_1$ ’den  $\mathbf{v}_r$ ’e kadar olan vektörler sıfırdan farklı  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  özdeğerlerine karşılık gelmektedir. Diğer grupta kalan  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  sıfır özdeğerlere karşılık gelen vektörlerdir. Bunlar için ,

$$\mathbf{V}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n) = \mathbf{V}_2^T (0, 0, \dots, 0) = 0 \quad (3.5)$$

yazılabilir.  $\mathbf{A} \mathbf{V}_2 = 0$  veya

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_k = 0, \quad k = r+1, r+2, \dots, n \quad (3.6)$$

Buradan hareketle sıfırdan farklı  $\{\mathbf{u}_i\}$  sol tekil vektör setini tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A} \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.7)$$

$\mathbf{u}_i$ ’ler  $i=1, \dots, r$  ortonormal set formundadır. Çünkü

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j &= \frac{1}{\sigma_i} (\mathbf{A} \mathbf{v}_i)^T \frac{1}{\sigma_j} (\mathbf{A} \mathbf{v}_j) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (\mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j) \\ &= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$\mathbf{U}_1= (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ , ler yukarda açıklandığı şekilde bulunurken,  $\mathbf{U}=(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$ ’nin ortogonal olması sebebiyle  $\mathbf{U}_2= (\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m)$ , bölümü ortogonalite kuralını sağlayacak tarzda belirlenir. Herhangi bir  $k > r$  için,

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_i = 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.9)$$

(3.7) ifadesinin  $\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  olarak alınması ve  $\mathbf{U}$ ’nun vektörlerinin ortogonalliği sebebiyle

$$\mathbf{u}_k^T \mathbf{A} \mathbf{v}_i = 0, \quad i = r+1, \dots, n \quad (3.10)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$  olsun,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{v}_1^T \mathbf{A}^T \\ \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{v}_1^T \mathbf{A}^T \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_1} \mathbf{v}_1^T \mathbf{A}^T \\ \mathbf{u}_{r+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (3.11)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \cdot \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \frac{1}{\sigma_2} \cdot \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{\sigma_r} \cdot \sigma_r^2 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

burada  $\Sigma_1 = \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$  ve rank içinde yazılabilecek ifade  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T) = \text{rank}(\Sigma) = r$  şeklindedir. Elde edilen  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$  ifadesi tekil değerlere ayrıştırma “TDA”(Singular Value Decomposition SVD) olarak adlandırılır.

$\Sigma$  matrisinin diagonal elemanları  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ ,  $\mathbf{A}$  matrisinin tekil değerleridir. Bu tekil değerler her durumda pozitif ve reeldir.  $\mathbf{U}$ 'nun kolonları sol tekil vektörler,  $\mathbf{V}$ 'nin kolonları ise sağ tekil vektörler olarak anılır. Burada  $k = \min(m, n)$  olmak üzere  $\mathbf{A}$ 'nın  $r$  tane tekil değeri vardır. Bunlar  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 'nın (veya  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ ) matrisinin özdeğerlerinin karekökleridir. Kalan  $(k-r)$  adet tekil değerler  $r < k$  olmak üzere sıfırdır. Buradan hareketle, tüm tekil değerlerin tek olarak hesaplandığı sifıra karşılık gelen tekil vektörlerin de ortonormallik çerçevesinde belirlendiği görülmektedir.

### 3.2 TDA'nın Mevcut Uygulama Alanları

TDA'nın sahip olduğu özelliklerin son zamanlarda daha iyi anlaşılması ile birlikte çeşitli alanlarda bir araç olarak kullanımı hızla artmaktadır. Mevcut uygulama alanları olarak kontrol teorisi, sinyal işleme, görüntü işleme, örnek tanımlama, ses sentezi, zaman seri analizleri, elektriksel şebeke teorisi, biomedikal mühendisliği gibi konular sayılabilir [2]. Sinyal ve ses işleme alanında TDA genellikle kullanılan ses sinyali ve istenmeyen gürültü verilerinin birbirlerinden ayrılması veya filitrelenmesinde kullanılmaktadır. Örneğin, bir konuşma sırasında kelime ve cümle aralarındaki durmalar sebebiyle ses sinyali toplam konuşma süresinin ortalama %50'sinde kesilmektedir. Bu esnada arka fondan gelen fan, trafik v.b. gibi gürültüler ses sinyalinin olmadığı anlarda daha etkin hale gelerek anlaşılabilirliğin kalitesini düşürür. TDA'nın filtreleme özelliği, bu gibi durumlarda etkin bir şekilde kullanılabilir. Benzer bir uygulama biomedikal alanda, anne karnındaki bebeğin elektrokardiogramının alınmasında yapılmaktadır. Yapılan işlem bebekten gelen kalp sinyallerinin anneden gelen sinyallerden daha düşük olmasına rağmen TDA yoluyla ayıklanarak izlenebilir hale getirilmesidir.

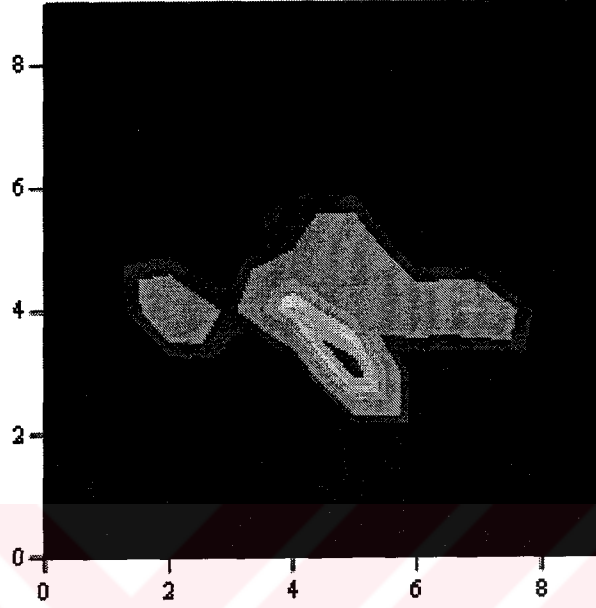
### 3.3 TDA'nın Görüntü İşleme Alanında Kullanılmasına Dair Bir Örnek

TDA görüntü işlemede genellikle verilerin transferinde kolaylık sağlamak amacıyla kullanılmaktadır [3]. Örnek olarak uzaydaki bir uydunun çektiği resimleri dünyaya göndermek istediğini varsayalım. Görüntü piksellerinin matris formunda olduğunu düşünürsek, bu matris elemanları piksellerin renk ve görüntüsünü temsil eden sayısal

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 8 & 4 & 5 & 6 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 25 & 8 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 13 & 4 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 36 & 15 & 9 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 45 & 22 & 24 & 8 & 6 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 24 & 3 & 3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 26 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 7 & 7 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 9 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Şekil 3.1 A matrisinin sayısal değerleri.

elemanlara sahiptir. Normalde böyle bir resime ait matris boyutları binler mertebelerinde olmasına karşın izlenebilirlik açısından Şekil 3.1'deki 10x10 boyutunda 100 elemanlı **A** matrisini ele alalım.



**Şekil 3.2** A matrisinin grafiksel görüntüsü.

Bu matrisin grafiksel görüntüsü Şekil 3.2'de çizdirilmiştir. A matrisinin MathCAD programı kullanılarak bulunan tekil değer ve tekil vektörleri Şekil 3.3-3.6' de verilmiştir.

|    | 1      | 2      | 3      | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 81.337 | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 2  | 0      | 37.477 | 0      | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 3  | 0      | 0      | 17.669 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 4  | 0      | 0      | 0      | 9.625 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 5  | 0      | 0      | 0      | 0     | 5.538 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 6  | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 3.712 | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 7  | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     | 2.595 | 0     | 0     | 0     |
| 8  | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     | 0     | 1.435 | 0     | 0     |
| 9  | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.767 | 0     |
| 10 | 0      | 0      | 0      | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.238 |

**Şekil 3.3** Tekil değerleri köşegeninde bulunduran  $\Sigma$  matrisi.

$$S^T = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 81.337 & 37.477 & 17.669 & 9.625 & 5.538 & 3.712 & 2.595 & 1.435 & 0.767 & 0.238 \end{bmatrix}$$

**Şekil 3.4** Tekil değerlerin vektör formundaki gösterimi.

$$U = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & -0.085 & 0.029 & -0.403 & 0.257 & -0.581 & 0.344 & 0.4 & -0.267 & 0.121 & -0.249 \\ 2 & -0.147 & -0.117 & -0.354 & 0.06 & 0.606 & 0.123 & -0.125 & -0.641 & -0.097 & -0.134 \\ 3 & -0.324 & 0.243 & 0.118 & -0.068 & 0.048 & -0.08 & 0.198 & -0.262 & 0.624 & 0.558 \\ 4 & -0.206 & 0.066 & -0.114 & 0.199 & 0.212 & 0.191 & -0.319 & 0.419 & 0.589 & -0.44 \\ 5 & -0.459 & 0.416 & 0.112 & -0.654 & -0.049 & 0.192 & 0.034 & -0.014 & -0.208 & -0.304 \\ 6 & -0.609 & -0.731 & 0.27 & 0.039 & -0.112 & -0.038 & 0.048 & 0.02 & -0.052 & -0.033 \\ 7 & -0.291 & 0.286 & 0.058 & 0.482 & 0.352 & 0.149 & 0.453 & 0.326 & -0.351 & 0.129 \\ 8 & -0.285 & 0.361 & 0.167 & 0.448 & -0.298 & -0.335 & -0.506 & -0.257 & -0.182 & -0.063 \\ 9 & -0.174 & 9 \cdot 10^{-3} & -0.52 & -0.121 & 0.027 & -0.761 & 0.235 & 0.174 & 0.015 & -0.138 \\ 10 & -0.217 & -0.048 & -0.546 & -0.096 & -0.143 & 0.268 & -0.403 & 0.266 & -0.19 & 0.531 \end{bmatrix}$$

**Şekil 3.5** Sol tekil vektörleri içeren U matrisi

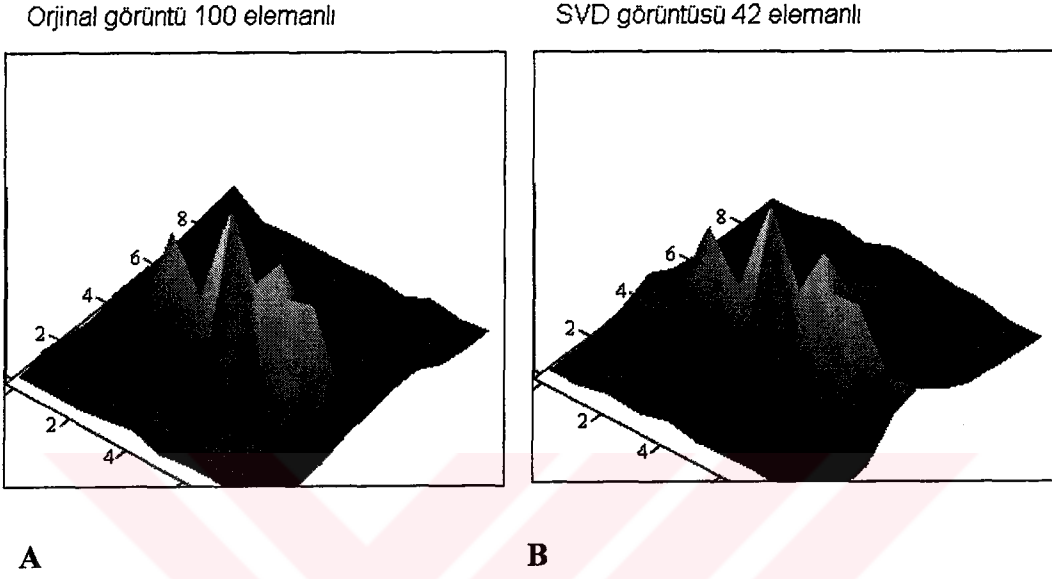
$$V = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & -0.061 & 0.052 & -0.111 & 0.018 & 9 \cdot 10^{-3} & 0.264 & -0.423 & 0.527 & -0.615 & -0.277 \\ 2 & -0.089 & 0.043 & -0.297 & 0.179 & -0.11 & -0.399 & 0.106 & 0.269 & -0.272 & 0.736 \\ 3 & -0.125 & 0.038 & -0.393 & 0.04 & 0.538 & -0.238 & 0.061 & -0.514 & -0.412 & -0.208 \\ 4 & -0.453 & -0.784 & 0.217 & 0.317 & 0.092 & -0.077 & -0.13 & 0.015 & 0.018 & 2 \cdot 10^{-3} \\ 5 & -0.724 & 0.57 & 0.371 & 0.087 & 0.031 & -0.059 & -0.027 & -0.025 & 0.025 & 4 \cdot 10^{-3} \\ 6 & -0.375 & -0.224 & -0.134 & -0.718 & -0.278 & 0.166 & 0.353 & -0.052 & -0.205 & 0.03 \\ 7 & -0.217 & 7 \cdot 10^{-3} & -0.454 & -0.281 & 0.167 & 0.076 & -0.619 & 4 \cdot 10^{-3} & 0.464 & 0.187 \\ 8 & -0.17 & 0.023 & -0.393 & 0.113 & 0.076 & -0.251 & 0.403 & 0.504 & 0.341 & -0.449 \\ 9 & -0.131 & 0.042 & -0.285 & 0.398 & 0.085 & 0.773 & 0.294 & -0.074 & 0.052 & 0.206 \\ 10 & -0.101 & 0.039 & -0.316 & 0.303 & -0.756 & -0.108 & -0.176 & -0.351 & -0.025 & -0.243 \end{bmatrix}$$

**Şekil 3.6** Sağ tekil vektörleri içeren V matrisi

Tekil değerlerden ilk ikisini ve onlara karşılık gelen iki sol ve iki sağ olmak üzere dört tekil vektörü alarak toplam 42 eleman kullanarak (3.13) ifadesi gereğince yeni

bir 100 elemanlı matris elde ederiz. Orjinal 100 elemanlı **A** matrisin görüntüsü ile, 42 eleman kullanarak elde edilen 100 elemanlı **B** matrisin grafiksel görüntülerinin karşılaştırması Şekil 3.7’de verilmiştir.

$$\text{svd}(\mathbf{A}); \quad \mathbf{B} = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2 \sigma_2 \mathbf{v}_2^T \quad (3.13)$$



**Şekil 3.7** Orjinal **A** matrisi ile TDA aracılığıyla üretilmiş **B** matrisinin grafiksel görüntülerinin karşılaştırılması.

Burada görüldüğü üzere her iki görüntü arasında büyük bir benzerlik vardır. Yani hemen hemen aynı görüntü 100 yerine 42 sayı kullanılarak elde edilmiştir. Gerçek bir fotoğraf karesinde kullanılan matris boyutunun binlerce hatta onbinlerce piksel içerdiği düşünülürse aralarındaki fark artacak ve çok küçük bir yüzde oranındaki veri ile orjinaline oldukça yakın görüntülerin elde edilebildiği görülmektedir.

#### 4. SONLU ELEMANLAR İFADELERİ

Bu kısımda sonlu elemanlar modellerinde kullanılan kiriş (beam) ve kafes (truss) elemanlara ait ifadeler yer verilmiştir. Yapısal sistemlerin sonlu elemanlar metodu ile analizlerinin yapılması elemanların model içerisindeki davranışlarının bilinmesini gerektirir. Elemanların denklemleri bir kez belirlendiğinde tüm yapının davranışına ulaşılabilmektedir. Sistem denklemlerinin enerji metodları ile elde edilebilmesi için birim uzama enerjisi ile kinetik enerjinin yanı sıra eğilmeden dolayı dış boyutlarda oluşan değişimlerinde tanımlanması gerekir. Eleman şekil değiştirme fonksiyonlarına, elemanların düğüm noktalarındaki yer değiştirmelerden yola çıkılarak ulaşılmaktadır [1].



Şekil 4.1 Doğrusal kiriş eleman.

##### 4.1 Kiriş Eleman Katılık Matrisi

Doğrusal bir kiriş eleman içindeki herhangi bir  $x$  noktasının ( $0 < x < \ell$ ) boylamasına birim şekil değişimi,

$$s(x) = -q_1 \frac{(x - \ell)}{\ell} + q_4 \frac{x}{\ell} \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_4$  ve  $q_5$  doğrusal elemanın uç noktalarının yer değiştirmesi  $q_3$  ve  $q_6$  uç noktaların dönmeleri,  $\ell$  eleman boyudur. Bu ifade kesit genişliği değişmeyen ve eksen üzerinde yayılı yük bulunmayan bir eleman içindir. Dikkat edilecek nokta  $s(x)$ 'in sadece boyuna şekil değiştirmeleri içerdiğiidir. Diğer

tarafından aynı  $x$  noktasının düğüm noktalarının yanal yer değiştirmesinden oluşan yanal birim şekil değişimi,

$$w(x) = \frac{q_2}{\ell^3} (2x^3 - 3\ell x^2 + \ell^3) - \frac{q_5}{\ell^3} (2x^3 - 3\ell x^2) + \frac{q_3}{\ell^2} (x^3 - 2\ell x^2 + \ell^2 x) + \frac{q_6}{\ell^2} (x^3 - \ell x^2) \quad (4.2)$$

Bu ifade kiriş eleman kesitinin sabit olması ve yanal yük olmaması durumunda yazılmıştır. Kiriş (beam) elemandaki toplam şekil değiştirmeler neticesinde ortaya çıkan birim uzama enerjisi "strain enerjisi",

$$\begin{aligned} SE &= \frac{1}{2} \int_0^\ell hE \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell hE \left( \frac{q_1}{\ell} - \frac{q_4}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left( \frac{q_2}{\ell^3} (12x - 6\ell) - \frac{q_5}{\ell^3} (12x - 6\ell) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_3}{\ell^2} (6x - 4\ell) + \frac{q_6}{\ell^2} (6x - 2\ell) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

ifadede geçen  $h$  kirişin kesit alanı,  $I$  kesit atalet momenti,  $E$  elastisite modülüdür.  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_6]^T$  olduğu düşünülürse, integral işleminin sonucu,

$$SE = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_B \mathbf{q} \quad (4.4)$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki  $\mathbf{k}_B$ , kiriş (beam) eleman katılık matrisidir.

$$\mathbf{k}_B = \frac{E}{\ell^3} \begin{bmatrix} h\ell^2 & 0 & 0 & h\ell^2 & 0 & 0 \\ & 12I & 6\ell I & 0 & -12I & 6\ell I \\ & & 4\ell^2 I & 0 & -6\ell I & 2\ell^2 I \\ & & & h\ell^2 & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & 12I & -6\ell I \\ & & & & & 4\ell^2 I \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

## 4.2 Kafes Eleman Katılık Matrisi

Eğer bir kiriş eleman üzerindeki eğilme etkilerini ihmal edersek kafes (truss) eleman davranışını elde ederiz. Bu durumda sadece  $q_1$  ve  $q_4$  koordinatları birim uzama enerjisini (strain enerji) etkilemektedir. Bunun sonucunda (4.4) denklemi ile verilen birim uzama enerji denklemi formunu korumakla birlikte kafes eleman katılık matrisi yeni şeklini alır.

$$\mathbf{k}_T = \frac{Eh}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ifade içersinde sadece  $q_1$  ve  $q_4$  koordinatlarının birim uzama enerjisi üzerinde etkili olduğu görülmektedir. Analizlerde  $q_3=q_6=(q_5-q_2)/\ell$  olarak dönme değişkenleri bastırılmakta ve eğilme olmamaktadır. Ayrıca  $\mathbf{k}_T$ 'nin rankı sadece 1 dir.

## 4.3 Kiriş ve Kafes Eleman Katılık Matrislerinin Özellikleri

Kiriş eleman katılık matrisinin ifade edildiği (4.5) denklemi eleman boyu  $\ell$ , kesit alanı  $h$ , kesit atalet momenti  $I$  'ya bağlıdır. Eğer kiriş elemanın kesit ölçüleri tasarım değişkenleri olarak alınırsa, bu durumda katılık matrisi tasarım değişkenlerinin bir fonksiyonu olmaktadır. Yapının geometrisinin değişmesi halinde, eleman boyu  $\ell$  'de tasarım değişkenlerine bağlı olacaktır.

Hesaplama işlemlerinin sonucunda (4.5) denklemlerindeki katılık matrisinin pozitif yarı-belirli (semidefinit) ve rankının 3 olduğu görülmektedir. Matris rankı üç adet katı cisim serbestlik derecesinin göstergesidir. Bu durumdaki bir elemanı herhangi bir deformasyona uğratmadan dolayısıyla birim uzama enerjisi oluşturmada bir düzlem dahilinde üç kinematik serbestlik derecesi ile hareket ettirmek mümkündür. Diğer taraftan eğer kiriş elemanın sol tarafını  $q_1=q_2=q_3=0$  olacak şekilde bağlarsak (4.4) denklemi ile hesaplanan strain enerji  $q_4$ ,  $q_5$  ve  $q_6$  değişkenleri için pozitif belirli olmaktadır.

#### 4.4 Kiriş ve Kafes Eleman Kütle Matrisleri

Eleman kesitinin dönme ataletlerinin ihmal edilmesi halindeki kiriş (beam) elemanın kinetik enerjisi,

$$\begin{aligned}
 KE &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho h \left[ \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dt} \right)^2 \right] dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho h \left[ \left[ -\dot{q}_1 \left( \frac{x-\ell}{\ell} \right) + \dot{q}_4 \frac{x}{\ell} \right]^2 \right. \\
 &\quad + \left[ \frac{\dot{q}_2}{\ell^3} (2x^3 - 3\ell x^2 + \ell^3) + \frac{\dot{q}_5}{\ell^3} (2x^3 - 3\ell x^2) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\dot{q}_3}{\ell^2} (x^3 - 2\ell x^2 + \ell x) + \frac{\dot{q}_6}{\ell^2} (x^3 - \ell x^2) \right]^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

burada  $\rho$  eleman malzemesinin kütleli yoğunluğu (') zamana göre türevi göstermektedir. İşlemler neticesinde

$$KE = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_B \dot{\mathbf{q}} \tag{4.8}$$

formunda yazılabilir. Buradaki  $\mathbf{m}_B$  kiriş eleman kütle matrisi adını alır.

$$\mathbf{m}_B = \frac{\rho h \ell}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22\ell & 0 & 54 & -13\ell \\ & & 4\ell^2 & 0 & 13\ell & -3\ell^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \text{simetrik} & & & 156 & -22\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Eleman kinetik enerjisinin pozitif olması ve her hangi bir  $q_i \neq 0$  durumunda  $\mathbf{m}_B$  pozitif belirlidir ve dolayısıyla tekil değildir. Bu özellikler analitik olarak da teyit edilebilmektedir. Kafes (truss) eleman için eğilme etkileri ihmal edilerek ve  $w(x) = q_2 + (q_5 - q_2)x/\ell$  alınarak (4.7) denkleminin integrali (4.8) ifadesini açığa çıkarmakta ancak bu kez kafes elemanın kütle matrisi

$$\mathbf{m}_T = \frac{\rho h \ell}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & \text{simetrik} & & & 2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

olmaktadır. İfadelerde dikkat edilecek husus,  $\dot{q}_3$  ve  $\dot{q}_6$  değerleri kafes elemanda bastırılmıştır. Buna karşılık  $\dot{q}_2$  ve  $\dot{q}_5$  değerleri önemli rol üstlenmiştir.  $\mathbf{m}_T$  matrisinin üçüncü ve altıncı kolonlarının sıfır olmasından dolayı matris tekildir. Gerçektende  $\mathbf{m}_T$ 'nin rankı 4'dür. Bir diğer husus ise birim şekil değiştirme enerjisi hesaplamalarında  $h$  ve  $\ell$  tasarım değişkenlerinin fonksiyonu olmaktadır.

#### 4.5 Kiriş Elemanların Geometrik Katılık Matrisi

Kiriş elemanda yanlamasına eğilmeden dolayı kaynaklanan  $\Delta \ell$  kısalması,

$$\begin{aligned}\Delta \ell &= \ell - \int_0^\ell \left[ 1 - \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \\ &\approx \int_0^\ell \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left[ \frac{q_2}{\ell^3} (6x^2 - 6\ell x) - \frac{q_5}{\ell^3} (6x^2 - 6\ell x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{q_3}{\ell^2} (3x^2 - 4\ell x + \ell^2) + \frac{q_6}{\ell^2} (3x^2 - 2\ell x) \right]^2 dx\end{aligned}\quad (4.11)$$

olmaktadır. İntegrasyon neticesinde

$$\Delta \ell = \mathbf{q}^T \mathbf{d}_B \mathbf{q} \quad (4.12)$$

formunu alır. Burada  $\mathbf{d}_B$  kiriş eleman geometrik katılık matrisi olarak adlandırılır.

$$\mathbf{d}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{3}{5\ell} & -\frac{1}{20} & 0 & -\frac{3}{5\ell} & \frac{1}{20} \\ & & \frac{\ell}{50} & 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{\ell}{60} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3}{5\ell} & -\frac{1}{20} \\ & & & & & \frac{\ell}{15} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

*simetrik*

Bu matrislerde anılan parametreler ( $\ell$ ,  $\rho$ , ...) tasarım değişkenleri olarak duyarlılık analizleri sırasında tekil değerlerin şekillendirilmesinde kullanılacaktır.

## 5. TDA'NIN SONLU ELEMANLAR DENKLEMLERİNE UYGULANMASI

Bu bölümde TDA'nın zamana bağlı ve zamandan bağımsız problemlerde sonlu elemanlar denklemlerine nasıl uygulanacağı üzerinde durulacaktır.

Önceki bölümlerde açıklandığı üzere  $u_i$  ve  $v_i$  'lerin sırasıyla  $AA^H$  ve  $A^HA$ 'nın ortonormal özvektörleri olduğundan hareketle

$$UU^H=I \text{ ve } AA^H U=U\Sigma^2 \quad (5.1)$$

$$VV^H=I \text{ ve } A^H A V=V\Sigma^2 \quad (5.2)$$

ifadeleri yazılabilmektedir.  $I$  birim matrisi göstermektedir. Sonlu elemanlar ifadesindeki katılık matrisinin kare olduğunu düşünersek, bunlara ilave olarak  $A$  matrisinin kare olması durumunda  $A=U\Sigma V^H$  ise

$$A^{-1}=V\Sigma^{-1}U^H \quad (5.3)$$

olur. Her ne kadar  $A$  matrisinin tekil değerleri tek olarak belirlenirken, özvektörler tek değildir.

Eğer  $A=U\Sigma V^H$  ise  $A=U'\Sigma V'^H$  yazılabilir. Burada  $U'=Ue^{j\theta}$ ,  $V'=Ve^{j\theta}$  değerlerine sahiptir [4].

Sonlu elemanlar ifadelerinde kullanılan,

$$Kd=f \quad (5.4)$$

doğrusal denklem sistemini ele alırsak, burada, en genel halde,  $K \in C^{n \times n}$  olarak sistemin katılık matrisi,  $d \in C^n$  şekil değiştirme vektörü ve  $f \in C^n$  sistemin girişini temsil eden yük vektörü, olacak tarzda  $d = K^{-1} f$  şeklinde ifade edilebilir.  $K^{-1}$  'nin TDA'sı için  $K^{-1}=U \Sigma^{-1} V^H$ , yazılabilir. Burada  $U \in C^{n \times n}$ ,  $\Sigma \in R^{n \times n}$  ve  $V \in C^{n \times n}$  dir. Sistemin farklı giriş doğrultularında farklı kazançlarının olduğunu gösterilmesi amacıyla  $K^{-1}$ 'in TDA'sı diyatik formda yazılabilir.

$$\mathbf{K}^{-1} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \quad (5.5)$$

fiziksel sistemlerde tekil değerlerin ayrı olduğundan yola çıkılarak, kuvvet vektörü  $\mathbf{f}$ 'in  $k$ .ncı sağ tekil vektöre eşit olması halinde  $\mathbf{f} = \mathbf{v}_k$  için

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_k \quad (5.6)$$

ifadesini elde ederiz.  $\mathbf{v}_i$  'lerin ortonormal olması sebebiyle  $\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_k = \delta_{ik}$  yazılabilir. Burada  $\delta_{ik}$  kronecker delta fonksiyonudur. Böylece

$$\mathbf{d} = \sigma_k \mathbf{u}_k \quad (5.7)$$

$$\|\mathbf{d}\|_2 = \sigma_k \quad (5.8)$$

olur. Bu ifadelerden anlaşılacağı üzere,  $\mathbf{f}$ 'in  $\mathbf{v}_k$  ile aynı doğrultuda olması halinde (5.7) denkleminde çıkış durumunda olan  $\mathbf{d}$  vektörü  $\mathbf{u}_k$  doğrultusunda olacaktır. (5.8) ifadesi ise sistemin kazancının  $\sigma_k$  olacağını göstermektedir. Böylece her bir sağ tekil vektörle temsil edilen girişlerin ne şekilde bir çıkışa sebep olacağı sol tekil vektörler aracılığıyla ortaya konmaktadır. Karşılık gelen tekil değerlerde giriş çıkış arasındaki kazanç faktörünü belirtmektedir [5]. TDA'nın yapısal dinamiğe ait uygulaması için,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (5.9)$$

matris denklemini alırsak. Burada  $\mathbf{M} \in R^{n \times n}$  kütle matrisi,  $\mathbf{C} \in R^{n \times n}$  viskoz sönüm matrisi,  $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$  katılık matrisi,  $\mathbf{f} \in R^n$  dış kuvvet vektörü,  $\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}$  ve  $\ddot{\mathbf{d}} \in R^n$  sırasıyla şekil değiştirme, hız ve ivme vektörleridir. (5.9) ifadesinin Laplace dönüşümünü alırsak,

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{F}(s) \quad (5.10)$$

elde ederiz. İfadede  $s$  kompleks Laplace dönüşüm değişkenidir.  $\mathbf{D}(s)$  ve  $\mathbf{F}(s)$  vektörleri sırasıyla  $\mathbf{d}(t)$  ve  $\mathbf{f}(t)$ 'nin Laplace dönüşümleri,  $\mathbf{G}(s)$  transfer fonksiyon matrisidir.

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1} \quad (5.11)$$

şeklinde tanımlanır.  $\omega$  frekansındaki  $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}\sin(\omega t)$  sinuzoidal girişe sistem cevabı olan  $\mathbf{D}(j\omega)$  sürekli rejim çıkışı

$$\mathbf{D}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega)\tilde{\mathbf{f}} \quad (5.12)$$

ifadesi ile verilir. Burada  $\tilde{\mathbf{f}}$  giriş vektörünün şiddeti,  $j$  kompleks değişkenidir. (5.12) denkleminde  $D_i(j\omega)$  şiddeti çıkış vektörü  $\mathbf{d}$  'nin  $i$ .inci elemanının şiddetine karşılık gelmektedir. Bu esnada  $D_i(j\omega)$  'nin faz açısı,  $\mathbf{d}$  çıkış vektörü ile  $\mathbf{f}$  giriş vektörlerinin  $i$ .inci elemanlarının arasındaki faz açısı kadardır. Statik durumdakine benzer şekilde, eğer  $\tilde{\mathbf{f}}$  giriş vektörü  $\mathbf{v}_k$  doğrultusunda ise,  $\mathbf{D}(j\omega)$  cevabı  $\sigma_k$  kazancı ile  $\mathbf{u}_k$  doğrultusunda olacaktır.  $\mathbf{G}(j\omega)$ 'nin tekil değerleri ve tekil vektörleri tahrik frekansı  $\omega$ 'nın fonksiyonudur. Tekil değerler arasındaki sıralama  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$  şeklindedir.

## 6. TDA VE DUYARLILIK ANALİZİ

Yapısal sistem denklemlerinin ifade (5.10) daki gibi Laplace değişkenlerini içerdiğini ve  $\omega$  frekansına sahip tahrik uygulandığını varsayarsak, (kısa gösterim amacıyla  $s=j\omega$  yazılmayacaktır.)  $G$ 'nin TDA'sı  $G=U\Sigma V^H$  şeklinde yazılabilir. Bir sisteme herhangi bir girişi,  $\{v_i\}$  vektörünü temel alarak,

$$F = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad (6.1)$$

formuyla temsil edebiliriz. Buradaki  $a_i$  katsayısı,  $v_i$  'lerin ortonormal olması özelliği kullanılarak,

$$a_i = \langle \bar{v}_i, F \rangle \quad (6.2)$$

şeklinde hesaplanabilir.  $\langle \rangle$  iç çarpımı, üst çizgi ise eşleniği göstermektedir.  $D$  çıkışı,

$$D = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i u_i v_i^H \right) F = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i u_i \quad (6.3)$$

ifadesi ile hesaplanır. Ayrıca  $i$ .inci çıkış ile  $j$ .inci giriş arasındaki transfer fonksiyon matris elemanları,

$$G_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial F_j} = \sum_{m=1}^n \sigma_m u_{m,i} \bar{v}_{m,j} \quad (6.4)$$

ile bulunabilir. Burada  $D_i$ ,  $D$  matrisinin  $i$ .nci elemanı,  $u_{m,i}$ ,  $u_m$  'in  $i$ .nci elemanı,  $\sigma_m$  ise  $G$ 'nin  $m$ .nci tekil değeridir. Dikkat edilecek bir nokta  $G_{ij}$ ,  $\sigma_n$  ile doğru orantılı

olduğudur. Ayrıca ifadelere bakıldığında giriş-çıkış duyarlılığının doğal olarak tahrik frekansı  $\omega$ 'nın bir fonksiyonu olduğu görülür.

### 6.1 Enerji Yayınımı ve Tekil Değerler

[6] ve [7]'de tekil değerlerin frekans alanındaki davranışları belli kazanç limitleri dahilinde gösterilmiştir. İfadelerde  $\omega$  frekansına sahip periyodik bir  $\mathbf{f}$  giriş sinyalinin bir periyodluk alan için sürekli rejim çıkışlarının,  $\mathbf{d}_{ss}$  ortalama değerlerinin toplamı,

$$SMSVO(j\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{d}_{ss}^T(t) \mathbf{d}_{ss}(t) dt = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{S}(j\omega) \mathbf{f} \quad (6.5)$$

olarak verilmektedir. Burada,

$$\mathbf{S}(j\omega) = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{G}^H(j\omega) \mathbf{G}(j\omega) + \overline{\mathbf{G}^H(j\omega) \mathbf{G}(j\omega)} \right] \quad (6.6)$$

şeklindedir. Diğer taraftan girişe ait ortalama değerlerin toplamı bir periyot için,

$$SMSVI = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \mathbf{f}^T(t) \mathbf{f}(t) dt = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{f} \quad (6.7)$$

ve

$$\sigma_1^2(j\omega) \geq \frac{SMSVO(j\omega)}{SMSVI} \geq \sigma_n^2(j\omega) \quad (6.8)$$

olarak yazılabilir. Periyodik olmayan bir giriş için ( 6.8) denklemi,

$$\sigma_1^2(j\omega) \geq \frac{\|\hat{\mathbf{d}}(j\omega)\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{f}}(j\omega)\|_2^2} \geq \sigma_n^2(j\omega) \quad (6.9)$$

olmaktadır. Burada

$$\frac{\|\hat{\mathbf{d}}(j\omega)\|_2^2}{\|\hat{\mathbf{f}}(j\omega)\|_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^n |\hat{d}_i(j\omega)|^2}{\sum_{i=1}^n |\hat{f}_i(j\omega)|^2} \quad (6.10)$$

=( $\omega$  frekansındaki enerji çıkışları toplamı) / ( $\omega$  frekansındaki enerji girişleri toplamı)

anlamını taşımaktadır. İfadedeki şapkalı değişkenler Fourier dönüşümü yapılmış değişkenleri tanımlamaktadır.

$$\hat{f}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.11)$$

Stochastic bir giriş sinyali için (6.8) ifadesi

$$\sigma_1^2(j\omega) \geq \frac{iz(P_d(j\omega))}{iz(P_f(j\omega))} \geq \sigma_n^2(j\omega) \quad (6.12)$$

olur.  $P_d(j\omega)$  ve  $P_f(j\omega)$  giriş ve çıkış vektörlerinin covarians matrislerinin Fourier dönüşümleridir. İspatlar [6] ve [7]' de verilmiştir.

(6.8) ve (6.9) ifadelerine bakıldığında  $\sigma_1^2(j\omega)$  ve  $\sigma_n^2(j\omega)$  nin periyodik giriş sinyalleri için ortalama güç oranlarının, periyodik olmayan sinyaller için ise enerji oranlarının sınırını oluşturduğu görülmektedir. Girişin  $v_1$  doğrultusunda olması durumunda üst sınır şartı,  $v_n$  doğrultusunda olması halinde ise alt sınır şartı gerçekleşmektedir.

Böylece yapısal bir sistemin tekil değerleri şekillendirilerek diğer bir değişle tekil değerlerin sayısal büyüklüklerine müdahale edilerek yapısal sistemin cevabı belirlenmiş olmaktadır.

## 6.2 Tekil Değerler ve Vektörlerin Tasarım Duyarlılığı

Yapısal bir sistemin,  $G=U \Sigma V^H$  şeklinde transfer fonksiyonu matrisinin TDA' sını ele alırsak ( $s=j\omega$  'yı kısa gösterim amacıyla yazmadığımızı düşünerek )  $b$ 'yi tasarım değişkeni olarak kabul edelim. Buradaki önemli bir nokta  $\sigma_i(b)$  ifadeleri genellikle türevlenebilen ifadeler içermemektedir. Ancak  $\sigma_i$ ,  $u_i$ , ve  $v_i$  fonksiyonlarının  $\Delta b$  tasarım değişkenine göre sayısal olarak sonuç üreten Gateaux türevleri mevcuttur [5], [8].

$$\delta \sigma_i(b; \Delta b) = \left. \frac{d \sigma_i(b + \varepsilon \Delta b)}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_i(b + \varepsilon \Delta b) - \sigma_i(b)}{\varepsilon} \quad (6.13)$$

$$\delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) = \left. \frac{d \mathbf{u}_i(b + \varepsilon \Delta b)}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_i(b + \varepsilon \Delta b) - \mathbf{u}_i(b)}{\varepsilon} \quad (6.14)$$

$$\delta \mathbf{v}_i(b; \Delta b) = \left. \frac{d \mathbf{v}_i(b + \varepsilon \Delta b)}{d \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}_i(b + \varepsilon \Delta b) - \mathbf{v}_i(b)}{\varepsilon} \quad (6.15)$$

Dyatik formda yazılan  $\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^H$  transfer fonksiyon matrisinin Gateaux türevini alırsak,

$$\delta \mathbf{G}(b; \Delta b) = \sum_{i=1}^n (\delta(\mathbf{u}_i(b; \Delta b)) \sigma_i \mathbf{v}_i^H + \mathbf{u}_i \delta(\sigma_i(b; \Delta b)) \mathbf{v}_i^H + \mathbf{u}_i \sigma_i \delta(\mathbf{v}_i^H(b; \Delta b))) \quad (6.16)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Diğer taraftan  $\delta \sigma_i(b; \Delta b)$  ifadesinin türevi [8]

$$\delta \sigma_i(b; \Delta b) = R \left[ \mathbf{u}_i^H \delta [\mathbf{G}(b; \Delta b)] \mathbf{v}_i \right] \quad (6.17)$$

şeklindedir. Buradaki  $R[\cdot]$  parantez içerisindeki ifadenin reel kısmı temsil etmektedir.

$\delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b)$  ifadesi için  $\mathbf{u}_i$  denkleminin her iki tarafının Gateaux türevlerini alırsak, [5]

$$\delta(\mathbf{G} \mathbf{G}^H(b; \Delta b)) \mathbf{u}_i + \mathbf{G} \mathbf{G}^H \delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) = 2 \sigma_i \mathbf{u}_i \delta \sigma_i(b; \Delta b) + \sigma_i^2 \delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) \quad (6.18)$$

bulunmaktadır. Bu ifadenin düzenlenmesiyle,

$$(\mathbf{G} \mathbf{G}^H - \sigma_i^2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b) = 2 \sigma_i \mathbf{u}_i \delta \sigma_i(b; \Delta b) - \delta [\mathbf{G} \mathbf{G}^H(b; \Delta b)] \mathbf{u}_i \quad (6.19)$$

elde edilmektedir. Benzer şekilde bu ifadeninde Gateaux türevleri alınarak düzenlenmesi sonucu,

$$(\mathbf{G}^H \mathbf{G} - \sigma_i^2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{v}_i(b; \Delta b) = 2\sigma_i \mathbf{v}_i \delta \sigma_i(b; \Delta b) - \delta [\mathbf{G}^H \mathbf{G}(b; \Delta b)] \mathbf{v}_i \quad (6.20)$$

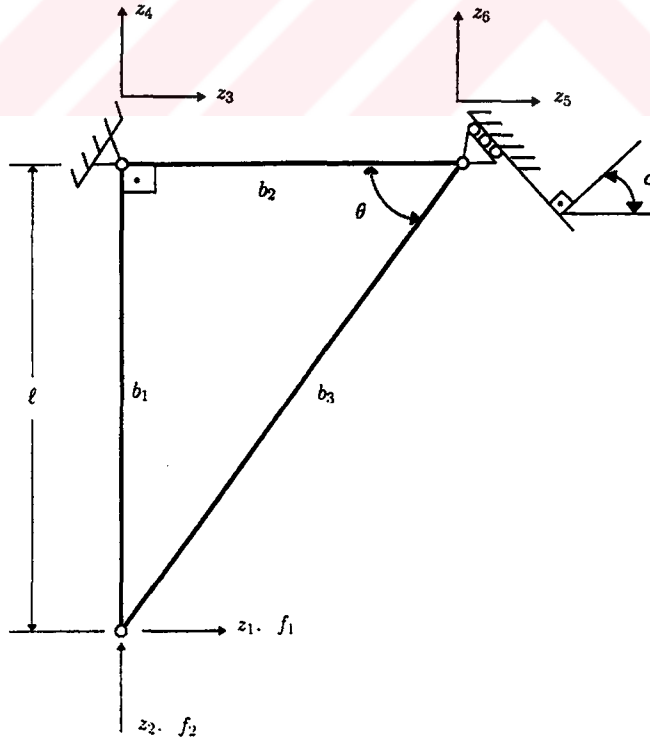
denklemine ulaşılmaktadır. Böylelikle bir kez  $\delta \mathbf{G}(b; \Delta b)$ ,  $\delta [\mathbf{G}^H \mathbf{G}(b; \Delta b)]$  ve  $\delta [\mathbf{G} \mathbf{G}^H(b; \Delta b)]$  hesaplandıktan sonra (6.17), (6.19) ve (6.20) denklemleri kullanılarak sırasıyla  $\delta \sigma_i(b; \Delta b)$ ,  $\delta \mathbf{u}_i(b; \Delta b)$  ve  $\delta \mathbf{v}_i(b; \Delta b)$  değerleri bulunabilmektedir. Tekil değerler ve tekil vektörlere ait Gateaux türevlerinin bu şekilde bulunması (6.13)-(6.15) denklemlerinin kullanılarak bulunmasına göre ayrıca sayısal olarak daha kararlı ve hesaplamalı alanda CPU süresi ve hafıza kullanımı bakımından daha avantajlıdır.

Bu tarzda yapılan hesaplama işlemlerinde her bir tasarım parametresindeki  $\Delta b$  değişimine karşılık  $\mathbf{G}$ 'nin TDA'sının tekrar hesaplanması zorunluluğu ortadan kalkmaktadır. Ayrıca (5.3)'teki özellik sayesinde,  $\mathbf{G}$ 'ye ait  $\mathbf{u}_i$  ve  $\mathbf{v}_i$ 'leri bulmak için (5.11)'deki matris tersi alma işlemine de gerek kalmamaktadır. Diğer taraftan yapısal sistem cevabının sınırları ile ilgilenilmesi durumunda sadece en büyük ve en küçük tekil değerler ile onlara karşılık gelen tekil vektörleri hesaplamak yeterlidir [9]. Diğer tekil değer ve vektörlerin hesaplanmasına gerek yoktur. Bu durum, hesaplama süresi ve hafıza kullanımı açısından büyük avantaj sağlamaktadır.

## 7. YAPISAL SİSTEMLERE AİT DUYARLILIK ANALİZLERİ VE SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, tezde geliştirilen yöntem, çeşitli duyarlılık analiz tiplerini içerecek şekilde sayısal örnekler üzerinde izah edilmiş, karşılaştırmalar yapılmış ve yöntemin avantajları ortaya konmuştur. Hesaplamalar ve diğer işlemlerde Matlab, Mathematica ve Mathcad gibi yazılımlardan faydalanılmıştır. Örneklerde anılan işlemci hesaplama süreleri (CPU time) Intel 166MMX işlemcisinde gerçekleşen değerlerdir.

İlk olarak Şekil 7.1’de gösterilen üç çubuk kafes sistemine ait tekil değer ve tekil vektör tasarım duyarlılığı üzerinde durulmuştur. Bu kafes sisteminin, statik cevap duyarlılığı ve özdeğer tasarım duyarlılığı [1]’de verilmiştir. Burada, tezde oluşturulan TDA’ya dayalı tasarım duyarlılığı ile adı geçen klasik duyarlılık metodlarının karşılaştırması yapılacaktır.



Şekil 7.1 Üç çubuk kafes sistemi.

$\theta = 45^\circ$  ve  $\alpha = 30^\circ$  için yapısal sisteme ait sonlu elemanlar denklemleri şu şekilde oluşmaktadır [1].

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f} \quad (7.1)$$

Genelleştirilmiş global katılık matrisi,

$$\mathbf{K}_g(b) = \frac{E}{\ell} \begin{bmatrix} b_3 c^2 s & b_3 c s^2 & 0 & 0 & -b_3 c^2 s & -b_3 c s^2 \\ b_3 c s^2 & b_1 + b_3 s^2 & 0 & -b_1 & -b_3 c s^2 & -b_3 s^3 \\ 0 & 0 & \frac{b_2 s}{c} & 0 & -\frac{b_2 s}{c} & 0 \\ 0 & -b_1 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ -b_3 c^2 s & -b_3 c s^2 & -\frac{b_2 s}{c} & 0 & \frac{b_2 s}{c} + b_3 c^2 s & b_3 c s^2 \\ -b_3 c s^2 & -b_3 s^3 & 0 & 0 & b_3 c s^2 & b_3 s^3 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Burada  $c = \cos\theta$  ve  $s = \sin\theta$  dir. Düğüm noktalarının kinematik bağ, indirgenmiş kütle matrisi, indirgenmiş katılık matrisi ile şekil değiştirme ve kuvvet vektörü ifadeleri

$$\mathbf{Z} = \{ \mathbf{z}_g \in R^6 : z_3 = z_4 = 0, z_5 \cos\alpha + z_6 \sin\alpha = 0 \} \quad (7.3)$$

$$\mathbf{M}(b_i) = \frac{\rho \ell}{2} \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{2} b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + \sqrt{2} b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4(b_2 + \sqrt{2} b_3) \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\mathbf{K}(b_i) = \frac{E}{2\sqrt{2}\ell} \begin{bmatrix} b_3 & b_3 & (\sqrt{3}-1)b_3 \\ b_3 & 2\sqrt{2}b_1 + b_3 & (\sqrt{3}-1)b_3 \\ (\sqrt{3}-1)b_3 & (\sqrt{3}-1)b_3 & 2\sqrt{2}b_2 + (4-2\sqrt{3})b_3 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ z_5]^T \quad (7.6)$$

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ 0]^T \quad (7.7)$$

şeklindedir. Burada  $E$  Elastiklik modülü,  $\ell$  birinci çubuğun boyu  $\rho$  çubuk malzemesinin yoğunluğu,  $b_i$   $i$  inci çubuğa ait kesit alanı ve  $f_i$  dış kuvvetlerdir.

## 7.1 Statik Cevap Tasarım Duyarlılığı Analizi

Şekil 7.1'deki üç çubuk kafes sisteminin statik cevap tasarım duyarlılığı analizinin performans ölçüm fonksiyonu olarak  $\psi(b_k, z(b_k)) = z_1$ , yani birinci düğüm noktasının yatay yer değişimini alarak yapalım. Önce klasik yöntemle başlarsak, [1]'deki ifadeler neticesinde,

$\mathbf{z}$  yerdeğiştirme vektörü

$$\mathbf{z} = \frac{\ell}{E} \left[ \frac{(2\sqrt{2}b_1b_2 + 4b_1b_3 - 2\sqrt{3}b_1b_3 + b_2b_3)f_1 - b_2b_3f_2}{b_1b_2b_3} \quad \frac{f_2 - f_1}{b_1} \quad \frac{(1-\sqrt{3})f_1}{b_2} \right]^T \quad (7.8)$$

$f_1 = f_2 = 1$  ve  $\ell = 1$  alınması durumunda,

$$\mathbf{z} = \left[ \frac{4-2\sqrt{3}}{Eb_2} + \frac{2\sqrt{2}}{Eb_3} \quad 0 \quad \frac{1-\sqrt{3}}{Eb_3} \right]^T \quad (7.9)$$

olur. Performans fonksiyonu  $\psi = z_1$  için (2.10) adjoint ifadesi,

$$\mathbf{K}(b)\boldsymbol{\lambda} = \partial \psi^T / \partial \mathbf{z} = [1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (7.10)$$

çözüm sonrasında,

$$\boldsymbol{\lambda} = \left[ \frac{1}{Eb_1} + \frac{4-2\sqrt{3}}{Eb_2} + \frac{2\sqrt{2}}{Eb_3} \quad -\frac{1}{Eb_1} \quad \frac{1-\sqrt{3}}{Eb_2} \right]^T \quad (7.11)$$

indirgenmiş katılık matrisi,  $\mathbf{z}$  ve  $\boldsymbol{\lambda}$  'nın kullanımıyla,

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{K}(b) \tilde{\mathbf{z}}) = \left[ 0 \quad \frac{2\sqrt{3}-4}{Eb_2^2} \quad -\frac{2\sqrt{2}}{Eb_3^2} \right]^T \quad (7.12)$$

biçiminde elde edilir. Analizde tasarım parametreleri olarak çubukların kesit alanları  $b_i$ 'leri alalım. Bilinmeyenlerde dış kuvvetler  $f_1$  ve  $f_2$  olsun. Dış kuvvetlerle birlikte

performans ölçüm fonksiyonu  $\psi$ 'nin tasarım parametreleri olan  $b_i$ 'lere göre olan türev ifadesi,

$$\frac{d\psi}{d\mathbf{b}} = \frac{\ell}{E} \begin{bmatrix} \frac{f_2 - f_1}{b_1^2} & \frac{f_1(2\sqrt{3} - 4)}{b_2^2} & \frac{-2\sqrt{2}f_1}{b_3^2} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

olarak bulunmaktadır.

Genelleştirilmiş global formülasyon durumunda  $\mathbf{z}_g$  vektörü,

$$\mathbf{z}_g = \begin{bmatrix} \frac{4-2\sqrt{3}}{Eb_2} + \frac{2\sqrt{2}}{Eb_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{Eb_2} & \frac{3-\sqrt{3}}{Eb_2} \end{bmatrix}^T \quad (7.14)$$

olur.  $d\mathbf{z}_g/db_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) değerlerini hesaplırsak

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{z}_g}{db_1} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \frac{d\mathbf{z}_g}{db_2} &= \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}-4}{Eb_2^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{Eb_2^2} & \frac{\sqrt{3}-3}{Eb_2^2} \end{bmatrix}^T \\ \frac{d\mathbf{z}_g}{db_3} &= \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{Eb_3^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (7.15)$$

bulunur. Bu ifadelerde her bir tasarım parametresinin yer değiştirme vektörü üzerindeki etkisi görülmektedir.

Tekil değerlerin tanım ifadeleri gereğince kuvvet vektörü için  $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$ , çıkışı temsil eden yerdeğiştirme vektörü için  $\mathbf{z} = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i \mathbf{u}_i$  ifadeleri yazılabilir. Buradan anlaşıldığına göre, eğer biz tekil değerleri minimize edersek, diğer bir deyişle tüm tekil değerlerin üst sınırı yani en büyüğü olan  $\sigma_1$  'i minimize edersek çıkış vektörü elemanları ve doğal olarak performans ölçüm fonksiyonu,  $\psi = z_1$  'de minimize olacaktır.

**Tablo 7.1**  $f_1 = f_2 = 1$  ve  $\Delta b_i = 0.05b_i$  için birinci çıkış,  $\delta z_1(b_i; \Delta b_i)$  ve tekil değerler  $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$  ait Gateaux türevleri.

| $i$                                | 1                        | 2                        | 3                        |
|------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\delta \sigma_1(b_i; \Delta b_i)$ | $-8.0166 \times 10^{-2}$ | $-4.2961 \times 10^{-2}$ | $-3.8168 \times 10^{-2}$ |
| $\delta \sigma_2(b_i; \Delta b_i)$ | $-1.7446 \times 10^{-2}$ | $-3.2554 \times 10^{-2}$ | 0                        |
| $\delta \sigma_3(b_i; \Delta b_i)$ | $-2.3877 \times 10^{-3}$ | $-1.2798 \times 10^{-3}$ | $-1.1832 \times 10^{-2}$ |
| $\delta z_1(b_i; \Delta b_i)$      | 0                        | $-2.6795 \times 10^{-2}$ | $-5.0000 \times 10^{-2}$ |

TDA'ya dayalı tasarım duyarlılığı analizinin avantajlarından birisi de çoklu yükleme durumunda ortaya çıkar. Buradaki  $a_i$  katsayılarının  $b_i$  tasarım parametrelerinden bağımsız olduğundan yola çıkarsak

$$\delta \mathbf{z}(b_i; \Delta b_i) = \sum_{k=1}^n a_k \delta [\sigma_k(b_i; \Delta b_i) \mathbf{u}_k(b_i; \Delta b_i)] \quad (7.16)$$

yazılabilir.  $\delta [\sigma_k(b_i; \Delta b_i) \mathbf{u}_k(b_i; \Delta b_i)]$  ifadesi birkez hesaplandıktan sonra statik (TDA sabit) ve dinamik harmonik (TDA tahrik frekansı  $\omega$ 'nın fonksiyonu) duyarlılık analizleri,  $a_i$  katsayısının (7.16) ifadesinde yerine konması ile çoklu yükleme (multiple load case) konumları için doğrudan hesaplanabilir. Ayrıca  $\psi(b_k, \mathbf{z}(b_k))$  performans ölçüm fonksiyonu ifadesinin Gateaux türevleri,

$$\delta \psi(b_i; \Delta b_i) = \frac{\partial \psi}{\partial b_i} \Delta b_i + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z}(b_i; \Delta b_i) \quad (7.17)$$

şeklinde elde edilir. Buradaki  $\delta \mathbf{z}(b_i; \Delta b_i)$  ifadesi (7.16)'da verilmiştir

$b_1 = b_2 = 1$ ,  $b_3 = 2\sqrt{2}$ ,  $E = 1$  ve  $\ell = 1$  değerleri için, birim yükleme durumu  $f_1 = f_2 = 1$  olması halinde  $z_1$  ve  $\sigma_i$ 'nin Gateaux türevleri Tablo 7.1'dedir. Burada tasarım parametrelerindeki değişim %5'lik olarak  $\Delta b_i = 0.05b_i$  şeklinde göz önüne alınmıştır.

Tablo 7.1 incelendiğinde  $i = 1, 2, 3$  için  $d\psi/db_i = dz_1/db_1 = 0$  ve  $\delta z_1(b_1; \Delta b_1) = 0$  iken  $\delta \sigma_i(b_1; \Delta b_1) \neq 0$  dır. En büyük tekil değer  $\sigma_1$ 'in minimize edilmesi demek aslında tüm

yapısal sistemin statik cevap büyüklüğünün minimize edilmesi demektir. Bu aynı zamanda sistemin katılığının artırılması anlamına gelmektedir.

Tablo 7.1'den herhangi bir yükleme koşulunda yapısal sistemin şekil değiştirmesi üzerinde en etkili tasarım parametresinin  $b_1$  olduğu  $\delta\sigma_1(b_1; \Delta b_1)$ 'in tablodaki en düşük değer olması sebebiyle anlaşılmaktadır. Bir başka değişle çubuk kesitleri göz önüne alındığında birinci çubuğun kesitinin artırılması yapının rijitliğinin artırılması üzerinde en etkili olanıdır. Bu sonuca ulaşılmasında hesaplama süresi 0.3713 saniye işlemci zamanıdır. Eğer klasik usuldeki direk yaklaşımla hesaplama yapılsaydı her bir  $b_i$  tasarım parametresi için mümkün olan tüm yükleme durumları için hesaplama yapmak gerekmektedir. Bu hesaplama sırasında kuvvet arttırımının 0.01 olması ve -1 den 1'e kadar değişmesi halinde 34.335 saniye işlemci süresi geçecektir. (Bunun 34.330 saniyesi maksimum yerdeğiştirmeyi veren kuvvetin bulunması, 0.005 saniyeside duyarlılıkların hesalanmasında geçen süredir.) Problemin boyutunun artması ve yük adetinin çoğalması halinde TDA'ya dayalı analizin işlemci zamanı ile klasik tekniklerin arasındaki süre farkı doğrusal olarak artmaktadır.

## 7.2 Özdeğer Tasarım Duyarlılığı Analizi

Bu kısımda tekil değerlerin kullanımı dinamik harmonik analiz üzerinde gösterilecektir. Bunun için tekil değerler tasarım duyarlılığı analizi, klasik yöntem olan özdeğer tasarım duyarlılığı analizi ile karşılaştırılarak Şekil 7.1'deki üç çubuklu kafes sistem üzerine uygulanmıştır.  $E = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $b_1 = b_2 = 1$  ve  $b_3 = 2\sqrt{2}$  değerleri için genelleştirilmiş global kütle matrisi

$$\mathbf{M}_g(b) = \frac{\rho \ell}{2} \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{2}b_3 & & & & & \\ & b_1 + \sqrt{2}b_3 & & & & \\ & & b_1 + b_2 & & & \\ & & & b_1 + b_2 & & \\ & & & & b_2 + \sqrt{2}b_3 & \\ & & & & & b_2 + \sqrt{2}b_3 \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Düğüm noktalarının kinematik yerdeğiştirmeleri,

$$\mathbf{Z} = \{y_g \in R^6 : y_3 = y_4 = 0, y_5 \cos \alpha + y_6 \sin \alpha = 0\}$$

$\theta = 45^\circ$   $\alpha = 30^\circ$  değerleri için  $\mathbf{K}_g(b)$  positif belirlidir. İndirgenmiş kütle matrisi,

$$\mathbf{M}(b) = \frac{\rho \ell}{2} \begin{bmatrix} b_1 + \sqrt{2}b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + \sqrt{2}b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 4(b_2 + \sqrt{2}b_3) \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

olarak bulunur. Yapısal sisteme ait temel özdeğer ve karşılık gelen normalize edilmiş özvektör sırası ile [1]'den  $\zeta = 0.08038$  ve

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ y_3]^T = [-0.3496 \ 0.08451 \ 0.2601]^T \quad (7.20)$$

şeklindedir. Aynı şekilde bu sisteme ait temel özdeğer için özdeğer tasarım duyarlılığı;

$$\frac{d\zeta}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}(b) \tilde{\mathbf{y}}) - \zeta \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}(b) \tilde{\mathbf{y}}) \quad (7.21)$$

$$\frac{d\zeta}{d\mathbf{b}} = [0.001944 \ 0.05678 \ -0.02076]^T \quad (7.22)$$

olarak bulunur. Genelleştirilmiş küresel formülasyon halinde normalize edilmiş özvektör,

$$\mathbf{y}_g = [-0.3496 \ 0.08451 \ 0 \ 0 \ 0.2601 \ -0.45051]^T \quad (7.23)$$

olmaktadır. Özdeğer tasarım duyarlılığında ifadeler

$$\frac{d\zeta}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{y}}_g^T \mathbf{K}_g(b) \tilde{\mathbf{y}}_g) - \zeta \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (\tilde{\mathbf{y}}_g^T \mathbf{M}_g(b) \tilde{\mathbf{y}}_g) \quad (7.24)$$

$$\frac{d\zeta}{d\mathbf{b}} = [0.001944 \ 0.05678 \ -0.02076]^T \quad (7.25)$$

şeklindedir. Global formülasyonun kullanımı ilede aynı sonuçlara ulaşılmaktadır.

Sisteme olan girişler  $f_1$  and  $f_2$  ( $f_3 = 0$  'dır. Bu yüzden formüllerde yer almamıştır.) çıkışlar ise  $z_1$ ,  $z_2$  ve  $z_3$  olarak TDA hesaplamalarına dahil edilmiştir. Tahrik frekansı

$\omega = \sqrt{\zeta_1} = \sqrt{0.08038} = 0.2835$  rad/sn için sistemin tekil değerleri ve tekil vektörleri şu şekilde bulunmaktadır. Tekil değerler;  $\sigma_1=6616.05$  ve  $\sigma_2=1.23524$ , tekil vektörler;

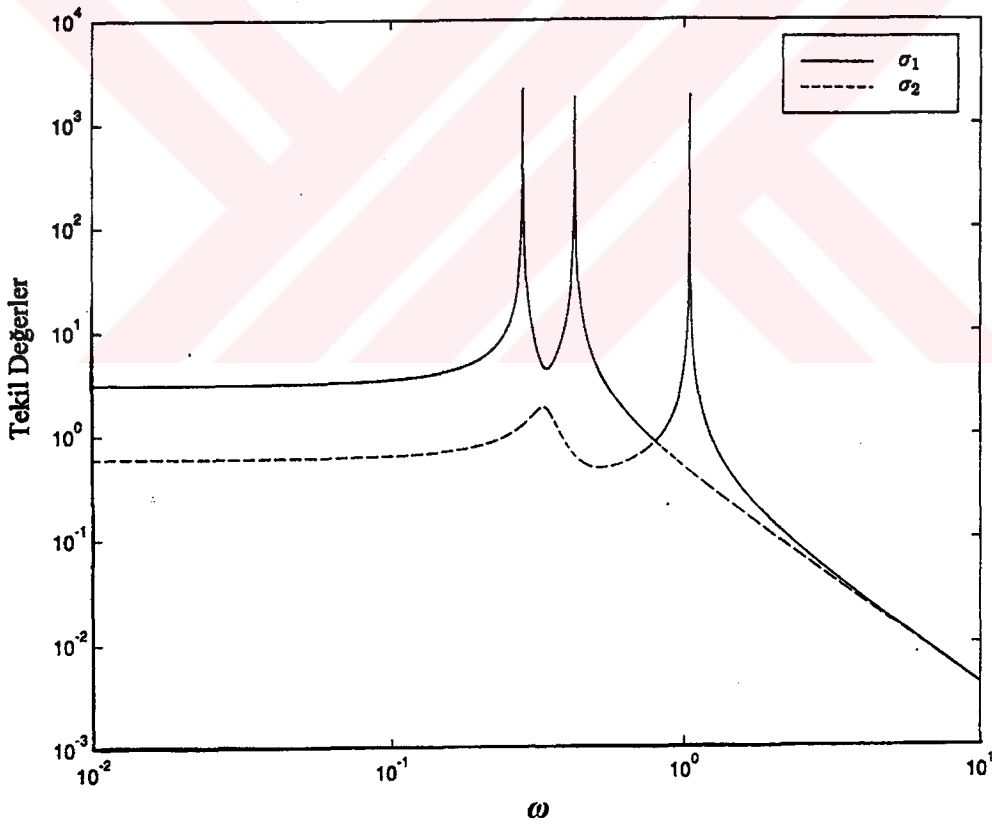
$$\mathbf{u}_1 = [-0.78479 \quad 0.19711 \quad 0.58758]^T \quad (7.26)$$

$$\mathbf{u}_2 = [0.22541 \quad -0.79237 \quad 0.58758]^T \quad (7.27)$$

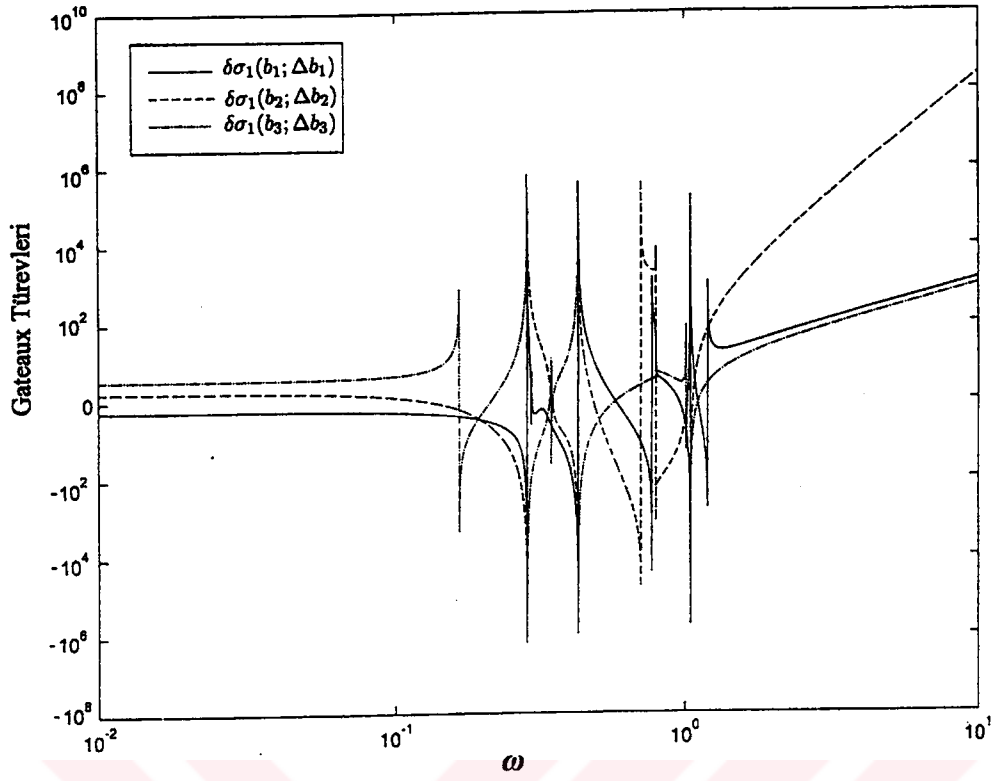
$$\mathbf{v}_1 = [0.96985 \quad -0.24369]^T \quad (7.28)$$

$$\mathbf{v}_2 = [-0.24369 \quad -0.96985]^T \quad (7.29)$$

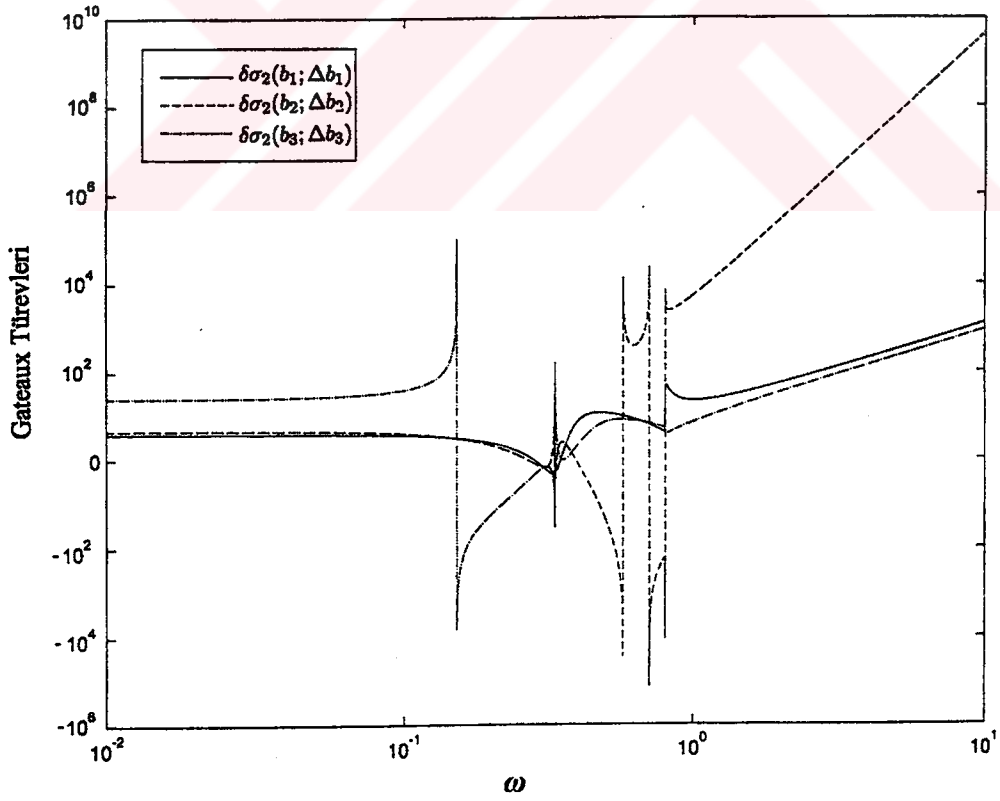
Sisteme ait tekil değerler  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$  'nin tahrik frekansı  $\omega$ 'ya göre değişimi Şekil 7.2'de verilmiştir.



**Şekil 7.2** Yapısal sistemin tekil değerlerinin  $\omega$  frekans alanındaki değişimi.

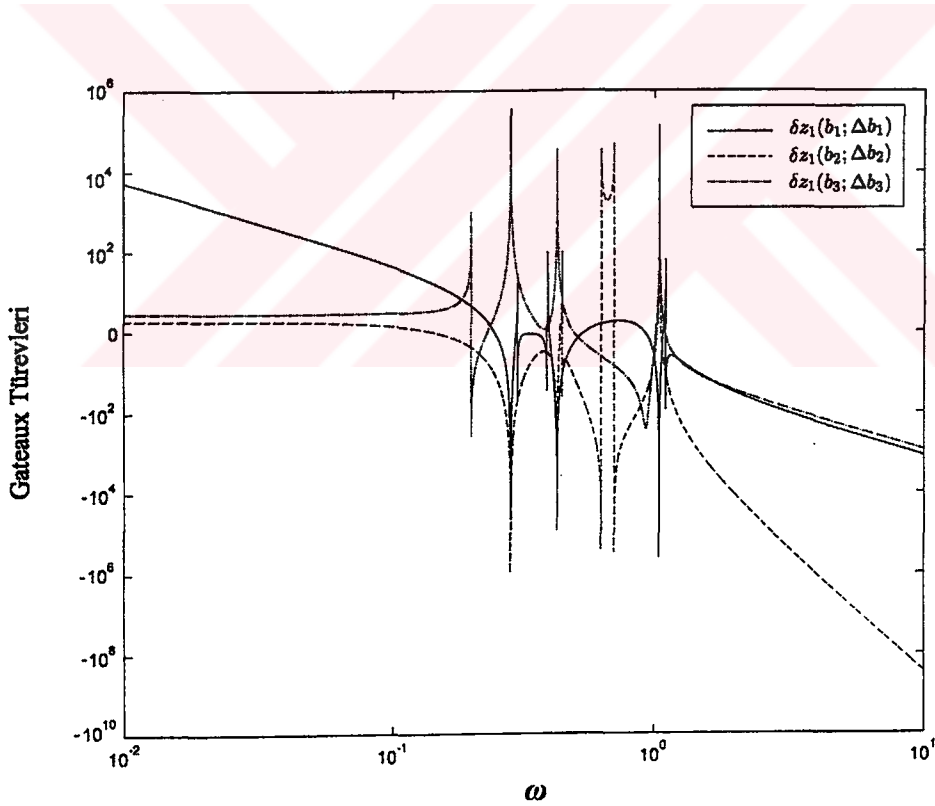


Şekil 7.3  $\sigma_1$ 'in  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$ 'e göre Gateaux türevlerinin  $\omega$  frekans alanındaki değişimi.

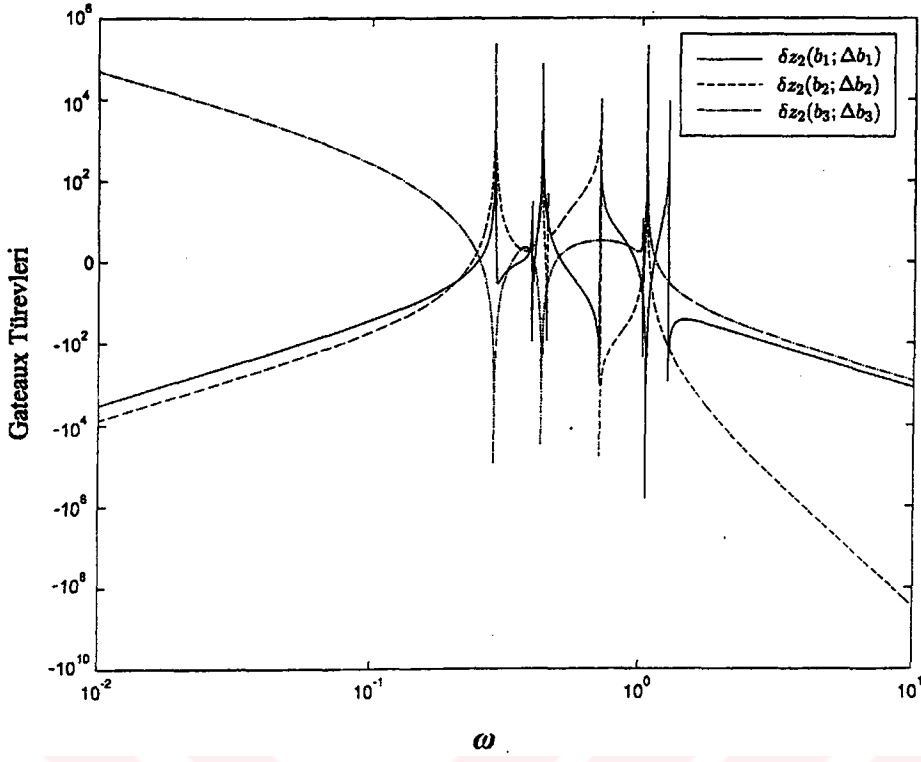


Şekil 7.4  $\sigma_2$ 'in  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$ 'e göre Gateaux türevlerinin  $\omega$  frekans alanındaki değişimi.

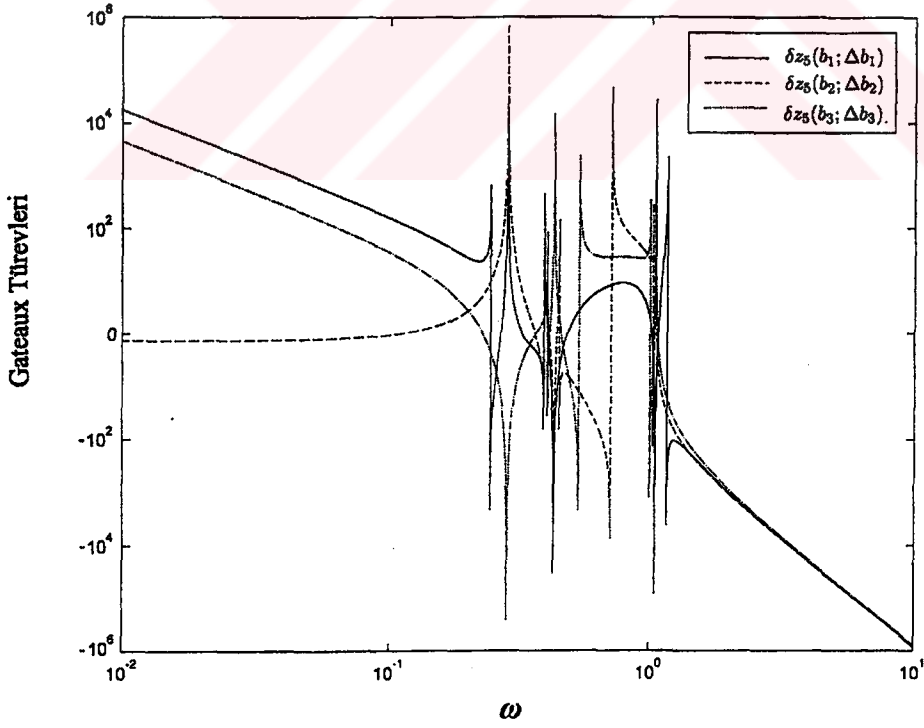
Gateaux türevleri ise sırasıyla Şekil 7.3 ve Şekil 7.4'dedir. Çıkışların Gateaux türevleri  $\delta z_k(b_i; \Delta b_i)$  Şekil 7.5-7.7'de  $f_1 = f_2 = 1$  birim yük değerleri için gösterilmektedir. Buradaki Gateaux türevlerinin hesaplamalarında tasarım parametrelerinde %5 lik değişim  $\Delta b_i = 0.05b_i$  olarak alınmış ve sonlu farklar formülü kullanılmıştır. Gateaux türevleri  $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$  ve  $\delta z_k(b_i; \Delta b_i)$  'nin frekans alanındaki davranışlarına baktığımızda, rezonans noktalarında sıçramaların meydana geldiği görülmektedir.  $\delta \sigma_k(b_i; \Delta b_i)$  özellikle sistemin enerji ve güç aktarım oranlarının duyarlılığıdır. Diğer taraftan  $\delta z_k(b_i; \Delta b_i)$  yapısal sistemin  $k$ .ncı serbestlik derecesine ait titreşim genliğinin duyarlılığıdır. Bunun sonucu olarak eğer biz  $\omega$  frekansına sahip dış kuvvetlerin yapı üzerinde oluşturduğu titreşim genliklerini minimize etmek istiyorsak yapmamız gereken ilgili  $\omega$  frekansındaki  $\sigma_1$  yani en büyük tekil değeri minimize etmektir. Bu ise en duyarlı tasarım parametresine yapılacak müdahale ile mümkün olacaktır.



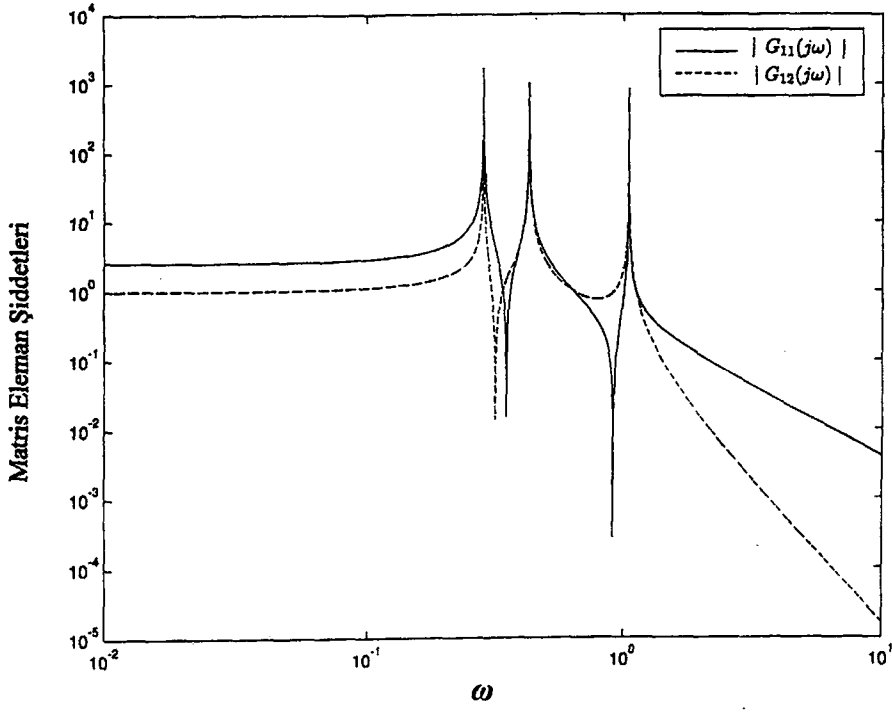
Şekil 7.5  $z_1$ 'in  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$ 'e göre Gateaux türevlerinin  $\omega$  frekans alanındaki değişimi.



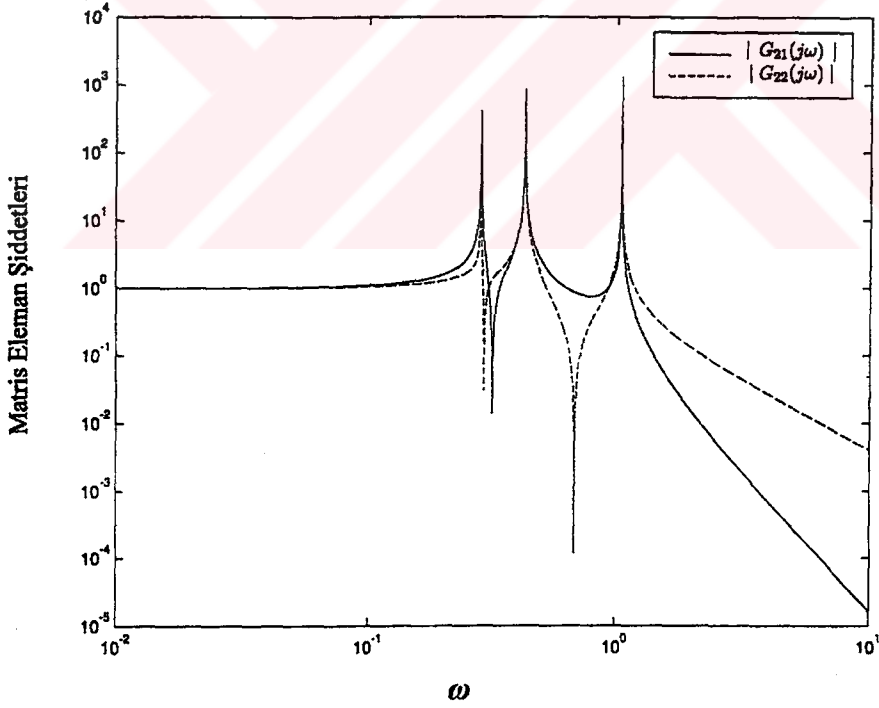
Şekil 7.6  $z_2$ 'in  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$ 'e göre Gateaux türevlerinin  $\omega$  frekans alanındaki değişimi.



Şekil 7.7  $z_5$ 'in  $b_1$ ,  $b_2$  ve  $b_3$ 'e göre Gateaux türevlerinin  $\omega$  frekans alanındaki değişimi.



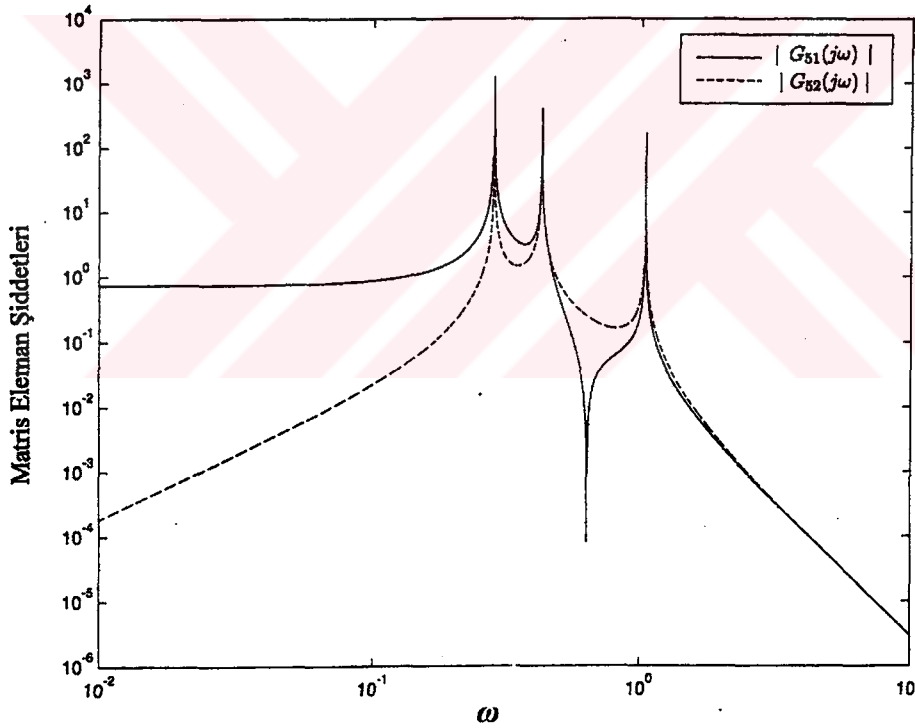
**Şekil 7.8** Transfer fonksiyon matris elemanlarının şiddetlerinin  $\omega$ 'nın fonksiyonu olarak değişimi.



**Şekil 7.9** Transfer fonksiyon matris elemanlarının şiddetlerinin  $\omega$ 'nın fonksiyonu olarak değişimi.

Üç çubuk kafes sistemine ait temel özdeğer [1]'de  $\lambda_1 = \omega^2 = 0.08038$  olarak verilmiştir. Bu değer Şekil 7.2'deki  $\sigma_1$  'in birinci tepe noktasına  $\omega = \sqrt{0.08038} = 0.2835$  rad/sn. de karşılık gelmektedir. Böylece tekil değer analizi esnasında sistemin rezonansları hakkında da bilgi edinilmektedir. Özdeğer tasarım duyarlılığı sonuçlarına TDA duyarlılık analizi ile de ulaşılmış olunmaktadır.

Görüldüğü üzere  $\sigma_k$  ve  $\delta\sigma_k(b_i; \Delta b_i)$  'nın grafik üzerindeki değişimi bize yapısal sistem frekans cevabını tüm frekans alanını kapsayacak şekilde vermektedir. Buna rezonans frekansları ve bu frekanslardaki duyarlılıklar da dahildir. Halbuki klasik yöntem olan özdeğer tasarım duyarlılığı sadece rezonans frekanslarında geçerlidir. Tekil değer tasarım duyarlılığı ise tüm frekans alanında kullanılabilir.  $\sigma_1$  'in çizimindeki üç tepe noktası sistemin serbestlik derecesini ve rezonans frekanslarını işaret etmektedir.

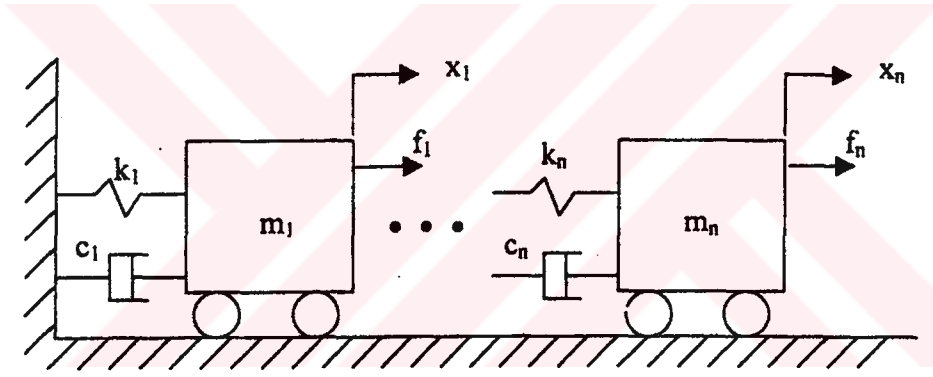


**Şekil 7.10** Transfer fonksiyon matris elemanlarının şiddetlerinin  $\omega$  'nın fonksiyonu olarak değişimi.

Ayrıca (6.4) ifadesi ile tanımlanan transfer fonksiyon matris elemanlarının büyüklükleri  $|G_{ij}(\omega)|$  Şekil 7.8-7.10'da verilmiştir. Bunlar incelendiği zaman  $|G_{ij}(\omega)|$ 'nin ve  $\sigma_i(\omega)$ 'nin benzer karakteristiğe sahip olduğu görülmektedir. Dahası rezonans frekansları da çakışmaktadır. Benzer sonuçlar  $\delta\sigma_i(b_m; \Delta b_m)$  ve  $\delta|G_{ij}|(b_m; \Delta b_m)$ 'in grafiklerinde de görülmektedir. Bu arada  $\sigma_1$  ve  $\sigma_2$ 'nin değişimleri  $\omega=0.7997$  rad/sn değerinde temas edip ayrılma davranışı göstermektedir.

### 7.3 En Kötü Yükleme Durumu

Yapısal sistem mekaniğinin temel konularından bir tanesi de olabilecek çeşitli yükleme koşullarından en kötüsünün tespit edilebilmesidir. TDA'ya dayalı analizin bu konudaki uygulamasını Şekil 7.11'deki titreşim yapan "n" adet kütleli sistemin tasarım duyarlılığını inceleyebiliriz.



Şekil 7.11 n adet kütleli bir titreşim sistemi.

Bu sisteme ait global katılık, sönüm ve kütle matrisleri şu şekildedir.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

ve

$$\mathbf{M} = \text{Diagonal} \{ m_1, m_2, \dots, m_n \} \quad (7.32)$$

Sayısal hesaplamalar için  $k_i = 1$ ,  $c_i = 1$  ve  $m_i = 1$  olarak,  $\omega = 5$  rad/sn'lik tahrik frekansındaki en kötü yükleme halinin bulunmak istendiğini varsayalım. TDA'ya dayalı analizde en büyük yapısal sistem kazancı diğer bir değişle sistemin hareketi en kötü yükleme şekline karşılık gelmektedir. Bu da sistemin transfer fonksiyon matrisinin en büyük tekil değeri  $\sigma_1$  ile temsil edilmektedir. Transfer fonksiyon matrisi  $\mathbf{G} = (-\mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}$ 'ye ait  $\sigma_1$  veya  $(-\mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})$  'e ait  $\sigma_n$  'nin bulunması önem kazanır. Böylece ikinci halde matris tersi almak gibi hesaplamalı işlemlerde zahmetli olan bir işlemin önüne geçilmiş olur.

Yükleme durumunun  $\mathbf{G}$ 'nin ilk sağ tekil vektörü  $\mathbf{v}_1$  doğrultusunda olmasıyla (veya  $-\mathbf{M}\omega^2 + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$  'nın  $\mathbf{u}_n$  ) sistem kazancı maksimum olacak ve en kötü yükleme koşulu meydana gelecektir.

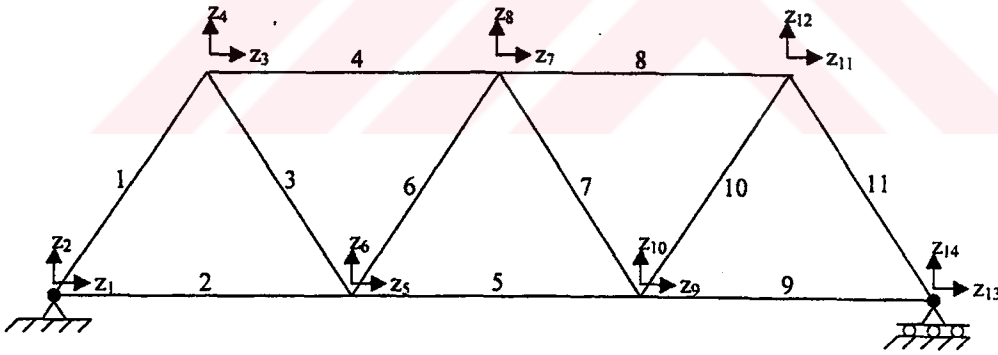
**Tablo 7.2** n=20 kütleli titreşim sisteminde en kötü yükleme koşullarının işlemci hesaplama süreleri (CPU sn.).

| Yük Sayısı | TDA    | Doğrudan Metod         |
|------------|--------|------------------------|
| 2          | 1.5368 | 77.55                  |
| 3          | 1.5820 | $1.864698 \times 10^4$ |
| 4          | 1.5620 | $3.63813 \times 10^6$  |

Diğer yandan doğrudan metod da ise her sefer tek bir yükün oluşturduğu hareket dikkate alınacak tarzda Gauss eliminasyon metodu ile denklem sistemi çözdürülmüştür. En kötü yükleme halinin bulunmasında TDA ve doğrudan metodun karşılaştırılması işlemci “CPU” süresi olarak Tablo 7.2’de verilmiştir. Hesaplamalarda  $n=20$ , kuvvet tarama aralığı  $-1$  den  $1$  ‘e, artırım miktarı ise  $0.01$  alınmıştır. Tablo 7.2’de karşılaştırma yük sayısına bağlı olarak yapılmaktadır. TDA’ya dayalı analizin burada da belirgin bir üstünlüğü olduğu görülmektedir.

#### 7.4 Çoklu Yükleme Hali

Bu bölümde tekil değer tasarım duyarlılık analizi Şekil 7.12’de görülen 11 elemanlı köprü kafes sistemi üzerine uygulanmıştır. Kuvvet tatbiklerinin düğüm noktalarına gelecek şekilde yapının çoklu yükleme şartları altındaki davranış analizi yapılmıştır. Dış kuvvetlerin, köprü üzerindeki araç hareketlerini temsil edecek tarzda  $z_5$ ,  $z_6$ ,  $z_9$  ve  $z_{10}$  doğrultularında etkidiğini varsayalım. Sayısal hesaplamalarda elastisite modülü  $E_i = 1$ , yoğunluk  $\rho_i = 1$ , eleman boyu  $\ell_i = \ell = 2$ , kesit alanı  $h_i = h = 1$  ( $i$  kafes eleman numarasını temsil etmektedir.)



Şekil 7.12 Köprü kafes sistemi

##### 7.4.1 Yapısal Sistem Gürbüzlüğü

Sistem mühendisliğinde araştırılan özelliklerden bir tanesi de sistemin (Bu kontrol sistemi veya konstrüktif yapısal sistem olabilir) giriş parametrelerindeki değişime karşı verdiği cevaplar arasındaki farkın büyüklüğüdür. Bunu yapısal sistemler için biraz daha açacak olursak, bir yapı belli doğrultularda yapılan yüklemeye karşılık

oldukça katı (veya esnek) davranırken değişik yükleme doğrultularında tam ters bir davranış gösterebilir. Buradan hareketle ortaya şu problem atılabilir: biz yapısal sistemimizi öyle tasarlayalımki değişik yükleme doğrultularına verdiği cevaplar arasındaki fark minimum olsun. İşte bu hal sistemin gürbüzlüğü (robustness) olarak adlandırılmaktadır.

**Tablo 7.3** Köprü sisteminin tekil değer ve tekil vektörleri.

| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_4$ |
|------------|------------|------------|------------|
| 16.3838    | 6.4338     | 2.4508     | 0.8418     |
| $v_1$      | $v_2$      | $v_3$      | $v_4$      |
| 0.2037     | -0.5092    | 0.0147     | 0.8360     |
| -0.6317    | -0.2550    | -0.7320    | 0.0115     |
| 0.4335     | -0.7114    | -0.1347    | -0.5366    |
| -0.6096    | -0.4118    | 0.6677     | -0.1141    |
| $u_1$      | $u_2$      | $u_3$      | $u_4$      |
| 0.2666     | -0.1937    | 0.0707     | 0.1987     |
| -0.2555    | -0.0156    | -0.3296    | -0.2109    |
| 0.1218     | -0.3243    | 0.0272     | 0.7532     |
| -0.4407    | -0.2183    | -0.6436    | 0.0130     |
| 0.1786     | -0.3040    | -0.1795    | 0.1154     |
| -0.4723    | -0.2517    | -0.0166    | 0.2487     |
| 0.2622     | -0.4257    | -0.0524    | -0.3809    |
| -0.4229    | -0.3437    | 0.5644     | -0.1704    |
| 0.0916     | -0.4330    | 0.0100     | -0.0827    |
| -0.2240    | -0.1905    | 0.3096     | -0.1138    |
| 0.3057     | -0.3612    | -0.1471    | -0.2818    |

Şekil 7.12 deki kafes köprü sisteminin tasarım parametrelerine müdahale ederek yapının gürbüzlüğünü arttırmak istediğimizi varsayalım. Köprü sisteminde dört giriş (düğüm noktalarına  $z_5, z_6, z_9$  ve  $z_{10}$  doğrultularında etkiyen araç yükleri) ve onbir çıkış (düğüm noktalarının yerdeğişimi) vardır. Sistemin tekil değerleri ve karşılık gelen tekil vektörleri hesaplanarak Tablo 7.3’de verilmiştir.

Diğer taraftan köprünün frekans cevap duyarlılığını doğrudan metod aracılığıyla referansta verildiği biçimiyle ilgili denklemlerin türevlenmesi ile bulabiliriz.

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (7.33)$$

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K})\Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f} - (-\omega^2 \Delta \mathbf{M} + j\omega \Delta \mathbf{C} + \Delta \mathbf{K})\mathbf{d}, \quad (7.34)$$

burada  $\Delta$  tasarım parametresine göre olan türev  $(\partial/\partial b_i)$ ’yi göstermektedir. Doğrudan metodda (7.33) ve (7.34) denklemleri her bir tahrik frekansı, yükleme durumu ve tasarım parametresine göre çözülmelidir.

Yapısal sisteme ait genlik ilgili tekil değer tarafından temsil edildiğine göre, yapının gürbüzlüğünün maksimum olması en büyük tekil değer  $\sigma_1$  ile en küçük tekil değer  $\sigma_4$  arasındaki farkın minimize edilmesiyle mümkün olacaktır. ( $\sigma_1/\sigma_4 = \text{minimum}$ ) Tasarım parametresi olarak kabul ettiğimiz. Çubuk kesit alanlarındaki  $\pm\%50$  lik değişimlerin tekil değerlerin Gateaux türevlerine olan etkisi Tablo 7.4 ‘de gösterilmiştir. Buradan hareketle, mevcut yani orjinal durumdaki  $\sigma_1/\sigma_4 = 16.3838 / 0.8418 = 19.4636$  oranını yeni kesit alanları aracılığıyla  $\sigma_1/\sigma_4 = 18.7423 / 1.1944 = 15.6914$  değerine getirebiliriz. Bu esnada kesit değişimleri,  $h_1=1.5h, h_2=0.5h, h_3=1.5h, h_4=1.5h, h_5=0.5h, h_6=1.5h, h_7=0.5h, h_8=1.5h, h_9=1.5h, h_{10}=1.5h, h_{11}=1.5h$ , şeklinde olmaktadır. Böylelikle (ikinci durumda) yapı daha yüksek bir gürbüzlüğe ulaşmaktadır.

Bunun dışında sistemin rijitliğini topyekün arttırmak isteyebiliriz. Yani herhangi bir yükleme karşısında yapının şekil değişiminin minimum olması istensin. Bu ise tasarım parametrelerine yapılacak müdahale ile düğüm noktalarının yer değişimlerinin en aza indirilmesi ile mümkün olacaktır. Bu problemin tekil değer analizine dayalı çözülmesi halinde, en büyük tekil değer  $\sigma_1$  ‘in düşürülmesi gerekir. Kesit alanlarında  $h_1=1.5h, h_2=0.5h, h_3=1.5h, h_4=1.5h, h_5=0.5h, h_6=1.5h, h_7=0.5h, h_8=1.5h, h_9=1.5h, h_{10}=1.5h, h_{11}=1.5h$ , şeklinde yapılacak değişikliklerle  $\sigma_1, 16.3838$ ’den  $10.9213$ ’e düşmektedir. Bunun anlamı en kötü yükleme halinde şekil

değiştirme miktarlarının %33.34 oranında düşmesi demektir. Tekil değerlere dayalı olarak yapılan hesaplamaların süresi 1.26 işlemci (CPU) saniyedir. Öte yandan (7.33) ve (7.34) ifadelerinin aracılığıyla doğrudan methodla hesaplanması halinde  $-1$  ,  $1$  aralığının  $0.01$  artım değeri ile taranması durumunda işlem süresi  $9.3078 \times 10^5$  işlemci (CPU) saniyedir.

**Tablo 7.4** Köprü sisteminde  $\Delta h_i=0.5h$  tasarım parametre değişimi için  $\delta\sigma_1(h_i; \Delta h_i)$  ve  $\delta\sigma_4(h_i; \Delta h_i)$  tekil değerlerinin Gateaux türevleri.

| Tasarım Parametre Değişimi (-) | $\delta\sigma_1$ | $\delta\sigma_4$ |
|--------------------------------|------------------|------------------|
| $\Delta h_1=0.5h$              | 1.2757           | 0.0042           |
| $\Delta h_2=0.5h$              | 3.3298           | 0.2231           |
| $\Delta h_3=0.5h$              | 0.8503           | -0.0129          |
| $\Delta h_4=0.5h$              | 1.4473           | 0.0096           |
| $\Delta h_5=0.5h$              | 4.3298           | 0.5515           |
| $\Delta h_6=0.5h$              | -0.0014          | -0.0163          |
| $\Delta h_7=0.5h$              | 0.0079           | 0.0114           |
| $\Delta h_8=0.5h$              | 1.4113           | 0.0378           |
| $\Delta h_9=0.5h$              | 0.6493           | -0.0147          |
| $\Delta h_{10}=0.5h$           | 1.3576           | 0.0131           |
| $\Delta h_{11}=0.5h$           | 1.7261           | 0.0350           |

#### 7.4.2 Duyarlılık Sınırları

Duyarlılık analizleri esnasında diğer önemli bir konu çıkışlar üzerinde en etkili olan tasarım değişikliği doğrultularının bilinmesidir. Klasik yöntemlerde  $\Delta u$ 'nun verilen bir yükleme durumunda maksimize (veya minimize) edilmesi için (7.33) ve (7.34)

denklemlerinin  $\Delta\mathbf{M}$ ,  $\Delta\mathbf{C}$  ve  $\Delta\mathbf{K}$ 'ya göre çözülmesi gerekmektedir. Ancak bu işlem hesaplamalı alanda oldukça maliyetli sayılabilecek bir yöntemdir.

Halbuki TDA bu analizi önemli ölçüde basitleştirebilmektedir.  $(\sigma_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$  ve  $(\sigma_n, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$ 'nin transfer fonksiyon matrisi  $\mathbf{G}$ 'nin sırasıyla ilk ve son tekil değerleri ile tekil vektörlerini gösterdiğini kabul edelim.  $\omega$  tahrik frekansında (7.34) ifadesinin sağ tarafı,

$$\Delta\mathbf{f} - (-\omega^2 \Delta\mathbf{M} + j\omega\Delta\mathbf{C} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{d} = \mathbf{v}_1 \quad (7.35)$$

veya

$$\Delta\mathbf{f} - (-\omega^2 \Delta\mathbf{M} + j\omega\Delta\mathbf{C} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{d} = \mathbf{v}_n \quad (7.36)$$

şeklinde oluşur. Burada, her iki halde de  $\|\Delta\mathbf{f} - (-\omega^2 \Delta\mathbf{M} + j\omega\Delta\mathbf{C} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{d}\|_2 = 1$ , ayrıca  $\Delta\mathbf{d} = \sigma_1 \mathbf{u}_1$  ve  $\|\Delta\mathbf{d}\|_2 = \sigma_1$  dir. (benzer şekilde  $\Delta\mathbf{d} = \sigma_n \mathbf{u}_n$  ve  $\|\Delta\mathbf{d}\|_2 = \sigma_n$ ) Bunun anlamı sistemin cevap duyarlılığının maksimize (7.35) (veya minimize (7.36) ) edilebilmesidir.

Bu ifadeler sayesinde bir yapısal sistemin belli bir frekanstaki tasarım duyarlılığı, sistemin tekil değerleri aracılığıyla bulunabilmektedir. Şekil 7.12'deki kafes köprü sistemini göz önüne alırsak duyarlılık sınırları, Tablo 7.3'de verilen ilk ve son tekil değerler ile onlara karşılık gelen tekil vektörler yardımıyla elde edilebilmektedir.

Belli bir  $\omega$  tahrik frekansında ve verilen yükleme koşullarında duyarlılık sınırlarını açığa çıkaran tasarım değişikliği (7.35) ve (7.36) denklemlerinin  $\Delta\mathbf{M}$ ,  $\Delta\mathbf{C}$  ve  $\Delta\mathbf{K}$ 'ya göre çözülmesi ile bulunur. Diğer taraftan  $\Delta\mathbf{M}$ ,  $\Delta\mathbf{C}$ ,  $\Delta\mathbf{K}$  türevleri ve  $\omega$  frekansı durumunda duyarlılık sınırına karşılık gelen yükleme koşulunun bulunması için önce (7.35) ve (7.36) ifadelerinden  $\mathbf{d}$  vektörü elde edilir, daha sonra (7.33) denklemini kullanılarak  $\mathbf{f}$  vektörü hesaplanır. Burada da önceki kısımlarda açıklandığı gibi TDA'nın hesaplama tekniği açısından olan üstünlüğü görülmektedir.

## **8. TDA'NIN LAMELLİ KARMA MALZEMELERİN TASARIMINA UYGULANMASI**

Lamelli kompozit yapılar uygulamada genellikle yüksek dayanımlarına karşılık hafiflikleri sebebiyle yer bulmaktadır. Lamel sistemlerinin tasarım çalışmalarının bir çoğunda lamel parametrelerinin optimizasyonu işlemi belli bir yükleme hali, ortalama gerilme değerleri ve bunlardan doğan moment ve gerilme sonuçları esas alınarak yapılmaktadır. Bunun sonucunda elde edilen optimal yapı, sadece hesaplamaların yapıldığı belli bir yükleme hali için geçerlidir. Uygulamada ise imal edilmiş olan sistem farklı yükler, değişik sınır koşulları ile çeşitli gerilme ve uzama şartlarına maruz kalmaktadır. Bu yüzden en genel hal için optimum yapının aranmasında sadece tek bir yükleme koşuluna göre hareket edilmemesi gerekir.

Bir diğer tasarım kriteri de yapının en kötü yükleme halindeki performansının maksimize edilmesidir. Bu ise ancak olabilecek tüm yükleme koşulları dikkate alınarak yapılabilir.

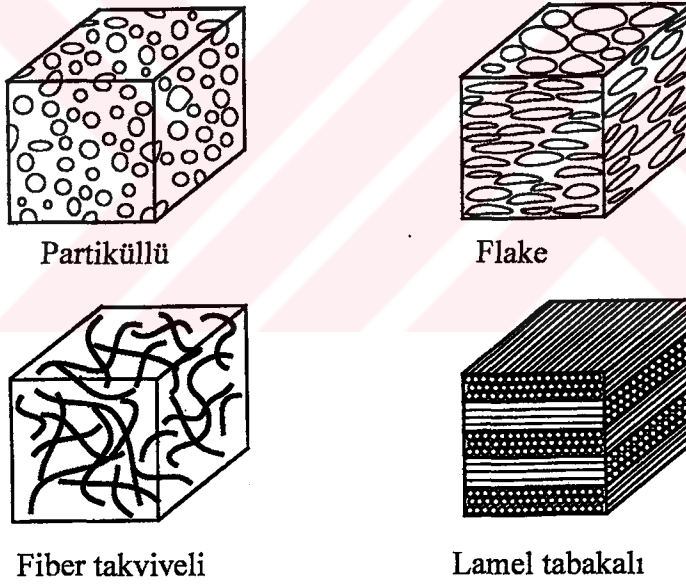
Bu bölümde, en kötü yükleme haline karşılık gelen optimum lamel tasarımı bir minimax problemi olarak ele alınıp tekil değerlerin minimize edilmesiyle sonuca ulaşılmış, ayrıca sayısal bir örnek üzerinde uygulama yapılmıştır.

### **8.1 Karma Malzemeler (Kompozitler) Hakkında Genel Bilgi**

Yapısal sistemlerin tasarımlarında mümkün olan en iyi tasarıma en az kaynak kullanımı ile ulaşılmaya çalışılır. Elde edilen tasarımın performansı, kullanılan kaynak olarak kabul edilen ağırlık veya maliyet gibi kavramlarla karşılaştırılır. Bu noktada tek bir tür malzeme kullanmak yerine farklı gruplardan iki veya daha fazla malzemeyi birlikte kullanarak daha yüksek performans elde etmek mümkün olmaktadır.

Malzemelerin birleştirme işleminin atomsal veya molekülsel düzeyde olması ile alaşımlar oluşurken özellikle farklı gruplardan malzemelerin makro düzeyde birleştirilmesiyle karma malzemeler (kompozitler) elde edilirler. Bu işlemin amacı bileşenlerin en iyi taraflarının bir araya getirilmesidir. Hatta zaman zaman elde edilen özellikler bileşenlerinkinden daha iyi olmaktadır. Karma malzemeyi oluşturan bileşenlerden genellikle bir tanesi (fiber) sistemdeki dayanımı, rijitliği sağlarken diğeri daha yumuşak bir malzeme olarak fiberin formunun korunmasını, dış etkenlerden uzak tutulmasını sağlayan dolgu (matris) malzemesidir [10].

Fiber ve matris türleri ile bunların genel yapı içersinde dizilişleri bakımından bazı gruplamalar yapmak mümkündür (şekil 8.1). Bu yapılar içersinde matematiksel modellemenin daha başarılı bir şekilde yapılabilen lamelli kompozitlerdir. Diğerlerinde ise deneysel çalışmalar ön plana çıkmaktadır.

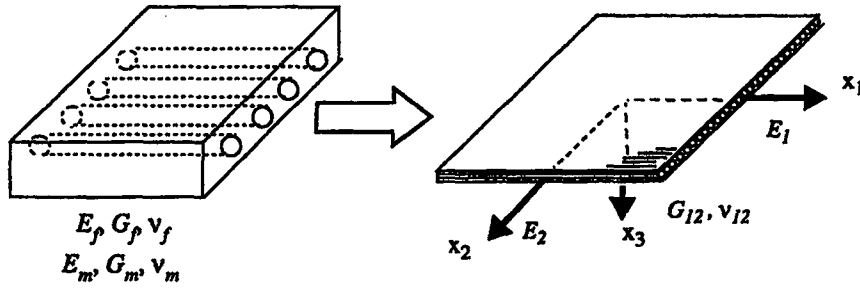


**şekil 8.1** Karma malzeme (kompozit) tipleri.

## 8.2 Ortotropik Lamelli Karma Malzemeler

Malzeme  zelliklerinin yönlerden bağımsız olması izotropik, tüm yönlerde farklı olması anizotropik hal olarak adlandırılmaktadır. Anizotropinin  zel bir hali olarak birbirine dik iki doğrultuda farklı özellik göstermesi ortotropik durumdur. Sürekli

fiberlerden oluşan yapılar bu davranış tarzına sahiptir. Tabakaların üst üste yerleştirilmesiyle kullanılırlar. Uygulama alanları olarak havacılık sanayi, yüksek mukavemetli roket gövdeleri ve araç lastikleri sayılabilir.



**Şekil 8.2** Fiber takviyeli ortotropik kompozit tabakaların elastik özellikleri

Bu tür yapılarda çoğunlukla matris ve fiber ayrı ayrı izotropik özellik gösterirken meydana gelen karma malzeme ortotropik olmaktadır. Notasyon olarak bir tabakada fiber doğrultusu  $x_1$ , fibere dik doğrultu  $x_2$  ile gösterilmekte ve asal doğrultular olarak adlandırılmaktadır. Fiber doğrultusunda yapılan yüklemelerde yapı daha fazla dayanım gösterirken, dik doğrultuda daha düşük dayanım gösterir. İlk durumda fiber ikinci durumda matris malzemesinin özelliklerine benzerlik görülmektedir. Katmanların malzeme özellikleri  $E_1$  ve  $E_2$  fiber ve ona dik doğrultulardaki elastiklik modülü,  $G_{12}$  kayma modülü,  $\nu_{12}$  Poisson oranıdır (Şekil 8.2).

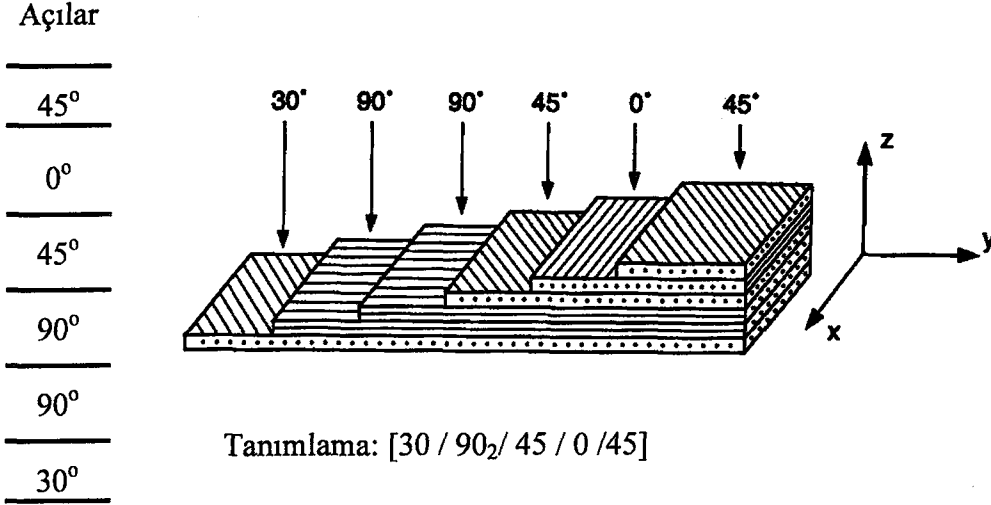
### 8.2.1 Lamel Tanımlaması

Bir lamel sistemi, tabakaların (ply) üst üste getirilmesiyle oluşturulmaktadır. Tabakalara ait fiber açılarının Şekil 8.3’de gösterildiği gibi belirlenmiş bir referans doğrultusundan saat yönünün tersi pozitif yön olmak üzere yazılması ile lamel sistemi tanımlanmaktadır [10].

$$[30 / 90_2 / 45 / 0 / 45] \quad (8.1)$$

Tabakalardan her hangi birisinin fiber açıları  $\theta=0^\circ$  veya  $\theta=90^\circ$  olarak referans doğrultusu ile çakışması halinde eksen üstü tabakası olarak adlandırılır. Birbirlerini

takip eden ve aynı fiber açısı değerine sahip tabakaların açıları altına indis olarak tekrarlama adeti yazılmaktadır.



**Şekil 8.3** Lamellerin yapışma sırasına göre sistemin tanımlanması.

### 8.3 Lamellerin Dayanımı ve Katılık Tasarımı

#### 8.3.1 Klasik Lamel Teorisi

Bu kısımda [10] ve [11] doğrultusunda klasik lamel teorisinin genel hatları üstünde durulacaktır. Düzlemsel davranış kabulü gereği z doğrultusunda kuvvet etkimediği varsayımından hareket edilecektir. Bu durumda  $\sigma_z$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz}$  nin değerleri bu yüzeylerde sıfırdır. Bir diğer kabul tabakaların birbirlerine mükemmel olarak birleştirilmiş olmasıdır.

Yüklemeye altında şekil değişimine uğrayan elastik yapının x, y ve z doğrultularındaki küçük yer değişimlerinin sırasıyla u, v ve w olduğunu varsayarsak, birim şekil değiştirmeler için (8.2) denklemleri verilmektedir

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (8.2)$$

burada  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ , sırasıyla x, y, z, doğrultularındaki birim uzamaları,  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$  birim kayma şekil değişimlerini göstermektedir.

Elastisite problemlerinin çözümü için gerilme ve birim uzama ilişkilerini içeren ifadelere ihtiyaç vardır. En genel haldeki üç boyutlu ve anizotropik lineer elastik ifadeler matris formunda

$$\sigma = C \varepsilon \quad (8.3)$$

ve

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.4)$$

biçiminde verilebilir. Burada simetriden dolayı 21 bağımsız malzeme sabiti vardır. C malzeme katılık matrisi,  $\sigma$  ve  $\varepsilon$  sırasıyla gerilme ve birim uzama elemanlarını içeren vektörlerdir.

Üç boyutlu izotropik halde ise (8.4) ifadesi,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

formuna indirgenebilmektedir. Bu durumda bağımsız sadece iki tane  $C_{11}$  ve  $C_{12}$  sayıları vardır. Bunlarda elastisite modülü  $E$  ve Poisson oranı  $\nu$  ile ifade edilebilmektedir.

$$C_{11} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (8.6)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$



**Şekil 8.4** Üç boyutlu genel hal ve iki boyutlu düzlemsel gerilme durumlarındaki gerilme elemanları.

### 8.3.2 Düzlemsel İzotropik Tabakalar

İnce tabakalardan meydana gelen yapılar temelde yükleri iki ayrı tip mekanizma şeklinde taşırlar. Bir tanesi tabaka düzlemindeki çekme ve basma yükleri, diğeri ise tabakaların bükülme halidir.

İnce plakaların düzlemsel gerilme kabulünde yüzeyin z normali doğrultusunda herhangi bir kuvvet etkilediği varsayımından hareket edilir. Bu durumda

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (8.7)$$

yazılabilir.

Kalan  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ve  $\tau_{xy}$  gerilmeleri tabaka düzleminde. Burdan hareketle düzlemsel gerilme halinde

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{\nu}{1-\nu}C_{12} & C_{12} - \frac{\nu}{1-\nu}C_{12} & 0 \\ C_{12} - \frac{\nu}{1-\nu}C_{12} & C_{11} - \frac{\nu}{1-\nu}C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

olmaktadır.  $C_{11}$  ve  $C_{12}$  yerine karşılıkları konduğunda

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.9)$$

elde edilir. Burada,

$$Q_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad \text{ve} \quad Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.10)$$

şeklindedir ve matris notasyonlarının kullanılmasıyla,

$$\sigma = Q \varepsilon \quad (8.11)$$

olur. Buradaki  $Q$  indirgenmiş malzeme katılık matrisi olarak adlandırılmaktadır.

### 8.3.3 Ortotropik Halde Klasik Lamel Teorisi

Düzlemsel gerilmenin bir diğer sonucu gerilme ve uzamaların tabaka kalınlığı boyunca aynı olmasıdır. Kirchhoff-Love ifadeleri gereğince  $k$ .nci tabaka için, sırasıyla  $\varepsilon^0$  ve  $\kappa$  sabit olan birim uzamayı ve orta düzlem eğimini göstermek üzere [11]

$$\sigma_{(k)} = \bar{Q}_{(k)} \varepsilon = \bar{Q}_{(k)} (\varepsilon^0 + z\kappa) \quad (8.12)$$

burada,

$$\sigma_{(k)} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T_{(k)} \quad (8.13)$$

$$\varepsilon^0 = [\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_y^0 \quad \gamma_{xy}^0]^T \quad (8.14)$$

$$\kappa = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}]^T = \left[ -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (8.15)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \quad (8.16)$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (8.17)$$

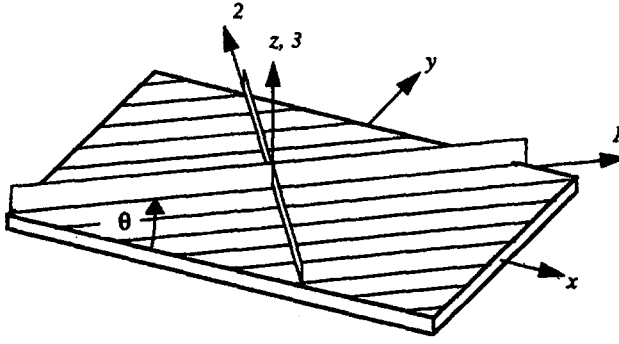
$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

ve

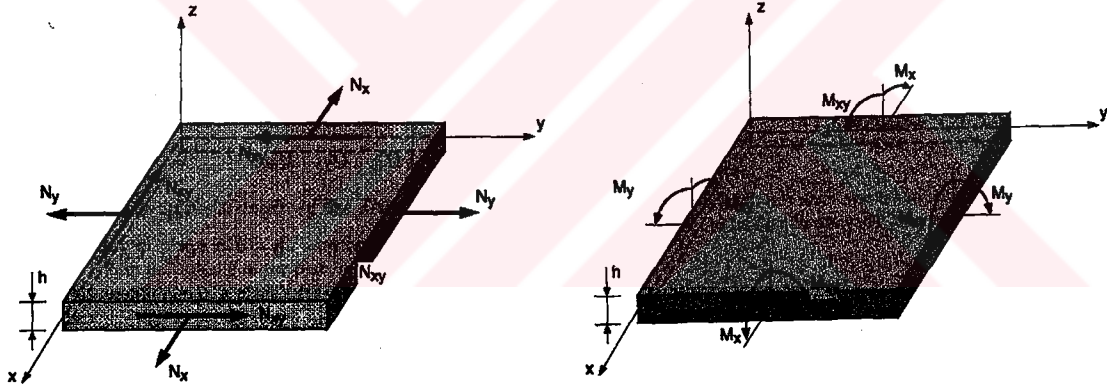
$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Burada  $z$  kalınlık boyunca olan koordinat, indis  $k$  ilgili  $k$ .ncı tabakayı,  $\theta$  tabakanın fiber açısını,  $E_1$  ve  $E_2$  malzeme asal eksenlerindeki elastisite modülünü,  $G_{12}$  kayma modülünü, ve  $\nu_{12}$  ile  $\nu_{21}$  Poisson oranını göstermektedir.



**Şekil 8.5** Ortotropik bir tabaka için malzeme yön doğrultuları.

Klasik lamel teorisinde, gerilme bileşenleri  $N$  ve moment bileşenleri  $M$  birim tabaka uzunluğu için tanımlanmaktadır.



**Şekil 8.6** Bir lamel tabakasına etkiyen kuvvet ve moment bileşenleri.

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}^T = \int_{z=-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T dz = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} \quad (8.19)$$

ve

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^T = \int_{z=-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T z dz = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \quad (8.20)$$

Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (8.22)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (8.23)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (8.24)$$

ve  $N$  tabaka sayısı,  $z$  kalınlık boyunca olan koordinat,  $h$  malzeme kalınlığıdır. (8.19)

ve (8.20) ifadelerinin dönüştürülmesi ile [11]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (8.25)$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= \mathbf{A}^* - \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{C}^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{B}^{*T} \\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B}^* \mathbf{D}^{*-1} = -\mathbf{D}^{*-1} \mathbf{C}^* = \mathbf{D}^{*-1} \mathbf{B}^{*T} \\
\mathbf{C}' &= -\mathbf{D}^{*-1} \mathbf{D}^* = \mathbf{B}^{*T} \\
\mathbf{D}' &= \mathbf{D}^{*-1} \\
\mathbf{A}^* &= \mathbf{A}^{-1} \\
\mathbf{B}^* &= -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \\
\mathbf{C}^* &= \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} = (-\mathbf{B}^*)^T \\
\mathbf{D}^* &= \mathbf{D} - \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{B} \mathbf{B}^*
\end{aligned} \tag{8.26}$$

verilmiş olan gerilme bileşenleri  $\mathbf{N}$  ve moment bileşenleri  $\mathbf{M}$  için düzlemsel elemanlar (8.12) ve (8.25) ifadelerinin aşağıdaki gibi düzenlenmesi ile bulunmaktadır.

$$\sigma_{(k)} = \bar{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{33} & \mathbf{zI}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \tag{8.27}$$

burada  $\mathbf{I}_{mm} \in R^{m \times m}$  biçiminde birim matrisdir.

### 8.3.4 Gerilme ve Şekil Değişimlerinin Minimize Edilmesi

Sadece belli bir yükleme hali için elde edilen optimum tasarım diğer yükleme hallerinde geçerli olmayabilir. Bu durumda yapılacak olan en kötü yükleme haline karşılık gelen maksimum gerilme veya maksimum şekil değiştirme vektörü şiddetinin minimize edilmesidir.

Yani  $\mathbf{N}$  ve/veya  $\mathbf{M}$ 'ye karşılık gelen

$$\text{Minimize maks} \|\sigma\|_2 \text{ veya minimize maks} \|\epsilon\|_2 \tag{8.28}$$

minimize edilmesi gerekir. Burada sistem giriş-çıkış ilişkisinin gösterilmesi açısından  $\|\mathbf{N}\|_2$  ve  $\|\mathbf{M}\|_2$  uzunluğa göre normalize edilmiştir.

$$\|\mathbf{N}\|_2=1, \|\mathbf{M}\|_2=1 \tag{8.29}$$

Yapılacak olan minimize işlemi, girişler ( $\mathbf{N}$  ve  $\mathbf{M}$ ) ile çıkışlar ( $\sigma$  veya  $\epsilon$ ) arasındaki transfer fonksiyon matrisi  $\mathbf{G}$ 'nin en büyük tekil değerinin minimize edilmesidir.

(Not: Bu bölümde gerilme ile karışmasını önlemek için tekil değerler  $\mu$  notasyonu ile gösterilmektedir.)

$$\mu_1 = \max\{\|G \mathbf{x}\|_2 : \mathbf{x} \in C^n, \|\mathbf{x}\|_2=1\}, \text{Burdan } \mu_1 = \|G \mathbf{w}_1\|_2, \mathbf{w}_1 : \text{birimsel vektör}, \mathbf{w}_1 \in C^n$$

$$\mu_2 = \max\{\|G \mathbf{x}\|_2 : \mathbf{x} \in C^n, \|\mathbf{x}\|_2=1, \mathbf{x} \perp \mathbf{w}_1\}, \text{Burdan } \mu_2 = \|G \mathbf{w}_2\|_2, \mathbf{w}_2 : \text{birimsel vektör}, \mathbf{w}_2 \in C^n, \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{w}_1$$

$$\mu_k = \max\{\|G \mathbf{x}\|_2 : \mathbf{x} \in C^n, \|\mathbf{x}\|_2=1, \mathbf{x} \perp \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-1}\}, \text{Burdan } \mu_k = \|G \mathbf{w}_k\|_2, \mathbf{w}_k : \text{birimsel vektör}, \mathbf{w}_k \in C^n, \mathbf{w}_k \perp \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k-1}$$

(8.28) ve (8.29) ifadeleri ile tanımlanan minimaks probleminin çözülmesi yerine transfer fonksiyon matrisinin en büyük tekil değeri  $\mu_1$ 'in minimize edilmesi yeterlidir. Çünkü sistemin en kötü yükleme durumu için yapılacak olan tekil değerlerin optimizasyonunda, oldukça uzun bir işlem olan en kötü yükleme halinin kendisinin bulunmasına gerek yoktur. Tekil vektörler yapının cevabını temsil eden değerleri bünyesinde barındırmaktadır. Birinci ve en büyük tekil değere karşılık gelen birinci sağ tekil vektör  $\mathbf{v}_1$  en kötü yükleme doğrultusunu vermektedir. Böylelikle orjinal minimaks problemi hesaplama tekniği açısından çok daha avantajlı olan minimizasyon problemine indirgenmiş olmaktadır.

Tekil değerlerin minimize edilmesi problemi için girişler ve çıkışlar arasındaki transfer fonksiyon matrisi önceki bölümde verilen ifadeler aracılığıyla aşağıdaki gibi çıkarılmaktadır.

Eğer gerilme değerleri çıkış olarak isteniyorsa,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}^\sigma \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

Eğer birim uzamalar çıkış olarak istenirse,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{G}^\varepsilon \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (8.31)$$

ifadeleri kullanılır.  $G_{(k)}^\sigma$  matrisi önceki bölümde verilen gerilme-birim uzama denklemleri aracılığıyla aşağıdaki formda bulunur.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{(k)} = G_{(k)}^\sigma \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

Burada  $G_{(k)}^\sigma$  şu şekilde tanımlanmaktadır.

$$G_{(k)}^\sigma = \bar{Q}_{(k)} \begin{bmatrix} I_{33} & z I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} W \quad (8.33)$$

Anılan  $W$  matrisi,  $N$  ve  $M$ 'in elemanları arasında ağırlık matrisi olarak görev yapmaktadır.

#### 8.4 TDA'nın Lamelli Karma Malzemeler Üzerine Uygulanması

Bu kısımda TDA'nın lamel tasarımına uygulanması üzerinde durulacaktır.

$$\sigma_{(k)} = G_{(k)}^\sigma f \quad (8.34)$$

ifadesini göz önüne alırsak klasik lamel teorisinde (tabakaların ince olması nedeniyle kayma etkilerini ihmal ederek)  $G_{(k)}^\sigma \in R^{3 \times 6}$ ,  $\sigma_{(k)} \in R^3$  ve  $f = [N \ M]^T \in R^6$  şeklindedir.

$G_{(k)}^\sigma$  matrisinin TDA'sının  $G_{(k)}^\sigma = USV^H$  olduğunu varsayarsak burada  $U \in C^{m \times m}$ ,  $S \in R^{m \times n}$  ve  $V \in C^{n \times n}$  boyutundadır (Kayma etkilerinin ihmal edilebildiği durumlarda klasik lamel teorisi gereği  $m=3$  ve  $n=6$  dır).

Sistemin farklı giriş doğrultularında farklı kazanç değerlerine sahip olduğunu göstermek için  $G_{(k)}^\sigma$ 'nin TDA'sını dyadik formda yazabiliriz.

$$G_{(k)}^\sigma = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i v_i^H \quad (8.35)$$

Kuvvet vektörü  $\mathbf{f}$  'in  $\ell$  .nci sağ tekil vektöre eşit olduğu varsayılırsa  $\mathbf{f} = \mathbf{v}_\ell$  durumunda

$$\sigma_{(k)} = \sum \mu_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_\ell \quad (8.36)$$

ifadesi elde edilir.

$\mathbf{v}_i$  'lerin ortonormal olmaları nedeniyle  $\mathbf{v}_i^H \mathbf{v}_\ell = \delta_{i\ell}$  dir. İfadedeki  $\delta_{i\ell}$  Kronecker delta fonksiyonudur. Böylece

$$\sigma_{(k)} = \mu_\ell \mathbf{u}_\ell \quad (8.37)$$

$$\|\sigma_{(k)}\|_2 = \mu_\ell \quad (8.38)$$

(8.37) denkleminin gösterdiğine göre eğer  $\mathbf{f}$  vektörü  $\mathbf{v}_\ell$  eşit olursa  $\sigma_{(k)}$  çıkışı  $\mathbf{u}_\ell$  doğrultusunda olacaktır. Yapının kazanç faktörü ise  $\mu_\ell$  ile temsil (8.38) edilmektedir. Böylelikle önceki bölümlerde gösterildiği gibi her bir sağ vektör  $\mathbf{v}_i$  ne şekildeki bir girişin ne şekilde bir çıkış üreteceğini yani gerilme veya birim uzama vektör elemanlarının oluşumunu sol tekil vektör  $\mathbf{u}_i$  aracılığıyla gösterirken  $\mu_i$  değeri ile de sistemin kazancını göstermektedir.

Tekil değerler ile enerji dağılım ilişkisi önceki 6.1 bölümünde, açıklanan formunu lamellerin optimizasyonu konusunda da korumaktadır.

## 8.5 Karma Malzemeler Üzerine Sayısal Örnek

Bu bölümde, geliştirilen TDA'ya dayalı metodun optimum lamel tasarımı üzerinde ne şekilde sonuç verdiğine dair sayısal bir örnek üzerinde durulacaktır. Örnek üzerinde gerilmelerin bulunması ve bunların genel notasyonlarında " $\sigma$ " olması sebebiyle bu örnekteki tekil değerler " $\mu$ " notasyonu ile gösterilmektedir.

Kompozit yapıya ait gerilme birim uzama denklemlerinden yola çıktığımızda, buradaki en büyük tekil değer  $\mu_{\max}$  'ın minimize edilmiş hali kendine karşılık gelen

tekil vektörleri açığa çıkarmaktadır. Bu vektörler yükleme doğrultuları ve gerilme-şekil değiştirme değerlerini veren elemanları içermektedir. Buradaki örneğimizde katlı lamel yapısına sahip kompozit sistemlerin en kötü yükleme halindeki performanslarına tekil değerleri aracılığıyla ulaşılmaya çalışılacaktır.

Örnek olarak Grafit/Epoksi lamelli yapıyı göz önüne alırsak, malzeme özellikleri;

$E_1=18.5 \times 10^6$  psi,  $E_2= 1.89 \times 10^6$  psi ,  $G_{12}=0.93 \times 10^6$  ,  $\nu_{12}=0.3$ ,  $\nu_{21}=\nu_{12}E_2/E_1$  ve tabaka kalınlığı  $t = 0.005$  in. olacak tarzdaki tabakaların oluşturduğu üç ayrı lamel sisteminin verildiğini varsayalım.

i)  $[0]_8$  ii)  $[\pm 45]_4$  iii)  $[\pm 45/90/0]_2$  , bu lamel sistemlerinin herbiri için en kötü yükleme hallerinin bulunması ayrıca aşağıdaki yükleme durumlarında en iyi performansı gösteren sistemin seçiminin yapılması istensin.

Durum 1: Gerilme  $N$  ve moment  $M$  ait tüm elemanların mevcut olduğunu varsayalım

$$W = \text{Diag}\{1,1,1,1,1,1\} \quad (8.39)$$

Durum 2: Sadece gerilme elemanları  $N_x$  ,  $N_y$  ve  $N_{xy}$  mevcut olması halinde,  $W$ 'nın sadece  $N_x$  ,  $N_y$  ve  $N_{xy}$  'ye karşılık gelen elemanları 1 , diğerleri 0 dır.

$$W = \text{Diag}\{1,1,1,0,0,0\} \quad (8.40)$$

Durum 3: Sadece moment değerleri  $M_x$ ,  $M_y$  ve  $M_{xy}$  mevcut ise

$$W = \text{Diag}\{0,0,0,1,1,1\} \quad (8.41)$$

olacaktır.

Herhangi bir başka yükleme şekli,  $W$  'nın elemanlarının kombinasyonu ile gerçekleştirilebilir. Burada herbir lamel sisteminin üç adet tekil değeri  $\mu_i$  ve dolayısıyla onlara karşılık gelen üç adet sol ve sağ tekil vektörleri (sırasıyla  $u_i$  ve  $v_i$  ) vardır. Herbir lamel sistemi için hesaplanan  $G^E$  'nın en büyük tekil değeri  $\mu_{\max}$  ve onlara karşılık gelen tekil vektörleri Tablo 8.1, 8.2 ve 8.3'de her üç yükleme hali için listelenmiştir. Lamel sistemlerinin yükleme durumlarına bağlı olarak birbirleri ile

olan mukayeseleri maksimum gerilme vektörü büyüklüğü  $\|\sigma_{(k)}\|_2$  ile birlikte Tablo 8.4’de özetlenmiştir. Tablolardaki tekil değerlerin ve vektörlerin alt indisleri ait oldukları tabaka numarasını göstermektedir.

Tablo 8.3’ün incelenmesiyle  $[\pm 45/90/0]_2$  lamel sisteminin her üç yükleme halinde de en düşük maksimum tekil değere sahip olduğu anlaşılmaktadır.  $[0]_8$  lamel sistemi, maksimum tekil değer  $\mu_{\max}$  ‘ sahip olması minimum gerilme vektör şiddeti  $\|\sigma_{(k)}\|_2$  ‘yı ortaya çıkarmaktadır. Burada dikkati çeken noktalar  $[\pm 45/90/0]_2$  sistemine ait  $G^E$  ‘nin  $\mu_{\max}$  değeri minimum iken  $[0]_8$  sisteminin  $G^E$  ‘nun  $\mu_{\max}$ ’ı maksimum olmaktadır. Yine Tablo 8.4’de en büyük  $\|\sigma_{(k)}\|_2$  değeri yani gerilme  $[\pm 45/90/0]_2$  sisteminde görülürken en düşük  $\|\sigma_{(k)}\|_2$  değeri  $[0]_8$  lameline aittir.

Tablo 8.1, 8.2 ve 8.3’ün kullanılmasıyla lamel sistemlerin en kötü yükleme şartları hakkında bilgi edinilebilmektedir. Örneğin,  $[0]_8$  için birim uzamaya ait maksimum tekil değer  $\mu_{\max} = 0.004$  dür ve buna karşılık gelen giriş vektörü  $f = [0 \ 0 \ 0.0067 \ 0 \ 0 \ -1]^T$ , birim şekil değiştirmeler ise  $[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}] = [0 \ 0 \ 1]$  dir.  $[\pm 45]_4$  sisteminin “Durum 1” yükleme koşulunda oluşan en kötü yükleme halinde birim uzamanın maksimum tekil değeri  $\mu_{\max} = 0.002$  (  $[0]_8$  sisteminin yarısı kadar ) olmaktadır. Bu haldeki giriş vektörü,  $f = [0.0047 \ -0.0047 \ 0 \ -0.7071 \ 0.7071 \ 0]^T$  ve birim şekil değiştirmeler  $[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}] = [0.7071 \ -0.7071 \ 0]$  olur.  $[\pm 45/90/0]_2$  sisteminde ise en kötü yükleme durumunu temsil eden maksimum tekil değer  $\mu_{\max} = 0.0014$  ( $[0]_8$  in üçte biri) , buna karşılık gelen yükleme giriş vektörü  $f = [0.0023 \ -0.0021 \ -0.0008 \ -0.7819 \ 0.6109 \ 0.1242]$  ve birim şekil değişim vektörü  $[\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}] = [0.7819 \ -0.6109 \ -0.1242]$  . Bu sonuçların irdelenmesi neticesinde en kötü yükleme hallerinde  $[0]_8$  sisteminde sadece kayma şekil değişimi varken,  $[\pm 45]_4$  ‘de kayma şekil değişimi hiç görülmemektedir.

Söz gelimi sadece düzlemsel yüklemeye maruz kalacak bir lamel sistemi tasarımı yaptığımızı varsayalım. Bu durumda servis yükleri  $N_x$ ,  $N_y$  ve  $N_{xy}$  şeklinde oluşacaktır. Buradaki en iyi seçim üç lamel sistemi arasından minimum  $\mu_{\max}$  değerine sahip olan  $[\pm 45/90/0]_2$  lameli olacaktır (Tablo 8.4).  $N_x$  ve  $N_y$  ‘nin her ikisinde aynı yönde olduğu yani aynı işareti (pozitif veya negatif) taşıması durumunda, Tablo 8.1, 8.2 ve 8.3’ün incelenmesiyle en iyi seçimin  $[0]_8$  sistemi olacağı anlaşılmaktadır. Bunun sebebi tablolarda düzlemsel yükleme durumuna

karşılık gelen, “Durum 2” için sağ tekil vektör  $v_i$  ‘nin elemanlarının ilk iki satırı  $N_x$  ve  $N_y$  ‘ye karşılık gelmektedir. Bunlardan aynı işarete karşılık gelenler;  $[0]_8$  için  $\mu_3 = 1.34 \times 10^{-6}$  ,  $[\pm 45]_4$  için  $\mu_3 = 2.3 \times 10^{-6}$  ,  $[\pm 45/90/0]_2$  için  $\mu_3 = 2.302 \times 10^{-6}$  dır. Bunlar arasında en düşük tekil değere sahip olan  $[0]_8$  lamelidir ve dolayısıyla en iyi performansı göstermektedir.

**Tablo 8.1**  $[0]_8$  lamel sistemine ait şekil değiştirme transfer matrisi  $G^E$ ’nin maksimum tekil değerleri ve tekil vektörleri.

| Yüklem Durumu | Maks. $\mu_{\max}$                                                                                               | u                                                                                                     | v                                                                                                                                                                  |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1             | $\begin{bmatrix} 0.004 \\ 0.002 \\ 0.0002 \end{bmatrix}_{1,8}$                                                   | $\begin{bmatrix} 0 & 0.0341 & 0.9994 \\ 0 & -0.9994 & 0.0341 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1,8}$        | $\begin{bmatrix} 0 & 0.0002 & 0.0067 \\ 0 & -0.0067 & 0.0002 \\ 0.0067 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0341 & -0.9994 \\ 0 & 0.9994 & -0.0341 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1,8}$ |
| 2             | $\begin{bmatrix} 2.688 \times 10^{-5} \\ 1.324 \times 10^{-5} \\ 1.34 \times 10^{-6} \end{bmatrix}_{\text{Tüm}}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0.0341 & 0.9994 \\ 0 & -0.9994 & 0.0341 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{Tüm}}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0.0341 & 0.9994 \\ 0 & -0.9994 & 0.0341 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{Tüm}}$                       |
| 3             | $\begin{bmatrix} 0.004 \\ 0.002 \\ 0.0002 \end{bmatrix}_{1,8}$                                                   | $\begin{bmatrix} 0 & 0.0341 & 0.9994 \\ 0 & -0.9994 & 0.0341 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1,8}$        | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0341 & -0.9994 \\ 0 & 0.9994 & -0.0341 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1,8}$                           |

**Tablo 8.2**  $[\pm 45]_4$  Lamel sistemine şekil değiştirme transfer matrisi  $G^E$  'nin maksimum tekil değerleri ve tekil vektörleri.

| Yükleme Durumu | Maks. $\mu_{maks}$                                                                                      | u                                                                                                                       | v                                                                                                                                                                                                       |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1              | $\begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.0009 \\ 0.0003 \end{bmatrix}_{1,8}$                                         | $\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.2215 & -0.6715 \\ -0.7071 & -0.2215 & -0.6715 \\ 0 & 0.9496 & -0.3133 \end{bmatrix}_{1,8}$ | $\begin{bmatrix} 0.0047 & -0.0006 & -0.0068 \\ -0.0047 & -0.0006 & -0.0048 \\ 0 & 0.0054 & -0.005 \\ -0.7071 & 0.2215 & 0.6715 \\ 0.7071 & 0.2215 & 0.6715 \\ 0 & -0.9496 & 0.3133 \end{bmatrix}_{1,8}$ |
| 2              | $\begin{bmatrix} 1.344 \times 10^{-5} \\ 5.15 \times 10^{-6} \\ 2.3 \times 10^{-6} \end{bmatrix}_{Tüm}$ | $\begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{Tüm}$                        | $\begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0 & -0.7071 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{Tüm}$                                                                 |
| 3              | $\begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.0009 \\ 0.0003 \end{bmatrix}_{1,8}$                                         | $\begin{bmatrix} 0.7071 & -0.2216 & -0.6715 \\ -0.7071 & -0.2216 & -0.6715 \\ 0 & 0.9496 & -0.3133 \end{bmatrix}_{1,8}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.7071 & 0.2216 & 0.6715 \\ 0.7071 & 0.2216 & 0.6715 \\ 0 & -0.9496 & 0.3133 \end{bmatrix}_{1,8}$                                              |

Karşılaştırması yapılan lamel sistemlerinin sadece  $N_{xy}$  kayma gerilmesine maruz kaldığını varsayarsak, en iyi performansı  $[\pm 45]_4$  lamel sisteminin gösterdiği görülmektedir. Tablolardaki Durum 2'ye baktığımızda  $v_i$  'nin elemanları sadece  $N_{xy}$ 'ye karşılık gelir. Sistem  $[0]_8$  için birinci sağ tekil vektör  $v_1$ 'in tekil değeri  $\mu_1=2.688 \times 10^{-5}$  , sistem  $[\pm 45]_4$  ikinci sağ tekil vektör  $v_2$  ve onun tekil değeri  $\mu_2=5.15 \times 10^{-6}$  ,  $[\pm 45/90/0]_2$  için ise birinci sağ tekil vektör  $v_1$  ve tekil değeri  $\mu_1=8.638 \times 10^{-6}$  dir.

Verilen bir yükleme durumunda en düşük  $\mu_{\text{maks}}$  değerine sahip olan lamel sisteminin en iyi performansı gösterdiğinden yola çıkılarak seçim yapılabilmektedir. Bu düşünceye bağlı olarak herhangi bir yükleme koşulu için işlemler benzer şekilde yapılabilir.

**Tablo 8.3**  $[\pm 45/90/0]_2$  Lamel sistemine şekil değiştirme transfer matrisi  $G^e$  'nin maksimum tekil değerleri ve tekil vektörleri.

| Yükleme Durumu | Maks. $\mu_{\text{maks}}$                                                                                         | u                                                                                                                            | v                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1              | $\begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0009 \\ 0.0003 \end{bmatrix}_{1,8}$                                                  | $\begin{bmatrix} 0.7819 & 0.0486 & -0.6215 \\ -0.6109 & 0.2584 & -0.7483 \\ -0.1242 & -0.9648 & -0.2318 \end{bmatrix}_{1,8}$ | $\begin{bmatrix} 0.0023 & -0.0001 & -0.0039 \\ -0.0021 & 0.0009 & -0.0056 \\ -0.0008 & -0.0089 & -0.0061 \\ -0.7819 & -0.0486 & 0.6215 \\ 0.6109 & -0.2584 & 0.7483 \\ 0.1242 & 0.9648 & 0.2317 \end{bmatrix}_1$ |
| 2              | $\begin{bmatrix} 8.638 \times 10^{-6} \\ 4.319 \times 10^{-6} \\ 2.302 \times 10^{-6} \end{bmatrix}_{\text{Tüm}}$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{Tüm}}$                      | $\begin{bmatrix} 0 & 0.7071 & -0.7071 \\ 0 & -0.7071 & -0.7071 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{Tüm}}$                                                                   |
| 3              | $\begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0009 \\ 0.0003 \end{bmatrix}_{1,8}$                                                  | $\begin{bmatrix} -0.7819 & -0.0486 & 0.6215 \\ 0.6109 & -0.2585 & 0.7483 \\ 0.1242 & 0.9648 & 0.2318 \end{bmatrix}_{1,8}$    | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.7819 & 0.0486 & -0.6215 \\ -0.6109 & 0.2585 & -0.7483 \\ -0.1242 & -0.9648 & -0.2318 \end{bmatrix}_1$                                                  |

**Tablo 8.4** En kötü yükleme koşulları altındaki lamelli sistemlerin  $G^e$  'na ait maksimum tekil değerleri ve gerilme şiddetlerinin karşılaştırılması.

| Yükleme Durumu                            | $[0]_8$                 | $[\pm 45]_4$            | $[\pm 45/90/0]_2$       |
|-------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Durum 1: Maks. değer $\mu_{maks}$         | 0.004                   | 0.002                   | 0.0014                  |
| Durum 1: Maks. değer $\ \sigma_{(k)}\ _2$ | 3776                    | 4235.1                  | 4309.92                 |
| Durum 2: Maks. değer $\mu_{maks}$         | $2.6882 \times 10^{-5}$ | $1.3441 \times 10^{-5}$ | $8.6376 \times 10^{-6}$ |
| Durum 2: Maks. değer $\ \sigma_{(k)}\ _2$ | 25.0459                 | 39.4696                 | 66.1986                 |
| Durum 3: Maks. değer $\mu_{maks}$         | 0.004                   | 0.002                   | 0.0014                  |
| Durum 3: Maks. değer $\ \sigma_{(k)}\ _2$ | 3776                    | 4235.1                  | 4309.47                 |

Lamel sistemlerinin yükleme kombinasyonlarına göre tekil değer ve tekil vektörlerinin aldığı tabloların incelenmesiyle görülen, en iyi lamel sisteminin hangisi olduğunun yükleme durumuna göre farklılık gösterdiğiidir. Buna karşılık en kötü yükleme halinde en iyi performansı veren sistem tek olarak belirlenebilmektedir.

## 9. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada yapısal sistemlerin (structure) tasarım duyarlılığı analizi matris cebirin araçlarından olan tekil değerlere ayrıştırma TDA'ya (singular value decomposition-SVD) dayalı olarak yapılmıştır. Bunun neticesinde mevcut klasik duyarlılık metodlarına ilave olarak TDA'ya dayalı tasarım duyarlılığı yöntemi geliştirilmiştir.

Geliştirilen bu yöntem klasik duyarlılık metodları ile çeşitli analiz tiplerinde karşılaştırılmış, konu açıklamalarının yanı sıra yöntemin performansı sayısal örnekler üzerinde de gösterilmiştir.

Bir yapısal sistemde, tekil değerlerin kareleri sistem giriş ve çıkış vektörleri arasındaki güç enerji ve enerji dağılım oranlarının sınırları ile bağıntılıdır. Frekans alanında ise tekil değerlerin konumları ile transfer fonksiyon matris elemanlarının şiddetleri arasında ilişki olduğu görülmektedir.

TDA'ya dayalı olarak yapılan statik ve dinamik cevap duyarlılık analizlerinde, tekil değerler yapısal sistemin çıkış genliklerini temsil etmektedir. Buna bağlı olarak yapının statik veya dinamik cevap büyüklüğünün düşürülmesi, en büyük tekil değer minimize edilmesi ile mümkün olmaktadır.

Diğer taraftan bir yapısal sistemde, giriş-çıkış doğrultuları arasındaki ilişkinin sistemin tekil vektörleri tarafından temsil edilebildiği görülmektedir. Sağ tekil vektör elemanları giriş veya yükleme koşullarını bünyesinde barındırırken, karşılık gelen sol tekil vektörler çıkış değerlerinin elemanlarını içermektedir. Özdeğer tasarım duyarlılığı ile yapılan karşılaştırmada klasik metod sadece rezonans frekansında geçerli iken tekil değerlere dayalı duyarlılık analizi tüm frekans alanında sonuç vermektedir.

Ayrıca karma malzemelerde lamel açılarının düzenlenmesinin sistemin genel performansına olan etkisi, TDA aracılığıyla incelenmiştir. Uygulamada lamelli bir sisteme etkiyen yüklerin sürekli değişmesi sonucu ortaya çıkan farklı gerilme ve

uzama koşulları nedeniyle lamelli yapı tasarımının en kötü yükleme hali için yapılması, herhangi bir kuvvet ve moment altındaki hesaplama ve tasarıma göre daha gerçekçidir. Burada da TDA kullanımının bazı avantajları göze çarpmaktadır. İlk olarak en büyük tekil değer ve ona karşılık gelen sol ve sağ tekil vektörler sırasıyla yapının maksimum kazancını en kötü yükleme halinin nasıl olduğunu ve bunun sonucunda ortaya çıkan gerilme/uzama durumunu vermektedir. Tasarım değişkenleri aracılığıyla en büyük tekil değer minimize edilmesiyle en kötü yükleme koşuluna karşı en iyi direnci gösteren tasarımı elde etmek mümkün olmaktadır. Burada, en büyük tekil değer minimize edilirken yapının enerji sönümleme kapasitesi artırılmış olmaktadır. Konu ile ilgili ele alınan örnekte tasarım değişkenleri olarak kompozit açıları dikkate alınarak analiz yapılmıştır. Buna ilave olarak tabaka kalınlığı, malzeme özellikleri gibi diğer parametreler kullanılarak da analizler yapılması mümkündür.

TDA'ya dayalı yöntemin klasik yöntemlere nazaran daha geniş bilgi içermesi yanı sıra özellikle çoklu yükleme durumu başta olmak üzere işlemci hesaplama süresi ve hafıza kullanımı açısından avantajlara sahip olduğu görülmektedir. Metodun kullanılabilirlik açısından bir başka avantajı da sürekli ortamların modellenmesinde etkin yöntem olan, sayısal metodların başında gelen sonlu elemanlar ifadelerine uyarlanabilmekteki başarısıdır. Bu da gelecekte, yöntemin önde gelen (Ansys, Nastran, gibi) ticari analiz programlarının algoritmalarına dahil edilmesinin yolunu açmaktadır.

## KAYNAKLAR

- [1] **E. J. Haug, K. K. Choi and V. Komkov**, Design Sensitivity Analysis of structural Systems (Academic Press, Orlanda, Florida, 1986).
- [2] **Biswa Nath Datta**, Numerical Linear Algebra and Applications, (Brooks/Cole Publishing Company 1995)
- [3] **G Strang**, **Linear Algebra**, (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers 1988)
- [4] **H. Ersoy and A. Mugan**, Design Sensitivity Analysis of Structures Based Upon The Singular Value Decomposition Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 191 (2002) 3459-3476
- [5] **J. S. Freudenberg and D.P. Looze**, Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback System~, (Springer., Verlag, Berlin, 1988).
- [6] **A. G. J. MacFarlane and D. F. A. Scott-Jones**, Vector Gain, Int. J. Control, 29 (1979) 65-91
- [7] **I. Postlethwaite, J. M. Edmunds and A. G. J. MacFarlane**, Principal Gains and Principle Phases in the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems, IEEE Trans. Auto. Contr., AC-26 (1981) 32-46.
- [8] **J. S. Freudenberg, D. P. Looze and J. B. Cruz**, Robustness Analysis Using Singular Value Sensitivities, Int. J. Control, 35 (1982) 95-116.
- [9] **G. H. Golub and C. F. Van Loan**, Matrix Computations (Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983)
- [10] **Z. Gürdal R.T. Haftka and P. Hajela**, Design and Optimization of Laminated Composite Materials. (John Wiley and Sons, New York, 1999).
- [11] **J. M. Berthelot**, Composite Materials, (Springer-Verlag, Berlin, 1999).
- [12] **V. C. Klema and A. J. Laub**, The Singular Value Decomposition: its Computation and Some Application.". IEEE Trans. Auto. Contr., 25 (1980) 164-176.
- [13] **MSC/NASTRAN V68 User's Manual**, MacNeal-Schwendler Inc
- [14] **A. Mugan**, Effects of Mode Localization on Input-output Directional Properties of Structures, J. of Sound and Vib. 258(1), 45-63, Nov 14, (2002).

- [15] **W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery**, Numerical Recipes (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992)
- [16] **H. M. Adelman, R. T. Haftka**, Sensitivity analysis of discrete structural systems, AIAA J.24(1986) 823-832
- [17] **D. A. Tortorelli, P. Michaleris**, Design Sensitivity Analysis: overview and review, Inv. Prob. Enrg. 1 (1994) 71-105.
- [18] **S. Skogestad, M. Morari, J. Doyle**, Robust control of ill-conditioned plants:high purity distillation, IEEE Trans. Auto. Contr. 33 (1988) 1092-1105
- [19] **M. Kleiber, (Ed)** Handbook of Computational Solid Mechanics (Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998)
- [20] **R. T. Haftka and Z. Gürdal**, Elements of Structural Optimization (KluwerAcademic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1993).
- [21] **S. W. Tsai and H. T. Hahn**, Introduction to Composite Materials (Technomic Publishing AG 1980)
- [22] **J. S. Arora , T. H. Lee, J. B. Cardoso** Structural shape sensitivity analysis: relationship between material derivative and control volume approach, AIAA J. 30 (1992) 1638-1648
- [23] **J. M. Ferreira and A. Chattopadhyay**, An Optimization Procedure for Maximizing the Energy Absorption Capability of Composite Shells, Mathematical and Computer Modelling, 19 (1994) 61-77.

## ÖZGEÇMİŞ

Hakan Ersoy 1965 yılında Antalyada doğdu. İlk orta ve lise eğitimini Antalya'da tamamladı Antalya lisesi matematik dalından 1982 yılında mezun olduktan sonra İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesine girdi. Konstrüksiyon ve imalat kolundan makina mühendisi olarak mezun olduktan sonra 1987 yılında Bilkent üniversitesi Endüstri mühendisliği yüksek lisans programına burslu öğrenci olarak kabul edildi. Buranın ingilizce hazırlık okulunu bitirdikten sonra Yıldız Üniversitesine geçiş yaparak Makina mühendisliği konstrüksiyon dalından yüksek lisans derecesini 1990 yılında aldı. Yüksek lisans eğitimi sırasında İngiltere Cambridge dil eğitimi, Macaristanda mesleki staj yaptı. Mezuniyetten sonra Kayseri Uçak Fabrikasında (2. HİBM) F16 projesinde göreve başladı. 1991 yılında askere gitti. Topçu ve Füze okulundaki asteğmenlik eğitiminden sonra 7.nci kolordu Diyarbakır'a Top. Atğm. ve ingilizce tercüman olarak atandı. 1992 Ekim ayında terhis oldu. İzmit Goodyear lastik fabrikasına 1993 yılında girerek ürün geliştirme bölümünde teknik servis ve ekipman mühendisi sıfatıyla arka traktör lastiğinin Türkiye tasarımı ve kalitesinden sorumlu olarak iki yıl görev yaptı Daha sonra IMP (Mahle Piston) izmit fabrikasında kalite planlama mühendisi olarak çalıştı ve ISO 9001 prosedürlerinin yazımında görev aldı. 1995 yılında İstanbul'daki firma içi eğitimi takiben BMW Borusan-Kosifler Oto Antalya merkezinin kuruluşu için Antalya'ya gitti ve buranın bir yıl boyunca servis müdürlüğünü yaptı. 1997 yılından itibaren iki yıl Antalya'da ısıtma ve havalandırma konusunda çalıştı. 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesinde doktora başladı. Aynı yıl İTÜ Makina Fakültesi mekanik anabilim dalında araştırma görevlisi oldu. Görevli bulunduğu sırada DPT destekli otomasyon teknolojileri geliştirme merkezi kuruluşunda çalıştı.(proje no:DPT-122), ayrıca Tübitak-Ford Otosan destekli Taşıt Dinamiği ve dayanıklılık modellerinde esnek elemanların etkisi (MİSAG-206) projesinde görev aldı. Bu esnada yaptığı yayınları;1) Design sensitivity analysis of structures based upon the singular value decomposition - Hakan Ersoy, Ata Muğan - Computer methods in applied mechanics and engineering 191 (2002) 3459-3476, 2) Optimization of Laminates via Singular Values "Hakan Ersoy, Ata Muğan"ESDA 2002 Temmuz 8- 11, 2002 İstanbul Türkiye, 3) Singular Value Design Sensitivity Analysis of Structures "Hakan Ersoy, Ata Muğan" ESDA 2002 Temmuz 8- 11, 2002 İstanbul Türkiye, 4) Effects of Mode Localization on Input-Output Directional Properties "Ata Muğan, Hakan Ersoy" ESDA 2002 Temmuz 8- 11, 2002 İstanbul Türkiye, şeklindedir.