

155835

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ İNŞAAT FAKÜLTESİ

**TEK SİMETRİ EKSENLİ VE SİMETRİ EKSENİ OLMAYAN, İNCE
CİDARLI AÇIK ENKESİTLİ ÇUBUKLARIN, İMPULSİF YÜK ALTINDA
LYAPUNOV ANLAMINDA STABİLİTESİNİN İNCELENMESİ**

**İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesince «Doktor»
payesinin tevcihi için kabul edilen tezdır.**

Y. Müh. Erdoğan UZGİDER

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 10 Ocak 1973

Tezin Müdafaa Edildiği Tarih : 19 Nisan 1973

Doktorayı Yöneten Profesör : Prof. Fahrettin ARDAN

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Adnan ÇAKIROĞLU

Prof. Dr. Sacit TAMEROĞLU

**T Ü R K İ Y E
B İ L İ M S E L ve T E K N İ K
A R A Ş T I R M A K U R U M U
K Ü T Ü P H A N E S İ**

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT FAKÜLTESİ MATBAASI**

1973

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmalarım boyunca büyük desteğini gördüğüm Sayın Hocam Prof.Fahrettin ARDAN' a, kıymetli fikirlerinden faydalandığım Sayın Doę.Dr.Hilmi DEREN' e, çalışmamı başından sonuna kadar, yakın ilgi, değerli fikir ve yardımları ile büyük ölçüde destekleyen kıymetli büyüğüm Sayın Doę.Dr.Vural CİNEMRE' ye,nümerik hesaplarda emeği bulunan kıymetli arkadaşım Dr. Yavuz ÖNDER'e ve formüllerin yazılmasında emeği bulunan krs arkadaşım Y.Müh.Nesrin TÜRKMAN'a teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

İ Ç İ N D E K İ L E R

Sayfa No.

BÖLÜM 1

ÖZET

1.1.	Tarihçe ve konu	1
1.2.	Problemın takdimi	5
1.3.	Problemde yapılan kabuller ve ihmaller	6
1.4.	Simetrik olmayan açık kesitli çubuklarda statik stabilite ifadelerinin çıkarılması	7

BÖLÜM 2

2.	SİMETRİK OLMAYAN AÇIK KESİTLİ ÇUBUKLARIN EKSENEL DEĞİŞKEN YÜK ALTINDA HAREKET DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI	16
2.1.	Sistemin potansiyel enerji ifadelerinin çıkarılması	17
2.2.	Sistemin kinetik enerji ifadelerinin çıkarılması	18
2.3.	Hareketin diferansiyel denkleminin çıkarılması	23
2.4.	Başlangıç şartlarının tanımı	36
2.5.	Titreşim denklemlerinin vektör matris notasyonunda ifadesi	37
2.6.	Sistemin enerji ifadelerinin kareler toplamı haline getirilmesi	38
2.7.	Diferansiyel denklem takımının modal şekli	42

BÖLÜM 3

3.	HAREKETİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN İNCELENMESİ	46
3.1	Hareketin diferansiyel denkleminin belirli bir çözümünün stabilitesinin incelenmesi	47
3.2.	Otonom halde hareketin diferansiyel denkleminin triviyal çözümünün stabilitesinin incelenmesi	48
3.3.	Lyapunov'un direkt metodu	50

BÖLÜM 4

4. KONSERVATİF SİSTEMLER VE LYAPUNOV FONKSİYONU 52

BÖLÜM 5

5. LYAPUNOV'UN DİREKT METODU İLE İMPULSİF AKSİYAL YÜKLERE MARUZ, SİMETRİK OLMAYAN AÇIK ENKESİTLİ İKİ UCU MAFSALLI ÇUBUKLARIN STABİLİTESİNİN İNCELENMESİ 55
- 5.1. Bir eksene göre simetrik açık enkesitli çubuk hali 56
- 5.11. Lyapunov fonksiyonunun saptanması 71
- 5.111. Otonom halde Lyapunov fonksiyonunun saptanması 71
- 5.112. Otonom olmayan halde Lyapunov fonksiyonunun saptanması ve kritik yük genliğinin elde edilişi 76
- 5.113.. Elde edilen stabilite kriterinin yorumu 84
- 5.1131. Tek simetri eksenli açık enkesitli çubuğun modal cevap analizi 85
- 5.1132. Tek simetri eksenli açık enkesitli iki ucu mafsallı çubuğun modal stabilite kriterlerinden, çubuğun bütün modları için geçerli tek bir stabilite kriterine geçiş 88
- 5.114. Amplifikasyon sınırının tanımı 90
- 5.115. Direkt metod için düşünülen genel yaklaşım 96
- 5.116. Müsaade edilen deformasyon sınırından amplifikasyon sınırına geçiş 98
- 5.2. Simetri ekseni olmayan açık enkesitli çubuk hali 104

BÖLÜM 6

- 6.1. Sayısal uygulama 109

SONUÇLAR

LİTERATÜR

Ö Z E T

Bu çalışmada, simetri eksenli olmayan ve tek simetri eksenli olan ince cidarlı açık enkesitli iki ucu mafsallı narin çubukların, impulsif eksenel yük altında, Lyapunov anlamında stabilitesi için bir kriter aranmıştır.

Çalışma Holzer'in (18) simetrik eksenli çubukların Lyapunov anlamındaki stabilitesine ait çalışmasının, simetri eksenli olmayan ve tek simetri eksenli kesitli çubuklara teşmilidir.

Çalışmanın birinci bölümünde, konu ve tarihçesi hakkında bilgi verilmiş, problemin ana hatları ve güdülen amaç belirtilmiştir. Ayrıca bu bölümde yapılan kabuller ve söz konusu çubuklara ait kısa bir statik stabilite etüdü verilmiştir.

İkinci bölümde bu çubukların impulsif yük altında hareket denklemi ve enerji ifadesi çıkarılmış, bunu takiben de elde edilen kuple denklemler ve enerji ifadeleri modal forma indirgenmiştir. Bunun için iki ucu mafsallı simetrik kesitli çubuğun yüksüz haldeki serbest titreşim probleminin öz fonksiyonları koordinat fonksiyonu olarak kullanılmış ve bunu takiben normal koordinatlara geçişi ve bu suretle denklem sistemindeki kuplajı kaldıran bir transformasyon matrisi tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde hareketin diferansiyel denkleminin belirli bir başlangıç değeri için çözümünün stabilitesi hakkında, matematik yünden bir tanım verilmiş ve bunu takiben de Lyapunov anlamında stabilite tanımlanmış ve ispatsız olarak Direkt metod ve kullanıldığı teoremler tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde konservatif sistemlere ait bir tanımı takiben, bu sistemlerde toplam enerji ifadesi ile Lyapunov fonksiyonu arasında bir benzeşim ortaya konmuştur.

Beşinci bölümde bu çalışmanın konusu olan tipteki çubukların direkt metod yardımı ile stabilitesi incelenmiştir. Bölüm 5.1 de bu inceleme, tek simetri eksenli çubuklar için yapılmış ve Holzer'in çift simetri eksenli çubuklar için bulduğunun aksine (16), tek simetri eksenli çubuklar için tamamen modal formda bir stabilite kriteri elde edilmiştir. Yine bu bölümde, bu modal stabilite kriterlerinden çubuk için tek bir stabilite kriterine geçilmiştir. Bunu sağlamak için, çubuğun dinamik yüklemelere karşı modal cevap problemi incelenmiştir.

Bölümün sonunda ise amplifikasyon sınırı tanımlanmış ve öngörülen deformasyon sınırından amplifikasyon sınırına geçiş sağlanmıştır.

Bölüm (5.1) ve (5.2) de varılan sonuçların, simetri eksenli olmayan ince cidarlı, açık kesitli, iki ucundan mafsallı çubuklar için de geçerli olacağı gösterilmiştir.

Altıncı bölümde tek simetri eksenli ince cidarlı açık kesitli, iki ucu mafsallı, impulsif bir yükle eksenel olarak yüklü, çubuk için sayısal uygulamaya hazırlık yapılmış ve arkasından sayısal uygulamaya geçilmiştir.

Bu bölümün son kısmında ise elde edilen sonuçlara ait bir eleştiri yer almıştır.

S U M M A R Y

In this study, a stability criteria in the sense of Lyapunov for bars with thin walled, open cross-sections under impulsive axial loadings was worked out.

The cross-section of the bars are either symmetric with respect to one axis or not and the bars are pinned at each end.

This work is the extension of the paper by Holzer(18) in which bars with symmetrical cross sections were studied. The principles were extended to the case of the unsymmetric bars or to bars symmetric with respect to an axis.

In the first section, the background of the problem has been given, the main feature and the proposed goals are displayed. Further more the assumption of our calculations and a short account of the static stability of the mentioned bars are given.

The second section deals with the study of those bars under impulsive loadings, namely with the equation of motion and energy. First of all these last equations have been obtained and then the coupled equations have been reduced to modal form. To reach this aim the free vibrations forms of the unloaded, symmetrical pinned bar were used as coordinate functions. Afterwards a transformation matrix operating the shifting to normal coordinates and thus canceling the coupling inherent to the system of equations is defined.

In the third section, the stability of the solution of the differential equation of motion under certain initial conditions and the stability in the sense of Lyapunov are defined and the direct method with its principal theorems are given without proof.

The fourth section deals mainly with the total energy expression in conservative systems and further a similarity between this expression and the Lyapunov function is worked out.

In the fifth section, the stability of the bars which we are studying is analyzed with the help of the direct method. The paragraph (5.1) deals with bars whose cross-section are symmetrical with respect to one axis.

The proposed stability criteria is the contrary of the Holzer's in this sense that it is entirely in modal form. Pursuing, a single stability criteria is reached through the use of those modal criterias. To this a modal response analysis of the bar has been made.

Toward the end of the section the amplification bound is defined and the shifting from the maximum allowable lateral displacement and angle of twist to the amplification bound is assured.

It is proved that the results reached in paragraphs (5.1) and (5.2) are equally valid for bars with unsymmetric, thin walled, open cross sections and pinned at each end.

In the sixth section, the numerical calculations for a bar symmetrical with respect to one axis and with a thin-walled, open cross-section and also pinned at each and axially loaded are carried out.

Further a discussion of the theoretical and numerical results takes also place at the end of this section.

B İ R İ N C İ B Ö L Ü M

GİRİŞ

1.1.- TARİHÇE ve KONU

İnce cidarlı açık kesitli çubuklar, yük taşıyıcı yapı elemanları olarak, son zamanlarda bilhassa A.B.D. de endüstri yapıları alanında geniş uygulama sahası bulmuştur. Gerek imâl kolaylığı ve gerekse hafifliği yönünden, hadde profillerine olan üstünlüğü nedeniyle, çelik konstrüksiyonlarda aranan elemanlar haline gelmeleri, bunlar üzerine inşaat mühendisliğinin muhtelif konularında araştırmalar yapılmasına yol açmıştır. Örneğin burkulma konusunda oldukça önemli problemler ortaya çıkmıştır. Bu kesitlerde, düşük burulma rijitlikleri ve açık kesitleri nedeniyle, burulmalı burkulma modu kritiktir.

Bu tip çubukların simetri ekseni olmayan kesitlileri için sabit yükler altında elastik burulmalı burkulma etüdü detaylı olarak N.J.GOODIER (1), TIMOSHENKO, S., GERE (2) J.M.VLASOV, V.Z.(3) tarafından ele alınmıştır.

Tek simetri ekseni olan ince cidarlı açık enkesitli çubukların aksiyal yük altında statik stabilite problemi incelenmiş ve çubuk dizaynı için gerekli pratik bilgi elde edilmiştir.

Bu sahada, CHAJES, A. ve WINTER, G (4), KLÖPPEL, K. ve SCHARAT, R.(5), PFLÜGER, A (6), CHILVER, A.H. (7) gibi yazarların çalışmalarına literatürde rastlamak mümkündür.

Statik yükler altında burkulma problemi yönünden bir hayli eleştirilmiş durumda olan bu tip kesitleri haiz basınç çubuklarının, dinamik yükler altında çözümlenmemiş problemleri mevcuttur.

Buna karşılık dinamik tesirler çelik yapılarda sık sık karşılaşılan ve üzerinde önemle durulması gereken bir faktördür. Ayrıca bu tesirlerin çok çeşitli karakterlerde ele alınması gerekmektedir.

Dinamik yükler söz konusu olduğunda, sadece yükün periyodik olması halinde, tek simetri eksenli olan ince cidarlı açık enkesitli çubukların stabilitesi, GOLDENBLAT (8) tarafından 1947 de yayınlanan makalede incelenmiş, BOLOTİN (9) tarafından, simetri eksenli olmayan ve tek simetri eksenli ince cidarlı açık enkesitli çubuklar için, lineer ve nonlineer baza göre, ele alınmıştır.

Periyodik olmayan değişken eksenel yük hali için tek simetri eksenli veya iki simetri eksenli olan ve simetri eksenli olmayan, ince cidarlı, açık enkesitli çubuklara ait dinamik burkulma incelemesi, ilk olarak 1969 yılında MARTİN. L.MODDY (10) tarafından ele alınmıştır.

Çalışma, basit mesnetli çubuğun iki ucunu birbirine göre sabit hızla hareket ettirecek şekilde değişen eksenel yük altında dinamik cevabın incelemesi şeklindedir. Burada ilk kusur olarak eksenel eğrilik ve burulma deformasyon değerleri göz önüne alınmıştır.

Bu arada, kısa sürede etkiyen geçici eksenel yükler altında veya başka bir deyişle impulsif yükler altında bu tip çubukların dinamik burkulma incelemesine ait bir çalışma literatürde mevcut değildir. Mevcut çalışmalar daha fazla düzlem burkulma hali içindir.

Bu konuda uğraşan daha önceki araştırmacılar, en kesidi çift simetri eksenli olmayan çubukları ele almamışlar, çalışmaları sadece düzlem dinamik burkulma alanında olmuştur. Yani ele aldıkları çubuklar, simetri düzlemi içinde burkulma ve yeter derecede burulma rijitliği olan en kesitli olarak sınırlandırılmışlardır.

Açıktır ki, bu şartlar bir çok açık kesitli ince cidarlı çubuk tarafından sağlanmaz.

Çubukların bir düzlem içindeki dinamik burkulması, J.TAUB ve C.KONNING, 1934 (11), J.H.MEIER 1945 (12), J.F.DAVIDSON 1935 (13) adlı yazarlar tarafından incelenmiş ve çalışmalarda temel Euler modunun geçici eksenel yüklere karşı cevabı ele alınmıştır. Bu çalışmalarda amaç, geçici yükte Euler yükünü aşan artımları, yükün kısa sürede etkimesi halinde belirlemektir.

N.J.HOFF, 1951 yılında yayınlanan çalışmasında (14), düzlem dinamik burkulma halinde, çubuk uçlarının birbirine göre sabit hızla hareket ettiren karakterde bir yükleme durumunda, benzer problemi ele almıştır.

EUGENE SEVIN 1960 yılında yayınlanan çalışması (15) ile dinamik burkulma probleminin sonucunun, esas olarak eksenel atalet kuvvetlerinin de hesaba katılmasından etkilenmeyeceğini göstermiştir.

Yüksek modlarda geçici eksenel yüklere karşı cevap LAVRENTIER ve ISHINSKY'nin 1949 da yayınlanan makalesinde (16) ele alınmıştır.

Benzeri şekilde bir çalışmaya H.E.LINDBER'in 1965 de yayınlanan makalesinde (17) rastlanmaktadır. Çalışmada ve bu arada yapılan deneyler sonucunda, eksenel dalga yayılımının, çubuğun burkulma formunu ve bu forma ait dalga uzunluğunu etkilemediği ve bunun çelik malzemede daha belirgin olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu arada, düzlem dinamik burkulma halinde, basit mesnetli ve impulsif yüke maruz çubukların dizayn kriterini genişletmek amacı ile S.M.HOLZER tarafından bir çalışma yapılmıştır (18). Bu çalışmada dizayn yükü, kabul edilebilecek maksimum lateral deformasyonla sınırlandırılmıştır.

Sözü edilen dizayn kriteri, çubuğun responsu için düşünülen sınır, başlangıç pertürbasyonları ve verilen impulsif yükün tesir süresi ile genliği arasında münasebet kurmaktadır.

Burada sözü edilen başlangıç pertürbasyonları, çubuk yükünün tatbiki esnasında, çubuğun kendi ideal konumundan sapması ile husule gelir. Yani; çubuk ekseninden eğrilik, uygulanan

yükteki eksantrisite ve bu partürbasyona yardımcı olan, belirlenemiyen impulsif yükler gibi.

HOLZER'in çalışmasının temel amacı, daha evvel de belirtildiği gibi, başlangıç partürbasyonları ile pertürbe olmuş harekete ait sınır arasındaki bağıntıyı kurmaktır. Bundan da dizayn kriterini elde etmek mümkün olmaktadır ki bu da Lyapunov anlamında stabilite kriteridir. Böylece bu bağıntının kurulması, problemin çözümü olur. Bu çözüm ise, adı geçen çalışmada, Lyapunov'un Direkt Metodu yardımıyla elde edilmektedir.

Direkt Metoda ait gerekli bilgilere geçmeden evvel Lyapunov anlamında stabiliteden ne anlaşıldığını belirtmek gerekir.

Lyapunov anlamında stabilite; pertürbe olmuş hareketin denge konumunun yakın civarında hapsolması anlamındadır.

Lyapunov'un Direkt Metodunda, çözüme ait bilgi olmadan pertürbe olmuş hareketin diferansiyel denkleminde direkt olarak stabilite halini incelemek için özel skaler fonksiyonlar kullanılır ki, bu fonksiyonlara Lyapunov fonksiyonu denir ve bu metod uyarınca, Lyapunov fonksiyonunun varolması stabilite için yeter şartı ifade eder.

Direkt Metod ayırık sistemler için uygun bir vasıta olduğundan, sürekli sistemlerin bu metodla incelenmesi modal analiz ile mümkün olmaktadır.

Bu yüzden çalışmada sürekli sisteme ait diferansiyel denklemden, uygun koordinat fonksiyonları kullanarak ayırık sisteme ait modal diferansiyel denklemlere geçiliyor. Modal denklemler birbirinden bağımsız olduğundan her biri için bir Lyapunov fonksiyonu tanımlamak ve böylece yine her birisi için bir stabilite kriteri vermek söz konusu olabilirken, HOLZER'in elde ettiği modal stabilite kriterlerinin her biri modlardan bağımsız olduğundan, herhangi birini ele alıp çubuk için stabilite kriteri olarak düşünmek mümkün olmaktadır.

HOLZER çalışmasında (18), SEVIN'in çalışmasından yararlanarak, (15) atalet kuvvetlerinin eksenel birleşenini ihmal ediyor, benzeri şekilde LINDBERG'in çalışmasından (17) fayda-

lanarak da eksenel dalga yayılımlarını işin içine sokmuyor. Dizayn kriterinin elde edilmesinde ise LAVRENTİER, ISHINSKY nin çalışmasından (16) hareket ediliyor.

Halbuki MOVCHAN, A.A. yapmış olduğu çalışmalarla (19) Direkt Metodu sürekli sistemlere genişletmiş, KNOPS, R.J., ve WILKERS, E.W. (20), Movchan'ın stabilite teoremlerini eleştirmişler ve daha uygulanabilir hale getirmişlerdir. Movchan'ın metodunda, Direkt Metod'daki Lyapunov fonksiyonuna karşı gelen bir fonksiyonel tanımlanmış ve bunlar yardımıyla, harekete ait parsiyel diferansiyel denklemden direkt olarak stabilite halini elde etmek mümkün olmuştur.

HOLZER, S.M., 1971 yılında yayınlanan (21) çalışmasında Movchan'ın teoremlerinden yararlanarak, daha evvel sözü edilen çalışmayı bir kere daha ele almıştır.

1.2 - PROBLEMİN TAKDİMİ

Burada takdim edilen çalışmanın temel amacı HOLZER'in (18) düzlem burkulma hali için ele almış olduğu problemi, yine impulsif yükleme altında fakat burulmalı burkulma hali için incelemektir. Bu amaç ile tek simetri eksenli ince cıdarlı ve açık enkesitli, iki ucundan mafsallı, çubuklar için benzeri şekilde bir dizayn kriteri aranmıştır. Söz konusu olan dizayn kriteri bu halde şöyle ifade edilebilir : Bu kriter, çubuğun maksimum lateral deformasyon cevabı ve aynı zamanda maksimum burulma cevabı üzerine düşünülen sınır (buna cevap sınırı da diyebiliriz), başlangıç pertürbasyonları (eksenel eğrilik ve aynı zamanda burulma) ve verilen impulsif yükün tesir müddeti ile genliği arasında bağıntı kurar. Bu kriter yardımıyla da, sözü edilen cevap sınırının kabul edilebilir bir değeri için yükün genliği belirli bir kritik değer ile sınırlanabilir. Bu durumda yükün genliğinin bu kritik değeri aşmaması halinde, Lyapunov anlamında bir stabilite hali söz konusu olmaktadır. Yani böylece Lyapunov anlamında bir stabilite kriteri elde edilmiş olur. Ayrıca bu kritik yük değeri, kabul edilebilir cevap sınırına bağlı olarak, temel moda ait statik burkulma yükünün belirli bir katı olabilir.

Buradan şu pratik sonuca ulaşılmış olur; çubuk üzerinde, başlangıçta mevcut kusurların, elastik bölgede kalmak şartıyla, konstrüktif yönden tolere edilebilir bir mertebede amplifike edilmesi hali için çubuğu, genliği temel moda ait statik burkulma yükünün belirli katı olan, bir impulsif yük- le yüklemek mümkündür.

Çalışmada yukarıda üzerinde durulan cevap sınırı, değerce eğilme ve burulma deformasyonları için aynı alınmıştır. Aksi halde arzu edilen dizayn kriterini istenilen formda elde etmek mümkün olmamaktadır.

Problemin çözümü, HOLZER'in çalışmasında olduğu gibi (18) Lyapunov'un Direkt Metod'u yardımı ile elde edilmiştir. Çünkü bu çubuklar için elde edilen diferansiyel denklemler (hareket denklemleri) kuple olduğundan MOVCHAN'ın (19) tanımladığı fonksiyonellerin, bu problem için elde edilmesinin, yapılan araştırmalar sonucunda, çok güç olacağı neticesine varılmıştır.

Problemin çözümü için çubuğun impulsif yükleme altında modal inceleme yapılmış, yani çubuğa ait kuple, değişken katsayılı parsiyel diferansiyel denklem takımı modal forma indirgenmiştir. Böylece elde edilen modal denklemler için, modal stabilite kriterleri elde edilmiştir. Bu kriterler HOLZER'in (18) çalışmasındakilerin aksine modlara bağlı çıkmıştır. Bunu takiben bulunan bu netice simetri eksenini olmayan açık enkesitli, iki ucu mafsallı çubuklara genişletilmiştir.

Bu tip çubuklar için genel bir stabilite kriteri vermek, simetrik kesitli çubuklara nazaran daha güç olmuştur. Bunun için LAVRANTİER ve ISHINSKY'nin çalışmasından (16) hareketle bu tip çubuklar için bir modal cevap analizi yapılmış ve bundan yararlanarak bir kriter elde etmek mümkün olmuştur.

1.3 - ÇALIŞMADA YAPILAN KABULLER ve İHMALLER

Yapılan kabuller :

A) Çubuğun malzemesi homojen ve lineer elastiktir.

B) Yer değiştirmeler çubuğun boyuna nisbetle küçüktür.

- C) Yükleme sırasında kesit, düzlemi içerisinde çarpılmaz fakat kesit düzlemine dik çarpılma mevcuttur.
- D) Çubuk iki ucundan mafsallı ve bu uçlar burulmaya karşı tutulmuştur.
- F) Yük ekseneldir ve yükleme sırasında doğrultusunu değiştirmez.

Yapılan ihmaller :

- I - (B) kabulü kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinde yüksek mertebeden terimlerin ihmaline imkân veriyor. Böylece küçük titreşimler teorisi söz konusu oluyor.
- II - (A) kabulü ile bağımlı olarak SEVIN'in çalışmasından (15) hareketle, atalet kuvvetlerinin eksenel birleşeninin ihmal ediyoruz.
- III - Yine (A) kabulü ile LINDBERG'in çalışması (17) bize eksenel dalga yayılımlarının problemin işlenişinde ihmaline imkân veriyor.
- IV - Çubuğun kesit boyutları, boyuna göre küçük olduğundan, lokal burkulma tesiri göz önüne alınmamıştır.
- V - Kesme kuvvetlerinin eğrilik bağıntısına etkisi ihmal edilmiştir.

1.4- SİMETRİK OLMAYAN AÇIK KESİTLİ ÇUBUKLARIN STATİK STABİLİTE İFADELERİNİN ÇIKARILMASI.

1.4.1 - Simetrik olmayan açık kesitli çubukların enerji ifadeleri

Konsantrik yükle yüklü çubuğun içsel deformasyon enerjisi

Eğilme ve burulmaya maruz açık, simetri eksenine olmayan enkesitli çubuklarda elastik bölgede içsel deformasyon enerjisi şu ifade ile verilir (31) :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ_y u''^2 + EJ_x v''^2 + E\Gamma \beta''^2 + GK \beta'^2 + EA \epsilon^2) dz \quad (1.1)$$

Burada; EJ_y zayıf eksen etrafındaki eğilme rijitliği, EJ_x kuvvetli eksen etrafındaki eğilme rijitliği, $E\Gamma$ çarpılma rijitliği, GK Torsiyon rijitliği, ϵ aksiyal deformasyon ve u, v, β ise kayma merkezinin yer değiştirmelerini ifade eder.

Burkulma deformasyonu esnasındaki enerji değişimini inceleyeceğimizden (1.1) ifadesindeki $E\Delta \epsilon^2$ terimini terketmek kabildir. Bu durumda (1.1) ifadesi aşağıdaki hale gelir.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ_y u''^2 + EJ_x v''^2 + E\Gamma \beta''^2 + GK \beta'^2) dz \quad (1.1a)$$

Konsantrik yüklerle yüklü çubuğun dış kuvvetinin potansiyel enerjisi ifadesi :

Bu ifade küçük deformasyonlar halinde aşağıdaki şekilde belirlenmiştir (31) :

$$V = -\frac{P}{2} \int_0^L (u'^2 + v'^2 + 2x_0 u'\beta' - 2x_0 v'\beta' + \beta'^2 \frac{J_p}{A}) dz \quad (1.2)$$

1.4.2. Konsantrik yüklerle yüklü, simetrik olmayan açık enkesitli çubukların burulmalı burkulmasına ait diferansiyel denklemlerin çıkarılması.

Toplam potansiyel enerji ifadesi ;

$$U_T = U + V = \frac{1}{2} \int_0^L (EJ_y u''^2 + EJ_x v''^2 + E\Gamma \beta''^2 + GK \beta'^2 - P u'^2 - P v'^2 - 2P x_0 u'\beta' + 2P x_0 v'\beta' - P \frac{J_p}{A} \beta'^2) dz \quad (1.3)$$

Stasyoner potansiyel enerji teoremine göre U_T minimum olmalıdır. U_T nun üç değişkeninin fonksiyonu oluşu hatırla tutularak ve varyasyon hesabı esaslarına göre üç Euler denkleminin gerçekleşmesi halinde U_T nun stasyoner olabileceği hatırlanarak (31) :

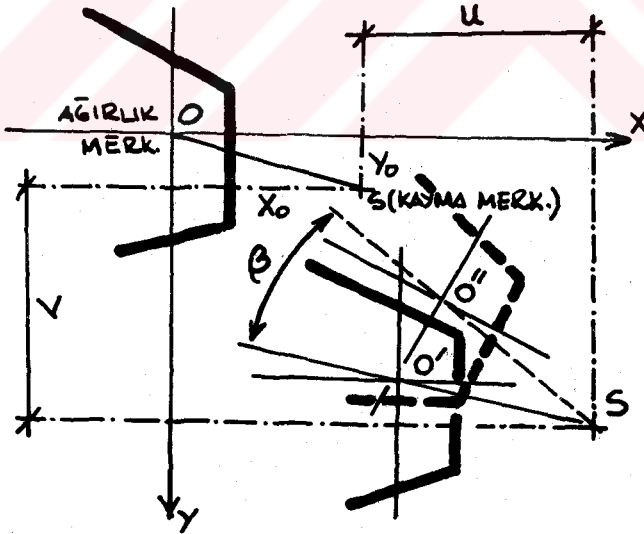
$$EJ_y u^{IV} + P u^{II} + P y_0 \beta^{II} = 0 \quad (1.4a)$$

$$EJ_x v^{IV} + P v^{II} - P x_0 \beta^{II} = 0 \quad (1.4b)$$

$$P y_0 u^{II} - P x_0 v^{II} + E \Gamma \beta^{IV} + \left(P \frac{J_p}{A} - GK \right) \beta^{II} = 0 \quad (1.4c)$$

Bu üç simultane denklem simetri ekseni olmayan kesitli çubukların konsantrik yük altında burulmalı burkulmasının diferansiyel denklemini verir.

Burada J_p , S kayma merkezine göre kesidin polar atalet momentidir. x_0 , y_0 ise kayma merkezinin koordinatlarıdır (Bak.Şekil 1).



Şekil 1

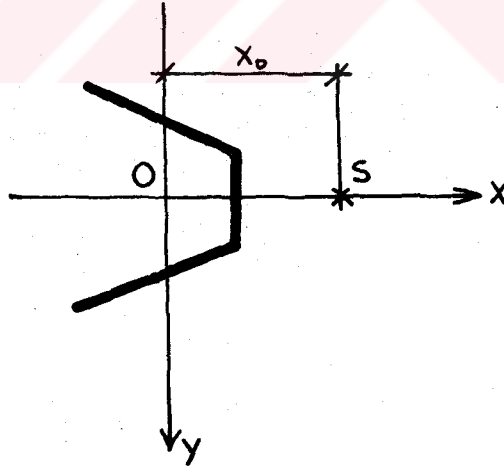
Tek simetri eksenini haiz kesitlerde (1.4) denklemleri, kayma merkezi simetri eksenleri üzerinde bulunacağına göre, koordinat eksenleri kesidin ağırlık merkezinden geçtiğini ve x ekseninin kesidin simetri eksenini olduğunu düşünerek, Şekil 2 ye göre $y_0 = 0$ koyarak geçerli olur.

Bu durumda Şekil 2 deki gibi tek simetri eksenli kesidi olan çubuklar için burulmalı burkulmaya ait diferansiyel denklemler şu şekli alır :

$$EJ_y u^{IV} + P u^{II} = 0 \quad (1.5a)$$

$$EJ_x v^{IV} + P v^{II} - P x_0 \beta^{II} = 0 \quad (1.5b)$$

$$-P x_0 v^{II} + E \Gamma \beta^{IV} + \left(P \frac{J_p}{A} - GK \right) \beta^{II} = 0 \quad (1.5c)$$



Şekil 2

(1.5) denklemlerinden son ikisi simultanedir. Birinci denklem bağımsızdır ve $y-y$ eksenini etrafında düzlem burkulmayı ifade eder. (1.5b, 1.5c) simultane denklemleri ise y doğrultusundaki burulmalı burkulmayı ifade eder.

Elde edilen bu lineer denklemler, küçük deformasyonlar hali ve elastik bölgede kalındığı kabullerine dayanmaktadır.

1.4.3 - Diferansiyel denklemlerin çözümü, simetrisiz ve tek simetri eksenli açık kesitli çubuklara ait kritik yüklerin tayini.

Şimdi aşağıdaki denklem takımını ele alalım :

$$EJ_y u^{IV} + P u'' + P_{y_0} \beta'' = 0 \quad (1.4a)$$

$$EJ_x v^{IV} + P v'' - P_{x_0} \beta'' = 0 \quad (1.4b)$$

$$P_{y_0} u'' - P_{x_0} v'' + E\Gamma \beta^{IV} + \left(P \frac{J_F}{A} - GK \right) \beta'' = 0 \quad (1.4c)$$

Bu simultane denklem takımını sağlayan u , v , β çözümlerini $u(0)=v(0)=\beta(0)=u(L)=v(L)=\beta(L)=0$ sınır şartları için

$$u = C_1 \sin \frac{k\pi z}{L} \quad v = C_2 \sin \frac{k\pi z}{L} \quad \beta = C_3 \sin \frac{k\pi z}{L} \quad (1.6)$$

şeklinde yazabiliriz.

Bunları (1.4) denklem takımında yerine koyarsak :

$$\begin{aligned}
& EJ_y C_1 \frac{k^4 \pi^4}{L^4} \sin \frac{k\pi z}{L} - C_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} P \sin \frac{k\pi z}{L} - P_{y_0} C_3 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi z}{L} = 0 \\
& EJ_x C_2 \frac{k^4 \pi^4}{L^4} \sin \frac{k\pi z}{L} - C_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} P \sin \frac{k\pi z}{L} + P_{x_0} C_3 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi z}{L} = 0 \\
& -P_{y_0} C_1 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi z}{L} + P_{x_0} C_2 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi z}{L} + EI C_3 \frac{k^4 \pi^4}{L^4} \sin \frac{k\pi z}{L} - \\
& - \left(P \frac{J_p}{A} - GK \right) C_3 \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sin \frac{k\pi z}{L} = 0
\end{aligned}$$

Böyle bir çözümün mevcut olabilmesi için C_1, C_2, C_3 sabitlerine ait katsayılar determinantının sıfır olması lâzımdır. $\lambda_k = k\pi/L$ dersek gerekli sadeleştirmeleri yaparak katsayılar determinantını şöyle yazabiliriz ;

$$\begin{vmatrix}
EJ_y \lambda_k^2 - P & 0 & -P_{y_0} \\
0 & EJ_x \lambda_k^2 - P & P_{x_0} \\
-P_{y_0} & P_{x_0} & EI \lambda_k^2 - \left(P \frac{J_p}{A} - GK \right)
\end{vmatrix} = 0$$

katsayılar determinantı açılırsa :

$$r^2(P_{y_k} - P)(P_{x_k} - P)(P_{\phi_k} - P) - P_{y_0}^2(P_{x_k} - P) - P_{x_0}^2(P_{y_k} - P) = 0 \quad (1.7)$$

şeklinde kübik bir denklem elde ederiz. Bunun kökleri olan P_{ϕ_k} değerleri çubuğun mümkün olan üç burkulma yükünü verir. Burada P_{x_k}, P_{y_k} ve P_{ϕ_k} parametreleri sırayla şu anlam ve forma sahiptirler; P_{x_k} , P_{y_k} asal eksenler etrafındaki burulmasız burkulma yükleridir, P_{ϕ_k} ise kayma merkezi eksen etrafında burulma burkulması yüküdür. Bu parametrelerin formu ;

$$P_{x_k} = k^2 \pi^2 EJ_x / L^2 \quad (1.8a)$$

$$P_{yK} = k^2 \pi^2 EJ_y / L^2 \quad (1.8b)$$

$$P_{\phi K} = \frac{1}{r^2} (GK + EI \pi^2 / L^2) \quad (1.8c)$$

şeklindedir.

Burada r kayma merkezine göre kesidin atalet yarıçapını gösterir ve

$$r^2 = \frac{J_x + J_y}{F} + x_0^2 + y_0^2$$

şeklindedir. Başka bir deyişle, eğer çubuk kayma merkezi eksenini etrafında burularak burkulmaya karşı tutulursa P_{xK} ve

P_{yK} asal eksenler etrafındaki burkulma yüklerini ifade eder. $P_{\phi K}$ ise; çubuk lateral deplasmanlara karşı tutulduğunda kayma merkezi eksenini etrafında burulma burkulması yüküdür.

Eğer kesit bir simetriyi haiz değilse (1.7) denklemi basitleştirilemez ve üç P_{CR} kökünden her biri P_{xK} , P_{yK} ve $P_{\phi K}$ nin fonksiyonlarıdır. Bu tip kesitler için sadece normal burkulma veya sadece torsiyonel burkulma söz konusu olamaz ve her bir P_{CR} burkulma yükü burulmalı burkulma tipindedir. Bunların değerice en küçüğü için sistemin burkulması söz konusudur. Ayrıca bu yük P_{xK} , P_{yK} ve $P_{\phi K}$ parametrelerinden küçüktür ve bu her zaman gösterilebilir (31). Eğer x eksenini simetri eksenini ise (Bak. Şekil 2) bu durumda $y_0 = 0$ olmalıdır. Bu durumda (1.7) denklemi şu şekle indirgenebilir.

$$(P - P_{yK}) [r^2 (P - P_{xK})(P - P_{\phi K}) - P^2 x_0^2] = 0 \quad (1.9)$$

Bu durumda yine üç çözüm mevcuttur. Bunlardan biri $P = P_{yK}$ dir ve $y-y$ eksenini etrafında çubuğun normal burkulma yüküdür. Diğer ikisi köşeli parantez içindeki ikinci derece ifadenin sıfıra eşitlenmesinden elde edilen denklemin kökleridir ve iki burulmalı burkulma yükünü gösterirler. En küçük burulmalı burkulma yükü P_{xK} ve $P_{\phi K}$ değerlerinden küçük ola-

caktır. Bu yük ayrıca P_{YK} den büyük veya küçük olabilir.

Bu durumda tek simetri eksenini haiz kesitler iki mod-
dan birinde burkulurlar. Biri simetri eksenine dik eksen
etrafında düzlem burkulma, diğeri ise burulmalı burkulmadır.
Burkulmanın bu modlardan hangi birinde olacağı kesidin şek-
line ve geometrik boyutlarına bağlıdır.

Eğer kesit iki simetri eksenine sahipse bu durumda kay-
ma merkezi ile ağırlık merkezi üstüste çıkışacağından $x_0=y_0=0$
olacaktır.

Bu durumda (1.7) denklemi şu şekle indirgenir ;

$$(P - P_{YK})(P - P_{XK})(P - P_{\emptyset K}) = 0 \quad (1.10)$$

Böylece üç muhtemel burkulma yükü $P_{CR} = P_{YK}$, $P_{CR} = P_{XK}$
veya $P_{CR} = P_{\emptyset K}$ olacaktır.

Kesit şekline bağlı olarak bunlardan biri en küçük de-
ğeri haiz olacak ve burkulma modunu tayin edecektir. Bu hal-
de üç burkulma modunun birbirine etkisi yoktur.

Şimdi (1.9) denklemini ele alalım :

$$(P - P_{YK})[r^2(P - P_{XK})(P - P_{\emptyset K}) - P_{X_0}^2] = 0 \quad (1.9)$$

bunun kökleri

$$P_{YCR} = P_{YK} \quad (1.9a)$$

$$P_{X\emptyset CR} = \frac{P_{\emptyset K} + P_{XK} - \sqrt{(P_{\emptyset K} + P_{XK})^2 - 4K P_{\emptyset K} P_{XK}}}{2K} \quad (1.9b)$$

burada

$$K = \epsilon_0^2 / r^2 = 1 - (x_0/r)^2 \quad (1.9c)$$

olmalıdır.



BÖLÜM 2

2.- SİMETRİK OLMAYAN AÇIK KESİTLİ ÇUBUKLARIN, EKSENEL DEĞİŞKEN YÜKLER ALTINDA EĞİLMELİ-BURULMA TİTREŞİM DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI

Hareketin diferansiyel denklemini tayinde, ufak titreşimler teorisi ile uğraştığımızı göz önünde tutarak, uygun koordinat fonksiyonları seçip, Lagrange denklemlerinden hareketle neticeye gidebiliriz. Şöyle ki ;

$$U(z,t) = \sum_{k=1}^n f_{1k}(t) \chi_k(z) \quad (2.1a)$$

$f_{1k}(t)$ burada $[L]$ boyutundadır.

$$V(z,t) = \sum_{k=1}^n f_{2k}(t) \chi_k(z) \quad (2.1b)$$

burada $[L]$ boyutundadır.

$$\beta(z,t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r} f_{3k}(t) \chi_k(z) \quad (2.1c)$$

(2.1c) de $\frac{1}{r}$ katsayısı $f_{3k}(t)$ yi $[L]$ boyutuna getirmek için kullanılmıştır.

Burada $\chi_k(z)$ fonksiyonları, problemin sınır şartlarını sağlaması gereken, uygun koordinat fonksiyonlarıdır. Bunlar tam bir ortogonal sistem teşkil edecek şekilde seçileceklerdir.

$f_{ik}(t)$, $(i=1,2,3), (k=1,\dots,n)$ çarpanları ise zamanın tayin edilmemiş fonksiyonlarıdır.

Böylece sistemi, sürekli bir sistem olmaktan çıkararak ayrık bir sistem haline getireceğiz.

Öte yandan ;

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{Min!} \quad (2.2)$$

Variasyon problemi bizi, çok iyi bilinen LAGRANGE denklemlerine götürür.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.3a)$$

Burada ;

$$Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (2.3b)$$

dir ve genelleştirilmiş kuvvetler olarak adlandırılır. Bu ifade-
dede V dış kuvvetlerin potansiyel enerjisidir.

(2.3a) ifadesinde,

$$L = T - U \quad (2.3c)$$

şeklindedir. Burada T sistemin kinetik enerjisini, U ise sistemin iç kuvvetlerinin potansiyel enerjisini belirler.

Yine aynı ifadede q_i ler ise genelleştirilmiş koordinatlardır. Bu problemde $f_{ik}(t)$ leri genelleştirilmiş koordinatlar olarak ele alırsak,

$$f_{1k}(t) = q_1 \quad f_{2k}(t) = q_2 \quad f_{3k}(t) = q_3 \quad (2.3d)$$

Böylece (2.3a) ifadesini açık olarak şöyle yazabiliriz :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (2.4)$$

2.1.- ÇUBUĞUN POTANSİYEL ENERJİ İFADELERİNİN ÇIKARILMASI

Şimdi Bölüm 1.4 de verilen enerji ifadelerinden yararlanarak U ve V potansiyel enerjilerini yazalım. Bu halde yer değiştirmeler $U(z,t)$, $V(z,t)$, $\beta(z,t)$ şeklinde hem z ve hem t nin fonksiyonu olduğu göz önünde tutularak ve (1.1a) ifadesinden yararlanarak sistemin iç kuvvetlerinin deformasyon enerjisini şöyle yazabiliriz ;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EJ_y \left(\frac{\partial^2 U(z,t)}{\partial z^2} \right)^2 + EJ_x \left(\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 \beta(z,t)}{\partial z^2} \right)^2 + GK \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (2.5a)$$

Öte yandan dış kuvvetlerin potansiyel enerjisinin ifadesi (1.2) ifadesinden yararlanarak,

$$V = \frac{P(t)}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial U(z,t)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \right)^2 + 2\gamma_0 \left(\frac{\partial U(z,t)}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right) - 2x_0 \left(\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right) + r^2 \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right)^2 \right] dz \quad (2.5b)$$

2.2.- ÇUBUĞUN KİNETİK ENERJİSİNİN HESABI

Bunun için çubuğun kesitinin ağırlık merkezinin U_0 ve V_0 yer değiştirmelerini kayma merkezinin yer değiştirmesi cinsinden ifade edelim. Şekil 3 den faydalanarak,

$$V_0 = Y_0 + V_s - Y_0 \cos \beta_s - x_0 \sin \beta_s$$

küçük yerdeğiştirmeler teorisi geçerli olduğundan

$$\cos \beta_s \cong 1 \quad \sin \beta_s \cong \beta_s$$

olmalıdır.

$$\text{Buradan} \quad V_s = V \quad \beta_s = \beta \quad \text{denirse;}$$

$$V_0 = Y_0 + V - Y_0 - x_0 \beta$$

$$V_0 = V - x_0 \beta$$

(2.6a)

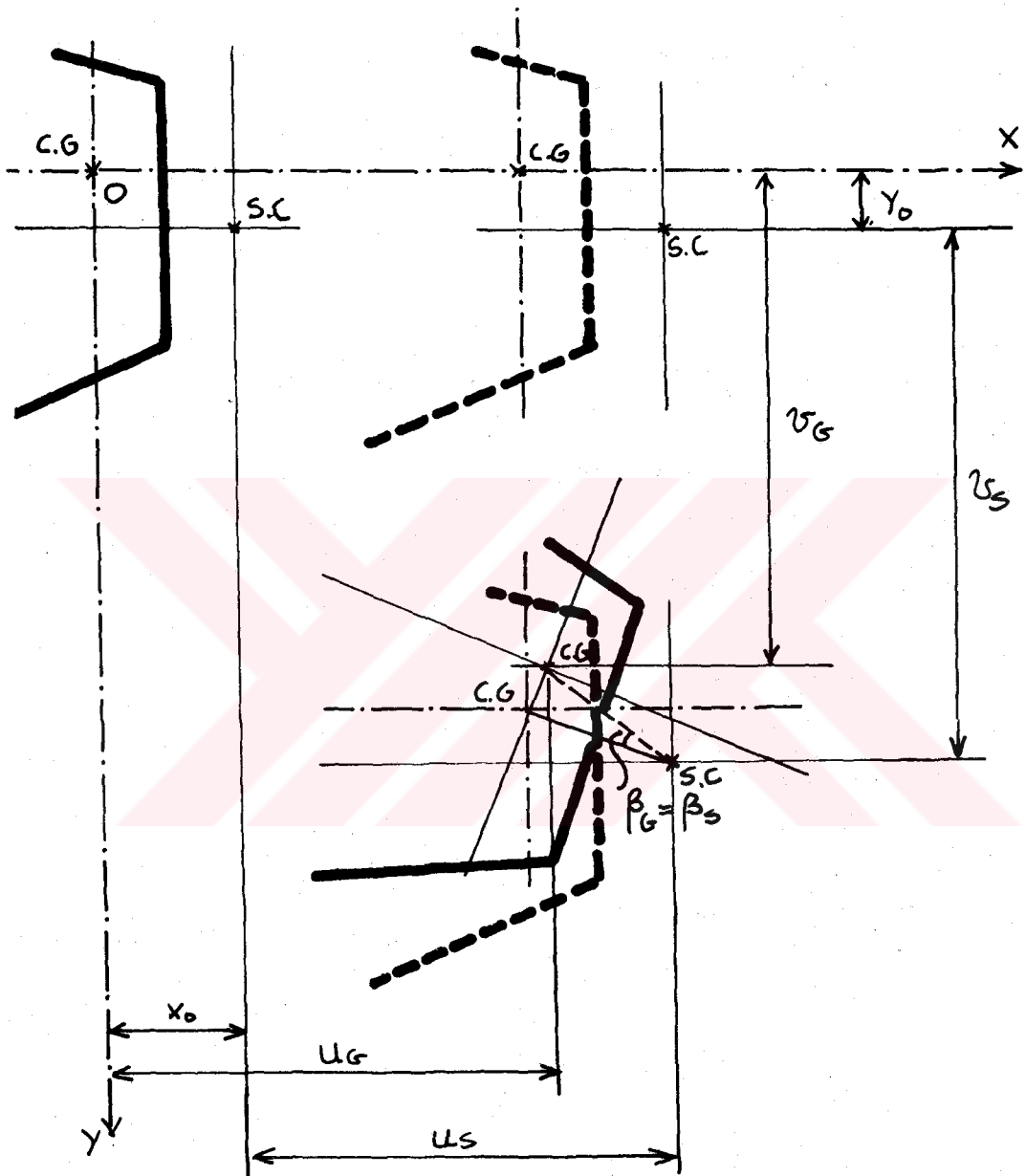
$$U_0 = x_0 + U_s + Y_0 \sin \beta_s - x_0 \cos \beta_s$$

Küçük yerdeğiştirmeler geçerli olduğundan ;

$$\cos \beta_s \cong 1$$

$$\sin \beta_s \cong \beta_s$$

olmalıdır.



Şekil 3

$$U_G = x_0 + U_s + Y_0 \beta_s - x_0$$

$$U_s = U$$

$$\beta_s = \beta$$

denirse

$$U_G = U + Y_0 \beta \quad (2.6b)$$

Şimdi sistemin T kinetik enerjisini $T = T_1 + T_2 + T_3$ olarak bir toplam şeklinde düşünecek olursak

T_1 KINETİK ENERJİSİNİN HESABI

Bu enerji çubuğun kesitinin ağırlık merkezinin U_G yerdeğiştirmesinden dolayı ortaya çıkar. Bu yerdeğiştirme yukarıda (2.6b) ifadesi ile belirlidir. Bu durumda kinetik enerji ifadesi

$$T_1 = \frac{m}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial U_G}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{m}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial U(z,t)}{\partial t} + Y_0 \frac{\partial \beta(z,t)}{\partial t} \right)^2 dz \quad (2.7)$$

T_2 KINETİK ENERJİNİN HESABI

Bu kinetik enerji çubuğun kesitinin ağırlık merkezinin v_G yerdeğiştirmesinden meydana gelir. Bunun ifadesi (2.6a) formülü ile belirlidir. Bu durumda kinetik enerji ifadesi ;

$$T_2 = \frac{m}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v_G}{\partial t} \right)^2 dz = \frac{m}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - x_0 \frac{\partial \theta(z,t)}{\partial t} \right)^2 dz \quad (2.8)$$

T_3 KINETİK ENERJİNİN HESABI

Bu kinetik enerji çubuğun ağırlık eksenini etrafında yaptığı $\beta = \beta_s = \beta_0$ dönmesinden meydana gelir. Bu durumda kinetik enerji ifadesi

$$T_3 = \frac{1}{2} m_0^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial t} \right)^2 dz \quad (2.9)$$

Şimdi sistemin kinetik ve potansiyel enerjilerini toplu olarak yazalım :

(2.5a) dan

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EJ \left(\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} \right)^2 + EJ \left(\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 \theta(z,t)}{\partial z^2} \right)^2 + GK \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right)^2 \right] dz$$

(2.5b) den

$$V = \frac{1}{2} P(t) \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \right)^2 + 2\gamma_0 \left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \right) - 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right) + r^2 \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial z} \right)^2 \right] dz$$

(2.7), (2.8), (2.9) dan kareleri açar ve düzenlersek,

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \right)^2 + r^2 \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial t} \right)^2 + 2\gamma_0 \left(\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \right) - 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \beta(z,t)}{\partial t} \right) \right] dz$$

Bölüm 2 nin başındaki (2.1a), (2.1b), (2.1c) ifadelerini, enerji ifadelerinde yerine koyarsak ;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EJ_y \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{y1} f_{y2} \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} + EJ_x \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{x1} f_{x2} \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{r^2} E \Gamma \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{3i} f_{3k} \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} + \frac{1}{r^2} G K \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{3i} f_{3k} \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz}$$

olur.

$$V = \frac{1}{2} P(t) \int_0^L \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{1i} f_{1k} \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{2i} f_{2k} \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} + 2 \frac{Y_0}{r} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_i f_{2k} \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} - \right. \\ \left. - 2 \frac{X_0}{r} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{2i} f_{3k} \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{3i} f_{3k} \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} \right] dz$$

olur.

$$T = \frac{1}{2} m \int_0^L \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{df_{1i}}{dt} \frac{df_{1k}}{dt} \chi_i \chi_k + \frac{df_{2i}}{dt} \frac{df_{2k}}{dt} \chi_i \chi_k + \frac{df_{3i}}{dt} \frac{df_{3k}}{dt} \chi_i \chi_k + \right. \\ \left. + 2 \frac{Y_0}{r} \frac{df_{1i}}{dt} \frac{df_{2k}}{dt} \chi_i \chi_k - 2 \frac{X_0}{r} \frac{df_{2i}}{dt} \frac{df_{3k}}{dt} \chi_i \chi_k \right) dz$$

olur.

Bu ifadeleri daha düzenli yazarsak

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (E J_y f_{1i} f_{1k} + E J_x f_{2i} f_{2k} + \frac{1}{r^2} E \Gamma f_{3i} f_{3k}) \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz + \\ + \frac{1}{2 r^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n G K f_{3i} f_{3k} \int_0^L \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} dz$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (E_y f_{1i} f_{1k} + E_x f_{2i} f_{2k} + \frac{1}{r_2} E_r f_{3i} f_{3k}) \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz \right. \\ \left. + \frac{1}{r_2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n G K f_{3i} f_{3k} \int_0^L \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} dz \right]$$

olur.

$$V = \frac{1}{2} P(t) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(f_{1i} f_{1k} + f_{2i} f_{2k} + 2 \frac{Y_0}{r} f_{1i} f_{3k} - 2 \frac{X_0}{r} f_{2i} f_{3k} + \right. \\ \left. + f_{3i} f_{3k} \right) \int_0^L \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} dz$$

olur.

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{df_{1i}}{dt} \frac{df_{1k}}{dt} + \frac{df_{2i}}{dt} \frac{df_{2k}}{dt} + \frac{df_{3i}}{dt} \frac{df_{3k}}{dt} + \right. \\ \left. + 2 \frac{Y_0}{r} \frac{df_{1i}}{dt} \frac{df_{3k}}{dt} - 2 \frac{X_0}{r} \frac{df_{2i}}{dt} \frac{df_{3k}}{dt} \right] \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

olur.

2.3.- HAREKETİN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN ÇIKARILMASI

Yukarıki enerji ifadelerinden ve LAGRENGE denkleminden hareketle ;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{ji}} \right) - \frac{\partial}{\partial f_{ji}} (T - U) = \frac{\partial V}{\partial f_{ji}} \quad (j=1,2,3) \\ (i=1,2,3,\dots,n)$$

$j=1$ için enerji ifadelerinden yararlanarak, şunları yazabiliriz.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{1i}} = m \sum_{k=1}^n \left(\frac{df_{1k}}{dt} + \frac{Y_0}{r} \frac{df_{2k}}{dt} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

öte yandan

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{1i}} \right) = m \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} + \frac{Y_0}{r} \frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$\frac{dU}{df_{1i}} = \sum_{k=1}^n EJ_y f_{1k} \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$Q_{1i} = \frac{\partial V}{\partial f_{1i}} = P(t) \sum_{k=1}^n \left(f_{1k} + \frac{Y_0}{r} f_{3k} \right) \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Bu ifadeleri $j=1$ için Lagrange denklemine koyarsak,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n m \left(\frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} + \frac{Y_0}{r} \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz + \sum_{k=1}^n EJ_y f_{1k} \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz \\ &= P(t) \sum_{k=1}^n \left(f_{1k} + \frac{Y_0}{r} f_{3k} \right) \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz \\ & \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (2.10a)$$

ifadesini buluruz.

$j=2$ için enerji ifadelerinden yararlanarak, şunları yazabiliriz :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{2i}} = m \sum_{k=1}^n \left(\frac{df_{2k}}{dt} - \frac{Y_0}{r} \frac{df_{3k}}{dt} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{2i}} \right) = m \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} - \frac{x_0}{r} \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

$$\frac{\partial U}{\partial f_{2i}} = \sum_{k=1}^n E J_x f_{2k} \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz$$

$$Q_{2i} = \frac{\partial V}{\partial f_{2i}} = P(t) \sum_{k=1}^n \left(f_{2k} - \frac{x_0}{r} f_{3k} \right) \int_0^L \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} dz$$

Bu ifadeleri $j=2$ için Lagrange denklemine koyarak :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n m \left(\frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} - \frac{x_0}{r} \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz + \sum_{k=1}^n E J_x f_{2k} \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz \\ &= P(t) \sum_{k=1}^n \left(f_{2k} - \frac{x_0}{r} f_{3k} \right) \int_0^L \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} dz \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (2.10b)$$

ifadesini buluruz.

$j=3$ için enerji ifadelerinden yararlanarak, şunları yazabiliriz :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{3i}} = m \sum_{k=1}^n \left(\frac{df_{3k}}{dt} + \frac{y_0}{r} \frac{df_{1k}}{dt} - \frac{x_0}{r} \frac{df_{2k}}{dt} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{f}_{3i}} \right) = m \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} + \frac{y_0}{r} \frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} - \frac{x_0}{r} \frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

$$\frac{\partial U}{\partial f_{3i}} = \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n E r f_{3k} \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz + \frac{1}{r^2} G K f_{3k} \int_0^L \frac{d \chi_i}{dz} \frac{d \chi_k}{dz} dz$$

$$Q_{3i} = \frac{\partial V}{\partial f_{3i}} = P(t) \sum_{k=1}^n \left(f_{3k} + \frac{Y_0}{r} f_{1k} - \frac{X_0}{r} f_{2k} \right) \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz$$

Bu ifadeleri $j=3$ için LAGRANGE denklemlerine koyarsak,

$$\sum_{k=1}^n \left(m \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} + \frac{Y_0}{r} \frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} - \frac{X_0}{r} \frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} \right) \int_0^L \chi_i \chi_k dz +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^n E \Gamma f_{3k} \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz + \frac{1}{r^2} G K f_{3k} \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz$$

$$= P(t) \sum_{k=1}^n \left(f_{3k} + \frac{Y_0}{r} f_{1k} - \frac{X_0}{r} f_{2k} \right) \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz \quad (2.10c)$$

ifadesini buluruz.

(2.10a,b,c) ifadelerini toplu halde yazar $d(\)/dt$ operatörünü, $D \frac{d^2(\)}{dz^2}$ operatörünü D^2 ile gösterirsek, ayrıca,

$$a_{ik} = \int_0^L \chi_i \chi_k dz \quad (2.11a)$$

$$b_{ik} = \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz \quad (2.11b)$$

$$c_{ik} = \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz \quad (2.11c)$$

notasyonları kullanılarak (2.10a,b,c) ifadeleri aşağıdaki hali alır :

$$\sum_{k=1}^n m(D^2 f_{1k} + \frac{Y_0}{F} D^2 f_{3k}) a_{ik} + \sum_{k=1}^n E J_y f_{1k} b_{ik} = P(t) \sum_{k=1}^n (f_{1k} + \frac{Y_0}{F} f_{3k}) c_{ik}$$

$$\sum_{k=1}^n m(D^2 f_{2k} - \frac{X_0}{F} D^2 f_{3k}) a_{ik} + \sum_{k=1}^n E J_x f_{2k} b_{ik} = P(t) \sum_{k=1}^n (f_{2k} - \frac{X_0}{F} f_{3k}) c_{ik}$$

(2.11d)

$$\sum_{k=1}^n m(D^2 f_{3k} + \frac{Y_0}{F} D^2 f_{1k} - \frac{X_0}{F} D^2 f_{2k}) a_{ik} + \frac{1}{F_2} \sum_{k=1}^n E F f_{3k} b_{ik} + \frac{1}{F_2} \sum_{k=1}^n G K f_{3k} c_{ik}$$

$$= P(t) \sum_{k=1}^n (f_{3k} + \frac{Y_0}{F} f_{1k} - \frac{X_0}{F} f_{2k}) c_{ik} \quad (i=1,2,\dots,n)$$

veya

$$\sum_{k=1}^n \left[(m D^2 a_{ik} + E J_y b_{ik} - P(t) c_{ik}) f_{1k} + 0 \cdot f_{2k} + \right. \\ \left. + (m \frac{Y_0}{F} D^2 a_{ik} - \frac{Y_0}{F} P(t) c_{ik}) f_{3k} \right] = 0 \quad (2.11e)$$

$$\sum_{k=1}^n \left[0 \cdot f_{1k} + (m D^2 a_{ik} + E J_x b_{ik} - P(t) c_{ik}) f_{2k} - \right. \\ \left. - (m \frac{X_0}{F} D^2 a_{ik} - \frac{X_0}{F} P(t) c_{ik}) f_{3k} \right] = 0$$

$$\sum_{k=1}^n \left[(m \frac{Y_0}{F} D^2 a_{ik} - P(t) \frac{Y_0}{F} c_{ik}) f_{1k} - (m \frac{X_0}{F} D^2 a_{ik} - \frac{X_0}{F} P(t) c_{ik}) f_{2k} + \right. \\ \left. + (m D^2 a_{ik} + \frac{1}{F_2} E F b_{ik} + \frac{1}{F_2} G K c_{ik} - P(t) c_{ik}) f_{3k} \right] = 0 \\ (i=1,2,\dots,n)$$

Böylece $3n$ adet kuple diferansiyel denklem takımı elde edilmiş oldu.

Öte yandan,

$$p_{ik} = m D^2 \alpha_{ik} + EJ_y b_{ik} - P(t) c_{ik} \quad (2.12a)$$

$$q_{ik} = m \frac{Y_o}{F} D^2 \alpha_{ik} - \frac{Y_o}{F} P(t) c_{ik} \quad (2.12b)$$

$$r_{ik} = m D^2 \alpha_{ik} + EJ_x b_{ik} - P(t) c_{ik} \quad (2.12c)$$

$$s_{ik} = - \left(m \frac{X_o}{F} D^2 \alpha_{ik} - \frac{X_o}{F} P(t) c_{ik} \right) \quad (2.12d)$$

$$q_{ik} = m \frac{Y_o}{F} D^2 \alpha_{ik} - P(t) \frac{Y_o}{F} c_{ik} \quad (2.12e)$$

$$u_{ik} = m D^2 \alpha_{ik} + \frac{1}{F^2} E I b_{ik} + \frac{1}{F^2} G K c_{ik} - P(t) c_{ik} \quad (2.12f)$$

(2.12a,b,c,d,e,f) notasyonları kullanılırsa yukarıki denklem takımı aşağıda görülen vektör-matris denklemi şeklinde yazılabilir.

$$\begin{pmatrix}
 p_{11} & 0 & q_{11} & \dots & p_{12} & 0 & q_{12} & \dots \\
 0 & r_{11} & s_{11} & \dots & 0 & r_{12} & s_{12} & \dots \\
 q_{11} & s_{11} & u_{11} & \dots & q_{12} & s_{12} & u_{12} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 p_{21} & 0 & q_{21} & \dots & p_{22} & 0 & q_{22} & \dots \\
 0 & r_{21} & s_{21} & \dots & 0 & r_{22} & s_{22} & \dots \\
 q_{21} & s_{21} & u_{21} & \dots & q_{22} & s_{22} & u_{22} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ \vdots \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ \vdots \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Böylece (2.13) denklemini kısa olarak şöyle yazabiliriz ;

$$\begin{pmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (2.14a)$$

Burada ;

$$K_{ik} = \begin{pmatrix} p_{ik} & 0 & q_{ik} \\ 0 & r_{ik} & s_{ik} \\ q_{ik} & s_{ik} & u_{ik} \end{pmatrix} \quad f_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} \quad (2.14b)$$

Şimdi çubuğun iki ucunun mafsallı olduğu halini ele alalım; bu durumda sınır şartları şöyle olmalıdır ;

$$U(0,t) = V(0,t) = \beta(0,t) = \frac{\partial^2 U(0,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V(0,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \beta(0,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.15a)$$

$$U(L,t) = V(L,t) = \beta(L,t) = \frac{\partial^2 U(L,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V(L,t)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \beta(L,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.15b)$$

Bu sınır şartları çerçevesinde, koordinat fonksiyonları olarak simetrik kesitli çubuğun serbest titreşim formlarını alırsak ; (10)

$$X_k(z) = \sin \frac{k\pi z}{L} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.16)$$

Sistemin çözümü (2.1a,b,c) den hareketle şöyle yazılabilir ;

$$U(z,t) = f_{1k}(t) \sin \frac{k\pi z}{L} \quad (2.17a)$$

$$V(z,t) = f_{2k}(t) \sin \frac{k\pi z}{L} \quad (2.17b)$$

$$\beta(z,t) = \frac{1}{r} f_{3k}(t) \sin \frac{k\pi z}{L} \quad (2.17c)$$

Çubuğun serbest titreşim formları ortogonal bir sistem meydana getirdiğinden

$$k \neq i \quad \text{için} \quad \int_0^L \sin \frac{i\pi z}{L} \sin \frac{k\pi z}{L} dz = 0 \quad (2.18a)$$

$$k = i \quad \text{için} \quad \int_0^L \sin \frac{i\pi z}{L} \sin \frac{k\pi z}{L} dz = \frac{L}{2} \quad (2.18b)$$

Benzer şekilde $\cos \frac{k\pi z}{L}$ ($k=1,2,\dots,n$) sistemi de ortogonal bir sistem meydana getirdiğinden

$$k \neq i \quad \text{için} \quad \int_0^L \cos \frac{i\pi z}{L} \cos \frac{k\pi z}{L} dz = 0 \quad (2.19a)$$

$$k = i \quad \text{için} \quad \int_0^L \cos \frac{i\pi z}{L} \cos \frac{k\pi z}{L} dz = \frac{L}{2} \quad (2.19b)$$

olur.

Böylece K_{ik} matrisinin elemanlarını aşağıdaki şekilde hesaplıyabiliriz :

$$P_{ik} = m \ddot{a}_{ik} + EJ_y b_{ik} - P(t) c_{ik}$$

Öte yandan,

$$\alpha_{ik} = \int_0^L \chi_i \chi_k dz$$

bu durumda

$$\alpha_{ik} = \int_0^L \sin \frac{i\pi z}{L} \sin \frac{k\pi z}{L} dz \quad (2.20a)$$

olduğuna göre şunlar söz konusudur :

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= 0 & i \neq k \\ \alpha_{ik} &= \frac{L}{2} & i = k \end{aligned} \quad (2.20b)$$

Öte yandan,

$$b_{ik} = \int_0^L \frac{d^2 \chi_i}{dz^2} \frac{d^2 \chi_k}{dz^2} dz \quad (2.20c)$$

olduğu bilindiğine göre ;

$$\frac{d^2 \chi_i}{dz^2} = -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{k\pi z}{L}$$

böylece

$$b_{ik} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \sin \frac{i\pi z}{L} \sin \frac{k\pi z}{L} dz$$

olur.

$$\begin{aligned} b_{ik} &= 0 & i \neq k \\ b_{ik} &= \left(\frac{k\pi}{L}\right)^4 \frac{L}{2} & i = k, \lambda_k = \frac{k\pi}{L} \end{aligned} \quad (2.20d)$$

dersek,

$$b_{ik} = \lambda_k^4 \frac{L}{2}$$

Benzer şekilde,

$$c_{ik} = \int_0^L \frac{d\chi_i}{dz} \frac{d\chi_k}{dz} dz \quad (2.20e)$$

olduğuna göre,

$$\frac{d\chi_i}{dz} = \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi z}{L}$$

$$c_{ik} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \int_0^L \cos \frac{i\pi z}{L} \cos \frac{k\pi z}{L} dz$$

olur.

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L}$$

dersek,

$$c_{ik} = 0 \quad i \neq k \quad (2.20f)$$

$$c_{ik} = \lambda_k^2 \frac{L}{2} \quad i = k$$

Böylece K_{ik} matrisi şu hale gelir, $i = k$ için

$$K_{ik} = K_{kk} = \begin{pmatrix} p_{kk} & 0 & q_{kk} \\ 0 & r_{kk} & s_{kk} \\ q_{kk} & s_{kk} & u_{kk} \end{pmatrix} \quad (2.21a)$$

(2.12) ve (2.20a,b,c,d,e,f) den yararlanarak şunları yazabiliriz ;

$$p_{kk} = m D^2 \frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^4 L}{2} E J_y - \frac{\lambda_k^2 L}{2} P(t)$$

$$r_{kk} = m D^2 \frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^4 L}{2} E J_x - \frac{\lambda_k^2 L}{2} P(t) \quad (2.21b)$$

$$u_{kk} = m D^2 \frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^4}{F^2} E I \frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^2}{F^2} G K \frac{L}{2} - \frac{\lambda_k^2 L}{2} P(t)$$

$$q_{kk} = m \frac{Y_0}{F} D^2 \frac{L}{2} - \frac{Y_0}{F} P(t) \frac{\lambda_k^2 L}{2}$$

$$s_{kk} = - \left(m \frac{X_0}{F} D^2 \frac{L}{2} - \frac{X_0}{F} P(t) \frac{\lambda_k^2 L}{2} \right) \quad (k=1,2,\dots,n)$$

$i \neq k$ için, (2.12) ve (2.20a, ..., f) den :

$$K_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

olduğu görülür.

Böylece (2.13) ifadesi şu hale gelir.

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ q_{11} & s_{11} & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{22} & 0 & q_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_{22} & s_{22} \\ 0 & 0 & 0 & q_{22} & s_{22} & u_{22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \\ f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Bu durumda (2.13) ifadesindeki lineer operatör, kuasidiagonal forma gelmiş olur. Yani $3n$ adet (2.11e) kuplediferansiyel denklem takımı bu şekilde kendi aralarında kup-
le üç denklemden oluşan n adet ayrık denklem takımına dönüşmüş olur.

Şöyleki :

$$p_{kk}f_{1k} + q_{kk}f_{3k} = 0$$

$$r_{kk}f_{2k} + s_{kk}f_{3k} = 0 \quad (2.24a)$$

$$q_{kk}f_{1k} + s_{kk}f_{2k} + u_{kk}f_{3k} = 0 \quad (k=1,2,\dots,n)$$

veya daha açık :

$$\left[m\ddot{D}\frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^4 L}{2} E]_y - \frac{\lambda_k^2 L}{2} P(t) \right] f_{1k} + \left[m\frac{Y_0}{F}\ddot{D}\frac{L}{2} - \frac{Y_0}{F}P(t)\frac{\lambda_k^2 L}{2} \right] f_{3k} = 0$$

$$\left[m\ddot{D}\frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^4 L}{2} E]_x - \frac{\lambda_k^2 L}{2} P(t) \right] f_{2k} - \left[m\frac{X_0}{F}\ddot{D}\frac{L}{2} - \frac{X_0}{F}P(t)\frac{\lambda_k^2 L}{2} \right] f_{3k} = 0 \quad (2.24b)$$

$$\begin{aligned} & \left[m\frac{Y_0}{F}\ddot{D}\frac{L}{2} - \frac{Y_0}{F}P(t)\frac{\lambda_k^2 L}{2} \right] f_{1k} - \left[m\frac{X_0}{F}\ddot{D}\frac{L}{2} - \frac{X_0}{F}P(t)\frac{\lambda_k^2 L}{2} \right] f_{2k} + \\ & + \left[m\frac{G^2}{F^2}\ddot{D}\frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^4}{F^2} E\Gamma\frac{L}{2} + \frac{\lambda_k^2}{F^2} GK\frac{L}{2} - \frac{\lambda_k^2 L}{2} P(t) \right] f_{3k} = 0 \end{aligned}$$

Düzenlersek ;

$$m\frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} + m\frac{Y_0}{F}\frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} + \lambda_k^4 E]_y f_{1k} - P(t)\lambda_k^2 (f_{1k} + \frac{Y_0}{F}f_{3k}) = 0$$

$$m\frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} - m\frac{X_0}{F}\frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} + \lambda_k^4 E]_x f_{2k} - P(t)\lambda_k^2 (f_{2k} - \frac{X_0}{F}f_{3k}) = 0 \quad (2.24c)$$

$$m \frac{Y_0}{F} \frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} - m \frac{X_0}{F} \frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} + m \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} + \frac{1}{F_2} (E \Gamma \lambda_k^4 + G K \lambda_k^2) f_{3k} -$$

$$- \lambda_k^2 P(t) \left[f_{3k} + \frac{Y_0}{F} f_{1k} - \frac{X_0}{F} f_{2k} \right] = 0$$

$$(k=1, 2, \dots, n)$$

2.4. - BAŞLANGIÇ ŞARTLARININ TANIMI

(2.24c) diferansiyel denklemlerinin çıkarılmasında, düşünülen sınır şartları ve ilgili koordinat fonksiyonları ile, bunlar yardımı ile bulunan $U(Z, t)$, $V(Z, t)$, $\beta(Z, t)$ fonksiyonlarının seriyeye açılmış şekli evvelki bölümde ele alınmıştı.

Şimdi benzer şekilde başlangıç şartlarını tesbit edelim.

$$U(Z, 0) = \phi_1(Z) \quad V(Z, 0) = \phi_2(Z) \quad \beta(Z, 0) = \phi_3(Z) \quad (2.25a)$$

$$\left(\frac{\partial U(Z, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi_1(Z) \quad \left(\frac{\partial V(Z, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi_2(Z) \quad \left(\frac{\partial \beta(Z, t)}{\partial t} \right)_{t=0} = \psi_3(Z) \quad (2.25b)$$

Burada $0 \leq Z \leq L$ dir.

Bunları koordinat fonksiyonları yardımıyla seriyeye açarsak ;

$$\phi_1(Z) = \sum_{k=1}^n \phi_{1k} \sin \frac{k\pi Z}{L}, \quad \phi_2(Z) = \sum_{k=1}^n \phi_{2k} \sin \frac{k\pi Z}{L}, \quad \phi_3(Z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{F} \phi_{3k} \sin \frac{k\pi Z}{L} \quad (2.25c)$$

Benzer şekilde

$$\psi_1(Z) = \sum_{k=1}^n \psi_{1k} \sin \frac{k\pi Z}{L}, \quad \psi_2(Z) = \sum_{k=1}^n \psi_{2k} \sin \frac{k\pi Z}{L}, \quad \psi_3(Z) = \sum_{k=1}^n \psi_{3k} \frac{1}{F} \sin \frac{k\pi Z}{L} \quad (2.25d)$$

2.5.- TİTREŞİM DENKLEMLERİNİN VEKTÖR-MATRİS NOTASYONUNDA GÖSTERİMİ

Titreşimin üç simultane denklemini vektör-matris notasyonu kullanarak tek bir diferansiyel denklem şeklinde yazabiliriz. Şöyle ki:

$$\mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{y_0}{r} \\ 0 & 1 & -\frac{x_0}{r} \\ \frac{y_0}{r} & -\frac{x_0}{r} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} EJ_y \lambda_k^4 & 0 & 0 \\ 0 & EJ_x \lambda_k^4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{F_z} (EI \lambda_k^4 + GK \lambda_k^2) \end{pmatrix} \quad (2.26c)$$

Böylece (2.24c) denklem takımı tek bir matris denklem olarak

$$m \mathbf{F} \frac{d^2 \mathbf{f}_k}{dt^2} + [\mathbf{R}_k - \lambda_k^2 \mathbf{P}(t) \mathbf{F}] \mathbf{f}_k = \mathbf{0}$$

$$(k=1,2,3,\dots,n) \quad (2.27a)$$

şeklinde veya

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_k}{dt^2} + \left[\frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R}_k - \lambda_k^2 \mathbf{P}(t) \frac{1}{m} \mathbf{E} \right] \mathbf{f}_k = \mathbf{0} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.27b)$$

şeklinde yazılabilir.

2.6.- ÇUBUĞUN ENERJİ İFADELERİNİN KARELER TOPLAMI HALİNE GETİRİLMESİ

Şimdi (2.24c) denkleminin tanımladığı sisteme ait enerji ifadelerini ele alalım. Bölüm (2.1), (2.2) ve (2.3) den, Kinetik enerji için :

$$T_k = \frac{m}{4} \left[\dot{f}_{1k}^2 + \dot{f}_{2k}^2 + \dot{f}_{3k}^2 + \frac{2Y_0}{r} \dot{f}_{1k} \dot{f}_{3k} - \frac{2X_0}{r} \dot{f}_{2k} \dot{f}_{3k} \right] \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.28a)$$

İç kuvvetlerin potansiyel enerjisi için :

$$U_k = \frac{1}{4} \left[\lambda_k^4 E \dot{f}_{1k}^2 + \lambda_k^4 E \dot{f}_{2k}^2 + \frac{1}{r^2} \lambda_k^4 E \dot{f}_{3k}^2 + \lambda_k^2 \frac{1}{r^2} G K \dot{f}_{3k}^2 \right] \quad (2.28b)$$

ifadelerini yazarsak; ayrıca bunları matris-vektör notasyonunda gösterirsek,

$$T_k = \frac{1}{4} \dot{\mathbf{f}}_k^T [m \mathbf{F}] \dot{\mathbf{f}}_k \quad (k=1,2,3,\dots,n) \quad (2.29a)$$

$$U_k = \frac{1}{4} \dot{\mathbf{f}}_k^T \mathbf{R}_k \dot{\mathbf{f}}_k \quad (k=1,2,3,\dots,n) \quad (2.29b)$$

Şu ifade şeklini kullanarak

$$B(\dot{\mathbf{f}}_k, \dot{\mathbf{f}}_k) = \dot{\mathbf{f}}_k^T [\mathbf{mF}] \dot{\mathbf{f}}_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.30a)$$

$$A(\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k) = \mathbf{f}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{f}_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.30b)$$

veya belirli bir k için (böylece geçici olarak k endisini kaldırabiliriz)

$$\mathbf{B} = \mathbf{mF} \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_k \quad (2.31b)$$

denirse,

$$B(\dot{\mathbf{f}}, \dot{\mathbf{f}}) = \dot{\mathbf{f}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{f}} \quad (2.31c)$$

$$A(\mathbf{f}, \mathbf{f}) = \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f} \quad (2.31d)$$

Öte yandan (2.29a) ve (2.29b) kuadratik formları pozitif definittir. Bu özellik problemin karakterinden görmek kabildir. Şöyle ki; kinetik enerji daima pozitiftir ve sadece sıfır hızlar için sıfırdır. Potansiyel enerji ise denge konumunda bir minimumu haizdir, dolayısı ile pozitif definittir.

Bu iki reel kuvadratik form $A(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \lambda B(\dot{\mathbf{f}}, \dot{\mathbf{f}})$ şeklinde bir kuvadratik form demeti belirlerler.

$B(\dot{\mathbf{f}}, \dot{\mathbf{f}})$ kuvadratik formu daima pozitif definit olduğundan $A(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \lambda B(\dot{\mathbf{f}}, \dot{\mathbf{f}})$ form demeti regulardır denir. Ayrıca

$$|A - \lambda B| = 0 \quad (2.32a)$$

denklemini, $A(f, f) - \lambda B(f, f)$ kuvadratik form demetinin karakteristik denklemi olarak adlandırılır. Öte yandan sözü edilen kuvadratik form demetlerine ait şu teoremleri ele alalım :

Teorem (25) (Vol.1, s.310, Teo.8)

$A(x, x) - \lambda B(x, x)$ formunun regular bir demetinin $|A - \lambda B| = 0$ karakteristik denklemi daima $z^j = (z_{1j}, z_{2j}, z_{3j}, \dots, z_{nj})$ ($j=1, 2, \dots, n$) asal vektörlerine tekabül eden n tane reel λ_k köküne sahiptir.

$$Az^j = \lambda_j Bz^j \quad (j=1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.32b)$$

Bu asal vektörler öyle seçilebilirler ki, δ_{ij} Kronecker deltası olmak üzere

$$B(z^i, z^j) = \delta_{ij} \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \quad (2.32c)$$

bağıntısı sağlanır.

Teorem (25) (Cilt 1, s.314, Teo. 9)

Eğer $Z = \|z_{ij}\|$, $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ formunun regular bir demetinin bir asal matrisi ise, bu durumda

$$x = Z\xi \quad (2.33a)$$

transformasyonu, $A(x, x)$ ve $B(x, x)$ formlarının her ikisini birden kareler toplamına indirger :

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j^2 \quad \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \quad (2.33b)$$

burada $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$; $A(x, x) - \lambda B(x, x)$

demetinin $\mathbf{Z}$ in $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \dots, \mathbf{z}^n$ kolonlarına tekabül eden karakteristik değerleridir.

Bu iki teoremden yararlanarak şu neticelere gelebiliriz.

Öyle bir

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{z} \quad (2.34a)$$

nonsingular transformasyonu mevcuttur ki, bu transformasyon (2.31c) ve (2.31d) deki $\mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ ve $\mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ kuvadratik formlarının her ikisini birlikte kareler toplamı haline getirir.

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^3 \lambda_j z_j^2 \quad (2.34b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^3 z_j^2 \quad (2.34c)$$

Burada λ_j ler

$$|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0 \quad (2.34d)$$

denkleminin kökleridir.

Yani, λ_j ler $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ matrisinin karakteristik değerleridir. Bu karakteristik değerlere $\mathbf{T}$ matrisinin $\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3$ kolonları tekabül eder.

Başka bir deyişle $\mathbf{T}$ matrisi $\mathbf{A}(\mathbf{f}, \mathbf{f}) - \lambda \mathbf{B}(\mathbf{f}, \mathbf{f})$ form demetinin asal matrisidir.

Bu matrise ait asal vektörler öyle seçilebilir ki,

$$B(\mathbf{t}, \mathbf{t}) = \mathbf{t}^i \mathbf{t}^j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.34e)$$

şartı sağlanır.

Öte yandan birinci teoremden şu neticeye varırız : (2.34d) deki **BA** matrisinin daima λ_1 , λ_2 , λ_3 şeklinde, üç reel birbirinden farklı karakteristik değerleri vardır. Bunlara tekabül eden $\mathbf{t}^1$, $\mathbf{t}^2$, $\mathbf{t}^3$ karakteristik vektörlerine ait karakteristik kolonlar (2.32c) şartını sağlarlar ve tam, ortonormal bir sistem teşkil ederler.

Böylece yukarıda özelliklerinden söz edilen koordinat transformasyonu yardımı ile kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri değişik k sayıları için :

$$T_k = \frac{1}{4} [\dot{z}_{1k}^2 + \dot{z}_{2k}^2 + \dot{z}_{3k}^2] \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.35a)$$

$$U_k = \frac{1}{4} [\lambda_1 z_{1k}^2 + \lambda_2 z_{2k}^2 + \lambda_3 z_{3k}^2] \quad (2.35b)$$

şeklinde yazılabilir.

2.7.- DİFERANSİYEL DENKLEM TAKIMININ MODAL ŞEKLİ

Şimdi (2.27b) denklemini ele alalım ve şöyle yazalım:

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_k}{dt^2} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{f}_k - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} \mathbf{f}_k = \mathbf{0} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.36a)$$

Öte yandan öyle bir koordinat sistemi seçmek mümkündür ki bu koordinat sisteminde $\frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R}_k^{-1}$ matrisi diyagonal forma gelir. Şimdi sözü geçen koordinat sistemine geçişi sağlayan non singular transformasyonu şöyle yazalım ;

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{T}_k \mathbf{z}_k \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.36b)$$

Böylece (2.36a) diferansiyel denklemi şu forma dönüştür ;

$$T_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} + \frac{1}{m} \bar{F} R_k^{-1} T_k z_k - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} T_k z_k = 0$$

Öte yandan T_k nonsingular bir matris olduğuna göre ;

$$\frac{d^2 z_k}{dt^2} + T_k^{-1} \left(\frac{1}{m} \bar{F} R_k^{-1} \right) T_k z_k - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_k = 0 \quad (2.36c)$$

(2.36c) ifadesindeki ikinci terimin

$$T_k^{-1} \left(\frac{1}{m} \bar{F} R_k^{-1} \right) T_k = \lambda E$$

şeklinde yazılabilmesi için

$$\left(\frac{1}{m} \bar{F} R_k^{-1} - \lambda E \right) T_k = 0$$

olmalıdır.

T_k nin nonsingular bir matris olduğu hatırlanacak olursa :

$$\left| \frac{1}{m} \bar{F} R_k^{-1} - \lambda E \right| = 0 \quad (2.36d)$$

şeklinde ilgili matrisin karakteristik denklemi elde edilir. Öte yandan Bölüm 2.6 da (2.34d) denklemi ile bu bölümdeki (2.36d) denklemi aynıdır.

Şöyle ki: Bölüm 2.6 ; (2.31a) ve (2.31b) den dolayı

$$B A = \frac{1}{m} \bar{F} R_k^{-1} \quad (2.36e)$$

olduğundan, bu iki denklem aynı karakteristik değerleri verecek böylece karakteristik vektörler de aynı olacaktır. Bu durumda, Bölüm 2.6 da enerji ifadelerinin her ikisini de birlikte (2.35a), (2.35b) şeklinde kareler toplamına indirgeyen koordinat transformasyonu ile, bu bölümde sözü geçen koordinat transformasyonunun aynı olduğu görülmektedir.

Bu demektir ki enerji ifadelerini kareler toplamına getiren transformasyon diferansiyel denklemi de aşağıdaki forma indirger ;

$$\frac{d^2 z_{ik}}{dt^2} + \lambda_i z_{ik} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_{ik} = 0 \quad (i, k=1, \dots, n) \quad (2.37a)$$

Burada λ_i değerleri (2.34d) veya (2.36d) denklemlerinin kökleridir. Bölüm 2.6 da sözü edildiği gibi bu kökler; üç, reel birbirinden farklı köktür ve bunlara, komple ortonormal karakteristik vektörler karşı gelir.

Öte yandan böyle bir transformasyon, görüleceği gibi, çubuğun yüksüz halde serbest eğilmeli-burulmalı titreşimini koordinat fonksiyonu olarak düşünmeye denktir.

Şöyle ki : çubuğun yüksüz halde serbest eğilmeli-burulmalı titreşiminin diferansiyel denklemi ;

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_k}{dt^2} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{f}_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.37b)$$

olduğu açıktır. Eğer

$$\mathbf{f}_k = \mathbf{z}_k \sin(\Omega_k t + \alpha) \quad (2.37c)$$

ifadesi (2.37b) denkleminin bir çözümü ise, ki burada

$\mathbf{z}_k = (z_{k1}, z_{k2}, z_{k3})$ sabit genlik vektörüdür (kolon vektör)
 Ω_k frekans, α ise titreşim başlangıç fazıdır.

Eğer (2.37c) yi (2.37b) de yerine koyarsak :

$$\left(\frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R}_k^{-1} - \Omega_k^2 \mathbf{E} \right) \mathbf{z}_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (2.37d)$$

veya,

$$\frac{1}{m} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{R}_k \mathbf{z}_k = \Omega_k^2 \mathbf{z}_k \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.37e)$$

Böylece, (2.37d) denkleminde faydalanılarak, eğilmeli-burulma serbest titreşim frekanslarını aşağıdaki denklemden elde edebiliriz.

$$\left| \frac{1}{m} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{R}_k - \Omega_k^2 \mathbf{E} \right| = 0 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.38a)$$

buradan Ω_{1k}^2 , Ω_{2k}^2 , Ω_{3k}^2 olarak bütün kökler tesbit edilir.

Öte yandan (2.38a) denklemini (2.34d) ve (2.36d) denklemleri ile aynı olduğu açıktır.

Böylece, şunu yazabiliriz ;

$$\lambda_1 = \Omega_{1k}^2, \quad \lambda_2 = \Omega_{2k}^2, \quad \lambda_3 = \Omega_{3k}^2 \quad (2.38b)$$

O halde (2.37a) dan

$$\frac{d^2 z_{1k}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 z_{1k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_{1k} = 0$$

$$\frac{d^2 z_{2k}}{dt^2} + \Omega_{2k}^2 z_{2k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_{2k} = 0 \quad (2.38c)$$

$$\frac{d^2 z_{3k}}{dt^2} + \Omega_{3k}^2 z_{3k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_{3k} = 0$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

şeklinde ifade etmek kabildir.

BÖLÜM 3

HAREKETİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN İNCELENMESİ

Şimdi (2.38c) denklemlerini ele alalım. Bunlar normal koordinatlarda kolonun eğilmeli-burulma hareketini ifade eden üç adet ikinci mertebeden denklem takımıdır.

İleride görüleceği gibi, uygun değişken dönüşümleri ve matris vektör notasyonu kullanarak bu denklem takımını aşağıdaki formda basit bir şekle indirmek kabil olacaktır. Şimdi, $E_{x,t}^{n+1}$ uzayında sözü edilen formu,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1a)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\mathbf{x} : x_1, x_2, \dots, x_n$ bileşenlerine (t nin fonksiyonu olarak) sahip bir vektör, aynı şekilde yine $\mathbf{X} : X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ bileşenlerine $\mathbf{x}$ ve t nin fonksiyonu olarak sahip bir vektördür.

Ayrıca (3.1a) denklemini E_x^n uzayında, sadece $\mathbf{x}$ in fonksiyonu ve fakat ekspilisit olarak t ye bağlı olmadığı halde şu formda yazmak kabildir ;

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (3.1b)$$

(3.1a) da $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow E_x^n$, $\Omega \subset E_{x,t}^{n+1}$ şeklinde lineer bir operatör, (3.1b) de $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow E_x^n$ $\Omega \subset E_x^n$ şeklinde yine bir lineer operatördür.

Öte yandan hareketin diferansiyel denkleminin (3.1a) formuna ototonom olmayan, (3.1a) formuna ise ototonom, ayrıca $E_{x,t}^{n+1}$ uzayına hareket uzayı, E_x^n uzayına ise faz uzayı diyeceğiz.

Şimdi yine hareketin diferansiyel denklemini ele alalım ve bu diferansiyel denklemin çözümünün varlığı, tekliği ve ayrıca başlangıç değerlerinin sürekli bir fonksiyonu olduğu hakkında (24) teoremini hatırlatalım.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t$ koordinatına ait uzay $E_{x,t}^{n+1}$ ile gösterilsin. Ω ise bu uzayın bir bölgesi olsun.

CAUCHY-LİPSCHİTZ TEOREMİ

Farzedelim ki Ω nın bütün noktalarında $\partial x_n / \partial x_k$ sürekli parsiyel türevleri mevcut olsun. Ayrıca (x^0, t_0) , Ω bölgesinin bir noktasını ifade etsin.

Bu durumda (3.1a) denklem sisteminin tek bir $x(t)$ çözümü vardır. Öyle ki $x(t_0) = x^0$ bu durum bütün bölgesine genişletilebilir ve bu çözüm (x^0, t_0) noktasının, bu nokta Ω bölgesi içinde gezindikçe sürekli bir fonksiyondur.

Şimdi (3.1a) denkleminin bir çözümü $x(t)$ olsun bu çözüm $E_{x,t}^{n+1}$ uzayında bir eğri tanımlar ve bu eğriye (3.1a) denkleminin integral eğrisi denir. (3.1b) denkleminin integral eğrisi, (2.1a) denkleminin integral eğrisinin E_x^n uzayındaki izdüşümüdür. Buna hareketin y ö r ü n g e e ğ r i s i denir.

3.1.- HAREKETİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN BELİRLİ BİR ÇÖZÜMÜNÜN STABİLİTESİNİN İNCELENMESİ

Şimdi bu denklem sisteminin belirli bir çözümünün stabilitesinden söz edelim.

(3.1a) sisteminin belirli bir çözümü $x(t)$ olsun. Başka bir deyişle ;

Belirli bir $\Omega \subset E_{x,t}^{n+1}$ bölgesi içinde CAUCHY-LİPSCHİTZ teoremi (3.1a) denklemini için gerçekleşiyorsa, bu Ω bölgesinin belirli bir (x^0, t_0) noktası için (3.1a) denkleminin çözümü $x(t)$ olsun. Yine bu teoreme göre çözüm (x^0, t_0) noktası için tektir.

Öte yandan şunu söyleyebiliriz ; $E_{x,t}^{n+1}$ uzayında (x^0, t_0) noktasından bu nokta için (3.1a) nin $x(t)$ çözümüne karşı gelen tek bir γ entegral eğrisi geçer. E_x^n de bu entegral eğrisine Γ yörünge eğrisi (x^0, t_0) noktasına ise x^0 noktası karşı gelir ve x^0 dan yine tek bir Γ yörünge eğrisi geçer. Γ ya (3.1b) nin x^0 noktası için çözümüne ait entegral eğrisi gözüyle bakabiliriz.

Öte yandan Γ nin kendisi ve civarı E_x^n de (3.1b) denkleminin çözümüdür. Şimdi, Γ eğrisinin başlangıcı olan x^0 noktasının yeter derecede yakınındaki bir x^1 noktasından başlayan (3.1b) nin başka bir çözümünün Γ^* yörünge eğrisini göz önüne alalım. Buna $E_{x,t}^{n+1}$ uzayında δ^* entegral eğrisi ve Ω bölgesinde (x^0, t_0) noktasına yakın bir (x^1, t_1) noktası karşı gelir.

Şimdi soru şudur ; t arttıkça Γ^* yörünge eğrisi, Γ nin yakınında mı kalır, yoksa ondan uzaklaşır mı?

Birinci hale (x^0, t_0) e karşı gelen $x(t)$ çözümünün stabilitesi, ikinci hale ise instabilitesi karşı gelir.

Bu demektir ki ; (3.1a) veya (3.1b) nin belirli bir çözümüne, çözüm başlangıç değerlerinin sürekli bir fonksiyonu olduğuna göre, belirli bir başlangıç pertürbasyonu verildiğinde bu çözümün stabilite veya instabilitesi söz konusudur.

3.2. - OTONOM HALDE HAREKETİN DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN TRİVİAL ÇÖZÜMÜNÜN STABİLİTESİNİN İNCELENMESİ

Şimdi belirli bir $\Omega : \|x\| < A$ açık küresel bölgesi için varlık teoreminin (3.1b) denklemi için gerçekleştiğini düşünelim. Bu durumda Ω bölgesinin her x noktasından tek bir Γ entegral eğrisi veya yörünge eğrisi geçer. Şimdi (3.1b) denklemini ele alalım :

$$\dot{x} = X(x)$$

Bunun trivial çözümü $\mathbf{x}(t)=0 \quad t>0$ şeklindedir. Bu çözüm $E_{x,t}^{n+1}$ uzayında bir yarım doğru, E_x^n uzayında ise bir nokta ile gösterilir. Denklemin bu çözümüne çubuğun ideal denge konumu karşı gelsin. Sıfır ihtiva eden $\Omega \subset E_x^n$ bölgesinde bu çözüme ait integral eğrisi $\mathbf{x}=0$ noktasından ibarettir.

Başka bir deyimle t nin her değeri için yörünge eğrisi bir nokta olarak belirir.

Şimdi $\mathbf{x}=0$ noktası ve bunun Ω civarı (3.1b) diferansiyel denkleminin çözümü olduğu hatırd tutularak şunu söyleyebiliriz : $\Omega \subset E_x^n$ bölgesi içinde $\mathbf{x}=0$ noktası yanında bir $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ noktasını ele alalım. Bu nokta çubukta başlangıçta mevcut olabilen eksenel eğrilik, kesitte mevcut dönme, eksantrik yükleme gibi başlangıç pertürbasyonları sebebiyle çubuğun ideal denge konumundan bir miktar uzaklaşmasına karşı gelsin.

Bu durumda varlık teoremine göre $\mathbf{x}=\mathbf{a}$ noktasından (3.1b) nin bu nokta için çözümüne tekabül eden tek bir Γ^* yörünge eğrisi geçer. Şimdi t arttıkça bu yörünge eğrisinin $\mathbf{x}=0$ noktasına göre davranışı nasıl olur?

Eğer Γ^* yörünge eğrisi t arttıkça bu noktadan uzaklaşırsa bu durumda sözü edilen başlangıç pertürbasyonu altında (3.1b) sisteminin trivial çözümü instabildir.

Başka bir deyimle, sözü geçen kusurları haiz çubuğun eğilmeli-burulma hareketi t arttıkça çubuğu ideal denge konumundan uzaklaştırır.

Öte yandan Γ^* yörüngesi t arttıkça bu noktanın belirli bir civarında kalıyorsa, bahsi geçen başlangıç pertürbasyonu altında (3.1b) denklemini trivial çözümü stabildir. Yani adı geçen kusurları bulunan bir çubuğun eğilmeli-burulma hareketi, t arttıkça, ideal denge konumu civarında kalır.

Şimdi stabilitenin araştırılmasında kullanılan pertürbasyonların cümlesine $e: \|\mathbf{x}\| < B$

kolonun eğilmeli-burulma hareketini sınırlayan bölgeye de $K(R): \|\mathbf{x}\| < R$ dersek, çubuk için müsaade edilen belirli bir R mevzubahis olduğunda, buna karşı gelen

B/R değerini belirlemek bu çalışmada ele alınan problemin amaçlarındandır.

3.3.- LYAPUNOV'UN DİREK METODU

Lyapunov'un direk metodu, hareketin diferansiyel denkleminin çözümü hakkında herhangi bir bilgiye ihtiyaç olmaksızın bu denklemin triviyal çözümünün stabilitesi üzerine bir kriter kurar. Yani direk metod, diferansiyel denkleme ilâveten faz ve hareket uzayında tariflenen uygun fonksiyonlar kullanarak stabilite kriteri kurar.

İşte bu fonksiyonlara $L y p u n o v$ fonksiyonu denir. Genel olarak stabilite araştırması için Lyapunov fonksiyonlarının işareti ve diferansiyel denklemi için bunların zamana göre türevlerinin işareti irdelenir (24).

Şurası bilinir ki fiziksel sistemlerin denge konumuna yakın konumlarda, sistemin enerjisi azalıyor ise, bu denge konumu stabildir. Lyapunov teoremleri bu fikrin genelleştirmesidir.

Bu teoremler şunlardır :

I) OTONOM HAL İÇİN STABİLİTE TEOREMİ (24)

Eğer orijinin Ω gibi belirli civarında, bir Lyapunov fonksiyonu mevcutsa orijin stabildir.

Teoremden orijin sistemi triviyal çözümünü ifade ediyor ve $\nabla(V)$ Lyapunov fonksiyonu ile de aşağıdaki özellikleri haiz skaler fonksiyon kastediliyor.

Bu özellikler şunlardır :

a) Pozitif definit olmalıdır.

b) Orijini içine alan belirli bir Ω açık bölgesinde birinci mertebeden parsiyel türevleri ile birlikte sürekli olmalıdır.

c) $V(0) = 0$ olmalıdır.

d) Belirli bir Ω açık bölgesinde (3.1b) diferansiyel denkleminin integral eğrisi boyunca zamana göre türevi sıfır veya sıfırdan küçük olmalıdır. Yani :

$$\dot{V}(x) = X \cdot \text{GRAD } V \leq 0$$

olmalıdır.

II) OTONOM OLMAYAN HAL İÇİN STABİLİTE TEOREMİ (24)

Bu hal için stabilite teoreminin ifadesi otonom haldekinin aynıdır. Şu farkla ki ; bu halde,

$$\dot{x} = X(x, t) \quad (3.1a)$$

sistemi ele alınır ve bu sistem için $\Omega : \|x\| < A, t \geq 0$ de varlık ve teklik teoremi geçerli olur. Ayrıca $t \geq 0$ için $X(0, t) = 0$ ifadesi sistemin trivial çözümünü temsil eder.

Lyapunov fonksiyonunun bu halde sahip olduğu özellikler ise şunlardır.

a) $V(x, t)$ fonksiyonu bütün $t \geq 0$ lar için Ω bölgesi içinde tanımlıdır.

b) Bütün $t \geq 0$ lar için $V(0, t) = 0$ olmalıdır.

c) $V(x, t)$ fonksiyonu pozitif definit belirli bir $W(x)$ fonksiyonundan büyük olmalıdır; yani Ω içindeki bütün x ler ve $t \geq 0$ lar için $V(x, t) \geq W(x)$ olmalıdır.

d) Ω bölgesi içinde $\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + X \cdot \text{GRAD } V < 0$ dır.

BÖLÜM 4

KONSERVATİF SİSTEMLER VE LYAPUNOV FONKSİYONU

Şimdi hareketin otonom halde denklemini ele alalım ve

$$\dot{\mathbf{x}} : E_x^n \rightarrow E_x^n$$

operatörünün E_x^n içinde herhangi bir $\mathbf{x}^0$ için sürekli olduğunu farzedelim, ayrıca E_x^n içinde bu $\mathbf{x}^0$ için :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

sistemi tek bir çözümü sahip olsun. Bu çözüm $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ şeklinde başlangıç şartlarının fonksiyonudur ve $t=0$ da $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0$ özelliğine sahiptir.

Şimdi $V : D \subset E_x^n = \mathbb{R}$ fonksiyonu $D \subset E_x^n$ bölgesi içinde, eğer V birinci mertebeden parsiyel türevi ile birlikte sürekli ise ve V fonksiyoneli $D \subset E_x^n$ içinde açık bir cümle üzerinde sabit değilse, ayrıca V (4.1) denkleminin herhangi bir $\mathbf{x}(t)$ çözümü boyunca sabit ise, buna (4.1) denkleminin entegralidir denir. (23)

V nin birinci mertebeden parsiyel türevi havi olması gerektiğinden son özellik bundan yararlanarak şöyle yazılabilir :

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) \text{GRAD } V = 0 \quad (4.2)$$

Böylece (4.1) sistemi E_x^n içinde yukarıda tariflenen bir entegrale sahipse konservatif bir sistem olarak adlandırılır.

Hatırlanacağı gibi problemin hareket denklemlerini kurarken Lagrange ifadelerinden faydalanılmıştı.

Şimdi Lagrange dinamiğine göre ele aldığımız problem için durumu gözden geçirelim.

Otonom hal için Lagrange denklemini yazalım :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4.3a)$$

Burada L , $L = T(\dot{q}) - V(q)$ şeklindedir ve küçük titreşimler teorisi geçerlidir. $T(\dot{q})$ kinetik, $V(q)$ ise sistemin potansiyel enerjileridir. Ayrıca daha evvelce de belirtildiği gibi, q genelleştirilmiş koordinatları, $\dot{q}$ ise genelleştirilmiş hızları karakterize eder.

Şimdi (4.3a) denkleminin her iki yanını $\dot{q}$ ile çarpalım,

$$\dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (4.3b)$$

Öte yandan (4.3b)'e $\ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ve $\frac{\partial L}{\partial t}$ ilâve edip çıkaralım,

$$-\ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \ddot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dot{q} \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.3c)$$

Öte yandan

$$\frac{dL(q, \dot{q})}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

olduğundan, (4.3c) ifadesini aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dL}{dt} = 0 \quad (4.3d)$$

Yani,

$$\frac{d}{dt} (\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (4.3e)$$

Öte yandan incelediğimiz problemde Otonom hal için Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T T \dot{q} - \frac{1}{2} q^T P q \quad (4.4)$$

formundadır.

(4.4) ifadesinden Lagrangianın otonom halde explicit olarak t ye bağılı olmadığı görülür.

Bu durumda $\partial L / \partial t = 0$ olmalıdır. Böylece (4.3e) denklemini şu formda yazabiliriz :

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = 0 \quad (4.5a)$$

Yani,

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = K \quad (4.5b)$$

Bu durumda (4.5b) ifadesi, (4.3a) denkleminin herhangi bir çözümü boyunca zamana göre integraldir ve sistemin toplam enerjisine eşittir.

Şöyle ki :

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^T T \dot{q} - \frac{1}{2} q^T P q$$

olduğu bilindiğine göre

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = T \dot{q} \quad (4.6)$$

olacağı tabiidir.

Şimdi L ifadesini ve (4.6) ifadesini (4.5b) de yerine koyarsak,

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T T \dot{q} + \frac{1}{2} q^T P q \quad (4.7)$$

olarak sistemin toplam enerjisi elde edilir.

Böylece bu bölümden çıkan sonuçlar sırasıyla şunlardır: Probleminizin Otonom halde hareket denklemleri konservatif bir sistem teşkil ederler. Ayrıca toplam enerji ifadesi, otonom hal için Bölüm 3.3 de Lyapunov fonksiyonelinin sağlaması gerekli şartlar olarak belirlenen şartları tamamen sağlar.

BÖLÜM 5

LYAPUNOV'UN DİREKT METODU YARDIMIYLA İMPULSİF YÜKLERE MARUZ,
SİMETRİK OLMAYAN AÇIK ENKESİTLİ İKİ UCUNDAN MAFSALLI ÇUBUK-
LARIN STABİLİTESİNİN İNCELENMESİ

Burada problem simetrik olmayan açık enkesitli iki ucundan mafsallı çubukların denge konumunun Lyapunov anlamında stabilitesinin incelenmesidir. Adı geçen denge konumu, tam manâsı ile doğru eksenli lineer elastik, eksen boyunca bir burulma deformasyonunu haiz olmayan ve tam manâsı ile ekse- nel bir basınç kuvveti altındaki çubuğun denge konumu olarak düşünülecektir.

Pratikte böyle ideal bir konumdan uzaklaşma, her zaman mümkün olabilir.

Örneğin, çubuk ekseninde başlangıçta mevcut bir eğrilik veya eksen boyunca bir burulma deformasyonu, keza bunlara idantik tesirler meydana getiren eksentrik yükleme, denge konumundan uzaklaştıracı sebepler olarak gösterilebilir.

Kusursuz bir denge konumundan, yukarıda bahsedilen veya benzeri sebepler dolayısı ile uzaklaşılması halinde, impulsif karakterdeki eksenel yükün etkimesi, çubukta yanıl bir hareket veya bunun ile birlikte bir burulma hareketi, yani bir eğilmeli-burulma hareketi meydana getirecektir.

Bu hareketin denklemleri Bölüm 2.3 de çıkarılmış, ayrıca Bölüm 3 de, bu denklemin uygun bir formunun, çözüm ve çözümlerinin stabilitesinden söz edilmişti.

Böylece sözü geçen hareket, çubuğun denge konumunun yeter derecede yakın civarında tutulabiliyorsa, impulsif ekse- nel yük altındaki çubuk Lyapunov anlamında stabildir, aksi takdirde stabil değildir.

Bu durumun araştırılmasında Lyapunov'un direk metodu kullanılacaktır. Bölüm 3 de bu metoddan ve bu metodun kullanıldığı Lyapunov fonksiyonunun özelliklerinden bahsedilmişti.

5.1.- BİR EKSENE GÖRE SİMETRİK AÇIK ENKESİTLİ ÇUBUK HALİ

Bu halde (2.24c) ifadelerinde $\gamma_0=0$ koyarsak, bu duruma ait hareket denklemlerine geçebiliriz :

$$m \frac{d^2 f_{1k}}{dt^2} + EJ_y \lambda_k^4 f_{1k} - P(t) \lambda_k^2 f_{1k} = 0 \quad (5.1a)$$

$$m \frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} - m \frac{x_0}{r} \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} + EJ_x \lambda_k^4 f_{2k} - \lambda_k^2 P(t) \left[f_{2k} - \frac{x_0}{r} f_{3k} \right] = 0 \quad (5.1b)$$

$$m \frac{d^2 f_{3k}}{dt^2} - m \frac{x_0}{r} \frac{d^2 f_{2k}}{dt^2} + \frac{1}{r^2} (EJ \lambda_k^4 + GK \lambda_k^2) f_{3k} - \lambda_k^2 P(t) \left(f_{3k} - \frac{x_0}{r} f_{2k} \right) = 0 \quad (5.1c)$$

Bu durumda (5.1a) bağımsız bir denklemdir ve simetri eksenine paralel doğrultuda eğilme titreşimine tekabül eder. Böylece bu çubuk tipinde eğilmeli-burulma titreşim denklemleri (5.1b ve 5.1c) simultane denklemlerdir.

Böylece (2.26) denklemini şu hale gelir :

$$\mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.2a)$$

$$R_k = \begin{pmatrix} E J_k \lambda_k^4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{F_2} (E \Gamma \lambda_k^4 + G K \lambda_k^2) \end{pmatrix} \quad (5.2b)$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x_0}{r} \\ -\frac{x_0}{r} & 1 \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.2c)$$

Bu durumda (5.2) ifadelerinden yararlanarak (5.1b ve 5.1c) denklem takımını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$m F \frac{d^2 f_k}{dt^2} + [R_k - \lambda_k^2 P(t) F] f_k = 0$$

Başka bir formda :

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \left[\frac{1}{m} F R_k - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} F \right] f_k = 0 \quad (5.3a)$$

Öte yandan Bölüm 2.6 ve 2.7 den bilindiği gibi (2.34a) transformasyonunu uygularsak :

$$f_k = T_k z_k \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (2.29b)$$

(5.3a) denklemi şu forma gelir :

$$\frac{d^2 z_{1k}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 z_{1k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_{1k} = 0$$

$$\frac{d^2 z_{2k}}{dt^2} + \Omega_{2k}^2 z_{2k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} z_{2k} = 0 \quad (5.3b)$$

Burada $\Omega_{1k}^2, \Omega_{2k}^2$ değerleri bu hale karşı gelen eğilmeli-burulma serbest titreşimine ait frekanslardır ve bunlar, yine Bölüm 2.7 den bilindiği gibi,

$$\left| \frac{1}{m} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{R}_k - \Omega_k^2 \mathbf{E} \right| = 0 \quad (5.4a)$$

denkleminin çözümünden elde edilir.

Bu denklemi şöyle de yazabiliriz :

$$\left| \mathbf{R}_k - \Omega_k^2 m \mathbf{F} \right| = 0 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.4b)$$

Yukarıdaki denklemi açık olarak yazarsak :

$$\begin{vmatrix} E I_x \lambda_k^4 - m \Omega_k^2 & m \frac{x_o}{r} \Omega_k^2 \\ m \frac{x_o}{r} \Omega_k^2 & \frac{1}{r^2} (E I_x \lambda_k^4 + G K \lambda_k^2) - m \Omega_k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4c)$$

veya

$$\begin{vmatrix} \lambda_k^2 P_{x(k)} - m \Omega_k^2 & m \frac{x_o}{r} \Omega_k^2 \\ m \frac{x_o}{r} \Omega_k^2 & \lambda_k^2 P_{\phi(k)} - m \Omega_k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4d)$$

(k=1,2,\dots,n)

(5.4d) determinantını açarsak

$$(\lambda_k^2 P_{x(k)} - m \Omega_k^2)(\lambda_k^2 P_{\phi(k)} - m \Omega_k^2) - m^2 \frac{x_o^2}{r^2} \Omega_k^4 = 0$$

değişik bir formda yazarsak :

$$\left(P_{x(k)} - \frac{m \Omega_k^2}{\lambda_k^2} \right) \left(P_{\phi(k)} - \frac{m \Omega_k^2}{\lambda_k^2} \right) - \frac{x_0^2 m^2 \Omega_k^4}{r^2 \lambda_k^4} = 0 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.4e)$$

Bu denklemi (1.9) denklemi ile karşılaştırırsak görülür ki, çubuğun burulmalı statik burkulma yükü $m \Omega_k^2 / \lambda_k^2$ ye eşittir. Böylece $m \Omega_k^2 / \lambda_k^2$ yerine P koyar denklemi çözürsük

$$P_{1,2} = \frac{P_{x(k)} + P_{\phi(k)} \mp \sqrt{(P_{x(k)} + P_{\phi(k)})^2 - 4 r_0^2 / r^2 P_{x(k)} P_{\phi(k)}}}{2 r_0^2 / r^2} = P_{x\phi(k)}^{(1,2)} \quad (5.5a)$$

Yani :

$$P_{x\phi(k)}^{(1)} = \frac{m \Omega_{k1}^2}{\lambda_k^2} \quad P_{x\phi(k)}^{(2)} = \frac{m \Omega_{2k}^2}{\lambda_k^2} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.5b)$$

Şimdi (5.3b) denklem takımından hareketle (5.5b) ifadelerinden yararlanarak :

$$\frac{d^2 z_{1k}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 z_{1k} - \lambda_k^2 \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}^{(1)}} P_{x\phi(k)}^{(1)} \frac{1}{m} z_{1k} = 0$$

$$\frac{d^2 z_{2k}}{dt^2} + \Omega_{2k}^2 z_{2k} - \lambda_k^2 \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}^{(2)}} P_{x\phi(k)}^{(2)} \frac{1}{m} z_{2k} = 0$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

Böylece

$$\frac{d^2 z_{1k}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 z_{1k} - \Omega_{1k}^2 \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}^{(1)}} z_{1k} = 0$$

$$\frac{d^2 z_{2k}}{dt^2} + \Omega_{2k}^2 z_{2k} - \Omega_{2k}^2 \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}^{(2)}} z_{2k} = 0$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

veya

$$\frac{d^2 z_{1k}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}} \right) z_{1k} = 0$$

(5.5c)

$$\frac{d^2 z_{2k}}{dt^2} + \Omega_{2k}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}} \right) z_{2k} = 0$$

Şimdi birinci mod'a ait titreşim denklemini ele alalım. Uygun bir değişken dönüşümü ile,

$$x_{1k}^{(1)} = z_{1k}$$

(5.5d)

$$x_{2k}^{(1)} = \frac{dz_{1k}}{dt}$$

(5.5c) ve (5.5d) den :

Otonom olmayan hal için :

$$\frac{dx_{1k}^{(1)}}{dt} = x_{2k}^{(1)}$$

(5.6a)

$$\frac{dx_{2k}^{(1)}}{dt} = -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{x\phi(k)}} \right) x_{1k}^{(1)} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Otonom hal için (yani $P(t)=0$ halinde)

$$\frac{dx_{1k}^{(1)}}{dt} = x_{2k}^{(1)}$$

(5.6b)

$$\frac{dx_{2k}^{(1)}}{dt} = -\Omega_{1k}^2 x_{1k}^{(1)} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Vektör-matris notasyonu kullanarak (5.6a) ve (5.6b) denklem takımını şöyle yazabiliriz :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_{1k}^{(1)}}{dt} \\ \frac{dx_{2k}^{(1)}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{\phi(k)}}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.7a)$$

veya aşağıdaki notasyonu kullanarak

$$\mathbf{x}_k^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{\phi(k)}}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{kt}^{(1)} \mathbf{x}_k^{(1)} \quad (5.7b)$$

$$\mathbf{x}_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{1k}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{k0}^{(1)} \mathbf{x}_k^{(1)} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.7c)$$

Otonom olmayan hal için :

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \mathbf{x}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.8a)$$

ve otonom hal için :

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \mathbf{x}_k^{(1)}(\mathbf{x}) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.8b)$$

matris denklemi elde edilir.

İkinci mod'a ait titreşim denklemini ele alalım, benzer tarzda uygun bir değişken dönüşümü ile,

$$\begin{aligned} x_{1k}^{(2)} &= z_{2k} \\ x_{2k}^{(2)} &= \frac{dz_{2k}}{dt} \end{aligned} \quad (5.9a)$$

Böylece birinci mod için izlenen yoldan giderek :

$$\mathbf{x}_k^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{1k}^{(2)} \\ x_{2k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_k^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{2k}^2 \left(1 - \frac{p(t)}{p_{x\phi(k)}}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(2)} \\ x_{2k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.9b)$$

$$\mathbf{x}_k^{(2)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{2k}^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(2)} \\ x_{2k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.9c)$$

buradan; otonom olmayan hal için:

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(2)} = \mathbf{x}_k^{(2)}(\mathbf{x}, t) \quad (5.10a)$$

ve otonom hal için :

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(2)} = \mathbf{x}_k^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (5.10b)$$

matris denklemleri elde edilir.

Yükün tesir şeklini şöyle tanımlıyalım :

$$P(t) = P_t \varnothing(t) \geq 0 \quad (5.11a)$$

Burada $\varnothing(t)$ fonksiyonu yükün değişimini karakterize eder ve $t \geq 0$ bölgesinde tanımlı, sürekli ve kısmî olarak türevlidir. Ayrıca, aşağıki özellikleri haizdir :

$$0 \leq \varnothing(t) \leq 1 \quad [0, t_d] \quad (5.11b)$$

$$\varnothing(t) = 0 \quad t > t_d \quad (5.11c)$$

Bu durumda (5.7b) ve (5.9b) deki

$$X_{(k)}^{(i)}(x, t)$$

matrisleri

şu formda yazılabilir;

$$X_{(k)}^{(1)}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{t0(1)}} \varnothing(t)\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.12a)$$

$$X_{(k)}^{(2)}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{2k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{t0(2)}} \varnothing(t)\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(2)} \\ x_{2k}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.12b)$$

Öte yandan (5.5c) modal denklemlerine karşı gelen karşı gelen modal enerji ifadelerini ele alalım :

Bölüm 2.6 dan biliyoruz ki hareketin diferansiyeli denklemini modal forma getiren transformasyon, enerji ifadelerini de karaler toplamı haline getirir.

Şöyle ki, konservatif halde :

Sistemin kinetik enerji ifadesi şu formdadır :

$$T_k = \frac{1}{4} [\dot{Z}_{1k}^2 + \dot{Z}_{2k}^2] \quad (2.35a)$$

Sistemin iç kuvvetlerinin potansiyel enerjisi ise, aşağıdaki şekilde yazılabilir ;

$$U_k = \frac{1}{4} [\Omega_{1k}^2 Z_{1k}^2 + \Omega_{2k}^2 Z_{2k}^2] \quad (2.35b)$$

Burada Ω_{1k} ve Ω_{2k} tek simetri eksenli açık kesite sahip iki ucu mafsallı çubuğa ait eğilmeli-burulma serbest titreşim frekanslarıdır.

Buradan modal enerji ifadelerine geçmek mümkündür. Şöyle ki :

Birinci mod için kinetik enerji ifadesi :

$$T_k^{(1)} = \frac{1}{4} \dot{Z}_{1k}^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.14a)$$

Birinci mod için iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi :

$$U_k^{(1)} = \frac{1}{4} \Omega_{1k}^2 Z_{1k}^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.14b)$$

İkinci mod için kinetik enerji ifadesi :

$$T_k^{(2)} = \frac{1}{4} \dot{Z}_{2k}^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.14c)$$

İkinci mod için iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi:

$$U_k^{(2)} = \frac{1}{4} \Omega_{2k}^2 Z_{2k}^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.14d)$$

Şimdi $\vec{x}$ iki boyutlu EUCLİD uzayında $\mathbf{x}_k^{(i)}(x_{1k}, x_{2k})$ vektörünün bu uzayın belirli bir baz sisteme itibarla bileşenlerini ifade ettiğine göre $\mathbf{x}$ bu vektörün koordinat vektörüdür. ve bir kolon matris şeklinde ifade edilir. Böylece tanımlanan uzaya faz uzayı diyorduk.

Bu uzaya ilâveten x_{1k}, x_{2k}, t değerlerine ait $E_{x,t}$ üç boyutlu uzayı, yani hareket uzayını da ele almak gereklidir. Bu uzayda $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, t çifti bir eğri çizer ki buna hareket eğrisi denir.

Şimdi (5.10a) denklemini ele alalım; eğer $R(A,0) \subset E_{x,t}^3$ ise, ayrıca burada $R(A,0)$ bölgesi $\|\mathbf{x}\| < A, t \geq 0$ şeklinde tanımlansın ve A değeri, küçük yer değiştirmeler teorisinin sınırını ifade etsin; bu durumda (5.10a) denklemi $R(A,0) \subset E_{x,t}^3$ alt uzayında çubuğun eğilmeli-burulmalı hareketini ifade eder.

Bu özellikleri haiz olan (5.10a) denklemine, Bölüm 3 den OTONOM OLMAYAN SİSTEM dendiğini biliyoruz.

Benzer şekilde (5.10b) denklemini ele alalım. Eğer $R(A) \subset E_x^2$ ise, ayrıca burada $R(A)$ bölgesi $\|\mathbf{x}\| < A$ şeklinde tanımlansın, ilâveten A değeri küçük yer değiştirmeler teorisinin sınırını teşkil etsin, bu durumda (5.10b) denklemi $R(A) \subset E_x^2$ alt uzayında çubuğun eğilmeli-burulmalı hareketini ifade eder.

Yine Bölüm 3 den bu denklem sistemine OTONOM sistem dendiğini biliyoruz.

Şimdi (2.34a) daki T_k transformasyon matrisini tayin edelim.

Bölüm 2.5 ve 2.6 dan yararlanarak enerji ifadelerini transformasyondan evvelki hali ile şöyle yazalım :

(2.28a,b) den tek simetri eksenli kesitler için kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri :

$$T_k = \frac{1}{4} B(\dot{f}_k, \dot{f}_k) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.15a)$$

$$U_k = \frac{1}{4} A(f_k, f_k) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.15b)$$

Burada $B(\dot{f}_k, \dot{f}_k)$ ve $A(f_k, f_k)$ ifadeleri (2.30a,d) den

$$B(\dot{f}_k, \dot{f}_k) = \dot{f}_k^T B \dot{f}_k$$

$$A(f_k, f_k) = f_k^T A f_k \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Yine burada,

$$B = [mF] = \begin{pmatrix} m & -m \frac{x_0}{r} \\ -m \frac{x_0}{r} & m \end{pmatrix} \quad (5.15c)$$

$$A = R_k = \begin{pmatrix} \lambda_k^2 p_{xk} & 0 \\ 0 & \lambda_k^2 p_{\theta k} \end{pmatrix} \quad (5.15d)$$

Bölüm 2.6 ve 2.7 den biliyoruz ki bu transformasyonla enerji ifadelerinin her ikisini birden kareler toplamına getirebildiğimiz gibi, hareketin diferansiyel denklemini de modal forma getirebiliyorduk. Şimdi bu özellikteki T_k transformasyon matrisini elde etmeğe çalışalım. (2.32b) den şunu yazabiliriz.

$$At^i = \omega_i Bt^i, \quad \omega_i = \Omega_{ki}^2 \quad i=1,2 \quad (5.16a)$$

Böylece **A** ve **B** matrislerini aşağıdaki şekilde düşü-
nerek :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} \quad (5.16b)$$

(5.16a) ve (5.16b) den hareketle açık olarak yazılırsa
için:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} \quad (5.16c)$$

veya

$$\begin{pmatrix} a_{11} t_{11} \\ a_{22} t_{21} \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} b_{11} t_{11} + b_{12} t_{21} \\ b_{12} t_{11} + b_{11} t_{21} \end{pmatrix}$$

buradan,

$$(a_{11} - \omega_1 b_{11}) t_{11} - \omega_1 b_{12} t_{21} = 0$$

$$-\omega_1 b_{12} t_{11} - (a_{22} - \omega_1 b_{11}) t_{21} = 0$$

Öte yandan denklemin katsayılar determinantının sıfır
olduğu (5.4c) ve (5.4d) ifadelerinden açıktır.

Bu durumda t_{11} i keyfi bırakıp birinci denklemi atarak,

$$t_{21} = \frac{\omega_1 b_{12}}{a_{22} - \omega_1 b_{11}} t_{11} \quad (5.16d)$$

Aynı şeyler $i=2$ için yapılacak olursa

$$\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} \quad (5.17a)$$

veya

$$\begin{pmatrix} a_{11} t_{12} \\ a_{22} t_{22} \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} b_{11} t_{12} + b_{12} t_{22} \\ b_{12} t_{12} + b_{11} t_{22} \end{pmatrix}$$

buradan

$$(a_{11} - \omega_2 b_{11}) t_{12} - \omega_2 b_{12} t_{22} = 0$$

$$-\omega_2 b_{12} t_{12} + (a_{22} - \omega_2 b_{11}) t_{22} = 0$$

Bu denklemin katsayılar determinantı da, (5.4c) ve (5.4d) den açıkça bellidir ki, sıfırdır.

Böylece ikinci denklemi atıp t_{22} yi keyfi bırakarak :

$$t_{12} = \frac{\omega_2 b_{12}}{a_{11} - \omega_2 b_{11}} t_{22} \quad (5.17b)$$

Öte yandan Bölüm 2.6 da Teorem 8 den biliyoruz ki,

$$B(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) = \mathbf{t}_i^T B \mathbf{t}_j = \delta_{ij}$$

olmalıdır.

Böylece, $B(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_1) = 1$ olacak şekilde (2.16d) den yararlanarak t_{11} i bulalım.

Kuvadratik form demetinin asal matrisi T_K yi şöyle yazmak mümkündür :

$$T_K = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \frac{\omega_2 b_{12}}{a_{11} - \omega_2 b_{11}} t_{22} \\ \frac{\omega_1 b_{12}}{a_{22} - \omega_1 b_{11}} t_{11} & t_{22} \end{pmatrix} \quad (5.17c)$$

Bu matrisin birinci kolonu $\mathbf{t}^1$ ikinci kolonu $\mathbf{t}^2$ asal vektörlerini gösterdiği bilindiğine göre :

$$B(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^1) = \mathbf{t}^{1T} B \mathbf{t}^1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ \frac{\omega_1 b_{12}}{a_{22} - \omega_1 b_{11}} t_{11} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{11} \frac{\omega_1 b_{12}}{a_{22} - \omega_1 b_{11}} t_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ \frac{\omega_1 b_{12}}{a_{22} - \omega_1 b_{11}} t_{11} \end{pmatrix}$$

$$B(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^1) = b_{11} t_{11}^2 + 2 \frac{\omega_1 b_{12}}{a_{22} - \omega_1 b_{11}} t_{11}^2 + \frac{\omega_1^2 b_{11} b_{12}^2}{(a_{22} - \omega_1 b_{11})^2} t_{11}^2 = 1$$

Gerekli değerler yerine konup ara işlemler yapıldığında :

$$t_{11} = \frac{P_{xK} - P_{x\phi(K)}^{(1)}}{\sqrt{m(P_{\phi K}^2 - 2 \frac{r_z^2}{r_z^2} P_{x\phi(K)}^{(1)} P_{\phi K} + P_{x\phi(K)}^{(1)2} \frac{r_z^2}{r_z^2})}} \quad (5.18a)$$

(5.16d) de yerine konursa,

$$t_{21} = \frac{-\frac{x_0}{F} P_{x\phi(K)}^{(1)}}{\sqrt{m(P_{\phi K}^2 - 2 \frac{r_z^2}{r_z^2} P_{x\phi(K)}^{(1)} P_{\phi K} + P_{x\phi(K)}^{(1)2} \frac{r_z^2}{r_z^2})}} \quad (5.18b)$$

Benzer şekilde (5.17b) den yararlanarak $B(\mathbf{t}^2, \mathbf{t}^2) = 1$ olacak şekilde t_{22} yi bulalım :

$$B(\mathbf{t}^e, \mathbf{t}^e) = \mathbf{t}^T B \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2 b_{12}}{a_{11} - \omega_2 b_{11}} t_{22} \\ t_{22} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega_2 b_{12}}{a_{11} - \omega_2 b_{11}} t_{22} \\ t_{22} \end{pmatrix}$$

$$B(\mathbf{t}^e, \mathbf{t}^e) = \frac{\omega_2 b_{11} b_{12}}{(a_{11} - \omega_2 b_{11})^2} t_{22}^2 + \frac{\omega_2 b_{12}^2}{a_{11} - \omega_2 b_{11}} t_{22}^2 + \frac{\omega_2 b_{12}^2}{a_{11} - \omega_2 b_{11}} t_{22}^2 + b_{11} t_{22}^2 = 1$$

Gerekli değerler yerine konulup ara işlemler yapıldığında :

$$t_{22} = \frac{P_{xk} - P_{x\phi(k)}^{(2)}}{\sqrt{m(P_{xk}^2 - 2P_{x\phi(k)}^{(2)} P_{xk} \frac{F_2^2}{F_2} + P_{x\phi(k)}^{(2)2} \frac{F_2^2}{F_2})}} \quad (5.19a)$$

(5.17b) de bu değer yerine konursa:

$$t_{12} = \frac{-\frac{x_0}{F} P_{x\phi(k)}^{(2)}}{\sqrt{m(P_{xk}^2 - 2P_{x\phi(k)}^{(2)} P_{xk} \frac{F_2^2}{F_2} + P_{x\phi(k)}^{(2)2} \frac{F_2^2}{F_2})}} \quad (5.19b)$$

Böylece asal matrisi yazarsak, k ya bağlı olduğundan k endisi kullanarak,

$$T_k = \begin{pmatrix} \frac{P_{xk} - P_{x\phi(k)}^{(1)}}{\sqrt{m(P_{xk}^2 - 2P_{x\phi(k)}^{(1)} P_{xk} \frac{F_2^2}{F_2} + P_{x\phi(k)}^{(1)2} \frac{F_2^2}{F_2})}} & \frac{-\frac{x_0}{F} P_{x\phi(k)}^{(2)}}{\sqrt{m(P_{xk}^2 - 2P_{x\phi(k)}^{(2)} P_{xk} \frac{F_2^2}{F_2} + P_{x\phi(k)}^{(2)2} \frac{F_2^2}{F_2})}} \\ \frac{-\frac{x_0}{F} P_{x\phi(k)}^{(1)}}{\sqrt{m(P_{xk}^2 - 2P_{x\phi(k)}^{(1)} P_{xk} \frac{F_2^2}{F_2} + P_{x\phi(k)}^{(1)2} \frac{F_2^2}{F_2})}} & \frac{P_{xk} - P_{x\phi(k)}^{(2)}}{\sqrt{m(P_{xk}^2 - 2P_{x\phi(k)}^{(2)} P_{xk} \frac{F_2^2}{F_2} + P_{x\phi(k)}^{(2)2} \frac{F_2^2}{F_2})}} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

(k=1,2,...,n)

5.11.- LYAPUNOV FONKSİYONUNUN SAPTANMASI

Evvelki bölümden de anlaşılacağı gibi, ele alınan çubuğun eğilmeli-burulmalı titreşimini ifade eden denklemler değişken yükün tesiri altında OTONOM OLMAYAN bir sistem teşkil ederler. Kuvvetin tesiri kalktığı anda OTONOM bir sistem teşkil ederler.

Burada Lypunov fonksiyonunun teşkili için şöyle bir yol izlenecektir (22). Evvelâ OTONOM hal için bu fonksiyon bulunacak OTONOM OLMAYAN faz için genişletilecektir. Bu durumda OTONOM OLMAYAN fazda bu fonksiyon, zamanın bir fonksiyonu ve OTONOM fazda bulunan LYAPUNOV fonksiyonunun bir araya gelmesinden oluşacaktır.

Genel halde, zamana bağlı bu fonksiyonu tam manâsıyla bulmaya imkân yoktur. Yalnız otonom olmayan fazda Lyapunov fonksiyonunun, stabilitenin mümkün olması için gerçekleştirilmesi gerekli şartlar dolayısı ile, zamana bağlı bu fonksiyonu bir fonksiyon ailesi şeklinde tanımlamak suretiyle elde etmek mümkün olacaktır.

5.11.1- OTONOM HALDE LYAPUNOV FONKSİYONUNUN SAPTANMASI

Bu hal için hareket denklemi daha evvelki bölümlerden de bilindiği gibi,

$$\ddot{x}_k^{(i)} = X_k^{(i)}(x) \quad (i=1,2) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.15)$$

sistemin konservatif olduğu daha evvelki bölümlerden açıktır. Ayrıca Bölüm 4 den bilindiği üzere, sistemin toplam enerji ifadesi bu hal için Lyapunov fonksiyonu olarak teklif edilebilir.

Böylece sistemin modal toplam enerji ifadesi,

$$U_{TK}^{(i)} = \frac{1}{4} (\Omega_{ik}^2 Z_{ik}^2 + \dot{Z}_{ik}^2) = U_K^{(i)} + T_K^{(i)} \quad \begin{matrix} (i=1,2) \\ (k=1,2,\dots,n) \end{matrix} \quad (5.16a)$$

(5.5d) değişken dönüşümü uyarınca (5.16a) ifadesi şu hale gelir :

$$U_{T(k)} = \frac{1}{4}(\Omega_{ik}^2 x_{1k}^{(i)^2} + x_{2k}^{(i)^2}) = C \quad (i=1,2) \\ (k=1,2,\dots,n) \quad (5.16b)$$

Burada C sabit pozitif bir sayıdır. Buradan Lyapunov fonksiyonuna şöyle geçebiliriz : N pozitif bir sabiti göstermek üzere:

$$V_k^{(i)}(\mathbf{x}) = N(\Omega_{ik}^2 x_{1k}^{(i)^2} + x_{2k}^{(i)^2}) \quad (i=1,2) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.16c)$$

Bu ifadede i eğilmeli-burulma titreşiminin modlarını karakterize ediyor. Böylece Lyapunov fonksiyonu eğilmeli-burulma titreşiminin modlarına göre :

Birinci mod için :

$$V_k^{(1)}(\mathbf{x}) = N(\Omega_{1k}^2 x_{1k}^{(1)^2} + x_{2k}^{(1)^2}) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.17a)$$

İkinci mod için :

$$V_k^{(2)}(\mathbf{x}) = N(\Omega_{2k}^2 x_{1k}^{(2)^2} + x_{2k}^{(2)^2}) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.17b)$$

Birinci modu ele alalım. Bu halde hareketin diferansiyel denklemi :

$$\text{Otonom halde} \quad \dot{\mathbf{x}}_k^{(1)} = \mathbf{X}_k^{(1)}(\mathbf{x}) \quad (5.18a)$$

Ayrıca bu mod için Lyapunov fonksiyonu vektör-matris formunda :

$$V_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = N \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Omega_{1k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k}^{(1)} \\ x_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.18b)$$

veya

$$V_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = N \mathbf{x}_{k(1)}^T \mathbf{N}_k \mathbf{x}_{k(1)} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.18c)$$

Burada :

$$N_k = \begin{pmatrix} \Omega_{1k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.18d)$$

Görülüyor ki, (5.18c) ifadesi 2 boyutlu faz uzayında kuvadratik bir form ifade ederler.

Şimdi (5.18c) ifadesinin otonom halde bir Lyapunov fonksiyonu olabilmesi için gerçekleştirmesi gerekli şartlar, Bölüm 3 den bilindiği gibi :

- a) Pozitif definit olmalıdır,
- b) $R(A)$ açık bölgesinde birinci mertebeden parsiyel türevleri ile birlikte sürekli olmalıdır.
- c) $\mathbf{x}=0$ da $V=0$ olmalıdır.
- d) $R(A)$ bölgesinde $\dot{V} = \mathbf{x} \text{GRAD} V < 0$ olmalıdır.
- a) Şartının tahkiki :

$V_k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kuvadratik formunun pozitif definit olması için, gerek ve yeter şart J.J.SYLVESTER (27) tarafından verilmiştir. Bu şart ise N_k simetrik matrisinin determinantının ardışık minörlerinin pozitif olmasıdır.

Yani $|B| = |b_{ij}|$ ise,

$$b_{11} > 0 ; \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0 ; \dots ; \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Öte yandan N_k simetrik matrisinin determinantının bu şartı sağlayacağı açıktır.

b) şartının tahkiki :

$V_k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kuvadratik formu $R(A)$ bölgesinde birinci mertebeden parsiyel türevleri ile birlikte süreklidir. Çünkü bu ifade sistemin potansiyel enerjisi ile kinetik enerjisinin toplamının bir sabitle çarpımına eşittir.

Öte yandan konservatif bir sistemde bu toplamın Bölüm 4 den bilindiği gibi parsiyel türevleri ile birlikte sürekli olduğu aşîkârdır.

c) Şartının tahkiki :

$V_k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ifadesi sistemin toplam enerjisinin bir sabitle çarpımı olduğuna göre Bölüm 4 den bilindiği gibi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ için potansiyel ve kinetik enerjinin sıfır olmaları gerektiğinden $V_k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ifadesi de sıfır olur.

d) Şartının tahkiki :

Bunun için $\dot{V}_k^{(1)} = \mathbf{x}_k^{(1)T} \text{GRAD } V_k^{(1)} \leq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için (5.18c) ifadesinin zamana göre türevini alalım :

$$\dot{V}_k^{(1)} = N(\dot{\mathbf{x}}_k^{(1)T} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(1)T} \mathbf{N}_k \dot{\mathbf{x}}_k^{(1)}) \quad (k=1,2,\dots,n)$$

(5.18a) dan hareketle şunları yazabiliriz :

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(1)T} = \mathbf{x}_k^{(1)T} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.19a)$$

Şimdi (5.7a,b,c) den,

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(1)T} = \mathbf{x}_k^{(1)T} \mathbf{H}_{k0}^{(1)} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.19b)$$

Bunlar türev ifadesinde yerine konacak olursa :

$$\dot{V}_k^{(1)} = N(\mathbf{x}_k^{(1)T} \mathbf{H}_{k0}^{(1)} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(1)T} \mathbf{N}_k \mathbf{H}_{k0}^{(1)} \mathbf{x}_k^{(1)}) \quad (5.19c)$$

Öte yandan şu ifadeler söz konusudur :

$$H_{KO}^{(1)T} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{AK}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N_K^{(1)} = \begin{pmatrix} \Omega_{AK}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_{KO}^{(1)T} N_K^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{AK}^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{AK}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{AK}^2 \\ \Omega_{AK}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19d)$$

$$N_K^{(1)} H_{KO}^{(1)} = \begin{pmatrix} \Omega_{AK}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{AK}^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{AK}^2 \\ -\Omega_{AK}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19e)$$

(5.19d,e) ifadeleri (5.19c) de yerine konursa

$$\dot{V}_K^{(1)} = N \mathbf{x}_K^T \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{AK}^2 \\ \Omega_{AK}^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_K^{(1)} + N \mathbf{x}_K^T \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{AK}^2 \\ -\Omega_{AK}^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_K^{(1)} \quad (5.20a)$$

yani

$$\dot{V}_K^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \quad (5.20b)$$

Böylece (d) şartı sağlanmış oldu. Ayrıca bunun böyle olacağı Bölüm 4, (4.5a) dan bellidir.

Bu durumda $V_K^{(1)}$ fonksiyonunun otonom hal için bir Lyapunov fonksiyonu olduğu sonucuna varılmış oldu. Bu demektir ki (5.18a) denkleminin orijini, yani $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ çözümü, $t \geq t_d$ için stabil bir denge konumu ifade ediyor.

5.112- OTONOM OLMAYAN HAL İÇİN LYAPUNOV FONKSİYONUNUN SAP-TANMASI VE KRİTİK YÜK GENLİĞİNİN ELDE EDİLİŞİ.

Bu halde Lyapunov fonksiyonunu şöyle saptayalım : (5.18c) ifadesini ele alalım, bunu aşağıdaki şekilde otonom olmayan hal için genişletelim (18) :

$$K(t) = N + g(t) \quad (5.21a)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece :

$$V_k(\mathbf{x}, t) = K(t) \mathbf{x}_k^{(n)T} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k^{(n)} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5.21b)$$

(5.21b) ifadesinin otonom olmayan hal için bir Lyapunov fonksiyonu olması şu şartların gerçekleşmesi ile mümkündür. Bu şartlar Bölüm 3 den bilindiği gibi şunlardır :

a) $V(\mathbf{x}, t)$ ve $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonları $R(A, 0)$ bölgesi içinde sürekli fonksiyonlar olmalıdır.

b) $V(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonu, pozitif tarifli bir $W(\mathbf{x})$ fonksiyonundan $R(A, 0)$ bölgesi içinde büyük olmalıdır.

c) $t \geq 0$ için $V(0, t) = W(0) = 0$ olmalıdır.

d) $\dot{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \mathbf{x}^T \text{GRAD } V \leq 0$ olmalıdır.

(5.21a) ifadesinde N pozitif bir sabittir, $g(t)$ ise şimdi ki halde bilinmeyen bir fonksiyondur. (5.21b) fonksiyonunun bir Lyapunov fonksiyonu olabilmesi için, sağlaması gerekli dört şartın koyduğu sınırlamalarla $g(t)$ fonksiyonunu bir fonksiyon ailesi olarak tanımlamak mümkün olacaktır.

Şimdi (5.21b) skaler fonksiyonunun adı geçen şartları sağlayıp sağlamadığını araştırmadan önce $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ türev ifadesini yazalım.

Bunun için (5.21b) ifadesinin zamana göre türevini alarak :

$$\dot{V}_k^{(n)}(\mathbf{x}, t) = \dot{K}(t) \mathbf{x}_k^{(n)T} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k^{(n)} + K(t) \dot{\mathbf{x}}_k^{(n)T} \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k^{(n)} + K(t) \mathbf{x}_k^{(n)T} \mathbf{N}_k \dot{\mathbf{x}}_k^{(n)} \quad (5.21c)$$

(5.7b, 5.8a ve 5.12a) dan,

$$\dot{\mathbf{x}}_k^{(4)} = \mathbf{H}_{kt}^{(4)} \mathbf{x}_k^{(4)}, \quad \mathbf{H}_{kt}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{4k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{\text{max}}^{(4)}} \phi(t)\right) & 0 \end{pmatrix}$$

olduğunu biliyoruz.

Böylece (5.21c) den hareketle,

$$\dot{\mathbf{V}}_k^{(4)}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{K}}(t) \mathbf{x}_k^{(4)\top} \mathbf{N}_k^{(4)} \mathbf{x}_k^{(4)} + \mathbf{K}(t) \left[\mathbf{x}_k^{(4)\top} \mathbf{H}_{kt}^{(4)\top} \mathbf{N}_k^{(4)} \mathbf{x}_k^{(4)} + \mathbf{x}_k^{(4)\top} \mathbf{N}_k^{(4)} \mathbf{H}_{kt}^{(4)} \mathbf{x}_k^{(4)} \right]$$

Öte yandan,

$$\mathbf{H}_{kt}^{(4)\top} \mathbf{N}_k^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{4k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{\text{max}}^{(4)}} \phi(t)\right) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{4k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{kt}^{(4)} \mathbf{N}_k^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{4k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{\text{max}}^{(4)}} \phi(t)\right) \\ -\Omega_{4k}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ayrıca şu işlemi de yapalım :

$$\mathbf{N}_k^{(4)} \mathbf{H}_{kt}^{(4)} = \begin{pmatrix} \Omega_{4k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{4k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{\text{max}}^{(4)}} \phi(t)\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{4k}^2 \\ -\Omega_{4k}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{\text{max}}^{(4)}} \phi(t)\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Türev ifadesinde yerine koyarsak :

$$\begin{aligned} \dot{V}_k^{(1)} &= \dot{K}(t) X_k^T \begin{pmatrix} \Omega_{1k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_k^{(1)} + \\ &+ K(t) X_k^T \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P_E}{P_{x\phi(k)}} \phi(t)\right) \\ \Omega_{1k}^2 & 0 \end{pmatrix} X_k^{(1)} + \\ &+ K(t) X_k^T \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1k}^2 \\ -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P_E}{P_{x\phi(k)}} \phi(t)\right) & 0 \end{pmatrix} X_k^{(1)} \end{aligned}$$

veya gerekli sadeleştirmeleri yaparak :

$$\dot{V}_k^{(1)} = X_k^T \begin{pmatrix} \dot{K}(t) \Omega_{1k}^2 & K(t) \Omega_{1k}^2 \frac{P_E}{P_{x\phi(k)}} \phi(t) \\ K(t) \Omega_{1k}^2 \frac{P_E}{P_{x\phi(k)}} \phi(t) & \dot{K}(t) \end{pmatrix} X_k^{(1)} \quad (5.22a)$$

Böylece türev ifadesini kuadratik form olarak elde etmiş olduk.

Şimdi (5.21b) skaler fonksiyonunun otonom olmayan halde bir Lyapunov fonksiyonu olabilmesi için gerçekleştirmesi gerekli şartların araştırmasını yapalım.

a) şartının tahkiki :

$V_k^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ skaler fonksiyonunun $R(A, 0)$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon olabilmesi için, $K(t)$ fonksiyonunun $t \geq 0$ için, t nin sürekli bir fonksiyonu olması lâzımdır. Şöyle ki (5.21b) ifadesini ele alırsak :

$$V_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) = K(t) \mathbf{x}_k^T \mathbf{N}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(1)} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (5.21b)$$

formundadır. Öte yandan otonom halde $V_k^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_k^T \mathbf{x}_k \mathbf{N}_k \mathbf{x}_k^{(1)}$ fonksiyonunun $R(A) \subset E_x^2$ bölgesinde sürekli olduğunu biliyoruz. Otonom olmayan halde $V_k^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ nin, $R(A, 0) \subset E_{x,t}^3$ bölgesinde sürekli olabilmesi için $K(t)$ nin, $t > 0$ için t nin sürekli bir fonksiyonu olmasının gerekliliği açıktır. Böylece bu şart (a) şartının gerçekleşmesi için birinci şart olarak ortaya çıkar.

Öte yandan $\dot{V}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ nin $R(A, 0) \subset E_{x,t}^3$ bölgesinde sürekli olabilmesi için, $\phi(t)$ fonksiyonunun $t > 0$ için sürekli bir fonksiyonu olduğu Bölüm 5.1 den bilindiğine göre, aşağıki türev ifadesi tetkik edilecek olursa :

$$\dot{V}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \dot{K}(t) \mathbf{x}_k^T \begin{pmatrix} \Omega_{1k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k^{(1)} + K(t) \mathbf{x}_k^T \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P}{P_{\text{m}}(t)} \phi(t)\right) \\ \Omega_{1k}^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k^{(1)}$$

$$+ K(t) \mathbf{x}_k^T \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{1k}^2 \\ -\Omega_{1k}^2 \left(1 - \frac{P}{P_{\text{m}}(t)} \phi(t)\right) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_k^{(1)}$$

$K(t)$ nin $t \geq 0$ için t nin sürekli bir fonksiyonu olması şartına ilaveten, $\dot{K}(t)$ nin de $t \geq 0$ için t nin sürekli bir fonksiyonu olması, ikinci şart olarak ortaya çıkar.

b) Şartının araştırılması

Burada $\mathbb{W}_k(\mathbf{x})$ fonksiyonu olarak $\mathbb{V}_k^{(1)}(\mathbf{x})$ ifadesini ele alalım. Yani :

$$\mathbb{W}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{N} \mathbf{x}_k^T \mathbf{N}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(1)} \quad (5.22b)$$

$\mathbb{V}(\mathbf{x})$ nin pozitif definit olduğu otonom halde gösterilmiştir. $\mathbb{V}(\mathbf{x}, t)$ nin $R(A, 0) \subset E_{x,t}^3$ bölgesinde bundan büyük olabilmesi için, $K(t) = N + g(t)$ ifadesinde, $g(t)$ fonksiyonunun $[0, t_d]$ aralığında $g(t) \geq 0$ olması gerekir. Burada N , keyfî pozitif bir sabittir.

Böylece, $g(t) \geq 0$ şartı gerçekleştiğinde, $R(A, 0) \subset E_{x,t}^3$ bölgesinde,

$$\mathbb{V}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) = [N + g(t)] \mathbf{x}_k^T \mathbf{N}_k^{(1)} \mathbf{x}_k^{(1)} \geq \mathbb{W}(\mathbf{x}) \quad (5.22c)$$

eşitsizliği yazılabilir.

c) şartının araştırılması

$\mathbb{W}(\mathbf{x})$ ve $\mathbb{V}^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ ifadeleri tetkik edildiğinde $t \geq 0$ için $\mathbb{V}_k^{(1)}(\mathbf{0}, t) = \mathbb{W}(\mathbf{0}) = 0$ eşitliğinin varlığının aşikâr olduğu ortaya çıkar.

d) şartının araştırılması

Bu şart (5.22a) kuvadratik formunun matrisinin (-1) ile çarpımından meydana gelen matrisin elemanları ve dolayısı ile $K(t)$ fonksiyonu üzerine bazı kısıtlamalar koyar. Şöyle ki, kuvadratik form teorisinden hareket edildiğinde $-\dot{\mathbb{V}}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t)$ ifadesinin, $-\dot{\mathbb{V}}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) > 0$ olması için yine $K(t)$ ve $\dot{K}(t)$ fonksiyonları belirli özelliklere sahip olmalıdır.

Böylece (5.22a) dan hareketle,

$$-\dot{V}_k^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_k^T \begin{pmatrix} \dot{K}(t)\Omega_{1k}^2 & -K(t)\Omega_{1k}^2 \frac{P_t}{P_{x\phi(k)}^{(1)}} \phi(t) \\ -K(t)\Omega_{1k}^2 \frac{P_t}{P_{x\phi(k)}^{(1)}} \phi(t) & -\dot{K}(t) \end{pmatrix} \mathbf{x}_k^{(1)} \quad (5.22d)$$

(k=1,2,...,n)

(5.22b) kuvadratik formunun pozitif olması için, J.J.SYLVESTER (27) tarafından verilen gerek ve yeter şartı kullanalım. Bu şart kuvadratik formun matrisinin determinantının ardışık asal minörlerinin sıfırdan büyük olması idi.

Şimdi ardışık asal minörlerin pozitif olmaları için gerekli şartları saptıyalım. Bunun için matrisin determinantını yazalım.

$$D = \begin{vmatrix} -\dot{K}(t)\Omega_{1k}^2 & \dots & -K(t)\Omega_{1k}^2 \frac{P_t}{P_{x\phi(k)}^{(1)}} \phi(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -K(t)\Omega_{1k}^2 \frac{P_t}{P_{x\phi(k)}^{(1)}} \phi(t) & \dots & -\dot{K}(t) \end{vmatrix} \quad (5.22e)$$

$$-\dot{K}(t)\Omega_{1k}^2 \geq 0 \quad (5.23a)$$

bu eşitliğin mümkün olabilmesi için $\dot{K}(t) \leq 0$ olmalıdır.

$$\dot{K}^2(t) \Omega_{1K}^2 - K^2(t) \Omega_{1K}^4 \frac{P_t^2}{P_{x\phi(K)}^{(1)2}} \geq 0 \quad (5.23b)$$

bu eşitsizlikten ise şu netice çıkar: eşitlik halinde, $\dot{K}(t)$ yani $\dot{q}(t)$; $\phi(t)$ sıfır olmadıkça, sıfır olamaz.

Eşitsizlik halinde ise şu mevzubahistir :

$$P_t^2 \leq \frac{\dot{K}^2(t)}{K^2(t) \phi^2(t)} \frac{P_{x\phi(K)}^{(1)2}}{\Omega_{1K}^2} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.24a)$$

Böylece (5.23b) deki eşitsizliğin sağlanması için gereken sınırlama

$$P_t < \frac{|\dot{K}(t)|}{K(t) \phi(t)} \frac{P_{x\phi(K)}^{(1)}}{\Omega_{1K}} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.24b)$$

olur. Buradan şunu söyleyebiliriz: eğilmeli-burulma titreşimin ikinci normal mod'u içinde aynı şeyler geçerlidir. Bu durumda :

$$P_t < \frac{|\dot{K}(t)|}{K(t) \phi(t)} \frac{P_{x\phi(K)}^{(2)}}{\Omega_{2K}} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.24c)$$

Şimdi $V_k^{(i)}(x,t)$ $i=1,2$ skaler fonksiyonunun OTONOM OLMAYAN halde bir LYAPUNOV fonksiyonu olabilmesi için $K(t)=N+q(t)$ fonksiyonunun sağlaması gerekli şartları özetleyelim.

a) $q(t)$, $t \geq 0$ için t nin sürekli bir fonksiyonu olmalıdır.

b) $\dot{q}(t)$, $t \geq 0$ için t nin sürekli bir fonksiyonu olmalıdır.

c) $\dot{q}(t)$, $t \geq 0$ için $\dot{q}(t) \leq 0$ $\phi(t) = 0$

$\dot{q}(t) < 0$ $\phi(t) \neq 0$

d) $g(t) > 0$ olmalıdır $[0, t_d]$ için.

e) $g(t) = 0$ olmalıdır $t \geq 0$ için.

Şimdi yukarıdaki özelliklere sahip $g(t)$ fonksiyonu ailesini tanımlıyalım. Bunun için aşağıdaki özelliklere sahip bir $F(t)$ eğri ailesi düşünelim (18).

α) $F(t)$, $t \geq 0$ bölgesinde tarifli ve süreklidir.

β) $(0, t_d)$ aralığında $F(t) > 0$ dır.

γ) $t \geq t_d$ için $F \equiv 0$ dır.

θ) $\frac{\varnothing(t)}{F(t)}$, $t \geq 0$ için sonludur.

Şimdi $g(t)$ fonksiyonu ailesini, yukarıdaki dört şartı sağlayan eğri ailesinden yararlanarak tanımlıyabiliriz, şöyle ki :

$$g(t) = \frac{1}{t_d} \int_t^{t_d} F(\xi) d\xi \quad (5.25a)$$

dersek türevini alarak,

$$\dot{g}(t) = -\frac{F(t)}{t_d} < 0 \quad t \geq 0 \quad \text{ için } \quad (5.25b)$$

Böylece tanımlanan $g(t)$ fonksiyonu ailesi (a, ..., e) şartlarını sağlar.

Şimdi (5.24b) ifadesini ele alalım :

$$P_t < \frac{\dot{K}(t)}{K(t)\varnothing(t)} \frac{P_{x\varnothing(k)}^{(n)}}{\Omega_{4k}} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

veya

$$P_t < \frac{\dot{g}(t)}{K(t)\varnothing(t)} \frac{P_{x\varnothing(k)}^{(n)}}{\Omega_{4k}} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Bu ifadeye (5.25b) yi koyarsak :

$$P_t < \frac{F(t)}{t_d K(t)\varnothing(t)} \frac{P_{x\varnothing(k)}^{(n)}}{\Omega_{4k}} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Öte yandan :

$$\theta(t) = \frac{N + g(t)}{F(t)} \varnothing(t) \quad (5.25c)$$

dersek ve

$$\xi = \sup [\theta(t) : 0 < t < t_d] \quad (5.25d)$$

denirse

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\varnothing(k)}^{(1)}}{\Omega_{1k}} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.25e)$$

Benzer şekilde :

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\varnothing(k)}^{(2)}}{\Omega_{2k}} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.25f)$$

Bu ifade form olarak Siegfried M.Holzer'in (18) iki simetri eksenini haiz kesitli çubuklar için bulmuş olduğu ifade ile aynıdır. Yalnız söz konusu çalışmada ifade modlardan bağımsız çıkmıştır. Halbuki (5.25e,f) ifadeleri modlara bağlıdır.

Böylece (5.25) eşitsizlikleri sağlandığında söz konusu mod LYAPUNOV anlamında stabildir. Bu şu demektir; öyle bir başlangıç pertürbasyonu cümlesi mevcut olabilir ki, bunlara karşı gelen model hareket belirli bir sınır içinde hapsedilebilir.

Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde yukarıda sözü geçen sınır ve bu sınıra karşı gelen başlangıç pertürbasyonları cümlesi arasında bir bağıntı kurmaya çalışılacaktır.

5.113- ELDE EDİLEN STABİLİTE KRİTERİNİN YORUMU

Şimdi Bölüm 5.112 deki stabilite şartlarını ele alarak şöyle bir yorum yapabiliriz :

Serbest titreşimin $k=n$ nci moduna ve eğilmeli-burulma titreşiminin 1. ve 2. moduna ait modal hareket denklemlerinin çözümünün stabilitesini mümkün kılan şartlar sırasıyla

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\phi(n)}^{(1)}}{\Omega_{1n}} \quad (5.25e)$$

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\phi(n)}^{(2)}}{\Omega_{2n}} \quad (5.25f)$$

dur.

Böylece genliği yukarki şartları sağlayan impulsif bir yük için ilgili modal hareket denklemlerinin, yani sırasıyla

$$\ddot{x}_n^{(1)} = X_n^{(1)}(x, t) \quad (5.25g)$$

$$\ddot{x}_n^{(2)} = X_n^{(2)}(x, t) \quad (5.25h)$$

stabilitesi sağlanmış olur. Öte yandan bu demektir ki(5.25e, f) kriterleri sadece n nci mod için bir manâ ifade etmektedir. n den büyük ve küçük modlar için bu kriterler geçerli değildir. Böylece buraya kadar, bütün modlar için tek bir stabilite kriteri vermek mümkün olamamıştır.

Böyle bir kriterin bulunabilmesi için önce çubuğun impulsif yükleme halinde modal cevap karakterinin bilinmesi gereklidir.

5.1131- TEK SİMETRİ EKSENLİ AÇIK ENKESİTLİ ÇUBUĞUN İMPULSİF YÜK ALTINDA MODAL CEVAP ANALİZİ

Cevap analizine, çubuğun modal hareket denklemlerini ele alarak başlayalım.

Bu denklemler :

$$\frac{d^2 z_{ik}}{dt^2} + \Omega_{ik}^2 \left(1 - \frac{P_t}{P_{x\phi(n)}^{(i)}} \phi(t) \right) z_{ik} = 0 \quad (5.26a)$$

$$(i=1,2) \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Burada (i) normal mod numarasını, k ise serbest titreşim modlarının numarasını belirlemektedir.

Şimdi mevzu, P_t nin belirli değerleri için maksimum amplifiye edilen modun (cevabı en fazla olan mod) numarasının saptanmasıdır. Öte yandan H.E.LİNDBERG (17), darbeli yükleme halinde ve özellikle çelik malzeme söz konusu olduğunda, burkulma dalga boyunun veya başka bir deyimle burkulma modunun saptanmasında aksiyal dalga yayılımının tesirinin ihmal edilebileceğini, yani yükün çubuk boyu sabit olduğunu düşünenin yeterli olacağını teorik ve deneysel yönlerden göstermiştir.

Bu durumda burkulma dalga boyunun saptanması için (5.26a) denklemini şöyle yazmak yeterlidir :

$$\frac{d^2 z_{ik}}{dt^2} + \Omega_{ik} \left(1 - \frac{P_t}{P_{\phi(k)}^{(i)}}\right) z_{ik} = 0 \quad (i=1,2) \quad (k=1, \dots, n) \quad (5.26b)$$

Böylece LAVRENTİER, M.A. ve ISHINSKY, A.V. nin (16) maksimum amplifiye edilen modun saptanmasında kullandığı metodu benimseyerek, bu hal için maksimum amplifiye edilen modu tanımlıyalım.

$$\alpha_{ik}^2 = \Omega_{ik}^2 \left(\frac{P_t}{P_{\phi(k)}^{(i)}} - 1\right) \quad (5.26c)$$

dersek, (5.26b) denklemi şu hale gelir :

$$\frac{d^2 z_{ik}}{dt^2} - \alpha_{ik}^2 z_{ik} = 0 \quad (i=1,2) \quad (k=1,2, \dots, n) \quad (5.26d)$$

Bu denklemden ve (5.26c) den yararlanarak şu irdilemeyi yapmak mümkündür :

a) Eğer $P_t > P_{\phi(k)}^{(i)}$ ise $\alpha_{ik}^2 > 0$ dır. Bu durumda (5.26d) denkleminin çözümü hiperbolik formdadır. Yani exponansiyel artım söz konusudur.

b) Eğer $P_t < P_{\phi(k)}^{(i)}$ ise $\alpha_{ik}^2 < 0$ dır. Bu durumda (5.26d) denkleminin çözümü bir sinüs ve kosinüs fonksiyonudur. Yani titreşim hali söz konusudur.

c) Eğer $P_t = P_{x\phi(k)}^{(i)}$ ise $\alpha_{ik} = 0$ dır. Bu durumda (5.26d) denkleminin çözümü t ye göre birinci derece bir polinomdur ve bu hâl (a) ile (b) arasındaki sınırı ifade eder.

Şimdi (a) hâli için (5.26d) denkleminin çözümünü yazalım ; Normal koordinatlara indirgenmiş başlangıç değerleri:

$$Z_{ik}(0) = U_{ik} \quad \dot{Z}_{ik}(0) = \dot{U}_{ik} \quad \text{ise çözüm : (5.27a)}$$

$$Z_{ik} = U_{ik} \cosh \alpha_{ik} t + \frac{\dot{U}_{ik}}{\alpha_{ik}} \sinh \alpha_{ik} t \quad (5.27b)$$

$$Z_{ik} = U_{ik} \cosh \left[\Omega_{ik} \sqrt{\frac{P_t}{P_{x\phi(k)}} - 1} \right] t + \frac{\dot{U}_{ik}}{\left[\Omega_{ik} \sqrt{\frac{P_t}{P_{x\phi(k)}} - 1} \right]} \sinh \left[\Omega_{ik} \sqrt{\frac{P_t}{P_{x\phi(k)}} - 1} \right] t \quad (5.27c)$$

(5.27c) ifadesinden yararlanarak maksimum amplifike edilen mod için şunlar söz konusudur.

Maksimum amplifike edilen mod $\mu = \frac{P_t}{P_{x\phi(k)}^{(i)}}$ sayısını $\min \mu > 1$ yapan moddur. Gerçekten $\alpha_{ik} > 0$ değeri $\min \mu > 1$ şartını sağlayan μ lar için maksimumdur. Çünkü Ω_{ik} değerleri modlarla μ ye kıyasla daha hızlı artar ve μ ye kıyasla değerce çok büyüktür.

α_{ik} değeri büyüdükçe belirli bir $t=t_1$ zamanı için (5.27b) ifadesi benzer şekilde büyüyen değerler verir. Böylece $\max \alpha_{ik} > 0$ için maksimum amplifikasyon elde edilir.

Buradan şu neticeye gelinmiş olur :

İmpulsif yükleme altında ele alınan çubuğun maksimum amplifike edilen modu, burkulma yükü P_t amplitüdüne en yakın fakat ondan ufak olan moddur. Bu ise $\min \mu > 1$ şartı demektir.

Öte yandan benzeri şekilde (b) hali için (5.26d) denkleminin çözümünü yazalım.

Yine normal koordinatlara getirilmiş başlangıç değerleri :

$$Z_{ik}(0) = U_{ik} \quad \dot{Z}_{ik}(0) = \dot{U}_{ik} \quad (5.27d)$$

Denklemin çözümü :

$$Z_{ik} = U_{ik} \cos \left[\Omega_{ik} \sqrt{1 - \frac{P_{\phi(k)}}{P_{\phi(k)}}} t \right] + \frac{\dot{U}_{ik}}{\left[\Omega_{ik} \sqrt{1 - \frac{P_{\phi(k)}}{P_{\phi(k)}}} \right]} \sin \left[\Omega_{ik} \sqrt{1 - \frac{P_{\phi(k)}}{P_{\phi(k)}}} t \right] \quad (5.27e)$$

Bu halde bir serbest titreşim söz konusudur. (c) haline ait çözümü ise şöyle yazabiliriz :

$$Z_{ik} = At + B \quad (5.27f)$$

5.1132 - TEK SİMETRİ EKSENLİ AÇIK ENKESİTLİ İKİ UCU MAFSALLI ÇUBUĞUN MODAL STABİLİTE KRİTERLERİNDEN, ÇUBUĞUN BÜTÜN MODLARI İÇİN GEÇERLİ TEK BİR STABİLİTE KRİTERİNE GEÇİŞ

Şimdi her bir modal denkleme karşı gelen modal stabilite kriterini ele alalım,

$$P_t < P_{ik(CR)} = \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{\phi(k)}^{(i)}}{\Omega_{ik}} \quad (i=1,2) \quad (k=1, \dots, n) \quad (5.28a)$$

Bu ifadede $1/\xi t_d$ sayısı impuls fonksiyonunun şekli, yükün tesir müddeti ve öngörülen amplifikasyon sınırı ile değişir. Buna karşılık modlarla değişmez.

Öte yandan :

$$\Omega_{ik}^2 = \frac{\lambda_k^2}{m} P_{\phi(k)}^{(i)}, \quad \Omega_{ik} = \lambda_k \sqrt{\frac{1}{m} P_{\phi(k)}^{(i)}} \quad (5.28b)$$

olduğundan Ω_{ik} , (k) arttıkça $P_{\phi(k)}^{(i)}$ den daha hızlı artar. Bu durumda $P_{ik(CR)}$, (k) arttıkça azalır. Buna karşılık (i) ile bu değişim şöyle ifade edilir :

$$P_{1k(CR)} < P_{2k(CR)} \quad (5.28c)$$

Bu neticeyi nümerik hesapla saptamak kabildir. Böylece maksimum amplifike edilen modun numarası (k^*) ise $k^* \leq \min k = k_{CR}$ olmak şartıyla (k_{CR}) numaralı mod'a ait (5.28a) stabilite kriterine çubuğun bütün modları için geçerli bir stabilite kriteri gözü ile bakılabilir.

Burada k_{CR} maksimum amplifike edilen moddan büyük fakat ona en yakın mod numarasıdır.

Gerçekten $P_t < P_{ik(CR)}, k=k_{CR}$ şartı sağlandığında $P_t < P_{ik(CR)}, (k=1, \dots, k^*)$ şartları otomatikman sağlanmış olur. Çünkü daha evvel de bahsedildiği gibi $P_{ik(CR)}, (k)$ arttıkça azalır.

Şimdi yukarıda tanımlanan k_{CR} numaralı mod'a kritik mod dersek, bu mod'a ait şart da kritik stabilite şartı olur. Öte yandan belirli bir impuls fonksiyonu için karşı gelen kritik modun ve bağımlı olarak kritik stabilite şartının tanımlanması söz konusudur. Bu durumda $1/\xi t_d = M$ dersek, impuls fonksiyonunun belli olması, M sayısının belli olması demektir. $i, (i=1,2)$ nin belirli bir değeri için, maksimum amplifike edilen mod kavramından hareketle şunu söyleyebiliriz :

Kritik mod serbest titreşim frekansı değerce M sayısına eşit veya ondan küçük olan mod'dur. Yani :

$$\max. \Omega_{ik} \leq M \quad (i=1,2) \quad (k=1,2, \dots, n) \quad (5.28d)$$

şartını sağlayan moddur. Buna karşılık $i=1, i=2$ normal modları için (5.28d) şartı :

$$\max. \Omega_{1k} \leq M, \max. \Omega_{2k} \leq M \quad (k=1,2, \dots, n) \quad (5.28e)$$

haline gelir.

Bu demektir ki her iki şarttan elde edilen kritik mod numarası değişiktir. Fakat buna karşılık bu şartları sağlayan Ω_{1n} ve Ω_{2m} değerleri birbirine yakındır.

Bu durumda söz konusu olan stabilite kriterlerini yazıp karşılaştırırsak ve M/Ω_{1n} ve M/Ω_{2m} sayılarının birbirine yakın sayılar olduğunu düşünürsek :

$$P_{1n(CR)} = \frac{M}{\Omega_{1n}} P_{x\phi(n)}^{(1)} < P_{2m(CR)} = \frac{M}{\Omega_{2m}} P_{x\phi(m)}^{(2)} \quad (5.28f)$$

eşitsizliği söz konusudur. Çünkü $i=2$ halinde $P_{x_{\phi(k)}}^{(2)}$ burkulma yükleri $i=1$ halindeki $P_{x_{\phi(k)}}^{(1)}$ burkulma yüklerinden daima büyüktür.

Bu duruma göre çubuğun genel stabilite şartının saptanmasında $i=1$ haline ait kritik modun ele alınması yeterlidir. Öte yandan (k_{cr}) kritik modundan büyük modlar için, kritik stabilite şartı sağlandığından, yine stabilite söz konusudur. Zira (k_{cr}) kritik modu veya $k^* \leq \min k = k_{cr}$ şartını sağlayan herhangi bir modun maksimum amplifike edilmesine karşılık (k_{cr}) dan büyük numaralı modlar çok az amplifike edilirler.

5.114 - AMPLİFİKASYON SINIRININ TANIMI

Eğilmeli-burulmalı titreşimin birinci modunu ele alalım: (5.18c) kuvadratik formundan hareketle,

$$V_k^{(1)} = N X_k^{(1)T} N_k^{(1)} X_k^{(1)} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

Buradan şu ifadeyi yazalım :

$$X_k^{(1)T} N_k^{(1)} X_k^{(1)} = \begin{pmatrix} X_{1k}^{(1)T} \\ X_{2k}^{(1)T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{1k}^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1k}^{(1)} \\ X_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} = B(X, X) \quad (5.29a)$$

Bu ifade incelenecek olursa, X vektörünün E_x^2 iki boyutlu EUCLID uzayının ortogonal bir baz sistemine göre, uzunluğunun karesini verir. Öte yandan nonsingular bir koordinat transformasyonu düşünelim. Şöyle ki :

$$\begin{pmatrix} X_{1k}^{(1)} \\ X_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_{1k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1k}^{(1)} \\ Y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.29b)$$

Bu transformasyonla geçilen E_x^2 iki boyutlu EUCLID uzayının diğer bir baz sisteminde, (5.18c) kuvadratik formu şu hale gelir :

$$V_k^{(1)} = N \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_{1k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_{1k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Buradan :

$$V_k^{(1)} = N \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Omega_{1k}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_{1k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad V_k^{(1)} = N \Omega_{1k}^2 \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Öte yandan şunu yazabiliriz :

$$B(y_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.29c)$$

ve şunu söyleyebiliriz. (5.26c) ifadesi, $\vec{y}_k$ vektörünün E_x^2 iki boyutlu EUCLID uzayının ortonormal baz sisteminde normunun karesini verir. Yani

$$B(y_k^{(1)}, y_k^{(1)}) = \|y_k^{(1)}\|^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.30a)$$

Aynı şeyler eğilmeli-burulmalı titreşimin ikinci modu için de söylenebilir. Böylece :

$$B(y_k^{(2)}, y_k^{(2)}) = \|y_k^{(2)}\|^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.30b)$$

Öte yandan (5.18c) formu bu halde şöyle yazılabilir :

$$V_k^{(1)} = N \Omega_{1k}^2 \|y_k^{(1)}\|^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.31a)$$

Benzer şekilde :

$$V_k^{(2)} = N \Omega_{2k}^2 \|y_k^{(2)}\|^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.31b)$$

Böylece (5.29b) transformasyonu ile titreşimin birinci ve ikinci modu için sırayla şunları yazabiliriz :

$$\frac{dy_{1k}^{(1)}}{dt} = \Omega_{1k} y_{2k}^{(1)}$$

$$\frac{dy_{2k}^{(1)}}{dt} = -\Omega_{1k} \left(1 - \frac{P_E}{P_{\Sigma(k)}} \phi(t)\right) y_{1k}^{(1)} \quad (5.32a)$$

$$(k=1,2,\dots,n)$$

$$\frac{dy_{1k}^{(2)}}{dt} = \Omega_{2k} y_{2k}^{(2)}$$

$$\frac{dy_{2k}^{(2)}}{dt} = -\Omega_{2k} \left(1 - \frac{P_E}{P_{\Sigma(k)}} \phi(t)\right) y_{1k}^{(2)} \quad (5.32b)$$

Otonom halde bu denklemler şu hali alır :

$$\frac{dy_{1k}^{(1)}}{dt} = \Omega_{1k} y_{2k}^{(1)}$$

$$\frac{dy_{2k}^{(1)}}{dt} = -\Omega_{1k} y_{1k}^{(1)}$$

$$(k=1,2,\dots,n) \quad (5.33a)$$

$$\frac{dy_{1k}^{(2)}}{dt} = \Omega_{2k} y_{2k}^{(2)}$$

$$\frac{dy_{2k}^{(2)}}{dt} = -\Omega_{2k} y_{1k}^{(2)}$$

$$(5.33b)$$

Şimdi (5.32) denklemlerini vektör-matris formunda yazalım :

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{1k}^{(1)}}{dt} \\ \frac{dy_{2k}^{(1)}}{dt} \end{pmatrix} = \Omega_{1k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 - \frac{P_E}{P_{\Sigma(k)}} \phi(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1k}^{(1)} \\ y_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.34a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{1K}^{(1)}}{dt} \\ \frac{dy_{2K}^{(1)}}{dt} \end{pmatrix} = \Omega_{2K} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 - \frac{P_K}{P_{K0}} \phi(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1K}^{(1)} \\ y_{2K}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.34b)$$

(5.33) denklemini aynı notasyonla yazarsak :

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{1K}^{(1)}}{dt} \\ \frac{dy_{2K}^{(1)}}{dt} \end{pmatrix} = \Omega_{4K} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1K}^{(1)} \\ y_{2K}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (5.35a)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_{1K}^{(2)}}{dt} \\ \frac{dy_{2K}^{(2)}}{dt} \end{pmatrix} = \Omega_{2K} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1K}^{(2)} \\ y_{2K}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.35b)$$

olur.

Diğer taraftan aşağıdaki notasyonlar kullanılarak,

$$Y_K^{(1)} = \begin{pmatrix} y_{1K}^{(1)} \\ y_{2K}^{(1)} \end{pmatrix} \quad Y_K^{(2)} = \begin{pmatrix} y_{1K}^{(2)} \\ y_{2K}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (5.36a)$$

$$N_{Kt}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 - \frac{P_K}{P_{K0}} \phi(t)) & 0 \end{pmatrix} \quad N_{Kt}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1 - \frac{P_K}{P_{K0}} \phi(t)) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36b)$$

$$N_{K0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{4K} \\ -\Omega_{4K} & 0 \end{pmatrix} \quad N_{K0}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{4K} \\ -\Omega_{4K} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.36c)$$

(5.35a) ve (5.35b) denklemleri aşağıdaki hale gelir :

$$\dot{Y}_k^{(1)} = N_{kt}^{(1)} Y_k^{(1)} , \quad \dot{Y}_k^{(2)} = N_{kt}^{(2)} Y_k^{(2)} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.37a)$$

$$\dot{Y}_k^{(1)} = N_{ko}^{(1)} Y_k^{(1)} , \quad \dot{Y}_k^{(2)} = N_{ko}^{(2)} Y_k^{(2)} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.37b)$$

Şimdi otonom olmayan halde (5.31a,b) ifadelerini şöyle yazabiliriz :

$$V_k^{(1)}(Y,t) = K(t) \Omega_{4k}^2 \|Y_k^{(1)}\|^2 \quad (5.38a)$$

$$V_k^{(2)}(Y,t) = K(t) \Omega_{2k}^2 \|Y_k^{(2)}\|^2 \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.38b)$$

Öte yandan $\|Y_k^{(1)}\| = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < A$ öngörülen sınırı göster-sin ve,

$$\|Y_k^{(1)}\| = \varepsilon \quad \text{ için } \quad W_k(Y_k^{(1)}) = \delta \quad (5.39a)$$

olsun.

$R(A,0)$ içinde $V_k(Y,t) \geq W_k(Y)$ olduğunu bildiğimize göre, başlangıç kusuru olarak alabileceğimiz değer $V(Y,0)$ ifadesi-ni $W(Y) = \delta$ dan küçük yapmamalıdır. Böylece ; $V(0,t) = 0$ olduğundan ve $V(Y,t)$ nin, $R(A,0)$ bölgesinde sürekli bir fonksiyon oluşu yüzünden, süreklilik teoremi uyarınca öy-le bir $\delta(\gamma,0)$ sayısı bulunabilir ki :

$$\|Y_k^{(1)} - 0\| < \delta \quad (5.39b)$$

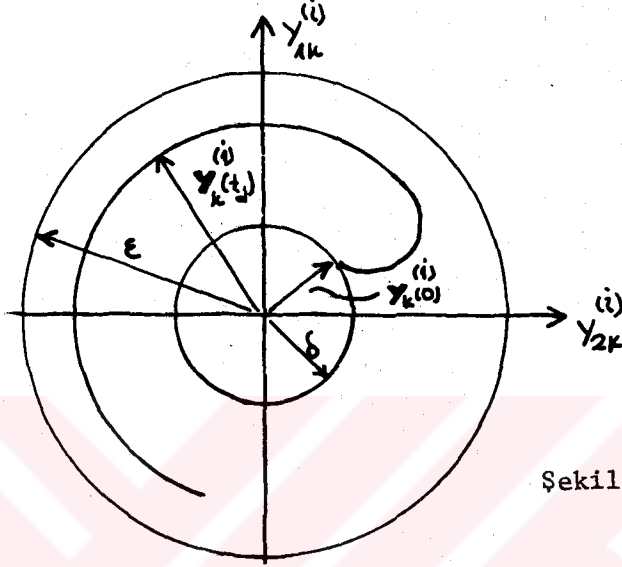
ifadesine uygun gelen bütün $Y_k^{(1)}$ ler için :

$$|V_k^{(1)}(Y_k^{(1)},0) - V_k^{(1)}(0,0)| < \delta \quad (5.39c)$$

olur (18)

Buradan şunu yazabiliriz :

$$\|Y_k^{(i)}\| = \delta \quad \text{için} \quad V_k^{(i)}(Y_k^{(i)}, 0) = \delta \quad (5.39b)$$



Şekil 4

Böylece, Lyapunov stabilite teoremine göre (5.37a,b) denklem sistemine ait, $\|Y_k^{(i)}\| < \delta$ $i=1,2$ açık bölgesinde başlıyan her yörünge $\|Y_k^{(i)}\| < \varepsilon$ $i=1,2$ açık bölgesi içinde hapsolunacaktır.

Burada $\alpha_f = \varepsilon/\delta$ amflikasyon sınırını gösterecektir. Şimdi α yi şöyle tanımlıyalım : $k=n$ halinde :

$$\|Y_n^{(i)}\| = \varepsilon \quad \text{için} \quad W_n(Y_n^{(i)}) = N\Omega_{4n}^2 \varepsilon^2 = \delta \quad (5.40a)$$

olduğunu biliyoruz. $G = g(0)$ olduğuna göre :

$$\|Y_n^{(i)}\| = \delta \quad \text{için} \quad V_n^{(i)}(Y, 0) = (N+G)\Omega_{4n}^2 \delta^2 = \delta \quad (5.40b)$$

olduğu yine bizim için bellidir.

Öte yandan (5.39a,b) den yararlanarak şunu yazabiliriz:

$$\frac{V_n^{(q)}(\mathbf{Y}, 0)}{W_n(\mathbf{Y})} = \frac{(N+G)\Omega_{in}^2 \delta^2}{N\Omega_{in}^2 \epsilon^2} = 1 \quad (5.40c)$$

$$\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^2 = \frac{N+G}{N} \quad , \quad a_f = \sqrt{\frac{N+G}{N}} \quad (5.40d)$$

Böylece görülmektedir ki a_f amplifikasyon sınırı modlardan bağımsızdır.

5.115 - DİREKT METOD İÇİN DÜŞÜNÜLEN GENEL YAKLAŞIM

Holzer, S.M. in (18) düzlem dinamik burkulma halinde ileri sürdüğü yaklaşım metodunun, bu çalışmada ele alınan problem için geçerli olduğu (5.111, 5.112, 5.114) bölümlerinden görülmektedir. Çünkü tanımlanan F fonksiyonu ailesi her iki halde de aynıdır. Bu metoda kısaca göz atacak olursak, (5.40d) denkleminde,

$$N = \frac{G}{a_f^2 - 1} \quad , \quad a_f > 1 \quad (5.41a)$$

Burada $G = g(0)$ dır.

Bölüm (5.112) den biliyoruz ki $g(t)$ fonksiyonu, tanımlanan F fonksiyon ailesi ile tayin ediliyordu.

Öte yandan,

$$\theta(t) = (N+G) \frac{|g|}{F} \quad (5.41b)$$

fonksiyonu,

$$\xi = \sup[\theta(t) : 0 < t < t_d] \quad (5.25d)$$

şeklinde ifade edilebilen bir en küçük üst limiti haizdir. Böylece bu ξ değeri ile,

$$P_{cr} = \frac{1}{\xi} \frac{P_{\xi(k)}^{(w)}}{\Omega_{in} t_d} \quad (i=1,2) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.41c)$$

ifadesinden P_{cr} yük genliğini tayin etmek kabil olur. fonksiyon ailesine ait öyle bir eğri seçilebilir ki bu ξ değerini minimum yapar. Dolayısı ile de P_{cr} değerini maksimum yapar. Fakat F fonksiyonu ailesi çok geniş olduğundan bu eğriyi aramak zordur. Dolayısı ile araştırma bu ailesinin bir alt sınıfı için söz konusu olabilir.

Holzer sözü edilen çalışmasında (18) sonlu süreli yük hali için,

$$F = \begin{cases} f_1(x) & 0 \leq x \leq \mu & x = \frac{t}{t_d} \\ f_2(x) & \mu \leq x \leq 1 & f_1 = (1-x)^p \\ 0 & x \geq 1 & f_2 = (1-\mu)^{p-1} (1-x) \end{cases} \quad (5.42a)$$

iki parametrelili eğri ailesini seçmiştir.

Yine Holzer bu çalışmasında Bölüm. 5 (5.11a,b,c) de tanımlanan $\varnothing(t)$ fonksiyonunun

$$\varnothing(x) = 4x(1-x) \quad x = \frac{t}{t_d}$$

şeklinde seçilmesi halinde $a_f = 5.0$ için bu aileye ait bir alt sınıfı tarayarak $1/\xi = 4.13$ bulmuştur.

Bu aileye ait $p = \mu = 1$ ye tekabül eden tek bir fonksiyon halinde :

$$F = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad x = t/t_d \quad (5.42b)$$

fonksiyonu söz konusudur. Bu halde,

$$\theta(x) = 2x[\beta + (1-x)^2] \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\beta = \frac{1}{a_f^2 - 1} \quad a_f > 1$$

olduğuna göre ξ yi şöyle hesaplamak mümkündür.

$$\xi = \begin{cases} \theta(\eta) & \text{eğer} \quad \beta < \eta(1-\eta) \\ 2\beta & \text{eğer} \quad \beta > \eta(1-\eta) \end{cases} \quad (5.42c)$$

Burada,

$$\eta = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{1 - 3\beta}) \quad a_f \geq 2.0$$

Öte yandan $a_f = 5.0$ için $1/\xi = 3.10$ bulunur. Buradan çıkarılan netice ξ yi minimum yapmak için F ailesine ait bir alt sınıfın taranması daha iyi sonuç vermektedir.

5.116 - MÜSAADE EDİLEN DEFORMASYON SINIRINDAN AMPLİFİKASYON SINIRINA GEÇİŞ

Bölüm 2.4 (2.25c), 2.25d) ifadelerinde, denge konumunun perturbasyonunun lateral yerdeğiştirme, kayma merkezi etrafında dönme ve bunlara karşı gelen hızlar şeklinde tanımlanmış, başlangıç değerleri olarak aşağıdaki şekilde verilmişti:

$$\begin{aligned} V(Z,0) &= \phi_2(Z) = \sum_{k=1}^n \phi_{2k} \sin \frac{k\pi Z}{L} \\ \beta(Z,0) &= \phi_3(Z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r} \phi_{3k} \sin \frac{k\pi Z}{L} \end{aligned} \quad (5.43a)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z,0) &= \psi_2(Z) = \sum_{k=1}^n \psi_{2k} \sin \frac{k\pi Z}{L} \\ \dot{\beta}(Z,0) &= \psi_3(Z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r} \psi_{3k} \sin \frac{k\pi Z}{L} \end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned} f_{2k}(0) &= \phi_{2k} & \dot{f}_{2k}(0) &= \psi_{2k} \\ f_{3k}(0) &= \phi_{3k} & \dot{f}_{3k}(0) &= \psi_{3k} \end{aligned} \quad (5.43b)$$

dir.

Bu durumda başlangıçta çubuğun yüksüz halde serbest titreşim hareketini haiz ve $P(t)$ yükünün tatbik anına karşı gelen bir $t = \tau$ anında çubuk üzerindeki hız, yerdeğiştirme ve dönmelerin (5.43a) ifadesindeki gibi olduğunu düşünmek hakkına sahibiz.

Böylece başlangıçtaki bu serbest titreşimin hareket denklemini aşikâr olarak şöyle yazmak kabildir :

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \frac{1}{m} \bar{F} R_k f_k = 0 \quad (5.43c)$$

Bu hareket için başlangıç değerleri için :

$$\begin{aligned} f_{2k}(0) &= \phi_{2k}(0) & \dot{f}_{2k}(0) &= \psi_{2k}(0) \\ f_{3k}(0) &= \phi_{3k}(0) & \dot{f}_{3k}(0) &= \psi_{3k}(0) \end{aligned} \quad (5.43d)$$

şeklinde tanımlansın.

Burada,

$$\phi_{2k(\text{GENLİK})} = f_{2k(\text{GENLİK})} \quad \phi_{3k(\text{GENLİK})} = f_{3k(\text{GENLİK})} \quad (5.43e)$$

olacağı açıktır.

Öte yandan, $P(t)$ yükünün tesir süresi sonunda, yani $t \geq t_d$ için yine:

$$\frac{d^2 \mathbf{f}_k}{dt^2} + \frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R} \mathbf{f}_k = \mathbf{0} \quad (5.44a)$$

denklemleriyle karakterize edilen bir serbest titreşim hareketi söz konusu ve burada başlangıç değerleri,

$$\begin{aligned} f_{2k}(t_d) &= \phi_{2k}(t_d) & \dot{f}_{2k}(t_d) &= \psi_{2k}(t_d) \\ f_{3k}(t_d) &= \phi_{3k}(t_d) & \dot{f}_{3k}(t_d) &= \psi_{3k}(t_d) \end{aligned} \quad (5.44b)$$

şeklinde dir.

Biz biliyoruz ki

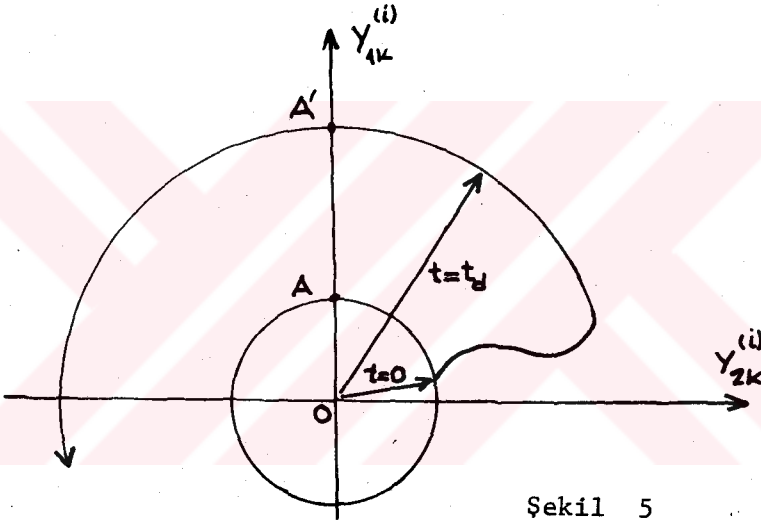
$$\begin{pmatrix} f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11(k)} & t_{12(k)} \\ t_{21(k)} & t_{22(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1k} \\ Z_{2k} \end{pmatrix} \quad (5.44c)$$

transformasyonu ile Z_{ik} normal koordinatlarına geçiliyor.

$$\begin{pmatrix} z_{1k} \\ \dot{z}_{1k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_{1k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1k}^{(i)} \\ y_{2k}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (5.44d)$$

transformasyonuyla ise faz düzlemine geçiliyor.

Bu söylenenleri göz önünde tutarak, hareketin faz düzlemindeki tasvirinden, (Şekil 5)



Şekil 5

$t=0$ için $\mathbf{y}_k^{(i)}(0)$ vektörünün normunu yazabiliriz :

$$\delta_k^{(i)}(0) = \|\mathbf{y}_k^{(i)}(0)\| = \sqrt{y_{1k}^{(i)}(0)^2 + y_{2k}^{(i)}(0)^2} \quad (5.45a)$$

$t=t_d$ için $\mathbf{y}_k^{(i)}(t_d)$ vektörünün normu

$$\delta_k^{(i)}(t_d) = \|\mathbf{y}_k^{(i)}(t_d)\| = \sqrt{y_{1k}^{(i)}(t_d)^2 + y_{2k}^{(i)}(t_d)^2} \quad (i=1,2) \quad (k=1,\dots,n) \quad (5.45b)$$

Açıktır ki $\delta_k^{(i)}(0)$ ve $\delta_k^{(i)}(t_d)$ değerleri hareketin genlik değerlerine karşı gelir.

(5.44d) den görülür ki :

$$\begin{pmatrix} Z_{ik}(t_d) \\ \dot{Z}_{ik}(t_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^{(i)}(t_d) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(5.45c)

ve

$$\begin{pmatrix} Z_{ik}(0) \\ \dot{Z}_{ik}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Omega_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^{(i)}(0) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (i=1,2)$$

(k=1,2,...,n)

yazılabilir. Buradan :

$$\begin{aligned} Z_{ik}(t_d) &= \delta_k^{(i)}(t_d) \\ Z_{ik}(0) &= \delta_k^{(i)}(0) \end{aligned}$$

Yani normal koordinatlarda yerdeğiştirme genlik değeri ile faz düzlemindeki yer değiştirme genlik değeri eşittir. Buradan hareketle (5.44c) den faydalanarak :

$$\begin{pmatrix} f_{2k}^{(0)} \\ f_{3k}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11(k)} & t_{12(k)} \\ t_{21(k)} & t_{22(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^{(1)}(0) \\ \delta_k^{(2)}(0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_{2k}(t_d) \\ f_{3k}(t_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11(k)} & t_{12(k)} \\ t_{21(k)} & t_{22(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^{(1)}(t_d) \\ \delta_k^{(2)}(t_d) \end{pmatrix} \quad (5.45d)$$

yazılabilir.

Böylece,

$$\begin{aligned} f_{2k}^{(0)} &= t_{11(k)} \delta_k^{(1)}(0) + t_{12(k)} \delta_k^{(2)}(0) & f_{2k}(t_d) &= t_{11(k)} \delta_k^{(1)}(t_d) + t_{12(k)} \delta_k^{(2)}(t_d) \\ f_{3k}^{(0)} &= t_{21(k)} \delta_k^{(1)}(0) + t_{22(k)} \delta_k^{(2)}(0) & f_{3k}(t_d) &= t_{21(k)} \delta_k^{(1)}(t_d) + t_{22(k)} \delta_k^{(2)}(t_d) \end{aligned} \quad (5.45e)$$

Öte yandan a_f modal amplifikasyon sınırı ise (Bak.5.40b)

$$\begin{aligned}\delta_k^{(1)}(t_d) &= a_f \delta_k^{(1)}(0) \\ \delta_k^{(2)}(t_d) &= a_f \delta_k^{(2)}(0)\end{aligned}\quad (5.46a)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bunlar (5.45e) de yerine konursa:

$$\begin{aligned}f_{2k}^{(1)}(t_d) &= a_f (t_{11(k)} \delta_k^{(1)}(0) + t_{12(k)} \delta_k^{(2)}(0)) \\ f_{3k}^{(1)}(t_d) &= a_f (t_{21(k)} \delta_k^{(1)}(0) + t_{22(k)} \delta_k^{(2)}(0))\end{aligned}\quad (5.46b)$$

ifadeleri yazılabilir.

Buradan (5.43e) ifadelerinden faydalanarak :

$$\begin{aligned}f_{2k}^{(1)}(t_d) &= a_f f_{2k}^{(1)}(0) \\ f_{3k}^{(1)}(t_d) &= a_f f_{3k}^{(1)}(0)\end{aligned}\quad (5.46c)$$

eşitliklerini yazmak kabildir.

Yine bölüm (2.2) (2.26a, 2.26b) ifadelerinden şu yazılabilir :

$$\begin{pmatrix} V_6 \\ \beta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_5 \\ \beta_5 \end{pmatrix}\quad (5.46d)$$

yine bu bölümden biliyoruz ki :

$$V_5 = V \quad \beta_5 = \beta \quad (5.46e)$$

Burada V_0, β_0 kesit ağırlık merkezinin lateral deplasmanı ve kesitin ağırlık merkezi etrafında dönmeleridir.

V_0, β_0 ise kayma merkezinin lateral deplasmanı ve kayma merkezi etrafında dönmeleridir.

(5.45e) den :

$$V_0 = V - x_0 \beta \quad (5.46f)$$

$$\beta_0 = \beta$$

V_0 ve β_0 nin pratik değerlerinin oluşu bunların sınırlandırılmasının akla yakın olacağı neticesini getirdiği için,

$$V_0 \text{ için sınır } \Delta V_0$$

$$\beta_0 \text{ için sınır } \Delta \beta_0 \quad \text{olsun,}$$

Bu durumda (5.46a) dan faydalananarak V için sınırı,

$$\Delta V = \Delta V_0 + x_0 \Delta \beta_0 \quad (5.47a)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

(5.45f) den β için deformasyon sınırı

$$\Delta \beta = \Delta \beta_0 \quad (5.47b)$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Öte yandan (5.1131) ve (5.1132) bölümlerinden bilindiği gibi sistemin $P = P_{cr}$ kritik yük amplitüdü altında gerçek amplifikasyon karakteri şöyledir ; bu amplifikasyon kritik mod civarında maksimum, diğer modlarda ise azalan şekildedir. Halbuki yine aynı bölümlerden anlaşılır ki, kritik modun amplifikasyonu ve bağımlı olarak diğer modların amplifikasyonunu, $P \leq P_{cr}$ şartını temin ederek, P_{cr} değerinin tesbitinde göz önüne alınan amplifikasyon sınırının altında tutma imkânımız mevcuttur. Bir an kritik modun amplifikasyonunun öngörülen bu a_f amplifikasyon sınırına eşit olduğu düşünülürse $P \leq P_{cr}$ şartının sağlanması (5.43a) serilerinin terimlerinin farklı işaretli olacağı nedeniyle :

$$a_{fv} = \frac{\Delta v}{\sum_{k=1}^n \phi_{2k} \sin \frac{k\pi z}{L}}$$

$$a_f = \min(a_{fv}, a_{f\beta}) \quad (5.47c)$$

$$a_{f\beta} = \frac{\Delta \beta}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{r} \phi_{3k} \sin \frac{k\pi z}{L}}$$

şeklinde tanımlanan a_f amplifikasyon sınırının aşılmasını önleyemez.

Bu aksaklığın giderilmesi nedeniyle (5.46d) ifadesinde belirtilen amplifikasyon sınırını şu şekilde tanımlamak uygundur :

$$a_{fv} = \frac{\Delta v}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\phi_{2k} \sin \frac{k\pi z}{L})^2}}$$

$$a_f = \min(a_{fv}, a_{f\beta}) \quad (5.47d)$$

$$a_{f\beta} = \frac{\Delta \beta}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (\frac{1}{r} \phi_{3k} \sin \frac{k\pi z}{L})^2}}$$

Böylece (5.46c) ve (5.47d) ifadelerinden faydalanarak şunları söyleyebiliriz ; maksimum amplifike edilen moda ait amplifikasyon katsayısını, kritik moda ait stabilite kriterini kullanarak (5.47d) ile tanımlanan çubuğun amplifikasyon katsayısının altında tutmak mümkün olur.

5.2 - SİMETRİK EKSENİ OLMAYAN AÇIK ENKESİTLİ ÇUBUK HALİ

Bu hal için hareket denklemleri (2.26a,b,c) ve (2.27a,b) den

$$\frac{d^2 \mathbf{f}}{dt^2} + \left[\frac{1}{m} \mathbf{F} \mathbf{R}_k - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} \mathbf{E} \right] \mathbf{f}_k = \mathbf{0} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.48a)$$

Burada

$$\mathbf{f}_k = \begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.48b)$$

Bölüm 2.6 ve 2.7 den (5.48a) hareket denklemi ve buna ait kinetik ve potansiyel enerji ifadelerinin

$$\begin{pmatrix} f_{1k} \\ f_{2k} \\ f_{3k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11(k)} & t_{12(k)} & t_{13(k)} \\ t_{21(k)} & t_{22(k)} & t_{23(k)} \\ t_{31(k)} & t_{32(k)} & t_{33(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1k} \\ Z_{2k} \\ Z_{3k} \end{pmatrix} \quad (5.48c)$$

transformasyonu, sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z_{1k}}{dt^2} + \Omega_{1k}^2 Z_{1k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} Z_{1k} &= 0 \\ \frac{d^2 Z_{2k}}{dt^2} + \Omega_{2k}^2 Z_{2k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} Z_{2k} &= 0 \quad (k=1,2,\dots,n) \\ \frac{d^2 Z_{3k}}{dt^2} + \Omega_{3k}^2 Z_{3k} - \lambda_k^2 P(t) \frac{1}{m} Z_{3k} &= 0 \end{aligned} \quad (5.49a)$$

hareket denklemleriyle,

$$T_k = \frac{1}{4} [\dot{Z}_{1k}^2 + \dot{Z}_{2k}^2 + \dot{Z}_{3k}^2] \quad (5.49b)$$

$$U_k = \frac{1}{4} [\Omega_{1k}^2 Z_{1k}^2 + \Omega_{2k}^2 Z_{2k}^2 + \Omega_{3k}^2 Z_{3k}^2] \quad (5.49c)$$

enerji ifadeleri yazılır.

Burada tek simetri eksenliden farklı olarak $P_{x\theta(k)}^{(i)}$ ü kapalı olarak elde etmek mümkün değildir. $P_{x\theta(k)}^{(i)}$ değerlerini Bölüm 1.4 de (1.7) numaralı üçüncü derece denklemden sayısal olarak elde etmek mümkün olmaktadır. Bağımlı olarak Ω_{ik}^2 değerleri içinde aynı şeyler söz konusudur.

Böylece T_k transformasyon matrisini, bu halde sadece nümerik olarak elde etmenin mümkün olduğu neticesine varılır. Bölüm 5.1 de tek simetri eksenli keside ait T_k transformasyon matrisinin bulunuşu incelenirse durum açık olarak görülebilir.

Öte yandan (5.116) dan görülüyor ki T_k matrisinin terimlerini kapalı olarak veya nümerik olarak tanımlamak problemin gidişini etkilememektedir.

Böylece (5.49a) modal hareket denklemlerine Bölüm 5.1 deki (5.5d) değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} x_{1k}^{(i)} &= z_{ik} \\ x_{2k}^{(i)} &= \frac{dz_{ik}}{dt} \end{aligned} \quad (5.50a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1k}^{(i)}}{dt} &= x_{2k}^{(i)} \\ \frac{dx_{2k}^{(i)}}{dt} &= -\Omega_{ik} \left(1 - \frac{P(t)}{P_{x\phi(t)}^{(i)}} \right) x_{1k}^{(i)} \end{aligned} \quad (i=1,2,3) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.50b)$$

elde edilir.

Otonom ve otonom olmayan haller için (5.50b) ifadesi vektör matris formunda :

$$\dot{x}_k^{(i)} = X_k^{(i)}(x) \quad x_k^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{1k}^{(i)} \\ x_{2k}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (5.50c)$$

$$X_k^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{ik}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (i=1,2,3)$$

şeklinde ve

$$\begin{aligned} \dot{x}_k^{(i)} &= X_k^{(i)}(x, t) \\ X_k^{(i)}(x, t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega_{ik}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{\text{sgl}(k)}}\right) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.50d)$$

(i=1,2,3) (k=1,2,3,...,n)

şeklinde yazılabilir.

Öte yandan Bölüm 5.111 deki benzer şekilde bu denklemler için otonom halde Lyapunov fonksiyonu olarak şu ifade seçilebilir :

$$V_k^{(i)}(x, x) = N \left(\Omega_{ik}^2 x_{1k}^{(i)2} + x_{2k}^{(i)2} \right) \quad (i=1,2,3) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.51a)$$

Otonom olmayan hal için (5.112) ye benzer şekilde

$$V_k^{(i)}(x, t) = K(t) \left(\Omega_{ik}^2 x_{1k}^{(i)2} + x_{2k}^{(i)2} \right) \quad (i=1,2,3) \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (5.51b)$$

ifadesi Lyapunov fonksiyonu olarak seçilebilir.

Böylece Bölüm (5.112) de söylenenlerin hepsi bu hale de genişletilebilir. Bu durumda stabilite kriterleri (5.25c,d,e,f) den

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\phi(0)}^{(1)}}{\Omega_{1K}}$$

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\phi(k)}^{(2)}}{\Omega_{2K}} \quad (5.52a)$$

$$P_t < \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\phi(k)}^{(3)}}{\Omega_{3K}}$$

$$(k=1,2,3,\dots,n)$$

Ayrıca Bölüm (5.113) den bu bölüme kadar tek simetri eksensliler için söylenenlerin hepsi bu hal için aynen geçerlidir. Buradan stabilite kriterleri için şunlar söylenebilir:

$k_{CR} = n$ kritik mod ise çubuk için stabilite kriteri :

$$P_{CR} = \frac{1}{\xi t_d} \frac{P_{x\phi(n)}^{(1)}}{\Omega_{1n}} \quad (n \text{ kritik moddur}) \quad (5.52b)$$

BÖLÜM 6

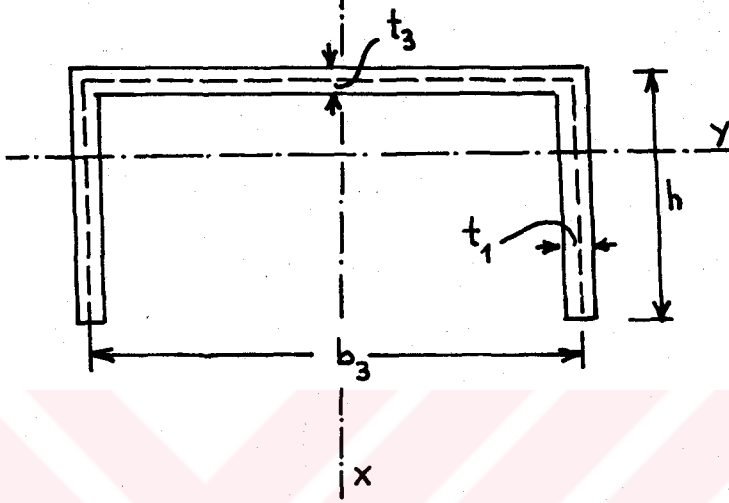
SAYISAL UYGULAMA

Burada uygulama tek simetri eksenli, açık enkesitli ve iki ucundan mafsallı bir çubuğa aittir.

Uygulamada tatbik edilecek sıra şöyledir :

- I) Çubuğun geometrik özellikleri tanımlanacak
- II) Çubuğun üzerinde mevcut konsantrik yüke ait fonksiyon tanımlanacak
- III) Çubuk üzerinde mevcut ilk kusurlar, çubuk eksenı boyunca birer fonksiyon olarak belirli olduğuna göre, a_f amplifikasyon katsayısı saptanacak
- IV) Bu a_f ye göre $\frac{1}{\xi t_d} = M$ sayısı hesaplanacak
- V) M sayısı yardımıyla, kritik mod ve buradan kritik yük amplitüdü bulunacak
- VI) Bu kritik amplitüdü ile başlangıç değerleri olarak da normu bir olan bir vektörün bileşenleri alınarak, çubuğa ait hareket denklemleri $[0, t_d]$ aralığında sayısal olarak entegre edilecektir.

I) ÇUBUĞUN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ



Şekil 6

$$2h = b_3 \quad t_1 = t_3 = t \quad \alpha = \frac{t}{h} \quad \beta = \frac{h}{t} \quad (6.1a)$$

(6.1a) ve (1.8a, 1.8b, 1.9b, 1.9c) formüllerinden hareketle,

$$P_{xK} = D(2) \frac{k^2}{\alpha^2 \beta} E h^2$$

$$P_{\phi K} = \frac{E h^2}{E(2) \beta} \left[\frac{F(2)}{\beta^2} + G(2) \frac{k^2}{\alpha^2} \right] \quad (6.1b)$$

$$P_{\phi x(1K)}^{(1)} = \Delta(2) \left[P_{xK} + P_{\phi K} - \sqrt{(P_{xK} + P_{\phi K})^2 - B(2) P_{xK} P_{\phi K}} \right]$$

ve (5.5b) formülünden

$$\Omega_{1K} = C(2) \frac{k}{\alpha} \left[P_{\phi x(1K)}^{(1)} \right]^{1/2} \quad (6.1c)$$

formüllerde mevcut katsayılar,

$$\begin{aligned}
 D(2) &= 2.666666 \times (3.14159272)^2 \\
 F(2) &= 0.3846153 \times 1.333333 \\
 G(2) &= 0.291666 \times (3.141593)^2 \\
 E(2) &= 1.1614583 \\
 A(2) &= 1.1614583 / 1.5416666 \\
 B(2) &= 3.083333 / 1.1614583 \\
 C(2) &= 7.388235 \times 10^2
 \end{aligned}
 \tag{6.1d}$$

Seçilen çubuk için :

$$\alpha = 120 \quad \beta = 17 \quad h = 10 \text{ cm}$$

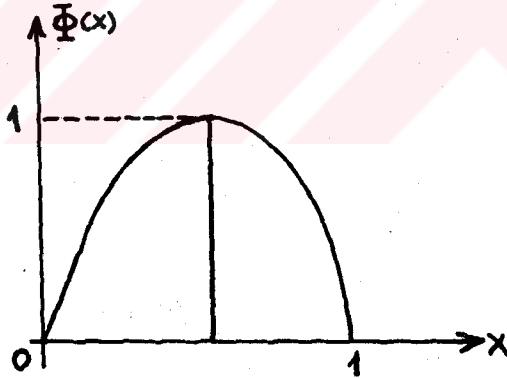
olarak seçilmiştir. Bu durumda kesitte ;

$$h = 10 \text{ cm} \quad b_3 = 20 \text{ cm} \quad t = 0.6 \text{ cm}$$

çubuk boyu;

$$L = 1200 \text{ cm}$$

II) ÇUBUĞUN ÜZERİNDEKİ KONSANTRİK YÜKE AİT FONKSİYON



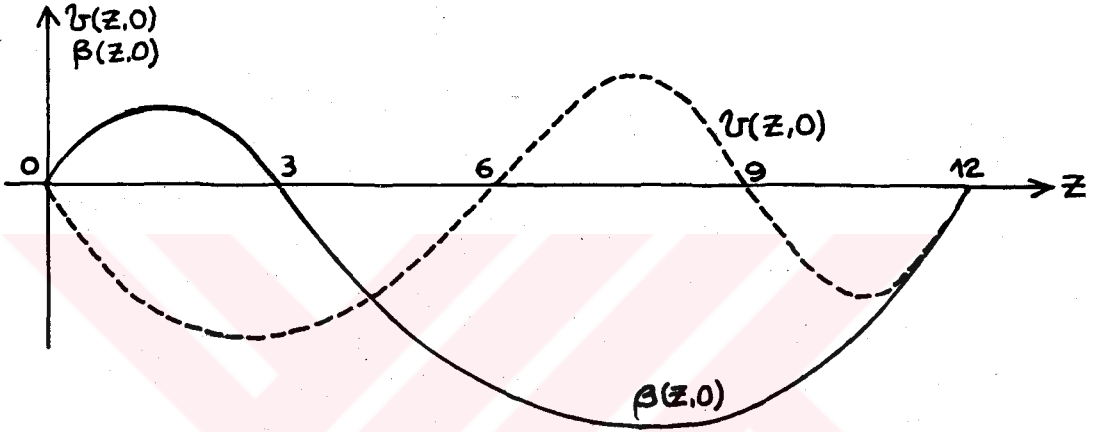
Şekil 7

Yüke ait tesir fonksiyonu,

$$\phi(x) = 4x(1-x) \quad x = \frac{t}{t_d}$$

olarak düşünülüyor.

III) ÇUBUK ÜZERİNDEKİ İLK KUSURLARIN ÇUBUK EKSENİ BOYUNCA TANIMLANMASI



Şekil 8

$$V(z,0) = \phi_2(z) = 10^{-4} z(z-6)(z-9)(z-12)$$

$$\beta(z,0) = \phi_3(z) = \frac{10^{-4}}{r} z(z-3)(z-12)$$

Burada r kayma merkezine göre kesidin atalet yarıçapı. Bu ifadeleri Furiye-sinüs serisine açarak; furiye katsayılarını $V(z,0)$ için :

$$\phi_{k2} = \frac{9.30}{k^3} \left[0.0252(-1)^k - 0.0468 - \frac{0.0350}{k^2} [(-1)^k - 1] \right]$$

$$\beta(z,0) \quad \text{ için :} \quad (k=1,2,\dots,n)$$

$$\phi_{k3} = \frac{9.30}{k^3} \left[0.0042(-1)^k + 0.0030 \right] \quad (k=1,2,\dots,n)$$

şeklinde buluruz.

Bu durumda bu fonksiyonların furye-sinüs açınımları

$$V(z,0) = -0.0186 \sin \frac{\pi z}{12} - 0.0251 \sin \frac{2\pi z}{12} - 0.0219 \sin \frac{3\pi z}{12} - \\ - 0.0032 \sin \frac{4\pi z}{12} - 0.0056 \sin \frac{5\pi z}{12} - 0.0009 \sin \frac{6\pi z}{12} + \dots$$

ve

$$\beta(z,0) = -\frac{0.0112}{r} \sin \frac{\pi z}{12} + \frac{0.0084}{r} \sin \frac{2\pi z}{12} - \frac{0.0004}{r} \sin \frac{3\pi z}{12} + \\ + \frac{0.0011}{r} \sin \frac{4\pi z}{12} - \frac{0.0001}{r} \sin \frac{5\pi z}{12} + \frac{0.0003}{r} \sin \frac{6\pi z}{12} + \dots$$

olur.

Şimdi çubuk boyunun tam ortasında müsaade edilen burulma deformasyonu Δ_β (müsaade edilen) = $0.067/r$ radyan olsun. (5.47d) ifadelerinin ikincisinden

$$a_{f\beta} = \frac{0.067/r}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} (\phi_{3k} \sin \frac{k\pi}{12})^2}}$$

değerleri yerine konursa,

$$a_{f\beta} = \frac{0.067}{\sqrt{(-0.0112)^2 + (0.0004)^2 + (-0.0001)^2}} = 6$$

Öte yandan çubuk üst ucundan itibaren $1/4$ noktasında müsaade edilen yatay deplasman Δ_y (müsaade edilen) = 0.160 m (16 cm) olsun. (5.47d) ifadelerinin ilkinden.

$$a_{fy} = \frac{0.160}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\phi_{k2} \sin \frac{k\pi}{4})^2}}$$

değerler yerine konursa

$$a_{fy} = \frac{0.160}{\sqrt{(-0.0186 \times 0.707)^2 + (-0.0251 \times 1.0)^2 + (-0.0219 \times 0.707)^2 + (-0.0056 \times 0.707)^2 + (-0.0009 \times 1.0)^2}} = 5$$

(5.47d) ifadesinden :

$$a_f = \min(a_{fv}, a_{fp})$$

$$a_f = \min(a_{fv}=5, a_{fp}=6)$$

$$a_f = 5$$

IV) M SAYISININ HESABI

Bölüm (5.115) den tek fonksiyon seçilmesi halinde $a_f=5$ için $1/\xi=3.10$ olduğunu biliyoruz. Bu değeri, bu uygulama için kabul edersek :

$$M = \frac{1}{\xi t_d} = \frac{3.10}{0.028} = 110.71 \text{ } 1/sac$$

V) KRİTİK MODUN KRİTİK AMPLİTÜDÜNÜN SAPTANMASI

Böylece bulunan M değerini çubuğun serbest titreşiminin $i=1$, $k=1$ nci modlarına ait α , Ω_{11} diyagramında Ω_{11} e ait eksen üzerinde tesbit edip karşı gelen $\alpha=\alpha^*$ değerini buluruz. Bu α^* değeri bize, kritik modun dalga boyunun h kenar uzunluğuna oranını verir. Çubuğa ait α ile α^* yi oranlarsak kritik moda ait $k=N_{cr}$ numarasını bulmanın mümkün olacağı açıktır. Böylece

$$N_{cr} = \frac{\alpha}{\alpha^*}$$

Öte yandan N_{cr} sayısının bir tam sayı olarak elde edilmesi her zaman mümkün olamaz. Bu durumda, Bölüm (5.1132) deki (5.28d) ifadesini hatırlayacak olursak :

$$\max \Omega_{ik} \leq M$$

şartını sağlayan k . moda kritik mod adını vermiştik. Bu bize α/α^* nin tam sayı olarak elde edilememesi halinde N_{cr} için bir alttaki tam sayının alınması olanağını verir.

Böylece (6.1a,b,c,d) den faydalanarak, $h=10\text{cm}$, $b_3=20\text{cm}$ $t=0.6\text{cm}$ için yapılan ara hesaplar neticesi (6.1c) ifadesini şu hale getirmek mümkündür.

$$\Omega_n = 738.824 \sqrt{\frac{0.753}{\alpha^4} (18.71\alpha^2 + 363528 - \sqrt{(18.71\alpha^2 + 363528)^2 - 8.849 \times 10^5 (18.71\alpha^2 + 30528)})}$$

Buna göre çeşitli α değerleri için şu tablo hazırlanmıştır.

α	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Ω_n	1329.14	347.24	176.49	108.97	78.90	60.51	49	41	34.65	30.29

Buradan α, Ω_n diyagramını çizmek mümkündür (Şekil 9).

Şimdi bu diyagramda (Şekil 9) $M = 110.71 \text{ 1/sec}$ değerlerine $\alpha = 40$ tekabül eder.

Böylece $N_{cr} = 120/40 = 3$ çıkar. Yani kritik mod 3 no.lu moddur. Maksimum amplifike edilen mod numarası 2 veya 3 tür.

Böylece kritik yük amplitüdü ;

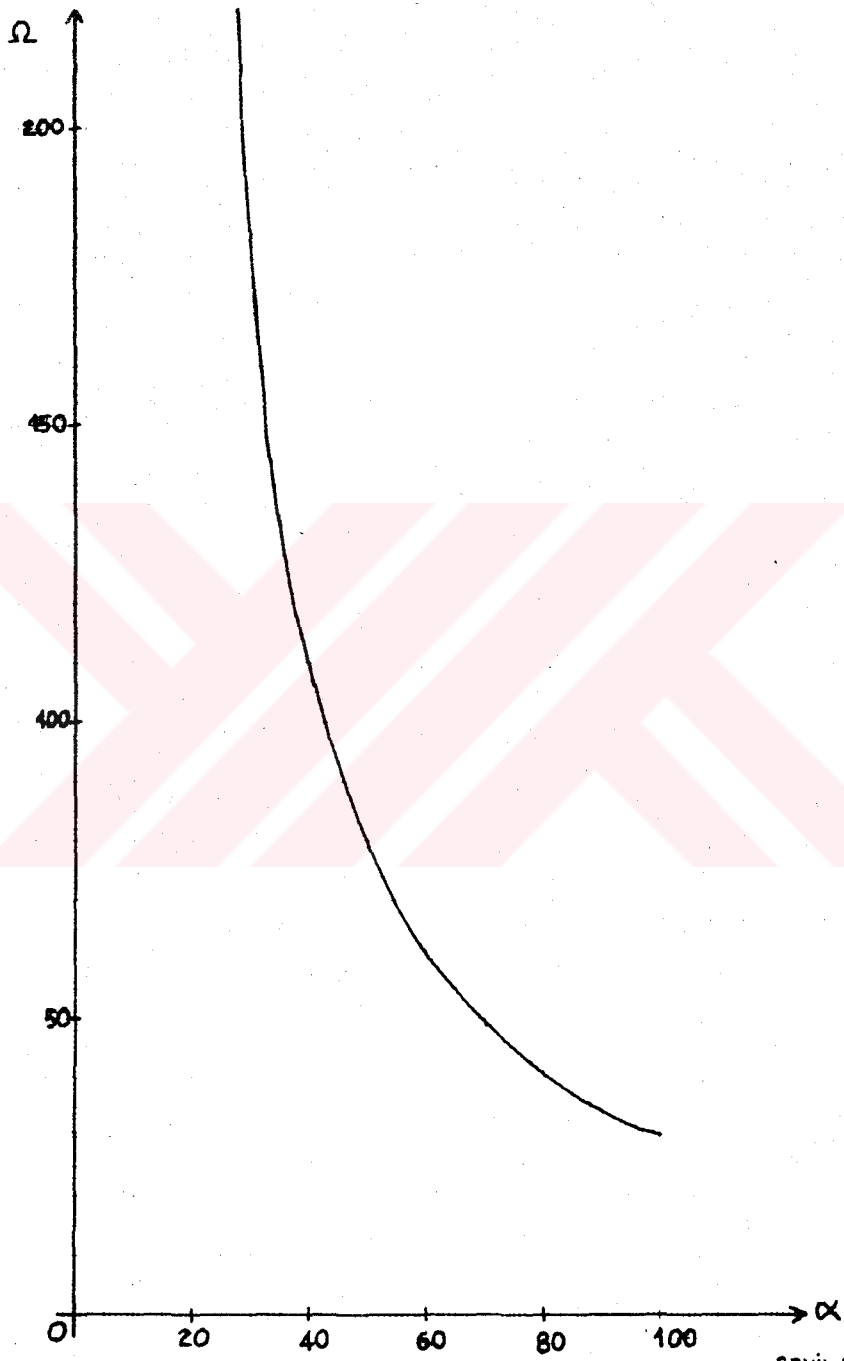
$$P_{t(cr)} = P_{x\emptyset(3)}^{(4)}$$

olarak tanımlanır.

(6.1b) de sayısal değerler yerine konduğunda ;

$$P_{t(cr)} = P_{x\emptyset(3)}^{(4)} = 35.483 \text{ t}$$

olarak bulunur.



ŞEKİL.9

IV) SAYISAL İNTEGRASYON

Şimdi $\alpha=120$ $\beta=17$ $h=10$ için $i=1,2$ haline tekabül eden diferansiyel denklemleri sayısal olarak entegre edelim. Bunun için (5.31a) ve II. kısımda tanımlanan yük fonksiyonundan faydalananarak şunları yazabiliriz :

$$\begin{aligned}\frac{dY_{1k}^{(i)}}{dt} &= \Omega_{1k} Y_{2k}^{(i)} \\ \frac{dY_{2k}^{(i)}}{dt} &= -\Omega_{1k} \left(1 - \frac{P_t}{P_{\phi(k)}} \frac{4}{t_d^2} (t_d - t)t\right) Y_{1k}^{(i)} \quad (i=1,2) \\ &\quad (k=1, \dots, n)\end{aligned}$$

Gerekli sayısal değerler yerine konulursa ; $t_d = 0.028 \text{ sec}$ için, $i=1$ halinde,

$$\begin{aligned}\frac{dY_{1k}^{(1)}}{dt} &= \Omega_{1k} Y_{2k}^{(1)} \\ \frac{dY_{2k}^{(1)}}{dt} &= -\Omega_{1k} \left(1 - \frac{35.483}{P_{\phi(k)}^{(1)}} \frac{4}{(0.028)^2} (0.028 - t)t\right) Y_{1k}^{(1)} \\ &\quad (k=1, \dots, n)\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde $i=2$ halinde,

$$\begin{aligned}\frac{dY_{1k}^{(2)}}{dt} &= \Omega_{2k} Y_{2k}^{(2)} \\ \frac{dY_{2k}^{(2)}}{dt} &= -\Omega_{2k} \left(1 - \frac{35.483}{P_{\phi(k)}^{(2)}} \frac{4}{(0.028)^2} (0.028 - t)t\right) Y_{1k}^{(2)} \\ &\quad (k=1, \dots, n)\end{aligned}$$

olur.

Bu denklemler, başlangıç değeri olarak $\|Y_k^{(i)}(0)\|=1$ ve $\|Y_k^{(i)}(0)\|=1$ şeklinde, normları bir olan vektörleri ele alıp, dördüncü mertebe Runge-Kutta metodu kullanarak, $[0, t_d]$ zaman aralığında sayısal olarak entegre edilecektir.

Daha evvelki bölümlerden anlaşılabacağı gibi başlangıç değeri vektörünün normunu bir seçmekle elde edilen $Y_k^{(i)}(t_d)$ vektörünün normu bize modal amplifikasyon katsayısı verecektir. Bu

Bu norm, Bölüm 5.1131 den anlaşılacağı gibi, başlangıç değeri vektörünün çeşitli bileşenleri için $[0, t_f]$ zaman aralığında sayısal olarak entegre edilmiştir.

Entegrasyon her bir hal için $k=1,2,3,4,5,6$ modlarında yapılmış, bunun için İ.T.Ü. Elektronik Hesap Merkezinin olanaklarından faydalanılmıştır.

Sayısal hesapla elde edilen neticeler bir sonraki sayfede verilmiştir.



$t_d = 0,028 \text{ sec}$, $i = 1$, $\gamma_{AK}^{(i)} = 0,34202014$, $\gamma_{ZK}^{(i)} = 0,93969262$ için :

PT = .35483112E+02

MOD

AMPF KATSAYISI

1 10681720E+01
1 12564368E+01
1 14913834E+01
1 16178197E+01
2 11252765E+01
2 14938026E+01
2 19748275E+01
2 22220937E+01
3 11669578E+01
3 15532422E+01
3 19361570E+01
3 20216930E+01
4 11537354E+01
4 11621586E+01
4 88183280E+00
4 77924663E+00
5 10588353E+01
5 79294419E+01
5 10832595E+01
5 99405176E+00
6 93815049E+00
6 11185951E+01
6 90866069E+00
6 10050538E+01

$\gamma_{AK}^{(i)}$

49133169E+00
65188643E+00
83704434E+00
10388450E+01
11965209E+00
11096920E+01
15798020E+01
20482918E+01
95976157E+00
14325668E+01
18740207E+01
19795947E+01
11151686E+01
11429539E+01
64422717E+00
24221625E+00
10307812E+01
73846243E-01
10743543E+01
22709515E+00
544209058E+00
11127424E+01
28255569E+00
37154728E+00

$\gamma_{ZK}^{(i)}$

94846438E+00
10740939E+01
12343344E+01
12402115E+01
86507126E+00
10000151E+01
11849766E+01
86151115E+00
66956000E+00
60026152E+00
48657019E+00
- 29581155E+00
- 21040251E+00
- 60216315E+00
- 74064608E+00
- 24212123E+00
- 79156094E+00
- 13861506E+00
- 96776377E+00
- 76411657E+00
- 11427782E+00
- 86361210E+00
- 82672062E+00

Not : Sayısal hesap neticeleri her bir mod için 0.25 t_d , 0.50 t_d , 0.75 t_d , t_d değerleri için elde edilmiştir.

BİLİMSEL ve TEKNİK
ARAŞTIRMA KURUMU
KÜTÜPHANESİ

STOP

$t_p = 0,028 \text{ sec}$, $i = 1$, $\gamma_{ik}^{(4)} = 0,5$, $\gamma_{zk}^{(4)} = 0,86602540$ için :

PT = .35483112E+02

AMPF KATSAYISI

MOD

1 10833514E+01
 1 12990187E+01
 1 15597508E+01
 1 16870650E+01
 2 11360814E+01
 2 15004769E+01
 2 19680622E+01
 2 22048325E+01
 3 11603721E+01
 3 14771979E+01
 3 1777668E+01
 3 18291384E+01
 3 11212561E+01
 4 10207508E+01
 4 72390954E+00
 4 6927331E+00
 4 10102008E+01
 5 81969662E+00
 5 11058031E+01
 5 68136609E+00
 5 91183810E+00
 6 11169523E+01
 6 92225955E+00
 6 99697570E+00

$\gamma_{ik}^{(4)}$

• 63701886E+00
 • 78830322E+00
 • 96933932E+00
 • 11698312E+01
 • 11891196E+01
 • 16255796E+01
 • 20614010E+01
 • 10278984E+01
 • 14017273E+01
 • 17409643E+01
 • 17716378E+01
 • 11125529E+01
 • 96602860E+00
 • 37448752E+00
 • 41559852E+00
 • 93330179E+00
 • 29029334E+00
 • 11056491E+01
 • 52337610E-01
 • 36734265E+00
 • 11161891E+01
 • 46200925E+00
 • 41653346E+00

$\gamma_{zk}^{(4)}$

• 87627472E+00
 • 10324862E+01
 • 12219673E+01
 • 12294409E+01
 • 76659315E+00
 • 91510970E+00
 • 11093963E+01
 • 78224852E+00
 • 53841303E+00
 • 46612704E+00
 • 35936471E+00
 • 45502415E+00
 • 13943279E+00
 • 32972866E+00
 • 61951928E+00
 • 55421776E+00
 • 38727673E+00
 • 76657181E+00
 • 18458394E-01
 • 67996949E+00
 • 83457062E+00
 • 41286790E-01
 • 79819180E+00
 • 90579271E+00

Stop

Not : Bu hale ait neticelerin (10) no.lu şekilde grafiği çizilmiştir.

$t_d = 0,028 \text{ sec}$, $i = 2$, $\gamma_{ik}^{(2)} = 0,5$, $\gamma_{2k}^{(2)} = 0,86602540$ için :

PT = .35483112E+02

MOD	AMPE. KATSAYISI	$\gamma_{ik}^{(2)}$	$\gamma_{2k}^{(2)}$
1	.10443254E+01	.74675068E+00	.73005418E+00
1	.11474314E+01	.95775709E+00	.631900216E+00
1	.12458699E+01	.11370014E+01	.50933222E+00
1	.12817495E+01	.12590670E+01	.24006743E+00
2	.10327914E+01	.10305868E+01	.67446583E-01
2	.96277037E+00	.65905587E+00	.70183486E+00
2	.91672637E+00	.25327892E+00	.88104315E+00
2	.95749159E+00	.92465410E+00	.24860605E+00
3	.97611854E+00	.32918123E+00	.91893805E+00
3	.10187095E+01	.97268854E+00	.30273118E+00
3	.99567573E+00	.83699314E+00	.54662059E+00
3	.99233645E+00	.11068270E+00	.98614450E+00
4	.10100782E+01	.10038619E+01	.11188998E+00
4	.99897581E+00	.73655261E+00	.67486512E+00
4	.98562289E+00	.56930624E-01	.983997734E+00
4	.99556688E+00	.83438389E+00	.54309940E+00
5	.99714120E+00	.58401350E+00	.80821954E+00
5	.99641072E+00	.60976066E+00	.78805221E+00
5	.99698001E+00	.63181201E+00	.77122159E+00
5	.99800929E+00	.69774391E+00	.71356569E+00

Bu hale ait neticelerin (11) no.lu şekilde grafiği çizilmiştir.

$Y_{\text{K}}^{(4)} = 0,70710678 \quad \text{ifn} :$

$Y_{\text{K}}^{(4)} = 0,70710678,$

$t_d = 0,028 \text{ sec} , \quad i = 1 ,$

PT = .35483112E+02

FOR

AMPF KATSAVISI

1	10890842E+01
1	13146234E+01
1	15880800E+01
1	17304860E+01
2	11265693E+01
2	14423634E+01
2	18529637E+01
2	20594808E+01
3	11215064E+01
3	12985848E+01
3	14516103E+01
3	14486449E+01
4	10504733E+01
4	81135900E+00
4	61219800E+00
4	69503112E+00
5	93683093E+00
5	90891429E+00
5	11182382E+01
5	96797197E+00
6	86607681E+00
6	10921270E+01
6	96133324E+00
6	98565484E+00

	$Y_{\text{K}}^{(4)}$	$Y_{\text{K}}^{(4)}$
•	81803219E+00	71897707E+00
•	94691873E+00	91190988E+00
•	11115430E+01	11342268E+01
•	12987131E+01	11436461E+01
•	96798644E+00	57633404E+00
•	12400602E+01	73665680E+00
•	16016107E+01	93382266E+00
•	19640219E+01	61974134E+00
•	10771169E+01	31240348E+00
•	12762584E+01	23976462E+00
•	14439033E+01	14938511E+00
•	13611986E+01	49569218E+00
•	10455529E+01	10155494E+00
•	64753335E+00	4888036E+00
--	48793941E-01	61025041E+00
--	65044934E+00	24491615E+00
--	73438498E+00	58166221E+00
--	59643809E+00	68584751E+00
--	10895832E+01	25152603E+00
•	21213482E+00	94444088E+00
•	82770414E-01	89224588E+00
--	10580185E+01	27081096E+00
•	70327513E+00	65541262E+00
•	161866379E+00	97227342E+00

STOP

$t_d = 0,028 \text{ sec} ,$
 $i = 1 ,$
 $Y_K^{(0)} = 0,86602340 ,$
 $PT = .35483112E+02$

MOD

AMPE KATSAYISI

```

1 187301156E+01
1 12709832E+01
1 15254510E+01
1 16593318E+01
2 10882793E+01
2 12090784E+01
2 16244859E+01
2 17817987E+01
2 10549404E+01
3 10638179E+01
3 10503288E+01
3 99435600E+00
4 96738383E+00
4 67753033E+00
4 72982519E+00
4 84486960E+00
5 88215933E+00
5 10269970E+01
5 11031940E+01
5 96272820E+00
6 91299318E+00
6 10454267E+01
6 10113885E+01
6 97802134E+00

```

 $Y_K^{(0)}$

```

943329602E+00
104100011E+01
11779949E+01
13390873E+01
10315437E+01
12064910E+01
14684928E+01
17327959E+01
10529296E+01
10638139E+01
10484428E+01
85799671E+00
90729849E+00
28491082E+00
46874750E+00
84097061E+00
48570533E+00
86193436E+00
99926308E+00
46214914E+00
20744103E+00
92774478E+00
89666118E+00
10383553E+00

```

 $Y_K^{(0)}$

```

512682228E+00
72918800E+00
96918984E+00
97991206E+00
34679902E+00
50800206E+00
69461031E+00
41500020E+00
65105025E-01
29364066E-02
70773956E-01
50257886E+00
33562025E+00
61471391E+00
55939307E+00
81074612E-01
73640676E+00
55838361E+00
46745117E+00
84454945E+00
88911461E+00
4818730E+00
46796806E+00
97249368E+00

```

STOP

$t_p = 0,028 \text{ sec}$, $i = 1$, $\gamma_{pk}^{(i)} = 0,93966262$, $\gamma_{pk}^{(i)} = 0,34202014$ için :

PT = .35483112E+02

MOD

AMPF KATSAYISI

1 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 6
 10530068E+01
 12117148E+01
 143360038E+01
 15567007E+01
 10504033E+01
 11864151E+01
 14173471E+01
 15342335E+01
 10019755E+01
 89624218E+00
 77391492E+00
 79000221E+00
 91581713E+00
 6764479E+00
 88927468E+00
 98266243E+00
 86631074E+00
 11039767E+01
 10798154E+01
 96563368E+00
 93987256E+00
 10071235E+01
 10438946E+01
 97610674E+00

$\gamma_{pk}^{(i)}$

991446622E+00
 106451330E+01
 11777559E+01
 13152222E+01
 10349352E+01
 11380604E+01
 13233024E+01
 15117247E+01
 99663727E+00
 88079890E+00
 74322132E+00
 48773491E+00
 78001613E+00
 30775015E-01
 73267147E+00
 93679794E+00
 29846263E+00
 10100969E+01
 89990947E+00
 61490895E+00
 39425963E+00
 80503831E+00
 99221037E+00
 27815034E+00

$\gamma_{pk}^{(i)}$

35476466E+00
 57884794E+00
 82158278E+00
 83277120E+00
 17960078E+00
 33526048E+00
 50768481E+00
 26184191E+00
 10329259E+00
 16566040E+00
 21579246E+00
 48807553E+00
 47989152E+00
 67574939E+00
 50398610E+00
 29670707E+00
 81327386E+00
 45043197E+00
 59679513E+00
 74455370E+00
 85318216E+00
 60515387E+00
 32439901E+00
 93356370E+00

STOP

Bu halde max amplifikasyon,

$$Y_{1k}^{(1)} = 0,34202014$$

$$Y_{2k}^{(1)} = 0,93969262$$

bileşenleri için, $\max_f A_f = 2,222$ olarak elde edilmiştir.



S O N U Ç L A R

Bu çalışmada HOLZER'in (18) simetrik kesitli çubuklar için ele almış olduğu problem, simetri eksenini olmayan veya tek eksene göre simetrik enkesitli çubuklar için, tekrardan ele alınmıştır.

Hareketin kuple parsiyel diferansiyel denklem takımı, yapılan transformasyonlarla ayrık adi diferansiyel denklemlere dönüştürülmüş ve bu şekilde OTONOM OLMAYAN hal için LYAPUNOV fonksiyonunun seçimi ve bu arada $K(t)$ fonksiyon ailesinin tanımı için HOLZER'in (18) sözü edilen çalışmasında izlemiş olduğu yolun, bu hal için de geçerliliği sağlanmıştır.

Bu çalışmada netice olarak elde edilen stabilite kriteri, HOLZER'in (18) elde etmiş olduğunun aksine, modlarla bağımlı çıkmıştır.

Bu netice bize, elde edilen kriterle sadece o kriterin ait olduğu modun stabilitesini temin etme olanağını sağlamıştır. Bu özelliği ile elde edilen stabilite kriteri, hiç bir zaman çubuk için yeterli nitelikte değildir.

Halbuki HOLZER'in (18) elde ettiği kriterin, modlardan bağımsız oluşu nedeniyle, bütün modların stabilitesini temin etme özelliği vardır. Yani böylece çubuk için tek bir kriter elde edilmiştir.

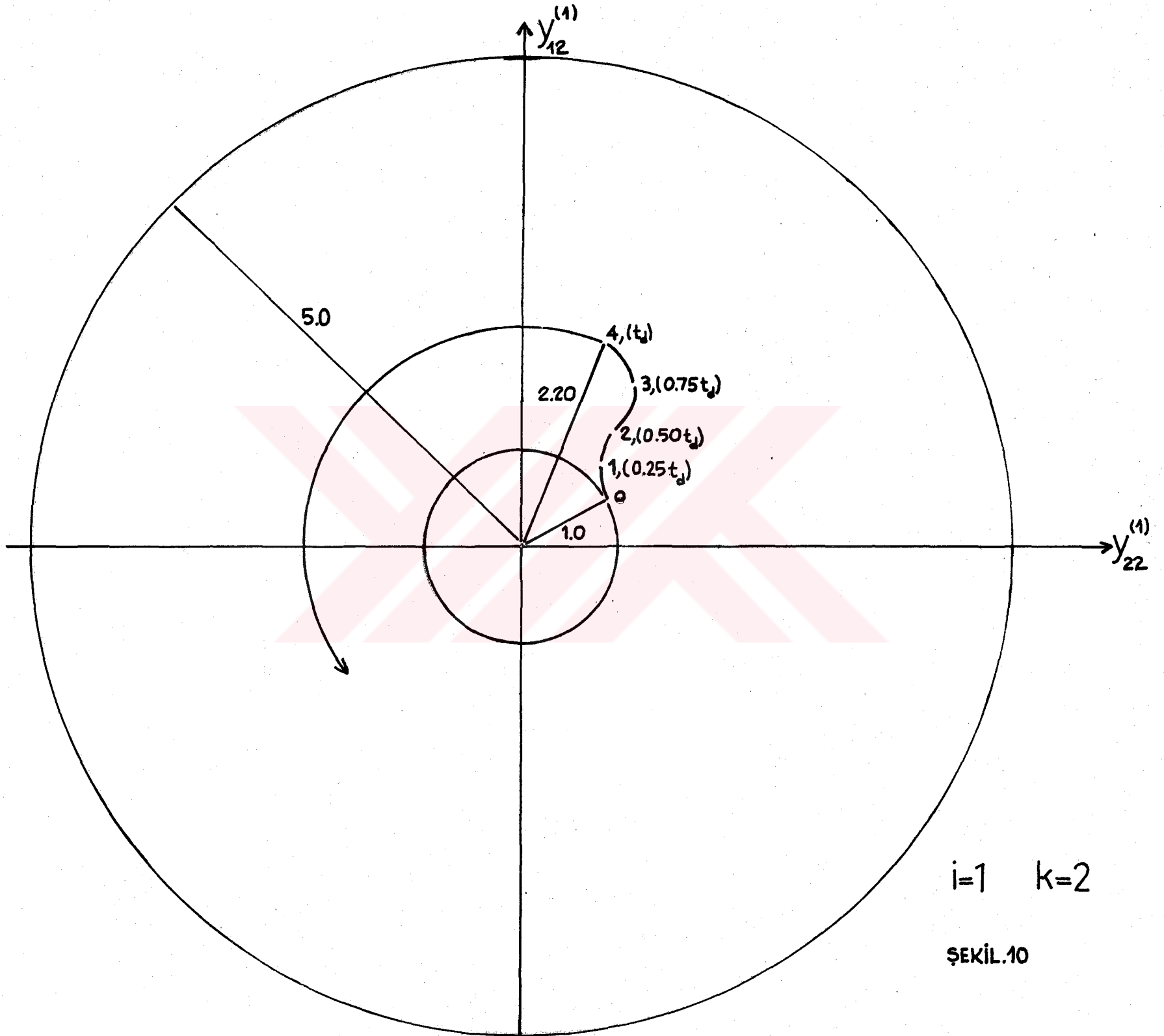
Bu çalışmada elde edilen stabilite kriterinin yukarıda sözü edilen yetersizliğini ortadan kaldırmak amacıyla, çubukun respons analizinden yararlanarak kritik mod tanımı yapılmış ve bu moda ait kriterin kullanılması, bütün modların stabilitesini temin için yeterli olduğu gösterilmiştir.

Çalışmanın sonunda belirli bir kesit için, verilen bir yük fonksiyonu ve amplifikasyon sınırı halinde kritik mod saptanarak, yükün kritik genliği bulunmuştur. Bunu takiben bu kritik genlik ile sayısal çözüm yapılmıştır. Çözüm, başlangıç değeri vektörünün çeşitli bileşenleri için tekrarlanmış ve maksimum amplifikasyonun elde edildiği bileşen durumu tesbit edilmiştir.

Öte yandan t_d yük tesir süresinin sistemin amplifikasyonu üzerine tesiri yönünde sayısal bir araştırma HOLZER (18) tarafından yapılmış ve t_d için bir kritik bölge tanımlanmıştır. Bu çalışmada güdülen gaye, verilen bir yük fonksiyonu ve amplifikasyon sınırı halinde, yine verilen bir çubuk için, yükün amplitüdünün kritik değerini tesbit etmek, yönünde olduğundan ve burada elde edilen neticenin pratik yönden yeterli nitelikte olduğu düşünülerek, t_d için kritik bölge tanımı hususunda, sayısal bir araştırma-ya gidilmemiştir.

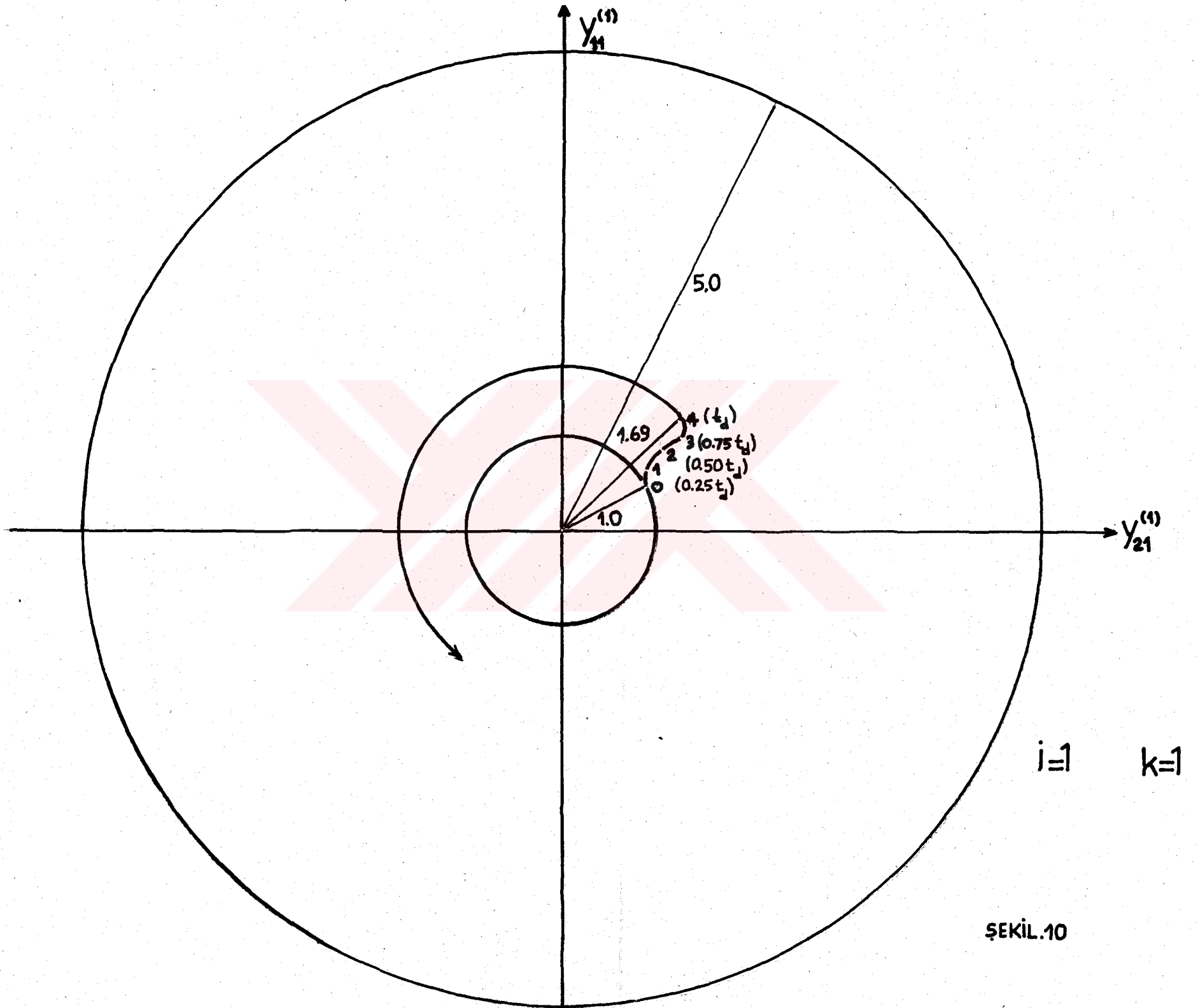
Böylece, bu tip çubuklarda elde edilen stabilite kriteri, verilen yük fonksiyonu ve amplifikasyon sınırı halinde, çubuğun verilen geometrik nitelikleri için, kritik yük genliğinin tanımlanması ile çubuk için stabilitenin temini olanağını sağlamış olur.

Bu çalışmayla, bu tip çubuklar için elde edilen stabilite kriteri tamamen orijinal niteliktedir.

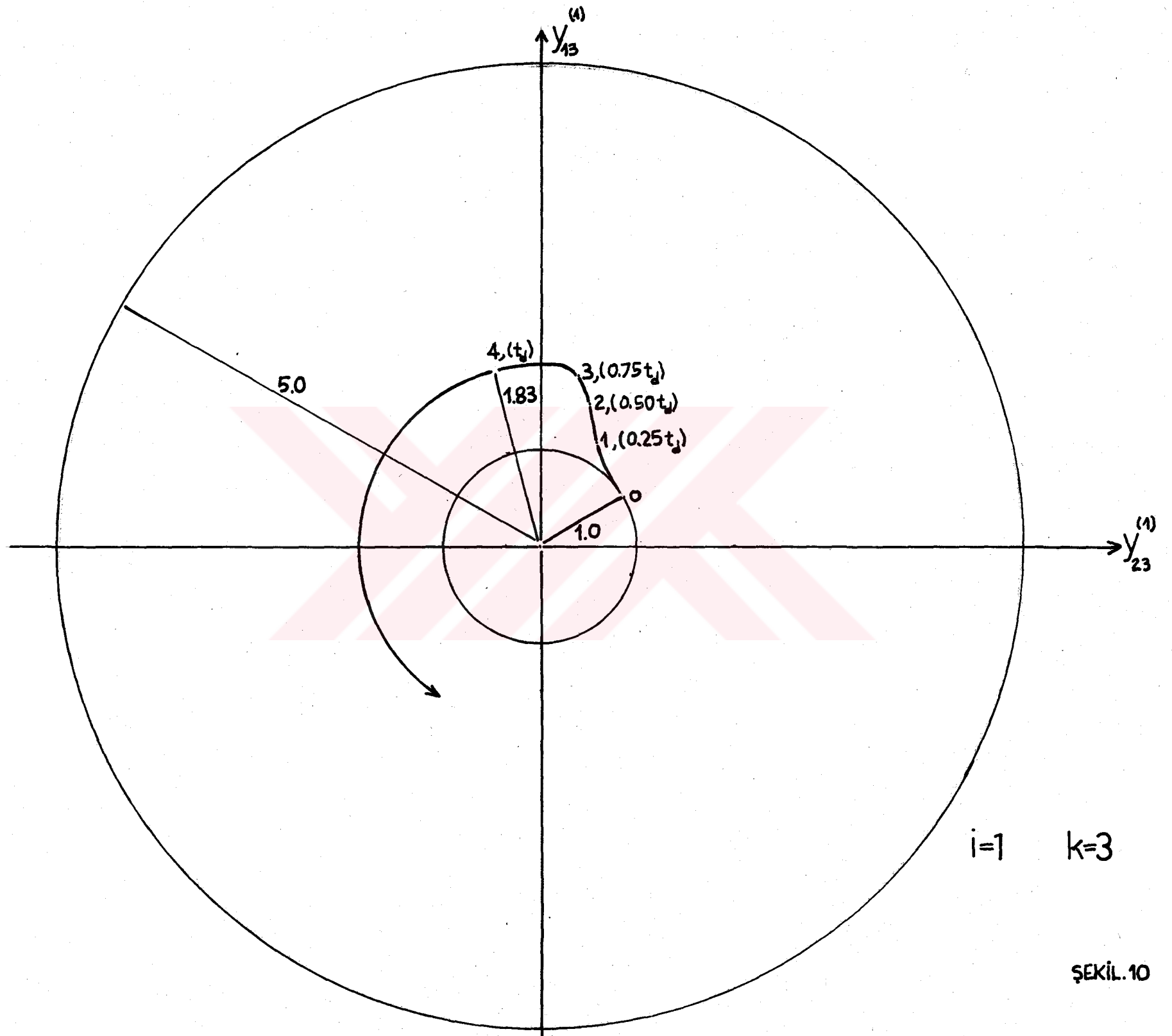


$i=1 \quad k=2$

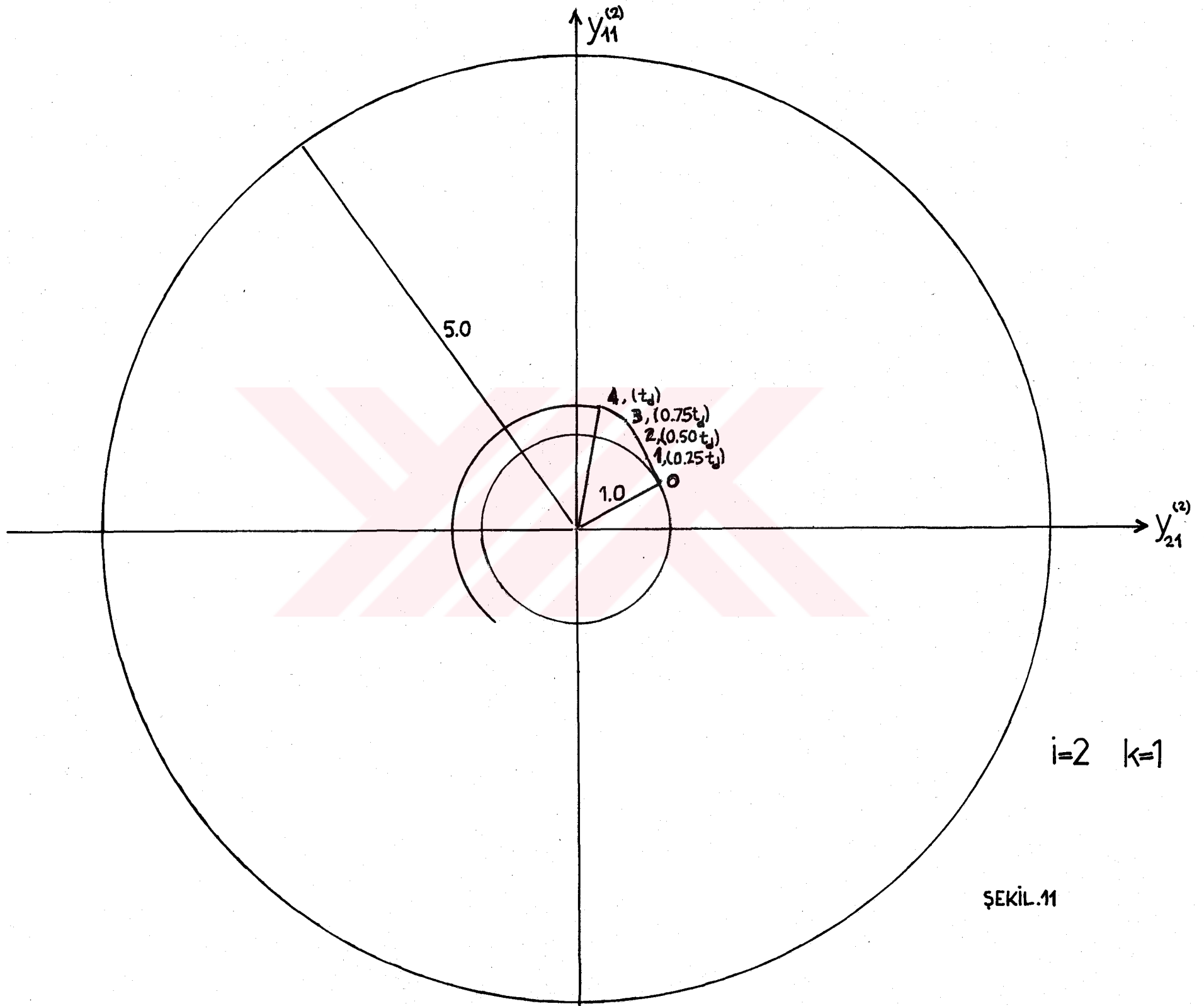
ŞEKİL.10



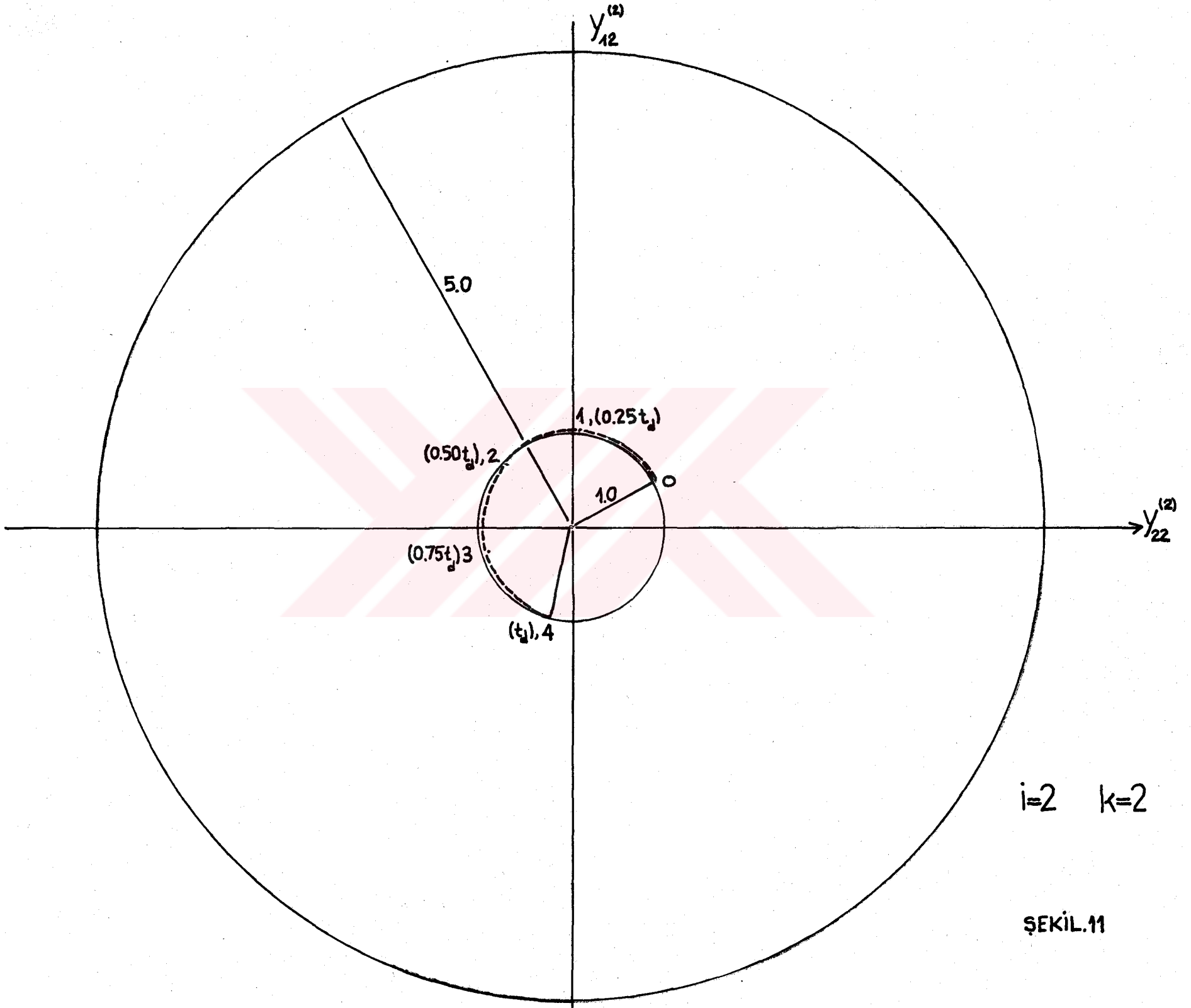
ŞEKİL.10



ŞEKİL.10



ŞEKİL.11



$i=2 \quad k=2$

ŞEKİL.11

L I T E R A T Ü R

- [1] Goodier, J.N., "Flexural-Torsional Buckling of Bars of Open Section", Cornell University Engineering Exp.Sta. Bulletin No.28, January, 1942.
- [2] Timoshenko, S., Gere, J.M., "Theory of Elastic Stability", Second Edition, Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New-York, 1961.
- [3] Vlasov, V.Z., "Thin-Walled Elastic Beams" National Science Foundation, Washington, D.C., Second Edition, 1961.
- [4] Chajes, A., and Winter, G., "Torsional-Flexural Buckling of Thin-Walled Members", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.91, No., Proc. Paper, August, 1965, pp.
- [5] Klöppel, K., und Scharat, R., "Beitrag zur praktischen Ermittlung der Vergleichsen von mitting gedrückten Stäben mit einfach symmetrischen offenem dünnwandigem Querschnitt", Der Stahlbau, Wilhelm Ernst und Sohn, 1958.
- [6] Pfluger, A., "Thin-Walled Compression Members," "Mitteilungen des Instituts für Statik der Technischen Hochschule, Hannover, Part. 1, 1959, Part 2, 1959, Part 3, 1961.
- [7] Chilver, A.H., "Thin-Walled Structures", John Wiley and Sons, Inc., New-York, 1967.
- [8] Gol'denblat, I.I., "Contemporary Problems of Vibrations and Stability of Engineering Structures", Sovremennye problemy kolebaniy ustoychivosti inzhenernykh sooruzhenii, Stroiizdat, Moscow, 1947.

- [9] Martin, L.Moody, "Response of Slender Columns to Rapid Compression", ASCE, Engineering Mechanics Division, February, 1969.
- [10] Bolotin, V.V., "Dynamic Stability of Elastic Systems", Holden-Day, Inc., San Fransisco, 1964.
- [11] J.Taub and C.Koning, "Impact Buckling of Thin Bars in the Elastic Range Hinged at Both Ends", NACA TM 748, 1934 and J.Taub, "Impact Buckling of Thin Bars in the Elastic Range for any end Condition", NACA TM 749, 1934.
- [12] J.H.Meier, "On the Dynamics of Elastic Buckling", Journal of the Aeronautical Sciences, Vol.12, 1945, pp. 433-440.
- [13] J.F.Davidson, "Buckling of Struts Under Dynamic Loading", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.2, 1953, pp. 54-66.
- [14] N.J.Hoff, "The Dynamics of the Buckling of Elastic Columns", Journal of Applied Mechanics, Vol.73, 1951, pp. 68-74.
- [15] Eugene Sevin, "On the Elastic Bending of Columns Due to Dynamic Axial Forces Including Effects of Axial Inertia", Journal of Applied Mechanics Vol.27, Trans. ASME, vd.82, Series E,1960, pp. 125-131.
- [16] M.A.Lavrentier and A.V. Ishinsky, "Dynamic Forms of Loss of Stability of Elastic Systems," Doklady Akademiya Nauk, USSR, Vol.64, 1949,pp.779-782.
- [17] H.E.Lindberg "Impact Bucling of a Thin Bar", Journal of Applied Mechanics Trans, ASME, 1965, June, pp. 315-322.

- [18] Holzer, S.M., and Eubanks, R.A., "Stability of Columns Subject to Impulsive Loading", Journal of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers 95, EM.4, 897-920, August, 1969.
- [19] Movchan, A.A., "The Direct Method of Liapunov in Stability Problems of Elastic Systems", Applied Mathematics and Mechanics, Vol.23, no.3, 1959, pp. 686-700.
- [20] Knops, R.J., and Wilkers, E.W., "On Movchan's Theorems for Stability of Continuous Systems", International Journal of Engineering Science, Vol.4, 1966, pp. 303-329.
- [21] Holzer, S.M., "Response Bounds for Columns with Transient Loads", ASME Applied Mechanics Division, March 1971, pp. 157-161.
- [22] Wolfgang Hahn, "Theory and Application of Liapunov's Direct Method", Prentice-Hall, Inc., 1963.
- [23] Jack, K., Hale, "Ordinary Differential Equations", Wiley-Interscience, 1969.
- [24] Joseph La Salle and Solomon Lefschetz, "Stability by Liapunov's Direct Method with Applications", Academic Press, 1961.
- [25] Gantmacher, F.R., "The Theory of Matrices", Chelsea Publishing Company, New-York, 1960.
- [26] Belman, R., "Stability Theory of Differential Equations", Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 1953.
- [27] Smirnov, V.I., "A Course of Higher Mathematics", Vol.3, Part.1, Pergamon Press, 1964.
- [28] Flügge, S., "Encyclopedia of Physics", Vol.III/1, Springer-Verlag, 1960.

- [29] Lipschuts, S, "Theory and Problems of Linear Algebra",
Schaum's Outline Series, 1968.
- [30] Levy, H., "Numerical Solutions of Differential
Equations", Dover Publications, Inc.
- [31] Bleich, F. "Buckling Strength of Metal Structures",
Mc Graw-Hill Book Company.



HAL TERCÜMESİ

Erdoğan UZGİDER, 1942 yılında İstanbul'da doğmuş ; lise öğrenimini Işık Lisesinde yapmıştır. 1961 yılında İ.T.Ü.İnşaat Fakültesine girmiş ve 1966 yılında da mezun olmuştur. 1966 yılı Aralık ayında aynı fakültenin Ahşap ve Çelik Yapılar Kürsüsüne asistan olarak girmiştir. Halen aynı kürsüde görevine devam etmektedir.

9967

9967

YAZAR : Uzgüder, Erdoğan

KITAP ADI ^{ok} simetri eksenli ve sir

[illegible]

624.075(043)

9967

597

YAZAR: Uzgider, Erdoğan

KITAP ADI: Tek simetri eksenli ve.

Jade Tarihi

Alanın Soyadı, Adı

IADE TARİHİ

[illegible]